



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo**

**ROMILDO APARECIDO SOARES JUNIOR**

**O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM  
RECIPROCIDADE DUAL E INTEGRAÇÃO RADIAL  
PARA DETERMINAÇÃO DA CARGA DE  
FLAMBAGEM DE PLACAS CONSIDERANDO O  
EFEITO DA DEFORMAÇÃO POR CORTANTE**

**CAMPINAS**  
**2020**

**ROMILDO APARECIDO SOARES JUNIOR**

**O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM  
RECIPROCIDADE DUAL E INTEGRAÇÃO RADIAL  
PARA DETERMINAÇÃO DA CARGA DE  
FLAMBAGEM DE PLACAS CONSIDERANDO O  
EFEITO DA DEFORMAÇÃO POR CORTANTE**

Tese de Doutorado apresentada a Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil na área de Estruturas e Geotécnica.

**Orientador: Prof. Dr. LEANDRO PALERMO JUNIOR**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO ROMILDO APARECIDO SOARES JUNIOR E ORIENTADO PELO PROF. DR. LEANDRO PALERMO JUNIOR.

ASSINATURA DO ORIENTADOR

---

**CAMPINAS**

**2020**

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

So11m Soares Junior, Romildo Aparecido, 1988-  
O método dos elementos de contorno com reciprocidade dual e integração radial para determinação da carga de flambagem de placas considerando o efeito da deformação por cortante / Romildo Aparecido Soares Junior. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Leandro Palermo Junior.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Placas (Engenharia). 2. Métodos de elementos de contorno. 3. Flambagem (Mecânica). I. Palermo Junior, Leandro, 1960-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** The boundary element method with dual reciprocity and radial integration for the determination of the buckling load of plates considering the effect of shear deformation

**Palavras-chave em inglês:**

Plates (Engineering)

Boundary element methods

Buckling (Mechanics)

**Área de concentração:** Estruturas e Geotécnica

**Titulação:** Doutor em Engenharia Civil

**Banca examinadora:**

Leandro Palermo Junior [Orientador]

Luiz Carlos de Almeida

Isaías Vizotto

Joao Batista de Paiva

Ney Augusto Dumont

**Data de defesa:** 19-10-2020

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Civil

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-1778-5532>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/7845811382749340>

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E  
URBANISMO**

**O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM  
RECIPROCIDADE DUAL E INTEGRAÇÃO RADIAL PARA  
DETERMINAÇÃO DA CARGA DE FLAMBAGEM DE PLACAS  
CONSIDERANDO O EFEITO DA DEFORMAÇÃO POR  
CORTANTE**

**Romildo Aparecido Soares Junior**

**Tese de Doutorado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:**

**Prof. Dr. Leandro Palermo Junior  
Presidente e Orientador/Universidade Estadual de Campinas**

**Prof. Dr. Luiz Carlos de Almeida  
Universidade Estadual de Campinas**

**Prof. Dr. Isaías Vizotto  
Universidade Estadual de Campinas**

**Dr. Joao Batista de Paiva  
Universidade de São Paulo**

**Dr. Ney Augusto Dumont  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro**

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

Campinas, 19 de outubro de 2020

## **DEDICATÓRIA**

Dedico primeiramente a Deus. À minha família, Pai, Mãe e Irmão. À Carla, minha companheira de todos os dias. Também dedico ao meu orientador Prof. Dr. Leandro Palermo Junior, pois este trabalho foi possível de ser realizado graças a seus ensinamentos. E aos que utilizarem esta obra como fonte de estudo.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Leandro Palermo Junior e também ao Prof. Dr. Luiz Carlos Wrobel, pela gentileza de terem compartilhado seus conhecimentos e experiências na área do método dos elementos de contorno, acompanhando o projeto desde os primeiros resultados.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 - (88882.435135/2019-01)

## RESUMO

Neste trabalho é analisado o problema de flambagem de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante, usando o método dos elementos de contorno com aproximação das integrais de domínio pelos métodos da Reciprocidade Dual e da Integração Radial. A necessidade de discretização e integração de células de domínio é substituída por tratamentos numéricos usando integrais de contorno e funções de base radial referenciadas a pontos distribuídos no domínio e ao longo do contorno. Para resolução do problema de autovalor e obtenção das cargas críticas, são utilizados o método da iteração inversa e o quociente de Rayleigh. Para a aplicação do Método da Reciprocidade Dual, foram necessárias as primeiras e segundas derivadas das soluções fundamentais de placas com efeito de cortante, gerando então integrais singulares de ordem supersingular e hypersingular, as quais tiveram seu grau de singularidade diminuído utilizando o operador tangente e foram calculadas com o método fornecido por Gao (2006). Foram analisados os problemas de flambagem de placas quadradas com ou sem furo, retangulares, triangulares e esconsas. As placas foram solicitadas por carga uniaxial, biaxial e de cisalhamento. Os valores para a razão entre a espessura e o lado da placa variam entre 0,001 e 0,2. Os resultados são comparados com os obtidos pela literatura.

Palavras chave: Placas (Engenharia), Métodos de elementos de contorno, Flambagem (Mecânica)

## ABSTRACT

In this study, the plate buckling problem is analyzed, considering the effect of shear deformation. The boundary element method is applied in conjunction with the domain integral approximation, using the Dual Reciprocity and Radial Integration methods. The discretization and integration of domain cells are obviated by numerical treatments using boundary integrals and radial basis functions referenced to points distributed in the domain and along the boundary. The inverse iteration method and Rayleigh quotient iteration are used to solve the eigenvalue problem and obtain the critical loads. The first and second derivatives of the fundamental solutions of plates under shear deformation are required to implement the Dual Reciprocity Method. Thus, supersingular and hypersingular integrals are generated. The tangent operator is used to reduce the singularity degree of the integrals, which are subsequently calculated using the method of Gao (2006). The buckling problems of square with or without hole, rectangular, triangular and skew plates were analyzed. The plates were subjected to uniaxial, biaxial and shear loads. The values for the ratio between the thickness and the side of the plate range from 0.001 to 0.2. The results are compared with those reported in the literature.

Keywords: Plates (Engineering), Boundary element methods, Buckling (Mechanics)

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1</b>	– Placa retangular $a/b = 2$ com carga uniaxial – Modo de flambagem.....	18
<b>Figura 2</b>	– Malha para elementos de contorno (a) e elementos finitos (b).....	19
<b>Figura 3</b>	– Malha com células de domínio (a) e Método da Reciprocidade Dual (b)	20
<b>Figura 4</b>	– Elemento deformado para teoria de Kirchhoff .....	50
<b>Figura 5</b>	– Elemento diferencial do problema de placas .....	52
<b>Figura 6</b>	– Elemento deformado conforme a teoria de Reissner .....	55
<b>Figura 7</b>	– Discretização de um problema de placa.....	74
<b>Figura 8</b>	– Mudança de coordenadas para o elemento isoparamétrico .....	75
<b>Figura 9</b>	– Plotagem das funções de forma.....	76
<b>Figura 10</b>	– Primeiro ponto fonte que será deslocado devido canto de 90 graus .....	79
<b>Figura 11</b>	– Deslocamento do ponto fonte para posição $-2/3$ do elemento .....	81
<b>Figura 12</b>	– Elemento a ser integrado com ponto fonte interno .....	81
<b>Figura 13</b>	– Coordenadas isoparamétricas de cada nó do elemento .....	82
<b>Figura 14</b>	– Segundo elemento a ser integrado.....	83
<b>Figura 15</b>	– Terceiro elemento a ser integrado.....	84
<b>Figura 16</b>	– Quarto elemento a ser integrado .....	85
<b>Figura 17</b>	– Posicionamento de todos os pontos fonte.....	86
<b>Figura 18</b>	– Integração com ponto fonte fora do elemento .....	87
<b>Figura 19</b>	– Integração com ponto fonte dentro do elemento .....	88
<b>Figura 20</b>	– Deslocamento dos pontos fonte de canto dos elementos .....	89
<b>Figura 21</b>	– Ilustração da matriz de coeficientes para problemas de placas .....	89
<b>Figura 22</b>	– Aproximação das cargas de domínio nos pontos de MRD .....	100
<b>Figura 23</b>	– Ponto fonte das soluções particulares nos pontos de MRD .....	102
<b>Figura 24</b>	– Deslocamento dos pontos fonte para contribuição das diagonais.....	103
<b>Figura 25</b>	– Elemento dividido em 3 subelementos .....	136
<b>Figura 26</b>	– Teste de convergência aumentando os pontos de domínio .....	147
<b>Figura 27</b>	– Malha com 64 elementos de contorno e 256 pontos de domínio .....	148
<b>Figura 28</b>	– Malha de células de domínio (esquerda) e malha de MRD (direita)....	149
<b>Figura 29</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,001$ com carga uniaxial – F1 .....	157
<b>Figura 30</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,001$ com carga uniaxial – F2 .....	157
<b>Figura 31</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,01$ com carga uniaxial – F1 .....	158
<b>Figura 32</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,01$ com carga uniaxial – F2 .....	158
<b>Figura 33</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,05$ com carga uniaxial – F1 .....	159
<b>Figura 34</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,05$ com carga uniaxial – F2 .....	159
<b>Figura 35</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,1$ com carga uniaxial – F1 .....	160
<b>Figura 36</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,1$ com carga uniaxial – F2 .....	160
<b>Figura 37</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,2$ com carga uniaxial – F1 .....	161
<b>Figura 38</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,2$ com carga uniaxial – F2 .....	161
<b>Figura 39</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,001$ com carga biaxial – F1 .....	163
<b>Figura 40</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,001$ com carga biaxial – F2 .....	163
<b>Figura 41</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,01$ com carga biaxial – F1 .....	164
<b>Figura 42</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,01$ com carga biaxial – F2 .....	164
<b>Figura 43</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,05$ com carga biaxial – F1 .....	165

<b>Figura 44</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,05$ com carga biaxial – F2 .....	165
<b>Figura 45</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,1$ com carga biaxial – F1 .....	166
<b>Figura 46</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,1$ com carga biaxial – F2 .....	166
<b>Figura 47</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,15$ com carga biaxial – F1 .....	167
<b>Figura 48</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,15$ com carga biaxial – F2 .....	167
<b>Figura 49</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,001$ - cisalhamento – F1.....	169
<b>Figura 50</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,001$ - cisalhamento – F2.....	169
<b>Figura 51</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,01$ - cisalhamento – F1.....	170
<b>Figura 52</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,01$ - cisalhamento – F2.....	170
<b>Figura 53</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,05$ - cisalhamento – F1.....	171
<b>Figura 54</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,05$ - cisalhamento – F2.....	171
<b>Figura 55</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,1$ - cisalhamento – F1.....	172
<b>Figura 56</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,1$ - cisalhamento – F2.....	172
<b>Figura 57</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,2$ -cisalhamento – F1.....	173
<b>Figura 58</b>	– Convergência em placa com $h/a = 0,2$ - cisalhamento – F2.....	173
<b>Figura 59</b>	– Placa perfurada por furo quadrado solicitada por carga uniaxial .....	175
<b>Figura 60</b>	– Malha para placa com furo quadrado $d/a = 0,4$ - MRD.....	175
<b>Figura 61</b>	– Malha para placa com furo quadrado $d/a = 0,4$ – Células de domínio	176
<b>Figura 62</b>	– Gráfico com comparação entre as células de domínio com MRD .....	179
<b>Figura 63</b>	– Placa perfurada com furo circular solicitada por carga uniaxial.....	180
<b>Figura 64</b>	– Malha para placa com furo circular $d/a = 0,4$ - MRD .....	181
<b>Figura 65</b>	– Malha para placa com furo circular $d/a = 0,2$ – Células de domínio ....	182
<b>Figura 66</b>	– Gráfico com comparação entre as células de domínio com MRD .....	184
<b>Figura 67</b>	– Relações entre a solução fundamental e o raio de aproximação .....	189
<b>Figura 68</b>	– Raios do ponto fonte à pontos de Gauss dentro do elemento.....	190
<b>Figura 69</b>	– Aproximação das cargas de domínio nos pontos de MRD .....	201
<b>Figura 70</b>	– Exemplo de discretização para o MIR usando uma distribuição uniforme (a) e não uniforme (b) de pontos de domínio. ....	214
<b>Figura 71</b>	– Placa esconsa com carga uniaxial .....	219
<b>Figura 72</b>	– Placas triangulares com carga no plano.....	222
<b>Figura 73</b>	– Modo de flambagem para placa AAAA e AAEE com carga uniaxial ...	227
<b>Figura 74</b>	– Modo de flambagem para placa EAAA e AEAE com carga uniaxial ...	227
<b>Figura 75</b>	– Modo de flambagem para placa EAEE e LAEE com carga uniaxial ....	228
<b>Figura 76</b>	– Modo de flambagem para placa AAAL e LAEA com carga uniaxial ....	228
<b>Figura 77</b>	– Modo de flambagem para placa AEAL e LALA com carga uniaxial.....	228
<b>Figura 78</b>	– Modo de flambagem para placa ALAL e EEEE com carga uniaxial ...	228
<b>Figura 79</b>	– Modo de flambagem para placa AAAA e AEAL com carga biaxial.....	229
<b>Figura 80</b>	– Modo de flambagem para placa AAAL e ALAL com carga biaxial .....	229
<b>Figura 81</b>	– Modo de flambagem para placa EEEE com carga biaxial.....	229
<b>Figura 82</b>	– Modo de flambagem para placa AAAA e EEEE – cisalhamento .....	230
<b>Figura 83</b>	– Modo de flambagem para placa AEAE e AELE -cisalhamento .....	230
<b>Figura 84</b>	– Modo de flambagem para placa LELE e EAAA - cisalhamento.....	230
<b>Figura 85</b>	– Modo de flambagem, placa com $a/b = 1.5$ AAAA com carga uniaxial .	231

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> – Adição dos termos livres na matriz H.....	90
<b>Tabela 2</b> – Convergência do MRD – Flambagem Uniaxial – AAAA – $h/a = 0,001$ ..	146
<b>Tabela 3</b> – Convergência do MRD – Flambagem Uniaxial – AAAA – $h/a = 0,01$ ....	147
<b>Tabela 4</b> – MRD – Malhas para placas quadradas sem furo .....	148
<b>Tabela 5</b> – MRD – Resultados para carga uniaxial .....	150
<b>Tabela 6</b> – MRD – Resultados para carga uniaxial 2 .....	151
<b>Tabela 7</b> – MRD – Resultados para carga biaxial .....	151
<b>Tabela 8</b> – MRD – Resultados para carga de cisalhamento .....	152
<b>Tabela 9</b> – MRD – Resultados para carga uniaxial em placas retangulares.....	153
<b>Tabela 10</b> – MRD – Resultados para carga uniaxial em placas retangulares 2.....	153
<b>Tabela 11</b> – MRD – Resultados para carga uniaxial em placas retangulares 3.....	154
<b>Tabela 12</b> – MRD – Resultados para carga biaxial em placas retangulares.....	154
<b>Tabela 13</b> – MRD – Resultados para carga biaxial em placas retangulares 2.....	155
<b>Tabela 14</b> – MRD – Resultados para carga biaxial em placas retangulares 3.....	155
<b>Tabela 15</b> – MRD – Resultados para cisalhamento em placas retangulares.....	156
<b>Tabela 16</b> – MRD – Resultados para cisalhamento em placas retangulares 2.....	156
<b>Tabela 17</b> – Malhas para células de domínio com furo quadrado central .....	176
<b>Tabela 18</b> – MRD – Resultados para placas com furo quadrado 1 – Malha 1 .....	177
<b>Tabela 19</b> – MRD – Resultados para placas com furo quadrado 2 – Malha 1 .....	177
<b>Tabela 20</b> – MRD – Resultados para placas com furo quadrado 3 – Malha 1 .....	177
<b>Tabela 21</b> – MRD – Resultados para placas com furo quadrado 4 – Malha 2.....	178
<b>Tabela 22</b> – MRD – Resultados para placas com furo quadrado 5 – Malha 2.....	178
<b>Tabela 23</b> – MRD – Resultados para placas com furo quadrado 6 – Malha 2.....	178
<b>Tabela 24</b> – Malhas para células de domínio com furo circular central .....	182
<b>Tabela 25</b> – MRD – Resultados para placas com furo circular 1 .....	183
<b>Tabela 26</b> – MRD – Resultados para placas com furo circular 2 .....	183
<b>Tabela 27</b> – MRD – Resultados para placas com furo circular 3 .....	183
<b>Tabela 28</b> – Análise de convergência de placas AAAA sob carregamento uniaxial com distribuição uniforme e não uniforme de pontos de domínio, $h/a = 0,001$ .....	214
<b>Tabela 29</b> – MIR – Resultados para Carga uniaxial – Parte 1 .....	215
<b>Tabela 30</b> – MIR – Resultados para Carga uniaxial – Parte 2 .....	216
<b>Tabela 31</b> – MIR – Resultados para Carga biaxial.....	216
<b>Tabela 32</b> – MIR – Resultados para Carga de cisalhamento.....	217
<b>Tabela 33</b> – MIR – Resultados para outras funções $f(r)$ – Parte 1 .....	218
<b>Tabela 34</b> – MIR – Resultados para outras funções $f(r)$ – Parte 2.....	219
<b>Tabela 35</b> – MIR – Resultados para placas esconsas AAAA e EEEE com carga uniaxial .....	220
<b>Tabela 36</b> – MIR – Resultados para outras funções $f(r)$ em placas esconsas .....	220
<b>Tabela 37</b> – MIR – Resultados para outras funções $f(r)$ em placas esconsas 2 .....	221
<b>Tabela 38</b> – MIR – Resultados para placas com geometria de triângulo retângulo com condições de contorno $A^*A^*A^*$ , $EEE$ , $EEA^*$ , $A^*A^*E$ .....	222
<b>Tabela 39</b> – MIR – Resultados para placas com geometria de triângulo retângulo com condições de contorno $ELE$ , $A^*LA^*$ , $LLE$ , $LEL$ .....	223

<b>Tabela 40</b> – MIR – Resultados para placas com geometria de triângulo isósceles com condições de contorno A*A*A*, EEE, A*EE, EA*A* .....	223
<b>Tabela 41</b> – MIR – Resultados para placas com geometria de triângulo isósceles com condições de contorno LEE, LA*A*, ELL, LEL.....	224
<b>Tabela 42</b> – MIR – Placas com furo quadrado 1 .....	225
<b>Tabela 43</b> – MIR – Placas com furo quadrado 2.....	225
<b>Tabela 44</b> – MIR – Placas com furo quadrado 3.....	225

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

MEC – Método dos Elementos de Contorno

MEF – Método dos Elementos Finitos

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

MRD – Método da Reciprocidade Dual

MIR – Método da Integração Radial

## LISTA DE SÍMBOLOS

$M_{\alpha\beta}$  = Momento Fletor

$N_{\alpha\beta}$  = Normais do problema de estado plano

$N_i$  = Funções de forma para elementos quadráticos

$Q_\alpha$  = Cortante

$h$  = Espessura de uma placa

$a$  = Comprimento de um lado de uma placa

$\xi$  = Variável intrínseca para integração de Gauss

$\theta$  = Variável utilizada na transformação de Telles para integrais singulares

$\bar{\xi}$  = Posição do Ponto Fonte na coordenada intrínseca

$D$  = Módulo de Rigidez à Flexão

$E$  = Módulo de Young

$\sigma_{\alpha\beta}$  = Tensão

$\varepsilon_{\alpha\beta}$  = Deformação

$u_{\alpha\beta}$  = Deslocamentos

$\delta_{\alpha\beta}$  = Delta de Kronecker

$\nabla$  = Operador Gradiente

$\Delta$  = Operador Laplaciano

$C_{ij}$  = Coeficientes do termo livre para ponto fonte no contorno

$n_\alpha$  = Cossenos diretores do vetor normal ao contorno

$\lambda$  = Coeficiente utilizado na teoria de placas de Reissner

$k^2$  = Fator de correção de cortante

$T_{\alpha\beta}^*$  = Soluções fundamentais de força de superfície

$U_{\alpha\beta}^*$  = Soluções fundamentais de deslocamento

$q$  = Carga uniformemente distribuída em uma placa

$w$  = Deslocamento na direção  $x_3$

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	18
1.1	OBJETIVOS .....	24
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	25
2.1	REVISÃO SOBRE O PROBLEMA DE INSTABILIDADE DE PLACAS NÃO PERFURADAS .....	25
2.2	REVISÃO SOBRE O PROBLEMA DE INSTABILIDADE DE PLACAS PERFURADAS .....	28
2.3	REVISÃO SOBRE A INSTABILIDADE DE PLACAS QUANDO TRATADAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....	31
2.4	REVISÃO SOBRE O MÉTODO DA RECIPROCIDADE DUAL .....	33
2.5	REVISÃO SOBRE O MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL .....	46
3	TEORIA DE PLACAS .....	49
3.1	TEORIA CLÁSSICA .....	49
3.2	TEORIA DE REISSNER .....	54
4	APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE ELEMENTOS DE CONTORNO À FLAMBAGEM DE PLACAS LEVANDO EM CONTA O EFEITO DA DEFORMAÇÃO POR CORTANTE .....	59
4.1	EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO .....	59
4.2	SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA A EQUAÇÃO INTEGRAL DE DESLOCAMENTOS .....	62
5	APLICAÇÃO DO MÉTODO DA RECIPROCIDADE DUAL .....	64
6	A APLICAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....	74
6.1	DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA EM ELEMENTOS QUADRÁTICOS .....	74
6.2	MONTAGEM DAS MATRIZES H e G .....	79
6.3	MONTAGEM DA PRIMEIRA DERIVADA DAS MATRIZES H e G .....	90
6.4	MONTAGEM DA SEGUNDA DERIVADA DAS MATRIZES H e G .....	93
6.5	MONTAGEM DAS MATRIZES H <sup>2</sup> e G <sup>2</sup> .....	94
6.6	MONTAGEM DA MATRIZ M <sub>CONT1</sub> .....	96
6.7	MONTAGEM DA MATRIZ M <sub>CONT2</sub> .....	97
6.8	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MRD PARA INTEGRAIS DE DOMÍNIO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS .....	99

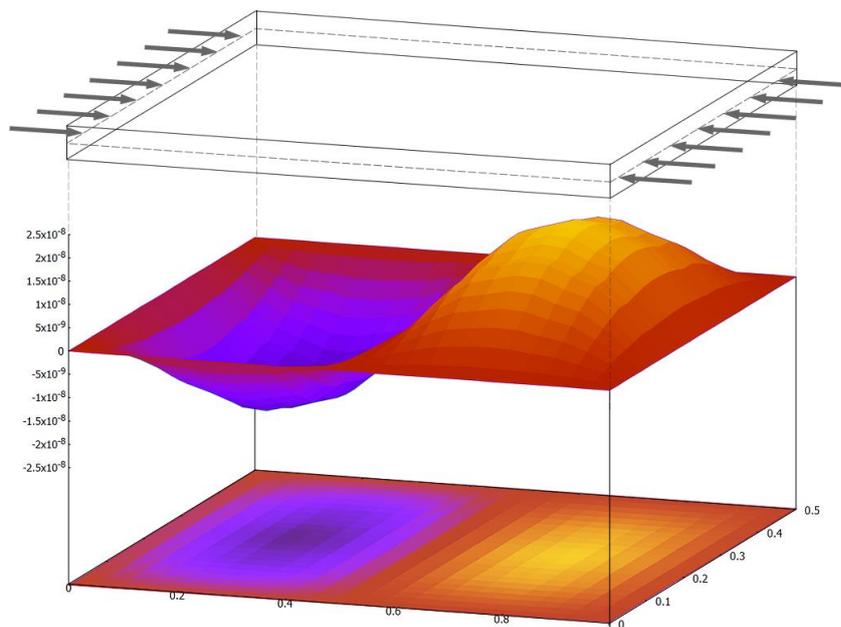
6.9 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MRD PARA INTEGRAIS DE DOMÍNIO DA DERIVADA DA EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS .....	106
6.10 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE AUTOVALOR PARA O MRD .....	108
7 APLICAÇÃO DO OPERADOR TANGENTE.....	115
7.1 OPERADOR TANGENTE PARA PRIMEIRA DERIVADA DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS .....	115
7.2 OPERADOR TANGENTE PARA SEGUNDA DERIVADA DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS .....	120
8 MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO SINGULAR .....	122
8.1 SINGULARIDADE DO TIPO 1/R.....	122
8.2 SINGULARIDADE DO TIPO LN(R).....	130
8.3 TRANSFORMAÇÃO DE MONEGATO E SLOAN .....	134
8.4 TÉCNICA DOS SUBELEMENTOS .....	135
8.5 MÉTODO DE GAO PARA INTEGRAIS SINGULARES.....	137
9 RESULTADOS PARA MRD .....	145
9.1 ANÁLISE INICIAL DE CONVERGÊNCIA – MRD.....	145
9.2 MALHAS PARA PLACAS SEM FURO – MRD.....	148
9.3 RESULTADOS PARA PLACAS QUADRADAS – MRD .....	150
9.3.1 Resultados para placas quadradas com carga uniaxial – MRD .....	150
9.3.2 Resultados para placas retangulares com carga uniaxial .....	153
9.3.3 Resultados para placas retangulares com carga biaxial – MRD .....	154
9.3.4 Resultados para placas retangulares com carga de cisalhamento – MRD ....	156
9.3.5 Gráficos com o comportamento do MRD para carga uniaxial .....	157
9.3.6 Comentários sobre os problemas com carga uniaxial – MRD.....	162
9.3.7 Gráficos com o comportamento do MRD para carga biaxial .....	163
9.3.8 Comentários sobre os problemas com carga biaxial – MRD.....	168
9.3.9 Gráficos com o comportamento do MRD para carga de cisalhamento .....	169
9.3.10 Comentários sobre os problemas com carga de cisalhamento – MRD .....	174
9.4 RESULTADOS PARA PLACAS COM FUROS – MRD .....	174
9.4.1 Problemas com furo quadrado central – MRD .....	174
9.4.2 Malhas utilizadas para furo quadrado central com MRD .....	174
9.4.3 Malhas para furo quadrado central com células de domínio .....	176
9.4.4 Resultados para placas com furo quadrado central – MRD .....	177
9.4.5 Problemas com furo circular central – MRD.....	180

9.4.6 Malhas utilizadas para furo circular central com MRD.....	180
9.4.7 Malhas para furo circular central com células de domínio.....	181
9.4.8 Resultados para placas com furo circular central – MRD.....	182
10 O MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL .....	186
10.1 INTRODUÇÃO AO MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL .....	186
10.2 BASE TEÓRICA PARA O MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL .....	187
10.3 O MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL PARA EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS.....	188
10.4 O MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL PARA A DERIVADA DA EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS .....	192
10.5 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MIR .....	199
10.5.1 Implementação numérica do problema de autovalor no MIR .....	199
10.6 RESULTADOS PARA MIR.....	213
10.6.1 Resultados para placas sem furo – MIR.....	213
10.6.2 Resultados para outras funções de aproximação – MIR.....	217
10.6.3 Resultados para placas esconsas – MIR .....	219
10.6.4 Resultados para placas triangulares – MIR.....	221
10.6.5 Resultados para placas com furo – MIR.....	224
10.6.6 Tempo de processamento – MIR .....	226
11. MODOS DE FLAMBAGEM .....	227
11.1 MODOS DE FLAMBAGEM PARA PLACAS QUADRADAS COM CARGA UNIAXIAL.....	227
11.2 MODOS DE FLAMBAGEM PARA PLACAS QUADRADAS COM CARGA BIAXIAL.....	229
11.3 MODOS DE FLAMBAGEM PARA PLACAS QUADRADAS COM CARGA DE CISALHAMENTO .....	230
11.4 MODOS DE FLAMBAGEM PARA PLACA RETANGULAR COM CARGA UNIAXIAL.....	231
12 CONCLUSÕES .....	232
12.1 CONCLUSÕES PARA MRD .....	232
12.2 CONCLUSÕES PARA MIR .....	233
12.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	235
REFERÊNCIAS.....	236

## 1 INTRODUÇÃO

Na literatura são encontrados diversos métodos numéricos que tratam a flambagem de placas, entre eles pode-se destacar o método dos elementos de contorno (PURBOLAKSONO e ALIABADI, 2005; SOARES JR. e PALERMO JR., 2017), elementos finitos (EL-SAWY e NAZMY, 2001; REDDY, 2002), faixas finitas (MIZUSAWA, 1993; DAWE e ROUFAEIL, 1982), os métodos sem malha (BUI et al, 2011; KATSIKADELIS e BABOUSKOS, 2007) entre outros (BROWN e YETTRAM, 1986; NERANTZAKI e KATSIKADELIS, 1996). Na Figura 1, gerada com o auxílio do software Gnuplot (WILLIAMS *et al.*, 2019), é ilustrado o modo de flambagem de uma placa retangular simplesmente apoiada no contorno, de comprimento “a” duas vezes maior que a largura “b”, obtido de maneira numérica.

**Figura 1** – Placa retangular  $a/b = 2$  com carga uniaxial – Modo de flambagem



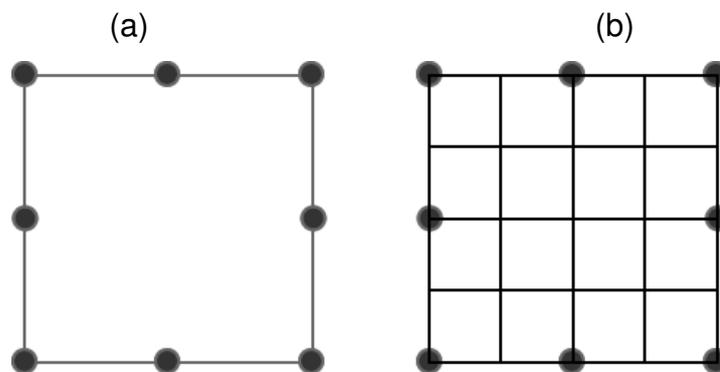
**Fonte:** O autor (2020)

O cálculo preciso das cargas críticas de placas finas ou espessas é de grande importância na engenharia, uma vez que diversos tipos de elementos estruturais podem ser compostos de placas sujeitas à flambagem. Entre eles pode-se citar as almas e mesas de perfis metálicos utilizados em projetos da construção

civil como galpões, torres, passarelas, estádios, edifícios, residências, etc. Placas também são utilizadas em veículos os quais o peso tem grande influência em sua performance, como aviões, navios e automóveis (REDDY, 2002). Na aplicação do método dos elementos finitos para obtenção das cargas críticas de flambagem de placas, é necessária a completa discretização do contorno e do domínio do problema. Dependendo do tamanho do projeto, o cálculo de uma estrutura com um número elevado de graus de liberdade pode consumir recursos computacionais significantes, conforme analisado por Poole, Lie e Mandel (2003). Os estudos de métodos numéricos que removem a integração de domínio buscam diminuir o tempo de cálculo da estrutura e a memória utilizada para processamento, possibilitando a análise estrutural para uma quantidade maior de computadores e conseqüentemente de usuários.

O método dos elementos de contorno é uma alternativa robusta introduzida por Nardini e Brebbia (1983). Tendo como base a utilização de equações integrais para resolução do problema, o método possibilita a remoção da integração de domínio em diversos tipos de problemas que não possuem efeitos não lineares, como problemas de potencial da equação de Laplace, problemas de elasticidade com ausência de forças de corpo, entre outros. A Figura 2 mostra uma malha do método dos elementos de contorno e uma malha do método dos elementos finitos para problemas homogêneos.

**Figura 2** – Malha para elementos de contorno (a) e elementos finitos (b)



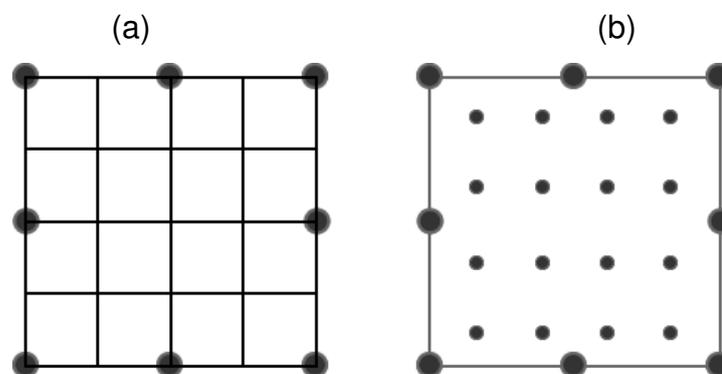
**Fonte:** O autor (2020).

Contudo, em problemas não lineares, o método dos elementos de contorno ao ser aplicado em sua forma tradicional também necessita de células de

domínio quando a carga de domínio possui uma distribuição não uniforme, podendo-se citar problemas de potencial com a equação de Poisson, problemas de elasticidade com forças de corpo e o problema tratado no presente trabalho, a flambagem de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante.

Técnicas foram desenvolvidas para remover a necessidade da discretização de domínio, podendo-se citar o Método da Reciprocidade Dual (NARDINI e BREBBIA, 1983; PARTRIDGE, BREBBIA e WROBEL, 1992) o Método da Multipla Reciprocidade (NOWAK e BREBBIA, 1989), o Método da Equação Análoga (YIOTIS e KATSIKADELIS, 2008), o Método da Integração Radial (GAO, 2002) entre outros (WEN, ALIABADI e ROOKE, 1998). Dentre os citados, o mais divulgado continua sendo o Método da Reciprocidade Dual (MRD) introduzido por Nardini e Brebbia (1983), aplicado com sucesso em diversos tipos de problemas de engenharia, entre eles problemas de potencial (WROBEL, BREBBIA e NARDINI, 1986), elasticidade bidimensionais (YAN *et al.*, 2008) e tridimensionais (ZHOU *et al.*, 2012), acústicos (LEE, WU e ZHANG, 1994), vibração (AGNANTARIS, POLYZOS e BESKOS, 2001), flambagem (ELZEIN e SYNGELLAKIS, 1992), simulação de campos magnéticos (PEKMEN e TEZER-SEZGIN, 2013), mecânica dos flúidos (RAHAIM e KASSAB, 1996) entre outros (FRIEDRICH, 1999). O MRD remove a necessidade da discretização e integração de células de domínio, deixando apenas a necessidade da discretização de pontos ao longo do contorno e domínio do problema.

**Figura 3** – Malha com células de domínio (a) e Método da Reciprocidade Dual (b)



Fonte: O autor (2020).

Este benefício diminui a quantidade de memória necessária para construção da malha de cálculo, com a consequente redução dos recursos computacionais e a manutenção do intuito inicial do método dos elementos de contorno, ao obter uma formulação apenas com integrais de contorno. Isto é possível devido ao fato dos termos não lineares ao longo do domínio serem aproximados por uma função de base radial normalmente de forma simples, podendo-se usar como exemplo a função  $f(r) = 1 + r$ , a qual é indicada por Partridge, Brebbia e Wrobel (1992). Uma vez que a função da distribuição de cargas de domínio é conhecida, utiliza-se do teorema da reciprocidade e de soluções particulares obtidas resolvendo-se a equação diferencial do problema quando a carga de domínio é conhecida e igual à função radial escolhida para aproximação. As soluções particulares são únicas para cada tipo de problema e dependem da função de aproximação escolhida, sendo esta uma das dificuldades para implementação do método. Apesar de existirem estudos sobre a influência do tipo da função de aproximação na solução do problema (PARTRIDGE, 2000), não existem limitações para a escolha da função aproximadora, na literatura encontram-se trabalhos que investigam funções lineares, polinomiais, multiquadráticas, exponenciais, logarítmicas, *“thin plate splines”* e as *“augmented thin plate splines”*, as quais apresentaram melhores resultados.

Com relação à utilização do MRD em problemas de placas, são encontrados diversos trabalhos na literatura. Kamiya e Sawaki (1988) trataram o problema de flexão de placas com a teoria de Kirchhoff. Silva e Venturini (1988) estudaram o problema de flexão de placas em fundação elástica. Sawaki, Takeuchi e Kamiya (1990) abordaram o problema de flexão de placas com grandes deslocamentos. Elzein e Syngellakis (1992) resolveram o problema de flambagem e obtiveram as cargas críticas de placas com a teoria de Kirchhoff. Davies e Moslehy (1994) conseguiram as frequências naturais e os modos de vibração para problemas de flexão de placas teoria de Kirchhoff. Lin, Duffield e Shih (1999) resolveram problemas de flambagem de placas finas circulares e retangulares. Wen, Aliabadi e Young (2005) apresentaram resultados para problemas de flexão de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante utilizando o Método da Integração Direta e o MRD. Wang, Ji e Tanaka (2000) resolveram o problema de grandes deslocamentos em flexão de placas baseando-se nas equações de von

Karman. Purbolaksono e Aliabadi (2005) compararam os resultados entre a formulação da flambagem de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante quando tratadas por células de domínio e pelo MRD. Supriyono e Aliabadi (2007) resolveram problemas de flexão de placas levando em conta os efeitos da não-linearidade física e geométrica. Purbolaksono e Aliabadi (2010) estudaram problemas de flexão de placas com a teoria de grandes deslocamentos. Yan, Feng e Zhou (2010) resolveram problemas de flexão de placas finas utilizando-se as vantagens do MRD e dos métodos sem malha. Purbolaksono, Dirgantara e Aliabadi (2012) analisaram problemas de fratura em placas levando em conta as não-linearidades física e geométrica. Useche e Albuquerque (2012) realizaram a análise de dinâmica em placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante. Di Pisa e Aliabadi (2013) estudaram o crescimento de fraturas em problemas de associação de placas. Useche (2014) realizou a análise de vibrações em cascas espessas. Pomeranz e Hamill (2014) compararam o Método da Solução Fundamental de Bessel e o MRD em problemas de flexão de placas em fundação elástica. Uğurlu (2015) realizou a análise de vibração linear de placas finas acopladas a fluidos. Seche e Albuquerque (2015) realizaram análise dinâmica transiente em cascas que levam em conta o efeito da deformação por cortante utilizando. Useche e Harnish (2016) analisaram problemas de vibração em cascas que levam em conta o efeito da deformação por cortante.

Além do MRD, outro método de redução de malhas é estudado no presente trabalho, sendo este o Método da Integração Radial (MIR) introduzido por Gao (2002). Gao mostrou algumas vantagens que o MIR tem com relação ao MRD, podendo-se citar a não necessidade de soluções particulares, fácil escolha de funções de aproximação e a sua implementação ser mais rápida com relação ao MRD. Estas vantagens atraíram a atenção de outros pesquisadores, o que levou o MIR a ser utilizado em diversos problemas de engenharia, como problemas de transferência de calor nos trabalhos de Gao (2006), Yang e Gao (2010), convecção no trabalho de Wang *et al.* (2017), difusão nos trabalhos de Al-Jawary (2012) e Peng (2019), elasticidade nos trabalhos de Gao (2002) e Yang *et al.* (2015), acústicos no trabalho de Qu (2013), vibração no trabalho de Zheng, Gao e Zhang (2016), flexão de placas finas no artigo de Albuquerque, Sollero e Paiva (2007) e espessas na tese de Santana (2014), flambagem de placas finas no artigo de Doval, Albuquerque e

Sollero (2010), flambagem de compósitos laminados na tese de Doval (2013) e flambagem de cascas finas no trabalho de Albuquerque e Aliabadi (2008).

Soares Jr. e Palermo Jr. (2017) apresentaram uma nova proposta para o problema de flambagem de placas com efeito de cortante, fazendo-se o uso apenas das primeiras derivadas dos deslocamentos transversais, mas utilizando células de domínio para cálculo das integrais de domínio. O presente trabalho visa aplicar o MRD e o MIR no problema de flambagem de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante, removendo a necessidade da discretização de células de domínio do trabalho de Soares Jr. e Palermo Jr. (2017).

## 1.1 OBJETIVOS

O presente trabalho apresenta uma aplicação computacional que remove a integração de domínio do problema de flambagem de placas levando em conta o efeito da deformação por cortante utilizando o método dos elementos de contorno com Reciprocidade Dual e Integração Radial. Após o desenvolvimento desta aplicação, foi feita a determinação das cargas de flambagem de placas solicitadas por cargas uniaxiais, biaxiais e de cisalhamento, com geometrias retangulares, esconsas, triangulares e também placas quadradas com furo quadrado e circular.

A influência do efeito da deformação por cortante na carga de flambagem também foi verificada variando-se o aspecto de espessura de  $h/a = 0,001$  até  $h/a = 0,2$ , onde “h” é a espessura da placa e “a” é a largura da placa.

Os objetivos do presente trabalho podem ser resumidos em:

- A aplicação do MRD e o MIR no problema de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante, removendo-se o uso de células de domínio;
- O cálculo das cargas críticas de flambagem de placas com diversas geometrias, tipos de carga e aspectos de espessura  $h/a$ ;
- A identificação das vantagens e desvantagens da utilização do MRD e do MIR e a comparação das soluções obtidas por estes métodos;
- O estudo de técnicas para melhorar a precisão dos resultados, como o uso do operador tangente para reduzir o grau de singularidade de integrais singulares;

Para cumprir estes objetivos foi desenvolvido um software na linguagem Fortran 90, por meio do ambiente de desenvolvimento Visual Studio em conjunto com o compilador Intel Fortran. Também foi criado um gerador de malhas para auxiliar na análise de convergência dos resultados obtidos.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 REVISÃO SOBRE O PROBLEMA DE INSTABILIDADE DE PLACAS NÃO PERFURADAS

Bryan (1891) analisou o problema de flambagem de placas aplicando o método da energia para estabilidade e mostrou uma aplicação em partes de navios. Timoshenko (1932) verificou a estabilidade das placas de perfis metálicos quando solicitadas à flexão. Seydel (1933) resolveu o problema de flambagem de placas finas quando solicitadas por cisalhamento. Way (1936) utilizando o método da energia, apresentou resultados para flambagem de placas solicitadas por carga de cisalhamento e flexão. Iguchi (1938) apresentou soluções para placas retangulares solicitadas por cisalhamento e cargas combinadas.

Batdorf e Houbolt (1944) resolveram o problema de flambagem de uma placa retangular de tamanho infinito solicitada por cargas combinadas. Batdorf e Stein (1947) analisaram o problema de flambagem de placa retangular solicitada por cargas combinadas. Libove *et al.* (1949) solucionaram o problema de flambagem de placas retangulares solicitadas por cargas lineares.

Gerard e Becker (1957) utilizando o método da energia apresentaram as cargas críticas de placas com diversos tipos de cargas e condições de contorno. As soluções analíticas de problemas de flambagem de placas retangulares e circulares com diversos tipos de condições de contorno e também de solicitação podem ser encontradas no livro de Timoshenko e Gere (1961).

Iyengar e Narasimhan (1965) resolveram o problema de flambagem de placas retangulares com borda engastada e simplesmente apoiada. Johns (1971) apresentou resultados para placas isotrópicas e ortotrópicas. Hinton (1978) calculou as cargas críticas de placas solicitadas por carga uniaxial e biaxial utilizando método das faixas finitas.

Dawe e Roupaeil (1982) calcularam as cargas críticas de placas solicitadas por carga uniaxial e biaxial utilizando método das faixas finitas. Peköz (1986) desenvolveu um método de dimensionamento de perfis formados a frio levando em conta instabilidade. Sakiyama e Matsuda (1987) solucionaram o

problema de flambagem de placas de Mindlin retangulares com condições de contorno variadas.

Tham e Szeto (1990) resolveram o problema de flambagem de placas com domínio arbitrário utilizando o método das faixas finitas. Mizusawa (1993) mostrou o efeito da deformação por cortante utilizando uma teoria de alta ordem e o método das faixas finitas. Xiang *et al.* (1993) solucionaram diversos problemas de placas retangulares que levam em conta o efeito da deformação por cortante com cargas biaxiais e uniaxiais. Bank e Yin (1996) analisaram problemas de flambagem de placas ortotrópicas com bordas livres. Liew, Xiang e Kitipornchai (1996) abordaram de forma analítica o problema de flambagem de placas de Mindlin com borda livre.

Reddy (2002) resolveu utilizando o método da energia problemas de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante mostrando que a carga crítica diminui quando a espessura aumenta. Reddy (2003) mostra em seu livro diversas soluções para problemas de flambagem de placas ortotrópicas e também de compósitos laminados. Xiang e Wei (2004) abordaram problemas de placas com espessura variável levando em conta a teoria de Mindlin. Aydogdu e Ece (2005) analisaram o efeito de apoios "não ideais" ( que permitem um pequeno deslocamento ) na carga crítica de placas isotrópicas.

Shufrin e Eisenberger (2005) analisaram o problema de placas retangulares utilizando a teoria de placas que levam em conta a deformação por cortante de alta ordem e compararam com a teoria clássica. Kang e Leissa (2005) resolveram o problema de flambagem de placas retangulares quando solicitadas por carga linearmente distribuída em diversas condições de contorno. Hwang e Lee (2006) abordaram o problema de placas ortotrópicas cargas linearmente distribuídas.

Shufrin e Eisenberger (2007) verificaram o problema de flambagem por cisalhamento em placas finas utilizando o método de Kantorovich. Wang e Aung (2007) mostraram as cargas críticas de placas espessas de domínio triangular. Hosseini-Hashemi, Khorshidi e Amabili (2008) apresentaram as soluções analíticas para diversos problemas de flambagem de placas retangulares, levando em conta a teoria de Mindlin. Kim, Thai e Lee (2009) analisaram problemas de placas ortotrópicas utilizando uma teoria refinada de duas variáveis. Vrcelj e Bradford

(2008) utilizaram o método das faixas finitas com splines para resolver problemas de flambagem de placas.

Jalali e Naei (2010) calcularam cargas críticas de placas espessas circulares com espessura variável. Vrcelj e Bradford (2010) analisaram problemas de perfis de paredes delgadas utilizando o método das faixas finitas com splines. Bui, Nguyen e Zhang (2011) aplicaram um método sem malha para resolver problemas de placas de Mindlin e Reissner. Ferreira *et al.* (2011) utilizaram funções de base radial para calcular problemas de flambagem de placas que levam o efeito da deformação por cortante.

Hosseini-Hashemi, Atashipour e Fadaee (2012) apresentaram as soluções analíticas para flambagem de placas que utilizam a teoria de Reddy. Sayyad e Ghugal (2012) analisaram problemas de flambagem de placas isotrópicas usando uma teoria que leva em conta o efeito da deformação por cortante do tipo exponencial.

Yang *et al.* (2013) utilizaram o método dos elementos finitos para obter os modos de flambagem e cargas críticas de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante. Fazzolari, Banerjee e Boscolo (2013) resolveram problemas de compósitos laminados utilizando uma teoria de deformação por cortante de alta ordem. Thai e Choi (2013) encontraram soluções analíticas para flexão, flambagem e vibração de placas espessas com uma teoria refinada de duas variáveis.

Millar e Mora (2015) utilizaram o método dos elementos finitos com malha triangular para obter as cargas críticas de placas de kirchhoff. Ghannadpour, Ovesy e Zia-Dehkordi (2015) resolveram o problema de flambagem de placas utilizando o método de faixas finitas exato. Juhász e Szekrényes (2015) resolveram problemas de placas ortotrópicas retangulares.

Moslemi, Neyra e Amiri (2016) calcularam o problema de flambagem de placas espessas baseado na teoria da elasticidade em três dimensões e compararam os resultados obtidos pelas teorias de Reissner e Mindlin.

Ruocco *et al.* (2017) usaram o método de Kantorovich para obter as soluções analíticas para o problema de flambagem de placas espessas utilizando a teoria de Mindlin. Park e Choi (2018) mostraram as soluções analíticas para os problemas de flexão, flambagem e vibração livre de placas espessas. Mousavi,

Azhari e Saadatpour (2019) utilizaram o método de Galerkin livre de elementos para calcular problemas de flambagem de placas espessas.

## **2.2 REVISÃO SOBRE O PROBLEMA DE INSTABILIDADE DE PLACAS PERFURADAS**

Levy, Woolley e Kroll (1947) apresentaram um método numérico para análise da carga crítica de flambagem de placas quadradas com furo circular com reforço ou sem reforço, quando solicitadas por uma carga uniforme uniaxial. Kroll (1949) realizou a análise numérica de placas quadradas com furo circular com ou sem reforço quando solicitadas por carga de cisalhamento.

Schlack (1964) analisou de maneira experimental e numérica utilizando o método de Ritz o comportamento de placas retangulares com furos circulares quando solicitadas por deslocamento uniforme na borda. Kawai *et al.* (1967) verificaram a concentração de tensões em uma placa retangular com furo circular utilizando o método da energia. Yoshiki *et al.* (1967) analisaram de maneira numérica e experimental as cargas críticas de placas retangulares com furo circular em posições excentricas. Schlack (1968) novamente faz uma série de testes experimentais com placas perfuradas quando solicitadas por deslocamento uniforme na borda e compara com resultados teóricos. Bulson (1969) apresentou em seu livro uma revisão dos resultados obtidos por outros autores para a flambagem de placas com furo circular.

Yu e Davis (1971) analisaram de maneira analítica e experimental a flambagem de placas com furos enrijecidos. Vann (1971) verificou de forma experimental e numérica utilizando o método dos elementos finitos o problema de placas quadradas simplesmente apoiadas com furo circular central. Ritchie e Rhodes (1975) realizaram um extenso estudo sobre os resultados obtidos por outros autores da carga crítica de placas com furo circular central, comparando resultados teóricos com diversos valores obtidos de maneira experimental. Uenoya e Redwood(1978) calcularam pelo método dos elementos finitos as cargas críticas de placas com furo circular solicitadas por cisalhamento.

Narayanan (1981) analisou de maneira experimental placas com furos circulares quando solicitadas por carga de cisalhamento. Narayanan e Avanesian

(1983) verificaram de maneira experimental placas com furo circular quando solicitadas por cisalhamento. Chow e Narayanan (1984) analisaram de maneira numérica placas com furo circular e retangular excêntrico.

Narayanan e Avnessian (1984) utilizaram o método dos elementos finitos para calcular as cargas críticas de placas com furos circular e retangular excêntricos quando a placa é solicitada por cisalhamento. Narayanan e Chow (1984) verificaram de maneira numérica e experimental placas com furo circular e retangular quando solicitadas por carga uniforme uniaxial. Nemeth (1984) analisou de maneira numérica placas com furo circular quando solicitadas por carga uniforme uniaxial. Roberts e Azizian (1984) utilizaram o método dos elementos finitos para analisar placas com furo circular quando solicitada por carga uniforme e cisalhamento obtendo as cargas críticas para placas finas e moderadamente espessas.

Nemeth, Stein e Johnson (1986) analisaram placas com furos circulares e retangulares e obtiveram as cargas críticas para diversos tipos de carga. Narayanan e Avnessian (1986) utilizaram o método dos elementos finitos para obter as cargas críticas de placas solicitadas por carga de cisalhamento e compararam com alguns testes experimentais. Sabir e Chow (1986) utilizaram o método dos elementos finitos para calcular as cargas críticas de placas solicitadas por cargas de cisalhamento e compressão uniforme onde os furos foram localizados de maneira excêntrica. Brown, Yettram e Burnett (1987) verificaram de maneira numérica placas com furos retangulares.

Nemeth (1988) abordou de maneira numérica e experimental placas ortotrópicas com furo circular central. Lee, Lin e Lin (1989) analisaram placas ortotrópicas com furo circular central quando solicitada por carga uniforme biaxial. Chang e Chiang (1990) resolveram problemas de placas finas e moderadamente espessas com furo retangular pelo método dos elementos finitos. Shimizu, Yoshida e Enomoto (1991) calcularam placas com furos circulares e retangulares quando solicitadas por tensão uniaxial.

Sabir e Davies (1997) determinaram as frequências naturais e as cargas críticas de placas perfuradas utilizando o método dos elementos finitos. Prabhakara e Datta (1997) utilizaram o método dos elementos finitos para determinar as frequências naturais e as cargas críticas de flambagem de placas perfuradas por

diversos tipos de furos. Shanmugam *et al.* (1999) realizaram uma proposta de fórmula para o dimensionamento de placas perfuradas por furos circulares e retangulares.

El-Sawy e Nazmy (2001) usaram o método dos elementos finitos para obter as cargas críticas de placas perfuradas por furos excêntricos. El-Sawy, Nazmy e Martini (2004) novamente utilizaram o método dos elementos finitos para determinar as cargas críticas de placas perfuradas por furos excêntricos mas agora levando em conta a plasticidade.

El-Sawy e Martini (2007) empregaram o método dos elementos finitos para calcular as cargas críticas de placas perfuradas quando solicitada por carga biaxial. Onkar, Upadhyay e Yadav (2007) analisaram placas de compósitos laminados perfuradas por furos circulares centrais quando solicitadas por carga uniaxial uniforme. Paik (2007) utilizou o método dos elementos finitos para analisar placas com furo circular central quando solicitadas por carga uniaxial uniforme.

Komur e Sonmez (2008) fizeram o uso do método dos elementos finitos e obtiveram as cargas críticas de placas perfuradas por furos circulares em posição excêntrica e quando solicitadas por carga linearmente distribuída.

Kim, Choe e Paik (2009) utilizaram o método dos elementos finitos para obter as cargas críticas de placas com furo circular com ou sem reforço. Pellegrino, Maiorana e Modena (2009) avaliaram um placas com furo circular ou retangular excêntricos quando solicitadas por cargas de cisalhamento. Maiorana, Pellegrino e Modena (2009) analisaram o problema de placas com furos excêntricos quando solicitadas por carga axial e momento fletor. Wang *et al.* (2009) verificaram placas com furos circulares e furos longos com borda circular e mediante os resultados numéricos fizeram uma proposta para uma fórmula simplificada. Cheng e Zhao (2010) abordaram problemas de placas finas e moderadamente espessas com furos circulares reforçados ou não.

Maiorana, Pellegrino e Modena (2011) realizaram testes em placas com furos circulares excêntricos solicitadas por compressão e flexão levando em conta a plasticidade. Shanmugam *et al.* (2011) estudaram placas esconsas perfuradas quando solicitadas por compressão. Tajdari *et al.* (2011) verificaram a influência do tipo de apoio em placas perfuradas quando solicitadas por carga linearmente distribuída. Zhong, Pan e Yu (2011) calcularam problemas de placas finas e

moderadamente espessas com furo circular usando o método dos elementos de quadratura.

Cheng e Wang (2013) verificaram de maneira experimental e numérica placas com furos. Rocha *et al.* (2013) analisaram placas com diversos tipos de furos utilizando o método dos elementos finitos.

Jayashankarbabu e Karisiddappa (2013) estudaram placas finas ou moderadamente espessas com furos excêntricos. Real *et al.* (2013) verificaram problemas de placas retangulares com furo circular central quando solicitadas por carga uniformemente distribuída.

Jana (2016) analisou a melhor posição possível para o furo circular em placas retangulares para obtenção da maior resistência. Serror, Hamed Mourad (2016) verificaram de maneira numérica a resistência de almas de vigas com furos circulares e retangulares. Pham (2017) verificou de maneira numérica placas com furos circulares e retangulares quando solicitadas ao cisalhamento.

### **2.3 REVISÃO SOBRE A INSTABILIDADE DE PLACAS QUANDO TRATADAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Gospodinov e Ljutskanov (1982) desenvolveram uma aplicação em Fortran para solução do problema de flambagem de placas finas (teoria de Kirchhoff) utilizando o método dos elementos de contorno. Bezine, Cimetiere e Gelbert (1985) verificaram o problema de flambagem de placas com a teoria de Kirchhoff, onde o método de resolução foi chamado de Método da Equação Integral. Liu (1987) mostrou uma proposta de nova formulação para a resolução de problemas de flambagem de placas finas, utilizando-se de células de domínio para resolver problemas de placas quadradas e circulares. Irschik, Heuer e Ziegler (1987) utilizaram o método dos elementos de contorno em problemas de placas retangulares solicitadas por flexão. Syngellakis e Kang (1987) resolveram o problema de flambagem de placas utilizando células de domínio triangulares e resolveram problemas de placas retangulares e triangulares. Tanaka e Miyazaki (1988) estudaram o problema de flambagem de placas fazendo o acoplamento de placas finas para obter a carga crítica de um perfil tubular. Shi (1990) utilizou o método dos elementos de contorno para resolver problemas de vibração e

flambagem de placas ortotrópicas, levando em conta a teoria de Kirchhoff. Syngellakis *et al.* (1991) compararam os resultados obtidos pelo método dos elementos de contorno com resultados experimentais para flambagem de placas retangulares. Elzein e Syngellakis (1992) utilizaram o método dos elementos de contorno com Reciprocidade Dual em problemas de flambagem de placas finas, obtendo-se resultados para placas com diversas geometrias e tipos de solicitação. Syngellakis e Elzein (1994) desenvolveram uma aplicação em Fortran baseada no método dos elementos de contorno para solução de problemas de flambagem de placas de geometria quadrada, circular, esbelta e triangular.

Marczak (1995) aplicou o método dos elementos de contorno para resolver problemas de placas finas e espessas utilizando células de domínio. Chang-Jun e Rong (1996) resolveram problemas de placas em forma de anel com borda simplesmente apoiada e engastada. Nerantzaki e Katsikadelis (1996) usaram o Método da Equação Análoga em conjunto com o método dos elementos de contorno para obter as cargas críticas de placas com espessura variável. Lin, Duffield e Shih (1999) utilizaram o MRD para analisar placas finas com carga linear. Purbolaksono e Aliabadi (2005) fizeram o uso do MRD para resolver problemas de instabilidade de placas espessas utilizando a segunda derivada do deslocamento transversal.

Katsikadelis e Babouskous (2007) aplicaram o Método da Equação Análoga em problemas de pós-buckling em placas finas quadradas. Chinnaboon, Chucheepsakul e Katsikadelis (2007) resolveram problemas de flambagem de placas finas utilizando o Método da Equação Análoga.

Albuquerque, Baiz e Aliabadi (2008) analisaram problemas de flambagem de compósitos laminados utilizando o método dos elementos de contorno. Yiotis e Katsikadelis (2008) utilizaram o Método da Equação Análoga para resolver problemas de flambagem de placas finas quadradas simplesmente apoiadas e engastadas. Baiz e Aliabadi (2009) realizaram o acoplamento de placas espessas para calcular as cargas críticas de perfis estruturais metálicos.

Doval, Albuquerque e Sollero (2012) usaram o método dos elementos de contorno em conjunto com o MIR para resolver problemas de flambagem de placas finas perfuradas feitas de compósitos laminados. Doval (2013) utilizou o MIR para resolver problemas de flambagem de placas finas isotrópicas e anisotrópicas com furo retangular excêntrico e central.

Katsikadelis (2014) mostra problemas de flexão, flambagem e vibração em placas finas e espessas utilizando o método dos elementos de contorno. Ele também descreve o Método da Equação Análoga para placas com espessura constante e variável.

Soares Jr. e Palermo Jr. (2017) apresentaram uma nova formulação para solução de problemas de flambagem de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante utilizando o teorema da divergência para obter uma formulação dependente apenas das primeiras derivadas do deslocamento transversal, as integrais de domínio foram calculadas utilizando células de domínio.

## **2.4 REVISÃO SOBRE O MÉTODO DA RECIPROCIDADE DUAL**

Nardini e Brebbia (1983) publicaram um artigo o qual utilizava o método dos elementos de contorno para analisar vibrações em elementos estruturais em 2D. Embora ainda não nomeando a técnica de Reciprocidade Dual, pela primeira vez as integrais de domínio foram calculadas com o auxílio de uma função aproximadora e o teorema da reciprocidade, mas neste trabalho não foram utilizados pontos de domínio. Apesar de não ser a parte principal do artigo, a remoção das integrais de domínio chamaram a atenção dos autores e de outros pesquisadores. Brebbia e Nardini (1983) resolveram o mesmo problema de vibrações, mas agora reduzindo a modelagem à um problema de autovalor. A técnica da Reciprocidade Dual foi aplicada nas integrais de domínio, mas ainda não utilizando pontos de domínio.

Nardini e Brebbia (1985) resolveram problemas de dinâmica em problemas de vigas com diversas geometrias.

Brebbia e Nardini (1986) pela primeira vez chamaram o método da conversão das integrais de domínio para integrais de contorno aproximadas de Reciprocidade Dual e resolveram problemas de transferência de calor e de dinâmica em problemas com domínio finito, infinito e semi-infinito. Wrobel, Telles e Brebbia (1986) calcularam problemas de difusão apresentando um método que utiliza-se da Reciprocidade Dual. Wrobel, Brebbia e Nardini (1986) aplicaram o MRD para resolver problemas de transferência de calor transiente. Nardini e Brebbia (1986) utilizaram da Reciprocidade Dual para resolver problemas dinâmicos transientes.

Wrobel e Brebbia (1987) resolveram problemas de difusão não lineares utilizando o MRD para as integrais de domínio e a técnica de Newton-Raphson de forma iterativa.

Kamiya e Sawaki (1988) usaram a Reciprocidade Dual para resolver problemas de flexão de placas com base na teoria clássica de Kirchhoff. Houve convergência à medida que se aumentava o número de pontos no domínio e também os elementos de contorno. Niku e Brebbia (1988) mostraram a aplicação do MRD em problemas de potencial, apresentando as soluções particulares para a função de aproximação  $f = r$ . Silva e Venturini (1988) aplicaram o MRD para resolver o problema de flexão de placas em uma fundação elástica.

Sawaki, Takeuchi e Kamiya (1990) aplicaram o MRD para resolver o problema de flexão de placas finas com grandes deslocamentos.

Wrobel e Defigueiredo (1991) utilizaram o MRD para problemas de convecção e difusão. Kontoni, Partridge e Brebbia (1991) resolveram problemas de Helmholtz por uma análise de autovalor, utilizando o MRD. Partridge, Brebbia e Wrobel (1992) descreveram em seu livro o MRD apresentando a parte teórica, códigos computacionais na linguagem Fortran e a resolução de diversos problemas de engenharia, como transferência de calor, elasticidade em duas dimensões e problemas de dinâmica.

Nowak e Partridge (1992) realizaram uma comparação entre o MRD e o método da múltipla reciprocidade em problemas de potencial regidos pela equação de Poisson. Elzein e Syngellakis (1992) utilizaram o método dos elementos de contorno com Reciprocidade Dual para calcular os parâmetros críticos de flambagem de placas finas (teoria clássica) com diversas condições de contorno e carregamentos. Gramann, Mätzig e Osswald (1992) calcularam problemas de transferência de calor utilizando o MRD, para simular o comportamento da mistura de polímeros. Harrouni *et al.* (1992) resolveram o problema do fluxo de Darcy em meio heterogêneo utilizando o MRD. Kontoni (1992) aplicou o MRD para realizar a análise dinâmica em problemas elastoplásticos. Wrobel e Brebbia (1992) explicaram o MRD com detalhes em seu livro, para problemas de transferência de calor.

Singh e Kalra (1993) utilizaram o MRD para problemas de transferência de calor transiente com integração no tempo. Zhu e Zhang (1993) resolveram problemas de potencial de domínio infinito usando o MRD. ZHU (1993) resolveu

problemas de refração e difração de ondas utilizando o MRD. Kontoni e Beskos (1993) realizaram a análise dinâmica transiente em problemas elastoplásticos utilizando o MRD. Zhang (1993) em sua dissertação de mestrado realizou uma revisão da bibliografia e revisitou os problemas de potencial utilizando o MRD. Fedelinski, Aliabadi e Rooke (1993) utilizaram o MRD em problemas de fratura. Yamada e Wrobel (1993) analisaram as propriedades das funções radiais gaussianas e sua utilização no MRD.

Karur e Ramachandran (1994) avaliaram diversos tipos de funções radiais de aproximação do MRD, entre as testadas foram a *"thin plate splines"*, a função linear e a função linear com parâmetro R. Zhu, Satravaha e Lu (1994) resolveram problemas de difusão com dependência do tempo utilizando o MRD. Cheng, Lafe e Grilli (1994) apresentaram funções de aproximação diferentes das utilizadas normalmente, realizando o cálculo com funções de aproximação globais. As funções de aproximação globais apresentaram melhores resultados, mas a matriz de coeficientes pode se tornar singular, piorando o desempenho para alguns tipos de problemas. Zhang e Zhu (1994) mostraram que nem sempre a função linear pode representar corretamente a carga de domínio, sugerindo a utilização de funções polinomiais. Davis *et al.* (1994) utilizaram o MRD para simular a transferência de calor no processamento de polímeros. Yamada, Wrobel e Power (1994) analisaram as propriedades da convergência do MRD, chegando na conclusão que o método é convergente, quando o termo não homogêneo é representado por uma função contínua. Partridge (1994) comparou as funções de aproximação radiais locais com as funções globais, chegando a conclusão de que as funções globais podem dar resultados melhores, mas muito dependentes do tipo de problema. Davies e Moslehy (1994) encontraram as frequências naturais e seus modos de vibração de placas finas (teoria clássica), utilizando o MRD. Lee, Wu e Zhang (1994) resolveram problemas de radiação acústica utilizando o MRD.

Zhu, Zhang e Marchant (1995) resolveram problemas de transferência de calor com microondas ( o termo não homogêneo é uma função exponencial ) e encontraram respostas para diversos exemplos, utilizando o MRD. Weng e Rahman (1995) analisaram as matrizes geradas pelo MRD e concluíram que elas são cheias e não simétricas. Zhu e Zhang (1995) resolveu problemas de refração e difração de ondas curtas utilizando o MRD. Harrouni *et al.* (1995) abordaram o problema do fluxo

de Darcy em meio heterogêneo utilizando o MRD, mas desta vez utilizando funções de aproximação globais.

Zhu e Satravaha (1996) resolveram problemas de transferência de calor transiente com termos não lineares, utilizando o MRD com transformada de Laplace, resolvendo uma série de exemplos. HU *et al.* (1996) utilizaram método dos elementos de contorno com Reciprocidade Dual para estudar as características da transferência de calor dentro de uma ferramenta de moldagem de epoxi. Singh e Kalra (1996) calcularam problemas de difusão transiente utilizando o MRD. Zhu e Satravaha (1996) novamente utilizando o MRD com transformada de Laplace resolveram problemas de difusão transiente com termos não lineares. Harrouni *et al.* (1996) aplicaram o MRD para equação de Poisson e resolveram problemas de obtenção de parâmetros para um aquífero heterogêneo. Niku e Adey (1996) analisaram o custo computacional do MRD com relação ao método dos elementos finitos. Rahaim e Kassab (1996) resolveram problemas de fluxo laminar de fluidos incompressíveis utilizando o MRD.

Roy e Grilli (1997) utilizaram o MRD para calcular problemas de fluxo de águas subterrâneas, em meio poroso. Harrouni *et al.* (1997) resolveram problemas de fluxo de águas subterrâneas em duas dimensões utilizando o MRD. Chen e Wong (1997) abordaram problemas de autovalor unidimensionais utilizando o MRD. Jumarhon, Amini e Chen (1997) mostraram a convergência das funções radiais “*thin plate splines*” quando são resolvidos problemas da equação de Poisson, utilizando o MRD. Eldho e Rao (1997) calcularam problemas de transporte de contaminantes bidimensionais, utilizando o MRD.

Kurgan (1998) calculou problemas de campo magnetostático com região permeável não homogênea, utilizando o MRD. Zhu e Liu (1998) utilizaram o MRD com transformada de Laplace para problemas de difusão com termos não lineares, utilizando funções de aproximação multiquadráticas. Perrey-Debain, Gervais e Guilbaud (1998) resolveram a equação de Helmholtz para analisar problemas de propagação acústica em meios não homogêneos utilizando o MRD. Zhu (1998) utilizaram o MRD com transformada de Laplace para resolver problemas de difusão transientes, com difusividade constante. Mostrando também a conexão entre o MRD com transformada de Laplace e os métodos que utilizam soluções fundamentais dependentes do tempo. Šarler e Kuhn (1998) abordaram problemas de difusão e

convecção com não linearidade nas propriedades do material analisado, utilizando o MRD. Chino e Tosaka (1998) aplicaram o MRD para resolver a equação de Burger, testando diversos tipos de funções de aproximação polinomiais. Zhu (1998) aplicaram o MRD com transformada de Laplace para resolver problemas de difusão utilizando como funções de aproximação as “*thin plate splines*” aumentadas, obtendo melhores resultados. Duraiswami, Sarkar e Chahine (1998) resolveram problemas relacionadas com a tomografia de impedância elétrica em duas e três dimensões, utilizando funções de aproximação polinomiais, exponenciais e outras. Lu, Liu e Zeng (1998) avaliaram a propagação da temperatura em tecidos biológicos, concluindo que o MRD é eficiente para este tipo de problema. Friedrich (1998) utilizou o MRD em problemas de convecção e difusão transientes para avaliar a degradação na forma de hieróglifos e sinais arqueológicos.

Friedrich (1999) desenvolveu o software “CFDlab” para resolver de forma gráfica problemas de Laplace, Poisson, convecção e difusão utilizando o MRD. Wen, Aliabadi e Rooke (1999) realizaram a análise em três dimensões da dinâmica da fratura utilizando o MRD. Šarler e Kuhn (1999) mostraram que as funções de aproximação do tipo “*thin plate splines*” aumentadas apresentam resultados melhores do que as propostas lineares ou polinomiais, em problemas das equações de Navier–Stokes incompressíveis. Singh e Tanaka (1999) resolveram problemas de difusão transientes não lineares utilizando o MRD e apresentaram diversos métodos de integração no tempo. Divo, Kassab e Cavalleri (1999) utilizaram o MRD para prever a ablação em aletas de mísseis resolvendo um problema não linear. Perrey-Debain (1999) realizou uma análise de convergência nos problemas da equação de Helmholtz, utilizando o MRD. Chen (1999) propôs que poderia melhorar os resultados em problemas com equações diferenciais parciais convertendo o problema em uma equação de Helmholtz modificada, no âmbito da Reciprocidade Dual. Lin, Duffield e Shih (1999) utilizaram o MRD para calcular as cargas críticas de flambagem de placas finas retangulares e circulares, realizando também comparações com o método dos elementos finitos. Wen, Aliabadi e Young (1999) usaram o método da integração direta e o MRD para o cálculo de flexão de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante.

Liu e Xu (2000) utilizaram o MRD para realizar o diagnóstico de estados térmicos de corpos biológicos, determinando-se as condições fisiológicas de tecidos

como a pele. Blobner, Hriberšek e Kuhn (2000) aplicaram o MRD em problemas de fluxo de flúidos e transferência de calor. Lu (2000) aplicou o MRD e realizou a simulação numérica da transferência de calor transiente cristais semi-transparentes. Zhu, Liu e Chen (2000) realizaram um modelo numérico para simular a refração e difração de ondas utilizando o MRD. Partridge (2000) avaliou a performance de diversas funções de aproximação na resolução de problemas de transferência de calor com o MRD, foram verificadas funções radiais lineares, cúbicas, *“thin plate splines”*, multiquadráticas e *“thin plate splines”* aumentadas. Cheng, Young, e Tsai (2000) resolveram problemas da equação de Poisson utilizando o MRD. Wen *et al.* (2000) aplicaram com sucesso o MRD para problemas de flexão de placas e cascas que levam em conta o efeito da deformação por cortante, mostrando as soluções particulares para a função radial de aproximação linear. Partridge e Sensale (2000) usaram o método das soluções fundamentais com Reciprocidade Dual para solucionar problemas de difusão e convecção. Power e Mingo (2000) fizeram uso do MRD com divisão em sub-domínios para resolver sistemas de equações de Navier–Stoke em duas dimensões. Power e Mingo (2000) utilizaram o MRD com divisão em sub-domínios para resolver problemas de convecção térmica. Itagaki (2000) aplicou o MRD em problemas de auto valor do tipo Helmholtz não uniformes. Deng e Liu (2000) resolveram o problema de transferência de calor transiente em corpos biológicos com fluxo de calor sinusoidal na superfície. Qiu e Fisher (2000) simularam reações de eletrólise utilizando a Reciprocidade Dual e relataram melhorias nos resultados com relação ao método das diferenças finitas. Perrey-Debain, Gervais e Guilbaud (2000) utilizaram o MRD para as equações da propagação de ondas acústicas. Tanaka e Singh (2000) utilizaram o MRD para resolver problemas de transferência de calor reversa. Tanaka e Chen (2000) resolveram problemas elastodinâmicos com carga periódica utilizando o MRD. Wang, Ji e Tanaka (2000) aplicaram o MRD para resolver o problema de flexão de placas com grandes deslocamentos utilizando as equações de Von Kármán.

Tanaka e Chen (2001) acoplaram o MRD e o método da quadratura diferencial para resolver problemas de difusão transiente. Singh e Tanaka (2001) aplicaram o MRD para resolver problemas de transferência de calor em versos. Ghadiali, Halpern e Gaver (2001) utilizaram o MRD para avaliar transporte de tensoativos em superfícies. Florez e Power (2001) realizaram uma comparação entre

o uso de elementos contínuos e descontínuos no MRD para solução das equações de Navier-Stokes em duas dimensões. Pérez-Gavilán e Aliabadi (2001) utilizaram o MRD para resolver problemas de elasticidade em duas dimensões. Agnantiaris, Polyzos e Beskos (2001) usaram o MRD para resolver problemas de vibração livre.

Fan e Lu (2002) fizeram uso do MRD com transformada de Laplace para resolver problemas de difusão e transferência de calor. Florez e Power (2002) utilizaram um método de multidomínios com Reciprocidade Dual para resolver as equações de Navier-Stokes em duas dimensões. Young *et al.* (2002) mostraram a solução do fluxo de Stokes utilizando o MRD iterativo. Bialecki, Jurgaś e Kuhn (2002) propuseram uma versão do MRD o qual não há necessidade da inversão das matrizes principais afim de diminuir o custo computacional em problemas de larga escala. Rodríguez e Power (2002) resolveram a equação de Poisson utilizando um MRD adaptivo para refinamento de malha. Chen e Tanaka (2002) resolveram problemas de condução de calor inversos utilizando a Reciprocidade Dual. Horikane *et al.* (2002) resolver uma equação de Laplace em três dimensões utilizando MRD.

Albuquerque, Sollero e Fedelinski (2003) aplicaram o MRD em problemas de fratura anisotrópicos. Wang, Tan e Zhou (2003) elaboraram formulações alternativas para a Reciprocidade Dual nas equações de Poisson axissimétricas. Ang, Clements e Vahdati (2003) utilizaram o MRD para resolver relacionados a equação diferencial parcial elíptica em meio anisotrópico não homogêneo. Chien, Chen e Chuang (2003) aplicaram o MRD em problemas elastodinâmicos transientes. Ang (2003) resolveu problemas de um sistema Brusselador não linear relacionados à difusão. Shanazari e Chen (2003) acoplaram o método de sobreposição de Schwartz e o MRD para calcular problemas de Poisson. Farcas *et al.* (2003) resolveram problemas de Cauchy associados à equação de Poisson utilizando o MRD. Matsumoto, Tanaka e Tsukamoto (2003) aplicaram o MRD problemas potenciais de duas dimensões testando várias distribuições de fonte de calor no domínio.

Behbahani-NIA e Kowsary (2004) resolveram problemas de condução de calor em versos do MRD. Farcas *et al.* (2004) utilizaram o MRD identificação da condutividade hidráulica no fluxo de aquíferos. Šarler *et al.* (2004) solucionaram problemas de convecção natural nos meios porosos de Darcy–Brinkman utilizando a Reciprocidade Dual. Natalini e Popov (2004) aplicaram uma estratégia multidomínio melhorar o esforço computacional o cálculo de derivadas parciais de alta ordem no

MRD. Medeiros, Partridge e Brandão (2004) aplicaram o método das soluções fundamentais com Reciprocidade Dual em problemas de elasticidade em duas dimensões. Bai e Lu (2004) desenvolveram maneiras eliminar a singularidade em funções de aproximação que utilizam a expressão  $1/r$  como base e resolveram problemas de transferência de calor. Deng e Liu (2004) resolveram problemas de transferência de calor transiente multidimensionais envolvendo o congelamento de tecidos biológicos. Rap *et al.* (2004) aplicaram o MRD em problemas de convecção e difusão de Cauchy.

Wen, Aliabadi e Young (2005) usaram o MRD em problemas de flexão de placas de Reissner com grandes deslocamentos. ANG (2005) aplicou o MRD em problemas de difusão de calor anisotrópicos. Portapila e Power (2005) resolveram problemas de transferência de calor, de difusão e convecção utilizando a Reciprocidade Dual e realizaram a comparação de duas funções radiais diferentes, a função básica linear e a "*thin plate spline*". Amado *et al.* (2005) aplicaram o método da reciprocidade do dual com transformada de Laplace na modelagem de problemas de difusão transientes para simulação de tratamento com laser. Vera-Tudela e Telles (2005) utilizaram o MRD para resolver problemas e fratura elastodinamicos. Choo (2005) resolveu problemas de condução de calor em meio anisotrópico utilizando a Reciprocidade Dual.

Marin *et al.* (2006) encontraram soluções para o problema de Cauchy para equações do tipo Helmholtz com coeficientes variáveis utilizando a Reciprocidade Dual. Tanaka, Matsumoto e Takakuwa (2006) resolveram problemas de condução de calor transiente em materiais não lineares utilizando a Reciprocidade Dual. Baranoglu e Mengi (2006) utilizaram o MRD para problemas de viscoelasticidade thermal. Lu e Wu (2006) realizaram análise dinâmica de problemas bidimensionais de fratura utilizando a Reciprocidade Dual. Ang (2006) calculou problemas de condução de calor transiente para materiais em contato por uma interface imperfeita utilizando o MRD.

Ang (2007) realizou a análise elastodinamica de um bimatériau com interface imperfeita viscoelástica usando o MRD e uma formulação hypersingular. Supriyono e Aliabadi (2007) resolveram problemas de flexão de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante com não linearidade geométrica e física utilizando o MRD. Bozkaya (2007) calculou problemas de difusão e convecção

transientes utilizando a Reciprocidade Dual. Natalini e Popov (2007) abordaram problemas de advecção-difusão em três dimensões utilizando a Reciprocidade Dual e mostraram que adicionando pontos internos os erros absoluto e relativo diminuem. Gospavic *et al.* (2007) realizaram uma modelagem da interação entre laser e material utilizando o MRD.

Zhou, Zhang e Chen (2008) utilizaram o MRD para analisar interações fototermiais em terapia por laser em tecidos biológicos com geometria complexa. Gospavic, Popov e Todorovic (2008) usaram o MRD com multidomínio para resolver a equação de Schrödinger. Dehghan e Mirzaei (2008) aplicaram o MRD para resolver a equação de Sebo-Gordon em duas dimensões. Yan *et al.* (2008) resolveram problemas de elasticidade em três dimensões com forças de corpo utilizando o MRD e compararam seus resultados com o método dos elementos finitos e também com soluções analíticas. Ang e Ooi (2008) calcularam problemas de transferência de calor em problemas axisimétricos. Tosecky *et al.* (2008) resolveram problemas de dinâmica em três dimensões utilizando o MRD. Tanaka, Kurokawa e Matsumoto (2008) aplicaram o MRD em problemas de transferência de calor transiente em sólidos anisotrópicos.

Yan *et al.* (2009) utilizaram as vantagens do método dos elementos de contorno, dos métodos sem malha e também do MRD para analisar problemas de vibração Livre. Wen e Khonsari (2009) resolveram problemas de transferência de calor transiente com fonte de calor em movimento utilizando o MRD. Zhu, Liu e Marchant (2009) apresentaram um modelo não linear para representar a difração e refração de ondas governadas pela equação de Boussinesq, utilizando o MRD. Dehghan e Mirzaei (2009) apresentaram um método numérico para resolver a equação de Cahn–Hilliard em uma dimensão, utilizando o MRD. Choi e Balaras (2009) utilizaram o MRD para resolver as equações de Navier-Stokes em duas dimensões com fluxo incompressível transiente. Hsiao, Chang e Wen (2009) utilizaram o MRD para verificar problema propagação de ondas em cilindros circulares.

Dehghan e Ghesmati (2010) aplicaram o MRD para resolver a equação de Klein-Gordon não linear. Yan, Feng e Zhou (2010) desenvolveram um método sem malha para problemas de elasticidade combinando o MRD, o método dos elementos de contorno híbrido e o método dos pontos de interpolação radial. Chen e Shanazari

(2010) acoplaram o método de sobreposição de Schwarz com o MRD para resolver problemas da equação de Poisson. Dobroskok e Linkov (2010) combinaram o método da variável complexa e o MRD para resolver problemas de fluxo de calor em meio composto. Li, Huang e Miao (2010) utilizaram o MRD híbrido para obter um método sem malha para resolver problemas de autovalor acústicos. Meral e Tezer-Sezgin (2010) aplicaram o MRD para resolver a equação da oscilação de ondas não linear. Gümgüm e Tezer-Sezgin (2010) resolveram problemas de convecção de nanofluidos com fonte de calor utilizando o MRD. Purbolaksono e Aliabadi (2010) aplicaram o MRD na análise de grandes deslocamentos em placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante, utilizando o método de Euler. Yun e Ang (2010) aplicaram o MRD para problemas axissimétricos de condução de calor em sólido não homogêneo.

Ghadimi e Dashtimanesh (2011) acoplaram o método das diferenças finitas e o MRD para resolver as equações Navier–Stokes em duas dimensões. Yan, Feng e Zhou (2011) desenvolveram um método sem malha acoplando o MRD o método da interpolação de pontos radiais e o método dos elementos de contorno para resolver problemas de flexão de placas de Kirchhoff. Javaran, Khaji e Moharrami (2011) resolveram problemas elastodinâmicos transientes utilizando o MRD com funções radiais de aproximação de Fourier. Zhou *et al.* (2011) resolveram problemas da equação de Poisson em três dimensões utilizando o MRD com funções radiais de aproximação com forma variável. Meral e Tezer-Sezgin (2011) realizaram uma comparação entre o MRD e o método da quadratura diferencial para equações de reação-difusão não lineares.

Florez *et al.* (2012) utilizaram funções de interpolação radiais de Hermite para resolver problemas das equações de Navier-Stokes utilizando o MRD com multidomínio. Purbolaksono, Dirgantara e Aliabadi (2012) analisaram problemas de fratura levando em conta a não-linearidade geométrica em placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante utilizando o MRD. Fahmy (2012) analisou o esforço viscoelástico e magnetotérmico em um sólido não homogêneo anisotrópico utilizando o MRD. Soltankoochi, Gatmiri e Noorzad (2012) apresentaram um método para analisar a difração, refração e a dissipação do atrito em ondas de água utilizando o método da reciprocidade. Useche e Albuquerque (2012) realizaram uma análise dinâmica em placas que levam em conta o efeito da deformação por

cortante utilizando o MRD. Solekhudin e Ang (2012) resolveram uma equação de Helmholtz modificada para analisar o fluxo de água em solos não saturados utilizando o MRD. Zhou *et al.* (2012) utilizaram o MRD para resolver problemas de elasticidade em três dimensões não homogêneas e compararam com o método dos elementos finitos. Al-Gahtani (2012) apresentou um método sem malha acoplando o método das soluções fundamentais com o MRD para problemas de elasticidade em duas dimensões. Yun e Ang (2012) aplicaram o MRD para analisar problemas axissimétricos termo elastostáticos de materiais não homogêneos.

Di Pisa e Aliabadi (2013) analisaram um problema do crescimento de fraturas devido a fadiga em estruturas de placas acopladas utilizando o MRD. Pekmen e Tezer-Sezgin (2013) solucionaram o problema da convecção livre em meio poroso solicitados pelo efeito de campo magnético utilizando o MRD. Liu e Zhao (2013) realizaram a simulação de um reservatório de petróleo utilizando o MRD. Fahmy (2013) realizou uma simulação de problemas de termoelasticidade com efeito de campo magnético utilizando o MRD. Alsoy-Akgün e Tezer-Sezgin (2013) resolveram problemas de transferência de calor por convecção com o objetivo de simular o comportamento da eliminação de lixo nuclear, crescimento de cristais e oceanografia. Tezer-Sezgin, Bozkaya e Türk (2013) resolveram o problema do fluxo de fluido biomagnético entre duas placas paralelas sob o efeito de campo magnético onde o fluido é assumido como newtoniano e incompressível, comparando os resultados com os métodos da Reciprocidade Dual e dos Elementos Finitos.

Pekmen e Tezer-Sezgin (2014) estudaram o comportamento de um fluxo hidrodinâmico e a transferência de calor em uma cavidade quadrada sob o efeito de um campo magnético externo utilizando o MRD. Useche (2014) utilizaram o MRD para realizar uma análise de vibração em cascas que levam em conta o efeito da deformação por cortante. Gümgüm e Tezer-Sezgin (2014) usaram o MRD para resolver o problema do fluxo de convecção em nanofluidos em invólucros com paredes móveis. Aydin e Tezer-Sezgin (2014) simularam utilizando o MRD o fluxo magneto-hidrodinâmico em um tubo sob a influência de um campo magnético transversal quando o meio externo também está conduzindo eletricidade. Pomeranz e Hamill (2014) realizaram uma comparação o MRD e o método das soluções fundamentais em problemas de placas finas apoiadas em uma fundação elástica.

Uğurlu (2015) realizou a análise de vibração linear de placas finas acopladas a fluidos utilizando o MRD. Yu *et al.* (2015) resolveram problemas de condução de calor transiente e compararam seus resultados com o método dos elementos finitos. Useche e Albuquerque (2015) realizaram análise dinâmica transiente em cascas que levam em conta o efeito da deformação por cortante utilizando o MRD. Caruso, Portapila e Power (2015) fizeram uma proposta de um método que considera apenas integrais regulares e interpolação de funções radiais de maneira local juntamente com o MRD e testaram vários tipos de problemas como problemas de convecção, difusão e da equação de Poisson. Solekhudin e Ang (2015) apresentaram uma simulação da infiltração de raízes de canais periódicos trapezoidais governados pela equação de Helmholtz, utilizando o MRD. Chuang, Yueh e Huang (2015) usaram o método dos elementos de contorno dual acoplado ao MRD para determinar o espalhamento de onda por um sistema cilíndrico concêntrico. Dehghan e Shirzadi (2015) utilizaram o MRD para resolver equações diferenciais parciais estocásticas.

Useche e Harnish (2016) analisaram problemas de vibração em cascas que levam em conta o efeito da deformação por cortante utilizando o MRD. Galvis e Sollero (2016) analisaram propagação de fraturas em materiais policristalinos utilizando o MRD. Senel e Tezer-Sezgin (2016) apresentaram soluções das Equações de Stokes e Navier-Stokes em cavidades sob o efeito de um campo magnético de fonte pontual externa utilizando o MRD. Oğlakkaya e Bozkaya (2016) resolveram o problema de um fluxo de convecção em um invólucro semi-anelar com um fluxo de calor constante sob o efeito de um campo magnético inclinado, utilizando o MRD. Caruso, Portapila e Power (2016) realizaram uma proposta de método para solução de problemas de convecção, difusão, das equações de Helmholtz e Poisson o qual todas as integrais são regulares, o novo método apresentado foi chamado de MRD Regular Localizado. Luo, Qiao e Li (2016) acoplaram um método de Galerkin *multiwavelet* e o MRD para solução da equação de Poisson. Yan *et al.* (2016) apresentaram o novo Método dos Nós de Contorno Híbridos com Reciprocidade Dual e realizaram testes em problemas de elasticidade.

Gümgüm e Wrobel (2017) resolveram problemas fluxo de Stokes transiente utilizando MRD. Yan, Yu e Lv (2017) utilizaram o método dos nós de contorno com Reciprocidade Dual para resolver problemas de convecção-difusão.

Kovářik *et al.* (2017) acoplaram ao Método do Contorno Singular com o MRD obtendo-se um método sem malha para resolver problemas de difusão transiente.

Oğlakkaya e Bozkaya (2018) utilizaram o MRD para resolver problemas de um fluxo de convecção Sob o Efeito de um campo magnético externo. Al-Bayati e Wrobel (2018) resolveram problemas de convecção-difusão-reação com campo de velocidade variável usando o MRD com diferentes funções de aproximação Radial. Fahmy (2018) mostrou que o MRD pode ser utilizado em problemas de otimização da forma de elementos estruturais. Chen *et al.* (2018) acoplaram o MRD com o algoritmo de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno para identificar condições de contorno dependentes do tempo para problemas de condução de calor transiente em 2D em materiais com gradiente funcional. Hamzehei-Javaran e Khaji (2018) utilizaram o MRD com funções de formado tipo Fourier complexa para resolver problemas de elasticidade em duas dimensões estáticos ou dinâmicos.

Aydin e Tezer-Sezgin (2018) analisaram o fluxo magnetohidrodinâmico direto e problemas de Cauchy em um duto retangular com parede superior escorregadia e perturbada utilizando o MRD. Fendoğlu, Bozkaya e Tezer-Sezgin (2018) compararam o método dos elementos de contorno convencional com o MRD para problemas de convecção-difusão-reação transientes. Al-Bayati e Wrobel (2018) apresentaram uma nova formulação do MRD para problemas de convecção-difusão-reação transientes com velocidade variável utilizando o método das Diferenças Finitas para aproximar a primeira derivada dos potenciais. Zhou *et al.* (2018) apresentaram o MRD com integração precisa para resolver problemas tridimensionais de condução de calor transiente.

Com os estudos realizados no presente trabalho, Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a) aplicaram o MRD na formulação antes proposta por Soares Jr. e Palermo Jr. (2017) para resolver problemas de flambagem de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante. O método foi aplicado integrando-se no contorno as derivadas primeiras e segundas das soluções fundamentais. Os resultados mostraram que o MRD pode ser aplicado em placas retangulares e também placas com furo quadrado central.

## 2.5 REVISÃO SOBRE O MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL

Venturini (1988) fez uso de coordenadas polares para calcular integrais de domínio no método dos elementos de contorno realizando a integração analítica das cargas de domínio.

Wen, Aliabadi e Rooke (1998) além de utilizarem coordenadas polares, aplicaram funções de base radial para aproximar todo o núcleo da integral de domínio e depois usou um método analítico para calcular a integral de domínio.

Gao (2002) utilizou coordenadas polares e funções de base radial para converter integrais de domínio para integrais radiais e de contorno aproximadas, utilizando a integração numérica. Gao chamou este método de "Método da Integração Radial" (MIR) e apresentou as vantagens com relação à outros métodos de redução de malha, como o MRD. Gao (2003) aplicou o MIR para resolver problemas de termoelasticidade.

Albuquerque *et al.* (2006) calculou problemas de placas anisotrópicas utilizando a teoria de Kirchhoff e o MIR. Gao (2006) resolveu problemas de transferência de calor usando o MIR.

Gao (2007) abordou problemas de elasticidade não lineares e não-homogêneos utilizando o MIR. Albuquerque, Sollero e Paiva (2007) aplicaram o MIR em problemas de dinâmica em placas anisotrópicas. Albuquerque e Aliabadi (2008) apresentaram uma formulação baseada no MIR para solução de problemas de cascas finas.

Albuquerque e Aliabadi (2010) resolveram problemas de compositos laminados com a teoria de cascas finas, utilizando o MIR. Yang e Gao (2010) abordaram problemas de transferência de calor transiente usando o MIR, foram mostrados resultados problemas de geometria retangular com furo circular. Jesus, Albuquerque e Sollero (2010) mostraram que o custo computacional do MIR é maior que outros métodos de redução de malha, em problemas de transferência de calor.

Yang, Gao e Liu (2011) calcularam as integrais radiais do MIR de maneira analítica para diminuir o custo computacional, para problemas de transferência de calor com coeficiente variáveis em duas e três dimensões. Zhang *et al.* (2011) resolveram problemas de fratura em três dimensões usando o MIR.

Al-Jawary e Wrobel (2012) abordaram problemas de condução de calor com coeficientes variáveis, utilizando o MIR.

Peng, Cui e Gao (2013) aplicaram o MIR em problemas de fluxo viscoso e mostraram que o MIR pode ter um custo computacional maior em comparação às células de domínio, enquanto a integração por células demorou 6 segundos para computar, o MIR demorou 243 segundos, os autores justificaram que esta diferença é devido a utilização da integração numérica de Gauss nas integrais radiais. Qu *et al.* (2013) resolveram problemas acústicos em três dimensões utilizando o MIR. Doval (2013) aplicou o MIR em problemas de flambagem de placas de compósitos laminados onde a teoria de placas utilizada foi a teoria clássica, resolvendo problemas com furo quadrado, retangular e sem furo.

Santana (2014) calculou problemas de flexão de placas espessas isotrópicas e ortotrópicas utilizando o MIR. Yu *et al.* (2014) analisaram problemas de congelamento e solidificação utilizando o MIR. Yang, Liu e Gao (2014) apresentaram as soluções analíticas para integração radial em problemas de materiais funcionalmente graduados.

Yang *et al.* (2015) apresentaram as soluções analíticas para integração radial em problemas de elasticidade. Gao (2015) aplicaram o MIR em problemas termoelásticos de duas e três dimensões.

Zheng, Gao e Zhang (2016) resolveram problemas de vibração em estruturas de duas e três dimensões. Feng *et al.* (2016) apresentaram as soluções analíticas para integração radial em problemas de transferência de calor transiente em três dimensões.

Yang *et al.* (2017) implementaram o MIR para resolver problemas de condução de calor não-lineares com condutividade dependente da temperatura. Qu *et al.* (2017) analisaram a influência da temperatura em problemas tridimensionais de elasticidade utilizando o MIR.

Cui *et al.* (2018) utilizaram o MIR para resolver problemas tridimensionais de condução de calor, utilizando elementos de superfície poligonais. Peng *et al.* (2018) usaram o MIR para resolver problemas de condução e convecção de calor bidimensionais e tridimensionais. Zheng *et al.* (2018) realizaram uma análise de fratura dinâmica em problemas tridimensionais com carga térmica usando o MIR. Najarzadeh, Movahedian e Azhari (2018) usaram o MIR para resolver problemas de

flambagem de placas finas com geometria concava. Cui *et al.* (2018) resolveram problemas de condução de calor transiente utilizando o MIR.

Yang *et al.* (2019) aplicaram o MIR para calcular problemas de condução de calor transiente em materiais compósitos utilizando o MIR. Yang *et al.* (2019b) implementaram o MIR para resolver problemas de condução de calor inversa. Najarzadeh, Movahedian e Azhari (2019) usaram o MIR para analisar problemas da equação da onda escalar. Al-Bayati e Wrobel (2019) resolveram problemas bidimensionais não homogêneos de reação-difusão-convecção usando o MIR. Peng *et al.* (2019) analisaram problemas de convecção-difusão transientes usando o MIR.

Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020) aplicaram o MIR para problemas de flambagem de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante. Foram resolvidas placas de geometria quadrada com e sem furo, triangular e esconsa.

### 3 TEORIA DE PLACAS

Placas são estruturas planas, onde a espessura é de ordem pequena quando comparada com as outras dimensões. As teorias de placas foram desenvolvidas com o intuito de reduzir o problema de elasticidade de três dimensões para um problema de duas dimensões, diminuindo a dificuldade para a obtenção de soluções analíticas. Diversas teorias foram propostas para descrever o comportamento de placas, podendo-se citar a teoria proposta por Kirchhoff (1850), também conhecida como teoria clássica, foi formulada assumindo um problema de placas finas com pequenos deslocamentos sem levar em consideração o efeito da deformação por cortante. Baseando-se nas hipóteses de Kirchhoff, Love (1888) apresentou soluções para problemas de vibração de cascas finas.

Von-Karman (1910) desenvolveu uma teoria para descrever grandes deslocamentos em placas delgadas. A teoria de Reissner (1945) leva em conta o efeito da deformação por cortante, assumindo tensões de cisalhamento ao longo da espessura, podendo-se resolver problemas de placas finas e moderadamente espessas.

Mindlin (1951) propôs uma teoria similar à de Reissner, mas com um fator de correção para distribuição da tensão de cisalhamento diferente. Wang *et al.* (2001) mostrou as diferenças entre os resultados das teorias propostas por Reissner e Mindlin.

Reddy (1984) propôs a teoria que leva em conta o efeito da deformação por cortante de terceira ordem, assumindo uma variação quadrática das deformações por cortante ao longo da espessura e com isso dispensando o uso do fator de correção de cortante, fornecendo um aumento na precisão em relação à solução das teorias de primeira ordem.

#### 3.1 TEORIA CLÁSSICA

Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) assumem uma placa de espessura fina com relação às outras dimensões e que os deslocamentos transversais são pequenos quando comparados com a espessura. O efeito da

deformação por cortante é desconsiderado. A teoria clássica requer duas condições de contorno. As seguintes hipóteses propostas por Kirchhoff (1850) são consideradas:

1) Qualquer linha reta que era originalmente perpendicular à superfície média da placa permanece reta e perpendicular à superfície média após a deformação.

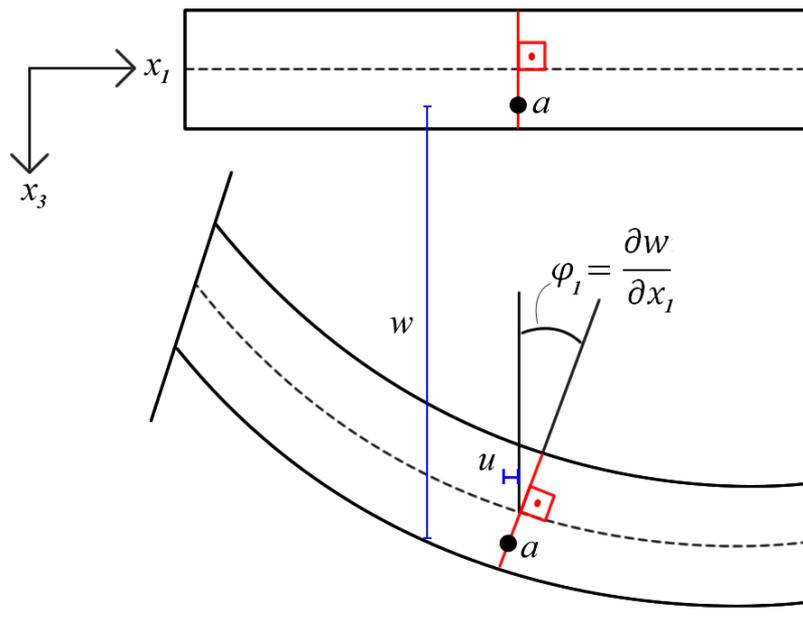
2) Todos os elementos da superfície média não sofrem qualquer deformação.

As equações da teoria clássica são baseadas no campo de deslocamentos dado pela equação 3.1:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &= -w_{,\alpha} \\ u_\alpha &= -zw_{,\alpha} \\ u_3 &= w(x, y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

As rotações são dadas pelas derivadas dos deslocamentos transversais. Pode-se observar o comportamento das equações 3.1 na Figura 4:

**Figura 4** – Elemento deformado para teoria de Kirchhoff



**Fonte:** O autor (2020).

As deformações fora do eixo médio são dadas pela equação 3.2:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -x_3 w_{,\alpha\beta} \quad (3.2)$$

As deformações por cortante  $\varepsilon_{33}$ ,  $\varepsilon_{13}$  e  $\varepsilon_{23}$  são omitidas pela teoria clássica, mas as tensões  $\sigma_{13}$  e  $\sigma_{23}$  são utilizadas para determinar os esforços de cortante. As tensões podem ser encontradas utilizando-se a lei de Hooke:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= -\frac{E}{1-\nu^2} x_3 (v w_{,\theta\theta} \delta_{\alpha\beta} + (1-\nu) w_{,\alpha\beta}) \\ \sigma_{\alpha 3} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta,\beta} dx_3 = E \frac{(x_3^2 - \frac{h^2}{4})}{2(1-\nu^2)} w_{,\beta\beta\alpha} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Os esforços unitários de momento e cortante são obtidos integrando-se as tensões ao longo da espessura da placa, conforme equação 3.4:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 \\ Q_\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} x_3 dx_3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Os momentos e cortantes são dados pela equação 3.5:

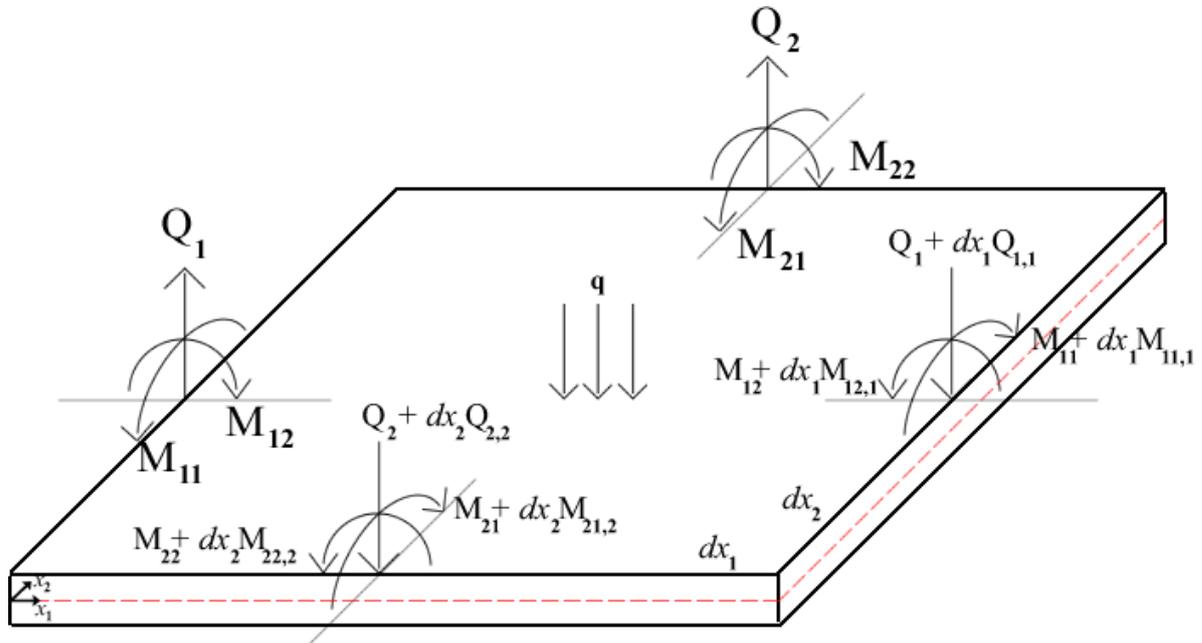
$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= -D [v \delta_{\alpha\beta} w_{,\theta\theta} + (1-\nu) w_{,\alpha\beta}] \\ Q_\alpha &= -D w_{,\beta\beta\alpha} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Onde D é o módulo de rigidez a flexão da placa, dado pela equação 3.6:

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.6)$$

Para encontrar as equações de equilíbrio pode-se recorrer ao elemento diferencial do problema de placas. Na Figura 5 pode-se verificar os esforços unitários que estão uniformemente distribuídos ao longo da geometria diferencial, mas foram ilustrados de maneira pontual para facilitar a visualização.

**Figura 5** – Elemento diferencial do problema de placas



**Fonte:** O autor (2020).

Concentrando-se os esforços de cortante na geometria diferencial e realizando-se o equilíbrio do elemento diferencial na direção  $x_3$ :

$$\sum F_{x_3} = 0$$

$$Q_1 dx_2 - (Q_1 + Q_{1,1} dx_1) dx_2 + Q_2 dx_1 - (Q_2 + Q_{2,2} dx_2) dx_1 - q dx_1 dx_2 = 0 \quad (3.7)$$

Simplificando a equação 3.7 encontra-se uma equação de equilíbrio que relaciona a cortante com a carga distribuída:

$$Q_{1,1} + Q_{2,2} + q = 0 \quad (3.8)$$

Concentrando-se o a distribuição uniforme de momentos e realizando o somatório de momentos em torno do eixo  $x_1$ , desconsiderando os resíduos de  $\frac{dx_2}{2}$ , pode-se encontrar a equação 3.9:

$$\begin{aligned}
\sum M_{11} &= 0 \\
-M_{12}dx_2 - M_{22}dx_1 + (M_{22} + M_{22,2}dx_2)dx_1 \\
+(M_{12} + M_{12,1}dx_1)dx_2 - Q_2dx_1dx_2 &= 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Simplificando a equação 3.9, encontra-se uma equação de equilíbrio que relaciona a cortante com as derivadas dos momentos:

$$M_{12,1} + M_{22,2} = Q_2 \tag{3.10}$$

Aplicando a notação indicial, as equações de equilíbrio da teoria clássica são dadas pela equação 3.11:

$$\begin{aligned}
M_{\beta\alpha,\beta} - Q_\alpha &= 0 \\
Q_{\alpha,\alpha} + q &= 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Manipulando o sistema de equações 3.11, substituindo o momento na derivada da cortante pode-se encontrar a equação 3.12:

$$\begin{aligned}
(M_{\beta\alpha,\beta})_{,\alpha} &= -q \\
(M_{11,1} + M_{21,2})_{,1} + (M_{12,1} + M_{22,2})_{,2} &= -q
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Substituindo as relações de momento com as derivadas do deslocamento transversal da equação 3.5 encontra-se a equação diferencial da teoria clássica:

$$[w_{,1111} + w_{,2121} + w_{,1212} + w_{,2222}] = \frac{q}{D} \tag{3.13}$$

A equação 3.13 pode ser escrita utilizando-se o operador biarmônico:

$$\Delta^2 w = w_{,\alpha\alpha\beta\beta} = \frac{q}{D} \tag{3.14}$$

### 3.2 TEORIA DE REISSNER

A teoria clássica apresenta limitações à medida que a espessura da placa aumenta, pois a deformação por cortante começa a ter influência na solução do problema. No caso do presente trabalho, as cargas críticas obtidas pelo problema de flambagem apresentaram grande diferença entre as placas com espessura fina e as placas moderadamente espessas.

Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) alertaram sobre os desvios gerados pela teoria clássica nas soluções de placas com furos de tamanho de ordem da espessura da placa. Devido à estes problemas, Reissner (1945) apresentou sua teoria de placas que considera o efeito da deformação por cortante.

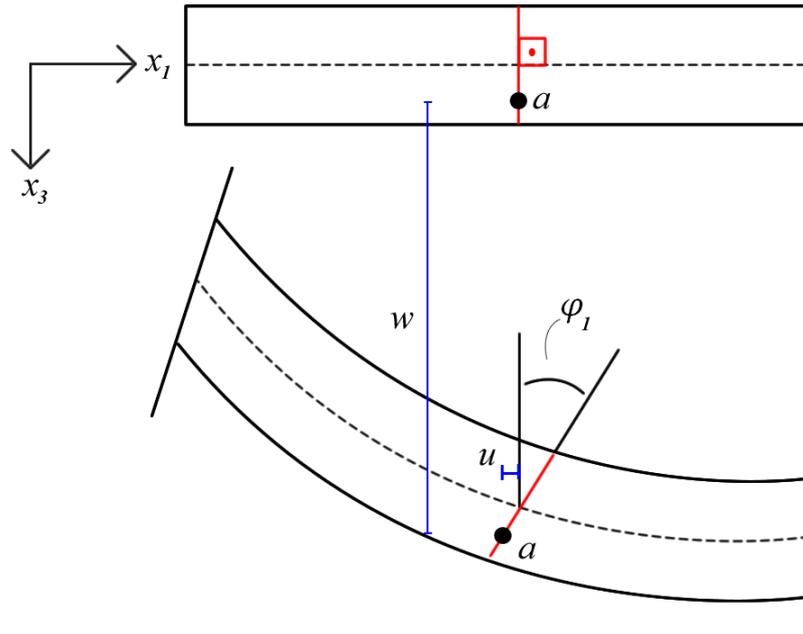
Reissner assume uma placa isotrópica e que os deslocamentos transversais são pequenos quando comparados com a espessura. A superfície média é considerada indeformável. Diferentemente da teoria clássica, qualquer linha reta que era originalmente perpendicular à superfície média da placa permanece reta, mas não necessariamente perpendicular à superfície média após a deformação. A teoria de Reissner requer três condições de contorno.

Reissner admitiu as seguintes relações tensão-deformação:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} = u_{1,1} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) \\
 \varepsilon_{22} = u_{2,2} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})) \\
 \varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} &= \frac{1}{G} \sigma_{12} \\
 \varepsilon_{13} = \varphi_1 + u_{3,1} &= \frac{1}{G} \sigma_{13} \\
 \varepsilon_{23} = \varphi_2 + u_{3,2} &= \frac{1}{G} \sigma_{23}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

A Figura 6 ilustra o comportamento de um segmento normal à superfície média após a deformação da placa:

**Figura 6** – Elemento deformado conforme a teoria de Reissner



**Fonte:** O autor (2020).

Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) mostraram que as tensões nas faces superior e inferior da placa são dadas pela equação 3.16:

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= -q \text{ para } x_3 = -\frac{h}{2} \\ \sigma_{33} &= 0 \text{ para } x_3 = +\frac{h}{2} \\ \sigma_{\alpha 3} &= 0 \text{ para } x_3 = \pm\frac{h}{2}\end{aligned}\tag{3.16}$$

As tensões em função dos esforços unitários são dadas pela equação 3.17:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta} &= \frac{12M_{\alpha\beta}}{h^3} x_3 \\ \sigma_{\alpha 3} &= \frac{3Q_\alpha}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] = G\varepsilon_{\alpha 3} \\ \sigma_{33} &= \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{2x_3}{h} \right) \left[ 3 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \right\} q\end{aligned}\tag{3.17}$$

De forma análoga à teoria clássica, ao se realizar o equilíbrio do elemento diferencial pode-se encontrar as equações de equilíbrio 3.18:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha,\alpha} + q &= 0 \\ M_{\beta\alpha,\beta} - Q_{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Reissner (1945) definiu rotações e deslocamentos médios adotando que o trabalho ao longo da espessura, gerado pela multiplicação das tensões  $\sigma_{ij}$  e os deslocamentos  $u_3$  é igual ao produto dos esforços solicitantes  $M_{\alpha\beta}$ ,  $Q_{\alpha}$  pelos deslocamentos médios  $\varphi_{\beta}$ ,  $w$ :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} u_{\beta} dx_3 &= M_{\alpha\beta} \varphi_{\beta} \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} u_3 dx_3 &= Q_{\alpha} w \end{aligned} \quad (3.19)$$

Reissner (1945) definiu deslocamentos e rotações generalizados que são obtidos realizando-se uma média ponderada dos mesmos ao longo da espessura. Substituindo os esforços solicitantes na equação 3.19 pode-se obter a equação 3.20:

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} 12 \frac{M_{\alpha\beta}}{h^3} x_3 u_{\beta} dx_3 &= M_{\alpha\beta} \varphi_{\beta} \\ \int_{-h/2}^{h/2} 3 \frac{Q_{\alpha}}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] u_3 dx_3 &= Q_{\alpha} w \end{aligned} \quad (3.20)$$

Isolando-se os deslocamentos médios, é possível obter as equações:

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha} &= \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} u_{\alpha} x_3 dx_3 \\ w &= \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} u_3 \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] dx_3 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ao substituir as tensões de cisalhamento  $\sigma_{\alpha 3}$  nas equações 3.15, Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) mostraram as rotações em função da cortante ( a equação 3.22 também pode ser encontrada em Ribeiro (1976) ):

$$\varphi_\alpha = -w_{,\alpha} + \frac{h^2 Q_\alpha}{5D(1-\nu)} \quad (3.22)$$

Utilizando as relações tensão-deformação 3.15 pode-se expressar as tensões em função dos deslocamentos:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} = & \frac{E}{1-\nu^2} \frac{(1-\nu)}{2} \left( u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\theta,\theta} \delta_{\alpha\beta} - \frac{(1-\nu^2)}{(1+\nu)(1-\nu)} (u_{\alpha,\beta} + \nu u_{\beta,\alpha}) \right) \delta_{\alpha\beta} \\ & + \frac{E}{2(1+\nu)} (u_{\alpha,\beta} + \nu u_{\beta,\alpha}) - \frac{3q\nu}{4(1-\nu)} \left[ \frac{2}{3} - \frac{2x_3}{h} + \frac{1}{3} \left( \frac{2x_3}{h} \right)^3 \right] \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Os esforços solicitantes são encontrados integrando-se as tensões ao longo da espessura:

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 &= M_{\alpha\beta} \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3 &= Q_\alpha \end{aligned} \quad (3.24)$$

Como exemplo, pode-se substituir a equação 3.23 na equação 3.24 para encontrar os esforços solicitantes:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{12 \left( \frac{E}{1-\nu^2} (u_{1,1} + \nu u_{2,2}) - \frac{3q\nu}{4(1-\nu)} \left[ \frac{2}{3} - \frac{2x_3}{h} + \frac{1}{3} \left( \frac{2x_3}{h} \right)^3 \right] \right) x_3}{h^3} dx_3 \\ M_{11} &= D(\varphi_{1,1} + \nu \varphi_{2,2}) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \end{aligned} \quad (3.25)$$

Realizando-se a mesma operação para todas as tensões, obtêm-se as equações de momento e cortante:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \frac{D(1-\nu)}{2} \left( \varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \varphi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \\ Q_\alpha &= \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (\varphi_\alpha + w_{,\alpha}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Onde:

$$\lambda^2 = 12 \frac{k^2}{h^2} \quad (3.27)$$

$k^2$  é o fator de correção de cortante utilizado nas teorias de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante de primeira ordem, sendo que para a teoria de Reissner o valor de  $k^2$  é dado pela equação 3.28:

$$k^2_{Reissner} = \frac{5}{6} \quad (3.28)$$

Para a teoria de Mindlin,  $k^2$  é dado pela equação 3.29:

$$k^2_{Mindlin} = \frac{\pi^2}{12} \quad (3.29)$$

O sistema de equações diferenciais da teoria de placas de Reissner pode ser visto em Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), dado pela equação 3.30:

$$\begin{aligned} M_{11} &= -D(w_{,11} + \nu w_{,22}) + \frac{h^2}{5} Q_{1,1} - \frac{qh^2}{10} \frac{\nu}{(1-\nu)} \\ M_{22} &= -D(w_{,22} + \nu w_{,11}) + \frac{h^2}{5} Q_{2,2} - \frac{qh^2}{10} \frac{\nu}{(1-\nu)} \\ M_{12} &= D(1-\nu)w_{,12} - \frac{h^2}{10}(Q_{1,2} + Q_{2,1}) \\ Q_1 &= -D(\nabla^2 w)_{,1} + \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_1 - \frac{h^2}{10(1-\nu)} q_{,1} \\ Q_2 &= -D(\nabla^2 w)_{,2} + \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_2 - \frac{h^2}{10(1-\nu)} q_{,2} \\ D\Delta^2 w &= q - \frac{h^2(2-\nu)}{10(1-\nu)} \nabla^2 q \end{aligned} \quad (3.30)$$

## 4 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE ELEMENTOS DE CONTORNO À FLAMBAGEM DE PLACAS LEVANDO EM CONTA O EFEITO DA DEFORMAÇÃO POR CORTANTE

### 4.1 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

As equações integrais de contorno podem ser deduzidas utilizando-se métodos como o teorema da reciprocidade de Betti, conforme os trabalhos de Karam (1986) e Soares Jr. (2015) e o método dos resíduos ponderados, conforme Ribeiro (1992). A equação integral de contorno de deslocamentos para a flambagem de placas espessas foi inicialmente utilizada no método dos elementos de contorno por Purbolaksono e Aliabadi (2005), sendo dada pela equação 4.1:

$$\begin{aligned}
 C_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} [T_{ij}(x', x)u_j(x) - U_{ij}(x', x)t_j(x)]d\Gamma(x) \\
 = \iint_{\Omega} U_{i3}(x', X) \left[ q + \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} \left( N_{\alpha\beta} \frac{\partial u_3}{\partial X_{\beta}} \right) \right] d\Omega(X)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Onde  $T_{ij}$  e  $U_{ij}$  são as soluções fundamentais de forças de superfície e deslocamento dadas por Weeën (1982), respectivamente. O deslocamento transversal é dado por  $u_3$ . As solicitações na placa são dadas pela carga distribuída  $q$  e pela distribuição das tensões normais  $N_{\alpha\beta}$ . A nova proposta de Soares Jr. e Palermo Jr. (2017) aplica o teorema da divergência na integral de domínio da equação 4.1, obtendo-se apenas as primeiras derivadas do deslocamento transversal, conforme a equação 4.2:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} U_{i3}(x', X) \left[ \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} \left( N_{\alpha\beta} \frac{\partial u_3(X)}{\partial X_{\beta}} \right) \right] d\Omega(X) = \dots \\
 = \int_{\Gamma} n_{\alpha}(x)N_{\alpha\beta}(x)u_{3,\beta}(x)U_{i3}(x', x)d\Gamma(x) - \iint_{\Omega} N_{\alpha\beta}(X)u_{3,\beta}(X)U_{i3,\alpha}(x', X)d\Omega(X)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Substituindo a equação 4.2 na equação 4.1, obtém-se a equação integral dos deslocamentos que utiliza a primeira derivada dos deslocamentos transversais:

$$\begin{aligned}
& C_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} [T_{ij}(x', x)u_j(x) - U_{ij}(x', x)t_j(x)]d\Gamma(x) = \dots \\
& = \iint_{\Omega} q(X)U_{i3}(x', X)d\Omega(X) + \int_{\Gamma} n_{\alpha}(x)N_{\alpha\beta}(x)u_{3,\beta}(x)U_{i3}(x', x)d\Gamma(x) + \dots \quad (4.3) \\
& \quad - \iint_{\Omega} N_{\alpha\beta}(X)u_{3,\beta}(X)U_{i3,\alpha}(x', X)d\Omega(X)
\end{aligned}$$

Onde  $x'$  é um ponto fonte pertencente ao contorno,  $x$  é um ponto campo pertencente ao contorno,  $X'$  é um ponto fonte pertencente ao domínio e  $X$  é um ponto campo pertencente ao domínio. Observa-se a presença de duas integrais relacionadas ao efeito da não linearidade geométrica, uma integral de domínio e outra no contorno. A equação 4.3 mostra a proposta de Soares Jr. e Palermo Jr. (2017), ao utilizar a primeira derivada da solução fundamental ao invés da segunda, pode-se obter uma precisão maior dos resultados.

A segunda equação integral utilizada para se formar um problema de autovalor é dada pela primeira derivada do deslocamento perpendicular ao plano da placa, mostrada pela equação 4.4:

$$\begin{aligned}
u_{3,\gamma}(X') &= \int_{\Gamma} \left\{ n_{\alpha}(x) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [M_{3\alpha\beta}(X', x)]u_{\beta}(x) + n_{\beta}(x) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [Q_{3\beta}(X', x)]u_3(x) + \dots \right. \\
& \dots - \left. \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{3\beta}(X', x)]t_{\beta}(x) - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{33}(X', x)]t_3(x) \right\} d\Gamma(x) - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X_{\gamma}} [U_{33}(X', X)]q(X)d\Omega(X) \dots \quad (4.4) \\
& \dots - \int_{\Gamma} n_{\alpha}(x)N_{\alpha\beta}(x)u_{3,\beta}(x) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{33}(X', x)]d\Gamma(x) + \iint_{\Omega} N_{\alpha\beta}(X)u_{3,\beta}(X) \frac{\partial}{\partial X_{\gamma}} [U_{33,\alpha}(X', X)]d\Omega(X)
\end{aligned}$$

As duas equações 4.3 e 4.4 (a de deslocamento e de derivadas do deslocamento transversal), formam um problema de autovalor o qual a menor autovalor é dado pela carga crítica da placa analisada. Já foi demonstrada a estabilidade desta análise no trabalho de Soares Jr. e Palermo Jr. (2017), quando

utilizadas células de domínio para calcular as integrais de domínio. As equações 4.3 e 4.4 estão escritas de forma simplificada, pois não incluem as condições naturais do problema de flambagem, demonstradas em de Soares Jr. e Palermo Jr. (2017). Para incluir as condições naturais, o contorno  $\Gamma$  pode ser dividido em duas partes, uma pelo contorno com deslocamentos prescritos ( $\Gamma_p$  = borda simplesmente apoiada ou engastada) e outra pelo contorno com deslocamentos não prescritos ( $\Gamma_{np}$  = borda livre). Aplicando-se as condições naturais na equação 4.3 pode-se encontrar a equação 4.5:

$$\begin{aligned}
& C_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} [T_{ij}(x', x)u_j(x) - U_{ij}(x', x)t_j(x)]d\Gamma(x) = \dots \\
& = \iint_{\Omega} q(X)U_{i3}(x', X)d\Omega(X) + \int_{\Gamma} n_{\alpha}(x)N_{\alpha\beta}(x)u_{3,\beta}(x)U_{i3}(x', x)d\Gamma(x) + \dots \quad (4.5) \\
& - \int_{\Gamma_{np}} n_{\alpha}(x)N_{\alpha\beta}(x)u_{3,\beta}(x)U_{i3}(x', x)d\Gamma(x) - \iint_{\Omega} N_{\alpha\beta}(X)u_{3,\beta}(X)U_{i3,\alpha}(x', X)d\Omega(X)
\end{aligned}$$

Por meio da aplicação das condições naturais na equação 4.4 pode-se encontrar a equação 4.6:

$$\begin{aligned}
u_{3,\gamma}(X') &= \int_{\Gamma} \left\{ n_{\alpha}(x) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [M_{3\alpha\beta}(X', x)]u_{\beta}(x) + n_{\beta}(x) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [Q_{3\beta}(X', x)]u_3(x) + \dots \right. \\
&\dots - \left. \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{3\beta}(X', x)]t_{\beta}(x) - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{33}(X', x)]t_3(x) \right\} d\Gamma(x) - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X_{\gamma}} [U_{33}(X', X)]q(X)d\Omega(X) \dots \\
&\dots - \int_{\Gamma} n_{\alpha}(x)N_{\alpha\beta}(x)u_{3,\beta}(x) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{33}(X', x)]d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_{np}} n_{\alpha}(x)N_{\alpha\beta}(x)u_{3,\beta}(x) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{33}(X', x)]d\Gamma(x) \\
&\quad + \iint_{\Omega} N_{\alpha\beta}(X)u_{3,\beta}(X) \frac{\partial}{\partial X_{\gamma}} [U_{33,\alpha}(X', X)]d\Omega(X)
\end{aligned} \quad (4.6)$$

Em problemas com deslocamentos prescritos ( borda simplesmente apoiada ou engastada ) a aplicação das condições naturais não gera nenhuma diferença na solução do problema, mas quando o problema apresenta

deslocamentos não prescritos ( borda livre ) as soluções divergem caso não sejam aplicadas as condições naturais. A aplicação das condições naturais gera modificações no cálculo das integrais de contorno relacionadas com a não linearidade geométrica, necessitando a integração de uma integral de contorno adicional ao longo do contorno com deslocamentos não prescritos.

## 4.2 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA A EQUAÇÃO INTEGRAL DE DESLOCAMENTOS

As soluções fundamentais de deslocamentos utilizadas nas equações integrais 4.3 e 4.4 são dadas pela equação 4.7:

$$\begin{aligned}
 U_{\alpha\beta}^* &= \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \{ [8B(z) - (1-\nu)(2\ln(z) - 1)]\delta_{\alpha\beta} - [8A(z) + 2(1-\nu)]r_{,\alpha}r_{,\beta} \} \\
 U_{\alpha 3}^* &= -U_{3\alpha}^* = \frac{1}{8\pi D} (2\ln(z) - 1)rr_{,\alpha} \\
 U_{33}^* &= \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} [(1-\nu)z^2(\ln(z) - 1) - 8\ln(z)]
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

As soluções fundamentais de força de superfície utilizadas equações integrais 4.3 e 4.4 são dadas pela equação 4.8:

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\beta}^* &= -\frac{1}{4\pi r} \left[ (4A(z) + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\beta}r_{,n} + r_{,\beta}n_{\alpha}) + (4A(z) + 1 + \nu)r_{,\alpha}n_{\beta} \right. \\
 &\quad \left. - 2(8A(z) + 2zK_1 + 1 - \nu)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,n} \right] \\
 T_{\alpha 3}^* &= \frac{\lambda^2}{2\pi} (B(z)n_{\alpha} - A(z)r_{,\alpha}r_{,n}) \\
 T_{3\alpha}^* &= \frac{-(1-\nu)}{8\pi} \left[ \left( 2\frac{1+\nu}{1-\nu}\ln(z) - 1 \right) n_{\alpha} + 2r_{,\alpha}r_{,n} \right] \\
 T_{33}^* &= \frac{-1}{2\pi r} r_{,n}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Onde:

$$z = \lambda r; \quad A(z) = K_0(z) + \frac{2}{z} \left[ K_1(z) - \frac{1}{z} \right]; \quad B(z) = K_0(z) + \frac{1}{z} \left[ K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \tag{4.9}$$

As funções  $K_0(z)$  e  $K_1(z)$  são funções de Bessel modificadas de segunda espécie, para pequenos argumentos estas funções são mostradas nas equações 4.10 e 4.11:

$$\begin{aligned}
 K_0(z) = & \left[ -\gamma - \ln\left(\frac{z}{2}\right) \right] + \left[ -\gamma + -\ln\left(\frac{z}{2}\right) \right] \frac{(z^2/4)}{(1!)^2} \\
 & + \left[ -\gamma + 1 + \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{z}{2}\right) \right] \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} \\
 & + \left[ -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ln\left(\frac{z}{2}\right) \right] \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
 K_1(z) = & \frac{1}{z} - \left[ -\gamma + \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{z}{2}\right) \right] \frac{(z^2/4)^{1/2}}{0! \cdot 1!} \\
 & - \left[ -\gamma + 1 + \frac{1}{4} - \ln\left(\frac{z}{2}\right) \right] \frac{(z^2/4)^{3/2}}{1! \cdot 2!} \\
 & - \left[ -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \ln\left(\frac{z}{2}\right) \right] \frac{(z^2/4)^{5/2}}{2! \cdot 3!} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Onde  $\gamma$  é a constante de EULER:

$$\gamma = 0,5772156649 \tag{4.12}$$

As derivadas dos termos das soluções fundamentais são dadas por 4.13:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x_\alpha} &= \lambda r_{,\alpha} \\
 \frac{\partial r_{,\alpha}}{\partial x_\beta} &= \frac{\delta_{\alpha\beta} - r_{,\alpha} r_{,\beta}}{r} \\
 \frac{\partial r_{,n}}{\partial x_\gamma} &= \frac{n_\gamma - r_{,n} r_{,\gamma}}{r} \\
 \frac{\partial A}{\partial x_\alpha} &= -\frac{r_{,\alpha}}{r} (zK_1 + 2A) \\
 \frac{\partial B}{\partial x_\alpha} &= -\frac{r_{,\alpha}}{r} (zK_1 + A)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

## 5 APLICAÇÃO DO MÉTODO DA RECIPROCIDADE DUAL

O tratamento adicional dado por este trabalho é a conversão das integrais de domínio para integrais de contorno equivalentes utilizando-se o Método da Reciprocidade Dual (MRD), apresentado por Nardini e Brebbia (1983).

O método tem base na aproximação das cargas de domínio por uma função radial, onde a escolha da função é dada como livre pelos autores do método. Existem diversos tipos de função de aproximação, como as funções lineares, quadráticas, multiquadráticas, “*thin plate splines*”, exponenciais, entre outras.

No presente trabalho, é feita a aproximação das tensões normais multiplicadas pelas derivadas dos deslocamentos transversais por uma função de base radial escolhida, da forma mostrada pelas equações 5.1 e 5.2:

$$b_{\theta}(X) = N_{\theta\beta}(X)u_{3,\beta}(X) \quad (5.1)$$

$$b_{\theta}(X) = \sum_{m=1}^{N+L} \alpha_{\theta}^m f^m \quad (5.2)$$

A aproximação do produto das tensões normais obtidas pelo problema de estado plano pelas derivadas do deslocamento transversal é feita distribuindo pontos de MRD ao longo do contorno (N) e domínio (L) do problema.

Cada linha do sistema de equações é obtida fixando um ponto fonte e variando-se a distância  $r$  com relação à todos os outros pontos de MRD, avaliando a função radial em cada raio diferente.

Como os valores das tensões normais e as derivadas dos deslocamentos transversais são conhecidos, seus valores nodais são utilizados como referência para aproximação. As incógnitas deste sistema são os valores de  $\alpha_{\theta}^m$  necessários para aplicação do MRD.

$$[F][\alpha_{\theta}^m] = [N_{\alpha\beta}u_{3,\beta}] \quad (5.3)$$

Segundo o sistema na equação 5.3, os coeficientes  $\alpha_{\theta}^m$  são dados pela equação 5.4:

$$[\alpha_{\theta}^m] = [N_{\theta\beta} u_{3,\beta}] [F]^{-1} \quad (5.4)$$

O MRD também necessita de soluções particulares  $\hat{u}_i$  as quais são obtidas substituindo-se na equação diferencial do problema o valor da carga distribuída no domínio pela função de base radial  $f(r)$  escolhida, isto é mostrado pelas equações 5.5 até 5.7. A equação diferencial de equilíbrio de placas espessas pode ser encontrada em Palermo Jr. (2000).

$$\nabla^2(\nabla^2\phi) = \frac{1}{D} f(r) \quad (5.5)$$

$$\nabla^2(\hat{u}_3) = \frac{2}{D(1-\nu)\lambda^2} f(r) - \nabla^2\phi \quad (5.6)$$

$$\hat{u}_{\alpha} = \phi_{,\alpha} \quad (5.7)$$

As funções de aproximação testadas no presente trabalho são dadas pelas equações 5.8 e 5.9:

$$F1 \Rightarrow f(r) = 1 + r \quad (5.8)$$

$$F2 \Rightarrow f(r) = 1 + r + r^2 + r^3 \quad (5.9)$$

Resolvendo-se as equações de diferenciais 5.5 e 5.6 para as funções  $f(r)$  das equações 5.8 e 5.9, obtêm-se as soluções particulares de deslocamentos  $\hat{u}_i$ , dadas pelas equações 5.10 e 5.11:

$$f^m = 1 + r \Rightarrow \begin{cases} \hat{u}_\alpha^m = \frac{1}{D} \left( \frac{r^3}{16} + \frac{r^4}{45} \right) r_\alpha \\ \hat{u}_3^m = \frac{2}{D(1-\nu)\lambda^2} \left( \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} \right) - \frac{1}{D} \left( \frac{r^4}{64} + \frac{r^5}{225} \right) \end{cases} \quad (5.10)$$

$$f^m = 1 + r + r^2 + r^3 \Rightarrow \begin{cases} \hat{u}_\alpha^m = \frac{1}{D} \left( \frac{r^3}{16} + \frac{r^4}{45} + \frac{r^5}{96} + \frac{r^6}{175} \right) r_\alpha \\ \hat{u}_3^m = \frac{2}{D(1-\nu)\lambda^2} \left( \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} + \frac{r^4}{16} + \frac{r^5}{25} \right) - \frac{1}{D} \left( \frac{r^4}{64} + \frac{r^5}{225} + \frac{r^6}{576} + \frac{r^7}{1225} \right) \end{cases} \quad (5.11)$$

Multiplicando as soluções particulares de momento e cortante pelos cossenos diretores encontra-se as soluções particulares de forças de superfície dadas pelas equações 5.12 e 5.13:

$$\hat{t}_\alpha = \hat{M}_{\alpha\beta} n_\beta \quad (5.12)$$

$$\hat{t}_3 = \hat{Q}_\beta n_\beta \quad (5.13)$$

Em que momentos e cortantes são dados pelas equações 5.14 e 5.15:

$$f^m = 1 + r \Rightarrow \begin{cases} \hat{M}_{11} = \left( \frac{r^2}{8} + \frac{r^3}{15} \right) (r_{,1}^2 + \nu r_{,2}^2) + \left( \frac{r^2}{16} + \frac{r^3}{45} \right) (1 + \nu) \\ \hat{M}_{22} = \left( \frac{r^2}{8} + \frac{r^3}{15} \right) (r_{,2}^2 + \nu r_{,1}^2) + \left( \frac{r^2}{16} + \frac{r^3}{45} \right) (1 + \nu) \\ \hat{M}_{12} = \hat{M}_{21} = (1 - \nu) \left( \frac{r^2}{8} + \frac{r^3}{15} \right) r_{,1} r_{,2} \\ \hat{Q}_1 = \left( \frac{r}{2} + \frac{r^2}{3} \right) r_{,1} \\ \hat{Q}_2 = \left( \frac{r}{2} + \frac{r^2}{3} \right) r_{,2} \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned}
& f^m = 1 + r + r^2 + r^3 \\
\Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
\widehat{M}_{11} &= \left( \frac{r^2}{8} + \frac{r^3}{15} + \frac{r^4}{24} + \frac{r^5}{35} \right) (r_{,1}^2 + \nu r_{,2}^2) + \left( \frac{r^2}{16} + \frac{r^3}{45} + \frac{r^4}{96} + \frac{r^5}{175} \right) (1 + \nu) \\
\widehat{M}_{22} &= \left( \frac{r^2}{8} + \frac{r^3}{15} + \frac{r^4}{24} + \frac{r^5}{35} \right) (r_{,2}^2 + \nu r_{,1}^2) + \left( \frac{r^2}{16} + \frac{r^3}{45} + \frac{r^4}{96} + \frac{r^5}{175} \right) (1 + \nu) \\
\widehat{M}_{12} = \widehat{M}_{21} &= (1 - \nu) \left( \frac{r^2}{8} + \frac{r^3}{15} + \frac{r^4}{24} + \frac{r^5}{35} \right) r_{,1} r_{,2} \\
\widehat{Q}_1 &= \left( \frac{r}{2} + \frac{r^2}{3} + \frac{r^3}{4} + \frac{r^4}{5} \right) r_{,1} \\
\widehat{Q}_2 &= \left( \frac{r}{2} + \frac{r^2}{3} + \frac{r^3}{4} + \frac{r^4}{5} \right) r_{,2}
\end{aligned} \right. \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Utilizando as soluções particulares, observa-se a equação integral dos deslocamentos dada pela equação 4.3, na maioria dos trabalhos a aplicação do MRD é direta, utilizando-se as matrizes formadas pelas soluções fundamentais de força de superfície e deslocamentos para aproximar a integral de domínio. Como neste trabalho a solução fundamental da integral de domínio da equação 4.3 é dada pela primeira derivada dos deslocamentos ( $U_{i3,\gamma}$ ), o MRD será aplicado utilizando a derivada da equação integral de deslocamentos. A equação 5.16 mostra a derivada da equação integral de deslocamentos já com as soluções particulares e a aproximação das tensões normais multiplicadas pelas derivadas dos deslocamentos transversais por uma função radial:

$$\begin{aligned}
c\hat{u}_{i,\theta}^m(x') &= \int_{\Gamma} [n_{\alpha}(x)M_{i\alpha\beta,\theta}(x',x)\hat{u}_{\beta}^m(x) + n_{\beta}(x)Q_{i\beta,\theta}(x',x)\hat{u}_{3}^m(x) + \dots \\
&\dots - U_{i\beta,\theta}(x',x)\hat{t}_{\beta}^m(x) - U_{i3,\theta}(x',x)\hat{t}_{3}^m(x)]d\Gamma(x) - \iint_{\Omega} f^m(X)U_{i3,\theta}(x',X)d\Omega(X)
\end{aligned} \quad (5.16)$$

O coeficiente escalar  $c$  é igual a 1 caso o ponto fonte esteja no domínio e igual a 0.5 caso o ponto fonte esteja em uma parte suave do contorno. Isolando a integral de domínio da equação 5.16 e substituindo na equação integral dos deslocamentos 4.3 obtêm-se a equação 5.17:

$$\begin{aligned}
& C_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} [T_{ij}(x', x)u_j(x) - U_{ij}(x', x)t_j(x)]d\Gamma(x) = \dots \\
& = \int_{\Gamma} n_{\alpha}(x)N_{\alpha\beta}(x)u_{3,\beta}(x)U_{i3}(x', x)d\Gamma(x) + \sum_{m=1}^{N+L} \alpha_{\theta}^m \{c\hat{u}_{i,\theta}^m(x') + \dots \\
& \dots \dots \dots - \int_{\Gamma} [n_{\alpha}(x)M_{i\alpha\beta,\theta}(x', x)\hat{u}_{\beta}^m(x) + n_{\beta}(x)Q_{i\beta,\theta}(x', x)\hat{u}_{3}^m(x) + \dots \\
& \dots - U_{i\beta,\theta}(x', x)\hat{t}_{\beta}^m(x) - U_{i3,\theta}(x', x)\hat{t}_{3}^m(x)]d\Gamma(x)\}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

A equação 5.17 é dada pela equação integral dos deslocamentos com aproximação da integral de domínio utilizando o MRD. O termo diagonal  $\hat{u}_{i,\theta}^m$  é dado pela primeira derivada das soluções particulares de deslocamento dadas pelas equações 5.18 e 5.19:

$$\begin{aligned}
& f^m = 1 + r \Rightarrow \\
& \begin{cases} \hat{u}_{\alpha,\gamma} = \frac{1}{D} \left( \frac{3r^2}{16} + \frac{4r^3}{45} \right) r_{,\alpha} r_{,\gamma} + \frac{1}{D} \left( \frac{r^3}{16} + \frac{r^4}{45} \right) \left( \frac{\delta_{\alpha\gamma} - r_{,\alpha} r_{,\gamma}}{r} \right) \\ \hat{u}_{3,\gamma} = \frac{2}{D(1-\nu)\lambda^2} \left( \frac{r}{2} + \frac{r^2}{3} \right) r_{,\gamma} - \frac{1}{D} \left( \frac{r^3}{16} + \frac{r^4}{45} \right) r_{,\gamma} \end{cases} \tag{5.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f^m = 1 + r + r^2 + r^3 \Rightarrow \\
& \begin{cases} \hat{u}_{\alpha,\gamma} = \frac{1}{D} \left( \frac{3r^2}{16} + \frac{4r^3}{45} + \frac{5r^4}{96} + \frac{6r^5}{175} \right) r_{,\alpha} r_{,\gamma} + \frac{1}{D} \left( \frac{r^3}{16} + \frac{r^4}{45} + \frac{r^5}{96} + \frac{r^6}{175} \right) \left( \frac{\delta_{\alpha\gamma} - r_{,\alpha} r_{,\gamma}}{r} \right) \\ \hat{u}_{3,\gamma} = \frac{2}{D(1-\nu)\lambda^2} \left( \frac{r}{2} + \frac{r^2}{3} + \frac{r^3}{4} + \frac{r^4}{5} \right) r_{,\gamma} - \frac{1}{D} \left( \frac{r^3}{16} + \frac{r^4}{45} + \frac{r^5}{96} + \frac{r^6}{175} \right) r_{,\gamma} \end{cases} \tag{5.19}
\end{aligned}$$

As derivadas primeiras das soluções fundamentais de força de superfície são hypersingulares. Para diminuir o grau de singularidade destas soluções fundamentais foi utilizado o operador tangente estudado em Palermo Jr. (2012). Reduzindo-se as integrais hypersingulares para integrais do tipo Cauchy e as integrais do tipo Cauchy se tornaram singulares logarítmicas. A derivada da equação integral dos deslocamentos transversais, com a aplicação do operador tangente fica conforme a equação 5.20:

$$\begin{aligned}
u_{3,\gamma}(X') &= \int_{\Gamma} \left\{ M_{3\alpha\beta}(X', x) D_{\gamma\alpha} [u_{\beta}(x)] + Q_{3\beta} n_{\gamma} u_{\beta}(x) + Q_{3\beta}(X', x) D_{\beta\gamma} [u_{\beta}(x)] + \dots \right. \\
&\dots - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{3\beta}(X', x)] t_{\beta}(x) - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{33}(X', x)] t_3(x) \left. \right\} d\Gamma(x) - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X_{\gamma}} [U_{33}(X', X)] q(X) d\Omega(X) + \dots \quad (5.20) \\
&\dots - \int_{\Gamma} n_{\alpha}(x) N_{\alpha\beta}(x) u_{3,\beta}(x) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{33}(X', x)] d\Gamma(x) + \iint_{\Omega} N_{\alpha\beta}(X) u_{3,\beta}(X) \frac{\partial}{\partial X_{\gamma}} [U_{33,\alpha}(X', X)] d\Omega(X)
\end{aligned}$$

A derivada da equação integral dos deslocamentos nos eixos  $x_1$  e  $x_2$ , com a aplicação do operador tangente fica conforme a equação 5.21:

$$\begin{aligned}
u_{\rho,\gamma}(X') &= \int_{\Gamma} \left\{ M_{\rho\alpha\beta}(X', x) D_{\gamma\alpha} [u_{\beta}(x)] + n_{\gamma} Q_{\rho\beta}(X', x) u_{\beta}(x) + n_{\beta} \frac{\partial}{\partial X_{\gamma}} [Q_{\rho\beta}(X', x)] u_3(x) \dots \right. \\
&\dots - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{3\beta}(X', x)] t_{\beta}(x) - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{33}(X', x)] t_3(x) \left. \right\} d\Gamma(x) - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X_{\gamma}} [U_{\rho 3}(X', X)] q(X) d\Omega(X) + \dots \quad (5.21) \\
&\dots - \int_{\Gamma} n_{\alpha}(x) N_{\alpha\beta}(x) u_{3,\beta}(x) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{\rho 3}(X', x)] d\Gamma(x) + \iint_{\Omega} N_{\alpha\beta}(X) u_{3,\beta}(X) \frac{\partial}{\partial X_{\gamma}} [U_{\rho 3,\alpha}(X', X)] d\Omega(X)
\end{aligned}$$

As primeiras derivadas das soluções fundamentais são dadas pelas equações 5.22-5.32:

$$\begin{aligned}
U_{\alpha\beta,\gamma}^* &= \frac{1}{4\pi D(1-\nu)r} \left\{ -(4A(z) + 4zK_1(z) + 1 - \nu) r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2(8A(z) + 2zK_1(z) + 1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right. \\
&\quad \left. - (4A(z) + 1 - \nu) (\delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} + r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma}) \right\} \quad (5.22)
\end{aligned}$$

$$U_{\alpha 3,\gamma}^* = -U_{3\alpha,\gamma}^* = \frac{1}{8\pi D} (\delta_{\alpha\gamma} (2 \ln(z) - 1) + 2r_{,\gamma} r_{,\alpha}) \quad (5.23)$$

$$U_{33,\gamma}^* = \frac{1}{4\pi D} \left( \ln(z) - \frac{1}{2} \right) r r_{,\gamma} - \frac{1}{\pi D(1-\nu)\lambda^2 r} r_{,\gamma} \quad (5.24)$$

$$\int_{\Gamma} T_{\rho\beta,\gamma} u_{\beta} d\Gamma = \int_{\Gamma} Q_{\rho\beta} n_{\gamma} u_{\beta} + M_{\rho\alpha\beta} D_{\gamma\alpha} [u_{\beta}] d\Gamma + [e_{3\alpha\gamma} M_{\rho\alpha\beta} u_{\beta}]_0^{\Gamma} \quad (5.25)$$

$$\int_{\Gamma} T_{3\beta,\gamma} u_{\beta} d\Gamma = \int_{\Gamma} Q_{3\beta} n_{\gamma} u_{\beta} + M_{3\alpha\beta} D_{\gamma\alpha} [u_{\beta}] d\Gamma + [e_{3\alpha\gamma} M_{3\alpha\beta} u_{\beta}]_0^{\Gamma} \quad (5.26)$$

$$\int_{\Gamma} T_{33,\gamma} u_3 d\Gamma = \int_{\Gamma} Q_{3\beta} D_{\gamma\beta} [u_3] d\Gamma + [e_{3\beta\gamma} Q_{3\beta} u_3]_0^{\Gamma} \quad (5.27)$$

$$T_{\alpha 3,\gamma}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi r} \left( -(zK_1(z) + A(z)) r_{,\gamma} n_{\alpha} + (zK_1(z) + 4A(z)) r_{,\gamma} r_{,\alpha} r_{,n} - A(z) r_{,n} \delta_{\alpha\gamma} - A(z) r_{,\alpha} n_{\gamma} \right) \quad (5.28)$$

Onde:

$$M_{\rho\alpha\beta} = -\frac{1}{\pi r} \left[ \left( \frac{zK_1(z)}{2} + \frac{1-v}{4} + A(z) \right) [(\delta_{\rho\beta} - 2r_{,\beta} r_{,\rho}) r_{,\alpha} + \delta_{\rho\alpha} r_{,\beta}] + \frac{1+v}{4} \delta_{\alpha\beta} r_{,\rho} + A(z) (\delta_{\alpha\beta} r_{,\rho} - 2r_{,\beta} r_{,\rho} r_{,\alpha}) \right] \quad (5.29)$$

$$Q_{\rho\beta} = \frac{\lambda^2}{2\pi} [B(z) \delta_{\rho\beta} - A(z) r_{,\beta} r_{,\rho}] \quad (5.30)$$

$$M_{3\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} \left[ (1+v) \delta_{\alpha\beta} \ln(z) + (1-v) \left( r_{,\alpha} r_{,\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \right) \right] \quad (5.31)$$

$$Q_{3\beta} = -\frac{1}{2\pi r} r_{,\beta} \quad (5.32)$$

Onde  $e_{3\alpha\gamma}$  é o tensor alternante dado pela equação 5.33:

$$e_{3\alpha\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{se } 3\alpha\gamma = 123, 231, 312 \\ 0 & \text{se dois indices forem iguais} \\ -1 & \text{se } 3\alpha\gamma = 321, 213, 132 \end{cases} \quad (5.33)$$

As integrais do tipo Cauchy foram calculadas utilizando o método da subtração de singularidade dado por Guiggiani (1991) e as integrais logarítmicas

foram calculadas utilizando a técnica da transformação de Telles, abordada em Telles (1987).

Para aproximar a integral de domínio da equação integral da derivada dos deslocamentos transversais deve-se utilizar a segunda derivada das soluções fundamentais de forças de superfície e deslocamentos, uma vez que a solução fundamental da integral de domínio da equação 4.4 é dada pela segunda derivada dos deslocamentos transversais ( $U_{33,\gamma\theta}$ ). Devido à essa diferença, uma equação integral da segunda derivada dos deslocamentos transversais torna-se necessária para utilizar o MRD:

$$c\hat{u}_{3,\gamma\theta}^m(x') + \int_{\Gamma} [n_{\alpha}(x)M_{3\alpha\beta,\gamma\theta}(x',x)\hat{u}_{\beta}^m(x) + n_{\beta}(x)Q_{3\beta,\gamma\theta}(x',x)\hat{u}_3^m(x) + \dots \dots - U_{3\beta,\gamma\theta}(x',x)\hat{t}_{\beta}^m(x) - U_{33,\gamma\theta}(x',x)\hat{t}_3^m(x)]d\Gamma(x) = \iint_{\Omega} f^m(X)U_{33,\gamma\theta}(x',X)d\Omega(X) \quad (5.34)$$

Utilizando a equação 5.34 pode-se introduzir o MRD na equação integral da derivada dos deslocamentos transversais 4.4, obtendo-se a equação 5.35:

$$gu_{3,\gamma}(x') = \int_{\Gamma} \{n_{\alpha}(x)M_{3\alpha\beta,\gamma}(x',x)u_{\beta}(x) + n_{\beta}(x)Q_{3\beta,\gamma}(x',x)u_3(x) + \dots \dots - U_{3\beta,\gamma}(x',x)t_{\beta}(x) - U_{33,\gamma}(x',x)t_3(x)\}d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} n_{\alpha}(x)N_{\alpha\beta}(x)u_{3,\beta}(x)U_{i3,\gamma}(x',x)d\Gamma(x) + \dots \dots + \sum_{m=1}^{N+L} \alpha_{\theta}^m \left\{ c\hat{u}_{3,\gamma\theta}^m(x') + \int_{\Gamma} [n_{\alpha}(x)M_{3\alpha\beta,\gamma\theta}(x',x)\hat{u}_{\beta}^m(x) + n_{\beta}(x)Q_{3\beta,\gamma\theta}(x',x)\hat{u}_3^m(x) + \dots \dots - U_{3\beta,\gamma\theta}(x',x)\hat{t}_{\beta}^m(x) - U_{33,\gamma\theta}(x',x)\hat{t}_3^m(x)]d\Gamma(x) \right\} \quad (5.35)$$

O coeficiente 'g' tem valor de 1 quando o ponto fonte encontra-se no domínio e 0.5 quando o ponto fonte situa-se em uma parte suave do contorno. O termo diagonal  $\hat{u}_{3,\gamma\theta}^m$  é dado pela segunda derivada das soluções particulares de deslocamento dadas pelas equações 5.36 e 5.37:

$$f^m = 1 + r \Rightarrow \left\{ \hat{u}_{3,\alpha\gamma} = \frac{2}{D(1-\nu)\lambda^2} \left( \frac{1}{3} r r_{,\alpha} r_{,\gamma} + \frac{\delta_{\alpha\gamma}}{2} + \frac{r \delta_{\alpha\gamma}}{3} \right) - \frac{1}{D} \left( \frac{1}{8} r^2 r_{,\alpha} r_{,\gamma} + \frac{1}{15} r^3 r_{,\alpha} r_{,\gamma} + \frac{1}{16} r^2 \delta_{\alpha\gamma} + \frac{1}{45} r^3 \delta_{\alpha\gamma} \right) \right. \quad (5.36)$$

$$f^m = 1 + r + r^2 + r^3 \Rightarrow \left\{ \hat{u}_{3,\alpha\gamma} = \frac{2}{D(1-\nu)\lambda^2} \left[ \left( \frac{4r^3}{5} + \frac{3r^2}{4} + \frac{2r}{3} + \frac{1}{2} \right) r_{,\alpha} r_{,\gamma} + \left( \frac{r^4}{5} + \frac{r^3}{4} + \frac{r^2}{3} + \frac{r}{2} \right) \left( \frac{\delta_{\alpha\gamma} - r_{,\alpha} r_{,\gamma}}{r} \right) \right] + \dots \right. \quad (5.37)$$

$$\left. + \dots - \frac{1}{D} \left[ \left( \frac{3r^2}{16} + \frac{4r^3}{45} + \frac{5r^4}{96} + \frac{6r^5}{175} \right) r_{,\alpha} r_{,\gamma} + \left( \frac{r^3}{16} + \frac{r^4}{45} + \frac{r^5}{96} + \frac{r^6}{175} \right) \left( \frac{\delta_{\alpha\gamma} - r_{,\alpha} r_{,\gamma}}{r} \right) \right] \right.$$

As derivadas segundas das soluções fundamentais de forças de superfície e deslocamentos são dadas pelas equações 5.38-5.41:

$$T_{33,\gamma\theta}^* = \frac{1}{\pi r^3} \left( r_{,\theta} n_{\gamma} + \delta_{\gamma\theta} r_{,n} + n_{\theta} r_{,\gamma} - 4r_{,n} r_{,\theta} r_{,\gamma} \right) \quad (5.38)$$

$$T_{3\alpha,\gamma\theta}^* = \frac{-(1-\nu)}{8\pi r^2} \left[ 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \left( \delta_{\gamma\theta} - 4r_{,\gamma} r_{,\theta} \right) n_{\alpha} + \delta_{\alpha\gamma} \left( -4r_{,\theta} r_{,n} + 2n_{\theta} \right) - 4r_{,\theta} r_{,\alpha} n_{\gamma} \right. \quad (5.39)$$

$$\left. + 16r_{,\theta} r_{,\alpha} r_{,n} r_{,\gamma} + \delta_{\alpha\theta} \left( -4r_{,n} r_{,\gamma} + 2n_{\gamma} \right) - 4n_{\theta} r_{,\alpha} r_{,\gamma} - 4r_{,\alpha} r_{,n} \delta_{\gamma\theta} \right]$$

$$U_{33,\gamma\theta}^* = \frac{1}{4\pi D} \left( r_{,\theta} r_{,\gamma} + \ln(z) \delta_{\gamma\theta} - \frac{1}{2} \delta_{\gamma\theta} \right) - \frac{1}{\pi D (1-\nu) \lambda^2 r^2} \left( \delta_{\gamma\theta} - 2r_{,\gamma} r_{,\theta} \right) \quad (5.40)$$

$$U_{3\alpha,\gamma\theta}^* = \frac{1}{8\pi D r} \left( -2\delta_{\alpha\gamma} r_{,\theta} - 2\delta_{\gamma\theta} r_{,\alpha} - 2r_{,\gamma} \delta_{\alpha\theta} + 4r_{,\gamma} r_{,\alpha} r_{,\theta} \right) \quad (5.41)$$

O grau de singularidade destas soluções fundamentais é supersingular para  $T_{33,\gamma\theta}$  e hypersingular para as soluções  $T_{3\alpha,\gamma\theta}$  e  $U_{33,\gamma\theta}$ . Inicialmente, para tratar simultaneamente estas integrais, foi utilizado o código em Fortran fornecido por Gao (2006), mas notou-se que o método de Gao não apresentava uma precisão suficiente para o MRD em integrais supersingulares calculadas em elementos curvos, isto foi verificado em problemas com furo circular.

Para melhorar a precisão da integração em elementos curvos utilizou-se novamente o operador tangente, diminuindo o grau das singularidades de supersingular para hypersingular, as quais não apresentaram problemas em

elementos curvos quando utilizado o método de Gao. A aplicação do operador tangente é feita derivando-se o núcleo das soluções fundamentais obtidas nas equações 5.25, 5.26 e 5.27. As integrais com operador tangente utilizadas no MRD para segunda derivada das soluções fundamentais são dadas pelas equações 5.42 e 5.43:

$$\int_{\Gamma} T_{3\beta,\gamma\theta} u_{\beta} d\Gamma = \int_{\Gamma} M_{3\alpha\beta,\theta} D_{\gamma\alpha} [u_{\beta}] + Q_{3\beta,\theta} n_{\gamma} u_{\beta} d\Gamma + [e_{3\alpha\gamma} M_{3\alpha\beta,\theta} u_{\beta}]_0^{\Gamma} \quad (5.42)$$

$$\int_{\Gamma} T_{33,\gamma\theta} u_3 d\Gamma = \int_{\Gamma} Q_{3\beta,\theta} D_{\gamma\beta} [u_3] d\Gamma + [e_{3\beta\gamma} Q_{3\beta,\theta} u_3]_0^{\Gamma} \quad (5.43)$$

Onde:

$$M_{3\alpha\beta,\theta} = -\frac{1}{4\pi r} [(1 + \nu)\delta_{\alpha\beta} r_{,\theta} + (1 - \nu)(\delta_{\alpha\theta} - r_{,\alpha} r_{,\theta}) r_{,\beta} + (1 - \nu)(\delta_{\beta\theta} - r_{,\beta} r_{,\theta}) r_{,\alpha}] \quad (5.44)$$

$$Q_{3\beta,\theta} = -\frac{1}{2\pi r^2} (-2r_{,\beta} r_{,\theta} + \delta_{\beta\theta}) \quad (5.45)$$

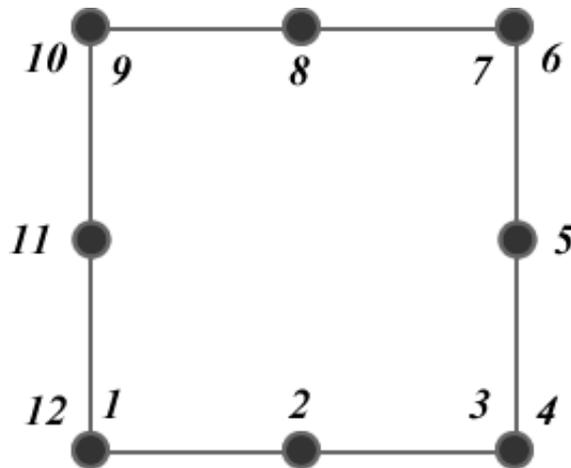
O desenvolvimento da aplicação do operador tangente é realizado no capítulo 7.

## 6 A APLICAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

### 6.1 DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA EM ELEMENTOS QUADRÁTICOS

Utilizando-se as equações integrais de contorno 4.3 e 4.4 é possível aplicar o método dos elementos de contorno de forma numérica. No presente trabalho, o contorno é discretizado utilizando-se elementos de contorno quadráticos. A Figura 7 mostra um problema de placa discretizado com 4 elementos de contorno quadráticos:

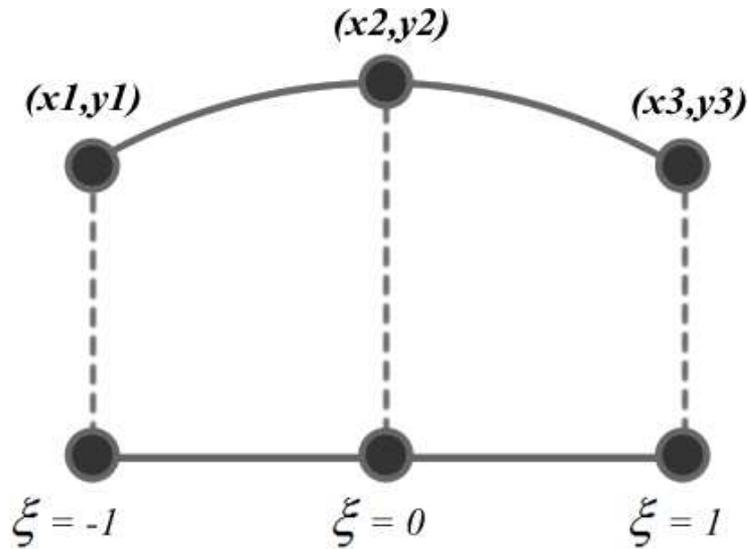
**Figura 7** – Discretização de um problema de placa



**Fonte:** O autor (2020).

As integrais das equações 4.3 e 4.4 tornam-se somatórios da contribuição da integração de cada elemento de contorno. Para integrar cada elemento, as coordenadas cartesianas são convertidas para coordenadas intrínsecas, isto possibilita o uso de técnicas de integração numéricas com maior facilidade. Segundo Kane (1994), para elementos quadráticos, as funções a serem integradas no método dos elementos de contorno podem ser consideradas complexas, isto faz com que a obtenção de uma solução utilizando integração analítica seja difícil. Devido à este problema, o processo de integração dos elementos de contorno adotado no presente trabalho foi a integração numérica de Gauss, com tratamento para integrais singulares quando necessário. A Figura 8 mostra o processo de conversão de coordenadas cartesianas para coordenadas intrínsecas:

**Figura 8** – Mudança de coordenadas para o elemento isoparamétrico



**Fonte:** O autor (2020).

Desenvolvendo-se a equação 4.3 em soma de integrais estendidas aos elementos de contorno, utilizando-se elementos quadráticos e células de domínio pode-se encontrar a equação 6.1:

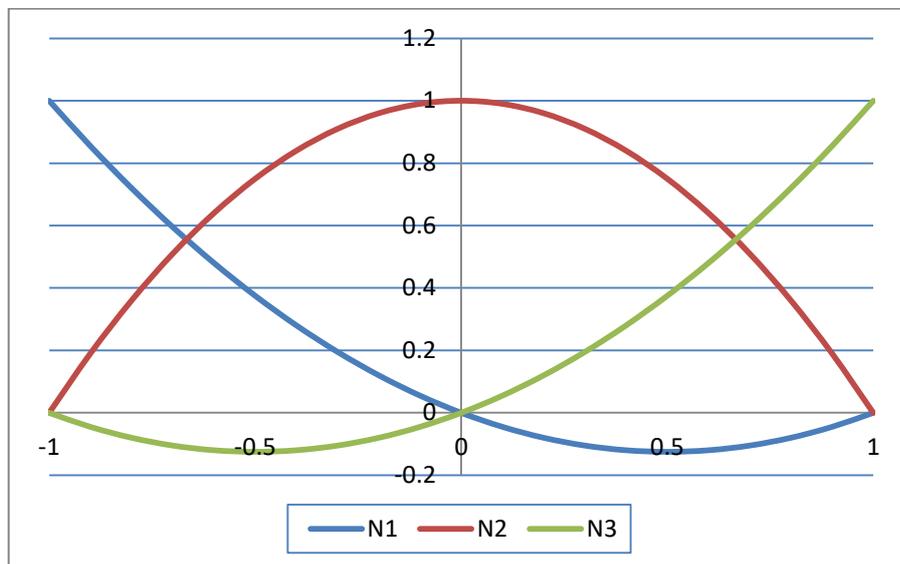
$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} C_{ij}(x') u_j(x') + \sum_{n=1}^{Nelem} \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^1 [T_{ij}(x', x) u_j(x) - U_{ij}(x', x) t_j(x)] N_k(\xi) J(\xi) d\xi = \dots \\
 = \sum_{n=1}^{Nelem} \int_{-1}^1 n_\alpha(x) N_{\alpha\beta}(x) u_{3,\beta}(x) U_{i3}(x', x) J(\xi) d\xi + \dots \\
 - \sum_{c=1}^{Ncel} \iint_{\Omega_c} N_{\alpha\beta}(X) u_{3,\beta}(X) U_{i3,\alpha}(x', X) d\Omega_c(X)
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

As funções de forma para a utilização de elementos quadráticos são dadas pela equação 6.2.

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\
 N_2(\xi) &= (\xi + 1)(1 - \xi) \\
 N_3(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

Na Figura 9 pode-se ver a plotagem das funções de forma ao longo da coordenada intrínseca.

**Figura 9** – Plotagem das funções de forma



**Fonte:** O autor (2020).

As coordenadas \$x\$ e \$y\$ dos elementos de contorno são convertidas para a coordenada intrínseca \$\xi\$ realizando-se o somatório dos nós do elemento multiplicados pelas funções de forma.

$$\begin{aligned}
 x(\xi) &= \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)x_i \\
 y(\xi) &= \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)y_i
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

Expandindo-se o somatório da equação 6.3 pode-se encontrar a equação 6.4:

$$\begin{aligned}x(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)x_1 + (\xi + 1)(1 - \xi)x_2 + \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)x_3 \\y(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)y_1 + (\xi + 1)(1 - \xi)y_2 + \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)y_3\end{aligned}\tag{6.4}$$

Na equação 6.4,  $x_1$  é a coordenada  $x$  do primeiro nó do elemento de contorno,  $x_2$  é a coordenada  $x$  do nó central e  $x_3$  é a coordenada  $x$  do nó final. Análogamente para a coordenada  $y$  dos nós do elemento de contorno define-se  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ . Apartir das funções  $x(\xi)$  e  $y(\xi)$  pode-se definir as parcelas da solução fundamental a ser integrada, na equação 6.5 mostra-se a componente  $x$  do raio  $r(\xi)$ :

$$dx(\xi) = x(\xi) - xf\tag{6.5}$$

Em que  $xf$  é a coordenada  $x$  do ponto fonte. Na equação 6.6 mostra-se a componente  $y$  do raio  $r(\xi)$ :

$$dy(\xi) = y(\xi) - yf\tag{6.6}$$

Onde  $yf$  é a coordenada  $y$  do ponto fonte. O raio  $r(\xi)$  é então calculado na equação 6.7:

$$r(\xi) = \sqrt{dx(\xi)^2 + dy(\xi)^2}\tag{6.7}$$

A derivada do raio com relação a  $x$  é dada pela equação 6.8:

$$r_{,1}(\xi) = \frac{dx(\xi)}{r(\xi)}\tag{6.8}$$

A derivada do raio com relação a  $y$  é dada pela equação 6.9:

$$r_{,2}(\xi) = \frac{dy(\xi)}{r(\xi)} \quad (6.9)$$

O jacobiano da transformação de coordenadas é dado pela equação 6.10:

$$J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{d}{d\xi}x(\xi)\right)^2 + \left(\frac{d}{d\xi}y(\xi)\right)^2} \quad (6.10)$$

A componente em relação a x do vetor normal ao contorno é dada pela equação 6.11:

$$x_{,n}(\xi) = nx = \frac{1}{J(\xi)} \left(\frac{d}{d\xi}y(\xi)\right) \quad (6.11)$$

A componente em relação a y do vetor normal ao contorno é dada pela equação 6.12:

$$y_{,n}(\xi) = ny = -\frac{1}{J(\xi)} \left(\frac{d}{d\xi}x(\xi)\right) \quad (6.12)$$

A derivada normal do raio é dada pela equação 6.13:

$$r_{,n}(\xi) = r_{,1}(\xi)nx + r_{,2}(\xi)ny \quad (6.13)$$

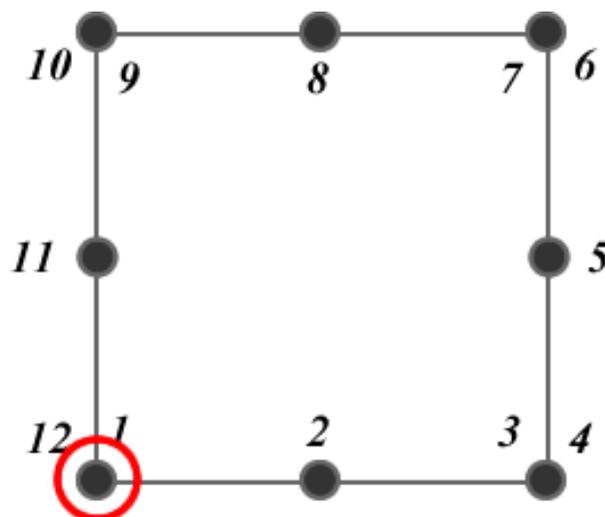
## 6.2 MONTAGEM DAS MATRIZES H e G

O método consiste na montagem de matrizes contendo as contribuições de cada elemento geradas pelas integrais das soluções fundamentais. Separando-se as integrais de contorno principais da equação 4.3 pode-se obter a equação 6.14:

$$\int_{\Gamma} [T_{ij}(x', x)u_j(x) - U_{ij}(x', x)t_j(x)] d\Gamma(x) \quad (6.14)$$

Será construída uma matriz H contendo as soluções fundamentais de forças de superfície  $T_{ij}$  e a matriz G contendo as soluções fundamentais de deslocamentos  $U_{ij}$ . Realizada a discretização dos nós e elementos no contorno do problema, faz-se necessário a aplicação do método da colocação do ponto fonte ao longo do contorno, conforme os trabalhos de Jaswon (1967), Brebbia (1992) e Kane (1994). Este método posiciona o ponto fonte em cada nó do contorno, incluindo os nós duplos. Para facilitar-se o entendimento será adotado um problema simples com um elemento de contorno quadrático por lado, conforme a Figura 10:

**Figura 10** – Primeiro ponto fonte que será deslocado devido canto de 90 graus



**Fonte:** O autor (2020).

O primeiro elemento tem a seguinte geometria:

No1Elemento1X = 0. No2Elemento1X = 1,0 No3Elemento1X = 2,0

No1Elemento1Y = 0. No2Elemento1Y = 0. No3Elemento1Y = 0.

O segundo elemento tem a seguinte geometria:

No1Elemento2X = 2,0 No2Elemento2X = 2,0 No3Elemento2X = 2,0

No1Elemento2Y = 0. No2Elemento2Y = 1,0 No3Elemento2Y = 2,0

O terceiro elemento tem a seguinte geometria:

No1Elemento3X = 2,0 No2Elemento3X = 1,0 No3Elemento3X = 0.

No1Elemento3Y = 2,0 No2Elemento3Y = 2,0 No3Elemento3Y = 2,0

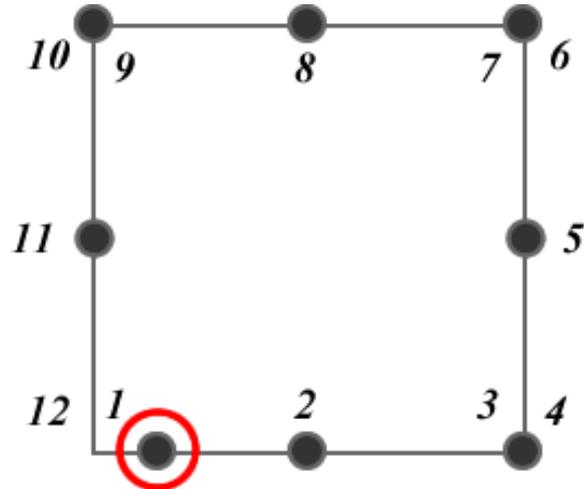
O quarto elemento tem a seguinte geometria:

No1Elemento4X = 0. No2Elemento4X = 0. No3Elemento4X = 0.

No1Elemento4Y = 2,0 No2Elemento4Y = 1,0 No3Elemento4Y = 0.

Nós duplos serão posicionados em cada canto de 90 graus a fim de aproximar a desconexão entre as condições de contorno de um lado para o outro. Será posicionado então o ponto fonte em cada nó de cada elemento, incluindo os nós duplos. Inicialmente será posicionado o ponto fonte no primeiro nó do primeiro elemento, conforme a Figura 10. Como o primeiro nó do elemento 1 é duplo, o ponto fonte deve então ser deslocado a  $-2/3$  da coordenada intrínseca do elemento, como observado na Figura 11:

**Figura 11** – Deslocamento do ponto fonte para posição  $-2/3$  do elemento

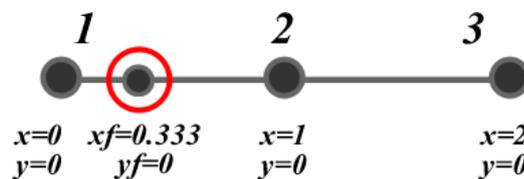


**Fonte:** O autor (2020).

Isto significa que o ponto fonte terá sua coordenada modificada de  $x = 0$ ,  $y = 0$  para  $x = 0,333333$  e  $y = 0$ . Este tratamento é feito para aproximar as descontinuidades que aparecem nos cantos de 90 graus do problema, onde podem aparecer condições de contorno que mudam de um lado para outro.

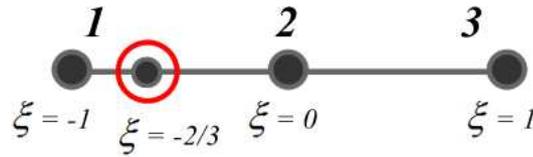
Posicionado o ponto fonte, deve-se então integrar cada elemento definido no problema. Lembrando-se que o elemento que possui o ponto fonte deve ser integrado utilizando as técnicas de integração singular. Os elementos que não possuem o ponto fonte serão integrados utilizando a quadratura de Gauss Legendre. O primeiro elemento a ser integrado é o elemento 1, na Figura 12 é possível ver o ponto fonte e o elemento a ser integrado nas coordenadas cartesianas:

**Figura 12** – Elemento a ser integrado com ponto fonte interno



**Fonte:** O autor (2020).

Na Figura 13 o mesmo elemento pode ser visto agora feita a transformação de coordenadas cartesianas para a coordenada intrínseca:

**Figura 13** – Coordenadas isoparamétricas de cada nó do elemento

**Fonte:** O autor (2020).

As soluções fundamentais terão suas parcelas calculadas para o ponto fonte na coordenada deslocada e as coordenadas do elemento serão as do elemento 1. As posições na matriz H das soluções fundamentais a serem integradas são dadas pela equação 6.15:

Primeiro nó do elemento:

$$\begin{aligned} H_{11} &= \int_{-1}^1 T_{11}(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi & H_{12} &= \int_{-1}^1 T_{12}(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi & H_{13} &= \int_{-1}^1 T_{13}(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi \\ H_{21} &= \int_{-1}^1 T_{21}(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi & H_{22} &= \int_{-1}^1 T_{22}(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi & H_{23} &= \int_{-1}^1 T_{23}(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi \\ H_{31} &= \int_{-1}^1 T_{31}(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi & H_{32} &= \int_{-1}^1 T_{32}(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi & H_{33} &= \int_{-1}^1 T_{33}(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Segundo nó do elemento:

$$\begin{aligned} H_{14} &= \int_{-1}^1 T_{11}(\xi) N_2(\xi) J(\xi) d\xi & H_{15} &= \int_{-1}^1 T_{12}(\xi) N_2(\xi) J(\xi) d\xi & H_{16} &= \int_{-1}^1 T_{13}(\xi) N_2(\xi) J(\xi) d\xi \\ H_{24} &= \int_{-1}^1 T_{21}(\xi) N_2(\xi) J(\xi) d\xi & H_{25} &= \int_{-1}^1 T_{22}(\xi) N_2(\xi) J(\xi) d\xi & H_{26} &= \int_{-1}^1 T_{23}(\xi) N_2(\xi) J(\xi) d\xi \\ H_{34} &= \int_{-1}^1 T_{31}(\xi) N_2(\xi) J(\xi) d\xi & H_{35} &= \int_{-1}^1 T_{32}(\xi) N_2(\xi) J(\xi) d\xi & H_{36} &= \int_{-1}^1 T_{33}(\xi) N_2(\xi) J(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (6.15)$$

Terceiro nó do elemento:

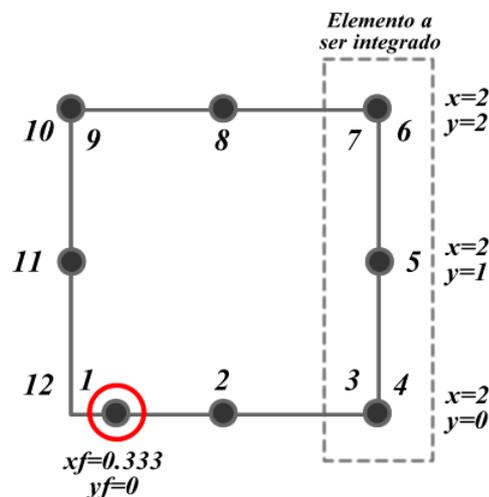
$$\begin{aligned} H_{17} &= \int_{-1}^1 T_{11}(\xi) N_3(\xi) J(\xi) d\xi & H_{18} &= \int_{-1}^1 T_{12}(\xi) N_3(\xi) J(\xi) d\xi & H_{19} &= \int_{-1}^1 T_{13}(\xi) N_3(\xi) J(\xi) d\xi \\ H_{27} &= \int_{-1}^1 T_{21}(\xi) N_3(\xi) J(\xi) d\xi & H_{28} &= \int_{-1}^1 T_{22}(\xi) N_3(\xi) J(\xi) d\xi & H_{29} &= \int_{-1}^1 T_{23}(\xi) N_3(\xi) J(\xi) d\xi \\ H_{37} &= \int_{-1}^1 T_{31}(\xi) N_3(\xi) J(\xi) d\xi & H_{38} &= \int_{-1}^1 T_{32}(\xi) N_3(\xi) J(\xi) d\xi & H_{39} &= \int_{-1}^1 T_{33}(\xi) N_3(\xi) J(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Cada contribuição da matriz H será então multiplicada pela sua variável correspondente de deslocamento  $u$  e pela variável correspondente de força de superfície  $t$  quando o caso for a matriz G. Na equação 6.16 está um exemplo dos termos posicionados no sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} & H_{17} & H_{18} & H_{19} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} & H_{27} & H_{28} & H_{29} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} & H_{37} & H_{38} & H_{39} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Observando-se a matriz H, são formadas 3 linhas para cada ponto fonte e 9 valores de soluções fundamentais para cada nó. Analisando o sistema de equações 6.16, é possível observar que as 3 primeiras colunas são as três colunas do meio são devido aos valores do segundo nó e as colunas da direita são devido à contribuição O mesmo se repete para a matriz G. As equações mostradas em 6.16 demonstram apenas a contribuição de um elemento quadrático de placa, com 9 soluções fundamentais por nó. Deve-se então realizar o mesmo procedimento ao longo do contorno, é necessário calcular todos os elementos com relação ao nó do ponto fonte. O próximo elemento a ser integrado é o elemento 2 dado pela Figura 14:

**Figura 14** – Segundo elemento a ser integrado



**Fonte:** O autor (2020).

Realizadas as integrações para todas as soluções fundamentais de deslocamento, é necessário posicioná-las de maneira correta na matriz H,

lembrando-se que agora o elemento é subsequente ao elemento 1, quando isto ocorre, dois tipos de posicionamento podem acontecer:

1- Quando o primeiro nó do elemento integrado for duplo: Não deve-se sobrepor os nós dos elementos anteriores.

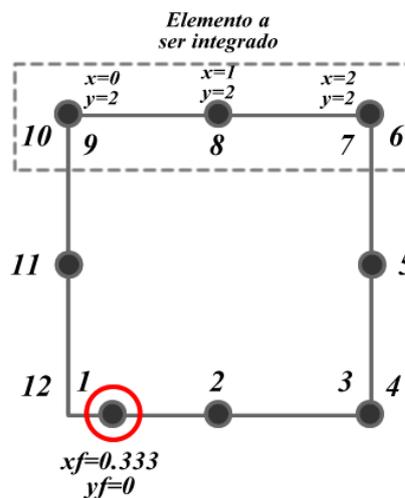
$$\begin{bmatrix} H_{11}^{e1} & H_{12}^{e1} & H_{13}^{e1} & H_{14}^{e1} & H_{15}^{e1} & H_{16}^{e1} & H_{17}^{e1} & H_{18}^{e1} & H_{19}^{e1} & H_{11}^{e2} & H_{12}^{e2} & H_{13}^{e2} & H_{14}^{e2} & H_{15}^{e2} & H_{16}^{e2} & H_{17}^{e2} & H_{18}^{e2} & H_{19}^{e2} \\ H_{21}^{e1} & H_{22}^{e1} & H_{23}^{e1} & H_{24}^{e1} & H_{25}^{e1} & H_{26}^{e1} & H_{27}^{e1} & H_{28}^{e1} & H_{29}^{e1} & H_{21}^{e2} & H_{22}^{e2} & H_{23}^{e2} & H_{24}^{e2} & H_{25}^{e2} & H_{26}^{e2} & H_{27}^{e2} & H_{28}^{e2} & H_{29}^{e2} \\ H_{31}^{e1} & H_{32}^{e1} & H_{33}^{e1} & H_{34}^{e1} & H_{35}^{e1} & H_{36}^{e1} & H_{37}^{e1} & H_{38}^{e1} & H_{39}^{e1} & H_{31}^{e2} & H_{32}^{e2} & H_{33}^{e2} & H_{34}^{e2} & H_{35}^{e2} & H_{36}^{e2} & H_{37}^{e2} & H_{38}^{e2} & H_{39}^{e2} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

2- Quando o primeiro nó do elemento integrado não for duplo: Deve-se sobrepor as contribuições do ultimo nó do elemento anterior com a contribuição do primeiro nó do elemento que acaba de ser integrado.

$$\begin{bmatrix} H_{11}^{e1} & H_{12}^{e1} & H_{13}^{e1} & H_{14}^{e1} & H_{15}^{e1} & H_{16}^{e1} & H_{17}^{e1} + H_{11}^{e2} & H_{18}^{e1} + H_{12}^{e2} & H_{19}^{e1} + H_{13}^{e2} & H_{14}^{e2} & H_{15}^{e2} & H_{16}^{e2} & H_{17}^{e2} & H_{18}^{e2} & H_{19}^{e2} \\ H_{21}^{e1} & H_{22}^{e1} & H_{23}^{e1} & H_{24}^{e1} & H_{25}^{e1} & H_{26}^{e1} & H_{27}^{e1} + H_{21}^{e2} & H_{28}^{e1} + H_{22}^{e2} & H_{29}^{e1} + H_{23}^{e2} & H_{24}^{e2} & H_{25}^{e2} & H_{26}^{e2} & H_{27}^{e2} & H_{28}^{e2} & H_{29}^{e2} \\ H_{31}^{e1} & H_{32}^{e1} & H_{33}^{e1} & H_{34}^{e1} & H_{35}^{e1} & H_{36}^{e1} & H_{37}^{e1} + H_{31}^{e2} & H_{38}^{e1} + H_{32}^{e2} & H_{39}^{e1} + H_{33}^{e2} & H_{34}^{e2} & H_{35}^{e2} & H_{36}^{e2} & H_{37}^{e2} & H_{38}^{e2} & H_{39}^{e2} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Na situação em que se encontra o problema, onde o primeiro nó do elemento 2 é duplo ( observando-se a Figura 11 ), não deve-se somar as contribuições dos dois elementos. A contribuição do elemento 2 será colocada na matriz principal logo após a contribuição do elemento 1. O próximo elemento a ser integrado seria o elemento 3, dado na Figura 15:

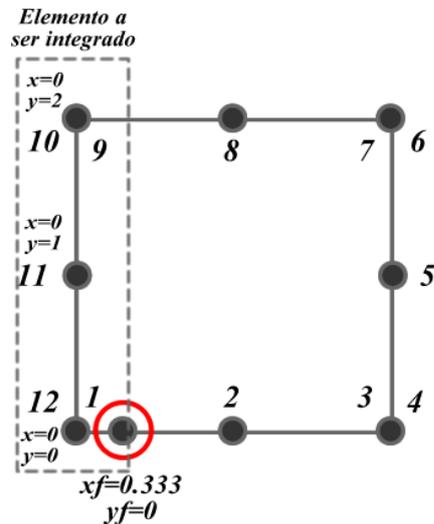
**Figura 15** – Terceiro elemento a ser integrado



Fonte: O autor (2020).

Novamente o elemento encontra-se adjacente a nós duplos então a contribuição será feita logo após a contribuição do elemento 2. O último elemento é o elemento 4 dado pela Figura 16:

**Figura 16** – Quarto elemento a ser integrado



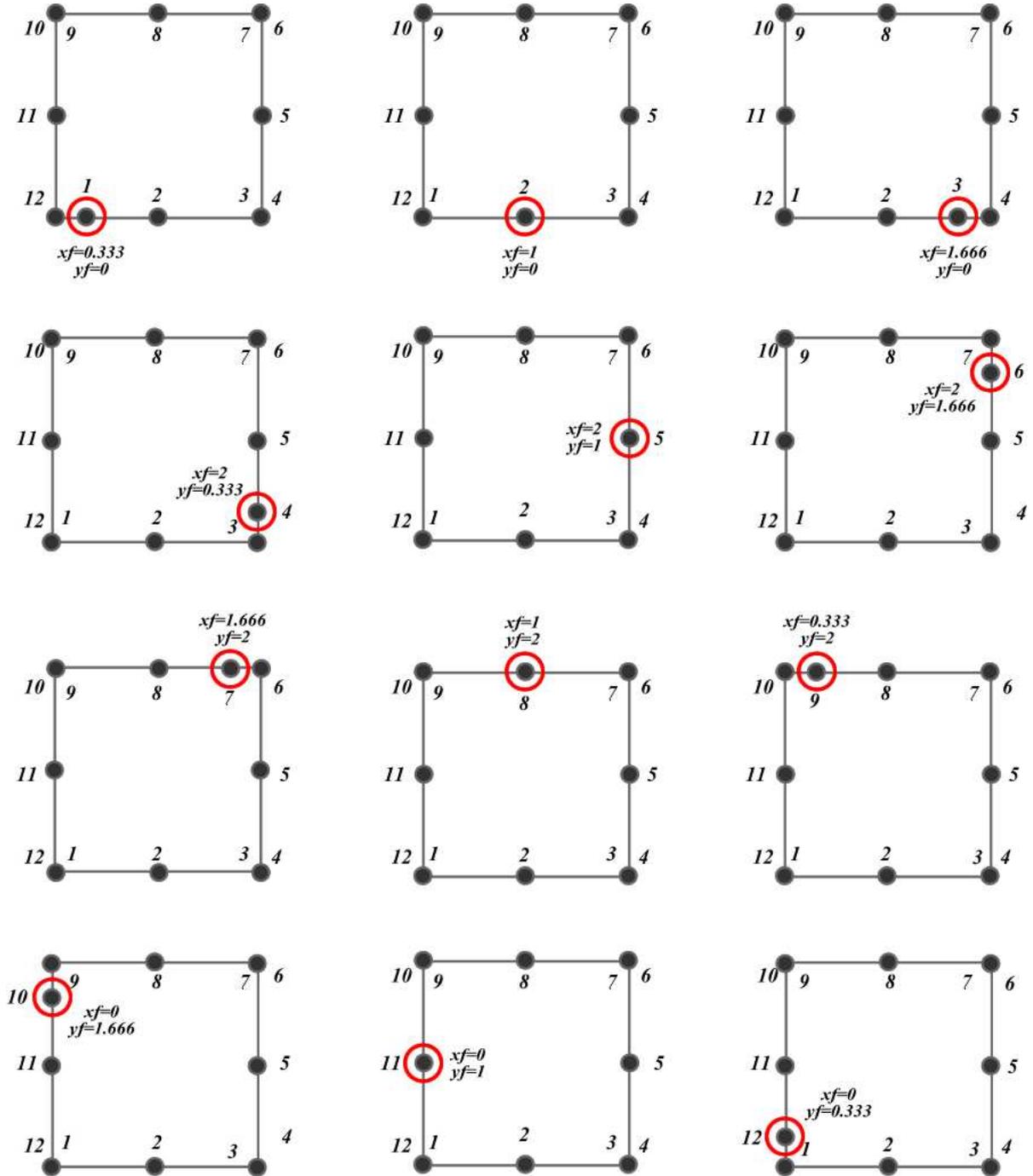
**Fonte:** O autor (2020).

Novamente o elemento encontra-se adjacente a nós duplos então a contribuição será feita logo após a contribuição do elemento 3.

Com esta última contribuição as três primeiras linhas da matriz H estão completas. Para montar a matriz completa é necessário posicionar o ponto fonte em cada nó de contorno e então recalculer as contribuições de cada elemento. Devido à utilização de nós duplos, quando o ponto fonte estiver no primeiro nó do elemento e for duplo, a posição do ponto fonte deve ser modificada para  $-2/3$  na coordenada intrínseca. Quando o ponto fonte estiver no último nó do elemento e for duplo, a posição do ponto fonte deve ser modificada para  $2/3$  na coordenada intrínseca.

O primeiro ponto fonte irá gerar as linhas 1, 2 e 3 das matrizes H e G. O segundo ponto fonte irá gerar as linhas 4, 5 e 6. O sistema então procede para o cálculo em todos os pontos fonte, até que as matrizes, no caso deste exemplo, estejam com 36 linhas. A Figura 17 mostra a posição de cada ponto fonte utilizado neste problema:

**Figura 17 – Posicionamento de todos os pontos fonte**



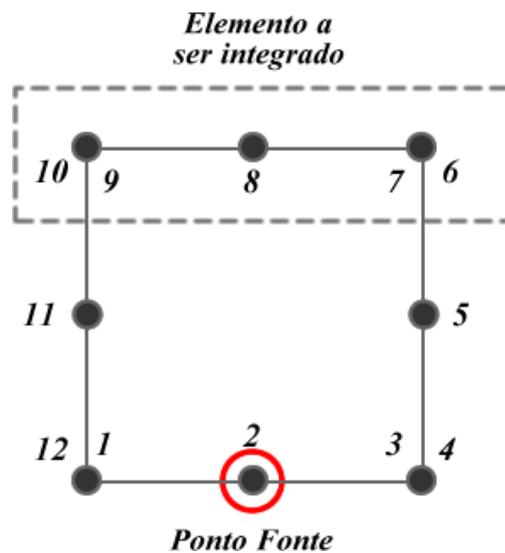
**Fonte:** O autor (2020).

Para o exemplo dado neste capítulo, a matriz  $H$  assume a forma da equação 6.19:

$$\begin{bmatrix}
 H_{11}^{e1} & H_{12}^{e1} & H_{13}^{e1} & H_{14}^{e1} & H_{15}^{e1} & H_{16}^{e1} & H_{17}^{e1} & H_{18}^{e1} & H_{19}^{e1} & H_{11}^{e2} & H_{12}^{e2} & H_{13}^{e2} & H_{14}^{e2} & H_{15}^{e2} & H_{16}^{e2} & H_{17}^{e2} & H_{18}^{e2} & H_{19}^{e2} \\
 H_{21}^{e1} & H_{22}^{e1} & H_{23}^{e1} & H_{24}^{e1} & H_{25}^{e1} & H_{26}^{e1} & H_{27}^{e1} & H_{28}^{e1} & H_{29}^{e1} & H_{21}^{e2} & H_{22}^{e2} & H_{23}^{e2} & H_{24}^{e2} & H_{25}^{e2} & H_{26}^{e2} & H_{27}^{e2} & H_{28}^{e2} & H_{29}^{e2} + \dots \\
 H_{31}^{e1} & H_{32}^{e1} & H_{33}^{e1} & H_{34}^{e1} & H_{35}^{e1} & H_{36}^{e1} & H_{37}^{e1} & H_{38}^{e1} & H_{39}^{e1} & H_{31}^{e2} & H_{32}^{e2} & H_{33}^{e2} & H_{34}^{e2} & H_{35}^{e2} & H_{36}^{e2} & H_{37}^{e2} & H_{38}^{e2} & H_{39}^{e2} \\
 H_{11}^{e1} & H_{12}^{e1} & H_{13}^{e1} & H_{14}^{e1} & H_{15}^{e1} & H_{16}^{e1} & H_{17}^{e1} & H_{18}^{e1} & H_{19}^{e1} & H_{11}^{e2} & H_{12}^{e2} & H_{13}^{e2} & H_{14}^{e2} & H_{15}^{e2} & H_{16}^{e2} & H_{17}^{e2} & H_{18}^{e2} & H_{19}^{e2} \\
 H_{21}^{e1} & H_{22}^{e1} & H_{23}^{e1} & H_{24}^{e1} & H_{25}^{e1} & H_{26}^{e1} & H_{27}^{e1} & H_{28}^{e1} & H_{29}^{e1} & H_{21}^{e2} & H_{22}^{e2} & H_{23}^{e2} & H_{24}^{e2} & H_{25}^{e2} & H_{26}^{e2} & H_{27}^{e2} & H_{28}^{e2} & H_{29}^{e2} + \dots \\
 H_{31}^{e1} & H_{32}^{e1} & H_{33}^{e1} & H_{34}^{e1} & H_{35}^{e1} & H_{36}^{e1} & H_{37}^{e1} & H_{38}^{e1} & H_{39}^{e1} & H_{31}^{e2} & H_{32}^{e2} & H_{33}^{e2} & H_{34}^{e2} & H_{35}^{e2} & H_{36}^{e2} & H_{37}^{e2} & H_{38}^{e2} & H_{39}^{e2} \\
 H_{11}^{e1} & H_{12}^{e1} & H_{13}^{e1} & H_{14}^{e1} & H_{15}^{e1} & H_{16}^{e1} & H_{17}^{e1} & H_{18}^{e1} & H_{19}^{e1} & H_{11}^{e2} & H_{12}^{e2} & H_{13}^{e2} & H_{14}^{e2} & H_{15}^{e2} & H_{16}^{e2} & H_{17}^{e2} & H_{18}^{e2} & H_{19}^{e2} \\
 H_{21}^{e1} & H_{22}^{e1} & H_{23}^{e1} & H_{24}^{e1} & H_{25}^{e1} & H_{26}^{e1} & H_{27}^{e1} & H_{28}^{e1} & H_{29}^{e1} & H_{21}^{e2} & H_{22}^{e2} & H_{23}^{e2} & H_{24}^{e2} & H_{25}^{e2} & H_{26}^{e2} & H_{27}^{e2} & H_{28}^{e2} & H_{29}^{e2} + \dots \\
 H_{31}^{e1} & H_{32}^{e1} & H_{33}^{e1} & H_{34}^{e1} & H_{35}^{e1} & H_{36}^{e1} & H_{37}^{e1} & H_{38}^{e1} & H_{39}^{e1} & H_{31}^{e2} & H_{32}^{e2} & H_{33}^{e2} & H_{34}^{e2} & H_{35}^{e2} & H_{36}^{e2} & H_{37}^{e2} & H_{38}^{e2} & H_{39}^{e2}
 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

As soluções fundamentais utilizadas no método dos elementos de contorno estão em função do raio, dado pela distância entre o ponto fonte e o ponto campo. Esta característica pode gerar singularidades quando o raio é pequeno ou zero. Nesta situação, os métodos convencionais como a integração de Gauss não geram uma precisão satisfatória, podendo causar desvios nas soluções. Como utiliza-se elementos quadráticos, as expressões para as integrais dos elementos tornam-se grandes e complexas, dificultando o processo de integração analítica. Devido a estes problemas, o presente trabalho adota o processo de integração numérica com tratamento para integrais singulares. Quando o ponto fonte estiver fora do elemento de contorno que deve ser integrado, o processo de integração é regular, podendo ser utilizada a integração de Gauss. Um exemplo desta ocasião pode ser visto na Figura 18:

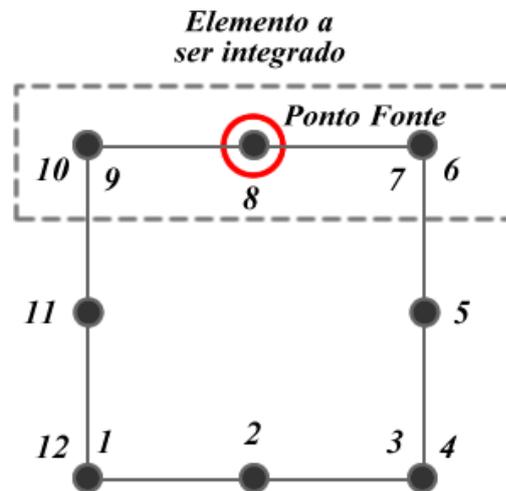
**Figura 18** – Integração com ponto fonte fora do elemento



Fonte: O autor (2020).

Por outro lado, quando o ponto fonte estiver dentro do elemento de contorno que deve ser integrado, o processo de integração é singular, devendo ser utilizada a técnica apropriada para a ordem da singularidade. A Figura 19 mostra esta ocasião:

**Figura 19** – Integração com ponto fonte dentro do elemento



**Fonte:** O autor (2020).

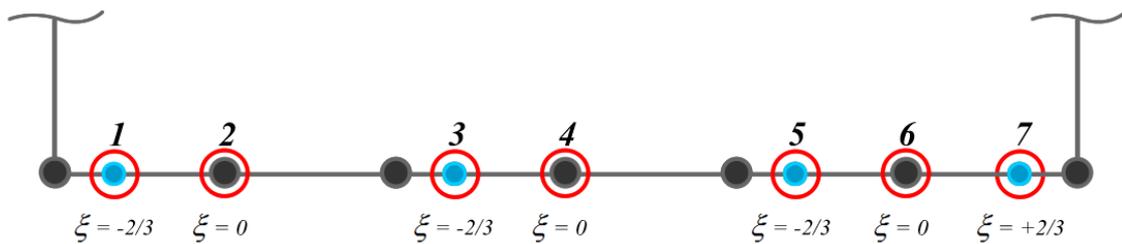
Para integrais singulares de ordem  $\ln(r)$  (fracamente singulares), é utilizada a transformação proposta por Telles (1987), este tipo de singularidade aparece nas soluções fundamentais de deslocamento. Para as integrais singulares de ordem  $(\frac{1}{r})$  (tipo Cauchy), é aplicado o método da subtração de singularidade proposto por Guiggiani (1991), este tipo de singularidade é encontrado nas soluções fundamentais de forças de superfície.

Em alguns casos, as integrais possuem as funções de Bessel modificadas de segunda espécie, utilizadas pelos termos  $A(z)$  e  $B(z)$  dados pela equação 4.9. Quando a relação entre a espessura e o lado da placa " $h/a$ " for maior que 0,001, o argumento  $z$  é pequeno, então  $A(z)$  é regular e  $B(z)$  tem uma singularidade de ordem  $\ln(r)$ . Quando " $h/a$ " for igual ou menor que 0,001, o argumento  $z$  é grande, então as expressões que contém  $A(z)$  e  $B(z)$  tornam-se integrais de parte finita e para estes casos, utilizou-se a técnica dos subelementos para integração.

Diferentemente do trabalho de Soares Jr. e Palermo Jr. (2017), os pontos extremos dos elementos devem ser deslocados para  $-2/3$  inclusive dos que não são

nós duplos. Isso é devido à utilização posterior das derivadas das soluções fundamentais para cálculo do MRD, como as derivadas não possuem continuidade nos nós extremos dos elementos quadráticos (coordenada  $\xi = -1$  e  $\xi = 1$ ), faz-se necessário o deslocamento do primeiro ponto de cada elemento. No exemplo dado nesta seção o problema tinha apenas 1 elemento por lado então não foi possível notar esta modificação. Em um problema com 2 ou mais elementos por lado os primeiros pontos de cada elemento devem ser deslocados para a posição  $\xi = -\frac{2}{3}$ , mantendo-se assim a continuidade das derivadas uma vez que estão sendo calculadas no interior de cada elemento. A Figura 20 mostra o posicionamento dos pontos fonte para um problema com 3 elementos por lado:

**Figura 20** – Deslocamento dos pontos fonte de canto dos elementos



Fonte: O autor (2020).

A matriz H de um problema com mais de um elemento por lado pode ser representada pela Figura 21:

**Figura 21** – Ilustração da matriz de coeficientes para problemas de placas

		Elemento 1						Elemento 2						Elemento 3							
Ponto Fonte 1	H11	H12	H13	H14	H15	H16	H17	H18	H19	H110	H111	H112	H113	H114	H115	H116	H117	H118	H119	H120	H121
	H21	H22	H23	H24	H25	H26	H27	H28	H29	H210	H211	H212	H213	H214	H215	H216	H217	H218	H219	H220	H221
	H31	H32	H33	H34	H35	H36	H37	H38	H39	H310	H311	H312	H313	H314	H315	H316	H317	H318	H319	H320	H321
Ponto Fonte 2	H41	H42	H43	H44	H45	H46	H47	H48	H49	H410	H411	H412	H413	H414	H415	H416	H417	H418	H419	H420	H421
	H51	H52	H53	H54	H55	H56	H57	H58	H59	H510	H511	H512	H513	H514	H515	H516	H517	H518	H519	H520	H521
	H61	H62	H63	H64	H65	H66	H67	H68	H69	H610	H611	H612	H613	H614	H615	H616	H617	H618	H619	H620	H621
Ponto Fonte 3	H71	H72	H73	H74	H75	H76	H77	H78	H79	H710	H711	H712	H713	H714	H715	H716	H717	H718	H719	H720	H721
	H81	H82	H83	H84	H85	H86	H87	H88	H89	H810	H811	H812	H813	H814	H815	H816	H817	H818	H819	H820	H821
	H91	H92	H93	H94	H95	H96	H97	H98	H99	H910	H911	H912	H913	H914	H915	H916	H917	H918	H919	H920	H921

Fonte: O autor (2020).

O termo livre  $C_{ij}$  deve ser incorporado na matriz  $[H]$ , nos pontos fonte deslocados para manter-se a continuidade das derivadas das soluções fundamentais, o valor usual 0,5 deve ser multiplicado pelas funções de forma avaliadas na posição do ponto fonte e adicionado nas diagonais da contribuição de cada nó do elemento, obtendo-se  $C_{ij} = 0,5N_k(\bar{\xi})$ . Quando o ponto fonte está na posição central do elemento adiciona-se  $C_{ij} = 0,5$  nas diagonais centrais do elemento. Um exemplo da aplicação do termo livre é dado na tabela 1:

**Tabela 1 – Adição dos termos livres na matriz H**

$H_{11} + 0,5N_1\left(-\frac{2}{3}\right)$	$H_{12}$	$H_{13}$	$H_{14} + 0,5N_2\left(-\frac{2}{3}\right)$	$H_{15}$	$H_{16}$	$H_{17} + 0,5N_3\left(-\frac{2}{3}\right)$	$H_{18}$	$H_{19}$
$H_{21}$	$H_{22} + 0,5N_1\left(-\frac{2}{3}\right)$	$H_{23}$	$H_{24}$	$H_{25} + 0,5N_2\left(-\frac{2}{3}\right)$	$H_{26}$	$H_{27}$	$H_{28} + 0,5N_3\left(-\frac{2}{3}\right)$	$H_{29}$
$H_{31}$	$H_{32}$	$H_{33} + 0,5N_1\left(-\frac{2}{3}\right)$	$H_{34}$	$H_{35}$	$H_{36} + 0,5N_2\left(-\frac{2}{3}\right)$	$H_{37}$	$H_{38}$	$H_{39} + 0,5N_3\left(-\frac{2}{3}\right)$
$H_{41}$	$H_{42}$	$H_{43}$	$H_{44} + 0,5$	$H_{45}$	$H_{46}$	$H_{47}$	$H_{48}$	$H_{49}$
$H_{51}$	$H_{52}$	$H_{53}$	$H_{54}$	$H_{55} + 0,5$	$H_{56}$	$H_{57}$	$H_{58}$	$H_{59}$
$H_{61}$	$H_{62}$	$H_{63}$	$H_{64}$	$H_{65}$	$H_{66} + 0,5$	$H_{67}$	$H_{68}$	$H_{69}$
$H_{71}$	$H_{72}$	$H_{73}$	$H_{74}$	$H_{75}$	$H_{76}$	$H_{77} + 0,5N_1\left(-\frac{2}{3}\right)$	$H_{78}$	$H_{79}$
$H_{81}$	$H_{82}$	$H_{83}$	$H_{84}$	$H_{85}$	$H_{86}$	$H_{87}$	$H_{88} + 0,5N_1\left(-\frac{2}{3}\right)$	$H_{89}$
$H_{91}$	$H_{92}$	$H_{93}$	$H_{94}$	$H_{95}$	$H_{96}$	$H_{97}$	$H_{98}$	$H_{99} + 0,5N_1\left(-\frac{2}{3}\right)$

Fonte: O autor (2020).

### 6.3 MONTAGEM DA PRIMEIRA DERIVADA DAS MATRIZES H e G

As matrizes  $[H_{,\gamma}]$  e  $[G_{,\gamma}]$  são preenchidas com as derivadas primeiras derivadas das soluções fundamentais e o procedimento é análogo ao mostrado na seção 6.2. Estas matrizes são utilizadas no MRD para aproximar a integral de domínio da equação 4.3.

O ponto fonte passa por todos os nós de contorno, sempre nas posições da coordenada intrínseca  $\xi = -\frac{2}{3}$  e  $\xi = 0$ , estando dentro dos elementos quadráticos. Isto é necessário para manter-se a continuidade das derivadas, uma vez que são

descontínuas nos cantos dos elementos. Integrado o elemento, a contribuição é feita conforme a Figura 21.

São armazenadas 4 matrizes para o MRD,  $[H_{,1}], [H_{,2}], [G_{,1}], [G_{,2}]$ . Para visualizar um exemplo da montagem da matriz  $[H_{,1}]$  de derivadas primeiras das soluções fundamentais de forças de superfície pode-se verificar a equação 22:

$$\left[ \begin{array}{c} \int T_{11,1}N_1 \int T_{12,1}N_1 \int T_{13,1}N_1 \int T_{11,1}N_2 \int T_{12,1}N_2 \int T_{13,1}N_2 \int T_{11,1}N_3 \int T_{12,1}N_3 \int T_{13,1}N_3 \\ \int T_{21,1}N_1 \int T_{22,1}N_1 \int T_{23,1}N_1 \int T_{21,1}N_2 \int T_{22,1}N_2 \int T_{23,1}N_2 \int T_{21,1}N_3 \int T_{22,1}N_3 \int T_{23,1}N_3 \dots \\ \int T_{31,1}N_1 \int T_{32,1}N_1 \int T_{33,1}N_1 \int T_{31,1}N_2 \int T_{32,1}N_2 \int T_{33,1}N_2 \int T_{31,1}N_3 \int T_{32,1}N_3 \int T_{33,1}N_3 \\ \dots \end{array} \right] \quad (6.20)$$

No processo de integração das derivadas das soluções fundamentais é utilizado o operador tangente para reduzir o grau de singularidade de hypersingular ( $\frac{1}{r^2}$ ) para singularidade forte ou do tipo Cauchy ( $\frac{1}{r}$ ). Os detalhes do desenvolvimento da aplicação do operador tangente podem ser vistos no capítulo 7. O processo numérico do operador tangente é dado a seguir:

Usando um exemplo para melhor ilustrar a aplicação do operador tangente, mostra-se a contribuição da matriz de derivadas da equação 6.21:

$$\int_{\Gamma} T_{\rho\beta,\gamma} u_{\beta} d\Gamma = \int_{\Gamma} Q_{\rho\beta} n_{\gamma} u_{\beta} + M_{\rho\alpha\beta} D_{\gamma\alpha} [u_{\beta}] d\Gamma + [M_{\rho\alpha\beta} e_{3\alpha\gamma} u_{\beta}]_0^{\Gamma} \quad (6.21)$$

Considerando a aproximação do contorno do problema por elementos quadráticos, o primeiro termo da matriz  $H_{,\gamma}$  é dado pela equação 6.22:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_{11,1}(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi &= \int_{-1}^1 Q_{\rho\beta} n_{\gamma} u_{\beta} + M_{\rho\alpha\beta} e_{3\gamma\alpha} \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \frac{1}{J(\xi)} J(\xi) d\xi + [M_{\rho\alpha\beta} e_{3\alpha\gamma} u_{\beta}]_0^{\Gamma} \\ &= \int_{-1}^1 Q_{111}(\xi) n_1(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 (M_{111}(\xi) e_{311} + M_{121}(\xi) e_{312}) \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \frac{1}{J(\xi)} J(\xi) d\xi \\ &\quad + [M_{111} e_{311} + M_{121} e_{321}]_0^{\Gamma} \end{aligned} \quad (6.22)$$

O valor do operador tangente da incógnita de contorno  $D_{\gamma\alpha}[u_\beta]$  pode ser aproximado pela derivada da função de forma dividido pelo jacobiano. A solução fundamental integrada também deve ser multiplicada pelo tensor alternante. O processo de integração é similar às figuras 18 e 19, quando o ponto fonte pertence ao elemento integrado é utilizada a integração singular, quando o ponto fonte está fora do elemento, a integração é regular.

Também é necessário adicionar as contribuições de canto do elemento integrado, ou seja, os últimos termos da equação 6.22. Para isto a solução fundamental é avaliada com raio saindo do ponto fonte ao nó inicial do elemento e depois com raio saindo do ponto fonte ao nó final do elemento.

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x_1 - x_f)^2 + (y_1 - y_f)^2}; r_{1,1} = \frac{(x_1 - x_f)}{r_1}; r_{1,2} = \frac{(y_1 - y_f)}{r_1} \\ r_2 &= \sqrt{(x_3 - x_f)^2 + (y_3 - y_f)^2}; r_{2,1} = \frac{(x_3 - x_f)}{r_2}; r_{2,2} = \frac{(y_3 - y_f)}{r_2} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Simplificando a equação 6.22 e adicionando as contribuições de canto, é possível obter a equação 6.24, sendo esta a formulação final da aplicação do operador tangente para o primeiro termo da matriz de derivadas  $[H_{,\gamma}]$

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 T_{11,1}(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi = \\ &\int_{-1}^1 Q_{11}(\xi) n_1(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 (M_{111}(\xi) e_{311} + M_{121}(\xi) e_{312}) \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} d\xi \\ &\quad - [M_{111}(r_1) e_{311} + M_{121}(r_1) e_{321}] + [M_{111}(r_2) e_{311} + M_{121}(r_2) e_{321}] \end{aligned} \quad (6.24)$$

Constatou-se no presente trabalho que quando a integral a ser calculada fosse singular e multiplicada por uma função de Bessel, além dos métodos tradicionais como a subtração de singularidade e transformação de Telles, também foi necessária a implementação da técnica dos subelementos para que a precisão destas integrais fosse satisfatória. Os métodos de integração singular são mostrados no capítulo 8.

## 6.4 MONTAGEM DA SEGUNDA DERIVADA DAS MATRIZES H e G

As matrizes  $[H_{,\gamma\theta}]$  e  $[G_{\gamma\theta}]$  são preenchidas com as segundas derivadas das soluções fundamentais e o procedimento é análogo ao mostrado na seção 6.2, mas somente serão utilizados pontos de centro do elemento e pontos internos. Estas matrizes são utilizadas no MRD para aproximar a integral de domínio da equação 4.4. São armazenadas 4 matrizes para o MRD,  $[H_{,\gamma1}]$ ,  $[H_{,\gamma2}]$ ,  $[G_{,\gamma1}]$ ,  $[G_{,\gamma2}]$ . Para visualizar um exemplo da montagem da matriz  $[H_{,\gamma1}]$  de derivadas primeiras das soluções fundamentais de forças de superfície pode-se verificar a equação 6.25:

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} \int T_{31,11}N_1 & \int T_{32,11}N_1 & \int T_{33,11}N_1 & \int T_{31,11}N_2 & \int T_{32,11}N_2 & \int T_{33,11}N_2 & \int T_{31,11}N_3 & \int T_{32,11}N_3 & \int T_{33,11}N_3 \\ \int T_{31,21}N_1 & \int T_{32,21}N_1 & \int T_{33,21}N_1 & \int T_{31,21}N_2 & \int T_{32,21}N_2 & \int T_{33,21}N_2 & \int T_{31,21}N_3 & \int T_{32,21}N_3 & \int T_{33,21}N_3 & \dots \\ \dots & \dots \end{array} \right] \quad (6.25)$$

Para o presente trabalho, estas integrais foram calculadas utilizando o código em Fortran fornecido por Gao (2006), o qual usa o MIR para integrais singulares. Estas matrizes fazem parte do MRD para aproximar a integral de domínio da equação 4.4 (derivada da equação integral de deslocamentos transversais). Novamente é aplicado o operador tangente para reduzir desta vez o grau de singularidade de supersingular ( $\frac{1}{r^3}$ ) para hypersingular ( $\frac{1}{r^2}$ ), uma vez que o método de Gao mostra uma melhor precisão para integrais hypersingulares em elementos curvos.

A aplicação do operador tangente é feita derivando-se o núcleo das soluções fundamentais obtidas nas equações 5.26 e 5.27. A implementação numérica é feita de maneira similar à seção 6.3, a primeira contribuição da matriz de derivadas segundas é feita utilizando a equação 5.41:

$$\int_{\Gamma} T_{3\beta,\gamma\theta} u_{\beta} d\Gamma = \int_{\Gamma} M_{3\alpha\beta,\theta} D_{\gamma\alpha} [u_{\beta}] + Q_{3\beta,\theta} n_{\gamma} u_{\beta} d\Gamma + [e_{3\alpha\gamma} M_{3\alpha\beta,\theta} u_{\beta}(x)]_0^{\Gamma} \quad (6.26)$$

Substituindo os índices e considerando a aproximação do contorno por elementos quadráticos:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 T_{31,11}(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi = \\
& = \int_{-1}^1 M_{3\alpha\beta,\theta} e_{3\gamma\alpha} \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \frac{1}{J(\xi)} J(\xi) d\xi + Q_{3\beta,\theta} n_\gamma u_\beta d\Gamma + [e_{3\alpha\gamma} M_{3\alpha\beta,\theta} u_\beta]_0^\Gamma = \\
& \int_{-1}^1 Q_{31,1}(\xi) n_1(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 (M_{311,1}(\xi) e_{311} + M_{321,1}(\xi) e_{312}) \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \frac{1}{J(\xi)} J(\xi) d\xi \\
& \quad + [M_{311,1} e_{311} + M_{321,1} e_{321}]_0^\Gamma
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Simplificando a equação 6.27 e considerando as contribuições de canto de maneira análoga à seção 6.3, encontra-se a equação 6.28:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 Q_{31,1}(\xi) n_1(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 (M_{311,1}(\xi) e_{311} + M_{321,1}(\xi) e_{312}) \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} d\xi \\
& \quad - [M_{311,1}(r_1) e_{311} + M_{321,1}(r_1) e_{321}] + [M_{311,1}(r_2) e_{311} + M_{321,1}(r_2) e_{321}]
\end{aligned} \tag{6.28}$$

## 6.5 MONTAGEM DAS MATRIZES H2 e G2

As matrizes H2 e G2 contém as contribuições das integrais de contorno das soluções fundamentais da equação 4.4. Estas integrais são mostradas na equação 6.29:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \{ n_\alpha(x) M_{3\alpha\beta,\gamma}(x', x) u_\beta(x) + n_\beta(x) Q_{3\beta,\gamma}(x', x) u_3(x) + \dots \\
& \quad \dots - U_{3\beta,\gamma}(x', x) t_\beta(x) - U_{33,\gamma}(x', x) t_3(x) \} d\Gamma(x)
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Estas matrizes são utilizadas para encontrar as derivadas do deslocamento transversal  $u_{3,\gamma}$ , Diferentemente das matrizes H e G, as matrizes H2 e G2 são calculadas com pontos fonte no centro dos elementos de contorno quadráticos e também nos pontos internos do problema. O processo de integração e discretização é o mesmo da seção 6.2, conforme a equação 6.30:

$$\sum_{n=1}^{Nelem} \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^1 [n_{\alpha}(x)M_{3\alpha\beta,\gamma}(x',x)u_{\beta}(x) + n_{\beta}(x)Q_{3\beta,\gamma}(x',x)u_3(x) - U_{3\beta,\gamma}(x',x)t_{\beta}(x) - U_{33,\gamma}(x',x)t_3(x)] N_k(\xi)J(\xi)d\xi \quad (6.30)$$

Cada ponto fonte irá gerar duas linhas nas matrizes, uma para a derivada do deslocamento transversal em relação a x e outra para derivada com relação a y. Pode-se ver um exemplo da matriz H2 na equação 6.31 onde considera-se a contribuição de um elemento de contorno quadrático:

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} \int T_{31,1}N_1 & \int T_{32,1}N_1 & \int T_{33,1}N_1 & \int T_{31,1}N_2 & \int T_{32,1}N_2 & \int T_{33,1}N_2 & \int T_{31,1}N_3 & \int T_{32,1}N_3 & \int T_{33,1}N_3 \\ \int T_{31,2}N_1 & \int T_{32,2}N_1 & \int T_{33,2}N_1 & \int T_{31,2}N_2 & \int T_{32,2}N_2 & \int T_{33,2}N_2 & \int T_{31,2}N_3 & \int T_{32,2}N_3 & \int T_{33,2}N_3 \dots \end{array} \right] \quad (6.31)$$

O preenchimento da matriz segue de maneira análoga à seção 6.2. Quando o ponto fonte está dentro do domínio, estas integrais tem um comportamento regular, mas quando o ponto fonte está no contorno as soluções fundamentais apresentam um comportamento singular onde o maior grau de singularidade foi hypersingular ( $\frac{1}{r^2}$ ). Estas integrais foram tratadas utilizando o operador tangente para reduzir o grau de singularidade de hypersingular ( $\frac{1}{r^2}$ ) para singularidade forte ou do tipo Cauchy ( $\frac{1}{r}$ ). Os detalhes do desenvolvimento da aplicação do operador tangente podem ser vistos no capítulo 7. A implementação numérica é feita de maneira similar à seção 6.3, para exemplificar a aplicação, mostra-se a primeira contribuição da matriz H2 utilizando a equação 6.32:

$$\int_{\Gamma} T_{3\beta,\gamma}u_{\beta}d\Gamma = \int_{\Gamma} M_{3\alpha\beta}D_{\gamma\alpha}[u_{\beta}] + Q_{3\beta}n_{\gamma}u_{\beta} d\Gamma + [e_{3\alpha\gamma}M_{3\alpha\beta}u_{\beta}]_0^{\Gamma} \quad (6.32)$$

Substituindo os índices e considerando a aproximação do contorno por elementos quadráticos:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 T_{31,1}(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi &= \int_{-1}^1 Q_{3\beta} n_\gamma u_\beta + M_{3\alpha\beta} e_{3\gamma\alpha} \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \frac{1}{J(\xi)} J(\xi) d\xi + [M_{3\alpha\beta} e_{3\alpha\gamma}]_0^\Gamma \\
&= \int_{-1}^1 Q_{31}(\xi) n_1(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 (M_{311}(\xi) e_{311} + M_{321}(\xi) e_{312}) \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \frac{1}{J(\xi)} J(\xi) d\xi \\
&\quad + [M_{311} e_{311} + M_{321} e_{321}]_0^\Gamma
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Simplificando a equação 6.33 e considerando de maneira análoga à seção 6.3 as contribuições de canto, encontra-se a equação 6.34:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 T_{31,1}(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi = \\
&\int_{-1}^1 Q_{31}(\xi) n_1(\xi) N_1(\xi) J(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 (M_{311}(\xi) e_{311} + M_{321}(\xi) e_{312}) \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} d\xi \\
&\quad - [M_{311}(r_1) e_{311} + M_{321}(r_1) e_{321}] + [M_{311}(r_2) e_{311} + M_{321}(r_2) e_{321}]
\end{aligned} \tag{6.34}$$

## 6.6 MONTAGEM DA MATRIZ MCONT1

A matriz MCONT1 é dada pela integral de contorno relacionada com a não linearidade geométrica da equação 4.3, podendo ser vista na equação 6.35:

$$\int_{\Gamma} n_\theta(x) N_{\theta\beta}(x) u_{3,\beta}(x) U_{i3}(x', x) d\Gamma(x) \tag{6.35}$$

Como esta integral faz parte da equação 4.3, o ponto fonte passa por todos os nós de contorno, sempre nas posições da coordenada intrínseca  $\xi = -\frac{2}{3}$  e  $\xi = 0$ , estando dentro dos elementos quadráticos. Também para esta integral, a aplicação das cargas de domínio  $N_{\alpha\beta}(x) u_{3,\beta}(x)$  será considerada no centro do elemento de contorno, devido a esta consideração a discretização é dada pela equação 6.36:

$$\sum_{n=1}^{Nelem} \int_{-1}^1 n_\theta(x) N_{\theta\beta}(x) u_{3,\beta}(x) U_{i3}(x', x) J(\xi) d\xi \tag{6.36}$$

Como as cargas de domínio são conhecidas, pode-se multiplicar as integrais pelas normais  $N_{\theta\beta}(x)$  no centro do elemento de contorno, deixando a matriz final a ser multiplicada pelo vetor das derivadas do deslocamento transversal  $u_{3,\beta}(x)$ . A montagem da matriz MCONT1 é feita alternando-se entre os valores multiplicados por cada derivada do deslocamento transversal. Cada ponto fonte irá gerar 3 linhas e cada integração de elemento irá gerar 2 colunas, onde não deve-se sobrepor os nós dos elementos anteriores, conforme exemplo da equação 6.37:

$$\begin{bmatrix} \left( N_{11} \int U_{13} n_1 + N_{21} \int U_{13} n_2 \right) & \left( N_{12} \int U_{13} n_1 + N_{22} \int U_{13} n_2 \right) & \\ \left( N_{11} \int U_{23} n_1 + N_{21} \int U_{23} n_2 \right) & \left( N_{12} \int U_{23} n_1 + N_{22} \int U_{13} n_2 \right) & \dots \\ \left( N_{11} \int U_{33} n_1 + N_{21} \int U_{33} n_2 \right) & \left( N_{12} \int U_{33} n_1 + N_{22} \int U_{33} n_2 \right) & \\ & \dots & \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

Caso todos os cantos de uma placa estejam simplesmente apoiados a integração deve ser feita em todos os elementos de contorno. Caso exista uma parte do contorno que esteja livre, deve-se aplicar a condição natural do problema de flambagem mostrada no trabalho de Soares Jr. e Palermo Jr. (2017), na qual consiste em adicionar mais uma integral nos elementos que passam pelo contorno com deslocamentos não prescritos, conforme equação 6.38:

$$\int_{\Gamma} n_{\theta}(x) N_{\theta\beta}(x) u_{3,\beta}(x) U_{i3}(x', x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma_{np}} n_{\theta}(x) N_{\theta\beta}(x) u_{3,\beta}(x) U_{i3}(x', x) d\Gamma(x) \quad (6.38)$$

Nas partes onde o contorno não contém deslocamentos prescritos a contribuição do elemento integrado na matriz MCONT1 será nula devido ao sinal diferente das integrais da equação 6.38.

## 6.7 MONTAGEM DA MATRIZ MCONT2

A matriz MCONT2 é dada pela integral de contorno relacionada com a não linearidade geométrica da equação 4.4, podendo ser vista na equação 6.39:

$$- \int_{\Gamma} n_{\theta}(x) N_{\theta\beta}(x) u_{3,\beta}(x) U_{33,\gamma}(x', x) d\Gamma(x) \quad (6.39)$$

Como esta integral faz parte da equação 4.4, o ponto fonte passa pelos nós centrais dos elementos de contorno e também pelos nós internos. A aplicação das cargas de domínio  $N_{\theta\beta}(x)u_{3,\beta}(x)$  será considerada no centro do elemento de contorno, devido a esta consideração a discretização é dada pela equação 6.40:

$$- \sum_{n=1}^{N_{elem}} \int_{-1}^1 n_{\theta}(x) N_{\theta\beta}(x) u_{3,\beta}(x) U_{33,\gamma}(x', x) J(\xi) d\xi \quad (6.40)$$

A montagem da matriz MCONT2 é feita de maneira análoga à MCONT1. Cada ponto fonte irá gerar 2 linhas e cada integração de elemento irá gerar 2 colunas, onde não deve-se sobrepor os nós dos elementos anteriores, conforme exemplo da equação 6.41:

$$\left[ \begin{array}{cc} \left( N_{11} \int U_{33,1} n_1 + N_{21} \int U_{33,1} n_2 \right) & \left( N_{12} \int U_{33,1} n_1 + N_{22} \int U_{33,1} n_2 \right) \\ \left( N_{11} \int U_{33,2} n_1 + N_{21} \int U_{33,2} n_2 \right) & \left( N_{12} \int U_{33,2} n_1 + N_{22} \int U_{33,2} n_2 \right) \quad \dots \\ & \dots \end{array} \right] \quad (6.41)$$

De maneira análoga à matriz MCONT1, deve-se aplicar a condição natural do problema de flambagem conforme equação 6.42:

$$- \int_{\Gamma} n_{\theta}(x) N_{\theta\beta}(x) u_{3,\beta}(x) U_{33,\gamma}(x', x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_{np}} n_{\theta}(x) N_{\theta\beta}(x) u_{3,\beta}(x) U_{33,\gamma}(x', x) d\Gamma(x) \quad (6.42)$$

## 6.8 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MRD PARA INTEGRAIS DE DOMÍNIO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS

A integral de domínio da equação integral dos deslocamentos ( equação 4.3) pode ser convertida para contorno utilizando a relação da equação 6.43:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} N_{\alpha\beta}(X)u_{3,\beta}(X)U_{i3,\alpha}(x',X)d\Omega(X) = \\ & \sum_{m=1}^{N+L} \alpha_{\theta}^m \left\{ c\hat{u}_{i,\theta}^m(x') - \int_{\Gamma} [n_{\alpha}(x)M_{i\alpha\beta,\theta}(x',x)\hat{u}_{\beta}^m(x) + n_{\beta}(x)Q_{i\beta,\theta}(x',x)\hat{u}_{3}^m(x) + \dots \right. \\ & \left. \dots - U_{i\beta,\theta}(x',x)\hat{t}_{\beta}^m(x) - U_{i3,\theta}(x',x)\hat{t}_{3}^m(x)]d\Gamma(x) \right\} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Os coeficientes  $\alpha_{\theta}^m$  são dados pela solução de um sistema linear criado da aproximação das normais multiplicadas pelas derivadas do deslocamento transversal por uma função radial utilizando-se pontos de MRD no contorno e domínio do problema, conforme pela equação 6.44:

$$f(r)\alpha_{\theta}^m = N_{\theta\beta}u_{3,\beta} \quad (6.44)$$

O sistema de equações a ser resolvido é formado pela função  $f(r)$  escolhida avaliada para cada ponto fonte e ponto campo preenchendo-se a matriz  $[F]$ , as incógnitas do sistema na matriz  $[\alpha_{\theta}^m]$  e os valores nodais a serem aproximados das normais multiplicadas pelas derivadas do deslocamento transversal são guardados na matriz  $[N_{\theta\beta}u_{3,\beta}]$ , conforme mostrado na equação 6.45:

$$[F][\alpha_{\theta}^m] = [N_{\theta\beta}u_{3,\beta}] \quad (6.45)$$

Para o problema de instabilidade de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante, será necessário aproximar duas distribuições diferentes de tensões normais multiplicadas pelas derivadas do deslocamento transversal.

$$[F][\alpha_1^m] = [N_{11}u_{3,1} + N_{12}u_{3,2}] \quad (6.46)$$

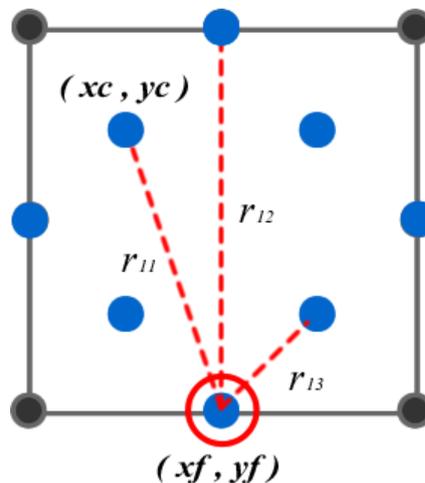
$$[F][\alpha_1^m] = [N_{11}u_{3,1} + N_{12}u_{3,2}] \quad (6.47)$$

Para preencher-se a matriz  $[F]$ , o raio utilizado na função radial  $f(r)$  é dado pela equação 6.48:

$$r = \sqrt{(x_c - x_f)^2 + (y_c - y_f)^2} \quad (6.48)$$

Na Figura 22 observa-se uma representação visual do raio da função radial  $f(r)$ :

**Figura 22** – Aproximação das cargas de domínio nos pontos de MRD



**Fonte:** O autor (2020).

A matriz  $[F]$  é quadrada e seu tamanho é o número de pontos de MRD, onde as linhas são dadas por cada ponto de MRD e as colunas são dadas pela função radial avaliada na distância à cada ponto campo. As linhas do vetor de cargas  $[N_{\theta\beta}u_{3,\beta}]$  são dadas pelo valor das tensões normais de estado plano vezes as derivadas dos deslocamentos transversais no ponto fonte. Para a demonstração da implementação numérica, na equação 6.49 pode-se ver um esquema da matriz de aproximação:

$$\begin{bmatrix} f(r_{11}) & f(r_{12}) & f(r_{13}) \\ f(r_{21}) & f(r_{22}) & f(r_{23}) \\ f(r_{31}) & f(r_{32}) & f(r_{33}) \\ \vdots & & \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}u_{3,1} + N_{12}u_{3,2} \\ N_{11}u_{3,1} + N_{12}u_{3,2} \\ N_{11}u_{3,1} + N_{12}u_{3,2} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

Lembrando-se que é necessário aproximar duas distribuições diferentes de tensões normais multiplicadas pelas derivadas do deslocamento transversal , a matriz da segunda aproximação é dada pela equação 6.50:

$$\begin{bmatrix} f(r_{11}) & f(r_{12}) & f(r_{13}) \\ f(r_{21}) & f(r_{22}) & f(r_{23}) \\ f(r_{31}) & f(r_{32}) & f(r_{33}) \\ \vdots & & \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{22}u_{3,2} + N_{21}u_{3,1} \\ N_{22}u_{3,2} + N_{21}u_{3,1} \\ N_{22}u_{3,2} + N_{21}u_{3,1} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

Resolve-se então este sistema de equações para obter-se o vetor de coeficientes  $[\alpha_\theta^m]$ , o qual tem altura igual ao número de pontos de MRD, os coeficientes utilizados pelo MRD são dados pela equação 6.51:

$$[\alpha_\theta^m] = [N_{\theta\beta}u_{3,\beta}][F]^{-1} \quad (6.51)$$

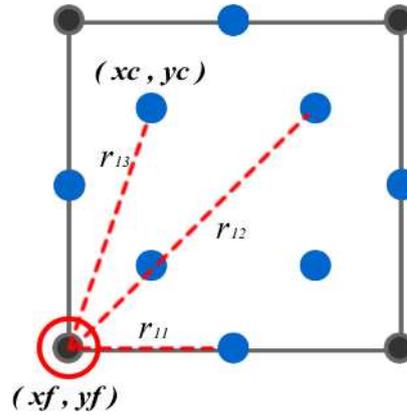
Abrindo-se os coeficientes para uma abordagem simples obtêm-se as equações 6.52 e 6.53:

$$[\alpha_1^m] = [N_{11}u_{3,1} + N_{12}u_{3,2}][F]^{-1} \quad (6.52)$$

$$[\alpha_2^m] = [N_{22}u_{3,2} + N_{21}u_{3,1}][F]^{-1} \quad (6.53)$$

São então calculadas as soluções particulares  $\hat{u}$  e  $\hat{t}$  avaliadas em cada nó de contorno. Conforme a Figura 23:

**Figura 23** – Ponto fonte das soluções particulares nos pontos de MRD



Fonte: O autor (2020).

Para preencher as matrizes  $[\hat{u}]$  e  $[\hat{t}]$ , avaliam-se as soluções particulares com ponto fonte em cada nó de contorno, variando-se o ponto campo em cada ponto de MRD. As soluções particulares  $\hat{u}$  são dadas pela equação 5.18 ou 5.19, as soluções particulares  $\hat{t}$  são dadas pela equação 6.54, lembrando-se que os vetores normais utilizados nas soluções particulares são avaliados no pontos fonte.

$$\begin{aligned}\hat{t}_\alpha &= \hat{M}_{\alpha\beta} n_\beta \\ \hat{t}_3 &= \hat{Q}_\beta n_\beta\end{aligned}\quad (6.54)$$

Abordando-se as matrizes  $[\hat{u}]$  e  $[\hat{t}]$  com relação ao tamanho, elas têm altura igual à três vezes o número de pontos no contorno e largura igual ao número de pontos de MRD.

$$[\hat{u}] = \begin{bmatrix} \hat{u}_{11} & \hat{u}_{12} & \hat{u}_{13} \\ \hat{u}_{21} & \hat{u}_{22} & \hat{u}_{23} \\ \hat{u}_{31} & \hat{u}_{32} & \hat{u}_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad [\hat{t}] = \begin{bmatrix} \hat{t}_{11} & \hat{t}_{12} & \hat{t}_{13} \\ \hat{t}_{21} & \hat{t}_{22} & \hat{t}_{23} \\ \hat{t}_{31} & \hat{t}_{32} & \hat{t}_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

As matrizes  $[\hat{u}]$  e  $[\hat{t}]$  são então multiplicadas pelos coeficientes  $[\alpha_\theta^m]$  formando-se os vetores  $[\hat{u}\alpha_\theta^m]$  e  $[\hat{t}\alpha_\theta^m]$  de altura igual à três vezes o número de pontos no contorno.

$$[\hat{u}\alpha_\theta^m] = [\hat{u}][\alpha_\theta^m] \quad (6.56)$$

$$[\hat{t}\alpha_\theta^m] = [\hat{t}][\alpha_\theta^m] \quad (6.57)$$

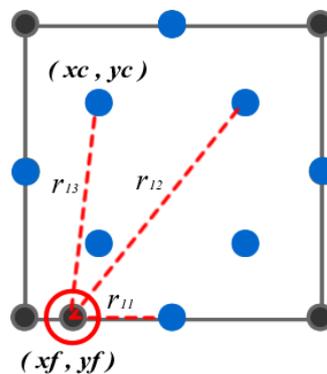
Lembrando-se que são duas aproximações para o problema de instabilidade de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante, os vetores  $[\hat{u}\alpha_\theta^m]$  e  $[\hat{t}\alpha_\theta^m]$  são dados pelas equações 6.58 e 6.59:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}\alpha_1^1 \\ \hat{u}\alpha_1^2 \\ \hat{u}\alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_{11} & \hat{u}_{12} & \hat{u}_{13} \\ \hat{u}_{21} & \hat{u}_{22} & \hat{u}_{23} \\ \hat{u}_{31} & \hat{u}_{32} & \hat{u}_{33} \\ \dots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \hat{t}\alpha_1^1 \\ \hat{t}\alpha_1^2 \\ \hat{t}\alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{t}_{11} & \hat{t}_{12} & \hat{t}_{13} \\ \hat{t}_{21} & \hat{t}_{22} & \hat{t}_{23} \\ \hat{t}_{31} & \hat{t}_{32} & \hat{t}_{33} \\ \dots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u}\alpha_2^1 \\ \hat{u}\alpha_2^2 \\ \hat{u}\alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_{11} & \hat{u}_{12} & \hat{u}_{13} \\ \hat{u}_{21} & \hat{u}_{22} & \hat{u}_{23} \\ \hat{u}_{31} & \hat{u}_{32} & \hat{u}_{33} \\ \dots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \hat{t}\alpha_2^1 \\ \hat{t}\alpha_2^2 \\ \hat{t}\alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{t}_{11} & \hat{t}_{12} & \hat{t}_{13} \\ \hat{t}_{21} & \hat{t}_{22} & \hat{t}_{23} \\ \hat{t}_{31} & \hat{t}_{32} & \hat{t}_{33} \\ \dots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

Deve-se calcular também o termo diagonal com a primeira derivada das soluções particulares de deslocamentos multiplicada pelo coeficiente da posição do ponto fonte e também pelos coeficientes  $[\alpha_\theta^m]$ . As derivadas das soluções particulares devem ter seus pontos fonte deslocados na mesma posição das matrizes de derivadas das soluções fundamentais, ou seja, os pontos fonte da primeira derivada das soluções particulares de deslocamentos devem ser deslocados para  $(-2/3, 0, +2/3)$ , conforme a Figura 24:

**Figura 24** – Deslocamento dos pontos fonte para contribuição das diagonais



**Fonte:** O autor (2020).

As derivadas das soluções particulares são dadas pela equação 6.60. A matriz das derivadas das soluções particulares tem a seguinte forma:

$$[\hat{u}_{i,\gamma}] = C_{ij} \begin{bmatrix} \hat{u}_{1,\gamma}(r_{11}) & \hat{u}_{1,\gamma}(r_{12}) & \hat{u}_{1,\gamma}(r_{13}) \\ \hat{u}_{2,\gamma}(r_{11}) & \hat{u}_{2,\gamma}(r_{12}) & \hat{u}_{2,\gamma}(r_{13}) \\ \hat{u}_{3,\gamma}(r_{11}) & \hat{u}_{3,\gamma}(r_{12}) & \hat{u}_{3,\gamma}(r_{13}) \\ \vdots & & \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

São armazenadas duas matrizes de soluções particulares, uma para a derivada com relação a x e outra para a derivada com relação a y.

$$[\hat{u}_{i,1}] = C_{ij} \begin{bmatrix} \hat{u}_{1,1}(r_{11}) & \hat{u}_{1,1}(r_{12}) & \hat{u}_{1,1}(r_{13}) \\ \hat{u}_{2,1}(r_{11}) & \hat{u}_{2,1}(r_{12}) & \hat{u}_{2,1}(r_{13}) \\ \hat{u}_{3,1}(r_{11}) & \hat{u}_{3,1}(r_{12}) & \hat{u}_{3,1}(r_{13}) \\ \vdots & & \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

$$[\hat{u}_{i,2}] = C_{ij} \begin{bmatrix} \hat{u}_{1,2}(r_{11}) & \hat{u}_{1,2}(r_{12}) & \hat{u}_{1,2}(r_{13}) \\ \hat{u}_{2,2}(r_{11}) & \hat{u}_{2,2}(r_{12}) & \hat{u}_{2,2}(r_{13}) \\ \hat{u}_{3,2}(r_{11}) & \hat{u}_{3,2}(r_{12}) & \hat{u}_{3,2}(r_{13}) \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

A matriz das derivadas das soluções particulares para contribuição diagonal tem altura igual a três vezes o número de pontos no contorno e largura igual ao número de pontos de MRD. Cada ponto fonte irá gerar três linhas nas matrizes de derivadas de soluções particulares. O coeficiente  $C_{ij}$  é tem valor 0.5 caso o ponto fonte esteja no contorno e 1.0 caso o ponto fonte esteja no domínio. Para aproximação da integral de domínio pelo MRD, deve-se então multiplicar a matriz das derivadas das soluções particulares pelo vetor  $[\alpha^m]$  correspondente. Os vetores  $[\hat{u}\alpha^m]$  e  $[\hat{t}\alpha^m]$  multiplicam as matrizes de derivadas das soluções fundamentais  $[H_{,\gamma}]$  e  $[G_{,\gamma}]$  respectivamente. Como são duas aproximações de distribuições de tensões no domínio, tem-se no final duas integrais diferentes que devem ser somadas para obter-se a integral final completa.

A integral da aproximação de  $N_{11}(X)u_{3,1}(X) + N_{12}(X)u_{3,2}(X)$  é dada pela equação 6.62:

$$I_1 = \iint_{\Omega} (N_{11}(X)u_{3,1}(X) + N_{12}(X)u_{3,2}(X))U_{i3,1}(x', X)d\Omega(X) \cong$$

$$C_{ij} \begin{bmatrix} \hat{u}_{1,1} & \hat{u}_{1,1} & \hat{u}_{1,1} & \dots \\ \hat{u}_{2,1} & \hat{u}_{2,1} & \hat{u}_{2,1} & \dots \\ \hat{u}_{3,1} & \hat{u}_{3,1} & \hat{u}_{3,1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{11,1} & T_{12,1} & T_{13,1} \\ T_{21,1} & T_{22,1} & T_{23,1} \\ T_{31,1} & T_{32,1} & T_{33,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \hat{u}\alpha_1^1 \\ \hat{u}\alpha_1^2 \\ \hat{u}\alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{11,1} & U_{12,1} & U_{13,1} \\ U_{21,1} & U_{22,1} & U_{23,1} \\ U_{31,1} & U_{32,1} & U_{33,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \hat{t}\alpha_1^1 \\ \hat{t}\alpha_1^2 \\ \hat{t}\alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

A integral da aproximação de  $N_{22}(X)u_{3,2}(X) + N_{21}(X)u_{3,1}(X)$  é dada pela equação 6.63:

$$I_2 = \iint_{\Omega} (N_{22}(X)u_{3,2}(X) + N_{21}(X)u_{3,1}(X))U_{i3,2}(x', X)d\Omega(X) \cong$$

$$C_{ij} \begin{bmatrix} \hat{u}_{1,2} & \hat{u}_{1,2} & \hat{u}_{1,2} & \dots \\ \hat{u}_{2,2} & \hat{u}_{2,2} & \hat{u}_{2,2} & \dots \\ \hat{u}_{3,2} & \hat{u}_{3,2} & \hat{u}_{3,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{11,2} & T_{12,2} & T_{13,2} \\ T_{21,2} & T_{22,2} & T_{23,2} \\ T_{31,2} & T_{32,2} & T_{33,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \hat{u}\alpha_2^1 \\ \hat{u}\alpha_2^2 \\ \hat{u}\alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{11,2} & U_{12,2} & U_{13,2} \\ U_{21,2} & U_{22,2} & U_{23,2} \\ U_{31,2} & U_{32,2} & U_{33,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \hat{t}\alpha_2^1 \\ \hat{t}\alpha_2^2 \\ \hat{t}\alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

Somando-se as contribuições das duas integrais aproximadas, obtêm-se o resultado da aproximação das integrais de domínio da equação integral de deslocamentos pelo MRD dada pela equação 6.64.

$$\iint_{\Omega} N_{\alpha\beta}(X)u_{3,\beta}(X)U_{i3,\alpha}(x', X)d\Omega(X) \cong I_1 + I_2 \quad (6.64)$$

## 6.9 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MRD PARA INTEGRAIS DE DOMÍNIO DA DERIVADA DA EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS

A integral de domínio da derivada da equação integral dos deslocamentos ( equação 4.3) pode ser convertida para contorno utilizando a relação 6.65:

$$\iint_{\Omega} N_{\alpha\beta}(X)u_{3,\beta}(X)U_{33,\alpha\gamma}(X',X)d\Omega(X) = \sum_{m=1}^{N+L} \alpha_{\theta}^m \left\{ c\hat{u}_{3,\gamma\theta}^m(x') + \int_{\Gamma} [n_{\alpha}(x)M_{3\alpha\beta,\gamma\theta}(x',x)\hat{u}_{\beta}^m(x) + n_{\beta}(x)Q_{3\beta,\gamma\theta}(x',x)\hat{u}_{3}^m(x) \dots - U_{3\beta,\gamma\theta}(x',x)\hat{t}_{\beta}^m(x) - U_{33,\gamma\theta}(x',x)\hat{t}_{3}^m(x)]d\Gamma(x) \right\} \quad (6.65)$$

Para a conversão da integral de domínio para o contorno utilizando o MRD, o procedimento é o mesmo que o da equação integral dos deslocamentos, para isto, foram aproveitadas as matrizes  $[\alpha_{\theta}^m]$ ,  $[\hat{u}\alpha_{\theta}^m]$  e  $[\hat{t}\alpha_{\theta}^m]$  para cálculo do MRD. Também deve-se calcular o termo diagonal com a segunda derivada das soluções particulares de deslocamentos multiplicada pelo coeficiente da posição do ponto fonte e também pelos coeficientes  $[\alpha_{\theta}^m]$ . As derivadas das soluções particulares são dadas pelas equações 5.35 ou 5.36. A matriz das segundas derivadas das soluções particulares tem a forma da equação 6.66:

$$[\hat{u}_{3,\gamma\theta}] = C_{ij} \begin{bmatrix} \hat{u}_{3,\gamma\theta}(r_{11}) & \hat{u}_{3,\gamma\theta}(r_{12}) & \hat{u}_{3,\gamma\theta}(r_{13}) \\ \hat{u}_{3,\gamma\theta}(r_{21}) & \hat{u}_{3,\gamma\theta}(r_{22}) & \hat{u}_{3,\gamma\theta}(r_{23}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

São armazenadas duas matrizes de soluções particulares, uma para a derivada com relação a x e outra para a derivada com relação a y.

$$[\hat{u}_{3,\gamma 1}] = C_{ij} \begin{bmatrix} \hat{u}_{3,11}(r_{11}) & \hat{u}_{3,11}(r_{12}) & \hat{u}_{3,11}(r_{13}) \\ \hat{u}_{3,21}(r_{21}) & \hat{u}_{3,21}(r_{22}) & \hat{u}_{3,21}(r_{23}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

$$[\hat{u}_{3,\gamma 2}] = C_{ij} \begin{bmatrix} \hat{u}_{3,12}(r_{11}) & \hat{u}_{3,12}(r_{12}) & \hat{u}_{3,12}(r_{13}) \\ \hat{u}_{3,22}(r_{21}) & \hat{u}_{3,22}(r_{22}) & \hat{u}_{3,22}(r_{23}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

A matriz das derivadas segundas das soluções particulares para contribuição diagonal tem altura de tamanho duas vezes o número de pontos de MRD e largura igual ao número de pontos de MRD. Cada ponto fonte irá gerar duas linhas na matriz. O coeficiente  $C_{ij}$  é tem valor 0.5 caso o ponto fonte esteja no contorno e 1.0 caso o ponto fonte esteja no domínio. Para aproximação da integral de domínio pelo MRD, deve-se então multiplicar a matriz das derivadas segundas das soluções particulares pelo vetor  $[\alpha_\theta^m]$  correspondente. Os vetores  $[\hat{u}\alpha_\theta^m]$  e  $[\hat{t}\alpha_\theta^m]$  multiplicam as matrizes de derivadas segundas das soluções fundamentais  $[H_{,\gamma\theta}]$  e  $[G_{,\gamma\theta}]$  respectivamente. Como são duas aproximações de distribuições de tensões no domínio, tem-se no final duas integrais diferentes que devem ser somadas para obter-se a integral final completa.

A integral da aproximação de  $N_{11}(X)u_{3,1}(X) + N_{12}(X)u_{3,2}(X)$  é dada pela equação 6.68:

$$\iint_{\Omega} (N_{11}(X)u_{3,1}(X) + N_{12}(X)u_{3,2}(X))U_{33,\gamma 1}(X', X)d\Omega(X) \cong$$

$$-C_{ij} \begin{bmatrix} \hat{u}_{3,11} & \hat{u}_{3,11} & \hat{u}_{3,11} \\ \hat{u}_{3,21} & \hat{u}_{3,21} & \hat{u}_{3,21} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{31,11} & T_{32,11} & T_{33,11} \\ T_{31,21} & T_{32,21} & T_{33,21} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}\alpha_1^1 \\ \hat{u}\alpha_1^2 \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{31,11} & U_{32,11} & U_{33,11} \\ U_{31,21} & U_{32,21} & U_{33,21} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}\alpha_1^1 \\ \hat{t}\alpha_1^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

A integral da aproximação de  $N_{22}(X)u_{3,2}(X) + N_{21}(X)u_{3,1}(X)$  é dada pela equação 6.69:

$$\iint_{\Omega} (N_{22}(X)u_{3,2}(X) + N_{21}(X)u_{3,1}(X))U_{33,\gamma 2}(X', X)d\Omega(X) \cong$$

$$-C_{ij} \begin{bmatrix} \hat{u}_{3,12} & \hat{u}_{3,12} & \hat{u}_{3,12} \\ \hat{u}_{3,22} & \hat{u}_{3,22} & \hat{u}_{3,22} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{31,12} & T_{32,12} & T_{33,12} \\ T_{31,22} & T_{32,22} & T_{33,22} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}\alpha_2^1 \\ \hat{u}\alpha_2^2 \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{31,12} & U_{32,12} & U_{33,12} \\ U_{31,22} & U_{32,22} & U_{33,22} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}\alpha_2^1 \\ \hat{t}\alpha_2^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

## 6.10 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE AUTOVALOR PARA O MRD

Para encontrar a carga crítica, é necessário montar um problema de autovalor utilizando as duas equações integrais (4.3) e (4.4). Todo o processo depende a aproximação das tensões normais multiplicadas pelas derivadas dos deslocamentos transversais  $[N_{\theta\beta}u_{3,\beta}]$ . As tensões normais são obtidas resolvendo o problema de estado plano de tensão, mas as derivadas dos deslocamentos transversais devem ser obtidas utilizando um processo de iteração. Inicialmente é criado um vetor  $[DWI]$  que armazena as derivadas  $u_{3,1}$  e  $u_{3,2}$  em cada ponto do domínio e contorno. Como ainda não se sabe os valores das derivadas dos deslocamentos transversais, é feito um chute inicial com o valor de 1, conforme apresentado na equação 6.70:

$$[DWI] = \begin{bmatrix} u_{3,1}^{(1)} \\ u_{3,2}^{(1)} \\ u_{3,1}^{(2)} \\ u_{3,2}^{(2)} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

Com os valores iniciais de  $u_{3,1}$  e  $u_{3,2}$  deve-se proceder para o processo do cálculo de  $[\alpha_\theta^m]$ . Para a primeira iteração do processo de cálculo de autovalor, as matrizes do sistema de aproximação da função radial fica da conforme equação 6.71:

$$[F][\alpha_\theta^m] = [N_{\theta\beta}u_{3,\beta}]$$

$$\begin{bmatrix} f(r_{11}) & f(r_{12}) & f(r_{13}) \\ f(r_{21}) & f(r_{22}) & f(r_{23}) \\ f(r_{31}) & f(r_{32}) & f(r_{33}) \\ \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}u_{3,1} + N_{12}u_{3,2} \\ N_{11}u_{3,1} + N_{12}u_{3,2} \\ N_{11}u_{3,1} + N_{12}u_{3,2} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

Substituindo os valores iniciais, obtem-se:

$$\begin{bmatrix} f(r_{11}) & f(r_{12}) & f(r_{13}) \\ f(r_{21}) & f(r_{22}) & f(r_{23}) \\ f(r_{31}) & f(r_{32}) & f(r_{33}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} * 1 + N_{12} * 1 \\ N_{11} * 1 + N_{12} * 1 \\ N_{11} * 1 + N_{12} * 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

Lembrando-se que é necessário aproximar duas distribuições diferentes de tensões normais multiplicadas pelas derivadas do deslocamento transversal, a matriz da segunda aproximação é dada pela equação 6.73:

$$\begin{bmatrix} f(r_{11}) & f(r_{12}) & f(r_{13}) \\ f(r_{21}) & f(r_{22}) & f(r_{23}) \\ f(r_{31}) & f(r_{32}) & f(r_{33}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{22} * 1 + N_{21} * 1 \\ N_{22} * 1 + N_{21} * 1 \\ N_{22} * 1 + N_{21} * 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.73)$$

Como todos os valores são conhecidos, resolve-se o sistema para encontrar os coeficientes  $[\alpha_\theta^m]$  .:

$$[\alpha_1^m] = [N_{11} * 1 + N_{12} * 1][F]^{-1} \quad (6.74)$$

$$[\alpha_2^m] = [N_{22} * 1 + N_{21} * 1][F]^{-1}$$

Multiplica-se então os coeficientes  $[\alpha_\theta^m]$  pelas matrizes de soluções particulares  $[\hat{u}]$  e  $[\hat{t}]$  obtendo-se:

$$[\hat{u}\alpha_1^m] = [\hat{u}][\alpha_1^m]$$

$$[\hat{u}\alpha_2^m] = [\hat{u}][\alpha_2^m]$$

(6.75)

$$[\hat{t}\alpha_1^m] = [\hat{t}][\alpha_1^m]$$

$$[\hat{t}\alpha_2^m] = [\hat{t}][\alpha_2^m]$$

Utilizando as matrizes da equação anterior é possível obter as integrais de domínio da primeira iteração:

$$\iint_{\Omega} (N_{11}(X)u_{3,1}(X) + N_{12}(X)u_{3,2}(X))U_{i3,1}(x', X)d\Omega(X) \cong$$

$$[I_1] = C_{ij} \begin{bmatrix} \hat{u}_{1,1} & \hat{u}_{1,1} & \hat{u}_{1,1} & \dots & \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \hat{u}_{2,1} & \hat{u}_{2,1} & \hat{u}_{2,1} & \dots & \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \hat{u}_{3,1} & \hat{u}_{3,1} & \hat{u}_{3,1} & \dots & \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{11,1} & T_{12,1} & T_{13,1} & \dots & \begin{bmatrix} \hat{u}_{\alpha_1^1} \\ \hat{u}_{\alpha_1^2} \\ \hat{u}_{\alpha_1^3} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ T_{21,1} & T_{22,1} & T_{23,1} & \dots & \begin{bmatrix} \hat{u}_{\alpha_1^1} \\ \hat{u}_{\alpha_1^2} \\ \hat{u}_{\alpha_1^3} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ T_{31,1} & T_{32,1} & T_{33,1} & \dots & \begin{bmatrix} \hat{u}_{\alpha_1^1} \\ \hat{u}_{\alpha_1^2} \\ \hat{u}_{\alpha_1^3} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{11,1} & U_{12,1} & U_{13,1} & \dots & \begin{bmatrix} \hat{t}_{\alpha_1^1} \\ \hat{t}_{\alpha_1^2} \\ \hat{t}_{\alpha_1^3} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ U_{21,1} & U_{22,1} & U_{23,1} & \dots & \begin{bmatrix} \hat{t}_{\alpha_1^1} \\ \hat{t}_{\alpha_1^2} \\ \hat{t}_{\alpha_1^3} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ U_{31,1} & U_{32,1} & U_{33,1} & \dots & \begin{bmatrix} \hat{t}_{\alpha_1^1} \\ \hat{t}_{\alpha_1^2} \\ \hat{t}_{\alpha_1^3} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \quad (6.76)$$

$$\iint_{\Omega} (N_{22}(X)u_{3,2}(X) + N_{21}(X)u_{3,1}(X))U_{i3,2}(x', X)d\Omega(X) \cong$$

$$[I_2] = C_{ij} \begin{bmatrix} \hat{u}_{1,2} & \hat{u}_{1,2} & \hat{u}_{1,2} & \dots & \begin{bmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \hat{u}_{2,2} & \hat{u}_{2,2} & \hat{u}_{2,2} & \dots & \begin{bmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \hat{u}_{3,2} & \hat{u}_{3,2} & \hat{u}_{3,2} & \dots & \begin{bmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{11,2} & T_{12,2} & T_{13,2} & \dots & \begin{bmatrix} \hat{u}_{\alpha_2^1} \\ \hat{u}_{\alpha_2^2} \\ \hat{u}_{\alpha_2^3} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ T_{21,2} & T_{22,2} & T_{23,2} & \dots & \begin{bmatrix} \hat{u}_{\alpha_2^1} \\ \hat{u}_{\alpha_2^2} \\ \hat{u}_{\alpha_2^3} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ T_{31,2} & T_{32,2} & T_{33,2} & \dots & \begin{bmatrix} \hat{u}_{\alpha_2^1} \\ \hat{u}_{\alpha_2^2} \\ \hat{u}_{\alpha_2^3} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{11,2} & U_{12,2} & U_{13,2} & \dots & \begin{bmatrix} \hat{t}_{\alpha_2^1} \\ \hat{t}_{\alpha_2^2} \\ \hat{t}_{\alpha_2^3} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ U_{21,2} & U_{22,2} & U_{23,2} & \dots & \begin{bmatrix} \hat{t}_{\alpha_2^1} \\ \hat{t}_{\alpha_2^2} \\ \hat{t}_{\alpha_2^3} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ U_{31,2} & U_{32,2} & U_{33,2} & \dots & \begin{bmatrix} \hat{t}_{\alpha_2^1} \\ \hat{t}_{\alpha_2^2} \\ \hat{t}_{\alpha_2^3} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \quad (6.77)$$

O vetor final com os valores da integral de domínio é calculado somando-se os vetores  $[I_1]$  e  $[I_2]$ :

$$\iint_{\Omega} N_{\theta\beta}(X)u_{3,\beta}(X)U_{i3,\theta}(x', X)d\Omega(X) \cong [I_1] + [I_2]$$

(6.78)

$$[INT_1] = [I_1] + [I_2]$$

Também deve-se calcular a integral de contorno relacionada com a não linearidade geométrica:

$$\int_{\Gamma} n_{\theta}(x)N_{\theta\beta}(x)u_{3,\beta}(x)U_{i3}(x', x)d\Gamma(x)$$

(6.79)

Esta integral será armazenada no vetor  $[C_1]$ , sendo obtida multiplicando-se a matriz com as contribuições das integrais de contorno  $[MCONT_1]$  pelo vetor de

derivadas dos deslocamentos transversais  $[DWI]$ , o processo de montagem da matriz  $[MCONT_1]$  é mostrado na seção 6.6.

$$[C_1] = [MCONT_1][DWI] \quad (6.80)$$

A equação integral dos deslocamentos pode então ser escrita conforme a equação 6.81:

$$[H][u] - [G][t] = [C_1] - [INT_1] \quad (6.81)$$

Aplicando as condições de contorno nas matrizes  $[H]$  e  $[G]$ , e somando-se as matrizes relacionadas com a não linearidade geométrica  $[C_1]$  e  $[INT_1]$  o problema reduz-se a um sistema linear:

$$[A][x] = [b] \quad (6.82)$$

As incógnitas no contorno obtidas pela resolução deste sistema devem ser armazenadas em um vetor de forças de superfície  $[t]$  e um vetor de deslocamentos  $[u]$ . Voltando-se para a equação integral da derivada dos deslocamentos transversais, deve-se também calcular as integrais de domínio utilizando os mesmos vetores  $[\alpha_\theta^m]$ ,  $[\hat{u}\alpha_\theta^m]$  e  $[\hat{t}\alpha_\theta^m]$ . As integrais de domínio da equação integral da derivada dos deslocamentos transversais são dadas pelas equações 6.83 e 6.84:

$$\iint_{\Omega} (N_{11}(X)u_{3,1}(X) + N_{12}(X)u_{3,2}(X))U_{33,\gamma_1}(X', X)d\Omega(X) \cong \quad (6.83)$$

$$[U_3] = -C_{ij} \begin{bmatrix} \hat{u}_{3,11} & \hat{u}_{3,11} & \hat{u}_{3,11} \\ \hat{u}_{3,21} & \hat{u}_{3,21} & \hat{u}_{3,21} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{31,11} & T_{32,11} & T_{33,11} \\ T_{31,21} & T_{32,21} & T_{33,21} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}\alpha_1^1 \\ \hat{u}\alpha_1^2 \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{31,11} & U_{32,11} & U_{33,11} \\ U_{31,21} & U_{32,21} & U_{33,21} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}\alpha_1^1 \\ \hat{t}\alpha_1^2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\iint_{\Omega} (N_{22}(X)u_{3,2}(X) + N_{21}(X)u_{3,1}(X))U_{33,\gamma 2}(X', X)d\Omega(X) \cong \quad (6.84)$$

$$[I_4] = -C_{ij} \begin{bmatrix} \hat{u}_{3,12} \hat{u}_{3,12} \hat{u}_{3,12} \\ \hat{u}_{3,22} \hat{u}_{3,22} \hat{u}_{3,22} \dots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{31,12} T_{32,12} T_{33,12} \\ T_{31,22} T_{32,22} T_{33,22} \dots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}\alpha_2^1 \\ \hat{u}\alpha_2^2 \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{31,12} U_{32,12} U_{33,12} \\ U_{31,22} U_{32,22} U_{33,22} \dots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}\alpha_2^1 \\ \hat{t}\alpha_2^2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

O vetor final com os valores da integral de domínio é calculado somando-se os vetores  $[I_3]$  e  $[I_4]$ :

$$\iint_{\Omega} N_{\theta\beta}(X)u_{3,\beta}(X)U_{33,\gamma\theta}(X', X)d\Omega(X) \cong [I_3] + [I_4] \quad (6.85)$$

$$[INT_2] = [I_3] + [I_4]$$

Também deve-se calcular a integral de contorno relacionada com a não linearidade geométrica:

$$\int_{\Gamma} n_{\theta}(x)N_{\theta\beta}(x)u_{3,\beta}(x)U_{33,\gamma}(X', X)d\Gamma(x) \quad (6.86)$$

Esta integral será armazenada no vetor  $[C_2]$ , sendo obtida multiplicando-se a matriz com as contribuições das integrais de contorno  $[MCONT_2]$  pelo vetor de derivadas dos deslocamentos transversais  $[DWI]$ , o processo de montagem da matriz  $[MCONT_2]$  é mostrado na seção 6.7.

$$[C_2] = [MCONT_2][DWI] \quad (6.87)$$

Os vetores  $[u]$  e  $[t]$  obtidos pela equação integral dos deslocamentos são utilizados na equação integral da derivada dos deslocamentos transversais, nas integrais dadas pela equação 6.88:

$$\int_{\Gamma} \left\{ n_{\alpha}(x) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [M_{3\alpha\beta}(X', x)] u_{\beta}(x) + n_{\beta}(x) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [Q_{3\beta}(X', x)] u_3(x) + \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{3\beta}(X', x)] t_{\beta}(x) - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{33}(X', x)] t_3(x) \right\} d\Gamma(x) \quad (6.88)$$

As contribuições da equação 6.88 são armazenadas nas matrizes de derivadas das soluções fundamentais  $[H_2]$  e  $[G_2]$ , sendo então multiplicadas pelos vetores de soluções  $[u]$  e  $[t]$  encontrados pela equação integral dos deslocamentos (equação 4.3). O processo de montagem das matrizes  $[H_2]$  e  $[G_2]$  é mostrado na seção 6.5. Para encontrar a derivada dos deslocamentos transversais somam-se as contribuições das integrais de contorno e domínio. Lembrando-se que deve-se levar em consideração o coeficiente de posicionamento do ponto fonte, multiplicando o resultado por 2 caso o ponto fonte esteja no contorno e por 1 caso ele esteja no domínio.

$$C_{ij}[u_{3,\gamma}] = \{[H_2][u] - [G_2][t] - [C_2] + [INT_2]\} \quad (6.89)$$

As derivadas dos deslocamentos transversais são armazenadas em uma matriz  $[DWA]$ , conforme equação 6.90:

$$[u_{3,\gamma}] = [DWA] \quad (6.90)$$

Para cada ponto de MRD, encontra-se uma derivada na direção  $x$  e uma derivada na direção  $y$ . Estas derivadas são então utilizadas no cálculo da carga crítica utilizando o quociente de Rayleigh:

$$Ax^{(k+1)} = x^k \quad \lambda_k = \frac{(x^{(k+1)}, x^k)}{(x^{(k+1)}, x^{(k+1)})} \quad (6.91)$$

$$N_{cr} = \frac{[DWA][DWI]}{[DWA][DWA]}$$

Este problema é considerado um problema de raiz dupla, sendo necessário um tratamento especialmente quando se considera problemas com

solicitação de cisalhamento puro. Este tratamento é dado pela equação 6.92 (quando já se passou a primeira iteração):

$$N_{cr1} = \sqrt{[AUX1][AUX2]} \quad [AUX1] = \sqrt{\frac{[DWI][DWI]}{[DWA][DWA]}} \quad (6.92)$$

$$[AUX2] = [AUX1]_{anterior}$$

O valor de AUX2 é AUX1 quando calculado na iteração anterior do problema de autovalor, se o programa estiver na primeira iteração o valor de  $N_{cr1}$  é 0. O valor de  $[DWA]$  é então dividido pela sua norma:

$$[DWA] = \frac{[DWA]}{\sqrt{|[DWA][DWA]|}} \quad (6.93)$$

Deve-se então ir para a segunda iteração substituindo o vetor  $[DWI]$ :

$$[DWI] = [DWA] \quad (6.94)$$

São então recalculadas as matrizes  $[\alpha_\theta^m]$ ,  $[\hat{u}\alpha_\theta^m]$ ,  $[\hat{t}\alpha_\theta^m]$ ,  $[C_1]$ ,  $[INT_1]$ ,  $[C_2]$ ,  $[INT_2]$  utilizando-se o novo valor de  $[DWI]$  da iteração anterior, obtendo-se as cargas críticas  $N_{crit}$  e  $N1_{crit}$  da iteração atual. Este processo continua até uma condição de parada, no caso do presente trabalho a condição é quando o erro relativo entre os valores da carga crítica atual e da carga crítica anterior for menor que  $10^{-4}$ . O valor do parâmetro crítico de flambagem é dado por 6.95:

$$k = \frac{a^2 N_{cr}}{\pi^2 D} \quad k_1 = \frac{a^2 N_{cr1}}{\pi^2 D} \quad (6.95)$$

O valor do parâmetro crítico de flambagem para a segunda carga crítica ( $N1_{crit}$ ) é dado por  $k_1$ .

## 7 APLICAÇÃO DO OPERADOR TANGENTE

### 7.1 OPERADOR TANGENTE PARA PRIMEIRA DERIVADA DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

O método do operador tangente mostrado no trabalho de Palermo Jr. (2012) é utilizado para reduzir o grau de singularidade das primeiras derivadas das soluções fundamentais de força de superfície de hypersingular ( $\frac{1}{r^2}$ ) para singularidades do tipo Cauchy ( $\frac{1}{r}$ ). A aplicação do método para a formulação de instabilidade de placas que leva em conta o efeito da deformação por cortante é mostrado a seguir. Inicialmente considerando a equação integral da derivada dos deslocamentos transversais com carga de domínio nula:

$$u_{3,\gamma} = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} T_{3j} u_j d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} U_{3j} t_j d\Gamma \quad (7.1)$$

Separando as parcelas da equação 7.1 encontra-se a equação 7.2:

$$\begin{aligned} u_{3,\gamma} = & \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} T_{3\beta} u_{\beta} + \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} T_{33} u_3 d\Gamma + \\ & - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} U_{3\beta} t_{\beta} + \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} U_{33} t_3 d\Gamma \end{aligned} \quad (7.2)$$

As relações das forças de superfície com o momento fletor e a cortante são dados pelas equações 7.3 e 7.4:

$$T_{3\alpha} = M_{3\alpha\beta} n_{\beta} \quad (7.3)$$

$$T_{33} = Q_{3\beta} n_{\beta} \quad (7.4)$$

Aplicando as relações das equações 7.3 e 7.4 na equação 7.2 pode-se obter a equação 7.5:

$$u_{3,\gamma} = \int_{\Gamma} n_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} M_{3\alpha\beta} u_{\beta} + n_{\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} Q_{3\beta} u_3 d\Gamma +$$

$$- \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} U_{3\beta} t_{\beta} + \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} U_{33} t_3 d\Gamma \quad (7.5)$$

Para poder escrever a equação 7.5 em termos do operador tangente adiciona-se e subtrai-se ao mesmo tempo os termos da equação 7.6:

$$u_{3,\gamma} = \int_{\Gamma} \left( n_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} M_{3\alpha\beta} - n_{\gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} M_{3\alpha\beta} \right) u_{\beta} + n_{\gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} M_{3\alpha\beta} u_{\beta} d\Gamma$$

$$+ \int_{\Gamma} \left( n_{\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} Q_{3\beta} - n_{\gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} Q_{3\beta} \right) u_3 + n_{\gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} Q_{3\beta} u_3 d\Gamma \quad (7.6)$$

$$- \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} U_{3\beta} t_{\beta} + \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} U_{33} t_3 d\Gamma$$

Segundo Timoshenko (1959) ao se realizar o equilíbrio das forças no elemento infinitesimal de placa, é possível obter a equação 7.7:

$$Q_{3\beta,\beta} + q = 0$$

$$M_{3\alpha\beta,\alpha} - Q_{3\beta} = 0 \quad (7.7)$$

Utilizando-se as equações de equilíbrio na equação 7.6 e admitindo-se que  $Q_{3\beta,\beta} = 0$  quando não existem cargas transversais é possível encontrar a equação 7.8:

$$\begin{aligned}
u_{3,\gamma} = & \int_{\Gamma} \left( n_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} M_{3\alpha\beta} - n_{\gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} M_{3\alpha\beta} \right) u_{\beta} + n_{\gamma} Q_{3\beta} u_{\beta} d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} \left( n_{\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} Q_{3\beta} - n_{\gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} Q_{3\beta} \right) u_3 d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} U_{3\beta} t_{\beta} + \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} U_{33} t_3 d\Gamma
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Segundo Palermo Jr. (2012) o operador tangente pode ser escrito conforme a equação 7.9:

$$D_{bm}[f] = n_b f_{,m} - n_m f_{,b} \tag{7.9}$$

Observando esta relação na equação 7.8 pode-se substituir o operador tangente das funções momento e cortante, obtendo-se a equação 7.10:

$$\begin{aligned}
u_{3,\gamma} = & \int_{\Gamma} (D_{\alpha\gamma}[M_{3\alpha\beta}]) u_{\beta} + n_{\gamma} Q_{3\beta} u_{\beta} d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma} (D_{\beta\gamma}[Q_{3\beta}]) u_3 d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} U_{3\beta} t_{\beta} + \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} U_{33} t_3 d\Gamma
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Apartir do trabalho de Palermo Jr. (2012) pode-se obter a relação 7.11:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} D_{\alpha\gamma}[f(x)]g(x)d\Gamma = & [e_{3\alpha\gamma}f(x)g(x)]_0^{\Gamma} + \int_{\Gamma} f(x)D_{\gamma\alpha}[g(x)]d\Gamma \\
D_{\gamma\alpha}[g(\xi)] = & e_{3\gamma\alpha} \frac{dg}{dt} = e_{3\gamma\alpha} \frac{1}{J(\xi)} \frac{dg}{d\xi}
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Onde  $e_{3\alpha\gamma}$  é o tensor alternante dado pela equação 5.33. Utilizando a relação da equação 7.11 na equação 7.10 pode-se obter a equação integral da derivada dos deslocamentos com o operador tangente.

$$\begin{aligned}
u_{3,\gamma}(X') = & \int_{\Gamma} \{ M_{3\alpha\beta}(X', x) D_{\gamma\alpha} [u_{\beta}(x)] + Q_{3\beta} n_{\gamma} u_{\beta}(x) + \\
& + Q_{3\beta}(X', x) D_{\beta\gamma} [u_3(x)] - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{3\beta}(X', x)] t_{\beta}(x) - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{33}(X', x)] t_3(x) \} d\Gamma(x) \\
& [e_{3\alpha\gamma} M_{3\alpha\beta} u_{\beta}(x)]_0^{\Gamma} + [e_{3\beta\gamma} Q_{3\beta} u_3(x)]_0^{\Gamma}
\end{aligned} \quad (7.12)$$

Onde os termos finais da equação 7.12 são as contribuições de canto que para o MRD devem ser consideradas para todos os elementos de contorno. Adicionando-se as integrais de domínio encontra-se a equação integral final da derivada dos deslocamentos com o operador tangente dada pela equação 7.13.

$$\begin{aligned}
u_{3,\gamma}(X') = & \int_{\Gamma} \{ M_{3\alpha\beta}(X', x) D_{\gamma\alpha} [u_{\beta}(x)] + Q_{3\beta} n_{\gamma} u_{\beta}(x) + \\
& + Q_{3\beta}(X', x) D_{\beta\gamma} [u_3(x)] - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{3\beta}(X', x)] t_{\beta}(x) - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{33}(X', x)] t_3(x) \} d\Gamma(x) \\
& [e_{3\alpha\gamma} M_{3\alpha\beta} u_{\beta}(x)]_0^{\Gamma} + [e_{3\beta\gamma} Q_{3\beta} u_3(x)]_0^{\Gamma} + \\
& \dots - \int_{\Gamma} n_{\alpha}(x) N_{\alpha\beta}(x) u_{3,\beta}(x) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{33}(X', x)] d\Gamma(x) + \iint_{\Omega} N_{\alpha\beta}(X) u_{3,\beta}(X) \frac{\partial}{\partial X_{\gamma}} [U_{33,\alpha}(X', X)] d\Omega(X)
\end{aligned} \quad (7.13)$$

A derivada da equação integral dos deslocamentos nos eixos x e y, com a aplicação do operador tangente fica conforme a equação 7.14, observando-se que só foi possível aplicar o operador tangente na solução fundamental de momento.

$$\begin{aligned}
u_{\rho,\gamma}(X') = & \int_{\Gamma} \left\{ M_{\rho\alpha\beta}(X', x) D_{\gamma\alpha} [u_{\beta}(x)] + n_{\gamma} Q_{\rho\beta}(X', x) u_{\beta}(x) + n_{\beta} \frac{\partial}{\partial X_{\gamma}} [Q_{\rho\beta}(X', x)] u_3(x) \dots \right. \\
& \dots - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{3\beta}(X', x)] t_{\beta}(x) - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{33}(X', x)] t_3(x) \} d\Gamma(x) + [e_{3\alpha\gamma} M_{\rho\alpha\beta} u_{\beta}(x)]_0^{\Gamma} \\
& - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X_{\gamma}} [U_{33}(X', X)] q(X) d\Omega(X) + \\
& - \int_{\Gamma} n_{\alpha}(x) N_{\alpha\beta}(x) u_{3,\beta}(x) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} [U_{\rho 3}(X', x)] d\Gamma(x) + \iint_{\Omega} N_{\alpha\beta}(X) u_{3,\beta}(X) \frac{\partial}{\partial X_{\gamma}} [U_{\rho 3,\alpha}(X', X)] d\Omega(X)
\end{aligned} \quad (7.14)$$

Observou-se no presente trabalho que a utilização do operador tangente para reduzir o grau da singularidade das soluções fundamentais gera resultados de integração melhores que as soluções fundamentais convencionais. A aplicação do MRD foi possível devido à utilização operador tangente, pois as soluções fundamentais convencionais tinham um núcleo hypersingular ( $\frac{1}{r^2}$ ) multiplicado por funções de Bessel  $K_0$  e  $K_1$ , necessitando-se métodos de integração singular robustos. O operador tangente reduziu o grau de singularidade para integrais singulares do tipo Cauchy ( $\frac{1}{r}$ ), permitindo que estas integrais fossem calculadas utilizando o método da subtração de singularidade ou o método dos subelementos. A implementação numérica do operador tangente pode ser vista seção 6.3. As integrais com operador tangente utilizadas no MRD são dadas pelas equações 7.15-7.21:

$$\int_{\Gamma} T_{\rho\beta,\gamma} u_{\beta} d\Gamma = \int_{\Gamma} Q_{\rho\beta} n_{\gamma} u_{\beta} + M_{\rho\alpha\beta} D_{\gamma\alpha} [u_{\beta}] d\Gamma + [e_{3\alpha\gamma} M_{\rho\alpha\beta} u_{\beta}]_0^{\Gamma} \quad (7.15)$$

$$\int_{\Gamma} T_{3\beta,\gamma} u_{\beta} d\Gamma = \int_{\Gamma} Q_{3\beta} n_{\gamma} u_{\beta} + M_{3\alpha\beta} D_{\gamma\alpha} [u_{\beta}] d\Gamma + [e_{3\alpha\gamma} M_{3\alpha\beta} u_{\beta}]_0^{\Gamma} \quad (7.16)$$

$$\int_{\Gamma} T_{33,\gamma} u_3 d\Gamma = \int_{\Gamma} Q_{3\beta} D_{\gamma\beta} [u_3] d\Gamma + [e_{3\beta\gamma} Q_{3\beta} u_3]_0^{\Gamma} \quad (7.17)$$

Onde:

$$M_{\rho\alpha\beta} = -\frac{1}{\pi r} \left[ \left( \frac{zK_1(z)}{2} + \frac{1-v}{4} + A(z) \right) [(\delta_{\rho\beta} - 2r_{,\beta}r_{,\rho})r_{,\alpha} + \delta_{\rho\alpha}r_{,\beta}] \right. \\ \left. + \frac{1+v}{4} \delta_{\alpha\beta}r_{,\rho} + A(z)(\delta_{\alpha\beta}r_{,\rho} - 2r_{,\beta}r_{,\rho}r_{,\alpha}) \right] \quad (7.18)$$

$$Q_{\rho\beta} = \frac{\lambda^2}{2\pi} [B(z)\delta_{\rho\beta} - A(z)r_{,\beta}r_{,\rho}] \quad (7.19)$$

$$M_{3\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} \left[ (1 + \nu)\delta_{\alpha\beta} \ln(z) + (1 - \nu) \left( r_{,\alpha} r_{,\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \right) \right] \quad (7.20)$$

$$Q_{3\beta} = -\frac{1}{2\pi r} r_{,\beta} \quad (7.21)$$

## 7.2 OPERADOR TANGENTE PARA SEGUNDA DERIVADA DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

No desenvolvimento do presente trabalho notou-se que o método de Gao (2002) para solução de integrais super singulares ( $\frac{1}{r^3}$ ) em elementos curvos não apresentava uma precisão suficiente para a aplicação do MRD, diminuindo a precisão na solução de problemas de placas com furo circular. Passou-se a utilizar o operador tangente nas segundas derivadas das soluções fundamentais para redução do grau de singularidade para hypersingular ( $\frac{1}{r^2}$ ), as quais apresentaram precisão satisfatória para elementos curvos. A aplicação do operador tangente na segunda derivada das soluções fundamentais é feita derivando-se os núcleos obtidos para a primeira derivada. Considerando a equação integral da segunda derivada dos deslocamentos transversais com carga de domínio nula:

$$\begin{aligned} u_{3,\gamma\theta}(X') = & \int_{\Gamma} \left\{ M_{3\alpha\beta,\theta}(X', x) D_{\gamma\alpha} [u_{\beta}(x)] + Q_{3\beta,\theta} n_{\gamma} u_{\beta}(x) + \right. \\ & \left. + Q_{3\beta,\theta}(X', x) D_{\beta\gamma} [u_3(x)] - \frac{\partial}{\partial x_{\theta}} [U_{3\beta,\gamma}(X', x)] t_{\beta}(x) - \frac{\partial}{\partial x_{\theta}} [U_{33,\gamma}(X', x)] t_3(x) \right\} d\Gamma(x) \\ & [e_{3\alpha\gamma} M_{3\alpha\beta,\theta} u_{\beta}(x)]_0^{\Gamma} + [e_{3\beta\gamma} Q_{3\beta,\theta} u_3(x)]_0^{\Gamma} \end{aligned} \quad (7.22)$$

As integrais com operador tangente utilizadas no MRD para segunda derivada das soluções fundamentais são dadas pelas equações 7.23-7.26:

$$\int_{\Gamma} T_{3\beta,\gamma\theta} u_{\beta} d\Gamma = \int_{\Gamma} M_{3\alpha\beta,\theta} D_{\gamma\alpha} [u_{\beta}] + Q_{3\beta,\theta} n_{\gamma} u_{\beta} d\Gamma + [e_{3\alpha\gamma} M_{3\alpha\beta,\theta} u_{\beta}]_0^{\Gamma} \quad (7.23)$$

$$\int_{\Gamma} T_{33,\gamma\theta} u_3 d\Gamma = \int_{\Gamma} Q_{3\beta,\theta}(X', x) D_{\beta\gamma} [u_3] d\Gamma + [e_{3\beta\gamma} Q_{3\beta,\theta} u_3]_0^{\Gamma} \quad (7.24)$$

Onde:

$$M_{3\alpha\beta,\theta} = -\frac{1}{4\pi r} [(1 + \nu)\delta_{\alpha\beta}r_{,\theta} + (1 - \nu)(\delta_{\alpha\theta} - r_{,\alpha}r_{,\theta})r_{,\beta} + (1 - \nu)(\delta_{\beta\theta} - r_{,\beta}r_{,\theta})r_{,\alpha}] \quad (7.25)$$

$$Q_{3\beta,\theta} = -\frac{1}{2\pi r^2} (-2r_{,\beta}r_{,\theta} + \delta_{\beta\theta}) \quad (7.26)$$

## 8 MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO SINGULAR

### 8.1 SINGULARIDADE DO TIPO 1/R

As integrais singulares de ordem  $(\frac{1}{r})$  são chamadas de fortemente singulares ou integral do tipo Cauchy. A equação 8.1 mostra um exemplo deste tipo de integral singular:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{r} dr \quad r \rightarrow 0 \quad (8.1)$$

O tratamento deste tipo de integral singular pode ser feito utilizando-se o método da subtração de singularidade, mostrado no trabalho de Guiggiani (1991), com este método pode-se calcular a integral da equação 8.1 no sentido do valor principal de Cauchy. A integral é calculada com uma parte numérica e uma parte analítica. O método será desenvolvido utilizando-se a expressão 8.2:

$$T_{\alpha\beta}^* = \int_{-1}^1 \frac{g(\xi) - g(\bar{\xi})}{(\xi - \bar{\xi})} d\xi + \int_{-1}^1 \frac{g(\bar{\xi})}{(\xi - \bar{\xi})} d\xi \quad (8.2)$$

Devido à subtração da singularidade, o primeiro termo do lado direito da equação 8.2 é regular, podendo ser calculado com a quadratura de Gauss convencional. O segundo termo do lado direito da equação 8.2 é calculado analiticamente. Para aplicação do método da subtração de singularidade, é necessário subtrair das funções de forma o valor de  $N(\bar{\xi})$ , ou seja, a função de forma avaliada no ponto fonte, localizado na coordenada intrínseca  $\xi = -1 \dots 1$ . Isto faz com que a integração seja considerada apenas quando o ponto fonte está dentro do elemento de contorno. Esta manipulação será feita utilizando as funções de forma usuais:

$$x(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)x_1 + (\xi + 1)(1 - \xi)x_2 + \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)x_3 \quad (8.3)$$

$$y(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)y_1 + (\xi + 1)(1 - \xi)y_2 + \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)y_3 \quad (8.4)$$

O processo da subtração de cada função de forma avaliada no ponto ponte é dado pelas equações 8.5, 8.6 e 8.7:

$$\begin{aligned} N1(\xi) - N1(\bar{\xi}) &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) - \frac{1}{2}\bar{\xi}(\bar{\xi} - 1) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi - \bar{\xi}^2 + \bar{\xi}) \\ &= \frac{1}{2}(\xi^2 - \bar{\xi}^2 - (\xi - \bar{\xi})) = \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi})(\xi + \bar{\xi} - 1) \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} N2(\xi) - N2(\bar{\xi}) &= (\xi + 1)(1 - \xi) - (\bar{\xi} + 1)(1 - \bar{\xi}) = -\xi + \bar{\xi}^2 \\ &= (\xi - \bar{\xi})(\xi + \bar{\xi})(-1) \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} N3(\xi) - N3(\bar{\xi}) &= \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) - \frac{1}{2}\bar{\xi}(\bar{\xi} + 1) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \bar{\xi}^2 + \xi - \bar{\xi}) \\ &= \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi})(\xi + \bar{\xi} + 1) \end{aligned} \quad (8.7)$$

A distância entre o ponto fonte e o ponto campo com relação a x é dada pela equação 8.8 e simplificada para 8.9:

$$dx(\xi, \bar{\xi}) = \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi})(\xi - \bar{\xi} - 1)x_1 + (\xi - \bar{\xi})(\xi + \bar{\xi})(-1)x_2 + \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi})(\xi + \bar{\xi} + 1)x_3 \quad (8.8)$$

$$dx(\xi, \bar{\xi}) = (\xi - \bar{\xi}) \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)x_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)x_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)x_3 \right) \quad (8.9)$$

De maneira análoga pode-se encontrar a distância com relação a y:

$$dy(\xi, \bar{\xi}) = \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi})(\xi - \bar{\xi} - 1)y_1 + (\xi - \bar{\xi})(\xi + \bar{\xi})(-1)y_2 + \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi})(\xi + \bar{\xi} + 1)y_3 \quad (8.10)$$

$$dy(\xi, \bar{\xi}) = (\xi - \bar{\xi}) \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)y_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)y_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)y_3 \right) \quad (8.11)$$

A distância  $r(\xi, \bar{\xi})$  é calculada de acordo com as equações equações 8.12-8.14:

$$r(\xi, \bar{\xi}) = \sqrt{dx(\xi, \bar{\xi})^2 + dy(\xi, \bar{\xi})^2} \quad (8.12)$$

$$r(\xi, \bar{\xi}) = \sqrt{\left[ (\xi - \bar{\xi}) \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)x_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)x_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)x_3 \right) \right]^2 + \left[ (\xi - \bar{\xi}) \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)y_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)y_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)y_3 \right) \right]^2} \quad (8.13)$$

$$r(\xi, \bar{\xi}) = |\xi - \bar{\xi}| \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)x_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)x_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)x_3 \right)^2 + \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)y_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)y_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)y_3 \right)^2 \right]} \quad (8.14)$$

A equação 8.14, removendo-se o termo  $|\xi - \bar{\xi}|$  obtêm-se o raio regularizado. As derivadas do raio são então calculadas utilizando-se o raio regularizado. A derivada com relação a x dada pelas equações 8.15 e 8.16:

$$\frac{dr}{dx}(\xi, \bar{\xi}) = \frac{dx(\xi, \bar{\xi})}{r(\xi, \bar{\xi})} \quad (8.15)$$

$$\frac{dr}{dx}(\xi, \bar{\xi}) = \frac{(\xi - \bar{\xi}) \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)x_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)x_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)x_3 \right)}{|\xi - \bar{\xi}| \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)x_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)x_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)x_3 \right)^2 + \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)y_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)y_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)y_3 \right)^2 \right]}} \quad (8.16)$$

A relação  $(\xi - \bar{\xi})$  pelo módulo  $|\xi - \bar{\xi}|$  gera a função sinal, a derivada do raio com relação a x passa a ser conforme a equação 8.17.

$$\frac{dr}{dx}(\xi, \bar{\xi}) = \frac{\text{signum}(\xi - \bar{\xi}) \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)x_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)x_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)x_3 \right)}{\sqrt{\left[ \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)x_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)x_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)x_3 \right)^2 + \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)y_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)y_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)y_3 \right)^2 \right]}} \quad (8.17)$$

A derivada do raio com relação a y passa a ser conforme a equação 8.18:

$$\frac{dr}{dy}(\xi, \bar{\xi}) = \frac{dy(\xi, \bar{\xi})}{r(\xi, \bar{\xi})} \quad (8.18)$$

$$\frac{dr}{dy}(\xi, \bar{\xi}) = \frac{(\xi - \bar{\xi}) \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)y_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)y_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)y_3 \right)}{|\xi - \bar{\xi}| \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)x_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)x_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)x_3 \right)^2 + \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)y_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)y_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)y_3 \right)^2 \right]}} \quad (8.19)$$

De maneira análoga pode-se obter a equação 8.20:

$$\frac{dr}{dy}(\xi, \bar{\xi}) = \frac{\text{signum}(\xi - \bar{\xi}) \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)y_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)y_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)y_3 \right)}{\sqrt{\left[ \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)x_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)x_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)x_3 \right)^2 + \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)y_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)y_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)y_3 \right)^2 \right]}} \quad (8.20)$$

Para calcular o jacobiano, utiliza-se as funções de forma não regularizadas, conforme mostrado pelas equações 8.21 e 8.22:

$$J(\xi) = \sqrt{\left[ \left( \frac{dx(\xi)}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right)^2 \right]} \quad (8.21)$$

$$J(\xi) = \sqrt{\left[ \left( \xi - \frac{1}{2} \right) x_1 + (-2\xi)x_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) x_3 \right]^2 + \left[ \left( \xi - \frac{1}{2} \right) y_1 + (-2\xi)y_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) y_3 \right]^2} \quad (8.22)$$

Os vetores normais são calculados com relação às funções de forma não regularizadas, o vetor normal  $n_x$  é dado pelas equações 8.23 e 8.24:

$$\frac{dx(\xi)}{dn} = n_x = \frac{1}{J(\xi)} \frac{dy(\xi)}{d\xi} \quad (8.23)$$

$$\frac{dx(\xi)}{dn} = n_x = \frac{\left( \xi - \frac{1}{2} \right) y_1 + (-2\xi)y_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) y_3}{\sqrt{\left[ \left( \xi - \frac{1}{2} \right) x_1 + (-2\xi)x_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) x_3 \right]^2 + \left[ \left( \xi - \frac{1}{2} \right) y_1 + (-2\xi)y_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) y_3 \right]^2}} \quad (8.24)$$

O vetor normal  $n_y$  é dado pelas equações 8.25 e 8.26:

$$\frac{dy(\xi)}{dn} = n_y = -\frac{1}{J(\xi)} \frac{dx(\xi)}{d\xi} \quad (8.25)$$

$$\frac{dy(\xi)}{dn} = n_y = \frac{(-1) \left( \left( \xi - \frac{1}{2} \right) x_1 + (-2\xi)x_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) x_3 \right)}{\sqrt{\left[ \left( \xi - \frac{1}{2} \right) x_1 + (-2\xi)x_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) x_3 \right]^2 + \left[ \left( \xi - \frac{1}{2} \right) y_1 + (-2\xi)y_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) y_3 \right]^2}} \quad (8.26)$$

A derivada normal é dada pela equação 8.27:

$$\frac{dr(\xi)}{dn} = \frac{dr(\xi, \bar{\xi})}{dx} nx + \frac{dr(\xi, \bar{\xi})}{dy} ny \quad (8.27)$$

Utilizando os termos calculados, pode-se aplicar o método da subtração da singularidade conforme descrito por Guiggiani (1991):

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \frac{g(\xi) - g(\bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}} d\xi + \int_{-1}^1 \frac{g(\bar{\xi})}{(\xi - \bar{\xi})} d\xi \quad (8.28)$$

Devem ser definidas as funções  $g(\xi)$  e  $g(\bar{\xi})$  para aplicação da subtração de singularidade. Utilizando-se como exemplo uma solução fundamental com aplicação no MRD pela equação 8.29:

$$U_{3\alpha,\gamma\theta}^* = \frac{1}{8\pi D r} (-2\delta_{\alpha\gamma} r_{,\theta} - 2\delta_{\gamma\theta} r_{,\alpha} - 2r_{,\gamma} \delta_{\alpha\theta} + 4r_{,\gamma} r_{,\alpha} r_{,\theta}) \quad (8.29)$$

Os termos regularizados serão definidos como uma função  $k$ , simplificando a solução fundamental 8.29 para a equação 8.31:

$$k(\xi, \bar{\xi}) = \frac{1}{8\pi D} (-2\delta_{\alpha\gamma} r_{,\theta} - 2\delta_{\gamma\theta} r_{,\alpha} - 2r_{,\gamma} \delta_{\alpha\theta} + 4r_{,\gamma} r_{,\alpha} r_{,\theta}) \quad (8.30)$$

$$U_{3\alpha,\gamma\theta}^* = k(\xi, \bar{\xi}) \frac{1}{r(\xi, \bar{\xi})} \quad (8.31)$$

Procede-se então com a integração do elemento de contorno conforme a equação 8.32:

$$U_{3\alpha,\gamma\theta}^* = \int_{-1}^1 \frac{k(\xi, \bar{\xi})}{r(\xi, \bar{\xi})} N_i(\xi) J(\xi) d\xi \quad (8.32)$$

Lembrando que o jacobiano e as funções de forma estão em sua forma não regularizada, conforme a equação 8.33:

$$J(\xi) = \sqrt{\left[ \left( \xi - \frac{1}{2} \right) x_1 + (-2\xi) x_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) x_3 \right]^2 + \left[ \left( \xi - \frac{1}{2} \right) y_1 + (-2\xi) y_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) y_3 \right]^2} \quad (8.33)$$

Observando que o raio está sendo multiplicado pelo módulo  $|\xi - \bar{\xi}|$ :

$$r = |\xi - \bar{\xi}| \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)x_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)x_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)x_3 \right)^2 + \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)y_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)y_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)y_3 \right)^2 \right]} \quad (8.34)$$

Substituindo o raio na equação 8.32:

$$U_{3\alpha, \gamma\theta}^* = \int_{-1}^1 \frac{k(\xi, \bar{\xi}) Ni(\xi) J(\xi) d\xi}{|\xi - \bar{\xi}| \cdot \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)x_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)x_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)x_3 \right)^2 + \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)y_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)y_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)y_3 \right)^2 \right]}} \quad (8.35)$$

Adotando-se  $\bar{r}$  conforme a equação 8.36:

$$\bar{r} = \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)x_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)x_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)x_3 \right)^2 + \left( \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi} - 1)y_1 + (\xi + \bar{\xi})(-1)y_2 + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi} + 1)y_3 \right)^2 \right]} \quad (8.36)$$

Substituindo o raio por  $\bar{r}$  na equação 8.35:

$$U_{3\alpha, \gamma\theta}^* = \int_{-1}^1 \frac{k(\xi, \bar{\xi})}{\bar{r} \cdot |\xi - \bar{\xi}|} Ni(\xi) J(\xi) d\xi \quad (8.37)$$

Chamando os termos da equação 8.37 de  $g(\xi, \bar{\xi})$ , exceto  $|\xi - \bar{\xi}|$ :

$$\int_{-1}^1 g(\xi, \bar{\xi}) d\xi = \int_{-1}^1 \frac{k(\xi, \bar{\xi})}{\bar{r}} Ni(\xi) J(\xi) d\xi \quad (8.38)$$

Substituindo (8.38) em (8.37) encontra-se a expressão 8.39:

$$U_{3\alpha, \gamma\theta}^* = \int_{-1}^1 \frac{g(\xi, \bar{\xi})}{|\xi - \bar{\xi}|} d\xi \quad (8.39)$$

Para realizar a subtração de singularidade, avalia-se a função  $g(\xi, \bar{\xi})$  no ponto fonte, de acordo com a equação 8.40:

$$\int_{-1}^1 g(\bar{\xi}, \bar{\xi}) d\xi = \int_{-1}^1 \frac{k(\bar{\xi}, \bar{\xi})}{r} Ni(\bar{\xi}) J(\bar{\xi}) d\xi \quad (8.40)$$

Subtraindo-se então a equação 8.40 de 8.39 e adicionando o sinal multiplicando  $g(\bar{\xi}, \bar{\xi})$  devido à utilização do módulo para regularizar a função:

$$U_{3\alpha, \gamma\theta}^* = \int_{-1}^1 \frac{g(\xi, \bar{\xi}) - \text{signum}(\xi - \bar{\xi}) \cdot g(\bar{\xi}, \bar{\xi})}{|\xi - \bar{\xi}|} d\xi \quad (8.41)$$

A integral 8.41 é calculada utilizando a quadratura de Gauss convencional devido ao seu núcleo núcleo regular. A utilização do módulo simplifica a avaliação da função sinal somente para as derivadas do raio e para a constante. O valor de  $g(\bar{\xi}, \bar{\xi})$  é sempre igual e somente será modificado devido ao sinal adicionado no momento da integração. A valor da função avaliada no ponto fonte é adicionada conforme a equação 8.42:

$$U_{3\alpha, \gamma\theta}^* = \int_{-1}^1 \frac{g(\xi, \bar{\xi}) - \text{signum}(\xi - \bar{\xi}) \cdot g(\bar{\xi}, \bar{\xi})}{|\xi - \bar{\xi}|} d\xi + \int_{-1}^1 \frac{g(\bar{\xi}, \bar{\xi})}{(\xi - \bar{\xi})} d\xi \quad (8.42)$$

A função avaliada no ponto fonte deve ter sua integral calculada analiticamente no sentido do valor principal de Cauchy, dado pelas equações 8.43-8.45. Se a posição do ponto fonte for  $\xi = -1$ , o valor da integral será dado pela equação 8.43:

$$\int_{-1}^1 \frac{g(\bar{\xi}, \bar{\xi})}{(\xi - \bar{\xi})} d\xi = g(\bar{\xi}, \bar{\xi}) \cdot \ln(J(\bar{\xi})) \quad (8.43)$$

Se a posição do ponto fonte estiver no intervalo  $-1 < \xi < 1$ , o valor da integral será dado pela equação 8.44:

$$\int_{-1}^1 \frac{g(\bar{\xi}, \bar{\xi})}{(\xi - \bar{\xi})} d\xi = g(\bar{\xi}, \bar{\xi}) \cdot [\ln(1 - \xi) - \ln(1 + \xi)] \quad (8.44)$$

Se a posição do ponto fonte for  $\xi = 1$ , o valor da integral será dado pela equação 8.45:

$$\int_{-1}^1 \frac{g(\bar{\xi}, \bar{\xi})}{(\xi - \bar{\xi})} d\xi = g(\bar{\xi}, \bar{\xi}) \cdot [-\ln(J(\bar{\xi}))] \quad (8.45)$$

Onde  $J(\bar{\xi})$  é o valor do jacobiano avaliado no ponto fonte.

## 8.2 SINGULARIDADE DO TIPO LN(R)

Para tratar as integrais singulares de ordem  $\ln(r)$  é utilizada a transformação cúbica descrita por Telles (1987). Esta transformação tem uma característica de zerar o jacobiano quando o ponto fonte está perto da singularidade. A integral em função de  $\xi$  a ser integrada é dada pela equação 8.46:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (8.46)$$

É utilizada uma equação cúbica para realizar a transformação de coordenadas, como a equação 8.47:

$$\xi(\theta) = a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d \quad (8.47)$$

A transformação linear de  $\xi$  para  $\theta$  é feita impondo as seguintes condições para a equação cúbica:

$$\frac{d\xi}{d\theta} = 0 \text{ para } \theta = \xi; \quad (8.48)$$

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} = 0 \text{ para } \theta = \xi; \quad (8.49)$$

$$\xi = 1 \text{ para } \theta = 1; \quad (8.50)$$

$$\xi = -1 \text{ para } \theta = -1; \quad (8.51)$$

Utilizando a equação 8.50 e aplicando na equação 8.47:

$$\begin{aligned} a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c + d &= 1 \\ a + b + c + d &= 1 \end{aligned} \quad (8.52)$$

Utilizando a condição 8.51 e aplicando na equação 8.47

$$\begin{aligned} a(-1)^3 + b(-1)^2 - c + d &= -1 \\ -a + b - c + d &= -1 \end{aligned} \quad (8.53)$$

Utilizando 8.50 e 8.51 encontra-se o sistema de equações 8.54:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 1 \\ -a + b - c + d &= -1 \end{aligned} \quad (8.54)$$

Resolvendo o sistema de equações 8.54, observa-se a equação 8.55:

$$\begin{aligned} a &= -c + 1 \\ b &= -d \end{aligned} \quad (8.55)$$

Aplicando a condição 8.48, achando a derivada primeira:

$$3a\theta^2 + 2b\theta + c = 0 \quad (8.56)$$

Substituindo os valores de a e b de 8.55 em 8.56 encontra-se 8.57 :

$$3 \cdot ((-c + 1))\bar{\gamma}^2 + 2 \cdot (-d) \cdot \bar{\gamma} + c = 0 \quad (8.57)$$

Aplicando a condição 8.49, achando a derivada segunda e substituindo os valores de a e b encontra-se a equação 8.58:

$$\begin{aligned} 6a\theta + 2b &= 0 \\ 6(-c + 1)\bar{\gamma} + 2(-d) &= 0 \end{aligned} \quad (8.58)$$

Formando-se um sistema de duas equações com c e d como incógnitas 8.59:

$$\begin{aligned} 3 \cdot ((-c + 1))\bar{\gamma}^2 + 2 \cdot (-d) \cdot \bar{\gamma} + c &= 0 \\ 6(-c + 1)\bar{\gamma} + 2(-d) &= 0 \end{aligned} \quad (8.59)$$

Resolvendo o sistema de equações acima:

$$c = \frac{3\bar{\gamma}^2}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \quad d = \frac{3\bar{\gamma}}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \quad (8.60)$$

Substituindo os valores de 8.55 em 8.60 encontra-se 8.61:

$$a = -\frac{3\bar{\gamma}^2}{3\bar{\gamma}^2 + 1} + 1 \quad b = -\frac{3\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}^2 + 1} \quad (8.61)$$

Lembrando-se da equação original:

$$\xi(\theta) = a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d \quad (8.62)$$

Substituindo os valores finais de a,b,c e d em 8.62:

$$\xi(\theta) = \frac{1}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \cdot \theta^3 + \left(-\frac{3\bar{\gamma}}{3\bar{\gamma}^2 + 1}\right) \cdot \theta^2 + \frac{3\bar{\gamma}^2}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \cdot \theta + \frac{3\bar{\gamma}}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \quad (8.63)$$

Deve-se encontrar também o jacobiano desta transformação, como a equação tem apenas uma variável, deve-se realizar a derivada primeira de 8.63:

$$J(\theta) = \frac{3\bar{\gamma}^2 - 6\bar{\gamma}\theta + 3\theta^2}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \quad (8.64)$$

Substituindo o valor de  $\xi(\theta)$  com a transformação cúbica na função original obtêm-se a equação 8.65:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \cdot \theta^3 + \left(-\frac{3\bar{\gamma}}{3\bar{\gamma}^2 + 1}\right) \cdot \theta^2 + \frac{3\bar{\gamma}^2}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \cdot \theta + \frac{3\bar{\gamma}}{3\bar{\gamma}^2 + 1}\right) \frac{3\bar{\gamma}^2 - 6\bar{\gamma}\theta + 3\theta^2}{3\bar{\gamma}^2 + 1} d\theta \quad (8.65)$$

Ainda é necessário calcular o valor de  $\bar{\gamma}$  para um valor  $\eta$  da posição do ponto fonte na coordenada intrínseca. Para isto deve-se resolver o polinômio de grau 3 dado pela equação 8.66.

$$\frac{1}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \cdot \theta^3 + \left( -\frac{3\bar{\gamma}}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \right) \cdot \theta^2 + \frac{3\bar{\gamma}^2}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \cdot \theta + \frac{3\bar{\gamma}}{3\bar{\gamma}^2 + 1} = \eta \quad (8.66)$$

Para resolver este polinômio é feita a substituição  $\theta = \bar{\gamma}$  e multiplica-se todos os termos por  $3\bar{\gamma}^2 + 1$  obtendo-se a equação 8.67:

$$(3\bar{\gamma}^2 + 1) \left[ \frac{1}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \cdot \bar{\gamma}^3 + \left( -\frac{3\bar{\gamma}}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \right) \cdot \bar{\gamma}^2 + \frac{3\bar{\gamma}^2}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \cdot \bar{\gamma} + \frac{3\bar{\gamma}}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \right] = \eta(3\bar{\gamma}^2 + 1) \quad (8.67)$$

Simplificando a equação 8.67 pode-se obter 8.68:

$$\bar{\gamma}^3 + 3\bar{\gamma} = \eta(3\bar{\gamma}^2 + 1) \quad (8.68)$$

Os coeficientes da equação cúbica são dados pela equação 8.69:

$$\begin{aligned} a_0 &= -\eta \\ a_1 &= 3 \\ a_2 &= -3\eta \\ a_3 &= 1 \end{aligned} \quad (8.69)$$

Para encontrar a raiz real da equação cúbica pode-se utilizar as relações 8.70:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \frac{-1}{3} a_2 + S + T \\ S &= \sqrt[3]{R + \sqrt{D}} \\ T &= \sqrt[3]{R - \sqrt{D}} \\ D &= (-Q)^2 \\ Q &= \frac{3a_1 - a_2^2}{9} \end{aligned} \quad (8.70)$$

$$R = \frac{9a_2a_1 - 27a_0 - 2a_2^3}{54}$$

Utilizando os coeficientes da equação 8.70 na equação 8.68 pode-se encontrar o valor de  $\bar{\gamma}$ :

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{\eta(\eta^2 - 1) + |\eta^2 - 1|} + \sqrt[3]{\eta \cdot (\eta^2 - 1) - |\eta^2 - 1|} + \eta; \quad (8.71)$$

Ao substituir-se 8.71 em 8.65 a transformação cúbica de Telles é então mostrada na equação 8.72:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 f \left( \frac{1}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \cdot \theta^3 + \left( -\frac{3\bar{\gamma}}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \right) \cdot \theta^2 + \frac{3\bar{\gamma}^2}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \cdot \theta + \frac{3\bar{\gamma}}{3\bar{\gamma}^2 + 1} \right) \frac{3\bar{\gamma}^2 - 6\bar{\gamma}\theta + 3\theta^2}{3\bar{\gamma}^2 + 1} d\theta \quad (8.72)$$

onde:

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{\eta(\eta^2 - 1) + |\eta^2 - 1|} + \sqrt[3]{\eta \cdot (\eta^2 - 1) - |\eta^2 - 1|} + \eta;$$

$\eta$  = posição do ponto fonte na coordenada intrínseca

A transformação cúbica de Telles pode ser usada em qualquer posição do ponto fonte, nos cantos e dentro do elemento de contorno.

### 8.3 TRANSFORMAÇÃO DE MONEGATO E SLOAN

A transformação proposta no trabalho de Monegato e Sloan (1997) pode ser considerada como a generalização da transformação de Telles para qualquer grau de polinômio, sendo este inteiro e ímpar. De maneira similar à transformação de Telles, é feita uma transformação de coordenadas de acordo com a equação 8.73:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 f(\gamma(\theta)) J(\theta) d\theta \quad (8.73)$$

A coordenada intrínseca é substituída pela relação da equação 8.74:

$$\xi = \gamma(\theta) = \eta + 2^{-q} \left\{ (1 + \eta)^{\frac{1}{q}} + (1 - \eta)^{\frac{1}{q}} \right\}^q \left[ \theta - \frac{(1 + \eta)^{\frac{1}{q}} - (1 - \eta)^{\frac{1}{q}}}{(1 + \eta)^{\frac{1}{q}} + (1 - \eta)^{\frac{1}{q}}} \right]^q \quad (8.74)$$

O jacobiano da transformação é dado pela equação 8.75:

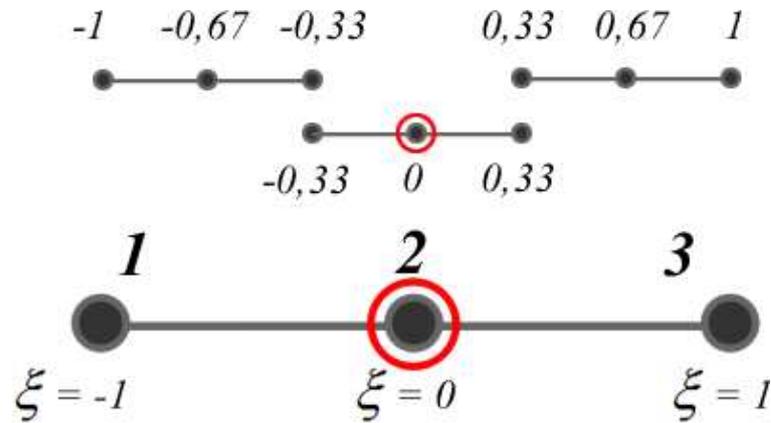
$$J(\theta) = \frac{2^{-q} \left\{ (1 + \eta)^{\frac{1}{q}} + (1 - \eta)^{\frac{1}{q}} \right\}^q \left[ \theta - \frac{(1 + \eta)^{\frac{1}{q}} - (1 - \eta)^{\frac{1}{q}}}{(1 + \eta)^{\frac{1}{q}} + (1 - \eta)^{\frac{1}{q}}} \right]^{q-1} q}{\theta - \frac{(1 + \eta)^{\frac{1}{q}} - (1 - \eta)^{\frac{1}{q}}}{(1 + \eta)^{\frac{1}{q}} + (1 - \eta)^{\frac{1}{q}}}} \quad (8.75)$$

Onde:  $\eta$  é a posição do ponto fonte na coordenada intrínseca  $\xi$ , “q” é o grau do polinômio de transformação, sendo que se este é assumido como  $q = 3$ , é obtida a transformação de Telles. No presente trabalho observou-se que uma transformação quinto grau  $q = 5$  gera resultados em geral melhores que a transformação cúbica de Telles para qualquer número de pontos de Gauss. Caso for utilizado  $q = 7$  ou mais foi constatado que a utilização de muitos pontos de Gauss ( $n = 22$  ou mais) pode deixar a transformação instável divergindo o resultado da integração.

#### 8.4 TÉCNICA DOS SUBELEMENTOS

A técnica dos subelementos é utilizada neste trabalho quando o núcleo das integrais do tipo Cauchy são multiplicadas por funções de Bessel. A técnica é aplicada dividindo-se o elemento principal em um número “n” de subelementos, onde estes são divididos entre os que não contém o ponto fonte realizando a integração regular, e o subelemento que contém o ponto fonte, aplicando-se uma técnica de integração singular. Esta divisão pode ser verificada na Figura 25, onde são mostrados subelementos para um elemento quadrático:

**Figura 25** – Elemento dividido em 3 subelementos



**Fonte:** O autor (2020).

Na Figura 25, o elemento principal foi dividido em 3 subelementos, acima de cada nó de cada subelemento pode-se ver a posição do nó na coordenada intrínseca do elemento principal. O primeiro subelemento não contém o ponto fonte, então sua integração é regular. O segundo subelemento contém o ponto fonte então a integração é singular e o terceiro deve ser integrado de maneira regular. Cada subelemento é mapeado em sua própria coordenada intrínseca e integrado de maneira similar ao mostrado no capítulo 4, contendo o jacobiano e multiplicado pelas funções de forma do subelemento quadrático.

Para recuperar-se os valores das integrais para o elemento principal, deve-se somar as contribuições de cada subelemento multiplicando-se pela função de forma avaliada na coordenada intrínseca do elemento principal correspondente aos nós de cada subelemento. Para exemplificar este processo, a equação 8.76 mostra este somatório, onde  $\xi_m$  são as coordenadas intrínsecas de um subelemento “m”.

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 F(\xi) N_1(\xi) d\xi = \\
 & N_1(-1) \int_{-1}^1 F(\xi_1) N_1(\xi_1) d\xi_1 + N_1(-0,67) \int_{-1}^1 F(\xi_1) N_2(\xi_1) d\xi_1 + N_1(-0,33) \int_{-1}^1 F(\xi_1) N_3(\xi_1) d\xi_1 \\
 & + N_1(-0,33) \int_{-1}^1 F(\xi_2) N_1(\xi_2) d\xi_2 + N_1(0) \int_{-1}^1 F(\xi_2) N_2(\xi_2) d\xi_2 + N_1(0,33) \int_{-1}^1 F(\xi_2) N_3(\xi_2) d\xi_2 \\
 & + N_1(0,33) \int_{-1}^1 F(\xi_3) N_1(\xi_3) d\xi_3 + N_1(0,67) \int_{-1}^1 F(\xi_3) N_2(\xi_3) d\xi_3 + N_1(1) \int_{-1}^1 F(\xi_3) N_3(\xi_3) d\xi_3
 \end{aligned} \tag{8.76}$$

Escrevendo-se em forma de somatório a equação 8.76:

$$\int_{-1}^1 F(\xi) N_a(\xi) d\xi = \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^3 N_a(\bar{\xi}_i) \int_{-1}^1 F(\xi_m) N_i(\xi_m) d\xi_m \quad (8.77)$$

O somatório da equação 8.77 está escrito para uma integral multiplicada por uma função de forma “a”.  $\xi_m$  são as coordenadas intrínsecas de cada subelemento.  $\bar{\xi}_i$  são os valores da posição de cada nó do subelemento na coordenada intrínseca do elemento principal.

## 8.5 MÉTODO DE GAO PARA INTEGRAIS SINGULARES

O método proposto por Gao (2006) é utilizado no presente trabalho para calcular as integrais de contorno hypersingulares e supersingulares. A equação 8.78 mostra uma integral singular de grau  $\beta$ :

$$\int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(r^\beta)}{r^\beta} d\Gamma \quad (8.78)$$

O método é baseado na integração radial posicionando-se o ponto fonte dentro do elemento e distribuindo pontos campo ao longo do intervalo de integração. Para utilizar-se da integração radial o diferencial  $d\Gamma$  precisa ser expresso em termos de  $dr$ , para isto Gao adotou a seguinte transformação:

$$I = \int_0^r \frac{\bar{f}(r^\beta)}{(\hat{r} \cdot \hat{l}) r^\beta} dr \quad (8.79)$$

Onde  $\hat{r}$  são os vetores unitários ao raio “r” e  $\hat{l}$  são os vetores unitários tangentes ao contorno no ponto campo. Para avaliar as integrais singulares, a parte não singular dos integrandos é aproximada com polinômios baseados na distância “r”:

$$\frac{\bar{f}(r^\beta)}{(\hat{r} \cdot \hat{l})} = \sum_{n=0}^N C_i^n r^n \quad (8.80)$$

Onde N é a ordem dos polinômios e C são os coeficientes determinados pela colocação do ponto campo em N + 1 pontos do ponto fonte até o ponto final do elemento. Para determinar os coeficientes C, Gao apresentou a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & r^1(xf_1, xc_1) & r^{N-1}(xf_1, xc_1) \\ 1 & r^1(xf_1, xc_2) & r^{N-1}(xf_1, xc_2) \\ 1 & r^1(xf_1, xc_N) & r^{N-1}(xf_1, xc_N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_i^1 \\ C_i^2 \\ C_i^N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\bar{f}(xf_1, xc_1)/(\hat{r} \cdot \hat{l}) - C_i^0)/r^1(xf_1, xc_1) \\ (\bar{f}(xf_1, xc_2)/(\hat{r} \cdot \hat{l}) - C_i^0)/r^1(xf_1, xc_2) \\ (\bar{f}(xf_1, xc_N)/(\hat{r} \cdot \hat{l}) - C_i^0)/r^1(xf_1, xc_N) \end{Bmatrix} \quad (8.81)$$

Para o sistema da equação 8.81, xf é o ponto fonte, xc é o ponto campo e  $C_i^0$  é dado pela equação 8.82:

$$C_i^0 = \bar{f}(xf_1, xf_1) \quad (8.82)$$

Obtidos os coeficientes  $C_i^n$ , a integral singular é aproximada pela equação 8.83:

$$\int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(r^\beta)}{r^\beta} d\Gamma = \sum_{n=0}^N C_i^n F^n \quad (8.83)$$

Onde  $F^n$  é dado pela equação 8.84:

$$F^n = \begin{cases} \frac{r^{n-\beta+1}(xf_1, xc_N)}{n - \beta + 1} & \text{para } n - \beta + 1 \neq 0 \\ \ln(r^1(xf_1, xc_N)) & \text{para } n - \beta + 1 = 0 \end{cases} \quad (8.84)$$

Gao (2006) forneceu um código em Fortran para aplicação do método de integração singular, o qual foi utilizado no presente trabalho. O algoritmo fornecido por Gao para cálculo de integrais singulares é mostrado a seguir.

O presente trabalho utiliza o método de Gao para integrais singulares com ponto fonte no centro do elemento quadrático. Para calcular este tipo de integral,

Gao separa o intervalo de integração em duas metades iguais, uma à direita do ponto fonte e outra à esquerda, aplicando o método duas vezes para encontrar a integral completa. Será mostrada a utilização do método para um elemento curvo com as seguintes coordenadas:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0,1500000 & x_2 &= 0,1504815 & x_3 &= 0,1519214 \\y_1 &= 0,2500000 & y_2 &= 0,2598017 & y_3 &= 0,2695090 \\x_f &= 0,1504815 & y_f &= 0,259801\end{aligned}\tag{8.85}$$

Para a primeira aplicação, é encontrada uma integral parcial com  $\xi$  de 0 até 1. Para isto, no caso do elemento quadrático, a coordenada intrínseca do ponto fonte é fixada em  $\xi = 0$ , o intervalo da metade à direita do ponto fonte ( $\xi = 0$  até 1) é então dividido em N partes, sendo N o grau do polinômio escolhido para interpolar a parte regular da integral. Por exemplo, se o grau do polinômio for  $N = 3$ , a função será avaliada com pontos campo em  $\xi = 0$ ,  $\xi = 1/3$ ,  $\xi = 2/3$  e  $\xi = 1$ .

Definidos os pontos para avaliação da função, é necessário preencher as matrizes do sistema da equação 8.81 para encontrar os coeficientes  $C_i^n$ . O primeiro coeficiente  $C_i^0$  é encontrado avaliando a função regular no ponto fonte  $\bar{f}(x_{f_1}, x_{f_1})$ . Somente para esta avaliação,  $dr/dn = 0$ ,  $\hat{r} \cdot \hat{l} = 1$  e se a função possuir as derivadas do raio ( $r_{,1}(\xi)$ ,  $r_{,2}(\xi)$ ), estas são singulares em  $\xi = 0$ , para contornar este problema, Gao aplicou uma tolerância, movendo o ponto campo para  $\xi = 0,03$  na coordenada intrínseca, somente para encontrar as parcelas da derivada do raio.

$$\begin{aligned}\xi_{0tol} &= 0,03 \\x(\xi_{0tol}) &= \sum_{i=1}^3 N_i(\xi_{0tol})x_i = 0,15051076 & y(\xi_{0tol}) &= \sum_{i=1}^3 N_i(\xi_{0tol})y_i = 0,26009429 \\dx(\xi_{0tol}) &= x(\xi_{0tol}) - x_f = 0,00002926 & dy(\xi_{0tol}) &= y(\xi_{0tol}) - y_f = 0,00029259 \\r(\xi_{0tol}) &= \sqrt{dx(\xi_{0tol})^2 + dy(\xi_{0tol})^2} = 0,00029404941 \\r_{,1}(\xi_{0tol}) &= \frac{dx(\xi_{0tol})}{r(\xi_{0tol})} = 0,099507086 & r_{,2}(\xi_{0tol}) &= \frac{dy(\xi_{0tol})}{r(\xi_{0tol})} = 0,99503685\end{aligned}\tag{8.86}$$

Calculadas as derivadas do raio com a tolerância, pode-se calcular os termos faltantes para encontrar  $C_i^0$ :

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= 0 \\
\frac{dx(\xi_0)}{d\xi} &= \sum_{i=1}^3 \frac{dN_i(\xi_0)}{d\xi} x_i = 0,000960700 & \frac{dy(\xi_0)}{d\xi} &= \sum_{i=1}^3 \frac{dN_i(\xi_0)}{d\xi} y_i = 0,00975450 \\
J(\xi_0) &= \sqrt{\frac{dx(\xi_0)^2}{d\xi} + \frac{dy(\xi_0)^2}{d\xi}} = 0,0098016944 \\
nx(\xi_0) &= \frac{1}{J(\xi_0)} \frac{dy(\xi_0)}{d\xi} = 0,99518511 & ny(\xi_0) &= -\frac{1}{J(\xi_0)} \frac{dx(\xi_0)}{d\xi} = -0,098013669 \\
\hat{r} \cdot \hat{l} &= 1 & \frac{dr}{dn} &= 0
\end{aligned} \tag{8.87}$$

A função escolhida neste exemplo tem uma singularidade de grau  $\frac{1}{r^2}$ , para encontrar  $C_i^0$  ela deve ser avaliada removendo-se o raio e o jacobiano:

$$\begin{aligned}
f(r) &= \frac{1}{r(\xi)^2} N_1(\xi) J(\xi) \\
\bar{f}(\xi) &= N_1(\xi) = -\frac{1}{2} \xi(1 - \xi) \\
C_i^0 &= \bar{f}(\xi_0 = 0) = 0
\end{aligned} \tag{8.88}$$

A função regular é então avaliada com ponto fonte em  $\xi = 0$ , e ponto campo  $\xi = 1/3$ . Obtendo-se os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{1}{3} \\
x(\xi_1) &= \sum_{i=1}^3 N_i(\xi_1) x_i = 0,15085497 & y(\xi) &= \sum_{i=1}^3 N_i(\xi_1) y_i = 0,26304795 \\
dx(\xi_1) &= x(\xi_1) - x_f = 0,00037347 & dy(\xi_1) &= y(\xi_1) - y_f = 0,00324625 \\
r_1(\xi_1) &= \sqrt{dx(\xi_1)^2 + dy(\xi_1)^2} = 0,0032676626 \\
r_{,1}(\xi_1) &= \frac{dx(\xi_1)}{r(\xi_1)} = 0,11429271 & r_{,2}(x_{gi}) &= \frac{dy(\xi_1)}{r(\xi_1)} = 0,99344712 \\
J(\xi_1) &= \sqrt{\frac{dx(\xi_1)^2}{d\xi} + \frac{dy(\xi_1)^2}{d\xi}} = 0,0098069339 \\
nx(\xi_1) &= \frac{1}{J(\xi_1)} \frac{dy(\xi_1)}{d\xi} = 0,99144342 & ny(\xi_1) &= -\frac{1}{J(\xi_1)} \frac{dx(\xi_1)}{d\xi} = -0,13053723
\end{aligned} \tag{8.89}$$

$$\xi_1 = \frac{1}{3}$$

$$\hat{l}_x = \frac{dx(\xi_1)}{d\xi} \frac{1}{J(\xi_1)} = 0,13053723 \quad \hat{l}_y = \frac{dy(\xi_1)}{d\xi} \frac{1}{J(\xi_1)} = 0,99144342$$

$$\hat{r} \cdot \hat{l} = |r_{,1}(\xi_1)\hat{l}_x + r_{,2}(\xi_1)\hat{l}_y| = 0,99986606 \quad (8.90)$$

$$\frac{dr}{dn} = r_{,1}(\xi_1)nx + r_{,2}(\xi_1)ny = -0,01636708$$

$$\frac{\bar{f}(\xi_1) - C_i^0}{\hat{r} \cdot \hat{l} - r_1(\xi_1)} = -34,007792$$

A função regular é então avaliada com ponto fonte em  $\xi = 0$ , e ponto campo  $\xi = 2/3$ . Obtendo-se os seguintes valores:

$$\xi_2 = \frac{2}{3}$$

$$x(\xi_2) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi_2)x_i = 0,15133495 \quad y(\xi_2) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi_2)y_i = 0,26628372$$

$$dx(\xi_2) = x(\xi_2) - x_f = 0,00085345 \quad dy(\xi_2) = y(\xi_2) - y_f = 0,00648202$$

$$r_1(\xi_2) = \sqrt{dx(\xi_1)^2 + dy(\xi_1)^2} = 0,0065379630$$

$$r_{,1}(\xi_2) = \frac{dx(\xi_2)}{r(\xi_2)} = 0,13053760 \quad r_{,2}(\xi_2) = \frac{dy(\xi_2)}{r(\xi_2)} = 0,99144336$$

$$J(\xi_2) = \sqrt{\frac{dx(\xi_2)^2}{d\xi} + \frac{dy(\xi_2)^2}{d\xi}} = 0,0098227037$$

$$nx(\xi_2) = \frac{1}{J(\xi_2)} \frac{dy(\xi_2)}{d\xi} = 0,98665091 \quad ny(\xi_2) = -\frac{1}{J(\xi_2)} \frac{dx(\xi_2)}{d\xi} = -0,16284925 \quad (8.91)$$

$$\hat{l}_x = \frac{dx(\xi_2)}{d\xi} \frac{1}{J(\xi_2)} = 0,16284925 \quad \hat{l}_y = \frac{dy(\xi_2)}{d\xi} \frac{1}{J(\xi_2)} = 0,98665091$$

$$\hat{r} \cdot \hat{l} = |r_{,1}(\xi_2)\hat{l}_x + r_{,2}(\xi_2)\hat{l}_y| = 0,99946644$$

$$\frac{dr}{dn} = r_{,1}(\xi_2)nx + r_{,2}(\xi_2)ny = -0,03266077$$

$$\frac{\bar{f}(\xi_2) - C_i^0}{\hat{r} \cdot \hat{l} - r_2(\xi_2)} = -17,003833$$

A função regular é então avaliada com ponto fonte em  $\xi = 0$ , e ponto campo  $\xi = 1$ . Obtendo-se os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
& \xi_3 = 1 \\
& x(\xi_3) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi_3)x_i = 0,15192140 \quad y(\xi_3) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi_3)y_i = 0,26950900 \\
& dx(\xi_3) = x(\xi_3) - x_f = 0,00143990 \quad dy(\xi_3) = y(\xi_3) - y_f = 0,00970730 \\
& r_1(\xi_3) = \sqrt{dx(\xi_3)^2 + dy(\xi_3)^2} = 0,0098135103 \\
& r_{,1}(\xi_3) = \frac{dx(\xi_3)}{r(\xi_3)} = 0,14672629 \quad r_{,2}(\xi_3) = \frac{dy(\xi_3)}{r(\xi_3)} = 0,98917713 \\
& J(\xi_3) = \sqrt{\frac{dx(\xi_3)^2}{d\xi} + \frac{dy(\xi_3)^2}{d\xi}} = 0,0098488820 \\
& nx(\xi_3) = \frac{1}{J(\xi_3)} \frac{dy(\xi_3)}{d\xi} = 0,98083217 \quad ny(\xi_3) = -\frac{1}{J(\xi_3)} \frac{dx(\xi_3)}{d\xi} = -0,19485461 \quad (8.92) \\
& \hat{l}_x = \frac{dx(\xi_3)}{d\xi} \frac{1}{J(\xi_3)} = 0,19485461 \quad \hat{l}_y = \frac{dy(\xi_3)}{d\xi} \frac{1}{J(\xi_3)} = 0,98083217 \\
& \hat{r} \cdot \hat{l} = |r_{,1}(\xi_3)\hat{l}_x + r_{,2}(\xi_3)\hat{l}_y| = 0,99880704 \\
& \frac{dr}{dn} = r_{,1}(\xi_3)nx + r_{,2}(\xi_3)ny = -0,04883185 \\
& \frac{\bar{f}(\xi_2) - C_i^0}{\hat{r} \cdot \hat{l} r_3(\xi_3)} = 0
\end{aligned}$$

A matriz do sistema 8.81 é então preenchida com os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & r_1(\xi_1) & r_1(\xi_1)^2 \\ 1 & r_2(\xi_2) & r_2(\xi_2)^2 \\ 1 & r_3(\xi_3) & r_2(\xi_3)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_i^1 \\ C_i^2 \\ C_i^N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\bar{f}(\xi_1)/(\hat{r} \cdot \hat{l}) - C_i^0)/r_1(\xi_1) \\ (\bar{f}(\xi_2)/(\hat{r} \cdot \hat{l}) - C_i^0)/r_2(\xi_2) \\ (\bar{f}(\xi_3)/(\hat{r} \cdot \hat{l}) - C_i^0)/r_3(\xi_3) \end{Bmatrix} \quad (8.93) \\
& \begin{bmatrix} 1 & 0,0032676690 & 0,0000106776 \\ 1 & 0,0065379644 & 0,0000427449 \\ 1 & 0,0098135103 & 0,0000963049 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_i^1 \\ C_i^2 \\ C_i^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -34,0077257098 \\ -17,0038290015 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Resolvendo-se o sistema, obtém-se os seguintes coeficientes:

$$\begin{Bmatrix} C_i^1 \\ C_i^2 \\ C_i^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -51,02523470 \\ 5212,01434488 \\ -1276,3824119 \end{Bmatrix} \quad (8.94)$$

Após os coeficientes serem obtidos, deve-se realizar o somatório da equação 8.83 e utilizar também a equação 8.84. Para o primeiro termo com  $n = 0$  do somatório, o coeficiente a ser multiplicado é  $C_i^0$ . A partir de  $n = 1$  deve-se multiplicar

os coeficientes  $C_i^n$  encontrados pela solução do sistema. Os coeficientes são multiplicados pelo termo analítico da equação 8.84. O somatório fica da seguinte maneira:

$$\int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(r^\beta)}{r^\beta} d\Gamma = \sum_{n=0}^N C_i^n F^n =$$

$$= C_i^0 \frac{r_3(\xi_3)^{0-2+1}}{0-2+1} + C_i^1 \ln(r_3(\xi_3)) + C_i^2 \frac{r_3(\xi_3)^{2-2+1}}{2-2+1} + C_i^3 \frac{r_3(\xi_3)^{3-2+1}}{3-2+1} \quad (8.95)$$

$$I1 = 287,0271$$

Este ainda não é o valor da integral final, ainda é necessário colocar os pontos campo à esquerda do ponto fonte, ou seja, realizar novamente os cálculos utilizando como pontos campo  $\xi = 0$ ,  $\xi = -1/3$ ,  $\xi = -2/3$  e  $\xi = -1$  (lembrando-se que para a primeira iteração, para calcular as derivadas do raio, é necessário que o ponto campo seja movido para  $\xi = -0,03$ ). Realizando estes cálculos, a matriz do sistema 8.81 é então preenchida com os seguintes valores:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,0032676690 & 0,0000106776 \\ 1 & 0,0065379644 & 0,0000427449 \\ 1 & 0,0098135103 & 0,0000963049 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_i^1 \\ C_i^2 \\ C_i^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 68,015430188 \\ 85,019091846 \\ 102,02195083 \end{Bmatrix} \quad (8.96)$$

Resolvendo-se o sistema, obtém-se os seguintes coeficientes:

$$\begin{Bmatrix} C_i^1 \\ C_i^2 \\ C_i^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50,286 \\ 5339,3 \\ -6565,4 \end{Bmatrix} \quad (8.97)$$

Após os coeficientes serem obtidos, deve-se realizar o somatório da equação 8.83

$$\int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(r^\beta)}{r^\beta} d\Gamma = \sum_{n=0}^N C_i^n F^n =$$

$$I2 = -184,7241 \quad (8.98)$$

Somando – se os valores de I1 e I2, obtém-se o valor da integral final:

$$\int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(r^{\beta})}{r^{\beta}} d\Gamma = I1 + I2 = 287,0271 - 184,7241$$
$$\int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(r^{\beta})}{r^{\beta}} d\Gamma = 102,303$$
(8.99)

O valor da aproximação da integral pode ser melhorado aumentando o grau do polinômio de aproximação N.

## 9 RESULTADOS PARA MRD

### 9.1 ANÁLISE INICIAL DE CONVERGÊNCIA – MRD

O primeiro teste realizado será uma análise de convergência do MRD quando é fixado o número de elementos de contorno e aumenta-se o número de pontos de domínio. O valor do parâmetro crítico de flambagem é dado pela equação 9.1:

$$k = \frac{a^2 N_{cr}}{\pi^2 D} \quad (9.1)$$

A carga crítica da placa é dada por  $N_{cr}$ , o tamanho do lado da placa é dado por “a”. D é o módulo de rigidez à flexão da placa, o módulo de Young adotado tem o valor de 206.9 GPa, o coeficiente de Poisson adotado tem valor de 0,3. O parâmetro da teoria de placas com deformação por cortante utilizado foi o de Mindlin, com valor de  $\pi^2/12$ . As placas analisadas são quadradas de  $a = 0,5$  m de lado. A carga aplicada nas placas é uniforme, com valor de 1 N, normal à seção transversal da placa.

Os tipos de vinculação utilizados são dados por (A) simplesmente apoiado, (L) lado livre, (E) lado engastado. Todos os resultados são para condição de contorno “hard”, ou seja, o giro tangencial ao canto da placa é travado.

A placa adotada para análise de convergência tem condições de contorno simplesmente apoiada nos quatro cantos e foi solicitada por carga uniaxial. Foram fixados 256 elementos quadráticos e aumentou-se os pontos de domínio distribuídos de maneira uniforme. Além disso, será mostrada uma das vantagens do método utilizado, a possibilidade de cálculo dos parâmetros críticos de flambagem para placas muito finas, de uma ordem de espessura de  $h/a = 0,001$ .

As funções de aproximação testadas para MRD foram  $f(r) = 1+r$  e  $f(r) = 1+r+r^2+r^3$ . Os valores da tabela 2 mostram os resultados obtidos:

**Tabela 2** – Convergência do MRD – Flambagem Uniaxial – AAAA –  $h/a = 0,001$ 

Elementos de contorno	Pontos de domínio	Resultados $f(r) = 1+r$	Resultados $f(r) = 1+r+r^2+r^3$	Analítica	Diferença (%) $f(r) = 1+r$	Diferença (%) $f(r) = 1+r+r^2+r^3$
256	4	4,3563	4,4114	4,0000	8,1791	9,3268
256	9	4,1839	4,2155	4,0000	4,3949	5,1127
256	16	4,1024	4,1223	4,0000	2,4970	2,9663
256	25	4,0617	4,0754	4,0000	1,5202	1,8509
256	36	4,0397	4,0500	4,0000	0,9835	1,2338
256	49	4,0270	4,0351	4,0000	0,6695	0,8703
256	64	4,0191	4,0259	4,0000	0,4756	0,6442
256	81	4,0141	4,0200	4,0000	0,3503	0,4971
256	100	4,0107	4,0160	4,0000	0,2662	0,3978
256	121	4,0083	4,0132	4,0000	0,2081	0,3284
256	144	4,0067	4,0112	4,0000	0,1667	0,2787
256	169	4,0055	4,0097	4,0000	0,1367	0,2420
256	196	4,0046	4,0086	4,0000	0,1144	0,2148
256	225	4,0039	4,0078	4,0000	0,0977	0,1941
256	256	4,0034	4,0071	4,0000	0,0849	0,1779

Fonte: O autor (2020).

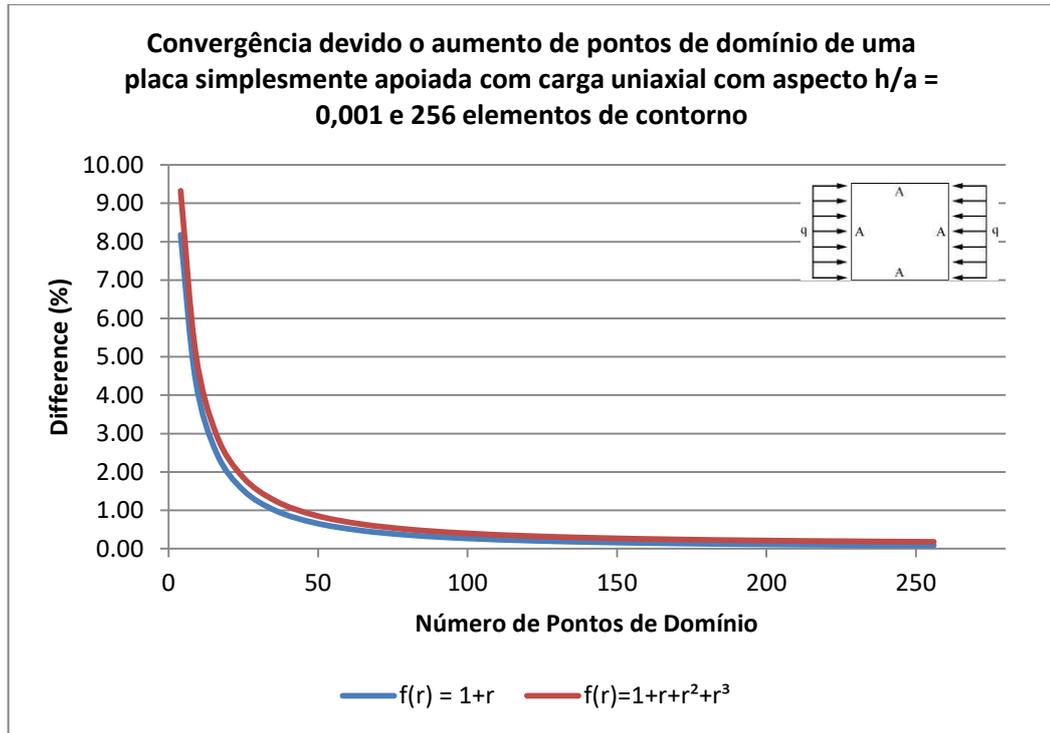
Foi observado que o valor do parâmetro crítico de flambagem convergiu para o valor analítico conforme foram adicionados pontos de domínio, melhorando assim a aproximação das tensões normais e das derivadas dos deslocamentos transversais ao longo do domínio.

Para placas muito finas, de uma ordem de espessura de  $h/a = 0,001$ , o número de elementos de contorno mostrou-se um ponto significativo no cálculo das cargas críticas. Este comportamento pode estar relacionado com as integrais das funções de Bessel, as quais tornam-se integrais de parte finita e precisam ser calculadas utilizando a técnica dos subelementos, esta técnica é abordada no capítulo 8.

Para o problema da placa simplesmente apoiada nos quatro lados observou-se que a função  $f(r) = 1+r$  convergiu de forma mais rápida que a função com mais termos  $f(r) = 1+r+r^2+r^3$ , mas com apenas 64 pontos de domínio as duas funções apresentaram um erro menor que 1% com relação à solução analítica.

A Figura 26 mostra o comportamento do método proposto à medida que aumenta-se o número de pontos de domínio.

**Figura 26** – Teste de convergência aumentando os pontos de domínio



**Fonte:** O autor (2020).

O segundo teste realizado na tabela 3 será uma análise com relação ao método proposto por Purbolaksono e Aliabadi (2005), mostrando o valor dos parâmetros críticos de flambagem para a mesma placa do exemplo anterior mas com uma ordem de espessura de  $h/a = 0,01$ .

**Tabela 3** – Convergência do MRD – Flambagem Uniaxial – AAAA –  $h/a = 0,01$

Elementos de contorno	Pontos de domínio	Resultados $f(r) = 1+r$	Resultados $f(r) = 1+r+r^2+r^3$	Purbolaksono e Aliabadi (2005)	Diferença (%) $f(r) = 1+r$	Diferença (%) $f(r) = 1+r+r^2+r^3$
32	25	4,040	4,121	4,189	-3,6888	-1,6599
32	36	4,019	4,092	4,141	-3,0358	-1,1911
32	49	4,009	4,078	4,060	-1,2762	0,4419
32	64	4,005	4,070	4,032	-0,6831	0,9397
32	81	3,997	4,061	3,985	0,3040	1,8778
32	100	3,994	4,057	3,999	-0,1133	1,4358

**Fonte:** O autor (2020).

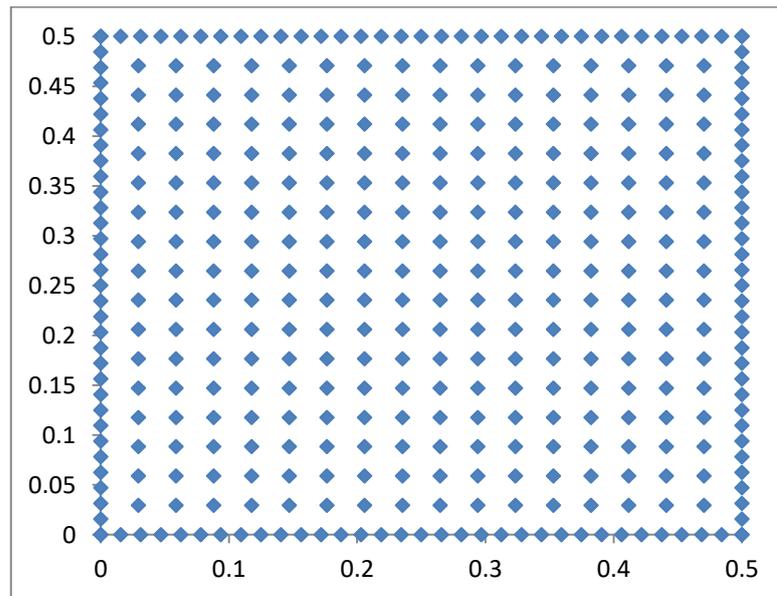
A comparação com Purbolaksono e Aliabadi (2005) mostrou a estabilidade do método, pois o valor dos parâmetros críticos de flambagem

diminuíram à medida que aumentou-se o número de pontos no domínio. Convém observar que o número de elementos de contorno necessários para calcular a placa com uma ordem de espessura de  $h/a = 0,01$  é menor do que a placa com ordem de espessura de  $h/a = 0,001$ . Isto é devido ao fato que o cálculo das integrais das funções de Bessel tornam-se fracamente singulares e podem ser calculadas utilizando a transformação de Telles.

## 9.2 MALHAS PARA PLACAS SEM FURO – MRD

Para os problemas de placas sem furo com carga uniaxial, foram testadas as malhas da tabela 4. Na Figura 27 pode-se ver um exemplo de malha com 64 elementos de contorno e 256 pontos de domínio.

**Figura 27** – Malha com 64 elementos de contorno e 256 pontos de domínio



**Fonte:** O autor (2020).

**Tabela 4** – MRD – Malhas para placas quadradas sem furo

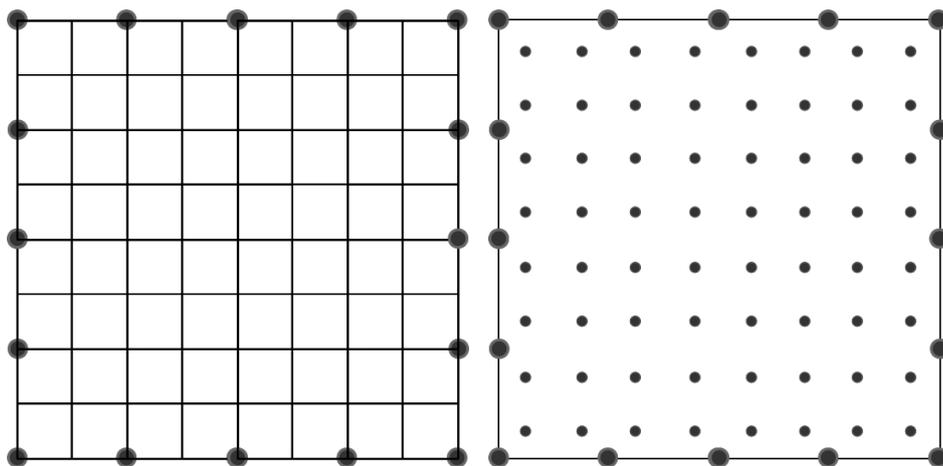
Elementos de contorno		Pontos de domínio	
64	16	64	256
128	16	64	256
256	16	64	256
384		256	
512		256	

**Fonte:** O autor (2020).

Analisou-se cada tipo de vinculação com os 9 tipos de malhas diferentes da tabela 4, verificando a sensibilidade da formulação para o número de elementos de contorno e também para o número de pontos de domínio, esta análise pode ser verificada nos gráficos da seção 9.3.5.

Convém observar que para o MRD a criação de malhas mostrou-se muito mais simples e rápida, uma vez que não é necessária nenhuma ligação entre os nós internos, diferentemente de quando utilizam-se células de domínio retangulares por exemplo, onde necessita-se identificar os nós de canto de cada célula de domínio da malha. Este tipo de simplificação pode facilitar a criação de malhas de problemas mais complexos como placas com furos ou então de formas variadas. Na Figura 28, pode-se notar as diferenças entre uma malha com células de domínio e uma malha somente de pontos de domínio.

**Figura 28** – Malha de células de domínio (esquerda) e malha de MRD (direita)



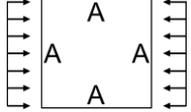
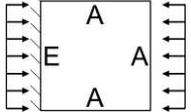
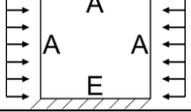
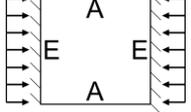
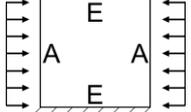
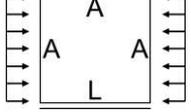
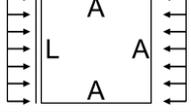
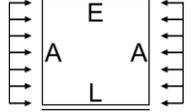
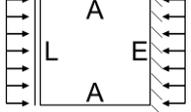
**Fonte:** O autor (2020).

Para as tabelas 5-6 utilizou-se 256 elementos de contorno e 64 pontos de domínio (problemas com carga uniaxial), para a tabela 7 utilizou-se 384 elementos de contorno e 256 pontos de domínio (problemas com carga biaxial), para a tabela 8 utilizou-se 512 elementos de contorno e 256 pontos de domínio (problemas com carga de cisalhamento). Para as tabelas 9-16 (placas retangulares) adotou-se 64 elementos de contorno para o lado menor da placa e para o lado maior aumentou-se o número de elementos na mesma proporção, ex.: lado  $b = 0,5$  tem 64 elementos e  $a = 1$  tem 128 elementos.

### 9.3 RESULTADOS PARA PLACAS QUADRADAS – MRD

#### 9.3.1 Resultados para placas quadradas com carga uniaxial – MRD

Tabela 5 – MRD – Resultados para carga uniaxial

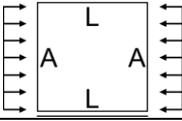
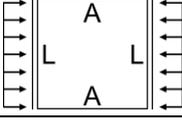
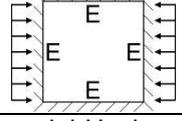
Type	h/a	Análítica (a)	Células (b)	MRD-f1	MRD-f2
	0,001	4,0000	4,0127	4,0191	4,0316
	0,010	3,9977 (c)	4,0104	4,0169	4,0299
	0,050	3,9437	3,9561	3,9624	3,9726
	0,100	3,7838	3,7952	3,8009	3,8074
	0,200	3,2558	3,2643	3,2685	3,2740
	0,001	4,8471	4,8707	4,9074	4,9314
	0,010	-	4,8665	4,8938	4,9122
	0,050	4,7454	4,7681	4,7941	4,8097
	0,100	4,4656	4,4858	4,5090	4,5206
	0,200	3,6115	3,6250	3,6419	3,6507
	0,001	5,7401	5,7598	5,7767	5,7868
	0,010	-	5,7539	5,7619	5,7782
	0,050	5,5977	5,6164	5,6241	5,6423
	0,100	5,2171	5,2335	5,2399	5,2556
	0,200	4,1364	4,1572	4,1972	4,1596
	0,001	6,7431	6,7967	6,8904	6,9542
	0,010	-	6,7875	6,8779	6,9424
	0,050	6,5238	6,5742	6,6609	6,7187
	0,100	5,9487	5,9914	6,0663	6,1129
	0,200	4,4004	4,4260	4,4762	4,5087
	0,001	7,6911	7,7542	7,8471	7,8791
	0,010	-	7,7372	7,8327	7,8625
	0,050	7,2989	7,3561	7,4440	7,4675
	0,100	6,3698	6,4139	6,4853	6,5097
	0,200	4,3204	4,3413	4,3815	4,3942
	0,001	1,4014 (d)	1,4038	1,4072	1,4060
	0,010	1,4000 (d)	1,4029	1,3992	1,3999
	0,050	1,3813 (d)	1,3849	1,3811	1,3837
	0,100	1,3270 (d)	1,3442	1,3404	1,3457
	0,200	1,2138 (d)	1,2167	1,2133	1,2156
	0,001	2,3639	2,3690	2,3399	2,3361
	0,010	-	2,3530	2,3464	2,3487
	0,050	2,2442	2,2520	2,2423	2,2446
	0,100	2,0829	2,0908	2,0791	2,0852
	0,200	1,7105	1,7178	1,7037	1,7060
	0,001	1,6522	1,6555	1,6643	1,6592
	0,010	-	1,6536	1,6469	1,6471
	0,050	1,6197	1,6245	1,6176	1,6208
	0,100	1,5558	1,5604	1,5537	1,5613
	0,200	1,3701	1,3738	1,3683	1,3710
	0,001	2,3901	2,3951	2,3650	2,3591
	0,010	-	2,3788	2,3717	2,3737
	0,050	2,2667	2,2747	2,2644	2,2662
	0,100	2,1010	2,1090	2,0968	2,1027
	0,200	1,7200	1,7274	1,7130	1,7151

(a) Hosseini-Hashemi, Khorshidi e Amabili (2012), (b) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

(c) Hosseini-Hashemi, Atashipour e Fadaee (2012), (d) Mizusawa (1993)

Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

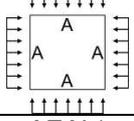
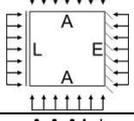
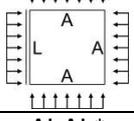
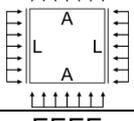
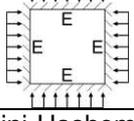
**Tabela 6 – MRD – Resultados para carga uniaxial 2**

Type	h/a	Analítica (a)	Células (b)	MRD-f1	MRD-f2
	0,001	0,9522	0,9537	0,9605	0,9588
	0,010	-	0,9532	0,9529	0,9549
	0,050	0,9431	0,9449	0,9446	0,9465
	0,100	0,9218	0,9236	0,9233	0,9252
	0,200	0,8501	0,8516	0,8512	0,8530
	0,001	2,0413	2,0455	2,0152	1,9990
	0,010	-	2,0308	2,0239	2,0238
	0,050	1,9457	1,9508	1,9409	1,9397
	0,100	1,8216	1,8270	1,8156	1,8155
	0,200	1,5333	1,5389	1,5253	1,5255
	0,001	10,0738 (c)	10,1605	10,2300	10,3656
	0,010	-	10,1382	10,2764	10,3840
	0,050	9,5588 (c)	9,6326	9,7637	9,8673
	0,100	8,2917 (c)	8,3411	8,4547	8,5390
	0,200	5,3156 (c)	5,3175	5,4807	5,4620

(a) Hosseini-Hashemi, Khorshidi e Amabili (2012), (b) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)  
(c) Kitipornchai e Xiang (1993)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

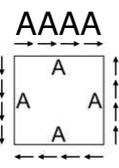
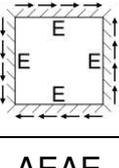
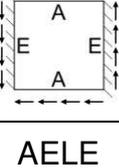
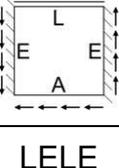
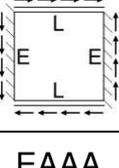
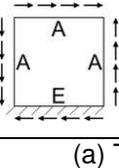
**Tabela 7 – MRD – Resultados para carga biaxial**

Type	h/a	Analítica (a)	Células (b)	MRD -f1	MRD - f2
	0,001	2,0000	2,0064	1,9983	2,0014
	0,005	1,9997	2,0061	1,9983	2,0006
	0,050	1,9718	1,9782	1,9705	1,9727
	0,100	1,8919	1,8980	1,8907	1,8927
	0,150	1,7722	1,7780	1,7712	1,7729
	0,001	1,1431	1,1467	1,1470	1,1428
	0,005	1,1412	1,1449	1,1419	1,1408
	0,050	1,1119	1,1159	1,1119	1,1108
	0,100	1,0641	1,0680	1,0635	1,0624
	0,150	1,0049	1,0087	1,0037	1,0026
	0,001	1,0548	1,0576	1,0567	1,0540
	0,005	1,0535	1,0564	1,0534	1,0530
	0,050	1,0322	1,0354	1,0318	1,0311
	0,100	0,9954	0,9986	0,9945	0,9938
	0,150	0,9476	0,9507	0,9462	0,9456
	0,001	0,9321	0,9339	0,9373	0,9349
	0,005	0,9316	0,9335	0,9323	0,9325
	0,050	0,9207	0,9228	0,9214	0,9214
	0,100	0,8977	0,8998	0,8981	0,8982
	0,150	0,8650	0,8671	0,8651	0,8650
	0,001	5,3036 (c)	5,3482	5,3009	5,3087
	0,001	5,2970 (d)	5,3460	5,3246	5,3234
	0,050	5,0840 (c)	5,1254	5,1075	5,1055
	0,100	4,5400 (c)	4,5741	4,5594	4,5577
	0,150	3,8727 (c)	3,8992	3,8873	3,8861

(a) Hosseini-Hashemi, Khorshidi e Amabili (2012), (b) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)  
(c) Xiang, Wang e Liew (1993), (d) Dawe e Roufaeil (1982)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Tabela 8 – MRD – Resultados para carga de cisalhamento**

Type	h/a	Literatura	Células (g)	MRD -f1	MRD - f2
 AAAA	0,001	9,3400 (a)	9,4260	9,2794	9,3777
	0,01	9,3780 (b)	9,4083	9,3295	9,3557
	0,05	-	8,9979	8,9250	8,9457
	0,1	-	7,9201	7,8570	7,8686
	0,20	-	5,3269	5,2745	5,2766
 EEEE	0,001	14,7100 (a)	14,8702	14,7703	14,7760
	0,01	14,6155 (b)	14,8109	14,7154	14,7103
	0,05	-	13,5493	13,4506	13,4469
	0,1	-	10,8454	10,7417	10,7410
	0,20	-	6,1662	6,3455	6,3304
 AEAE	0,001	12,5997 (c)	12,7360	12,8363	12,7571
	0,01	12,5800 (d)	12,6947	12,6850	12,6551
	0,05	-	11,7923	11,7643	11,7408
	0,1	-	9,7344	9,6784	9,6679
	0,20	-	5,8436	5,8987	5,8582
 AELE	0,001	8,4289 (e)	8,5001	8,3867	8,4103
	0,01	-	8,4398	8,3653	8,3710
	0,05	-	7,7706	7,6947	7,6996
	0,1	-	6,4888	6,4213	6,4244
	0,20	-	4,1638	4,1184	4,1192
 LELE	0,001	7,4869 (e)	7,5437	7,4953	7,5067
	0,01	-	7,4938	7,4492	7,4516
	0,05	-	6,9230	6,8758	6,8778
	0,1	-	5,8095	5,7628	5,7646
	0,20	-	3,7634	3,7290	3,7299
 EAAA	0,001	10,6000 (f)	10,8349	10,8321	10,8142
	0,01	-	10,8083	10,7609	10,7604
	0,05	-	10,2089	10,1560	10,1553
	0,1	-	8,7375	8,6809	8,6794
	0,20	-	5,5783	5,5194	5,5193

(a) Timoshenko e Gere (1961), (b) Bui, Nguyen e Zhang (2011)

(c) Vrcelj e Bradford (2008), (d) Tham e Szeto (1990), (e) Shufrin e Eisenberger (2007)

(f) Elzein e Syngellakis (1992), (g) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

Observando-se as tabelas 5, 6, 7 e 8 é possível verificar que o comportamento da formulação é satisfatório. Os problemas com carga uniaxial e biaxial mostram bons resultados mesmo com uma malha pequena e também convergiram mais rápido para a função de aproximação F1. Já os problemas com carga de cisalhamento apresentaram bons resultados à medida que aumentou-se o número de elementos de contorno e convergiram mais rápido para a função F2.

### 9.3.2 Resultados para placas retangulares com carga uniaxial

**Tabela 9 – MRD – Resultados para carga uniaxial em placas retangulares**



a/b	h/b	Literatura (a)	Células (b)	MRD	Diferença (%)	Literatura (a)	Células (b)	MRD	Diferença (%)
0,5	0,001	6,2499	6,2995	6,2567	0,1090	19,3380	19,8473	19,4529	0,5940
0,5	0,050	6,0346	6,0807	6,0456	0,1818	17,4347	17,6045	17,3410	-0,5372
0,5	0,100	5,4693	5,5067	5,4784	0,1656	13,2568	13,2916	13,0718	-1,3955
0,5	0,150	4,7305	4,7581	4,7375	0,1475	9,2233	9,3580	9,2946	0,7727
1,0	0,001	4,0000	4,0127	4,0034	0,0850	10,0737	10,1605	10,0458	-0,2769
1,0	0,050	3,9437	3,9561	3,9463	0,0669	9,5526	9,6326	9,5840	0,3282
1,0	0,100	3,7839	3,7952	3,7862	0,0599	8,2733	8,3375	8,3002	0,3252
1,0	0,150	3,5446	3,5543	3,5465	0,0548	6,7309	6,7769	6,8646	1,9858
1,5	0,001	4,3406	4,3595	4,3595	0,4351	8,3504	8,4152	8,4026	0,6255
1,5	0,050	4,2559	4,2743	4,2670	0,2598	7,9383	7,9973	7,9817	0,5463
1,5	0,100	4,0214	4,0377	4,0312	0,2430	6,9467	6,9930	6,9803	0,4836
1,5	0,150	3,6831	3,6965	3,6911	0,2184	5,7798	5,8130	5,8046	0,4294
2,0	0,001	4,0000	4,0127	4,0185	0,4637	7,8671	7,9538	8,1359	3,4165
2,0	0,050	3,9437	3,9561	3,9543	0,2679	7,4825	7,5353	7,7351	3,3760
2,0	0,100	3,7839	3,7952	3,7933	0,2492	6,5605	6,6056	6,6254	0,9894
2,0	0,150	3,5446	3,5543	3,5524	0,2203	5,4815	5,5117	5,5798	1,7934

(a) Xiang, Wang e Liew (1993), (b) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

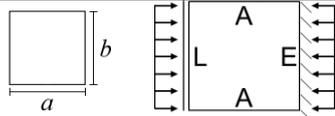
**Tabela 10 – MRD – Resultados para carga uniaxial em placas retangulares 2**



a/b	h/b	Literatura (a)	Células (b)	MRD	Diferença (%)	Literatura (a)	Células (b)	MRD	Diferença (%)
0,5	0,05	1,4696	1,4721	1,4678	-0,1213	1,9464	1,9509	1,9444	-0,1006
0,5	0,10	1,3416	1,3433	1,3388	-0,2085	1,8233	1,8271	1,8202	-0,1700
0,5	0,15	1,2080	1,2088	1,2042	-0,3128	1,6839	1,6866	1,6796	-0,2552
1,0	0,05	1,9464	1,9508	1,9444	-0,1017	2,2452	2,2520	2,2433	-0,0867
1,0	0,10	1,8233	1,8271	1,8201	-0,1777	2,0852	2,0908	2,0815	-0,1762
1,0	0,15	1,6839	1,6866	1,6791	-0,2854	1,9035	1,9075	1,8981	-0,2854
1,5	0,05	2,1466	2,1490	2,1427	-0,1814	2,1920	2,1983	2,1883	-0,1697
1,5	0,10	2,0007	2,0084	1,9950	-0,2833	2,0421	2,0472	2,0363	-0,2824
1,5	0,15	1,8753	1,8800	1,8264	-2,6058	1,8705	1,8741	1,8628	-0,4126
2,0	0,05	2,1522	2,1737	2,1458	-0,2988	2,1960	2,2024	2,1902	-0,2662
2,0	0,10	2,0085	2,0182	2,0119	0,1692	2,0450	2,0502	2,0365	-0,4139
2,0	0,15	1,8437	1,8442	1,8561	0,6746	1,8725	1,8762	1,8618	-0,5720
2,5	0,05	2,1903	2,2080	2,1958	0,2511	2,1961	2,2024	2,1880	-0,3695
2,5	0,10	2,0402	2,0549	2,0404	0,0122	2,0451	2,0503	2,0336	-0,5603
2,5	0,15	1,8689	1,8798	1,8639	-0,2699	1,8725	1,8762	1,8583	-0,7607
3,0	0,05	2,1920	2,1983	2,1845	-0,3426	2,1960	2,2023	2,1850	-0,5018
3,0	0,10	2,0421	2,0472	2,0300	-0,5945	2,0450	2,0502	2,0297	-0,7478
3,0	0,15	1,8705	1,8741	1,8552	-0,8186	1,8725	1,8762	1,8538	-0,9993

(a) Liew, Xiang e Kitipornchai (1996), (b) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Tabela 11 – MRD – Resultados para carga uniaxial em placas retangulares 3**


a/b	h/b	Literatura (a)	Células (b)	MRD	Diferença (%)
0,5	0,05	2,4840	2,4932	2,4822	-0,0712
0,5	0,10	2,2948	2,3022	2,2911	-0,1615
0,5	0,15	2,0829	2,0883	2,0775	-0,2578
1,0	0,05	2,2676	2,2747	2,2657	-0,0854
1,0	0,10	2,1033	2,1090	2,0995	-0,1812
1,0	0,15	1,9171	1,9212	1,9115	-0,2905
1,5	0,05	2,2071	2,2136	2,2035	-0,1622
1,5	0,10	2,0536	2,0589	2,0479	-0,2768
1,5	0,15	1,8786	1,8823	1,8709	-0,4104
2,0	0,05	2,1964	2,2027	2,1905	-0,2683
2,0	0,10	2,0453	2,0504	2,0368	-0,4148
2,0	0,15	1,8726	1,8764	1,8620	-0,5666
2,5	0,05	2,1962	2,2025	2,1880	-0,3718
2,5	0,10	2,0451	2,0503	2,0337	-0,5589
2,5	0,15	1,8726	1,8763	1,8583	-0,7654
3,0	0,05	2,1960	2,2024	2,1850	-0,5022
3,0	0,10	2,0450	2,0502	2,0297	-0,7480
3,0	0,15	1,8725	1,8762	1,8538	-0,9996

(a) Liew, Xiang e Kitipornchai (1996), (b) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

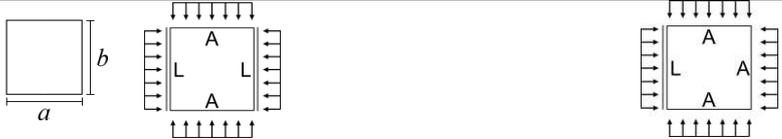
**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).**9.3.3 Resultados para placas retangulares com carga biaxial – MRD****Tabela 12 – MRD – Resultados para carga biaxial em placas retangulares**


a/b	h/b	Literatura (a)	Células (b)	MRD	Diferença (%)	Literatura (a)	Células (b)	MRD	Diferença (%)
0,5	0,001	4,9999	5,0399	4,9902	-0,1939	15,6930	16,0735	15,8062	0,7210
0,5	0,050	4,8277	4,8659	4,8227	-0,1030	13,9625	14,2662	14,1169	1,1061
0,5	0,100	4,3754	4,4089	4,3716	-0,0876	10,5408	10,7230	10,6282	0,8296
0,5	0,150	3,7844	3,8122	3,7818	-0,0678	7,5254	7,6309	7,5723	0,6230
1,0	0,001	2,0000	2,0064	1,9966	-0,1690	5,3036	5,3482	5,3007	-0,0537
1,0	0,050	1,9719	1,9782	1,9689	-0,1526	5,0840	5,1254	5,1130	0,5710
1,0	0,100	1,8920	1,8980	1,8892	-0,1486	4,5400	4,5741	4,5638	0,5248
1,0	0,150	1,7723	1,7779	1,7699	-0,1354	3,8727	3,8992	3,8907	0,4652
1,5	0,001	1,4444	1,4478	1,4439	-0,0361	4,1212	4,1482	4,1324	0,2707
1,5	0,050	1,4297	1,4330	1,4292	-0,0373	3,9879	4,0132	4,0116	0,5935
1,5	0,100	1,3872	1,3904	1,3867	-0,0336	3,6415	3,6628	3,6619	0,5592
1,5	0,150	1,3218	1,3248	1,3213	-0,0350	3,1898	3,2067	3,2059	0,5062
2,0	0,001	1,2500	1,2525	1,2507	0,0548	3,9234	3,9479	3,9456	0,5658
2,0	0,050	1,2389	1,2414	1,2396	0,0542	3,8046	3,8276	3,8405	0,9447
2,0	0,100	1,2069	1,2093	1,2075	0,0507	3,4906	3,5100	3,5216	0,8882
2,0	0,150	1,1571	1,1593	1,1577	0,0491	3,0725	3,0876	3,0975	0,8122

(a) Xiang, Wang e Liew (1993), (b) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Tabela 13 – MRD – Resultados para carga biaxial em placas retangulares 2**

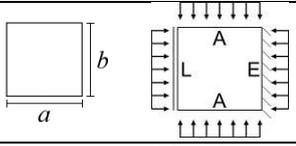


a/b	h/b	Literatura (a)	Células (b)	MRD	Diferença (%)	Literatura (a)	Células (b)	MRD	Diferença (%)
0,5	0,05	0,9080	0,9101	0,9101	0,2219	1,1449	1,1492	1,1449	0,0008
0,5	0,10	0,8875	0,8889	0,8892	0,1869	1,0851	1,0893	1,0845	-0,0592
0,5	0,15	0,8577	0,8592	0,8589	0,1399	1,0155	1,0186	1,0143	-0,1223
1,0	0,05	0,9207	0,9227	0,9217	0,1099	1,0323	1,0352	1,0319	-0,0357
1,0	0,10	0,8977	0,8995	0,8985	0,0830	0,9954	0,9983	0,9947	-0,0750
1,0	0,15	0,8651	0,8663	0,8654	0,0385	0,9476	0,9497	0,9463	-0,1350
1,5	0,05	0,9324	0,9344	0,9341	0,1787	0,9930	0,9954	0,9927	-0,0220
1,5	0,10	0,9086	0,9105	0,9100	0,1510	0,9623	0,9648	0,9617	-0,0667
1,5	0,15	0,8747	0,8760	0,8756	0,1017	0,9208	0,9225	0,9196	-0,1308
2,0	0,05	0,9408	0,9428	0,9431	0,2469	0,9777	0,9799	0,9774	-0,0263
2,0	0,10	0,9168	0,9192	0,9188	0,2093	0,9496	0,9518	0,9488	-0,0793
2,0	0,15	0,8824	0,8873	0,8838	0,1584	0,9105	0,9121	0,9091	-0,1533
2,5	0,05	0,9467	0,9500	0,9495	0,3026	0,9709	0,9731	0,9707	-0,0251
2,5	0,10	0,9226	0,9301	0,9590	3,9428	0,9440	0,9461	0,9431	-0,0963
2,5	0,15	0,8878	0,8992	0,8925	0,5275	0,9061	0,9076	0,9044	-0,1886
3,0	0,05	0,9509	0,9611	0,9548	0,4155	0,9676	0,9697	0,9674	-0,0262
3,0	0,10	0,9267	0,9645	0,9513	2,6511	0,9414	0,9435	0,9403	-0,1142
3,0	0,15	0,8917	0,9053	0,9121	2,2889	0,9041	0,9055	0,9020	-0,2313

(a) Liew, Xiang e Kitipornchai (1996), (b) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Tabela 14 – MRD – Resultados para carga biaxial em placas retangulares 3**



a/b	h/b	Literatura (a)	Células (b)	MRD	Diferença (%)
0,5	0,05	1,7455	1,7549	1,7475	0,1135
0,5	0,10	1,6222	1,6305	1,6226	0,0218
0,5	0,15	1,4827	1,4887	1,4817	-0,0695
1,0	0,05	1,1190	1,1299	1,1125	-0,5829
1,0	0,10	1,0641	1,0677	1,0640	-0,0051
1,0	0,15	1,0049	1,0075	1,0041	-0,0817
1,5	0,05	1,0148	1,0175	1,0150	0,0218
1,5	0,10	0,9807	0,9834	0,9804	-0,0360
1,5	0,15	0,9356	0,9375	0,9346	-0,1071
2,0	0,05	0,9860	0,9883	0,9860	0,0009
2,0	0,10	0,9564	0,9588	0,9559	-0,0573
2,0	0,15	0,9158	0,9175	0,9145	-0,1394
2,5	0,05	0,9746	0,9757	0,9745	-0,0074
2,5	0,10	0,9470	0,9622	0,9462	-0,0835
2,5	0,15	0,9084	0,9254	0,9067	-0,1815
3,0	0,05	0,9695	0,9705	0,9693	-0,0128
3,0	0,10	0,9428	0,9573	0,9418	-0,1049
3,0	0,15	0,9051	0,9215	0,9031	-0,2255

(a) Liew, Xiang e Kitipornchai (1996), (b) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

### 9.3.4 Resultados para placas retangulares com carga de cisalhamento – MRD

**Tabela 15 – MRD – Resultados para cisalhamento em placas retangulares**

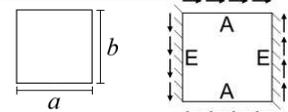


a/b	h/b	Literatura (a)	Células (b)	MRD	Diferença (%)	Literatura (a)	Células (b)	MRD	Diferença (%)
0,5	0,001	-	26,9274	26,0301	-3,3324	-	42,7394	41,6464	-2,5575
0,5	0,050	-	23,9614	23,4259	-2,2349	-	33,6784	32,6510	-3,0505
0,5	0,100	-	17,7443	17,2345	-2,8730	-	21,2577	20,4331	-3,8792
0,5	0,150	-	12,2767	11,8205	-3,7155	-	13,3468	12,7129	-4,7493
1,0	0,001	9,3400	9,4260	9,2794	-1,5559	14,7100	14,8702	14,7703	-0,6718
1,0	0,050	-	8,9979	8,9250	-0,8105	-	13,5493	13,4506	-0,7286
1,0	0,100	-	7,9200	7,8570	-0,7959	-	10,8453	10,7417	-0,9555
1,0	0,150	-	6,5963	6,5401	-0,8528	-	8,2270	8,1338	-1,1333
1,5	0,001	7,1000	7,1254	7,1165	-0,1252	11,5000	11,5923	11,5797	-0,1085
1,5	0,050	-	6,8879	6,8811	-0,0991	-	10,9795	10,7549	-2,0461
1,5	0,100	-	6,2612	6,2517	-0,1515	-	9,1297	8,9411	-2,0655
1,5	0,150	-	5,4326	5,4195	-0,2412	-	7,1367	7,0475	-1,2499
2,0	0,001	6,6000	6,6162	6,6538	0,5692	10,3400	10,3581	10,4093	0,4941
2,0	0,050	-	6,4089	6,4271	0,2840	-	9,6753	9,7178	0,4396
2,0	0,100	-	5,8428	5,8568	0,2392	-	8,1421	8,1628	0,2552
2,0	0,150	-	5,0902	5,0986	0,1654	-	6,5061	6,5107	0,0711

(a) Timoshenko e Gere (1961), (b) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Tabela 16 – MRD – Resultados para cisalhamento em placas retangulares 2**



a/b	h/b	Literatura (a)	Células (b)	MRD	Diferença (%)
0,5	0,001	-	27,6157	26,9096	-2,5570
0,5	0,050	-	24,9439	23,9350	-4,0445
0,5	0,100	-	18,4455	17,8668	-3,1373
0,5	0,150	-	12,4725	11,9802	-3,9468
1,0	0,001	12,2800	12,7360	12,8346	0,7741
1,0	0,050	-	11,7916	11,7647	-0,2284
1,0	0,100	-	9,7340	9,6786	-0,5695
1,0	0,150	-	7,6082	7,5402	-0,8937
1,5	0,001	11,1200	10,9085	10,8919	-0,1518
1,5	0,050	-	10,1715	10,1476	-0,2354
1,5	0,100	-	8,5249	8,4940	-0,3623
1,5	0,150	-	6,7780	6,7462	-0,4699
2,0	0,001	10,2100	10,1129	10,1544	0,4104
2,0	0,050	-	9,4649	9,5008	0,3789
2,0	0,100	-	8,0000	8,0168	0,2096
2,0	0,150	-	6,4202	6,4234	0,0495

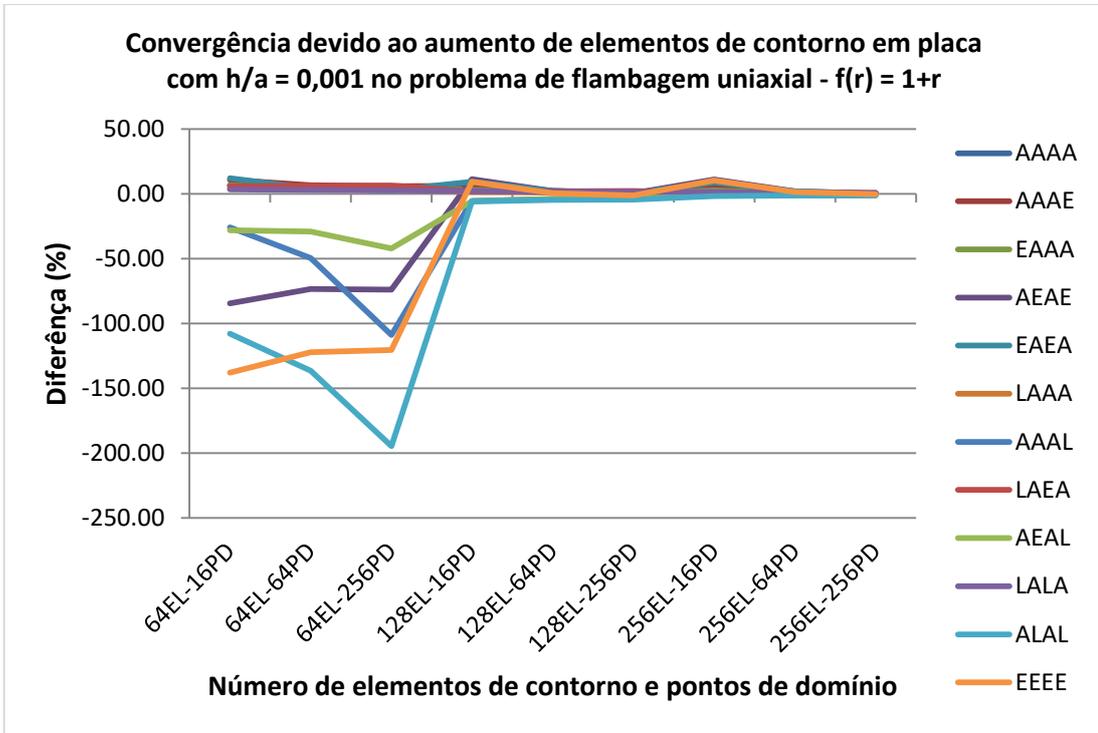
(a) Timoshenko e Gere (1961), (b) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

Para as tabelas 15-16 onde não houve solução analítica, as diferenças foram calculadas com relação às células de domínio.

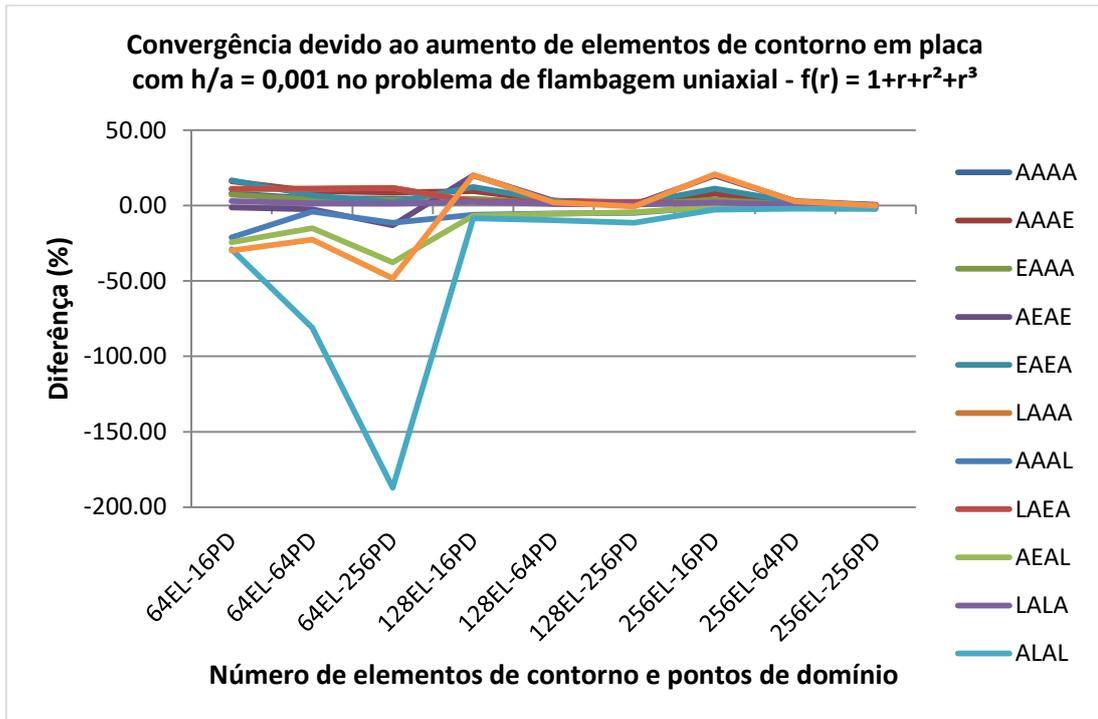
9.3.5 Gráficos com o comportamento do MRD para carga uniaxial

Figura 29 – Convergência em placa com  $h/a = 0,001$  com carga uniaxial – F1



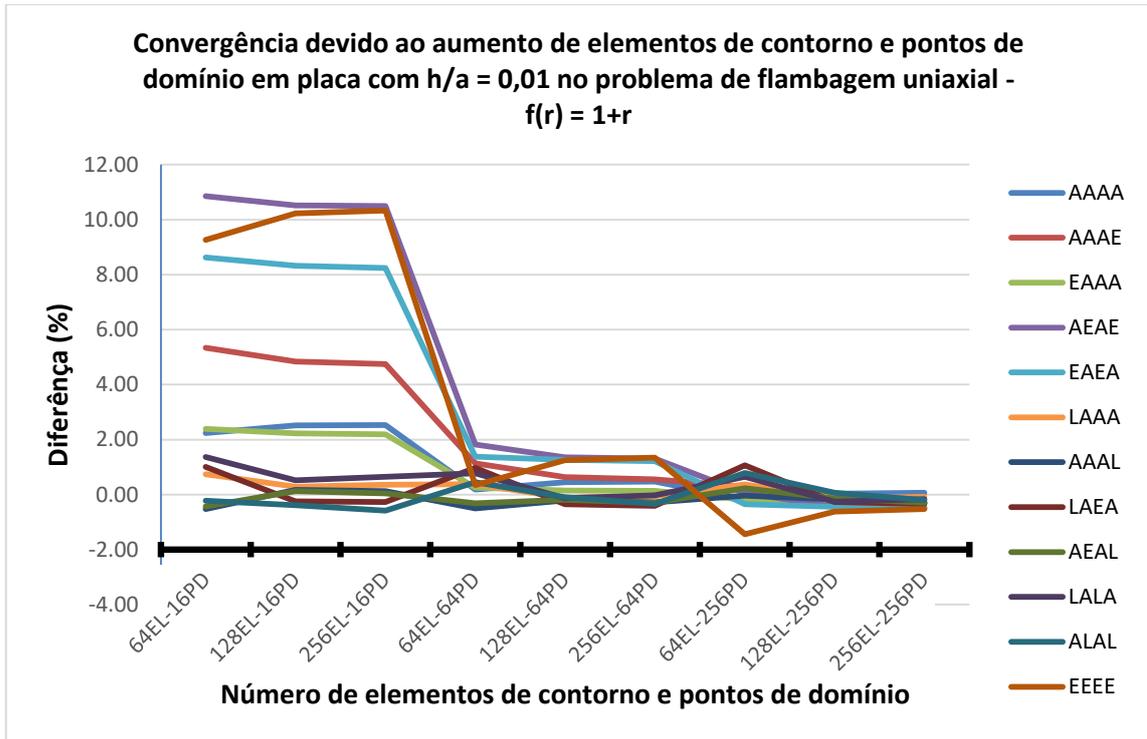
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

Figura 30 – Convergência em placa com  $h/a = 0,001$  com carga uniaxial – F2



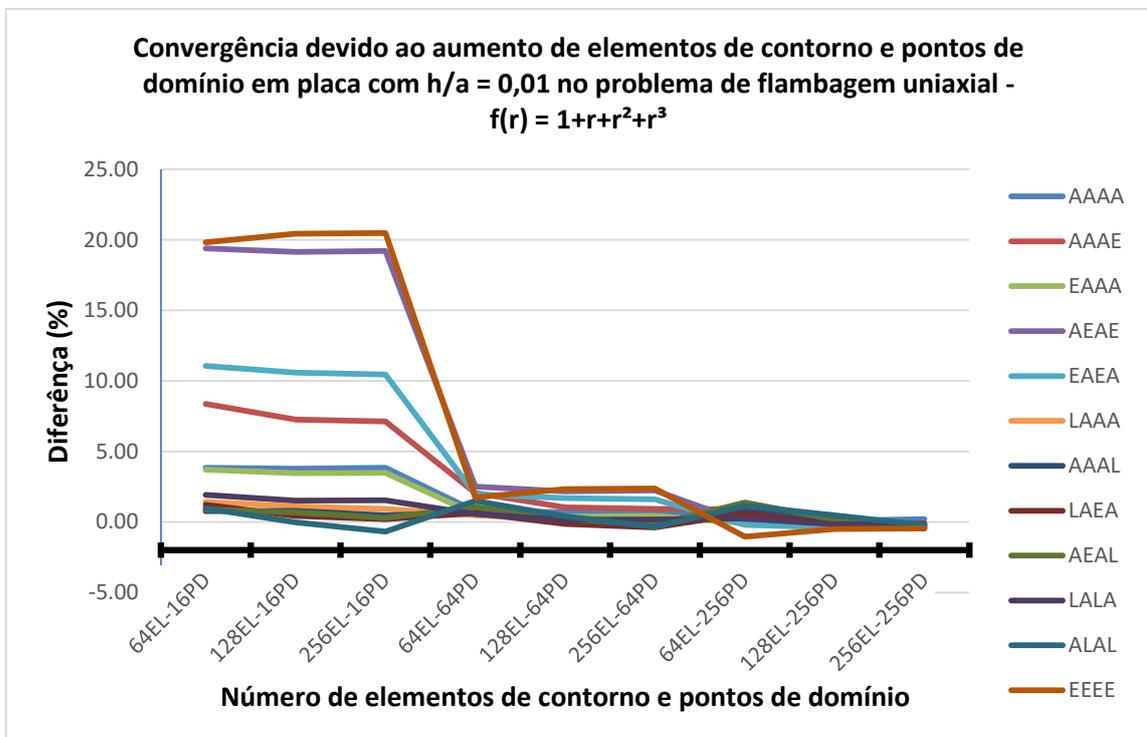
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 31** – Convergência em placa com  $h/a = 0,01$  com carga uniaxial – F1



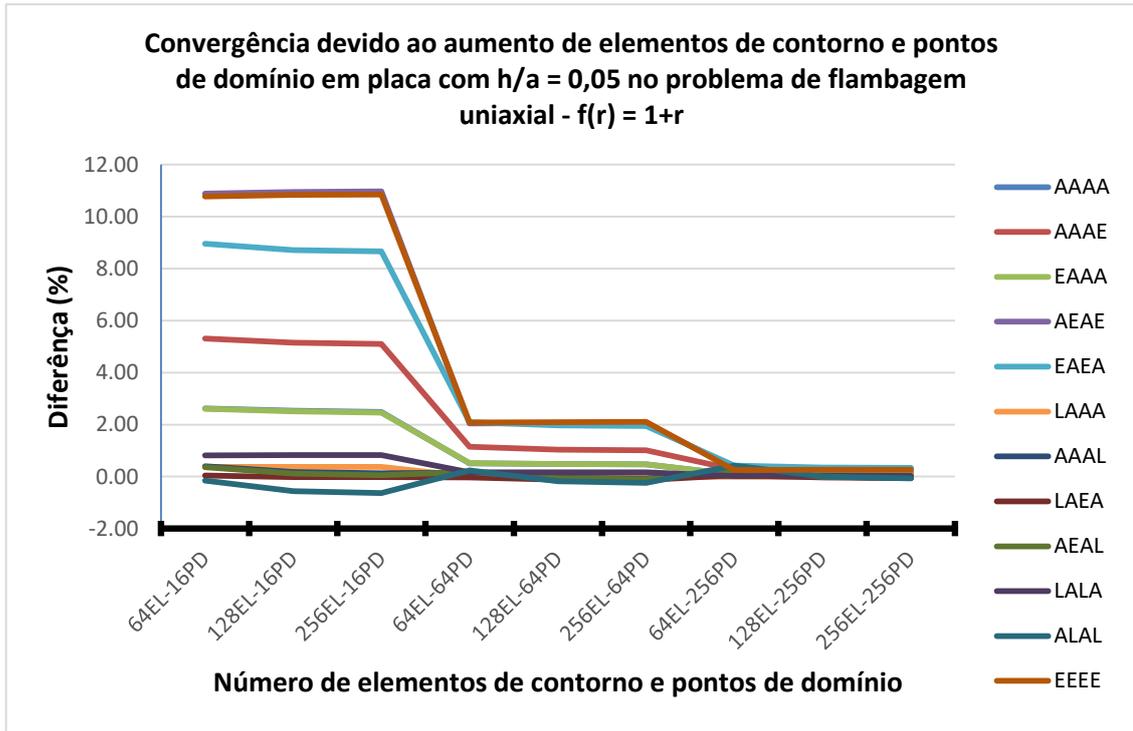
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 32** – Convergência em placa com  $h/a = 0,01$  com carga uniaxial – F2



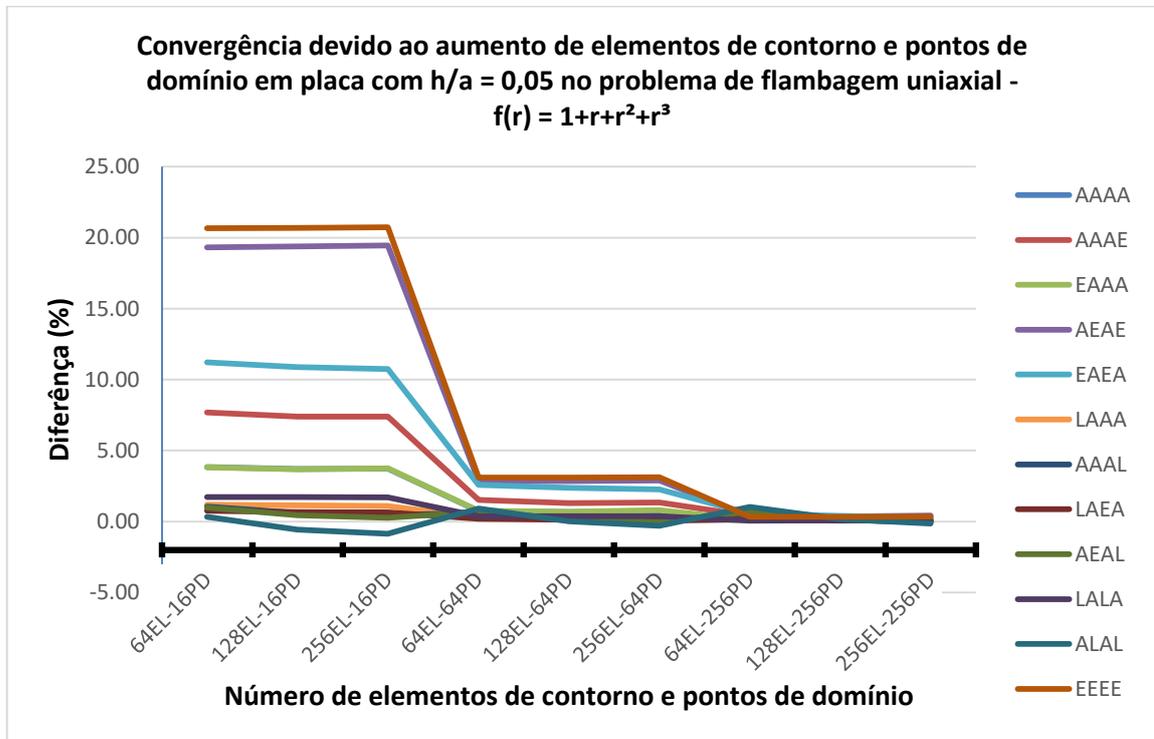
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 33** – Convergência em placa com  $h/a = 0,05$  com carga uniaxial – F1



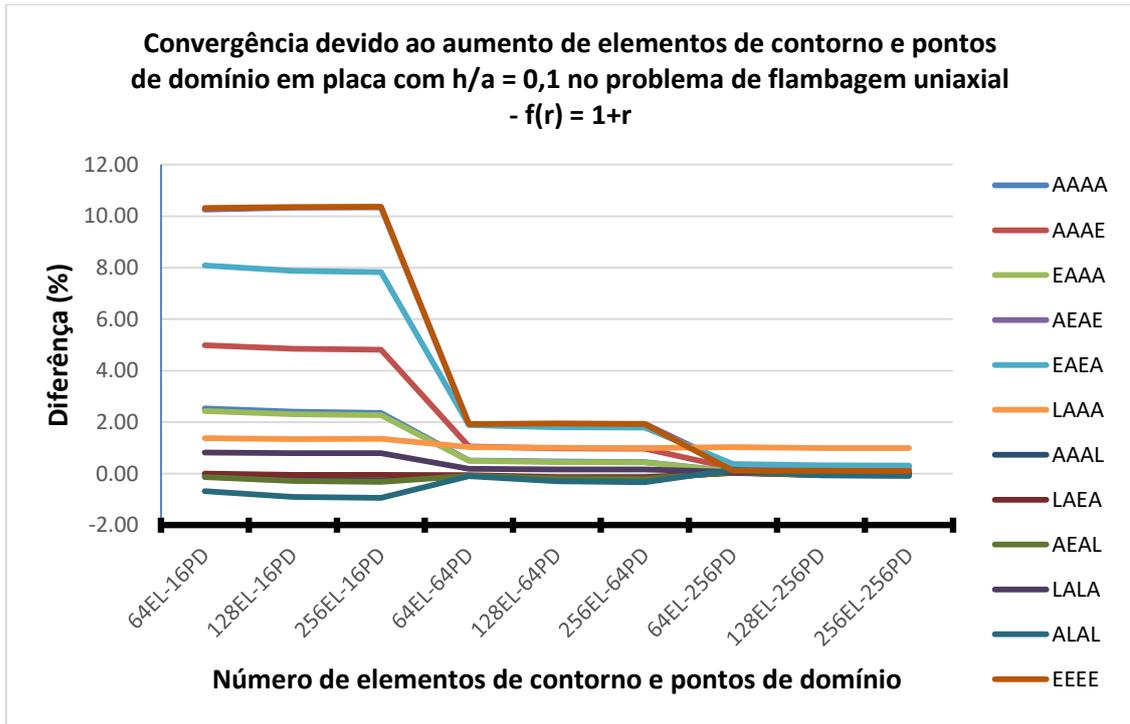
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 34** – Convergência em placa com  $h/a = 0,05$  com carga uniaxial – F2



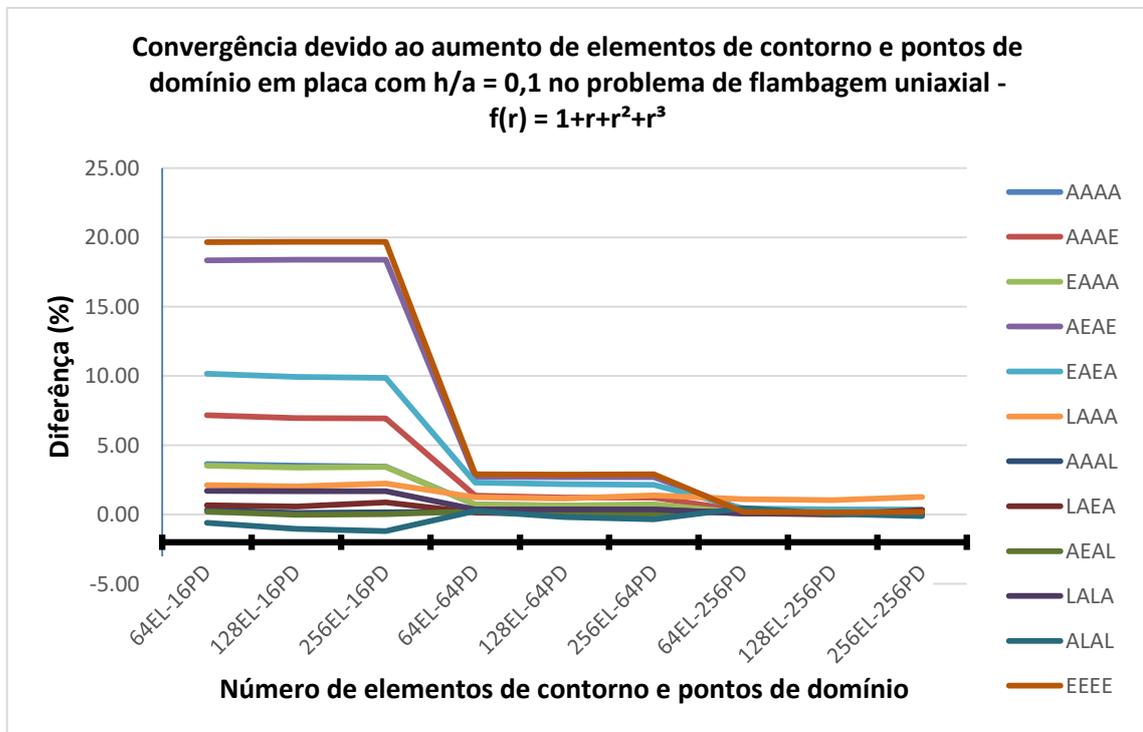
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 35** – Convergência em placa com  $h/a = 0,1$  com carga uniaxial – F1



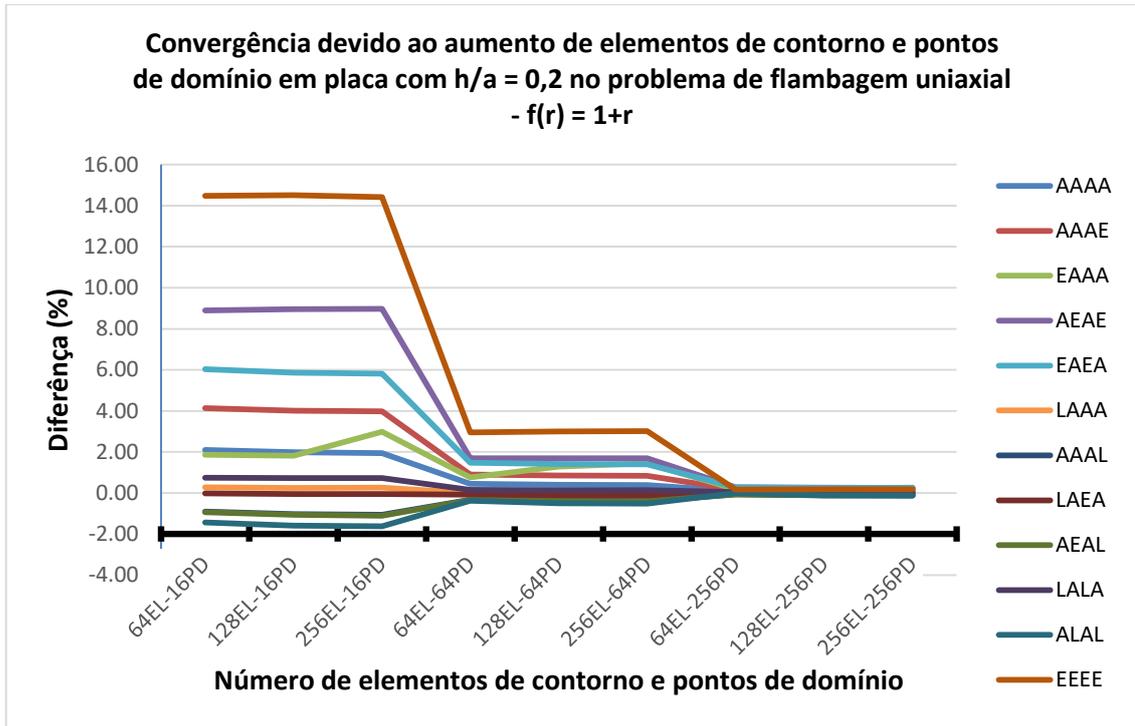
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 36** – Convergência em placa com  $h/a = 0,1$  com carga uniaxial – F2



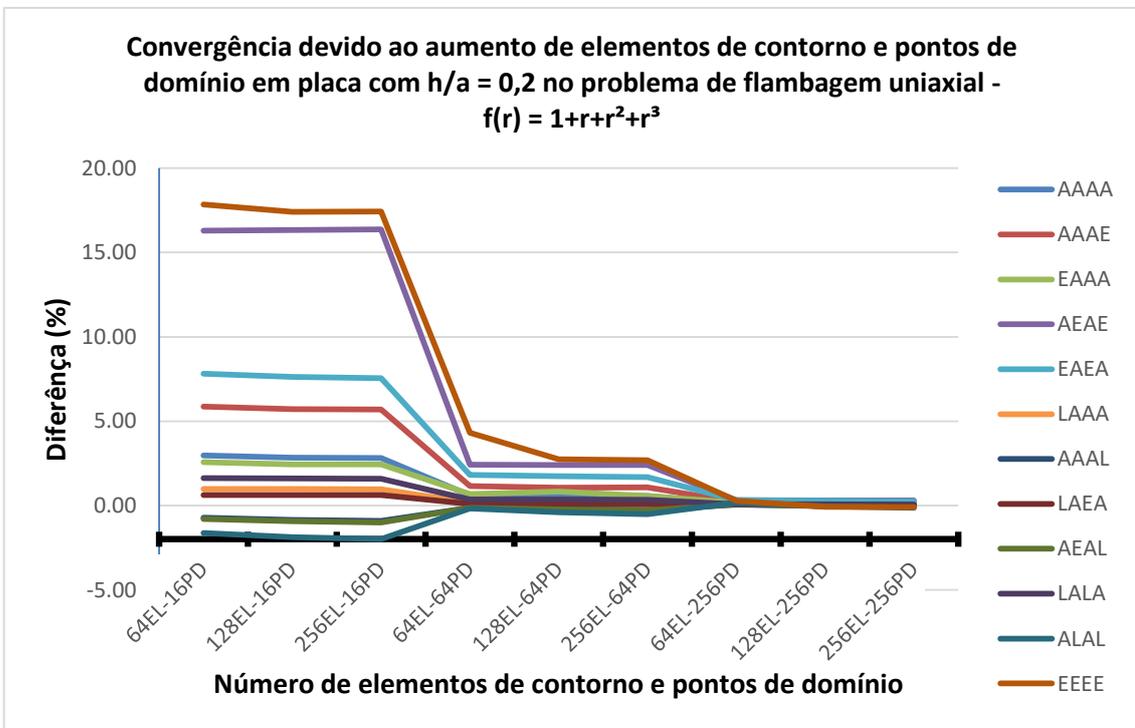
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 37** – Convergência em placa com  $h/a = 0,2$  com carga uniaxial – F1



Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 38** – Convergência em placa com  $h/a = 0,2$  com carga uniaxial – F2



Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

### 9.3.6 Comentários sobre os problemas com carga uniaxial – MRD

Observando-se os gráficos apresentados pode-se verificar que a formulação é sensível ao número de elementos de contorno quando a espessura da placa é de ordem  $h/a = 0,001$ , onde nota-se a convergência dos resultados à medida que aumenta-se o número de elementos de contorno juntamente com o número de pontos de domínio. Quando a placa tem aspecto de espessura de ordem  $h/a > 0,001$  o número de pontos de domínio mostrou-se o fator principal para convergência do problema uma vez que com um número pequeno de elementos de contorno pode-se obter diferenças pequenas com relação aos resultados da literatura.

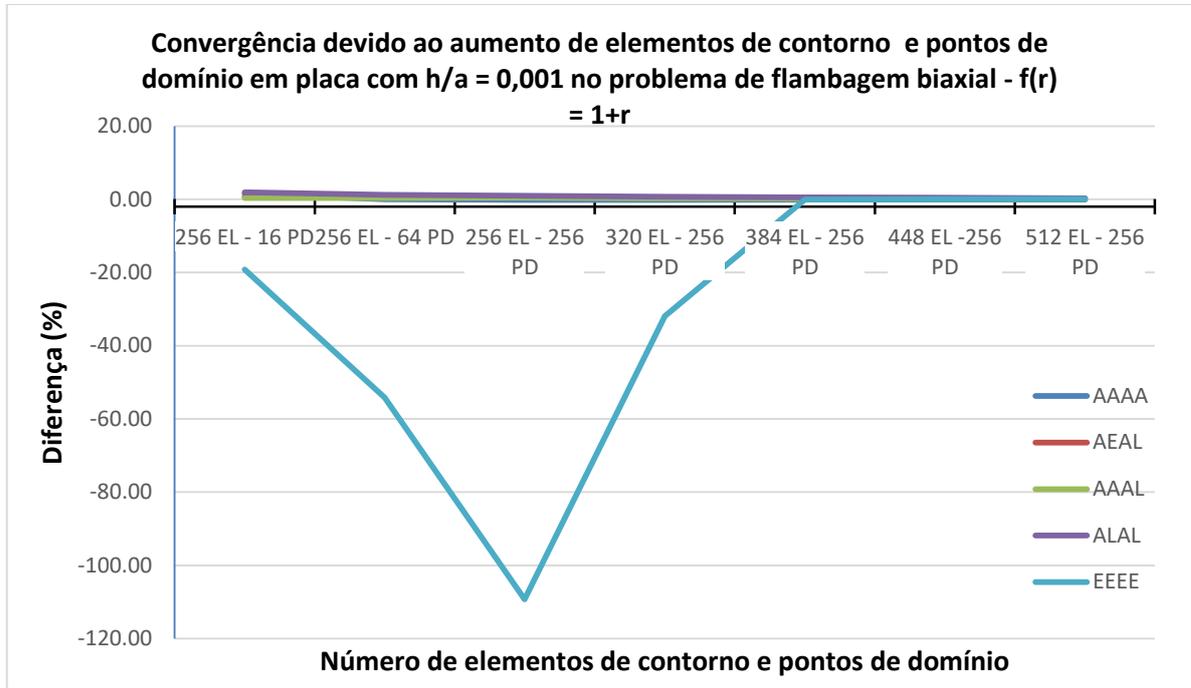
Os problemas com aspecto de espessura de ordem  $h/L > 0,001$  e com carga uniaxial podem ser resolvidos com facilidade, uma vez que precisaram de uma malha pequena para que os resultados fossem satisfatórios.

As condições de contorno também influenciaram na obtenção de resultados, placas com condições engastadas convergiram mais lentamente que placas com condições simplesmente apoiadas.

Na grande maioria dos casos, a função F1 convergiu mais rapidamente que a função F2.

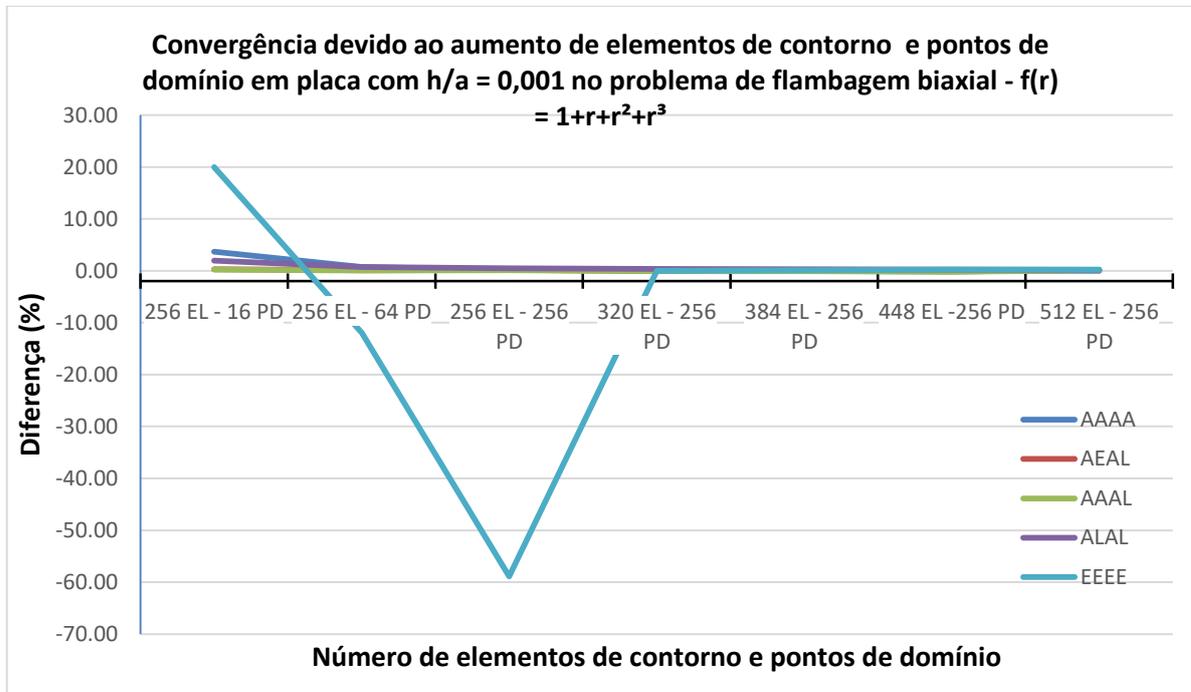
9.3.7 Gráficos com o comportamento do MRD para carga biaxial

Figura 39 – Convergência em placa com  $h/a = 0,001$  com carga biaxial – F1



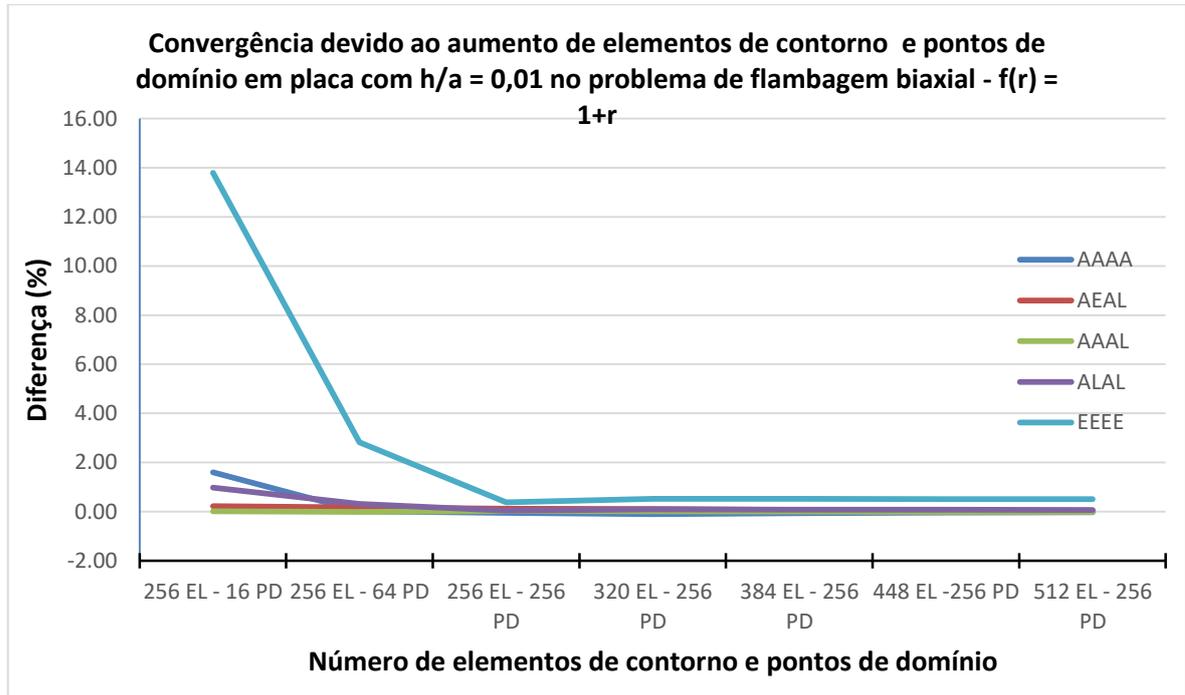
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

Figura 40 – Convergência em placa com  $h/a = 0,001$  com carga biaxial – F2



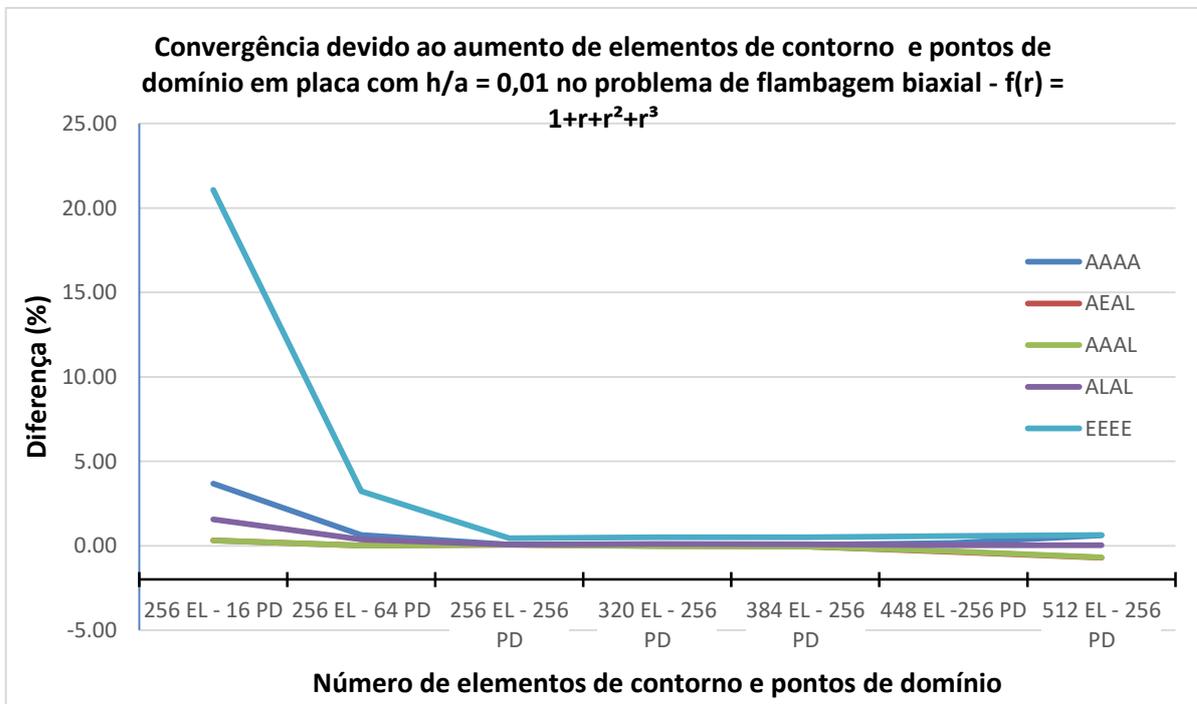
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 41** – Convergência em placa com  $h/a = 0,01$  com carga biaxial – F1



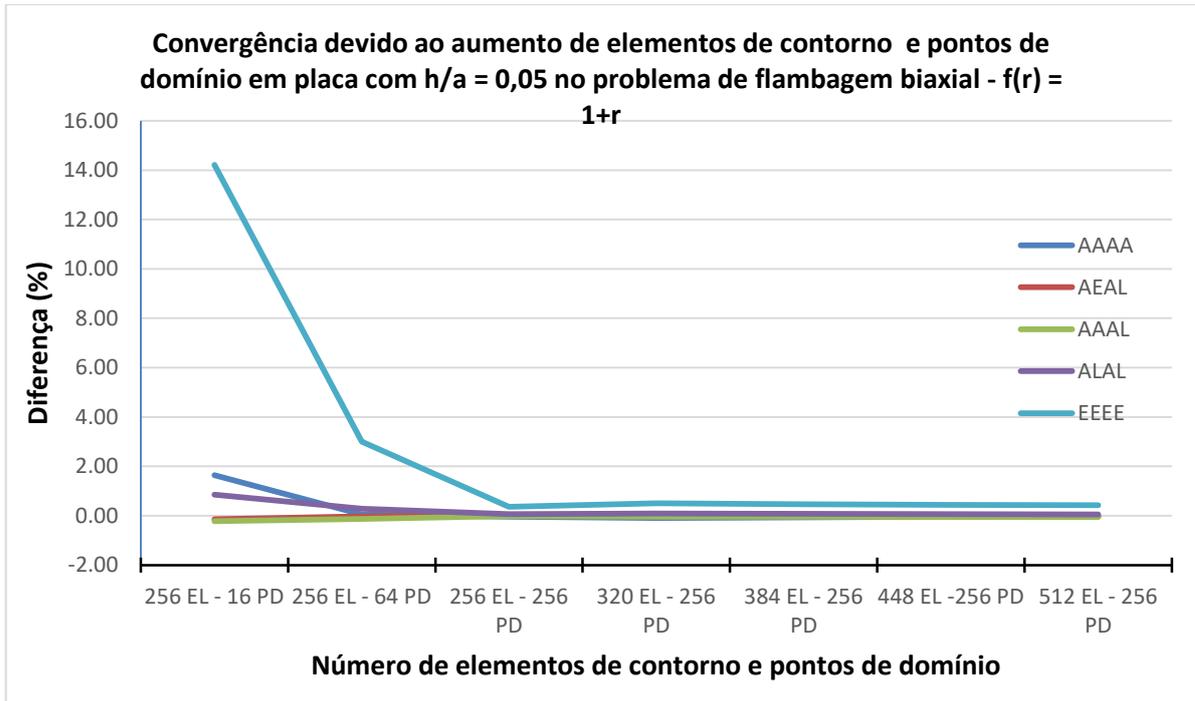
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 42** – Convergência em placa com  $h/a = 0,01$  com carga biaxial – F2



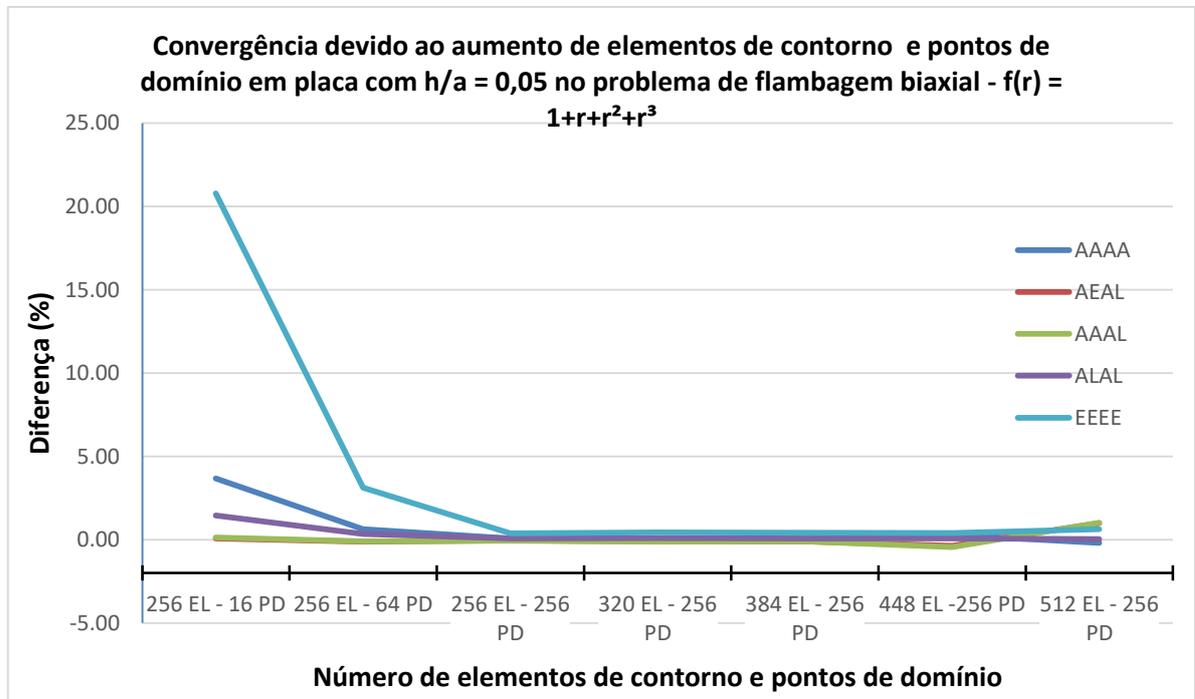
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 43** – Convergência em placa com  $h/a = 0,05$  com carga biaxial – F1



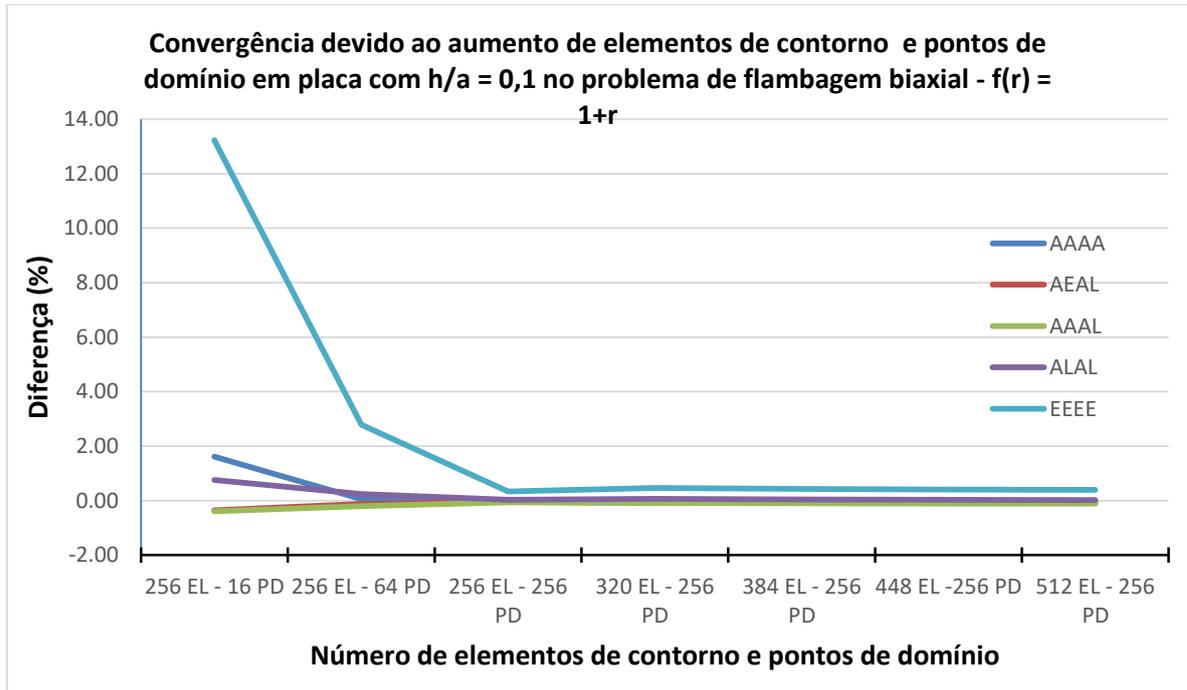
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 44** – Convergência em placa com  $h/a = 0,05$  com carga biaxial – F2



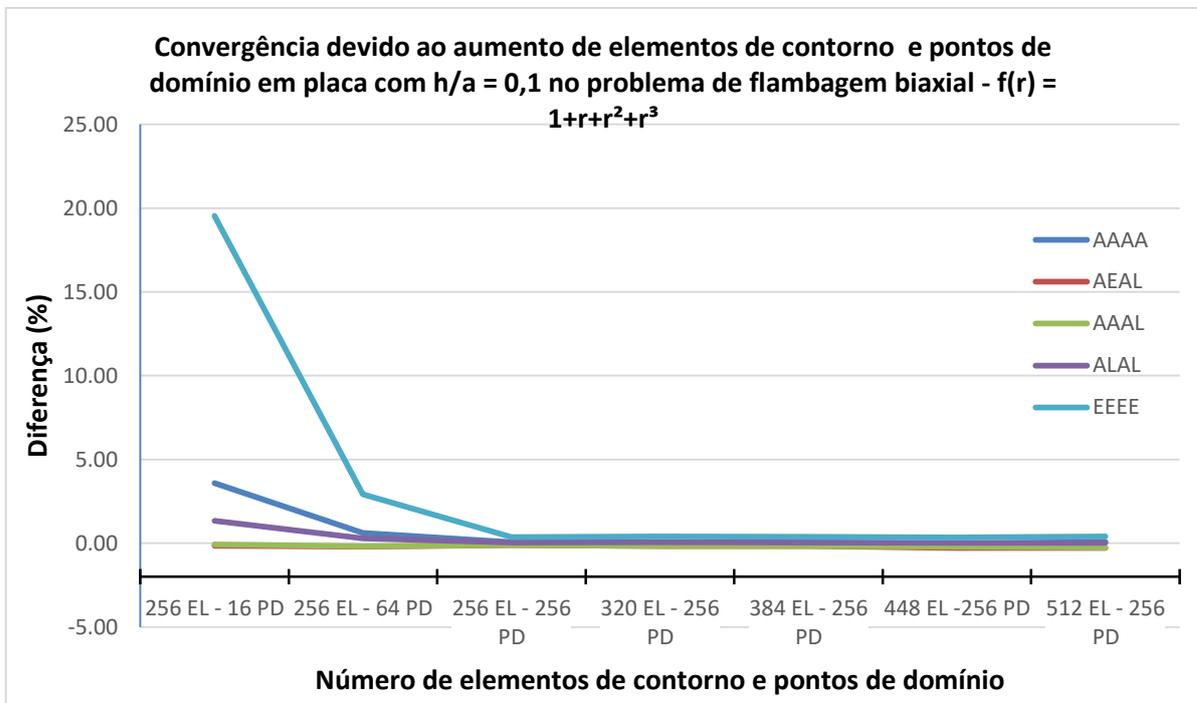
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 45 – Convergência em placa com  $h/a = 0,1$  com carga biaxial – F1**



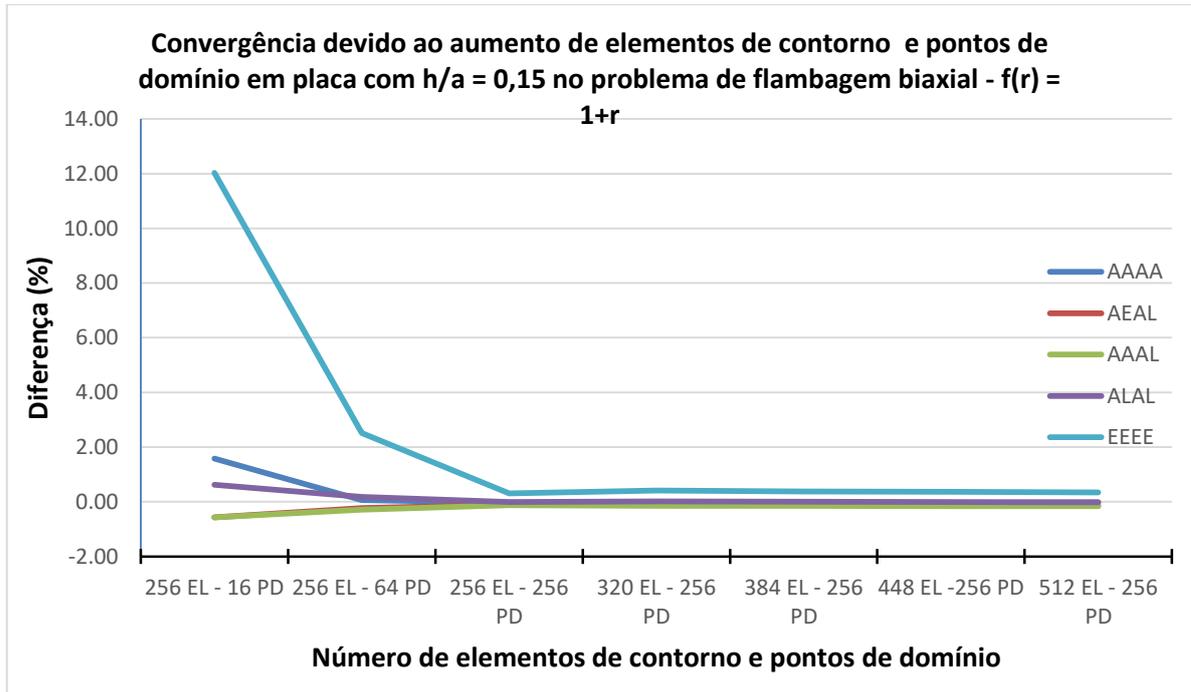
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 46 – Convergência em placa com  $h/a = 0,1$  com carga biaxial – F2**



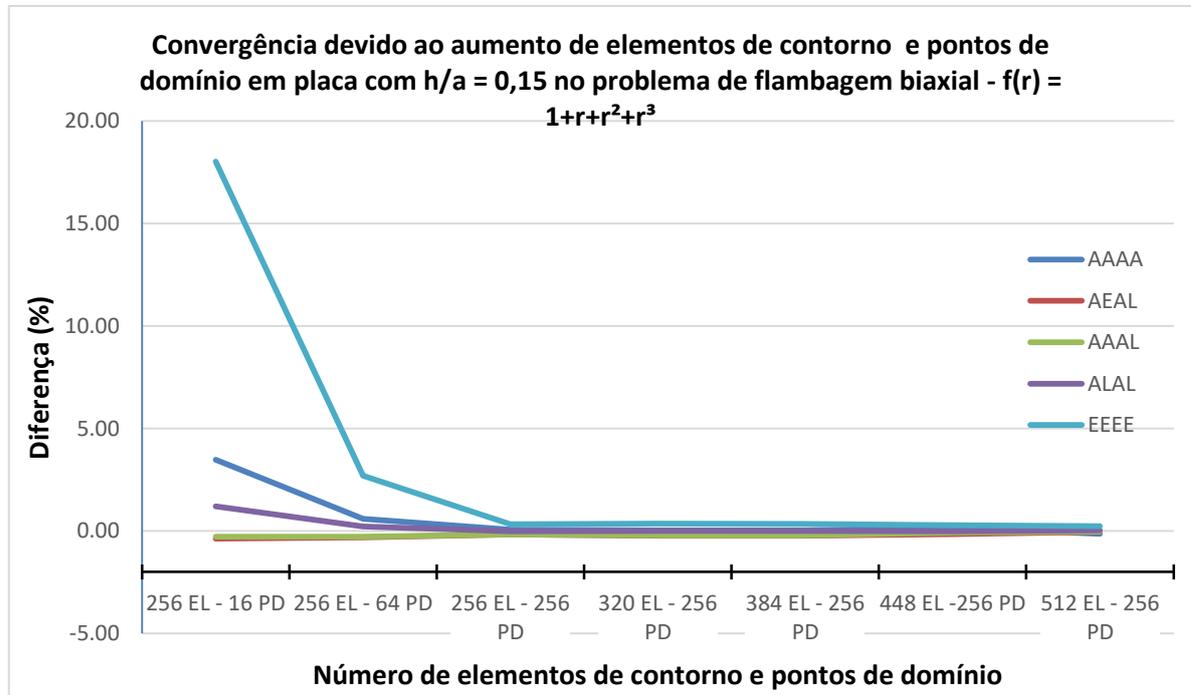
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 47** – Convergência em placa com  $h/a = 0,15$  com carga biaxial – F1



Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 48** – Convergência em placa com  $h/a = 0,15$  com carga biaxial – F2



Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

### 9.3.8 Comentários sobre os problemas com carga biaxial – MRD

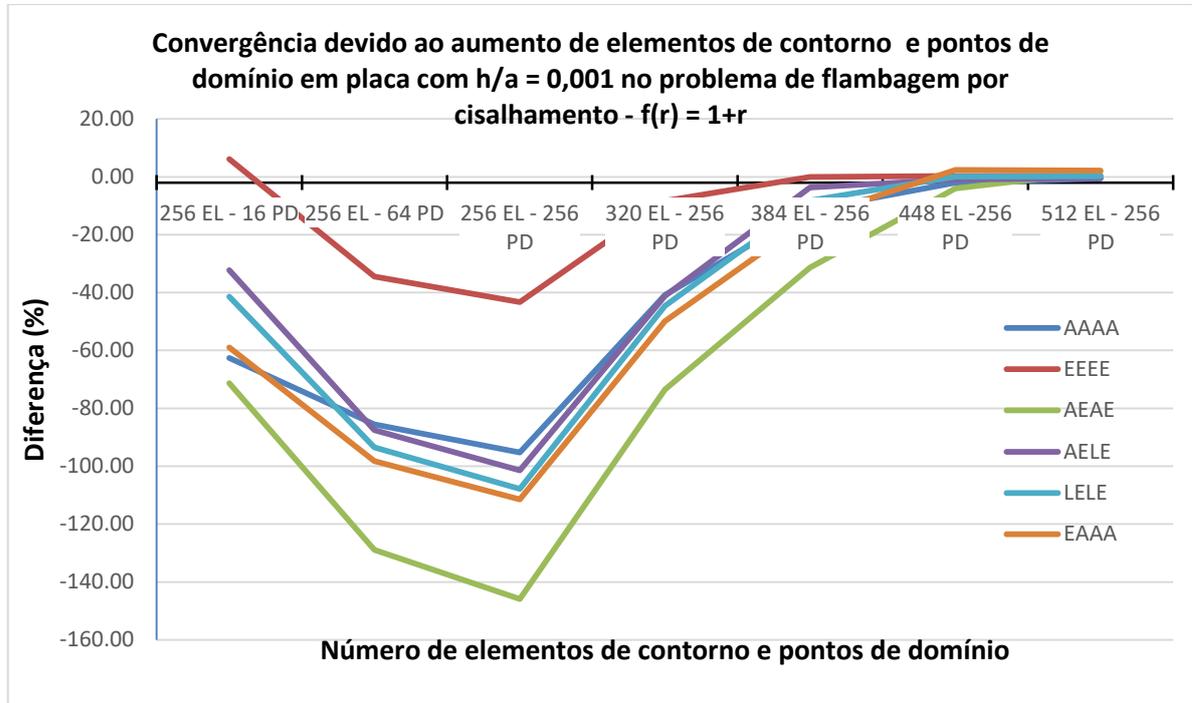
Os problemas com carga biaxial precisaram de mais elementos de contorno do que os problemas com carga uniaxial para que as diferenças fossem pequenas, enquanto os problemas com carga uniaxial precisaram de no máximo 256 elementos de contorno, os problemas de carga biaxial precisaram de 384 elementos de contorno ou mais. Quando a placa tem espessura de ordem  $h/L > 0,001$  o número de pontos de domínio mostrou-se o fator principal para convergência do problema uma vez que com um número pequeno de elementos de contorno pode-se obter diferenças pequenas com relação aos resultados da literatura.

Novamente as condições de contorno também influenciaram na obtenção de resultados, placas com condições engastadas convergiram mais lentamente que placas com condições simplesmente apoiadas.

Assim como os problemas de cargas uniaxiais, para grande maioria dos casos, a função F1 convergiu mais rapidamente que a função F2.

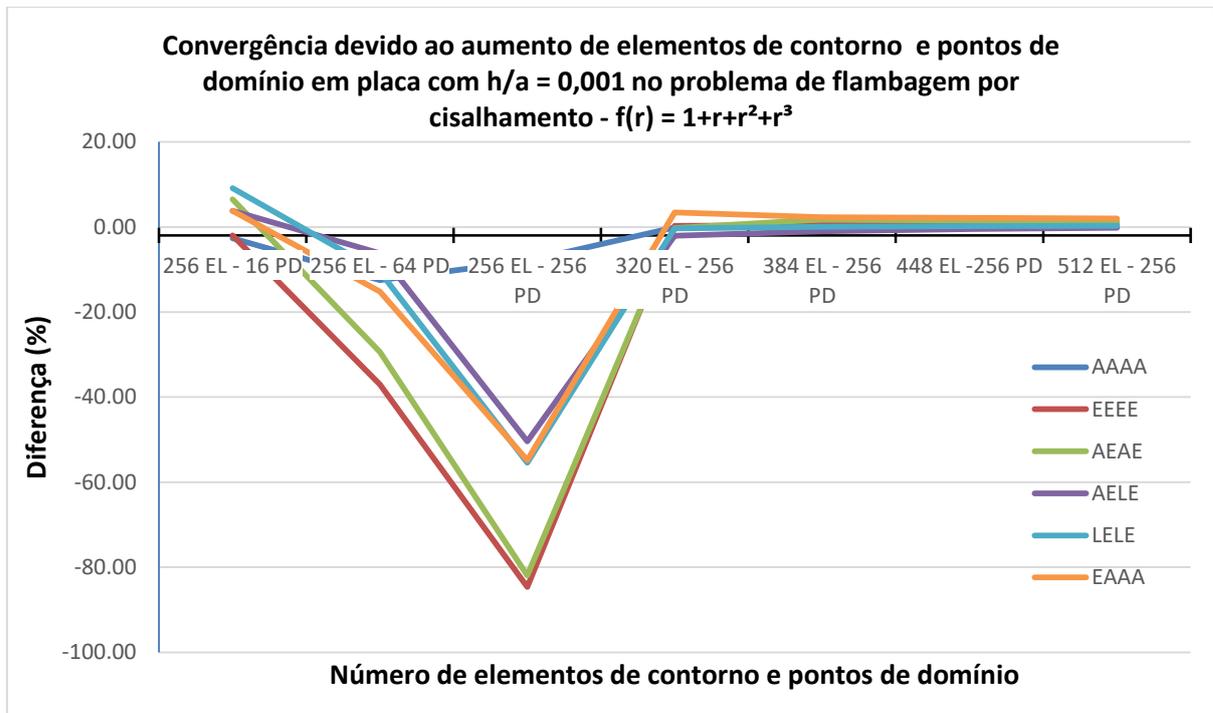
9.3.9 Gráficos com o comportamento do MRD para carga de cisalhamento

Figura 49 – Convergência em placa com  $h/a = 0,001$  - cisalhamento – F1



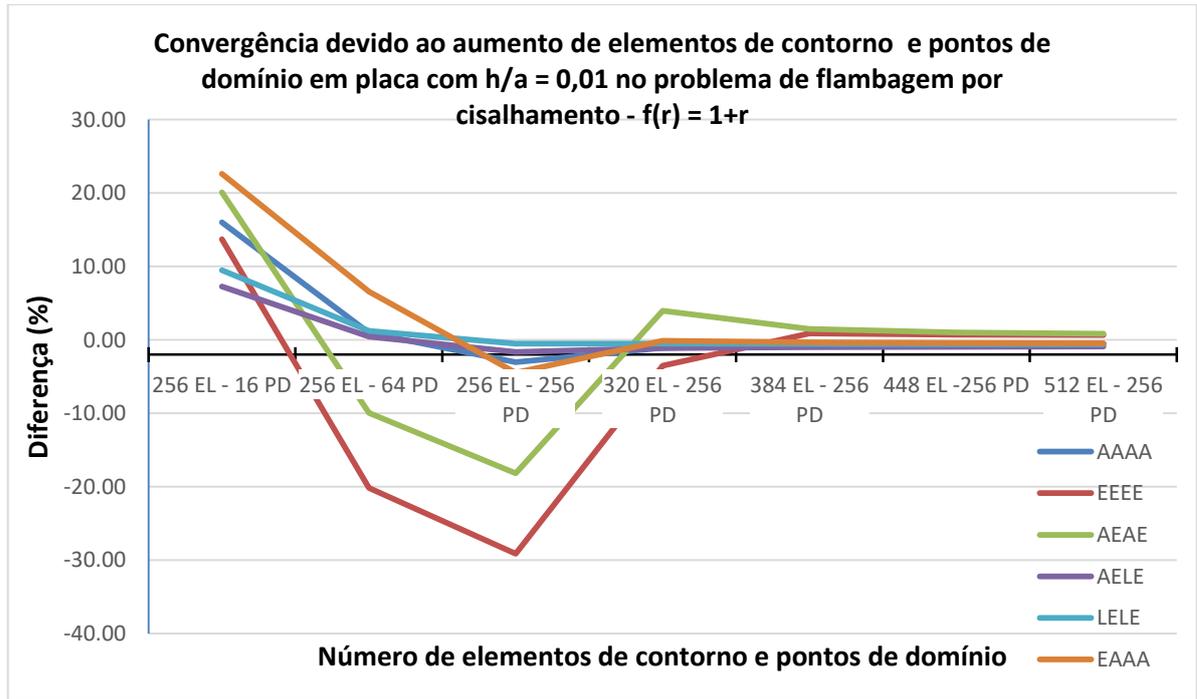
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

Figura 50 – Convergência em placa com  $h/a = 0,001$  - cisalhamento – F2



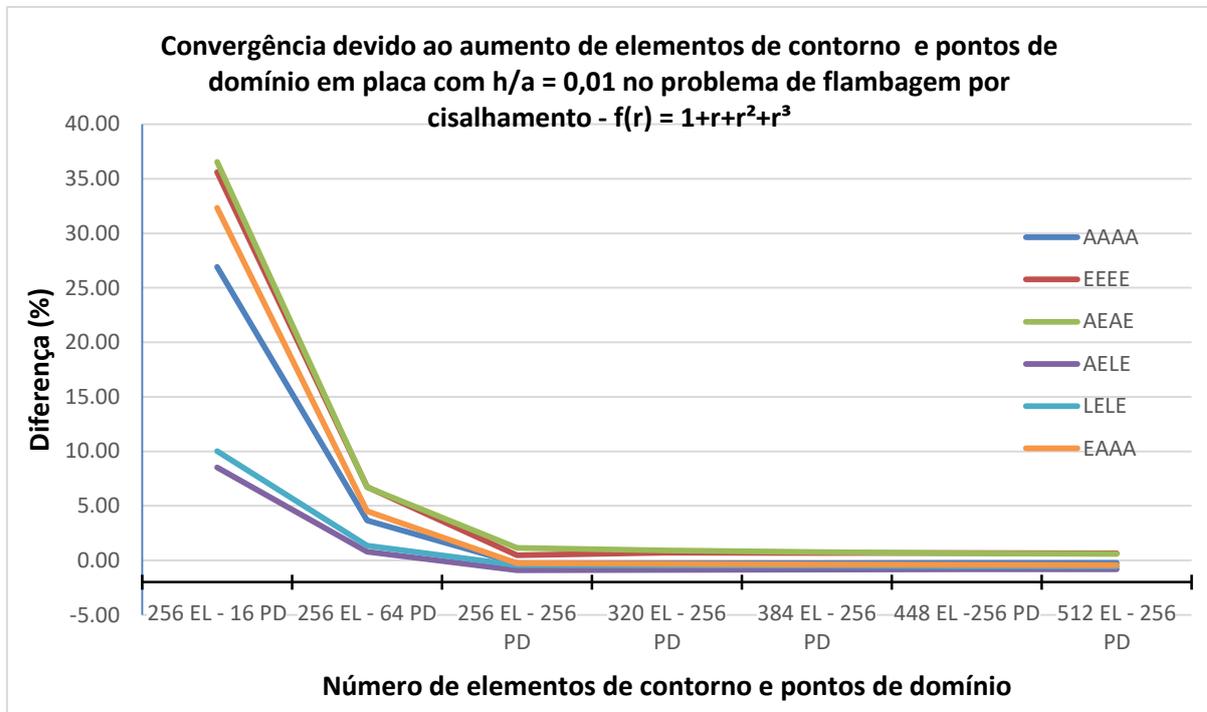
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 51** – Convergência em placa com  $h/a = 0,01$  - cisalhamento – F1



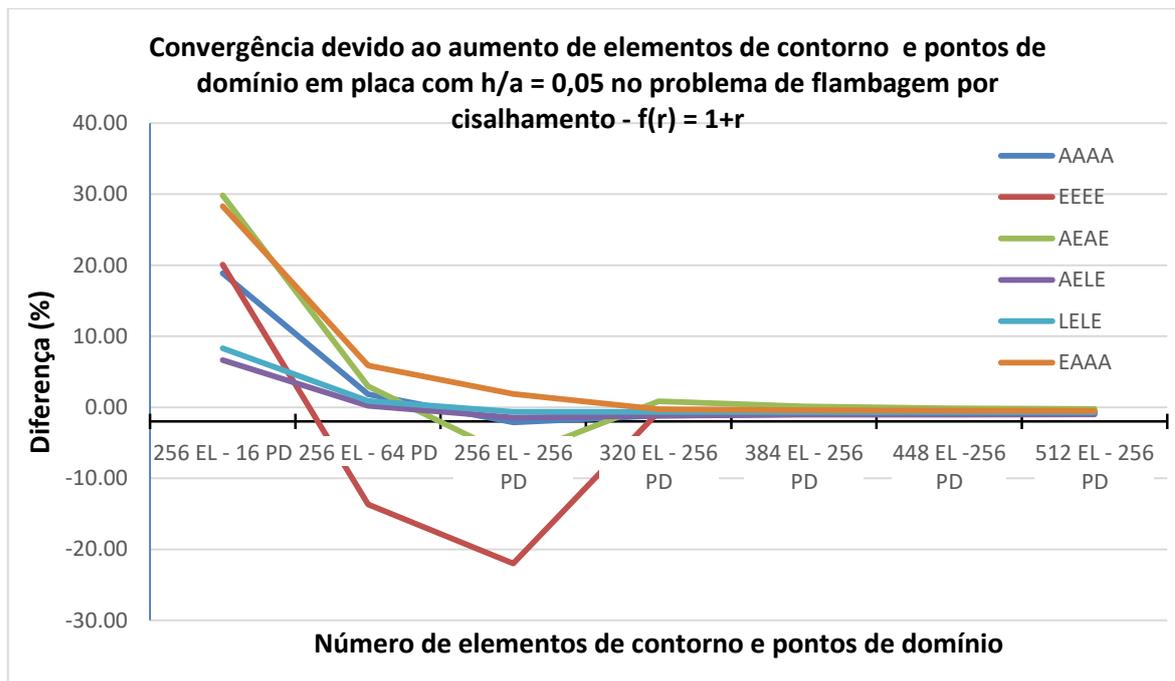
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 52** – Convergência em placa com  $h/a = 0,01$  - cisalhamento – F2



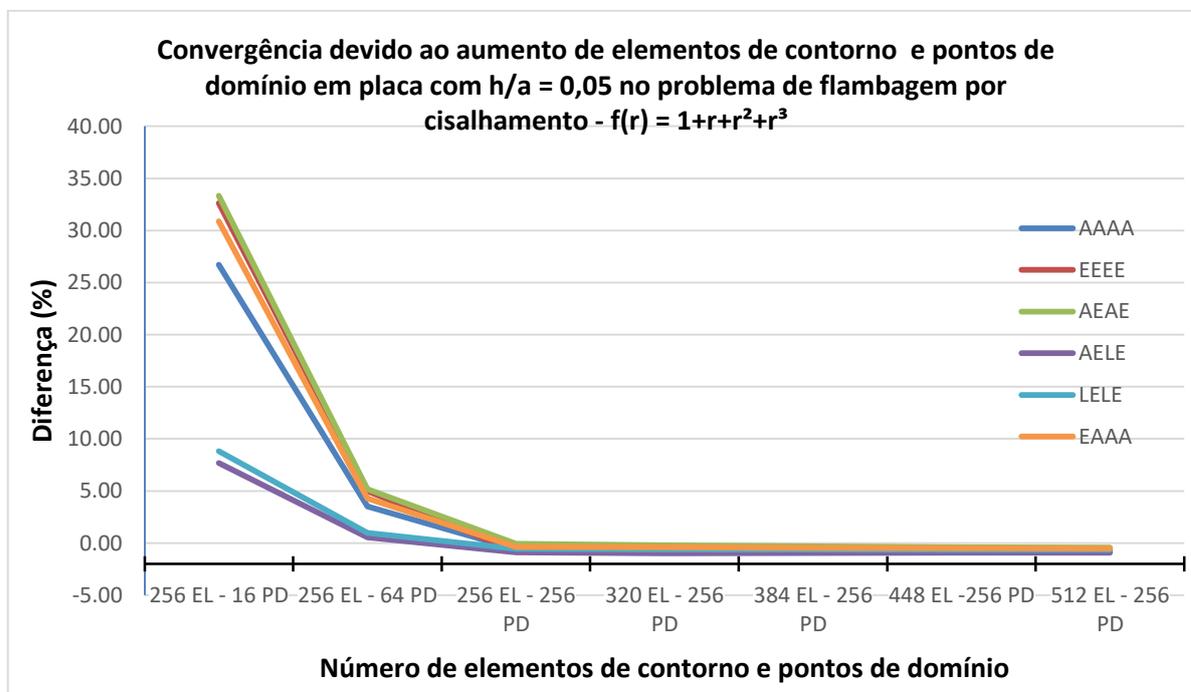
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 53** – Convergência em placa com  $h/a = 0,05$  - cisalhamento – F1



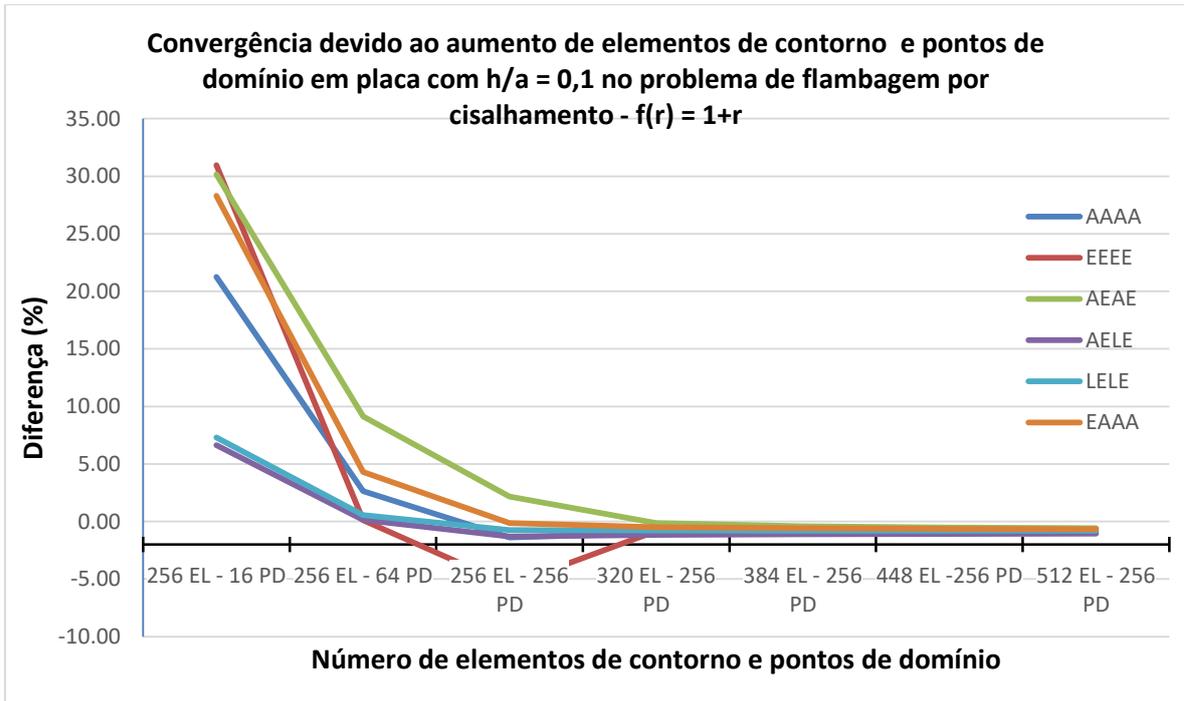
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 54** – Convergência em placa com  $h/a = 0,05$  - cisalhamento – F2



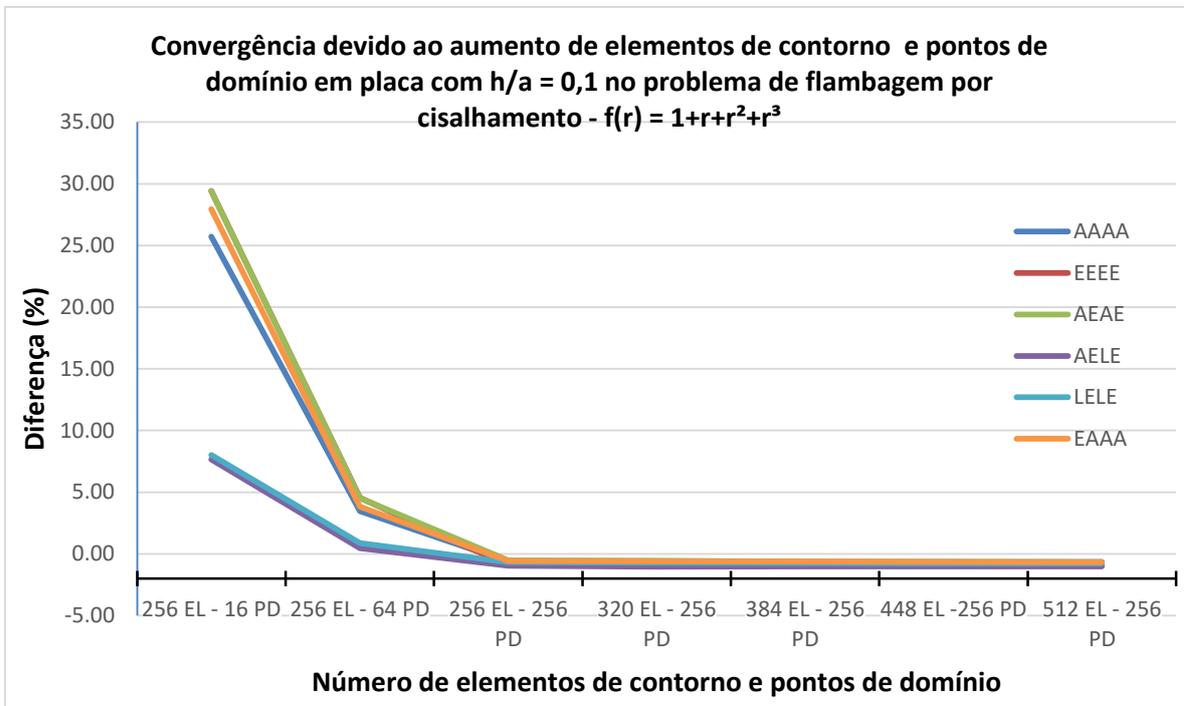
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 55** – Convergência em placa com  $h/a = 0,1$  - cisalhamento – F1



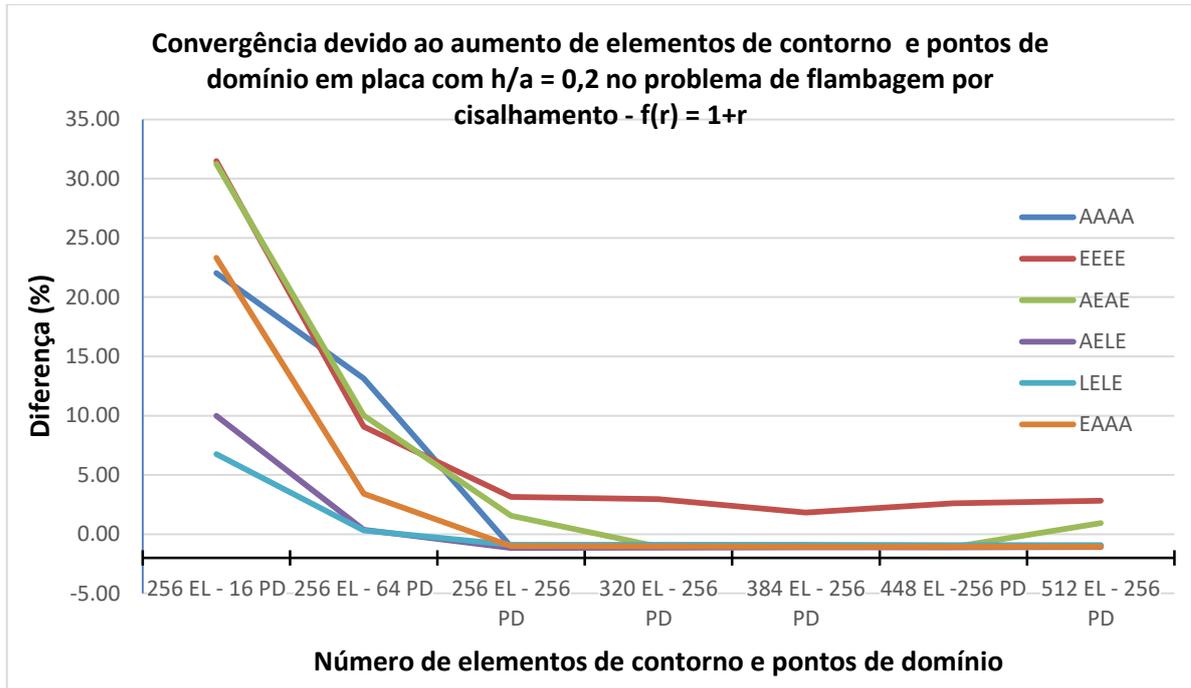
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 56** – Convergência em placa com  $h/a = 0,1$  - cisalhamento – F2



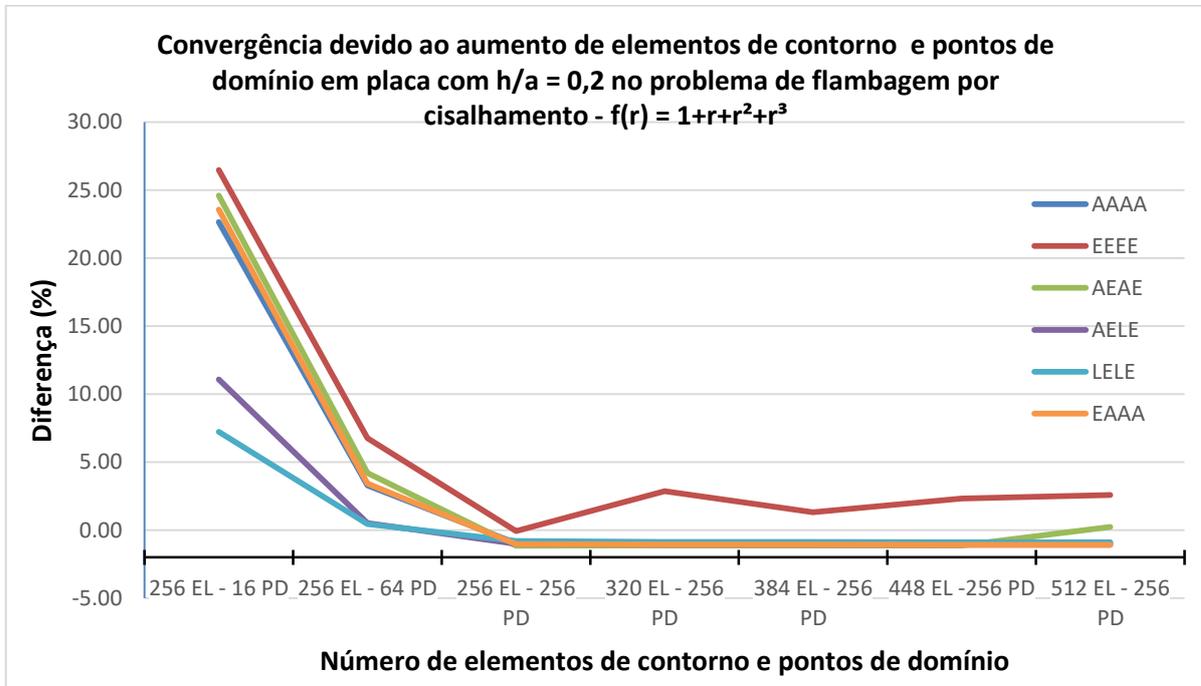
Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 57** – Convergência em placa com  $h/a = 0,2$  -cisalhamento – F1



Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

**Figura 58** – Convergência em placa com  $h/a = 0,2$  - cisalhamento – F2



Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019a).

### **9.3.10 Comentários sobre os problemas com carga de cisalhamento – MRD**

Os problemas com carga de cisalhamento precisaram de mais elementos de contorno do que os problemas com carga uniaxial e biaxial para que as diferenças fossem pequenas. Quando a placa tem espessura de ordem  $h/L > 0,001$  o número de pontos de domínio mostrou-se o fator principal para convergência do problema uma vez que com um número pequeno de elementos de contorno pode-se obter diferenças pequenas com relação aos resultados da literatura.

Novamente as condições de contorno também influenciaram na obtenção de resultados, placas com condições engastadas convergiram mais lentamente que placas com condições simplesmente apoiadas. Diferentemente dos outros casos, a função F2 convergiu mais rapidamente que a função F1, isto pode ser devido à complexidade da distribuição das cargas de domínio para o problema de cisalhamento ser maior.

## **9.4 RESULTADOS PARA PLACAS COM FUROS – MRD**

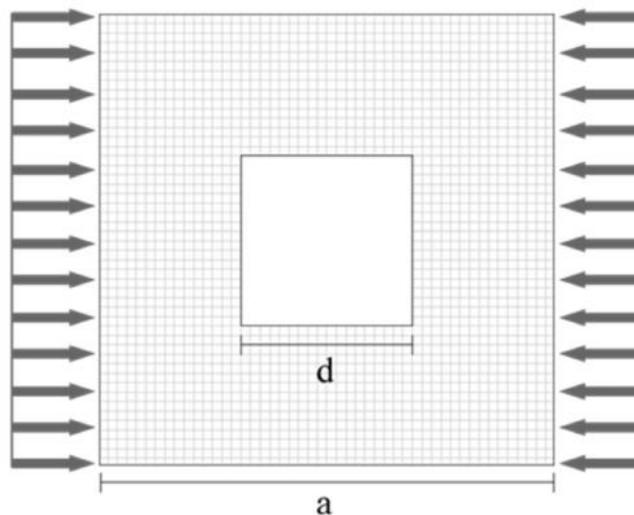
### **9.4.1 Problemas com furo quadrado central – MRD**

Foram resolvidos problemas de placas com furo quadrado central solicitadas por carga uniaxial conforme a ilustração da Figura 59, variando-se o aspecto  $d/a$  de 0,1 até 0,7, onde “d” é o tamanho do lado do furo e “a” é o tamanho do lado inferior da placa. As placas estão simplesmente apoiadas nas bordas externas (com a condição “hard”) e livres nas bordas do furo. Também será analisada a influência da espessura das placas.

### **9.4.2 Malhas utilizadas para furo quadrado central com MRD**

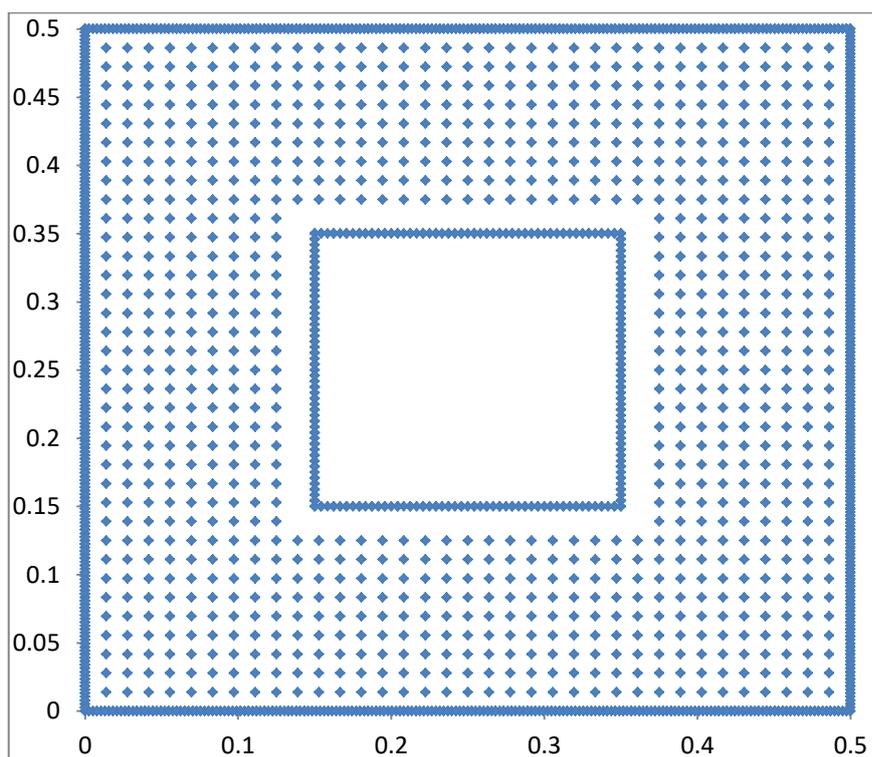
As malhas dadas pela tabela 18 possuem 384 elementos quadráticos nas bordas externas e 96 elementos na borda do furo. Foram distribuídos de 836 até 984 pontos internos conforme o tamanho do furo. Os pontos internos foram posicionados de maneira uniforme ao longo do domínio do problema. As malhas foram criadas por um gerador de malhas desenvolvido pelo autor do presente trabalho na linguagem Fortran 90.

**Figura 59** – Placa perfurada por furo quadrado solicitada por carga uniaxial



**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019b).

**Figura 60** – Malha para placa com furo quadrado  $d/a = 0,4$  - MRD

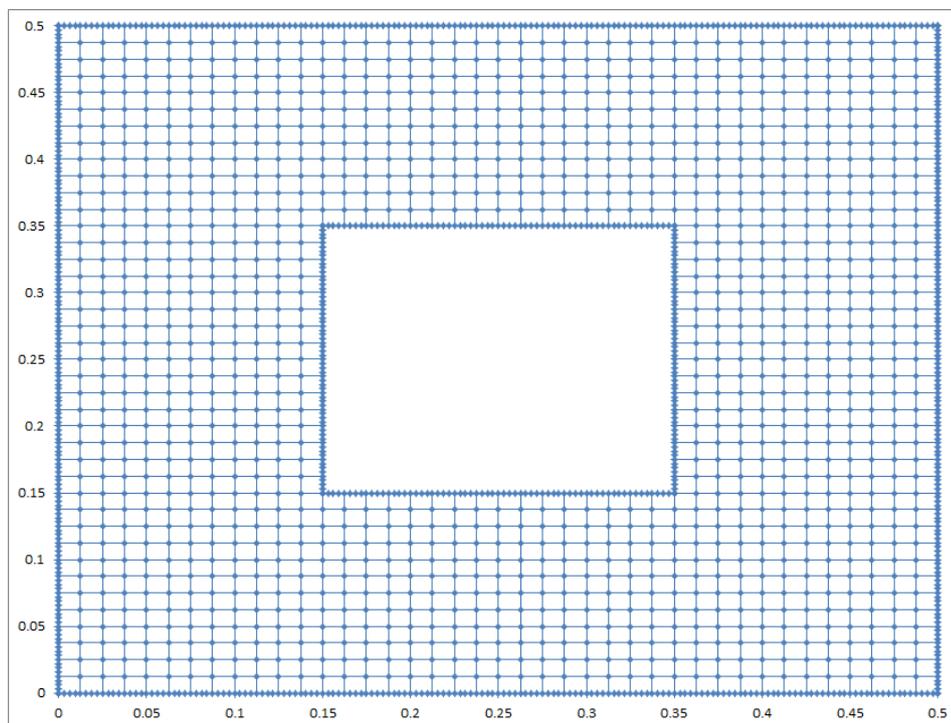


**Fonte:** O autor (2020).

### 9.4.3 Malhas para furo quadrado central com células de domínio

Também foram calculados os problemas com furo quadrado central utilizando-se células de domínio constantes, onde o centro de gravidade da célula é distante do contorno, ou seja, a cada 2 elementos de contorno utiliza-se 1 célula de domínio. A Figura 61 mostra a uma malha de 448 elementos de contorno e 1344 células de domínio.

**Figura 61** – Malha para placa com furo quadrado  $d/a = 0,4$  – Células de domínio



Fonte: Adaptado de Soares Jr. (2015).

**Tabela 17** – Malhas para células de domínio com furo quadrado central

Aspecto $d/a$	Elementos de Contorno	Células de Domínio
0,1	704	6336
0,2	768	6144
0,3	832	5824
0,4	896	5376
0,5	960	4800
0,6	1024	4096
0,7	1088	3264

Fonte: O autor (2020).

#### 9.4.4 Resultados para placas com furo quadrado central – MRD

Nas tabelas 18-20 é possível observar o comportamento da formulação que utiliza o MRD, onde na coluna “EL” pode-se ver o número de elementos, no caso 480 elementos quadráticos, sendo 384 elementos na borda externa e 96 na borda do furo. Os pontos de domínio estão na coluna “PD”. Os resultados são comparados com os obtidos por células de domínio, usando-se as malhas da tabela 17. A função de aproximação das cargas de domínio foi  $f(r) = 1 + r$ .

**Tabela 18** – MRD – Resultados para placas com furo quadrado 1 – Malha 1

EL	PD	d/a	MRD h/a = 0,001	Células h/a = 0,001	Diferença %	MRD h/a = 0,01	Células h/a = 0,01	Diferença %
480	864	0,1	3,7946	3,7994	-0,1272	3,7879	3,7932	-0,1406
480	836	0,2	3,4397	3,4494	-0,2821	3,4296	3,4412	-0,3394
480	880	0,3	3,1713	3,1883	-0,5375	3,1575	3,1782	-0,6547
480	936	0,4	2,9998	3,0297	-0,9955	2,9810	3,0153	-1,1503
480	896	0,5	2,9069	2,9310	-0,8282	2,8881	2,9096	-0,7440
480	924	0,6	2,8186	2,8664	-1,6977	2,8175	2,8352	-0,6280
480	984	0,7	1,0569	2,8449	-169,1660	2,8001	2,7998	0,0094

Fonte: O autor (2020).

**Tabela 19** – MRD – Resultados para placas com furo quadrado 2 – Malha 1

EL	PD	d/a	MRD h/a = 0,05	Células h/a = 0,05	Diferença %	MRD h/a = 0,1	Células h/a = 0,1	Diferença %
480	864	0,1	3,7248	3,7313	-0,1738	3,5722	3,5819	-0,2721
480	836	0,2	3,3602	3,3747	-0,4304	3,2140	3,2344	-0,6352
480	880	0,3	3,0774	3,1034	-0,8445	2,9207	2,9577	-1,2654
480	936	0,4	2,8781	2,9207	-1,4797	2,6898	2,7495	-2,2199
480	896	0,5	2,7562	2,7820	-0,9376	2,5333	2,5670	-1,3293
480	924	0,6	2,6392	2,6625	-0,8811	2,3596	2,3884	-1,2224
480	984	0,7	2,5388	2,5629	-0,9512	2,2438	2,2716	-1,2388

Fonte: O autor (2020).

**Tabela 20** – MRD – Resultados para placas com furo quadrado 3 – Malha 1

EL	PD	d/a	MRD h/a = 0,2	Células h/a = 0,2	Diferença %
480	864	0,1	3,0712	3,1043	-1,0777
480	836	0,2	2,7135	2,8052	-3,3791
480	880	0,3	2,3788	2,5138	-5,6729
480	936	0,4	2,0842	2,2235	-6,6819
480	896	0,5	1,9152	1,7185	10,2718
480	924	0,6	1,4944	1,1755	21,3382
480	984	0,7	0,8317	0,7263	12,6747

Fonte: O autor (2020).

Decidiu-se testar uma segunda malha dobrando-se o número de pontos de domínio, onde verificou-se a convergência na maioria dos problemas:

**Tabela 21 – MRD – Resultados para placas com furo quadrado 4 – Malha 2**

EL	PD	d/a	MRD h/a = 0,001	Células h/a = 0,001	Diferença %	MRD h/a = 0,01	Células h/a = 0,01	Diferença %
480	1564	0,1	3,7975	3,7994	-0,0500	3,7909	3,7932	-0,0607
480	1500	0,2	3,4442	3,4494	-0,1503	3,4343	3,4412	-0,2021
480	1568	0,3	3,1854	3,1883	-0,0899	3,1723	3,1782	-0,1847
480	1536	0,4	3,0194	3,0297	-0,3423	3,0012	3,0153	-0,4696
480	1533	0,5	2,9066	2,9310	-0,8412	2,8879	2,9096	-0,7510
480	1548	0,6	2,8431	2,8664	-0,8179	2,8198	2,8352	-0,5468
480	1632	0,7	2,8168**	2,8449	-0,9958	2,8131	2,7998	0,4733

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019b).

**Tabela 22 – MRD – Resultados para placas com furo quadrado 5 – Malha 2**

EL	PD	d/a	MRD h/a = 0,05	Células h/a = 0,05	Diferença %	MRD h/a = 0,1	Células h/a = 0,1	Diferença %
480	1564	0,1	3,7284	3,7313	-0,0769	3,5780	3,5819	-0,1085
480	1500	0,2	3,3659	3,3747	-0,2608	3,2222	3,2344	-0,3784
480	1568	0,3	3,0957	3,1034	-0,2489	2,9471	2,9577	-0,3588
480	1536	0,4	2,9028	2,9207	-0,6165	2,7247	2,7495	-0,9084
480	1533	0,5	2,7565	2,7820	-0,9242	2,5346	2,5670	-1,2789
480	1548	0,6	2,6412	2,6625	-0,8073	2,3614	2,3884	-1,1414
480	1632	0,7	2,5730	2,5629	0,3917	2,2611	2,2716	-0,4665

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019b).

**Tabela 23 – MRD – Resultados para placas com furo quadrado 6 – Malha 2**

EL	PD	d/a	MRD h/a = 0,2	Células h/a = 0,2	Diferença %
480	1564	0,1	3,0798	3,1043	-0,7943
480	1500	0,2	2,7555	2,8052	-1,8052
480	1568	0,3	2,4799	2,5138	-1,3677
480	1536	0,4	2,2025	2,2235	-0,9538
480	1533	0,5	1,6960**	1,7185	-1,3296
480	1548	0,6	1,2087**	1,1755	2,7468
480	1632	0,7	0,7813**	0,7263	7,0445

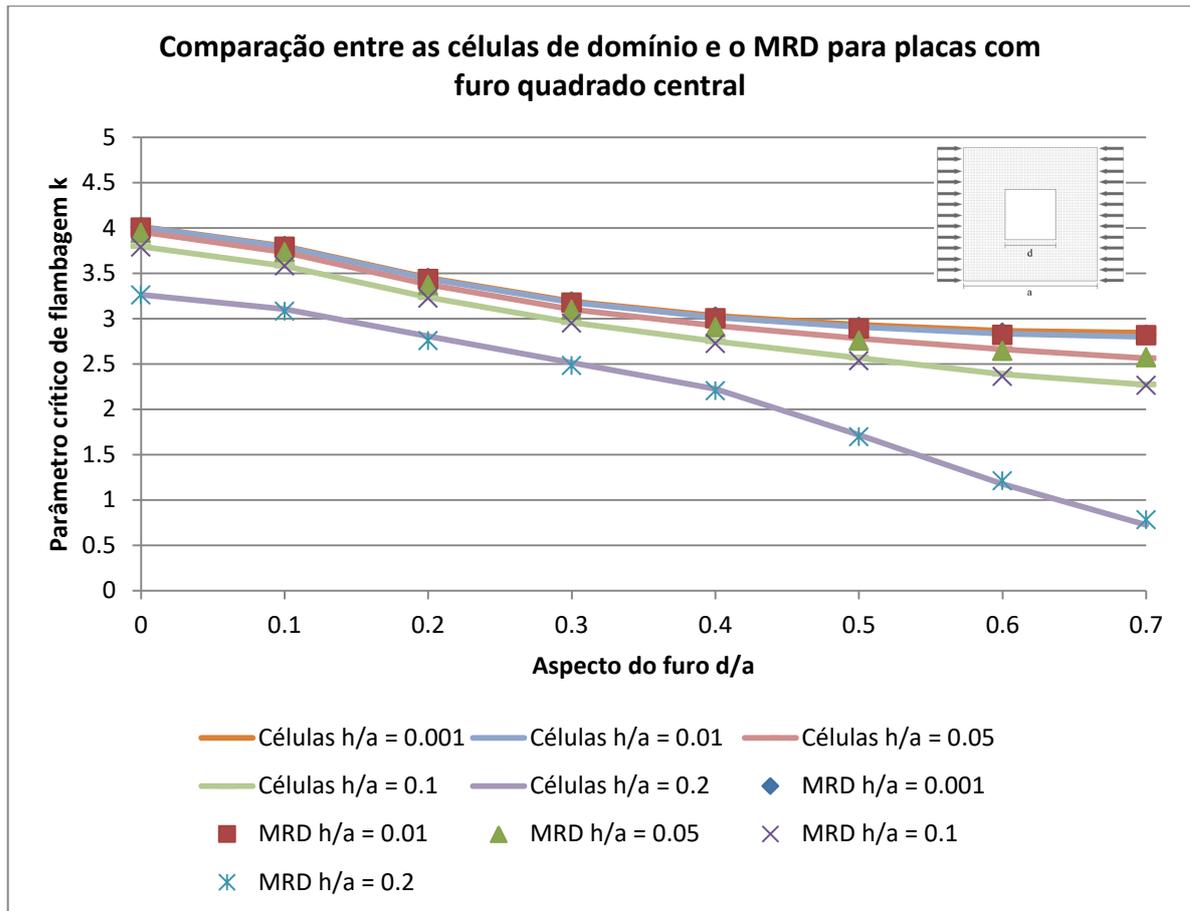
**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019b).

Os resultados marcados com (\*\*) precisaram ser resolvidos com 1280 elementos de contorno (1024 elementos quadráticos para borda externa e 256 para borda do furo) para que fossem obtidos bons resultados, estes problemas ocorreram

na placa com furo  $d/a = 0,7$  e aspecto de espessura  $h/a = 0,001$ , e para as placas com furos  $d/a = 0,5, 0,6$  e  $0,7$  para aspecto de espessura  $h/a = 0,2$ .

Os gráficos da Figura 62 mostram a comparação dos resultados obtidos pelo MRD com os obtidos pelas células de domínio:

**Figura 62** – Gráfico com comparação entre as células de domínio com MRD



**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2019b).

Notou-se um bom comportamento da formulação na maioria dos casos testados. Para problemas com furos grandes  $d/a \geq 0,7$  e aspecto de espessura  $h/a = 0,001$  houve a necessidade de aumentar o número de elementos de contorno para obter-se uma resposta satisfatória, isto é devido à integração das funções de Bessel com argumento grande as quais tornam-se problemáticas quando a placa é muito fina, nestes problemas de espessuras finas o número de pontos de domínio têm menor influência do que o número de elementos de contorno. Também houve a necessidade de aumentar-se o número de elementos de contorno para problemas

com furos  $d/a \geq 0,5$  e aspecto de espessura  $h/a = 0,2$ , para estes problemas de espessura moderada, o aumento de número de elementos de contorno e pontos de domínio têm influência similar na convergência dos resultados.

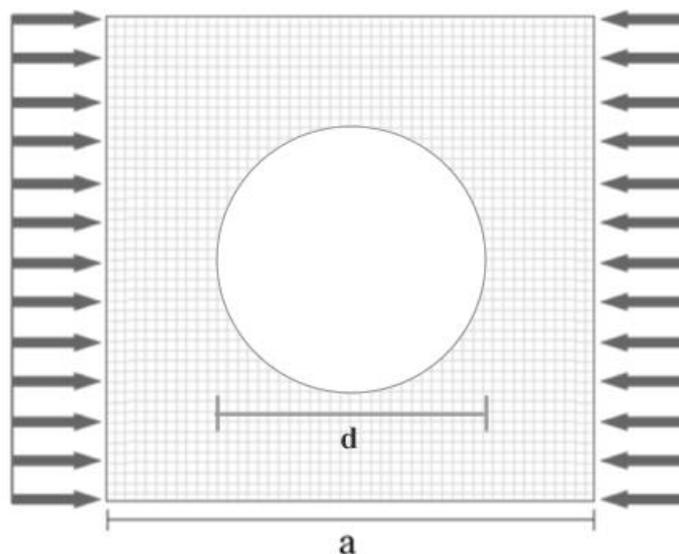
#### 9.4.5 Problemas com furo circular central – MRD

Foram resolvidos problemas de placas com furo circular central solicitadas por carga uniaxial conforme a ilustração da Figura 63, variando-se o aspecto  $d/a$  de 0,1 até 0,7, onde “d” é o tamanho do diâmetro do furo e “a” é o tamanho do lado inferior da placa. As placas estão simplesmente apoiadas nas bordas externas (com a condição “hard”) e livres nas bordas do furo. Também será analisada a influência da espessura das placas.

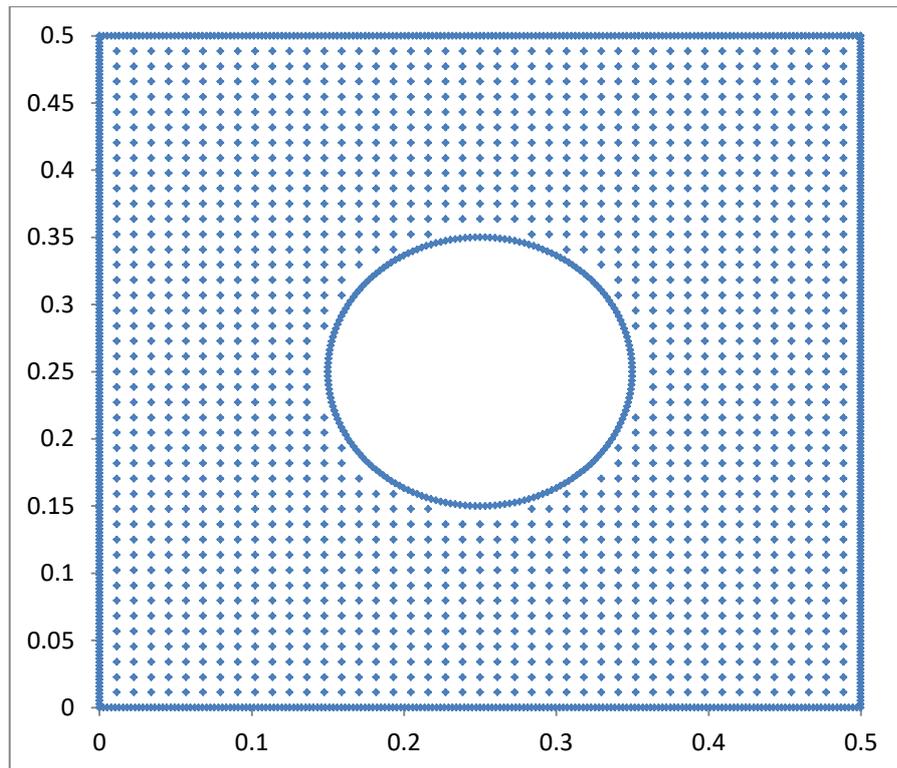
#### 9.4.6 Malhas utilizadas para furo circular central com MRD

As malhas possuem 384 elementos quadráticos nas bordas externas e 96 elementos na borda do furo. Foram distribuídos de 1460 até 1584 pontos internos conforme o tamanho do furo. Os pontos internos foram posicionados de maneira uniforme ao longo do domínio do problema.

**Figura 63** – Placa perfurada com furo circular solicitada por carga uniaxial



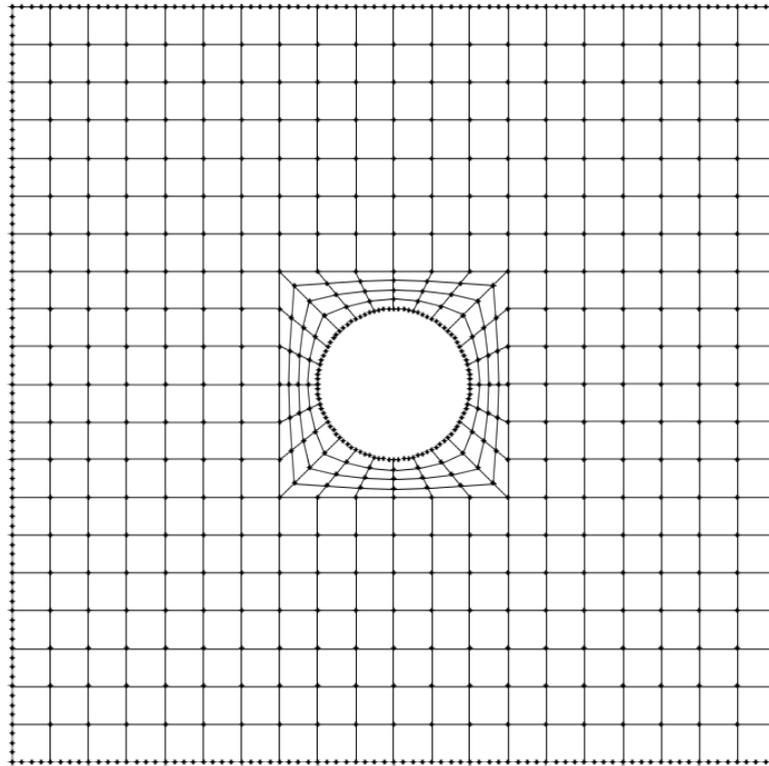
**Fonte:** Adaptado de Soares Jr. e Palermo Jr. (2018).

**Figura 64** – Malha para placa com furo circular  $d/a = 0,4$  - MRD

Fonte: O autor (2020).

#### 9.4.7 Malhas para furo circular central com células de domínio

Também foram calculados os problemas com furo circular central utilizando-se células de domínio constantes, onde o centro de gravidade da célula é distante do contorno, ou seja, a cada 2 elementos de contorno utiliza-se 1 célula de domínio. As malhas são estruturadas e a forma das células mantém um padrão retangular até chegar à distância de dois elementos de contorno do furo, nas proximidades do furo o número de células foi aumentado para melhor descrever a variação de tensões na área. A Figura 65 mostra uma malha de 208 elementos de contorno e 460 células de domínio.

**Figura 65** – Malha para placa com furo circular  $d/a = 0,2$  – Células de domínio

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr. e Palermo Jr. (2018).

**Tabela 24** – Malhas para células de domínio com furo circular central

Aspecto $d/a$	Elementos de Contorno	Células de Domínio
0,1	192	448
0,2	208	460
0,3	224	464
0,4	240	460
0,5	256	448
0,6	272	428
0,7	288	400

**Fonte:** O autor (2020).

#### 9.4.8 Resultados para placas com furo circular central – MRD

Nas tabelas 25-27 é possível observar o comportamento da formulação que utiliza o MRD, onde na coluna “EL” pode-se ver o número de elementos de contorno totais, no caso 480 elementos de contorno quadráticos, sendo 384 elementos na borda externa e 96 na borda do furo. Os pontos de domínio estão na coluna “PD”. Os resultados são comparados com os obtidos por células de domínio

usando-se as malhas da tabela 24. A função de aproximação das cargas de domínio utilizada foi a função  $f(r) = 1 + r$

**Tabela 25 – MRD – Resultados para placas com furo circular 1**

EL	PD	d/a	MRD h/a = 0,001	Células h/a = 0,001	Diferença %	MRD h/a = 0,01	Células h/a = 0,01	Diferença %
480	1584	0,1	3,8402	3,84371	-0,0908	3,8383	3,8442	-0,1547
480	1540	0,2	3,5162	3,51651	-0,0086	3,5150	3,5166	-0,0450
480	1460	0,3	3,2309	3,22691	0,1246	3,2297	3,2260	0,1142
480	1572	0,4	3,0360	3,02691	0,3005	3,0330	3,0244	0,2813
480	1488	0,5	2,9176	2,89594	0,7434	2,9110	2,8904	0,7069
480	1532	0,6	2,8092	2,80079	0,2994	2,8266	2,7900	1,2937
480	1528	0,7	2,7603**	2,71648	1,5876	2,7683	2,6972	2,5670

Fonte: O autor (2020).

**Tabela 26 – MRD – Resultados para placas com furo circular 2**

EL	PD	d/a	MRD h/a = 0,05	Células h/a = 0,05	Diferença %	MRD h/a = 0,1	Células h/a = 0,1	Diferença %
480	1584	0,1	3,7890	3,7944	-0,1416	3,6423	3,6471	-0,1314
480	1540	0,2	3,4730	3,4742	-0,0351	3,3476	3,3481	-0,0170
480	1460	0,3	3,1906	3,1864	0,1315	3,0757	3,0706	0,1656
480	1572	0,4	2,9892	2,9799	0,3127	2,8679	2,8578	0,3533
480	1488	0,5	2,8501	2,8310	0,6711	2,7016	2,6829	0,6946
480	1532	0,6	2,7401	2,7024	1,3737	2,5305	2,5005	1,1852
480	1528	0,7	2,6370	2,5606	2,8982	2,2669	2,2929	-1,1445

Fonte: O autor (2020).

**Tabela 27 – MRD – Resultados para placas com furo circular 3**

EL	PD	d/a	MRD h/a = 0,2	Células h/a = 0,2	Diferença %
480	1584	0,1	3,1528	3,1559	-0,0961
480	1540	0,2	2,9165	2,9152	0,0427
480	1460	0,3	2,6601	2,6545	0,2124
480	1572	0,4	2,3884	2,4601	-3,0018
480	1488	0,5	1,9122	1,8480	3,3574
480	1532	0,6	1,3337	1,2738	4,4873
480	1528	0,7	0,8075	0,7799	3,4165

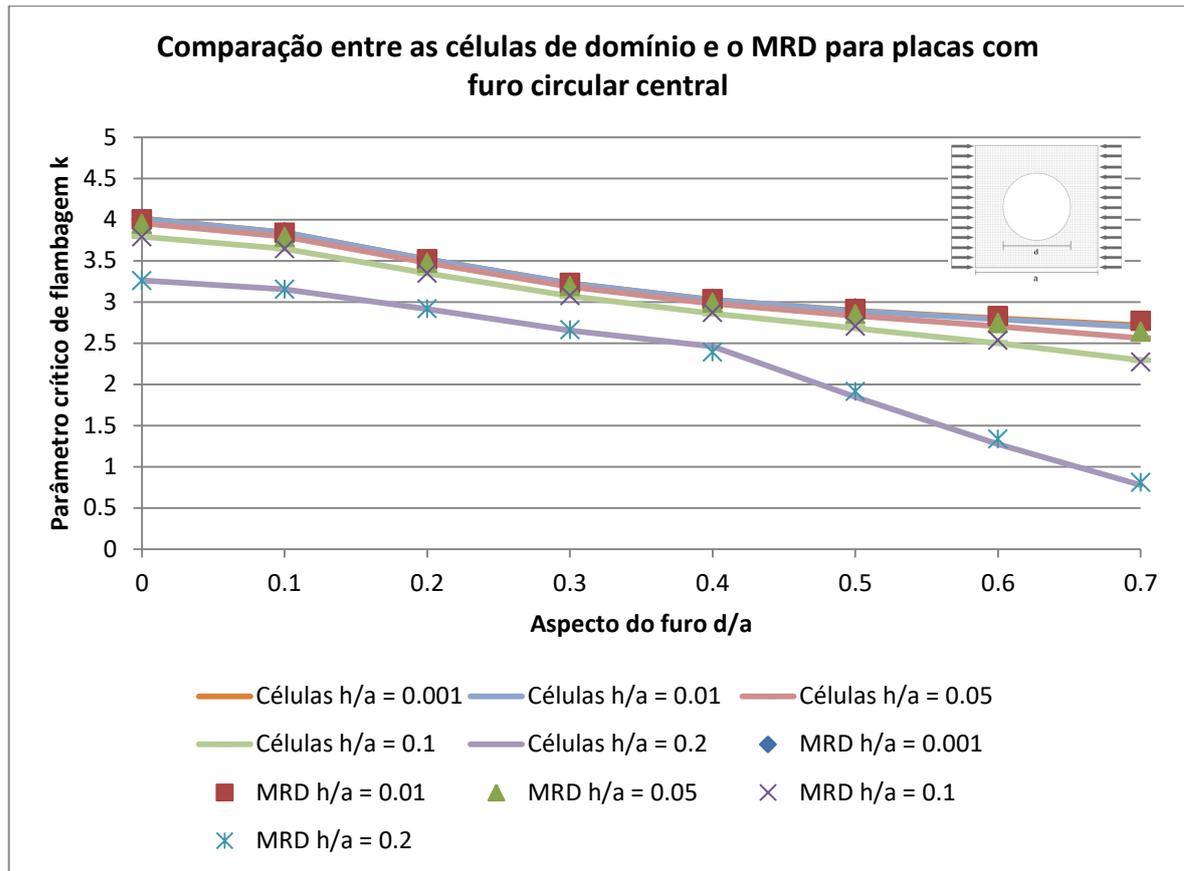
Fonte: O autor (2020).

Os resultados marcados com (\*\*) precisaram ser resolvidos com 1280 elementos de contorno (1024 elementos quadráticos para borda externa e 256 para

borda do furo) para que fossem obtidos bons resultados, estes problemas foram a placa com furo  $d/a = 0,7$  e aspecto de espessura  $h/a = 0,001$ .

Os gráficos da Figura 66 mostram a comparação dos resultados obtidos pelo MRD com os obtidos pelas células de domínio:

**Figura 66** – Gráfico com comparação entre as células de domínio com MRD



**Fonte:** O autor (2020).

Notou-se um bom comportamento da formulação na maioria dos casos testados. Para problemas com furos grandes  $d/a \geq 0,7$  e aspecto de espessura  $h/a = 0,001$  houve a necessidade de aumentar o número de elementos de contorno para obter-se uma resposta satisfatória, isto é devido à integração das funções de Bessel com argumento grande as quais tornam-se problemáticas quando a placa é muito fina, nestes problemas de espessuras finas o número de pontos de domínio têm menor influência do que o número de elementos de contorno.

Os problemas com furos circulares só puderam ser resolvidos devido à aplicação do operador tangente nas derivadas segundas das soluções fundamentais, uma vez que o código fornecido por GAO (2006) não é capaz de resolver integrais Supersingulares ( $\frac{1}{r^3}$ ) em elementos curvos. A diminuição do grau de singularidade Supersingulares para integrais do tipo Hypersingular ( $\frac{1}{r^2}$ ) resolveu o problema.

## 10 O MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL

### 10.1 INTRODUÇÃO AO MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL

Apesar do sucesso do MRD na conversão das integrais de domínio para integrais de contorno aproximadas, o estudo do método revelou algumas de suas desvantagens. A necessidade de soluções particulares para o MRD se mostrou como a principal desvantagem do método, uma vez que pode haver dificuldade no cálculo das mesmas para certos tipos de problemas e de funções de aproximação conforme mostrado por Albuquerque, Sollero e Paiva (2007). Como alternativa ao MRD, Gao (2002) apresentou o Método da Integração Radial (MIR).

Uma das bases para formulação do MIR está na utilização de coordenadas polares para auxiliar na integração de domínio, esta transformação foi inicialmente proposta por Venturinni (1988), integrando-se as cargas de domínio de forma analítica. A primeira vez que as coordenadas polares foram utilizadas em conjunto com a aproximação de funções de base radial foi no trabalho de WEN, Aliabadi e Rooke (1998), propondo um método de conversão de integrais de domínio para integrais de contorno, onde o núcleo da integral de domínio incluindo a solução fundamental foi aproximado pela função radial.

Baseando-se em seu trabalho anterior (GAO, 2001), Gao (2002) fez o uso de manipulações matemáticas e utilizando-se da integração numérica, generalizou a aplicação de coordenadas polares em conjunto com funções de base radial para conversão de integrais de domínio para integrais de contorno aproximadas, chamando o método obtido de “Método da Integração Radial”. Uma diferença com o trabalho de Wen, Aliabadi e Rooke (1998) foi que a solução fundamental não era aproximada pela função de base radial. Gao também mostrou diversas vantagens iniciais do MIR com relação à outros métodos, como a redução de grau de singularidade da solução fundamental, a escolha livre das funções de base radial sem a necessidade de cálculo de soluções particulares e a sua fácil implementação em códigos já existentes.

No presente trabalho é estudada a aplicação do MIR em problemas de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante, mostrando

resultados em placas com diversas condições de contorno e aspectos de espessura. Analisou-se placas perfuradas com furos centrais quadrados e circulares. Também são mostradas as vantagens e desvantagens do MIR com relação ao MRD.

## 10.2 BASE TEÓRICA PARA O MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL

O método da integração radial (MIR) será usado para tratar as integrais de domínio das equações 4.3 e 4.4. O método é elaborado em de duas premissas: a conversão para coordenadas polares e a utilização de funções de base radial para aproximação das cargas de domínio. Seguindo os trabalhos de Venturinni (1988), Wen, Aliabadi e Rooke (1998) e Gao (2002) pode-se converter as coordenadas de uma integral de domínio para coordenadas polares utilizando a relação 10.1:

$$x = r\cos(\theta) \quad y = r\sin(\theta) \quad d\Omega = r dr d\theta \quad (10.1)$$

Para um domínio circular, pode-se encontrar a relação 10.2:

$$\iint_{\Omega} F(x, y) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^r F(r, \theta) r dr d\theta \quad (10.2)$$

Para converter a integral de domínio para coordenadas polares em um domínio genérico, Gao (2002) propôs as relações 10.3:

$$d\theta = \frac{\cos(\alpha) d\Gamma}{r} \quad (10.3)$$

Substituindo a equação 10.3 na equação 10.2 pode-se obter:

$$\int_{\Gamma} \int_0^r F(r, \theta) r dr \frac{\cos(\alpha) d\Gamma}{r} \quad (10.4)$$

A derivada normal do raio é dada por 10.5:

$$\cos(\alpha) = \frac{dr}{dn} \quad (10.5)$$

Substituindo a equação 10.5 na equação 10.4 e arranjando os termos pode-se encontrar a equação 10.6:

$$\iint_{\Omega} F(x, y) d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \int_0^r F(r, \theta) r dr \right) d\Gamma \quad (10.6)$$

Para cargas de domínio representadas por funções simples como constante e polinomial, esta integral pode ser calculada de maneira analítica.

### 10.3 O MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL PARA EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS

Inicialmente será aplicado o MIR para a integral de domínio presente na equação 4.3, esta integral contém a primeira derivada das soluções fundamentais de deslocamento, sendo dada pela equação 10.7:

$$I_1 = \iint_{\Omega} N_{\theta\beta}(X) u_{3,\beta}(X) U_{i3,\theta}(x', X) d\Omega(X) \quad (10.7)$$

A aproximação das normais multiplicadas pelas derivadas do deslocamento transversal é feita por uma função de base radial utilizando-se uma quantidade “m” de pontos no contorno e domínio do problema, conforme pela equação 10.8:

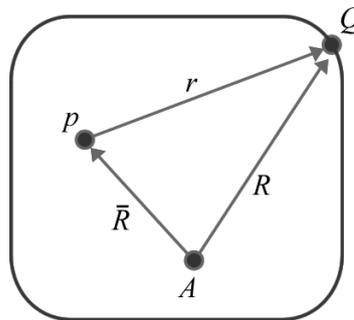
$$f(R) \alpha_{\theta}^m = N_{\theta\beta} u_{3,\beta} \quad (10.8)$$

Substituindo a equação 10.8 na equação 10.7 e utilizando a equação 10.6 pode-se converter a integral de domínio para integral de contorno utilizando o MIR:

$$I_1 = \sum_{m=1}^{N+L} \alpha_{\theta}^m \left\{ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \int_0^{r(Q)} U_{i3,\theta}(r) f(R) r dr \right) d\Gamma \right\} \quad (10.9)$$

A equação 10.9 está escrita em uma forma simplificada, para realizar a integral radial corretamente, é necessário converter a função de aproximação  $f(R)$  para que o raio “R” de aproximação da função radial fique em função do raio “r” que sai do ponto fonte até o elemento de contorno. Para isto pode-se usar a Figura 67:

**Figura 67** – Relações entre a solução fundamental e o raio de aproximação



**Fonte:** Adaptado de Gao (2002).

Onde “A” é o ponto de aproximação da função de base radial, “p” é o ponto fonte e “Q” é o ponto campo no elemento de contorno. Da Figura 2 é possível estabelecer a relação 10.10:

$$R = \sqrt{r^2 + sr + \bar{R}^2} \quad (10.10)$$

Os valores de  $s$  e  $\bar{R}$  são dados por GAO (2002):

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \sqrt{(x_p - x_A)^2 + (y_p - y_A)^2} \\ s &= 2[r_{,1}(x_p - x_A) + r_{,2}(y_p - y_A)] \end{aligned} \quad (10.11)$$

Utilizando como exemplo a função de aproximação  $f(R)=1+R$ , pode-se substituir as relações das equações 10.10 e 10.11 na equação 10.9, obtendo-se:

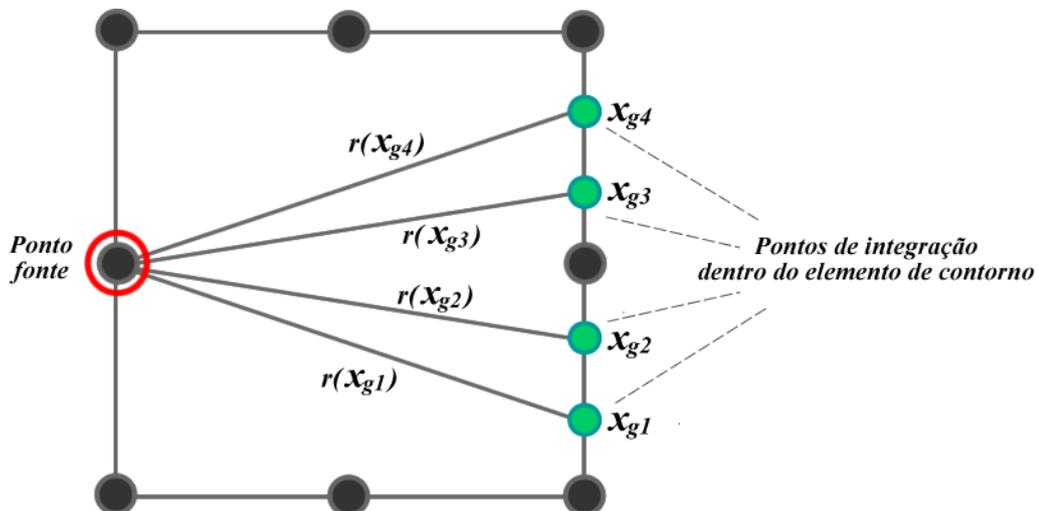
$$I_1 = \alpha_\theta^m \int_\Gamma \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \int_0^{r(Q)} U_{i3,\theta}(r) \{1 + \sqrt{r^2 + sr + \bar{R}^2}\} r dr \right) d\Gamma \quad (10.12)$$

Utilizando por exemplo a solução fundamental  $U_{\beta3,\theta}$  a integral radial fica da seguinte maneira:

$$I_1 = \alpha_\theta^m \int_\Gamma \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \int_0^{r(Q)} \left\{ -\frac{1}{8\pi D} [\delta_{\beta\theta}(2 \ln(\lambda r) - 1) + 2r_\theta r_\beta] \right\} \{1 + \sqrt{r^2 + sr + \bar{R}^2}\} r dr \right) d\Gamma \quad (10.13)$$

A integral radial da equação 10.13 tem grande influência no resultado obtido pelo MIR. O núcleo desta integral é regular, podendo-se aplicar a integração numérica de Gauss convencional. No presente trabalho adotou-se que o raio  $r(Q)$  partirá do ponto fonte até cada um dos pontos relacionados à integração de Gauss distribuídos dentro do elemento quadrático. Verificou-se que 4 pontos de Gauss são suficientes para resolver problemas com furos grandes de ordem  $d/L = 0,7$ . Desta forma o tempo de processamento aumenta, pois deve-se realizar 4 integrais radiais por elemento de contorno, conforme a Figura 68:

**Figura 68** – Raios do ponto fonte à pontos de Gauss dentro do elemento



**Fonte:** O autor (2020).

Para cada elemento de contorno, são então marcados 4 pontos de Gauss dentro do elemento, estes servirão de ponto campo para 4 integrais radiais. A

integração de contorno é feita simultaneamente com a integral radial, percorrendo todos os elementos de contorno, conforme a equação 10.14:

$$I_1 = \sum_{m=1}^{N+L} \alpha_{\theta}^m \left\{ \sum_{n=1}^{NE} \sum_{a=1}^4 \frac{1}{r(x_{ga})} \frac{dr(x_{ga})}{dn} \left( \int_0^{r(x_{ga})} \bar{F}(r, A_m) dr \right) J(x_{ga}) w_{ga} \right\} \quad (10.14)$$

Onde  $NE$  é o número de elementos de contorno,  $x_{ga}$  são os pontos de Gauss,  $w_{ga}$  são os pesos de Gauss,  $N$  é o número de pontos no contorno e  $L$  é o número de pontos internos. Para a equação 10.14,  $\frac{1}{r(x_{ga})}$ ,  $\frac{dr(x_{ga})}{dn}$  e  $J(x_{ga})$  estão relacionados ao elemento de contorno quadrático. Cada integral radial deverá ser resolvida utilizando uma técnica de integração apropriada, para as primeiras derivadas da solução fundamental de deslocamentos a integral radial é regular e não é necessário um tratamento numérico além da integração numérica de Gauss.

Para se montar a matriz do MIR deve-se fixar um ponto fonte e o ponto de aproximação da função de base radial. Feito isso, integra-se todos os elementos de contorno utilizando-se a equação 10.14. O somatório da contribuição de todos os elementos de contorno fica na primeira coluna da matriz principal. O ponto de aproximação então é trocado para o próximo ponto e integra-se todos os elementos de contorno, colocando-se agora todas as contribuições na coluna 2 da matriz. Este procedimento é feito até que todas as colunas da matriz sejam preenchidas, ou seja, a integral para o ponto fonte 1 foi calculada para todos os pontos de aproximação da função de base radial.

Pode-se então repetir o procedimento para todos os pontos fonte do problema. Para encontrar-se a integral de domínio basta multiplicar a matriz final pelos coeficientes obtidos na aproximação por função de base radial, conforme equação 10.15:

$$\begin{bmatrix} I_1(p_1, U_{i3,\theta}) \\ I_1(p_2, U_{i3,\theta}) \\ I_1(p_3, U_{i3,\theta}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_2) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_3) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_2) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_3) d\Gamma \dots \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_3, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_3, A_2) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_3, A_3) d\Gamma \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{\theta}^1 \\ \alpha_{\theta}^2 \\ \alpha_{\theta}^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.15)$$

Onde:

$$F(p_m, A_m) = \int_0^{r(x_{ga})} U_{i3,\theta}(r) f(R(r, \bar{R})) r dr$$

$$p_m = \text{ponto fonte} \quad A_m = \text{ponto de aproximação}$$

A matriz da equação 10.15 é armazenada para ser usada posteriormente no processo iterativo para obtenção das cargas críticas. Ela será multiplicada pelos coeficientes  $\alpha_{\theta}^m$  obtidos em cada iteração do problema de autovalor. Substituindo a integral de domínio convertida pelo MIR na equação integral de deslocamentos pode-se obter a equação 10.16:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} C_{ij}(x') u_j(x') + \int_{\Gamma} [T_{ij}(x', x) u_j(x) - U_{ij}(x', x) t_j(x)] d\Gamma(x) &= \dots \\ &= \int_{\Gamma} n_{\theta}(x) N_{\theta\beta}(x) u_{3,\beta}(x) U_{i3}(x', x) d\Gamma(x) + \dots \\ &- \sum_{m=1}^{N+L} \alpha_{\theta}^m \left\{ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \int_0^{r(Q)} U_{i3,\theta}(r) f(R) r dr \right) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (10.16)$$

#### 10.4 O MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL PARA A DERIVADA DA EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS

Será então aplicado o MIR para a integral de domínio presente na equação 4.4, esta integral contém a segunda derivada das soluções fundamentais de deslocamento, sendo dada pela equação 10.17:

$$I_2 = \iint_{\Omega} N_{\theta\beta}(X) u_{3,\beta}(X) U_{33,\gamma\theta}(X', X) d\Omega(X) \quad (10.17)$$

A aplicação do MIR é feita de maneira análoga à equação integral dos deslocamentos, a derivada da equação integral dos deslocamentos com MIR é dada pela equação 10.18:

$$\begin{aligned}
 g u_{3,\gamma}(x') = & \int_{\Gamma} \{ n_{\alpha}(x) M_{3\alpha\beta,\gamma}(x', x) u_{\beta}(x) + n_{\beta}(x) Q_{3\beta,\gamma}(x', x) u_3(x) + \dots \\
 & \dots - U_{3\beta,\gamma}(x', x) t_{\beta}(x) - U_{33,\gamma}(x', x) t_3(x) \} d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} n_{\alpha}(x) N_{\alpha\beta}(x) u_{3,\beta}(x) U_{i3,\gamma}(x', x) d\Gamma(x) + \dots \quad (10.18) \\
 & \dots + \sum_{m=1}^{N+L} \alpha_{\theta}^m \left\{ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \int_0^{r(Q)} U_{33,\gamma\theta}(r) f(R) r dr \right) d\Gamma \right\}
 \end{aligned}$$

De acordo com os trabalhos de Bui (1978) e Telles (1979), quando é realizada uma integração de domínio em uma integral do tipo Cauchy é necessário uma análise limite para verificar a existência de termos livres, a qual será feita a seguir. Considerando um ponto fonte no domínio, pode-se escrever a integral de domínio da seguinte maneira:

$$\iint_{\Omega} N_{\theta\beta}(X) u_{3,\beta}(X) U_{33,\theta\gamma}(X', X) d\Omega(X) = \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} \iint_{\Omega} b_{\theta}(X) U_{33,\theta}(X', X) d\Omega(X) \quad (10.19)$$

Será então removido um círculo de tamanho unitário  $\Omega_{\varepsilon}$  ao redor do ponto fonte e a carga de domínio dentro deste círculo será considerada constante.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} \iint_{\Omega} b_{\theta}(X) U_{33,\theta\gamma}(X', X) d\Omega(X) = \\
 & \iint_{\Omega - \Omega_{\varepsilon}} b_{\theta}(X) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} \left( U_{33,\theta}(X', X) \right) d\Omega(X) + \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} \iint_{\Omega_{\varepsilon}} b_{\theta}(X) \left( U_{33,\theta}(X', X) \right) d\Omega_{\varepsilon}(X) \quad (10.20)
 \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência na segunda integral do lado direito da equação 10.20 e considerando o termo  $b_{\theta}(X')$  constante no círculo:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \iint_{\Omega} b_\theta(X) U_{33,\theta}(X', X) d\Omega(X) = \\ & \iint_{\Omega - \Omega_\varepsilon} b_\theta(X) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (U_{33,\theta}(X', X)) d\Omega(X) + b_\theta(X') \int_{\Gamma_\varepsilon} (U_{33,\theta}(X', X)) n_\gamma d\Gamma_\varepsilon(x) \end{aligned} \quad (10.21)$$

Onde  $\Gamma_\varepsilon$  é o contorno de um círculo de raio unitário. Convertendo a segunda integral do lado direito da equação 10.21 para coordenadas polares pode-se obter a equação 10.22:

$$\iint_{\Omega - \Omega_\varepsilon} b_\theta(X) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (U_{33,\theta}(X', X)) d\Omega(X) + b_\theta(X') \int_0^{2\pi} U_{33,\theta}(X', X) n_\gamma r d\varphi \quad (10.22)$$

A solução fundamental  $U_{33,\theta}$  é dada pela equação 10.23:

$$U_{33,\theta} = \frac{1}{4\pi D} \left( \ln(z) - \frac{1}{2} \right) r r_{,\theta} - \frac{r_{,\theta}}{\pi D (1 - \nu) \lambda^2 r} \quad (10.23)$$

O primeiro termo no lado direito da equação 10.23 é regular e não gera termos livres. O segundo termo tem uma singularidade forte e deve ser verificada a existência de termos livres. Escrevendo a solução fundamental de uma maneira conveniente:

$$\iint_{\Omega - \Omega_\varepsilon} b_\theta(X) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (U_{33,\theta}(X', X)) d\Omega(X) + b_\theta(X') \int_0^{2\pi} \frac{\bar{U}_{33,\theta}(X', X)}{r} n_\gamma r d\varphi \quad (10.24)$$

Simplificando a integral com relação a r:

$$\iint_{\Omega - \Omega_\varepsilon} b_\theta(X) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (U_{33,\theta}(X', X)) d\Omega(X) + b_\theta(X') \int_0^{2\pi} \bar{U}_{33,\theta}(X', X) n_\gamma d\varphi \quad (10.25)$$

A solução fundamental  $\bar{U}_{33,\theta}$  é dada por:

$$\bar{U}_{33,\theta}(X', X) = -\frac{r_{,\theta}}{\pi D(1-\nu)\lambda^2} \quad (10.26)$$

Substituindo a equação 10.26 na integral da equação 10.25:

$$\iint_{\Omega-\Omega_\varepsilon} b_\theta(X) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (U_{33,\theta}(X', X)) d\Omega(X) + b_\theta(X') \int_0^{2\pi} -\frac{r_{,\theta}}{\pi D(1-\nu)\lambda^2} n_\gamma d\varphi \quad (10.27)$$

Quando r tende a 0, os valores de  $r_{,\theta}$ ,  $n_\gamma$  valem:

$$\begin{aligned} r_{,1} &= \cos(\varphi) & r_{,2} &= \sin(\varphi) \\ n_1 &= \cos(\varphi) & n_2 &= \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (10.28)$$

A partir da equação 10.28 pode-se obter a seguinte relação:

$$\int_0^{2\pi} r_{,\theta} n_\gamma d\varphi = \pi \delta_{\theta\gamma} \quad (10.29)$$

Utilizando a equação 10.29 pode-se calcular a integral da equação 10.27:

$$\iint_{\Omega-\Omega_\varepsilon} b_\theta(X) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (U_{33,\theta}(X', X)) d\Omega(X) - \frac{b_\theta(X') \delta_{\theta\gamma}}{D(1-\nu)\lambda^2} \quad (10.30)$$

O termo da direita da equação 10.30 é o termo livre da integração de domínio quando o ponto fonte está no domínio. Quando o ponto fonte está no contorno a integração acontece ao longo da metade de um círculo, obtendo-se o termo livre da equação 10.31:

$$b_\theta(x') \int_0^\pi \frac{r_{,\theta}}{\pi D(1-\nu)\lambda^2} n_\gamma d\varphi = -\frac{b_\theta(x') \delta_{\theta\gamma}}{2D(1-\nu)\lambda^2} \quad (10.31)$$

A integral da esquerda da equação 10.30 deve ser avaliada no sentido do valor principal de Cauchy. O termo livre da equação 10.31 é então incorporado na

equação integral da derivada dos deslocamentos transversais, sendo que o coeficiente “g” vale 1 para o ponto fonte no domínio e 0,5 para o ponto fonte no contorno:

$$\begin{aligned}
 gu_{3,\gamma}(x') &= \int_{\Gamma} \{n_{\alpha}(x)M_{3\alpha\beta,\gamma}(x',x)u_{\beta}(x) + n_{\beta}(x)Q_{3\beta,\gamma}(x',x)u_3(x) + \dots \\
 &\dots - U_{3\beta,\gamma}(x',x)t_{\beta}(x) - U_{33,\gamma}(x',x)t_3(x)\}d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} n_{\alpha}(x)N_{\alpha\beta}(x)u_{3,\beta}(x)U_{i3,\gamma}(x',x)d\Gamma(x) + \dots \quad (10.32) \\
 &\dots + \sum_{m=1}^{N+L} \alpha_{\theta}^m \left\{ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \int_0^{r(Q)} U_{33,\theta\gamma}(r)f(R)rdr \right) d\Gamma - g \frac{f(\bar{R})\delta_{\theta\gamma}}{D(1-\nu)\lambda^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Além do termo livre, também é necessário um tratamento da integral radial pois o termo  $U_{33,\theta\gamma}(r)f(R)r$  contém uma singularidade do tipo Cauchy. Este tratamento é mostrado nos trabalhos de Guiggiani e Gigante (1990) e Gao (2002). A solução fundamental  $U_{33,\theta\gamma}$  é dada pela equação 10.33:

$$U_{33,\theta\gamma} = \frac{1}{4\pi D} \left( \delta_{\theta\gamma} \left( \ln(z) - \frac{1}{2} \right) + r_{,\theta}r_{,\gamma} \right) - \frac{1}{\pi D(1-\nu)\lambda^2 r^2} (\delta_{\theta\gamma} - 2r_{,\theta}r_{,\gamma}) \quad (10.33)$$

Quando multiplicados por r na integral radial, o primeiro termo do lado direito da equação. 10.33 é regular e o segundo termo necessita de um tratamento subtraindo-se a singularidade. Para realizar este procedimento, multiplica-se a função da integral radial por r obtendo-se o termo da equação 10.34:

$$h_{\theta\gamma}(r) = (f(R)U_{33,\theta\gamma}r)r = f(R)U_{33,\theta\gamma}r^2 \quad (10.34)$$

Para realizar a subtração de singularidade, pode-se realizar a análise limite de  $h_{\theta\gamma}(r)$ :

$$\lim_{r \rightarrow 0} h_{\theta\gamma}(r) = h_{\theta\gamma}(\bar{R}) = f(\bar{R}) \left( -\frac{1}{\pi D(1-\nu)\lambda^2} (\delta_{\theta\gamma} - 2r_{,\theta}r_{,\gamma}) \right) \quad (10.35)$$

A equação 10.35 contém as derivadas do raio pois estas são constantes para a integral radial. Subtraindo-se a singularidade e adicionando o termo novamente obtêm-se a equação 10.36:

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \int_0^{r(Q)} U_{33,\gamma\theta}(r) f(R) r dr \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \int_0^{r(Q)} \frac{h_{\theta\gamma}(r) - h_{\theta\gamma}(\bar{R})}{r} dr \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \int_0^{r(Q)} \frac{h_{\theta\gamma}(\bar{R})}{r} dr \right) d\Gamma \quad (10.36)$$

A integral da esquerda pode ser calculada utilizando a quadratura de Gauss convencional. Para a integral da direita deve ser feita a remoção de um círculo de raio  $\varepsilon$  no limite inferior da integral radial:

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \int_0^{r(Q)} \frac{h_{\theta\gamma}(\bar{R})}{r} dr \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{r(Q)} \frac{h_{\theta\gamma}(\bar{R})}{r} dr \right) d\Gamma \quad (10.37)$$

A análise limite da equação 10.37 resulta na equação 10.38:

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} h_{\theta\gamma}(\bar{R}) \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{r(Q)} \frac{1}{r} dr \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} h_{\theta\gamma}(\bar{R}) \ln(r(Q)) d\Gamma \quad (10.38)$$

Substituindo o resultado na integral da equação 10.36:

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \int_0^{r(Q)} U_{33,\gamma\theta}(r) f(R) r dr \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \int_0^{r(Q)} \frac{h_{\theta\gamma}(r) - h_{\theta\gamma}(\bar{R})}{r} dr \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} h_{\theta\gamma}(\bar{R}) \ln(r(Q)) d\Gamma \quad (10.39)$$

A equação integral da derivada dos deslocamentos com o MIR com termo livre para integral de domínio e tratamento para integral radial com singularidade forte fica conforme equação 10.40, sendo esta a equação final a ser utilizada para aplicação do MIR:

$$\begin{aligned}
gu_{3,\gamma}(x') &= \int_{\Gamma} \{n_{\alpha}(x)M_{3\alpha\beta,\gamma}(x',x)u_{\beta}(x) + n_{\beta}(x)Q_{3\beta,\gamma}(x',x)u_3(x) + \dots \\
&\dots - U_{3\beta,\gamma}(x',x)t_{\beta}(x) - U_{33,\gamma}(x',x)t_3(x)\}d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} n_{\alpha}(x)N_{\alpha\beta}(x)u_{3,\beta}(x)U_{i3,\gamma}(x',x)d\Gamma(x) + \dots \\
&+ \sum_{m=1}^{N+L} \alpha_{\theta}^m \left\{ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \int_0^{r(Q)} \frac{h_{\theta\gamma}(r) - h_{\theta\gamma}(\bar{R})}{r} dr \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} h_{\theta\gamma}(\bar{R}) \ln(r(Q)) d\Gamma \right. \\
&\quad \left. - g \frac{f(\bar{R})\delta_{\theta\gamma}}{D(1-\nu)\lambda^2} \right\}
\end{aligned} \tag{10.40}$$

O operador tangente foi aplicado para reduzir o grau de singularidade das integrais de contorno, a equação 10.41 mostra a equação 10.40 com a utilização do operador tangente:

$$\begin{aligned}
gu_{3,\gamma}(x') &= \int_{\Gamma} \{M_{3\alpha\beta}(x',x)D_{\gamma\alpha}[u_{\beta}] + Q_{3\beta}n_{\gamma}u_{\beta} + Q_{3\beta}D_{\gamma\beta}[u_3] + \dots \\
&\dots - U_{3\beta,\gamma}(x',x)t_{\beta}(x) - U_{33,\gamma}(x',x)t_3(x)\}d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} n_{\alpha}(x)N_{\alpha\beta}(x)u_{3,\beta}(x)U_{i3,\gamma}(x',x)d\Gamma(x) + \dots \\
&+ \sum_{m=1}^{N+L} \alpha_{\theta}^m \left\{ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \int_0^{r(Q)} \frac{h_{\theta\gamma}(r) - h_{\theta\gamma}(\bar{R})}{r} dr \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} h_{\theta\gamma}(\bar{R}) \ln(r(Q)) d\Gamma \right. \\
&\quad \left. - g \frac{f(\bar{R})\delta_{\theta\gamma}}{D(1-\nu)\lambda^2} \right\} + [e_{3\alpha\gamma}M_{3\alpha\beta}u_{\beta}]_0^{\Gamma} + [e_{3\beta\gamma}Q_{3\beta}u_3(x)]_0^{\Gamma}
\end{aligned} \tag{10.41}$$

## 10.5 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MIR

O processo de obtenção das cargas críticas de flambagem no MIR é similar ao utilizado pelo MRD. Utiliza-se as equações 4.3 e 4.4 em sua forma discretizada para formar um problema de autovalor. Adotou-se a discretização do problema em elementos de contorno quadráticos contínuos nas partes suaves do contorno, nos cantos usou-se elementos descontínuos movendo-se os pontos fonte para as posições  $(-0,67; 0,0; +0,67)$ , no espaço  $(-1,+1)$ .

O cálculo das matrizes H e G da equação 10.16 é feito de forma análoga ao capítulo de implementação numérica do MRD, elas são preenchidas integrando-se as soluções fundamentais ao longo de todos os elementos de contorno para pontos fonte no centro e na posição  $-0,67$  de cada elemento.

### 10.5.1 Implementação numérica do problema de autovalor no MIR

Para encontrar a carga crítica, é necessário encontrar primeiro as incógnitas no contorno de forças de superfície  $[t]$  e de deslocamentos  $[u]$ . Para isso, utiliza-se a equação 10.16 em sua forma discretizada e já com a aplicação do MIR:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} C_{ij}(x') u_j(x') + \sum_{n=1}^{NE} \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^1 [T_{ij}(x', x) u_j(x) - U_{ij}(x', x) t_j(x)] N_k(\xi) J(\xi) d\xi \\ & = \sum_{n=1}^{NE} \int_{-1}^1 n_\alpha(x) N_{\alpha\beta}(x) u_{3,\beta}(x) U_{i3}(x', x) J(\xi) d\xi + \dots \end{aligned} \quad (10.42)$$

$$- \sum_{m=1}^{N+L} \alpha_\theta^m \left\{ \sum_{n=1}^{NE} \sum_{a=1}^4 \frac{1}{r(x_{ga})} \frac{dr(x_{ga})}{dn} \left( \int_0^{r(x_{ga})} U_{i3,\theta}(r) f(R(r, \bar{R})) r dr \right) J(x_{ga}) w_{ga} \right\}$$

O processo depende a aproximação das tensões normais multiplicadas pelas derivadas dos deslocamentos transversais  $[N_{\theta\beta} u_{3,\beta}]$ . As tensões normais são obtidas resolvendo o problema de estado plano de tensão, mas as derivadas dos deslocamentos transversais devem ser obtidas utilizando um processo de iteração. Inicialmente é criado um vetor  $[DWI]$  que armazena as derivadas  $u_{3,1}$  e  $u_{3,2}$  em cada

ponto do domínio e contorno. Como ainda não se sabe os valores das derivadas dos deslocamentos transversais, é feito um chute inicial com o valor de 1, conforme apresentado na equação 10.43:

$$[DWI] = \begin{bmatrix} u_{3,1}^{(1)} \\ u_{3,2}^{(1)} \\ u_{3,1}^{(2)} \\ u_{3,2}^{(2)} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.43)$$

Com os valores iniciais de  $u_{3,1}$  e  $u_{3,2}$  deve-se proceder para o processo do cálculo de  $[\alpha_\theta^m]$ . Os coeficientes  $\alpha_\theta^m$  são dados pela solução de um sistema linear criado da aproximação das normais multiplicadas pelas derivadas do deslocamento transversal por uma função radial utilizando-se pontos de MRD no contorno e domínio do problema, conforme pela equação 10.44:

$$f(r)\alpha_\theta^m = N_{\theta\beta}u_{3,\beta} \quad (10.44)$$

O sistema de equações a ser resolvido é formado pela função  $f(r)$  escolhida avaliada para cada ponto fonte e ponto campo preenchendo-se a matriz  $[F]$ , as incógnitas do sistema na matriz  $[\alpha_\theta^m]$  e os valores nodais a serem aproximados das normais multiplicadas pelas derivadas do deslocamento transversal são guardados na matriz  $[N_{\theta\beta}u_{3,\beta}]$ , conforme mostrado na equação 10.45:

$$[F][\alpha_\theta^m] = [N_{\theta\beta}u_{3,\beta}] \quad (10.45)$$

Para o problema de instabilidade de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante, será necessário aproximar duas distribuições diferentes de tensões normais multiplicadas pelas derivadas do deslocamento transversal.

$$\begin{bmatrix} f(r_{11}) & f(r_{12}) & f(r_{13}) \\ f(r_{21}) & f(r_{22}) & f(r_{23}) \\ f(r_{31}) & f(r_{32}) & f(r_{33}) \\ \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}u_{3,1} + N_{12}u_{3,2} \\ N_{11}u_{3,1} + N_{12}u_{3,2} \\ N_{11}u_{3,1} + N_{12}u_{3,2} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.46)$$

A matriz da segunda aproximação é dada pela equação 10.47:

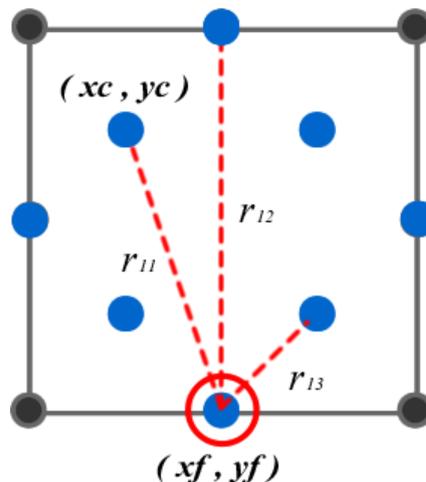
$$\begin{bmatrix} f(r_{11}) & f(r_{12}) & f(r_{13}) \\ f(r_{21}) & f(r_{22}) & f(r_{23}) \\ f(r_{31}) & f(r_{32}) & f(r_{33}) \\ \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{22}u_{3,2} + N_{21}u_{3,1} \\ N_{22}u_{3,2} + N_{21}u_{3,1} \\ N_{22}u_{3,2} + N_{21}u_{3,1} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.47)$$

Para preencher-se a matriz  $[F]$ , o raio utilizado na função radial  $f(r)$  é dado pela equação 10.48:

$$r = \sqrt{(xc - xf)^2 + (yc - yf)^2} \quad (10.48)$$

As cargas de domínio conhecidas são aproximadas colocando-se pontos de aproximação no centro dos elementos de contorno e em pontos internos. Na Figura 69 observa-se uma representação visual do raio da função radial  $f(r)$ :

**Figura 69** – Aproximação das cargas de domínio nos pontos de MRD



Fonte: O autor (2020).

Substituindo os valores iniciais da equação 10.49, obtem-se:

$$\begin{bmatrix} f(r_{11}) & f(r_{12}) & f(r_{13}) \\ f(r_{21}) & f(r_{22}) & f(r_{23}) \\ f(r_{31}) & f(r_{32}) & f(r_{33}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} * 1 + N_{12} * 1 \\ N_{11} * 1 + N_{12} * 1 \\ N_{11} * 1 + N_{12} * 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.49)$$

Lembrando-se que é necessário aproximar duas distribuições diferentes de tensões normais multiplicadas pelas derivadas do deslocamento transversal, a matriz da segunda aproximação é dada pela equação 10.50:

$$\begin{bmatrix} f(r_{11}) & f(r_{12}) & f(r_{13}) \\ f(r_{21}) & f(r_{22}) & f(r_{23}) \\ f(r_{31}) & f(r_{32}) & f(r_{33}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{22} * 1 + N_{21} * 1 \\ N_{22} * 1 + N_{21} * 1 \\ N_{22} * 1 + N_{21} * 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.50)$$

As tensões normais vêm da solução de um problema de estado plano. Como todos os valores são conhecidos, resolve-se o sistema para encontrar os coeficientes  $[\alpha_\theta^m]$ :

$$\begin{aligned} [\alpha_1^m] &= [N_{11} * 1 + N_{12} * 1][F]^{-1} \\ [\alpha_2^m] &= [N_{22} * 1 + N_{21} * 1][F]^{-1} \end{aligned} \quad (10.51)$$

Os coeficientes obtidos são utilizados para aproximação das integrais de domínio do MIR. A primeira integral de domínio a ser aproximada é a pertencente à equação 4.3. Para aproximar esta integral é necessário somar o valor de duas integrais de domínio, uma relacionada com a derivada da solução fundamental com relação à x ( $U_{i3,1}$ ) e outra com relação à y ( $U_{i3,2}$ ). Estas integrais são aproximadas multiplicando-se a matriz armazenada obtida pelo MIR pelos coeficientes de aproximação  $[\alpha_\theta^m]$  correspondentes à direção da derivada da solução fundamental. As integrais de domínio da equação 4.3 são aproximadas pelo MIR utilizando as equações 10.42, onde a equação 10.52 mostra a integral relacionada com a derivada com relação a x:

$$\iint_{\Omega} (N_{11}(X)u_{3,1}(X) + N_{12}(X)u_{3,2}(X))U_{i3,1}(x', X)d\Omega(X) \cong$$

$$[U_1] = \begin{bmatrix} I_1(p_1, U_{13,1}) \\ I_1(p_1, U_{23,1}) \\ I_1(p_1, U_{33,1}) \\ I_1(p_2, U_{13,1}) \\ I_1(p_2, U_{23,1}) \\ I_1(p_2, U_{33,1}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_2) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_3) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_2) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_3) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_2) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_3) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_2) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_3) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_2) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_3) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_2) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_3) d\Gamma \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.52)$$

Onde:

$$F(p_m, A_m) = \int_0^{r(x_{ga})} U_{i3,1}(r) f(R(r, \bar{R})) r dr$$

$p_m =$  ponto fonte;  $A_m =$  ponto de aproximação

O raio  $r(x_{ga})$  é encontrado posicionando-se pontos de Gauss  $x_{ga}$  dentro de um elemento de contorno quadrático, conforme a Figura 68. Utilizando-se as equações 10.50 pode-se encontrar o raio para um ponto de Gauss na coordenada intrínseca do elemento de contorno no intervalo de -1 até 1:

$$x(x_{ga}) = \sum_{i=1}^3 N_i(x_{ga}) x_i \quad y(x_{ga}) = \sum_{i=1}^3 N_i(x_{ga}) y_i$$

$$dx(x_{ga}) = x(x_{ga}) - x_p$$

$$dy(x_{ga}) = y(x_{ga}) - y_p$$

$$r(x_{ga}) = \sqrt{dx(x_{ga})^2 + dy(x_{ga})^2}$$

$$r_{,1}(x_{ga}) = \frac{dx(x_{ga})}{r(x_{ga})} \quad r_{,2}(x_{ga}) = \frac{dy(x_{ga})}{r(x_{ga})} \quad (10.53)$$

$$J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{d}{d\xi} x(\xi)\right)^2 + \left(\frac{d}{d\xi} y(\xi)\right)^2}$$

$$nx = \frac{1}{J(\xi)} \left(\frac{d}{d\xi} y(\xi)\right) \quad ny = -\frac{1}{J(\xi)} \left(\frac{d}{d\xi} x(\xi)\right)$$

$$\frac{dr}{dn}(x_{ga}) = r_{,1}(x_{ga}) nx + r_{,2}(x_{ga}) ny$$

No presente trabalho verificou-se que 4 pontos de Gauss são suficientes, então cada termo da matriz da equação 10.52 é dado pelo somatório:

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_m, A_m) d\Gamma = \sum_{n=1}^{NE} \sum_{a=1}^4 \frac{1}{r(x_{ga})} \frac{dr(x_{ga})}{dn} \left( \int_0^{r(x_{ga})} U_{i3,\theta}(r) f(R(r, \bar{R})) r dr \right) J(x_{ga}) w_{ga} \quad (10.54)$$

Para calcular a integral radial da equação 10.54 pode-se utilizar a integração numérica de Gauss convertendo os limites de integração de 0 a r para os limites -1 a 1. Para isso utilizou-se a seguinte transformação:

$$r = r_{rd}(\xi) = \frac{\xi}{2} r(x_{ga}) + \frac{r(x_{ga})}{2} \quad (10.55)$$

$$J_{rd}(\xi) = \frac{r(x_{ga})}{2}$$

Substituindo 10.55 na integral radial da equação 10.54:

$$\int_0^{r(x_{ga})} U_{i3,\theta}(r) f(R(r, \bar{R})) r dr = \int_{-1}^1 U_{i3,1}(r_{rd}(\xi)) f(R(r_{rd}(\xi), \bar{R})) r_{rd}(\xi) J_{rd}(\xi) d\xi \quad (10.56)$$

Como exemplo, substitui-se na equação 10.56 a solução fundamental  $U_{\beta 3,1}$ , a função de aproximação de base radial  $f(R) = 1 + R$  e as relações da equação 10.55, colocando o raio da função radial “R” em função do raio “r”:

$$\int_0^{r(x_{gi})} U_{\beta 3,1}(r) f(R(r, \bar{R})) r dr = \int_{-1}^1 U_{\beta 3,1}(r_{rd}(\xi)) f(R(r_{rd}(\xi), \bar{R})) r_{rd}(\xi) J_{rd}(\xi) d\xi \quad (10.57)$$

$$= \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{8\pi D} [\delta_{\beta 1} (2 \ln(\lambda r_{rd}(\xi)) - 1) + 2r_{,1} r_{,\beta}] \right\} \left\{ 1 + \sqrt{r_{rd}(\xi)^2 + s r_{rd}(\xi) + \bar{R}^2} \right\} r_{rd}(\xi) J_{rd}(\xi) d\xi$$

Foi observado que as derivadas do raio são constantes para a integral radial, o núcleo da integral 10.57 é regular. A integral de domínio relacionada com a derivada na direção y é dada pela equação 10.58:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} (N_{22}(X)u_{3,2}(X) + N_{21}(X)u_{3,1}(X))U_{i3,2}(x', X)d\Omega(X) \cong \\
[I_2] &= \begin{bmatrix} I_2(p_1, U_{13,2}) \\ I_2(p_1, U_{23,2}) \\ I_2(p_1, U_{33,2}) \\ I_2(p_2, U_{13,2}) \\ I_2(p_2, U_{23,2}) \\ I_2(p_2, U_{33,2}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_2) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_3) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_2) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_3) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_2) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_3) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_2) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_3) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_2) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_3) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_2) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_3) d\Gamma \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.58)
\end{aligned}$$

Onde:

$$F(p_m, A_m) = \int_0^{r(x_{ga})} U_{i3,2}(r) f(R(r, \bar{R})) r dr$$

$p_m =$  ponto fonte;  $A_m =$  ponto de aproximação

O vetor final com os valores da integral de domínio é calculado somando-se os vetores  $[I_1]$  e  $[I_2]$ :

$$\iint_{\Omega} N_{\theta\beta}(X)u_{3,\beta}(X)U_{i3,\theta}(x', X)d\Omega(X) \cong [I_1] + [I_2] \quad (10.59)$$

$$[INT_1] = [I_1] + [I_2]$$

Também deve-se calcular a integral de contorno relacionada com a não linearidade geométrica dada por 10.60:

$$\sum_{n=1}^{Nelem} \int_{-1}^1 n_{\alpha}(x) N_{\alpha\beta}(x) u_{3,\beta}(x) U_{i3}(x', x) J(\xi) d\xi \quad (10.60)$$

Esta integral será armazenada no vetor  $[C_1]$ , sendo obtida multiplicando-se a matriz com as contribuições das integrais de contorno  $[MCONT_1]$  pelo vetor de derivadas dos deslocamentos transversais  $[DWI]$ :

$$[C_1] = [MCONT_1][DWI] \quad (10.61)$$

A equação integral dos deslocamentos 10.42 pode então ser escrita da seguinte maneira:

$$[H][u] - [G][t] = [C_1] - [INT_1] \quad (10.62)$$

Aplicando as condições de contorno nas matrizes  $[H]$  e  $[G]$ , e somando-se as matrizes relacionadas com a não linearidade geométrica  $[C_1]$  e  $[INT_1]$  o problema reduz-se a um sistema linear:

$$[A][x] = [b] \quad (10.63)$$

As incógnitas no contorno obtidas pela resolução deste sistema devem ser armazenadas em um vetor de forças de superfície  $[t]$  e um vetor de deslocamentos  $[u]$ . Encontradas estas incógnitas, é necessário utilizar a equação 4.4 em sua forma discretizada para encontrar as derivadas do deslocamento transversal  $[u_{3,\gamma}]$  nos nós de contorno localizados nos centros dos elementos e também nos pontos internos. A equação 4.4 em sua forma discretizada e com a aplicação do MIR é dada pela equação 10.64:

$$\begin{aligned} g u_{3,\gamma}(x') = & \sum_{n=1}^{Nelem} \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^1 \left[ M_{3\alpha\beta} e_{3\gamma\alpha} \frac{\partial N_k(\xi)}{\partial \xi} + Q_{3\beta} n_\gamma N_k(\xi) J(\xi) + Q_{3\beta} e_{3\gamma\beta} \frac{\partial N_k(\xi)}{\partial \xi} \right. \\ & \left. - U_{3\beta,\gamma}(x', x) t_\beta(x) N_k(\xi) J(\xi) - U_{33,\gamma}(x', x) t_3(x) N_k(\xi) J(\xi) \right] d\xi + \\ & - \sum_{n=1}^{Nelem} \int_{-1}^1 n_\theta(x) N_{\theta\beta}(x) u_{3,\beta}(x) U_{i3,\gamma}(x', x) J(\xi) d\xi + \\ & + \sum_{m=1}^{N+L} \alpha_\theta^m \left\{ \int_\Gamma \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \left( \int_0^{r(Q)} \frac{h_{\theta\gamma}(r) - h_{\theta\gamma}(\bar{R})}{r} dr \right) d\Gamma + \int_\Gamma \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} h_{\theta\gamma}(\bar{R}) \ln(r(Q)) d\Gamma \right. \\ & \left. - g \frac{f(\bar{R}) \delta_{\theta\gamma}}{D(1-\nu)\lambda^2} \right\} + [e_{3\alpha\gamma} M_{3\alpha\beta} u_\beta]_0^\Gamma + [e_{3\beta\gamma} Q_{3\beta} u_3(x)]_0^\Gamma \end{aligned} \quad (10.64)$$

As integrais de domínio da equação integral da derivada segunda dos deslocamentos transversais com relação a  $x$  são dadas pelas equações 10.65:

$$\iint_{\Omega} (N_{11}(X)u_{3,1}(X) + N_{12}(X)u_{3,2}(X))U_{33,1\gamma}(X', X)d\Omega(X) \cong$$

$$\begin{bmatrix} I_3(p_1, U_{33,11}) \\ I_3(p_1, U_{33,12}) \\ I_3(p_2, U_{33,11}) \\ I_3(p_2, U_{33,12}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_1) + F2(p_1, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_2) + F2(p_1, A_2) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_1) + F2(p_1, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_2) + F2(p_1, A_2) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_1) + F2(p_2, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_2) + F2(p_2, A_2) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_1) + F2(p_2, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_2) + F2(p_2, A_2) d\Gamma \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.65)$$

Onde:

$$F(x_p, x_A) = \int_0^{r(x_{ga})} \frac{f(R)U_{33,1\gamma}r^2 - f(\bar{R}) \left( -\frac{1}{\pi D(1-v)\lambda^2} (\delta_{1\gamma} - 2r_{,1}r_{,\gamma}) \right)}{r} dr$$

$$F2(x_p, x_A) = \bar{U}_{33,1\gamma} \ln(r(x_{ga})) f(\bar{R})$$

$p_m$  = ponto fonte;  $A_m$  = ponto de aproximação

$$\bar{U}_{33,1\gamma} = -\frac{1}{\pi D(1-v)\lambda^2} (\delta_{1\gamma} - 2r_{,1}r_{,\gamma})$$

Para que a integral de domínio seja calculada corretamente ainda é necessário adicionar o termo livre. O termo livre é multiplicado pelas cargas de domínio avaliadas no ponto fonte. Como os pontos fontes da equação 4.4 estão situados no mesmo lugar dos pontos de aproximação da função radial, basta multiplicar a matriz de aproximação da função de base radial  $[F]$  pelos coeficientes  $[\alpha_{\theta}^m]$  para encontrar o valor das cargas de domínio nos pontos fonte.

$$\begin{bmatrix} f(r_{11}) & f(r_{12}) & f(r_{13}) \\ f(r_{21}) & f(r_{22}) & f(r_{23}) \\ f(r_{31}) & f(r_{32}) & f(r_{33}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(p_1) \\ f_1(p_2) \\ f_1(p_3) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.66)$$

Para encontrar o termo livre é necessário multiplicar as cargas de domínio nos pontos fonte pelo valor do termo livre encontrado.

$$\begin{bmatrix} I_{3Livre}(p_1, U_{33,11}) \\ I_{3Livre}(p_1, U_{33,12}) \\ I_{3Livre}(p_2, U_{33,11}) \\ I_{3Livre}(p_2, U_{33,12}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(p_1) \frac{-g\delta_{11}}{D(1-v)\lambda^2} \\ f_1(p_1) \frac{-g\delta_{12}}{D(1-v)\lambda^2} \\ f_1(p_2) \frac{-g\delta_{11}}{D(1-v)\lambda^2} \\ f_1(p_2) \frac{-g\delta_{12}}{D(1-v)\lambda^2} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.67)$$

O termo livre é então adicionado ao valor da integral de domínio  $[I_3]$ .

$$[I_3] = [I_3] + [I_{3Livre}] \quad (10.68)$$

As integrais de domínio da equação integral da derivada segunda dos deslocamentos transversais com relação a  $y$  são dadas pelas equações 10.69:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (N_{22}(X)u_{3,2}(X) + N_{21}(X)u_{3,1}(X))U_{33,2\gamma}(X', X)d\Omega(X) \cong \\ & \begin{bmatrix} I_4(p_1, U_{33,21}) \\ I_4(p_1, U_{33,22}) \\ I_4(p_2, U_{33,21}) \\ I_4(p_2, U_{33,22}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_1) + F2(p_1, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_2) + F2(p_1, A_2) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_1) + F2(p_1, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_1, A_2) + F2(p_1, A_2) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_1) + F2(p_2, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_2) + F2(p_2, A_2) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_1) + F2(p_2, A_1) d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F(p_2, A_2) + F2(p_2, A_2) d\Gamma \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.69)$$

Onde:

$$F(x_p, x_A) = \int_0^{r(x_{ga})} \frac{f(R)U_{33,2\gamma}r^2 - f(\bar{R}) \left( -\frac{1}{\pi D(1-v)\lambda^2} (\delta_{2\gamma} - 2r_{,2}r_{,y}) \right)}{r} dr$$

$$F2(x_p, x_A) = \bar{U}_{33,2\gamma} \ln(r(x_{ga})) f(\bar{R})$$

$p_m$  = ponto fonte;  $A_m$  = ponto de aproximação

$$\bar{U}_{33,2\gamma} = -\frac{1}{\pi D(1-v)\lambda^2} (\delta_{2\gamma} - 2r_{,2}r_{,y})$$

Deve-se multiplicar a matriz de aproximação da função de base radial  $[F]$  pelos coeficientes  $[\alpha_\theta^m]$  para encontrar o valor das cargas de domínio nos pontos fonte.

$$\begin{bmatrix} f(r_{11}) & f(r_{12}) & f(r_{13}) \\ f(r_{21}) & f(r_{22}) & f(r_{23}) \\ f(r_{31}) & f(r_{32}) & f(r_{33}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(p_1) \\ f_2(p_2) \\ f_2(p_3) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.70)$$

Para encontrar o termo livre é necessário multiplicar as cargas de domínio nos pontos fonte pelo valor do termo livre encontrado.

$$\begin{bmatrix} I_{4Livre}(p_1, U_{33,21}) \\ I_{4Livre}(p_1, U_{33,22}) \\ I_{4Livre}(p_2, U_{33,21}) \\ I_{4Livre}(p_2, U_{33,22}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(p_1) \frac{-g\delta_{21}}{D(1-v)\lambda^2} \\ f_2(p_1) \frac{-g\delta_{22}}{D(1-v)\lambda^2} \\ f_2(p_2) \frac{-g\delta_{21}}{D(1-v)\lambda^2} \\ f_2(p_2) \frac{-g\delta_{22}}{D(1-v)\lambda^2} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10.71)$$

O termo livre é então adicionado ao valor da integral de domínio  $[I_4]$ .

$$[I_4] = [I_4] + [I_{4Livre}] \quad (10.72)$$

O vetor final com os valores da integral de domínio é calculado somando-se os vetores  $[I_3]$  e  $[I_4]$ :

$$\iint_{\Omega} N_{\theta\beta}(X) u_{3,\beta}(X) U_{33,\gamma\theta}(X', X) d\Omega(X) \cong [I_3] + [I_4] \quad (10.73)$$

$$[INT_2] = [I_3] + [I_4]$$

Também deve-se calcular a integral de contorno relacionada com a não linearidade geométrica 10.74:

$$\sum_{n=1}^{Nelem} \int_{-1}^1 n_{\theta}(x) N_{\theta\beta}(x) u_{3,\beta}(x) U_{33,\gamma}(x', x) J(\xi) d\xi \quad (10.74)$$

Esta integral será armazenada no vetor  $[C_2]$ , sendo obtida multiplicando-se a matriz com as contribuições das integrais de contorno  $[MCONT_2]$  pelo vetor de derivadas dos deslocamentos transversais  $[DWI]$ :

$$[C_2] = [MCONT_2][DWI] \quad (10.75)$$

Os vetores  $[u]$  e  $[t]$  obtidos pela equação integral dos deslocamentos são utilizados na equação integral da derivada dos deslocamentos transversais, nas integrais dadas pela equação 10.76:

$$\sum_{n=1}^{Nelem} \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^1 \left[ M_{3\alpha\beta} e_{3\gamma\alpha} \frac{\partial N_k(\xi)}{\partial \xi} + Q_{3\beta} n_{\gamma} N_k(\xi) J(\xi) + Q_{3\beta} e_{3\gamma\beta} \frac{\partial N_k(\xi)}{\partial \xi} - U_{3\beta,\gamma}(x', x) t_{\beta}(x) N_k(\xi) J(\xi) - U_{33,\gamma}(x', x) t_3(x) N_k(\xi) J(\xi) \right] d\xi \quad (10.76)$$

As contribuições dadas por essas integrais são armazenadas matrizes das derivadas das soluções fundamentais  $[H_2]$  e  $[G_2]$ , estas matrizes são então multiplicadas pelos vetores de soluções  $[u]$  e  $[t]$  encontrados pela equação integral dos deslocamentos (equação 4.3). Para encontrar a derivada dos deslocamentos transversais somam-se as contribuições das integrais de contorno e domínio. Lembrando-se que deve-se levar em consideração o coeficiente de posicionamento do ponto fonte, multiplicando o resultado por 2 caso o ponto fonte esteja no contorno e por 1 caso ele esteja no domínio.

$$C_{ij}[u_{3,\gamma}] = \{[H_2][u] - [G_2][t] - [C_2] + [INT_2]\} \quad (10.77)$$

As derivadas dos deslocamentos transversais são armazenadas em uma matriz  $[DWA]$ , conforme equação 10.78:

$$[u_{3,\gamma}] = [DWA] \quad (10.78)$$

Para cada ponto de de aproximação, encontra-se uma derivada na direção x e uma derivada na direção y. Estas derivadas são então utilizadas no cálculo da carga crítica utilizando o quociente de Rayleigh:

$$\begin{aligned} Ax^{(k+1)} &= x^k & \lambda_k &= \frac{(x^{(k+1)}, x^k)}{(x^{(k+1)}, x^{(k+1)})} \\ x^{(k+1)} &= [DWA] \\ x^{(k)} &= [DWI] \\ N_{cr} &= \frac{[DWA][DWI]}{[DWA][DWA]} \end{aligned} \quad (10.79)$$

Este problema é considerado um problema de raiz dupla, sendo necessário um tratamento especialmente quando se considera problemas com solicitação de cisalhamento puro. Este tratamento é dado por (quando já se passou a primeira iteração):

$$\begin{aligned} N_{cr1} &= \sqrt{[AUX1][AUX2]} \\ [AUX1] &= \sqrt{\frac{[DWI][DWI]}{[DWA][DWA]}} \\ [AUX2] &= [AUX1]_{anterior} \end{aligned} \quad (10.80)$$

O valor de AUX2 é AUX1 quando calculado na iteração anterior do problema de autovalor, se o programa estiver na primeira iteração o valor de  $N_{cr1}$  é 0. O valor de  $[DWA]$  é então dividido pela sua norma:

$$[DWA] = \frac{[DWA]}{\sqrt{|[DWA][DWA]|}} \quad (10.81)$$

Deve-se então ir para a segunda iteração, realizando-se as seguintes substituições:

$$[DWI] = [DWA] \quad (10.82)$$

São então recalculadas as matrizes  $[\alpha_\theta^m]$ ,  $[C_1]$ ,  $[INT_1]$ ,  $[C_2]$ ,  $[INT_2]$  utilizando-se o novo valor de  $[DWI]$  da iteração anterior, obtendo-se as cargas críticas  $N_{crit}$  e  $N1_{crit}$  da iteração atual. Este processo continua até uma condição de parada, no caso do presente trabalho a condição é quando o erro relativo entre os valores da carga crítica atual e da carga crítica anterior for menor que  $10^{-4}$ . O valor do parâmetro crítico de flambagem é dado por 10.83:

$$k = \frac{\alpha^2 N_{cr}}{\pi^2 D} \quad (10.83)$$

O valor do parâmetro crítico de flambagem para a segunda carga crítica ( $N1_{crit}$ ) é dado por 10.84:

$$k_1 = \frac{\alpha^2 N_{cr1}}{\pi^2 D} \quad (10.84)$$

## 10.6 RESULTADOS PARA MIR

### 10.6.1 Resultados para placas sem furo – MIR

O valor do parâmetro crítico de flambagem é dado pela equação 10.85:

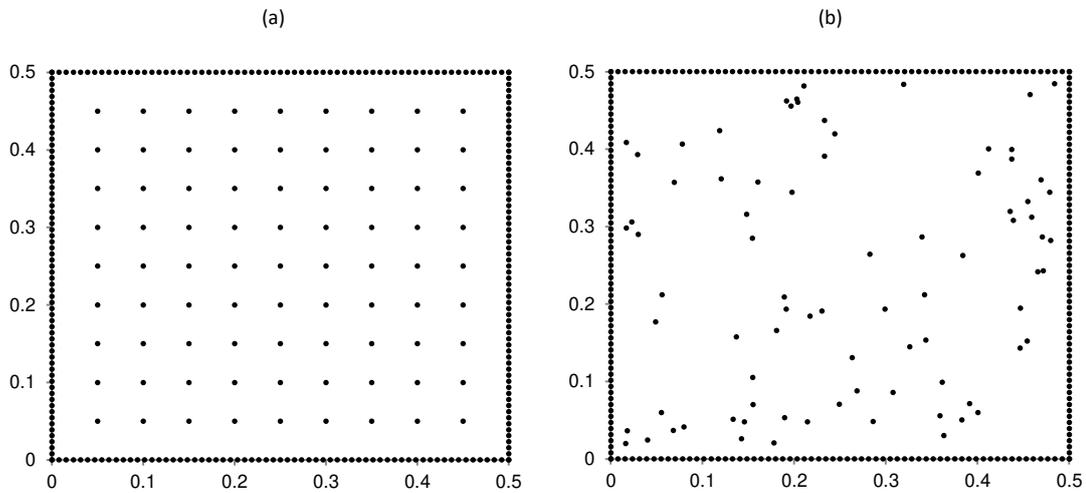
$$k = \frac{a^2 N_{cr}}{\pi^2 D} \quad (10.85)$$

A carga crítica da placa é dada por  $N_{cr}$ , o tamanho do lado da placa é dado por “a”.  $D$  é o módulo de rigidez à flexão da placa, o módulo de Young adotado tem o valor de 206,9 GPa, o coeficiente de Poisson adotado tem valor de 0,3. O parâmetro da teoria de placas com deformação por cortante utilizado foi o de Mindlin, com valor de  $\pi^2/12$ . As placas analisadas são quadradas de  $a = 0,5$  m de lado. A carga aplicada nas placas é uniforme, com valor de 1 N, normal à seção transversal da placa.

Os tipos de vinculação utilizados são dados por (A) simplesmente apoiado, (L) lado livre, (E) lado engastado. Todos os resultados são para condição de contorno “hard”, ou seja, o giro tangencial ao canto da placa é travado.

Um teste de convergência foi realizado utilizando a função de aproximação  $f(r) = 1 + r$  em uma placa quadrada simplesmente apoiada com carga uniaxial. A malha utilizada foi de 128 elementos quadráticos e o número de pontos de domínio variou de 4 até 100. Para os pontos de domínio, adotou-se dois tipos de distribuição para a posição dos pontos, uma uniforme e também uma distribuição não uniforme. A distribuição não uniforme utilizou a rotina interna do Intel Fortran chamada “Random Number” para modificar a posição dos pontos de forma aleatória. Um exemplo para as malhas utilizadas pode ser visto na Figura 70 e os resultados estão na tabela 28. O aumento do número de pontos de domínio reduziu a diferença para os valores esperados, mesmo para uma distribuição não uniforme de pontos no domínio. A distribuição uniforme convergiu mais rapidamente que a distribuição não uniforme.

**Figura 70** – Exemplo de discretização para o MIR usando uma distribuição uniforme (a) e não uniforme (b) de pontos de domínio.



**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

**Tabela 28** – Análise de convergência de placas AAAA sob carregamento uniaxial com distribuição uniforme e não uniforme de pontos de domínio,  $h/a = 0,001$

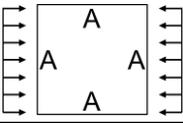
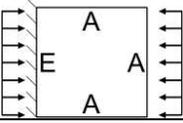
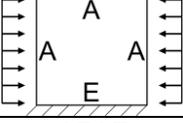
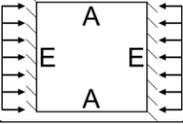
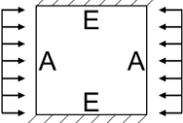
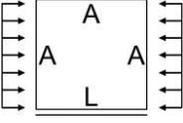
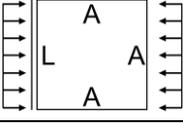
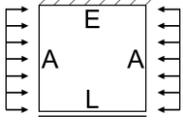
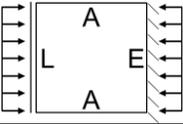
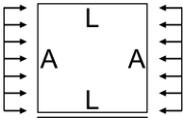
EL	PD	MIR Uniforme	MIR Não uniforme	Análítica (a)	Diferença (%) Uniforme	Diferença (%) Não uniforme
128	4	4,3623	4,4773	4,0000	8,30	10,66
128	9	4,1862	4,4194	4,0000	4,45	9,49
128	16	4,1031	4,2553	4,0000	2,51	6,00
128	25	4,0612	4,1622	4,0000	1,51	3,90
128	36	4,0390	4,1434	4,0000	0,97	3,46
128	49	4,0256	4,0720	4,0000	0,64	1,77
128	64	4,0176	4,0617	4,0000	0,44	1,52
128	81	4,0121	4,0410	4,0000	0,30	1,02
128	100	4,0086	4,0355	4,0000	0,21	0,88

(a) Hosseini-Hashemi, Khorshidi e Amabili (2012)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

Nas tabelas 29-30 encontra-se os resultados para placas sem furo com carga uniaxial. Utilizou-se 256 elementos de contorno e 256 pontos internos tanto para MIR quanto para MRD. A função de aproximação utilizada para as tabelas 29-32 foi a função  $f(r) = 1 + r$ . Os resultados são comparados com os obtidos por células de domínio e por outros autores.

**Tabela 29 – MIR – Resultados para Carga uniaxial – Parte 1**

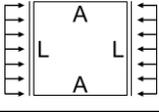
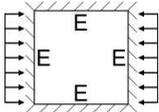
Type	h/a	Analítica (a)	Células (b)	MRD	Diferença (%)	MIR	Diferença (%)	
	AAAA	0,001	4,0000	4,0127	4,0191	0,4756	4,0194	0,4826
	0,010	3,9977 (c)	4,0104	4,0169	0,4786	4,0170	0,4814	
	0,050	3,9437	3,9561	3,9624	0,4716	3,9624	0,4713	
	0,100	3,7838	3,7952	3,8009	0,4505	3,8010	0,4521	
	0,200	3,2558	3,2643	3,2685	0,3885	3,2685	0,3882	
	AAAE	0,001	4,8471	4,8707	4,9074	1,2297	4,8977	1,0332
	0,010	-	4,8665	4,8938	-	4,8934	-	
	0,050	4,7454	4,7681	4,7941	1,0162	4,7939	1,0111	
	0,100	4,4656	4,4858	4,5090	0,9628	4,5089	0,9603	
	0,200	3,6115	3,6250	3,6419	0,8347	3,6418	0,8320	
	EAAA	0,001	5,7401	5,7598	5,7767	0,6329	5,7680	0,4831
	0,010	-	5,7539	5,7619	-	5,7620	-	
	0,050	5,5977	5,6164	5,6241	0,4692	5,6240	0,4678	
	0,100	5,2171	5,2335	5,2399	0,4350	5,2399	0,4357	
	0,200	4,1364	4,1572	4,1972	1,4493	4,1971	1,4473	
	AEAE	0,001	6,7431	6,7967	6,8904	2,1374	6,8856	2,0699
	0,010	-	6,7875	6,8779	-	6,8769	-	
	0,050	6,5238	6,5742	6,6609	2,0581	6,6595	2,0378	
	0,100	5,9487	5,9914	6,0663	1,9383	6,0654	1,9238	
	0,200	4,4004	4,4260	4,4762	1,6923	4,4756	1,6801	
	EAEA	0,001	7,6911	7,7542	7,8471	1,9876	7,8475	1,9933
	0,010	-	7,7372	7,8327	-	7,8307	-	
	0,050	7,2989	7,3561	7,4440	1,9491	7,4429	1,9346	
	0,100	6,3698	6,4139	6,4853	1,7816	6,4846	1,7709	
	0,200	4,3204	4,3413	4,3815	1,3936	4,3812	1,3873	
	LAAA	0,001	1,4014 (d)	1,4038	1,4072	0,4125	1,4009	-0,0332
	0,010	1,4000 (d)	1,4029	1,3992	-0,0573	1,3993	-0,0486	
	0,050	1,3813 (d)	1,3849	1,3811	-0,0132	1,3812	-0,0101	
	0,100	1,3270 (d)	1,3442	1,3404	0,9988	1,3404	0,9977	
	0,200	1,2138 (d)	1,2167	1,2133	-0,0421	1,2133	-0,0428	
	AAAL	0,001	2,3639	2,3690	2,3399	-1,0246	2,3629	-0,0442
	0,010	-	2,3530	2,3464	-	2,3451	-	
	0,050	2,2442	2,2520	2,2423	-0,0843	2,2424	-0,0810	
	0,100	2,0829	2,0908	2,0791	-0,1837	2,0792	-0,1765	
	0,200	1,7105	1,7178	1,7037	-0,3966	1,7039	-0,3880	
	LAEA	0,001	1,6522	1,6555	1,6643	0,7271	1,6496	-0,1569
	0,010	-	1,6536	1,6469	-	1,6468	-	
	0,050	1,6197	1,6245	1,6176	-0,1298	1,6176	-0,1288	
	0,100	1,5558	1,5604	1,5537	-0,1352	1,5537	-0,1361	
	0,200	1,3701	1,3738	1,3683	-0,1322	1,3683	-0,1330	
	AEAL	0,001	2,3901	2,3951	2,3650	-1,0605	2,3885	-0,0649
	0,010	-	2,3788	2,3717	-	2,3703	-	
	0,050	2,2667	2,2747	2,2644	-0,1019	2,2644	-0,0994	
	0,100	2,1010	2,1090	2,0968	-0,2020	2,0969	-0,1950	
	0,200	1,7200	1,7274	1,7130	-0,4096	1,7131	-0,4008	
	LALA	0,001	0,9522	0,9537	0,9605	0,8672	0,9534	0,1246
	0,010	-	0,9532	0,9529	-	0,9531	-	
	0,050	0,9431	0,9449	0,9446	0,1641	0,9446	0,1629	
	0,100	0,9218	0,9236	0,9233	0,1579	0,9232	0,1569	
	0,200	0,8501	0,8516	0,8512	0,1326	0,8512	0,1323	

(a) Hosseini-Hashemi, Khorshidi e Amabili (2012), (b) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

(c) Hosseini-Hashemi, Atashipour e Fadaee (2012), (d) Mizusawa (1993)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

**Tabela 30 – MIR – Resultados para Carga uniaxial – Parte 2**

Type	h/a	Analítica (a)	Células (b)	MRD	Diferença (%)	MIR	Diferença (%)
 ALAL	0,001	2,0413	2,0455	2,0152	-1,2958	2,0365	-0,2371
	0,010	-	2,0308	2,0239	-	2,0221	-
	0,050	1,9457	1,9508	1,9409	-0,2474	1,9408	-0,2506
	0,100	1,8216	1,8270	1,8156	-0,3284	1,8157	-0,3272
	0,200	1,5333	1,5389	1,5253	-0,5224	1,5254	-0,5155
 EEEE	0,001	10,0738 (c)	10,1605	10,2300	1,5270	10,2929	2,1283
	0,010	-	10,1382	10,2764	-	10,2719	-
	0,050	9,5588 (c)	9,6326	9,7637	2,0990	9,7603	2,0645
	0,100	8,2917 (c)	8,3411	8,4547	1,9275	8,4523	1,9006
	0,200	5,3156 (c)	5,3175	5,4807	3,0123	5,4810	3,0178

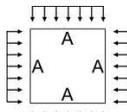
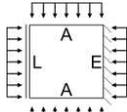
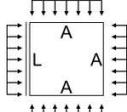
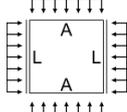
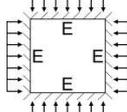
(a) Hosseini-Hashemi, Khorshidi e Amabili (2012), (b) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

(c) Kitipornchai e Xiang (1993)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

Na tabela 31 encontra-se os resultados para placas sem furo com carga biaxial onde utilizou-se 256 elementos de contorno e 256 pontos internos para MIR e MRD.

**Tabela 31 – MIR – Resultados para Carga biaxial**

Type	h/a	Analítica (a)	Células (b)	MRD	Diferença (%)	MIR	Diferença (%)
 AAAA	0,001	2,0000	2,0064	1,9971	-0,1439	2,0006	0,0300
	0,005	1,9997	2,0061	1,9986	-0,0542	2,0004	0,0369
	0,050	1,9718	1,9782	1,9711	-0,0339	1,9728	0,0491
	0,100	1,8919	1,8980	1,8912	-0,0351	1,8929	0,0517
	0,150	1,7722	1,7780	1,7717	-0,0298	1,7731	0,0510
 AEAL*	0,001	1,1431	1,1467	1,1509	0,6814	1,1413	-0,1534
	0,005	1,1412	1,1449	1,1425	0,1167	1,1401	-0,1002
	0,050	1,1119	1,1159	1,1121	0,0188	1,1105	-0,1254
	0,100	1,0641	1,0680	1,0637	-0,0346	1,0622	-0,1820
	0,150	1,0049	1,0087	1,0038	-0,1066	1,0024	-0,2534
 AAAL*	0,001	1,0548	1,0576	1,0597	0,4597	1,0535	-0,1253
	0,005	1,0535	1,0564	1,0538	0,0286	1,0527	-0,0749
	0,050	1,0322	1,0354	1,0320	-0,0180	1,0313	-0,0918
	0,100	0,9954	0,9986	0,9947	-0,0663	0,9939	-0,1489
	0,150	0,9476	0,9507	0,9464	-0,1290	0,9456	-0,2164
 ALAL*	0,001	0,9321	0,9339	0,9413	0,9805	0,9317	-0,0382
	0,005	0,9316	0,9335	0,9320	0,0412	0,9317	0,0099
	0,050	0,9207	0,9228	0,9213	0,0591	0,9206	-0,0102
	0,100	0,8977	0,8998	0,8980	0,0306	0,8973	-0,0476
	0,150	0,8650	0,8671	0,8649	-0,0129	0,8642	-0,1000
 EEEE	0,001	5,3036 (c)	5,3482	5,3101	0,1221	5,3210	0,3262
	0,001	5,2970 (d)	5,3460	5,3169	0,3734	5,3189	0,4123
	0,050	5,0840 (c)	5,1254	5,1021	0,3555	5,1007	0,3279
	0,100	4,5400 (c)	4,5741	4,5552	0,3339	4,5538	0,3035
	0,150	3,8727 (c)	3,8992	3,8847	0,3078	3,8832	0,2706

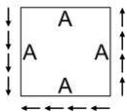
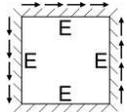
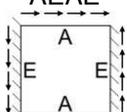
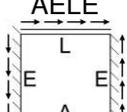
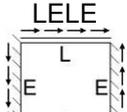
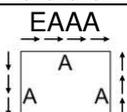
(a) Hosseini-Hashemi, Khorshidi e Amabili (2012), (b) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

(c) Xiang, Wang e Liew (1993), (d) Dawe e Roufaeil (1982)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

Na tabela 32 abaixo encontra-se os resultados para placas sem furo com carga de cisalhamento utilizando o MIR. Utilizou-se 256 elementos de contorno e 256 pontos internos. Os resultados para MRD usaram 512 elementos de contorno e 256 pontos internos.

**Tabela 32 – MIR – Resultados para Carga de cisalhamento**

Type	h/a	Literatura	Células (g)	MRD	Diferença (%)	MIR	Diferença (%)
	0,001	9,3400 (a)	9,4260	9,2794	-0,6532	9,3577	0,1889
	0,01	9,3780 (b)	9,4083	9,3295	-0,5197	9,3444	-0,3593
	0,05	-	8,9979	8,9250	-	8,9381	-
	0,1	-	7,9201	7,8570	-	7,8625	-
	0,20	-	5,3269	5,2745	-	5,2728	-
	0,001	14,7100 (a)	14,8702	14,7703	0,4084	14,7281	0,1228
	0,01	14,6155 (b)	14,8109	14,7154	-0,6488	14,6780	0,4257
	0,05	-	13,5493	13,4506	-	13,4255	-
	0,1	-	10,8454	10,7417	-	10,7315	-
	0,20	-	6,1662	6,3455	-	6,3689	-
	0,001	12,5997 (c)	12,7360	12,8363	1,8431	12,6289	0,2312
	0,01	12,5800 (d)	12,6947	12,6850	-0,0762	12,5923	0,0981
	0,05	-	11,7923	11,7643	-	11,6952	-
	0,1	-	9,7344	9,6784	-	9,6444	-
	0,20	-	5,8436	5,8987	-	6,1411	-
	0,001	8,4289 (e)	8,5001	8,3867	-0,5031	8,4011	-0,3310
	0,01	-	8,4398	8,3653	-	8,3727	-
	0,05	-	7,7706	7,6947	-	7,7047	-
	0,1	-	6,4888	6,4213	-	6,4263	-
	0,20	-	4,1638	4,1184	-	4,1183	-
	0,001	7,4869 (e)	7,5437	7,4953	0,1124	7,4699	-0,2272
	0,01	-	7,4938	7,4492	-	7,4384	-
	0,05	-	6,9230	6,8758	-	6,8689	-
	0,1	-	5,8095	5,7628	-	5,7587	-
	0,20	-	3,7634	3,7290	-	3,7273	-
	0,001	10,6000 (f)	10,8349	10,8321	2,1427	10,7509	1,4039
	0,01	-	10,8083	10,7609	-	10,7286	-
	0,05	-	10,2089	10,1560	-	10,1339	-
	0,1	-	8,7375	8,6809	-	8,6663	-
	0,20	-	5,5783	5,5194	-	5,5151	-

(a) Timoshenko e Gere (1961), (b) Bui, Nguyen e Zhang (2011)

(c) Vrcelj e Bradford (2008), (d) Tham e Szeto (1990), (e) Shufrin e Eisenberger (2007)

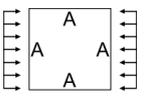
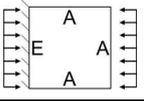
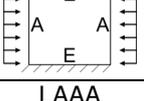
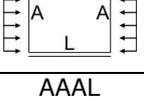
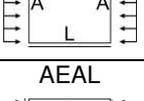
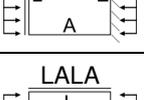
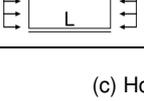
(f) Elzein e Syngellakis (1992), (g) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

### 10.6.2 Resultados para outras funções de aproximação – MIR

Na tabela 33 foram verificadas outras funções de aproximação para problemas com carga uniaxial. Utilizou-se neste teste 128 elementos quadráticos e 64 pontos de domínio. As funções foram polinomiais:  $f(r) = 1+r$ ,  $f(r) = 1+r+r^2+r^3$  e também a função baseada em “thin plate splines”  $f(r) = r^2 \ln(r)$ .

**Tabela 33 – MIR – Resultados para outras funções f(r) – Parte 1**

Type	h/a	Análitica (a)	Células (b)	f(r) = 1+r	Diferença (%)	f(r) = 1+r+r <sup>2</sup> +r <sup>3</sup>	Diferença (%)	f(r) = r <sup>2</sup> ln(r)	Diferença (%)
	0,001	4,0000	4,0127	4,0200	0,4969	4,0233	0,5799	4,0051	0,1282
	0,010	3,9977 (c)	4,0104	4,0176	0,4956	4,0210	0,5783	4,0029	0,1290
	0,050	3,9437	3,9561	3,9630	0,4859	3,9662	0,5669	3,9486	0,1251
	0,100	3,7838	3,7952	3,8015	0,4663	3,8045	0,5435	3,7883	0,1182
	0,200	3,2558	3,2643	3,2691	0,4058	3,2710	0,4653	3,2589	0,0944
	0,001	4,8471	4,8707	4,8982	1,0436	4,8996	1,0710	4,8599	0,2627
	0,010	-	4,8665	4,8939	-	4,8953	-	4,8557	-
	0,050	4,7454	4,7681	4,7944	1,0219	4,7957	1,0486	4,7576	0,2573
	0,100	4,4656	4,4858	4,5094	0,9710	4,5105	0,9963	4,4763	0,2386
	0,200	3,6115	3,6250	3,6422	0,8428	3,6429	0,8618	3,6185	0,1944
	0,001	5,7401	5,7598	5,7688	0,4970	5,7733	0,5744	5,7458	0,0994
	0,010	-	5,7539	5,7628	-	5,7673	-	5,7400	-
	0,050	5,5977	5,6164	5,6248	0,4821	5,6291	0,5574	5,6031	0,0967
	0,100	5,2171	5,2335	5,2407	0,4496	5,2444	0,5203	5,2218	0,0892
	0,200	4,1364	4,1572	4,1978	1,4624	4,1970	1,4430	4,1517	0,3691
	0,001	6,7431	6,7967	6,8851	2,0620	6,8899	2,1306	6,7618	0,2761
	0,010	-	6,7875	6,8763	-	6,8811	-	6,7527	-
	0,050	6,5238	6,5742	6,6590	2,0296	6,6636	2,0976	6,5413	0,2671
	0,100	5,9487	5,9914	6,0649	1,9165	6,0689	1,9807	5,9632	0,2435
	0,200	4,4004	4,4260	4,4754	1,6769	4,4779	1,7314	4,4091	0,1969
	0,001	7,6911	7,7542	7,8486	2,0069	7,8460	1,9742	7,7330	0,5412
	0,010	-	7,7372	7,8319	-	7,8292	-	7,7161	-
	0,050	7,2989	7,3561	7,4440	1,9487	7,4416	1,9171	7,3369	0,5176
	0,100	6,3698	6,4139	6,4855	1,7844	6,4837	1,7568	6,3994	0,4627
	0,200	4,3204	4,3413	4,3817	1,4000	4,3811	1,3846	4,3348	0,3333
	0,001	1,4014 (d)	1,4038	1,4004	-0,0734	1,4010	-0,0267	1,3989	-0,1787
	0,010	1,4000 (d)	1,4029	1,3993	-0,0505	1,3999	-0,0042	1,3978	-0,1541
	0,050	1,3813 (d)	1,3849	1,3812	-0,0102	1,3818	0,0343	1,3798	-0,1064
	0,100	1,3270 (d)	1,3442	1,3404	0,9977	1,3409	1,0394	1,3392	0,9112
	0,200	1,2138 (d)	1,2167	1,2133	-0,0429	1,2137	-0,0065	1,2124	-0,1161
	0,001	2,3639	2,3690	2,3623	-0,0698	2,3623	-0,0688	2,3610	-0,1244
	0,010	-	2,3530	2,3454	-	2,3454	-	2,3443	-
	0,050	2,2442	2,2520	2,2429	-0,0584	2,2429	-0,0598	2,2427	-0,0647
	0,100	2,0829	2,0908	2,0798	-0,1507	2,0797	-0,1546	2,0808	-0,1011
	0,200	1,7105	1,7178	1,7044	-0,3588	1,7043	-0,3663	1,7073	-0,1871
	0,001	1,6522	1,6555	1,6489	-0,2011	1,6490	-0,1949	1,6483	-0,2390
	0,010	-	1,6536	1,6468	-	1,6469	-	1,6462	-
	0,050	1,6197	1,6245	1,6176	-0,1301	1,6177	-0,1251	1,6171	-0,1589
	0,100	1,5558	1,5604	1,5537	-0,1371	1,5538	-0,1319	1,5533	-0,1602
	0,200	1,3701	1,3738	1,3683	-0,1341	1,3684	-0,1262	1,3680	-0,1557
	0,001	2,3901	2,3951	2,3879	-0,0937	2,3874	-0,1136	2,3869	-0,1326
	0,010	-	2,3788	2,3706	-	2,3701	-	2,3699	-
	0,050	2,2667	2,2747	2,2650	-0,0761	2,2645	-0,0968	2,2652	-0,0676
	0,100	2,1010	2,1090	2,0975	-0,1685	2,0970	-0,1895	2,0988	-0,1057
	0,200	1,7200	1,7274	1,7136	-0,3710	1,7133	-0,3904	1,7167	-0,1902
	0,001	0,9522	0,9537	0,9529	0,0773	0,9550	0,2963	0,9503	-0,2051
	0,010	-	0,9532	0,9531	-	0,9552	-	0,9504	-
	0,050	0,9431	0,9449	0,9446	0,1624	0,9467	0,3808	0,9420	-0,1159
	0,100	0,9218	0,9236	0,9232	0,1563	0,9252	0,3722	0,9207	-0,1155
	0,200	0,8501	0,8516	0,8512	0,1315	0,8530	0,3374	0,8491	-0,1227

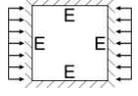
(a) Hosseini-Hashemi, Khorshidi e Amabili (2012), (b) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)  
 (c) Hosseini-Hashemi, Atashipour e Fadaee (2012), (d) Mizusawa (1993), (e) Kitipornchai e Xiang (1993)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

Observando os resultados da tabela 33 pode-se verificar que os resultados das funções polinomiais foram similares, mas a função  $f(r) = 1+r$  convergiu mais rapidamente que a função  $f(r) = 1+r+r^2+r^3$ . A função baseada em “thin

plate splines”  $f(r) = r^2 \ln(r)$  obteve os melhores resultados das 3, convergindo mais rapidamente com o mesmo número de elementos de contorno e pontos de domínio.

**Tabela 34 – MIR – Resultados para outras funções  $f(r)$  – Parte 2**

Type	h/a	Analítica (a)	Células (b)	$f(r) =$ $1+r$	Diferença (%)	$f(r) =$ $1+r+r^2+r^3$	Diferença (%)	$f(r) =$ $r^2 \ln(r)$	Diferença (%)
	0,001	2,0413	2,0455	2,0358	-0,2717	2,0338	-0,3707	2,0370	-0,2118
	0,010	-	2,0308	2,0222	-	2,0202	-	2,0236	-
	0,050	1,9457	1,9508	1,9412	-0,2310	1,9392	-0,3346	1,9431	-0,1318
	0,100	1,8216	1,8270	1,8161	-0,3040	1,8141	-0,4125	1,8188	-0,1566
	0,200	1,5333	1,5389	1,5259	-0,4878	1,5241	-0,6038	1,5298	-0,2290
	0,001	10,0738 (e)	10,1605	10,2926	2,1258	10,3006	2,2017	10,0973	0,2331
	0,010	-	10,1382	10,2717	-	10,2797	-	10,0754	-
	0,050	9,5588 (e)	9,6326	9,7601	2,0623	9,7675	2,1371	9,5751	0,1701
	0,100	8,2917 (e)	8,3411	8,4523	1,8998	8,4583	1,9699	8,2946	0,0350
	0,200	5,3156 (e)	5,3175	5,4803	3,0050	5,4848	3,0856	5,3224	0,1275

(a) Hosseini-Hashemi, Khorshidi e Amabili (2012), (b) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

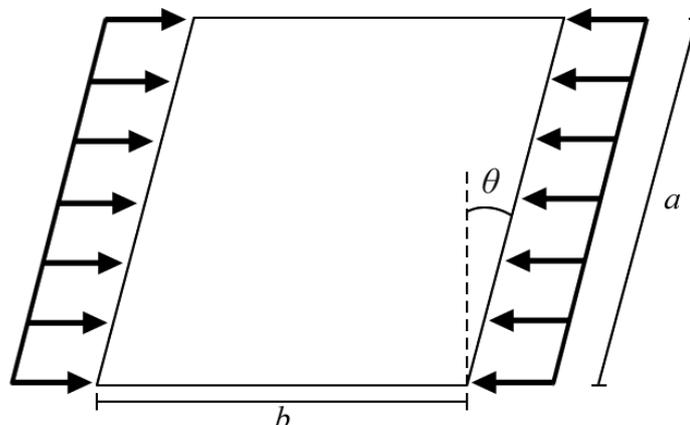
(c) Hosseini-Hashemi, Atashipour e Fadaee (2012), (d) Mizusawa (1993), (e) Kitipornchai e Xiang (1993)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

### 10.6.3 Resultados para placas esconsas – MIR

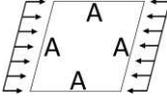
Foram obtidos resultados em placas esconsas com carga uniaxial. Foi feito um teste de convergência utilizando 256 elementos de contorno quadráticos e os pontos de domínio variaram de 64 até 144. As placas analisadas tiveram um aspecto  $a/b = 1$ , com ângulo de inclinação  $\theta = 15^\circ, 30^\circ$  e  $45^\circ$ , aspectos de espessura  $h/b = 0,001$  e a função de aproximação utilizada foi  $f(r) = 1+r$ . Estes resultados podem ser observados na tabela 35. Um esquema das placas analisadas pode ser visto na Figura 71.

**Figura 71 – Placa esconsa com carga uniaxial**



**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

**Tabela 35 – MIR – Resultados para placas esconsas AAAA e EEEE com carga uniaxial**

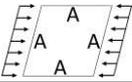
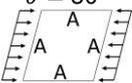
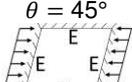
Condição de contorno	$\theta$	64 PD	100 PD	144 PD	(a)	(b)	(c)	Diferença (%) 144 PD para (a)
 AAAA	15°	4,4147	4,4046	4,3997	4,3926	4,39	4,39	0,16
	30°	5,8962	5,8792	5,8710	5,8716	5,85	5,83	-0,01
	45°	9,7854	9,7381	9,7154	9,8458	9,67	9,39	-1,34
 EEEE	15°	11,0966	10,9779	10,9222	10,835	10,80	10,83	0,80
	30°	13,9413	13,7598	13,6737	13,538	13,50	13,54	0,99
	45°	20,9539	20,5744	20,3912	20,105	20,10	20,10	1,40

(a) Wang e Yuan (2018), (b) Huyton e York (2001), (c) Wang, Tan e Zhou (2003)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

Os resultados da tabela 36 e 37 usaram 128 elementos de contorno quadráticos e 64 pontos de domínio e outras funções de aproximação. As placas tem aspecto  $a/b = 1$ , ângulos de inclinação  $\theta = 15^\circ, 30^\circ$  e  $45^\circ$  e várias relações  $h/b$ .

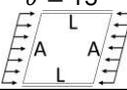
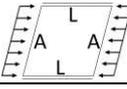
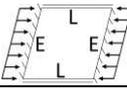
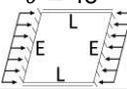
**Tabela 36 – MIR – Resultados para outras funções  $f(r)$  em placas esconsas**

Tipo	$h/a$	(a)	$f(r) = 1+r$	Diferença (%)	$f(r) = 1+r+r^2+r^3$	Diferença (%)	$f(r) = r^2 \ln(r)$	Diferença (%)
1) AAAA $\theta = 15^\circ$ 	0,001	4,3938	4,4161	0,50	4,4196	0,58	4,3976	0,09
	0,050	4,3280	4,3481	0,46	4,3516	0,54	4,3299	0,04
	0,100	4,1422	4,1586	0,39	4,1618	0,47	4,1416	-0,01
	0,150	3,8650	3,8765	0,30	3,8791	0,36	3,8610	-0,10
	0,200	3,5326	3,5391	0,19	3,5413	0,25	3,5252	-0,21
2) AAAA $\theta = 30^\circ$ 	0,001	5,8969	5,8993	0,04	5,9036	0,11	5,8650	-0,54
	0,050	5,7784	5,7759	-0,04	5,7801	0,03	5,7423	-0,63
	0,100	5,4617	5,4594	-0,04	5,4631	0,02	5,4273	-0,63
	0,150	4,9980	4,9955	-0,05	4,9984	0,01	4,9649	-0,67
	0,200	4,4509	4,4501	-0,02	4,4524	0,03	4,4199	-0,70
3) AAAA $\theta = 45^\circ$ 	0,001	10,1032	9,7828	-3,28	9,7885	-3,21	9,6827	-4,34
	0,050	9,7063	9,4206	-3,03	9,4260	-2,97	9,3240	-4,10
	0,100	8,7991	8,5910	-2,42	8,5954	-2,37	8,4991	-3,53
	0,150	7,5451	7,4245	-1,62	7,4277	-1,58	7,3364	-2,84
	0,200	6,1572	6,1244	-0,54	6,1267	-0,50	6,0362	-2,00
4) EEEE $\theta = 15^\circ$ 	0,001	10,8345	11,0963	2,36	11,1049	2,43	10,8645	0,28
	0,050	10,2312	10,4677	2,26	10,4756	2,33	10,2524	0,21
	0,100	8,7741	8,9618	2,09	8,9681	2,16	8,7797	0,06
	0,150	7,0589	7,2067	2,05	7,2102	2,10	7,2387	2,48
	0,200	5,4913	5,6021	1,98	5,6612	3,00	5,4940	0,05
5) EEEE $\theta = 30^\circ$ 	0,001	13,5377	13,9407	2,89	13,9508	2,96	13,5914	0,39
	0,050	12,5711	12,9290	2,77	12,9380	2,84	12,6095	0,30
	0,100	10,3760	10,6495	2,57	10,6564	2,63	10,3890	0,13
	0,150	8,0098	8,2089	2,43	8,2138	2,48	8,1629	1,88
	0,200	6,0328	6,2107	2,86	6,2145	2,92	6,0265	-0,10
6) EEEE $\theta = 45^\circ$ 	0,001	20,1115	20,9524	4,01	20,9664	4,08	20,2413	0,64
	0,050	17,9652	18,6735	3,79	18,6853	3,85	18,0584	0,52
	0,100	13,6909	14,1672	3,36	14,1750	3,42	13,7242	0,24
	0,150	9,7994	10,1088	3,06	10,1137	3,11	9,9095	1,11
	0,200	6,9712	7,2079	3,28	7,2111	3,33	6,9703	-0,01

(a) Kitipornchai e Xiang (1993)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

**Tabela 37 – MIR – Resultados para outras funções  $f(r)$  em placas esconsas 2**

Type	h/a	(a)	$f(r) = 1+r$	Diferença (%)	$f(r) = 1+r+r^2+r^3$	Diferença (%)	$f(r) = r^2\ln(r)$	Diferença (%)
1) LALA $\theta = 15^\circ$ 	0,001	1,0674	1,0684	0,10	1,0707	0,31	1,0655	-0,18
	0,050	1,0523	1,0533	0,10	1,0555	0,30	1,0505	-0,17
	0,100	1,0229	1,0238	0,09	1,0259	0,29	1,0212	-0,17
	0,150	0,9823	0,9826	0,03	0,9846	0,24	0,9803	-0,20
	0,200	0,9330	0,9328	-0,02	0,9346	0,18	0,9308	-0,24
2) LALA $\theta = 30^\circ$ 	0,001	1,5128	1,5119	-0,06	1,5146	0,12	1,5073	-0,36
	0,050	1,4676	1,4670	-0,04	1,4697	0,14	1,4629	-0,32
	0,100	1,4006	1,4004	-0,01	1,4029	0,17	1,3970	-0,26
	0,150	1,3198	1,3190	-0,06	1,3213	0,12	1,3164	-0,26
	0,200	1,2300	1,2288	-0,10	1,2308	0,07	1,2269	-0,26
3) LALA $\theta = 45^\circ$ 	0,001	2,7443	2,7231	-0,78	2,7272	-0,63	2,7307	-0,50
	0,050	2,5762	2,5647	-0,45	2,5685	-0,30	2,5724	-0,15
	0,100	2,3767	2,3683	-0,35	2,3717	-0,21	2,3754	-0,05
	0,150	2,1642	2,1564	-0,36	2,1593	-0,23	2,1625	-0,08
	0,200	1,9505	1,9434	-0,37	1,9458	-0,24	1,9484	-0,11
4) LELE $\theta = 15^\circ$ 	0,001	4,2824	4,3099	0,64	4,3116	0,68	4,2707	-0,28
	0,050	4,1387	4,1608	0,53	4,1623	0,57	4,1241	-0,35
	0,100	3,7937	3,8081	0,38	3,8094	0,41	3,7763	-0,46
	0,150	3,3391	3,3464	0,22	3,3475	0,25	3,3200	-0,57
	0,200	2,8620	2,8640	0,07	2,8649	0,10	2,8426	-0,68
5) LELE $\theta = 30^\circ$ 	0,001	5,6159	5,6399	0,42	5,6416	0,46	5,5886	-0,49
	0,050	5,3660	5,3803	0,27	5,3819	0,30	5,3336	-0,61
	0,100	4,8043	4,8131	0,18	4,8145	0,21	4,7736	-0,64
	0,150	4,1036	4,1080	0,11	4,1092	0,14	4,0759	-0,68
	0,200	3,4071	3,4087	0,05	3,4097	0,08	3,3833	-0,70
6) LELE $\theta = 45^\circ$ 	0,001	8,0948	8,0738	-0,26	8,0748	-0,25	8,0173	-0,97
	0,050	7,4670	7,4538	-0,18	7,4547	-0,17	7,4071	-0,81
	0,100	6,3311	6,3232	-0,13	6,3239	-0,11	6,2869	-0,70
	0,150	5,1556	5,1485	-0,14	5,1491	-0,13	5,1195	-0,71
	0,200	4,1438	4,1366	-0,17	4,1372	-0,16	4,1121	-0,77

(a) Kitipornchai e Xiang (1993)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

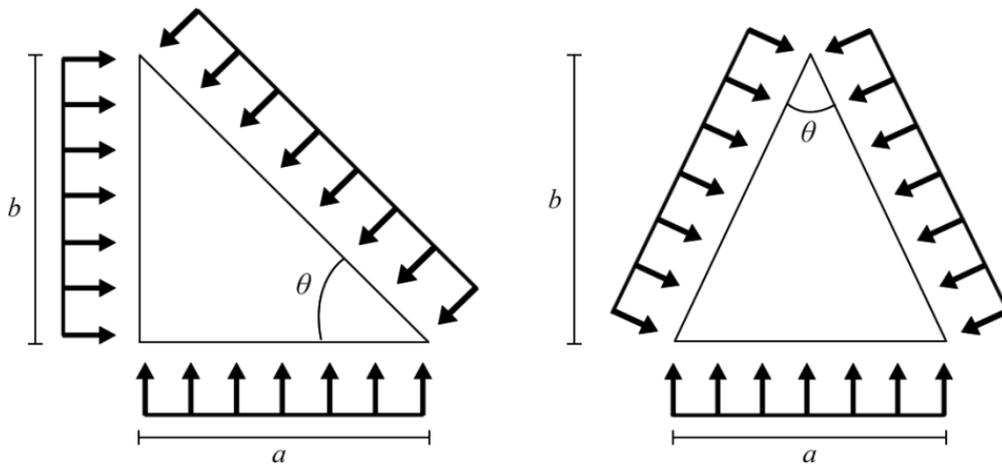
De maneira similar para as placas quadradas, a função  $f(r) = 1+r$  convergiu mais rapidamente que a função  $f(r) = 1+r+r^2+r^3$ . A função baseada em “*thin plate splines*”  $f(r) = r^2\ln(r)$  obteve os melhores resultados das três, convergindo mais rapidamente com o mesmo número de elementos de contorno e pontos de domínio, mas demorou mais para calcular.

#### 10.6.4 Resultados para placas triangulares – MIR

Também foram analisadas placas com geometria de triângulo isósceles e triângulo retângulo. Um esquema pode ser visualizado na Figura 72. As placas testadas têm vários aspectos, com ângulos  $\theta = 60^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $120^\circ$  para triângulo isósceles e  $\theta = 30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$  para triângulo retângulo, várias proporções h/a e a função da base radial adotada foi  $f(r) = 1 + r$ . A notação (A\*) indica condição de

contorno simplesmente apoiada com condição “soft” (rotação livre na direção tangencial e normal). A malha utilizada foi 64 elementos de contorno quadráticos no lado menor do triângulo, aumentando o número de elementos do lado maior proporcionalmente ao lado menor e o número de pontos internos adotado foi de 64. As tabelas 38, 39, 40 e 41 mostram os resultados obtidos:

**Figura 72 – Placas triangulares com carga no plano**



Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

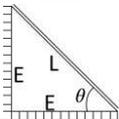
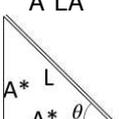
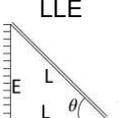
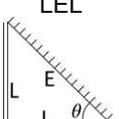
**Tabela 38 – MIR – Resultados para placas com geometria de triângulo retângulo com condições de contorno A\*A\*A\*, EEE, EEA\*, A\*A\*E**

Type	$\theta$	$h/a = 0,001$		$h/a = 0,05$		$h/a = 0,1$		$h/a = 0,15$		$h/a = 0,2$	
		(a)	MIR	(a)	MIR	(a)	MIR	(a)	MIR	(a)	MIR
	30°	9,3325	9,4151	8,3335	8,3983	6,8123	6,8560	5,3486	5,3759	4,1561	4,1736
	45°	4,9997	5,0352	4,6474	4,6771	4,0887	4,1120	3,4802	3,4967	2,9117	2,9232
	60°	3,1110	3,1398	2,9604	2,9803	2,7049	2,7248	2,4104	2,4266	2,1126	2,1251
	30°	26,7549	27,9761	22,0433	22,9370	14,6481	15,1227	9,4988	9,7508	6,4003	6,5462
	45°	14,1413	14,6309	12,6908	13,1006	9,7909	10,0607	7,1526	7,3187	5,2225	5,3271
	60°	8,9192	9,3258	8,3164	8,6798	6,9494	7,2220	5,4885	5,6775	4,2612	4,3903
	30°	21,1880	21,8895	17,6660	18,1701	12,2456	12,5280	8,2598	8,4079	5,7307	5,8159
	45°	10,4130	10,6436	9,4389	9,6278	7,5524	7,7149	5,7278	5,8762	4,3911	4,4438
	60°	6,1109	6,2680	5,7457	5,8878	4,9924	5,0982	4,1308	4,2095	3,3480	3,4064
	30°	11,6926	11,8491	10,3852	10,5111	8,1952	8,2763	6,1801	6,2294	4,6426	4,6730
	45°	6,8166	6,8982	6,3038	6,3732	5,3722	5,4226	4,3796	4,4148	3,5122	3,5362
	60°	4,6141	4,6940	4,3632	4,4271	3,8710	3,9261	3,3066	3,3486	2,7686	2,7995

(a) Xiang *et al.*(1994)

Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

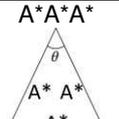
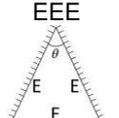
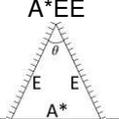
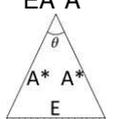
**Tabela 39 – MIR – Resultados para placas com geometria de triângulo retângulo com condições de contorno ELE, A\*LA\*, LLE, LEL**

Type	$\theta$	h/a = 0,001		h/a = 0,05		h/a = 0,1		h/a = 0,15		h/a = 0,2	
		(a)	MIR	(a)	MIR	(a)	MIR	(a)	MIR	(a)	MIR
 ELE	30°	4,4560	4,4545	4,1520	4,1504	3,6534	3,6495	3,1102	3,1050	2,6094	2,6040
	45°	2,5324	2,5302	2,4160	2,4142	2,2226	2,2199	1,9931	1,9897	1,7591	1,7555
	60°	1,4855	1,4850	1,4382	1,4380	1,3611	1,3604	1,2656	1,2644	1,1616	1,1601
 A*LA*	30°	0,5678	0,5667	0,5155	0,5154	0,4616	0,4617	0,4084	0,4087	0,3579	0,3584
	45°	0,3683	0,3689	0,3473	0,3471	0,3241	0,3241	0,3009	0,3010	0,2781	0,2783
	60°	0,1893	0,1890	0,1798	0,1793	0,1691	0,1690	0,1587	0,1587	0,1483	0,1484
 LLE	30°	0,5146	0,5166	0,5067	0,5067	0,4963	0,4961	0,4837	0,4834	0,4668	0,4667
	45°	0,4826	0,4825	0,4740	0,4738	0,4636	0,4632	0,4511	0,4508	0,4371	0,4368
	60°	0,4359	0,4355	0,4287	0,4282	0,4192	0,4188	0,4083	0,4079	0,3958	0,3956
 LEL	30°	1,8749	1,8728	1,8013	1,7995	1,6945	1,6926	1,5697	1,5673	1,4367	1,4341
	45°	0,9923	0,9913	0,9639	0,9633	0,9261	0,9252	0,8814	0,8805	0,8327	0,8316
	60°	0,6250	0,6244	0,6127	0,6120	0,5955	0,5949	0,5752	0,5746	0,5525	0,5518

(a) Xiang *et al.*(1994)

Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

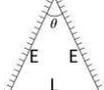
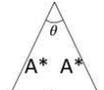
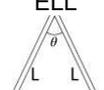
**Tabela 40 – MIR – Resultados para placas com geometria de triângulo isósceles com condições de contorno A\*A\*A\*, EEE, A\*EE, EA\*A\***

Type	$\theta$	h/a = 0,001		h/a = 0,05		h/a = 0,1		h/a = 0,15		h/a = 0,2	
		(a)	MIR	(a)	MIR	(a)	MIR	(a)	MIR	(a)	MIR
 A*A*A*	60°	5,3329	5,3749	4,9457	4,9822	4,3247	4,3518	3,6499	3,6688	3,0271	3,0403
	90°	9,9986	10,0988	8,8591	8,9391	7,1671	7,2183	5,5697	5,6016	4,2908	4,3110
	120°	21,8916	22,1789	17,6066	17,8785	12,4002	12,5449	8,4705	8,5480	5,9041	5,9484
 EEE	60°	14,8340	15,3950	13,2452	13,7094	10,1189	10,4199	7,3314	7,5147	5,3228	5,4378
	90°	28,2820	29,7982	23,0740	24,1685	15,1120	15,6863	9,7033	10,0070	6,4984	6,6740
	120°	64,1827	72,7347	42,9529	47,2623	21,8710	23,4636	12,1717	12,8250	7,5402	7,8525
 A*EE	60°	10,6050	10,8488	9,6030	9,8058	7,6996	7,8365	5,8629	5,9493	4,4318	4,4866
	90°	18,6660	19,1886	15,9231	16,3164	11,4322	11,6562	7,8842	8,0069	5,5366	5,6071
	120°	39,8561	42,0908	29,6714	31,0230	17,3888	17,9571	10,4138	10,6617	6,7187	6,8393
 EA*A*	60°	7,5737	7,6761	6,9465	7,0339	5,8285	5,8912	4,6707	4,7129	3,6889	3,7170
	90°	15,6138	15,9233	13,3074	13,5364	9,8413	9,9760	7,0017	7,0785	5,0409	5,0862
	120°	37,038 8	38,3433	26,8880	27,7928	16,1176	16,5120	9,8505	10,0286	6,4487	6,5374

(a) Xiang *et al.*(1994)

Fonte: Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

**Tabela 41 – MIR – Resultados para placas com geometria de triângulo isósceles com condições de contorno LEE, LA\*A\*, ELL, LEL**

Type	$\theta$	h/a = 0,001		h/a = 0,05		h/a = 0,1		h/a = 0,15		h/a = 0,2	
		(a)	MIR	(a)	MIR	(a)	MIR	(a)	MIR	(a)	MIR
 LEE	60°	3,8151	3,8045	3,5641	3,5529	3,1499	3,1369	2,6914	2,6785	2,2649	2,2530
	90°	5,0644	5,0610	4,6855	4,6812	4,0671	4,0597	3,4081	3,3997	2,8168	2,8087
	120°	8,3586	8,3759	7,5412	7,5511	6,2480	6,2480	4,9769	4,9727	3,9211	3,9160
 LA*A*	60°	0,8469	0,8456	0,8012	0,8011	0,7475	0,7478	0,6897	0,6902	0,6305	0,6314
	90°	0,7389	0,7377	0,6752	0,6753	0,6097	0,6100	0,5454	0,5459	0,4843	0,4850
	120°	0,6523	0,6364	0,5037	0,5036	0,4142	0,4146	0,3446	0,3454	0,2890	0,2899
 ELL	60°	0,7039	0,7034	0,6886	0,6881	0,6684	0,6679	0,6447	0,6441	0,6184	0,6178
	90°	1,9846	1,9827	1,8986	1,8974	1,7789	1,7772	1,6410	1,6389	1,4962	1,4940
	120°	5,3448	5,3480	4,9338	4,9367	4,3232	4,3214	3,6721	3,6678	3,0680	3,0630
 LEL	60°	1,2269 0,7396*	0,7033	1,1870	0,6880	1,1335	0,6678	1,0716	0,6440	1,0048	0,6177
	90°	1,7305 0,9650*	0,9642	1,6575	0,9393	1,5639	0,9059	1,4538	0,8662	1,3099	0,8209
	120°	2,3264 1,3243*	1,2964	2,1939	1,2694	1,9462	1,1944	1,4136	1,0338	1,0252	0,8069

(a) Xiang *et al.*(1994), \* Xiang (2002)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

Um aumento nas diferenças nos resultados foi obtido para o caso LEL na Tabela 41 quando os resultados obtidos com o MIR foram comparados com os resultados obtidos em Xiang *et al.* (1994) Outro estudo do mesmo autor, Xiang (2002), mas utilizando a teoria clássica de placas foi publicado mais tarde e apresentou valores semelhantes aos obtidos com o MIR, sendo incluídos também no aspecto  $h/a = 0,001$ .

### 10.6.5 Resultados para placas com furo – MIR

Nas tabelas 42-44 encontra-se os resultados para placas com furo quadrado central com carga uniaxial utilizando o MIR. Foram usados 480 elementos de contorno quadráticos, sendo 384 elementos na borda externa e 96 na borda do furo. Foram usados de 836 a 900 pontos de domínio. Na Figura 59 pode-se verificar uma placa com furo quadrado central solicitada por uma carga uniaxial.

**Tabela 42 – MIR – Placas com furo quadrado 1**

EL	PD	d/a	MRD h/a = 0,001	Células (a) h/a = 0,001	MIR h/a = 0,001	MRD h/a = 0,01	Células (a) h/a = 0,01	MIR h/a = 0,01
480	864	0,1	3,7946	3,7994	3,7898	3,7879	3,7932	3,7878
480	836	0,2	3,4397	3,4494	3,4524	3,4296	3,4412	3,4377
480	880	0,3	3,1713	3,1883	3,1839	3,1575	3,1782	3,1769
480	936	0,4	2,9998	3,0297	3,0471	2,9810	3,0153	3,0121
480	896	0,5	2,9069	2,9310	2,9236	2,8881	2,9096	2,8996
480	924	0,6	2,8186	2,8664	2,8591	2,8175	2,8352	2,8348
480	984	0,7	2,8168*	2,8449	2,8544	2,8001	2,7998	2,7628

(a) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017) (\*)1280 elementos de contorno

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).**Tabela 43 – MIR – Placas com furo quadrado 2**

EL	PD	d/a	MRD h/a = 0,05	Células (a) h/a = 0,05	MIR h/a = 0,05	MRD h/a = 0,1	Células (a) h/a = 0,1	MIR h/a = 0,1
480	864	0,1	3,7248	3,7313	3,7267	3,5722	3,5819	3,5765
480	836	0,2	3,3602	3,3747	3,3680	3,2140	3,2344	3,2261
480	880	0,3	3,0774	3,1034	3,0999	2,9207	2,9577	2,9517
480	936	0,4	2,8781	2,9207	2,9145	2,6898	2,7495	2,7405
480	896	0,5	2,7562	2,7820	2,7678	2,5333	2,5670	2,5470
480	924	0,6	2,6392	2,6625	2,6491	2,3596	2,3884	2,3643
480	984	0,7	2,5388	2,5629	2,5359	2,2438	2,2716	2,2518

(a) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).**Tabela 44 – MIR – Placas com furo quadrado 3**

EL	PD	d/a	MRD h/a = 0,2	Células (a) h/a = 0,2	MIR h/a = 0,2
480	864	0,1	3,0712	3,1043	3,0776
480	836	0,2	2,7135	2,8052	2,7841
480	880	0,3	2,3788	2,5138	2,4906
480	936	0,4	2,0842	2,2235	2,2041
480	896	0,5	1,9152	1,7185	1,8769
480	924	0,6	1,4944	1,1755	1,4777
480	984	0,7	0,8317	0,7263	0,8144

(a) Soares Jr. e Palermo Jr. (2017)

**Fonte:** Adaptado de Soares Jr., Palermo Jr. e Wrobel (2020).

Os resultados para placas com furo só puderam ser obtidos com a aproximação das normais colocando pontos de Gauss dentro do elemento de contorno, conforme a Figura 68. Se a aproximação da integral radial tiver ponto campo nos nós do elemento de contorno os resultados divergem para furos acima

de  $d/L = 0,4$ . Foi necessário adicionar o termo livre da mesma forma que em uma integral de domínio. O MIR precisou de menos elementos de contorno para obter uma resposta similar ao MRD.

#### **10.6.6 Tempo de processamento – MIR**

Foi feita uma comparação para o tempo de processamento entre as técnicas de integração de domínio, no caso a integração por células, o MRD e o MIR. O tempo de processamento para uma placa quadrada com  $h/a = 0,2$  com furo  $d/a = 0,5$  foram:

- a) Células de domínio: 13 min 56 segundos ( 960 elementos de contorno e 4800 células de domínio )
- b) MRD: 38 min 02 segundos ( 1280 elementos de contorno e 1533 pontos de domínio )
- c) MIR: 50 min 45 segundos ( 480 elementos de contorno e 896 pontos de domínio )

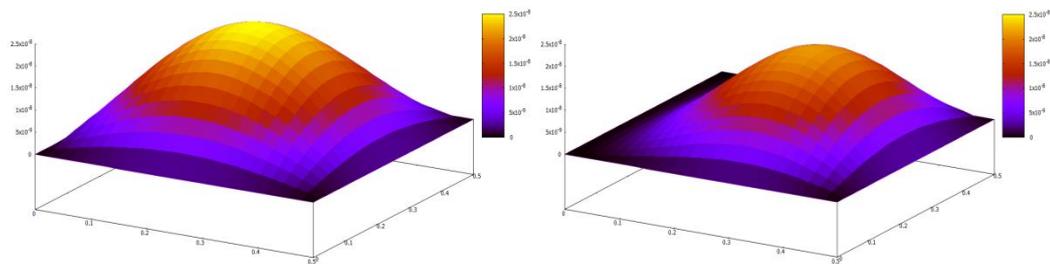
Todas as análises usaram o compilador Intel Fortran no Windows 7 com o compilador definido no modo Release usando valores padrão. O computador tinha um processador Intel i7-4790 (3.6 GHz) e 16 Gb de RAM

## 11. MODOS DE FLAMBAGEM

### 11.1 MODOS DE FLAMBAGEM PARA PLACAS QUADRADAS COM CARGA UNIAXIAL

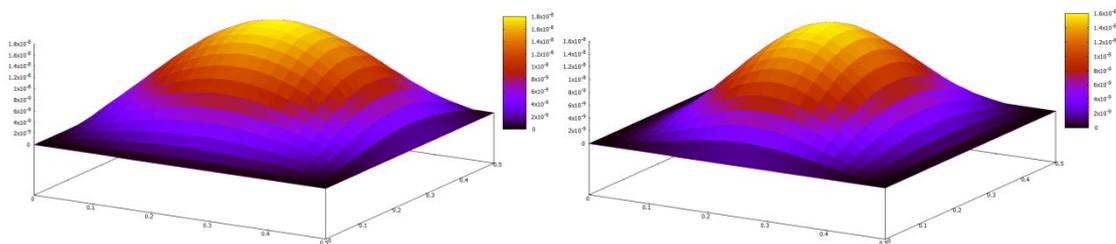
Os modos de flambagem foram obtidos calculando-se os deslocamentos transversais da placa (equação 4.3) na iteração final do problema de autovalor. Os deslocamentos foram calculados nos pontos de domínio e nos pontos dos elementos de contorno. A plotagem foi feita introduzindo os deslocamento obtidos no software de plotagem gratuito Gnuplot, desenvolvido por Williams *et al.* (2019). Os modos de flambagem foram calculados utilizando células de domínio.

**Figura 73** – Modo de flambagem para placa AAAA e AAEE com carga uniaxial



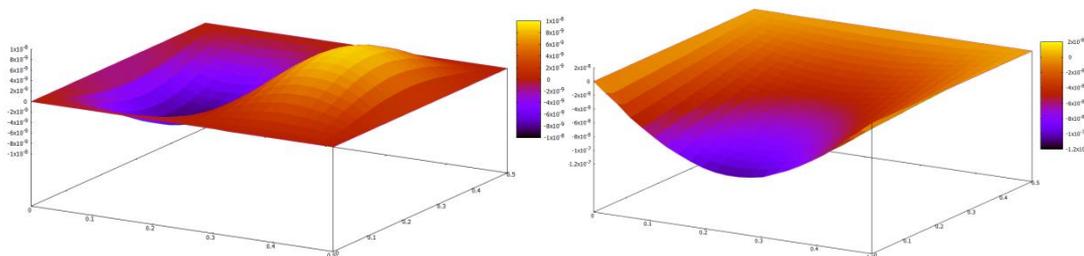
Fonte: O autor (2020).

**Figura 74** – Modo de flambagem para placa EAAA e AEAE com carga uniaxial



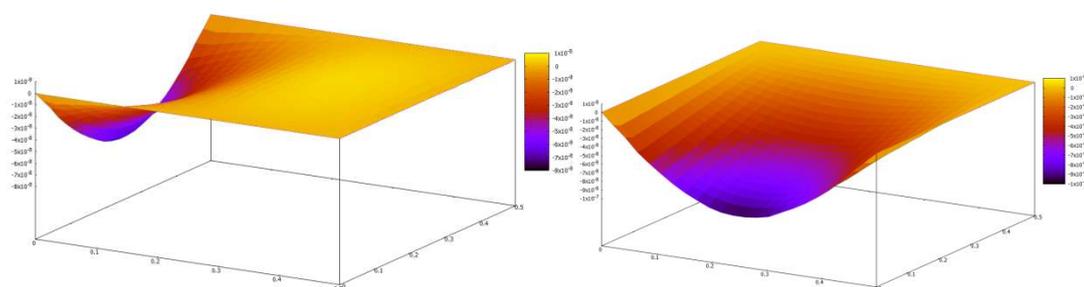
Fonte: O autor (2020).

**Figura 75** – Modo de flambagem para placa EAEA e LAAA com carga uniaxial



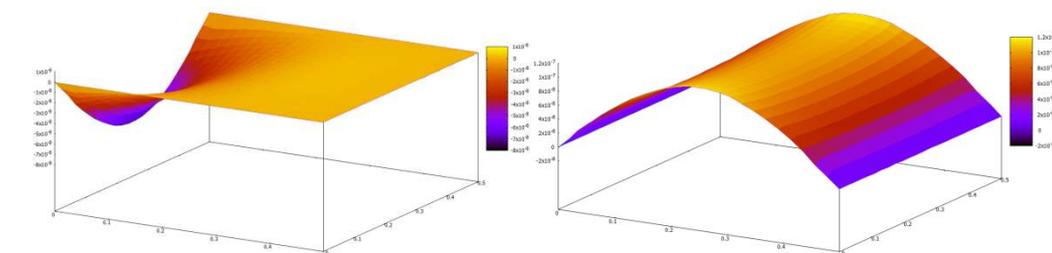
Fonte: O autor (2020).

**Figura 76** – Modo de flambagem para placa AAAL e LAEA com carga uniaxial



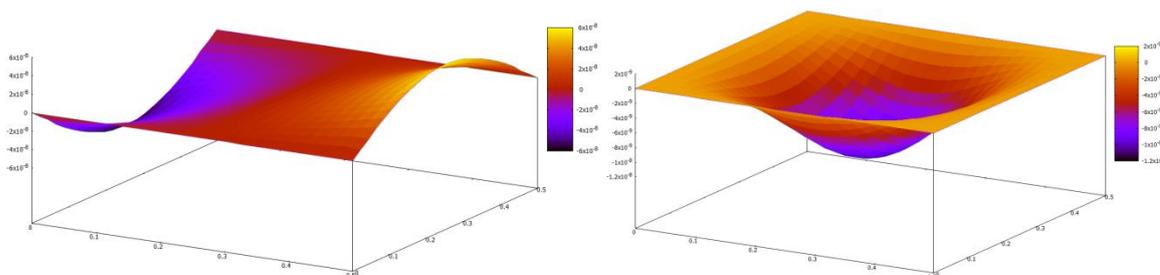
Fonte: O autor (2020).

**Figura 77** – Modo de flambagem para placa AEAL e LALA com carga uniaxial



Fonte: O autor (2020).

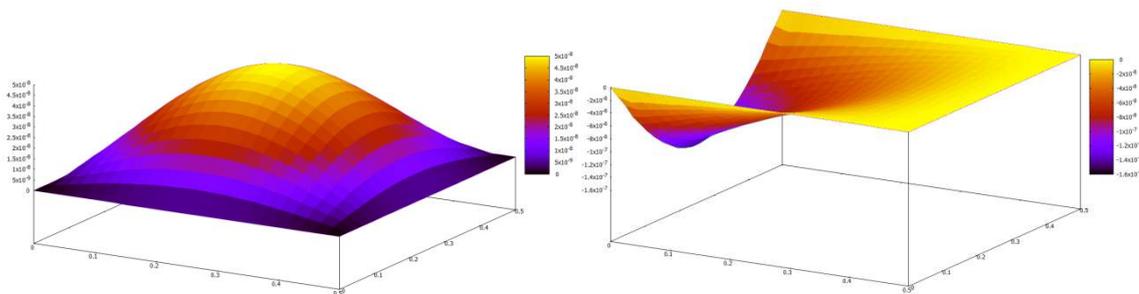
**Figura 78** – Modo de flambagem para placa ALAL e EEEE com carga uniaxial



Fonte: O autor (2020).

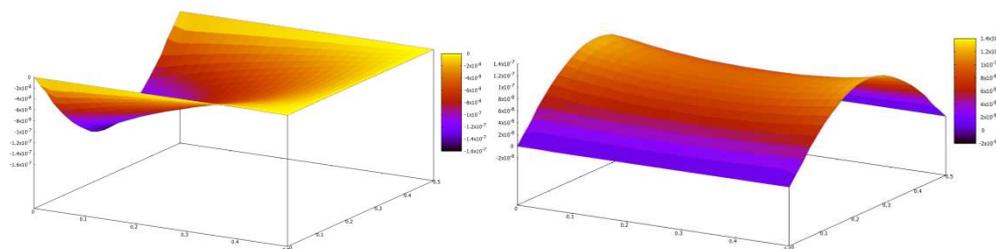
## 11.2 MODOS DE FLAMBAGEM PARA PLACAS QUADRADAS COM CARGA BIAIXIAL

**Figura 79** – Modo de flambagem para placa AAAA e AEAL com carga biaxial



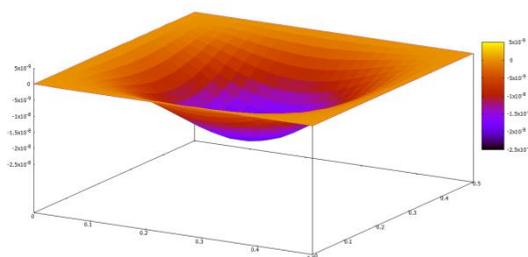
Fonte: O autor (2020).

**Figura 80** – Modo de flambagem para placa AAAL e ALAL com carga biaxial



Fonte: O autor (2020).

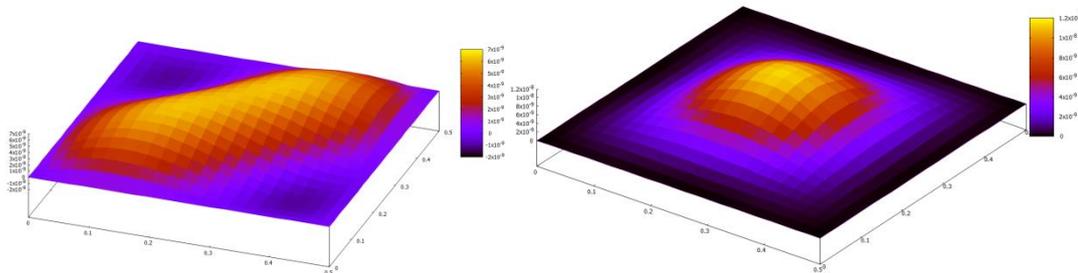
**Figura 81** – Modo de flambagem para placa EEEE com carga biaxial



Fonte: O autor (2020).

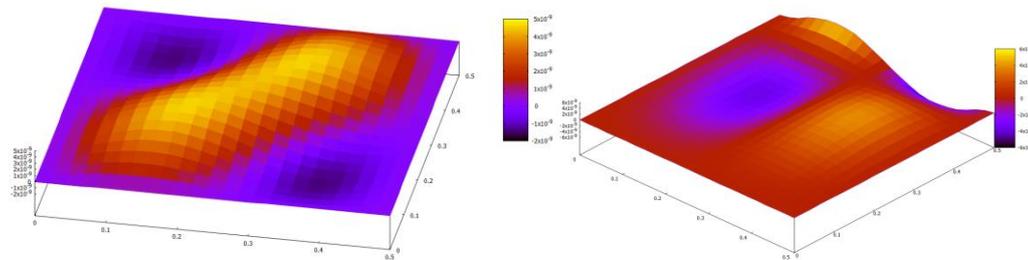
### 11.3 MODOS DE FLAMBAGEM PARA PLACAS QUADRADAS COM CARGA DE CISCALHAMENTO

**Figura 82** – Modo de flambagem para placa AAAA e EEEE – cisalhamento



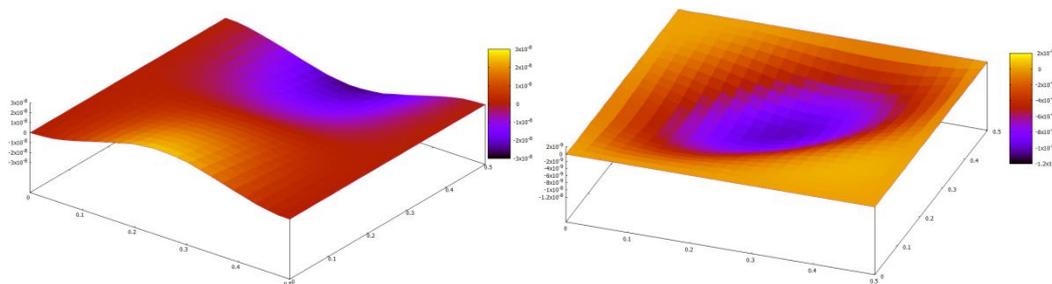
**Fonte:** O autor (2020).

**Figura 83** – Modo de flambagem para placa AEAE e AELE -cisalhamento



**Fonte:** O autor (2020).

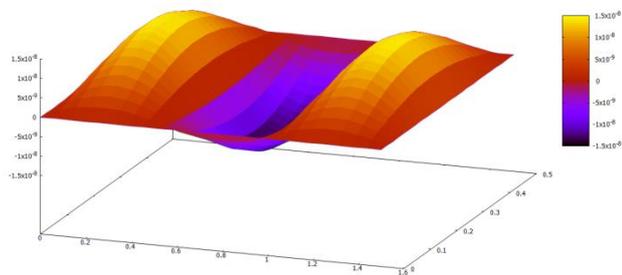
**Figura 84** – Modo de flambagem para placa LELE e EAAA - cisalhamento



**Fonte:** O autor (2020).

## 11.4 MODOS DE FLAMBAGEM PARA PLACA RETANGULAR COM CARGA UNIAXIAL

**Figura 85** – Modo de flambagem, placa com  $a/b = 1.5$  AAAA com carga uniaxial



**Fonte:** O autor (2020).

## 12 CONCLUSÕES

### 12.1 CONCLUSÕES PARA MRD

Os resultados obtidos mostram que a formulação dada por Soares Jr. e Palermo Jr. (2017) é consistente quando utilizada em conjunto com o MRD. Como notado por alguns pesquisadores, a implementação do MRD é complexa, devido à teoria pesada e a necessidade da manipulação analítica para obtenção das soluções particulares para cada função aproximadora escolhida. A resolução do problema de flambagem de placas no presente trabalho foi ainda diferente da maioria das aplicações do MRD da literatura, uma vez que as matrizes principais  $H$  e  $G$  não foram aproveitadas, as derivadas destas matrizes tiveram que ser calculadas.

Apesar destas dificuldades, o método mostrou-se estável, inclusive solucionando problemas com furos. Foi detectado que os problemas com aspecto de espessura maiores que  $h/a = 0,001$  necessitaram de menos elementos de contorno e convergiram à medida que aumentava-se o número de pontos de domínio. Quando os problemas com aspecto de espessura iguais a  $h/a = 0,001$  foram analisados, necessitou-se um número maior de elementos de contorno, os problemas convergiram a medida que se aumentou o número de elementos de contorno e também o número de pontos de domínio.

Isto é devido à integração numérica das primeiras derivadas das soluções fundamentais, estas derivadas possuem núcleos singulares do tipo Cauchy, mas são multiplicadas pelas funções de Bessel modificadas  $K_0(z)$  e  $K_1(z)$ . Estas funções, quando o parâmetro  $z$  é considerado grande ( que é o caso para placas com aspecto de espessura  $h/a = 0,001$  ) têm seu núcleo modificado para uma série de integrais de parte finita, estas integrais necessitam de técnicas robustas de integração, como o método dos sub-elementos. Como o MRD depende destas integrais de contorno, quanto mais precisa for a integração do elemento, melhor será o resultado. Projeta-se que com um método de integração robusto para integrais de parte finita será possível o cálculo com um número menor de elementos de contorno.

A aplicação do operador tangente nas integrais supersingulares reduzindo-as para hypersingulares melhorou a precisão dos resultados obtidos em problemas com elementos de contorno curvos.

Pode-se mostrar algumas vantagens e desvantagens do MRD com relação à outros métodos de redução de malha:

Vantagens:

- (a) Rápido processamento, em alguns casos equivalente ou mais rápido que as células de domínio.
- (b) O cálculo é feito somente com integrais de contorno.
- (c) A precisão dos resultados observada foi melhor do que as células de domínio constantes.

Desvantagens:

- (a) Necessidade de soluções particulares, sendo então difícil de alternar entre as funções de aproximação.
- (b) Difícil implementação.
- (c) A precisão dos resultados depende das integrais de contorno, os métodos de integração singular precisam ser robustos para que a solução seja convergente.

## 12.2 CONCLUSÕES PARA MIR

O MIR apresentou na maioria dos resultados uma precisão maior quando comparado ao MRD e também as células de domínio. Outro ponto que foi observado, com relação à integração numérica, foi que em problemas sem furo as integrais radiais puderam ser calculadas utilizando-se 8 pontos Gauss, apresentando uma precisão aceitável quando comparados os resultados à solução analítica. Mas em problemas com furos foi necessária a aplicação de 3 subelementos que utilizam 16 pontos de Gauss para que a precisão fosse satisfatória, isto pode ser devido à complexidade dos termos de domínio em problemas com furo.

Os raios que partem do ponto fonte até o elemento de contorno precisaram ser aproximados posicionando-se 4 pontos de Gauss dentro do elemento de contorno, um valor menor que 4 mostrou que podem haver desvios nas respostas

e um valor maior levou ao mesmo resultado, sendo o processamento desnecessário. As vantagens e desvantagens do MIR com relação à outros métodos de redução de malha são mostradas abaixo:

Vantagens:

- (a) Fácil implementação.
- (b) Uma precisão maior para um número menor de elementos de contorno, se comparado às células de domínio ou o MRD.
- (c) Facilidade de alternar entre as funções de aproximação de base radial, sem a necessidade de calcular soluções particulares.

Desvantagens:

- (a) Conforme observado por outros autores, o MIR consome muito tempo para processar o problema, especialmente quando as integrais radiais são feitas de maneira numérica. O tempo de processamento pode ser diminuído caso a integração for analítica.
- (b) O MIR apesar de ser um método de redução de malhas, precisou da adição de termos livres que aparecem quando é feita a integração de domínio para uma função singular do tipo Cauchy, algo que não foi necessário no MRD.
- (c) Além de integrais de contorno, é necessário calcular integrais radiais. Foi percebido no presente trabalho que as integrais radiais devem ser calculadas de maneira precisa pois dependendo da complexidade da carga de domínio aproximada elas podem gerar grandes desvios caso a técnica de integração não seja adequada ao núcleo da integral radial.

### 12.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para o MRD pode-se sugerir algumas melhorias:

(a) Buscar métodos robustos para integração singular das funções de Bessel ( $K_0(z)$  e  $K_1(z)$ ) quando o argumento é grande, melhorando a precisão dos resultados em problemas com aspecto de espessura  $h/a = 0,001$ .

(b) Realizar a aplicação do MRD para teoria de placas que levam em conta o efeito da deformação por cortante de ordem maior.

(c) Pode-se realizar a associação de elementos planos para obter as cargas críticas de perfis metálicos.

Para o MIR pode-se sugerir para trabalhos futuros:

(a) Integração analítica das integrais radiais, diminuindo o tempo de processamento do problema.

(b) Buscar formas computacionais para reduzir o tempo de cálculo, como o uso da GPU para processamento paralelo.

(c) Como sugerido para o MRD, pode-se realizar a associação de elementos planos e também a aplicação do MIR para outras teorias de placas.

## REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. Handbook of mathematical functions. 1965.
- AGNANTHARIS, J. P.; POLYZOS, D.; BESKOS, D. E. Free vibration analysis of non-axisymmetric e axisymmetric structures by the dual reciprocity BEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 25, n. 9, p. 713-723, 2001.
- AL-BAYATI, S. A.; WROBEL, L. C. A novel dual reciprocity boundary element formulation for two-dimensional transient convection–diffusion–reaction problems with variable velocity. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 94, p. 60-68, 2018.
- AL-BAYATI, S. A.; WROBEL, L. C. Radial integration boundary element method for two-dimensional non-homogeneous convection–diffusion–reaction problems with variable source term. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 101, p. 89-101, 2019.
- AL-BAYATI, S. A.; WROBEL, L. C. The dual reciprocity boundary element formulation for convection-diffusion-reaction problems with variable velocity field using different radial basis functions. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 145, p. 367-377, 2018.
- ALBUQUERQUE, E. L. *et al.* Boundary element analysis of anisotropic Kirchhoff plates. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, n. 14-15, p. 4029-4046, 2006.
- ALBUQUERQUE, E. L.; ALIABADI, M. H. A boundary element analysis of symmetric laminated composite shallow shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 41-44, p. 2663-2668, 2010.
- ALBUQUERQUE, E. L.; ALIABADI, M. H. A boundary element formulation for boundary only analysis of thin shallow shells. **CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences**, v. 29, n. 2, p. 63-73, 2008.
- ALBUQUERQUE, E. L.; BAIZ, P. M.; ALIABADI, M. H. Stability analysis of composite plates by the boundary element method. **International Conference on Boundary Element Techniques**. 2008. p. 455-460.
- ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; FEDELINSKI, P. Dual reciprocity boundary element method in Laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems. **Computers & structures**, v. 81, n. 17, p. 1703-1713, 2003.
- ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; PORTILHO DE PAIVA, W. The radial integration method applied to dynamic problems of anisotropic plates. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 23, n. 9, p. 805-818, 2007.

AL-GAHTANI, H. J. DRM—MFS for two-dimensional finite elasticity. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 36, n. 10, p. 1473-1477, 2012.

ALIABADI, M. H. *et al.* Analysis of shear deformable plates with combined geometric and material nonlinearities by boundary element method. **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, n. 3-4, p. 1038-1059, 2007.

ALIABADI, M. H. **The Boundary Element Method: Applications in Solids and Structures**, v. 2 John Wiley & Sons Ltd. West Sussex, 2002.

ALIABADI, M. H.; BAIZ, P. M.; ALBUQUERQUE, E. L. Stability analysis of plates. In: MANOLIS G. D.; POLYZOS, D. **Recent Advances in Boundary Element Methods**. Springer Netherlands, 2009. p. 1-14.

ALIABADI, M. H.; SUPRIYONO, A. Analysis of shear deformable plates with combined geometric and material nonlinearities by boundary element method. **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, n. 3, p. 1038-1059, 2007.

AL-JAWARY, M. A.; WROBEL, L. C. Radial integration boundary integral and integro-differential equation methods for two-dimensional heat conduction problems with variable coefficients. **Engineering analysis with boundary elements**, v. 36, n. 5, p. 685-695, 2012.

AL-JAWARY, M. **The radial integration boundary integral and integro-differential equation methods for numerical solution of problems with variable coefficients**. 2012. Tese ( Doutorado ) - Brunel University School of Engineering and Design, Londres, 2012.

ALSOY-AKGÜN, N.; TEZER-SEZGIN, M. DRBEM solution of the thermo-solutal buoyancy induced mixed convection flow problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, n. 3, p. 513-526, 2013.

ALTIERO, N. J.; SIKARSKIE, D. L. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. **Computers & Structures**, v. 9, n. 2, p. 163-168, 1978.

AMADO, J. M. *et al.* Application of the Laplace transform dual reciprocity boundary element method in the modelling of laser heat treatments. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29, n. 2, p. 126-135, 2005.

ANDO, Y. *et al.* On the Application of the Energy Method to the Stress Concentration Problems of a Rectangular Plate with a Circular Hole. **Journal of Zosen Kiokai**, v. 1967, n. 122, p. 146-156, 1967.

ANDRADE, R. C. , **Uma análise das soluções fundamentais aplicáveis as placas espessas pelas teorias de Reissner e Mindlin e suas relações com a teoria clássica para uso no método dos elementos de contorno**. 2001. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

ANG, W. T. A time-stepping dual-reciprocity boundary element method for anisotropic heat diffusion subject to specification of energy. **Applied mathematics and computation**, v. 162, n. 2, p. 661-678, 2005.

ANG, W. T. Non-steady state heat conduction across an imperfect interface: a dual-reciprocity boundary element approach. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 30, n. 9, p. 781-789, 2006.

ANG, W. T. The two-dimensional reaction–diffusion Brusselator system: a dual-reciprocity boundary element solution. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, n. 9, p. 897-903, 2003.

ANG, W. T.; CLEMENTS, D. L.; VAHDATI, N.. A dual-reciprocity boundary element method for a class of elliptic boundary value problems for non-homogeneous anisotropic media. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, n. 1, p. 49-55, 2003.

ANG, W. T.; OOI, E. H. A dual-reciprocity boundary element approach for solving axisymmetric heat equation subject to specification of energy. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 32, n. 3, p. 210-215, 2008.

ANG, W.T. Elastodynamic antiplane deformation of a bimaterial with an imperfect viscoelastic interface: A dual reciprocity hypersingular boundary integral solution. **Applied Mathematical Modelling**, v. 31, n. 4, p. 749-762, 2007.

AYDIN, C.; TEZER-SEZGIN, M. DRBEM solution of the Cauchy MHD duct flow with a slipping perturbed boundary. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 93, p. 94-104, 2018.

AYDOGDU, M.; ECE, M. C. Buckling and vibration of non-ideal simply supported rectangular isotropic plates. **Mechanics Research Communications**, v. 33, n. 4, p. 532-540, 2006.

BAI, F.; LU, W.-Q. The selection and assemblage of approximation functions and disposal of its singularity in axisymmetric DRBEM for heat transfer problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 28, n. 8, p. 955-965, 2004.

BAIZ, P. M.; ALIABADI, M. H. Local buckling of thin-walled structures by the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 33, n. 3, p. 302-313, 2009.

BANK, L. C.; YIN, J. Buckling of orthotropic plates with free and rotationally restrained unloaded edges. **Thin-Walled Structures**, v. 24, n. 1, p. 83-96, 1996.

BARANOGLU, B.; MENGI, Y.. The use of dual reciprocity boundary element method in coupled thermoviscoelasticity. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 196, n. 1-3, p. 379-392, 2006.

BATDORF, S. B.; HOUBOLT, J. C. Critical Combinations of Shear and Transverse Direct Stress for an Infinitely Long Flat Plate with Edges Elastically Restrained Against Rotation. **National Advisory Committee for Aeronautics**, 1945.

BATDORF, S. B.; STEIN, M. Critical combinations of shear and direct stress for simply supported rectangular flat plates. 1947.

BECKER, A. A. **The boundary element method in engineering: a complete course**. London: McGraw-Hill, 1992.

BEHBAHANI-NIA, A.; KOWSARY, F. A dual reciprocity BE-based sequential function specification solution method for inverse heat conduction problems. **International journal of heat and mass transfer**, v. 47, n. 6-7, p. 1247-1255, 2004.

BERGMAN, S.; REISSNER, H. Über die Knickung von rechteckigen Platten bei Schubbeanspruchung. **Z. Flugtech Motorluftschiffahrt**, v. 23, p. 6, 1932.

BETTI, E. Teoria dell'elasticità. *Il Nuovo Cimento*. p. 7-10, 1872.

BEZINE, G. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. **Mechanics Research Communications**, v. 5, n. 4, p. 197-206, 1978.

BEZINE, G.; CIMETIERE, A.; GELBERT, J. P. Unilateral buckling of thin elastic plates by the boundary integral equation method. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 21, n. 12, p. 2189-2199, 1985.

BIAŁECKI, R. A.; JURGAŚ, P.; KUHN, G. Dual reciprocity BEM without matrix inversion for transient heat conduction. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 26, n. 3, p. 227-236, 2002.

BLOBNER, J.; HRIBERŠEK, M.; KUHN, G. Dual reciprocity BEM–BDIM technique for conjugate heat transfer computations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 190, n. 8-10, p. 1105-1116, 2000.

BOZKAYA, C. Least-squares differential quadrature time integration scheme in the dual reciprocity boundary element method solution of diffusive–convective problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 31, n. 1, p. 83-93, 2007.

BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. London. **Petench Press**, 1978.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J.; TASSOULAS, J. L. Boundary elements: An Introductory Course. **Journal of Applied Mechanics**, v. 58, p. 860, 1991.

BREBBIA, C. A.; NARDINI, D. Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure. **International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v. 2, n. 4, p. 228-233, 1983.

BREBBIA, C. A.; NARDINI, D. Solution of parabolic and hyperbolic time dependent problems using Boundary elements. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 12, n. 5-6, p. 1061-1072, 1986.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary element techniques— theory and applications in engineering**. Springer. New York, 1984.

BREBBIA, C. A.; WROBEL, L. C. Boundary element methods in heat transfer. **Springer Science & Business Media**, 2012.

BROCKENBROUGH, R.L.; JOHNSTON, B.G. Steel design manual. Pittsburgh: **United States Steel Corporation**, 1974.

BROWN, C. J. Elastic buckling of perforated plates subjected to concentrated loads. **Computers & Structures**, v. 36, n. 6, p. 1103-1109, 1990.

BROWN, C. J.; YETTRAM, A. L. Factors influencing the elastic stability of orthotropic plates containing a rectangular cut-out. **The Journal of Strain Analysis for Engineering Design**, v. 35, n. 6, p. 445-458, 2000.

BROWN, C. J.; YETTRAM, A. L. The elastic stability of square perforated plates under combinations of bending, shear and direct load. **Thin-Walled Structures**, v. 4, n. 3, p. 239-246, 1986.

BROWN, C. J.; YETTRAM, A. L.; BURNETT, M. Stability of plates with rectangular holes. **Journal of Structural Engineering**, v. 113, n. 5, p. 1111-1116, 1987.

BRYAN, G. H. On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane, with applications to the "buckling" of the sides of a ship. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. 1, n. 1, p. 54-67, 1890.

BUI, H. D. Some remarks about the formulation of three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations. **International Journal of Solids and Structures**, v. 14, n. 11, p. 935-939, 1978.

BUI, T. Q.; NGUYEN, M. N.; ZHANG, C. Buckling analysis of Reissner–Mindlin plates subjected to in-plane edge loads using a shear-locking-free and meshfree method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 35, n. 9, p. 1038-1053, 2011.

BULSON, P. S. **The stability of flat plates**. Elsevier Publishing Company, 1969.

CARUSO, N.; PORTAPILA, M.; POWER, H. PDE centres enhancement in the Localized Regular Dual Reciprocity Method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 64, p. 255-266, 2016.

CARUSO, N.; PORTAPILA, M.; POWER, Henry. An efficient and accurate implementation of the Localized Regular Dual Reciprocity Method. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 69, n. 11, p. 1342-1366, 2015.

CHANG, C.; CHIANG, F. Stability analysis of a thick plate with interior cutout. **AIAA journal**, v. 28, n. 7, p. 1285-1291, 1990.

CHANG-JUN, C.; RONG, W. Boundary integral equations and the boundary element method for buckling analysis of perforated plates. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 17, n. 1, p. 57-68, 1996.

CHEN, G.; ZHOU, J. **Boundary element methods with applications to nonlinear problems**. Springer Science & Business Media, 2010.

CHEN, H.-L. *et al.* Identification of transient boundary conditions with improved cuckoo search algorithm and polynomial approximation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 95, p. 124-141, 2018.

CHEN, J. T.; WONG, F. C. Analytical derivations for one-dimensional eigenproblems using dual boundary element method and multiple reciprocity method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 20, n. 1, p. 25-33, 1997.

CHEN, K. Improving the accuracy of DRBEM for convective partial differential equations. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 23, n. 8, p. 639-644, 1999.

CHEN, K.; SHANAZARI, K. A parallel implementation of overlapping Schwarz method for the dual reciprocity method. **Applied Mathematics and Computation**, v. 216, n. 11, p. 3355-3364, 2010.

CHEN, W.; TANAKA, M. Solution of some inverse heat conduction problems by the dynamic programming filter and BEM. In: TANAKA M.; DULIKRAVICH G. S. **Inverse Problems in Engineering Mechanics III**. Nagano: Elsevier, 2002. p. 23-28.

CHENG, A.; LAPE, O.; GRILLI, S. Dual-reciprocity BEM based on global interpolation functions. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 13, n. 4, p. 303-311, 1994.

CHENG, A.; YOUNG, D. L.; TSAI, C. C. Solution of Poisson's equation by iterative DRBEM using compactly supported, positive definite radial basis function. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, n. 7-8, p. 549-557, 2000.

CHENG, B.; LI, C. Buckling behavior of strengthened perforated plates under shear loading. **Steel & Composite Structures**, v. 13, n. 4, p. 367-382, 2012.

CHENG, B.; WANG, J.; LI, C. Compression tests and numerical analysis of perforated plates containing slotted holes in steel pylons. **Thin-Walled Structures**, v. 67, p. 129-143, 2013.

CHENG, B.; ZHAO, J. Strengthening of perforated plates under uniaxial compression: Buckling analysis. **Thin-Walled Structures**, v. 48, n. 12, p. 905-914, 2010.

CHIEN, C-C.; CHEN, Y-H.; CHUANG, C-C. Dual reciprocity BEM analysis of 2D transient elastodynamic problems by time-discontinuous Galerkin FEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, n. 6, p. 611-624, 2003.

CHINNABOON, B.; CHUCHEEPSAKUL, S.; KATSIKADELIS, J. T. A BEM-based meshless method for elastic buckling analysis of plates. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 7, n. 1, p. 81-99, 2007.

CHINO, E.; TOSAKA, N.. Dual reciprocity boundary element analysis of time-independent Burger's equation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 21, n. 3, p. 261-270, 1998.

CHOI, C-Y.; BALARAS, E.. A dual reciprocity boundary element formulation using the fractional step method for the incompressible Navier–Stokes equations. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 33, n. 6, p. 741-749, 2009.

CHOO, K-K. Microscale heat conduction in homogeneous anisotropic media: a dual-reciprocity boundary element method and polynomial time interpolation approach. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29, n. 12, p. 1143-1152, 2005.

CHOW, F.; NARAYANAN, R. Buckling of plates containing openings. In: SEVENTH INTERNATIONAL SPECIALTY CONFERENCE ON COLD-FORMED STEEL STRUCTURES, 7., 1984, Missouri. **Anais [...]**. Missouri: Missouri S&T, 1984. p. 39-53.

CHUANG, S-H.; YUEH, C-Y.; HUANG, L-H. Dual boundary element model coupled with the dual reciprocity method to determine wave scattering by a concentric cylindrical system mounted on a conical shoal. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 56, p. 30-38, 2015.

COOK, I. T.; ROCKEY, K. C. Shear buckling of orthogonally stiffened, infinitely long simply-supported plates- Stiffeners having torsional and flexural rigidities(Shear buckling of simply supported infinitely long plates orthogonally reinforced by stiffeners with flexural and torsional rigidity). **AERONAUTICAL QUARTERLY**, v. 20, p. 75-87, 1969.

COOK, I. T.; ROCKY, K. C. Shear buckling of rectangular plates with mixed boundary conditions. **Aeronaut. Q**, v. 14, n. 4, p. 349-355, 1963.

COSTA, J. A.; BREBBIA, C. A. Elastic buckling of plates using the boundary element method. **Boundary elements VII**, p. 4-29, 1985.

CRESCCE, S. H. **Análise não-linear de pavimentos de concreto armado pelo método dos elementos de contorno**. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

CRUSE, T. A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. **International journal of solids and structures**, v. 5, n. 12, p. 1259-1274, 1969.

CUI, M. *et al.* A new radial integration polygonal boundary element method for solving heat conduction problems. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 123, p. 251-260, 2018.

CUI, M. *et al.* A radial integration boundary element method for solving transient heat conduction problems with heat sources and variable thermal conductivity. **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, v. 73, n. 1, p. 1-18, 2018.

DANSON, D. J. Analysis of plate bending problems by direct boundary element method. **MSc Dissert.(4th edition) Univ. of Southampton**, 1979.

DAVIES, T. W.; MOSLEHY, F. A. Modal analysis of plates using the dual reciprocity boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 14, n. 4, p. 357-362, 1994.

DAVIS, B. A. *et al.* The dual-reciprocity method for heat transfer in polymer processing. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 13, n. 3, p. 249-261, 1994.

DAWE, D. J.; ROUFAEIL, O. L. Buckling of rectangular Mindlin plates. **Computers & Structures**, v. 15, n. 4, p. 461-471, 1982.

DE MEDEIROS, G. C.; PARTRIDGE, P. W.; BRANDÃO, J. O. The method of fundamental solutions with dual reciprocity for some problems in elasticity. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 28, n. 5, p. 453-461, 2004.

DEHGHAN, M.; GHESMATI, A. Application of the dual reciprocity boundary integral equation technique to solve the nonlinear Klein–Gordon equation. **Computer Physics Communications**, v. 181, n. 8, p. 1410-1418, 2010.

DEHGHAN, M.; GHESMATI, A. Solution of the second-order one-dimensional hyperbolic telegraph equation by using the dual reciprocity boundary integral equation (DRBIE) method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 34, n. 1, p. 51-59, 2010.

DEHGHAN, M.; MIRZAEI, D. A numerical method based on the boundary integral equation and dual reciprocity methods for one-dimensional Cahn–Hilliard equation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 33, n. 4, p. 522-528, 2009.

DEHGHAN, M.; MIRZAEI, D. The dual reciprocity boundary element method (DRBEM) for two-dimensional sine-Gordon equation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 6-8, p. 476-486, 2008.

DEHGHAN, M.; SHIRZADI, M. The modified dual reciprocity Boundary elements method and its application for solving stochastic partial differential equations. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 58, p. 99-111, 2015.

DENG, Z-S.; LIU, J. Modeling of multidimensional freezing problem during cryosurgery by the dual reciprocity boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 28, n. 2, p. 97-108, 2004.

DENG, Z-S.; LIU, J. Parametric studies on the phase shift method to measure the blood perfusion of biological bodies. **Medical engineering & physics**, v. 22, n. 10, p. 693-702, 2000.

DI PISA, C.; ALIABADI, M. H. Fatigue crack growth analysis of assembled plate structures with dual boundary element method. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 98, p. 200-213, 2013.

DIAZ-CONTRERAS, R. E.; NOMURA, S. Green's function applied to solution of Mindlin plates. **Computers & structures**, v. 60, n. 1, p. 41-48, 1996.

DIVO, E.; KASSAB, A.; CAVALLERI, R. Application of the DRBEM to model ablation characteristics of a thrust vector control vane. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 23, n. 8, p. 693-701, 1999.

DOBROSKOK, A. A.; LINKOV, A. M. CV dual reciprocity BEM for transient flow in blocky systems with singular points and lines of discontinuities. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 34, n. 3, p. 238-247, 2010.

DOVAL P. C. M.; ALBUQUERQUE E. L.; SOLLERO P. A boundary element formulation with boundary only discretization for the stability analysis of perforated thin plates. **Advances in Boundary Element & Meshless Techniques XIV**. 2013.

DOVAL, P. C. M. **Análise de estabilidade de placas de materiais compósitos laminados usando o método dos elementos de contorno**. 2013. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

DOVAL, P. C. M.; ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P. Análise de estabilidade de estruturas usando o método dos elementos de contorno. **Nono Simpósio de Mecânica Computacional, SIMMEC**, 2010

DOVAL, P. C. M.; ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P. Numerical aspects of the radial integration method in boundary element formulation for stability analysis of thin perforated plates of laminated composites. **Blucher Mechanical Engineering Proceedings**, v. 1, n. 1, p. 3879-3887, 2012.

DOVAL, P. C. M.; ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P. Stability analysis of composite laminate plates under non-uniform stress fields by the boundary element method. **EC ltd**, p. 156, 2011.

DOVAL, P. C. M.; ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P. Stability Analysis of Elastic Plates Under Non-Uniform Stress Fields by the Boundary Element Method. **Mecânica Computacional**, v. 29, n. 8, p. 699-705, 2010.

DOVAL, P. C. M.; ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P. Stability analysis of elastic plates under non-uniform stress fields by the boundary element method. **Mecânica Computacional**, v. 29, n. 8, p. 699-705, 2010.

DU, Q.; YAO, Z.; SONG, G. Solution of some plate bending problems using the boundary element method. **Applied mathematical modelling**, v. 8, n. 1, p. 15-22, 1984.

DUARTE, J. **Análise de Instabilidade em Placas Finas pelo Método dos Elementos de Contorno**. 1999. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

DURAI SWAMI, R.; SARKAR, K.; CHAHINE, G. L. Efficient 2D and 3D electrical impedance tomography using dual reciprocity boundary element techniques. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 22, n. 1, p. 13-31, 1998.

EL HARROUNI, K. *et al.* Aquifer parameter estimation by extended Kalman filtering and Boundary elements. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 19, n. 3, p. 231-237, 1997.

EL HARROUNI, K. *et al.* Dual reciprocity boundary element method for heterogeneous porous media. In: BREBBIA C. A.; INGBER M. S. **Boundary Element Technology VII**. Albuquerque: University of New Mexico, 1992. p. 151-159.

EL HARROUNI, K. *et al.* Global interpolation function based DRBEM applied to Darcy's flow in heterogeneous media. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 16, n. 3, p. 281-285, 1995.

EL HARROUNI, K. *et al.* Groundwater optimization and parameter estimation by genetic algorithm and dual reciprocity boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 18, n. 4, p. 287-296, 1996.

EL HARROUNI, K. *et al.* Groundwater parameter estimation by optimization and DRBEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 19, n. 2, p. 97-103, 1997.

EL HARROUNI, K. *et al.* Uncertainty analysis of groundwater flow with DRBEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 19, n. 3, p. 217-221, 1997.

ELDHO, T. I.; RAO, B. Vasudeva. Simulation of two-dimensional contaminant transport with dual reciprocity Boundary elements. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 20, n. 3, p. 213-228, 1997.

EL-SAWY, K. M.; MARTINI, M. I. Elastic stability of bi-axially loaded rectangular plates with a single circular hole. **Thin-Walled Structures**, v. 45, n. 1, p. 122-133, 2007.

EL-SAWY, K. M.; NAZMY, A. S. Effect of aspect ratio on the elastic buckling of uniaxially loaded plates with eccentric holes. **Thin-Walled Structures**, v. 39, n. 12, p. 983-998, 2001.

EL-SAWY, K. M.; NAZMY, A. S.; MARTINI, Mohammad Iqbal. Elasto-plastic buckling of perforated plates under uniaxial compression. **Thin-Walled Structures**, v. 42, n. 8, p. 1083-1101, 2004.

EL-ZAFRANY, A.; FADHIL, S.; DEBBIH, M. An efficient approach for boundary element bending analysis of thin and thick plates. **Computers & structures**, v. 56, n. 4, p. 565-576, 1995.

ELZEIN, A.; SYNGELLAKIS, S. Dual reciprocity in boundary element formulations of the plate buckling problem. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 9, n. 2, p. 175-184, 1992.

FAHMY, M. A. A time-stepping DRBEM for the transient magneto-thermo-viscoelastic stresses in a rotating non-homogeneous anisotropic solid. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 36, n. 3, p. 335-345, 2012.

FAHMY, M. A. Implicit–explicit time integration DRBEM for generalized magneto-thermoelasticity problems of rotating anisotropic viscoelastic functionally graded solids. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, n. 1, p. 107-115, 2013.

FAHMY, M. A. Shape design sensitivity and optimization of anisotropic functionally graded smart structures using bicubic B-splines DRBEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 87, p. 27-35, 2018.

FAHMY, M. A. Transient magneto-thermoviscoelastic plane waves in a non-homogeneous anisotropic thick strip subjected to a moving heat source. **Applied Mathematical Modelling**, v. 36, n. 10, p. 4565-4578, 2012.

FAN, Q-M.; LU, W-Q. A new numerical method to simulate the non-Fourier heat conduction in a single-phase medium. **International journal of heat and mass transfer**, v. 45, n. 13, p. 2815-2821, 2002.

FARCAS, A. *et al.* An inverse dual reciprocity method for hydraulic conductivity identification in steady groundwater flow. **Advances in water resources**, v. 27, n. 3, p. 223-235, 2004.

FARCAS, A. *et al.* The dual reciprocity boundary element method for solving Cauchy problems associated to the Poisson equation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, n. 10, p. 955-962, 2003.

FAZZOLARI, F. A.; BANERJEE, J. R.; BOSCOLO, M. Buckling of composite plate assemblies using higher order shear deformation theory—an exact method of solution. **Thin-Walled Structures**, v. 71, p. 18-34, 2013.

FEDELINSKI, P.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. The dual boundary element method in dynamic fracture mechanics. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 12, n. 3, p. 203-210, 1993.

FENDOĞLU, H.; BOZKAYA, C.; TEZER-SEZGIN, M. DBEM and DRBEM solutions to 2D transient convection-diffusion-reaction type equations. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 93, p. 124-134, 2018.

FENG, W. Z. *et al.* Analytically-integrated radial integration BEM for solving three-dimensional transient heat conduction problems. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 79, p. 21-30, 2016.

FERNANDES, G. R. **O método dos elementos de contorno aplicado à análise não-linear de placas**. 1998. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

FERREIRA, A. J. M. *et al.* Buckling analysis of isotropic and laminated plates by radial basis functions according to a higher-order shear deformation theory. **Thin-Walled Structures**, v. 49, n. 7, p. 804-811, 2011.

FLOREZ, W. F. *et al.* Local mass conservative Hermite interpolation for the solution of flow problems by a multi-domain boundary element approach. **Applied Mathematics and Computation**, v. 218, n. 11, p. 6446-6457, 2012.

FLOREZ, W. F.; POWER, H. Comparison between continuous and discontinuous Boundary elements in the multidomain dual reciprocity method for the solution of the two-dimensional Navier–Stokes equations. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 25, n. 1, p. 57-69, 2001.

FLOREZ, W. F.; POWER, H. DRM multidomain mass conservative interpolation approach for the BEM solution of the two-dimensional Navier-Stokes equations. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 43, n. 3-5, p. 457-472, 2002.

FLOREZ, W. F.; POWER, H. Multi-domain mass conservative dual reciprocity method for the solution of the non-Newtonian Stokes equations. **Applied Mathematical Modelling**, v. 26, n. 3, p. 397-419, 2002.

FOLTRAN, C. E. **Análise de problemas planos em regime elasto-plástico pelo método dos elementos de contorno**. 1999. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade Estadual de Campinas-Faculdade de Engenharia Civil, Campinas, 1999.

FREDHOLM, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. **Acta mathematica**, v. 27, n. 1, p. 365-390, 1903.

FRIEDRICH, J. A dual reciprocity boundary element model for the degradation of strongly eroded archaeological signs. **Mathematics and computers in simulation**, v. 48, n. 3, p. 281-293, 1999.

FRIEDRICH, J. Design and calibration of DRBEM solutions to determine the shape of archaeological signs. In: TANAKA, M.; DULIKRAVICH, G. S. **Inverse Problems in Engineering Mechanics**. Nagano: Elsevier, 1998. p. 131-140.

FRIEDRICH, J. Object-oriented design and implementation of CFDLab: a computer-assisted learning tool for fluid dynamics using dual reciprocity boundary element methodology. **Computers & Geosciences**, v. 25, n. 7, p. 785-800, 1999.

FUJITA, Y.; YOSHIDA, K.; ARAI, H. Instability of plates with holes (2nd report). **J. Soc. Naval Arch. Japan**, v. 126, p. 285-294, 1969.

GALVIS, A. F.; SOLLERO, P. 2D analysis of intergranular dynamic crack propagation in polycrystalline materials a multiscale cohesive zone model and dual reciprocity Boundary elements. **Computers & Structures**, v. 164, p. 1-14, 2016.

GAO X. W. Boundary only integral equations in boundary element analysis. Proceedings of the International Conference on BoundaryElement Techniques, 16 – 18 July, 2001, Rutgers University, NJ, USA, p. 39 – 46

GAO, X. W. A boundary element method without internal cells for two-dimensional and three-dimensional elastoplastic problems. **J. Appl. Mech.**, v. 69, n. 2, p. 154-160, 2002.

GAO, X. W. A meshless BEM for isotropic heat conduction problems with heat generation and spatially varying conductivity. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 66, n. 9, p. 1411-1431, 2006.

GAO, X. W. Boundary element analysis in thermoelasticity with and without internal cells. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 57, n. 7, p. 975-990, 2003.

GAO, X. W. Boundary only integral equations in boundary element analysis. In: PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON BOUNDARY ELEMENT TECHNIQUES, 2001. **Proceedings** [...]. New Jersey: Rutgers University, 2001. p. 16-18.

GAO, X. W. *et al.* Radial integration BEM for dynamic coupled thermoelastic analysis under thermal shock loading. **Computers & Structures**, v. 158, p. 140-147, 2015.

GAO, X. W. Numerical evaluation of two-dimensional singular boundary integrals—Theory and Fortran code. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 188, n. 1, p. 44-64, 2006.

GAO, X. W. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 26, n. 10, p. 905-916, 2002.

GAO, X. W.; ZHANG, C.; GUO, L. Boundary-only element solutions of 2D and 3D nonlinear and nonhomogeneous elastic problems. **Engineering analysis with boundary elements**, v. 31, n. 12, p. 974-982, 2007.

GERARD, G.; BECKER, H. **Handbook of Structural Stability. Part I. Buckling of Flat Plates**. New York Univ., New York, 1957.

GHADIALI, S. N.; HALPERN, D.; GAVER III, D. P. A dual-reciprocity boundary element method for evaluating bulk convective transport of surfactant in free-surface flows. **Journal of Computational Physics**, v. 171, n. 2, p. 534-559, 2001.

GHADIMI, P.; DASHTIMANESH, A. Solution of 2D Navier–Stokes equation by coupled finite difference-dual reciprocity boundary element method. **Applied Mathematical Modelling**, v. 35, n. 5, p. 2110-2121, 2011.

GHANNADPOUR, S. A. M.; OVESY, H. R.; ZIA-DEHKORDI, E. Buckling and post-buckling behavior of moderately thick plates using an exact finite strip. **Computers & Structures**, v. 147, p. 172-180, 2015.

GOSPAVIĆ, R. *et al.* DRM-MD approach for modeling laser–material interaction with axial symmetry. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 31, n. 3, p. 200-208, 2007.

GOSPAVIC, R.; POPOV, V.; TODOROVIC, G. Boundary element—dual reciprocity formulation for bound electron states in semiconductor quantum wires. **Computer Physics Communications**, v. 178, n. 5, p. 366-373, 2008.

GOSPODINOV, G.; LJUTSKANOV, D. The boundary element method applied to plates. **Applied Mathematical Modelling**, v. 6, n. 4, p. 237-244, 1982.

GRAMANN, P. J.; MÄTZIG, J. C.; OSSWALD, T. A. Boundary Element Simulation of the Mixing Process of Polymer Blends. In: BREBBIA C. A.; INGBER M. S. **Boundary Element Technology VII**. Albuquerque: University of New Mexico, 1992. p. 117-134.

GROSSKURTH, J. F.; GALLAGHER, R. H.; WHITE, R. N. Shear buckling of square perforated plates. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 102, n. 6, p. 1025-1040, 1976.

GUIGGIANI, M. Hypersingular boundary integral equations have an additional free term. **Computational Mechanics**, v. 16, n. 4, p. 245-248, 1995.

GUIGGIANI, M.. The evaluation of cauchy principal value integrals in the boundary element method—a review. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 15, n. 3-5, p. 175-184, 1991.

GUIGGIANI, M.; G., A. A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method. **Journal of Applied Mechanics**, v. 57, n. 4, p. 906-915, 1990.

GÜMGÜM, S.; TEZER-SEZGIN, M. DRBEM solution of mixed convection flow of nanofluids in enclosures with moving walls. **Journal of computational and applied mathematics**, v. 259, p. 730-740, 2014.

GÜMGÜM, S.; TEZER-SEZGIN, M. DRBEM solution of natural convection flow of nanofluids with a heat source. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 34, n. 8, p. 727-737, 2010.

GÜMGÜM, S.; WROBEL, L. C. DRBEM formulation for transient Stokes flow with slip boundary condition. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 75, p. 65-78, 2017.

GUO-SHU, S.; MUKHERJEE, S. Boundary element method analysis of bending of elastic plates of arbitrary shape with general boundary conditions. **Engineering analysis**, v. 3, n. 1, p. 36-44, 1986.

HÄGGBLAD, B.; BATHE, K. J. Specifications of boundary conditions for Reissner/Mindlin plate bending finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 30, n. 5, p. 981-1011, 1990.

HAMZEHEI-JAVARAN, S.; KHAJI, N. Complex Fourier element shape functions for analysis of 2D static and transient dynamic problems using dual reciprocity boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 95, p. 222-237, 2018.

HANSEN, E. B. Numerical solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems. **Journal of elasticity**, v. 6, n. 1, p. 39-56, 1976.

HARTMANN, F. **Introduction to Boundary elements: theory and applications**. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

HEUER, D. R. A boundary element method for eigenvalue problems of polygonal membranes and plates. **Acta mechanica**, v. 66, n. 1-4, p. 9-20, 1987.

HINTON, E. Buckling of initially stressed Mindlin plates using a finite strip method. **Computers & Structures**, v. 8, n. 1, p. 99-105, 1978.

HORIKANE, T. *et al.* 3D Electrical Impedance Prospecting Simulation Based on the Dual Reciprocity Boundary Element Modelling. In: TANAKA M.; DULIKRAVICH G. S. **Inverse Problems in Engineering Mechanics III**. Nagano: Elsevier, 2002. p. 411-418.

HÖRMANDER, L. **Linear partial differential operators**. Springer, 1963.

HOSSEINI-HASHEMI, S.; ATASHIPOUR, S. R.; FADAEE, M. On the buckling analysis of isotropic, transversely isotropic, and laminated rectangular plates via Reddy plate theory: an exact closed-form procedure. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 226, n. 5, p. 1210-1224, 2012.

HOSSEINI-HASHEMI, S.; KHORSHIDI, K.; AMABILI, M. Exact solution for linear buckling of rectangular Mindlin plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 315, n. 1, p. 318-342, 2008.

HSIAO, S. S.; CHANG, C. M.; WEN, C. C. Solution for wave propagation through a circular cylinder mounted on different topography ripple-bed profile shoals using DRBEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 33, n. 11, p. 1246-1257, 2009.

HU, S. Y. *et al.* Effect of mold heat transfer on the curing reaction of epoxy molding compound during transfer molding. **International communications in heat and mass transfer**, v. 23, n. 6, p. 779-788, 1996.

HUYTON, P.; YORK, C. B. Buckling of skew plates with continuity or rotational edge restraint. **Journal of aerospace engineering**, v. 14, n. 3, p. 92-101, 2001.

HWANG, I.; LEE, J. S. Buckling of orthotropic plates under various inplane loads. **KSCE Journal of Civil Engineering**, v. 10, n. 5, p. 349-356, 2006.

IGUCHI, S. Die knickung der rechteckigen platte durch Schubkräfte. **Archive of Applied Mechanics**, v. 9, n. 1, p. 1-12, 1938.

IRSCHIK, H.; HEUER, R.; ZIEGLER, F. BEM using Green's functions of rectangular domains: static and dynamic problems of bending of plates. In: BREBBIA C. A. **Boundary elements IX**. Springer-Verlag Berlin, 1987. p. 35-45.

ITAGAKI, M. Advanced dual reciprocity method based on polynomial source and its application to eigenvalue problem for nonuniform media. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, n. 2, p. 169-176, 2000.

IYENGAR, S. R.; KARASIMHAN, K. Y. Buckling of rectangular plates with clamped and simply-supported edges. **Publications de l'Institut Mathématique [Elektronische Ressource]**, v. 19, p. 31-40, 1965.

JALALI, S. K.; NAEI, M. H. Elastic Buckling of Moderately Thick Homogeneous Circular Plates of Variable Thickness. **Journal of Solid Mechanics**, v. 2, n. 1, p. 19-27, 2010.

JANA, P. Optimal design of uniaxially compressed perforated rectangular plate for maximum buckling load. **Thin-Walled Structures**, v. 103, p. 225-230, 2016.

JASWON, M. A.; MAITI, M.; SYMM, G. T. Numerical biharmonic analysis and some applications. **International Journal of Solids and Structures**, v. 3, n. 3, p. 309-332, 1967.

JAVARAN, S. H.; KHAJI, N.; MOHARRAMI, H. A dual reciprocity BEM approach using new Fourier radial basis functions applied to 2D elastodynamic transient analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 35, n. 1, p. 85-95, 2011.

JAYASHANKARBABU, B.; KARISIDDAPPA, K. Stability of Square Plate with Concentric Cutout. **International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering**, v. 3, n. 8, p. 259 - 267, 2013.

JESUS, L. J. M.; CIMINI, C. A.; ALBUQUERQUE, E. L. Application of the radial integration method into dynamic formulation of anisotropic shallow shells using boundary element method. In: ALFAIATE, J.; ALIABADI, M. H. **Key Engineering Materials**. Trans Tech Publications Ltd, 2015. p. 465-468.

JESUS, L. JM; ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P. Further Development in the Radial Integration Method. **Mecánica Computacional**, v. 29, n. 55, p. 5567-5575, 2010.

JOHNS, D. J.; KIRKPATRICK, D. L. I. **Shear buckling of isotropic and orthotropic plates: a review**. HM Stationery Office, 1971.

JUHÁSZ, Z.; SZEKRÉNYES, A. Progressive buckling of a simply supported delaminated orthotropic rectangular composite plate. **International Journal of Solids and Structures**, v. 69, p. 217-229, 2015.

JUMARHON, B.; AMINI, S.; CHEN, K. On the boundary element dual reciprocity method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 20, n. 3, p. 205-212, 1997.

KAMIYA, N.; SAWAKI, Y. The plate bending analysis by the dual reciprocity Boundary elements. **Engineering analysis**, v. 5, n. 1, p. 36-40, 1988.

KANE, J. H. **Boundary element analysis in engineering continuum mechanics**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994.

KANG, J.; LEISSA, A. W. Exact solutions for the buckling of rectangular plates having linearly varying in-plane loading on two opposite simply supported edges. **International Journal of Solids and Structures**, v. 42, n. 14, p. 4220-4238, 2005.

KARAM, V. J. **Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para flexão de placas**. 1986. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1986.

KARAM, V. J.; TELLES, J. C. F. On Boundary elements for Reissner's plate theory. **Engineering Analysis**, v. 5, n. 1, p. 21-27, 1988.

KARUR, S. R.; RAMACHANDRAN, P. A. Radial basis function approximation in the dual reciprocity method. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 20, n. 7, p. 59-70, 1994.

KATSIKADELIS, J. T. **Boundary elements: Theory and Applications**. Elsevier, 2002.

KATSIKADELIS, J. T. **The boundary element method for plate analysis**. Elsevier, 2014.

KATSIKADELIS, J. T.; BABOUSHKOS, N. The post-buckling analysis of plates. A BEM based meshless variational solution. **Facta Universitatis, Series Mechanics, Automatic Control and Robotics**, v. 6, p. 113-118, 2007.

KATSIKADELIS, J. T.; YOTIS, A. J. A new boundary element solution of thick plates modelled by Reissner's theory. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 12, n. 1, p. 65-74, 1993.

KAWAI, T.; OHTSUBO, H. A method of solution for the complicated buckling problems of elastic plates with combined use of Rayleigh-Ritz's procedure in the finite element method. **Proceedings of the 2nd Air Force Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics**, p. 967-994, 1968.

KELVIN, L. (THOMPSON W.). Note on the integration of the equations of equilibrium of an elastic solid. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, v. 3, p. 87-89, 1848.

KIM, S.; THAI, H.; LEE, J. Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory. **Thin-Walled Structures**, v. 47, n. 4, p. 455-462, 2009.

KIM, U. N.; CHOE, I. H.; PAIK, J. K. Buckling and ultimate strength of perforated plate panels subject to axial compression: experimental and numerical investigations with design formulations. **Ships and Offshore Structures**, v. 4, n. 4, p. 337-361, 2009.

KITIPORNCHAI S , XIANG Y . Buckling of thick skew plates. *Int J Numer Methods Eng* 1993;36:1299–310 .

KOMUR, M. A. *et al.* Buckling analysis of laminated composite plates with an elliptical/circular cutout using FEM. **Advances in Engineering Software**, v. 41, n. 2, p. 161-164, 2010.

KOMUR, M. A.; SONMEZ, M. Elastic buckling behavior of rectangular plates with holes subjected to partial edge loading. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 112, p. 54-60, 2015.

KOMUR, M. A.; SONMEZ, M. Elastic buckling of rectangular plates under linearly varying in-plane normal load with a circular cutout. **Mechanics Research Communications**, v. 35, n. 6, p. 361-371, 2008.

KONTONI, D. P. N. The dual reciprocity boundary element method for the transient dynamic analysis of elastoplastic problems. In: BREBBIA C. A.; INGBER M. S. **Boundary Element Technology VII**. Albuquerque: University of New Mexico, 1992 p. 653-669.

KONTONI, D. P. N.; BESKOS, D. E. Transient dynamic elastoplastic analysis by the dual reciprocity BEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 12, n. 1, p. 1-16, 1993.

KONTONI, D. P. N.; PARTRIDGE, P. W.; BREBBIA, C. A. The dual reciprocity boundary element method for the eigenvalue analysis of Helmholtz problems. **Advances in Engineering Software and Workstations**, v. 13, n. 1, p. 2-16, 1991.

KOVÁŘÍK, K. *et al.* Singular boundary method using dual reciprocity for two-dimensional transient diffusion. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 83, p. 256-264, 2017.

KROLL, W. D. Instability in shear of simply supported square plates with reinforced hole. **Journal of Research of the National Bureau of Standards**, v. 43, p. 465-472, 1949.

KUMAI, T. The flexural vibrations of a square plate with a central circular hole. **Proceedings of the Second Japanese National Congress on Applied Mechanics**. 1952. p. 339-342.

KUPRADZE, V. D. **Potential methods in the theory of elasticity**. Israel program for scientific translations, 1965.

KURGAN, E. A boundary element solution of the inhomogeneous magnetostatic problems. **Applied numerical mathematics**, v. 28, n. 2-4, p. 343-358, 1998.

KZAM, A. K. L. **Formulação dual em mecânica da fratura utilizando elementos de contorno curvos de ordem qualquer**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

KZAM, A. K. L.; CODA, H. B. Tratamento das integrais singulares do método dos elementos de contorno. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 12, n. 54, p. 17-30, 2010.

LAWRENCE C. B., JIANSHENG Y. Buckling of orthotropic plates with free and rotationally restrained unloaded edges. **Thin-Walled Structures** Volume 24, Issue 1, 1996, Pages 83–96

LEE, K. H.; LIM, G. T.; WANG, C. M. Thick Lévy plates re-visited. **International Journal of Solids and Structures**, v. 39, n. 1, p. 127-144, 2002.

LEE, L.; WU, T. W.; ZHANG, P. A dual-reciprocity method for acoustic radiation in a subsonic non-uniform flow. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 13, n. 4, p. 365-370, 1994.

LEE, Y. J.; LIN, H. J.; LIN, C. C. A study on the buckling behavior of an orthotropic square plate with a central circular hole. **Composite Structures**, v. 13, n. 3, p. 173-188, 1989.

LEGGETT, D. **The buckling of a square panel under shear when one pair of opposite edges is clamped, and the other pair is simply supported**. HM Stationery Office, 1941.

LEVY, S.; WOOLLEY, R. M.; KROLL, W. D. Instability of simply supported square plate with reinforced circular hole in edge compression. **Journal of Research**, p. 571-577, 1947.

LI, K.; HUANG, Q. B.; MIAO, Y. Dual reciprocity hybrid boundary node method for acoustic eigenvalue problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 34, n. 4, p. 359-368, 2010.

LIBOVE, C.; FERDMAN, S.; REUSCH, J. J. Elastic buckling of a simply supported plate under a compressive stress that varies linearly in the direction of loading. **National Advisory Committee for Aeronautics**. Langley Aeronautical Lab, 1949.

LIEW, K.M.; XIANG, Y.; KITIPORNCHAI, S. Analytical buckling solutions for mindlin plates involving free edges, **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 38, n. 10, p. 1127-1138, 1996.

LIN, J.; DUFFIELD, R. C.; SHIH, H. Buckling analysis of elastic plates by boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 23, n. 2, p. 131-137, 1999.

LIU, J.; XU, L. X. Boundary information based diagnostics on the thermal states of biological bodies. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 43, n. 16, p. 2827-2839, 2000.

LIU, M.; ZHAO, G. Case study of using boundary integration technique in reservoir modeling of single-e two-phase immiscible fluid flow. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 106, p. 9-17, 2013.

LIU, Y. Elastic stability analysis of thin plate by the boundary element method—a new formulation. **Engineering analysis**, v. 4, n. 3, p. 160-164, 1987.

LOVE, A. E. H. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London.(A.)**, n. 179, p. 491-546, 1888.

LU, W. Q. Boundary element analysis of the heat transfer in Bridgman growth process of semi-transparent crystals. **Materials Science and Engineering: A**, v. 292, n. 2, p. 219-223, 2000.

LU, W. Q.; LIU, J.; ZENG, Y. Simulation of the thermal wave propagation in biological tissues by the dual reciprocity boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 22, n. 3, p. 167-174, 1998.

LU, X.; WU, W. L. A subregion DRBEM formulation for the dynamic analysis of two-dimensional cracks. **Mathematical and computer modelling**, v. 43, n. 1-2, p. 76-88, 2006.

LUO, J.; QIAO, R.; LI, J. A dual reciprocity multiwavelet Galerkin method for the numerical solution of Poisson' s equation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 65, p. 55-62, 2016.

MAIORANA, E.; PELLEGRINO, C.; MODENA, C. Elastic stability of plates with circular and rectangular holes subjected to axial compression and bending moment. **Thin-Walled Structures**, v. 47, n. 3, p. 241-255, 2009.

MAIORANA, E.; PELLEGRINO, C.; MODENA, C. Linear buckling analysis of perforated plates subjected to localised symmetrical load. **Engineering Structures**, v. 30, n. 11, p. 3151-3158, 2008.

MAIORANA, E.; PELLEGRINO, C.; MODENA, C.. Elasto-plastic behaviour of perforated steel plates subjected to compression and bending. **Steel and Comp. Struct**, v. 11, n. 2, p. 131-147, 2011.

MAITI, M.; CHAKRABARTY, S. K. Integral equation solutions for simply supported polygonal plates. **International Journal of Engineering Science**, v. 12, n. 10, p. 793-806, 1974.

MANOLIS, G. D.; BESKO, D. E.; PINEROS, M. F. Beam and plate stability by Boundary elements. **Computers & structures**, v. 22, n. 6, p. 917-923, 1986.

MARCZAK, R. J. Análise de estabilidade linear elástica de placas finas e semi-espessas através do método dos elementos de contorno. **Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería**, v. 11, n. 4, p. 625-636, 1995.

MARIN, L. *et al.* Dual reciprocity boundary element method solution of the Cauchy problem for Helmholtz-type equations with variable coefficients. **Journal of sound and vibration**, v. 297, n. 1-2, p. 89-105, 2006.

MATSUMOTO, T.; TANAKA, M.; TSUKAMOTO, T. Identifications of source distributions using BEM with dual reciprocity method. In: TANAKA M. **Inverse Problems in Engineering Mechanics IV**. Nagano: Elsevier, 2003. p. 127-135.

MAY, I. M.; GANABA, T. H. Elastic stability of plates with and without openings. **Engineering computations**, v. 5, n. 1, p. 50-52, 1988.

MCKENZIE, K. I. The buckling of a rectangular plate under combined biaxial compression, bending and shear (Buckling stresses investigated for simply supported rectangular plate subjected to combined biaxial compression, bending and shear). **Aeronautical Quarterly**, v. 15, p. 239-246, 1964.

MEDEIROS, G. C.; PARTRIDGE, P. W.; BRANDÃO, J. O. The method of fundamental solutions with dual reciprocity for some problems in elasticity. **Engineering analysis with boundary elements**, v. 28, n. 5, p. 453-461, 2004.

MERAL, G.; TEZER-SEZGIN, M. DRBEM solution of exterior nonlinear wave problem using FDM and LSM time integrations. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 34, n. 6, p. 574-580, 2010.

MERAL, G.; TEZER-SEZGIN, M. The comparison between the DRBEM and DQM solution of nonlinear reaction–diffusion equation. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 16, n. 10, p. 3990-4005, 2011.

MICHAEL, M. E. Critical Shear Stress for Webs with Holes. J. R. **Aeronaut. Soc.**, v. 64, p. 268, 1960.

MIKHLINI, S. G. Integral equations. **Pergamon Press**, New York, 1957.

MILLAR, F.; MORA, D. A finite element method for the buckling problem of simply supported Kirchhoff plates. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 286, p. 68-78, 2015.

MIZUSAWA, T. Buckling of rectangular Mindlin plates with tapered thickness by the spline strip method, **International Journal of Solids and Structures**, v. 30, p. 1663–1677, 1993.

MOEN, C. D.; SCHAFFER, B. W. Elastic buckling of thin plates with holes in compression or bending. **Thin-Walled Structures**, v. 47, n. 12, p. 1597-1607, 2009.

MOEN, C. D.; SCHAFFER, B. W. Impact of holes on the elastic buckling of cold-formed steel columns. **Eighteenth international specialty conference on cold-formed steel structures**. Missouri S&T, 2006.

MOEN, C. D.; SCHAFFER, B. W. Simplified methods for predicting elastic buckling of cold-formed steel structural members with holes. In: PROCEEDINGS OF THE 19TH

INTERNATIONAL SPECIALTY CONFERENCE ON COLD-FORMED STEEL STRUCTURES, 19, 2008, Missouri. **Proceedings** [...]. Missouri: Missouri University of Science and Technology, Rolla, 2008. p. 17-31.

MONEGATO, G.; SLOAN, Ian H. Numerical solution of the generalized airfoil equation for an airfoil with a flap. **SIAM journal on numerical analysis**, v. 34, n. 6, p. 2288-2305, 1997.

MOSLEMI, A.; NEYA, B. N.; AMIRI, J. V.. 3-D elasticity buckling solution for simply supported thick rectangular plates using displacement potential functions. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, n. 11-12, p. 5717-5730, 2016.

MOUSAVI, H.; AZHARI, M.; SAADATPOUR, M. M.. A novel formulation for static and buckling analysis of plates using coupled element free Galerkin-finite strip (EFG-FS). **Applied Mathematical Modelling**, v. 70, p. 264-284, 2019.

MUSKHELISHVILI, N. I. **Singular Integral Equations: Boundary Problems of Functions Theory and Their Application to Mathematical Physics**. P. Noordhoff, 1953.

MUSKHELISHVILI, N. I. **Some basic problems of the mathematical theory of elasticity**. Springer Science & Business Media, 1977.

NAJARZADEH, L.; MOVAHEDIAN, B.; AZHARI, M. Numerical solution of scalar wave equation by the modified radial integration boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 105, p. 267-278, 2019.

NAJARZADEH, L.; MOVAHEDIAN, B.; AZHARI, M. Stability analysis of the thin plates with arbitrary shapes subjected to non-uniform stress fields using boundary element and radial integration methods. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 87, p. 111-121, 2018.

NARAYANAN, R. DER AVANESSIAN, N. G. V. **Strength of Webs Containing Circular Cut-outs**, IABSE Proceedings P-64/83, 141-152

NARAYANAN, R.; CHOW, F. Strength of biaxially compressed perforated plates. In: In: SEVENTH INTERNATIONAL SPECIALTY CONFERENCE ON COLD-FORMED STEEL STRUCTURES, 7., 1984, Missouri. **Anais** [...]. Missouri: Missouri S&T, 1984. p. 55-73

NARAYANAN, R.; CHOW, F. Y. Ultimate capacity of uniaxially compressed perforated plates. **Thin-Walled Structures**, v. 2, n. 3, p. 241-264, 1984.

NARAYANAN, R.; DER AVANESSIAN, N. G. V. Elastic buckling of perforated plates under shear. **Thin-Walled Structures**, v. 2, n. 1, p. 51-73, 1984.

NARAYANAN, R.; DER-AVANESSIAN, N. G. V. Analysis of plate girders with perforated webs. **Thin-walled structures**, v. 4, n. 5, p. 363-380, 1986.

NARAYANAN, R.; ROCKEY, K. C. ULTIMATE LOAD CAPACITY OF PLATE GIRDERS WITH WEBS CONTAINING CIRCULAR CUT-OUTS. **Proceedings of the institution of civil engineers**, v. 71, n. 3, p. 845-862, 1981.

NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. A new approach to free vibration analysis using Boundary elements. **Applied mathematical modelling**, v. 7, n. 3, p. 157-162, 1983.

NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. Boundary integral formulation of mass matrices for dynamic analysis. In: BREBBIA, C. A. **Time-dependent and Vibration Problems.**, Berlin: Springer, 1985. p. 191-208.

NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. Transient boundary element elastodynamics using the dual reciprocity method and modal superposition. **Boundary elements VIII**, v. 1, p. 435-443, 1986.

NATALINI, B.; POPOV, V. An alternative approach for calculation of the first and higher order derivatives in the DRM-MD. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 28, n. 1, p. 61-78, 2004.

NATALINI, B.; POPOV, V. On the optimal implementation of the boundary element dual reciprocity method—multi-domain approach for 3D problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 31, n. 3, p. 275-287, 2007.

NEJAD A.; SHANMUGAM N.E. Elastic buckling of uniaxially loaded skew plates containing openings. **Thin-Walled Structures**, v. 49, n. 10, p. 1208-1216, 2011.

NEMETH, M. Buckling behavior of compression-loaded symmetrically laminated angle-ply plates with holes. **aiaa journal**, v. 26, n. 3, p. 330-336, 1988.

NEMETH, M. P. A buckling analysis for rectangular orthotropic plates with centrally located cutouts. 1984.

NEMETH, M. P.; STEIN, M.; JOHNSON, E. R. **An Approximate Buckling Analysis for Rectangular Orthotropic Plates with Centrally Located Cutouts**. NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION HAMPTON VA LANGLEY RESEARCH CENTER, 1986.

NERANTZAKI, M. S.; KATSIKADELIS, J. T. Buckling of plates with variable thickness—an analog equation solution. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 18, n. 2, p. 149-154, 1996.

NERANTZAKI, M. S.; KATSIKADELIS, J. T. The BEM for large deflection analysis of plates with variable thickness. **Advances in Boundary Element Techniques IV**, p. 353-358, 2003.

NIKU, S. M.; ADEY, R. A. Computational aspect of the dual reciprocity method for dynamics. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 18, n. 1, p. 43-61, 1996.

NIKU, S. M.; BREBBIA, C. A. Dual reciprocity boundary element formulation for potential problems with arbitrarily distributed sources. **Engineering analysis**, v. 5, n. 1, p. 46-48, 1988.

NIWA, Y.; KOBAYACHI, S.; FUKUI, T. An application of the integral equation method of plate bending. **Faculty of Engineering**, Tokio, v. 36, p. 140-158, 1974.

NOWAK, A. J.; BREBBIA, C. A. The multiple-reciprocity method. A new approach for transforming BEM domain integrals to the boundary. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 6, n. 3, p. 164-167, 1989.

NOWAK, A. J.; PARTRIDGE, P. W. Comparison of the dual reciprocity and the multiple reciprocity methods. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 10, n. 2, p. 155-160, 1992.

OCHIAI, Y.; SHIMIZU, T. Deformation analysis of thin plate with distributed load by triple-reciprocity boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 36, n. 5, p. 772-778, 2012.

OĞLAKKAYA, F. S.; BOZKAYA, Canan. MHD natural convection in a semi-annulus enclosure filled with water-based nanofluid using DRBEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 71, p. 151-163, 2016.

OĞLAKKAYA, F. S.; BOZKAYA, Canan. Unsteady MHD mixed convection flow in a lid-driven cavity with a heated wavy wall. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 148, p. 231-245, 2018.

ONKAR, A. K.; UPADHYAY, C. S.; YADAV, D. Stochastic finite element buckling analysis of laminated plates with circular cutout under uniaxial compression. **Journal of applied mechanics**, v. 74, n. 4, p. 798-809, 2007.

PAIK, J. K. Ultimate strength of perforated steel plates under combined biaxial compression and edge shear loads. **Thin-Walled Structures**, v. 46, n. 2, p. 207-213, 2008.

PAIK, J. K. Ultimate strength of perforated steel plates under edge shear loading. **Thin-Walled Structures**, v. 45, n. 3, p. 301-306, 2007.

PAIK, J. K. Ultimate strength of steel plates with a single circular hole under axial compressive loading along short edges. **Ships and offshore structures**, v. 2, n. 4, p. 355-360, 2007.

PALERMO JR, L. The tangential differential operator applied to a stress boundary integral equation for plate bending including the shear deformation effect. **Engineering analysis with boundary elements**, v. 36, n. 8, p. 1213-1225, 2012.

PALERMO JR., L. **A análise de placas e o Método dos Elementos de contorno**. Livro docência. Universidade Estadual de Campinas, 2000.

PALERMO JR., L. **Esforços de Flexão e Flexo-Torção em Teoria de Segunda Ordem - Automação de Cálculo**. 1985. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade de São Paulo, Escola de engenharia de São Carlos, São Carlos, 1985.

PALERMO JR., L. On the harmonic solution for plate bending considering effects of the shear deformation and the forces in the middle plane. **Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXXVII**, p. 241-251, 2014.

PALERMO JR., L. Plate bending analysis using the classical or the Reissner–Mindlin models. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, n. 6, p. 603-609, 2003.

PALERMO JR., L.; SOARES JR., R. A. On the boundary element formulation to compute critical loads considering the effect of shear deformation in the plate bending. **Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXXVIII**, v. 38, 2015.

PARIS, F.; LEON, S. Boundary element method applied to the analysis of thin plates. **Computers & structures**, v. 25, n. 2, p. 225-233, 1987.

PARK, M.; CHOI, D.. A two-variable first-order shear deformation theory considering in-plane rotation for bending, buckling and free vibration analyses of isotropic plates. **Applied Mathematical Modelling**, v. 61, p. 49-71, 2018.

PARTRIDGE, P. W. Dual reciprocity BEM: local versus global approximation functions for diffusion, convection and other problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 14, n. 4, p. 349-356, 1994.

PARTRIDGE, P. W. *et al.* (Ed.). **Dual reciprocity boundary element method**. Springer Science & Business Media, 1992.

PARTRIDGE, P. W. Towards criteria for selecting approximation functions in the dual reciprocity method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, n. 7-8, p. 519-529, 2000.

PARTRIDGE, P. W.; SENSALÉ, B. The method of fundamental solutions with dual reciprocity for diffusion and diffusion–convection using subdomains. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, n. 9, p. 633-641, 2000.

PAVLOVIC, M. N.; BAKER, G. The effect of non-uniform stress distribution on the stability of biaxially compressed plates. **Res mechanica**, v. 28, n. 1-4, p. 69-89, 1989.

PEKMEN, B.; TEZER-SEZGIN, M. DRBEM solution of free convection in porous enclosures under the effect of a magnetic field. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 56, n. 1-2, p. 454-468, 2013.

PEKMEN, B.; TEZER-SEZGIN, M. MHD flow and heat transfer in a lid-driven porous enclosure. **Computers & Fluids**, v. 89, p. 191-199, 2014.

PEKMEN, B.; TEZER-SEZGIN, M. Numerical solution of buoyancy MHD flow with magnetic potential. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 71, p. 172-182, 2014.

PEKÖZ, T. Development of a Unified Approach to the Design of Cold-formed Steel Members. Research Report CF 87-1, **American Iron and Steel Institute**, 1987

PELLEGRINO, C.; MAIORANA, E.; MODENA, C. Linear and non-linear behaviour of steel plates with circular and rectangular holes under shear loading. **Thin-Walled Structures**, v. 47, n. 6, p. 607-616, 2009.

PENG, H. F. *et al.* Radial integration BEM for steady convection-conduction problem with spatially variable velocity and thermal conductivity. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 126, p. 1150-1161, 2018.

PENG, H. F. *et al.* Radial integration boundary element method for solving two-dimensional unsteady convection–diffusion problem. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 102, p. 39-50, 2019.

PENG, H. F.; CUI, M.; GAO, X. W. A boundary element method without internal cells for solving viscous flow problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, n. 2, p. 293-300, 2013.

PENG, H. F. *et al.* Radial integration boundary element method for solving two-dimensional unsteady convection–diffusion problem. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 102, p. 39-50, 2019.

PÉREZ-GAVILÁN, J. J.; ALIABADI, M. H. A symmetric Galerkin formulation and dual reciprocity for 2D elastostatics. **Engineering analysis with boundary elements**, v. 25, n. 3, p. 229-235, 2001.

PERREY-DEBAIN, E. Analysis of convergence and accuracy of the DRBEM for axisymmetric Helmholtz-type equation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 23, n. 8, p. 703-711, 1999.

PERREY-DEBAIN, E.; GERVAIS, Y.; GUILBAUD, M. Calcul de la propagation acoustique en milieux non homogènes infinis par la DRBEM. **CR Acad. Sci. Paris**, v. 326, p. 649-656, 1998.

PERREY-DEBAIN, E.; GERVAIS, Y.; GUILBAUD, M. Extension de la DRBEM à la propagation guidée en écoulement cisailé. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics**, v. 328, n. 5, p. 429-436, 2000.

PHAM, C. H. Shear buckling of plates and thin-walled channel sections with holes. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 128, p. 800-811, 2017.

POMERANZ, S. B.; HAMILL, W. A. Dual reciprocity versus Bessel function fundamental solution boundary element methods for the plane strain deformation of a thin plate on an elastic foundation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 41, p. 37-46, 2014.

POOLE, G.; LIU, Y-C.; MANDEL, J. Advancing analysis capabilities in ANSYS through solver technology. **Electronic Transactions on Numerical Analysis**, v. 15, p. 106-121, 2003.

PORTAPILA, M.; POWER, H. Iterative schemes for the solution of system of equations arising from the DRM in multi domain approach, and a comparative analysis of the performance of two different radial basis functions used in the interpolation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29, n. 2, p. 107-125, 2005.

POWER, H.; MINGO, R. The DRM sub-domain decomposition approach for two-dimensional thermal convection flow problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, n. 1, p. 121-127, 2000.

POWER, H.; MINGO, R. The DRM subdomain decomposition approach to solve the two-dimensional Navier–Stokes system of equations. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, n. 1, p. 107-119, 2000.

POZRIKIDIS, C. **A practical guide to boundary element methods with the software library BEMLIB**. CRC Press, 2002.

PRABHAKARA, D. L.; DATTA, P. K. Vibration, buckling and parametric instability behaviour of plates with centrally located cutouts subjected to in-plane edge loading (tension or compression). **Thin-Walled Structures**, v. 27, n. 4, p. 287-310, 1997.

PURBOLAKSONO, J. **Buckling and Post-Buckling Analysis of Cracked Plates by The Boundary Element Method**. 2003. Tese (Doutorado) - University of London, Londres, 2003.

PURBOLAKSONO, J.; ALIABADI, M. H. Buckling analysis of shear deformable plates by boundary element method. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 62, n. 4, p. 537-563, 2005.

PURBOLAKSONO, J.; ALIABADI, M. H. Large deformation of shear-deformable plates by the boundary-element method. **Journal of engineering mathematics**, v. 51, n. 3, p. 211-230, 2005.

PURBOLAKSONO, J.; ALIABADI, M. H. Stability of Euler's method for evaluating large deformation of shear deformable plates by dual reciprocity boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 34, n. 9, p. 819-823, 2010.

PURBOLAKSONO, J.; DIRGANTARA, T.; ALIABADI, M. H. Fracture mechanics analysis of geometrically nonlinear shear deformable plates. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 36, n. 2, p. 87-92, 2012.

QIU, F. L.; FISHER, A. C. The dual reciprocity method: simulation of potential step voltammetry at microelectrodes. **Electrochemistry communications**, v. 2, n. 10, p. 738-742, 2000.

QU, S. *et al.* Radial integration boundary element method for acoustic eigenvalue problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, n. 7-8, p. 1043-1051, 2013.

QU, W. *et al.* Three-dimensional thermal stress analysis using the indirect BEM in conjunction with the radial integration method. **Advances in Engineering Software**, v. 112, p. 147-153, 2017.

RAHAIM, C. P.; KASSAB, A. J. Pressure correction DRBEM solution for heat transfer and fluid flow in incompressible viscous fluids. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 18, n. 4, p. 265-272, 1996.

RAP, A. *et al.* DRBEM for Cauchy convection-diffusion problems with variable coefficients. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 28, n. 11, p. 1321-1333, 2004.

RASHED, Y. F. A relative quantity integral equation formulation for evaluation of boundary stress resultants in shear deformable plate bending problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 32, n. 2, p. 152-161, 2008.

RASHED, Y. F. Boundary element modelling of flat plate floors under vertical loading. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 62, n. 12, p. 1606-1635, 2005.

RASHED, Y. F. Boundary element formulations for thick plates. **Computational Mechanics Publications**, 2000.

RASHED, Y. F.; ALIABADI, M. H.; BREBBIA, C. A. Hypersingular boundary element formulation for Reissner plates. **International journal of solids and structures**, v. 35, n. 18, p. 2229-2249, 1998.

RASHED, Y. F.; ALIABADI, M. H.; BREBBIA, C. A. On the evaluation of the stresses in the BEM for Reissner plate-bending problems. **Applied Mathematical Modelling**, v. 21, n. 3, p. 155-163, 1997.

REAL, M. *et al.* Elastic and elasto-plastic buckling analysis of perforated steel plates. **VETOR-Revista de Ciências Exatas e Engenharias**, v. 23, n. 2, p. 61-70, 2013.

REDDY, J. A simple higher-order theory for laminated composite plates. **Journal of applied Mechanics**, v. 51, p. 745-752, 1984.

REDDY J. **Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics**. 2nd ed. John Wiley & Sons, NY, 2002.

REDDY, J. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. CRC press, 2003.

REIS, A.. **Formulações do método dos elementos de contorno para análise de placas de materiais compostos laminados**. 2010. Tese (Doutorado em

Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, 2010.

REISSNER, E. On the theory of transverse bending of elastic plates. **International Journal of Solids and Structures**, v. 12, n. 8, p. 545-554, 1976.

REISSNER, E. On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 11, n. 5, p. 569-573, 1975.

REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. **Journal of applied Mechanics**, v. 12, p. 69-77, 1945.

RIBEIRO, G. O. **Sobre a formulação do método dos elementos de contorno de placas usando as hipóteses de Reissner**. 1992. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, São Carlos, 1992.

RIBEIRO, J. R. M. **Estudo da Validade da Hipótese de Kirchhoff-Love na Teoria de Placas**. 1976. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1976.

RITCHIE, D.; RHODES, J. Buckling and post-buckling behaviour of plates with holes. **The Aeronautical Quarterly**, v. 26, n. 4, p. 281-296, 1975.

ROBERTS, T. M.; AZIZIAN, Z. G. Strength of perforated plates subjected to in-plane loading. **Thin-Walled Structures**, v. 2, n. 2, p. 153-164, 1984.

ROCHA, L. A. O. *et al.* Constructal design applied to the elastic buckling of thin plates with holes. **Central European Journal of Engineering**, v. 3, n. 3, p. 475-483, 2013.

RODRÍGUEZ, J. J.; POWER, H. An adaptive dual reciprocity scheme for the numerical solution of the Poisson equation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 26, n. 4, p. 283-300, 2002.

ROY, R. V.; GRILLI, S. T. Probabilistic analysis of flow in random porous media by stochastic Boundary elements. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 19, n. 3, p. 239-255, 1997.

RUOCCO, E. *et al.* Analytical solution for buckling of Mindlin plates subjected to arbitrary boundary conditions. **Applied Mathematical Modelling**, v. 50, p. 497-508, 2017.

SABIR, A. B.; CHOW, F. Y. Elastic buckling of flat panels containing circular and square holes. **Granada Publishing Ltd.**, p. 311-321, 1983.

SABIR, A. B.; CHOW, F. Y. Elastic buckling of plates containing eccentrically located circular holes. **Thin-walled structures**, v. 4, n. 2, p. 135-149, 1986.

SABIR, A. B.; DAVIES, G. T. Vibration and buckling of square plates containing central holes. In: ASME ASIA CONGRESS AND EXHIBITION, 1997, Singapore. **Proceedings** [...]. Singapore, 1997.

SAKANAKA, S. H., **Determinação de frequências naturais e cargas críticas em placas incluindo o efeito da deformação por cortante com o método dos elementos de contorno**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

SAKIYAMA, T.; MATSUDA, H. Elastic buckling of rectangular Mindlin plate with mixed boundary conditions. **Computers & Structures**, v. 25, n.5, p. 801-808, 1987

SALERNO, V. L.; GOLDBERG, M. A. Effect of shear deformations on the bending of rectangular plates. **Journal of applied Mechanics**, v. 27, n. 1, p. 54-58, 1960.

SANCHES, L. C. F. The Direct Boundary Element Method Applied to Modeling Differential and Integral Elastic Thin and Thick Plates Equations. **Synergismus scientifica UTFPR**, v. 4, n. 2, 2009.

SANTANA, A. P. **Formulação do método dos elementos de contorno para análise de placas espessas isotrópicas e ortotrópicas**. 2014. Tese (Doutorado em Ciências Mecânicas) - Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

ŠARLER, B.; KUHN, G.. Dual reciprocity boundary element method for convective-diffusive solid-liquid phase change problems, Part 1. Formulation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 21, n. 1, p. 53-63, 1998.

ŠARLER, B.; KUHN, G.. Primitive variable dual reciprocity boundary element method solution of incompressible Navier–Stokes equations. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 23, n. 5-6, p. 443-455, 1999.

ŠARLER, B. *et al.* Dual reciprocity boundary element method solution of natural convection in Darcy–Brinkman porous media. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 28, n. 1, p. 23-41, 2004.

SAWAKI, Y.; TAKEUCHI, K.; KAMIYA, N. Nonlinear bending analysis without domain-cell discretization. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 7, n. 3, p. 130-135, 1990.

SAYYAD, A.S., GHUGAL, Y.M. Buckling analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory. **Applied and Computational Mechanics 6(2)**: 185 – 196, 2012.

SCHLACK, A. L. Elastic stability of pierced square plates. **Experimental Mechanics**, v. 4, n. 6, p. 167-172, 1964.

SCHLACK, A. L. Experimental critical loads for perforated square plates. **Experimental Mechanics**, v. 8, n. 2, p. 69-74, 1968.

SENEL, P.; TEZER-SEZGIN, M. DRBEM solutions of Stokes and Navier–Stokes equations in cavities under point source magnetic field. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 64, p. 158-175, 2016.

SERROR, M. H.; HAMED, A. N.; MOURAD, S. A. Numerical study on buckling of steel web plates with openings. **STEEL AND COMPOSITE STRUCTURES**, v. 22, n. 6, p. 1417-1443, 2016.

SEYDEL, E. Über das Ausbeulen von rechteckigen, isotropen oder orthogonalanisotropen Platten bei Schubbeanspruchung. **Ingenieur-Archiv**, v. 4, n. 2, p. 169-191, 1933.

SHAKERLEY, T. M.; BROWN, C. J. Elastic buckling of plates with eccentrically positioned rectangular perforations. **International journal of mechanical sciences**, v. 38, n. 8, p. 825-838, 1996.

SHANAZARI, K.; CHEN, K. An overlapping domain decomposition dual reciprocity method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, n. 10, p. 945-953, 2003.

SHANMUGAM, N. E. *et al.* Elastic buckling of uniaxially loaded skew plates containing openings. **Thin-Walled Structures**, v. 49, n. 10, p. 1208-1216, 2011.

SHANMUGAM, N. E.; THEVENDRAN, V.; TAN, Y. H. Design formula for axially compressed perforated plates. **Thin-Walled Structures**, v. 34, n. 1, p. 1-20, 1999.

SHI, G. Flexural vibration and buckling analysis of orthotropic plates by the boundary element method. **International Journal of Solids and Structures**, v. 26, n. 12, p. 1351-1370, 1990.

SHIMIZU, S.; YOSHIDA, S.; ENOMOTO, N. Buckling of plates with a hole under tension. **Thin-Walled Structures**, v. 12, n. 1, p. 35-49, 1991.

SHUFRIN, I.; EISENBERGER, M. Shear buckling of thin plates with constant in-plane stresses. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 7, n. 2, p. 179-192, 2007.

SHUFRIN, I.; EISENBERGER, M. Stability and vibration of shear deformable plates—first order and higher order analyses. **International journal of solids and structures**, v. 42, n. 3, p. 1225-1251, 2005.

SILVA, N. A.; VENTURINI, W. S. Dual reciprocity process applied to solve bending plates on elastic foundations. **Boundary Element X**, v. 3, p. 95-106, 1988.

SIMÕES, R. **Um estudo de placas sob cargas dinamicas estacionarias e com o efeito da não linearidade geometrica sob cargas estaticas usando o metodo dos elementos de contorno**. 2001. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

SINGH, K. M.; KALRA, M. S. Least squares finite element formulation in the time domain for the dual reciprocity boundary element method in heat conduction. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 104, n. 2, p. 147-172, 1993.

SINGH, K. M.; KALRA, M. S. Time integration in the dual reciprocity boundary element analysis of transient diffusion. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 18, n. 2, p. 73-102, 1996.

SINGH, K. M.; TANAKA, M. Dual reciprocity boundary element analysis of nonlinear diffusion: temporal discretization. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 23, n. 5-6, p. 419-433, 1999.

SINGH, K. M.; TANAKA, M. Dual reciprocity boundary element analysis of inverse heat conduction problems. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 190, n. 40-41, p. 5283-5295, 2001.

SMIRNOV, V. I. **A Course of Higher Mathematics: Integral equations and partial differential equations**. Pergamon, 1964.

SOARES JR, R. A. **Aplicação do método dos elementos de contorno na análise de instabilidade de placas perfuradas**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.

SOARES JR, R. A.; PALERMO JR, L. Effect of shear deformation on the buckling parameter of perforated and non-perforated plates studied using the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 85, p. 57-69, 2017.

SOARES JR, R. A.; PALERMO JR, L. Effect of shear deformation and aspect ratio on the buckling parameter of perforated plates. **Proceedings of the Eighth International Conference On Thin-Walled Structures, Lisboa, Portugal**. 2018.

SOARES JR, R. A.; PALERMO JR, L.; WROBEL, L. C. Application of the dual reciprocity method for the buckling analysis of plates with shear deformation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 106, p. 427-439, 2019a.

SOARES JR, R. A.; PALERMO JR, L.; WROBEL, L. C. Buckling of perforated plates using the dual reciprocity boundary element method. **Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods XLII**, v. 126, p. 89-99, 2019b.

SOARES JR, R. A.; PALERMO JR, L.; WROBEL, L. C. Application of the radial integration method for the buckling analysis of plates with shear deformation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 118, p. 250-264, 2020.

SOLEKHUDDIN, L.; ANG, K. C. A DRBEM with a predictor–corrector scheme for steady infiltration from periodic channels with root-water uptake. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 36, n. 8, p. 1199-1204, 2012.

SOLEKHUDDIN, L.; ANG, K. C. A Laplace transform DRBEM with a predictor–corrector scheme for time-dependent infiltration from periodic channels with root-water uptake. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 50, p. 141-147, 2015.

SOLTANKOOHI, A. R.; GATMIRI, B.; NOORZAD, A. A new application of an improved DRBEM model for water wave propagation over a frictional uneven bottom. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 36, n. 4, p. 537-550, 2012.

SOUTHWELL, R. V.; SKAN, S. W. On the stability under shearing forces of a flat elastic strip. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, p. 582-607, 1924.

STEIN, O. Stabilität ebener rechteckbleche unter biegung and schub, **Bauingenieur**, v. 17, p. 308, 1936.

STERN, M. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. **International journal of solids and structures**, v. 15, n. 10, p. 769-782, 1979.

SYNGELLAKIS, S.; ELZEIN, A. Plate buckling loads by the boundary element method. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 37, n. 10, p. 1763-1778, 1994.

SYNGELLAKIS, S.; ELZEIN, A.; WALKER, A. C. Comparison between experimental and boundary element predictions of plate buckling behaviour. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 8, n. 2, p. 103-108, 1991.

SYNGELLAKIS, S.; KANG, M. A Boundary Element Solution of the Plate Buckling Problem. **Engineering Analysis**, v.4, n.2, p. 75-81, 1987.

SZILARD, R. **Theories and applications of plate analysis: classical numerical and engineering methods**. John Wiley & Sons, 2004.

TAJDARI, M. *et al.* The effects of plate-support condition on buckling strength of rectangular perforated plates under linearly varying in-plane normal load. **Journal of World Academy of Science, Engineering and Technology**, v. 54, p. 479-486, 2011.

TANAKA, M.; CHEN, W. Coupling dual reciprocity BEM and differential quadrature method for time-dependent diffusion problems. **Applied Mathematical Modelling**, v. 25, n. 3, p. 257-268, 2001.

TANAKA, M.; CHEN, W. Dual reciprocity BEM applied to transient elastodynamic problems with differential quadrature method in time. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 18-19, p. 2331-2347, 2001.

TANAKA, M.; CHEN, W. Identification of elastodynamics load using drbem and dynamic programming filter. In: TANAKA M.; DULIKRAVICH G. S. **Inverse Problems in Engineering Mechanics II**. Nagano: Elsevier, 2000. p. 333-342.

TANAKA, M.; KUROKAWA, K.; MATSUMOTO, T. A time-stepping DRBEM for transient heat conduction in anisotropic solids. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 32, n. 12, p. 1046-1053, 2008.

TANAKA, M.; MATSUMOTO, T.; TAKAKUWA, S. Dual reciprocity BEM for time-stepping approach to the transient heat conduction problem in nonlinear materials. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 195, n. 37-40, p. 4953-4961, 2006.

TANAKA, M.; MIYAZAKI, K. A boundary element method for elastic buckling analysis of assembled plate structures. **Computational mechanics**, v. 3, n. 1, p. 49-57, 1988.

TANAKA, M.; SINGH, K. M. Application of DRBEM and iterative regularization to inverse heat conduction. In: TANAKA M.; DULIKRAVICH G. S. **Inverse Problems in Engineering Mechanics II**. Nagano: Elsevier, 2000. p. 81-90.

TELLES, J. C. F. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 24, n. 5, p. 959-973, 1987.

TELLES, J. C. F.; BREBBIA, C. A. On the application of the boundary element method to plasticity. **Applied Mathematical Modelling**, v. 3, n. 6, p. 466-470, 1979.

TEZER-SEZGIN, M.; BOZKAYA, C.; TÜRK, Ö. BEM and FEM based numerical simulations for biomagnetic fluid flow. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, n. 9, p. 1127-1135, 2013.

THAI, H.; CHOI, D. Analytical solutions of refined plate theory for bending, buckling and vibration analyses of thick plates. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, n. 18-19, p. 8310-8323, 2013.

THAM, L.; SZETO, H. Buckling analysis of arbitrarily shaped plates by spline finite strip method, **Computers & structures**, v. 36, n. 4, p. 729-735, 1990.

THEVENDRAN, V.; SHANMUGAM, N. E.; LIEW, J. Flexural torsional behaviour of steel I-beams curved in plan. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 1, n. 46, p. 79-80, 1998.

TIMOSHENKO, S. Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. **Zeitschrift für Mathematik und Physik**, v. 58, p. 337-385, 1910.

TIMOSHENKO, S. Stability of Plate Girders Subjected to Bending, Preliminary Publication. **Internat. Ass. for Bridge and Structural Eng., Paris**, p. 129, 1932.

TIMOSHENKO, S.; GERE, J. Theory of elastic stability. **McGraw-Hill New York**, 1961.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. New York: McGraw-hill, 1959.

TOSECKÝ, Andrej *et al.* Three-dimensional transient half-space dynamics using the dual reciprocity boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 32, n. 7, p. 597-618, 2008.

TOTTENHAM, H. The boundary element method for plates and shells. **Developments in boundary element methods- 1.(A 80-14763 03-39)** London, **Applied Science Publishers, Ltd., 1979**,, p. 173-205, 1979.

UENOYA, M.; REDWOOD, R. G. Elasto-plastic shear buckling of square plates with circular holes. **Computers & Structures**, v. 8, n. 2, p. 291-300, 1978.

UĞURLU, B. A dual reciprocity boundary element solution method for the free vibration analysis of fluid-coupled Kirchhoff plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 340, p. 190-210, 2015.

USECHE, J. Vibration analysis of shear deformable shallow shells using the Boundary Element Method. **Engineering Structures**, v. 62, p. 65-74, 2014.

USECHE, J.; ALBUQUERQUE, E. L. Dynamic analysis of shear deformable plates using the Dual Reciprocity Method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 36, n. 5, p. 627-632, 2012.

USECHE, J.; ALBUQUERQUE, E. L. Transient dynamic analysis of shear deformable shallow shells using the boundary element method. **Engineering Structures**, v. 87, p. 1-7, 2015.

USECHE, J.; HARNISH, C. A boundary element method formulation for modal analysis of doubly curved thick shallow shells. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, n. 5-6, p. 3591-3600, 2016.

VANN, W. P. Compressive buckling of perforated plate elements. **Proceedings of the 1st Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures**. University of Missouri-Rolla, 1971.

VANN, W. Pennington. Compressive buckling of perforated plate elements. 1971.

VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. **Thin plates and shells: theory: analysis, and applications**. CRC press, 2001.

VENTURINI, W. S. A study of boundary element method and its application on engineering problems. **Associate Professor thesis**, University of São Paulo, Structures Department-Engineering School of São Carlos, 1988.

VENTURINI, W. S.; PAIVA, J. B. Boundary element for plate bending analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 11, n. 1, p. 1-8, 1993.

VERA-TUDELA, C. A. R.; TELLES, J. C. F. A numerical Green's function and dual reciprocity BEM method to solve elastodynamic crack problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29, n. 3, p. 204-209, 2005.

VON KARMAN, T. **Festigkeitsprobleme im maschinenbau**, 1910.

VRCELJ, Z. , BRADFORD, M. A. A simple method for the inclusion of external and internal supports in the spline finite strip method (SFSM) of buckling analysis. **Comput Struct** 2008;86(6):529–44 .

VRCELJ, Z. , BRADFORD, M. A. On using Legendre polynomials and amended spline transformations in the SFSM for buckling and free vibrations of plates and thin-walled beams. **Thin-walled structures**, v. 48, n. 10-11, p. 798-805, 2010.

WANG, C. M.; AUNG, T. M. Plastic buckling analysis of thick plates using p-Ritz method. **International journal of solids and structures**, v. 44, n. 18-19, p. 6239-6255, 2007.

WANG, C. M. *et al.* Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories. **Engineering structures**, v. 23, n. 7, p. 838-849, 2001.

WANG, G. *et al.* Buckling and ultimate strength of plates with openings. **Ships and Offshore Structures**, v. 4, n. 1, p. 43-53, 2009.

WANG, J. *et al.* Radial integration boundary element method for heat conduction problems with convective heat transfer boundary. **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, v. 72, n. 4, p. 300-310, 2017.

WANG, Kaichun; MATTHEIJ, Robert Martinus Maria; TER MORSCHE, H. G. Alternative DRM formulations. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, n. 2, p. 175-181, 2003.

WANG, W.; JI, X.; TANAKA, M. A dual reciprocity boundary element approach for the problems of large deflection of thin elastic plates. **Computational mechanics**, v. 26, n. 1, p. 58-65, 2000.

WANG, X.; TAN, M.; ZHOU, Y. Buckling analyses of anisotropic plates and isotropic skew plates by the new version differential quadrature method. **Thin-Walled Structures**, v. 41, n. 1, p. 15-29, 2003.

WANG, X.; YUAN, Z. Buckling analysis of isotropic skew plates under general in-plane loads by the modified differential quadrature method. **Applied Mathematical Modelling**, v. 56, p. 83-95, 2018.

WAY, S. Stability of rectangular plates under shear and bending forces. **Journal of Applied Mechanics**, v. 3, n. 4, 1936.

WEEËN, F. V. Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 18, n. 1, p. 1-10, 1982.

WEN, J.; KHONSARI, M. M. Transient heat conduction in rolling/sliding components by a dual reciprocity boundary element method. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 52, n. 5-6, p. 1600-1607, 2009.

WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. A new method for transformation of domain integrals to boundary integrals in boundary element method. **Communications in numerical methods in engineering**, v. 14, n. 11, p. 1055-1065, 1998.

WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; YOUNG, A. Transformation of domain integrals to boundary integrals in BEM analysis of shear deformable plate bending problems. **Computational mechanics**, v. 24, n. 4, p. 304-309, 1999.

WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. Three-dimensional dynamic fracture analysis with the dual reciprocity method in Laplace domain. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 23, n. 1, p. 51-58, 1999.

WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; YOUNG, A. Application of dual reciprocity method to plates and shells. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, n. 7-8, p. 583-590, 2000.

WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; YOUNG, A. Large deflection analysis of Reissner plate by boundary element method. **Computers & structures**, v. 83, n. 10, p. 870-879, 2005.

WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; YOUNG, A. Post buckling analysis of Reissner plates by the boundary element method. **The Journal of Strain Analysis for Engineering Design**, v. 41, n. 3, p. 239-252, 2006.

WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; YOUNG, A. Transformation of domain integrals to boundary integrals in BEM analysis of shear deformable plate bending problems. **Computational mechanics**, v. 24, n. 4, p. 304-309, 1999.

WENG, W.; RAHMAN, M. A note on the matrix analysis of Dual Reciprocity Boundary Element Method. **Applied Mathematics Letters**, v. 8, n. 1, p. 87-90, 1995.

WILKINSON J. The algebraic eigenvalue problem. London: Oxford University Press, William Clowes & Sons; 1972 .

WILLIAMS, T. *et al.* Gnuplot: an interactive plotting program. Disponível em: <<http://gnuplot.info>>. Acesso em: 19 de fevereiro. de 2019

WROBEL, L. C.; BREBBIA, C. A. The dual reciprocity boundary element formulation for nonlinear diffusion problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 65, n. 2, p. 147-164, 1987.

WROBEL, L. C.; BREBBIA, C. A. **Boundary Element Methods in HeatTransfer**. New York: Computational Mechanics Publications and El-sevier Applied Science, 1992

WROBEL, L. C.; BREBBIA, C. A.; NARDINI, D. Analysis of transient thermal problems in the BEASY system. **BETECH**, v. 86, p. 269-280, 1986.

WROBEL, L. C.; BREBBIA, C. A.; NARDINI, D. The dual reciprocity boundary element formulation for transient heat conduction. **Finite elements in water resources VI**, p. 801-811, 1986.

WROBEL, L. C.; DEFIGUEIREDO, D. B. A dual reciprocity boundary element formulation for convection-diffusion problems with variable velocity fields. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 8, n. 6, p. 312-319, 1991.

WROBEL, L. C.; TELLES, J. C. F.; BREBBIA, C. A. A dual reciprocity boundary element formulation for axisymmetric diffusion problems. **Boundary Elements**, v. 44, p. 1054-1067, 1986.

WU, B. C.; ALTIERO, N. J. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. **Computers & Structures**, v. 10, n. 4, p. 703-707, 1979.

XIANG Y. , WANG C. M. , LIEW K. M. , KITIPORNCHAI S. Mindlin Plate Buckling with Prebuckling In -Plane Deformation. *J Eng Mech* 1993;119(1):1–18 .

XIANG, Y. *et al.* Buckling of triangular Mindlin plates under isotropic inplane compression. **Acta mechanica**, v. 102, n. 1-4, p. 123-135, 1994.

XIANG, Y. *et al.* Mindlin Plate Buckling with Prebuckling In-Plane Deformation. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 119, n. 1, p. 1-18, 1993.

XIANG, Y.; WEI, G. W. Exact solutions for buckling and vibration of stepped rectangular Mindlin plates. **International journal of solids and structures**, v. 41, n. 1, p. 279-294, 2004.

XIANG, Yang. Buckling of triangular plates with elastic edge constraints. **Acta mechanica**, v. 156, n. 1-2, p. 63-77, 2002.

YAMADA, T.; WROBEL, L. C. Properties of Gaussian radial basis functions in the dual reciprocity boundary element method. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP**, v. 44, n. 6, p. 1054-1067, 1993.

YAMADA, T.; WROBEL, L. C.; POWER, H. On the convergence of the dual reciprocity boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 13, n. 3, p. 291-298, 1994.

YAN, F. *et al.* A new dual reciprocity hybrid boundary node method based on Shepard and Taylor interpolation method and Chebyshev polynomials. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 73, p. 61-68, 2016.

YAN, F. *et al.* Dual reciprocity hybrid boundary node method for 2-D elasticity with body force. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 32, n. 9, p. 713-725, 2008.

YAN, F. *et al.* Dual reciprocity hybrid boundary node method for free vibration analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 321, n. 3-5, p. 1036-1057, 2009.

YAN, F. *et al.* Dual reciprocity hybrid boundary node method for three-dimensional elasticity with body force. **Acta Mechanica Solida Sinica**, v. 21, n. 3, p. 267-277, 2008.

YAN, F.; FENG, X. T.; ZHOU, H.. Dual reciprocity hybrid radial boundary node method for the analysis of Kirchhoff plates. **Applied Mathematical Modelling**, v. 35, n. 12, p. 5691-5706, 2011.

YAN, F.; FENG, X.; ZHOU, H.. Meshless method of dual reciprocity hybrid radial boundary node method for elasticity. **Acta Mechanica Solida Sinica**, v. 23, n. 5, p. 447-458, 2010.

YAN, F.; YU, M.; LV, J. H.. Dual reciprocity boundary node method for convection-diffusion problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 80, p. 230-236, 2017.

YANG, K. *et al.* A new modified conjugate gradient method to identify thermal conductivity of transient non-homogeneous problems based on radial integration boundary element method. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 133, p. 669-676, 2019.

YANG, K. *et al.* A new modified Levenberg-Marquardt algorithm for identifying the temperature-dependent conductivity of solids based on the radial integration boundary element method. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 144, 2019.

YANG, K. *et al.* New analytical expressions in radial integration BEM for stress computation with several kinds of variable coefficients. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 289, p. 44-59, 2015.

YANG, K. *et al.* New analytical expressions in radial integration BEM for solving heat conduction problems with variable coefficients. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 50, p. 224-230, 2015.

YANG, K. *et al.* Radial integration BEM for solving transient nonlinear heat conduction with temperature-dependent conductivity. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 108, p. 1551-1559, 2017.

YANG, K.; GAO, X. W.. Radial integration BEM for transient heat conduction problems. **Engineering analysis with boundary elements**, v. 34, n. 6, p. 557-563, 2010.

YANG, K.; GAO, X. W.; LIU, Y. F. Using analytical expressions in radial integration BEM for variable coefficient heat conduction problems. **Engineering analysis with boundary elements**, v. 35, n. 10, p. 1085-1089, 2011.

YANG, K.; LIU, Y. F.; GAO, X. W. Analytical expressions for evaluation of radial integrals in stress computation of functionally graded material problems using RIBEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 44, p. 98-103, 2014.

YANG, Z. *et al.* Free vibration and buckling analysis of plates using B-spline wavelet on the interval Mindlin element. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, n. 5, p. 3449-3466, 2013.

YETTRAM, A. L.; BROWN, C. J. The elastic stability of square perforated plates. **Computers & structures**, v. 21, n. 6, p. 1267-1272, 1985.

YETTRAM, A. L.; BROWN, C. J. The elastic stability of square perforated plates under bi-axial loading. **Computers & structures**, v. 22, n. 4, p. 589-594, 1986.

YIOTIS, A. J.; KATSIKADELIS, J. T. The meshless analog equation method for the solution of plate problems. **Proceedings of the 6th GRACM International Congress on Computational Mechanics, Thessaloniki, Greece**. 2008.

YOSHIKI, M. *et al.* Instability of plates with holes (1st report). **Journal of Zosen Kiokai**, v. 1967, n. 122, p. 137-145, 1967.

YOSHIZUKA, J.; NARUOKA, M. Buckling coefficient of simply supported rectangular plates under combined bending and compressive stresses in two perpendicular directions. **Stahlbau**, v. 40, n. 7, p. 217-221, 1971.

YOUNG, D. L. *et al.* Solution of Stokes flow using an iterative DRBEM based on compactly-supported, positive-definite radial basis function. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 43, n. 3-5, p. 607-619, 2002.

YU, B. *et al.* Precise time-domain expanding dual reciprocity boundary element method for solving transient heat conduction problems. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 91, p. 110-118, 2015.

YU, B. *et al.* Radial integration BEM for one-phase solidification problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 39, p. 36-43, 2014.

YU, W. W.; DAVIS, C. S. Buckling behavior and post-buckling strength of perforated stiffened compression elements. 1971.

YUN, B. I.; ANG, W. T. A dual-reciprocity boundary element method for axisymmetric thermoelastostatic analysis of nonhomogeneous materials. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 36, n. 12, p. 1776-1786, 2012.

YUN, B. I.; ANG, W. T.. A dual-reciprocity boundary element approach for axisymmetric nonlinear time-dependent heat conduction in a nonhomogeneous solid. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 34, n. 8, p. 697-706, 2010.

ZHANG, C. H. *et al.* 3D crack analysis in functionally graded materials. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 78, n. 3, p. 585-604, 2011.

ZHANG, Y. **On the dual reciprocity boundary element method**. 1993. Dissertação (Mestrado em Ciências) - University of Wollongong, Wollongong, 1993.

ZHANG, Y.; ZHU, S.. On the choice of interpolation functions used in the dual-reciprocity boundary-element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 13, n. 4, p. 387-396, 1994.

ZHENG, B. *et al.* Dynamic fracture analysis of functionally graded materials under thermal shock loading by using the radial integration boundary element method. **Composite Structures**, v. 201, p. 468-476, 2018.

ZHENG, B.; GAO, X. W. ; ZHANG, C.. Radial integration BEM for vibration analysis of two-and three-dimensional elasticity structures. **Applied Mathematics and Computation**, v. 277, p. 111-126, 2016.

ZHONG, H.; PAN, C.; YU, H.. Buckling analysis of shear deformable plates using the quadrature element method. **Applied Mathematical Modelling**, v. 35, n. 10, p. 5059-5074, 2011.

ZHOU, F. *et al.* A dual reciprocity boundary face method for 3D non-homogeneous elasticity problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 36, n. 9, p. 1301-1310, 2012.

ZHOU, F. *et al.* Shape variable radial basis function and its application in dual reciprocity boundary face method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 35, n. 2, p. 244-252, 2011.

ZHOU, F. *et al.* The precise integration method for semi-discretized equation in the dual reciprocity method to solve three-dimensional transient heat conduction problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 95, p. 160-166, 2018.

ZHOU, J.; ZHANG, Y.; CHEN, J. K. A dual reciprocity boundary element method for photothermal interactions in laser-induced thermotherapy. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 51, n. 15-16, p. 3869-3881, 2008.

ZHU, S. A new DRBEM model for wave refraction and diffraction. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 12, n. 4, p. 261-274, 1993.

ZHU, S. Solving transient diffusion problems: time-dependent fundamental solution approaches versus LTDRM approaches. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 21, n. 1, p. 87-90, 1998.

ZHU, S.; LIU, H. W.; LU, X. P. A combination of LTDRM and ATPS in solving diffusion problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 21, p. 285-289, 1998.

ZHU, S.; LIU, H. W.; MARCHANT, T. R. A perturbation DRBEM model for weakly nonlinear wave run-ups around islands. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 33, n. 1, p. 63-76, 2009.

ZHU, S.; SATRAVAHA, P. An efficient computational method for modelling transient heat conduction with nonlinear source terms. **Applied mathematical modelling**, v. 20, n. 7, p. 513-522, 1996.

ZHU, S.; SATRAVAHA, P. Solving nonlinear time-dependent diffusion equations with the dual reciprocity method in Laplace space. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 18, n. 1, p. 19-27, 1996.

ZHU, S.; SATRAVAHA, P; LU, X.. Solving linear diffusion equations with the dual reciprocity method in Laplace space. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 13, n. 1, p. 1-10, 1994.

ZHU, S.; ZHANG, Y. Solving general field equations in infinite domains with dual reciprocity boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 12, n. 4, p. 241-250, 1993.

ZHU, S.; ZHANG, Y.. Combined refraction and diffraction of short waves using the dual-reciprocity boundary-element method. **Applied ocean research**, v. 17, n. 5, p. 315-322, 1995.

ZHU, S.; ZHANG, Y.; MARCHANT, T. R. A DRBEM model for microwave heating problems. **Applied mathematical modelling**, v. 19, n. 5, p. 287-297, 1995.

ZHU, S; LIU, H. W. On the application of multiquadric bases in conjunction with the LTDRM method to solve nonlinear diffusion equations. **Applied mathematics and computation**, v. 96, n. 2-3, p. 161-175, 1998.

ZHU, S; LIU, H. W.; CHEN, K. A general DRBEM model for wave refraction and diffraction. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, n. 5, p. 377-390, 2000.