



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Rafael Fontes Souto

**MODELAGEM E CONTROLE DE SISTEMAS
ESTOCÁSTICOS COM DINÂMICA POUCO CONHECIDA**

Campinas

2015

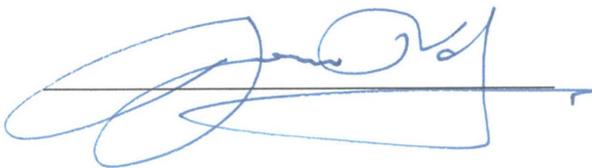
Rafael Fontes Souto

MODELAGEM E CONTROLE DE SISTEMAS ESTOCÁSTICOS COM DINÂMICA POUCO CONHECIDA

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica na Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Rafael Fontes Souto e orientada pelo Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val

A handwritten signature in blue ink, consisting of several loops and a long horizontal stroke extending to the right.

Campinas

2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Elizangela Aparecida dos Santos Souza - CRB 8/8098

So89m Souto, Rafael Fontes, 1984-
Modelagem e controle de sistemas estocásticos com dinâmica pouco conhecida / Rafael Fontes Souto. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: João Bosco Ribeiro do Val.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Teoria de controle estocástico. 2. Programação dinâmica. 3. Difusão de processos - Modelos matemáticos. I. do Val, João Bosco Ribeiro, 1955-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Modeling and control of stochastic systems with poorly known dynamics

Palavras-chave em inglês:

Stochastic control theory

Dynamic programming

Diffusion processes - Mathematical models

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

João Bosco Ribeiro do Val [Orientador]

Marcelo Dutra Fragoso

Oswaldo Luiz do Valle Costa

Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira

José Cláudio Geromel

Data de defesa: 18-08-2015

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: Rafael Fontes Souto

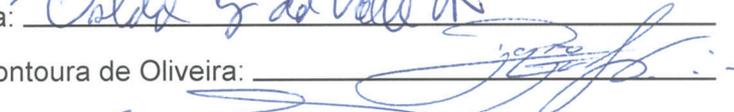
Data da Defesa: 18 de agosto de 2015

Título da Tese: "Modelagem e Controle de Sistemas Estocásticos com Dinâmica Pouco Conhecida"

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val (Presidente):  _____

Prof. Dr. Marcelo Dutra Fragoso:  _____

Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa:  _____

Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira:  _____

Prof. Dr. José Cláudio Geromel:  _____

Aos meus filhos, Mateus e Lara.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ser minha fonte primária de motivação e inspiração.

Ao professor João Bosco Ribeiro do Val, por ser um orientador formidável e, sobretudo, pela amizade edificada no decurso destes anos.

Aos membros da banca examinadora e aos meus colegas de pós-graduação, pelos comentários pertinentes e sugestões valiosas que contribuíram para melhorar a qualidade do trabalho.

À minha família, por ser o alicerce de minha carreira, mas, em especial, ao meu pai, Gilson Leal Souto, pela revisão, ortográfica e gramatical, minuciosa do texto, bem como pelo enriquecimento vocabular do mesmo.

Aos meus amigos, notadamente os que me faziam companhia às viagens para os congressos científicos e os que, generosamente, hospedaram-me em suas residências durante a fase final do meu doutorado.

Aos funcionários da Unicamp, pela prontidão com que sempre me atenderam, sendo indispensáveis para a consecução das diversas atividades no *campus*.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo financiamento do meu projeto de pesquisa (processo n° 2010/15135-0), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

“Quando o cientista, depois de ter uma intuição, se lança à procura da explicação lógica e empírica dum certo fenómeno, fá-lo porque tem a esperança, desde o início, de encontrar uma resposta, e não se dá por vencido com os insucessos. Nem considera inútil a intuição inicial, só porque não alcançou o seu objetivo; dirá antes, e justamente, que não encontrou ainda a resposta adequada.”

São João Paulo II, Carta enc. Fides et Ratio (14 de Setembro de 1998), 29: AAS 91 (1999), 28.

Resumo

Esta tese de doutorado diz respeito ao controle de sistemas pouco conhecidos em que apenas um modelo simplificado e incerto está disponível para fins de projeto de controle. Há muitos sistemas sobre os quais não se pode realizar experimentos adequados para sua identificação, embora sejam importantes para áreas como economia, biologia ou medicina. As ideias são desenvolvidas em um contexto estocástico a partir de um ponto de vista alternativo para levar em conta a modelagem grosseira disponível neste cenário, destacando o efeito do controle em um modelo modificado. As ferramentas matemáticas para o controle ótimo revelam características importantes, dentre as quais vale a pena mencionar o surgimento de uma política cautelosa de controle que “mantém a ação de controle inalterada” (inação) em uma determinada região do espaço de estados. Esta característica não é observada na abordagem robusta, mas chama atenção e permeia parte da literatura econômica. A caracterização da convexidade da função valor e o gradiente generalizado provêm os meios e o uso da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman para o problema geral. Quando se restringe ao problema de horizonte infinito com custo quadrático descontado, o comportamento assintótico é identificado, de modo que a solução ótima do caso multidimensional seja obtida dentro da região de inação por uma equação do tipo Lyapunov e, distante dessa região, por um tipo de equação de Riccati. Assim, a solução completa é composta de uma parte analítica e de outra numérica, sendo desenvolvida para o caso escalar. O projeto de controle proposto aqui é comparado com as soluções LQG, padrão e robusta, explorando o fato de que o modelo pode ser bastante distinto do sistema real. Verifica-se que, em algumas situações de discrepância do modelo, a nova abordagem apresentada nesta tese produz um desempenho melhor do que as estratégias LQG.

Palavras-chaves: Teoria de controle estocástico; Programação dinâmica; Processos de Difusão - Modelos matemáticos.

Abstract

This doctorate thesis is concerned with controlling poorly known systems, for which only a simplified and uncertain model is available for control design purposes. There are many systems that cannot be reasonably probed for the sake of identification, yet they are important for areas such as economy, biology or medicine. The ideas are developed around an alternative way to account for the rough modeling in a stochastic based setting, and to heighten the control features for such a modified model. The mathematical framework for the optimal control reveals important features, worthy to mention, the raising of a cautionary feedback policy of “keep the action unchanged” (inaction, for short), on a certain state space region. This feature is not seen in the robust approach, but has been pointed out and permeates part of the economics literature. Convexity characterization of the value function and the generalized gradient provide the means and the use of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation for the general problem. When specialized to the infinite horizon problem with discounted quadratic running cost, the asymptotic behavior is identified, in such a manner that the optimal solution of the multidimensional case is given inside the inaction region by a Lyapunov type of equation, and far apart, by a Riccati like equation. Thus, the complete solution is composed of an analytical part and a numerical one, and it is derived for the scalar case. The control design proposed here is compared with the standard and robust LQG solutions, exploring the fact that the model can be quite distinct of the actual system. It is verified that in some mismatched situations the novel approach presented in this thesis yields better performance than the LQG strategies.

Keywords: Stochastic control theory; Dynamic programming; Diffusion processes - Mathematical models.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Ilustração do comportamento de um modelo CVIU bidimensional.	16
Figura 2 – Curva típica do gradiente generalizado do hamiltoniano associado, respectivamente, às regiões \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_3 e \mathcal{R}_2 no espaço de estados.	51
Figura 3 – Exemplo da atuação de um controlador CVIU em um modelo escalar.	53
Figura 4 – Simetria da solução ótima associada a um modelo CVIU escalar.	64
Figura 5 – Custo ótimo no semiplano positivo para $x_\infty = 10$	67
Figura 6 – Erro da solução ótima no semiplano positivo para $x_\infty = 10$	67
Figura 7 – Controle ótimo no semiplano positivo para $x_\infty = 10$	68
Figura 8 – Aproximações do controle ótimo para $x_\infty = 10$, $x_\infty = 20$ ou $x_\infty = 30$	69
Figura 9 – Erro da solução ótima no semiplano positivo.	69
Figura 10 – Aproximação linear por partes para a política de controle ótimo de um sistema CVIU bidimensional.	70
Figura 11 – Comparações de desempenho entre as políticas de controle CVIU, LQG e malha aberta.	72
Figura 12 – Resumo das comparações de desempenho entre os controladores CVIU e LQG padrão.	73
Figura 13 – Resumo das comparações de desempenho entre os controladores CVIU e LQR robusto.	74

LISTA DE SÍMBOLOS

- \mathbb{R}^n - Espaço euclidiano n -dimensional.
- A' - Matriz transposta de A .
- I - Matriz identidade.
- $\text{tr}[\cdot]$ - Traço da matriz.
- \mathbb{S} - Um subconjunto de \mathbb{R}^n .
- $\bar{\mathbb{S}}$ - Fecho do conjunto \mathbb{S} .
- ∂_x - Gradiente generalizado em x .
- $\text{co}[\cdot]$ - Fecho convexo de um conjunto.
- Ω - Um conjunto qualquer.
- ω - Um elemento de Ω .
- \emptyset - O conjunto vazio.
- \mathbb{F} - Um subconjunto de Ω .
- \mathbb{F}^c - O complemento de \mathbb{F} .
- \mathcal{F} - Uma σ -álgebra de Ω .
- \mathcal{B} - Uma σ -álgebra de Borel.
- \mathbb{U} - Um conjunto de Borel.
- $P(\cdot)$ - Medida de probabilidade.
- $\{W_t\}$ - Processo de Wiener.
- \mathcal{A} - Gerador de um processo de difusão de Itô.
- $E[\cdot]$ - Esperança matemática.
- $E[\cdot/\cdot]$ - Esperança matemática condicional.
- $C^1(\cdot)$ - Classe de funções continuamente diferenciáveis.
- $C^2(\cdot)$ - Classe de funções duas vezes continuamente diferenciáveis.

1	Introdução	14
1.1	Motivação para a Proposta de um Novo Modelo	15
1.2	Contribuição Principal do Modelo CVIU	17
1.3	Publicações Resultantes do Trabalho	18
1.4	Estrutura da Tese	19
I	Fundamentos	21
2	Tópicos Preliminares	22
2.1	Conceitos Matemáticos Básicos	22
2.2	Elementos da Teoria de Integração e Medida	27
2.3	Probabilidade e Cálculo Estocástico	30
3	Controle Ótimo Estocástico	33
3.1	Processos de Difusão de Itô	33
3.2	Processos de Difusão Controlada de Itô	35
3.3	Formulação do Problema de Controle Ótimo Estocástico	37
3.4	O Método da Programação Dinâmica	38

II Contribuições	41
4 O Projeto do Controlador CVIU	42
4.1 Descrição Matemática de um Modelo CVIU	42
4.2 O Problema de Controle de um Modelo CVIU	44
4.3 Caracterizações Essenciais	45
4.3.1 A Convexidade do Custo Ótimo	45
4.3.2 A Convexidade do Hamiltoniano	48
4.4 A Minimização do Hamiltoniano	49
4.5 A Região de Inação	52
4.6 O Controle Ótimo para um Modelo CVIU	55
5 O Problema de Custo Quadrático Descontado	56
5.1 Reformulação do Problema de Controle de um Modelo CVIU	56
5.2 Solução dentro da região de inação	58
5.3 Solução fora da região de inação	59
5.4 Um Breve Comentário sobre Estabilidade e Existência de Soluções	62
5.5 Solução Analítica do Problema Escalar	62
6 Experimentos Numéricos	65
6.1 Aproximações para o Caso Escalar	65
6.2 Aproximações para o Caso Multidimensional	69
6.3 Comparações de Desempenho entre Controladores	71
6.3.1 O Controlador CVIU e o LQG padrão	71
6.3.2 O Controlador CVIU e o LQR Robusto	73
Conclusão	75
Referências	78

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Um projeto de controle requer invariavelmente um modelo matemático para representar o sistema do mundo real que se deseja controlar. Em geral, para a obtenção de um modelo satisfatório, algumas técnicas da teoria de identificação de sistemas (LJUNG, 1999) devem ser aplicadas, resultando em um mapeamento de entradas e saídas que servirá como modelo do sistema. O sucesso destas técnicas depende, entre outras coisas, da quantidade e da qualidade dos dados que podem ser adquiridos a partir de experimentos que se apliquem ao sistema real. Naturalmente, não existe um modelo fixo capaz de responder exatamente como o verdadeiro sistema.

No entanto, é possível avaliar a precisão do modelo, verificando quão próximas suas respostas se encontram das respostas do sistema real. Ocorre que, em diversas situações, não é possível realizar experimentos com o sistema. Isso aumenta tanto a dificuldade de se obter um bom modelo quanto a de testar sua precisão. É o caso, por exemplo, quando o Banco Central precisa definir a taxa de juros para controlar a economia nacional, buscando alcançar algumas metas monetárias.

Outra típica situação desfavorável para a modelagem surge quando um médico precisa definir a dosagem de um determinado medicamento para controlar a resposta do corpo de seu paciente diante do ataque de um vírus específico ou, ainda, quando precisa inibir o crescimento de um tumor a partir da aplicação de alguma droga quimioterápica. Em particular, esses problemas enfrentados pela medicina enquadram-se em uma classe mais geral de problemas de controle para os quais um bom modelo de crescimento resultaria na determinação de uma boa política de tratamento. Na verdade, situações semelhantes a esta de modelagem e controle também surgem em outros contextos, tais como em problemas de gestão da caça e pesca, entre outros. (HANSON, 2007).

O ponto comum entre esses cenários é o fato de que o processo de modelagem conta apenas com alguns dados históricos espalhados que normalmente oferecem uma informação bem limitada

acerca do sistema, resultando em modelos matemáticos que podem apresentar uma incerteza considerável em suas estruturas. Apesar disso, a julgar pelos problemas mencionados no parágrafo anterior, um bom projeto de controle para esses sistemas é bastante relevante e, certamente, necessário, o que torna o desenvolvimento de controladores capazes de agir eficazmente em sistemas, para os quais a dinâmica é pouco conhecida, um tema importante na área de engenharia de controle.

A busca natural por controladores com um bom desempenho nesses casos não pode culminar realisticamente em políticas ótimas de controle. Para tanto, faz-se mister um perfeito conhecimento da dinâmica do sistema a ser controlado, bem como da distribuição do ruído envolvido. No tocante aos sistemas estocásticos com dinâmica pouco conhecida, escopo deste trabalho, há um compromisso de desempenho, de modo que já não se pode mais falar em controle ótimo. Sendo assim, a abordagem usual passa por uma espécie de análise de pior caso em que se busca uma política de controle satisfatória (subótima), dando origem ao sentido de controle robusto.

Desde o final de 1970 e início de 1980, um grande número de técnicas foi desenvolvido a partir desse ponto de vista. Algumas referências clássicas na área são (DULLERUD; PAGANINI, 2000; ZHOU; DOYLE, 1997; BHATTACHARYYA *et al.*, 1995; BOYD *et al.*, 1994; BARMISH, 1994; FRANCIS, 1987). Contudo, o controle robusto não é a única abordagem possível.

Esta tese propõe uma alternativa ao controle robusto, desenvolvendo as ideias essenciais e a estrutura matemática necessária para proporcionar uma ferramenta de projeto de controle que pode lidar com sistemas estocásticos em tempo contínuo, cujas dinâmicas não são bem conhecidas. Apresenta-se um novo modelo estocástico para tais sistemas, partindo de um ponto de equilíbrio razoavelmente conhecido, em vez de supor um intervalo de valores possíveis para os parâmetros do modelo, como de costume na tradicional análise de pior caso.

1.1 Motivação para a Proposta de um Novo Modelo

A inadequação de qualquer modelo é inevitável. Entretanto, como destacado em (ZHOU *et al.*, 1996), um bom modelo deve ser simples o bastante para facilitar o projeto de controle, mas complexo o suficiente para dar confiança ao engenheiro de que os projetos baseados no modelo funcionarão no sistema real. Partindo desta premissa, o modelo proposto neste trabalho mescla a simplicidade de uma aproximação linear com a complexidade de uma difusão dependente do controle.

Suponha que um sistema estocástico com dinâmica pouco conhecida esteja operando em torno de um certo ponto de equilíbrio, de tal forma que a sua dinâmica possa ser estudada do ponto de vista das variações do estado e do controle com relação aos valores nominais desse equilíbrio. A abordagem padrão é obter um modelo linear para descrevê-lo, estando sua precisão restrita a

uma faixa estreita de valores do estado e do controle próximos do equilíbrio. Por outro lado, devido à falta de um conhecimento mais apurado acerca da dinâmica real desse sistema (imprecisão nos parâmetros, não-linearidades ou quaisquer outras dinâmicas indeterminadas), a tentativa de controlá-lo, confiando em um modelo simples demais, poderia ser desastrosa. Como resultado, a ação de controle poderia conduzir o estado do sistema para regiões relativamente longe do equilíbrio, para as quais o erro da aproximação linear torna-se muito grande. Além disso, magnitudes elevadas do sinal de controle poderiam aumentar ainda mais o risco de o sistema tender a se afastar do equilíbrio desejado. Em virtude desse efeito, pode-se estabelecer uma ligação entre os desvios no modelo e a incerteza gerada pelas variações na magnitude do sinal de controle com relação ao seu valor nominal.

Para compreender melhor esta ligação, suponha que um sistema esteja em um estado inicial x_0 e considere a atuação de um controle nominal constante \bar{u} capaz de manter o vetor de estado próximo da origem, desde que a origem e o estado não estejam significativamente distantes. Considere agora três ações de controle distintas, u_1 , u_2 e u_3 , as quais se somam ao controle constante \bar{u} e induzem três evoluções possíveis para o sistema após um curto período de tempo.

A Figura 1 ilustra esta situação com as respectivas regiões de incerteza do estado para o caso em que $|u_1| < |u_2| < |u_3|$. Os círculos representam regiões em que o estado pode ser encontrado, com alguma probabilidade fixa, após um curto período de tempo.

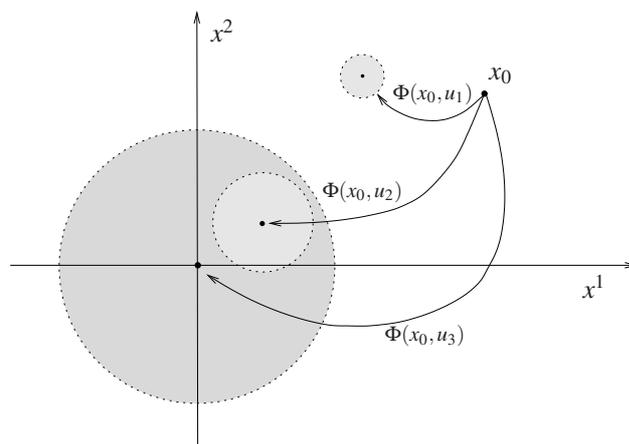


Figura 1 – Ilustração do comportamento de um modelo CVIU bidimensional.

Note que a ação u_3 , apresentando uma maior variação do sinal de controle com relação ao sinal nominal \bar{u} , pode levar de maneira mais rápida o estado do sistema para a origem, mas possivelmente com a maior incerteza. As outras duas ações, u_1 e u_2 , com variações menores, produzem deslocamentos menores no estado, mas podem ser mais eficazes no sentido de que elas induzem menos incerteza sobre a evolução do estado.

Esse elo entre controle, incerteza e desvios do modelo inspirou uma melhoria com relação à simples aproximação linear. A adição de um termo extra de ruído, que é modulado pela variação do sinal de controle, produz um modelo mais adequado. Por conseguinte, este inclui a incerteza induzida pela variação do controle e baseia-se em uma classe mais geral de modelos de difusão, denominada na literatura como difusão dependente do controle (BENSOUSSAN, 1982).

Assim, as variações do controle aumentam a incerteza do estado, de modo a refletir o aumento do grau de incerteza, devido às tentativas de se conduzir o sistema pouco conhecido a partir de grandes alterações do sinal de controle. Em vista disso, atribui-se a esse modelo a sigla CVIU, do inglês “*Control Variations Increase Uncertainty*”.

Um dos objetivos desta tese é obter, por meio de um modelo CVIU, a solução “ótima” para o problema de controle de um sistema com uma dinâmica pouco conhecida. Como mencionado anteriormente, não faz sentido falar de soluções ótimas de controle para esse tipo sistema. Portanto, o termo “ótimo”, neste trabalho, refere-se estritamente ao projeto de controle associado ao modelo CVIU, não ao sistema original.

1.2 Contribuição Principal do Modelo CVIU

Conforme será demonstrado ao longo do texto, uma característica interessante do problema de controle ótimo para sistemas CVIU é o surgimento de uma região no espaço de estados para a qual a ação ótima de controle é sustentar a ação aplicada no instante exato em que o estado do sistema cruza sua fronteira, entrando na região. Enquanto o estado estiver ali dentro, a política de controle permanece constante até o próximo instante de saída, produzindo, assim, controles com períodos de ação constante. Esse comportamento remete à ideia de um controle cauteloso no seguinte sentido: em face do conhecimento insuficiente acerca do sistema, a melhor estratégia, eventualmente, deveria ser conservadora, ou seja, manter a mesma ação de controle poderia ser menos prejudicial do que atuar agressivamente sobre o sistema.

Esse comportamento cauteloso tem sido estudado há décadas no campo da economia, seja na micro ou na macroeconomia. O artigo (BRAINARD, 1967) é considerado entre os economistas como uma análise clássica nessa área, demonstrando que a incerteza sobre os parâmetros de um modelo pode resultar em uma política cautelosa. Em (ABEL; EBERLY, 1994), propõe-se um modelo de uma empresa que resulta em uma política ótima com a presença de uma região de inação, isto é, uma região no espaço de estados, cuja ação ótima de controle seria a de investimento nulo, algo similar ao que será observado nos modelos CVIU. De fato, esse tema é recorrente na literatura e ainda recebe atenção constante. Há muitas análises que buscam explicar como a incerteza no modelo afeta as políticas do Banco Central e, nesse sentido, vale a pena destacar os seguintes trabalhos sobre o tema geral de incerteza no contexto econômico: (GIANNONI, 2002; LEVIN

et al., 2003; ONATSKI; WILLIAMS, 2003; BROCK *et al.*, 2007; LEITEMO; SÖDERSTRÖM, 2008). Destaca-se também a monografia (STOKEY, 2009) que é bem abrangente e trata a política de inação para o sistema econômico com custos de transação fixos.

Ao lidar com sistemas pouco conhecidos, este comportamento cauteloso pode apresentar algumas vantagens. Exemplificando, considere o controle LQG clássico ou um controle robusto aplicado a um sistema pouco conhecido. Assim, o controlador LQG poderia adotar erroneamente uma ação de controle que diverge amplamente com relação ao que seria uma política razoável. Neste trabalho, o projeto de controle baseado na abordagem CVIU será comparado com as soluções LQG padrão e robusta para um simples caso linear e escalar. Os experimentos numéricos visam explorar diferentes níveis de discrepância entre a dinâmica real do sistema e o seu modelo, de modo que, quando estes níveis tornam-se suficientemente grandes, a solução CVIU apresenta um desempenho melhor que as outras soluções de controle mencionadas.

Ressalte-se que o comportamento cauteloso surge na abordagem CVIU como resultado do problema de controle ótimo estocástico associado ao modelo CVIU. Aplicam-se ferramentas da análise de funções não suaves para resolver a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) associada ao problema, produzindo, com isso, a região de inação. Pode-se dizer que, de certa forma, este é um comportamento esperado, uma vez que o tomador de decisão deveria ter cuidado ao controlar um sistema estocástico pouco conhecido.

Em contrapartida, a abordagem tradicional via controle robusto, que se baseia na análise de pior caso para lidar com uma família parametrizada de modelos, para os quais se procura minimizar um limitante superior de uma norma ou custo, pode produzir resultados insatisfatórios. Na verdade, os controladores robustos não possuem uma tendência a apresentar o comportamento cauteloso em face da incerteza, podendo-se duvidar de que tal comportamento, de alguma maneira, surgiria nesta abordagem. Portanto, é auspicioso que o controlador CVIU emule o comportamento cauteloso desde o seu princípio. Desse modo, o controlador proposto nesta tese pode ser interessante como uma opção para lidar com sistemas estocásticos com dinâmica pouco conhecida, sendo capaz de capturar as características “naturais” do controle de tais sistemas.

1.3 Publicações Resultantes do Trabalho

Os seguintes artigos foram publicados, e apresentados pelo próprio autor, em congressos internacionais:

- SOUTO, R. F.; do VAL, J. B. R.; OLIVEIRA, R. C. L. F. Controlling uncertain stochastic systems: performance comparisons in a scalar system. In: *52nd IEEE Conference on Decision and Control*. Florença, Itália, 2013. p. 1886–1891.

- SOUTO, R. F.; do VAL, J. B. R. Underdetermined stochastic systems modelled by a control dependent diffusion. In: *10th Portuguese Conference on Automatic Control*. Funchal, Ilha da Madeira, Portugal, 2012. p. 167–172.
- SOUTO, R. F.; do VAL, J. B. R. A stochastic model to account for system uncertainties applied to an optimal harvesting problem. In: *7th IFAC Symposium on Robust Control Design*. Aalborg, Dinamarca, 2012. p. 39–44.

Houve também a seguinte publicação e apresentação de artigo em congresso nacional:

- SOUTO, R. F.; do VAL, J. B. R. Controle cauteloso a partir de um novo modelo estocástico para sistemas com dinâmicas incertas. In: *XIX Congresso Brasileiro de Automática*. Campina Grande, PB, Brasil, 2012. p. 137–144.

Por fim, o seguinte artigo foi submetido a uma importante revista na área de controle:

- SOUTO, R. F.; do VAL, J. B. R. Modeling and Control of Stochastic Systems With Poorly Known Dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Junho 2015. Submetido.

Vale a pena mencionar que o modelo CVIU aparece, pela primeira vez na literatura, em (CALMON, 2009; CALMON *et al.*, 2009), no contexto de problemas em tempo discreto. Na dissertação de mestrado (SOUTO, 2010), o modelo CVIU começa a ser desenvolvido para problemas em tempo contínuo, de modo que esta tese de doutorado estende o trabalho em (SOUTO, 2010), apresentando novos resultados para o caso contínuo.

1.4 Estrutura da Tese

Os próximos capítulos estão agrupados em duas partes. A primeira, contendo os Capítulos 2 e 3, apresenta os fundamentos matemáticos que serão utilizados ao longo do texto. A segunda, contendo os Capítulos 4, 5 e 6, as contribuições da tese. O conteúdo de cada capítulo é resumido a seguir.

Capítulo 2: Apresenta uma coletânea de definições, proposições e teoremas para servir de referência rápida durante a leitura dos capítulos subsequentes. Em suma, este capítulo reúne noções, conceitos e resultados importantes tanto para a modelagem CVIU quanto para o projeto de controle associado.

Capítulo 3: Estabelece o problema de controle ótimo estocástico e introduz o método da programação dinâmica para a busca de soluções ótimas.

Capítulo 4: Desenvolve o modelo CVIU para representar sistemas estocásticos com dinâmica pouco conhecida, estabelece o problema de controle ótimo associado a este modelo e introduz as hipóteses necessárias para o projeto do controlador CVIU. Demonstra-se, também, a convexidade da função de custo ótimo e do hamiltoniano do sistema, o que representa uma caracterização essencial para os propósitos do capítulo. Além disso, apresenta-se a região de inação, uma particularidade interessante do projeto.

Capítulo 5: Investiga um caso especial dos problemas de controle ótimo, a saber, o problema de custo quadrático descontado. Desenvolve-se analiticamente as soluções ótimas invariantes no tempo para a região de inação e para regiões muito distantes dela. Ao final do capítulo, apresentam-se as fórmulas fechadas correspondentes para o caso escalar.

Capítulo 6: Discute aproximações numéricas para se completar a solução ótima invariante no tempo do caso escalar e propõe uma forma de tratar o caso multidimensional. Um exemplo escalar simples é analisado, e algumas comparações de desempenho entre o controlador CVIU e outros mais tradicionais são realizadas.

Por fim, um capítulo de conclusões recapitula em linhas gerais tudo o que foi desenvolvido nesta tese e lança algumas ideias e perspectivas para trabalhos futuros correlatos.

Parte I

Fundamentos

CAPÍTULO 2

TÓPICOS PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é estabelecer a notação matemática a ser empregada no decorrer do texto e apresentar algumas definições e resultados conhecidos que serão necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

2.1 Conceitos Matemáticos Básicos

Esta seção aborda tópicos de álgebra linear, análise de funções convexas e análise de funções não suaves.

Álgebra Linear:

A notação $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ significa que A é uma matriz real de dimensão $(n \times m)$. Em outras palavras, a matriz A possui n linhas e m colunas, sendo todos os seus elementos números reais. Denota-se a_{ij} como o elemento presente na i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz A . Utiliza-se A' para representar a matriz transposta de A . Uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ possui exatamente n autovalores (reais ou complexos), se for levada em conta a multiplicidade de cada um deles, de modo que λ_i corresponde ao seu i -ésimo autovalor. Finalmente, se $A \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, então A é um vetor e adota-se a notação simplificada $A \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.1. (LÜTKEPOHL, 1996, p. 41) Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Define-se o traço de A como sendo a função matricial que associa a matriz A à soma dos elementos de sua diagonal principal, isto é,

$$\text{tr}[A] = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (2.1)$$

Outra expressão possível para o cálculo do traço de A é dada por

$$\operatorname{tr}[A] = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (2.2)$$

Note que o uso de (2.2) pode ser mais conveniente em algumas demonstrações matemáticas.

Proposição 2.1. (LÜTKEPOHL, 1996, p. 41) *O traço é uma função linear. Assim, para quaisquer matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tem-se*

$$\operatorname{tr}[aA \pm bB] = a\operatorname{tr}[A] \pm b\operatorname{tr}[B], \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Proposição 2.2. (LÜTKEPOHL, 1996, p. 41) *Se A, B e C forem matrizes de dimensões compatíveis, então*

$$\operatorname{tr}[AB] = \operatorname{tr}[BA] \quad (2.4)$$

e, conseqüentemente,

$$\operatorname{tr}[ABC] = \operatorname{tr}[CAB] = \operatorname{tr}[BCA]. \quad (2.5)$$

Definição 2.2. (LÜTKEPOHL, 1996, p. 156) *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz quadrada qualquer. Deste modo, a matriz A será simétrica, se $A' = A$.*

Note pela Definição 2.2 que as matrizes $A'A$ e AA' , com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, são simétricas.

Proposição 2.3. (LÜTKEPOHL, 1996, p. 156) *Considere $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se $A' = A$ e $B' = B$, então a matriz $C = aA \pm bB$ será simétrica para todo $a, b \in \mathbb{R}$.*

Proposição 2.4. (LÜTKEPOHL, 1996, p. 157) *Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Se $A' = A$, então a matriz $C = B'AB$ será simétrica.*

Definição 2.3. (LÜTKEPOHL, 1996, p. 150) *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica. Assim, A será*

(i) *definida positiva ($A > 0$), se $x'Ax > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$;*

(ii) *semidefnida positiva ($A \geq 0$), se $x'Ax \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Proposição 2.5. (LÜTKEPOHL, 1996, p. 151) *Considere $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $c \in \mathbb{R}$, tal que $c > 0$. Assim,*

$$A > 0 \text{ e } B \geq 0 \Rightarrow A + B > 0. \quad (2.6a)$$

$$A \geq 0 \text{ e } B \geq 0 \Rightarrow A + B \geq 0. \quad (2.6b)$$

$$A > 0 \Rightarrow cA > 0. \quad (2.6c)$$

$$A \geq 0 \Rightarrow cA \geq 0. \quad (2.6d)$$

Teorema 2.1. (LÜTKEPOHL, 1996, p. 158) Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ for uma matriz simétrica, então todos os n autovalores de A serão números reais e as seguintes afirmações serão verdadeiras

$$A > 0 \Leftrightarrow \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7a)$$

$$A \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7b)$$

A seguir, apresenta-se um resultado importante da álgebra linear que será utilizado no Capítulo 4.

Teorema 2.2. (WANG et al., 1986) Considere $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se $A = A' \geq 0$ e $B = B'$, então

$$\text{tr}[AB] \geq \text{tr}[A]\lambda_{\min}(B) \quad (2.8)$$

em que $\lambda_{\min}(B)$ corresponde ao menor autovalor de B .

Análise de Funções Convexas:

Definição 2.4. (BOYD; VANDENBERGHE, 2004, p. 67) Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ será convexa, se o seu domínio for um conjunto convexo e se, para todo x_1 e x_2 pertencentes a este domínio, a seguinte desigualdade for válida

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2), \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (2.9)$$

A função f será estritamente convexa, se a desigualdade em (2.9) for estrita sempre que $x_1 \neq x_2$ e $0 < \alpha < 1$.

Definição 2.5. (BOYD; VANDENBERGHE, 2004, p. 67) Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ será côncava, se a função $-f$ for convexa e, estritamente côncava, se $-f$ for estritamente convexa.

Note que, se f for uma função afim qualquer, a expressão em (2.9) torna-se uma igualdade, permitindo o enunciado da seguinte proposição.

Proposição 2.6. (BOYD; VANDENBERGHE, 2004, p. 67) Toda função afim e, conseqüentemente, toda função linear, é convexa e côncava simultaneamente. Por outro lado, qualquer função que seja convexa e côncava, ao mesmo tempo, será uma função afim.

Proposição 2.7. (BOYD; VANDENBERGHE, 2004, p. 79) Sejam $k_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, constantes reais não negativas. Assim, a soma ponderada de funções convexas, $f = k_1 f_1 + k_2 f_2 + \dots + k_m f_m$, é convexa.

A seguir, dois resultados relevantes da análise de funções convexas são enunciados na forma de teorema, a saber, as condições de otimalidade de primeira ordem e as condições de otimalidade de segunda ordem.

Teorema 2.3. (BOYD; VANDENBERGHE, 2004, p. 69) *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, isto é, seu gradiente f_x existe em cada ponto x do seu domínio, que é aberto. Assim, f será convexa, se, e somente se, o domínio de f for convexo e a desigualdade*

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f_x(x_1)(x_2 - x_1) \quad (2.10)$$

for válida para todo x_1 e x_2 pertencentes a este domínio.

Note que a expressão que aparece ao lado direito de (2.10) corresponde à aproximação da função f próxima do ponto x_1 por um polinômio de Taylor de primeira ordem. Assim, a desigualdade (2.10) afirma que, para uma função convexa, a aproximação de Taylor de primeira ordem é de fato um subestimador global para a função. Por outro lado, se a aproximação de Taylor de primeira ordem sempre for um subestimador global para a função, então esta função será convexa.

Além disso, a desigualdade (2.10) mostra que, a partir de informações locais de uma função convexa (o seu valor e a sua derivada em um dado ponto), pode-se obter uma informação global (um subestimador global da função). Esta talvez seja a propriedade mais importante das funções convexas e, certamente, explica algumas das propriedades notáveis dos problemas de otimização convexas. Como um exemplo disto, observe que, se $f_x(x_1) = 0$, então, para todo x_2 pertencente ao domínio de f , tem-se $f(x_2) \geq f(x_1)$, indicando que x_1 é um minimizador global da função f .

Teorema 2.4. (BOYD; VANDENBERGHE, 2004, p. 71) *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, isto é, sua matrix hessiana f_{xx} existe em cada ponto x do seu domínio, que é aberto. Assim, f será convexa, se, e somente se, o domínio de f for convexo, e a hessiana de f for semidefinida positiva em todo o domínio.*

Note que, se a função f for definida sobre o conjunto dos números reais, isto é, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, então a condição de segunda ordem implica que o domínio de f seja um intervalo e sua derivada segunda seja não negativa ou, similarmente, sua derivada primeira seja não decrescente.

Finaliza-se esta seção com dois exemplos simples de funções convexas. Sejam $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções dadas, respectivamente, por $f_1(x) = k_1|x|$ e $f_2(x) = k_2x^2$, sendo $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e $k_1, k_2 \geq 0$.

Pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} f_1(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &= k|\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2| \leq \\ &k|\alpha x_1| + k|(1 - \alpha)x_2| = \alpha k|x_1| + (1 - \alpha)k|x_2| = \alpha f_1(x_1) + (1 - \alpha)f_1(x_2), \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

Deste modo, pela Definição 2.4, a função f_1 é convexa. Por outro lado, a derivada segunda de f_2 é igual a k_2 , implicando, pelo Teorema 2.4, que a função f_2 também seja convexa.

Análise de Funções Não Suaves:

Considere \mathbb{X} um espaço de Banach. Os elementos $x \in \mathbb{X}$ são referidos como vetores ou pontos, e a norma de um dado elemento x é denotada por $\|x\|$. Além disso, define-se \mathbb{B} como uma bola unitária aberta nesse espaço.

Definição 2.6. (CLARKE, 1987, p. 25) Considere \mathbb{Y} um subconjunto de \mathbb{X} . Assim, uma função $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz uma condição de Lipschitz em \mathbb{Y} , desde que, para algum escalar K não negativo, a desigualdade

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq K \|y_1 - y_2\| \quad (2.11)$$

seja válida para todos os pontos $y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$. A desigualdade (2.11) também é conhecida como condição de Lipschitz de rank K .

Definição 2.7. (CLARKE, 1987, p. 25) Uma função $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ será Lipschitz (de rank K) próxima do ponto x , se, para algum $\varepsilon > 0$, a função f satisfizer uma condição de Lipschitz (de rank K) no conjunto $x + \varepsilon\mathbb{B}$, isto é, dentro de uma vizinhança ε de x . Neste caso, refere-se também à função f como sendo localmente Lipschitz.

Para as funções de uma variável real, uma condição de Lipschitz corresponde à exigência de o gráfico da função não ser “íngreme demais”. De fato, uma função que possua esta propriedade na vizinhança de um certo ponto no espaço não precisa ser diferenciável neste ponto nem admitir derivadas direcionais no sentido clássico.

Proposição 2.8. (CLARKE, 1987, p. 32) Seja F um mapeamento de \mathbb{X} para um outro espaço de Banach \mathbb{Y} . Se F for continuamente diferenciável em x , então F será Lipschitz próximo do ponto x .

Proposição 2.9. (CLARKE, 1987, p. 38) Se f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, for uma família finita de funções, sendo cada uma delas localmente Lipschitz, então a função $f = \sum f_i$ será também localmente Lipschitz.

Definição 2.8. (CLARKE, 1987, p. 63) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz em uma vizinhança de $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, seja Φ qualquer conjunto de medida nula em \mathbb{R}^n e Φ_f o conjunto de pontos em \mathbb{R}^n para os quais f não é diferenciável. Assim, o gradiente generalizado em x , denotado por $\partial_x f(x)$, será o conjunto

$$\partial_x f(x) = \text{co} \left[\lim_{x_i \rightarrow x} \nabla f(x_i) : x_i \notin \Phi, x_i \notin \Phi_f \right] \quad (2.12)$$

em que $\text{co}[\cdot]$ corresponde ao fecho convexo.

Proposição 2.10. (CLARKE, 1987, p. 38) Se f atinge um mínimo (ou máximo) local em x , então $0 \in \partial_x f(x)$.

2.2 Elementos da Teoria de Integração e Medida

Considere Ω um conjunto qualquer e ω um elemento de Ω . A notação \emptyset é utilizada para indicar o conjunto vazio e 2^Ω para indicar o conjunto das partes de Ω , isto é, o conjunto de todos os subconjuntos de Ω . Para um subconjunto qualquer \mathbb{F} de Ω , o conjunto $\mathbb{F}^c = \Omega \setminus \mathbb{F}$ é o complemento de \mathbb{F} em Ω .

Definição 2.9. (BARTLE, 1966, p. 6) *Uma família \mathcal{F} de subconjuntos de Ω é definida como uma σ -álgebra de Ω , se*

- (i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$;
- (ii) $\mathbb{F} \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{F}^c \in \mathcal{F}$;
- (iii) $\mathbb{F}_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{F}_i \in \mathcal{F}$.

Qualquer conjunto $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$ é chamado de conjunto \mathcal{F} -mensurável; porém, quando a σ -álgebra \mathcal{F} for fixa, o que geralmente ocorre, então \mathbb{F} será chamado simplesmente de conjunto mensurável.

Definição 2.10. (YONG; ZHOU, 1999, p. 1) *Se \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 forem duas σ -álgebras de Ω e $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, então \mathcal{F}_1 será uma sub- σ -álgebra de \mathcal{F}_2 . Além disso, para qualquer família $\mathcal{G} \subseteq 2^\Omega$, define-se $\sigma(\mathcal{G})$ como a menor σ -álgebra contendo \mathcal{G} e refere-se à $\sigma(\mathcal{G})$ como sendo a σ -álgebra gerada por \mathcal{G} .*

Note que a menor σ -álgebra contendo \mathcal{G} é a interseção de todas as σ -álgebras contendo \mathcal{G} , quer dizer, $\bigcap \{ \mathcal{F}; \mathcal{F} \text{ } \sigma\text{-álgebra de } \Omega \text{ e } \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \}$. Cabe ressaltar que essa interseção sempre existirá, uma vez que 2^Ω é uma σ -álgebra de Ω e portanto há, pelo menos, uma \mathcal{F} que contém \mathcal{G} .

Definição 2.11. (YONG; ZHOU, 1999, p. 3) *Seja (Ω, τ) um espaço topológico em que τ é uma topologia qualquer de Ω . Se \mathcal{G} for a família de todos os conjuntos abertos de Ω , então $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G})$ será definida como σ -álgebra de Borel, e os seus elementos $\mathbb{U} \subset \Omega$ serão chamados de conjuntos de Borel ou, simplesmente, borelianos.*

Para $\Omega = \mathbb{R}^n$, uma topologia τ pode ser gerada a partir do conjunto das bolas abertas. Assim, se $\Omega = \mathbb{R}$, por exemplo, então \mathcal{B} é a σ -álgebra gerada por todos os intervalos abertos (a, b) em \mathbb{R} . Note que \mathcal{B} também é a σ -álgebra gerada por todos os intervalos fechados $[a, b]$ em \mathbb{R} .

Definição 2.12. (BARTLE, 1966, p. 6) *Um par ordenado (Ω, \mathcal{F}) , constituído por um conjunto Ω e uma σ -álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de Ω , é chamado de espaço mensurável.*

A partir de dois espaços mensuráveis quaisquer, (Ω, \mathcal{F}) e $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$, considere uma função $F : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$. Assim, para um subconjunto $\tilde{\mathbb{F}}$ de $\tilde{\Omega}$, define-se a imagem inversa $F^{-1}(\tilde{\mathbb{F}})$ de F como sendo todos os elementos ω de Ω , tais que suas respectivas imagens $F(\omega)$ pertençam a $\tilde{\mathbb{F}}$, ou seja, $F^{-1}(\tilde{\mathbb{F}}) = \{\omega \in \Omega, F(\omega) \in \tilde{\mathbb{F}}\}$, $\tilde{\mathbb{F}} \subset \tilde{\Omega}$.

Definição 2.13. (YONG; ZHOU, 1999, p. 3) *Sejam (Ω, \mathcal{F}) e $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ dois espaços mensuráveis e $F : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ uma função qualquer. Assim, F é uma função $\mathcal{F} / \tilde{\mathcal{F}}$ -mensurável, se, para todos os conjuntos $\tilde{\mathbb{F}} \subset \tilde{\Omega}$, sua imagem inversa $F^{-1}(\tilde{\mathbb{F}})$ pertencer à σ -álgebra \mathcal{F} , isto é, $F^{-1}(\tilde{\mathcal{F}}) \subseteq \mathcal{F}$.*

Um caso particular da Definição 2.13 ocorre quando $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$, de modo que uma função $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada de função \mathcal{F} -mensurável ou, simplesmente, função mensurável, se, para todos os conjuntos de Borel $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$, sua imagem inversa $F^{-1}(\mathbb{U})$ pertencer à σ -álgebra \mathcal{F} .

Note que uma σ -álgebra pode ser gerada por meio de uma função qualquer $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. De fato, a σ -álgebra gerada por F é a menor σ -álgebra de Ω contendo todos os conjuntos $F^{-1}(\mathbb{U})$ em que $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto de Borel.

Proposição 2.11. (BARTLE, 1966, p. 9) *Qualquer função contínua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathcal{B} -mensurável.*

Proposição 2.12. (BARTLE, 1966, p. 9) *Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante qualquer. Assim, se ambas as funções reais $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ forem mensuráveis, então as funções cF , F^2 , $|F|$, $F + G$ e FG também o serão.*

Considere agora $\overline{\mathbb{R}}$ como o conjunto estendido dos números reais, isto é, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Desse modo, uma função $F : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é denominada função real estendida.

Definição 2.14. (BARTLE, 1966, p. 19) *Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável e suponha que os conjuntos $\mathbb{F}_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots$, formem uma sequência disjunta qualquer de conjuntos em \mathcal{F} , isto é, $\mathbb{F}_i \cap \mathbb{F}_j = \emptyset$, se $i \neq j$. Então, uma função real estendida μ será contavelmente aditiva ou, simplesmente, σ -aditiva, se*

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{F}_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\mathbb{F}_i). \quad (2.13)$$

Definição 2.15. (BARTLE, 1966, p. 19) *Uma medida é uma função real estendida μ definida em uma σ -álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de Ω , tal que*

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (ii) $\mu(\mathbb{F}) \geq 0$, para todo $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$;
- (iii) μ é contavelmente aditiva.

Estas funções, denominadas medidas, remetem à ideia de comprimentos, áreas, massas e assim por diante. Portanto, é natural que assumam o valor zero para o conjunto vazio e que sejam (contavelmente) aditivas para conjuntos disjuntos. Entretanto, observe que a medida μ pode ser $+\infty$. De fato, quando uma medida μ for um valor real finito (em vez de $+\infty$), isto é, quando $\mu < +\infty$, então μ será chamada de medida finita. Por outro lado, note que o surgimento de $+\infty$ ao lado direito de (2.13) pode ocorrer em duas situações distintas: quando $\mu(\mathbb{F}_i) = +\infty$ para algum i ou quando a série de termos não negativos que aparece ao lado direito de (2.13) for divergente. Por conta disso, introduz-se, para uma medida, a seguinte definição.

Definição 2.16. (BARTLE, 1966, p. 20) *Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável. Se houver uma sequência \mathbb{F}_i de conjuntos em \mathcal{F} com $\Omega = \bigcup \mathbb{F}_i$, tal que $\mu(\mathbb{F}_i) < \infty$ para todo i , então a medida μ será σ -finita.*

Proposição 2.13. (BARTLE, 1966, p. 20) *Se $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, então existe uma única medida λ , definida em \mathcal{B} , que coincide com o comprimento dos intervalos abertos. Isso significa que, se \mathbb{F} for o intervalo não vazio (a, b) , então $\lambda(\mathbb{F}) = b - a$.*

A medida única λ , citada na Proposição 2.13, é conhecida como medida de Lebesgue ou medida de Borel. A medida de Lebesgue não é uma medida finita, mas sim σ -finita.

Definição 2.17. (BARTLE, 1966, p. 22) *Uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, constituída por um conjunto Ω , uma σ -álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de Ω e uma medida μ definida em \mathcal{F} , é chamada de espaço de medida. No caso em que a medida μ for σ -finita, a tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ será chamada de espaço de medida σ -finito.*

A seguir, apresenta-se um resultado importante da teoria de integração e medida, o Teorema de Tonelli, o qual será utilizado no Capítulo 4.

Teorema 2.5. (BARTLE, 1966, p. 118) *Sejam $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ e $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ dois espaços de medida σ -finitos e seja F uma função mensurável não negativa em $\mathbb{Z} = \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Assim, as funções definidas em \mathbb{X} e \mathbb{Y} por*

$$f(x) = \int_{\mathbb{Y}} F_x d\nu \quad e \quad g(y) = \int_{\mathbb{X}} F_y d\mu$$

são mensuráveis e

$$\int_{\mathbb{X}} f d\mu = \int_{\mathbb{Z}} F d\pi = \int_{\mathbb{Y}} g d\nu.$$

De maneira equivalente,

$$\int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} F d\nu \right) d\mu = \int_{\mathbb{Z}} F d\pi = \int_{\mathbb{Y}} \left(\int_{\mathbb{X}} F d\mu \right) d\nu. \quad (2.14)$$

A medida π definida em $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ é o produto de μ e ν .

2.3 Probabilidade e Cálculo Estocástico

No âmbito da teoria de probabilidade, o espaço de medida (Ω, \mathcal{F}, P) é denominado espaço de probabilidade. O conjunto Ω é o espaço amostral, e os seus elementos $\omega \in \Omega$ são as amostras. Os conjuntos \mathcal{F} -mensuráveis são os eventos possíveis, de modo que a σ -álgebra \mathcal{F} é o conjunto destes eventos. Assim, para um evento $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$, a medida $P(\mathbb{F})$, definida em \mathcal{F} , é interpretada como sendo a probabilidade de o evento \mathbb{F} ocorrer.

Definição 2.18. (YONG; ZHOU, 1999, p. 2) Uma função $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ será uma medida de probabilidade em (Ω, \mathcal{F}) , se

(i) $P(\emptyset) = 0$;

(ii) $P(\Omega) = 1$;

(iii) $\mathbb{F}_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots, \mathbb{F}_i \cap \mathbb{F}_j = \emptyset$ para $i \neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{F}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\mathbb{F}_i)$.

Note que a medida de probabilidade é uma medida σ -finita e, portanto, o espaço de probabilidade é um espaço de medida σ -finito. Denota-se $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$ como um evento de probabilidade nula, se $P(\mathbb{F}) = 0$. Além disso, dois eventos \mathbb{F}_1 e \mathbb{F}_2 serão independentes, se $P(\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2) = P(\mathbb{F}_1)P(\mathbb{F}_2)$. Um evento \mathbb{F} será independente da σ -álgebra \mathcal{F} , se \mathbb{F} for independente de qualquer evento de \mathcal{F} . Por fim, duas σ -álgebras \mathcal{F} e \mathcal{G} serão independentes, se qualquer evento $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$ for independente de \mathcal{G} .

Definição 2.19. (YONG; ZHOU, 1999, p. 3) Um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) será completo, se, para qualquer evento de probabilidade nula $\mathbb{F}_2 \in \mathcal{F}$, o evento \mathbb{F}_1 pertencer à \mathcal{F} , sempre que $\mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}_2$. Assim, faz-se necessário que \mathbb{F}_1 também seja um evento de probabilidade nula.

Definição 2.20. (YONG; ZHOU, 1999, p. 4) Sejam (Ω, \mathcal{F}) e $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ dois espaços mensuráveis. Uma variável aleatória X é uma função \mathcal{F} -mensurável $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Note que a definição de variável aleatória independe da definição de medida de probabilidade. No entanto, toda variável aleatória induz uma medida de probabilidade μ_X em \mathbb{R}^n , definida por $\mu_X(\mathbb{U}) = P(X^{-1}(\mathbb{U}))$. A esta medida μ_X , dá-se o nome de distribuição de X .

Proposição 2.14. (SCARSINI, 1998) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias gaussianas multidimensionais, tais que $X \sim N(\bar{X}, \Sigma_X)$ e $Y \sim N(\bar{Y}, \Sigma_Y)$. Então, para toda função convexa φ ,

$$\bar{X} = \bar{Y} \text{ e } \Sigma_Y - \Sigma_X \geq 0 \Leftrightarrow E[\varphi(X)] \leq E[\varphi(Y)]$$

Definição 2.21. (YONG; ZHOU, 1999, p. 15) Seja \mathbb{I} um conjunto não vazio de índices e (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade. Um processo estocástico é uma família $\{X_t, t \in \mathbb{I}\}$ de variáveis aleatórias de (Ω, \mathcal{F}, P) para \mathbb{R}^n . Para qualquer $\omega \in \Omega$, a função $t \rightarrow X_t(\omega)$ é denominada de trajetória do processo.

O conjunto de índices \mathbb{I} é normalmente escolhido como sendo o intervalo $[0, \infty)$ e, nesse caso, pode receber uma interpretação de tempo. Assim, ao longo do texto, as notações mais compactas $\{X_t\}_{t \geq 0}$, $\{X_t\}$ e $X(\cdot)$ serão utilizadas de forma equivalente para representar um processo estocástico, podendo este, por vezes, ser chamado simplesmente de processo.

Definição 2.22. (YONG; ZHOU, 1999, p. 16) Para um dado espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) , define-se uma filtração \mathcal{F}_t como sendo uma família de sub- σ -álgebras $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, com $t \in [0, T]$, de forma que $\mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}$ para todo $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$. Assim, o espaço $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ é chamado de espaço mensurável filtrado e $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ de espaço de probabilidade filtrado. De mais a mais, se $\bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$, $t \in [0, T)$, então $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ será contínuo à direita.

Definição 2.23. (YONG; ZHOU, 1999, p. 17) Um espaço de probabilidade filtrado dado por $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ satisfaz as condições usuais, se (Ω, \mathcal{F}, P) for completo, \mathcal{F}_0 contiver todos os eventos de probabilidade nula em \mathcal{F} e $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ for contínuo à direita.

Definição 2.24. (OKSENDAL, 2007, p. 25) Seja $X_t(\omega)$ um processo estocástico m -dimensional. Define-se \mathcal{F}_t como a σ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias $\{X_i(s)\}_{1 \leq i \leq m}$, $0 \leq s \leq t$. Em outras palavras, \mathcal{F}_t é a menor σ -álgebra contendo todos os conjuntos da forma $\{\omega; X_{t_1}(\omega) \in F_1, \dots, X_{t_k}(\omega) \in F_k\}$ em que $t_j \leq t$, $j \leq k = 1, 2, \dots$, e $F_j \subset \mathbb{R}^m$ são borelianos. Além disso, considera-se que todos os conjuntos de medida nula estejam incluídos em \mathcal{F}_t .

Definição 2.25. (OKSENDAL, 2007, p. 25) Uma função $Y(\omega)$ será \mathcal{F}_t -mensurável, se, e somente se, Y puder ser escrita como um limite ponto a ponto de somas de funções na forma

$$g_1(W_{t_1})g_2(W_{t_2}) \dots g_k(W_{t_k})$$

em que g_1, g_2, \dots, g_k são funções contínuas limitadas e $t_j \leq t$ para $j \leq k = 1, 2, \dots$

Intuitivamente, dizer que Y é \mathcal{F}_t -mensurável significa que o valor de $Y(\omega)$ pode ser decidido a partir dos valores de $X_s(\omega)$ para $s \leq t$. Exemplificando, $Y_1(\omega) = X_{t/2}(\omega)$ é \mathcal{F}_t -mensurável, enquanto que $Y_2(\omega) = X_{2t}(\omega)$ não o é. Nesse sentido, pode-se pensar em \mathcal{F}_t como sendo a história de X_s até o instante t , ou seja, a quantidade de informação gerada por X_s , sendo $s \leq t$. Nota-se que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para $s < t$, isto é, $\{\mathcal{F}_t\}$ está crescendo com o passar do tempo. E ainda, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para todo t .

Definição 2.26. (OKSENDAL, 2007, p. 25) Seja $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ uma família monotônica de σ -álgebras de subconjuntos de Ω . Um processo $Z(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamado \mathcal{F}_t -adaptado, se, para cada $t \geq 0$, a função $\omega \rightarrow Z(t, \omega)$ for \mathcal{F}_t -mensurável.

Um exemplo extremamente importante de um processo estocástico é o processo de Wiener definido a seguir. Por razões históricas, este processo é normalmente chamado de movimento browniano, sendo esta a terminologia adotada neste trabalho.

Definição 2.27. (YONG; ZHOU, 1999, p. 21) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ um espaço de probabilidade filtrado. Assim, um processo $\{W_t\}$, assumindo valores em \mathbb{R}^n e \mathcal{F}_t -adaptado, é chamado de movimento browniano m -dimensional em $[0, \infty)$, se, para todo $0 \leq s < t$, a variável aleatória $W_t - W_s$ for independente de \mathcal{F}_s e possuir distribuição normal com média zero e covariância $(t - s)I$, ou seja, para qualquer $0 \leq s < t$,

$$E[W_t - W_s / \mathcal{F}_s] = 0, \text{ com probabilidade quase certa;} \quad (2.15a)$$

$$E[(W_t - W_s)(W_t - W_s)' / \mathcal{F}_s] = (t - s)I, \text{ com probabilidade quase certa.} \quad (2.15b)$$

Ademais, se $P(W_0 = 0) = 1$, então $\{W_t\}$ é um movimento browniano padrão.

CAPÍTULO 3

CONTROLE ÓTIMO ESTOCÁSTICO

Uma vez que os sistemas são dinâmicos, isto é, evoluem com o passar do tempo, as decisões pertinentes (controles), que são tomadas com base nas informações mais atualizadas disponíveis para os tomadores de decisão (controladores), devem também mudar ao longo do tempo. Os tomadores de decisão devem escolher uma decisão ótima, dentre todas as possíveis decisões envolvidas, com o intuito de se alcançar o melhor resultado esperado relacionado aos seus objetivos. Este tipo de problema de otimização estocástica é intitulado “problema de controle ótimo estocástico”.

A gama de problemas de controle ótimo estocástico abrange uma variedade de sistemas, dentre os quais podem-se citar os sistemas físicos, biológicos, econômicos, entre outros. Este capítulo provê a estrutura matemática necessária para o tratamento do problema de controle ótimo estocástico que será abordado nos capítulos subsequentes.

3.1 Processos de Difusão de Itô

Os sistemas dinâmicos no escopo deste trabalho são descritos por equações diferenciais estocásticas de Itô e, portanto, são chamados de processos de difusão de Itô. A fonte básica de incerteza nestes processos é o ruído branco que representa os efeitos conjuntos de um grande número de forças aleatórias independentes atuando sobre os sistemas.

Definição 3.1. (OKSENDAL, 2007, p. 114) *Uma difusão de Itô homogênea no tempo é um processo estocástico $X_t(\omega) = X(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz uma equação diferencial estocástica da forma*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

em que W_t é um movimento browniano m -dimensional. As funções $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, denominadas, respectivamente, por coeficiente de tendência e coeficiente de difusão, são funções Lipschitz contínuas.

Em diversas aplicações, é interessante associar um operador diferencial parcial de segunda ordem \mathcal{A} a uma difusão de Itô $t \rightarrow X_t$, de tal maneira que \mathcal{A} possa caracterizar, de forma infinitesimal, a evolução do processo $X_t(\omega)$ do ponto de vista de sua média. Por conta disso, \mathcal{A} é tipicamente chamado de gerador do processo e definido como a seguir.

Definição 3.2. (OKSENDAL, 2007, p. 121) *Seja $t \rightarrow X_t$ uma difusão de Itô homogênea no tempo. Assim, o gerador \mathcal{A} do processo $X_t(\omega)$ é dado por*

$$\mathcal{A}J(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{E^x [J(X_t)] - J(x)}{t}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad J \in \mathbb{D}_{\mathcal{A}}, \quad (3.2)$$

em que $E^x[\cdot]$ corresponde ao valor esperado a partir de $t = 0$ e $X_0 = x$. O conjunto $\mathbb{D}_{\mathcal{A}}$ corresponde às funções $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para as quais o limite em (3.2) existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Uma relação entre o gerador e os coeficientes b e σ da difusão de Itô pode ser encontrada a partir do seguinte lema, cuja demonstração baseia-se na aplicação direta da fórmula de Itô a $J(X_t)$.

Lema 3.1. (OKSENDAL, 2007, p. 122) *Seja X_t um processo de Itô em \mathbb{R}^n com $X_0 = x$. Suponha que J seja uma função de suporte compacto e $J \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Suponha também que $b(t, \omega)$ e $\sigma(t, \omega)$ sejam limitadas em $[0, T] \times \Omega$, de modo que X_t pertença ao suporte de J . Então,*

$$E^x [J(X_t)] = J(x) + E^x \left[\int_0^t \left(\sum_i b_i(r, \omega) \frac{\partial J}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma(r, \omega) \sigma'(r, \omega))_{i,j} \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} \right) dr \right]. \quad (3.3)$$

Assim, utilizando a Definição 3.2 e o resultado do Lema 3.1, formula-se o seguinte teorema, associando o gerador \mathcal{A} aos coeficientes b e σ .

Teorema 3.1. (OKSENDAL, 2007, p. 123) *Seja $t \rightarrow X_t$ uma difusão de Itô dada por*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t. \quad (3.4)$$

Se $J \in C^2(\mathbb{R}^n)$ for uma função de suporte compacto, então $J \in \mathbb{D}_{\mathcal{A}}$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{A}J(x) &= \sum_i b_i(x) \frac{\partial J}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma(x) \sigma'(x))_{i,j} \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= b'(x, u) \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\sigma'(x) \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \sigma(x) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que $\text{tr}[\cdot]$ denota o traço da matriz.

A combinação do Lema 3.1 com o Teorema 3.1 produz o Teorema 3.2, um importante resultado matemático que é conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo Estocástico.

Teorema 3.2. (OKSENDAL, 2007, p. 124) *Seja $J \in C^2(\mathbb{R}^n)$ uma função de suporte compacto. Então,*

$$E^x[J(X_t)] = J(x) + E^x \left[\int_0^t \mathcal{A}J(X_r) dr \right], \quad t > 0. \quad (3.6)$$

Comentário 3.1. *A expressão em (3.6) é denominada fórmula de Dynkin. Se $J = J(t, X_t)$, a introdução da dependência temporal faz com que a fórmula de Dynkin passe a ser escrita como*

$$E^x[J(T, X_T)] = J(t, x) + E^x \left[\int_t^T \left(\frac{\partial J}{\partial r} + \mathcal{A}J(r, X_r) \right) dr \right], \quad t > 0. \quad (3.7)$$

3.2 Processos de Difusão Controlada de Itô

Suponha que o processo de difusão em (3.1) possua seus coeficientes (de tendência e de difusão) dependentes de um certo parâmetro u_t , cujo valor possa ser escolhido, a cada instante t , arbitrariamente de um conjunto de Borel \mathbb{U} dado. O parâmetro u_t é utilizado para controlar o processo de difusão e, por isso, recebe o nome de sinal de controle. Com isso, é possível definir uma difusão controlada de Itô homogênea no tempo.

Definição 3.3. *Uma difusão controlada de Itô homogênea no tempo é um processo estocástico $X_t(\omega) = X(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz uma equação diferencial estocástica da forma*

$$dX_t = b(X_t, u_t)dt + \sigma(X_t, u_t)dW_t \quad (3.8)$$

em que $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ são funções Lipschitz contínuas.

Note que o controle $u_t = u(t, \omega)$ também é um processo estocástico, devendo ser escolhido de forma a garantir a existência de uma única solução para a equação (3.8).

Em qualquer instante de tempo, o controlador contém todas as informações relevantes, conforme especificado pela filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, sobre o que aconteceu até aquele momento, não sendo, contudo, capaz de prever o que vai acontecer depois, devido à incerteza do sistema. Consequentemente, para qualquer instante t , o controlador não pode exercer sua decisão u_t antes que o instante t realmente chegue. Nesse sentido, dizer que o controle $u = \{u_t\}_{t \geq 0}$ é uma função $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptada, ou de forma equivalente que u é um controle factível, significa que o controlador atende a esta restrição não antecipatória.

Se, além de ser factível, um dado controle u , assumindo valores em \mathbb{U} , satisfizer também a restrição

$$E \left[\sup_{t \in [0, T]} |u_t|^2 \right] < \infty, \quad T > 0, \quad (3.9)$$

então este controle será um controle admissível. Assim, para qualquer $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$, sob o conjunto de controles admissíveis, a equação (3.8) admite uma única solução $t \rightarrow X_t$ no espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$.

Particularmente, o interesse deste trabalho concentra-se em uma família específica de controles admissíveis constituída por sinais de controle markovianos. Com efeito, um controle admissível markoviano é uma função de Markov $u_t = u(t, X_t)$ que forma processos mensuráveis \mathcal{F}_t -adaptados com valores em \mathbb{U} e satisfaz a restrição (3.9). Posto isso, o gerador do processo $X_t(\omega)$ pode ser redefinido para incluir o controle.

Definição 3.4. *Seja $t \rightarrow X_t$ uma difusão controlada de Itô homogênea no tempo, e $\mathbb{D}_{\mathcal{A}}$ o conjunto de funções $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tais que o limite*

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{E^x [J(X_t)] - J(x)}{t} \quad (3.10)$$

exista para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se $J \in C^2(\mathbb{R}^n)$ for uma função de suporte compacto, e $b(t, \omega)$ e $\sigma(t, \omega)$ forem limitadas em $[0, T] \times \Omega$, então $J \in \mathbb{D}_{\mathcal{A}}$, e o gerador \mathcal{A}^u do processo X_t aplicado a J será dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^u J(x) &= \sum_i b_i(x, u) \frac{\partial J}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma(x, u) \sigma'(x, u))_{i,j} \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= b'(x, u) \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\sigma'(x, u) \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \sigma(x, u) \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

em que $u \in \mathbb{U}$.

A seguir, apresentam-se dois resultados que serão úteis em capítulos posteriores.

Proposição 3.1. (KALLIANPUR, 1980, p. 255) *Seja $t \rightarrow X_t \in \mathbb{R}^n$ uma difusão controlada de Itô na forma*

$$dX_t = (A_t X_t + B_t u_t) dt + \sigma_t dW_t, \quad t \geq 0, \quad (3.12)$$

em que $u_t \in \mathbb{U}$ é \mathcal{F}_t -adaptado e as funções matriciais $A = \{A_t\}_{t \geq 0}$ e $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ possuem dimensões compatíveis. Assim, se $X_0 = x$ for uma variável aleatória gaussiana, independente de $\{W_t\}$ no intervalo $0 \leq t \leq T$, então o processo $\{X_t\}, 0 \leq t \leq T$ será gaussiano.

Proposição 3.2. (DAVIS, 1977, p. 111) *Sejam $t \rightarrow X_t^i \in \mathbb{R}^n$, $i = \{1, 2\}$, duas difusões controladas de Itô que satisfaçam a seguinte equação diferencial estocástica linear*

$$dX_t^i = (A_t X_t^i + B_t u_t) dt + \sigma_t^i dW_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = x. \quad (3.13)$$

Desse modo, X_t^1 e X_t^2 possuem uma mesma média $m(t) = E^x[X_t^1] = E^x[X_t^2]$.

3.3 Formulação do Problema de Controle Ótimo Estocástico

De acordo com (YONG; ZHOU, 1999), há duas formulações matemáticas distintas para o problema de controle ótimo estocástico, a saber, a formulação forte e a formulação fraca. Na primeira, o espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ juntamente com o movimento browniano $W(\cdot)$ são fixos. Na segunda, varia-se $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$, bem como $W(\cdot)$, de maneira a considerá-los como partes do controle.

Vale a pena ressaltar que a formulação forte é aquela que decorre do mundo prático, ao passo que a formulação fraca, por vezes, serve como um modelo matemático auxiliar, porém, eficaz, o qual visa, em última análise, resolver os problemas sob a formulação forte. A principal razão pela qual isto funciona é que o objetivo de um problema de controle estocástico gira em torno da minimização da esperança matemática de uma determinada variável aleatória que depende apenas da distribuição dos processos envolvidos. Portanto, se as soluções da equação de estado em diferentes espaços de probabilidade possuírem a mesma distribuição de probabilidade, então haverá mais liberdade na escolha de um espaço de probabilidade conveniente para se trabalhar.

Entretanto, deve-se observar que a formulação fraca falha, se qualquer um dos coeficientes da equação de estado ou do funcional de custo também for aleatório, significando que estes coeficientes dependem explicitamente de ω . Neste caso, o espaço de probabilidade deve ser especificado e fixado *a priori*. O escopo desta tese abrange apenas a formulação forte que é apresentada a seguir.

Dado um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ que satisfaça as condições usuais, descritas na Definição 2.23, sob o qual um movimento browniano padrão m -dimensional $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ é definido, considere um sistema descrito pela seguinte equação diferencial estocástica controlada de Itô

$$dX_t = G(X_t, u_t) dt + \sigma_t dW_t, \quad t \geq 0, \quad (3.14a)$$

$$X_0 = x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.14b)$$

em que $G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função mensurável que representa a dinâmica do sistema e $\sigma = \{\sigma_t\}_{t \geq 0}$, $\sigma_t \in \mathbb{R}^{n \times m}$, é uma função matricial $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptada que corresponde ao coeficiente de difusão do sistema. Dado um conjunto de Borel $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}$, a função $u = \{u_t\}_{t \geq 0}$, $u_t \in \mathbb{U}$, representa o controle do sistema, ou seja, a política de ação dos controladores (tomadores de decisão). Por fim, $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$, $X_t \in \mathbb{R}^n$, é o estado do sistema.

Associado ao sistema (3.14), define-se um funcional de custo J que avalia o desempenho do sistema por meio do valor esperado de um critério de Bolza do tipo

$$J(x, u) = E^x \left[\int_0^T f(t, X_t, u_t) dt + g(X_T) \right], \quad T \in (0, \infty) \text{ fixo}, \quad (3.15)$$

em que $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas dadas, e $E^x[\cdot]$ corresponde ao valor esperado resultante, quando se inicia o processo X em um estado $X_0 = x$ no instante $t = 0$. Note que a constante $T > 0$ é um valor fixo e, por conta disto, um problema de controle formulado nestas condições é geralmente referido como um problema de horizonte de tempo finito ou, simplesmente, problema de duração finita.

A partir destas definições, a formulação forte do problema de controle ótimo estocástico consiste em minimizar o custo (3.15) sujeito à equação de estado (3.14) sobre o conjunto de todos os controles admissíveis. Em outras palavras, busca-se encontrar um controle admissível u^* que seja ótimo no seguinte sentido

$$u^* = \underset{\{u_t\}, t \in [0, T]}{\operatorname{arg\,min}} J(x, u). \quad (3.16)$$

Se tal controle existir, chamar-se-á controle ótimo e possuirá a seguinte propriedade

$$J^*(x) = \inf_{\{u_t\}, t \in [0, T]} J(x, u) = J(x, u^*), \quad (3.17)$$

sendo $J^*(x)$ denominado custo ótimo.

Assim, o problema descrito nessa seção pode ser abordado pelo método da programação dinâmica, uma poderosa ferramenta matemática para lidar com problemas de controle ótimo estocástico em tempo contínuo.

3.4 O Método da Programação Dinâmica

A ideia básica do método é considerar uma família de problemas com diferentes condições iniciais para o tempo e para o estado do sistema, de modo a estabelecer relações entre eles via uma equação diferencial parcial não linear de segunda ordem, conhecida como equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) ou, simplesmente, equação da programação dinâmica. Com exceção de algumas situações particulares, a resolução analítica desta equação possui um grau enorme de dificuldade.

Considere a seguinte definição para a função custo ótimo futuro $J^*(t, x)$ que leva em conta o custo ótimo (3.17) a partir de um determinado instante de tempo t em diante.

$$J^*(t, x) = \inf_{u(\cdot)} E^{t, x} \left[\int_t^T f(r, X_r, u_r) dr + g(X_T) \right] \quad (3.18)$$

em que $E^{t, x}[\cdot]$ denota a esperança matemática a partir do instante t e do estado $X_t = x$. Para simplificar a notação, será utilizado em alguns momentos J^* , em vez de $J^*(t, x)$, e também J_t^* , J_x^* e J_{xx}^* para denotar as derivadas parciais.

O Teorema 3.3, a seguir, introduz a equação de HJB e representa um resultado fundamental do método da programação dinâmica.

Teorema 3.3. (OKSENDAL, 2007, p. 240) Seja \mathcal{A}^u o gerador usual de uma difusão de Itô e suponha que $J^* \in C^1([0, T]) \times C^2(\mathbb{R}^n)$ satisfaça

$$E^{t,x} \left[\int_t^T |J_r^* + \mathcal{A}^u J^*(r, X_r)| dr + |J^*(T, X_T)| \right] < \infty, \quad T < \infty,$$

para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{U}$. Defina

$$H(t, x, u) := \{f(t, x, u) + \mathcal{A}^u J^*\} \quad (3.19)$$

como o hamiltoniano do sistema. Então,

$$J_t^* + \inf_{u \in \mathbb{U}} H(t, x, u) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \quad (3.20a)$$

$$J^*(T, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.20b)$$

Ademais, dado que um controle ótimo markoviano u^* exista, o ínfimo em (3.20a) é obtido para $u = u^*(t, x)$.

A expressão (3.20a) é a equação de HJB, sendo (3.20b) sua condição de contorno. Note que a última frase do Teorema 3.3 apenas afirma que, se um controle atingir o mínimo em (3.18), ele também minimizará o hamiltoniano em (3.19). Trata-se, portanto, de uma condição necessária, embora não suficiente. Porém, pode-se demonstrar a suficiência, isto é, se um controle atingir o mínimo em (3.18), então ele será capaz de minimizar o hamiltoniano em (3.19) e de satisfazer $J_t^* + H(t, x, u^*) = 0$ para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$.

Consequentemente, se for possível resolver (3.20), analítica ou numericamente, para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, então a minimização do hamiltoniano do sistema $H(t, x, u)$ com relação a u , para cada t e x , será suficiente para se obter o controle ótimo $u = u^*(t, x)$. Isso é o que, a grosso modo, está dito no Teorema de Verificação enunciado a seguir.

Teorema 3.4. (OKSENDAL, 2007, p. 243) Suponha que $J^* \in C^1([0, T]) \times C^2(\mathbb{R}^n)$. Se for possível encontrar um controle admissível $\hat{u} = \hat{u}(t, x) \in \mathbb{U}$ que satisfaça

$$J_t^* + H(t, x, \hat{u}) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \quad (3.21)$$

então \hat{u} será um controle markoviano, tal que

$$J^*(t, x) = E^{t,x} \left[\int_t^T f(r, X_r, \hat{u}_r) dr + g(X_T) \right], \quad (3.22)$$

e, consequentemente, \hat{u} deverá ser um controle ótimo.

De fato, a abordagem do problema de controle ótimo via teorema de verificação fornece soluções para toda a família de problemas com diferentes condições iniciais e, em particular, para o problema original. Contudo, há uma grande desvantagem no método. Este requer que a equação de HJB admita soluções clássicas, ou seja, as soluções precisam ser suaves o bastante, pelo menos, até a ordem das derivadas envolvidas na equação. Em linguagem matemática, o método exige $J^* \in C^1([0, T]) \times C^2(\mathbb{R}^n)$ e, mesmo para algumas situações bem simples, isto não ocorre necessariamente. Logo, a equação de HJB, em geral, não possui solução clássica, fazendo com que o problema seja difícil de lidar.

Parte II

Contribuições

CAPÍTULO 4

O PROJETO DO CONTROLADOR CVIU

O projeto do controlador CVIU consiste em determinar uma política ótima de controle para um modelo CVIU, isto é, um modelo de sistema estocástico para o qual a variação do sinal de controle aumenta a incerteza do estado. Conforme visto no Capítulo 1, os modelos CVIU surgem como uma possibilidade de se representar sistemas estocásticos, operando em torno de um ponto de equilíbrio, sobre os quais não se pode realizar experimentos adequados para a identificação precisa de sua dinâmica. Nesse sentido, o fato de possuir um termo extra de ruído modulado pelas variações do sinal de controle poderia tornar o modelo CVIU mais propício para a modelagem de sistemas estocásticos com dinâmica pouco conhecida.

4.1 Descrição Matemática de um Modelo CVIU

Considere o seguinte sistema de controle estocástico, cuja dinâmica G seja pouco conhecida

$$dZ_t = G(Z_t, v_t) dt + \sigma_t dW_t, \quad t \geq 0, \quad (4.1a)$$

$$Z_0 = z \in \mathbb{R}^n. \quad (4.1b)$$

Para uma descrição matemática detalhada das variáveis envolvidas em (4.1), vide Seção 3.3. Suponha que este sistema esteja operando em torno de um ponto de equilíbrio (x_e, u_e) . Assim, um modelo linear de sua dinâmica pode ser adotado próximo do equilíbrio. O modelo de aproximação linear pode ser construído ao se reescrever o estado original (4.1) por meio de uma simples mudança

de variável

$$X_t = Z_t - x_e \quad (\text{processo de variação do estado}), \quad (4.2)$$

$$u_t = v_t - u_e \quad (\text{processo de variação do controle}), \quad (4.3)$$

de modo que

$$dZ_t = G(x_e + X_t, u_e + u_t) dt + \sigma_t dW_t \quad (4.4)$$

$$= dX_t \cong (A_t X_t + B_t u_t) dt + \sigma_t dW_t, \quad t \geq 0. \quad (4.5)$$

Note que $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ e $u = \{u_t\}_{t \geq 0}$ descrevem as variações do estado e do controle, respectivamente. Além disso, o modelo local do processo original é dado pelas funções matriciais $A = \{A_t\}_{t \geq 0}$ e $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ de dimensões compatíveis. Finalmente, a aproximação é obtida da equação diferencial estocástica produzida por (4.5) por meio da substituição do sinal de aproximação pelo sinal de igualdade. Neste panorama, o estado do sistema original em (4.1) pode ser aproximado pelas variações X_t em torno do equilíbrio $G(x_e, u_e) = 0$.

Suponha agora que haja incerteza sobre os valores de A e B . Neste caso, a teoria de controle robusto empregaria o seguinte modelo como ponto de partida.

$$dX_t = ((A_t + \tilde{A})X_t + (B_t + \tilde{B})u_t) dt + \sigma_t dW_t, \quad t \geq 0, \quad (4.6)$$

em que \tilde{A} e \tilde{B} representam a incerteza sobre a dinâmica. Por hipótese, estas incertezas estão confinadas a limites conhecidos, tipicamente conjuntos compactos e convexos. Modelos deste tipo correspondem a uma classe específica dos sistemas com incertezas descritas por restrições quadráticas integrais. Para maiores detalhes, vide (FU *et al.*, 1995) e as referências ali contidas.

A ideia na abordagem CVIU é lidar com as incertezas sobre a dinâmica do sistema por meio da adição de um termo extra de ruído ao modelo linear, representando um enfoque diferente ao da teoria de controle robusto que insere termos extras no coeficiente de tendência, como realizado em (4.6) com o acréscimo de \tilde{A} e \tilde{B} . A motivação apresentada na Seção 1.1 indica que este termo extra de ruído deva ser modulado pelas variações do sinal de controle aplicadas ao sistema, fazendo com que o coeficiente de difusão $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ em (4.5) torne-se $\{\sigma_t + \bar{\sigma}_t |u_t|\}_{t \geq 0}$.

Além do mais, a inserção do termo extra de ruído faz com que a abordagem CVIU não se detenha apenas sobre incertezas paramétricas do modelo, tornando-a capaz de tratar casos de maior desconhecimento do sistema original, muitas vezes relacionados com sua própria estrutura. De fato, o termo $\{\bar{\sigma}_t |u_t| dW_t\}_{t \geq 0}$ representa o erro induzido no vetor de estado pelos desvios de ordens superiores que ocorrem devido às variações do controle em torno do seu valor nominal.

Dessa maneira, o processo (4.5) dá origem ao modelo CVIU

$$dX_t = (A_t X_t + B_t u_t) dt + (\sigma_t + \bar{\sigma}_t |u_t|) dW_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = x. \quad (4.7)$$

O parâmetro σ_t está relacionado com o ruído original do sistema, e $\bar{\sigma}_t$ é um parâmetro de ajuste do modelo CVIU que regula como a variação do controle induz incerteza no estado. Por hipótese, para cada $t \geq 0$, tem-se $\sigma_t' \sigma_t > 0$, $\bar{\sigma}_t' \bar{\sigma}_t > 0$ e $\sigma_t \bar{\sigma}_t' \geq 0$. Mais adiante, para a obtenção do resultado do Lema 4.4, será necessária a hipótese mais restritiva $\bar{\sigma}_t \sigma_t' + \sigma_t \bar{\sigma}_t' > 0$.

Em síntese, o modelo CVIU pode lidar com a dinâmica pouco conhecida do processo X por meio de um termo extra no coeficiente de difusão que é modulado pela variação do sinal de controle. Trata-se, portanto, de uma perspectiva distinta à da teoria de controle robusto.

Associado ao modelo CVIU em (4.7), tem-se o seguinte gerador para o processo X_t , conforme a Definição 3.4

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^u J(x) &= (A_t x + B_t u)' J_x + \frac{1}{2} \text{tr} [(\sigma_t + \bar{\sigma}_t |u|)' J_{xx} (\sigma_t + \bar{\sigma}_t |u|)] \\ &= x' A_t' J_x^* + \frac{1}{2} \Gamma_1(J_{xx}^*) + \frac{1}{2} \Gamma_2(J_{xx}^*) u^2 + B_t' J_x^* u + \frac{1}{2} \Gamma_{12}(J_{xx}^*) |u|. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Visando simplificar a apresentação dos cálculos nas próximas seções, foi introduzida, na equação (4.8), a notação

$$\Gamma_1(J_{xx}^*) = \text{tr} [\sigma_t' J_{xx}^* \sigma_t], \quad \Gamma_2(J_{xx}^*) = \text{tr} [\bar{\sigma}_t' J_{xx}^* \bar{\sigma}_t] \quad \text{e} \quad \Gamma_{12}(J_{xx}^*) = \text{tr} [\sigma_t' J_{xx}^* \bar{\sigma}_t + \bar{\sigma}_t' J_{xx}^* \sigma_t]. \quad (4.9)$$

4.2 O Problema de Controle de um Modelo CVIU

Considere o modelo CVIU em (4.7) com $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$ e u , tal que, para todo $t \geq 0$, $u_t \in \mathbb{U}$, um subconjunto convexo de \mathbb{R} . Todas as funções matriciais $t \rightarrow A_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \rightarrow B_t \in \mathbb{R}^n$, $t \rightarrow \sigma_t \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $t \rightarrow \bar{\sigma}_t \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são contínuas no tempo e determinísticas.

Além do mais, sejam $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ duas funções contínuas, de maneira que

H1: As funções $f(t, \cdot, \cdot)$, para cada $t \geq 0$, e $g(\cdot)$ são convexas;

H2: A função $f(t, x, \cdot)$ é continuamente diferenciável para cada $t \geq 0$ e x .

A partir destas definições e hipóteses, pode-se definir o problema de controle ótimo estocástico de um modelo CVIU (sob o ponto de vista da formulação forte descrita na Seção 3.3) como o problema de minimizar (3.15) sujeito à equação de estado (4.7) sobre o conjunto de todos os controles de Markov admissíveis, isto é,

$$\min_{u(\cdot)} E^x \left[\int_0^T f(t, X_t, u_t) dt + g(X_T) \right], \quad t \geq 0, \quad T \in (0, \infty) \text{ fixo}, \quad (4.10a)$$

$$\text{s.a } dX_t = (A_t X_t + B_t u_t) dt + (\sigma_t + \bar{\sigma}_t |u_t|) dW_t, \quad X_0 = x \text{ (determinístico)}. \quad (4.10b)$$

O método da programação dinâmica, apresentado na Seção 3.4, fornece a base para a solução de problemas de controle ótimo estocástico e será utilizado na próxima seção com o intuito de se obter a política ótima de controle u^* para sistemas CVIU. Este método resulta em uma equação diferencial parcial não linear de segunda ordem com respeito à função desconhecida u , sendo, em geral, de difícil resolução. Para casos específicos, matemáticos e engenheiros têm desenvolvido alguns artifícios numéricos para alcançar a solução; porém, até onde se sabe, não há nada na literatura que se aplica aos sistemas CVIU.

Assim, para o projeto de controle ótimo de um modelo CVIU, a ideia é empregar o Teorema 3.4 para validar possíveis soluções da equação de HJB. Contudo, como esta abordagem exige que a equação de HJB admita soluções clássicas, introduz-se, para os propósitos deste trabalho, a hipótese

$$\text{H3: } J^* \in C^1([0, T]) \times C^2(\mathbb{R}^n),$$

permitindo que a programação dinâmica seja a ferramenta de projeto do controlador CVIU. Esta estratégia pode soar bastante restritiva, mas, como será averiguado posteriormente no Capítulo 5, a escolha de uma função suave para servir de candidata na utilização do teorema de verificação permite a obtenção da solução ótima para o sistema CVIU em algumas situações particulares. Por esta razão, não há um desconforto em supor esta hipótese de suavidade para a função de custo ótimo no âmbito deste trabalho.

Por fim, conforme será visto mais adiante, na Seção 4.4, a minimização do hamiltoniano associado ao modelo CVIU exige a seguinte hipótese

$$\text{H4: } \sup_{x \in \mathbb{S}} |J_{xx}^*| < \infty, \quad \forall \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{S} \text{ um conjunto compacto.}$$

4.3 Caracterizações Essenciais

O projeto do controlador CVIU demanda alguns resultados prévios, a saber, a convexidade da função custo ótimo $x \rightarrow J^*(t, x)$ para cada $t \in [0, T]$ e a convexidade do hamiltoniano $H(t, x, \cdot)$ para cada $t \in [0, T]$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Sem estes resultados, não seria possível obter a solução ótima do problema de controle de um modelo CVIU e, muito menos, as particularidades desta solução, tais como serão apresentadas ao longo deste capítulo. Assim, esta seção é dedicada à demonstração destes resultados essenciais.

4.3.1 A Convexidade do Custo Ótimo

Como etapa preliminar da caracterização da convexidade da função custo ótimo futuro $x \rightarrow J^*(t, x)$ no contexto dos sistemas CVIU, prova-se no Lema 4.1 um resultado de certa forma

intuitivo, a saber, se houver dois processos de difusão com a mesma média e avaliados pelo mesmo funcional de custo convexo, então o processo que possuir a maior dispersão também possuirá o custo mais elevado (em termos de valor esperado). Em seguida, o resultado principal de convexidade é enunciado e demonstrado no Teorema 4.1.

Lema 4.1. *Sejam $t \rightarrow \xi_t \in \mathbb{R}^n$ e $t \rightarrow \psi_t \in \mathbb{R}^n$ dois processos de difusão controlada de Itô, ambos associados ao mesmo sinal de controle $t \rightarrow u_t \in \mathbb{U}$, \mathcal{F}_t -adaptado. Considere que estes processos possuam o mesmo estado inicial $\xi_0 = \psi_0 = \rho$ e que seus respectivos coeficientes de tendência sejam lineares. Desse modo,*

$$d\xi_t = (A_t \xi_t + B_t u_t) dt + \varpi_t dW_t, \quad t \geq 0, \quad \xi_0 = \rho, \quad (4.11a)$$

$$d\psi_t = (A_t \psi_t + B_t u_t) dt + \varphi_t dW_t, \quad t \geq 0, \quad \psi_0 = \rho. \quad (4.11b)$$

Suponha que, para cada $t \in [0, T]$, o coeficiente de difusão de ψ_t seja maior que o de ξ_t , isto é, $\varphi_t' \varphi_t - \varpi_t' \varpi_t \geq 0$. Então, para quaisquer funções contínuas f e g que satisfaçam a hipótese H1, tem-se

$$E^\rho \left[\int_t^T f(r, \xi_r, u_r) dr + g(\xi_T) \right] \leq E^\rho \left[\int_t^T f(r, \psi_r, u_r) dr + g(\psi_T) \right] \quad (4.12)$$

Demonstração. A prova deste lema é uma consequência direta das proposições 3.1, 3.2 e 2.14. Note pelas Proposições 3.1 e 3.2 que $t \rightarrow \xi_t \in \mathbb{R}^n$ e $t \rightarrow \psi_t \in \mathbb{R}^n$ são processos gaussianos com a mesma média. Como o coeficiente de difusão de ψ_t é maior que o de ξ_t , e as funções f e g são convexas no espaço de estados, a Proposição 2.14 implica que, para cada $t \in [0, T]$,

$$E^\rho [f(t, \xi_t, u_t)] \leq E^\rho [f(t, \psi_t, u_t)] \quad (4.13)$$

$$E^\rho [g(\xi_T)] \leq E^\rho [g(\psi_T)]. \quad (4.14)$$

A integração de (4.13) no intervalo $[t, T]$, para $0 \leq t < T$, fornece integrais iteradas em $\mathbb{R} \times \Omega$ com medidas σ -finitas. Dessa maneira, dado que f e g são funções mensuráveis não negativas, pode-se aplicar o Teorema 2.5 para garantir que a troca da ordem da integração é irrelevante, resultando em

$$E^\rho \left[\int_t^T f(r, \xi_r, u_r) dr \right] \leq E^\rho \left[\int_t^T f(r, \psi_r, u_r) dr \right] \quad (4.15)$$

Finalmente, adicionando (4.14) e (4.15), conclui-se a demonstração. \square

A partir do resultado do Lema 4.1, pode-se provar o Teorema 4.1 a seguir.

Teorema 4.1. *Considere a função custo ótimo futuro J^* definida em (3.18) e associada ao modelo CVIU em (4.7). Assim, se a hipótese H1 for válida, então a função $x \rightarrow J^*(t, x)$ será convexa para cada $t \in [0, T]$.*

Demonstração. Considere $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$ e $\alpha + \beta = 1$. O objetivo aqui é provar que, para qualquer $x^{(\alpha)}, x^{(\beta)} \in \mathbb{R}^n$, vale a seguinte desigualdade.

$$J^* \left(t, \alpha x^{(\alpha)} + \beta x^{(\beta)} \right) \leq \alpha J^* \left(t, x^{(\alpha)} \right) + \beta J^* \left(t, x^{(\beta)} \right). \quad (4.16)$$

Sejam $t \rightarrow X_t^{(\alpha)} \in \mathbb{R}^n$ e $t \rightarrow X_t^{(\beta)} \in \mathbb{R}^n$ duas trajetórias quaisquer de estado de um sistema CVIU, distintas entre si, com estados iniciais $X_0^{(\alpha)} = x^{(\alpha)}$ e $X_0^{(\beta)} = x^{(\beta)}$, respectivamente, e $t \rightarrow u_t^{(\alpha)} \in \mathbb{U}$ e $t \rightarrow u_t^{(\beta)} \in \mathbb{U}$ seus correspondentes sinais de controle ε -ótimo \mathcal{F}_t -adaptados¹. Então, para $t \geq 0$,

$$X_t^{(\alpha)} = x^{(\alpha)} + \int_0^t \left(A_r X_r^{(\alpha)} + B_r u_r^{(\alpha)} \right) dr + \int_0^t \left(\sigma_r + \bar{\sigma}_r |u_r^{(\alpha)}| \right) dW_r, \quad (4.17a)$$

$$X_t^{(\beta)} = x^{(\beta)} + \int_0^t \left(A_r X_r^{(\beta)} + B_r u_r^{(\beta)} \right) dr + \int_0^t \left(\sigma_r + \bar{\sigma}_r |u_r^{(\beta)}| \right) dW_r. \quad (4.17b)$$

Ademais, seja $t \rightarrow Y_t^{(c)} \in \mathbb{R}^n$ um processo \mathcal{F}_t -adaptado criado por meio de uma combinação convexa, tal que $Y_t^{(c)} = \alpha X_t^{(\alpha)} + \beta X_t^{(\beta)}$, quer dizer,

$$\begin{aligned} Y_t^{(c)} &= \alpha x^{(\alpha)} + \beta x^{(\beta)} + \int_0^t \left[A_r \left(\alpha X_r^{(\alpha)} + \beta X_r^{(\beta)} \right) + B_r \left(\alpha u_r^{(\alpha)} + \beta u_r^{(\beta)} \right) \right] dr \\ &\quad + \int_0^t \left[\sigma_r + \bar{\sigma}_r \left(|\alpha u_r^{(\alpha)}| + |\beta u_r^{(\beta)}| \right) \right] dW_r \\ &= y^{(c)} + \int_0^t \left[A_r Y_r^{(c)} + B_r \left(\alpha u_r^{(\alpha)} + \beta u_r^{(\beta)} \right) \right] dr \\ &\quad + \int_0^t \left[\sigma_r + \bar{\sigma}_r \left(|\alpha u_r^{(\alpha)}| + |\beta u_r^{(\beta)}| \right) \right] dW_r. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Observe que, embora (4.18) não represente uma trajetória de estado factível para um sistema CVIU, a equação (4.18) é de fato um processo de difusão de Itô começando em $Y_0^{(c)} = y^{(c)} = \alpha x^{(\alpha)} + \beta x^{(\beta)}$.

Por outro lado, é possível definir $t \rightarrow \tilde{X}_t \in \mathbb{R}^n$ como uma trajetória de estado de um sistema CVIU com estado inicial $\tilde{X}_0 = \tilde{x} = y^{(c)}$, obtida pela aplicação do controle $t \rightarrow u_t^{(c)} \in \mathbb{U}$, \mathcal{F}_t -adaptado, formado pela combinação convexa dos controles $t \rightarrow u_t^{(\alpha)}$ e $t \rightarrow u_t^{(\beta)}$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t &= \tilde{x} + \int_0^t \left[A_r \tilde{X}_r + B_r u_r^{(c)} \right] dr + \int_0^t \left[\sigma_r + \bar{\sigma}_r |u_r^{(c)}| \right] dW_r \\ &= \tilde{x} + \int_0^t \left[A_r \tilde{X}_r + B_r \left(\alpha u_r^{(\alpha)} + \beta u_r^{(\beta)} \right) \right] dr + \int_0^t \left[\sigma_r + \bar{\sigma}_r \left(|\alpha u_r^{(\alpha)}| + |\beta u_r^{(\beta)}| \right) \right] dW_r. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Sejam agora $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ duas funções contínuas satisfazendo H1, como definido na Seção 4.2. A propriedade de convexidade das funções f e g acarreta

$$0 \leq f \left(t, Y_t^{(c)}, u_t^{(c)} \right) \leq \alpha f \left(t, X_t^{(\alpha)}, u_t^{(\alpha)} \right) + \beta f \left(t, X_t^{(\beta)}, u_t^{(\beta)} \right), \quad (4.20a)$$

$$0 \leq g \left(Y_T^{(c)} \right) \leq \alpha g \left(X_T^{(\alpha)} \right) + \beta g \left(X_T^{(\beta)} \right), \quad (4.20b)$$

¹ Um controle ε -ótimo $u^\varepsilon(\cdot)$ é tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$J(x, u^\varepsilon) \leq J^*(x) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

sendo que (4.20a) vale para cada $t \in [0, T]$. Em seguida, integrando (4.20a) de t a T , somando (4.20b) e rearranjando os termos, obtém-se

$$\int_t^T f\left(r, Y_r^{(c)}, u_r^{(c)}\right) dr + g(Y_T^{(c)}) \leq \alpha \left[\int_t^T f\left(r, X_r^{(\alpha)}, u_r^{(\alpha)}\right) dr + g(X_T^{(\alpha)}) \right] + \beta \left[\int_t^T f\left(r, X_r^{(\beta)}, u_r^{(\beta)}\right) dr + g(X_T^{(\beta)}) \right]. \quad (4.21)$$

Tomando o valor esperado de (4.21) com relação à filtração no instante $t \in [0, T]$, a desigualdade acima torna-se

$$\begin{aligned} E \left[\int_t^T f\left(r, Y_r^{(c)}, u_r^{(c)}\right) dr + g(Y_T^{(c)}) \middle| \mathcal{F}_t \right] &\leq \\ \alpha E \left[\int_t^T f\left(r, X_r^{(\alpha)}, u_r^{(\alpha)}\right) dr + g(X_T^{(\alpha)}) \middle| \mathcal{F}_t \right] &+ \beta E \left[\int_t^T f\left(r, X_r^{(\beta)}, u_r^{(\beta)}\right) dr + g(X_T^{(\beta)}) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \alpha J^* \left(t, x^{(\alpha)} \right) + \beta J^* \left(t, x^{(\beta)} \right) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A última igualdade vem do fato de que estamos lidando com processos de difusão markovianos, e o ótimo em (3.18), ou em (3.17), é atingido mediante controles markovianos.

A seguir, obtém-se um limite inferior para o lado esquerdo da desigualdade em (4.22). Note que, pela otimalidade, para $\tilde{x} = \alpha x^{(\alpha)} + \beta x^{(\beta)}$, tem-se

$$\begin{aligned} J^* \left(t, \tilde{x} \right) &= \inf_{u(\cdot)} E^{\tilde{x}} \left[\int_t^T f\left(r, \tilde{X}_r, u_r\right) dr + g(X_T) \right] \leq \\ &E^{\tilde{x}} \left[\int_t^T f\left(r, \tilde{X}_r, u_r^{(c)}\right) dr + g(\tilde{X}_T) \right] \leq \\ &E^{\tilde{x}} \left[\int_t^T f\left(r, Y_r^{(c)}, u_r^{(c)}\right) dr + g(Y_T^{(c)}) \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

A última desigualdade em (4.23) foi obtida pelo Lema 4.1, fazendo $\xi_t = \tilde{X}_t$ e $\psi_t = Y_t^{(c)}$. A partir da desigualdade triangular, o coeficiente de difusão de $Y_t^{(c)}$ é maior que o coeficiente de difusão de \tilde{X}_t para cada $t \in [0, T]$. Além disso, $t \rightarrow \tilde{X}_t$ e $t \rightarrow Y_t^{(c)}$ iniciam no mesmo estado em \mathbb{R}^n , permitindo a aplicação do lema.

Finalmente, observa-se que o lado esquerdo de (4.22) corresponde ao último termo de (4.23), em virtude de se tratarem de processos markovianos, bastando, portanto, levar em conta apenas os controles markovianos para fins de otimalidade. Assim, por ser $\varepsilon > 0$ um valor arbitrário, vale a desigualdade (4.16), e a demonstração está concluída. \square

4.3.2 A Convexidade do Hamiltoniano

A partir da definição da função custo ótimo futuro em (3.18) e do gerador em (4.8), este associado a uma dinâmica descrita por um modelo CVIU, o Teorema 3.3 fornece a seguinte equação

de HJB

$$J_t^* + \inf_{u \in \mathbb{U}} \left[f(t, x, u) + x' A_t' J_x^* + \frac{1}{2} \Gamma_1(J_{xx}^*) + \frac{1}{2} \Gamma_2(J_{xx}^*) u^2 + B_t' J_x^* u + \frac{1}{2} \Gamma_{12}(J_{xx}^*) |u| \right] = 0, \quad (4.24a)$$

$$J^*(T, x) = g(x), \quad T < \infty, \quad (4.24b)$$

válida para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. A função que aparece dentro dos colchetes em (4.24a), a saber,

$$H(t, x, u) = f(t, x, u) + x' A_t' J_x^* + \frac{1}{2} \Gamma_1(J_{xx}^*) + \frac{1}{2} \Gamma_2(J_{xx}^*) u^2 + B_t' J_x^* u + \frac{1}{2} \Gamma_{12}(J_{xx}^*) |u|, \quad (4.25)$$

é o hamiltoniano do sistema CVIU.

Teorema 4.2. *Considere a função custo ótimo futuro J^* definida em (3.18) e associada ao modelo CVIU em (4.7). Assim, se as hipóteses H1 e H3 forem válidas, então o hamiltoniano $H(t, x, u)$ em (4.25) será convexo em $u \in \mathbb{U}$ para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Considerando a hipótese H3, a combinação dos resultados dos Teoremas 2.4 e 4.1 garante que $J_{xx}^* \geq 0$. Consequentemente, $\Gamma_2(J_{xx}^*) \geq 0$ e $\Gamma_{12}(J_{xx}^*) \geq 0$, fazendo com que as funções

$$f_1 = \frac{1}{2} \Gamma_2(J_{xx}^*) u^2 \quad \text{e} \quad f_2 = \frac{1}{2} \Gamma_{12}(J_{xx}^*) |u|$$

sejam convexas com relação a u . Além disso, a Proposição 2.6 garante que a função afim

$$f_3 = B_t' J_x^* u + x' A_t' J_x^* + \frac{1}{2} \Gamma_1(J_{xx}^*)$$

também seja convexa com relação a u . Finalmente, pela hipótese H1 e Proposição 2.7, a função $H(t, x, u) = f(t, x, u) + f_1 + f_2 + f_3$ é convexa em u , completando a demonstração. \square

Os Teoremas 4.1 e 4.2 são imprescindíveis para o projeto do controlador CVIU desenvolvido neste capítulo. De fato, os resultados obtidos na sequência dependem diretamente da convexidade tanto do custo ótimo quanto do hamiltoniano. Por fim, vale a pena frisar que a convexidade do hamiltoniano está condicionada à convexidade do custo ótimo, conforme constatado na demonstração do Teorema 4.2.

4.4 A Minimização do Hamiltoniano

Conforme discutido na Seção 3.4, a minimização do hamiltoniano do sistema com relação à u exerce um papel central no projeto do controle ótimo. Nota-se, contudo, que o hamiltoniano associado ao modelo CVIU, quer dizer, a função $H(t, x, u)$ definida em (4.25), possui um termo contendo o valor absoluto de u , o que torna $H(t, x, u)$ não diferenciável em $u = 0$ para cada t e x .

Neste caso, uma ferramenta da análise de funções não suaves proporciona uma forma interessante de lidar com essa minimização. Trata-se do gradiente generalizado definido em (2.12).

Portanto, a base do projeto do controlador CVIU é aplicar a Definição 2.8 durante o processo de minimização do hamiltoniano (4.25) exigido pela equação de HJB (4.24a) para a obtenção do controle ótimo. Com efeito, o Lema 4.2 a seguir garante que o hamiltoniano satisfaça a condição de Lipschitz próximo de u , permitindo o uso do gradiente generalizado.

Lema 4.2. *Considere a função custo ótimo futuro J^* definida em (3.18) e associada ao modelo CVIU em (4.7). Assim, se as hipóteses H2–H4 forem válidas, então o hamiltoniano $H(t, x, u)$ em (4.25) será localmente Lipschitz em $u \in \mathbb{U}$ para cada $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. A hipótese H2 juntamente com a Proposição 2.8 implicam em $f(t, x, \cdot)$ ser localmente Lipschitz para cada t e x . A partir das Definições 2.6 e 2.7, a limitação da derivada de J^* , introduzida pela hipótese H4, implica em os demais termos do hamiltoniano serem localmente Lipschitz para cada t e x . Destarte, o resultado segue diretamente da Proposição 2.9. \square

Pelo fato de o hamiltoniano do sistema ser convexo na variável de controle, a análise de otimalidade para o controlador CVIU pode ser fundamentada nas condições de primeira ordem, resultando na equação

$$\partial_u H(t, x, u = u^*) = \partial_u f(t, x, u)|_{u=u^*} + \Gamma_2(J_{xx}^*)u^* + B_t' J_x^* + \frac{1}{2} \Gamma_{12}(J_{xx}^*) \mathcal{U} = 0 \quad (4.26a)$$

em que \mathcal{U} corresponde ao seguinte conjunto

$$\mathcal{U} = \begin{cases} +1, & \text{se } u^* > 0, \\ -1, & \text{se } u^* < 0, \\ [-1, +1], & \text{se } u^* = 0. \end{cases} \quad (4.26b)$$

À luz de (4.26b), fica evidente a necessidade de se conhecer primeiro o sinal do controle ótimo u^* antes de poder calculá-lo por meio de (4.26a). Note que o sinal de u^* determina o valor de \mathcal{U} , tornando possível resolver (4.26a). Note ainda que se u^* não possuir sinal, isto é, se $u^* = 0$, então não é preciso resolver diretamente (4.26a), uma vez que o controle ótimo já está estabelecido.

Diante do exposto, o lema a seguir é de suma importância para o projeto do controlador CVIU, visto que afirma ser possível determinar o sinal de u^* (ou se $u^* = 0$), tendo por base somente o valor do estado x .

Lema 4.3. *Suponha que as hipóteses H1–H4 sejam verdadeiras. Assim, o controle ótimo definido por (3.16) é tal que*

$$\begin{cases} u^* > 0, & \text{se } x \in \mathcal{R}_1(t) := \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{u \downarrow 0} \partial_u H(t, x, u) < 0\}, \\ u^* < 0, & \text{se } x \in \mathcal{R}_2(t) := \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{u \uparrow 0} \partial_u H(t, x, u) > 0\}, \\ u^* = 0, & \text{se } x \in \mathcal{R}_3(t) := \{x \in \mathbb{R}^n : (\mathcal{R}_1(t) \cup \mathcal{R}_2(t))^c\}. \end{cases} \quad (4.27)$$

Demonstração. Pela hipótese H2, tem-se que $\partial_u f(t, x, u) \equiv d_u f(t, x, u)$, isto é, o gradiente generalizado é equivalente ao gradiente padrão. Além disso, de acordo com (4.26), o conjunto $\partial_u H(t, x, u)$ é um ponto ou um intervalo fechado da reta.

Como o Teorema 4.2 garante a convexidade do hamiltoniano (4.25) em $u \in \mathbb{U}$ para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, desenvolve-se uma noção de crescimento para $u \rightarrow \partial_u H(t, x, u)$ no seguinte sentido

$$u_1 \leq u_2 \Leftrightarrow \eta_1 \leq \eta_2, \quad \forall \eta_1 \in \partial_u H(t, x, u_1) \quad \text{e} \quad \forall \eta_2 \in \partial_u H(t, x, u_2).$$

A partir desta noção, pode-se determinar o sinal de u^* , analisando apenas $\partial_u H(t, x, u)|_{u=0}$. Tal análise permite a formulação do seguinte conjunto de regras, ilustrado na Figura 2.

Região \mathcal{R}_1 : Se $\eta < 0, \forall \eta \in \partial_u H(t, x, u)|_{u=0}$, então o valor do hamiltoniano está diminuindo em $u^* = 0$ e, conseqüentemente, seu valor mínimo ocorrerá no semiplano positivo ($u^* > 0$). Vide Figura 2a;

Região \mathcal{R}_2 : Se $\eta > 0, \forall \eta \in \partial_u H(t, x, u)|_{u=0}$, então o valor do hamiltoniano está aumentando em $u^* = 0$ e, conseqüentemente, seu valor mínimo ocorrerá no semiplano negativo ($u^* < 0$). Vide Figura 2c;

Região \mathcal{R}_3 : Se $\eta = 0 \in \partial_u H(t, x, u)|_{u=0}$, então o controle ótimo será $u^* = 0$. Vide Figura 2b.

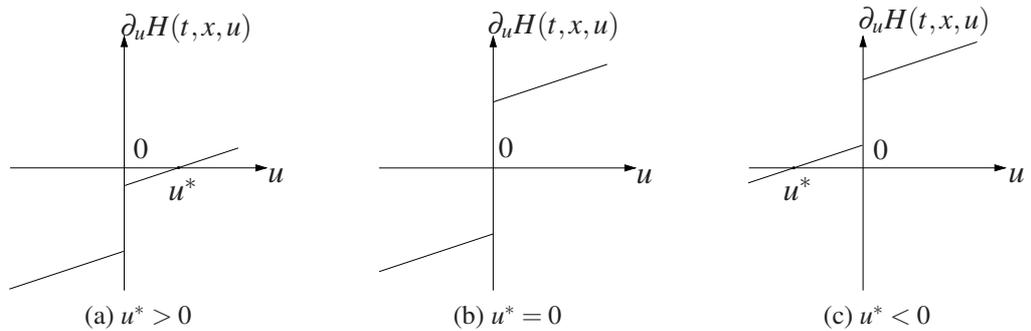


Figura 2 – Curva típica do gradiente generalizado do hamiltoniano associado, respectivamente, às regiões \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_3 e \mathcal{R}_2 no espaço de estados.

Note que neste procedimento de definição das regiões basta verificar o sinal dos elementos extremos do conjunto $\partial_u H(t, x, u)|_{u=0}$ para se determinar o sinal de u^* . Assim, considerando o fato de $u \rightarrow \partial_u H(t, x, u)|_{u=0}$ ser não decrescente em u , conclui-se que

$$\lim_{u \downarrow 0} \partial_u H(t, x, u) = \max \partial_u H(t, x, u)|_{u=0}, \quad (4.28)$$

$$\lim_{u \uparrow 0} \partial_u H(t, x, u) = \min \partial_u H(t, x, u)|_{u=0}, \quad (4.29)$$

e, por conseguinte,

$$\lim_{u \downarrow 0} \partial_u H(t, x, u) \geq \lim_{u \uparrow 0} \partial_u H(t, x, u). \quad (4.30)$$

De acordo com a Definição 2.8, para o cálculo dos limites acima, evitam-se os conjuntos de medida nula e os pontos em que $u \rightarrow H(t, x, u)$ não seja diferenciável. Finalmente, obtêm-se

$$x \in \mathbb{R}^n : \lim_{u \downarrow 0} \partial_u H(t, x, u) < 0 \Rightarrow u^* > 0 \quad (\text{Região } \mathcal{R}_1),$$

$$x \in \mathbb{R}^n : \lim_{u \uparrow 0} \partial_u H(t, x, u) > 0 \Rightarrow u^* < 0 \quad (\text{Região } \mathcal{R}_2),$$

de tal modo que as regiões \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 não se superpõem para cada $t \in [0, T]$. Consequentemente, tais regiões do espaço de estados são ditas complementares e, buscando cobrir todo o espaço de estados, define-se uma terceira região, \mathcal{R}_3 , que está associada com a solução $u^* = 0$, isto é,

$$x \in \mathbb{R}^n : (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)^c \Rightarrow u^* = 0 \quad (\text{Região } \mathcal{R}_3).$$

□

Comentário 4.1. À guisa de informação, a Proposição 2.10 permite que a região \mathcal{R}_3 , definida no Lema 4.3, possa ser representada de maneira equivalente por $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \in \partial_u H(t, x, u)|_{u=0}\}$. Observe que $u^* \equiv 0$ dentro desta região. Por esta razão, \mathcal{R}_3 será denominada Região de Inação.

Comentário 4.2. É importante frisar que “inação” não significa que o controlador não deva atuar, e sim que uma variação de controle nula resulte em uma ação ótima dentro da região \mathcal{R}_3 . Em outras palavras, o melhor a se fazer dentro da região de inação é não variar a ação de controle.

4.5 A Região de Inação

Como visto ao longo deste capítulo, o uso de técnicas da programação dinâmica e da análise de funções não suaves para resolver o problema de controle ótimo estocástico de um modelo CVIU indica a existência de uma região de inação no espaço de estados. A Figura 3 exemplifica a atuação de um controlador CVIU, considerando uma possível trajetória do processo de variação do estado em um modelo CVIU escalar e o sinal de variação de controle correspondente. Neste exemplo, as fronteiras da região de inação encontram-se nos pontos $\pm 0,5$.

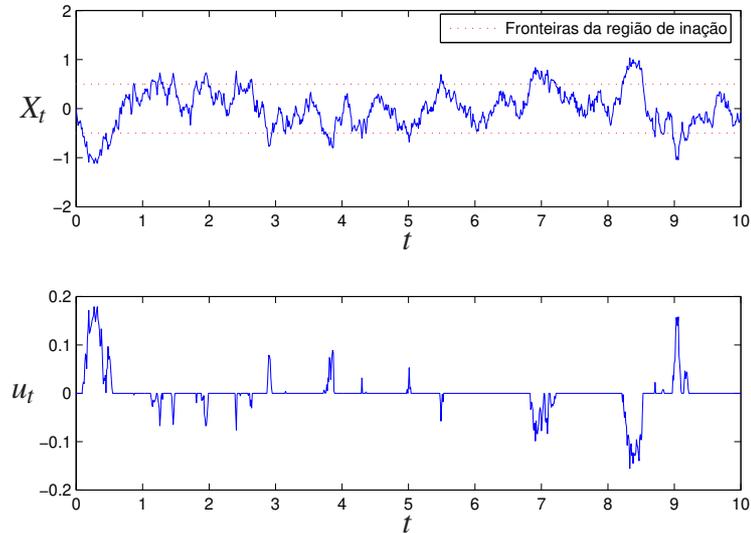


Figura 3 – Exemplo da atuação de um controlador CVIU em um modelo escalar.

Note pela Figura 3 a relação entre o estado e o controle. Quando o estado do sistema entra na região de inação, a ação ótima de controle corresponde à manutenção da ação aplicada no instante imediatamente anterior ao momento em que o estado cruza sua fronteira. As variações no controle voltam a ocorrer apenas quando o estado do sistema cruza novamente a fronteira, saindo desta região. Esta relação produz um efeito peculiar no sinal de controle ótimo, fazendo com que este alterne entre períodos de valor constante da ação de controle, enquanto o estado permanece próximo do equilíbrio e dentro da região de inação, e períodos de variação da ação de controle, quando o estado se afasta do equilíbrio, excedendo as fronteiras desta região.

Em certo sentido, os períodos de manutenção da ação de controle indicam que o controlador CVIU possui um comportamento cauteloso, quer dizer, em face da incerteza envolvida no contexto de sistemas pouco conhecidos, um tomador de decisão poderia julgar por vezes que é melhor manter a ação de controle anterior em vez de alterá-la. Salienta-se que o surgimento da região de inação, e consequentemente deste comportamento cauteloso do controle, é fruto do processo de otimização associado ao modelo CVIU, podendo ser vantajoso em diversas situações.

Na sequência desta seção, procede-se a uma análise referente à existência da região de inação de maneira não degenerada e demonstra-se um resultado pertinente neste aspecto.

A partir do Lema 4.3 e das delimitações de fronteiras apresentadas em (4.27), a Região de Inação supracitada pode ser representada por

$$\mathcal{R}_3(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{u \uparrow 0} \partial_u H(t, x, u) \leq 0 \leq \lim_{u \downarrow 0} \partial_u H(t, x, u) \right\}. \quad (4.31)$$

Esta representação enfatiza o fato de a origem do espaço de estados estar contida em \mathcal{R}_3 . No entanto, poder-se-ia imaginar que, em algum problema específico, a região \mathcal{R}_3 se degenerasse em um hiperplano, ou seja, as regiões \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 seriam grandes o suficiente a ponto de cobrirem todo o espaço de estados, fazendo com que \mathcal{R}_3 possuísse um hipervolume nulo. Em outras palavras, a degeneração implicaria que $\mathcal{R}_3(t) \subset \overline{\mathcal{R}_1}(t)$ e $\mathcal{R}_3(t) \subset \overline{\mathcal{R}_2}(t)$, sendo $\overline{\mathcal{S}}$ o fecho do conjunto \mathcal{S} . Neste caso, as desigualdades em (4.31) tornar-se-iam igualdades para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{R}_3$, de modo que

$$\lim_{u \uparrow 0} \partial_u H(t, x, u) = \lim_{u \downarrow 0} \partial_u H(t, x, u) = 0. \quad (4.32)$$

O Lema 4.4, a seguir, mostra em que hipóteses a região \mathcal{R}_3 existe no espaço de estados como um hipervolume não vazio, sendo, portanto, um resultado fundamental para o projeto do controlador CVIU.

Lema 4.4. *Suponha que as hipóteses H1–H3 sejam verdadeiras. Então, a região $\mathcal{R}_3(t)$ em (4.27) será um hipervolume não vazio no espaço de estados, se $\text{tr}[J_{xx}^*] > 0$ e $\bar{\sigma}_t \sigma_t' + \sigma_t \bar{\sigma}_t' > 0$.*

Demonstração. Considere a definição alternativa da região $\mathcal{R}_3(t)$ dada em (4.31). Para demonstrar este lema, é suficiente provar que os dois extremos que aparecem em (4.31) são distintos, isto é, que as desigualdades em (4.31) são estritas para cada $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Assim, aplicando os limites ao gradiente generalizado do hamiltoniano (4.25), obtém-se

$$\begin{aligned} \lim_{u \uparrow 0} \partial_u H(t, x, u) &= \lim_{u \uparrow 0} [d_u f(t, x, u)] + B_t' J_x^* - \frac{1}{2} \Gamma_{12}(J_{xx}^*) \leq 0 \\ &\leq \lim_{u \downarrow 0} \partial_u H(t, x, u) = \lim_{u \downarrow 0} [d_u f(t, x, u)] + B_t' J_x^* + \frac{1}{2} \Gamma_{12}(J_{xx}^*). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Pela hipótese H2, $\lim_{u \uparrow 0} [d_u f(t, x, u)] = \lim_{u \downarrow 0} [d_u f(t, x, u)]$, e a desigualdade (4.33) será estrita para cada $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ se, e somente se, $\Gamma_{12}(J_{xx}^*) > 0$.

Os Teoremas 2.4 e 4.1 implicam que a matriz hessiana J_{xx}^* seja semidefinida positiva. Além disso, a matriz $\Upsilon := \bar{\sigma}_t \sigma_t' + \sigma_t \bar{\sigma}_t'$ é simétrica, permitindo, assim, a aplicação do Teorema 2.2 com $A = J_{xx}^*$ e $B = \bar{\sigma}_t \sigma_t' + \sigma_t \bar{\sigma}_t'$. Consequentemente,

$$\Gamma_{12}(J_{xx}^*) = \text{tr} [\sigma_t' J_{xx}^* \bar{\sigma}_t + \bar{\sigma}_t' J_{xx}^* \sigma_t] = \text{tr} [J_{xx}^* (\bar{\sigma}_t \sigma_t' + \sigma_t \bar{\sigma}_t')] \geq \text{tr} [J_{xx}^*] \lambda_{\min}(\Upsilon), \quad (4.34)$$

sendo $\text{tr}[J_{xx}^*] > 0$, por hipótese. Enfim, pela hipótese no enunciado do lema de que $\bar{\sigma}_t \sigma_t' + \sigma_t \bar{\sigma}_t' > 0$, o Teorema 2.1 implica que $\lambda_{\min}(\Upsilon) > 0$, e o resultado está demonstrado. \square

Note que no Lema 4.4 foi excluída a situação em que todos os autovalores de J_{xx}^* são nulos. Trata-se do caso de um problema degenerado em que a função custo ótimo seria tão somente um hiperplano no espaço de estados e, portanto, foge ao interesse deste trabalho.

4.6 O Controle Ótimo para um Modelo CVIU

Os teoremas e os lemas desenvolvidos ao longo deste capítulo constituem a base do projeto do controlador CVIU. Diante disso, o objetivo desta seção é apenas reuni-los em um único corolário que resuma todos os resultados obtidos até o momento.

Corolário 4.1. *Considere o seguinte problema de controle estocástico em que o estado do sistema é descrito por um modelo CVIU.*

$$\min_{u(\cdot)} E^x \left[\int_0^T f(t, X_t, u_t) dt + g(X_T) \right], \quad t \geq 0, \quad T \in (0, \infty) \text{ fixo}, \quad (4.35a)$$

$$\text{s.a } dX_t = (A_t X_t + B_t u_t) dt + (\sigma_t + \bar{\sigma}_t |u_t|) dW_t, \quad X_0 = x \text{ (determinístico)}. \quad (4.35b)$$

Assim, se as hipóteses H1–H4 forem válidas, então a política ótima de controle u^* será determinada por

$$\partial_u H(t, x, u = u^*) = \begin{cases} \partial_u f(t, x, u)|_{u=u^*} + \Gamma_2(J_{xx}^*) u^* + B_t' J_x^* + \frac{1}{2} \Gamma_{12}(J_{xx}^*) = 0, & \text{se } u^* > 0, \\ \partial_u f(t, x, u)|_{u=u^*} + \Gamma_2(J_{xx}^*) u^* + B_t' J_x^* - \frac{1}{2} \Gamma_{12}(J_{xx}^*) = 0. & \text{se } u^* < 0. \end{cases} \quad (4.36)$$

Além disso, a política ótima de controle será $u^* \equiv 0$, se x pertencer a

$$\mathcal{R}_3(t) := \{x \in \mathbb{R}^n : (\mathcal{R}_1(t) \cup \mathcal{R}_2(t))^c\} \quad (4.37a)$$

em que

$$\mathcal{R}_1(t) := \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{u \downarrow 0} \partial_u H(t, x, u) < 0\}, \quad (4.37b)$$

$$\mathcal{R}_2(t) := \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{u \uparrow 0} \partial_u H(t, x, u) > 0\}. \quad (4.37c)$$

A região \mathcal{R}_3 , denominada Região de Inação, contém necessariamente a origem do espaço de estados e possui um hipervolume não vazio, se $\text{tr}[J_{xx}^*] > 0$ e $\bar{\sigma}_t \sigma_t' + \sigma_t \bar{\sigma}_t' > 0$.

O Corolário 4.1 descreve o comportamento geral da solução ótima para o problema de controle de um modelo CVIU em horizonte de tempo finito. Entretanto, para avançar em direção a uma síntese de controle, considera-se, no próximo capítulo, a avaliação do sistema por meio de um custo quadrático e a reformulação do problema (4.35) para um cenário de horizonte de tempo infinito, vinculando-o a soluções ótimas invariantes no tempo.

CAPÍTULO 5

O PROBLEMA DE CUSTO QUADRÁTICO DESCONTADO

Neste capítulo, considera-se o problema de controle apresentado na Seção 4.2 em um cenário de horizonte de tempo infinito. Associado ao modelo CVIU, considera-se um custo quadrático com um fator de desconto. De fato, a inclusão do fator de desconto é comum nas formulações de problemas com horizonte de tempo infinito para garantir a convergência do valor esperado do custo.

5.1 Reformulação do Problema de Controle de um Modelo CVIU

Considere o problema de controle (4.10) com os coeficientes A_t , B_t , σ_t e $\bar{\sigma}_t$ constantes. Considere também que o desempenho do sistema seja avaliado, em um horizonte de tempo infinito, por um custo descontado, tomado aqui como quadrático. Assim, o novo problema proposto seria

$$\min_{u(\cdot)} E^x \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} (X_t' Q X_t + R u_t^2) dt \right], \quad \alpha > 0 \in \mathbb{R}, \quad (5.1a)$$

$$\text{s.a } dX_t = (A X_t + B u_t) dt + (\sigma + \bar{\sigma} |u_t|) dW_t, \quad X_0 = x \text{ (determinístico)}, \quad (5.1b)$$

sendo $Q \geq 0$ uma matriz simétrica e semidefinida positiva, e $R > 0$ uma constante escalar positiva.

A reformulação do problema (4.10) para o (5.1) torna propícia a busca por uma solução $V^*(x)$ invariante no tempo que se relaciona com $J^*(t, x)$ por meio de um fator exponencial, de tal modo que, para $X_t = x$ e para cada $\tau > t$, tem-se

$$J^*(t, x) = \inf_{u(\cdot)} E^{t,x} \left[\int_t^{\tau} e^{-\alpha s} (X_s' Q X_s + R u_s^2) ds + e^{-\alpha \tau} V^*(X_{\tau}) \right] = e^{-\alpha t} V^*(x). \quad (5.2)$$

Uma vez que a função contínua V^* é convexa (conforme Teorema 4.1), o funcional de custo em (5.2) pode ser obtido por um argumento limite, quando $\tau \rightarrow \infty$, desde que o sistema em (5.1b) seja estocasticamente estável em algum sentido que garanta

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E^x [e^{-\alpha t} V^*(X_t)] = 0. \quad (5.3)$$

Por exemplo, se $\{X_t\}_{t \geq 0}$ for um processo, tal que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E^x [\|X_t\|^2] < c, \quad (5.4)$$

para alguma constante $c > 0$, e a função V^* puder ser majorada por uma função quadrática, então pode-se mostrar que a igualdade (5.3) estará garantida.

Note que a escolha da função quadrática para o funcional de custo em (5.1a) garante que as hipóteses H1 e H2 sejam válidas, permitindo o projeto do controlador CVIU. Note também que as hipóteses H3 e H4 ainda são necessárias, porém reformuladas para o contexto de horizonte infinito, haja vista o uso da programação dinâmica para o tratamento do problema 5.2. Por conta disso, introduz-se

$$\text{H3}' : V^* \in C^2(\mathbb{R}^n),$$

$$\text{H4}' : \sup_{x \in \mathbb{S}} |V_{xx}^*| < \infty, \quad \forall \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{S} \text{ um conjunto compacto.}$$

Assim, no âmbito das soluções invariantes no tempo, a equação de HJB (3.20) é simplificada para

$$\inf_{u \in \mathbb{U}} H(x, u) = \alpha V^*, \quad (5.5a)$$

de modo que o custo quadrático associado ao modelo CVIU produz o hamiltoniano

$$H(x, u) = x' Q x + x' A' V_x^* + \frac{1}{2} \Gamma_1 (V_{xx}^*) + R_* u^2 + B' V_x^* u + \frac{1}{2} \Gamma_{12} (V_{xx}^*) |u| \quad (5.5b)$$

com

$$R_* = R + \frac{1}{2} \Gamma_2 (V_{xx}^*). \quad (5.5c)$$

Note que a caracterização da convexidade da função de custo ótimo, do hamiltoniano do sistema e da região de inação, desenvolvida no Capítulo 4, também vale, sob algumas adaptações, para o problema invariante no tempo tratado neste capítulo. Note também que as regiões \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 e \mathcal{R}_3 , bem como suas fronteiras, serão invariantes no tempo.

Além disso, uma vez que a solução invariante no tempo $V^*(x)$ é convexa, pode-se concluir, pela simetria do custo, que o seu valor mínimo é atingido na origem e, portanto, dentro da região \mathcal{R}_3 . Por conta disso, resolve-se, primeiramente, o problema (5.1) dentro de \mathcal{R}_3 , valendo-se do comportamento de $V^*(x)$ suficientemente próximo da origem. A seguir, determina-se uma solução assintótica. Em ambos os casos, o teorema de verificação discutido na Seção 3.4 é aplicado para garantir a otimalidade da solução encontrada.

5.2 Solução dentro da região de inação

Para cada $x \in \mathcal{R}_3$, a política ótima de controle é $u^* \equiv 0$. O uso desta política na equação (5.5) produz a seguinte equação diferencial

$$\frac{1}{2}\Gamma_1(V_{xx}^*) + x'A'V_x^* - \alpha V^* = -x'Qx \quad (5.6)$$

que é satisfeita pelo custo ótimo V^* e válida apenas em \mathcal{R}_3 .

Lema 5.1. *Considere o problema (5.1). Sob as hipóteses H3'–H4', se existir uma matriz S_0 que seja solução da equação matricial*

$$A'S_0 + S_0A - \alpha S_0 + Q = 0, \quad (5.7)$$

tal que $S_0 = S_0'$ e $S - S_0 \geq 0$ para qualquer outra matriz semidefinida positiva S que resolva (5.7), então o custo ótimo V^* para cada $x \in \mathcal{R}_3$ será

$$V^*(x) = x'S_0x + \alpha^{-1}\Gamma_1(S_0). \quad (5.8)$$

Além disso, as fronteiras da região \mathcal{R}_3 serão dadas pelos seguintes hiperplanos

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : B'S_0x = -\frac{1}{2}\Gamma_{12}(S_0) \right\} \quad (\text{entre } \mathcal{R}_3 \text{ e } \mathcal{R}_1), \quad (5.9a)$$

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : B'S_0x = +\frac{1}{2}\Gamma_{12}(S_0) \right\} \quad (\text{entre } \mathcal{R}_3 \text{ e } \mathcal{R}_2). \quad (5.9b)$$

Demonstração. Divide-se esta prova em duas partes. Primeiramente, o foco está em uma vizinhança ao redor da origem, tendo como objetivo o cálculo das condições de contorno para (5.6). A seguir, obtém-se a solução ótima para toda a região \mathcal{R}_3 .

Note que $V^*(x)$ é de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$ e convexo. Além do mais, por simetria, seu ponto de mínimo ocorre na origem. Portanto, uma função quadrática fornece uma boa aproximação para o custo ótimo em uma vizinhança da origem, a saber, para cada $\varepsilon > 0$, há um $\delta > 0$ correspondente, tal que

$$\|x\| < \delta \Rightarrow |x'V_{xx}^*(0)x + V_x^*(0)x + V^*(0) - V^*(x)| < \varepsilon.$$

A substituição desta aproximação de $V^*(x)$ em (5.6) resulta na seguinte equação

$$x' [A'V_{xx}^*(0) + V_{xx}^*(0)A - \alpha V_{xx}^*(0) + Q] x + [V_x^*(0)(A - \alpha I)] x - \alpha V^*(0) + \frac{1}{2}\Gamma_1(V_{xx}^*(0) + V_{xx}^*(0)') = 0. \quad (5.10)$$

Escolhendo $V_{xx}^*(0) = S_0$ como em (5.7), $V_x^*(0) = 0$ e $V^*(0) = \alpha^{-1}\Gamma_1(S_0)$, resolve-se (5.10) para todo x , tal que $\|x\| < \delta$. Note que S_0 deve ser uma matriz simétrica semidefinida positiva.

Estas relações determinam as condições de contorno para (5.6) na origem, isto é, $V^*(0) = \alpha^{-1}\Gamma_1(S_0)$ e $V_x^*(0) = 0$. A seguir, a solução quadrática é estendida para toda a região \mathcal{R}_3 .

Defina $V^c(x) = x'Sx + P'x + \ell$ como uma solução candidata de (5.6) para $x \in \mathcal{R}_3$. Observe que este palpite é coerente com a parte não homogênea da equação (5.6). Assim, a substituição de $V^c(x)$ em (5.6) fornece

$$x' [A'S + SA - \alpha S + Q] x + [P' (A - \alpha I)] x - \alpha \ell + \frac{1}{2} \Gamma_1 (S + S') = 0. \quad (5.11)$$

Para que a solução candidata $V^c(x)$ satisfaça as condições de contorno na origem, tem-se $S = S_0 = V_{xx}^*(0)$, $P = P_0 = V_x^*(0) = 0$ e $\ell = \ell_0 = \alpha^{-1}\Gamma_1(S_0)$. Na verdade, como esta solução de estado estacionário satisfaz (5.6) para cada $x \in \mathcal{R}_3$, então o Teorema 3.4 garante que $V^c(x)$, definido desta maneira, seja uma solução ótima.

Finalmente, pela definição da região \mathcal{R}_3 em (4.31), com o hamiltoniano definido em (5.5) associado à solução invariante no tempo V^* em (5.8), obtêm-se as fronteiras em (5.9). \square

Comentário 5.1. Observe que, se existir uma solução $S_0 \geq 0$ que satisfaça (5.7), então a hipótese de $\text{tr}[V_{xx}^*] > 0$, exigida pelo Lema 4.4 para a não degeneração da região de inação, será verdadeira, confirmando a existência da região de inação como um hipervolume não vazio no espaço de estados.

5.3 Solução fora da região de inação

Na seção anterior, a solução ótima foi obtida na região \mathcal{R}_3 , sendo que esta contém a origem e é limitada pelos hiperplanos paralelos em (5.9). Nesta seção, busca-se a solução ótima nas regiões \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 . Com efeito, a política ótima de controle u^* para as regiões \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 pode ser expressa a partir de (4.26) na forma

$$u^* = -\frac{1}{2} R_*^{-1} \left(B' V_x^* + \frac{1}{2} \Gamma_{12} (V_{xx}^*) \mathcal{U} \right) \quad (5.12)$$

com $\mathcal{U} = 1$ se $x \in \mathcal{R}_1$ e $\mathcal{U} = -1$ se $x \in \mathcal{R}_2$. Assim, visando a obtenção da política ótima como uma realimentação de estados $u^* = u^*(X_t)$ para estas duas regiões, faz-se necessário calcular V_x^* e V_{xx}^* de uma maneira mais explícita. Em princípio, isto pode ser realizado por meio da substituição de (5.12) em (5.5) e da resolução da equação diferencial parcial não linear decorrente desta substituição, quer dizer,

$$x' A' V_x^* - \frac{1}{4} V_x^{*'} B R_*^{-1} B' V_x^* + x' Q x - \frac{1}{4} R_*^{-1} \left(\frac{1}{4} \Gamma_{12} (V_{xx}^*)^2 - 2 R_* \Gamma_1 (V_{xx}^*) + B' V_x^* \Gamma_{12} (V_{xx}^*) \mathcal{U} \right) - \alpha V^* = 0, \quad (5.13)$$

válida apenas fora da região de inação, ou seja, para cada $x \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. Contudo, resolver (5.13) é uma tarefa difícil, mesmo numericamente, e provavelmente impossível em termos analíticos. Desse modo, busca-se, em um primeiro momento, uma solução assintótica mais simples que permita analisar alguns aspectos da solução geral. No Capítulo 6, emprega-se esta solução assintótica para descobrir a solução para toda a região $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.

Com base no teorema de verificação, é possível identificar o comportamento do custo ótimo V^* suficientemente distante da região de inação, de forma semelhante ao que foi desenvolvido na Seção 5.2 para a região de inação. O lema seguinte possui este propósito, mas, antes, define-se no espaço de estados uma função distância com sinal, $d_{\mathcal{R}_3}$, relativa à região de inação \mathcal{R}_3 , tal que $d_{\mathcal{R}_3}(x) = 0$ para $x \in \mathcal{R}_3$ e

$$d_{\mathcal{R}_3}(x) = \begin{cases} +\inf_{y \in \mathcal{R}_3} \|x - y\|, & \text{se } x \in \mathcal{R}_1, \\ -\inf_{y \in \mathcal{R}_3} \|x - y\|, & \text{se } x \in \mathcal{R}_2. \end{cases} \quad (5.14)$$

Lema 5.2. *Considere o problema (5.1). Sob as hipóteses H3'–H4', se existir uma matriz S_∞ que seja solução da equação matricial*

$$A'S_\infty + S_\infty A - \alpha S_\infty - S_\infty B R_*^{-1} B' S_\infty + Q = 0, \quad R_* = R + \Gamma_2(S_\infty), \quad (5.15)$$

tal que $S_\infty = S'_\infty$ e $S - S_\infty \geq 0$ para qualquer outra matriz semidefinida positiva S que resolva (5.15), então o custo ótimo V^* para $d_{\mathcal{R}_3}(x) \rightarrow \pm\infty$ será

$$V^*(x) = x'S_\infty x \pm P'_\infty x + \ell_\infty, \quad (5.16a)$$

com

$$P'_\infty = R_*^{-1} B' S_\infty \Gamma_{12}(S_\infty) (A - \alpha I - B R_*^{-1} B' S_\infty)^{-1}, \quad (5.16b)$$

$$\ell_\infty = \alpha^{-1} \left(\Gamma_1(S_\infty) - \frac{1}{4} (B' P_\infty + \Gamma_{12}(S_\infty))' R_*^{-1} (B' P_\infty + \Gamma_{12}(S_\infty)) \right). \quad (5.16c)$$

Além disso, a política ótima de controle u^* para $d_{\mathcal{R}_3}(x) \rightarrow \pm\infty$ será

$$u^*(x) = -K_\infty x \mp M_\infty \quad (5.17a)$$

em que

$$K_\infty = R_*^{-1} B' S_\infty, \quad (5.17b)$$

$$M_\infty = \frac{1}{2} R_*^{-1} (B' P_\infty + \Gamma_{12}(S_\infty)). \quad (5.17c)$$

Demonstração. Defina $V^c(x) = x'S_\infty x \pm P'_\infty x + \ell_\infty$ como uma solução candidata de (5.13) para $d_{\mathcal{R}_3}(x) \rightarrow \pm\infty$ e note que $\mathcal{U} = 1$ se $d_{\mathcal{R}_3}(x) \rightarrow \infty$ e $\mathcal{U} = -1$ se $d_{\mathcal{R}_3}(x) \rightarrow -\infty$. Assim, a substituição de $V^c(x)$ em (5.13) fornece

$$\begin{aligned} & x' \left[A'S_\infty + S_\infty A - \alpha S_\infty - \frac{1}{4} (S_\infty + S'_\infty)' BR_*^{-1} B' (S_\infty + S'_\infty) + Q \right] x \\ & \quad + \left[P'_\infty \left(A - \alpha I - \frac{1}{2} BR_*^{-1} B' (S_\infty + S'_\infty) \right) \mp \frac{1}{4} R_*^{-1} B' (S_\infty + S'_\infty) \Gamma_{12} (S_\infty + S'_\infty) \right] x \\ & \quad + \frac{1}{2} \Gamma_1 (S_\infty + S'_\infty) - \frac{1}{4} R_*^{-1} \left(P'_\infty B B' P_\infty \pm P'_\infty B \Gamma_{12} (S_\infty + S'_\infty) - \frac{1}{4} \Gamma_{12}^2 (S_\infty + S'_\infty) \right) - \alpha \ell_\infty = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A fim de resolver (5.18) para todo $d_{\mathcal{R}_3}(x) \rightarrow \pm\infty$, se for escolhido S_∞ como a solução semidefinida positiva mínima de (5.15), desde que S_∞ exista, e também P_∞ e ℓ_∞ como em (5.16b) e (5.16c), respectivamente, então a solução candidata $V^c(x)$ será realmente a solução não negativa mínima de (5.13). A otimalidade desta solução assintótica é garantida pelo Teorema 3.4.

Finalmente, a partir de (5.16a) e (5.12), obtêm-se as expressões em (5.17) para a política ótima de controle como uma realimentação de estados. \square

Note que as soluções assintóticas no Lema 5.2 são expressas por duas funções quadráticas, uma em \mathcal{R}_1 e outra em \mathcal{R}_2 , as quais proporcionam dois controles afins correspondentes, sendo estes invariantes no tempo e obtidos por realimentação de estados. É claro que esta simplicidade é conveniente; porém, estas soluções aplicam-se apenas às regiões distantes de \mathcal{R}_3 e, portanto, distantes da origem.

Diferente do que foi desenvolvido no Lema 5.1 para a região \mathcal{R}_3 , as soluções assintóticas apresentadas no Lema 5.2 não podem ser facilmente estendidas para cobrir por completo ambas as regiões \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 . Note, também, que nas regiões \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 , mas bem próximo da região de inação, a solução exata precisa satisfazer a equação diferencial parcial não linear (5.13) com as condições de contorno definidas na fronteira da região \mathcal{R}_3 , as quais são fornecidas pela solução dentro desta.

Embora, em geral, esta seja uma tarefa difícil, algumas aproximações podem ser utilizadas com o intuito de se compor a solução completa do problema de custo quadrático descontado. Poder-se-ia propor, por exemplo, a interpolação das soluções afins de controle no Lema 5.2 com a solução de variação nula de controle no Lema 5.1, o que evitaria a necessidade de se resolver (5.13). No Capítulo 6, esta e outras aproximações, mais sutis, serão exploradas numericamente.

Comentário 5.2. Para $\bar{\sigma} = 0$, os termos $\Gamma_{12}(S_0)$ e $\Gamma_2(S_\infty)$ tornam-se nulos. Neste caso, (5.9) indica a degeneração da região de inação, e (5.15) transfigura-se em uma equação de Riccati tradicional. Observe, então, que P_∞ em (5.16b) e M_∞ em (5.17c) também se tornam nulos, de modo que a solução clássica do problema LQG é recuperada. Por outro lado, quanto maior for o valor de

$\bar{\sigma}$, maior será o afastamento entre os hiperplanos em (5.9). Assim, para valores suficientemente grandes de $\bar{\sigma}$, se a região da inação existir, então esta se tornará tão extensa que o controlador CVIU nunca atuará, fazendo com que, na prática, o sistema opere em malha aberta.

5.4 Um Breve Comentário sobre Estabilidade e Existência de Soluções

Os principais resultados deste capítulo, Lemas 5.1 e 5.2, estão relacionados com a existência de soluções mínimas para as equações matriciais (5.7) e (5.15).

A primeira corresponde a uma equação do tipo Lyapunov a tempo contínuo e, se Q for uma matriz definida positiva, então haverá uma única solução definida positiva para (5.7), desde que a matriz $A - \frac{\alpha}{2}I$ seja estável no sentido padrão de sistemas lineares determinísticos, isto é, possua todos os seus autovalores com parte real negativa.

A segunda é uma versão modificada da equação algébrica de Riccati a tempo contínuo do problema LQG clássico com custo descontado. Note que em (5.15) aparece uma dependência da solução S_∞ na definição de R_* , conforme (5.5c), a qual se manifesta como $R_* = R + \Gamma_2(S_\infty)$. Embora fora do padrão nesse sentido, a solução de (5.15) ainda pode fundamentar-se na análise da equação de Riccati padrão que é realizada para o caso LQG, tal como em (ABOU-KANDIL *et al.*, 2003).

Desta análise, conclui-se o seguinte: haverá uma solução para (5.15), que será única, semidefinida positiva e estabilizante, desde que $(A - \frac{\alpha}{2}I, B)$ seja estabilizável e $(Q^{\frac{1}{2}}, A - \frac{\alpha}{2}I)$ seja detectável. Aqui, solução estabilizante significa que o controle ótimo é estabilizante no sentido padrão de sistemas lineares com custo descontado, ou seja, a matriz $A - BK_\infty - \frac{\alpha}{2}I$ é estável.

No cenário em que as condições estabilizantes acima e a estabilidade de $A - \frac{\alpha}{2}I$ são satisfeitas, as soluções semidefinidas positivas S_0 e S_∞ nos Lemas 5.1 e 5.2 são únicas, de modo que os enunciados destes lemas podem ser simplificados. Por outro lado, quando $A - \frac{\alpha}{2}I$ não for estável, o Lema 5.1 sugere a inexistência da região de inação.

5.5 Solução Analítica do Problema Escalar

Tendo em vista a obtenção da solução analítica do problema multidimensional (5.1) nas seções anteriores, o objetivo aqui é apenas apresentar as equações para o caso escalar, de modo que estas possam servir de referência para alguns dos experimentos numéricos realizados no próximo capítulo.

Introduz-se, então, o problema escalar

$$\min_{u(\cdot)} E^x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} (QX_t^2 + Ru_t^2) dt \right], \quad \alpha > 0 \in \mathbb{R}, \quad (5.19a)$$

$$\text{s.a } dX_t = (AX_t + Bu_t) dt + (\sigma + \bar{\sigma} |u_t|) dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R} \text{ (determinístico)}, \quad (5.19b)$$

em que $Q \geq 0$ e $R > 0$ são constantes escalares. Assim, resolver (5.19) corresponde a resolver a equação de HJB associada, isto é,

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \left[Qx^2 + AxV_x^* + \frac{1}{2} \sigma^2 V_{xx}^* + R_* u^2 + BV_x^* u + \sigma \bar{\sigma} V_{xx}^* |u| \right] = \alpha V^*, \quad R_* = R + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 V_{xx}^*. \quad (5.20)$$

Dentro da região de inação, tem-se $u^* \equiv 0$, e a equação diferencial ordinária

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V_{xx}^* + AxV_x^* - \alpha V^* = -Qx^2 \quad (5.21)$$

é satisfeita. Por conseguinte, o Lema 5.1 fornece

$$V^*(x) = V_0(x) = s_0 x^2 + \ell_0, \quad -B^{-1} \sigma \bar{\sigma} \leq x \leq B^{-1} \sigma \bar{\sigma}, \quad (5.22a)$$

sendo

$$s_0 = \frac{Q}{\alpha - 2A} \quad \text{e} \quad \ell_0 = \frac{\alpha^{-1} \sigma^2 Q}{\alpha - 2A}. \quad (5.22b)$$

Note que a condição de estabilidade discutida na Seção 5.4 exige $Q > 0$ e $\alpha - 2A > 0$, garantindo que as constantes s_0 e ℓ_0 sejam não negativas.

Atinente à solução fora da região de inação, tem-se

$$u^* = -\frac{1}{2} R_*^{-1} (BV_x^* + \sigma \bar{\sigma} V_{xx}^* \mathcal{U}) \quad (5.23)$$

para as regiões \mathcal{R}_1 ($\mathcal{U} = 1$) e \mathcal{R}_2 ($\mathcal{U} = -1$) e, ainda, a seguinte equação diferencial correspondente

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} B^2 (V_x^*)^2 + \frac{1}{2} (B\sigma\bar{\sigma}\mathcal{U} - A\bar{\sigma}^2 x) V_x^* V_{xx}^* + \frac{1}{2} \alpha \bar{\sigma}^2 V^* V_{xx}^* \\ - \frac{1}{2} (R\sigma^2 + Q\bar{\sigma}^2 x^2) V_{xx}^* - AR_x V_x^* + \alpha R V^* - RQx^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Assim, a solução assintótica dada pelo Lema 5.2 é

$$V^*(x) = V_\infty(x) = s_\infty x^2 \pm p_\infty x + \ell_\infty, \quad d_{\mathcal{R}_3}(x) \rightarrow \pm\infty, \quad (5.25a)$$

em que

$$s_\infty = \frac{Q\bar{\sigma}^2 - (\alpha - 2A)R + \sqrt{(Q\bar{\sigma}^2 + (\alpha - 2A)R)^2 + 4QRB^2}}{2((\alpha - 2A)\bar{\sigma}^2 + B^2)}, \quad (5.25b)$$

$$p_\infty = 2R_*^{-1} B\sigma\bar{\sigma} s_\infty^2 (A - \alpha - R_*^{-1} B^2 s_\infty)^{-1}, \quad (5.25c)$$

$$\ell_\infty = \alpha^{-1} \left(\sigma^2 s_\infty - \frac{1}{4} R_*^{-1} (Bp_\infty + 2\sigma\bar{\sigma} s_\infty)^2 \right), \quad (5.25d)$$

e o controle ótimo é

$$u^* = u_\infty = -k_\infty x \mp m_\infty = -R_*^{-1} B s_\infty x \mp \frac{1}{2} R_*^{-1} (B p_\infty + 2\sigma \bar{\sigma} s_\infty), \quad d_{\mathcal{R}_3}(x) \rightarrow \pm\infty. \quad (5.26)$$

Novamente, a condição de estabilidade discutida na Seção 5.4 garante que s_∞ seja uma constante positiva. Ante as razões expostas, observe que a função quadrática (5.22) juntamente com as duas funções quadráticas simétricas em (5.25) delineiam uma imagem do custo ótimo como uma função par. Ademais, a equação (5.26) e o fato de que $u^* = 0$ em um intervalo simétrico com relação à origem indicam que o controle ótimo é uma função ímpar. A Figura 4 ilustra esta simetria da solução ótima.

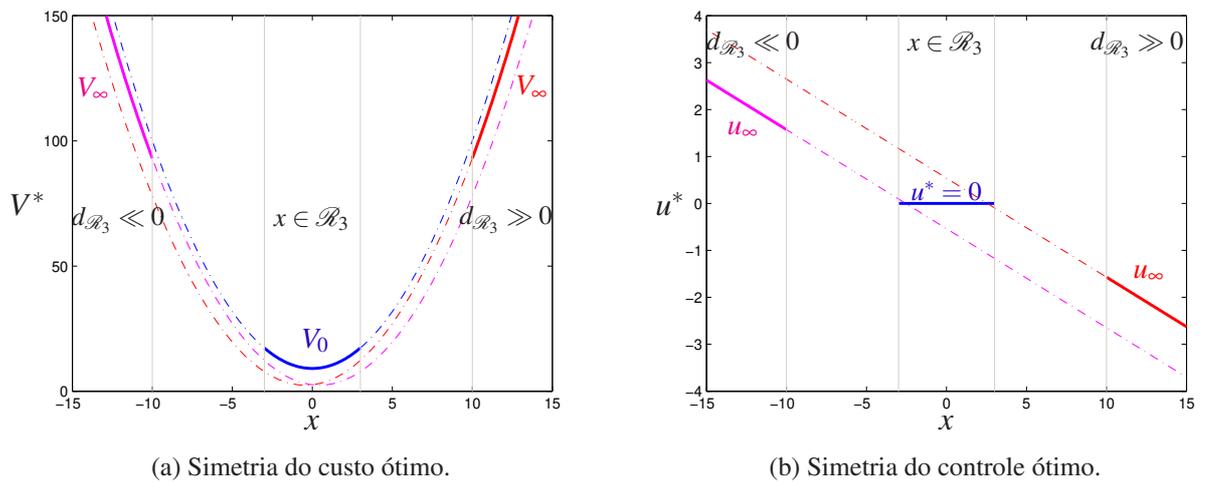


Figura 4 – Simetria da solução ótima associada a um modelo CVIU escalar.

CAPÍTULO 6

EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

A solução analítica do problema (5.1), dada conjuntamente pelos Lemas 5.1 e 5.2, não cobre todo o espaço de estados. Com efeito, para se estabelecer a solução completa, isto é, a solução em todo o espaço de estados, é preciso resolver a equação diferencial (5.13), considerando as condições de contorno definidas nas fronteiras da região \mathcal{R}_3 .

Devido à dificuldade desta tarefa, este capítulo propõe nas Seções 6.1 e 6.2 possíveis aproximações que poderiam auxiliar na construção numérica da solução completa. Entretanto, por se tratar de uma equação diferencial parcial não linear, cuja solução numérica possua um alto grau de complexidade, desenvolve-se a solução completa exclusivamente para o caso escalar. Para o caso multidimensional, apresenta-se uma discussão a respeito das aproximações.

No desfecho do capítulo, valendo-se da solução completa do problema escalar, alguns experimentos numéricos são realizados com o intuito de se comparar o desempenho do controlador CVIU com o de outros controladores mais tradicionais.

6.1 Aproximações para o Caso Escalar

Com o objetivo de se completar a solução ótima do problema escalar (5.19), é preciso calcular V^* entre a solução V_0 em \mathcal{R}_3 e a solução assintótica V_∞ , dadas, respectivamente, por (5.22) e (5.25). A observação da simetria de V^* , destacada para o caso escalar na Seção 5.5, permite que se considere apenas o semiplano positivo para a realização deste cálculo. Em seguida, pode-se simplesmente espelhar o resultado para se obter a solução no semiplano negativo, completando, assim, a solução ótima em todo o espaço de estados.

De (5.22a), define-se

$$x_b = B^{-1} \sigma \bar{\sigma} > 0 \quad (6.1)$$

como a fronteira de \mathcal{R}_3 no semiplano positivo do espaço de estados. Assim, $V^* = V_0$ no intervalo $x \in [0, x_b]$. De (5.25a), define-se

$$x_\infty \gg x_b \quad (6.2)$$

como um ponto arbitrário suficientemente distante da região de inação, de tal modo que se pode atribuir $V^* = V_\infty$ no intervalo $x \in [x_\infty, \infty)$. Logo, visando obter a solução ótima para todo $x \geq 0$, faz-se necessário resolver (5.24) com $\mathcal{U} = 1$ no intervalo $x \in (x_b, x_\infty)$, tarefa esta que pode ser realizada via integração numérica.

Todavia, devido às não linearidades da equação (5.24), sua integração numérica pode ser muito complexa, sendo, portanto, conveniente a adoção de uma aproximação para viabilizar esta tarefa. Para tanto, pode-se reduzir a ordem de (5.24) por meio da suposição de que V_{xx}^* seja uma função conhecida no intervalo $x \in (x_b, x_\infty)$. Considera-se então $V_{xx}^* = v(x)$ em que $v(x)$ é dada pela combinação convexa entre $V_{xx}^*(x_b)$ e $V_{xx}^*(x_\infty)$. Desse modo, a equação (5.24) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} B^2 (V_x^*)^2 + \left(\frac{1}{2} v(x) (B \sigma \bar{\sigma} - A \bar{\sigma}^2 x) - ARx \right) V_x^* \\ + \left(R + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 v(x) \right) \alpha V^* - \frac{1}{2} v(x) (R \sigma^2 + Q \bar{\sigma}^2 x^2) - RQx^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

para $x_b < x < x_\infty$. Enfim, emprega-se $V^*(x_b)$ como condição inicial para se realizar a integração numérica de (6.3) e, a partir da solução encontrada, a política ótima de controle u^* é obtida no intervalo $x \in (x_b, x_\infty)$ por meio de (5.23).

O erro induzido por esta aproximação pode ser avaliado com o auxílio do teorema de verificação e da equação de HJB em (5.20). O exemplo a seguir calcula a solução ótima completa do problema de controle de um sistema CVIU escalar e confere numericamente se tal solução satisfaz a equação de HJB correspondente.

Exemplo: Considere o modelo CVIU

$$dX_t = \left(-\frac{1}{2} X_t - \frac{1}{2} u_t \right) dt + \left(1 + \frac{1}{2} |u_t| \right) dW_t, \quad X_0 = 0, \quad (6.4a)$$

com custo associado

$$V^*(x) = \inf_{u(\cdot)} E^x \left[\int_0^\infty e^{-0.1s} \left(X_s^2 + \frac{1}{10} u_s^2 \right) ds \right]. \quad (6.4b)$$

Primeiramente, utiliza-se (6.1) e calcula-se $x_b = 1$. Sendo assim, V^* está completamente determinado no intervalo $x \in [-1, 1]$. Em seguida, escolhe-se, para este exemplo, $x_\infty = 10$, permitindo a consideração de que V^* está completamente determinado nos intervalos $x \in (-\infty, -10]$ e $x \in [10, \infty)$.

Conforme mencionado no início desta seção, devido à simetria, apenas o semiplano positivo precisa ser levado em conta no desenvolvimento numérico da solução e na apresentação dos resultados. Assim, procede-se à integração numérica de (6.3) no intervalo $x \in (1, 10)$ e obtém-se a política ótima de controle para este mesmo intervalo por meio de (5.23). A Figura 5 exibe a solução ótima para uma janela de observação de $x = 0$ a $x = 11$.

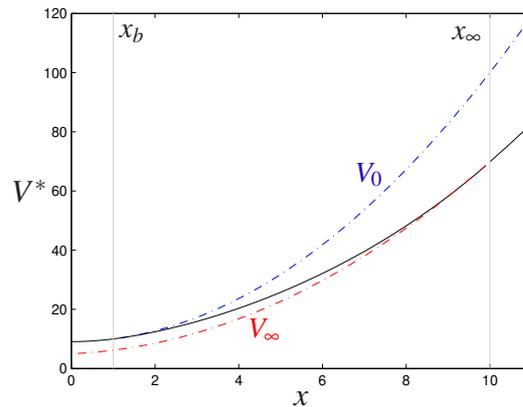


Figura 5 – Custo ótimo no semiplano positivo para $x_\infty = 10$.

Na Figura 5, a linha contínua preta corresponde ao custo ótimo. A função quadrática V_0 , dada por (5.22), está representada pela linha tracejada azul, e a função quadrática V_∞ em (5.25) pela vermelha. A primeira quadrática coincide com o custo ótimo dentro da região de inação, $x \in [0, 1]$, e a segunda fornece o comportamento assintótico do custo ótimo em um ponto x distante da região de inação, o que significa, neste exemplo, $x \in [10, \infty)$. No intervalo $x \in (1, 10)$, o custo ótimo foi obtido por meio do procedimento de aproximação explicado no início desta seção. Note que a integração numérica produz uma solução que se afasta de V_0 para alcançar V_∞ de maneira suave, preservando a convexidade da função valor. A Figura 6 apresenta o erro desta aproximação para a solução ótima.

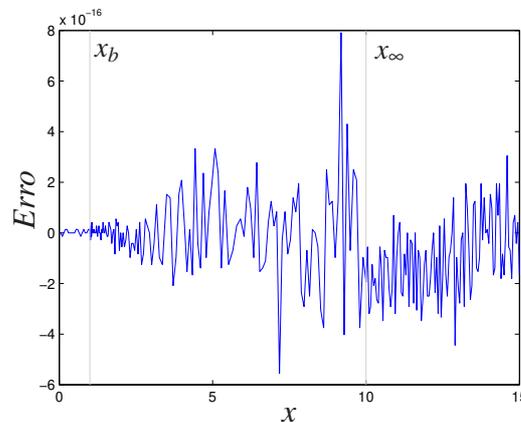


Figura 6 – Erro da solução ótima no semiplano positivo para $x_\infty = 10$.

O erro apresentado na Figura 6 corresponde à diferença relativa entre os lados esquerdo e direito da equação de HJB em (5.20). Uma magnitude de erro de 10^{-16} é observada na região de aproximações numéricas, o que é comparável em escala com a solução exata em $[0, x_b]$. Portanto, para o caso escalar, o procedimento de aproximar a derivada segunda V_{xx}^* utilizando uma combinação convexa é adequado para proporcionar bons resultados. Mesmo assim, se houver um interesse em melhorar a precisão da solução, pode-se reajustar a aproximação da derivada segunda e verificar novamente a equação de HJB.

No que concerne à política ótima de controle, a Figura 7 exprime o resultado obtido. A linha contínua preta corresponde ao controle ótimo, ficando evidente a inação $u^* = 0$ no intervalo $x \in [0, 1]$. O controle afim u_∞ , dado por (5.26), está representado pela linha tracejada vermelha e indica o comportamento assintótico do controle ótimo distante da região de inação, ou seja, para $x \in [10, \infty)$. No intervalo $x \in (1, 10)$, o controle ótimo foi obtido de (5.23) a partir dos valores de V_x^* e V_{xx}^* oriundos da integração numérica de (6.3).

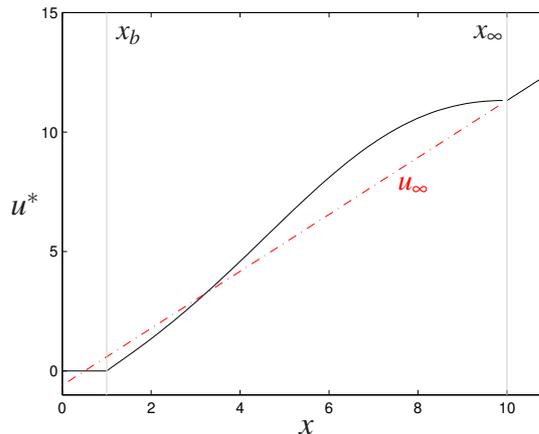


Figura 7 – Controle ótimo no semiplano positivo para $x_\infty = 10$.

Do ponto de vista do controle, o resultado não é tão suave quando comparado ao que foi observado no custo. Entretanto, é possível melhorar a suavidade do controle, escolhendo valores maiores para x_∞ . A Figura 8 corrobora esta afirmação. Note que, ao escolher $x_\infty = 20$ e $x_\infty = 30$, as aproximações em verde e em vermelho, respectivamente, são obtidas para o controle ótimo. Ambas tendem a se comportar de forma mais suave e de acordo com a solução assintótica afim. A avaliação do erro para estes casos é exibida na Figura 9.

Comentário 6.1. *O comportamento do controle ótimo observado na Figura 8 sugere um procedimento simples para a obtenção de uma solução subótima para o problema. Esta poderia ser construída a partir de uma aproximação linear por partes em que a solução exata $u^* = 0$ em $[0, x_b]$ é conectada à solução assintótica u_∞ em $[x_\infty, \infty)$ por meio de uma reta auxiliar. Observe que este procedimento evitaria a integração numérica de (5.24) para o intervalo (x_b, x_∞) .*

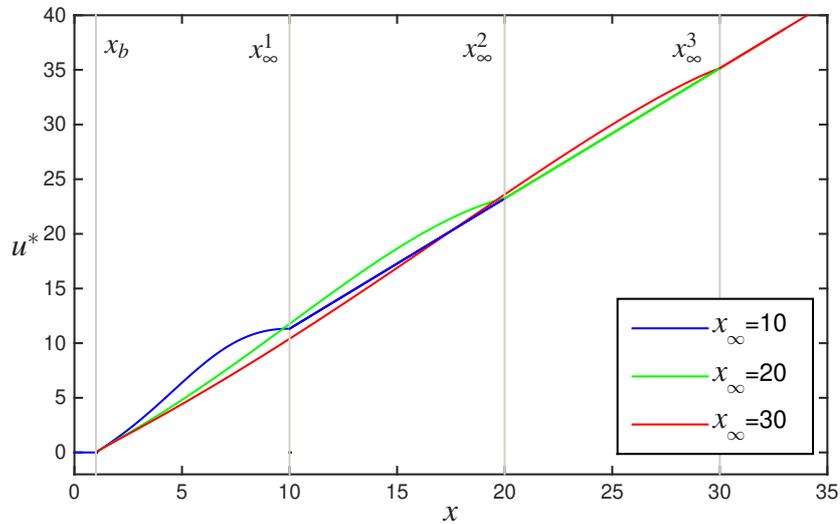
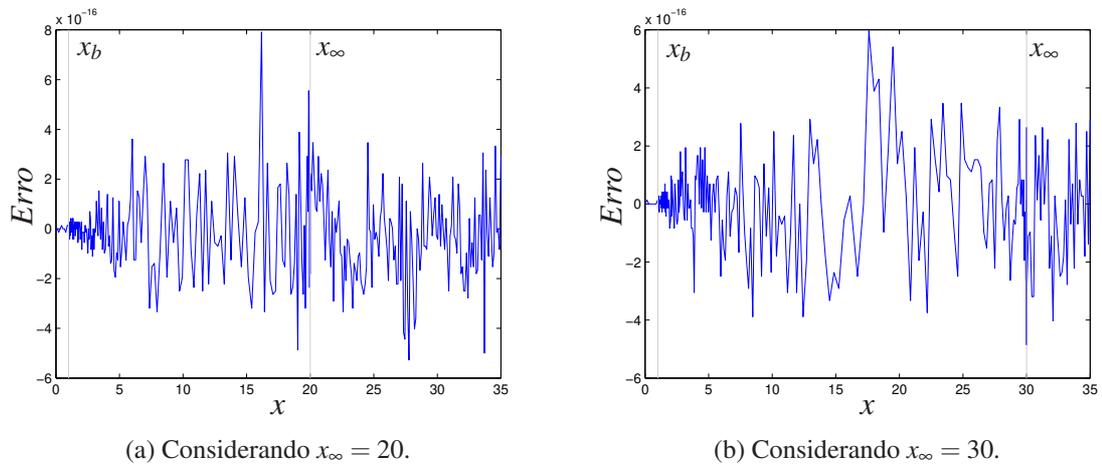


Figura 8 – Aproximações do controle ótimo para $x_\infty = 10$, $x_\infty = 20$ ou $x_\infty = 30$.



(a) Considerando $x_\infty = 20$.

(b) Considerando $x_\infty = 30$.

Figura 9 – Erro da solução ótima no semiplano positivo.

6.2 Aproximações para o Caso Multidimensional

Os resultados dos Lemas 5.1 e 5.2 são válidos, independentemente da dimensão do sistema. O Lema 5.1 afirma que as fronteiras da região de inação estão completamente determinadas por hiperplanos paralelos e simétricos em relação à origem, sendo a solução ótima dentro desta região obtida por uma equação de Lyapunov a tempo contínuo. Por outro lado, o Lema 5.2 relaciona a solução ótima a um tipo de equação modificada de Riccati a tempo contínuo, porém, válida apenas quando o estado x do sistema estiver muito distante da região de inação.

O principal obstáculo para se completar a solução ótima do problema multidimensional (5.1) incide na resolução direta da equação (5.13) com as condições de contorno fornecidas pelas soluções assintóticas e de inação. Deste modo, por se tratar de uma resolução extremamente complexa, seja do ponto de vista analítico ou numérico, é razoável buscar uma solução subótima para esta região do espaço de estados.

À luz do Comentário 6.1, esta solução subótima poderia ser construída por meio de uma interpolação numérica afim entre as soluções de controle determinadas analiticamente, conectando, assim, o controle de inação $u^* = 0$ com o controle assintótico afim $u^*(x) = -K_\infty x \mp M_\infty$. Isso produziria uma simples aproximação linear por partes para o controle ótimo do problema multidimensional, evitando a resolução de (5.13). A Figura 10 ilustra esta aproximação para um problema bidimensional.

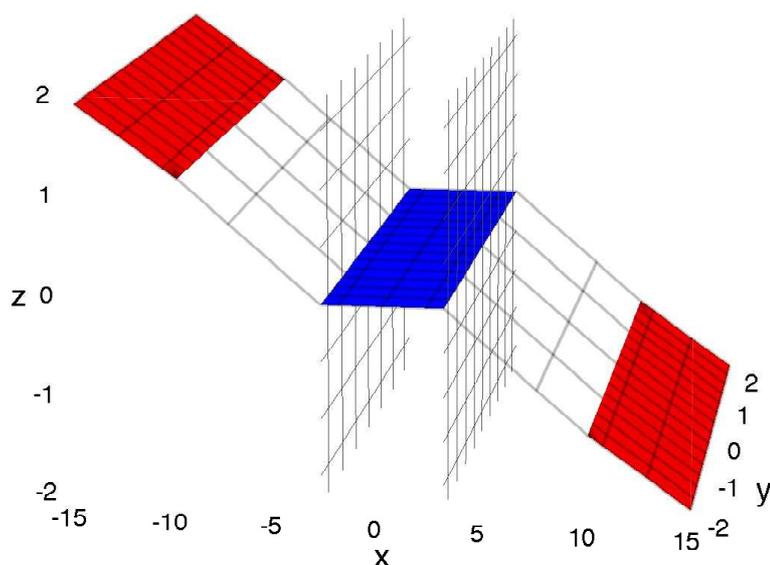


Figura 10 – Aproximação linear por partes para a política de controle ótimo de um sistema CVIU bidimensional.

Note na Figura 10 a solução ótima de inação representada pelo plano azul, a solução ótima assintótica em vermelho e, finalmente, a aproximação afim, em branco, construída por interpolação para se completar a solução.

6.3 Comparações de Desempenho entre Controladores

Considere um sistema escalar, linear e invariante no tempo, operando em torno do ponto de equilíbrio $(x_e, u_e) = (0, 0)$, cujo estado evolui de acordo com a seguinte equação diferencial estocástica

$$dZ_t = (-AZ_t + v_t) dt + dW_t, \quad t \geq 0, \quad (6.5)$$

sendo A um parâmetro desconhecido do sistema. Para fins de modelagem, considere também que A pertença a um intervalo conhecido $I_A = [a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $0 < a < b < \infty$.

Assim, o objetivo desta seção é comparar o desempenho do controlador CVIU com o dos controladores LQG padrão e LQR robusto, levando-se em conta o sistema estável descrito em (6.5) e avaliando-se o custo invariante no tempo V^* obtido pela atuação de cada um dos controladores. Em todos os experimentos, o valor de V^* é calculado via simulações de Monte Carlo com 50 realizações. Ressalte-se que, uma vez finalizado o projeto do controlador CVIU e estabelecida sua lei de controle, a simulação da atuação deste controlador no sistema (6.5) corresponderá a uma tarefa simples do ponto de vista computacional.

6.3.1 O Controlador CVIU e o LQG padrão

Seja $I_A = [\frac{1}{2}, 5]$. Assim, um modelo CVIU do sistema real (6.5) pode ser construído para alguma estimativa de A pertencente ao intervalo I_A . Denota-se esta estimativa por \hat{A} e a equação do modelo é dada por

$$dX_t = (-\hat{A}X_t + u_t) dt + (1 + \bar{\sigma} |u_t|) dW_t \quad (6.6)$$

em que $\bar{\sigma}$ é um parâmetro de ajuste.

A fim de estabelecer uma maneira formal para medir a discrepância entre o sistema real e o modelo utilizado para representá-lo, define-se

$$\delta = A - \hat{A}, \quad (6.7)$$

de modo que quanto maior for o valor de δ , maior será a discrepância.

Suponha, então, que um projetista estime $\hat{A} = 2$ e note que $\delta \in [-\frac{3}{2}, 3]$ neste experimento. Deste modo, com o propósito de se comparar a solução ótima fornecida pelo modelo CVIU e pelo modelo LQG padrão, pode-se avaliar o desempenho dos controladores em diferentes cenários de discrepância, isto é, para diferentes valores de δ .

Para a estimativa $\hat{A} = 2$, o ganho obtido pelo modelo LQG foi de $-0,4142$, permitindo, assim, a simulação do sistema sob a atuação do controlador LQG padrão. No caso do modelo CVIU, as avaliações foram realizadas para diferentes ajustes do parâmetro $\bar{\sigma}$. A Figura 11 exhibe os resultados para quatro cenários distintos, a saber, $\delta = 0,25$, $\delta = 1$, $\delta = 2$ e $\delta = 3$.

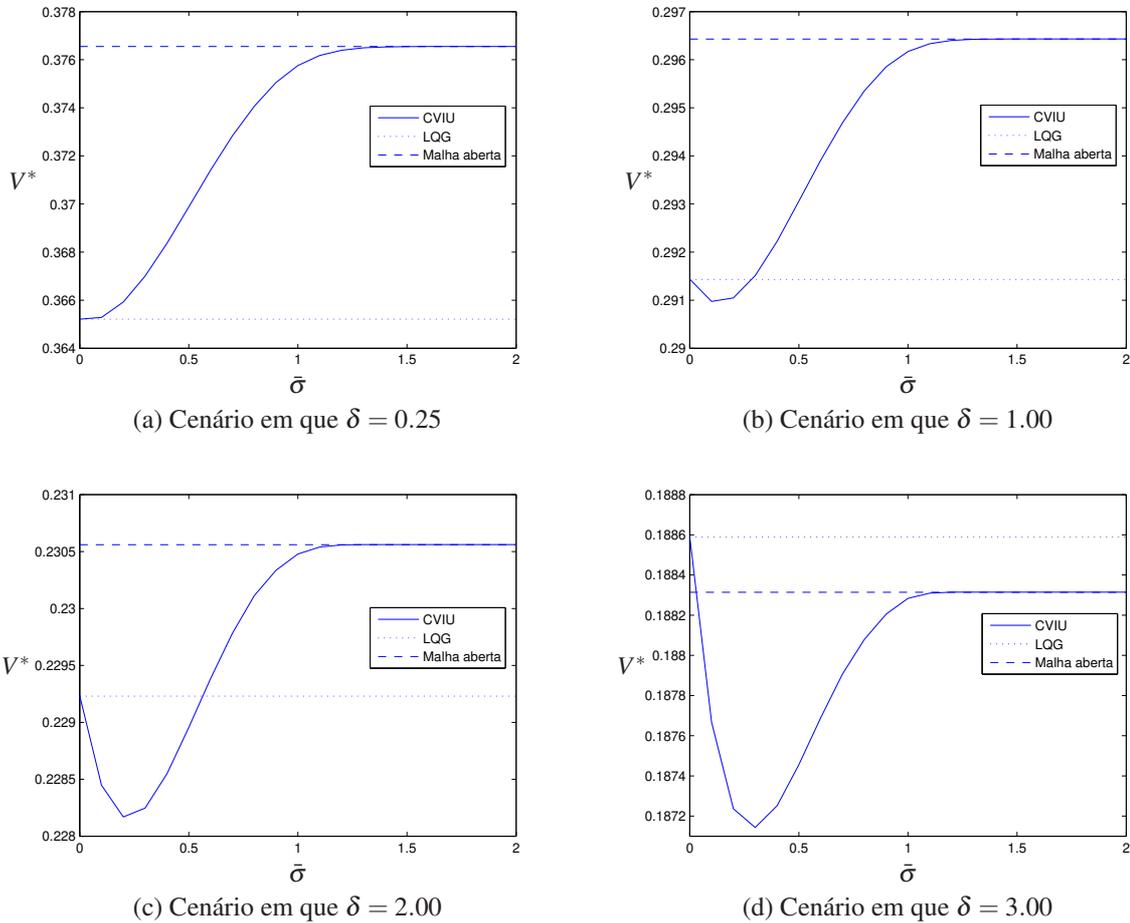


Figura 11 – Comparações de desempenho entre as políticas de controle CVIU, LQG e malha aberta.

Note que quando $\delta = 0,25$, o custo obtido pelo controlador LQG é sempre menor do que aqueles obtidos pelo controlador CVIU, independentemente do ajuste de $\bar{\sigma}$. Todavia, quando $\delta = 1$, há uma gama de valores de $\bar{\sigma}$ que torna o desempenho do CVIU melhor que o do LQG. À medida que δ aumenta, essa gama de valores torna-se ainda maior, como pode ser visto no gráfico para $\delta = 2$. Finalmente, quando $\delta = 3$, a discrepância do modelo é tão grande que o controlador LQG fornece resultados piores que os produzidos pelo sistema em malha aberta. Neste caso, a utilização do modelo CVIU é sempre melhor que a do LQG, independentemente do ajuste de $\bar{\sigma}$, sendo ainda melhor utilizar um controlador CVIU, em vez de manter o sistema em malha aberta.

O gráfico $\bar{\sigma} \times \delta$ na Figura 12 resume todos os cenários possíveis de discrepância para este experimento e indica quando é melhor usar um ou outro modelo. À luz do Comentário 5.2, o ajuste $\bar{\sigma} = 0$ foi excluído das simulações comparativas, uma vez que as atuações dos controladores CVIU e LQG seriam equivalentes em todos os cenários.

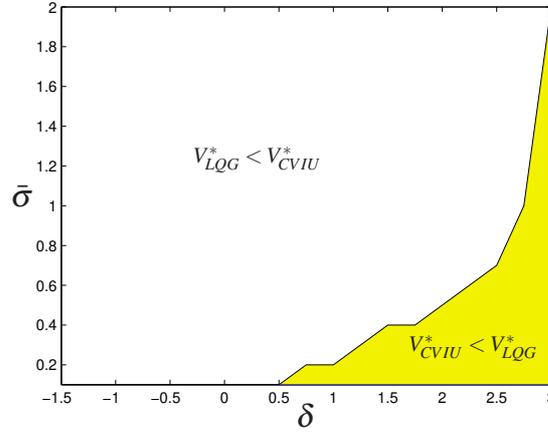


Figura 12 – Resumo das comparações de desempenho entre os controladores CVIU e LQG padrão.

6.3.2 O Controlador CVIU e o LQR Robusto

Seja $I_A = [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$. Para os propósitos deste experimento, consideram-se três estimativas diferentes \hat{A} de A para a construção do modelo CVIU, a saber, $\hat{A} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ e $\frac{5}{2}$, e compara-se a solução ótima fornecida pelo modelo CVIU e pelo modelo LQR robusto.

A abordagem utilizada para projetar um ganho LQR robusto depende da consideração de parâmetros incertos em (6.5). Neste caso particular, segundo (BOYD *et al.*, 1994), a matriz dinâmica é modelada por meio de uma representação politópica dada por

$$A(\alpha) = \alpha \frac{1}{2} + (1 - \alpha) \frac{5}{2}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Assim, para sintetizar um ganho LQR robusto, emprega-se um controle robusto \mathcal{H}_2 por realimentação de estados fundamentado na otimização por desigualdades matriciais lineares. O ganho ótimo LQR robusto sob estabilidade quadrática pode ser obtido, considerando a equação de saída

$$y = \begin{bmatrix} \sqrt{q} \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{r} \end{bmatrix} u$$

para se obter de forma equivalente o custo quadrático. As condições das desigualdades foram programadas em MATLAB, versão 7.0.1 (R14), utilizando os pacotes Yalmip (LÖFBERG, 2004) e SeDuMi (STURM, 1999). Desse modo, para o intervalo I_A fornecido, o ganho LQR robusto obtido foi $-0,618$, permitindo, deste modo, a simulação do sistema sob a atuação do controlador robusto. É importante frisar que este não é um modelo LQG e, portanto, há uma certa dessintonia com o problema original. Ainda assim, as comparações realizadas aqui servem de base para um estudo inicial e motivam a investigação de novos experimentos comparativos.

Os três gráficos $\bar{\sigma} \times A$ na Figura 13 resumem os cenários deste experimento e indicam para qual deles é melhor adotar um ou outro modelo. Em cada gráfico, o lado direito é favorável ao controlador CVIU, e o esquerdo ao LQR robusto.

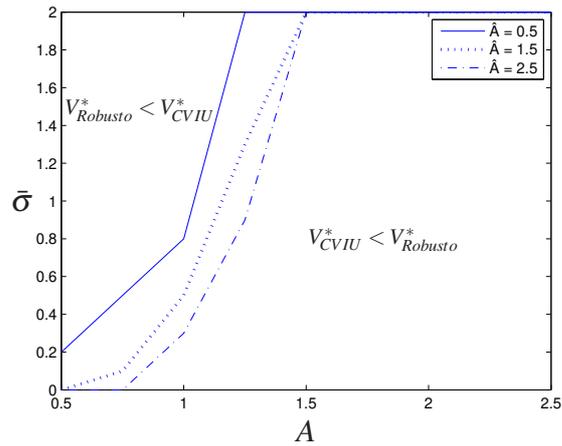


Figura 13 – Resumo das comparações de desempenho entre os controladores CVIU e LQR robusto.

Note que para $\hat{A} = 0,5$ e um ajuste adequado de $\bar{\sigma}$, o controlador CVIU apresenta um desempenho melhor do que o controlador LQR robusto para qualquer valor de A no intervalo I_A .

CONCLUSÃO

Esta tese apresenta um modelo para lidar com o problema de controle de sistemas estocásticos contínuos com dinâmicas pouco conhecidas. O modelo proposto, que surge como uma alternativa à abordagem robusta normalmente empregada neste contexto, é denominado Modelo CVIU, do inglês “*Control Variations Increase Uncertainty*”, significando que as variações do controle aumentam a incerteza do estado do sistema.

A utilização da programação dinâmica para projetar um controlador ótimo com relação ao modelo CVIU remete à difícil tarefa de se resolver a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman associada ao problema. A não diferenciabilidade do hamiltoniano do sistema requer ferramentas da análise de funções não suaves para o tratamento adequado da otimização. Ademais, algumas hipóteses são introduzidas sobre o custo do sistema para demonstrar que a função valor é convexa, o que permite a dedução da política ótima de controle por realimentação de estados.

Revela-se, então, uma região no espaço de estados em que a otimalidade sugere que se mantenha constante a ação de controle, enquanto o estado do sistema permanecer dentro desta região. Fazendo uso de uma nomenclatura já consagrada no campo da economia, esta região é chamada de Região de Inação, e a consequência de sua existência é o surgimento de uma espécie de política cautelosa de controle, caracterizada por um sinal de controle que alterna entre períodos de constância e períodos de variação. Este comportamento não é observado no tradicional controlador robusto, o que torna a abordagem CVIU promissora.

Visando aprofundar o assunto, o problema de controle ótimo de um modelo CVIU é formulado, em um cenário de horizonte de tempo infinito, como um problema de custo quadrático descontado. Assim, busca-se estudar as soluções ótimas invariantes no tempo relacionadas ao controlador CVIU, de sorte que fórmulas fechadas são derivadas analiticamente via equação de HJB para o problema de controle ótimo estocástico, resultando em funções quadráticas que cobrem

parte do espaço de estados. Dentro da região de inação, a solução pode ser obtida por meio de uma equação de Lyapunov. Em regiões suficientemente distantes da região de inação, obtêm-se soluções assintóticas ao se resolver um tipo de equação modificada de Riccati.

Contudo, encontrar a solução completa do problema implica em resolver uma complicada equação diferencial parcial não linear produzida pela minimização da hamiltoniano. Desse modo, impulsionadas pela solução, ainda que parcial, da equação de HJB, algumas aproximações numéricas são propostas, possibilitando a resolução completa para o caso escalar, ilustrada e analisada em um exemplo simples, e fomentando uma ideia inicial de como aproximações elementares podem ser aplicadas para lidar com o caso multidimensional.

A partir do projeto de controle completo para um modelo CVIU escalar, foram realizadas as primeiras comparações de desempenho entre o controlador CVIU e outros mais tradicionais, a saber, os controladores LQG padrão e LQR robusto. Avaliou-se o desempenho de cada controlador ao atuar em um sistema estável com dinâmica linear, porém com um parâmetro incerto. Os experimentos numéricos levaram em conta diferentes níveis de discrepância entre o valor real do parâmetro e o seu valor estimado para a composição do modelo. Na comparação com o controlador LQG padrão, observa-se que, para estimativas ruins do parâmetro incerto do sistema, o controlador obtido pelo modelo CVIU produz melhores resultados.

No que tange à comparação com o controlador robusto, a maior parte dos cenários avaliados apontou ser mais vantajoso o uso do controlador CVIU. Todavia, há de se ressaltar que os experimentos realizados com o controlador robusto não são completamente equiparáveis com os do controlador CVIU, quando se leva em conta a natureza do problema. De fato, o controlador robusto considerou uma formulação LQR do problema. Ainda assim, os resultados apresentados servem de base para um estudo inicial e motivam a investigação de novos experimentos.

Evidentemente, os experimentos numéricos realizados até o momento não são suficientes para uma avaliação ampla e profunda do desempenho do controlador CVIU. Na verdade, diversas situações ainda precisam ser exploradas, o que já indica a necessidade de trabalhos futuros. É fundamental que se realizem mais experimentos comparativos entre as abordagens CVIU e LQG, sem contar a vasta quantidade de controladores robustos que poderiam ser confrontados. De mais a mais, para caminhar em direção à generalização da teoria de controladores CVIU, faz-se mister consolidar a análise do caso multidimensional, avaliando as aproximações propostas e realizando novos experimentos em sistemas mais complexos, bem como incorporar no desenvolvimento do modelo a possibilidade de haver múltiplas entradas de controle.

É importante frisar que o projeto do controlador CVIU para o caso multidimensional, tal como foi realizado, passa pela resolução de uma equação peculiar, semelhante à de Riccati, porém, com um termo dependente da própria solução da equação. Esta equação ainda precisa ser investi-

gada e, possivelmente, algum método iterativo ou de relaxação deverá ser aplicado em sua resolução. Oportuna e apropriadamente, a eficiência e a velocidade de convergência destes métodos, ou até mesmo as situações em que não há convergência, necessitariam ser estudadas, apontando mais campos de pesquisa para trabalhos futuros.

Em contrapartida, deve-se levar em conta também a possibilidade de se resolver diretamente a equação de HJB associada ao modelo CVIU, utilizando técnicas de aproximação da função valor, o que facilitaria significativamente o projeto do controlador CVIU para o caso multidimensional. Destacam-se, neste contexto, as técnicas de programação semidefinida e otimização polinomial, as quais procuram contornar o problema da maldição da dimensionalidade, oriundo de algoritmos envolvendo programação dinâmica.

Por fim, é de bom alvitre salientar que alguns aspectos relevantes da teoria dos controladores CVIU encontram-se intimamente ligados à análise de estabilidade que não foi contemplada detalhadamente nesta tese. É primordial que um estudo completo e abrangente de estabilidade seja elaborado futuramente, propiciando maior segurança no uso da abordagem CVIU para lidar com problemas de controle de sistemas estocásticos contínuos com dinâmicas pouco conhecidas.

REFERÊNCIAS

- ABEL, A. B.; EBERLY, J. C. A unified model of investment under uncertainty. *American Economic Review*, v. 84, p. 1369–1384, 1994.
- ABOU-KANDIL, H.; FREILING, G.; IONESCU, V.; JANK, G. *Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory*. [S.l.]: Birkhäuser Basel, 2003.
- BARMISH, B. R. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. New York: Macmillan Publishing Company, 1994.
- BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc., 1966.
- BENSOUSSAN, A. Lecture on stochastic control. In: *Nonlinear Filtering and Stochastic Control*. New York: Springer-Verlag, 1982, (Lecture Notes in Mathematics, v. 972).
- BHATTACHARYYA, S. P.; CHAPPELLAT, H.; KEEL, L. H. *Robust Control: The Parametric Approach*. New Jersey: Prentice-Hall Publishing Co., 1995.
- BOYD, S.; El Ghaoui, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- BRAINARD, W. C. Uncertainty and the effectiveness of policy. *American Economic Review*, v. 57, n. 2, p. 411–425, 1967.
- BROCK, W. A.; DURLAUF, S. N.; WEST, K. D. Model uncertainty and policy evaluation: Some theory and empirics. *Journal of Econometrics*, v. 136, p. 629–664, 2007.
- CALMON, A. P. *Variação do Controle como Fonte de Incerteza*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, Maio 2009.
- CALMON, A. P.; VALLEÉ, T.; VAL, J. B. R. do. Control variation as a source of uncertainty: Single input case. In: *American Control Conference*. St. Louis, MO: [s.n.], 2009. p. 4416–4421.

- CLARKE, F. H. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- DAVIS, M. H. A. *Linear Estimation and Stochastic Control*. [S.l.]: Chapman and Hall, 1977.
- DULLERUD, G.; PAGANINI, F. *Course in Robust Control Theory*. New York: Springer-Verlag, 2000.
- FRANCIS, B. A. *A Course in \mathcal{H}_∞ Control Theory*. New York: Springer-Verlag, 1987. (Lectures Notes in Control and Information Sciences, v. 88).
- FU, M.; BARABANOV, N. E.; LI, H. Robust \mathcal{H}_∞ analysis and control of linear systems with integral quadratic constraints. In: *European Control Conference*. [S.l.: s.n.], 1995.
- GIANNONI, M. P. Does model uncertainty justify caution? Robust optimal monetary policy in a forward-looking model. *Macroeconomic Dynamics*, v. 6, p. 111–144, February 2002.
- HANSON, F. B. *Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis, and Computation*. [S.l.]: SIAM, 2007.
- KALLIANPUR, G. *Stochastic Filtering Theory*. [S.l.]: Springer, 1980.
- LEITEMO, K.; SÖDERSTRÖM, U. Robust monetary policy in a small open economy. *Journal of Economic Dynamics & Control*, v. 32, n. 10, p. 3218–3252, October 2008.
- LEVIN, A.; WIELAND, V.; WILLIAMS, J. C. The performance of forecast-based monetary policy rules under model uncertainty. *American Economic Review*, v. 93, n. 3, p. 622–645, June 2003.
- LJUNG, L. *System Identification: Theory for the User*. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999.
- LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.* Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289. Disponível em: <<http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>>.
- LÜTKEPOHL, H. *Handbook of Matrices*. England: John Wiley & Sons Inc., 1996.
- OKSENDAL, B. *Stochastic Differential Equations: an Introduction with Applications*. 6. ed. Berlin: Springer, 2007.
- ONATSKI, A.; WILLIAMS, N. Modeling model uncertainty. *Journal of the European Economic Association*, v. 1, p. 1087–1122, March 2003.
- SCARSINI, M. Multivariate convex orderings, dependence and stochastic equality. *Journal of Applied Probability*, v. 35, p. 93–103, 1998.
- SOUTO, R. F. *Processos de Difusão Controlada: um Estudo sobre Sistemas em que a Variação do Controle Aumenta a Incerteza*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, Março 2010.
- STOKEY, N. L. *The Economics of Inaction - Stochastic Control Models with Fixed Costs*. New Jersey: Princeton University Press, 2009.

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optim. Method Softw.*, v. 11, n. 1–4, p. 625–653, 1999. Disponível em: <<http://sedumi.ie.lehigh.edu/>>.

WANG, S. D.; KUO, T. S.; HSU, C. F. Trace bounds on the solution of the algebraic matrix Riccati and Lyapunov equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 31, n. 7, p. 654–656, July 1986.

YONG, J.; ZHOU, X. Y. *Stochastic Controls - Hamiltonian Systems and HJB Equations*. New York: Springer, 1999.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. *Essentials of Robust Control*. [S.l.]: Prentice Hall, 1997.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. *Robust and Optimal Control*. New Jersey: Prentice Hall, 1996.