



GILES BORTOLON LEITÃO

**ANÁLISE NUMÉRICA DE SEGUNDA ORDEM DE
PÓRTICOS PLANOS DE ESTRUTURAS DE AÇO**

**CAMPINAS
2014**



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E
URBANISMO**

GILES BORTOLON LEITÃO

**ANÁLISE NUMÉRICA DE SEGUNDA ORDEM DE
PÓRTICOS PLANOS DE ESTRUTAS DE AÇO**

Orientador: Prof. Dr. João Aberto Venegas Requena

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de Estruturas.

**ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA
DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO GILES
BORTOLON LEITÃO E ORIENTADO PELO PROF. DR. JOÃO
ALBERTO VENEGAS REQUENA.**

Assinatura do Orientador

**CAMPINAS
2014**

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

L535a Leitão, Giles Bortolon, 1981-
Análise numérica de segunda ordem de pórticos planos de estruturas de aço /
Giles Bortolon Leitão. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: João Alberto Venegas Requena.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de
Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Análise numérica. 2. Estruturas de aço. 3. Teorias não-lineares. I. Requena,
João Alberto Venegas, 1956-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade
de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Numerical second order analysis for steel plane frames

Palavras-chave em inglês:

Numerical analysis

Steel structures

Nonlinear theory

Área de concentração: Estruturas

Titulação: Mestre em Engenharia Civil

Banca examinadora:

João Alberto Venegas Requena [Orientador]

Francisco Antônio Menezes

Júlio Soriano

Data de defesa: 28-01-2014

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Civil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO**

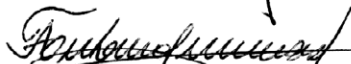
**ANÁLISE NUMÉRICA DE SEGUNDA ORDEM DE PÓRTICOS
PLANOS DE ESTRUTURAS DE AÇO**

Giles Bortolon Leitão

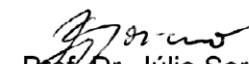
Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



**Prof. Dr. João Alberto Venegas Requena
Presidente e Orientador/FEC-UNICAMP**



**Prof. Dr. Francisco Antônio Menezes
FEC-UNICAMP**



**Prof. Dr. Júlio Soriano
FEAGRI-UNICAMP**

Campinas, 28 de janeiro de 2014.

RESUMO

Este trabalho trata da análise numérica de segunda ordem de pórticos planos de estruturas de aço. A norma brasileira ABNT NBR8800:2008 recomenda o uso de análise de segunda ordem para qualquer estrutura sempre que os deslocamentos afetarem de forma significativa os seus esforços internos, e apresenta um processo analítico simplificado para obter a análise de segunda ordem de pórticos planos de estruturas de aço. Como se trata de um processo analítico e aproximado, além de trabalhoso, propõe-se neste trabalho um processo numérico de análise de segunda ordem, utilizando o processo das funções de rigidez com a hipótese dos pequenos deslocamentos, com a finalidade de determinar os esforços para verificação de perfis de pórticos planos, de forma rápida, precisa e automática. Utilizaram-se as simplificações da norma brasileira para a consideração das imperfeições iniciais geométricas e de material. Desenvolveu-se também, dentro do programa, a verificação de perfis laminados de aço para análise de primeira e segunda ordem. Exemplos de pórticos são apresentados para validação dos resultados dos esforços obtidos numericamente pelo programa de computador desenvolvido e para compará-los com os obtidos pelo método de cálculo analítico simplificado indicado pela referida norma.

Palavras chave: análise numérica de segunda ordem, não linearidade geométrica, instabilidade estrutural, estruturas de aço.

ABSTRACT

This work approaches numerical second order analysis for steel plane frames. The Brazilian standard ABNT NBR8800:2008 specifies use of second order analysis for any structure where the displacements significantly affect their internal forces and presents a simplified analytical process to obtain second order analysis for steel plane frames. As it is a laborious approximated analytical process, it is proposed in this work a numerical second order analysis method, using rigidity functions process, with hypothesis of small displacements, in order to determine the forces to design plane frames profiles, by a quickly, accurately and automatically way. It was used simplifications of the Brazilian standard for consideration of initial geometric and material imperfections. Also, it was developed inside the software, verification of hot rolled steel profiles for first and second order analysis. Frame examples are presented to validate the results of efforts obtained numerically by the developed software and to compare them with those obtained by the simplified analytical method presented in the standard.

Keywords: numerical second order analysis, geometrical nonlinearity, structural instability, steel structures.

SUMÁRIO

1. Introdução	1
1.1. Considerações iniciais	1
1.2. Objetivos.....	2
1.2.1. Objetivo Geral	2
1.2.2. Objetivos Específicos:.....	2
1.3. Organização do texto	3
2. Fundamentação teórica	5
2.1. Estudo da instabilidade	5
2.2. Considerações sobre não linearidade física e geométrica	10
2.3. Considerações sobre a análise global elástica de segunda ordem.....	12
2.4. Análise computacional dos efeitos de segunda ordem	18
3. Considerações normativas para estabilidade e análise estrutural	21
3.1. Considerações gerais	21
3.2. Exigências de projeto para a estabilidade das barras componentes da estrutura.....	22
3.3. Classificação das estruturas quanto à sensibilidade a deslocamentos laterais	22
3.4. Análise elástica de segunda ordem	24
3.4.1. Aplicação do método da amplificação dos esforços solicitantes (B_1 - B_2)	24
3.4.1.1. Modelo para análise.....	24
3.4.1.2. Determinação dos deslocamentos relativos entre os andares	26

3.4.1.3.	Estruturas de pequena deslocabilidade	27
3.4.1.4.	Estruturas de média deslocabilidade	28
3.4.1.5.	Estruturas de grande deslocabilidade	29
3.4.2.	Determinação de respostas para estados-limites de serviço.....	29
4.	Considerações sobre análise numérica de segunda ordem	31
4.1.	Considerações da proposta deste trabalho	31
4.2.	Funções de rigidez	34
4.3.	Processo de determinação da instabilidade de pórtico plano (carga crítica)	37
4.4.	Desenvolvimento do programa computacional	39
4.5.	Fluxograma.....	42
4.5.1.	Fluxograma resumido do programa desenvolvido para a análise numérica de segunda ordem	43
4.5.2.	Rotina de programação 1.....	49
5.	Exemplos numéricos do programa.....	51
5.1.	Exemplo numérico 1.....	51
5.2.	Exemplo numérico 2.....	53
5.3.	Exemplo numérico 3.....	54
5.3.1.	Determinação do coeficiente B_2 usando a estrutura original	55
5.3.2.	Determinação do coeficiente B_1	58
5.3.3.	Determinação dos esforços solicitantes das barras.....	60
5.3.1.	Análise de instabilidade	63
5.3.2.	Verificação do perfil da barra 2	63

5.3.2.1. Verificação ao esforço axial.....	64
5.3.2.2. Verificação ao momento fletor	66
5.3.2.3. Verificação da limitação pela expressão de interação.....	71
5.3.2.4. Verificação ao esforço cortante	71
5.4. Exemplo numérico 4.....	72
5.4.1. Análise de instabilidade	76
6. Considerações finais	79
Referências Bibliográficas	81
ANEXO A	83
ANEXO B	105

AGRADECIMENTOS

À minha família, pelo apoio e incentivo durante todo o período do curso de Mestrado.

Ao Prof. Dr. João Alberto Venegas Requena, pela disponibilidade e orientação no desenvolvimento deste trabalho.

Aos demais professores do programa de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, que contribuíram para o desenvolvimento de novos conhecimentos.

À Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, pela oportunidade que me foi oferecida.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Barra comprimida de Euler	5
Figura 2.2 – Comportamento de barras comprimidas. Fonte: Galambos (1988)	9
Figura 2.3 – Determinação do módulo tangente na relação tensão-deformação.....	10
Figura 2.4 – Efeitos de segunda ordem de pórticos. Fonte: Silvestre e Camotim (2007)	15
Figura 3.1 — Forças equivalentes (nocionais). Fonte: ABNT NBR8800:2008	23
Figura 3.2 — Modelo para análise. Fonte: ABNT NBR8800:08.....	25
Figura 4.1 — Carregamento geral de barra. Fonte: Salmon e Johnson (1996)	31
Figura 4.2 — Sistemas de coordenadas para o plano	35
Figura 4.3 — Estados de deslocamento: a) Translação unitária horizontal; b) Translação unitária vertical; c) Giro unitário.....	36
Figura 5.1 — Exemplo numérico 1.....	52
Figura 5.2 — Exemplo numérico 2.....	53
Figura 5.3 — Exemplo numérico 3.....	55
Figura 5.4 — Modelo para análise do exemplo numérico 3.....	58
Figura 5.5 — Diagrama de momentos fletores solicitantes de cálculo em kN.cm.....	70
Figura 5.6 — Exemplo numérico 4.....	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Coeficiente de flambagem K por flexão de elementos isolados	8
Tabela 2.2 – Resumo comparativo dos métodos de análise de estabilidade e cálculo. Fonte: AISC (2005)	17
Tabela 4.1 - Funções de rigidez de barra com interação entre força axial, força cortante e flexão	37
Tabela 5.1 – Resultados da análise de instabilidade da barra do exemplo numérico 1	53
Tabela 5.2 – Propriedades das barras do exemplo numérico 2.....	54
Tabela 5.3 – Resultados da análise de instabilidade das barras do exemplo numérico 2.....	54
Tabela 5.4 – Propriedades das barras do exemplo numérico 3.....	56
Tabela 5.5 – Deslocamentos para as ações combinadas.....	56
Tabela 5.6 – Determinação de $B_2 - 1.^a$ ordem original	57
Tabela 5.7 – Deslocamentos para as ações combinadas com rigidezes reduzidas	57
Tabela 5.8 – Determinação de $B_2 - 1.^a$ ordem original com rigidezes reduzidas.....	57
Tabela 5.9 – Esforços no final das barras com as rigidezes reduzidas	59
Tabela 5.10 – Comparação entre os resultados do anexo D da ABNT NBR8800:2008 e programa desenvolvido	61
Tabela 5.11 – Comparação entre os resultados obtidos nas análises de primeira e segunda ordem.....	62
Tabela 5.12 – Resultados da análise de instabilidade das barras do exemplo numérico 3.....	63
Tabela 5.13 – Propriedades das barras do exemplo numérico 4	73
Tabela 5.14 – Comparação entre os resultados obtidos nas análises de primeira e segunda ordem.....	74
Tabela 5.15 – Resultados da análise de instabilidade das barras do exemplo numérico 4.....	76

1. Introdução

1.1. Considerações iniciais

A engenharia estrutural tem se desenvolvido rapidamente nos últimos anos através do desenvolvimento de novas tecnologias de programas computacionais, bem como de novos materiais.

O mercado necessita cada vez mais de ferramentas capazes de melhorar o desempenho para a obtenção do melhor custo-benefício de estruturas e diminuição do trabalho manual. Isso deve contribuir para facilitar a tomada de decisão do profissional de estruturas.

Atualmente busca-se o projeto mais econômico que atenda às recomendações normativas, bem como do mercado da construção civil.

É possível obter projetos mais esbeltos com maiores cargas, no entanto, devem-se levar em consideração os efeitos de segunda ordem. Projetos esbeltos levam a deslocamentos maiores que, por sua vez, levam a incrementos de esforços nas estruturas que podem ultrapassar seu limite de resistência, podendo levar ao colapso progressivo da estrutura.

As atuais normas de cálculo de estruturas metálicas especificam a consideração dos efeitos de segunda ordem nas estruturas, pois os deslocamentos causados por esses efeitos podem causar alterações significativas nos esforços internos e estabilidade das estruturas.

Estas normas apresentam processos simplificados de cálculo para a consideração destes efeitos. Em geral, são processos de cálculo manuais que demandam grande quantidade de tempo. Devido a isso, muitos profissionais ignoram esses efeitos.

Um processo de cálculo mais preciso exige a utilização de processos de análise iterativa que só pode ser feito de forma viável através da utilização de programas computacionais.

A proposta deste trabalho é desenvolver um programa para análise de segunda ordem de pórticos planos de estruturas de aço de forma automatizada, tendo a finalidade de determinar os esforços, considerando os efeitos de segunda ordem para a verificação dos perfis de aço dos pórticos ao estado limite último (ELU), utilizando as recomendações da norma

brasileira ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas) NBR (Norma Brasileira Registrada) 8800:2008. Foi desconsiderada a verificação ao estado limite de serviço (ELS).

O programa foi desenvolvido utilizando-se o método da análise direta para consideração dos efeitos de segunda ordem, através do processo das funções de rigidez, mas foram utilizadas as simplificações da norma brasileira para a consideração das imperfeições iniciais geométricas e de material.

Desenvolveu-se, dentro do programa, a verificação de perfis tipo I laminados de aço para análise de primeira e de segunda ordem, conforme as recomendações da norma. Foi feita a verificação somente para o estado limite último (ELU), desconsiderando-se o estado limite de serviço (ELS).

Exemplos de pórticos são apresentados para validação dos resultados dos esforços obtidos numericamente pelo programa de computador desenvolvido e para compará-los com os obtidos pelo método de cálculo analítico simplificado indicado pela referida norma.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo Geral

Desenvolver um programa de computador para a obtenção dos esforços através de análise numérica de segunda ordem e verificação de perfis para pórticos planos de aço ao estado limite último, utilizando as recomendações da norma brasileira ABNT NBR8800:2008.

1.2.2. Objetivos Específicos:

- a) apresentar as considerações para o cálculo dos efeitos de segunda ordem de pórticos planos;
- b) desenvolver algoritmo para obtenção dos esforços para cálculo de pórticos planos em primeira ordem;

- c) desenvolver algoritmo para análise de segunda ordem de pórticos planos e determinação da carga crítica;
- d) desenvolver algoritmo para verificação de perfis laminados de aço, segundo as recomendações da norma brasileira;
- e) fazer comparativo dos resultados obtidos com o método analítico simplificado apresentado na norma brasileira e
- f) validar os resultados comparando com exemplos retirados da bibliografia.

1.3. Organização do texto

O texto é organizado em seis capítulos, sendo que neste primeiro o tema do trabalho é descrito e os objetivos principais são definidos.

No segundo capítulo é apresentada a fundamentação teórica do trabalho, demonstrando a base do estudo de instabilidade e as considerações sobre análise global elástica de segunda ordem.

As considerações normativas para estabilidade e análise estrutural são apresentadas no terceiro capítulo.

No quarto capítulo são apresentadas as considerações de análise numérica de segunda ordem que foram utilizadas para a proposta deste trabalho e a rotina de programação utilizada.

No quinto capítulo são demonstrados exemplos numéricos para validação dos resultados dos esforços obtidos numericamente pelo programa de computador desenvolvido e para compará-los com os obtidos pelo método de cálculo analítico simplificado indicado pela norma brasileira.

Finalmente, no sexto capítulo, as considerações finais e sugestões para outros trabalhos são apresentadas.

2. Fundamentação teórica

2.1. Estudo da instabilidade

A base da teoria de barra elástica comprimida é a carga de Euler, considerando-se uma barra reta, prismática, rotulada nas extremidades, com carga perfeitamente centralizada, que é esbelta suficiente para flambar a uma tensão abaixo do limite de proporcionalidade do material (GALAMBOS, 1988).

Johnston (1983) define a carga de Euler como a carga crítica para a qual a barra esbelta elástica pode suportar um carregamento axial em uma configuração ligeiramente fletida.

Ainda segundo o autor, a fórmula de Euler para a carga crítica elástica de um pilar esbelto é a fórmula mais antiga da engenharia que ainda está em uso hoje. A história desta fórmula, juntamente com suas modificações por Engesser e Shanley para o comportamento inelástico, fornece a base para uma história que tem continuidade ao longo dos últimos três séculos.

A solução para uma barra comprimida com extremidades articuladas (Figura 2.1) foi publicada pela primeira vez por Euler (1744), e é obtida da forma como se segue.

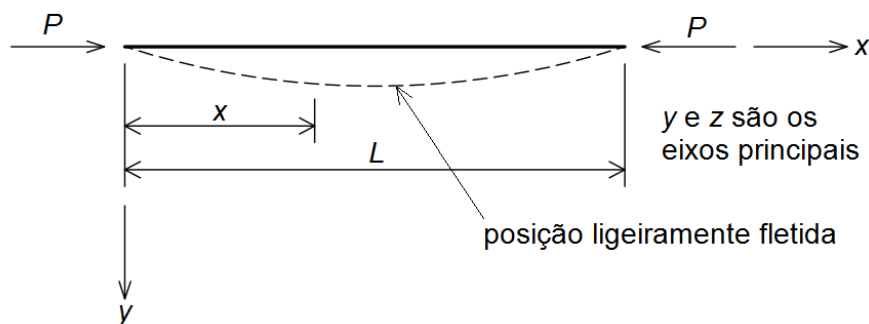


Figura 2.1 – Barra comprimida de Euler

Dada a Figura 2.1, em que P é a carga axial de compressão; x é a direção do eixo longitudinal da barra; y e z são os eixos principais da seção transversal da barra; L é o comprimento da barra; em qualquer localização de x , o momento fletor M_x na barra ligeiramente fletida em torno do eixo principal z é

$$M_x = Py \quad (2.1)$$

e sabendo que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} \quad (2.2)$$

em que EI é a rigidez elástica da barra – sendo E o módulo de elasticidade longitudinal e I o momento de inércia em torno de z – a equação diferencial fica

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \quad (2.3)$$

Adotando $k^2 = P/EI$, a solução desta equação diferencial linear de segunda ordem pode ser expressa como

$$y = A \operatorname{sen} kx + B \operatorname{cos} kx \quad (2.4)$$

Aplicando as condições de contorno, $y = 0$ e $x = 0$; e $y = 0$ e $z = L$, obtém-se da primeira condição $B = 0$, e da segunda condição

$$0 = A \operatorname{sen} kL \quad (2.5)$$

Para satisfazer a Equação (2.5) existem três possibilidades:

- a) constante $A = 0$, isto é, não há deformação;
- b) $kL = 0$, isto é, não há cargas aplicadas;
- c) $kL = N\pi$, o requisito para que ocorra flambagem. Então

$$\left(\frac{N\pi}{L}\right)^2 = \frac{P}{EI}$$

$$P = \frac{N^2\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.6)$$

O modo fundamental de flambagem, uma curvatura simples ($y = A \operatorname{sen} \pi x/L$ da Equação (2.4)), ocorrerá quando $N = 1$. Assim, a carga crítica de Euler para uma barra comprimida bi-rotulada é

$$P_{cr} = P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.7)$$

A carga de flambagem elástica ou carga de Euler, P_E , é o valor de referência pelo qual a resistência das barras é usualmente comparada atualmente (GALAMBOS, 1988).

Depois do estudo de Euler (1759), Timoshenko e Gere (1961) apud Lu et al (2008) apresentaram analiticamente um estudo exaustivo de flambagem à flexão de um pilar com diferentes condições de apoio. Usando a solução teórica de flambagem de um pilar, o efeito de instabilidade sobre um pilar ideal com diferentes condições de apoio pode ser avaliado pelo comprimento imaginário do elemento, denominado como comprimento efetivo, ou coeficiente de flambagem K .

Sendo assim, se as condições de extremidade forem diferentes de rótulas perfeitamente sem atrito, a carga crítica é expressa por

$$P_{EK} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (2.8)$$

onde KL é um comprimento efetivo definindo uma porção da flecha de flambagem entre pontos de curvatura zero. Em outras palavras, KL é o comprimento de flambagem equivalente de uma barra bi-rotulada com a mesma carga que uma com diferentes condições de apoio. Para uma barra bi-rotulada, $K = 1$ (GALAMBOS, 1988).

O valor do coeficiente de flambagem K para diferentes condições de apoio é mostrado na Tabela 2.1.






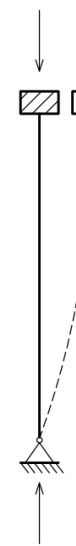




A resistência da barra comprimida é caracterizada pela máxima força axial que pode ser suportada sem excessivas deformações laterais (GALAMBOS, 1988).

Quando a carga axial alcança o valor de P_E , uma configuração de equilíbrio estável é possível mesmo com a presença de deformação lateral (Figura 2.2.a), enquanto a carga permanecer constante (Figura 2.2.b, linha OAB). Mesmo se existir uma deformação inicial e/ou uma excentricidade inicial da carga, a carga máxima de resistência da barra, $P_{m\acute{a}x}$, se aproximaria da carga de Euler assintoticamente enquanto o material permanecer elástico (curva C , Figura 2.2.b) (GALAMBOS, 1988).

Muitos elementos estruturais usuais estão em uma faixa de esbeltez, em que as porções de flambagem dos mesmos não são mais elásticas e, portanto, uma das principais suposições, intrínseca à teoria de barra comprimida de Euler, é violada. Essencialmente, a rigidez da barra comprimida é reduzida por escoamento. Esta degradação da rigidez pode ser o resultado de

uma não linearidade no próprio material, ou pode ser devido ao escoamento parcial da seção transversal em pontos de tensões residuais de compressão (GALAMBOS, 1988).

Tabela 2.1 – Coeficiente de flambagem K por flexão de elementos isolados

<p>A linha tracejada indica a linha elástica de flambagem</p>						
<p>Valores teóricos de K</p>	<p>0,5</p>	<p>0,7</p>	<p>1,0</p>	<p>1,0</p>	<p>2,0</p>	<p>2,0</p>
<p>Valores recomendados pela NBR8800:2008</p>	<p>0,65</p>	<p>0,8</p>	<p>1,2</p>	<p>1,0</p>	<p>2,1</p>	<p>2,0</p>
<p>Condições de apoio</p>	   	<p>Rotação e translação impedidas</p> <p>Rotação livre, translação impedida</p> <p>Rotação impedida, translação livre</p> <p>Rotação e translação livres</p>				

O comportamento pós-flambagem de tal barra é radicalmente diferente da barra elástica, pois a bifurcação de flambagem ocorre na *carga do módulo tangente* (ponto D na Figura 2.2.c), P_t , dada por

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \quad (2.9)$$

em que E_t é o módulo de elasticidade tangente, dado pela inclinação da curva de tensão-deformação (Figura 2.3), quando o material é não-linear. Mas, apesar disso, o deslocamento lateral só acontecerá se a carga aumentar. Se não houver mais mudanças na rigidez devido ao

escoamento, a carga se aproximaria assintoticamente da *carga do módulo reduzido* (curva E na Figura 2.2.c), P_r , dada por

$$P_r = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2} \quad (2.10)$$

em que a deformação tende a valores elevados. Sendo E_r o módulo de elasticidade reduzido. O aumento da carga é devido à descarga elástica de algumas fibras na seção transversal, o que resulta em um aumento na rigidez. Os módulos E_r e E_t , quando a tensão residual está presente, dependerão também da forma da seção transversal (GALAMBOS, 1988).

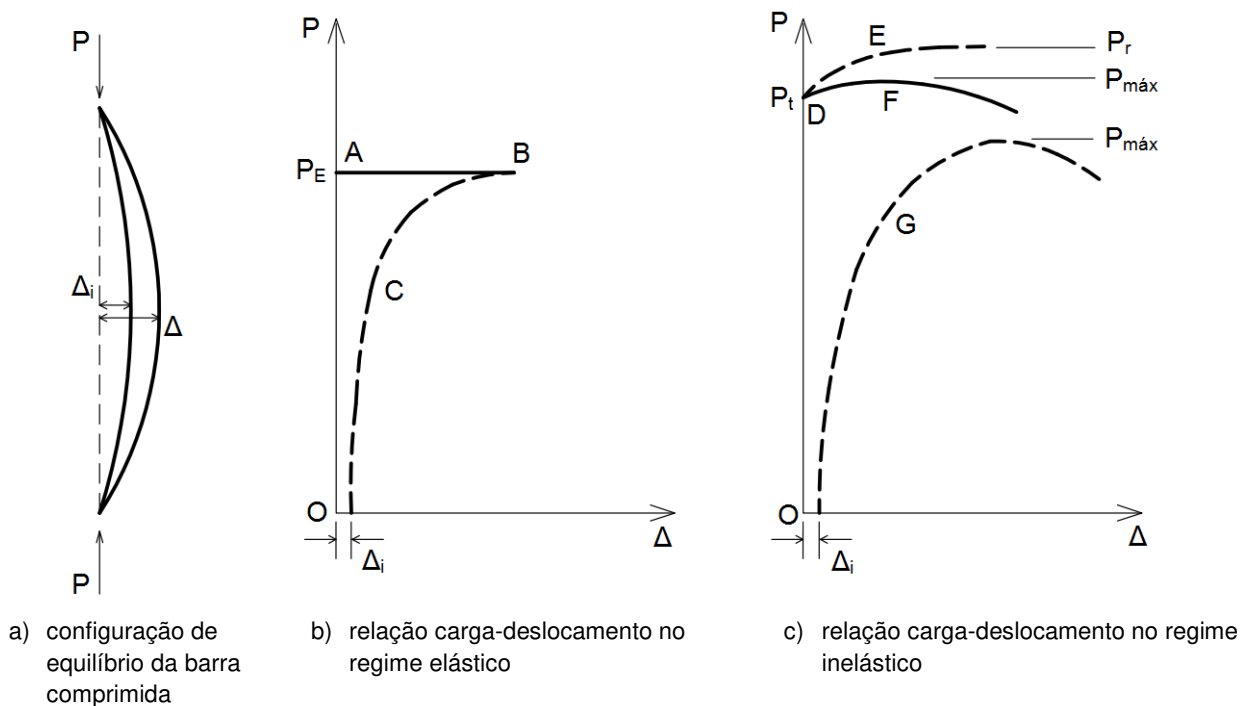


Figura 2.2 – Comportamento de barras comprimidas. Fonte: Galambos (1988)

O aumento do carregamento além da carga do módulo tangente resulta em mais escoamento, assim, a rigidez continua a ser reduzida e a curva de carga-deslocamento atinge um pico ($P_{máx}$, ponto F na Figura 2.2.c) além do qual ele cai (GALAMBOS, 1988).

A melhor compreensão do comportamento pós-flambagem de barras comprimidas inelásticas é possível graças a Shanley (1947) apud Galambos (1988), que representou o passo mais significativo na compreensão do comportamento de barras comprimidas desde o desenvolvimento original de Euler da teoria de flambagem elástica em 1744. Assim, uma barra

comprimida inelástica perfeita vai começar a deslocar lateralmente quando $P = P_t$ e $P_t < P_{max} < P_r$ (GALAMBOS, 1988).

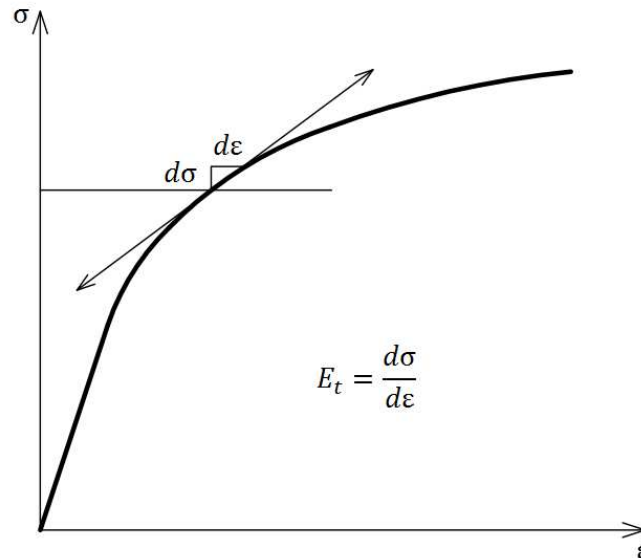


Figura 2.3 – Determinação do módulo tangente na relação tensão-deformação

Imperfeições geométricas, sob a forma tolerável, mas inevitável da não linearidade da barra e/ou excentricidade da carga axial, vão introduzir flexão desde o início do carregamento. E a curva G na Figura 2.2.c caracteriza o desempenho desta barra. O deslocamento lateral existe desde o início do carregamento. A carga máxima é atingida quando a capacidade de momento interno na seção crítica é igual ao momento externo causado pelo produto da carga e do deslocamento. A carga máxima é, assim, uma função da imperfeição. Para alguns tipos de barras, a natureza do problema é tal que a capacidade máxima da barra imperfeita é estreitamente aproximada através da carga do módulo tangente da barra perfeita. Mas, em muitos tipos de barras, as imperfeições devem ser incluídas para se obter uma carga máxima realista (GALAMBOS, 1988).

2.2. Considerações sobre não linearidade física e geométrica

Segundo Pereira (2002), a formulação clássica dos problemas de otimização de dimensões busca minimizar o peso de uma estrutura, em que é adotada a hipótese do comportamento linear físico e geométrico, o que simplifica bastante as etapas de análise

estrutural e de avaliação da sensibilidade, aumentando a eficiência e contribuindo para a popularização da otimização.

Pereira (2002) afirma ainda que, em geral, a formulação clássica gera projetos seguros e econômicos, mas que, frequentemente o modelo linear não permite a avaliação correta da capacidade de carga da estrutura.

Na busca pela estrutura ideal, utilizando-se a formulação clássica, muitas vezes se aumenta a esbeltez de um dado elemento estrutural, o que pode gerar significativas mudanças no seu mecanismo de colapso. Desta forma, a não linearidade geométrica se torna cada vez mais importante e dá origem a vários fenômenos que não são encontrados em sistemas lineares, como a existência de múltiplas configurações de equilíbrio (estáveis e instáveis) e de pontos críticos (limite e bifurcação) ao longo do caminho não linear de equilíbrio (PEREIRA, 2002).

A redução da capacidade portante da estrutura é ocasionada devido a dois efeitos que agem em conjunto na estrutura. Estes efeitos são chamados de não linearidade geométrica e não linearidade física do material. O primeiro efeito produz a redução à capacidade portante da estrutura, devido à mudança da configuração geométrica que esta sofre, à medida que o carregamento vai sendo aplicado, ou seja, à medida que a geometria da estrutura se modifica em relação à original. O segundo efeito é produzido pela degradação da própria rigidez do material. À medida que este é solicitado com estados de tensões que ultrapassam o limite de proporcionalidade do material, as fibras começam a se plastificar, fazendo com que o mesmo perca capacidade portante (CALLEJAS, 1998).

A não linearidade física decorre do fato do material não apresentar uma relação tensão-deformação linear (não segue a lei de Hooke), isto é, o comportamento do material não é elástico linear. Pode-se ter também não linearidade física nas relações momento-rotação de conexões semirrígidas ou flexíveis, ou de rótulas inelásticas oriundas de mecanismos de colapso localizados (flambagem, plastificação ou fissuração localizadas em componentes estruturais) (PEREIRA, 2002).

Com relação à não linearidade geométrica, uma estrutura pode ter um comportamento não-linear, ainda que constituída de um material que obedeça à lei de Hooke. Para valores relativamente grandes de deslocamentos, a deflexão lateral de um elemento pode trazer, como consequência, o aparecimento de momentos fletores adicionais (denominados de segunda

ordem), em virtude da presença de um esforço normal. A esse tipo de comportamento não linear dá-se o nome de não linearidade geométrica. Neste caso, os efeitos não lineares estão associados às equações de equilíbrio, as quais consideram a configuração deformada e as relações tensão-deformação (PEREIRA, 2002).

Em geral, os esforços das barras comprimidas devem ser determinados pela consideração das imperfeições geométricas e de material e pela não linearidade de material e/ou os efeitos de tensões residuais (GALAMBOS, 1988).

Perfis estruturais de aço e placas possuem tensões residuais que resultam principalmente de resfriamento desigual após a laminação. Elementos soldados de edificações apresentam tensões residuais de tração nas imediações das soldas, devido ao resfriamento do metal de solda. Estes são iguais ao ponto de escoamento do metal de solda, que será normalmente um tanto maior do que o ponto de escoamento do metal original (GALAMBOS, 1988).

A influência da tensão residual mostra-se como um dos principais fatores de resistência de uma barra comprimida. Outro fator é o desaprumo inicial (também conhecido como curvatura inicial). A presença de qualquer defeito geométrico (imperfeições iniciais) faz com que a flambagem da barra comprimida seja problema de um tipo de tensão-deformação, ao contrário do tipo de bifurcação do problema da estabilidade (GALAMBOS, 1988).

As variações do índice de esbeltez e tipos de barras, em que o efeito combinado da tensão residual e curvatura inicial é mais do que a soma de suas partes, ressaltam a complexidade do fenômeno (GALAMBOS, 1988).

2.3. Considerações sobre a análise global elástica de segunda ordem

Segundo Beedle et al (1969), apud Galambos (1988), as construções de pórticos de aço estrutural de proporções habituais tendem a falhar por instabilidade antes que um mecanismo de colapso plástico seja formado sob cargas crescentes. Afirmam ainda que o principal modo de falha de pórticos é a instabilidade.

Os pórticos são geometricamente imperfeitos, ou seja, os níveis dos andares não estão perfeitamente no prumo. Esta imperfeição, embora dentro de limites de tolerância especificados, resulta em deslocamento espacial a partir do início do carregamento. É conveniente tratar o movimento de qualquer ponto de um pórtico como sendo composto de duas partes: os deslocamentos nodais do pórtico (deslocamentos globais), e os deslocamentos dos elementos (deslocamentos locais) (GALAMBOS, 1988).

Há outros fatores que também influenciam o limite de estabilidade de pórticos estruturais (GALAMBOS, 1988). Seguem alguns abaixo:

- a) quanto aos efeitos geométricos podem ser citados: a influência da força axial na rigidez à flexão do elemento; o efeito dos deslocamentos horizontais nodais relativos, comumente chamado de efeito $P-\Delta$; mudanças no comprimento de arco do elemento resultantes de tensão axial e curvatura; curvatura inicial dos elementos e desaprumo do pórtico;
- b) outros efeitos relevantes são: a relação tensão-deformação não-linear; as tensões residuais presentes nos elementos antes do carregamento, como resultado dos processos de fabricação; variações no esforço do elemento devido às variações das dimensões da seção transversal teóricos listados nos catálogos; deformações de cisalhamento; flambagem local ou outras distorções locais; movimento fora do plano do pórtico; flexibilidade das ligações; encruamento; contribuições da laje para resistência e rigidez e
- c) há alguns efeitos de carregamento que também podem ser citados, como: carregamento desproporcional; carregamento variável repetitivo; efeitos dinâmicos.

Segundo Vieira (1998), a análise de instabilidade global é de fundamental importância, devendo ser considerada como uma fase de cálculo do projeto que tem como objetivo garantir a segurança das estruturas.

Vieira (1998) afirma ainda que os efeitos de segunda ordem influenciarão no comportamento estrutural, o que resultará na redução da rigidez da estrutura e/ou sua resistência; isto afetará a distribuição dos esforços internos no sistema estrutural.

Segundo Nardi et al (2011), a análise de primeira ordem pressupõe, para o cálculo de esforços e deslocamentos, o equilíbrio da estrutura em sua posição inicial indeformada. Ao contrário da análise de segunda ordem, que estabelece o equilíbrio da estrutura na posição

deformada, gerando esforços adicionais devido às excentricidades das forças aplicadas provocadas pelos deslocamentos.

Segundo Lu et al (2008), o procedimento tradicional de cálculo estrutural, em especial para as estruturas complexas e de grande escala, é demorado e ineficaz. Isto acontece principalmente pelo fato de que o cálculo tradicional considera os efeitos de segunda ordem indiretamente, por força das especificações de cálculo para cada elemento, em vez de para um sistema de análise da estrutura inteira. Conseqüentemente, os demorados procedimentos de cálculo analítico são inevitavelmente necessários para considerar os efeitos de segunda ordem para cada elemento individualmente nas especificações de cálculo.

Segundo a norma brasileira ABNT NBR8800:2008, para pórticos planos convencionais os efeitos $P-\Delta$ são os efeitos decorrentes dos deslocamentos horizontais dos nós da estrutura, denominados de efeitos globais de segunda ordem, e os efeitos $P-\delta$ são os decorrentes da não-retilineidade dos eixos das barras, ditos efeitos locais de segunda ordem.

Para melhor caracterização, estes dois tipos de efeitos de segunda ordem são ilustrados na Figura 2.4, para o caso de um pórtico ortogonal simples, em que:

- a) os efeitos $P-\Delta$ ocorrem devido às forças verticais aplicadas no pórtico e referem-se unicamente aos seus deslocamentos horizontais Δ , isto é, os deslocamentos relativos que ocorrem entre as extremidades do pilar (Figura 2.4.b), sendo que as deformações que ocorrem dentro dos vãos dos elementos não são levadas em conta. Além disso, os momentos fletores adicionais associados a estes efeitos de segunda ordem (momentos $P-\Delta$) são obtidos a partir de equações de equilíbrio, estabelecidas na configuração “parcialmente deformada” de um pórtico. Essa configuração é definida pelas cordas dos seus elementos (Figura 2.4.b). Isto implica, automaticamente, que a distribuição do momento $P-\Delta$ é linear e global, isto é, envolve toda a estrutura;
- b) os efeitos $P-\delta$ ocorrem devido às forças de compressão axiais que atuam sobre os diversos elementos do pórtico, estando relacionados com as suas deformações individuais, ou seja, os deslocamentos δ que aparecem entre as configurações deformadas do elemento e posição da corda (Figura 2.4.c). Os momentos fletores adicionais associados com estes efeitos de segunda ordem (momentos $P-\delta$) são produzidos por equações de equilíbrio escritas nas configurações deformadas dos vários elementos, assumindo que as forças de compressão axiais correspondentes

atuam ao longo das respectivas cordas (Figura 2.4.c). Assim, as distribuições do momento $P-\delta$ são não lineares e locais, isto é, envolvem cada elemento individualmente (SILVESTRE; CAMOTIM, 2007).

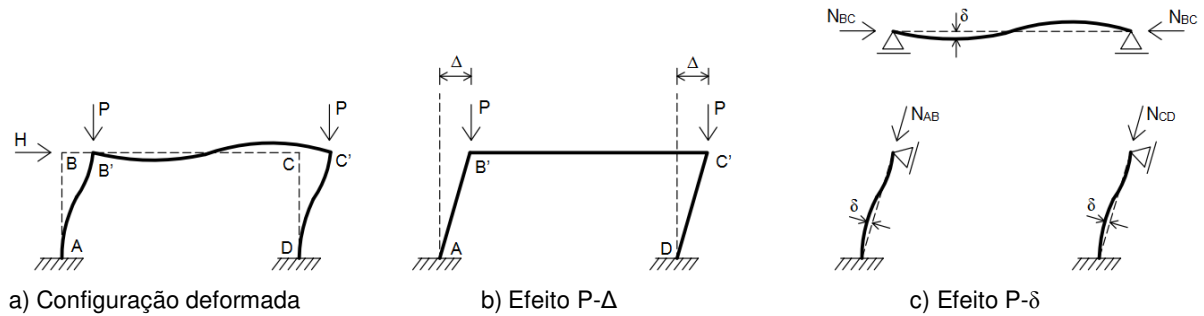


Figura 2.4 – Efeitos de segunda ordem de pórticos. Fonte: Silvestre e Camotim (2007)

Assim, é essencial incorporar os efeitos $P-\Delta$ nos valores de cálculo das forças e momentos internos do pórtico. Uma tarefa que pode ser realizada diretamente, através de análises globais de segunda ordem genuínas, exatas ou aproximadas, ou, desde que certas exigências sejam atendidas, indiretamente, por meio de uma modificação adequada dos resultados gerados pelas análises globais de primeira ordem. Os métodos indiretos mais comuns (e racionais) disponíveis são os denominados “métodos de amplificação dos momentos”. Uma designação decorrente do fato de que eles se baseiam na identificação e amplificação adequada dos “momentos e deslocamentos desestabilizantes” de primeira ordem (SILVESTRE; CAMOTIM, 2007).

Segundo Ficanha (2012), até o ano de 2005, o único método definido em normas técnicas era o método do comprimento efetivo de flambagem, largamente conhecido como coeficiente de flambagem K . É baseado na análise de estabilidade no plano, considerando as condições de contorno de barras isoladas ou a rigidez das conexões de extremidade, considerados em estruturas de pórtico (sem travamento vertical).

Ficanha (2012) cita ainda que os métodos simplificados para a amplificação dos esforços para uma barra articulada e estruturas rígidas foram expostos por Lemessurier (1976, 1977).

Conforme a norma brasileira ABNT NBR8800:2008, a análise não linear, também denominada de análise de segunda ordem, deve ser usada sempre que os deslocamentos afetarem de forma significativa os esforços internos. Essa análise pode ter como base teorias

geometricamente exatas, teorias aproximadas ou adaptações a resultados da teoria de primeira ordem.

O método da amplificação dos esforços, também denominado de método B_1-B_2 , é o método aproximado analítico apresentado pela norma brasileira ABNT NBR8800:2008, em seu anexo D.

Assim, a análise de estabilidade e cálculo das estruturas pode ser feita através do método do comprimento efetivo, análise de primeira ordem ou pelo método da análise direta. Este último é o processo numérico que foi utilizado para o desenvolvimento do programa computacional.

A Tabela 2.2, retirada do *Steel Construction Manual* (AISC, 2005, p.2-37), apresenta um resumo comparativo dos métodos de análise de estabilidade e cálculo atualmente utilizados pela AISC 360-05 (2005) e que é similar ao que a norma brasileira apresenta.

Silvestre e Camotim (2007) alertam para o fato de que, apesar do método de amplificação dos esforços ser aplicável a pórticos horizontais ou com cobertura inclinada, a configuração de telhado inclinado, ao contrário dos pórticos planos ortogonais, conduz ao desenvolvimento de forças significativas de compressão da viga – da mesma ordem de grandeza que os pilares. Uma característica que pode ter um grande impacto na resposta estrutural do pórtico, mas que é muitas vezes negligenciada por um grande número de calculistas.

Os autores apontam ainda algumas diferenças que devem ser levadas em consideração em relação a pórticos com cobertura inclinada e ortogonais:

- a) nos pórticos ortogonais, a maneira na qual as forças horizontais aplicadas (nodais) são distribuídas entre os dois topos dos pilares não afeta os deslocamentos desestabilizantes correspondentes – são virtualmente sempre idênticas; por outro lado, nos pórticos com cobertura inclinada, estes deslocamentos são iguais somente se as duas cargas horizontais aplicadas forem idênticas (devido à rigidez lateral das vigas inclinadas);
- b) pórticos ortogonais simétricos (geometria e carga vertical) apresentam deslocamentos nulos no topo do pilar; em pórticos simétricos com cobertura inclinada, verticalmente carregados, não há deslocamentos desestabilizantes “externos” do pilar que podem ser considerados insignificantes. Estes são

resultantes do efeito combinado do deslocamento vertical do topo do pórtico e da inclinação da viga;

- c) é um fato bem conhecido que a configuração deformada de primeira ordem e a distribuição do momento fletor de um pórtico ortogonal simétrico são ocasionadas exclusivamente devido às cargas horizontais aplicadas. Esta característica é muito importante, pois a validade do método de amplificação do momento é baseada na similaridade entre os resultados de primeira ordem e seus respectivos modos críticos de flambagem do pórtico.

Tabela 2.2 – Resumo comparativo dos métodos de análise de estabilidade e cálculo. Fonte: AISC (2005)

	Método da análise direta	Método do comprimento efetivo	Método da análise de primeira ordem
Limites de uso ¹	Nenhum	$\Delta_{2^a}/\Delta_{1^a} \leq 1,5$	$\Delta_{2^a}/\Delta_{1^a} \leq 1,5$ $\alpha P_r / P_y \leq 0,5$
Tipo de análise	elástica de 2ª ordem ²		elástica de 1ª ordem
Geometria da estrutura	Todos os três métodos usam a geometria indeformada na análise		
Cargas laterais mínimas ou adicionais requeridas na análise	Mínima ³ ; 0,2% da carga gravitacional do andar	Mínima; 0,2% da carga gravitacional do andar	Adicional; pelo menos 0,42% da carga gravitacional do andar
Rigidezes dos elementos usadas na análise	EA e EI reduzidos	EA e EI nominais	
Cálculo dos pilares	K = 1 para todos os pórticos	K = 1 para pórticos contraventados. Para pórticos resistentes a momento, determinar K pela análise da flambagem lateral ⁴	K = 1 para todos os pórticos ⁵
Referência da especificação do método	Apêndice 7	Seção C.2.2 ^a	Seção C.2.2b
<p>1. $\Delta_{2^a}/\Delta_{1^a}$ é a relação do deslocamento de segunda ordem pelo deslocamento de primeira ordem, que pode ser adotado como o valor de B_2.</p> <p>2. Pode ser usado qualquer método geral de análise de segunda ordem ou o método da amplificação dos esforços solicitantes.</p> <p>3. Esta carga nocional será somada se $\Delta_{2^a}/\Delta_{1^a} > 1,5$.</p> <p>4. K = 1 é permitido para pórticos resistentes a momento quando $\Delta_{2^a}/\Delta_{1^a} < 1,1$.</p> <p>5. Uma amplificação adicional para os efeitos da curvatura do elemento é requerido para pilares em pórticos resistentes a momento.</p>			

Algumas das observações do trabalho de Nardi et al (2011) indicam que, quanto maior é a rigidez da estrutura, menor é a influência dos efeitos de segunda ordem, e que a altura da estrutura em relação a sua base tem influência direta nos efeitos de segunda ordem.

No entanto, Nardi et al (2011) afirmam que, a rigor, estruturas contraventadas não têm influência direta nos efeitos de segunda ordem, apenas na estabilidade da estrutura. Mas que, nos exemplos mostrados em seu trabalho, a estrutura possui apenas um vão na direção transversal, sendo essa a direção das cargas nocionais – caracterizadas como forças horizontais equivalentes aplicadas nos nós da estrutura a fim de simular os efeitos desestabilizantes ocasionados pelas imperfeições geométricas iniciais dos elementos da estrutura. Sendo assim, constatou-se que o contraventamento dos vãos determinou uma diminuição dos efeitos de segunda ordem.

2.4. Análise computacional dos efeitos de segunda ordem

O estudo da não linearidade em análises estruturais foi impulsionado pelo advento do desenvolvimento computacional, facilitando e transformando análises de segunda ordem viáveis pelo reduzido tempo relativo necessário (FICANHA et al, 2012).

Segundo Ormonde e Souza (2012), com o avanço dos recursos e modelos de análise de estruturas, alicerçados pelo constante desenvolvimento tecnológico dos computadores e *softwares* de projeto, a realidade das análises avançadas vem ganhando cada vez mais espaço dentro dos escritórios de engenharia.

Ormonde e Souza (2012) ressaltam que esse avanço não acontece sem erros e riscos. Começam a surgir pelo Brasil casos severos de patologias, e até mesmo colapso de estruturas, tendo por causa principal o uso inadequado destas novas ferramentas. A ideia de que se deve conhecer profundamente a ferramenta que se utiliza nunca foi tão clara como agora se pode constatar. Programas podem produzir erros de resultados, principalmente quando mal compreendidos. Daí a importância de métodos e processos simplificados somados aos adequados fundamentos teóricos das análises utilizadas, para que o engenheiro tenha condição de perceber estes erros quando ocorrerem.

Um aspecto importante dos *softwares* desenvolvidos localmente é a possibilidade, nem sempre muito explorada, de se adicionar recursos não encontrados em pacotes comerciais, cujos objetivos estão principalmente voltados para o desenvolvimento de estruturas novas (ORMONDE; SOUZA, 2012).

Segundo Iu et al (2008), nas últimas décadas o cálculo estrutural é baseado principalmente na análise elástica linear numérica. Os tradicionais procedimentos de cálculo para considerar a flexão não linear e flambagem de pórticos devido, respectivamente, aos efeitos $P-\delta$ e $P-\Delta$, recorreram a especificações empíricas de cálculo.

O cálculo tradicional dos elementos requer diferentes parâmetros de cálculo, tais como comprimento efetivo e fator de amplificação dos esforços para cada elemento para incorporar, respectivamente, os efeitos $P-\delta$ e $P-\Delta$ em todos os elementos. Como resultado, o procedimento de cálculo analítico tradicional é implementado separadamente para verificar a estabilidade de cada elemento inevitavelmente. Estes parâmetros de cálculo de estabilidade são aproximados e, por vezes, requerem julgamento subjetivo do engenheiro, de tal forma que é difícil determinar a carga de flambagem de um elemento ou de um pórtico inteiro com precisão. E até mesmo, em algumas circunstâncias, os parâmetros de cálculo de estabilidade para formas mais complicadas de estruturas são impossíveis de serem avaliados. Além disso, os parâmetros de cálculo dos diferentes elementos podem ser vários, os quais dependem fortemente das condições de restrição dos nós, rigidez dos elementos conectados, combinações de cargas ao longo do elemento, e também da geometria da estrutura de todo o pórtico (IU et al, 2008).

Isso implica que, devido à complexidade das tradicionais especificações de cálculo, não é viável avaliar o comportamento global da estrutura com efeitos de segunda ordem por meio de cálculo analítico. Além disso, o uso de testes de laboratório tem limites práticos e econômicos para investigar os efeitos de segunda ordem sobre toda uma estrutura ou um elemento individual. Por outro lado, desde que o desenvolvimento da tecnologia de computadores, tanto em *software* e quanto *hardware*, foi tão avançado na última década, tornou-se viável, através do método computacional, utilizar a análise inelástica de segunda ordem para calcular as práticas estruturas aporticadas (IU et al, 2008).

Por outro lado, uma análise elástica de segunda ordem pode calcular numericamente e diretamente as distribuições de carga e deslocamentos, com a inclusão de ambos os efeitos, $P-\Delta$ e $P-\delta$, no sistema estrutural. Consequentemente, nenhum parâmetro de cálculo é necessário para o elemento. Isso implica que não há nenhum procedimento de cálculo de estabilidade para

cada elemento individual. Todos os cálculos manuais onerosos e complicados para os efeitos de segunda ordem são implementados diretamente no processo numérico de análise elástica de segunda ordem (IU et al, 2008).

3. Considerações normativas para estabilidade e análise estrutural

3.1. Considerações gerais

As informações apresentadas neste capítulo referem-se às considerações da norma brasileira ABNT NBR8800:2008, fazendo um comparativo em relação à norma americana AISC360:2005, indicando algumas similaridades e diferenças entre ambas.

Segundo a ABNT NBR8800:2008, o objetivo da análise estrutural é determinar os efeitos das ações na estrutura, visando efetuar verificações de estados-limites últimos e de serviço, feita com um modelo realista, que permita representar a resposta da estrutura e dos materiais estruturais, levando-se em conta as deformações causadas por todos os esforços solicitantes relevantes.

O tipo de análise estrutural pode ser feito de acordo com considerações do material e dos efeitos dos deslocamentos da estrutura. Dentre os tipos de análise, utiliza-se análise global elástica ou plástica, com relação aos materiais, para determinação dos esforços internos; e análise linear em teoria de primeira ordem, com base na geometria indeformada da estrutura, ou análise não linear, com base na geometria deformada da estrutura.

A norma ABNT NBR8800:2008 afirma ainda que a não linearidade do material pode ser considerada, em alguns casos, de forma indireta, efetuando-se uma análise elástica reduzindo-se a rigidez das barras.

Podem ser utilizados métodos de análise que considerem direta ou indiretamente a influência da geometria deformada da estrutura (efeitos $P-\delta$ e $P-\Delta$), das imperfeições iniciais, do comportamento das ligações e da redução de rigidez dos elementos componentes, quer pela não linearidade do material, quer pelo efeito das tensões residuais.

Ficanha et al (2012) afirmam que as atuais normas não apresentam comentários e indicações de como o profissional deve proceder para interpretação dos resultados apresentados na análise de segunda ordem.

3.2. Exigências de projeto para a estabilidade das barras componentes da estrutura

As imperfeições geométricas iniciais devem ser tomadas na forma de uma imperfeição equivalente global, Δ , de $L/500$ ou local, δ , de $L/1000$, conforme o tipo de contenção adotado, em que L é o comprimento destravado do elemento. Se os elementos forem projetados para conter lateralmente mais de um pilar ou viga, devem ser considerados os efeitos das imperfeições de todos esses pilares ou vigas, porém multiplicados pelo fator de redução α_{red} , dado por:

$$\alpha_{red} = \sqrt{0,5 \left(1 + \frac{1}{m}\right)} \quad (3.1)$$

em que m é o número de pilares ou vigas a serem contidos lateralmente.

Permite-se também que as imperfeições geométricas sejam representadas por forças equivalentes, denominadas forças nocionais, que provoquem, nas vigas e pilares a serem contidos lateralmente, efeitos equivalentes aos das referidas imperfeições, como exemplificado na Figura 3.1, em que

N_{sd} é a força axial solicitante de cálculo;

H_{Δ} é a força equivalente à imperfeição geométrica inicial global;

q_{δ} é a força equivalente à imperfeição geométrica inicial local.

Esses efeitos devem ser considerados como valores mínimos para cálculo do sistema de travamento, mas não precisam ser adicionados às demais forças atuantes nele.

3.3. Classificação das estruturas quanto à sensibilidade a deslocamentos laterais

A norma ABNT NBR8800:2008 classifica as estruturas quanto à sensibilidade a deslocamentos laterais em estruturas de pequena, média ou grande deslocabilidade.

Quando a máxima relação entre o deslocamento lateral do andar relativo à base, obtido na análise de segunda ordem, e aquele obtido na análise de primeira ordem ($\Delta_{2^a\text{ordem}} / \Delta_{1^a\text{ordem}}$), considerando todos os andares e todas as combinações últimas de ações, for:

- a) $\frac{\Delta_{2^a\text{ordem}}}{\Delta_{1^a\text{ordem}}} \leq 1,1$ – a estrutura é de pequena deslocabilidade;
- b) $1,1 < \frac{\Delta_{2^a\text{ordem}}}{\Delta_{1^a\text{ordem}}} \leq 1,4$ – a estrutura é de média deslocabilidade;
- c) $\frac{\Delta_{2^a\text{ordem}}}{\Delta_{1^a\text{ordem}}} > 1,4$ – a estrutura é de grande deslocabilidade.

Há uma diferença com relação ao limite estabelecido pela norma AISC360:2005 que é de 1,5 para a consideração de estrutura de grande deslocabilidade lateral.

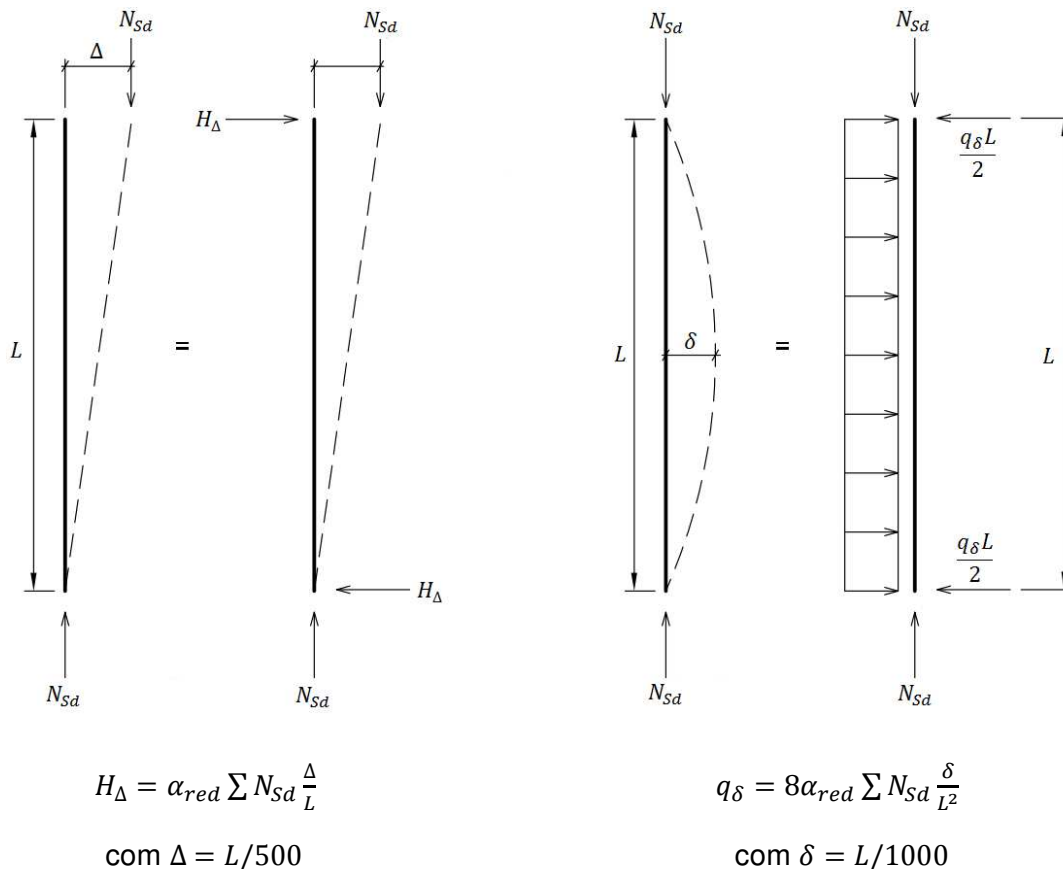


Figura 3.1 — Forças equivalentes (nocionais). Fonte: ABNT NBR8800:2008

A classificação da estrutura deve ser obtida para as combinações últimas de ações em que os deslocamentos horizontais provenientes das forças horizontais tenham os mesmos sentidos dos deslocamentos horizontais decorrentes das cargas gravitacionais.

A classificação da estrutura depende da combinação última de ações considerada. Por simplicidade, essa classificação pode ser feita uma única vez, tomando-se a combinação de ações que fornecer, além de forças horizontais, a maior resultante de carga gravitacional.

Para a classificação das estruturas quanto à sensibilidade a deslocamentos laterais, as imperfeições iniciais de material, não necessitam ser consideradas na análise.

3.4. Análise elástica de segunda ordem

A norma brasileira afirma que a determinação dos esforços solicitantes, para as combinações últimas de ações, deve ser realizada por meio de análise elástica de segunda ordem.

As considerações da norma ABNT NBR8800:2008 são similares às especificações do apêndice 7 da AISC360:2005 para o método de análise direta.

Os esforços solicitantes devem ser obtidos considerando-se os efeitos globais e locais de segunda ordem. O método da amplificação dos esforços solicitantes, dado no Anexo D da norma, pode ser considerado uma aproximação aceitável para análise de segunda ordem.

3.4.1. Aplicação do método da amplificação dos esforços solicitantes (B_1 - B_2)

3.4.1.1. Modelo para análise

Dois modelos para análise devem ser feitos, desdobrados da estrutura original, conforme a Figura 3.2.

Para a estrutura *nt* (não translação ou sem translação), faz-se a análise elástica de primeira ordem, com os nós da estrutura impedidos de se deslocarem horizontalmente, usando-se, na análise, contenções horizontais fictícias em cada andar (Figura 3.2.b).

Para a estrutura *lt* (livre para translação) faz-se a análise elástica de primeira ordem, considerando os efeitos das reações das contenções fictícias da estrutura *nt* aplicadas em sentido contrário, nos mesmos pontos onde tais contenções foram colocadas (Figura 3.2.c).

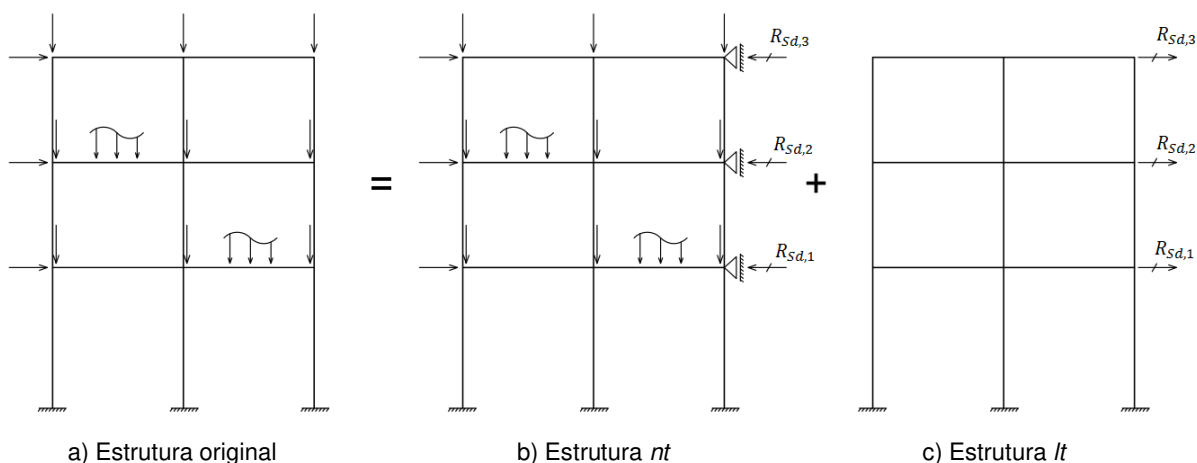


Figura 3.2 — Modelo para análise. Fonte: ABNT NBR8800:08

Por meio deste procedimento obtém-se o momento fletor e a força axial de cálculo, M_{Sd} e N_{Sd} , para o dimensionamento da estrutura, através das seguintes equações:

$$M_{Sd} = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} \quad (3.2)$$

$$N_{Sd} = N_{nt} + B_2 N_{lt} \quad (3.3)$$

Devem ser considerados os efeitos das imperfeições geométricas iniciais, através de um deslocamento relativo entre os pavimentos de $h/333$ ou através da aplicação de uma força horizontal equivalente (força nocional) igual a 0,3% do valor da somatória das cargas gravitacionais do andar.

A norma brasileira afirma que não é necessário somá-las às reações horizontais de apoio. Portanto, esses efeitos não se aplicam ao método da amplificação dos esforços visto que, neste caso, os nós da estrutura são impedidos de se deslocarem horizontalmente. No caso do programa computacional desenvolvido, estas forças nocionais são aplicadas para a consideração das imperfeições geométricas iniciais.

Para a correta consideração desse método, devem-se desconsiderar no cálculo, as deformações axiais das barras. No entanto, a influência dessas deformações nos exemplos de cálculo que serão apresentados é pequena e foram consideradas pois, no programa computacional utilizado no cálculo dos esforços, não há o recurso para desconsiderá-las.

3.4.1.2. Determinação dos deslocamentos relativos entre os andares

Deve ser feita a análise da estrutura em primeira ordem para a determinação dos deslocamentos relativos entre os andares.

A relação entre o deslocamento lateral do andar relativo à base obtido na análise de segunda ordem e aquele obtido na análise de primeira ordem pode ser aproximada de maneira aceitável pelo valor do coeficiente B_2 , expresso pela Equação (3.4), sem a consideração das imperfeições iniciais de material.

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{R_s} \frac{\Delta_h}{h} \frac{\sum N_{Sd}}{\sum H_{Sd}}} \quad (3.4)$$

em que:

$\sum N_{Sd}$ é a carga gravitacional total que atua no andar considerado, englobando as cargas atuantes nas subestruturas de contraventamento e nos elementos que não pertençam a essas subestruturas;

R_s é um coeficiente de ajuste, igual a 0,85 nas estruturas em que o sistema resistente a ações horizontais é constituído apenas por subestruturas de contraventamento formadas por pórticos, nos quais a estabilidade lateral é assegurada pela rigidez à flexão das barras e pela capacidade de transmissão de momentos das ligações, e igual a 1,0 para todas as outras estruturas;

Δ_h é o deslocamento horizontal relativo entre os níveis superior e inferior (deslocamento interpavimento) do andar considerado, obtido da análise de primeira ordem, na estrutura original (Figura 3.2.a) ou na estrutura lt (Figura 3.2.c). Se Δ_h possuir valores diferentes em um mesmo andar, deve ser tomado um valor ponderado para esse deslocamento, em função da proporção das cargas gravitacionais atuantes ou, de modo conservador, o maior valor;

$\sum H_{Sd}$ é a força cortante no andar, produzida pelas forças horizontais de cálculo atuantes, usadas para determinar Δ_h e obtida na estrutura original (Figura 3.2.a) ou na estrutura lt (Figura 3.2.c);

h é a altura do andar (distância entre eixos de vigas de dois andares consecutivos ou entre eixos de vigas e a base, no caso do primeiro andar).

Se:

- a) $B_2 \leq 1,1$ – a estrutura é de pequena deslocabilidade;
- b) $1,1 < B_2 \leq 1,4$ – a estrutura é de média deslocabilidade;
- c) $B_2 > 1,4$ – a estrutura é de grande deslocabilidade.

3.4.1.3. Estruturas de pequena deslocabilidade

Para estruturas de pequena deslocabilidade, pode ser feita análise de primeira ordem para determinação dos esforços solicitantes. Assim, pode-se desconsiderar os efeitos globais de segunda ordem. Para isso deve-se considerar os efeitos das imperfeições geométricas iniciais adicionando-as às respectivas combinações, inclusive àquelas em que atuam ações variáveis devidas ao vento e o esforço axial solicitante de cálculo deve ser

$$N_{sd} \leq 0,5Af_y \quad (3.5)$$

em que A é a área da seção transversal da barra; e f_y é a tensão de escoamento do aço.

Nas estruturas de pequena deslocabilidade, os efeitos das imperfeições iniciais de material não precisam ser considerados na análise. Os efeitos locais de segunda ordem devem ser considerados amplificando-se os momentos fletores pelo coeficiente B_1 , expresso pela Equação (3.6).

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - \frac{N_{sd1}}{N_e}} \geq 1,0 \quad (3.6)$$

em que:

N_e é a força axial que provoca a flambagem elástica por flexão da barra no plano de atuação do momento fletor, calculada com o comprimento real da barra, considerando, se for o caso, a imperfeição inicial de material;

N_{sd1} é a força axial de compressão solicitante de cálculo na barra considerada, em análise de primeira ordem ($N_{sd1} = N_{nt} + N_{lt}$);

C_m é um coeficiente igual a:

a) se não houver forças transversais entre as extremidades da barra no plano de flexão:

$$C_m = 0,60 - 0,40 \frac{M_1}{M_2} \quad (3.7)$$

sendo M_1/M_2 a relação entre o menor e o maior dos momentos fletores solicitantes de cálculo na estrutura nt no plano de flexão, nas extremidades apoiadas da barra, tomada como positiva, quando os momentos provocarem curvatura reversa, e negativa, quando provocarem curvatura simples ($M_1 = M_{nt1}$; $M_2 = M_{nt2}$);

b) se houver forças transversais entre as extremidades da barra no plano de flexão, o valor de C_m deve ser determinado por análise racional ou ser tomado conservadoramente igual a 1,0.

Se a força axial solicitante de cálculo na barra for de tração, deve-se tomar B_1 igual a 1,0.

3.4.1.4. Estruturas de média deslocabilidade

A determinação dos esforços solicitantes, para as combinações últimas de ações, deve ser realizada por meio de análise elástica de segunda ordem.

Se as estruturas forem de média deslocabilidade, os coeficientes B_1 e B_2 devem ser calculados com as rigidezes à flexão e axial reduzidas para 80% dos valores originais, respectivamente, $0,8EI$ e $0,8EA$, para se considerar as imperfeições iniciais de material.

Faz-se a análise da estrutura – original, nt e lt – com as rigidezes reduzidas e determina-se novo valor de B_2 . Além disso, para determinar B_1 determina-se C_m , N_{sd} e N_e , em que:

$$N_e = \frac{\pi^2 0,8EI}{L^2} \quad (3.8)$$

3.4.1.5. Estruturas de grande deslocabilidade

O método da amplificação dos esforços solicitantes pode ser usado para estruturas de grande deslocabilidade, considerando-se os efeitos das imperfeições geométricas iniciais e adicionando-os às combinações últimas de ações em que atuam ações variáveis devidas ao vento.

De outra forma, nas estruturas de grande deslocabilidade, deve ser feita uma análise rigorosa, levando-se em conta as não linearidades geométricas e de material.

3.4.2. Determinação de respostas para estados-limites de serviço

Para a determinação de respostas para estados-limites de serviço, devem ser utilizadas as combinações de serviço, não sendo necessário considerar as imperfeições iniciais geométricas e de material.

Para as estruturas de pequena e média deslocabilidade, pode ser feita análise elástica de primeira ordem. Para as estruturas de grande deslocabilidade, devem ser considerados os efeitos globais e locais de segunda ordem.

4. Considerações sobre análise numérica de segunda ordem

4.1. Considerações da proposta deste trabalho

A aplicação do método de análise numérica apresentada neste trabalho é feita de forma exata, sem a necessidade da utilização dos métodos aproximados citados anteriormente. Os efeitos $P-\delta$ e $P-\Delta$ produzirão automaticamente as necessárias amplificações de momento de cálculo, eliminando a necessidade da utilização desses processos, que são complicados e demorados para calcular analiticamente.

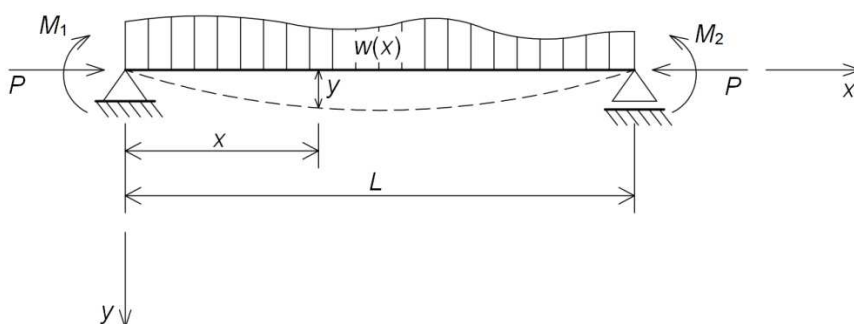


Figura 4.1 — Carregamento geral de barra. Fonte: Salmon e Johnson (1996)

Os processos numéricos para análise elástica de estruturas em teoria de segunda ordem são baseados na função da barra da Figura 4.1, expressa por:

$$M_x = M_i + Py = -EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (4.1)$$

em que:

$w(x)$ é o carregamento transversal distribuído ao longo do comprimento da barra;

y é o deslocamento transversal da barra no plano da estrutura;

x é a direção do eixo ao longo do comprimento da barra;

M_1 e M_2 são os momentos aplicados nas extremidades da barra;

M_i é o momento fletor, dado pela combinação da carga $w(x)$ com M_1 e M_2 , sendo uma função de x ;

M_x é o momento fletor dado na posição x ;

EI é a rigidez à flexão;

P é a força axial atuante na barra.

Para seções com EI constante, e dividindo por EI a Equação (4.1) resulta em

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = -\frac{M_i}{EI} \quad (4.2)$$

Derivando a equação diferencial duas vezes torna-se

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI} \frac{d^2M_i}{dx^2} \quad (4.3)$$

Sabendo que

$$\frac{d^2M_i}{dx^2} = -w \quad (4.4)$$

a equação diferencial que governa uma barra resulta em

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} + P \frac{d^2y}{dx^2} = w \quad (4.5)$$

Para resolver esta equação diferencial, pode-se recorrer à solução da própria equação diferencial do problema, conhecido como processo das funções de rigidez. Esses processos numéricos consideram a degeneração geométrica da estrutura através dos efeitos $P-\delta$ e $P-\Delta$, conhecidos como efeitos de segunda ordem, quando ao ser aplicado um carregamento a estrutura passa a apresentar uma configuração deformada (VIEIRA, 1998).

Nesse processo, a equação diferencial, expressa pela Equação (4.5), é resolvida de forma exata assumindo a hipótese de pequenos deslocamentos. A solução é obtida através das equações de equilíbrio e das condições de contorno que aparecem na barra, quando esta é analisada na posição deformada e deslocada. A matriz de rigidez é obtida através da solução da equação diferencial que fornece as funções de rigidez. Este processo é conhecido desde 1930, sendo James apud Al-Mashary e Chen (1993) o primeiro a apresentar estes coeficientes. Entretanto, Livesley e Chandler e Horne e Merchant apud Al-Mashary e Chen (1993) foram os primeiros a tabular na forma conveniente para ser usada na análise de instabilidade, escrita com fatores de correção baseados na matriz de primeira ordem.

Com relação aos processos aproximados, a vantagem é que somente a análise em primeira ordem é necessária para o dimensionamento. O efeito de segunda ordem é considerado através da aplicação de fatores de amplificação. Entretanto, as desvantagens destes processos são muitas, por exemplo, podem-se citar algumas delas para o processo B_1 - B_2 , apresentado no capítulo 3 (VIEIRA, 1998):

- a) é restrita a estruturas retangulares;
- b) é feita uma correção local nas barras, mas não é analisado o comportamento global desta barra na estrutura (na verdade, as barras sobre a ação do efeito de segunda ordem redistribuem as suas forças internas);
- c) interpretações errôneas do processo podem levar à colocação errada dos suportes artificiais, para o caso de não haver translação e também erros no cálculo de alguns fatores, tais como o fator C_m ou no comprimento efetivo de flambagem K ;
- d) a soma dos dois momentos amplificados, no caso de não haver translação e para o caso da translação permitida, embora eles possam não ocorrer na mesma localização;
- e) não se podem prever os momentos finais corretos nas barras, assim como as forças axiais; entretanto, na análise de segunda ordem, os momentos são amplificados para tentar levar em consideração a ação global da estrutura que é o caso real;
- f) é exigido um esforço considerável no cálculo do fator de amplificação, principalmente se esse cálculo é manual e, portanto, existe uma boa chance de se cometerem erros no processo;
- g) são necessárias duas análises em teoria de primeira ordem para a solução da estrutura com diferentes carregamentos e condições de contorno: uma para o caso de não haver translação e outra para o caso da translação permitida.

O processo de análise de instabilidade elástica por flexão de pórticos planos, proposto por Al-Mashary e Chen (1993) para a análise, simplifica o problema por considerar dois aspectos:

- a) a força axial na barra calculada pela análise em teoria de segunda ordem usualmente não diverge muito da correspondente calculada pela análise em teoria de primeira ordem;

- b) a inclusão do efeito de encurtamento das barras não altera significativamente os resultados finais dos momentos e forças cortantes, mas complica significativamente o esforço computacional na análise e requer mais iterações.

Portanto, o processo proposto por Al-Mashary e Chen (1993) para a análise é baseado nas seguintes suposições:

- a) o efeito de encurtamento nas barras é negligenciado;
- b) apenas uma iteração baseada na análise da formulação em teoria de segunda ordem com funções de rigidez é realizada;
- c) a matriz de rigidez é baseada nas funções de rigidez;
- d) o valor da força P para cada barra é analisado dentro do programa pela análise em teoria de primeira ordem, a qual usa a mesma formulação da análise em segunda ordem, mas com $P = 0$.

4.2. Funções de rigidez

Vieira (1998, 2010) apresenta um processo de análise em teoria de segunda ordem, proposto por Al-Mashary e Chen (1993) e adaptado por Requena (1995, 1997). O mesmo foi baseado nas funções de rigidez, demonstrando que, através das equações fundamentais da matriz de rigidez, observa-se que o efeito da não linearidade na equação é resultado da presença da carga axial P na matriz de rigidez e da presença do deslocamento nodal no vetor força, quando se considera o efeito de encurtamento das barras na análise.

Estas funções de rigidez consideram os efeitos de não linearidade geométrica em teoria de segunda ordem, considerando simultaneamente as deformações por força axial, força cortante e flexão.

Para uma barra fletida, a presença do esforço normal causa variação nos momentos fletores. Como consequência, sua derivada, que fornece o esforço cortante, também será alterada pela presença do esforço normal. Neste caso os coeficientes da matriz de rigidez da barra são determinados em teoria de segunda ordem e resultam funções não lineares da força axial. Quando as tensões se mantêm proporcionais às deformações e com a hipótese assumida de pequenos deslocamentos, estas funções podem ser consideradas exatas.

A influência da força axial e os efeitos da força cortante nas deformações foram considerados na dedução das funções de rigidez. Esta dedução encontra-se disponível para consulta no Anexo A, considerando o caso de flexão apenas no plano.

Na Figura 4.2 é esquematizado o sistema de coordenadas para uma barra de seção prismática engastada nas extremidades.

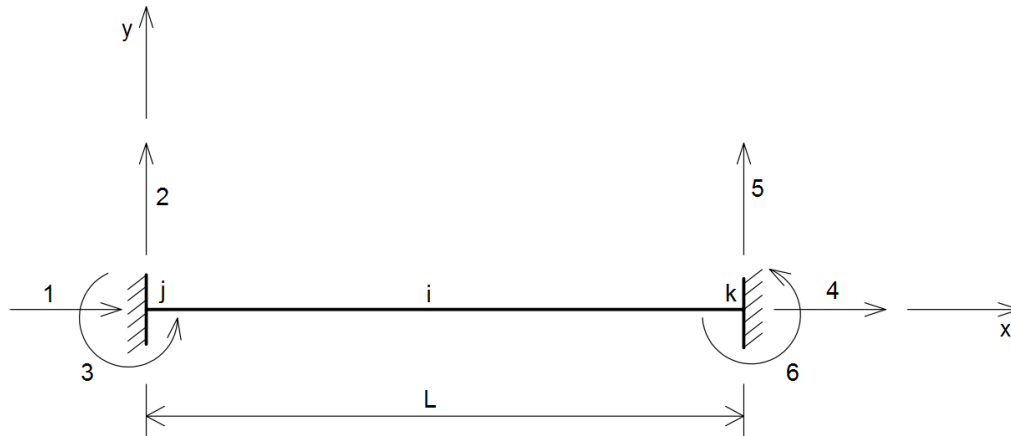


Figura 4.2 — Sistemas de coordenadas para o plano

Levando-se em conta a simetria, o equilíbrio de esforços e a aplicação do Teorema da Reciprocidade, a matriz de rigidez que relaciona os deslocamentos D com os esforços F – em relação às seis coordenadas definidas – tem a forma mostrada na Equação (4.6), na qual os valores não nulos são designados por S_1 , S_2 , S_3 , S_4 e S_5 .

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & -S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & S_3 & 0 & -S_2 & S_3 \\ 0 & S_3 & S_4 & 0 & -S_3 & S_5 \\ -S_1 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & -S_2 & -S_3 & 0 & S_2 & -S_3 \\ 0 & S_3 & S_5 & 0 & -S_3 & S_4 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Os valores de S_1 até S_5 foram deduzidos de forma sistemática, com o propósito de programação para computadores, possibilitando a análise de estruturas mais complexas. Esta teve como base a barra prismática da Figura 4.2, engastada em ambas as extremidades designadas por j e k . Cada coluna da matriz de rigidez (Equação (4.6)) representa os valores dos esforços exercidos pelas restrições quando é imposto um deslocamento unitário na direção

e sentido da coordenada respectiva mantendo todos os outros nulos. A Figura 4.3 mostra os três tipos básicos possíveis de deslocamento.

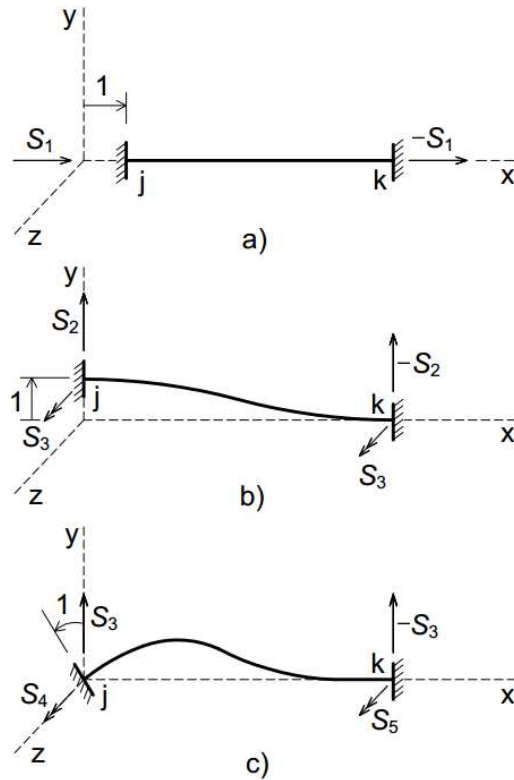


Figura 4.3 — Estados de deslocamento: a) Translação unitária horizontal; b) Translação unitária vertical; c) Giro unitário

Existem três casos a serem considerados para a determinação da matriz de rigidez. O primeiro é quando o valor da força axial na barra é nulo, o segundo quando este valor é negativo e, finalmente, quando este valor é positivo. O sinal do esforço normal influenciará no tipo de solução geral que será utilizado para solução da equação diferencial do problema.

Na Tabela 4.1 estão demonstradas as funções de rigidez, e no Anexo A é apresentada a definição de cada variável.

A utilização do processo das funções de rigidez permite que os pesquisadores analisem a não linearidade do material de pórticos com pouco esforço computacional.

Tabela 4.1 - Funções de rigidez de barra com interação entre força axial, força cortante e flexão

S	Compressão ($P < 0$)	($P = 0$)	Tração ($P > 0$)
S_1	$\frac{EA_x}{L}$	$\frac{EA_x}{L}$	$\frac{EA_x}{L}$
S_2	$\frac{EI_z a^2 \alpha^3 \text{sen } \alpha L}{\phi_c}$	$\frac{12EI'_z}{L^3}$	$\frac{EI_z a^2 \alpha^3 \text{senh } \alpha L}{\phi_t}$
S_3	$\frac{EI_z a \alpha^2 (1 - \cos \alpha L)}{\phi_c}$	$\frac{6EI'_z}{L^2}$	$\frac{EI_z a \alpha^2 (\cosh \alpha L - 1)}{\phi_t}$
S_4	$\frac{EI_z \alpha (\text{sen } \alpha L - a \alpha L \cos \alpha L)}{\phi_c}$	$\frac{EI'_z}{L} (4 + K)$	$\frac{EI_z \alpha (a \alpha L \cosh \alpha L - \text{senh } \alpha L)}{\phi_t}$
S_5	$\frac{EI_z \alpha (a \alpha L - \text{sen } \alpha L)}{\phi_c}$	$\frac{EI'_z}{L} (2 - K)$	$\frac{EI_z \alpha (\text{senh } \alpha L - a \alpha L)}{\phi_t}$
	$\phi_c = 2 - 2\cos \alpha L - a \alpha L \text{sen } \alpha L$	$K = \frac{12cEI_z}{GA_x L^2}$	$\phi_t = 2 - 2\cosh \alpha L + a \alpha L \text{senh } \alpha L$
	$a = 1 + \frac{cP}{GA_x}$	$\alpha = \sqrt{\frac{ P }{aEI_z}}$	$I'_z = \frac{I_z}{1 + K}$

4.3. Processo de determinação da instabilidade de pórtico plano (carga crítica)

A matriz de rigidez de um elemento de barra $[S_{KB}]_i$, expressa pela Equação (4.6), relaciona o vetor dos esforços $\{F\}_i$ e vetor de ações de engastamento perfeito $\{f\}_i$, com o vetor dos deslocamentos $\{D_L\}_i$, nas coordenadas locais do elemento (ver Figura 4.2).

Portanto, a formulação matricial para o i -ésimo elemento da estrutura fica:

$$\{F\}_{i(6 \times 1)} = [S_{KB}]_{i(6 \times 6)} \{D_L\}_{i(6 \times 1)} + \{f\}_{i(6 \times 1)} \quad (4.7)$$

A matriz de rigidez da estrutura $[S_{KG}]$ relaciona o vetor das ações $\{A\}$ com o vetor dos deslocamentos $\{D\}$, nas n coordenadas do sistema global, desta forma tem-se:

$$\{A\}_{i(n \times 1)} = [S_{KG}]_{i(n \times n)} \{D\}_{i(n \times 1)} \quad (4.8)$$

A matriz de rigidez da estrutura $[S_{KG}]$ pode ser obtida através da contribuição dos elementos de barra, tem-se que:

$$\{S_{KG}\}_{(n \times n)} = \sum_{i=1}^{nb} [b]_{i(n \times 6)}^T [S_{KB}]_{i(6 \times 6)} [b]_{i(6 \times n)} \quad (4.9)$$

em que n é número total de coordenadas da estrutura formada apenas por elementos de barra, no sistema global; nb é número de elementos de barra; $[b]_i$ = submatriz de ordem $6 \times n$, correspondente ao elemento i , da matriz de transformação $[b]$ de ordem $6nb \times n$, que relaciona os deslocamentos da estrutura com os deslocamentos dos elementos:

$$\{D_L\}_{i(6nb \times 1)} = [b]_{i(6nb \times n)} \{D\}_{i(n \times 1)} \quad (4.10)$$

A análise linear de flambagem consiste na determinação de uma solução de autovalor, a qual, através das equações de equilíbrio sobre a deformada, iterativamente define o fator crítico resistente, fator considerado sobre a carga aplicada. Os modos de flambagem não fornecem uma deformação em função de uma carga, mas sim o valor limite resistente da estrutura (carga crítica) (FICANHA et al, 2012).

Segundo Ficanha et al (2012), embora não apresente valores de deformações reais para utilização nas verificações de projeto, os modos resultantes da análise linear de flambagem possibilitam a verificação do comportamento da estrutura como um todo, evidenciando possíveis pontos de baixa rigidez estrutural, que podem ser reduzidos com o uso de um sistema de travamento.

Segundo Lopes et al (2005), para se considerar os efeitos de segunda ordem, devem-se realizar inúmeras interações atualizando sempre a matriz de rigidez em função da carga horizontal e do deslocamento. Quando não há mais deslocamento relativo dos nós da estrutura, a análise então converge e tem-se então o deslocamento total da estrutura. Se a análise não convergir, significa que a estrutura apresenta rigidez insuficiente.

A carga crítica para o pórtico é determinada pela mesma técnica descrita por Requena (1995, 1997). As instabilidades na estrutura global são encontradas verificando-se a matriz de rigidez para singularidades como o vetor de ações que é gradualmente incrementado.

A técnica para determinação do carregamento crítico, denominado de W_{crit} , consiste em avaliar os deslocamentos da estrutura produzidos por um determinado carregamento, inicialmente sem o efeito das forças normais, e posteriormente considerando os seus efeitos. A estrutura é calculada sucessivas vezes até que haja convergência nos valores dos deslocamentos, mediante uma tolerância previamente estabelecida, ou seja, pesquisa-se um carregamento crítico capaz de degenerar a rigidez da estrutura, através da singularização de sua matriz de rigidez.

Uma estrutura será considerada estável sob certo carregamento se sua matriz de rigidez for definida positiva. Neste caso, todos os deslocamentos da estrutura serão determinados; porém, se este carregamento levar a estrutura a uma situação de instabilidade, a matriz de rigidez da estrutura deixará de ser definida positiva; portanto os deslocamentos tornar-se-ão indeterminados.

Finalmente, o carregamento crítico de instabilidade de uma estrutura será considerado definido quando, após sucessivos aumentos no carregamento da estrutura, a rigidez for se degenerando até que o determinante de sua matriz de rigidez se torne nulo, indicando o surgimento do menor autovalor igual à zero.

4.4. Desenvolvimento do programa computacional

O programa foi desenvolvido em linguagem C++, com a finalidade de determinar os valores de esforços dos elementos, considerando os efeitos de segunda ordem e determinar a capacidade máxima de carregamentos nas estruturas ao se atingirem os limites de suas estabilidades. Além disso, é feita a verificação dos perfis de aço que constituem as barras.

Este trabalho utiliza as seguintes hipóteses para análise do sistema estrutural:

- a) a estrutura do pórtico transversal é considerada plana constituída de elementos de barra, deformáveis por flexão, por força axial e por cisalhamento, em seu plano;

- b) as barras são consideradas perfeitamente retas;
- c) as seções transversais permanecem inalteradas durante o processo;
- d) o desenvolvimento matricial é feito com base no processo dos deslocamentos para estruturas no regime elástico;
- e) na análise da instabilidade do pórtico é levada em conta a influência da força axial nos elementos de barra, caracterizada pelo efeito da não linearidade geométrica em teoria de pequenos deslocamentos;
- f) o carregamento crítico da estrutura é alcançado quando ela deixa de ser estável em seu próprio plano, admitindo-a estável no plano perpendicular por vinculações adequadas;
- g) com o único propósito de se iniciar a análise, as forças axiais P são obtidas na teoria de primeira ordem; com os valores de P , o processo iterativo começa na teoria de segunda ordem;
- h) as forças axiais P são idealizadas sem excentricidade;
- i) as cargas são aplicadas apenas no plano do pórtico.

O programa computacional faz o cálculo em teoria de primeira ordem, em teoria de segunda ordem e o cálculo de instabilidade, o qual determina a carga crítica, W_{crit} , da estrutura.

No cálculo de primeira ordem, o programa obtém os deslocamentos dos nós no sistema global, os esforços no final das barras e as reações de apoio.

Para o cálculo de segunda ordem, o programa classifica a estrutura quanto a sensibilidade a deslocamentos laterais, considerando os deslocamentos relativos entre os andares de forma direta ($\Delta_{2ªorden}/\Delta_{1ªorden}$), determina o valor de P para utilização nas funções de rigidez, além dos deslocamentos dos nós no sistema global, os esforços no final das barras e as reações de apoio, aplicando as recomendações da norma brasileira ABNT NBR8800:2008.

A análise numérica, para a consideração dos efeitos de segunda ordem, $P-\Delta$ e $P-\delta$, é exata, porém foram utilizadas as recomendações aproximadas da norma brasileira para a consideração das imperfeições geométricas iniciais e de material. Por isso não foi considerada no programa a análise para estruturas de grande deslocabilidade. Para estas a consideração das imperfeições geométricas iniciais e de material devem ser precisas.

A deformação por cortante pode ser ou não considerada no programa, através do coeficiente de forma c . Para os exemplos que serão apresentados no capítulo 5, essa

deformação não será considerada, visto não ser relevante para a comparação dos resultados finais. Isso quer dizer que será adotado o valor de $c = 0$.

A técnica utilizada para a determinação da carga crítica é a da iteração direta. Esta técnica consiste em atualizar a matriz de rigidez da estrutura devido à variação do esforço axial que se modifica em cada iteração. Os deslocamentos são estimados em cada iteração e, quando estes convergem para uma tolerância previamente estipulada, a estrutura atinge sua configuração de equilíbrio.

Para a determinação da carga crítica dos exemplos numéricos, caso não se consiga convergência em um número de 50 ciclos previamente estabelecidos, mediante também uma precisão desejada previamente estabelecida em 10^{-3} – conforme indicado por Requena (1995) – o programa interrompe o processamento avisando que ultrapassou o número de ciclos previstos sem ter, entretanto, obtido convergência. No entanto, os valores do número de ciclos e a precisão determinada para a convergência da iteração podem ser definidos pelo usuário do programa computacional nos dados de entrada.

No presente trabalho foi adotado o seguinte critério de convergência dos deslocamentos:

$$\left| \frac{\{d_n\} - \{d_{n-1}\}}{\{d_n\}} \right| \leq TOL \quad (4.11)$$

sendo $\{d_n\}$ o vetor deslocamento na n -ésima iteração; $\{d_{n-1}\}$ o vetor deslocamento da $(n-1)$ -ésima iteração, e TOL a tolerância adotada.

Com a opção do cálculo de instabilidade, além de determinar a carga crítica da estrutura, W_{crit} , o valor de K é calculado separadamente para cada barra. Seu valor é obtido a partir da carga crítica de barra comprimida, expressa por

$$P_{crit(i)} = W_{crit} P_{(i)} \quad (4.12)$$

e através da fórmula de Euler (VIEIRA, 2010):

$$(KL)^2 = \frac{\pi^2 EI}{P_{crit}} \rightarrow K^2 = \frac{\pi^2 EI}{P_{crit} L^2} \rightarrow K_{(i)} = \sqrt{\frac{P_{Euler(i)}}{P_{crit(i)}}} \quad (4.13)$$

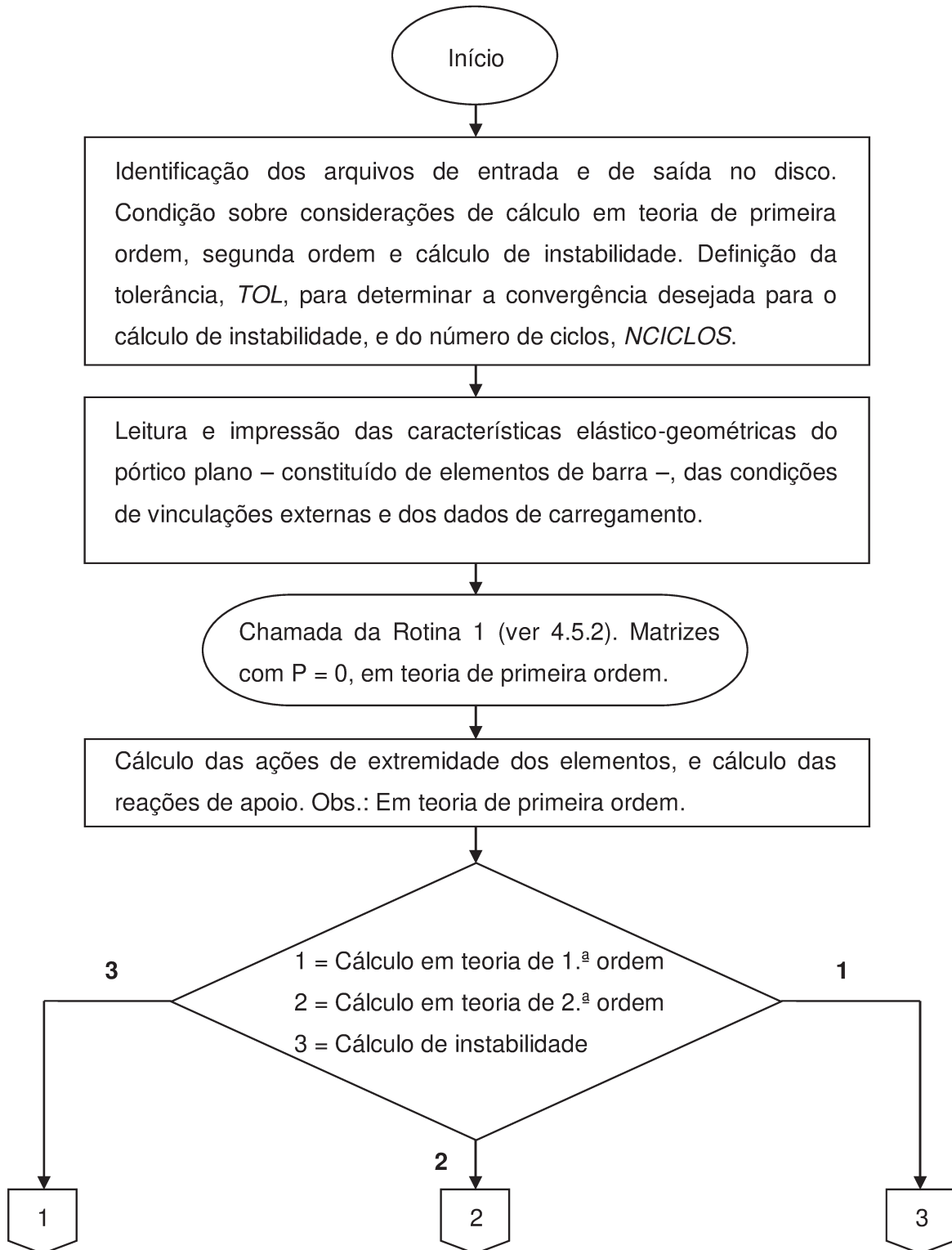
Assim, no programa computacional desenvolvido, K representa o comportamento global da barra e a carga crítica é definida automaticamente (VIEIRA, 2010).

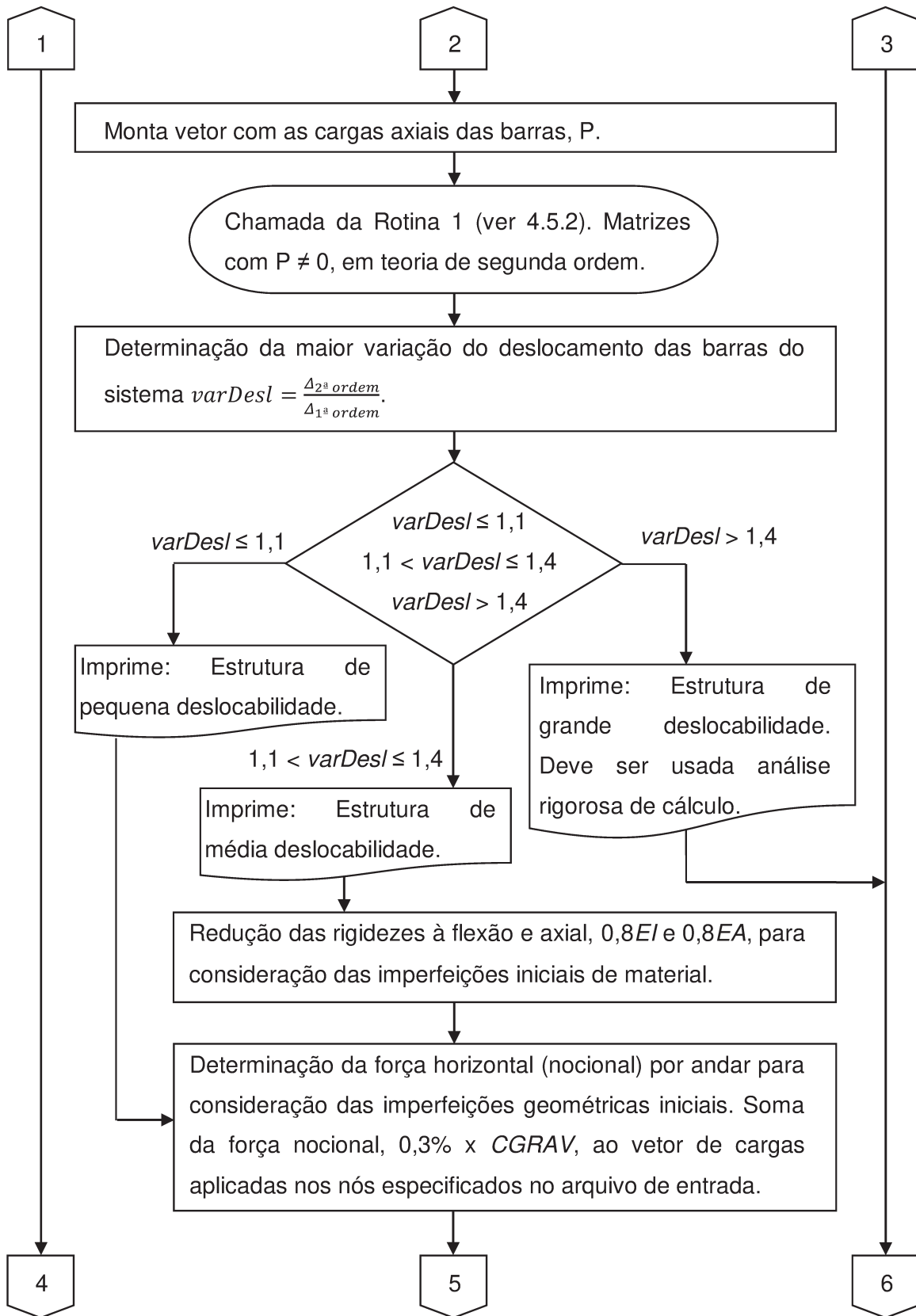
Também foi desenvolvida a verificação de perfis laminados de aço para análise de primeira ordem e também após a análise de segunda ordem, utilizando-se os critérios estabelecidos na norma brasileira ABNT NBR8800:2008.

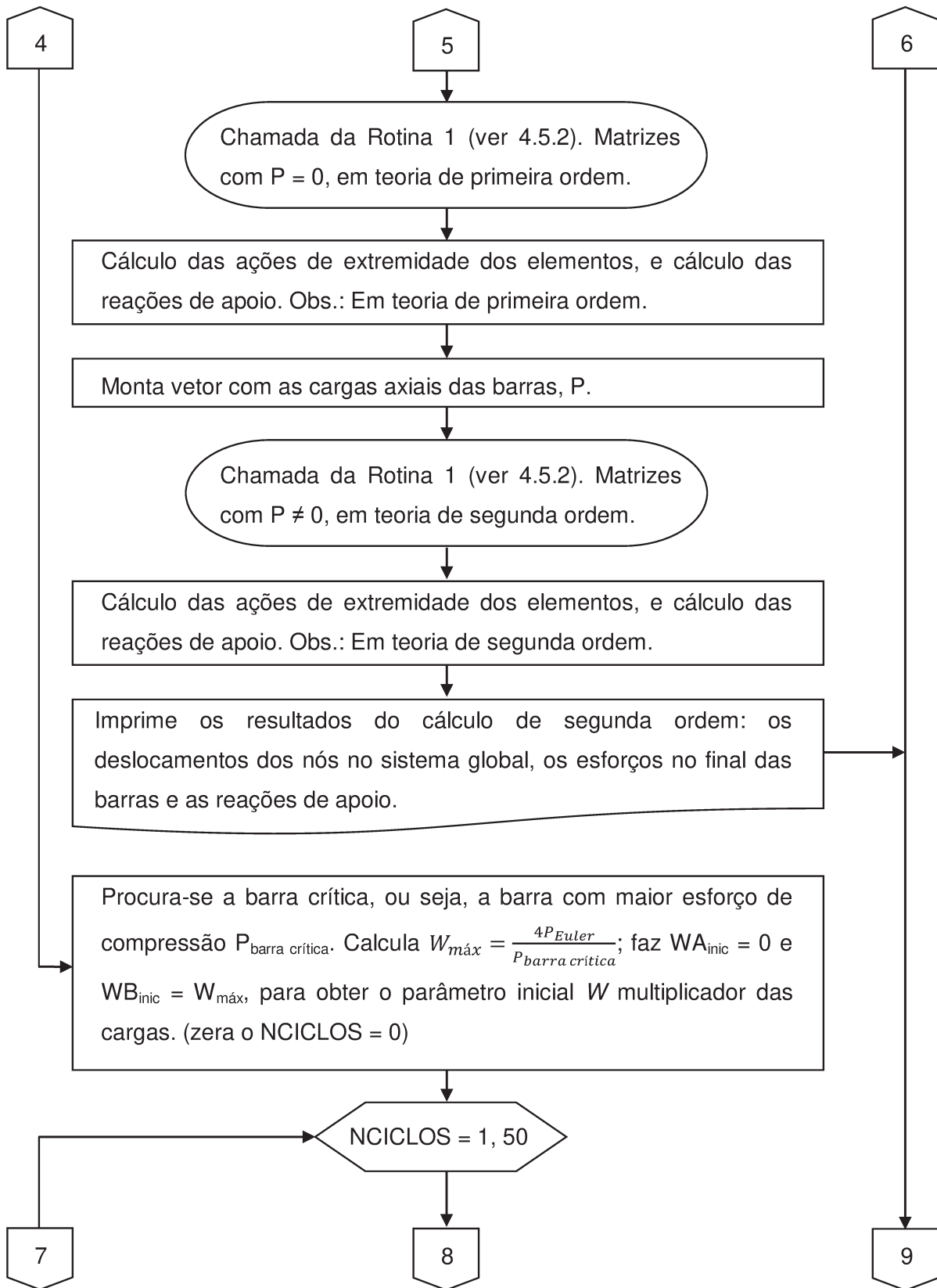
4.5. Fluxograma

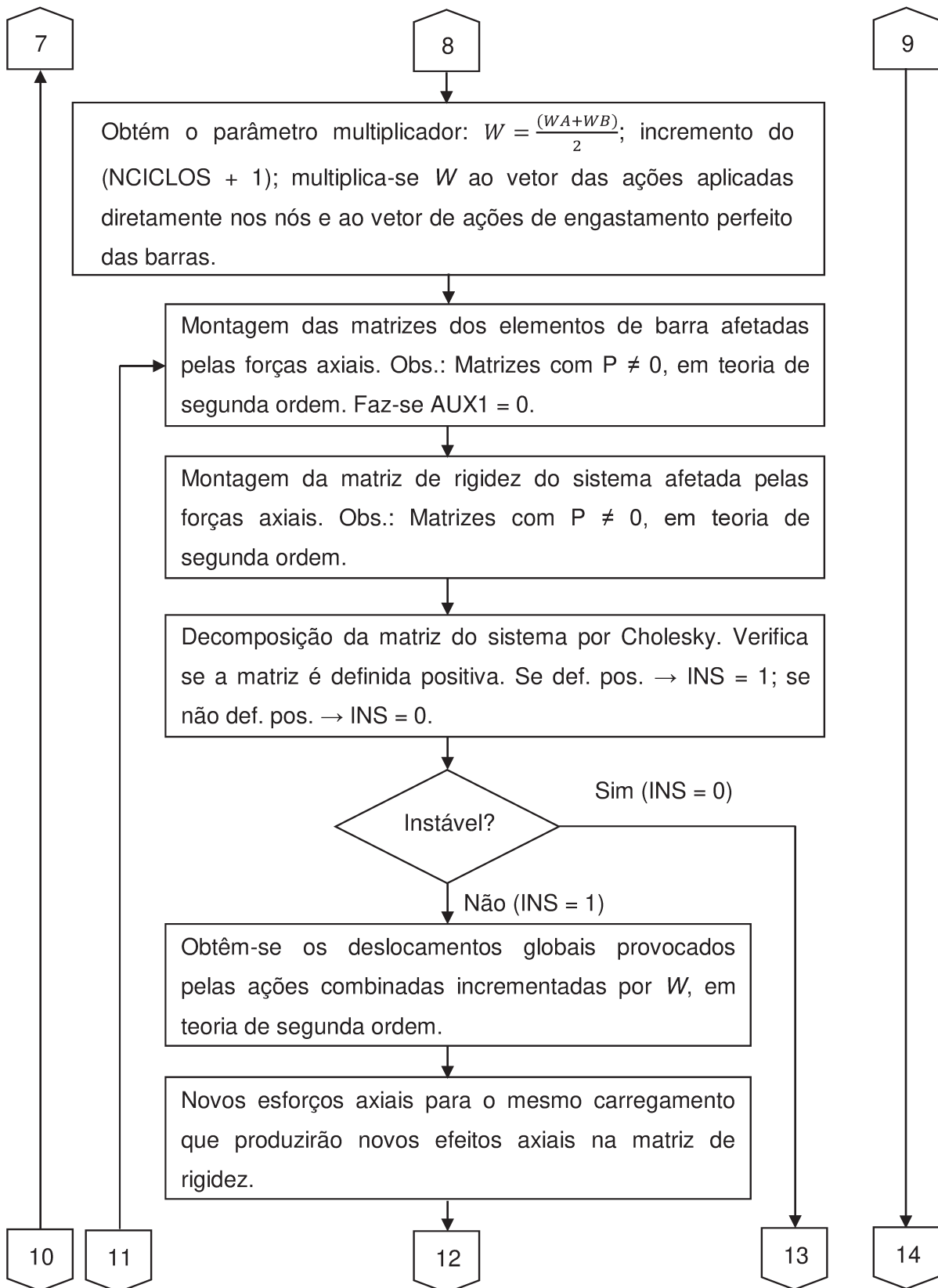
O fluxograma resumido, apresentado a seguir, visa esclarecer o programa de computador desenvolvido para a análise de segunda ordem e cálculo do parâmetro crítico de instabilidade W_{crit} de pórticos planos. A parte do fluxograma utilizada para o cálculo de W_{crit} foi desenvolvida por Vieira (1998). O manual do programa e exemplo de utilização são apresentados no Anexo B.

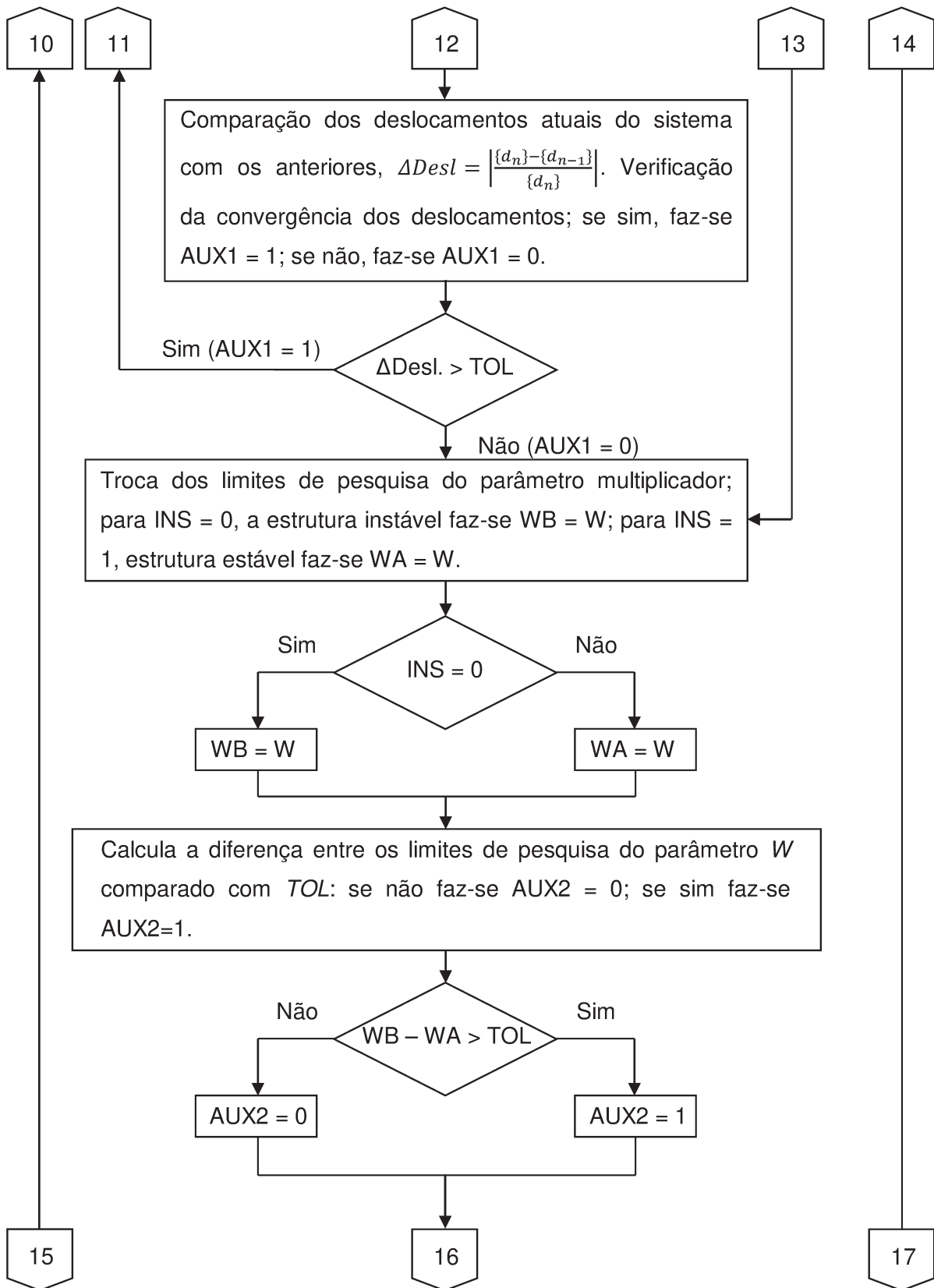
4.5.1. Fluxograma resumido do programa desenvolvido para a análise numérica de segunda ordem

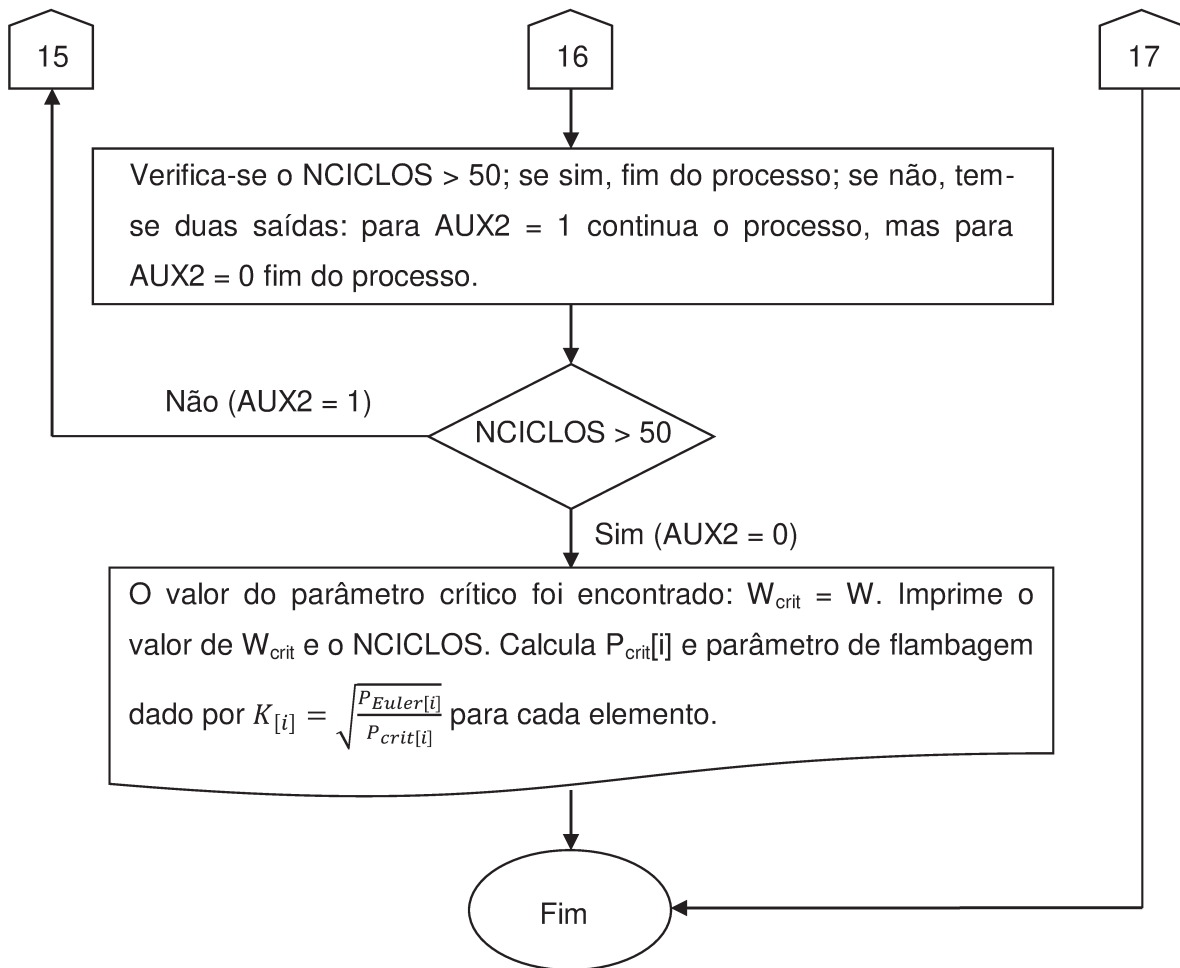




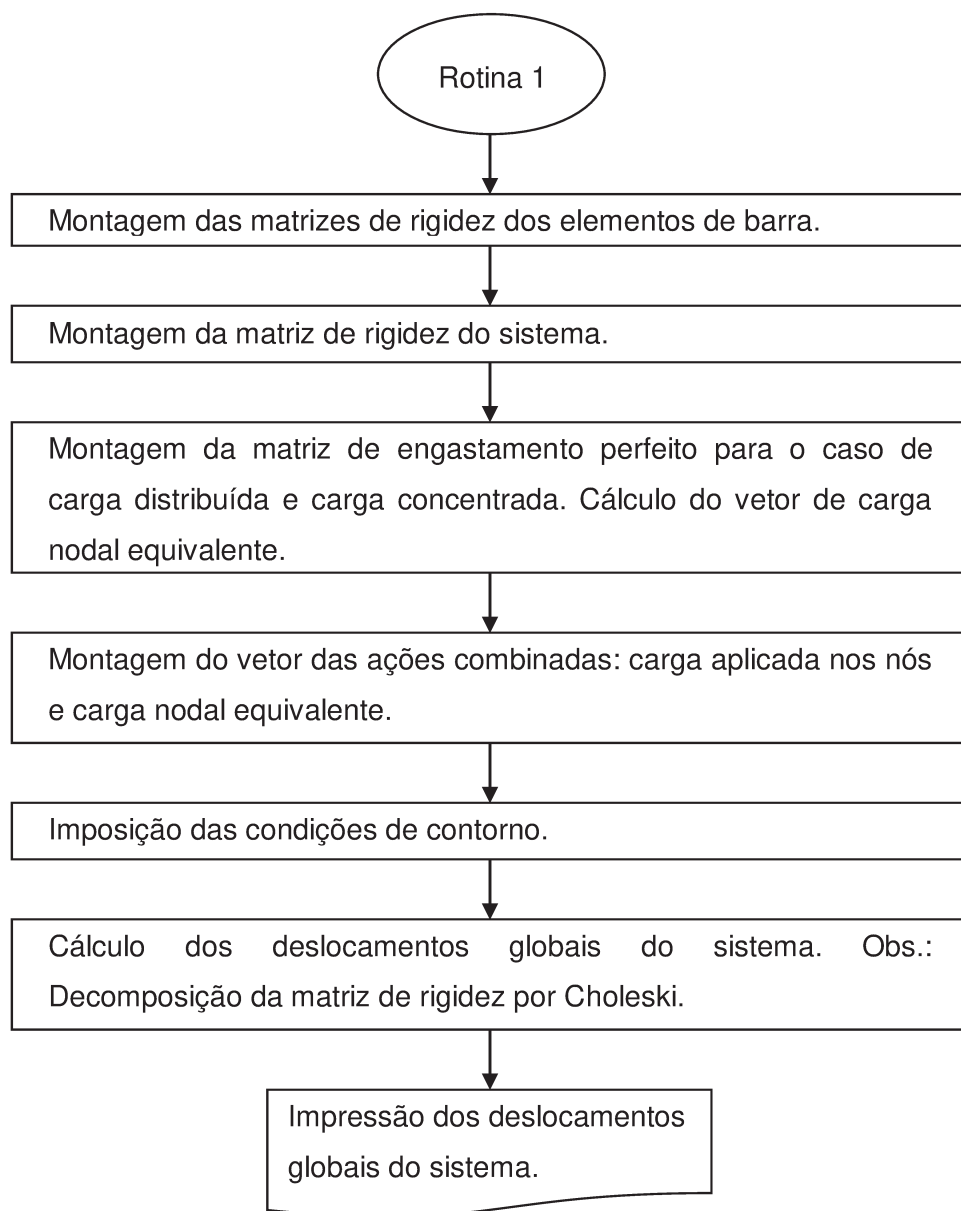








4.5.2. Rotina de programação 1



5. Exemplos numéricos do programa

Os exemplos numéricos, apresentados a seguir, servirão para validação dos resultados dos esforços obtidos numericamente pelo programa de computador desenvolvido, e também para compará-los com os obtidos pelo método de cálculo analítico simplificado, indicado pela norma brasileira ABNT NBR8800:2008.

O exemplo 1 é apresentado para avaliar a qualidade da análise de segunda ordem do programa computacional. No exemplo 2 é feito um comparativo dos resultados dos esforços da análise de segunda ordem obtidos pelo programa desenvolvido em relação ao obtido na referência bibliográfica. Já o exemplo 3 foi desenvolvido para demonstrar o processo de cálculo analítico simplificado apresentado pela referida norma, bem como comparar os resultados dos esforços com o programa e também os resultados de verificação dos perfis de aço. No exemplo 4 são comparados os resultados obtidos pelo programa na análise de primeira e segunda ordem.

Serão apresentados também os resultados da análise de instabilidade do programa computacional desenvolvido em cada exemplo.

5.1. Exemplo numérico 1

Este exemplo numérico servirá para avaliar a qualidade da análise de segunda ordem do programa computacional, baseando-se nas formulações exatas do comportamento de deslocamento lateral e de deslocamento por não linearidade da barra, apresentadas nos Comentários da AISC360:2005. Os resultados serão comparados com os obtidos por Nardi et al (2011). O modelo de referência utilizado é o da Figura 5.1.

Considerando um perfil W150x18, com suas propriedades e cargas atuantes como se segue: $E = 200000 \text{ MPa} = 20000 \text{ kN/cm}^2$; $G = 77000 \text{ MPa} = 7700 \text{ kN/cm}^2$; $I = 939 \text{ cm}^4$; $P = 250 \text{ kN}$; $H = 0,50 \text{ kN}$; $L = 2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$; tem-se a deslocabilidade inicial em primeira ordem do nó da barra, x_0 , expressa por

$$x_0 = \frac{HL^3}{3EI} \quad (5.1)$$

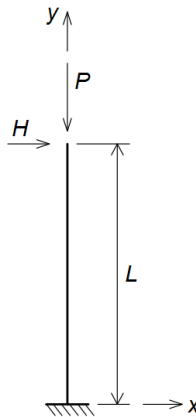


Figura 5.1 — Exemplo numérico 1

Assim, x_0 fica:

$$x_0 = \frac{0,50 \times 200^3}{3 \times 20000 \times 939} = 0,070997 \text{ cm}$$

O valor máximo do deslocamento em segunda ordem do nó da barra, $x_{m\acute{a}x}$, é expresso por

$$x_{m\acute{a}x} = \frac{HL^3}{3EI} \left[\frac{3(\text{tg}\alpha - \alpha)}{\alpha^3} \right] \quad (5.2)$$

Em que

$$\alpha = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}} \quad (5.3)$$

Assim, o valor de α fica:

$$\alpha = \sqrt{\frac{250 \times 200^2}{20000 \times 939}} = 0,7297$$

Portanto, $x_{m\acute{a}x}$ resulta em:

$$x_{m\acute{a}x} = \frac{0,5 \times 200^3}{3 \times 20000 \times 939} \left[\frac{3(\text{tg}0,7297 - 0,7297)}{0,7297^3} \right] \Rightarrow x_{m\acute{a}x} = 0,090275 \text{ cm}$$

Os valores obtidos pelo programa computacional desenvolvido, desconsiderando a redução das rigidezes e acréscimo da carga nocional automáticas, são:

$$x_0 = 0,07099752 \text{ cm}$$

$$x_{m\acute{a}x} = 0,09027545 \text{ cm}$$

Sendo assim, a precisão dos resultados, em comparação com o cálculo analítico, demonstra a qualidade e confiabilidade dos mesmos.

Os resultados da análise de instabilidade do programa computacional desenvolvido são apresentados na Tabela 5.1, sendo o valor de $W_{crit} = 4,634345$.

Tabela 5.1 – Resultados da análise de instabilidade da barra do exemplo numérico 1

Barra	L (cm)	P_{crit} (kN)	P_{Euler} (kN)	K
1	200	-1158,59	4633,78	1,9999

5.2. Exemplo numérico 2

O exemplo da Figura 5.2 foi retirado do trabalho de Silvestre e Camotim (2008), com o propósito de comparar os resultados deste com os obtidos através do programa computacional. Os autores fizeram vários cálculos do pórtico utilizando diferentes valores de cargas distribuídas. Para ser utilizado como comparação, foi escolhido aleatoriamente apenas um modelo, com o valor da carga distribuída de 10 kN/m.

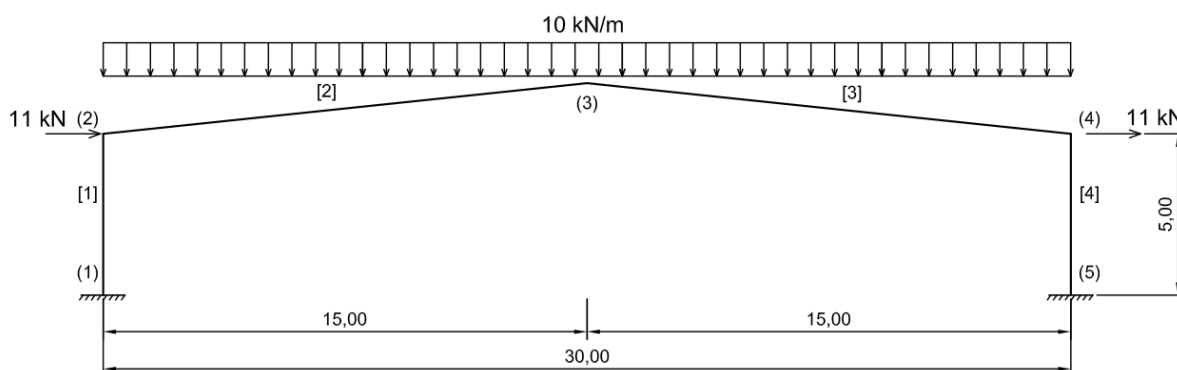


Figura 5.2 — Exemplo numérico 2

A Tabela 5.2 mostra as propriedades das barras do exemplo numérico 2, em que, para todas as barras: $E = 200000 \text{ MPa} = 20000 \text{ kN/cm}^2$; $G = 77000 \text{ MPa} = 7700 \text{ kN/cm}^2$.

Silvestre e Camotim (2008) apresentam somente o resultado do momento fletor no topo do pilar da direita, ou seja, no nó 4 da barra 4.

Tabela 5.2 – Propriedades das barras do exemplo numérico 2

Barra	Perfil	A (cm ²)	Iz(cm ⁴)
1	HEB280	131,40	19270,00
2	HEA240	149,10	11260,00
3	HEA240	149,10	11260,00
4	HEB280	131,40	19270,00

O resultado obtido por análise exata é de $M_{Sd} = 673,3$ kNm e o utilizado pelo método desenvolvido em seu trabalho é de $M_{Sd} = 668,7$ kNm. O resultado obtido pelo programa desenvolvido é de $M_{Sd} = 677,5$ kNm. Este resultado dá uma diferença algo em torno de 1% em relação aos resultados do trabalho dos referidos autores.

Os resultados da análise de instabilidade do programa computacional desenvolvido são apresentados na Tabela 5.3, sendo o valor de $W_{crit} = 15,837306$.

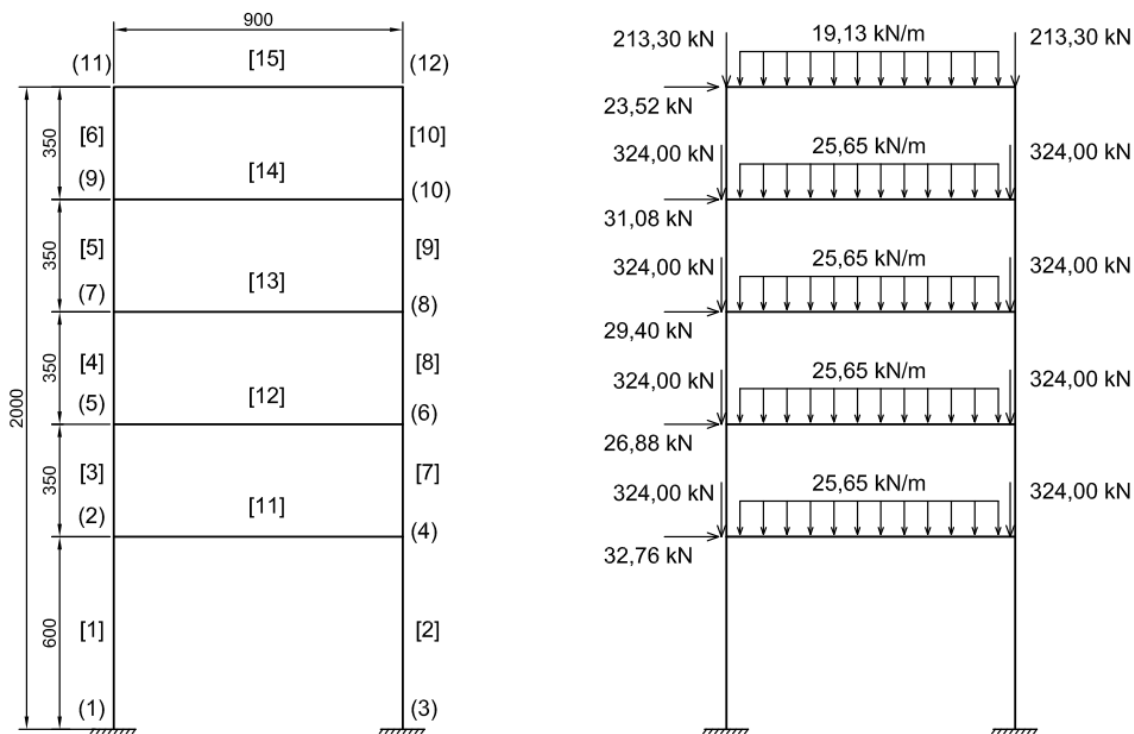
Tabela 5.3 – Resultados da análise de instabilidade das barras do exemplo numérico 2

Barra	L (cm)	P_{crit} (kN)	P_{Euler} (kN)	K
1	500,00	-2377,84	15214,98	2,5296
2	1508,19	-3906,07	977,13	0,5002
3	1508,19	-3908,29	977,13	0,5000
4	500,00	-2399,19	15214,98	2,5183

5.3. Exemplo numérico 3

Através deste exemplo numérico, será demonstrado o método de cálculo aproximado apresentado no anexo D da norma ABNT NBR8800:2008 para que, no final, sejam comparados os resultados com aqueles obtidos pelo programa computacional desenvolvido. Para isso foi elaborado como exemplo o pórtico da Figura 5.3.

As propriedades das barras do exemplo numérico 3 são apresentadas na Tabela 5.4, em que, para todas as barras: $E = 200000$ MPa = 20000 kN/cm²; $G = 77000$ MPa = 7700 kN/cm².



a)

Dimensões do pórtico plano com número de barras e nós b) Ações combinadas atuantes no pórtico

Figura 5.3 — Exemplo numérico 3

5.3.1. Determinação do coeficiente B_2 usando a estrutura original

Fazendo-se a análise da estrutura em primeira ordem para a determinação dos deslocamentos relativos entre os andares, é apresentada a Tabela 5.5 com os resultados.

A determinação do coeficiente B_2 , expresso pela Equação (3.4), usando a estrutura original, é apresentada na Tabela 5.6.

Conforme consta na Tabela 5.6, o valor de B_2 a ser adotado é de 1,213. Portanto, a estrutura é de média deslocabilidade. Assim, deve-se determinar novamente B_2 com as rigidezes à flexão e axial reduzidas, $0,8EI$ e $0,8EA$.

Assim, fazendo a análise da estrutura com as rigidezes reduzidas (Tabela 5.7), determina-se novo valor de B_2 (Tabela 5.8).

Tabela 5.4 – Propriedades das barras do exemplo numérico 3

Barra	Perfil	A (cm²)	Iz(cm⁴)
1	W460x158	201,00	79500,00
2	W460x158	201,00	79500,00
3	W460x128	144,00	63683,00
4	W460x128	144,00	63683,00
5	W460x128	144,00	63683,00
6	W460x128	144,00	63683,00
7	W460x128	144,00	63683,00
8	W460x128	144,00	63683,00
9	W460x128	144,00	63683,00
10	W460x128	144,00	63683,00
11	W460x68	87,60	29851,00
12	W460x68	87,60	29851,00
13	W460x52	66,60	21370,00
14	W460x52	66,60	21370,00
15	W360x44	66,60	12112,00

Tabela 5.5 – Deslocamentos para as ações combinadas

Nó	X (cm)	Y (cm)	RZ (rad)
1	0,000000	0,000000	0,000000
2	2,287342	-0,256913	0,005326
3	0,000000	0,000000	0,000000
4	2,297485	-0,294702	0,004011
5	4,077607	-0,401087	0,004839
6	4,068088	-0,457578	0,003888
7	5,677526	-0,504335	0,004413
8	5,668056	-0,571640	0,003415
9	6,991413	-0,565241	0,003522
10	6,985781	-0,638304	0,002564
11	8,034432	-0,583228	0,003334
12	7,981604	-0,658146	0,001747

Tabela 5.6 – Determinação de B_2 – 1.ª ordem original

Pavimento	h_i	Desl.x	Δ_{hi}	H_{Sdi}	N_{Sdi}	$\sum N_{Sdi}$	$\sum H_{Sdi}$	B_2
	cm	cm	cm	kN	kN	kN	kN	
1.º	600	2,287342	2,287342	32,76	878,85	4114,12	143,64	1,1474
2.º	350	4,077607	1,790265	26,88	878,85	3235,27	110,88	1,2130
3.º	350	5,677526	1,599919	29,40	878,85	2356,42	84,00	1,1777
4.º	350	6,991413	1,313887	31,08	878,85	1477,57	54,60	1,1357
Cobertura	350	8,034432	1,043019	23,52	598,72	598,72	23,52	1,0980

Tabela 5.7 – Deslocamentos para as ações combinadas com rigidezes reduzidas

Nó	X (cm)	Y (cm)	RZ (rad)
1	0,000000	0,000000	0,000000
2	2,859175	-0,360262	0,006658
3	0,000000	0,000000	0,000000
4	2,871859	-0,407499	0,005013
5	5,097007	-0,565721	0,006050
6	5,085112	-0,636334	0,004860
7	7,097183	-0,717122	0,005518
8	7,084794	-0,801253	0,004267
9	8,736788	-0,812697	0,004369
10	8,734704	-0,904025	0,003238
11	10,045611	-0,851723	0,004364
12	9,974434	-0,945370	0,001986

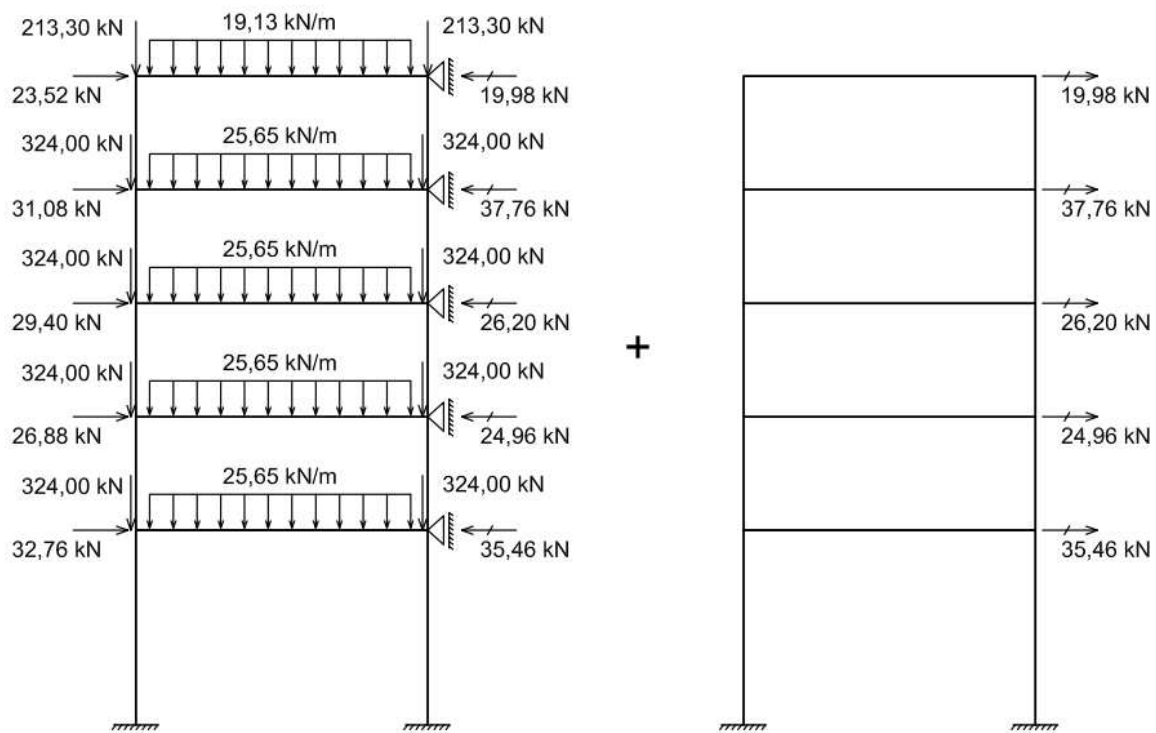
Tabela 5.8 – Determinação de B_2 – 1.ª ordem original com rigidezes reduzidas

Pavimento	h_i	Desl.x	Δ_{hi}	H_{Sdi}	N_{Sdi}	$\sum N_{Sdi}$	$\sum H_{Sdi}$	B_2
	cm	cm	cm	kN	kN	kN	kN	
1.º	600	2,85918	2,85918	32,76	878,85	4114,12	143,64	1,19129
2.º	350	5,09701	2,23783	26,88	878,85	3235,27	110,88	1,28120
3.º	350	7,09718	2,00017	29,40	878,85	2356,42	84,00	1,23244
4.º	350	8,73679	1,63961	31,08	878,85	1477,57	54,60	1,17529
Cobertura	350	10,04561	1,30882	23,52	598,72	598,72	23,52	1,12611

Conforme consta na Tabela 5.8, o valor de B_2 adotado é de 1,2812.

5.3.2. Determinação do coeficiente B_1

Conforme demonstrado no item 3.4.1.1, o modelo para análise do exemplo numérico 3 é dado pela Figura 5.4.



a) Reações do pórtico indeslocável (estrutura nt)

b) Reações solicitantes do pórtico deslocável (estrutura lt)

Figura 5.4 — Modelo para análise do exemplo numérico 3

A Tabela 5.9 mostra os valores dos esforços normais e momentos fletores no final das barras para a estrutura nt e estrutura lt do exemplo numérico, com as rigidezes reduzidas.

Como exemplo, será apresentado apenas o cálculo da barra 2, constituída pelos nós 3 e 4. Assim, para a determinação de B_1 tem-se:

$$C_m = 0,60 - 0,40 \frac{2978,17}{6410,28} = 0,41463$$

Tabela 5.9 – Esforços no final das barras com as rigidezes reduzidas

Barra	Nó	Estrutura <i>nt</i>		Estrutura <i>lt</i>	
		N_{nt} (kN)	M_{nt} (kN.m)	N_{lt} (kN)	M_{lt} (kN.m)
1	1	2056,48	-31,2640	-125,93	338,9397
	2	-2056,48	-66,9263	125,93	92,3917
2	3	2057,70	29,7817	125,93	340,8288
	4	-2057,70	64,1028	-125,93	93,9997
3	2	1617,11	-97,0475	-86,54	84,8162
	5	-1617,11	-83,8192	86,54	106,9932
4	5	1177,82	-82,4397	-49,97	57,6106
	7	-1177,82	-82,7969	49,97	88,9396
5	7	738,34	-85,8610	-26,35	17,2585
	9	-738,34	-84,7404	26,35	83,0075
6	9	299,08	-83,3568	-8,36	-2,0344
	11	-299,08	-122,7737	8,36	37,6708
7	4	1618,17	100,9273	86,54	83,2779
	6	-1618,17	86,9636	-86,54	106,0626
8	6	1178,60	80,5771	49,97	58,5012
	8	-1178,60	84,8736	-49,97	88,7387
9	8	739,24	83,2061	26,35	17,5719
	10	-739,24	76,4116	-26,35	84,2520
10	10	299,64	93,2533	8,36	-3,2869
	12	-299,64	125,2775	-8,36	37,5805
11	2	4,75	163,9738	-17,01	-177,2079
	4	-4,75	-164,9300	17,01	-177,2777
12	5	33,09	166,2589	-13,00	-164,6038
	6	-33,09	-167,5407	13,00	-164,5638
13	7	27,86	168,6579	-13,23	-106,1981
	8	-27,86	-168,0797	13,23	-106,3106
14	9	20,31	168,0972	-18,43	-80,9731
	10	-20,31	-169,6649	18,43	-80,9651
15	11	83,06	122,2737	-10,20	-37,6708
	12	-83,06	-125,2775	10,20	-37,5805

$$N_{Sd1} = N_{nt} + N_{lt} = 2057,70 + 125,93 = 2183,63 \text{ kN}$$

$$N_e = \frac{\pi^2 0,8EI}{L^2} = \frac{\pi^2 0,8 \times 20000 \times 79500}{600^2} = 34872,60 \text{ kN}$$

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - \frac{N_{Sd1}}{N_e}} = \frac{0,41463}{1 - \frac{2183,63}{34872,60}} = 0,4423 < 1,0$$

Portanto, adota-se $B_1 = 1,0$.

5.3.3. Determinação dos esforços solicitantes das barras

Finalmente, a determinação dos esforços solicitantes da barra 2, fica:

$$M_{Sd\text{nó}_4} = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} = 1,0 \times 6410,28 + 1,2812 \times 9399,97 = 18453,52 \text{ kN.cm}$$

$$M_{Sd\text{nó}_3} = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} = 1,0 \times 2978,17 + 1,2812 \times 34082,88 = 46645,16 \text{ kN.cm}$$

$$N_{Sd} = N_{nt} + B_2 N_{lt} = 2057,70 + 1,2812 \times 125,93 = 2219,04 \text{ kN}$$

A Tabela 5.10 mostra a comparação entre os resultados obtidos pelo cálculo analítico apresentado pela norma e os resultados obtidos pela análise numérica do programa computacional desenvolvido. Já a Tabela 5.11 mostra a comparação entre os resultados obtidos pela análise de primeira ordem com os obtidos pela análise de segunda ordem.

Pode-se observar pela Tabela 5.10 que os valores obtidos pelo programa desenvolvido são muito próximos dos obtidos pelo cálculo analítico. Por se tratar de um método aproximado, a comparação dos valores não será exata. Porém, observa-se que as diferenças maiores em termos de porcentagem são relativas aos menores esforços relativos. Sendo assim, essas diferenças não influenciarão de forma significativa no dimensionamento dos perfis.

Já através da Tabela 5.11, pode-se verificar como a variação dos esforços obtidos na análise de segunda ordem podem alterar de forma significativa os esforços e estabilidade da estrutura, em relação à análise de primeira ordem.

Tabela 5.10 – Comparação entre os resultados do anexo D da ABNT NBR8800:2008 e programa desenvolvido

Barra	Nó	N_{Sd} (kN)			M_{Sd} (kN.m)		
		Cálculo analítico	Programa desenvolvido	%	Cálculo analítico	Programa desenvolvido	%
1	1	1895,14	1894,53	0%	402,9855	387,1292	-4%
	2	-1895,14	-1894,53	0%	51,4459	58,8979	14%
2	3	2219,04	2219,64	0%	466,4516	450,7785	-3%
	4	-2219,04	-2219,64	0%	184,5352	183,1850	-1%
3	2	1506,23	1506,91	0%	11,6190	8,8545	-24%
	5	-1506,23	-1506,91	0%	53,2605	56,0846	5%
4	5	1113,80	1115,13	0%	-8,6290	-10,1316	17%
	7	-1113,80	-1115,13	0%	31,1525	32,7942	5%
5	7	704,58	705,64	0%	-63,7494	-67,4040	6%
	9	-704,58	-705,64	0%	21,6088	20,8239	-4%
6	9	288,37	288,86	0%	-85,9633	-88,9527	3%
	11	-288,37	-288,86	0%	-74,5099	-77,6341	4%
7	4	1729,05	1728,41	0%	207,6229	215,3828	4%
	6	-1729,05	-1728,41	0%	222,8510	230,5607	3%
8	6	1242,62	1241,34	0%	155,5288	152,2105	-2%
	8	-1242,62	-1241,34	0%	198,5656	201,4439	1%
9	8	773,00	771,98	0%	105,7192	102,6153	-3%
	10	-773,00	-771,98	0%	184,3553	179,8683	-2%
10	10	310,35	309,91	0%	89,0421	92,0866	3%
	12	-310,35	-309,91	0%	173,4256	172,2277	-1%
11	2	-17,04	-21,22	25%	-63,0650	-67,7524	7%
	4	17,04	21,22	25%	-392,0582	-398,5678	2%
12	5	16,43	21,61	31%	-44,6315	-45,9530	3%
	6	-16,43	-21,61	31%	-378,3798	-382,7712	1%
13	7	10,91	16,09	47%	32,5969	34,6098	6%
	8	-10,91	-16,09	47%	-304,2848	-304,0592	0%
14	9	-3,30	2,15	-35%	64,3545	68,1289	6%
	10	3,30	-2,15	-35%	-273,3974	-271,9549	-1%
15	11	69,99	74,2	6%	76,6928	77,6341	1%
	12	-69,99	-74,2	6%	-176,1745	-172,2277	-2%

Tabela 5.11 – Comparação entre os resultados obtidos nas análises de primeira e segunda ordem

Barra	Nó	N_{Sd} (kN)		M_{Sd} (kN,m)	
		Primeira ordem	Segunda ordem	Primeira ordem	Segunda ordem
1	1	1929,91	1894,53	304,3478	387,1292
	2	-1929,91	-1894,53	32,037	58,8979
2	3	2184,26	2219,64	368,3777	450,7785
	4	-2184,26	-2219,64	157,0774	183,1850
3	2	1530,46	1506,91	-17,6289	8,8545
	5	-1530,46	-1506,91	21,5658	56,0846
4	5	1127,97	1115,13	-23,7474	-10,1316
	7	-1127,97	-1115,13	5,1883	32,7942
5	7	712,12	705,64	-68,4431	-67,4040
	9	-712,12	-705,64	-1,2157	20,8239
6	9	290,81	288,86	-87,2832	-88,9527
	11	-290,81	-288,86	-86,1022	-77,6341
7	4	1704,86	1728,41	188,3334	215,3828
	6	-1704,86	-1728,41	195,8098	230,5607
8	6	1228,5	1241,34	138,7932	152,2105
	8	-1228,5	-1241,34	173,7659	201,4439
9	8	765,5	771,98	101,6723	102,6153
	10	-765,5	-771,98	159,0866	179,8683
10	10	307,96	309,91	92,3881	92,0866
	12	-307,96	-309,91	163,3173	172,2277
11	2	-22,18	-21,22	-14,4081	-67,7524
	4	22,18	21,22	-345,411	-398,5678
12	5	20,45	21,61	2,1816	-45,9530
	6	-20,45	-21,61	-334,603	-382,7712
13	7	14,8	16,09	63,2549	34,6098
	8	-14,8	-16,09	-275,438	-304,0592
14	9	1,44	2,15	88,4989	68,1289
	10	-1,44	-2,15	-251,475	-271,9549
15	11	73,06	74,2	86,1022	77,6341
	12	-73,06	-74,2	-163,317	-172,2277

5.3.1. Análise de instabilidade

Os resultados da análise de instabilidade do programa computacional desenvolvido são apresentados na Tabela 5.12, sendo o valor de $W_{crit} = 10,463765$.

Tabela 5.12 – Resultados da análise de instabilidade das barras do exemplo numérico 3

Barra	L (cm)	P_{crit} (kN)	P_{Euler} (kN)	K
1	600,00	-20194,10	43590,75	1,4692
2	600,00	-22855,61	43590,75	1,3810
3	350,00	-16014,42	102616,49	2,5314
4	350,00	-11802,94	102616,49	2,9486
5	350,00	-7451,74	102616,49	3,7109
6	350,00	-3043,53	102616,49	5,8066
7	350,00	-17839,21	102616,49	2,3984
8	350,00	-12854,61	102616,49	2,8254
9	350,00	-8009,73	102616,49	3,5793
10	350,00	-3221,86	102616,49	5,6436
11	900,00	232,05	7274,51	0,0000
12	900,00	-213,68	7274,51	5,8347
13	900,00	-157,15	5207,74	5,7567
14	900,00	-10,96	5207,74	21,7998
15	900,00	-766,64	2951,62	1,9622

5.3.2. Verificação do perfil da barra 2

Será demonstrada a seguir, a verificação do perfil da barra 2 ao estado limite último. Sendo que, os resultados da verificação do mesmo, obtidos pelo programa computacional desenvolvido, são apresentados no Anexo B.

Algumas propriedades do perfil da barra 2 e seus esforços são apresentados como se segue:

- a) tipo de perfil laminado: W460x158;

- b) aço ASTM A572 GR50, $f_y = 345 \text{ MPa}$, $f_u = 450 \text{ MPa}$;
- c) comprimento de flambagem: $L_b = L_x = L_y = L_z = 6,00 \text{ m} = 600 \text{ cm}$;
- d) constante de empenamento: $C_w = 4670412 \text{ cm}^6$;
- e) constante de torção da seção transversal: $J = 312 \text{ cm}^4$;
- f) esforço axial solicitante de cálculo: $N_{Sd} = -2219,04 \text{ kN}$ (compressão);
- g) esforço cortante solicitante de cálculo: $V_{Sd} = 92,82 \text{ kN}$;
- h) momento fletor solicitante de cálculo: $M_{Sd} = 466,4516 \text{ kNm} = 46645,16 \text{ kNcm}$.

5.3.2.1. Verificação ao esforço axial

Para verificação da resistência ao esforço axial de compressão, deve-se determinar a força axial resistente de cálculo, expressa pela seguinte equação:

$$N_{c,Rd} = \frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{a1}} \quad (5.4)$$

em que

χ é o fator de redução associado à resistência à compressão;

Q é o fator de redução total associado à flambagem local;

A_g é a área bruta da seção transversal da barra;

γ_{a1} é o coeficiente de ponderação da resistência do aço estrutural para estados-limites últimos relacionados a escoamento, flambagem e instabilidade, igual a 1,10.

Determinação de Q:

$$\frac{b}{t} = \frac{b_f}{t_f} = \frac{28,4/2}{2,39} = 5,94 < 0,56 \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 13,48$$

$$\frac{b}{t} = \frac{d'}{t_w} = \frac{42,72}{1,50} = 28,48 < 1,49 \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 35,87$$

Portanto, $Q = 1,0$.

Determinação de χ :

A força axial de flambagem elástica, N_e , é o menor valor entre:

$$N_{ex} = \frac{\pi^2 EI_x}{(K_x L_x)^2} \quad (5.5)$$

$$N_{ex} = \frac{\pi^2 \times 20000 \times 79500}{600^2} = 43590,75 \text{ kN}$$

$$N_{ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{(K_y L_y)^2} \quad (5.6)$$

$$N_{ey} = \frac{\pi^2 \times 20000 \times 9140}{600^2} = 5011,57 \text{ kN}$$

$$N_{ez} = \frac{1}{r_0^2} \left[\frac{\pi^2 EC_w}{(K_z L_z)^2} + GJ \right] \quad (5.7)$$

$$r_0 = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + x_0^2 + y_0^2} \quad (5.8)$$

$$r_0 = \sqrt{19,90^2 + 6,74^2} = 21,01 \text{ cm}$$

$$N_{ez} = \frac{1}{21,01^2} \left[\frac{\pi^2 \times 20000 \times 4670412}{600^2} + 7700 \times 312 \right] = 11243,80 \text{ kN}$$

Assim, $N_e = 5011,57 \text{ kN}$.

em que:

$K_x L_x$ é o comprimento de flambagem por flexão em relação ao eixo x ;

I_x é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo x ;

$K_y L_y$ é o comprimento de flambagem por flexão em relação ao eixo y ;

I_y é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo y ;

$K_z L_z$ é o comprimento de flambagem por torção;

r_0 é o raio de giração polar da seção bruta em relação ao centro de cisalhamento;

r_x e r_y são os raios de giração em relação aos eixos centrais x e y ;

x_0 e y_0 são as coordenadas do centro de cisalhamento na direção dos eixos centrais x e y , em relação ao centro geométrico da seção.

O índice de esbeltez reduzido, λ_0 , é dado por:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{QA_g f_y}{N_e}} \quad (5.9)$$

Assim:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{1,0 \times 201 \times 34,5}{5011,57}} = 1,176$$

O fator de redução associado à resistência à compressão, χ , é dado por:

$$\chi = 0,658^{\lambda_0^2} \quad (5.10)$$

$$\chi = 0,658^{1,176^2} = 0,5605$$

Finalmente, obtém-se o valor da força axial resistente de cálculo:

$$N_{c,Rd} = \frac{0,5605 \times 1,0 \times 201 \times 34,5}{1,1} = 3533,44 \text{ kN} > N_{Sd} = 2219,04 \text{ kN}$$

Portanto, a resistência do perfil atende à força solicitante de cálculo.

A relação entre a força axial solicitante e a resistente de cálculo é dada por:

$$\frac{N_{Sd}}{N_{c,Rd}} = \frac{2219,04}{3533,44} = 0,63 \geq 0,2$$

5.3.2.2. Verificação ao momento fletor

a) Flambagem local da alma – FLA:

O parâmetro de esbeltez, λ , é dado por:

$$\lambda = \frac{h}{t_w} = \frac{d'}{t_w} = \frac{38,40}{1,50} = 25,60$$

em que

h é a altura da alma;

d' é a altura da alma descontando-se os dois raios de concordância entre a mesa e a alma de perfis laminados;

t_w é a espessura da alma.

Sendo que o parâmetro de esbeltez correspondente à plastificação, λ_p , é dado por:

$$\lambda_p = 3,76 \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 3,76 \sqrt{\frac{20000}{34,5}} = 90,53$$

Como $\lambda < \lambda_p$, o momento fletor resistente de cálculo, M_{Rd} , é dado por:

$$M_{Rd} = \frac{M_{pl}}{\gamma_{a1}} = \frac{Z f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{3780 \times 34,5}{1,1} = 118554,55 \text{ kNcm}$$

em que

M_{pl} é o momento fletor de plastificação da seção transversal;

Z é o módulo de resistência plástico da seção transversal.

b) Flambagem local da mesa – FLM:

$$\lambda = \frac{b}{t} = \frac{b_f/2}{t_f} = \frac{28,40/2}{2,39} = 5,94$$

em que

b_f é largura da mesa;

t_f é a espessura da mesa.

$$\lambda_p = 0,38 \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 0,38 \sqrt{\frac{20000}{34,5}} = 9,15$$

Como $\lambda < \lambda_p$:

$$M_{Rd} = \frac{M_{pl}}{\gamma_{a1}} = \frac{Z f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{3780 \times 34,5}{1,1} = 118554,55 \text{ kNcm}$$

c) Flambagem lateral com torção – FLT:

$$\lambda = \frac{L_b}{r_y} = \frac{600}{6,74} = 89,02$$

em que:

L_b é a distância entre duas seções contidas à flambagem lateral com torção (comprimento destravado);

r_y é o raio de giração da seção em relação ao eixo principal de inércia perpendicular ao eixo de flexão.

$$\lambda_p = 1,76 \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 1,76 \sqrt{\frac{20000}{34,5}} = 42,38$$

$$\beta_1 = \frac{(f_y - \sigma_r)W}{EJ} = \frac{0,7f_y W}{EJ} = \frac{0,7 \times 34,5 \times 3350}{20000 \times 312} = 0,012965$$

sendo W o módulo de resistência elástico da seção, relativo ao eixo de flexão.

O parâmetro de esbeltez correspondente ao início do escoamento, λ_r , é dado por:

$$\lambda_r = \frac{1,38\sqrt{I_y J}}{r_y J \beta_1} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{27C_w \beta_1^2}{I_y}}}$$

$$\lambda_r = \frac{1,38\sqrt{9140 \times 312}}{6,74 \times 312 \times 0,012965} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{27 \times 4670412 \times 0,012965^2}{9140}}} = 143,58$$

Como $\lambda_p < \lambda < \lambda_r$:

$$M_{Rd} = \frac{C_b}{\gamma_{a1}} \left[M_{pl} - (M_{pl} - M_r) \frac{\lambda - \lambda_p}{\lambda_r - \lambda_p} \right] \leq \frac{M_{pl}}{\gamma_{a1}} \quad (5.11)$$

em que:

C_b é o fator de modificação para diagrama de momento fletor não uniforme;

M_r é o momento fletor correspondente ao início do escoamento.

$$M_r = (f_y - \sigma_r)W = 0,7f_yW = 0,7 \times 34,5 \times 3350 = 80902,50 \text{ kNcm}$$

$$M_{pl} = Zf_y = 3780 \times 34,5 = 130410,00 \text{ kNcm}$$

$$C_b = \frac{12,5M_{m\acute{a}x}}{2,5M_{m\acute{a}x} + 3M_A + 4M_B + 3M_C} R_m \leq 3,0 \quad (5.12)$$

em que:

$M_{m\acute{a}x}$ é o valor do momento fletor máximo solicitante de cálculo, em módulo, no comprimento destravado;

M_A é o valor do momento fletor solicitante de cálculo, em módulo, na seção situada a um quarto do comprimento destravado, medido a partir da extremidade esquerda;

M_B é o valor do momento fletor solicitante de cálculo, em módulo, na seção central do comprimento destravado;

M_C é o valor do momento fletor máximo solicitante de cálculo, em módulo, na seção situada a três quartos do comprimento destravado, medido a partir da extremidade esquerda;

R_m é um parâmetro de monossimetria, igual a 1,0, para o caso de seção duplamente simétrica.

Os valores dos momentos fletores solicitantes de cálculo necessários para o cálculo de C_b , são dados pela Figura 5.5.

$$M_{Sd} = B_1M_{nt} + B_2M_{lt}$$

$$M_{Sd_1} = M_{m\acute{a}x} = 1,0 \times 2978,17 + 1,2812 \times 34082,88 = 46645,16 \text{ kNcm}$$

$$M_{Sd_2} = M_A = 1,0 \times 631,06 + 1,2812 \times 23212,17 = 30370,49 \text{ kNcm}$$

$$M_{Sd_3} = M_B = 1,0 \times (-1716,05) + 1,2812 \times 12341,46 = 14095,83 \text{ kNcm}$$

$$M_{Sd_4} = M_C = 1,0 \times (-4063,16) + 1,2812 \times 1470,74 = -2178,85 \text{ kNcm}$$

$$M_{Sd5} = 1,0 \times (-6410,28) + 1,2812 \times (-9399,97) = -18453,52 \text{ kNcm}$$

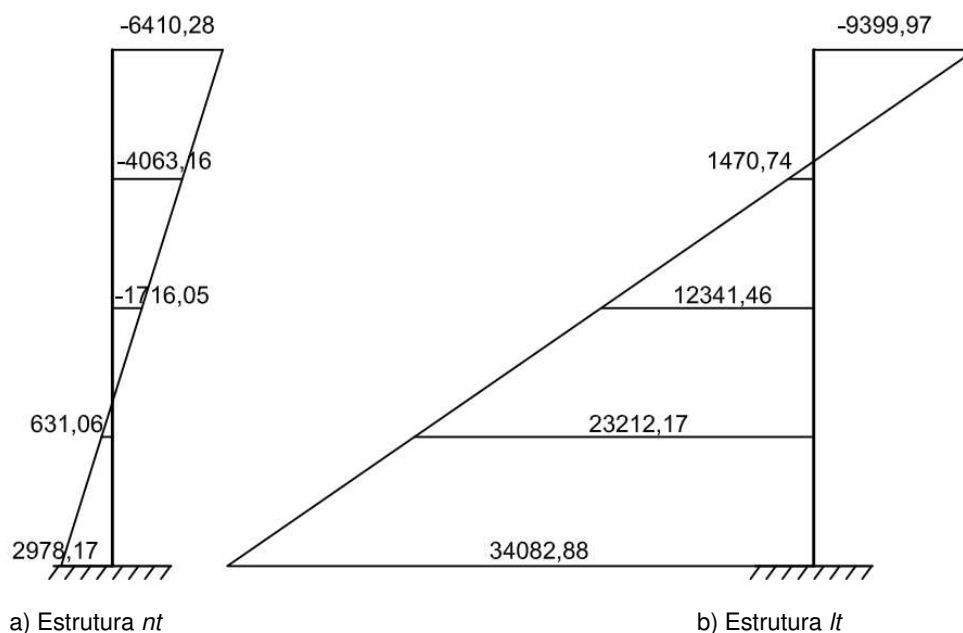


Figura 5.5 — Diagrama de momentos fletores solicitantes de cálculo em kN.cm

$$C_b = \frac{12,5 \times 46645,16}{2,5 \times 46645,16 + 3 \times 30370,49 + 4 \times 14095,83 + 3 \times 2178,85} \times 1,0 = 2,154 \leq 3,0$$

$$M_{Rd} = \frac{2,154}{1,10} \left[130410,00 - (130410,00 - 80902,50) \frac{89,02 - 42,38}{143,58 - 42,38} \right] = 211089,98 \text{ kNcm}$$

Como:

$$M_{Rd} > \frac{M_{pl}}{\gamma_{a1}} \Rightarrow M_{Rd} = \frac{M_{pl}}{\gamma_{a1}} = \frac{Z f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{3780 \times 34,5}{1,1} = 118554,55 \text{ kNcm}$$

Adota-se o menor valor resistente entre os estados limites de FLA, FLM e FLT. Como todos os resultados foram iguais, adota-se o valor de $M_{Rd} = 118554,55 \text{ kNcm}$.

5.3.2.3. Verificação da limitação pela expressão de interação

Como a relação $N_{Sd}/N_{Rd} \geq 0,2$, deve ser obedecida a limitação fornecida pela expressão de interação (5.13), para consideração da atuação simultânea da força axial e de momentos fletores na barra:

$$\frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} + \frac{8}{9} \left(\frac{M_{x,Sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,Sd}}{M_{y,Rd}} \right) \leq 1,0 \quad (5.13)$$

Neste caso, como a atuação das forças são no plano, consideram-se apenas os momentos fletores em x , Assim a expressão fica:

$$\frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} + \frac{8}{9} \left(\frac{M_{x,Sd}}{M_{x,Rd}} \right) = 0,63 + \frac{8}{9} \left(\frac{46645,16}{118554,55} \right) = 0,98 \leq 1,0$$

Sendo assim, o perfil atende a limitação dada pela expressão de interação.

5.3.2.4. Verificação ao esforço cortante

$$\lambda = \frac{h}{t_w} = \frac{38,40}{1,50} = 25,60$$

$$\lambda_p = 1,10 \sqrt{\frac{k_v E}{f_y}} = 1,10 \sqrt{\frac{5,0 \times 20000}{34,5}} = 59,22$$

Como $\lambda < \lambda_p$, a força cortante resistente de cálculo, V_{Rd} , é dada por:

$$V_{Rd} = \frac{V_{pl}}{\gamma_{a1}} = \frac{0,60 A_w f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{0,60 dt_w f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{0,60 \times 47,6 \times 1,5 \times 34,5}{1,10} = 1343,62 \text{ kN} \quad (5.14)$$

em que

k_v é um coeficiente igual a 5,0 para almas sem enrijecedores transversais.

V_{pl} é a força cortante correspondente à plastificação da alma por cisalhamento;

A_w é a área efetiva de cisalhamento, tomada como dt_w ;

d é a altura total da seção transversal.

Como $V_{Rd} = 1343,62\text{kN} > V_{Sd} = 92,82\text{ kN}$, a resistência do perfil atende à força cortante solicitante de cálculo.

5.4. Exemplo numérico 4

O exemplo da Figura 5.6 foi retirado do trabalho de Barsan e Chiorean (1999), com o propósito de usar um modelo mais complexo para comparação dos resultados dos esforços obtidos na análise de primeira e segunda ordem, e realizar, também, a análise de instabilidade.

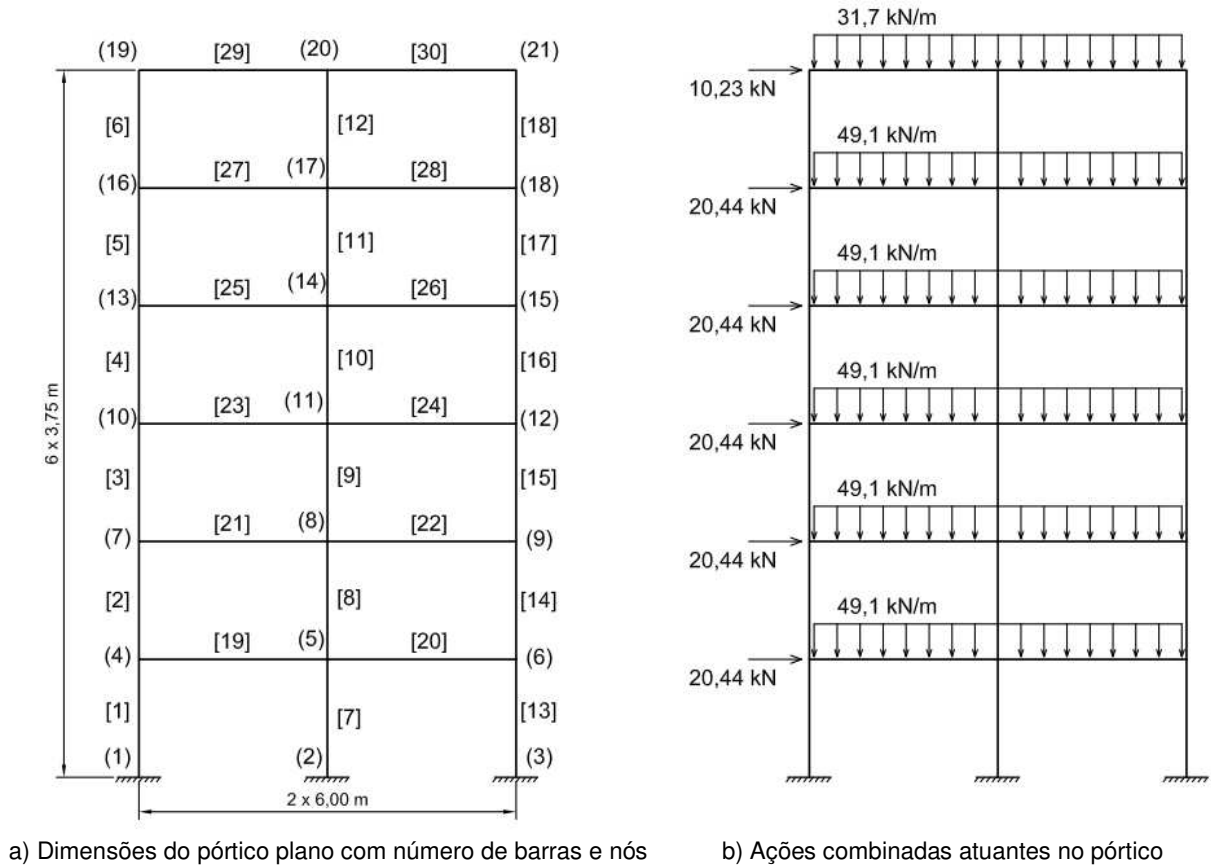


Figura 5.6 — Exemplo numérico 4

A Tabela 5.13 mostra as propriedades das barras do exemplo numérico 4, utilizando, para todas as barras: $E = 200000\text{ MPa} = 20000\text{ kN/cm}^2$; $G = 77000\text{ MPa} = 7700\text{ kN/cm}^2$. E os resultados são apresentados na Tabela 5.14.

Tabela 5.13 – Propriedades das barras do exemplo numérico 4

Barra	Perfil	A (cm²)	Iz(cm⁴)
1	HEB220	91,00	8090,00
2	HEB220	91,00	8090,00
3	HEB220	91,00	8090,00
4	HEB220	91,00	8090,00
5	HEB160	54,3	2490,00
6	HEB160	54,3	2490,00
7	HEB260	118,00	14920,00
8	HEB260	118,00	14920,00
9	HEB240	106,00	11260,00
10	HEB240	106,00	11260,00
11	HEB200	78,1	5700,00
12	HEB200	78,1	5700,00
13	HEB220	91,00	8090,00
14	HEB220	91,00	8090,00
15	HEB220	91,00	8090,00
16	HEB220	91,00	8090,00
17	HEB160	54,3	2490,00
18	HEB160	54,3	2490,00
19	IPE400	84,5	23130,00
20	IPE400	84,5	23130,00
21	IPE360	62,6	11770,00
22	IPE360	62,6	11770,00
23	IPE330	62,6	11770,00
24	IPE330	62,6	11770,00
25	IPE300	53,8	8356,00
26	IPE300	53,8	8356,00
27	IPE300	53,8	8356,00
28	IPE300	53,8	8356,00
29	IPE240	39,1	3892,00
30	IPE240	39,1	3892,00

Tabela 5.14 – Comparação entre os resultados obtidos nas análises de primeira e segunda ordem

Barra	Nó	N_{Sd} (kN)		M_{Sd} (kN,m)	
		Primeira ordem	Segunda ordem	Primeira ordem	Segunda ordem
1	1	735,77	707,74	4491,23	5938,36
	4	-735,77	-707,74	907,51	2109,27
2	4	631,99	612,64	-884,38	562,72
	7	-631,99	-612,64	-2091,87	-916,54
3	7	514,63	502,69	-2615,07	-1528,15
	10	-514,63	-502,69	-2062,86	-861,42
4	10	390,99	384,87	-4541,09	-3928,82
	13	-390,99	-384,87	-5634,19	-4889,89
5	13	262,9	260,5	-2208,52	-1831,97
	16	-262,9	-260,5	-2198,07	-1719,02
6	16	133,46	132,91	-5982,83	-5928,91
	19	-133,46	-132,91	-8310,42	-8179,96
7	2	1822,17	1823,3	11795,34	14489,33
	5	-1822,17	-1823,3	8689,87	10879,38
8	5	1501,7	1502,47	9490,57	12351,87
	8	-1501,7	-1502,47	7979,37	10424,74
9	8	1194,27	1194,87	5926,26	7801,24
	11	-1194,27	-1194,87	6660,94	8727,21
10	11	891,31	891,87	4655,97	5947,17
	14	-891,31	-891,87	4824,72	6145,44
11	14	583,43	583,79	2556,37	3369,54
	17	-583,43	-583,79	2727,76	3667,67
12	17	266,2	266,45	1937,16	2126,37
	20	-266,2	-266,45	4644,52	4904,14
13	3	872,87	899,77	8127,08	9632,16
	6	-872,87	-899,77	8150,22	9216,02
14	6	707,91	726,49	10351,71	11785,2
	9	-707,91	-726,49	9650,85	10791,27
15	9	543,5	554,84	9382,16	10440,16
	12	-543,5	-554,84	9539,82	10701,93
16	12	380,91	386,46	9115,93	9752,82
	15	-380,91	-386,46	10744,91	11463,35

Tabela 5.14 – Comparação entre os resultados obtidos nas análises de primeira e segunda ordem
(continuação)

Barra	Nó	N_{Sd} (kN)		M_{Sd} (kN.m)	
		Primeira ordem	Segunda ordem	Primeira ordem	Segunda ordem
17	15	227,67	229,71	4811,23	5164,47
	18	-227,67	-229,71	5812,48	6196,22
18	18	85,14	85,45	5557,8	5657,83
	21	-85,14	-85,45	5990,03	6106,06
19	4	-1,89	-0,98	-23,13	-2671,99
	5	1,89	0,98	-26088,2	-28648,7
20	5	-9,93	-9,35	7907,77	5417,43
	6	9,93	9,35	-18501,9	-21001,2
21	7	15,9	17,52	4706,94	2444,69
	8	-15,9	-17,52	-22672,6	-24849
22	8	2,88	2,78	8767,01	6623,01
	9	-2,88	-2,78	-19033	-21231,4
23	10	5,78	6,46	6603,95	4790,24
	11	-5,78	-6,46	-20797,8	-22479,1
24	11	-2,5	-1,94	9480,87	7804,69
	12	2,5	1,94	-18655,8	-20454,8
25	13	35,82	37,05	7842,71	6721,86
	14	-35,82	-37,05	-19372,1	-20459,4
26	14	24,63	25,4	11991,02	10944,38
	15	-24,63	-25,4	-15556,1	-16627,8
27	16	-5,92	-4,82	8180,89	7647,94
	17	5,92	4,82	-18898,8	-19473,1
28	17	-2,46	-2,18	14233,92	13679,05
	18	2,46	2,18	-11370,3	-11854
29	19	48,35	49,32	8310,42	8179,96
	20	-48,35	-49,32	-16611,7	-16784,2
30	20	30,79	31,18	11967,18	11880,01
	21	-30,79	-31,18	-5990,03	-6106,06

Assim como mostrado no exemplo anterior, através da Tabela 5.11, a Tabela 5.14 desse exemplo demonstra que houve uma variação significativa dos esforços obtidos na análise de segunda ordem em relação à análise de primeira ordem.

5.4.1. Análise de instabilidade

Os resultados da análise de instabilidade do programa computacional desenvolvido são apresentados na Tabela 5.15, sendo o valor de $W_{crit} = 22,986765$.

Tabela 5.15 – Resultados da análise de instabilidade das barras do exemplo numérico 4

Barra	L (cm)	P_{crit} (kN)	P_{Euler} (kN)	K
1	375,00	-16912,91	11355,75	0,8194
2	375,00	-14527,32	11355,75	0,8841
3	375,00	-11829,66	11355,75	0,9798
4	375,00	-8987,49	11355,75	1,1241
5	375,00	-6043,25	3495,16	0,7605
6	375,00	-3067,92	3495,16	1,0674
7	375,00	-41885,72	20942,86	0,7071
8	375,00	-34519,34	20942,86	0,7789
9	375,00	-27452,45	15805,40	0,7588
10	375,00	-20488,27	15805,40	0,8783
11	375,00	-13411,25	8000,96	0,7724
12	375,00	-6119,02	8000,96	1,1435
13	375,00	-20064,36	11355,75	0,7523
14	375,00	-16272,53	11355,75	0,8354
15	375,00	-12493,28	11355,75	0,9534
16	375,00	-8755,82	11355,75	1,1388
17	375,00	-5233,29	3495,16	0,8172
18	375,00	-1957,05	3495,16	1,3364
19	600,00	43,52	12682,44	0,0000
20	600,00	228,35	12682,44	0,0000
21	600,00	-365,54	6453,62	4,2018

Tabela 5.15 – Resultados da análise de instabilidade das barras do exemplo numérico 4 (continuação)

Barra	L (cm)	P_{crit} (kN)	P_{Euler} (kN)	K
22	600,00	-66,24	6453,62	9,8708
23	600,00	-132,87	6453,62	6,9692
24	600,00	57,55	6453,62	0,0000
25	600,00	-823,46	4581,69	2,3588
26	600,00	-566,22	4581,69	2,8446
27	600,00	136,18	4581,69	0,0000
28	600,00	56,65	4581,69	0,0000
29	600,00	-1111,30	2134,03	1,3857
30	600,00	-707,86	2134,03	1,7363

6. Considerações finais

Neste trabalho foi apresentado um programa desenvolvido para análise numérica de segunda ordem de pórticos planos de estruturas de aço e seus resultados, em comparação com a utilização do método analítico simplificado, apresentado no Anexo D da norma brasileira ABNT NBR8800:2008.

Através dos exemplos apresentados, o resultado do programa demonstrou que a utilização do cálculo numérico desenvolvido é eficaz em comparação com o método analítico simplificado, demonstrando a importância do desenvolvimento deste programa para aferição dos resultados obtidos através do processo B_1-B_2 , já que o mesmo é preciso e exato.

Desta forma, o programa apresentado é uma ferramenta capaz de ajudar o trabalho do Engenheiro de Estruturas na aplicação das recomendações normativas para a análise de segunda ordem de estruturas metálicas, bem como fornece a verificação dos perfis de aço tipo I laminados, com redução significativa do trabalho manual, visto que será um programa liberado para utilização de forma gratuita.

É necessário que o desenvolvimento do programa seja continuado para que o mesmo seja aplicado em um programa completo que dimensione automaticamente os perfis metálicos, considerando o acréscimo dos esforços obtidos pela análise de segunda ordem, além de incluir uma gama maior de tipos de perfis, como perfis soldados e formados a frio.

Além disso, pode-se acrescentar o uso de ligações que não sejam somente rígidas, podendo-se considerar rótulas e ligações semirrígidas, para aproximar o modelo ao máximo do comportamento real da estrutura.

E como o programa faz a análise elástica de segunda ordem, utilizando o processo das funções de rigidez com a hipótese dos pequenos deslocamentos, em estudos subsequentes, o trabalho pode ser estendido para utilização da análise inelástica.

Por fim, sugere-se o desenvolvimento de uma interface gráfica para o programa, de forma que a utilização fique mais agradável e acessível para o usuário final.

Referências Bibliográficas

AL-MASHARY, F.; CHEN, W.F. *Elastic second-order analysis for frame design*. Journal of Constructional Steel Research, Oxford, n. 15, p.303-322, 1993.

AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. *Steel construction manual*. 13.ed. Chicago, IL: 2005.

_____. *Specification for structural steel buildings*. Chicago, IL: ANSI/AISC 360-05, 2005.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 8800: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios*. Rio de Janeiro, 2008.

BARSAN, G. M.; CHIOREAN, C. G. *Influence of residual stress on the carrying-capacity of steel framed structures: numerical investigation*. In: DUBINA, D.; IVANY, M. *Stability and ductility of steel structures*. Oxford: Elsevier Science Pub., 1999. p. 317-324.

CALLEJAS, Ivan Julio Apolonio. *Análise e dimensionamento de estruturas metálicas planas considerando a não-linearidade geométrica e física*. 1998. 227f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

FICANHA, R.; FABEANE, R.; PRAVIA, Z. M. C. *Análise de segunda ordem: comparação das análises bidimensionais e tridimensionais em modelos estruturais de aço*. Construmetal 2012, Associação Brasileira da Construção Metálica, São Paulo, 2012.

GALAMBOS, Theodore V. *Guide to stability design criteria for metal structures*. 4.ed. New York: John Wiley & Sons, 1988, 785p.

IU, C. K. et al. *Direct second-order elastic analysis for steel frame design*. Journal of Civil Engineering, KSCE, v. 12, n. 6, p. 379-389, 2008.

JOHNSTON, B. G. *Column buckling: historic highlights*. New York: Journal of Structural Engineering, 1983. v. 109, n. 9, p. 2086-2096.

LOPES, A. P.; SANTOS, G. O.; SOUZA, A. L. *Estudo sobre diferentes métodos de análise p-delta*. Revista Teoria e Prática na Construção Civil, Rio Grande, n.7, p.9-19, set. 2005.

NARDI, F. A.; FICANHA, R.; PRAVIA, Z. M. C. *Análise de segunda ordem: aplicações, dificuldades e recomendações*. Revista Construção Metálica, Associação Brasileira da Construção Metálica, São Paulo, 101. ed., p.28-33, 2011.

ORMONDE, P. C.; SOUZA, A. S. C. *Software Educacional Livre para análise não-linear e dimensionamento de pórtico plano em estruturas metálicas*. Artigo. Construmetal 2012. São Paulo: Associação Brasileira da Construção Metálica, 2012.

PEREIRA, Anderson. *Projeto ótimo de pórticos planos com restrição à flambagem*. Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2002.

REQUENA, J. A. V. *Carregamento crítico de instabilidade geral de pilares de seção composta variável, de edifícios industriais metálicos*. 1995. 157p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

_____, *Determinação do comprimento efetivo de flambagem de pilares de edifícios industriais com variação brusca de seção transversal*. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, XXVIII, 1997, São Carlos. Anais... São Carlos: ASAE, 1997.

SALMON, C. G.; JOHNSON, J. E. *Steel structures: design and behavior*. 4.ed. New York: HarperCollins College Publishers, 1996, 1026p.

SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. *Elastic buckling and second-order behavior of pitched-roof steel frames*. Journal of Constructional Steel Research, n.63, p. 804-818, 2007.

VIEIRA, Rosilene de Fátima. *Estudo da influência dos contraventamentos na instabilidade de estruturas metálicas reticuladas aporticadas*. 1998. 217f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas,

_____. *Influence of bracings on the stability of columns*. Practice Periodical on Structural Design and Construction, ASCE, v. 15, n. 3, August 1, 2010.

ANEXO A

DEDUÇÃO DAS FUNÇÕES DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE BARRA

A dedução das funções de rigidez foi realizada de forma minuciosa no trabalho de Vieira (1998), como se segue.

O coeficiente S_1 é o valor da rigidez axial da barra. Este coeficiente não é afetado com a presença do esforço normal P . Assim tem-se que $S_{11} = S_{41} = S_1$.

Adotando a notação tradicional para as características geométricas da seção e propriedades elásticas do material, tem-se:

$$S_1 = \frac{EA}{L} \quad (1)$$

Fazendo a somatória dos momentos no nó inicial da barra, ao se aplicar um deslocamento unitário na direção do eixo y , conforme mostrado na Figura 4.3,b, admitindo P de tração, obtém-se:

$$S_3 + S_3 - LS_2 + P = 0 \quad (2)$$

$$S_2 = \frac{2S_3 + P}{L} \quad (3)$$

Fazendo-se o mesmo para o estado de deslocamento da Figura 4.3.c, obtém-se:

$$S_4 + S_5 - LS_3 = 0 \quad (4)$$

$$S_5 = S_3L - S_4 \quad (5)$$

Para a montagem da matriz de rigidez, portanto, é necessário apenas o cálculo dos coeficientes S_1 , S_3 e S_4 . Os valores de S_2 e S_5 são obtidos através do equilíbrio das ações exercidas na barra.

Os valores dos coeficientes S_3 e S_4 dependem do sentido do esforço normal P que influi no valor do momento fletor e sua derivada, esforço cortante. A distorção γ definida pela diferença entre a inclinação θ da linha elástica e o giro ϕ da seção transversal que independem do valor e sentido de P , são:

$$y' = \theta = \phi + \gamma \quad (6)$$

$$\gamma = \frac{cQ}{GA} \quad (7)$$

Substituindo a Equação (7) na Equação (6), tem-se:

$$y' = \phi + \frac{cQ}{GA} \quad (8)$$

Derivando y' e lembrando que $\phi' = -M/EI$, resulta:

$$y'' = -\frac{M}{EI} + \frac{c}{GA} \left(\frac{dQ}{dx} \right) \quad (9)$$

Sendo:

P a força axial no elemento de barra;

A a área da seção transversal;

I o momento de inércia em relação ao eixo z ;

G o módulo de elasticidade transversal;

E o módulo de elasticidade longitudinal;

c o coeficiente de forma da seção transversal da barra;

L o comprimento da barra.

Existem três casos a serem considerados para a determinação da matriz de rigidez. O primeiro é quando o valor da força axial na barra é nulo; o segundo quando este valor é negativo e, finalmente, quando este valor é positivo. O valor no sinal do esforço normal influenciará no tipo de solução geral que será utilizado para solução da equação diferencial do problema.

- Caso P igual à zero

Fazendo-se o equilíbrio de momentos em uma posição x da barra para o caso mostrado na Figura 4.3.c, obtém-se:

$$M = S_4 - S_3x \quad (10)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = -S_3 \quad (11)$$

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (12)$$

Substituindo a Equação (11) na Equação (8), resulta:

$$y' = \phi - \frac{cS_3}{GA} \quad (13)$$

Substituindo as Equações (10) e (12) na Equação (9), tem-se:

$$y'' = -\frac{(S_4 - S_3x)}{EI} = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3}{EI}x \quad (14)$$

Aplicando as condições de contorno na Equação (14) para $x = 0$ e $x = L$, obtém-se:

$$y''_{(0)} = -\frac{S_4}{EI} \quad (15)$$

$$y''_{(L)} = -\frac{S_4}{EI} + \frac{LS_3}{EI} \quad (16)$$

Derivando duas vezes a Equação (14), resulta:

$$y^{IV} = 0 \quad (17)$$

A equação diferencial para o caso de $P = 0$ tem como solução geral a seguinte expressão:

$$y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 \quad (18)$$

$$y' = 3C_1x^2 + 2C_2x + C_3 \quad (19)$$

$$y'' = 6C_1x + 2C_2 \quad (20)$$

Aplicando as condições de contorno na Equação (20) para $x = 0$ e $x = L$, resulta:

$$y''_{(0)} = 2C_2 \quad (21)$$

$$y''_{(L)} = 6C_1L + 2C_2 \quad (22)$$

Comparando a Equação (21) com a Equação (15) e a Equação (22) com a Equação (16), tem-se:

$$-\frac{S_4}{EI} = 2C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{S_4}{2EI} \quad (23)$$

$$6C_1L + 2C_2 = -\frac{S_4}{EI} + \frac{LS_3}{EI} \quad (24)$$

Substituindo o valor de C_2 obtido pela Equação (23) na Equação (24) tem-se o valor de C_1 , portanto:

$$6C_1L - 2\frac{S_4}{2EI} = -\frac{S_4}{EI} + \frac{LS_3}{EI}$$

Isolando C_1 , tem-se:

$$C_1 = \frac{S_3}{6EI} \quad (25)$$

Aplicando as condições de contorno na Equação (18), tem-se:

$$y_{(0)} = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \quad (26)$$

$$y_{(L)} = 0 \Rightarrow C_1L^3 + C_2L^2 + C_3L + C_4 = 0 \quad (27)$$

Com as condições de contorno na Equação (13) e (19) para $x = 0$, e lembrando que $\phi_j = 1$ no nó inicial da barra, obtém-se:

$$y'_{(0)} = \phi_j - \frac{cS_3}{GA} \Rightarrow y'_{(0)} = 1 - \frac{cS_3}{GA} \quad (28)$$

$$y'_{(0)} = 3C_1 \cdot 0 + 2C_2 \cdot 0 + C_3 \Rightarrow y'_{(0)} = C_3 \quad (29)$$

Igualando a Equação (28) com a Equação (29), resulta que:

$$C_3 = 1 - \frac{cS_3}{GA} \quad (30)$$

Aplicando as condições de contorno na Equação (13) e Equação (19) para $x = L$ e lembrando que $\phi_k = 0$ no nó final da barra, obtém-se:

$$y'_{(L)} = \phi_k - \frac{cS_3}{GA} \Rightarrow y'_{(L)} = -\frac{cS_3}{GA} \quad (31)$$

$$y'_{(L)} = 3C_1L^2 + 2C_2L + C_3 \quad (32)$$

Igualando a Equação (31) com a Equação (32), tem-se:

$$3C_1L^2 + 2C_2L + C_3 = -\frac{cS_3}{GA} \quad (33)$$

Substituindo os valores de C_1 , C_2 e C_3 , dados respectivamente pelas equações (25), (23) e (30) na Equação (33), obtém-se:

$$3\frac{S_3}{6EI}L^2 - 2\frac{S_4}{2EI}L + 1 - \frac{cS_3}{GA} = -\frac{cS_3}{GA}$$

Fazendo-se as simplificações, chega-se a:

$$\frac{S_3}{2EI}L^2 - \frac{S_4}{EI}L + 1 = 0 \Rightarrow \frac{S_3}{2EI}L^2 = \frac{S_4}{EI}L - 1$$

Multiplicando por $2EI$, resulta:

$$S_3L^2 = 2LS_4 - 2EI \Rightarrow S_3 = \frac{2S_4}{L} - \frac{2EI}{L^2} \quad (34)$$

Voltando à Equação (27) e substituindo os valores de C_1 , C_2 , C_3 e C_4 , dados respectivamente pelas equações (25), (23), (30) e (26), tem-se:

$$\frac{S_3}{6EI}L^3 - \frac{S_4}{2EI}L^2 + L - \frac{cS_3}{GA}L + 0 = 0$$

Multiplicando por $12EI/L^3$, resulta:

$$2S_3 - \frac{6S_4}{L} + \frac{12EI}{L^2} - \frac{cS_3}{GA} \cdot \frac{12EI}{L^2} = 0$$

Assumindo $K = 12cEI/GAL^2$, tem-se:

$$2S_3 - \frac{6S_4}{L} + \frac{12EI}{L^2} - \frac{cS_3}{GA} \cdot \frac{12EI}{L^2} = 0 \quad (35)$$

Substituindo o valor de S_3 , dado pela Equação (34) na Equação (35), obtém-se:

$$2\left(\frac{2S_4}{L} - \frac{2EI}{L^2}\right) - \frac{6S_4}{L} + \frac{12EI}{L^2} - K\left(\frac{2S_4}{L} - \frac{2EI}{L^2}\right) = 0$$

$$\frac{4S_4}{L} - \frac{4EI}{L^2} - \frac{6S_4}{L} + \frac{12EI}{L^2} - K\frac{2S_4}{L} + K\frac{2EI}{L^2} = 0$$

$$-\frac{2S_4}{L} + \frac{8EI}{L^2} - K\frac{2S_4}{L} + K\frac{2EI}{L^2} = 0$$

Multiplicando por L , tem-se:

$$-2S_4 + \frac{8EI}{L} - 2KS_4 + K\frac{2EI}{L} = 0$$

$$2S_4 + 2KS_4 = \frac{8EI}{L} + K\frac{2EI}{L}$$

$$2S_4(1 + K) = \frac{2EI}{L}(4 + K)$$

$$S_4 = \frac{EI}{L(1 + K)}(4 + K) \quad (36)$$

Fazendo $I' = I/(1 + K)$, obtém-se:

$$S_4 = \frac{EI'}{L}(4 + K) \quad (37)$$

Substituindo o valor de S_4 , dado pela Equação (36) na Equação (34), resulta:

$$S_3 = \frac{2}{L} \cdot \frac{EI}{L(1 + K)}(4 + K) - \frac{2EI}{L^2} \Rightarrow S_3 = \frac{2EI}{L^2} \left(\frac{4 + K}{1 + K} - 1 \right)$$

$$S_3 = \frac{2EI}{L^2} \left(\frac{4 + K - 1 - K}{1 + K} \right) = \frac{2EI}{L^2} \cdot \frac{3}{(1 + K)}$$

Lembrando-se que $I' = I/(1 + K)$, tem-se:

$$S_3 = \frac{6EI'}{L^2} \quad (38)$$

O valor de S_2 , dado pela Equação (3), pode ser obtido substituindo o valor de S_3 , dado pela Equação (38) e fazendo $P = 0$; desta forma, chega-se que:

$$S_2 = \frac{2}{L} \cdot \frac{6EI'}{L^2} \Rightarrow S_2 = \frac{12EI'}{L^3} \quad (39)$$

Para obter o valor de S_5 , serão substituídos na Equação (5) os valores de S_3 e S_4 , dados respectivamente pelas equações (38) e (37), assim obtendo:

$$S_5 = \frac{6EI'}{L^2}L - \frac{EI'}{L}(4 + K) = \frac{EI'}{L}(6 - 4 - K)$$

$$S_5 = \frac{EI'}{L}(2 - K) \quad (40)$$

- Caso P de compressão

Fazendo-se o equilíbrio de momentos em uma posição x da barra, para o caso mostrado na Figura 4.3.c, e levando em consideração a atuação de uma força normal P de compressão, obtém-se:

$$M = S_4 - S_3x + Py \quad (41)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = -S_3 + Py' \quad (42)$$

$$\frac{dQ}{dx} = Py'' \quad (43)$$

Substituindo a Equação (42) na Equação (8), resulta:

$$y' = \phi - \frac{c}{GA}(-S_3 + Py') = \phi - \frac{cS_3}{GA} + \frac{cP}{GA}y'$$

$$y' - \frac{cP}{GA}y' = \phi - \frac{cS_3}{GA} \Rightarrow y' \left(1 - \frac{cP}{GA}\right) = \phi - \frac{cS_3}{GA}$$

Fazendo $a = 1 - cP/GA$, chega-se a:

$$y' = \frac{1}{a} \left(\phi - \frac{cS_3}{GA} \right) \quad (44)$$

Substituindo as equações (41) e (43) na Equação (9), tem-se:

$$y'' = -\frac{(S_4 - S_3x + Py)}{EI} + \frac{c}{GA}Py'' = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3}{EI}x - \frac{Py}{EI} + \frac{cP}{GA}y''$$

$$y'' - \frac{cP}{GA}y'' = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3}{EI}x - \frac{Py}{EI}$$

$$y'' \left(1 - \frac{cP}{GA}\right) = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3}{EI}x - \frac{Py}{EI}$$

Lembrando que $a = 1 - cP/GA$, tem-se:

$$y'' = \frac{1}{aEI} (-S_4 + S_3x - Py) \quad (45)$$

Derivando duas vezes a Equação (45), obtém-se:

$$y''' = \frac{S_3}{aEI} - \frac{Py'}{aEI} \quad (46)$$

$$y^{IV} = -\frac{Py''}{aEI} \Rightarrow y^{IV} + \frac{P}{aEI}y'' = 0$$

Fazendo $\alpha^2 = P/aEI$, tem-se:

$$y^{IV} + \alpha^2 y'' = 0 \quad (47)$$

A equação diferencial de quarto grau para o caso de P de compressão tem como solução geral a seguinte expressão:

$$y = C_1 \text{sen} \alpha x + C_2 \text{cos} \alpha x + C_3 x + C_4 \quad (48)$$

Fazendo-se a primeira e segunda derivadas da solução geral da equação diferencial:

$$y' = \alpha C_1 \text{cos} \alpha x - \alpha C_2 \text{sen} \alpha x + C_3 \quad (49)$$

$$y'' = -\alpha^2 C_1 \text{sen} \alpha x - \alpha^2 C_2 \text{cos} \alpha x$$

$$y'' = -\alpha^2 (C_1 \text{sen} \alpha x + C_2 \text{cos} \alpha x) \quad (50)$$

e aplicando as condições de contorno na Equação (45) para $x = 0$ e $x = L$, e lembrando que para os dois casos $y = 0$, obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{1}{aEI} (-S_4) \quad (51)$$

$$y''_{(L)} = \frac{1}{aEI} (-S_4 + LS_3) \quad (52)$$

Com as condições de contorno na Equação (50) para $x = 0$ e $x = L$, resulta em:

$$y''_{(0)} = -\alpha^2 C_2 \quad (53)$$

$$y''_{(L)} = -\alpha^2 (C_1 \text{sen} \alpha L + C_2 \text{cos} \alpha L) \quad (54)$$

Comparando a Equação (51) com a Equação (53) e a Equação (52) com a Equação (54), tem-se:

$$\frac{1}{aEI} (-S_4) = -\alpha^2 C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{S_4}{aEI \alpha^2}$$

Lembrando que $\alpha^2 = P/aEI$, obtém-se:

$$C_2 = \frac{S_4}{aEI} \cdot \frac{aEI}{P} \Rightarrow C_2 = \frac{S_4}{P} \quad (55)$$

$$\frac{1}{aEI}(-S_4 + LS_3) = -\alpha^2(C_1 \text{sen}\alpha L + C_2 \text{cos}\alpha L)$$

Substituindo o valor de C_2 tem-se o valor de C_1 , portanto:

$$\frac{1}{aEI\alpha^2}(-S_4 + LS_3) = -C_1 \text{sen}\alpha L - \frac{S_4}{P} \text{cos}\alpha L$$

Multiplicando por P e lembrando que $\alpha^2 = P/aEI$, tem-se:

$$\frac{P}{aEI} \cdot \frac{aEI}{P}(-S_4 + LS_3) = -C_1 P \text{sen}\alpha L - S_4 \text{cos}\alpha L$$

Simplificando, resulta:

$$C_1 P \text{sen}\alpha L = S_4 - LS_3 - S_4 \text{cos}\alpha L$$

$$C_1 = \frac{-LS_3 + S_4(1 - \text{cos}\alpha L)}{P \text{sen}\alpha L} \quad (56)$$

Aplicando as condições de contorno na Equação (48) para $x = 0$ e $x = L$, tem-se:

$$y_{(0)} = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \quad (57)$$

$$y_{(L)} = 0 \Rightarrow C_1 \text{sen}\alpha L + C_2 \text{cos}\alpha L + C_3 L + C_4 = 0 \quad (58)$$

Supondo as condições de contorno na Equação (44) e (49) para $x = 0$, e lembrando que $\phi_j = 1$ no nó inicial da barra, obtém-se:

$$y'_{(0)} = \frac{1}{a} \left(\phi_j - \frac{cS_3}{GA} \right) \Rightarrow y'_{(0)} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{cS_3}{GA} \right) \quad (59)$$

$$y'_{(0)} = \alpha C_1 + C_3 \quad (60)$$

Igualando a Equação (59) com a Equação (60), resulta:

$$\frac{1}{a} \left(1 - \frac{cS_3}{GA} \right) = \alpha C_1 + C_3 \quad (61)$$

Aplicando as condições de contorno na Equação (44) e (49) para $x = L$ e lembrando que $\phi_k = 0$ no nó final da barra, obtém-se:

$$y'_{(L)} = \frac{1}{a} \left(\phi_k - \frac{cS_3}{GA} \right) \Rightarrow y'_{(L)} = -\frac{cS_3}{aGA} \quad (62)$$

$$y'_{(L)} = \alpha C_1 \cos \alpha L - \alpha C_2 \sin \alpha L + C_3 \quad (63)$$

Igualando a Equação (62) com a Equação (63), tem-se:

$$-\frac{cS_3}{aGA} = \alpha C_1 \cos \alpha L - \alpha C_2 \sin \alpha L + C_3 \quad (64)$$

As equações (55), (56), (57), (58), (61) e (64) formam um sistema de seis equações e seis incógnitas, sendo as incógnitas C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , S_3 e S_4 . Das equações (55) e (57) obtém-se o valor de C_4 :

$$C_4 = -\frac{S_4}{P} \quad (65)$$

Substituindo o valor de C_1 dado pela Equação (56) na Equação (61), chega-se a:

$$C_3 + \alpha \left[\frac{-LS_3 + S_4(1 - \cos \alpha L)}{P \sin \alpha L} \right] = \frac{1}{a} - \frac{cS_3}{aGA}$$

$$C_3 = \frac{1}{a} - \frac{cS_3}{aGA} - \alpha \left[\frac{-LS_3 + S_4(1 - \cos \alpha L)}{P \sin \alpha L} \right]$$

$$C_3 = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{cS_3}{GA} \right) - \frac{\alpha}{P \sin \alpha L} [-LS_3 + S_4(1 - \cos \alpha L)] \quad (66)$$

Substituindo os valores de C_1 , C_2 , C_3 e C_4 , dados pelas equações (56), (55), (66) e (65), respectivamente, na Equação (58), resulta:

$$\frac{-LS_3 + S_4(1 - \cos \alpha L)}{P \sin \alpha L} \sin \alpha L + \frac{S_4}{P} \cos \alpha L + \left\{ \frac{1}{a} \left(1 - \frac{cS_3}{GA} \right) - \frac{\alpha}{P \sin \alpha L} [-LS_3 + S_4(1 - \cos \alpha L)] \right\} L - \frac{S_4}{P} = 0$$

Então:

$$\frac{-LS_3}{P} + \frac{S_4}{P} - \frac{S_4 \cos \alpha L}{P} + \frac{S_4 \cos \alpha L}{P} + \frac{L}{a} \left(1 - \frac{cS_3}{GA} \right) - \frac{\alpha L}{P \sin \alpha L} [-LS_3 + S_4(1 - \cos \alpha L)] - \frac{S_4}{P} = 0$$

Simplificando:

$$\frac{-LS_3}{P} + \frac{L}{a} - \frac{cLS_3}{aGA} + \frac{\alpha S_3 L^2}{P \text{sen}\alpha L} - \frac{\alpha S_4 (1 - \text{cos}\alpha L)}{P \text{sen}\alpha L} = 0$$

Multiplicando por $P \text{sen}\alpha L / L$, resulta:

$$\frac{-S_3 P \text{sen}\alpha L}{P} + \frac{P \text{sen}\alpha L}{a} - \frac{c S_3 P \text{sen}\alpha L}{aGA} + \alpha S_3 L - \alpha S_4 (1 - \text{cos}\alpha L) = 0$$

$$\frac{P \text{sen}\alpha L}{a} = S_3 \text{sen}\alpha L + \frac{c S_3 P \text{sen}\alpha L}{aGA} - \alpha S_3 L + \alpha S_4 (1 - \text{cos}\alpha L)$$

$$\frac{P \text{sen}\alpha L}{a} = S_3 \text{sen}\alpha L \left(\frac{cP}{aGA} + 1 \right) - \alpha S_3 L + \alpha S_4 (1 - \text{cos}\alpha L)$$

Sendo que $a = 1 - cP/GA \Rightarrow cP/GA = 1 - a$, então fica:

$$\frac{P \text{sen}\alpha L}{a} = S_3 \text{sen}\alpha L \left(\frac{1-a}{a} + 1 \right) - \alpha S_3 L + \alpha S_4 (1 - \text{cos}\alpha L)$$

$$\frac{P \text{sen}\alpha L}{a} = S_3 \left(\frac{\text{sen}\alpha L}{a} - \alpha L \right) + \alpha S_4 (1 - \text{cos}\alpha L) \quad (67)$$

Substituindo os valores de C_1 , C_2 e C_3 , dados pelas equações (56), (55) e (66), respectivamente, na Equação (64), resulta:

$$\begin{aligned} -\frac{cS_3}{aGA} = & \alpha \text{cos}\alpha L \left[\frac{-S_3 L + S_4 (1 - \text{cos}\alpha L)}{P \text{sen}\alpha L} \right] - \frac{\alpha S_4}{P} \text{sen}\alpha L + \frac{1}{a} \left(1 - \frac{cS_3}{GA} \right) \\ & - \frac{\alpha}{P \text{sen}\alpha L} [-LS_3 + S_4 (1 - \text{cos}\alpha L)] \end{aligned}$$

Então, tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{cS_3}{aGA} = & \frac{-\alpha S_3 L \text{cos}\alpha L}{P \text{sen}\alpha L} + \frac{\alpha S_4 \text{cos}\alpha L (1 - \text{cos}\alpha L)}{P \text{sen}\alpha L} - \frac{\alpha S_4 \text{sen}\alpha L}{P} + \frac{1}{a} - \frac{cS_3}{aGA} + \frac{\alpha S_3 L}{P \text{sen}\alpha L} \\ & - \frac{\alpha S_4 (1 - \text{cos}\alpha L)}{P \text{sen}\alpha L} \end{aligned}$$

Simplificando, tem-se:

$$\frac{\alpha S_3 L}{P \text{sen}\alpha L} (1 - \text{cos}\alpha L) + \frac{\alpha S_4}{P \text{sen}\alpha L} [\text{cos}\alpha L (1 - \text{cos}\alpha L) - \text{sen}^2 \alpha L - (1 - \text{cos}\alpha L)] + \frac{1}{a} = 0$$

Simplificando, tem-se:

$$\frac{\alpha S_3 L}{P \text{sen}\alpha L} (1 - \text{cos}\alpha L) + \frac{\alpha S_4}{P \text{sen}\alpha L} (\text{cos}\alpha L - \text{cos}^2 \alpha L - 1 + \text{cos}^2 \alpha L - 1 + \text{cos}\alpha L) + \frac{1}{a} = 0$$

Simplificando novamente, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha S_3 L}{P \operatorname{sen} \alpha L} (1 - \operatorname{cos} \alpha L) + \frac{\alpha S_4}{P \operatorname{sen} \alpha L} (2 \operatorname{cos} \alpha L - 2) + \frac{1}{a} &= 0 \\ \frac{1}{a} &= \frac{1}{P \operatorname{sen} \alpha L} [-\alpha S_3 L (1 - \operatorname{cos} \alpha L) - \alpha S_4 (2 \operatorname{cos} \alpha L - 2)] \\ \frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{a} &= -\alpha S_3 L (1 - \operatorname{cos} \alpha L) + 2 \alpha S_4 (1 - \operatorname{cos} \alpha L) \\ \alpha S_4 (1 - \operatorname{cos} \alpha L) &= \frac{\frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{a} + \alpha S_3 L (1 - \operatorname{cos} \alpha L)}{2} \end{aligned} \quad (68)$$

Da Equação (68) na Equação (67), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{2a} + \frac{\alpha S_3 L (1 - \operatorname{cos} \alpha L)}{2} + S_3 \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha L}{a} - \alpha L \right) &= \frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{a} \\ \frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{2a} &= S_3 \left[\frac{\operatorname{sen} \alpha L}{a} - \alpha L + \frac{\alpha L (1 - \operatorname{cos} \alpha L)}{2} \right] \\ P \operatorname{sen} \alpha L &= 2a S_3 \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha L}{a} - \alpha L + \frac{\alpha L}{2} - \frac{\alpha L \operatorname{cos} \alpha L}{2} \right) \\ P \operatorname{sen} \alpha L &= S_3 (2 \operatorname{sen} \alpha L - a \alpha L - a \alpha L \operatorname{cos} \alpha L) \end{aligned}$$

Mas $\alpha^2 = P/aEI \Rightarrow P = \alpha^2 aEI$, assim:

$$S_3 = \frac{\alpha^2 aEI \operatorname{sen} \alpha L}{(2 \operatorname{sen} \alpha L - a \alpha L - a \alpha L \operatorname{cos} \alpha L)} \quad (69)$$

Substituindo S_3 dado pela Equação (69) na Equação (67) obtém-se o valor de S_4 , portanto:

$$\frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{a} = \frac{\alpha^2 aEI \operatorname{sen} \alpha L}{(2 \operatorname{sen} \alpha L - a \alpha L - a \alpha L \operatorname{cos} \alpha L)} \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha L}{a} - \alpha L \right) + \alpha S_4 (1 - \operatorname{cos} \alpha L)$$

Multiplicando por $a/P \operatorname{sen} \alpha L$, e sabendo que $P = \alpha^2 aEI$, tem-se:

$$\frac{S_4 \alpha (1 - \operatorname{cos} \alpha L)}{P \operatorname{sen} \alpha L} = 1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha L - a \alpha L}{(2 \operatorname{sen} \alpha L - a \alpha L - a \alpha L \operatorname{cos} \alpha L)}$$

Multiplicando por $(2 \operatorname{sen} \alpha L - a \alpha L - a \alpha L \operatorname{cos} \alpha L)$, obtém-se:

$$\frac{S_4 \alpha \alpha (1 - \cos \alpha L)}{P \operatorname{sen} \alpha L} (2 \operatorname{sen} \alpha L - \alpha \alpha L - \alpha \alpha L \cos \alpha L) \\ = 2 \operatorname{sen} \alpha L - \alpha \alpha L - \alpha \alpha L \cos \alpha L - \operatorname{sen} \alpha L + \alpha \alpha L$$

Simplificando e substituindo o valor de $P = \alpha^2 aEI$, tem-se:

$$S_4 \alpha \alpha (1 - \cos \alpha L) (2 \operatorname{sen} \alpha L - \alpha \alpha L - \alpha \alpha L \cos \alpha L) = \alpha^2 aEI \operatorname{sen} \alpha L (\operatorname{sen} \alpha L - \alpha \alpha L \cos \alpha L)$$

Simplificando novamente, tem-se:

$$S_4 (2 \operatorname{sen} \alpha L - \alpha \alpha L - \alpha \alpha L \cos \alpha L - 2 \operatorname{sen} \alpha L \cos \alpha L + \alpha \alpha L \cos \alpha L + \alpha \alpha L \cos^2 \alpha L) \\ = \alpha EI \operatorname{sen} \alpha L (\operatorname{sen} \alpha L - \alpha \alpha L \cos \alpha L)$$

Sendo que:

$$\alpha \alpha L \cos^2 \alpha L = \alpha \alpha L (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha L) = \alpha \alpha L - \alpha \alpha L \operatorname{sen}^2 \alpha L$$

Portanto, tem-se:

$$S_4 (2 \operatorname{sen} \alpha L - \alpha \alpha L - \alpha \alpha L \cos \alpha L - 2 \operatorname{sen} \alpha L \cos \alpha L + \alpha \alpha L \cos \alpha L + \alpha \alpha L - \alpha \alpha L \operatorname{sen}^2 \alpha L) \\ = \alpha EI \operatorname{sen} \alpha L (\operatorname{sen} \alpha L - \alpha \alpha L \cos \alpha L)$$

Simplificando e dividindo por $\operatorname{sen} \alpha L$, tem-se:

$$S_4 (2 - 2 \cos \alpha L - \alpha \alpha L \operatorname{sen} \alpha L) = \alpha EI (\operatorname{sen} \alpha L - \alpha \alpha L \cos \alpha L)$$

$$S_4 = \frac{\alpha EI (\operatorname{sen} \alpha L - \alpha \alpha L \cos \alpha L)}{(2 - 2 \cos \alpha L - \alpha \alpha L \operatorname{sen} \alpha L)} \quad (70)$$

Para que o denominador das equações (69) e (70) se tornem iguais, facilitando a programação, multiplica-se o numerador e o denominador da Equação (69) por $(1 - \cos \alpha L)$, assim tem-se:

$$S_3 = \frac{\alpha^2 aEI \operatorname{sen} \alpha L}{(2 \operatorname{sen} \alpha L - \alpha \alpha L - \alpha \alpha L \cos \alpha L)} \cdot \frac{(1 - \cos \alpha L)}{(1 - \cos \alpha L)}$$

Portanto, fica:

$$S_3 = \frac{\alpha^2 aEI \operatorname{sen} \alpha L (1 - \cos \alpha L)}{(2 \operatorname{sen} \alpha L - \alpha \alpha L - \alpha \alpha L \cos \alpha L - 2 \operatorname{sen} \alpha L \cos \alpha L + \alpha \alpha L \cos \alpha L + \alpha \alpha L \cos^2 \alpha L)}$$

$$S_3 = \frac{\alpha^2 aEI \operatorname{sen} \alpha L (1 - \cos \alpha L)}{(2 \operatorname{sen} \alpha L - \alpha \alpha L - 2 \operatorname{sen} \alpha L \cos \alpha L + \alpha \alpha L - \alpha \alpha L \operatorname{sen}^2 \alpha L)}$$

Assim, resulta:

$$S_3 = \frac{\alpha^2 aEI(1 - \cos\alpha L)}{(2 - 2\cos\alpha L - \alpha\alpha L \sin\alpha L)} \quad (71)$$

Através das condições de equilíbrio dado pela Equação (3), lembrando que P é de compressão, podemos fazer:

$$S_2 = \frac{2S_3 - P}{L}$$

Substituindo o valor de S_3 dado pela Equação (71), tem-se:

$$S_2 = \frac{2 \left[\frac{\alpha^2 aEI(1 - \cos\alpha L)}{(2 - 2\cos\alpha L - \alpha\alpha L \sin\alpha L)} \right] - \alpha^2 aEI}{L}$$

$$S_2 = \frac{2\alpha^2 aEI(1 - \cos\alpha L) - \alpha^2 aEI(2 - 2\cos\alpha L - \alpha\alpha L \sin\alpha L)}{L(2 - 2\cos\alpha L - \alpha\alpha L \sin\alpha L)}$$

Fazendo as multiplicações, obtém-se:

$$S_2 = \frac{2\alpha^2 aEI - 2\alpha^2 aEI \cos\alpha L - 2\alpha^2 aEI + 2\alpha^2 aEI \cos\alpha L + \alpha^3 a^2 EIL \sin\alpha L}{L(2 - 2\cos\alpha L - \alpha\alpha L \sin\alpha L)}$$

Simplificando, resulta:

$$S_2 = \frac{\alpha^3 a^2 EIL \sin\alpha L}{(2 - 2\cos\alpha L - \alpha\alpha L \sin\alpha L)} \quad (72)$$

Através das condições de equilíbrio dado pela Equação (5), podemos fazer:

$$S_5 = S_3 L - S_4$$

Substituindo os valores de S_3 e S_4 dados pelas equações (71) e (70), respectivamente:

$$S_5 = \frac{\alpha^2 aEI(1 - \cos\alpha L)}{(2 - 2\cos\alpha L - \alpha\alpha L \sin\alpha L)} L - \frac{\alpha EI(\sin\alpha L - \alpha\alpha L \cos\alpha L)}{(2 - 2\cos\alpha L - \alpha\alpha L \sin\alpha L)}$$

Assim, tem-se:

$$S_5 = \frac{\alpha^2 aEIL - \alpha^2 aEIL \cos\alpha L - \alpha EI \sin\alpha L + \alpha^2 aEIL \cos\alpha L}{(2 - 2\cos\alpha L - \alpha\alpha L \sin\alpha L)}$$

Simplificando, tem-se:

$$S_5 = \frac{\alpha EI(\alpha L - \sin\alpha L)}{(2 - 2\cos\alpha L - \alpha\alpha L \sin\alpha L)} \quad (73)$$

- Caso P de tração

Fazendo-se o equilíbrio de momentos em uma posição x da barra para o caso mostrado na Figura 4.3.c, levando em consideração a atuação de uma força normal P de tração, obtém-se:

$$M = S_4 - S_3x - Py \quad (74)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = -S_3 - Py' \quad (75)$$

$$\frac{dQ}{dx} = -Py'' \quad (76)$$

Substituindo a Equação (75) na Equação (8), resulta:

$$y' = \phi + \frac{c}{GA}(-S_3 - Py') = \phi - \frac{cS_3}{GA} - \frac{cP}{GA}y'$$

$$y' + \frac{cP}{GA}y' = \phi - \frac{cS_3}{GA} \Rightarrow y' \left(1 + \frac{cP}{GA}\right) = \phi - \frac{cS_3}{GA}$$

Fazendo $a = 1 + cP/GA$, chega-se a:

$$y' = \frac{1}{a} \left(\phi - \frac{cS_3}{GA} \right) \quad (77)$$

Substituindo as equações (74) e (76) na Equação (9), tem-se:

$$y'' = -\frac{(S_4 - S_3x - Py)}{EI} + \frac{c}{GA}(-Py'') = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3}{EI}x + \frac{Py}{EI} - \frac{cP}{GA}y''$$

$$y'' + \frac{cP}{GA}y'' = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3}{EI}x + \frac{Py}{EI}$$

$$y'' \left(1 + \frac{cP}{GA}\right) = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3}{EI}x + \frac{Py}{EI}$$

Seja $a = 1 + cP/GA$, portanto:

$$y'' = \frac{1}{aEI}(-S_4 + S_3x + Py) \quad (78)$$

Derivando duas vezes a Equação (78), obtém-se:

$$y''' = \frac{S_3}{aEI} + \frac{Py'}{aEI} \quad (79)$$

$$y^{IV} = \frac{Py''}{aEI} \Rightarrow y^{IV} - \frac{P}{aEI}y'' = 0$$

Fazendo $\alpha^2 = P/aEI$, resulta:

$$y^{IV} - \alpha^2 y'' = 0 \quad (80)$$

A equação diferencial de quarto grau para o caso de P de tração tem como solução geral a seguinte expressão:

$$y = C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x + C_3 x + C_4 \quad (81)$$

Fazendo-se a primeira e segunda derivadas da solução geral da equação diferencial, obtém-se:

$$y' = \alpha C_1 \cosh \alpha x + \alpha C_2 \sinh \alpha x + C_3 \quad (82)$$

$$y'' = \alpha^2 C_1 \sinh \alpha x + \alpha^2 C_2 \cosh \alpha x$$

$$y'' = \alpha^2 (C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x) \quad (83)$$

Aplicando as condições de contorno na Equação (78) para $x = 0$ e $x = L$, e lembrando que para os dois casos $y = 0$, obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{1}{aEI} (-S_4) \quad (84)$$

$$y''_{(L)} = \frac{1}{aEI} (-S_4 + LS_3) \quad (85)$$

Com as condições de contorno na Equação (83) para $x = 0$ e $x = L$, resulta em:

$$y''_{(0)} = \alpha^2 C_2 \quad (86)$$

$$y''_{(L)} = \alpha^2 (C_1 \sinh \alpha L + C_2 \cosh \alpha L) \quad (87)$$

Comparando a Equação (84) com a Equação (86) e a Equação (85) com a Equação (87), tem-se:

$$\frac{1}{aEI} (-S_4) = \alpha^2 C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{S_4}{aEI \alpha^2}$$

Lembrando que $\alpha^2 = P/aEI$, tem-se:

$$C_2 = -\frac{S_4}{aEI} \cdot \frac{aEI}{P} \Rightarrow C_2 = -\frac{S_4}{P} \quad (88)$$

$$\frac{1}{aEI}(-S_4 + LS_3) = \alpha^2(C_1 \operatorname{senh}\alpha L + C_2 \operatorname{cosh}\alpha L) \quad (89)$$

Substituindo o valor de C_2 obtido na Equação (88) na Equação (89) tem-se o valor de C_1 , portanto:

$$\frac{1}{aEI\alpha^2}(-S_4 + LS_3) = C_1 \operatorname{senh}\alpha L - \frac{S_4}{P} \operatorname{cosh}\alpha L$$

Multiplicando por P e lembrando que $\alpha^2 = P/aEI$, tem-se:

$$\frac{P}{aEI} \cdot \frac{aEI}{P}(-S_4 + LS_3) = C_1 P \operatorname{senh}\alpha L - S_4 \operatorname{cosh}\alpha L$$

$$C_1 P \operatorname{senh}\alpha L = -S_4 + LS_3 + S_4 \operatorname{cosh}\alpha L$$

$$C_1 = \frac{LS_3 + S_4(\operatorname{cosh}\alpha L - 1)}{P \operatorname{senh}\alpha L} \quad (90)$$

Aplicando as condições de contorno na Equação (81) para $x = 0$ e $x = L$, tem-se:

$$y_{(0)} = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \quad (91)$$

$$y_{(L)} = 0 \Rightarrow C_1 \operatorname{senh}\alpha L + C_2 \operatorname{cosh}\alpha L + C_3 L + C_4 = 0 \quad (92)$$

Aplicando as condições de contorno nas equações (77) e (82) para $x = 0$ e lembrando que $\phi_j = 1$ no nó inicial da barra, obtém-se:

$$y'_{(0)} = \frac{1}{a} \left(\phi_j - \frac{cS_3}{GA} \right) \Rightarrow y'_{(0)} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{cS_3}{GA} \right) \quad (93)$$

$$y'_{(0)} = \alpha C_1 + C_3 \quad (94)$$

Igualando a Equação (93) com a Equação (94), resulta:

$$\frac{1}{a} \left(1 - \frac{cS_3}{GA} \right) = \alpha C_1 + C_3 \quad (95)$$

Aplicando as condições de contorno nas equações (77) e (82) para $x = L$ e lembrando que $\phi_k = 0$ no nó final da barra, obtém-se:

$$y'_{(L)} = \frac{1}{a} \left(\Phi_k - \frac{cS_3}{GA} \right) \Rightarrow y'_{(L)} = -\frac{cS_3}{aGA} \quad (96)$$

$$y'_{(L)} = \alpha C_1 \cosh \alpha L + \alpha C_2 \sinh \alpha L + C_3 \quad (97)$$

Igualando a Equação (96) com a Equação (97), tem-se:

$$-\frac{cS_3}{aGA} = \alpha C_1 \cosh \alpha L + \alpha C_2 \sinh \alpha L + C_3 \quad (98)$$

As equações (88), (89), (91), (92), (95) e (98) formam um sistema de seis equações e seis incógnitas, sendo as incógnitas C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , S_3 e S_4 . Das equações (88) e (91) obtém-se o valor de C_4 :

$$C_4 = \frac{S_4}{P} \quad (99)$$

Substituindo o valor de C_1 dado pela Equação (90) na Equação (95), tem-se:

$$C_3 + \alpha \left[\frac{LS_3 + S_4(\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} \right] = \frac{1}{a} - \frac{cS_3}{aGA}$$

$$C_3 = \frac{1}{a} - \frac{cS_3}{aGA} - \alpha \left[\frac{LS_3 + S_4(\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} \right]$$

$$C_3 = \frac{1}{a} - \frac{cS_3}{aGA} - \frac{\alpha S_3 L}{P \sinh \alpha L} - \frac{\alpha S_4 (\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} \quad (100)$$

Substituindo os valores de C_1 , C_2 , C_3 e C_4 , dados pelas equações (90), (88), (100) e (99), respectivamente, na Equação (92), resulta:

$$\frac{S_3 L + S_4 (\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} \sinh \alpha L - \frac{S_4}{P} \cosh \alpha L + \left[\frac{1}{a} - \frac{cS_3}{aGA} - \frac{\alpha S_3 L}{P \sinh \alpha L} - \frac{\alpha S_4 (\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} \right] L + \frac{S_4}{P} = 0$$

Então:

$$\frac{S_3 L}{P} + \frac{S_4 \cosh \alpha L}{P} - \frac{S_4}{P} - \frac{S_4 \cosh \alpha L}{P} + \frac{L}{a} - \frac{cS_3 L}{aGA} - \frac{\alpha S_3 L^2}{P \sinh \alpha L} - \frac{\alpha S_4 L (\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} + \frac{S_4}{P} = 0$$

Simplificando:

$$\frac{S_3 L}{P} + \frac{L}{a} - \frac{cS_3 L}{aGA} - \frac{\alpha S_3 L^2}{P \sinh \alpha L} - \frac{\alpha S_4 L (\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} = 0$$

Multiplicando por $P \sinh \alpha L / L$, resulta:

$$S_3 \operatorname{senh} \alpha L + \frac{P \operatorname{senh} \alpha L}{a} - \frac{c S_3 P \operatorname{senh} \alpha L}{a G A} - \alpha S_3 L - \alpha S_4 (\operatorname{cosh} \alpha L - 1) = 0$$

$$\frac{P \operatorname{senh} \alpha L}{a} = -S_3 \operatorname{senh} \alpha L + \frac{c S_3 P \operatorname{senh} \alpha L}{a G A} + \alpha S_3 L + \alpha S_4 (\operatorname{cosh} \alpha L - 1)$$

$$\frac{P \operatorname{senh} \alpha L}{a} = S_3 \operatorname{senh} \alpha L \left(\frac{c P}{a G A} - 1 \right) + \alpha S_3 L + \alpha S_4 (\operatorname{cosh} \alpha L - 1)$$

Sendo que $a = 1 + cP/GA \Rightarrow cP/GA = a - 1$, então fica:

$$\frac{P \operatorname{senh} \alpha L}{a} = S_3 \operatorname{senh} \alpha L \left(\frac{a - 1}{a} - 1 \right) + \alpha S_3 L + \alpha S_4 (\operatorname{cosh} \alpha L - 1)$$

$$\frac{P \operatorname{senh} \alpha L}{a} = S_3 \operatorname{senh} \alpha L \left(\frac{-1}{a} \right) + \alpha S_3 L + \alpha S_4 (\operatorname{cosh} \alpha L - 1)$$

$$\frac{P \operatorname{senh} \alpha L}{a} = S_3 \left(\alpha L - \frac{\operatorname{senh} \alpha L}{a} \right) + \alpha S_4 (\operatorname{cosh} \alpha L - 1) \quad (101)$$

Substituindo os valores de C_1 , C_2 e C_3 , dados pelas equações (90), (88) e (100), respectivamente, na Equação (98), resulta:

$$-\frac{c S_3}{a G A} = \alpha \operatorname{cosh} \alpha L \left[\frac{S_3 L + S_4 (\operatorname{cosh} \alpha L - 1)}{\frac{P \operatorname{senh} \alpha L}{\alpha S_4 (\operatorname{cosh} \alpha L - 1)}} \right] - \frac{\alpha S_4}{P} \operatorname{senh} \alpha L + \frac{1}{a} - \frac{c S_3}{a G A} - \frac{\alpha S_3 L}{P \operatorname{senh} \alpha L}$$

Simplificando, resulta:

$$\frac{[\alpha S_3 L + \alpha S_4 (\operatorname{cosh} \alpha L - 1)] \operatorname{cosh} \alpha L}{P \operatorname{senh} \alpha L} - \frac{\alpha S_4 \operatorname{senh} \alpha L}{P} + \frac{1}{a} - \frac{\alpha S_3 L}{P \operatorname{senh} \alpha L} - \frac{\alpha S_4 (\operatorname{cosh} \alpha L - 1)}{P \operatorname{senh} \alpha L} = 0$$

Multiplicando por $P \operatorname{senh} \alpha L$, tem-se:

$$\alpha S_3 L \operatorname{cosh} \alpha L + \alpha S_4 \operatorname{cosh} \alpha L (\operatorname{cosh} \alpha L - 1) - \alpha S_4 \operatorname{senh}^2 \alpha L + \frac{P \operatorname{senh} \alpha L}{a} - \alpha S_3 L - \alpha S_4 (\operatorname{cosh} \alpha L - 1) = 0$$

$$\alpha S_3 L \operatorname{cosh} \alpha L + \alpha S_4 \operatorname{cosh}^2 \alpha L - \alpha S_4 \operatorname{cosh} \alpha L - \alpha S_4 \operatorname{senh}^2 \alpha L + \frac{P \operatorname{senh} \alpha L}{a} - \alpha S_3 L - \alpha S_4 \operatorname{cosh} \alpha L + \alpha S_4 = 0$$

Lembrando que $\operatorname{cosh}^2 \alpha L - \operatorname{senh}^2 \alpha L = 1$, tem-se:

$$\alpha S_3 L \operatorname{cosh} \alpha L + \alpha S_4 - \alpha S_4 \operatorname{cosh} \alpha L + \frac{P \operatorname{senh} \alpha L}{a} - \alpha S_3 L - \alpha S_4 \operatorname{cosh} \alpha L + \alpha S_4 = 0$$

Simplificando, tem-se:

$$\alpha S_3 L \cosh \alpha L + 2\alpha S_4 - 2\alpha S_4 \cosh \alpha L + \frac{P \sinh \alpha L}{a} - \alpha S_3 L = 0$$

$$\frac{P \sinh \alpha L}{a} = 2\alpha S_4 (\cosh \alpha L - 1) - \alpha S_3 L (\cosh \alpha L - 1) \quad (102)$$

Portanto tem-se duas equações e duas incógnitas dadas pelas equações (101) e (102), assim isolando a Equação (102) e substituindo na Equação (101), resulta:

$$\alpha S_4 (\cosh \alpha L - 1) = \frac{P \sinh \alpha L}{2a} + \frac{\alpha S_3 L (\cosh \alpha L - 1)}{2}$$

$$\frac{P \sinh \alpha L}{a} = S_3 \left(\alpha L - \frac{\sinh \alpha L}{a} \right) + \frac{P \sinh \alpha L}{2a} + \frac{\alpha S_3 L (\cosh \alpha L - 1)}{2}$$

$$2P \sinh \alpha L = 2\alpha S_3 \left(\alpha L - \frac{\sinh \alpha L}{a} \right) + P \sinh \alpha L + \alpha \alpha S_3 L (\cosh \alpha L - 1)$$

$$P \sinh \alpha L = 2\alpha S_3 \alpha L - 2S_3 \sinh \alpha L + \alpha \alpha S_3 L \cosh \alpha L - \alpha \alpha S_3 L$$

$$P \sinh \alpha L = S_3 (\alpha \alpha L - 2 \sinh \alpha L + \alpha \alpha L \cosh \alpha L)$$

Mas $\alpha^2 = P/aEI \Rightarrow P = \alpha^2 aEI$, assim:

$$S_3 = \frac{\alpha^2 aEI \sinh \alpha L}{(\alpha \alpha L - 2 \sinh \alpha L + \alpha \alpha L \cosh \alpha L)} \quad (103)$$

Substituindo S_3 dado pela Equação (103) na Equação (102) obtém-se o valor de S_4 , portanto:

$$\frac{P \sinh \alpha L}{a} = 2\alpha S_4 (\cosh \alpha L - 1) - \alpha L (\cosh \alpha L - 1) \frac{P \sinh \alpha L}{(\alpha \alpha L - 2 \sinh \alpha L + \alpha \alpha L \cosh \alpha L)}$$

$$2\alpha \alpha S_4 = \frac{P \sinh \alpha L (\alpha \alpha L - 2 \sinh \alpha L + \alpha \alpha L \cosh \alpha L) + \alpha \alpha L P \sinh \alpha L (\cosh \alpha L - 1)}{(\alpha \alpha L - 2 \sinh \alpha L + \alpha \alpha L \cosh \alpha L) (\cosh \alpha L - 1)}$$

$$2\alpha \alpha S_4 = \frac{P \sinh \alpha L (\alpha \alpha L - 2 \sinh \alpha L + \alpha \alpha L \cosh \alpha L) + \alpha \alpha L P \sinh \alpha L (\cosh \alpha L - 1)}{\sinh \alpha L (2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha \alpha L \sinh \alpha L)}$$

Simplificando tem-se:

$$2\alpha \alpha S_4 = \frac{P (\alpha \alpha L - 2 \sinh \alpha L + \alpha \alpha L \cosh \alpha L + \alpha \alpha L \cosh \alpha L - \alpha \alpha L)}{(2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha \alpha L \sinh \alpha L)}$$

Simplificando novamente, e sabendo que $P = \alpha^2 aEI$, tem-se:

$$S_4 = \frac{\alpha EI(\alpha L \cosh \alpha L - \sinh \alpha L)}{(2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha L \sinh \alpha L)} \quad (104)$$

Para que o denominador das equações (103) e (104) se tornem iguais, facilitando a programação, multiplica-se o numerador e o denominador da Equação (103) por $(\cosh \alpha L - 1)$, assim tem-se:

$$S_3 = \frac{\alpha^2 aEI \sinh \alpha L}{(\alpha L - 2 \sinh \alpha L + \alpha L \cosh \alpha L)} \cdot \frac{(\cosh \alpha L - 1)}{(\cosh \alpha L - 1)}$$

$$S_3 = \frac{\alpha^2 aEI \sinh \alpha L (\cosh \alpha L - 1)}{(-\alpha L - 2 \sinh \alpha L \cosh \alpha L + 2 \sinh \alpha L + \alpha L + \alpha L \sinh^2 \alpha L)}$$

Simplificando, tem-se:

$$S_3 = \frac{\alpha^2 aEI \sinh \alpha L (\cosh \alpha L - 1)}{\sinh \alpha L (2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha L \sinh \alpha L)}$$

Simplificando novamente, tem-se:

$$S_3 = \frac{\alpha^2 aEI (\cosh \alpha L - 1)}{(2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha L \sinh \alpha L)} \quad (105)$$

Através das condições de equilíbrio dado pela Equação (3), lembrando que P é de tração, podemos fazer:

$$S_2 = \frac{2S_3 + P}{L}$$

Substituindo o valor de S_3 dado pela Equação (105), tem-se:

$$S_2 = \frac{2 \left[\frac{\alpha^2 aEI (\cosh \alpha L - 1)}{(2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha L \sinh \alpha L)} \right] + \alpha^2 aEI}{L}$$

$$S_2 = \frac{2\alpha^2 aEI (\cosh \alpha L - 1) + \alpha^2 aEI (2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha L \sinh \alpha L)}{L(2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha L \sinh \alpha L)}$$

$$S_2 = \frac{2\alpha^2 aEI \cosh \alpha L - 2\alpha^2 aEI + 2\alpha^2 aEI - 2\alpha^2 aEI \cosh \alpha L + \alpha^3 a^2 EI \sinh \alpha L}{L(2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha L \sinh \alpha L)}$$

Simplificando, resulta:

$$S_2 = \frac{\alpha^3 a^2 EI \operatorname{senh} \alpha L}{(2 - 2 \operatorname{cosh} \alpha L - \alpha \alpha L \operatorname{senh} \alpha L)} \quad (106)$$

Através das condições de equilíbrio dadas pela Equação (5), podemos fazer:

$$S_5 = S_3 L - S_4$$

Substituindo os valores de S_3 e S_4 , dados pelas equações (105) e (104), respectivamente, resulta:

$$S_5 = \frac{\alpha^2 a EI (\operatorname{cosh} \alpha L - 1)}{(2 - 2 \operatorname{cosh} \alpha L + \alpha \alpha L \operatorname{senh} \alpha L)} L - \frac{\alpha EI (\alpha \alpha L \operatorname{cosh} \alpha L - \operatorname{senh} \alpha L)}{(2 - 2 \operatorname{cosh} \alpha L + \alpha \alpha L \operatorname{senh} \alpha L)}$$

Assim, tem-se:

$$S_5 = \frac{\alpha^2 a EIL \operatorname{cosh} \alpha L - \alpha^2 a EIL - \alpha^2 a EIL \operatorname{cosh} \alpha L + \alpha EI \operatorname{senh} \alpha L}{(2 - 2 \operatorname{cosh} \alpha L + \alpha \alpha L \operatorname{senh} \alpha L)}$$

Simplificando, tem-se:

$$S_5 = \frac{\alpha EI (\operatorname{senh} \alpha L - \alpha \alpha L)}{(2 - 2 \operatorname{cosh} \alpha L + \alpha \alpha L \operatorname{senh} \alpha L)} \quad (107)$$

ANEXO B

MANUAL DE INSTRUÇÕES DO PROGRAMA

Dissertação de mestrado: *Análise numérica de segunda ordem de pórticos planos de estruturas de aço.*

Autor: Eng.º Giles Bortolon Leitão

Orientador: Prof. Dr. João Alberto Venegas Requena

Nome do programa: pórtico.exe

Tela de entrada do programa:

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS – UNICAMP
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

PROGRAMA DE ANALISE DE SEGUNDA ORDEM DE PORTICOS PLANOS
AUTOR: GILES BORTOLON LEITAO

ENTRE COM O NOME DO ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS: *
ENTRE COM O NOME DO ARQUIVO DE SAIDA DOS RESULTADOS: *

OPCOES DE CALCULO:
(1) CALCULO EM TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM
(2) CALCULO EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM
(3) CALCULO DE INSTABILIDADE

DIGITE A OPCAO DESEJADA:

DIGITE A TOLERANCIA DESEJADA: (apenas para o cálculo de instabilidade)
DIGITE O NUMERO MAXIMO DE CICLOS DESEJADO: (apenas para o cálculo de instabilidade)

*Usar para arquivo de entrada a extensão .dat e para arquivo de saída .txt.

ARQUIVO DE ENTRADA:

ANÁLISE DE PÓRTICOS PLANOS

DADOS DA ESTRUTURA

NNO NBAR NNR NMAT NNC NBC NPAV

COORDENADAS DOS NÓS

NO X(J) Y(J)

RESTRIÇÕES DOS NÓS

NO RX RY RZ

DADOS DAS BARRAS

BARRA	NOINI	NOFINE	A	lx	G	fy	fu	d	bf	tw	tf
h	d'	rx	ry	ly	Z	J	W	TRAV.			

CARGAS APLICADAS NOS NÓS

NO Fx Fy Fz

CARGAS APLICADAS NAS BARRAS

BARRA wx1 wy1 wx2 wy2

CARGA GRAVITACIONAL DOS PAVIMENTOS

PAV NO CGRAV

*Clicar na tecla TAB para preencher as colunas.

Significado das siglas do arquivo de entrada:

DADOS DA ESTRUTURA:

NNO: número de nós

NBAR: número de barras

NNR: número de nós com restrições

NMAT: número de materiais

NNC: número de nós com cargas

NBC: número de barras com cargas

NPAV: número de pavimentos

COORDENADAS DOS NOS:

Repetir até NNO:

NO: número do nó

X(J): Coordenada X do nó

Y(J): Coordenada Y do nó

RESTRICOES DOS NOS:

Repetir até NNR:

NO: número do nó restringido

RX: Restrição em X (translação horizontal)

RY: Restrição em Y (translação vertical)

RZ: Restrição em Z (rotação)

DADOS DAS BARRAS:

Repetir até NBAR:

BARRA: número da barra

NOINI: número do nó inicial

NOFIN: número do nó final

E: módulo de elasticidade longitudinal do material da barra

A: área da seção transversal da barra

Ix: momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo x

G: módulo de elasticidade transversal do material da barra

fy: resistência ao escoamento do aço

fu: resistência à ruptura do aço à tração

d: altura total da seção transversal

bf: largura da mesa

tw: espessura da alma

tf: espessura da mesa

h: altura da alma

d': altura da alma descontando-se os dois raios de concordância entre a mesa e a alma de perfis laminados

rx: raio de giração da seção em relação ao eixo principal de inércia paralelo ao eixo de flexão

ry: raio de giração da seção em relação ao eixo principal de inércia perpendicular ao eixo de flexão

Iy: momento de inércia da seção em relação ao eixo que passa pelo plano médio da alma

Z: módulo de resistência plástico

J: constante de torção da seção transversal

W: módulo de resistência elástico da seção, relativo ao eixo de flexão

TRAV.: número de travamentos da barra à FLT

CARGAS APLICADAS NOS NÓS

Repetir até NNC:

NO: número do nó com carga aplicada

Fx: Carga aplicada no nó na direção X

Fy: Carga aplicada no nó na direção Y

Fz: Momento aplicado no nó

CARGAS APLICADAS NAS BARRAS (distribuídas)

Repetir até NBC:

BARRA: número da barra com carga aplicada

wx1: Carga aplicada no início da barra na direção X

wy1: Carga aplicada no início da barra na direção Y

wx2: Carga aplicada no final da barra na direção X

wy2: Carga aplicada no final da barra na direção Y

CARGA GRAVITACIONAL DOS PAVIMENTOS

Repetir até NPAV:

PAV: Número do pavimento

NO: Número do nó para aplicação da carga nocional do pavimento
CGRAV: Somatório das cargas gravitacionais do pavimento

ARQUIVO DE SAÍDA:

ANÁLISE DE PÓRTICOS PLANOS

DADOS DA ESTRUTURA

NNO NBAR NNR NMAT NNC NBC NPAV

COORDENADAS DOS NÓS

NO X(J) Y(J)

RESTRICÇÕES DOS NÓS

NO RX RY RZ

DADOS DAS BARRAS

BARRA	NOINI	NOFINE	A	lx	G	fy	fu	d	bf	tw	tf
h	d'	rx ry	ly	Z	J	W	TRAV.				

CARGAS APLICADAS NOS NÓS

NO Fx Fy Fz

CARGAS APLICADAS NAS BARRAS

BARRA wx1 wy1 wx2 wy2

CARGA GRAVITACIONAL DOS PAVIMENTOS

PAV NO CGRAV

RESULTADOS DO CÁLCULO DE PRIMEIRA ORDEM

DESLOCAMENTOS NO SISTEMA GLOBAL

NÓ Dx Dy Dz

ESFORÇOS NO FINAL DAS BARRAS

BARRA Am1 Am2 Am3 Am4 Am5 Am6

REAÇÕES DE APOIO

NÓ RX RY RZ

RESULTADOS DO CÁLCULO DE SEGUNDA ORDEM

DESLOCAMENTOS NO SISTEMA GLOBAL

NÓ Dx Dy Dz

CLASSIFICAÇÃO QUANTO À SENSIBILIDADE A DESLOCAMENTOS LATERAIS:

ESFORÇOS NO FINAL DAS BARRAS

BARRA Am1 Am2 Am3 Am4 Am5 Am6

RESULTADOS DO CÁLCULO DE SEGUNDA ORDEM

DESLOCAMENTOS NO SISTEMA GLOBAL

NÓ Dx Dy Dz

ESFORÇOS NO FINAL DAS BARRAS

BARRA Am1 Am2 Am3 Am4 Am5 Am6

REAÇÕES DE APOIO

NÓ RX RY RZ

RESULTADO DA VERIFICAÇÃO DOS PERFIS

RESUMO

BARRA RESULTADO VERIFICAÇÃO

RESULTADO DETALHADO

Significado das siglas do arquivo de saída:

O arquivo de saída repete todas as informações do arquivo de entrada e depois inclui os resultados do cálculo.

Para o cálculo de primeira ordem as seguintes informações são apresentadas:

RESULTADOS DO CÁLCULO DE PRIMEIRA ORDEM

DESLOCAMENTOS NO SISTEMA GLOBAL

NÓ: número do nó

Dx: deslocamento do nó no eixo X

Dy: deslocamento do nó no eixo Y

Dz: rotação do nó

ESFORÇOS NO FINAL DAS BARRAS

BARRA: número da barra

Am1: esforço axial no nó inicial da barra

Am2: esforço cortante no nó inicial da barra

Am3: momento fletor no nó inicial da barra

Am4: esforço axial no nó final da barra

Am5: esforço cortante no nó final da barra
Am6: momento fletor no nó final da barra

REAÇÕES DE APOIO

NÓ: número do nó
RX: reação de apoio na direção X
RY: reação de apoio na direção Y
RZ: reação de apoio na direção Z (momento fletor)

Para o cálculo de segunda ordem, além das informações anteriores, as seguintes informações são apresentadas:

RESULTADOS DO CÁLCULO DE SEGUNDA ORDEM (de 2ª ordem sem redução da rigidez para classificação quanto à sensibilidade a deslocamentos laterais)

DESLOCAMENTOS NO SISTEMA GLOBAL

NÓ: número do nó
Dx: deslocamento do nó no eixo X
Dy: deslocamento do nó no eixo Y
Dz: rotação do nó

CLASSIFICAÇÃO QUANTO À SENSIBILIDADE A DESLOCAMENTOS LATERAIS:
Informa se a estrutura é de pequena, média ou grande deslocabilidade.

ESFORÇOS NO FINAL DAS BARRAS

BARRA: número da barra
Am1: esforço axial no nó inicial da barra
Am2: esforço cortante no nó inicial da barra
Am3: momento fletor no nó inicial da barra
Am4: esforço axial no nó final da barra
Am5: esforço cortante no nó final da barra
Am6: momento fletor no nó final da barra

RESULTADOS DO CÁLCULO DE SEGUNDA ORDEM (de 2ª ordem com redução da rigidez)

DESLOCAMENTOS NO SISTEMA GLOBAL

NÓ: número do nó
Dx: deslocamento do nó no eixo X
Dy: deslocamento do nó no eixo Y
Dz: rotação do nó

ESFORÇOS NO FINAL DAS BARRAS

BARRA: número da barra
Am1: esforço axial no nó inicial da barra
Am2: esforço cortante no nó inicial da barra
Am3: momento fletor no nó inicial da barra
Am4: esforço axial no nó final da barra
Am5: esforço cortante no nó final da barra
Am6: momento fletor no nó final da barra

REAÇÕES DE APOIO

NÓ: número do nó
RX: reação de apoio na direção X
RY: reação de apoio na direção Y
RZ: reação de apoio na direção Z (momento fletor)

Para o cálculo de instabilidade, além dos resultados do cálculo de 1ª ordem, são apresentadas as seguintes informações:

RESULTADOS DO CÁLCULO DE SEGUNDA ORDEM

NUMERO DE CICLOS EXTERNO: número de iterações para a convergência do resultado

WCrit: o valor do parâmetro crítico de instabilidade

BARRA: número da barra
L: comprimento da barra
PCRIT: carga crítica da barra
PEULER: carga de Euler da barra
K: o valor do fator K da barra

RESULTADO DA VERIFICAÇÃO DOS PERFIS

RESUMO

BARRA: número da barra
RESULTADO: resultado expressão de interação entre força normal e momento fletor
VERIFICAÇÃO: assinala o resultado como OK ou NÃO OK

RESULTADO DETALHADO: resultado com todos os parâmetros utilizados na verificação dos perfis

Será apresentado o exemplo 3 da dissertação:

ARQUIVO DE ENTRADA: EXEMPLO3.DAT

ANÁLISE DE PÓRTICOS PLANOS

DADOS DA ESTRUTURA

NNO	NBAR	NNR	NMAT	NNC	NBC	NPAV
12	15	2	5	10	15	5

COORDENADAS DOS NÓS

NO	X(J)	Y(J)
1	0	0
2	0	600
3	900	0
4	900	600
5	0	950
6	900	950
7	0	1300
8	900	1300
9	0	1650
10	900	1650
11	0	2000
12	900	2000

RESTRIÇÕES DOS NÓS

NO	RX	RY	RZ
1	1	1	1
3	1	1	1

DADOS DAS BARRAS

BARRA	NOINI	NOFIN	E	A	lx	G	fy	fu	d	bf	tw	tf
	h	d'	rx	ry	ly	Z	J	W	TRAV.			
1	1	2	20000	201	79500	7700	34.5	45	47.6	28.4	1.5	2.39
	42.8	38.4	19.9	6.74	9140	3780	312	3350	0			
2	3	4	20000	201	79500	7700	34.5	45	47.6	28.4	1.5	2.39
	42.8	38.4	19.9	6.74	9140	3780	312	3350	0			
3	2	5	20000	144	63683	7700	34.5	45	46.7	28.2	1.22	1.96
	42.8	38.5	19.7	6.69	7330	3050	172	2730	0			
4	5	7	20000	144	63683	7700	34.5	45	46.7	28.2	1.22	1.96
	42.8	38.5	19.7	6.69	7330	3050	172	2730	0			
5	7	9	20000	144	63683	7700	34.5	45	46.7	28.2	1.22	1.96
	42.8	38.5	19.7	6.69	7330	3050	172	2730	0			
6	9	11	20000	144	63683	7700	34.5	45	46.7	28.2	1.22	1.96
	42.8	38.5	19.7	6.69	7330	3050	172	2730	0			
7	4	6	20000	144	63683	7700	34.5	45	46.7	28.2	1.22	1.96
	42.8	38.5	19.7	6.69	7330	3050	172	2730	0			
8	6	8	20000	144	63683	7700	34.5	45	46.7	28.2	1.22	1.96
	42.8	38.5	19.7	6.69	7330	3050	172	2730	0			
9	8	10	20000	144	63683	7700	34.5	45	46.7	28.2	1.22	1.96
	42.8	38.5	19.7	6.69	7330	3050	172	2730	0			
10	10	12	20000	144	63683	7700	34.5	45	46.7	28.2	1.22	1.96
	42.8	38.5	19.7	6.69	7330	3050	172	2730	0			
11	2	4	20000	87.6	29851	7700	34.5	45	45.9	15.4	0.91	1.54
	42.8	40.4	18.46	3.28	941	1495.4	52.29	1300.7	1			

12	5	6	20000	87.6	29851	7700	34.5	45	45.9	15.4	0.91	1.54
	42.8	40.4	18.46	3.28	941	1495.4	52.29	1300.7	1			
13	7	8	20000	66.6	21370	7700	34.5	45	45.0	15.2	0.76	1.08
	42.8	40.4	17.91	3.09	634	1095.9	21.79	949.8	1			
14	9	10	20000	66.6	21370	7700	34.5	45	45.0	15.2	0.76	1.08
	42.8	40.4	17.91	3.09	634	1095.9	21.79	949.8	1			
15	11	12	20000	57.7	12258	7700	34.5	45	35.2	17.1	0.69	0.98
	33.2	30.8	14.58	3.77	818	784.3	16.7	696.5	1			

CARGAS APLICADAS NOS NÓS

NO	Fx	Fy	Fz
2	32.76	-324	0
4	0	-324	0
5	26.88	-324	0
6	0	-324	0
7	29.4	-324	0
8	0	-324	0
9	31.08	-324	0
10	0	-324	0
11	23.52	-213.3	0
12	0	-213.3	0

CARGAS APLICADAS NAS BARRAS

BARRA	wx1	wy1	wx2	wy2
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	0	-0.25650		-0.2565
12	0	-0.25650		-0.2565
13	0	-0.25650		-0.2565
14	0	-0.25650		-0.2565
15	0	-0.19130		-0.1913

CARGA GRAVITACIONAL DOS PAVIMENTOS

PAV	NO	CGRAV
1	2	-878.85
2	5	-878.85
3	7	-878.85
4	9	-878.85
5	11	-598.77

ARQUIVO DE SAÍDA: EXEMPLO3.TXT

ANÁLISE DE PÓRTICOS PLANOS

DADOS DA ESTRUTURA

NNO	NBAR	NNR	NMAT	NNC	NBC	NPAV
12	15	2	5	10	15	5

COORDENADAS DOS NÓS

NO	X(J)	Y(J)
1	0	0
2	0	600
3	900	0
4	900	600
5	0	950
6	900	950
7	0	1300
8	900	1300
9	0	1650
10	900	1650
11	0	2000
12	900	2000

RESTRIÇÕES DOS NÓS

NO	RX	RY	RZ
1	1	1	1
2	0	0	0
3	1	1	1
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0
7	0	0	0
8	0	0	0
9	0	0	0
10	0	0	0
11	0	0	0
12	0	0	0

DADOS DAS BARRAS

BARRA	NOINI	NOFIN	E	A	Ix	G	fy	fu	d	bf	tw	tf
	h	d'	rx	ry	r	ly		Z		J	W	TRAV.
1	1	2	20000	201.00	79500	7700	34.50	45.00	47.60	28.40	1.50	2.39
	42.80	38.40	19.90	6.74	2.80	9140.00		3780.00		312.00	3350.00	0
2	3	4	20000	201.00	79500	7700	34.50	45.00	47.60	28.40	1.50	2.39
	42.80	38.40	19.90	6.74	2.80	9140.00		3780.00		312.00	3350.00	0
3	2	5	20000	144.00	63683	7700	34.50	45.00	46.70	28.20	1.22	1.96
	42.80	38.50	19.70	6.69	2.60	7330.00		3050.00		172.00	2730.00	0
4	5	7	20000	144.00	63683	7700	34.50	45.00	46.70	28.20	1.22	1.96
	42.80	38.50	19.70	6.69	2.60	7330.00		3050.00		172.00	2730.00	0
5	7	9	20000	144.00	63683	7700	34.50	45.00	46.70	28.20	1.22	1.96
	42.80	38.50	19.70	6.69	2.60	7330.00		3050.00		172.00	2730.00	0
6	9	11	20000	144.00	63683	7700	34.50	45.00	46.70	28.20	1.22	1.96
	42.80	38.50	19.70	6.69	2.60	7330.00		3050.00		172.00	2730.00	0
7	4	6	20000	144.00	63683	7700	34.50	45.00	46.70	28.20	1.22	1.96
	42.80	38.50	19.70	6.69	2.60	7330.00		3050.00		172.00	2730.00	0

8	6	8	20000	144.00	63683	7700	34.50	45.00	46.70	28.20	1.22	1.96	
	42.80	38.50	19.70	6.69	2.60	7330.00		3050.00		172.00	2730.00		0
9	8	10	20000	144.00	63683	7700	34.50	45.00	46.70	28.20	1.22	1.96	
	42.80	38.50	19.70	6.69	2.60	7330.00		3050.00		172.00	2730.00		0
10	10	12	20000	144.00	63683	7700	34.50	45.00	46.70	28.20	1.22	1.96	
	42.80	38.50	19.70	6.69	2.60	7330.00		3050.00		172.00	2730.00		0
11	2	4	20000	87.60	29851	7700	34.50	45.00	45.90	15.40	0.91	1.54	
	42.80	40.40	18.46	3.28	3.93	941.00		495.40		52.29	1300.70		1
12	5	6	20000	87.60	29851	7700	34.50	45.00	45.90	15.40	0.91	1.54	
	42.80	40.40	18.46	3.28	3.93	941.00		1495.40		52.29	1300.70		1
13	7	8	20000	66.60	21370	7700	34.50	45.00	45.00	15.20	0.76	1.08	
	42.80	40.40	17.91	3.09	3.79	634.00	1095.90		21.79		949.80	1	
14	9	10	20000	66.60	21370	7700	34.50	45.00	45.00	15.20	0.76	1.08	
	42.80	40.40	17.91	3.09	3.79	634.00	1095.90		21.79		949.80	1	
15	11	12	20000	57.70	12258	7700	34.50	45.00	35.20	17.10	0.69	0.98	
	33.20	30.80	14.58	3.77	4.43	818.00	784.30		16.70		696.50	1	

CARGAS APLICADAS NOS NÓS

NO	Fx	Fy	Fz
1	0.000000		0.000000
2	32.759998		-324.000000
3	0.000000		0.000000
4	0.000000		-324.000000
5	26.879999		-324.000000
6	0.000000		-324.000000
7	29.400000		-324.000000
8	0.000000		-324.000000
9	31.080000		-324.000000
10	0.000000		-324.000000
11	23.520000		-213.300003
12	0.000000		-213.300003

CARGAS APLICADAS NAS BARRAS

BARRA	wx1	wy1	wx2	wy2
1	0.000000		0.000000	
2	0.000000		0.000000	
3	0.000000		0.000000	
4	0.000000		0.000000	
5	0.000000		0.000000	
6	0.000000		0.000000	
7	0.000000		0.000000	
8	0.000000		0.000000	
9	0.000000		0.000000	
10	0.000000		0.000000	
11	0.000000		-0.256500	
12	0.000000		-0.256500	
13	0.000000		-0.256500	
14	0.000000		-0.256500	
15	0.000000		-0.191300	

CARGA GRAVITACIONAL DOS PAVIMENTOS

PAV	NO	CGRAV
1	2	878.85
2	5	878.85
3	7	878.85
4	9	878.85

5 11 598.77

RESULTADOS DO CÁLCULO DE PRIMEIRA ORDEM

DESLOCAMENTOS NO SISTEMA GLOBAL

NÓ	Dx	Dy	Dz
1	0.00000000	0.00000000	0.00000000
2	2.17607042	-0.28804562	-0.00513794
3	0.00000000	0.00000000	0.00000000
4	2.18746391	-0.32600961	-0.00398680
5	3.88326160	-0.47403908	-0.00459941
6	3.87275514	-0.53319740	-0.00388407
7	5.40860369	-0.61111892	-0.00420183
8	5.39860365	-0.68249413	-0.00340355
9	6.66176660	-0.69766154	-0.00327813
10	6.66079103	-0.77552339	-0.00261468
11	7.66730603	-0.73300249	-0.00326191
12	7.61032785	-0.81294962	-0.00164012

ESFORÇOS NO FINAL DAS BARRAS

BARRA	Am1	Am2	Am3	Am4	Am5	Am6
1	1929.91	56.06	30434.78	-1929.91	-56.06	3203.70
2	2184.26	87.58	36837.77	-2184.26	-87.58	15707.74
3	1530.46	1.12	-1762.89	-1530.46	-1.12	2156.58
4	1127.97	-5.30	-2374.74	-1127.97	5.30	518.83
5	712.12	-19.90	-6844.31	-712.12	19.90	-121.57
6	290.81	-49.54	-8728.32	-290.81	49.54	-8610.22
7	1704.86	109.76	18833.34	-1704.86	-109.76	19580.98
8	1228.50	89.30	13879.32	-1228.50	-89.30	17376.59
9	765.50	74.50	10167.23	-765.50	-74.50	15908.66
10	307.96	73.06	9238.81	-307.96	-73.06	16331.73
11	-22.18	75.45	-1440.81	22.18	155.40	-34541.08
12	20.45	78.49	218.16	-20.45	152.36	-33460.30
13	14.80	91.85	6325.49	-14.80	139.00	-27543.82
14	1.44	97.32	8849.89	-1.44	133.53	-25147.47
15	73.06	77.51	8610.22	-73.06	94.66	-16331.73

REAÇÕES DE APOIO

NÓ	RX	RY	RZ
1	-56.06	1929.91	30434.78
2	0.00	0.00	0.00
3	-87.58	2184.26	36837.77
4	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00
6	0.00	0.00	0.00
7	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00
11	0.00	0.00	0.00
12	0.00	0.00	0.00

RESULTADOS DO CÁLCULO DE SEGUNDA ORDEM

DESLOCAMENTOS NO SISTEMA GLOBAL

NÓ	Dx	Dy	Dz
1	0.00000000	0.00000000	0.00000000
2	2.48284979	-0.28543146	-0.00581885
3	0.00000000	0.00000000	0.00000000
4	2.49436823	-0.32862377	-0.00465929
5	4.44217489	-0.47002017	-0.00521592
6	4.43170455	-0.53721631	-0.00450095
7	6.18032280	-0.60634635	-0.00470706
8	6.17042971	-0.68726670	-0.00390675
9	7.59160068	-0.69251377	-0.00362876
10	7.59072912	-0.78067115	-0.00296560
11	8.71003681	-0.72774056	-0.00354240
12	8.65303300	-0.81821156	-0.00191749

CLASSIFICAÇÃO QUANTO À SENSIBILIDADE A DESLOCAMENTOS LATERAIS:

###ESTRUTURA DE MÉDIA DESLOCABILIDADE###

ESFORÇOS NO FINAL DAS BARRAS

BARRA	Am1	Am2	Am3	Am4	Am5	Am6
1	1919.16	62.26	33333.65	-1919.16	-62.26	4019.46
2	2195.01	93.73	39722.92	-2195.01	-93.73	16513.48
3	1523.15	5.96	-1029.41	-1523.15	-5.96	3114.38
4	1123.82	-1.75	-1913.16	-1123.82	1.75	1299.14
5	709.94	-17.69	-6736.72	-709.94	17.69	545.92
6	290.11	-48.64	-8728.06	-290.11	48.64	-8297.51
7	1712.17	114.63	19575.92	-1712.17	-114.63	20544.19
8	1232.65	92.82	14335.25	-1232.65	-92.82	18153.06
9	767.68	76.72	10278.26	-767.68	-76.72	16574.04
10	308.66	73.96	9241.50	-308.66	-73.96	16644.78
11	-20.90	72.00	-2990.05	20.90	158.85	-36089.39
12	21.81	75.34	-1201.23	-21.81	155.51	-34879.44
13	16.10	89.88	5437.58	-16.10	140.97	-28431.32
14	2.76	95.83	8182.13	-2.76	135.02	-25815.54
15	73.96	76.81	8297.51	-73.96	95.36	-16644.78

RESULTADOS DO CÁLCULO DE SEGUNDA ORDEM

DESLOCAMENTOS NO SISTEMA GLOBAL

NÓ	Dx	Dy	Dz
1	0.00000000	0.00000000	0.00000000
2	3.49495699	-0.35345784	-0.00811122
3	0.00000000	0.00000000	0.00000000
4	3.50858471	-0.41411120	-0.00665895
5	6.25482883	-0.58237313	-0.00728665
6	6.24093449	-0.67667248	-0.00639264
7	8.69685549	-0.75177056	-0.00653722
8	8.68345397	-0.86524575	-0.00553560
9	10.67092961	-0.85896044	-0.00501419
10	10.66877961	-0.98252071	-0.00418567
11	12.22505291	-0.90283107	-0.00481667
12	12.15291651	-1.02960907	-0.00278526

ESFORÇOS NO FINAL DAS BARRAS

BARRA	Am1	Am2	Am3	Am4	Am5	Am6
1	1894.53	63.16	38711.51	-1894.53	-63.16	5890.89
2	2219.64	92.82	45076.41	-2219.64	-92.82	18319.46
3	1506.92	6.54	882.41	-1506.92	-6.54	5609.92
4	1115.12	-1.34	-1019.37	-1115.12	1.34	3294.95
5	705.62	-17.51	-6765.56	-705.62	17.51	2039.02
6	288.79	-48.68	-8866.84	-288.79	48.68	-7720.15
7	1728.40	114.05	21535.40	-1728.40	-114.05	23059.30
8	1241.35	92.41	15212.80	-1241.35	-92.41	20141.10
9	772.00	76.54	10257.15	-772.00	-76.54	18056.46
10	309.98	74.00	9114.03	-309.98	-74.00	17242.63
11	-21.22	63.62	-6773.30	21.22	167.23	-39854.86
12	21.64	67.80	-4590.55	-21.64	163.05	-38272.10
13	15.87	85.50	3470.62	-15.87	145.35	-30398.25
14	2.55	92.82	6827.83	-2.55	138.03	-27170.50
15	74.00	75.49	7720.15	-74.00	96.68	-17242.63

REAÇÕES DE APOIO

NÓ	RX	RY	RZ
1	-63.16	1894.53	38711.51
2	0.00	0.00	0.00
3	-92.82	2219.64	45076.41
4	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00
6	0.00	0.00	0.00
7	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00
11	0.00	0.00	0.00
12	0.00	0.00	0.00

RESULTADO DA VERIFICAÇÃO DOS PERFIS

RESUMO

BARRA	RESULTADO	VERIFICAÇÃO
1	0.83	OK
2	0.97	OK
3	0.45	OK
4	0.33	OK
5	0.16	OK
6	0.13	OK
7	0.67	OK
8	0.51	OK
9	0.37	OK
10	0.22	OK
11	0.85	OK
12	0.83	OK
13	1.01	NÃO OK
14	0.87	OK
15	0.76	OK

RESULTADO DETALHADO

(será mostrado apenas o resultado da barra 2, devido ao grande número de barras)

=====

BARRA 2

TRAVAMENTOS INTERMEDIÁRIOS = 0 Lb = 600.00cm Cw = 4670412cm⁶
NSd = -2219.64kN (COMPRESSÃO)
VSd = 92.82kN
MSd = 45076.41kN.cm

1. VERIFICAÇÃO AO ESFORÇO CORTANTE

lambda = 25.60
lambda_p = 59.22
lambda_r = 73.76
Aw = 71.40cm²
Vpl = 1477.98kN
VRd = 1343.62kN
VSd/VRd = 0.07 OK

2. VERIFICAÇÃO AO ESFORÇO AXIAL

Q = 1.00
Ne = 5011.57kN
lambda_0 = 1.176
X = 0.560
Nc,Rd = 3532.66kN
NSd/NRd = 0.63 OK

3. VERIFICAÇÃO AO MOMENTO FLETOR

Mpl = 130410.00kN.cm
Ma = -29227.44kN.cm
Mb = -13378.47kN.cm
Mc = 2470.49kN.cm
Mmáx = 45076.41kN.cm

Cb = 2.16

FLAMBAGEM LOCAL DA ALMA - FLA

lambda = 25.60
lambda_p = 90.53
lambda_r = 137.24
Mr = 115575.00kN.cm
MRd,FLA = 118554.55kN.cm

FLAMBAGEM LOCAL DA MESA - FLM

lambda = 5.94
lambda_p = 9.15
lambda_r = 737.05
Mr = 80902.50kN.cm
Mcr = 1047690.59kN.cm
MRd,FLM = 118554.55kN.cm

FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO - FLT

lambda = 89.02
lambda_p = 42.38
lambda_r = 143.58
Mr = 80902.50kN.cm
Mcr = 272055.83kN.cm
MRd,FLT = 118554.55kN.cm

$MRd = 118554.55 \text{ kN.cm}$

$MSd/MRd = 0.38 \text{ OK}$

4.FORÇAS COMBINADAS

$NSd/NRd + 8/9(MSd/MRd) = 0.97 \text{ OK}$

=====