



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Amanda Spagolla

**Análise de Estabilidade e Síntese de Controle
para Sistemas Lineares Positivos Discretos no
Tempo por meio de Desigualdades Matriciais
Lineares**

Campinas
2019

Amanda Spagolla

**Análise de Estabilidade e Síntese de Controle para
Sistemas Lineares Positivos Discretos no Tempo por meio
de Desigualdades Matriciais Lineares**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres

Coorientadora: Dr.^a Cecília de Freitas Morais

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA PELA ALUNA AMANDA SPAGOLLA E ORIENTADA PELO PROF. DR. PEDRO LUIS DIAS PERES.

Campinas
2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

Sp13a Spagolla, Amanda, 1992-
Análise de estabilidade e síntese de controle para sistemas lineares positivos discretos no tempo por meio de desigualdades matriciais lineares / Amanda Spagolla. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres.
Coorientador: Cecília de Freitas Morais.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas lineares invariantes no tempo. 2. Sistemas lineares variantes no tempo. 3. Controle robusto. 4. Desigualdades matriciais lineares. I. Peres, Pedro Luis Dias, 1960-. II. Morais, Cecília de Freitas, 1987-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Stability analysis and control synthesis for positive discrete-time linear systems by means of linear matrix inequalities

Palavras-chave em inglês:

Linear systems

Robust control

Positive systems

Feedback control systems

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestra em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Pedro Luis Dias Peres [Orientador]

Matheus Souza

Cristiano Marcos Agulhari

Data de defesa: 25-03-2019

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-7100-6499>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/4250357475786788>

COMISSÃO JULGADORA — DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Candidata: Amanda Spagolla

RA: 192721

Data da Defesa: 25/03/2019

Título da Dissertação: “Análise de Estabilidade e Síntese de Controle para Sistemas Lineares Positivos Discretos no Tempo por meio de Desigualdades Matriciais Lineares”

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Matheus Souza (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari (UTFPR – Cornélio Procópio)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no processo de vida acadêmica da aluna.

*Dedico esta à minha família: meu pai Armando (in memorian), minha mãe Leila,
meus avós Lila e Léo (in memorian), minha irmã Jéssica,
minha sobrinha Sophia e meu anjo Daniel.*

Agradecimentos

Essa, sem dúvidas, é a parte que mais me alegra escrever, afinal não só significa que finalizei a dissertação (ufa!), como, e principalmente, é a oportunidade que tenho para externar um pouco o quão grata sou às pessoas que fizeram parte dessa jornada. Assim, agradeço:

Ao meu orientador Dr. Pedro L. D. Peres, por me conceder essa grande oportunidade que foi o mestrado. Agradeço também pela fantástica orientação, paciência e aprendizados de caráter profissional e pessoal, por ser uma pessoa tão de bem com a vida.

À minha coorientadora Dra. Cecília de Freitas Moraes, minha referência de profissional, extremamente dedicada em tudo que se propõe a fazer, além de muito solícita. Agradeço por toda paciência, ensinamentos e pela valorosa amizade.

Ao Dr. Ricardo C. L. F. Oliveira, por me orientar ainda que na informalidade, contribuindo de modo decisivo para o avanço desta dissertação. Agradeço também pelos conhecimentos transmitidos por meio das conversas e das excelentes aulas no curso IA892.

Ao Dr. Cristiano M. Agulhari e ao Dr. Fábio R. Durand, por me proporcionarem todas as condições e oportunidades possíveis para que eu pudesse trilhar o caminho da pesquisa e conseqüentemente o mestrado. Agradeço à sorte de encontrar pessoas e profissionais tão maravilhosos e humildes como vocês.

Aos amigos que fazem ou fizeram parte do LE16, em especial, ao Luciano por sua prontidão em ajudar, excelentes explicações e grande paciência. Agradeço também à Juliane, pessoa muito querida e prestativa; Elmer, o peruano favorito de todos e poeta nas horas vagas; João, sempre muito aconselhador; Álvaro e Izabella meus irmãos por parte de orientador, muito bondosos e divertidos; Raul, sempre solícito; Lucas, o DJ das músicas chicletes; Jonathan, meu companheiro de noitadas no laboratório e Alexandre Felipe pela solidária ajuda para sanar minhas dúvidas com tão boa vontade. Obrigada também aos que partiram dessa para uma melhor, Tábita, na Holanda; Filipe, no Canadá e Lício, em Oxford.

Aos novos amigos que encontrei em Campinas, em especial a Rafael, Monyque, Darla, Glauco (também conhecido por Galco), Tiago e Luciane por serem pessoas genuinamente tão boas. Agradeço, também, às meninas da república onde morei no início do mestrado por todo apoio no período em que vivemos juntas: Tami, Tisci, Nay, Gabi, Guta e Sara.

Aos meus amigos Pedro, Vinícius, Thiago, Thíago e Marco, obrigada pela amizade, incentivo e ajuda para me candidatar ao mestrado (a culpa é de vocês!). Em especial, agradeço ao Thíago por todo suporte e amizade fundamentais para me ajudar a passar por períodos de perdas e a transição no início do mestrado, não conseguiria sem você.

Aos amigos de longa data Bruna, Iago, Anna Carla e Fidel (também primo), por todas conversas, alegrias e tristezas compartilhadas, pela amizade de sempre.

Aos Simão Horevicz, Beta, Luiz, Daniel, Carol e Abel com “1”, por acolherem tão bem a mim e à minha família. Por todas as vezes que buscaram minha sobrinha para brincar e se divertir, mesmo quando eu estava longe. Em especial, agradeço ao meu namorado Daniel pela sua generosidade ao apoiar e incentivar minhas decisões, ainda quando essas venham acompanhadas por novos obstáculos. Obrigada por todo zelo, amizade, bondade, por trazer mais alegria à minha vida.

À minha família, em especial aos meus pais, minha razão de ser, a melhor parte de mim. Agradeço à minha mãe Leila por todo seu amor, incentivo, dedicação e generosidade, por cuidar tão bem de mim e de minha irmã e agora da Sophia, sendo uma super avó. Agradeço ao meu pai Armando, meu eterno herói, por mais do que saudades, deixar um exemplo de ser humano a ser seguido. Por mostrar que a melhor forma de transmitir bons ensinamentos é vivenciando-os. Sempre amparou, ajudou e ainda ajuda as pessoas, mesmo na morte, por meio da doação de seus órgãos e pelas memórias deixadas. Agradeço à minha irmã por todo amor e preocupação a mim direcionados. Agradeço à minha sobrinha Sophia por todos os bolos, comidinhas e presentinhos imaginários. Obrigada por ser essa criança iluminada, a alegria da família, minha amigona.

À UNICAMP, por fornecer professores e funcionários capacitados, além da estrutura necessária para viabilizar a realização deste trabalho.

Aos membros da banca, pelas excelentes sugestões que contribuíram para a elaboração da versão final desta dissertação.

A Deus, por tudo.

Agradecimentos - Auxílio Financeiro

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, cujo convênio com a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) propiciou o apoio financeiro concedido durante o período do mestrado, processo nº 2016/25273-8. Assim, agradeço à CAPES, à FAPESP e também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo primeiro mês de bolsa no início do mestrado, processo nº 132452/2017-0.

Resumo

Nesta dissertação são estudados sistemas lineares positivos, isto é, sistemas lineares com variáveis de estado e de saída não negativas, para qualquer condição inicial e entrada não negativas. Mais precisamente, pretende-se abordar os problemas de síntese de controladores para sistemas discretos positivos lineares com parâmetros variantes no tempo (LPV, do inglês *Linear Parameter-Varying*) por meio de metodologias baseadas em desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs). Para este fim, consideram-se como critérios de desempenho as normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 . Investiga-se o projeto de controladores por realimentação estática de saída e de estados. Como primeira contribuição, propõe-se um procedimento iterativo, baseado em LMIs dependentes de parâmetros, para a estabilização e controle \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 dos sistemas discretos positivos LPV. Dentre as principais características do método iterativo, destaca-se o emprego do ganho diretamente como uma variável de otimização, em vez de adotar mudanças de variáveis. Esse atributo da recuperação do ganho é muito vantajoso no âmbito de sistemas positivos, uma vez que possibilita eliminar a imposição de estruturas diagonais sobre as matrizes envolvidas na recuperação do ganho para satisfazer a restrição de positividade aplicada ao sistema em malha fechada. Outra vantagem é a possibilidade de o método proposto poder ser particularizado para lidar com sistemas politópicos invariantes no tempo e sistemas chaveados (com regra de chaveamento arbitrária), permitindo, ainda, o emprego de estruturas especiais no ganho, tais como descentralização ou restrições sobre o módulo dos elementos, sem restringir qualquer outra variável do problema. Outras propriedades interessantes da técnica proposta são listadas a seguir: o emprego de relaxações aplicadas de maneira combinada às condições de estabilidade e positividade para reduzir o grau de conservadorismo do procedimento iterativo; a garantia de convergência local do algoritmo; a proposição de condições iniciais adequadas que garantem a existência de soluções factíveis a cada iteração. Como segunda contribuição, apresenta-se nesta dissertação uma condição LMI associada a uma busca em um parâmetro escalar restrito a um intervalo bem definido para síntese de controladores por realimentação de estados no contexto de sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo, capaz de prover controladores dependentes e independentes de modos. Finalmente, exemplos numéricos ilustram a aplicabilidade e a flexibilidade dos métodos propostos, bem como a eficiência das abordagens quando comparadas com outras técnicas existentes na literatura.

Palavras-chaves: Sistemas lineares positivos; sistemas chaveados; parâmetros variantes no tempo; controle por realimentação estática de saída; realimentação de estados; desigualdades matriciais lineares.

Abstract

Linear positive systems are investigated in this dissertation, that is, linear systems whose state and output variables are non-negative for any non-negative input and non-negative initial condition. More precisely, the problem of control synthesis for linear parameter-varying (LPV) discrete-time positive systems is addressed by means of linear matrix inequality (LMI) based methodologies. To this aim, performance criteria such as the \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 norms are taken into account. The static state and output feedback control design is investigated. As first contribution, an iterative procedure based in parameter-dependent LMIs is proposed to solve the problems of stabilization and \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 control of LPV discrete-time positive systems. Among the main features of the iterative method, one can highlight the use of the control gain directly as optimization variable, instead of adopting the usual change of variables. This particularity of gain synthesis is very advantageous in the context of positive systems, since it eliminates the need of diagonal structures in the variables related to the gain recovery, required to satisfy the positiveness constraint applied to the closed-loop system. Another benefit is that the proposed method can be particularized to deal with time-invariant polytopic systems and switched systems (with arbitrary switching rule), also allowing the employment of particular structures in the gain, such as decentralization or module limitation of the gain entries, without constraining other variables of the problem. Further interesting properties of the proposed technique are listed as follows: the employment of relaxations applied jointly to the stability and positivity conditions to reduce the conservativeness of the iterative procedure; the guarantee of local convergence of the synthesis algorithm; the proposition of appropriate initial conditions that assure the existence of feasible solution at each iteration. As a second contribution, this dissertation presents an LMI condition combined with a scalar parameter search, with the scalar parameter confined to a well-defined interval, for the design of state-feedback controllers for discrete-time positive switched systems, that is capable of providing mode-dependent and mode-independent controllers. Finally, numerical examples illustrate the applicability and flexibility of the proposed methods, as well as the efficiency of the proposed approach when compared with other techniques from the literature.

Keywords: Linear positive systems; switched systems; time-varying parameters; static output-feedback control; state-feedback control; linear matrix inequalities.

Lista de Ilustrações

Figura 1 – Região estabilizável obtida com o Algoritmo 1 (A1) utilizando $X_i(\bar{\alpha}(k))$ simétrica (s) ou cheia (c) (\circ); diagonal (d) (∇); e com Ebihara <i>et al.</i> (2014) (*).	37
Figura 2 – Região estabilizável obtida com Algoritmo 1 com $X_i(\bar{\alpha}(k))$ simétrica para a síntese de ganhos escalonados ($L(\alpha(k)) - \times$) e robustos ($L - \circ$).	38
Figura 3 – Trajetórias dos parâmetros variantes no tempo ($\alpha(k)$); da saída em malha aberta ($\log_{10}(y(k))$); da saída ($y(k)$) e dos estados ($x(k)$) em malha-fechada com o ganho (3.8) para o exemplo.	39
Figura 4 – Máximos valores de ρ obtidos com o teste de 19 valores de $\xi \in [-0.9, 0.9]$ igualmente espaçados para as abordagens dependente (linha vermelha) e independente de modos (linha azul), baseadas no Teorema 3.2 para o Exemplo 1.	42
Figura 5 – Respostas temporais obtidas para o sistema (4.30) do Exemplo 3.6 em malha-fechada utilizando controladores dependentes e independentes de modos obtidos pelo Teorema 3.2 (respectivamente, $K_i(T3.2)$ e $K(T3.2)$ - curva contínua verde) e pelo Algoritmo 1 ($K_i(A1)$ e $K(A1)$ - curva tracejada azul) e o controlador independente de modos reportado em Liu <i>et al.</i> (2017) (K_ℓ - curva pontilhada em cinza).	44
Figura 6 – Respostas temporais obtidas para o sistema (4.30) do Exemplo 3.6 em malha-fechada com controladores dependentes de modo sintetizados pelo Teorema 3.2 com $\xi \in [-0.9, 0.9]$	45
Figura 7 – Respostas temporais obtidas para o sistema (4.30) do Exemplo 3.6 em malha-fechada com controladores independentes de modo sintetizado pelo Teorema 3.2 com $\xi \in [-0.9, 0.9]$	46
Figura 8 – Trajetórias médias dos estados do sistema (4.30) em malha fechada e desvios padrões associados (áreas sombreadas) obtidos por meio de uma simulação de Monte Carlo para os controladores dependente e independente de modos obtidos pelo Teorema 3.2 (respectivamente $K_i(T3.2)$ - curva vermelha e $K(T3.2)$ - curva verde) e pelo método de Liu <i>et al.</i> (2017) (em azul) para o Exemplo 3.7.	47

Lista de Tabelas

Tabela 1	– Resultados da estabilização robusta de sistemas LTI e LPV por realimentação de estados, obtidos pelas condições LMIs propostas em Ebihara <i>et al.</i> (2014) (respectivamente E(25) e E(27)) e pelo método proposto no Algoritmo 1 (A1), adotando 5 como número máximo de iterações e as variáveis de folga $X_{ei}(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, 3$, com estrutura cheia ('f'), simétrica ('s'), ou diagonal ('d').	33
Tabela 2	– Resultados da estabilização de sistemas LTI e LPV de ordem $n_x = 2$ obtidos pelas condições LMIs propostas em Ebihara <i>et al.</i> (2014) (respectivamente E(25) e E(27)) e pelo método proposto no Algoritmo 1 (A1), usando no máximo 5 iterações e variáveis de folga com estrutura simétrica ('s'), com ganho robusto descentralizado, empregando as estruturas $(L_{dc}) [l_1 \ 0]$ e $[0 \ l_2]$	34
Tabela 3	– Resultados da estabilização de sistemas LTI e LPV de ordem $n_x = 3$ obtidos pelas condições LMIs propostas em Ebihara <i>et al.</i> (2014) (respectivamente E(25) e E(27)) e pelo método proposto no Algoritmo 1 (A1), usando no máximo 5 iterações e variáveis de folga com estrutura simétrica ('s'), com ganho robusto descentralizado, empregando as estruturas $(L_{dc}) [l_1 \ 0 \ 0]$, $[0 \ l_2 \ 0]$ e $[0 \ 0 \ l_3]$	34
Tabela 4	– Resultados da estabilização de sistemas LTI e LPV de ordem $n_x = 3$ obtidos pelas condições LMIs propostas em Ebihara <i>et al.</i> (2014) (respectivamente E(25) e E(27)) e pelo método proposto no Algoritmo 1 (A1), usando no máximo 5 iterações e variáveis de folga com estrutura simétrica ('s'), com ganho robusto descentralizado, empregando as estruturas $(L_{dc}) [1 \ 1 \ 0]$, $[1 \ 0 \ 1]$ e $[0 \ 1 \ 1]$	35
Tabela 5	– Resultados da estabilização de sistemas LTI e LPV por realimentação estática de saída, adotando 5 como número máximo de iterações na técnica proposta e as variáveis de folga $X_{ei}(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, 3$, com estrutura diagonal ('d'), simétrica ('s') ou cheia ('f').	36
Tabela 6	– Valores dos custos garantidos $\mathcal{H}_\infty(\gamma)$ calculados para o Exemplo 4.2 com a técnica proposta com m iterações ($it_{max} = 40$ e γ_0 fornecido) utilizando as seguintes estruturas para as variáveis de folga $X_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$: 'd' (diagonal), 's' (simétrica) e 'f' (cheia).	60

Tabela 7 – Custos garantidos \mathcal{H}_∞ associados aos ganhos descentralizados de realimentação de estados com diferentes estruturas L_{dc} referentes ao Exemplo 4.3 obtidos pela condição LMI (25) de Ebihara *et al.* (2014), E(25), e pelo método proposto no Algoritmo 2, A2, utilizando no máximo 30 iterações e variáveis de folga com estrutura simétrica ('s'). 63

Lista de Símbolos e Abreviações

\mathbb{Z}_+	Conjunto dos números inteiros não-negativos
$\alpha(k)$	Vetor de parâmetros variantes no tempo
ℓ_2	Espaço das funções discretas quadraticamente somáveis
$\epsilon(k)$	Função de chaveamento
Λ	Simplex unitário de dimensão N
$\lambda(M)$	Autovalores de uma matriz quadrada M
\mathbb{R}^n ($\mathbb{R}^{n \times n}$)	Conjunto de vetores (matrizes) reais de ordem n ($n \times n$)
$\mathcal{E}\{\cdot\}$	Esperança matemática
0	Matriz de zeros de dimensão apropriada
$\text{He}(M)$	Indica a soma da matriz M com sua transposta M'
I	Matriz identidade de dimensão apropriada
$\text{Tr}\{\cdot\}$	Traço de uma matriz
\star	Indica o bloco simétrico da matriz
M'	Transposta da matriz M
$M = M' \succ 0$	Matriz M é simétrica e definida positiva
$M \geq 0$	Matriz M possui elementos não-negativos
BMI	Bilinear Matrix Inequality (Desigualdade matricial bilinear)
KYP	Kalman-Yakubovich-Popov
LMI	Linear Matrix Inequality (Desigualdade matricial linear)
LPV	Linear Parameter-Varying (Linear com parâmetros variantes)
LTI	Linear Time Invariant (Linear e invariante no tempo)

SUMÁRIO

1	Introdução	17
2	Fundamentos Matemáticos	20
2.1	Sistemas positivos discretos no tempo	20
2.2	Definição do problema	21
2.3	Cômputo de normas	22
2.3.1	Análise da norma \mathcal{H}_∞	23
2.3.2	Análise da norma \mathcal{H}_2	23
2.4	Extensão para sistemas positivos chaveados	24
2.5	Lemas auxiliares	25
3	Estabilização de Sistemas Positivos	27
3.1	Estabilização de sistemas LPV positivos por realimentação estática de saída	27
3.1.1	Principais aplicações da técnica	29
3.1.2	Método iterativo	30
3.1.3	Testes de dimensão finita	31
3.1.4	Exemplos numéricos	32
3.1.4.1	Conclusões parciais	39
3.2	Estabilização de sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo por realimentação de estados	39
3.2.1	Principais aplicações da técnica	41
3.2.2	Exemplos numéricos	41
3.2.2.1	Conclusões parciais	47
4	Controle \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2	48
4.1	Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação estática de saída	48
4.1.1	Método iterativo	50
4.2	Controle \mathcal{H}_2 por realimentação estática de saída	53
4.2.1	Método iterativo	55
4.3	Testes de dimensão finita	57
4.4	Principais aplicações da técnica	57
4.5	Exemplos numéricos	58
4.5.1	Critério de desempenho \mathcal{H}_∞	59
4.5.1.1	Conclusões parciais	63
4.5.2	Critério de desempenho \mathcal{H}_2	64
4.5.2.1	Conclusões parciais	66
5	Considerações Finais	67

Referências 70

1 Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos tem sido impulsionado com o advento de ferramentas computacionais cada vez mais poderosas, viabilizando o uso de modelos matemáticos complexos, capazes de atender a demandas de controle mais exigentes. Em particular, os problemas de controle e análise de estabilidade de sistemas dinâmicos sujeitos às mais variadas adversidades (incertezas, saturação de sinais, imprecisão de medidas, falhas de sensores e atuadores) vêm recebendo grande atenção. Nesse cenário, destacam-se as técnicas de otimização baseadas em programação semidefinida, sobretudo as formulações expressas em termos de desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs). Veja, por exemplo, (BOYD *et al.*, 1994; El Ghaoui; NICULESCU, 2000) e também (OLIVEIRA; PERES, 2010) para uma introdução ao tema.

Fundamentadas pela teoria de Lyapunov (LYAPUNOV, 1992), isto é, pela construção de funções de Lyapunov que certifiquem a estabilidade em malha fechada (e eventualmente garantam outras propriedades) do sistema, inúmeros resultados surgiram nas últimas décadas envolvendo o projeto de controladores, filtros ou simplesmente testes conclusivos sobre a estabilidade de sistemas lineares incertos. Desde a função quadrática nos estados com uma matriz constante de Lyapunov associada à incerteza presente no modelo (estabilidade quadrática), até a construção de funções polinomiais homogêneas em termos do estado ou do parâmetro incerto, um elenco enorme de métodos e condições baseados em LMIs foi desenvolvido, tratando de sistemas contínuos, discretos, híbridos, etc., sujeitos a diversas perturbações.

Muitas vezes, entretanto, no projeto de controladores as restrições emergem não apenas de critérios de desempenho ou de perturbações externas, mas sim como consequência imediata da natureza do sistema em si. Uma vasta gama de problemas de engenharia, por exemplo, possui como restrição adicional a não-negatividade dos estados (DAYAWANSA; MARTIN, 1999; BENZAOUIA; TADEO, 2008). Sistemas cujas variáveis de estado assumem apenas valores não-negativos, chamados de sistemas positivos (FARINA; RINALDI, 2000), podem ser encontrados nas mais diversas áreas como engenharia, biologia, medicina, ciências sociais e economia (CACCIETTA; RUMCHEV, 2000).

A teoria de sistemas positivos está enraizada no estudo de matrizes não-negativas, cujo pilar é o famoso Teorema de Perron-Frobenius (HORN; JOHNSON, 1991). Iniciado por Luenberger (1979), o estudo de sistemas positivos ainda é uma área em aberto para pesquisas, pois muitos dos resultados bem estabelecidos para sistemas lineares não podem ser aplicados diretamente aos sistemas positivos, uma vez que esses são definidos em cones e não no espaço linear (CACCIETTA; RUMCHEV, 2000). Não obstante, segundo

Ebihara *et al.* (2018), a restrição de positividade intrínseca ao sistema em malha fechada dificulta a síntese, podendo entretanto, para algumas situações, ser contornada com a “estabilidade diagonal”. Essa afirmação se baseia no conhecimento bem estabelecido de que sistemas positivos admitem estrutura diagonal para a matriz de Lyapunov que certifica a estabilidade assintótica do sistema.

No que se refere a sistemas positivos, por ora, existem condições necessárias e suficientes apenas para estabilização e controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados para sistemas precisamente conhecidos. Dentre os trabalhos que abordam sistemas lineares invariantes no tempo (em inglês, *Linear Time Invariant* — LTI), vale mencionar (TANAKA; LANGBORT, 2011), no qual é mostrada a prova de que a LMI do Lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP), considerando o desempenho \mathcal{H}_∞ , admite a matriz de Lyapunov com estrutura diagonal em sistemas positivos. Na mesma linha, em Ebihara *et al.* (2014) apresenta-se uma prova alternativa para demonstrar que a matriz de Lyapunov nas LMIs do tipo KYP e nas desigualdades de Lyapunov pode ser diagonal, e ainda ser relaxada para não-simétrica no caso de sistemas positivos. Finalmente, uma aplicação interessante é investigada por Hernandez-Vargas *et al.* (2011), em que a dinâmica do tratamento de uma mutação viral é representada por meio de um sistema linear positivo chaveado.

Em relação à realimentação estática de saída, conforme afirmado por Bhattacharyya e Patra (2018), são poucos os trabalhos presentes na literatura que propõem solução para esse problema de controle no âmbito de sistemas positivos. O artigo de Bhattacharyya e Patra (2018) utiliza um método iterativo baseado em LMIs para tratar a realimentação de saída para sistemas LTI positivos no tempo contínuo.

No caso do controle \mathcal{H}_2 existe um desafio ainda maior, pois segundo Ebihara *et al.* (2018), acredita-se que a síntese do controlador \mathcal{H}_2 por realimentação de estados sob restrições de positividade seja um problema não convexo. Em Deaecto e Geromel (2017) são apresentados métodos que fornecem uma função de chaveamento globalmente assintoticamente estável e um conjunto de ganhos de realimentação de estados que assegura a positividade e um custo garantido \mathcal{H}_2 para sistemas chaveados contínuos no tempo. Ainda em relação à norma \mathcal{H}_2 , em Ebihara *et al.* (2018) é tratada a síntese \mathcal{H}_2 por realimentação de estados para sistemas discretos invariantes no tempo precisamente conhecidos, considerando a restrição de positividade nas matrizes de malha fechada.

Diante do exposto, neste trabalho é proposta uma nova abordagem iterativa, baseada em LMIs dependentes de parâmetros, para a estabilização e controle \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 por realimentação estática de saída para tratar sistemas discretos positivos lineares com parâmetros variantes no tempo (LPV, do inglês *Linear Parameter-Varying*). As condições também podem tratar o problema de realimentação de estados e, com pequenas modificações, considerar sistemas chaveados (com chaveamento arbitrário), ou invariantes no tempo. Além disso, desenvolve-se outro método de síntese, também baseado em LMIs, no

contexto de sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo.

Uma descrição resumida dos capítulos que compõem a dissertação é apresentada na sequência.

Capítulo 2: Apresenta a definição do problema estudado, assim como conceitos relacionados à estabilidade de sistemas positivos discretos, condições LMIs para análise de estabilidade e cômputo das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de sistemas LPV, além de alguns lemas auxiliares utilizados no decorrer deste trabalho.

Capítulo 3: A primeira contribuição desta dissertação, a qual consiste em um procedimento iterativo baseado em LMIs dependentes de parâmetros, para tratar a estabilização de sistemas LPV positivos, é apresentada. Ademais, é mostrado o desenvolvimento de uma condição LMI para abordar a síntese de controladores por realimentação de estados para sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo. A eficiência dos métodos propostos é averiguada por meio de exemplos numéricos estatísticos ou retirados da literatura.

Capítulo 4: Discorre sobre as condições desenvolvidas para a síntese de controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , as quais são resolvidas mediante o uso de procedimentos iterativos. Os algoritmos utilizados para obter os controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ baseiam-se nas mesmas relaxações para redução de conservadorismo e possuem estrutura similar, consistindo de três etapas: garantia da estabilidade, verificação da positividade e otimização do custo garantido. Além disso, são destacadas as características principais das condições propostas e, em seguida, experimentos numéricos ilustram a eficácia das abordagens desenvolvidas quando comparadas a outras técnicas disponíveis na literatura.

Capítulo 5: Contém as conclusões, perspectivas para trabalhos futuros e relação dos artigos produzidos ao longo do desenvolvimento do mestrado.

2 Fundamentos Matemáticos

Neste capítulo são introduzidos fundamentos teóricos para tornar viável a familiarização com o problema investigado, isto é, o controle por realimentação estática de saída e de estados de sistemas discretos positivos. Na sequência, apresenta-se a definição do problema, em conjunto com as restrições que envolvem os sistemas positivos. Adicionalmente, alguns conceitos relacionados à estabilidade e critérios de desempenho são lembrados. Por fim, detalha-se uma extensão no contexto de sistemas positivos e é feita a apresentação dos lemas auxiliares empregados nesta dissertação.

2.1 Sistemas positivos discretos no tempo

Considere um sistema linear discreto invariante no tempo dado por

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}w(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}w(k)\end{aligned}\tag{2.1}$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ e $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ são, respectivamente, o vetor de estados, o vetor de entradas e o de saídas do sistema; \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são matrizes do sistema precisamente conhecidas (independente de parâmetros).

A seguir são apresentadas as definições de sistemas positivos que podem ser encontradas em [Farina e Rinaldi \(2000\)](#).

Definição 2.1. *Um sistema é dito externamente positivo se para cada entrada não negativa $w(k)$ e condição inicial nula $x(0) = 0$, o vetor de saída $y(k)$ pertence ao quadrante positivo, ou seja, $y(k) \in \mathbb{R}_+^{n_y}$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.*

Definição 2.2. *Um sistema é dito internamente positivo se para cada entrada não negativa $w(k)$ e condição inicial não negativa $x(0)$, o vetor de estados $x(k)$ e o vetor de saídas $y(k)$ pertencem ao quadrante positivo, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.*

Das definições anteriores, está claro que um sistema é externamente positivo somente se é internamente positivo, mas o contrário não é válido. Neste trabalho considera-se o cenário de sistemas internamente positivos (denominados simplesmente sistemas positivos).

Outra definição de positividade de sistemas lineares discretos no tempo, descrita em termos de matrizes de espaço de estados, é reproduzida a seguir ([FARINA; RINALDI, 2000](#)).

Definição 2.3. *O sistema (2.1) é positivo se, e somente se, $\mathbf{A} \geq 0$, $\mathbf{B} \geq 0$, $\mathbf{C} \geq 0$ e $\mathbf{D} \geq 0$.*

Adicionalmente, para projetar controladores estabilizantes, faz-se necessário a introdução da definição de estabilidade assintótica, descrita na sequência em termos de LMIs.

Lema 2.1. *O sistema (2.1) é assintoticamente estável se, e somente se, existir uma matriz de Lyapunov diagonal definida positiva P tal que*

$$\mathbf{A}'PA - P \prec 0. \quad (2.2)$$

2.2 Definição do problema

Embora as definições apresentadas tenham sido estabelecidas para sistemas precisamente conhecidos, com intuito de ser mais abrangente, nesta dissertação será tratado o caso de sistemas lineares afetados por parâmetros incertos variantes no tempo¹. Assim, considere o seguinte sistema LPV positivo discreto no tempo

$$\mathcal{G} \triangleq \begin{cases} x(k+1) = A(\alpha(k))x(k) + B(\alpha(k))u(k) + E(\alpha(k))w(k), \\ z(k) = C_z(\alpha(k))x(k) + D_z(\alpha(k))u(k) + E_z(\alpha(k))w(k), \\ y(k) = C_y(\alpha(k))x(k) + E_y(\alpha(k))w(k), \end{cases} \quad (2.3)$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada de ruído, $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída controlada, $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida e $\alpha(k) = [\alpha_1(k), \dots, \alpha_N(k)]'$ é um vetor de parâmetros variantes no tempo, o qual pertence ao simplex unitário de dimensão N dado por

$$\Lambda \triangleq \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \zeta_i = 1, \zeta_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

As matrizes do espaço de estados podem ser escritas como uma combinação convexa de N vértices conhecidos M_i

$$M(\alpha(k)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(k)M_i, \quad \alpha(k) \in \Lambda.$$

Esta dissertação aborda, dentre outros, o problema de projeto de uma lei de controle de realimentação estática de saída definida por

$$u(k) = L(\alpha(k))y(k), \quad (2.4)$$

para o sistema LPV politópico (2.3). O sistema LPV de malha fechada resultante é dado por

$$\mathcal{G}_{cl} \triangleq \begin{cases} x(k+1) = A_{cl}(\alpha(k))x(k) + B_{cl}(\alpha(k))w(k), \\ z(k) = C_{cl}(\alpha(k))x(k) + D_{cl}(\alpha(k))w(k), \end{cases} \quad (2.5)$$

¹ Observe que os sistemas LTI podem ser tratados como um caso particular dos sistemas LPV.

em que

$$\begin{aligned}
A_{cl}(\alpha(k)) &= A(\alpha(k)) + B(\alpha(k))L(\alpha(k))C_y(\alpha(k)), \\
B_{cl}(\alpha(k)) &= E(\alpha(k)) + B(\alpha(k))L(\alpha(k))E_y(\alpha(k)), \\
C_{cl}(\alpha(k)) &= C_z(\alpha(k)) + D_z(\alpha(k))L(\alpha(k))C_y(\alpha(k)), \\
D_{cl}(\alpha(k)) &= E_z(\alpha(k)) + D_z(\alpha(k))L(\alpha(k))E_y(\alpha(k)).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

O propósito do controlador obtido é assegurar a estabilidade assintótica e garantir a positividade em malha fechada do sistema.

Uma condição suficiente para verificar a estabilidade assintótica do sistema LPV discreto (2.5), que pode ser vista como uma extensão da Lema 2.1 para sistemas LPV politópicos, é apresentada a seguir (DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001).

Lema 2.2. *O sistema (2.5) é assintoticamente estável se existir uma matriz simétrica e definida positiva $P(\alpha(k))$, tal que*

$$A_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k))A'_{cl}(\alpha(k)) - P(\alpha(k+1)) \prec 0, \quad \forall \alpha(k) \in \Lambda \tag{2.7}$$

ou, equivalentemente (por complemento de Schur)

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k+1)) & \star \\ P(\alpha(k))A'_{cl}(\alpha(k)) & P(\alpha(k)) \end{bmatrix} \succ 0, \quad \forall \alpha(k) \in \Lambda. \tag{2.8}$$

Além de garantir a estabilidade de sistemas LPV, a condição apresentada no Lema 2.2 é necessária e suficiente para garantir a Schur estabilidade de sistemas LTIs politópicos admitindo-se $\alpha(k+1) = \alpha(k) = \alpha$, ou seja, ao satisfazer o Lema 2.2 é possível assegurar que os autovalores da matriz dinâmica $A_{cl}(\alpha(k))$ estão dentro do círculo de raio unitário. Note que a estrutura da matriz $P(\alpha(k))$ não está definida a priori no Lema 2.2 e, além disso, buscar por uma solução para o Lema 2.2 caracteriza um problema de otimização de dimensão infinita, uma vez que as LMIs dependentes de parâmetros (2.7) ou (2.8) devem ser satisfeitas para todos valores de $\alpha(k) \in \Lambda$. Diante disso, na Seção 3.1.3, são expostas as estratégias adotadas para obter LMIs finitas (condições suficientes que, se verificadas, garantem a validade de (2.7) e (2.8) para todo $\alpha(k) \in \Lambda$), tornando o problema computacionalmente programável.

Além de garantir a estabilidade assintótica e a positividade, deseja-se considerar no projeto critérios de desempenho, como as normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 , citadas na sequência.

2.3 Cômputo de normas

Para o projeto de controladores, pretende-se adotar a minimização de um limitante superior, custo garantido, para a norma \mathcal{H}_∞ e para a norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada. Assim, esta seção almeja apresentar algumas definições e condições LMIs bem estabelecidas relacionadas ao cômputo das normas.

2.3.1 Análise da norma \mathcal{H}_∞

Em termos de resposta em frequência a norma \mathcal{H}_∞ pode ser interpretada, no caso monovariável (uma entrada e uma saída), como o maior ganho possível que o sistema pode fornecer para entradas senoidais. Assim, o controle \mathcal{H}_∞ pode ser empregado para atenuar efeitos causados por distúrbios externos.

A norma \mathcal{H}_∞ do sistema (2.5) é definida como a razão entre as raízes quadradas da energia da saída $z(k)$ e da energia da entrada exógena $w(k)$ para o pior cenário do sinal de entrada $w(k) \in \ell_2$ (DE CAIGNY *et al.*, 2010), conforme apresentado a seguir.

$$\|\mathcal{G}_{cl}\|_\infty \triangleq \sup_{\|w(k)\|_2 \neq 0} \frac{\|z(k)\|_2}{\|w(k)\|_2}, \quad \forall \alpha(k)$$

Uma forma de se calcular a norma \mathcal{H}_∞ do sistema (2.5) é solucionando um problema de otimização baseado em LMIs dependentes de parâmetros. De modo geral, condições que relacionam um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ com a existência de uma solução são conhecidas como *bounded real lemmas*. A seguir é apresentado o *bounded real lemma* para sistemas LPV discretos no tempo, utilizando uma função de Lyapunov dependente de parâmetros (DE SOUZA *et al.*, 2006, Lema 3).

Lema 2.3. *O sistema LPV discreto no tempo (2.5) é estável e satisfaz $\|\mathcal{G}_{cl}\|_\infty < \gamma$ se existir uma matriz simétrica definida positiva $P(\alpha(k))$, tal que a LMI dependente de parâmetros²*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k+1)) & \star & \star & \star \\ P(\alpha(k))A'_d(\alpha(k)) & P(\alpha(k)) & \star & \star \\ B'_d(\alpha(k)) & 0 & \gamma I & \star \\ 0 & C_d(\alpha(k))P(\alpha(k)) & D_d(\alpha(k)) & \gamma I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.9)$$

seja assegurada para todo $(\alpha(k), \alpha(k+1)) \in \Lambda \times \Lambda$.

2.3.2 Análise da norma \mathcal{H}_2

Uma especificação muito importante em sistemas de controle é a área ao quadrado da soma das respostas impulsivas computadas em todas as saídas, conhecida como norma \mathcal{H}_2 . Assim, o controle \mathcal{H}_2 é comumente empregado para minimizar a energia da resposta ao impulso do sistema. Se o sistema (2.5) for assintoticamente estável, a norma \mathcal{H}_2 é definida por (BARBOSA *et al.*, 2002).

$$\|\mathcal{G}_{cl}\|_2^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \sup \mathcal{E} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{k=0}^T z'(k)z(k) \right\}$$

² O símbolo \star representa um bloco simétrico em uma matriz.

em que T é um inteiro positivo que representa o horizonte de tempo e $\mathcal{E}\{\cdot\}$ é a esperança matemática. Na sequência, apresenta-se uma condição LMI dependente de parâmetros, conforme mostrado em [De Caigny et al. \(2010\)](#), a qual fornece um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 em um horizonte infinito.

Lema 2.4. *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P(\alpha(k))$ e $M(\alpha(k))$, tais que*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k+1)) - A_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k))A'_{cl}(\alpha(k)) & \star \\ B_{cl}(\alpha(k)) & I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.10)$$

e

$$\begin{bmatrix} M(\alpha(k)) - D_{cl}(\alpha(k))D'_{cl}(\alpha(k)) & \star \\ P(\alpha(k))C'_{cl}(\alpha(k)) & P(\alpha(k)) \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.11)$$

para todo $(\alpha(k), \alpha(k+1)) \in \Lambda \times \Lambda$, então o sistema (2.5) é assintoticamente estável e

$$\|\mathcal{G}_{cl}\|_2^2 \leq \text{Tr}(M(\alpha(k))).$$

2.4 Extensão para sistemas positivos chaveados

Além de tratar o caso de sistemas LPV positivos discretos, o método de síntese de controladores desenvolvido nesta dissertação pode ser adaptado para tratar a estabilização de outras classes de sistemas lineares como, por exemplo, a classe caracterizada pela existência de “chaveamentos” entre subsistemas ou modos de operação. Nesse sentido, sabendo que muitos problemas de engenharia, além de serem inerentemente multimodais, necessitando de vários modelos dinâmicos para descrever com precisão razoável o comportamento do sistema sob estudo, têm como restrição adicional a não-negatividade dos estados ([DAYAWANSA; MARTIN, 1999](#); [BENZAOUIA; TADEO, 2008](#)), o que torna os sistemas positivos chaveados uma extensão interessante a ser abordada. Diante disso, considere o sistema linear positivo chaveado discreto no tempo

$$x(k+1) = A_{\epsilon(k)}x(k) + B_{\epsilon(k)}u(k) \quad (2.12)$$

em que $A_{\epsilon(k)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{\epsilon(k)} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x(k)$ é o vetor de estados, $u(k)$ é o vetor de entradas de controle e $\epsilon(k) : \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, \dots, S\}$ é a função de chaveamento que seleciona arbitrariamente o subsistema (modo de operação) linear que está ativo a cada instante de tempo, sendo S o número de subsistemas. Ao admitir a seguinte lei de controle

$$u(k) = K_{\epsilon(k)}x(k) \quad (2.13)$$

objetiva-se estabilizar assintoticamente e garantir a positividade do sistema chaveado em malha-fechada

$$x(k+1) = A_{cl\epsilon(k)}x(k), \quad (2.14)$$

em que $A_{cl\epsilon(k)} = A_{\epsilon(k)} + B_{\epsilon(k)}K_{\epsilon(k)}$.

Uma condição necessária e suficiente para que o sistema em malha fechada (2.14) seja positivo é dada pela Definição 2.3 para todo $\epsilon(k)$.

Adicionalmente, a estabilidade assintótica de um sistema chaveado em malha fechada pode ser certificada por um resultado de Daafouz *et al.* (2002), descrito a seguir.

Lema 2.5. *O sistema chaveado (2.14) é assintoticamente estável se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i, i = 1, \dots, N$, tais que*

$$A'_{cl_i}P_jA_{cl_i} - P_i \prec 0, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.15)$$

Aplicando o complemento de Schur em (2.15), obtém-se a condição equivalente

$$\begin{bmatrix} P_i & A'_{cl_i}P_j \\ \star & P_j \end{bmatrix} \succ 0, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.16)$$

Ao fazer uma transformação de congruência em (2.16), com $X_i = P_i^{-1}$, obtém-se o seguinte resultado

$$\begin{bmatrix} X_i & X_iA'_{cl_i} \\ \star & X_j \end{bmatrix} \succ 0, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.17)$$

2.5 Lemas auxiliares

A seguir apresentam-se dois lemas auxiliares utilizados na construção e demonstração de condições propostas nesta dissertação. Esses lemas possibilitam eliminar variáveis e não linearidades, bem como acrescentar variáveis extras, aumentando assim a liberdade na busca por soluções factíveis e ainda separar as matrizes de Lyapunov das matrizes pertencentes ao sistema. Na sequência, o Lema da Projeção (GAHINET; APKARIAN, 1994; IWASAKI; SKELTON, 1994) é mostrado.

Lema 2.6. (Lema da Projeção) *Dadas as matrizes W e Y com n colunas e $Q = Q' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, existe uma matriz não estruturada F que satisfaz*

$$Q + W'FY + Y'F'W \prec 0 \quad (2.18)$$

se, e somente se, as desigualdades de projeção são satisfeitas

$$N'_W Q N_W \prec 0, \quad (2.19)$$

$$N'_Y Q N_Y \prec 0, \quad (2.20)$$

em que N_W e N_Y são matrizes arbitrárias cujas colunas formam uma base para o espaço nulo de W e Y , respectivamente.

O Lema de Finsler (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001), descrito a seguir, tam-

bém pode ser utilizado para estender condições de análise para a síntese de controladores e filtros.

Lema 2.7. (Lema de Finsler) *Considere $w \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $\text{rank}(B) < n$ e B^\perp uma base para o espaço nulo de B , isto é, $BB^\perp = 0$. As seguintes condições são equivalentes*

1. $w'Qw, \forall w \neq 0 : Bw = 0$;
2. $B^{\perp'}QB^\perp \prec 0$;
3. $\exists \mu \in \mathbb{R} : Q - \mu B'B \prec 0$;
4. $\exists X \in \mathbb{R}^{n \times m} : Q + XB + B'X' \prec 0$.

3 Estabilização de Sistemas Positivos

Neste capítulo, apresentam-se os principais resultados referentes ao caso de estabilização de sistemas positivos discretos no tempo (LPV, LTI e chaveados). Inicialmente, discorre-se de modo sucinto sobre o método do qual as técnicas propostas neste trabalho derivam. Na sequência, a condição desenvolvida para estabilização é apresentada. As principais aplicações e vantagens da técnica proposta, bem como informações em relação à obtenção dos testes de dimensão finita são fornecidas. Finalmente, exemplos numéricos ilustram a aplicabilidade da abordagem proposta.

3.1 Estabilização de sistemas LPV positivos por realimentação estática de saída

Nesta seção apresenta-se uma adaptação do método de [Felipe \(2017\)](#) para abordar a realimentação estática de saída em sistemas LPV positivos discretos no tempo, em que as matrizes do sistema são dependentes de parâmetros variantes no tempo pertencentes a um domínio politópico. Nesta dissertação, consideram-se apenas variações arbitrárias (os parâmetros podem atingir, de um instante a outro, qualquer ponto no domínio). A extensão dos resultados para tratar o caso de variações limitadas é imediata.

Em [Felipe \(2017\)](#) trata-se do problema de estabilização robusta de sistemas lineares incertos invariantes no tempo por realimentação estática de saída e estados. O procedimento de síntese em [Felipe \(2017\)](#) ocorre por meio de um algoritmo iterativo com convergência local baseado em LMIs. O principal diferencial dessa estratégia é tratar o ganho de controle diretamente como uma variável de otimização, ao invés de transformar o produto entre a matriz de Lyapunov (ou a variável de folga) e o ganho de controle em uma nova variável, como geralmente ocorre nos métodos disponíveis na literatura ([BOYD et al., 1994](#)).

A principal motivação para desenvolver uma extensão do método de [Felipe \(2017\)](#) para o projeto de controladores no contexto de sistemas positivos, é evitar a necessidade de impor estruturas nas variáveis matriciais do problema, necessariamente diagonais para síntese do ganho na maioria dos trabalhos sobre sistemas positivos. Essa imposição decorre da restrição de positividade ao sistema em malha fechada, quando o ganho é obtido por mudanças de variáveis. No caso de estabilidade quadrática, quando uma única matriz de Lyapunov é utilizada para garantir a estabilidade em malha fechada para todos os parâmetros incertos, a restrição é ainda mais severa, pois a própria matriz de Lyapunov, empregada para a recuperação do ganho, deve ser diagonal.

Observação 3.1. Como destacado em [Ebihara et al. \(2014\)](#), em termos de síntese, é possível escolher a matriz de Lyapunov como simétrica (e até com estrutura arbitrária), o que resulta em condições menos conservadoras e garante a positividade do sistema realimentado pela lei de controle determinada. Não obstante, em termos de análise de estabilidade, uma matriz de Lyapunov diagonal é necessária e suficiente para garantir a estabilidade do sistema positivo em malha-fechada.

O teorema apresentado na sequência é baseado em um dos resultados de [Felipe \(2017\)](#), tendo como principal diferença a inclusão da restrição (3.2), responsável por garantir a positividade em malha fechada.

Teorema 3.1. Para dadas matrizes dependentes de parâmetros¹ $Y_{e_i}(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, 3$, se existirem matrizes dependentes de parâmetros simétricas definidas positivas $P(\bar{\alpha}(k))$, matrizes dependentes de parâmetros $X_{e_i}(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, 3$, e $L(\alpha(k))$ tais que

$$\mathcal{Q}_e(\bar{\alpha}(k)) + \mathcal{X}_e(\bar{\alpha}(k))\mathcal{B}_e(\bar{\alpha}(k)) + \mathcal{B}'_e(\bar{\alpha}(k))\mathcal{X}'_e(\bar{\alpha}(k)) \prec 0, \quad (3.1)$$

$$A_{cl}(\alpha(k)) \geq 0 \quad (3.2)$$

para todo $\bar{\alpha}(k) = (\alpha(k), \alpha(k+1)) \in \Lambda \times \Lambda$ e todo $k \in \mathbb{Z}_+$, em que

$$\mathcal{B}_e(\bar{\alpha}(k)) = \begin{bmatrix} Y_{e_1}(\bar{\alpha}(k)) & Y_{e_2}(\bar{\alpha}(k)) & Y_{e_3}(\bar{\alpha}(k)) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X}_e(\bar{\alpha}(k)) = \begin{bmatrix} X'_{e_1}(\bar{\alpha}(k)) & X'_{e_2}(\bar{\alpha}(k)) & X'_{e_3}(\bar{\alpha}(k)) \end{bmatrix}',$$

$$\mathcal{Q}_e(\bar{\alpha}(k)) = \begin{bmatrix} -P(\alpha(k)) & \star & \star \\ 0 & P(\alpha(k+1)) & \star \\ A_{cl}(\alpha(k)) & -I & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

sendo $A_{cl}(\alpha(k))$ e $C_{cl}(\alpha(k))$ definidas em (2.6), então $L(\alpha(k))$ é um ganho de controle por realimentação estática de saída que assegura a estabilidade e a positividade do sistema em malha fechada.

Demonstração. Perceba que, conforme a Definição 2.3, a condição em (3.2) garante a positividade do sistema em malha fechada (2.5). Em relação à estabilidade robusta, a factibilidade de (3.1) implica que $Y_{e_3}(\bar{\alpha}(k))$ possui posto completo. Assim, considere $\mathcal{B}_e(\bar{\alpha}(k)) = Y_{e_3}(\bar{\alpha}(k)) \begin{bmatrix} -F(\bar{\alpha}(k)) & -G(\bar{\alpha}(k)) & I \end{bmatrix}$ e pré e pós-multiplique (3.1) respectivamente por $\mathcal{B}^{\perp'}(\bar{\alpha}(k))$ e $\mathcal{B}^{\perp}(\bar{\alpha}(k))$ com

$$\mathcal{B}^{\perp'}(\bar{\alpha}(k)) = \begin{bmatrix} I & 0 & F'(\bar{\alpha}(k)) \\ 0 & I & G'(\bar{\alpha}(k)) \end{bmatrix},$$

¹ O vetor de parâmetros $\bar{\alpha}(k)$ representa $\bar{\alpha}(k) = (\alpha(k), \alpha(k+1))$.

para obter a seguinte condição equivalente

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha(k)) + \text{He}(A_{cl}(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k))) & \star \\ G'(\bar{\alpha}(k))A_{cl}(\alpha(k)) - F(\bar{\alpha}(k)) & P(\alpha(k+1)) - \text{He}(G(\bar{\alpha}(k))) \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.4)$$

Multiplicando (3.4) pela direita por $\mathbf{N}(\alpha(k))$ e pela esquerda por

$$\mathbf{N}'(\alpha(k)) = \begin{bmatrix} I & A'_{cl}(\alpha(k)) \end{bmatrix},$$

tem-se

$$-P(\alpha(k)) + A'_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k+1))A_{cl}(\alpha(k)) \prec 0, \quad (3.5)$$

que é equivalente ao resultado apresentado no Lema 2.2. \square

3.1.1 Principais aplicações da técnica

O Teorema 3.1 pode ser estendido para abranger diferentes tipos de controle e outras classes de sistemas. Por exemplo, para tratar a estabilização por realimentação de estados, é possível adaptar diretamente o Teorema 3.1, como segue no Corolário 3.1.

Corolário 3.1 (Realimentação de estados). *Para dadas matrizes dependentes de parâmetros $Y_{ei}(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, 3$, se existirem matrizes dependentes de parâmetros simétricas definidas positivas $P(\alpha(k))$, matrizes dependentes de parâmetros $X_i(\bar{\alpha}(k))$ com $i = 1, 2, 3$ e $L(\alpha(k))$, considerando $C_y(\alpha(k)) = I$ e $E_y(\alpha(k)) = 0$, tais que (3.1) e (3.2) sejam válidas, então $L(\alpha(k))$ é um ganho escalonado de realimentação de estados que assegura a positividade do sistema em malha fechada.*

O Teorema 3.1 e o Corolário 3.1 podem ser moldados para sintetizar controladores estáticos robustos para sistemas LTI incertos, como mostrado na próxima observação.

Observação 3.2 (Sistemas LTI). *Se o sistema (2.3) for LTI (matrizes $M(\alpha(k)) = M(\alpha)$, $\forall k \geq 0, \alpha \in \Lambda$), então o projeto de um controlador robusto (independente de parâmetros) L que estabiliza o sistema (2.3) e garante a positividade do sistema em malha fechada, é obtido solucionando (3.1) e (3.2), fazendo $\alpha(k+1) = \alpha(k) = \alpha$ (i.e., retirando a dependência no tempo de todas as matrizes dependentes de parâmetros).*

Além das extensões apresentadas, é possível adequar o Teorema 3.1 para que este possa ser utilizado no âmbito de sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo, como descrito no corolário a seguir.

Corolário 3.2 (Sistemas positivos chaveados). *O projeto de controladores para sistemas chaveados na forma (2.12) pode ser feito adaptando o Teorema 3.1 com a substituição da dependência do parâmetro variante no tempo $\alpha(k)$ pela lei de chaveamento $\epsilon(k)$ nas variáveis de decisão.*

3.1.2 Método iterativo

Note que, no Teorema 3.1, os valores de $\mathcal{B}_e(\bar{\alpha}(k))$ são fixados (não são variáveis e sim um dado do problema de otimização), assim como em Felipe *et al.* (2016), para evitar que (3.1) seja um problema de desigualdade matricial bilinear (do inglês, *Bilinear Matrix Inequality* — BMI). Entretanto, fazer escolhas apropriadas para $Y_{e_i}(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, \dots, 3$, as quais garantam a existência de resultados factíveis, não é trivial. Diante disso, uma interessante alternativa, adotada em Felipe *et al.* (2016), que é a introdução de uma relaxação no problema de estabilização, é adaptada para este trabalho.

A relaxação consiste em resolver (3.1) substituindo $A_{cl}(\alpha(k))$ por $\bar{A}(\alpha(k)) = (1-r)A_{cl}(\alpha(k))$, com $r \in (-\infty, 1]$. Para $r \in [0, 1)$, a estabilidade de $\bar{A}(\alpha(k))$ assegura que $1/(1-r)$ é um limitante superior para o máximo valor absoluto dos autovalores de $A_{cl}(\alpha)$ no caso LTI e para a taxa de decaimento no caso LPV. Isso significa que garantir a estabilidade de $\bar{A}(\alpha(k))$ é menos restritivo que garantir a estabilidade de $A_{cl}(\alpha)$. Por outro lado, se $r \leq 0$, a estabilidade de $\bar{A}(\alpha(k))$ implica a estabilidade de $A_{cl}(\alpha(k))$.

Finalmente, é importante destacar que para a escolha particular $\mathcal{B}_e(\bar{\alpha}(k)) = \mathcal{B}_e = \begin{bmatrix} 0 & I & -I \end{bmatrix}$, isto é, $Y_{e_1}(\bar{\alpha}(k)) = 0$, $Y_{e_2}(\bar{\alpha}(k)) = I$ e $Y_{e_3}(\bar{\alpha}(k)) = -I$, sempre existe um r finito suficientemente grande para o qual a condição (3.1) é verificada com $A_{cl}(\alpha(k)) = \bar{A}(\alpha(k)) = (1-r)A_{cl}(\alpha(k))$. Assim, observe que, como mostrado em Felipe *et al.* (2016), $\mathcal{B}_e(\bar{\alpha}(k))$ e $\mathcal{X}'_e(\bar{\alpha}(k))$ são intercambiáveis, uma vez que $\text{He}(\mathcal{X}'_e(\bar{\alpha}(k))\mathcal{B}_e(\bar{\alpha}(k))) = \text{He}(\mathcal{B}'_e(\bar{\alpha}(k))\mathcal{X}'_e(\bar{\alpha}(k)))$ e todos os possíveis valores para $\mathcal{X}'_e(\bar{\alpha}(k))$ são escolhas válidas para $\mathcal{B}_e(\bar{\alpha}(k))$. Supondo então, $r = 1$ ($\bar{A}(\alpha(k)) = 0$), $\mathcal{X}'_e(\bar{\alpha}(k)) = -1/2\mathcal{B}_{e_0}$, e aplicando o complemento de Schur em (3.1), obtém-se

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha(k)) & \star & \star \\ 0 & P(\alpha(k+1)) - I & \star \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.6)$$

Como sempre existe $P(\alpha(k)) = P(\alpha(k+1)) = \nu I$, $\nu \in (0, 1)$ tal que (3.6) seja satisfeita, é válido afirmar que $\mathcal{B}_e = \begin{bmatrix} 0 & I & -I \end{bmatrix}$ é uma escolha inicial que garante a factibilidade do problema para $r = 1$. Deste modo, definido $\mathcal{B}_e(\bar{\alpha}(k))$, é então possível resolver o Teorema 3.1, por meio do procedimento iterativo descrito a seguir.

De modo sucinto, para utilizar o Algoritmo 1 é preciso informar as matrizes do sistema, o número desejado de iterações máximas, it_{max} , além de fornecer a condição inicial para $\mathcal{B}_e(\bar{\alpha}(k))$, ou seja, $\mathcal{B}_{e_0} = \begin{bmatrix} 0 & I & -I \end{bmatrix}$. O procedimento consiste em aplicar uma relaxação na restrição de estabilização, resolvendo (3.1) com a substituição de $A_{cl}(\alpha(k))$ por $\bar{A}(\alpha(k)) = (1-r)A_{cl}(\alpha(k))$, minimizando r , com a atualização de $\mathcal{B}_e(\alpha(k)) = \mathcal{X}'_e(\alpha(k))$ a cada iteração, enquanto $r > 0$. Quando $r \leq 0$, a estabilidade assintótica de $A_{cl}(\alpha(k))$ é garantida e pode-se finalizar o processo. Note que, embora seja possível atribuir outras condições iniciais, \mathcal{B}_{e_0} , determinadas escolhas podem acarretar a não factibilidade do

Teorema 3.1, nesse caso, o algoritmo se encerra sem fornecer uma solução estabilizante.

Algoritmo 1: PROCEDIMENTO ITERATIVO PARA ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS POSITIVOS DISCRETOS NO TEMPO

```

1 Função Estab-1phase( $A(\alpha(k)), B(\alpha(k)), C(\alpha(k)), it_{max}$ )
2   Inicialização de  $\mathcal{B}_{e0}$ ,  $m \leftarrow 0$ ;
3   enquanto  $m < it_{max}$  faça
4      $m \leftarrow m + 1$ ;  $\bar{A}_m = (1 - r_m)A_{cl}(\alpha(k))$ ;
5     minimize  $r$  sujeito a  $\mathcal{Q}_e(\bar{\alpha}(k), \bar{A}_m) + \text{He}(\mathcal{X}_e(\bar{\alpha}(k))\mathcal{B}_e(\bar{\alpha}(k))) \prec 0$ ,
6        $P(\alpha(k)) \succ 0$ ,  $A(\alpha(k)) + B(\alpha(k))L(\alpha(k))C(\alpha(k)) \geq 0$ ;
7     se factível então
8        $\bar{A}_m = A_{cl}(\alpha(k))$ ;
9       se  $r \leq 0$  então
10        resolva  $\mathcal{Q}_e(\bar{\alpha}(k), \bar{A}_m) + \text{He}(\mathcal{X}_e(\bar{\alpha}(k))\mathcal{B}_e(\bar{\alpha}(k))) \prec 0$ ,  $P(\alpha(k)) \succ 0$ ,
11           $A(\alpha(k)) + B(\alpha(k))L(\alpha(k))C(\alpha(k)) \geq 0$ ;
12          se factível então
13            retorna( $L(\alpha(k))$ );
14          fim
15        fim
16      senão
17        Abandone;
18      fim
19 fim

```

3.1.3 Testes de dimensão finita

Como $\alpha(k) \in \Lambda$ para todo $k \geq 0$, a dependência no tempo associada a todas as matrizes no Teorema 3.1 pode ser suprimida. Neste trabalho, os parâmetros que variam com o tempo são considerados arbitrariamente rápidos, isto é, $\alpha(k+1)$ pode ser modelado como pertencente a um outro simplex $\alpha(k+1) = \beta(k) \in \Lambda$. Ademais, o Teorema 3.1 e as condições propostas na Seção 3.1.1 constituem problemas de dimensão infinita que devem ser resolvidos para todo $(\alpha(k), \alpha(k+1)) \in \Lambda \times \Lambda$, ou seja, não são computacionalmente programáveis. Uma maneira de superar essa questão é por meio do uso das aproximações polinomiais, as quais se converteram em uma ferramenta muito eficaz para solucionar problemas em termos das, assim chamadas, *relaxações* (OLIVEIRA; PERES, 2007). A positividade ou negatividade das desigualdades polinomiais, resultantes da fixação das variáveis de otimização na forma de polinômios homogêneos, pode ser verificada em termos de um conjunto finito de LMIs. Dentre outras formas, estes conjuntos de LMIs podem ser

obtidos automaticamente por meio do *parser* ROLMIP (*Robust LMI Parser*) (AGULHARI *et al.*, 2012).

No tocante aos graus das variáveis, para $P(\alpha(k))$ e $P(\alpha(k+1))$ nos exemplos numéricos apresentados nesta dissertação, escolheu-se grau um, e para $X_{e_i}(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, 3$, o grau é um em ambos parâmetros $\alpha(k)$ e $\beta(k) = \alpha(k+1)$. No caso dos controladores de ganho escalonado, também impôs-se grau um a $L(\alpha(k))$ e, se desejado um controlador robusto (independente de parâmetros), foi fixado grau zero.

Nesta dissertação, todas as rotinas foram programadas em Matlab (R2017b) empregando os analisadores ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2012) e Yalmip (LÖFBERG, 2004) e o solucionador Mosek (MOSEK ApS, 2015).

3.1.4 Exemplos numéricos

Nesta seção, os métodos propostos para estabilização por realimentação estática de saída e estados são submetidos a exemplos de comparação estatística. O desempenho das técnicas de estabilização propostas neste capítulo é avaliado para diferentes estruturas das variáveis de folga, $X_{e_i}(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, 3$. Além disso, verifica-se a capacidade da abordagem fornecer ganhos de realimentação de estados com restrições de estrutura como, por exemplo, descentralizados.

Exemplo 3.1. O objetivo deste exemplo é realizar uma comparação das condições de projeto dadas em Ebihara *et al.* (2014), com o método exposto nesta dissertação para tratar a estabilização robusta por realimentação de estados para sistemas LTI e LPV. Além disso, uma análise do desempenho da condição proposta, considerando diferentes estruturas para as variáveis de folga, também é feita. Para este fim, testes de estabilização numérica são implementados utilizando um banco de dados de sistemas positivos politópicos², criado para viabilizar tais comparações estatísticas. Essa base de dados é composta por sistemas que são instáveis em malha aberta, robustamente estabilizáveis e positivos por algum ganho de realimentação de estados, mas não estabilizáveis quadraticamente (isto é, não admitem uma matriz de Lyapunov constante que verifique a estabilidade do sistema em malha fechada). Os testes foram aplicados para sistemas com as seguintes dimensões: $n_x \in \{2, 3\}$ estados e $N \in \{2, \dots, 5\}$ vértices e uma entrada ($n_u = 1$). Para cada combinação de n_x e N , a base contém 50 conjuntos diferentes de sistemas.

As condições LMIs (24), (25) e (27) propostas em Ebihara *et al.* (2014) (respectivamente chamadas de E(24), E(25) e E(27) ao longo do texto) foram adaptadas para tratar o problema de estabilização por realimentação de estados, para os casos LPV e LTI, tornando assim possível a comparação com o Algoritmo 1 (A1) apresentado nesta

² Em <http://www.dt.fee.unicamp.br/~cfmorais/PositiveSystemsBasis> podem ser encontradas a base de dados utilizada nos exemplos, a função para a leitura da base e a rotina necessária para gerar uma base estabilizável por controladores descentralizados.

Tabela 1 – Resultados da estabilização robusta de sistemas LTI e LPV por realimentação de estados, obtidos pelas condições LMIs propostas em [Ebihara et al. \(2014\)](#) (respectivamente E(25) e E(27)) e pelo método proposto no Algoritmo 1 (A1), adotando 5 como número máximo de iterações e as variáveis de folga $X_{ei}(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, 3$, com estrutura cheia ('f'), simétrica ('s'), ou diagonal ('d').

n_x	N	LPV				LTI			
		E(25)	E(27)	A1(s,f)	A1(d)	E(25)	E(27)	A1(s,f)	A1(d)
2	2	40	39	50	48	40	40	50	47
	3	39	38	50	49	39	39	50	48
	4	40	39	50	49	40	40	50	50
	5	39	38	50	48	39	39	50	48
3	2	44	44	50	49	44	44	50	49
	3	43	42	50	50	43	43	50	50
	4	47	47	50	50	47	47	50	50
	5	43	43	50	49	43	43	50	49
Total(%)		83.75	82.5	100	98	83.75	83.75	100	97.75

dissertação.

Na Tabela 1 é possível verificar o número de sistemas estabilizados pelos métodos adaptados de [Ebihara et al. \(2014\)](#) e pelo método apresentado neste trabalho para as estruturas cheia, simétrica e diagonal das variáveis de folga, admitindo no máximo 5 iterações. A condição fornecida pela desigualdade (24) de [Ebihara et al. \(2014\)](#), baseada na estabilidade quadrada, não foi apresentada na Tabela 1, pois não é capaz de estabilizar nenhum sistema fornecido pela base utilizada.

A porcentagem total de sistemas estabilizados na Tabela 1 evidencia a vantagem de utilizar a técnica proposta, pois esta consegue estabilizar mais sistemas que os métodos comparados ([EBIHARA et al., 2014](#)) para ambos os casos LTI e LPV, sejam as variáveis de folga com estrutura cheia, diagonal ou simétrica, admitindo um número pequeno de iterações, em média, 1.79 e 1.83 para o caso LPV, utilizando A1(s,f) e A1(d), respectivamente. Por sua vez, na abordagem LTI a média foi 1.78 e 1.82 iterações, para A1(s,f) e A1(d), nessa ordem.

Como é possível observar na Tabela 1 os melhores resultados são obtidos ao utilizar variáveis de folga com estrutura simétrica ou cheia.

Exemplo 3.2. Deseja-se avaliar o desempenho das técnicas utilizadas no exemplo anterior para obter ganhos robustos de realimentação de estados com alguns elementos específicos zerados, tratando por exemplo, o problema de descentralização, em que a estrutura utilizada é representada por L_{dc} . A base utilizada previamente é adaptada para garantir a existência de tais ganhos. Neste exemplo, adota-se apenas a estrutura simétrica nas variáveis de folga, visto que a mesma proporcionou melhores resultados no Exemplo 3.1. Os resultados obtidos são mostrados nas Tabelas 2, 3 e 4.

Tabela 2 – Resultados da estabilização de sistemas LTI e LPV de ordem $n_x = 2$ obtidos pelas condições LMIs propostas em Ebihara *et al.* (2014) (respectivamente E(25) e E(27)) e pelo método proposto no Algoritmo 1 (A1), usando no máximo 5 iterações e variáveis de folga com estrutura simétrica ('s'), com ganho robusto descentralizado, empregando as estruturas (L_{dc}) $[l_1 \ 0]$ e $[0 \ l_2]$.

n_x	L_{dc}	N	LPV			LTI		
			E(25)	E(27)	A1(s)	E(25)	E(27)	A1(s)
2	$[l_1 \ 0]$	2	12	9	50	12	12	50
		3	13	11	50	13	13	50
		4	13	12	50	13	13	50
		5	14	12	50	14	14	50
		5	14	12	50	14	14	50
	$[0 \ l_2]$	2	21	19	50	21	21	50
		3	23	20	50	23	23	50
		4	15	14	49	15	15	49
		5	12	11	50	12	12	50
		5	12	11	50	12	12	50
Total(%)			30.75	27	99.75	30.75	30.75	99.75

Tabela 3 – Resultados da estabilização de sistemas LTI e LPV de ordem $n_x = 3$ obtidos pelas condições LMIs propostas em Ebihara *et al.* (2014) (respectivamente E(25) e E(27)) e pelo método proposto no Algoritmo 1 (A1), usando no máximo 5 iterações e variáveis de folga com estrutura simétrica ('s'), com ganho robusto descentralizado, empregando as estruturas (L_{dc}) $[l_1 \ 0 \ 0]$, $[0 \ l_2 \ 0]$ e $[0 \ 0 \ l_3]$.

n_x	L_{dc}	N	LPV			LTI		
			E(25)	E(27)	A1(s)	E(25)	E(27)	A1(s)
3	$[l_1 \ 0 \ 0]$	2	12	12	50	12	12	50
		3	7	6	50	7	7	50
		4	9	7	50	9	9	50
		5	10	10	50	10	10	50
		5	10	10	50	10	10	50
	$[0 \ l_2 \ 0]$	2	7	5	50	7	7	50
		3	11	11	50	11	11	50
		4	5	4	50	5	5	50
		5	9	7	50	9	9	50
		5	9	7	50	9	9	50
	$[0 \ 0 \ l_3]$	2	10	10	50	10	10	50
		3	10	9	50	10	10	50
		4	3	3	50	3	3	50
		5	8	8	50	8	8	50
		5	8	8	50	8	8	50
Total(%)			15.75	14.25	100	15.75	15.75	100

Tabela 4 – Resultados da estabilização de sistemas LTI e LPV de ordem $n_x = 3$ obtidos pelas condições LMIs propostas em Ebihara *et al.* (2014) (respectivamente E(25) e E(27)) e pelo método proposto no Algoritmo 1 (A1), usando no máximo 5 iterações e variáveis de folga com estrutura simétrica ('s'), com ganho robusto descentralizado, empregando as estruturas (L_{dc}) $[1 \ 1 \ 0]$, $[1 \ 0 \ 1]$ e $[0 \ 1 \ 1]$.

n_x	L_{dc}	N	LPV			LTI			
			E(25)	E(27)	A1(s)	E(25)	E(27)	A1(s)	
3	$[l_1 \ l_2 \ 0]$	2	30	27	50	30	30	50	
		3	27	25	50	27	27	50	
		4	31	29	50	31	31	50	
		5	24	24	50	24	24	50	
			2	29	29	50	29	29	50
	$[l_1 \ 0 \ l_3]$	3	25	24	50	25	25	50	
		4	27	26	50	27	27	50	
		5	30	30	50	30	30	50	
			2	24	23	50	24	24	50
	$[0 \ l_2 \ l_3]$	3	30	29	50	30	30	50	
		4	26	25	50	26	26	50	
		5	28	28	50	28	28	50	
	Total(%)			54.75	53.5	100	54.75	54.75	100

A vantagem em utilizar o método proposto no âmbito de ganhos descentralizados é clara ao analisar os resultados expostos nas Tabelas 2, 3 e 4. A técnica proposta consegue estabilizar praticamente a totalidade dos sistemas testados com uma média de 2.05 iterações no caso LTI e 2.07 iterações no LPV. Em contrapartida, as condições apresentadas em Ebihara *et al.* (2014, desigualdades (25) e (27)) não conseguem estabilizar, em média, 30% das combinações testadas.

Exemplo 3.3. A técnica proposta é aplicada para tratar a estabilização por realimentação estática de saída para sistemas LTI e LPV, utilizando leis de controle independentes dos valores dos parâmetros (controle robusto) e no caso em que se supõe a leitura em tempo real dos parâmetros (controle escalonado ou *gain scheduling*). Neste exemplo, comparam-se os resultados obtidos para diferentes estruturas das variáveis de folga, $X_{ei}(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, 3$, de modo que todas sejam ora diagonais ('d'), simétricas ('s') ou cheias ('f'). Os resultados são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Resultados da estabilização de sistemas LTI e LPV por realimentação estática de saída, adotando 5 como número máximo de iterações na técnica proposta e as variáveis de folga $X_{ei}(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, 3$, com estrutura diagonal ('d'), simétrica ('s') ou cheia ('f').

		LPV						LTI		
		Robusto			Escalonado			Robusto		
n_x	N	A1(f)	A1(s)	A1(d)	A1(f)	A1(s)	A1(d)	A1(f)	A1(s)	A1(d)
2	2	49	49	41	50	50	47	49	49	37
	3	49	50	39	50	50	49	49	50	41
	4	50	50	45	50	50	49	50	50	42
	5	50	50	45	50	50	49	50	50	45
3	2	50	50	37	50	50	49	49	50	32
	3	50	50	43	50	50	50	50	50	38
	4	50	50	46	50	50	50	50	50	40
	5	50	50	45	50	50	49	50	50	44
Total (%)		99.5	99.75	85.25	100	100	98	99.25	99.75	79.75

Embora seja comum intuir que um maior número de variáveis escalares proporciona melhores resultados em um problema de otimização, isso nem sempre é verdade em um algoritmo iterativo, como pode ser visto na Tabela 5. Apesar da abordagem proposta produzir resultados superiores empregando variáveis de folga com estrutura simétrica em vez de estrutura diagonal, a porcentagem total de sistemas estabilizados utilizando variáveis cheias é inferior à porcentagem obtida pela estrutura simétrica. Como trata-se de um método iterativo que busca soluções em um espaço não convexo, não é possível saber a priori qual estrutura fornece a melhor solução. Na primeira iteração, de fato, há vantagem em utilizar um maior número de variáveis. Contudo, passado esta, nada mais pode-se afirmar, visto que o espaço de solução não é mais o mesmo, estando sujeito a diferentes mínimos locais. Ademais, vale ressaltar que o uso de outras condições iniciais \mathcal{B}_{e0} , diferentes da proposta neste trabalho, também acarretariam mudanças na solução final.

Finalmente, na Tabela 5 observa-se também um maior número de sistemas estabilizados ao utilizar o ganho escalonado, sendo a média de iterações para o caso LPV robusto igual a 2.12, 2.07 e 2.18 para A1(f), A1(s) e A1(d), respectivamente, enquanto para o ganho escalonado é de 1.78, 1.78 e 1.82 iterações. Por sua vez, para a abordagem LTI a média obtida é de 2.05, 2.06 e 2.10 iterações para A1(f), A1(s) e A1(d), nessa ordem.

Exemplo 3.4. Considere o projeto de um ganho robusto por realimentação de estados para estabilizar o sistema LPV politópico discreto positivo (2.3) cujos vértices das matrizes são

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6.29 & 3.58 \\ 5.28 & 2.79 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1.11 & a \\ 2.37 & 2.35 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} b \\ 3 \end{bmatrix}.$$

O objetivo deste exemplo é comparar o conservadorismo do Algoritmo 1 (A1), usando

diferentes estruturas (s = simétrica, d = diagonal e c = cheia) nas variáveis de folga $X_i(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, 3$ do Teorema 3.1, com as condições (24), (25) e (27) de Ebihara *et al.* (2014) (respectivamente chamadas de E24, E25 e E27) adaptadas para tratar o caso de estabilização de sistemas LPV positivos. A eficiência dos métodos é avaliada pela família

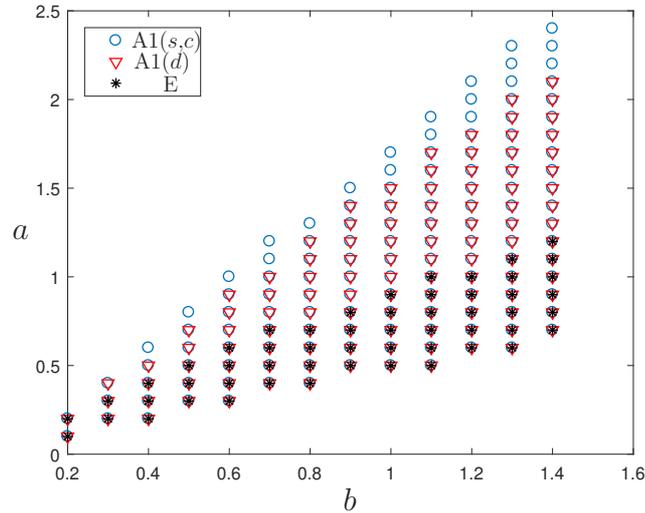


Figura 1 – Região estabilizável obtida com o Algoritmo 1 (A1) utilizando $X_i(\bar{\alpha}(k))$ simétrica (s) ou cheia (c) (\circ); diagonal (d) (∇); e com Ebihara *et al.* (2014) (*).

de sistemas variantes no tempo que podem ser estabilizados, ou seja, quanto maior a área no plano $a \times b$ relacionada a soluções factíveis, menor é o conservadorismo do método.

É possível observar na Figura 1 que os três métodos da literatura provêm os mesmos resultados, estabilizando um conjunto menor de sistemas que o método proposto, Algoritmo 1. Adicionalmente, note que o Algoritmo 1 produz uma maior área de estabilização quando emprega mais variáveis escalares no problema de otimização (estruturas cheia e simétrica em vez de diagonal em $X_i(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, 3$).

Quando o valor dos parâmetros variantes no tempo está disponível em tempo real (por medição ou estimação), resultados menos conservadores podem ser obtidos com o emprego de controladores dependentes de parâmetros (escalonados). Diferentemente das condições da literatura, a técnica proposta permite produzir ganhos escalonados sem alterar as demais variáveis do problema. A Figura 2 ilustra como a área de estabilização obtida pelo Algoritmo 1 (com estrutura simétrica nas variáveis de folga) aumenta significativamente com o emprego de ganhos escalonados.

Para ilustrar a aplicabilidade do método proposto na síntese de controladores robustos por realimentação estática de saída, considere $a = 2.4$, $b = 2.4$ e

$$C_{y_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{y_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

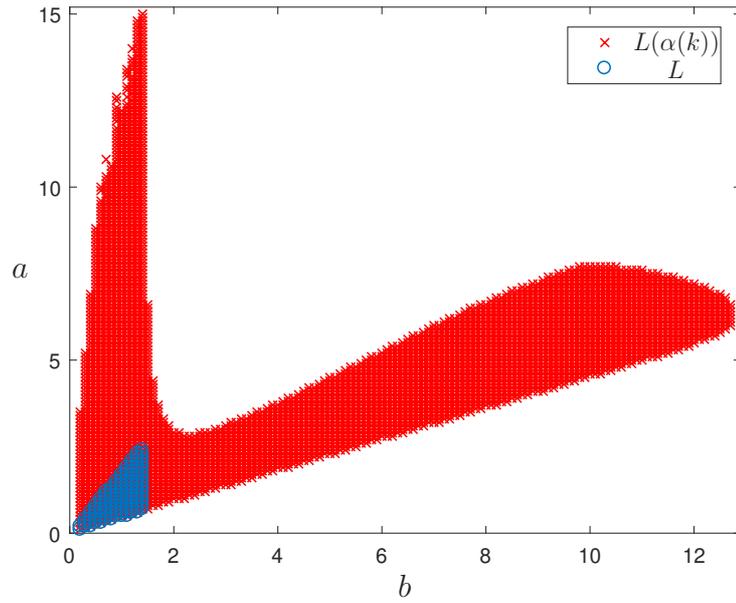


Figura 2 – Região estabilizável obtida com Algoritmo 1 com $X_i(\bar{\alpha}(k))$ simétrica para a síntese de ganhos escalonados ($L(\alpha(k)) - \times$) e robustos ($L - \circ$).

Neste caso, mesmo considerando o problema de realimentação de estados, os métodos de (EBIHARA *et al.*, 2014) não são capazes de prover um ganho que estabilize e mantenha a positividade do sistema em malha-fechada. Entretanto, mesmo que E24, E25 ou E27 produzissem uma solução factível para o par (a, b) considerando o problema de realimentação de estados, não seria possível adaptar o sistema ou as condições de síntese para computar um controle por realimentação de saída, uma vez que a matriz $C_y(\alpha(k))$ é politópica e variante no tempo. No entanto, o Algoritmo 1 com $X_i(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, 3$ simétricas, produz o seguinte ganho robusto

$$L = \begin{bmatrix} -0.7900 & -0.4650 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

O comportamento das trajetórias das saídas e dos estados do sistema (2.3) em malha-fechada com o controlador (3.8) pode ser visto na Figura 3 para uma condição inicial $x(0) = [1 \ 2]'$ e um vetor de parâmetros $\alpha(k)$ que varia de acordo com a seguinte função:

$$\alpha_1(k) = \frac{\sin(0.4k) + 1}{2}, \quad \alpha_2(k) = 1 - \alpha_1(k).$$

Observe que a saída em malha-aberta é instável, porém tanto os estados quanto as saídas em malha-fechada são positivos e tendem assintoticamente para zero.

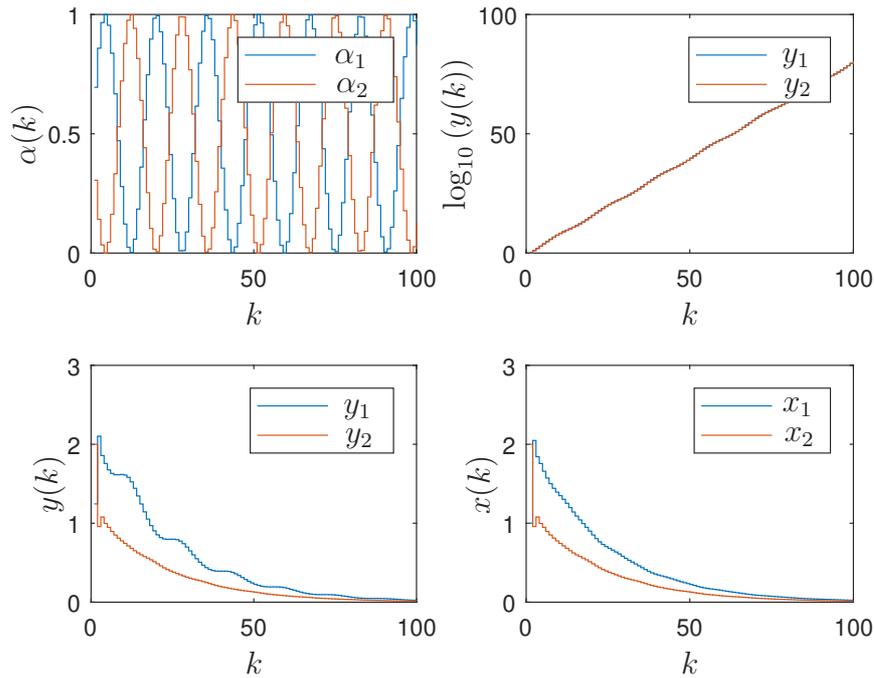


Figura 3 – Trajetórias dos parâmetros variantes no tempo ($\alpha(k)$); da saída em malha aberta ($\log_{10}(y(k))$); da saída ($y(k)$) e dos estados ($x(k)$) em malha-fechada com o ganho (3.8) para o exemplo.

3.1.4.1 Conclusões parciais

Os exemplos numéricos apresentados neste capítulo mostram que o método proposto é muito eficiente em termos estatísticos, conseguindo estabilizar quase 100% dos sistemas testados. Observou-se que mesmo nos casos mais complexos (tais como realimentação estática de saída ou de estados usando ganhos descentralizados), o procedimento iterativo foi capaz de prover resultados superiores aos obtidos pelos outros métodos da literatura, assim como nos exemplos mais simples (realimentação de estados com ganhos sem restrição de estrutura).

3.2 Estabilização de sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo por realimentação de estados

Os métodos disponíveis na literatura que tratam a síntese de controladores estabilizantes por realimentação de estados para sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo, com lei de chaveamento arbitrária, em geral são baseados em programação linear (LIU *et al.*, 2017; LI; ZHANG, 2019; XIANG *et al.*, 2017). Com o intuito de fornecer um método de síntese baseado em LMIs aplicado a esse contexto, para comparar com o Corolário 3.2, foi desenvolvida uma nova condição baseada nos resultados de [Morais *et al.* \(2013\)](#).

Em [Morais et al. \(2013\)](#), para projetar leis de controle dependentes e independentes de modos, as matrizes de ganho são determinadas a partir das variáveis de folga introduzidas nas condições de síntese, sem impor restrições à matriz de Lyapunov. Para reduzir ainda mais o conservadorismo, uma busca em um parâmetro escalar restrito a um intervalo bem definido é adotada nas condições.

O teorema a seguir consiste em uma nova condição LMI para a síntese de controladores estabilizantes por realimentação de estados para o sistema (2.12), que pode ser interpretada como a adaptação da condição de [Morais et al. \(2013\)](#) para tratar sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo.

Teorema 3.2. *Para um valor dado do parâmetro escalar $\xi \in (-1, 1)$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonais e matrizes $Z_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $i = 1, \dots, N$, tais que*

$$\begin{bmatrix} \xi A_i G_i + \xi G_i' A_i + \xi B_i Z_i + \xi Z_i' B_i - P_j & -\xi G_i' + A_i G_i + B_i Z_i \\ \star & P_i - G_i - G_i' \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.9)$$

$$A_i G_i + B_i Z_i \geq 0, \quad (3.10)$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$, então $K_i = Z_i G_i^{-1}$ assegura a estabilidade assintótica e a positividade do sistema chaveado em malha fechada (2.14).

Prova: Admitindo que as condições (3.9) e (3.10) sejam factíveis, o bloco (2, 2) da desigualdade (3.9) implica que

$$G_i + G_i' \succ P_i \succ 0 \quad (3.11)$$

e, logo, a existência das matrizes inversas G_i^{-1} , $i = 1, \dots, N$, é assegurada. Multiplicando (3.10) à direita por G_i^{-1} , obtém-se

$$A_i + B_i Z_i G_i^{-1} \geq 0, \quad (3.12)$$

que corresponde à condição do Lema 2.3, garantindo assim, a positividade do sistema de malha fechada com $K_i = Z_i G_i^{-1}$. Além disso, a condição (3.9) pode ser reescrita na forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -P_j & 0 \\ 0 & P_i \end{bmatrix}}_Q + \begin{bmatrix} \xi I \\ I \end{bmatrix} G_i' \underbrace{\begin{bmatrix} (A_i + B_i Z_i G_i^{-1})' & -I \end{bmatrix}}_W + \begin{bmatrix} A_i + B_i Z_i G_i^{-1} \\ -I \end{bmatrix} G_i \underbrace{\begin{bmatrix} \xi I & I \end{bmatrix}}_Y \prec 0 \quad (3.13)$$

Portanto, pelo Lema 2.6, a condição (3.9) é equivalente a

$$\begin{aligned} N_W' Q N_W &= \begin{bmatrix} I \\ (A_i + B_i Z_i G_i^{-1})' \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -P_j & 0 \\ 0 & P_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ (A_i + B_i Z_i G_i^{-1})' \end{bmatrix} \\ &= -P_j + (A_i + B_i Z_i G_i^{-1}) P_i (A_i + B_i Z_i G_i^{-1})' \prec 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

em que N'_W é o espaço nulo, dado por $N'_W = [I \quad A_i + B_i Z_i G_i^{-1}]$. Na sequência, por meio de um complemento de Schur, tem-se

$$\begin{bmatrix} -P_i & P_i(A_i + B_i Z_i G_i^{-1})' \\ \star & -P_j \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.15)$$

que equivale à condição (2.17) do Lema 2.5, garantindo, assim, a estabilidade assintótica do sistema de malha fechada com $K_i = Z_i G_i^{-1}$.

Por sua vez, a escolha de $N'_Y = [I \quad -\xi I]$ produz

$$N'_Y Q N_Y = \begin{bmatrix} I \\ -\xi I \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -P_j & 0 \\ 0 & P_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -\xi I \end{bmatrix} = -P_j + \xi^2 P_i \prec 0.$$

Fazendo o somatório da última desigualdade para todo $i, j = 1, \dots, N$, tem-se

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (-P_j + \xi^2 P_i) = -\bar{P} + \xi^2 \bar{P} \prec 0, \quad \bar{P} = N \sum_{\ell=1}^N P_\ell \succ 0. \quad (3.16)$$

De fato, a desigualdade (3.16) é válida para todo $\xi \in (-1, 1)$. \square

3.2.1 Principais aplicações da técnica

A síntese do controlador pode ser adaptada de forma que a lei de controle (2.13) seja independente de modos. Para tal, basta adequar o Teorema 3.2 assumindo que $G_i = G$ e $Z_i = Z$ para todo $i, j = 1, \dots, N$.

3.2.2 Exemplos numéricos

Exemplo 3.5. Este é um exemplo adaptado de [Ebihara et al. \(2014\)](#). Considere um sistema chaveado que possa ser descrito como (2.12), com as seguintes matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \\ 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.6 & 0.7 \\ 0.9 & 1 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}.$$

O objetivo é avaliar o grau de conservadorismo das condições de síntese propostas, comparando as abordagens dependente e independente de modos e a influência do valor do parâmetro escalar ξ sobre os resultados obtidos. Para tanto, as matrizes A_1 e A_2 são multiplicadas por um escalar ρ e determina-se o máximo valor de ρ associado,

associado a uma solução factível para as condições dependente e independente de modos, obtidas por meio do Teorema 3.2, utilizando diferentes escolhas de $\xi \in [-0.9, 0.9]$, com 19 valores igualmente espaçados no intervalo. Posteriormente, faz-se a comparação para os valores de ϱ obtidos com as técnicas provindas do Algoritmo 1 adaptado de acordo com o Corolário 3.2.

Na Figura 4 é possível verificar os resultados proporcionados pelas abordagens baseadas no Teorema 3.2. Note que, embora a escolha trivial para o parâmetro escalar seja $\xi = 0$, observou-se que valores de ξ diferentes de zero produzem resultados menos conservadores. No caso dependente de modos o maior valor obtido foi $\varrho = 2.5048$ para $\xi = -0.1$. Na abordagem de ganho independente de modos o maior valor obtido foi $\varrho = 1.2901$ para $\xi = 0.2$. De fato, realizar a busca no escalar ξ é uma estratégia útil, pois pode produzir resultados com diferentes níveis de conservadorismo. Por exemplo, note que a diferença percentual entre os valores máximo e mínimo de ϱ obtidos com o Teorema 3.2, considerando todos os 19 testes foi de 26.4% no caso dependente de modos e 22.49% no independente. Por outro lado, ao utilizar o método iterativo descrito no Algoritmo 1 baseado no Corolário 3.2, obtém-se para o caso independente de modos $\varrho = 1.3069$ e para o dependente $\varrho = 2.6319$. Em ambas as abordagens, dependente e independente de modos, as estratégias oriundas do Algoritmo 1 têm um desempenho melhor, uma vez que permitem estabilizar mais sistemas do que os estabilizáveis pelo Teorema 3.2 (e, conseqüentemente, fornecem valores maiores para ϱ).

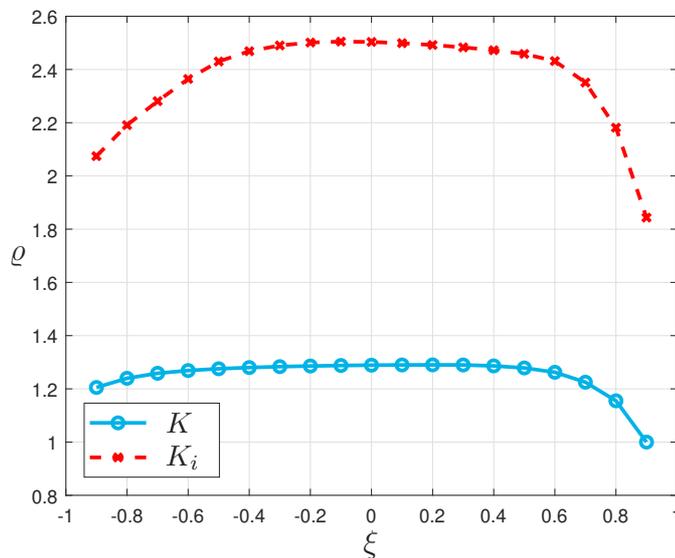


Figura 4 – Máximos valores de ϱ obtidos com o teste de 19 valores de $\xi \in [-0.9, 0.9]$ igualmente espaçados para as abordagens dependente (linha vermelha) e independente de modos (linha azul), baseadas no Teorema 3.2 para o Exemplo 1.

De modo geral, os métodos dependentes de modos fornecem maiores valores de ϱ do que os obtidos com o caso independente. Isso indica que um controlador dependente de modos consegue certificar a estabilidade de uma quantidade maior de sistemas chave-

ados. Perante isto, pode-se afirmar que resultados menos conservadores são produzidos com o controlador dependente de modos. Assim, faz mais sentido restringir o uso das abordagens independente de modos para situações nas quais as informações a respeito dos modos não estejam disponíveis para a realimentação.

Para verificar as vantagens da introdução da variável de folga G (ou G_i no caso dependente de modos) à condição de projeto apresentada na Seção 3.2, considere $\xi = 0$ no Teorema 3.2 e as seguintes escolhas particulares: $G_i = G'_i = P_i$ (diagonal para todo $i = 1, \dots, N$) ou, para o caso independente, $G = G' = P$ (diagonal). Nesse caso, como é comum na literatura, os ganhos de controle são determinados diretamente em termos da matriz de Lyapunov. Repetindo os testes para as condições sem variáveis de folga tem-se no caso dependente de modos $\varrho = 2.4489$ e no independente $\varrho = 1.2651$. Como é possível verificar, para ambos os casos, os valores de ϱ são inferiores aos obtidos com as condições propostas no Teorema 3.2. Embora a diferença não seja tão expressiva, esses resultados indicam uma melhoria com o uso das variáveis de folga G ou G_i .

Exemplo 3.6. Este exemplo foi retirado de Liu *et al.* (2017). Considere o sistema linear chaveado discreto no tempo (2.12), representado pelas seguintes matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.5 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.3 \\ -0.4 & -0.4 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

O objetivo deste exemplo é projetar controladores estabilizantes por realimentação de estados e comparar os resultados da resposta temporal dos estados do sistema em malha fechada com os resultados reportados em Liu *et al.* (2017), mostrados na sequência.

$$K_{\ell_1} = \begin{bmatrix} 0.3467 & -0.4784 \\ 0.3467 & -0.4784 \end{bmatrix}, K_{\ell_2} = \begin{bmatrix} 0.3024 & 0.0966 \\ 0.3024 & 0.0966 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Considerando a abordagem dependente de modos, por meio do Teorema 3.2 com $\xi = -0.9$ (parâmetro escalar associado à melhor resposta no domínio do tempo, em termos de tempo de estabilização), os seguintes ganhos foram produzidos

$$K_1(T3.2) = \begin{bmatrix} 11.1342 & 3.8889 \\ -12.7347 & -5.3115 \end{bmatrix}, K_2(T3.2) = \begin{bmatrix} -3.6667 & -2.3506 \\ 3.8671 & 2.1676 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Ainda para o caso dependente de modos, ao adotar o Algoritmo 1 adaptado para tratar sistemas chaveados pelo Corolário 3.2, obtém-se

$$K_1(A1) = \begin{bmatrix} 12.0164 & 2.0073 \\ -13.7260 & -3.1025 \end{bmatrix}, K_2(A1) = \begin{bmatrix} -2.2294 & -3.4004 \\ 2.5826 & 3.0447 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Abordando o caso independente de modos, por meio do Teorema 3.2, admitindo $\xi = 0.9$, obtém-se o seguinte ganho robusto

$$K(T3.2) = \begin{bmatrix} 0.7361 & -4.5083 \\ 0.0562 & 4.4899 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Por outro lado, por meio do Algoritmo 1 adaptado com o Corolário 3.2, o ganho independente de modos é dado por

$$K(A1) = \begin{bmatrix} 1.5352 & -2.4733 \\ -1.0358 & 2.2200 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Na sequência, ao utilizar a lei de chaveamento fornecida em Liu *et al.* (2017), com estado inicial $x_0 = [10 \ 20]'$, foram obtidas as respostas temporais dos estados dos sistemas em malha fechada para os controladores dependentes e independentes de modos projetados pelo Teorema 3.2 e Algoritmo 1 adaptado com o Corolário 3.2, assim como para o ganho dependente de modos reportado em Liu *et al.* (2017).

Diante dos gráficos apresentados na Figura 5, constata-se que os controladores sintetizados por meio das abordagens propostas nesta dissertação provêm para este caso melhores respostas temporais, em termos de uma convergência mais rápida para a origem, embora não tenham sido projetados para isso.

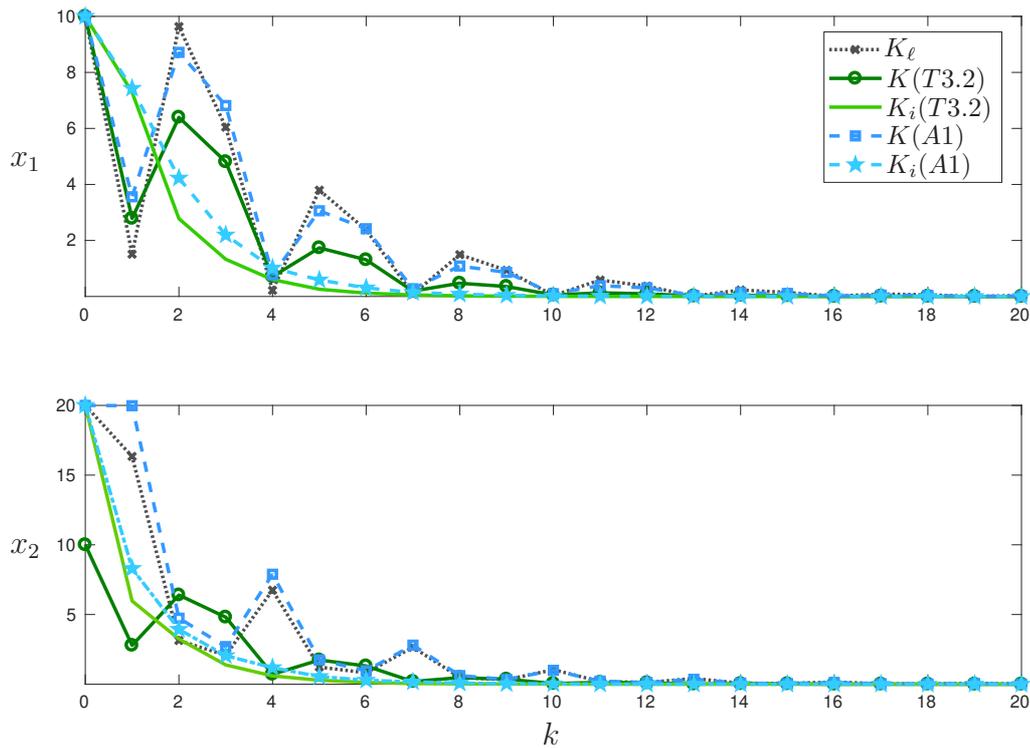


Figura 5 – Respostas temporais obtidas para o sistema (4.30) do Exemplo 3.6 em malha fechada utilizando controladores dependentes e independentes de modos obtidos pelo Teorema 3.2 (respectivamente, $K_i(T3.2)$ e $K(T3.2)$ - curva contínua verde) e pelo Algoritmo 1 ($K_i(A1)$ e $K(A1)$ - curva tracejada azul) e o controlador independente de modos reportado em Liu *et al.* (2017) (K_ℓ - curva pontilhada em cinza).

É importante enfatizar que os controladores independentes de modos (3.22) e (3.21) provêm um desempenho temporal melhor do que a resposta associada ao método

de Liu *et al.* (2017) (dependente de modos). Isso significa que, mesmo utilizando menos informações a respeito do sistema (conhecimento do modo atual de operação do sistema chaveado), as abordagens propostas proporcionam uma convergência mais rápida.

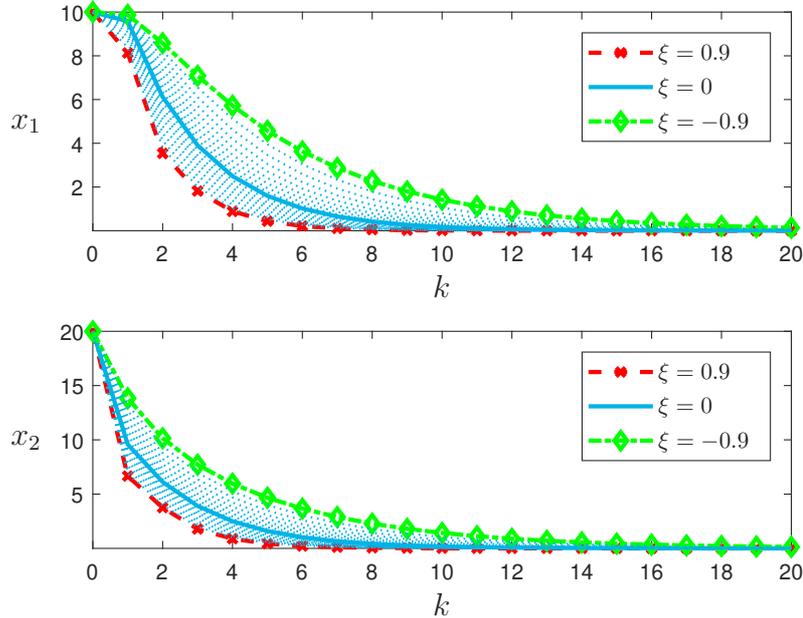


Figura 6 – Respostas temporais obtidas para o sistema (4.30) do Exemplo 3.6 em malha-fechada com controladores dependentes de modo sintetizados pelo Teorema 3.2 com $\xi \in [-0.9, 0.9]$.

Adicionalmente, nota-se que as técnicas propostas também podem ser beneficiadas caso a informação a respeito dos modos esteja disponível para realimentação. Nesse caso, o resultado é ainda melhor, como pode ser observado nos gráficos da Figura 5.

Além disso, usando o Teorema 3.2, diferentes comportamentos para a resposta temporal são obtidos dependendo do ganho sintetizado para cada valor do parâmetro escalar ξ . Para ilustrar essa variedade de soluções obtidas, são apresentadas nas Figuras 6 e 7 as respostas temporais associadas aos controladores dependentes e independentes de modos sintetizados pelo Teorema 3.2 com 19 valores de $\xi \in [-0.9, 0.9]$ igualmente espaçados. Note que, apesar da escolha trivial para o parâmetro escalar ser $\xi = 0$ (linha contínua em azul nas figuras), os melhores resultados são obtidos para valores de $\xi \neq 0$.

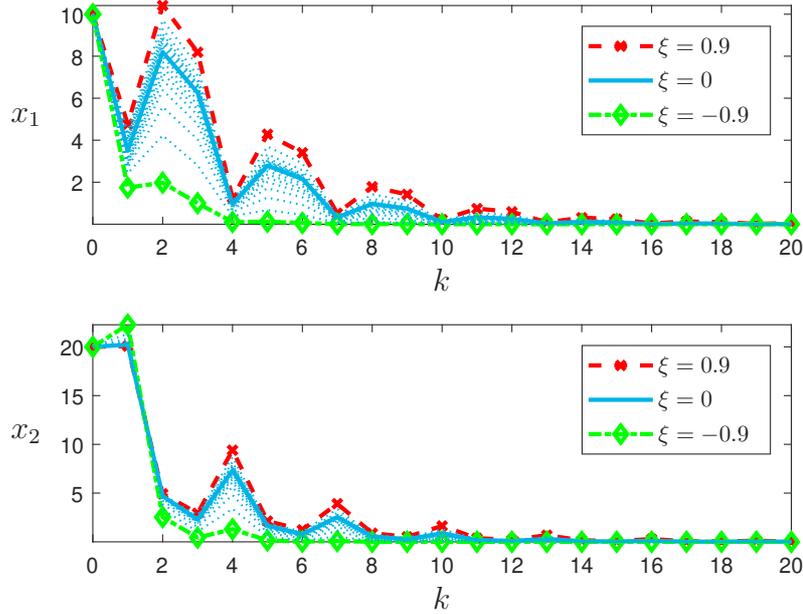


Figura 7 – Respostas temporais obtidas para o sistema (4.30) do Exemplo 3.6 em malha fechada com controladores independentes de modo sintetizado pelo Teorema 3.2 com $\xi \in [-0.9, 0.9]$.

Embora a resposta temporal para uma determinada lei de chaveamento tenha sido investigada, tanto este trabalho como o de Liu *et al.* (2017) tratam o caso de sistemas com lei de chaveamento arbitrária. Nesse sentido, no exemplo a seguir uma aplicação mais realista dos controladores é explorada impondo-se uma lei de chaveamento arbitrária.

Exemplo 3.7. Neste exemplo compara-se o método de Liu *et al.* (2017) aos controladores estabilizantes por realimentação de estados, baseados³ no Teorema 3.2, para o sistema (4.30) utilizando uma lei de chaveamento arbitrária com modos de operação escolhidos com auxílio de um gerador pseudo-aleatório⁴.

Os resultados obtidos com uma simulação de Monte Carlo de 5×10^4 realizações para um horizonte de 20 amostras são apresentados na Figura 8.

Observe que as respostas temporais médias produzidas, tanto pelo controlador dependente de modos (curva vermelha na Figura 8) quanto pelo independente de modos (curva verde), convergem mais rapidamente para zero do que as respostas obtidas aplicando-se o controlador dependente de modos computado pelo método de Liu *et al.* (2017) (curva azul). Todavia, mesmo que o desvio padrão das primeiras amostras do segundo estado em malha fechada com o controlador independente de modos (3.21) seja maior do que o desvio padrão referente ao controlador dependente de modos de Liu *et al.* (2017), o método proposto pode ser considerado vantajoso, pois requer uma lei de controle mais simples.

³ Os resultados do Algoritmo 1 não foram apresentados neste exemplo.

⁴ Neste trabalho, utilizou-se a função *randi()* do software Matlab.

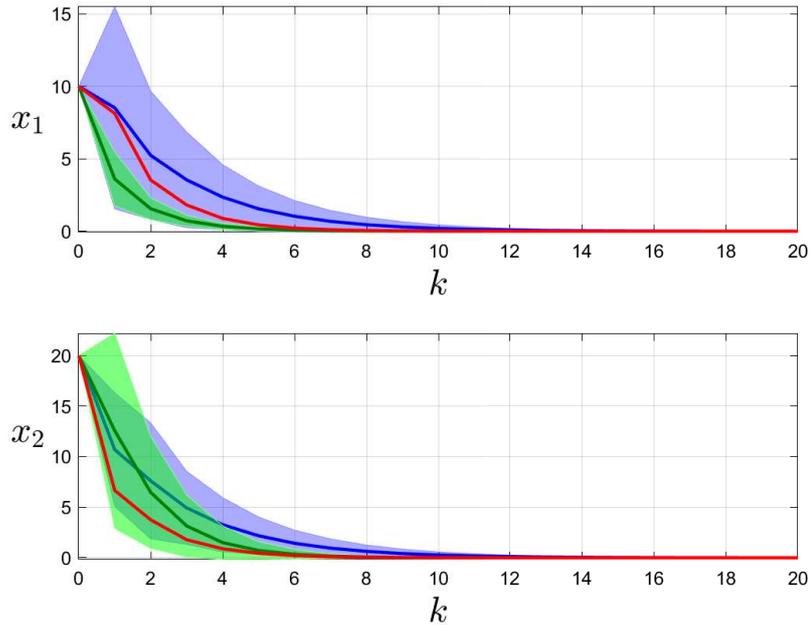


Figura 8 – Trajetórias médias dos estados do sistema (4.30) em malha fechada e desvios padrões associados (áreas sombreadas) obtidos por meio de uma simulação de Monte Carlo para os controladores dependente e independente de modos obtidos pelo Teorema 3.2 (respectivamente $K_i(T3.2)$ - curva vermelha e $K(T3.2)$ - curva verde) e pelo método de Liu *et al.* (2017) (em azul) para o Exemplo 3.7.

3.2.2.1 Conclusões parciais

Por meio da condição LMI proposta no Teorema 3.2 e pelo método iterativo descrito no Algoritmo 1 adaptado com Corolário 3.2 foi possível obter controladores por realimentação de estados dependentes e independentes de modos para sistemas chaveados positivos. A introdução do parâmetro escalar nas condições de projeto do Teorema 3.2 mostrou-se vantajosa, uma vez que resultados menos conservadores e diferentes comportamentos temporais são obtidos dependendo do ganho sintetizado para cada valor de ξ . Como esperado, verificou-se que os controladores dependentes de modos fornecem soluções menos conservadoras quando comparados aos independentes. Os exemplos numéricos comprovam a eficácia de ambas as abordagens propostas, assegurando a positividade e garantindo uma boa resposta temporal para o sistema positivo chaveado em malha fechada.

Por fim, nota-se que os resultados fornecidos pelo Teorema 3.2 são em geral inferiores aos do Algoritmo 1, mas representam uma alternativa mais simples (busca escalar de um único parâmetro em intervalo conhecido e solução de LMIs) à resolução iterativa de conjuntos de LMIs.

4 Controle \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2

Com base na técnica iterativa apresentada no Capítulo 3, foram desenvolvidos métodos para a síntese de controladores \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 por realimentação estática de saída para tratar sistemas LPV politópicos. Assim, nas próximas seções, pretende-se introduzir as condições para a obtenção de tais controladores. Além disso, as principais extensões das técnicas são descritas e, finalmente, por meio de exemplos retirados da literatura, são feitas comparações numéricas de modo a demonstrar a eficácia dos métodos propostos.

4.1 Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação estática de saída

O seguinte teorema apresenta uma condição suficiente para o controle \mathcal{H}_∞ por realimentação estática de saída de sistemas positivos discretos no tempo, em termos de condições LMIs dependentes de parâmetro.

Teorema 4.1. *Para dadas matrizes $Y_{\gamma_i}(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, 3$, se existirem matrizes dependentes de parâmetros simétricas definidas positivas $P(\alpha(k))$, matrizes dependentes de parâmetros $X_{\gamma_i}(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, 3$, e $L(\alpha(k))$ tais que*

$$\mathcal{Q}_\gamma(\bar{\alpha}(k)) + \mathcal{X}_\gamma(\bar{\alpha}(k))\mathcal{B}_\gamma(\bar{\alpha}(k)) + \mathcal{B}'_\gamma(\bar{\alpha}(k))\mathcal{X}'_\gamma(\bar{\alpha}(k)) \prec 0 \quad (4.1)$$

$$A_{cl}(\alpha(k)) \geq 0, B_{cl}(\alpha(k)) \geq 0, C_{cl}(\alpha(k)) \geq 0, D_{cl}(\alpha(k)) \geq 0 \quad (4.2)$$

para todo $\bar{\alpha}(k) = (\alpha(k), \alpha(k+1)) \in \Lambda \times \Lambda$ e todo $k \in \mathbb{Z}_+$, em que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\gamma(\bar{\alpha}(k)) &= \begin{bmatrix} Y_{\gamma_1}(\bar{\alpha}(k)) & Y_{\gamma_2}(\bar{\alpha}(k)) & 0 & 0 & Y_{\gamma_3}(\bar{\alpha}(k)) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{X}_\gamma(\bar{\alpha}(k)) &= \begin{bmatrix} X'_{\gamma_1}(\bar{\alpha}(k)) & X'_{\gamma_2}(\bar{\alpha}(k)) & 0 & 0 & X'_{\gamma_3}(\bar{\alpha}(k)) \end{bmatrix}', \\ \mathcal{Q}_\gamma(\bar{\alpha}(k)) &= \begin{bmatrix} -P(\alpha(k+1)) & \star & \star & \star & \star \\ 0 & P(\alpha(k)) & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -\gamma I & \star & \star \\ B'_{cl}(\alpha(k)) & 0 & D'_{cl}(\alpha(k)) & -\gamma I & \star \\ A'_{cl}(\alpha(k)) & -I & C'_{cl}(\alpha(k)) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

com $A_{cl}(\alpha(k))$, $B_{cl}(\alpha(k))$, $C_{cl}(\alpha(k))$, e $D_{cl}(\alpha(k))$ dadas em (2.6), então γ é um custo garantido \mathcal{H}_∞ para o sistema (2.3) e $L(\alpha(k))$ é um ganho escalonado de realimentação estática de saída, o qual assegura simultaneamente a positividade e a estabilidade assintótica do sistema (2.3) em malha fechada.

Demonstração. Primeiramente, note que (4.2) garante a positividade do sistema (2.3) em malha fechada. Com respeito à garantia de estabilidade e ao limitante para a norma \mathcal{H}_∞ , a factibilidade de (4.1) implica que $Y_{\gamma_3}(\bar{\alpha}(k))$ possui posto completo. Assim, considere as seguintes mudanças de variáveis $\mathcal{B}_\gamma(\bar{\alpha}(k)) = Y_{\gamma_3}(\bar{\alpha}(k)) \begin{bmatrix} -F(\bar{\alpha}(k)) & -G(\bar{\alpha}(k)) & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ e pré e pós-multiplique (4.1) por respectivamente $\mathcal{B}^{\perp'}(\bar{\alpha}(k))$ e $\mathcal{B}^\perp(\bar{\alpha}(k))$ em que

$$\mathcal{B}^{\perp'}(\bar{\alpha}(k)) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & F'(\bar{\alpha}(k)) \\ 0 & I & 0 & 0 & G'(\bar{\alpha}(k)) \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix},$$

para obter

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha(k+1)) + \text{He}(A_{cl}(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k))) & * \\ G'(\bar{\alpha}(k))A'_{cl}(\alpha(k)) - F(\bar{\alpha}(k)) & P(\alpha(k)) - \text{He}(G(\bar{\alpha}(k))) \\ C_{cl}(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)) & C_{cl}(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)) \\ B'_{cl}(\alpha(k)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ -\gamma I & * \\ D'_{cl}(\alpha(k)) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.4)$$

Multiplicando (4.4) à direita por $N(\alpha(k))$ e à esquerda por

$$N'(\alpha(k)) = \begin{bmatrix} I & A_{cl}(\alpha(k)) & 0 & 0 \\ 0 & C_{cl}(\alpha(k)) & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k))A'_{cl}(\alpha(k)) - P(\alpha(k+1)) \\ C_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k))A'_{cl}(\alpha(k)) \\ B'_{cl}(\alpha(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * \\ -\gamma I + C_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k))C'_{cl}(\alpha(k)) & * \\ D'_{cl}(\alpha(k)) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.5)$$

que é equivalente, por complemento de Schur, ao *bounded real lemma* (2.9) aplicado ao sistema (2.3) em malha fechada. \square

Note que o Teorema 4.1 permite projetar controladores escalonados, descentralizados e com elementos limitados em norma (situação adequada, por exemplo, para limitar a magnitude dos sinais de controle e evitar a saturação de atuadores em situações práticas), bastando para isso incluir restrições lineares no projeto, as quais são impostas diretamente às variáveis do ganho $L(\alpha(k))$.

4.1.1 Método iterativo

No Capítulo 3 foi relatada a inserção de uma relaxação, almejando facilitar o problema de estabilização, como discutido em Felipe *et al.* (2016). Essa mesma abordagem é estendida para o controle \mathcal{H}_∞ . Ademais, uma segunda relaxação associada com a positividade do sistema em malha fechada é adotada.

Primeiramente, é preciso destacar a necessidade de se fornecer um valor inicial apropriado para $\mathcal{B}_\gamma(\bar{\alpha}(k))$ no Teorema 4.1, permitindo que o algoritmo proposto a seguir parta de uma condição inicial garantidamente factível. Assim, na sequência demonstra-se que para a escolha particular $\mathcal{B}_\gamma(\bar{\alpha}(k)) = \mathcal{B}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$, isto é, $Y_{\gamma_1}(\bar{\alpha}(k)) = 0$, $Y_{\gamma_2}(\bar{\alpha}(k)) = I$, e $Y_{\gamma_3}(\bar{\alpha}(k)) = -I$, sempre existe um r finito e um γ suficientemente grande para os quais (4.1) é satisfeita para todo $A_{cl}(\alpha(k)) = \bar{A} = (1 - r)A_{cl}(\alpha(k))$. Supondo então, $r = 1$ ($\bar{A} = 0$), $\mathcal{X}'_\gamma(\bar{\alpha}(k)) = -1/2\mathcal{B}_{\gamma_0}$, e aplicando o complemento de Schur em (4.1), obtém-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -P(\alpha(k+1)) & 0 & 0 \\ 0 & P(\alpha(k)) - I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}}_{\mathbb{T}_1} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & B_{cl}(\alpha(k)) \\ 0 & 0 \\ C'_{cl}(\alpha(k)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma I & D_{cl}(\alpha(k)) \\ D'_{cl}(\alpha(k)) & -\gamma I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{cl}(\alpha(k)) \\ B'_{cl}(\alpha(k)) & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{T}_2} \prec 0,$$

a partir da qual nota-se que $\gamma \rightarrow \infty$ implica em $\mathbb{T}_2 \rightarrow 0$. Assim, existe ao menos uma matriz $P(\alpha(k))$ satisfazendo $P(\alpha(k)) = P(\alpha(k+1)) = \nu I$, $\nu \in (0, 1)$, tal que $\mathbb{T}_1 \prec 0$ seja válida.

Assumido $\mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}_{\gamma_0}$, pode-se empregar um procedimento iterativo como o descrito pelo Algoritmo 2 para obter a melhor solução em termos das escolhas das condições iniciais e da correspondente solução das LMIs. O procedimento iterativo empregado para a síntese do controlador \mathcal{H}_∞ pode ser dividido em três fases:

Fase 1: Inicialize $\mathcal{B}_\gamma(\bar{\alpha}(k)) = \mathcal{B}_{\gamma_0} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$, inclua uma relaxação na restrição de positividade, impondo¹ $A_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbb{1}$, $B_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbb{1}$, $C_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbb{1}$, $D_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbb{1}$ com $p \in \mathbb{R}$ em vez de (4.2), e aplique uma relaxação na restrição de estabilização, resolvendo (4.1) com a substituição de $A_{cl}(\alpha(k))$ por $\bar{A} = (1 - r)A_{cl}(\alpha(k))$. Verifique a factibilidade, uma vez que para $\mathcal{B}_\gamma(\bar{\alpha}(k))$ diferente do apresentado, podem existir combinações que resultem na infactibilidade. Simultaneamente minimize r e maximize p (impondo pesos diferentes para cada uma dessas

¹ O símbolo $\mathbb{1}$ representa uma matriz de dimensões adequadas composta por elementos unitários.

variáveis de otimização²) e atualize $\mathcal{B}_\gamma(\bar{\alpha}(k)) = \mathcal{X}'_\gamma(\bar{\alpha}(k))$ a cada iteração, enquanto $r > 0$. Quando $r \leq 0$, a estabilidade assintótica de $A_{cl}(\alpha(k))$ é garantida. Prossiga então para a Fase 2.

Fase 2: Resolva (4.1) sem a relaxação na restrição de estabilidade ($\bar{A} = A_{cl}(\alpha(k))$, ou seja, a variável de otimização r que aparece na Fase 1 é eliminada na Fase 2) e mantenha a relaxação nas restrições de positividade, solucionando $A_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbb{1}$, $B_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbb{1}$, $C_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbb{1}$, $D_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbb{1}$ em vez de (4.2). Maximize p e atualize $\mathcal{B}_\gamma(\bar{\alpha}(k)) = \mathcal{X}'_\gamma(\bar{\alpha}(k))$ até que $p \geq 0$, implicando que a positividade do sistema em malhada fechada é assegurada. Prossiga então para a Fase 3.

Fase 3: Todas as relaxações são retiradas (as variáveis de otimização p e r são eliminadas). Solucione o Teorema 4.1 (condições (4.1) e (4.2)) minimizando $\gamma_m = \gamma$ e atualizando $\mathcal{B}_\gamma(\bar{\alpha}(k)) = \mathcal{X}'_\gamma(\bar{\alpha}(k))$ até que $|\gamma_m - \gamma_{m-1}| < tol_\gamma$, em que tol_γ é uma tolerância pré-especificada.

Observação 4.1. Na Fase 3, os níveis de relaxação (em termos dos escalares r e p) são completamente removidos. A eliminação da relaxação da estabilidade é, de fato, necessária, caso contrário γ não seria um custo válido para o sistema (2.3) em malha fechada (vale ressaltar que um sistema com matriz dinâmica $(1-r)A_{cl}(\alpha(k))$ está associado a uma norma \mathcal{H}_∞ diferente da norma do sistema com $A_{cl}(\alpha(k))$). O procedimento iterativo proposto neste trabalho também inclui como critério de parada o número máximo de iterações, it_{max} .

Observação 4.2. O custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ pode ser minimizado no procedimento iterativo de duas maneiras:

1. O parâmetro γ é um valor conhecido atribuído pelo projetista na inicialização do algoritmo. Na Fase 3 realiza-se um procedimento de bissecção em que o limite máximo é o próprio valor de γ utilizado nas duas fases anteriores, o mínimo valor é zero e o valor a ser testado é a média entre os dois. Caso a solução seja factível o limitante superior é atualizado para o último valor testado, caso contrário, o limitante inferior recebe o último valor testado. O procedimento se repete até que a diferença entre os limitantes máximo e mínimo satisfaça um critério pré-estabelecido.
2. O parâmetro γ é uma variável livre do problema nas duas primeiras fases e a variável de otimização na terceira fase.

Os experimentos numéricos apresentados nesta dissertação utilizam o método 1, para o qual foram encontrados os melhores resultados.

² Para as simulações realizadas nesta dissertação, foram utilizados os pesos 0.95 para r e 0.05 para p no Algoritmo 2.

Algoritmo 2: PROCEDIMENTO ITERATIVO CONTROLE \mathcal{H}_∞

```

1 Função Hinf-3phases ( $A, B, E, C_z, D_z, E_z, C_y, E_y(\alpha(k)), tol, it_{max}$ )
2   Inicialização de  $\mathcal{B}_{\gamma_0}$ ,  $\gamma_1 \leftarrow 10^5$ ,  $\gamma_0 \leftarrow 0$ ,  $m \leftarrow 0$ ,  $fase \leftarrow 1$ ;
3   enquanto  $m < it_{max}$  &  $|\gamma_m - \gamma_{m-1}| \geq tol$  faça
4      $m \leftarrow m + 1$ ;  $\bar{A} = (1 - r)A_{cl}(\alpha(k))$ ;
5     se  $fase = 1$  então
6       minimize  $r$  e maximize  $p$  sujeito a
7          $\mathcal{Q}_\gamma(\bar{\alpha}(k), \bar{A}) + \text{He}(\mathcal{X}_\gamma(\bar{\alpha}(k))\mathcal{B}_\gamma(\bar{\alpha}(k))) \prec 0$ ,  $P(\alpha(k)) \succ 0$ ,
8          $A_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}$ ,  $B_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}$ ,  $C_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}$ ,  $D_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}$ ;
9       se factível então
10         $\bar{A}_m = A_{cl}(\alpha(k))$ ;
11        se  $r \leq 0$  então
12           $fase \leftarrow 2$ ;
13        fim
14         $\mathcal{B}_{\gamma_m}(\bar{\alpha}(k)) \leftarrow \mathcal{X}'_\gamma(\bar{\alpha}(k))$ ;
15      senão
16        Abandone;
17      fim
18    senão se  $fase = 2$  então
19      maximize  $p$  sujeito a
20         $\mathcal{Q}_\gamma(\bar{\alpha}(k), \bar{A}) + \text{He}(\mathcal{X}_\gamma(\bar{\alpha}(k))\mathcal{B}_\gamma(\bar{\alpha}(k))) \prec 0$ ,  $P(\alpha(k)) \succ 0$ ,  $A_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}$ ,
21         $B_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}$ ,  $C_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}$ ,  $D_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}$ ;
22      se factível &  $p \geq 0$  então
23         $fase \leftarrow 3$ ;
24      fim
25       $\mathcal{B}_{\gamma_m}(\bar{\alpha}(k)) \leftarrow \mathcal{X}'_\gamma(\bar{\alpha}(k))$ ;
26    senão
27      minimize  $\gamma$  sujeito a
28         $\mathcal{Q}_\gamma(\bar{\alpha}(k), \bar{A}) + \text{He}(\mathcal{X}_\gamma(\bar{\alpha}(k))\mathcal{B}_\gamma(\bar{\alpha}(k))) \prec 0$ ,  $P(\alpha(k)) \succ 0$ ,  $A_{cl}(\alpha(k)) \geq 0$ ,
29         $B_{cl}(\alpha(k)) \geq 0$ ,  $C_{cl}(\alpha(k)) \geq 0$ ,  $D_{cl}(\alpha(k)) \geq 0$ ;
30      se factível então
31         $\gamma_m = \gamma$ ;
32      fim
33     $\mathcal{B}_\gamma(\bar{\alpha}(k)) \leftarrow \mathcal{X}'_\gamma(\bar{\alpha}(k))$ ;
34  fim
35 fim

```

4.2 Controle \mathcal{H}_2 por realimentação estática de saída

Nesta seção, uma condição suficiente para o controle \mathcal{H}_2 por realimentação estática de saída do sistema (2.3), considerando $E_y(\alpha(k))$ nula, é descrita pelo Teorema 4.2.

Teorema 4.2. *Para dadas matrizes dependentes de parâmetros $Y_i(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, \dots, 6$, se existirem matrizes dependentes de parâmetros simétricas definidas positivas $M(\alpha(k))$, matrizes dependentes de parâmetros simétricas definidas positivas $P(\bar{\alpha}(k))$, matrizes dependentes de parâmetros $X_i(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, \dots, 6$, e $L(\alpha(k))$ tais que as restrições (4.2),*

$$\mathcal{Q}_g(\bar{\alpha}(k)) + \mathcal{X}_g(\bar{\alpha}(k))\mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k)) + \mathcal{B}'_g(\bar{\alpha}(k))\mathcal{X}'_g(\bar{\alpha}(k)) \prec 0, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{Q}_t(\bar{\alpha}(k)) + \mathcal{X}_t(\bar{\alpha}(k))\mathcal{B}_t(\bar{\alpha}(k)) + \mathcal{B}'_t(\bar{\alpha}(k))\mathcal{X}'_t(\bar{\alpha}(k)) \prec 0, \quad (4.7)$$

$$\text{Tr}(M(\alpha(k))) < \rho^2, \quad (4.8)$$

para todo $\bar{\alpha}(k) = (\alpha(k), \alpha(k+1)) \in \Lambda \times \Lambda$ e todo $k \in \mathbb{Z}_+$, em que

$$\mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k)) = \begin{bmatrix} Y_1(\bar{\alpha}(k)) & Y_2(\bar{\alpha}(k)) & 0 & Y_3(\bar{\alpha}(k)) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}_t(\bar{\alpha}(k)) = \begin{bmatrix} Y_4(\bar{\alpha}(k)) & Y_5(\bar{\alpha}(k)) & Y_6(\bar{\alpha}(k)) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X}_g(\bar{\alpha}(k)) = \begin{bmatrix} X'_1(\bar{\alpha}(k)) & X'_2(\bar{\alpha}(k)) & 0 & X'_3(\alpha(k)) \end{bmatrix}',$$

$$\mathcal{X}_t(\bar{\alpha}(k)) = \begin{bmatrix} X'_4(\bar{\alpha}(k)) & X'_5(\bar{\alpha}(k)) & X'_6(\bar{\alpha}(k)) \end{bmatrix}',$$

$$\mathcal{Q}_g(\bar{\alpha}(k)) = \begin{bmatrix} -P(\alpha(k+1)) & \star & \star & \star \\ 0 & P(\alpha(k)) & \star & \star \\ B'_{cl}(\alpha(k)) & 0 & -I & 0 \\ A'_{cl}(\alpha(k)) & -I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{Q}_t(\bar{\alpha}(k)) = \begin{bmatrix} -M(\alpha(k)) + D_{cl}(\alpha(k))D'_{cl}(\alpha(k)) & \star & \star \\ 0 & P(\alpha(k)) & \star \\ C'_{cl}(\alpha(k)) & -I & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

com $A_{cl}(\alpha(k))$, $B_{cl}(\alpha(k))$, $C_{cl}(\alpha(k))$, e $D_{cl}(\alpha(k))$ dadas em (2.6), então ρ é um custo garantido \mathcal{H}_2 para o sistema (2.3) em malha fechada e $L(\alpha(k))$ é um ganho escalonado de realimentação estática de saída, o qual assegura simultaneamente a positividade e a estabilidade assintótica do sistema (2.3) em malha fechada.

Demonstração. Sabendo de antemão que (4.2) garante a positividade do sistema (2.3) em malha fechada, basta assegurar que ρ é um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 do sistema. Como a factibilidade de (4.6) implica que $Y_3(\bar{\alpha}(k))$ possui posto completo, é

possível considerar $\mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k)) = Y_{\gamma_3}(\bar{\alpha}(k)) \begin{bmatrix} -F(\bar{\alpha}(k)) & -G(\bar{\alpha}(k)) & 0 & I \end{bmatrix}$. Assim, pré e pós-multiplicando (4.6) respectivamente por $\mathcal{B}_g^{\perp'}$ e \mathcal{B}_g^\perp com

$$\mathcal{B}_g^{\perp'}(\bar{\alpha}(k)) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & F'(\bar{\alpha}(k)) \\ 0 & I & 0 & G'(\bar{\alpha}(k)) \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha(k+1)) + F'(\bar{\alpha}(k))A'_{cl}(\alpha(k)) + A_{cl}(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)) \\ G'(\bar{\alpha}(k))A'_{cl}(\alpha(k)) - F(\bar{\alpha}(k)) \\ B'_{cl}(\alpha(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \star & \star \\ P(\alpha(k)) - G'(\bar{\alpha}(k)) - G(\bar{\alpha}(k)) & \star \\ 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.11)$$

Multiplicando (4.11) à direita por $\mathbf{N}_g(\alpha(k))$ e à esquerda por

$$\mathbf{N}_g(\alpha(k))' = \begin{bmatrix} I & A_{cl}(\alpha(k)) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k))A'_{cl}(\alpha(k)) - P(\alpha(k+1)) & \star \\ B'_{cl}(\alpha(k)) & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.12)$$

equivalente ao gramiano de controlabilidade (2.10).

A prova para demonstrar (4.7) e (4.8) segue a mesma linha. Uma vez que, se (4.7) for factível é assegurado que $Y_6(\bar{\alpha}(k))$ possui posto completo, tornando válida a seguinte escolha $\mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k)) = Y_6(\bar{\alpha}(k)) \begin{bmatrix} -H(\bar{\alpha}(k)) & -J(\bar{\alpha}(k)) & I \end{bmatrix}$. Na sequência, pré e pós-multiplicando (4.7) por $\mathcal{B}_t^{\perp'}$ e \mathcal{B}_t^\perp com

$$\mathcal{B}_t^{\perp'}(\bar{\alpha}(k)) = \begin{bmatrix} I & 0 & H'(\bar{\alpha}(k)) \\ 0 & I & J'(\bar{\alpha}(k)) \end{bmatrix}$$

e ainda, multiplicando o resultado à direita por $N_t(\alpha(k))$ e à esquerda por

$$\mathbf{N}'_t(\alpha(k)) = \begin{bmatrix} I & A'_{cl}(\alpha(k)) \end{bmatrix},$$

obtém-se

$$-M(\alpha(k)) + D_{cl}(\alpha(k))D'_{cl}(\alpha(k)) + C_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k))C'_{cl}(\alpha(k)) \prec 0 \quad (4.13)$$

que é equivalente, por complemento de Schur, à condição (2.11). \square

4.2.1 Método iterativo

O algoritmo iterativo elaborado para sintetizar o controlador \mathcal{H}_2 se assemelha ao do controle \mathcal{H}_∞ , mantendo as mesmas relaxações e estrutura. Assim, como nos Teoremas 3.1 e 4.1, apresentados anteriormente, é preciso fornecer parâmetros iniciais para o presente método. No caso da condição fornecida pelo Teorema 4.2, é necessário inicializar os valores de $\mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k))$ e $\mathcal{B}_t(\bar{\alpha}(k))$. Desse modo, pretende-se demonstrar que as escolhas iniciais

$$\mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k)) = \mathcal{B}_{g_0} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma I & 0 & -(1/\sigma)I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_t(\bar{\alpha}(k)) = \mathcal{B}_{t_0} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma I & -(1/\sigma)I \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

com³

$$\sigma > \max_{\{i=1, \dots, n_x\}, \{\alpha(k) \in \Lambda\}} \left\{ \sqrt{\lambda_{B_i(\alpha(k))}}, 1 \right\} \quad (4.15)$$

são escolhas válidas (no sentido de garantirem uma solução inicial factível para o Teorema 4.2) no controle \mathcal{H}_2 . Assim como feito na Seção 4.1.1, substituindo $A_{cl}(\alpha(k))$ por $\bar{A} = (1-r)A_{cl}(\alpha(k))$, fazendo $\mathcal{X}'_g(\bar{\alpha}(k)) = -1/2\mathcal{B}_{g_0}$ e $\mathcal{X}'_t(\bar{\alpha}(k)) = -1/2\mathcal{B}_{t_0}$, aplica-se o complemento de Schur em (4.6) e em (4.7), respectivamente, obtendo

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha(k+1)) + B_{cl}(\alpha(k))B'_{cl}(\alpha(k)) & \star \\ 0 & P(\alpha(k)) - \sigma^2 I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.16)$$

$$\begin{bmatrix} -M(\alpha(k)) + D_{cl}(\alpha(k))D'_{cl}(\alpha(k)) + C_{cl}(\alpha(k))C'_{cl}(\alpha(k)) & \star \\ 0 & P(\alpha(k)) - \sigma^2 I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (4.17)$$

Supondo $\sigma > 1$, é possível provar que existe ao menos uma solução constante para a matriz de Lyapunov, tal que $P(\alpha(k)) = P(\alpha(k+1)) = \varepsilon I$, com $\varepsilon \in (1, \sigma^2)$. Assim, pode-se inferir que o bloco (2,2) de (4.16) é sempre negativo para o intervalo de existência de ε . Em contrapartida, o bloco (1,1) de (4.16) implica em

$$0 \preceq B_{cl}(\alpha(k))B'_{cl}(\alpha(k)) \prec P(\alpha(k+1)) = \varepsilon I \prec \sigma^2 I.$$

Aplicando uma transformação de similaridade para diagonalizar $B_{cl}(\alpha(k))B'_{cl}(\alpha(k))$, tem-se

$$T^{-1}(B_{cl}(\alpha(k))B'_{cl}(\alpha(k)))T \prec T^{-1}(\varepsilon I)T \prec T^{-1}(\sigma^2 I)T$$

que equivale a

$$\begin{bmatrix} \lambda_{B_1}(\alpha(k)) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{B_{n_x}}(\alpha(k)) & \\ & & & \end{bmatrix} \prec \begin{bmatrix} \varepsilon & & & \\ & \ddots & & \\ & & \varepsilon & \\ & & & \end{bmatrix} \prec \begin{bmatrix} \sigma^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma^2 & \\ & & & \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

³ $\lambda_{B_i(\alpha(k))}$, $i = 1, \dots, n$ denota o i -ésimo autovalor da matriz $B_{cl}(\alpha(k))B'_{cl}(\alpha(k))'$.

Sabendo que $\sigma > 1$, $\varepsilon \in (1, \sigma^2)$ e que (4.18) devem ser asseguradas, as seguintes escolhas particulares

$$\sigma > \sqrt{\varepsilon} > \max_{\{i=1, \dots, n_x\}, \{\alpha(k) \in \Lambda\}} \left\{ \sqrt{\lambda_{B_i(\alpha(k))}}, 1 \right\} \quad (4.19)$$

para os parâmetros σ e ε garantem que (4.16) sempre tem uma solução válida, para as condições iniciais propostas.

Por outro lado, a partir de (4.17) é possível obter as seguintes restrições

$$M(\alpha(k)) \succ \underbrace{D_{cl}(\alpha(k))D'_{cl}(\alpha(k)) + C_{cl}(\alpha(k))C'_{cl}(\alpha(k))}_T \quad (4.20)$$

$$P(\alpha(k)) \prec \sigma^2 I \quad (4.21)$$

Admitindo-se novamente a existência de $P(\alpha(k)) = P(\alpha(k+1)) = \varepsilon I$ com $\varepsilon < \sigma^2$ a restrição (4.21) é satisfeita.

Considerando ε , tal que (4.19) seja verdadeira, a desigualdade (4.20) é assegurada pela condição (4.13), pois para $P(\alpha(k)) = \varepsilon I$, com $\varepsilon \in (1, \sigma^2)$ e $\sigma > 1$, tem-se

$$T \prec D_{cl}(\alpha(k))D'_{cl}(\alpha(k)) + C_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k))C'_{cl}(\alpha(k))$$

Então, para uma escolha apropriada de σ que satisfaça (4.19), assegura-se a existência de ao menos uma matriz de Lyapunov: $P(\alpha(k)) = P(\alpha(k+1)) = \varepsilon I$ positiva que satisfaz as condições (4.16) e (4.17).

Observação 4.3. Note que, caso a matriz $E_y(\alpha(k))$ seja diferente de zero, a matriz $B_{cl}(\alpha(k))$ torna-se dependente do ganho $L(\alpha(k))$ e, conseqüentemente, as condições iniciais que garantem a factibilidade do algoritmo não poderiam ser determinadas a priori. É possível utilizar o Teorema 4.2 para fornecer controladores para um sistema com $E_y(\alpha(k)) \neq 0$, mas nesse caso, a factibilidade para a escolha inicial \mathcal{B}_0 demonstrada anteriormente não é garantida.

Assim como no controle \mathcal{H}_∞ , utiliza-se um algoritmo iterativo para que, a partir dos valores iniciais especificados para as variáveis $\mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k))$ e $\mathcal{B}_t(\bar{\alpha}(k))$, seja possível aplicar o Teorema 4.2 para prover um controlador \mathcal{H}_2 . O procedimento iterativo, descrito com detalhes no Algoritmo 3, também pode ser dividido em três fases:

Fase 1: Inicialize $\mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k))$ e $\mathcal{B}_t(\bar{\alpha}(k))$

$$\mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k)) = \mathcal{B}_{g0} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma I & 0 & -(1/\sigma)I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_t(\bar{\alpha}(k)) = \mathcal{B}_{t0} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma I & -(1/\sigma)I \end{bmatrix},$$

com

$$\sigma > \max_{\{i=1, \dots, n_x\}, \{\alpha(k) \in \Lambda\}} \sqrt{\lambda_{B_i(\alpha(k))}},$$

relaxe a restrição de positividade, solucionando $A_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}$, $B_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}$, $C_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}$, $D_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}$, com $p \in \mathbb{R}$, em vez de (4.2) e aplique uma relaxação

na restrição de estabilização, resolvendo (4.6) e (4.7) com a substituição de $A_{cl}(\alpha(k))$ por $\bar{A} = (1-r)A_{cl}(\alpha(k))$. Simultaneamente minimize r e maximize p (impondo pesos diferentes para cada uma dessas variáveis de otimização⁴) e atualize $\mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k)) = \mathcal{X}'_g(\bar{\alpha}(k))$ e $\mathcal{B}_t(\bar{\alpha}(k)) = \mathcal{X}'_t(\bar{\alpha}(k))$ até que $p \geq 0$ a cada iteração, enquanto $r > 0$. Quando $r \leq 0$, a estabilidade assintótica de $A_{cl}(\alpha(k))$ é garantida. Prossiga então para a Fase 2.

Fase 2: Resolva (4.6) e (4.7) sem a relaxação na restrição de estabilidade e mantenha a relaxação nas restrições de positividade, solucionando $A_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}$, $B_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}$, $C_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}$, $D_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}$ em vez de (4.2). Maximize p e atualize $\mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k)) = \mathcal{X}'_g(\bar{\alpha}(k))$ e $\mathcal{B}_t(\bar{\alpha}(k)) = \mathcal{X}'_t(\bar{\alpha}(k))$ até que $p \geq 0$, implicando que a positividade do sistema em malhada fechada é assegurada. Prossiga para a Fase 3.

Fase 3: Todas as relaxações são retiradas. Solucione o Teorema 4.2 (condições (4.2), (4.6), (4.7) e (4.8)) minimizando $\rho_m = \rho$ e atualizando $\mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k)) = \mathcal{X}'_g(\bar{\alpha}(k))$ e $\mathcal{B}_t(\bar{\alpha}(k)) = \mathcal{X}'_t(\bar{\alpha}(k))$ até que $|\rho_m - \rho_{m-1}| < tol_\rho$, em que tol_ρ é uma tolerância pré-especificada.

Assim como no caso \mathcal{H}_∞ , o custo garantido \mathcal{H}_2 dado por ρ pode ser minimizado no procedimento iterativo de duas maneiras: bisseção e tratando ρ como uma variável de otimização do programa (para mais detalhes, veja a Observação 4.2).

4.3 Testes de dimensão finita

As condições propostas neste capítulo foram programadas utilizando as mesmas ferramentas mencionadas no início da Seção 3.1.3.

Em relação aos graus das variáveis, para $P(\alpha(k))$ e $P(\alpha(k+1))$ foi escolhido grau um, e para $X_i(\bar{\alpha}(k))$, $i = 1, 2, \dots, 7$, o grau é um em ambos parâmetros $\alpha(k)$ e $\beta(k) = \alpha(k+1)$. No caso dos controladores de ganho escalonado, também impõe-se grau um a $L(\alpha(k))$ e grau zero para controlador robusto.

4.4 Principais aplicações da técnica

É possível adaptar os Teoremas 4.1 e 4.2 para tratar a estabilização por realimentação de estados utilizando $C_y(\alpha(k)) = I$ e $E_y(\alpha(k)) = 0$, assim como feito no Corolário 3.1. Para o projeto de controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas positivos LTI incertos basta omitir a dependência no tempo de todas as matrizes dependentes de parâmetros e sintetizar um ganho robusto (grau de $L(\alpha) = 0$), assim como descrito na Observação 3.2.

⁴ Para as simulações realizadas nesta dissertação, foram utilizados os pesos 0.99 para r e 0.01 para p no Algoritmo 3.

Algoritmo 3: PROCEDIMENTO ITERATIVO CONTROLE \mathcal{H}_2

```

1 Função H2-3phases ( $A, B, E, C_z, D_z, E_z(\alpha(k)), tol, it_{max}$ )
2   Inicialização de  $\mathcal{B}_{g0}, \mathcal{B}_{t0}, m \leftarrow 0, \mathcal{Q}_t(r_m) = \mathcal{Q}_t((1 - r_m)A_{cl}(\alpha(k))), fase \leftarrow 1$ 
3   enquanto  $m < it_{max}$  &  $|\rho_m - \rho_{m-1}| \geq tol$  faça
4      $m \leftarrow m + 1; \bar{A} = (1 - r)A_{cl}(\alpha(k));$ 
5     se  $fase = 1$  então
6       minimize  $r$  e maximize  $p$  sujeito a
7          $\mathcal{Q}_t(\bar{\alpha}(k), \bar{A}) + \text{He}(\mathcal{X}_t(\bar{\alpha}(k))\mathcal{B}_t(\bar{\alpha}(k))) \prec 0,$ 
8          $\mathcal{Q}_g(\bar{\alpha}(k), \bar{A}) + \text{He}(\mathcal{X}_g(\bar{\alpha}(k))\mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k))) \prec 0, P(\alpha(k)) \succ 0,$ 
9          $A_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}, B_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}, C_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}, D_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1};$ 
10      se factível então
11         $\bar{A}_m = A_{cl}(\alpha(k));$ 
12        se  $r \leq 0$  então
13           $phase \leftarrow 2;$ 
14        fim
15         $\mathcal{B}_t(\bar{\alpha}(k)) \leftarrow \mathcal{X}'_t(\bar{\alpha}(k)); \mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k)) \leftarrow \mathcal{X}'_g(\bar{\alpha}(k));$ 
16      senão
17        Abandone;
18      fim
19      senão se  $fase = 2$  então
20        maximize  $p$  sujeito a  $\mathcal{Q}_t(\bar{\alpha}(k), \bar{A}) + \text{He}(\mathcal{X}_t(\bar{\alpha}(k))\mathcal{B}_t(\bar{\alpha}(k))) \prec 0,$ 
21         $\mathcal{Q}_g(\bar{\alpha}(k), \bar{A}) + \text{He}(\mathcal{X}_g(\bar{\alpha}(k))\mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k))) \prec 0, P(\alpha(k)) \succ 0,$ 
22         $A_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}, B_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}, C_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}, D_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1};$ 
23        se factível &  $p \geq 0$  então
24           $phase \leftarrow 3;$ 
25        fim
26         $\mathcal{B}_t(\bar{\alpha}(k)) \leftarrow \mathcal{X}'_t(\bar{\alpha}(k)); \mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k)) \leftarrow \mathcal{X}'_g(\bar{\alpha}(k));$ 
27      senão
28        minimize  $\rho$  sujeito a  $\mathcal{Q}_t(\bar{\alpha}(k), \bar{A}) + \text{He}(\mathcal{X}_t(\bar{\alpha}(k))\mathcal{B}_t(\bar{\alpha}(k))) \prec 0,$ 
29         $\mathcal{Q}_g(\bar{\alpha}(k), \bar{A}) + \text{He}(\mathcal{X}_g(\bar{\alpha}(k))\mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k))) \prec 0, P(\alpha(k)) \succ 0,$ 
30         $A_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}, B_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}, C_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1}, D_{cl}(\alpha(k)) \geq p\mathbf{1};$ 
31        se factível então
32           $\rho = \rho_m; \text{retorna}(\rho);$ 
33        fim
34         $\mathcal{B}_t(\bar{\alpha}(k)) \leftarrow \mathcal{X}'_t(\bar{\alpha}(k)); \mathcal{B}_g(\bar{\alpha}(k)) \leftarrow \mathcal{X}'_g(\bar{\alpha}(k));$ 
35      fim
36    fim
37  fim

```

4.5 Exemplos numéricos

Nesta seção são apresentados exemplos retirados da literatura e outros experimentos numéricos randômicos criados especialmente para explorar as aplicações dos métodos descritos nesse capítulo para o projeto de controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ no contexto de sistemas positivos discretos no tempo.

4.5.1 Critério de desempenho \mathcal{H}_∞

Na sequência, emprega-se o Algoritmo 2 para computar controladores robustos por realimentação de estados e de saída, objetivando minimizar o limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada. Na resolução dos exemplos apresentados nesta seção, foi utilizada uma matriz $P(\alpha(k))$ diagonal para a execução do Algoritmo 2.

Exemplo 4.1. Este exemplo foi retirado de Ebihara *et al.* (2014). Considere o sistema positivo LTI politópico discreto no tempo

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.0 & 0.3 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \\ 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}, & E_1 &= \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0.9 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \\
 C_{z_1} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}, & D_{z_1} &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}, & E_{z_1} &= \begin{bmatrix} 0.1 \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.6 & 0.7 \\ 0.9 & 1.0 \\ 0.3 & 1.0 \end{bmatrix}, & E_2 &= \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.7 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \\
 C_{z_2} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.4 & 0.0 \end{bmatrix}, & D_{z_2} &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}, & E_{z_2} &= \begin{bmatrix} 0.1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Neste exemplo, deseja-se projetar um controlador \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados estruturado na forma

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e comparar os resultados fornecidos pelo método proposto com os resultados obtidos pelas condições apresentadas em (EBIHARA *et al.*, 2014).

Conforme reportado no artigo original, a condição (24) de Ebihara *et al.* (2014) fornece o seguinte ganho

$$K = \begin{bmatrix} 0.1667 & -0.0140 & 0 & 0 \\ -0.2500 & -0.1368 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

associado com um custo garantido \mathcal{H}_∞ de 33.0912, e uma norma \mathcal{H}_∞ de pior caso em malha fechada de 7.1548, enquanto que a desigualdade (25) proposta nesse mesmo artigo provê

$$L = \begin{bmatrix} 0.1667 & -0.2105 & 0 & 0 \\ -0.2500 & -0.0526 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.23}$$

correspondente a um custo garantido \mathcal{H}_∞ de 6.6884 e uma norma \mathcal{H}_∞ de pior caso em malha fechada 6.0228. Por outro lado, o procedimento iterativo elaborado neste trabalho, com variáveis de folga $X_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$ cheias, feita a inicialização de $\gamma = 8$, produz um controlador igual ao obtido em (4.23), porém associado a um custo garantido \mathcal{H}_∞ de

$\gamma = 6.6762$ para 10 iterações, $\gamma = 6.3236$ para 30 iterações, $\gamma = 6.2088$ para 60 iterações e $\gamma = 6.1899$ para 90 iterações, ou seja, fornece estimativas mais próximas da norma de pior caso (6.0228). Observe que, após 10 iterações, o resultado é melhor do que o apresentado em [Ebihara et al. \(2014\)](#).

Exemplo 4.2. Considere o seguinte sistema LTI positivo politópico discreto no tempo.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 6.29 & 3.58 \\ 5.28 & 2.79 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix}, E_{z_1} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, C_{z_1} = C_{z_2} = I \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1.11 & 1.23 \\ 2.37 & 2.35 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0 \end{bmatrix}, E_{z_2} = 5E_{z_1}, D_{z_1} = D_{z_2} = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

O objetivo é calcular um controlador robusto por realimentação de estados que minimize o limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ do sistema de malha fechada.

Para este sistema, nenhum dos métodos apresentados em [Ebihara et al. \(2014\)](#) conseguiu prover uma solução factível, mesmo sem impor nenhuma restrição de estrutura ao ganho. Em contrapartida, o método iterativo proposto neste trabalho gera estimativas diferentes para o custo garantido \mathcal{H}_∞ de acordo com a escolha da estrutura das variáveis de folga $X_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$, como mostrado na Tabela 6.

Tabela 6 – Valores dos custos garantidos $\mathcal{H}_\infty(\gamma)$ calculados para o Exemplo 4.2 com a técnica proposta com m iterações ($it_{max} = 40$ e γ_0 fornecido) utilizando as seguintes estruturas para as variáveis de folga $X_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$: ‘d’ (diagonal), ‘s’ (simétrica) e ‘f’ (cheia).

$X_{1,2,3}(\alpha)$	γ_0	γ	m	L
d	65	52.6886	33	$[-0.790 \quad -0.465]$
f	8	6.1266	40	$[-0.790 \quad -0.465]$
s	8	5.1748	31	$[-0.790 \quad -0.465]$

Note que, na primeira iteração, é possível assegurar que, quanto mais complexa a estrutura, melhores os resultados, pois o caso com mais variáveis escalares sempre inclui o caso com menos variáveis como solução particular. No entanto, como o método é iterativo, procurando uma solução em um espaço não convexo, não é possível saber a priori qual estrutura fornece a melhor solução. Neste exemplo em particular, a estrutura simétrica, que possui menos variáveis escalares que a estrutura cheia, proporcionou o melhor resultado. Vale ressaltar que assim como para o algoritmo de estabilização, o uso de uma outra condição inicial, neste caso \mathcal{B}_{γ_0} , pode gerar diferentes soluções.

Exemplo 4.3. Este exemplo tem como motivação prática a exploração a longo prazo de um estoque de peixes de modo sustentável, baseando-se no modelo de [Ladino et al. \(2016\)](#).

O modelo em questão descreve a dinâmica populacional de uma espécie de peixes estruturada em dois estágios ou duas subpopulações, a pré-recruta (ovos, larvas

e juvenis), $x_1(k)$, e a explorável (recrutas ou adultos), $x_2(k)$, cuja relação é baseada no recrutamento⁵.

A seguir, apresentam-se premissas e parâmetros característicos à dinâmica populacional modelada que podem ser encontrados com mais detalhes em [Ladino et al. \(2016\)](#).

1. A população total no tempo $k \in \mathbb{N}$ é dividida em duas subpopulações: população pré-recruta $x_1(k) \geq 0$ e população explorável $x_2(k) \geq 0$.
2. A taxa de reprodução da população adulta, única considerada capaz de se reproduzir, é $\delta > 0$.
3. A taxa de mortalidade por causas naturais é representada por $\mu \in (0, 1)$ e, por simplicidade, é adotada a mesma para ambas as subpopulações.
4. O número máximo de recrutas produzidos é representado por $\sigma > 0$.
5. O parâmetro β é o estoque necessário para se produzir, em média, um recrutamento igual a $\sigma/2$.
6. O número total de recrutas depende somente do tamanho da população de pré-recrutas. Assim, é usada a relação:

$$R = \frac{\sigma x_1(k)}{\beta + x_1(k)} < x_1(k)$$

7. O parâmetro $q > 0$ é chamado de coeficiente de capturabilidade. Quanto maior a eficiência da técnica de pesca utilizada, maior o valor de q .
8. O esforço de captura medido é dado por $E > 0$. Na pesca, isto refere-se, por exemplo, ao número de barcos por dia.
9. A taxa de mortalidade por captura, F , proporcional ao esforço de captura, é dada por: $F = qE$.
10. A taxa de mortalidade total da população explorável consiste, então, na soma das taxas de mortalidade por causas naturais e por captura, ou seja, $\mu + F$.

Após ambientar o leitor com o problema, apresenta-se na sequência, o modelo dinâmico que descreve o comportamento do estoque de peixes, dado pelas equações a diferenças não lineares ([LADINO et al., 2016](#))

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + \delta x_2(k) - \frac{\sigma x_1(k)}{\beta + x_1(k)} - \mu x_1(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + \frac{\sigma x_1(k)}{\beta + x_1(k)} - (\mu + F)x_2(k) \end{aligned} \tag{4.25}$$

⁵ Evento pelo qual os novos indivíduos de uma espécie se tornam parte da população explorável.

Lema 4.1. *O sistema 4.25 é significativo biologicamente se, e somente se (LADINO et al., 2016)*

$$\begin{aligned} 1 - \mu - \frac{\sigma}{\beta} &\geq 0 \\ 1 - \mu - F &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Na sequência expõe-se, de modo sucinto, a prova do Lema 4.1 elaborada por Ladino et al. (2016).

No instante inicial, a população de pré-recrutas satisfaz $x_1(k) \geq 0$. Dada a evolução do sistema do instante k para $k + 1$, a fração $\mu x_1(k)$ morre por causas naturais, ao passo que $\sigma x_1(k)/(\beta + x_1(k))$ torna-se parte da população explorável. Assim, a soma dessas parcelas não pode exceder o estoque inicial de pré-recrutas $x_1(k)$, isto é, a condição

$$x_1(k) - \mu x_1(k) - \frac{\sigma x_1(k)}{\beta + x_1(k)} \geq 0, \quad \forall x_1(k) \geq 0 \quad (4.27)$$

deve ser satisfeita. Note que ao dividir (4.27) por $x_1(k)$ e, posteriormente, analisar a expressão em $x_1(k) = 0$, obtém-se a inequação superior de (4.26).

Analogamente, seja $x_2(k) \geq 0$ a quantidade da população de recrutas no instante k . Com a passagem de k para $k + 1$, a parcela $\mu x_2(k)$ morre de causas naturais, enquanto a quantia $F x_2(k)$ é capturada. Deste modo, a soma dessas parcelas não pode ultrapassar o estoque inicial de $x_2(k)$, ou seja,

$$x_2(k) - \mu x_2(k) - F x_2(k) \geq 0, \quad \forall x_2(k) \geq 0. \quad (4.28)$$

Perceba que a divisão de (4.28) por $x_2(k)$ resulta na desigualdade inferior de (4.26).

Em relação à existência de pontos de equilíbrio, segundo Ladino et al. (2016) o sistema (4.25) possui um ponto de equilíbrio trivial $P_1 = (0, 0)$ (estado de extinção) para todos valores positivos dos parâmetros. Entretanto, somente se $R_0 > 1$, existe um segundo ponto de equilíbrio não trivial $P_2 = (x_1^*, x_2^*)$ (estado de coexistência), localmente assintoticamente estável, com $x_2 > 0$ e $y_2 > 0$, em que

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{\sigma}{\mu}(R_0 - 1), \frac{\sigma}{\delta - (\mu + F)}(R_0 - 1) \right), \quad R_0 = \frac{\delta}{\mu + F} - \frac{\mu\beta}{\sigma}. \quad (4.29)$$

Diante do exposto, para aplicar a técnica proposta neste trabalho, é necessário, primeiramente, linearizar o modelo. Para tal, opta-se por utilizar o jacobiano, assim como realizado por Pedrosa (2018). Deste modo, obtém-se o sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio P_2

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \mu - \frac{\sigma\beta}{(\beta + x_1^*)^2} & \delta \\ \frac{\sigma\beta}{(\beta + x_1^*)^2} & 1 - \mu - F \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -q x_2^* \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Adotam-se os parâmetros: $\alpha = 64$, $\beta = 102$, $\mu = 0.3$, $q = 0.1$ e $E = 1.6$, que satisfazem (4.26). Além disso, visto que mudanças ambientais podem delimitar o período e o sucesso

reprodutivo na maioria dos peixes (VAZZOLER, 1981), no modelo trabalhado, considere-se que a constante da taxa de reprodução δ não é um valor precisamente conhecido, e sim uma incerteza pertencente ao intervalo $[0.7, 0.9]$.

Assim, com o intuito de projetar um controlador robusto às incertezas, pretende-se otimizar o critério de desempenho \mathcal{H}_∞ na síntese do ganho por realimentação de estados estabilizante. Para isso, considere as seguintes matrizes de ruído e saída: $C_{z_i} = I$, $E_i = 0.5B_i$, $D_{z_i} = 0$, $E_{z_i} = [0.5 \ 0.5]'$, com $i = 1, 2$.

Definidos os valores dos parâmetros e estabelecido o projeto de controle é então possível utilizar a técnica proposta, bem como a de Ebihara *et al.* (2014, desigualdade (25)), denotada E(25), a fim de verificar os custos garantidos \mathcal{H}_∞ . Na Tabela 7, são apresentados os valores dos custos garantidos \mathcal{H}_∞ , utilizando a técnica proposta (Algoritmo 2) e a condição E(25) (EBIHARA *et al.*, 2014). O controlador, obtido por meio do Algoritmo 2, também é mostrado.

Tabela 7 – Custos garantidos \mathcal{H}_∞ associados aos ganhos descentralizados de realimentação de estados com diferentes estruturas L_{dc} referentes ao Exemplo 4.3 obtidos pela condição LMI (25) de Ebihara *et al.* (2014), E(25), e pelo método proposto no Algoritmo 2, A2, utilizando no máximo 30 iterações e variáveis de folga com estrutura simétrica ('s').

L_{dc}	E(25)	A2 (γ_{init})	L_{A2}
$\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$	8.9544	8.2378 (10)	$\begin{bmatrix} 0.0201 & 0.0776 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} l_1 & 0 \end{bmatrix}$	34.6321	30.7617 (40)	$\begin{bmatrix} 0.0225 & 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & l_2 \end{bmatrix}$	12.0785	11.5070 (13)	$\begin{bmatrix} 0 & 0.0776 \end{bmatrix}$

Para este exemplo, no Algoritmo 2, foi definido um número de iterações máximas iguais a 30, sendo necessárias 15 iterações para obter as soluções apresentadas.

Na Tabela 7 é possível verificar que a abordagem proposta, Algoritmo 2, provê, para este exemplo, menores valores para o custo garantido \mathcal{H}_∞ em todas situações testadas quando comparada ao método de Ebihara *et al.* (2014, desigualdade (25)).

4.5.1.1 Conclusões parciais

Os resultados obtidos por meio dos exemplos numéricos mostraram que a técnica proposta pode obter melhores estimativas do custo garantido quando comparada com outros métodos da literatura. Ademais, o método proposto se mostrou capaz de fornecer soluções para sistemas em que outras abordagens falham ou nem mesmo podem ser aplicadas.

4.5.2 Critério de desempenho \mathcal{H}_2

O Teorema 4.2 é aplicado nos exemplos a seguir para computar controladores robustos por realimentação de estados para minimizar o limitante superior da norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada. Para empregar o Algoritmo 3 na resolução, utilizou-se uma matriz $P(\alpha(k))$ com estrutura simétrica e variáveis de folga também simétricas.

Exemplo 4.4. Considere o sistema LTI positivo discreto no tempo, retirado do Exemplo 1 de Ebihara *et al.* (2018). O objetivo é projetar um controlador robusto \mathcal{H}_2 por realimentação de estados.

$$A = \begin{bmatrix} 0.33 & 0.36 & 0.36 & 0.28 & 0.08 \\ 0.28 & 0.21 & 0.25 & 0.32 & 0.08 \\ 0.11 & 0.23 & 0.31 & 0.36 & 0.06 \\ 0.10 & 0.00 & 0.32 & 0.27 & 0.13 \\ 0.26 & 0.31 & 0.28 & 0.06 & 0.36 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.04 \\ 0.08 & 0.28 \\ 0.83 & -0.16 \\ -0.02 & -0.24 \\ -0.03 & -0.15 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0.67 \\ 0.07 \\ 0.53 \\ 0.15 \\ 0.36 \end{bmatrix}$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 0.40 & 0.17 & 0.51 & 0.03 & 0.80 \\ 0.92 & 0.81 & 0.74 & 0.39 & 0.95 \\ 0.35 & 0.02 & 0.68 & 0.35 & 0.07 \end{bmatrix}, \quad D_z = \begin{bmatrix} 0.26 & -0.09 \\ -0.01 & 0.41 \\ -0.54 & 0.15 \end{bmatrix}, \quad E_z = 0.$$

Conforme o reportado em Ebihara *et al.* (2018), a condição de projeto dada pelas desigualdades (12) e (14) de Ebihara *et al.* (2018) provê um ganho

$$K = \begin{bmatrix} -0.1888 & -0.3350 & -0.2964 & -0.4484 & -0.1207 \\ -0.2918 & -0.3002 & 0.4001 & -0.9622 & -0.2512 \end{bmatrix}$$

associado a um custo garantido \mathcal{H}_2 de 3.7558, e uma norma \mathcal{H}_2 em malha fechada de 3.3278. Enquanto, a condição proposta (com $\rho_0 = 270$ e $it_{max} = 15$) fornece, após 13 iterações, um ganho

$$L = \begin{bmatrix} -0.2146 & -0.3990 & -0.5160 & -0.4484 & 0.0155 \\ -0.4258 & -0.6322 & -0.7394 & -0.9621 & 0.4553 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

correspondente a um custo garantido \mathcal{H}_2 de 3.3495, e uma norma \mathcal{H}_2 em malha fechada de 3.3476.

Perceba que, embora a norma \mathcal{H}_2 de pior caso, obtida pelo método proposto, seja maior que a resultante de Ebihara *et al.* (2018), a diferença (*gap*) entre o limitante superior computado (custo garantido) e a norma de pior caso do sistema é de 0.0019, em oposição à do método de Ebihara *et al.* (2018) correspondente a 0.428 que representa um aumento de 42.61%. Diante disso, é possível afirmar que o método proposto provê, para este exemplo, uma estimativa mais acurada do custo garantido real.

Exemplo 4.5. Considere o sistema LTI positivo discreto no tempo, que pode ser encontrado no Exemplo 5.2 de Ebihara *et al.* (2018). A intenção é computar um controlador

robusto por realimentação de estados que minimize o limitante superior da norma \mathcal{H}_2 do sistema de malha fechada.

$$A = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.28 & 0.34 & 0.14 & 0.02 \\ 0.25 & 0.29 & 0.32 & 0.33 & 0.11 \\ 0.24 & 0.17 & 0.30 & 0.18 & 0.35 \\ 0.24 & 0.08 & 0.34 & 0.03 & 0.14 \\ 0.04 & 0.35 & 0.11 & 0.15 & 0.16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.42 & -0.46 \\ 0.51 & -0.60 \\ 0.93 & 0.11 \\ -0.75 & -0.72 \\ -0.55 & -0.32 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.92 & 0.37 \\ 0.34 & 0.61 & 0.64 \\ 0.52 & 0.01 & 0.99 \\ 0.30 & 0.06 & 0.50 \\ 0.55 & 0.66 & 0.62 \end{bmatrix}$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.36 & 0.08 & 0.24 & 0.03 \\ 0.63 & 0.30 & 0.97 & 0.21 & 0.05 \\ 0.07 & 0.91 & 0.16 & 0.63 & 0.10 \end{bmatrix}, \quad Dz = \begin{bmatrix} 0.55 & -0.04 \\ 0.50 & 0.41 \\ -0.46 & 0.61 \end{bmatrix}, \quad E_z = 0.$$

O ganho obtido pelo método de Ebihara *et al.* (2018) é dado por

$$K = \begin{bmatrix} -0.0727 & -0.2180 & -0.1137 & -0.2072 & 0.0273 \\ 0.2500 & 0.2980 & 0.4367 & 0.1152 & 0.0684 \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

resultando em um custo garantido \mathcal{H}_2 de 4.1355, e uma norma \mathcal{H}_2 em malha fechada de 3.7106.

Por sua vez, a técnica proposta nessa dissertação (com $\rho_0 = 60$ e $it_{max} = 15$) apresenta, após 10 iterações, um custo garantido \mathcal{H}_2 de 3.6829, e uma norma \mathcal{H}_2 em malha fechada de 3.6551 relacionada com o seguinte ganho

$$L = \begin{bmatrix} -0.0727 & -0.2180 & -0.1137 & -0.2072 & -0.0550 \\ 0.2500 & 0.2980 & 0.4367 & 0.1152 & -0.0068 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Neste exemplo, o método proposto não só provê um *gap* menor, 0.0278, em relação ao de Ebihara *et al.* (2018), 0.4249, equivalendo a uma melhoria de 39.71%, como também um menor custo garantido e uma menor norma \mathcal{H}_2 em malha fechada.

Exemplo 4.6. Considere novamente o Exemplo 4.1. Entretanto, em vez de computar um controlador \mathcal{H}_∞ , o objetivo é projetar um ganho robusto de realimentação de estados que minimize a norma \mathcal{H}_2 . Para fins de comparação, a condição de Ebihara *et al.* (2018) é aplicada, resultando em um custo garantido \mathcal{H}_2 de 1.8793, uma norma \mathcal{H}_2 de pior caso em malha fechada de 1.2023 associados ao seguinte ganho

$$K = \begin{bmatrix} 0.1667 & -0.0606 & -0.1905 & -0.1591 \\ -0.2500 & -0.1169 & 0.0714 & 0.0682 \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Por outro lado, a estratégia apresentada neste trabalho (com $\rho_0 = 170$ e $it_{max} = 15$) obtém, após 15 iterações, um custo garantido \mathcal{H}_2 de 1.2461 e uma norma \mathcal{H}_2 de pior caso em malha fechada de 1.2023 obtida com o seguinte controlador

$$L = \begin{bmatrix} 0.1667 & -0.2105 & -0.1905 & -0.1591 \\ -0.2500 & -0.0526 & 0.0714 & 0.0682 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Uma vez mais, embora o valor da norma \mathcal{H}_2 em malha fechada seja o mesmo para ambas as técnicas comparadas, o método proposto provê um ganho que proporciona um *gap* menor de 0.0438, quando comparado ao de [Ebihara *et al.* \(2018\)](#), correspondente a 0.677, o que significa uma acurácia 63.32% maior.

4.5.2.1 Conclusões parciais

Nos exemplos numéricos é possível notar que, em geral, os controladores obtidos pelo método proposto são similares aos fornecidos por [Ebihara *et al.* \(2018\)](#), provendo uma norma \mathcal{H}_2 em malha fechada praticamente igual. No entanto, a estimativa para o cômputo do custo garantido fornecida pela técnica desta dissertação, mesmo para os casos de sistemas precisamente conhecidos, é melhor.

5 Considerações Finais

Este trabalho tem como principal contribuição a proposição de uma nova abordagem iterativa, baseada em LMIs dependentes de parâmetros, para a estabilização e controle \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 por realimentação estática de saída para tratar sistemas LPV positivos discretos no tempo. Ademais, é desenvolvido outro método de síntese, também baseado em LMIs, no contexto de sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo.

Uma vantagem do método iterativo desta dissertação, quando comparado às outras técnicas disponíveis na literatura, é tratar o ganho diretamente como uma variável de otimização, ao invés de se valer de mudanças de variáveis. Outra característica, que merece destaque, é o fornecimento de condições iniciais que garantem a existência de soluções factíveis a cada iteração. Além disso, é possível tratar o projeto de controladores robustos para sistemas LTI politópicos, problemas de controle por realimentação de estados, controle de sistemas chaveados com regra de chaveamento arbitrária (dependente ou independente de modos) e impor estruturas particulares ao ganho, tais como descentralização ou restrição em módulo sobre os elementos do ganho, sem afetar qualquer outra variável do problema.

Os algoritmos de projeto de controladores \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 são divididos em três etapas: estabilização, positividade e otimização do custo garantido. Nas duas primeiras fases, são empregadas relaxações nas condições que testam a positividade das matrizes de malha fechada e na taxa de decaimento (permitindo que esta viole o limite superior unitário, de maneira que no caso LTI os polos possam ser, ao longo das iterações, alocados fora do círculo de raio unitário centrado na origem do plano complexo), para facilitar a busca por soluções estabilizadoras. Na última etapa, as relaxações são eliminadas para que o controlador projetado seja de fato uma solução estabilizante que assegure a positividade do sistema testado e o custo garantido computado seja realmente um limitante superior para o sistema em malha fechada.

A estratégia de controle \mathcal{H}_∞ tem como benefício a possibilidade de considerar as matrizes de ruído na medida $E_y(\alpha(k))$ e de saída $C_y(\alpha(k))$ como politópicas e variantes no tempo, enquanto outras técnicas da literatura exigem que $E_y(\alpha(k))$ seja nula e $C_y(\alpha(k))$ seja independente de parâmetros, muitas vezes impondo uma estrutura particular ou que exista uma transformação de similaridade adequada para produzir uma forma específica que permita obter um ganho de realimentação de saída. Poder considerar incertezas nas matrizes $E_y(\alpha(k))$ e $C_y(\alpha(k))$ é útil para representar, por exemplo, sistemas positivos controlados via rede de comunicação semi-confiável, cujas matrizes de saída são geralmente afetadas por incertezas que modelam atrasos ou perda de pacotes.

Em relação ao controle \mathcal{H}_2 , também existe a vantagem de considerar que a

matriz de saída $C_y(\alpha(k))$ seja politópica variante no tempo com elementos genéricos. Entretanto, vale ressaltar que no caso de matriz $E_y(\alpha(k)) \neq 0$ não há garantia da factibilidade inicial do algoritmo, pois as condições iniciais que asseguram a factibilidade do algoritmo na primeira iteração não poderiam ser estabelecidas a priori, por depender do ganho, que é uma variável do problema.

No que se refere à estabilização de sistemas LTI e LPV politópicos, a abordagem se mostrou notoriamente eficiente em termos estatísticos. No projeto de controlador \mathcal{H}_∞ a estratégia adotada não só obteve menores custo garantidos quando comparada às demais, como foi capaz de fornecer soluções para sistemas em que outras técnicas falharam. No contexto de controle \mathcal{H}_2 , os custos garantidos computados pelo procedimento proposto, associados aos ganhos fornecidos, mostraram-se estimativas mais acuradas da norma em malha fechada, inclusive no projeto para sistemas LTI precisamente conhecidos, conforme ilustrado pelos experimentos numéricos. Em contrapartida, para a obtenção de soluções menos conservadoras, demanda-se um esforço computacional maior em termos de linhas de LMIs, variáveis de otimização e tempo computacional em relação às condições presentes na literatura.

Perspectivas

Para trabalhos futuros, é possível propor:

1. A investigação de um procedimento iterativo similar em termos de condições LMIs derivadas de diferentes formulações. Uma possibilidade é se basear na condição fornecida por Ebihara *et al.* (2014), em especial para estabilização e controle \mathcal{H}_∞ , a qual aproveita o fato de que, de acordo com o Teorema de Perron–Frobenius (HORN; JOHNSON, 1985), toda matriz dinâmica positiva discreta A_d é Schur estável se e somente se $A_d - I$ é Hurwitz estável. Isso também implica que um sistema discreto \mathcal{G}_d com matrizes $\{A_d, B_d, C_d, D_d\}$ é estável e satisfaz $\|G_d\|_\infty < \gamma$ se e somente se o sistema contínuo \mathcal{G}_c com matrizes $\{(A_d - I), B_d, C_d, D_d\}$ é estável e satisfaz $\|G_c\|_\infty < \gamma$.
2. O projeto de controle usando condições duais (isto é, considerando um sistema com dinâmica descrita pela matriz $A'_{cl}(\alpha(k))$) para comparar com os resultados obtidos pelo método primal (baseado na condição LMI (2.7) para estabilização e no gramiano de controlabilidade (2.10) no caso \mathcal{H}_2), nos casos de estabilização e de controle \mathcal{H}_2 (no caso de controle \mathcal{H}_∞ , não há diferenças significativas entre as duas possibilidades).
3. Estudar extensões empregando a norma \mathcal{L}_1 .
4. Tratar sistemas lineares positivos sujeitos a saltos markovianos.

5. Utilizar a técnica proposta para tratar problemas similares, no âmbito de filtragem ou controle por realimentação dinâmica de sistemas positivos discretos.

Trabalho publicado

- Spagolla, A, Frezzatto, L., Morais, C. F., Peres, P. L. D., Oliveira, R. C. L. F. Controle por realimentação de estados para sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo. Em: *XXII Congresso Brasileiro de Automática*, João Pessoa, Brasil, Setembro 2018, DOI: 10.20906/CPS/CBA2018-0801.

Trabalhos em processo de submissão

- Spagolla, A, Morais, C. F., Peres, P. L. D., Oliveira, R. C. L. F. \mathcal{H}_∞ static output-feedback control of positive polytopic LTI discrete-time systems. In: *58th IEEE Conference on Decision and Control*, Nice, France, December 2019, Submitted.
- Spagolla, A, Morais, C. F., Peres, P. L. D., Oliveira, R. C. L. F. A new technique for stabilization and \mathcal{H}_2 output-feedback control of discrete-time LPV positive systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, Submitted.

Referências

- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems. In: *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*. Campina Grande, PB, Brasil: [s.n.], 2012. p. 2298–2305. <<http://rolmip.github.io>>. Citado na página 32.
- BARBOSA, K. A.; DE SOUZA, C. E.; TROFINO, A. Robust \mathcal{H}_2 filtering for discrete-time uncertain linear systems using parameter-dependent Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 2002 American Control Conference*. Anchorage, AK, USA: [s.n.], 2002. p. 3224–3229. Citado na página 23.
- BENZAOUIA, A.; TADEO, F. Output feedback stabilization of positive switching linear discrete-time systems. In: *Proceedings of the 16th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED2008)*. Ajaccio, France: [s.n.], 2008. p. 119–124. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 24.
- BHATTACHARYYA, S.; PATRA, S. Static output-feedback stabilization for MIMO LTI positive systems using LMI-based iterative algorithms. *IEEE Control Systems Letters*, v. 2, n. 2, p. 242–247, April 2018. Citado na página 18.
- BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 27.
- CACCETTA, L.; RUMCHEV, V. G. A survey of reachability and controllability for positive linear systems. *Annals of Operations Research*, v. 98, n. 1, p. 101–122, December 2000. Citado na página 17.
- DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameter uncertainties. *Systems & Control Letters*, v. 43, n. 5, p. 355–359, August 2001. Citado na página 22.
- DAAFOUZ, J.; RIEDINGER, P.; IUNG, C. Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 11, p. 1883–1887, November 2002. Citado na página 25.
- DAYAWANSA, W. P.; MARTIN, C. F. A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 4, p. 751–760, April 1999. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 24.
- DE CAIGNY, J.; CAMINO, J. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D.; SWEVERS, J. Gain-scheduled \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control of discrete-time polytopic time-varying systems. *IET Control Theory & Applications*, v. 4, n. 3, p. 362–380, March 2010. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: Reza Moheimani, S. O. (Ed.). *Perspectives in Robust Control*. New York, NY: Springer-Verlag, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Science, v. 268). p. 241–257. Citado na página 25.

- DE SOUZA, C. E.; BARBOSA, K. A.; TROFINO, A. Robust \mathcal{H}_∞ filtering for discrete-time linear systems with uncertain time-varying parameters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 54, n. 6, p. 2110–2118, June 2006. Citado na página 23.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. \mathcal{H}_2 state feedback control design of positive switched linear systems. In: *Proceedings of the 20th IFAC World Congress*. Toulouse, France: [s.n.], 2017. p. 3136–3141. Citado na página 18.
- EBIHARA, Y.; COLANERI, P.; GEROMEL, J. C. H_2 state-feedback synthesis for discrete-time systems under positivity constraint. In: *Proceedings of the 2018 SICE International Symposium on Control Systems (SICE ISCS)*. Tokyo, Japan: [s.n.], 2018. p. 39–46. Citado 4 vezes nas páginas 18, 64, 65 e 66.
- EBIHARA, Y.; PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. LMI approach to linear positive system analysis and synthesis. *Systems & Control Letters*, v. 63, p. 50–56, January 2014. Citado 16 vezes nas páginas 10, 11, 12, 18, 28, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 41, 59, 60, 63 e 68.
- El Ghaoui, L.; NICULESCU, S. I. (Ed.). *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Philadelphia, PA: SIAM, 2000. (Advances in Design and Control). Citado na página 17.
- FARINA, L.; RINALDI, S. *Positive Linear Systems: Theory and Applications*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 20.
- FELIPE, A. *Um algoritmo de busca local baseado em LMIs para computar ganhos de realimentação estabilizantes diretamente como variáveis de otimização*. Dissertação (M.Sc. Thesis) — FEEC – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- FELIPE, A.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. An iterative LMI based procedure for robust stabilization of continuous-time polytopic systems. In: *Proceedings of the 2016 American Control Conference*. Boston, MA, USA: [s.n.], 2016. p. 3826–3831. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 50.
- GAHINET, P.; APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 4, n. 4, p. 421–448, July–August 1994. Citado na página 25.
- HERNANDEZ-VARGAS, E.; COLANERI, P.; MIDDLETON, R.; BLANCHINI, F. Discrete-time control for switched positive systems with application to mitigating viral escape. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 21, n. 10, p. 1093–1111, May 2011. Citado na página 18.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. Cambridge, MA, USA: Cambridge University Press, 1985. Citado na página 68.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge, MA, USA: Cambridge University Press, 1991. Citado na página 17.
- IWASAKI, T.; SKELTON, R. E. All controllers for the general \mathcal{H}_∞ control problem: LMI existence conditions and state-space formulas. *Automatica*, v. 30, n. 8, p. 1307–1317, August 1994. Citado na página 25.

- LADINO, L. M.; MAMMANA, C.; MICHETTI, E.; VALVERDE, J. C. Discrete time population dynamics of a two-stage species with recruitment and capture. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 85, p. 143–150, April 2016. Citado 3 vezes nas páginas 60, 61 e 62.
- LI, Y.; ZHANG, H. Stability, L1-gain analysis and asynchronous L1-gain control of uncertain discrete-time switched positive linear systems with dwell time. *Journal of the Franklin Institute*, v. 356, p. 382–406, January 2019. Citado na página 39.
- LIU, T.; WU, B.; WANG, Y.; LIU, L. New stabilization results for discrete-time positive switched systems with forward mode-dependent average dwell time. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, v. 39, n. 2, p. 224–229, February 2017. Citado 7 vezes nas páginas 10, 39, 43, 44, 45, 46 e 47.
- LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289. <<http://yalmip.github.io>>. Citado na página 32.
- LUENBERGER, D. G. *Introduction to Dynamic Systems. Theory, Models & Applications*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1979. Citado na página 17.
- LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, v. 55, n. 3, p. 531–534, 1992. Citado na página 17.
- MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust state feedback control for discrete-time linear systems via LMIs with a scalar parameter. In: *Proceedings of the 2013 American Control Conference*. Washington, DC, USA: [s.n.], 2013. p. 3876–3881. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- MOSEK ApS. *The MOSEK optimization software*. [S.l.], 2015. <<http://www.mosek.com>>. Citado na página 32.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 7, p. 1334–1340, July 2007. Citado na página 31.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Análise e controle de sistemas lineares por meio de desigualdades matriciais lineares. In: FELTRIN, A. P.; MINUSSI, C. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; LÁZARO, R. A. R. (Ed.). *Tutoriais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2010. p. 203–229. ISBN 978-85-7983-061-7. Citado na página 17.
- PEDROSA, F. C. *Modelagem e controle de sistemas CVIU a tempo discreto*. Dissertação (M.Sc. Thesis) — FEEC – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, 2018. Citado na página 62.
- TANAKA, T.; LANGBORT, C. The bounded real lemma for internally positive systems and H-infinity structured static state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 56, n. 9, p. 2218–2223, September 2011. Citado na página 18.
- VAZZOLER, A. E. A. M. *Manual de métodos para estudos biológicos de populações de peixes: Reprodução e crescimento*. [S.l.]: CNPq, 1981. Citado na página 63.

XIANG, W.; LAM, J.; SHEN, J. Stability analysis and L1-gain characterization for switched positive systems under dwell-time constraint. *Automatica*, v. 85, p. 1–8, 2017. Citado na página [39](#).