



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Comunicações

Fernando Darío Almeida García

Detecção Ótima e Subótima para um Radar
Meteorológico com Três Antenas Fixas de Feixe Largo

Campinas
2016



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Comunicações

Fernando Darío Almeida García

Detecção Ótima e Subótima para um Radar Meteorológico com Três Antenas Fixas de Feixe Largo

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.

Orientador: Prof. Dr. José Cândido S. Santos Filho.

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno, e orientada pelo Prof. Dr. José Cândido Silveira Santos Filho.

Campinas
2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

AL64d Almeida García, Fernando Darío, 1989-
Detecção ótima e subótima para um radar meteorológico com três antenas
fixas de feixe largo / Fernando Darío Almeida García. – Campinas, SP : [s.n.],
2015.

Orientador: José Cândido Silveira Santos Filho.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade
de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Radar. 2. Sistemas de comunicação. 3. Verossimilhança (Estatística)
. 4. Verossimilhança parcial (Estatística). I. Santos Filho, José Cândido
Silveira, 1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Detección óptima y sub-óptima para un radar meteorológico con tres antenas fijas de haz amplio

Palavras-chave em inglês:

Radar

Communication systems

Likelihood (Statistics)

Partial likelihood (Statistics)

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

José Cândido Silveira Santos Filho [Orientador]

Yusef Rafael Cáceres Zúñiga

Michel Daoub Yacoub

Data de defesa: 15-12-2015

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Candidato: Fernando Darío Almeida García RA: 151557

Data da Defesa: 15 de dezembro de 2016

Título da Tese: "Detecção Ótima e Subótima para um Radar Meteorológico com Três Antenas Fixas de Feixe Largo".

Prof. Dr. José Cândido Silveira Santos Filho (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Yusef Rafael Cáceres Zúñiga (BRADAR Indústria S.A.)

Prof. Dr. Michel Daoub Yacoub (FEEC/UNICAMP)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

*Aos meus pais Luisa e Fernando. A
eles que são a inspiração e o exemplo
na minha vida.*

Agradecimentos

A Deus, por ser a minha força e guiar o meu caminho.

Aos meus pais e irmãos, pelo apoio incondicional e pelos sábios conselhos em cada instante da minha vida.

À minha família inteira, por sempre me mostrar o caminho certo.

Ao Prof. José Cândido e a Marco Miranda, pelos momentos de amável dedicação e orientação ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Agradeço também ao Prof. Cândido pela oportunidade de realizar meus estudos de mestrado no Brasil.

Aos meus amigos, pela companhia e ajuda nos momentos difíceis durante o mestrado.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Recentemente, foi proposta e analisada na literatura uma abordagem inovadora de baixo custo para a construção de radares meteorológicos, com base em duas antenas fixas de feixe largo. Verificou-se na ocasião que uma quantidade muito elevada de amostras de sinal seria necessária para garantir à abordagem proposta um desempenho satisfatório. Por outro lado, vislumbrou-se que tal problema poderia ser amenizado pelo uso de antenas adicionais. Este trabalho constitui um primeiro passo nesse sentido, ao estender a proposta em questão de duas para três antenas. Um detector ótimo é projetado para o novo radar, bem como suas probabilidades de detecção e falso alarme são obtidas na forma de expressões analíticas fechadas. Além disso, como termo de comparação, dois esquemas subótimos de detecção são também projetados e avaliados. No primeiro esquema subótimo, aplica-se o detector ótimo conhecido para duas antenas a cada um dos três pares de antenas do radar, e combinam-se então as decisões parciais via regra da maioria. No segundo esquema, melhor que o primeiro, aplica-se também o detector ótimo para duas antenas a cada par de antenas do radar. Entretanto, em lugar de se tomar e combinar as decisões parciais, utilizam-se as variáveis de decisão parciais como base para um novo teste de hipóteses por razão de verossimilhança. As probabilidades de detecção e falso alarme de cada esquema subótimo são obtidas analiticamente. O detector ótimo projetado mostra-se consideravelmente superior aos detectores subótimos investigados.

Palavras-chave: antenas fixas, arranjo de antenas, coeficiente de correlação, detector ótimo, radar meteorológico, regra da maioria, probabilidade de detecção, probabilidade de falso alarme, teste por razão de verossimilhança.

Abstract

Recently, an innovative low-cost framework was proposed and analyzed in the literature for the construction of meteorological radars, based on two fixed wide-beam antennas. It has then been found that a very large amount of signal samples would be required to ensure an adequate performance for the proposed framework. On the other hand, it has been envisaged that such problem can be alleviated by using additional antennas. This work gives a first step in this direction, by extending the referred proposal from two to three antennas. An optimal detector is designed for the new radar, and its detection and false-alarm probabilities are derived in analytical closed form. Moreover, as a term of comparison, two suboptimal detection schemes are also designed and evaluated. In the first suboptimal scheme, the known two-antenna optimal detector is applied to each of the three pairs of antennas, with the partial decisions being combined via majority rule. In the second scheme, better than the first one, the known two-antenna optimal detector is also applied to each antenna pair. However, instead of taking and combining the partial decisions, the partial decision variables are used as a basis for a new likelihood-ratio hypothesis test. The detection and false-alarm probabilities of each suboptimal scheme are derived analytically. The optimal detector proves to be much superior to the investigated suboptimal schemes.

Keywords: antenna arrays, correlation coefficient, detection probability, false-alarm probability, fixed antennas, likelihood ratio test, majority rule, meteorological radar, optimal detector.

Lista de Figuras

1.1	Operação de um radar pulsado.	19
1.2	Célula de resolução de um radar.	20
1.3	Sinal recebido e processo de detecção.	21
1.4	Parâmetros de desempenho de um radar (PD e PFA).	22
a	Probabilidades de falso alarme e de omissão.	22
b	Probabilidade de detecção.	22
2.1	Vista superior do sistema de radar com duas antenas fixas.	25
3.1	Vista superior do radar meteorológico proposto, composto por um arranjo linear de três antenas fixas de feixe largo.	30
3.2	Diagrama de blocos dos detectores ótimo e subótimos.	31
3.3	Cálculo da PFA e PD para o detector subótimo 1.	32
4.1	Vista superior do radar meteorológico com N antenas.	44
5.1	PD versus PFA versus limiar de detecção ($n = 100$, $\sigma^2 = 1$, $\rho_{12} = 0.3$, $\rho_{13} = 0.1$ e $\rho_{23} = 0.2$).	49
a	Detector ótimo	49
b	Detector subótimo 1	49
c	Detector subótimo 2	49
d	PD versus PFA	49
5.2	PD versus PFA ($\sigma^2 = 1$, $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.1$).	50
a	$n = 100$	50
b	$n = 500$	50
c	$n = 1000$	50
d	$n = 1500$	50
5.3	PD versus PFA ($n = 100$, $\sigma^2 = 1$).	51
a	$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.01$	51
b	$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.1$	51
c	$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.5$	51
d	$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.9$	51
5.4	PD versus PFA: detecção ótima com duas ou três antenas ($\sigma^2 = 1$, $\rho_{12} = 0.3$, $\rho_{13} = 0.1$ e $\rho_{23} = 0.2$).	52
a	$n = 200$	52
b	$n = 300$	52
c	$n = 400$	52

d	$n = 500$	52
5.5	PD versus PFA: detecção ótima com duas ou três antenas ($n = 500, \sigma^2 = 1$).	53
a	$\rho_{12} = 0.3$ e $\rho_{13} = \rho_{23} = 0$	53
b	$\rho_{12} = 0.3, \rho_{13} = 0.1$ e $\rho_{23} = 0.2$	53
c	$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.3$	53
d	$\rho_{12} = 0.3, \rho_{13} = 0.9$ e $\rho_{23} = 0.99$	53

Lista de Tabelas

3.1	Elementos do vetor de médias e da matriz de covariância de $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$, condicionados às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1	34
4.1	Elementos do vetor de médias e da matriz de covariância das variáveis auxiliares A , B , C , D , E e F , condicionados às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1	43

Lista de Acrônimos e Símbolos

FDP	função densidade de probabilidade
PD	probabilidade de detecção
PFA	probabilidade de falso alarme
RADAR	<i>radio detection and ranging</i>
TRV	teste por razão de verossimilhança
B	comprimento da linha de base que separa duas antenas
$\text{COV}\{\cdot, \cdot\}$	covariância entre duas variáveis aleatórias
C	matriz de covariância entre $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$
c	velocidade da luz
δ	resolução em alcance do radar
$E\{\cdot\}$	média de uma variável aleatória
$f_Z(\cdot)$	função densidade de probabilidade de uma variável aleatória genérica Z
γ	limiar de detecção
Δf	largura de banda do sinal transmitido
N	número de antenas
n	número de amostras
$\Lambda(\cdot)$	função de razão de verossimilhança
$D_{n,12}$	variável de decisão parcial para o detector subótimo 1, referente às antenas 1 e 2
$D_{n,23}$	variável de decisão parcial para o detector subótimo 1, referente às antenas 2 e 3
$D_{n,13}$	variável de decisão parcial para o detector subótimo 1, referente às antenas 1 e 3
$D_{n,2}$	variável de decisão para o detector ótimo com 2 antenas fixas
$D_{n,3}$	variável de decisão para o detector ótimo com 3 antenas fixas
$D_{n,N}$	variável de decisão para o detector ótimo com N antenas fixas
D_{Sub}	variável de decisão para o detector subótimo 2
m	vetor de médias de $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$
$J(\cdot)$	matriz Jacobiana de uma transformação de variáveis
ρ	coeficiente de correlação entre duas variáveis aleatórias
S_{1i}	signal complexo recebido pela antena 1 no instante i
S_{2i}	signal complexo recebido pela antena 2 no instante i
S_{3i}	signal complexo recebido pela antena 3 no instante i
θ_{el}	largura do feixe da antena em elevação (3 dB)
θ_{az}	largura do feixe da antena em azimute (3 dB)
τ	largura do pulso transmitido
T_p	intervalo de tempo entre pulsos transmitidos
$\text{VAR}\{\cdot\}$	variância de uma variável aleatória

$\det(\cdot)$	determinante de uma matriz
$\mathcal{M}_{\mathcal{H}_0}$	matriz de covariância para o detector ótimo com 3 antenas, condicionada à hipótese \mathcal{H}_0
$\mathcal{M}_{\mathcal{H}_1}$	matriz de covariância para o detector ótimo com 3 antenas, condicionada à hipótese \mathcal{H}_1
μ	vetor de médias das variáveis auxiliares do detector ótimo com 3 antenas fixas
Σ	matriz de covariância das variáveis auxiliares do detector ótimo com 3 antenas fixas
$\mathcal{M}_{N \mathcal{H}_0}$	matriz de covariância para o detector ótimo com N antenas, condicionada à hipótese \mathcal{H}_0
$\mathcal{M}_{N \mathcal{H}_1}$	matriz de covariância para o detector ótimo com N antenas, condicionada à hipótese \mathcal{H}_1

Sumário

Lista de Figuras	9
Lista de Tabelas	11
Lista de Acrônimos e Símbolos	12
1 Introdução	17
1.1 Tipos de Radar em Aplicações Meteorológicas	17
1.2 Pulso de Transmissão	18
1.3 Resolução Nominal	19
1.4 Parâmetros de Desempenho	20
1.5 Objetivos e Contribuições	22
1.6 Estrutura da Dissertação	23
2 Detecção Ótima com Duas Antenas Fixas	24
2.1 Modelagem Estocástica do Sistema	25
2.2 Formulação do Teste de Hipóteses	26
2.3 Definição do Critério de Decisão	26
2.4 Determinação da Variável de Decisão	27
2.5 Análise de Desempenho do Detector	27
2.6 Conclusões	28
3 Detecção Subótima com Três Antenas Fixas	29
3.1 Descrição do Sistema	29
3.2 Projeto e Análise dos Detectores Subótimos	30
3.2.1 Teste de Hipóteses	30
3.2.2 Detector Subótimo 1	31
3.2.2.1 Critério e Variáveis de Decisão	31
3.2.2.2 Desempenho do Detector	32
3.2.3 Detector Subótimo 2	35
3.2.3.1 Critério de Decisão	35
3.2.3.2 Variável de Decisão	36
3.2.3.3 Desempenho do Detector	37
3.3 Conclusões	38

4	Detecção Ótima com Três Antenas Fixas	40
4.1	Teste de Hipóteses	40
4.2	Critério de Decisão	40
4.3	Variável de Decisão	41
4.4	Desempenho do Detector	41
4.5	Detecção Ótima com N Antenas	44
4.6	Conclusões	46
5	Resultados Numéricos	47
6	Conclusões e Perspectivas	54
	Apêndices	56
A	Caracterização das Variáveis de Decisão $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$	56
A.1	Vetor de Médias	56
A.1.1	Média de $D_{n,12}$	57
A.1.2	Média de $D_{n,13}$	57
A.1.3	Média de $D_{n,23}$	57
A.2	Matriz de Covariância	58
A.2.1	Variância de $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$	58
A.2.2	COV $\{D_{n,12}, D_{n,13}\}$	59
A.2.3	COV $\{D_{n,12}, D_{n,23}\}$	60
A.2.4	COV $\{D_{n,13}, D_{n,23}\}$	60
B	Caracterização da Variável de Decisão $D_{n,3}$	61
B.1	Vetor de Médias	61
B.1.1	Média de A	62
B.1.2	Média de B	62
B.1.3	Média de C	62
B.1.4	Média de D , E e F	63
B.2	Média de $D_{n,3}$	63
B.3	Matriz de Covariância	63
B.3.1	Variância de A	64
B.3.2	Variância de B	64
B.3.3	Variância de C	64
B.3.4	Variância de D , E e F	65
B.3.5	COV $\{A, B\}$	65
B.3.6	COV $\{A, C\}$	66
B.3.7	COV $\{A, D\}$	66
B.3.8	COV $\{A, E\}$	66
B.3.9	COV $\{A, F\}$	67
B.3.10	COV $\{B, C\}$	67
B.3.11	COV $\{B, D\}$	68
B.3.12	COV $\{B, E\}$	68

B.3.13	COV $\{B, F\}$	68
B.3.14	COV $\{C, D\}$	69
B.3.15	COV $\{C, E\}$	69
B.3.16	COV $\{C, F\}$	70
B.3.17	COV $\{D, E\}$, COV $\{D, F\}$ e COV $\{E, F\}$	70
B.4	Variância de $D_{n,3}$	71

Bibliografia**72**

Capítulo

1

Introdução

Nas últimas décadas, as aplicações de radar têm proporcionado avanços importantes em diferentes áreas tecnológicas, dentre as quais podem-se destacar sensoriamento remoto, meteorologia, controle de tráfego aéreo, monitoramento espacial e segurança nacional. O acrônimo RADAR provém da sigla em inglês para *RAdio Detection And Ranging*, e seu princípio de funcionamento está baseado na emissão de ondas eletromagnéticas de alta frequência. As ondas emitidas pelo radar são refletidas, e os ecos correspondentes são então capturados por uma ou mais antenas receptoras. Por fim, são utilizados algoritmos de detecção e estimação de dados para determinar a distância, velocidade radial e a posição em azimute dos alvos de interesse. Neste capítulo são apresentados brevemente alguns conceitos básicos sobre os parâmetros físicos de um radar, sua construção, técnicas de detecção e métricas de desempenho, bem como os principais tipos de radar utilizados em aplicações meteorológicas, objeto desta Dissertação.

1.1 Tipos de Radar em Aplicações Meteorológicas

No que se refere à quantidade e função das antenas, os radares são classificados em monoestático, biestático ou multiestático. O radar monoestático utiliza uma única antena para transmissão e recepção. O radar biestático utiliza duas antenas: uma para transmissão, outra para recepção. Nesse caso, as antenas transmissora e receptora são tipicamente separadas por uma distância muito maior que o comprimento de cada antena. O radar multiestático é uma generalização do radar biestático, com mais de uma antena sendo empregada na recepção ou na transmissão ou em ambas [1, 5]. Neste trabalho, considera-se o uso de um radar multiestático.

No que se refere à estrutura e ao modo de operação das antenas, três tipos principais de radar são utilizados em aplicações meteorológicas: (i) radar girante de feixe estreito, (ii) arranjo de antenas e (iii) antenas espaçadas. No radar girante de feixe estreito, utiliza-se uma antena em formato de corneta incidindo sobre um refletor parabólico. Quanto maior o tamanho do aparato, mais estreito é o feixe resultante da antena. A varredura em azimute é obtida girando-se a antena por meio de um motor, e a varredura em elevação é obtida alterando-se a inclinação da antena a cada giro. Por conta disso, o tempo de varredura é relativamente elevado — 15 a 25 minutos, dependendo da configuração do radar [14, 13].

Além disso, essa abordagem exige uma grande robustez mecânica e um elevado custo de manutenção do sistema girante. Por outro lado, no arranjo de antenas, um feixe estreito é obtido através do controle apropriado das fases e amplitudes de cada um dentre múltiplos (dezenas, centenas ou até milhares) elementos irradiantes que compõem o sistema. Assim, a posição do feixe pode ser ajustada eletronicamente, de modo que o tempo de varredura é ínfimo, em geral da ordem de microssegundos [16]. Todavia, essa abordagem tem um elevado custo de implementação por necessitar de múltiplos elementos de antena. Por fim, a terceira abordagem, denominada antenas espaçadas, é na verdade um uso específico do arranjo de antenas. Em particular, apenas alguns poucos elementos irradiantes do arranjo são utilizados, a fim de determinar as componentes radiais de velocidade do fenômeno meteorológico em questão, como o vento ou um tornado [15]. Para tanto, empregam-se técnicas de interferometria, combinando-se adequadamente as informações de amplitude e fase dos sinais recebidos por duas ou mais antenas.

Neste trabalho, em lugar dos esquemas mencionados no parágrafo anterior, considera-se uma abordagem inovadora de baixo custo introduzida recentemente na literatura [8, 7], baseada originalmente em duas antenas fixas de feixe largo. Mais especificamente, estende-se tal abordagem por meio do acréscimo de uma terceira antena, como detalhado nos próximos capítulos.

1.2 Pulso de Transmissão

O sinal transmitido por um sistema de radar pode ser do tipo contínuo ou pulsado. Em radares do tipo contínuo, como o próprio nome indica, o sinal é transmitido continuamente, enquanto o receptor interpreta os ecos provenientes dos alvos. Para que isso seja viável, um radar do tipo contínuo deve operar necessariamente no modo biestático ou multiestático. Esse tipo de radar é utilizado para medir velocidade, por modular continuamente a fase [3]. Por outro lado, em radares do tipo pulsado, o sinal eletromagnético é transmitido durante um curto intervalo de tempo, conhecido como largura de pulso (τ). Durante esse tempo, a função de recepção encontra-se desligada e isolada, a fim de se proteger os componentes do receptor dos sinais de alta potência do transmissor. Em seguida, a recepção é habilitada para amostrar os possíveis ecos provenientes dos alvos e, nessa ocasião, o circuito de transmissão permanece desligado [4]. O intervalo de tempo entre o início de dois pulsos de transmissão adjacentes é chamado de tempo entre pulsos (T_P). A Figura 1.1 ilustra esse processo, mostrando o nível de potência recebida dado em Watts [W], versus o tempo transcorrido dado em expressado em segundos [s]. Neste trabalho, considera-se o uso de um radar do tipo pulsado.

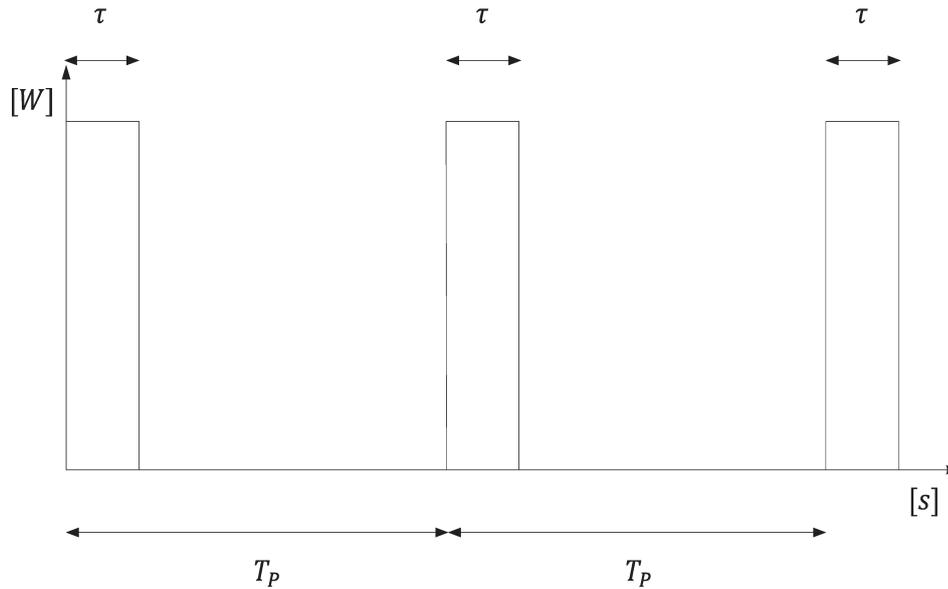


Figura 1.1: Operação de um radar pulsado.

1.3 Resolução Nominal

Qualquer sistema de radar apresenta o que se denomina *célula de resolução*, definida a partir da capacidade de o radar resolver (ou seja, distinguir) alvos separados em alcance, azimute ou elevação, como observado na Figura 1.2. Definem-se resolução em alcance (δ), resolução em azimute (θ_{el}) e resolução em elevação (θ_{az}) como sendo a distância mínima (linear ou angular, conforme o caso) entre dois alvos tais que o radar ainda consiga detectá-los em separado. Ou seja, se a distância entre os alvos é menor que a resolução em questão, então o radar os reconhece como sendo um alvo único. A resolução em alcance para radares que utilizam compressão de pulso é dada por [10]

$$\delta = \frac{c}{2\Delta f}, \quad (1.1)$$

em que c é a velocidade da luz e Δf é a largura de banda do sinal transmitido. Por sua vez, as resoluções angulares θ_{el} e θ_{az} são determinadas pelas larguras de feixe de 3 dB¹ — em elevação e em azimute, respectivamente — associadas à antena empregada [2].

¹Tal largura equivale ao espaçamento angular entre dois pontos com metade da potência máxima central.

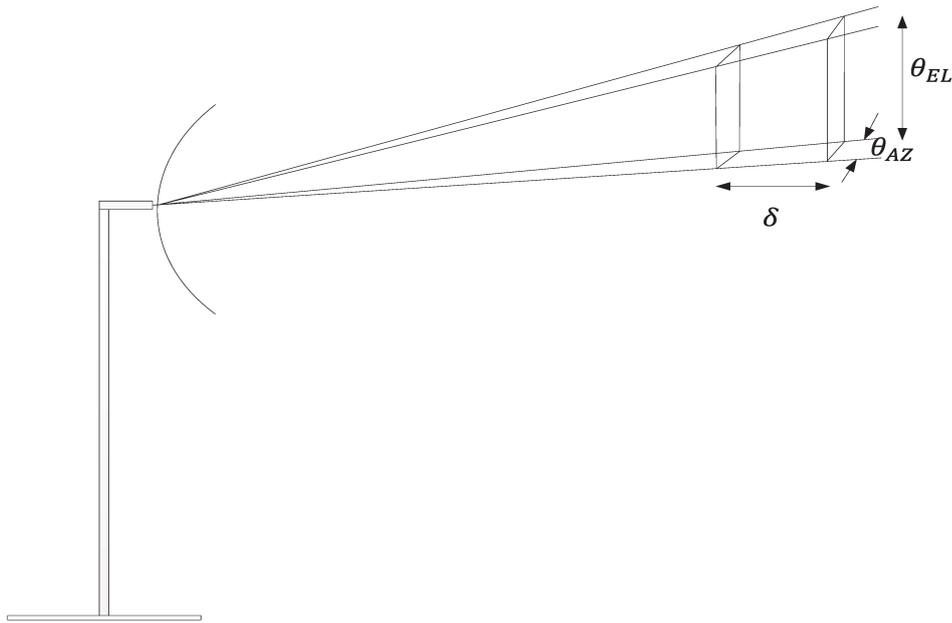


Figura 1.2: Célula de resolução de um radar.

1.4 Parâmetros de Desempenho

Em sistemas de radar, o sinal transmitido é afetado por diversos fatores, dentre os quais ruído térmico. Assim, devido à presença de ruído, o sinal recebido pelo radar possui um comportamento aleatório. Além disso, o próprio eco proveniente dos alvos pode ter características inerentemente aleatórias, dependendo da natureza desses alvos, como ocorre para alvos distribuídos, a exemplo de nuvens e chuva [11]. Tipicamente, o processo de detecção é efetuado comparando-se a amplitude do sinal recebido com um determinado limiar, denominado limiar de detecção ou limiar de decisão. Os sinais acima desse limiar são interpretados como retornos provenientes de alvos, enquanto que os sinais abaixo desse limiar são interpretados como ruído, ou seja, ausência de alvo [10]. A Figura 1.3 ilustra esse processo.

Devido à natureza aleatória dos sinais envolvidos, o desempenho de um radar é caracterizado de forma probabilística. Nesse sentido, definem-se duas probabilidades fundamentais: (i) a probabilidade de que um alvo existente seja detectado como tal, chamada de probabilidade de detecção (PD) e (ii) a probabilidade de que ruído seja interpretado erroneamente como alvo, chamada de probabilidade de falso alarme (PFA). Na prática, para uma dada aplicação, deseja-se que o detector cumpra simultaneamente um valor máximo de PFA e um valor mínimo de PD. Por outro lado, para um dado detector, há um compromisso intrínseco entre os valores obtidos para PD e PFA, ajustado pela escolha do limiar de detecção. Aumentando-se o limiar, reduz-se PFA, mas também reduz-se PD; reduzindo-se o limiar, aumenta-se PD, mas também aumenta-se PFA. Um caminho “trivial” para aumentar PD e reduzir (ou não aumentar, ao menos) PFA é elevar a potência de transmissão do radar em relação à potência do ruído. Evidentemente, isso gera um aumento no consumo de energia e, por sua vez, nos custos de implementação. Daí a importância de se aperfeiçoar o projeto do detector, auferindo-se assim um ganho real de desempenho para um dada potência de transmissão disponível.

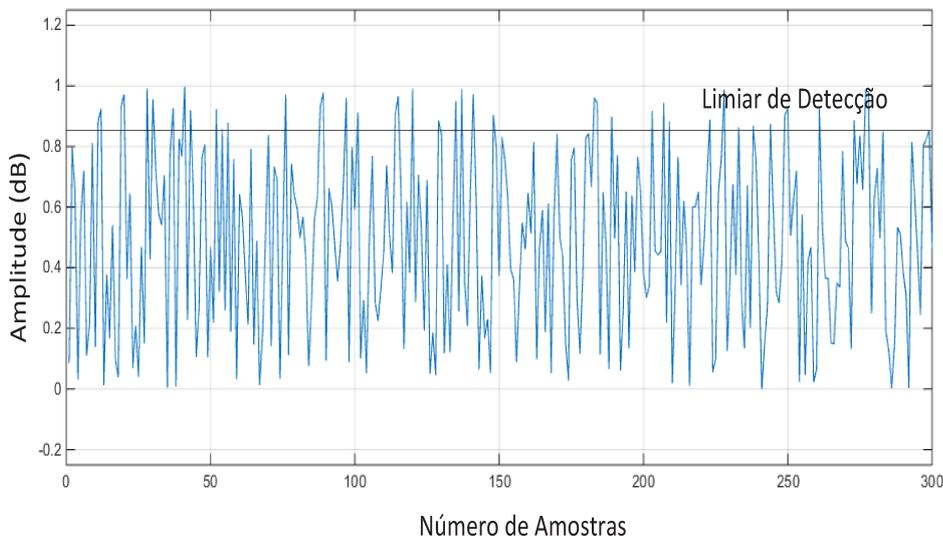
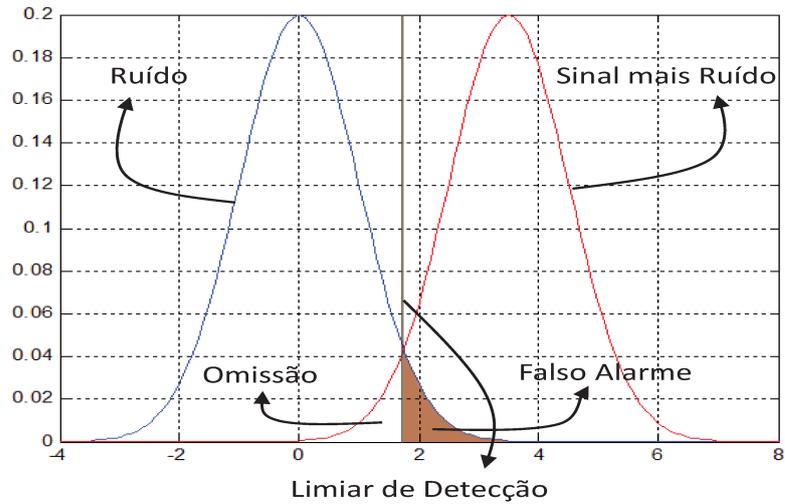
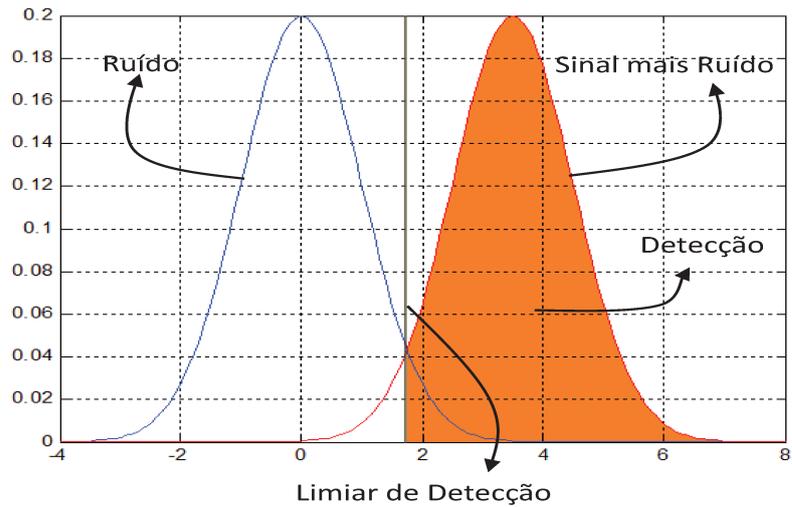


Figura 1.3: Sinal recebido e processo de detecção.

A Figura 1.4 ajuda a esclarecer os conceitos de PD e PFA. Em particular, com o exemplo, considera-se na figura que os eventos de ausência de alvo (apenas ruído, em azul) e presença de alvo (sinal+ruído, em vermelho) são descritos por funções densidade de probabilidade (FDPs) Gaussianas. Na literatura, as condições de ausência e presença de alvo são normalmente identificadas como hipótese \mathcal{H}_0 e hipótese \mathcal{H}_1 , respectivamente. Observa-se que, uma vez fixado o limiar de detecção, é possível determinar PFA e PD em termos das FDPs de cada hipótese, como sendo as áreas das regiões hachuradas nas Figuras 1.4a e 1.4b, respectivamente. Na prática, a determinação dos parâmetros estatísticos do sinal recebido sob as hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser muito complicada, o que dificulta a análise de desempenho do radar. Em muitos casos, as estatísticas envolvidas não são Gaussianas, dificultando ainda mais o processo. Nesses casos, quando apropriado, costuma-se adotar uma aproximação Gaussiana para facilitar a análise. Esse tipo de aproximação será adotado em alguns esquemas de detecção explorados neste trabalho.



(a) Probabilidades de falso alarme e de omissão.



(b) Probabilidade de detecção.

Figura 1.4: Parâmetros de desempenho de um radar (PD e PFA).

1.5 Objetivos e Contribuições

Este trabalho tem como objetivo projetar e analisar três detectores — um ótimo e dois subótimos — para um radar meteorológico com três antenas fixas de feixe largo. Os detectores propostos constituem a extensão de uma abordagem inovadora de baixo custo introduzida em [8, 7], originalmente com duas antenas receptoras. Nessa abordagem, o processo de detecção se baseia no grau de correlação entre os sinais recebidos por cada antena. Quanta maior a presença do alvo meteorológico — tal presença vai depender do volume físico, do tipo de forma e da sua composição —, mais correlacionados hão de ser os sinais das antenas. Em particular, quando não há alvo, os sinais recebidos pelas antenas

são mutuamente descorrelacionados.

O detector ótimo é projetado a partir de um teste de hipóteses por razão de verossimilhança. Alternativamente, duas estratégias subótimas são propostas. Na primeira estratégia, denominada Detector Subótimo 1, aplica-se o detector ótimo para duas antenas apresentado em [8] a cada par de antenas do novo radar, e combinam-se então as decisões parciais via regra da maioria. A fim de melhorar o desempenho, na segunda estratégia subótima, denominada Detector Subótimo 2, utilizam-se as variáveis de decisão (as variáveis de decisão, não as decisões!) parciais desses mesmos detectores ótimos para duas antenas a fim de compor um novo teste de hipóteses por razão de verossimilhança. Expressões analíticas são obtidas para as probabilidades de detecção e de falso alarme de cada detector projetado. As expressões obtidas são validadas por meio de simulação.

Em última instância, este trabalho visa quantificar como o uso de uma terceira antena pode aliviar a quantidade de amostras necessárias para garantir um desempenho satisfatório à abordagem inovadora para radares meteorológicos introduzida em [8, 7]. Além disso, apresenta-se também uma análise preliminar de detecção ótima para o caso geral de um número arbitrário N de antenas. Desse modo, espera-se que os métodos e resultados desta Dissertação possam servir de referência para futuras investigações e avanços na área de sistemas de radar, sendo possivelmente estendidos e aperfeiçoados para além de aplicações meteorológicas.

1.6 Estrutura da Dissertação

O restante desta Dissertação está organizado como segue. O **Capítulo 2** revisita a detecção ótima para duas antenas realizada em [8], apresentando as principais expressões que definem o desempenho desse detector. No **Capítulo 3**, elabora-se a detecção subótima para três antenas, conforme as duas estratégias mencionadas na última seção. O **Capítulo 4** descreve o projeto e a análise do detector ótimo para três antenas, contribuição central deste trabalho. Além disso, apresenta também uma investigação preliminar do detector ótimo para um número arbitrário de antenas. No **Capítulo 5** são discutidos alguns resultados numéricos a fim de se comparar o desempenho dos vários detectores investigados. Por último, o **Capítulo 6** apresenta as principais conclusões do trabalho, alguns comentários finais dos resultados obtidos e propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Detecção Ótima com Duas Antenas Fixas

Radares meteorológicos tradicionais se baseiam em uma única antena girante de feixe estreito [13]. No entanto, essa abordagem pode ser muito custosa, pois requer um aparato mecânico enorme e extremamente robusto. Além disso, pode ser inadequada para previsões do tempo de curto prazo (*nowcasting*), já que seu ciclo de varredura é muito demorado. A fim de contornar esse problema, uma abordagem inovadora de varredura rápida e baixo custo foi introduzida em [7]. A nova abordagem se baseia no uso de duas antenas fixas de feixe largo. A ideia central é que tais antenas, mesmo sendo de feixe largo, possam prover resolução angular de feixe estreito, explorando-se para tanto a correlação mútua entre os sinais recebidos pelas antenas. Mais especificamente, se existe um alvo meteorológico (nuvem ou chuva, por exemplo) na região de intersecção entre as células de resolução das duas antenas, então os sinais recebidos por elas devem ser correlacionados entre si. Do contrário, se não existe alvo na região de intersecção, então os sinais são mutuamente independentes. Assim, o grau de correlação entre os sinais recebidos pelas duas antenas provê a base para um algoritmo de detecção do radar. Quanto maior a correlação, melhor o desempenho esperado. Em [7], essa correlação foi obtida analiticamente em termos de parâmetros físicos do radar, como linha de base entre as antenas, largura de banda de frequência e diretividade das antenas. Em [8], o detector ótimo para o radar em questão foi projetado e analisado em termos das probabilidades de detecção e de falso alarme.

Neste capítulo são apresentados os principais resultados associados ao detector ótimo do radar meteorológico com duas antenas fixas proposto em [8]. Mais especificamente, os seguintes aspectos são revisitados:

- Modelagem estocástica do sistema;
- Formulação do teste de hipóteses;
- Definição do critério de decisão;
- Determinação da variável de decisão;
- Análise de desempenho do detector.

Como já mencionado, nos capítulos subsequentes, esse detector servirá de base para o projeto de um detector ótimo e de dois detectores subótimos que exploram uma terceira antena.

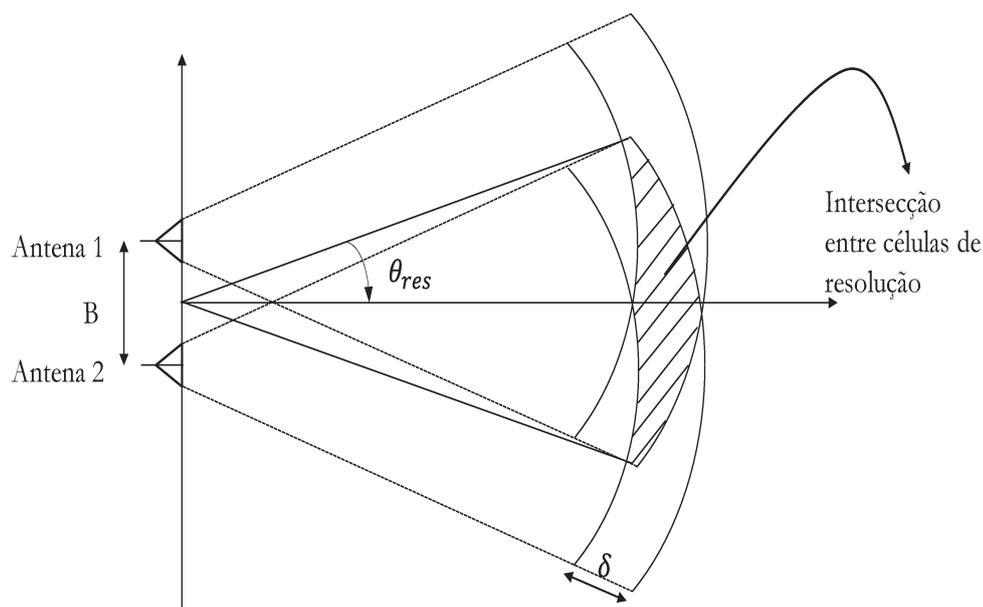


Figura 2.1: Vista superior do sistema de radar com duas antenas fixas.

2.1 Modelagem Estocástica do Sistema

Na Figura 2.1, mostra-se a vista superior do sistema de radar, constituído por duas antenas fixas de feixe largo separadas por uma linha de base de comprimento B . Pode-se notar que, a um dado alcance, o valor de δ e o feixe de cada antena definem uma faixa curva, correspondente à célula de resolução da antena. Observe também que as células de resolução das duas antenas apresentam uma região de intersecção (hachurada), cuja extensão angular estabelece a resolução em azimute θ_{res} do radar. Como descrito em [7], o sinal recebido em cada antena resulta da soma de ecos provenientes de uma grande quantidade de partículas de espalhadores dentro da célula de resolução. Esses espalhadores representam o fenômeno meteorológico sob observação (chuva ou nuvens, por exemplo). Assim, os sinais recebidos pelas antenas 1 e 2 podem ser representados respectivamente como

$$S_{1i} = X_{1i} + jY_{1i} \quad (2.1a)$$

$$S_{2i} = X_{2i} + jY_{2i}, \quad (2.1b)$$

em que i é um índice temporal discreto ($i = 1, 2, \dots, n$), n é a quantidade de amostras observadas em cada antena, X_{1i} e X_{2i} são as componentes em fase para as antenas 1 e 2, respectivamente, e Y_{1i} e Y_{2i} são as componentes em quadratura correspondentes. Como discutido em [7], X_{1i} e Y_{1i} são mutuamente independentes, bem como X_{2i} e Y_{2i} . Além disso, S_{1i} e S_{2i} são independentes de S_{1m} e S_{2m} , $\forall i \neq m$ — considerando que o intervalo de repetição de pulso é muito maior que tempo de coerência associado ao movimento aleatório dos espalhadores. Por outro lado, X_{1i} e X_{2i} (bem como Y_{1i} e Y_{2i}) podem ser mutuamente independentes ou apresentar certo coeficiente de correlação ρ , dependendo da existência ou não de alvo na região de intersecção entre as células de resolução das antenas, respectivamente. Sob condições bem gerais, S_{1i} e S_{2i} podem ser modelados como processos Gaussianos brancos circularmente simétricos e identicamente distribuídos [7], de modo que X_{1i} , X_{2i} , Y_{1i} e Y_{2i} têm média nula e mesma variância σ^2 . Quando há alvo na região de intersecção, S_{1i} e S_{2i} são correlacionados; caso contrário, são independentes.

A fim de simplificar a notação, agrupam-se as componentes em fase e quadratura referentes às múltiplas observações de sinal nas antenas 1 e 2 como

$$\underline{X} = \{X_{11}, X_{21}, \dots, X_{1n}, X_{2n}\} \quad (2.2a)$$

$$\underline{Y} = \{Y_{11}, Y_{21}, \dots, Y_{1n}, Y_{2n}\}. \quad (2.2b)$$

Na análise que segue, $f_Z(\cdot)$ denota a FDP de uma variável aleatória genérica Z , $E\{\cdot\}$ denota média estatística, $\text{VAR}\{\cdot\}$ denota variância e $\text{COV}\{\cdot, \cdot\}$ denota covariância.

2.2 Formulação do Teste de Hipóteses

O problema da detecção em sistemas de radar consiste essencialmente em se decidir pela presença ou ausência de alvo. No radar em questão, a detecção é feita para cada região de intersecção entre as células de resolução das duas antenas. Assim, com base nas observações \underline{X} e \underline{Y} , deve-se decidir por uma dentre as seguintes hipóteses:

- Hipótese \mathcal{H}_0 : não existe alvo. Nesse caso, \underline{X} e \underline{Y} são formados por componentes Gaussianas mutuamente independentes com média nula e variância σ^2 .
- Hipótese \mathcal{H}_1 : existe alvo. Nesse caso, as componentes de \underline{X} e \underline{Y} são também Gaussianas de média nula e variância σ^2 , mas agora X_{1i} e X_{2i} (bem como Y_{1i} e Y_{2i}) são mutuamente correlacionados, com coeficiente de correlação ρ .

Para encontrar a PD e a PFA do sistema de radar em questão, é necessário caracterizar as FDPs conjuntas das observações em (2.2) condicionadas a cada hipótese, \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 . A partir do modelo sistêmico descrito na última seção, e levando-se em conta que as amostras são independentes para instantes distintos, tais FDPs podem ser obtidas como [8]

$$f_{\underline{X}, \underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y} | \mathcal{H}_0) = \frac{\exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2)}{2\sigma^2} \right]}{[(2\pi)^2 \sigma^4]^n} \quad (2.3)$$

$$f_{\underline{X}, \underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y} | \mathcal{H}_1) = \frac{\exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2) - 2\rho \sum_{i=1}^n (X_{1i} X_{2i} + Y_{1i} Y_{2i})}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \right]}{[(2\pi)^2 \sigma^4]^n (1-\rho^2)^n}. \quad (2.4)$$

2.3 Definição do Critério de Decisão

Em um teste de hipóteses binário simples, a decisão ótima — aquela que fornece máxima PD para uma dada PFA — é fornecida pelo critério de Neyman-Pearson, equivalente ao chamado teste por razão de verossimilhança (TRV) [6]. Segundo esse critério, decide-se pela hipótese \mathcal{H}_1 se a razão de verossimilhança $\Lambda(\underline{X}, \underline{Y})$ entre as hipóteses \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_0 exceder um certo limiar γ' , e pela hipótese \mathcal{H}_0 caso contrário, ou seja,

$$\Lambda(\underline{X}, \underline{Y}) \triangleq \frac{f_{\underline{X}, \underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y} | \mathcal{H}_1)}{f_{\underline{X}, \underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y} | \mathcal{H}_0)} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \gamma'. \quad (2.5)$$

Substituindo-se (2.3) e (2.4) em (2.5), tem-se para o cenário em questão que

$$\Lambda(\underline{X}, \underline{Y}) = \frac{\exp \left[\frac{2\rho \sum_{i=1}^n (X_{1i} X_{2i} + Y_{1i} Y_{2i}) - \rho^2 \sum_{i=1}^n (X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2)}{2(1-\rho^2)\sigma^2} \right]}{(1-\rho^2)^n}. \quad (2.6)$$

2.4 Determinação da Variável de Decisão

É possível reescrever o critério de decisão definido por (2.5) e (2.6) em termos de uma função mais simples das observações \underline{X} e \underline{Y} , a qual será confrontada em última instância com um novo limiar de decisão correspondente γ . A essa função dá-se o nome de variável de decisão, denotada aqui por $D_{n,2}$. Levando-se em conta que a função exponencial (em (2.6)) é monotonicamente crescente, uma possibilidade é estabelecer

$$D_{n,2} = 2 \frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i})}{n} - \rho \frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2)}{n}, \quad (2.7)$$

de modo que a regra de decisão em (2.5) pode ser reformulada como

$$D_{n,2} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \gamma. \quad (2.8)$$

2.5 Análise de Desempenho do Detector

Considerando-se um número n muito grande de amostras, tem-se, pelo Teorema Central do Limite [9], que a variável de decisão $D_{n,2}$ pode ser aproximada por uma variável Gaussiana. Nesse caso, sua caracterização estatística é inteiramente fornecida em termos de média e variância. Após as devidas considerações e manipulações algébricas feitas em [8], os resultados finais de média e variância de $D_{n,2}$ condicionados às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 são dados por

$$E \{D_{n,2}|\mathcal{H}_0\} = -4\rho\sigma^2 \quad (2.9)$$

$$E \{D_{n,2}|\mathcal{H}_1\} = 0 \quad (2.10)$$

$$\text{VAR} \{D_{n,2}|\mathcal{H}_0\} = \frac{8(1+\rho^2)\sigma^4}{n} \quad (2.11)$$

$$\text{VAR} \{D_{n,2}|\mathcal{H}_1\} = \frac{8(-1+\rho^2)^2\sigma^4}{n}. \quad (2.12)$$

Quando a variável de decisão é Gaussiana, sabe-se que a PD e a PFA de um detector binário genérico são dadas por [10]

$$\text{PFA} = Q \left(\frac{\gamma - E\{D_{n,2}|\mathcal{H}_1\}}{\sqrt{\text{VAR}\{D_{n,2}|\mathcal{H}_1\}}} \right) \quad (2.13)$$

$$\text{PD} = Q \left(\frac{\gamma - E\{D_{n,2}|\mathcal{H}_0\}}{\sqrt{\text{VAR}\{D_{n,2}|\mathcal{H}_0\}}} \right), \quad (2.14)$$

em que $Q(x) \triangleq \int_x^\infty (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-t^2/2) dt$ é a função de distribuição cumulativa complementar de uma variável normal padrão (média nula e variância unitária). Finalmente, substituindo-se (2.9)–(2.12) em (2.14) e (2.13), a PD e a PFA do detector ótimo com duas

antenas são obtidas como

$$\text{PFA} = Q \left(\frac{\gamma + 4\rho\sigma^2}{\sqrt{\frac{8(1+\rho^2)\sigma^4}{n}}} \right) \quad (2.15)$$

$$\text{PD} = Q \left(\frac{\gamma}{\sqrt{\frac{8(-1+\rho^2)^2\sigma^4}{n}}} \right). \quad (2.16)$$

2.6 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados a modelagem, o projeto e a análise de um detector ótimo para um radar meteorológico com duas antenas fixas de feixe largo. Os resultados apresentados são reproduções de uma proposta inovadora de baixo custo e varredura rápida proposta em [8, 7] para radares meteorológicos. Nos capítulos que seguem, tal proposta é estendida para acomodar uma terceira antena adicional, melhorando o desempenho do radar.

Capítulo 3

Detecção Subótima com Três Antenas Fixas

Neste capítulo, com base na abordagem introduzida em [8, 7] para duas antenas, descreve-se a estrutura e o modo de funcionamento de um radar meteorológico composto por três antenas fixas de feixe largo. Além disso, são apresentados dois projetos de detectores subótimos para o novo radar. Ambos os detectores são analisados em termos de suas probabilidades de detecção e de falso alarme.

3.1 Descrição do Sistema

Neste trabalho, considera-se um radar multiestático composto, por três antenas fixas de feixe largo. As antenas encontram-se alinhadas e separadas duas a duas por uma determinada linha de base B na direção de azimute, como mostrado na Figura 3.1. Como o radar é multiestático, o mesmo arranjo linear é utilizado para transmissão e recepção. Além disso, o sinal transmitido pelo radar é do tipo pulsado, e se faz compressão de pulso na recepção. Observa-se na figura que as células de resolução das três antenas apresentam uma região de intersecção (região hachurada). Essa região determina a resolução em azimute θ_{res} do radar. Note que θ_{res} diminui com o aumento de B .

Assim como ocorre no radar com duas antenas analisado no capítulo anterior, o sinal recebido por cada antena resulta da soma de ecos provenientes de uma grande quantidade de espalhadores dentro da célula de resolução. Com a inclusão de uma terceira antena, os sinais recebidos pelas antenas 1, 2 e 3 podem ser escritos respectivamente como

$$S_{1i} = X_{1i} + jY_{1i} \quad (3.1a)$$

$$S_{2i} = X_{2i} + jY_{2i} \quad (3.1b)$$

$$S_{3i} = X_{3i} + jY_{3i}, \quad (3.1c)$$

em que i representa o tempo discreto ($i = 1, 2, \dots, n$), n o número de amostras observadas em cada antena, X_{ki} é a componente em fase da k -ésima antena ($k = 1, 2, 3$) e Y_{ki} é a componente em quadratura correspondente. A partir das mesmas considerações feitas em [7] para duas antenas, pode-se mostrar que X_{1i} e Y_{1i} são mutuamente independentes, bem como X_{2i} e Y_{2i} , e também X_{3i} e Y_{3i} . Além disso, S_{1i} , S_{2i} e S_{3i} são independentes de S_{1m} , S_{2m} e S_{3m} , $\forall i \neq m$, considerando que o intervalo de repetição de pulso é muito maior que o tempo de coerência associado ao movimento randômico dos espalhadores [12]. Por outro lado, X_{ki} e X_{li} (bem como Y_{ki} e Y_{li}) podem ser mutuamente independentes ou apresentar certo coeficiente de correlação ρ_{kl} , $(k, l) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, dependendo

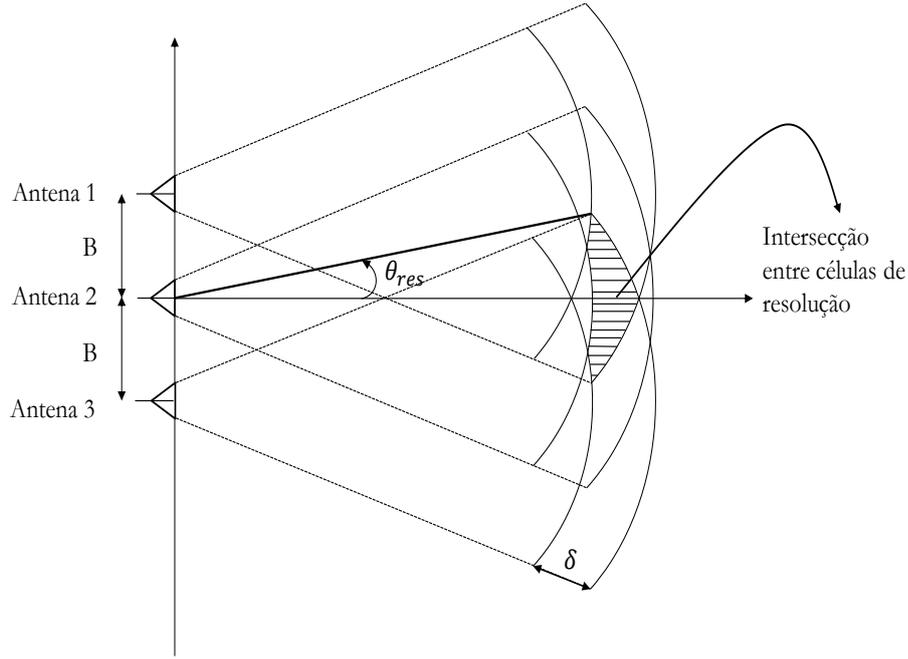


Figura 3.1: Vista superior do radar meteorológico proposto, composto por um arranjo linear de três antenas fixas de feixe largo.

da existência ou ausência de alvo na região de intersecção entre as células de resolução. Finalmente, sob condições bem gerais, S_{1i} , S_{2i} e S_{3i} são processos Gaussianos brancos circularmente simétricos e identicamente distribuídos, de modo que X_{1i} , X_{2i} , X_{3i} , Y_{1i} , Y_{2i} e Y_{3i} têm média nula e mesma variância σ^2 , como demonstrado em [7]. Nesse trabalho, uma análise abrangente dos parâmetros ρ_{kl} e σ^2 foi apresentada em termos dos parâmetros físicos do radar. Portanto, nenhuma discussão adicional envolvendo tais parâmetros será apresentada aqui. Em vez disso, o objetivo desta Dissertação é projetar e analisar o detector ótimo e dois detectores subótimos para o radar em questão, em termos de valores arbitrários de ρ_{12} , ρ_{13} , ρ_{23} e σ^2 . Os detectores subótimos são apresentados neste capítulo; o ótimo, no capítulo seguinte.

3.2 Projeto e Análise dos Detectores Subótimos

A fim de aliviar a notação, as observações referentes aos sinais em (3.1) podem ser representadas de forma compacta como

$$\underline{X} = \{X_{11}, X_{21}, X_{31}, \dots, X_{1n}, X_{2n}, X_{3n}\} \quad (3.2a)$$

$$\underline{Y} = \{Y_{11}, Y_{21}, Y_{31}, \dots, Y_{1n}, Y_{2n}, Y_{3n}\}. \quad (3.2b)$$

3.2.1 Teste de Hipóteses

Como já mencionado no capítulo anterior, a questão central da detecção em sistemas de radar é decidir pela presença ou ausência de alvo. No radar considerado, a questão é posta sobre cada região de intersecção entre as células de resolução das três antenas, para diversas combinações de alcance. Desse modo, varre-se todo o setor iluminado pelas antenas. Trata-se de um teste de hipóteses binário simples, baseado nas observações \underline{X} e \underline{Y} , como segue:

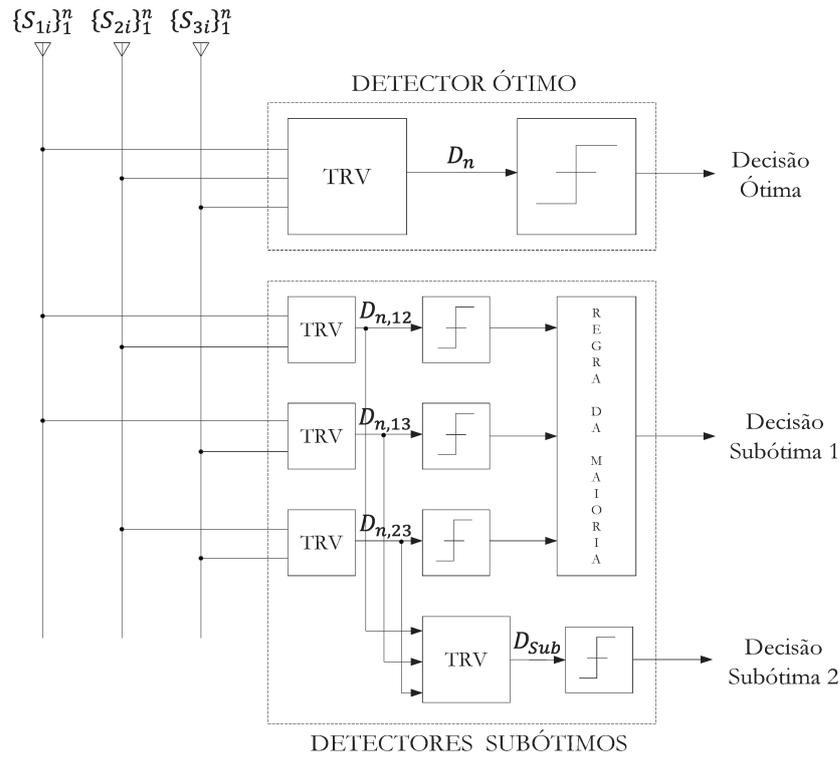


Figura 3.2: Diagrama de blocos dos detectores ótimo e subótimos.

- Hipótese \mathcal{H}_0 : não existe alvo. Nesse caso, de acordo com o modelo de radar descrito na seção anterior, \underline{X} e \underline{Y} são formados por componentes Gaussianas mutuamente independentes com média nula e variância σ^2 .
- Hipótese \mathcal{H}_1 : existe alvo. Nesse caso, \underline{X} e \underline{Y} são ainda independentes entre si, mas agora as componentes X_{ki} e X_{li} (bem como Y_{ki} e Y_{li}), $(k, l) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, são variáveis conjuntamente Gaussianas com média nula, variância σ^2 e coeficiente de correlação ρ_{kl} .

3.2.2 Detector Subótimo 1

3.2.2.1 Critério e Variáveis de Decisão

Os dois detectores subótimos propostos neste trabalho estão ilustrados na Fig. 3.2, bem como o detector ótimo a ser considerado no próximo capítulo. No detector subótimo 1, os sinais de cada par (k, l) de antenas, $(k, l) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, originam uma variável de decisão parcial $D_{n,kl}$, obtida exatamente como no detector ótimo para duas antenas proposto em [8], apresentado no capítulo anterior. Mais especificamente, $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e

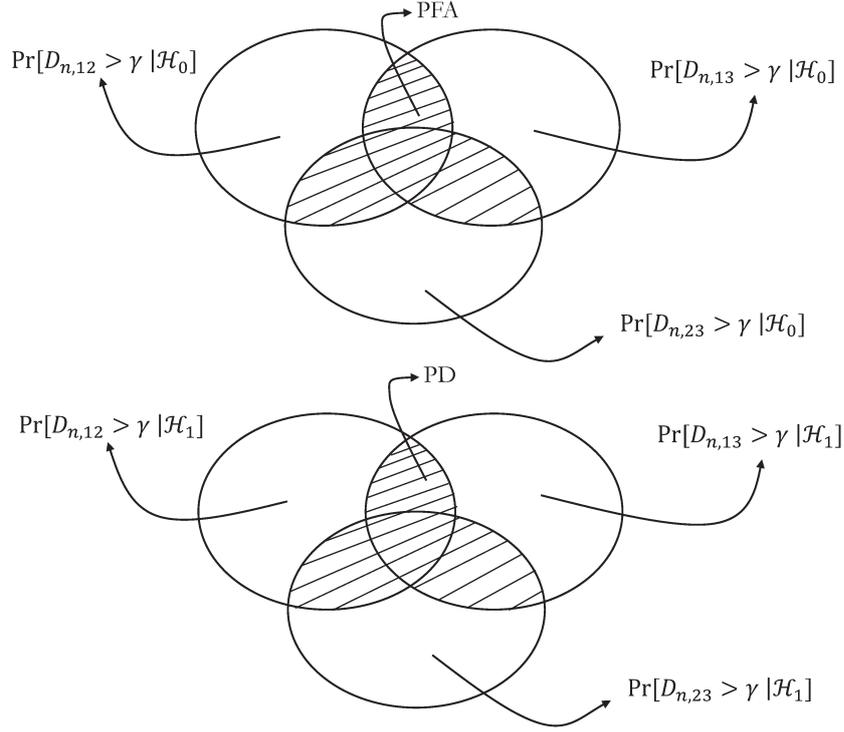


Figura 3.3: Cálculo da PFA e PD para o detector subótimo 1.

$D_{n,23}$ são obtidas como [8]

$$D_{n,12} = \frac{1}{n} \left(2 \sum_{i=1}^n (X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}) - \rho_{12} \sum_{i=1}^n (X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2) \right) \quad (3.3)$$

$$D_{n,13} = \frac{1}{n} \left(2 \sum_{i=1}^n (X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}) - \rho_{13} \sum_{i=1}^n (X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2) \right) \quad (3.4)$$

$$D_{n,23} = \frac{1}{n} \left(2 \sum_{i=1}^n (X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}) - \rho_{23} \sum_{i=1}^n (X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2) \right). \quad (3.5)$$

A partir de $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$, tomam-se então decisões parciais, comparando-se cada variável com um certo limiar γ , assim como em (2.8). Posteriormente, a regra da maioria é aplicada sobre as decisões parciais com o intuito de se obter a decisão final do sistema. Assim, decide-se por \mathcal{H}_1 se pelo menos duas das decisões parciais tiverem decidido por \mathcal{H}_1 . Caso contrário, decide-se por \mathcal{H}_0 .

3.2.2.2 Desempenho do Detector

Como ilustrado na região hachurada da Fig. 3.3, a decisão por \mathcal{H}_1 corresponde à união das intersecções entre cada par de eventos $D_{n,12} > \gamma$, $D_{n,13} > \gamma$ e $D_{n,23} > \gamma$. Desse modo,

PFA e PD podem ser formuladas como

$$\begin{aligned} \text{PFA} &= \Pr [(D_{n,12} > \gamma \cap D_{n,13} > \gamma) \\ &\quad \cup (D_{n,13} > \gamma \cap D_{n,23} > \gamma) \\ &\quad \cup (D_{n,23} > \gamma \cap D_{n,12} > \gamma) | \mathcal{H}_0] \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \text{PD} &= \Pr [(D_{n,12} > \gamma \cap D_{n,13} > \gamma) \\ &\quad \cup (D_{n,13} > \gamma \cap D_{n,23} > \gamma) \\ &\quad \cup (D_{n,23} > \gamma \cap D_{n,12} > \gamma) | \mathcal{H}_1]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Considerando-se o cálculo da probabilidade de eventos não disjuntos [6], as expressões (3.6) e (3.7) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \text{PFA} &= \Pr [(D_{n,12} > \gamma) \cap (D_{n,13} > \gamma) | \mathcal{H}_0] \\ &\quad + \Pr [(D_{n,13} > \gamma) \cap (D_{n,23} > \gamma) | \mathcal{H}_0] \\ &\quad + \Pr [(D_{n,23} > \gamma) \cap (D_{n,12} > \gamma) | \mathcal{H}_0] \\ &\quad - 2 \Pr [(D_{n,12} > \gamma) \cap (D_{n,13} > \gamma) \cap (D_{n,23} > \gamma) | \mathcal{H}_0] \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{PD} &= \Pr [(D_{n,12} > \gamma) \cap (D_{n,13} > \gamma) | \mathcal{H}_1] \\ &\quad + \Pr [(D_{n,13} > \gamma) \cap (D_{n,23} > \gamma) | \mathcal{H}_1] \\ &\quad + \Pr [(D_{n,23} > \gamma) \cap (D_{n,12} > \gamma) | \mathcal{H}_1] \\ &\quad - 2 \Pr [(D_{n,12} > \gamma) \cap (D_{n,13} > \gamma) \cap (D_{n,23} > \gamma) | \mathcal{H}_1], \end{aligned} \quad (3.9)$$

e, portanto, representadas em termos das FDPs conjuntas de $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$ como

$$\begin{aligned} \text{PFA} &= \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f_{D_{n,12}, D_{n,13}}(D_{n,12}, D_{n,13} | \mathcal{H}_0) dD_{n,12} dD_{n,13} \\ &\quad + \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f_{D_{n,12}, D_{n,23}}(D_{n,12}, D_{n,23} | \mathcal{H}_0) dD_{n,12} dD_{n,23} \\ &\quad + \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f_{D_{n,13}, D_{n,23}}(D_{n,13}, D_{n,23} | \mathcal{H}_0) dD_{n,13} dD_{n,23} \\ &\quad - 2 \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f_{D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23}}(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23} | \mathcal{H}_0) dD_{n,12} dD_{n,13} dD_{n,23} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \text{PD} &= \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f_{D_{n,12}, D_{n,13}}(D_{n,12}, D_{n,13} | \mathcal{H}_1) dD_{n,12} dD_{n,13} \\ &\quad + \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f_{D_{n,12}, D_{n,23}}(D_{n,12}, D_{n,23} | \mathcal{H}_1) dD_{n,12} dD_{n,23} \\ &\quad + \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f_{D_{n,13}, D_{n,23}}(D_{n,13}, D_{n,23} | \mathcal{H}_1) dD_{n,13} dD_{n,23} \\ &\quad - 2 \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f_{D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23}}(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23} | \mathcal{H}_1) dD_{n,12} dD_{n,13} dD_{n,23}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Faz-se então necessário especificar tais FDPs conjuntas para cada uma das hipóteses. Para um número n de amostras suficientemente elevado, segue, pelo Teorema Central do Limite, que $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$ se aproximam de variáveis conjuntamente Gaussianas.

Tabela 3.1: Elementos do vetor de médias e da matriz de covariância de $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$, condicionados às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 .

\mathcal{H}_0	\mathcal{H}_1
$m_{1 \mathcal{H}_0} = -4\sigma^2\rho_{12}$	$m_{1 \mathcal{H}_1} = 0$
$m_{2 \mathcal{H}_0} = -4\sigma^2\rho_{13}$	$m_{2 \mathcal{H}_1} = 0$
$m_{3 \mathcal{H}_0} = -4\sigma^2\rho_{23}$	$m_{3 \mathcal{H}_1} = 0$
$C_{11 \mathcal{H}_0} = \frac{8\sigma^4}{n}(1 + \rho_{12}^2)$	$C_{11 \mathcal{H}_1} = 8\sigma^4(-1 + \rho_{12}^2)^2/n$
$C_{22 \mathcal{H}_0} = \frac{8\sigma^4}{n}(1 + \rho_{13}^2)$	$C_{22 \mathcal{H}_1} = 8\sigma^4(-1 + \rho_{13}^2)^2/n$
$C_{33 \mathcal{H}_0} = \frac{8\sigma^4}{n}(1 + \rho_{23}^2)$	$C_{33 \mathcal{H}_1} = 8\sigma^4(-1 + \rho_{23}^2)^2/n$
$C_{12 \mathcal{H}_0} = \frac{4\sigma^4}{n}\rho_{12}\rho_{13}$	$C_{12 \mathcal{H}_1} = \frac{4\sigma^4}{n}(\rho_{12}\rho_{13}(-1 + \rho_{12}^2 + \rho_{13}^2) - 2\rho_{23}(-1 + \rho_{12}^2 + \rho_{13}^2) + \rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}^2)$
$C_{13 \mathcal{H}_0} = \frac{4\sigma^4}{n}\rho_{12}\rho_{23}$	$C_{13 \mathcal{H}_1} = \frac{4\sigma^4}{n}(\rho_{12}\rho_{23}(-1 + \rho_{12}^2 + \rho_{23}^2) - 2\rho_{13}(-1 + \rho_{12}^2 + \rho_{23}^2) + \rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}^2)$
$C_{23 \mathcal{H}_0} = \frac{4\sigma^4}{n}\rho_{13}\rho_{23}$	$C_{23 \mathcal{H}_1} = \frac{4\sigma^4}{n}(\rho_{13}\rho_{23}(-1 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2) - 2\rho_{12}(-1 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2) + \rho_{12}^2\rho_{13}\rho_{23}^2)$

Assim, é suficiente determinar o vetor de média

$$m \triangleq \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

e a matriz (simétrica) de covariância

$$C \triangleq \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

O procedimento matemático para se determinar m e C em termos dos parâmetros de entrada do sistema (ρ_{12} , ρ_{13} , ρ_{23} e σ^2) é muito extenso e entediante, como descrito no Apêndice A. Os resultados finais estão apresentados na Tabela 3.1, que lista os elementos de m e C para cada uma das hipóteses, \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 . As FDPs conjuntas correspondentes, necessárias em (3.10) e (3.11), são dadas por

$$f_{D_{n,12}, D_{n,13}}(D_{n,12}, D_{n,13}) = \frac{1}{(2\pi)^2 \det(C_1)} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} D_{n,12} - m_1 \\ D_{n,13} - m_2 \end{bmatrix}^T C_1^{-1} \begin{bmatrix} D_{n,12} - m_1 \\ D_{n,13} - m_2 \end{bmatrix} \right] \quad (3.14)$$

$$f_{D_{n,12}, D_{n,23}}(D_{n,12}, D_{n,23}) = \frac{1}{(2\pi)^2 \det(C_2)} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} D_{n,12} - m_1 \\ D_{n,23} - m_3 \end{bmatrix}^T C_2^{-1} \begin{bmatrix} D_{n,12} - m_1 \\ D_{n,23} - m_3 \end{bmatrix} \right] \quad (3.15)$$

$$f_{D_{n,13}, D_{n,23}}(D_{n,13}, D_{n,23}) = \frac{1}{(2\pi)^2 \det(C_3)} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} D_{n,13} - m_2 \\ D_{n,23} - m_3 \end{bmatrix}^T C_3^{-1} \begin{bmatrix} D_{n,13} - m_2 \\ D_{n,23} - m_3 \end{bmatrix} \right] \quad (3.16)$$

$$f_{D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23}}(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23}) = \frac{1}{(2\pi)^3 \det(C)} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} D_{n,12} - m_1 \\ D_{n,13} - m_2 \\ D_{n,23} - m_3 \end{bmatrix}^T C^{-1} \begin{bmatrix} D_{n,12} - m_1 \\ D_{n,13} - m_2 \\ D_{n,23} - m_3 \end{bmatrix} \right], \quad (3.17)$$

em que

$$C_1 \triangleq \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}, \quad C_2 \triangleq \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{13} & C_{33} \end{bmatrix}, \quad C_3 \triangleq \begin{bmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

e $[\cdot]^T$ indica transposição. Aparentemente, não há solução em forma fechada para PFA e PD dadas em (3.10) e (3.11), de modo que essas expressões devem ser avaliadas numericamente.

3.2.3 Detector Subótimo 2

3.2.3.1 Critério de Decisão

No detector subótimo 1, a decisão final é tomada a partir de variáveis de decisão parciais $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$ para cada par de antenas. Na verdade, partindo-se dessas mesmas variáveis, é possível melhorar a decisão. Isso é feito no detector subótimo 2, como ilustrado na Figura 3.2. Para tanto, em vez de se tomar e combinar (via regra da maioria ou qualquer outra regra) as decisões parciais, usam-se as variáveis de decisão parciais para compor um novo teste de hipóteses segundo o critério de Neyman-Pearson.

Como já mencionado na seção 3.2.2, para um número suficientemente elevado de amostras, $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$ podem ser aproximadas por variáveis Gaussianas com PDF conjunta dada em (3.17), estando o vetor de média e a matriz de covariância definidos na Tabela 3.1 para cada hipótese, \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 . Segundo o critério de Neyman-Pearson, decide-se pela hipótese \mathcal{H}_1 se a razão de verossimilhança $\Lambda(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23})$ for maior que um certo limiar γ' , e pela hipótese \mathcal{H}_0 caso contrário, ou seja,

$$\Lambda(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23}) \triangleq \frac{f_{D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23}}(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23} | \mathcal{H}_1)}{f_{D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23}}(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23} | \mathcal{H}_0)} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \gamma'. \quad (3.19)$$

Substituindo-se (3.17) em (3.19), tem-se

$$\Lambda(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23}) = \frac{\left[\frac{\det(C_{\mathcal{H}_0})}{\det(C_{\mathcal{H}_1})} \right] \times \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} D_{n,12} - m_{1|\mathcal{H}_1} \\ D_{n,13} - m_{2|\mathcal{H}_1} \\ D_{n,23} - m_{3|\mathcal{H}_1} \end{bmatrix}^T C_{\mathcal{H}_1}^{-1} \begin{bmatrix} D_{n,12} - m_{1|\mathcal{H}_1} \\ D_{n,13} - m_{2|\mathcal{H}_1} \\ D_{n,23} - m_{3|\mathcal{H}_1} \end{bmatrix} \right]}{\exp \left[-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} D_{n,12} - m_{1|\mathcal{H}_0} \\ D_{n,13} - m_{2|\mathcal{H}_0} \\ D_{n,23} - m_{3|\mathcal{H}_0} \end{bmatrix}^T C_{\mathcal{H}_0}^{-1} \begin{bmatrix} D_{n,12} - m_{1|\mathcal{H}_0} \\ D_{n,13} - m_{2|\mathcal{H}_0} \\ D_{n,23} - m_{3|\mathcal{H}_0} \end{bmatrix} \right]}, \quad (3.20)$$

em que os valores das médias e das matrizes de covariância condicionados à cada hipótese estão dados na Tabela 3.1.

3.2.3.2 Variável de Decisão

A fim de simplificar a análise de desempenho, e considerando que a função exponencial é monotonicamente crescente, uma variável de decisão D_{Sub} pode ser definida a partir de (3.20) como

$$D_{Sub} = D'_{Sub} K_{Sub}, \quad (3.21)$$

em que

$$D'_{Sub} = -\frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} D_{n,12} - m_{1|\mathcal{H}_1} \\ D_{n,13} - m_{2|\mathcal{H}_1} \\ D_{n,23} - m_{3|\mathcal{H}_1} \end{array} \right]^T C_{\mathcal{H}_1}^{-1} \left[\begin{array}{c} D_{n,12} - m_{1|\mathcal{H}_1} \\ D_{n,13} - m_{2|\mathcal{H}_1} \\ D_{n,23} - m_{3|\mathcal{H}_1} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} D_{n,12} \\ D_{n,13} \\ D_{n,23} \end{array} \right]^T C_{\mathcal{H}_0}^{-1} \left[\begin{array}{c} D_{n,12} \\ D_{n,13} \\ D_{n,23} \end{array} \right], \quad (3.22)$$

e K_{Sub} é uma constante dada por

$$K_{Sub} = 2 (C_{13|\mathcal{H}_0}^2 C_{22|\mathcal{H}_0} - 2C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0} + C_{12|\mathcal{H}_0}^2 C_{33|\mathcal{H}_0} + C_{11|\mathcal{H}_0} (C_{23|\mathcal{H}_0}^2 - C_{22|\mathcal{H}_0} C_{33|\mathcal{H}_0})) \\ \times (C_{13|\mathcal{H}_1}^2 C_{22|\mathcal{H}_1} - 2C_{12|\mathcal{H}_1} C_{13|\mathcal{H}_1} C_{23|\mathcal{H}_1} + C_{12|\mathcal{H}_1}^2 C_{33|\mathcal{H}_1} + C_{11|\mathcal{H}_1} (C_{23|\mathcal{H}_1}^2 - C_{22|\mathcal{H}_1} C_{33|\mathcal{H}_1})), \quad (3.23)$$

escolhida de modo a cancelar o denominador de D'_{Sub} em (3.22). Assim, comparar a razão de verossimilhança original $\Lambda(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23})$ com um limiar γ' é equivalente a comparar a variável de decisão D_{Sub} com outro limiar correspondente γ . Portanto, a regra de decisão em (3.19) pode ser reescrita como

$$D_{Sub} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \gamma. \quad (3.24)$$

Após as devidas simplificações, a variável de decisão D_{Sub} é reduzida para

$$D_{Sub} = D_{n,12}^2 A_c + D_{n,12} B_c + D_{n,13}^2 C_c + D_{n,13} D_c + D_{n,23}^2 E_c + D_{n,23} F_c \\ + D_{n,12} D_{n,13} G_c + D_{n,12} D_{n,23} H_c + D_{n,13} D_{n,23} I_c, \quad (3.25)$$

em que $A_c, B_c, C_c, D_c, E_c, F_c, G_c, H_c$ e I_c são constantes que dependem dos vetores de médias e das matrizes de covariância condicionais de $D_{n,12}, D_{n,13}$ e $D_{n,23}$, fornecidos na Tabela 3.1. Mais especificamente, tais constantes são dadas pelas seguintes expressões:

$$A_c = (-2C_{12|\mathcal{H}_1} C_{13|\mathcal{H}_1} C_{23|\mathcal{H}_1} (C_{23|\mathcal{H}_0}^2 - C_{22|\mathcal{H}_0} C_{33|\mathcal{H}_0}) + C_{12|\mathcal{H}_1}^2 C_{33|\mathcal{H}_1} (C_{23|\mathcal{H}_0}^2 - C_{22|\mathcal{H}_0} C_{33|\mathcal{H}_0}) \\ - C_{23|\mathcal{H}_1}^2 (C_{13|\mathcal{H}_0}^2 C_{22|\mathcal{H}_0} - 2C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0} + C_{12|\mathcal{H}_0}^2 C_{33|\mathcal{H}_0} - (C_{11|\mathcal{H}_1} - C_{11|\mathcal{H}_0})) \\ \times (C_{23|\mathcal{H}_0}^2 - C_{22|\mathcal{H}_0} C_{33|\mathcal{H}_0})) + C_{22|\mathcal{H}_1} (C_{13|\mathcal{H}_1}^2 (C_{23|\mathcal{H}_0}^2 - C_{22|\mathcal{H}_0} C_{33|\mathcal{H}_0}) + C_{33|\mathcal{H}_1} (C_{13|\mathcal{H}_0}^2 C_{22|\mathcal{H}_0} \\ - 2C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0} + C_{12|\mathcal{H}_0}^2 C_{33|\mathcal{H}_0} - (C_{11|\mathcal{H}_1} - C_{11|\mathcal{H}_0}) (C_{23|\mathcal{H}_0}^2 - C_{22|\mathcal{H}_0} C_{33|\mathcal{H}_0})))) \quad (3.26)$$

$$B_c = 2 (C_{13|\mathcal{H}_1}^2 C_{22|\mathcal{H}_1} - 2C_{12|\mathcal{H}_1} C_{13|\mathcal{H}_1} C_{23|\mathcal{H}_1} + C_{12|\mathcal{H}_1}^2 C_{33|\mathcal{H}_1} + C_{11|\mathcal{H}_1} (C_{23|\mathcal{H}_1}^2 - C_{22|\mathcal{H}_1} C_{33|\mathcal{H}_1})) \\ \times (-C_{23|\mathcal{H}_0}^2 \mu_{1|\mathcal{H}_0} - C_{12|\mathcal{H}_0} C_{33|\mathcal{H}_0} m_{2|\mathcal{H}_0} + C_{23|\mathcal{H}_0} (C_{13|\mathcal{H}_0} m_{2|\mathcal{H}_0} + C_{12|\mathcal{H}_0} m_{3|\mathcal{H}_0}) + C_{22|\mathcal{H}_0} \\ \times (C_{33|\mathcal{H}_0} m_{1|\mathcal{H}_0} - C_{13|\mathcal{H}_0} m_{3|\mathcal{H}_0})) \quad (3.27)$$

$$C_c = (-2C_{12|\mathcal{H}_1} C_{13|\mathcal{H}_1} C_{23|\mathcal{H}_1} (C_{13|\mathcal{H}_0}^2 - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{33|\mathcal{H}_0}) + C_{12|\mathcal{H}_1}^2 C_{33|\mathcal{H}_1} (C_{1|\mathcal{H}_0}^2 - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{33|\mathcal{H}_0}) \\ + C_{13|\mathcal{H}_1}^2 (C_{22|\mathcal{H}_1} C_{13|\mathcal{H}_0}^2 - C_{13|\mathcal{H}_0}^2 C_{22|\mathcal{H}_0} + 2C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0} - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}^2 - (C_{12|\mathcal{H}_0}^2 \\ + C_{11|\mathcal{H}_0} (C_{22|\mathcal{H}_1} - C_{22|\mathcal{H}_0})) C_{33|\mathcal{H}_0}) + C_{11|\mathcal{H}_1} (C_{23|\mathcal{H}_1}^2 (C_{13|\mathcal{H}_0}^2 - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{33|\mathcal{H}_0}) + C_{33|\mathcal{H}_1} \\ \times (-C_{22|\mathcal{H}_1} C_{13|\mathcal{H}_0}^2 + C_{13|\mathcal{H}_0}^2 C_{22|\mathcal{H}_0} - 2C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0} + C_{11|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}^2 + (C_{12|\mathcal{H}_0}^2 + C_{11|\mathcal{H}_0} \\ \times (C_{22|\mathcal{H}_1} - C_{22|\mathcal{H}_0})) C_{33|\mathcal{H}_0}))) \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
D_c &= 2 (C_{13|\mathcal{H}_1}^2 C_{22|\mathcal{H}_1} - 2C_{12|\mathcal{H}_1} C_{13|\mathcal{H}_1} C_{23|\mathcal{H}_1} + C_{12|\mathcal{H}_1}^2 C_{33|\mathcal{H}_1} + C_{11|\mathcal{H}_1} (C_{23|\mathcal{H}_1}^2 - C_{22|\mathcal{H}_1} C_{33|\mathcal{H}_1})) \\
&\quad \times (-C_{12|\mathcal{H}_0} C_{33|\mathcal{H}_0} \mu_{1|\mathcal{H}_0} - C_{13|\mathcal{H}_0}^2 \mu_{2|\mathcal{H}_0} + C_{13|\mathcal{H}_0} (C_{23|\mathcal{H}_0} \mu_{1|\mathcal{H}_0} + C_{12|\mathcal{H}_0} \mu_{3|\mathcal{H}_0}) + C_{11|\mathcal{H}_0} \\
&\quad \times (C_{33|\mathcal{H}_0} \mu_{2|\mathcal{H}_0} - C_{23|\mathcal{H}_0} \mu_{3|\mathcal{H}_0}))
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
E_c &= (C_{13|\mathcal{H}_1}^2 C_{22|\mathcal{H}_1} (C_{12|\mathcal{H}_0}^2 - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0}) - 2C_{12|\mathcal{H}_1} C_{13|\mathcal{H}_1} C_{23|\mathcal{H}_1} (C_{12|\mathcal{H}_0}^2 - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0}) \\
&\quad + C_{12|\mathcal{H}_1}^2 (-C_{13|\mathcal{H}_0}^2 C_{22|\mathcal{H}_0} + C_{33|\mathcal{H}_1} (C_{12|\mathcal{H}_0}^2 - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0}) + 2C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0} \\
&\quad - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}^2 + (-C_{12|\mathcal{H}_0}^2 + C_{11|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0}) C_{33|\mathcal{H}_0}) + C_{11|\mathcal{H}_1} (C_{23|\mathcal{H}_1}^2 (C_{12|\mathcal{H}_0}^2 - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0}) \\
&\quad + C_{22|\mathcal{H}_1} (C_{13|\mathcal{H}_0}^2 C_{22|\mathcal{H}_0} + C_{33|\mathcal{H}_1} (-C_{12|\mathcal{H}_0}^2 + C_{11|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0}) - 2C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0} \\
&\quad + C_{11|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}^2 + (C_{12|\mathcal{H}_0}^2 - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0}) C_{33|\mathcal{H}_0}))
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
F_c &= 2 (C_{13|\mathcal{H}_1}^2 C_{22|\mathcal{H}_1} - 2C_{12|\mathcal{H}_1} C_{13|\mathcal{H}_1} C_{23|\mathcal{H}_1} + C_{12|\mathcal{H}_1}^2 C_{33|\mathcal{H}_1} + C_{11|\mathcal{H}_1} (C_{23|\mathcal{H}_1}^2 - C_{22|\mathcal{H}_1} C_{33|\mathcal{H}_1})) \\
&\quad \times (C_{23|\mathcal{H}_0} (C_{12|\mathcal{H}_0} m_{1|\mathcal{H}_0} - C_{11|\mathcal{H}_0} m_{2|\mathcal{H}_0}) + C_{13|\mathcal{H}_0} (-C_{22|\mathcal{H}_0} m_{1|\mathcal{H}_0} + C_{12|\mathcal{H}_0} m_{2|\mathcal{H}_0}) \\
&\quad \times (-C_{12|\mathcal{H}_0}^2 + C_{11|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0}) m_{3|\mathcal{H}_0})
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
G_c &= -2 (C_{13|\mathcal{H}_1}^2 C_{22|\mathcal{H}_1} (C_{13|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0} - C_{12|\mathcal{H}_0} C_{33|\mathcal{H}_0}) + C_{12|\mathcal{H}_1}^2 C_{33|\mathcal{H}_1} (C_{13|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0} \\
&\quad - C_{12|\mathcal{H}_0} C_{33|\mathcal{H}_0}) + C_{11|\mathcal{H}_1} (C_{23|\mathcal{H}_1}^2 - C_{22|\mathcal{H}_1} C_{33|\mathcal{H}_1}) (C_{13|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0} - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{33|\mathcal{H}_0}) \\
&\quad + C_{12|\mathcal{H}_1} C_{33|\mathcal{H}_1} (C_{13|\mathcal{H}_0}^2 C_{22|\mathcal{H}_0} - 2C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0} + C_{11|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}^2 + (C_{12|\mathcal{H}_0}^2 \\
&\quad - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0}) C_{33|\mathcal{H}_0}) - C_{13|\mathcal{H}_1} C_{23|\mathcal{H}_1} (C_{13|\mathcal{H}_0}^2 C_{22|\mathcal{H}_0} + 2(C_{12|\mathcal{H}_1} - C_{12|\mathcal{H}_0}) C_{13|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0} \\
&\quad + C_{12|\mathcal{H}_0} (-2C_{12|\mathcal{H}_1} + C_{12|\mathcal{H}_0}) C_{33|\mathcal{H}_0} + C_{11|\mathcal{H}_0} (C_{23|\mathcal{H}_0}^2 - C_{22|\mathcal{H}_0} C_{33|\mathcal{H}_0}))
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
H_c &= 2 (C_{13|\mathcal{H}_1}^2 C_{22|\mathcal{H}_1} (C_{13|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0} - C_{12|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}) + C_{11|\mathcal{H}_1} (C_{23|\mathcal{H}_1}^2 - C_{22|\mathcal{H}_1} C_{33|\mathcal{H}_1})) \\
&\quad \times (C_{13|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0} - C_{12|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}) + C_{13|\mathcal{H}_1} (2C_{12|\mathcal{H}_1} C_{23|\mathcal{H}_1} (-C_{13|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0} + C_{12|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}) \\
&\quad - C_{22|\mathcal{H}_1} (C_{13|\mathcal{H}_0}^2 C_{22|\mathcal{H}_0} - 2C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0} + C_{11|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}^2 + (C_{12|\mathcal{H}_0}^2 \\
&\quad - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0}) C_{33|\mathcal{H}_0})) + C_{12|\mathcal{H}_1} (C_{12|\mathcal{H}_1} C_{33|\mathcal{H}_1} (C_{13|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0} - C_{12|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}) + C_{23|\mathcal{H}_1} \\
&\quad \times (C_{13|\mathcal{H}_0}^2 C_{22|\mathcal{H}_0} - 2C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0} + C_{11|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}^2 + (C_{12|\mathcal{H}_0}^2 - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0}) C_{33|\mathcal{H}_0}))
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
I_c &= -2 (C_{13|\mathcal{H}_1}^2 C_{22|\mathcal{H}_1} (C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}) + C_{12|\mathcal{H}_1}^2 C_{33|\mathcal{H}_1} (C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} \\
&\quad - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}) - C_{12|\mathcal{H}_1} C_{13|\mathcal{H}_1} (C_{13|\mathcal{H}_0}^2 C_{22|\mathcal{H}_0} - 2C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0} + C_{11|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}^2 \\
&\quad + 2C_{23|\mathcal{H}_1} (C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}) + (C_{12|\mathcal{H}_0}^2 - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0}) C_{33|\mathcal{H}_0}) + C_{11|\mathcal{H}_1} \\
&\quad \times (C_{23|\mathcal{H}_1}^2 (C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}) + C_{22|\mathcal{H}_1} C_{33|\mathcal{H}_1} (-C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} + C_{11|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}) \\
&\quad + C_{23|\mathcal{H}_1} (C_{13|\mathcal{H}_0}^2 C_{22|\mathcal{H}_0} - 2C_{12|\mathcal{H}_0} C_{13|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0} + C_{11|\mathcal{H}_0} C_{23|\mathcal{H}_0}^2 + (C_{12|\mathcal{H}_0}^2 \\
&\quad - C_{11|\mathcal{H}_0} C_{22|\mathcal{H}_0}) C_{33|\mathcal{H}_0}))
\end{aligned} \tag{3.34}$$

3.2.3.3 Desempenho do Detector

Observa-se em (3.25) que a variável de decisão D_{Sub} é uma soma ponderada de $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$, dos seus valores quadráticos $D_{n,12}^2$, $D_{n,13}^2$ e $D_{n,23}^2$, e dos termos cruzados $D_{n,12}D_{n,13}$, $D_{n,12}D_{n,23}$ e $D_{n,13}D_{n,23}$. Como resultado, mesmo para um número arbitrariamente elevado de amostras — quando $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$ se aproximam de variáveis Gaussianas — D_{Sub} NÃO pode ser também aproximado por uma Gaussiana. Em vez disso, a determinação da FDP de D_{Sub} deve ser feita via força bruta, por meio de uma transformação de variáveis. Em particular, adota-se aqui a transformação de $(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23})$ para $(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{Sub})$.

A fim de facilitar o entendimento da transformação, denota-se como $W(\cdot, \cdot, \cdot)$ a função que mapeia $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$ em D_{Sub} , definida explicitamente por (3.25), e como

$W_1^{-1}(\cdot, \cdot, \cdot)$ e $W_2^{-1}(\cdot, \cdot, \cdot)$ as duas raízes (são duas por conta do termo quadrático) que mapeiam $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e D_{Sub} de volta em $D_{n,23}$, obtidas como

$$W_1^{-1}(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{Sub}) = \frac{1}{2E_c} \left(-H_c D_{n,12} - I_c D_{n,13} - F_c + (4E_c (- (A_c D_{n,12}^2) - B_c D_{n,12} - C_c D_{n,13}^2 - G_c D_{n,13} D_{n,12} - D_c D_{n,13} + D_{Sub}) + (- (H_c D_{n,12}) - I_c D_{n,13} - F_c)^2)^{1/2} \right) \quad (3.35)$$

$$W_2^{-1}(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{Sub}) = \frac{1}{2E_c} \left(-H_c D_{n,12} - I_c D_{n,13} - F_c - (4E_c (- (A_c D_{n,12}^2) - B_c D_{n,12} - C_c D_{n,13}^2 - G_c D_{n,13} D_{n,12} - D_c D_{n,13} + D_{Sub}) + (- (H_c D_{n,12}) - I_c D_{n,13} - F_c)^2)^{1/2} \right). \quad (3.36)$$

A partir dessas definições, a FDP conjunta de $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e D_{Sub} pode ser escrita como

$$f_{D_{n,12}, D_{n,13}, D_{Sub}}(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{Sub}) = \frac{f_{D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23}}(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23})}{|\det(J)|} \Big|_{D_{n,23}=W_1^{-1}(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{Sub})} + \frac{f_{D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23}}(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23})}{|\det(J)|} \Big|_{D_{n,23}=W_2^{-1}(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{Sub})}, \quad (3.37)$$

em que a PDF conjunta de $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$ é definida por (3.17) e pelos parâmetros na Tabela 3.1, J representa a matriz Jacobiana da transformação, dada por

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_{n,12}}{\partial D_{n,12}} & \frac{\partial D_{n,12}}{\partial D_{n,13}} & \frac{\partial D_{n,12}}{\partial D_{n,23}} \\ \frac{\partial D_{n,13}}{\partial D_{n,12}} & \frac{\partial D_{n,13}}{\partial D_{n,13}} & \frac{\partial D_{n,13}}{\partial D_{n,23}} \\ \frac{\partial D_{Sub}}{\partial D_{n,12}} & \frac{\partial D_{Sub}}{\partial D_{n,13}} & \frac{\partial D_{Sub}}{\partial D_{n,23}} \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

e $\det(\cdot)$ representa a operação de determinante. Após as devidas simplificações, obtém-se

$$\det(J) = F_c + H_c D_{n,12} + I_c D_{n,13} + 2E_c D_{n,23}. \quad (3.39)$$

Uma vez definida a FDP conjunta de D_{Sub} , $D_{n,12}$ e $D_{n,13}$, como em (3.37), é possível encontrar a PFA e a PD do detector integrando-se tal PDF sobre todo o suporte de $D_{n,12}$ e $D_{n,13}$, e para D_{Sub} variando entre o limiar γ e infinito. Assim, tem-se finalmente que

$$\text{PFA} = \int_{\gamma}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{D_{n,12}, D_{n,13}, D_{Sub}}(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{Sub} | \mathcal{H}_0) dD_{n,12} dD_{n,13} dD_{Sub} \quad (3.40)$$

$$\text{PD} = \int_{\gamma}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{D_{n,12}, D_{n,13}, D_{Sub}}(D_{n,12}, D_{n,13}, D_{Sub} | \mathcal{H}_1) dD_{n,12} dD_{n,13} dD_{Sub}. \quad (3.41)$$

Aparentemente, não é possível obter solução fechada para essas expressões, de modo que se deve recorrer a rotinas numéricas de integração.

3.3 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados e analisados dois detectores subótimos para um radar meteorológico com três antenas fixas de feixe largo.

O primeiro detector foi projetado com base nas decisões parciais majoritárias de detectores ótimos aplicados a cada par de antenas do radar. Desse modo, o radar acusa uma detecção se e somente se pelo menos duas decisões parciais indica a presença de alvo. Determinou-se uma expressão geral para a probabilidade do evento de detecção, em termos de eventos conjuntos envolvendo as variáveis de decisão parciais. Com base nessa expressão, foram obtidas formulações integrais para as probabilidades de detecção e de falso alarme do detector.

No segundo detector, em lugar de se combinar as decisões parciais para cada par de antenas, um novo teste de Neyman-Pearson foi elaborado sobre as três variáveis de decisão parciais, a fim de maximizar a probabilidade de detecção. Desse processo, resultou uma nova variável de decisão. Em particular, mostrou-se que tal variável não deve ser aproximada por uma distribuição Gaussiana, diferentemente do primeiro detector. Em vez disso, efetuou-se uma transformação de variáveis convencional e, a partir dessa transformação, deduziram-se formulações analíticas para as probabilidades de detecção e de falso alarme do detector, novamente obtidas em forma integral.

No próximo capítulo, será detalhado o desenvolvimento de um detector ótimo para o radar com três antenas, bem como será apresentada uma análise preliminar correspondente para um radar com N antenas.

Capítulo

4

Detecção Ótima com Três Antenas Fixas

No Capítulo 2 foi apresentado o detector ótimo para um radar meteorológico com duas antenas fixas de feixe largo, reproduzindo-se uma abordagem inovadora de baixo custo proposta em [8, 7]. Este capítulo estende tal proposta, projetando e analisando o detector ótimo correspondente para o caso de três antenas fixas. O intuito é avaliar como o acréscimo de uma terceira antena pode reduzir o número mínimo de amostras de sinal necessário para garantir um bom desempenho à nova abordagem. Além disso, apresenta-se uma análise preliminar do detector ótimo para o caso geral de um número arbitrário de antenas.

4.1 Teste de Hipóteses

O modelo sistêmico do radar em questão é idêntico ao descrito na Seção 3.1. Com base nesse modelo, as FDPs conjuntas das observações \underline{X} e \underline{Y} definidas em (3.2), condicionadas às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 , podem ser escritas respectivamente como

$$f_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y} | \mathcal{H}_0) = \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\underline{X}_i^T \mathcal{M}_{\mathcal{H}_0}^{-1} \underline{X}_i + \underline{Y}_i^T \mathcal{M}_{\mathcal{H}_0}^{-1} \underline{Y}_i) \right]}{[(2\pi)^3 \det(\mathcal{M}_{\mathcal{H}_0})]^n} \quad (4.1)$$

$$f_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y} | \mathcal{H}_1) = \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\underline{X}_i^T \mathcal{M}_{\mathcal{H}_1}^{-1} \underline{X}_i + \underline{Y}_i^T \mathcal{M}_{\mathcal{H}_1}^{-1} \underline{Y}_i) \right]}{[(2\pi)^3 \det(\mathcal{M}_{\mathcal{H}_1})]^n}, \quad (4.2)$$

com $\underline{X}_i \triangleq [X_{1i} \ X_{2i} \ X_{3i}]^T$ e $\underline{Y}_i \triangleq [Y_{1i} \ Y_{2i} \ Y_{3i}]^T$. Além disso, $\mathcal{M}_{\mathcal{H}_0}$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{H}_1}$ representam as matrizes de covariância condicionais de X_{1i} , X_{2i} e X_{3i} (ou, equivalentemente, de Y_{1i} , Y_{2i} e Y_{3i}), dadas por

$$\mathcal{M}_{\mathcal{H}_0} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{H}_1} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

4.2 Critério de Decisão

Segundo o critério ótimo de Neyman-Pearson, já apresentado nos capítulos anteriores, decide-se pela hipótese \mathcal{H}_1 se a razão de verossimilhança $\Lambda(\underline{X}, \underline{Y})$ entre as hipóteses \mathcal{H}_1 e

\mathcal{H}_0 exceder um certo limiar γ' , e pela hipótese \mathcal{H}_0 caso contrário, ou seja,

$$\Lambda(\underline{X}, \underline{Y}) \triangleq \frac{f_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y} | \mathcal{H}_1)}{f_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y} | \mathcal{H}_0)} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \gamma'. \quad (4.5)$$

4.3 Variável de Decisão

A partir de (4.5), é possível destrinchar melhor a regra de decisão em termos das observações \underline{X} e \underline{Y} . O intuito é obter uma variável de decisão $D_{n,3}$ mais simples que a razão de verossimilhança original. O processo está ilustrado na Fig. 3.2. Substituindo-se (4.1) e (4.2) em (4.5), e realizando-se as devidas simplificações, obtém-se que

$$\Lambda(\underline{X}, \underline{Y}) = \left[\frac{\det(\mathcal{M}_{\mathcal{H}_0})}{\det(\mathcal{M}_{\mathcal{H}_1})} \right]^n \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\underline{S}_i^H (\mathcal{M}_{\mathcal{H}_1}^{-1} - \mathcal{M}_{\mathcal{H}_0}^{-1}) \underline{S}_i) \right], \quad (4.6)$$

em que $\underline{S}_i \triangleq [S_{1i} \ S_{2i} \ S_{3i}]^H$, com $[\cdot]^H$ indicando conjugado transposto. A fim de simplificar a análise, escalona-se a variável de decisão como

$$D_{n,3} = D'_{n,3} K_D, \quad (4.7)$$

em que

$$D'_{n,3} \triangleq -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\underline{S}_i^H (\mathcal{M}_{\mathcal{H}_1}^{-1} - \mathcal{M}_{\mathcal{H}_0}^{-1}) \underline{S}_i) \quad (4.8)$$

e K_D é uma constante dada por

$$K_D \triangleq \sigma^2 (1 - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{23}^2), \quad (4.9)$$

escolhida de modo a cancelar o denominador de $D'_{n,3}$ em (4.8). Uma vez que a função exponencial é monótona e crescente, confrontar $\Lambda(\underline{X}, \underline{Y})$ com um limiar γ' , como em (4.5), é equivalente a confrontar $D_{n,3}$ com outro limiar γ . A normalização por n em (4.8) é arbitrária. Finalmente, a regra de decisão em (4.5) pode ser reescrita como

$$D_{n,3} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \gamma. \quad (4.10)$$

4.4 Desempenho do Detector

Considerando-se um número n de amostras suficientemente elevado, segue, pelo Teorema Central do Limite, que a variável de decisão $D_{n,3}$ definida em (4.7) se aproxima de uma Gaussiana. Desse modo, a caracterização de $D_{n,3}$ requer apenas a determinação de sua média e variância, sob cada uma das hipóteses, \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 . Para tanto, expande-se (4.7), obtendo-se uma representação para $D_{n,3}$ explicitamente em termos das múltiplas componentes em fase e em quadratura do vetor de observações, a saber:

$$D_{n,3} = A(2\rho_{12} - 2\rho_{13}\rho_{23}) + B(2\rho_{13} - 2\rho_{12}\rho_{23}) + C(2\rho_{23} - 2\rho_{12}\rho_{13}) \\ + D(-\rho_{12}^2 + \rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}) + E(-\rho_{13}^2 + \rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}) + F(-\rho_{23}^2 + \rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}), \quad (4.11)$$

em que

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i})}{n} \quad (4.12)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i})}{n} \quad (4.13)$$

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i})}{n} \quad (4.14)$$

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2)}{n} \quad (4.15)$$

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2)}{n} \quad (4.16)$$

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2)}{n} \quad (4.17)$$

representam variáveis auxiliares. Pode-se notar que $D_{n,3}$ ocorre na forma de uma soma ponderada dessas variáveis, com os pesos sendo dados em função dos coeficientes de correlação ρ_{12} , ρ_{13} e ρ_{23} entre cada par de antenas. Portanto, a média e a variância de $D_{n,3}$ podem ser obtidas a partir do vetor de médias μ e da matriz (simétrica) de covariância Σ das variáveis auxiliares, definidos como

$$\mu \triangleq \begin{bmatrix} E\{A\} \\ E\{B\} \\ E\{C\} \\ E\{D\} \\ E\{E\} \\ E\{F\} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\Sigma \triangleq \begin{bmatrix} \text{VAR}\{A\} & \text{COV}\{A,B\} & \text{COV}\{A,C\} & \text{COV}\{A,D\} & \text{COV}\{A,E\} & \text{COV}\{A,F\} \\ \text{COV}\{A,B\} & \text{VAR}\{B\} & \text{COV}\{B,C\} & \text{COV}\{B,D\} & \text{COV}\{B,E\} & \text{COV}\{B,F\} \\ \text{COV}\{A,C\} & \text{COV}\{B,C\} & \text{VAR}\{C\} & \text{COV}\{C,D\} & \text{COV}\{C,E\} & \text{COV}\{C,F\} \\ \text{COV}\{A,D\} & \text{COV}\{B,D\} & \text{COV}\{C,D\} & \text{VAR}\{D\} & \text{COV}\{D,E\} & \text{COV}\{D,F\} \\ \text{COV}\{A,E\} & \text{COV}\{B,E\} & \text{COV}\{C,E\} & \text{COV}\{D,E\} & \text{VAR}\{E\} & \text{COV}\{E,F\} \\ \text{COV}\{A,F\} & \text{COV}\{B,F\} & \text{COV}\{C,F\} & \text{COV}\{D,F\} & \text{COV}\{E,F\} & \text{VAR}\{F\} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Após uma série extensa e entediante de manipulações e simplificações algébricas, detalhadas no Apêndice B, o vetor de médias e a matriz de covariância são obtidos como na Tabela 4.1, para cada uma das hipóteses, \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 . Finalmente, utilizando-se esses resultados em (4.11), após algumas simplificações, a média e a variância condicionais da variável de decisão $D_{n,3}$ podem ser determinadas como

$$E\{D_{n,3}|\mathcal{H}_0\} = 4\sigma^2 (3\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2) \quad (4.20)$$

$$E\{D_{n,3}|\mathcal{H}_1\} = 0 \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}\{D_{n,3}|\mathcal{H}_0\} &= \frac{8\sigma^4}{n} [\rho_{12}^4 + \rho_{13}^2 - 4\rho_{12}^3\rho_{13}\rho_{23} + \rho_{23}^2 + (\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2)^2 \\ &\quad - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} (3 + 2\rho_{13}^2 + 2\rho_{23}^2) + \rho_{12}^2 (1 + 2\rho_{23}^2 + \rho_{13}^2 (2 + 6\rho_{23}^2))] \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\text{VAR}\{D_{n,3}|\mathcal{H}_1\} = \frac{8\sigma^4}{n} (\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2) (-1 + \rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} + \rho_{23}^2)^2. \quad (4.23)$$

Tabela 4.1: Elementos do vetor de médias e da matriz de covariância das variáveis auxiliares A , B , C , D , E e F , condicionados às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 .

	\mathcal{H}_0	\mathcal{H}_1
$E\{A\}$	0	$2\sigma^2\rho_{12}$
$E\{B\}$	0	$2\sigma^2\rho_{13}$
$E\{C\}$	0	$2\sigma^2\rho_{23}$
$E\{D\}$	$4\sigma^2$	$4\sigma^2$
$E\{E\}$	$4\sigma^2$	$4\sigma^2$
$E\{F\}$	$4\sigma^2$	$4\sigma^2$
$\text{VAR}\{A\}$	$\frac{2\sigma^4}{n}$	$\frac{2\sigma^4}{n}(1 + \rho_{12}^2)$
$\text{VAR}\{B\}$	$\frac{2\sigma^4}{n}$	$\frac{2\sigma^4}{n}(1 + \rho_{13}^2)$
$\text{VAR}\{C\}$	$\frac{2\sigma^4}{n}$	$\frac{2\sigma^4}{n}(1 + \rho_{23}^2)$
$\text{VAR}\{D\}$	$\frac{8\sigma^4}{n}$	$\frac{8\sigma^4}{n}(1 + \rho_{12}^2)$
$\text{VAR}\{E\}$	$\frac{8\sigma^4}{n}$	$\frac{8\sigma^4}{n}(1 + \rho_{13}^2)$
$\text{VAR}\{F\}$	$\frac{8\sigma^4}{n}$	$\frac{8\sigma^4}{n}(1 + \rho_{23}^2)$
$\text{COV}\{A, B\}$	0	$\frac{2\sigma^4}{n}(\rho_{12}\rho_{13} + \rho_{23})$
$\text{COV}\{A, C\}$	0	$\frac{2\sigma^4}{n}(\rho_{12}\rho_{23} + \rho_{13})$
$\text{COV}\{A, D\}$	0	$\frac{8\sigma^4\rho_{12}}{n}$
$\text{COV}\{A, E\}$	0	$\frac{4\sigma^4}{n}(\rho_{13}\rho_{23} + \rho_{12})$
$\text{COV}\{A, F\}$	0	$\frac{4\sigma^4}{n}(\rho_{13}\rho_{23} + \rho_{12})$
$\text{COV}\{B, C\}$	0	$\frac{2\sigma^4}{n}(\rho_{13}\rho_{23} + \rho_{12})$
$\text{COV}\{B, D\}$	0	$\frac{4\sigma^4}{n}(\rho_{12}\rho_{23} + \rho_{13})$
$\text{COV}\{B, E\}$	0	$\frac{8\sigma^4\rho_{13}}{n}$
$\text{COV}\{B, F\}$	0	$\frac{4\sigma^4}{n}(\rho_{12}\rho_{23} + \rho_{13})$
$\text{COV}\{C, D\}$	0	$\frac{4\sigma^4}{n}(\rho_{12}\rho_{13} + \rho_{23})$
$\text{COV}\{C, E\}$	0	$\frac{4\sigma^4}{n}(\rho_{12}\rho_{13} + \rho_{23})$
$\text{COV}\{C, F\}$	0	$\frac{8\sigma^4\rho_{23}}{n}$
$\text{COV}\{D, E\}$	$\frac{4\sigma^4}{n}$	$\frac{4\sigma^4}{n}(1 + \rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2)$
$\text{COV}\{D, F\}$	$\frac{4\sigma^4}{n}$	$\frac{4\sigma^4}{n}(1 + \rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2)$
$\text{COV}\{E, F\}$	$\frac{4\sigma^4}{n}$	$\frac{4\sigma^4}{n}(1 + \rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2)$

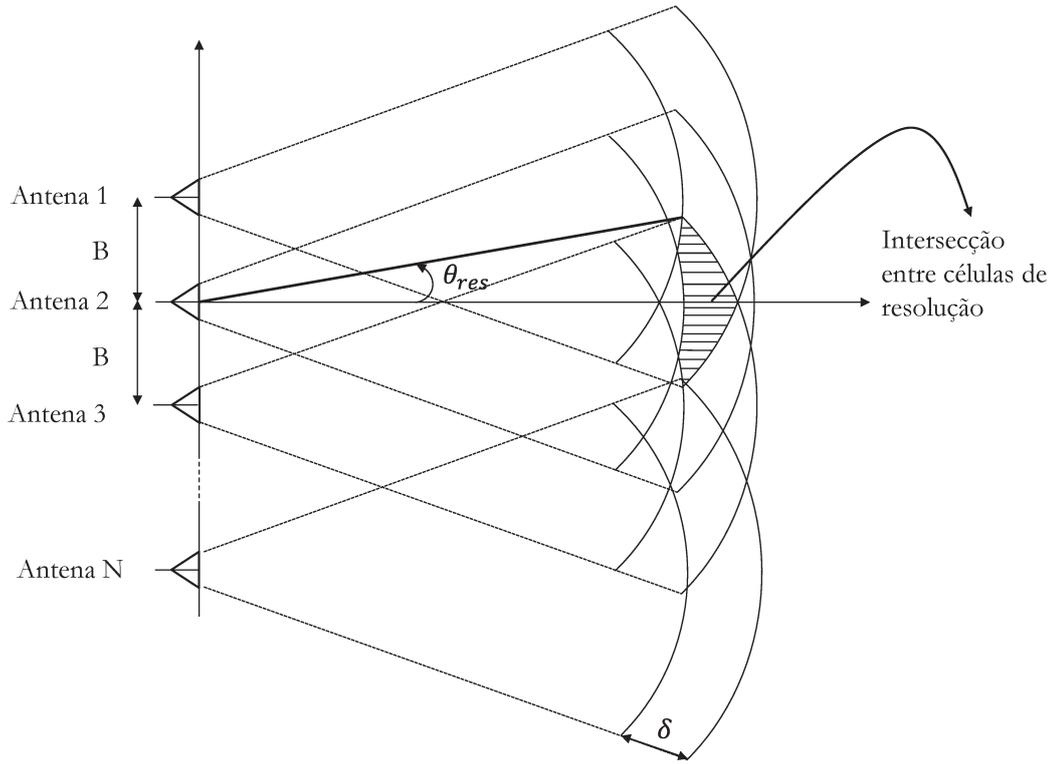


Figura 4.1: Vista superior do radar meteorológico com N antenas.

Substituindo-se (4.20)–(4.23) em (2.13) e (2.14), a PFA e a PD do detector ótimo para três antenas são obtidas em forma fechada como

$$\text{PFA} = Q \left(\frac{\gamma - 4(3\rho_{13}\rho_{23}\rho_{12} - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2)\sigma^2}{\sqrt{\frac{(\rho_{12}^4 - 4\rho_{13}\rho_{23}\rho_{12}^3 + ((6\rho_{23}^2 + 2)\rho_{13}^2 + 2\rho_{23}^2 + 1)\rho_{12}^2 - 2\rho_{13}\rho_{23}(2\rho_{13}^2 + 2\rho_{23}^2 + 3)\rho_{12} + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 + (\rho_{13} + \rho_{23})^2)(8\sigma^4)}{n}}} \right) \quad (4.24)$$

$$\text{PD} = Q \left(\frac{\gamma}{\sqrt{\frac{8\sigma^4(\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2)(-1 + \rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23})^2}{n}}} \right). \quad (4.25)$$

4.5 Detecção Ótima com N Antenas

Esta seção apresenta uma investigação preliminar do detector ótimo para o caso geral de um radar com um número arbitrário N de antenas fixas. O detector é devidamente projetado, ou seja, a sua variável de decisão é especificada em termos das observações de sinal nas antenas. Por outro lado, não se obtêm expressões analíticas para as probabilidades de detecção e de falso alarme. Essa segunda tarefa requer um tratamento matemático de maior complexidade, devendo ser objeto de trabalhos futuros.

A Figura 4.1 apresenta o sistema de radar generalizado, composto por N antenas alinhadas, com antenas adjacentes estando separadas por uma linha de base de comprimento B . Da mesma forma que nos sistemas com duas ou três antenas já apresentados, cada antena possui uma célula de resolução individual, delimitada por suas resoluções em alcance e angular. Uma região é formada a partir da intersecção das células de resolução das várias antenas, determinando a resolução em azimute θ_{res} do radar. Pode-se notar

que a amplitude da região de interseção diminui com o aumento do número de antenas, o que deve ser considerado na prática para o dimensionamento adequado do sistema.

Seguindo o mesmo procedimento apresentado na Seção 3.1 para três antenas, os sinais recebidos por cada uma das N antenas podem ser escritos como

$$S_{hi} = X_{hi} + jY_{hi}, \quad (4.26)$$

em que o subíndice h identifica a antena ($h = 1, 2, \dots, N$) e o subíndice i denota o tempo discreto ($i = 1, 2, \dots, n$), com n sendo o número de amostras observadas por cada antena. Como discutido em [7], X_{hi} (componentes em fase) e Y_{hi} (componentes em quadratura) são independentes entre si. Além disso, S_{hi} e S_{hk} são independentes de S_{hi} e S_{hk} , $\forall i \neq k$. Sob condições bem gerais, mostra-se ainda que $S_{1i}, S_{2i}, \dots, S_{Ni}$ são processos Gaussianos brancos circularmente simétricos e identicamente distribuídos, de modo que X_{hi} e Y_{hi} são variáveis Gaussianas de média nula e mesma variância σ^2 [7]. Por outro lado, X_{hi} e X_{li} (bem como Y_{hi} e Y_{li}), $\forall h \neq l$, podem ser mutuamente independentes (se não existe alvo, ou seja, sob a hipótese \mathcal{H}_0) ou apresentar certo coeficiente de correlação ρ_{hl} (se existe alvo, ou seja, sob a hipótese \mathcal{H}_1). Em outras palavras, as matrizes de covariância de $X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{Ni}$ (ou, equivalentemente, de $Y_{1i}, Y_{2i}, \dots, Y_{Ni}$), condicionadas às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 , são dadas respectivamente por

$$\mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_0} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (4.27)$$

$$\mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_1} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1N} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} & & \rho_{2N} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 & & \rho_{3N} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \rho_{1N} & \rho_{2N} & \rho_{3N} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Agrupando-se as componentes em fase e em quadratura das N antenas, obtém-se uma representação compacta para os sinais observados:

$$\underline{X} = \{X_{11}, X_{21}, \dots, X_{N1}, X_{12}, X_{22}, \dots, X_{N2}, \dots, X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{Nn}\} \quad (4.29)$$

$$\underline{Y} = \{Y_{11}, Y_{21}, \dots, Y_{N1}, Y_{12}, Y_{22}, \dots, Y_{N2}, \dots, Y_{1n}, Y_{2n}, \dots, Y_{Nn}\}. \quad (4.30)$$

Com base no modelo sistêmico apresentado, as observações \underline{X} e \underline{Y} seguem uma distribuição Gaussiana multivariável. Considerando-se a independência entre as componentes em fase e quadratura, a independência entre amostras para instantes distintos e as matrizes de covariância condicionais em (4.27) e (4.28), as FDPs conjuntas condicionais de \underline{X} e \underline{Y} para cada hipótese podem ser obtidas como

$$f_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y}|\mathcal{H}_0) = \frac{1}{[(2\pi)^N \det(\mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_0})]^n} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\underline{X}_i^T \mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_0}^{-1} \underline{X}_i + \underline{Y}_i^T \mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_0}^{-1} \underline{Y}_i) \right] \quad (4.31)$$

$$f_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y}|\mathcal{H}_1) = \frac{1}{[(2\pi)^N \det(\mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_1})]^n} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\underline{X}_j^T \mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_1}^{-1} \underline{X}_j + \underline{Y}_j^T \mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_1}^{-1} \underline{Y}_j) \right], \quad (4.32)$$

em que $\underline{X}_i \triangleq [X_{1i} \ X_{2i} \ \cdots \ X_{Ni}]^T$ e $\underline{Y}_i \triangleq [Y_{1i} \ Y_{2i} \ \cdots \ Y_{Ni}]^T$. Alternativamente, utilizando-se notação complexa $\underline{S}_i \triangleq [S_{1i} \ S_{2i} \ \cdots \ S_{Ni}]^T$, (4.31) e (4.32) reduzem para

$$f_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y}|\mathcal{H}_0) = \frac{1}{[(2\pi)^N \det(\mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_0})]^n} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\underline{S}_i^H \mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_0}^{-1} \underline{S}_i) \right] \quad (4.33)$$

$$f_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y}|\mathcal{H}_1) = \frac{1}{[(2\pi)^N \det(\mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_1})]^n} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\underline{S}_i^H \mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_1}^{-1} \underline{S}_i) \right]. \quad (4.34)$$

A partir desses resultados, atendendo-se ao critério ótimo de Neyman-Pearson, a razão de verossimilhança é construída como

$$\Lambda(\underline{X}, \underline{Y}) = \frac{f_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y}|\mathcal{H}_1)}{f_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y}|\mathcal{H}_0)} = \left[\frac{\det(\mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_0})}{\det(\mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_1})} \right]^n \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\underline{S}_i^H (\mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_1}^{-1} - \mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_0}^{-1}) \underline{S}_i) \right], \quad (4.35)$$

de modo que a variável de decisão $D_{n,N}$ pode ser definida como

$$D_{n,N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\underline{S}_i^H (\mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_1}^{-1} - \mathcal{M}_{N|\mathcal{H}_0}^{-1}) \underline{S}_i), \quad (4.36)$$

e a regra de decisão como

$$D_{n,N} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \gamma. \quad (4.37)$$

4.6 Conclusões

Neste capítulo foi apresentado o detector ótimo para três antenas fixas, com base em um teste de hipóteses por razão de verossimilhança. A fim de facilitar a caracterização da variável de decisão, foram definidas diversas variáveis auxiliares, tendo-se encontrado o vetor de médias e a matriz de covariância correspondentes. Com base nessa descrição, foram obtidas expressões fechadas para a PD e a PFA do detector ótimo, dadas em função do número de amostras, do limiar de detecção e dos coeficientes de correlação entre cada par de sinais. Por fim, o projeto do detector ótimo foi estendido para o caso geral de N antenas. No entanto, PD e PFA não foram determinadas para esse caso, devido à grande complexidade da análise.

No próximo capítulo será realizada uma comparação de desempenho entre os detectores ótimo e subótimos propostos nesta Dissertação.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

Neste capítulo são confrontados resultados analíticos e simulados para cada esquema de detecção proposto, variando-se a quantidade de amostras e os valores dos coeficientes de correlação entre os sinais recebidos pelas antenas. Os cálculos foram feitos em MATHEMATICA[®] e as simulações foram feitas em MATLAB[®].

As Figuras 5.1a, 5.1b e 5.1c ilustram o desempenho dos detectores ótimo, subótimo 1 e subótimo 2, respectivamente, apresentando PD e PFA em função do limiar de decisão γ . Como exemplo, foram adotados os seguintes valores de parâmetros: 100 amostras ($n = 100$), variância unitária para as componentes em fase e em quadratura ($\sigma^2 = 1$) e coeficientes de correlação iguais a $\rho_{12} = 0.3$, $\rho_{13} = 0.1$ e $\rho_{23} = 0.2$. As figuras incluem curvas teóricas, obtidas a partir das expressões analíticas deste trabalho — (3.10), (3.11), (3.40), (3.41), (4.24) e (4.25) —, e curvas obtidas por simulação de Monte Carlo. Note como teoria e simulação estão em perfeito acordo em todos os casos apresentados, o que atesta a validade das expressões analíticas deduzidas. A Fig. 5.1d reapresenta o desempenho dos detectores, desta vez com PD dada em função de PFA, para o mesmo cenário anterior. Nessa figura, observa-se como o detector ótimo é consideravelmente superior aos detectores subótimos propostos — sobretudo ao detector subótimo 1 —, fornecendo o maior valor de PD para cada valor PFA. Para uma PFA de 10^{-4} , por exemplo, os detectores ótimo, subótimo 2 e subótimo 1 apresentam uma PD em torno de 91%, 87% e 40%, respectivamente. Como esperado, o detector subótimo 1 tem o pior desempenho.

É interessante quantificar como o grau de superioridade do detector ótimo em relação a cada detector subótimo evolui à medida que se aumenta o número de amostras ou os valores dos coeficientes de correlação. Isso é apresentado nas Figuras 5.2 e 5.3.

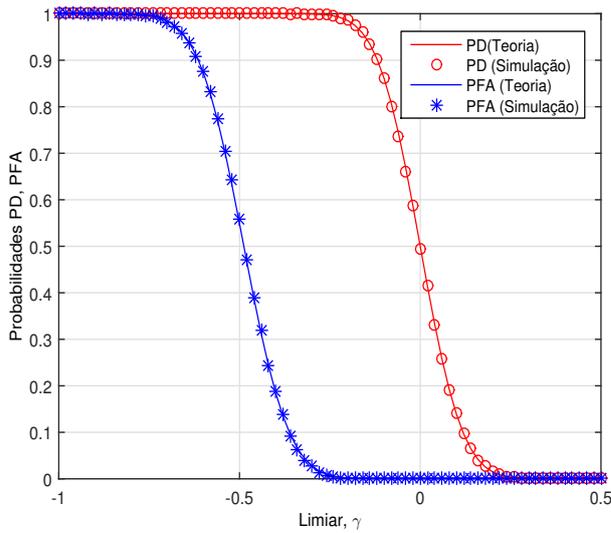
A Figura 5.2 mostra PD versus PFA para 100, 500, 1000 e 1500 amostras, fixando-se os coeficientes de correlação ($\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.1$) e a variância ($\sigma^2 = 1$). Obviamente, como atestado na figura, o desempenho de todos os detectores melhora à medida que se aumenta o número de amostras, sendo liderado pelo detector ótimo, seguido dos detectores subótimos 2 e 1, nessa ordem. Por outro lado, menos óbvio é o fato de que os desempenhos dos três detectores se distanciam mutuamente à medida que o número de amostras aumenta. Por exemplo, para uma PD fixa de 80%, os valores observados de PFA para os detectores ótimo, subótimo 2 e subótimo 1 com $n = 100$ são 6.33×10^{-2} , 7.52×10^{-2} e 1.21×10^{-1} , respectivamente; com $n = 500$, são 3.23×10^{-6} , 8.26×10^{-6} e 8.97×10^{-5} ; com $n = 1000$, 8.76×10^{-12} , 2.27×10^{-11} e 1.01×10^{-8} ; e com $n = 1500$, 1.18×10^{-17} , 2.09×10^{-16} e 1.31×10^{-12} . Assim, para n variando de 100 a 1500, a PFA do detector ótimo varia de 0 a 1 ordem de grandeza inferior à PFA do detector subótimo 2, e de 1 a 5 ordens de grandeza inferior à PFA do detector subótimo 1. Em suma, quanto maior o

número de amostras, melhor é o detector ótimo em relação a cada detector subótimo, e melhor é o detector subótimo 2 em relação ao detector subótimo 1.

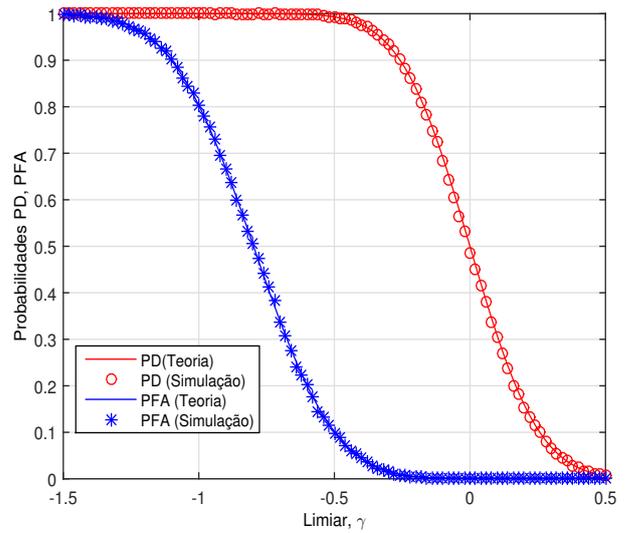
A Figura 5.3 mostra PD versus PFA para coeficientes de correlação iguais a 0.01, 0.1, 0.5 e 0.9, fixando-se o número de amostras ($n = 100$) e a variância ($\sigma^2 = 1$). Observa-se um comportamento similar ao do caso anterior. Ou seja, à medida que o valor dos coeficientes de correlação aumenta, os desempenhos dos três detectores melhoram e se distanciam mutuamente. Por exemplo, para uma PD fixa de 80%, os valores observados de PFA para os detectores ótimo, subótimo 2 e subótimo 1 com $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.01$ são 7.27×10^{-1} , 7.30×10^{-1} e 7.37×10^{-1} , respectivamente; com $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.1$, são 6.33×10^{-2} , 7.52×10^{-2} e 1.21×10^{-1} ; com $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.5$, 6.29×10^{-21} , 5.27×10^{-20} e 3.21×10^{-16} ; e com $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.9$, 1.28×10^{-41} , 1.24×10^{-39} e 1.23×10^{-26} . Assim, para o valor dos coeficientes de correlação variando de 0.01 a 0.9, a PFA do detector ótimo varia de 0 a 2 ordens de grandeza inferior à PFA do detector subótimo 2, e de 0 a 15 ordens de grandeza inferior à PFA do detector subótimo 1. Em suma, quanto maior o valor dos coeficientes de correlação, melhor é o detector ótimo em relação a cada detector subótimo, e melhor é o detector subótimo 2 em relação ao detector subótimo 1. Em particular, observa-se que para valores muito baixos do coeficiente de correlação (0.01, no exemplo), os desempenhos dos detectores subótimos se aproximam do ótimo.

A Figura 5.4 apresenta uma comparação de desempenho entre o detector ótimo de duas antenas em [8] e o detector ótimo de três antenas desenvolvido nesta Dissertação. Mais especificamente, avalia-se o impacto do número de amostras (200, 300, 400 e 500) sobre o desempenho de cada detector, fixando-se os valores dos coeficientes de correlação ($\rho_{12} = 0.3$, $\rho_{13} = 0.1$ e $\rho_{23} = 0.2$) e da variância ($\sigma^2 = 1$). Novamente, observa-se que os desempenhos dos detectores melhoram e se distanciam mutuamente à medida que o número de amostras aumenta. Por exemplo, para uma PD fixa de 80%, os valores observados de PFA para os detectores ótimos de duas e três antenas com $n = 200$ são 2.93×10^{-7} e 1.99×10^{-10} , respectivamente; com $n = 300$, são 1.51×10^{-10} e 2.40×10^{-15} ; com $n = 400$, 7.22×10^{-14} e 2.45×10^{-20} ; e com $n = 500$, 3.42×10^{-17} e 2.63×10^{-25} . Assim, para n variando de 200 a 500, a PFA do detector ótimo de três antenas varia de 3 a 8 ordens de grandeza inferior à PFA do detector ótimo de duas antenas. Em suma, quanto maior o número de amostras, melhor é o detector ótimo de três antenas em relação ao detector ótimo de duas antenas.

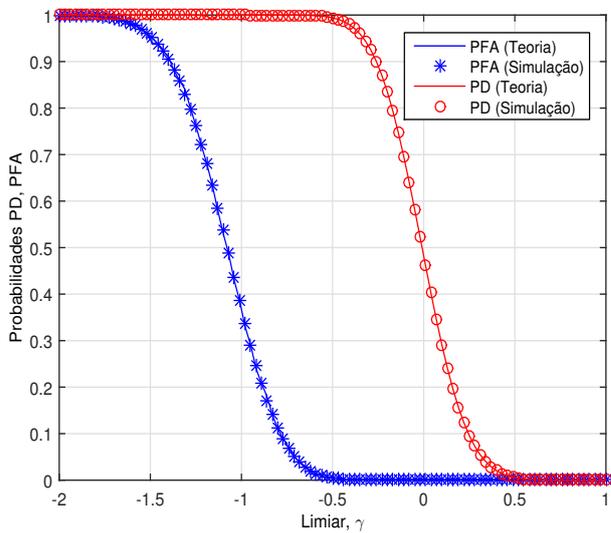
Por fim, a Figura 5.5 compara os detectores ótimos de duas e três antenas para diferentes valores de coeficientes de correlação, fixando-se o número de amostras ($n = 500$) e a variância ($\sigma^2 = 1$). Além disso, fixa-se também o coeficiente de correlação entre as antenas 1 e 2 ($\rho_{12} = 0.3$). O comportamento observado é similar ao do caso anterior. Ou seja, à medida que os valores dos coeficientes de correlação ρ_{13} e ρ_{23} aumentam, o desempenho do detector ótimo de três antenas melhora, distanciando-se do de duas antenas. Por exemplo, para uma PD fixa de 80%, o valor observado de PFA para o detector ótimo de três antenas com $\rho_{12} = 0.3$, $\rho_{13} = 0.1$ e $\rho_{23} = 0.2$ é 2.63×10^{-25} ; com $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.3$, é 4.53×10^{-47} ; e com $\rho_{12} = 0.3$, $\rho_{13} = 0.9$ e $\rho_{23} = 0.99$, 4.41×10^{-113} . Por outro lado, a PFA do detector ótimo de duas antenas é 3.45×10^{-17} em todos os casos, uma vez que o valor de ρ_{12} é fixo. Assim, nesses casos, a PFA do detector ótimo de três antenas varia de 8 a 96 ordens de grandeza inferior à PFA do detector ótimo de duas antenas. Note que, para o caso especial em que o sinal da terceira antena é completamente decorrelacionado dos sinais das antenas 1 e 2 ($\rho_{12} = 0.3$, $\rho_{13} = \rho_{23} = 0$), os dois detectores apresentam o mesmo desempenho. Isso é esperado, uma vez que esse caso representa um cenário degenerado em que a terceira antena não sinaliza quando da presença de alvo, não trazendo ganho



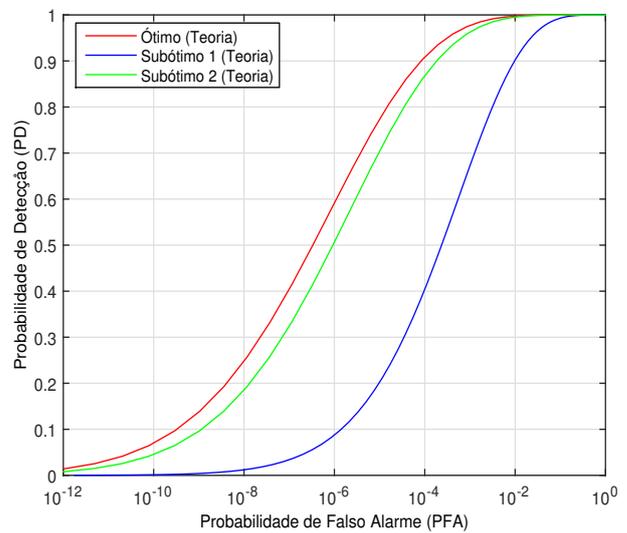
(a) Detector ótimo



(b) Detector subótimo 1



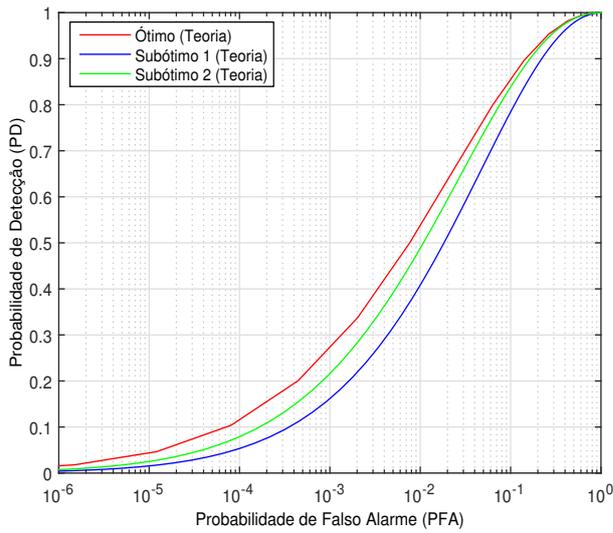
(c) Detector subótimo 2



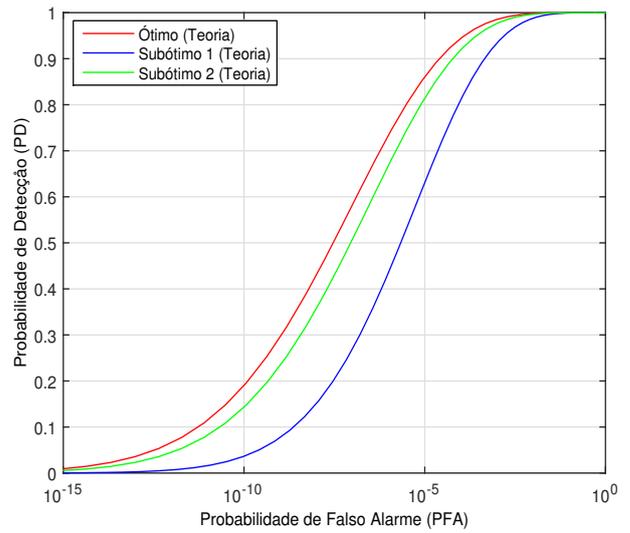
(d) PD versus PFA

Figura 5.1: PD versus PFA versus limiar de detecção ($n = 100$, $\sigma^2 = 1$, $\rho_{12} = 0.3$, $\rho_{13} = 0.1$ e $\rho_{23} = 0.2$).

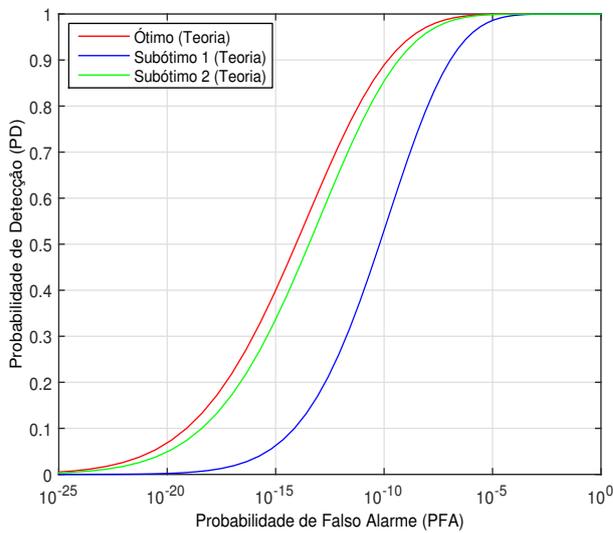
algum, portanto.



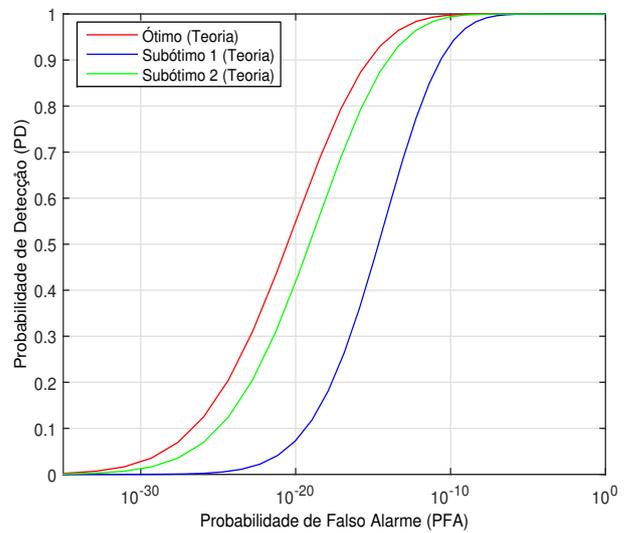
(a) $n = 100$



(b) $n = 500$

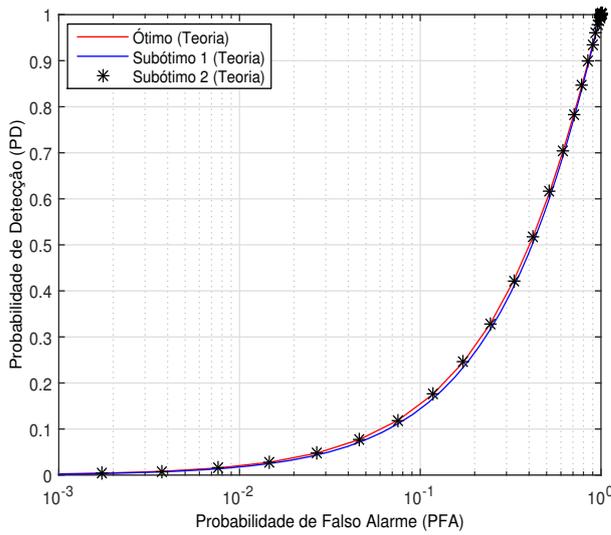


(c) $n = 1000$

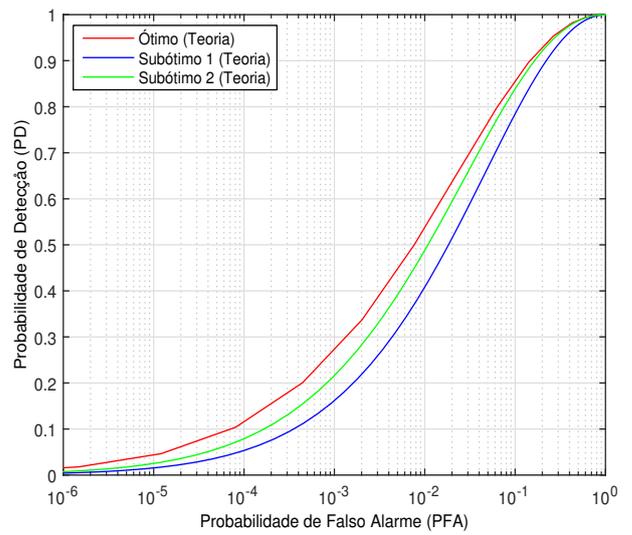


(d) $n = 1500$

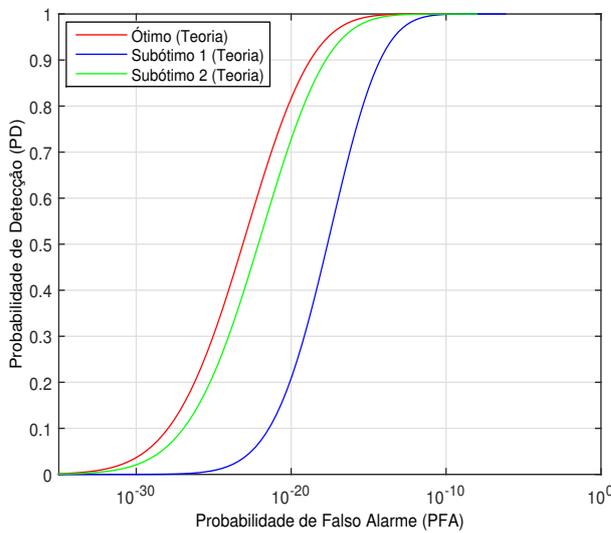
Figura 5.2: PD versus PFA ($\sigma^2 = 1$, $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.1$).



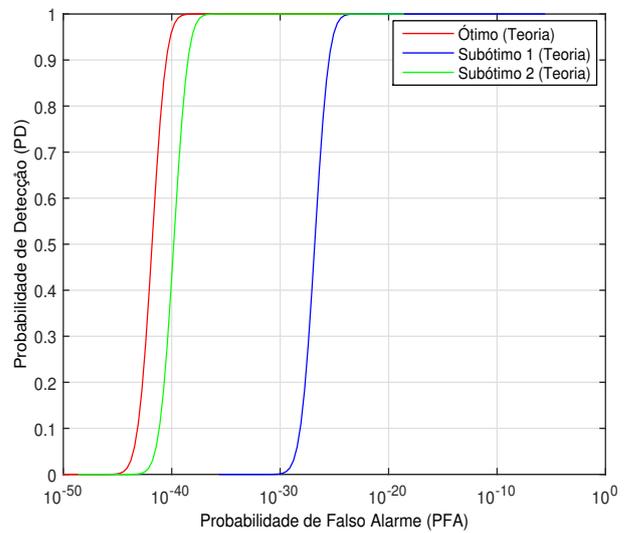
(a) $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.01$



(b) $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.1$

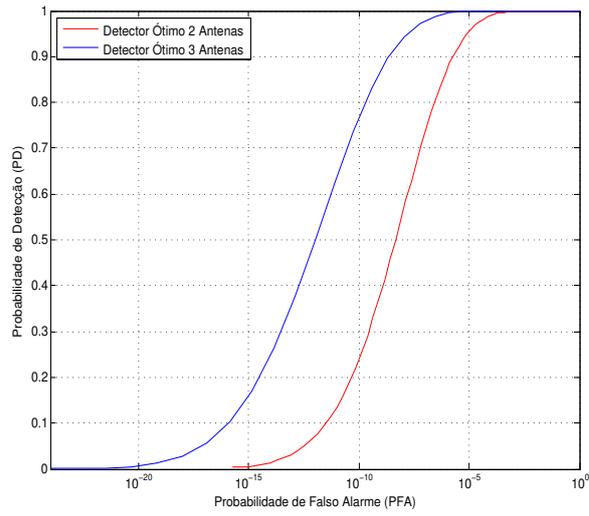


(c) $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.5$

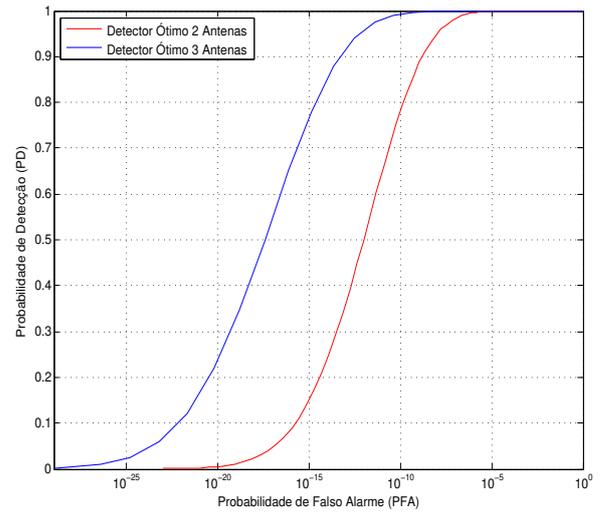


(d) $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.9$

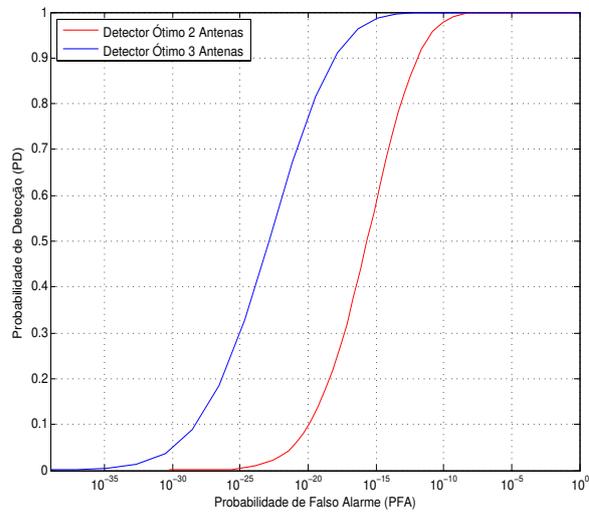
Figura 5.3: PD versus PFA ($n = 100, \sigma^2 = 1$).



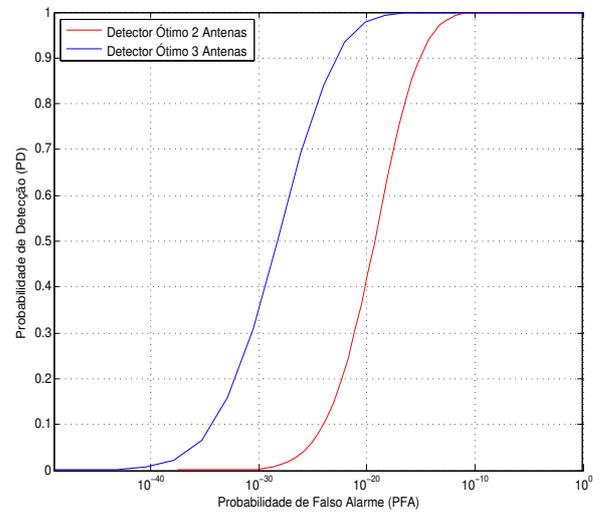
(a) $n = 200$



(b) $n = 300$

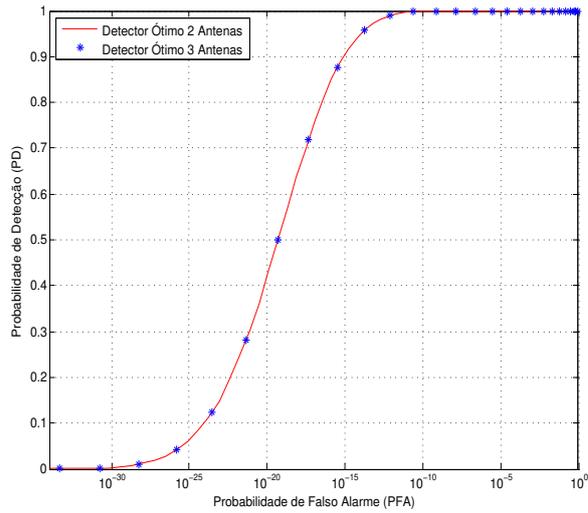


(c) $n = 400$

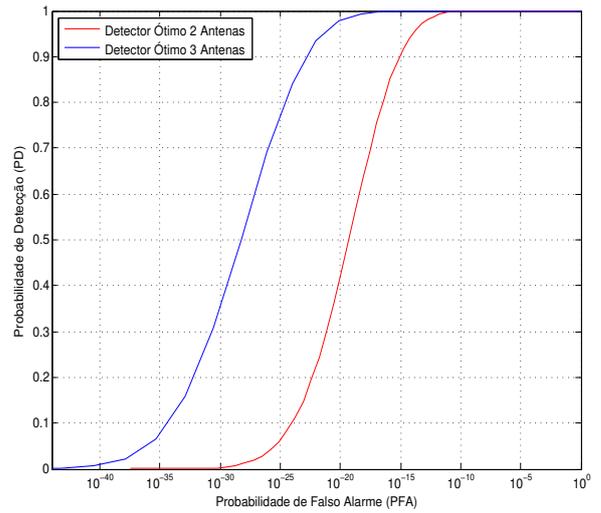


(d) $n = 500$

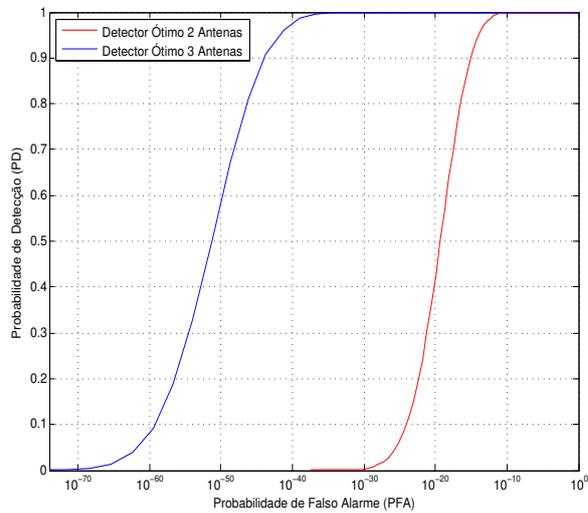
Figura 5.4: PD versus PFA: detecção ótima com duas ou três antenas ($\sigma^2 = 1, \rho_{12} = 0.3, \rho_{13} = 0.1$ e $\rho_{23} = 0.2$).



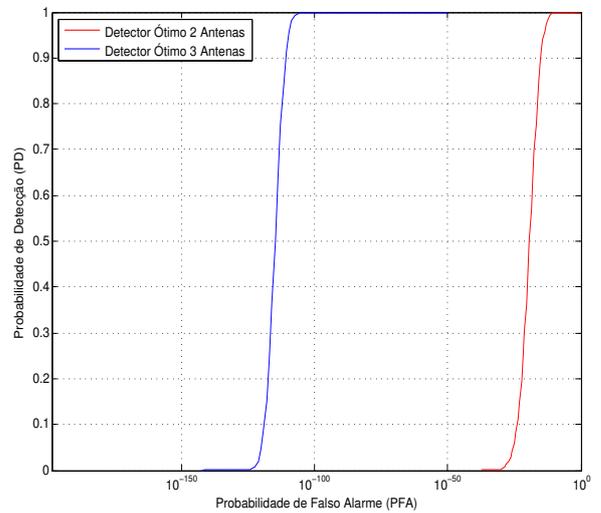
(a) $\rho_{12} = 0.3$ e $\rho_{13} = \rho_{23} = 0$



(b) $\rho_{12} = 0.3$, $\rho_{13} = 0.1$ e $\rho_{23} = 0.2$



(c) $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.3$



(d) $\rho_{12} = 0.3$, $\rho_{13} = 0.9$ e $\rho_{23} = 0.99$

Figura 5.5: PD versus PFA: detecção ótima com duas ou três antenas ($n = 500$, $\sigma^2 = 1$).

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Recentemente, em [8, 7], foi proposta uma abordagem inovadora para a construção de radares meteorológicos, com base em duas antenas fixas de feixe largo. A grande vantagem dessa nova abordagem frente à abordagem tradicional — uma antena girante de feixe estreito — é o menor custo e o menor tempo de varredura. Por outro lado, verificou-se na ocasião que uma quantidade muito elevada de amostras dos sinais recebidos pelas antenas seria necessária para o funcionamento a contento da nova proposta de radar. Além disso, sinalizou-se então o uso de antenas adicionais como uma estratégia promissora de se contornar a exigência por muitas amostras.

Esta Dissertação representa um primeiro esforço rumo ao uso de múltiplas antenas em radares meteorológicos sob essa nova abordagem. Mais especificamente, foi adicionada uma terceira antena ao radar, e foram projetados e analisados um detector ótimo e dois detectores subótimos para o sistema. As probabilidades de detecção e de falso alarme correspondentes foram obtidas em forma fechada para o detector ótimo e em forma integral para os detectores subótimos. Além disso, uma série de exemplos numéricos foram apresentados e discutidos, indicando uma vantagem crescente para o detector ótimo de três antenas frente aos detectores subótimos, e ao detector ótimo de duas antenas à medida que o número de amostras ou o grau de correlação entre os sinais aumenta. Por fim, mas não menos importante, o projeto do detector ótimo foi generalizado para o caso de um número arbitrário de antenas, embora a análise de desempenho tenha sido adiada nesse caso, por ser muito complexa.

Trabalhos Futuros

Um desdobramento natural e relevante deste trabalho é analisar o desempenho do detector ótimo projetado para o caso geral com um número arbitrário de antenas. Embora a variável de decisão desse detector tenha sido plenamente especificada em (4.36) em termos dos sinais das antenas e das matrizes de covariância associadas, a caracterização estatística de tal variável, necessária ao cálculo das probabilidades de detecção e de falso alarme, é desafiadora. Mais especificamente, o desafio é encontrar a média e a variância dessa variável de decisão. Nos casos com duas e três antenas, o problema é mais simples, já que a variável de decisão pode ser expandida na forma de uma função explícita de uma quantidade finita de sinais das antenas, como feito em (4.11) para três antenas. Assim, a média e a variância podem ser calculadas com base em relações fundamentais da teoria de probabilidade (tal procedimento é extenso e entediante, mesmo para esses casos!). Por

outro lado, com um número arbitrário de antenas, fica difícil (senão impossível) expandir a formulação original (matricial) para a variável de decisão na forma de uma função explícita dos vários sinais das antenas. Nesse caso, a solução parece demandar um novo arcabouço matemático, em que a notação matricial seja a linguagem nativa. A busca por esse arcabouço e pela solução decorrente devem ser objeto de trabalhos futuros.

Apêndice A

Caracterização das Variáveis de Decisão $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$

Conforme apresentado no Capítulo 3, as variáveis de decisão $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$ são definidas como

$$D_{n,12} = \frac{1}{n} \left(2 \sum_{i=1}^n (X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}) - \rho_{12} \sum_{i=1}^n (X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2) \right) \quad (\text{A.1})$$

$$D_{n,13} = \frac{1}{n} \left(2 \sum_{i=1}^n (X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}) - \rho_{13} \sum_{i=1}^n (X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2) \right) \quad (\text{A.2})$$

$$D_{n,23} = \frac{1}{n} \left(2 \sum_{i=1}^n (X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}) - \rho_{23} \sum_{i=1}^n (X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2) \right), \quad (\text{A.3})$$

e cada uma delas constitui (para $n \rightarrow \infty$) uma variável Gaussiana com certa média e variância. Vale lembrar que todos os processos envolvidos são independentes para instantes de tempo distintos, e que as componentes em fase (X_{1i} , X_{2i} e X_{3i}) são independentes das componentes em quadratura (Y_{1i} , Y_{2i} e Y_{3i}). Por outro lado, X_{1i} , X_{2i} e X_{3i} , assim como Y_{1i} , Y_{2i} e Y_{3i} , podem ser independentes ou correlacionadas, dependendo da ausência ou presença de alvo na região de intersecção entre as células de resolução das antenas. A caracterização das variáveis de decisão $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$ será realizada nas seções a seguir.

A.1 Vetor de Médias

O vetor de médias m para $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$ é definido como

$$m \triangleq \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \text{E} \{ D_{n,12} \} \\ \text{E} \{ D_{n,13} \} \\ \text{E} \{ D_{n,23} \} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

A.1.1 Média de $D_{n,12}$

Aplicando-se o operador de média em (A.1), tem-se que

$$E \{D_{n,12}\} = \frac{1}{n} E \left\{ 2 \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} + Y_{1i} Y_{2i} \right\} - \frac{1}{n} E \left\{ \rho_{12} \sum_{i=1}^n X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2 \right\}. \quad (\text{A.5})$$

Sabendo-se que a média da soma de n variáveis aleatórias identicamente distribuídas é igual a n vezes a média de uma das variáveis aleatórias, segue que

$$E \{D_{n,12}\} = 2 E \{X_{1i} X_{2i} + Y_{1i} Y_{2i}\} - \rho_{12} E \{X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2\}. \quad (\text{A.6})$$

Então, fazendo-se uso do modelo estocástico descrito no Capítulo 3, e condicionando-se a média de $D_{n,12}$ às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 , obtêm-se, respectivamente,

$$m_{1|\mathcal{H}_0} = -4\sigma^2 \rho_{12} \quad (\text{A.7})$$

$$m_{1|\mathcal{H}_1} = 2(2\sigma^2 \rho_{12}) - \rho_{12}(4\sigma^2) = 0. \quad (\text{A.8})$$

A.1.2 Média de $D_{n,13}$

Aplicando-se o operador de média em (A.2), tem-se que

$$E \{D_{n,13}\} = \frac{1}{n} E \left\{ 2 \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{3i} + Y_{1i} Y_{3i} \right\} - \frac{1}{n} E \left\{ \rho_{13} \sum_{i=1}^n X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2 \right\} \quad (\text{A.9})$$

Sabendo-se que a média da soma de n variáveis aleatórias identicamente distribuídas é igual a n vezes a média de uma das variáveis aleatórias, segue que

$$E \{D_{n,13}\} = 2 E \{X_{1i} X_{3i} + Y_{1i} Y_{3i}\} - \rho_{13} E \{X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2\} \quad (\text{A.10})$$

Então, fazendo-se uso do modelo estocástico descrito no Capítulo 3, e condicionando-se a média de $D_{n,13}$ às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 , obtêm-se, respectivamente,

$$m_{2|\mathcal{H}_0} = -4\sigma^2 \rho_{13} \quad (\text{A.11})$$

$$m_{2|\mathcal{H}_1} = 2(2\sigma^2 \rho_{13}) - \rho_{13}(4\sigma^2) = 0. \quad (\text{A.12})$$

A.1.3 Média de $D_{n,23}$

Aplicando-se o operador de média em (A.3), tem-se que

$$E \{D_{n,23}\} = \frac{1}{n} E \left\{ 2 \sum_{i=1}^n X_{2i} X_{3i} + Y_{2i} Y_{3i} \right\} - \frac{1}{n} E \left\{ \rho_{23} \sum_{i=1}^n X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2 \right\} \quad (\text{A.13})$$

Sabendo-se que a média da soma de n variáveis aleatórias identicamente distribuídas é igual a n vezes a média de uma das variáveis aleatórias, segue que

$$E \{D_{n,23}\} = 2 E \{X_{2i} X_{3i} + Y_{2i} Y_{3i}\} - \rho_{23} E \{X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2\} \quad (\text{A.14})$$

Então, fazendo-se uso do modelo estocástico descrito no Capítulo 3, e condicionando-se a média de $D_{n,23}$ às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 , obtêm-se, respectivamente,

$$m_{3|\mathcal{H}_0} = -4\sigma^2 \rho_{23} \quad (\text{A.15})$$

$$m_{3|\mathcal{H}_1} = 2(2\sigma^2 \rho_{23}) - \rho_{23}(4\sigma^2) = 0. \quad (\text{A.16})$$

A.2 Matriz de Covariância

A matriz de covariância C para $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$ é denotada como

$$C \triangleq \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

A.2.1 Variância de $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$

Aplicando-se a definição de variância em (A.1), e sabendo-se que a variância da soma de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas é n vezes a variância de uma das variáveis, tem-se que

$$\begin{aligned} \text{VAR} \{D_{n,12}\} &= \frac{1}{n} \left[\text{E} \left\{ \left(2(X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}) - \rho_{12}(X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2) \right)^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. - \text{E} \left\{ 2(X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}) - \rho_{12}(X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2) \right\}^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Expandindo-se (A.18), chega-se a

$$\begin{aligned} \text{VAR} \{D_{n,12}\} &= \frac{1}{n} \left[8 \text{E} \{X_{1i}X_{2i}Y_{1i}Y_{2i}\} + 4 \text{E} \{X_{1i}^2X_{2i}^2\} + 4 \text{E} \{Y_{1i}^2Y_{2i}^2\} \right. \\ &\quad - 4\rho_{12} \text{E} \{X_{1i}^3X_{2i}\} - 4\rho_{12} \text{E} \{X_{1i}X_{2i}^3\} - 4\rho_{12} \text{E} \{X_{1i}X_{2i}Y_{1i}^2\} \\ &\quad - 4\rho_{12} \text{E} \{X_{1i}^2Y_{1i}Y_{2i}\} - 4\rho_{12} \text{E} \{X_{2i}^2Y_{1i}Y_{2i}\} - 4\rho_{12} \text{E} \{Y_{1i}^3Y_{2i}\} \\ &\quad + \rho_{12}^2 \text{E} \{X_{1i}^4\} - 4\rho_{12} \text{E} \{X_{1i}X_{2i}Y_{2i}^2\} - 4\rho_{12} \text{E} \{Y_{1i}Y_{2i}^3\} \\ &\quad + 2\rho_{12}^2 \text{E} \{X_{1i}^2X_{2i}^2\} + \rho_{12}^2 \text{E} \{X_{2i}^4\} + 2\rho_{12}^2 \text{E} \{X_{1i}^2Y_{1i}^2\} + 2\rho_{12}^2 \text{E} \{X_{2i}^2Y_{1i}^2\} \\ &\quad + 2\rho_{12}^2 \text{E} \{X_{1i}^2Y_{2i}^2\} + 2\rho_{12}^2 \text{E} \{X_{2i}^2Y_{2i}^2\} + 2\rho_{12}^2 \text{E} \{Y_{1i}^2Y_{2i}^2\} + \rho_{12}^2 \text{E} \{Y_{1i}^4\} \\ &\quad + \rho_{12}^2 \text{E} \{Y_{2i}^4\} - (2(\text{E} \{X_{1i}X_{2i}\} + \text{E} \{Y_{1i}Y_{2i}\}) - \rho_{12}(\text{E} \{X_{1i}^2\} + \text{E} \{X_{2i}^2\} \\ &\quad \left. + \text{E} \{Y_{1i}^2\} + \text{E} \{Y_{2i}^2\}))^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 3, e aplicando-se a hipótese \mathcal{H}_0 em (A.19), tem-se que

$$\begin{aligned} C_{11|\mathcal{H}_0} = \text{VAR} \{D_{n,12}|\mathcal{H}_0\} &= \frac{1}{n} \left[3\rho_{12}^2\sigma^4 + 3\rho_{12}^2\sigma^4 + 2\rho_{12}^2\sigma^4 + 2\rho_{12}^2\sigma^4 + 2\rho_{12}^2\sigma^4 + 4\sigma^4 + 4\sigma^4 \right. \\ &\quad \left. + 3\rho_{12}^2\sigma^4 + 3\rho_{12}^2\sigma^4 + 2\rho_{12}^2\sigma^4 + 2\rho_{12}^2\sigma^4 + 2\rho_{12}^2\sigma^4 - (-\rho_{12}(4\sigma^2))^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Expressões correspondentes podem ser formuladas para as variâncias de $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$. Assim, após as devidas simplificações, as variâncias de $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$ sob a hipótese \mathcal{H}_0 são obtidas respectivamente como

$$C_{11|\mathcal{H}_0} = \text{VAR} \{D_{n,12}|\mathcal{H}_0\} = \frac{8\sigma^4}{n} (1 + \rho_{12}^2) \quad (\text{A.21})$$

$$C_{22|\mathcal{H}_0} = \text{VAR} \{D_{n,13}|\mathcal{H}_0\} = \frac{8\sigma^4}{n} (1 + \rho_{13}^2) \quad (\text{A.22})$$

$$C_{33|\mathcal{H}_0} = \text{VAR} \{D_{n,23}|\mathcal{H}_0\} = \frac{8\sigma^4}{n} (1 + \rho_{23}^2). \quad (\text{A.23})$$

Similarmente, utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 3, e aplicando-se a hipótese \mathcal{H}_1 em (A.19), tem-se que

$$\begin{aligned}
 C_{11|\mathcal{H}_1} = \text{VAR} \{D_{n,12}|\mathcal{H}_1\} &= \frac{1}{n} \left[-12\sigma^4 \rho_{12}^2 + 4\sigma^2 (2\rho_{12}^2 + 1) + 4\sigma^2 (2\rho_{12}^2 + 1) + 8(\sigma^2 \rho_{12})^2 \right. \\
 &\quad - 12\sigma^4 \rho_{12}^2 - 4\sigma^4 \rho_{12}^2 - 4\sigma^4 \rho_{12}^2 - 4\sigma^4 \rho_{12}^2 - 4\sigma^4 \rho_{12}^2 - 12\sigma^4 \rho_{12}^2 \\
 &\quad + 3\sigma^4 \rho_{12}^2 + 3\sigma^4 \rho_{12}^2 + 2\sigma^4 \rho_{12}^2 - 12\sigma^4 \rho_{12}^2 + 2\sigma^2 \rho_{12}^2 (2\rho_{12}^2 + 1) \\
 &\quad + 2\sigma^4 \rho_{12}^2 + 3\sigma^4 \rho_{12}^2 + 2\sigma^4 \rho_{12}^2 + 2\sigma^4 \rho_{12}^2 + 2\sigma^2 \rho_{12}^2 (2\rho_{12}^2 + 1) \\
 &\quad \left. + 3\sigma^4 \rho_{12}^2 - (2(2\sigma^2 \rho_{12}) - \rho_{12}(4\sigma^2))^2 \right]. \quad (\text{A.24})
 \end{aligned}$$

Expressões correspondentes podem ser formuladas para as variâncias de $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$. Da mesma forma, após as devidas simplificações, as variâncias de $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$ sob a hipótese \mathcal{H}_1 são obtidas respectivamente como

$$C_{11|\mathcal{H}_1} = \text{VAR} \{D_{n,12}|\mathcal{H}_1\} = \frac{8\sigma^4}{n} (-1 + \rho_{12}^2)^2$$

$$C_{22|\mathcal{H}_1} = \text{VAR} \{D_{n,13}|\mathcal{H}_1\} = \frac{8\sigma^4}{n} (-1 + \rho_{13}^2)^2$$

$$C_{33|\mathcal{H}_1} = \text{VAR} \{D_{n,23}|\mathcal{H}_1\} = \frac{8\sigma^4}{n} (-1 + \rho_{23}^2)^2.$$

A.2.2 COV $\{D_{n,12}, D_{n,13}\}$

A partir de (A.1) e (A.2), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \text{COV} \{D_{n,12}, D_{n,13}\} &= \frac{1}{n} \text{COV} \left\{ 2(X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}) - \rho_{12}(X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2), 2 \right. \\
 &\quad \left. \times (X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}) - \rho_{13}(X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2) \right\}. \quad (\text{A.25})
 \end{aligned}$$

Usando-se a definição de covariância, segue que

$$\begin{aligned}
 \text{COV} \{D_{n,12}, D_{n,13}\} &= \frac{1}{n} \left[\text{E} \left\{ (2(X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}) - \rho_{12}(X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times (2(X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}) - \rho_{13}(X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2)) \right\} \right. \\
 &\quad - \text{E} \left\{ 2(X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}) - \rho_{12}(X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2) \right\} \\
 &\quad \left. \times \text{E} \left\{ (2(X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}) - \rho_{13}(X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2)) \right\} \right]. \quad (\text{A.26})
 \end{aligned}$$

Então, simplificando-se (A.26), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 3, a covariância entre $D_{n,12}$ e $D_{n,13}$ condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$C_{12|\mathcal{H}_0} = \text{COV} \{D_{n,12}, D_{n,13}|\mathcal{H}_0\} = \frac{4\sigma^4}{n} \rho_{12}\rho_{13}$$

$$\begin{aligned}
 C_{12|\mathcal{H}_1} = \text{COV} \{D_{n,12}, D_{n,13}|\mathcal{H}_1\} &= \frac{4\sigma^4}{n} (\rho_{12}\rho_{13} (\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - 1) \\
 &\quad + \rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}^2 - 2(\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - 1)\rho_{23}). \quad (\text{A.27})
 \end{aligned}$$

A.2.3 COV $\{D_{n,12}, D_{n,23}\}$

A partir de (A.1) e (A.3), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\begin{aligned} \text{COV} \{D_{n,12}, D_{n,23}\} &= \frac{1}{n} \text{COV} \left\{ 2(X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}) - \rho_{12}(X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2), 2 \right. \\ &\quad \left. \times (X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}) - \rho_{23}(X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Usando-se a definição de covariância, segue que

$$\begin{aligned} \text{COV} \{D_{n,12}, D_{n,23}\} &= \frac{1}{n} \left[\text{E} \left\{ \left(2(X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}) - \rho_{12}(X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(2(X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}) - \rho_{23}(X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2) \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \text{E} \left\{ 2(X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}) - \rho_{12}(X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2) \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \text{E} \left\{ \left(2(X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}) - \rho_{23}(X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2) \right) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Então, simplificando-se (A.29), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 3, a covariância entre $D_{n,12}$ e $D_{n,23}$ condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$C_{13|\mathcal{H}_0} = \text{COV} \{D_{n,12}, D_{n,23} | \mathcal{H}_0\} = \frac{4\sigma^4}{n} \rho_{12}\rho_{23}$$

$$\begin{aligned} C_{13|\mathcal{H}_1} = \text{COV} \{D_{n,12}, D_{n,23} | \mathcal{H}_1\} &= \frac{4\sigma^4}{n} \left(\rho_{12}\rho_{23} (\rho_{12}^2 + \rho_{23}^2 - 1) \right. \\ &\quad \left. + \rho_{12}\rho_{13}^2\rho_{23} - 2(\rho_{12}^2 + \rho_{23}^2 - 1)\rho_{13} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

A.2.4 COV $\{D_{n,13}, D_{n,23}\}$

A partir de (A.2) e (A.3), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\begin{aligned} \text{COV} \{D_{n,13}, D_{n,23}\} &= \frac{1}{n} \text{COV} \left\{ 2(X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}) - \rho_{13}(X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2), 2 \right. \\ &\quad \left. \times (X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}) - \rho_{23}(X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Usando-se a definição de covariância, segue que

$$\begin{aligned} \text{COV} \{D_{n,13}, D_{n,23}\} &= \frac{1}{n} \left[\text{E} \left\{ \left(2(X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}) - \rho_{13}(X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(2(X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}) - \rho_{23}(X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2) \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \text{E} \left\{ 2(X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}) - \rho_{13}(X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2) \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \text{E} \left\{ \left(2(X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}) - \rho_{23}(X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2) \right) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Então, simplificando-se (A.32), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 3, a covariância entre $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$ condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$C_{23|\mathcal{H}_0} = \text{COV} \{D_{n,13}, D_{n,23} | \mathcal{H}_0\} = \frac{4\sigma^4}{n} \rho_{13}\rho_{23}$$

$$\begin{aligned} C_{23|\mathcal{H}_1} = \text{COV} \{D_{n,13}, D_{n,23} | \mathcal{H}_1\} &= \frac{4\sigma^4}{n} \left(\rho_{13}\rho_{23} (\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - 1) \right. \\ &\quad \left. + \rho_{12}^2\rho_{13}\rho_{23} - 2(\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - 1)\rho_{12} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Apêndice B

Caracterização da Variável de Decisão $D_{n,3}$

No Capítulo 4, a variável de decisão $D_{n,3}$ foi definida como

$$D_{n,3} = A(2\rho_{12} - 2\rho_{13}\rho_{23}) + B(2\rho_{13} - 2\rho_{12}\rho_{23}) + C(2\rho_{23} - 2\rho_{12}\rho_{13}) \\ + D(-\rho_{12}^2 + \rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}) + E(-\rho_{13}^2 + \rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}) + F(-\rho_{23}^2 + \rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}), \quad (\text{B.1})$$

em termos das seguintes variáveis auxiliares:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i})}{n} \quad (\text{B.2})$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i})}{n} \quad (\text{B.3})$$

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i})}{n} \quad (\text{B.4})$$

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2)}{n} \quad (\text{B.5})$$

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2)}{n} \quad (\text{B.6})$$

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2)}{n}. \quad (\text{B.7})$$

Considerando-se um número suficientemente elevado de amostras, segue, pelo Teorema central do Limite, que $D_{n,3}$ pode ser considerada como uma variável aleatória Gaussiana. Assim, para sua completa caracterização, basta encontrar a média e a variância. Um bom caminho é determinar o vetor de médias e a matriz de covariância das variáveis auxiliares A , B , C , D , E e F . Esse processo será apresentado nas seções a seguir.

B.1 Vetor de Médias

O vetor de médias μ correspondente às variáveis auxiliares é definido como

$$\mu \triangleq \begin{bmatrix} E\{A\} \\ E\{B\} \\ E\{C\} \\ E\{D\} \\ E\{E\} \\ E\{F\} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

B.1.1 Média de A

Aplicando-se o operador de média em (B.2), e sabendo-se que a média da soma de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a média de uma das variáveis, tem-se que

$$E\{A\} = E\left\{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i})}{n}\right\} = E\{X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}\}. \quad (\text{B.9})$$

Assim, utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a média de A condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 é obtida respectivamente como

$$E\{A|\mathcal{H}_0\} = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$E\{A|\mathcal{H}_1\} = 2\rho_{12}\sigma^2. \quad (\text{B.11})$$

B.1.2 Média de B

Aplicando-se o operador de média em (B.3), e sabendo-se que a média da soma de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a média de uma das variáveis, tem-se que

$$E\{B\} = E\left\{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i})}{n}\right\} = E\{X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}\}. \quad (\text{B.12})$$

Assim, utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a média de B condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 é obtida respectivamente como

$$E\{B|\mathcal{H}_0\} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$E\{B|\mathcal{H}_1\} = 2\rho_{13}\sigma^2. \quad (\text{B.14})$$

B.1.3 Média de C

Aplicando-se o operador de média em (B.4), e sabendo-se que a média da soma de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a média de uma das variáveis, tem-se que

$$E\{C\} = E\left\{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i})}{n}\right\} = E\{X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}\}. \quad (\text{B.15})$$

Assim, utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a média de C condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 é obtida respectivamente como

$$E\{C|\mathcal{H}_0\} = 0. \quad (\text{B.16})$$

$$E\{C|\mathcal{H}_1\} = 2\rho_{23}\sigma^2. \quad (\text{B.17})$$

B.1.4 Média de D , E e F

Aplicando-se o operador de média em (B.5), e sabendo-se que a média da soma de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual à n vezes a média de uma das variáveis, tem-se que

$$E\{D\} = E\left\{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2)}{n}\right\} = E\{X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2\}. \quad (\text{B.18})$$

Assim, utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a média de C condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 é obtida como

$$E\{D|\mathcal{H}_0\} = 4\sigma^2 \quad (\text{B.19})$$

$$E\{D|\mathcal{H}_1\} = 4\sigma^2. \quad (\text{B.20})$$

Com base em (B.5), (B.6) e (B.7), é possível verificar que D , E e F têm mesma média, de modo que

$$E\{D|\mathcal{H}_0\} = E\{E|\mathcal{H}_0\} = E\{F|\mathcal{H}_0\} = 4\sigma^2 \quad (\text{B.21})$$

$$E\{D|\mathcal{H}_1\} = E\{E|\mathcal{H}_1\} = E\{F|\mathcal{H}_1\} = 4\sigma^2. \quad (\text{B.22})$$

B.2 Média de $D_{n,3}$

Aplicando-se o operador de média em (B.1), tem-se que

$$\begin{aligned} E\{D_{n,3}\} &= (2\rho_{12} - 2\rho_{13}\rho_{23}) E\{A\} + (2\rho_{13} - 2\rho_{12}\rho_{23}) E\{B\} + (2\rho_{23} - 2\rho_{12}\rho_{13}) E\{C\} \\ &\quad + (\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{12}^2) E\{D\} + (\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{23}^2) E\{F\} + (\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{13}^2) E\{E\}. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Finalmente, utilizando-se as médias já determinadas para as variáveis auxiliares, a média de $D_{n,3}$ condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 é obtida respectivamente como

$$E\{D_{n,3}|\mathcal{H}_0\} = 4\sigma^2 (3\rho_{13}\rho_{23}\rho_{12} - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2) \quad (\text{B.24})$$

$$E\{D_{n,3}|\mathcal{H}_1\} = 0. \quad (\text{B.25})$$

B.3 Matriz de Covariância

A matriz de covariância correspondente às variáveis auxiliares é definida como

$$\Sigma \triangleq \begin{bmatrix} \text{VAR}\{A\} & \text{COV}\{A,B\} & \text{COV}\{A,C\} & \text{COV}\{A,D\} & \text{COV}\{A,E\} & \text{COV}\{A,F\} \\ \text{COV}\{A,B\} & \text{VAR}\{B\} & \text{COV}\{B,C\} & \text{COV}\{B,D\} & \text{COV}\{B,E\} & \text{COV}\{B,F\} \\ \text{COV}\{A,C\} & \text{COV}\{B,C\} & \text{VAR}\{C\} & \text{COV}\{C,D\} & \text{COV}\{C,E\} & \text{COV}\{C,F\} \\ \text{COV}\{A,D\} & \text{COV}\{B,D\} & \text{COV}\{C,D\} & \text{VAR}\{D\} & \text{COV}\{D,E\} & \text{COV}\{D,F\} \\ \text{COV}\{A,E\} & \text{COV}\{B,E\} & \text{COV}\{C,E\} & \text{COV}\{D,E\} & \text{VAR}\{E\} & \text{COV}\{E,F\} \\ \text{COV}\{A,F\} & \text{COV}\{B,F\} & \text{COV}\{C,F\} & \text{COV}\{D,F\} & \text{COV}\{E,F\} & \text{VAR}\{F\} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.26})$$

B.3.1 Variância de A

A partir de (B.2), e sabendo-se que a variância da soma de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a variância de uma das variáveis, tem-se que

$$\text{VAR}\{A\} = n \text{VAR} \left\{ \frac{X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}}{n} \right\} = \frac{1}{n} \text{VAR} \{X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}\}. \quad (\text{B.27})$$

Usando-se a definição de variância, segue que

$$\text{VAR}\{A\} = \text{E} \left\{ (X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i})^2 \right\} - \text{E}^2 \{X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}\}. \quad (\text{B.28})$$

Simplificando-se (B.28), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a variância de A condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{VAR} \{A|\mathcal{H}_0\} = \frac{2\sigma^4}{n} \quad (\text{B.29})$$

$$\text{VAR} \{A|\mathcal{H}_1\} = \frac{2\sigma^4}{n} (1 + \rho_{12}^2). \quad (\text{B.30})$$

B.3.2 Variância de B

A partir de (B.3), e sabendo-se que a variância da soma de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a variância de uma das variáveis, tem-se que

$$\text{VAR}\{B\} = n \text{VAR} \left\{ \frac{X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}}{n} \right\} = \frac{1}{n} \text{VAR} \{X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}\}. \quad (\text{B.31})$$

Usando-se a definição de variância, segue que

$$\text{VAR}\{B\} = \text{E} \left\{ (X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i})^2 \right\} - \text{E}^2 \{X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}\}. \quad (\text{B.32})$$

Simplificando-se (B.32), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a variância de B condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{VAR} \{B|\mathcal{H}_0\} = \frac{2\sigma^4}{n} \quad (\text{B.33})$$

$$\text{VAR} \{B|\mathcal{H}_1\} = \frac{2\sigma^4}{n} (1 + \rho_{13}^2). \quad (\text{B.34})$$

B.3.3 Variância de C

A partir de (B.4), e sabendo-se que a variância da soma de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a variância de uma das variáveis, tem-se que

$$\text{VAR}\{C\} = n \text{VAR} \left\{ \frac{X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}}{n} \right\} = \frac{1}{n} \text{VAR} \{X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}\}. \quad (\text{B.35})$$

Usando-se a definição de variância, segue que

$$\text{VAR}\{C\} = \text{E} \left\{ (X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i})^2 \right\} - \text{E}^2 \{X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}\}. \quad (\text{B.36})$$

Simplificando-se (B.36), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a variância de C condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{VAR} \{C|\mathcal{H}_0\} = \frac{2\sigma^4}{n} \quad (\text{B.37})$$

$$\text{VAR} \{C|\mathcal{H}_1\} = \frac{2\sigma^4}{n} (1 + \rho_{23}^2). \quad (\text{B.38})$$

B.3.4 Variância de D , E e F

A partir de (B.5), e sabendo-se que a variância da soma de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a variância de uma das variáveis, tem-se que

$$\text{VAR}\{D\} = n \text{VAR} \left\{ \frac{X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2}{n} \right\} = \frac{1}{n} \text{VAR} \{X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2\}. \quad (\text{B.39})$$

Usando-se a definição de variância, segue que

$$\text{VAR}\{D\} = \frac{1}{n} [\text{E} \{(X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2)^2\} - \text{E}^2 \{X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2\}]. \quad (\text{B.40})$$

Simplificando-se (B.40), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a variância de D condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{VAR} \{D|\mathcal{H}_0\} = \frac{8\sigma^4}{n} \quad (\text{B.41})$$

$$\text{VAR} \{D|\mathcal{H}_1\} = \frac{8\sigma^4}{n} (1 + \rho_{12}^2). \quad (\text{B.42})$$

Similarmente, a partir de (B.6) e (B.7), é possível mostrar que

$$\text{VAR} \{E|\mathcal{H}_0\} = \text{VAR} \{F|\mathcal{H}_0\} = \frac{8\sigma^4}{n} \quad (\text{B.43})$$

$$\text{VAR} \{E|\mathcal{H}_1\} = \frac{8\sigma^4}{n} (1 + \rho_{13}^2) \quad (\text{B.44})$$

$$\text{VAR} \{F|\mathcal{H}_1\} = \frac{8\sigma^4}{n} (1 + \rho_{23}^2). \quad (\text{B.45})$$

B.3.5 COV $\{A, B\}$

A partir de (B.2) e (B.3), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\text{COV}\{A, B\} = \frac{1}{n} \text{COV} \{X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}, X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}\}. \quad (\text{B.46})$$

Usando-se a definição de covariância, segue que

$$\begin{aligned} \text{COV}\{A, B\} &= \frac{1}{n} [\text{E} \{(X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i})(X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i})\} \\ &\quad - \text{E} \{X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}\} \text{E} \{X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}\}]. \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Simplificando-se (B.47), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a covariância entre A e B condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{COV} \{A, B|\mathcal{H}_0\} = 0 \quad (\text{B.48})$$

$$\text{COV} \{A, B|\mathcal{H}_1\} = \frac{2\sigma^4}{n} (\rho_{12}\rho_{13} + \rho_{23}). \quad (\text{B.49})$$

B.3.6 COV $\{A, C\}$

A partir de (B.2) e (B.4), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\text{COV}\{A, C\} = \frac{1}{n} \text{COV}\{X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}, X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}\}. \quad (\text{B.50})$$

Usando-se a definição de covariância, segue que

$$\begin{aligned} \text{COV}\{A, C\} &= \frac{1}{n} [\text{E}\{(X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i})(X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i})\} \\ &\quad - \text{E}\{X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}\} \text{E}\{X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}\}]. \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

Simplificando-se (B.51), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a covariância entre A e C condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{COV}\{A, C|\mathcal{H}_0\} = 0 \quad (\text{B.52})$$

$$\text{COV}\{A, C|\mathcal{H}_1\} = \frac{2\sigma^4}{n} (\rho_{12}\rho_{23} + \rho_{13}). \quad (\text{B.53})$$

B.3.7 COV $\{A, D\}$

A partir de (B.2) e (B.5), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\text{COV}\{A, D\} = \frac{1}{n} \text{COV}\{X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}, X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2\}. \quad (\text{B.54})$$

Usando-se a definição de covariância, segue que

$$\begin{aligned} \text{COV}\{A, D\} &= \frac{1}{n} [\text{E}\{(X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i})(X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2)\} \\ &\quad - \text{E}\{X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}\} \text{E}\{X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2\}]. \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

Simplificando-se (B.55), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a covariância entre A e D condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{COV}\{A, D|\mathcal{H}_0\} = 0 \quad (\text{B.56})$$

$$\text{COV}\{A, D|\mathcal{H}_1\} = \frac{8\sigma^4\rho_{12}}{n}. \quad (\text{B.57})$$

B.3.8 COV $\{A, E\}$

A partir de (B.2) e (B.6), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\text{COV}\{A, E\} = \frac{1}{n} \text{COV}\{X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}, X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2\}. \quad (\text{B.58})$$

Usando-se a definição de covariância, segue que

$$\begin{aligned} \text{COV}\{A, E\} &= \frac{1}{n} \left[\text{E} \left\{ (X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}) (X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \text{E} \{X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}\} \text{E} \{X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

Simplificando-se (B.59), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a covariância entre A e E condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{COV}\{A, E | \mathcal{H}_0\} = 0 \quad (\text{B.60})$$

$$\text{COV}\{A, E | \mathcal{H}_1\} = \frac{4\sigma^4}{n} (\rho_{12} + \rho_{13}\rho_{23}). \quad (\text{B.61})$$

B.3.9 COV $\{A, F\}$

A partir de (B.2) e (B.7), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\text{COV}\{A, F\} = \frac{1}{n} \text{COV} \{X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}, X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2\}. \quad (\text{B.62})$$

Usando-se a definição de covariância, segue que

$$\begin{aligned} \text{COV}\{A, F\} &= \frac{1}{n} \left[\text{E} \left\{ (X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}) (X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \text{E} \{X_{1i}X_{2i} + Y_{1i}Y_{2i}\} \text{E} \{X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

Simplificando-se (B.63), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a covariância entre A e F condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{COV}\{A, D | \mathcal{H}_0\} = 0 \quad (\text{B.64})$$

$$\text{COV}\{A, D | \mathcal{H}_1\} = \frac{4\sigma^4}{n} (\rho_{12} + \rho_{13}\rho_{23}). \quad (\text{B.65})$$

B.3.10 COV $\{B, C\}$

A partir de (B.3) e (B.4), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\text{COV}\{B, C\} = \frac{1}{n} \text{COV} \{X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}, X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}\}. \quad (\text{B.66})$$

Usando-se a definição de covariância, segue que

$$\begin{aligned} \text{COV}\{B, C\} &= \frac{1}{n} \left[\text{E} \left\{ (X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}) (X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \text{E} \{X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}\} \text{E} \{X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

Simplificando-se (B.67), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a covariância entre B e C condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{COV}\{B, C | \mathcal{H}_0\} = 0. \quad (\text{B.68})$$

$$\text{COV}\{B, C | \mathcal{H}_1\} = \frac{2\sigma^4}{n} (\rho_{12} + \rho_{13}\rho_{23}). \quad (\text{B.69})$$

B.3.11 COV $\{B, D\}$

A partir de (B.3) e (B.5), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\text{COV}\{B, D\} = \frac{1}{n} \text{COV} \{X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}, X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2\}. \quad (\text{B.70})$$

Usando-se a definição de covariância, segue que

$$\begin{aligned} \text{COV}\{B, D\} &= \frac{1}{n} [\text{E} \{(X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i})(X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2)\} \\ &\quad - \text{E}\{X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}\} \text{E}\{X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2\}]. \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

Simplificando-se (B.71), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a covariância entre B e D condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{COV}\{B, D | \mathcal{H}_0\} = 0 \quad (\text{B.72})$$

$$\text{COV}\{B, D | \mathcal{H}_1\} = \frac{4\sigma^4}{n} (\rho_{13} + \rho_{12}\rho_{23}) \quad (\text{B.73})$$

B.3.12 COV $\{B, E\}$

A partir de (B.3) e (B.6), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\text{COV}\{B, E\} = \frac{1}{n} \text{COV} \{X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}, X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2\}. \quad (\text{B.74})$$

Usando-se a definição de covariância, segue que

$$\begin{aligned} \text{COV}\{B, E\} &= \frac{1}{n} [\text{E} \{(X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i})(X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2)\} \\ &\quad - \text{E}\{X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}\} \text{E}\{X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2\}]. \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

Simplificando-se (B.75), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a covariância entre B e E condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{COV}\{B, E | \mathcal{H}_0\} = 0 \quad (\text{B.76})$$

$$\text{COV}\{B, E | \mathcal{H}_1\} = \frac{8\sigma^4\rho_{13}}{n}. \quad (\text{B.77})$$

B.3.13 COV $\{B, F\}$

A partir de (B.3) e (B.7), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\text{COV}\{B, F\} = \frac{1}{n} \text{COV} \{X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}, X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2\}. \quad (\text{B.78})$$

Usando-se a definição de covariância, segue que

$$\begin{aligned} \text{COV}\{B, F\} &= \frac{1}{n} \left[\mathbb{E} \left\{ (X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}) (X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E} \{X_{1i}X_{3i} + Y_{1i}Y_{3i}\} \mathbb{E} \{X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.79})$$

Simplificando-se (B.79), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a covariância entre B e F condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{COV}\{B, F | \mathcal{H}_0\} = 0 \quad (\text{B.80})$$

$$\text{COV}\{B, F | \mathcal{H}_1\} = \frac{4\sigma^4}{n} (\rho_{13} + \rho_{12}\rho_{23}). \quad (\text{B.81})$$

B.3.14 COV $\{C, D\}$

A partir de (B.4) e (B.5), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\text{COV}\{C, D\} = \frac{1}{n} \text{COV} \{X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}, X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2\}. \quad (\text{B.82})$$

Usando-se a definição de covariância, segue que

$$\begin{aligned} \text{COV}\{C, D\} &= \frac{1}{n} \left[\mathbb{E} \left\{ (X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}) (X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E} \{X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}\} \mathbb{E} \{X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

Simplificando-se (B.83), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a covariância entre C e D condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{COV}\{C, D | \mathcal{H}_0\} = 0 \quad (\text{B.84})$$

$$\text{COV}\{C, D | \mathcal{H}_1\} = \frac{4\sigma^4}{n} (\rho_{12}\rho_{13} + \rho_{23}). \quad (\text{B.85})$$

B.3.15 COV $\{C, E\}$

A partir de (B.4) e (B.6), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\text{COV}\{C, E\} = \frac{1}{n} \text{COV} \{X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}, X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2\}. \quad (\text{B.86})$$

Usando-se a definição de covariância, segue que

$$\begin{aligned} \text{COV}\{C, E\} &= \frac{1}{n} \left[\mathbb{E} \left\{ (X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}) (X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E} \{X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}\} \mathbb{E} \{X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.87})$$

Simplificando-se (B.87), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a covariância entre C e E condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{COV}\{C, E | \mathcal{H}_0\} = 0 \quad (\text{B.88})$$

$$\text{COV}\{C, E | \mathcal{H}_1\} = \frac{4\sigma^4}{n} (\rho_{12}\rho_{13} + \rho_{23}). \quad (\text{B.89})$$

B.3.16 COV $\{C, F\}$

A partir de (B.4) e (B.7), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\text{COV}\{C, F\} = \frac{1}{n} \text{COV} \{X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}, X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2\}. \quad (\text{B.90})$$

Usando-se a definição de covariância, segue que

$$\begin{aligned} \text{COV}\{C, F\} &= \frac{1}{n} \left[\text{E} \{ (X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i}) (X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2) \} \right. \\ &\quad \left. - \text{E} \{ X_{2i}X_{3i} + Y_{2i}Y_{3i} \} \text{E} \{ X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2 \} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.91})$$

Simplificando-se (B.91), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a covariância entre C e F condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{COV} \{C, F | \mathcal{H}_0\} = 0 \quad (\text{B.92})$$

$$\text{COV} \{C, F | \mathcal{H}_1\} = \frac{8\sigma^4 \rho_{23}^2}{n}. \quad (\text{B.93})$$

B.3.17 COV $\{D, E\}$, COV $\{D, F\}$ e COV $\{E, F\}$

A partir de (B.5) e (B.6), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é igual a n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\text{COV}\{D, E\} = \frac{1}{n} \text{COV} \{X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2, X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2\}. \quad (\text{B.94})$$

Usando-se a definição de covariância, segue que

$$\begin{aligned} \text{COV}\{D, E\} &= \frac{1}{n} \left[\text{E} \{ (X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2) (X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2) \} \right. \\ &\quad \left. - \text{E} \{ X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2 \} \text{E} \{ X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2 \} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.95})$$

Simplificando-se (B.95), e utilizando-se o modelo estocástico descrito no Capítulo 4, a covariância entre D e E condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\text{COV} \{D, E | \mathcal{H}_0\} = \frac{4\sigma^4}{n} \quad (\text{B.96})$$

$$\text{COV} \{D, E | \mathcal{H}_1\} = \frac{4\sigma^4}{n} (\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 + 1). \quad (\text{B.97})$$

Similarmente, a partir de (B.5)–(B.7), é possível mostrar que

$$\text{COV} \{D, F | \mathcal{H}_0\} = \text{COV} \{E, F | \mathcal{H}_0\} = \frac{4\sigma^4}{n} \quad (\text{B.98})$$

$$\text{COV} \{D, F | \mathcal{H}_1\} = \text{COV} \{E, F | \mathcal{H}_1\} = \frac{4\sigma^4}{n} (\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 + 1). \quad (\text{B.99})$$

B.4 Variância de $D_{n,3}$

Aplicando-se a definição de variância em (B.1), é possível reescrever $\text{VAR}\{D_{n,3}\}$ em termos das variâncias e covariâncias das variáveis auxiliares, obtendo-se

$$\begin{aligned}
\text{VAR}\{D_{n,3}\} = & 4(\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23})^2 \text{VAR}\{A\} + 4(\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23})^2 \text{VAR}\{B\} + 4(\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13})^2 \text{VAR}\{C\} \\
& + (\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{12}^2)^2 \text{VAR}\{D\} + (\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{13}^2)^2 \text{VAR}\{E\} + (\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{23}^2)^2 \\
& \times \text{VAR}\{F\} + 8(\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23})(\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23}) \text{COV}\{A, B\} + 8(\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23})(\rho_{23} \\
& - \rho_{12}\rho_{13}) \text{COV}\{A, C\} + 8(\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23})(\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}) \text{COV}\{B, C\} + 4(\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}) \\
& \times (\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{12}^2) \text{COV}\{A, D\} + 4(\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23})(\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{12}^2) \text{COV}\{B, D\} \\
& + 4(\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13})(\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{12}^2) \text{COV}\{C, D\} + 4\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}(-\rho_{13}^2 \\
& + \rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}) \text{COV}\{A, E\} + 4(\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23})(\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{13}^2) \text{COV}\{B, E\} \\
& + 4(\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13})(\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{13}^2) \text{COV}\{C, E\} + 2(\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{12}^2) \\
& \times (\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{13}^2) \text{COV}\{D, E\} + 4(\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23})(\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{23}^2) \\
& \times \text{COV}\{A, F\} + 4(\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23})(\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{23}^2) \text{COV}\{B, F\} + 4(\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}) \\
& \times (\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{23}^2) \text{COV}\{C, F\} + 2(\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{12}^2)(\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{23}^2) \\
& \times \text{COV}\{D, F\} + 2(\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{13}^2)(\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{23}^2) \text{COV}\{E, F\}. \tag{B.100}
\end{aligned}$$

Por fim, com uso dessas variâncias e covariâncias, determinadas anteriormente, a variância de $D_{n,3}$ condicionada às hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 pode ser obtida respectivamente como

$$\begin{aligned}
\text{VAR}\{D_{n,3}|\mathcal{H}_0\} = & \frac{8\sigma^4}{n} [\rho_{12}^4 - 4\rho_{13}\rho_{23}\rho_{12}^3 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 + (\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2)^2 \\
& + \rho_{12}^2 ((6\rho_{23}^2 + 2)\rho_{13}^2 + 2\rho_{23}^2 + 1) - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}(2\rho_{13}^2 + 2\rho_{23}^2 + 3)] \tag{B.101}
\end{aligned}$$

$$\text{VAR}\{D_{n,3}|\mathcal{H}_1\} = \frac{8\sigma^4}{n} (\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2) (\rho_{12}^2 - 2\rho_{13}\rho_{23}\rho_{12} + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - 1)^2. \tag{B.102}$$

Bibliografia

- [1] V. S. Chernyak, *Fundamentals of multisite radar systems: Multistatic radars and multiradar systems*, 1st ed. CRC Press, 1998.
- [2] K. A. Bakshi e A. V. Bakshi, *Antenna and Wave Propagation*, 1st ed. Technical Publications, 2009.
- [3] D. K. Barton, *Radar equations for modern radar*. Artech House, 2013.
- [4] L. V. Blake, *Radar range-performance analysis*, 1st ed. Artech House, 1986.
- [5] T. Ito, R. Takahashi, S. Morita e K. Hirata, “Experimental result of passive bistatic radar with unknown transmitting radar pulse,” em *Proc. European Radar Conference*, Núremberg, Alemanha, Out. 2013, pp. 455-458.
- [6] A. Leon-Garcia, *Probability and random processes for electrical engineering*, 2nd ed. Addison-Wesley, 1994.
- [7] M. A. M. Miranda, J. C. S. Santos Filho, G. Fraidenraich, M. D. Yacoub, J. R. Moreira e Y. C. Zúñiga, “Correlation Between Signals From Spaced Antennas of Stationary Meteorological Radars,” *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 52, no. 6, pp. 3116–3124, Jun. 2014.
- [8] M. A. M. Miranda, J. C. S. Santos Filho, G. Fraidenraich, M. D. Yacoub, J. R. Moreira e Y. C. Zúñiga, “Radar Meteorológico com Antenas Fixas: Projeto e Análise de Detector ótimo,” em *Proc. XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Fortaleza, Brasil, Set. 2013.
- [9] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 4th ed. McGraw-Hill, 2002.
- [10] M. A. Richards, *Fundamentals of radar signal processing*, 2nd ed. McGraw-Hill, 2014.
- [11] M. A. Richards, J. Scheer, W. A. Holm e W. L. Melvin, *Principles of modern radar: Basic principles*, 1st ed. SciTech Pub, 2010.
- [12] H. Sauvageot, *Radar meteorology*, 1st ed. Artech House, 1992.
- [13] M. Wada, J. Horikomi e F. Mizutani, “Development of solid-state weather radar,” em *Proc. IEEE Radar Conference*, California, USA, Maio. 2009, pp. 1–4.
- [14] N. J. Willis e H. Griffiths, *Advances in bistatic radar*, 1st ed. SciTech Pub, 2007.
- [15] G. Zhang e R. J. Doviak, “Spaced-Antenna Interferometry to Detect and Locate Subvolume Inhomogeneities of Reflectivity: An Analogy with Monopulse Radar,”

- em *Proc. J. Atmos. Ocean. Technol.*, Nov. 2008, pp. 1921–1938.
- [16] D. S. Zrnic, V. M. Melnikov, R. J. Doviak e R. Palmer, “Scanning Strategy for the Multifunction Phased-Array Radar to Satisfy Aviation and Meteorological Needs,” *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.*, vol. 12, no. 6, pp. 1204–1208, Jun. 2015.