



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo

DANIEL GIORGI REIS

**A AVALIAÇÃO MODAL COMO MÉTODO DE
PREVISÃO DA SUSCETIBILIDADE DE ESTRUTURAS
A EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM**

CAMPINAS

2016

DANIEL GIORGI REIS

**A AVALIAÇÃO MODAL COMO MÉTODO DE
PREVISÃO DA SUSCETIBILIDADE DE ESTRUTURAS
A EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM**

Dissertação de Mestrado apresentada a Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de Estruturas e Geotécnica.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Carlos Marcos Vieira Junior

Co-orientador: Prof. Dr. Gustavo Henrique Siqueira

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO DANIEL GIORGI REIS E ORIENTADO PELO PROF. DR. LUIZ CARLOS MARCOS VIEIRA JUNIOR.

ASSINATURA DO ORIENTADOR



CAMPINAS

2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

R277a Reis, Daniel Giorgi, 1987-
A avaliação modal como método de previsão da suscetibilidade de estruturas a efeitos de segunda ordem / Daniel Giorgi Reis. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Luiz Carlos Marcos Vieira Junior.
Coorientador: Gustavo Henrique Siqueira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Análise não-linear. 2. Análise modal. 3. Estabilidade estrutural. 4. Estruturas de concreto. I. Vieira Junior, Luiz Carlos Marcos, 1982-. II. Siqueira, Gustavo Henrique, 1980-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Modal analysis used as a prediction method of the structure's susceptibility to second order effects

Palavras-chave em inglês:

Non-linear analysis

Modal analysis

Structural stability

Concrete structure

Área de concentração: Estruturas e Geotécnica

Titulação: Mestre em Engenharia Civil

Banca examinadora:

Luiz Carlos Marcos Vieira Junior [Orientador]

José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa

Edson Denner Leonel

Data de defesa: 12-08-2016

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Civil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E
URBANISMO**

**A AVALIAÇÃO MODAL COMO MÉTODO DE PREVISÃO DA
SUSCETIBILIDADE DE ESTRUTURAS A EFEITOS DE
SEGUNDA ORDEM**

DANIEL GIORGI REIS

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:

Prof. Dr. Luiz Carlos Marcos Vieira Junior
Presidente e Orientador/UNICAMP

Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa
UNICAMP

Prof. Dr. Edson Denner Leonel
USP

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se
no processo de vida acadêmica do aluno.

Campinas, 12 de Agosto de 2016

*Em memória de Alcides Giorgi.
Amado avô, serviu a todos de inspiração para
nos tornarmos justos, honestos e humildes.
Sempre foi um farol para a família, colocando no
caminho correto, apesar das atribuições.*

Saudades.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por se fazer presente em todos os momentos de minha vida, me acompanhando enquanto caminhava, me carregando quando não conseguia mais.

A minha esposa pelo amor incondicional, pela força, pela ternura e compreensão em todos os momentos.

A minha mãe e a toda a minha família por serem um porto seguro, dedicando uma vida de esforços e amor a mim.

Aos professores Dr Luiz Vieira Jr. e Dr. Gustavo Siqueira, por todo o conhecimento que me foi passado e pela amizade nestes anos. Ao prof. Dr. Mário Cavicchia, por sempre deixar a porta da sala aberta.

O sr. Júlio Timerman, por ter sido um exemplo e referência como profissional e como pessoa, ensinando muito do que sei hoje. A todos meus amigos de ENGETI Engenharia, pelos anos que convivemos juntos.

A meus amigos pela paciência nos momentos difíceis, comemorações nos momentos de alegria e presença nos momentos que precisava. Agradeço aos meus amigos Fabrício Tardivo e Ivan Jurba Monteiro, por redefinirem meu conceito de amizade.

Aos meus amigos da Prefeitura de Campinas pelo apoio e convivência nestes últimos anos.

Aos órgãos financiadores FAPESP e FAEPEX-UNICAMP, que com o apoio ao projeto de pesquisa contribuiu indiretamente para o desenvolvimento desta pesquisa.

A Universidade Estadual de Campinas, pela base que tive em minha graduação e pelas oportunidades promovidas em minha pós-graduação.

RESUMO

Pesquisas recentes demonstram haver relação entre a suscetibilidade aos efeitos de segunda ordem da estrutura e o período natural de vibração (T) da mesma, uma vez que ambos dependem fundamentalmente das matrizes de rigidez e de massa da estrutura. A vantagem dessa relação simplificada é que na maioria das ferramentas computacionais de análise estrutural existentes o período natural de vibração é de fácil obtenção. Neste estudo, são desenvolvidas diferentes formulações com o intuito de propor e validar um fator de amplificação (χ_T) que, multiplicado pelos valores de momentos oriundos de uma análise de primeira ordem, é capaz de aproximar satisfatoriamente os valores de momentos fletores de segunda ordem. Essas formulações têm como base o princípio de D'Alembert e o método de Rayleigh, com a generalização de coordenadas para o deslocamento dinâmico de barras flexíveis. Desta forma, foram analisadas as amplificações dos momentos (M_2/M_1 – momentos fletores provenientes de uma análise de segunda ordem divididos pelos momentos fletores provenientes de uma análise de primeira ordem) para 122 modelos regulares de concreto armado, variando o número e as plantas dos pavimentos. As amplificações M_2/M_1 foram plotados frente aos períodos naturais de vibração, para cada altura e cada direção ortogonal. Nas análises, pode-se observar que os valores de χ_T se aproximam dos valores de métodos de análise simplificada utilizadas usualmente no Brasil, sendo de fato, mais próximo dos valores obtidos de amplificação para os elementos mais solicitados. Assim sendo, é possível propor um fator de amplificação (χ_T), baseado no período natural de vibração da estrutura, para ser utilizado como: (i) um indicador da susceptibilidade aos efeitos globais de segunda ordem; e (ii) um fator de amplificação para a obtenção dos momentos de segunda ordem para estruturas reticuladas de concreto armado.

Palavra-chave: Análise não-linear; Análise modal; Estabilidade estrutural; Estruturas de concreto

ABSTRACT

Recent studies have demonstrated that there is a relationship between the structure's susceptibility to second-order effects and its natural vibration period (T) since both properties are fundamentally dependent on the structure's stiffness and mass properties. The main advantage on the use of this characteristic is that for the majority of existing structural analysis software, the natural period of vibration can be easily obtained. In this study, different formulations are developed in order to propose and validate an amplification factor (χ_T) to multiply first-order analysis results and satisfactorily obtain results due to a second-order analysis. These formulations are based on the D'Alembert's principle, Rayleigh's method, and the use of generalized coordinates to represent the dynamic displacement of flexible structures. Therefore, it is analyzed the bending moment amplification (M_2/M_1 – bending moment due to a second-order analysis divided by bending moment due to a first-order analysis) for 122 spatial multistory reinforced-concrete frames, with different number of stories and floor plants. The ratios M_2/M_1 are plotted against natural vibration period for each building floor plant and each orthogonal direction. It is observed that values of χ_T lead to values closer to the traditional simplified methods currently used in Brazil and, in fact, more accurate. Thus, it is proposed an amplification factor (χ_T), based on the natural period of vibration, to be used as: (i) an indicator of the structures' susceptibility to second order effects and (ii) an amplification factor to describe the second-order effects on reinforced concrete frames.

Keyword: Non-linear analysis; Modal analysis; Structural stability; Concrete structure

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1	EXEMPLO DE LIMITES ELÁSTICOS E PLÁSTICOS PARA MATERIAIS DÚCTEIS (FONTE: TIMOSHENKO, 1983).....	23
FIGURA 2	RESULTADO DE MOMENTOS NA BASE DE UM PILAR CARREGADO SEGUNDO A ANÁLISE DE PRIMEIRA ORDEM (A) E CONSIDERANDO O EQUILÍBRIO NA POSIÇÃO DEFORMADA (ANÁLISE DE SEGUNDA ORDEM GEOMÉTRICA) (B)	25
FIGURA 3	PÓRTICO PLANO CALCULADO COM CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM GLOBAIS $P-\Delta$ (A) E LOCAIS $P-\delta$ (B) (FONTE: ZIEMIAN, 2010)	26
FIGURA 4	ANÁLISE DE SEGUNDA ORDEM COM CONSIDERAÇÃO DO EFEITO $P-\Delta$ (FONTE: BUENO, 2009) .	28
FIGURA 5	PÓRTICO MODELADO COM BARRAS DIAGONAIS FICTÍCIAS (A) E COM UMA COLUNA FICTÍCIA (B)	29
FIGURA 6	SISTEMA OSCILATÓRIO FORÇADO AMORTECIDO COM UM GRAU DE LIBERDADE (A) E EQUILÍBRIO DAS FORÇAS DO SISTEMA (B).....	30
FIGURA 7	SISTEMA OSCILATÓRIO FORÇADO NÃO AMORTECIDO COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE....	35
FIGURA 8	(A) BARRA ENGASTADA COM DESLOCAMENTO ASSOCIADO $u(x, t)$ E (B) TRECHO INFINITESIMAL DA BARRA ∂x	37
FIGURA 9	REPRESENTAÇÃO DOS ESFORÇOS, DESLOCAMENTOS E DISTÂNCIAS PARA CÁLCULO DO γ_z	46
FIGURA 10	MODELOS SIMPLIFICADOS PARA APLICAÇÃO DOS PARÂMETROS B_1 E B_2	49
FIGURA 11	SISTEMA OSCILATÓRIO LIVRE NÃO-AMORTECIDO CONSIDERANDO CORPO RÍGIDO E APOIO ELÁSTICO.....	52
FIGURA 12	JANELA DE CARREGAMENTOS DO SAP2000	56
FIGURA 13	JANELA DE CARREGAMENTO PARA ANÁLISE MODAL NO SAP2000	57
FIGURA 14	MODELO GENERALIZADO ADOTADO.....	58
FIGURA 15	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO DIVISOR DE μ_n	65
FIGURA 16	GRÁFICO DA VARIAÇÃO χ_T EM FUNÇÃO DA VARIAÇÃO DE κ_{pav}	66
FIGURA 17	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO DIVIDENDO DE μ_n	67
FIGURA 18	DIFERENÇAS ENTRE μ_n OBTIDO NO EQUACIONAMENTO COMPLETO E NO SIMPLIFICADO	68
FIGURA 19	ISOMÉTRICA DO MODELO 5 COM 35 PAVIMENTOS NO SOFTWARE SAP2000	70
FIGURA 20	PLANTA BAIXA DAS GEOMETRIAS CONSIDERADAS NAS ANÁLISES	71

FIGURA 21	AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO – MODELO 1 – DIREÇÃO “X”	73
FIGURA 22	AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO – MODELO 1 – DIREÇÃO “Y”	74
FIGURA 23	AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO – MODELO 2 – DIREÇÃO “X”	74
FIGURA 24	AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO – MODELO 2 – DIREÇÃO “Y”	75
FIGURA 25	AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO – MODELO 3 – DIREÇÃO “X”	75
FIGURA 26	AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO – MODELO 3 – DIREÇÃO “Y”	76
FIGURA 27	AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO – MODELO 4 – DIREÇÃO “X”	76
FIGURA 28	AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO – MODELO 4 – DIREÇÃO “Y”	77
FIGURA 29	AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO – MODELO 5 – DIREÇÃO “X”	77
FIGURA 30	AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO – MODELO 5 – DIREÇÃO “Y”	78
FIGURA 31	AMPLIFICAÇÃO DOS MOMENTOS EM DOIS PILARES, ILUSTRANDO GRANDES AMPLIFICAÇÕES EM MOMENTOS DE PRIMEIRA ORDEM DE PEQUENA MAGNITUDE.....	79
FIGURA 32	EXEMPLO DE PILAR PARA ILUSTRAR PROBLEMAS LOCALIZADOS COM A AMPLIFICAÇÃO M_2/M_1 .	80
FIGURA 33	AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 DO MODELO 1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO, ESTIMANDO O VALOR DE M_2 A PARTIR DA MAJORAÇÃO DE M_1 POR $0,95\gamma_z$	81
FIGURA 34	RESULTADOS DO MODELO 1, DESTACANDO A PARTICIPAÇÃO DA MASSA MODAL DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO, PARA CADA ALTURA CALCULADA	82
FIGURA A.1	PLANTA DO PAVIMENTO TÍPICO DO MODELO 1.....	93
FIGURA A.2	PLANTA DO PAVIMENTO TÍPICO DO MODELO 2.....	93
FIGURA A.3	PLANTA DO PAVIMENTO TÍPICO DO MODELO 3.....	94
FIGURA A.4	PLANTA DO PAVIMENTO TÍPICO DO MODELO 4.....	94

FIGURA A.5	<i>PLANTA DO PAVIMENTO TÍPICO DO MODELO 5.....</i>	95
FIGURA B.1	<i>AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO PARA O MODELO 1 (DIREÇÃO "X"), DESTACANDO NÓS DAS BASES, PILARES CRÍTICOS E PARTICIPAÇÃO DA MASSA MODAL EM CADA MODELO.....</i>	96
FIGURA B.2	<i>AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO PARA O MODELO 1 (DIREÇÃO "Y"), DESTACANDO NÓS DAS BASES, PILARES CRÍTICOS E PARTICIPAÇÃO DA MASSA MODAL EM CADA MODELO.....</i>	96
FIGURA B.3	<i>AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO PARA O MODELO 2 (DIREÇÃO "X"), DESTACANDO NÓS DAS BASES, PILARES CRÍTICOS E PARTICIPAÇÃO DA MASSA MODAL EM CADA MODELO.....</i>	97
FIGURA B.4	<i>AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO PARA O MODELO 2 (DIREÇÃO "Y"), DESTACANDO NÓS DAS BASES, PILARES CRÍTICOS E PARTICIPAÇÃO DA MASSA MODAL EM CADA MODELO.....</i>	97
FIGURA B.5	<i>AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO PARA O MODELO 3 (DIREÇÃO "X"), DESTACANDO NÓS DAS BASES, PILARES CRÍTICOS E PARTICIPAÇÃO DA MASSA MODAL EM CADA MODELO.....</i>	98
FIGURA B.6	<i>AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO PARA O MODELO 3 (DIREÇÃO "Y"), DESTACANDO NÓS DAS BASES, PILARES CRÍTICOS E PARTICIPAÇÃO DA MASSA MODAL EM CADA MODELO.....</i>	98
FIGURA B.7	<i>AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO PARA O MODELO 4 (DIREÇÃO "X"), DESTACANDO NÓS DAS BASES, PILARES CRÍTICOS E PARTICIPAÇÃO DA MASSA MODAL EM CADA MODELO.....</i>	99
FIGURA B.8	<i>AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO PARA O MODELO 4 (DIREÇÃO "Y"), DESTACANDO NÓS DAS BASES, PILARES CRÍTICOS E PARTICIPAÇÃO DA MASSA MODAL EM CADA MODELO.....</i>	99
FIGURA B.9	<i>AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO PARA O MODELO 5 (DIREÇÃO "X"), DESTACANDO NÓS DAS BASES, PILARES CRÍTICOS E PARTICIPAÇÃO DA MASSA MODAL EM CADA MODELO.....</i>	100
FIGURA B.10	<i>AMPLIFICAÇÕES M_2/M_1 EM FUNÇÃO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO PARA O MODELO 5 (DIREÇÃO "Y"), DESTACANDO NÓS DAS BASES, PILARES CRÍTICOS E PARTICIPAÇÃO DA MASSA MODAL EM CADA MODELO.....</i>	100

FIGURA B.11	<i>COMPARAÇÃO DE RESULTADO OBTIDO PELO PROCESSO $P-\Delta$ FRENTE AO RESULTADO OBTIDO PELO MÉTODO SIMPLIFICADO – MODELO 1 (DIREÇÃO “X”)</i>	101
FIGURA B.12	<i>COMPARAÇÃO DE RESULTADO OBTIDO PELO PROCESSO $P-\Delta$ FRENTE AO RESULTADO OBTIDO PELO MÉTODO SIMPLIFICADO – MODELO 1 (DIREÇÃO “Y”)</i>	101
FIGURA B.13	<i>COMPARAÇÃO DE RESULTADO OBTIDO PELO PROCESSO $P-\Delta$ FRENTE AO RESULTADO OBTIDO PELO MÉTODO SIMPLIFICADO – MODELO 2 (DIREÇÃO “X”)</i>	102
FIGURA B.14	<i>COMPARAÇÃO DE RESULTADO OBTIDO PELO PROCESSO $P-\Delta$ FRENTE AO RESULTADO OBTIDO PELO MÉTODO SIMPLIFICADO – MODELO 2 (DIREÇÃO “Y”)</i>	102
FIGURA B.15	<i>COMPARAÇÃO DE RESULTADO OBTIDO PELO PROCESSO $P-\Delta$ FRENTE AO RESULTADO OBTIDO PELO MÉTODO SIMPLIFICADO – MODELO 3 (DIREÇÃO “X”)</i>	103
FIGURA B.16	<i>COMPARAÇÃO DE RESULTADO OBTIDO PELO PROCESSO $P-\Delta$ FRENTE AO RESULTADO OBTIDO PELO MÉTODO SIMPLIFICADO – MODELO 3 (DIREÇÃO “Y”)</i>	103
FIGURA B.17	<i>COMPARAÇÃO DE RESULTADO OBTIDO PELO PROCESSO $P-\Delta$ FRENTE AO RESULTADO OBTIDO PELO MÉTODO SIMPLIFICADO – MODELO 4 (DIREÇÃO “X”)</i>	104
FIGURA B.18	<i>COMPARAÇÃO DE RESULTADO OBTIDO PELO PROCESSO $P-\Delta$ FRENTE AO RESULTADO OBTIDO PELO MÉTODO SIMPLIFICADO – MODELO 4 (DIREÇÃO “Y”)</i>	104
FIGURA B.19	<i>COMPARAÇÃO DE RESULTADO OBTIDO PELO PROCESSO $P-\Delta$ FRENTE AO RESULTADO OBTIDO PELO MÉTODO SIMPLIFICADO – MODELO 5 (DIREÇÃO “X”)</i>	105
FIGURA B.20	<i>COMPARAÇÃO DE RESULTADO OBTIDO PELO PROCESSO $P-\Delta$ FRENTE AO RESULTADO OBTIDO PELO MÉTODO SIMPLIFICADO – MODELO 5 (DIREÇÃO “Y”)</i>	105

ÍNDICE DE FIGURAS DO RESUMO EXPANDIDO EM INGLÊS

FIGURE C.1	<i>EQUIVALENT CANTILEVER BEAM-COLUMN CONSIDERED IN THE DERIVATION OF χ_T</i>	112
FIGURE C.2	<i>EQUIVALENT CANTILEVER BEAM-COLUMN SUBJECTED TO A HORIZONTAL LOAD DISTRIBUTED UNIFORMLY ALONG ITS HEIGHT AND THE OVERTURNING MOMENT OF THE EQUIVALENT SYSTEM</i>	119
FIGURE C.3	<i>SENSIBILITY ANALYSIS OF χ_T</i>	121
FIGURE C.4	<i>SENSIBILITY ANALYSES OF THE TERMS IN THE VARIABLE κ. (A) NUMERATOR ANALYSIS (B) DENOMINATOR ANALYSIS</i>	122
FIGURE C.5	<i>SENSIBILITY ANALYSIS OF κ, DIFFERENCE BETWEEN USING EQUATION 45 AND 46</i>	122
FIGURE C.6	<i>ISOMETRIC VIEW OF MODEL 5 WITH 35 STORIES</i>	124
FIGURE C.7	<i>FLOOR PLANT OF MODELS ANALYZED</i>	125
FIGURE C.8	<i>BENDING-MOMENT AMPLIFICATION (M_2/M_1) AGAINST NATURAL PERIOD OF VIBRATION ANALYSIS FOR EVERY MODEL STUDIED IN THIS PAPER; NATURAL PERIOD OF VIBRATION (T) IN BOTH DIRECTION (X AND Y)</i>	127
FIGURE C.9	<i>MOMENT AMPLIFICATION IN COLUMN P1 AND P2 OF MODEL 2 AND 11 STORIES</i>	128
FIGURE C.10	<i>CANTILEVER BEAM-COLUMN EXAMPLE TO EXPLAIN LOCALIZED ISSUES WITH THE RATIO M_2/M_1</i>	129
FIGURE C.11	<i>MODEL 1: COMPARISON BETWEEN THE EQUATION PROPOSED HEREIN AND THE ANALYSIS RESULTS USING THE γ_z METHOD PROPOSED IN BRAZILIAN REINFORCED CONCRETE DESIGN STANDARD ABNT NBR 6118:2014. M_2/M_1 IN Y-AXIS AND T (S) IN X-AXIS</i>	130
FIGURE C.12	<i>MODEL 1: ADDITIONAL DISCUSSION ON THE IMPORTANCE OF CONSIDERING THE MASS-PARTICIPATION RATIO (Y-AXIS TO THE RIGHT) IN FUTURE STUDIES</i>	131

LISTA DE SÍMBOLOS

B_1	<i>Parâmetro de Estabilidade Local para Estruturas Metálicas</i>
B_2	<i>Parâmetro de Estabilidade Global para Estruturas Metálicas</i>
C	<i>Coefficiente de Amortecimento</i>
C_{crit}	<i>Amortecimento Crítico</i>
E	<i>Módulo de Elasticidade</i>
e	<i>Deslocamento axial de seção da barra quando submetido a uma força transversal</i>
I	<i>Inércia a Flexão</i>
F	<i>Forças Tangencias Atuantes ao Longo da Barra</i>
F_i	<i>Força horizontal concentrada na altura do pavimento i</i>
f_A	<i>Força de Amortecimento</i>
f_E	<i>Força Elástica</i>
f_I	<i>Força Inercial</i>
g	<i>Aceleração da Gravidade</i>
H	<i>Altura Total da Estrutura</i>
$H_{i,d}$	<i>Força horizontal aplicada no pavimento i</i>
h	<i>Altura Entre Pavimentos</i>
h_i	<i>Altura total do pavimento i</i>
K	<i>Rigidez da Estrutura</i>
K_E	<i>Rigidez Elástica</i>
K_G	<i>Rigidez Geométrica</i>
\tilde{K}	<i>Rigidez Generalizada</i>
\tilde{K}_E	<i>Rigidez elástica generalizada</i>
\tilde{K}_G	<i>Rigidez geométrica generalizada</i>
M_1	<i>Momento de Primeira Ordem</i>
$M_{1,tot,d}$	<i>Momento de Tombamento</i>
$\Delta M_{tot,d}$	<i>Acréscimo de momento devido a primeira parcela de momento de segunda ordem</i>

M_2	<i>Momento de Segunda Ordem</i>
ΔM_2	<i>Primeira Parcela Incremental do Momento de Segunda Ordem</i>
\bar{m}	<i>Massa Distribuída ao Longo do Comprimento da Barra</i>
\tilde{m}	<i>Massa Generalizada</i>
m_i	<i>Massas Concentradas em cada Pavimento i</i>
m_p	<i>Massa do Pavimento</i>
N	<i>Forças Normais Atuantes ao Longo da Barra</i>
n	<i>Número Total de Pavimentos</i>
P	<i>Peso Total da Estrutura</i>
P_i	<i>Força vertical concentrada na altura do pavimento i</i>
P_{pav}	<i>Peso Total dos Pavimentos da Estrutura</i>
P_{pil}	<i>Peso Total dos Pilares da Estrutura</i>
p	<i>Forças Tangencias Atuantes ao Longo da Barra em Função do Tempo</i>
\tilde{p}	<i>Força generalizada</i>
r	<i>Razão Geométrica</i>
T	<i>Período Natural de Vibração</i>
T_D	<i>Período Amortecido</i>
t	<i>Tempo</i>
u	<i>Deslocamentos Transversais</i>
u_i	<i>Deslocamento transversal na altura do pavimento i</i>
δW_E	<i>Trabalho virtual das forças externas</i>
δW_{f_I}	<i>Trabalho virtual das forças inerciais</i>
δW_I	<i>Trabalho virtual dos esforços internos</i>
δW_N	<i>Trabalho virtual da força axial N</i>
δW_P	<i>Trabalho virtual da força transversal p</i>
z	<i>Deslocamento Transversal Generalizado</i>
α	<i>Parâmetro de Instabilidade Alfa</i>
γ_Z	<i>Parâmetro de Estabilidade Gama Z para Estruturas de Concreto Armado</i>
Δ_1	<i>Deslocamento transversal de uma análise de primeira ordem</i>
Δ_2	<i>Deslocamento transversal de uma análise de segunda ordem</i>

ζ	<i>Razão de Amortecimento</i>
θ	<i>Rotação de seção da barra quando submetido a uma força transversal</i>
κ_{pav}	<i>Coefficiente Kápa</i>
μ_n	<i>Função Mi do Número de Pavimentos</i>
ψ	<i>Curvatura de uma barra</i>
χ_T	<i>Parâmetro de Estabilidade Chi T para Estruturas de Concreto Armado</i>
ψ	<i>Função de Forma</i>
ω_D	<i>Frequência Angular Amortecida de Vibração</i>
ω_n	<i>Frequência Angular de Vibração</i>

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO GERAL.....	19
1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS	19
1.2. OBJETIVO GERAL	20
1.3. OBJETIVO ESPECÍFICO	21
1.4. JUSTIFICATIVA	21
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	23
2.1. ANÁLISE DE SEGUNDA ORDEM.....	23
2.2. ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS	29
2.3. PARÂMETRO γ_z PARA ESTRUTURAS EM CONCRETO.....	42
2.4. OUTROS PARÂMETROS DE ESTABILIDADE.....	47
2.5. RELAÇÃO ENTRE PARÂMETROS DE ESTABILIDADE E O PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO	52
2.6. ANÁLISE NUMÉRICA SEGUNDO SAP2000	55
3. EQUACIONAMENTO DO PARÂMETRO χ_T	57
3.1. EQUACIONAMENTO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO	58
3.2. EQUACIONAMENTO AMPLIFICAÇÃO DOS EFEITOS DE 2ª ORDEM.....	61
3.3. EQUACIONAMENTO DO PARÂMETRO COMPLETO	63
3.4. SIMPLIFICAÇÃO DO PARÂMETRO	65
4. METODOLOGIA.....	69
5. RESULTADOS.....	73
6. CONCLUSÕES	83
7. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	84
8. BIBLIOGRAFIA	85

9. ANEXOS	92
ANEXO A – PLANTAS DOS MODELOS	93
ANEXO B – RESULTADOS COMPLETOS	96
ANEXO C – RESUMO EXPANDIDO EM INGLES	106
C.1. ABSTRACT	106
C.2. INTRODUCTION.....	107
C.3. AMPLIFICATION FACTORS PREVIOUSLY PROPOSED IN THE LITERATURE	108
C.4. DERIVATION OF THE AMPLIFICATION FACTOR: χ_T	111
C.5. FURTHER SIMPLIFICATION ON THE AMPLIFICATION FACTOR: χ_T	121
C.6. CASE STUDY	123
C.7. RESULTS	126
C.8. CONCLUSIONS AND DISCUSSIONS.....	131
C.9. ACKNOWLEDGEMENTS.....	132
C.10. REFERENCES.....	132

1. INTRODUÇÃO GERAL

1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O aumento da densidade demográfica em centros urbanos aliado a busca constante por novas soluções arquitetônicas contribuíram para a busca de estruturas mais altas e esbeltas. Além disso, o advento dos concretos de alta resistência, com valores de resistência à compressão acima de 50 MPa, faz com que os engenheiros lidem com estruturas mais esbeltas (Moncayo, 2011), levando a sistemas cada vez mais deslocabilidade do ponto de vista estrutural.

A atuação simultânea de esforços verticais e horizontais em estruturas deslocáveis pode gerar efeitos importantes e indesejáveis, inviabilizando a utilização e comprometendo a estabilidade das mesmas (Oliveira, 2002). Sendo assim, foram desenvolvidas ao longo do tempo diferentes ferramentas para a verificação da estabilidade das estruturas em sua configuração deformada. Para uma avaliação criteriosa da estabilidade, devem-se considerar os efeitos da não-linearidade física e geométrica dos elementos que compõe estrutura, o que faz com que esse tipo de análise seja complexa.

Como alternativa a uma análise rigorosa, principalmente em fases preliminares do projeto estrutural, foram propostos métodos simplificados de avaliação da instabilidade e suscetibilidade das estruturas aos esforços adicionais oriundos da não-linearidade geométrica, conhecidos como efeitos de segunda ordem. Estes métodos baseiam-se na determinação de parâmetros simples, utilizados em análises elásticas, para determinar a necessidade da consideração dos efeitos globais de segunda ordem no dimensionamento dos elementos estruturais.

Para a dispensa desses efeitos em estruturas de concreto armado, a ABNT NBR 6118:2014 permite a utilização de dois métodos aproximados: o parâmetro de instabilidade α e o parâmetro Gamma z (γ_z). O primeiro qualifica a estrutura como suscetível ou não aos efeitos de segunda ordem. O segundo, introduzido por Franco e Vasconcelos (1991) com o objetivo de propor um novo parâmetro de verificação da estabilidade estrutural, além de classificar quanto à suscetibilidade, representa uma estimativa do acréscimo de esforços devido aos efeitos de segunda ordem em relação aos efeitos de primeira ordem (Pinto, 2002).

Parâmetros de classificação e amplificação dos esforços para obter esforços de segunda ordem através de análises lineares também estão presentes nas normas de estruturas metálicas AISC/LFRD (2010) e ABNT NBR 8800:2008. Para o caso destas estruturas são adotados parâmetros para a consideração da estabilidade local do elemento (B_1) e para a consideração da estabilidade global da estrutura (B_2).

Haja vista que, dentre os parâmetros que influenciam a estabilidade global de um edifício, os mais importantes são a rigidez e o peso atuante na estrutura (Feitosa e Alves, 2015), existe alguma outra forma de avaliar a necessidade de consideração dos efeitos globais de segunda ordem? Recentemente, Statler et al. (2011) demonstraram que é possível relacionar a estabilidade global de estruturas metálicas com seu período fundamental de vibração, uma vez que ambos dependem das matrizes de massa e de rigidez da estrutura.

Nesse contexto, o objetivo principal deste trabalho é o equacionamento e a validação de um parâmetro de estabilidade de estruturas baseado na relação existente entre o período natural de vibração e os acréscimos de esforços devido aos efeitos globais de segunda ordem em estruturas. Para tanto diferentes modelos de pórticos tridimensionais em concreto armado foram considerados, onde variou-se a quantidade de pavimentos até que fosse atingido o valor limite de 1,3 para o parâmetro γ_z em cada uma das direções ortogonais.

Nessas condições, foram plotados para cada valor de período natural de vibração os respectivos valores da relação entre os momentos de segunda ordem sobre os momentos de primeira ordem de cada pilar da estrutura. Estes resultados foram comparados com o parâmetro equacionado e com uma simplificação proposta, verificando a eficiência de cada um.

1.2. OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é analisar a suscetibilidade de estruturas em concreto armado a efeitos de segunda ordem a partir da análise modal da estrutura, propondo um parâmetro que relacione estas duas análises. Para tal, serão modelados pórticos espaciais nos programas computacionais S4 Sistema Building e SAP2000 para obter os períodos naturais de vibração e à amplificação dos esforços, comparando assim com o parâmetro equacionado.

1.3. OBJETIVO ESPECÍFICO

Pretende-se demonstrar neste trabalho que o período natural pode ser tomado como um bom indicador para os efeitos de segunda ordem em estruturas de concreto armado, servindo de opção eficaz para a verificação da instabilidade global da estrutura.

Ao final, pretende-se apresentar um parâmetro alternativo de suscetibilidade e amplificação dos efeitos de segunda ordem para estruturas modeladas em pórticos espaciais, utilizando-se como base a análise modal da estrutura, obtendo resultados para as duas direções ortogonais dos pórticos espaciais.

1.4. JUSTIFICATIVA

A relevância da análise não-linear de estruturas vem aumentando ao longo dos anos associada à crescente busca por estruturas mais altas e esbeltas. Impulsionadas pela necessidade de otimização dos espaços nos grandes centros urbanos e pela possibilidade de utilização de materiais mais resistentes, a importância da concepção e do cálculo estrutural tem aumentado de tal forma que se faz necessário o desenvolvimento de técnicas para prever instabilidades nas estruturas.

As normas de dimensionamento de estruturas atuais preveem que as estruturas devam garantir a segurança e estabilidade nos estados últimos e de serviço, apresentando requisitos necessários para o atendimento dessas premissas. Dentre os requisitos pode-se destacar a verificação das instabilidades locais e globais, efeitos estes que tornam-se mais pronunciados em estruturas esbeltas.

As normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) apresentam métodos simplificados para a classificação e estimativa das majorações dos esforços devido à consideração dos efeitos de segunda ordem a partir de análises lineares de primeira ordem. Todavia, apesar da simplificação neste método, os cálculos destes parâmetros possuem certa complexidade e demandam muito cuidado em sua aplicação.

Apesar dos avanços tecnológicos das ferramentas de análise estrutural, as análises de segunda ordem têm sido muitas vezes negligenciadas ou aplicadas de forma incorreta pela inexperiência ou desconhecimento do processo de análise.

Desta forma, a proposição de uma metodologia simples e eficaz para classificar a estrutura quanto a suscetibilidade a efeitos de segunda ordem e, ao mesmo tempo, estimar a majoração dos esforços, representaria um avanço no desenvolvimento técnico e científico para a análise estrutural de estruturas esbeltas.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. ANÁLISE DE SEGUNDA ORDEM

Em 1676, Robert Hooke estabeleceu uma relação entre a deformação normal elástica de um objeto com as tensões normais impostas ao mesmo, sendo esta relação uma das bases do cálculo estrutural. A relação encontrada descreve que para o regime elástico a tensão normal é diretamente proporcional a deformação normal multiplicada pelo módulo de elasticidade, propriedade essa característica do material.

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad (\text{eq. 1})$$

Esta proporção é válida até que se alcance o chamado limite elástico do material. Até este limite, é admissível que o material se deforme linearmente sob a tensão aplicada, retornando ao seu estado inicial indeformado ao cessar o carregamento. Essa relação faz parte do conjunto de relações constitutivas dos materiais que, juntamente com as equações de equilíbrio e as equações de compatibilidade de deslocamento, fornecem condições suficientes para obtenção de esforços, deslocamentos, tensões, deformações e reações. Após ultrapassar o limite elástico é dito que o material alcança o estado plástico, estado este em que existe a presença de deformações residuais permanentes, mesmo após cessar os esforços.

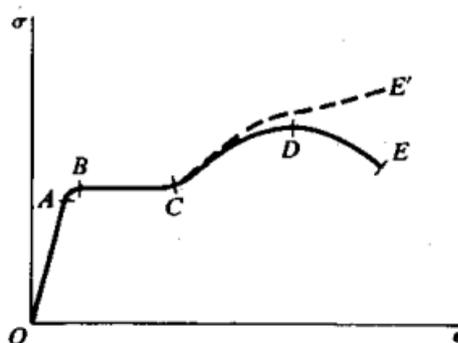


Figura 1 – Exemplo de limites elásticos e plásticos para materiais dúcteis (fonte: Timoshenko, 1983)

Na *análise de primeira ordem* ou *análise elástica-linear* dizemos que é respeitada a linearidade dos esforços e a superposição de efeitos. Na análise linear é admitida as seguintes hipóteses:

- O equilíbrio dos esforços é efetuado na situação não deformada (assume-se a validade da hipótese de pequenos deslocamentos);
- Os materiais são isótipos e com comportamento mecânico elástico-linear;

Segundo Lourenço (1999), a vasta utilização da análise linear atualmente faz com que muitos profissionais desconsiderem as limitações deste método. Leonhardt e Mönnig (2008) ressaltam a ineficiência de uma análise linear em estruturas expostas a grandes deformações.

“As hipóteses (lineares) da Teoria de 1ª Ordem, entretanto, devem ser abandonadas, quando as deformações tiverem sensível influência sobre os esforços solicitantes, diminuindo conseqüentemente a capacidade resistente de uma peça estrutural” (Leonhardt e Mönnig, 2008).

A *análise de segunda ordem*, em oposição à análise de primeira ordem, pretende obter os esforços e deslocamentos considerando o equilíbrio da estrutura em sua configuração deformada, levando em consideração suas características não-lineares físicas e geométricas. Ao estudarmos a não-linearidade dos materiais dizemos que a análise considera o efeito da *não-linearidade física*, ou seja, que a não-linearidade é causada pelo comportamento do material após seu regime elástico, sendo este influenciado por efeitos como a fissuração, fluência e escoamento da armadura (Pinto, 1997).

Já a *não-linearidade geométrica* considera o equilíbrio estático da estrutura em uma configuração deformada, gerando acréscimo de esforços devido a esta nova posição deformada. A sensibilidade das estruturas a este efeito em geral está ligada a esbeltez da mesma e a ação conjunta de forças externas longitudinais e transversais ao eixo da estrutura.

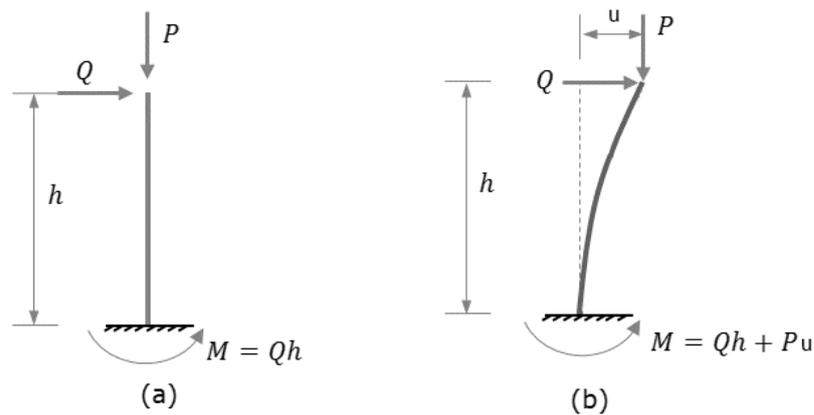


Figura 2 - Resultado de momentos na base de um pilar carregado segundo a análise de primeira ordem (a) e considerando o equilíbrio na posição deformada (análise de segunda ordem geométrica) (b)

Na Figura 2 é possível verificar a diferença entre os esforços obtidos na análise linear e na análise não linear geométrica. No primeiro caso, o momento na base é resultado unicamente da força horizontal Q , aplicada a uma altura h da base. Assim, a carga vertical P não gera um acréscimo de momento uma vez que o equilíbrio é efetuado na posição inicial. Entretanto ao analisar o equilíbrio da barra na Figura 2b, verifica-se um deslocamento horizontal u no topo da barra devido à atuação da carga Q . Assim, nesta nova configuração, existirá um acréscimo de momento devido ao deslocamento horizontal u , conhecido como momento de segunda ordem, que se adiciona ao momento de primeira ordem, devido somente à atuação da carga horizontal Q . Este acréscimo de momento pode levar a um aumento no deslocamento horizontal da barra, que por sua vez, pode levar a um novo acréscimo de momento, que no limite, causará a sua perda de estabilidade. Devido a isso, o estudo da instabilidade de barras esbeltas só pode ser realizado via uma análise de segunda ordem (Wight e MacGregor, 2012).

As barras de uma estrutura podem estar submetidas a dois tipos de momentos de segunda ordem:

1) Momentos resultantes da deflexão, δ , do eixo local da barra para longe da corda que une suas extremidades, conhecidos como momentos do tipo P- δ (Fig 3.b);

2) Momentos resultantes de deflexão lateral dos nós da estrutura, Δ , a partir de sua posição original, conhecidos como momentos do tipo P- Δ (Fig 3.a);

Desta maneira, a análise pode ser dividida em efeitos globais e locais, como apresentado na Figura 3. Na Figura 3a o deslocamento global dos pontos de aplicação da carga gera acréscimo nos esforços calculados, sendo assim tratado como uma análise do efeito global da deformação da estrutura, do tipo P- Δ . Já para o caso da Figura 3b, a deformação da barra implica em um aumento nos esforços, apesar de não haver um deslocamento horizontal dos nós, sendo assim associado a deformações dos elementos estruturais. Este segundo caso é tratado como uma análise dos efeitos locais, do tipo P- δ . O requisito básico da análise de segunda ordem é assegurar que o equilíbrio seja satisfeito para o sistema estrutural em sua configuração deformada (Ziemian, 2010)

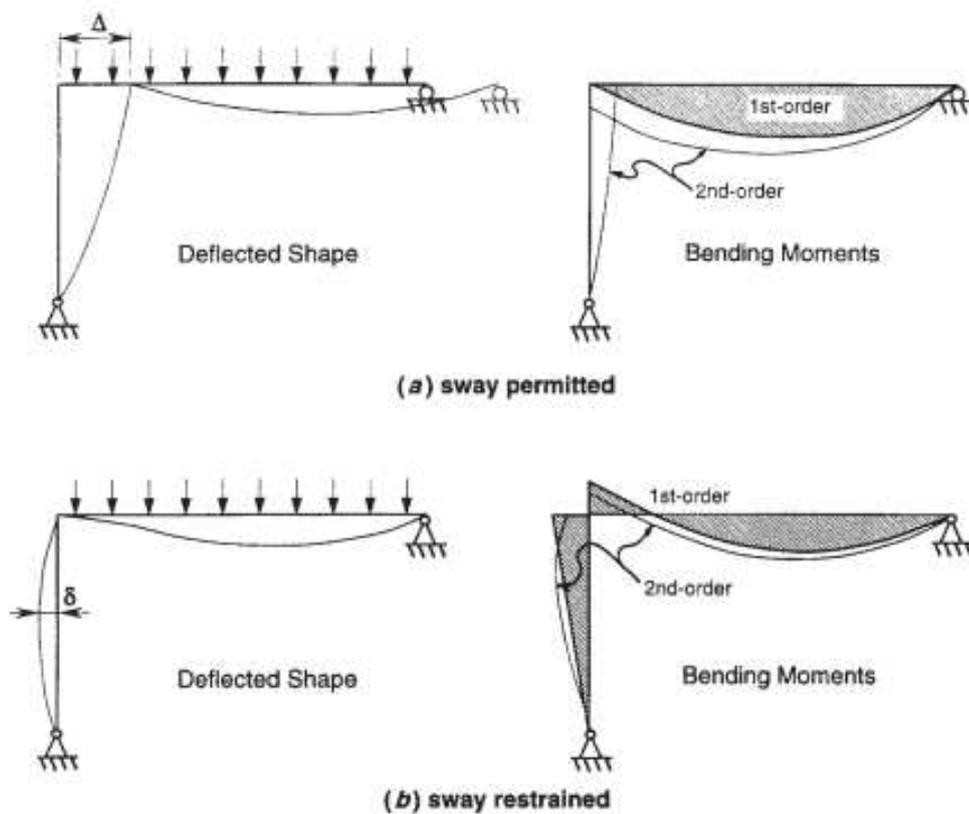


Figura 3 - Pórtico plano calculado com consideração dos efeitos de segunda ordem globais P- Δ (a) e locais P- δ (b) (fonte: ZIEMIAN, 2010)

Há diversos métodos para a determinação dos efeitos do P- Δ , como por exemplo a análise matricial da estrutura adaptando a matriz de rigidez para incluir os efeitos de P- Δ . Azevedo (1993) discorre sobre esta técnica em seu trabalho.

“Os métodos matriciais de análise estrutural, desenvolvidos para a resolução de problemas lineares, podem ser adaptados de forma a incluir os efeitos de segunda ordem. Devido à presença de termos não-lineares, a solução do problema matricial não pode ser obtida, em geral, de forma explícita recorrendo-se, conseqüentemente, a processos iterativos” (Azevedo, 1993, p.31)

Nesta técnica, a matriz de rigidez da $[K]$ da estrutura é montada de forma que seja a soma da matriz de rigidez elástica de primeira ordem $[K_E]$ e a matriz de rigidez geométrica $[K_G]$, tal como na Equação 2. A matriz de rigidez da estrutura é utilizada na análise matricial (equação 3), levando assim em consideração os efeitos da não-linearidade geométrica.

$$[K] = [K_E] + [K_G] \quad (\text{eq. 2})$$

$$[K]\{u\} = \{f\} \quad (\text{eq. 3})$$

Entretanto a matriz de rigidez geométrica depende dos esforços aplicados, sendo necessários métodos iterativos de resolução. Como o processo de inversão de matrizes é muito custoso computacionalmente, o processamento iterativo deste método torna-se inviável para a resolução de um sistema com vários graus de liberdade. Singh e Singh (1992) apresentaram método semelhante de resolução matricial incremental.

Outro método conhecido para a resolução deste tipo de problema é a resolução incremental-iterativa para obtenção dos efeitos P- Δ . Neste método é realizado o equilíbrio da estrutura a partir do deslocamento do ponto de aplicação da carga obtida pela análise anterior, resultando em um novo equilíbrio com um novo deslocamento deste ponto. O processo parte de uma análise linear de primeira ordem e é realizado sucessivamente até que seja encontrado equilíbrio. Uma descrição completa deste método pode ser encontrada em McGuire et al (2000).

Cada iteração gera um incremento nos esforços de segunda ordem, sendo que a somatória de todos estes incrementos resulta nos esforços finais de segunda ordem. Os esforços finais da estrutura são resultantes da soma dos esforços de primeira ordem com os esforços de segunda ordem (Bueno, 2009).

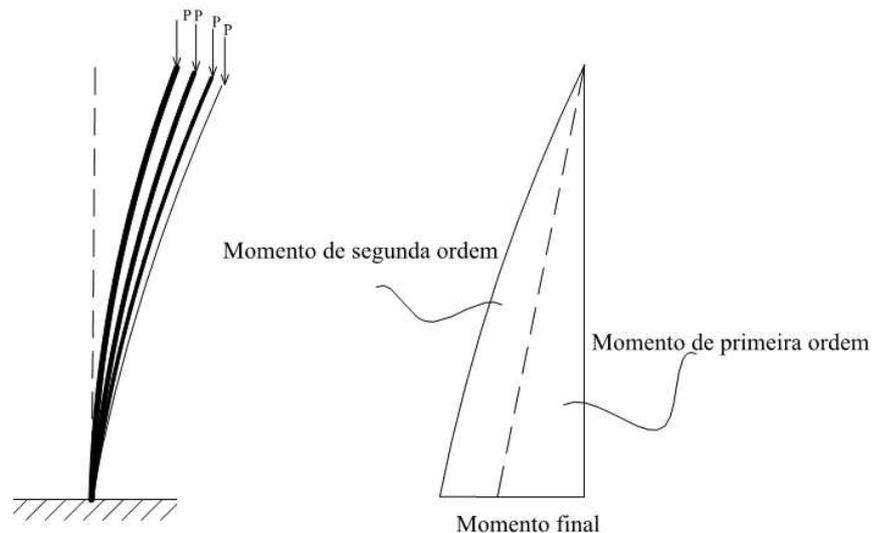


Figura 4 - Análise de segunda ordem com consideração do efeito P- Δ (fonte: Bueno, 2009)

Este método possui grande precisão sendo passível de implementar em programas computacionalmente. Entretanto o método mais otimizado para obtenção dos efeitos de segunda ordem é o proposto por Rutenberg (1981). Neste método a matriz de rigidez da estrutura é modelada acrescentando o efeito de barras diagonais fictícias com área negativa (Figura 5a) e colunas fictícias com inércia negativa (Figura 5b). Este novo equilíbrio já considera os efeitos de segunda ordem aplicados na estrutura e seu processamento é relativamente rápido comparado com os demais métodos. Posteriormente, outros métodos e variações baseados em forças nocionais foram apresentados e explorados por Wilson e Habilullah (1982), White et al. (2007a,b), LeMessurier (1976, 1977) e Crisfield (1991). Em outra vertente, Vandepitte (1982) propõe um método direto de análise a partir da alteração do método de inclinação-deflexão, obtendo novas equações de equilíbrio da estrutura.

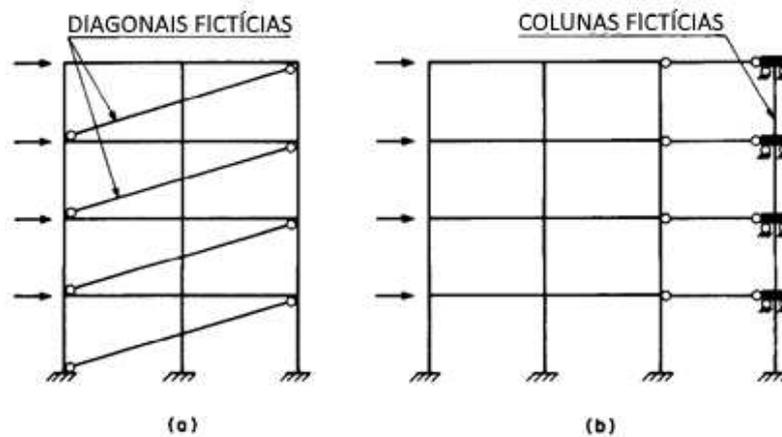


Figura 5 - Pórtico modelado com barras diagonais fictícias (a) e com uma coluna fictícia (b)

2.2. ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS

Ao contrário da análise estática clássica, quando se trata de uma análise de vibração de estruturas causada por um carregamento dinâmico, as forças aplicadas na estrutura variam ao longo do tempo, não existindo uma única solução para o problema mas sim uma função resposta em função do tempo. Desta forma, para a solução de um problema dinâmico é necessária a determinação do campo de deslocamentos $u(t)$, chamada de resposta dinâmica, obtendo a partir destes deslocamentos os esforços, reações, tensões. No caso dos problemas de caráter dinâmico devem ser consideradas as forças de inércia, que resistem ao movimento gerado pela força dinâmica aplicada. As forças de inércia são provenientes da massa da estrutura e possuem importância relevante nesse tipo de análise. Dependendo das características do sistema, devem ser consideradas também as forças oriundas das propriedades de amortecimento da estrutura. Estas forças são conhecidas como forças de amortecimento e dependendo das propriedades de amortecimento da estrutura, condicionam o caráter oscilatório da resposta. Em estruturas de concreto armado, a força de amortecimento é tão pequena que a amplitude máxima do deslocamento se confunde com a amplitude do deslocamento em um sistema não amortecido, podendo ser adotado em algumas análises um amortecimento nulo.

A determinação dos parâmetros e propriedades que influenciam de maneira significativa a resposta dinâmica de uma estrutura complexa demanda muita experiência da

parte dos engenheiros (Paultre, 2005). Para vários sistemas mecânicos ou estruturais, a resposta dinâmica completa pode ser definida pela resposta no tempo de apenas uma coordenada, conhecidos como sistemas a um grau de liberdade ou sistemas elementares. Normalmente esses sistemas são idealizações do comportamento, resultado de hipóteses simplificadoras para as propriedades essenciais do sistema: a massa, a rigidez e o amortecimento.

Dado um sistema elementar, a equação de equilíbrio dinâmico é definida a partir da soma do equilíbrio das forças inerciais, forças de amortecimento e forças elástica, que se opõe ao movimento gerado pela força externa aplicada ao sistema, como apresentado na Figura 6. A todo instante t , a massa do sistema está em equilíbrio sob a ação dessas forças, segundo o princípio de D'Alembert, e o equilíbrio dinâmico pode ser expresso pela Equação 4.

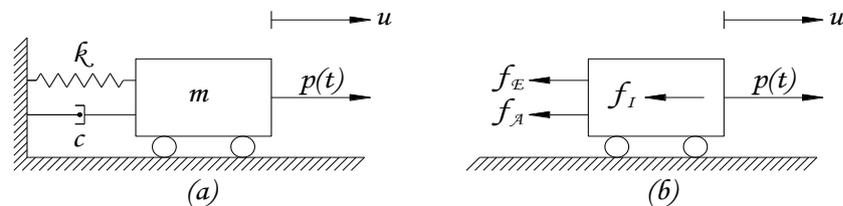


Figura 6 - Sistema oscilatório forçado amortecido com um grau de liberdade (a) e equilíbrio das forças do sistema (b)

$$f_I + f_A + f_E = p(t) \quad (\text{eq. 4})$$

Onde:

f_I força inercial;

f_A força de amortecimento;

f_E força elástica;

$p(t)$ força externa.

Para sistemas com massa concentrada, as forças internas podem ser expressas a partir das propriedades do sistema. Pode-se então obter a equação do movimento da massa ou equação de equilíbrio dinâmico, como apresentado na equação 5.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (\text{eq. 5})$$

Onde:

- m massa do corpo;
- c coeficiente de amortecimento;
- k rigidez a deformação da mola associada;
- p(t) forças externa.

Dependendo da natureza do material e do sistema considerado, a análise pode ou não levar em conta as forças de amortecimento, separando o equilíbrio dinâmico em análise de vibração de sistemas amortecidos ou não amortecidos. Outro fator importante na análise de vibração dinâmica é a existência ou não de uma carga dinâmica externa. A existência de força externa configura um sistema submetido a um regime de vibração forçada, que pode ser periódico ou não, dependendo da natureza da fonte externa de excitação da estrutura. Os casos onde não existem forças externas atuando são chamados de regime de vibração livre. Para o caso particular em que o sistema está submetido a um regime de vibração livre não amortecido a equação do equilíbrio dinâmico pode ser simplificada como apresentado na Equação 6.

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (\text{eq. 6})$$

A solução desta equação diferencial de segundo grau é uma função exponencial, com duas raízes diferentes, tal como descrito na equação 7. Sua solução possui duas raízes diferentes com a parte real nula, apresentadas na equação 8.

$$u(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\text{eq. 7})$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{eq. 8})$$

Substituindo estas raízes na equação 7 é possível descrever a posição do corpo em função do tempo. Também é possível expressar este resultado em senos e cossenos, tal como na equação 9.

$$u(t) = C_1 \text{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \text{cos} \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (\text{eq. 9})$$

Como é possível ver pela equação 9, a posição da massa em relação ao tempo descreve um movimento oscilatório com frequência angular (ou pulsação) de oscilação bem definida, tal como expresso na equação 10. Essa frequência angular é denominada de pulsação natural do sistema conservativo, ou pulsação própria, e seu valor é o inverso do período natural de vibração, como apresentado na equação 11.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{eq. 10})$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{eq. 11})$$

Ao estudar sistemas livres amortecidos passa-se a considerar as forças de amortecimento na equação de equilíbrio e a solução do sistema passa a ser dada pela resolução da equação 12. A equação diferencial poderá fornecer duas raízes reais, duas raízes complexas

ou uma única raiz real, como apresentado na equação 13, dependendo da relação entre o amortecimento c , a massa m e a rigidez k .

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (\text{eq. 12})$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (\text{eq. 13})$$

O sistema pode ser descrito como oscilatório caso as raízes da equação 13 sejam complexas, desta forma o valor do amortecimento que define o limite para que o sistema seja oscilatório ou não é denominado de amortecimento crítico, apresentado na equação 14. Para um sistema ser oscilatório o amortecimento deve ser inferior ao amortecimento crítico, apresentando assim uma razão de amortecimento ζ inferior a 1 (Equação 18).

$$c_{crit} = 2\sqrt{mk} \quad (\text{eq. 14})$$

$$\zeta = \frac{c}{c_{crit}} \quad (\text{eq. 15})$$

Classifica-se assim estes sistemas como *subamortecidos*. As estruturas em geral encontram-se nesta faixa de amortecimento, possuindo amortecimento crítico na faixa de 1% a 2% em estruturas de concreto armado, podendo aumentar para cerca de 5% após o aparecimento de fissuras e danos não estruturais quando submetidas a sismos (Wight e MacGregor, 2012).

Nestes casos a equação diferencial possuirá duas raízes complexas (equação 17) que podem ser descritas a partir da pulsação natural amortecida, apresentada na equação 16. A resolução deste sistema oscilatório pode ser apresentada em termos de senos e cossenos, como na equação 18.

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (\text{eq. 16})$$

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_D \quad (\text{eq. 17})$$

$$u(t) = (C_1 \text{sen}\omega_D t + C_2 \text{cos}\omega_D t) e^{-\zeta\omega_n t} \quad (\text{eq. 18})$$

O período natural de vibração de um sistema subamortecido pode ser calculado a partir do valor do período natural do sistema sem o amortecimento, uma vez que existe uma relação entre a pulsação natural com e sem amortecimento.

$$T_d = \frac{1}{\omega_D} = \frac{1}{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (\text{eq. 19})$$

Para o caso de sistemas não oscilatórios, a massa não oscilará em torno de sua posição inicial, havendo um decaimento exponencial da distância (Clough e Penzien, 1975; Chopra, 1995). Para o caso da estrutura possuir um fator de amortecimento igual a 1,0 define-se o sistema como *criticamente amortecido*, possuindo assim duas raízes iguais para o sistema (equação 20). A solução da equação diferencial assim é dada pela equação 21.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\zeta}{2m} = -\omega_n \quad (\text{eq. 20})$$

$$u(t) = (C_1 + tC_2) e^{-\omega_n t} \quad (\text{eq. 21})$$

Em sistemas cujo valor do amortecimento é superior ao amortecimento crítico, a solução para a equação diferencial apresenta duas raízes reais, representadas na equação 22.

Para estes casos o sistema é chamado de *sistema sobreamortecido*. A solução deste sistema é apresentada na equação 23.

$$\lambda_{1,2} = \zeta\omega_n \pm \omega_h \quad (\text{eq. 22})$$

$$u(t) = (C_1 e^{\omega_D t} + C_2 e^{-\omega_D t}) e^{-\zeta\omega_n t} \quad (\text{eq. 23})$$

No caso de sistemas com N graus de liberdade a formulação consiste em N equações diferenciais, compatíveis com os N graus de liberdade considerados. Uma maneira de expressar esta formulação é através de notação matricial, substituindo os parâmetros de entrada por matrizes contendo os parâmetros de entrada de cada equação diferencial. É possível reduzir a quantidade de variáveis da matriz a partir de uma condensação estática, diminuindo assim a ordem do problema.

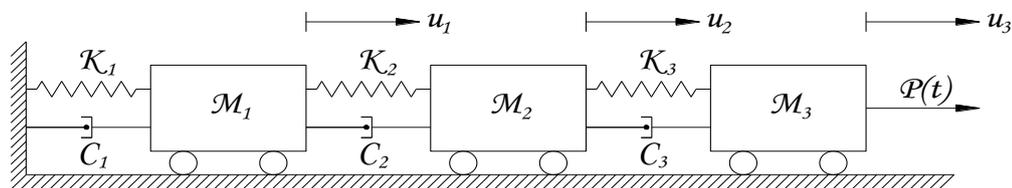


Figura 7 - Sistema oscilatório forçado não amortecido com múltiplos graus de liberdade

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F(t) \quad (\text{eq. 24})$$

Onde:

- M Matriz de massas;
- C Matriz de Amortecimento;
- K Matriz de Rigidez;
- F(t) Vetor de forças externas.

Para o caso de sistemas livres e não amortecidos o resultado do período natural de vibração pode ser obtido através da seguinte equação:

$$|K - \omega_n^2 M| = 0 \quad (\text{eq. 25})$$

O resultado da equação 25 é um conjunto de autovalores, representando as pulsações naturais para o sistema. Em estruturas reais temos infinitos graus de liberdade, resultando assim em um número infinito de pulsações naturais.

Cada autovalor obtido nesta equação possui um autovetor associado, expressando uma forma generalizada para o deslocamento de cada massa. Estes autovetores são chamados de modos de vibração da estrutura.

É denominado como primeiro modo de vibração, ou modo fundamental de vibração, uma resposta singular de deslocamento associada ao maior período de vibração da estrutura. A solução do sistema como um todo é resultado de uma combinação de todos os modos de vibração presentes na estrutura, dependendo das condições de contorno e da fonte de excitação.

Para estruturas flexíveis é necessária a consideração da distribuição da massa ao longo dos elementos, havendo assim infinitos graus de liberdade no sistema. Um artifício para a resolução deste problema é a consideração de que o sistema oscilatório terá apenas um único modo de vibração, tratando-o desta forma como um sistema de um grau de liberdade (Paultre, 2005).

Considerando uma barra engastada na base da Figura 8, com uma massa distribuída $\bar{m}(x)$, massa concentrada m_i e rigidez $EI(x)$ ao longo da barra, e sujeita a carregamento horizontal genérico $p(x, t)$ e uma carga axial $N(x)$, podemos descrever que o deslocamento de cada ponto da barra ao longo de tempo é dado pela função $u(x, t)$, dependente do tempo e da posição (equação 26). Este deslocamento pode ser descrito através de uma função de deslocamento independente do tempo, denominada de função de forma $\psi(x)$, como apresentado na Equação 27.

$$u(x, t) = \psi(x)z(t) \quad (\text{eq. 26})$$

$$\psi(x) = \frac{u(x, t)}{z(t)} \quad (\text{eq. 27})$$

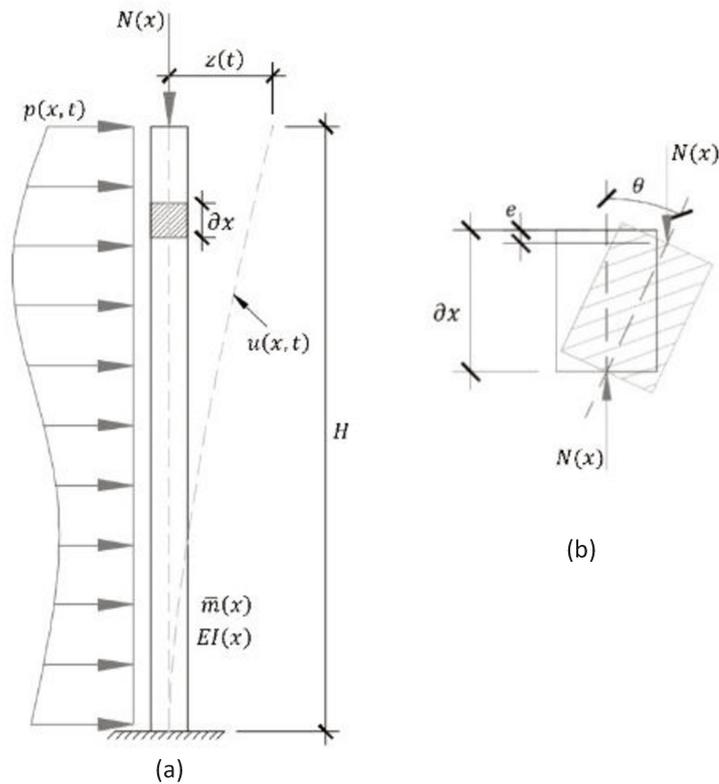


Figura 8 - (a) Barra engastada com deslocamento associado $u(x,t)$ e (b) trecho infinitesimal da barra ∂x

A equação do equilíbrio dinâmico da estrutura pode ser obtida pelo princípio dos trabalhos virtuais, o qual define que o trabalho virtual das forças externas δW_E é igual ao trabalho virtual das forças internas δW_I , quando esta está submetido a um deslocamento virtual $\delta u(x)$. Desta forma, o trabalho virtual das forças externas é o somatório do trabalho virtual causado pela força $p(x, t)$, pela força $N(x)$ e pelas forças inerciais, como apresentado na Equação 28.

$$\delta W_E = \delta W_p + \delta W_N + \delta W_{fI} \quad (\text{eq. 28})$$

O trabalho virtual resultante do carregamento horizontal $p(x, t)$, associado ao deslocamento $\delta u(x)$, é descrito na Equação 31.

$$p(x, t) = f(x)f_T(t) \quad (\text{eq. 29})$$

$$\delta u(x) = \psi(x)\delta z \quad (\text{eq. 30})$$

$$\delta W_p = \int_0^H p(x, t)\delta u(x)\partial x = f_T(t)\delta z \int_0^H f(x)\psi(x)\partial x \quad (\text{eq. 31})$$

Dado que a força inercial $f_I(x, t)$ é descrita na Equação 32, o trabalho virtual desta força associado ao deslocamento $\delta u(x)$ é apresentado na Equação 33.

$$f_I(x, t) = -\bar{m}(x)\ddot{u}(x, t) = -\bar{m}(x)\psi(x)\ddot{z}(t) \quad (\text{eq. 32})$$

$$\delta W_{f_I} = \int_0^H f_I(x, t)\delta u(x)\partial x = -\ddot{z}(t)\delta z \int_0^H \bar{m}(x)[\psi(x)]^2\partial x \quad (\text{eq. 33})$$

Por fim, para o cálculo do trabalho virtual da força $N(x)$, é necessário obter o deslocamento $\delta e(x)$ associado, como ilustrado na Figura 8b. Para tal, é necessária a consideração das relações trigonométricas presentes entre $\delta e(x)$ e $\delta u(x)$, apresentadas nas Equações 34 e 35.

$$e = (1 - \cos \theta)\partial x \quad (\text{eq. 34})$$

$$\partial e = \partial \theta \operatorname{sen} \theta \partial x \approx \theta(x, t) \partial \theta \partial x \quad (\text{eq. 35})$$

Como o ângulo $\theta(x, t)$ pode ser obtido pela derivada do deslocamento $u(x, t)$ em relação a posição x (equação 36), o deslocamento $\delta e(x)$ é definido como o apresentado na Equação 37.

$$\theta(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} z(t) \quad (\text{eq. 36})$$

$$\partial e = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} z(t) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \delta z \partial x \quad (\text{eq. 37})$$

Assim, o trabalho virtual da força axial $N(x)$ é dado pela Equação 39.

$$\partial(\delta W_N) = N \delta e = N \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2 z(t) \delta z \partial x \quad (\text{eq. 38})$$

$$\delta W_N = \int_0^H \partial(\delta W_N) = z(t) \delta z \int_0^H N(x) \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2 \partial x \quad (\text{eq. 39})$$

Assumindo desprezível a parcela do cisalhamento e torção da barra para o cálculo do trabalho virtual das forças internas, é necessário obter o trabalho virtual do momento fletor $M(x, t)$ da barra associado a curvatura $\delta \varphi(x)$, como apresentado nas Equações 40 a 42.

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} z(t) \quad (\text{eq. 40})$$

$$\delta\varphi(x) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \delta z \quad (\text{eq. 41})$$

$$\delta W_E = \int_0^H M(x, t) \delta\varphi(x) \partial x = z(t) \delta z \int_0^H EI(x) \left[\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \right]^2 \partial x \quad (\text{eq. 42})$$

Igualando o trabalho virtual das forças internas e o trabalho virtual das forças externas, é possível obter a equação do equilíbrio dinâmico, tal como descrito abaixo.

$$\begin{aligned} z(t) \delta z \int_0^H EI(x) [\psi''(x)]^2 \partial x = f_T(t) \delta z \int_0^H f(x) \psi(x) \partial x + \\ + z(t) \delta z \int_0^H N(x) \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2 \partial x - \ddot{z}(t) \delta z \int_0^H \bar{m}(x) [\psi(x)]^2 \partial x \end{aligned} \quad (\text{eq. 43})$$

Rearranjando esta equação, é possível apresentá-la como a equação do equilíbrio dinâmico de um sistema de um grau de liberdade, como a Equação 5 apresentada anteriormente, sendo esta representada por uma massa generalizada, uma rigidez estática generalizada, uma rigidez geométrica generalizada e uma força externa generalizada.

$$\tilde{m} = \int_0^H \bar{m}(x) [\psi(x)]^2 \partial x \quad (\text{eq. 44})$$

$$\tilde{k}_E = \int_0^H EI(x) [\psi''(x)]^2 \partial x \quad (\text{eq. 45})$$

$$\tilde{k}_G = - \int_0^H N(x) \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2 \partial x \quad (\text{eq. 46})$$

$$\tilde{p}(t) = f_T(t) \int_0^H f(x) \psi(x) \partial x \quad (\text{eq. 47})$$

$$\tilde{m}\ddot{z}(t) + \tilde{k}_E z(t) + \tilde{k}_G z(t) = p(t) \quad (\text{eq. 48})$$

Para o caso das massas concentradas m_i , a massa generalizada \tilde{m} é descrita como.

$$\tilde{m} = \int_0^H \bar{m}(x) [\psi(x)]^2 \partial x + \sum m_i (\psi_i)^2 \quad (\text{eq. 49})$$

Igualando as máximas energias potencial e cinética do sistema, é possível obter a frequência angular de vibração (ω_n) deste sistema conservativo. A partir da relação entre frequência angular e período natural de vibração (Equação 11) é possível calcular o período natural de vibração do sistema, como apresentado na Equação 50.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\tilde{m}}{\tilde{k}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\int_0^H \bar{m}(x) [\psi(x)]^2 \partial x + \sum m_i (\psi_i)^2}{\int_0^H EI(x) [\psi''(x)]^2 \partial x - \int_0^H N(x) \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2 \partial x}} \quad (\text{eq. 50})$$

Como é possível notar, dado o sistema com infinitos graus de liberdade, é possível simplificá-lo para um sistema de um grau de liberdade, desde que conhecida a função de forma $\psi(x)$. Em seus estudos, Rayleigh (1945) demonstrou, a partir do princípio da conservação de energia, que é possível adotar qualquer função de forma $\psi(x)$ que atenda as condições de contorno do sistema.

Apesar de o resultado exato para o sistema oscilatório só ser possível através da adoção do fator de forma exato, qualquer fator que atenda as condições de contorno do sistema fornecerá uma boa aproximação para o resultado, obtendo em uma frequência natural sempre maior que a exata. Desta forma o período natural de vibração encontrado por este método nunca será superestimado, independente do fator de forma adotado.

2.3. PARÂMETRO γ_z PARA ESTRUTURAS EM CONCRETO

A necessidade de verificar a suscetibilidade à influência dos efeitos geometricamente não lineares levou ao desenvolvimento de diversas técnicas de classificação das estruturas e estimativas dos esforços de segunda ordem nas estruturas.

Uma das primeiras tentativas para classificar estruturas segundo sua suscetibilidade a efeitos de segunda ordem foi introduzida por Beck e König (*apud* Vasconcelos, 1998), considerando a edificação como uma única barra engastada na base e livre no topo, com carga horizontal distribuída perpendicularmente ao eixo da barra (Cicolin et al., 2011). Este parâmetro, denominado de α , baseava-se na aproximação de que a rigidez da estrutura se concentra em poucos pilares rigidamente conectados entre si, como um pilar único, desconsiderando a contribuição da rigidez dos pilares menos rígidos (Vasconcelos, 1998).

O desenvolvimento teórico deste parâmetro tem como base a teoria de Euler para a carga crítica de flambagem de uma barra, situação esta simplificada pelos autores. Este tipo de análise simplificada permite a classificação das estruturas quanto a sua deslocabilidade, a partir de uma análise elástica de primeira ordem.

Beck e König concluíram em seu trabalho que o parâmetro de instabilidade proposto chegaria a bons resultados para estruturas de três ou mais pavimentos. Também concluíram que a análise de segunda ordem podia ser suprimida nas estruturas em que os efeitos de segunda ordem não acarretassem em um aumento de mais de 10% nos esforços da análise elástico-linear (Ellwanger, 2013).

$$\alpha = H_{Tot} \sqrt{\frac{(p + v)H_{Tot}}{EI}} \quad (\text{eq. 51})$$

onde,

p Carga distribuída nas subestruturas de contraventamento

v Carga distribuída nos elementos contraventados

H_{Tot} Altura total da edificação

Em 1990, após uma série de estudos realizados, o CEB-FIP abandonou o parâmetro α . Posteriormente a NBR 6118:2003 incorporou este parâmetro a sua seção 15, a qual trata especificamente da instabilidade nas estruturas. Para tal, ela adaptou o parâmetro substituindo as cargas das subestruturas em uma carga única com seu valor característico (N_k), também definindo que a rigidez considerada é a soma da rigidez de todos os pilares na direção considerada (equação 52). A norma também apresenta o valor de α limite para que a estrutura possa ser considerada de nós fixos, sendo este limite $0.2+0.1n$, em que n é o número de pavimentos, nos casos de estruturas de até 3 pavimentos, e 0.6 no caso de estruturas de 4 ou mais pavimentos.

$$\alpha = H_{Tot} \sqrt{\frac{N_k}{E_{CS}I_C}} \quad (\text{eq. 52})$$

Em 1991, para atender a demanda para uma classificação da suscetibilidade das estruturas a efeitos de segunda ordem, Franco e Vasconcelos (1991) propuseram um novo parâmetro de estabilidade a partir da análise da relevância dos momentos produzidos pelas forças verticais com excentricidade resultante das forças horizontais, parâmetro este denominado de γ_z .

A idealização do parâmetro γ_z partiu do processo de análise de deformações sucessivas, denominado de P- Δ (tal como apresentado no capítulo “Análise de segunda ordem”) em que a estrutura é sucessivamente carregada a partir da posição deformada anterior. O momento fletor de segunda ordem pode ser descrito como uma soma do momento fletor de

primeira ordem com os momentos fletores de segunda ordem, obtendo assim o momento final M_2 .

$$M_2 = M_1 + \Delta M_2 + \Delta M_3 + \Delta M_4 + \dots + \Delta M_n \quad (\text{eq. 53})$$

Segundo Vasconcelos (1998), é possível adotar que os termos desta somatória são uma progressão geométrica decrescente com uma razão $r \leq 1$. Desta forma é possível reescrever a equação 53 em termos do produto do momento de primeira ordem e as razões geométricas, como nas equações 54 e 55.

$$r = \frac{\Delta M_2}{M_1} = \frac{\Delta M_3}{\Delta M_2} = \frac{\Delta M_4}{\Delta M_3} = \frac{\Delta M_5}{\Delta M_4} = \dots = \frac{\Delta M_n}{\Delta M_{n-1}} \quad (\text{eq. 54})$$

$$M_2 = M_1(1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n) \quad (\text{eq. 55})$$

É possível notar que a somatória das razões será sempre maior do que 1, majorando assim o valor do momento primeira ordem. Oliveira (2002) descreve que o limite desta somatória quando n tende a infinito pode ser escrito da seguinte forma.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n) = \frac{1}{1 - r} \quad (\text{eq. 56})$$

Substituindo a razão r desta equação na equação 56 teremos a majoração dos esforços de primeira ordem em função do momento de primeira ordem e da primeira iteração no processo P- Δ para consideração dos efeitos de segunda ordem.

$$\frac{M_2}{M_1} = \gamma_z = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_2}{M_1}} \quad (\text{eq. 57})$$

A norma brasileira ABNT NBR 6118:2014 apresenta esta relação como sendo o produto das forças verticais pelo deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga, dividido pelo momento de tombamento.

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}} \quad (\text{eq. 58})$$

Onde:

$M_{1,tot,d}$ Momento de tombamento, ou seja, a soma dos momentos de todas as forças horizontais da combinação considerada com seus valores de cálculo, em relação à base da estrutura;

$$M_{1,tot,d} = \sum (H_{i,d} h_i) \quad (\text{eq. 59})$$

$\Delta M_{tot,d}$ Soma dos produtos de todas as forças verticais na estrutura, na combinação considerada, com seus respectivos valores de cálculo, pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos na análise de 1ª ordem. (ABNT NBR 6118:2014).

$$\Delta M_{tot,d} = \sum (P_{i,d} u_i) \quad (\text{eq. 60})$$

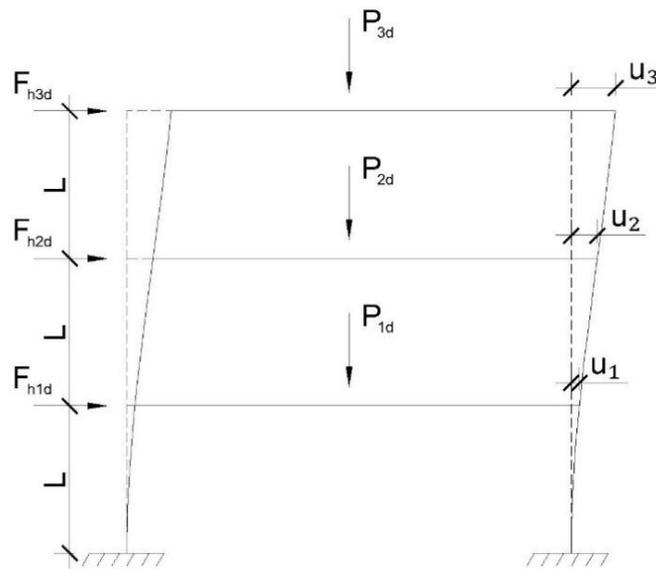


Figura 9 - Representação dos esforços, deslocamentos e distâncias para cálculo do γ_z

O parâmetro γ_z apresentado possui uma vantagem acerca do parâmetro α , uma vez que, além de classificar a estrutura de acordo com a sensibilidade aos efeitos globais de segunda ordem, também fornece uma estimativa de majoração dos efeitos de primeira ordem devido aos efeitos de segunda ordem que incidem sobre a estrutura (Feitosa et al., 2015). Para estruturas em que a majoração dos esforços devido aos efeitos de segunda ordem não ultrapassar 10% dos esforços calculados na análise de primeira ordem, dizemos que a estrutura é de nós fixos, tal como abordado por Beck & König (*apud* Vasconcelos, 1998), caso este em que os acréscimos de momento devido aos efeitos de segunda ordem são desprezíveis. Para estes casos é previsto em norma a dispensa da consideração dos efeitos de segunda ordem nestas estruturas.

Já estruturas com valores de γ_z superiores a 1,10 dizemos que a mesma é de nós móveis. Franco e Vasconcelos (1991) propuseram ainda que para estruturas de nós móveis com γ_z até o valor de 1,20 era possível a utilização do mesmo como método aproximado para cálculo dos efeitos de segunda ordem. Posteriormente, Carmo (1995) apresentou uma nova proposição para o limite em que pode se adotar o parâmetro γ_z para estimar os efeitos de segunda ordem, sendo este de 1,30. A NBR 6118:2003 também acrescentou o parâmetro γ_z a seção *Instabilidade e efeitos de 2ª ordem*, admitindo esta majoração dos esforços horizontais em $0,95\gamma_z$ para estruturas de nós móveis com o valor de $\gamma_z \leq 1,30$.

A eficiência deste parâmetro de amplificação foi testada em diversos estudos (Carmo, 1995; Lime e Guarda, 1999; Pinto et al., 2005) demonstrando o desempenho satisfatório do método, entretanto Lima e Guarda (1999) e Oliveira (2007) demonstraram que estes métodos superestimam os momentos em níveis inferiores e subestimam em níveis superiores da estrutura.

2.4. OUTROS PARÂMETROS DE ESTABILIDADE

Segundo Souza e Pereira (2009), os processos de análises de segunda ordem são classificados como processos rigorosos (com solução por processo iterativo), aproximados e simplificados. Alguns destes processos aproximados foram apresentados no capítulo “Análise de Segunda Ordem”, sendo também abordados por Chen & Lui (1991), Galambos (1998), Wood et al. (1976), Macgregor & Hage (1977), e Al Mashary & Chen (1990).

Já os processos simplificados apresentam praticidade e agilidade na resolução, sendo muito útil para o processo de análise estrutural. Alguns destes baseiam-se em equações aproximadas para a consideração destes efeitos, a partir do momento-curvatura de cada seção, atuando na modificação da rigidez a flexão de elementos estruturais (Chen e Lui, 1987; MacGregor et al., 1970; Mavichak e Furlong, 1976; Mirza, 1990; Resheidar et al., 1995; Bonet et al., 2004; Bonet et al., 2011; Afefy, 2012; Avsar et al., 2014). Muitas normas internacionais apresentam métodos simplificados para a consideração dos efeitos de segunda ordem a partir do momento-curvatura dos elementos estruturais, como é o caso das normas americanas (ACI-218-11,2011), canadense (CSA Standard A23.3-14, 2004), europeia (EM-192-1-1, 2004) e francesa (BAEL 91 E.7, 1999).

Outros métodos simplificados consideram o equilíbrio global da estrutura submetida a flexo compressão, como é o caso dos parâmetros α e γ_z apresentados anteriormente. Para estruturas metálicas, a norma brasileira ABNT NBR 8800:2008 cita o método de amplificação dos esforços através dos parâmetros B_1 e B_2 , presentes também na AISC/LRFD (2010). Tais parâmetros serão explorados aqui para introduzir o método semelhante proposto por Statler (2010) para estruturas metálicas.

Ao contrário do parâmetro γ_z que foi introduzido como método de classificação das estruturas e posteriormente verificado que é aplicável como estimativa dos esforços amplificados, o método apresentado pela AISC (2010) é um método para amplificação dos efeitos e sua concepção. Outro ponto que este parâmetro difere é a possibilidade de considerar não apenas os efeitos da instabilidade global da estrutura (P- Δ), mas também os efeitos locais (P- δ).

Segundo Nardi et al (2010), as estruturas podem ser classificadas como estruturas de baixa deslocabilidade, média deslocabilidade ou de alta deslocabilidade, comparando-se os deslocamentos resultantes de uma análise de segunda ordem com os deslocamentos resultantes de uma análise de primeira ordem. Em sua seção acerca da estabilidade estrutura, a norma ABNT NBR 8800:2008 rege que o próprio parâmetro B_2 pode ser utilizado como estimativa para esta relação entre deslocamentos obtidos na análise de segunda ordem e os deslocamentos obtidos na análise de primeira ordem, definindo assim os limites para classificação das estruturas (Equação 61).

$$\begin{cases} \Delta_2/\Delta_1 \leq 1,1 & \rightarrow \text{Estruturas de baixa deslocabilidade} \\ 1,1 < \Delta_2/\Delta_1 \leq 1,4 & \rightarrow \text{Estruturas de média deslocabilidade} \\ \Delta_2/\Delta_1 \geq 1,4 & \rightarrow \text{Estruturas de alta deslocabilidade} \end{cases} \quad (\text{eq. 61})$$

Desta forma, o parâmetro B_2 além de amplificar os esforços de segunda ordem também tem como função a classificação das estruturas. Assim como nas estruturas em concreto, a dispensa dos efeitos de segunda ordem é admitida para estruturas em que a consideração desta análise não gera um acréscimo de mais de 10% nos esforços calculados pela análise linear de primeira ordem. Todavia, a norma ABNT NBR 8800:2010 também estabelece duas exigências para que esta dispensa possa ser adotada: que as forças axiais solicitantes de todas as barras cuja flexão contribua para a estabilidade lateral da estrutura não sejam superiores a 50% da força axial correspondente ao escoamento da seção transversal e que sejam levados em consideração os efeitos de imperfeições geométricas iniciais nas combinações de cálculo.

Em estruturas de média deslocabilidade é necessário levar em consideração os efeitos das imperfeições geométricas iniciais, através da aplicação de um deslocamento inicial em cada andar de $h/333$, sendo h a altura do pavimento, ou através da aplicação de uma força

horizontal equivalente, denominada de força nocional. O esforço resultante desta imperfeição geométrica não deve ser combinado com demais carregamentos, mas pode ser considerado como um carregamento mínimo para a envoltória dos esforços. Também é necessário que sejam considerados neste caso as imperfeições iniciais do material, reduzindo a rigidez a flexão e a rigidez axial da barra para 80% dos valores originais.

A partir desta classificação, é indispensável a análise considerando os efeitos de segunda ordem locais e globais da estrutura. Segundo o método simplificado de amplificação dos esforços de primeira ordem, os momentos fletores de segunda ordem são obtidos pela somatória dos momentos fletores do modelo com restrição a deslocamentos laterais (*Estrutura nt*, Figura 10b), majorados pelo parâmetro de estabilidade local B_1 , com os momentos fletores devidos as cargas horizontais no modelo deslocável (*Estrutura lt*, Figura 10c), majorados do parâmetro de estabilidade global B_2 , tal como a equação 62.

$$M_{Sd} = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} \quad (\text{eq. 62})$$

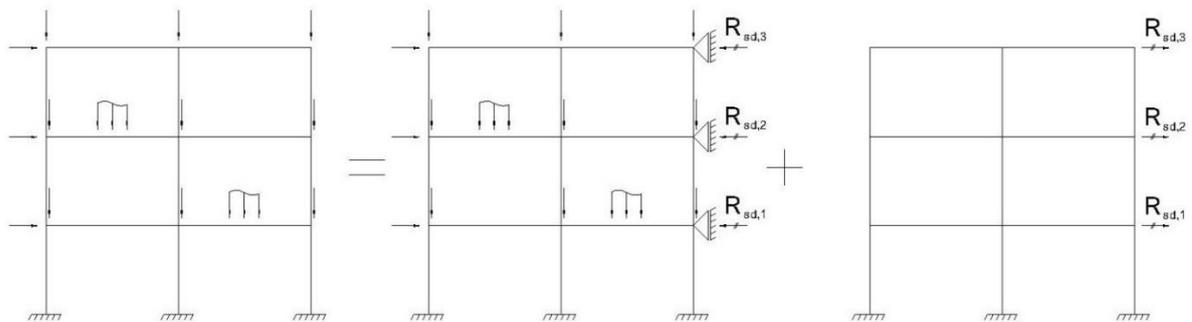


Figura 10 - Modelos simplificados para aplicação dos parâmetros B_1 e B_2

A amplificação das forças axiais também deve passar por este processo, contudo sem a majoração da carga devido à instabilidade local da barra. Assim a majoração pode ser obtida pela equação 63, seguindo os mesmos modelos apresentados na Figura 10.

$$N_{Sd} = N_{nt} + B_2 N_{lt} \quad (\text{eq. 63})$$

O cálculo do parâmetro de estabilidade local da barra, o B_1 depende fundamentalmente da carga crítica a flambagem da barra, segundo a teoria de Eüler. Desta forma, o equacionamento da barra segundo a ABNT NBR 8800:2008 é dado pela equação 64.

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - \frac{N_{Sd1}}{N_e}} \quad (\text{eq. 64})$$

Onde:

- N_e Força axial que provoca a flambagem elástica por flexão da barra no plano de atuação do momento fletor, calculada com o comprimento real da barra, considerando se for o caso a imperfeição local do material;
- N_{Sd} Força axial de compressão solicitante de cálculo da barra considerada, em análise de primeira ordem;
- C_m Coeficiente de uniformização de momentos fletores.

Este último parâmetro dependerá se não houver forças transversais entre as extremidades da barra no plano de flexão, caso em que deverá ser adotada a equação 65 para cálculo do coeficiente, ou se houver uma força transversal entre as extremidades da barra no plano de flexão, podendo ser adotado neste caso o valor de 1,0 para o coeficiente.

$$C_m = 0,6 - 0,4 \frac{M_1}{M_2} \quad (\text{eq. 65})$$

Onde:

- M_1 Menor momento fletor solicitante na estrutura nt no plano de flexão, na extremidade apoiada da barra;
- M_2 Maior momento fletor solicitante na estrutura nt no plano de flexão, na extremidade apoiada da barra.

Para o parâmetro B_2 o cálculo dependerá dos momentos fletores da análise linear de primeira ordem e do acréscimo de momento gerado devido ao produto do deslocamento horizontal do ponto de aplicação e a carga vertical atuante, semelhante ao cálculo de γ_z . Todavia, diferentemente do parâmetro γ_z que era calculado para a edificação como um todo, o parâmetro de estabilidade global B_2 é calculado para cada pavimento da estrutura. Então o deslocamento horizontal calculado é o deslocamento relativo entre pavimentos e a altura considerada é a distância entre dois eixos de barras consecutivas ou distância entre o eixo da viga e a base, no caso do primeiro pavimento.

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{R_s} \frac{\Delta_h}{h} \frac{\sum N_{Sd}}{\sum H_{Sd}}} \quad (\text{eq. 66})$$

Onde:

- $\sum N_{Sd}$ Carga gravitacional total atuante no andar considerado, inclusive das subestruturas que não pertençam a estruturas de contraventamento;
- $\sum H_{Sd}$ Somatório de todas as cargas horizontais atuantes no pavimento;
- Δ_h Deslocamento horizontal relativo entre dois pavimentos consecutivos devido às forças horizontais aplicadas;
- h Altura do pavimento;
- R_s Coeficiente de ajuste, igual a 0,85 em estruturas compostas apenas por subestruturas de contraventamento formando por pórticos nos quais se assegure a estabilidade lateral. Nos demais casos deve-se adotar o valor de 1,00.

2.5. RELAÇÃO ENTRE PARÂMETROS DE ESTABILIDADE E O PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO

Apesar das normas técnicas preverem parâmetros de classificação das estruturas com base em sua deslocabilidade, o processo pode ser trabalhoso e demanda diversas etapas de análise, dependendo inicialmente da conclusão de uma análise elástico-linear de primeira ordem para obter os deslocamentos necessários na verificação.

Em seu estudo, Statler (2010) demonstrou haver uma relação entre a amplificação dos esforços e o período natural de vibração de pórticos planos. Sua proposição partiu da percepção de que tanto os parâmetros de classificação e majoração dos esforços quanto o período natural dependem fundamentalmente da massa e rigidez da estrutura.

Inicialmente foi apresentado o cálculo do período natural de vibração de uma barra indeformável com apoio elástico, como na Figura 11. Aplicando os conceitos apresentados anteriormente de equilíbrio de forças em um sistema oscilatório livre não-amortecido, podemos verificar que para este caso a força inercial depende da translação e da rotação do centro de massa, ambos expressos em função do ângulo de giro θ graças a teoria de pequenos deslocamentos, como apresentado na Equação 67.

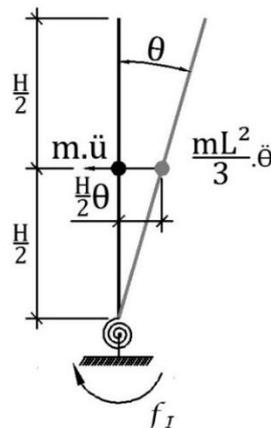


Figura 11 - Sistema oscilatório livre não-amortecido considerando corpo rígido e apoio elástico.

$$f_I = m \frac{H}{2} \ddot{\theta} \frac{H}{2} + \frac{m \left(\frac{H}{2}\right)^2}{3} \ddot{\theta} = \frac{mH^2}{3} \ddot{\theta} \quad (\text{eq. 67})$$

A equação do equilíbrio dinâmico neste sistema é apresentada na Equação 68. O resultado para o período natural de vibração deste sistema pode ser obtido analogamente ao apresentado no capítulo “*Análise dinâmica de estruturas*”, tendo sua resposta dada em função da massa m da barra, da altura H e da rigidez k da mesma, como descrito na equação 69.

$$\frac{mH^2}{3} \ddot{\theta} + k\theta = 0 \quad (\text{eq. 68})$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mH^2}{3k}} \quad (\text{eq. 69})$$

O valor do deslocamento Δ_h pode ser expresso em função da força horizontal e da rigidez da barra, a partir de uma análise elástica de primeira ordem, tal como na equação 70. Assim o valor do parâmetro B_2 poderia ser expresso em termos da rigidez k , massa m e altura H da barra, como na equação 71.

$$H_{sd} = \Delta_h \cdot k \quad (\text{eq. 70})$$

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{R_s} \frac{\sum H_{sd}}{k} \frac{\sum N_{sd}}{\sum H_{sd}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{R_s} \frac{m g}{H k}} \quad (\text{eq. 71})$$

Reescrevendo a equação 69 para que apresente a relação entre a massa e a rigidez, presente na equação desenvolvida 72, e substituindo esta relação na equação 71 podemos apresentar a relação entre o período natural de vibração da barra e o parâmetro de estabilidade global B_2 , desenvolvido na equação 73.

$$\frac{m}{k} = \frac{3T^2}{4\pi^2 H^2} \quad (\text{eq. 72})$$

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{R_s} \cdot \frac{3T^2 \cdot g}{4\pi^2 H^3}} \quad (\text{eq. 73})$$

Esta equação demonstra haver uma relação entre os parâmetros de estabilidade globais e o período de vibração natural em estruturas metálicas. Apesar do estudo de Statler (2010) ter sido focado em pórticos planos metálicos para demonstração desta relação, não houve uma extensão do estudo para estruturas em concreto armado ou para pórticos espaciais.

Posteriormente, Reis et al. (2015) demonstraram haver esta relação entre o período natural de vibração das estruturas de concreto armado e à amplificação dos esforços de segunda ordem. Para tal, os autores partiram da mesma relação entre parâmetros de estabilidade e o período natural de vibração proposta por Statler (2010), mas baseando no parâmetro de estabilidade γ_z .

Após uma primeira tentativa, Reis et al. (2015) apresentaram uma relação entre este parâmetro e o período natural de vibração de uma barra única, com esforços concentrados na extremidade superior. Tal equacionamento indicou que existe uma relação quadrática entre os parâmetros, como apresentado na equação 74.

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{gT^2}{4H\pi^2}} \quad (\text{eq. 74})$$

Para confrontar os resultados, os autores compararam a amplificação dos momentos (M_2/M_1) com os respectivos períodos de vibração, para diversas alturas de cada modelo. A partir da nuvem de pontos obtida foi ajustada uma função polinomial para descrever estas amplificações em função do período natural de vibração.

Apesar de não ter obtido um equacionamento para tal relação, os autores demonstraram que é possível apresentar uma relação entre estas grandezas e, desta forma, definir um parâmetro para avaliar a suscetibilidade a efeitos de segunda ordem em estruturas a partir do período natural de vibração. Também em seus resultados foi possível verificar que tal curva ajustada é um polinômio de 2º grau, comprovando suas suposições iniciais.

2.6. ANÁLISE NUMÉRICA SEGUNDO SAP2000

Grandes avanços na tecnologia e na análise de estruturas foram possibilitados pelo advento de ferramentas computacionais para resolução de problemas de grande escala. A demanda deste setor impulsionou o desenvolvimento de diversos programas para cálculo estrutural, dentre eles é possível citar o *SAP2000* da *Computers and Structures Inc.* Este programa de análise numérica é baseado no Método dos Elementos Finitos.

O *SAP2000* é um programa computacional que permite a modelagem de estruturas no plano ou espaciais, realizando análises lineares e de segunda ordem. As rotinas implementadas possibilitam realizar análises com carregamentos estáticos, dinâmicos e análises modais de estruturas. Pela abrangência de sua aplicação, o *SAP2000* tem sido utilizado por muitos projetistas, calculando e dimensionando estruturas de grande porte.

A análise de segunda ordem no *SAP2000* é implementada através da consideração dos efeitos globais P- Δ e locais P- δ . O método implementado considera a modificação da matriz de rigidez proposto por Rutenberg (1981) para contemplar o efeito de barras fictícias com área negativa e colunas com rigidez negativa, tal como descrito no capítulo “*Análise de segunda ordem*”.

Para tal, o software permite que seja acrescentado carregamentos com a consideração da não-linearidade geométrica em cada carregamento, como na Figura 12. Neste caso, o software realizará a análise de segunda ordem apenas nos carregamentos indicados.

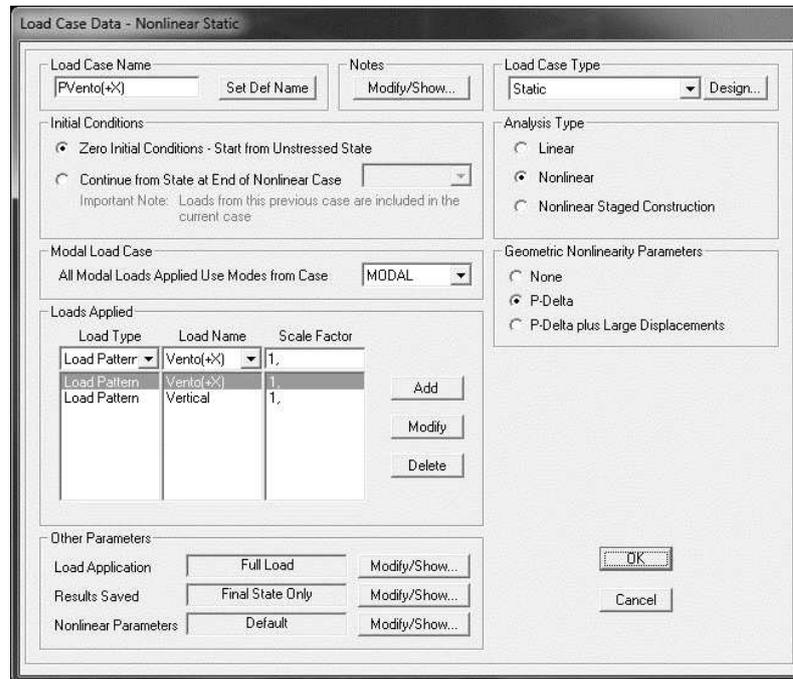


Figura 12 - Janela de carregamentos do SAP2000

Esta análise descrita como P-Delta leva em consideração os efeitos globais e locais da estrutura para a análise, fornecendo boa aproximação para os efeitos da não-linearidade geométrica. Para a consideração da não-linearidade física o usuário pode alterar manualmente as propriedades da seção e do material, tal como previsto nas normas ABNT NBR 6118:2014 e ABNT NBR 8800:2008.

Outra ferramenta presente no programa computacional é a análise modal de estruturas. Segundo CSI Technical Knowledge Base (2009), o cálculo realizado pelo SAP2000 dos modos de vibração parte de resolução de um sistema de equações diferenciais na forma matricial reduzida por uma condensação estática, com a solução de autovalores e autovetores, tal como apresentado na seção 2.2.

A análise modal permite extrair tantos modos de vibração quantos graus de liberdade houverem na estrutura analisada, ordenando-os decrescentemente em relação aos períodos de vibração encontrados.

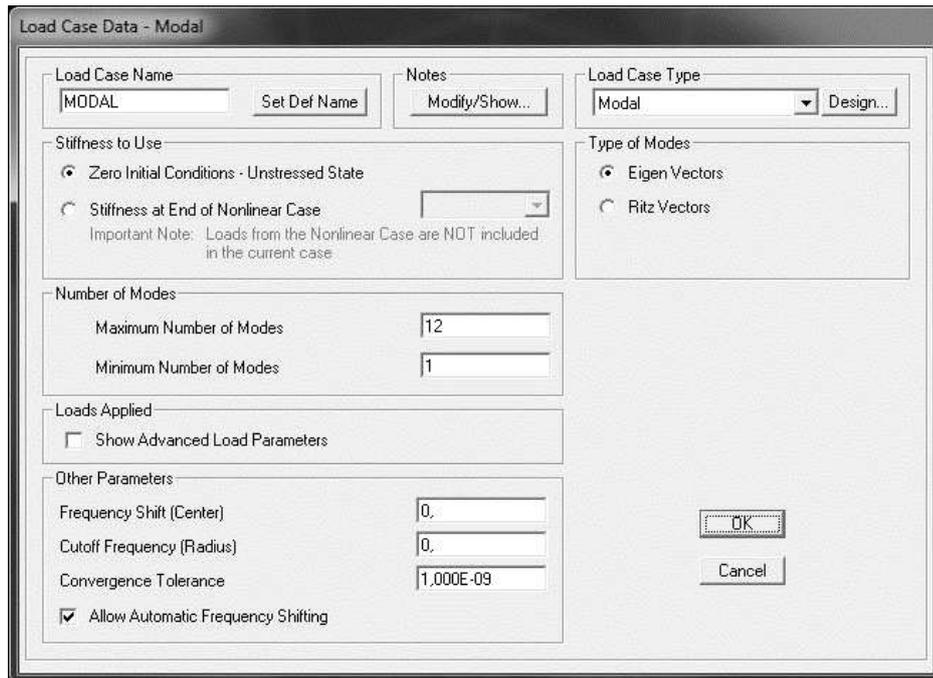


Figura 13 - Janela de carregamento para análise modal no SAP2000

Por ser um programa gráfico, o SAP2000 apresenta os resultados numéricos dos períodos de vibração e também uma forma deslocada da estrutura montada a partir do autovetor associado.

3. EQUACIONAMENTO DO PARÂMETRO χ_T

Estudos demonstram a existência de relação entre os parâmetros de estabilidade, presentes em muitas normas, e o período natural de vibração (Statler et al., 2011). Tal relação baseia-se na dependência mútua da distribuição da massa e da rigidez da estrutura, podendo assim ser elaborado um parâmetro de estabilidade

A criação de um parâmetro de estabilidade dependente do período natural de vibração traz ganhos na análise de segunda ordem em estruturas pois simplifica a obtenção das estimativas do efeito de segunda ordem, tornando assim uma valiosa ferramenta, principalmente para o pré-dimensionamento. Neste contexto é proposto o equacionamento simplificado do parâmetro de estabilidade χ_T .

3.1. EQUACIONAMENTO DO PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO

É possível obter o período natural de vibração de uma barra conhecendo suas propriedades físicas e a função de forma, que descreve a deformação da barra ao longo do tempo. Entretanto, segundo o método de Rayleigh (1945), é possível adotar qualquer função de forma, desde que atenda as condições de contorno, que será possível obter uma boa aproximação para o período natural de vibração.

Foi considerado assim uma estrutura regular, com n pavimentos iguais e sem variação de rigidez ao longo de sua altura. Assumiu-se que as propriedades físicas dos pilares se concentram em uma única barra fictícia, com massa e rigidez equivalente. As massas dos pavimentos foram concentradas em pontos desta barra fictícia, tal como apresentado na Figura 14. Foi considerado neste estudo um sistema não dinâmico e não amortecido.

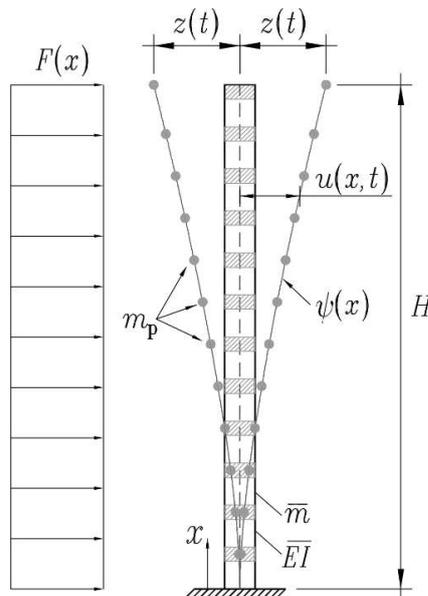


Figura 14 - Modelo generalizado adotado

A função de forma adotada para a barra em questão é um polinômio de segundo grau com deslocamento unitário em sua extremidade superior, tal como na Equação 75. Esta equação atende as condições de contorno do sistema, uma vez que em sua base o deslocamento e a rotação são nulas.

$$\psi(x) = x^2/H^2 \quad (\text{eq. 75})$$

Para este modelo teórico a massa total dos pilares \bar{m} está distribuída uniformemente ao longo de toda a barra. Já as massas dos pavimentos m_p dos pavimentos típicos foram consideradas concentradas em pontos da barra, igualmente espaçadas, dependendo do pé direito h considerado. Destas considerações e da Equação 49, é possível obter a massa generalizada do sistema, conforme a equação 77.

$$h = H/n \quad (\text{eq. 76})$$

$$\bar{m} \int_0^H x^4 / H^4 \partial x = \bar{m}H/5 \quad (\text{eq. 77})$$

$$m_p \sum_{i=1}^n \frac{(iH/n)^4}{H^4} = m_p \sum_{i=1}^n i^4 / n^4 = m_p \frac{6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1}{30n^3} \quad (\text{eq. 78})$$

$$\tilde{m} = \bar{m}H/5 + m_p \frac{6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1}{30n^3} \quad (\text{eq. 79})$$

A massa generalizada pode ser apresentada em função do peso total da estrutura, partindo de alguns artifícios matemáticos. Para tal, é possível considerar a representatividade peso total dos pavimentos frente ao peso total da estrutura, denominado aqui de κ_{pav} , apresentado na equação 80. O valor deste κ_{pav} é complementar a representatividade dos pesos dos pilares frente ao peso total da estrutura, sendo assim possível relacionar estes pesos a partir deste parâmetro.

$$\kappa_{pav} = \frac{P_{pav}}{P} = 1 - \frac{P_{pil}}{P} \quad (\text{eq. 80})$$

A partir desta relação e das equações 81 e 82, pode-se reescrever a massa generalizada do sistema para depender do peso total da estrutura (P) e a representatividade do peso dos pavimentos frente ao peso total da estrutura (κ_{pav}), como na equação 83.

$$\bar{m} = P_{pil}/gH = P(1 - \kappa_{pav})/gH \quad (\text{eq. 81})$$

$$m_p = P_{pav}/gn = P\kappa_{pav}/gn \quad (\text{eq. 82})$$

$$\tilde{m} = P/g \frac{6n^4 + \kappa_{pav}(15n^3 + 10n^2 - 1)}{30n^4} \quad (\text{eq. 83})$$

Assumindo também que a rigidez EI da barra é constante em toda a sua altura, o resultado da rigidez estática generalizada da barra é descrito como na equação 85.

$$\psi''(x) = 2/H^2 \quad (\text{eq. 84})$$

$$\tilde{k}_E = EI \int_0^H 4/H^4 \partial x = 4EI/H^3 \quad (\text{eq. 85})$$

Acerca da rigidez geométrica é importante ressaltar que os diversos parâmetros de estabilidade global apresentados em normas de concreto armado não levam em consideração os efeitos desta rigidez geométrica, atual como uma instabilidade local. Assim, não foi considerado no equacionamento deste parâmetro o efeito da rigidez geométrica generalizada.

Substituindo assim as equações 83 e 85 na equação 50 é possível equacionar o período natural de vibração estimado deste modelo, partindo da função de forma imposta anteriormente.

$$T^2 = PH^3\pi^2/gEI \frac{6n^4 + \kappa_{pav}(15n^3 + 10n^2 - 1)}{30n^4} \quad (\text{eq. 86})$$

3.2. EQUACIONAMENTO AMPLIFICAÇÃO DOS EFEITOS DE 2ª ORDEM

Como apresentado anteriormente, há alguns métodos plausíveis para a consideração dos efeitos de segunda ordem. Ressalta-se dentre eles o método iterativo de carregamentos sucessivos, apresentado anteriormente, por estudar um novo equilíbrio da estrutura a cada iteração. Franco e Vasconcelos (1991) propuseram uma forma simplificada de calcular o efeito completo dos esforços de segunda ordem, a partir dos esforços obtidos na análise de primeira ordem e a primeira iteração, como apresentado na Equação 57. Assim, podemos descrever esta relação genericamente como na equação 87.

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_2}{M_1}} = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_i u_i}{\sum F_i h_i}} \quad (\text{eq. 87})$$

Para a barra apresentada na Figura 14, o carregamento horizontal uniforme resultará em um deslocamento horizontal u_i , proveniente de uma análise linear de primeira ordem, a partir da relação existente entre o momento fletor da barra e seu deslocamento, como apresentado na equação 92.

$$M(x) = \frac{F(H-x)^2}{2} \quad (\text{eq. 88})$$

$$u(x) = \iint \frac{M(x)}{EI} \partial x^2 = \frac{F}{2EI} \iint (H-x)^2 \partial x^2 \quad (\text{eq. 89})$$

$$u(x) = \frac{F}{24EI} (6H^2 x^2 - 4Hx^3 + x^4 + 12C_1 x + 12C_2) \quad (\text{eq. 90})$$

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \dot{=} \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{eq. 91})$$

$$u(x) = \frac{F}{24EI} (6H^2x^2 - 4Hx^3 + x^4) \quad (\text{eq. 92})$$

Tal valor de u_i é obtido a partir da Equação 92, para cada altura h_i . Sendo a estrutura adotada com pavimentos igualmente espaçados e de mesma massa, as alturas consideradas para o cálculo do momento de primeira ordem e do deslocamento horizontal u_i são expressas na equação 89, sendo i o índice associado ao número do pavimento analisado. As equações 93 a 96 apresentam assim os valores, para o pavimento i , da altura h_i , deslocamento horizontal u_i , forças verticais P_i e forças horizontais F_i , respectivamente.

$$h_i = H/n \cdot i \quad (\text{eq. 93})$$

$$u_i = FH^4/24EIn^4 (6i^2n^2 - 4i^3n + i^4) \quad (\text{eq. 94})$$

$$P_i = P/n \quad (\text{eq. 95})$$

$$F_i = F \cdot H/n \quad (\text{eq. 96})$$

O momento de primeira ordem, utilizado no cálculo da amplificação dos esforços de segunda ordem, é calculado a partir do somatório dos produtos de forças horizontais com as alturas de aplicação da força, para todos os pavimentos da edificação, tal como apresentado na equação abaixo.

$$M_1 = \sum_{i=1}^n F_i h_i = \sum_{i=1}^n F_i H^2/n^2 = FH^2 \frac{n+1}{2n} \quad (\text{eq. 97})$$

Da mesma forma, a primeira iteração do momento de segunda ordem é calculada a partir do somatório do produto das forças verticais com os deslocamentos horizontais do ponto de aplicação da força, para todos os pavimentos da estrutura, tal como descrito na equação 99.

$$\Delta M_2 = \sum_{i=1}^n P_i u_i = \sum_{i=1}^n PFH^4 / 24EI n^5 (6i^2 n^2 - 4i^3 n + i^4) \quad (\text{eq. 98})$$

$$\Delta M_2 = PFH^4 / 24EI (n + 1) \frac{36n^3 + 9n^2 + n - 1}{30n^4} \quad (\text{eq. 99})$$

Portanto, o valor da amplificação dos esforços para a consideração dos efeitos de segunda ordem, pelo método de carregamentos sucessivos, pode ser obtido pela equação 100.

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{1}{1 - PH^2 / EI \frac{36n^3 + 9n^2 + n - 1}{360n^3}} \quad (\text{eq. 100})$$

3.3. EQUACIONAMENTO DO PARÂMETRO COMPLETO

Dados os equacionamentos do período natural de vibração (Equação 86) e da amplificação dos esforços de segunda ordem (Equação 100) para a barra da Figura 14, é interessante observar a existência de uma parcela comum entre eles, sendo esta parcela composta pelos valores de peso total da estrutura P , altura total da estrutura H e a rigidez dos pilares EI . Isolando estes valores na equação 101 e substituindo na equação 100, é possível obter uma relação entre os dois parâmetros, como na equação 102.

$$PH^2/EI = T^2g/H\pi^2 \frac{30n^4}{6n^4 + \kappa_{pav}(15n^3 + 10n^2 - 1)} \quad (\text{eq. 101})$$

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{1}{1 - \frac{T^2g}{H\pi^2} \frac{30n^4}{6n^4 + \kappa_{pav}(15n^3 + 10n^2 - 1)} \frac{36n^3 + 9n^2 + n - 1}{360n^3}} \quad (\text{eq. 102})$$

Assim, é apresentado na equação 103 o parâmetro de estabilidade da estrutura χ_T , baseado no período natural de vibração. Tal parâmetro depende também da altura do edifício, o número de pavimentos e também da relação entre o peso de todos os pavimentos com o peso total da estrutura.

$$\chi_T = 1 + \frac{1}{\frac{H\pi^2}{gT^2} \mu_n - 1} \quad (\text{eq. 103})$$

$$\mu_n = \frac{72n^4 + \kappa_{pav}(180n^3 + 120n^2 - 12)}{36n^4 + 9n^3 + n^2 - n} \quad (\text{eq. 104})$$

Onde:

H Altura total do edifício;

T Período natural de vibração;

n Número total de pavimentos;

κ_{pav} Relação entre a soma do peso de todos os pavimentos pelo peso total da estrutura.

3.4. SIMPLIFICAÇÃO DO PARÂMETRO

Apesar de já apresentar um ganho no processo de estimação do efeito de segunda ordem em estruturas, o parâmetro apresentado ainda traz uma complexidade na sua aplicação, devido a presença de extensos polinômios e do cálculo do μ_n . Entretanto é possível realizar uma análise de sensibilidade de cada parcela do parâmetro, avaliando assim sua dispensa.

Analisando inicialmente o polinômio presente no divisor de μ_n , é possível estudar a representatividade de cada parcela em relação ao valor total do divisor. A figura 15 representa esta análise realizada, variando o número n de 1 a 20 pavimentos.

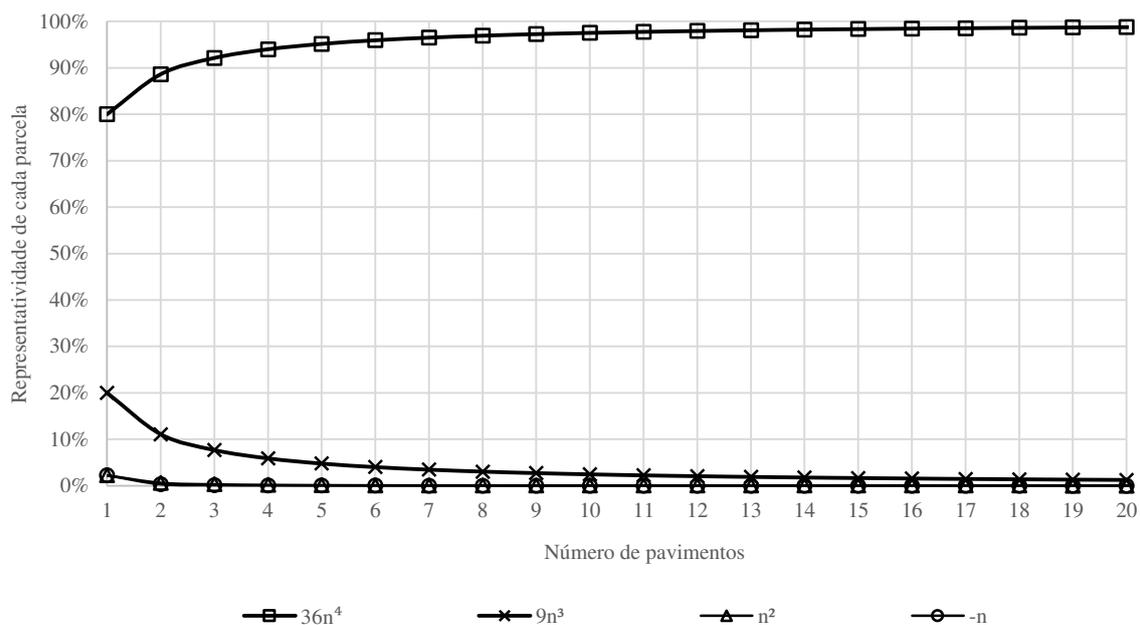


Figura 15 - Análise de sensibilidade do divisor de μ_n

Tal análise demonstra que a partir de 3 pavimentos a primeira parcela do divisor representa mais de 90% do valor total do resultado deste polinômio, tendo assim uma grande representatividade do divisor do parâmetro μ_n .

Para a análise de sensibilidade do dividendo é necessário tomar um cuidado adicional por conta da parcela de κ_{pav} , presente neste polinômio. Para um dos modelos tratados neste trabalho, foi analisada a influência do κ_{pav} no parâmetro χ_T , variando seu valor de 0.0 a 1.0. É possível notar na figura 16 que a diferença máxima obtida entre os resultados é de 5,6%, para o caso da estrutura com 16 pavimentos, sendo esta uma diferença pequena para o resultado final. Após entrevistas com projetistas estruturais brasileiros, chegou-se à conclusão que um valor adequado para este parâmetro κ_{pav} seria em torno de 0.80, representando assim uma grande variedade de edificações.

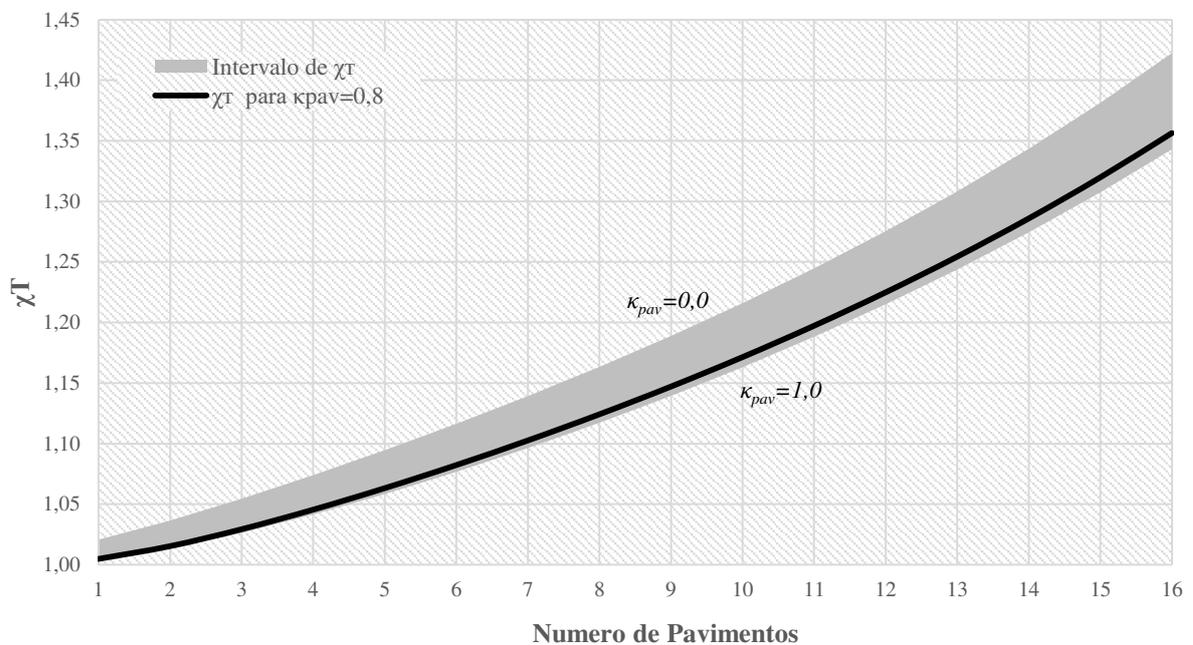


Figura 16 - Gráfico da variação χ_T em função da variação de κ_{pav}

Tendo este valor fixado, a análise de sensibilidade das parcelas do polinômio do dividendo de μ_n . Tais resultados são apresentados na Figura 17, variando n de 1 a 20 pavimentos, tal como na análise do divisor.

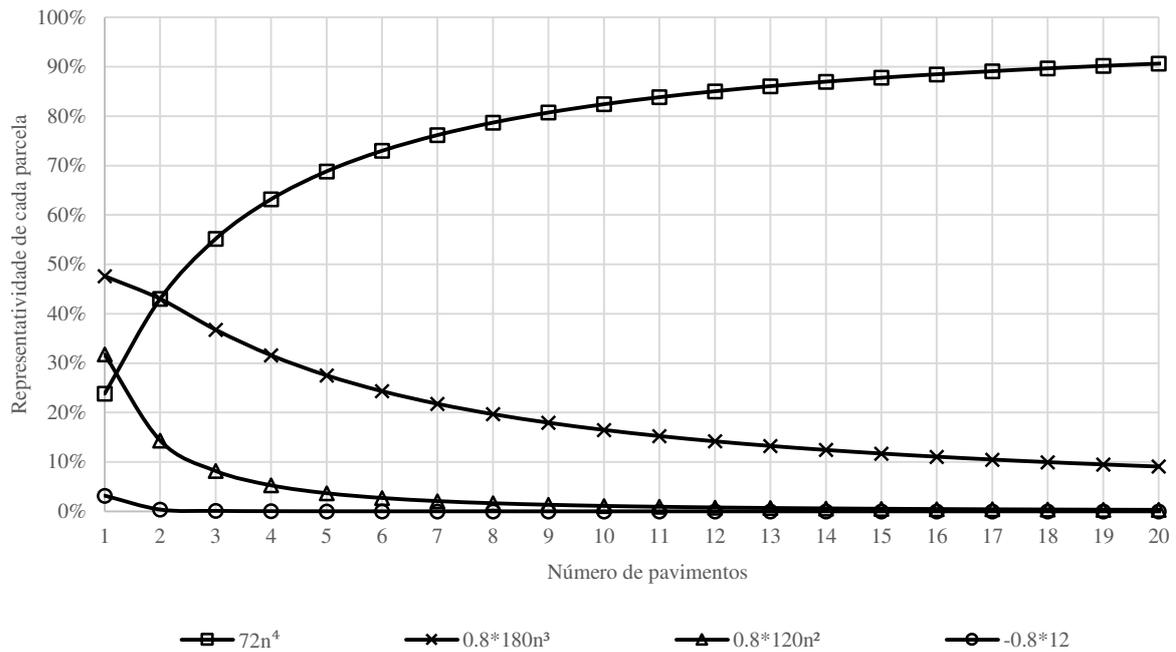


Figura 17 - Análise de sensibilidade do dividendo de μ_n

Os resultados demonstram que, para estruturas com 4 ou mais pavimentos, os dois primeiros termos do polinômio representam juntos mais de 90% do resultado total do dividendo. Assim, os valores dos demais termos podem ser considerados desprezíveis para o cálculo do parâmetro. Simplificando a equação 104 com estas considerações da análise de sensibilidade, podemos apresentar na equação abaixo o valor simplificado de μ_n .

$$\mu_n = \frac{72n^4 + 180n^3 \cdot 0.8}{36n^4} = 2 + \frac{4}{n} \quad (\text{eq. 105})$$

Para testar esta hipótese de simplificação foi comparado os resultados de μ_n obtido na equação original com o polinômio simplificado, apresentado na equação 105. As diferenças entre os métodos foram plotadas no gráfico da Figura 18, analisando novamente o intervalo de n de 1 a 20 pavimentos.

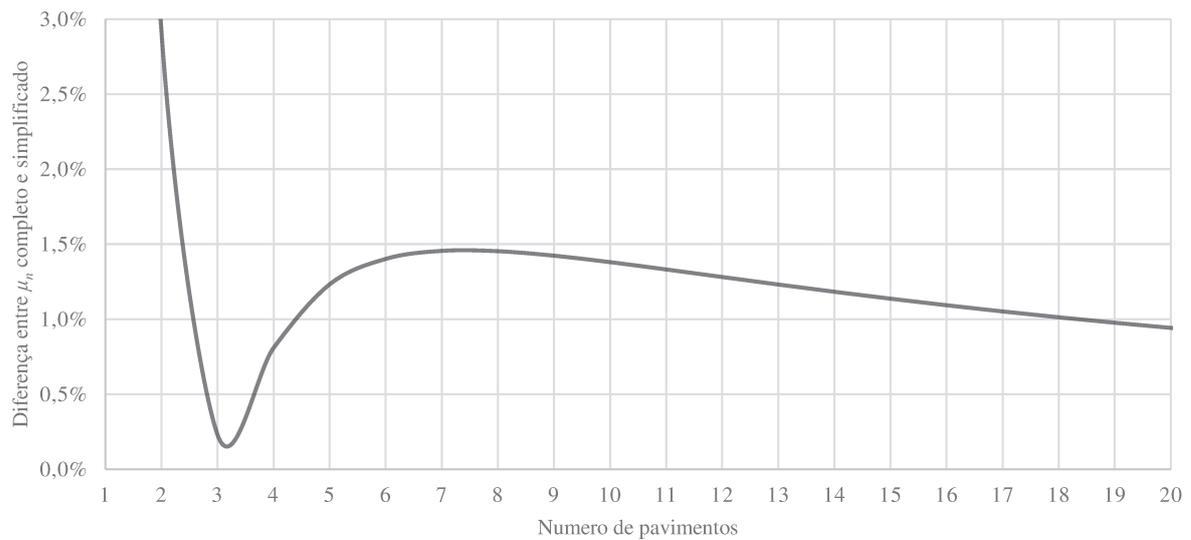


Figura 18 - Diferenças entre μ_n obtido no equacionamento completo e no simplificado

Para estruturas de 3 pavimentos ou mais, a simplificação de μ_n pela análise de sensibilidade das parcelas do polinômio apresenta uma boa aproximação para o valor proposto na equação 104, tendo a diferença máxima observada de 1,5% entre os métodos. Através deste ajuste é possível propor um equacionamento para o parâmetro de estabilidade χ_T simplificado, com boa aproximação para o resultado completo, como apresentado na equação abaixo.

$$\chi_T = 1 + \frac{1}{\frac{H\pi^2}{gT^2} \left(2 + \frac{4}{n}\right) - 1} \quad (\text{eq. 106})$$

Onde,

- H Altura total do edifício;
- T Período natural de vibração;
- n Número total de pavimentos;
- g Aceleração da gravidade.

4. METODOLOGIA

O presente estudo será dedicado à verificação da suscetibilidade de estruturas em concreto armado a efeitos de segunda ordem a partir da análise de seu período de vibração. Para tal, serão considerados cinco pórticos espaciais, obtendo de cada um os valores de período de vibração e do parâmetro γ_z para cada direção ortogonal, variando a quantidade de pavimentos.

Para efeito de simplificação, serão abordados modelos sem variação de rigidez ao longo de sua altura, sendo que quatro modelos possuirão planta baixa retangulares, com dois eixos de simetria no plano e um modelo com apenas um eixo de simetria no plano, representando uma estrutural real, tal como demonstrado na Figura 20. Esta última terá a finalidade de validar os resultados obtidos ao longo do trabalho. Em todos os modelos a altura entre pavimento adotada foi de 3,0m.

Para cada modelo a quantidade de pavimentos variará de um até o número de pavimentos suficientes para que o parâmetro γ_z ultrapasse o valor de 1,30. No caso de estruturas em que o parâmetro γ_z seja ultrapassado apenas em uma direção a análise prosseguirá apenas para a outra direção até que o valor do parâmetro γ_z da mesma também ultrapasse o valor de 1,30. A tabela 1 apresenta os valores das alturas máximas para cada geometria considerada, desprezando os resultados obtidos na respectiva direção quando superado o limite.

Os modelos serão lançados no software S4 v4.0 (S4 Sistemas, 2015) para obter as geometrias e valores dos parâmetros γ_z , variando a quantidade de pavimentos até que o valor deste parâmetro seja imediatamente superior a 1,3 nas duas direções, desconsiderando os resultados que extrapolem este limite na direção de menor rigidez. Os pórticos, juntamente com os casos de carregamento considerados, serão exportados para o software SAP2000 v14.0 (Computer & Structures Inc., 2009) para que sejam analisados os esforços provenientes da ação conjunta dos pesos próprios dos elementos estruturais e os carregamentos horizontais devido a força do vento, gerados pelo software S4, nas quatro direções principais da estrutura (V0°, V90°, V180° e V270°), segundo a ABNT NBR 6123:1988.

Tabela 1 - Alturas máximas nos modelos analisados

Modelo	Direção	Número de Pavimentos	Altura Total (m)	γ_z
1	X	16	48.0	1,300
	Y	16	48.0	1,300
2	X	20	60.0	1,309
	Y	17	51.0	1,322
3	X	26	78.0	1,313
	Y	26	78.0	1,313
4	X	25	75.0	1,316
	Y	18	54.0	1,314
5	X	35	105.0	1,313
	Y	22	66.0	1,322

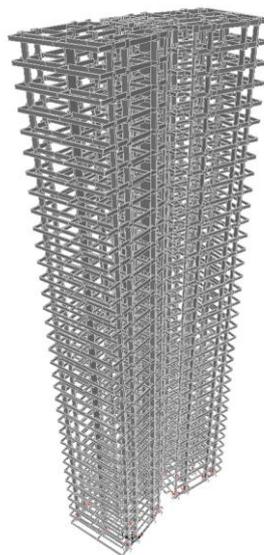


Figura 19 - Isométrica do Modelo 5 com 35 pavimentos no software SAP2000

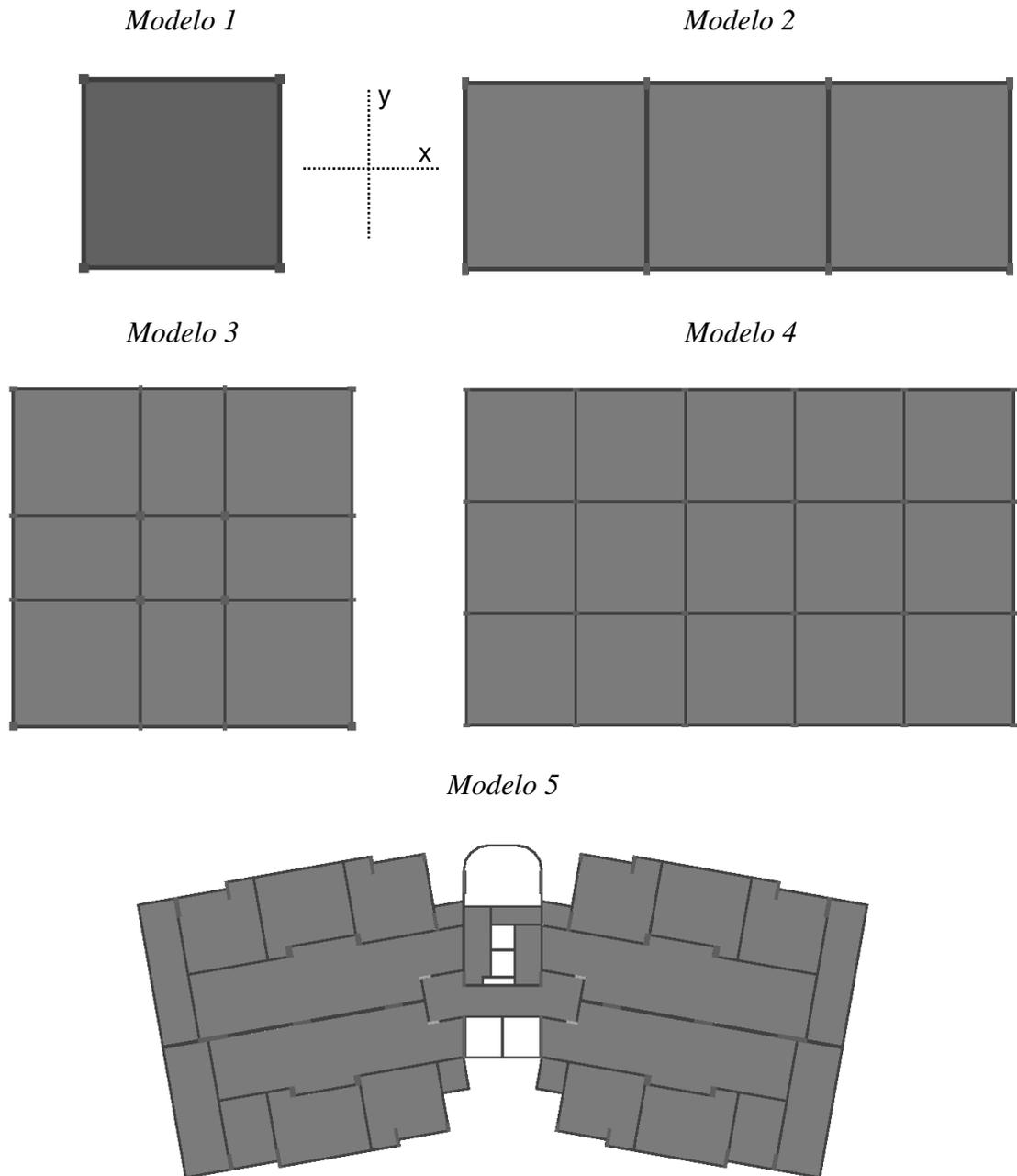


Figura 20 - Planta baixa das geometrias consideradas nas análises

Em cada uma das direções da carga de vento foram analisadas duas combinações dos carregamentos verticais e o respectivo carregamento de vento: a primeira uma análise linear de primeira ordem e na segunda com a consideração dos efeitos de $P-\Delta$. Desta forma obtidos os momentos fletores de primeira (M_1) e de segunda ordem (M_2) nas extremidades das barras dos pilares. Simultaneamente será executada a análise modal para a obtenção dos períodos naturais de vibração da estrutura, nas duas direções, para cada altura do modelo.

Os momentos fletores de segunda ordem serão divididos pelos momentos fletores de primeira ordem, de maneira a obter o fator de amplificação dos momentos fletores (M_2/M_1). Os fatores de amplificação e os períodos de vibração dos modelos nas duas direções por fim foram exportados para o software MATLAB (MATHWORKS Inc, 2014) para as devidas análises. Foram destacados os resultados de amplificações obtidas nas bases dos pilares e no pilar com o maior momento de segunda ordem.

Para cada modelo e em cada direção ortogonal, foram plotadas nuvens de pontos de amplificação dos esforços para seu respectivo período natural de vibração. Em cada gráfico também foi plotado o parâmetro χ_T , analisando assim a consistência do parâmetro frente aos resultados dos modelos propostos. Também foi plotado o parâmetro χ_T em sua forma simplificada para avaliar a aproximação dos resultados obtidos pelas duas equações.

Por fim, é apresentada a participação da massa modal do respectivo modo de vibração apresentado em cada altura, avaliando a influência de modos com pouca participação da massa modal no resultado final.

5. RESULTADOS

As Figuras 21 a 30 apresentam os resultados de amplificação dos esforços devido aos efeitos de segunda ordem em função do período natural de vibração para as duas direções ortogonais dos modelos estudados. Em cada gráfico são apresentados os valores de amplificação de momentos de todos os pilares para cada altura do edifício, destacando-se os resultados que representam os valores de amplificação para o pilar com os maiores momentos de segunda ordem em módulo (pilares críticos), sendo desprezados os valores de M_2/M_1 inferiores a 1,0. É possível notar nestes gráficos a existência um aumento da amplificação dos esforços com o aumento do período natural de vibração da estrutura, como assumido inicialmente.

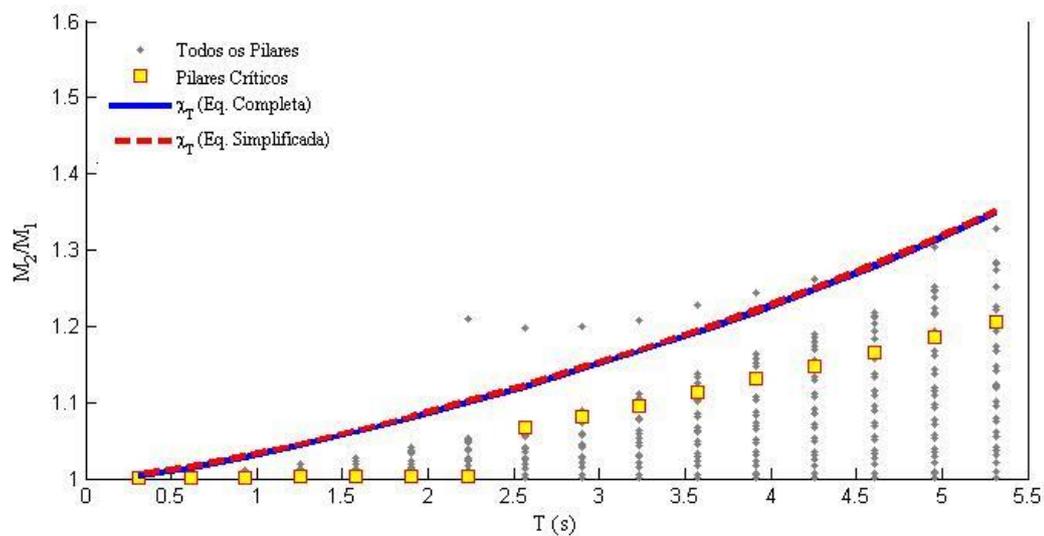


Figura 21 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração – Modelo 1 –
Direção “x”

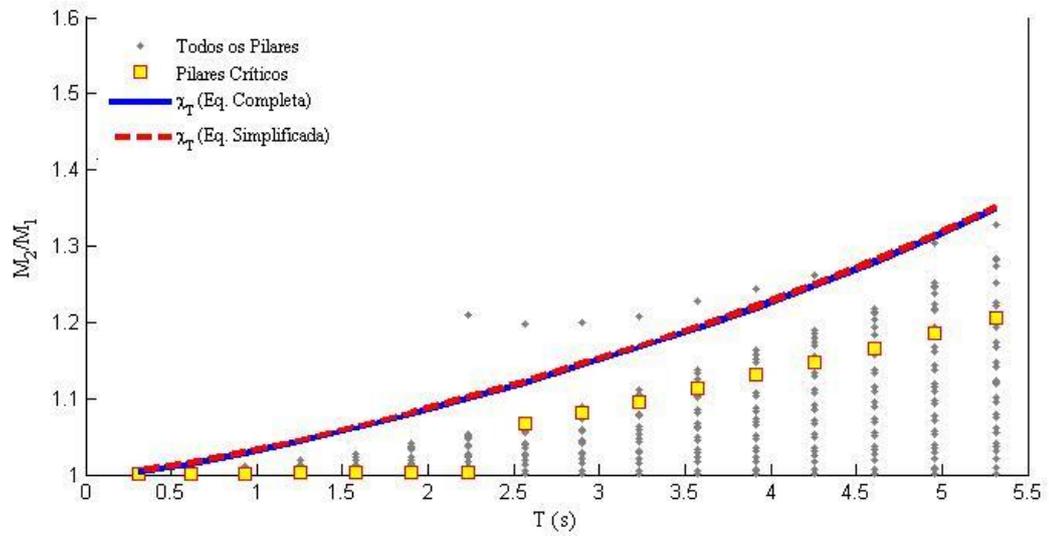


Figura 22 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração – Modelo 1 –
Direção "y"

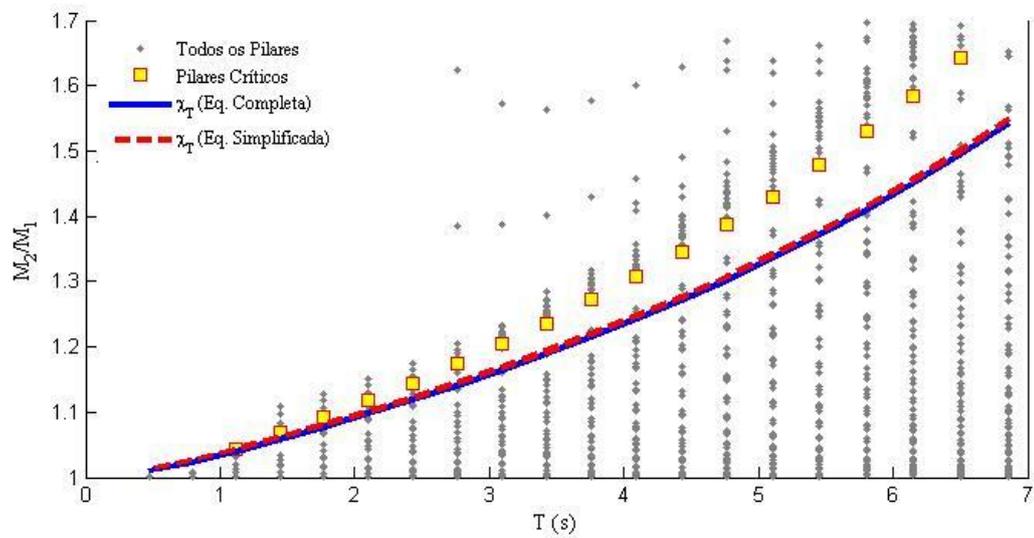


Figura 23 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração – Modelo 2 –
Direção "x"

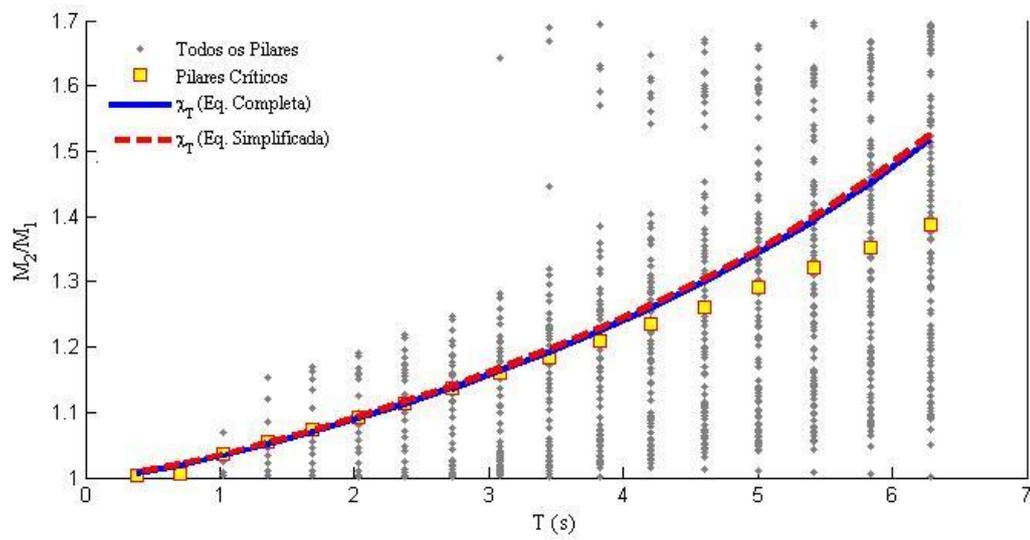


Figura 24 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração – Modelo 2 –
Direção “y”

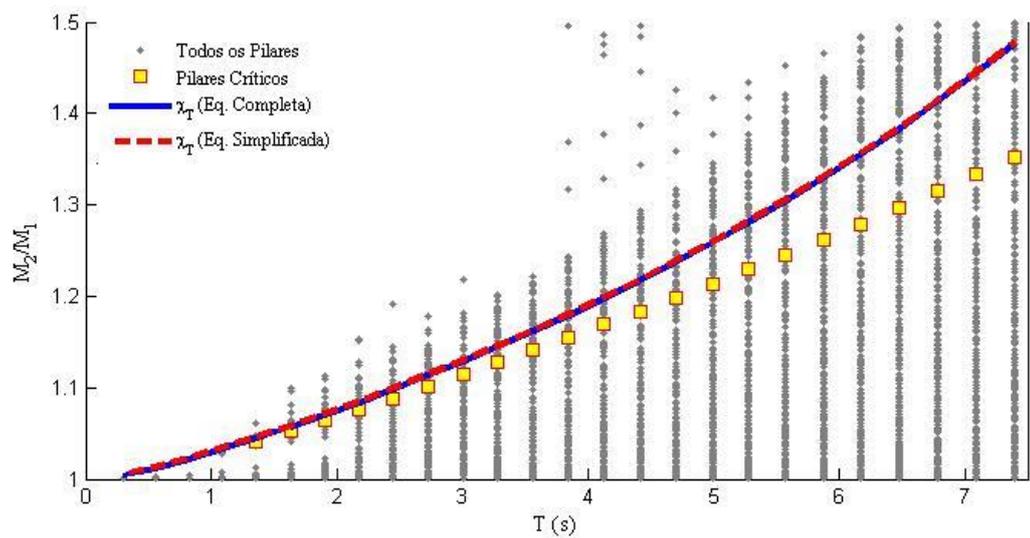


Figura 25 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração – Modelo 3 –
Direção “x”

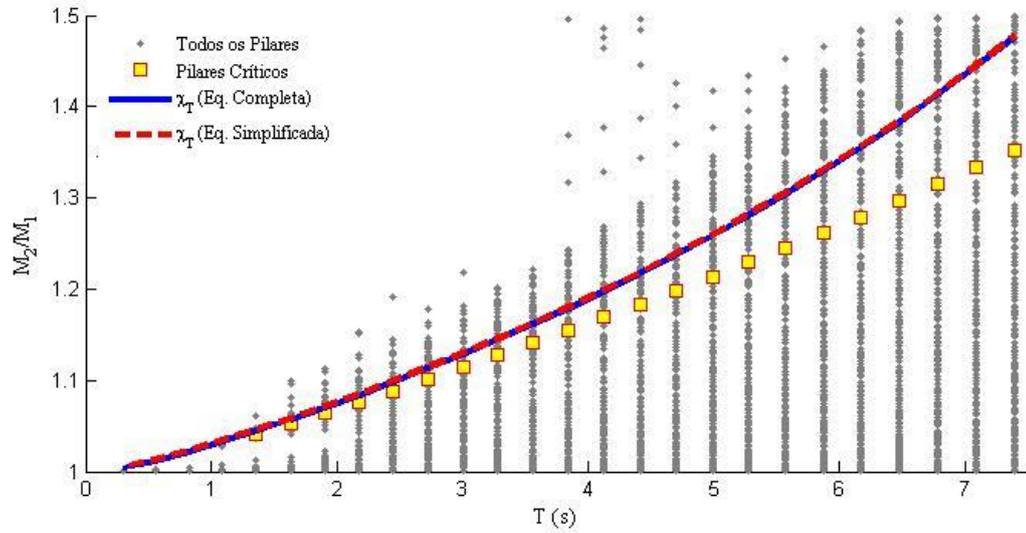


Figura 26 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração – Modelo 3 –
Direção “y”

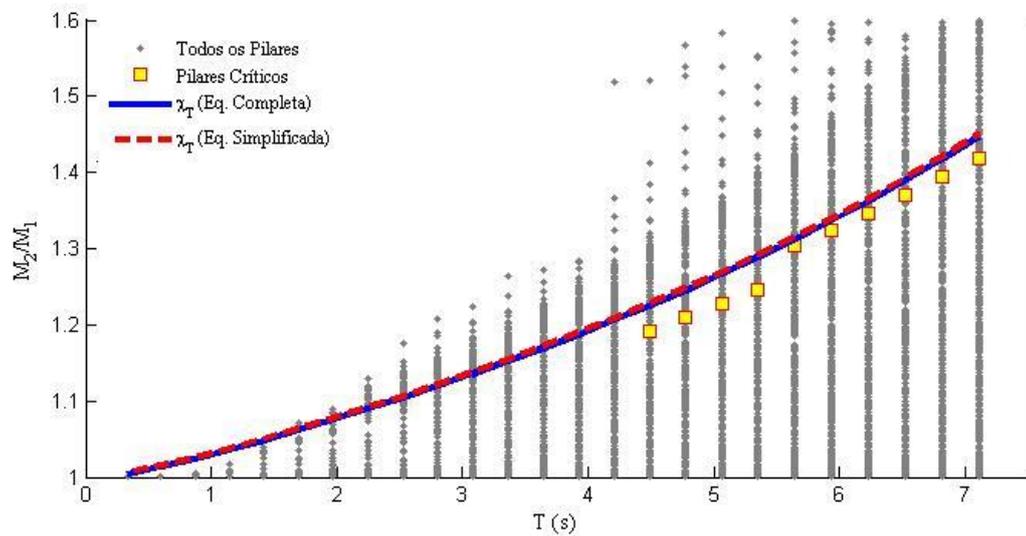


Figura 27 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração – Modelo 4 –
Direção “x”

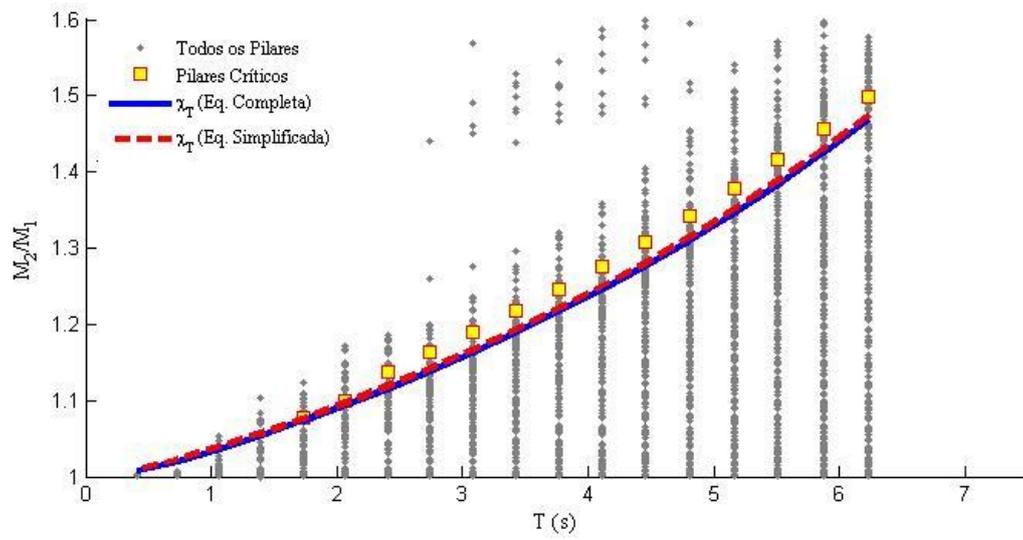


Figura 28 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração – Modelo 4 –
Direção “y”

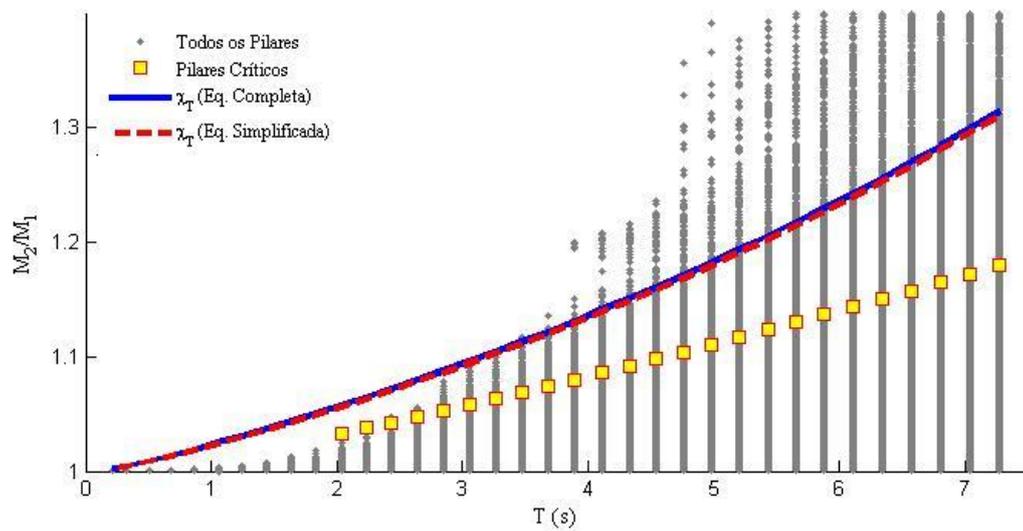


Figura 29 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração – Modelo 5 –
Direção “x”

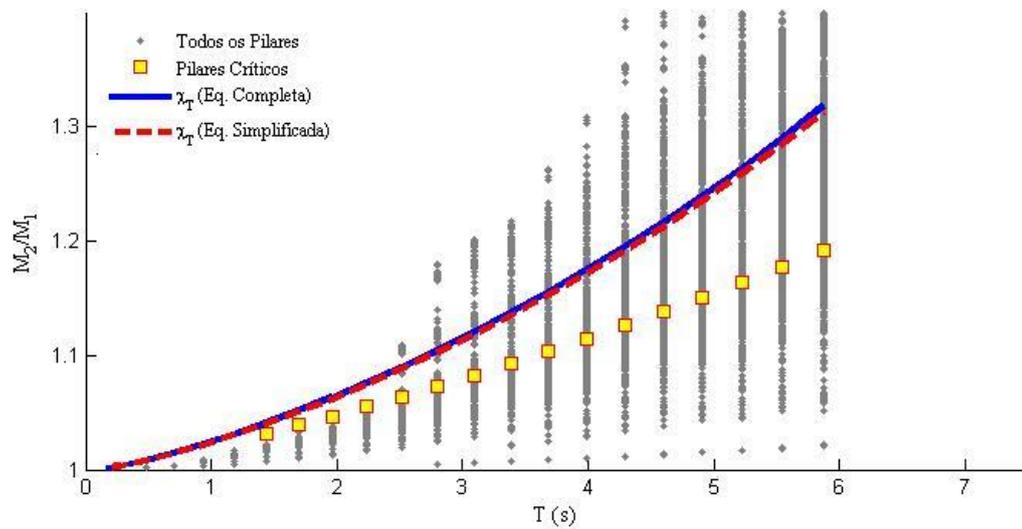


Figura 30 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração – Modelo 5 –
Direção “y”

Comparando a equação simplificada com a equação completa é possível verificar que em todos os gráficos as duas formulações se aproximam satisfatoriamente, demonstrando ser possível adotar a simplificação por análise de sensibilidade dos parâmetros como uma boa aproximação para a equação inicial.

Entretanto, nota-se a dispersão de alguns pontos que se situam em faixas de valores acima do esperado, sendo estes resultantes de esforços de pequena magnitude. Regiões com momentos de primeira ordem muito pequenos, tendem a resultar em valores de amplificação elevados para os momentos de segunda ordem, uma vez que pequenos acréscimos são significativos em relação ao momento de primeira ordem. Estes valores são desconsiderados pois não representam a realidade para o dimensionamento da estrutura. A Figura 31 ilustra este caso, apresentando o resultado de dois pilares onde pode-se notar as regiões onde acontecem os valores de amplificação considerados no dimensionamento da estrutura e, as regiões onde aparecem valores de amplificação que podem ser desconsiderados das análises por serem não significativos para a estabilidade estrutural. É possível notar no pilar P1, onde são encontrados os maiores valores de momentos deste modelo, que os valores significativos das amplificações ficam entre 1,25 e 1,36, valores esperados para este modelo de 11 pavimentos. Todavia neste mesmo modelo, no pilar P2, é possível notar uma região em que tanto o M_1 quanto M_2 são muito pequenos, onde um aumento de $0,29\text{tf.m}$ é suficiente para resultar em um valor de

amplificação de 7,18. Em outra região, o momento de primeira ordem é superior ao momento de segunda ordem, resultando em uma amplificação inferior a 1,0.

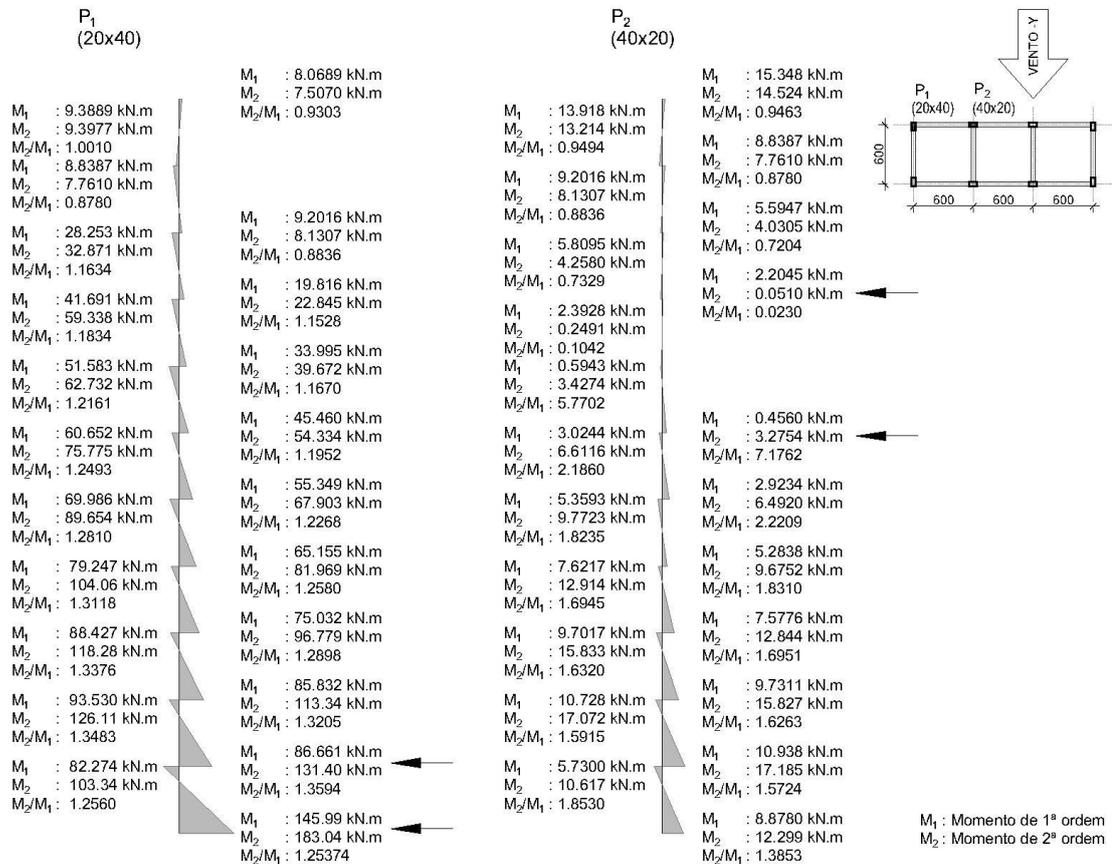


Figura 31 - Amplificação dos momentos em dois pilares, ilustrando grandes amplificações em momentos de primeira ordem de pequena magnitude

Estas anomalias são observadas em geral em pilares onde em certo ponto há uma inversão do sinal do momento fletor. Os acréscimos de momento de segunda ordem nas bases são superiores aos acréscimos de momento nos topos dos pilares, uma vez que o efeito de segunda ordem é diretamente ligado a carga vertical atuante. Esta amplificação desproporcional dos momentos tende a gerar uma região que pode haver a amplificação de momentos muito pequenos (região A e B) ou muito grandes (região C). A figura 32 ilustra esta situação com um pilar isolado com momento M e carga horizontal F aplicada no topo, base engastada e carga vertical P distribuída.

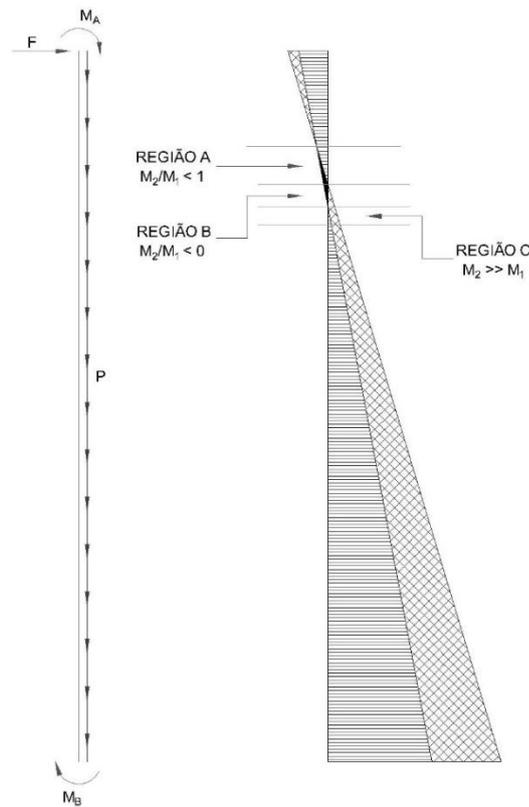


Figura 32 - Exemplo de pilar para ilustrar problemas localizados com a amplificação M_2/M_1

Os resultados significativos de amplificação dos esforços são verificados para o caso dos pilares mais carregados da estrutura, considerados críticos para o dimensionamento da estrutura. As variações dos valores de amplificação destes pontos tendem a seguir uma progressão polinomial para a maioria dos modelos estudados. As exceções são verificadas no modelo 1, nas duas direções analisadas (Figuras 21 e 22), e no modelo 4, na direção x (Figura 27). Nestes modelos é possível observar que os primeiros modos de vibração não são flexionais quando estes possuíam poucos pavimentos. Sendo assim, é possível que o fato do método de Rayleigh que é normalmente aplicado para a determinação do valor do período fundamental de vibração da estrutura, gere esse impacto significativo no caso desses modelos com poucos pavimentos. Nestes casos, o primeiro modo de vibração flexional corresponde ao segundo valor do período natural de vibração.

A equação plotada em todos os modelos tem demonstrado ser eficiente em representar as amplificações, principalmente em relação aos esforços críticos. Os resultados do equacionamento englobam quase a totalidade da nuvem de pontos considerada e também as

amplificações dos pilares críticos, salvo os modelos 2 (direção x, Figura 23) e 4 (direção y, Figura 28). Todavia, a grande maioria das amplificações significativas, mesmo nestes modelos, estariam cobertas pela equação proposta.

Todos os resultados de momentos de segunda ordem foram obtidos através da consideração do efeito de $P\Delta$, implementado diretamente no software computacional SAP2000. Para verificar a consistência do resultado frente a outros métodos adotados atualmente, foi estudado o caso da amplificação dos esforços considerando os efeitos de segunda ordem através de método simplificado indicado na ABNT NBR 6118:2014. Este processo simplificado permite chegar nos esforços de segunda ordem a partir da multiplicação dos esforços horizontais atuantes na estrutura por $0,95\gamma_z$, na direção principal da estrutura. A Figura 33 exibe os resultados da amplificação destes esforços frente à amplificação obtida pelo processo de $P-\Delta$, para o modelo 1.

Os resultados demonstram que os valores de amplificação de momentos obtidos a partir do parâmetro γ_z subestimam o fator de amplificação para os pilares mais solicitados da estrutura, juntamente com uma porção importante dos elementos cuja amplificação é significativa. Os resultados do equacionamento proposto neste estudo apresentam valores de amplificação superiores aos obtidos para os pilares mais solicitados, cobrindo também a maior parte da nuvem de pontos, que seriam os outros pilares significativos da estrutura.

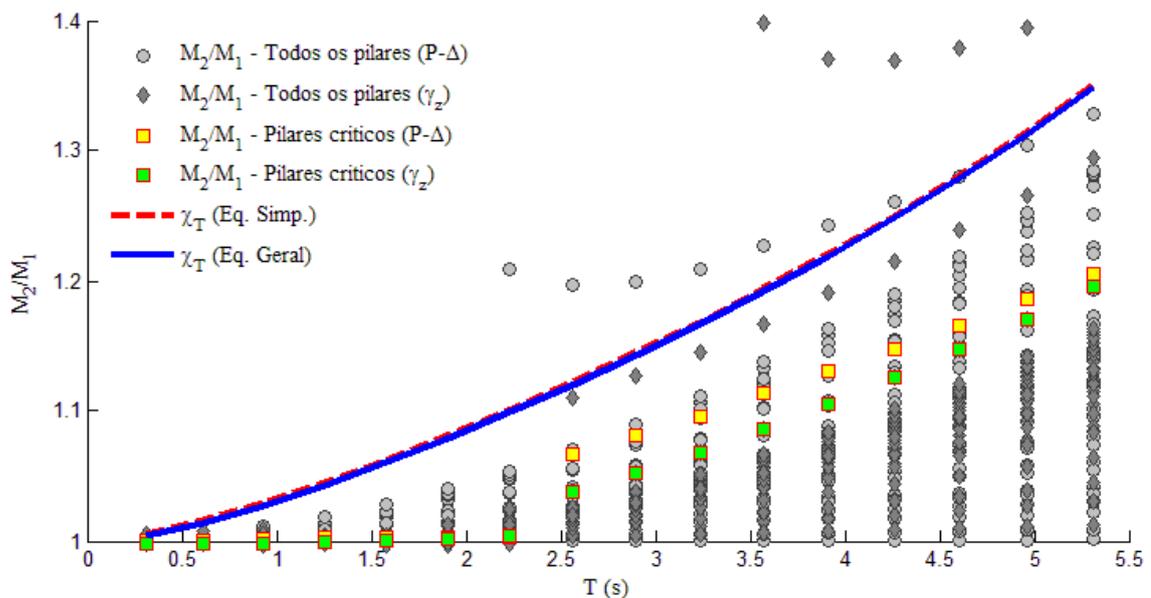


Figura 33 - Amplificações M_2/M_1 do Modelo 1 em função do Período Natural de Vibração, estimando o valor de M_2 a partir da majoração de M_1 por $0,95\gamma_z$

Um possível controle que pode ser avaliado para critério de validação é a participação da massa modal do primeiro modo considerado. Para tal, a Figura 34 apresenta essa participação da massa modal para o primeiro modo flexional desta direção. O valor da participação da massa modal passa a ter um valor aproximadamente constante a partir do modelo de 8 pavimentos, coincidindo com o início da região em que é possível observar uma continuidade nos resultados dos pilares críticos. Análises realizadas nos outros modelos são encontradas no Anexo B.

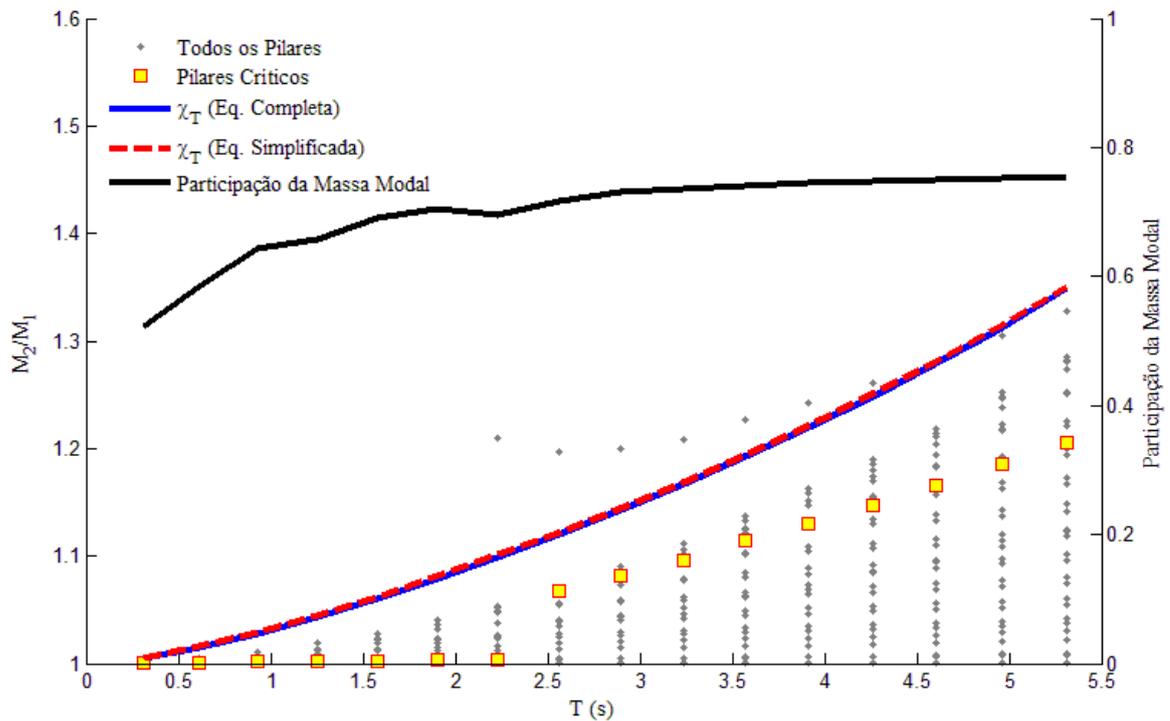


Figura 34 - Resultados do Modelo 1, destacando a participação da massa modal do primeiro modo de vibração, para cada altura calculada

Desta forma, deve-se realizar mais estudos avaliando a possibilidade de o resultado ser uma composição de diversos modos de vibração, ponderados pela sua participação de massa modal, de tal modo que seja garantido um valor mínimo de participação de massa modal.

6. CONCLUSÕES

Análises numéricas foram realizadas em cinco pórticos espaciais, variando a quantidade total de pavimentos, com o objetivo de avaliar a relação entre a amplificação dos esforços, devido a consideração dos efeitos de segunda ordem, e o período natural de vibração da estrutura. Através da equação do equilíbrio dinâmico da estrutura e do método de Rayleigh foi possível propor uma equação que descrevesse esta relação.

Os resultados apresentados demonstram que a susceptibilidade da estrutura aos esforços globais de segunda ordem pode ser relacionada às suas propriedades dinâmicas, mais especificamente o seu período natural de vibração, através da realização de uma simples análise modal. Através dos resultados obtidos, é possível observar que o valor da amplificação dos esforços aumenta com o aumento da altura da estrutura e, conseqüentemente, com o aumento do seu período natural de vibração. Esta relação é justificada pela dependência mútua da rigidez da estrutura e a distribuição de sua massa.

A equação simplificada proposta que relaciona o período natural de vibração da estrutura e o fator de amplificação dos esforços devido a consideração dos efeitos de segunda ordem demonstrou ser um bom indicativo, com aproximação superior, sobretudo para os elementos mais solicitados da estrutura. Para todos os modelos analisados, verificou-se que os valores da equação proposta seguiram a mesma tendência de crescimento observada para os valores de amplificação dos esforços de todos os pilares da estrutura.

Através do presente estudo, conclui-se que mais análises deverão ser realizadas para ajustar e validar a equação proposta. É fundamental que seja realizado estudo para verificar a influência dos modos torcionais na estrutura e a variação da rigidez ao longo da altura do edifício. Também é recomendado que seja estudado a influência de modos flexionais secundários, podendo encontrar resultados mais ajustados a partir da composição de diversos modos de vibração, ponderados pela participação da massa modal de cada modo. Entretanto, os resultados alcançados demonstram ser possível descrever um parâmetro de classificação e amplificação dos esforços a partir de uma análise modal, sendo este uma opção viável principalmente para a etapa de pré-dimensionamento devido a sua simplicidade e rapidez.

7. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O presente estudo demonstra ser possível a proposição de um parâmetro de estabilidade global de estruturas baseado em seu período natural de vibração. Todavia, mais análises são necessárias para verificar sua eficácia frente a obras reais. Desta forma é sugerido para trabalhos futuros o esclarecimento dos tópicos listados abaixo.

- **EFEITO DOS MODOS TORCIONAIS.** No presente trabalho foi desconsiderado os modos torcionais das estruturas, levando em consideração para efeito de cálculo apenas os modos flexionais. O efeito da instabilidade das estruturas a sua torção também não é abordado por outros métodos simplificados de análise do efeito de segunda ordem de estruturas. Assim, a complementação deste parâmetro para incluir os efeitos torcionais das estruturas permitiria uma avaliação mais completa das estruturas;
- **VARIAÇÃO DE RIGIDEZ AO LONGO DE SEU COMPRIMENTO.** Os modelos estudados foram de estruturas regulares sem variações bruscas de rigidez ao longo de seu comprimento. Entretanto esta consideração raramente pode ser adotada em estruturas reais. É necessário assim um aprofundamento no estudo, avaliando o efeito desta variação da rigidez no parâmetro;
- **PARTICIPAÇÃO DE MODOS SECUNDÁRIOS.** O equacionamento do parâmetro parte da simplificação de um sistema de infinitos graus de liberdade para um sistema de um único grau de liberdade. Desta forma, foram analisadas as estruturas para o primeiro modo de vibração da estrutura. Todavia é sugerido o estudo do efeito dos modos de vibração secundários neste parâmetro de estabilidade;
- **EFEITO DA RIGIDEZ GEOMÉTRICA.** Neste trabalho foi desconsiderada a rigidez geométrica no equacionamento do parâmetro. Tal efeito, no entanto, pode ser aplicado equação caso mais estudos neste campo sejam realizados;
- **APLICAÇÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS.** Apesar do parâmetro apresentado partir do equacionamento do γ_z , a fundamentação teórica dele baseia-se na relação existente entre o efeito de segunda ordem e o período natural de vibração. Tais grandezas são inerentes ao material aplicado, podendo assim ser descrito também para estruturas metálicas, dando continuidade a trabalhos realizados por Statler et al. (2011).

8. BIBLIOGRAFIA

AFEFY, H. M. E. D. Ultimate flexural rigidity of reinforced concrete beam–column members. Proceedings of the ICE - Structures and Buildings, Vol. 165(6), pp. 299–308, 2012.

AL MASHARY, A.; CHEN, W.F. Elastic seconder-order analysis for frame design. Journal of Constructional Steel Research. n.15, p. 303-322, 1990.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ACI 318-11 – Building Code Requirements for Structural Concrete. Farmington Hills, Michigan, U.S.A., 2011.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6123 – Forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro, 1988.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8800 – Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.

AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. Specificatins for Structural Steel Buildings. Chicago, 2010.

AVŞAR, Ö.; BAYHAN, B.; YAKUT, A. Effective flexural rigidities for ordinary reinforced concrete columns and beams. Struct. Design Tall Spec. Build., Vol. 23, 463–482, 2014.

AZEVEDO, A. F. F. L. C. Análise tridimensional de estruturas metálicas incluindo os efeitos de segunda ordem. 1993. Tese de Mestrado. Universidade do Porto.

BONET, J. L.; MIGUEL, P. F.; FERNANDEZ, M. A.; ROMERO, M. L. Biaxial bending moment magnifier method. *Eng Struct*, Vol. 26(13), pp. 2007–2019, 2004.

BONET, J. L.; ROMERO, M. L.; MIGUEL, P. F. Effective flexural stiffness of slender reinforced concrete columns under axial forces and biaxial bending. *Eng Struct*, Vol. 33(3), pp. 881–893, 2011.

BUENO, M. M. E. Avaliação dos parâmetros de instabilidade global em estruturas de concreto armado. 2009. Tese de Mestrado. Universidade de Brasília.

CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION. CSA STANDARD A23.3-04 – Design of Concrete Structures. Mississauga, Ontario, Canada, 2004.

CARMO, R. M. S. Efeitos de segunda ordem em edifícios usuais de concreto armado. 1995. Tese de Mestrado. Universidade de São Paulo.

CHEN, W. F.; LUI, E. M. *Structural Stability: Theory and Implementation*. Elsevier Science Publishing Co., London, 1987.

CHEN, W. F.; LUI, E. M. *Stability Design of Steel Frames*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1991.

CHOPRA, A. K. *Dynamics of Structures – Theory and applications to earthquake engineering*. 4ª edição. Prentice Hall, New Jersey, 1995.

CICOLIN, L. A. B.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. Stability of reinforced concrete buildings with flat slabs: influence of frames with flat slab layers and inverted edge beams. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, Vol. 4(3), pp. 501-529, 2011.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. Dynamics os Structures. 1ª edição. McGraw-Hill, Tokio, 1975.

CRISFIELD, M. A. Non-linear finite element analysis of solids and structures, Vol1. CRC Press, Boca Raton, FL, 1991.

ELLWANGER, R. J. Influência do número de pavimentos no parâmetro de instabilidade de edifícios constraventados por paredes ou núcleos de concreto armado. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, Vol. 6(5), pp. 783-810, 2013.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. EN-1992-1-1 – Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. Brussels, Belgium, 2004.

FEITOSA, L.A.; ALVES, E.C. Study of global stability of tall buildings with prestressed slabs. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, Vol. 8(2), pp. 196-209, 2015.

FRANCO, M.; VASCONCELOS, A. C. Practical assessment of second order effects in tall buildings. COLOQUIUM ON THE CEB-FIP MC90, Rio de Janeiro. Proceedings, p. 307-323, 1991.

GALAMBOS, T.V. Guide to stability design criteria for metal structures. John Wiley editor, New York, 1998.

LEMESSURIER, W. J. A Practical Method of Second-Order Analysis: Part 1 - Pin Jointed Systems. AISC Eng. J., Vol. 13(4), pp. 89–96, 1976.

LEMESSURIER, W. J. A Practical Method of Second-Order Analysis: Part 2 - Rigid Frames. AISC Eng. J., Vol. 14(2), pp. 49–67, 1977.

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. Construções de Concreto. Volume 1. Interciência, Rio de Janeiro, 2008.

LIMA, J. S.; GUARDA, M. C. C. Utilização do coeficiente γ_z como majorador de efeitos de primeira ordem em edifício altos. Anais do 41º Congresso Brasileiro do Concreto, Instituto Brasileiro do Concreto, Salvador, 1999.

LOURENÇO, P. B. Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não-lineares. 1999. Relatório 99-DEC/E-1. Universidade do Minho.

M. RESHEIDAT, M.; GHANMA, M.; SUTTON, C.; CHEN, W. F. Flexural Rigidity of Biaxially Loaded Reinforced Concrete Rectangular Column Sections. Computer & Structures, vol. 55(4), pp. 601-614, 1995.

MACGREGOR, J. G.; BREW, I. E.; PFRANG, E. O. Design of slender concrete columns. ACI J. Proc. 67, pp.6-28, 1970.

MACGREGOR, J.G.; HAGE, S.E. Stability analysis and design of concrete frames. Journal of the Structural Division, ASCE, v. 103, n. ST10, p. 1953-1970, 1977

MAVICHAK, V.; FURLONG, R. W. Strength and stiffness of reinforced concrete columns under biaxial bending. Research report 7-2F. Center for Highway Research. November 1976.

MATLAB: versão R2015b. Desenvolvido pela MathWorks, Inc. Massachusetts, 2015. Disponível em: < <http://www.mathworks.com>. >. Acesso em 18/12/2015.

MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. "Matrix Structural Analysis, 2nd Edition". Faculty Books, 2000

MIRZA, S. A. Flexural stiffness of rectangular reinforced concrete columns. ACI J. Proc. 87, pp. 425-435, 1990.

MONCAYO, W. J. Z. Análise de segunda ordem global em edifícios com estrutura de concreto armado. 191p. Tese de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

NARDI, F. A.; FICANHA, R.; PRAVIA, Z. M. C. Análise de segunda ordem em edifícios modelados tridimensionalmente : aplicações, dificuldades e recomendações. Congresso Latino-Americano da Construção Metálica, 2010.

OLIVEIRA, D. M. Parâmetros de Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado Segundo a Nova NBR-6118. 2002. Tese de Mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais.

OLIVEIRA, D. M. Estudo dos Processos Aproximados Utilizados para a Consideração das Não-Linearidades Física e Geométrica na Análise Global de Estruturas de Concreto Armado. 272p. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2007.

PAULTRE, P. Dynamique des structures: application aux ouvrages de génie civil. Lavoisier, 2005.

PINTO, R. S. Não-linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado. 108p. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

PINTO, R. S. Análise não-linear das estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado. 2002. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

PINTO, R. S.; CORRÊA, M. R. S.; RAMALHO, M. A. The use of γ_z parameter to evaluate second order effects on reinforced concrete buildings. Revista IBRACON de Estruturas, Vol. 1(2), pp. 145-165, 2005.

RAYLEIGH, J. W. S. L. Theory of Sound, vol. 2. Dover Publications, New York, NY, 1945

RÈGLES, BAEL 91 RÉVISÉES 99. Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la method des états-limites. Paris, 2000.

REIS, D. G.; MANGINI, Marlos; SIQUEIRA, G. H.; VIEIRA JUNIOR, L. C. M.; Uso do período natural de vibração como indicador dos efeitos globais de segunda ordem para estruturas de concreto armado. *57º Congresso Brasileiro do Concreto*, Vol. 57, pp.1-10, Bonito, MS, Brasil, 2015

RUTENBERG, A. A direct P-Delta analysis using standard plane frame computer programs. *Computers & Structures* v14, n. 1, p.97-102, 1981

S4 Sistema Building: versão 4.0. Desenvolvido pela S4 Sistemas. Curitiba, 2015. Disponível em: < <http://s4sistemas.com.br> >. Acesso em 24/06/2015.

SAP2000: versão 17.3.0. Desenvolvido pela Computers and Structures, Inc. Berkley, 2015. Disponível em: < <http://www.csiamerica.com>. >. Acesso em 04/11/2015.

SINGH, H.; SINGH, G. M. Non-linear analysis of Frames. *Comput. Struct.*, Vol. 44(6), pp. 1377–1379, 1992.

SOUZA, A. S. C.; PEREIRA, M. F. Evolução das técnicas de análise e códigos de projeto em análise de 2ª ordem de estruturas metálicas. *Revista Sul-americana de Engenharia Estrutural*, v. 6, n. 1, 2011.

STATLER, D. E. Using the natural period of a structure as an indicator of significance of the second-order effects. 2010. Bucknell University.

STATLER, D.E.; ZIEMIAN, R.D.; ROBERTSON, L.E. The Natural Period as an Indicator of Second-Order Effects. *Proceedings of the Annual Stability Conference Structural Stability Research Council*. 2011

TIMOSHENKO, G. *Mecânica dos Sólidos*. Livros Técnicos e Científicos Editora. Rio de Janeiro, 1983.

VANDEPITTE, D. Non-iterative Analysis of Frames Including the P- Δ -effect. *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 2(2), pp. 3–10, 1982.

VASCONCELOS, A. C. Origem dos parâmetros de estabilidade α e γ_z . *Revista IBRACON de Estruturas*, n. 20, p. 56-60, 1997.

WHITE, D. W., SUROVEK, A. E.; KIM, S. C. Direct Analysis and Design Using Amplified First-Order Analysis: Part 1–Combined Braced and Gravity Framing Systems. *AISC Eng. J.*, Vol. 44, No. 4, pp. 305–322, 2007a.

WHITE, D. W., SUROVEK, A. E.; CHANG, C. J. Direct Analysis and Design Using Amplified First-Order Analysis. Part 2–Moment Frames and General Framing Systems. *AISC Eng. J.*, Vol. 44(4), pp. 323–340, 2007b.

WIGHT, J. K.; MACGREGOR, J.G. *Reinforced Concrete: Mechanics and Design*. 1176p. Pearson, 6th edition, 2012.

WILSON, E. L.; HABIBULLAH, A. Static and Dynamic Analysis of Multi-Story Buildings Including P–Delta Effects. *Earthquake Spectra*, Vol. 3(2), pp. 289–298, 1987.

WOOD, B.R.; BEAULIEU, D.; ADAMS, P.F. Column design by P-D method. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v. 102, n. ST2, p. 411-427, 1976.

ZIEMIAN, R. D. *Guide to Stability design criteria for metal structures*. Wiley, 2010.

9. ANEXOS

ANEXO A – PLANTAS DOS MODELOS

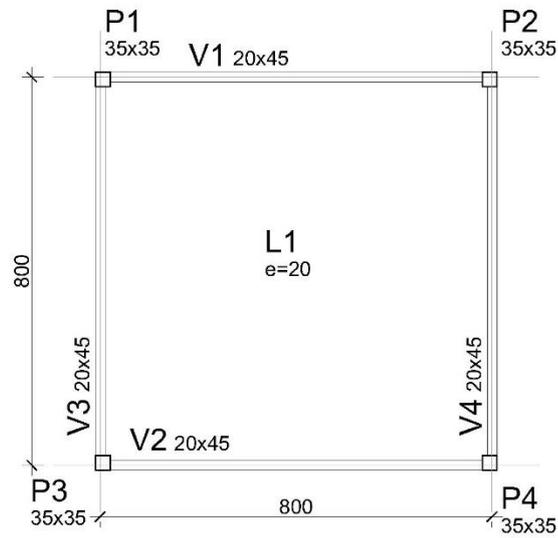


Figura A.1 - Planta do pavimento típico do Modelo 1

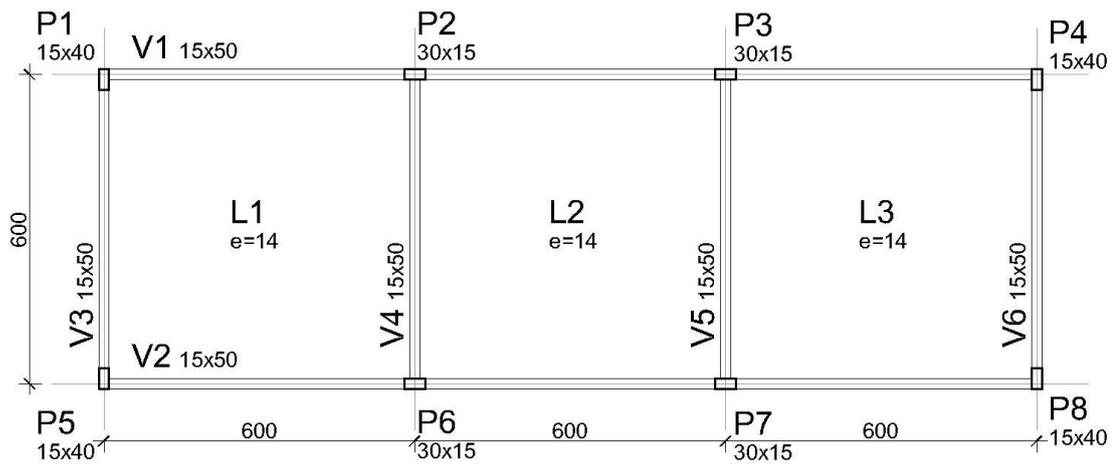


Figura A.2 - Planta do pavimento típico do Modelo 2

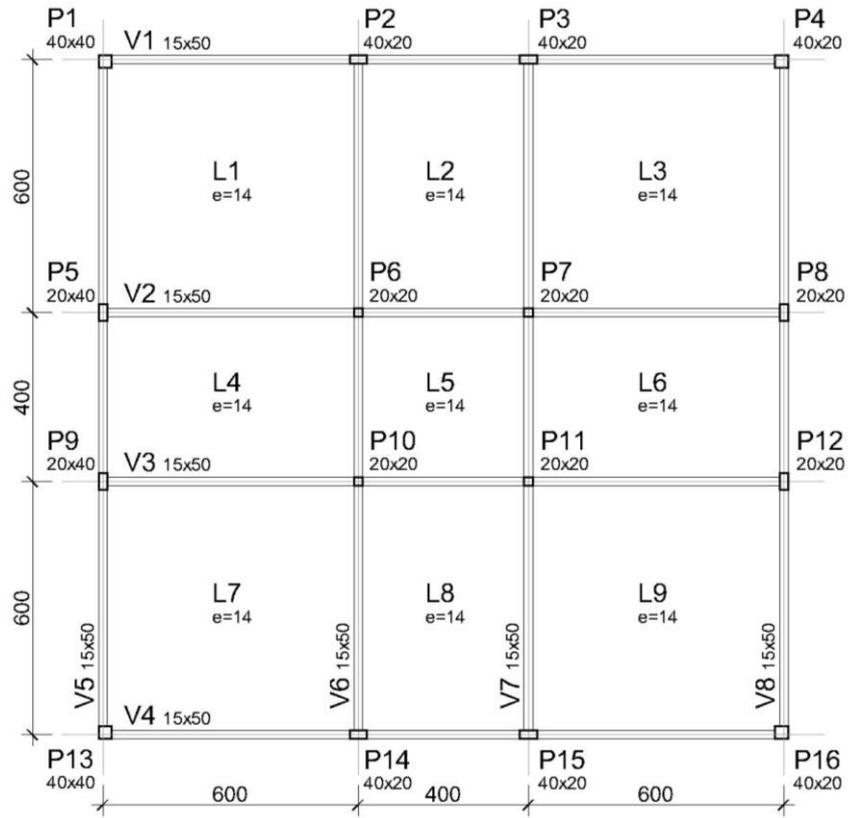


Figura A.3 - Planta do pavimento típico do Modelo 3

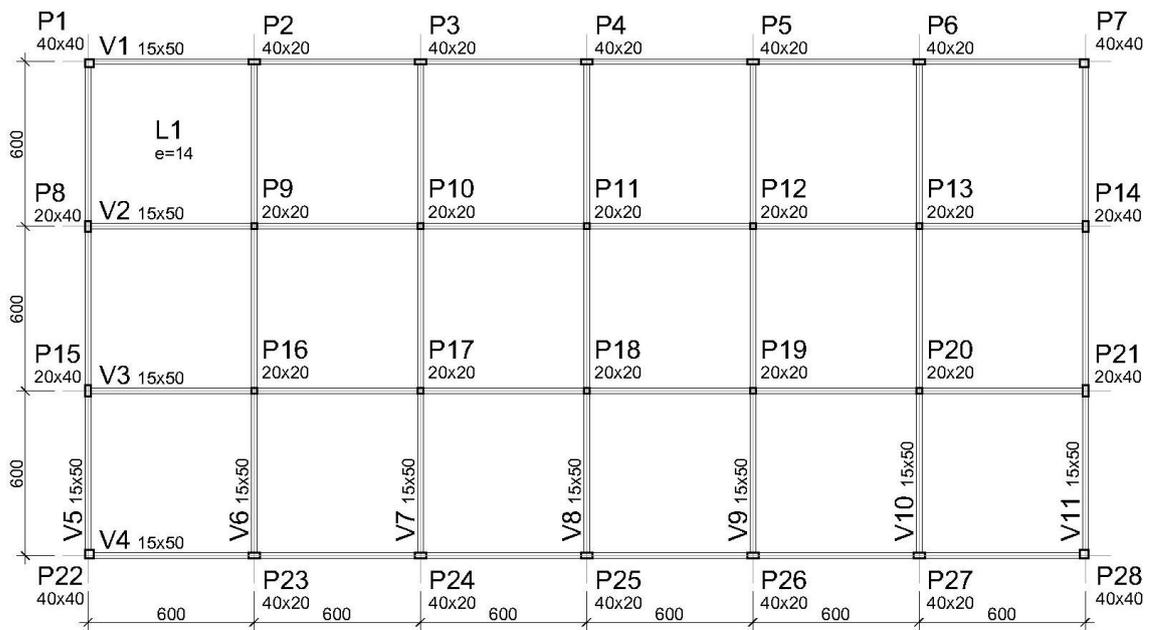


Figura A.4 - Planta do pavimento típico do Modelo 4

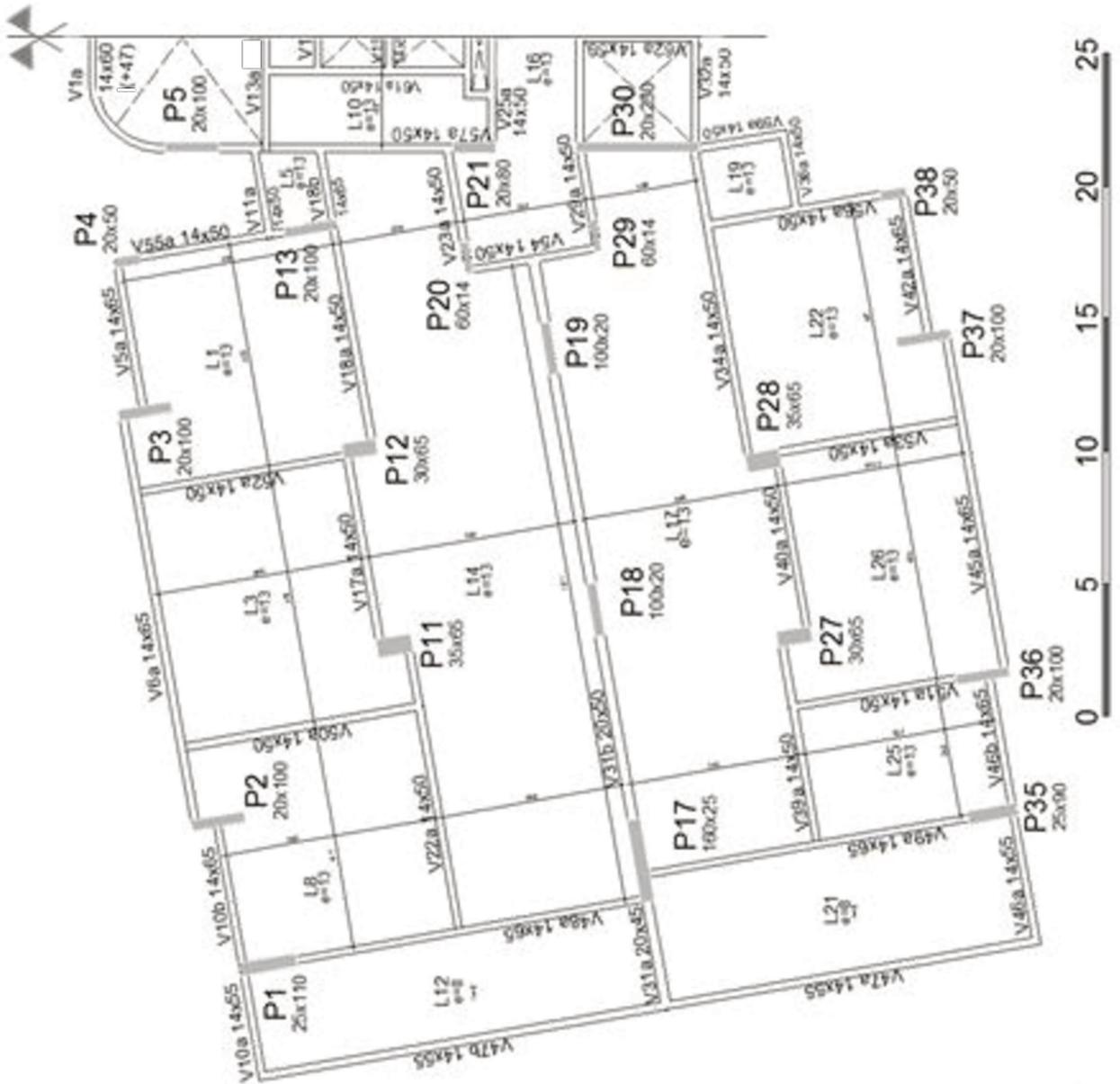


Figura A.5 - Planta do pavimento típico do Modelo 5

ANEXO B – RESULTADOS COMPLETOS

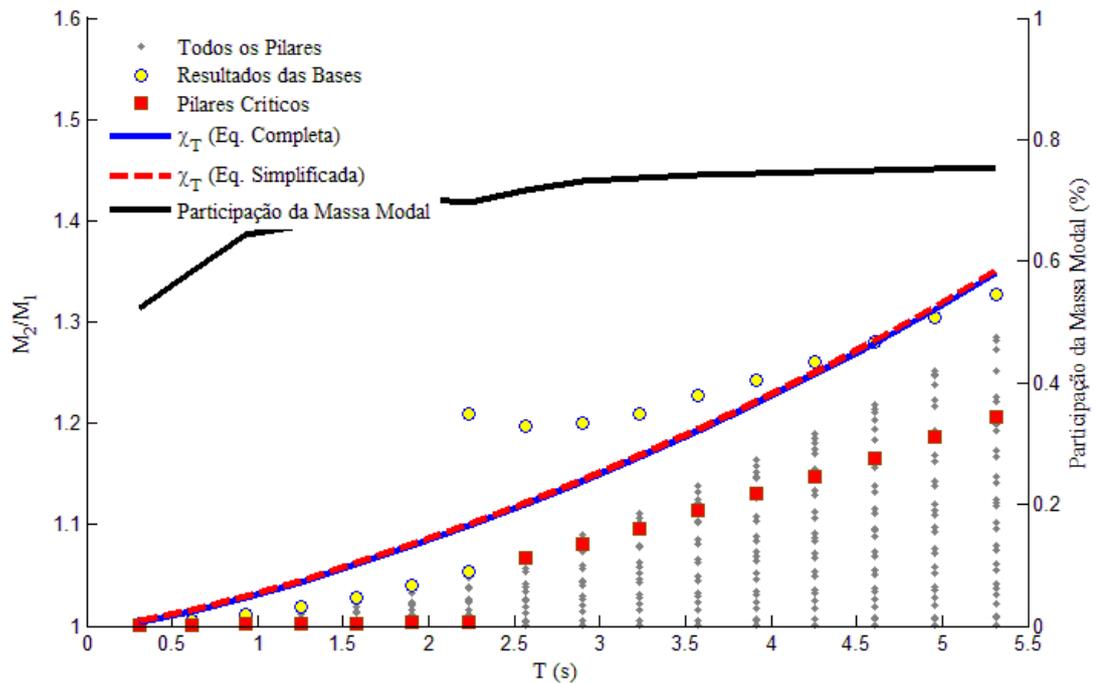


Figura B.1 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração para o Modelo 1 (Direção "x"), destacando nós das bases, pilares críticos e participação da massa modal em cada modelo

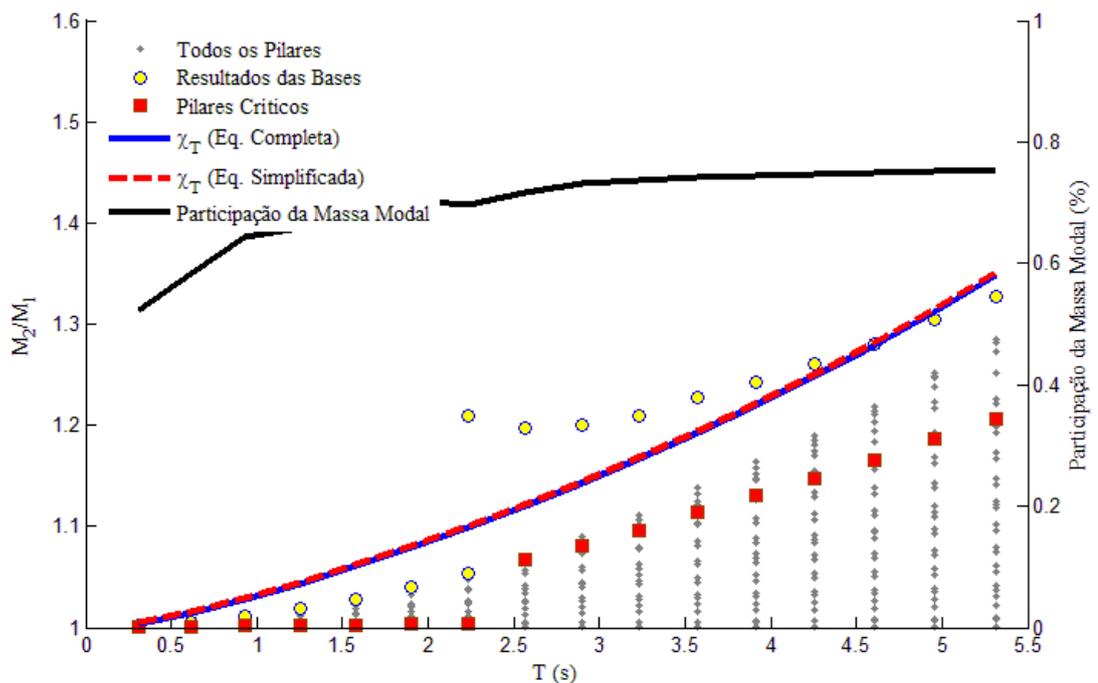


Figura B.2 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração para o Modelo 1 (Direção "y"), destacando nós das bases, pilares críticos e participação da massa modal em cada modelo

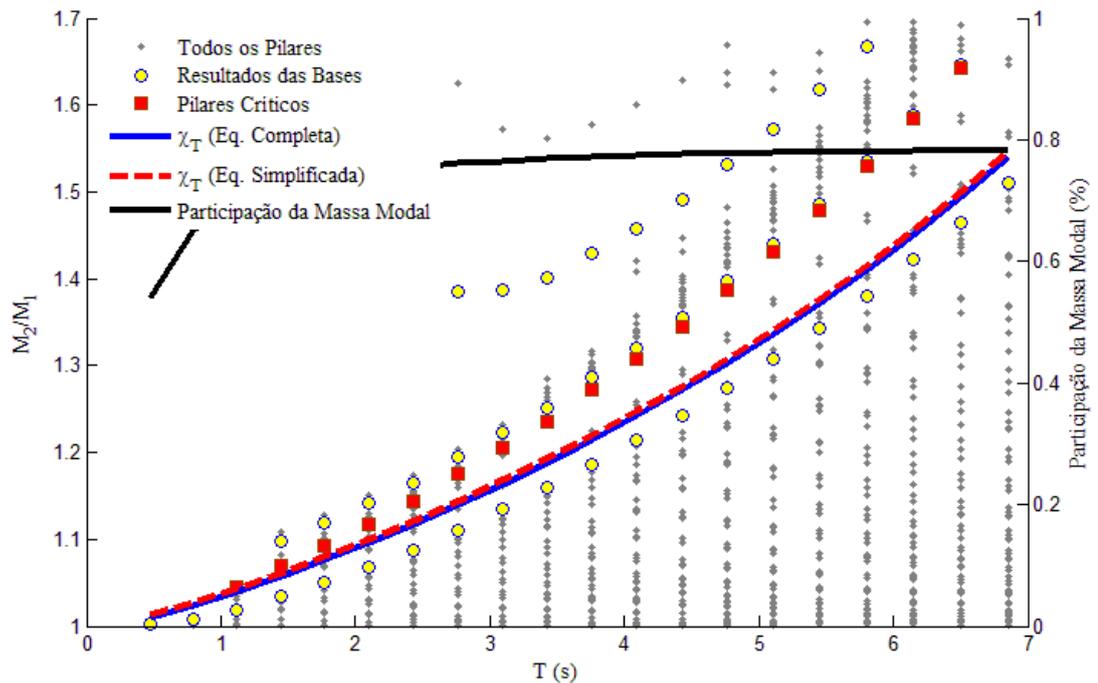


Figura B.3 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração para o Modelo 2 (Direção “x”), destacando nós das bases, pilares críticos e participação da massa modal em cada modelo

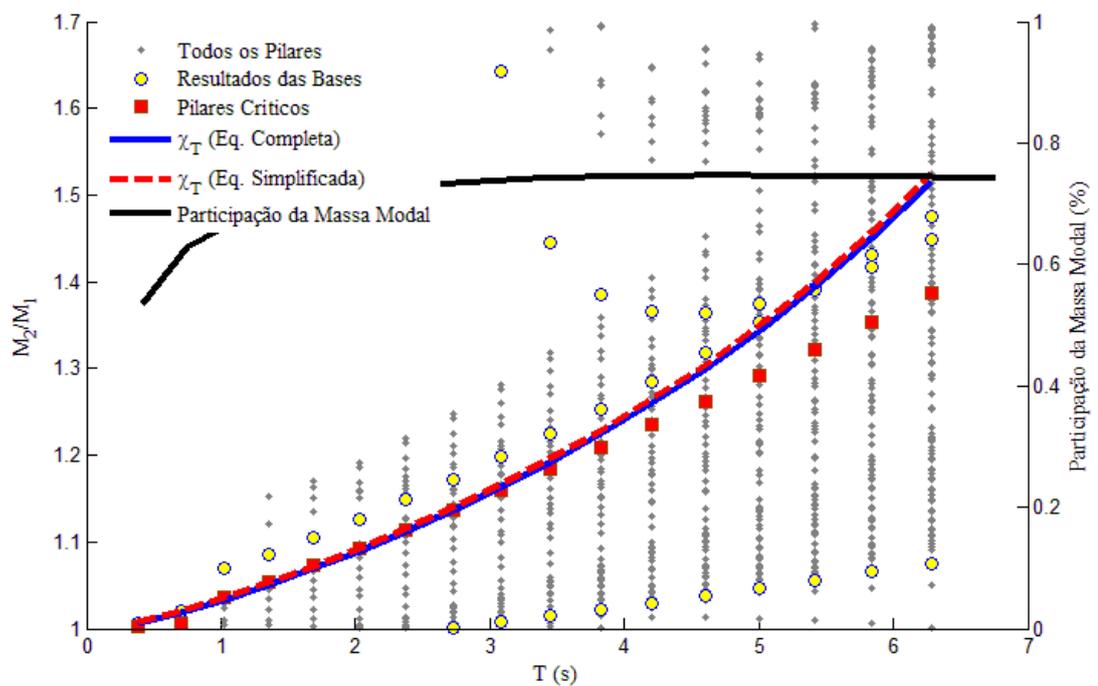


Figura B.4 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração para o Modelo 2 (Direção “y”), destacando nós das bases, pilares críticos e participação da massa modal em cada modelo

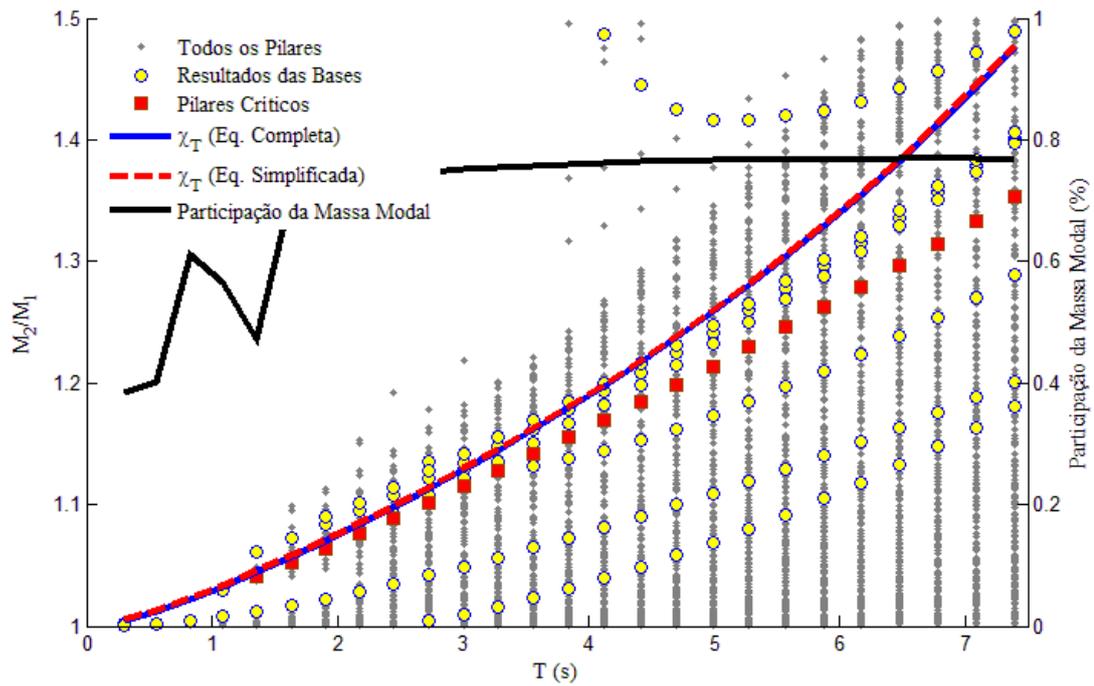


Figura B.5 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração para o Modelo 3 (Direção “x”), destacando nós das bases, pilares críticos e participação da massa modal em cada modelo

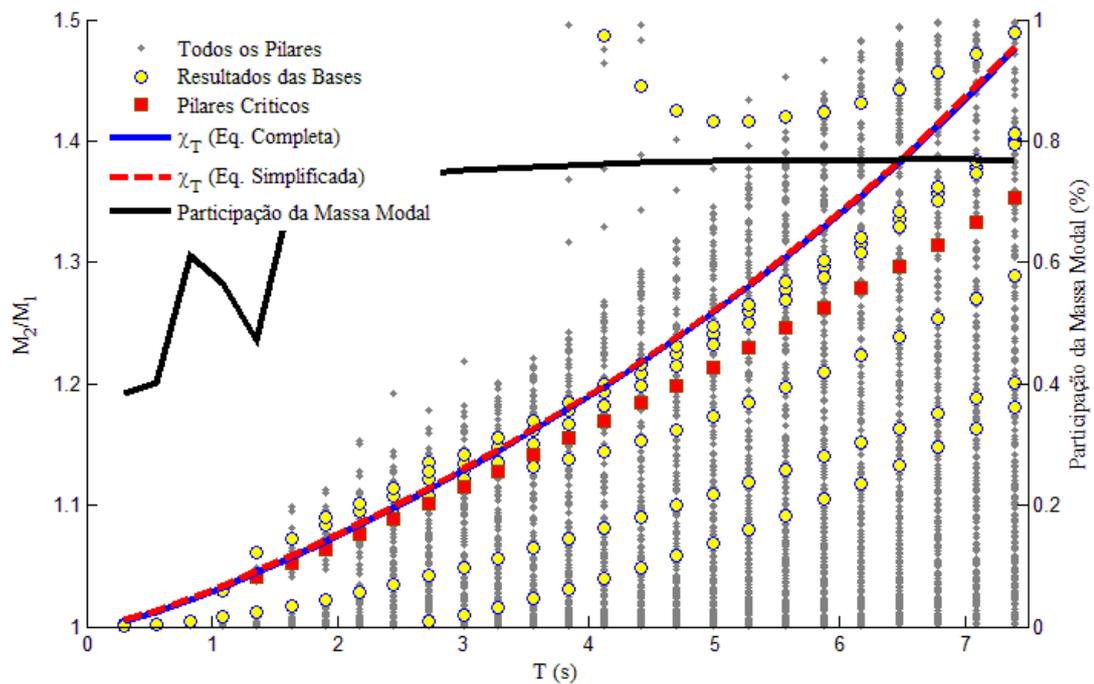


Figura B.6 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração para o Modelo 3 (Direção “y”), destacando nós das bases, pilares críticos e participação da massa modal em cada modelo

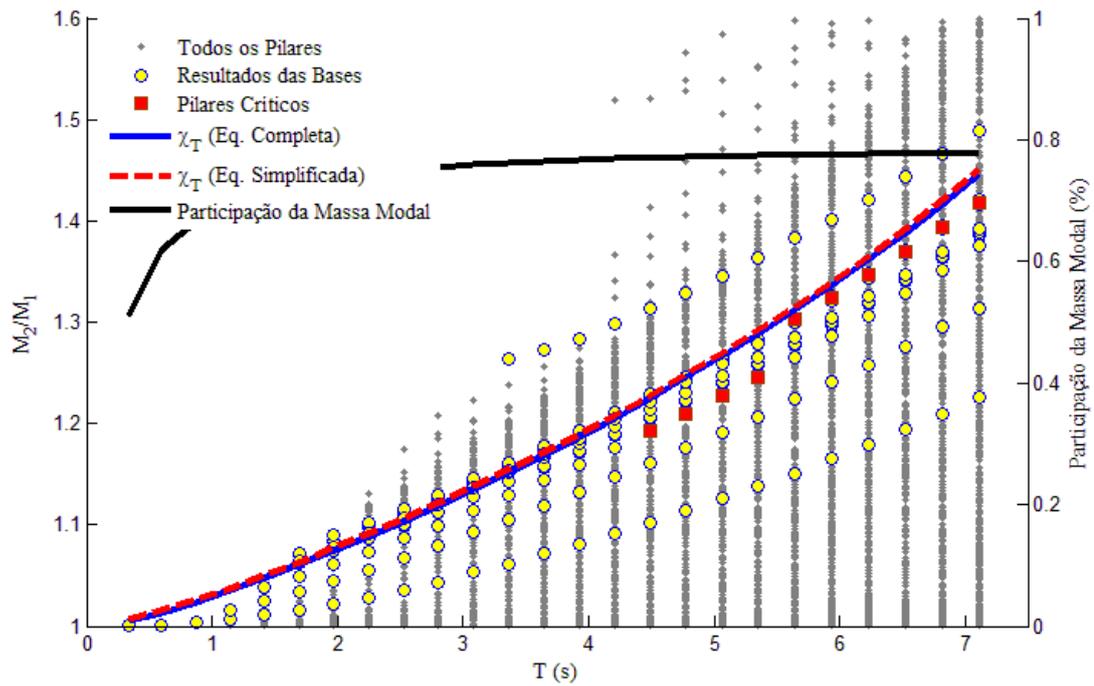


Figura B.7 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração para o Modelo 4 (Direção “x”), destacando nós das bases, pilares críticos e participação da massa modal em cada modelo

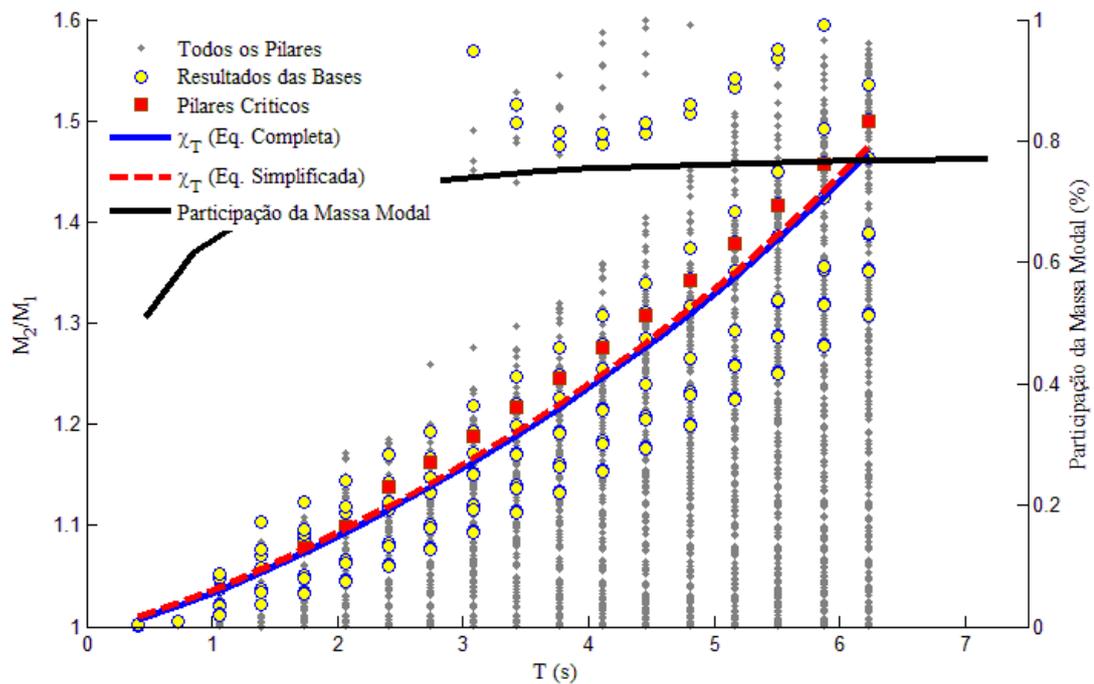


Figura B.8 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração para o Modelo 4 (Direção “y”), destacando nós das bases, pilares críticos e participação da massa modal em cada modelo

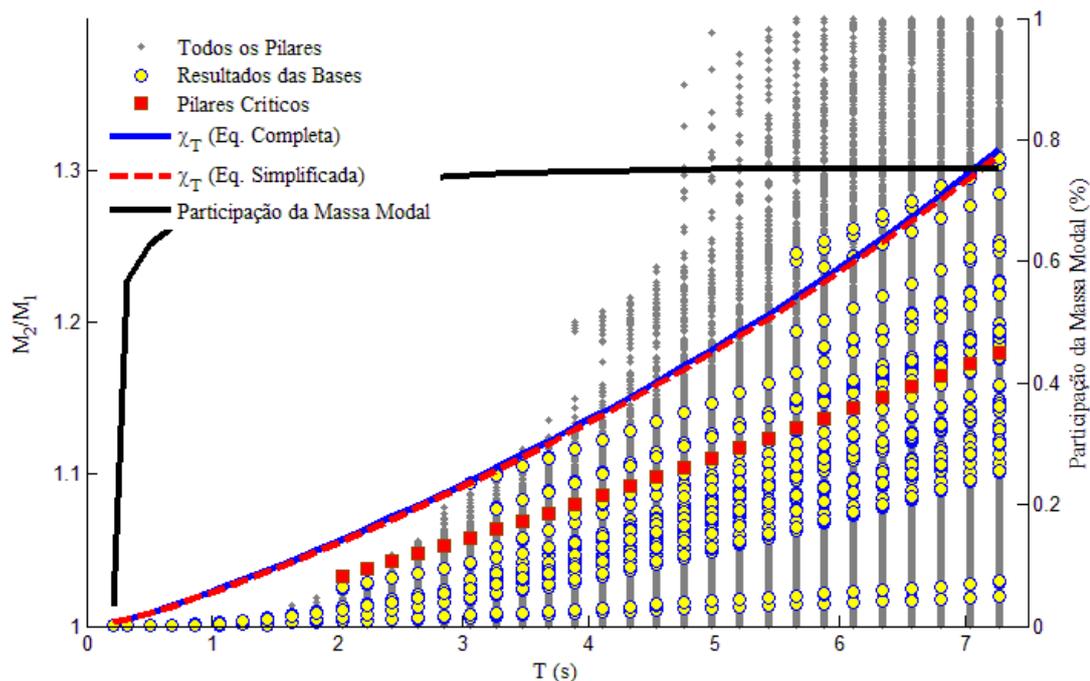


Figura B.9 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração para o Modelo 5 (Direção “x”), destacando nós das bases, pilares críticos e participação da massa modal em cada modelo

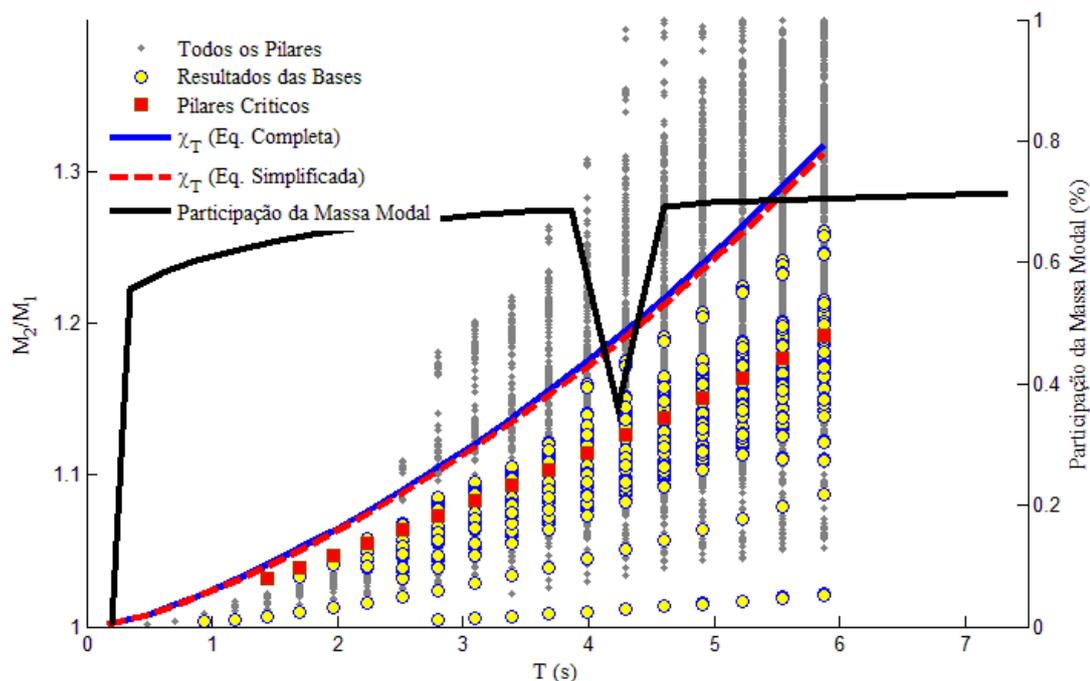


Figura B.10 - Amplificações M_2/M_1 em função do Período Natural de Vibração para o Modelo 5 (Direção “y”), destacando nós das bases, pilares críticos e participação da massa modal em cada modelo

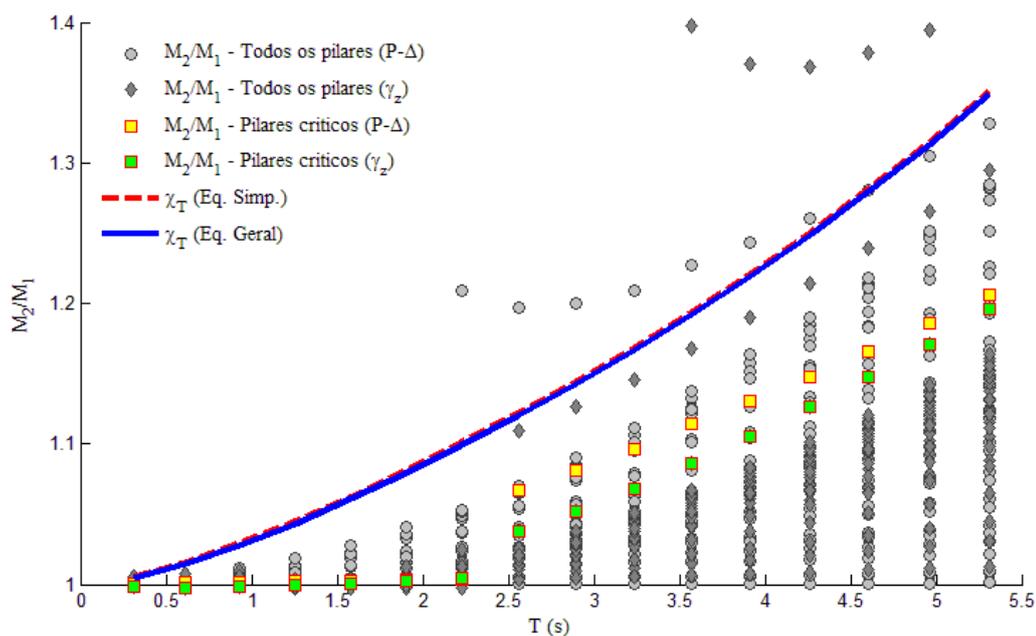


Figura B.11 - Comparação de resultado obtido pelo processo P- Δ frente ao resultado obtido pelo método simplificado – Modelo 1 (direção “x”)

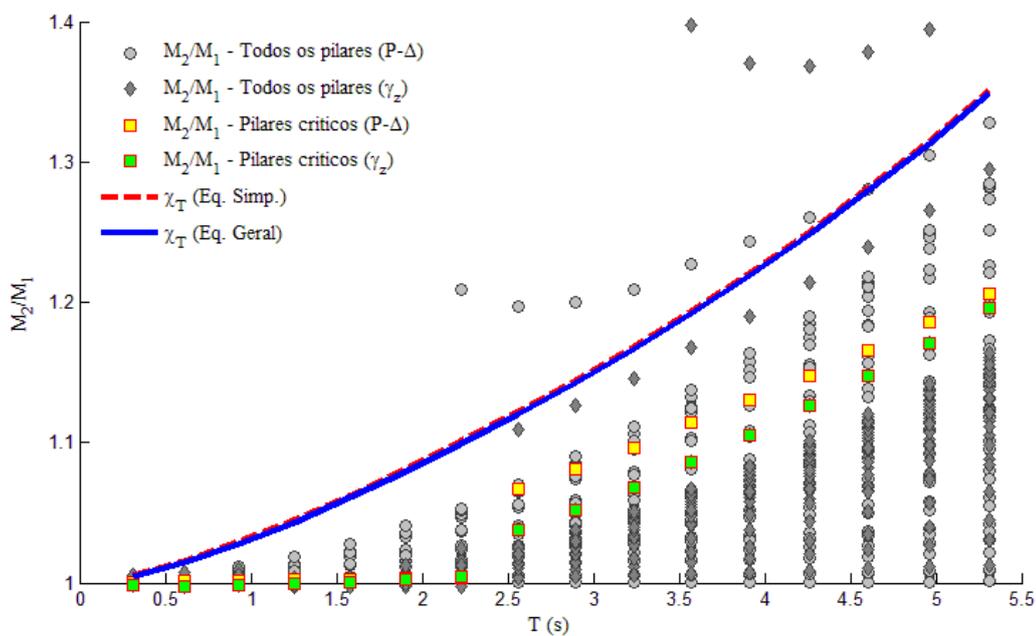


Figura B.12 - Comparação de resultado obtido pelo processo P- Δ frente ao resultado obtido pelo método simplificado – Modelo 1 (direção “y”)

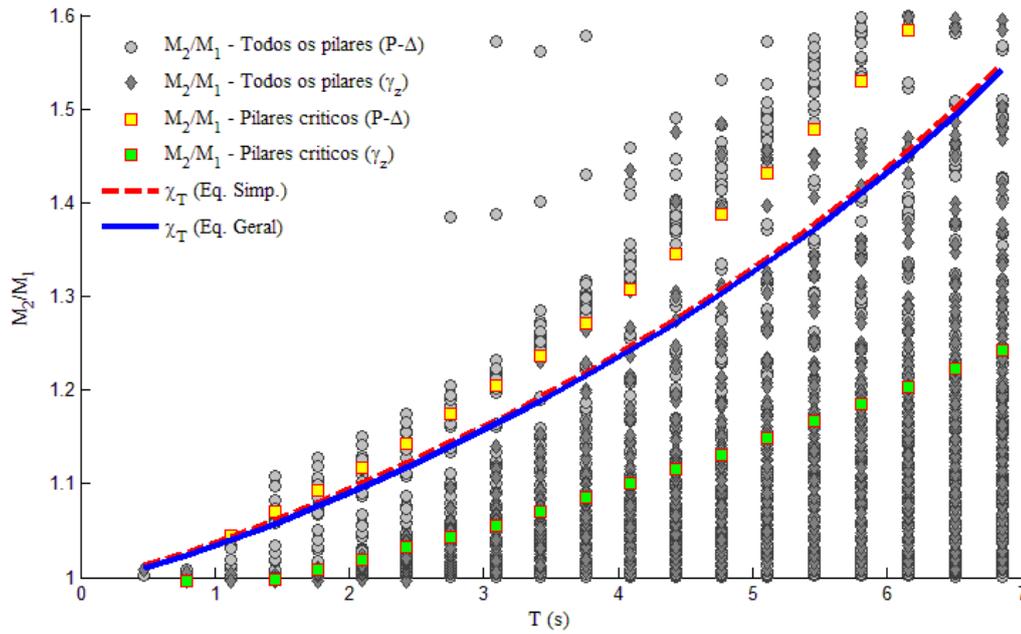


Figura B.13 - Comparação de resultado obtido pelo processo P- Δ frente ao resultado obtido pelo método simplificado – Modelo 2 (direção “x”)

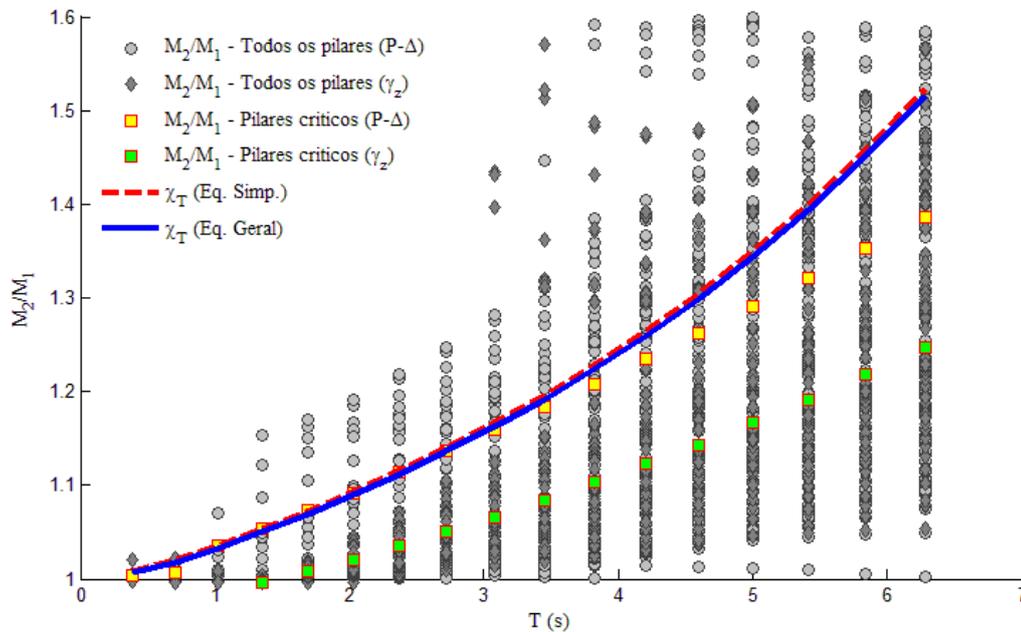


Figura B.14 - Comparação de resultado obtido pelo processo P- Δ frente ao resultado obtido pelo método simplificado – Modelo 2 (direção “y”)

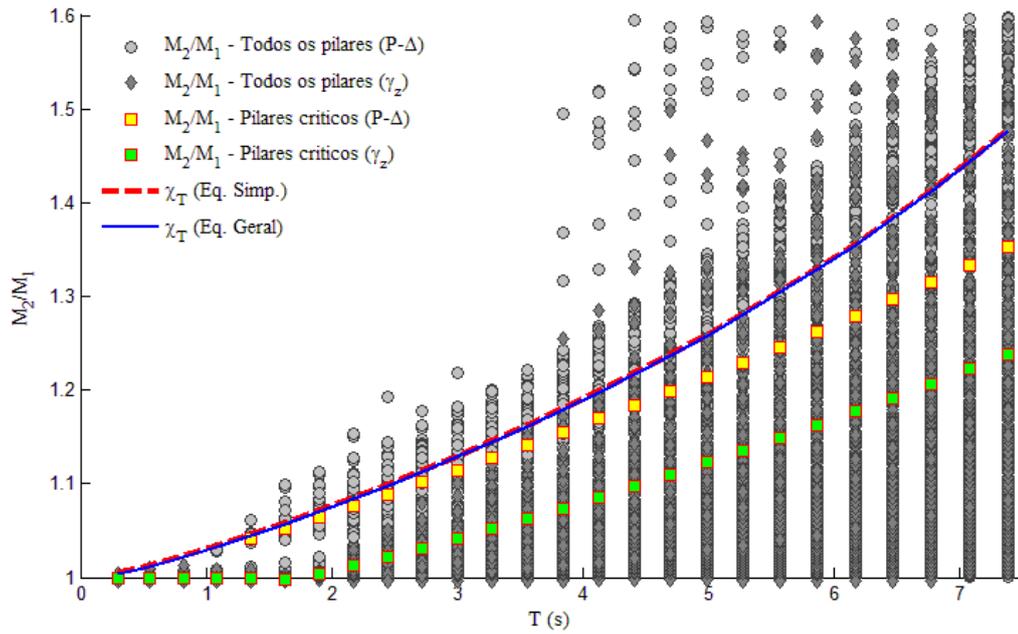


Figura B.15 - Comparação de resultado obtido pelo processo P- Δ frente ao resultado obtido pelo método simplificado – Modelo 3 (direção “x”)

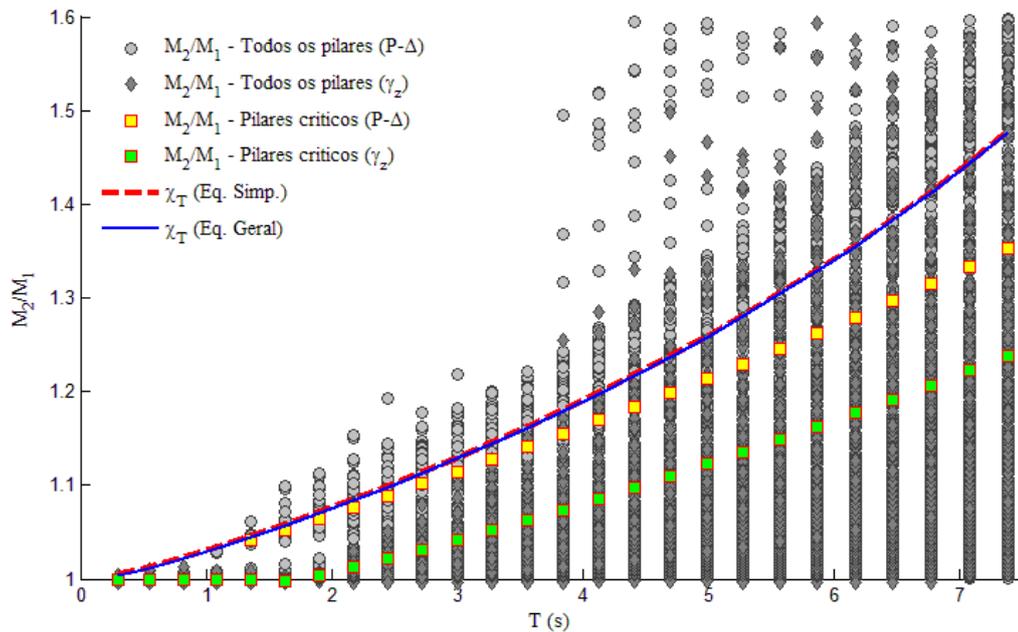


Figura B.16 - Comparação de resultado obtido pelo processo P- Δ frente ao resultado obtido pelo método simplificado – Modelo 3 (direção “y”)

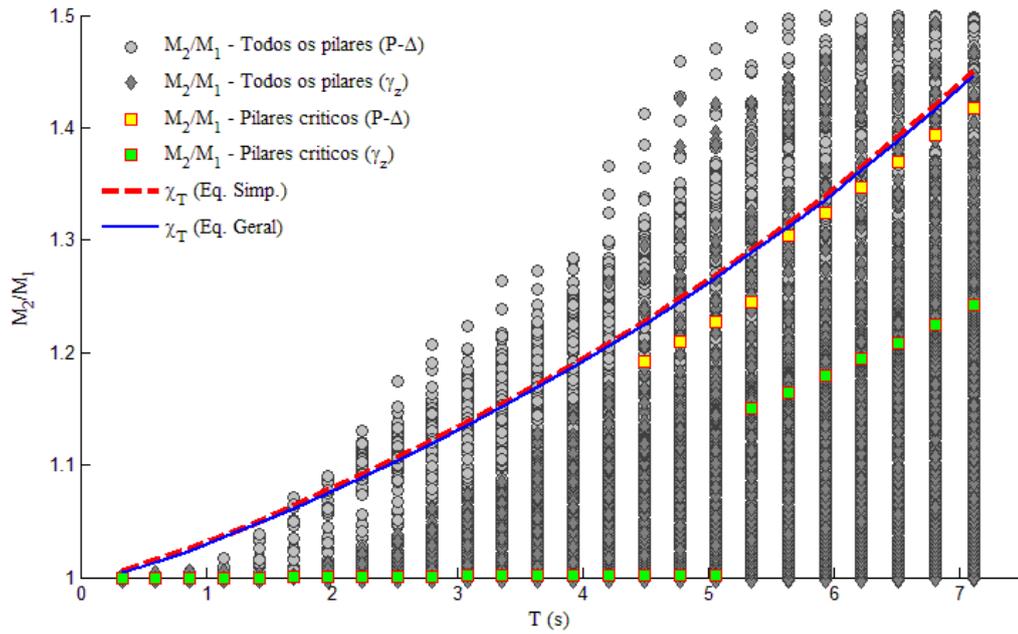


Figura B.17 - Comparação de resultado obtido pelo processo P- Δ frente ao resultado obtido pelo método simplificado – Modelo 4 (direção “x”)

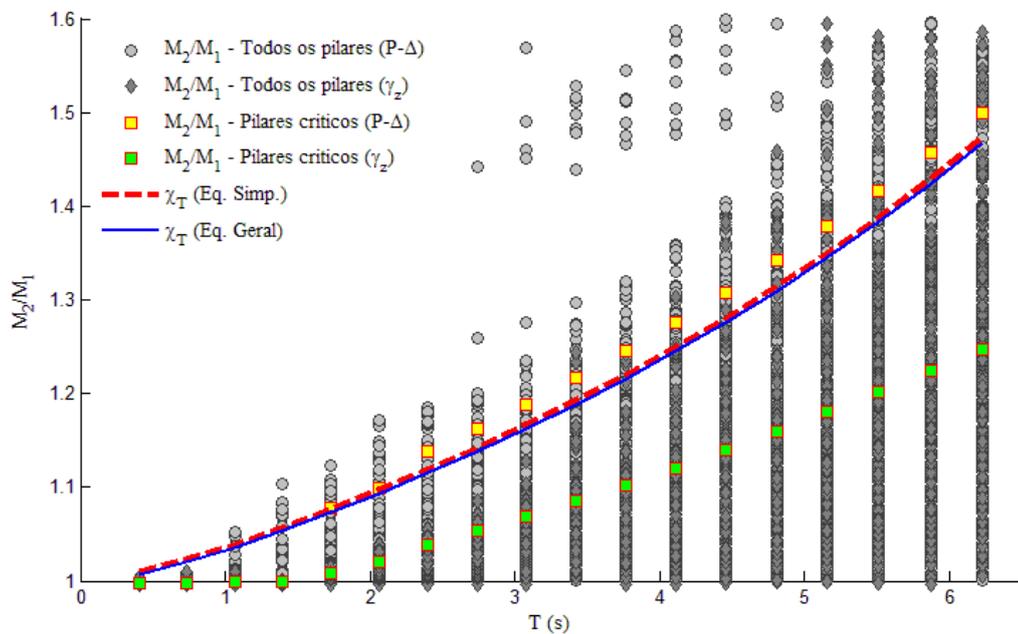


Figura B.18 - Comparação de resultado obtido pelo processo P- Δ frente ao resultado obtido pelo método simplificado – Modelo 4 (direção “y”)

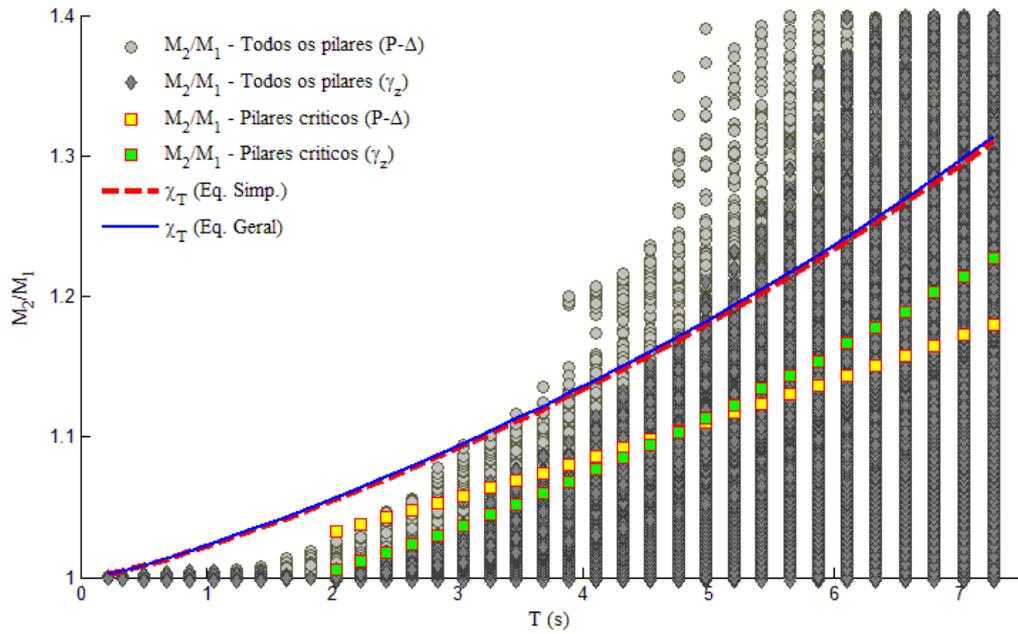


Figura B.19 - Comparação de resultado obtido pelo processo P-Δ frente ao resultado obtido pelo método simplificado – Modelo 5 (direção “x”)

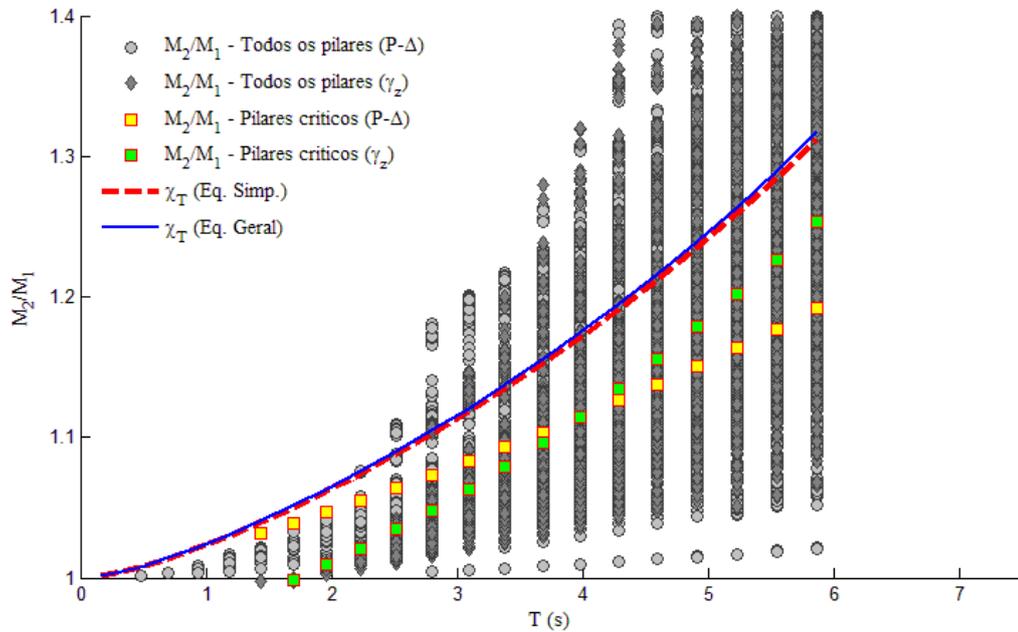


Figura B.20 - Comparação de resultado obtido pelo processo P-Δ frente ao resultado obtido pelo método simplificado – Modelo 5 (direção “y”)

ANEXO C – RESUMO EXPANDIDO EM INGLES

Método simplificado para verificação dos efeitos globais de segunda ordem para estruturas em concreto armado baseado no período natural de vibração

A simplified approach, based on the natural period of vibration, to consider second-order effects in reinforced concrete frames

Daniel G. Reis (1); Ronald D. Ziemian (2); Gustavo H. Siqueira (3); Luiz C. M. Vieira Jr. (3)

(1) Engenheiro Civil, Prefeitura Municipal de Campinas; Departamento de Estruturas, UNICAMP

(2) Professor Doutor, Bucknell University - 1 Dent Drive, Lewisburg, PA 17837

(3) Professor Doutor, Departamento de Engenharia de Estruturas, UNICAMP

Rua Saturnino de Brito, 224, Cidade Universitária Zeferino Vaz, Campinas - SP, CEP: 13083-889

C.1. ABSTRACT

Recent studies have demonstrated that there is a relationship between the structure's susceptibility to second-order effects and its natural vibration period (T) since both properties are fundamentally dependent on the structure's stiffness and mass properties. The main advantage on the use of this characteristic is that for the majority of existing structural analysis software, the natural period of vibration can be easily obtained. In this study, different formulations are developed in order to propose an amplification factor (χ_T) to multiply first-order analysis results and satisfactorily obtain results due to a second-order analysis. These formulations are based on the D'Alembert's principle, Rayleigh's method, and the use of generalized coordinates to represent the dynamic displacement of flexible structures. It is observed that values of χ_T lead to values closer to the traditional simplified methods currently used in Brazil and, in fact, more accurate. Thus, it is proposed an amplification factor (χ_T), based on the natural period of vibration, to be used as: (i) an indicator of the structures' susceptibility to second order effects and (ii) an amplification factor to describe the second-order effects on reinforced concrete frames.

Keywords: Second-Order Effects; Modal Analysis; Structural Stability

C.2. INTRODUCTION

Over the last few years, second-order structural analysis has gained importance due to the increasing need to design slender structures. **Moncayo** (2011) mentions that this is a consequence of great demand of space in urban centers and also the development of high-resistance concrete. Horizontal and vertical forces acting concomitantly with increasingly slender structures, result in non-negligible effects, which compromises structural stability (**Oliveira**, 2002).

It can be computationally demanding to perform a second-order analysis and the engineer responsible for carrying out the analysis has to have adequate training and knowledge on the topic. Several methods are presented in the literature to classify a structure as nonsway (braced) or sway (unbraced) frame, as well as, to consider the effects of geometrical and material non-linearity on the demands. The influence of these non-linearities can be considered through iterative methods in which the stiffness matrix is updated at each load or displacement increment (**Azevedo**, 1993). A detailed description of this method can be found in **Chen and Lui** (1991) and **McGuire et al.** (2000). Other iterative methods can be found in **Crisfield** (1991) and **Singh and Singh** (1992).

An alternative to iterative methods is simplified amplification factors, such as notional loads, or reduction factors to decrease an element stiffness; these methods are conventionally named direct methods. Direct methods are presented in **Rutenberg** (1981), **Wilson and Habilullah** (1982) and **White et al.** (2007a,b).

The Brazilian reinforced concrete design standard **ABNT NBR 6118:2014** presents two approximate methods to classify a structure with respect to its susceptibility to second-order effects: the parameter α and the parameter γ_z . Both lead the designer to identify if the structure in analysis can be considered as a nonsway or a sway frame. The parameter γ_z , however, introduced by **Franco and Vasconcelos** (1991), also represents an estimation of how much the bending moments due to a first-order analysis shall be amplified to satisfactorily predict the bending moments due to a second-order analysis (**Vasconcelos**, 1997; **Pinto**, 2002).

Feitosa and Alves (2015), in a parametric study, conclude that each element stiffness and vertical loading are the main parameters that influence the global stability of a building. **Statler et al.** (2011) demonstrate that a structure's natural period can be used to predict moment amplification due to second-order effects, since both properties are fundamentally dependent on structure stiffness and mass properties. **Reis et al.** (2015) particularized some of the findings previously presented by **Statler et al.** (2011) to reinforced concrete buildings.

This paper aims to develop a parameter, herein named χ_T , to be used as: (i) an indicator of the structure's susceptibility to second order effects and (ii) an amplification factor that satisfactorily describes the second-order effects on reinforced concrete frames, based on a first-order analysis. Therefore, 122 spatial frames of reinforced concrete, based on 5 different floor plants, have been studied. The number of stories for each floor plant was limited to γ_z , as defined in **ABNT NBR 6118:2014**, of 1.3 in each of the orthogonal directions ($\gamma_z = 1.3$ is defined in the Brazilian reinforced concrete design standard as the limiting value in which simplified methods can substitute a full second-order analysis).

C.3. AMPLIFICATION FACTORS PREVIOUSLY PROPOSED IN THE LITERATURE

In the early stages of designing a structure, it is fundamental to quickly verify the susceptibility of a structure to second-order effects. Thus, many parameters have been proposed to classify a structure as a nonsway frame, which do not take into account second-order effects, and sway frame, which shall take into consideration second-order effects.

Beck and König (1965) developed a parameter named α based on the analysis of a cantilever column, with an uniformly distributed horizontal load along its length. In 1990, after a series of studies, CEB – FIP abandoned the use of the α parameter. Nonetheless, the Brazilian reinforced design standard kept it in section 15.

In 1991, **Franco and Vasconcelos** (1991) proposed a new parameter called γ_z to classify the susceptibility of a given reinforced concrete frame to second-order effects. The parameter

γ_z is based on the magnitude of the overturning moment produced by a vertical load applied with a certain eccentricity, which was caused, by a horizontal load.

The basic idea behind the parameter γ_z is that the second-order overturning moment (M_2) is the result of n moment increments summed to the moment given in a first-order analysis (M_1); in each increment the structure is successively loaded from its last deformed shape (Equation C.1).

$$M_2 = M_1 + \Delta M_2 + \Delta M_3 + \Delta M_4 + \dots + \Delta M_n \quad (\text{Equation C.1})$$

According to **Vasconcelos** (1997), the relationship between the terms given in Equation 1 is a geometric regression with ratio $r \leq 1$ (Equation C.2); and the limit of the sum of $1 + \sum r^n$ (where n is the number of increments) is as given in Equation C.3.

$$r = \frac{\Delta M_2}{M_1} = \frac{\Delta M_3}{\Delta M_2} = \frac{\Delta M_4}{\Delta M_3} = \frac{\Delta M_5}{\Delta M_4} = \dots = \frac{\Delta M_n}{\Delta M_{n-1}} \quad (\text{Equation C.2})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n) = \frac{1}{1 - r} \quad (\text{Equation C.3})$$

Given equations 1 and 3, one can say that the relationship between M_2 and M_1 , named in **Vasconcelos** (1997) γ_z , is given by $1/(1-r)$. But, r as presented in equation 2, is equal to $\Delta M_2/M_1$, Equation 4. The Brazilian reinforced concrete design standard **ABNT NBR 6118:2014** uses a slight different nomenclature for the variables in the equation of γ_z , which is also presented in Equation C.4.

$$\frac{M_2}{M_1} = \gamma_z = \frac{1}{1 - r} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_2}{M_1}} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}} \quad (\text{Equation C.4})$$

Besides classifying the structure according to its sensibility to second-order effects, the advantage of this parameter, compared to the parameter α , is that it also gives an estimate of the how much the bending moment due to a first-order analysis shall be amplified to result in demands similar to those given in a second-order analysis (**Feitosa and Alves**, 2015). This amplification factor is only valid for sway frames and a limiting γ_z value of 1.3. Recently, γ_z instead of being used as an amplification factor applied to the moment demand, it has been used to amplify the lateral load applied to the frame, in fact, only $0.95\gamma_z$ is multiplied to the lateral load.

Statler et al. (2011) shows that the susceptibility of a structure, planar steel frames, to second-order effects can be evaluated based on the natural period of vibration. Thus, the amplification factor B_2 , provided in Section C2.1b of the **AISC Specification for Structural Steel Buildings** (2005) can be replaced by another amplification factor, B_A , that depends on the natural period of vibration, Equation C.5. The derivation of B_A is based on the equilibrium analysis of a spring-mass rigid-column system with a single degree of freedom system.

$$B_A = \frac{1}{1 - \frac{3gT^2}{8\pi^2H}} \quad (\text{Equation C.5})$$

Reis et al. (2015) studied if second-order effects in reinforced concrete spatial frames could also be captured by a simple analysis of the structures natural period of vibration; the authors concluded that for all the 5 different floor plants analyzed in their study, the observation made in **Statler et al.** (2011) is also valid, but special attention shall be taken when the predominant vibration mode is a torsional mode.

The study presented herein aims to further analyze this research topic and to present an alternative amplification factor, χ_T , which can substitute the current γ_z factor used in the Brazilian reinforced concrete design standard **ABNT NBR 6118:2014**.

C.4. DERIVATION OF THE AMPLIFICATION FACTOR: χ_T

In this section, a parameter χ_T is proposed to identify the susceptibility of spatial reinforced-concrete frames to second-order effects and to quantify the overturning moment amplification due to second-order effects. This parameter is developed based on the Rayleigh method for conservative systems (**Rayleigh**, 1945), in which is possible to determine the natural period of vibration of an equivalent cantilever beam-column, and the relationship between first-order and second-order overturning moments (**Franco and Vasconcelos**, 1991), Equation C.6.

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_2}{M_1}} = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_i u_i}{\sum F_i h_i}} \quad (\text{Equation C.6})$$

Where P_i and F_i are vertical and horizontal forces applied to each story level, respectively, u_i is the horizontal floor displacement due to a first-order analysis and h_i is the distance from where the horizontal force (F_i) is applied to the base.

According to **Paultre** (2005), it is possible to develop a generalized equation to obtain the natural period of vibration of a flexible bar, depending on its mass and stiffness distributions. This requires an approximation of the displacement field $u(x, t)$ of the bar based on a shape function $\psi(x)$ and a time function $z(t)$, called a generalized coordinate, as presented in Equation C.7. The shape function is dimensionless and respects the kinematic boundary conditions of the problem being analyzed.

$$u(x, t) = \psi(x)z(t) \quad (\text{Equation C.7})$$

It is assumed in the development of the χ_T parameter that the properties of the spatial frame can be simplified to the study of a cantilever beam-column, with equivalent mass and stiffness distributions. The mass applied on the equivalent cantilever beam-column is considered to be the sum of two parcels: (i) the column self-weight uniformly distributed load along its height, and (ii) concentrated loads applied along the height of the bar, due to the

condensate weight of each story. A free-body diagram of the equivalent cantilever beam-column is presented in Figure C.1.

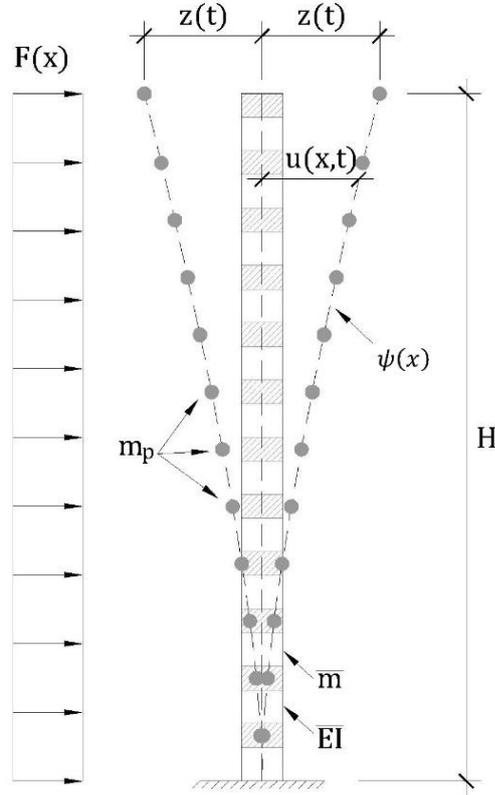


Figure C.1 – Equivalent cantilever beam-column considered in the derivation of χ_T .

The equation of motion for the equivalent cantilever beam-column can be written based on the principle of virtual work. The virtual work of the inertial forces can be expressed as follow.

$$\delta W_{f_I} = \int_0^H f_x(x, t) \delta u(x, t) \partial x \quad (\text{Equation C.8})$$

$$f_x(x, t) = \bar{m}(x) \ddot{u}(x, t) = \bar{m} \psi(x) \ddot{z}(t) \quad (\text{Equation C.9})$$

$$\delta u(x, t) = \delta z(t) \psi(x) \quad (\text{Equation C.10})$$

Substituting equations C.9 and C.10 into equation C.8 and considering the participation of the concentrated loads on each story level we have:

$$\delta W_{f_i} = \bar{m} \ddot{z}(t) \delta z(t) \int_0^H \psi(x)^2 \partial x + m_p \ddot{z}(t) \delta z(t) \sum_{i=1}^n \psi_i^2 \quad (\text{Equation C.11})$$

Where ψ_i is the value of the shape function on the i th story. The virtual work of the external applied force \mathbf{F} is expressed as:

$$\delta W_f = \int_0^H p(x, t) \delta u(x) \delta x = f_T(t) \delta z \int_0^H F(x) \psi(x) \delta x = F \delta z(t) \quad (\text{Equation C.12})$$

The virtual work of the internal forces is due to the overturning moment ($\mathbf{M}(x, t)$) on the rotation ($\delta\varphi(x, t)$) associated to the virtual displacement ($\delta\mathbf{u}(x, t)$) of the cantilever beam-column, and is written as follow:

$$\delta W_I = \int_0^H M(x, t) \delta\varphi(x) \partial x = \int_0^H M(x, t) \frac{\partial^2(\delta u(x, t))}{\partial x^2} \partial x \quad (\text{Equation C.13})$$

$$\frac{\partial^2(\delta u(x, t))}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\psi(x) \delta z(t))}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} * \delta z(t) \quad (\text{Equation C.14})$$

$$\delta W_I = \bar{EI} z(t) \delta z(t) \int_0^H [\psi''(x)]^2 \partial x \quad (\text{Equation C.15})$$

For the system in equilibrium, the virtual work of the internal forces is equivalent to the virtual work of external forces, thus we have:

$$\delta W_E = \delta W_I = \delta W_f - \delta W_{fI} \quad (\text{Equation C.16})$$

Or,

$$\begin{aligned} \overline{EI} z(t) \delta z \int_0^H [\psi''(x)]^2 \partial x \\ = F \delta z - \overline{m} \ddot{z}(t) \delta z \int_0^H [\psi(x)]^2 \partial x - m_p \ddot{z}(t) \delta z(t) \sum_{i=1}^n \psi_i^2 \end{aligned} \quad (\text{Equation C.17})$$

Rewriting Equation C.17, we obtain:

$$\left(\overline{m} \int_0^H \psi(x)^2 \partial x + m_p \sum_{i=1}^n \psi_i^2 \right) \ddot{z}(t) + \overline{EI} z(t) \int_0^H [\psi''(x)]^2 \partial x = F \quad (\text{Equation C.18})$$

Given Equation C.18, it is possible to write the generalized equation of motion for the equivalent cantilever beam-column with horizontal external forces applied, Equation C.19.

$$\tilde{m} \ddot{z}(t) + \tilde{K} z(t) = \tilde{p}(t) \quad (\text{Equation C.19})$$

Where \tilde{m} is the generalized mass, \tilde{k} is the generalized stiffness and $\tilde{p}(t)$ is the generalized external load, as presented in Equations C.20 to C.22.

$$\tilde{m} = \overline{m} \int_0^H \psi(x)^2 \partial x + m_p \sum_{i=1}^n \psi_i^2 \quad (\text{Equation C.20})$$

$$\tilde{K} = \overline{EI} \int_0^H \psi''(x)^2 \partial x \quad (\text{Equation C.21})$$

$$\tilde{p}(t) = F \quad (\text{Equation C.22})$$

For the equivalent cantilever beam-column being analyzed and based on the principle of energy conservation for the maximum potential and kinetic energies, the angular frequency (ω_n) can be written as presented in Equation C.23.

$$\omega_n^2 = \frac{\tilde{K}}{\tilde{m}} = \frac{\overline{EI} \int_0^H \psi''(x)^2 \partial x}{\overline{m} \int_0^H \psi(x)^2 \partial x + m_p \sum_{i=1}^n \psi_i^2} \quad (\text{Equation C.23})$$

The shape function ($\psi(x)$) describing the displacement field of the system depicted in Figure C.1, can be approximated by a polynomial function, with a unit displacement on its free end, which satisfies the geometric boundary conditions of the system, Equation C.24.

$$\psi(x) = x^2/H^2 \quad (\text{Equation C.24})$$

By substituting Equation C.24 in Equation C.23, the angular frequency for the system can be written as follow.

$$\omega_n^2 = \frac{\overline{EI}^4/H^4 \int_0^H \partial x}{\overline{m}/H^4 \int_0^H x^4 \partial x + m_p/H^4 \sum_{i=1}^n (iH/n)^4} \quad (\text{Equation C.25})$$

In Equation C.25, the last term in the denominator (summation in terms of the number of stories) can be replaced by the polynomial presented in Equation C.26.

$$\sum_{i=1}^n i^4/n^4 = \frac{6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1}{30n^3} \quad (\text{Equation C.26})$$

So, the angular frequency can be expressed as:

$$\omega_n^2 = \frac{\overline{EI}}{\overline{m} H^4 / 20 + H^3 m_p \frac{6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1}{120n^3}} \quad (\text{Equation C.27})$$

Based on Equation C.27, the natural period of vibration can be expressed in terms of the equivalent cantilever beam-column submitted to a horizontal load, Equation 30.

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\overline{m} H^4 / 20 + H^3 m_p \frac{6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1}{120n^3}}{\overline{EI}} \quad (\text{Equation C.28})$$

Assuming that the beam-column system has its mass regularly distributed on each floor, it is possible to represent the total story's weight as a percentage of the total building weight. Thus, writing the total weight of the structure (P) as a parcel due to the total weight of the stories including slabs and beams (P_{sto}) and other parcel due to the total weight of the columns (P_{col}), we have Equation C.29.

$$P = P_{sto} + P_{col} \quad (\text{Equation C.29})$$

Thus, the parcel that represents the story weight (κ_{pav}) can be represented as the ratio shown in Equation C.30.

$$\kappa_{pav} = \frac{P_{sto}}{P} = \frac{1 - P_{col}}{P} \quad (\text{Equation C.30})$$

The total column's weight is given by $P_{col} = Hg \overline{m}$, and the distributed mass of the columns is defined as presented in Equation C.31.

$$\bar{m} = \frac{P_{col}}{gH} = \frac{(1 - \chi_{pav})P}{gH} \quad (\text{Equation C.31})$$

Finally, the total stories' weight is given by $P_{sto} = n \cdot g \cdot m_p$, from which the concentrated masses, m_p (Figure C.1), applied on each storey of the equivalent system can be found by Equation C.32.

$$m_p = \frac{P_{sto}}{gn} = \frac{\kappa_{pav}P}{gn} \quad (\text{Equation C.32})$$

Where:

H	Total height of the structure;
P_{col}	Total weight of the columns;
\bar{m}	Distributed mass of the columns;
g	Gravity acceleration;
P	Total weight of the structure;
κ_{pav}	Ratio of the total stories weight;
n	Number of stories;
P_{sto}	Total weight of the stories;
m_p	Mass of the typical story.

By substituting Equation C.32 in Equation C.28, an equation for the natural period of vibration to the equivalent cantilever beam-column representing a concrete frame with n stories is obtained, Equation C.33.

$$T^2 = \frac{PH^3\pi^2}{g\bar{E}I} \left[\frac{6n^4 + \kappa_{pav}(15n^3 + 10n^2 - 1)}{30n^4} \right] \quad (\text{Equation C.33})$$

From the relationship between the first-order and second-order bending moment, presented in previous section (see Eq. C.6), an equation for the amplification factor of the first-order effects, for the beam-column system presented in Figure C.2, is proposed. From a linear analysis, it is possible to write the equation of the deflection curve ($\mathbf{u}(x)$) of a cantilever beam-column subjected to a uniformly distributed load, as follow.

$$M(x) = \frac{F(H-x)^2}{2} \quad (\text{Equation C.34})$$

And,

$$u(x) = \frac{1}{EI} \iint M(x) \partial x^2 = \frac{F}{24EI} (6H^2x^2 - 4Hx^3 + x^4) \quad (\text{Equation C.35})$$

Also, knowing that for each i th story, the vertical load (weight) \mathbf{P}_i , the story height \mathbf{h}_i , and the resultant horizontal load \mathbf{F}_i are constant, their respective values can be written as:

$$\begin{cases} P_i = P/n \\ u_i = \frac{FH^4}{24EI} \frac{6i^2n^2 - 4i^3n + i^4}{n^4} \\ F_i = F H/n \\ h_i = i H/n \end{cases} \quad (\text{Equation C.36})$$

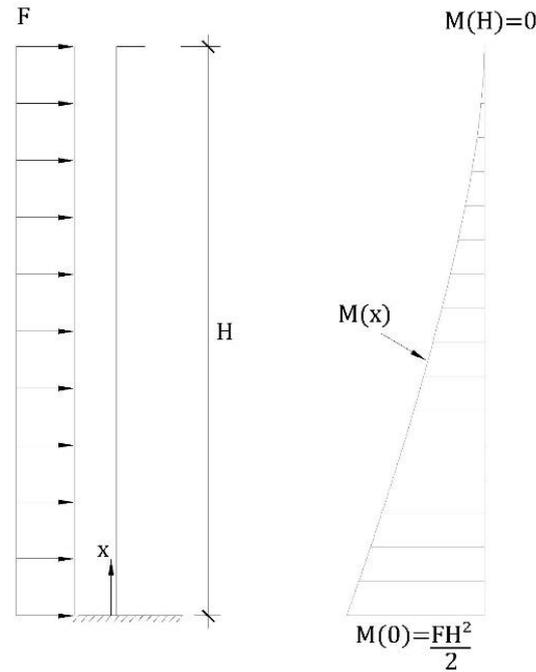


Figure C.2 – Equivalent cantilever beam-column subjected to a horizontal load distributed uniformly along its height and the overturning moment of the equivalent system.

After replacing the values given in Equation C.36 in Equation C.6, the equation for the amplification factor can be rewritten as follow.

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{1}{1 - \frac{PH^2}{EI} \frac{\sum \frac{6i^2n^2 - 4i^3n + i^4}{n^5}}{24 \sum \frac{i}{n^2}}} \quad (\text{Equation C.37})$$

In which,

$$\sum_{i=1}^n \frac{6i^2n^2 - 4i^3n + i^4}{n^5} = (n + 1) \frac{36n^3 + 9n^2 + n - 1}{30n^4} \quad (\text{Equation C.38})$$

And,

$$\sum \frac{i}{n^2} = \frac{n+1}{2n} \quad (\text{Equation C.39})$$

Thus,

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{1}{1 - \frac{PH^2}{EI} \frac{36n^3 + 9n^2 + n - 1}{360n^3}} \quad (\text{Equation C.40})$$

The amplification factor can be rewritten in function of the natural period of vibration, substituting the similar terms present on Equations C.33 and C.40, respectively, as presented in Equation C.41.

$$\frac{M_2}{M_1} = \chi_T = \frac{1}{1 - \frac{gT^2}{H\pi^2} \frac{30n^4}{6n^4 + \kappa_{pav}(15n^3 + 10n^2 - 1)} \frac{36n^3 + 9n^2 + n - 1}{360n^3}} \quad (\text{Equation C.41})$$

Which can finally be simplified as follow,

$$\chi_T = 1 + \frac{1}{\frac{H\pi^2}{gT^2} \mu_n - 1} \quad (\text{Equation C.42})$$

Where,

$$\mu_n = \frac{72n^4 + \kappa_{pav}(180n^3 + 120n^2 - 12)}{36n^4 + 9n^3 + n^2 - n} \quad (\text{Equation C.43})$$

C.5. FURTHER SIMPLIFICATION ON THE AMPLIFICATION FACTOR: χ_T

For traditional regular reinforced-concrete structures, it is possible to assume $\kappa_{pav} = 0.80$ (Equation C.30); this assumption is commonly used by reinforced-concrete structural engineers and, in fact, its impact on the value of χ_T is small as depicted in the sensibility analysis presented in Figure C.3; when κ_{pav} assumes values between 0.5 and 1.0, the maximum difference of χ_T is of only 2.6%.

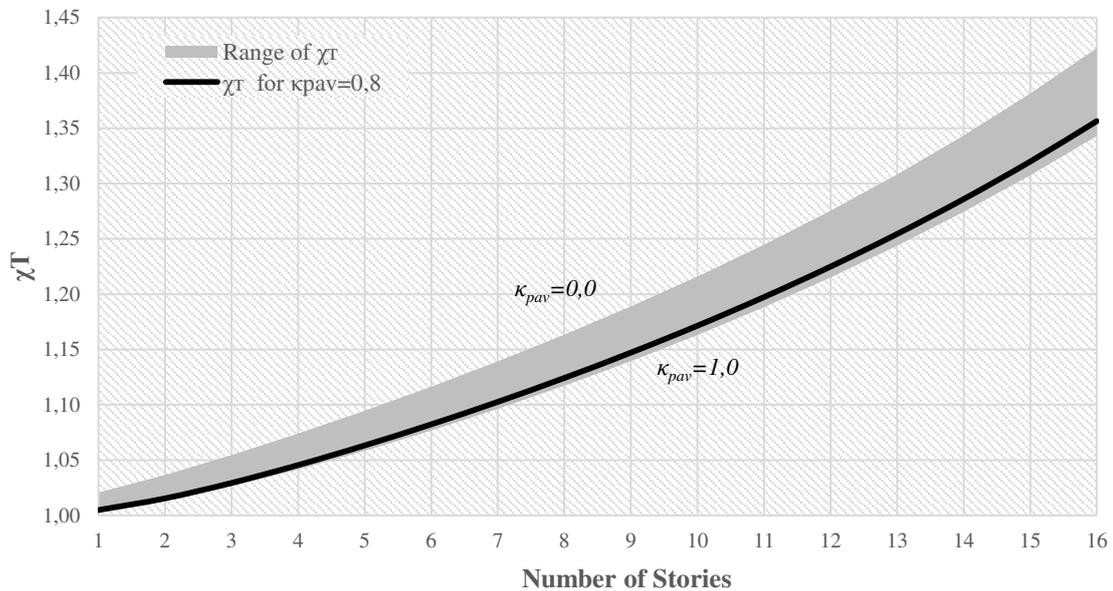


Figure C.3 – Sensibility analysis of χ_{pav} .

Considering the influence of each term of Equation C.43 on its final result, it is possible to determine the terms that most influence the value of μ_n . Figure C.4 depicts a sensibility analyses carried to out to understand each term's influence on the value of μ_n given a n number of floors.

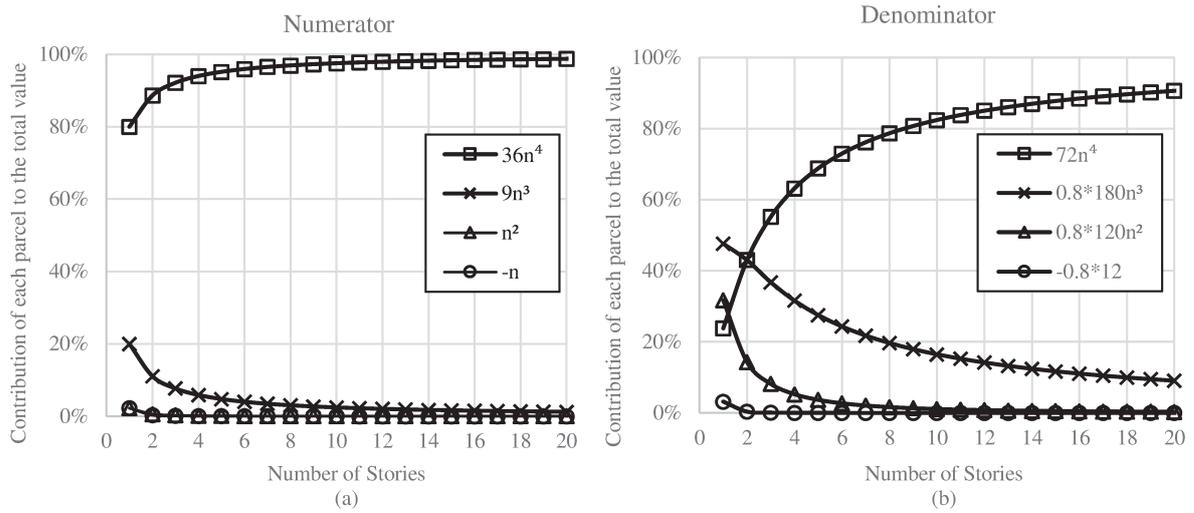


Figure C.4 – Sensibility analyses of the terms in the variable κ . (a) Numerator Analysis. (b) Denominator Analysis.

Given the analyses depicted in Figure C.4, one can conclude that: (i) in the numerator of Equation C.43 the first and second term (91.92% of the total numerator value) are relevant to buildings with more than 4 stories; (ii) in the denominator only the first term is relevant to the value of μ_n since it is equivalent 94% of the total value. Thus, Equation C.44 can replace Equation C.43.

$$\mu_n = 2 + \frac{4}{n} \tag{Equation C.44}$$

A further analysis is depicted in Figure C.5, where it is evaluated the error intrinsic to replacing Equation C.43 by Equation C.44 in the value of μ_n ; for buildings over 3 floors the error is under 1.5%.

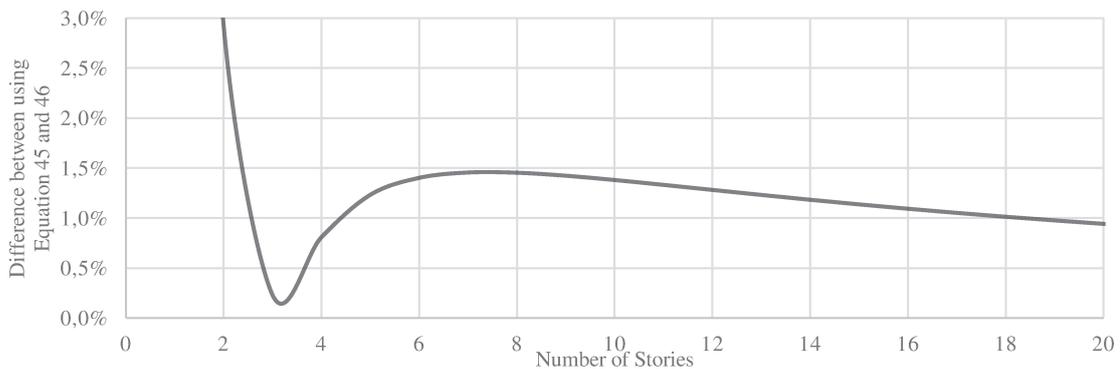


Figure C.5 – Sensibility analysis of κ , difference between using Equation 45 and 46.

Finally, it is possible to rewrite the amplification parameter (χ_T) in a simplified format as given in Equation C.45.

$$\chi_T = 1 + \frac{1}{\frac{H\pi^2}{gT^2} \left(2 + \frac{4}{n}\right) - 1} \quad (\text{Equation C.45})$$

Where:

H	Total height of the structure;
g	Gravity acceleration;
T	Natural Period;
n	Number of stories.

C.6. CASE STUDY

In order to validate the amplification factor (χ_T) proposed herein, 122 spatial frames were studied. For each frame, the number of stories was varied, for each floor plant (model 1, 2, 3, 4, and 5), first and second-order analysis were carried out and two orthogonal directions were analyzed. All cross-sections remained the same independent of the number of stories and the story height has a constant value of 3 meters. Between the five different floor plants, four of them are symmetric in the horizontal and vertical axes and one is symmetry about one axis only, Figure C.7. The last floor plant studied, named Model 5, was actually built in Curitiba, PR, Brazil. The parameter γ_z equal to 1.3 have been used as initial criterion to define the maximum number of stories to be analyzed in this study. Table C.1 depicts the maximum number of stories used in each model and the respective parameter γ_z value; therefore, for each floor plant we had the number of stories varying from 1 to the number depicted in Table C.1. Each model was first created and designed at the reinforced-concrete design software S4 v4.0 (S4 sistemas, 2015) and exported to SAP2000 v17.3.0 (Computer & Structures Inc., 2015), along with loadings (dead, live, and wind loadings).

Table C.1 – Total height of the analyzed models

Model	Direction	Number of Stories	Total Height (m)	γ_z
1	X	16	48.0	1,300
	Y	16	48.0	1,300
2	X	20	60.0	1,309
	Y	17	51.0	1,322
3	X	26	78.0	1,313
	Y	26	78.0	1,313
4	X	25	75.0	1,316
	Y	18	54.0	1,314
5	X	35	105.0	1,313
	Y	22	66.0	1,322

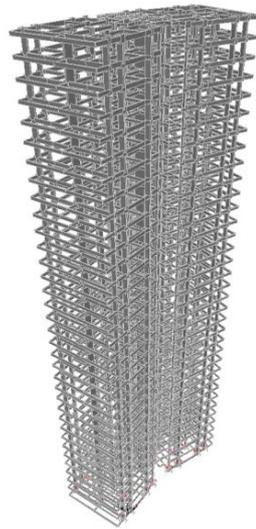


Figure C.6 – Isometric view of Model 5 with 35 stories.

Figure C.6 depicts an isometric view of Model 5 taken from SAP2000 with 35 stories. For each model, the wind load was considered applied at 0°, 90°, 180° and 270° as stated in the Brazilian code **ABNT NBR 6123:1988**.

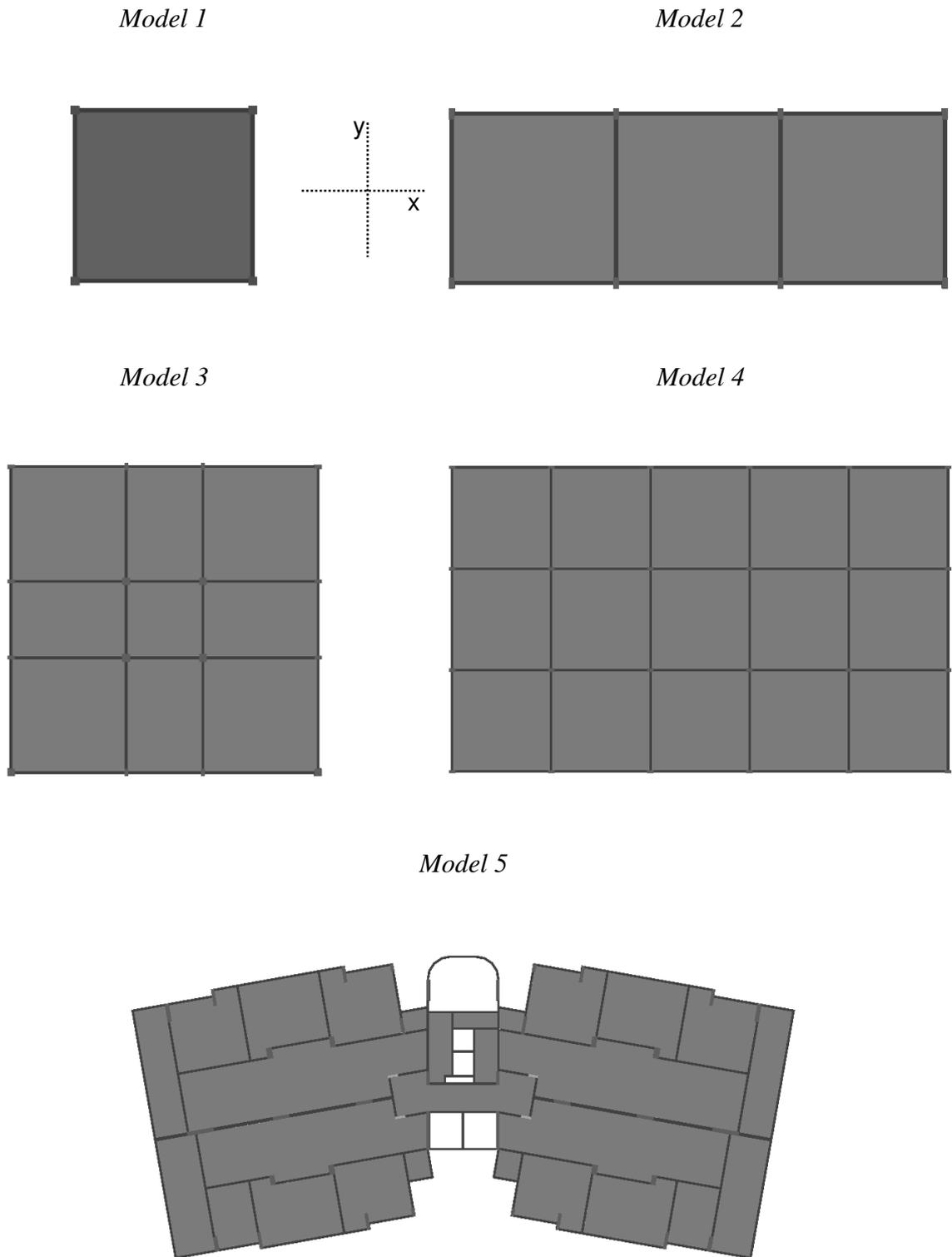


Figure C.7 – Floor plant of models analyzed.

C.7. RESULTS

Figure C.8 depicts the results of all 122 models. In each graph of Figure C.8, it is plotted the frame natural period of vibration against the moment amplification (M_2/M_1 – bending moment due to a second-order analysis divided by bending moment due to a first-order analysis) for every node in the model (gray dots); two graphs are presented for each floor plant, one is relative to the natural period of vibration in the x-axis and the other relative to vibration in the y-axis. Values of M_2/M_1 less than 1.0 were neglected. Values of M_2/M_1 for the most loaded column were highlighted since that is likely the most important column from the structural engineer standpoint.

Figure 7 also depicts the amplification factor (χ_T) proposed herein. The complete (Equation C.44) and simplified (Equation C.47) amplification factor (χ_T) lead to very similar results and, so, the simplified equation leads to satisfactory results. As already discussed in **Stlater et al.** (2011), there is a clear relationship between natural period of vibration and the ratio M_2/M_1 – bending-moment amplification.

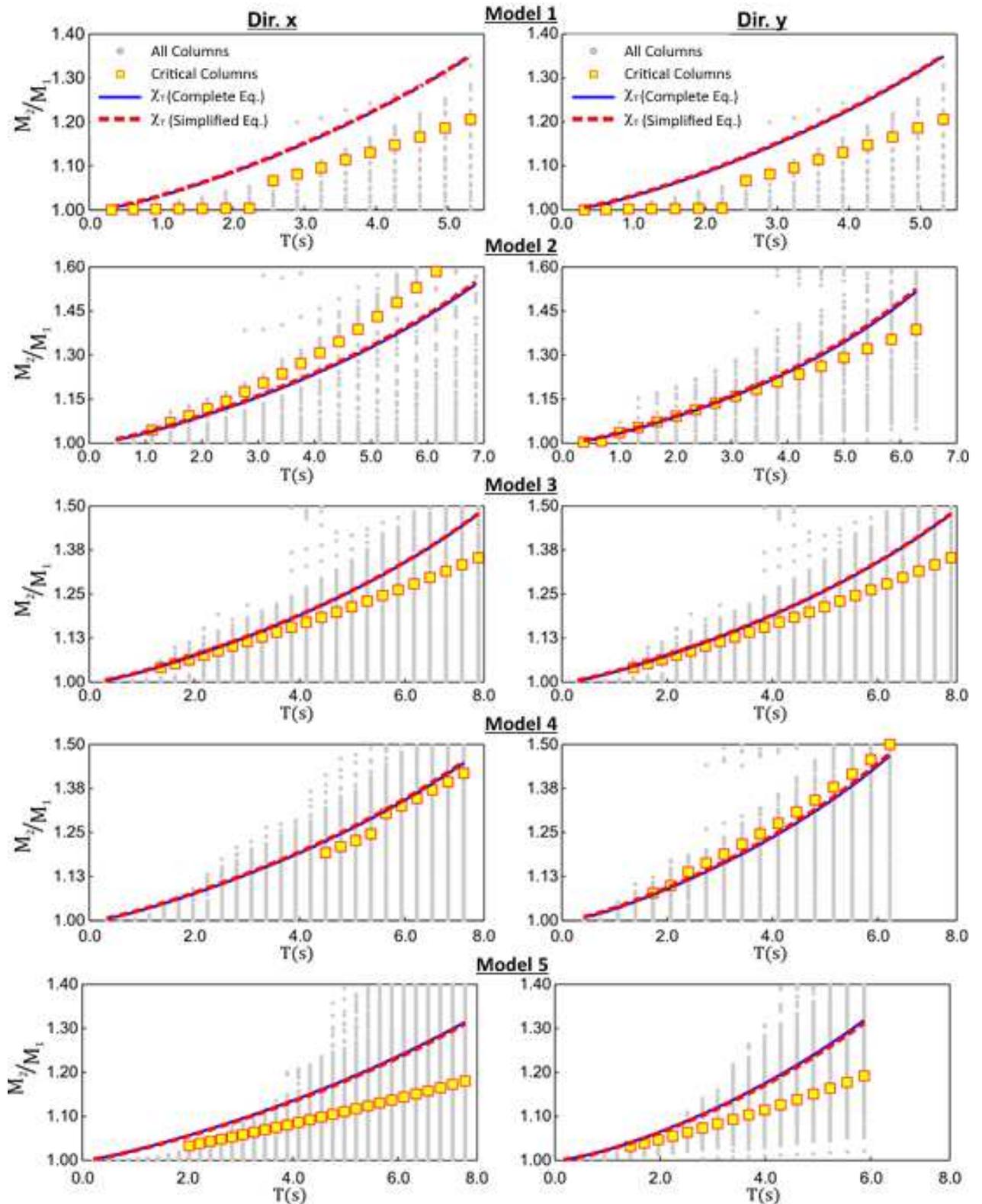


Figure C.8 – Bending-moment amplification (M_2/M_1) against natural period of vibration analysis for every model studied in this paper; natural period of vibration (T) in both direction (x and y).

Elements that present very small bending moment value in a first-order analysis may have extremely high moment amplification; as an example, in Figure C.9, column P2 has M_1 value of 0.4560 kN.m and M_2 of 3.2754 kN.m resulting in an amplification factor of 7.1762. The former example well depicts a column that presents little, if none, influence in the frame design – due to small bending moment on the column – and, therefore, can be disregarded in the analysis presented herein; considering these high values of M_2/M_1 would lead to a very conservative method, since the amplification factor (χ_T) is applied to the whole structure. In the same column, however, values of M_2/M_1 are in between 1.25 and 1.36, which is close to the value predicted by (χ_T).

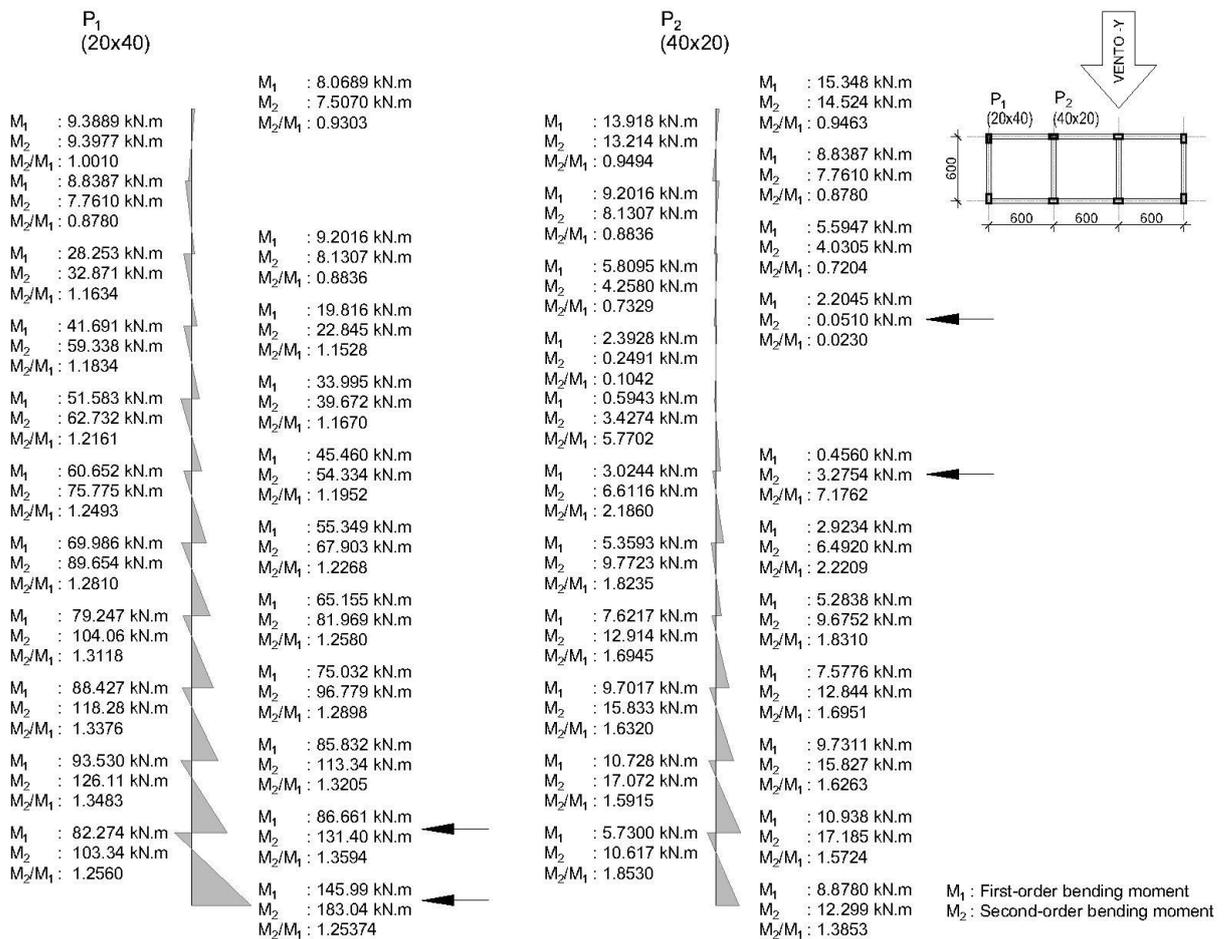


Figure C.9 – Moment amplification in column P1 and P2 of Model 2 and 11 stories.

Figure C.10 better illustrates the comments that were just made. In Figure C.10, a cantilever beam-column with a lateral load, a moment applied to the free end and a uniformly distributed axial load is analyzed; in this example, a first and second-order analysis is carried

out and the bending-moment diagram is depicted. Greater attention shall be taken to the observations drawn from the analysis of regions A, B, and C; in region C, M_2/M_1 will result in a high value since M_1 was very small to start with; in region B, there is an inversion of the bending moment and the ratio M_2/M_1 will be negative; in region A, M_2 is smaller than M_1 because the inflection point in the moment diagram has moved up. Although the ratio M_2/M_1 is analyzed in every node, localized issues such as the ones just commented are disregarded in this study. Thus, only columns with considerable amount of bending moment and axial load, which will be determinant in the structural design, are carefully studied and commented herein; this consideration was taken in account by limiting the analysis to columns in which the bending moment is greater than the strength of a column with same dimensions and minimum reinforcement.

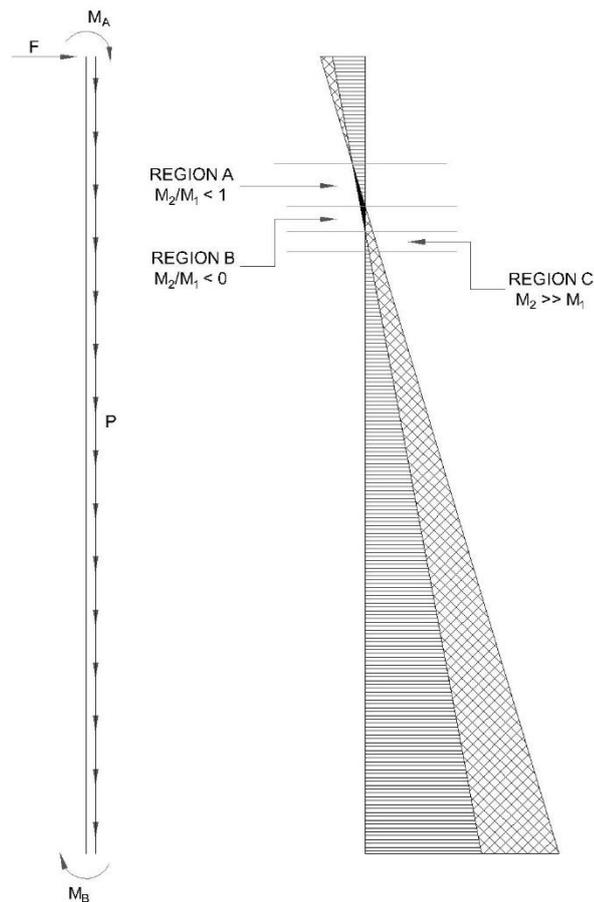


Figure C.10 – Cantilever beam-column example to explain localized issues with the ratio M_2/M_1 .

The ratio M_2/M_1 for the most loaded column, as depicted in Figure C.8, follows a polynomial shape for most models except for the short frames in Model 1 (x and y direction) and Model 4 (x direction); in these models, the first vibration mode for short frames is a torsional mode, which certainly influenced the continuity of the M_2/M_1 curve shape. The simplified and complete equations, however, do lead to a satisfactory prediction of the amplification factor and is, in most cases, slightly conservative.

The Brazilian standard for the design of reinforced concrete structures **ABNT NBR 6118:2014** states that frames that γ_z is in between 1.1 and 1.3, a first-order analysis can be performed instead of a second-order analysis if the lateral load is multiplied by $0.95\gamma_z$. Figure C.11 depicts a comparison between the results already presented for Model 1 and results from the simplified γ_z method; as it can be noted in Figure C.11, the ratio M_2/M_1 for the γ_z method leads to unsafe results for the columns most loaded, while the χ_T method leads to slightly conservative results.

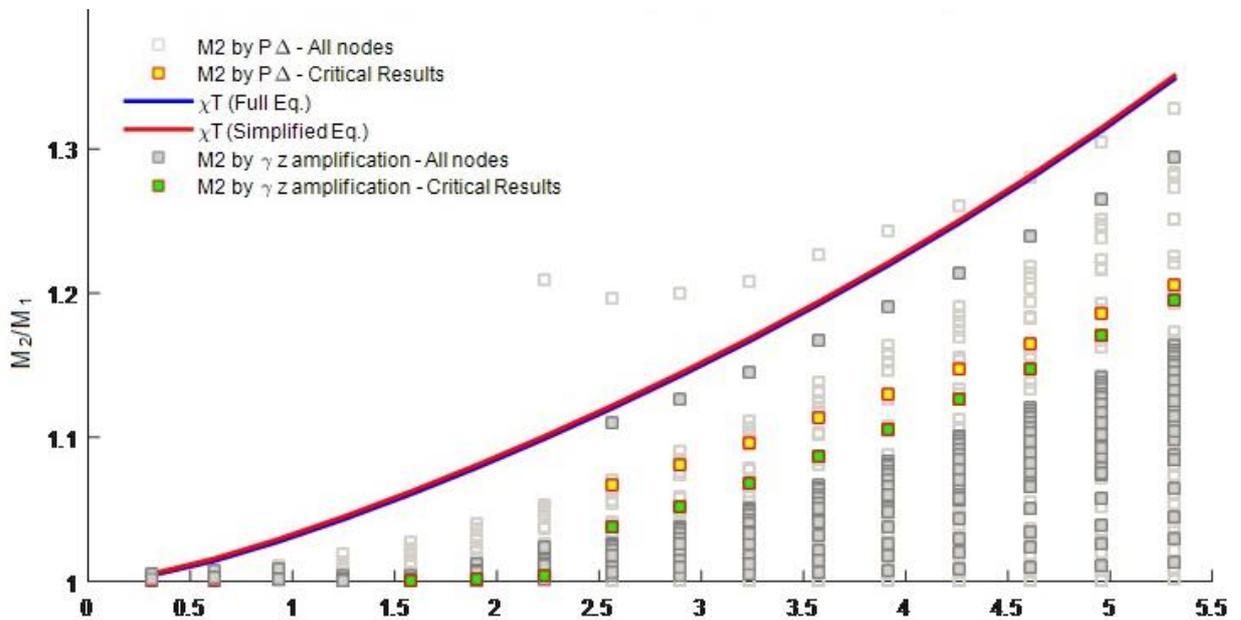


Figure C.11 – Model 1: Comparison between the equation proposed herein and the analysis results using the γ_z method proposed in Brazilian reinforced concrete design standard ABNT NBR 6118:2014. M_2/M_1 in y-axis and T (s) in x-axis.

The results presented in this paper have been focused on the analysis of the first lateral vibration mode; this mode, however, is only equivalent to a portion of the mass participation. In fact, for short frames in Model 1, the lateral mode is equivalent to only 60% of the mass participation, Figure C.12. For Model 1, but intermediated to tall frames, the mass participation of the first lateral mode reaches a plateau of about 80% of mass participation. This observation shall be explored in future research; since preliminary studies indicate that the χ_T method can lead to more accurate results if modal participation is included in the formulation and, thus, further modes are also considered.

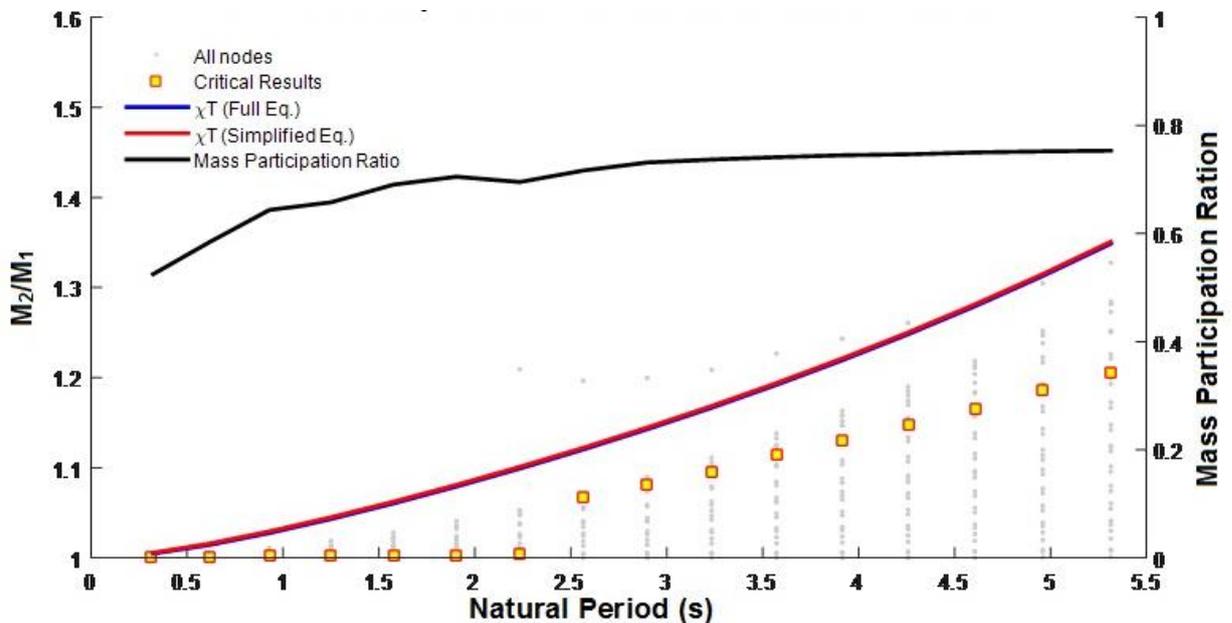


Figure C.12 – Model 1: Additional discussion on the importance of considering the mass-participation ratio (y-axis to the right) in future studies.

C.8. CONCLUSIONS AND DISCUSSIONS

In this study, an equation relating the natural period of vibration and the moment amplification due to second-order effects is proposed to reinforced-concrete frames; this equation is developed using the principle of energy conservation and the Rayleigh method to write a generalized dynamic equilibrium equation to an equivalent cantilever beam-column. Due to the presence of concentrated loads representing the self-weight of each story along the height of the equivalent cantilever beam-column, the general equation for the moment amplification factor χ_T presented a complex format. In order to simplify this equation, a

parameter sensibility analysis was carried out and a simplified equation was also proposed. In addition, to validate the equations proposed herein, numerical analyses have been performed in 122 spatial reinforced-concrete frames, varying the total number of stories and floor plants.

The results presented in this paper demonstrated that, although the χ_T method derived herein is simple in its formulation it can lead to satisfactory results. The amplification factor χ_T has shown to lead to an effective method to assess a structures susceptibility to second-order effects and to satisfactorily predict the moment amplification due to second-order effects. Note that the amplification factor χ_T only depends on the natural period of vibration and, so, only requires a simple dynamic analysis.

Modal participation, however, is a topic still open for discussion, which can lead to even more accurate results. More studies are also necessary in order to adjust and validate the χ_T method for different building geometries and irregularities and to consider the influence of torsional modes.

C.9. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to acknowledge the financial support of the São Paulo Research Foundation (**FAPESP**) under the grant 2015/18450-8 and FAEPEX-UNICAMP under the **PAPDIC** program number 1274/2015.

C.10. REFERENCES

All the references cited in this expanded abstract are listed in the section named: "**BIBLIOGRAFIA**"