



FABIO LUIS GEA DOS SANTOS

**Estudo e Automação da Influência da Taxa de
Carregamento na Resposta em Fratura Quase-Frágil**

**CAMPINAS
2014**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO

FABIO LUIS GEA DOS SANTOS

**Estudo e Automação da Influência da Taxa de
Carregamento na Resposta em Fratura Quase-Frágil**

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa

Dissertação de Mestrado apresentada a Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil na área de Estruturas e Geotécnica.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO FABIO LUIS GEA DOS SANTOS E ORIENTADO PELO PROF. DR. JOSÉ LUIZ ANTUNES DE OLIVEIRA E SOUSA.

ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

G26e Gea dos Santos, Fabio Luis, 1989-
Estudo e automação da influência da taxa de carregamento na resposta em
fratura quase-frágil / Fabio Luis Gea dos Santos. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de
Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Concreto - Propriedades mecânicas. 2. Concreto - Fratura. 3. Mecânica da
fratura - Modelos matemáticos. I. Sousa, José Luiz Antunes de Oliveira e, 1951-. II.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e
Urbanismo. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Study and automation on the influence of loading rate in response on
quasi-brittle fracture

Palavras-chave em inglês:

Concrete - Mechanical properties

Concrete - Fracture

Fracture mechanics - Mathematical models

Área de concentração: Estruturas e Geotécnica

Titulação: Mestre em Engenharia Civil

Banca examinadora:

José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa [Orientador]

Gustavo Henrique Siqueira

Oswaldo Luís Manzoli

Data de defesa: 20-10-2014

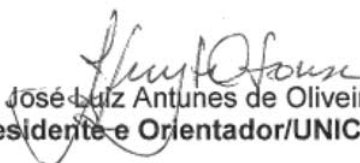
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Civil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO**

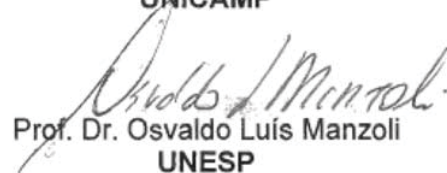
**ESTUDO E AUTOMAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA TAXA DE
CARREGAMENTO NA RESPOSTA EM FRATURA QUASE-FRÁGIL**

Fábio Luis Gea dos Santos

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora constituída por:


Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa
Presidente e Orientador/UNICAMP


Prof. Dr. Gustavo Henrique Siqueira
UNICAMP


Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli
UNESP

Campinas, 20 de Outubro de 2014

RESUMO

Nos últimos anos, o aumento no número de construções mais altas e complexas fez com que o estudo das propriedades mecânicas do concreto na ruptura em tração fosse foco de muitas pesquisas. O concreto desenvolve, durante o carregamento, diferentes processos de coalescência e crescimento de microfissuras e, devido a sua natureza heterogênea, um enorme esforço ainda é requerido para o desenvolvimento de um modelo constitutivo capaz de descrever aspectos relevantes do seu comportamento. A essa premissa soma-se a discussão da validade dos procedimentos de ensaio em descrever o comportamento real do material, devido à influência estrutural (forma da geometria, condições de contorno e tamanho) do espécime de teste. O comportamento quase-frágil do concreto, caracterizado pelo desenvolvimento de uma zona de processos inelásticos e/ou zona de processos de fratura (ZPF) ao redor do frente da trinca, quando na ruptura em tração, requer uma lei constitutiva – chamada lei coesiva, curva tensão-abertura de fissura ($\sigma - w$), curva de amolecimento ou função coesiva ($\sigma = f(w)$) – que relaciona a tensão desenvolvida no frente da fratura, isto é na ZPF, e a sua abertura como ingrediente para modelagem da nucleação e da propagação da fratura, seja esta representada de maneira implícita e/ou explícita. Desenvolveu-se um software para a determinação automática da lei constitutiva utilizando-se curvas da relação carga versus abertura da boca fratura (*load versus crack mouth opening displacement* – P-CMOD) ou da relação carga versus deslocamento no ponto de aplicação (P- δ) obtidas em ensaios com vigas prismáticas ranhuradas em flexão em três pontos (*Three-Point-Bend Test*), com taxas de carregamento variada. O objetivo desse trabalho é avaliar a lei coesiva-viscosa proposta por Rosa *et al.* (2012) utilizando o software desenvolvido para o ajuste de curvas P- δ numéricas com curvas de vigas ranhuradas de concreto de alta resistência, ensaiadas com taxas de carregamento variando da ordem de $\dot{\delta} = 10^{-5} \text{ mm/s}$ a $\dot{\delta} = 10^{+1} \text{ mm/s}$.

Palavras Chave: Concreto – Propriedades mecânicas, Concreto – Fratura, Mecânica da fratura – Modelos matemáticos.

ABSTRACT

In recent years, the increase of high and more complex constructions, many researches focus on the study of the mechanical properties of concrete at failure. The concrete under loading develops different processes of coalescence and growth of micro-cracks, and due to its heterogeneous nature, a great effort is still required to develop a constitutive model capable of describing the relevant aspects of its behavior. In addition to this premise is the discussion of validity of tests that describe the real behavior of the material, due to the structural influence (shape of the geometry, boundary conditions and size) of the test specimen. The quasi-brittle behavior of concrete, characterized by the development of a zone of inelastic processes and/or fracture processes (ZPF) around the crack front at failure, requires a constitutive law – called cohesive law curve stress-crack opening ($\sigma - w$), softening or cohesive function ($\sigma = f(w)$) – curve that relates the stress developed across the front of the fracture, i. e., the ZPF, and its opening displacement as an ingredient for modelling fracture nucleation and propagation, represented implicitly and/or explicitly. A software developed for automatic determination of a constitutive law using curves of load versus relative fracture mouth opening (P-CMOD) or the load versus displacement relationship at the application line (P- δ) obtained in tests with notched prismatic beams in Three-point Bend Test, with varying loading rates. This study aims at the evaluation of the viscous-cohesive model proposed by Rosa et al. (2012), using a software developed for the curve fitting P- δ numerical curve with notch beams of high strength concrete, tested with loading rate numerical in the order between $\dot{\delta} = 10^{-5} \text{ mm/s}$ and $\dot{\delta} = 10^{+1} \text{ mm/s}$.

Keywords: Concrete – Mechanical properties, Concrete – Fracture, Fracture mechanics – Mathematical models.

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO.....	1
1.1 – Considerações Iniciais	1
1.2 – Objetivos.....	3
1.3 – Justificativa.....	3
1.4 – Organização do trabalho.....	4
2 – ESTRUTURA, PROCESSOS E MODELOS DE FRATURA NO CONCRETO	7
2.1 – Considerações Iniciais	7
2.2 – Propriedades do Concreto.....	7
2.3 – Comportamento do Concreto à Fratura	8
2.4 – Modelos de Fraturamento.....	10
2.5 – Modos de Fratura.....	11
2.6 – Mecânica da Fratura Não-Linear.....	12
2.7 – Ensaios de Caracterização do Concreto.....	16
2.8 – Expressões Analíticas dos Modelos Coesivos.....	23
2.9 – Influência da Taxa de Carregamento na Resposta da Fratura	25
2.10 – Modelos de Visco-Coesão	27
2.11 – Considerações Finais	30
3 – ANÁLISE INVERSA.....	33
3.1 – Considerações Iniciais	33
3.2 – Aplicação e Estratégias de Análise Inversa.....	33
3.3 – O Algoritmo de Levenberg-Marquardt aplicado para o ajuste de parâmetros viscosos/coesivos.....	39
3.4 – Análise Matemática dos Modelos Visco-Coesivos	45
3.5 – Considerações Finais	53
4 – MODELAGEM BIDIMENSIONAL DO PROCESSO DE FRATURAMENTO VISCO-COESIVO	55
4.1 – Considerações Iniciais	55
4.2 – <i>Cracked Hinge Model</i> (Olesen, 2001).....	57
4.3 – Método de Superposição de Fraturas	63
4.4 – Comparação entre Métodos	69
4.5 – Considerações Finais	76

5 – FERRAMENTA COMPUTACIONAL DESENVOLVIDA.....	77
5.1 – Considerações Iniciais.....	77
5.2 – Estrutura do Programa	77
5.2.1 – Módulo Coesivo	78
5.2.2 – Módulo Visco-Coesivo.....	83
5.3 – Testes do Programa.....	87
5.3.1 – Ajuste do Módulo de Elasticidade.....	87
5.3.2 – Ajuste dos Parâmetros Coesivos.....	89
5.3.3 – Ajuste dos Parâmetros Viscosos e do Conjunto Visco-Coesivo	90
5.3.4 – Ajuste de Casos Quase-Estáticos Reais.....	91
5.4 – Considerações Finais.....	100
6 – ANÁLISE INVERSA COM DADOS EXPERIMENTAIS: VISCO-COESÃO	101
6.1 - Considerações Iniciais	101
6.2 – Caracterização do Concreto de Rosa <i>et al.</i> (2012).....	101
6.3 – Metodologia	102
6.4 – Resultados	104
6.4.1 – Ajuste do Módulo de Elasticidade.....	104
6.4.2 – Ajuste do modelo viscoso utilizando a curva Bilinear experimental	104
6.4.3 – Ajuste do modelo coesivo utilizando os dados experimentais quase-estáticos	107
6.4.4 – Ajuste do modelo viscoso utilizando as curvas coesivas determinadas numericamente.....	109
6.4.5 – Ajuste simultâneo de parâmetros coesivos e viscosos.....	113
6.5 – Comentários sobre os Resultados	118
6.6 – Considerações Finais.....	122
7 – CONCLUSÃO	123
7.1 – Objetivos Alcançados e Conclusões	123
7.2 – Propostas de Trabalhos	125
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	127

*Havia uma chama, quase imperceptível
Naquele bloco de gelo.
Havia uma necessidade de não apagar
O pouco que restava daquele corpo gélido e frio.*

*E brincando de escultora, tentei a qualquer preço
Lapidar o grande dente branco para encontrar o
nervo
Escondido e aflito e já quase morto
Misturado a sangue e podridão.*

*Brinquei então na minha secreta escavação
Cutucando aqui e ali,
Mexendo no perigo iminente
Escorregando em cada célula morta
Para enfim poder alcançar a única viva restante.*

*E nessa luta desenfreada, a chama chegou a
aumentar
Em alguns momentos,
Fazendo-me acreditar num oásis qualquer,
Num deserto qualquer.*

*Pena a percepção lastimável que tive
Nunca houvera chama, nervo ou vida!
Nunca houvera a possibilidade de
Fazer um coração seco voltar a
Bombardear vida!*

*Foi quando percebi que um bloco de gelo
Simplesmente é um bloco de gelo
E não devemos tentar julgar tal fato!
Foi quando percebi que a pequenina chama que
outrora
Eu avistara dentro da grande névoa esculpida
Não passara de um clarão meu, um breve clarão
Que na tentativa desenfreada de explodir,
Refletiu no bloco branco a minha própria cor
E tentou me enganar
Transformando-me num cego
Que fita a rara beleza de uma obra!*

(Taty Ades)

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos ao Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa pela orientação e confiança. À equipe do LABMEM (Laboratório de Modelagem Estrutural e Monitoração).

Ao Prof. Dr. Gonzalo Ruiz da Univesidad de Castilla-La Mancha (UCLM) pela disponibilização dos dados experimentais.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – (a) Compressão aplicada sobre uma partícula agregada em uma matriz mole. (b) Elemento de ruptura encontrado após ensaio de compressão uniaxial (Bittencourt, 1999).....	09
Figura 2.2 – Respostas de carregamento axial para material: (a) frágil; (b) dúctil; (c) quase-frágil.....	10
Figura 2.3 – Regiões de comportamento distinto à frente da fissura. (F) zona de fraturamento; (N) zona de plastificação; (L) região elástica.	11
Figura 2.4 – Modos básicos de carregamento: a) Modo I, b) Modo II, e c) Modo III (Mazella, 2007).....	12
Figura 2.5 – Representação do processo de amolecimento entre as faces de uma fissura no concreto.....	14
Figura 2.6 – (a) zona de processos a frente da ranhura. (b) Foco nas fissuras desenvolvidas. (c) Microfissuras desenvolvidas no polímero. (Cornell Fracture Group, 2010).....	15
Figura 2.7 – Representação do Modelo de Fissura Fictícia.....	16
Figura 2.8 – Representação do ensaio de compressão axial.....	17
Figura 2.9 – Representação de uma curva coesiva.....	18
Figura 2.10 – Dados coletados ao longo do ensaio tração uniaxial para representação da curva coesiva.....	19
Figura 2.11 – Ensaio de Compressão Diametral (Brazilian Test).....	20
Figura 2.12 – Representação do ensaio de flexão em três pontos.....	21
Figura 2.13 – Curva $P - \delta$ para medida de G_F pelo ensaio de flexão em três pontos.....	22
Figura 2.14 – Representação do modelo aproximado utilizado por Petersson (1981) para estimativa da energia não medida durante o ensaio de flexão em três pontos.....	22
Figura 2.15 – Curva Linear.....	24
Figura 2.16 – Curva Bilinear.....	24
Figura 2.17 – Curva de Hordijk (1991).....	25
Figura 2.18 – Sobreposição da envoltória de ensaios de flexão em três pontos para diferentes velocidades.....	26

Figura 2.19 – G_F médio dos ensaios realizados por Rosa et al. (2012) para diferentes velocidades de atuação do atuador (δ) em ensaios de flexão em três pontos.....	27
Figura 2.20 – Comportamento do parâmetro viscoso proposto por Tandon et al. (1995).....	28
Figura 2.21 – Comportamento do parâmetro viscoso proposto por Zhou et al. (2005).....	29
Figura 2.22 – Comportamento do parâmetro viscoso proposto por Rosa et al. (2012).....	30
Figura 3.1 – Representação do ensaio de flexão em três pontos com medidas de P versus CMOD.....	34
Figura 3.2 – Gráficos comparativos entre a curva P-CMOD experimental com a curva P-CMOD numérica para um par de parâmetros $f_{tc} = 2$ MPa e $G_F = 150$ J/m ² utilizados na curva coesiva de Hordijk (1991).....	35
Figura 3.3 – Gráficos comparativos entre a curva P-CMOD experimental com a curva P-CMOD numérica ajustada com os parâmetros $f_{tc} = 2,92$ MPa e $G_F = 180$ J/m ² utilizados na curva coesiva de Hordijk (1991).....	35
Figura 3.4 – Gráficos com as regiões contabilizadas pela fórmula de ξ_{sqr} . (a) região da primeira estimativa para os parâmetros de Hordijk (1991) (b) região da curva ajusta, menor que a área em (a).....	36
Figura 3.5 – Exemplo de função bem comportada, adequada para métodos baseados em gradiente. (a) Superfície da função exemplo. (b) Gráfico de contorno da mesma função, com a indicação do ponto de mínimo global.....	37
Figura 3.6 – Exemplo de função com muitos ruídos, adequada para métodos diretos. (a) Superfície da função exemplo. (b) Detalhe de uma região da superfície (b) Gráfico de contorno da mesma função, com a indicação do ponto de mínimo global.	37
Figura 3.7 – Avaliação da função ξ . (a) Superfície da função exemplo. (b) Detalhe de uma região da superfície (b) Gráfico de contorno da mesma função, com a indicação do ponto de mínimo global.....	38
Figura 3.8 – Exemplo de curva P – CMOD ajustada para um grupo de dados experimentais.....	39
Figura 3.9 – Exemplo de curvas P – δ ajustadas para grupos de ensaios experimentais realizados em diferentes taxas de carregamento.....	40
Figura 3.10 – Exemplo do processo iterativo de Levenberg-Marquardt. Em (a) o passo \vec{d} leva \vec{p} para \vec{p}_{new} , onde o valor de $\xi_{sqr}(\vec{p}_{new}) > \xi_{sqr}(\vec{p})$. Em (b) o \vec{p}_{new} calculado em (a) é ignorado e se é	

calculado um novo \vec{d} para um valor de λ maior, gerando $\xi_{sqr}(\vec{p}_{new}) < \xi_{sqr}(\vec{p})$. Na Figura (c), \vec{p} recebe o valor de \vec{p}_{new} e λ é reduzido, continuando-se o procedimento.....	43
Figura 3.11 – Avaliação do comportamento do parâmetro k da formulação (3.13) para $f_{tc} = 5,0$ MPa.....	47
Figura 3.12 – Avaliação do comportamento do parâmetro \dot{w}_0 da formulação (3.13) para $f_{tc} = 5,0$ MPa.....	47
Figura 3.13 – Grande similaridade dos valores de valores de Ψ de Tandon <i>et al.</i> (1995) para parâmetros distintos em velocidades baixas.....	48
Figura 3.14 – Avaliação do comportamento do parâmetro n da formulação (3.14).....	49
Figura 3.15 – Avaliação do comportamento do parâmetro \dot{w}_0 da formulação (3.14).....	50
Figura 3.16 – Representação da informação obtida por ensaios de tração uniaxial em relação a curva Ψ de Rosa et al. (2012).....	51
Figura 3.17 – Representação da variação de \dot{w} em um ensaio de compressão diametral com δ constante.....	51
Figura 3.18 – Representação da variação de \dot{w} em um ensaio de flexão em três pontos com δ constante.....	52
Figura 3.19 – Representação da informação obtida por um Ensaio de Compressão Diametral ou de Flexão em Três Pontos em relação a curva Ψ de Rosa et al. (2012).....	52
Figura 4.1 – (a) Representação da aleatoriedade da propagação da fratura no ensaio de flexão em três pontos no concreto. (b) Simplificação adotada para o modelo numérico.....	56
Figura 4.2 – Representação do Cracked Hinge Model.....	57
Figura 4.3 – Rotação das faces rígidas e mudança dos estados das molas.....	58
Figura 4.4 – Detalhe da rotação das faces rígidas.....	58
Figura 4.5 – Campo de tensões ao longo da face rígida.....	59
Figura 4.6 – Representação do método de superposição de fraturas.....	64
Figura 4.7 – Representação da malha utilizada no SAP2000.....	70
Figura 4.8 – Comparação das curvas P-CMOD entre os métodos.....	71
Figura 4.9 – Comparação das curvas P- δ entre os métodos.....	71
Figura 4.10 – Diferença na inclinação das curvas P- δ	71

Figura 4.11 – (a) Detalhe da deformação localizada no apoio na simulação no MEF.(b) Detalhe com o aumento da rigidez.....	72
Figura 4.12 – Representação da faixa rígida e da posição de medida de δ	72
Figura 4.13 – Comparação das curvas P-CMOD entre os métodos.....	72
Figura 4.14 – Comparação das curvas P- δ entre os métodos.....	73
Figura 4.15 – Semelhança na inclinação das curvas P- δ	73
Figura 4.16 – Evolução de P-CMOD no CHM.....	74
Figura 4.17 – Evolução de P-CMOD no SF-Rig.....	74
Figura 4.18 – Comparação dos métodos na evolução de P-CMOD.....	74
Figura 4.19 – Evolução de P- δ no CHM.....	75
Figura 4.20 – Evolução de P- δ no SF-Rig.....	75
Figura 4.21 – Comparação dos métodos na evolução de P- δ	75
Figura 5.1 – Interface do programa.....	78
Figura 5.2 – Interface dos “Dados Experimentais” do módulo coesivo.....	80
Figura 5.3 – Interface dos “Dados da Viga” do módulo coesivo.....	81
Figura 5.4 – Interface do “Modelo Numérico” do módulo coesivo.....	81
Figura 5.5 – Interface do “Modelo de Minimização” do módulo coesivo.....	82
Figura 5.6 – Interface do campo “Ajustar” do módulo coesivo.....	82
Figura 5.7 – Interface do campo “Dados Experimentais” do módulo visco-coesivo.....	85
Figura 5.8 – Interface do campo “Viga e Concreto” do módulo visco-coesivo.....	85
Figura 5.9 – Interface do campo “Modelo Numérico” do módulo visco-coesivo.....	86
Figura 5.10 – Interface do campo “Ajustar” do módulo visco-coesivo.....	86
Figura 5.11 – Envoltória experimental de cada grupo de análise.....	93
Figura 5.12 – Curvas coesivas ajustadas utilizando o CHM.....	98
Figura 5.13 – Curvas coesivas ajustadas utilizando o modelo de SF(Rig.).....	98
Figura 5.14 – Envoltória Experimental com as Curvas Ajustadas do CHM.....	99
Figura 5.15 – Envoltória Experimental com as Curvas Ajustadas do modelo SF(Rig.).....	99
Figura 6.1 – Curvas P – δ de Rosa et al. (2012) comparadas com as envoltórias experimentais.....	102
Figura 6.2 – Curvas P – δ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,45 mm utilizando a curva Bilinear de Rosa <i>et al.</i> (2012).....	105

Figura 6.3 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,225 mm utilizando a curva Bilinear de Rosa <i>et al.</i> (2012).	106
Figura 6.4 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,11 mm utilizando a curva Bilinear de Rosa <i>et al.</i> (2012).	106
Figura 6.5 – Comparação das curvas $P - \delta$ obtidas pelo ajuste do modelo coesivo de Hordijk (1991).	108
Figura 6.6 – Comparação das curvas $P - \delta$ obtidas pelo ajuste do modelo coesivo bilinear.	108
Figura 6.7 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,45 mm utilizando a curva Hordijk (1991) ajustada na seção 6.4.3.	110
Figura 6.8 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,225 mm utilizando a curva Hordijk (1991) ajustada na seção 6.4.3.	110
Figura 6.9 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,11 mm utilizando a curva Hordijk (1991) ajustada na seção 6.4.3.	111
Figura 6.10 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,45 mm utilizando a curva Bilinear ajustada na seção 6.4.3.	111
Figura 6.11 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,225 mm utilizando a curva Bilinear ajustada na seção 6.4.3.	112
Figura 6.12 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,11 mm utilizando a curva Bilinear ajustada na seção 6.4.3.	112
Figura 6.13 – Curvas $P - \delta$ para o intervalo de 0 a 0,45 mm ajustando simultaneamente Hordijk (1991) e modelo viscoso.	115
Figura 6.14 – Curvas $P - \delta$ para o intervalo de 0 a 0,225 mm ajustando simultaneamente Hordijk (1991) e modelo viscoso.	116
Figura 6.15 – Curvas $P - \delta$ para o intervalo de 0 a 0,11 mm ajustando simultaneamente Hordijk (1991) e modelo viscoso.	116
Figura 6.16 – Curvas $P - \delta$ para o intervalo de 0 a 0,45 mm ajustando simultaneamente o modelo coesivo bilinear e modelo viscoso.	117
Figura 6.17 – Curvas $P - \delta$ para o intervalo de 0 a 0,225 mm ajustando simultaneamente o modelo coesivo bilinear e modelo viscoso.	117
Figura 6.18 – Curvas $P - \delta$ para o intervalo de 0 a 0,11 mm ajustando simultaneamente o modelo coesivo bilinear e modelo viscoso.	118

Figura 6.19 – Exemplificação de um material mais frágil pela curva coesiva.....	119
Figura 6.20 – Valores de G_F obtidos em cada ajuste.....	120
Figura 6.21 – Ajuste da curva coesiva Hordijk (1991) utilizando o CHM para cada envoltória experimental.....	121
Figura 6.22 – Sobreposição das curvas coesivas ajustadas.....	122

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Resultados do ajuste do Módulo de Elasticidade.....	88
Tabela 5.2 – Resultados do ajuste do Módulo de Elasticidade com a curva experimental duplicada.....	89
Tabela 5.3 – Resultados do ajuste dos parâmetros coesivos.....	90
Tabela 5.4 – Resultados do ajuste dos parâmetros viscosos.....	91
Tabela 5.5 – Resultados do ajuste dos parâmetros visco-coesivos.....	91
Tabela 5.6 – Parâmetros determinados experimentalmente para os grupos de concreto.....	92
Tabela 5.7 – Módulos de Elasticidade determinados pela Análise Inversa.....	94
Tabela 5.8 – Comparação do Módulo de Elasticidade determinado Experimentalmente com a Análise Inversa.....	94
Tabela 5.9 – Parâmetros de Hordijk determinados pela Análise Inversa para CHM.....	94
Tabela 5.10 – Parâmetros de Hordijk determinados pela Análise Inversa para SF.....	94
Tabela 5.11 – Parâmetros da Curva Linear determinados pela Análise Inversa para CHM.....	95
Tabela 5.12 – Parâmetros da Curva Linear determinados pela Análise Inversa para SF.....	95
Tabela 5.13 – Parâmetros da Curva Bilinear determinados pela Análise Inversa para CHM.....	95
Tabela 5.14 – Parâmetros da Curva Bilinear determinados pela Análise Inversa para SF.....	95
Tabela 5.15 – Comparação de f_{tc} determinado Experimentalmente com a Análise Inversa pela Curva de Hordijk.....	96
Tabela 5.16 – Comparação de G_F determinado Experimentalmente com a Análise Inversa pela Curva de Hordijk.....	96
Tabela 5.17 – Comparação de f_{tc} determinado Experimentalmente com a Análise Inversa pela Curva Linear.....	96
Tabela 5.18 – Comparação de G_F determinado Experimentalmente com a Análise Inversa pela Curva Linear.....	97
Tabela 5.19 – Comparação de f_{tc} determinado Experimentalmente com a Análise Inversa pela Curva Bilinear.....	97
Tabela 5.20 – Comparação de G_F determinado Experimentalmente com a Análise Inversa pela Curva Bilinear.....	97

Tabela 6.1 – Resultados do Módulo de Elasticidade obtidos pela Análise Inversa.....	104
Tabela 6.2 – Resultados obtidos pela análise inversa do modelo de Rosa et al. (2012) utilizando a curva Bilinear determina experimentalmente.....	105
Tabela 6.3 – Resultados das curvas coesivas obtidos pela análise inversa das envoltórias quase-estáticas.....	107
Tabela 6.4 – Comparação dos parâmetros ajustados com os valores experimentais.....	108
Tabela 6.5 – Resultados obtidos pela análise inversa do modelo de Rosa et al. (2012) utilizando as curvas coesivas determinadas numericamente na seção 6.4.3.....	109
Tabela 6.6 – Resultados do ajuste simultâneo da visco-coesão utilizando o modelo coesivo de Hordijk (1991).....	113
Tabela 6.7 – Comparação dos resultados obtidos do ajuste simultâneo pelo modelo coesivo de Hordijk (1991) com os dados experimentais.....	114
Tabela 6.8 – Resultados do ajuste simultâneo da visco-coesão utilizando o modelo coesivo Bilinear.....	114
Tabela 6.9 – Comparação dos resultados obtidos do ajuste simultâneo pelo modelo coesivo Bilinear com os dados experimentais.....	115
Tabela 6.10 – Ajuste das curvas coesivas de Hordijk (1991) utilizando CHM.....	120

ABREVIATURAS

CHM - Cracked Hinge Model

CMOD – Crack Mouth Open Displacement

HSC – High Strength Concrete

MEF – Método dos Elementos Finitos

MFEL – Mecânica da Fratura Elástica Linear

MFF – Modelo de Fissura Fictícia

MFNL – Mecânica da Fratura Não-Linear

SF – Superposição de Fraturas

ZPF – Zona de Processos de Fratura

NOMENCLATURA

a_o – Altura do Entalhe

A_{lig} – Área de Ligação entre as Faces

b_o – Altura da Região sem Entalhe

C – Vetor de Deslocamento Verticais da SF

\vec{d} – Vetor de Variação dos Parâmetros

D – Matriz dos Deslocamentos nos Nós da SF

DP – Diferença Percentual

E_c – Módulo de Elasticidade do Concreto

f – Indicação da Função de Coesão

f_{tc} – Tensão Limite de Tração do Concreto

\mathcal{F} – Indicação da Função de Visco-Coesão

g – Aceleração da Gravidade

G_F – Energia de Fratura Aparente por Unidade de Área

$Grad$ – Gradiente

h – Altura da Viga

$Hess$ – Hessiana

$Hess\lambda$ – Hessiana com a diagonal modificada por λ

l_{ch} - Comprimento Característico

L – Comprimento da Viga

M – Momento ou no caso da SF é a Matriz com os valores de Reação e Deslocamento.

n – Parâmetro Adimensional do Modelo de Rosa et al. (2012)

N – Número de Nós da Discretização da SF

\vec{p} – Vetor de Parâmetros

P – Carga Aplicada pelo Atuador

P_{exp} – Função que Representa a Resposta Experimental

P_{num} – Função que Representa a Resposta Numérica
 P_u – Carga Última
 R – Matriz das Reações Referente a SF
 s – Comprimento das Molas
 S_p – Vão Livre
 tol - Tolerância
 w – Abertura entre Faces da Fratura
 w_c – Abertura Crítica
 w_{ch} - Abertura Característica
 w_v – Espessura da Viga
 \dot{w} – Velocidade de Abertura das Faces da Fratura
 \dot{w}_0 – Velocidade de Referência da Abertura das Faces da Fratura
 W – Energia Medida
 β_H – Fragilidade de Hillerborg
 ξ_{sqr} – Mínimos Quadrados
 δ – Deslocamento Vertical do Ponto de Aplicação de Carga na Viga em Flexão em Três Pontos
 δ_u – Valor Último de Deslocamento
 $\dot{\delta}$ – Velocidade do Atuador
 φ – Rotação da Face Rígida
 λ – Fator Multiplicativo
 Ψ – Indicação da Função de Viscosidade
 ρ – Densidade do Concreto
 σ – Tensão

1 – INTRODUÇÃO

1.1 – Considerações Iniciais

O colapso das estruturas depende das propriedades dos materiais utilizados em sua construção. O concreto é um material compósito, e devido a sua estrutura extremamente heterogênea, o seu desempenho mecânico não reflete a teoria da mecânica da fratura linear. “Enquanto a pasta de cimento e o agregado têm um comportamento tensão-deformação elástico linear até 80% de seu limite de resistência, o concreto começa a divergir para um comportamento não linear inelástico quando as tensões aplicadas alcançam 40-50% de sua capacidade” (Pompeu Neto, 2004).

O concreto é um material pouco resistente à tração. Existem muitas falhas e microfissuras internas antes mesmo de este receber algum carregamento. As microfissuras dependem de inúmeros parâmetros, incluindo a distribuição granulométrica, dimensão do agregado, teor de cimento, relação água/cimento, grau de adensamento do concreto fresco, condições de cura, umidade ambiente e histórico térmico do concreto. O comportamento mecânico do concreto sujeito a diferentes condições de carregamento é governado pelo início e propagação dessas microfissuras internas durante o carregamento.

Aplicações da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) foram iniciadas por Kaplan (1961) e continuadas até Kesler *et al.* (1972) concluírem que a MFEL não era válida para materiais cimentícios. A inaplicabilidade da MFEL se deve à existência de uma zona inelástica de grande escala na ponta da fissura do concreto. Por essa razão, desenvolveram-se métodos de fratura não linear que caracterizassem a zona de processos inelásticos.

Diversas abordagens foram propostas com o intuito de representar a zona de processos inelásticos e/ou zona de processos de fratura (ZPF). Dentre estas, podem ser citadas: o modelo de fissura fictícia (Hillerborg *et al.*, 1976), o modelo de banda de fratura (Bazant e Oh, 1983), o modelo de dois parâmetros (Jenq e Shah, 1985), o modelo de fissura efetiva (Nallathambi e Karihaloo, 1986) e o método da carga de pico (Tang *et al.*, 1996).

O modelo de fissura coesiva foi primeiramente proposto para caracterizar o fenômeno de falha na região próxima a ponta da fissura (Barenblatt, 1959, 1962). Hillerborg *et al.* (1976)

combinou o modelo da fissura coesiva com o método dos elementos finitos e demonstrou a falha de uma viga plana de concreto por flexão. A partir de então, o modelo de fissura coesiva vem sendo adotado por outros pesquisadores para o estudo da fratura em concreto.

A curva de amolecimento é o elemento que caracteriza o comportamento do material no modelo de fissura coesiva. Ela é determinada experimentalmente por meio de ensaios à tração em que uma única fratura é formada ao serem separadas faces paralelas de um corpo de prova, como é apresentado por Petersson (1981). Entretanto, esse experimento é apresenta dificuldades de execução (como, por exemplo, tracionar uniformemente o espécime e garantir as faces paralelas durante a propagação da fratura). Por isso, a maioria dos procedimentos para inferir a curva de amolecimento se baseia em métodos indiretos de ajustes de famílias de funções que determinam a curva de amolecimento.

As funções de amolecimento possuem pelo menos duas características essenciais: a tensão de tração (f_{tc}), que, por definição, representa a tensão na iminência de abertura da fratura; e a energia de fratura aparente (G_F), a qual expressa a energia necessária para que para que ambas as faces de uma porção da fratura de área unitária sejam separadas completamente. Alguns pesquisadores (Wittmann *et al.*, 1987, 1988; Mihashi, 1992; Guinea *et al.*, 1994) definiram métodos de ajustes de curvas com base em valores de f_{tc} e G_F provindos, respectivamente, dos ensaios de compressão diametral (*Brazilian Test*) e dos ensaios de ruptura por flexão em três pontos. Outros pesquisadores usam da análise inversa para a determinação dos parâmetros das funções de amolecimento (Roelfstra e Wittmann, 1986; Kooiman *et al.*, 2000; Ince, 2004; Sousa e Gettu, 2006; Sousa, 2011; Matallah *et al.*, 2013).

Com o aumento de pesquisas sobre o concreto, observou-se que este apresentava um comportamento diferente de acordo com a taxa de carregamento do ensaio. Esse efeito gerou e ainda gera um grande esforço por partes de pesquisadores para a caracterização dos mecanismos que desencadeiam essa diferença de comportamento ao material para diferentes taxas de carregamento.

Para tentar explicar esse processo, foi proposta a adição de uma curva viscosa que modificaria a forma da curva de coesão de acordo com a taxa de carregamento (Tandon *et al.*, 1995, Rosa *et al.*, 2012). Entretanto, essas curvas viscosas possuem parâmetros que precisam ser determinados. Uma forma de se obter esses parâmetros é por meio de uma análise inversa em que, com base em

dados experimentais, busca-se ajustar parâmetros de um modelo numérico pré-definido de modo que os valores calculados sejam tão próximo quanto possível dos valores observados experimentalmente.

1.2 – Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é avaliar a capacidade do modelo visco-coesivo de Rosa *et al.* (2012) em representar o comportamento do concreto sob o efeito da taxa de carregamento utilizando uma ferramenta computacional para o ajuste de curvas carga versus deslocamento do ponto de aplicação ($P-\delta$) obtidas em ensaios com vigas prismáticas ranhuradas em flexão em três pontos (*Three-Point-Bend Test*). Para tal, são estabelecidos os seguintes objetivos:

- Compreender os principais fenômenos que ocorrem no concreto durante o processo de fraturamento;
- Elencar os principais modelos que expressam o comportamento do concreto;
- Definir uma metodologia de análise inversa para determinação dos parâmetros dos modelos;
- Definir modelos numéricos adequados para a simulação das observações experimentais;
- Desenvolver uma ferramenta computacional capaz de realizar a automação do procedimento de análise inversa e, conseqüentemente, as simulações numéricas;
- Estabelecer critérios para avaliar os resultados obtidos utilizando-se o modelo visco-coesivo de Rosa *et al.* (2012);

1.3 – Justificativa

Ferramentas computacionais baseadas em métodos numéricos vêm sendo desenvolvidas ao longo dos anos e se tornaram instrumentos necessários para o aumento da eficiência e eficácia dos projetos de engenharia civil. Contudo, para que os resultados obtidos por estas ferramentas descrevam de maneira satisfatória o comportamento estrutural é necessário conhecer os parâmetros relevantes para descrever esse comportamento.

O modelo proposto por Rosa *et al.* (2012) foi avaliado com base somente na comparação da carga de pico dos resultados experimentais com os picos do modelo simulado. Tal comparação desconsidera o comportamento do concreto pós-pico e deixa em dúvida quais são os limites do modelo proposto por Rosa *et al.* (2012).

A justificativa deste trabalho encontra-se na busca de uma melhor compreensão da propagação da fratura no concreto sob altas taxas de carregamento para que o processo simulado se aproxime do comportamento real. Parapeitos de pontes, pavimentos de pistas de decolagem e vigas pré-moldadas de pontes ferroviárias são exemplos de estruturas e elementos estruturais que trabalham com taxas de carregamento variáveis. Conhecendo o comportamento do concreto, é possível:

- reduzir os custos da construção, uma vez que a estrutura pode ser projetada utilizando-se o mínimo de concreto para que a integridade da estrutura ao longo da sua vida seja garantida;
- aumentar a segurança, uma vez que os estados limites do concreto se tornam mais bem conhecidos;

1.4 – Organização do trabalho

Esta dissertação está dividida em 7 seções, listadas as seguir:

- **1 – Introdução:** Nesta seção são apresentadas as considerações iniciais a respeito do comportamento da propagação da fratura no concreto, uma revisão bibliográfica de trabalhos, os objetivos que devem ser alcançados e a motivação do mesmo.
- **2 – Estrutura, Processos e Modelos de Fratura no Concreto:** Aborda a estrutura do concreto e seu comportamento durante o processo de propagação de fratura. São apresentados ensaios de caracterização e modelos para representação do processo de fraturamento.
- **3 – Análise Inversa:** Apresenta o conceito de análise inversa e o método de Levenberg-Marquardt (Marquardt, 1963, Levenberg, 1944). Os modelos visco-coesivos são avaliados matematicamente na busca da unicidade da solução.

- **4 – Modelagem Bidimensional do Processo de Fraturamento:** É apresentada a formulação de dois modelos numéricos que simulam o comportamento de uma viga em flexão de três pontos.
- **5 – Ferramenta Computacional Desenvolvida:** Esta seção apresenta a estrutura da ferramenta desenvolvida para automação do procedimento de análise inversa. São realizados alguns testes de validação.
- **6 – Análise Inversa com Dados Experimentais: Visco-Coesão:** Nesta seção é realizada a análise inversa em ensaios com vigas de concreto de alta resistência em flexão de três pontos. A avaliação do modelo de Rosa *et al.* (2012) é feita nesta seção.
- **7 – Conclusão:** Este capítulo traz as conclusões obtidas e sugestões de tópicos relevantes para futuros trabalhos de pesquisa.

2 – ESTRUTURA, PROCESSOS E MODELOS DE FRATURA NO CONCRETO

2.1 – Considerações Iniciais

Nesta seção é abordada a estrutura do concreto e seu comportamento durante o processo de propagação da fratura. O concreto é um material heterogêneo, constituído por cimento, areia, agregados e água, com ou sem aditivos. Suas propriedades dependem das propriedades de seus componentes e da interação entre eles. Devido a sua heterogeneidade, é difícil prever com exatidão o caminho de propagação da fratura.

2.2 – Propriedades do Concreto

Segundo Pompeu Neto (2004), o concreto é um material cerâmico e heterogêneo, cujas propriedades dependem das propriedades e das fases de seus componentes e da interação entre eles. O concreto pode ser dividido em três fases: agregado, matriz e zona de transição. A zona de transição é, geralmente, a mais fraca do conjunto e influencia o comportamento mecânico do concreto.

A matriz é formada pela pasta endurecida. Ela é resultado dos produtos de hidratação do cimento, que incluem, principalmente, silicato de cálcio hidratado, hidróxido de cálcio e sulfoaluminatos de cálcio. Além dos cristais formados por esses produtos, os vazios são outros componentes importantes da microestrutura da pasta de cimento endurecida. Os diferentes tipos de vazios na pasta de cimento são classificados como porosidade gel e porosidade capilar. A porosidade gel varia numa faixa de tamanho de 5 a 10 *nm*, enquanto a porosidade capilar, varia de 10 *nm* a 10 *µm*. O volume da porosidade diminui durante a hidratação.

Os agregados podem constituir cerca de 75% do volume de concreto e, por causa dessa grande participação, as propriedades do concreto dependem do tipo de agregado escolhido. Dependendo de sua microestrutura, podem apresentar diferentes valores para algumas características como a resistência mecânica, a absorção, a dureza e o módulo de elasticidade.

A zona de transição é uma camada de hidróxido de cálcio que se precipita no limite físico entre o agregado e a matriz de cimento, formando em seguida, uma camada livre contendo cristais

de hidróxido de cálcio orientados, etringita e sílica de cálcio hidratado. Esta é uma camada com porosidade alta.

Como material compósito, podem ser definidas as seguintes características:

- As propriedades do concreto dependem das propriedades de seus componentes (matriz da pasta e agregados) e da interação entre eles;
- A presença dos agregados cria uma zona fraca (interface) onde se inicia o crescimento das fissuras existentes;
- A diferença de dureza entre agregados e matriz da pasta produz concentração de tensões nas interfaces, que podem diferir significativamente das tensões naqueles materiais;
- Podem ocorrer fissuras no concreto, na argamassa e nos agregados;

Alguns fatores que afetam a resistência da ligação agregado-matriz são:

- Características da superfície e grau de limpeza dos grãos de agregados;
- Composição mineralógica dos agregados;
- Resistência da matriz de cimento;
- Teor de umidade do concreto. Aumentando-se o teor de umidade do concreto, a resistência da ligação diminui.

2.3 – Comportamento do Concreto à Fratura

O concreto é um material pouco resistente à tração. Existem muitas falhas e fissuras internas em sua estrutura antes mesmo de este receber algum carregamento. O comportamento mecânico do concreto sujeito a diferentes condições de carregamento é governado pelo início e propagação das fissuras internas.

Para uma estrutura de concreto sujeita à tração, as fissuras prolongam-se em direção perpendicular à carga aplicada. Por outro lado, para um concreto sujeito unicamente à compressão uniaxial, as fissuras propagam-se principalmente na mesma direção da carga de compressão aplicada.

Vile *apud* Bittencourt, (1999) tentou explicar como ocorre o micromecanismo de desenvolvimento de fissuras. Uma partícula de agregado é imersa numa matriz mole. Inicialmente,

duas microfissuras na interface agregado-matriz são observadas, provavelmente devido à retração diferencial. Essas microfissuras são estáveis e só se propagam quando a carga externa for aumentada. A Figura 2.1(a) mostra o processo de fraturamento. Uma carga externa é aplicada, gerando carregamentos laterais de separação, e isso faz com que as fissuras de quebra de ligação propaguem. A propagação só cessa quando são alcançados cones carregados triaxialmente, e a fratura pode originar-se pela extensão de fissuras de cisalhamento inerente do material através da pasta. A Figura 2.1(b) mostra um exemplo experimental.

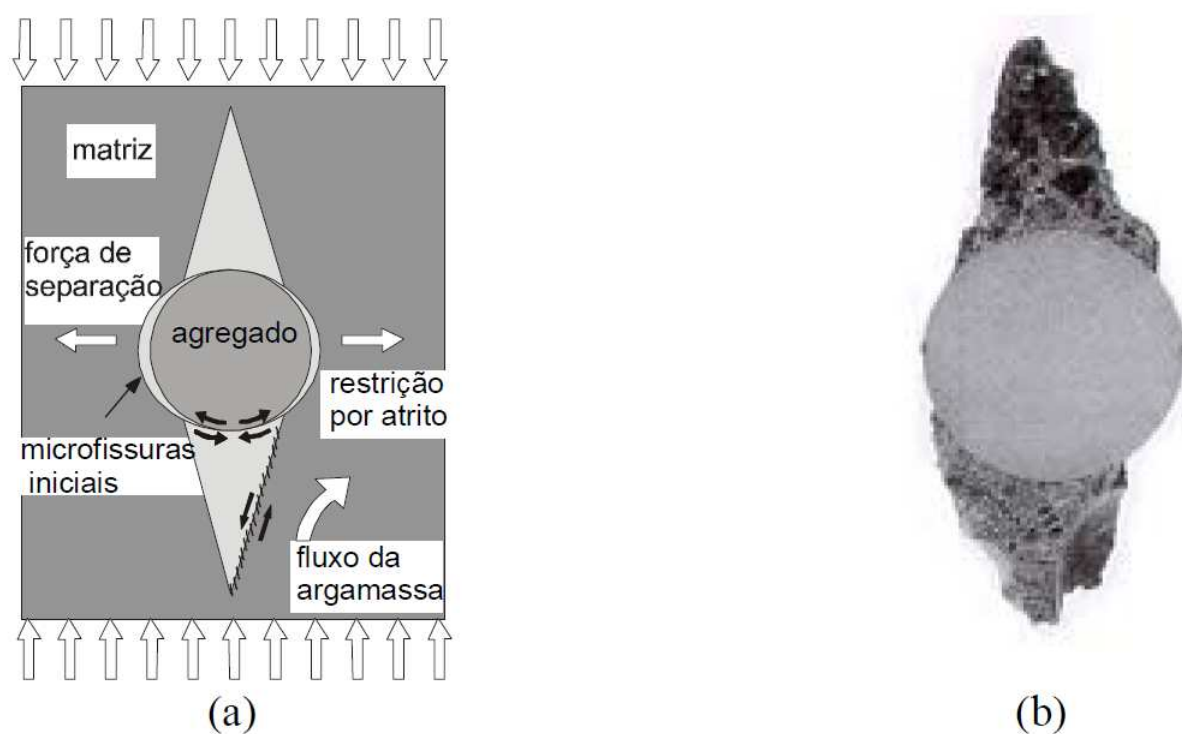


Figura 2.1 - (a) Compressão aplicada sobre uma partícula de agregado em uma matriz mole. (b) Elemento de ruptura encontrado após ensaio de compressão uniaxial (Bittencourt, 1999)

Segundo Bittencourt (1999), a proposta de Vile é limitada. O comportamento poderia ser diferente se considerado o composto como um todo, já que ocorrem outras interações entre os agregados. “Experimentos sobre discos de material fotoelástico têm mostrado que, de fato, ocorrem grandes concentrações de tensões na superfície de contato entre as diversas partículas. Em princípio, este modelo explica o aparecimento das forças laterais de separação e também as grandes deformações laterais que surgem nos ensaios de compressão uniaxial de concreto.”

2.4 – Modelos de Fraturamento

As propriedades do material utilizado são de grande influência no comportamento estrutural. O material pode ser caracterizado como frágil, dúctil ou quase-frágil. Materiais frágeis são aqueles que falham em tração em valores relativamente baixos de deformação. Materiais dúcteis são aqueles que sofrem grandes deformações permanentes antes da falha. Por fim, os quase-frágeis são os que depois de atingida uma carga de pico, apresentam uma deformação com redução da capacidade resistente, até que atinja a falha. A Figura 2.2 apresenta os três diferentes tipos de respostas de um material sob carregamento axial. O concreto é tratado como um material quase-frágil.

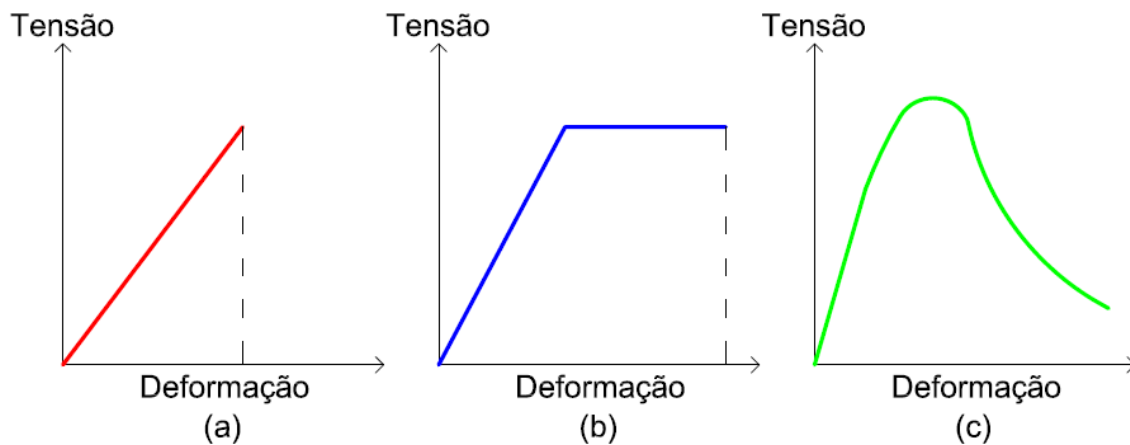


Figura 2.2 - Respostas de carregamento axial para material: (a) frágil; (b) dúctil; (c) quase-frágil.

A teoria da elasticidade linear é suficiente para descrever o comportamento da fissura caso a deformação e a localização dos efeitos sejam limitadas a uma pequena região à frente da fissura. Esse é o comportamento típico de materiais frágeis.

Em materiais dúcteis, os efeitos de plastificação são marcantes, o que impossibilita o uso da teoria da elasticidade linear. Para esses materiais deve ser considerado um modelo baseado na mecânica da fratura não-linear elasto-plástica.

A fratura em um material quase-frágil é caracterizada pelo desenvolvimento de uma zona de fraturamento com dimensões consideráveis seguida por uma zona de processos plásticos.

Semelhante aos materiais frágeis, a propagação da fissura deve ser caracterizada em termos energéticos, utilizando-se a energia elástica e a energia de plastificação.

A Figura 2.3 apresenta o comportamento da frente da fratura para os três tipos de materiais.

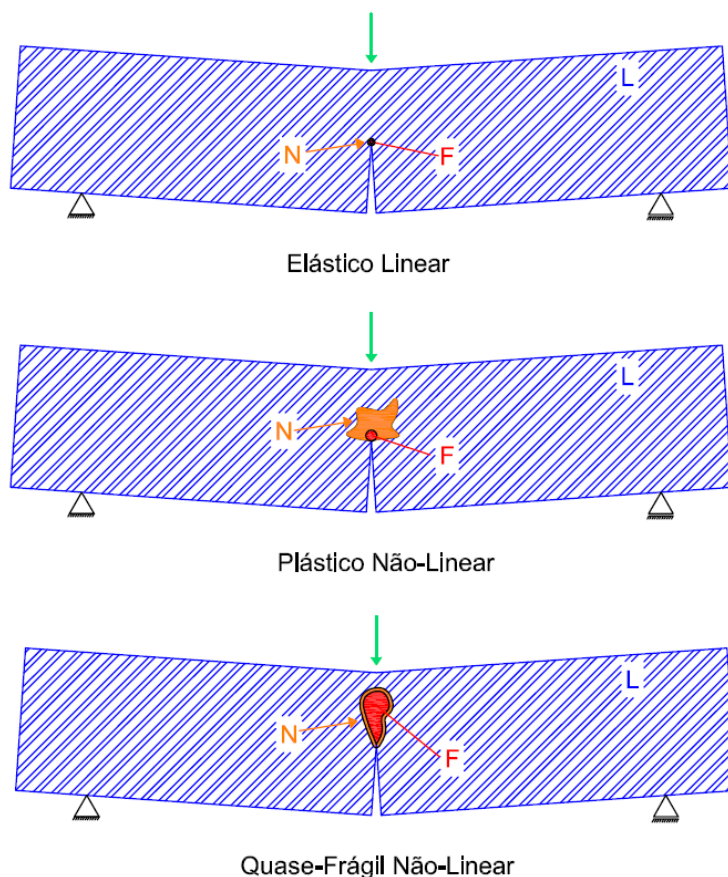


Figura 2.3 - Regiões de comportamento distinto à frente da fissura. (F) zona de fraturamento; (N) zona de plastificação; (L) região elástica.

Os critérios de energia para fissura podem ser estabelecidos usando princípios da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) e Mecânica da Fratura Não-Linear (MFNL). Como o enfoque da pesquisa é o concreto, serão tratados somente os conceitos de MFNL.

2.5 – Modos de Fratura

Um sólido fraturado pode ser tensionado em três diferentes modos. O primeiro modo (Modo I), conhecido como “modo de abertura”, gera deslocamentos perpendiculares ao plano da fratura.

O segundo modo (Modo II) ou “modo de cisalhamento no plano” gera deslocamentos no plano da fratura. O terceiro modo (Modo III), também conhecido como “modo de cisalhamento fora do plano”, gera deslocamentos fora do plano da fissura. A Figura 2.4 apresenta os três modos.

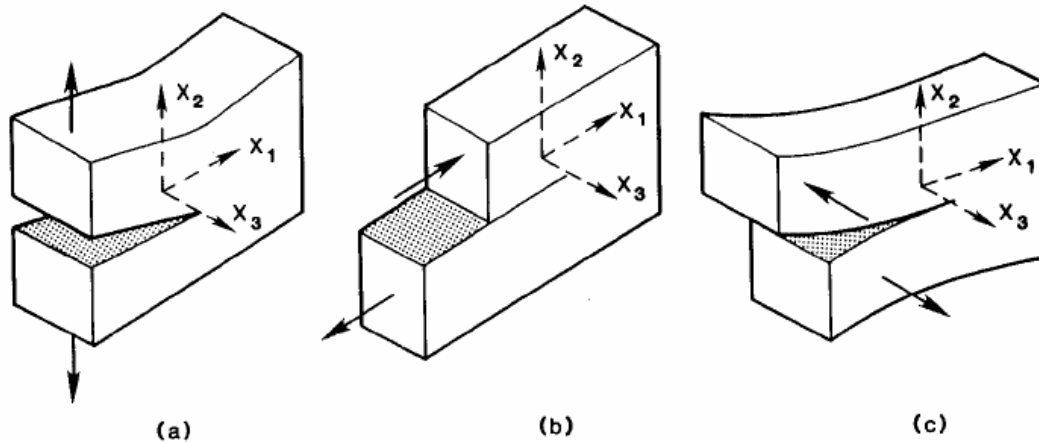


Figura 2.4 – Modos básicos de carregamento: a) Modo I, b) Modo II, e c) Modo III (Mazella, 2007)

2.6 – Mecânica da Fratura Não-Linear

Um estudo significativo de fraturamento não-linear para materiais quase-frágeis só teve início na década de 80. Diferentes mecanismos de tenacidade ao fraturamento podem ser ativados durante a propagações de fissuras em materiais quase-frágeis:

- Dissipação de energia de formação de superfícies;
- Microfissuração;
- Dissipação de energia na zona de fraturamento;

Pode-se resumir que estes mecanismos se baseiam, ou no conceito de localização e amolecimento na zona de fraturamento (modelo coesivo), ou no conceito de fissura elástica efetiva.

Quando uma estrutura de concreto é submetida a um carregamento externo, pode-se considerar que, até certo nível do carregamento, o material apresenta um comportamento linear. Conforme o carregamento aumenta, a tensão máxima é alcançada em pontos das seções transversais mais solicitadas. No entanto, devido à microestrutura heterogênea do concreto, desenvolvem-se zonas de plastificação e fraturamento, em função do aparecimento de

microfissuras, que se concentram em pequenos volumes adjacentes aos pontos mais solicitados, e que se caracterizam por alguma capacidade de transmissão de esforço. “Na zona de fraturamento ocorre a coalescência das microfissuras e a capacidade de transmissão tende a desaparecer com a gradual abertura da fissura, caracterizando um processo de amolecimento.” (Ferreira, 2012).

A capacidade de transmissão de esforços nas faces das fissuras geradas no concreto podem ser explicadas pela permanência de algumas micro ligações entre as faces. Na Figura 2.5 é apresentado um corpo de concreto submetido a tração uniaxial. No instante em que o concreto atinge seu limite máximo de tensão à tração (f_{tc}), são geradas fissuras e fraturas que macroscopicamente indicariam que as fases estão separadas. Entretanto, microscopicamente, ainda existem micro ligações entre as fases da fissura que não atingiram seu estado limite de tensão e continuam contribuindo para a passagem de tensões entre as faces das fissuras. Conforme as distâncias entre as faces das fissuras aumentam, as micro ligações vão atingindo as suas tensões limites e rompendo, reduzindo a transmissão de tensões entre as faces da fissura e desenvolvendo o processo de amolecimento até o ponto em que todas as micro ligações se rompem e a propagação da fissura se completa.

A Figura 2.6 apresenta uma análise microscópica do processo de fraturamento descrito anteriormente para o caso de um polímero. Na Figura 2.6 (a) é apresentada uma fissura, que aparentemente encontra-se com as faces separadas. Na Figura 2.6 (b) a imagem é aproximada para a região da fissura, onde podem ser observadas micro ligações entre as faces. Na Figura 2.6 (c) o foco é a estrutura das micro ligações.

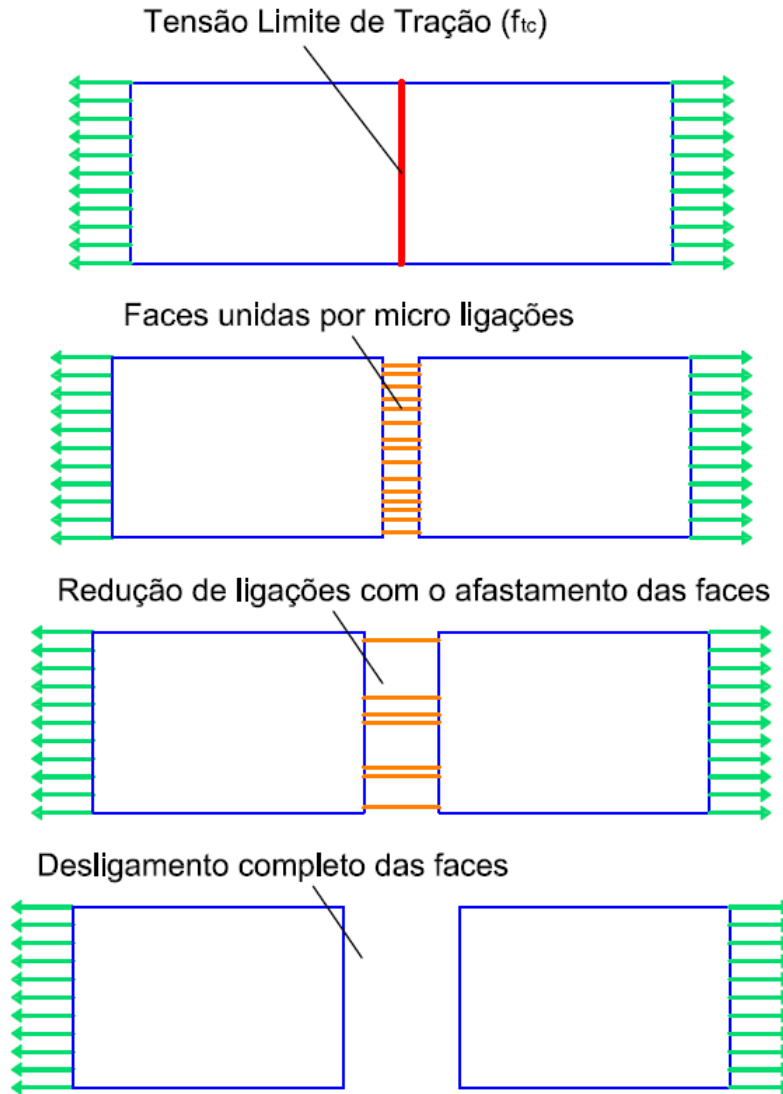


Figura 2.5 – Representação do processo de amolecimento entre as faces de uma fissura no concreto.

As primeiras propostas matemáticas para a modelagem do comportamento coesivo foram feitas por Dugdale (1960) e Barenblatt (1962). O modelo de Barenblatt (1962), conhecido como Modelo da Fissura Fictícia (MFF), foi aplicado por Hillerborg *et al.* (1976) e Planas e Elices (1991) em outras metodologias numéricas para discretização do processo de fraturamento.

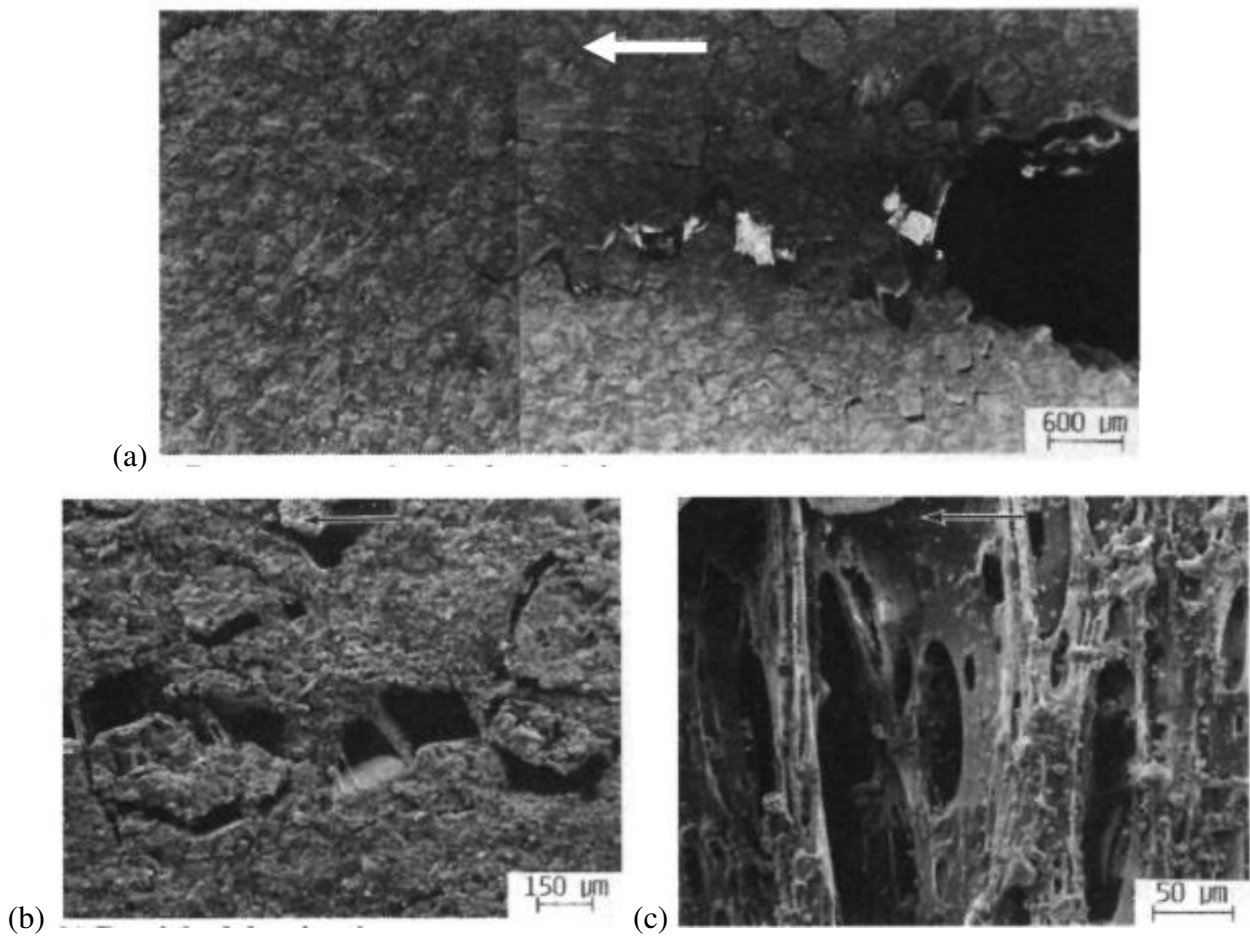


Figura 2.6 – (a) zona de processos a frente da ranhura. (b) Foco nas fissuras desenvolvidas. (c) Microfissuras desenvolvidas no polímero. (Cornell Fracture Group, 2010)

No MFF a zona de processos inelásticos é modelada como uma extensão da fissura real submetida a esforços coesivos. A Figura 2.7 apresenta uma representação do MFF. A zona de fissura fictícia tem início no ponto em que as faces da fissura possuem uma abertura (w) nula e termina num ponto no qual as faces da fissura chegaram a uma abertura conhecida como crítica (w_c), na qual não existiria nenhuma micro ligação entre as faces. Nesse intervalo entre o ponto em que as faces se encontram e o ponto de w_c , os efeitos de micro ligações que deveriam existir são representadas por tensões atuantes nas faces. Essas tensões variam desde a tensão limite de tração do material (f_{tc}) no encontro das faces, até a tensão nula no ponto de w_c . Essa variação de tensão em relação à abertura da fratura pode ser expressa por meio de uma curva, conhecida como curva coesiva ou curva de amolecimento.

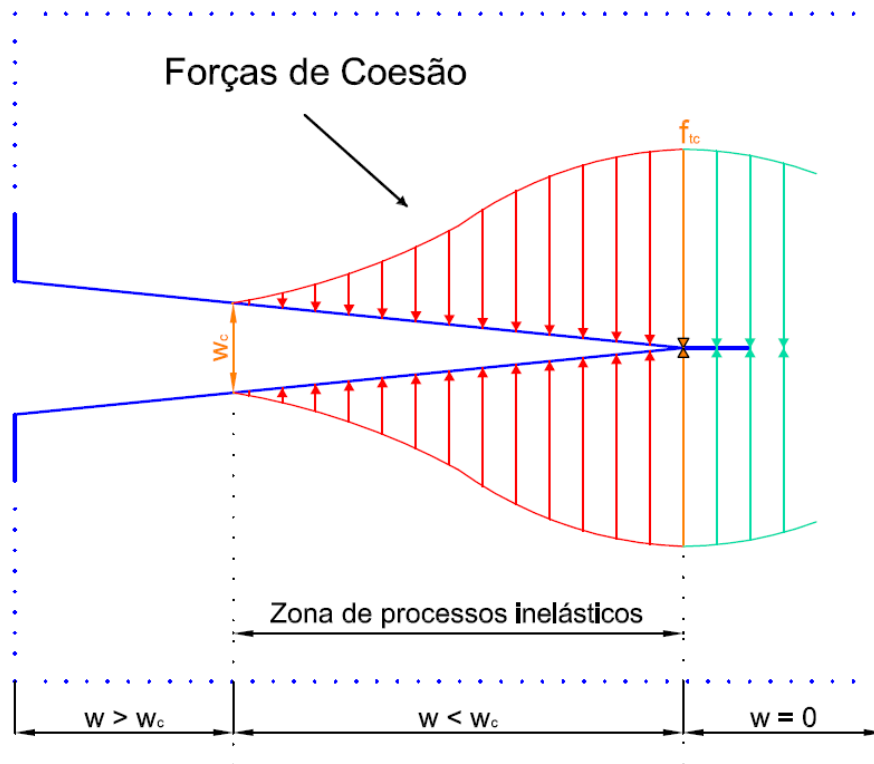


Figura 2.7 – Representação do Modelo de Fissura Fictícia.

Além do MFF existem outras abordagens para representar a zona de processos inelásticos e os efeitos coesivos. Um outro exemplo seria o uso de elementos coesivos utilizado no método dos elementos finitos. Nessa abordagem, o modelo numérico é discretizado por elementos que apresentam comportamento inelástico quando a tensão ultrapassa a tensão limite. Tal abordagem foi utilizada no trabalho de Zhou *et al.* (2005).

2.7 – Ensaio de Caracterização do Concreto

As propriedades mecânicas do concreto podem ser determinadas por diferentes tipos ensaios experimentais. Nesta subseção são apresentados alguns ensaios importantes no contexto desta dissertação. As propriedades abordadas são o módulo de elasticidade (E_c), a resistência a tração (f_{tc}), a curva coesiva e a energia de fratura aparente (G_F).

O módulo de elasticidade E_c pode ser obtido por ensaio de compressão axial. Para a realização do ensaio é utilizado um corpo de prova cilíndrico instrumentado com extensômetros elétricos para a medição dos deslocamentos. O corpo de prova instrumentado é colocado em uma máquina de compressão uniaxial, sendo armazenadas as relações carga *versus* deslocamento (medido pelos extensômetros) ao longo do experimento. A Figura 2.8 apresenta uma representação do ensaio de compressão axial.

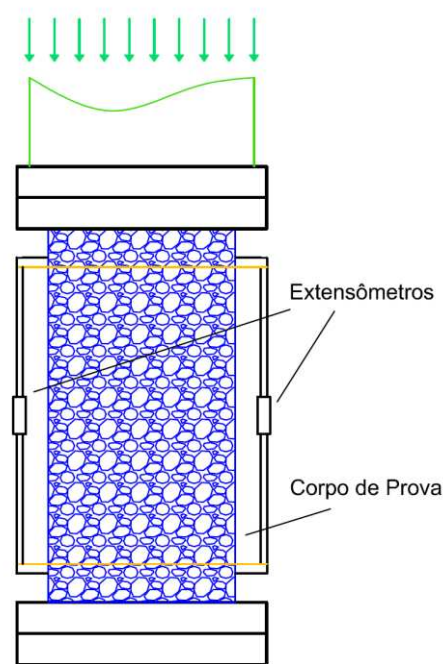


Figura 2.8 – Representação do ensaio de compressão axial.

A curva coesiva, como apresentado na seção 2.6, é a relação tensão *versus* abertura da fissura que caracteriza o amolecimento do concreto ao longo do processo de fraturamento. G_F corresponde à quantidade de energia necessária por unidade de área para que as faces da fissura se separem completamente. A Figura 2.9 apresenta um modelo de curva coesiva. Como a curva coesiva expressa a relação da tensão em cada instante da abertura da fissura, a sua integral, com a abertura da fissura w variando de zero a w_c , corresponde à energia de fratura G_F (Equação 2.1).

$$G_F = \int_0^{w_c} \sigma(w)dw \quad (2.1)$$

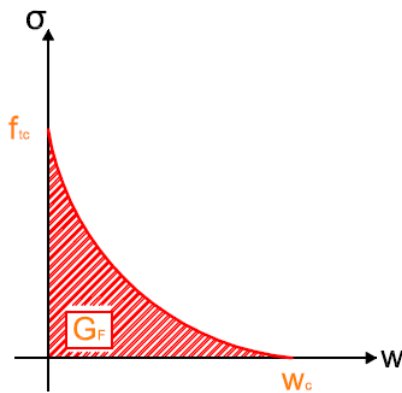


Figura 2.9 – Representação de uma curva coesiva.

O ensaio de tração uniaxial pode ser utilizado para obter E_c , f_{tc} , a curva coesiva e, conseqüentemente, G_F . O ensaio é similar ao de compressão axial, com mesmo formato de corpo de prova e o uso de extensômetros para a medida dos deslocamentos, principalmente na região próxima à abertura da fratura, para a obtenção da curva coesiva. E_c é obtido pela parte elástica da curva coletada de tensão *versus* deslocamento. f_{tc} corresponde à tensão máxima obtida ao longo do ensaio. A partir de f_{tc} , os dados coletados representam a curva coesiva, como apresenta a Figura 2.10.

O ensaio de compressão diametral (também conhecido como *Brazilian Test*) pode ser utilizado para medir indiretamente f_{tc} . O ensaio consiste na compressão diametral de um corpo de prova cilíndrico, sendo a tensão máxima obtida o valor de f_{tc} . A Figura 2.11 mostra uma representação do ensaio. Devido ao ensaio não ser um processo exclusivamente de tração do concreto, estima-se que f_{tc} obtido por esse método seja menor que os obtidos por ensaios de tração. De acordo com Elices *et al.* (1992), esse procedimento gera resultados 20% menores para f_{tc} que os resultados obtidos com os ensaios de tração direta.

A RILEM, *Technical Committee 50-FMC* (1985) recomenda medir a energia de fratura do material usando o ensaio de flexão em três pontos em vigas com entalhes caso não seja possível a realização do ensaio de tração uniaxial. A flexão da viga em três pontos possui algumas recomendações. A altura do entalhe deve ser igual à metade altura da viga $\pm 5 \text{ mm}$, e a largura do entalhe na ponta deve ser menor do que 10 mm . O teste deve ser executado com uma taxa de

deformação aproximadamente constante, que permita que a carga máxima seja alcançada entre 30 e 60 segundos depois do início do teste. Um gráfico entre a carga e o deslocamento deve ser registrado durante o ensaio. A deformação pode ser medida com uma precisão de no mínimo 0,01 mm, e a carga pode ser medida com uma precisão de 2 % do valor máximo de carga de ensaio. A deformação não elástica no suporte e no ponto de carregamento é normalmente desprezada.

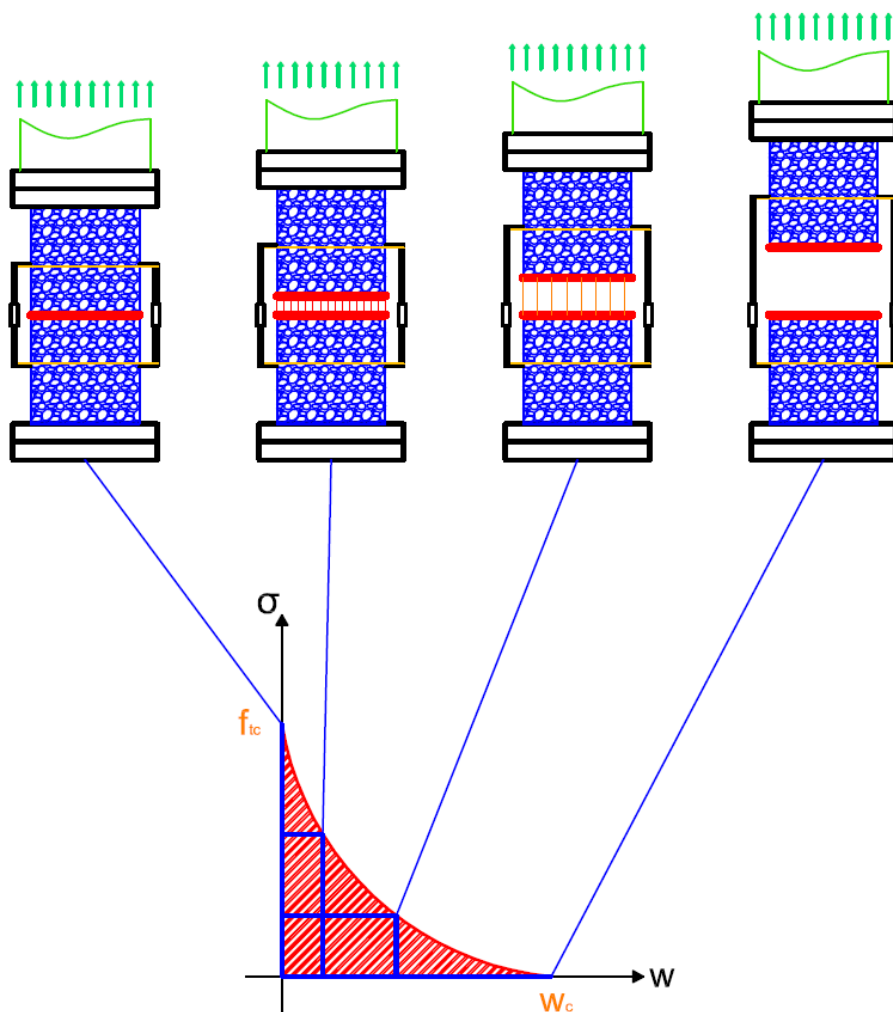


Figura 2.10 – Dados coletados ao longo do ensaio tração uniaxial para representação da curva coesiva.

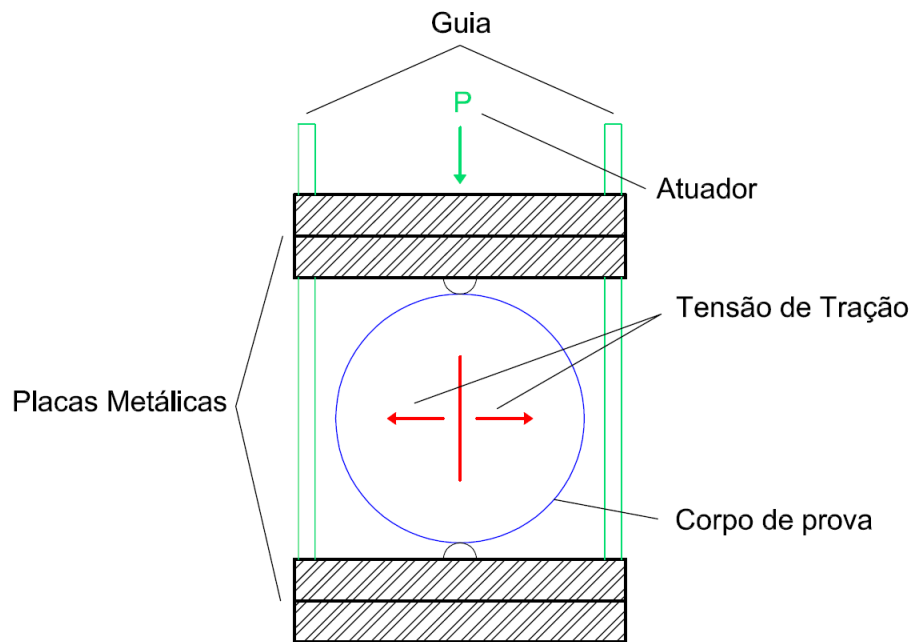


Figura 2.11 – Ensaio de Compressão Diametral (Brazilian Test).

Na Figura 2.12 é apresentado um esquema de ensaio de flexão em três pontos. Nela são representadas:

- L : comprimento da viga;
- S_p : vão livre;
- h : altura da viga;
- w_v : espessura da viga;
- a_o : altura do entalhe;
- b_o : altura da região sem entalhe;
- P : Carga aplicada no ensaio;
- δ : Deslocamento do atuador.

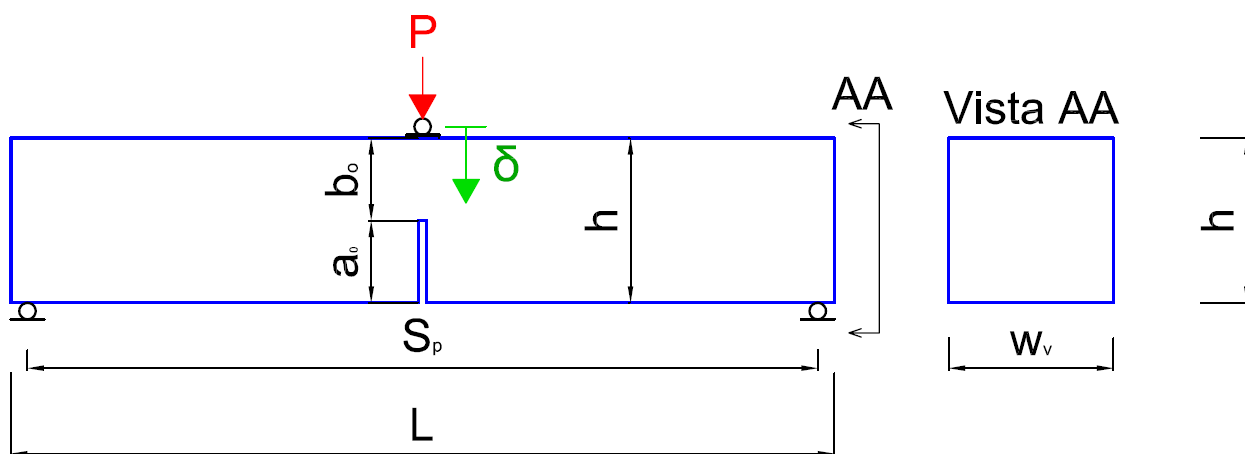


Figura 2.12 – Representação do ensaio de flexão em três pontos.

À partir do gráfico carga *versus* deslocamento ($P - \delta$) obtido no ensaio de flexão em três pontos, o valor de G_F pode ser estimado, como mostra Petersson (1981). Visto que o peso próprio da viga tem um efeito apreciável no ensaio, sua influência no valor de G_F pode ser estimada como mostra Petersson (1981). O peso da viga entre os suportes é igual a $P_w = S_p \cdot h \cdot w_v \cdot \rho \cdot g$, onde S_p , h e w_v são o vão, a altura e a espessura da viga conforme a Figura 2.12, ρ é a densidade do concreto e g é a aceleração da gravidade. Seja o ensaio realizado com a compensação ou não pelo peso próprio, o ensaio é interrompido para um valor último de deslocamento (δ_u), correspondente a uma carga última (P_u) não nula. Tal fato sugere que o material possui uma resistência residual não nula em δ_u , ou seja, existe uma energia não contabilizada no processo para valores de deslocamento $\delta > \delta_u$.

A Figura 2.13 apresenta a proposta de Petersson (1981) de divisão da curva $P - \delta$ em áreas correspondentes ao trabalho desempenhado ao longo do ensaio. Os termos W_0 , W_1 e W_3 correspondem a energia medida durante o ensaio, e W_2 corresponde a energia não medida devido ao término prematuro em δ_u . Por representar entre 1 – 2 % da energia total, W_3 é desprezado no conjunto de energias em Petersson (1981).

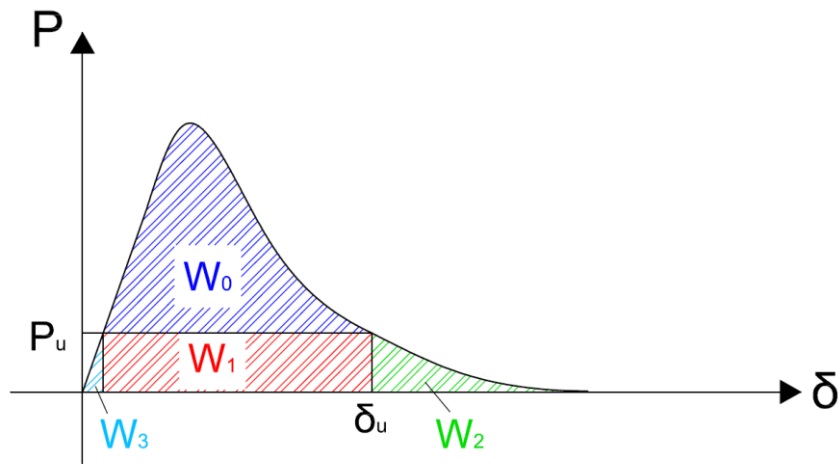


Figura 2.13 – Curva $P - \delta$ para medida de G_F pelo ensaio de flexão em três pontos.

Aproximando o ensaio de flexão em três pontos para uma viga cuja as faces da fratura são rígidas (Figura 2.14), Petersson (1981) demonstra que W_2 pode ser aproximado por W_1 .

$$W_2 = W_1 = P_u \cdot \delta_u \quad (2.2)$$

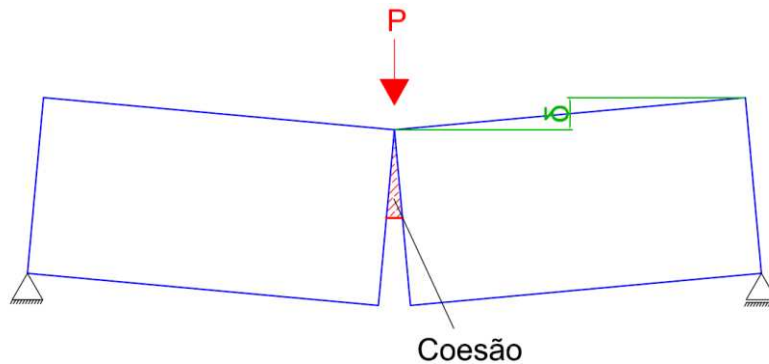


Figura 2.14 – Representação do modelo aproximado utilizado por Petersson (1981) para estimativa da energia não medida durante o ensaio de flexão em três pontos.

A energia total, desprezando-se W_3 , é

$$W_t = W_0 + W_1 + W_2 = W_0 + 2 \cdot P_u \cdot \delta_u \quad (2.3)$$

A área de ligação entre as faces da fratura é equivalente a

$$A_{lig} = b_0 \cdot w_v \quad (2.4)$$

Com base nas Equações 2.3 e 2.4, G_F pode ser estimado pela seguinte equação

$$G_F = \frac{W_t}{A_{lig}} = \frac{W_0 + 2 \cdot P_u \cdot \delta_u}{b_0 \cdot w_v} \quad (2.5)$$

2.8 – Expressões Analíticas dos Modelos Coesivos

A curva de coesão pode ser obtida pelo ensaio de tração uniaxial e, alternativamente, podem ser utilizados modelos matemáticas que buscam representar o processo. Existem várias expressões analíticas que são usadas para descrever os modelos coesivos. Cada expressão possui um conjunto de parâmetros que precisam ser ajustados de acordo com as propriedades do material. Esses parâmetros geralmente envolvem f_{tc} e G_F , que são dois parâmetros que podem ser obtidos por ensaios indiretos (*Brazilian Test* e flexão em três pontos, respectivamente) como apresentado na subseção 2.7. Além da obtenção de parâmetros por ensaios indiretos, as curvas coesivas também podem ser ajustadas por meio de análise inversa sobre os dados de observação experimental (maiores detalhes na Seção 3).

Algumas das expressões utilizadas são:

- Curva Linear:

$$\sigma(w) = \begin{cases} f_{tc}(1 - a_1 w), & \text{para } 0 \leq w \leq w_c \\ 0, & \text{para } w > w_c \end{cases} \quad (2.6)$$

sendo f_{tc} e a_1 os parâmetros a serem determinados. a_1 corresponde a inclinação da reta.

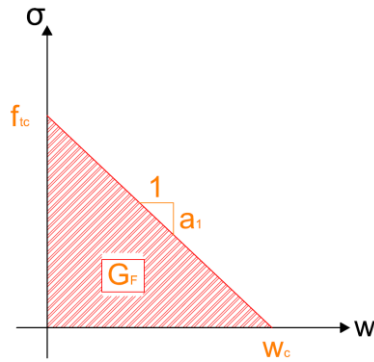


Figura 2.15 - Curva Linear.

- Curva Bilinear:

$$\sigma(w) = \begin{cases} f_{tc}(1 - a_1 w), & \text{para } w \leq \frac{1 - b_2}{a_1 - a_2} \\ f_{tc}(b_2 - a_2 w), & \text{para } \frac{1 - b_2}{a_1 - a_2} < w \leq \frac{b_2}{a_2} \\ 0, & \text{para } w > \frac{b_2}{a_2} \end{cases} \quad (2.7)$$

sendo f_{tc} , a_1 , a_2 e b_2 os parâmetros a serem determinados.

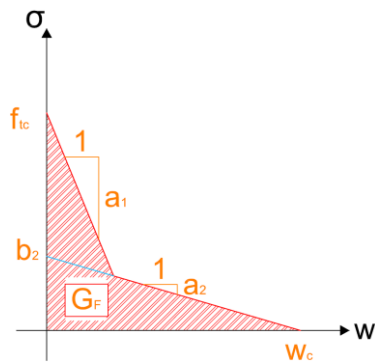


Figura 2.16 - Curva Bilinear.

- Curva de Hordijk (1991):

$$\sigma(w) = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{3w}{w_{lt}}\right)^3\right) e^{-\frac{6.93w}{w_{lt}}} - 28 \frac{w}{w_{lt}} e^{-6.93}, & \text{para } w \leq 5.136 \frac{G_F}{f_{tc}} \\ 0, & \text{para } w > 5.136 \frac{G_F}{f_{tc}} \end{cases} \quad (2.8)$$

$$w_{lt} = 5.136 \frac{G_F}{f_{tc}}$$

f_{tc} e G_F são os parâmetros a serem ajustados.

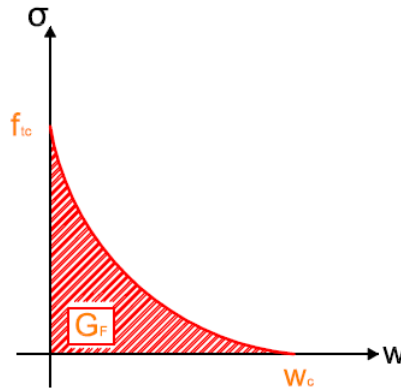


Figura 2.17 - Curva de Hordijk (1991).

2.9 – Influência da Taxa de Carregamento na Resposta da Fratura

Ao serem realizados ensaios em diferentes taxas de carregamento, observou-se (Wittmann *et al.*, 1987; Tandon *et al.*, 1995; Bazant *et al.*, 2000; Rosa, 2010; Ruiz *et al.*, 2011; Pyo e El-Tawil, 2013; Tarifa *et al.*, 2013) que o concreto apresentava um comportamento diferente. Apesar de um grande esforço e de um considerável número de pesquisas, ainda é incerto o mecanismo que leva o concreto a ter esse comportamento.

De acordo com Rosa (2010), com base em resultados experimentais, alguns investigadores afirmam que a energia de fratura e a resistência à tração nos materiais cimentícios aumentam com o aumento da taxa de carregamento. Essa mesma investigação é realizada em Pyo e El-Tawil (2013) confirmando essa observação. A Figura 2.18 apresenta a sobreposição da envoltória de ensaios de

flexão em três pontos realizado em diferentes velocidades de movimentação do atuador ($\dot{\delta}$) obtido em Rosa *et al.* (2012). Pela Figura pode-se observar que os picos de carga nas envoltórias aumentam conforme a velocidade do atuador aumenta.

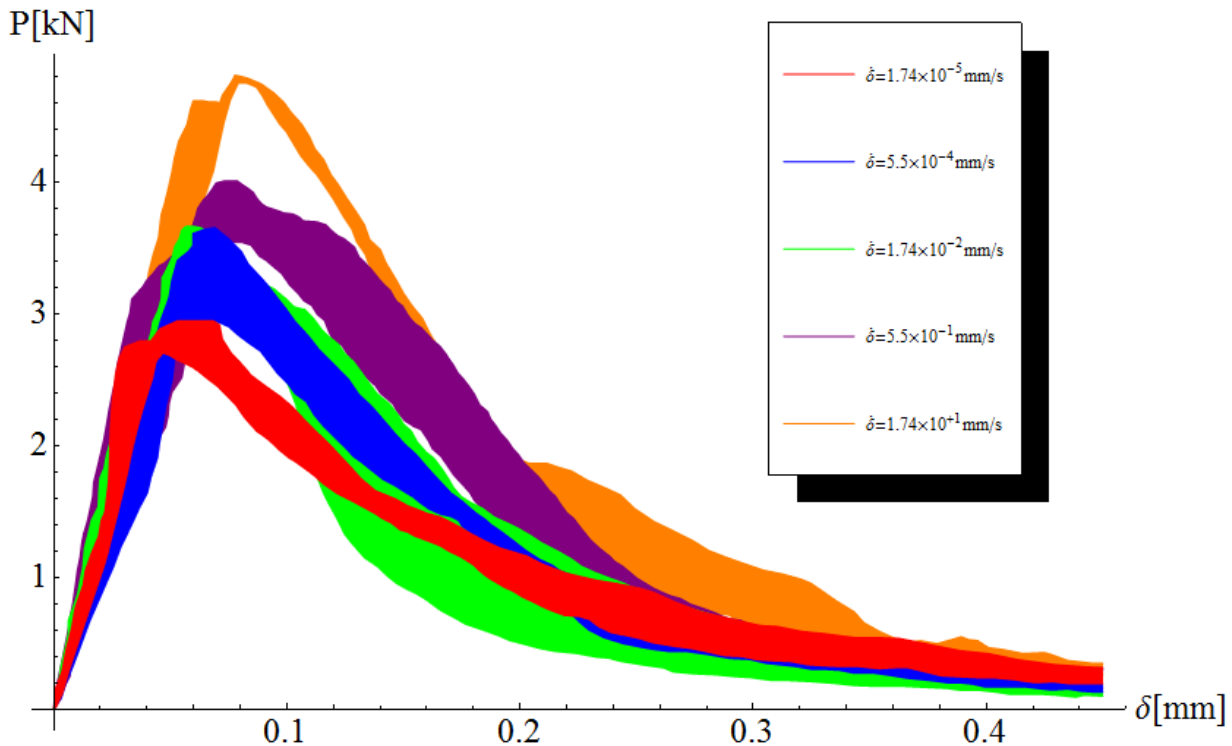


Figura 2.18 – Sobreposição da envoltória de ensaios de flexão em três pontos para diferentes velocidades.

Outra propriedade que se modifica com a taxa de carregamento é G_F . Ruiz *et al.* (2011) fizeram avaliações de G_F para diferentes tipos de concretos em ensaios de flexão em três pontos para velocidades que variaram de 10^{-5} a 10^{+1} mm/s. Constataram que para velocidades variando de 10^{-5} a 10^{-2} mm/s, G_F apresenta uma pequena redução de seu valor. Eles atribuíram esse comportamento à perda de umidade do concreto para o processo de cristalização, já que as velocidades mais baixas levam a ensaios mais demorados e de maiores tempos para a propagação de fratura. Para velocidades maiores que 10^{-2} mm/s, G_F apresenta um crescimento significativo. Esse comportamento é atribuído ao crescimento de micro fissuras ao longo da fratura principal. A Figura 2.19 apresenta o G_F médio para os ensaios de flexão em três pontos realizados por Rosa *et al.* (2012) em relação à velocidade do atuador. Pode-se perceber pela Figura que até uma velocidade

de 10^{-2} mm/s , a energia aparente apresenta pequena redução. Após a velocidade de 10^{-2} mm/s , a energia aparente cresce significativamente.

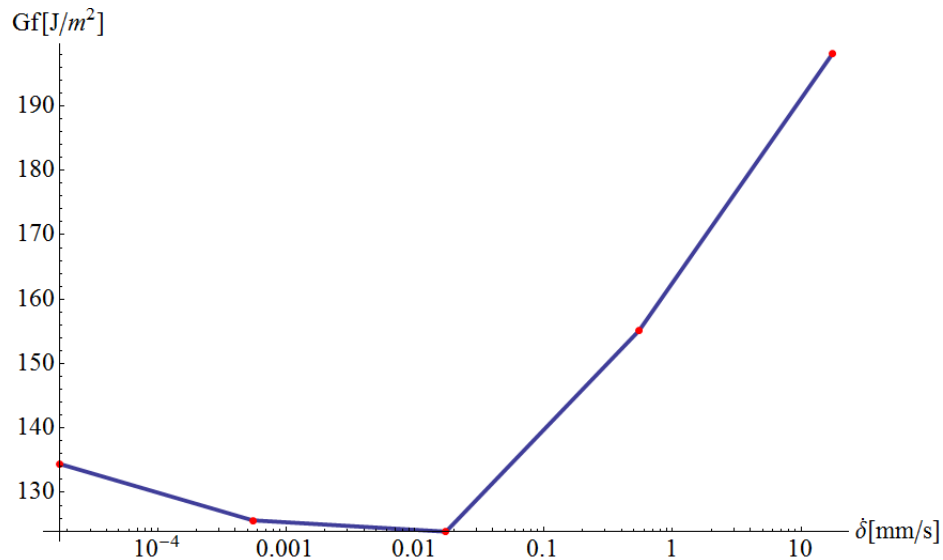


Figura 2.19 – G_F médio dos ensaios realizados por Rosa *et al.* (2012) para diferentes velocidades de atuação do atuador (δ) em ensaios de flexão em três pontos.

2.10 – Modelos de Visco-Coesão

Com base nas observações de ensaios experimentais em diferentes velocidades de carregamentos, diferentes modelos numéricos foram propostos com intuito de representar adequadamente o efeito da taxa de carregamento na propagação da fratura no concreto. A maioria dos modelos propostos sugere alguma modificação na curva coesiva com base na taxa de abertura da fratura.

Segundo Bazant *et al.* (2000), os modelos baseados em reologia são insuficientes para modelar a influência da taxa de aplicação do carregamento na resposta do material em fratura. O que se sugere é a adição de um parâmetro viscoso ao modelo de fissura coesiva. Tandon *et al.* (1995) propôs o seguinte modelo visco-coesivo:

$$\mathcal{F}(w, \dot{w}) = f(w) + \Psi(\dot{w}) \quad (2.9)$$

sendo \dot{w} a velocidade de abertura de fratura, f o modelo coesivo idealmente estático e Ψ o modelo viscoso proposto:

$$\Psi(\dot{w}) = f_{tc} k \sin^{-1} \left(\frac{\dot{w}}{\dot{w}_0} \right) \quad (2.10)$$

Os parâmetros k e \dot{w}_0 são auxiliares, sendo o primeiro adimensional e o segundo uma velocidade de referência. O modelo proposto por Tandon *et al.* (1995) realiza uma translação positiva da curva coesiva, como apresenta a Figura 2.20. Como também pode ser observado na Figura, o modelo não propõe nenhuma ampliação de w_c , apresentando uma descontinuidade em w_c .

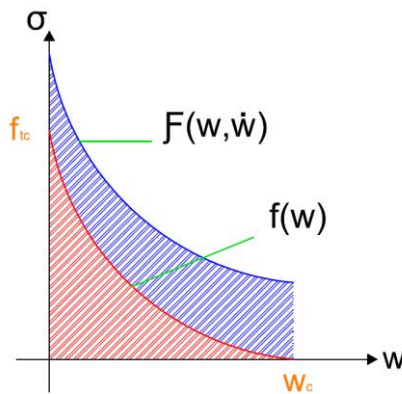


Figura 2.20 - Comportamento do parâmetro viscoso proposto por Tandon *et al.* (1995).

Zhou *et al.* (2005) propôs o seguinte modelo nos estudos de polimetilmetacrilato (um material quase-frágil):

$$\mathcal{F}(w, \dot{w}) = f(w, \Psi(\dot{w})) \quad (2.11)$$

Sendo $f(w, \Psi(\dot{w}))$ a formulação da curva coesiva modificada por um fator $\Psi(\dot{w})$ regido pela seguinte formulação:

$$\Psi(\dot{w}) = 1 + \left(\frac{\dot{w}}{\dot{w}_0}\right)^n \quad (2.12)$$

Os parâmetros n e \dot{w}_0 são auxiliares, sendo o primeiro adimensional e o segundo uma velocidade de referência. O modelo proposto expande a curva a coesiva no sentido de w , como mostra a Figura 2.21. Esse modelo expande w_c , sendo que esse fator deve ser adequadamente atribuído dependendo da formulação do modelo coesivo. Maiores detalhes da influência de $\Psi(\dot{w})$ em $f(w, \Psi(\dot{w}))$ podem ser obtidos em Zhou *et al.* (2005) e Tarifa *et al.* (2013).

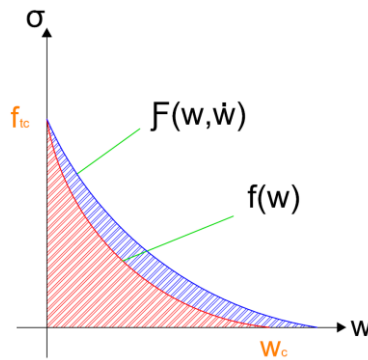


Figura 2.21 - Comportamento do parâmetro viscoso proposto por Zhou *et al.* (2005).

Rosa *et al.* (2012) propôs um outro modelo visco-coesivo utilizando o mesmo fator proposto por Zhou *et al.* (2005), porém incidindo sobre o valor da tensão de coesão:

$$\mathcal{F}(w, \dot{w}) = \Psi(\dot{w}) \cdot f(w) \quad (2.13)$$

O modelo viscoso Ψ proposto é idêntico a Equação 2.12. A Figura 2.22 apresenta uma representação do modelo visco-coesivo. O modelo viscoso gera uma expansão da curva coesiva no sentido de σ .

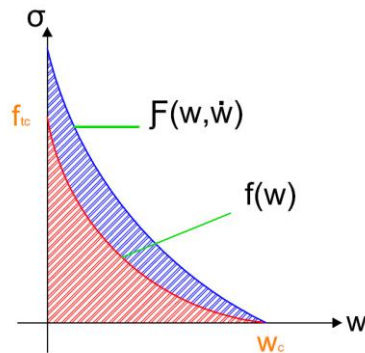


Figura 2.22 - Comportamento do parâmetro viscoso proposto por Rosa *et al.* (2012).

Os parâmetros propostos pelos modelos não possuem ensaios experimentais específicos, sendo ajustados por meio de análise inversa (Seção 3). No trabalho desenvolvido em Rosa *et al.* (2012) foram realizados ensaios de flexão em três pontos para vigas de concreto de alta resistência (*High Strength Concrete* – HSC) em velocidades de carregamento que variavam de $1.74 \times 10^{-5} \text{ mm/s}$ até $1.74 \times 10^{+1} \text{ mm/s}$. Os parâmetros do modelo viscoso foram ajustados de modo que valores de pico de carga em curvas $P-\delta$, obtidas por um modelo de elementos finitos, fossem próximas aos picos de carga observados nos experimentos. De acordo com Rosa *et al.* (2012) tal procedimento gerou resultados razoavelmente próximos aos observados experimentalmente.

2.11 – Considerações Finais

Nesta seção são apresentadas propriedades do concreto que são importantes para o entendimento da propagação da fratura. Na subseção 2.6 foi tratado como o concreto é representado durante o processo de amolecimento, dando-se o enfoque ao Modelo da Fissura Fictícia. Na subseção 2.7 foram apresentados alguns ensaios que servem para caracterizar as propriedades do concreto:

- Ensaio de Compressão Axial: E_c ;
- Ensaio de Tração Uniaxial: E_c , f_{tc} , a curva coesiva e G_F ;
- Ensaio de Compressão Diametral (*Brazilian Test*): f_{tc} ;
- Ensaio de Flexão em Três Pontos: G_F .

Na subseção 2.8 foram apresentadas algumas expressões analíticas de curvas coesivas. A subseção 2.9 tratou do comportamento do concreto sob influência de diferentes taxas de carregamento, sendo ressaltado o aumento de f_{tc} com o aumento da taxa de carregamento e o leve decréscimo de G_F em velocidades menores a 10^{-2} mm/s e o considerável crescimento deste em taxas maiores. Na subseção 2.10 foram tratados alguns modelos viscosos que modificam a curva coesiva com o intuito de retratar o comportamento do concreto em diferentes taxas.

3 – ANÁLISE INVERSA

3.1 – Considerações Iniciais

Problemas de Engenharia normalmente requerem a obtenção de um grande número de parâmetros para a modelagem dos diversos fenômenos envolvidos. Tais parâmetros nem sempre contam com um procedimento experimental específico para sua avaliação. O procedimento que vem sendo utilizado com mais frequência é a análise inversa, que consiste em atribuir valores tentativos para os parâmetros e, através de um modelo matemático adequado para o fenômeno em questão, ir ajustando os parâmetros de modo a reproduzir a correspondente resposta obtida experimentalmente.

Aliado a isto, o desenvolvimento de ferramentas de aquisição de dados experimentais mais eficientes e precisas nos últimos anos, como por exemplo, os métodos de inspeção não destrutivos de estruturas, técnicas de correlação de imagens digitais, tomografia computadorizada, ultrassom, ressonância magnética, etc., têm impulsionado o desenvolvimento de pesquisa nesta área do conhecimento.

Nesta seção é apresentado o conceito de análise inversa e algumas técnicas para sua aplicação. O algoritmo de Levenberg-Marquardt (Levenberg, 1944; Marquardt, 1963) é descrito na subseção 3.3 e é utilizado como metodologia de análise inversa. Na subseção 3.4 é realizada uma avaliação do comportamento matemático dos modelos visco-coesivos apresentados na subseção 2.10.

3.2 – Aplicação e Estratégias de Análise Inversa

Em linhas gerais, a análise inversa consiste no ajuste de parâmetros de algum modelo numérico de tal modo que a solução do modelo numérico seja a mais próxima possível comparada com a observação experimental. A Figura 3.1 apresenta o ensaio de flexão de três pontos com medidas experimentais que consistem na carga aplicada (P) e na correspondente abertura da boca da ranhura (*crack mouth open displacement*, $CMOD$). Na Figura 3.2 é apresentada uma curva experimental $P - CMOD$, obtida de um ensaio de flexão em três pontos de uma viga prismática

ranhurada, comparada com a curva correspondente obtida de um modelo numérico para o qual se busca determinar os parâmetros f_{tc} e G_F da curva coesiva de Hordijk (1991) que torne a curva numérica mais próxima possível da curva experimental. Na Figura 3.2 são escolhidos $f_{tc} = 2 \text{ MPa}$ e $G_F = 150 \text{ J/m}^2$, e observa-se que existe uma diferença significativa na região de pico das curvas.

Na Figura 3.3 é apresentada a comparação da curva $P - CMOD$ experimental com a curva $P - CMOD$ ajustada, sendo $f_{tc} = 2,92 \text{ MPa}$ e $G_F = 180 \text{ J/m}^2$. É importante ressaltar que o ajuste não necessariamente reproduz perfeitamente os valores experimentais, mas busca a melhor representação. A forma mais utilizada para se avaliar o quão próximo o resultado numérico encontra-se dos valores experimentais é por meio de uma função de mínimos quadrados:

$$\xi_{sqr}(\vec{p}) = \int_{v_{ini}}^{v_{fin}} [P_{exp}(v) - P_{num}(v, \vec{p})]^2 dv \quad (3.1)$$

sendo P_{exp} a função que representa a resposta experimental, P_{num} a função que representa a resposta numérica, v um dado instante no intervalo de dados experimentais e \vec{p} o vetor de parâmetros a serem ajustados.

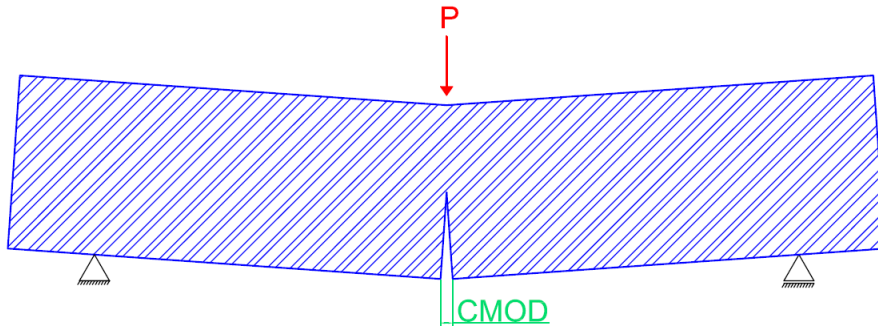


Figura 3.1 – Representação do ensaio de flexão em três pontos com medidas de P versus $CMOD$.

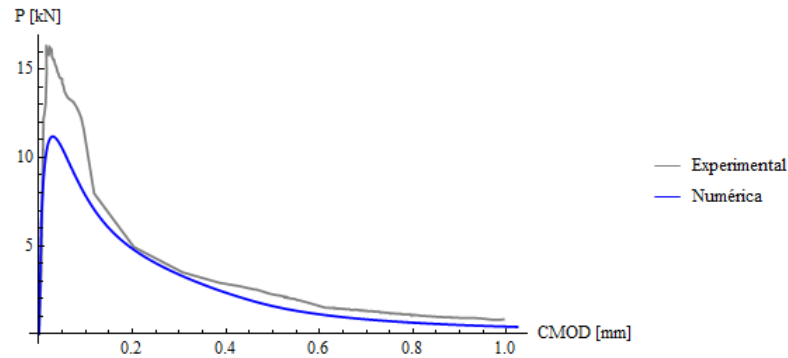


Figura 3.2 – Gráficos comparativos entre a curva P-CMOD experimental com a curva P-CMOD numérica para um par de parâmetros $f_{tc} = 2 \text{ MPa}$ e $G_F = 150 \text{ J/m}^2$ utilizados na curva coesiva de Hordijk (1991).

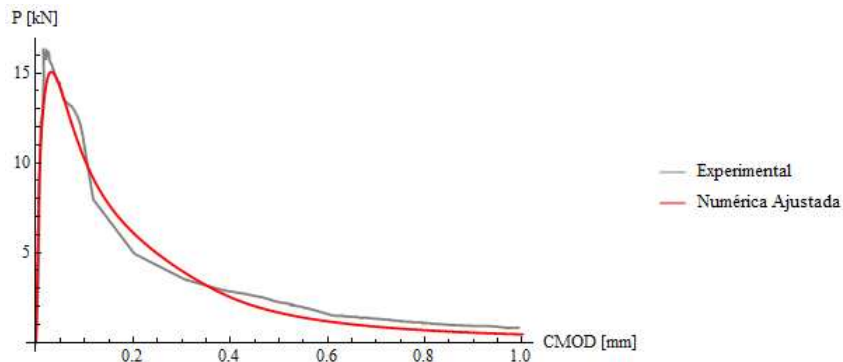


Figura 3.3 – Gráficos comparativos entre a curva P-CMOD experimental com a curva P-CMOD numérica ajustada com os parâmetros $f_{tc} = 2,92 \text{ MPa}$ e $G_F = 180 \text{ J/m}^2$ utilizados na curva coesiva de Hordijk (1991).

Com base na função de mínimos quadrados pode-se perceber que o objetivo dos procedimentos de análise inversa é encontrar o conjunto de parâmetros \vec{p} que sejam capazes de gerar o menor valor de $\xi_{sqr}(\vec{p})$, ou seja, trata-se de um problema de minimização de $\xi_{sqr}(\vec{p})$. Na Figura 3.4 são apresentadas as regiões contabilizadas pela formulação de ξ_{sqr} para estimar a diferença entre a curva experimental e a curva numérica.

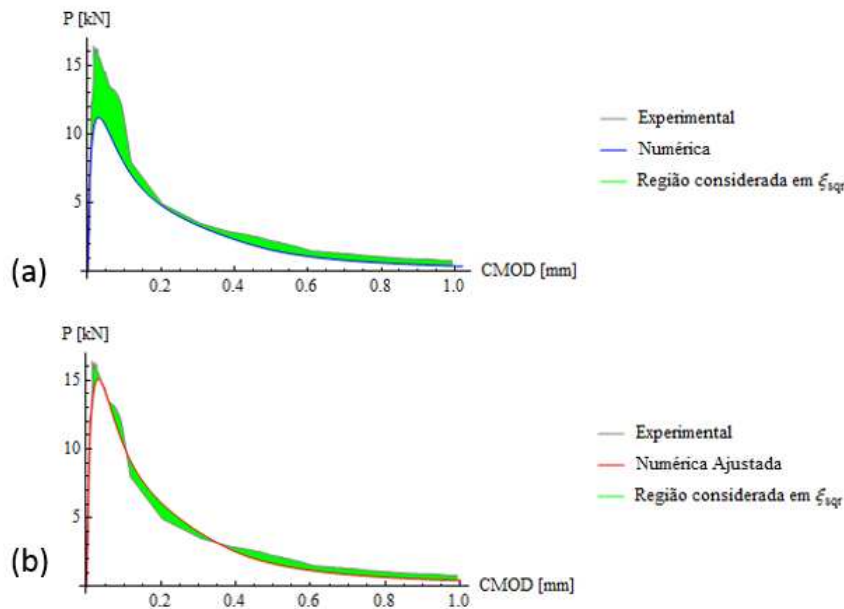


Figura 3.4 – Gráficos com as regiões contabilizadas pela fórmula de ξ_{sqr} . (a) região da primeira estimativa para os parâmetros de Hordijk (1991) (b) região da curva ajusta, menor que a região em (a).

Existem inúmeros algoritmos para a solução de problemas de minimização. Esses algoritmos podem ser divididos em dois grupos: Métodos de Gradiente e Métodos Diretos. Os Métodos de Gradiente utilizam a primeira derivada (Gradiente) ou a segunda derivada (Hessiana) como informação para se chegar no ponto de mínimo. Exemplos de Métodos de Gradiente são: Método de Newton, Método Quase-Newton (Gill, Murray and Wright, 1981) e o Método de Levenberg-Marquardt (Levenberg, 1944; Marquardt, 1963). Métodos Diretos são aqueles que não se utilizam de derivadas. Exemplos desse Método são Nelder-Mead (Lagarias *et al.*, 1998) e o algoritmo genético (Golberg, 1989).

Métodos Diretos tendem a apresentar uma convergência mais demorada e a exigir mais esforço computacional que os Métodos de Gradiente, porém são mais tolerantes quando a função a ser minimizada não é bem comportada (apresenta descontinuidades) e/ou apresenta muitos ruídos. A Figura 3.5 apresenta a superfície de uma função bem comportada na qual os métodos baseados no gradiente são mais indicados no quesito de menor esforço computacional. A Figura 3.6 apresenta a superfície de uma função com muitos ruídos na qual os Métodos Diretos são mais indicados devido a tolerarem superfícies muito irregulares.

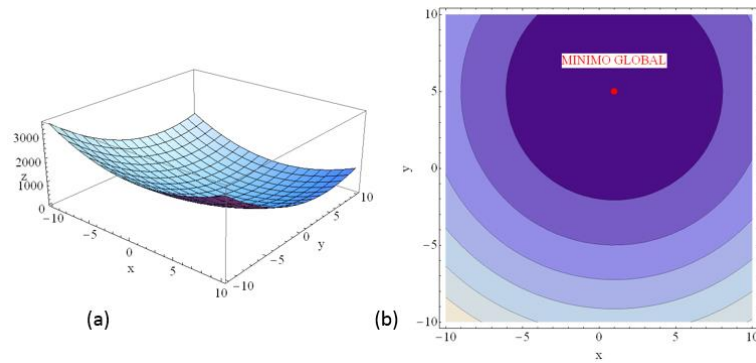


Figura 3.5 – Exemplo de função bem comportada, adequada para métodos baseados em gradiente. (a) Superfície da função exemplo. (b) Gráfico de contorno da mesma função, com a indicação do ponto de mínimo global.

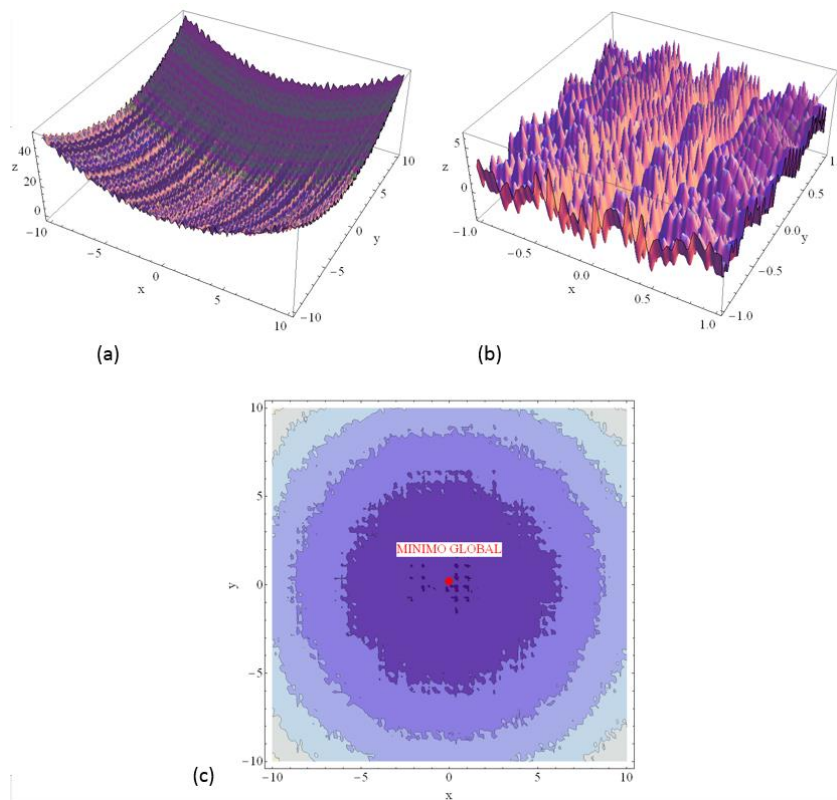


Figura 3.6 – Exemplo de função com muitos ruídos, adequada para métodos diretos. (a) Superfície da função exemplo. (b) Detalhe de uma região da superfície (c) Gráfico de contorno da mesma função, com a indicação do ponto de mínimo global.

A Figura 3.7 apresenta uma superfície construída a partir da função ξ_{sqr} aplicada no exemplo de ajuste dos parâmetros do Modelo de Hordijk (1991) para a representação da curva $P - CMOD$

experimental apresentada nas Figuras 3.5 e 3.6. Foram calculados os valores da função ξ_{sqr} para f_{tc} variando de 1 a 5 N/mm^2 e G_F variando de 100 a 260 J/m^2 . A superfície gerada é bem comportada e suave, sendo ideal para uso de métodos baseados no gradiente.

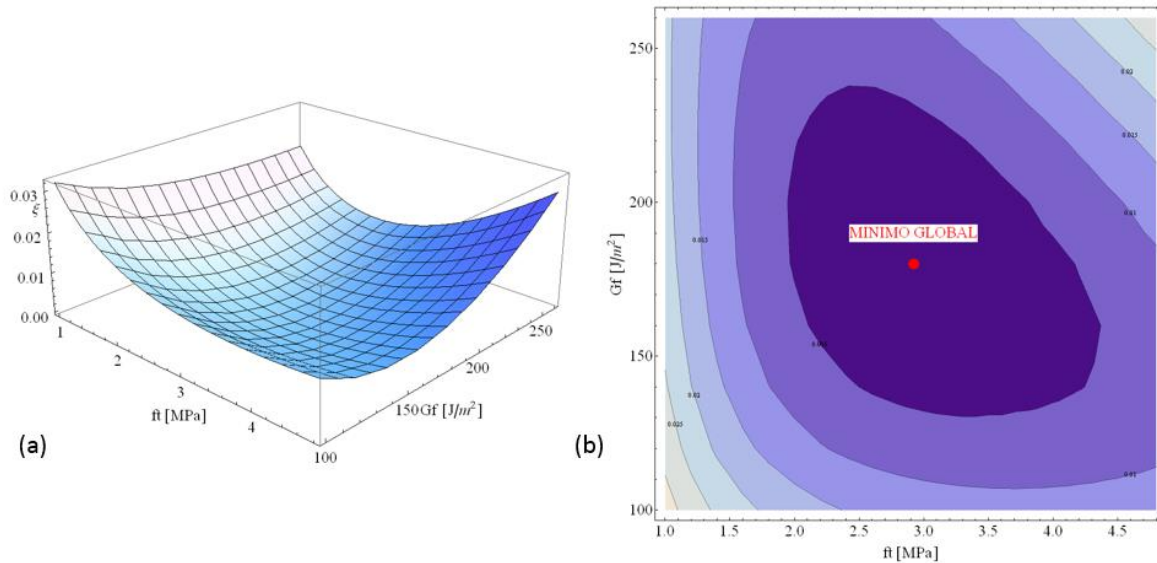


Figura 3.7 – Avaliação da função ξ avaliada para P-CMOD com os parâmetros da curva de Hordijk (1991). (a) Superfície da função. (b) Gráfico de contorno da mesma função, com a indicação do ponto de mínimo global.

Existe um número considerável de pesquisas que buscam determinar os parâmetros das curvas coesivas por meio da análise inversa. Dentre elas, pode-se citar, Sousa (2011) e Matallah *et al.* (2013). Ambos os trabalhos utilizaram o algoritmo de Levenberg-Marquardt (Levenberg, 1944; Marquardt, 1963) para a obtenção dos parâmetros buscados. O algoritmo de Levenberg-Marquardt é um método de busca de mínimos baseado em gradientes. Tal método possui algumas características que o torna mais robusto que outros métodos baseados no gradiente, como a capacidade de fazer buscas fora do sentido de máximo gradiente afim de evitar regiões de mínimos locais.

3.3 – O Algoritmo de Levenberg-Marquardt aplicado para o ajuste de parâmetros viscosos/coesivos

O método de Levenberg-Marquardt (Marquardt, 1963, Levenberg, 1944) pode ser utilizado para a obtenção do conjunto de parâmetros \vec{p} que minimizam a função ξ_{sqr} apresentada em (3.1). Sousa e Gettu (2006) e Matallah *et al.* (2013) fazem o ajuste dos parâmetros comparando uma curva experimental com uma curva numérica, como apresentado em (3.1). O concreto é um material muito heterogêneo e os resultados obtidos por um corpo de prova podem ser bem diferentes dos resultados obtidos por outro corpo de prova constituído do mesmo concreto. Tendo-se o intuito de contemplar a heterogeneidade do concreto, essa dissertação propõe a seguinte modificação da função ξ_{sqr} :

$$\xi_{sqr}(\vec{p}) = \sum_{i=1}^{\text{experimentos}} \int_{v_{ini}}^{v_{fin}} [P_{exp_i}(v) - P_{num}(v, \vec{p})]^2 dv \quad (3.2)$$

Com base em (3.2), a curva numérica P_{num} ajustada é aquela que melhor representa o conjunto de curvas experimentais. Vale salientar que no caso de ser avaliada somente uma curva experimental, (3.2) resulta em (3.1). A Figura 3.8 apresenta um exemplo da abordagem expressa por (3.2).

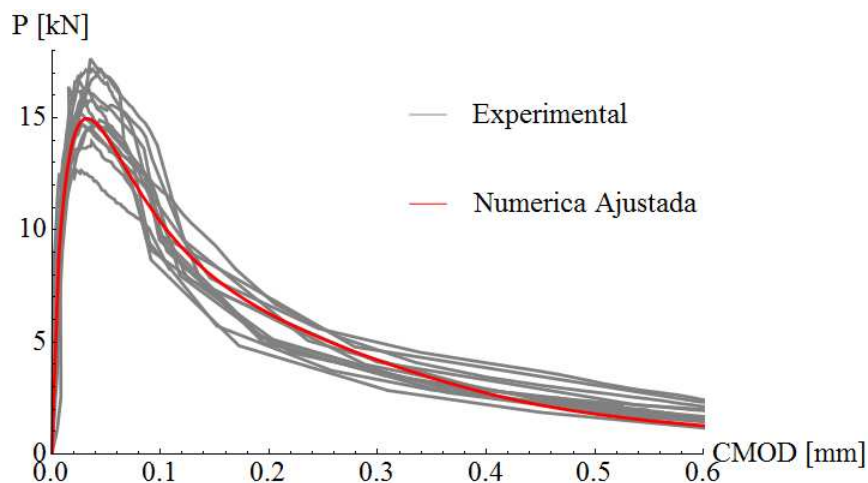


Figura 3.8 – Exemplo de curva P – CMOD ajustada para um grupo de dados experimentais.

Como a análise inversa desta dissertação considera ensaios experimentais em diferentes taxas de carregamento, é realizada mais uma modificação em (3.2) a fim de contabilizar o efeito do ajuste em todas taxas de carregamento simultaneamente:

$$\xi_{sqr}(\vec{p}) = \sum_{j=1}^{Taxa} \sum_{i=1}^{Exp.naTaxa} \int_{v_{ini}}^{v_{fin}} [P_{exp_{i,j}}(v) - P_{num}(v, \vec{p}, \delta_j)]^2 dv \quad (3.3)$$

sendo δ a taxa de carregamento. A Figura 3.9 apresenta um exemplo da abordagem expressa em (3.3).

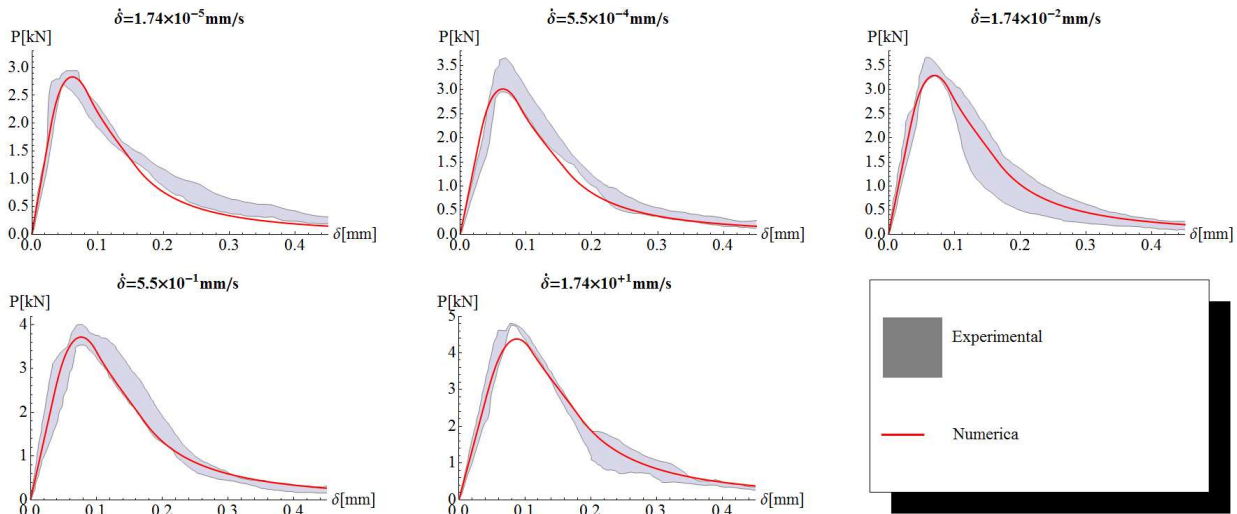


Figura 3.9 – Exemplo de curvas $P - \delta$ ajustadas para grupos de ensaios experimentais realizados em diferentes taxas de carregamento.

O método de Levenberg-Marquardt faz uso do Gradiente (primeira derivada) e da Hessiana (segunda derivada) da função a ser minimizada como informação para estimar um passo que leve a obtenções dos parâmetros que gerem o menor valor de (3.3). A primeira derivada da função (3.3) para um dado parâmetro p_k é expressa em (3.4). A segunda derivada, com base na função (3.4) para um dado parâmetro p_l é expressa em (3.5). O segundo termo da função (3.5) é geralmente retirado da formulação por ser pouco representativo em relação ao valor do primeiro termo e, também, por ser responsável por gerar instabilidades no processo de convergência quando se

encontra próximo do mínimo (PRESS *et al.*, 2007). Dessa forma, a formulação (3.5) é reduzida para (3.6).

$$\frac{\partial \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_k} = -2 \sum_{j=1}^{Taxa} \sum_{ij=1}^{Exp.naTaxa} \int_{v_{ini}}^{v_{fin}} \frac{\partial P_{num}(v, \vec{p}, \delta_j)}{\partial p_k} (P_{exp_{ij}}(v) - P_{num}(v, \vec{p}, \delta_j)) dv \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_k \partial p_l} = & 2 \sum_{j=1}^{Taxa} \sum_{ij=1}^{Exp.naTaxa} \int_{v_{ini}}^{v_{fin}} \frac{\partial P_{num}(v, \vec{p}, \delta_j)}{\partial p_k} \frac{\partial P_{num}(v, \vec{p}, \delta_j)}{\partial p_l} \\ & - \frac{\partial^2 P_{num}(v, \vec{p}, \delta_j)}{\partial p_k \partial p_l} (P_{exp_{ij}}(v) - P_{num}(v, \vec{p}, \delta_j)) dv \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_k \partial p_l} = 2 \sum_{j=1}^{Taxa} \sum_{ij=1}^{Exp.naTaxa} \int_{v_{ini}}^{v_{fin}} \frac{\partial P_{num}(v, \vec{p}, \delta_j)}{\partial p_k} \frac{\partial P_{num}(v, \vec{p}, \delta_j)}{\partial p_l} dv \quad (3.6)$$

Como alguns problemas de Engenharia não possuem uma formulação analítica, as derivadas do modelo numérico podem ser aproximadas por diferenças finitas:

$$\frac{\partial P_{num}(v, \vec{p}, \delta_j)}{\partial p_k} \cong \frac{P_{num}(v, \vec{p} + \overrightarrow{\delta p_k}, \delta_j) - P_{num}(v, \vec{p}, \delta_j)}{\delta p_k} \quad (3.7)$$

sendo $\overrightarrow{\delta p_k}$ um vetor que possui o valor δp_k na posição k e zero nas demais posições.

Com base em (3.4) e (3.6), o vetor Gradiente e a matriz Hessiana são representados por (3.8) e (3.9), respectivamente.

$$Grad(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_n} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$Hess(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_1 \partial p_1} & \dots & \frac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_1 \partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_n \partial p_1} & \dots & \frac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_n \partial p_n} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

O grande diferencial do método de Levenberg-Marquardt encontra-se na adição de um fator $(1 + \lambda)$ na diagonal principal da Hessiana, como mostra (3.10). A cada iteração do procedimento, λ é reavaliado de tal modo a reduzir seu valor a cada passo em que o método se aproxima de um valor de ξ_{sqr} menor que o anterior, e λ é aumentado quando o novo passo gera um valor maior da função a ser minimizada. Quanto menor for o valor de λ mais o método se aproxima do passo do método de Newton, quanto maior for o valor λ mais próximo o passo estará do ponto do qual se obtém as informações sobre o Gradiente e a Hessiana. O passo do método de Levenberg-Marquardt, expresso pelo vetor \vec{d} , é obtido pela solução do sistema (3.11). A nova estimativa do ponto de mínimo (\vec{p}_{new}) é obtida por (3.12).

$$Hess\lambda(\vec{p}) = \begin{pmatrix} (1 + \lambda) \frac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_1 \partial p_1} & \dots & \frac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_1 \partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_n \partial p_1} & \dots & (1 + \lambda) \frac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_n \partial p_n} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$Hess\lambda(\vec{p}) \cdot \vec{d} = -Grad(\vec{p}) \quad (3.11)$$

$$\vec{p}_{new} = \vec{p} + \vec{d} \quad (3.12)$$

A Figura 3.10 apresenta um exemplo do processo iterativo de Levenberg-Marquardt. Na Figura 3.10(a), a partir de um conjunto de parâmetros \vec{p} e de um valor de λ , é calculado $Grad(\vec{p})$ e $Hess\lambda(\vec{p})$, obtendo-se \vec{d} por (3.11), e consequentemente, \vec{p}_{new} por (3.12). Calculando-se $\xi_{sqr}(\vec{p}_{new})$ percebe-se que esse valor é maior que $\xi_{sqr}(\vec{p})$. Dessa forma \vec{p}_{new} é ignorado e se

mantém \vec{p} na Figura 3.10(b), onde um novo \vec{p}_{new} é calculado para um valor de λ maior que o valor utilizado em (a). Como $\xi_{sqr}(\vec{p}_{new}) < \xi_{sqr}(\vec{p})$, \vec{p} recebe os valores \vec{p}_{new} e λ é reduzido, continuando o procedimento na Figura 3.9(c).

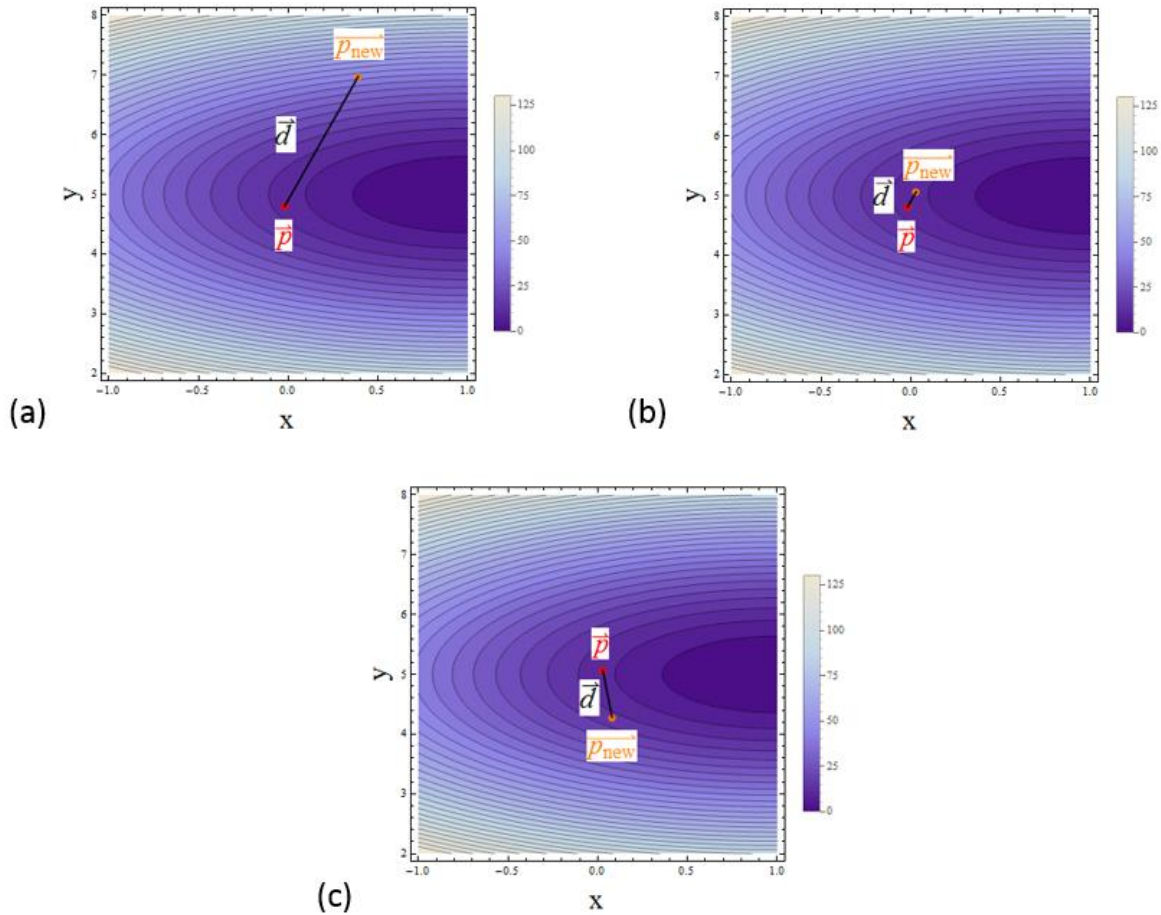


Figura 3.10 – Exemplo do processo iterativo de Levenberg-Marquardt. Em (a) o passo \vec{d} leva \vec{p} para \vec{p}_{new} , onde o valor de $\xi_{sqr}(\vec{p}_{new}) > \xi_{sqr}(\vec{p})$. Em (b) o \vec{p}_{new} calculado em (a) é ignorado e se é calculado um novo \vec{d} para um valor de λ maior, gerando $\xi_{sqr}(\vec{p}_{new}) < \xi_{sqr}(\vec{p})$. Na Figura (c), \vec{p} recebe o valor de \vec{p}_{new} e λ é reduzido, continuando-se o procedimento.

Como todo processo iterativo, o método de Levenberg-Marquardt possui uma condição para indicar se o procedimento chegou ou não em um ponto de mínimo. É estabelecida uma condição de tolerância (tol) para o passo normalizado ($\|\vec{d}\|$), na qual uma vez que $\|\vec{d}\| < tol$, é considerado que o valor de \vec{p} na iteração é suficientemente próximo de ponto de mínimo, e se $\xi_{sqr}(\vec{p})$ chegou em um valor considerado mínimo suficiente. Além da tolerância quanto ao passo, é estabelecido

um limite de iterações para que o procedimento não continue infinitamente. No caso do limite de iterações seja atingido, o procedimento é encerrado, sendo assumido que a convergência ao mínimo não foi atingida. Cabe ao usuário decidir reiniciar o método com um novo ponto de partida ou continuar com o último resultado obtido por mais um ciclo de iterações.

Além de verificar se $\xi_{sqr}(\vec{p}_{new}) < \xi_{sqr}(\vec{p})$, pode-se também verificar se os parâmetros obtidos em \vec{p}_{new} atendem determinadas condições limites. Em alguns casos, determinadas variáveis possuem limites físicos pelos quais são consideradas praticáveis, como, por exemplo, o valor de $f_{tc} \geq 0$. Entretanto, a priori, o método de Levenberg-Marquardt realiza a busca matemática do valor mínimo, e desconhece qualquer condição limite dos parâmetros. Para que as condições sejam consideradas e que o método não se encaminhe para uma solução fisicamente não factível, realiza-se uma verificação dos parâmetros \vec{p}_{new} , antes de se calcular $\xi_{sqr}(\vec{p}_{new})$. Caso os valores de \vec{p}_{new} não atendam as condições limites, \vec{p}_{new} é ignorado e retorna-se a \vec{p} (onde os parâmetros atendem as condições) com um valor de λ maior, para que a nova solução de \vec{p}_{new} seja mais próxima de \vec{p} , e possivelmente atenda as condições.

O algoritmo de Levenberg-Marquardt pode ser resumido em:

1. Comece com um valor trivial para os parâmetros \vec{p} ;
2. Calcule $\xi_{sqr}(\vec{p})$;
3. Escolha um valor pequeno para λ para começar o procedimento, por exemplo, $\lambda = 0.001$;
4. Calcule o vetor $Grad(\vec{p})$ e a matriz $Hess(\vec{p})$ de acordo com (3.8) e (3.9);
5. Modifique $Hess(\vec{p})$ multiplicando a diagonal principal por $(1 + \lambda)$, obtendo-se $Hess\lambda(\vec{p})$;
6. Calcule \vec{d} , o vetor de incrementos, resolvendo $Hess\lambda(\vec{p}) \cdot \vec{d} = -Grad(\vec{p})$;
7. Se $\|\vec{d}\| < tol$, pare, \vec{p} já é o conjunto de parâmetros que representam o ponto de mínimo (i. é, após a convergência ter sido alcançada);
8. Faça $\vec{p}_{new} = \vec{p} + \vec{d}$;
9. Se \vec{p}_{new} não atende as condições de contorno, multiplique λ por 10. Adicione mais uma iteração ao conjunto de iterações contabilizadas. Se o número de iterações atingiu o seu limite, pare, o método não convergiu no limite de iterações estipulado. Caso contrário, retorne ao passo 5 com \vec{p} ;

10. Calcule $\xi_{sqr}(\vec{p}_{new})$;
11. Se $\xi_{sqr}(\vec{p}_{new}) \geq \xi_{sqr}(\vec{p})$, multiplique λ por 10. Adicione mais uma iteração ao conjunto de iterações contabilizadas. Se o número de iterações atingiu o seu limite, pare, o método não convergiu no limite de iterações estipulado. Caso contrário, retorne ao passo 5 com \vec{p} ;
12. Se $\xi_{sqr}(\vec{p}_{new}) < \xi_{sqr}(\vec{p})$, divida λ por 10. Adicione mais uma iteração ao conjunto de iterações contabilizadas. Se o número de iterações atingiu o seu limite, pare, o método não convergiu no limite de iterações estipulado. Verifique se $\xi_{sqr}(\vec{p}_{new}) < tol_{\xi_{sqr}}$. Se a condição for satisfeita, o método convergiu, caso contrário, retorne ao passo 4 com $\vec{p} = \vec{p}_{new}$;

No algoritmo acima optou-se por modificar λ durante as iterações por fatores de 10. Não é obrigatório o uso de fatores 10, podendo-se utilizar quaisquer outros valores. Nesta dissertação optou-se pelo uso de fatores 10 por ser ter se mostrado adequado nos testes realizados.

3.4 – Análise Matemática dos Modelos Visco-Coesivos

Nesta subseção será feita uma análise matemática do comportamento das formulações visco-coesivas apresentadas na subseção 2.10. As curvas coesivas apresentadas na subseção 2.8 são bem comportadas e não possuem combinações diferentes de seus parâmetros característicos que resultem em uma mesma curva. Em relação aos modelos de visco-coesão é importante avaliar o comportamento da formulação e identificar possíveis dificuldades antes de realizar o procedimento de análise inversa.

O modelo viscoso de Tandon *et al.* (1995), apresentado em (2.10) e repetido em (3.13), realiza uma adição aos valores de tensão da curva coesiva, como expresso em (2.9). Como a curva coesiva já possui solução única para qualquer combinação de seus parâmetros, será feita somente a análise da formulação (3.13). Os parâmetros a serem ajustados desse modelo são: f_{tc} , k e \dot{w}_0 . Como f_{tc} já é um termo pertencente ao modelo coesivo, os parâmetros livres a serem analisados serão k e \dot{w}_0 .

$$\Psi(\dot{w}) = f_{tc} k \sin^{-1} \left(\frac{\dot{w}}{\dot{w}_0} \right) \quad (3.13)$$

O comportamento de $\Psi(\dot{w})$ para variações de k (0.5, 1.0, 2.0) com $f_{tc} = 5,0 \text{ MPa}$ e $\dot{w}_0 = 1,0 \text{ mm/s}$ é apresentado na Figura 3.11. O comportamento de $\Psi(\dot{w})$ para variações de \dot{w}_0 (0,5; 1,0; 2,0 mm/s) com $f_{tc} = 5,0 \text{ MPa}$ e $k = 1,0$ é apresentado na Figura 3.12. Em ambas Figuras pode-se perceber que (3.13) possui um limite quando $\dot{w} = \dot{w}_0$ e que $\Psi(\dot{w})$ tende a infinito próximo ao ponto limite. Pela análise das curvas e pela expressão (2.9), pode-se considerar que (3.13) tem a capacidade de proporcionar à curva coesiva o aumento de tensão suportada pelo concreto com o aumento da taxa de carregamento, descrito na subseção 2.9. Entretanto, como a curva (3.13) sempre aumenta com o aumento de \dot{w} , pode-se afirmar que esta formulação não é capaz de descrever o decaimento de energia descrito na subseção 2.9 (Figura 2.19). Em caso de ajuste de parâmetros simultâneos da curva coesiva com a viscosa, por análise inversa, com um conjunto de corpos de provas semelhantes aos descritos na subseção 2.9, é provável que a curva coesiva seja forçada a assumir, matematicamente, um valor de energia menor que o caso estático real. Este comportamento é esperado pois como (3.13) sempre aumenta com o aumento de \dot{w} , a curva coesiva (que possui mais flexibilidade no conjunto de parâmetros) irá reduzir a sua energia para suprir a tendência de (3.13).

Na Figura 3.13 é feita uma observação sobre a unicidade da solução por análise inversa de (3.13). No caso da Figura, são apresentadas duas curvas com pares de parâmetros k e \dot{w}_0 distintos. Percebe-se que essas duas curvas possuem soluções muito próximas até a velocidade de abertura de fratura $\dot{w} = 0,5 \text{ mm/s}$. Essa informação serve como alerta de unicidade de solução para análise inversa com ensaios em velocidades baixas.

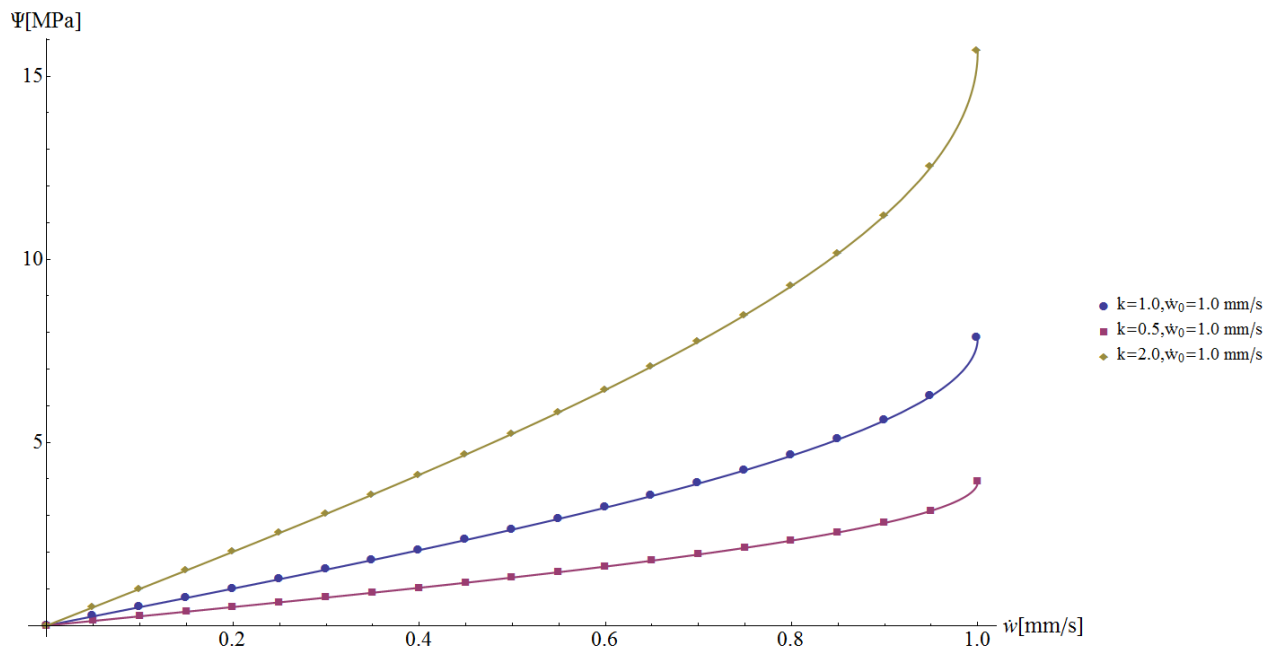


Figura 3.11 – Avaliação do comportamento do parâmetro k da formulação (3.13) para $f_{tc} = 5,0$ MPa.

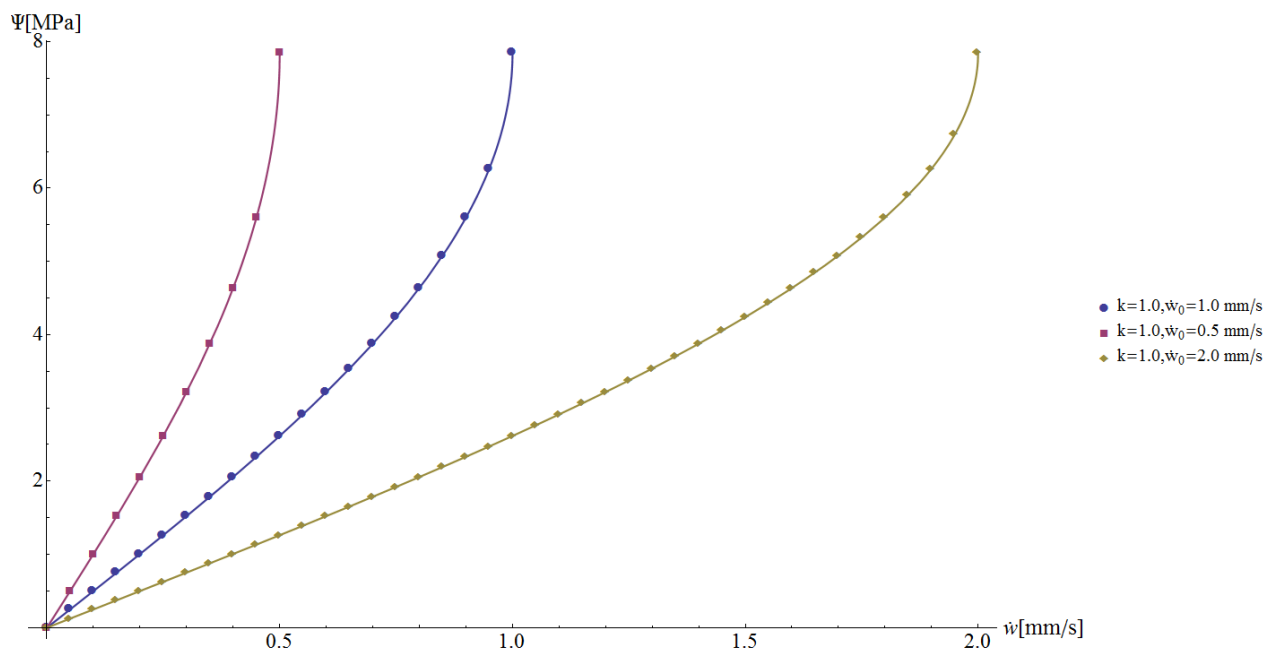


Figura 3.12 – Avaliação do comportamento do parâmetro \dot{w}_0 da formulação (3.13) para $f_{tc} = 5,0$ MPa.

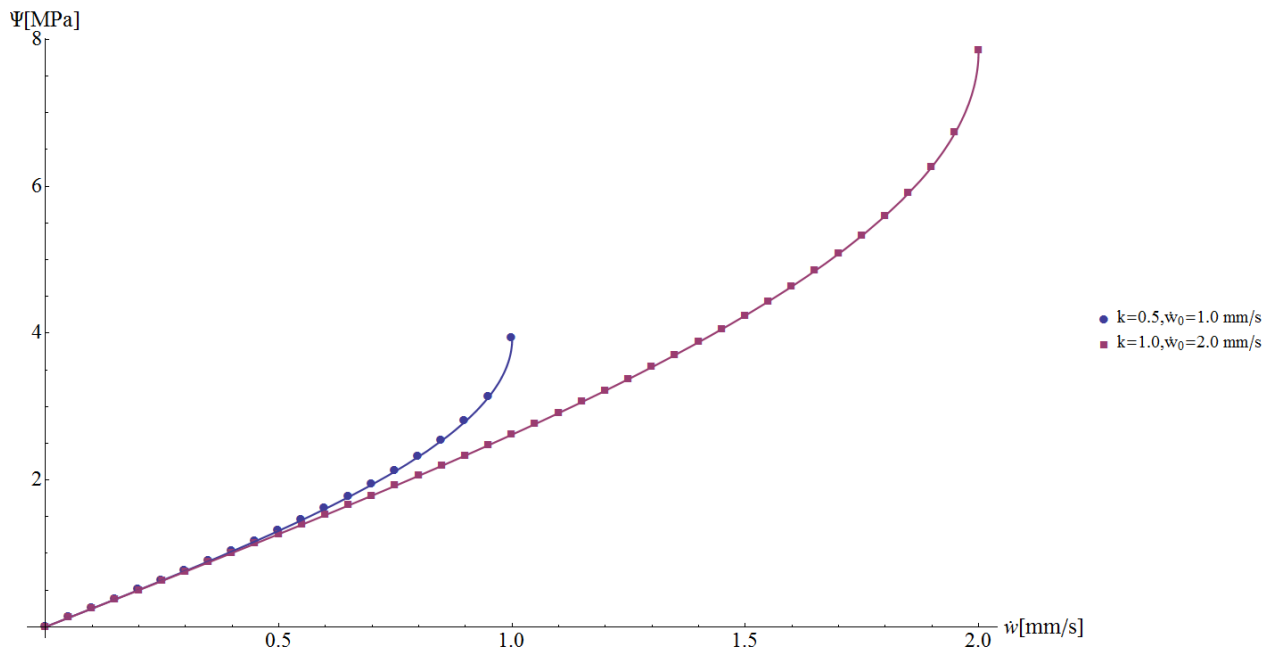


Figura 3.13 – Grande similaridade dos valores de valores de Ψ de Tandon et al. (1995) para parâmetros distintos em velocidades baixas.

A formulação para Ψ de Zhou *et al.* (2005) e Rosa *et al.* (2012) é idêntica, mudando somente a forma de contribuição desta para a função coesiva. Sendo assim, a função viscosa expressa em (2.12) e repetida em (3.14), será avaliada uma única vez para ambos os contextos. Os parâmetros a serem ajustados desse modelo são n e \dot{w}_0 .

$$\Psi(\dot{w}) = 1 + \left(\frac{\dot{w}}{\dot{w}_0}\right)^n \quad (3.14)$$

Na Figura 3.14 é apresentado o comportamento de (3.14) para variações de n (0,5; 1,0; 2,0) com $\dot{w}_0 = 1,0 \text{ mm/s}$. Na Figura 3.15 é apresentado o comportamento de (3.14) para variações de \dot{w}_0 (0,5; 1,0; 2,0 mm/s) com $n = 1,0$. Pela consideração de Zhou *et al.* (2005), Ψ contribui para expansão de w_c (abertura crítica de fratura), e desta forma, a formulação da coesão combinada com o termo viscoso não é capaz de representar o comportamento de aumento de tensão suportada pelo concreto com o aumento da taxa de carregamento. Também, por esta formulação proposta, não é possível representar o comportamento de decaimento de energia apresentado na subseção 2.9. Em relação ao que foi proposto por Rosa *et al.* (2012), Ψ contribui para expansão de f_{tc} com o

aumento da velocidade de abertura, logo, é capaz de descrever o aumento de tensão descrito na subseção 2.9. Entretanto, como os demais métodos, a proposta de Rosa *et al.* (2012) não é capaz de descrever o decaimento de energia.

Na Figura 3.14 é importante ressaltar um ponto com solução tripla para $\dot{w}_0 = 1,0 \text{ mm/s}$. Desta forma, é necessário evitar ajustes baseados em ensaios que impõem um único \dot{w} para os corpos de prova.

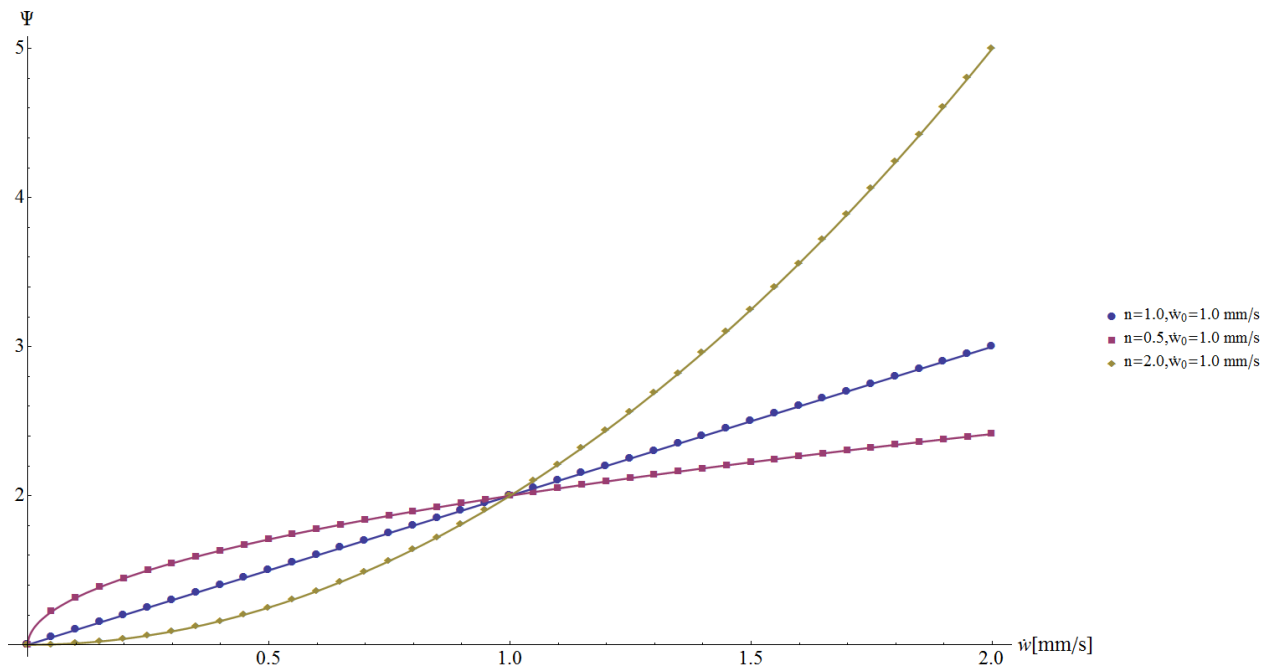


Figura 3.14 – Avaliação do comportamento do parâmetro n da formulação (3.14).

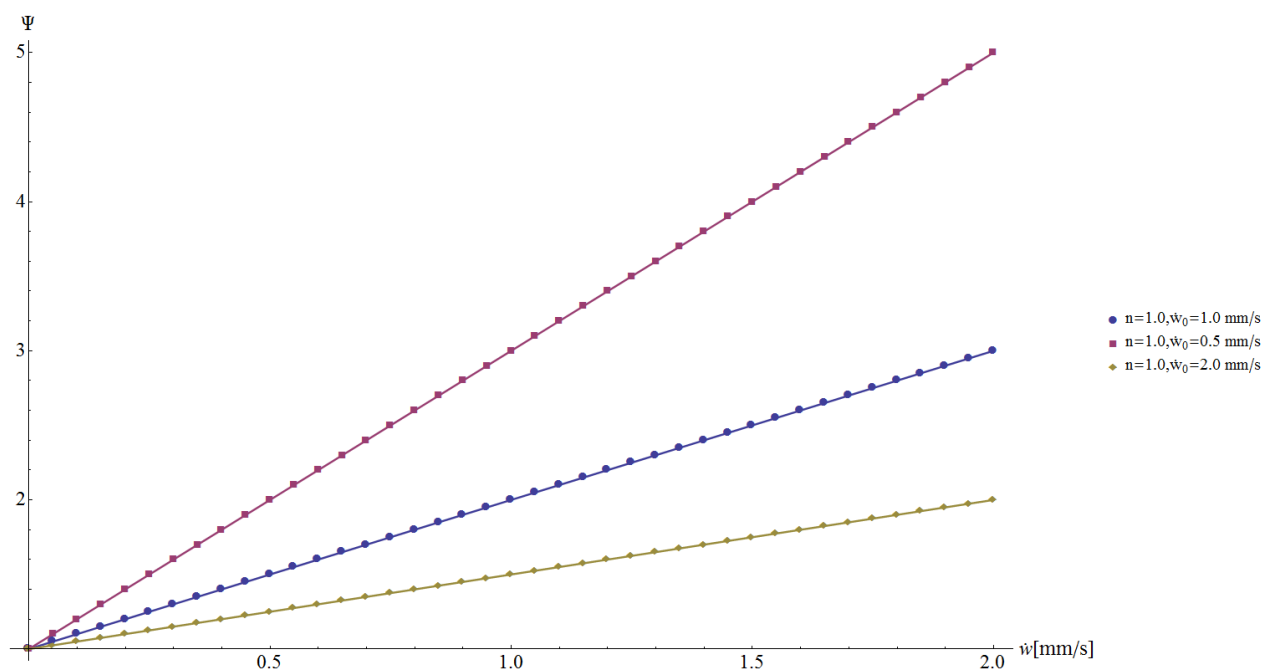


Figura 3.15 – Avaliação do comportamento do parâmetro \dot{w}_0 da formulação (3.14).

Na subseção 2.7 foram apresentados alguns ensaios experimentais de caracterização do concreto. Dentre eles, alguns podem ser utilizados para caracterizar os parâmetros da curva Ψ : o de tração uniaxial, o de compressão diametral e o de flexão em três pontos.

O ensaio de tração uniaxial, no caso de avaliação da taxa de carregamento, seria executado em uma taxa de carregamento $\dot{\delta}$, o que representaria $\dot{w} = \dot{\delta}$. Sendo assim, um ensaio de tração uniaxial executado em uma taxa constante $\dot{\delta}$ geraria um ponto de informação sobre a curva viscosa. Devido aos cuidados para se obter unicidade da solução por análise inversa, seria necessário mais de um ensaio com velocidade diferente para se ajustar os parâmetros de Ψ , independente do modelo. Na Figura 3.16 é feita uma representação da quantidade de informação obtida sobre um modelo para ensaios de tração uniaxial realizados à taxa constante. Cada ponto apresentado na Figura 3.16 representa a informação obtida por um ensaio de tração uniaxial. O ensaio de tração uniaxial poderia também ser executado em taxas variáveis, entretanto, como descrito na subseção 2.7, o ensaio apresenta tantas dificuldades que a inclusão da variação da taxa demandaria mais incertezas para o processo de análise inversa.

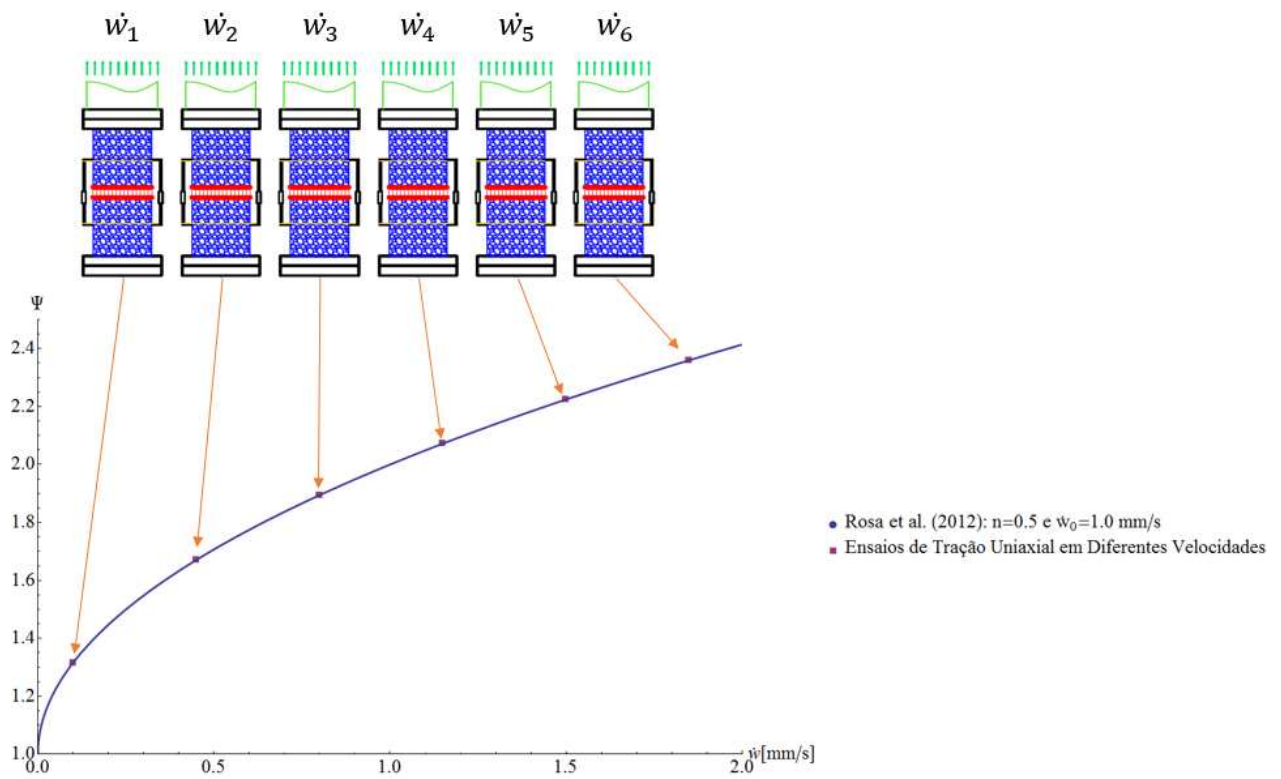


Figura 3.16 – Representação da informação obtida por ensaios de tração uniaxial em relação a curva Ψ de Rosa et al. (2012).

O ensaio de compressão diametral teria, em relação ao de tração uniaxial, a vantagem de obter mais informações sobre o processo viscoso utilizando uma taxa de carregamento constante. Na Figura 3.17 é feita uma representação da variação de \dot{w} durante o ensaio.

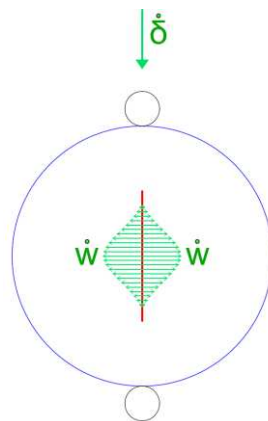


Figura 3.17 – Representação da variação de \dot{w} em um ensaio de compressão diametral com $\dot{\delta}$ constante.

Assim como o ensaio de compressão diametral, o ensaio de flexão em três pontos gera um campo de variação de \dot{w} para $\dot{\delta}$ constante. Na Figura 3.18 é feita uma representação da variação de \dot{w} durante o ensaio. Na Figura 3.19 é expresso o quanto de informação um ensaio de compressão diametral ou um ensaio de flexão em três pontos podem fornecer sobre Ψ com $\dot{\delta}$ constante.

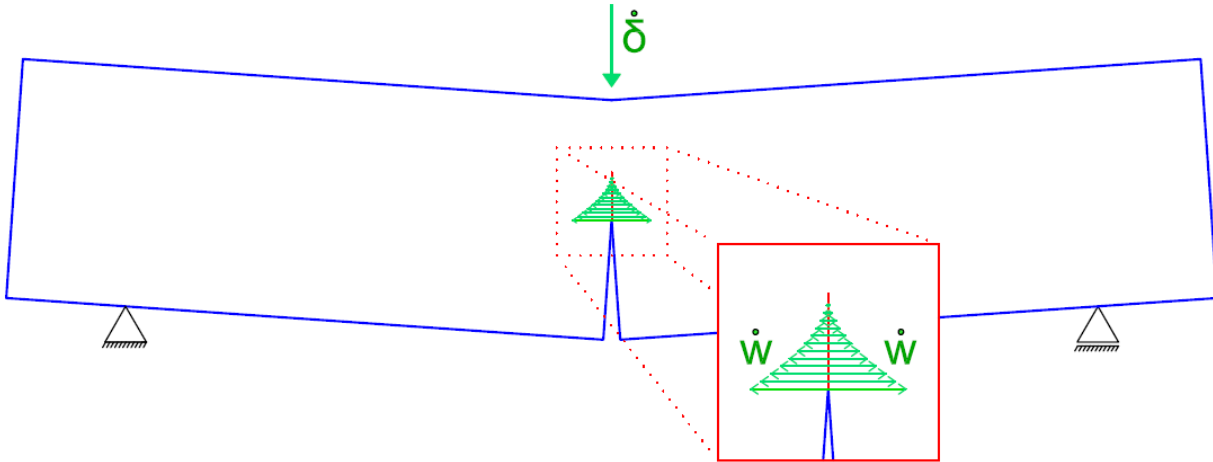


Figura 3.18 – Representação da variação de \dot{w} em um ensaio de flexão em três pontos com $\dot{\delta}$ constante.

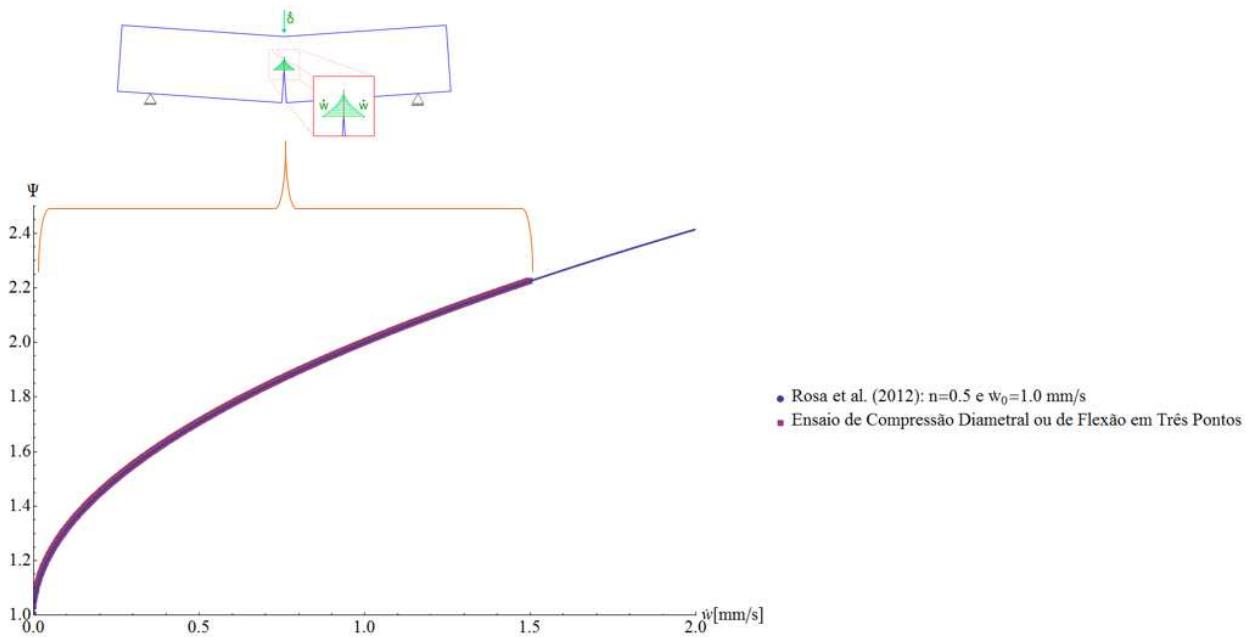


Figura 3.19 – Representação da informação obtida por um Ensaio de Compressão Diametral ou de Flexão em Três Pontos em relação a curva Ψ de Rosa et al. (2012).

Combinando as expressões analíticas de ambos modelos visco-coesivos (Zhou, 2015; Rosa *et al.*, 2012) com as observações experimentais, tende a ser mais indicado utilizar ensaios de compressão diametral ou de flexão de três pontos no processo de análise inversa do que o uso do ensaio de tração uniaxial.

3.5 – Considerações Finais

Nesta seção foi tratada a obtenção de parâmetros para o modelo visco-coesivo através de recursos de análise inversa. Procedimentos de análise inversa se baseiam em problemas de minimização de funções de erros. Existem algoritmos de minimização que se baseiam em derivadas da função e métodos que realizam buscas diretas sobre o domínio. Métodos baseados nas derivadas tendem a ser mais rápidos que métodos diretos, porém requerem que a função seja bem comportada, com poucos ruídos. No caso dos problemas tratados nesta dissertação, a função a ser minimizada pode ser considerada bem comportada, logo, optou-se pelo uso do algoritmo de Levenberg-Marquardt (subseção 3.3), por se tratar de um método baseado em derivadas com algumas vantagens em relação a outros métodos similares.

Na subseção 3.4 foi feita uma avaliação matemática das curvas de viscosidade afim de identificar possíveis dificuldades com a análise inversa. Dentre os três modelos estudados, o modelo de Rosa *et al.* (2012) é o que se aproxima mais do comportamento do concreto. Outro ponto importante da seção é a constatação da quantidade de informações que se obtém em um ensaio de compressão diametral ou um ensaio de flexão em três pontos sobre a curva viscosa.

4 – MODELAGEM BIDIMENSIONAL DO PROCESSO DE FRATURAMENTO VISCO-COESIVO

4.1 – Considerações Iniciais

A subseção 3.4 apresentou considerações importantes sobre o comportamento dos modelos viscosos e sobre alguns ensaios experimentais. Os ensaios de compressão diametral e de flexão em três pontos são duas alternativas a serem utilizadas pelo procedimento de análise inversa. Devido ao grande número de artigos que fazem uso do ensaio de flexão em três pontos para a caracterização do concreto (por exemplo, Ferreira, 2012, Ince, 2004, Zhang *et al.*, 2010, Sousa, 2011, Rosa *et al.*, 2012), optou-se por fazer o estudo de métodos numéricos que reproduzem esse ensaio.

Existe um número considerável de métodos numéricos capazes de representar a propagação da fratura em materiais quase-frágeis. Em geral, esses métodos são baseados no método dos elementos finitos ou no método dos elementos de contorno.

Em meio a tantos métodos, o critério utilizado para seleção baseou-se na escolha dos métodos que tivessem o menor custo computacional com a melhor precisão da solução. Esta escolha se deve as rotinas de análise inversa que exigem o cálculo do modelo numérico várias vezes. Métodos muito custosos tendem a ser mais demorados, logo, é interessante utilizar métodos menos custosos para que o procedimento de análise inversa seja rápido.

Modelos bidimensionais conseguem expressar bem o comportamento de uma viga prismática ranhurada submetida a flexão em três pontos. A simulação de processos de fraturamento para materiais quase-frágeis pode ser obtida com a aplicação do modelo de fissura fictícia. Este modelo permite uma simulação adequada da evolução de fissuras em peças de concreto.

O concreto é um material heterogêneo, e devido a isso, o desenvolvimento da fratura em um corpo de prova não é idêntico ao desenvolvimento da fratura em um outro corpo de prova constituído pelo mesmo concreto. Para propiciar uma região preferencial de propagação de fratura, os ensaios de flexão em três pontos possuem uma ranhura. As fraturas tendem a se propagar da ponta da ranhura até o topo da viga, localizando-se em torno do eixo da viga. Como o conjunto de ensaios gera diferentes desenvolvimentos da fratura em torno do eixo da viga, considera-se no modelo numérico a simplificação para o desenvolvimento de uma fratura ao longo do eixo. A Figura 4.1 representa essa simplificação.

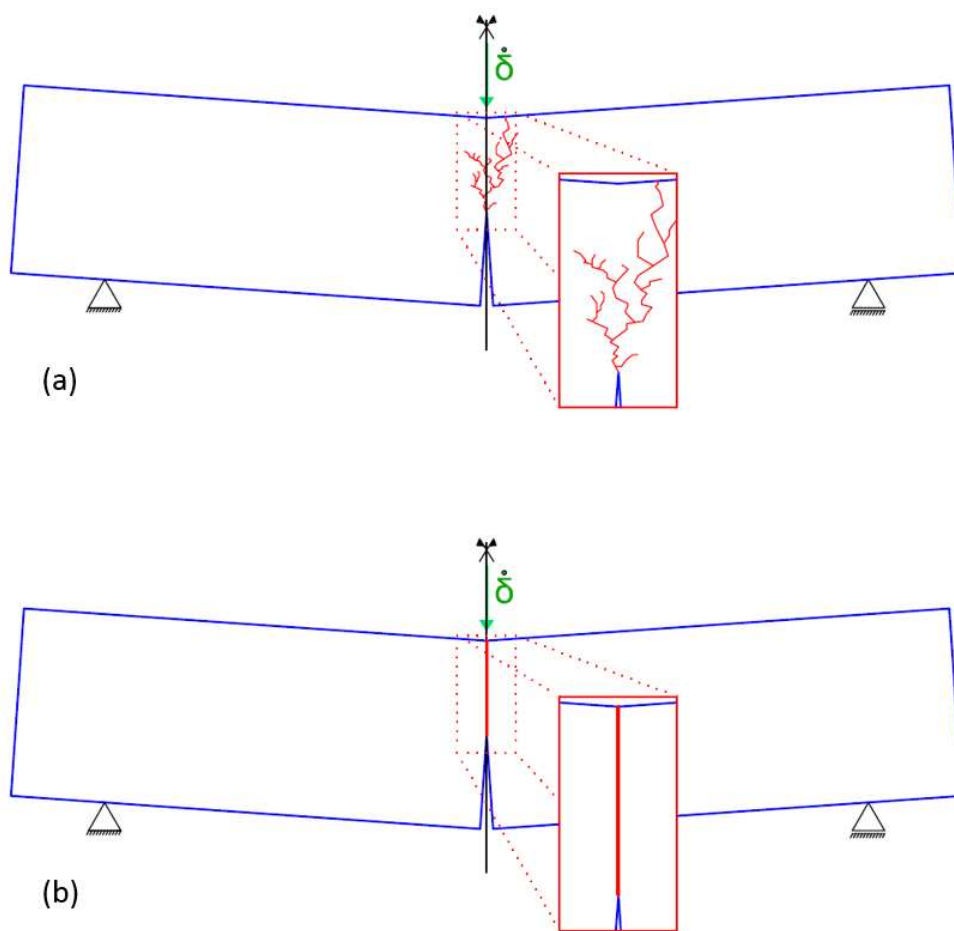


Figura 4.1 – (a) Representação da aleatoriedade da propagação da fratura no ensaio de flexão em três pontos no concreto.
 (b) Simplificação adotada para o modelo numérico.

Com base nas premissas apresentadas, escolheram-se dois modelos numéricos: *Cracked Hinge Model* (Olesen, 2001) e Superposição de Fraturas (Elices e Planas, 1991). Na subseção 4.2 é apresentado o *Cracked Hinge Model* (CHM) e na subseção 4.3 a Superposição de Fraturas (SF). Na subseção 4.4 é feita uma comparação entre os modelos.

4.2 – Cracked Hinge Model (Olesen, 2001)

Olesen (2001) apresenta uma solução analítica simplificada para a propagação da fratura em vigas. A ideia básica consiste em modelar uma faixa da região por onde se propaga a fratura com elementos de mola. Esses elementos de mola são conectados a bordas rígidas que se ligam ao restante da viga. A Figura 4.2 apresenta essa modelagem. Na Figura, L , h e w_v são, respectivamente, o comprimento, a altura e a largura da viga. S_p é o vão livre da viga, a_0 é a altura da ranhura inicial, b_0 é a altura sem ranhura e s é o comprimento da faixa de molas.

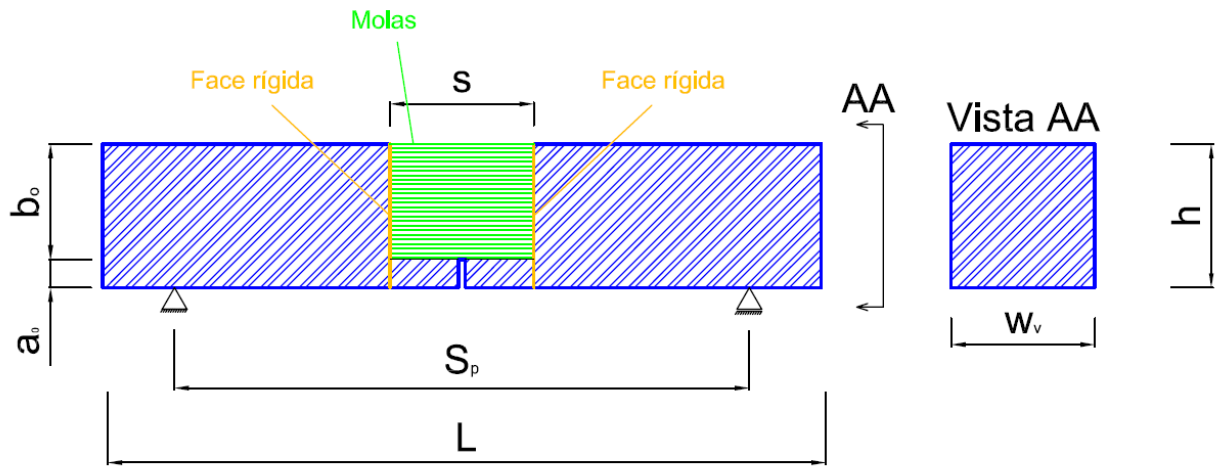


Figura 4.2 – Representação do Cracked Hinge Model.

Para representar o processo de flexão em três pontos, cada borda rígida irá rotacionar. Com base na rotação das bordas se é estabelecido o equilíbrio do sistema pela reação das molas. A relação constitutiva das molas obedece:

$$\sigma_m = \begin{cases} E_c \cdot \varepsilon, & \text{estado pré-fratura (Elástico)} \\ \sigma(w) \text{ ou } \mathcal{F}(w, \dot{w}), & \text{estado fraturado} \end{cases} \quad (4.1)$$

sendo E o módulo de elasticidade do concreto e ε a deformação elástica. $\sigma(w)$ representa a lei coesiva e $\mathcal{F}(w, \dot{w})$ a lei visco-coesiva, sendo w a abertura da fratura e \dot{w} a velocidade de abertura. A passagem do estado pré-fratura para o fraturado ocorre quando $E_c \cdot \varepsilon = f_{tc} = \sigma(0)$. A Figura 4.3

mostra a rotação das faces rígidas e a mudança do estado das molas. A rotação das faces é expressa pelo ângulo φ .

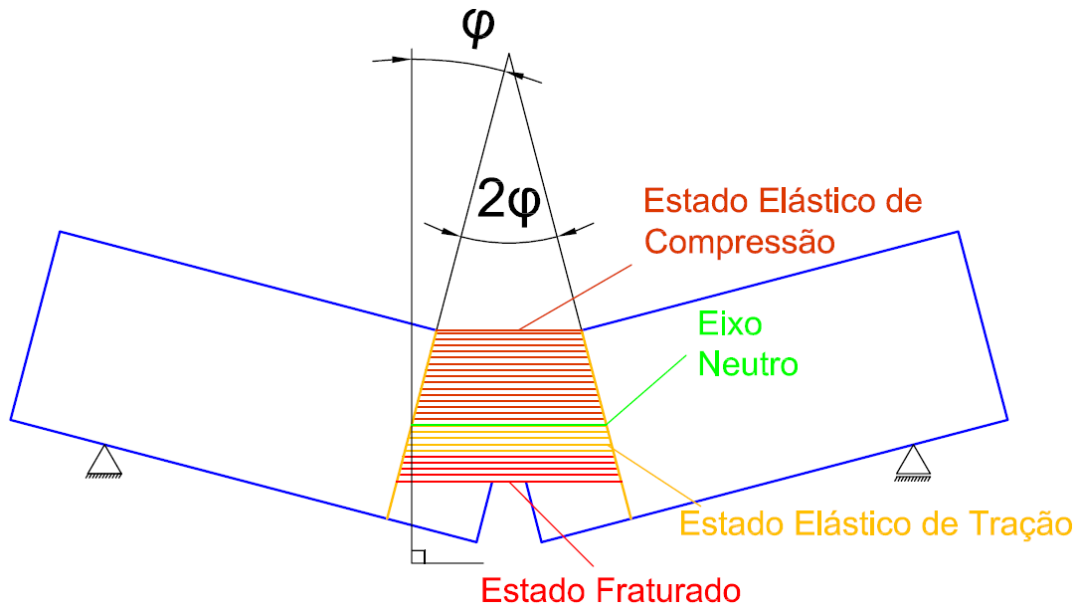


Figura 4.3 – Rotação das faces rígidas e mudança dos estados das molas.

A Figura 4.4 mostra um enfoque nas faces rígidas, tratando-as separadamente do conjunto da viga. O termo M expressa o momento desenvolvido pela rotação das faces. A Figura 4.5 apresenta a distribuição das tensões (σ) ao longo da face rígida. O subscrito c refere-se à tensões de compressão, t à tração elástica e f à tensão devida à coesão. η é um termo auxiliar para indicar a parcela de b_0 que se encontra em tração, variando entre 0 e 1.

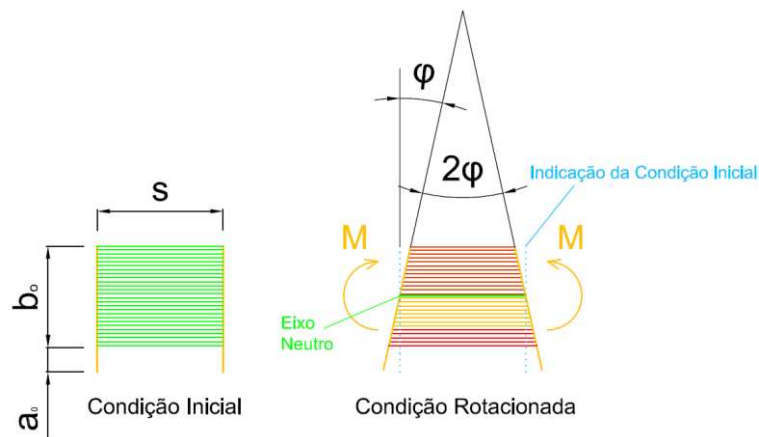


Figura 4.4 – Detalhe da rotação das faces rígidas.

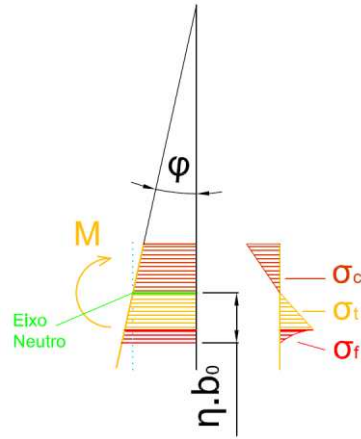


Figura 4.5 – Campo de tensões ao longo da face rígida.

Para o caso da solução de um problema não dependente da taxa de carregamento, as curvas $P - \delta$ e/ou $P - CMOD$ podem ser obtidas pela imposição de uma série de ângulos φ , como apresenta Olesen (2011). Imposto-se um valor φ , deve-se obter o valor η que satisfaça o equilíbrio de forças nas faces rígidas, provenientes dos campos de tensões, como expressa (4.2).

Na Equação (4.2), $n_c(\eta)$, $n_t(\eta)$ e $n_f(\eta)$ são as funções de forças de compressão, tração elástica e coesão, respectivamente. Como a espessura da viga é constante, as funções foram simplificadas, sendo sua unidade força por unidade de espessura. As Equações (4.3), (4.4) e (4.5) apresentam as referidas funções com as devidas simplificações.

$$n_c(\eta) - n_t(\eta) - n_f(\eta) = 0 \quad (4.2)$$

$$n_c(\eta) = \frac{\varphi \cdot E \cdot [(1 - \eta) \cdot b_0]^2}{2 \cdot s} \quad (4.3)$$

$$n_t(\eta) = \frac{f_{tc}^2 \cdot s}{2 \cdot \varphi \cdot E_c} \quad (4.4)$$

$$n_f(\eta) = \int_0^{cod(\eta)} \frac{\sigma(w)}{\varphi} dw \quad (4.5)$$

Em (4.5), a função $cod(\eta)$ expressa a abertura da fratura no ponto localizado no final da ranhura inicial (onde se inicia o processo de fraturamento na viga). A função de $cod(\eta)$ pode ser obtida em (4.6).

$$cod(\eta) = \eta \cdot b_0 \cdot \varphi - \frac{f_{tc} \cdot S}{E_c} \quad (4.6)$$

Obtendo-se η por (4.2), os valores de P , δ e $CMOD$ podem ser obtidos por (4.7), (4.8) e (4.9), respectivamente. $M(\eta)$ é a função do momento atuante nas faces rígidas, expressa em (4.10). Em (4.11) é definida a função do momento por unidade de espessura da viga, $m(\eta)$, e esta função é dividida em 3 funções que representam os momentos das parcelas de compressão, tração e coesão, apresentadas em (4.12), (4.13) e (4.14), respectivamente. Os valores de v_1 e v_2 , definidos em (4.15) e (4.16), são formulações empíricas auxiliares para o cálculo de $CMOD$ e δ (Tada *et al.*, 2000). Os ângulos auxiliares, φ_{elast} e φ_{crk} , proveniente da fase elástica, são expressos em (4.17) e (4.18).

$$P(\eta) = \frac{4 \cdot M(\eta)}{S_p} \quad (4.7)$$

$$\delta(\eta) = \frac{M(\eta) \cdot S_p^2}{E_c \cdot w_v \cdot h^3} + \frac{6 \cdot M(\eta) \cdot S_p \cdot v_2}{h^2 \cdot w_v \cdot E_c} + \frac{S_p}{4} \cdot (\varphi - \varphi_{elast}(\eta)) \quad (4.8)$$

$$CMOD(\eta) = cod(\eta) + \frac{24 \cdot a_0 \cdot M(\eta) \cdot v_1}{h^2 \cdot w_v \cdot E_c} + a_0 \cdot (\varphi - \varphi_{crk}) \quad (4.9)$$

$$M(\eta) = w_v \cdot m(\eta) \quad (4.10)$$

$$m(\eta) = m_c(\eta) + m_t(\eta) + m_f(\eta) \quad (4.11)$$

$$m_c(\eta) = \left(\frac{1}{6} + \frac{\eta}{3}\right) \cdot b_0 \cdot n_c(\eta) \quad (4.12)$$

$$m_t(\eta) = \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{\eta}{3} + \frac{2 \cdot cod(\eta)}{3 \cdot \varphi \cdot b_0}\right)\right] \cdot b_0 \cdot n_t(\eta) \quad (4.13)$$

$$m_f(\eta) = \left(\frac{1}{2} - \frac{cod(\eta)}{\varphi \cdot b_0}\right) \cdot b_0 \cdot n_f(\eta) + \int_0^{cod(\eta)} \frac{w \cdot \sigma(w)}{\varphi^2} dw \quad (4.14)$$

$$v_1 = 0,76 - 2,28 \cdot \frac{a_0}{h} + 3,87 \cdot \left(\frac{a_0}{h}\right)^2 - 2,04 \cdot \left(\frac{a_0}{h}\right)^3 + \frac{0,66}{\left(1 - \frac{a_0}{h}\right)^2} \quad (4.15)$$

$$v_2 = \left(1 - \frac{a_0}{h}\right)^2 \cdot \left[5,58 - 19,57 \cdot \frac{a_0}{h} + 36,82 \cdot \left(\frac{a_0}{h}\right)^2 - 34,94 \cdot \left(\frac{a_0}{h}\right)^3 + 12,77 \cdot \left(\frac{a_0}{h}\right)^4\right] \quad (4.16)$$

$$\varphi_{elast(\eta)} = \frac{12 \cdot m(\eta) \cdot s}{E_c \cdot b_0^3} \quad (4.17)$$

$$\varphi_{crk} = \frac{2 \cdot s \cdot f_{tc}}{b_0 \cdot E_c} \quad (4.18)$$

Para um problema dependente da taxa de carregamento, a equação (4.2) é substituída pela solução do sistema (4.18). Em (4.18), os termos a serem determinados são η e cod_φ (abertura da fratura no ponto localizado no final da ranhura inicial para o φ estipulado). As funções para o cálculo das forças de trações são modificadas devido aos efeitos da taxa de carregamento e são apresentadas em (4.19) e (4.20). Em (4.21) define-se a equação que deve ser resolvida numericamente para a obtenção de δ_φ , que é o deslocamento vertical da viga. A velocidade da abertura da fratura é estimada pela função (4.22). A função que calcula o *CMOD* para o φ estipulado esta definida em (4.27).

$$\begin{cases} n_c(\eta) - n_{tv}(\eta, cod_\varphi) - n_{fv}(\eta, cod_\varphi) = 0 \\ \eta \cdot b_0 \cdot \varphi - \frac{\mathcal{F}(0, \dot{w}_f(cod_\varphi, \delta_\varphi)) \cdot s}{E_c} - cod_\varphi = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

$$n_{tv}(cod_\varphi, \delta_\varphi) = \frac{\mathcal{F}(0, \dot{w}_f(cod_\varphi, \delta_\varphi))^2 \cdot s}{2 \cdot \varphi \cdot E_c} \quad (4.19)$$

$$n_{fv}(cod_\varphi, \delta_\varphi) = \frac{\int_0^{cod_\varphi} \mathcal{F}(w, \dot{w}_f(w, \delta_\varphi)) dw}{\varphi} \quad (4.20)$$

$$\delta_\varphi = \frac{M_v(\eta, cod_\varphi, \delta_\varphi) \cdot S_p^2}{E_c \cdot w_v \cdot h^3} + \frac{6 \cdot M_v(\eta, cod_\varphi, \delta_\varphi) \cdot S_p \cdot v_2}{S_p^2 \cdot w_v \cdot E_c} + \frac{S_p}{4} \cdot (\varphi - \varphi_{elastv}(\eta, cod_\varphi, \delta_\varphi)) \quad (4.21)$$

$$\dot{w}_f(w, \delta_\varphi) = \frac{w - w_{last}}{\delta_\varphi - \delta_{\varphi last}} \cdot \dot{\delta} \quad (4.22)$$

$$M_v(\eta, cod_\varphi, \delta_\varphi) = w_v \cdot m_v(\eta, cod_\varphi, \delta_\varphi) \quad (4.23)$$

$$m_v(\eta, cod_\varphi, \delta_\varphi) = m_c(\eta) + m_{tv}(\eta, cod_\varphi, \delta_\varphi) + m_{fv}(\eta, cod_\varphi, \delta_\varphi) \quad (4.24)$$

$$m_{tv}(\eta, cod_\varphi, \delta_\varphi) = \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{\eta}{3} + \frac{2 \cdot cod_\varphi}{3 \cdot \varphi \cdot b_0} \right) \right] \cdot b_0 \cdot n_{tv}(cod_\varphi, \delta_\varphi) \quad (4.25)$$

$$m_{fv}(\eta, cod_\varphi, \delta_\varphi) = \left(\frac{1}{2} - \frac{cod_\varphi}{\varphi \cdot b_0} \right) \cdot b_0 \cdot n_{fv}(cod_\varphi, \delta_\varphi) + \int_0^{cod_\varphi} \frac{w \cdot \mathcal{F}(w, \dot{w}_f(w, \delta_\varphi))}{\varphi^2} dw \quad (4.26)$$

$$CMOD_\varphi(\eta, cod_\varphi, \delta_\varphi) = cod_\varphi + \frac{24 \cdot a_0 \cdot M_v(\eta, cod_\varphi, \delta_\varphi) \cdot v_1}{h^2 \cdot w_v \cdot E_c} + a_0 \cdot (\varphi - \varphi_{crkv}(cod_\varphi, \delta_\varphi)) \quad (4.27)$$

$$\varphi_{elastv}(\eta, cod_{\varphi}, \delta_{\varphi}) = \frac{12. m_v(\eta, cod_{\varphi}, \delta_{\varphi}). s}{E_c. b_0^3} \quad (4.28)$$

$$\varphi_{crkv}(cod_{\varphi}, \delta_{\varphi}) = \frac{2. s. \mathcal{F}(0, \dot{w}_f(cod_{\varphi}, \delta_{\varphi}))}{b_0. E_c} \quad (4.29)$$

4.3 – Método de Superposição de Fraturas

Planas e Elices (1991) a partir do método de influências, desenvolveram um procedimento de superposição de fraturas conhecido como *Smeared Crack Tip Method* ou Superposição de Fraturas (SF). O procedimento permite realizar com agilidade um grande número de cálculos, uma vez que se obtém um sistema de equações bastante otimizado, cuja resolução não requer a inversão da matriz dos coeficientes.

Na SF faz-se a superposição de problemas em mecânica da Fratura Elástica Linear para representar a resposta em Mecânica da Fratura Não-Linear. Assim, para uma estrutura qualquer, com uma fratura discreta pré-definida em Modo-I, o método de cálculo faz a soma de N casos elásticos, correspondentes a N diferentes tamanhos de fraturas e com extremidade no nó j ($j = 1, 2, \dots, N$), para cada incremento de carga ΔP_j (Figura 4.6). Então, para cada nó i , a distribuição de tensões σ_i , as aberturas de fratura, w_i , o carregamento aplicado, P , e o deslocamento do ponto de aplicação de carga, δ , são calculados de acordo com as seguintes equações:

$$\sigma_i = \sum_{j=i}^N R_{ij} \Delta P_j \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \quad (4.30)$$

$$w_i = \sum_{j=i}^N D_{ij} \Delta P_j \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \quad (4.31)$$

$$P = \sum_{j=i}^N \Delta P_j \quad (4.32)$$

$$\delta = \sum_{j=i}^N C_j \Delta P_j \quad (4.33)$$

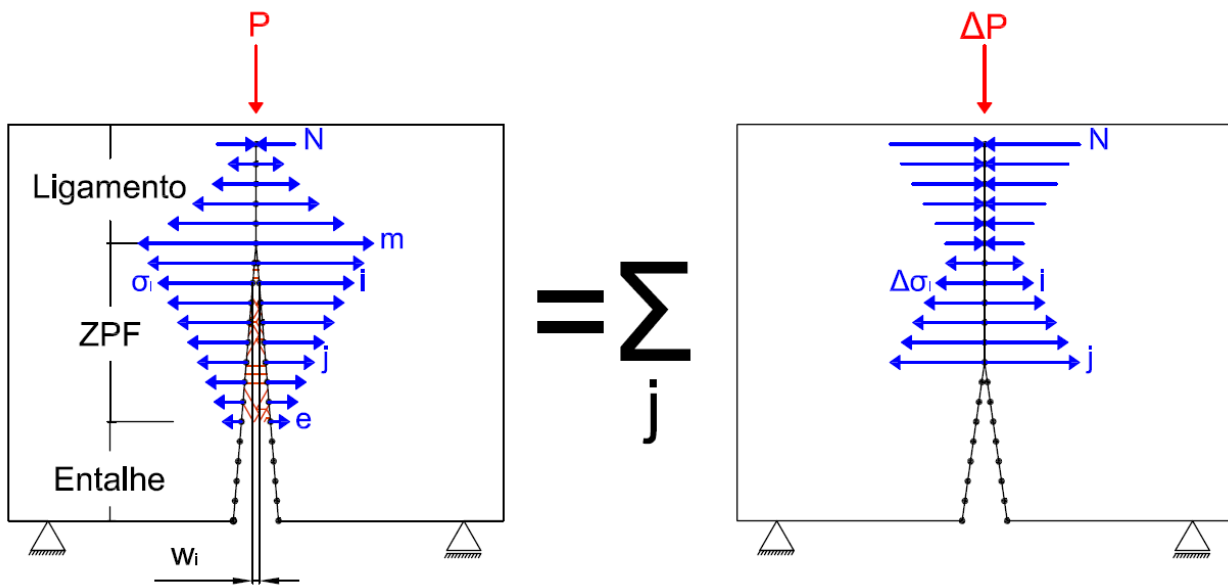


Figura 4.6 – Representação do método de superposição de fraturas.

Nas equações de (4.30) – (4.33), R_{ij} e D_{ij} são, respectivamente, as tensões e as aberturas de fratura em um nó i quando uma força externa unitária é aplicada e a fratura atinge o nó j . O coeficiente C_j é o deslocamento no ponto de aplicação de carga gerado por uma força externa unitária quando a fratura atinge o nó j . Seus N valores podem ser armazenados em um vetor \mathbf{C} .

$$\mathbf{C} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

Uma vez que as faces da fratura são livres de força de superfície, segue-se que $R_{ij} = 0$ para $i < j$. Devido a isso os coeficientes R_{ij} podem ser representados como elementos de uma matriz triangular inferior:

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N1} & \cdots & R_{NN} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

De modo similar, uma vez que a abertura da fratura é nula para valores de $i \geq j$, os N valores obtidos para D_{ij} podem ser representados como elementos de uma matriz triangular superior:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & D_{12} & \cdots & D_{1N} \\ 0 & 0 & \cdots & D_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Usando o Método dos Elementos Finitos (MEF), os coeficientes do vetor \mathbf{C} e das matrizes \mathbf{R} e \mathbf{D} podem ser calculados e armazenados, em uma matriz cheia \mathbf{M} de ordem $(N \times (N + 1))$, onde os coeficientes C_j são os elementos da coluna $N + 1$ (ver 4.37).

$$M = \begin{Bmatrix} R_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1N} & C_1 \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & D_{2N} & C_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & D_{N-1N} & \vdots \\ R_{N1} & R_{N2} & \cdots & R_{NN} & C_N \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

Obtida a matriz \mathbf{M} , a propagação da fratura visco-coesiva pode ser analisada impondo-se as condições de contorno que devem ser satisfeitas na seção central da viga:

$$\sigma_i = 0 \text{ para } i = 1, \dots, e - 1 \quad (4.38)$$

$$\sigma_i = \mathcal{F}(w_i, \dot{w}_i) \text{ para } i = e, \dots, m \quad (4.39)$$

$$w_i = 0 \text{ para } i \geq m \quad (4.40)$$

Os termos e e m referem-se aos nós em que se localizam a ponta da ranhura e a ponta da fratura respectivamente, como pode ser observado na Figura 4.6. A curva $P - \delta$ ou $P - CMOD$ é obtida combinando-se a solução dos casos com m variando de e até o nó limite N .

Em (4.39), $\mathcal{F}(w_i, \dot{w}_i)$ é a função visco-coesiva, e \dot{w}_i a velocidade de abertura do nó i definido por (4.41). Em (4.41), os índices m e $m - 1$ correspondem aos valores correspondentes ao passo atual e ao passo anterior.

$$\dot{w}_i^{(m)} = \left(\frac{w_i^{(m)} - w_i^{(m-1)}}{\delta^{(m)} - \delta^{(m-1)}} \right) \cdot \dot{\delta} \quad (4.41)$$

Substituindo (4.30) e (4.31) em (4.38), (4.39) e (4.40), obtém-se:

$$\sum_{j=i}^N R_{ij} \Delta P_j = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, e - 1 \quad (4.42)$$

$$\sum_{j=i}^N R_{ij} \Delta P_j = \mathcal{F} \left(\sum_{j=i}^N D_{ij} \Delta P_j, \dot{w}_i \right) \text{ para } i = e, e + 1, 2, \dots, m \quad (4.43)$$

$$\sum_{j=i}^N D_{ij} \Delta P_j = 0 \text{ para } i = m, m + 1, \dots, N \quad (4.44)$$

Para resolver o sistema formado pelas equações (4.42), (4.43) e (4.44), parte-se das equações (4.42) e (4.44), as quais são resolvidas impondo a solução:

$$\Delta P_j = 0 \text{ para } i \notin (e, \dots, m) \quad (4.45)$$

assim o conjunto de equações é reduzido para (4.43).

O incremento de carga ΔP_j que permite obter os valores das tensões nodais, aberturas de fratura, o carregamento total aplicado e o deslocamento total do ponto de aplicação de carga são obtidos pela resolução do sistema não linear de $m - e + 1$ equações, o qual é resolvido iterativamente a partir da estimativa $\Delta P_j = \Delta P_j^\alpha$ no lado direito de (4.43) e resolvendo para se obter a melhor estimativa $\Delta P_j^{\alpha+1}$ no lado esquerdo da equação, obtendo-se então:

$$\sum_{j=i}^N R_{ij} \Delta P_j^{\alpha+1} = \mathcal{F} \left(\sum_{j=i}^N D_{ij} \Delta P_j^\alpha \right) \text{ para } i = e, e + 1, 2, \dots, m \quad (4.46)$$

Essa metodologia é resolvida de forma adimensional, sendo que uma vez tendo-se uma matriz \mathbf{M} adimensional, é possível resolver qualquer viga. Parâmetros materiais importantes que permitirão escrever as equações na forma adimensional são a abertura característica e o comprimento característico:

$$w_{ch} = \frac{G_F}{f_{tc}} \quad (4.47)$$

$$l_{ch} = \frac{E_c G_F}{f_{tc}^2} \quad (4.48)$$

As formas adimensionais (escritas com asteriscos) são:

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{f_{tc}} \quad (4.49)$$

$$w^* = \frac{w}{w_{ch}} \quad (4.50)$$

$$P^* = \frac{\sigma_N}{f_{tc}} = \sigma_N^* = \frac{3}{2} \frac{P \cdot S_p}{h \cdot w_v^2 \cdot f_{tc}} \quad (4.51)$$

$$\delta^* = \frac{\delta}{w_{ch}} \quad (4.52)$$

Quando todas as variáveis são reduzidas na forma adimensional e a análise é restrita a elementos estruturais geometricamente similares, implica que o comportamento estrutural é controlado pelo número de fragilidade de Hillerborg, definido por:

$$\beta_H = \frac{w_v}{l_{ch}} \quad (4.53)$$

A partir das equações definidas em (4.49) – (4.52), os coeficientes do vetor **C** e os elementos das matrizes **R** e **D** podem ser reduzidos a forma adimensional mantendo a estrutura das equações iniciais:

$$R_{ij}^* = \left(\frac{2 \cdot h \cdot w_v^2}{3 \cdot S_p} \right) R_{ij} \quad (4.54)$$

$$D_{ij}^* = \left(\frac{2 \cdot h \cdot w_c}{3 \cdot S_p} \right) E_c \cdot \beta_H \cdot D_{ij} \quad (4.55)$$

$$C_j^* = \left(\frac{2 \cdot h \cdot w_c}{3 \cdot S_p} \right) E_c \cdot \beta_H \cdot C_j \quad (4.56)$$

4.4 – Comparação entre Métodos

Afim de comparar o *Crack Hinge Model* (CHM) com o método de Superposição de Fraturas (SF), um exemplo foi realizado. As medidas estipuladas para a viga (seguindo a Figura 4.2) são: $L = 450 \text{ mm}$, $S_p = 400 \text{ mm}$, $h = 100 \text{ mm}$, $w_v = 100 \text{ mm}$ e $a_0 = 50 \text{ mm}$. As propriedades do concreto são: $E_c = 33900 \text{ MPa}$, $f_{tc} = 3 \text{ MPa}$ e $G_F = 150 \text{ J/m}^2$. Escolheu-se a curva coesiva de Hordijk para as simulações.

Seguindo a mesma proposta de Rosa (2010), a matriz M utilizada na SF foi construída utilizando-se o software SAP2000 (CSI – Computers & Structures Inc., 2014) para simular o conjunto de vigas de dimensões adimensionais $S_p = 4$ e $h = 1$ e propriedades do material unitárias. A malha da semi-viga gerada na simulação pode ser observada na Figura 4.7. A altura da viga foi discretizada em 100 partes, tendo-se, portanto, $N = 101$ e um total de 100 simulações para a construção da matriz M . A construção da matriz foi automatizada por uma rotina computacional que gerava a simulação e guardava a informação em um arquivo de dados.

As Figuras 4.8 e 4.9 apresentam a comparação entre os métodos para as curvas $P - CMOD$ e $P - \delta$. Em uma visão geral, ambos os métodos possuem soluções similares, com a diferença de a SF apresentar um pico um pouco maior que o CHM. Outro ponto importante que pode ser observado, é que a SF possui a sua solução limitada pela malha. Logo, a sua solução é interrompida antes que o último elemento da malha seja fraturado. Para que a simulação da SF possa se estender, é necessário que a malha utilizada seja mais refinada nos elementos finais da propagação da fratura.

A Figura 4.10 apresenta um detalhe não muito visível pela Figura 4.9 e trata-se da diferença de inclinações das curvas $P - \delta$ no início das simulações. A parte inicial das curvas é dominada simplesmente pela elástica e não deveria existir diferenças significativas dos métodos como observado na Figura 4.10.

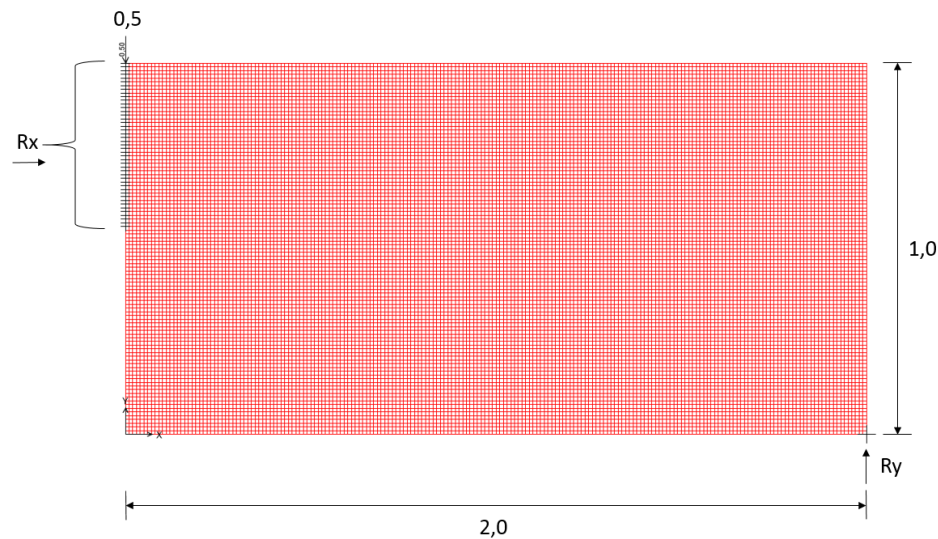


Figura 4.7 – Representação da malha utilizada no SAP2000.

Realizando-se uma análise das simulações, percebeu-se que a SF apresentava deformações localizadas nos apoios e no ponto da aplicação de carga (Figura 4.11), algo conhecido no MEF. O CHM não considera essas deformações. Vale ressaltar, que as curvas $P - \delta$ experimentais de Rosa *et al.* (2012) receberam um tratamento do trecho inicial das curvas (fase elástica) de modo a desconsiderar os esmagamentos do concreto localizados nos apoios. Como esse grupo experimental é utilizado nas análises da seção 6, é de interesse que a SF represente adequadamente o comportamento desses dados experimentais.

A curva $P - CMOD$ não apresenta o mesmo problema que a curva $P - \delta$ pois a abertura da boca da fratura é uma medida relativa que não é influenciada por deformações locais, diferente do deslocamento δ que é uma medida global.

Para contornar as deformações localizadas na simulação pelo MEF, aumentou-se por 10^9 a rigidez de uma faixa de elementos referente a 5% do vão livre S_p (Figura 4.12) e a medida de δ foi realizada sempre na média da face restringida pelos apoios no sentido de x (Figura 4.12). As Figuras 4.13, 4.14 e 4.15 apresentam a comparação dos métodos, considerando-se a metodologia adotada para a Superposição da Fratura (SF-Rig). Como se observa pela Figura 4.15, os trechos iniciais dos métodos são similares. É importante ressaltar que Rosa (2010) não realizou esta correção da rigidez. É possível observar em Rosa (2010) que a inclinação da curva numérica encontra-se sempre inferior à média da envoltória experimental e que o pico de carga da curva encontra-se à frente do pico de carga experimental.

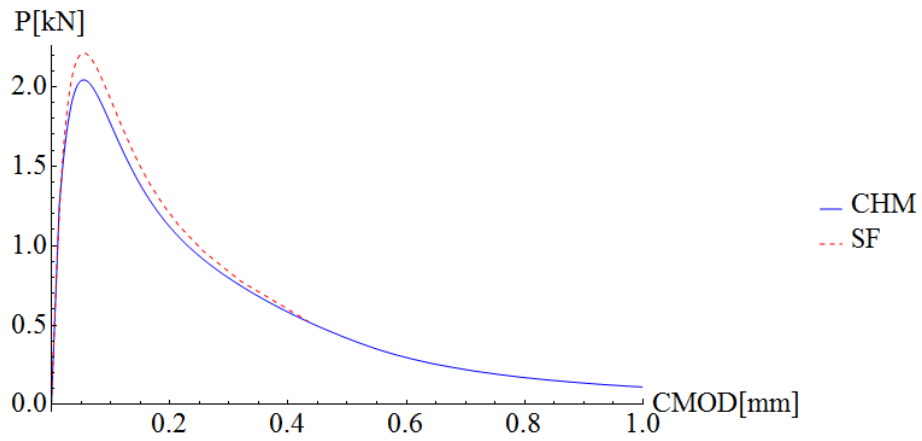


Figura 4.8 – Comparação das curvas P-CMOD entre os métodos.

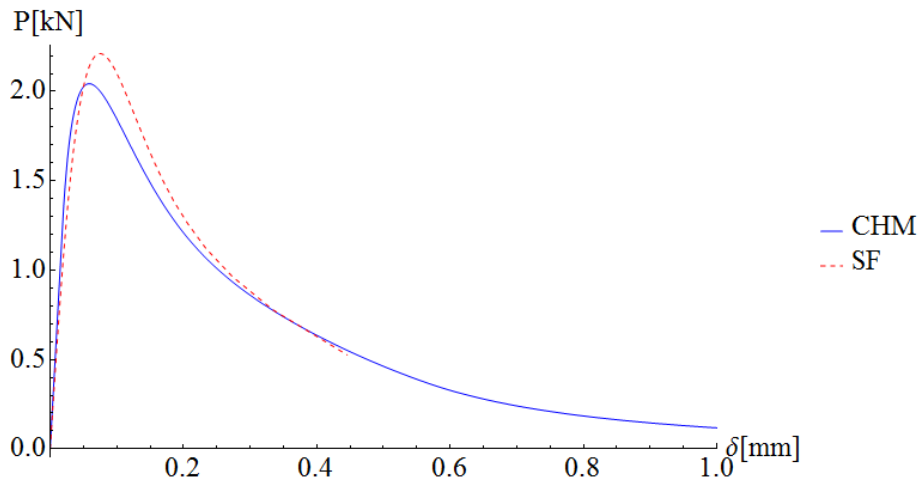


Figura 4.9 – Comparação das curvas P- δ entre os métodos.

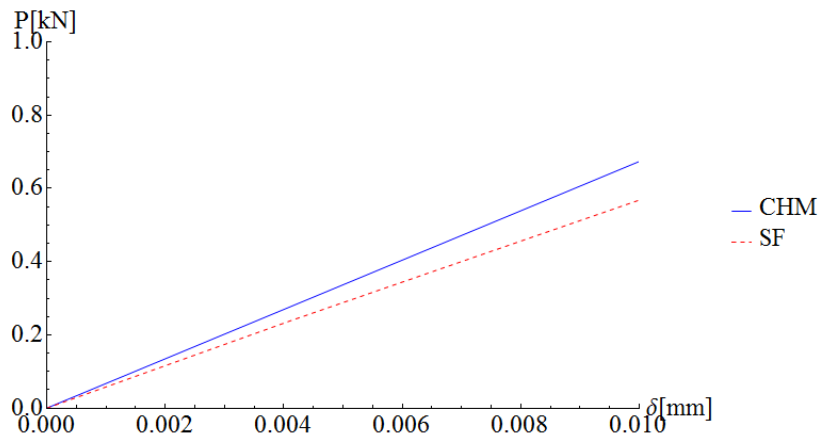


Figura 4.10 – Diferença na inclinação das curvas P- δ .

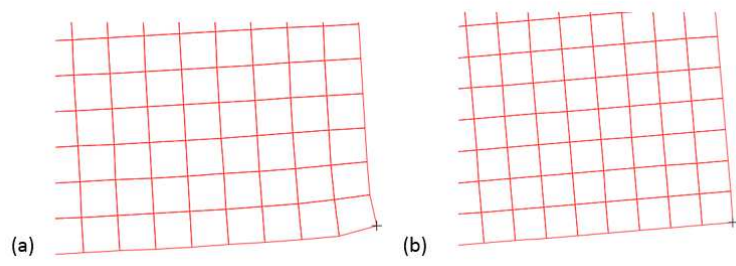


Figura 4.11 – (a) Detalhe da deformação localizada no apoio na simulação no MEF
 (b) Detalhe com o aumento da rigidez.

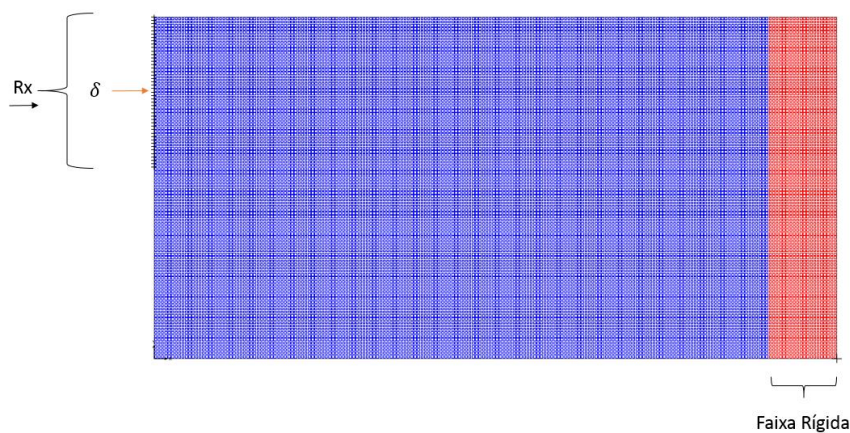


Figura 4.12 – Representação da faixa rígida e da posição de medida de δ .

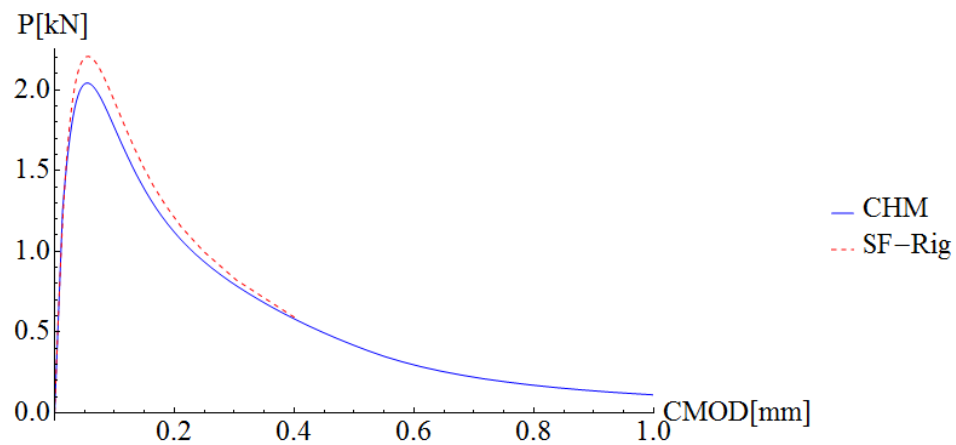


Figura 4.13 – Comparação das curvas P-CMOD entre os métodos.

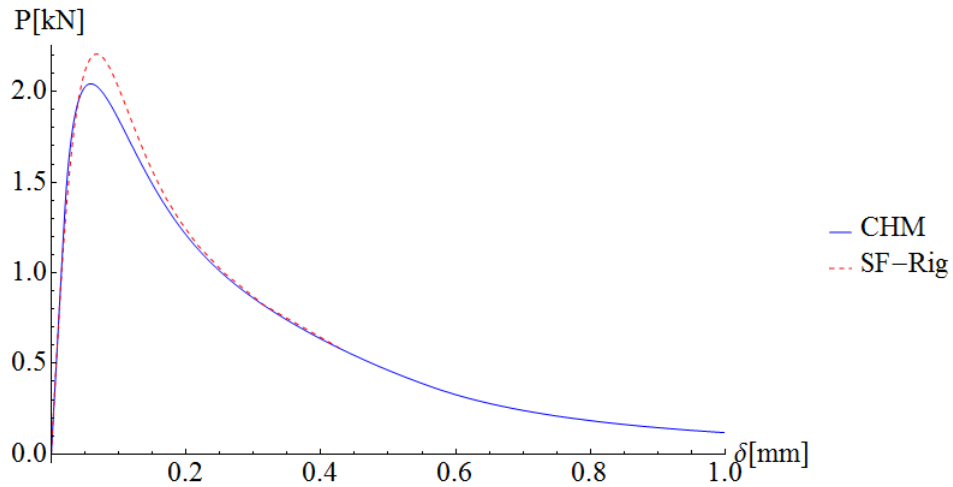


Figura 4.14 – Comparação das curvas P - δ entre os métodos.

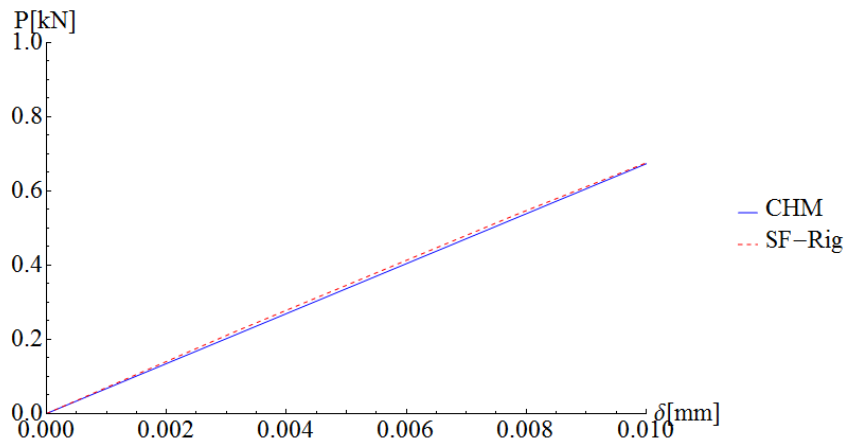


Figura 4.15 – Semelhança na inclinação das curvas P - δ .

Após a comparação dos casos estáticos, é proposta a comparação para os casos dinâmicos, mantendo-se as mesmas propriedades apresentadas anteriormente e introduzindo-se o termo viscoso de Rosa *et al.* (2012) com $\dot{w}_0 = 1 \text{ mm/s}$ e $n = 0.2$. Utilizaram-se quatro velocidades: 10^{-5} mm/s , 10^{-3} mm/s , 10^{-1} mm/s e 10 mm/s . As Figuras 4.16 e 4.17 apresenta a evolução das curvas $P - CMOD$ para o CHM e SF-Rig, respectivamente. Na Figura 4.18 é realizada a comparação do $P - CMOD$ CHM com SF-Rig. Nas Figuras 4.19, 4.20 e 4.21 são realizados os mesmos procedimentos para $P - \delta$.

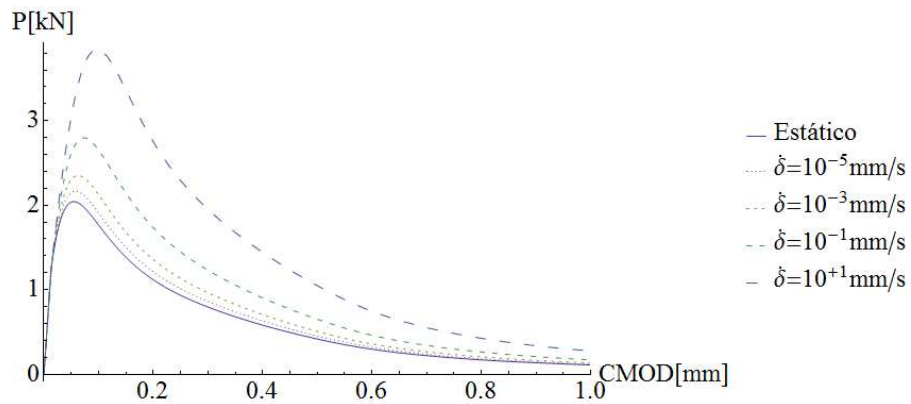


Figura 4.16 – Evolução de P-CMOD no CHM.

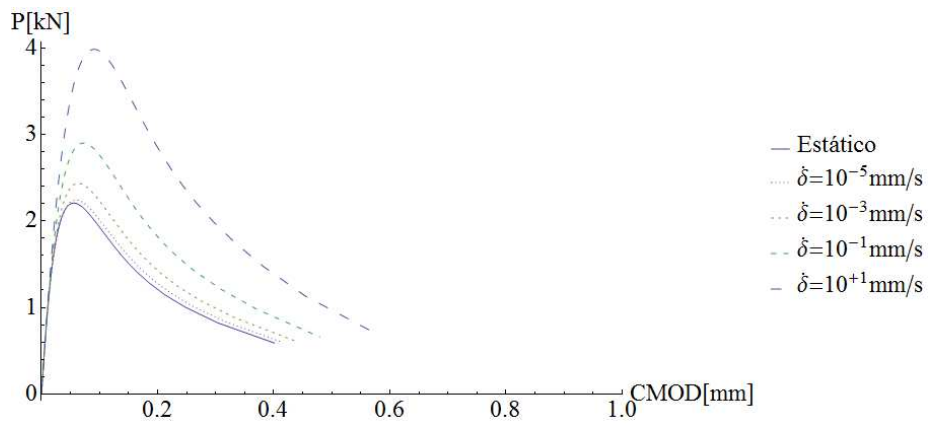


Figura 4.17 – Evolução de P-CMOD no SF-Rig.

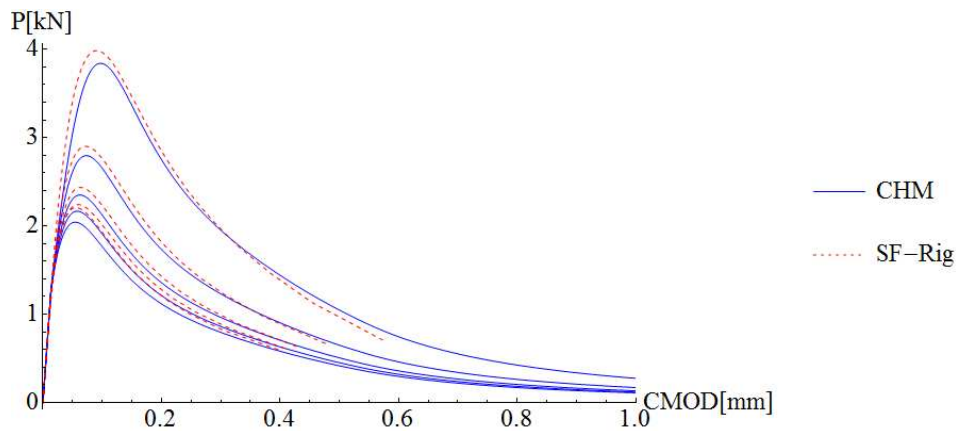


Figura 4.18 – Comparação dos métodos na evolução de P-CMOD.

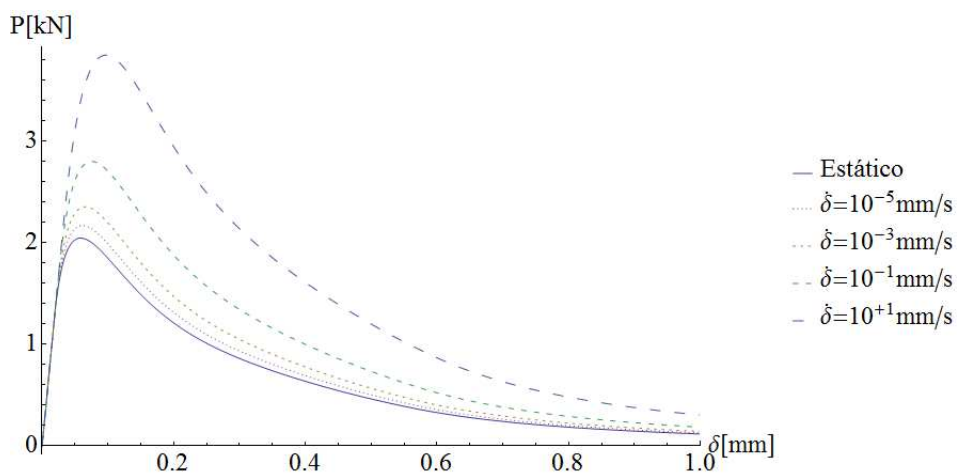


Figura 4.19 – Evolução de P - δ no CHM.

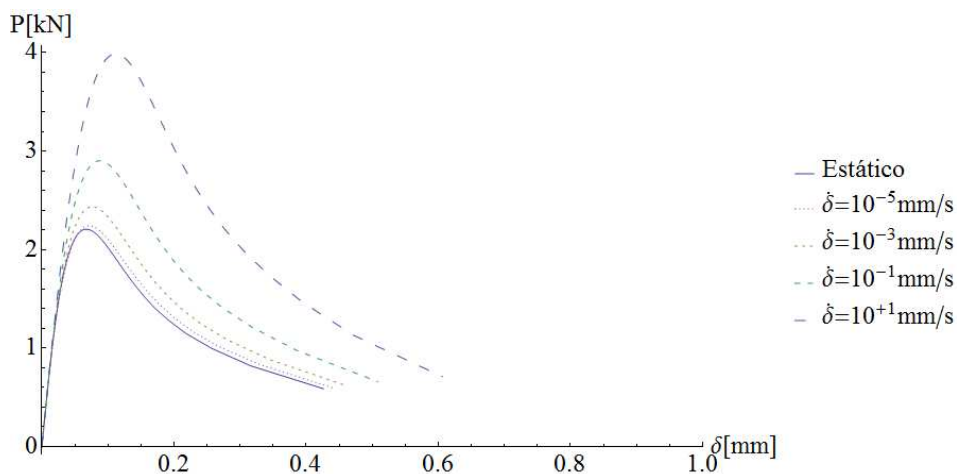


Figura 4.20 – Evolução de P - δ no SF-Rig.

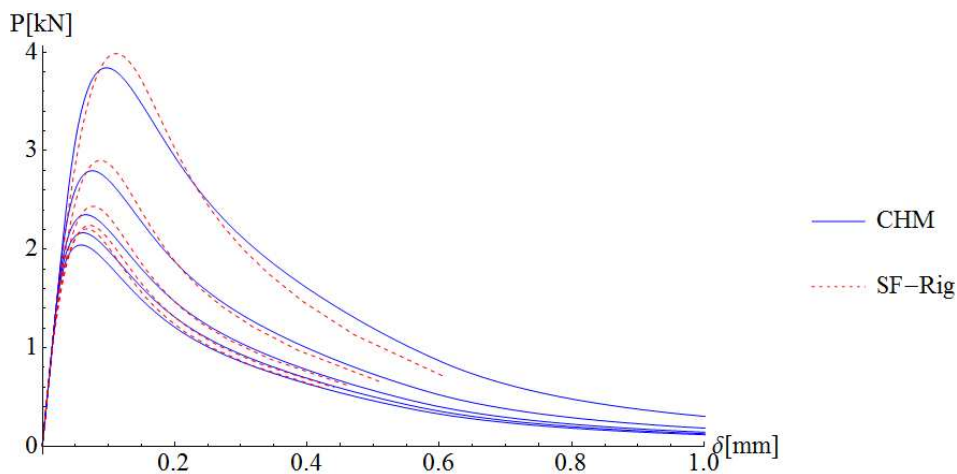


Figura 4.21 – Comparação dos métodos na evolução de P - δ .

4.5 – Considerações Finais

Nesta seção foram apresentados dois métodos (CHM e SF) para simulação de vigas em flexão em três pontos. Os critérios que levaram à escolha dos métodos foram a especificação do problema e a necessidade que a simulação fosse computacionalmente rápida (muitas repetições da simulação devido a técnica de análise inversa).

Os métodos foram comparados em um modelo de viga exemplo, e observou-se que as duas abordagens geram curvas $P - CMOD$ e $P - \delta$ semelhantes. Foi observado que a SF apresentava uma inclinação da curva $P - \delta$ diferente da CHM na fase elástica. Foram observadas deformações localizadas nos apoios nas simulações no MEF, e uma correção nas simulações do MEF foi proposta para que a inclinação inicial da curva fosse corrigida, sendo que esta correção é utilizada ao longo do trabalho.

5 – FERRAMENTA COMPUTACIONAL DESENVOLVIDA

5.1 – Considerações Iniciais

O objetivo deste trabalho é obter por análise inversa os parâmetros do modelo viscoso proposto por Rosa et al (2012) e avaliar a capacidade do modelo em representar o comportamento do concreto quando solicitado a diferentes taxas de carregamento. Para tal, desenvolveu-se um programa em linguagem C++ que pudesse automatizar o processo de análise inversa.

O C++ é uma linguagem orientada a objetos. Na programação orientada a objetos, implementa-se um conjunto de classes que definem os objetos presentes no sistema do programa. O ponto marcante da programação orientada a objetos é a possibilidade de expansão do código sem que a estrutura principal do mesmo seja alterada.

Esta seção apresenta a estrutura da ferramenta desenvolvida e exemplos de aplicação para validação da metodologia.

5.2 – Estrutura do Programa

O programa desenvolvido baseou-se na ideia apresentada em Sousa e Gettu (2006). A proposta era desenvolver um programa que fosse possível expandir as possibilidades de métodos sem que fosse necessário um grande esforço de implementação.

A vantagem da orientação a objetos se deve ao fato de se criar classes abstratas (classes “mães”) que podem ser sobrecarregadas por classes “filhas” que dividem as mesmas características básicas da “mãe” porém com procedimentos diferentes. Com base nos conceitos da programação orientada a objetos foi possível desenvolver um esquema de programação que trabalha com classes abstratas de modelo de fratura, modelos visco-coesivos e até mesmo métodos de análise inversa.

O programa é dividido em dois módulos: um somente para ajuste de parâmetros coesivos e outro para os parâmetros visco-coesivos, ou seja, um módulo puramente estático e outro dinâmico. Uma interface gráfica foi desenvolvida para facilitar o uso do programa, assim como a visualização dos dados de entrada e da solução. A interface permite abrir um conjunto de guias independentes, cada uma relacionada a um dos módulos, em um mesmo ambiente (Figura 5.1).

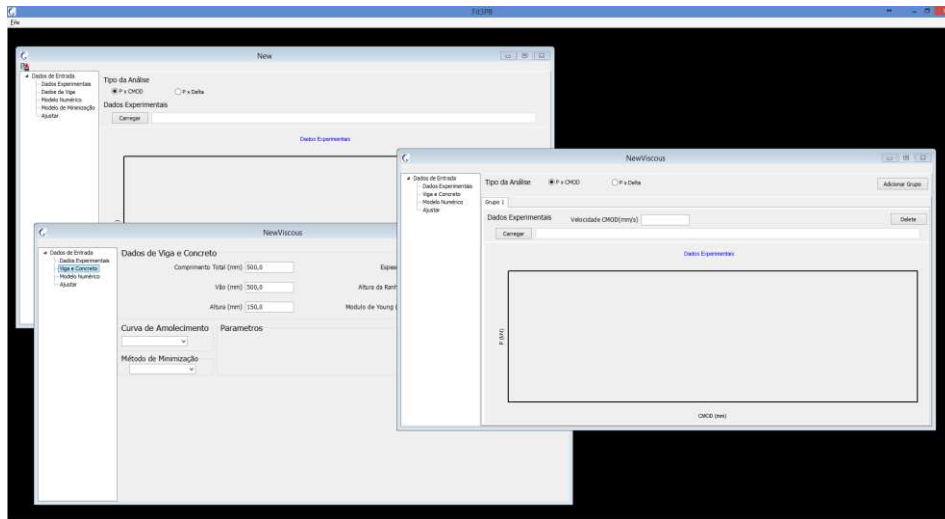


Figura 5.1 – Interface do programa.

As próximas subseções apresentam a estrutura de cada módulo do programa.

5.2.1 – Módulo Coesivo

O módulo coesivo desconsidera os efeitos de taxas de carregamento e serve para ajustar as curvas de amolecimento. O módulo coesivo é constituído pelas seguintes classes:

- *PolyFunc*: classe que armazena lista de pontos no plano 2D e é capaz de realizar interpolações entre os mesmos. Esta classe é utilizada para armazenar as curvas $P - CMOD$ ou $P - \delta$ de ensaios experimentais e dos cálculos numéricos.
- *BeamData*: classe que armazena as propriedades geométrica da viga (L , S_p , h , w_v e a_0 , Figura 4.2) e o módulo de elasticidade do concreto (E_c);
- *SoftModel*: classe abstrata que implementa o modelo de curva coesiva. As classes filhas implementadas são (referente a seção 2.8):
 - *SigwHordijk*: utiliza a curva exponencial de Hordijk;
 - *SigwLin*: curva Linear;
 - *SigwBiLin*: curva Bilinear;

- *FracMod*: classe abstrata que realiza o cálculo das curvas $P - \delta$ ou $P - CMOD$ com base no modelo numérico de fratura em viga sob flexão em três pontos. Esta classe depende das classes *BeamData* e *SoftModel*. As classes filhas são:
 - *FracStang*: utiliza o *Cracked Hinge Model* (Seção 4.2)
 - *FracRosa*: utiliza a Superposição de Fraturas (Seção 4.3);
- *MinQuadr*: classe abstrata que faz a minimização da função objetivo de mínimos quadrados. *MinQuadrLevMarq* é uma classe filha, que utiliza o algoritmo de Levenberg-Marquardt (Seção 3.3);
- *FitStatic*: classe que gerencia as informações entre as classes do módulo coesivo.

Ao ser escolhido um novo arquivo no programa de ajuste, e escolhido o módulo coesivo, o programa abre uma janela. Esta janela é dividida em:

- Dados Experimentais: entrada das curvas experimentais $P - CMOD$ ou $P - \delta$.
- Dados de Viga: entrada dos dados referentes a geometria da viga e ao seu módulo de elasticidade;
- Modelo Numérico: escolha do modelo numérico para simulação da flexão em três pontos (CHM ou SF), escolha da curva coesiva e entrada dos parâmetros iniciais da curva. É possível gerar curvas $P - CMOD$ ou $P - \delta$ de acordo com os parâmetros fornecidos;
- Modelo de Minimização: escolha do método de mínimos quadrados (na versão atual, somente Levenberg-Marquardt). É possível realizar o ajuste do módulo de elasticidade neste campo;
- Ajustar: ajuste dos parâmetros da curva coesiva.

Ao ser escolhido o módulo coesivo, a primeira etapa a ser realizada é ir ao campo “Dados Experimentais” e informar o tipo de análise, “P x CMOD” ou “P x Delta”, como pode ser observado na Figura 5.2. Além do tipo de análise, nesse campo são fornecidas as curvas experimentais, carregando-se um arquivo texto com os dados numéricos das curvas. É possível visualizar as curvas por um gráfico existente neste campo. As informações das curvas experimentais são armazenadas pela classe *FitStatic* em um vetor de classes *PolyFunc*.

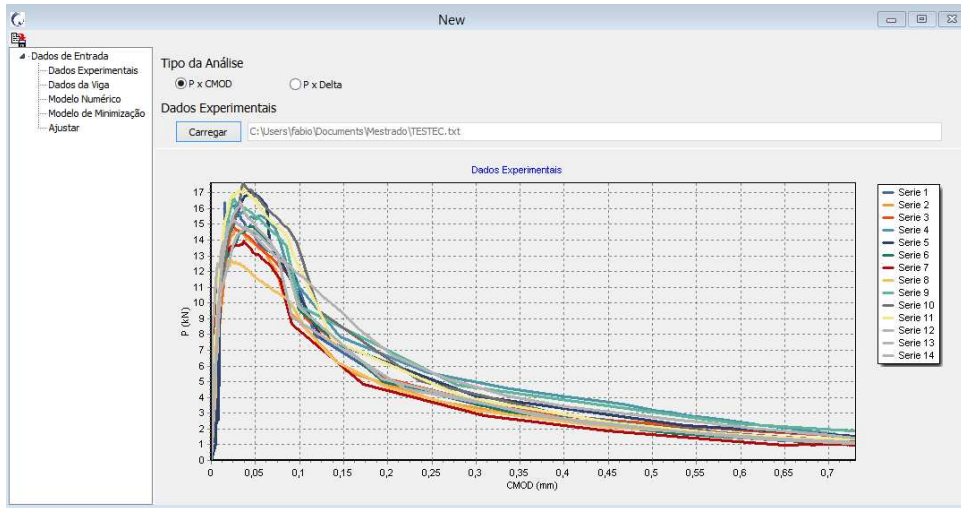


Figura 5.2 – Interface dos “Dados Experimentais” do módulo coesivo.

O próximo campo refere-se aos “Dados da Viga”, onde são fornecidas as propriedades geométrica da viga (L , S_p , h , w_v e a_0 , Figura 4.2) e o módulo de elasticidade do concreto (E_c). A Figura 5.3 apresenta a interface desse campo. Essas informações são transmitidas ao *FitStatic* que as armazena na classe *BeamData*.

Após a informação dos “Dados da Viga”, segue-se ao campo “Modelo Numérico”, onde são escolhidos o modelo de simulação (CHM ou SF) e a curva de amolecimento (Hordijk, Linear ou Bilinear). São informados os valores dos campos da curva coesiva, e esses valores, de acordo com o método de minimização, são utilizados como valores de partida. É possível gerar uma curva $P - CMOD$ ou $P - \delta$ numérica e compará-la na interface gráfica com as curvas experimentais, como mostra a Figura 5.4. A curva simulada também pode ser exportada a um arquivo de texto. A classe *FitStatic* é encarregada de criar as classes filhas e associá-las às classes abstratas *SoftModel* e *FracModel*.

No campo “Modelo de Minimização”, escolhe-se o método de minimização. É possível realizar o ajuste do módulo de elasticidade. O ajuste é realizado com base no conjunto de dados correspondentes a 70% da curva experimental antes da carga de pico. O usuário pode aceitar ou rejeitar o ajuste, e caso aceite, o valor substitui o informado no respectivo campo de “Dados da Viga”. É possível delimitar a extensão máxima das curvas experimentais a ser utilizada durante o ajuste dos parâmetros coesivos, no campo “Valores Máximos”. A Figura 5.5 apresenta a interface

do “Modelo de Minimização”. Novamente, cabe à *FitStatic* encaminhar as informações colhidas aos respectivos campos.

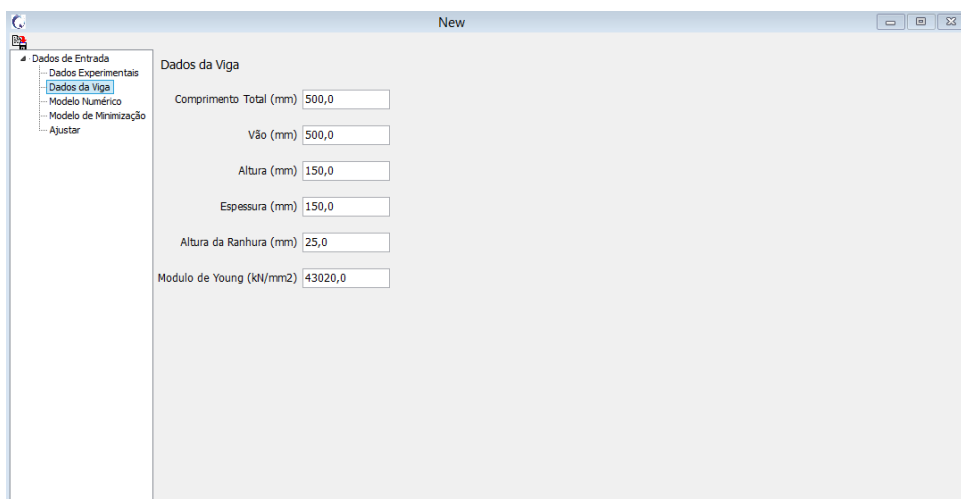


Figura 5.3 – Interface dos “Dados da Viga” do módulo coesivo.

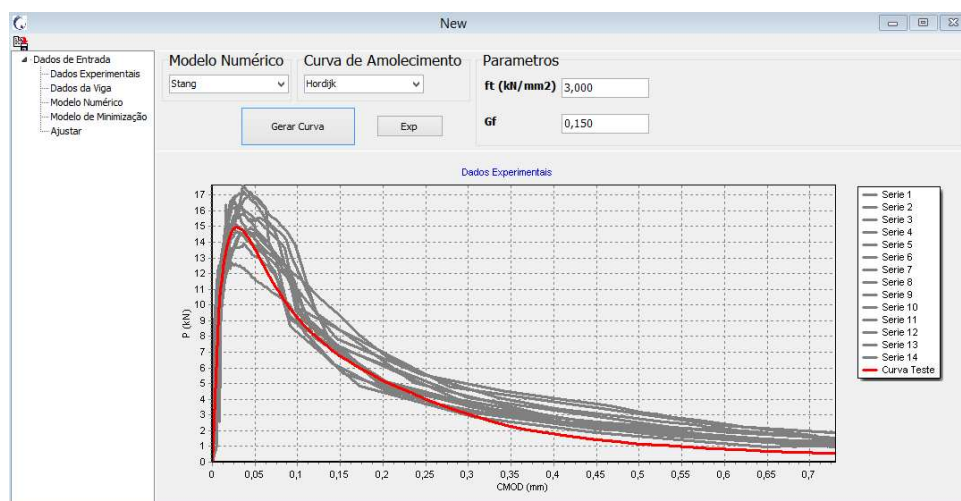


Figura 5.4 – Interface do “Modelo Numérico” do módulo coesivo.

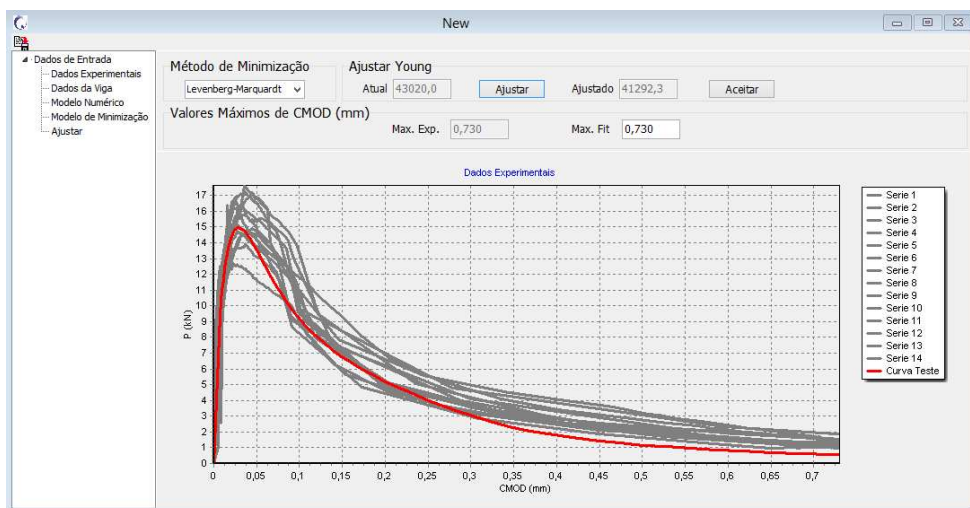


Figura 5.5 – Interface do “Modelo de Minimização” do módulo coesivo.

Finalmente, com todos os dados fornecidos, em “Ajustar” é habilitado o botão “FIT”. Ao se apertar o botão, a classe *FitStatic* aciona a classe *MinQuadr*, e o processo de ajuste inicia-se. Ao finalizar, a interface exibe uma tabela com os dados dos parâmetros iniciais e o resíduo, e os dados da melhor solução obtida pelo ajuste com o respectivo resíduo. Também é apresentado um gráfico com a curva dos parâmetros iniciais com a curva dos parâmetros ajustados, juntamente com as curvas experimentais. A Figura 5.6 apresenta a interface do campo “Ajustar”.

Mesmo tendo chegado ao fim do processo, o usuário pode retornar aos campos anteriores, editá-los, e realizar novos ajustes na mesma interface.

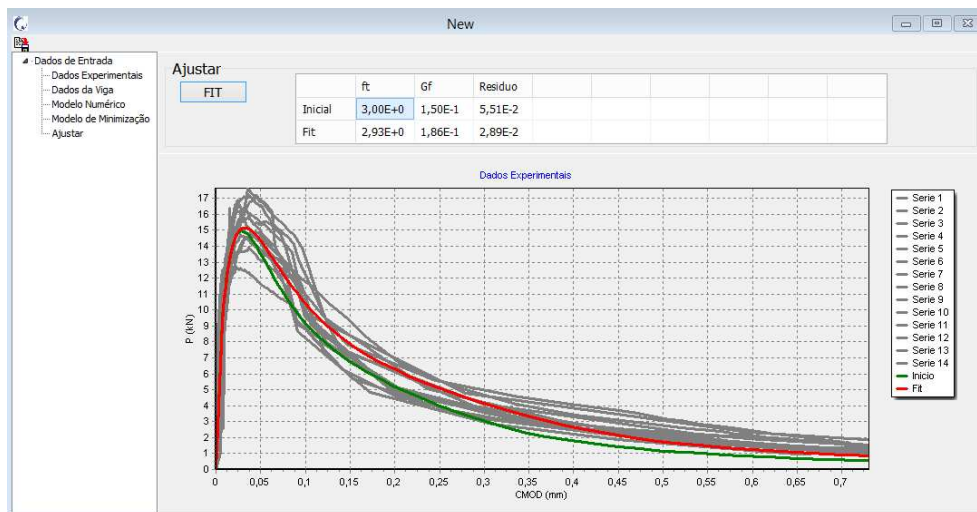


Figura 5.6 – Interface do campo “Ajustar” do módulo coesivo.

5.2.2 – Módulo Visco-Coesivo

O módulo visco-coesivo realiza o ajuste dos parâmetros viscosos ou visco-coesivos. Este módulo é similar ao módulo coesivo, tendo algumas peculiaridades em relação à este (módulo coesivo). O módulo é constituído pelas seguintes classes:

- *PolyFunc*: classe que armazena lista de pontos no plano 2D e é capaz de realizar interpolações entre os mesmos. Esta classe é utilizada para armazenar as curvas $P - CMOD$ ou $P - \delta$ de ensaios experimentais e dos cálculos numéricos.
- *BeamData*: classe que armazena as propriedades geométricas da viga (L , S_p , h , w_v e a_0 , Figura 4.2) e o módulo de elasticidade do concreto (E_c);
- *SoftModel*: classe abstrata que possui o modelo de curva coesiva. As classes filhas implementadas são (referente a seção 2.8):
 - *SigwHordijk*: utiliza a curva exponencial de Hordijk (1991);
 - *SigwLin*: curva linear;
 - *SigwBiLin*: curva Bilinear;
- *SoftModelViscous*: classe abstrata que possui o modelo da curva viscosa. Depende da classe *SoftModel*. As classes filhas são:
 - *SigwViscousRosa*: modelo de Rosa *et al.* (2012);
 - *SigwViscousRosaAndSoft*: modelo de Rosa *et al.* (2012), e permite o ajuste da curva coesiva;
 - *SigwViscousRosaAndZhou*: combina os modelos de Zhou *et al.* (2005) e Rosa *et al.* (2012);
- *FracModVisc*: classe abstrata que realiza o cálculo das curvas $P - \delta$ ou $P - CMOD$ com base no modelo numérico de fratura em viga sob flexão em três pontos. Esta classe depende das classes *BeamData* e *SoftModelViscous*. As classes filhas são:
 - *FracStangViscous*: utiliza o *Cracked Hinge Model* (Seção 4.2)
 - *FracRosaViscous*: utiliza a Superposição de Fraturas (Seção 4.3);
- *MinQuadr*: classe abstrata que faz a minimização da função objetivo de mínimos quadrados. *MinQuadrLevMarq* é uma classe filha, que utiliza o algoritmo de Levenberg-Marquardt (Seção 3.3);

- *FiTViscous*: classe que gerencia as informações entre as classes do módulo visco-coesivo.

Ao ser escolhido um novo arquivo no programa de ajuste, e escolhido o módulo visco-coesivo, o programa abre uma janela. Esta janela é dividida em:

- Dados Experimentais: entrada das curvas experimentais $P - CMOD$ ou $P - \delta$.
- Viga e Concreto: entrada dos dados referentes a geometria da viga e ao seu módulo de elasticidade, assim como a curva coesiva e seus parâmetros. Foi encaixada a escolha do método de ajuste nesse campo;
- Modelo Numérico: escolha do modelo numérico para simulação da flexão em três pontos (CHM ou SF), escolha da curva coesiva e entrada dos parâmetros iniciais da curva. É possível gerar curvas $P - CMOD$ ou $P - \delta$ de acordo com os parâmetros fornecidos;
- Ajustar: ajuste dos parâmetros da curva coesiva.

Ao ser escolhido o módulo visco-coesivo, a primeira etapa a ser realizada é ir ao campo “Dados Experimentais” e informar o tipo de análise, “ $P \times CMOD$ ” ou “ $P \times Delta$ ”, como pode ser observado na Figura 5.7. O que difere este campo do respectivo no módulo coesivo é que as curvas experimentais são agrupadas. Para cada grupo deve ser informada a velocidade do atuador do ensaio e carregadas as respectivas curvas. Inicialmente só existe um grupo, e o usuário pode adicionar (e excluir, se necessário) grupos.

No campo “Viga e Concreto”, são informadas as propriedades geométricas da viga (L , S_p , h , w_v e a_0 , Figura 4.2), o módulo de elasticidade do concreto (E_c), o método de minimização e a curva de amolecimento, informando-se os parâmetros da curva. Os parâmetros da curva poderão ou não ser ajustados, como será discutido junto do campo “Modelo Numérico”. A Figura 5.8 apresenta a interface deste campo.

O modelo numérico e o de viscosidade são informados no campo “Modelo Numérico” (Figura 5.9). São fornecidos, também, os parâmetros do modelo de viscosidade. Existem duas classes que utilizam o modelo visco-coesivo de Rosa *et al.* (2012): *SigwViscousRosa* e *SigwViscousRosaAndSoft*. A diferença entre uma e outra, é que *SigwViscousRosa* só repassa os parâmetros viscosos para a classe de ajuste enquanto *SigwViscousRosaAndSoft* repassa tanto os parâmetros do modelo viscoso quanto os parâmetros do modelo coesivo. Dessa forma, caso se

queira ajustar somente os parâmetros do modelo de Rosa *et al.* (2012), seleciona-se o item “Rosa” no campo “Viscosidade” (Figura 5.9). Caso o interesse seja ajustar os parâmetros coesivos em conjunto com os parâmetros de Rosa *et al.* (2012), escolhe-se o item “RosaAndSoft” no campo “Viscosidade”.

Ainda na interface de “Modelo Numérico”, é possível gerar uma curva numérica teste, para cada grupo, com base nos parâmetros fornecidos. A curva é exibida junto as curvas experimentais. Além disso, é possível delimitar a extensão máxima das curvas experimentais a ser utilizada durante o ajuste dos parâmetros coesivos, no campo de valores máximos exibidos em cada grupo.

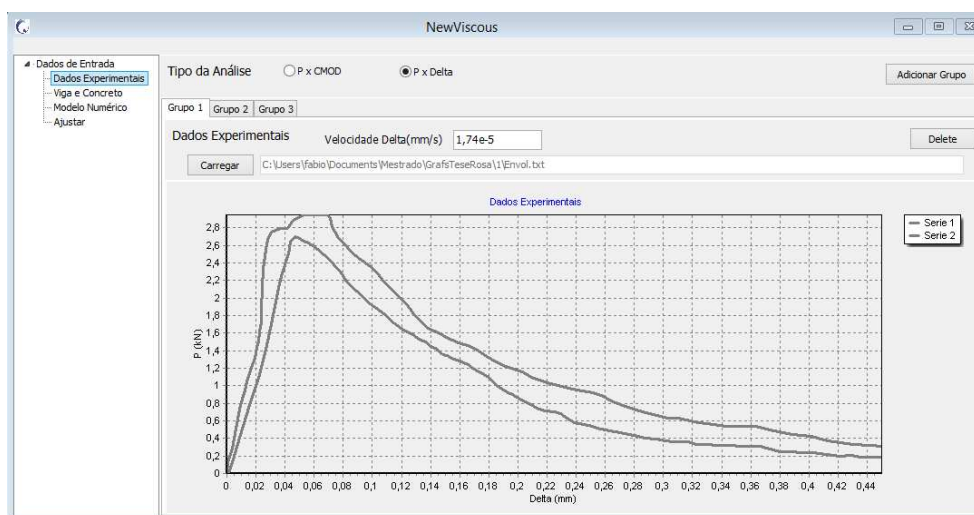


Figura 5.7 – Interface do campo “Dados Experimentais” do módulo visco-coesivo.

Figura 5.8 – Interface do campo “Viga e Concreto” do módulo visco-coesivo.

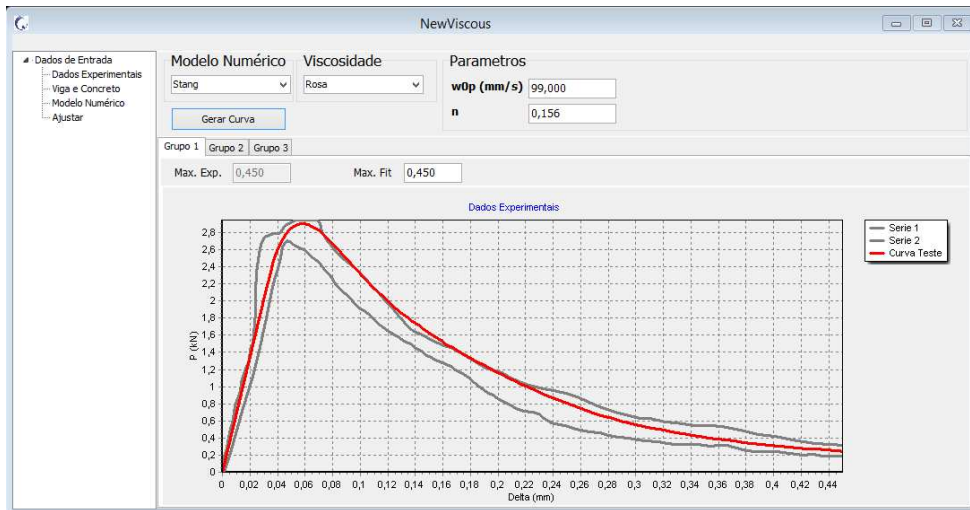


Figura 5.9 – Interface do campo “Modelo Numérico” do módulo visco-coesivo.

Finalmente, com todos os dados fornecidos, em “Ajustar” é habilitado o botão “FIT”. Ao se apertar o botão, a classe *FitViscous* aciona a classe *MinQuadr*, e o processo de ajuste inicia-se. Ao finalizar, a interface exibe uma tabela com os dados dos parâmetros iniciais e o resíduo, e os dados da melhor solução obtida pelo ajuste com o respectivo resíduo. Também é apresentado um gráfico com a curva dos parâmetros iniciais com a curva dos parâmetros ajustados, juntamente com as curvas experimentais. A Figura 5.10 apresenta a interface do campo “Ajustar”.

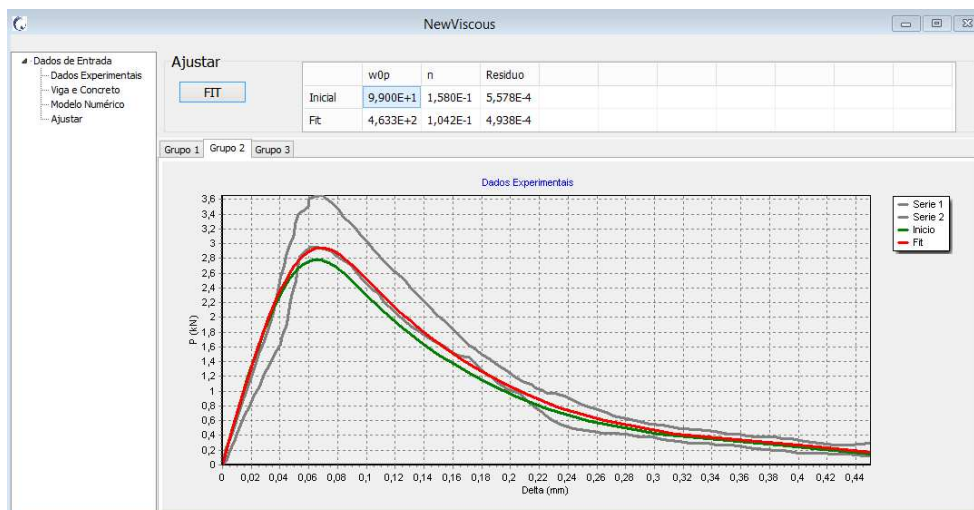


Figura 5.10 – Interface do campo “Ajustar” do módulo visco-coesivo.

5.3 – Testes do Programa

Nesta subseção são apresentados alguns testes realizados com o programa desenvolvido, com o intuito de avaliar o seu desempenho.

5.3.1 – Ajuste do Módulo de Elasticidade

Neste teste é fornecida uma curva numérica no campo de dados experimentais. O intuito é verificar o quão próxima é a solução do programa uma vez que os parâmetros buscados são conhecidos.

A viga proposta possui as seguintes dimensões:

- Comprimento: 450 *mm*;
- Vão Livre: 400 *mm*;
- Altura: 100 *mm*;
- Espessura: 100 *mm*;
- Extensão da Ranhura: 50 *mm*;
- Módulo de Elasticidade: 33900 *MPa*.

Escolheu-se a curva coesiva de Hordijk com os parâmetros: $f_{tc} = 3 \text{ MPa}$ e $G_F = 150 \text{ J/m}^2$. Foi simulada uma curva $P - CMOD$ com o CHM para ser utilizada como dado experimental no programa.

Os primeiros ajustes foram realizados para o Módulo de Elasticidade. Para tal, foram propostos dois casos com valores iniciais de Módulo de Elasticidade: 20000 *MPa* e 40000 *MPa*. Os demais valores foram mantidos iguais aos da simulação base, inclusive o CHM. Foram utilizadas diferentes tolerâncias para o método de minimização de Levenberg-Marquardt (seção 3.3) com o intuito de identificar um valor adequado para ser utilizado nos ajustes com os dados experimentais.

A Tabela 5.1 apresenta os resultados dos ajustes do Módulo de Elasticidade. Pela Tabela é possível observar que a tolerância de $10^{-6} \text{ kN}^2 \cdot \text{mm}$ é insuficiente para gerar algum ajuste, uma vez que os valores fornecidos inicialmente (20000 *MPa* e 40000 *MPa*) geram um resíduo inferior

a $10^{-6} \text{ kN}^2.\text{mm}$. Tolerâncias menores que $10^{-10} \text{ kN}^2.\text{mm}$ já são capazes de gerar ajustes adequadamente próximos do valor conhecido ($E_c = 33900 \text{ MPa}$). Com base nesses resultados, considerou-se adotar o valor de tolerância de $10^{-10} \text{ kN}^2.\text{mm}$ como valor padrão para o ajuste do Módulo de Elasticidade em análises futuras com dados experimentais.

Tabela 5.1 – Resultados do ajuste do Módulo de Elasticidade.

Módulo de Elasticidade Inicial (MPa)	Tolerância da Minimização (kN².mm)	Módulo de Elasticidade Ajustado (MPa)	Resíduo (kN².mm)
20000	10^{-6}	20000,00	$9,428 \times 10^{-7}$
20000	10^{-8}	33752,58	$6,468 \times 10^{-11}$
20000	10^{-10}	33752,58	$6,468 \times 10^{-11}$
20000	10^{-12}	33899,33	$6,468 \times 10^{-15}$
40000	10^{-6}	40000,00	$9,141 \times 10^{-8}$
40000	10^{-8}	33359,31	$8,812 \times 10^{-10}$
40000	10^{-10}	33892,91	$1,472 \times 10^{-13}$
40000	10^{-12}	33892,91	$1,472 \times 10^{-13}$

É relevante discutir que uma vez considerada a adoção da tolerância de $10^{-10} \text{ kN}^2.\text{mm}$ com base em um teste ideal (a simulação numérica é capaz de representar perfeitamente a informação experimental, uma vez que a informação experimental é uma simulação numérica) é suficiente para análises reais. Primeiro porque a simulação numérica é uma aproximação do comportamento real, e desse modo, já possui resíduos na diferença entre experimental e numérico. Provavelmente, tais resíduos jamais serão menores que $10^{-10} \text{ kN}^2.\text{mm}$ em casos reais, o que levaria o método a terminar quando o passo do procedimento se torna muito pequeno (para o Módulo de Elasticidade considerou-se a tolerância de $0,1 \text{ MPa}$; variações menores indicam que o valor já se encontra significativamente próximo do ótimo). Segundo porque, conforme se aumenta o número de curvas experimentais, maior é o resíduo. A Tabela 5.2 apresenta outro teste idealizado como o anterior só que, desta vez, foi passada duas vezes a mesma curva numérica base nos dados experimentais.

Como se pode observar pela Tabela 5.2, os resíduos deste caso encontram-se mais próximo da tolerância que os resíduos da Tabela 5.1, que conseguiam ser bem menores.

Tabela 5.2 – Resultados do ajuste do Módulo de Elasticidade com a curva experimental duplicada.

Módulo de Elasticidade Inicial (MPa)	Tolerância da Minimização ($kN^2 \cdot mm$)	Módulo de Elasticidade Ajustado (MPa)	Resíduo ($kN^2 \cdot mm$)
20000	10^{-6}	41527,97	$2,736 \times 10^{-7}$
20000	10^{-8}	33012,09	$4,807 \times 10^{-9}$
20000	10^{-10}	34028,96	$9,835 \times 10^{-11}$
20000	10^{-12}	33887,00	$9,958 \times 10^{-13}$
40000	10^{-6}	40000,00	$1,828 \times 10^{-7}$
40000	10^{-8}	33358,65	$1,767 \times 10^{-9}$
40000	10^{-10}	34029,01	$9,843 \times 10^{-11}$
40000	10^{-12}	33887,00	$9,958 \times 10^{-13}$

Realizar esse tipo de teste em curvas $P - \delta$ apresenta resultados similares, sendo que a tolerância de $10^{-10} kN^2 \cdot mm$ é considerada para esse tipo de curva também.

5.3.2 – Ajuste dos Parâmetros Coesivos

Com base na viga apresentada na seção 5.3.1, busca-se ajustar os parâmetros coesivos do modelo de Hordijk, sendo fornecida como dado experimental uma curva numérica $P - \delta$ simulada pela SF, com $f_{tc} = 3 MPa$ e $G_F = 150 J/m^2$.

A Tabela 5.3 apresenta os resultados de ajuste dos parâmetros coesivos para diferentes valores iniciais e tolerâncias. Pela Tabela observa-se que tolerâncias menores que $10^{-6} kN^2 \cdot mm$ já geram ajustes suficientemente próximos dos valores buscados. Dessa forma, tal tolerância será adotada para ajustes futuros.

Os comentários realizados na seção 5.3.1 também são válidos aqui, uma vez que a tolerância proposta é baseada em um ajuste idealizado.

Tabela 5.3 – Resultados do ajuste dos parâmetros coesivos.

f_{tc} Inicial (MPa)	G_F Inicial (J/m ²)	Tolerância (kN ² .mm)	f_{tc} Ajustado (MPa)	G_F Ajustado (J/m ²)	Resíduo (kN ² .mm)
5	80	10 ⁻⁴	2,88	151	5,69 × 10 ⁻⁷
5	80	10 ⁻⁶	2,88	151	5,69 × 10 ⁻⁷
5	80	10 ⁻⁸	3,00	150	7,11 × 10 ⁻¹⁰
2	210	10 ⁻⁴	2,85	146	2,17 × 10 ⁻⁶
2	210	10 ⁻⁶	2,98	149	1,01 × 10 ⁻⁷
2	210	10 ⁻⁸	3,00	150	2,45 × 10 ⁻¹⁰

5.3.3 – Ajuste dos Parâmetros Viscosos e do Conjunto Visco-Coesivo

Mantendo-se a mesma geometria, módulo de elasticidade e a curva coesiva de Hordijk da seção 5.3.1, geraram-se curvas $P - \delta$ no CHM utilizando-se o modelo de Rosa *et al.* (2012) com $\dot{w}_0 = 10,0 \text{ mm/s}$ e $n = 0,2$, para as seguintes velocidades: 10⁻⁵, 10⁻² e 10 mm/s.

A Tabela 5.4 apresenta os resultados de ajuste dos parâmetros coesivos para diferentes valores iniciais e tolerâncias. Pela Tabela observa-se que tolerâncias menores que 10⁻⁶ kN².mm já geram ajustes suficientemente próximos dos valores buscados, sendo esta adotada para ajustes futuros.

Com a mesma viga e mesmo modelo visco-coesivo (Rosa-Hordijk) gerou-se curvas $P - CMOD$ na SF para as mesmas velocidades do caso anterior. É chamado de parâmetros iniciais 1 a combinação de parâmetros $f_{tc} = 5 \text{ MPa}$, $G_F = 80 \text{ J/m}^2$, $\dot{w}_0 = 20,0 \text{ mm/s}$ e $n = 0,1$, e de parâmetros iniciais 2 a combinação $f_{tc} = 2 \text{ MPa}$, $G_F = 210 \text{ J/m}^2$, $\dot{w}_0 = 0,2 \text{ mm/s}$ e $n = 0,3$.

A Tabela 5.5 apresenta os resultados de ajuste dos parâmetros visco-coesivos para o conjunto de parâmetros iniciais propostos em diferentes tolerâncias. Pela Tabela observa-se que tolerâncias menores que 10⁻⁶ kN².mm geram ajustes próximos dos parâmetros visco-coesivos alvo. Baseado nesses resultados e nos comentários realizados na seção 5.3.1 sobre os dados experimentais

comparados com os numéricos, considera adequado o uso da tolerância de $10^{-6} \text{ kN}^2 \cdot \text{mm}$ nas avaliações futuras.

Tabela 5.4 – Resultados do ajuste dos parâmetros viscosos.

\dot{w}_0 Inicial (mm/s)	n Inicial	Tolerância ($\text{kN}^2 \cdot \text{mm}$)	\dot{w}_0 Ajustado (mm/s)	n Ajustado	Resíduo ($\text{kN}^2 \cdot \text{mm}$)
20	0,1	10^{-4}	9,096	0,1593	$1,64 \times 10^{-5}$
20	0,1	10^{-6}	9,840	0,1999	$1,02 \times 10^{-8}$
20	0,1	10^{-8}	9,890	0,2000	$9,71 \times 10^{-9}$
0,2	0,3	10^{-4}	3,524	0,1921	$4,79 \times 10^{-5}$
0,2	0,3	10^{-6}	9,369	0,2001	$1,40 \times 10^{-7}$
0,2	0,3	10^{-8}	9,977	0,2000	$1,72 \times 10^{-10}$

Tabela 5.5 – Resultados do ajuste dos parâmetros visco-coesivos.

Parâmetros Iniciais	Tolerância ($\text{kN}^2 \cdot \text{mm}$)	f_{tc} Ajustado (MPa)	G_F Ajustado (J/m^2)	\dot{w}_0 Ajustado (mm/s)	n Ajustado	Resíduo ($\text{kN}^2 \cdot \text{mm}$)
1	10^{-4}	2,896	141,4	4,138	0,1591	$1,2 \times 10^{-5}$
1	10^{-6}	2,922	145,9	7,620	0,1774	$6,9 \times 10^{-7}$
1	10^{-8}	3,002	150,0	10,010	0,1998	$4,0 \times 10^{-9}$
2	10^{-4}	2,651	133,3	2,147	0,1464	$4,7 \times 10^{-6}$
2	10^{-6}	2,993	149,4	9,624	0,1976	$1,6 \times 10^{-8}$
2	10^{-8}	3,003	150,0	10,010	0,1998	$5,4 \times 10^{-9}$

5.3.4 – Ajuste de Casos Quase-Estáticos Reais

Com intuito de verificar a qualidade da solução do programa, utilizou-se um conjunto de ensaios experimentais $P - \delta$ realizados em vigas com dimensões:

- Comprimento: 650 mm;

- Vão Livre: 600 mm;
- Altura: 150 mm;
- Espessura: 80 mm;
- Extensão da Ranhura: 45 mm;

Foram utilizados 3 grupos de concreto e as propriedades desses grupos, determinadas experimentalmente, encontram-se na Tabela 5.6. O ensaio de compressão diametral foi utilizado para determinar o valor de f_{tc} , enquanto G_F foi obtido pelo ensaio de flexão em três pontos e E_c pelo ensaio de compressão uniaxial.

Tabela 5.6 – Parâmetros determinados experimentalmente para os grupos de concreto.

Grupo	f_{tc} (MPa)	G_F (J/m ²)	E_c (MPa)
A	2,17	130	19442,0
B	3,18	141	25354,0
C	3,80	168	31865,0

Para análise inversa são utilizadas as envoltórias dos ensaios de flexão em três pontos realizados para cada grupo com medidas de $P - \delta$. A envoltória consiste dos valores máximos e mínimos observados no grupos de ensaios. A Figura 5.11 apresenta a envoltória experimental de cada grupos de análise.

Para avaliar o quão próximos estão os parâmetros determinados pela análise inversa dos parâmetros determinados experimentalmente, é utilizada a seguinte formulação:

$$DP = \frac{P_n - P_{exp}}{P_{exp}} \cdot 100\% \quad (5.1)$$

sendo P_n o parâmetro determinado numericamente, P_{exp} o parâmetro determinado experimentalmente.

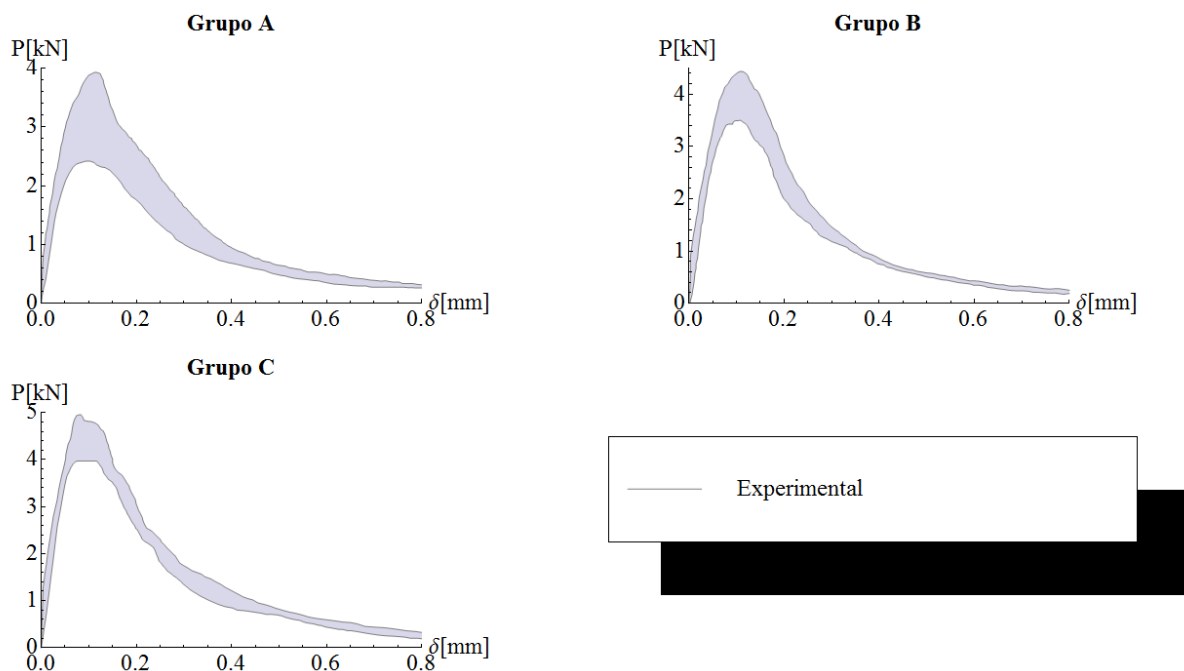


Figura 5.11 – Envoltória experimental de cada grupo de análise.

São utilizados para os ajustes os modelos CHM e SF(Rig.) (utilizando a malha corrigida com o trecho rígido apresentado na seção 4.4) e os três modelos coesivos apresentados na seção 2.7: Linear, Bilinear e Hordijk.

A Tabela 5.7 apresenta os valores de módulo de elasticidade obtidos pela análise inversa. Percebe-se pelos resíduos que o método de minimização não se interrompeu pela tolerância do resíduo ($10^{-10} \text{ kN}^2 \cdot \text{mm}$) mas pela tolerância do passo de convergência ($0,1 \text{ MPa}$). Na Tabela 5.8 é realizada a comparação do módulo de elasticidade determinado experimentalmente com o determinado pela análise inversa. Pela comparação, percebe-se que os valores determinados numericamente são muito semelhantes aos determinados experimentalmente, tendo-se uma diferença máxima de 13,6% na comparação do grupo B com o CHM.

As Tabelas de 5.9 à 5.14 apresenta os resultados da análise inversa para as curvas coesivas propostas nos dois modelos de simulação. Como pode-se observar nas tabelas, os resíduos obtidos não foram menores que a tolerância estabelecida ($10^{-6} \text{ kN}^2 \cdot \text{mm}$), sendo que o método de minimização interrompeu-se devido a tolerância do passo (10^{-4} para todos os parâmetros).

Tabela 5.7 – Módulos de Elasticidade determinados pela Análise Inversa.

Grupo	E_c CHM (MPa)	Resíduo (kN ² .mm)	E_c SF(Rig.) (MPa)	Resíduo (kN ² .mm)
A	18908,5	$8,011 \times 10^{-6}$	20442,8	$9,071 \times 10^{-6}$
B	21905,9	$8,340 \times 10^{-6}$	23746,8	$7,848 \times 10^{-6}$
C	30458,5	$5,878 \times 10^{-6}$	32216,5	$5,452 \times 10^{-6}$

Tabela 5.8 – Comparação do Módulo de Elasticidade determinado Experimentalmente com a Análise Inversa.

Grupo	E_c (MPa)	E_c CHM (MPa)	DP CHM (%)	E_c SF(Rig.) (MPa)	DP SF(Rig.) (%)
A	19442,0	18908,5	-2,744	20442,8	5,148
B	25354,0	21905,9	-13,600	23746,8	-6,339
C	31865,0	30458,5	-4,416	32216,5	1,103

Tabela 5.9 – Parâmetros de Hordijk determinados pela Análise Inversa para CHM.

Grupo	f_{tc} (MPa)	G_F (J/m ²)	Resíduo (kN ² .mm)
A	2,27	128	$7,82 \times 10^{-4}$
B	3,13	133	$4,87 \times 10^{-4}$
C	3,21	167	$5,28 \times 10^{-4}$

Tabela 5.10 – Parâmetros de Hordijk determinados pela Análise Inversa para SF.

Grupo	f_{tc} (MPa)	G_F (J/m ²)	Resíduo (kN ² .mm)
A	2,21	136	$7,52 \times 10^{-4}$
B	3,10	148	$4,24 \times 10^{-4}$
C	3,13	177	$4,62 \times 10^{-4}$

Tabela 5.11 – Parâmetros da Curva Linear determinados pela Análise Inversa para CHM.

Grupo	f_{tc} (MPa)	a_1	Resíduo ($kN^2 \cdot mm$)
A	1,61	10,70	$7,76 \times 10^{-4}$
B	2,24	19,50	$4,54 \times 10^{-4}$
C	2,33	17,40	$5,36 \times 10^{-4}$

Tabela 5.12 – Parâmetros da Curva Linear determinados pela Análise Inversa para SF.

Grupo	f_{tc} (MPa)	a_1	Resíduo ($kN^2 \cdot mm$)
A	1,46	8,47	$7,95 \times 10^{-4}$
B	2,04	15,30	$4,80 \times 10^{-4}$
C	2,12	13,90	$6,05 \times 10^{-4}$

Tabela 5.13 – Parâmetros da Curva Bilinear determinados pela Análise Inversa para CHM.

Grupo	f_{tc} (MPa)	a_1	a_2	b_2	Resíduo ($kN^2 \cdot mm$)
A	1,77	8,58	1,56	0,366	$7,09 \times 10^{-4}$
B	2,42	10,70	1,56	0,301	$3,62 \times 10^{-4}$
C	2,54	9,44	1,07	0,268	$3,62 \times 10^{-4}$

Tabela 5.14 – Parâmetros da Curva Bilinear determinados pela Análise Inversa para SF.

Grupo	f_{tc} (MPa)	a_1	a_2	b_2	Resíduo ($kN^2 \cdot mm$)
A	1,72	8,88	2,130	0,492	$7,11 \times 10^{-4}$
B	2,25	9,40	0,816	0,217	$3,52 \times 10^{-4}$
C	2,30	8,01	0,354	0,144	$3,57 \times 10^{-4}$

As comparações dos f_{tc} e G_F experimentais com os determinados numericamente são apresentadas nas Tabelas de 5.15 à 5.20. Independente do modelo numérico utilizado (CHM ou SF) os resultados obtidos são semelhantes. A curva coesiva de Hordijk é a que apresenta os valores mais semelhantes de f_{tc} e G_F determinados experimentalmente, com a maioria das comparações tendo uma diferença menor que 5%, tendo somente uma diferença um pouco maior de f_{tc} (15%) no Grupo C. Para as demais curvas, estas se distanciam bastante da determinação de f_{tc} , em especial para a curva Linear. A curva Bilinear representa bem G_F .

As Figuras 5.12 e 5.13 apresenta as curvas coesivas ajustadas por cada modelo, e as Figuras 5.14 e 5.15 as comparações das envoltórias experimentais com as curvas ajustadas.

Tabela 5.15 – Comparação de f_{tc} determinado Experimentalmente com a Análise Inversa pela Curva de Hordijk (1991).

Grupo	f_{tc} Exp. (MPa)	f_{tc} CHM (MPa)	DP CHM (%)	f_{tc} SF(Rig.) (MPa)	DP SF(Rig.) (%)
A	2,17	2,27	4,608	2,21	1,843
B	3,18	3,13	-1,572	3,10	-2,516
C	3,80	3,21	-15,526	3,13	-17,632

Tabela 5.16 – Comparação de G_F determinado Experimentalmente com a Análise Inversa pela Curva de Hordijk (1991).

Grupo	G_F Exp. (J/m²)	G_F CHM (J/m²)	DP CHM (%)	G_F SF(Rig.) (J/m²)	DP SF(Rig.) (%)
A	130	128	-1,538	136	4,615
B	141	133	-5,674	148	4,965
C	168	167	-0,595	177	5,357

Tabela 5.17 – Comparação de f_{tc} determinado Experimentalmente com a Análise Inversa pela Curva Linear.

Grupo	f_{tc} Exp. (MPa)	f_{tc} CHM (MPa)	DP CHM (%)	f_{tc} SF(Rig.) (MPa)	DP SF(Rig.) (%)
A	2,17	1,61	-25,806	1,46	-32,719
B	3,18	2,24	-29,560	2,04	-35,849
C	3,80	2,33	-38,684	2,12	-44,211

Tabela 5.18 – Comparação de G_F determinado Experimentalmente com a Análise Inversa pela Curva Linear.

Grupo	G_F Exp. (J/m^2)	G_F CHM (J/m^2)	DP CHM (%)	G_F SF(Rig.) (J/m^2)	DP SF(Rig.) (%)
A	130	121	-6,923	126	-3,077
B	141	129	-8,511	136	-3,546
C	168	156	-7,143	162	-3,571

Tabela 5.19 – Comparação de f_{tc} determinado Experimentalmente com a Análise Inversa pela Curva Bilinear.

Grupo	f_{tc} Exp. (MPa)	f_{tc} CHM (MPa)	DP CHM (%)	f_{tc} SF(Rig.) (MPa)	DP SF(Rig.) (%)
A	2,17	1,77	-18,433	1,72	-20,737
B	3,18	2,42	-23,899	2,25	-29,245
C	3,80	2,54	-33,158	2,30	-39,474

Tabela 5.20 – Comparação de G_F determinado Experimentalmente com a Análise Inversa pela Curva Bilinear.

Grupo	G_F Exp. (J/m^2)	G_F CHM (J/m^2)	DP CHM (%)	G_F SF(Rig.) (J/m^2)	DP SF(Rig.) (%)
A	130	127	-2,308	131	0,769
B	141	135	-4,255	145	2,837
C	168	167	-0,595	177	5,357

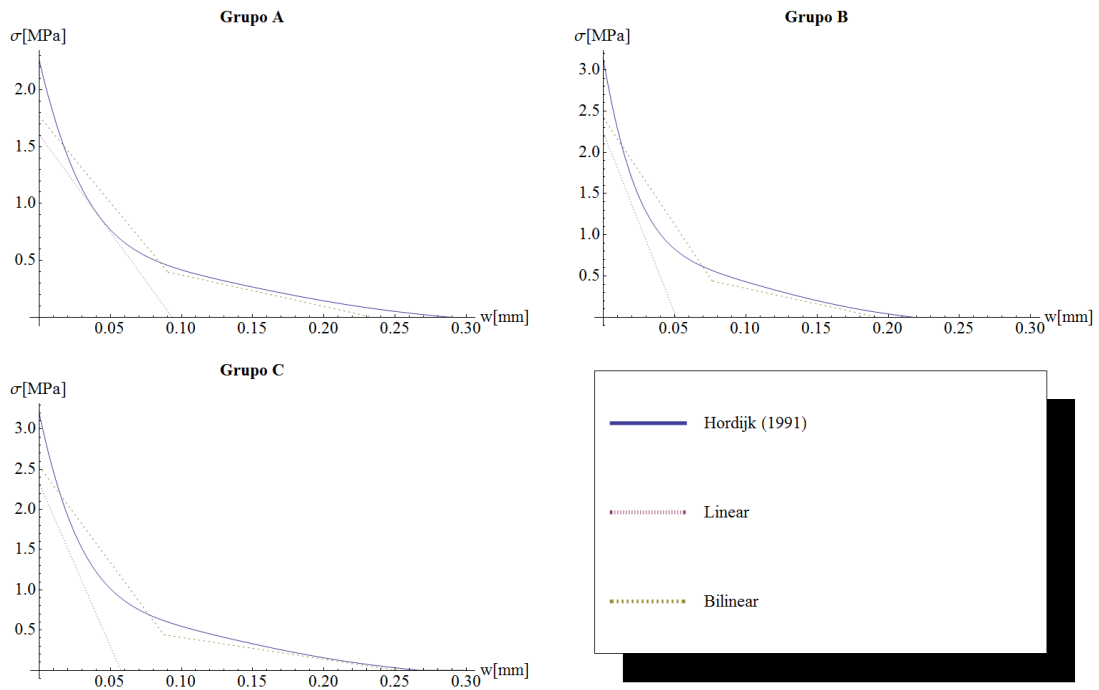


Figura 5.12 – Curvas coesivas ajustadas utilizando o CHM.

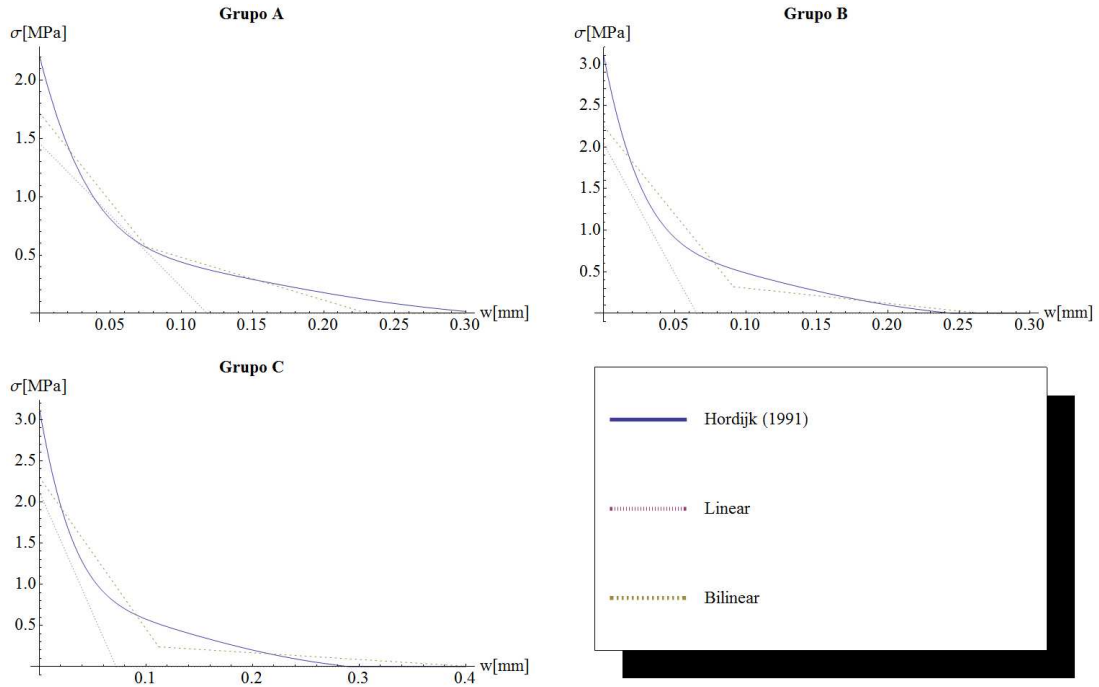


Figura 5.13 – Curvas coesivas ajustadas utilizando o modelo de SF(Rig.).

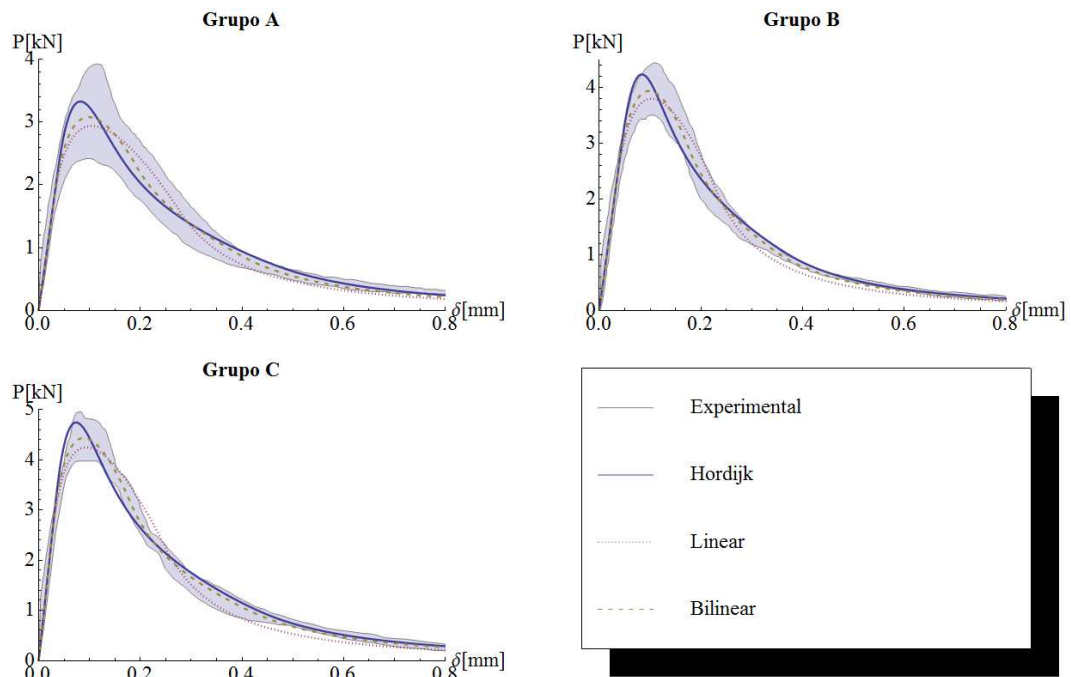


Figura 5.14 – Envoltória Experimental com as Curvas Ajustadas do CHM.

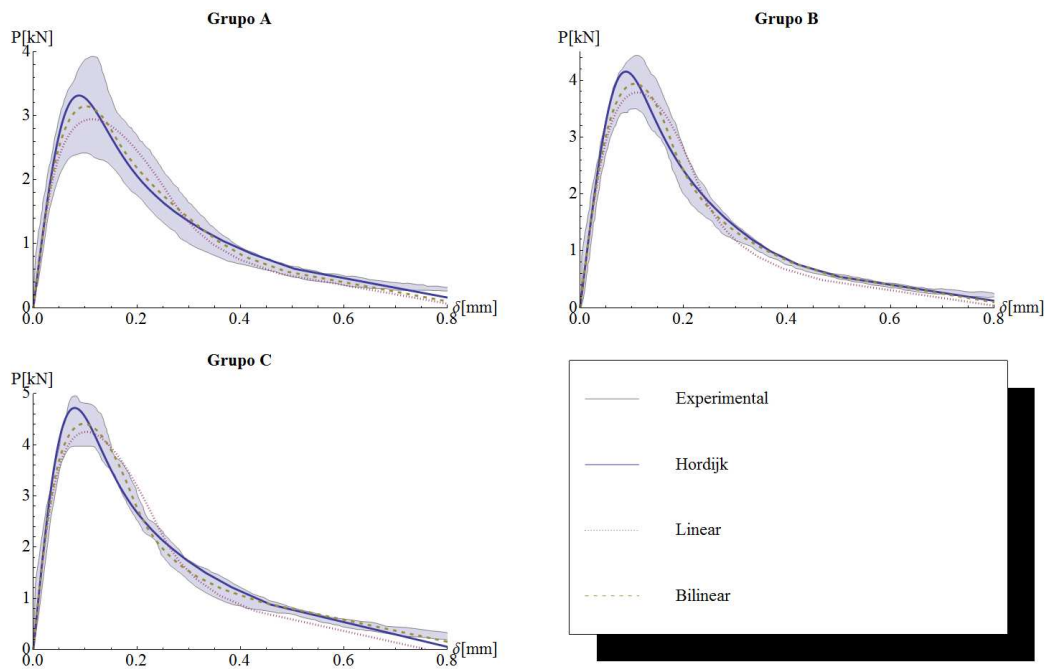


Figura 5.15 – Envoltória Experimental com as Curvas Ajustadas do modelo SF (Rig).

5.4 – Considerações Finais

Nesta seção foi apresentada a ferramenta computacional desenvolvida para a automatização do ajuste dos parâmetros visco-coesivos. A ferramenta se divide em dois módulos, um para ajustes estáticos e outro para ajustes dinâmicos.

Foram realizados alguns testes idealizados nas subseções 5.3.1, 5.3.2 e 5.3.3 com intuito de verificar a capacidade de a metodologia de ajuste resultar em parâmetros conhecidos e impostos, assim como estabelecer critérios de tolerância à metodologia.

Na subseção 5.3.4 foi realizado um teste com três grupos de concreto cujo parâmetros haviam sido determinados experimentalmente. Pelos resultados obtidos na análise inversa, percebeu-se que o módulo de elasticidade é representado adequadamente e que a curva de Hordijk (1991) foi a que apresentou os melhores resultados. A curva linear não apresentou resultados satisfatórios quando comparados os parâmetros. Não foram observadas diferenças significativas dos resultados obtidos pelo CHM com os obtidos pela SF(Rig.).

6 – ANÁLISE INVERSA COM DADOS EXPERIMENTAIS: VISCO-COESÃO

6.1 - Considerações Iniciais

Nesta seção é realizada a análise inversa para os resultados experimentais de vigas de concreto de alta resistência submetidos à ensaio de flexão em três pontos. Esses ensaios foram realizados por Rosa *et al.* (2012), e as soluções apresentadas no trabalho referido são comparadas com as soluções deste trabalho. São propostas algumas metodologias para avaliação das soluções obtidas por análise inversa assim como avaliar o modelo visco-coesivo proposto por Rosa *et al.* (2012).

6.2 – Caracterização do Concreto de Rosa *et al.* (2012)

São utilizados os ensaios apresentados em Rosa *et al.* (2012). Os ensaios foram realizados em vigas de concreto de alta resistência submetidas a flexão em três pontos nas seguintes velocidades de atuação do pistão ($\dot{\delta}$): $1,74 \times 10^{-5} \text{ mm/s}$, $5,5 \times 10^{-4} \text{ mm/s}$, $1,74 \times 10^{-2} \text{ mm/s}$, $5,5 \times 10^{-1} \text{ mm/s}$ e $1,74 \times 10^{+1} \text{ mm/s}$.

As propriedades do concreto foram definidas por ensaios de compressão axial ($E_c = 33,9 \text{ GPa}$), ensaios de compressão diametral ($f_{tc} = 5,2 \text{ MPa}$) e ensaios de flexão em três pontos ($G_F = 123 \text{ J/m}^2$).

Baseado no procedimento de Guinea *et al.* (1994), foi construída uma curva Bilinear com os seguintes parâmetros: $f_{tc} = 5,2 \text{ MPa}$, $a_1 = 50,0 \text{ mm}^{-1}$, $a_2 = 0,43 \text{ mm}^{-1}$ e $b_2 = 0,12$ ($G_F = 128 \text{ J/m}^2$).

Para os parâmetros do modelo viscoso proposto, Rosa *et al.* (2012) definiram os valores realizando os ajustes das curvas $P - \delta$ de tal modo que os valores máximos de P de cada curva numérica fosse equiparável com os valores máximos dos ensaios experimentais. Por esse processo, eles obtiveram $\dot{w}_0 = 0,0965 \text{ mm/s}$ e $n = 0,16$. A Figura 6.1 apresenta a comparação das curvas $P - \delta$ numéricas com as experimentais

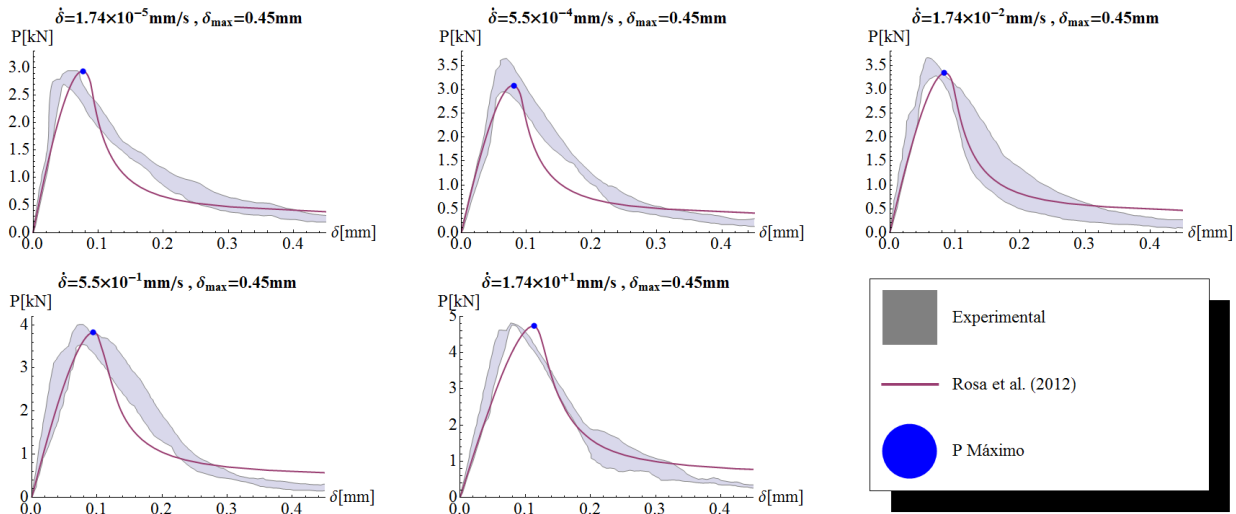


Figura 6.1 – Curvas $P - \delta$ de Rosa *et al.* (2012) comparadas com as envoltórias experimentais.

6.3 – Metodologia

Com base no conjunto de curvas experimentais obtidas por Rosa *et al.* (2012), são realizados os seguintes procedimentos:

- **Ajuste do Módulo de Elasticidade:** uso da ferramenta desenvolvida para ajuste do módulo de elasticidade utilizando os modelos numéricos apresentados nas seções 4.2 e 4.3. Os valores obtidos serão comparados com o resultado experimental para verificar a qualidade da solução;
- **Uso de três intervalos amostrais:** Rosa *et al.* (2012) utilizaram somente o pico das curvas $P - \delta$ como parâmetro para o ajuste das variáveis do modelo viscoso. Como discutido na seção 3.4, o intervalo de dados utilizado pode influenciar na solução. Desse modo, são utilizados três intervalos amostrais de δ :
 - **0 a 0,45 mm:** é o intervalo amostral apresentado em Rosa *et al.* (2012), o qual torna viável o uso do modelo de SF, uma vez que este, para essa combinação de parâmetros viga-concreto, simula até um pouco além de 0,45 mm (limitação do SF apresentada na seção 4.4);
 - **0 a 0,225 mm:** metade do intervalo anterior;

- **0 a 0, 11 mm:** o final do intervalo localiza-se logo após o pico de carga das curvas experimentais, sendo este caso o que mais se aproxima ao ajuste pelo pico de curva realizado por Rosa *et al.* (2012);
- **Ajuste do modelo viscoso utilizando a curva Bilinear de Rosa *et al.* (2012):** é utilizada a curva Bilinear apresentada por Rosa *et al.* (2012) como modelo coesivo para ajuste do modelo viscoso. Os resultados são comparados entre os modelos numéricos (CHM e SF(Rig.)), nos diferentes intervalos amostrais e com os resultados da referência;
- **Ajuste do modelo coesivo utilizando os dados experimentais quase-estáticos:** os ensaios realizados com $\delta = 1,74 \times 10^{-5} \text{ mm/s}$ são considerados ensaios quase-estáticos. Estando esses ensaios muito próximos de um ensaio estático ideal, utilizam-se esses conjuntos de dados para ajustar as curvas coesivas de Hordijk (1991) e Bilinear (as curvas que obtiveram os melhores resultados na seção 5.3.4). Esses resultados são comparados com a curva Bilinear apresentada em Rosa *et al.* (2012);
- **Ajuste do modelo viscoso utilizando as curvas coesivas determinadas numericamente:** utilizando as curvas coesivas determinadas com os experimentos quase-estáticos, é ajustado o modelo viscoso com base nos demais ensaios experimentais. Os resultados são comparados entre os modelos numéricos (CHM e SF), nos diferentes intervalos amostrais e com os resultados da referência;
- **Ajuste simultâneo da visco-coesão:** o modelo viscoso e o modelo coesivo (Hordijk ou Bilinear) são ajustados simultaneamente com base em todos os dados experimentais e em diferentes intervalos amostrais. Esses resultados são comparados com os dados da referência;

Analisando-se os resultados dos procedimentos, avalia-se se o modelo proposto por Rosa *et al.* (2012) é capaz de representar o comportamento do concreto quando submetido às diferentes taxas de sollicitação.

6.4 – Resultados

Nesta seção são apresentados os resultados do procedimento de análise inversa.

6.4.1 – Ajuste do Módulo de Elasticidade

A Tabela 6.1 apresenta os resultados do ajuste do módulo de elasticidade utilizando o CHM e a SF. Para a SF foi considerada a simulação sem e com a correção pela rigidez proposta na seção 4.4, uma vez que em Rosa *et al.* (2012) esta correção não foi considerada. A SF com a faixa rígida possui “(Rig.)” ao lado do nome.

Tabela 6.1 – Resultados do Módulo de Elasticidade obtidos pela Análise Inversa.

	Rosa <i>et al.</i> (2012)	CHM	SF	SF (Rig.)
E_c (MPa)	33900	33900	40718	33987
Resíduo ($kN^2 \cdot mm$)	–	$1,16 \times 10^{-6}$	$1,22 \times 10^{-6}$	$1,23 \times 10^{-6}$
DP (%)	–	0,00	20,11	0,26

Como pode-se observar pela tabela, o CHM e o SF (Rig.) corresponderam ao módulo de elasticidade determinado experimentalmente. Para o SF sem a correção, o ajuste apresentou 20% de diferença em relação ao resultado experimental, sendo que dessa maneira, será utilizado somente o SF (Rig.) nos próximos ajustes.

6.4.2 – Ajuste do modelo viscoso utilizando a curva Bilinear experimental

A Tabela 6.2 apresenta os resultados dos ajustes, onde δ_{max} determina o valor máximo utilizado no intervalo amostral. Como é observado, o parâmetro \dot{w}_0 varia consideravelmente de intervalo a intervalo e não corresponde ao parâmetro obtido por Rosa *et al.* (2012) mesmo quando $\delta_{max} = 0,11 \text{ mm}$. Essa diferença pode ser atribuída a correção da SF comentada na seção 6.4.1,

sendo que o SF sem a correção reproduz as curvas apresentadas por Rosa *et al.* (2012) para os parâmetros apresentados.

Tabela 6.2 – Resultados obtidos pela análise inversa do modelo de Rosa *et al.* (2012) utilizando a curva Bilinear do artigo.

Modelo	δ_{max} (mm)	\dot{w}_0 (mm/s)	n	Resíduo (kN ² .mm)
CHM	0,450	45,5	0,148	$2,15 \times 10^{-3}$
	0,225	12,3	0,137	$4,51 \times 10^{-4}$
	0,110	10,2	0,160	$9,23 \times 10^{-5}$
SF (Rig.)	0,450	1,95	0,125	$2,14 \times 10^{-3}$
	0,225	0,497	0,111	$4,32 \times 10^{-4}$
	0,110	0,804	0,124	$9,06 \times 10^{-5}$
Rosa <i>et al.</i> (2012)	0,450	0,0965	0,16	$4,14 \times 10^{-3}$

As Figuras 6.2, 6.3 e 6.4 apresentam a comparação gráfica das curvas numéricas com a envoltória experimental.

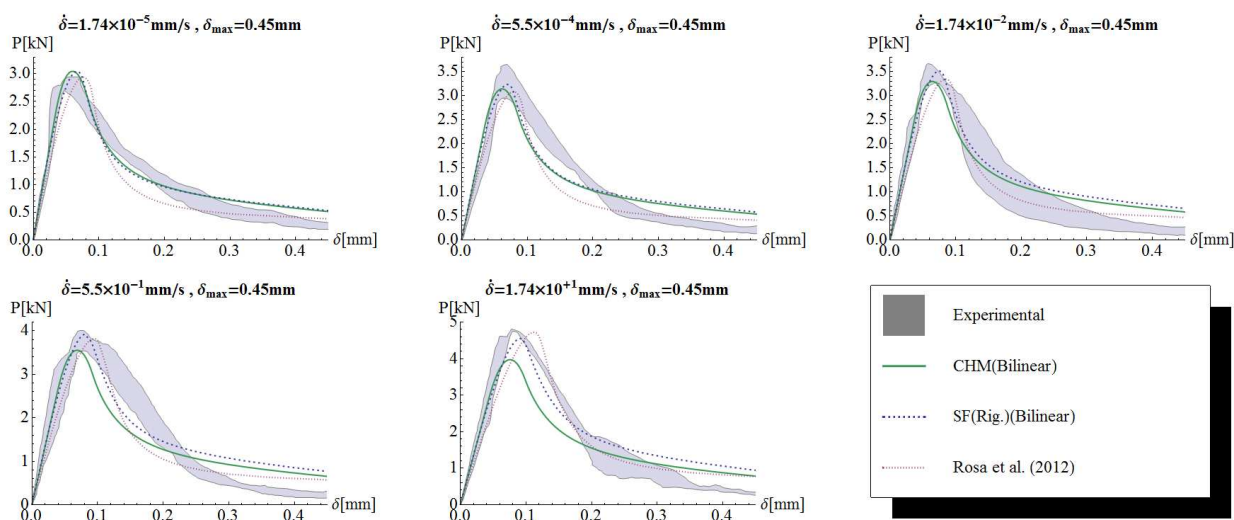


Figura 6.2 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,45 mm utilizando a curva Bilinear de Rosa *et al.* (2012).

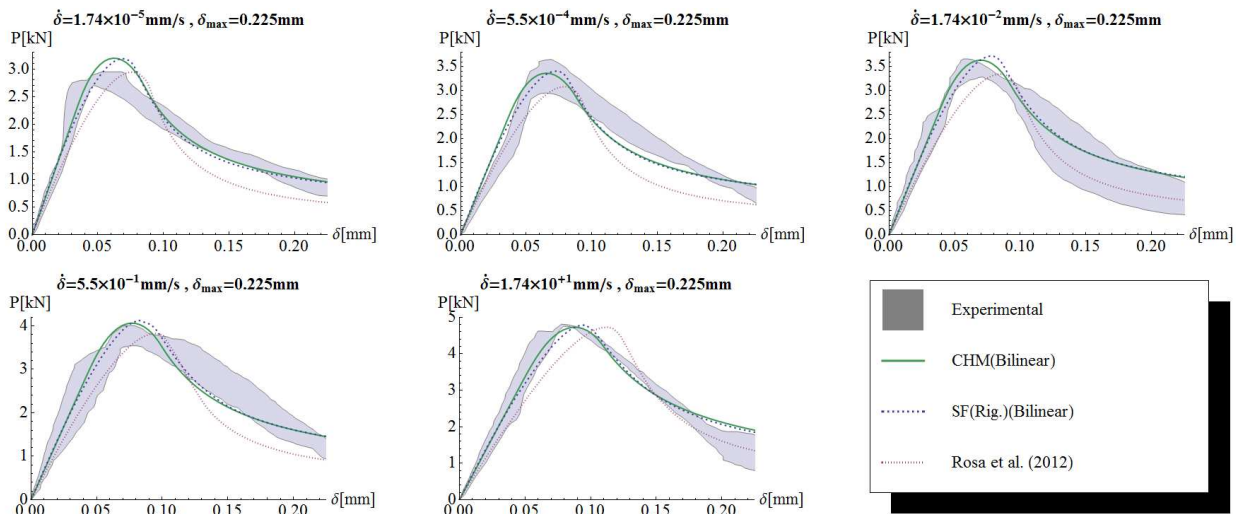


Figura 6.3 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,225 mm utilizando a curva Bilinear de Rosa et al. (2012).

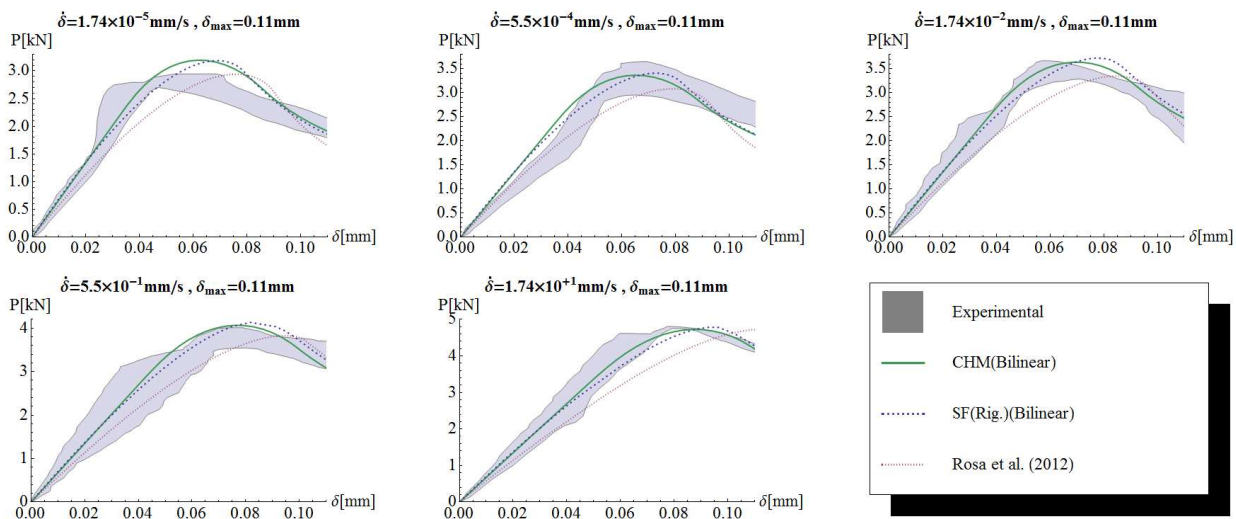


Figura 6.4 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,11 mm utilizando a curva Bilinear de Rosa et al. (2012).

Na Figura 6.2 observa-se que as curvas numéricas não representam adequadamente o envoltório experimental. Isso ocorre pois a curva bilinear determinada utilizando o procedimento de Guinea *et al.* (1994) limita-se na representação do valor máximo de P da curva $P - \delta$. Percebe-se que nas Figuras 6.3 e 6.4 as curvas numéricas representam melhor as experimentais, entretanto, os parâmetros obtidos entre diferentes δ_{max} variaram significativamente.

6.4.3 – Ajuste do modelo coesivo utilizando os dados experimentais quase-estáticos

A Tabela 6.3 apresenta os resultados dos ajustes das curvas coesivas utilizando as envoltórias experimentais quase-estáticas ($\dot{\delta} = 1,74 \times 10^{-5} \text{ mm/s}$). A Tabela 6.4 faz a comparação dos parâmetros f_{tc} e G_F experimentais e numéricos. Para G_F considerou-se também a comparação da energia aparente medida até o limite do intervalo dos dados experimentais (0,45 mm), sendo esse valor indicado por $G_{F0-0,45}$. Pela análise dos resultados considera-se que os valores obtidos pelo ajuste são razoavelmente similares aos experimentais.

As Figuras 6.5 e 6.6 apresentam a comparação das curvas $P - \delta$ numérica e experimentais. As curvas ajustadas representam bem o comportamento das curvas experimentais. É possível observar que a principal diferença dos modelos coesivos ajustados para o modelo bilinear utilizado por Rosa *et al.* (2012) encontra-se no valor w_c , sendo que os ajustados apresentam um valor em torno de 0,10 mm enquanto o da referência encontra-se um pouco acima de 0,25 mm.

Tabela 6.3 – Resultados das curvas coesivas obtidos pela análise inversa das envoltórias quase-estáticas.

Modelo	Coesão	f_{tc} (MPa)	G_F (J/m ²)	a_1 (mm ⁻¹)	a_2 (mm ⁻¹)	b_2	Resíduo ($\times 10^{-5}$) (kN ² .mm)
CHM	Hordijk	5,03	98	–	–	–	5,82
	Bilinear	4,80	100	40,3	3,16	0,30	5,92
SF (Rig.)	Hordijk	4,78	111	–	–	–	6,93
	Bilinear	5,25	113	49,3	3,05	0,317	6,14
Rosa et al. (2012)	Bilinear	5,20	128	50,0	0,43	0,12	414

Tabela 6.4 – Comparação dos parâmetros ajustados com os valores experimentais.

Modelo	Coesão	f_{tc} (MPa)	$DP f_{tc}$ (%)	$G_F (G_{F0-0,45})$ $\left(\frac{J}{m^2}\right)$	$DP G_F (G_{F0-0,45})$ (%)
Experimental	–	5,20	–	123 (95)	–
CHM	Hordijk	5,03	–2,269	98	–20,325 (3,158)
	Bilinear	4,80	–7,692	100	–18,699 (5,263)
SF (Rig.)	Hordijk	4,78	–8,077	111	–9,756 (16,842)
	Bilinear	5,25	0,962	113	–8,13 (18,947)

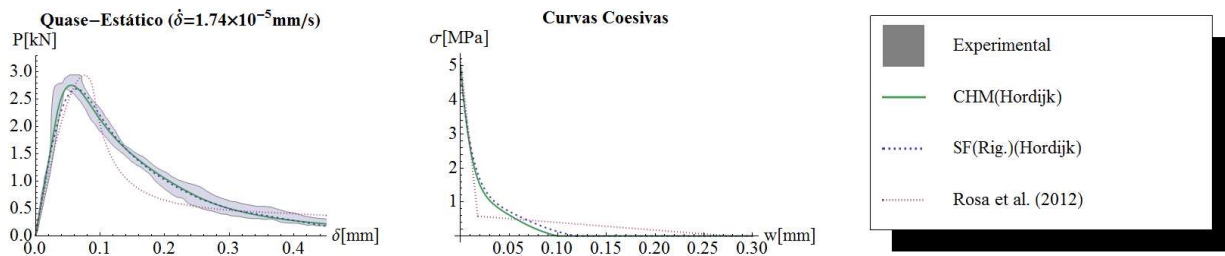


Figura 6.5 – Comparação das curvas $P - \delta$ obtidas pelo ajuste do modelo coesivo de Hordijk (1991).

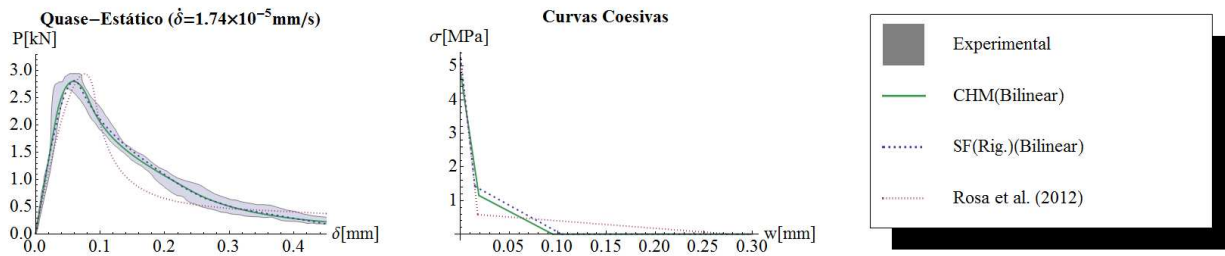


Figura 6.6 – Comparação das curvas $P - \delta$ obtidas pelo ajuste do modelo coesivo bilinear.

6.4.4 – Ajuste do modelo viscoso utilizando as curvas coesivas determinadas numericamente

A Tabela 6.5 apresenta os resultados dos ajustes do modelo viscoso utilizando-se como base as curvas coesivas determinadas na seção 6.4.3 e as amostras experimentais referentes a $\dot{\delta}$ de : $5,5 \times 10^{-4} \text{ mm/s}$, $1,74 \times 10^{-2} \text{ mm/s}$, $5,5 \times 10^{-1} \text{ mm/s}$ e $1,74 \times 10^{+1} \text{ mm/s}$. Novamente, os parâmetros apresentam variação significativa de um intervalo ao outro, o que reforça significativamente a necessidade de utilizar o maior conjunto possível de informações experimentais para os ajustes.

Tabela 6.5 – Resultados obtidos pela análise inversa do modelo de Rosa et al. (2012) utilizando as curvas coesivas determinadas numericamente na seção 6.4.3.

Modelo	Coesão	$\delta_{max} \text{ (mm)}$	$\dot{w}_0 \text{ (mm/s)}$	n	Resíduo ($kN^2 \cdot mm$)
CHM	Hordijk	0,450	99,0	0,156	$1,25 \times 10^{-3}$
		0,225	45,0	0,152	$4,42 \times 10^{-4}$
		0,110	7,74	0,161	$7,38 \times 10^{-5}$
	Bilinear	0,450	90,3	0,154	$1,29 \times 10^{-3}$
		0,225	35,2	0,152	$4,39 \times 10^{-4}$
		0,110	9,32	0,16	$7,32 \times 10^{-5}$
SF(Rig.)	Hordijk	0,450	21,3	0,158	$1,15 \times 10^{-3}$
		0,225	15,6	0,149	$4,45 \times 10^{-4}$
		0,110	1,55	0,159	$8,04 \times 10^{-5}$
	Bilinear	0,450	21,6	0,167	$1,22 \times 10^{-3}$
		0,225	14,7	0,156	$4,63 \times 10^{-4}$
		0,110	2,29	0,148	$7,27 \times 10^{-5}$
Rosa et al. (2012)	Bilinear	0,450	0,0965	0,16	$4,14 \times 10^{-3}$

As Figuras de 6.7 a 6.12 apresentam a comparação das curvas $P - \delta$ ajustadas com as curvas experimentais. Para $\dot{\delta} = 1,74 \times 10^1 \text{ mm/s}$ existe uma dificuldade de o modelo numérico

representar o pico da curva experimental. Entretanto, estes ajustes se mostram melhores que os ajustes da seção 6.4.2, uma vez que o final da curva $P - \delta$ é bem representada.

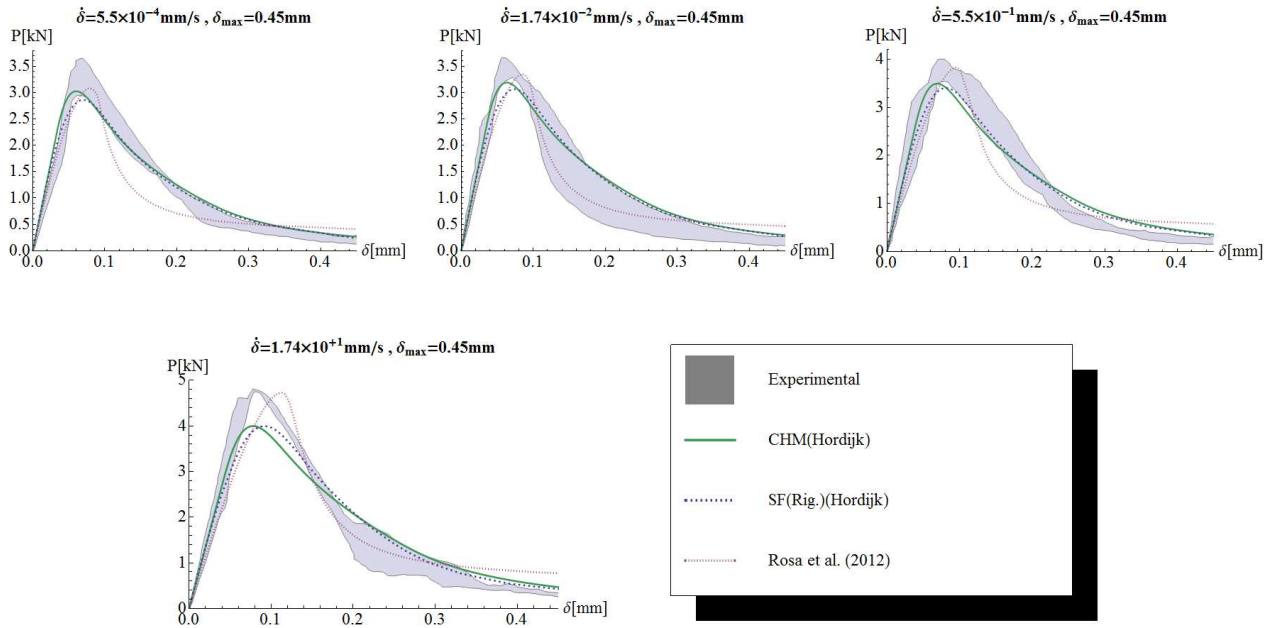


Figura 6.7 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,45 mm utilizando a curva Hordijk (1991) ajustada na seção 6.4.3.

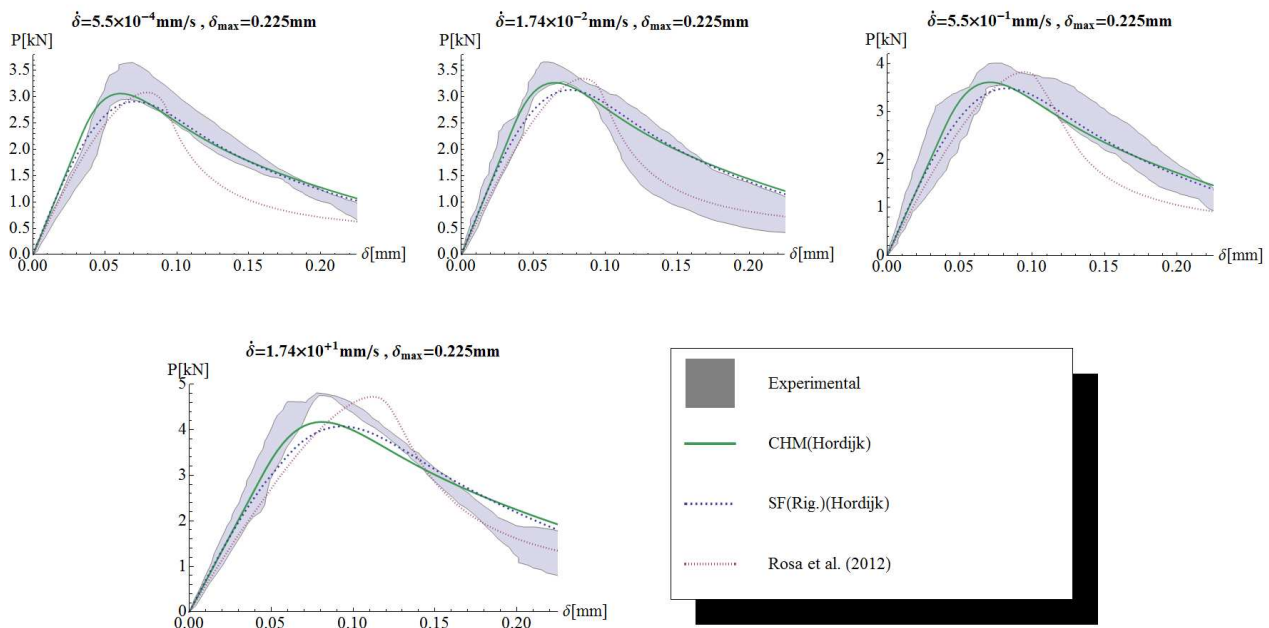


Figura 6.8 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,225 mm utilizando a curva Hordijk (1991) ajustada na seção 6.4.3.

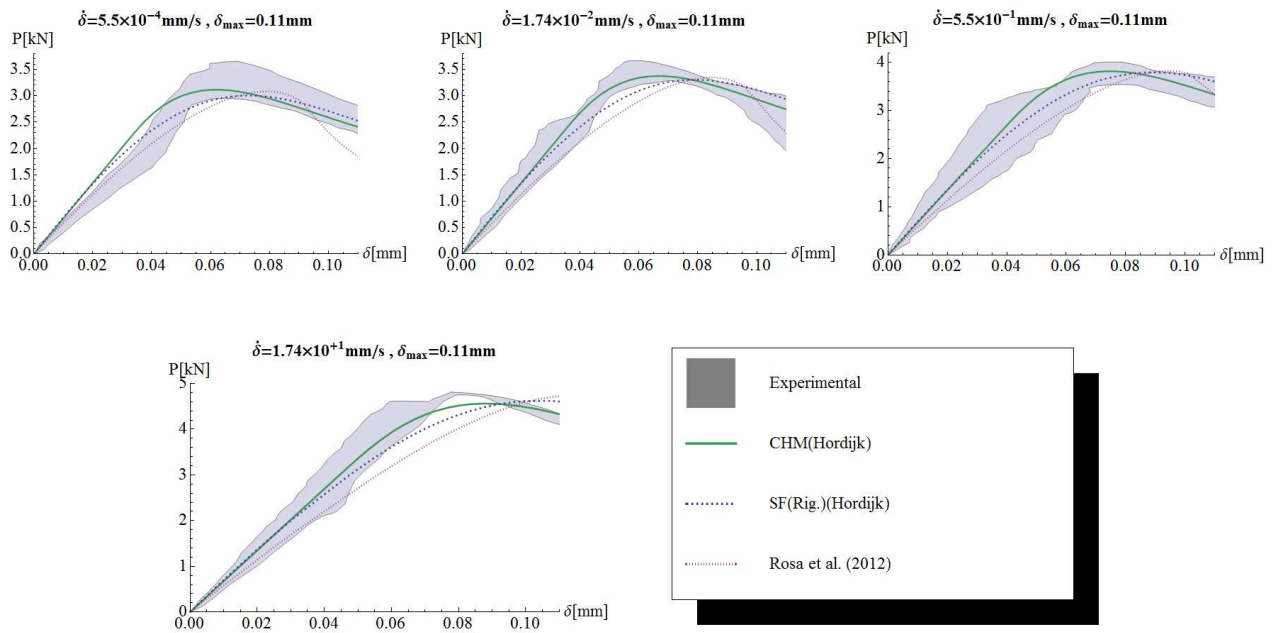


Figura 6.9 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,11 mm utilizando a curva Hordijk (1991) ajustada na seção 6.4.3.

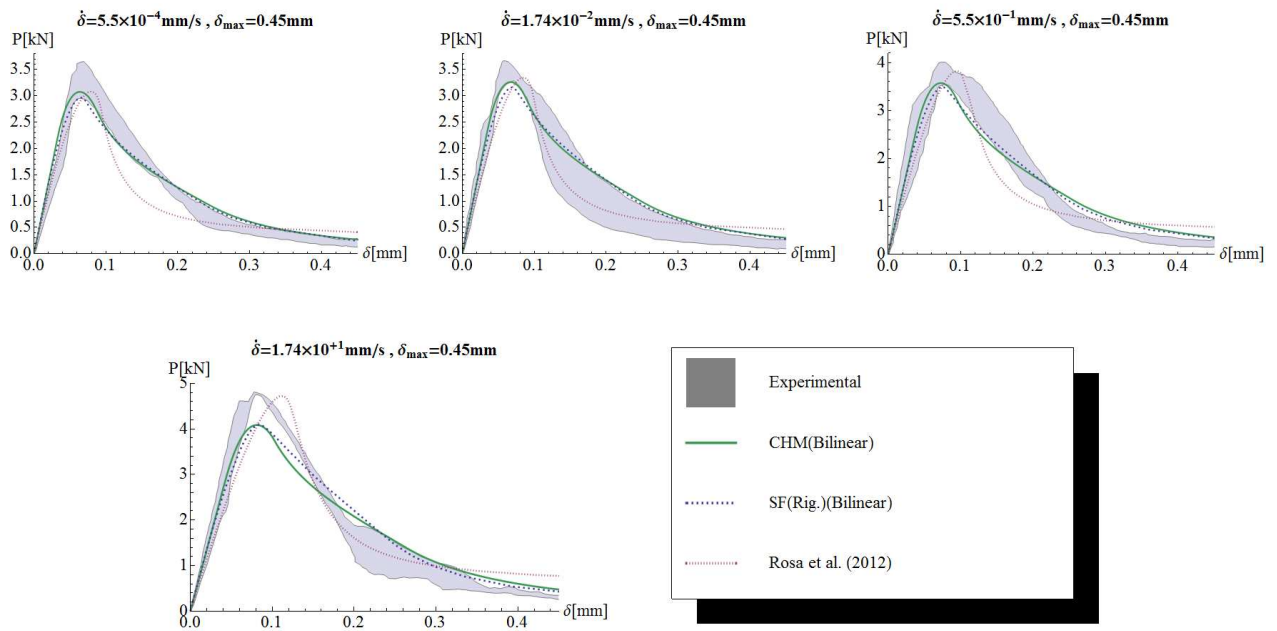


Figura 6.10 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,45 mm utilizando a curva Bilinear ajustada na seção 6.4.3.

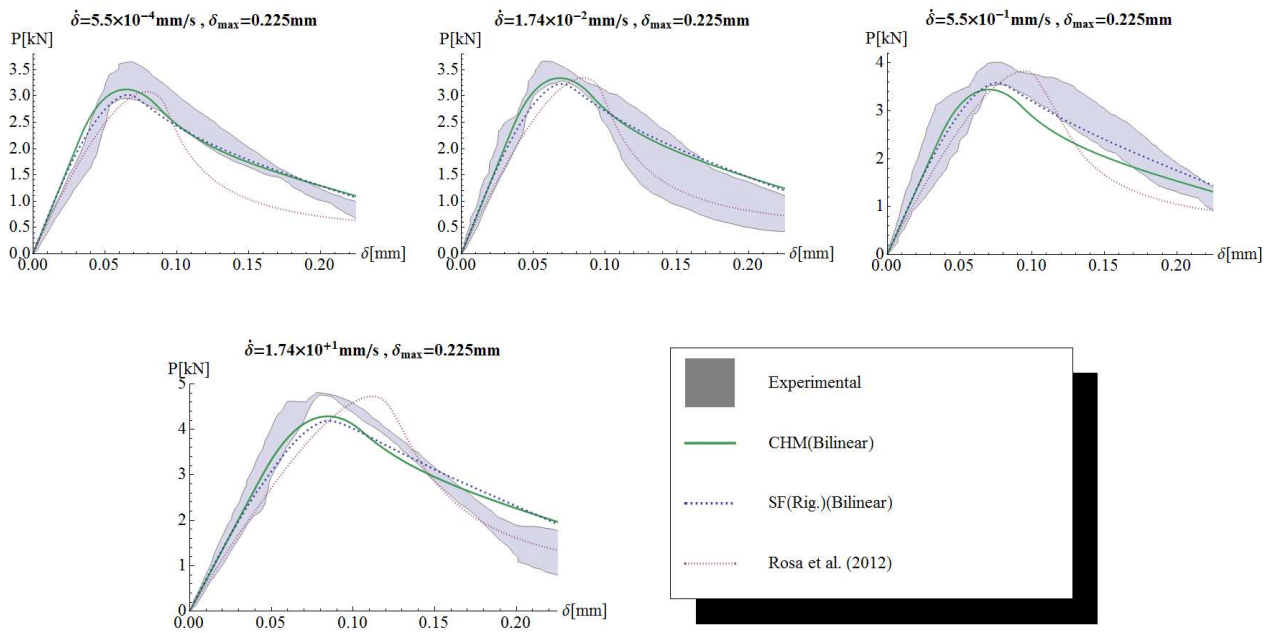


Figura 6.11 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,225 mm utilizando a curva Bilinear ajustada na seção 6.4.3.

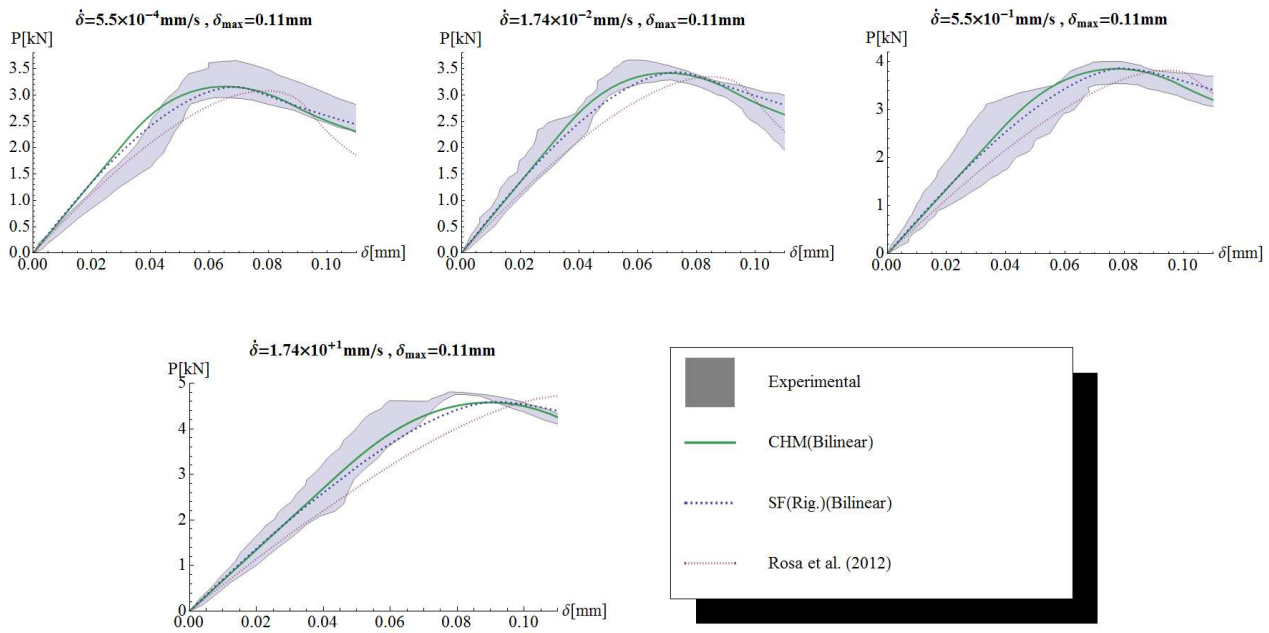


Figura 6.12 – Curvas $P - \delta$ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,11 mm utilizando a curva Bilinear ajustada na seção 6.4.3.

6.4.5 – Ajuste simultâneo de parâmetros coesivos e viscosos

As Tabelas de 6.6 até 6.9 apresentam os resultados obtidos pelo ajuste simultâneo das curvas coesivas com o modelo viscoso. Pelas Tabelas 6.6 e 6.8 observa-se que os parâmetros variam significativamente entre os intervalos amostrais. Nas tabelas 6.7 e 6.8 observa-se que é significativa a diferença entre os parâmetros determinados numericamente e os correspondentes experimentais.

As Figuras de 6.13 até 6.18 apresentam a comparação das curvas $P - \delta$ numéricas com as envoltórias experimentais. Esses foram os melhores ajustes obtidos utilizando-se o modelo viscoso de Rosa *et al.* (2012).

Tabela 6.6 – Resultados do ajuste simultâneo da visco-coesão utilizando o modelo coesivo de Hordijk (1991).

Modelo	δ_{max} (mm)	f_{tc} (MPa)	G_F (J/m ²)	\dot{w}_0 (mm/s)	n	Resíduo ($\times 10^{-4}$) (kN ² .mm)
CHM	0,450	5,13	63,7	6,92	0,105	9,68
	0,225	4,83	62,6	2,33	0,101	3,95
	0,110	4,31	87,9	1,01	0,127	0,84
SF(Rig.)	0,450	4,38	74,6	0,107	0,094	9,46
	0,225	4,96	70,5	0,0468	0,107	4,46
	0,110	5,01	64,3	0,0501	0,107	0,84
Rosa <i>et al.</i> (2012)	0,450	5,20	128	0,0965	0,16	41,40

Tabela 6.7 – Comparação dos resultados obtidos do ajuste simultâneo pelo modelo coesivo de Hordijk (1991) com os dados experimentais.

Modelo	δ_{max} (mm)	f_{tc} (MPa)	$DP f_{tc}$ (%)	$G_F(G_{F0-0,45})$ $\left(\frac{J}{m^2}\right)$	$DP G_F(G_{F0-0,45})$ (%)
Experimental	–	5,20	–	123 (95)	–
CHM	0,450	5,13	–1,346	63,7	–48,211 (–32,947)
	0,225	4,83	–7,115	62,6	–49,106 (–34,105)
	0,110	4,31	–17,115	87,9	–28,537 (–7,474)
SF(Rig.)	0,450	4,38	–15,769	74,6	–39,350 (–21,474)
	0,225	4,96	–4,615	70,5	–42,683 (–25,789)
	0,110	5,01	–3,654	64,3	–47,724 (–32,316)

Tabela 6.8 – Resultados do ajuste simultâneo da visco-coesão utilizando o modelo coesivo Bilinear.

Modelo	δ_{max} (mm)	f_{tc} (MPa)	G_F $\left(\frac{J}{m^2}\right)$	a_1 (mm ⁻¹)	a_2 (mm ⁻¹)	b_2	w_0 $\left(\frac{mm}{s}\right)$	n	Resíduo ($\times 10^{-4}$) (kN ² .mm)
CHM	0,450	4,15	71,6	36,8	7,90	0,428	3,83	0,111	9,39
	0,225	4,03	71,1	35,5	7,81	0,428	2,59	0,111	3,84
	0,110	4,16	67,2	39,3	12,50	0,560	1,35	0,133	0,83
SF (Rig.)	0,450	4,73	74,5	57,8	3,27	0,266	0,0869	0,095	9,21
	0,225	4,63	74,8	55,6	3,36	0,273	0,0855	0,097	3,80
	0,110	4,48	122,7	52,1	0,452	0,135	0,106	0,132	1,03
Rosa et al. (2012)	0,450	5,20	128	50,0	0,43	0,12	0,0965	0,16	41,4

Tabela 6.9 – Comparação dos resultados obtidos do ajuste simultâneo pelo modelo coesivo Bilinear com os dados experimentais.

Modelo	δ_{max} (mm)	f_{tc} (MPa)	DP f_{tc} (%)	$G_F(G_{F0-0,45})$ $\left(\frac{J}{m^2}\right)$	DP $G_F(G_{F0-0,45})$ (%)
Experimental	–	5,20	–	123 (95)	–
CHM	0,450	4,15	–20,192	71,6	–41,789 (–24,632)
	0,225	4,03	–22,500	71,1	–42,195 (–25,158)
	0,110	4,16	–20,000	67,2	–45,366 (–29,263)
SF(Rig.)	0,450	4,73	–9,038	74,5	–39,431 (–21,579)
	0,225	4,63	–10,962	74,8	–39,187 (–21,263)
	0,110	4,48	–13,846	122,7	–0,244 (–29,158)

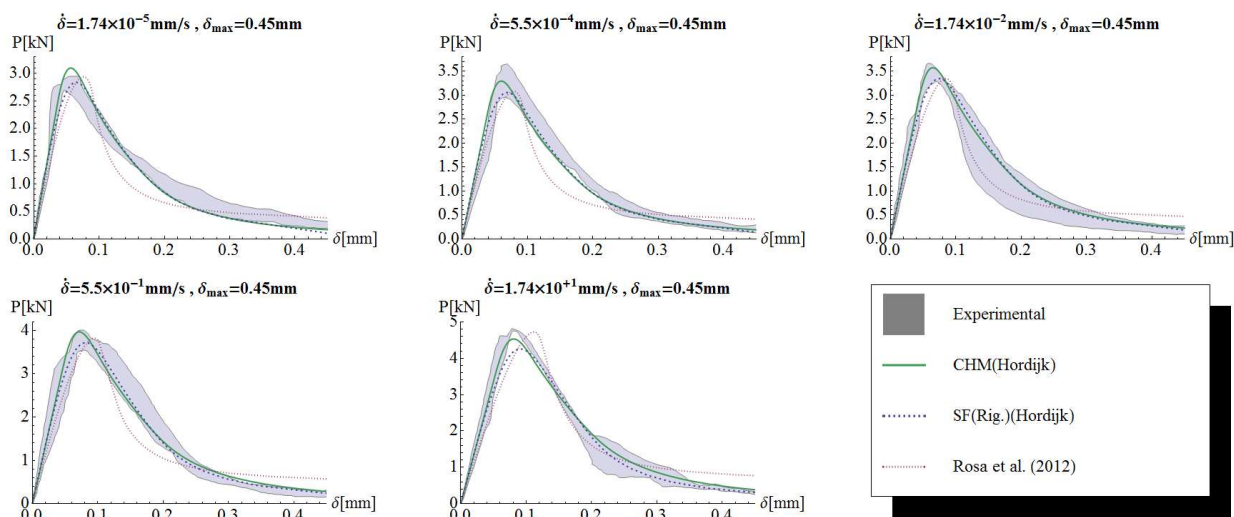


Figura 6.13 – Curvas $P - \delta$ para o intervalo de 0 a 0,45 mm ajustando simultaneamente Hordijk (1991) e modelo viscoso.

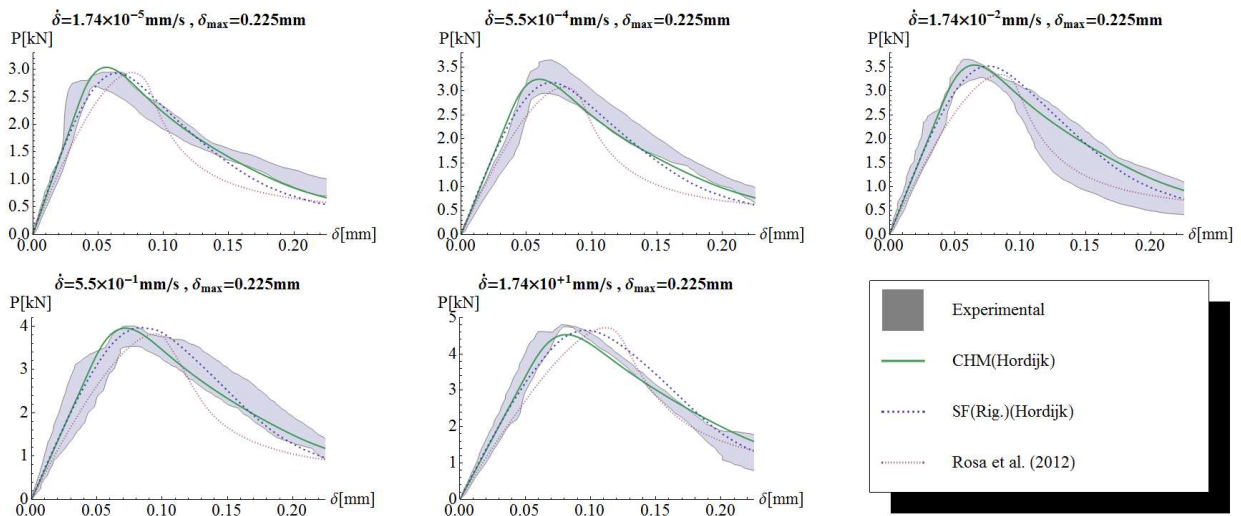


Figura 6.14 – Curvas $P - \delta$ para o intervalo de 0 a 0,225 mm ajustando simultaneamente Hordijk (1991) e modelo viscoso.

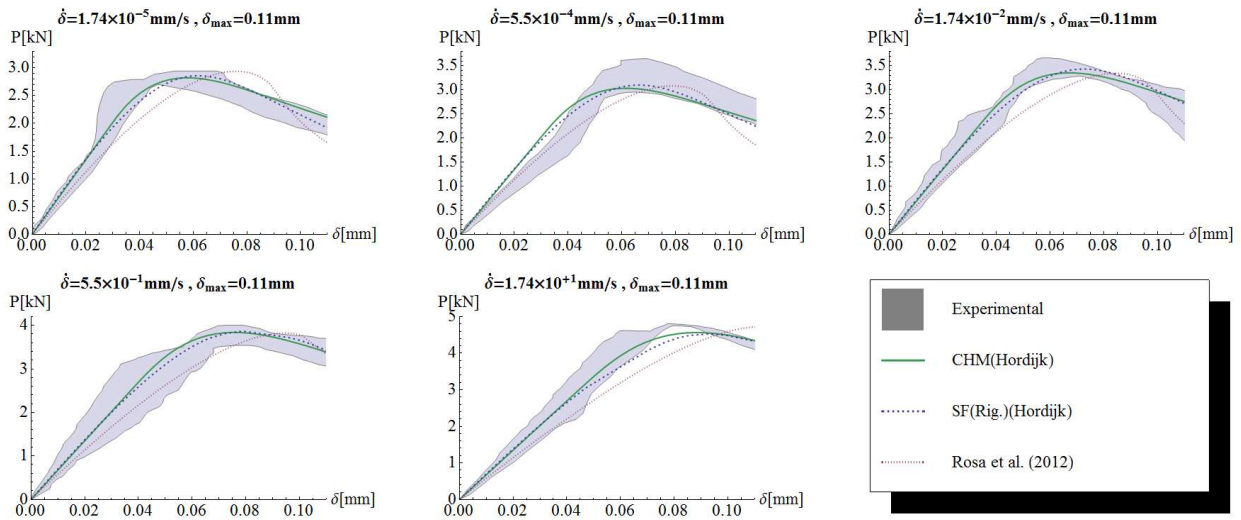


Figura 6.15 – Curvas $P - \delta$ para o intervalo de 0 a 0,11 mm ajustando simultaneamente Hordijk (1991) e modelo viscoso.

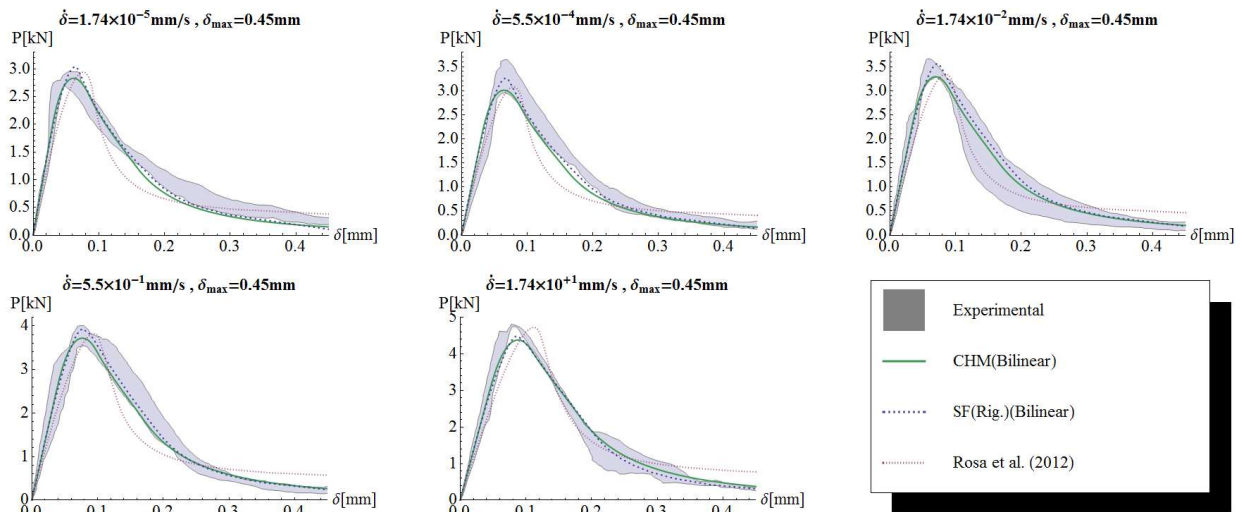


Figura 6.16 – Curvas $P - \delta$ para o intervalo de 0 a 0,45 mm ajustando simultaneamente o modelo coesivo bilinear e modelo viscoso.

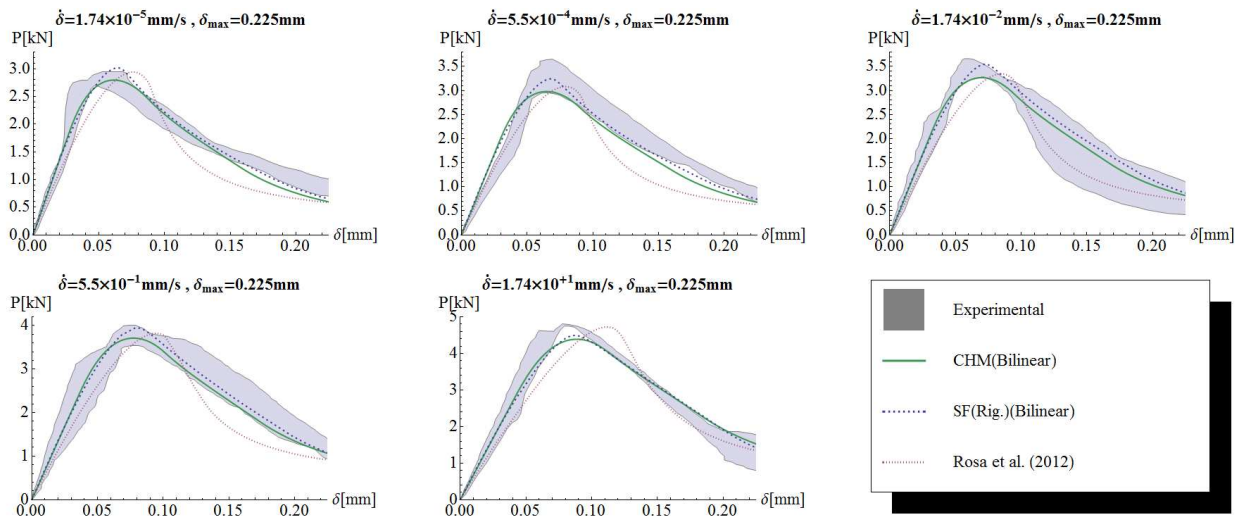


Figura 6.17 – Curvas $P - \delta$ para o intervalo de 0 a 0,225 mm ajustando simultaneamente o modelo coesivo bilinear e modelo viscoso.

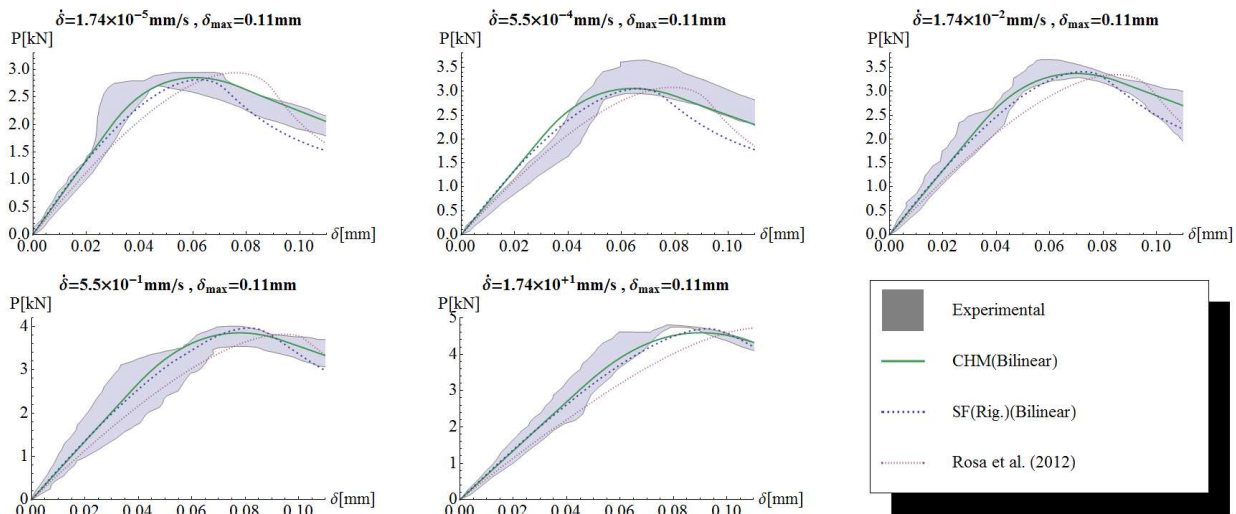


Figura 6.18 – Curvas $P - \delta$ para o intervalo de 0 a 0,11 mm ajustando simultaneamente o modelo coesivo bilinear e modelo viscoso.

6.5 – Comentários sobre os Resultados

O modelo de Rosa *et al.* (2012) foi proposto e avaliado para os valores máximos das curvas $P - \delta$. Os resultados apresentados na subseção 6.4 demonstram que o modelo de Rosa *et al.* (2012) não foi efetivo na representação completa das curvas $P - \delta$. Os parâmetros f_{tc} e G_F obtidos pelo ajuste simultâneo da coesão e viscosidade não se igualaram aos valores experimentais.

Uma questão que pode ser levantada é que o modelo de Rosa *et al.* (2012) só representa parcialmente o comportamento do concreto quando submetido a carregamento dinâmicos. Como discutido na subseção 3.4, o modelo proposto não é capaz de representar a variação de energia do concreto apresentada na subseção 2.9. O modelo é capaz de representar bem o aumento de tensão resistente à tração do concreto com o aumento da taxa de carregamento.

Uma outra questão que pode ser levantada provém da análise de materiais quase-frágeis e dúcteis em ensaios de impacto. Muitos materiais que apresentam comportamento quase-frágil ou dúctil quando submetidos a carregamento estático podem apresentar comportamento frágil sob carga de impacto. Este comportamento é devido à impossibilidade da redistribuição de tensões durante um período muito curto de deformação. Em termos de curvas coesivas, um material pode ser considerado mais frágil que outro se possui uma abertura crítica de fratura (w_c) menor.

Em termos de curvas coesivas, um material pode ser considerado mais frágil que outro se possui uma abertura crítica de fratura (w_c) menor. A Figura 6.19 exemplifica a afirmação anterior.

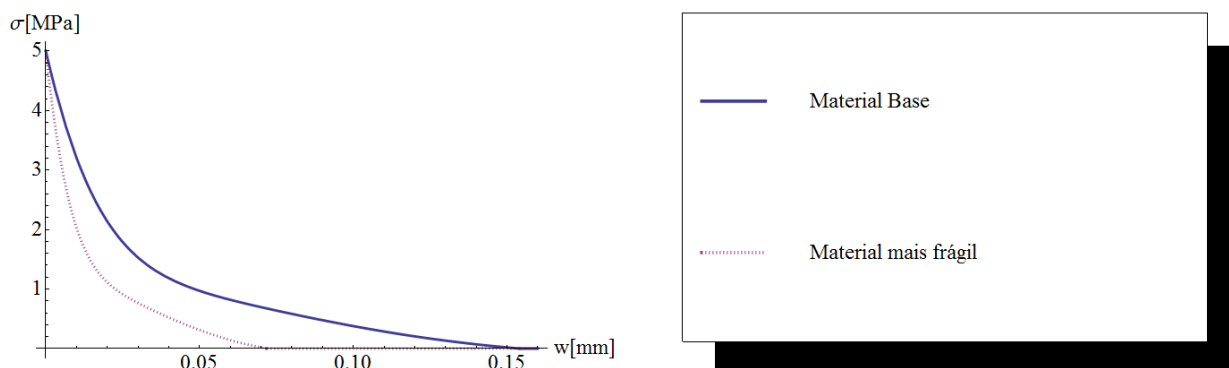


Figura 6.19 – Exemplificação de um material mais frágil pela curva coesiva.

Os ensaios realizados por Rosa não chegam a velocidades que possam ser próximas de um impacto, mas se for considerado que o material sofre uma transição gradual em um estágio de carregamento estático para o comportamento com impacto, deve-se observar que o material se torna cada vez mais frágil.

Buscando observar o aumento de fragilidade do material e verificar o aumento de f_{tc} com o aumento da taxa de carregamento, é realizado um ajuste individual de cada envoltória dos ensaios realizados por Rosa *et al.* (2012) no módulo de ajuste coesivo da ferramenta desenvolvida. O módulo de ajuste coesivo não leva em conta os efeitos da taxa de carregamento, e a curva coesiva ajustada é a representação matemática de uma curva coesiva “média” que reduz a função a ser minimizada. Desse modo, pretende-se que os ajustes matemáticos realizados evidenciem algum comportamento físico.

São apresentados somente os resultados obtidos utilizando a curva coesiva de Hordijk (1991) com o CHM pois as demais combinações geram resultados de comportamento similar.

A Tabela 6.10 apresenta o resumo de resultados. Como mostra a tabela, f_{tc} aumenta com o aumento de velocidade do atuador, o que está de acordo com a observação apresentada na seção 2.9. A Figura 6.20 apresenta o gráfico dos G_F obtidos em cada ajuste, e este gráfico possui um comportamento similar ao da Figura 2.19 da subseção 2.9.

Tabela 6.10 – Ajuste das curvas coesivas de Hordijk (1991) utilizando CHM.

Taxa de Carregamento (mm/s)	f_{tc} (MPa)	G_F (J/m^2)
$1,74 \times 10^{-5}$	5,03	98,0
$5,5 \times 10^{-4}$	6,67	97,1
$1,74 \times 10^{-2}$	7,37	79,0
$5,5 \times 10^{-1}$	8,14	96,3
$1,74 \times 10^{+1}$	10,5	109,0

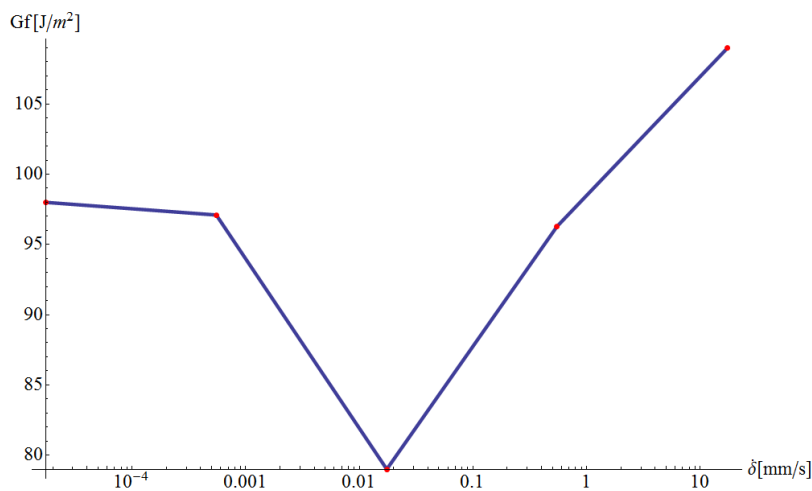


Figura 6.20 – Valores de G_F obtidos em cada ajuste.

A Figura 6.21 apresenta as curvas ajustadas e suas respectivas curvas coesivas. A Figura 6.22 apresenta a sobreposição das curvas coesivas. Como observa-se, o material se torna mais frágil no sentido de $1,74 \times 10^{-5} mm/s$ a $1,74 \times 10^{-2} mm/s$, aumenta de $1,74 \times 10^{-2} mm/s$ a $5,5 \times 10^{-1} mm/s$ e novamente volta ser mais frágil. Esse comportamento tende a evidenciar o modelo de impacto.

Desse modo, o modelo proposto por Rosa *et al.* (2012) aparenta necessitar de uma complementação para considerar a fragilidade do material junto com o aumento de f_{tc} . Os demais modelos de curvas visco-coesivas apresentados na subseção 2.10 não apresentam o comportamento buscado, e mesmo que possível a combinação do modelo de Rosa *et al.* (2012) com o modelo de Zhou *et al.* (2005), tal combinação não tenderia ao resultado esperado, uma vez que este último aumenta o valor de w_c com o aumento da taxa de carregamento.

A sugestão que fica após essas observações é que deve-se buscar alguma formulação que contemple a fragilidade do material com a taxa de carregamento e que esta complemente o modelo de Rosa *et al.* (2012).

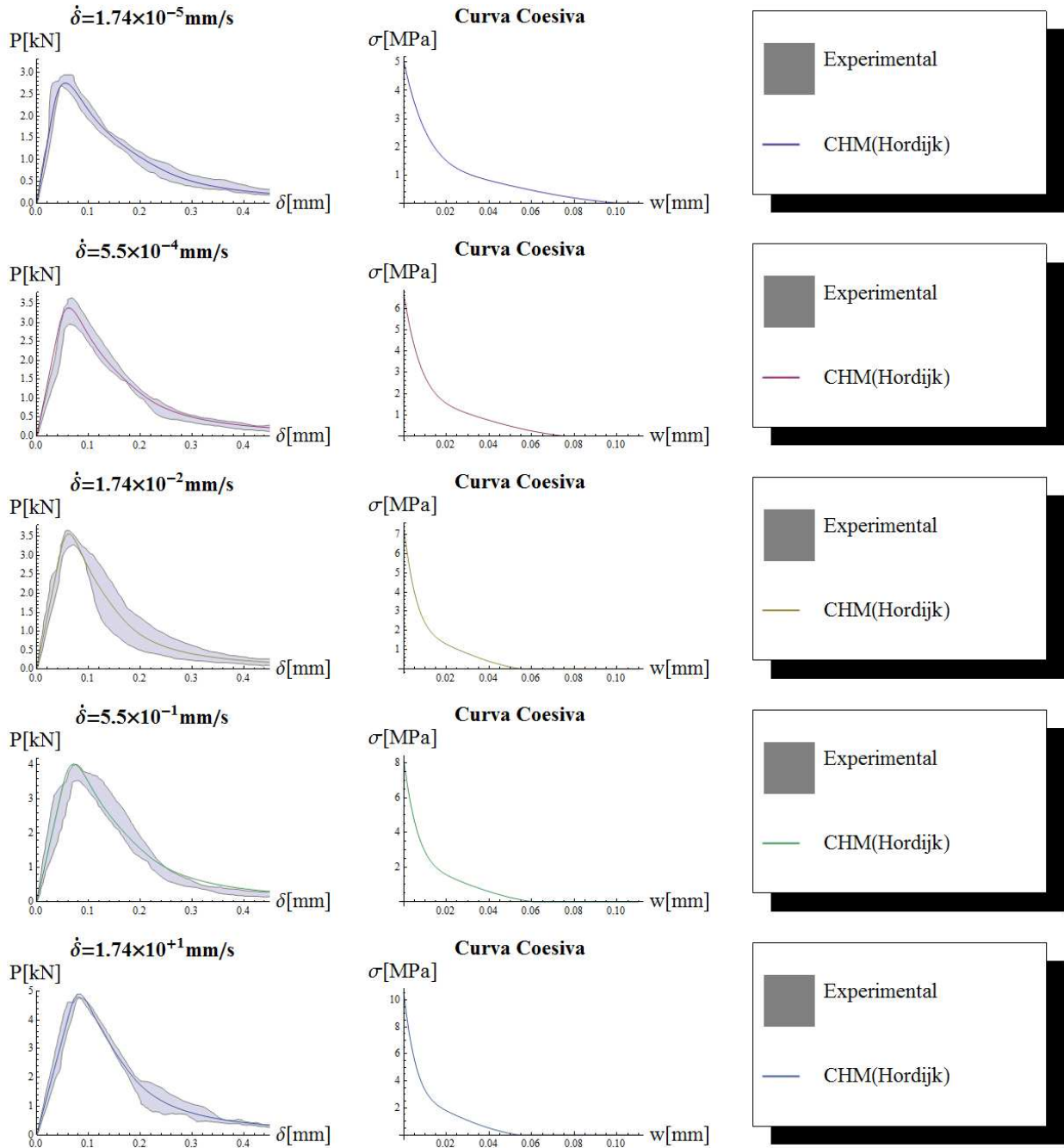


Figura 6.21 – Ajuste da curva coesiva Hordijk (1991) utilizando o CHM para cada envoltória experimental.

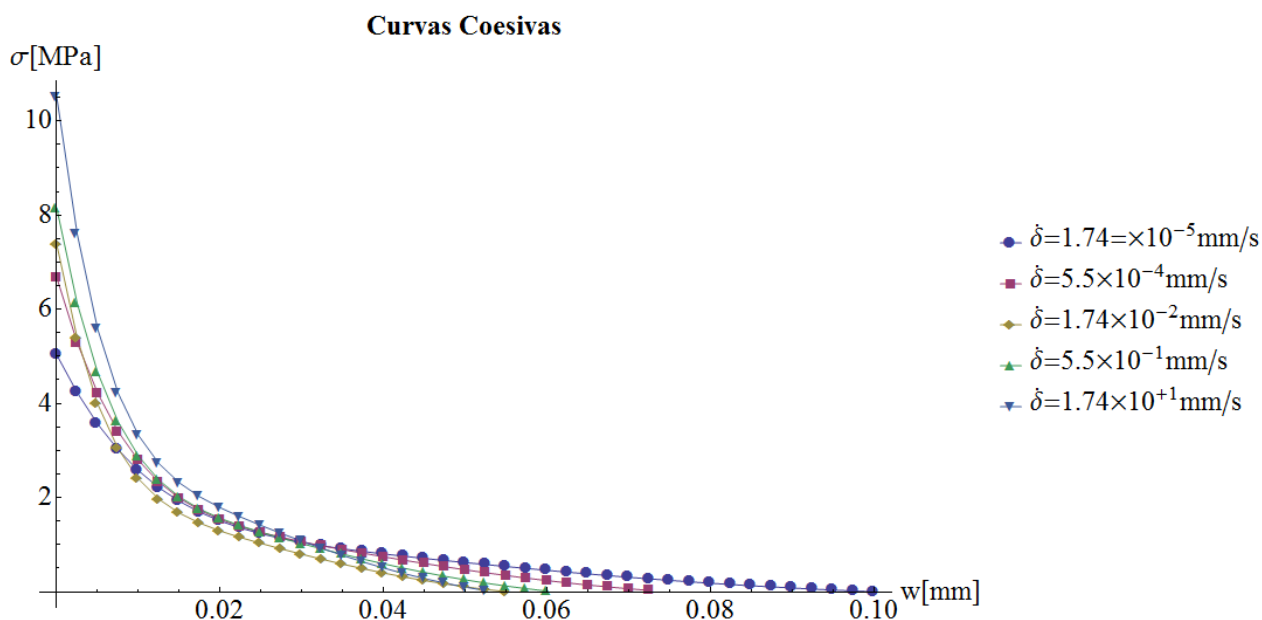


Figura 6.22 – Sobreposição das curvas coesivas ajustadas.

6.6 – Considerações Finais

Esta seção apresentou os resultados dos ajustes utilizando o modelo de Rosa *et al.* (2012). Pelos ajustes observou-se que o modelo não é capaz de representar os dados experimentais completamente e que existe uma grande dependência com o intervalo amostral.

Quando realizados os ajustes simultâneos do modelo de viscosidade com o modelo de coesão, os resultados do modelo de coesão não se equiparam com os valores de f_{tc} e G_F determinados experimentalmente.

Na subseção 6.5 fez-se uma observação sobre a teoria de impacto na qual materiais quase-frágeis se comportariam de forma frágil em carregamentos de impacto. Buscando-se alguma conexão entre a teoria coesiva estática com o estado de impacto, observou-se por ajustes coesivos que o material se torna cada vez mais frágil com o aumento da taxa de carregamento.

Desta forma considera-se necessária uma complementação do modelo de Rosa *et al.* (2012) de modo que este considere também a fragilidade do material com o aumento da taxa de carregamento.

7 – CONCLUSÃO

7.1 – Objetivos Alcançados e Conclusões

O objetivo principal deste trabalho é avaliar a capacidade do modelo visco-coesivo de Rosa *et al.* (2012) em representar o comportamento do concreto sob o efeito da taxa de carregamento utilizando uma ferramenta computacional para o ajuste de curvas carga versus deslocamento do ponto de aplicação ($P-\delta$) obtidas em ensaios com vigas prismáticas ranhuradas em flexão em três pontos (*Three-Point-Bend Test*). Ao longo das seções, as etapas para alcançar este objetivo foram cumpridas.

Na seção 2 foram apresentadas algumas propriedades do concreto (f_{tc} e G_F) que são importantes para o entendimento da propagação da fratura. Junto destas, na subseção 2.7 foram apresentados os ensaios experimentais para sua obtenção. Expressões analíticas para representar as curvas coesivas foram introduzidas na seção 2.8

Os efeitos da taxa de carregamento foram abordados na subseção 2.9. Nesta ressaltou-se o aumento de f_{tc} com o aumento da taxa de carregamento e o leve decréscimo de G_F em velocidades inferiores a 10^{-2} mm/s e o considerável crescimento deste a taxas maiores. Essas observações foram complementadas na seção 2.10 pelos modelos visco-coesivos propostos por alguns autores para representar esse comportamento.

O estudo da análise inversa foi realizado na seção 3. Como a função de resíduos a ser minimizada pode ser considerada bem comportada, obteve-se pelo uso do algoritmo de Levenberg-Marquardt, descrito na subseção 3.3.

Na subseção 3.4 foi desenvolvida uma avaliação matemática das curvas de viscosidade a fim de identificar possíveis dificuldades com a análise inversa. Dentre os três modelos estudados, o modelo de Rosa *et al.* (2012) é o que melhor aproxima o comportamento do concreto, com a maior garantia de unicidade do conjunto de parâmetros determinado. Outro ponto importante da subseção é a constatação da quantidade de informações que se obtém em um ensaio de compressão diametral ou um ensaio de flexão em três pontos sobre a curva viscosa em comparação com a que se obtém de um ensaio de tração uniaxial.

Os modelos de simulação do ensaio de flexão em três pontos foram descritos na seção 4. Escolheram-se o CHM e a SF pois estes apresentam o menor custo computacional.

Os modelos foram comparados em um modelo de viga exemplo, e observou-se que as duas abordagens geram curvas $P - CMOD$ e $P - \delta$ semelhantes. Foi observado que a SF apresentava uma inclinação da curva $P - \delta$ diferente da CHM na fase elástica. Foram observadas deformações localizadas nos apoios nas simulações no MEF, e uma correção nas simulações do MEF foi proposta para que a inclinação inicial da curva fosse corrigida, passando ambos modelos a gerar praticamente os mesmos resultados.

Na seção 5 foi apresentada a ferramenta computacional desenvolvida para a automatização do ajuste dos parâmetros visco-coesivos. A ferramenta se divide em dois módulos, um para ajustes estáticos e outro para ajustes dinâmicos. Foi realizado um teste com três grupos de concreto cujo parâmetros haviam sido determinados experimentalmente. Pelos resultados obtidos na análise inversa, percebeu-se que o módulo de elasticidade é representado adequadamente e que a curva de Hordijk (1991) foi a que apresentou os melhores resultados.

A seção 6 apresentou os resultados da análise inversa utilizando o modelo de Rosa *et al.* (2012). Pelos ajustes observou-se que o modelo não é capaz de representar os dados experimentais completamente e que existe uma grande dependência em relação ao intervalo amostral. Quando realizados os ajustes simultâneos do modelo de viscosidade com o modelo de coesão, os resultados do modelo de coesão não se equiparam com os valores de f_{tc} e G_F determinados experimentalmente.

Na subseção 6.5 foi realizada uma observação sobre a teoria de impacto na qual materiais quase-frágeis se comportaria de forma frágil em carregamentos de impacto. Buscando-se alguma conexão entre a teoria coesiva estático com o estado de impacto, observou-se por ajustes coesivos que o material se torna cada vez mais frágil com o aumento da taxa de carregamento.

Desta forma considera-se necessária uma complementação do modelo de Rosa *et al.* (2012) de tal modo que este considere também a fragilidade do material com o aumento da taxa de carregamento.

7.2 – Propostas de Trabalhos

Como continuidade aos estudos aqui realizados, os seguintes estudos podem trazer contribuições importantes:

- Complementação do modelo de Rosa *et al.* (2012) com a inclusão dos efeitos de mudança de fragilidade do material com o aumento da taxa de carregamento;
- Utilizar o método de SF para desenvolver outras geometrias e realizar diferentes ensaios com o concreto (por exemplo, compressão diametral e flexão em três pontos) e analisar os resultados obtidos por análise inversa;
- Comparação das soluções de análise inversa com espécimes variando dimensões a fim de avaliar o efeito escala;

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ATENA, <http://www.cervenka.cz/products/atenal/>, acessado em 08/10/2013

BARENBLATT, G. I. *The formation of equilibrium cracks in brittle fracture. General ideas and hypothesis, axially symmetrical cracks*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 23: 622-636, 1959.

BARENBLATT, G. I. *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*. Advances in Applied Mechanics, 7: 55-129, 1962.

BAZANT, Z. P., OH, B. H. *Crack band theory for fracture concrete*. Materials and Structures, 16(93):155-7, 1983.

BAZANT, Z. P., KAKEMI, M. T. *Determination of fracture energy, process zone length, and brittleness number from size effect with application to rock and concrete*. International Journal of Fracture, 44(2):111-131, 1990.

BAZANT, Z. P., CANER, F. C., ADLEY, M. D., AKERS, S. A. *Fracturing rate effect and creep in microplane model for dynamics*, Journal of Engineering Mechanics, 126: 962-970, 2000.

BITTENCOURT, T. N. *Fraturamento do Concreto Estrutural: Aspectos Teóricos, Computacionais e Experimentos, e suas Aplicações*. Tese de Livre Docência, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1999.

CORNELL FRACTURE GROUP, <http://www.cfg.cornell.edu/education/education.htm>, acessado em: 28/05/2013

CSI – Computers & Structures Inc., SAP2000, versão 15.

<http://www.csiamerica.com/products/sap2000>, acessado em: 03/09/2014

DUGDALE, D. *Yielding of steel sheets containing slits*. Journal of Mechanics Physics Solids, 8: 100 – 104, 1960.

ELICES, M., PLANAS, J., GUINEA, G. V. *Modelling cracking in rocks and cementitious Materials*. Proceedings of the Second International Conference on Fracture and Damage of Concrete and Rock, Vienna, Austria, 3 – 33, 1992.

FERREIRA, M. D. C. *Análise Inversa Utilizando o Método dos Elementos de Contorno e Correlação de Imagens Digitais*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

GILL, P. E., MURRAY, W., WRIGHT, M. *Practical Optimization*. Systems Optimization Laboratory, Department of Operations Research, Stanford University, California, USA, 1989.

GOLDBERG, D. E. *Genetic Algorithms in Search*. Optimization & Machine Learning, Addison-Wesley, 1989.

GUINEA, G. V., PLANAS, J., ELICES, M. A. *A general bilinear fit for the softening curve of concrete*. Materials and Structures, 27: 99 – 105, 1994.

HILLERBORG, A., MODEER, M., PETERSSON, P. E. *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*. Cement and Concrete Research, 6:773-182, 1976.

HILLERBORG, A. *The theoretical basis of a method to determine the fracture energy G_f of concrete*. Materials and Structures, v. 18, 106: 291 – 296, 1985.

HORDIJK, D. A. *Local approach to fatigue of concrete*. Doctoral thesis, Delft University of Technology, The Netherlands, 1991.

INCE, R. *Prediction of fracture parameters of concrete by artificial neural networks*. Engineering Fracture Mechanics, Elsevier, 71:2143-2159, 2004.

JENQ, Y. S., SHAH, S. P. *Two-parameter fracture model for concrete*. ASCE Journal of Engineering Mechanics, 111(10):1227-1241, 1985.

KAPLAN, M. F. *Strains and Stresses of Concrete at Initiation of Cracking and Near Failure*. ACI Journal Proceedings, 58:591-610, 1961.

KESLER, C. E. , NAUS, D. J., LOTT, L. L. *Fracture mechanics – its applicability to concrete*. Soc Mater Sci, 4:113-124, 1972.

KOOIMAN, A. G., VAN DER VEEN, C., WALRAVEN, J. C. *Modelling the postcracking behaviour of steel fibre reinforced concrete for structural design purposes*. Heron, 45(4): 275-307, 2000.

LAGARIAS, J. C., REEDS, J. A., WRIGHT, M. H., WRIGHT, P. E. *Convergence Properties of Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions*. SIAM Journal of Optimization, 9(1), 1998.

LEVENBERG, K. *A method for the solution of certain non-linear problems in least squares*. Applied Mathematics, 2: 164-168, 1944.

MARQUARDT, D. *An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters*. Journal of Applied Mathematics, 11: 431-441, 1963.

MAZELLA, I. J. G. *Sobre metodologias de modelagem computacional de propagação de trincas por fadiga em fuselagens aeronáuticas*. Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

MATALLAH, M., FARAH, M., GRONDIN, F., LOUKILI, A., ROZIÈRE, E. *Size-independent fracture energy of concrete at very early ages by inverse analysis*. Engineering Fracture Mechanics, Elsevier, 109:1-16, 2013.

MIHASHI, H. *Material structure and tension softening properties of concrete*. Fracture Mechanics of Concrete Structures, Elsevier, London, 239-250, 1992.

NALLATHAMBI, P., KARIHALOO, B. L. *Determination of specimen size independent fracture toughness of plain concrete*. Magazine of Concrete Research, 38(135):67-76, 1986.

OLESEN, J. F. *Fictitious crack propagation in fiber-reinforced concrete beams*. Journal of Engineering Mechanics, 127(3): 272 – 280, 2001.

PETERSSON, P. E. *Crack growth and development of fracture zone in plain concrete and similar materials*. Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Report TVBM-1006, 1981.

PLANAS, J. e ELICES, M.A.. *Nonlinear Fractures of Cohesive Materials*. Internacional Journal of Fracture, Vol. 51, 139-157, 1991

POMPEU NETO, B. B. *Efeitos do tipo, tamanho e teor de agregado graúdo na resistência e energia de fratura do concreto*. Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2004.

PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., BETHE, H. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes – The Art of Scientific Computing*. Third Edition, Cambridge University Press. 2007. ISBN-13 978-0-511-33555-6.

PYO, S., EL-TAWIL, S. *Crack velocity-dependent dynamic tensile behaviour of concrete*. International Journal of Impact Engineering, 55, 63-70, 2013.

RILEM, 1985-TC50-FMC, Fracture Mechanics of Concrete, Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of 3-point bend test on notched beams, 1985.

ROSA, A. L. *Estudos da influência da taxa de solitação na resposta em fratura quase-frágil*. Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Civil Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 2010.

ROSA, A.L., YU, R. C., RUIZ, G., SAUCEDO, L, SOUSA, J. L. A. O. *A loading rate dependent cohesive model for concrete fracture*. Engineering Fracture Mechanics, v. 82, p. 195-208, 2012.

ROELFSTRA, P. E., WITTMANN, F. H. *Numerical method to link strain softening with failure of concrete*. Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete, Elsevier Science, Amsterdam, 163-175, 1986.

RUIZ, G., ZHANG, X. X., YU, R. C., PORRAS, R., POVEDA, E., DEL VISO, J. R. *Effect of Loading Rate on Fracture Energy of High-Strength Concrete*. Strain An Internacional Journal for Experimental Mechanics, 47: 518-524, 2011.

SOUSA, J. L. A. O., GETTU, R. *Determining the tensile stress-crack opening curve of concrete by inverse analysis*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 132:141-148, 2006.

SOUSA, J. L. A. O. *A Levenberg-Marquardt algorithm for fitting $\sigma - w$ curves from three-point bend tests for plain and fiber reinforced concretes*. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, 4(4):691-694, 2011.

TADA, H., PARIS, P. C., IRWIN, G. R. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Third Edition, ASME Press, New York, 2000.

TANDON, S., FABER, K. T., BAZANT, Z. P., LI, Y. N. *Cohesive crack modeling of influence of sudden changes in loading rate on concrete fracture*. Engineering Fracture Mechanics, 52(6): 987-997, 1995.

TANG, T., OUYANG, C., SHAH, S. P. *A simple method for determining material fracture parameters from peak loads*. ACI Materials Journal, 93(2):147-57, 1996.

TARIFA, M., POVEDA, E., YU, R. C., ZHANG, X., RUIZ, G. *Effect of loading rate on high-strength concrete: numerical simulations*. VIII International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures, FraMCoS-8, 2013.

VILE, G. W. D. *The Strength of concrete under short term biaxial stress*. Proceedings Int. Conference on “The Structure of Concrete”, Cement & Concrete Association, pp. 275, 1968.

WITTMANN, F. H., ROELFSTRA, P. E., MIHASHI, H., HUANG, Y. Y., ZHANG, X. H., NOMURA, N. *Influence of age of loading, water-cement ratio, and rate of loading on fracture energy of concrete*. Materials and Structures, 20: 103-110, 1987.

WITTMANN, F. H., ROKUGO, K., BRUHWILER, E., MIHASHI, H., SIMONI, P. *Fracture energy and strain softening of concrete as determined by means of compact tension specimens*. Materials and Structures, 21: 21 – 32, 1988.

ZHANG, J., LEUNG, C. K. Y., XU, S. *Evaluation of fracture parameters of concrete from bending test using inverse analysis approach*. Material and Structures, 43: 857-874, 2010.

ZHOU, F., MOLINARI, J., SHIOYA, T. *A rate-dependent cohesive model for simulating dynamic crack propagation in brittle materials*. Engineering Fracture Mechanics, 72: 1383-1410, 2005.