



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo**

**ELYSON ANDREW POZO LIBERATI**

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE LAJES LISAS DE  
CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À PUNÇÃO**

**CAMPINAS**

**2019**

**ELYSON ANDREW POZO LIBERATI**

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE LAJES LISAS DE  
CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À PUNÇÃO**

Tese de Doutorado apresentada a Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil, na área de Estruturas e Geotécnica.

**Orientador: Prof. Dr. Leandro Mouta Trautwein**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO OU TESE DEFENDIDA PELO ALUNO ELYSON ANDREW POZO LIBERATI E ORIENTADO PELO PROF. DR. LEANDRO MOUTA TRAUTWEIN.

ASSINATURA DO ORIENTADOR

---

**CAMPINAS**

**2019**

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** Não se aplica.

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Elizangela Aparecida dos Santos Souza - CRB 8/8098

L615a Liberati, Elyson Andrew Pozo, 1988-  
Análise de confiabilidade de lajes lisas de concreto armado submetidas à punção / Elyson Andrew Pozo Liberati. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Leandro Mouta Trautwein.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Concreto armado. 2. Lajes. 3. Lajes de concreto. 4. Resistência ao cisalhamento. 5. Confiabilidade. I. Trautwein, Leandro Mouta, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Reliability analysis of punching in reinforced concrete flat slabs

**Palavras-chave em inglês:**

Reinforced concrete

Slabs

Concrete slabs

Shear strength

Reliability

**Área de concentração:** Estruturas e Geotécnica

**Titulação:** Doutor em Engenharia Civil

**Banca examinadora:**

Leandro Mouta Trautwein [Orientador]

Edson Denner Leonel

Caio Gorla Nogueira

José Neres da Silva Filho

Gustavo Henrique Siqueira

**Data de defesa:** 24-01-2019

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Civil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E**  
**URBANISMO**

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE LAJES LISAS DE**  
**CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À PUNÇÃO**

**Elyson Andrew Pozo Liberati**

**Tese de Doutorado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:**

Prof. Dr. Leandro Mouta Trautwein  
**Presidente e Orientador – FEC/UNICAMP**

Prof. Dr. Edson Denner Leonel  
**Universidade de São Paulo (USP) – Campus São Carlos**

Prof. Dr. Caio Gorla Nogueira  
**Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho (UNESP) - Campus Bauru**

Prof. Dr. José Neres da Silva Filho  
**Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) - Natal**

Prof. Dr. Gustavo Henrique Siqueira  
**FEC/UNICAMP**

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

Campinas, 24 de janeiro de 2019

*Aos meus amados pais, José e Cleuza, e  
à minha querida esposa Amanda.*

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar à Deus, que é lâmpada para os meus pés e luz para os meus caminhos, força maior para prosseguir.

Aos meus pais, José e Cleuza, por todos os ensinamentos e exemplos de vida que me deram e pelo incentivo constante em meu aprimoramento profissional. Também aos meus irmãos e demais familiares, por todo amor e alegria compartilhados.

A minha esposa Amanda Fonteque Giozet pelo apoio, incentivo, compreensão, confiança, carinho e companheirismo em todos os momentos.

Ao meu orientador, professor Leandro Mouta Trautwein, pela sua permanente colaboração, incentivo, acompanhamento e amizade.

Ao professor Edson Denner Leonel, pelas valiosas contribuições dadas a esta pesquisa. Sem dúvida, a conclusão e a qualidade deste trabalho não seriam alcançadas sem a sua participação.

Ao professor Ronaldo Barros Gomes, pelas contribuições de grande valor desde o início do programa experimental.

Ao professor Luiz Carlos de Almeida, por suas valiosas contribuições, desde a idealização dos ensaios e pela atenção e disponibilidade em dirimir as dúvidas que apareceram no decorrer do trabalho.

Aos membros da banca examinadora, meus agradecimentos pela inestimável colaboração para o aperfeiçoamento do conteúdo desta tese.

Aos amigos conquistados no período de doutoramento que tanto me ajudaram na pesquisa e na execução dos ensaios, Marília Gonçalves Marques, Diego da Silva Lourenço, Carlos Alberto Benedetty Torres e Leonardo Henrique Borges de Oliveira.

Aos técnicos do Laboratório de Estruturas da FEC-UNICAMP Luciano Passos e Marcelo Francisco Ramos, pela disponibilidade e dedicação no período dos ensaios experimentais.

Aos professores e demais funcionários da FEC-UNICAMP, pela dedicação e auxílio durante minha formação.

A Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Apucarana, por conceder redução de carga horária e posterior afastamento total das atividades na universidade para o término deste trabalho.

A Arcelormittal Brasil S.A. pela doação das barras de aço utilizadas nesta pesquisa.

Enfim, a todos que, embora não citados, colaboraram também com meu crescimento cultural, social e profissional no decorrer destes anos de estudo e dedicação.

*“Eu irei adiante de ti, e endireitarei os caminhos tortuosos; quebrarei as portas de bronze, e despedaçarei os ferrolhos de ferro. Dar-te-ei os tesouros escondidos e as riquezas encobertas, para que saibas que eu sou o Senhor, o Deus de Israel, que te chama pelo teu nome.”*

*Isaías, 45:2-3*

## RESUMO

Nas últimas décadas, lajes lisas têm sido amplamente empregadas em edificações, principalmente devido a sua concepção, que permite aliar eficiência estrutural aos requisitos arquitetônicos. Entretanto, esse sistema estrutural está sujeito à punção, um modo de falha que ocorre por cisalhamento em elementos delgados submetidos à carga ou reação concentrada. O objetivo desta pesquisa foi aplicar os conceitos das teorias de probabilidade e de confiabilidade na avaliação dos modelos de dimensionamento de ligações laje-pilar submetidas à punção, verificando as probabilidades de falha e índices de confiabilidade para cada estado limite de punção. Nove lajes lisas quadradas com 1800 mm de lado e com 130 mm de espessura foram ensaiadas até a ruptura, a fim de se verificar o comportamento desse sistema estrutural com ou sem a presença de aberturas. Além disso, os ensaios experimentais possibilitaram a obtenção dos parâmetros estatísticos das variáveis de projeto consideradas nas análises de confiabilidade, como aquelas relacionadas à resistência dos materiais, algumas propriedades geométricas e a carga de ruptura da laje. Uma investigação de modelos analíticos de previsão da carga de ruptura desse sistema estrutural complementou o programa experimental. Foram analisadas quatro especificações de projeto: EUROCODE 2 (2004), CEB-FIP/MC (2010), ACI 318 (2014) e ABNT NBR 6118 (2014). O estudo envolveu 249 resultados experimentais de carga de ruptura de lajes lisas com diferentes características físicas e geométricas para que estatísticas da variável erro de modelo pudessem ser construídas. Os resultados obtidos foram comparados com aqueles determinados através da modelagem teórica de Marques (2018) implementada computacionalmente. Por fim, a determinação das probabilidades de falha e índices de confiabilidade foi realizado com o acoplamento de algoritmos de confiabilidade aos modelos mecânicos de previsão da carga de ruptura de lajes lisas de concreto armado descritos anteriormente. Os algoritmos utilizados foram o Método de Simulação de Monte Carlo (MCS) e o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM).

**Palavras-Chave:** Concreto armado. Punção. Erro de modelo. Confiabilidade estrutural.

## ABSTRACT

In last decades, flat slabs have been widely used in buildings, mainly due to their design, which aligns structural efficiency to the architectural requirements. However, this structural system is subject to punching, a failure mode that occurs by shearing in thin elements subjected to the load or concentrated reaction. The objective of this research was to apply the concepts of probability and reliability theories in the evaluation of the slab-column design models submitted to punching and also verify the probabilities of failure and reliability indexes for each punching limit state. Nine square slabs with 1,800 mm of side and 130 mm of thickness were tested until the rupture, in order to verify the behavior of this structural system with or without openings. In addition, the experimental tests allowed to obtain the statistical parameters of the design variables considered in the reliability analyzes, such as those related to the strength of the materials, some geometric properties and the load of rupture of the slab. An investigation of analytical models to predict the rupture load of this structural system complemented the experimental program. Four project specifications were analyzed: EUROCODE 2 (2004), CEB-FIP/MC (2010), ACI 318 (2014) and ABNT NBR 6118 (2014). The study involved 249 experimental results of load of rupture of flat slabs with different physical and geometric characteristics so that statistics of the model error variable could be constructed. The results were compared with those determined through the theoretical modeling of Marques (2018) computationally implemented. Finally, the determination of the probabilities of failure and reliability indexes was performed by coupling reliability algorithms to the mechanical models for predicting the load of rupture of flat slabs of reinforced concrete previously described. The algorithms used were the Monte Carlo Simulation Method (MCS) and the First Order Reliability Method (FORM).

**Keywords:** Reinforced concrete. Punching. Model error. Structural reliability.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 - Fenômeno de punção: (a) tipos de falha em uma laje lisa; (b) fases consecutivas para solicitação axissimétrica (pilar interno).....	29
Figura 1.2 - Comportamento da laje lisa submetida a punção.....	29
Figura 1.3 - Superfícies de ruptura em lajes lisas com armadura de cisalhamento.....	30
Figura 1.4 - Acidente estrutural durante a construção do Shopping Rio Poty .....	31
Figura 1.5 – Aberturas adjacentes ao pilar .....	31
Figura 2.1 - Disposição das aberturas nas lajes (medidas em mm).....	37
Figura 2.2 - Detalhe da armadura de cisalhamento (medidas em mm).....	37
Figura 2.3 - Modos de falha das lajes .....	39
Figura 2.4 - Armadura de cisalhamento das lajes L7 a L11 (medidas em mm).....	40
Figura 2.5 - Esquema de ensaio, vistas superior e lateral (unidades em mm).....	40
Figura 2.6 - Características das lajes ensaiadas (unidades em mm).....	41
Figura 2.7 - Características das lajes .....	43
Figura 2.8 - Superfícies de ruptura das lajes L3 e L4.....	44
Figura 2.9 - Características das lajes (unidades em mm) .....	45
Figura 2.10 - Detalhe dos studs utilizados nas lajes da Série 3, sendo: (a) Laje L45_AC1 e (b) Laje L45FFD_AC2 ( $\phi = 10,0$ mm) e demais lajes ( $\phi = 8,0$ mm), unidades em mm.....	46
Figura 2.11 - Características geométricas das lajes ensaiadas (unidades em mm).....	48
Figura 2.12 - Esquema de ensaio utilizado por Teng et al. (2004) (unidades em mm).....	49
Figura 2.13 - Pavimento tipo utilizado e esforços solicitantes .....	51
Figura 2.14 - Configuração das aberturas nas lajes (medidas em mm).....	52
Figura 2.15 - Detalhamento das armaduras (medidas em mm).....	53
Figura 2.16 - Disposição das aberturas nas lajes (medidas em mm).....	54
Figura 2.17 - Detalhe das armaduras utilizadas nos modelos (medidas em mm) .....	55
Figura 2.18 - Pórtico utilizado nos ensaios.....	55
Figura 2.19 - Configuração das aberturas nas lajes ensaiadas.....	57
Figura 2.20 - Padrão de fissuração em cada laje .....	57
Figura 2.21 - Características das lajes ensaiadas por Lourenço (2018) (unidades em mm).....	59
Figura 2.22 - Esquema de ensaio utilizado por Lourenço (2018) .....	60
Figura 2.23 - Perímetro de controle ( $u_l$ ).....	61
Figura 2.24 - Perímetro de controle junto de uma abertura.....	62
Figura 2.25 - Perímetros de controle para pilares internos.....	64

Figura 2.26 - Perímetro de controle ( $b_l$ ).....	65
Figura 2.27 - Perímetro de controle reduzido em função da presença de aberturas.....	65
Figura 2.28 - Consideração da armadura de cisalhamento.....	67
Figura 2.29 - Perímetro crítico afastado da última camada de armadura de cisalhamento. ....	69
Figura 2.30 - Perímetro de controle ( $b_0$ ).....	72
Figura 2.31 - Perímetro de controle para lajes com aberturas.....	72
Figura 2.32 - Perímetro de controle $b_{out}$ .....	73
Figura 2.33 - Perímetro crítico em pilares internos.....	74
Figura 2.34 - Disposição da armadura de punção em planta e contorno da superfície crítica C".....	74
Figura 2.35 - Perímetro crítico junto à abertura na laje.....	75
Figura 2.36 - Perímetros de controle para a verificação da punção nas normas de projeto.....	77
Figura 2.37 - Modelo de ruptura por punção.....	78
Figura 2.38 - Forças envolvidas no modelo.....	78
Figura 2.39 - Modelo proposto por Gomes (1991).....	83
Figura 2.40 - Forças envolvidas no modelo.....	84
Figura 2.41 - Tronco de pirâmide na face do pilar.....	85
Figura 2.42 - Diagrama de deformações do aço e do concreto.....	87
Figura 2.43 - Diagrama das forças da armadura de cisalhamento.....	92
Figura 2.44 - Modelo proposto por Marques (2018).....	98
Figura 2.45 - Determinação do intervalo $\Delta\theta$ para lajes com aberturas retangulares.....	99
Figura 2.46 - Determinação do intervalo $\Delta\theta$ para lajes com aberturas circulares.....	100
Figura 3.1 - Interpretação geométrica do Método de Newton-Raphson.....	110
Figura 3.2 - Fluxograma para cálculo da carga de ruptura através do programa <i>PunCalc</i> baseado no modelo de Marques (2018).....	123
Figura 4.1 - Pórtico hipotético caracterizando a situação estudada.....	126
Figura 4.2 - Características das lajes a serem estudadas (unidades em mm).....	127
Figura 4.3 - Extração e modelo de corpo de prova das lajes ensaiadas.....	129
Figura 4.4 - Concretagem das lajes da Série 3.....	130
Figura 4.5 - Corpos de prova moldados em cada etapa.....	130
Figura 4.6 - Ensaio de abatimento do tronco de cone.....	131
Figura 4.7 - Projeto das armaduras de flexão das lajes da Série 1 (medidas em mm).....	132
Figura 4.8 - Projeto das armaduras de flexão das lajes da Série 2 (medidas em mm).....	132

Figura 4.9 - Projeto das armaduras de flexão das lajes da Série 3 (medidas em mm) .....	133
Figura 4.10 - Esquema da armação das lajes da Série 1 .....	133
Figura 4.11 - Armação das lajes da Série 1 (a), Série 2 (b) e Série 3 (c) posicionadas nas formas metálicas .....	134
Figura 4.12 - Disposição dos LVDTs para medição dos deslocamentos verticais nas lajes ..	135
Figura 4.13 - Posicionamento dos LVDTs nas lajes .....	135
Figura 4.14 - Procedimento para a utilização de extensômetros nas barras de aço.....	136
Figura 4.15 - Identificação dos extensômetros nas armaduras de flexão da Série 1 (medidas em mm).....	137
Figura 4.16 - Identificação dos extensômetros nas armaduras de flexão da Série 2 (medidas em mm).....	137
Figura 4.17 - Identificação dos extensômetros nas armaduras de flexão da Série 3 (medidas em mm).....	138
Figura 4.18 - Posição e identificação dos extensômetros no concreto .....	138
Figura 4.19 - Disposição dos EERs na face comprimida do concreto para as lajes com duas aberturas.....	139
Figura 4.20 – Sistema de aplicação de carga nas lajes .....	140
Figura 4.21 – Esquema de ensaio (medidas em mm) .....	140
Figura 4.22 - Esquema de ensaio detalhado das lajes.....	141
Figura 5.1 – Ensaios de resistência à compressão simples (a), resistência à tração por compressão diametral (b) e módulo de elasticidade longitudinal (c) .....	143
Figura 5.2 - Dimensões das vigas entalhadas utilizadas (a) e ensaio de flexão em três pontos (b) .....	144
Figura 5.3 - Curvas “Carga <i>versus</i> CMOD” e “Carga <i>versus</i> Deslocamento vertical” dos corpos de prova nas etapas de concretagem.....	145
Figura 5.4 - Ensaio de tração axial da barra de aço com diâmetro de 12,5 mm.....	146
Figura 5.5 - Configurações das superfícies de rupturas das lajes da Série 1 (medidas em mm) .....	149
Figura 5.6 - Configurações das superfícies de rupturas das lajes da Série 2 (medidas em mm) .....	149
Figura 5.7 - Configurações das superfícies de rupturas das lajes da Série 3 (medidas em mm) .....	150
Figura 5.8 - Superfícies de rupturas das lajes da Série 1 .....	151

Figura 5.9 - Superfícies de rupturas de ruptura das lajes da Série 2.....	151
Figura 5.10 - Superfícies de rupturas de ruptura das lajes da Série 3.....	152
Figura 5.11 - Fissuração nas lajes da Série 1.....	153
Figura 5.12 - Fissuração nas lajes da Série 2.....	153
Figura 5.13 - Fissuração nas lajes da Série 3.....	154
Figura 5.14 - Deslocamentos verticais nas lajes da Série 1.....	155
Figura 5.15 - Deslocamentos verticais nas lajes das Séries 2 e 3.....	156
Figura 5.16 - Deslocamentos lidos nos LVDTs T12 ao T15 das lajes da Série 1.....	157
Figura 5.17 - Deslocamentos lidos nos LVDTs T12 ao T15 das lajes das Séries 2 e 3.....	158
Figura 5.18 - Comparação entre os deslocamentos verticais máximos das lajes.....	159
Figura 5.19 - Normalização da carga de ruptura dos modelos ensaiados.....	161
Figura 5.20 - Capacidade de dissipação de energia das lajes.....	162
Figura 5.21 - Rotações finais das lajes (a) e Rotações das lajes ensaiadas para o nível de carga igual a 150 kN (b).....	162
Figura 5.22 - Deformações das armaduras de flexão das lajes da Série 1.....	163
Figura 5.23 - Deformações das armaduras de flexão das lajes das Séries 2 e 3.....	164
Figura 5.24 - Deformações do concreto das lajes da Série 1.....	166
Figura 5.25 - Deformações do concreto das lajes das Séries 2 e 3.....	167
Figura 5.26 - Modelo de bielas e tirantes para punção.....	168
Figura 5.27 - Curvas “Carga de ruptura <i>versus</i> Rotação” das lajes da Série 1.....	171
Figura 5.28 - Curvas “Carga de ruptura <i>versus</i> Rotação” das lajes da Série 2.....	171
Figura 5.29 - Curvas “Carga de ruptura <i>versus</i> Rotação” das lajes da Série 3.....	172
Figura 6.1 - Histogramas tridimensional (a) e bidimensional (b) da resistência e sollicitação e domínios de falha e não-falha.....	185
Figura 6.2 - Problema fundamental de confiabilidade (interferência entre populações).....	187
Figura 6.3 - Efeito das dispersões entre $f_R(r)$ e $f_S(s)$ em $P_f$ .....	187
Figura 6.4 - Aproximação de primeira ordem - integração unidimensional.....	189
Figura 6.5 - Sorteio de pontos na simulação de Monte Carlo.....	193
Figura 6.6 - Representação gráfica do método FORM.....	195
Figura 6.7 - Sistema em série.....	198
Figura 6.8 - Sistema em paralelo.....	198
Figura 6.10 - Definição de sistemas em série e paralelo na análise de confiabilidade de estruturas pelo método FORM.....	199

Figura 7.1 - Avaliação dos resultados quanto à precisão ( $V_{exp}$ versus $V_{teo}$ ) para lajes sem aberturas.....	201
Figura 7.2 - Avaliação dos resultados quanto à precisão ( $V_{exp}$ versus $V_{teo}$ ) para lajes com aberturas.....	202
Figura 7.3 - Avaliação dos resultados quanto à segurança e à dispersão para lajes sem aberturas .....	203
Figura 7.4 - Avaliação dos resultados quanto à segurança e à dispersão para lajes com aberturas .....	203
Figura 7.5 –Análise de correlação da variável resposta $E_m$ de acordo com EUROCODE 2 (2004) .....	206
Figura 7.6 - Análise de correlação da variável resposta $E_m$ de acordo com CEB-FIP/MC (2010) .....	207
Figura 7.7 - Análise de correlação da variável resposta $E_m$ de acordo com ACI 318 (2014).207	
Figura 7.8 - Análise de correlação da variável resposta $E_m$ de acordo com ABNT NBR 6118 (2014) .....	207
Figura 7.9 - Análise de correlação da variável resposta $E_m$ de acordo com o programa <i>PunCalc</i> com $r_l = 1,35d$ .....	208
Figura 7.10 – Gráficos de resíduos em (a) e de probabilidade normal com envelope com grau de confiança de 95% em (b) para o modelo do EUROCODE 2 (2004).....	211
Figura 7.11 - Gráficos de resíduos em (a) e de probabilidade normal com envelope com grau de confiança de 95% em (b) para o modelo do CEB-FIP/MC (2010) .....	212
Figura 7.12 – Gráficos de resíduos em (a) e de probabilidade normal com envelope com grau de confiança de 95% em (b) para o modelo do ACI 318 (2014).....	212
Figura 7.13 - Gráficos de resíduos em (a) e de probabilidade normal com envelope com grau de confiança de 95% em (b) para o modelo da ABNT NBR 6118 (2014).....	213
Figura 7.14 – Gráficos de resíduos em (a) e de probabilidade normal com envelope com grau de confiança de 95% em (b) para o modelo do programa <i>PunCalc</i> para $r_l = 1,35d$ .....	213
Figura 7.15 - Análise de convergência das equações de estados limites da norma EUROCODE 2 (2004) .....	220
Figura 7.16 - Análise de convergência das equações de estados limites da norma CEB-FIP/MC (2010) .....	220
Figura 7.17 - Análise de convergência das equações de estados limites da norma ACI 318 (2014) .....	221

Figura 7.18 - Análise de convergência das equações de estados limites da norma ABNT NBR 6118 (2014) .....	221
Figura 7.19 - Análise de convergência da equação de estado limite do programa <i>PunCalc</i> ( $r_1 = 1,35d$ ).....	222
Figura B.1- Definição das variáveis para o cálculo da taxa de armadura de flexão .....	261
Figura C.1 - Mecanismos de ruptura para as lajes ensaiadas .....	263
Figura C.2 - Diagrama simplificado de tensões no concreto .....	264

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Características das lajes ensaiadas por Gomes e Andrade (1995).....	38
Tabela 2.2 - Características e cargas de ruptura das lajes ensaiadas por Silva (2003).....	41
Tabela 2.3 - Características das lajes ensaiadas por Souza (2004).....	43
Tabela 2.4 - Características das lajes ensaiadas por Borges (2004) .....	46
Tabela 2.5 - Características da armadura de cisalhamento e carga de ruptura das lajes .....	47
Tabela 2.6 – Resultados experimentais obtidos por Teng et al. (2004).....	50
Tabela 2.7 - Resultados obtidos nos ensaios .....	53
Tabela 2.8 - Resultados obtidos por Oukaili e Salman (2014).....	56
Tabela 2.9 - Valores de carga de ruptura e deslocamento vertical das lajes .....	58
Tabela 2.10 - Caracterização das lajes ensaiadas por Lourenço (2018).....	59
Tabela 2.11 - Valores obtidos nos ensaios .....	60
Tabela 2.12 – Comparação entre os códigos normativos para previsão da carga de ruptura de lajes lisas.....	77
Tabela 4.1 - Características das lajes.....	128
Tabela 5.1 - Propriedades mecânicas do concreto.....	143
Tabela 5.2 - Valores obtidos da energia de fratura do concreto .....	146
Tabela 5.3 - Propriedades mecânicas dos aços utilizados para a fabricação das lajes .....	147
Tabela 5.4 - Cargas e modos de ruptura observados .....	148
Tabela 5.5 - Cargas de fissuração visual das lajes.....	152
Tabela 5.6 - Flechas centrais em diferentes estágios de carga .....	160
Tabela 5.7 - Características físicas e geométricas das lajes ensaiadas .....	169
Tabela 5.8 - Resultados obtidos nas análises.....	169
Tabela 5.9 Comparação entre os resultados experimentais e computacionais .....	170
Tabela 5.10 - Perímetros de controle estimados para cada código de projeto.....	173
Tabela 5.11 - Estimativa da carga de ruptura por meio dos códigos de projeto.....	173
Tabela 5.12 - Comparação entre as cargas de ruptura experimentais e teóricas estimadas por meio dos códigos de projeto ( $V_{exp}/V_{teo}$ ) .....	174
Tabela 6.1 - Adaptação do critério de Collins (2001) - DPC .....	179
Tabela 6.2 - Relação de pesquisadores e quantidades de lajes contidos na Base de Dados deste trabalho .....	182
Tabela 6.3 - Equações de estados limites consideradas.....	185
Tabela 6.4 - Índices de confiabilidade alvo $\beta$ e respectivas taxas de falha associadas .....	190

Tabela 7.1 - Classificação segundo o critério de Collins (2001) para lajes sem aberturas ....	204
Tabela 7.2 - Classificação segundo o critério de Collins (2001) para lajes com aberturas ....	204
Tabela 7.3 - Estimativas dos parâmetros $\lambda_i$ .....	210
Tabela 7.4 – Probabilidades de significância .....	211
Tabela 7.5 – Variáveis aleatórias com as distribuições e parâmetros .....	219
Tabela 7.6 - Resultados das análises de confiabilidade por meio MCS .....	223
Tabela 7.7 - Resultados das análises de confiabilidade por meio do método FORM .....	224
Tabela B.1 - Cálculo da taxa de armadura das lajes .....	262
Tabela C.1 – Cálculo do momento resistente à flexão .....	265
Tabela D.1 - Base de dados com características de lajes ensaiadas por diversos autores .....	266
Tabela E.1 - Resultados da variável erro de modelo ( $E_m$ ) para EUROCODE 2 (2004) .....	277
Tabela E.2 - Resultados da variável erro de modelo ( $E_m$ ) para CEB-FIP/MC (2010) .....	284
Tabela E.3 - Resultados da variável erro de modelo ( $E_m$ ) para ACI 318 (2014) .....	290
Tabela E.4 - Resultados da variável erro de modelo ( $E_m$ ) para ABNT NBR (2014) .....	296
Tabela E.5 - Resultados da variável erro de modelo ( $E_m$ ) obtidos pelo programa <i>PunCalc</i> ( $r_1$ ajustado computacionalmente) .....	303
Tabela E.6 - Resultados da variável erro de modelo ( $E_m$ ) obtidos pelo programa <i>PunCalc</i> ( $r_1 = 1,35d$ ) .....	310

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A_c$	Área de concreto na qual a força radial é aplicada
$A_v$	Área da armadura de cisalhamento dentro do perímetro de controle
$A_{sw}$	Área da armadura de cisalhamento em uma camada ao redor do pilar
$b$	Largura da laje, perímetro do pilar
$b_u$	Diâmetro de um círculo com a mesma superfície da região do apoio ou área carregada
$b_0$	Perímetro de controle reduzido (CEB-FIP/MC, 2010)
$b_0$	Perímetro de controle localizado a uma distância de $0,5d$ a partir da face do pilar (ACI 318, 2014)
$b_1$	Distância do centro do pilar a face da abertura mais próxima ao pilar
$b_2$	Distância entre as faces da abertura
$C$	Coesão interna do concreto (Gomes, 1991)
$C$	Superfície crítica de contorno do pilar ou da carga concentrada (ABNT NBR 6118, 2014)
$C_E$	Confiabilidade Estrutural
$CV$	Coeficiente de variação
$C'$	Superfície crítica de contorno afastada $2d$ do pilar ou carga concentrada
$C''$	Superfície crítica de contorno afastada $2d$ da última camada da armadura de cisalhamento
$c_{máx}$	Maior dimensão da seção transversal do pilar
$c_{mín}$	Menor dimensão da seção transversal do pilar
$D$	Força de pino
$d, d_v$	Altura útil da laje
$d_g$	Diâmetro máximo do agregado
$d_{v, out}$	Distância entre a armadura de flexão e a extremidade inferior do ramo vertical da armadura de cisalhamento
$d_x$	Altura útil da laje medida na direção $x$
$d_y$	Altura útil da laje medida na direção $y$
$E_c$	Módulo de elasticidade longitudinal do concreto
$E_m$	Variável erro de modelo
$E_s$	Módulo de elasticidade longitudinal do aço
$E_{sw}$	Módulo de elasticidade longitudinal da armadura de cisalhamento

$e_u$	Excentricidade da resultante das forças de cisalhamento
$F_{cr}$	Força radial do concreto
$F_{ct}$	Força tangencial do concreto
$F_{cth}$	Força tangencial do concreto referente à abertura
$F_e$	Força da armadura de cisalhamento
$F_{sh}$	Força tangencial da armadura de flexão referente à abertura
$F_{sr}$	Força radial da armadura de flexão
$F_{st}$	Força tangencial da armadura de flexão
$f_c$	Resistência a compressão do concreto medida em corpos de prova cilíndricos
$f_{cd}$	Resistência de cálculo do concreto à compressão
$f_{ck}$	Resistência característica à compressão do concreto
$f_{bd}$	Resistência de aderência do concreto
$f_{sp}$	Resistência à compressão diametral do concreto
$f_{ct}$	Resistência a tração do concreto
$f_u$	Resistência na ruptura do aço da armadura
$F_X(x)$	Função de distribuição acumulada de probabilidades
$f_X(x)$	Função densidade de probabilidade da variável aleatória $X$
$f_y$	Resistência ao escoamento do aço da armadura de flexão
$f_{ywd}$	Resistência ao escoamento de projeto do aço da armadura de cisalhamento
$f_{ywd,ef}$	Resistência efetiva ao escoamento de projeto do aço da armadura de cisalhamento
$G(x), G_i$	Função de Estado Limite
$h$	Altura total da laje
$K$	Coefficiente de efeito de tamanho
$k_{in}$	Parâmetro de ruptura interna
$k_c$	Razão entre a tensão normal máxima e $f_c$
$k_{dg}$	Parâmetro que depende do diâmetro máximo do agregado graúdo
$k_e$	Coefficiente de excentricidade
$k_{sys}$	Coefficiente que leva em conta o desempenho do sistema à punção ( $k_{sys} = 2,0$ )
$k_x$	Razão entre a tensão média no bloco até o valor máximo
$k_\psi$	Parâmetro que depende da rotação da laje ao redor da área apoiada

$m_S$	Momento solicitante médio de cálculo por unidade de comprimento
$m_R$	Momento resistente de cálculo por unidade de comprimento
$n_{AB}$	Número de aberturas na laje
$P$	Carga de punção
$P_f$	Probabilidade de falha
$r$	Raio geral
$r_{contrib}$	Comprimento dentro do qual as armaduras de cisalhamento contribuem para a força $F_e$
$r_s$	Distância do centroide do pilar ao ponto onde o momento é zero
$r_0$	Raio do pilar
$r_1$	Raios de seção crítica de ruptura externa, situado a $1,35d$ da última camada de armadura de cisalhamento
$r_3$	Raio da laje
$r_{c0}$	Raio que a fissura de punção cruza a armadura de flexão
$r_y$	Raio de escoamento da armadura de flexão
$r_w$	Raio de punção
$r_{ec1}$	Raio na laje onde ocorre a deformação $\epsilon_{c1}$
$S_{gr}$	Gradiente de tensões na zona de ruptura
$s_0$	Distância radial entre a face do pilar e o primeiro elemento da armadura de cisalhamento
$s, s_r$	Distância radial entre elementos da armadura de cisalhamento
$u_1$	Perímetro de controle distante a $2d$ da área carregada
$u_0$	Perímetro do pilar
$u_{ext}, u_{out}$	Perímetro de controle afastado da última camada de armadura de cisalhamento
$V_{Ed}$	Força de cisalhamento atuante
$V_{exp}$	Carga de ruptura experimental
$V_{min}$	Força resistente mínima ao cisalhamento
$V_n$	Força nominal resistente
$V_c, V_{Rd,c}$	Força resistente à punção devido ao concreto
$V_s, V_{Rd,s}$	Força resistente à punção devido ao aço
$V_{Rd}, V_{Rd,cs}$	Força resistente à punção devido ao concreto e ao aço

$V_{Rd,cs,out}$	Força resistente à punção devido ao concreto na região externa à armadura de cisalhamento
$V_{Rd,máx}$	Força de cisalhamento máxima
$V_{Rd1}$	Força de cisalhamento resistente na superfície crítica $C'$
$V_{Rd2}$	Força de cisalhamento na superfície crítica $C$
$V_{Rd3}$	Força de cisalhamento resistente para lajes com armadura de cisalhamento
$V_{teo}$	Carga de ruptura teórica, obtida pelos códigos normativos
$V_{teo,m}$	Carga nominal resistente à punção calculada com base nos valores médios das variáveis aleatórias
$V_{teo}^*$	Carga nominal resistente à punção calculada no ponto de projeto
$V_u$	Força nominal atuante
$x$	Altura da linha neutra da laje
$z$	Braço de alavanca

## LETRAS GREGAS

$\alpha$	Ângulo de aplicação da força radial do concreto
$\alpha_e$	$E_s/E_c$
$\alpha_s$	Coefficiente relacionado ao posicionamento do pilar em relação à laje
$\beta$	Índice de confiabilidade
$\beta_e$	Ângulo da força da armadura de cisalhamento com o plano horizontal
$\beta_{ex}$	Coefficiente que leva em conta os efeitos da excentricidade da carga
$\beta_c$	Relação entre maior e menor dimensão da seção transversal do pilar
$\beta_0$	Coefficiente relacionado com a excentricidade da carga do pilar
$\gamma$	Ângulo de superfície com o mecanismo de ruptura interna
$\gamma_c$	Coefficiente de redução da resistência do concreto
$\gamma_P$	Coefficiente utilizado para lajes com aberturas que define o modo de ruptura
$\gamma_R$	Coefficiente de segurança para a resistência
$\gamma_S$	Coefficiente de segurança para a resistência
$\varepsilon$	Deformação normal do concreto
$\varepsilon_{cl}$	$0,85f_c/(4250f_c^{1/2})$
$\varepsilon_{cr}$	Deformação radial do concreto
$\varepsilon_{ct}$	Deformação tangencial do concreto

$\epsilon_{cu}$	Deformação do concreto na ruptura (0,0035)
$\epsilon_{sr}$	Deformação radial do aço
$\epsilon_{st}$	Deformação tangencial do aço
$\eta$	Gradiente de tensões do concreto atuantes na face do pilar
$\mu$	Coefficiente de atrito do concreto
$\mu_X$	Desvio-padrão da variável aleatória
$\zeta$	Efeito de tamanho ( <i>size effect</i> )
$\rho$	Taxa geométrica de armadura de flexão
$\rho_x$	Taxa geométrica de armadura de flexão medida na direção $x$
$\rho_y$	Taxa geométrica de armadura de flexão medida na direção $y$
$\sigma$	Tensão normal
$\sigma_{sw}$	Tensão do aço da armadura de cisalhamento
$\sigma_x$	Tensão normal na direção $x$
$\sigma_X$	Média da variável aleatória
$\sigma_y$	Tensão normal na direção $y$
$\sigma_{máx}$	Tensão normal máxima
$\tau$	Tensão de cisalhamento
$\tau_{xy}$	Tensão de cisalhamento no plano $xy$
$\chi$	Coefficiente de redução relativo à diferença entre as forças radiais exercidas pela armadura ortogonal e aquelas devidas às armaduras radial e circunferencial
$\psi$	Rotação da laje
$\Delta\theta$	Ângulo referente a posição da abertura na laje

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>28</b>
1.1 OBJETIVOS .....	32
1.2 JUSTIFICATIVA.....	33
1.3 ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA .....	34
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>36</b>
2.1 ESTUDOS REALIZADOS .....	36
2.2 RECOMENDAÇÕES DE CÓDIGOS DE PROJETO .....	61
<b>2.2.1 EUROCODE 2 (2004) .....</b>	<b>61</b>
<b>2.2.2 CEB-FIP/MC (2010) .....</b>	<b>64</b>
<b>2.2.3 ACI 318 (2014).....</b>	<b>71</b>
<b>2.2.4 ABNT NBR 6118 (2014).....</b>	<b>74</b>
<b>2.2.5 COMPARAÇÃO ENTRE OS CÓDIGOS DE PROJETO.....</b>	<b>76</b>
2.3 MODELOS TEÓRICOS .....	77
<b>2.3.1 Shehata (1985) .....</b>	<b>78</b>
2.3.1.1 Forças da armadura de flexão .....	79
2.3.1.2 Forças do concreto .....	80
2.3.1.3 Condições de equilíbrio .....	81
2.3.1.4 Critérios de ruptura .....	82
<b>2.3.2 Gomes (1991) .....</b>	<b>83</b>
2.3.2.1 Força radial do concreto ( $F_{cr}$ ).....	85
2.3.2.2 Força tangencial do concreto ( $F_{ct}$ ).....	86
2.3.2.3 Força tangencial da armadura de flexão ( $F_{st}$ ).....	90
2.3.2.4 Força radial da armadura de flexão ( $F_{sr}$ ) .....	91
2.3.2.5 Força da armadura de cisalhamento ( $F_e$ ) .....	91
2.3.2.6 Equações de equilíbrio.....	93
2.3.2.7 Critérios de ruptura .....	94
<b>2.3.3 Marques (2018).....</b>	<b>97</b>
2.3.3.1 Força radial do concreto ( $F_{cr}$ ).....	100
2.3.3.2 Força tangencial do concreto ( $F_{ct}$ ).....	101
2.3.3.3 Força tangencial do concreto devido a abertura ( $F_{cth}$ ).....	101
2.3.3.4 Força tangencial da armadura de flexão ( $F_{st}$ ).....	104
2.3.3.5 Força tangencial do aço devido a abertura ( $F_{sth}$ ) .....	104

2.3.3.6 Força radial da armadura de flexão ( $F_{sr}$ ) .....	105
2.3.3.7 Força da armadura de cisalhamento ( $F_e$ ) .....	105
2.3.3.8 Equações de equilíbrio.....	105
2.3.3.9 Critérios de ruptura.....	106
<b>3 PROGRAMA COMPUTACIONAL BASEADO NO MODELO TEÓRICO DE MARQUES (2018) .....</b>	<b>108</b>
3.1 METODOLOGIA IDEALIZADA PARA A PROGRAMAÇÃO .....	108
3.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON AO MODELO TEÓRICO DE MARQUES (2018) .....	109
<b>3.2.1 Derivada da força <math>F_{cr}</math> em relação a <math>x</math> (<math>\partial F_{cr}/\partial x</math>) .....</b>	<b>112</b>
<b>3.2.2 Derivada da força <math>F_{cr}</math> em relação a <math>\alpha</math> (<math>\partial F_{cr}/\partial \alpha</math>) .....</b>	<b>114</b>
<b>3.2.3 Derivada da força <math>\xi \cdot F_{cr} \cdot \cos \alpha</math> em relação a <math>\alpha</math> (<math>\partial F_{cr1}/\partial \alpha</math>) .....</b>	<b>115</b>
<b>3.2.4 Derivada da força <math>F_{ct}</math> em relação a <math>x</math> (<math>\partial F_{ct}/\partial x</math>) .....</b>	<b>116</b>
<b>3.2.5 Derivada da força <math>F_{cth}</math> em relação a <math>x</math> (<math>\partial F_{cth}/\partial x</math>) .....</b>	<b>117</b>
<b>3.2.6 Derivada das forças da armadura de flexão em relação a <math>x</math> .....</b>	<b>120</b>
<b>3.2.7 Derivada da força <math>F_{sth}</math> em relação a <math>x</math> (<math>\partial F_{sth}/\partial x</math>) .....</b>	<b>121</b>
3.3 FLUXOGRAMA DO PROGRAMA .....	122
<b>4 PROGRAMA EXPERIMENTAL .....</b>	<b>126</b>
4.1 CARACTERÍSTICAS DAS LAJES ENSAIADAS.....	127
4.2 MATERIAIS .....	129
<b>4.2.1 Concreto .....</b>	<b>129</b>
<b>4.2.2 Aço – Armaduras de flexão .....</b>	<b>131</b>
4.3 INSTRUMENTAÇÃO.....	134
<b>4.3.1 Deslocamento vertical da laje.....</b>	<b>135</b>
<b>4.3.2 Deformações específicas.....</b>	<b>136</b>
4.4 SISTEMA DE ENSAIO E CARREGAMENTO.....	139
<b>5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS .....</b>	<b>142</b>
5.1 PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS MATERIAIS .....	142
<b>5.1.1 Concreto .....</b>	<b>142</b>
<b>5.1.2 Aço .....</b>	<b>146</b>
5.2 CARGAS E MODOS DE RUPTURA .....	147
5.3 FISSURAÇÃO .....	152
5.4 DESLOCAMENTOS VERTICAIS DAS LAJES .....	154

5.5	DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA DAS ARMADURAS DE FLEXÃO.....	163
5.6	DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA DO CONCRETO.....	165
5.7	COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS EXPERIMENTAIS COM O PROGRAMA <i>PUNCALC</i> .....	168
5.8	COMPARAÇÃO ENTRE AS CARGAS DE RUPTURA EXPERIMENTAIS E ESTIMADAS POR INSTRUÇÕES NORMATIVAS.....	172
<b>6</b>	<b>CONFIABILIDADE ESTRUTURAL.....</b>	<b>175</b>
6.1	INCERTEZAS NA ENGENHARIA ESTRUTURAL.....	176
6.2	ANÁLISE DE ERRO DE MODELO.....	177
6.2.1	Equacionamento do Erro de Modelo ( $E_m$ ).....	178
6.2.2	Modelos Lineares Generalizados (MLG).....	180
6.3	REQUISITOS DE SISTEMAS ESTRUTURAIS.....	182
6.4	ESTADOS LIMITES.....	183
6.5	PROBABILIDADE DE FALHA.....	186
6.6	ÍNDICE DE CONFIABILIDADE.....	188
6.7	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO.....	191
6.8	MÉTODO DE CONFIABILIDADE DE PRIMEIRA ORDEM (FORM).....	194
6.8.1	Algoritmo para o cálculo do índice de confiabilidade.....	197
6.9	CONFIABILIDADE DE SISTEMAS.....	198
<b>7</b>	<b>RESULTADOS DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL.....</b>	<b>200</b>
7.1	ANÁLISE DE ERRO DE MODELO.....	200
7.1.1	Análise estatística da variável erro de modelo.....	200
7.1.2	Modelos Lineares Generalizados.....	209
7.2	ANÁLISE DE CONFIABILIDADE.....	214
7.2.1	Detalhamento das equações de estados limites baseadas nos códigos de projeto.....	214
7.2.2	Variáveis aleatórias.....	218
7.2.3	Probabilidades de falha e índices de confiabilidade.....	219
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>226</b>
8.1	ANÁLISE EXPERIMENTAL.....	226
8.2	ANÁLISE DE CONFIABILIDADE.....	228
8.3	SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DO TRABALHO.....	230
<b>9</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>231</b>

<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>239</b>
<b>APÊNDICE B.....</b>	<b>261</b>
<b>APÊNDICE C .....</b>	<b>263</b>
<b>APÊNDICE D .....</b>	<b>266</b>
<b>APÊNDICE E.....</b>	<b>277</b>

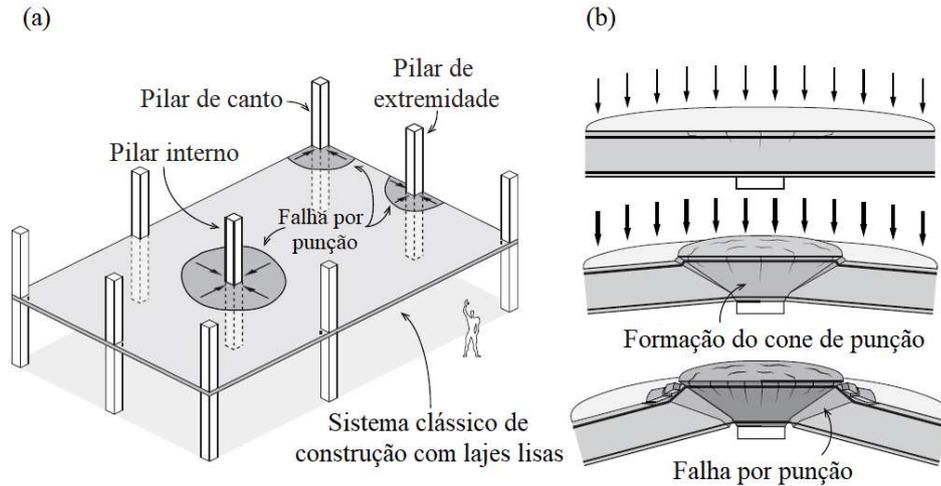
# 1 INTRODUÇÃO

As lajes planas, também chamadas de lisas, são estruturas laminares horizontais (maciças ou nervuradas) em concreto armado ou protendido que se apoiam rígida e diretamente em pilares, não existindo vigas para transferência dos esforços (FERREIRA, 2010; ABNT NBR 6118, 2014). A utilização de estruturas com lajes lisas tornou-se habitual há muitos anos.

Dentre as principais vantagens desse sistema estrutural estão: flexibilização do *layout*, diminuição da altura total do edifício, simplificação das armaduras e formas, diminuição da quantidade de formas e escoramento; maior facilidade no lançamento do concreto e menor carga na fundação, devido a diminuição do peso próprio.

Entretanto, algumas desvantagens podem ser observadas, fazendo com que o uso das lajes lisas tenha que ser bem estudado e comparado com outros tipos de lajes antes de sua adoção. As principais desvantagens das lajes lisas são: deslocamentos verticais maiores que do sistema estrutural convencional (considerando o mesmo vão) maiores momentos fletores na ligação laje-pilar, menor estabilidade global em relação a forças horizontais e risco de ruptura por punção na ligação laje-pilar, que pode levar ao colapso progressivo da estrutura no momento da redistribuição dos esforços após a ruptura por punção.

O fenômeno da punção é um modo de falha que ocorre por cisalhamento em elementos delgados submetidos à carga ou reação concentrada. Essa carga ou reação, aplicada transversalmente, provoca elevadas tensões de cisalhamento em torno de regiões relativamente pequenas podendo resultar na ruptura brusca do elemento estrutural (ALBUQUERQUE, 2010; OLIVEIRA, 2013). Brantschen (2016) afirma que esse fenômeno pode ocorrer em diferentes regiões de uma estrutura, dependendo das condições de carregamento e contorno, segundo demonstrado na Figura 1.1.

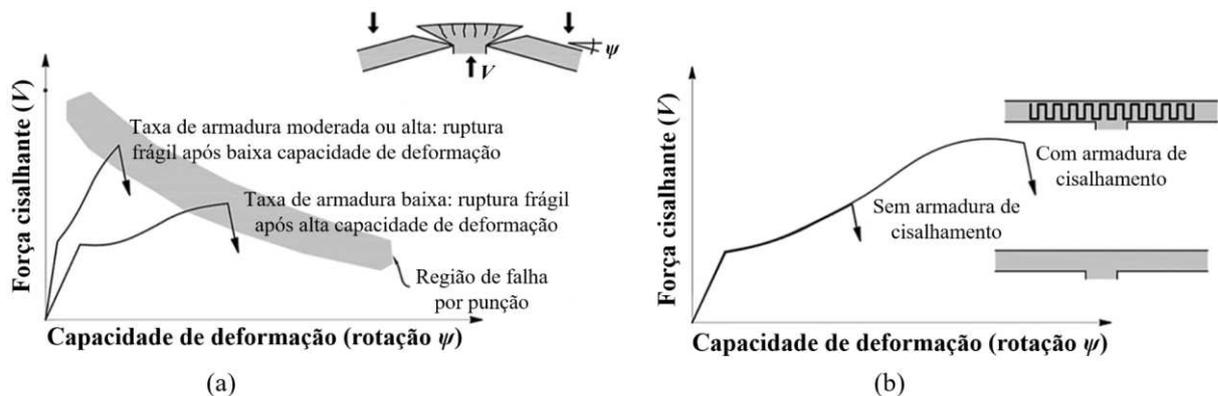


**Figura 1.1 - Fenômeno de punção: (a) tipos de falha em uma laje lisa; (b) fases consecutivas para solicitação axissimétrica (pilar interno)**

Fonte: Brantschen, 2016 - adaptado.

Ruiz, Mirzaei e Muttoni (2013) afirmam que a ruptura por punção pode levar a danos desproporcionais à severidade dos eventos causadores dos danos na estrutura. Esses autores afirmam ainda que, a robustez de uma estrutura garante que as falhas locais devido a ações inesperadas ou deficiências durante as etapas de projeto ou construção não se propaguem para outros elementos, levando ao colapso progressivo da estrutura.

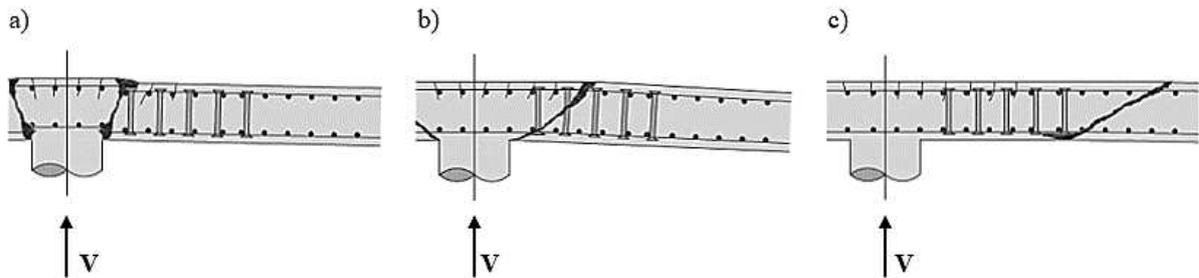
No que se refere às falhas por punçionamento, a robustez da estrutura é assegurada pela capacidade de deformação das lajes. Essa capacidade pode ser garantida com taxas de armadura de flexão suficientemente baixas (ainda maiores do que a taxa mínima de armadura de flexão) ou com a utilização de armadura de cisalhamento, segundo a Figura 1.2 (RUIZ, MIRZAEI e MUTTONI, 2013).



**Figura 1.2 - Comportamento da laje lisa submetida a punção**

Fonte: Ruiz, Mirzaei e Muttoni, 2013 – adaptado.

De acordo com Gomes (1991), as lajes lisas de concreto armado podem apresentar diferentes mecanismos de ruptura à punção, como pode ser verificado na Figura 1.3. Esses mecanismos podem se manifestar apenas em lajes com armadura de cisalhamento e são influenciados pela resistência do concreto, pela quantidade, pela disposição e pelo espaçamento dos elementos da armadura transversal.



**Figura 1.3 - Superfícies de ruptura em lajes lisas com armadura de cisalhamento**

Fonte: Gomes, 1991 - adaptado.

Com base na Figura 1.3, as superfícies de ruptura podem ser descritas, basicamente, como: (a) esmagamento da biela de compressão próxima ao pilar; (b) escoamento da armadura de cisalhamento com a superfície de ruptura localizada na região interna a esta armadura; (c) superfície de ruptura externa à região da armadura de cisalhamento. No caso de lajes sem essas armaduras, a ruptura pode ser classificada apenas como puncionamento.

Dentre os problemas que podem diminuir a resistência ao puncionamento de lajes lisas está a existência de aberturas nas regiões adjacentes ao pilar. Isso ocorre devido à diminuição da resistência ao cisalhamento provocada pela retirada de concreto e de armadura na abertura, reduzindo o perímetro crítico da laje (SOUZA, 2008; KOPPITZ, KENEL e KELLER, 2013).

A existência de aberturas pode ter sido a principal causa do acidente estrutural ocorrido durante a execução do Shopping Rio Poty, localizado em Teresina (Piauí), como apontado no relatório técnico elaborado pelo CREA-PI (2013). A Figura 1.4 apresenta as imagens da obra antes e após o acidente. De acordo com esse relatório, as aberturas dispostas próximas às quatro faces dos pilares (Figura 1.5) induziram maiores concentrações de tensões na ligação laje-pilar, comprometendo a resistência à punção das lajes.



**Figura 1.4 - Acidente estrutural durante a construção do Shopping Rio Poty**

Fonte: CREA-PI, 2013.



**Figura 1.5 – Aberturas adjacentes ao pilar**

Fonte: CREA-PI, 2013.

Segundo Oliveira (2013), a complexa distribuição dos esforços internos na pequena porção da laje próxima ao pilar, dificulta o desenvolvimento de equações analíticas para as tensões nessa região da laje. As normas de projeto, em geral, apresentam modelos de cálculo contra a punção, apresentando verificações que devem ser feitas nas ligações das lajes lisas para evitar esse fenômeno.

De modo geral, os modelos utilizados pelas normas consistem em definir uma tensão nominal de cisalhamento obtida pela razão entre a força de reação do pilar e a área de uma superfície de controle normal ao plano da laje situada ao redor da área carregada (RABELLO, 2010).

Com relação a essa área de carregamento, cada norma de projeto especifica suas próprias recomendações. Por consequência, o mesmo ocorre para o parâmetro de resistência do concreto, que se adequa de acordo com o traçado de cada área de carregamento, conhecida como perímetro ou superfície de controle. Isso resulta em diferentes previsões obtidas pelas normas, o que mostra que não se têm de fato um modelo de cálculo único e definitivo para a avaliação desse fenômeno (MARQUE e NOGUEIRA, 2018).

De acordo com Marque e Nogueira (2018), essa característica fica ainda mais evidenciada, uma vez que a superfície de controle é apenas uma grandeza de referência, não sendo necessariamente a superfície onde ocorre a ruptura. Em virtude das diferenças observadas nos modelos de previsão da resistência à punção de cada código de projeto, a obtenção de um parâmetro definido como erro de modelo que expressa a precisão desses modelos é de grande importância.

A teoria de confiabilidade aplicada à engenharia civil tem por hipótese que as incertezas nas variáveis básicas fundamentais de solicitação e resistência são inevitáveis. Dessa forma, os procedimentos de análise devem incluir métodos e conceitos probabilísticos para avaliar a importância dessas incertezas no projeto estrutural (NOWAK e COLLINS, 2000).

Silva (2011) afirma que considerar a aleatoriedade dos eventos físicos com o uso da estatística é a moderna tendência dos projetos e normas de engenharia. Entretanto, os conceitos probabilísticos ainda são pouco utilizados na engenharia pela falta de exemplos que mostrem como a metodologia pode ser utilizada no processo de tomada de decisão.

Diante disso, o emprego da confiabilidade estrutural, como método mais realista de verificação, vem a confirmar a segurança do sistema estrutural estudado neste trabalho, principalmente, quando da execução de aberturas nas lajes. Além disso, serve de base à adoção de coeficientes parciais de segurança para o método de cálculo semiprobabilístico, mais expedito e adequado à realidade de projetos.

## 1.1 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo aplicar os conceitos das teorias de probabilidade e de confiabilidade na avaliação dos modelos de dimensionamento de ligações laje-pilar submetidas à punção, verificando as probabilidades de falha e índices de confiabilidade para cada estado limite de punção. Como objetivos específicos, destacam-se:

- Implementar computacionalmente o modelo teórico de Marques (2018) para a estimativa da carga de ruptura de lajes com ou sem aberturas;
- Realizar ensaios em laboratório de modelos de lajes lisas submetidas a carregamento centrado, possibilitando avaliar o comportamento desses elementos sob influência de aberturas nas lajes;
- Determinar os valores de carga de ruptura obtidos por meio de recomendações normativas internacionais (EUROCODE 2, 2004; CEB-FIP/MC, 2010; ACI 318, 2014) e nacional (ABNT NBR 6118, 2014) e do modelo teórico de Marques (2018) das lajes ensaiadas nesta pesquisa, bem como por diversos pesquisadores;
- Realizar uma análise de erro de modelo a partir dos resultados obtidos segundo as equações contidas nos códigos e no modelo teórico descritos anteriormente.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

A resistência à punção de lajes lisas tem sido investigada por vários pesquisadores nos últimos anos. Contudo, apesar dos significativos avanços, as normas e códigos referentes a esse modo de falha, apresentam diferentes recomendações de projeto.

As aberturas em lajes lisas são frequentemente utilizadas para passagem de tubulações de água, esgoto, eletricidade, telefonia e outros. Muitas vezes, essas aberturas são localizadas adjacentes aos pilares, entretanto, Genikomsou e Polak (2017) afirmam que estudos sobre o comportamento da ligação laje-pilar com aberturas adjacentes ao pilar ainda são incipientes.

A segurança e o desempenho de um sistema estrutural são, invariavelmente, os principais objetivos técnicos de um projeto de engenharia. Devido a tais preocupações com a segurança, a confiabilidade estrutural está rapidamente crescendo em importância na engenharia de projetos.

Com o emprego da teoria da confiabilidade estrutural, as incertezas inerentes às variáveis de projeto poderão ser consideradas de maneira consistente a partir de distribuições estatísticas representativas dessas variáveis. Dessa forma, é possível verificar qual é o grau de segurança obtido pelos códigos de projetos na avaliação do efeito da punção em lajes lisas de concreto armado com ou sem aberturas.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA

Esta tese está dividida em nove capítulos e cinco apêndices. O Capítulo 2 traz uma revisão bibliográfica sobre os temas referidos na pesquisa. Na primeira parte, são apresentados trabalhos que discutem a influência de aberturas no comportamento de lajes lisas de concreto armado. Em seguida, são apresentados prescrições normativas e modelos teóricos para a determinação da carga de ruptura desse tipo de laje.

Os elementos utilizados para a programação computacional do modelo teórico proposto por Marques (2018) são apresentados no Capítulo 3, onde descreve-se o método de Newton-Raphson utilizado para a programação, os critérios de parada e os valores iniciais adotados para as variáveis envolvidas.

Uma descrição completa da análise experimental é apresentada no Capítulo 4, que contém as características físicas e geométricas das lajes e do sistema de ensaio desenvolvidos neste trabalho. São apresentados, também, detalhes da instrumentação utilizada para a coleta de dados.

No Capítulo 5 são apresentados e discutidos os resultados dos ensaios realizados. Na parte final desse capítulo, são feitas comparações entre esses resultados com valores estimados pelo modelo teórico e pelos códigos de projeto estudados nesta tese.

O Capítulo 6 aborda os conceitos de erro de modelo e confiabilidade estrutural de uma maneira geral. É feita uma breve discussão sobre a segurança estrutural e dos métodos considerados para determinação dos índices de confiabilidade e probabilidades de falha.

O Capítulo 7 traz os resultados das análises de erro de modelo alcançados a partir da base de dados criado com resultados experimentais de lajes estudadas por diversos pesquisadores. Por fim, é apresentado e discutido os resultados obtidos nas análises de confiabilidade.

O Capítulo 8 apresenta as conclusões obtidas com o desenvolvimento do trabalho e discute possíveis sugestões para pesquisas futuras. Ao final, são apresentadas as referências bibliográficas no Capítulo 9.

O Apêndice A traz o algoritmo implementado do programa *PunCalc* para a estimativa da carga de ruptura de lajes lisas de concreto armado com ou sem aberturas, como também, com a presença, ou não, de armadura de cisalhamento.

Os cálculos da taxa de armadura de flexão e da resistência à flexão das lajes lisas desta pesquisa são apresentados nos Apêndices B e C, respectivamente.

O Apêndice D contém a Base de Dados elaborada com as principais características de lajes lisas de concreto armado estudadas por diversos autores.

O Apêndice E apresenta os resultados obtidos da variável erro de modelo, sendo esses resultados utilizados nas análises estatísticas e de confiabilidade.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

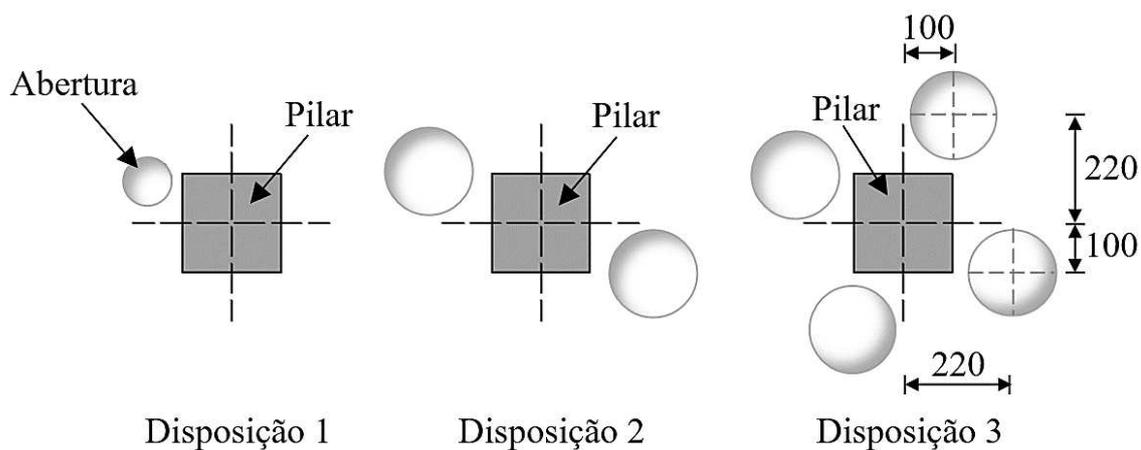
Diversas pesquisas têm sido realizadas sobre a resistência à punção em lajes lisas de concreto armado. Os principais assuntos discutidos nesses estudos são os tipos de armadura de cisalhamento e suas inclinações, o uso de concreto protendido, a existência de aberturas na laje, a utilização de fibras; utilização de concreto de alta resistência, entre outros. Neste capítulo serão apresentadas algumas pesquisas acerca do tema deste trabalho.

### 2.1 ESTUDOS REALIZADOS

Gomes e Andrade (1995) analisaram a contribuição da armadura de cisalhamento na forma de *studs* na resistência última de 16 (dezesseis) lajes lisas de concreto armado. As lajes apresentavam dimensões de 3.000 mm de lado e 200 mm de altura, aberturas de diâmetros variados próximas ao pilar, sendo este, simulado por uma placa metálica quadrada de 200 mm de lado. As principais variáveis na pesquisa foram a presença e tamanho das aberturas e o detalhamento da armadura de cisalhamento. As Figuras 2.1 e 2.2 mostram as disposições das aberturas circulares em torno do pilar e o detalhe dos *studs* utilizados pelos autores, nessa ordem.

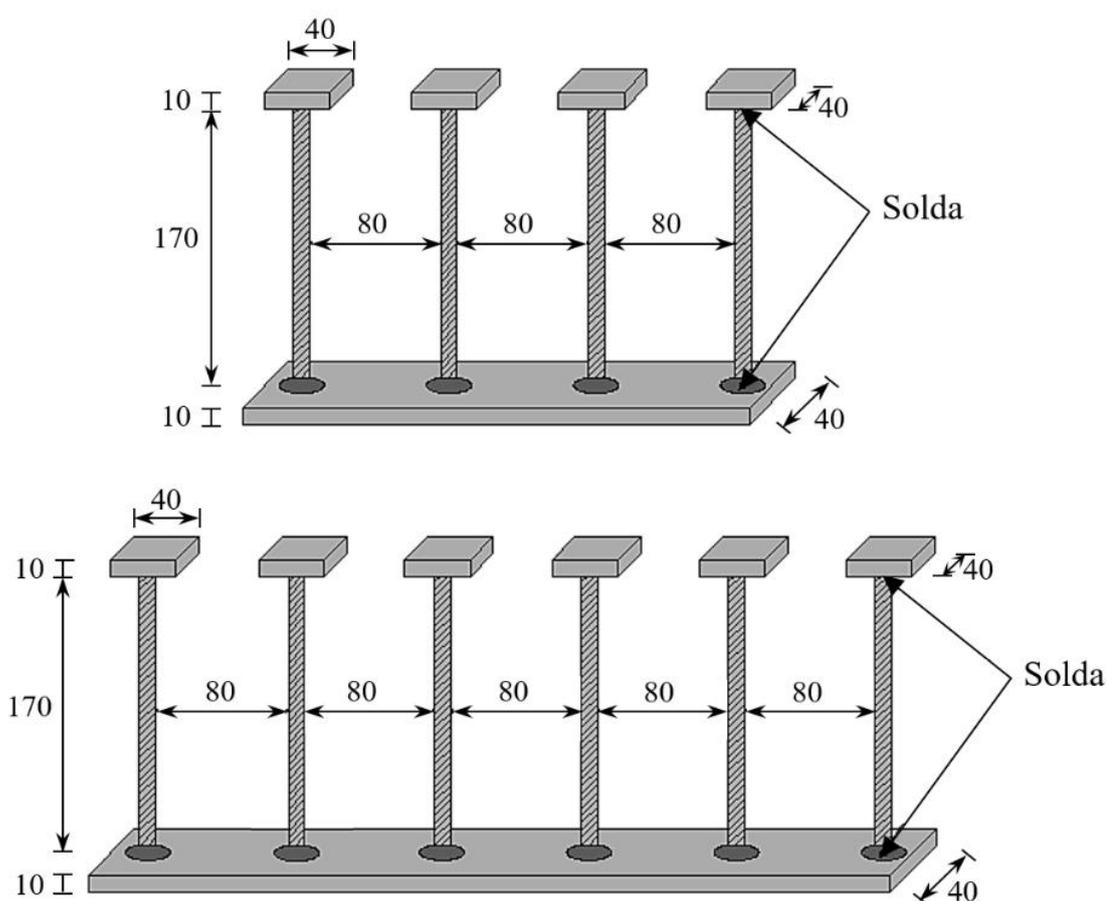
As lajes foram divididas em dois grupos: Grupo 1 – sem armadura de cisalhamento e Grupo 2 – com armadura de cisalhamento. Todas as lajes, exceto as lajes L12A e L16, tiveram aberturas posicionadas próximas ao pilar central. As lajes L13, L14, L17 e L18 possuíam uma abertura de 90 mm, 151 mm, 90 mm e 166 mm, respectivamente. As lajes L15, L19, L21 e L22 possuíam duas aberturas com diâmetro de 166 mm e as demais lajes, apresentavam quatro aberturas com diâmetro de 166 mm. Nas lajes L26, L27 foram utilizados quatro tubos de aço de 202 mm de diâmetro e 190 mm de altura, inseridos ao redor das aberturas.

A armadura de flexão foi mantida constante para todas as lajes, sendo que, a armadura negativa foi composta por uma malha ortogonal, constituída por 31 barras de 16,0 mm de diâmetro. A armadura de distribuição ou armadura positiva foi composta por malha ortogonal com 21 barras de 8,0 mm de diâmetro.



**Figura 2.1 - Disposição das aberturas nas lajes (medidas em mm)**

Fonte: Gomes e Andrade, 1995 - adaptado.



**Figura 2.2 - Detalhe da armadura de cisalhamento (medidas em mm)**

Fonte: Gomes e Andrade, 1995 – adaptado.

A Tabela 2.1 e a Figura 2.3 apresentam as características das lajes ensaiadas pelos autores. Na Tabela 2.1,  $s_0$  e  $s_r$  podem ser definidos, nessa ordem, como distância radial entre a face do pilar e o primeiro elemento da armadura de cisalhamento e distância radial da armadura de cisalhamento.

**Tabela 2.1 - Características das lajes ensaiadas por Gomes e Andrade (1995)**

Grupo	Laje	Aberturas		Armadura de Cisalhamento				
		Nº	Dimensão (mm)	Nº de Linhas	Nº de Camadas	$\phi$ (mm)	$s_0$ (mm)	$s_r$ (mm)
1	L12A	-	-	-	-	-	-	-
	L13	1	90	-	-	-	-	-
	L14	1	151	-	-	-	-	-
	L15	2	166	-	-	-	-	-
	L23	4	166	-	-	-	-	-
2	L16	-	-	8	4	10,0	80	80
	L17	1	90	8	4	10,0	80	80
	L18	1	166	8	4	10,0	80	80
	L19	2	166	8	4	10,0	80	80
	L20	4	166	8	4	10,0	80	80
	L24	4	166	8	4	10,0	40	80
	L25	4	166	8/8	6/3	10,0	80	80
	L26	4	166	8/8	6/3	10,0	80	80
	L27	4	166	8/8	10/5	10,0	80	80
	L21	2	166	8	6	10,0	80	80
L22	2	166	8	6	10,0	80	80	

Fonte: Gomes e Andrade, 1995.

A Figura 2.3 apresenta a seção transversal das lajes com a disposição da armadura de cisalhamento e a configuração das superfícies de ruptura das lajes ensaiadas por Gomes e Andrade (1995).

Os autores concluíram que a existência de aberturas reduz a resistência à punção de uma laje lisa de concreto armado em até 15,4% (L12A e L23), o que já era esperado. Entretanto, os resultados comprovaram que a utilização da armadura de cisalhamento em lajes com aberturas próximas ao pilar central pode permitir a recuperação de tal redução na resistência ao puncionamento. O ganho da carga de ruptura chegou a ser de 42% para a laje L20 em comparação com L23.

Esta pesquisa possibilitou demonstrar ainda que, a existência de aberturas próximas ao pilar pode alterar o mecanismo de ruptura. O aumento de duas aberturas na L20 em referência à laje L19 foi, provavelmente, a razão da mudança da posição da superfície de ruptura de externa à armadura de cisalhamento para interna, o que acarretou na redução da carga de ruptura em L20.

		$V_{exp}$ (kN)	Modo de Ruptura
$d = 163$ mm $f_c = 36,5$ MPa	Laje 12A sem aberturas $A_{sef,y}/camada = 0$ Pilar Superfície de ruptura	650	Punção
$d = 153$ mm $f_c = 31,4$ MPa	Laje 13 - 1 abertura $\phi = 90$ mm $A_{sef,y}/camada = 0$ Abertura	600	Punção
$d = 155$ mm $f_c = 31,4$ MPa	Laje 14 - 1 abertura $\phi = 151$ mm $A_{sef,y}/camada = 0$	556	Punção
$d = 148$ mm $f_c = 27,8$ MPa	Laje 15 - 2 aberturas $\phi = 166$ mm $A_{sef,y}/camada = 0$	554	Punção
$d = 156$ mm $f_c = 34,6$ MPa	Laje 16 sem aberturas Studs $A_{sef,y}/camada = 314,2$ kN	1.140	Externa
$d = 166$ mm $f_c = 34,1$ MPa	Laje 17 - 1 abertura $\phi = 90$ mm $A_{sef,y}/camada = 314,2$ kN	1.096	Externa
$d = 165$ mm $f_c = 36,8$ MPa	Laje 18 - 1 abertura $\phi = 166$ mm $A_{sef,y}/camada = 314,2$ kN	992	Externa
$d = 165$ mm $f_c = 36,6$ MPa	Laje 19 - 2 aberturas $\phi = 166$ mm $A_{sef,y}/camada = 314,2$ kN	1.010	Externa
$d = 159$ mm $f_c = 33,8$ MPa	Laje 20 - 4 aberturas $\phi = 166$ mm $A_{sef,y}/camada = 314,2$ kN	780	Interna
$d = 165$ mm $f_c = 36,3$ MPa	Laje 21 - 2 aberturas $\phi = 166$ mm $A_{sef,y}/camada = 201,1$ kN	896	Interna
$d = 164$ mm $f_c = 34,5$ MPa	Laje 22 - 2 aberturas $\phi = 166$ mm $A_{sef,y}/camada = 113,1$ kN	832	Interna
$d = 160$ mm $f_c = 36,4$ MPa	Laje 23 - 4 aberturas $\phi = 166$ mm $A_{sef,y}/camada = 0$	550	Punção
$d = 161$ mm $f_c = 35,0$ MPa	Laje 24 - 4 aberturas $\phi = 166$ mm $A_{sef,y}/camada = 314,2$ kN	890	Externa
$d = 160$ mm $f_c = 34,2$ MPa	Laje 25 - 4 aberturas $\phi = 166$ mm $A_{sef,y}/camada = 314,2/628,3$ kN	900	Interna
$d = 169$ mm $f_c = 36,7$ MPa	Laje 26 - 4 aberturas $\phi = 166$ mm $A_{sef,y}/camada = 157,1/628,3$ kN Tubo de aço	985	Externa
$d = 169$ mm $f_c = 30,7$ MPa	Laje 27 - 4 aberturas $\phi = 166$ mm $A_{sef,y}/camada = 157,1/628,3$ kN Tubo de aço	985	Flexão

**Figura 2.3 - Modos de falha das lajes**

Fonte: Gomes e Andrade (1995) - adaptado.

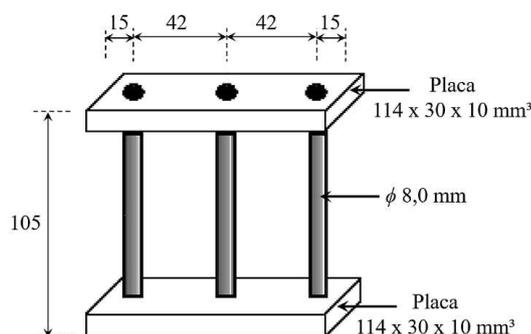
Silva (2003) estudou a influência da relação entre a maior e menor dimensão do pilar ( $c_{m\acute{a}x}/c_{m\acute{i}n}$ ), bem como da presença de aberturas na resistência à punção de lajes lisas de concreto armado. Para isso, foram ensaiadas até a ruptura doze lajes quadradas com dimensão

de 1.800 mm de lado e 130 mm de altura ( $d = 90$  mm), resistência do concreto à compressão ( $f_c$ ) em torno de 40 MPa e carregamento concêntrico.

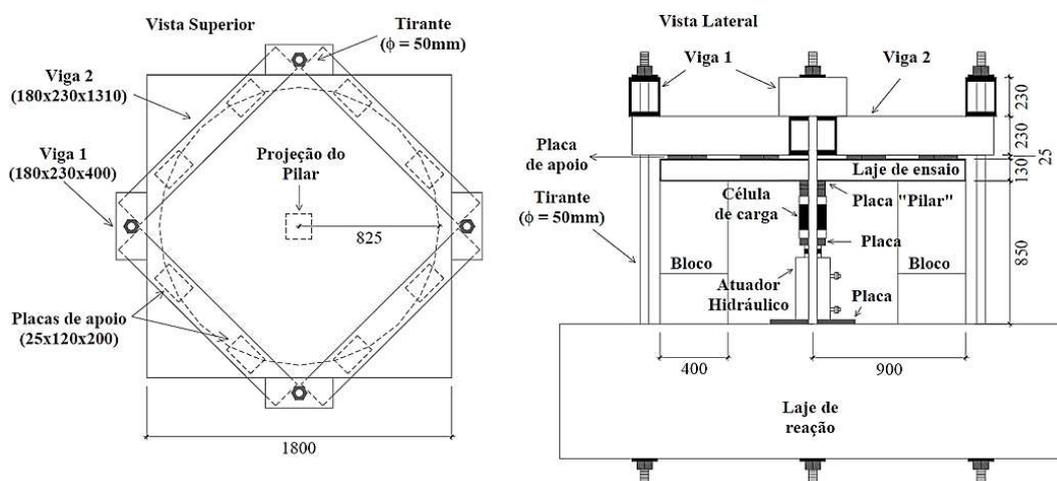
As lajes foram divididas em quatro grupos, sendo a principal variável de cada grupo, a relação entre lados do pilar: Grupo 1 – L1, L2, L3 e L12, lajes monolíticas sem aberturas e sem armadura de cisalhamento; Grupo 2 – L4, L5 e L6, lajes com aberturas; Grupo 3 – L7, L8 e L9, lajes com armadura de cisalhamento e Grupo 4 – L10 e L11, lajes com aberturas e armadura de cisalhamento.

A armadura de cisalhamento utilizada nas lajes L7, L8, L9, L10 e L11 foi composta de elementos de aço interconectados por chapas, também de aço, nas suas extremidades (*studs*). Os *studs* foram compostos por vergalhões de aço CA-50 ( $\phi = 8$  mm e comprimento de 105 mm) soldados, em suas extremidades, a chapas de aço de 30 mm de largura e 10 mm de espessura, como demonstrado na Figura 2.4.

A Figura 2.5 demonstra o sistema de ensaio utilizado pelo autor e as principais características das lajes ensaiadas e as cargas de ruptura podem ser observadas na Tabela 2.2 e na Figura 2.6.



**Figura 2.4 - Armadura de cisalhamento das lajes L7 a L11 (medidas em mm)**  
Fonte: Silva, 2003 - adaptado.



**Figura 2.5 - Esquema de ensaio, vistas superior e lateral (unidades em mm)**  
Fonte: Silva, 2003 - adaptado.

Tabela 2.2 - Características e cargas de ruptura das lajes ensaiadas por Silva (2003)

Grupo	Laje	$f_c$ (MPa)	$\rho$ (%)	Pilar (mm)	Abertura	Armadura de Cisalhamento			$V_{exp}$ (kN)
						Nº de Camadas	$\phi$ (mm)	$s_{\theta} = s_r$ (mm)	
1	L1	39,6	1,45	150x150	Não	-	-	-	273
	L2	40,4	1,45	150x300	Não	-	-	-	401
	L3	40,8	1,45	150x450	Não	-	-	-	469
	L12	42,3	1,45	402	Não	-	-	-	525
2	L4	39,4	1,57	150x150	Sim	-	-	-	225
	L5	39,6	1,57	150x300	Sim	-	-	-	350
	L6	39,1	1,57	150x450	Sim	-	-	-	375
3	L7	49,0	1,45	150x150	Não	3	8,0	42	420
	L8	49,4	1,45	150x300	Não	2 e 3	8,0	42	452
	L9	50,2	1,45	150x450	Não	3	8,0	422	452
4	L10	40,0	1,57	150x150	Sim	3	8,0	42	325
	L11	40,8f	1,57	150x300	Sim	3	8,0	42	350

Fonte: Silva, 2003.

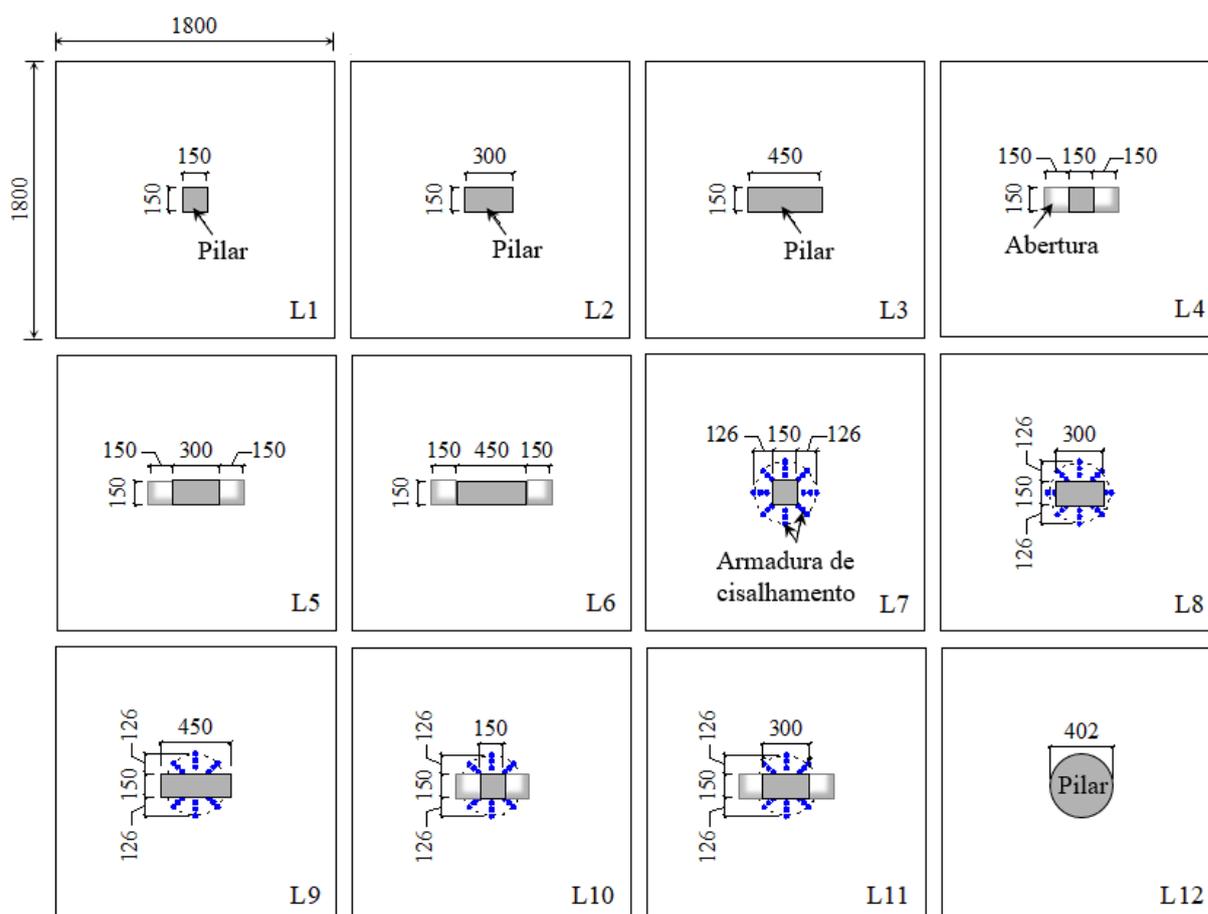


Figura 2.6 - Características das lajes ensaiadas (unidades em mm)

Fonte: Silva, 2003 - adaptado.

Todas as lajes testadas apresentaram ruptura por punção. As lajes com armadura de cisalhamento apresentaram ruptura do tipo externa, com a superfície de ruptura iniciando-se após a última camada de *studs*. Em quase todas as lajes sem armadura de cisalhamento, a superfície de ruptura iniciou-se na face do pilar.

Silva (2003) concluiu que, com o aumento de uma das dimensões do pilar, que conseqüentemente aumenta o perímetro de controle, ocorre um acréscimo na carga de ruptura, porém, sendo este aumento não constante, tendendo ser menor quanto maior for a relação entre os lados do pilar. Quanto à existência de aberturas, o autor atestou que, a carga de ruptura à punção diminuiu consideravelmente, devido a redução da porção resistente do concreto na região crítica. Os resultados mostraram que a carga última diminuiu em até 20% quando se reduziu a porção resistente do concreto na região crítica, com duas aberturas quadradas de 150 mm de lado.

O autor também concluiu que, o uso de armadura de cisalhamento em lajes com aberturas apresenta resultados bastantes satisfatórios e que pode ser uma possibilidade de aumento da resistência ao puncionamento nessas lajes.

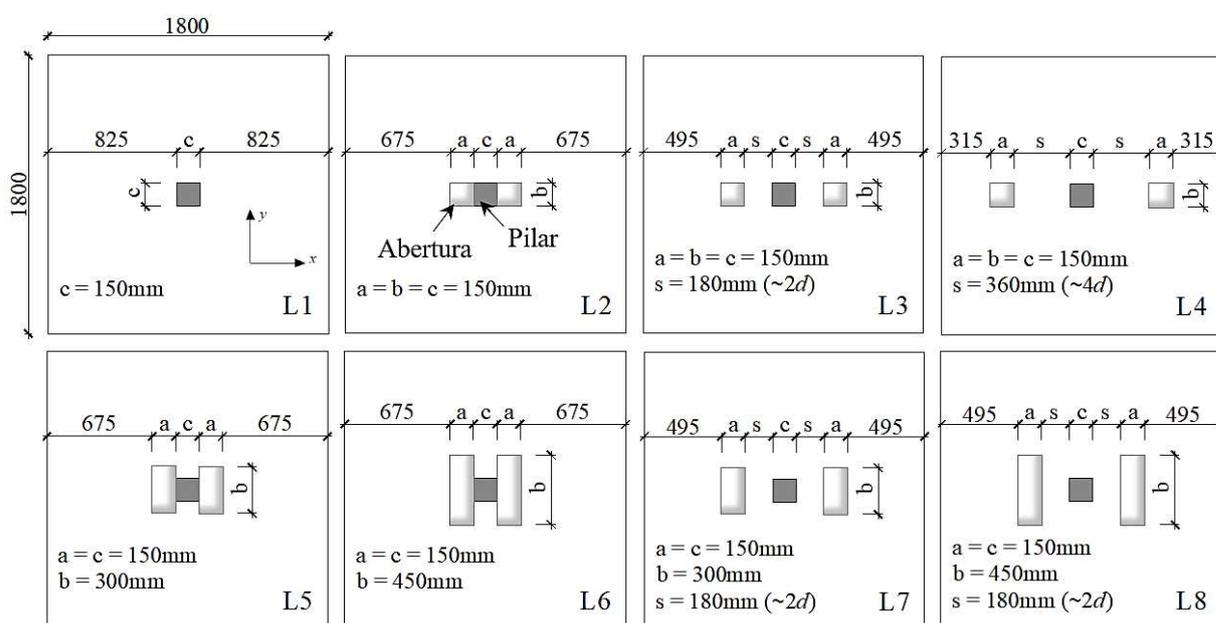
Souza (2004) analisou oito lajes quadradas de 1.800 mm de lado com espessura de 130 mm, apoiadas em oito placas metálicas situadas em pontos equidistantes, formando uma circunferência de raio igual a 825 mm. As lajes foram submetidas a um carregamento central, aplicado de baixo para cima na laje, através de um cilindro hidráulico que impulsionava uma placa metálica quadrada de 150 mm de lado e 25 mm de espessura, simulando um pilar. O esquema de ensaio utilizado por Souza (2004) assemelha-se ao esquema utilizado por Silva (2003), como demonstrado anteriormente na Figura 2.5.

Dentre as lajes ensaiadas, a laje L1 era de referência, isto é, sem abertura, e as demais (L2, L3, L4, L5, L6, L7 e L8) possuíam duas aberturas de tamanhos e posições variados. As aberturas das lajes L2, L3 e L4 tinham dimensões de 150 mm x 150 mm, igual à geometria do pilar. Por sua vez, as lajes L5 e L7 possuíam aberturas de 150 mm x 300 mm, equivalente à duas vezes a área do pilar e, por fim, as lajes L6 e L8 possuíam aberturas de 150 mm x 450 mm correspondente à três vezes a área do pilar.

Quanto à posição das aberturas, as lajes L2, L5 e L6 estavam posicionadas adjacentes a face do pilar, já as lajes L3, L7 e L8 estavam afastadas a 180 mm da face do pilar (aproximadamente  $2d$ ) enquanto que, as aberturas da laje L4 foram posicionados à 360 mm da face do pilar (aproximadamente  $4d$ ).

A armadura de flexão negativa foi composta por uma malha ortogonal com barras de 12,5 mm de diâmetro. A armadura de distribuição ou armadura positiva foi composta, por malha ortogonal com barras de diâmetro de 6,3 mm. Devido a existência das aberturas, as malhas apresentavam diferentes configurações, como, por exemplo, inclusão de barras adicionais nas armaduras de flexão. A ancoragem foi feita por grampos (6,3 mm de diâmetro) posicionados em todas as extremidades das barras.

A Figura 2.7 e a Tabela 2.3 apresentam as principais características das lajes estudadas pelo autor. Nesta tabela,  $s$  é a menor distância entre as faces da abertura e do pilar.



**Figura 2.7 - Características das lajes**

Fonte: Souza, 2004 - adaptado.

**Tabela 2.3 - Características das lajes ensaiadas por Souza (2004)**

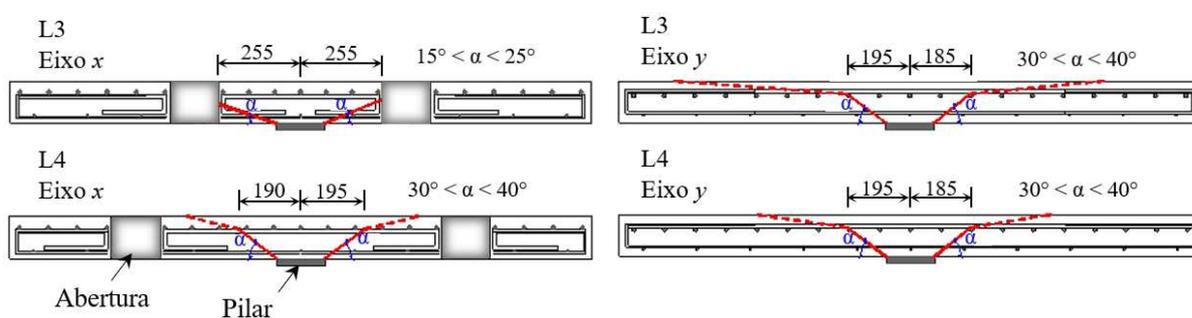
Laje	$f_c$ (MPa)	$d$ (mm)	$\rho$ (%)	Pilar (mm)	Abertura (mm)	$s$ (mm)	$V_{exp}$ (kN)
L1	35,5	91	1,36	150 x 150	-	-	274
L2	35,7	90	1,71		-	0	205
L3	36,0	89	1,64		150x150	180	275
L4	36,2	91	1,54		150x150	360	300
L5	31,9	91	1,36		150x150	0	140
L6	32,0	91	0,96		150x300	0	101
L7	32,1	9	1,56		150x450	180	225
L8	32,2	92	1,56		150x300	180	210

Fonte: Souza, 2004.

O autor verificou que todas as lajes romperam por punção, evidenciando que a existência de aberturas não alterou o modo de ruptura. Quanto à superfície de ruptura, foi constatado que a posição e o tamanho das aberturas alteraram consideravelmente o formato dessa superfície. Já em relação ao deslocamento, notou-se que as lajes com aberturas adjacentes à região carregada, apresentaram maiores valores em relação as outras posições avaliadas.

Souza (2004) constatou ainda que, a laje L3 apresentou praticamente a mesma carga última em relação à laje de referência (L1), enquanto que a laje L4 apresentou carga de ruptura 10% superior em relação à L1. O autor atribuiu esse comportamento a maior taxa de armadura nas lajes L3 e L4, em função de uma barra adicional utilizada, que compensou, também, a perda de volume de concreto devido à existência de aberturas.

Na laje L4, ao contrário da laje L3, o autor observou que a superfície de ruptura não alcançou as aberturas existentes, o que indicava que na laje L4 o posicionamento das aberturas não prejudicou a resistência ao cisalhamento em torno do pilar, como demonstrado na Figura 2.8. As demais lajes apresentaram perdas de resistência à medida que o tamanho da abertura e sua proximidade com o pilar aumentavam.



**Figura 2.8 - Superfícies de ruptura das lajes L3 e L4**

Fonte: Souza, 2004 - adaptado.

Borges (2004) realizou ensaios em vinte lajes lisas de concreto armado com 3.000 mm de lado e 200 mm de espessura, apoiadas em pilares internos e retangulares. A autora avaliou a influência de aberturas adjacentes ao pilar, sendo que essas aberturas apresentavam dimensões distintas entre os modelos ensaiados. Foi investigado também o detalhamento da armadura de flexão das lajes na região das aberturas.

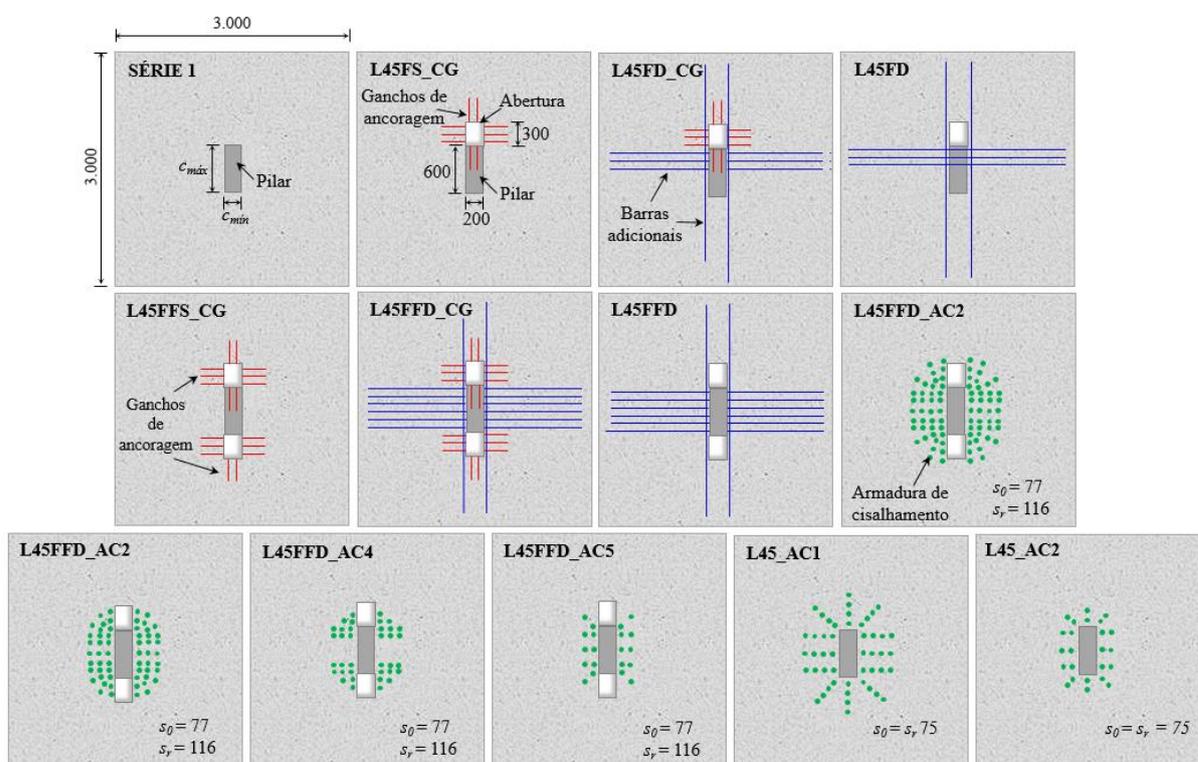
O conjunto de lajes foi dividido em três séries: Série 1 - oito lajes com pilares retangulares; Série 2 - seis lajes com aberturas retangulares; Série 3 - quatro lajes com aberturas e armadura de cisalhamento e duas lajes apenas com armadura de cisalhamento.

Para as lajes da Série 1, a armadura de flexão foi considerada constante e determinada para prevenir a ruptura por flexão. A armadura de flexão negativa, do bordo superior da laje, foi composta por 31 barras de aço, CA-50, com diâmetro de 16,0 mm em cada direção e espaçadas a cada 100 mm. A armadura de flexão positiva foi constituída por 21 barras de aço, CA-50, com diâmetro de 8 mm em cada direção e espaçadas a cada 150 mm. Com a finalidade de proporcionar adequada ancoragem para a armadura de flexão negativa, foram adicionadas 31 barras de aço, CA-50, com diâmetro de 12,5 mm na forma de grampo, em cada extremidade da armação e em cada direção.

Nas lajes da Série 2, variou-se a taxa de armadura de flexão, de uma laje para outra, com o acréscimo de barras na região adjacente às faces da abertura. A taxa de armadura para as lajes da Série 3 foi mantida constante.

A armadura de cisalhamento utilizada nas lajes da Série 3 foi do tipo *stud*, constituída por vergalhões, posicionados verticalmente na laje, e interconectados por barras chatas de aço soldadas nas duas extremidades do vergalhão.

As características das lajes das três séries podem ser observadas na Figura 2.9 e na Tabela 2.4. A Figura 2.9 e a Tabela 2.5 mostram detalhes acerca da armadura de cisalhamento utilizada pela autora.



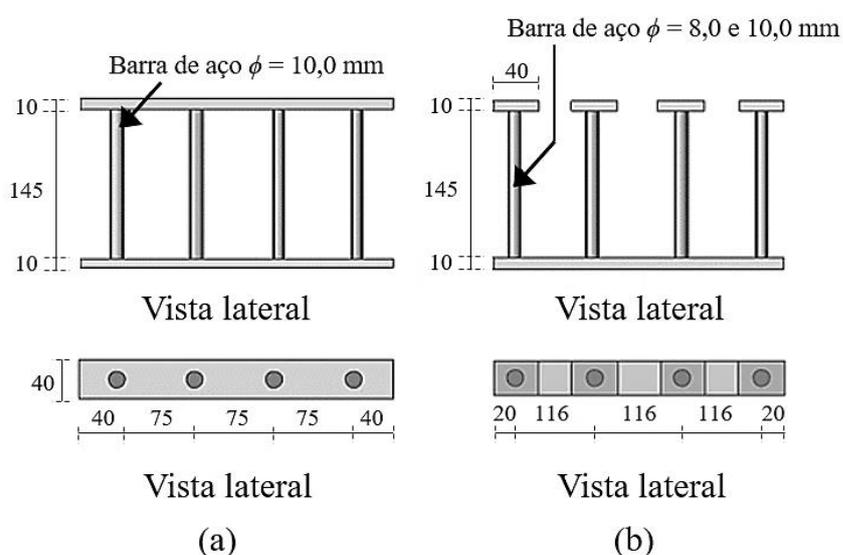
**Figura 2.9 - Características das lajes (unidades em mm)**

Fonte: Borges, 2004 - adaptado.

Tabela 2.4 - Características das lajes ensaiadas por Borges (2004)

Série	Laje	Pilar (mm)		$f_c$ (MPa)	$\rho$ (%)	$d$ (mm)	N° de Aberturas
		$c_{mín}$	$c_{máx}$				
1	L42	200	400	43,2	1,53	139	-
	L42A	200	400	36,2	1,15	164	-
	L45	200	600	42,0	1,37	154	-
	L46	200	800	39,3	1,15	164	-
	L41	150	250	44,7	1,39	139	-
	L41A	150	250	38,9	1,24	164	-
	L43A	150	450	38,7	1,24	164	-
	L44	150	600	40,0	1,18	164	-
2	L45FS_CG	200	600	40,5	1,14	154	1
	L45FD_CG	200	600	39,0	1,38	154	1
	L45FD	200	600	41,4	1,38	154	1
	L45FFS_CG	200	600	41,6	1,00	154	2
	L45FFD_CG	200	600	40,6	1,24	164	2
	L45FFD	200	600	37,0	1,55	144	2
3	L45FFD_AC2	200	600	44,5	1,38	154	2
	L45FFD_AC3	200	600	39,6	1,38	154	2
	L45FFD_AC4	200	600	43,2	1,38	154	2
	L45FFD_AC5	200	600	40,7	1,38	154	2
	L45_AC1	200	600	39,0	1,38	154	-
	L45_AC5	200	600	41,1	1,38	154	-

Fonte: Borges, 2004.

Figura 2.10 - Detalhe dos studs utilizados nas lajes da Série 3, sendo: (a) Laje L45\_AC1 e (b) Laje L45FFD\_AC2 ( $\phi = 10,0$  mm) e demais lajes ( $\phi = 8,0$  mm), unidades em mm

Fonte: Borges, 2004 - adaptado.

Tabela 2.5 - Características da armadura de cisalhamento e carga de ruptura das lajes

Série	Laje	Armadura Cisalhamento					$V_{exp}$ (kN)
		Nº de Camadas	Nº de Linhas	$\phi$ (mm)	$s_0$ (mm)	$s_r$ (mm)	
1	L42	-	-	-	-	-	703
	L42A	-	-	-	-	-	743
	L45	-	-	-	-	-	843
	L46	-	-	-	-	-	947
	L41	-	-	-	-	-	600
	L41A	-	-	-	-	-	650
	L43A	-	-	-	-	-	776
	L44	-	-	-	-	-	814
2	L45FS_CG	-	-	-	-	-	792
	L45FD_CG	-	-	-	-	-	750
	L45FD	-	-	-	-	-	776
	L45FFS_CG	-	-	-	-	-	750
	L45FFD_CG	-	-	-	-	-	850
	L45FFD	-	-	-	-	-	685
3	L45FFD_AC2	4	22	10,0	77	116	1.230
	L45FFD_AC3	3	22	8,0	77	116	1.050
	L45FFD_AC4	3	12	8,0	77	116	885
	L45FFD_AC5	2	10	8,0	77	116	837
	L45_AC1	4	12	10,0	75	75	1.250
	L45_AC5	2	12	8,0	77	116	1092

Fonte: Borges, 2004.

Os resultados desta pesquisa demonstraram que todas as lajes com aberturas e/ou com armadura de cisalhamento romperam por punção. Nas lajes com aberturas e sem armadura de cisalhamento, a ruptura ocorreu de forma brusca e repentina, enquanto que nas lajes com armadura transversal a ruptura se desenvolveu com algum aviso prévio.

Borges (2004) concluiu que, o aumento da relação  $c_{máx}/c_{mín}$  do pilar conduziu ao aumento da carga de ruptura das lajes, segundo pode ser verificado na Tabela 2.5. No entanto, o crescimento da carga de ruptura não ocorreu na mesma proporção do acréscimo da relação  $c_{máx}/c_{mín}$  ( $c_{mín}$  constante).

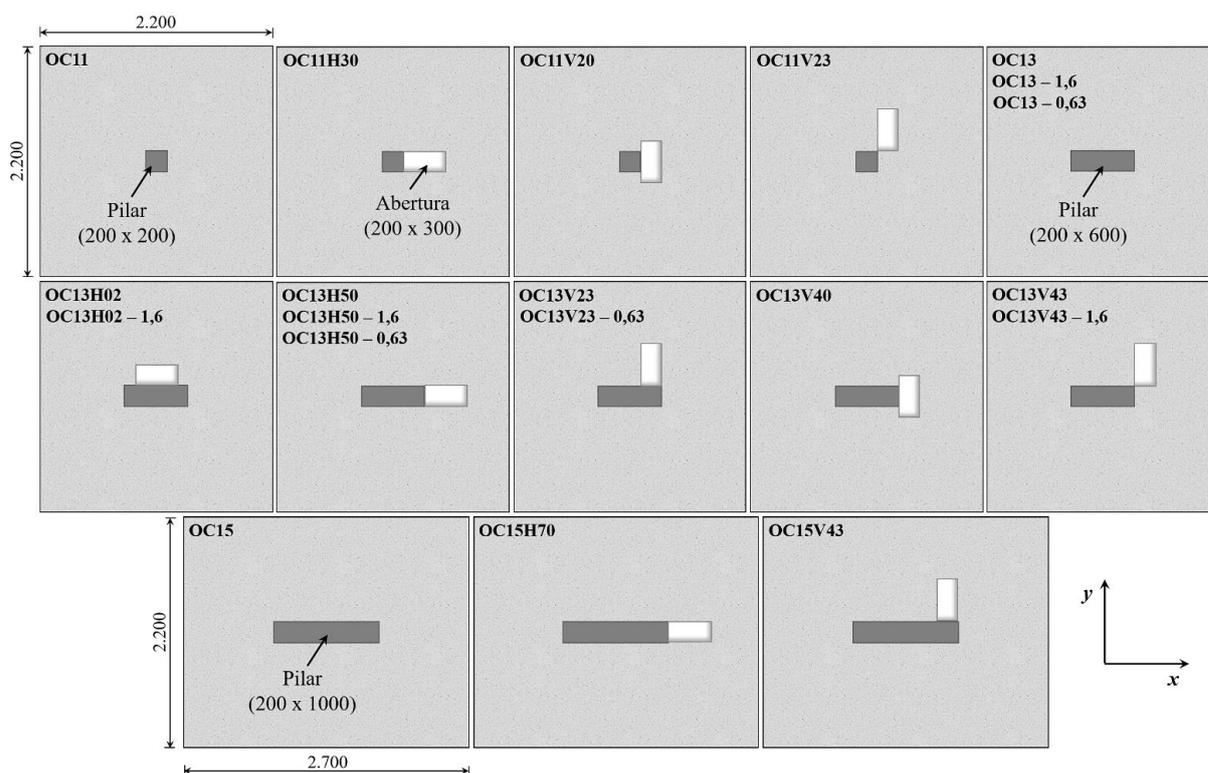
A autora atestou que as aberturas adjacentes ao pilar reduziram a carga de ruptura das lajes em até 24% (lajes L45\_AC5 e L45FFD\_AC5). Nas lajes com aberturas, a armadura de cisalhamento elevou a carga de ruptura em até 80% (lajes L45FFD e L45FFD\_AC2).

Por fim, Borges (2004) relatou que, a utilização de barras adicionais de armadura de flexão na região das aberturas não contribuiu para o aumento da resistência à punção das

lajes, embora o uso dessas barras terem conduzido a deslocamentos verticais semelhantes à laje de referência.

Teng et al. (2004) analisaram a influência de aberturas retangulares (200 mm x 400 mm) adjacentes ao pilar na resistência ao cisalhamento de vinte lajes lisas de concreto armado. Os modelos ensaiados apresentavam as seguintes dimensões: as lajes quadradas possuíam 2.200 mm de lado e 150 mm de altura, enquanto que, as lajes retangulares (OC15, OC15H70 e OC15V43) apresentavam 2.700 mm x 2.200 mm x 150 mm.

As principais variáveis investigadas pelos autores foram: a localização das aberturas em relação ao pilar, a retangularidade ( $c_{min}/c_{máx}$ ) do pilar e diferentes taxas de carregamento nas direções  $x$  e  $y$  das lajes. A Figura 2.11 apresenta as características geométricas e a localização das aberturas nos modelos ensaiados.



**Figura 2.11 - Características geométricas das lajes ensaiadas (unidades em mm)**

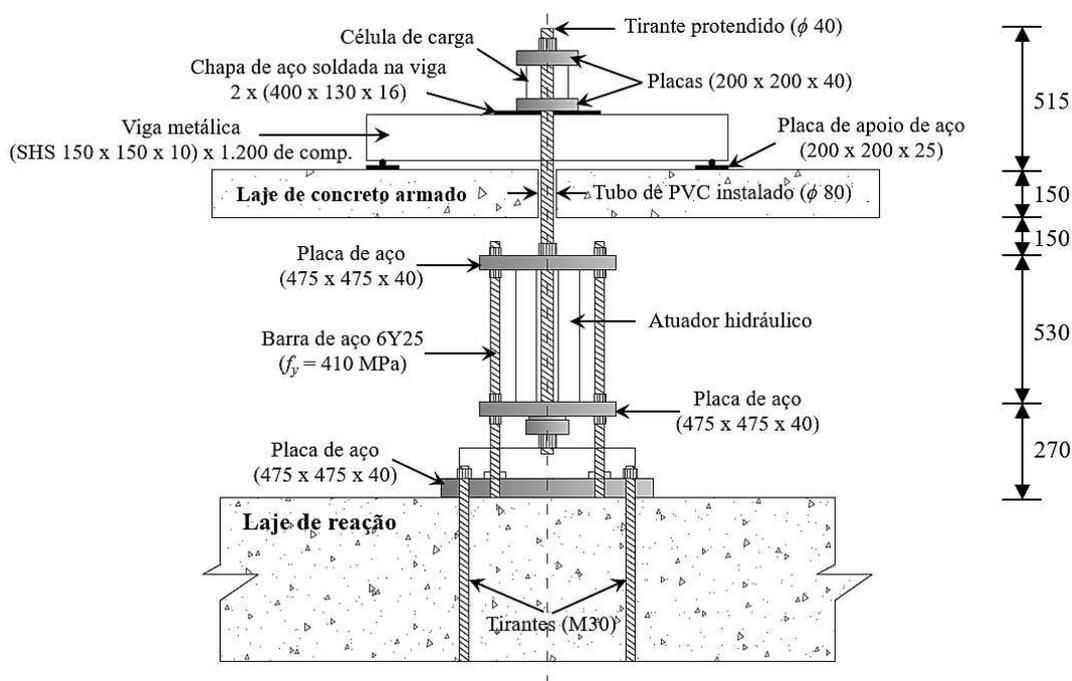
Fonte: Teng et al., 2004 - adaptado.

Para exemplificar a notação utilizada por esses autores para a classificação dos modelos estudados, a laje OC13V23-0,63, por exemplo, refere-se a uma laje com pilar com retangularidade 1/3 (200 mm x 600 mm), tendo uma abertura orientada verticalmente, cujo centro está na coordenada (200 mm; 300 mm) em relação ao centro do pilar. Os últimos

números (0,63) indicam que o carregamento ao longo da direção  $x$  (produz momento na direção  $y$ ) é igual a 0,63 vezes o carregamento ao longo da direção  $y$ .

As lajes foram confeccionadas com concreto de classe C40 e as armaduras de flexão foram constituídas por barras com diâmetro de 16,0 mm ( $f_y = 452,5$  MPa), dispostas na face superior das lajes e por barras de 13,0 mm de diâmetro ( $f_y = 518,8$  MPa), localizadas na face inferior. O espaçamento entre as barras nas regiões tracionada e comprimida nos modelos foi de 120 mm.

As lajes foram carregadas por um sistema constituído por oito pontos de aplicação de carga de igual magnitude, localizado na parte superior das lajes. A Figura 2.12 demonstra o esquema de ensaio utilizado por esses autores.



**Figura 2.12 - Esquema de ensaio utilizado por Teng et al. (2004) (unidades em mm)**

Fonte: Teng et al., 2004 - adaptado.

Os valores da resistência à compressão e módulo de elasticidade longitudinal do concreto, taxa de armadura de flexão, como também, da carga de ruptura das lajes ensaiadas podem ser observados na Tabela 2.6.

**Tabela 2.6 – Resultados experimentais obtidos por Teng et al. (2004)**

Laje	Pilar (mm)	$f_c$ (MPa)	$E_c$ (GPa)	$\rho$ (%)	$V_{exp}$ (kN)
OC11	200 x 200	36,01	23,36	1,81	423
OC11H30	200 x 200	33,87	22,48	1,70	349
OC11V20	200 x 200	38,63	25,28	1,74	207
OC11V23	200 x 200	34,14	22,88	1,69	373
OC13	200 x 600	35,81	24,91	1,71	568
OC13H02	200 x 600	43,09	26,43	1,64	512
OC13H50	200 x 600	36,29	24,92	1,67	443
OC13V23	200 x 600	36,94	24,92	1,70	484
OC13V40	200 x 600	43,03	26,44	1,69	340
OC13V43	200 x 600	36,62	24,92	1,61	467
OC13 – 1,6	200 x 600	32,98	26,26	1,67	508
OC13H02 – 1,6	200 x 600	37,53	23,95	1,61	420
OC13H50 – 1,6	200 x 600	33,09	28,71	1,60	428
OC13V43 – 1,6	200 x 600	33,21	23,90	1,65	383
OC13 – 0,63	200 x 600	39,71	25,17	1,65	455
OC13H50 – 0,63	200 x 600	39,80	30,80	1,67	511
OC13V23 – 0,63	200 x 600	35,65	24,60	1,67	488
OC15	200 x 1000	40,15	28,97	1,76	649
OC15H70	200 x 1000	37,89	25,69	1,67	529
OC15V43	200 x 1000	35,97	25,97	1,66	612

Fonte: Teng et al., 2004.

Teng et al. (2004) verificaram que, todas as lajes ensaiadas romperam por punção. As lajes OC11, OC13 e OC15, sem aberturas, apresentaram as maiores capacidades resistentes à punção em suas respectivas séries, como havia sido previsto pelos autores. Os valores da carga de ruptura dessas lajes foram 423 kN, 568 kN e 649 kN, respectivamente. Por sua vez, a menor capacidade resistente foi observada nas lajes com aberturas dispostas adjacentes ao menor lado da seção retangular do pilar (OC11V20, OC13V40 e OC15H70). Nessas lajes, a redução da carga última foi de 51,06%, 40,14% e 18,49%, nessa ordem, quando comparadas às respectivas lajes de referências de cada série.

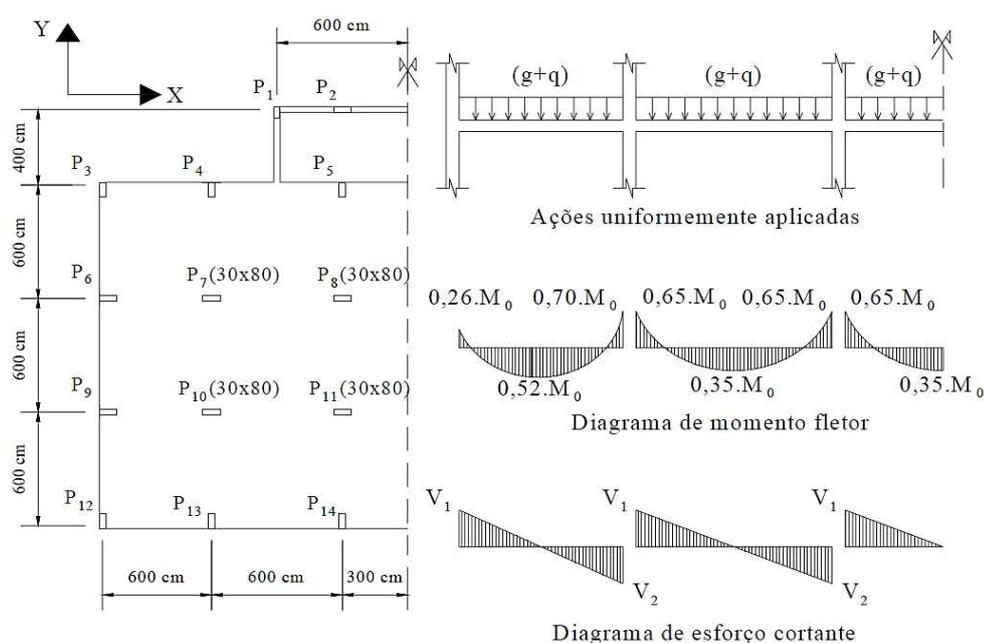
Os autores constataram ainda que, as diferentes proporções de carga aplicadas nas direções  $x$  e  $y$  afetaram a resistência ao cisalhamento das lajes. No entanto, esse efeito limitou-se aos casos em que o carregamento na direção do menor lado do pilar foi maior. Isso pode ser evidenciado na laje OC13H50-1,6, cujo carregamento na direção  $x$  (menor lado do pilar) foi 60% superior em relação à direção  $y$ . A redução da carga de ruptura nessa laje foi de 3,38% e

16,24%, quando comparada com as lajes OC13H50 (mesma carga em ambas as direções avaliadas) e OC13H50-0,63, por essa ordem.

Afinal, Teng et al. (2004) atentaram que, a rigidez dos modelos ensaiados foi mais influenciada pela espessura das lajes do que pela retangularidade do pilar. Ademais, observaram que a existência de aberturas reduziu a rigidez das lajes e conduziu a uma maior deflexão na região próxima à abertura.

Nogueira, Venturini e Beck (2007) avaliaram a confiabilidade do modelo de dimensionamento de ligações laje-pilar à punção proposto pela ABNT NBR 6118 (2003), verificando as probabilidades de falha para cada estado limite de punção.

Os autores aplicaram a teoria da confiabilidade na verificação à punção pelo modelo da norma brasileira em um pavimento de edifício de caráter comercial. O pilar analisado foi o pilar P7 (30 cm x 80 cm), classificado como sendo um pilar interno. A Figura 2.13 ilustra o pavimento e os esforços solicitantes considerados pelos autores.



**Figura 2.13 - Pavimento tipo utilizado e esforços solicitantes**

Fonte: Nogueira, Venturini e Beck, 2007.

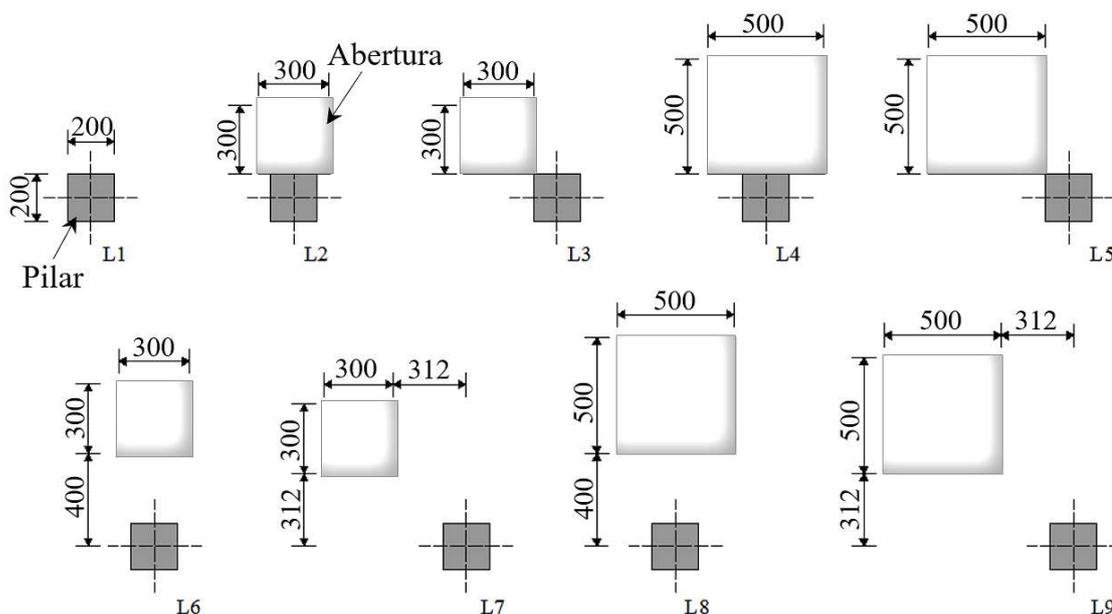
Os métodos empregados por Nogueira, Venturini e Beck (2007) na análise de confiabilidade foram o *First Order Reliability Method* (FORM) e a Simulação de Monte Carlo com Amostragem por Importância. As equações de estados limites consideradas foram baseadas nos próprios critérios de verificação à punção prescritos pela ABNT NBR 6118 (2003), onde são avaliadas tensões resistentes e tensões atuantes em regiões particulares da ligação laje-pilar.

Nogueira, Venturini e Beck (2007) concluíram que, o modelo da norma brasileira se mostrou, para o exemplo estudado, bastante seguro e com probabilidades de falha muito pequenas, demonstrando que as equações da norma técnica brasileira para verificação à punção estão a favor da segurança.

Além disso, com base nas análises de confiabilidades, os autores verificaram um comportamento distinto entre os contornos críticos estabelecidos na ABNT NBR 6118 (2003). No contorno *C*, isto é na face do pilar, a variável mais importante foi a resistência à compressão do concreto. Os fatores de sensibilidade mostraram que a resistência do concreto exerce mais de 50% na probabilidade de falha da ligação no contorno *C*, seguido pela carga variável com cerca de 30%. Já no contorno *C'* sem armadura de cisalhamento, o cenário de falha foi alterado de modo que as variáveis mais importantes foram a altura da laje e a carga variável, com cerca de 23% e 41%, respectivamente.

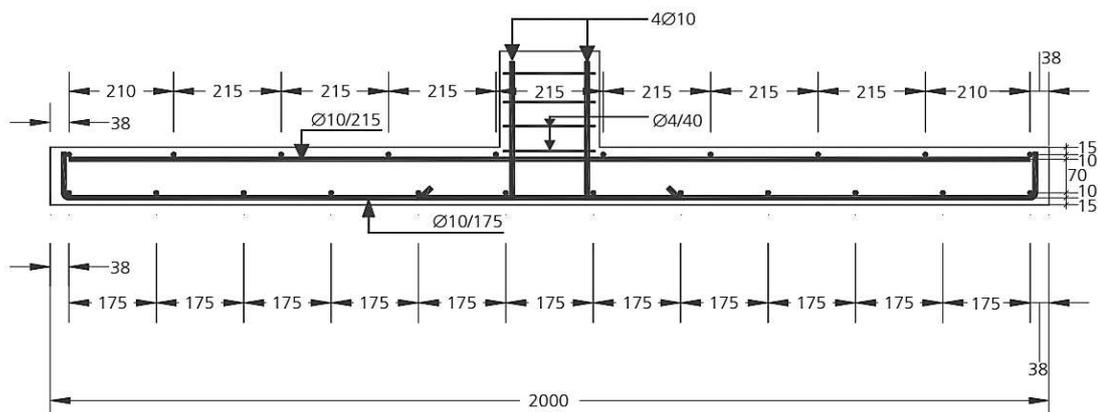
Anil, Kina e Salmani (2014) estudaram a influência de diferentes configurações de aberturas na resistência à punção de lajes lisas de concreto armado. Os autores ensaiaram até a ruptura nove lajes quadradas, com 2.000 mm de lado e 120 mm de altura. O carregamento foi aplicado no topo do pilar, sendo este, com dimensões 200 mm x 200 mm, executado juntamente com cada laje.

O tamanho e a localização das aberturas nas lajes, bem como o detalhamento das armaduras utilizadas pelos autores encontram-se nas Figura 2.14e 2.14, respectivamente. Foi considerado taxa de armadura tracionada ( $\rho_t$ ) de 0,39% e de armadura comprimida ( $\rho_c$ ) de 0,33%.



**Figura 2.14 - Configuração das aberturas nas lajes (medidas em mm)**

Fonte: Anil, Kina e Salmani, 2014 - adaptado.



**Figura 2.15 - Detalhamento das armaduras (medidas em mm)**

Fonte: Anil, Kina e Salmani, 2014.

Os autores atestaram que, a resistência ao cisalhamento das lajes, rigidez inicial e capacidade de dissipação de energia reduziram consideravelmente a medida que se aumentava o tamanho da abertura, como também, quando se alterava a posição da abertura em relação ao pilar. As lajes com aberturas adjacentes ao pilar (L2, L3, L4 e L5) apresentaram menores valores de resistência à punção comparativamente às lajes que possuíam aberturas afastadas da face do pilar (L6, L7, L8 e L9).

Além disso, os autores concluíram que as aberturas paralelas ao pilar (L2, L4, L6 e L8) acarretaram em menores valores de carga de ruptura do que nas lajes com aberturas diagonais ao pilar (L3, L5, L7 e L9). A Tabela 2.7 apresenta os resultados obtidos pelos autores.

**Tabela 2.7 - Resultados obtidos nos ensaios**

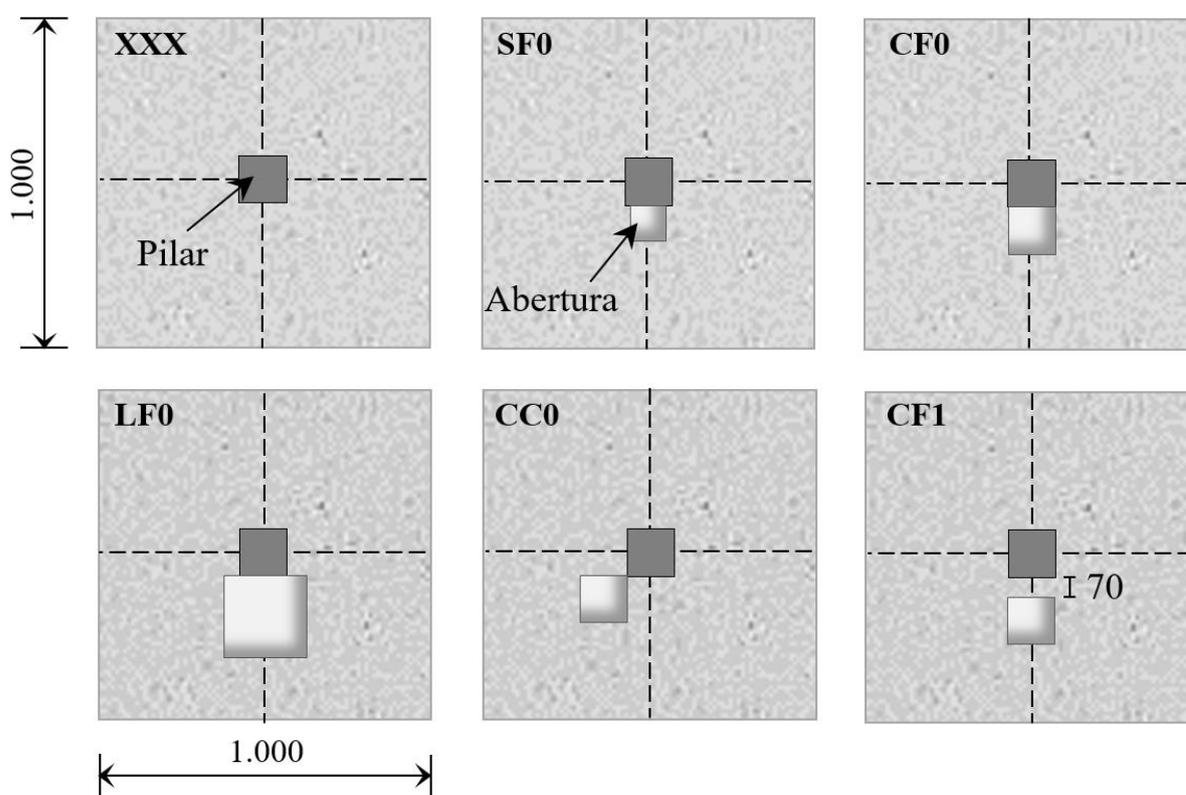
Laje	$f_c$ (MPa)	$V_{exp}$ (kN)	Deslocamento Vertical Máximo (mm)	Rigidez Inicial (kN/mm)	Capacidade de Dissipação de Energia (kN.mm)
L1	20,83	193,03	60,43	60,43	4.595,87
L2	20,60	99,03	11,60	11,60	2.118,53
L3	20,85	125,86	13,35	13,35	2.386,84
L4	19,63	76,98	9,04	9,04	1.365,13
L5	19,61	94,70	10,14	10,14	2.062,90
L6	20,02	134,78	12,25	12,25	3.667,61
L7	21,24	172,15	18,75	18,75	4.123,00
L8	20,05	115,53	11,91	11,91	2.993,50
L9	20,23	138,83	17,29	17,29	3.898,83

Fonte: Anil, Kina e Salmani, 2014.

Oukaili e Salman (2014) ensaiaram seis lajes lisas (XXX, SF0, CF0, LF0, CC0 e CF1) de concreto armado a fim de se estudar o efeito das aberturas na resistência ao

puncionamento da ligação laje-pilar. As lajes apresentavam dimensões 1.000 mm x 1.000 mm x 70 mm e foram apoiadas em um pilar central com 150 mm de lado e 200 mm de altura. Os modelos possuíam escala de 1:2 e representavam uma laje de piso de 4.250 mm de vão e com pilar interno.

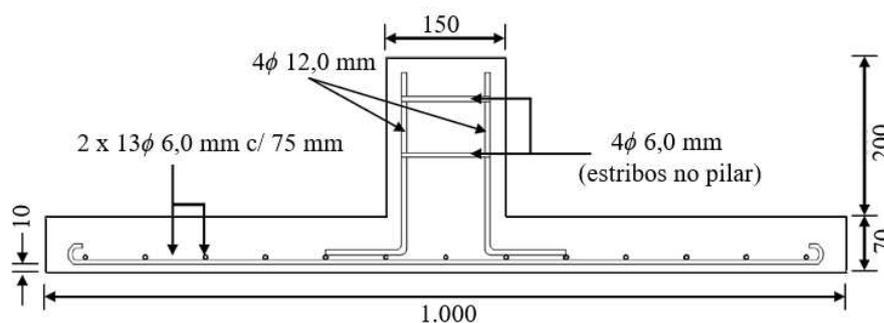
Os principais parâmetros avaliados por esses autores na pesquisa foram: a localização e as dimensões das aberturas. Todas as aberturas eram quadradas, com os lados de comprimento ( $l$ ) e paralelas às faces do pilar ( $c$ ). Três tamanhos de aberturas foram considerados: 100 mm x 100 mm ( $l/c = 0,67$ ), 150 mm x 150 mm ( $l/c = 1$ ) e 225 mm x 225 mm ( $l/c = 1,5$ ), conforme demonstrado na Figura 2.16.



**Figura 2.16 - Disposição das aberturas nas lajes (medidas em mm)**

Fonte: Oukaili e Salman, 2014 - adaptado.

A armadura de flexão das lajes foi constituída por barras de aço de 6,0 mm de diâmetro ( $f_y = 598$  MPa), localizadas na parte inferior da peça e espaçadas em 75 mm em ambas as direções, o que resultou em uma altura útil ( $d$ ) de 54 mm. Nos pilares, por sua vez, as armaduras empregadas foram formadas por quatro barras de aço de 12,0 mm de diâmetro ( $f_y = 648$  MPa) e estribos de 6,0 mm de diâmetro. A Figura 2.17 apresenta o detalhe das armaduras utilizados por Oukaili e Salman (2014).



**Figura 2.17 - Detalhe das armaduras utilizadas nos modelos (medidas em mm)**

Fonte: Oukaili e Salman, 2014 - adaptado.

O sistema de ensaio empregado pelos autores foi composto por um atuador hidráulico com capacidade de 1.000 kN e uma base metálica para apoio das bordas das lajes, ambos acoplados a um pórtico de reação, como apresentado na Figura 2.18. O carregamento foi aplicado no centro das lajes com incrementos de 3,5 kN até a ruptura das peças.



**Figura 2.18 - Pórtico utilizado nos ensaios**

Fonte: Oukaili e Salman, 2014.

A Tabela 2.8 apresenta os resultados das cargas de ruptura e dos deslocamentos verticais máximos obtidos por esses autores.

**Tabela 2.8 - Resultados obtidos por Oukaili e Salman (2014)**

Laje	$f_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)	$V_{exp}$ (kN)	Deslocamento Vertical Máximo (mm)
XXX	35,69	3,61	101,65	15,91
SF0	37,10	3,50	90,76	14,46
CF0	34,13	3,44	79,87	13,81
LF0	32,83	3,01	68,98	12,24
CC0	36,27	3,29	90,76	13,98
CF1	36,50	3,37	88,94	13,33

Fonte: Oukaili e Salman, 2014.

Os autores atentaram que todas as lajes romperam por punção. E ainda, observaram que tanto a localização quanto as dimensões da abertura afetaram a resistência ao puncionamento das lajes. Isso pode ser demonstrado a partir dos resultados das lajes LF0, SF0 e CF1, que apresentaram valores 32,13%, 10,71% e 12,50% menores em relação à laje XXX.

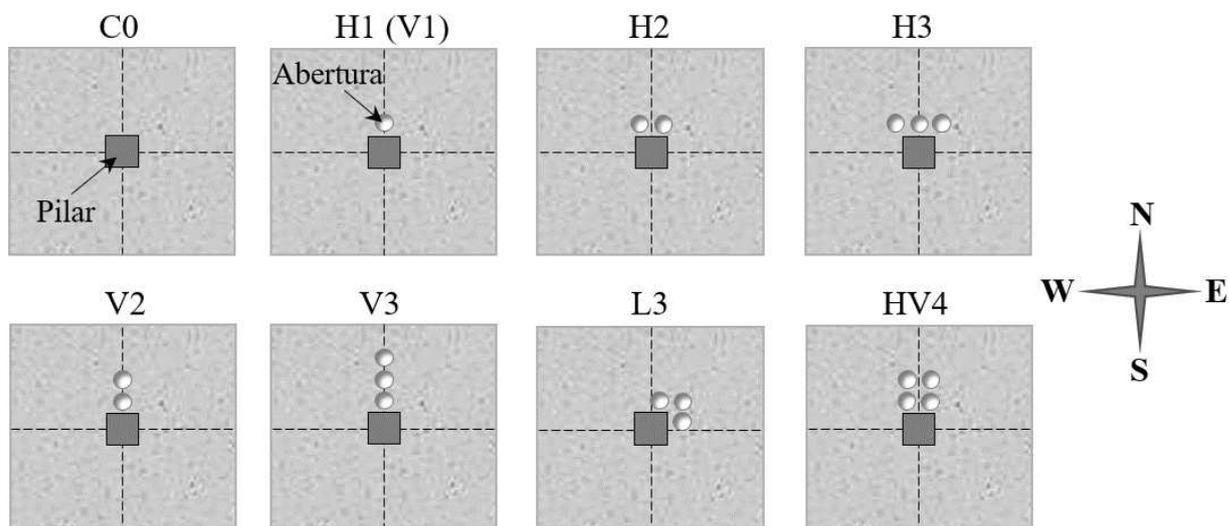
Os autores constataram ainda que, a capacidade resistente à punção é mais penalizada quando a abertura está disposta adjacente à face do pilar, em referência à laje cuja abertura está localizada no canto do pilar. A laje CF0 apresentou uma carga última 21,43% menor do que a laje XXX, enquanto que, a laje CC0 resultou em um valor 10,71% menor do que essa mesma laje.

Enfim, Oukaili e Salman (2014) concluíram que, a existência de abertura diminuiu a rigidez das lajes lisas, sendo essa característica, influenciada, também, pela sua localização e dimensões. Na laje LF0, foi observada uma redução significativa na rigidez (83,00%) na etapa de serviço, enquanto que, nas lajes com aberturas menores, a redução na rigidez foi muito menor (0,31% a 30,63%).

Ha et al. (2015) avaliaram experimentalmente o efeito das aberturas na resistência à punção de lajes lisas de concreto armado. Para isso, os autores ensaiaram oito lajes quadradas, com 2000 mm de lado e 180 mm de altura, apoiadas em um pilar central, monolítico, com 300 mm de lado e 300 mm de altura. Todas as lajes apresentavam aberturas circulares de 150 mm de diâmetro, exceto a laje C0, posicionadas próximas ao pilar. A resistência do concreto à compressão ( $f_c$ ) foi considerada em torno de 27 MPa e a taxa de armadura de flexão foi adotada constante para todas as lajes (1,16%).

Os autores identificaram as lajes da seguinte maneira: a abreviação H indicava que a abertura era distribuída nas direções E-W, enquanto que, V indicava que as aberturas eram distribuídas nas direções N-S. A abreviação HV indicava que as aberturas eram distribuídas em

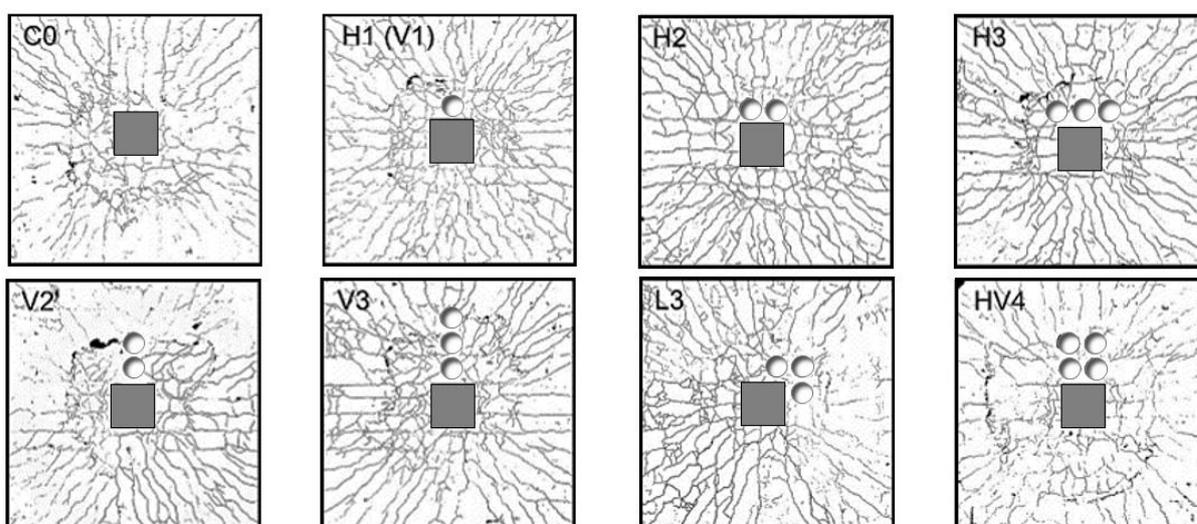
ambas as direções e C0 designava a laje de referência. A Figura 2.19 apresenta a configuração das aberturas presentes nas lajes ensaiadas.



**Figura 2.19 - Configuração das aberturas nas lajes ensaiadas**

Fonte: Ha et al., 2015 - adaptado.

Todas as lajes testadas apresentaram ruptura por punção. Os autores observaram que a laje de referência C0 apresentou fissuras que se propagaram radialmente a partir da face do pilar em direção a região de apoio. Por outro lado, as lajes com aberturas apresentaram nitidamente fissuras na direção E-W, exceto para a laje L3, como pode ser verificado na Figura 2.20.



**Figura 2.20 - Padrão de fissuração em cada laje**

Fonte: Ha et al., 2015 - adaptado.

Ha et al. (2015) concluíram que, a existência de aberturas interrompeu a transferência de esforços na direção N-S, sendo estes, transferidos para a direção E-W, alterando o comportamento da laje a partir de uma ação bidirecional para uma ação unidirecional.

Os autores concluíram também que, a redução da resistência ao cisalhamento, devido a existência de aberturas nas lajes é proporcional a perda de perímetro na seção crítica. A Tabela 2.9 mostra os resultados de carga de ruptura e deslocamento vertical máximo para cada laje ensaiada.

**Tabela 2.9 - Valores de carga de ruptura e deslocamento vertical das lajes**

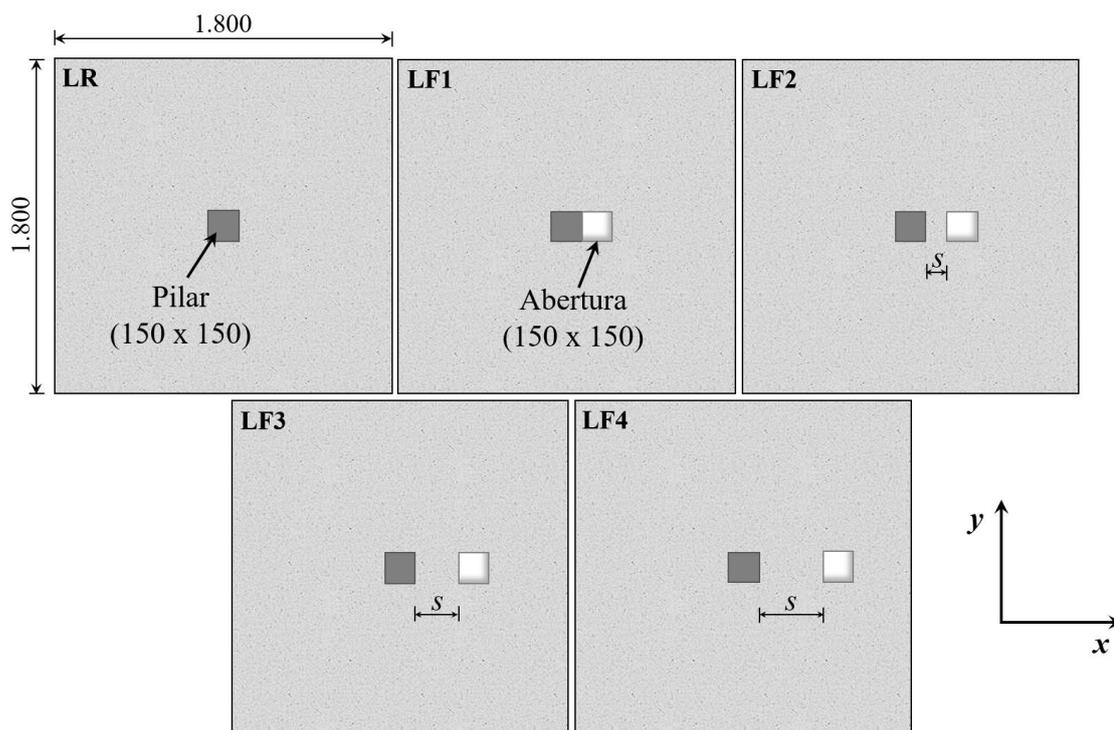
<b>Laje</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b>Deslocamento Vertical Máximo (mm)</b>
C0	590,2	13,2
H1	550,2	12,2
H2	517,3	12,2
H3	452,9	10,0
V2	556,9	12,3
V3	546,5	12,3
L3	418,2	8,7
HV4	517,9	11,4

Fonte: Ha et al., 2015.

Na série H dos modelos ensaiados por Ha et al. (2015), tanto os resultados experimentais quanto teóricos mostraram que a resistência ao cisalhamento diminuiu à medida que se aumentou o número de aberturas. Em contrapartida, a resistência ao cisalhamento manteve-se praticamente constante, independentemente do número de aberturas para as lajes da série V. A disposição das aberturas em forma de L no entorno do pilar resultou em uma redução adicional da resistência.

Lourenço (2018) avaliou a presença e a disposição de aberturas na resistência à punção de cinco lajes lisas de concreto armado. As lajes eram quadradas, com 1.800 mm de lado e espessura de 130 mm, submetidas a um carregamento simétrico aplicado por uma placa metálica quadrada com 150 mm de lado e espessura de 50 mm, simulando o pilar.

A Figura 2.21 e a Tabela 2.10 apresentam as características das lajes ensaiadas pelo autor. A variação da taxa de armadura das lajes foi em função da existência das aberturas e do distanciamento delas em relação a face do pilar (sendo definida pelo autor como  $s$ ).



**Figura 2.21 - Características das lajes ensaiadas por Lourenço (2018) (unidades em mm)**

Fonte: Lourenço, 2018 - adaptado.

**Tabela 2.10 - Caracterização das lajes ensaiadas por Lourenço (2018)**

Laje	$d$ (mm)	$\rho$ (%)	Abertura (mm)	$s$ (mm)
LR	90	1,58	-	-
LF1	92	1,23	150 x 150	0
LF2	91	1,26	150 x 150	90
LF3	92	1,23	150 x 150	180
LF4	93	1,49	150 x 150	270

Fonte: Lourenço, 2018.

A armadura de flexão foi composta por 20 barras de 12,5 mm de diâmetro (CA-50) na face superior em cada direção e 12 barras de 6,3 mm de diâmetro (CA-50) na face inferior em ambas as direções.

Para que a ancoragem das barras superiores fosse garantida, o autor utilizou 20 ganchos em forma de  $U$  com 6,3 mm de diâmetro em cada lado da laje. Devido as aberturas, algumas barras foram cortadas e outras deslocadas quando encontravam a abertura.

O carregamento foi aplicado na face inferior das lajes com um atuador hidráulico de capacidade de 600 kN, sendo esse alimentado por uma bomba manual. A reação ao carregamento centrado foi realizada por um conjunto de vigas metálicas atirantadas a uma laje de reação. A Figura 2.22 apresenta uma fotografia do esquema preparado para o ensaio.



Vista superior

Vista lateral

**Figura 2.22 - Esquema de ensaio utilizado por Lourenço (2018)**

Fonte: Lourenço, 2018.

A Tabela 2.11 apresenta as principais propriedades mecânicas do concreto e do aço utilizados na produção das lajes, bem como os valores de carga de ruptura e os deslocamentos verticais máximos obtidos após os ensaios.

**Tabela 2.11 - Valores obtidos nos ensaios**

Laje	$f_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$V_{exp}$ (kN)	Deslocamento Vertical Máximo (mm)
LR	39,8	3,4	576	232	14,33
LF1	46,0	3,8	563	206	11,40
LF2	46,3	3,8	563	235	10,55
LF3	45,9	3,8	563	216	14,92
LF4	41,2	3,6	576	258	13,59

Lourenço (2018) concluiu que tanto a existência quanto a localização de aberturas afetaram a resistência ao cisalhamento das lajes. O autor verificou que, conforme a abertura se distanciava da face do pilar, a carga de ruptura aumentava e se aproximava do valor da carga da laje de referência (LR), exceto para a laje LF3, que apresentou um comportamento não esperado. Nessa laje, a abertura pode ter ocasionado uma ruptura por punção com flexão localizada na região da abertura.

A presença da abertura, segundo o autor, levou a menores deslocamentos verticais em todos os estágios de carregamento para as lajes LF1, LF2 e LF4 quando comparadas com a laje de referência. Entretanto, a laje LF3, com abertura distante  $2d$  da face do pilar, alcançou deslocamento vertical máximo maior que a laje LR.

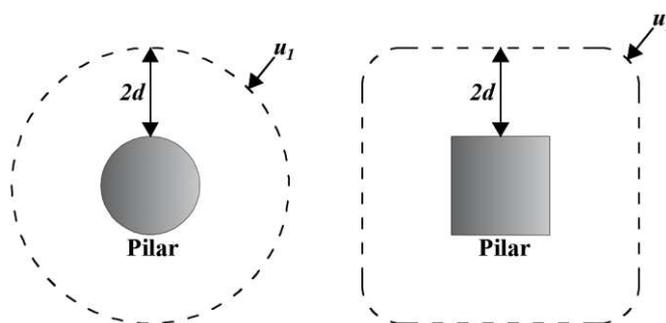
## 2.2 RECOMENDAÇÕES DE CÓDIGOS DE PROJETO

Atualmente, existem diversas normas de projeto que estimam a carga de ruptura de lajes lisas. As normas são fundamentadas com base em um modelo empírico de cálculo, que relaciona a tensão de cisalhamento, atuante em uma determinada superfície de controle, com a resistência ao cisalhamento. Porém, em cada norma diferenciam-se o tratamento do parâmetro de resistência do concreto ao cisalhamento e o traçado do perímetro de controle.

Neste item são apresentadas as recomendações normativas para o cálculo de lajes lisas de concreto armado com e sem aberturas. Neste trabalho, foram considerados os códigos EUROCODE 2 (2004), CEB-FIP/MC (2010), ACI 318 (2014) e ABNT NBR 6118 (2014).

### 2.2.1 EUROCODE 2 (2004)

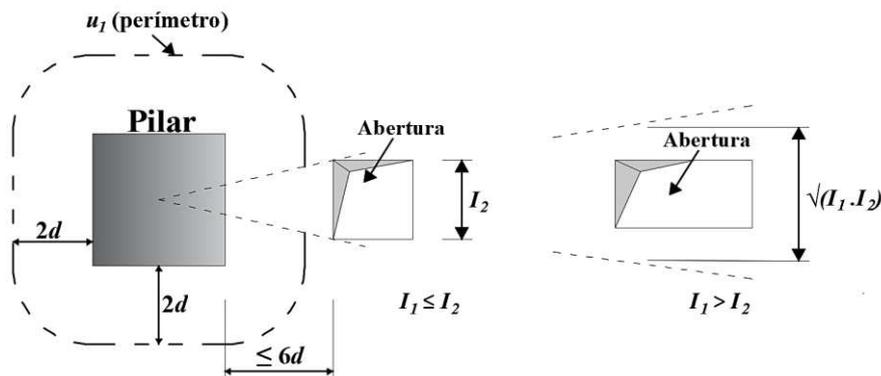
Para lajes sem armadura de cisalhamento, este código normativo recomenda que a resistência ao cisalhamento proveniente de cargas concentradas ou reações de apoio deve ser verificada no perímetro de controle ( $u_1$ ) distante a  $2d$  da área carregada, de acordo com a Figura 2.23, sendo  $d$  a altura útil da laje.



**Figura 2.23 - Perímetro de controle ( $u_1$ )**

Fonte: EUROCODE 2, 2004.

Para áreas carregadas junto de aberturas, se a menor distância entre o contorno da área carregada e o bordo da abertura não for superior a  $6d$ , não deverá ser considerada a parte do perímetro de controle compreendida entre as duas tangentes à abertura, traçadas desde o centro da área carregada Figura 2.24.



**Figura 2.24 - Perímetro de controle junto de uma abertura**

Fonte: EUROCODE 2, 2004.

O método de cálculo para as lajes sem armadura de cisalhamento, baseia-se em verificações efetuadas na face do pilar e no perímetro de controle ( $u_l$ ). O código estabelece que no perímetro do pilar, ou no perímetro da área carregada, não deverá ser excedido o valor máximo da tensão de cisalhamento, de acordo com a Equação 2.1.

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,máx} \quad (2.1)$$

sendo que:

$$V_{Ed} = \beta_{ex} \frac{F_{sd}}{u_0 d} \quad (2.2)$$

$$V_{Rd,máx} = 0,4 \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} u_0 d \quad (2.3)$$

Nestas equações,  $\beta_{ex}$  é um coeficiente que leva em conta os efeitos da excentricidade da carga e caso de não haver excentricidade pode-se tomar  $\beta_{ex} = 1,00$ ;  $F_{sd}$  é a força ou reação concentrada de cálculo;  $u_l$  é o perímetro de controle à  $2d$  da face do pilar;  $f_{ck}$  e  $f_{cd}$  são as resistências característica e de cálculo do concreto à compressão, nesta ordem;  $d$  é a altura útil da laje, considerada como:

$$d = \frac{(d_x + d_y)}{2} \quad (2.4)$$

onde,  $d_x$  e  $d_y$  são as alturas úteis da laje em função da armadura em duas direções ortogonais.

Para lajes sem armadura de cisalhamento, a resistência à punção deverá ser avaliada de acordo com as Equações 2.5 e 2.6.

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,c} \quad (2.5)$$

$$V_{Rd,c} = \frac{0,18}{\gamma_c} K (100 \rho f_{ck})^{1/3} u_1 d \geq V_{min} u_1 d \quad (2.6)$$

em que:

- $f_{ck}$ : resistência característica à compressão do concreto (MPa);
- $\gamma_c$ : coeficiente de minoração,  $\gamma_c = 1,5$ ;
- $K$ : coeficiente de efeito de tamanho, dado por  $K = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0$ , com  $d$  em mm;
- $\rho = \sqrt{\rho_x \rho_y} \leq 0,02$ ;
- $V_{min} = 0,035 K^{2/3} f_{ck}^{1/2}$ .

Para a determinação das taxas de armadura nas direções ortogonais ( $\rho_x$  e  $\rho_y$ ), consideram-se as barras em uma região de comprimento igual à dimensão do pilar mais  $3d$  para cada um dos lados do mesmo, ou até a borda da laje, caso esta estiver mais próxima.

Nas lajes com armadura de cisalhamento, a resistência à punção deverá ser avaliada na região adjacente à face do pilar (Equações 2.2 e 2.3) e nas regiões com armadura de cisalhamento e externa a essa armadura.

Na região com armadura de cisalhamento, tem-se que:

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,cs} \quad (2.7)$$

$$V_{Rd,cs} = 0,75 V_{Rd,c} + 1,5 \left( \frac{d}{s_r} \right) A_{sw} f_{ywd,ef} \text{sen} \alpha \quad (2.8)$$

onde:

$s_r$ : espaçamento radial das camadas da armadura de cisalhamento (mm);

$A_{sw}$ : área da armadura de cisalhamento em uma camada ao redor da coluna ( $\text{mm}^2$ );

$f_{ywd,ef} = 250 + 0,25d \leq f_{ywd}$ , em MPa;

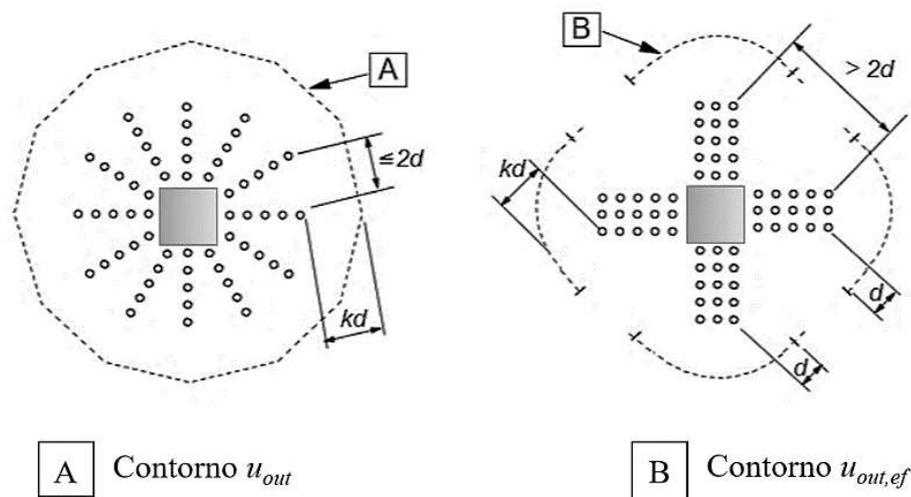
$\alpha$ : ângulo entre a armadura de cisalhamento e o plano da laje.

Para a região externa à armadura de cisalhamento, as Equações 2.9 e 2.10 são verificadas.

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,cs,out} \quad (2.9)$$

$$V_{Rd,cs,out} = 0,18K(100\rho f_{ck})^{1/3} u_{out}d \quad (2.10)$$

Nesta equação,  $u_{out}$  é o perímetro de controle traçado a uma distância de  $1,5d$  após a última camada da armadura de cisalhamento, como pode ser observado na Figura 2.25.



**Figura 2.25 - Perímetros de controle para pilares internos**

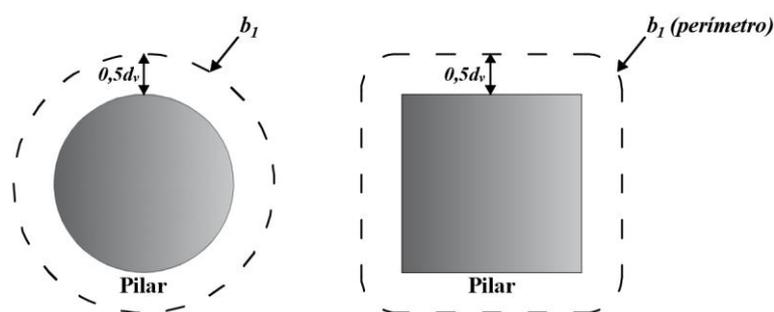
Fonte: EUROCODE 2, 2004.

### 2.2.2 CEB-FIP/MC (2010)

Esta norma se baseia na Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento, sendo adaptada para aplicações em projeto através da introdução de coeficientes de segurança. A norma estabelece um modelo para a verificação da punção no estado limite último que corresponde ao esforço resultante de uma carga concentrada em uma área relativamente pequena. Essa área ao redor da carga é delimitada por um perímetro, chamado de perímetro de controle básico  $b_1$ . A

norma recomenda que ele deve ser tomado a uma distância  $0,5d_v$  da face da área carregada, como mostra a Figura 2.26.

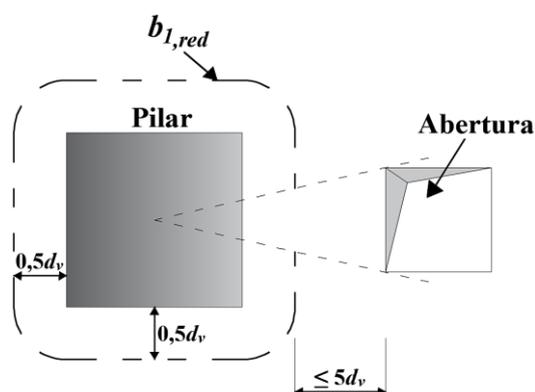
No caso de distribuições não uniformes de forças de cisalhamento ao longo do perímetro básico de controle ( $b_1$ ), deverá ser usado para o cálculo da carga última de ruptura por punção da laje o perímetro de controle resistente ao cisalhamento ( $b_0$ ). Essas distribuições não uniformes de forças de cisalhamento ocorrem em 4 situações: concentração de esforços de cisalhamento nos vértices de áreas apoiadas grandes, descontinuidades da laje, concentrações de esforços de cisalhamento devido à transferência de momento entre a laje e a área apoiada e à presença de carregamentos significantes próximos à área apoiada.



**Figura 2.26 - Perímetro de controle ( $b_1$ )**

Fonte: CEB-FIP/MC, 2010.

Em lajes que apresentam descontinuidades como aberturas, cuja distância para o centroide do pilar é inferior a 5 vezes a altura efetiva da laje ( $d_v$ ), o perímetro de controle compreendido entre duas linhas tangentes às faces da abertura, em que a origem é o centroide da região carregada, é considerada ineficaz e, para fins de cálculo, ela é desconsiderada conforme a Figura 2.27.



**Figura 2.27 - Perímetro de controle reduzido em função da presença de aberturas**

Fonte: CEB-FIP/MC, 2010.

Quando as lajes apresentam concentrações de esforços de cisalhamento devido à transferência de momento entre a laje e a área apoiada, este efeito deve ser de maneira aproximada, levado em consideração a multiplicação do perímetro básico de controle ( $b_{1,red}$ ) pelo coeficiente de excentricidade ( $k_e$ ), segundo a Equação 2.11.

$$b_0 = k_e b_{1,red} \quad (2.11)$$

sendo que,

$$k_e = \frac{1}{1 + \frac{e_u}{b_u}} \quad (2.12)$$

Nestas equações,  $e_u$  é a excentricidade da resultante das forças de cisalhamento em relação ao centroide do perímetro básico de controle (em mm);  $b_u$  é o diâmetro de um círculo com a mesma superfície da região do apoio ou área carregada (em mm).

A verificação da resistência à punção de uma laje de concreto armado deve obedecer à Equação 2.13, em que  $V_{Rd,c}$  é a parcela de resistência proveniente do concreto e  $V_{Rd,s}$  é a contribuição da armadura de cisalhamento para a resistência da laje. No caso de lajes sem armadura de cisalhamento a parcela  $V_{Rd,s}$  será nula.

$$V_{Rd} = V_{Rd,c} + V_{Rd,s} \quad (2.13)$$

$$V_{Rd,c} = k_\psi \frac{\sqrt{f_c}}{\gamma_c} b_0 d_v \quad (2.14)$$

onde:

$f_c$ : resistência à compressão do concreto (MPa);

$b_0$ : perímetro de controle resistente ao cisalhamento (mm);

$d_v$ : altura efetiva da laje (mm);

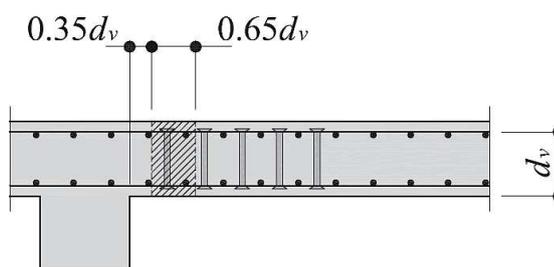
$k_\psi$ : é calculado pela Equação 2.15 e depende da rotação da laje ao redor da área apoiada.

$$k_{\psi} = \frac{1}{1,5 + 0,9k_{d,g}\psi d_v} \leq 0,6 \quad (2.15)$$

Nessa equação,  $\psi$  é a rotação da laje ao redor da área apoiada ou carregada;  $k_{d,g}$  é um parâmetro que depende do diâmetro máximo do agregado graúdo ( $d_g$ ). Se o diâmetro máximo do agregado for maior que 16,0 mm o valor adotado de  $k_{d,g}$  será unitário, caso contrário, deve ser calculado pela Equação 2.16.

$$k_{d,g} = \frac{32}{16 + d_g} \geq 0,75 \quad (2.16)$$

A contribuição da armadura de cisalhamento ( $V_{Rd,s}$ ) pode ser calculada como a somatória da multiplicação da área da seção transversal da armadura de cisalhamento compreendida em uma área distante  $0,35d_v$  a  $d_v$  da face do pilar (Figura 2.28).



**Figura 2.28 - Consideração da armadura de cisalhamento**

Fonte: CEB-FIP/MC, 2010.

Portanto, a contribuição da armadura de cisalhamento é definida como:

$$V_{Rd,s} = \sum A_{sw} k_e \sigma_{sw} \text{sen} \alpha \geq 0,5V_{Rd} \quad (2.17)$$

onde:

$\sum A_{sw}$ : é a soma das áreas da armadura de cisalhamento interceptada pela superfície de ruptura (superfícies em forma de cone com ângulo de  $45^\circ$ ) dentro da região demonstrada na Figura 2.28 (em  $\text{cm}^2$ );

$\alpha$ : é o ângulo da armadura de cisalhamento com a superfície de referência;

$\sigma_{sw}$ : é a tensão do aço da armadura de cisalhamento (em MPa), conforme Equação

2.18.

$$\sigma_{swd} = \frac{E_{sw}\psi}{6} \left( 1 + \frac{f_{bd}}{f_{ywd}} \frac{d_v}{\phi_w} \right) \leq f_{ywd} \quad (2.18)$$

Nessa equação,  $\phi_w$  é o diâmetro das barras da armadura,  $f_{ywd}$  e  $E_{sw}$  é a tensão de escoamento e o módulo de elasticidade da armadura de cisalhamento, respectivamente e  $f_{bd}$  é a força de adesão. Em muitos casos,  $f_{bd}$  pode ser adotada igual à 3 MPa.

O valor máximo da resistência à punção em lajes com armadura de cisalhamento é limitado devido ao esmagamento da biela de concreto próxima ao apoio e esse valor pode ser determinado por meio da Equação 2.19.

$$V_{Rd,máx} = k_{sys}k_{\psi} \frac{\sqrt{f_c}}{\gamma_c} b_0 d_v \leq \frac{\sqrt{f_c}}{\gamma_c} b_0 d_v \quad (2.19)$$

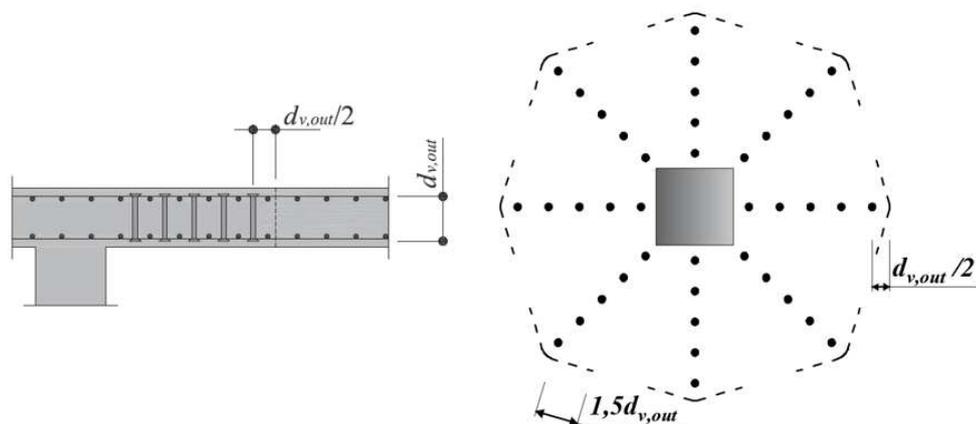
em que:

$k_{sys}$ : é o coeficiente que leva em conta o desempenho do sistema à punção utilizado no dimensionamento em termos de controle de fissuração e o confinamento adequado das bielas de compressão. Na ausência de dados experimentais e caso tenham sido seguidas as prescrições do CEB-FIP/MC (2010), esse parâmetro pode ser adotado igual à 2,0.

A capacidade resistente à punção avaliada após a armadura de cisalhamento é determinada a partir da Equação 2.20.

$$V_{Rd,c} = k_{\psi} \frac{\sqrt{f_c}}{\gamma_c} b_{out} d_{v,out} \quad (2.20)$$

Nessa equação,  $f_c$  é a resistência à compressão do concreto,  $b_{out}$  é o perímetro de controle definido a uma distância de  $0,5d_v$  após a última camada de armadura de cisalhamento (Figura 2.29), e  $d_{v,out}$  é a distância entre a armadura de flexão e a extremidade inferior do ramo vertical da armadura de cisalhamento.



**Figura 2.29 - Perímetro crítico afastado da última camada de armadura de cisalhamento.**

Fonte: CEB-FIP/MC, 2010.

A rotação da laje ao redor da área apoiada ou carregada ( $\psi$ ) pode ser estimada através de quatro diferentes níveis de aproximação, que se distinguem pelo nível de complexidade da análise e pelo grau de precisão dos resultados. Para lajes lisas usuais projetadas através de análises elásticas sem redistribuição significativa de esforços internos, a rotação é estimada de forma segura no momento da ruptura por meio da Equação 2.21, que representa o nível de aproximação I (LoA I). Nesse nível de aproximação, a razão entre o momento médio solicitante e o momento médio resistente é igual à 1,0.

$$\psi = 1,5 \frac{r_s f_{yd}}{d_v E_s} \quad (2.21)$$

$$d_v = \frac{d_x + d_y}{2} \quad (2.22)$$

em que:

$f_c$ : resistência à compressão do concreto (MPa);

$f_{yd}$ : tensão de escoamento de projeto da armadura longitudinal tracionada (MPa);

$E_s$ : módulo de elasticidade da armadura longitudinal tracionada (MPa);

$r_s$ : distância do centroide do pilar ao ponto onde o momento é zero (mm).

O valor de  $r_s$ , em lajes lisas usuais onde a razão entre os vãos ( $L_x/L_y$ ) está entre 0,5 e 2,0, que pode ser estimado como igual a  $0,22L_x$  ou  $0,22L_y$ , respectivamente, para as direções  $x$  e  $y$ .

Nos casos onde as lajes apresentam redistribuição significativa de momento no cálculo da armadura de flexão, a norma recomenda o uso do nível de aproximação II (LoA II). Nesse caso, a rotação das lajes é calculada de acordo com a Equação 2.23.

$$\psi = 1,5 \frac{r_s}{d_v} \frac{f_{yd}}{E_s} \left( \frac{m_S}{m_R} \right)^{1,5} \quad (2.23)$$

sendo que:

$m_S$ : momento solicitante médio de cálculo por unidade de comprimento (kN.mm/mm), podendo ser estimado por  $m_S = V_{exp}/8$ ;

$m_R$ : momento resistente de cálculo por unidade de comprimento (kN.mm/mm), podendo ser estimado por  $m_R = \rho f_y d^2 \left( 1 - \frac{\rho f_y}{2 f_c} \right)$ .

Segundo Ruiz e Muttoni (2009),  $m_S$  e  $m_R$  podem ser substituídos por  $V_u$  e  $V_{flex}$ , respectivamente, como mostra a Equação 2.24.

$$\psi = 1,5 \frac{r_s}{d_v} \frac{f_{yd}}{E_s} \left( \frac{V_u}{V_{flex}} \right)^{1,5} \quad (2.24)$$

Nos casos onde se tem lajes lisas irregulares ou quando a razão entre os vãos ( $L_x/L_y$ ) não estiver entre 0,5 e 2,0, a norma recomenda a utilização do nível de aproximação III (LoA III). Esse nível de aproximação requer uma análise linear elástica de um modelo não fissurado da laje analisada. Tal nível de aproximação é mais preciso que os anteriores e por isso o coeficiente 1,5 da Equação 2.20 é substituído por 1,2, conforme a Equação 2.25.

$$\psi = 1,2 \frac{r_s}{d_v} \frac{f_{yk}}{E_s} \left( \frac{m_S}{m_R} \right)^{1,5} \quad (2.25)$$

O nível de aproximação IV (LoA III) é utilizado apenas em alguns casos especiais, nele o comportamento carga-rotação da laje deve ser investigado, realizando uma análise não-linear da estrutura, considerando a fissuração e o escoamento da armadura e quaisquer outros parâmetros não lineares relevantes para uma verificação precisa.

Neste trabalho, as resistências à punção das lajes lisas de concreto armado foram estimadas a partir do nível de aproximação II (LoA II).

### 2.2.3 ACI 318 (2014)

O código ACI 318 (2014) estabelece que a verificação da punção em lajes lisas, deve ser feita através da comparação entre a força nominal atuante  $V_u$  e a força nominal resistente  $V_n$ , conforme descrito nas Equações 2.26 e 2.27.

$$\Phi V_n \geq V_u \quad (2.26)$$

$$V_n = V_c + V_s \quad (2.27)$$

Nessa equação,  $V_c$  é a força resistente do concreto;  $V_s$  a força resistente do aço;  $\Phi$  é um fator de redução  $\Phi = 0,75$ . Para ensaios em laboratório esse fator é igual à 1,0.

Para as lajes sem armadura de cisalhamento, o valor resistente, dado apenas pela parcela do concreto ( $V_c$ ), deve ser igual ao menor resultado obtido com a aplicação das Equações 2.28, 2.29 e 2.30:

$$V_c = \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{2}{\beta_c} \right) \sqrt{f_c} b_0 d \quad (2.28)$$

$$V_c = \frac{1}{12} \left( \frac{\alpha_s d}{b_0} + 2 \right) \sqrt{f_c} b_0 d \quad (2.29)$$

$$V_c = \frac{1}{3} \sqrt{f_c} b_0 d \quad (2.30)$$

sendo que:

$\alpha_s$ : assume o valor de 40 para pilares internos; 30 para pilares de borda e 20 para pilares de canto;

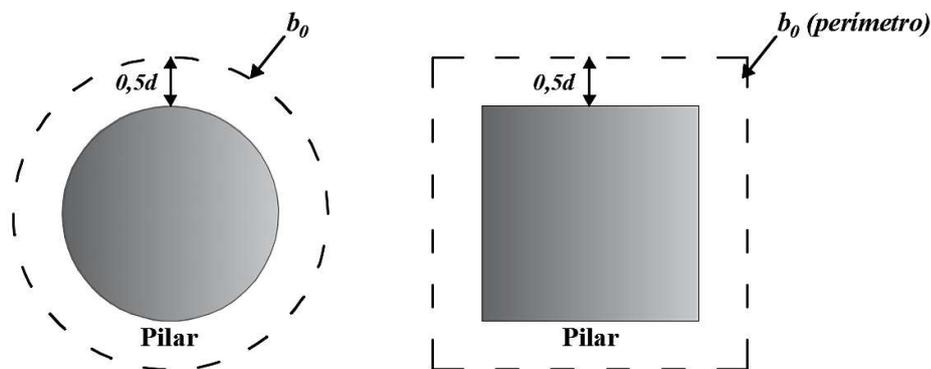
$\beta_c$ : razão entre o maior e o menor lado do pilar ( $c_{máx}/c_{mín}$ );

$b_0$ : perímetro de controle (mm);

$d$ : altura útil da laje ao longo do contorno crítico (mm);

$f_c$ : resistência à compressão do concreto (MPa).

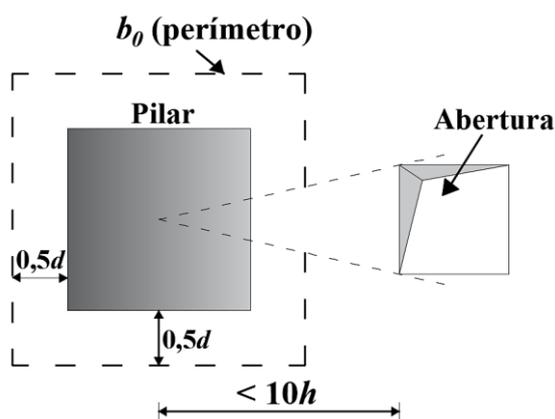
O perímetro de controle para a verificação da tensão resistente está localizado a uma distância de  $0,5d$  a partir da face do pilar. Para uma laje lisa, com pilar interno de seção retangular, o perímetro crítico é o mostrado na Figura 2.30.



**Figura 2.30 - Perímetro de controle ( $b_0$ )**

Fonte: ACI 318, 2014.

Quando a laje apresenta aberturas, cuja distância para o centroide do pilar é inferior a 10 vezes à espessura da laje e não apresenta armadura de combate à punção, a parte do perímetro de controle que se encontra delimitada por linhas retas projetadas do centroide do pilar tangente à abertura é considerado ineficiente, como apresentado na Figura 2.31.



**Figura 2.31 - Perímetro de controle para lajes com aberturas**

Fonte: ACI 318, 2014.

Em lajes com armadura de cisalhamento (*studs*), para determinar a resistência à punção, devem ser consideradas as parcelas de contribuição do concreto e do aço, conforme as Equações 2.31 e 2.32, por essa ordem.

$$V_c \leq \frac{1}{4} \sqrt{f_c} b_0 d \quad (2.31)$$

$$V_s = A_{sw} f_{yw} \frac{d}{s_r} \quad (2.32)$$

Nessas equações,  $A_{sw}$  é a área da armadura de cisalhamento;  $f_{yw}$  é a tensão específica de escoamento do aço ( $f_{yw} \leq 420$  MPa);  $s_r$  é o espaçamento entre os elementos da armadura de cisalhamento.

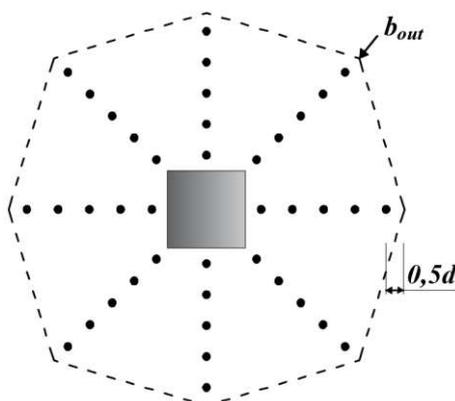
A soma das contribuições do concreto e da armadura é limitada para *studs* utilizados como armadura de cisalhamento, sendo calculada como:

$$V_u \leq \frac{2}{3} \sqrt{f_c} b_0 d \quad (2.33)$$

A capacidade resistente à punção avaliada após a armadura de cisalhamento é determinada a partir da Equação 2.34.

$$V_c = \frac{1}{6} \sqrt{f_c} b_{out} d \quad (2.34)$$

O espaçamento radial dos elementos da armadura de cisalhamento não deve ser maior que  $0,5d$ . A Figura 2.32, apresenta o cálculo para o perímetro distante  $0,5d$  da última camada da armadura de cisalhamento ( $b_{out}$ ).

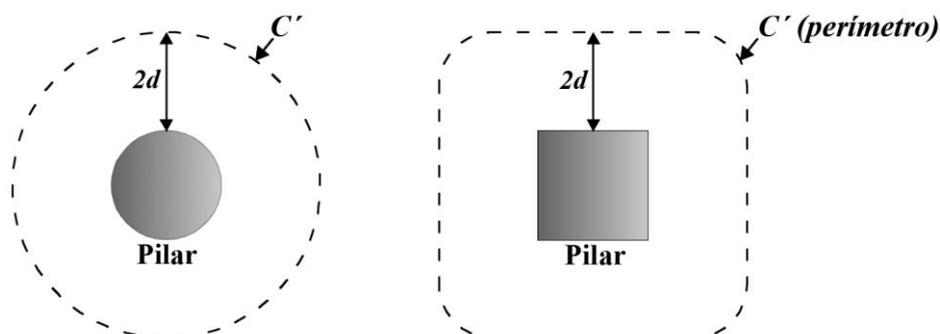


**Figura 2.32 - Perímetro de controle  $b_{out}$**   
Fonte: ACI 318, 2014.

## 2.2.4 ABNT NBR 6118 (2014)

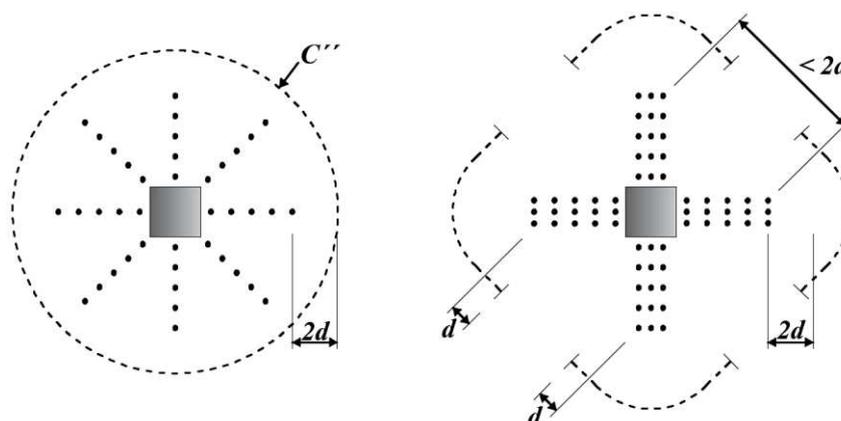
A norma brasileira ABNT NBR 6118 (2014) prevê a verificação da tensão resistente à punção de uma laje lisa de concreto armado em três superfícies críticas e demonstrado nas Figuras 2.30 e 2.31:

1. Superfície crítica de contorno  $C$  do pilar ou da carga concentrada, verificando indiretamente a tensão de compressão diagonal do concreto através da tensão de cisalhamento.
2. Superfície crítica de contorno  $C'$ , afastada  $2d$  do pilar ou carga concentrada, onde se verifica a capacidade da ligação à punção, associada à resistência à tração diagonal.
3. Superfície crítica de contorno  $C''$ , afastada  $2d$  da última camada da armadura de cisalhamento, verificada quando há a necessidade de considerar este tipo de armadura.



**Figura 2.33 - Perímetro crítico em pilares internos**

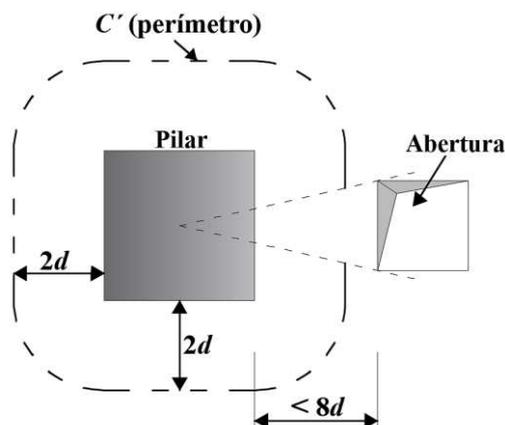
Fonte: ABNT NBR 6118, 2014.



**Figura 2.34 - Disposição da armadura de punção em planta e contorno da superfície crítica  $C''$**

Fonte: ABNT NBR 6118, 2014.

No caso de existência de abertura na laje situada a menos de  $8d$  do contorno  $C$  (face do pilar), o contorno crítico  $C'$  entre as duas retas que passam pelo centro de gravidade da área de aplicação da força e que tangenciam o contorno da abertura será considerado inefetivo, conforme Figura 2.35.



**Figura 2.35 - Perímetro crítico junto à abertura na laje**

Fonte: ABNT NBR 6118, 2014.

A primeira verificação presente na norma refere-se a força de compressão diagonal do concreto, calculada através da força de cisalhamento na primeira superfície crítica ( $C$ ), representada pelo perímetro do pilar ou da carga concentrada, mediante Equação 2.35.

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} = 0,27\alpha_v f_{cd} C d \quad (2.35)$$

onde:

$f_{cd}$ : resistência de cálculo do concreto à compressão (MPa);

$$\alpha_v = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right), f_{ck} \text{ em MPa};$$

$$d = \frac{d_x + d_y}{2}, \text{ onde, } d_x \text{ e } d_y \text{ são as alturas úteis nas duas direções ortogonais.}$$

A força de cisalhamento resistente na superfície crítica  $C'$  ( $V_{Rd1}$ ), afastada  $2d$  do pilar ou da carga concentrada, deve ser calculada em trechos sem armadura de punção a partir da Equação 2.36.

$$V_{sd} \leq V_{Rd1} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) (100 \rho f_{ck})^{1/3} C' d \quad (2.36)$$

Nesta equação,  $\rho = \sqrt{\rho_x \rho_y}$  é a taxa de armadura nas duas direções ortogonais, calculadas com a largura igual à dimensão do pilar mais  $3d$  para cada um dos lados (ou a borda da laje, se estiver mais próxima);  $d$  é a altura útil da laje ao longo do contorno crítico  $C'$  em cm.

Para os casos de lajes com armadura de cisalhamento, a força resistente deve ser calculada de acordo com a Equação 2.37.

$$V_{sd} \leq V_{Rd3} = 0,10 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) (100 \rho f_{ck})^{1/3} C' d + 1,5 \left( \frac{d}{s_r} \right) A_{sw} f_{ywd} \operatorname{sen} \alpha \quad (2.37)$$

onde:

$s_r$ : espaçamento radial entre as linhas da armadura de cisalhamento, não maior que  $0,75d$ ;

$A_{sw}$ : área de armadura de cisalhamento por camada;

$\alpha$ : ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de cisalhamento e o plano da laje;

$C'$ : perímetro crítico;

$f_{ywd}$ : resistência de cálculo da armadura de cisalhamento, não maior que 300 MPa para conectores do tipo *stud*.

Para o cálculo da força resistente externa à região com armadura de cisalhamento (Equação 2.35), deve-se utilizar o perímetro crítico distante  $2d$  do último elemento da armadura de cisalhamento (Figura 2.34).

## 2.2.5 COMPARAÇÃO ENTRE OS CÓDIGOS DE PROJETO

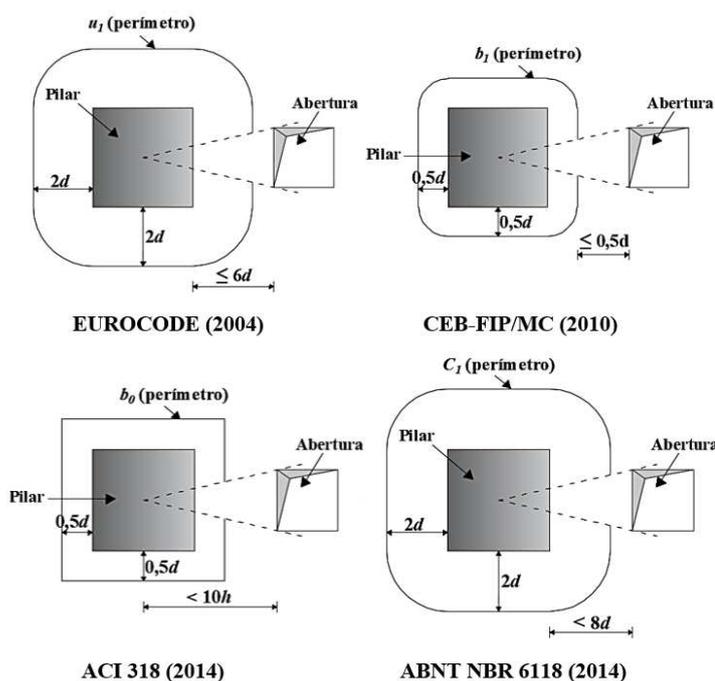
A Tabela 2.12 apresenta, resumidamente, a comparação entre os códigos normativos considerados neste trabalho para a previsão da carga de ruptura de lajes lisas de concreto armado. Nesta tabela,  $s_{r,máx}$  é o espaçamento radial máximo,  $u_l$  é o período de concreto a partir das faces do pilar e  $u_{out}$  é o período de controle a partir da última camada da armadura de cisalhamento.

**Tabela 2.12 – Comparação entre os códigos normativos para previsão da carga de ruptura de lajes lisas**

Códigos	$s_r, máx$ (mm)	$f_{ywd,máx}$ (MPa)	Contribuição de $A_{sw}$ (kN)	$u_1$ (mm)	$u_{out}$ (mm)
EUROCODE 2 (2004)	$0,75d$	$250 + 0,25d$	$1,5 \frac{d}{s_r} A_{sw} f_{ywd}$	$2d$	$1,5d$
CEB-FIP/MC (2010)	300	$\frac{E_{sw}\psi}{6} \left( 1 + \frac{f_{bd}}{f_{yw}} \frac{d}{\phi_w} \right)$	$A_{sw} * f_{ywd}$	$0,5d_v$	$0,5d_v$
ACI 318 (2014)	$0,5d$	420	$\frac{d}{s_r} A_{sw} f_{ywd}$	$0,5d$	$0,5d$
ABNT NBR 6118 (2014)	$0,75d$	300	$1,5 \frac{d}{s_r} A_{sw} f_{ywd}$	$2d$	$2d$

$A_{sw}^*$  é a área da armadura de cisalhamento compreendida em uma região distante  $0,35d_v$  a  $d_v$  da face do pilar.

A Figura 2.36 contém o traçado do perímetro de controle com a presença de abertura na laje estabelecido em cada código normativo considerado neste trabalho.



**Figura 2.36 - Perímetros de controle para a verificação da punção nas normas de projeto**

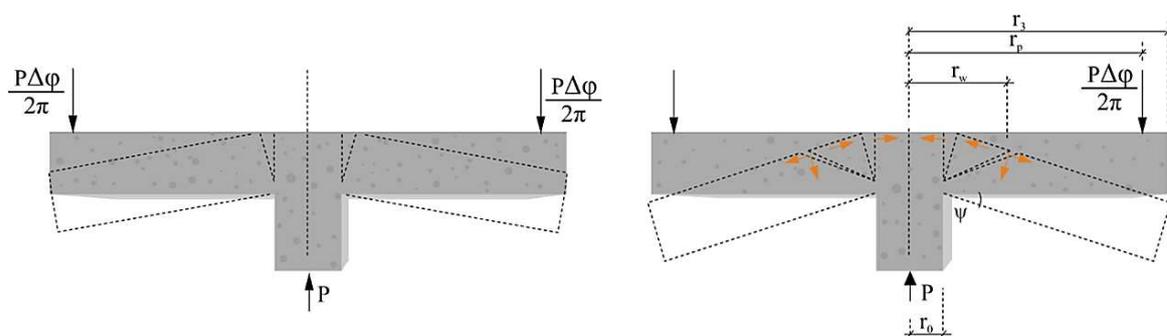
### 2.3 MODELOS TEÓRICOS

Dentre os principais métodos teóricos presentes na literatura que abordam o fenômeno da punção em lajes lisas de concreto armado sem e com armadura de cisalhamento,

destacam-se os métodos de Shehata (1985) e Gomes (1991), respectivamente, e considerados nesta pesquisa. Tais modelos serão brevemente demonstrados neste item.

### 2.3.1 Shehata (1985)

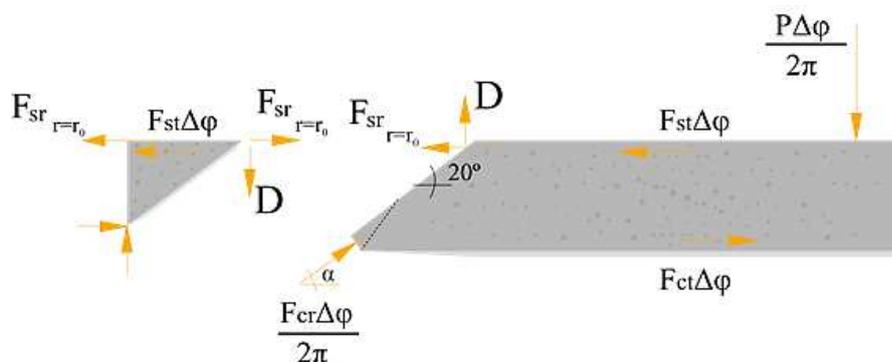
O modelo proposto por Shehata (1985) considera uma laje dividida em segmentos rígidos. Com o incremento de carga, formam-se fissuras, sendo que cada segmento formado é dividido por duas fissuras radiais, por uma circunferencial e pela extremidade da laje, as quais possuem perfis de deflexão praticamente lineares, conforme ilustra a Figura 2.37.



**Figura 2.37 - Modelo de ruptura por punção**

Fonte: Shehata, 1985 – adaptado.

As lajes abordadas nesse modelo teórico são sem armadura de cisalhamento, sendo que as tensões originadas de cisalhamento causam fissura interna inclinada, considerada igual a  $20^\circ$  para lajes com armadura de flexão distribuída ortogonalmente (Figura 2.38). O concreto comprimido no bordo inferior da laje próximo à face da coluna é considerado no estado plástico.



**Figura 2.38 - Forças envolvidas no modelo**

Fonte: Shehata, 1985 – adaptado.

### 2.3.1.1 Forças da armadura de flexão

Sendo  $r_y$  o raio no qual escoa a armadura de cisalhamento e  $r_w$  o raio do prolongamento da fissura de punção na face superior da laje, para  $r_y \leq r_w$  (estado elástico), tem-se:

$$r_y = \psi \frac{d}{\varepsilon_{sy}} \left( 1 - \frac{x}{d} \right) < r_w = r_0 + (d - x) \cot g 20^\circ \quad (2.38)$$

$$F_{st} = \rho_t f_y d r_y \ln \frac{r_3}{r_w} \quad (2.39)$$

$$F_{sr} = \rho_r f_y d r_y \Delta \varphi \quad (2.40)$$

Nestas equações,  $\rho_t$  e  $\rho_r$  são as taxas de armadura nas direções tangencial e radial nesta ordem. Fazendo-se o equilíbrio de momentos e considerando-se  $\rho_t = \rho_r = \rho$ , obteve-se através da simplificação da Equação 2.41, a equação da força de pino,  $D$ , (*dowel effect*) representada pela Equação 2.42.

$$\frac{(d - x)}{(r_w - r_0)} \approx \operatorname{tg} 20^\circ \cong 0,364 \quad (2.41)$$

$$D = 0,364 \rho f_y d r_y \ln \left( \frac{r_w}{r_y} \right) \Delta \varphi \quad (2.42)$$

Para o caso de  $r_y \geq r_w$  (estado elasto-plástico), tem-se as seguintes equações de forças da armadura de flexão:

$$F_{st} = \rho_t f_y d \left[ (r_y - r_w) + r_y \ln \left( \frac{r_3}{r_y} \right) \right] \quad (2.43)$$

$$F_{sr} = \rho_r f_y d r_w \Delta \varphi \quad (2.44)$$

Neste caso, o valor da força de pino ( $D$ ) é igual a zero.

### 2.3.1.2 Forças do concreto

A força radial que atua no concreto junto à coluna  $F_{cr}$  é:

$$F_{cr} = \eta f_c A_c \quad (2.45)$$

Nesta equação,  $\eta$  é a razão entre a resistência do tronco de pirâmide formado junto à coluna ( $\sigma_b$ ) e a resistência do concreto obtida por um corpo de prova cilíndrico ( $f_c$ ), dado por:

$$\eta = \frac{\sigma_b}{f_c} = 1 + S_{gr} \quad (2.46)$$

sendo que,  $S_{gr}$  é o gradiente de tensões na zona de ruptura, fornecido pela Equação 2.47. Nessa equação,  $A_c$  é a área normal à força atuante inclinada ( $F_{cr}$ ) e  $A_{cl}$  é a área limite da seção da zona de ruptura.

$$S_{gr} = \frac{\sigma_b}{f_c} \left( 1 - \frac{A_c}{A_{cl}} \right) \quad (2.47)$$

Os valores de  $A_c$  e  $A_{cl}$  são obtidos mediante as Equações 2.48 e 2.49.

$$A_c = 2\pi \left[ r_0 - \frac{x \operatorname{sen}70^\circ}{2\operatorname{sen}(110^\circ - \alpha)} \operatorname{sen}\alpha \right] \frac{x \operatorname{sen}70^\circ}{\operatorname{sen}(110^\circ - \alpha)} \quad (2.48)$$

$$A_{cl} = 2\pi \left[ r_0 + x - \frac{x(1 + \operatorname{tg}20^\circ) \operatorname{sen}70^\circ}{2\operatorname{sen}(110^\circ - \alpha)} \operatorname{sen}\alpha \right] \frac{x(1 + \operatorname{tg}20^\circ) \operatorname{sen}70^\circ}{\operatorname{sen}(110^\circ - \alpha)} \quad (2.49)$$

A força tangencial do concreto é obtida através da integral:

$$F_{ct} = \int_{r_0}^{r_3} k_c f_c k_x x dr \quad (2.50)$$

Os valores de  $k_c$  e  $k_x$  são definidos em função do bloco de tensões obtido segundo a deformação  $\varepsilon_{ct} = \psi(x/r)$ , a partir da rotação do corpo rígido, segundo as Equações 2.51 e 2.52.

$$0 < k_c = \frac{\sigma_{ct}}{f_c} \leq 0,85 \quad (2.51)$$

$$0,5 < k_x = 0,5 + 0,35 \left( \frac{\psi \frac{x}{r} - \varepsilon_{cl}}{0,0035 - \varepsilon_{cl}} \right) \leq 0,85 \quad (2.52)$$

Nestas equações,  $\sigma_{ct}$  é a tensão da fibra extrema na compressão e  $\varepsilon_{cl}$  é a deformação do concreto, dada por:

$$\varepsilon_{cl} = 0,85 \frac{f_c}{E_c} \quad (2.53)$$

Resolvendo-se a integral da Eq. 2.50, obtém-se equações de  $F_{ct}$  em função dos raios  $r_0$ ,  $r_{ec}$ ,  $r_{ecl}$  e  $r_{ecu}$ .

### 2.3.1.3 Condições de equilíbrio

Estabelecendo-se a relação entre a rotação  $\psi$ , a posição da linha neutra  $x$ , a inclinação da força de compressão na face da coluna  $\alpha$  e a carga última  $P$ , são obtidas três equações de equilíbrio.

A equação de equilíbrio horizontal é fornecida pela Equação 2.54:

$$F_{cr} \cos \alpha + F_{ct} \Delta\varphi = F_{sr} + F_{st} \Delta\varphi \quad (2.54)$$

A equação de equilíbrio vertical é dada por:

$$P \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \xi F_{cr} \text{sen} \alpha + D \quad (2.55)$$

onde,

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{500}{d \text{ (mm)}}} \quad (2.56)$$

Por sua vez, a equação de equilíbrio rotacional é obtida como:

$$P \frac{\Delta\varphi}{2\pi} (r_3 - r_0) = (F_{sr} + F_{st} \Delta\varphi) z + D (r_w - r_0) \quad (2.57)$$

em que,  $z = (d - 0,45x)$  é o braço de alavanca.

#### 2.3.1.4 Critérios de ruptura

Três situações críticas são levadas em consideração para avaliar o critério de ruptura segundo Shehata (1985):

1. Se o ângulo  $\alpha$  alcança a inclinação de  $20^\circ$ , tensões de tração elevadas provocam o deslizamento do concreto.
2. A deformação radial na face comprimida do concreto atinge o valor de 0,0035 em um comprimento plástico de 150 mm a partir da face da coluna, então tem-se:

$$\varepsilon_{cr} = 0,0035 = \psi \frac{x \text{ (mm)}}{150} \quad (2.58)$$

3. No momento em que a deformação tangencial da face comprimida do concreto torna-se igual a 0,0035, a uma distância igual à linha neutra  $x$  da face da coluna, ocorre o esmagamento tangencial no concreto.

Com as equações de equilíbrio, para determinados valores da rotação  $\psi$ , as incógnitas  $x/d$ ,  $\alpha$  e de  $P$  podem ser encontrados por processo iterativo. Para a definição da carga de ruptura à punção é necessário, portanto encontrar a rotação última  $\psi_u$ , através da aplicação

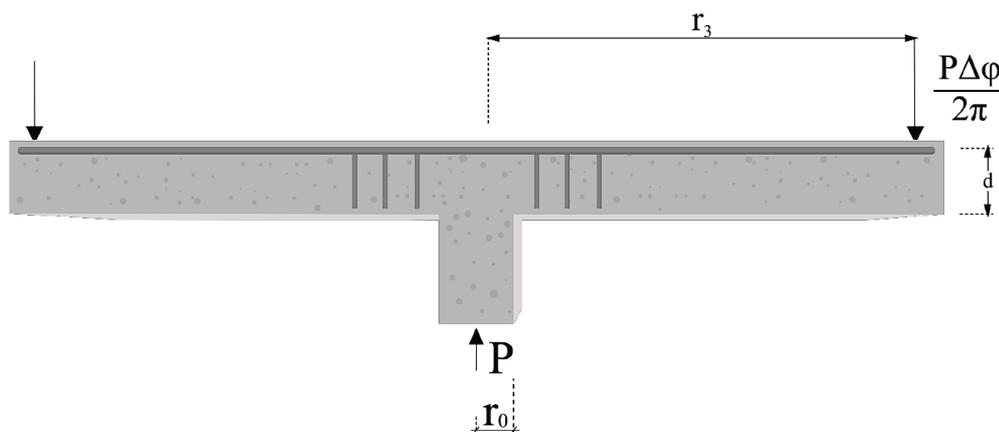
dos critérios de ruptura acima descritos. Logo, o modelo é um processo iterativo, testando-se rotações crescentes, e onde acontecer o equilíbrio das equações e do critério de ruptura, considera-se a ruptura à punção da laje.

### 2.3.2 Gomes (1991)

O modelo teórico proposto por Gomes (1991) baseou-se inicialmente no modelo de Kinnunen e Nylander (1960) que trata de lajes sem armadura de cisalhamento. Os modelos teóricos de Andersson (1963) e de Shehata (1985) para lajes com e sem armadura de cisalhamento, respectivamente, também foram fundamentais para o modelo proposto por Gomes (1991), além dos testes experimentais por ele realizados.

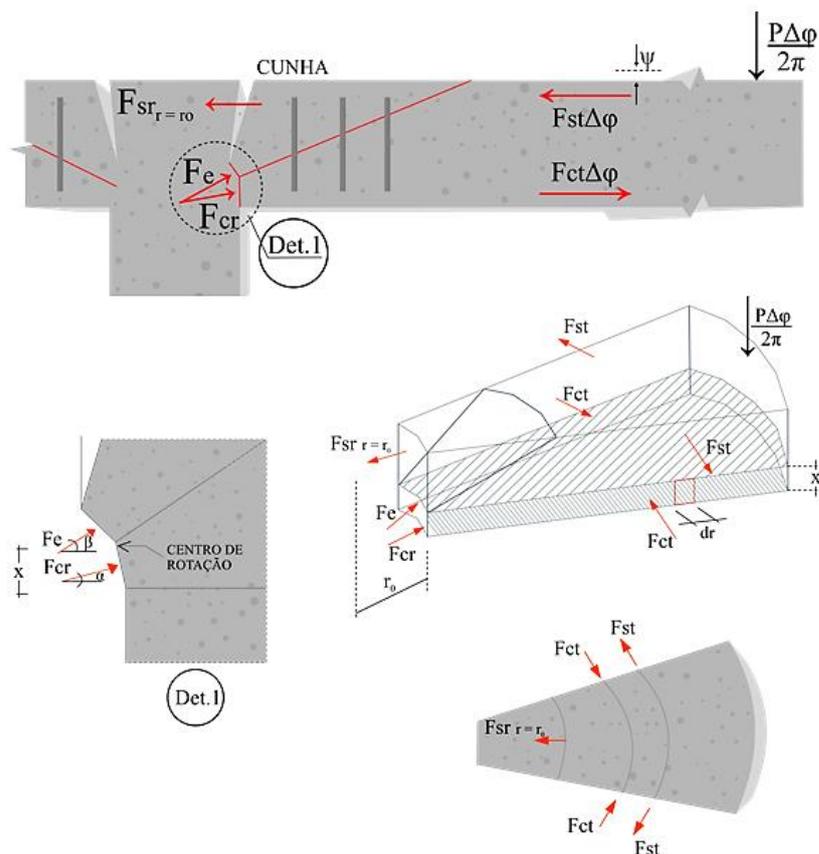
De acordo com o modelo proposto por Gomes (1991), para a determinação da resistência à punção em lajes lisas de concreto armado, em estágio avançado de carregamento, as fissuras de flexão e cisalhamento dividem a laje basicamente em três partes e ilustradas nas Figuras 2.35 e 2.36:

- pilar, limitado pela fissura circunferencial no topo da laje e próxima às faces do pilar;
- cunhas, limitadas pelas fissuras circunferenciais mais internas, pelas fissuras circunferenciais de cisalhamento e pelas fissuras radiais de flexão;
- segmentos de laje, limitados pelas fissuras circunferenciais de cisalhamento, pelas fissuras radiais de flexão e pela extremidade da laje.



**Figura 2.39 - Modelo proposto por Gomes (1991)**

Fonte: Gomes, 1991 – adaptado.



**Figura 2.40 - Forças envolvidas no modelo**

Fonte: Gomes, 1991 – adaptado.

Após a aplicação do carregamento na laje, haverá uma rotação ( $\psi$ ), sendo esta, responsável por dar origem a cinco forças:

- Força radial do concreto ( $F_{cr}$ ): atua com uma inclinação  $\alpha$  no segmento de laje abaixo da origem da fissura de cisalhamento na seção próxima ao pilar.
- Força tangencial do concreto ( $F_{ct}$ ): atua tangencialmente ao segmento de laje e abaixo do centro de rotação, com sentido do exterior para o interior do mesmo. Para o modelo, utiliza-se a componente radial da força tangencial do concreto ( $F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\phi$ ) que leva em consideração apenas a contribuição da seção situada abaixo da linha neutra,  $x$ .
- Força tangencial da armadura de flexão ( $F_{st}$ ): proveniente das armaduras de flexão nas fissuras radiais. Para o modelo, é importante a componente radial da força tangencial da armadura de flexão ( $F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\phi$ ).
- Força radial da armadura de flexão ( $F_{sr}$ ): surge junto à fissura circunferencial da cunha na seção próxima ao pilar na direção radial, atuando também na parte superior da laje, onde está a armadura negativa de flexão.

e) Força da armadura de cisalhamento ( $F_e$ ): transmitida para o segmento de laje através da cunha pela armadura de cisalhamento, seguindo um determinado ângulo  $\beta$  com a horizontal. Somente as armaduras que cruzam a fissura de cisalhamento contribuem para produzir essa força.

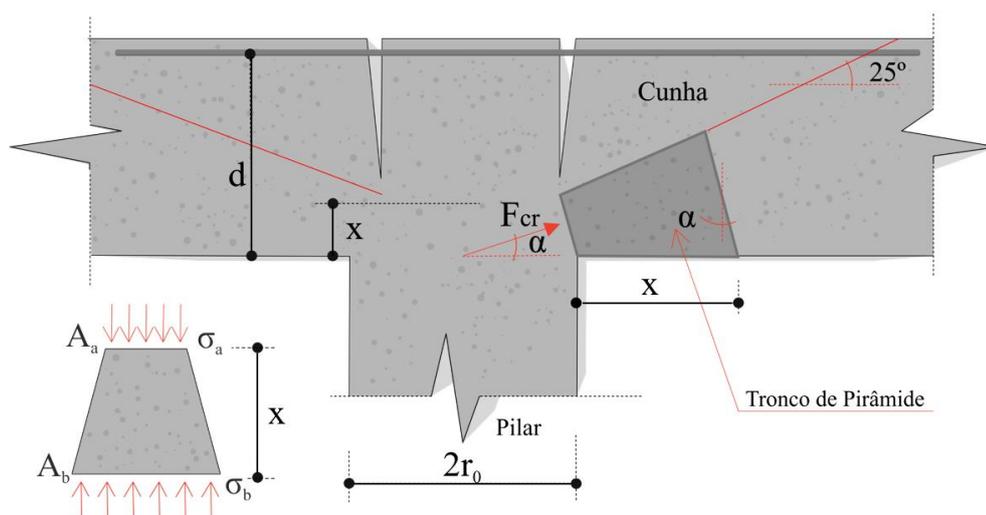
A Figura 2.40 ilustra a representação das forças atuantes no modelo idealizado por Gomes (1991) para lajes lisas com armadura de cisalhamento.

As forças que atuam no segmento de laje após a aplicação do carregamento, podem ser divididas, portanto, em forças do concreto, forças das armaduras de flexão e de cisalhamento. A determinação de cada uma dessas forças será detalhada nos itens a seguir.

### 2.3.2.1 Força radial do concreto ( $F_{cr}$ )

A força radial do concreto é estimada levando-se em consideração a capacidade última de um tronco de pirâmide na face da coluna, calculando-se o efeito radial do gradiente de tensões. A força tangencial do concreto é determinada com o concreto estando em compressão uniaxial.

Gomes (1991) propôs uma seção de tronco de pirâmide inserida na laje com uma base formada na face da coluna para considerar o gradiente de tensões, como ilustra a Figura 2.41.



**Figura 2.41 - Tronco de pirâmide na face do pilar**

Fonte: Gomes, 1991 – adaptado.

A força radial do concreto ( $F_{cr}$ ) pode ser determinada fazendo-se o produto da área na qual atua a força radial ( $A_c$ ) pelo gradiente longitudinal de tensões ( $\eta$ ) e pela resistência do concreto ( $f_c$ ), conforme Equação 2.59.

$$F_{cr} = A_c \eta f_c \quad (2.59)$$

A área na qual atua a força radial ( $A_c$ ) e o gradiente longitudinal de tensões ( $\eta$ ) podem ser obtidos pelas Equações 2.60 e 2.61.

$$A_c = \frac{2\pi x}{\cos \alpha} \left( r_0 - \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{2} \right) \quad (2.60)$$

$$\eta = \frac{\frac{2r_0}{d}k + \frac{x}{d}k_1}{\frac{r_0}{d}(1,8 + 0,2k) + \frac{x}{d}(0,1k + 0,9\operatorname{tg} \alpha)} \quad (2.61)$$

Nestas equações,  $x$  é a altura da linha neutra;  $\alpha$  é a inclinação da força radial do concreto;  $r_0$  é o raio do pilar,  $k$  e  $k_1$  cujos parâmetros são obtidos pelas Equações 2.62 e 2.63, respectivamente.

$$k = 1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(25^\circ - \alpha) \quad (2.62)$$

$$k_1 = \frac{2k}{\cos^2 \alpha} - k^2 \operatorname{tg} \alpha \quad (2.63)$$

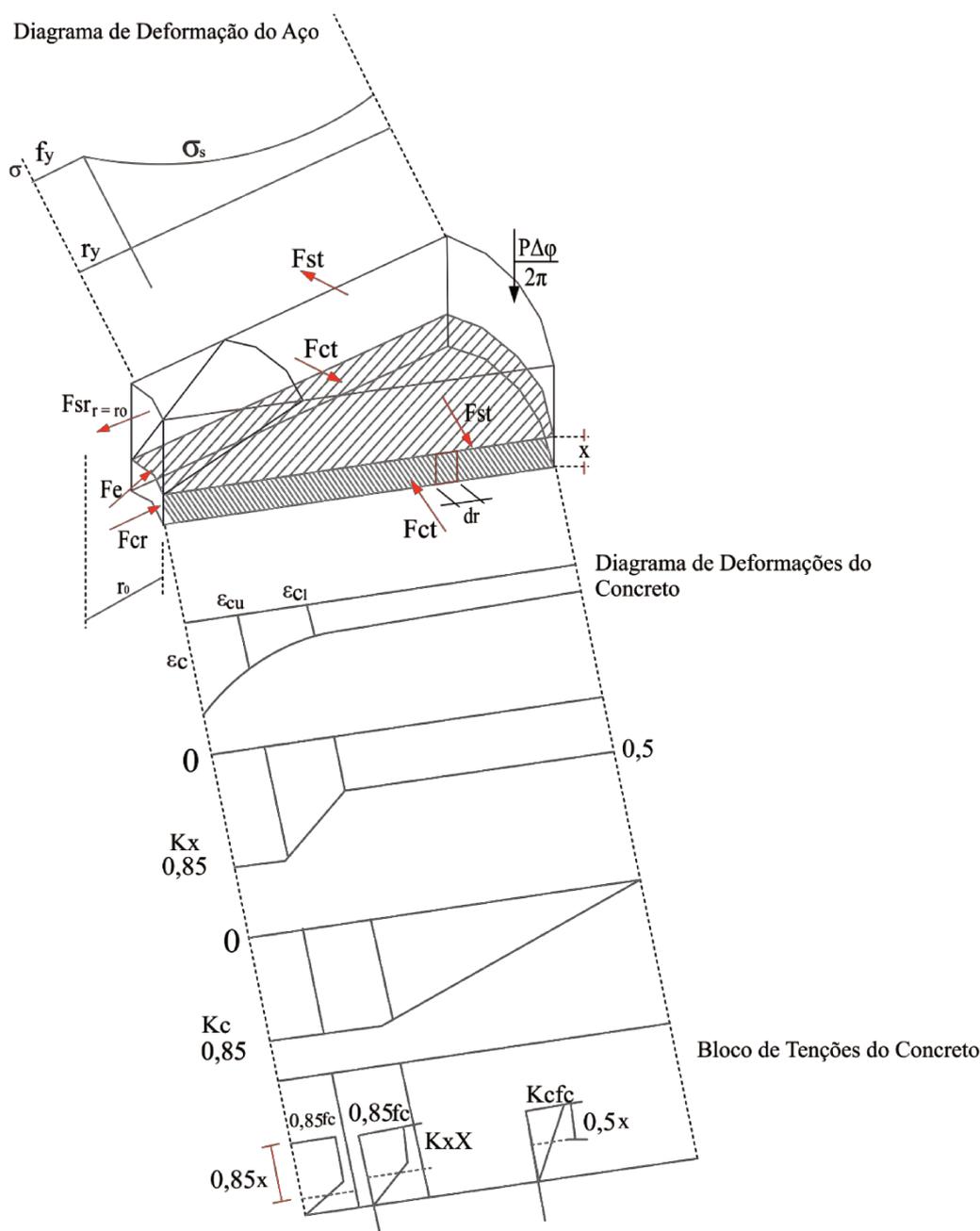
### 2.3.2.2 Força tangencial do concreto ( $F_{ct}$ )

A componente radial da força tangencial do concreto é determinada com a integração de área de um setor circular com espessura igual a  $dr$  e raio  $r$ , de acordo com a Equação 2.64.

$$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta \varphi = \Delta \varphi \int_{r_3}^{r_0} k_c f_c k_x x dr \quad (2.64)$$

onde,  $k_c$  e  $k_x$  são funções da deformação tangencial na fibra externa ( $\epsilon_{ct}$ ), sendo que,  $k_c$  é a razão entre a tensão máxima e  $f_c$  e  $k_x$  é a razão da tensão média no bloco até o valor máximo.

A Figura 2.42 apresenta o perfil da laje rígida, a partir de  $r_0$  (raio do pilar) até  $r_3$  (raio da laje), com a variação da forma dos diagramas de tensões e deformações tangenciais do concreto segundo os intervalos dos raios da laje.



**Figura 2.42 - Diagrama de deformações do aço e do concreto**

Fonte: Gomes, 1991 – adaptado.

A partir da Figura 2.42 observa-se que os valores intermediários de  $k_c$  e  $k_x$  podem ser interpolados no perfil representado em função das Equações 2.65 e 2.66.

$$k_x = \begin{cases} -0,5 & \text{para } r_{\varepsilon_{c1}} \leq r \leq r_3 \\ -0,5 + 0,35 \left( \frac{\varepsilon_{ct} - \varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1}} \right) \leq 0,85 & \text{para } r_{\varepsilon_{cu}} \leq r \leq r_{\varepsilon_{c1}} \end{cases} \quad (2.65)$$

$$k_c = \begin{cases} -0,85 \frac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{c1}} & \text{para } r_{\varepsilon_{c1}} \leq r \leq r_3 \\ -0,85 & \text{para } r \leq r_{\varepsilon_{c1}} \end{cases} \quad (2.66)$$

A deformação tangencial do concreto ( $\varepsilon_{ct}$ ), determinada a partir da rotação do diagrama de corpo rígido, é diretamente proporcional à rotação da laje ( $\psi$ ) e à altura da linha neutra ( $x$ ). Os valores das deformações consideradas nas Equações 2.65 e 2.66 são obtidos em função das Equações 2.67 e 2.68.

$$\varepsilon_{c1} = \frac{\sqrt{f_c}}{5000} \quad (2.67)$$

$$\varepsilon_{cu} = 0,0035$$

$$\varepsilon_{ct} = \psi \frac{x}{r} \quad (2.68)$$

onde,  $f_c$  é dado em N/mm<sup>2</sup>.

Dessa forma:

$$r_{\varepsilon_{c1}} = \psi \frac{x}{\varepsilon_{c1}} \quad (2.69)$$

$$r_{\varepsilon_{cu}} = \psi \frac{x}{\varepsilon_{cu}}$$

O cálculo das integrais, substituindo os valores de  $k_x$  e  $k_c$  das Equações 2.65 e 2.66 na Equação 2.64, levando em consideração os intervalos de raios calculados, resulta em seis possíveis combinações.

- **Caso 1:**  $r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$

$$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi f_c x^2 \left[ \frac{k_0 \psi}{\varepsilon_{c1}} - \frac{0,723 r_0}{x} + \frac{0,425 \psi}{\varepsilon_{c1}} \ln \left( \frac{r_3 \varepsilon_{c1}}{\psi x} \right) \right]$$

$$k_0 = 0,425 + \frac{0,298 \ln \alpha_0}{(\alpha_0 - 1)} \quad (2.70)$$

$$\alpha_0 = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{c1}}$$

- **Caso 2:**  $r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$

$$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi f_c x^2 \left[ \begin{aligned} &0,425 - \frac{0,298}{\alpha_0 - 1} \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{c1}} - \frac{r_0}{x} \right) + \frac{0,298 \psi}{(\alpha_0 - 1) \varepsilon_{c1}} \ln \left( \frac{\psi x}{r_0 \varepsilon_{c1}} \right) + \\ &+ 0,425 \frac{\psi}{\varepsilon_{c1}} \ln \left( \frac{r_0 \varepsilon_{c1}}{\psi x} \right) \end{aligned} \right] \quad (2.71)$$

- **Caso 3:**  $r_0 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{cu}}$

$$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi f_c x^2 \left[ \begin{aligned} &\left( 1 + \frac{1}{\alpha_0 - 1} \right) \left( \frac{0,298 \psi}{\varepsilon_{cu}} + \frac{0,425 r_3}{x} \right) - \frac{0,723}{x} \left( r_0 + \frac{r_3}{\alpha_0 - 1} \right) + \\ &+ \frac{0,298 \psi}{(\alpha_0 - 1) \varepsilon_{c1}} \ln \left( \frac{r_3 \varepsilon_{cu}}{\psi x} \right) \end{aligned} \right] \quad (2.72)$$

- **Caso 4:**  $r_0 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}}$

$$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi [0,723 f_c x (r_3 - r_0)] \quad (2.73)$$

- **Caso 5:**  $r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$

$$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi f_c x^2 \left[ \left( \frac{r_3 - r_0}{x} \right) \left( 0,425 - \frac{0,298}{\alpha_0 - 1} \right) + \frac{0,298}{(\alpha_0 - 1)\varepsilon_{c1}} \ln \left( \frac{r_3}{r_0} \right) \right] \quad (2.74)$$

• **Caso 6:**  $r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_0 \leq r_3$

$$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi f_c x^2 \left[ 0,425 \frac{\psi}{\varepsilon_{c1}} \ln \left( \frac{r_3}{r_0} \right) \right] \quad (2.75)$$

### 2.3.2.3 Força tangencial da armadura de flexão ( $F_{st}$ )

Para a determinação das forças da armadura de flexão, Gomes (1991) considera o material com comportamento elástico perfeitamente plástico.

A componente radial da força tangencial da armadura de flexão é fornecida pela integral da Equação 2.75.

$$F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi = \left[ \int_{r_0}^{r_y} \rho f_y ddr + \int_{r_y}^{r_3} \rho f_y d \frac{r_y}{r} \right] dr \Delta\varphi \chi \quad (2.76)$$

Nesta equação,  $\chi$  é o coeficiente de redução relativo à diferença entre as forças radiais exercidas pela armadura ortogonal e aquelas devidas às armaduras radial e circunferencial, resultando em uma mesma taxa de armadura de flexão. Este coeficiente depende de  $r_y$  e  $r_3$ , sendo  $r_y$  o raio onde o ponto de tensão de escoamento é alcançado na direção tangencial da armadura de flexão na ruptura. Os valores de  $\chi$  e  $r_y$  podem ser obtidos mediante as Equações 2.76 e 2.77.

$$\chi = -0,0671 \left( \frac{r_y}{r_3} \right)^3 + 0,1669 \left( \frac{r_y}{r_3} \right)^2 + 0,002 \left( \frac{r_y}{r_3} \right) + 0,829 \quad (2.77)$$

$$r_y = \psi \frac{(d - x)}{\varepsilon_{sy}} \quad (2.78)$$

onde, sendo  $\psi$  a rotação última de ruptura da laje, e a deformação,  $\varepsilon_{sy}$ , obtida de acordo com:

$$\varepsilon_{sy} = \frac{f_y}{E_s} \quad (2.79)$$

em que,  $f_y$  é a tensão de escoamento do aço e  $E_s$  o módulo de elasticidade longitudinal do aço.

Resolvendo-se a integral da Equação 2.76, obtém-se as Equações 2.80 e 2.81 de acordo com os intervalos de raios:

$$F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi\rho\chi \frac{f_y}{100} d \left[ (r_y - r_0) + r_y \ln \left( \frac{r_3}{r_y} \right) \right] \quad (r_0 \leq r_y \leq r_3) \quad (2.80)$$

$$F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi\rho\chi \frac{f_y}{100} d [(r_3 - r_0)] \quad (r_0 \leq r_3 \leq r_y) \quad (2.81)$$

#### 2.3.2.4 Força radial da armadura de flexão ( $F_{sr}$ )

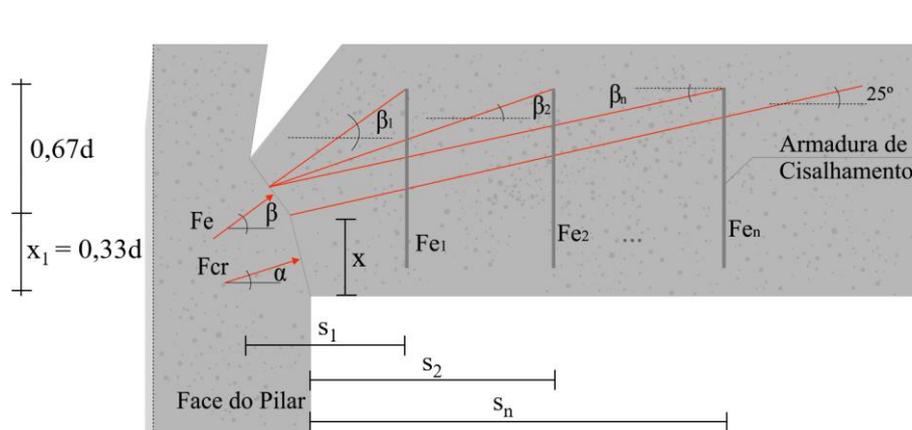
A força radial da armadura de flexão na seção  $r = r_0$  junto a coluna, pode ser determinada como:

$$F_{sr(r=r_0)} = 2\pi\rho\chi \frac{f_y}{100} d(r_0) \quad (2.82)$$

em que,  $\chi$  pode ser obtido pela Equação 2.77.

#### 2.3.2.5 Força da armadura de cisalhamento ( $F_e$ )

Para o cálculo da força da armadura de cisalhamento, considera-se a contribuição das armaduras que são atravessadas pela fissura de cisalhamento e que estão dentro da cunha. A Figura 2.43 mostra o diagrama das forças das armaduras de cisalhamento.



**Figura 2.43 - Diagrama das forças da armadura de cisalhamento**

Fonte: Gomes, 1991 – adaptado.

O comprimento dentro do qual as armaduras contribuem para a força pode ser estimado de acordo com o cálculo do raio de contribuição pela Equação 2.83.

$$r_{contrib.} = r_0 + (d - x) \cot g 25^\circ$$

$$r_{contrib.} \cong r_0 + 1,56d \quad (2.83)$$

A componente vertical da força da armadura de cisalhamento é obtida pelo somatório das forças verticais que cruzam a fissura de cisalhamento, ou seja:

$$F_e \sen \beta_e = A_{s1} f_{e1} + A_{s2} f_{e2} + \dots + A_{sn} f_{en} \quad (2.84)$$

Nesta equação,  $\beta_e$  é o ângulo entre  $F_e$  e o plano horizontal;  $A_{sn}$  é a área do n-ésimo elemento de armadura contribuinte contra o cisalhamento;  $f_{en}$  é a tensão atuante no respectivo n-ésimo elemento.

Por sua vez, a componente horizontal pode ser obtida pela Equação 2.85.

$$F_e \cos \beta_e = F_{e1} \cos \beta_1 + F_{e2} \cos \beta_2 + \dots + F_{en} \cos \beta_n \quad (2.85)$$

onde,

$$F_{en} = \frac{A_{sn} f_{en}}{\sen \beta_n} \quad (2.86)$$

Considerando  $\cot\beta_n$  aproximadamente igual a  $s_n/(d - x)$ , onde  $s_n$  é a distância entre o n-ésimo elemento da armadura de cisalhamento e a face do pilar, tem-se:

$$F_e \cos \beta_e = \frac{1}{(d - x)} (A_{s1} f_{e1} s_1 + A_{s2} f_{e2} s_2 + \dots + A_{sn} f_{en} s_n) \quad (2.87)$$

A partir da resolução do sistema formado pelas Eq. 2.84 a Eq. 2.87, e três incógnitas ( $F_e$ ,  $\beta_e$  e  $x$ ) e assumindo-se  $x_l = 0,33d$ , Gomes (1991) obteve as seguintes expressões para cálculo do ângulo  $\beta$  e da força total da armadura de cisalhamento  $F_e$ :

$$\beta_e = \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{0,67d \sum_{i=1}^n A_{si} f_{ei}}{\sum_{i=1}^n A_{si} f_{ei} s_i} \right] \quad (2.88)$$

$$F_e = \frac{\sum_{i=1}^n A_{si} f_{ei}}{\operatorname{sen} \beta_e} \quad (2.89)$$

sendo,  $n$  o último elemento da última camada contribuinte da armadura de cisalhamento.

### 2.3.2.6 Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio horizontal, vertical e rotacional podem ser obtidas com base no modelo apresentado na Figura 2.40 e de acordo com as Equações 2.90 a 2.92.

Considerando o equilíbrio horizontal, tem-se:

$$F_{sr(r=r_0)} + F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi = F_e \cos \beta_e + \xi F_{cr} \cos \alpha + F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi \quad (2.90)$$

sendo,  $\xi = (400 / d)^{1/4}$  (*size effect*).

Realizando o equilíbrio vertical, a equação resultante é:

$$\xi F_{cr} \text{sen} \alpha + F_e \text{sen} \beta_e = \frac{P \Delta \varphi}{2\pi} \quad (2.91)$$

Por fim, a equação do equilíbrio rotacional é dada por:

$$P \frac{\Delta \varphi}{2\pi} = \frac{z(F_{sr(r=r_0)} + F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta \varphi)}{r_3 - r_0} \quad (2.92)$$

onde,  $z = d - 0,45x$  (braço de alavanca).

Para determinação da equação de equilíbrio rotacional, considera-se a soma dos momentos em relação ao ponto do centro de rotação, segundo a Figura 2.40. Nessa consideração, as forças  $F_e$  (Força total da armadura de cisalhamento) e  $F_{cr}$  (Força radial do concreto) são desprezadas, pois devido à pequena distância entre suas linhas de ação e o centro de rotação, produzem momentos não significativos.

### 2.3.2.7 Critérios de ruptura

Dois critérios de ruptura são considerados por Gomes (1991) para a verificação de lajes submetidas à punção: critério de ruptura interna e critério de ruptura externa à região da armadura de cisalhamento.

A ruptura interna à região da armadura de cisalhamento, abaixo da fissura de punção e próximo ao pilar, ocorre quando a tensão de cisalhamento  $|\tau|$ , em qualquer superfície, atinge a resistência de deslizamento.

$$|\tau| = C - \mu \sigma \quad (2.93)$$

Nesta equação,  $C$  é a coesão interna do concreto e que segundo Braestrup (1976) *apud* Amorin (2000) é dada por  $C = f_c/4$ ;  $\mu$  é o coeficiente de fricção interna ( $\text{tg} \phi = 0,75$ ;  $\phi = 37^\circ$ );  $\sigma$  é a tensão normal na superfície de deslizamento, tomada negativa na compressão.

O trabalho externo, dado pelo produto da força pelo deslocamento, pode ser calculado por:

$$W_e = \sigma b t v \operatorname{sen}(\theta - \varphi) \quad (2.94)$$

O trabalho interno total pode ser expresso da seguinte forma:

$$W_i = v C \cos \varphi \frac{\operatorname{sen}(90^\circ + \gamma)}{\operatorname{sen}(90^\circ - \theta - \gamma)} \quad (2.95)$$

Igualando-se o trabalho externo com o trabalho interno, tem-se que:

$$\sigma = \frac{C \cos \varphi \operatorname{sen}(90^\circ + \gamma) b t}{\operatorname{sen}(\theta - \varphi) \operatorname{sen}(90^\circ - \theta - \gamma)} \quad (2.96)$$

O valor mínimo para  $\theta$  é dado por:

$$\theta = \frac{\varphi + 90^\circ - \gamma}{2} \quad (2.97)$$

A equação resultante da substituição da Equação 2.97 na Equação 2.96 é dada por:

$$\sigma_{\min} = \frac{C \cos \varphi \operatorname{sen}(90^\circ + \gamma)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{90^\circ - \gamma - \varphi}{2}\right)} = k_{in} f_c \quad (2.98)$$

O parâmetro  $k_{in}$  de ruptura interna é dado por:

$$k_{in} = 0,2 \frac{\operatorname{sen}(90^\circ + \gamma)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{53^\circ - \gamma}{2}\right)} \quad (2.99)$$

sendo,  $\gamma = 25^\circ - \alpha$  ( $\alpha \leq 12,5^\circ$ );  $\gamma = \alpha$  ( $\alpha \geq 12,5^\circ$ ).

O parâmetro  $k_{in}$ , apresentado na equação anterior, deve ser comparado com  $\eta$  (Equação 2.61) para avaliação do critério de ruptura interna segundo modelo proposto por

Gomes (1991). Dessa comparação, caso ocorra igualdade, acontece a ruptura interna à região da armadura de cisalhamento da laje.

A ruptura na região externa à armadura de cisalhamento ocorre quando a tensão normal máxima ( $\sigma_{máx}$ ), na seção  $1,35d$ , além da armadura de cisalhamento, atinge a resistência à tração do concreto ( $f_{ct}$ ). O valor 1,35 foi encontrado experimentalmente nos testes realizados por Gomes (1991).

O critério de ruptura externo baseia-se na aplicação do Círculo de Tensões de Mohr para determinação da tensão máxima na seção de raio  $r_1$ , a  $1,35d$  de distância da última camada da armadura de cisalhamento. A tensão normal máxima é, portanto, expressa por:

$$\sigma_{máx} = \frac{1}{2} \sigma_x \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = f_{ct} \quad (2.100)$$

Os parâmetros envolvidos nesta equação são calculados como:

$$\sigma_x = \frac{H}{bh} \quad (2.101)$$

$$b = 2\pi r_1 \quad (2.102)$$

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{P\Delta\varphi}{bh} \quad (2.103)$$

$$H = F_{st(r1 \rightarrow r3)}\Delta\varphi - F_{ct(r1 \rightarrow r3)}\Delta\varphi \quad (2.104)$$

$$F_{st(r1 \rightarrow r3)}\Delta\varphi = F_{st(r0 \rightarrow r3)}\Delta\varphi - F_{st(r0 \rightarrow r1)}\Delta\varphi \quad (2.105)$$

$$F_{ct(r1 \rightarrow r3)}\Delta\varphi = F_{ct(r0 \rightarrow r3)}\Delta\varphi - F_{ct(r0 \rightarrow r1)}\Delta\varphi \quad (2.106)$$

sendo  $h$  a altura da laje.

O método de Gomes (1991) pode ser representado por um sistema de quatro equações, sendo três equações de equilíbrio e uma em função do critério de ruptura. Com isso, surgem quatro incógnitas: rotação ( $\psi$ ), altura da linha neutra ( $x$ ), ângulo de aplicação da força radial do concreto ( $\alpha$ ) e carga de ruptura ( $P$ ). O procedimento para a solução deste sistema consiste em um processo iterativo com cinco etapas:

1. Adoção de valores iniciais para  $\psi$ ,  $x$ ,  $\alpha$ ;
2. Determinação de  $x$ , a partir da equação de equilíbrio horizontal;
3. Determinação de  $P \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$ , a partir da equação de equilíbrio rotacional;
4. Determinação de  $\alpha$ , com base na equação de equilíbrio vertical;
5. Aplicação do critério de ruptura.

### 2.3.3 Marques (2018)

Marques (2018) considerou as mesmas premissas básicas adotadas no modelo teórico proposto por Gomes (1991), a fim de desenvolver um modelo para a estimativa da carga e modo de ruptura de lajes lisas de concreto armado com a presença de aberturas, como também com presença, ou não, de armadura de cisalhamento

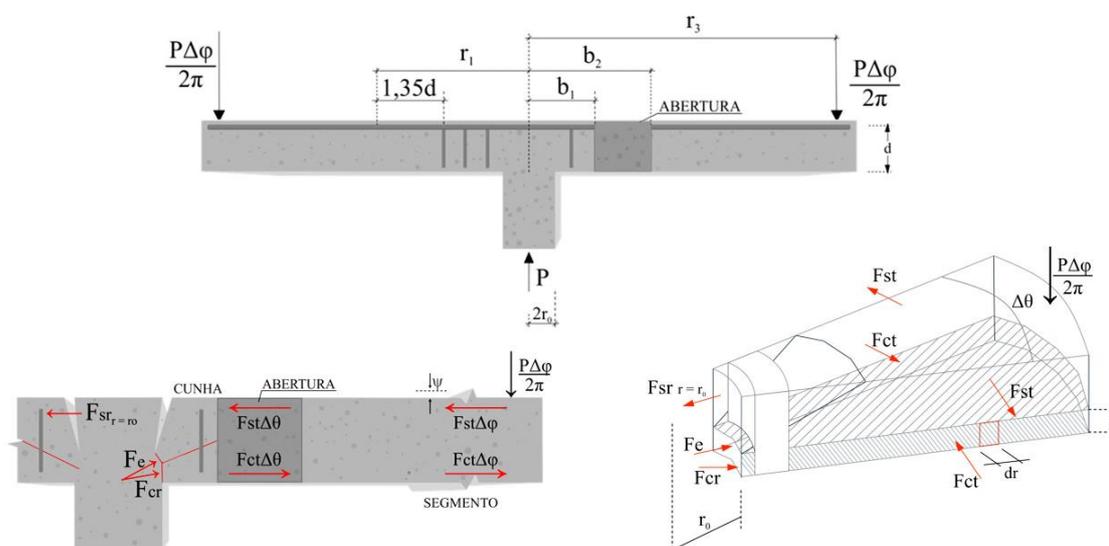
Além dos trabalhos de Gomes (1991), Kinnunen e Nylander (1960), Andersson (1963) e Shehata (1985), Marques (2018) baseou seu modelo teórico em testes experimentais realizados em nove lajes lisas quadradas, com 1.800 mm de lado e 130 mm de altura, submetidas a carregamento centrado. Resultados experimentais obtidos por Gomes e Andrade (1995), Silva (2003), Souza (2004), Borges (2004) e Loureço (2018), cujos autores também subsidiaram a construção desse modelo.

De acordo com o modelo proposto, após a aplicação do carregamento na laje, sete forças são originadas:

- a) Força radial do concreto ( $F_{cr}$ ): atua com uma inclinação  $\alpha$  no segmento de laje abaixo da origem da fissura de cisalhamento na seção próxima ao pilar.
- b) Força tangencial do concreto ( $F_{ct}$ ): atua tangencialmente ao segmento de laje e abaixo do centro de rotação, com sentido do exterior para o interior desse segmento. Para o modelo, utiliza-se a componente radial da força tangencial do concreto ( $F_{ct(r0 \rightarrow r3)} \Delta\varphi$ ) que leva em consideração apenas a contribuição da seção situada abaixo da linha neutra,  $x$ .

- c) Força tangencial da armadura de flexão ( $F_{st}$ ): proveniente das armaduras de flexão nas fissuras radiais. Para o modelo, é importante a componente radial da força tangencial da armadura de flexão ( $F_{st(r0 \rightarrow r3)} \Delta\varphi$ ).
- d) Força radial da armadura de flexão ( $F_{sr}$ ): surge junto à fissura circunferencial da cunha na seção próxima ao pilar na direção radial, atuando também na parte superior da laje, onde está a armadura negativa de flexão.
- e) Força da armadura de cisalhamento ( $F_e$ ): transmitida para o segmento de laje através da cunha pela armadura de cisalhamento, seguindo um determinado ângulo  $\beta$  com a horizontal.
- f) Força tangencial da armadura de flexão devido a abertura ( $F_{sth}$ ): proveniente das armaduras de flexão internas à abertura. Para o modelo, utiliza-se a componente radial da força tangencial da armadura de flexão presente no interior da abertura ( $F_{sth(r0 \rightarrow r3)} \Delta\theta$ ).
- g) Força tangencial do concreto devido a abertura ( $F_{cth}$ ): força tangencialmente ao seguimento da laje e presente internamente à abertura. Para o modelo, utiliza-se a componente radial da força tangencial do concreto ( $F_{cth(r0 \rightarrow r3)} \Delta\theta$ ) que leva em consideração apenas a contribuição da seção situada abaixo da linha neutra,  $x$ .

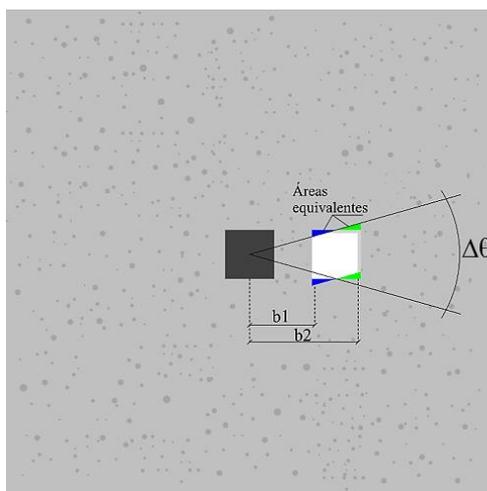
A Figura 2.44 ilustra a apresentação das forças atuantes no modelo idealizado para lajes lisa com aberturas e com armadura de cisalhamento. A determinação de cada umas destas forças será detalhada nos itens a seguir.



**Figura 2.44 - Modelo proposto por Marques (2018)**

Fonte: Marques, 2018.

Segundo Marques (2018), para a determinação do intervalo  $\Delta\theta$  considera-se que as forças  $F_{sth}$  e  $F_{cth}$  atuam no intervalo compreendido entre os pontos  $b_1$  e  $b_2$ , conforme demonstrado na Figura 2.45. Dessa forma, para as lajes com aberturas retangulares,  $\Delta\theta$  pode ser construído por tangentes traçadas, a partir do centro do pilar e com interseção no ponto médio da abertura.



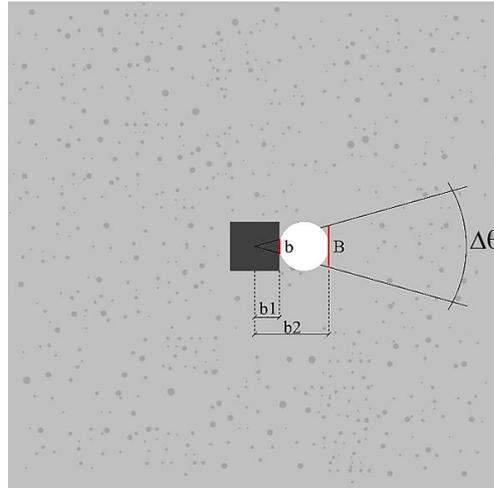
**Figura 2.45 - Determinação do intervalo  $\Delta\theta$  para lajes com aberturas retangulares**  
Fonte: Marques, 2018.

Para lajes com aberturas circulares (Figura 2.46), os pontos de interseção das tangentes na abertura circular são obtidos segundo as Equações 2.107 e 2.108.

$$B = b \left( \frac{r_0 + d_{abertura}}{r_0} \right) \quad (2.107)$$

$$B + b = b \left( \frac{\pi d_{abertura}}{2} \right) \quad (2.108)$$

sendo que:  $b$  é a base menor do trapézio,  $B$  é a base maior do trapézio e  $d_{abertura}$  é o diâmetro da abertura na laje.



**Figura 2.46 - Determinação do intervalo  $\Delta\theta$  para lajes com aberturas circulares**

Fonte: Marques, 2018.

### 2.3.3.1 Força radial do concreto ( $F_{cr}$ )

Como verificado no Item 2.3.2.1, a força radial do concreto ( $F_{cr}$ ) pode ser determinada fazendo-se o produto da área na qual atua a força radial ( $A_c$ ) pelo gradiente longitudinal de tensões ( $\eta$ ) e pela resistência do concreto ( $f_c$ ). No entanto, a presença de aberturas promove a redução da área de concreto onde a força radial do concreto atua. Dessa forma, esta força é influenciada tanto pela quantidade de aberturas quanto pela disposição dessas aberturas na laje.

$$F_{cr} = A_c \eta f_c \quad (2.109)$$

$$A_c = \frac{(2\pi - n_f \Delta\theta)x}{\cos \alpha} \left( r_0 - \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{2} \right) \quad (2.110)$$

$$\eta = \frac{\frac{2r_0}{d}k + \frac{x}{d}k_1}{\frac{r_0}{d}(1,8 + 0,2k) + \frac{x}{d}(0,1k + 0,9\operatorname{tg} \alpha)} \quad (2.111)$$

Nestas equações,  $x$  é a altura da linha neutra;  $\alpha$  é a inclinação da força radial do concreto;  $r_0$  é o raio do pilar,  $n_f$  é o número de aberturas presente na laje,  $\Delta\theta$  é o ângulo que define a cunha que contém a abertura,  $k$  e  $k_1$  são parâmetros obtidos pelas Equações 2.112 e 2.113, nesta ordem.

$$k = 1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(25^\circ - \alpha) \quad (2.112)$$

$$k_1 = \frac{2k}{\cos^2 \alpha} - k^2 \operatorname{tg} \alpha \quad (2.113)$$

### 2.3.3.2 Força tangencial do concreto ( $F_{ct}$ )

No modelo teórico de Marques (2018), a determinação da força tangencial do concreto ( $F_{ct}$ ) manteve-se similar ao apresentado no Item 2.3.2.2 deste trabalho. Marques (2018) optou por desenvolver uma força referente a abertura ( $F_{cth}$ ) e subtrair da força tangencial do concreto ( $F_{ct}$ ).

### 2.3.3.3 Força tangencial do concreto devido a abertura ( $F_{cth}$ )

A existência de aberturas na laje reduz o valor da componente radial da força tangencial do concreto ( $F_{ct}$ ), sendo que esta redução ( $F_{cth}$ ) é calculada em função do tamanho e disposição da abertura em relação ao pilar.

A força tangencial do concreto devido à abertura é determinada com a integração de área de um setor circular com espessura igual a  $dr$  e raio  $r$ , de acordo com a Equação 2.114.

$$F_{cth(b_1 \rightarrow b_2)} \Delta \theta = \Delta \theta \int_{b_1}^{b_2} k_c f_c k_x x dr \quad (2.114)$$

O cálculo das integrais, substituindo os valores de  $k_x$  e  $k_c$  das Equações 2.65 e 2.66 na Equação 2.114, levando em consideração os intervalos de raios calculados, resulta em seis possíveis combinações, sendo essas avaliadas para cada abertura existente na laje.

- **Caso 1:**  $r_0 \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{cl}} \leq r_3$

$$r_0 \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_2 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{cl}}$$

$$r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{cl}}$$

$$F_{cth} = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i f_c \left[ \begin{array}{l} 0,723x \left( \frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} - b_{1,i} \right) + 0,425x \left( b_{2,i} - \frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} \right) + \\ + \frac{0,298\psi x^2}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \ln \left( \frac{b_{2,i}\varepsilon_{cu}}{\psi x} \right) + \\ - \frac{0,298\varepsilon_{c1}x}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \left( b_{2,i} - \frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} \right) \end{array} \right] \quad (2.115)$$

- **Caso 2:**  $r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$

$$r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$$

$$F_{cth} = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i f_c [0,723x(b_{2,i} - b_{1,i})] \quad (2.116)$$

- **Caso 3:**  $r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$

$$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$$

$$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$$

$$F_{cth} = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i f_c \left[ \begin{array}{l} 0,425x(b_{2,i} - b_{1,i}) + \frac{0,298\psi x^2}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \ln \left( \frac{b_{2,i}}{b_{1,i}} \right) + \\ - \frac{0,298\varepsilon_{c1}x}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} (b_{2,i} - b_{1,i}) \end{array} \right] \quad (2.117)$$

- **Caso 4:**  $r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$

$$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq b_2 \leq r_3$$

$$F_{cth} = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i f_c \left[ \begin{array}{l} 0,425x \left( \frac{\psi x}{\varepsilon_{c1}} - b_{1,i} \right) + \\ + \frac{0,298\psi x^2}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \ln \left( \frac{\psi x}{b_{1,i}\varepsilon_{c1}} \right) - \\ - \frac{0,298\varepsilon_{c1}x}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \left( \frac{\psi x}{\varepsilon_{c1}} - b_{1,i} \right) + \\ + \frac{0,425x^2\psi}{\varepsilon_{c1}} \ln \left( \frac{b_{2,i}\varepsilon_{c1}}{\psi x} \right) \end{array} \right] \quad (2.118)$$

• **Caso 5:**  $r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$

$$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$$

$$r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$$

$$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$$

$$F_{cth} = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i f_c \left[ \frac{0,425x^2\psi}{\varepsilon_{c1}} \ln \left( \frac{b_{2,i}}{b_{1,i}} \right) \right] \quad (2.119)$$

• **Caso 6:**  $r_0 \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq b_1 \leq r_3$

$$F_{cth} = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i f_c \left[ \begin{array}{l} 0,723x \left( \frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} - b_{1,i} \right) + 0,425x^2\psi \left( \frac{1}{\varepsilon_{c1}} - \frac{1}{\varepsilon_{cu}} \right) + \\ + \frac{0,298\psi x^2}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \ln \left( \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{c1}} \right) - \frac{0,298\varepsilon_{c1}\psi x^2}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \left( \frac{1}{\varepsilon_{c1}} - \frac{1}{\varepsilon_{cu}} \right) + \\ + \frac{0,425x^2\psi}{\varepsilon_{c1}} \ln \left( \frac{b_{2,i}\varepsilon_{c1}}{\psi x} \right) \end{array} \right] \quad (2.120)$$

#### 2.3.3.4 Força tangencial da armadura de flexão ( $F_{st}$ )

No modelo teórico de Marques (2018), a determinação da força tangencial da armadura de flexão ( $F_{st}$ ) manteve-se semelhante ao apresentado no Item 2.3.2.3 deste trabalho. Desenvolveu-se uma força referente a abertura ( $F_{sth}$ ), sendo a força tangencial  $F_{st}$  subtraída por  $F_{sth}$ .

#### 2.3.3.5 Força tangencial do aço devido a abertura ( $F_{sth}$ )

A componente radial da força tangencial da armadura devido à abertura é fornecida pela Equação 2.121.

$$F_{sth(b_1 \rightarrow b_2)} \Delta\theta = \left[ \int_{r_0}^{r_y} \rho f_y ddr + \int_{r_y}^{r_3} \rho f_y d \frac{r_y}{r} dr \right] \Delta\theta \chi \quad (2.121)$$

Nesta equação,  $\chi$  é o coeficiente de redução que depende de  $r_y$  e  $r_3$ , conforme discutido no Item 2.3.2.3.

Resolvendo-se a integral da Equação 2.121, obtém-se quatro equações de acordo com o intervalo considerado. Essas equações são avaliadas para cada abertura existente na laje.

- **Caso 1:**  $r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_y \leq r_3$

$$F_{sth} = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i \chi f_y \frac{\rho}{100} d(b_{2,i} - b_{1,i}) \quad (2.122)$$

- **Caso 2:**  $r_0 \leq b_1 \leq r_y \leq b_2 \leq r_3$

$$F_{sth} = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i \chi f_y \frac{\rho}{100} d \left[ (r_y - b_{1,i}) + r_y \ln \left( \frac{b_{2,i}}{r_y} \right) \right] \quad (2.123)$$

- **Caso 3:**  $r_0 \leq r_y \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$

$$F_{sth} = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i \chi f_y \frac{\rho}{100} d \left[ r_y \ln \left( \frac{b_{2,i}}{b_{1,i}} \right) \right] \quad (2.124)$$

• **Caso 4:**  $r_0 \leq r_y \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$

$$F_{sth} = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i \chi f_y \frac{\rho}{100} d \left[ r_y \ln \left( \frac{b_{2,i}}{b_{1,i}} \right) \right] \quad (2.125)$$

### 2.3.3.6 Força radial da armadura de flexão ( $F_{sr}$ )

A força radial da armadura de flexão na seção  $r = r_0$  junto ao pilar, é dada por:

$$F_{sr(r=r_0)} = 2\pi\rho \chi \frac{f_y}{100} dr_0 \quad (2.126)$$

onde,  $\rho$  é a taxa de armadura de flexão.

### 2.3.3.7 Força da armadura de cisalhamento ( $F_e$ )

O cálculo da força da armadura de cisalhamento proposto por Gomes (1991) não se altera por conta das aberturas na laje. A armadura de cisalhamento será distribuída de forma a não preencher as aberturas.

A determinação de  $F_e$  pode ser verificada no Item 2.3.2.5 deste trabalho.

### 2.3.3.8 Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio horizontal, vertical e rotacional podem ser obtidas com base no modelo apresentado na Figura 2.44 e de acordo com as Equações 2.127 a 2.132.

Considerando o equilíbrio horizontal, tem-se:

$$F_{sr(r=r_0)} + F'_{st(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi = F_e \cos \beta_e + \xi F_{cr} \cos \alpha + F'_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi \quad (2.127)$$

sendo,

$$\xi = (400 / d)^{1/4} \text{ (size effect)} \quad (2.128)$$

$$F'_{st(r_0 \rightarrow r_3)} = F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} - F_{sth(b_2 \rightarrow b_1)} \quad (2.129)$$

$$F'_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} - F_{cth(b_2 \rightarrow b_1)} \quad (2.130)$$

Realizando o equilíbrio vertical, a equação resultante é:

$$\xi F_{cr} \text{sen} \alpha + F_e \text{sen} \beta_e = \frac{P \Delta \varphi}{2\pi} \quad (2.131)$$

Por fim, a equação do equilíbrio rotacional é dada por:

$$P \frac{\Delta \varphi}{2\pi} = \frac{z(F_{sr(r-r_0)} + F'_{st(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta \varphi)}{r_3 - r_0} \quad (2.132)$$

onde,  $z = d - 0,45x$  (braço de alavanca).

### 2.3.3.9 Critérios de ruptura

Segundo Marques (2018), a ruptura na região da armadura de cisalhamento ocorre quando a tensão de cisalhamento ( $\tau$ ) em qualquer superfície atinge uma parcela da resistência ao cisalhamento. Para que seja verificado o critério de ruptura interna, a Equação 2.133 deve ser atendida.

$$\eta > \gamma_p k_{in} \quad (2.133)$$

Nessa equação, os parâmetros  $\eta$  e  $k_{in}$  podem ser determinados com base nas Equações 2.61 e 2.99. O coeficiente  $\gamma_p$  foi determinado por Marques (2018) após ter investigado o efeito das aberturas em lajes de concreto armado ensaiadas por diversos pesquisadores. Assim, a autora definiu  $\gamma_p = 0,6$  para lajes com abertura e  $\gamma_p = 1,0$  para lajes sem aberturas, sendo esse último valor já considerado no modelo de Gomes (1991).

A ruptura na região externa à armadura de cisalhamento ocorre quando a tensão normal máxima ( $\sigma_{m\acute{a}x}$ ), na seção afastada  $1,35d$  a partir da armadura de cisalhamento, atinge uma parcela da resistência à tração do concreto ( $f_{ct}$ ), conforme Equação 2.134. A tensão normal máxima ( $\sigma_{m\acute{a}x}$ ) foi definida na Equação 2.100.

$$\sigma_{m\acute{a}x} \geq \gamma_P f_{ct} \quad (2.134)$$

No Capítulo 3 será discutida a implementação computacional do método teórico de Marques (2018) desenvolvida neste trabalho para a estimativa de carga de ruptura de lajes lisas de concreto armado com ou sem aberturas, como também com ou sem armaduras de cisalhamento.

### 3 PROGRAMA COMPUTACIONAL BASEADO NO MODELO TEÓRICO DE MARQUES (2018)

A implementação computacional do modelo teórico de Marques (2018) foi realizada com o objetivo de se determinar de maneira otimizada, as cargas de ruptura e modos de falha de lajes lisas de concreto armado com ou sem aberturas, como também com ou sem armaduras de cisalhamento do tipo *studs*.

O programa elaborado foi denominado de *PunCalc*, sendo esse desenvolvido em linguagem de programação FORTRAN e baseado nos trabalhos de Amorim (2000) e Carvalho (2000).

#### 3.1 METODOLOGIA IDEALIZADA PARA A PROGRAMAÇÃO

O modelo teórico proposto por Marques (2018) prevê quatro incógnitas:  $\psi$  (rotação última da laje),  $x$  (altura da linha neutra),  $\alpha$  (ângulo que a força radial do concreto,  $F_{cr}$ , faz com o plano horizontal) e  $P$  (carga de ruptura à punção).

A posição da linha neutra ( $x$ ) corresponde a altura de laje que contribui para a força tangencial do concreto ( $F_{ct}$ ). Além disso, essa incógnita é fundamental para a determinação da força radial do concreto ( $F_{cr}$ ) e das forças das armaduras de flexão ( $F_{sr}$  e  $F_{st}$ ).

Por sua vez, o ângulo que a força radial do concreto ( $F_{cr}$ ) faz com o plano horizontal,  $\alpha$ , é necessário para a determinação dessa força, bem como utilizado na equação de equilíbrio horizontal (Eq. 2.127).

Para cálculo do processo, estima-se, primeiramente, uma rotação inicial  $\psi_i$  e, por iterações, encontram-se na equação de equilíbrio horizontal (Eq. 2.127), os valores de  $x$  e  $\alpha$  que satisfaçam a igualdade.

Em seguida, calcula-se a carga  $P$  na equação de equilíbrio rotacional (Eq. 2.132) e substitui-se o valor encontrado na equação de equilíbrio vertical (Eq. 2.131), para encontrar o valor de  $\alpha$ . Caso o ângulo  $\alpha$  calculado seja igual ao utilizado na equação de equilíbrio horizontal, as quatro incógnitas estão em equilíbrio. Em caso negativo, refaz-se o processo até as três equações se equilibrarem e se obter a solução para a determinada rotação  $\psi_i$ .

O modelo proposto por Marques (2018) é iterativo, necessitando-se de grande trabalho manual ou auxílio de programa computacional para sua resolução.

As forças do modelo teórico relativas ao concreto ( $F_{cr}$  e  $F_{ct}$ ), relativas à armadura de flexão ( $F_{st}$  e  $F_{sr}$ ) e à armadura de cisalhamento ( $F_e$ ) formam um sistema de equações não lineares que representam as condições de equilíbrio horizontal, vertical e rotacional, e os critérios de ruptura interna e externa. O método de Newton-Raphson foi aplicado a esse sistema não-linear cujas raízes são as variáveis  $x$  (altura efetiva da linha neutra) e  $\alpha$  (ângulo formado entre a linha de aplicação da força radial do concreto e o eixo horizontal) para o conjunto das equações de equilíbrio.

### 3.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON AO MODELO TEÓRICO DE MARQUES (2018)

O método de Newton-Raphson é um caso particular dos métodos de ponto fixo para cálculo de zeros de funções, onde o objetivo é contribuir para uma função que satisfaça a Equação 3.1.

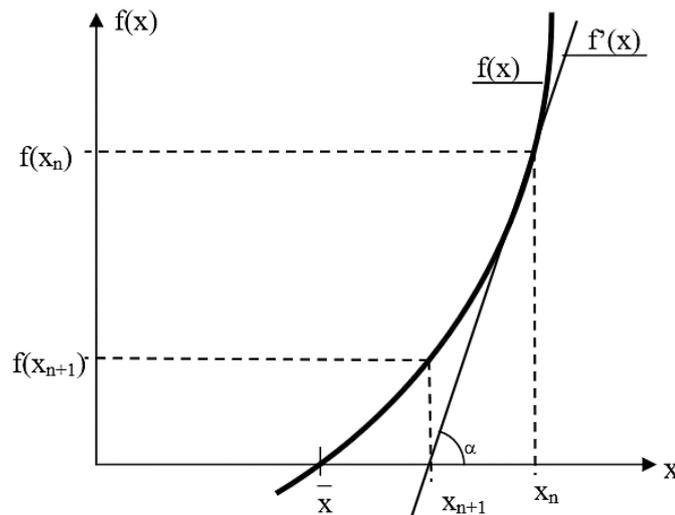
$$x_{n+1} = \phi(x_n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

A definição geométrica do método, também conhecido como método das tangentes (Figura 3.1), é dada por:

$$tg \alpha = f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} \quad (3.2)$$

Sendo assim, a Equação 3.1 pode ser reescrita como:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.3)$$



**Figura 3.1 - Interpretação geométrica do Método de Newton-Raphson**

Fonte: Amorim, 2000.

O procedimento do método Newton-Raphson aplica-se nas variáveis  $\alpha$  e  $x$  nas duas equações originárias de equilíbrio horizontal ( $EH$ ) e de equilíbrio vertical-rotacional ( $EVR$ ), as quais dependem ainda, da rotação  $\psi$ , considerada constante para cada iteração. Diante disso, para cada  $\psi$ , o procedimento retorna os valores de  $\alpha$  e  $x$ , que igualam as equações de equilíbrio. As Equações 3.4 e 3.5 descrevem, respectivamente as equações de equilíbrio horizontal e vertical-rotacional.

$$EH = -F_{sr(r=r_0)} - F'_{st(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi + F_e \cos \beta_e + \xi F_{cr} \cos \alpha + F'_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi = 0 \quad (3.4)$$

$$EVR = z \left( \frac{F_{sr(r=r_0)} + F'_{st(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi}{r_3 - r_0} \right) - \xi F_{cr} \sin \alpha - F_e \sin \beta_e = 0 \quad (3.5)$$

em que,  $z = d - x$  é o braço de alavanca.

Devido a não-linearidade destas equações, deve ser utilizado o método aplicado a sistemas não lineares, por meio da utilização do Jacobiano da função ( $J(x^{(k)})$ ). O Jacobiano é um determinante formado pelas derivadas parciais das funções em relação às incógnitas do sistema.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [J(x^{(k)})]^{-1} f(x^{(k)}) \quad (3.6)$$

A matriz Jacobiano que assume as primeiras derivadas das equações  $EH$  e  $EVR$ , segundo a Equação 3.6, aplicando-se às variáveis  $\alpha$  e  $x$ , é determinada pela Equação 3.7.

$$J(x, \alpha) = \begin{bmatrix} \frac{\partial EH}{\partial x} & \frac{\partial EH}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial EVR}{\partial x} & \frac{\partial EVR}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

A matriz inversa do Jacobiano,  $J^{-1}(x, \alpha)$ , é dada pela Equação 3.8.

$$J^{-1}(x, \alpha) = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\partial EVR}{\partial \alpha}}{\frac{\partial EH}{\partial \alpha} \frac{\partial EVR}{\partial x} - \frac{\partial EVR}{\partial \alpha} \frac{\partial EH}{\partial x}} & \frac{\frac{\partial EH}{\partial \alpha}}{\frac{\partial EH}{\partial \alpha} \frac{\partial EVR}{\partial x} - \frac{\partial EVR}{\partial \alpha} \frac{\partial EH}{\partial x}} \\ \frac{\frac{\partial EVR}{\partial x}}{\frac{\partial EH}{\partial \alpha} \frac{\partial EVR}{\partial x} - \frac{\partial EVR}{\partial \alpha} \frac{\partial EH}{\partial x}} & \frac{\frac{\partial EH}{\partial x}}{\frac{\partial EH}{\partial \alpha} \frac{\partial EVR}{\partial x} - \frac{\partial EVR}{\partial \alpha} \frac{\partial EH}{\partial x}} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Aplicando-se às variáveis  $\alpha$  e  $x$  na Equação 3.6, tem-se a forma genérica do procedimento para cálculo iterativo das referidas variáveis pelo método Newton-Raphson:

$$\begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ \alpha^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ \alpha^{(k)} \end{bmatrix} - J^{-1}(x, \alpha) \begin{bmatrix} EH(x^{(k)}, \alpha^{(k)}) \\ EVR(x^{(k)}, \alpha^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

onde  $k$  é a  $i$ -ésima iteração do processo numérico de cálculo.

Discretizando-se as incógnitas da Equação 3.9 para utilização no procedimento do programa computacional, tem-se para a incógnita  $x$ :

$$x_{k+1} = x_k + \frac{EVR \frac{\partial EH}{\partial \alpha} - EH \frac{\partial EVR}{\partial \alpha}}{\frac{\partial EVR}{\partial \alpha} \frac{\partial EH}{\partial x} - \frac{\partial EVR}{\partial x} \frac{\partial EH}{\partial \alpha}} \quad (3.10)$$

e fazendo-se o mesmo para  $\alpha$ :

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{EH \frac{\partial EVR}{\partial x} - EVR \frac{\partial EH}{\partial x}}{\frac{\partial EVR}{\partial \alpha} \frac{\partial EH}{\partial x} - \frac{\partial EVR}{\partial x} \frac{\partial EH}{\partial \alpha}} \quad (3.11)$$

As derivadas das equações de equilíbrio horizontal ( $EH$ ) e vertical rotacional ( $EVR$ ) em relação aos parâmetros  $x$  e  $\alpha$  podem ser determinadas por meio das Equações 3.12 a 3.15.

$$\frac{\partial EH}{\partial x} = \left( \frac{\partial F'_s}{\partial x} - \chi \frac{\partial F_{cr}}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial F'_{ct}}{\partial x} \right) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial EH}{\partial \alpha} = - \left( \frac{\partial F_{cr1}}{\partial x} \right) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial EVR}{\partial x} = \left[ \frac{\partial F_{cr}}{\partial x} \chi \text{sen} \alpha - \frac{\left( z \frac{\partial F'_s}{\partial x} \right) - 0,45(F_{sr} + F'_{st})}{r_3 - r_0} \right] \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial EVR}{\partial \alpha} = \frac{\partial F_{cr}}{\partial x} \chi \text{sen} \alpha + \chi f_c A_c \eta \cos \alpha \quad (3.15)$$

Nos itens a seguir serão deduzidas as derivadas das componentes das forças de equilíbrio do método teórico considerado neste trabalho.

### 3.2.1 Derivada da força $F_{cr}$ em relação a $x$ ( $\partial F_{cr}/\partial x$ )

As Equações 3.16 a 3.23 demonstram a dedução da derivada da força radial do concreto ( $F_{cr}$ ), em relação a posição da linha neutra ( $x$ ).

$$F_{cr} = A_c \eta f_c \xi \cos \alpha \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial F_{cr}}{\partial x} = \xi f_c \cos \alpha \left( \frac{\partial A_c}{\partial x} \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} A_c \right) \quad (3.17)$$

onde,

$$A_c = \frac{2\pi x}{\cos \alpha} \left( r_0 - \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{2} \right) \quad (3.18)$$

A derivada da área de concreto em relação a  $x$  é dada por:

$$\frac{\partial A_c}{\partial x} = \frac{2\pi}{\cos \alpha} (r_0 - x \operatorname{tg} \alpha) \quad (3.19)$$

$$\eta = \frac{2r_0 k + x k_1}{r_0(1,8 + 0,2k) + x(0,1k + 0,9 \operatorname{tg} \alpha)} \quad (3.20)$$

A derivada do gradiente longitudinal de tensões em relação a  $x$  pode ser obtida por meio da Equação 3.21.

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{k_1 r_0(1,8 + 0,2k) - 2r_0 k(0,1k + 0,9 \operatorname{tg} \alpha)}{[r_0(1,8 + 0,2k) + x(0,1k + 0,9 \operatorname{tg} \alpha)]^2} \quad (3.21)$$

Sendo assim,

$$\frac{\partial F_{cr}}{\partial x} = \xi f_c \cos \alpha \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\pi}{\cos \alpha} (r_0 - x \operatorname{tg} \alpha) \eta + \\ + \left[ \frac{k_1 r_0(1,8 + 0,2k) - 2r_0 k(0,1k + 0,9 \operatorname{tg} \alpha)}{[r_0(1,8 + 0,2k) + x(0,1k + 0,9 \operatorname{tg} \alpha)]^2} \right] A_c \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

Para lajes lisas com aberturas, a Equação 3.22 pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial F_{cr}}{\partial x} = \xi f_c \cos \alpha \left\{ \begin{array}{l} \frac{(2\pi - \sum_{i=1}^n \Delta \theta_i)}{\cos \alpha} (r_0 - x \operatorname{tg} \alpha) \eta + \\ + \left[ \frac{k_1 r_0(1,8 + 0,2k) - 2r_0 k(0,1k + 0,9 \operatorname{tg} \alpha)}{[r_0(1,8 + 0,2k) + x(0,1k + 0,9 \operatorname{tg} \alpha)]^2} \right] A_c \end{array} \right\} \quad (3.23)$$

em que,  $\sum_{i=1}^n \Delta\theta_i$  é a somatória dos ângulos formados nas cunhas devido a existência de aberturas na laje.

### 3.2.2 Derivada da força $F_{cr}$ em relação a $\alpha$ ( $\partial F_{cr}/\partial\alpha$ )

As Equações 3.24 a 3.36 demonstram a dedução da derivada da força radial do concreto ( $F_{cr}$ ), em relação ao ângulo  $\alpha$ .

$$\frac{\partial F_{cr}}{\partial\alpha} = \xi f_c \left( \frac{\partial A_c}{\partial\alpha} \eta + \frac{\partial \eta}{\partial\alpha} A_c \right) \quad (3.24)$$

Derivando a componente  $\partial A_c/\partial\alpha$ , tem-se:

$$\frac{\partial A_c}{\partial\alpha} = \frac{2\pi x}{\cos^2\alpha} \left[ r_0 \operatorname{sen}\alpha - \frac{x}{2\cos\alpha} (\operatorname{sen}^2\alpha + 1) \right] \quad (3.25)$$

A partir da Equação 3.25, pode-se considerar:

$$C = 2r_0k + xk_1 \quad (3.26)$$

$$D = r_0(1,8 + 0,2k) + x(0,1k + 0,9\operatorname{tg}\alpha) \quad (3.27)$$

onde,

$$k = 1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(25^\circ - \alpha) \quad (3.28)$$

$$k_1 = \frac{2[1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(25^\circ - \alpha)]}{\cos^2\alpha} - [1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(25^\circ - \alpha)]^2 \operatorname{tg}\alpha \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial C}{\partial\alpha} = 2r_0E + \frac{2x}{\cos^3\alpha} (\cos\alpha E + 2\operatorname{sen}\alpha k) - \frac{k}{\cos\alpha} \left( 2E\operatorname{sen}\alpha + \frac{k}{\cos\alpha} \right) \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial D}{\partial\alpha} = 0,2r_0E + 0,1xE + \frac{0,9x}{\cos^2\alpha} \quad (3.31)$$

sendo que,

$$E = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2(25^\circ - \alpha)} \quad (3.32)$$

Portanto, a componente  $\partial\eta/\partial\alpha$  pode ser expressa como:

$$\frac{\partial\eta}{\partial\alpha} = \frac{D \left( \frac{\partial C}{\partial\alpha} \right) - C \left( \frac{\partial D}{\partial\alpha} \right)}{D^2} \quad (3.33)$$

Sendo assim,

$$\frac{\partial F_{cr}}{\partial\alpha} = \xi f_c \left( \frac{\partial A_c}{\partial\alpha} \eta + \frac{\partial\eta}{\partial\alpha} A_c \right) \quad (3.34)$$

Para lajes lisas com aberturas adjacentes ao pilar, a área de concreto ( $A_c$ ) pode ser determinada por meio da Equação 3.35.

$$A_c = \frac{(2\pi - \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i)x}{\cos\alpha} \left( r_0 - \frac{x \operatorname{tg}\alpha}{2} \right) \quad (3.35)$$

A Equação 3.25 pode, portanto, ser reescrita através da Equação 3.36.

$$\frac{\partial A_c}{\partial\alpha} = \frac{(2\pi - \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i)x}{\cos^2\alpha} \left[ r_0 \operatorname{sen}\alpha - \frac{x}{2\cos\alpha} (\operatorname{sen}^2\alpha + 1) \right] \quad (3.36)$$

### 3.2.3 Derivada da força $\xi.F_{cr}.\cos\alpha$ em relação a $\alpha$ ( $\partial F_{cr1}/\partial\alpha$ )

Derivando a Equação 3.16 em relação a  $\alpha$ , tem-se:

$$\frac{\partial F_{cr1}}{\partial\alpha} = \frac{\partial F_{cr}}{\partial\alpha} \cos\alpha - A_c \eta f_c \xi \operatorname{sen}\alpha \quad (3.37)$$

Para lajes com aberturas, a Equação 3.37 é definida considerando a área de concreto conforme demonstrado na Equação 3.35.

### 3.2.4 Derivada da força $F_{ct}$ em relação a $x$ ( $\partial F_{ct}/\partial x$ )

As Equações 3.38 a 3.45 demonstram as deduções das derivadas da força tangencial do concreto ( $F_{ct}$ ), em relação a posição da linha neutra  $x$ , nos seis casos considerados no método teórico de Marques (2018).

- **Caso 1:**  $r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$

$$\frac{\partial F_{ct}}{\partial x} = 2\pi f_c \left\{ \frac{2xk_0\psi}{\varepsilon_{c1}} - 0,723r_0 + \frac{0,425\psi x}{\varepsilon_{c1}} \left[ 2\ln\left(\frac{r_3\varepsilon_{c1}}{\psi x}\right) - 1 \right] \right\} \quad (3.38)$$

sendo,

$$k_0 = 0,425 + \frac{0,298 \ln\alpha_0}{(\alpha_0 - 1)} \quad (3.39)$$

$$\alpha_0 = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{c1}} \quad (3.40)$$

- **Caso 2:**  $r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$

$$\frac{\partial F_{ct}}{\partial x} = 2\pi f_c \left\{ \begin{array}{l} \left( \left( 0,425 - \frac{0,298}{\alpha_0 - 1} \right) \left( \frac{2\psi x}{\varepsilon_{c1}} - r_0 \right) + \right. \\ \left. + \frac{0,298\psi x}{(\alpha_0 - 1)\varepsilon_{c1}} \left[ 2\ln\left(\frac{\psi x}{r_0\varepsilon_{c1}}\right) + 1 \right] \right) \\ \left. + \frac{0,425\psi x}{\varepsilon_{c1}} \left[ 2\ln\left(\frac{r_0\varepsilon_{c1}}{\psi x}\right) - 1 \right] \right\} \quad (3.41)$$

- **Caso 3:**  $r_0 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$

$$\frac{\partial F_{ct}}{\partial x} = 2\pi f_c \left\{ \begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{\alpha_0 - 1}\right) \left(\frac{0,596\psi x}{\varepsilon_{cu}} + 0,425r_3\right) + \\ &-0,723 \left(r_0 + \frac{r_3}{\alpha_0 - 1}\right) + \\ &+ \frac{0,298\psi x}{(\alpha_0 - 1)\varepsilon_{c1}} \left[2\ln\left(\frac{r_3\varepsilon_{cu}}{\psi x}\right) - 1\right] \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

• **Caso 4:**  $r_0 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}}$

$$\frac{\partial F_{ct}}{\partial x} = 2\pi f_c [0,723x(r_3 - r_0)] \quad (3.43)$$

• **Caso 5:**  $r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$

$$\frac{\partial F_{ct}}{\partial x} = 2\pi f_c \left\{ \begin{aligned} &(r_3 - r_0) \left(0,425 - \frac{0,298}{\alpha_0 - 1}\right) + \\ &+ \frac{0,298\psi}{(\alpha_0 - 1)\varepsilon_{c1}} \left[2x\ln\left(\frac{r_3}{r_0}\right)\right] \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

• **Caso 6:**  $r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_0 \leq r_3$

$$\frac{\partial F_{ct}}{\partial x} = 4\pi f_c x \left[0,425 \frac{\psi}{\varepsilon_{c1}} \ln\left(\frac{r_3}{r_0}\right)\right] \quad (3.45)$$

### 3.2.5 Derivada da força $F_{cth}$ em relação a $x$ ( $\partial F_{cth}/\partial x$ )

As Equações 3.46 a 3.51 demonstram as deduções das derivadas da força tangencial do concreto devido as aberturas ( $F_{cth}$ ), em função da posição da linha neutra  $x$ , nos casos considerados no método teórico.

- **Caso 1:**  $r_0 \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$

$$r_0 \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_2 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$$

$$r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}}$$

$$\frac{\partial F_{cth}}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i f_c \left\{ \begin{array}{l} 0,298 \left( \frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} \right) + 0,298 \frac{\psi x \varepsilon_{c1}}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1}) \varepsilon_{cu}} + \\ + 0,425 \left( b_{2,i} - \frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} \right) - 0,298 \frac{\left( b_{2,i} - \frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} \right) \varepsilon_{c1}}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} + \\ 0,723 \left( \frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} - b_{1,i} \right) - 0,298 \left[ \frac{\psi x}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \right] + \\ + 0,596 \left[ \frac{\psi x}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \right] \ln \left( \frac{b_{2,i} \varepsilon_{cu}}{\psi x} \right) + \end{array} \right\} \quad (3.46)$$

- **Caso 2:**  $r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$

$$r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$$

$$\frac{\partial F_{cth}}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i f_c [0,723(b_{2,i} - b_{1,i})] \quad (3.47)$$

- **Caso 3:**  $r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$

$$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$$

$$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$$

$$\frac{\partial F_{cth}}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i f_c \left\{ \begin{array}{l} 0,425(b_{2,i} - b_{1,i}) - 0,298 \left[ \frac{(b_{2,i} - b_{1,i}) \varepsilon_{c1}}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \right] + \\ + 0,596 \left[ \frac{\psi x}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \right] \ln \left( \frac{b_{2,i}}{b_{1,i}} \right) \end{array} \right\} \quad (3.48)$$

• **Caso 4:**  $r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_1 \leq b_2 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$

$$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq b_2 \leq r_3$$

$$\frac{\partial F_{cth}}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i f_c \left\{ \begin{array}{l} 0,425 \left( \frac{\psi x}{\varepsilon_{c1}} - b_{1,i} \right) - 0,298 \frac{\left( \frac{\psi x}{\varepsilon_{c1}} - b_{1,i} \right) \varepsilon_{c1}}{(\varepsilon_u - \varepsilon_{c1})} + \\ + 0,845 \left( \frac{\psi x}{\varepsilon_{c1}} \right) \ln \left( \frac{b_{2,i} \varepsilon_{c1}}{\psi x} \right) + \\ 0,596 \left[ \frac{\psi x}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \right] \ln \left( \frac{\psi x}{b_{1,i} \varepsilon_{c1}} \right) \end{array} \right\} \quad (3.49)$$

• **Caso 5:**  $r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$

$$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$$

$$r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$$

$$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$$

$$\frac{\partial F_{cth}}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i f_c \left[ 0,85 \left( \frac{\psi x}{\varepsilon_{c1}} \right) \ln \left( \frac{b_{2,i}}{b_{1,i}} \right) \right] \quad (3.50)$$

• **Caso 6:**  $r_0 \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq b_1 \leq r_3$

$$\frac{\partial F_{cth}}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i f_c \left\{ \begin{array}{l} 0,85 \psi x \left( \frac{1}{\varepsilon_{c1}} - \frac{1}{\varepsilon_{cu}} \right) + 0,723 \left( \frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} \right) + \\ - 0,596 \left[ \frac{\psi x \varepsilon_{c1}}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \right] \left( \frac{1}{\varepsilon_{c1}} - \frac{1}{\varepsilon_{cu}} \right) + \\ 0,723 \left( \frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} - b_{1,i} \right) + 0,596 \left[ \frac{\psi x}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \right] \ln \left( \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{c1}} \right) + \\ + 0,85 \left( \frac{\psi x}{\varepsilon_{c1}} \right) \ln \left( \frac{b_{2,i} \varepsilon_{c1}}{\psi x} \right) - 0,425 \left( \frac{\psi x}{\varepsilon_{c1}} \right) \end{array} \right\} \quad (3.51)$$

A resultante da derivada da força tangencial do concreto ( $F_{ct}$ ) em relação a posição da linha neutra  $x$  para lajes lisas com aberturas pode ser expressa pela Equação 3.52.

$$\frac{\partial F'_{ct}}{\partial x} = \frac{\partial F_{ct}}{\partial x} - \frac{\partial F_{cth}}{\partial x} \quad (3.52)$$

### 3.2.6 Derivada das forças da armadura de flexão em relação a $x$

As Equações 3.53 a 3.60 mostram as deduções das derivadas das forças da armadura de flexão ( $F_{sr}$  e  $F_{st}$ ), em relação a posição da linha neutra  $x$ , nos casos considerados no método teórico.

$$F_s = F_{sr} + F_{st} \quad (3.53)$$

• **Caso 1:**  $r_0 \leq r_y \leq r_3$

$$F_s = 2\pi\rho\chi \frac{f_y}{100} dr_y \left[ 1 + \ln\left(\frac{r_3}{r_y}\right) \right] \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial F_s}{\partial x} = 2\pi\rho \frac{f_y}{100} d \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \chi}{\partial x} r_y \left[ 1 + \ln\left(\frac{r_3}{r_y}\right) \right] + \chi \frac{\partial r_y}{\partial x} \left[ 1 + \ln\left(\frac{r_3}{r_y}\right) \right] + \\ + \chi r_y \frac{\partial \left[ 1 + \ln\left(\frac{r_3}{r_y}\right) \right]}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (3.55)$$

onde,

$$\frac{\partial r_y}{\partial x} = \frac{-\psi}{\varepsilon_{sy}} \quad (3.56)$$

$$\chi = -0,0671 \left(\frac{r_y}{r_3}\right)^3 + 0,1669 \left(\frac{r_y}{r_3}\right)^2 + 0,0020 \left(\frac{r_y}{r_3}\right) + 0,829 \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \left\{ \left[ -0,2013 \left(\frac{r_y}{r_3}\right)^2 + 0,3338 \left(\frac{r_y}{r_3}\right) + 0,0020 \right] \left(\frac{-\psi}{\varepsilon_{sy}}\right) \right\} \quad (3.58)$$

- **Caso 2:**  $r_0 \leq r_3 \leq r_y$

$$F_s = 2\pi\rho\chi \frac{f_y}{100} dr_3 \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial F_s}{\partial x} = 2\pi\rho \frac{f_y}{100} dr_3 \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \quad (3.60)$$

### 3.2.7 Derivada da força $F_{sth}$ em relação a $x$ ( $\partial F_{sth}/\partial x$ )

As Equações 3.61 a 3.64 demonstram as deduções das derivadas da força tangencial da armadura de flexão ( $F_{sth}$ ), em função da posição da linha neutra  $x$ , nos casos considerados no método teórico.

- **Caso 1:**  $r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_y \leq r_3$

$$\frac{\partial F_{sth}}{\partial x} = f_{yd} \frac{\rho}{100} d \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i (b_{2,i} - b_{1,i}) \left( \begin{array}{c} \frac{-0,002\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} + \\ -0,3338(d-x) \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} \right)^2 + \\ +0,2013(d-x)^2 \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} \right)^3 \end{array} \right) \quad (3.61)$$

- **Caso 2:**  $r_0 \leq b_1 \leq r_y \leq b_2 \leq r_3$

$$\frac{\partial F_{sth}}{\partial x} = f_{yd} \frac{\rho}{100} d \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i \left\{ \begin{array}{l} \left[ \left( \frac{(d-x)\psi}{\varepsilon_{sy}} - b_{1,i} \right) + \frac{(d-x)\psi}{\varepsilon_{sy}} \ln \left( \frac{b_{2,i}\varepsilon_{sy}}{(d-x)\psi} \right) \right] \left( \begin{array}{c} \frac{-0,002\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} + \\ -0,3338(d-x) \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} \right)^2 + \\ +0,2013(d-x)^2 \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} \right)^3 \end{array} \right) + \\ + \left( \begin{array}{c} 0,829 + 0,002(d-x) \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} \right) + \\ +0,1669(d-x)^2 \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} \right)^2 + \\ -0,0671(d-x)^3 \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} \right)^3 \end{array} \right) \left[ - \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{sy}} \right) \ln \left( \frac{b_{2,i}\varepsilon_{sy}}{(d-x)\psi} \right) \right] \end{array} \right\} \quad (3.62)$$

• **Caso 3:**  $r_0 \leq r_y \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$

$$\frac{\partial F_{sth}}{\partial x} = f_{yd} \frac{\rho}{100} d \sum_{i=1}^n \Delta \theta_i \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{(d-x)\psi}{\varepsilon_{sy}} \ln \left( \frac{b_{2,i}}{b_{1,i}} \right) \right] \left( \frac{-0,002\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} + \right. \\ \left. -0,3338(d-x) \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} \right)^2 + \right. \\ \left. +0,2013(d-x)^2 \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} \right)^3 \right) + \\ + \left( \begin{array}{l} -0,829 + 0,002(d-x) \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} \right) + \\ -0,1669(d-x)^2 \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} \right)^2 + \\ +0,0671(d-x)^3 \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} \right)^3 \end{array} \right) \left[ \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{sy}} \right) \ln \left( \frac{b_{2,i}}{b_{1,i}} \right) \right] \end{array} \right\} \quad (3.63)$$

• **Caso 4:**  $r_0 \leq r_y \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$

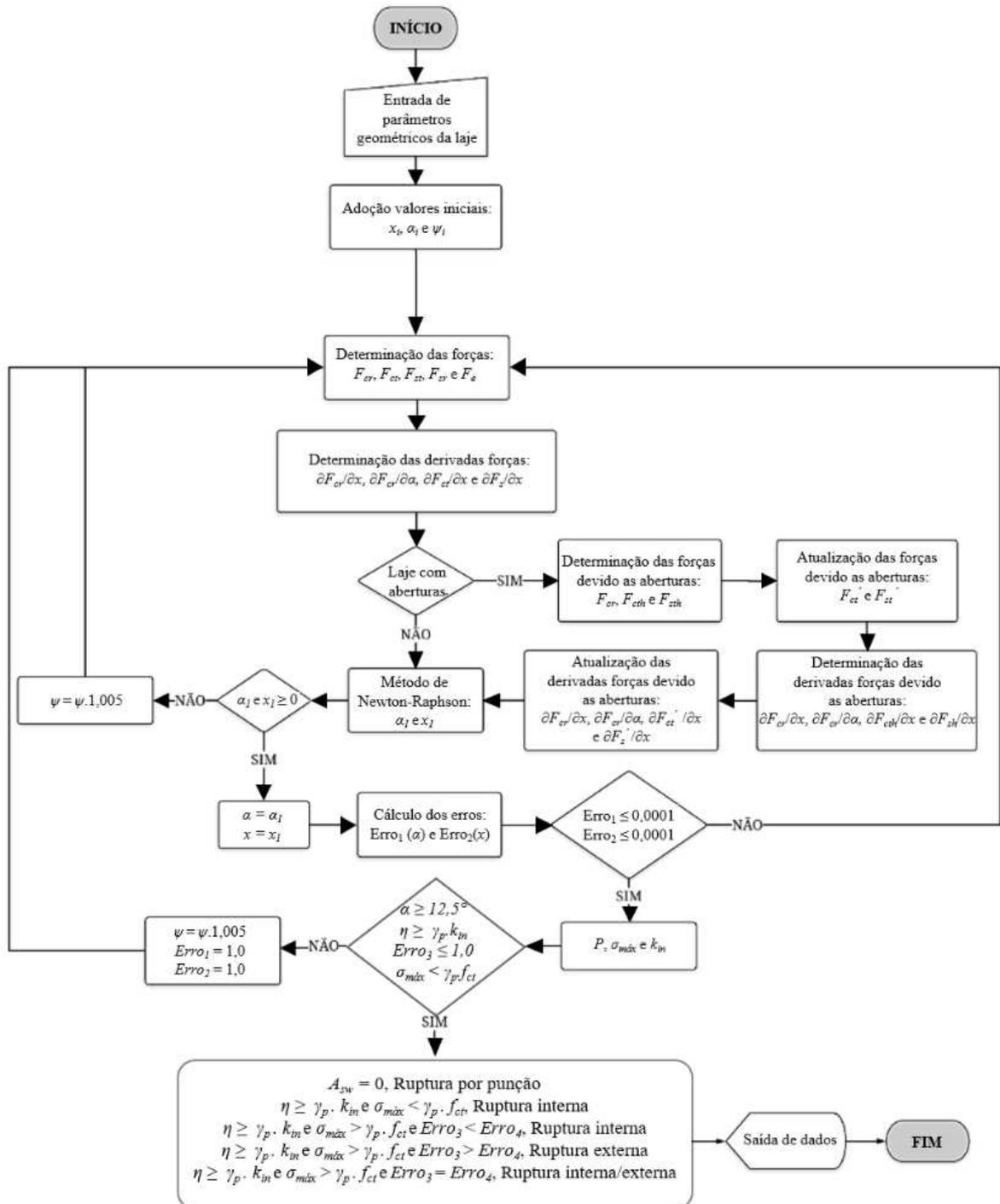
$$\frac{\partial F_{sth}}{\partial x} = f_{yd} \frac{\rho}{100} d \sum_{i=1}^n \Delta \theta_i (b_{2,i} - b_{1,i}) \left( \begin{array}{l} \frac{-0,002\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} + \\ -0,3338(d-x) \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} \right)^2 + \\ +0,2013(d-x)^2 \left( \frac{\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} \right)^3 \end{array} \right) \quad (3.64)$$

A resultante da derivada das forças da armadura de flexão ( $\partial F_s' / \partial x$ ) pode ser expressa pela Equação 3.65.

$$\frac{\partial F_s'}{\partial x} = \frac{\partial F_s}{\partial x} - \frac{\partial F_{sth}}{\partial x} \quad (3.65)$$

### 3.3 FLUXOGRAMA DO PROGRAMA

A Figura 3.2 apresenta o fluxograma simplificado do programa computacional *PunCalc* e o Apêndice A apresenta o algoritmo implementado.



**Figura 3.2 - Fluxograma para cálculo da carga de ruptura através do programa *PunCalc* baseado no modelo de Marques (2018)**

No arquivo de entrada do programa *PunCalc*, o usuário deve fornecer as características físicas e geométricas da laje a ser estimada a carga de ruptura. Essas características são:

a) Características físicas dos materiais: resistência à compressão ( $f_c$ ) e resistência à tração do concreto ( $f_{ct}$ ); módulo de elasticidade do concreto ( $E_c$ ); tensão de escoamento da armadura de flexão ( $f_y$ ); módulo de elasticidade do aço ( $E_s$ ) e taxa de armadura de flexão ( $\rho$ ).

b) Características geométricas da laje: altura total da laje ( $h$ ); altura útil ( $d$ ); raio do pilar ( $r_0$ ); raio da laje ( $r_3$ ); quantidade de aberturas ( $n_{Ab}$ ); quantidade de aberturas adjacentes ao pilar; coordenadas das aberturas em relação ao eixo do pilar ( $b_1$  e  $b_2$ ) e o ângulo  $\Delta\theta$ .

c) Características da armadura de cisalhamento: número de linhas de armaduras; número de camadas; tensão de escoamento da armadura de cisalhamento ( $f_{yw}$ ); área da armadura de cisalhamento ( $A_{sw}$ ); porcentagem de escoamento das armaduras de cada camada e espaçamento entre as camadas ( $s_0$  e  $s_r$ ).

Alguns valores iniciais foram adotados internamente pelo programa. Esses valores são demonstrados a seguir:

- Ângulo  $\alpha$  de aplicação da força radial do concreto ( $F_{cr}$ ): adotado inicialmente igual  $5,0^\circ$ ;
- Rotação inicial para laje com ou sem armadura de cisalhamento: estimada por  $\psi_i = 1/d$  ( $d$  em mm). Para as lajes com aberturas, adotou-se  $\psi_i = 1/1,5d$  para início das iterações;
- Valor inicial da posição da linha neutra ( $x$ ): pode ser obtido conforme proposto por Shehata (1985) por meio da Equação 3.66.

$$x = 0,8d \sqrt{\frac{35n\rho}{f_c}} \quad (3.66)$$

sendo que,

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (3.67)$$

Quando não há informações sobre o valor experimental do módulo de elasticidade do concreto, esse parâmetro pode ser determinado no programa como:

$$E_c = 4250\sqrt{f_c} \quad (3.68)$$

Para a avaliação do critério de ruptura externo, o programa adota o valor do raio da seção de tensão máxima  $r_l$  igual a  $1,35d$  além da última camada da armadura de cisalhamento, conforme proposto inicialmente por Gomes (1991). Entretanto, para determinadas lajes, há a necessidade de se alterar o valor de  $r_l$  diretamente no programa.

Como processo interno de cálculo, o programa determina para a rotação inicial ( $\psi_i$ ), o valor das forças e respectivas derivadas, aplicando em seguida o procedimento de Newton-Raphson até que ocorra a convergência dos valores de  $x$  e  $\alpha$ .

Com esse conjunto de incógnitas ( $x$ ,  $\alpha$  e  $\psi$ ), o programa determina a carga de ruptura ( $P$ ) correspondente e avalia se a solução obtida atende a um dos critérios de ruptura apresentados na Figura 3.2. Caso negativo, faz-se nova iteração para uma nova rotação 0,5% maior que a anterior até que o critério de ruptura seja atendido, fornecendo os valores da ruptura à punção e do critério de ruptura atingido.

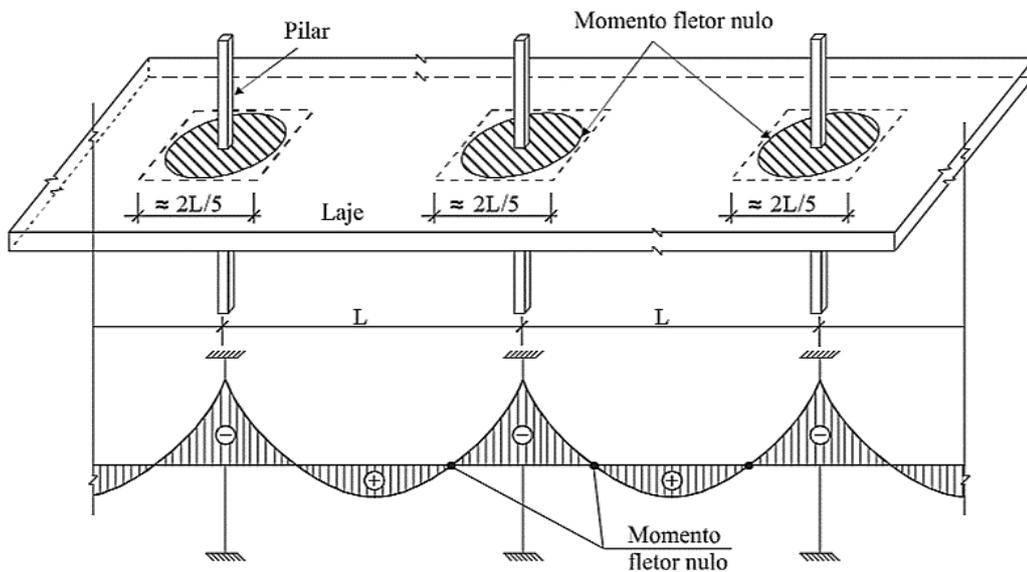
O Item 5.7 (Capítulo 5) apresenta a comparação entre os resultados experimentais de carga de ruptura e rotação das lajes ensaiadas nesta pesquisa com os valores estimados pelo programa *PunCalc*. No Apêndice E está apresentado os valores de cargas de ruptura obtidos pelo programa para lajes estudadas por diversos pesquisadores.

## 4 PROGRAMA EXPERIMENTAL

Estudar o comportamento de um pavimento de lajes lisas em proporções reais em um laboratório é uma tarefa complexa. Por conta disso, muitos pesquisadores adotam modelos (chamados de locais) que representam uma parte ou componente de um elemento estrutural. Esses modelos têm por finalidade reproduzir localmente o comportamento da estrutura quando esta é submetida aos carregamentos de serviço e/ou últimos.

Diante disso, as lajes consideradas nesta pesquisa tratam-se de modelos locais e representam uma região de momento fletor negativo, delimitada por pontos de inflexões com um comprimento de aproximadamente dois quintos do vão total entre pilares, o que equivale a um vão de 4.500 mm, considerado uma situação de pilar interno e carregamento simétrico, segundo a Figura 4.1. Os modelos ensaiados são representativos, pois o efeito a ser estudado é localizado. As lajes e o esquema de ensaio adotados basearam-se nos trabalhos de Silva (2003) e Souza (2004).

Os ensaios dos modelos da pesquisa foram realizados no Laboratório de Estruturas da Faculdade de Engenharia Civil e Arquitetura da Universidade Estadual de Campinas e os resultados obtidos foram utilizados nas análises de confiabilidade desenvolvidas neste trabalho.



**Figura 4.1 - Pórtico hipotético caracterizando a situação estudada**

Fonte: Musse, 2004.

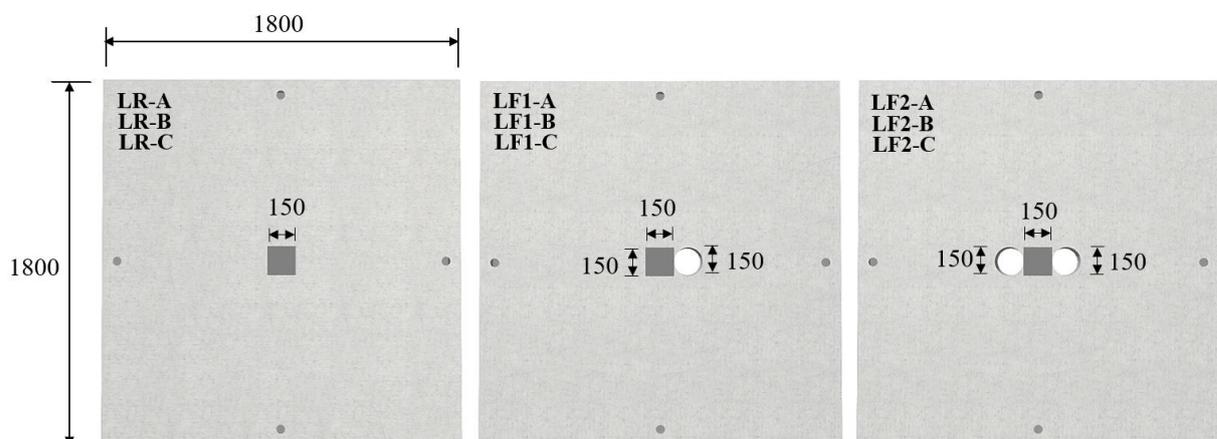
#### 4.1 CARACTERÍSTICAS DAS LAJES ENSAIADAS

A análise experimental deste trabalho compreendeu ensaios até a ruptura de nove lajes lisas quadradas com 1.800 mm de lado e 130 mm de espessura. A altura útil das lajes foi estabelecida inicialmente em 90 mm, sendo possível ocorrer variações devido ao processo de concretagem.

As principais variáveis deste trabalho foram a existência, ou não, de aberturas adjacentes ao pilar e a taxa de armadura de flexão, sendo essa taxa calculada em função das dimensões e da quantidade de aberturas. As demais variáveis de ensaio, tais como: a dimensão do pilar (150 mm x 150 mm) e o diâmetro das aberturas (150 mm) mantiveram-se constantes. A dimensão das aberturas foi adotada para simular a passagem de tubulações com diâmetros usuais nas lajes.

Foram considerados três séries de repetições: Série 1 - lajes sem abertura (também chamada de lajes de referências), Série 2 - lajes com uma abertura e Série 3 - lajes com duas aberturas. A primeira série foi composta pelas lajes LR-A, LR-B e LR-C. Já a segunda série, foi constituída pelas lajes LF1-A, LF1-B e LF1-C. Por fim, a terceira e última série foi formada pelas lajes LF2-A, LF2-B e LF2-C. A Figura 4.2 e a Tabela 4.1 apresentam as características das lajes ensaiadas nesta pesquisa.

A classificação das lajes em cada grupo foi feita por ordem de ensaio. Os resultados das cargas de ruptura das lajes distribuídas em cada série serão utilizados nas análises de confiabilidade descritas nos Capítulos 6 e 7.



**Figura 4.2 - Características das lajes a serem estudadas (unidades em mm)**

Fonte: Arquivo pessoal.

**Tabela 4.1 - Características das lajes**

Laje	$d$ (mm)	$\rho_x$ (%)	$\rho_y$ (%)	$\rho$ (%)	Aberturas	
					Quantidade	Dimensão (mm)
LR-A	89	1,51	1,73	1,62	-	-
LR-B	88	1,54	1,77	1,65	-	-
LR-C	90	1,48	1,70	1,58	-	-
LF1-A	90	1,29	1,27	1,28	1	$\phi 150$
LF1-B	88	1,34	1,33	1,34	1	$\phi 150$
LF1-C	91	1,27	1,25	1,26	1	$\phi 150$
LF2-A	92	1,07	1,22	1,14	2	$\phi 150$
LF2-B	95	1,01	1,15	1,08	2	$\phi 150$
LF2-C	93	1,05	1,20	1,12	2	$\phi 150$

Os valores das taxas geométricas de armadura de flexão ( $\rho$ ) apresentados na Tabela 4.1 foram calculados segundo as Equações 4.1 e 4.2 (ABNT NBR 6118, 2014).

$$\rho_{x,y} = \frac{A_{s,x,y}}{A_{c,x,y}} = \frac{A_{s,x,y}}{b_w d_{x,y}} \quad (4.1)$$

$$\rho = \sqrt{\rho_x \rho_y} \quad (4.2)$$

Nestas equações,  $\rho_{x,y}$  é a taxa de armadura de flexão nas direções ortogonais  $x$  e  $y$ ;  $A_{s,x,y}$  é a área de aço da armadura de flexão considerada nos respectivos eixos;  $A_{c,x,y}$  é a área de concreto, calculada mediante multiplicação da largura da seção de concreto ( $b_w$ ) pela altura útil da laje para cada eixo ( $d_{x,y} = d \pm \phi/2$ ). A largura da seção de concreto é calculada a partir da Equação 3.3.

$$b_w = c + 2(3d) \quad (4.3)$$

onde,  $c$  é o lado do pilar quadrado e  $d$  é a altura útil efetiva da laje verificada *in loco*. O cálculo detalhado da taxa de armadura para cada laje encontra-se no Apêndice B.

Os valores de altura útil ( $d$ ) contidos na Tabela 4.1 foram determinados após a conclusão dos ensaios. Para cada laje estudada, as alturas foram medidas através de corpos de prova cilíndricos extraídos próximos às projeções dos pilares. A extração desses corpos de

prova foi feita utilizando-se uma extratora rotativa com coroa diamantada de 4" de diâmetro (Figura 4.3).

Além das medições por extração de corpos de prova, o valor de  $d$  foi também calculado subtraindo a altura total de cada laje pelos respectivos valores de cobrimento  $d'$ , sendo esses, mensurados através de pedaços de concreto retirados da superfície superior das lajes. Esse procedimento foi adotado com a finalidade de se investigar as variações desta variável na região próxima ao pilar, possibilitando a determinação de valores mais precisos.



**Figura 4.3 - Extração e modelo de corpo de prova das lajes ensaiadas**

Fonte: Arquivo pessoal.

## 4.2 MATERIAIS

### 4.2.1 Concreto

Todas as lajes foram moldadas em formas metálicas e o concreto estrutural utilizado foi adquirido pela empresa *Campmix Concreto Usinado Ltda.*, e dosado para atingir resistência à compressão de cerca de 40 MPa aos 28 dias.

A concretagem das lajes foi executada em duas etapas: a primeira etapa foi realizada no dia 18/09/2017 com a concretagem das lajes das Séries 1 e 2 (totalizando seis lajes). Por sua vez, as lajes da Série 3 foram concretadas na segunda etapa que ocorreu no dia 08/11/2017 (três lajes). A Figura 4.4 apresenta a fotografia da concretagem de uma das lajes da Série 3.

Em cada etapa foram moldados 20 corpos de prova cilíndricos (100 mm x 200 mm) para determinação das propriedades mecânicas do concreto (resistência à compressão simples, resistência à tração por compressão diametral e módulo de elasticidade longitudinal). Além destes corpos de prova cilíndricos, foram também moldadas em cada etapa descrita anteriormente, 3 vigas (100 mm x 100 mm x 400 mm) para a realização do ensaio de flexão em três pontos de vigas entalhadas (Figura 4.5).



a) Concretagem



b) Lajes finalizadas

**Figura 4.4 - Concretagem das lajes da Série 3**

Fonte: Arquivo pessoal.

**Figura 4.5 - Corpos de prova moldados em cada etapa**

Fonte: Arquivo pessoal.

Em cada uma das etapas de concretagem descritas anteriormente, a verificação da consistência do concreto foi cometida através do ensaio de abatimento de tronco de cone, seguindo as recomendações da norma ABNT NBR NM 67 (1998), apresentando o resultado de  $120 \text{ mm} \pm 20 \text{ mm}$  de abatimento. A Figura 4.6 apresenta a fotografia do ensaio de abatimento de tronco de cone realizado na segunda etapa de concretagem.



**Figura 4.6 - Ensaio de abatimento do tronco de cone**

Fonte: Arquivo pessoal.

Após o término da concretagem, aguardou-se cerca de 4 horas para iniciar o processo de cura das lajes e dos corpos de prova. Esse processo consistiu na aspersão de água na superfície das lajes e dos corpos de prova duas vezes por dia, durante o período de 7 dias. Logo após a molhagem das lajes e dos corpos de prova, esses elementos foram cobertos por uma lona plástica, que teve a função de auxiliar a retenção da umidade em torno das peças de concreto.

#### **4.2.2 Aço – Armaduras de flexão**

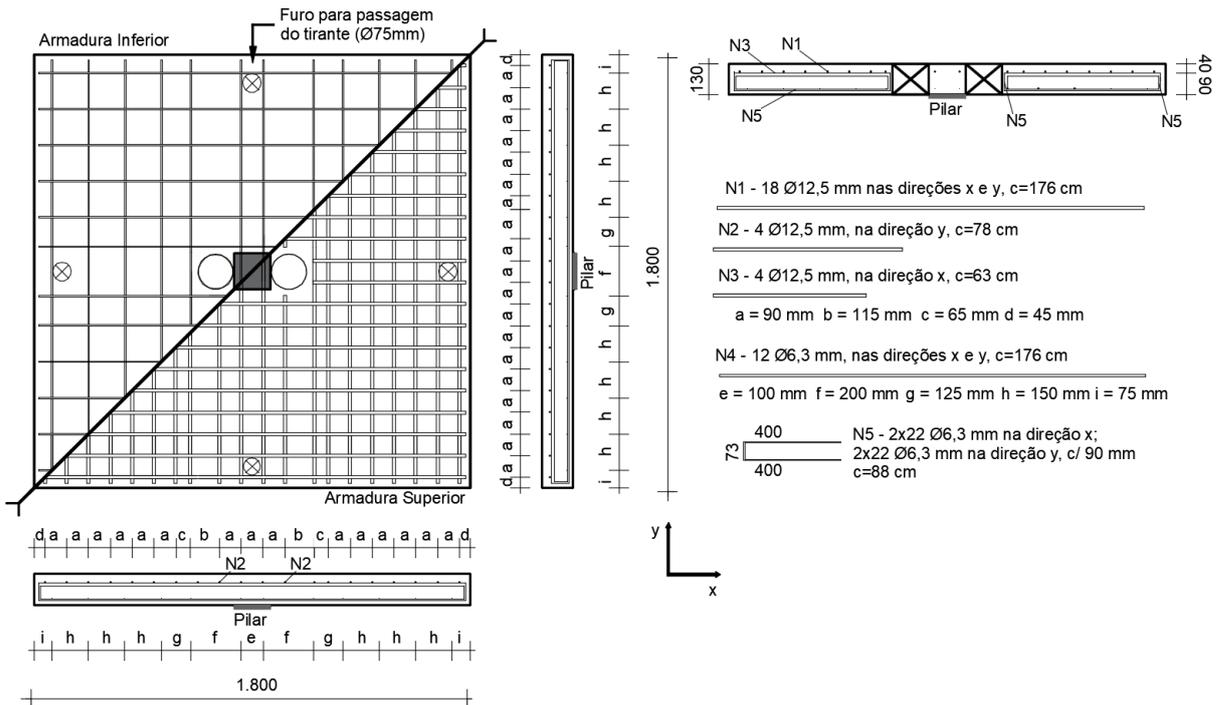
As armaduras de flexão foram constituídas por barras retas de aço CA-50 com 12,5 mm de diâmetro, dispostas ortogonalmente entre si na face superior (região tracionada) em todas as lajes. Essas armaduras foram distribuídas uniformemente a cada 90,0 mm nas direções  $x$  e  $y$ .

Na face inferior das lajes foram distribuídas barras retas com diâmetro de 6,3 mm (CA-50), a fim de se evitar fissuras no decorrer do transporte. As barras foram distribuídas uniformemente a cada 150 mm nas direções  $x$  e  $y$ .

Nas lajes da Série 2 e 3 as armaduras posicionadas nas faces superior e inferior das lajes foram distribuídas com espaçamentos entre barras distintos, ao mencionado anteriormente, nas regiões próximas às aberturas.

Para garantir a ancoragem da armadura negativa, foram utilizados grampos em forma de  $U$  feitos com barras de 6,3 mm de diâmetro nas extremidades das lajes e na região das aberturas adjacentes ao pilar. As Figuras 4.7, 4.8 e 4.9 apresentam os arranjos das armaduras e os detalhamentos dos grampos de ancoragem das lajes desta pesquisa.

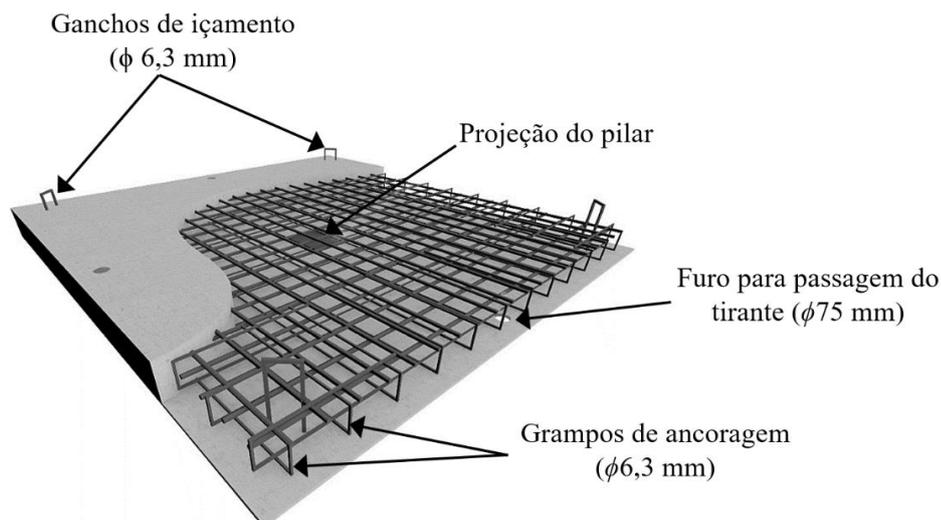




**Figura 4.9 - Projeto das armaduras de flexão das lajes da Série 3 (medidas em mm)**

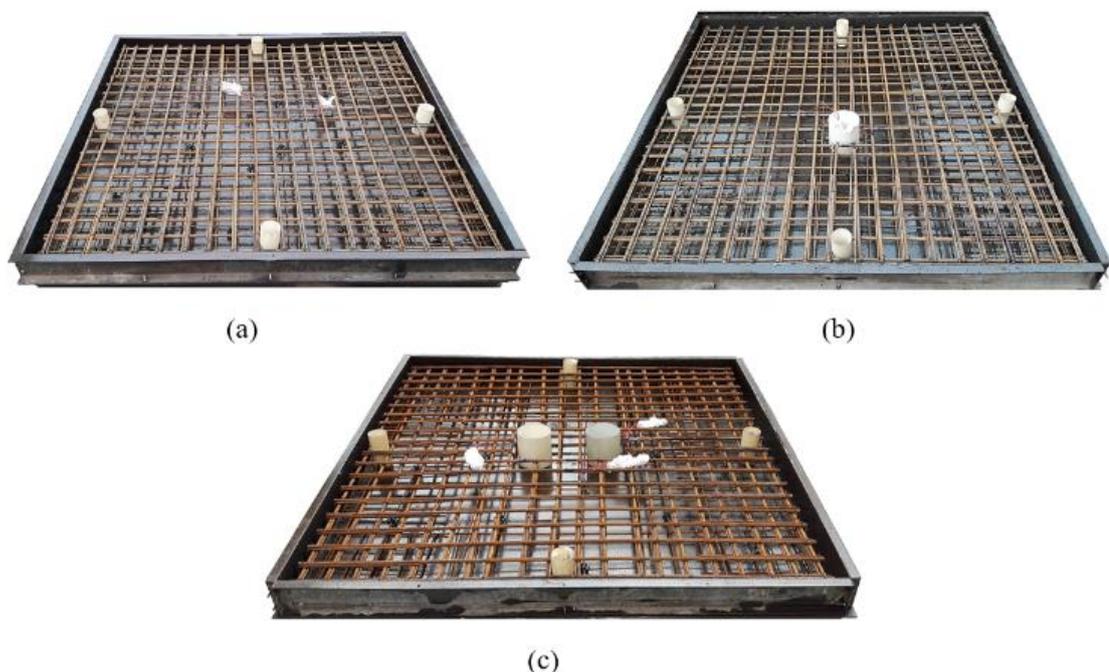
Fonte: Arquivo pessoal.

A Figura 4.10 demonstra um esquema em perspectiva da armação das lajes da Série 1, com o detalhe da amarração dos grampos com as barras de 12,5 mm e 6,3 mm de diâmetro. Já a Figura 4.11, apresenta as fotografias das armações das lajes posicionadas nas formas metálicas antes da concretagem.



**Figura 4.10 - Esquema da armação das lajes da Série 1**

Fonte: Arquivo pessoal.



**Figura 4.11 - Armação das lajes da Série 1 (a), Série 2 (b) e Série 3 (c) posicionadas nas formas metálicas**

Fonte: Arquivo pessoal.

Corpos de prova das barras de diâmetros 12,5 mm e 6,3 mm foram retirados dos lotes recebidos para a produção das lajes para a realização de ensaios de tração axial, visando a determinação das propriedades dos aços utilizados (tensão e deformação de escoamento, tensão de ruptura e módulo de elasticidade longitudinal do aço).

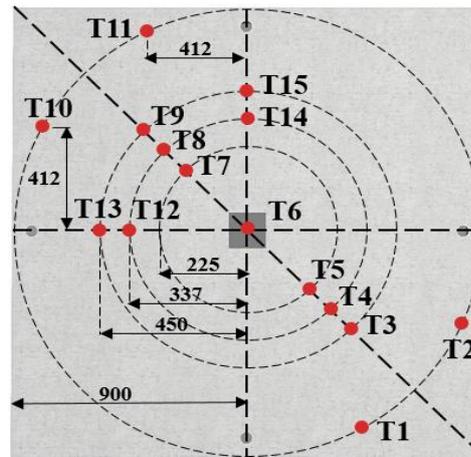
### 4.3 INSTRUMENTAÇÃO

A instrumentação tem a finalidade de coletar informações referentes ao estudo experimental dos modelos, permitindo, assim, a análise do comportamento dos mesmos. As informações adquiridas, além de descreverem o comportamento dos ensaios, serviram também de referência para a calibração dos modelos analíticos e nas análises de confiabilidade.

Neste trabalho, os modelos ensaiados foram monitorados através da leitura incremental de carregamento, dos deslocamentos verticais em pontos pré-definidos nas lajes; das deformações na armadura de flexão e no concreto. Além disso, o surgimento e o desenvolvimento de fissuras radiais e circunferenciais, mediante aplicação de carga, também, foram registrados com marcação à tinta de seus traçados feitos no bordo superior da laje.

### 4.3.1 Deslocamento vertical da laje

Os deslocamentos verticais das lajes desta pesquisa foram medidos em quinze pontos selecionados previamente, utilizando transdutores de posição LVDT (*Linear Variable Differential Transformer*), da marca *Micro Measurements* e precisão de 0,01 mm, posicionados na face tracionada das lajes. Os pontos foram selecionados com base na pesquisa de Silva (2003). A Figura 4.12 apresenta os locais de monitoramento considerados.



**Figura 4.12 - Disposição dos LVDTs para medição dos deslocamentos verticais nas lajes**  
Fonte: Arquivo pessoal.

Os transdutores foram denominados de T1 a T15, sendo que, o LVDT T6 registrou os deslocamentos centrais das lajes. É importante salientar que os LVDTs foram fixados em uma estrutura metálica secundária, completamente independente do sistema de ensaio das lajes (Figura 4.13).



(a) Vista superior

(b) Vista lateral

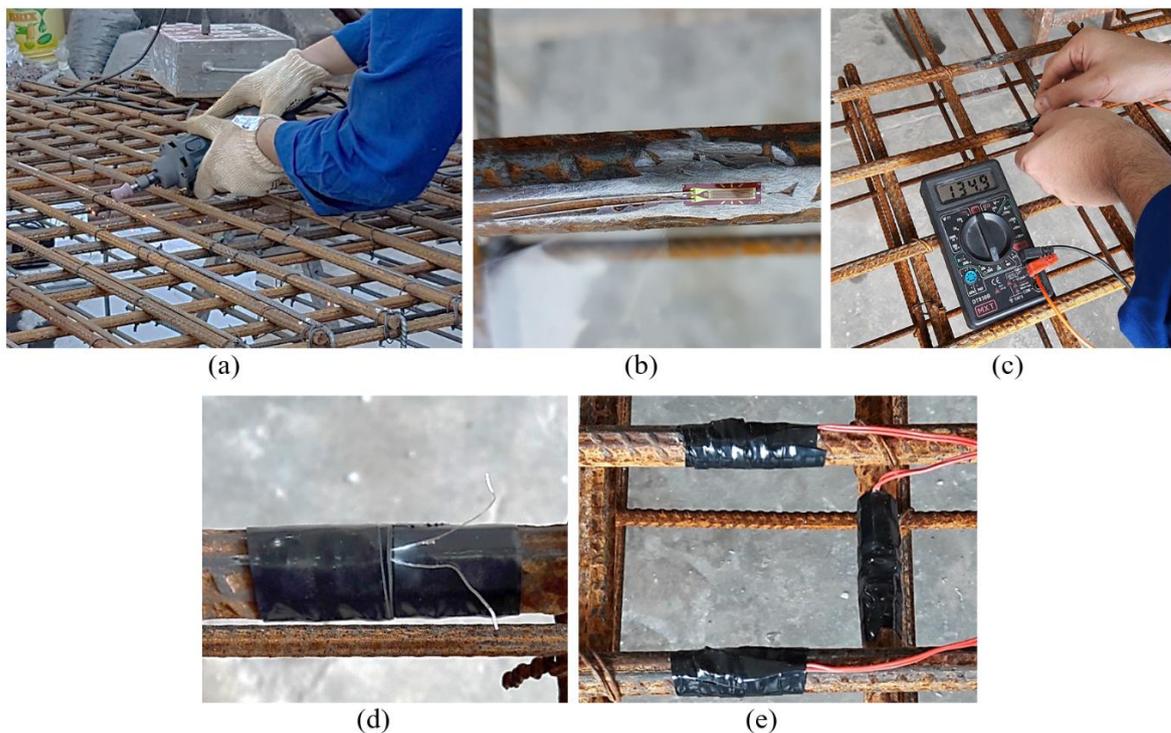
**Figura 4.13 - Posicionamento dos LVDTs nas lajes**

Fonte: Arquivo pessoal.

### 4.3.2 Deformações específicas

Foram medidas as deformações nas armaduras de flexão e na superfície do concreto, a fim de acompanhar o comportamento das lajes durante todas as fases de carregamento. As medições dessas deformações foram feitas utilizando-se extensômetros elétricos de resistência (EERs).

Nas armaduras de flexão foram utilizados extensômetros da marca *Kyowa Electronics Instruments* e tipo KFG-5-120-C1-11. A Figura 4.14 apresenta os principais procedimentos adotados para a aplicação dos extensômetros nas barras de aço.



**Figura 4.14 - Procedimento para a utilização de extensômetros nas barras de aço**

Fonte: Arquivo pessoal.

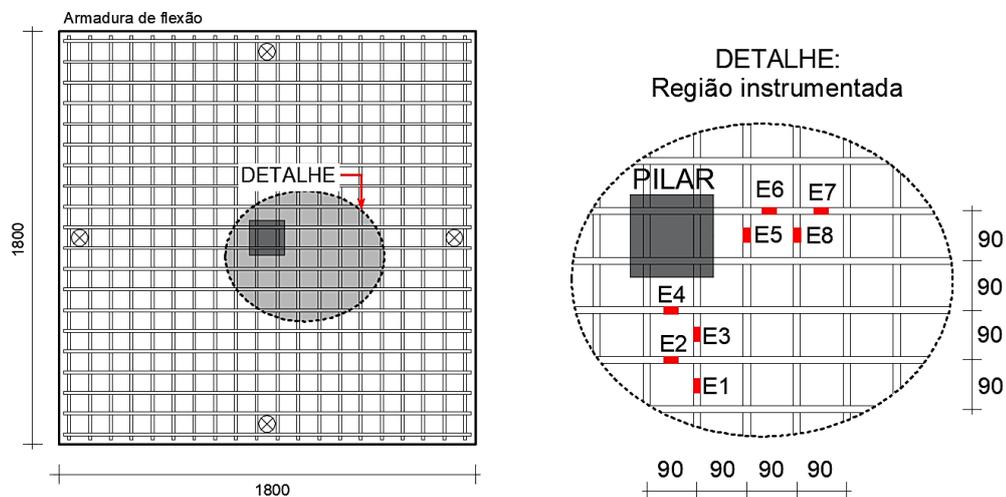
Para a fixação dos extensômetros nas barras foi necessário efetuar a regularização da superfície com boleador esmeril, lima e lixa, com o intuito de eliminar as mossas na região de fixação, sem danificar a seção nominal da barra, como demonstrado na Figura 4.14 (a).

Com a superfície da barra lisa foi feita a limpeza com álcool isopropílico para se retirar todos os resíduos presentes na superfície de instrumentação das barras. Posteriormente, os extensômetros foram colados com adesivo de éster de cianoacrilato (*Super Bonder*), como apresentado na Figura 4.14 (b).

Após a fixação dos extensômetros, eles foram testados com a utilização de um multímetro digital, Figura 4.14 (c). Em seguida fez-se a proteção com fita isolante de auto fusão, Figura 4.14 (d).

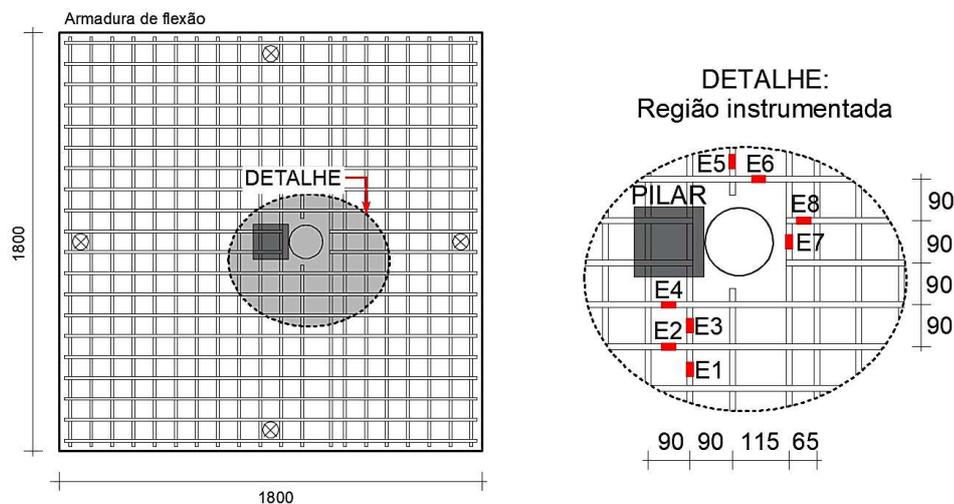
Seguidamente, cada terminal dos extensômetros foi soldado a um condutor flexível paralelo com diâmetro de 1,5 mm e a região da solda foi protegida com isolante líquido e, também, com fita isolante de auto fusão. Por fim, procedeu-se à verificação da resistência elétrica dos extensômetros nas extremidades livres dos condutores flexíveis.

As Figuras 4.15, 4.16 e 4.17, nessa ordem, mostram o posicionamento dos pontos de instrumentação das barras de flexão para as lajes das Séries 1, 2 e 3, nesta ordem.



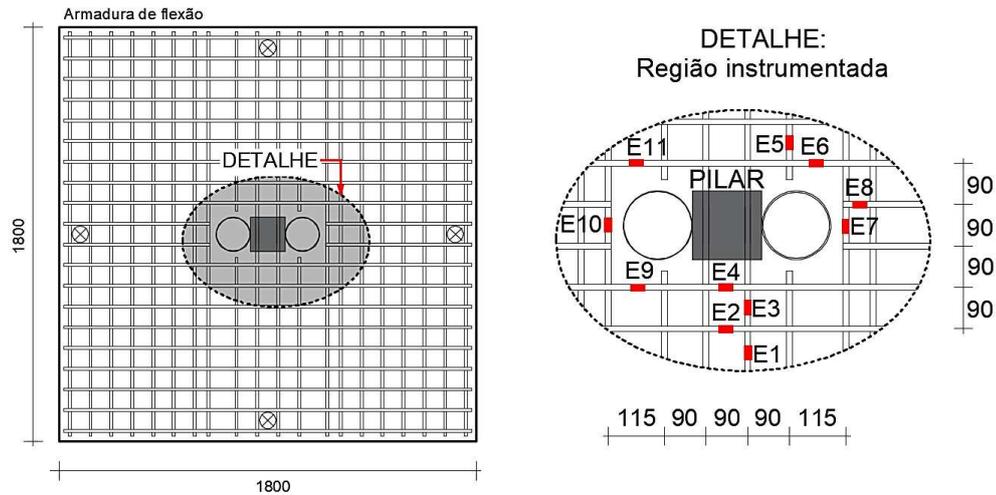
**Figura 4.15 - Identificação dos extensômetros nas armaduras de flexão da Série 1 (medidas em mm)**

Fonte: Arquivo pessoal.



**Figura 4.16 - Identificação dos extensômetros nas armaduras de flexão da Série 2 (medidas em mm)**

Fonte: Arquivo pessoal.

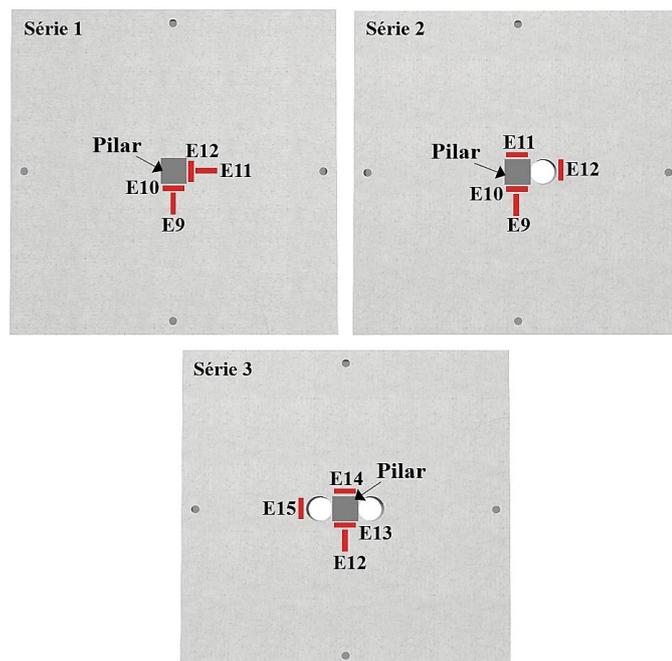


**Figura 4.17 - Identificação dos extensômetros nas armaduras de flexão da Série 3 (medidas em mm)**

Fonte: Arquivo pessoal.

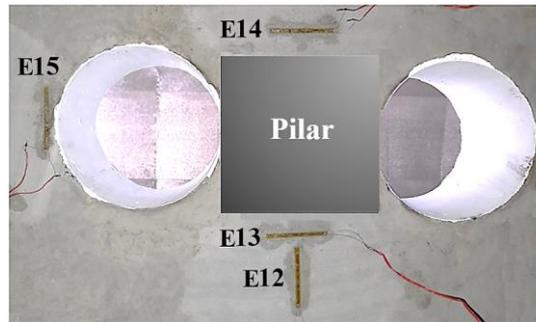
Para o monitoramento da deformação no concreto, foram utilizados extensômetros elétricos de resistência da marca *Excel Sensores Co. Ltda*, de modelo PA-06-201BA-120L, posicionados no bordo comprimido das lajes em uma região adjacente ao pilar e as aberturas.

Os procedimentos para a fixação dos extensômetros no concreto seguiram os mesmos descritos anteriormente, exceto a regularização da superfície das lajes, a qual foi feita apenas com lixa. As Figuras 4.18 e 4.19 apresentam a disposição e identificação dos extensômetros considerados na face comprimida das lajes.



**Figura 4.18 - Posição e identificação dos extensômetros no concreto**

Fonte: Arquivo pessoal.



**Figura 4.19 - Disposição dos EERs na face comprimida do concreto para as lajes com duas aberturas**

Fonte: Arquivo pessoal.

Os transdutores de posição (LVDTs) e os extensômetros elétricos de resistência (EERs) foram ligados a um aquisitor de dados com 40 canais, interligado a um terminal da *Micro Measurements* e modelo *MG 5100*. A leitura e o armazenamento dos dados a cada incremento de carga foram realizados pelo programa computacional *StrainSmart System 5000*.

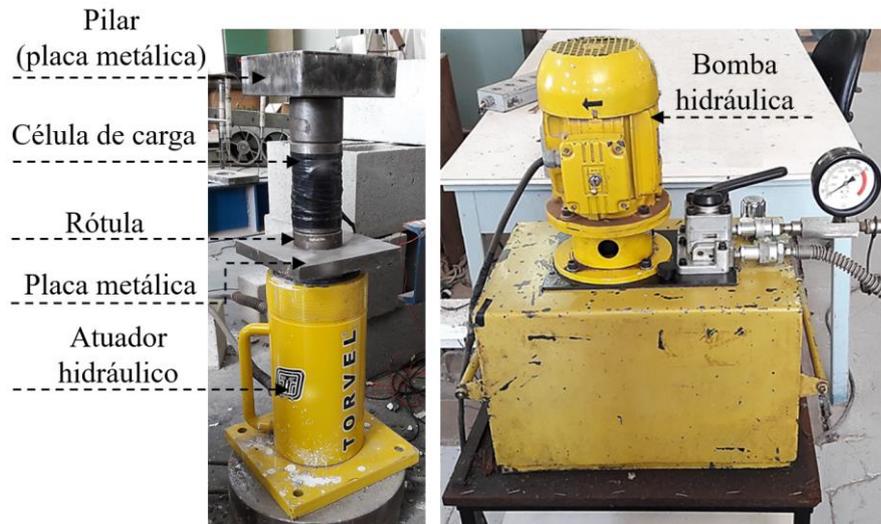
#### 4.4 SISTEMA DE ENSAIO E CARREGAMENTO

O sistema de ensaio empregado nesta pesquisa objetivou simular de forma simples e prática o comportamento da ligação laje-pilar de uma laje lisa, localizada internamente à edificação e submetida a carregamento simétrico (ausência de momento fletor desbalanceado).

O carregamento nas lajes ocorreu de forma incremental, com passos de carga de 25 kN. Para a aplicação de carga nas lajes, foi utilizado um atuador hidráulico com capacidade de 600 kN da marca *Enerpac* e alimentado por uma bomba hidráulica da marca *Yellow Power*.

Sobre o atuador utilizou-se uma placa metálica de 200 mm x 200 mm que serviu de base de apoio para a célula de carga de capacidade de 500 kN. Foi utilizada uma rótula metálica de alta resistência situada entre a placa metálica de base e a célula de carga com o objetivo de manter a carga aplicada sempre na vertical, mesmo após a deformação da laje.

Para transmitir o carregamento às lajes e simular um pilar de dimensões 150 mm x 150 mm foi utilizada uma placa de aço, de mesma dimensão do pilar e espessura de 80 mm. A Figura 4.20 mostra o sistema de aplicação de carga e o conjunto de equipamentos que foram utilizados nos ensaios.

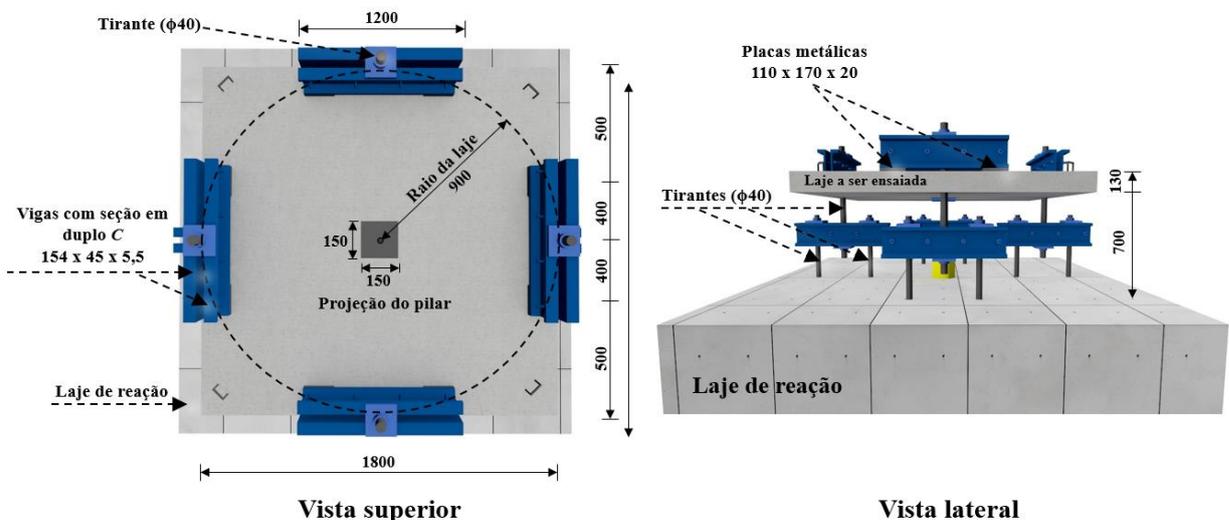


**Figura 4.20 – Sistema de aplicação de carga nas lajes**

Fonte: Arquivo pessoal.

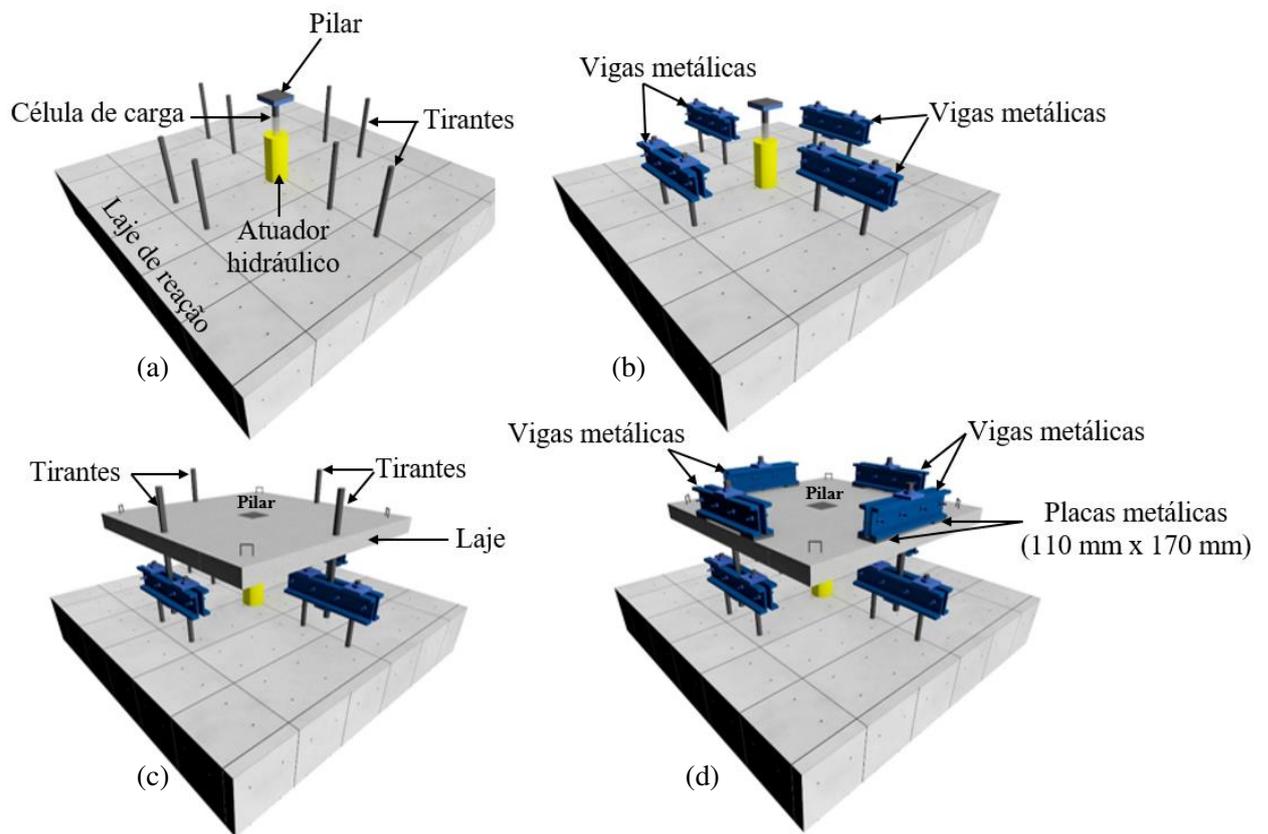
A reação ao carregamento centrado foi feita por um conjunto de vigas metálicas de 1200 mm de comprimento, compostas por perfis *C* de seção transversal  $154 \times 45 \times 5,5 \text{ mm}^3$ , os quais foram fixados por parafusos de 12,5 mm de diâmetro. As vigas metálicas foram apoiadas sobre as lajes em oito pontos equidistantes dispostos em uma circunferência de raio igual a 900 mm e fixadas em uma laje de reação.

Para que o sistema de vigas metálicas reagisse apenas nos oito pontos adotados, foram usadas placas metálicas com dimensões de 110 mm x 170 mm e 20 mm de espessura, localizadas entre as vigas metálicas e as lajes. As Figuras 4.21 e 4.22 apresentam o esquema de ensaio utilizado para os testes.



**Figura 4.21 – Esquema de ensaio (medidas em mm)**

Fonte: Arquivo pessoal.



**Figura 4.22 - Esquema de ensaio detalhado das lajes**  
 Fonte: Arquivo pessoal.

A Figura 4.22 (a) apresenta o esquema do sistema de aplicação de carga utilizado. Após o posicionamento de cada laje no esquema de ensaio, a posição desse sistema foi verificada para garantir que os centros de carga estivessem coincidindo com o centroide do pilar e da laje. Para as lajes com apenas uma abertura, o sistema de carregamento foi ajustado de modo que os centros de carga estivessem alinhados com o centroide do pilar e com o centro da laje. Nessa figura é possível observar, ainda, a existência de tirantes (40 mm de diâmetro) que foram rosqueados na laje de reação na extremidade inferior. Cada rosca contida na laje de reação apresentava capacidade de 10 toneladas.

Na Figura 4.22 (c) é possível verificar os tirantes principais e a laje posicionada. Por fim, na Figura 4.22 (d), verifica-se o arranjo experimental completo com o conjunto de vigas metálicas apoiadas nas oito placas metálicas.

A célula de carga foi conectada ao mesmo sistema de aquisição de dados utilizado para leitura e armazenamento dos valores dos extensômetros e transdutores, conforme detalhado anteriormente. Os incrementos de carga foram controlados através da leitura da carga indicada pelo programa computacional *StrainSmart System 5000*.

## 5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos nos ensaios de punção das nove lajes abordadas anteriormente no programa experimental. Inicialmente, são apresentados os resultados referentes aos ensaios de caracterização do concreto e do aço utilizados na fabricação das lajes. São apresentadas, também, as informações obtidas com a instrumentação das lajes e do sistema de ensaio como: deslocamentos verticais das lajes, deformações nas armaduras de flexão e no concreto, desenvolvimento de fissuras, além de cargas últimas e modos de ruptura observados.

### 5.1 PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS MATERIAIS

#### 5.1.1 Concreto

Durante cada etapa de concretagem das lajes foram moldados 20 corpos de prova cilíndricos (100 mm x 200 mm), sendo que desses, 10 foram destinados à realização de ensaios de resistência à compressão simples ( $f_c$ ) e 10 à resistência à tração por compressão diametral ( $f_{ct}$ ) e módulo de elasticidade ( $E_c$ ), conforme apresentados na Figura 5.1. Esses ensaios de caracterização das propriedades mecânicas do concreto foram realizados um dia após os ensaios de ruptura das lajes.

Os procedimentos dos ensaios foram aqueles estabelecidos pelas normas ABNT NBR 5739 (2007) para a determinação da resistência à compressão, ABNT NBR 7222 (2011) para determinação da resistência à tração por compressão diametral e ABNT NBR 8522 (2008) na obtenção do módulo de elasticidade do concreto.

A Tabela 5.1 apresenta os resultados das propriedades mecânicas do concreto para as duas etapas de concretagem consideradas na pesquisa (1ª etapa: seis lajes concretadas; 2ª etapa: 3 lajes concretadas).

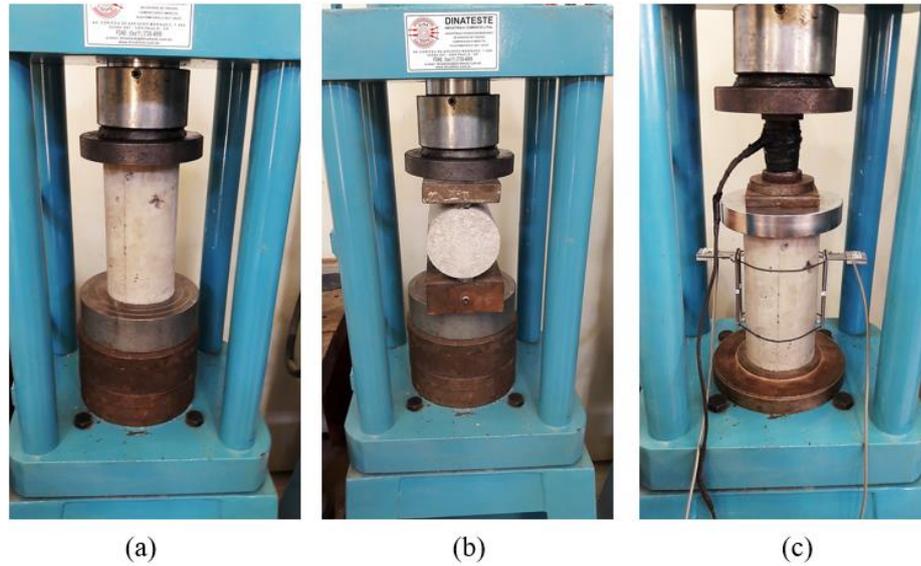


Figura 5.1 – Ensaio de resistência à compressão simples (a), resistência à tração por compressão diametral (b) e módulo de elasticidade longitudinal (c)

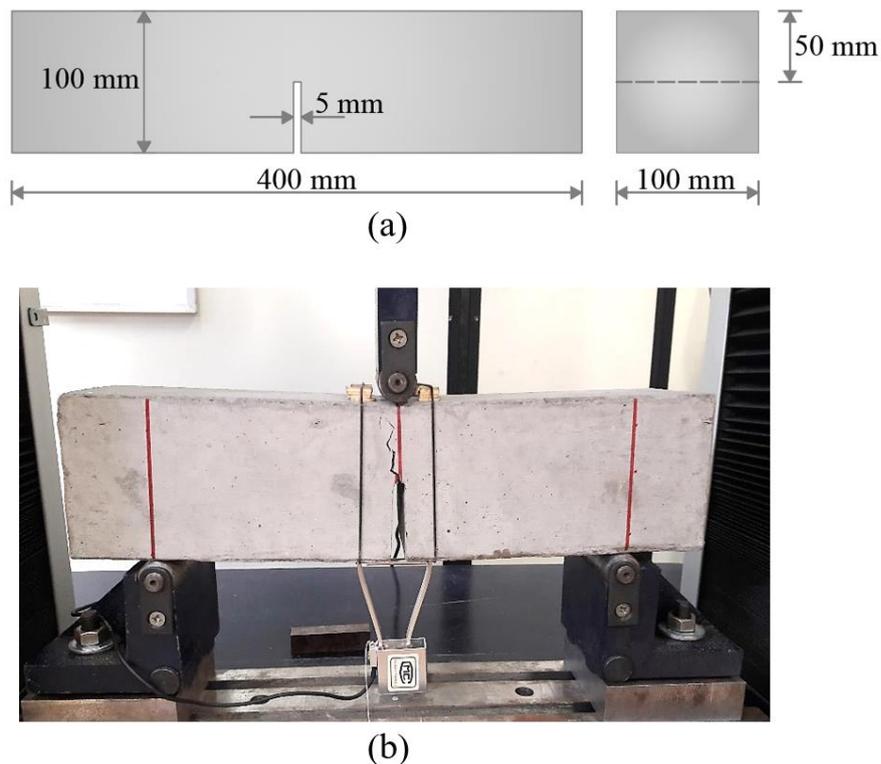
Fonte: Arquivo pessoal.

Tabela 5.1 - Propriedades mecânicas do concreto

Etapa de concretagem	Lajes	Idade (dias)	$f_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)	$E_c$ (GPa)	
1ª	LR-A LR-B LR-C	54	43,54	3,88	25,01	
			40,16	4,14	23,94	
			40,57	4,34	25,91	
			42,27	3,99	24,90	
			41,25	4,30	26,21	
	<b>Média</b>			<b>41,56</b>	<b>4,13</b>	<b>25,19</b>
	<b>CV (%)</b>			<b>3,29</b>	<b>4,77</b>	<b>3,57</b>
	LF1-A LF1-B LF1-C	48	43,85	4,33	25,02	
			47,11	3,73	27,88	
			45,23	4,49	25,62	
39,75			4,11	34,06		
46,78			4,80	29,44		
<b>Média</b>			<b>44,54</b>	<b>4,29</b>	<b>28,40</b>	
<b>CV (%)</b>			<b>6,69</b>	<b>9,38</b>	<b>12,76</b>	
2ª	LF2-A LF2-B LF2-C	36	36,85	3,37	22,61	
			35,98	3,48	23,88	
			34,91	3,36	23,63	
			35,55	3,28	23,22	
			34,56	3,21	22,50	
			35,04	3,08	21,31	
			33,33	3,25	24,65	
			35,65	3,18	24,46	
			34,35	3,11	24,62	
			35,98	3,16	25,16	
	<b>Média</b>			<b>35,22</b>	<b>3,25</b>	<b>23,60</b>
<b>CV (%)</b>			<b>2,84</b>	<b>3,89</b>	<b>5,09</b>	

O ensaio de flexão em três pontos de vigas com entalhes foi utilizado para determinar a energia de fratura ( $G_f$ ) do concreto empregado na fabricação das lajes. O ensaio seguiu as orientações da *Japan Concrete Institute Standard JCI-S-001* (2003).

A Figura 5.2 apresenta as dimensões dos corpos de prova prismáticos adotados na pesquisa, como também a fotografia do ensaio. As leituras de deslocamentos verticais no meio do vão foram registradas pela mesa da máquina universal. Para as leituras de abertura do entalhe, foi utilizado o *clip gauge* NCS YYV – 10/50.



**Figura 5.2 - Dimensões das vigas entalhadas utilizadas (a) e ensaio de flexão em três pontos (b)**

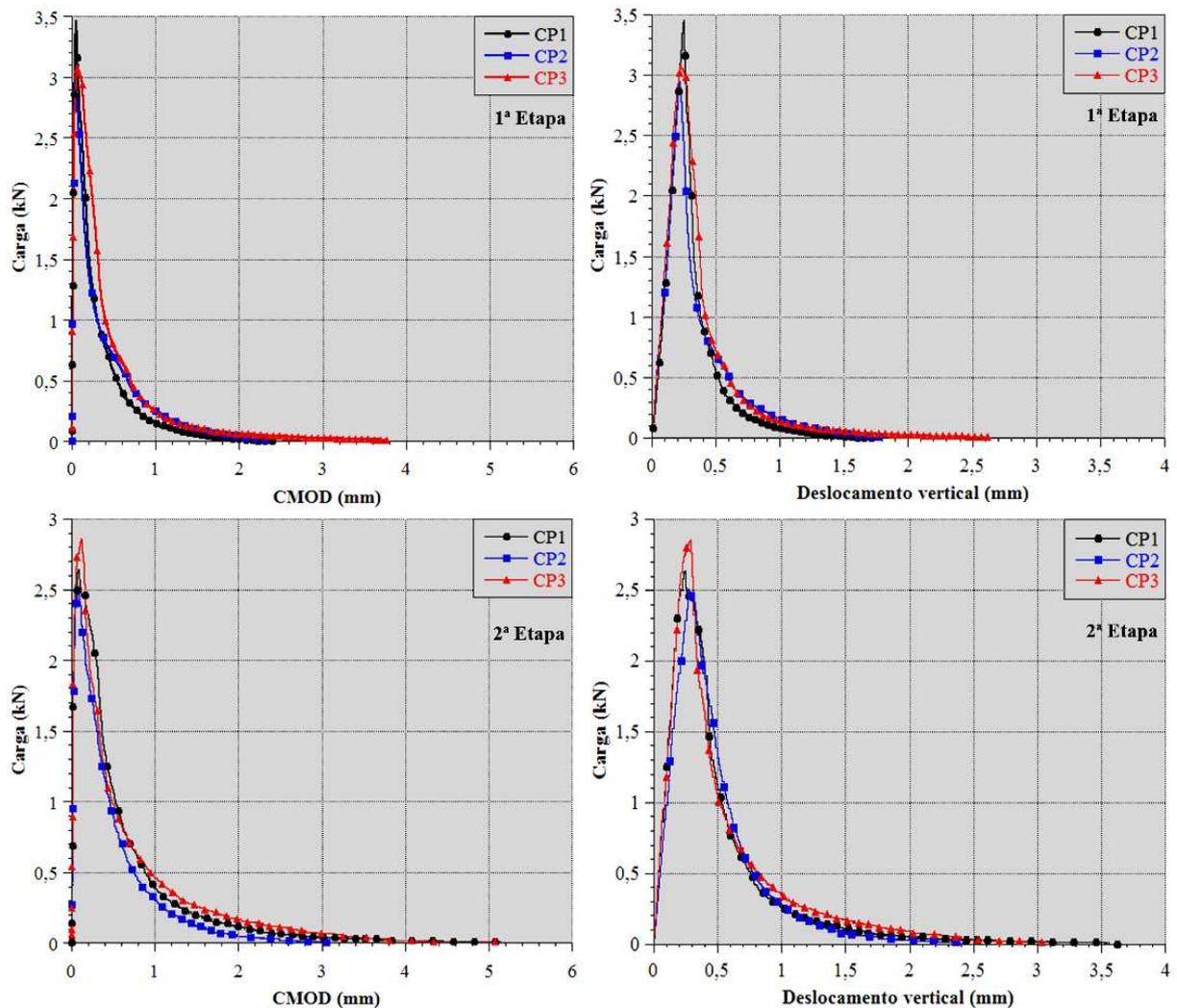
Fonte: Arquivo pessoal.

Na Figura 5.3 são apresentadas as curvas de “Carga versus CMOD” (*Crack Mouth Opening Displacement*) e “Carga versus Deslocamento vertical” obtidos nos ensaios. Os trechos iniciais das curvas foram corrigidos mediante regressão linear, de modo a se eliminar as perturbações associadas ao efeito de acomodação do corpo de prova, no dispositivo de apoio nas etapas iniciais do ensaio.

Para o cálculo da energia de fratura ( $G_f$ ) a partir dos resultados mostrados na Figura 5.3, foi considerado a Equação 5.1. O valor de  $G_f$  refere-se a energia necessária para se estender a fissura a partir do entalhe nas vigas de concreto.

$$G_f = \left( \frac{W_{exp}}{S_{lig}} \right) = \left[ \frac{W_{exp}}{(h-a)b} \right] \quad (5.1)$$

Nessa equação,  $W_{exp}$  é a área sob a curva “Carga versus Deslocamento vertical” (kN.mm);  $S_{lig}$  é a área da superfície de ligação (mm<sup>2</sup>);  $h$  é a altura do corpo de prova (mm);  $a$  é a altura do entalhe e  $b$  é a largura do corpo de prova.



**Figura 5.3 - Curvas “Carga versus CMOD” e “Carga versus Deslocamento vertical” dos corpos de prova nas etapas de concretagem**

A Tabela 5.2 apresenta as dimensões e os resultados do cálculo da energia de fratura para cada corpo de prova, nas etapas de concretagem realizadas. O termo  $f_{cm}$  representa o valor médio da resistência à compressão do concreto considerando todos os corpos de prova cilíndricos em cada etapa de concretagem.

Tabela 5.2 - Valores obtidos da energia de fratura do concreto

Etapa de concretagem	$f_{cm}$ (MPa)	$h$ (mm)	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$S_{lig}$ (mm <sup>2</sup> )	$W_{exp}$ (kN.mm)	$G_f$ (N/m)	$G_{fm}$ (N/m)
1 <sup>a</sup>	43,05	102,95	49,27	100,60	5.400,21	0,8732	161,69	183,34
		101,65	50,47	100,50	5.143,59	0,9081	176,56	
		102,75	49,43	97,10	5.177,37	1,0965	211,78	
2 <sup>a</sup>	35,22	102,50	52,50	101,00	5.050,00	1,3021	257,85	261,78
		100,50	49,50	98,00	4.998,00	1,2284	245,77	
		103,00	53,50	99,00	4.900,50	1,3806	281,73	

### 5.1.2 Aço

Os aços utilizados para a confecção das lajes ensaiadas nesta pesquisa foram fabricados e doados pela empresa *Arcelormittal Brasil S.A.* As propriedades mecânicas desses aços foram determinadas a partir da realização de ensaios de tração axial, seguindo as recomendações da norma ABNT NBR ISO 6892-1 (2013).

Foram ensaiados 3 corpos de prova de aço (CA-50) com diâmetro de 6,3 mm e 9 corpos de prova com diâmetro de 12,5 mm (Figura 5.4) para a obtenção da tensão de escoamento ( $f_y$ ), deformação de escoamento ( $\epsilon_y$ ), tensão de ruptura ( $f_u$ ) e o módulo de elasticidade longitudinal do aço ( $E_s$ ). Os ensaios foram realizados no Laboratório de Estruturas da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Apucarana. Para as leituras de deformações nas barras, foi utilizado o *clip gauge* NCS YYU – 25/50.



Figura 5.4 - Ensaio de tração axial da barra de aço com diâmetro de 12,5 mm

Fonte: Arquivo pessoal.

A Tabela 5.3 apresenta os resultados das propriedades mecânicas dos aços utilizados para a confecção das lajes desta pesquisa.

**Tabela 5.3 - Propriedades mecânicas dos aços utilizados para a fabricação das lajes**

<b>Diâmetro (mm)</b>	<b><math>f_y</math> (MPa)</b>	<b><math>f_u</math> (MPa)</b>	<b><math>\epsilon_y</math> (mm/m)</b>	<b><math>E_s</math> (GPa)</b>
6,3	694,03	733,73	3,20	211,53
	665,27	745,25	3,40	193,55
	674,69	748,85	3,30	196,68
<b>Média</b>	<b>668,00</b>	<b>742,61</b>	<b>3,30</b>	<b>200,59</b>
<b>CV (%)</b>	<b>2,16</b>	<b>1,06</b>	<b>3,03</b>	<b>4,79</b>
12,5	604,47	721,10	2,90	203,31
	544,02	751,17	3,70	153,37
	574,35	740,14	3,05	184,71
	562,70	761,23	3,10	183,75
	545,02	751,94	3,40	163,89
	584,65	735,76	3,30	178,41
	577,72	760,97	3,40	170,41
	589,41	754,20	3,50	181,22
<b>Média</b>	<b>575,93</b>	<b>748,35</b>	<b>3,29</b>	<b>178,68</b>
<b>CV (%)</b>	<b>3,81</b>	<b>1,80</b>	<b>7,45</b>	<b>8,18</b>

## 5.2 CARGAS E MODOS DE RUPTURA

As lajes foram ensaiadas incrementando-se o carregamento até que se atingissem a ruptura. Para a determinação da carga de ruptura, considerou-se o valor máximo de carga registrado pela célula de carga. O peso próprio da laje e dos equipamentos posicionados sobre ela não foram considerados para a determinação da carga última.

A determinação do modo de ruptura das lajes foi realizada, prioritariamente, por meio da observação do comportamento das lajes durante e ao término dos ensaios. Para isso, levou-se em consideração o mapeamento das fissuras, a superfície de ruptura, deformações das armaduras de flexão e da superfície de concreto dos modelos ensaiados.

Associado a essas observações, evidencia-se que o modo de ruptura, também, pôde ser classificado, comparando-se a razão entre a carga última ( $V_{exp}$ ) com a resistência à flexão das lajes ( $V_{flex}$ ). Elstner e Hognestad (1956) define que para valores desta relação  $V_{exp}/V_{flex} > 1$ , o modo de ruptura é por flexão. Se  $V_{exp}/V_{flex} < 1$  a ruptura se dá por punção, e se  $V_{exp}/V_{flex} = 1$ , as rupturas por flexão e por punção da laje ocorrem quase que simultaneamente. O Apêndice C apresenta o método detalhado, considerado para o cálculo de  $V_{flex}$  neste trabalho.

Todas as lajes romperam por punção de maneira brusca e repentina ( $V_{exp}/V_{flex} < 1$ ). A Tabela 5.4 apresenta as cargas de ruptura das lajes, os valores de resistência à flexão, juntamente, com os modos de ruptura observados.

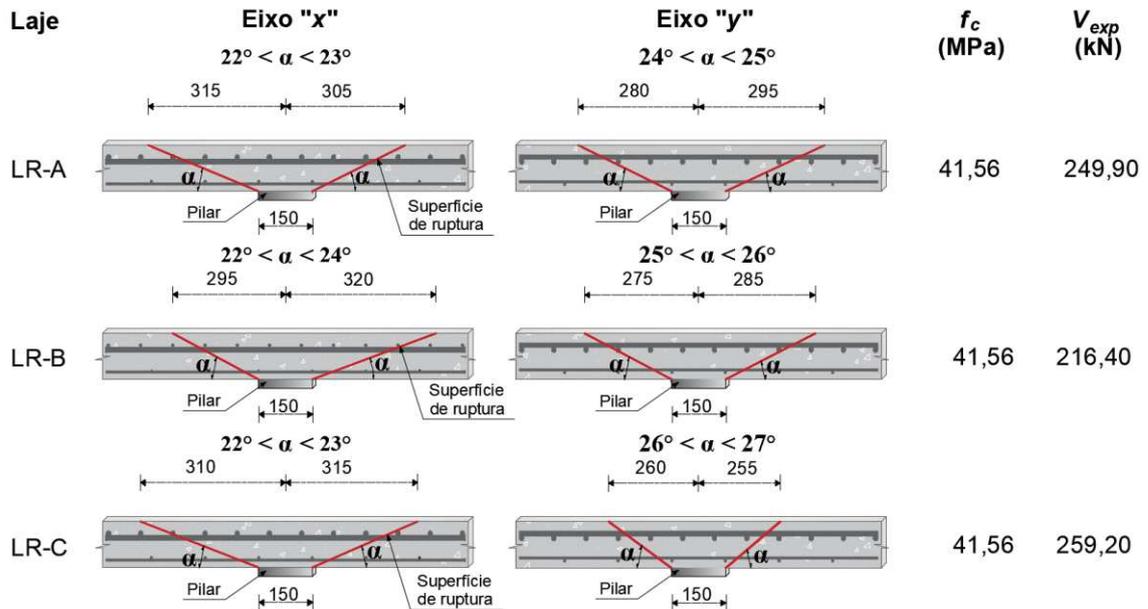
**Tabela 5.4 - Cargas e modos de ruptura observados**

Série	Laje	$f_c$ (MPa)	$d$ (mm)	$\rho$ (%)	$V_{exp}^*$ (kN)	$V_{flex}$ (kN)	$V_{exp}/V_{flex}$	Modo de ruptura
1	LR-A	41,56	89	1,62	249,90	542,93	0,46	Punção
	LR-B	41,56	88	1,65	216,40	539,28	0,40	Punção
	LR-C	41,56	90	1,58	259,20	543,30	0,48	Punção
2	LF1-A	44,54	90	1,28	187,61	454,24	0,41	Punção
	LF1-B	44,54	88	1,34	177,97	452,59	0,39	Punção
	LF1-C	44,54	91	1,26	233,73	457,82	0,51	Punção
3	LF2-A	35,22	92	1,14	187,57	417,61	0,45	Punção
	LF2-B	35,22	95	1,08	213,87	424,28	0,50	Punção
	LF2-C	35,22	93	1,12	194,80	420,05	0,46	Punção

\* Valores médios de  $V_{exp}$ : 241,83 kN (Série 1); 199,77 kN (Série 2) e 198,75 kN (Série 3).

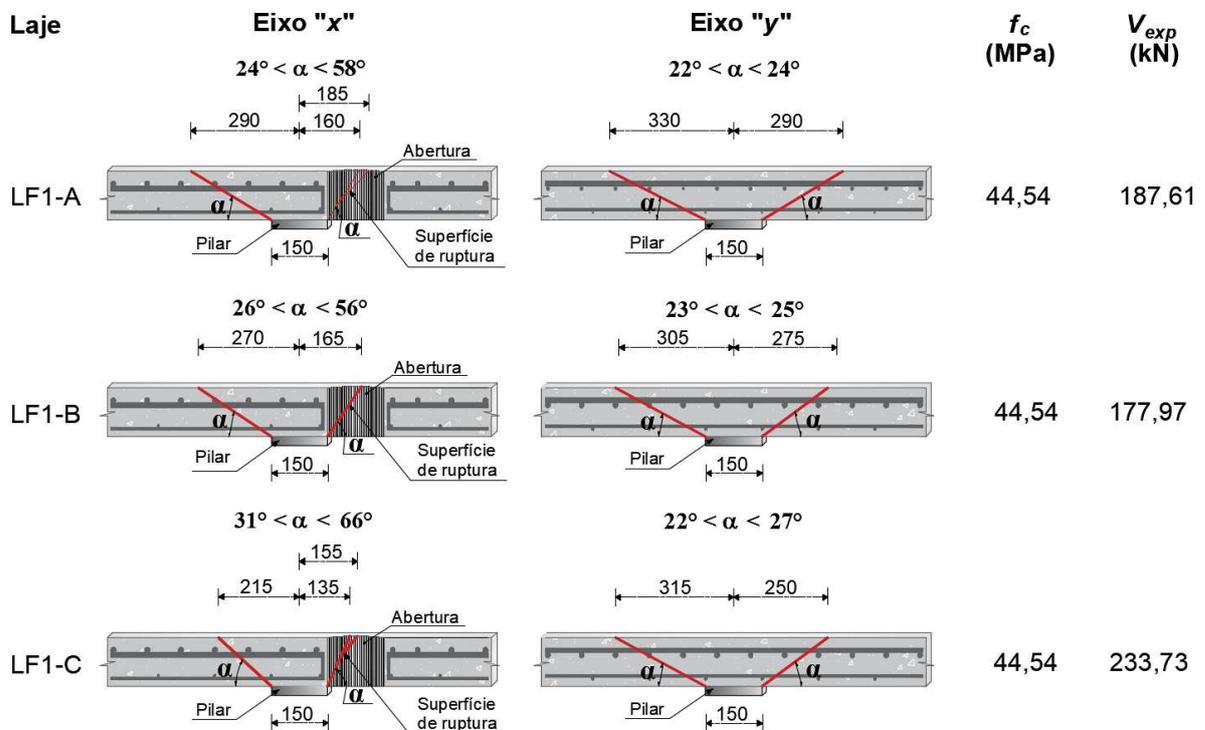
A partir da Tabela 5.4, observa-se que a presença de aberturas adjacentes ao pilar reduziu a resistência ao cisalhamento das lajes. As lajes da Série 2 apresentaram, em média, carga 17,39% inferior as lajes sem aberturas. Já as lajes com duas aberturas, a carga de ruptura média resultou em um valor 17,80% menor em comparação com as lajes da Série 1. Essa pequena diferença entre os valores de carga de ruptura das lajes das Séries 2 e 3 (cerca de 0,41% em referência às lajes da Série 1) pode estar associada às alturas úteis ( $d$ ) das lajes com duas aberturas terem sido maiores em relação às demais lajes ensaiadas. Na laje LF2-B, o valor de  $d$  resultou 5 mm maior do que o estabelecido inicialmente na pesquisa.

Com relação às superfícies de ruptura, estas se desenvolveram nas lajes da Série 1, a partir da face superior das lajes e se estenderam em direção à ligação laje-pilar, no bordo inferior, como demonstra a Figura 5.5. As inclinações das superfícies de rupturas das lajes sem aberturas variaram entre 12 a 24 graus na direção  $x$  e 24 a 27 graus na direção  $y$ .

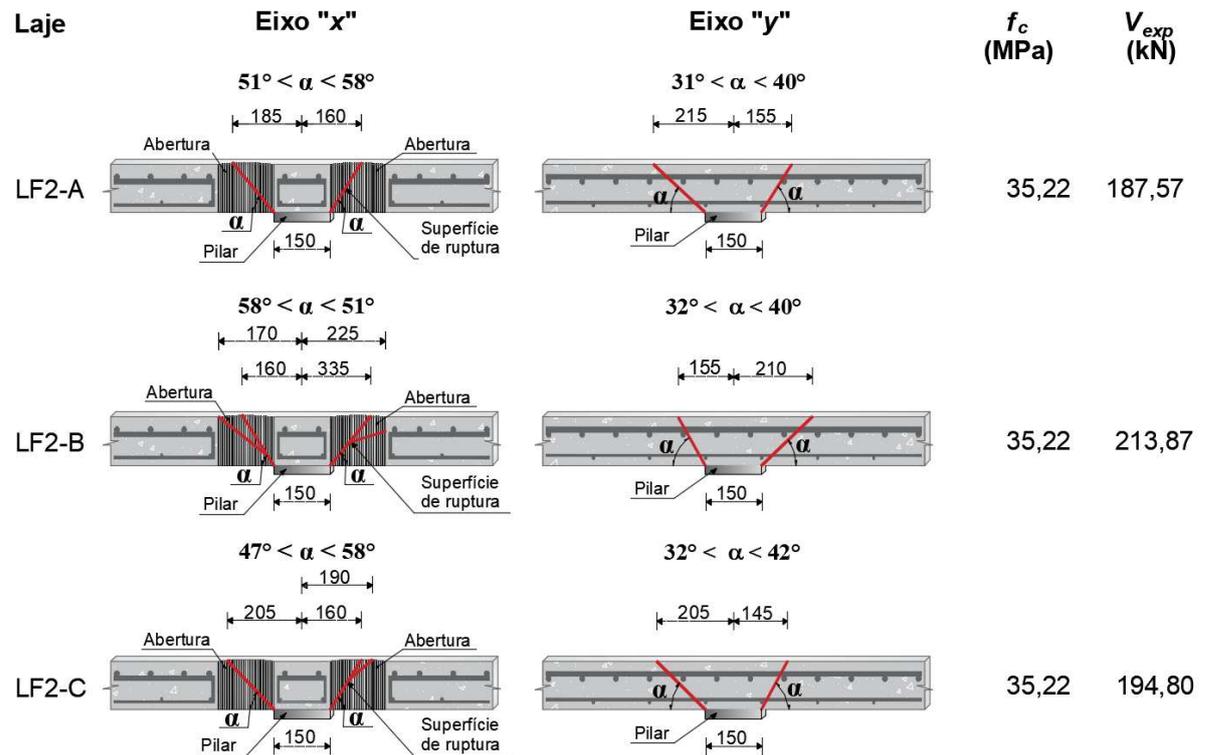


**Figura 5.5 - Configurações das superfícies de rupturas das lajes da Série 1 (medidas em mm)**

Nas lajes das Séries 2 e 3, foi possível observar a formação da superfície de ruptura no interior das aberturas, segundo Figuras 5.6 e 5.7.



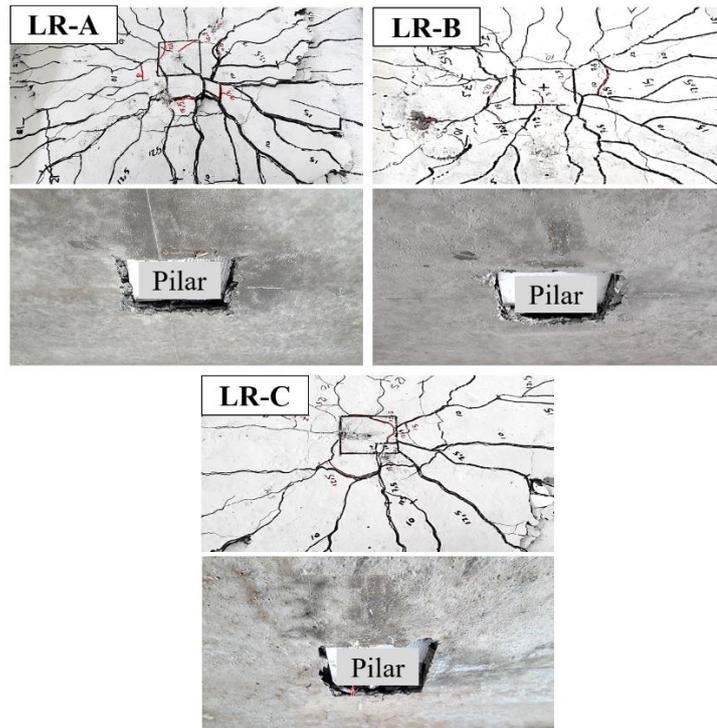
**Figura 5.6 - Configurações das superfícies de rupturas das lajes da Série 2 (medidas em mm)**



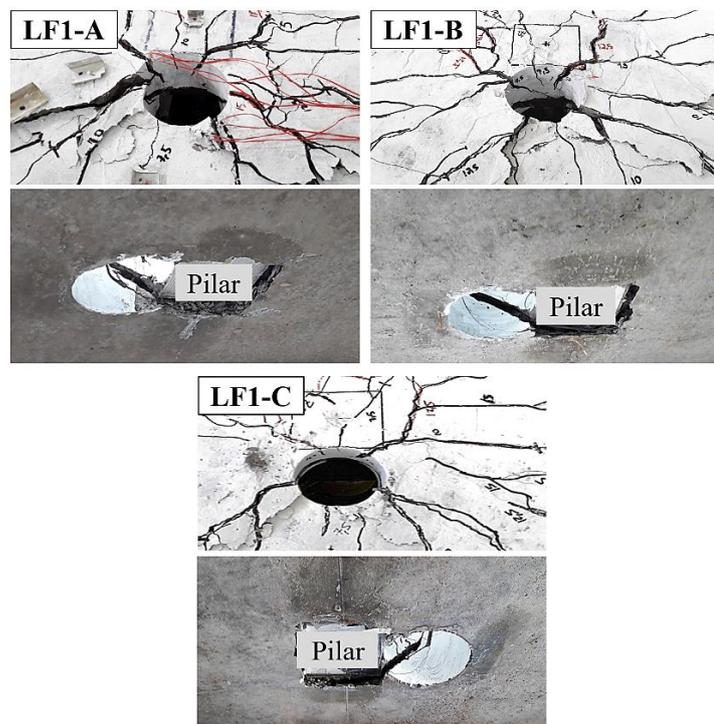
**Figura 5.7 - Configurações das superfícies de rupturas das lajes da Série 3 (medidas em mm)**

Nas lajes com aberturas, inicialmente, a fissura se iniciou no bordo superior da laje (face tracionada) e percorreu em direção ao pilar até, aproximadamente, a altura do plano médio da laje. Devido à existência de aberturas adjacentes ao pilar, as superfícies de ruptura nessas lajes desenvolveram-se de forma diferente daquelas registradas nas lajes da Série 1, com inclinações em relação ao plano médio da laje, entre 22 a 66 graus para a Série 2 e entre 31 a 58 graus para a Série 3.

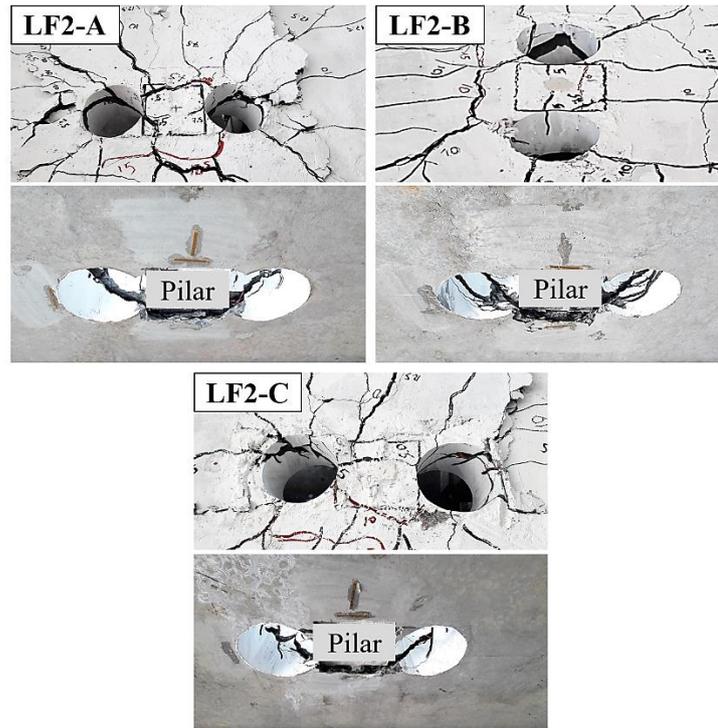
As Figuras 5.8 a 5.10 mostram as fotografias das superfícies de rupturas das lajes ensaiadas.



**Figura 5.8 - Superfícies de rupturas das lajes da Série 1**  
 Fonte: Arquivo pessoal.



**Figura 5.9 - Superfícies de ruptura das lajes da Série 2**  
 Fonte: Arquivo pessoal.



**Figura 5.10 - Superfícies de rupturas de ruptura das lajes da Série 3**

Fonte: Arquivo pessoal.

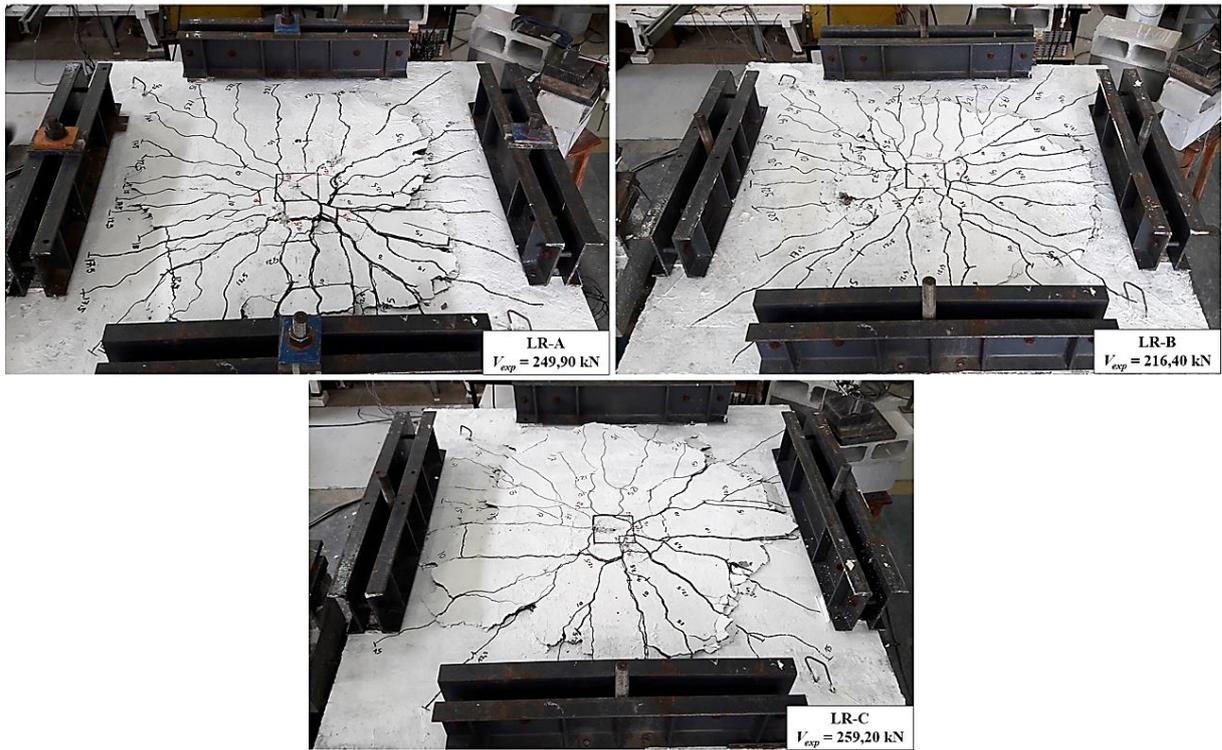
### 5.3 FISSURAÇÃO

Em cada umas das séries de ensaio, o padrão de fissuração das lajes ocorreu de modo semelhante, com as primeiras fissuras sendo radiais que se iniciavam na projeção da face do pilar até as bordas das lajes, com posterior surgimento de fissuras circunferenciais.

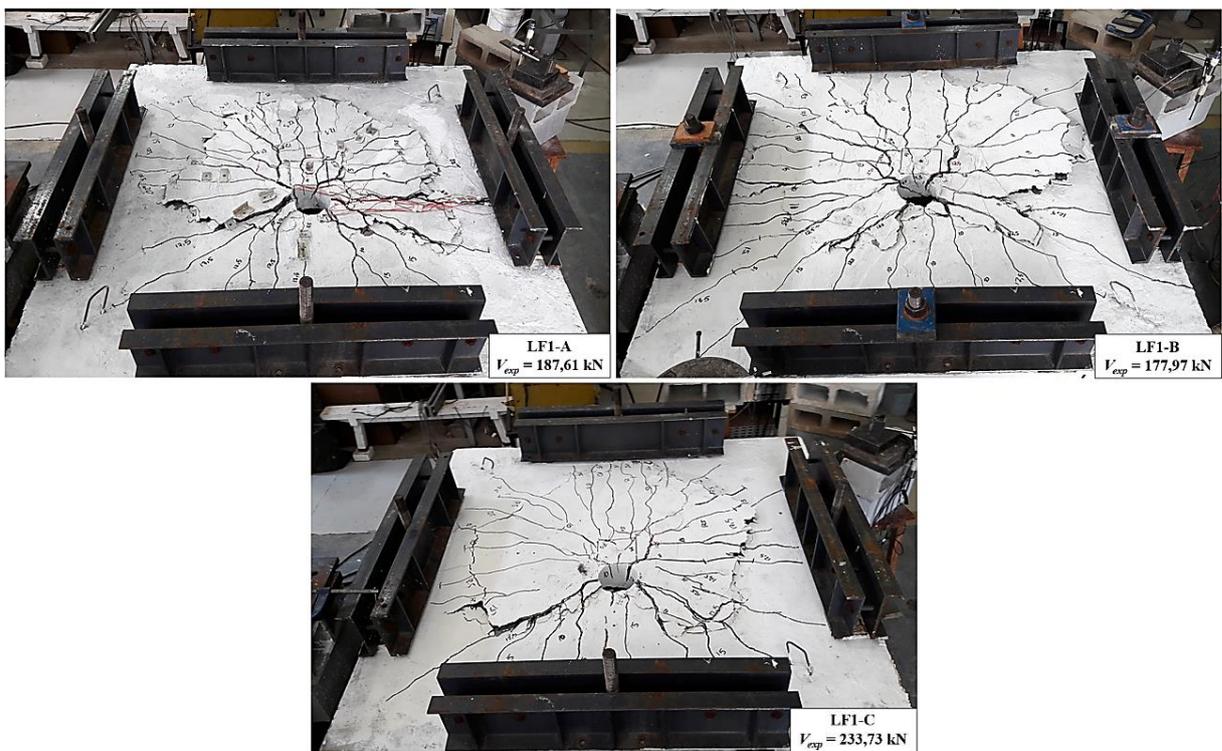
A Tabela 5.5 apresenta as cargas de fissuração visual das lajes e as Figuras 5.11 a 5.13 mostram os mapas de fissuração das lajes desta pesquisa.

**Tabela 5.5 - Cargas de fissuração visual das lajes**

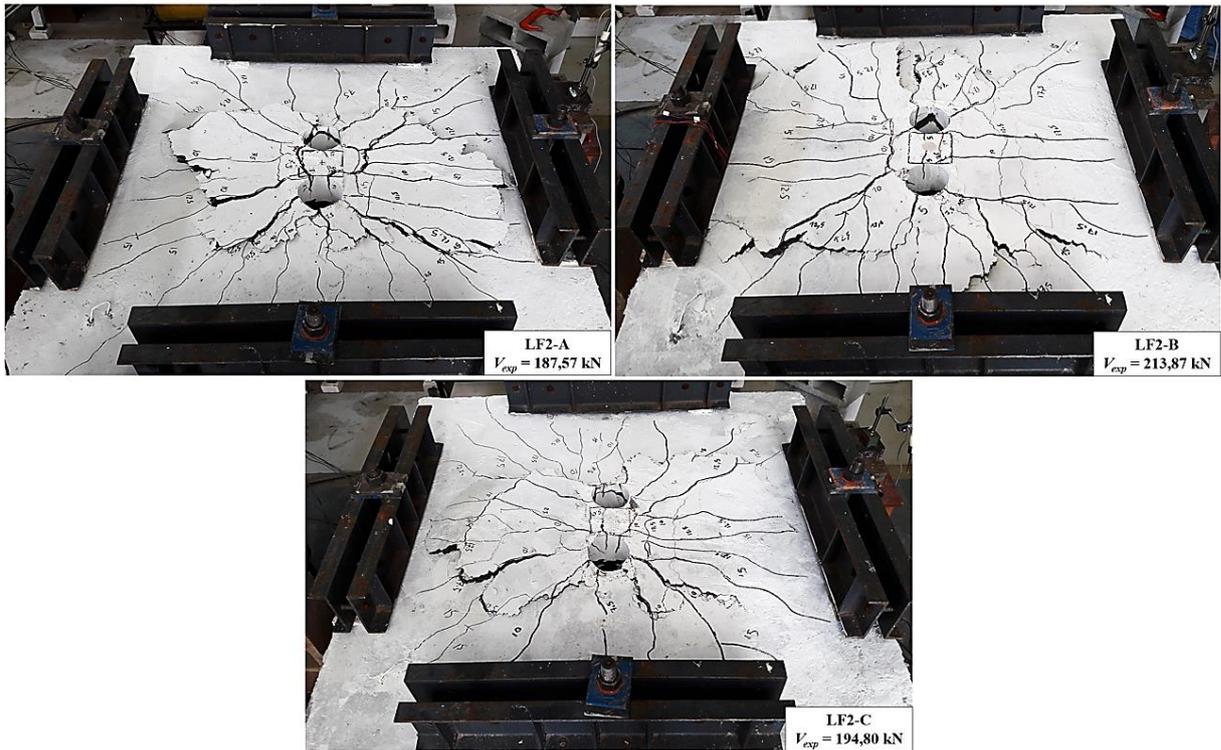
Laje	$V_{exp}$ (kN)	$V_{rad}$ (kN)	$V_{circ}$ (kN)
LR-A	249,90	100	125
LR-B	216,40	75	100
LR-C	259,20	75	125
LF1-A	187,61	75	150
LF1-B	177,97	75	125
LF1-C	233,73	75	125
LF2-A	187,57	50	100
LF2-B	213,87	50	100
LF2-C	194,80	50	100



**Figura 5.11 - Fissuração nas lajes da Série 1**  
Fonte: Arquivo pessoal.



**Figura 5.12 - Fissuração nas lajes da Série 2**  
Fonte: Arquivo pessoal.



**Figura 5.13 - Fissuração nas lajes da Série 3**  
Fonte: Arquivo pessoal.

A partir da Tabela 5.5, verifica-se que as lajes LR-1, LR-B e LR-C apresentaram a primeira fissura radial com 40,02%, 34,66% e 28,94% das respectivas cargas últimas. Por sua vez, as fissuras circunferenciais iniciaram-se à 50,02%, 46,21% e 48,23% da carga de ruptura, nessa ordem.

Nas lajes com aberturas, as fissuras surgiram na superfície superior, entre o centro da projeção do pilar e o interior das aberturas e, posteriormente, se propagaram em direção aos bordos das lajes com o aumento do carregamento. Nas lajes da Série 2, as fissuras radiais e circunferenciais surgiram com 38,07% e 67,89% do valor médio da carga de ruptura das lajes dessa série. As lajes da Série 3 apresentaram as primeiras fissuras com menores níveis de carregamento, comparando-se com as lajes com uma abertura. As fissuras radiais surgiram após o segundo incremento de carga (50 kN) e as fissuras circunferenciais manifestaram-se após a carga de 100 kN.

#### 5.4 DESLOCAMENTOS VERTICAIS DAS LAJES

Os deslocamentos verticais das lajes foram monitorados por 15 transdutores de posição (LVDT) localizados ao longo dos eixos das lajes e dispostos como apresentados no

Item 4.3.1. O monitoramento dos deslocamentos verticais ocorreu ao longo do carregamento até a ruptura das lajes.

Os resultados demonstraram, primeiramente, que os deslocamentos medidos nos diversos pontos adotados aumentaram com o acréscimo de carga, sendo que, os maiores valores foram verificados no ponto central das lajes (LVDT T6), como pode ser observado nas Figuras 5.14 e 5.15.

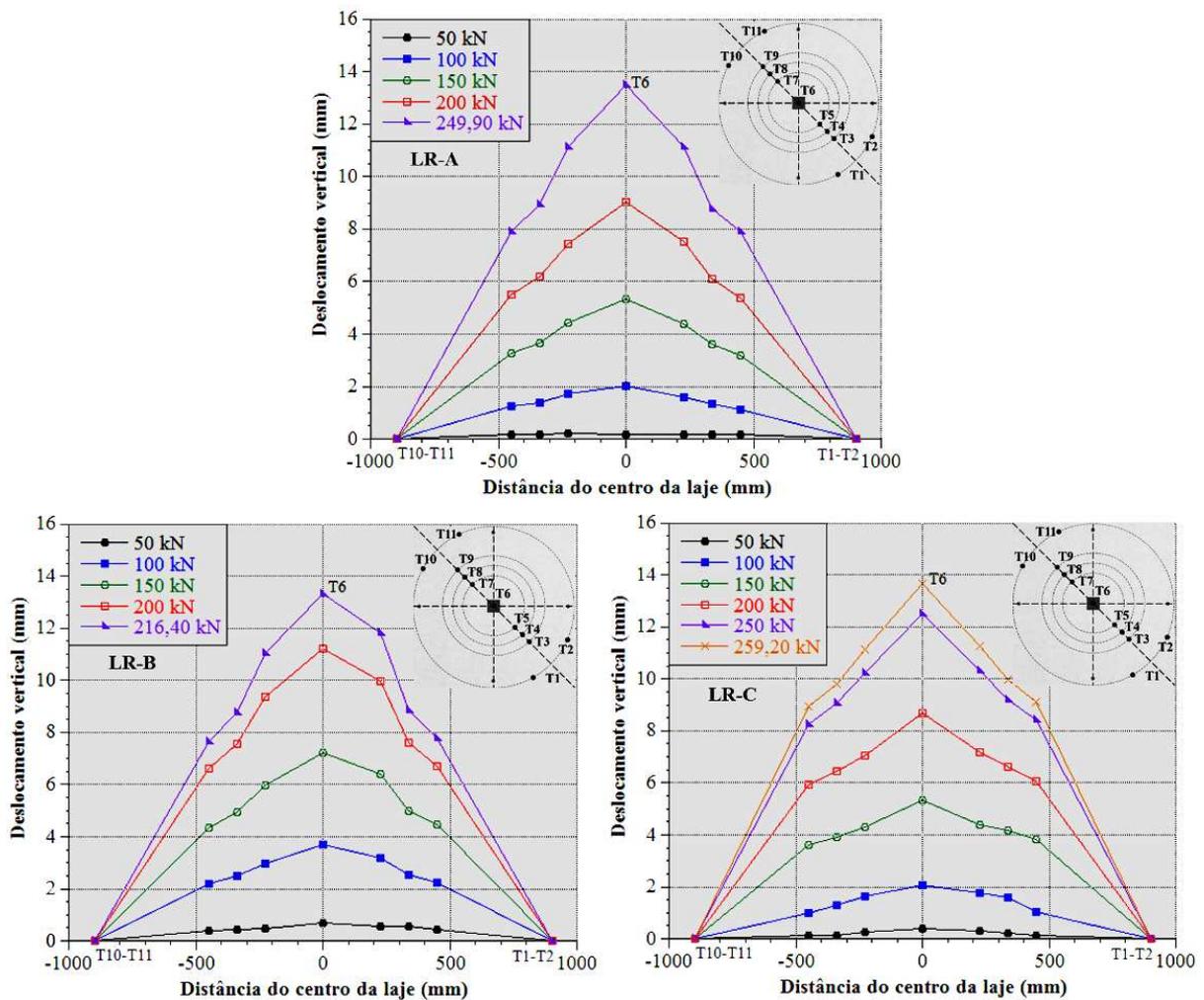
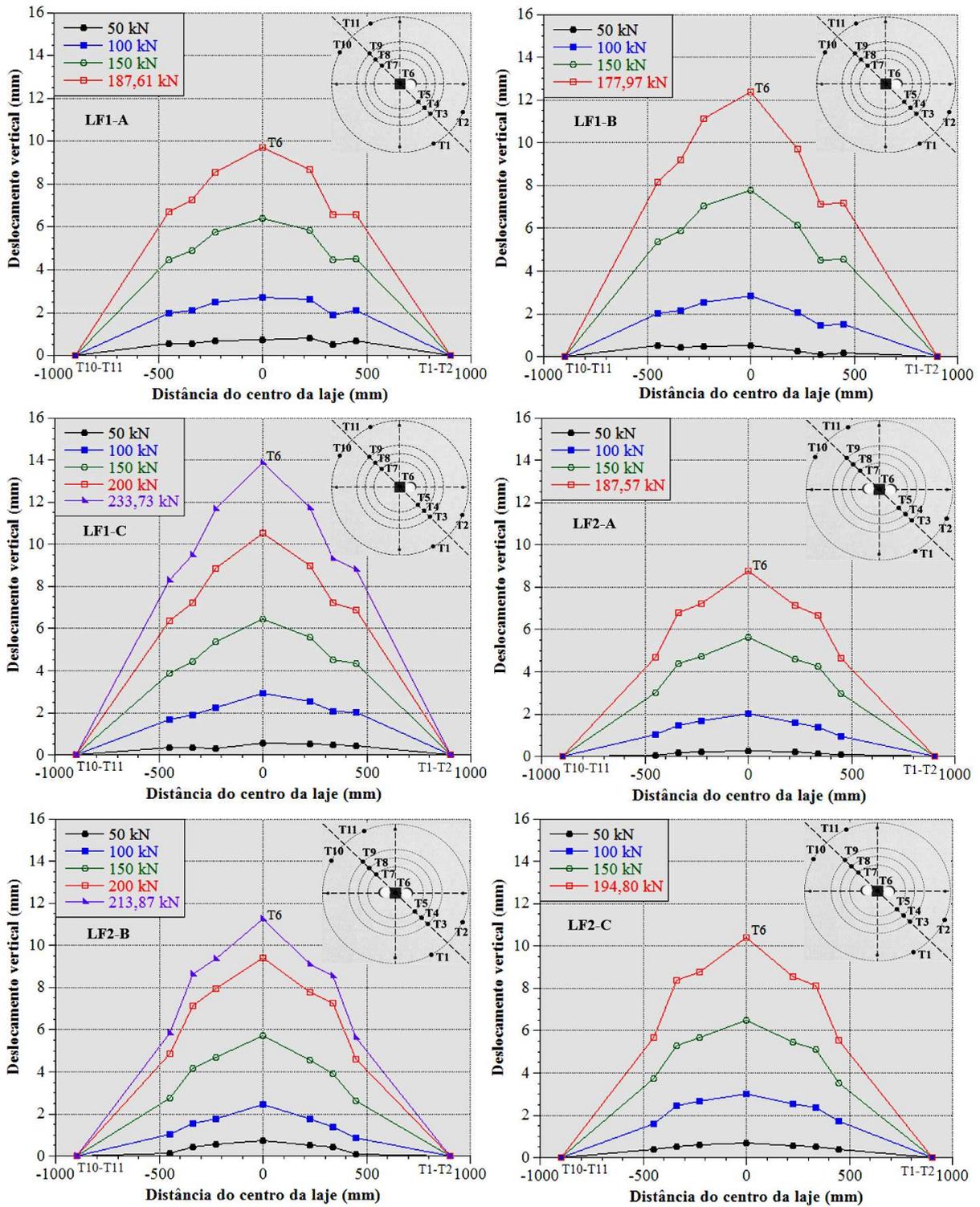


Figura 5.14 - Deslocamentos verticais nas lajes da Série 1



**Figura 5.15 - Deslocamentos verticais nas lajes das Séries 2 e 3**

As lajes das Séries 1 e 3 apresentaram um perfil simétrico para os deslocamentos verticais obtidos nas direções avaliadas. Já nas lajes com apenas uma abertura (Série 2), os deslocamentos verticais obtidos nos pontos próximos da abertura não foram simétricos com os

respectivos pontos equidistantes ao pilar. A abertura reduziu a rigidez das lajes dessa série e conduziu a uma maior deflexão na região próxima à abertura.

Verifica-se ainda que, para níveis de carregamento até 75 kN, os valores obtidos pelos transdutores se mostram semelhantes para todas as lajes. Já para níveis de carga acima deste valor até cerca de 175 kN, é possível observar que as lajes com uma abertura apresentaram deslocamentos verticais maiores do que as lajes dos outros grupos, comparando-se os resultados de T6 a T9.

Nas Figuras 5.16 e 5.17 são apresentados gráficos das lajes das Séries 1, 2 e 3, nessa ordem, com os deslocamentos verticais computados pelos LVDTs T12, T13, T14 e T15, ao longo dos ensaios.

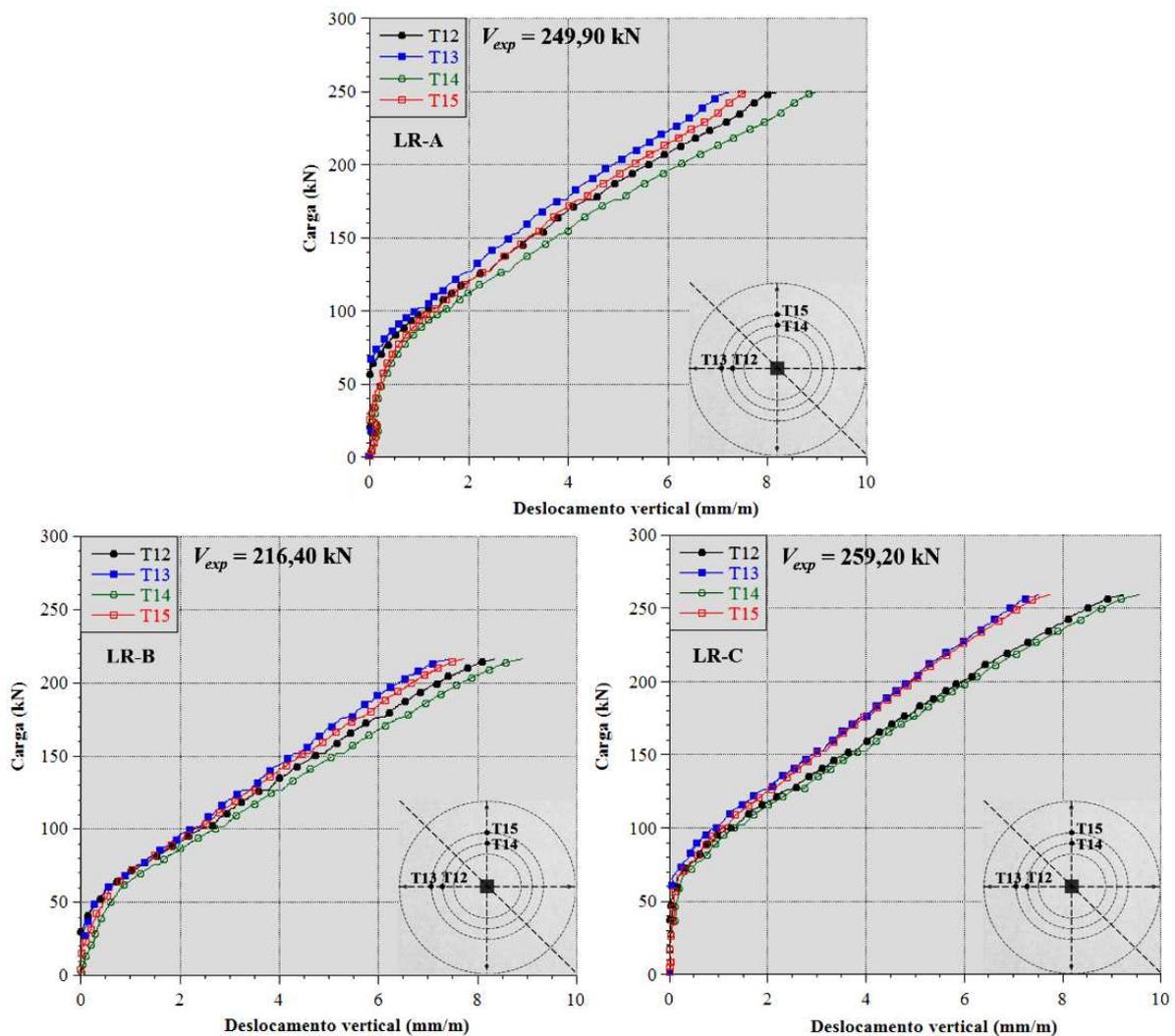
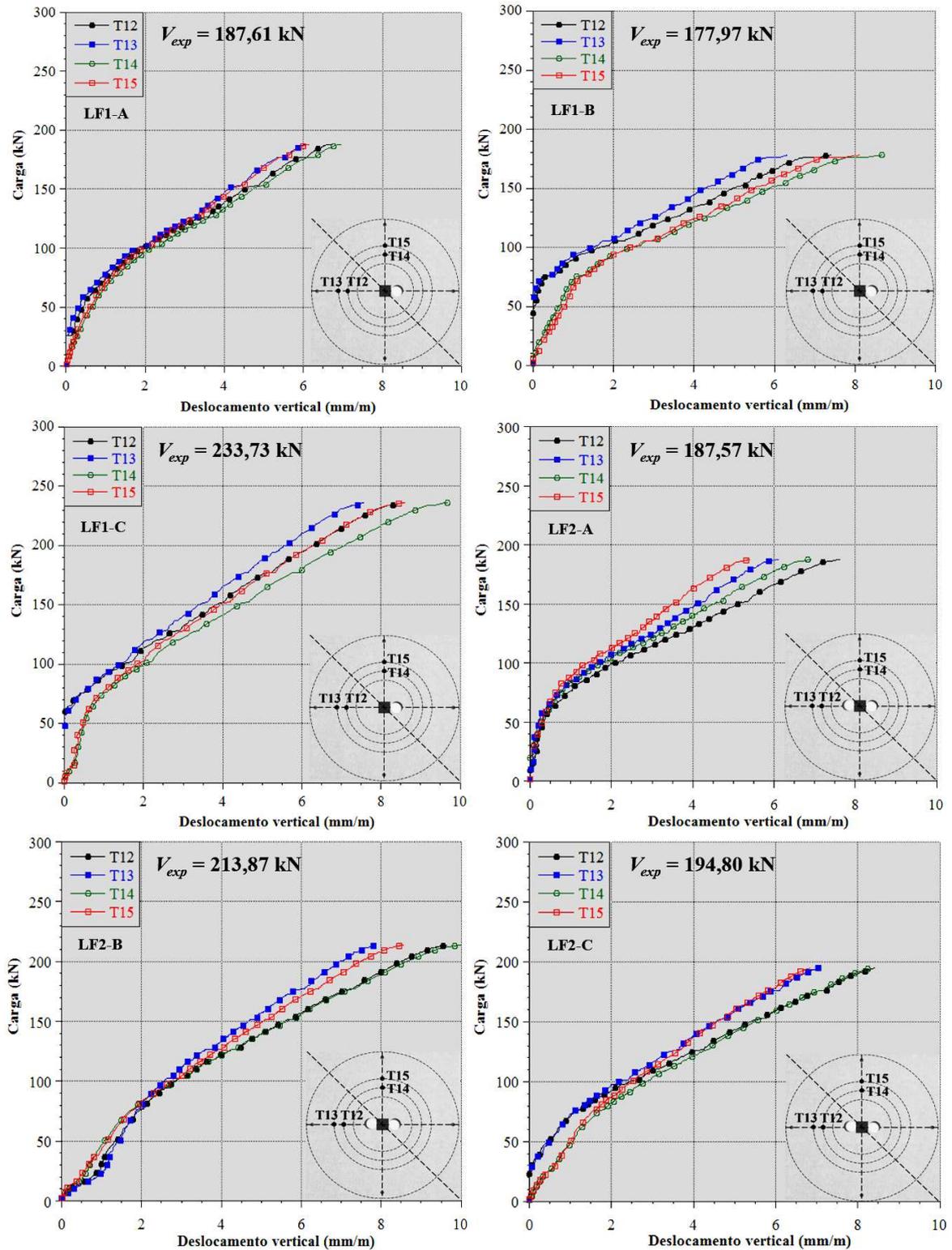


Figura 5.16 - Deslocamentos lidos nos LVDTs T12 ao T15 das lajes da Série 1



**Figura 5.17 - Deslocamentos lidos nos LVDTs T12 ao T15 das lajes das Séries 2 e 3**

Com base nas Figuras 5.16 e 5.17, verifica-se que as lajes das Séries 1 e 3 apresentaram deslocamentos simétricos em ambas as direções, assim como demonstrado anteriormente mediante as leituras dos deslocamentos obtidos nos diversos pontos considerados. Nas lajes da Série 3, o tamanho das aberturas em relação a laje pode ter resultado

nos valores simétricos de deslocamentos verticais lidos pelos transdutores posicionados nas direções avaliadas.

As lajes LR-A e LF2-A apresentaram deslocamentos distintos nas direções avaliadas. Comparando os valores lidos pelos LVDTs T12-T14 e T13-T15, no momento da ruptura dessas lajes, observa-se diferenças de 9,68% e 4,83%, respectivamente, entre esses transdutores para a laje LR-A. Os valores obtidos para a laje LF2-A diferiram-se 10,12% para T12-T14 e 13,16% para T13-T15.

Na Figura 5.17, nota-se que as leituras feitas nas lajes com uma abertura pelos transdutores T12 e T13 foram superiores aos deslocamentos computados na direção onde foram posicionados os LVDTs 14 e 15. Desde os primeiros instantes de carregamento, não houve simetria de deslocamentos nas direções avaliadas para as lajes dessa série.

A Figura 5.18 apresenta, graficamente, os valores de deslocamentos verticais no centro das lajes.

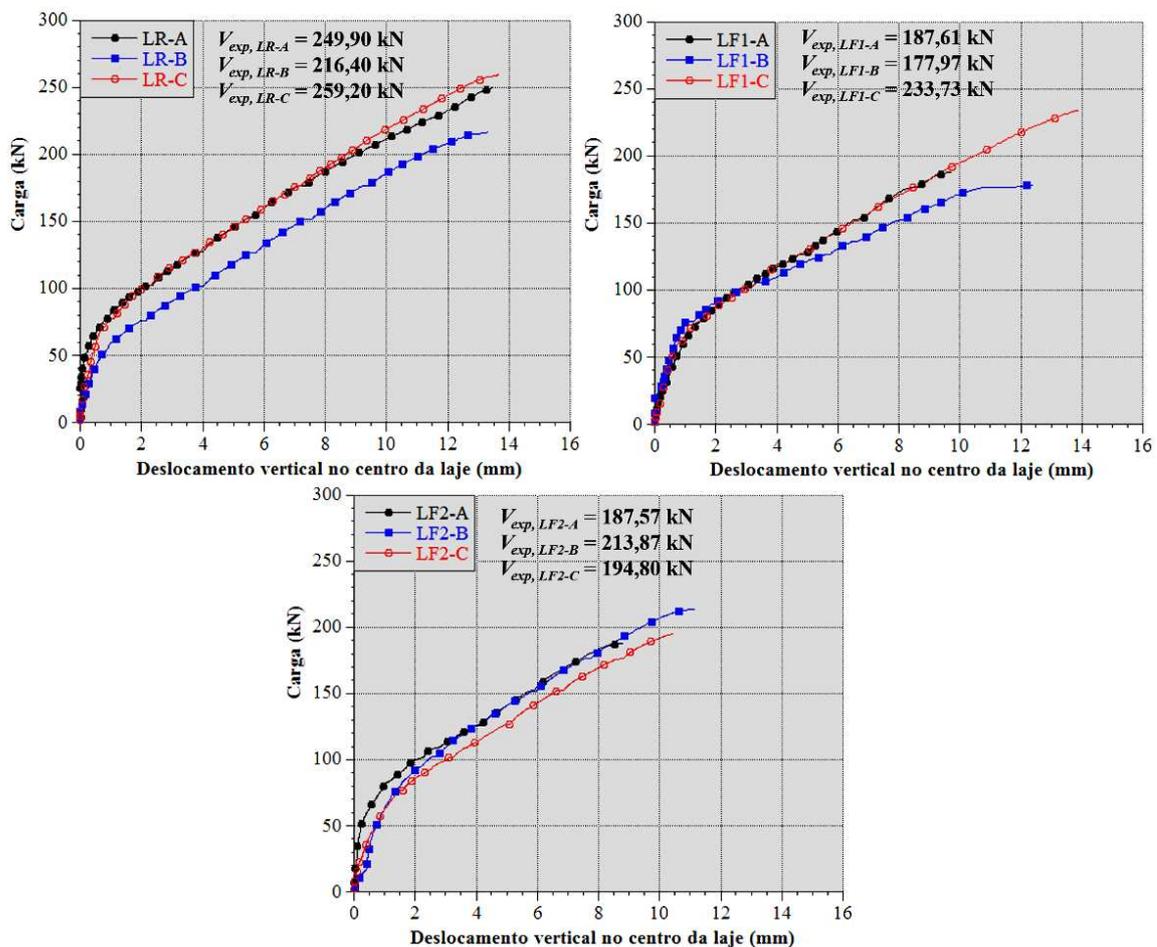


Figura 5.18 - Comparação entre os deslocamentos verticais máximos das lajes

Todas as lajes apresentaram deslocamentos máximos inferiores aos das lajes sem aberturas (Série 1), com exceção da laje LF1-C, que apresentou deslocamento cerca de 1,39% maior à da laje LR-C (maior deslocamento entre as lajes de referência).

A mudança de inclinação observadas nos gráficos da Figura 5.18 é ocasionada devido ao surgimento das primeiras fissuras no concreto. Como visto na Tabela 5.5, as primeiras fissuras radiais surgiram com nível de carga de 75 kN para as lajes da Série 1 e 2 (exceto para a laje LR-A, cujas primeiras fissuras foram observadas a partir de 100 kN). Para as lajes com duas aberturas, as primeiras fissuras radiais surgiram a partir de carga de 50 kN.

A laje LF2-A apresentou o menor deslocamento vertical com valor de 8,77 mm. Com base nos resultados de flechas máximas ( $\delta_u$ ) obtidos, todas as lajes podem ser consideradas como menos rígidas às lajes sem aberturas (exceto LF1-C).

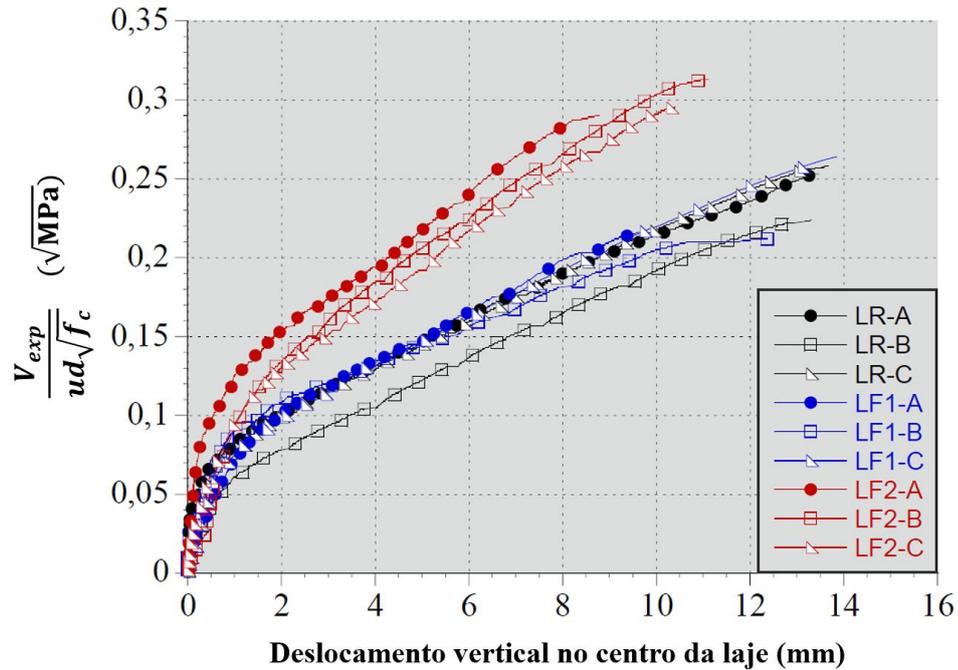
Os valores de deslocamento central das lajes para diferentes níveis de carregamento são demonstrados na Tabela 5.6. Observa-se que as lajes das Séries 2 e 3 apresentaram um comportamento menos rígido quando comparadas com LR-B, pois para os mesmos níveis de carga apresentaram deslocamentos verticais menores. A laje LF1-B nos níveis de carga 150 kN e 175 kN apresentou deslocamentos verticais superiores à LR-B nestes mesmos níveis.

**Tabela 5.6 - Flechas centrais em diferentes estágios de carga**

Grupo	Laje	Deslocamento vertical central (mm)						$\delta_u$ (mm)
		50 kN	75 kN	100 kN	125 kN	150 kN	175 kN	
1	LR-A	0,17	0,76	2,04	3,67	5,33	7,04	13,47
	LR-B	0,71	1,94	3,69	5,44	7,23	9,12	13,31
	LR-C	0,39	0,92	2,06	3,60	5,33	6,98	13,67
2	LF1-A	0,72	1,40	2,72	4,65	6,39	8,26	9,70
	LF1-B	0,50	0,98	2,85	5,47	7,77	10,56	12,36
	LF1-C	0,58	1,33	2,91	4,59	6,46	8,42	13,86
3	LF2-A	0,25	0,83	2,04	3,93	5,62	7,32	8,77
	LF2-B	0,73	1,30	2,45	3,94	5,70	7,45	11,11
	LF2-C	0,71	1,44	3,02	4,84	6,51	8,51	10,41

Para se avaliar com maior precisão a redução da resistência à punção devido à presença das aberturas nas lajes, efetuou-se uma normalização da carga de ruptura ( $V_{exp}$ ) em função das seguintes variáveis: altura útil ( $d$ ), resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ) e perímetro de controle ( $u$ ) distante  $2d$  das faces do pilar e determinado de acordo com a ABNT NBR 6118 (2004). Esse mesmo procedimento foi empregado nos estudos realizados por Harajli,

Maalouf e Khatib (1995) e Muttoni (2008). A Figura 5.19 apresenta os resultados obtidos na análise.



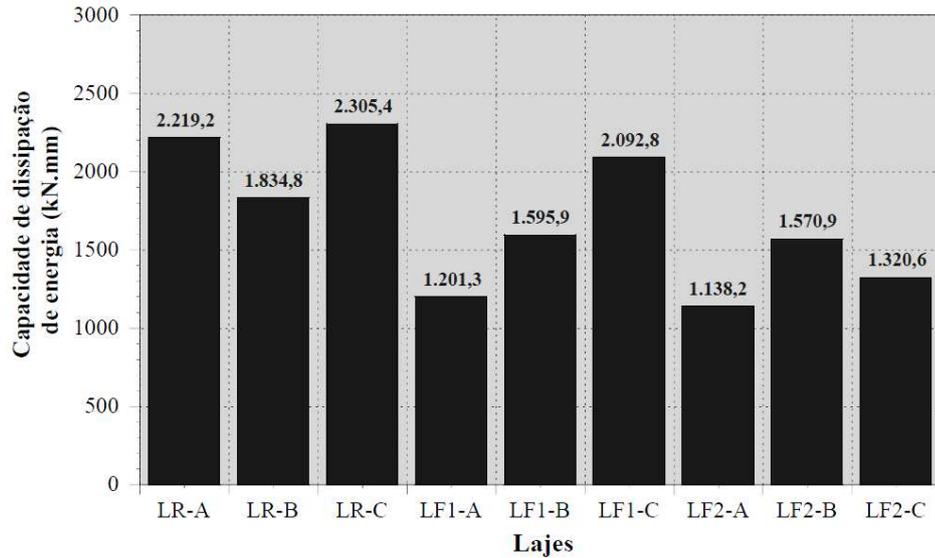
**Figura 5.19 - Normalização da carga de ruptura dos modelos ensaiados**

A partir da Figura 5.19 é possível constatar que os valores normalizados da carga de ruptura das lajes tendem a aumentar, principalmente, com a redução do perímetro crítico. Comparando-se os valores médios da relação  $V_{exp}/(u d \sqrt{f_c})$  das lajes da Série 1 e 3, verifica-se que uma redução de 30,36% do perímetro crítico devido à presença de duas aberturas nas lajes, acarretou em um aumento 22,38% dessa relação. Esse aumento, também, foi influenciado por uma redução de 15,38% da resistência do concreto à compressão das lajes com duas aberturas.

Esse mesmo comportamento não ocorreu para todas as lajes da Série 2. Apenas a laje LF1-C apresentou valores 4,14%, 18,04% e 2,28% superiores às cargas de ruptura normalizadas das lajes LR-A, LR-B e LR-C, respectivamente.

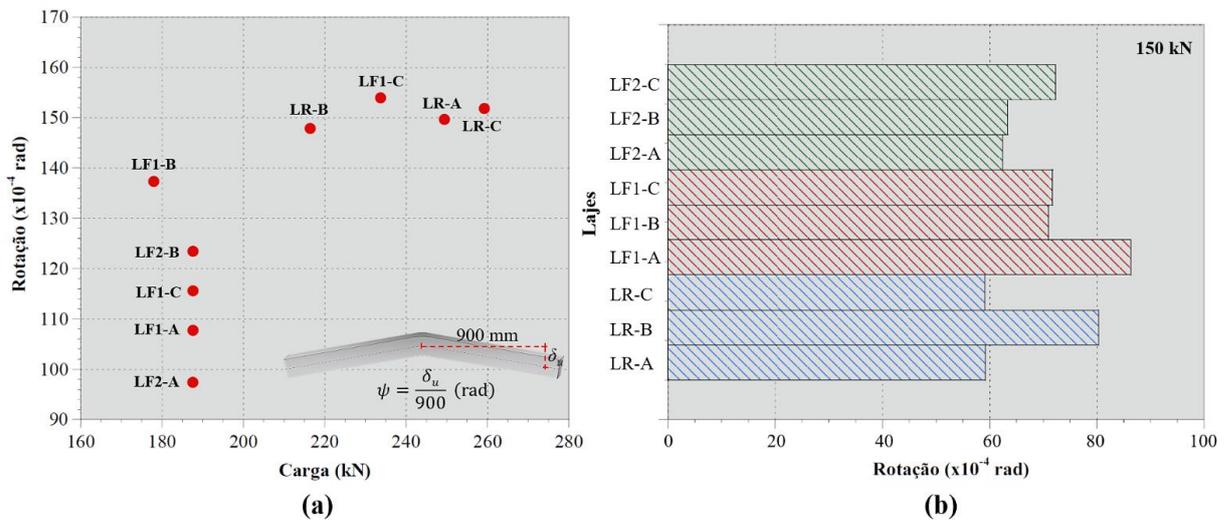
Calculando-se as áreas sob as curvas “Carga versus Deslocamento vertical no centro da laje” contidas na Figura 5.18 foi possível determinar a capacidade de dissipação de energia das lajes (Figura 5.20).

A partir da Figura 5.20, observa-se que a capacidade de dissipação de energia é reduzida com a presença de aberturas na laje de tal forma que as lajes da Série 1 foram em média 1,30 vezes maior que as lajes da Série 2 e 1,58 vezes maior que as lajes com duas aberturas.



**Figura 5.20 - Capacidade de dissipação de energia das lajes**

A Figura 5.21 apresenta as rotações finais das lajes ensaiadas, como também as rotações resultantes para o nível de carga igual a 150 kN.



**Figura 5.21 - Rotações finais das lajes (a) e Rotações das lajes ensaiadas para o nível de carga igual a 150 kN (b)**

As lajes com aberturas apresentaram rotações finais menores que das lajes da Série 1, com exceção da laje LF1-C, a qual apresentou rotação igual a  $153,98 \times 10^{-4}$  rad. Isso pode ser explicado pelo valor da altura útil dessa laje ter sido superior aos das lajes de referência.

Comparando-se as rotações para um mesmo nível de carregamento (150 kN), constata-se que as lajes com aberturas apresentaram rotações superiores às lajes de referência. A laje LR-B, no entanto, apresentou rotação para esse nível de carga superior às lajes com duas aberturas e às lajes LF1-B e LF1-C.

## 5.5 DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA DAS ARMADURAS DE FLEXÃO

No Item 4.3.2 foi apresentado o plano de instrumentação das barras das armaduras de flexão, o qual consistiu na utilização de 8 extensômetros (4 na direção  $x$  e 4 na direção  $y$ ), instalados nas faces superiores das barras de aço que constituíam as lajes das Séries 1 e 2. Nas lajes das Série 3, por sua vez, foram utilizados 11 extensômetros (6 na direção  $x$  e 5 na direção  $y$ ), instalados nas barras próximas das faces pilar e das aberturas.

Nas Figuras 5.22 e 5.23 são apresentados os gráficos com as deformações das armaduras de flexão das lajes em função da posição dos extensômetros nas barras. Nessas figuras, a variável  $\varepsilon_{y,m}$  representa a deformação média de escoamento obtida por meio do ensaio de tração axial dos corpos de prova de 12,5 mm de diâmetro, descrito anteriormente.

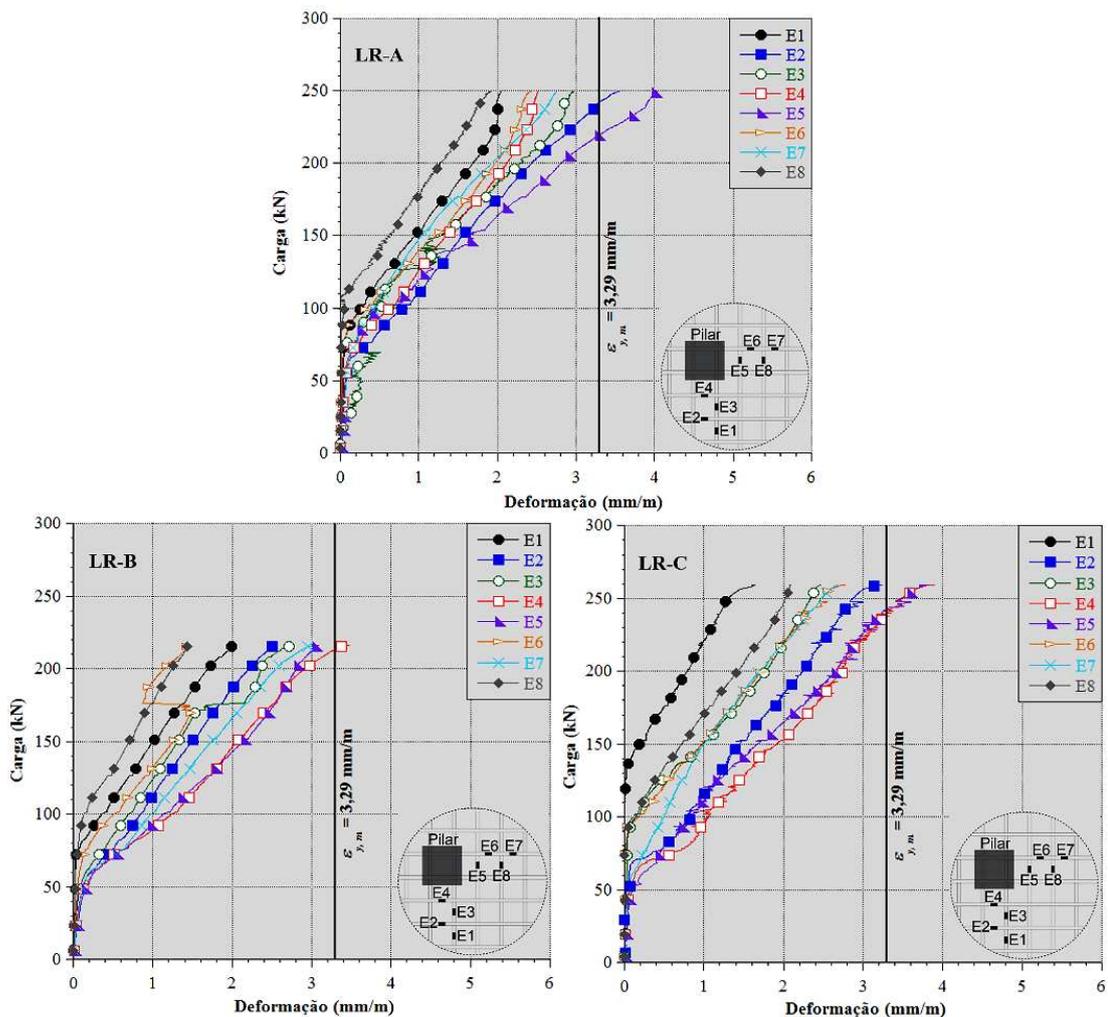


Figura 5.22 - Deformações das armaduras de flexão das lajes da Série 1

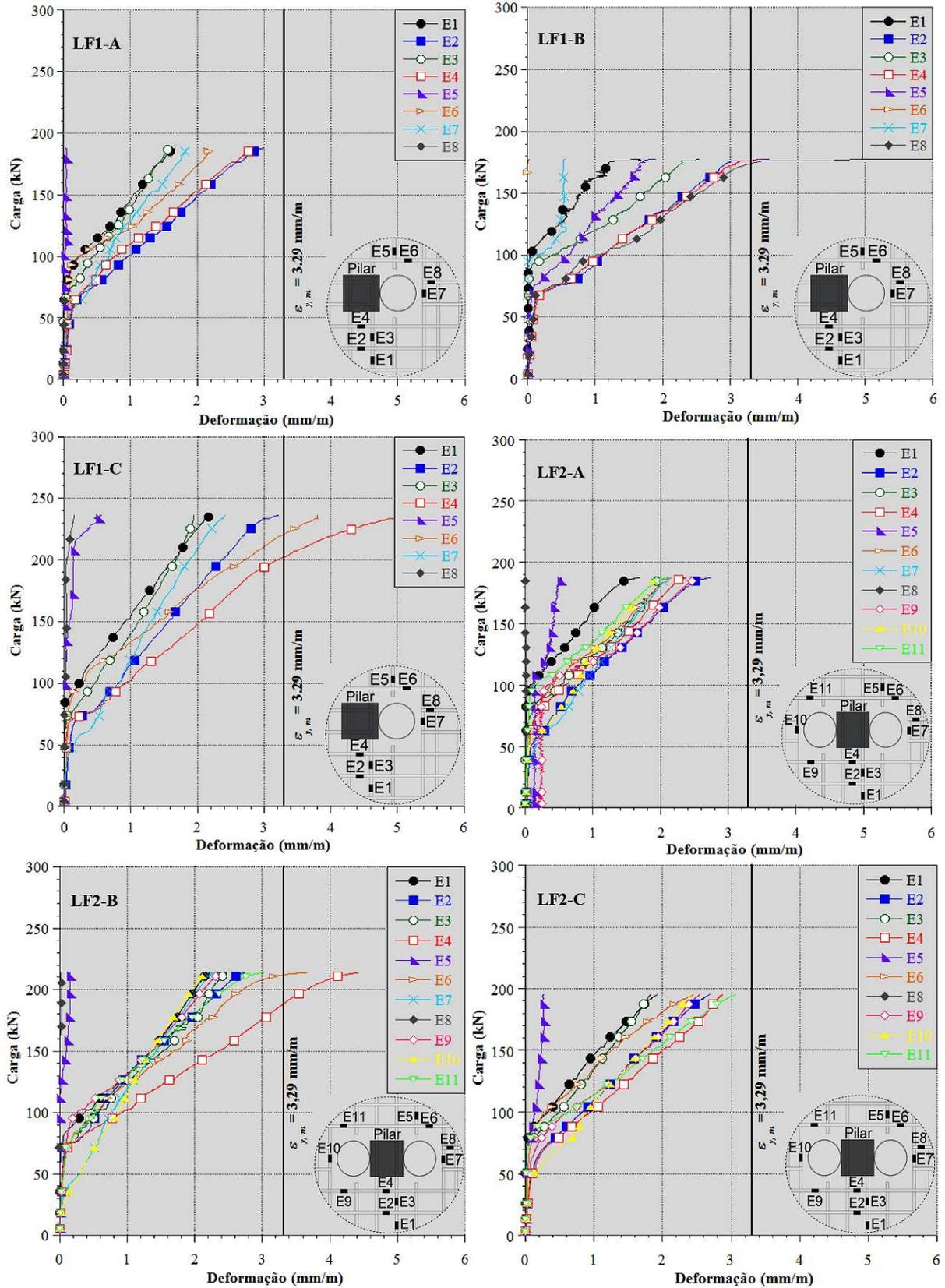


Figura 5.23 - Deformações das armaduras de flexão das lajes das Séries 2 e 3

Em todas as lajes ensaiadas, as maiores deformações ocorreram nas barras instrumentadas próximas às faces do pilar. Isso se justifica, pois nos pontos centrais a rigidez do pilar (ou da placa metálica utilizada) impede que as lajes se deformem livremente.

Os extensômetros E4 e E5 nas lajes de referência (Série 1) apresentaram comportamento semelhante, como também os extensômetros E6 e E3 (extensômetros radiais com distâncias equivalentes ao centro da laje). Nas lajes LR-A, LR-B e LR-C, as barras centrais instrumentadas apresentaram as maiores deformações com valores 4,03 mm/m (E5), 3,47 mm/m (E4) e 3,72 mm/m (E4), respectivamente.

Nas Séries 2 e 3, as maiores deformações das armaduras de flexão foram observadas nas barras paralelas ao eixo  $x$ , posicionadas adjacentes às faces do pilar e das aberturas. Nas lajes da Série 2, os extensômetros E2, E4, E6 e E8 registraram os maiores valores, enquanto que nas lajes da Série 3, os extensômetros E2, E4, E9 e E11 apresentaram as maiores deformações.

Nessas lajes, as barras cortadas pelas aberturas não apresentaram deformações significativas (com exceção da laje LF1-B), indicando que essas barras podem não exercer função de resistir aos esforços de flexão e cisalhamento.

## 5.6 DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA DO CONCRETO

As deformações no concreto foram medidas utilizando-se extensômetros elétricos de resistência posicionados na superfície inferior das lajes e próximos às extremidades do pilar e das aberturas (no caso das lajes das Séries 2 e 3). Esses extensômetros foram posicionados nos eixos das lajes e dispostos de modo a medir as deformações tangenciais e radiais.

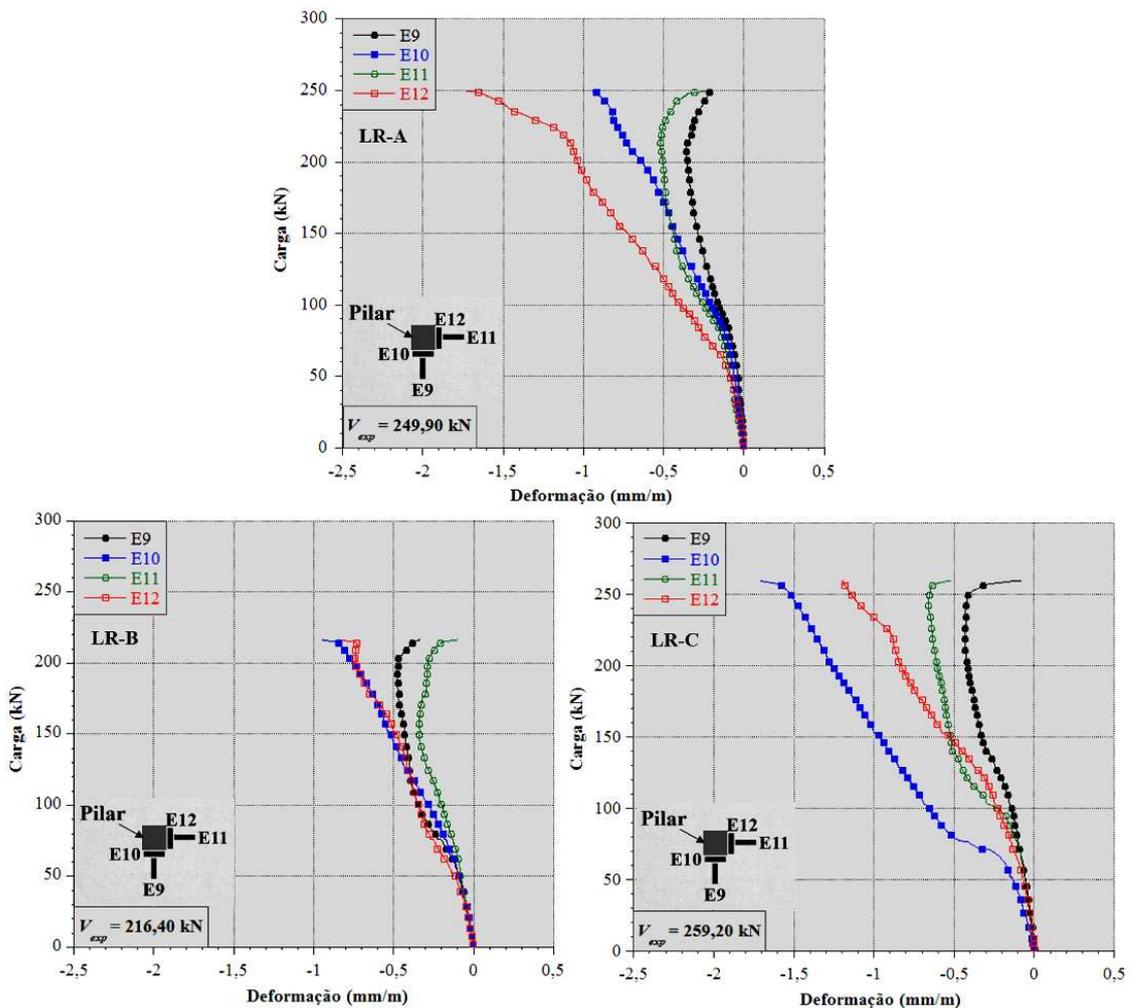
As leituras realizadas pelos extensômetros mostraram deformações inferiores a de esmagamento do concreto ( $\varepsilon_c > 3,5\%$ ), indicando que a integridade do concreto nas regiões analisadas não foi comprometida.

Nas Figuras 5.24 e 5.25, sequencialmente, são apresentados os resultados das deformações na superfície do concreto de todas as lajes.

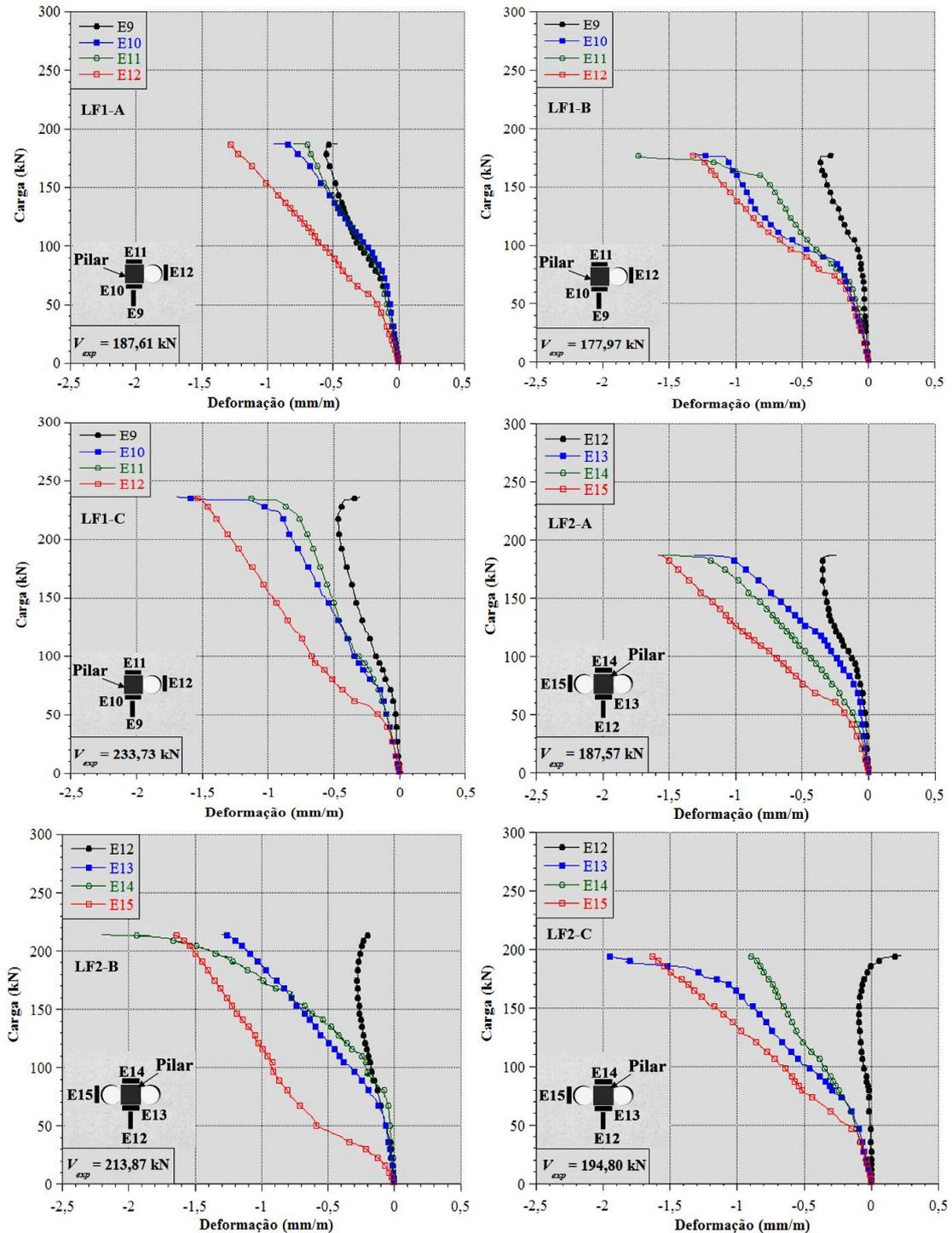
Na face comprimida das lajes, verificou-se que as deformações tangenciais na superfície são superiores às radiais para todas as lajes. Nas lajes da Série 1 as maiores deformações foram medidas pelos extensômetros E10 e E12 (tangentes ao pilar), com valores de -0,94 mm/m e -1,73 mm/m para a laje LR-A, nessa ordem e -1,71 mm/m e -1,19 mm/m para LR-C. A laje LR-B apresentou deformações inferiores às demais lajes de referência, com valores máximos de -0,94 mm/m e -0,85 mm/m lidos nos extensômetros E10 e E12, respectivamente.

Na Série 2, as maiores deformações do concreto ocorreram nos extensômetros E11 e E12 para LF1-B, com valores de -1,74 mm/m e -1,34, respectivamente. Já nas lajes LF1-A e LF1-C, os extensômetros E10 e E12 apresentaram as maiores deformações (-0,95 mm/m e -1,29 mm/m para LF1-A e -1,16 mm/m e -1,51 mm/m para LF1-C, nesta ordem).

Os extensômetros E14 e E15 em LF2-B e E13 e E15 em LF2-C apresentaram as maiores deformações para as lajes com duas aberturas. Os valores obtidos foram -2,20 mm/m e -1,66 mm/m para LF2-B e -1,95 mm/m e -1,64 mm/m para LF2-C, respectivamente. Na laje LF2-A, as maiores deformações foram obtidas nos extensômetros E14 (-1,58 mm/m) e E15 (-1,57 mm/m).



**Figura 5.24 - Deformações do concreto das lajes da Série 1**

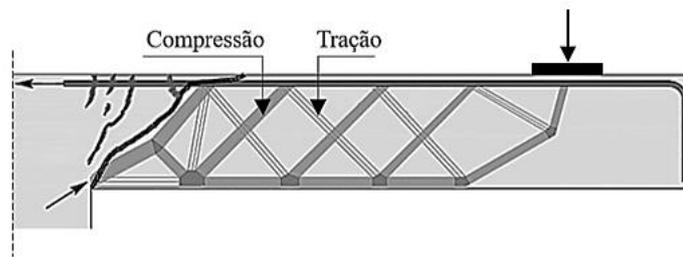


**Figura 5.25 - Deformações do concreto das lajes das Séries 2 e 3**

Os resultados das deformações no concreto mostraram que até o surgimento das primeiras fissuras de flexão (na faixa de carga compreendida entre 50 kN e 100 kN), as deformações em ambas direções encontravam-se em estágios similares, entretanto, após essa fase, as deformações desenvolveram-se em proporções diferentes, com as deformações tangenciais apresentando valores mais elevados.

Para as lajes das Séries 1 e 3, em um estágio de carregamento em torno de 50% da carga de ruptura, foi observado um alívio das deformações radiais, uma vez que sua intensidade começou a reduzir, chegando a passar de compressão para tração na laje LF2-C. Nas lajes da Série 2, esse comportamento de descompressão foi verificado próximo à carga de ruptura.

Muttoni (2008) afirma que esse comportamento pode ser explicado pela formação de uma biela em forma de cotovelo, devido ao surgimento da fissura crítica de cisalhamento, a qual altera a distribuição das tensões na região próxima ao pilar para um instante, imediatamente, anterior à ruptura por punção, conforme a Figura 5.26.



**Figura 5.26 - Modelo de bielas e tirantes para punção**

Fonte: Muttoni, 2008.

## 5.7 COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS EXPERIMENTAIS COM O PROGRAMA *PUNCALC*

A Tabela 5.7 apresenta as principais características físicas e geométricas das lajes ensaiadas neste trabalho, sendo essas características, utilizadas como dados de entrada para a previsão da carga de ruptura por meio do modelo teórico de Marques (2008) e implementado computacionalmente. Nessa tabela,  $\Delta\theta$  é o ângulo referente a posição da abertura na laje;  $b_1$  é a distância do centro do pilar a face da abertura mais próxima ao pilar e  $b_2$  é a distância entre as faces da abertura.

As dimensões do raio do pilar,  $r_0 = 75$  mm, do raio da laje,  $r_3 = 900$  mm e altura da laje,  $h = 130$  mm, foram mantidas constantes para todas as lajes analisadas. A tensão de escoamento e o módulo de elasticidade do aço também foram considerados constantes em todos os modelos (575,93 MPa e 178,68 GPa, nessa ordem).

**Tabela 5.7 - Características físicas e geométricas das lajes ensaiadas**

Lajes	$d$ (mm)	Quantidade Aberturas	$\Delta\theta$ (°)	$b_1$ (mm)	$b_2$ (mm)	$\rho$ (%)	$f_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)
LR-A	89	-	-		-	1,62	41,6	4,1
LR-B	88	-	-	-	-	1,65	41,6	4,1
LR-C	90	-	-	-	-	1,58	41,6	4,1
LF1-A	90	1	43,0	75	150	1,28	44,5	4,3
LF1-B	88	1	43,0	75	150	1,34	44,5	4,3
LF1-C	91	1	43,0	75	150	1,26	44,5	4,3
LF2-A	92	2	43,0	75	150	1,14	44,5	3,2
LF2-B	95	2	43,0	75	150	1,08	44,5	3,2
LF2-C	93	2	43,0	75	150	1,12	44,5	3,2

A Tabela 5.8 mostra os resultados obtidos por meio do programa *PunCalc* para as lajes ensaiadas. Nessa tabela,  $\psi_{ini}$  é a rotação inicial adotada no programa;  $r_l$  é raio teórico da superfície de ruptura externa;  $x$  é a posição da linha neutra da laje;  $\alpha$  é o ângulo entre a armadura de cisalhamento e o plano da laje;  $\eta$  é o gradiente de tensões do concreto atuantes na face do pilar;  $k_{in}$  é o parâmetro de ruptura interna considerado no método e  $\sigma_{m\acute{a}x}$  é a tensão normal máxima.

**Tabela 5.8 - Resultados obtidos nas análises**

Laje	$\psi_{ini}$ ( $\times 10^{-4}$ )	$r_l$ (mm)	$x$ (mm)	$\alpha$ (°)	$\eta$	$k_{in}$	$\sigma_{m\acute{a}x}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\psi_{teo}$ ( $\times 10^{-4}$ )	$V_{teo}$ (kN)
LR-A	$1/d$	$1,90d$	24,30	12,35	1,69	1,64	4,11	134,46	247,57
LR-B	$1/d$	$1,35d$	23,84	11,24	1,69	1,72	5,08	113,64	222,37
LR-C	$1/d$	$1,97d$	24,38	12,90	1,69	1,66	4,10	143,29	258,37
LF1-A	$1/1,5d$	$1,90d$	21,48	12,87	1,65	1,66	3,67	141,78	186,92
LF1-B	$1/1,4d$	$1,30d$	21,50	12,37	1,66	1,65	5,20	138,83	177,42
LF1-C	$1/1,6d$	$2,90d$	21,76	14,11	1,65	1,75	2,58	165,83	225,52
LF2-A	$1/1,6d$	$2,65d$	23,73	15,18	1,67	1,84	1,92	141,14	186,73
LF2-B	$1/1,6d$	$2,90d$	24,04	17,07	1,66	2,01	1,92	163,57	189,82
LF2-C	$1/1,6d$	$2,70d$	23,82	15,63	1,67	1,88	1,92	145,31	191,67

Os valores de  $r_l$ , contidos na Tabela 5.8 foram calculados computacionalmente com o intuito de obter-se cargas de ruptura teóricas próximas dos resultados experimentais.

A rotação inicial ( $\psi_{ini}$ ) foi adotada constante para os modelos sem aberturas, conforme proposto por Shehata (1985). Para as lajes das Série 2 e 3, adotou-se essa rotação variando de  $1/1,6d$  a  $1/1,4d$  para propiciar a convergência do programa.

A Tabela 5.9 apresenta a comparação entre os resultados experimentais ( $\psi_{exp}$  e  $V_{exp}$ ) com os teóricos ( $\psi_{teo}$  e  $V_{teo}$ ), obtidos a partir do algoritmo implementado.

**Tabela 5.9 Comparação entre os resultados experimentais e computacionais**

Laje	$\psi_{exp}$ ( $\times 10^{-4}$ )	$\psi_{teo}$ ( $\times 10^{-4}$ )	$V_{exp}$ (kN)	$V_{teo}$ (kN)	$\psi_{exp} / \psi_{teo}$	$V_{exp} / V_{teo}$
LR-A	149,69	134,46	249,90	247,57	1,11	1,01
LR-B	147,88	113,64	216,40	222,37	1,30	0,97
LR-C	151,86	143,29	259,20	258,37	1,06	1,00
<b>Média</b>	<b>149,81</b>	<b>130,46</b>	<b>241,83</b>	<b>242,77</b>	<b>1,16</b>	<b>0,99</b>
<b>CV (%)</b>	<b>1,33</b>	<b>11,67</b>	<b>9,31</b>	<b>7,61</b>	<b>10,95</b>	<b>2,10</b>
LF1-A	107,73	141,78	187,60	210,55	0,76	0,89
LF1-B	137,37	138,83	178,00	204,02	0,99	0,87
LF1-C	153,98	165,83	233,70	232,57	0,93	1,00
<b>Média</b>	<b>133,03</b>	<b>148,81</b>	<b>199,77</b>	<b>215,71</b>	<b>0,89</b>	<b>0,92</b>
<b>CV (%)</b>	<b>17,61</b>	<b>9,95</b>	<b>14,91</b>	<b>6,93</b>	<b>13,35</b>	<b>7,61</b>
LF2-A	97,42	141,14	187,60	187,47	0,69	1,00
LF2-B	123,48	163,57	213,90	211,20	0,75	1,01
LF2-C	115,61	145,31	194,80	193,13	0,80	1,01
<b>Média</b>	<b>112,17</b>	<b>150,01</b>	<b>198,77</b>	<b>197,27</b>	<b>0,75</b>	<b>1,01</b>
<b>CV (%)</b>	<b>11,92</b>	<b>7,95</b>	<b>6,84</b>	<b>6,28</b>	<b>7,38</b>	<b>0,57</b>

Com base na Tabela 5.9, pode-se observar que a carga última teórica apresentou valores com diferença máxima 13,0% (LF1-B) em comparação com a carga de ruptura experimental. Com relação à rotação, os resultados obtidos pelo programa apresentaram diferenças que variaram entre 1,0% (LF1-B) a 31,0% (LF2-A). Para os valores médios da relação  $V_{exp} / V_{teo}$  contidos nessa tabela, verifica-se resultados próximos da unidade, com maior diferença ocorrendo nas lajes da Série 2 com a carga teórica sendo 8,0% superior em relação a carga de ruptura experimental.

As Figuras 5.27 a 5.29 apresentam as curvas “Carga de ruptura *versus* Rotação” experimentais e teóricas para as lajes ensaiadas. Verifica-se que para pequenas rotações, o equilíbrio dos sistemas não lineares calculados pelo método de Marques (2018) não foi atingido para o critério de convergência proposto. Esse fato é em função do ângulo de inclinação  $\alpha$  ser menor que zero para baixas rotações. Apenas para rotações acima de  $30 \times 10^{-4}$  rad a convergência é alcançada, possibilitando o cálculo de  $V_{teo}$ . Nas lajes com aberturas, observa-se um segundo intervalo de não convergência para rotações entre  $50 \times 10^{-4}$  rad até  $140 \times 10^{-4}$  rad para as lajes da Série 2 e entre  $50 \times 10^{-4}$  rad até  $130 \times 10^{-4}$  rad para as lajes da Série 3.

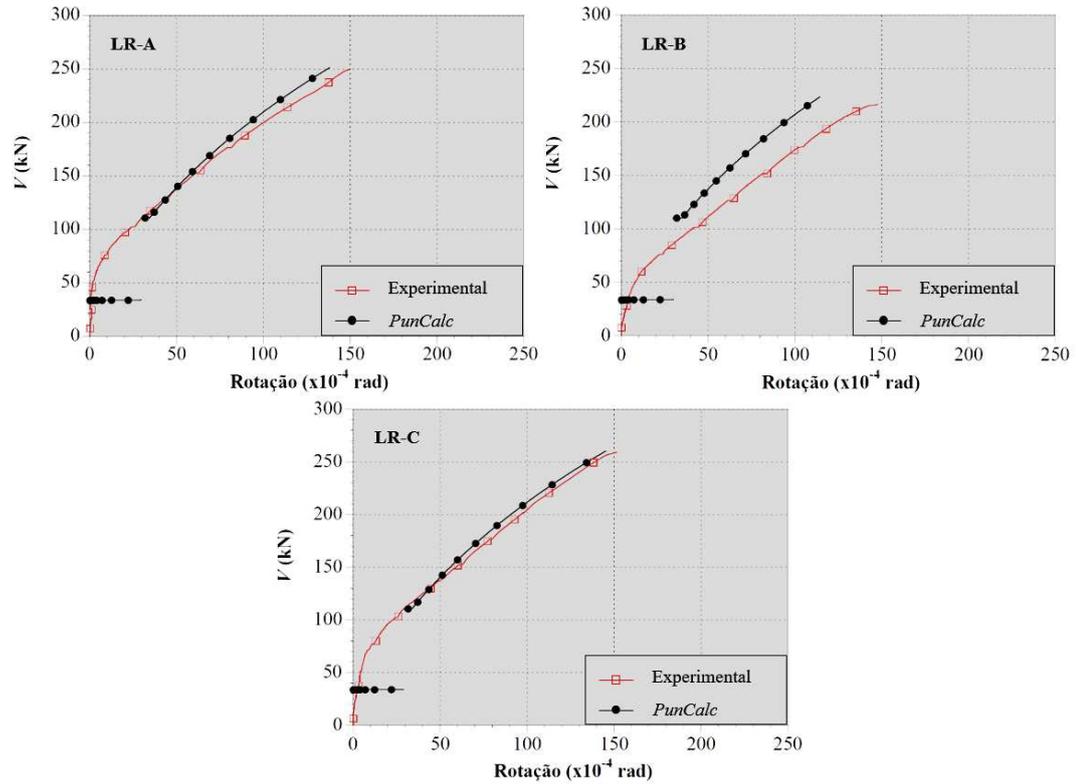


Figura 5.27 - Curvas “Carga de ruptura *versus* Rotação” das lajes da Série 1

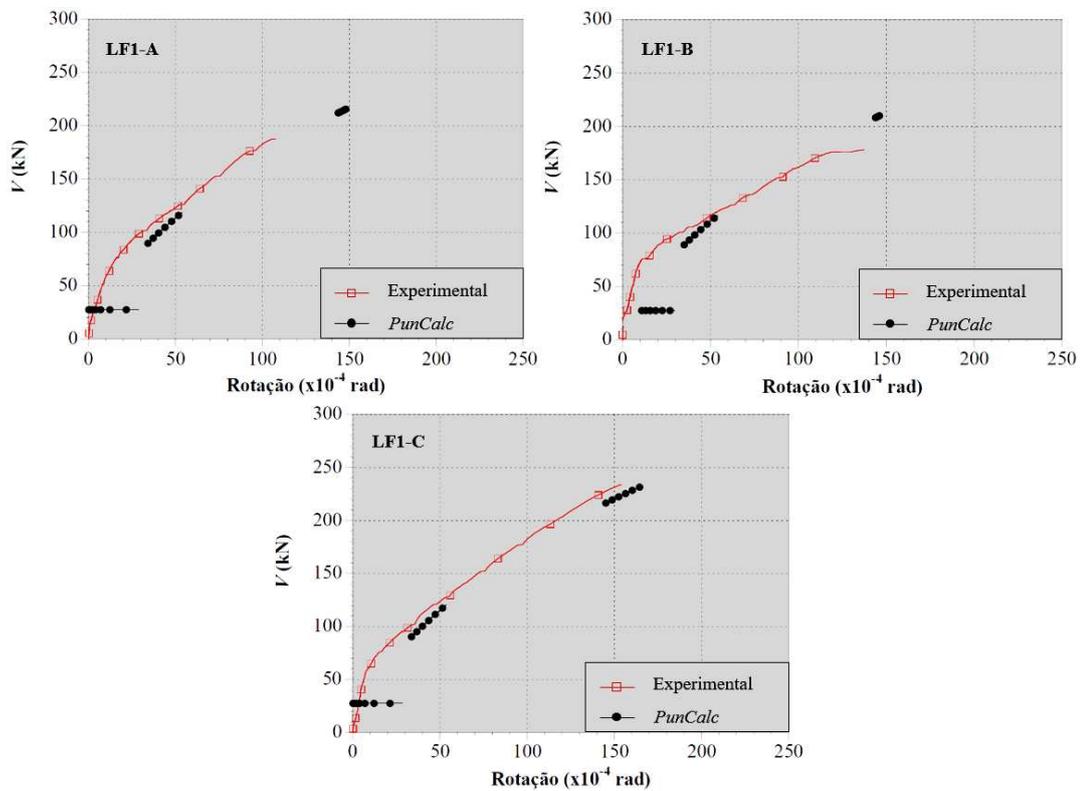
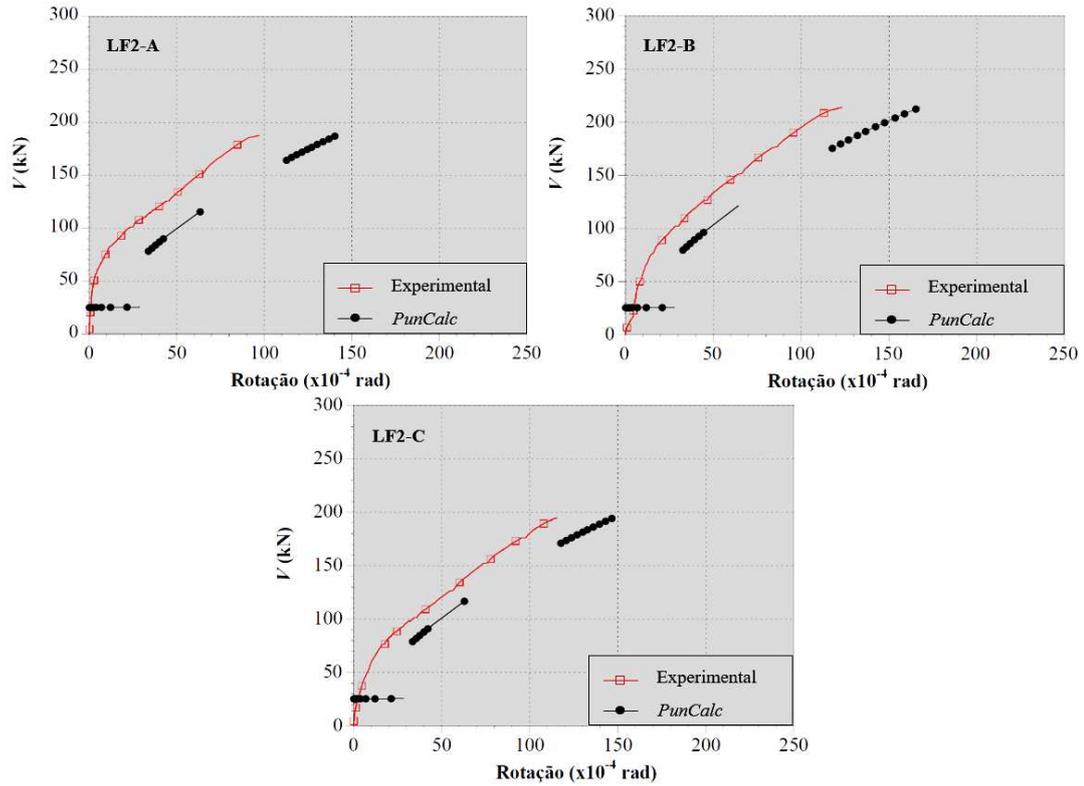


Figura 5.28 - Curvas “Carga de ruptura *versus* Rotação” das lajes da Série 2



**Figura 5.29 - Curvas “Carga de ruptura versus Rotação” das lajes da Série 3**

Nas lajes das Séries 1, as curvas dos resultados teóricos apresentaram um comportamento mais rígido do que as curvas experimentais, ou seja, para um mesmo instante de carga, a rotação experimental da laje foi menor. Esta diferença foi maior nos resultados obtidos para a laje LR-B. Já nas lajes das Séries 2 e 3, as curvas experimentais demonstraram-se mais rígidas.

## 5.8 COMPARAÇÃO ENTRE AS CARGAS DE RUPTURA EXPERIMENTAIS E ESTIMADAS POR INSTRUÇÕES NORMATIVAS

A Tabela 5.10 apresenta os valores dos perímetros de controle calculados para cada instrução normativa.

**Tabela 5.10 - Perímetros de controle estimados para cada código de projeto**

Série	Laje	$d$ (mm)	Perímetro de controle afastado do pilar (mm)			
			EUROCODE 2 (2004) ( $u_l$ )	CEB-FIP/MC (2010) ( $b_l$ )	ACI 318 (2014) ( $b_0$ )	ABNT NBR 6118 (2014) ( $C'$ )
1	LR-A	89	1.718,41	873,32	956,00	1.718,41
	LR-B	88	1.705,84	870,18	952,00	1.705,84
	LR-C	90	1.731,08	873,32	960,00	1.731,08
2	LF1-A	90	1.448,78	746,28	823,54	1.448,78
	LF1-B	88	1.427,83	733,70	816,47	1.427,83
	LF1-C	91	1.459,25	746,28	827,09	1.459,25
3	LF2-A	92	1.203,94	611,18	692,44	1.203,94
	LF2-B	95	1.210,78	620,38	701,92	1.210,78
	LF2-C	93	1.193,98	615,74	695,58	1.193,98

As Tabelas 5.11 e 5.12 apresentam, respectivamente, as estimativas da carga de ruptura obtidas a partir das instruções normativas EUROCODE 2 (2004), CEB-FIP/MC (2010), ACI 318 (2014) e ABNT NBR 6118 (2014) e a comparação desses valores com os resultados experimentais. Para a estimativa dos valores de cargas de ruptura, não foram considerados os coeficientes parciais de segurança previstos nos códigos de projeto.

**Tabela 5.11 - Estimativa da carga de ruptura por meio dos códigos de projeto**

Laje	$V_{exp}$ (kN)	$V_{teo}$ (kN)			
		EUROCODE 2 (2004)	CEB-FIP/MC (2010)	ACI 318 (2014)	ABNT NBR 6118 (2014)
LR-A	249,90	223,90	179,69	181,10	202,06
LR-B	216,40	221,25	193,90	178,31	200,34
LR-C	259,20	226,58	177,72	183,90	203,79
LF1-A	187,61	180,79	157,35	163,16	162,60
LF1-B	177,97	176,56	155,57	158,17	159,87
LF1-C	233,73	182,91	136,99	165,69	163,97
LF2-A	187,57	136,62	121,78	124,73	122,08
LF2-B	213,87	139,18	117,29	130,56	123,19
LF2-C	194,80	136,08	121,20	126,65	121,21

**Tabela 5.12 - Comparação entre as cagas de ruptura experimentais e teóricas estimadas por meio dos códigos de projeto ( $V_{exp}/V_{teo}$ )**

<b>Laje</b>	<b>EUROCODE 2 (2004)</b>	<b>CEB-FIP/MC (2010)</b>	<b>ACI 318 (2014)</b>	<b>ABNT NBR 6118 (2014)</b>
LR-A	1,12	1,39	1,38	1,24
LR-B	0,98	1,12	1,21	1,08
LR-C	1,14	1,46	1,41	1,27
<b>Média</b>	<b>1,08</b>	<b>1,32</b>	<b>1,33</b>	<b>1,20</b>
<b>CV (%)</b>	<b>8,07</b>	<b>13,57</b>	<b>8,09</b>	<b>8,54</b>
LF1-A	1,04	1,19	1,15	1,15
LF1-B	1,01	1,14	1,13	1,11
LF1-C	1,28	1,71	1,41	1,43
LF2-A	1,37	1,54	1,50	1,54
LF2-B	1,54	1,82	1,64	1,74
LF2-C	1,43	1,61	1,54	1,61
<b>Média</b>	<b>1,28</b>	<b>1,50</b>	<b>1,40</b>	<b>1,43</b>
<b>CV (%)</b>	<b>16,73</b>	<b>18,50</b>	<b>15,12</b>	<b>17,73</b>

Todas as disposições normativas consideradas mostraram uma tendência a subestimar a resistência ao punçoamento, sendo isso mais evidente no código ACI 318 (2014) para as lajes de referência (Série 1). Nas lajes com aberturas, a instrução normativa CEB-FIP/MC (2010) foi mais conservadora no nível de aproximação considerado neste trabalho (LoA II).

No Capítulo 7 será feita uma verificação do erro de modelo ( $E_m$ ) de cada procedimento normativo. Além disso, análises de confiabilidade serão realizadas de modo a verificar a segurança do sistema estrutural estudado neste trabalho.

## 6 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Um dos principais objetivos do cálculo estrutural na engenharia é garantir a segurança e o desempenho satisfatório das estruturas com o máximo de economia. Entretanto, atingir esse objetivo geralmente não é um problema simples, particularmente pelo fato de existir um grande número de sistemas estruturais que podem falhar ao desempenhar as funções para as quais foram projetadas (BERNARDO, 1999).

Para garantir a segurança das estruturas, as normas e os códigos de projeto especificam conjuntos de regras que determinam limites para ações, deslocamentos e deformações. Esses limites são resultados da evolução do conhecimento da engenharia e, por isso, sofrem constante modificação.

Apesar de todo o desenvolvimento no estudo das estruturas e dos materiais, a maioria dos avanços não considera a natureza aleatória das variáveis envolvidas nos projetos estruturais. A metodologia de projeto ainda é baseada na abordagem semiprobabilística que, embora represente satisfatoriamente o comportamento estrutural, não considera de maneira adequada o grau de incerteza presente nas variáveis. Isso pode causar situações indesejáveis e não previstas inicialmente (NEVES, 2004; NOGUEIRA, 2005).

Diante disso, Leonel (2009) e Nogueira (2010) afirmam que o problema central da confiabilidade de estruturas consiste em incorporar as incertezas a um modelo representativo da realidade. Essas incertezas são incorporadas por meio de dados estatísticos, como média, desvio-padrão e funções de distribuições de probabilidade. Dessa forma, os parâmetros analisados estatisticamente deixam de ser determinísticos e passam a ser modelados como variáveis aleatórias. Segundo Nogueira (2010), a vantagem de se trabalhar dessa forma é que as incertezas inerentes às variáveis de projeto na engenharia são consideradas de uma maneira consistente.

Inicialmente, este capítulo aborda tópicos relacionados à teoria de probabilidades, com a revisão de conceitos fundamentais como incertezas na engenharia e variáveis aleatórias. Posteriormente, apresenta considerações sobre análise de erro de modelo e por fim, aborda conceitos da teoria de confiabilidade estrutural, com ênfase no método a ser empregado neste trabalho.

## 6.1 INCERTEZAS NA ENGENHARIA ESTRUTURAL

Entre as incertezas presentes em problemas de engenharia, algumas podem ser classificadas como epistêmica e intrínseca. A incerteza epistêmica está relacionada ao conhecimento sobre o problema. Em tese, esta incerteza pode ser reduzida ou eliminada através da coleta de mais dados sobre os processos envolvidos ou através de melhor conhecimento do problema.

Por sua vez, a incerteza intrínseca é aquela que faz parte da natureza dos processos envolvidos e, portanto, não pode ser eliminada (BECK, 2012). O autor ainda afirma que outro tipo de incerteza que não se encaixa na classificação vista anteriormente é o erro humano.

As incertezas intrínsecas podem ser divididas em:

- Incerteza física: corresponde a aleatoriedade natural dos fenômenos físicos, químicos, biológicos e atmosféricos que nos rodeiam e que afetam o comportamento de sistemas de engenharia. Geralmente presentes nas avaliações de dimensões, valores de ações, valores de propriedades de materiais etc.
- Incerteza de previsão: refere-se a previsão de condições futuras de um processo ou sistema. Muitas vezes, a informação disponível sobre determinado processo é limitada a um curto período, mas deve ser extrapolada para o período de vida útil da estrutura. Extremos de fenômenos ambientais são exemplos típicos deste tipo de incerteza.

Já as incertezas epistêmicas podem ser divididas em:

- Incerteza estatística: a determinação da curva de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória ou de seus parâmetros e momentos, baseada em amostras, estão sujeitas a esse tipo de incerteza.
- Incerteza de decisão: está relacionada com a definição sobre se determinado evento ocorreu ou não.
- Incerteza de modelo: provenientes das simplificações e das hipóteses adotadas para a modelagem do comportamento estrutural, o emprego de novos materiais, técnicas construtivas, etc.
- Incerteza fenomenológica: provenientes da existência de eventos não previsíveis ou não levados em consideração.

A incerteza devida ao fator humano tem como natureza a ação do homem, quer seja intencional ou não, que afeta de maneira indesejável o comportamento do sistema estrutural.

Segundo Cordeiro (2016), embora boa parte dos componentes do erro humano tenham características de incertezas fenomenológicas, existem resultados empíricos para quantificar certas ações que levam a determinados tipos de erros humanos. Nota-se que a motivação e o treinamento reduzem a ocorrência desses erros.

Sabe-se, porém que nem todas as incertezas citadas podem ser consideradas em uma análise e, por isso, fala-se em confiabilidade formal, condicionada às incertezas adotadas. Logo, essa confiabilidade formal não é a real, tornando-se lógicas apenas comparações entre confiabilidades de sistemas com as mesmas considerações de incertezas. Assim, a avaliação da confiabilidade estrutural surge como ferramenta de comparação entre procedimentos existentes de projeto, além de avaliar a validade das recomendações estabelecidas em normas (BERNARDO, 1999).

## 6.2 ANÁLISE DE ERRO DE MODELO

Entende-se por erro de modelo ( $E_m$ ) a variável aleatória que permite comparar os resultados reais com os resultados obtidos segundo a previsão do modelo que pretende-se avaliar (SANTOS, 2012; BOLANDIM, BECK e MALITE, 2013). Nesta pesquisa, os resultados considerados como reais correspondem aos valores experimentais de carga de ruptura ( $V_{exp}$ ) de lajes lisas de concreto armado obtidos nos ensaios.

Nas análises de confiabilidade, o erro de modelo é utilizado para identificar o quanto a resistência experimental oscila em torno de um valor padrão. Entende-se por valor padrão, equações analíticas normativas, propostas com base na teoria da resistência dos materiais e com simplificações específicas de cada material estrutural. A oscilação resultante da análise de erro de modelo possibilita concluir se o modelo proposto é conservador ou não em relação ao valor experimental (ADOLFS, 2011).

O autor ainda afirma que o valor do erro de modelo é usado nas análises de confiabilidade como uma variável aleatória do problema de segurança estrutural. Após definir-se o seu valor, a sua inclusão nas análises de confiabilidade possibilita verificar o impacto no índice de confiabilidade, aumentando o índice de segurança, no caso de modelos conservadores e diminuindo, no caso de modelos não conservadores.

Neste trabalho, portanto, os valores experimentais de carga de ruptura de lajes lisas de concreto armado submetidas a carregamento centrado foram comparados com os resultados

estimados por meio de recomendações normativas EUROCODE 2 (2004), CEB-FIP/MC (2010), ACI 318 (2014) e ABNT NBR 6118 (2014) e do modelo teórico de Marques (2018).

### 6.2.1 Equacionamento do Erro de Modelo ( $E_m$ )

Os valores de erro de modelo são obtidos individualmente para cada ensaio realizado, bastando-se determinar os valores teóricos de carga de ruptura das lajes a partir das equações contidas nas prescrições normativas e no modelo teórico de Marques (2018). Dessa forma, a variável aleatória erro de modelo ( $E_m$ ) é calculada considerando os valores médios de resistência dos materiais e sem a consideração dos coeficientes parciais de segurança, conforme Equação 6.1.

$$E_m = \frac{V_{exp}}{V_{teo}} \quad (6.1)$$

Nessa equação,  $V_{exp}$  é a carga de ruptura da laje obtida experimentalmente e  $V_{teo}$  é o valor teórico da carga de ruptura para cada modelo teórico considerado.

A média da variável aleatória erro de modelo ( $E_m, média$ ) é conhecida como fator de tendenciosidade (*bias factor*) do modelo e indica se o mesmo é conservador ou contrário a segurança. O valor unitário representa que o modelo teórico não possui qualquer tendenciosidade sendo, portanto, considerado um modelo ideal. Para valores médios da variável superiores à unidade, tem-se um modelo teórico a favor da segurança em relação às observações experimentais, e o oposto para valores abaixo da unidade (BECK et al., 2009; BOLANDIM, 2011; SANTOS, 2012).

Com relação ao desvio padrão desta variável ( $E_m, desvio$ ), esse corresponde ao erro aleatório do modelo teórico devido à incapacidade de se prever, em todas as situações de projeto, a verdadeira resistência do elemento estrutural. O desvio padrão é uma referência das incertezas existentes no modelo adotado e no material empregado (OLIVEIRA, 2008).

Oliveira (2008) ainda afirma que idealmente, o fator de tendenciosidade ( $E_m, média$ ) deve ser utilizado para corrigir o modelo, fazendo com que, em média, o modelo corrigido resulte na carga de ruptura correta. Introduzindo essa correção, a carga de ruptura teórica pode ser obtida mediante Equação 6.2.

$$V_{teo}^{cor} = E_{m,média} \cdot V_{teo} \quad (6.2)$$

A variável aleatória  $E_m$  corrigida é obtida pela Equação 6.3. A média passa a ser unitária (modelo corrigido sem tendência) e o desvio-padrão resulta na Equação 6.4.

$$E_m^{cor} = \frac{E_m}{E_{m,média}} \quad (6.3)$$

$$E_{m,desvio}^{cor} = \frac{E_{m,desvio}}{E_{m,média}} \quad (6.4)$$

Como visto anteriormente, para a incorporação da variável aleatória erro de modelo nas análises de confiabilidade, é necessário obter informações estatísticas, tais como o valor médio, coeficiente de variação e tipo de distribuição da variável e corrigir as incertezas do modelo.

As análises dos resultados da variável  $E_m$  são apresentadas no Capítulo 7 e consistiram, primeiramente, em investigar a dispersão e o nível de conservadorismo das instruções normativas e do modelo teórico para previsão da carga de ruptura de lajes lisas de concreto armado considerados neste trabalho. Para isso, os valores de  $E_m$  foram avaliados segundo uma adaptação do critério de penalidade proposto por Collins (2001), o *Demerit Points Classification* (DPC), conforme Tabela 6.1. Esse critério adaptado às lajes lisas foi utilizado também nos trabalhos por Moraes Neto (2013) e Pinto (2015).

**Tabela 6.1 - Adaptação do critério de Collins (2001) - DPC**

<i>Intervalo</i>	$E_m = V_{exp}/V_{teo}$	<b>Classificação</b>	<b>Penalidade</b>
I	< 0,50	Extremamente perigoso	10
II	[0,50 - 0,85[	Perigoso	5
III	[0,85 - 1,15[	Segurança apropriada	0
IV	[1,15 - 2,00[	Conservador	1
V	$\geq 2,00$	Extremamente conservador	2

Fonte: Collins, 2001 – adaptado.

## 6.2.2 Modelos Lineares Generalizados (MLG)

Modelos de regressão buscam elaborar uma função que relacione em termos médios a variação da variável dependente ( $Y$ ) com a variação de variáveis independentes ( $X$ ). A parcela de variação da variável dependente, não explicada pela variação das variáveis independentes, é atribuída a uma variável aleatória denominada erro. Dada essa função, tem-se que a partir de valores das variáveis independentes, ou covariáveis, pode-se estimar o valor da variável de interesse. As formas mais simples de modelos de regressão envolvem uma dependência linear entre a resposta e as covariáveis, e ainda supõe que o erro tenha distribuição normal em torno de zero, que são conhecidos como Modelos de Regressão Linear (MCCULLAGH e NELDER, 1989).

No caso dos Modelos de Regressão Linear, a variável resposta é obtida por uma combinação linear das covariáveis adicionada por um erro, cuja distribuição supõe-se ser normal. Sendo assim, esses modelos requerem que a variável resposta também siga uma distribuição normal. No entanto, na prática isso muitas vezes não ocorre.

Em 1972 uma extensão do modelo de regressão linear foi proposta por Nelder e Wedderburn, constituindo os Modelos Lineares Generalizados. Esses modelos admitem a não normalidade nos erros  $e$ , portanto, da variável resposta.

Segundo Silvano (2003), os modelos lineares generalizados (MLG) são uma extensão dos modelos normais lineares, ou seja,  $Y = X\lambda + \varepsilon$ , em que  $Y$  representa o vetor de dimensões  $n \times 1$  de dados observados;  $X$ , de dimensões  $n \times p$ , é a matriz de delineamento;  $\lambda$ , de dimensões  $p \times 1$ , é um vetor de parâmetros desconhecidos fixos e  $\varepsilon$  é o vetor de dimensões  $n \times 1$  de erros aleatórios.

Esses modelos são caracterizados por três componentes distintas (MCCULLAGH e NELDER, 1989):

- 1) Componente aleatória que identifica a variável resposta  $Y$  e especifica uma distribuição  $Y$  pertencente à família exponencial;
- 2) Componente sistemática que especifica as variáveis explicativas do modelo e considera uma combinação linear dessas variáveis;
- 3) Função de ligação que estabelece a ligação entre a componente aleatória e a sistemática.

Os MLG pressupõem que a distribuição da variável resposta  $Y$  pertence à família exponencial, cuja função densidade de probabilidade, ou função massa de probabilidade, pode ser expressa como:

$$f(y|\theta, \phi) = \exp \left[ \frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi) \right] \quad (6.5)$$

Nessa equação,  $a(\phi)$ ,  $b(\theta)$  e  $c(y, \phi)$  são funções específicas para cada distribuição. O parâmetro  $\theta$  é o parâmetro de localização, também denominado parâmetro canônico, e  $\phi$  é um parâmetro de dispersão,  $\phi > 0$ , geralmente denominado por  $\sigma^2$ .

De acordo com a função de densidade probabilidade (Eq. 6.5), a média e a variância da variável resposta  $Y$  são dadas respectivamente por:

$$E(Y) = \mu = \frac{db(\theta)}{d\theta} \quad (6.6)$$

$$Var(Y) = \frac{d^2b(\theta)}{d\theta^2} a(\phi) \quad (6.7)$$

Os MLG podem ser utilizados quando a distribuição da variável de interesse é qualquer distribuição da família exponencial, tais como a Gaussiana, Binomial, Gama e Poisson.

Neste trabalho, modelos lineares generalizados foram construídos para descrever a variável  $E_m$  em função de suas covariáveis significativas. Além disso, esses modelos foram aplicados nas análises de confiabilidade, apresentados no Capítulo 7.

Para subsidiar as análises descritas neste item, uma Base de Dados foi elaborada, contendo as características físicas e geométricas de lajes lisas, assim como os valores experimentais de carga de ruptura obtidos por diversos pesquisadores. Essa Base de Dados contempla informações de lajes ensaiadas com ou sem armaduras de cisalhamento, como também de lajes com ou sem aberturas, sendo que todas foram submetidas a carregamento centrado.

No total foram coletadas informações de 240 lajes (além das nove lajes estudadas neste trabalho). A Tabela 6.2 contém a relação de pesquisadores e quantidades de lajes

consideradas de cada autor na Base de Dados. As características físicas e geométricas dessas lajes podem ser verificadas no Apêndice D.

**Tabela 6.2 - Relação de pesquisadores e quantidades de lajes contidos na Base de Dados deste trabalho**

<b>Autor</b>	<b>Quantidade de lajes</b>
Elstner e Hognestad (1956)	18
Gomes (1991)	12
Gomes e Andrade (1995)	13
Andrade (1999)	8
Trautwein (2001)	3
Oliveira (2003)	5
Silva (2003)	12
Teng et al. (2004)	13
Borges (2004)	19
Musse (2004)	4
Souza (2004)	8
Trautwein (2006)	10
Vaz (2007)	10
Damasceno (2007)	8
Souza (2008)	8
Guandalini et al. (2009)	10
Sagaseta et al. (2011)	6
Lips et al. (2012)	10
Oliveira (2013)	5
Oukaili e Salman (2014)	6
Anil et al. (2014)	9
Ferreira et al. (2014)	6
Ha et al. (2015)	8
Shu et al. (2017)	3
Lourenço (2018)	5
Marques (2018)	9
Teng et al. (2018)	12

### 6.3 REQUISITOS DE SISTEMAS ESTRUTURAIS

As estruturas e os elementos estruturais são projetados, construídos e mantidos de modo a cumprir uma determinada função estrutural (BECK, 2012). Esta função deve ser cumprida:

- a) durante um determinado período, chamado de vida útil ou vida de projeto,
- b) com um nível adequado de segurança e,
- c) de maneira economicamente viável.

Em particular, estruturas e elementos estruturais devem cumprir os seguintes requisitos básicos:

- requisito de serviço: uma estrutura deve se manter em condições apropriadas para a execução da função a qual se destina durante todo o período de vida útil;
- requisito de segurança: uma estrutura necessita suportar carregamentos extremos esporádicos e carregamentos repetitivos aos quais a mesma esteja sujeita dentro do período de vida previsto, sem entrar em colapso ou apresentar severos danos permanentes;
- requisito de robustez: uma estrutura não deve ser danificada por eventos acidentais, como incêndios, explosões, impacto ou erros humanos de maneira desproporcional a severidade do evento causador do dano.

Aliado aos três requisitos básicos apresentados anteriormente, as estruturas e os elementos estruturais devem satisfazer ainda os seguintes requisitos:

- requisito econômico: uma estrutura deve atender aos três requisitos básicos sem comprometer sua capacidade de gerar lucro, sob pena de se tornar economicamente inviável;
- requisito social: uma estrutura deve atender aos quatro requisitos anteriores com níveis de risco aceitáveis por parte do público ou usuário.

#### 6.4 ESTADOS LIMITES

O desempenho de um sistema estrutural é considerado satisfatório quando cumpre com os requisitos básicos de serviço e de segurança. Esses requisitos referem-se a capacidade do sistema resistir aos carregamentos aos quais está sujeito durante toda sua vida útil, mantendo-se em condições apropriadas para a execução da função a qual se destina, sem apresentar graves danos permanentes ou entrar em colapso (TESSARI, 2016).

Segundo Beck (2012), o não atendimento de um requisito de serviço ou de segurança representa um estado indesejável da estrutura. Cada distinta maneira que possa levar a um estado indesejável é chamada, genericamente, de um modo de falha. Cada modo de falha origina um estado limite. Os modos de falha e os estados limites correspondentes representam modelos idealizados de falhas estruturais.

Um estado limite é definido como sendo a fronteira entre o desempenho desejado e o indesejado de uma estrutura. Existem diversos estados limites a serem considerados em um

projeto estrutural. Normalmente, definem-se dois tipos básicos de estados limites: os estados limites últimos (correspondente aos requisitos de segurança) e os estados limites de utilização (correspondente aos requisitos de serviço). Essa é apenas uma classificação simplificada. Em muitos casos particulares, alguns novos estados limites intermediários podem ser considerados. Assim, definido um estado limite (ou estados limites) para a estrutura, o cálculo da confiabilidade fica condicionado a esse estado (NOGUEIRA, 2010).

De acordo com a ABNT NBR 8681 (2003), os estados limites últimos referem-se as ocorrências que determinam a paralisação total ou parcial de uma construção. Dentre eles, citam-se: ruptura dos materiais (esmagamento do concreto comprimido, alongamento excessivo da armadura), instabilidade global, ruptura das ligações, ruptura por cisalhamento e colapsos progressivos. Já os estados limites de utilização são aqueles que causam efeitos estruturais que não respeitam as condições especificadas para o uso normal da construção, ou que são indícios de comprometimento da sua durabilidade. Dentre eles estão deslocamento excessivo, vibração excessiva, deformações permanentes, formação e abertura de fissuras.

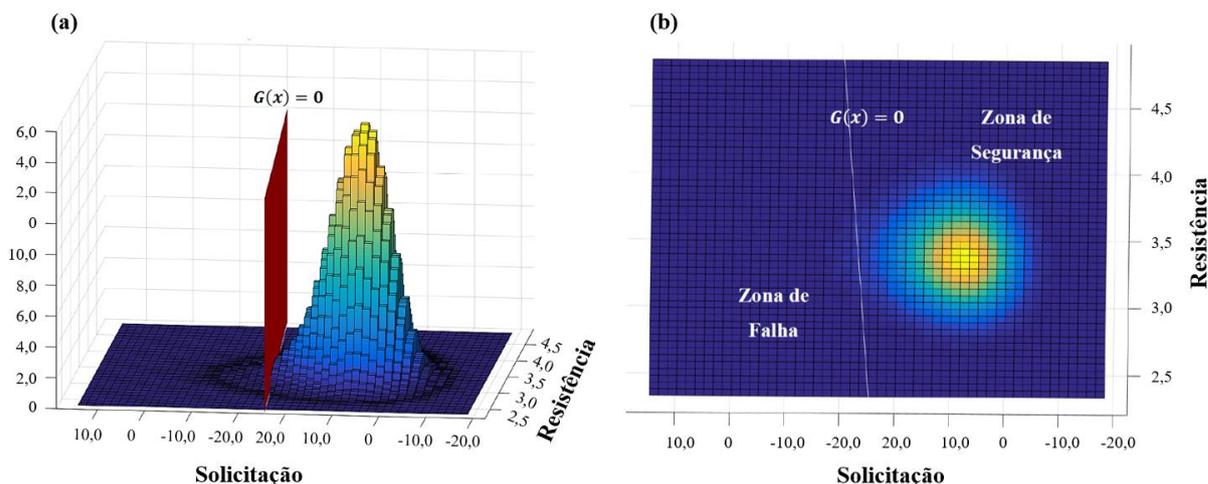
Os estados limites e, portanto, os modos de falha de estruturas e de elementos estruturais podem ser quantificados através de equações chamadas de equações de estado limite. De modo geral, essas equações são expressas em termos de uma margem de segurança, isto é, uma equação que expresse a diferença entre a capacidade resistente da estrutura e as ações ou efeitos dos carregamentos que agem sobre ela. Define-se, portanto, uma equação de estado limite a partir da Equação 6.8 (BECK, 2012; NOGUEIRA, 2005).

$$G(x_i) = R(x_i) - S(x_i) \quad (6.8)$$

Nessa equação,  $x_i$  corresponde as diversas variáveis aleatórias que influenciam sobre o desempenho da estrutura,  $G(x_i)$  é a função de desempenho ou estado limite,  $R(x_i)$  é a resistência ou capacidade resistente da estrutura em função das variáveis de projeto e  $S(x_i)$  é a ação ou solicitação atuante sobre a estrutura.

Uma equação de estado limite, como  $G(x_i)$ , separa duas situações: uma de segurança e outra de falha. Se  $G(x_i) > 0$ , considera-se que os requerimentos de projeto têm sido devidamente satisfeitos e correspondem a um ponto no domínio de segurança. Se  $G(x_i) \leq 0$ , os requerimentos de projeto não foram satisfeitos e correspondem a um ponto no domínio de falha ( $\Omega_f$ ).

Com a Eq. (6.8), é possível verificar a condição de segurança de uma estrutura, estabelecendo as regiões seguras e as regiões de falha, segundo a Figura 6.1. É importante ressaltar que a Eq. (6.8) expressa o caso geral, ou seja, tanto a resistência quanto a solicitação dependem das variáveis aleatórias, o que as torna também variáveis aleatórias.



**Figura 6.1 - Histogramas tridimensional (a) e bidimensional (b) da resistência e solicitação e domínios de falha e não-falha**

Fonte: Nova, 2017.

A Tabela 6.3 apresenta as equações de estados limites consideradas nesta pesquisa, como também as indicações das equações utilizadas como referência. O detalhamento das funções de estados limites apresentadas na Tabela 6.3 encontram-se no Item 6.11.

**Tabela 6.3 - Equações de estados limites consideradas**

Modelo de previsão	$G(x_i) = R(x_i) - S(x_i)$	
	Equações de estados limites	Equações de referência
EUROCODE 2 (2004)	$G_1 = V_{exp} - V_{Rd,max}$	Eq. (2.3)
	$G_2 = V_{exp} - V_{Rd,c}$	Eq. (2.6)
	$G_3 = V_{exp} - E_m V_{teo}$	Eq. (2.6)
CEB-FIP/MC (2010)	$G_1 = V_{exp} - V_{Rd,c}$	Eq. (2.14)
	$G_2 = V_{exp} - E_m V_{teo}$	Eq. (2.14)
ACI 318 (2014)	$G_1 = V_{exp} - V_c$	Eq. (2.28) a Eq. (2.30)
	$G_2 = V_{exp} - E_m V_{teo}$	Eq. (2.28) a Eq. (2.30)
ABNT NBR 6118 (2014)	$G_1 = V_{exp} - V_{Rd1}$	Eq. (2.36)
	$G_2 = V_{exp} - V_{Rd2}$	Eq. (2.35)
	$G_3 = V_{exp} - E_m V_{teo}$	Eq. (2.36)
<i>PunCalc</i> <sup>a</sup>	$G_1 = V_{exp} - E_m V_{teo}$	Eq. (2.129)

<sup>a</sup> Programa implementado computacionalmente com base no modelo teórico de Marques (2018), considerando  $r_1 = 1,35d$ .

## 6.5 PROBABILIDADE DE FALHA

A probabilidade de falha pode ser definida como a propensão a ocorrer um evento de falha, ou seja, que um estado limite seja alcançado. Deve-se salientar que o termo falha é bastante abrangente, significando a interrupção de uma determinada função da estrutura e não necessariamente ao seu colapso. O complemento da probabilidade de falha é a confiabilidade estrutural (Equação 6.9), que trata da propensão de que um estado limite não seja alcançado, considerando as variáveis fundamentais do projeto estrutural (LEONEL, 2009).

$$C_E = 1 - P_f \quad (6.9)$$

O problema fundamental de confiabilidade estrutural considera apenas um efeito de ação  $S$  resistido por uma resistência  $R$ . Tanto  $R$  quanto  $S$  são descritos por uma função de densidade de probabilidade,  $f_R(\cdot)$  e  $f_S(\cdot)$ , respectivamente. Uma estrutura entra em colapso se a resistência  $R$  inerente ao sistema é menor ou igual do que a solicitação  $S$  atuante. O objetivo da análise de confiabilidade é assegurar o evento ( $R > S$ ) durante toda a vida útil da estrutura. Essa garantia é possível somente em termos da probabilidade  $P(R > S)$ . Portanto, representa a medida realista da confiabilidade da estrutura (BERNARDO, 1999; LEONEL, 2009).

Sendo resistência e solicitação variáveis aleatórias estatisticamente independentes, com distribuições de probabilidade conhecidas e estacionárias no tempo, a probabilidade de falha,  $P_f$ , pode ser avaliada pela solução da Equação 6.10.

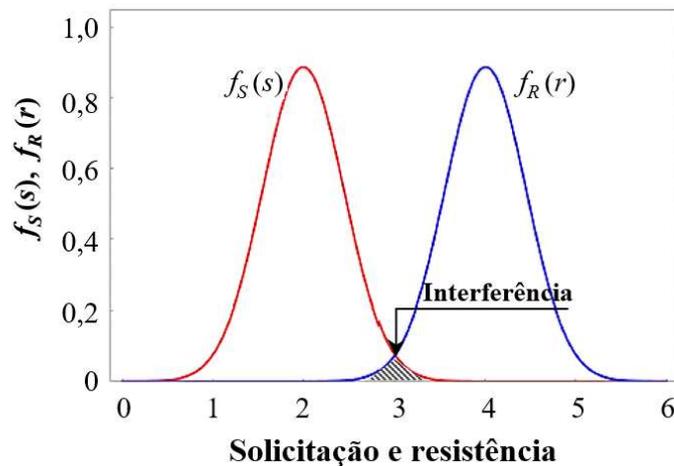
$$P_f = Prob[(R - S) \leq 0] = \int_0^{\infty} F_R(x) \cdot f_S(x) dx \quad (6.10)$$

Na equação exposta,  $F_R(x)$  é a função de probabilidade acumulada da resistência e  $f_S(x)$  é a função densidade de probabilidade da solicitação. Essa equação é conhecida como integral de convolução com relação à “ $x$ ”, correspondendo a soma de todos os casos de solicitação para os quais a resistência é menor do que a solicitação (LEONEL, 2009).

A Eq. (6.10) pode também ser escrita em termos da função de probabilidade acumulada da solicitação,  $F_S(x)$ , e da função densidade de probabilidade da resistência  $f_R(x)$ . Assim:

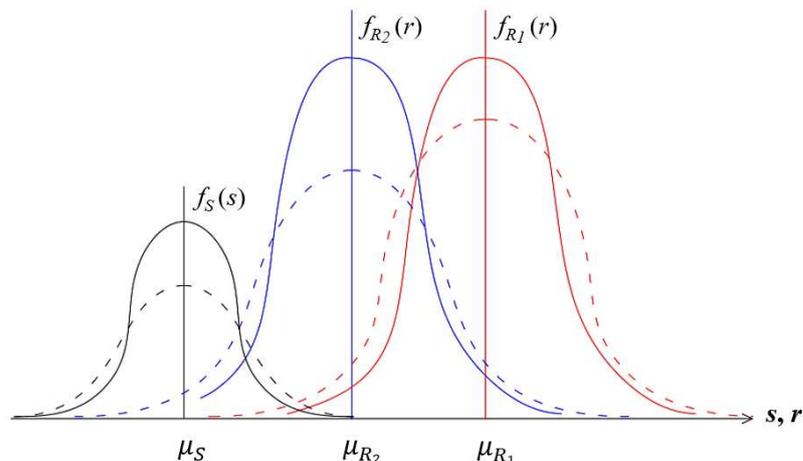
$$P_f = Prob[(R - S) \leq 0] = \int_0^{\infty} [1 - F_S(x)] \cdot f_R(x) dx \quad (6.11)$$

Portanto, a probabilidade de falha vem a ser a área sob a curva  $f_S(x)F_R(x)$ . Esta área é proporcional (mas não idêntica) a área de interferência entre as distribuições de  $R$  e  $S$ , mostrada (região hachurada) na Figura 6.2. Por esta semelhança, este problema é também conhecido na literatura como o problema de interferência entre populações (BECK, 2012).



**Figura 6.2 - Problema fundamental de confiabilidade (interferência entre populações)**  
Fonte: Beck, 2012.

É importante observar que a probabilidade de falha é diretamente influenciada pela forma das distribuições de probabilidade, bem como pelo grau de dispersão das respectivas variáveis aleatórias. A Figura 6.3 ilustra a influência da dispersão dos valores de resistência e solicitação em relação as suas médias.



**Figura 6.3 - Efeito das dispersões entre  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$  em  $P_f$**   
Fonte: Bolandim, 2011.

Nogueira (2005) afirma que quanto maior for o coeficiente de variação das variáveis, maior será a probabilidade de falha. Essa conclusão é lógica, uma vez que coeficientes de variação elevados indicam maiores incertezas sobre as variáveis. Com isso, a redução da probabilidade de falha de uma estrutura de concreto armado está diretamente associada a uma melhoria dos processos de fabricação e controle dos materiais e dos processos construtivos. Procedendo desse modo, seria possível diminuir as incertezas sobre a variável de resistência  $R$  da Eq. (6.8).

## 6.6 ÍNDICE DE CONFIABILIDADE

A primeira definição de índice de confiabilidade pode ser atribuída a Rzhnitsyn, mas quem resumiu e popularizou essa característica de segurança foi Cornell (LEMAIRE, 1997). Esse índice pode ser apresentado considerando, por simplicidade, a equação de estado limite do problema fundamental. Esta equação é definida como a diferença entre a resistência da estrutura e a solicitação atuante na mesma. Assim:

$$G = R - S \quad (6.12)$$

O problema posto pela Eq. (6.12) se resolve, como já apresentado, com o emprego das Eq. (6.10) e Eq. (6.11). No caso de  $R$  e  $S$  serem variáveis aleatórias,  $G$  será também uma variável aleatória. No caso de variáveis aleatórias gaussianas e a função  $G$  linear, obtém-se o seguinte resultado:

$$\mu_G = \mu_R - \mu_S \quad (6.13)$$

$$\sigma_G = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (6.14)$$

sendo que,  $\mu_G$  e  $\sigma_G$  são a média e o desvio padrão da equação de estado limite;  $\mu_R$  e  $\sigma_R$  são a média e o desvio padrão da variável aleatória de resistência da estrutura;  $\mu_S$  e  $\sigma_S$  são a média e o desvio padrão da variável aleatória de solicitação atuante na estrutura.

E a probabilidade de falha resulta (JCSS, 2001):

$$P_f = Prob[G \leq 0] = \Phi(-\beta) \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G} = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (6.15)$$

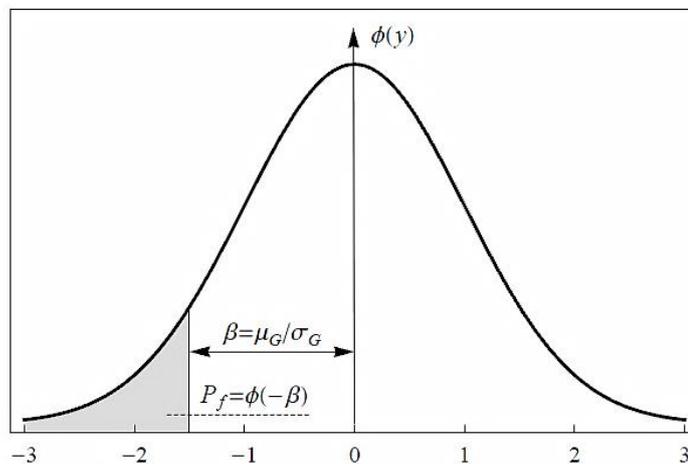
sendo  $P_f$  a probabilidade de falha e  $\beta$  o índice de confiabilidade.

Inicialmente, essa aproximação foi erroneamente generalizada. Entretanto, após algum tempo, foi corretamente definida por Hasofer e Lind, que propuseram escolher um espaço de funções normais Gaussianas (média nula, desvio padrão unitário,  $N(0,1)$ ) para representar a definição de  $\beta$ , independente da representação no espaço físico. Este espaço é denominado espaço reduzido, espaço normalizado, espaço normal padrão, ou simplesmente padronizado (LEMAIRE, 1997).

Apesar da Eq. (6.15) apresentar o índice de confiabilidade em apenas duas variáveis gaussianas, é possível a abordagem de problemas onde as variáveis apresentem uma distribuição qualquer. Nesse caso deve ser considerada uma transformação intermediária para a obtenção de variáveis normais equivalentes e só depois calcular as variáveis no espaço normal padrão (LEONEL, 2009).

Geometricamente, o índice de confiabilidade é definido como a menor distância entre a origem do espaço normal padrão não correlacionado e um ponto sobre a equação de estado de limite,  $G$  igual a zero (Figura 6.4).

De grande importância também é o ponto sobre a equação de estado limite mais próximo a origem no espaço normal padrão. Esse é o ponto de falha mais provável. De posse desse ponto no espaço normal padrão, deve-se fazer a transformação para a sua obtenção no espaço físico. No espaço físico, esse ponto é chamado de ponto de projeto ( $y^*$ ), indicando o conjunto de valores que provavelmente conduz a falha (LEONEL, 2009).



**Figura 6.4 - Aproximação de primeira ordem - integração unidimensional**

Fonte: Beck, 2012.

Quando o modelo probabilístico utilizado para a análise de confiabilidade de uma estrutura é fortemente influenciado por fatores subjetivos, o resultado estimado nem sempre representa a real confiabilidade da estrutura, devendo ser interpretado apenas como uma medida para comparação. Nesses casos, não é possível julgar de imediato se a confiabilidade estimada é suficientemente alta sem antes definir um valor de referência (CORDEIRO, 2016; TESSARI, 2016).

Na Tabela 6.4, índices de confiabilidade alvo e as correspondentes probabilidades de falha são apresentados para os Estados Limites Último (ELU) e de Serviço (ELS), com base nas recomendações propostas pela Comissão Conjunta sobre Segurança Estrutural (JCSS, 2001). Os índices e respectivas taxas de falha fornecidos correspondem a um período de retorno de um ano.

**Tabela 6.4 - Índices de confiabilidade alvo  $\beta$  e respectivas taxas de falha associadas**

Custo relativo das medidas de segurança	ELU – Consequências de falha			ELS irreversível
	Pequenas	Moderadas	Grandes	Índice alvo
Alto	$\beta = 3,1$ ( $P_f \approx 10^{-3}$ )	$\beta = 3,3$ ( $P_f \approx 10^{-4}$ )	$\beta = 3,7$ ( $P_f \approx 10^{-4}$ )	$\beta = 1,3$ ( $P_f \approx 10^{-1}$ )
Normal	$\beta = 3,7$ ( $P_f \approx 10^{-4}$ )	$\beta = 4,2$ ( $P_f \approx 10^{-5}$ )	$\beta = 4,4$ ( $P_f \approx 10^{-6}$ )	$\beta = 1,7$ ( $P_f \approx 10^{-2}$ )
Baixo	$\beta = 4,2$ ( $P_f \approx 10^{-5}$ )	$\beta = 4,4$ ( $P_f \approx 10^{-6}$ )	$\beta = 4,7$ ( $P_f \approx 10^{-6}$ )	$\beta = 2,3$ ( $P_f \approx 10^{-2}$ )

Fonte: JCSS, 2001.

As consequências mencionadas na Tabela 6.4 são definidas como:

- Consequências leves de falha: para estruturas que estão associadas a um risco de perda de vida pequeno em caso de ocorrência de dano, e com consequências econômicas insignificantes (exemplo: estruturas de agricultura e silos).
- Consequências moderadas de falha: para estruturas associadas a um risco de perda de vida médio em caso de ocorrência de dano, e com consequências econômicas consideráveis (exemplo: prédios industriais, de escritórios ou residenciais).
- Consequências graves de falha: para estruturas associadas a um risco de perda de vida alto em caso de ocorrência de dano, e com consequências econômicas significantes (exemplo: pontes principais, teatros, hospitais, pontes altas, entre outros).

## 6.7 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Em termos de análise estrutural, a simulação pode ser entendida como uma forma de simular numericamente um experimento que na prática não é realizável. Este experimento consiste em submeter a estrutura para todas as combinações de resistências e de ações, sendo estas variáveis aleatórias e/ou processos estocásticos (BECK, 2012).

O Método de Simulação de Monte Carlo (*Monte Carlo Simulation - MCS*) é um dos mais utilizados quando se deseja obter uma estimativa precisa da probabilidade de falha. Sua funcionalidade é bem aproveitada em problemas que envolvem variáveis aleatórias com distribuição de frequência conhecida ou assumida. O MCS caracteriza-se por envolver grande número de repetições de um processo de amostragem ou de realizações das variáveis aleatórias do problema. Essas realizações são obtidas de acordo com números aleatórios, gerados conforme conveniente distribuição de probabilidades.

As repetições fornecem um conjunto de soluções (uma para cada realização) que representam a resposta simulada do modelo mecânico. Essa amostra de soluções é similar, por exemplo, a uma realização de experimentos em laboratório e, portanto, os resultados também podem receber tratamento estatístico. Sendo uma técnica de amostragem, o método está sujeito aos problemas relativos a erros de amostragem. Normalmente, requerem-se amostras de tamanho elevado e não tendenciosa para que um conjunto de simulações apresente resultados que descrevam um fenômeno com boa precisão (LEONEL, 2009; NEVES, 2004; NOGUEIRA, 2005).

Segundo Santos e Beck (2012), outros métodos de transformação como o FORM (*First Order Reliability Method*) e o SORM (*Second Order Reliability Method*) não são eficientes para problemas que envolvem equações de estado limite altamente não lineares e que possuem elevado número de variáveis. Esses métodos realizam uma aproximação da equação de estado limite de forma linear (FORM) ou de forma quadrática (SORM).

Coelho (2017) afirma que esses métodos não são robustos na análise de problemas que apresentam múltiplos modos de falha, já que o conceito de ponto de projeto torna-se não definido. Para tais problemas, métodos de simulação fornecem soluções mais precisas. Nesse contexto, o MCS torna-se uma alternativa ao FORM/SORM na resolução de problemas de confiabilidade.

O núcleo do método reside na obtenção do conjunto de realizações aleatórias, obedecendo a uma lei definida, através da geração de números aleatórios. A obtenção de uma

amostra aleatória de uma variável aleatória, com função de distribuição cumulativa de probabilidades  $F_X(x)$  conhecida, pode ser dividida em duas etapas (BECK, 2012; LEONEL, 2009):

1. geração de um número aleatório  $u_i$  com distribuição uniforme entre 0 e 1;
2. determinação da inversa da função de distribuição cumulativa de probabilidades:

$$x_i = F_X^{-1}(u_i) \quad (6.16)$$

Amostras de variáveis aleatórias com distribuição normal e log-normal podem ser obtidas a partir de um algoritmo específico (BECK, 2012). Um par de amostras independentes  $y_1$  e  $y_2$  de uma variável normal padrão é obtido a partir de um par de amostras independentes  $u_1$  e  $u_2$ , uniformemente distribuídas entre 0 e 1, conforme demonstrado nas Equações 6.17 e 6.18.

$$y_1 = \sqrt{-2 \ln(u_1)} \cos(2\pi u_2) \quad (6.17)$$

$$y_2 = \sqrt{-2 \ln(u_1)} \text{sen}(2\pi u_2) \quad (6.18)$$

Com isso, as amostras da variável  $X \sim N(\mu, \sigma)$  são, então, obtidas a partir de:

$$x_i = y_i \sigma + \mu \quad (6.19)$$

E as amostras de uma variável log-normal  $X \sim LN(\lambda, \xi)$  são obtidas de:

$$x_i = \exp[y_i \xi + \lambda] \quad (6.20)$$

Deve-se comentar que as gerações aleatórias são feitas com base em parâmetros de entrada das variáveis aleatórias. Por esse motivo e pela utilização de funções determinísticas pelos computadores, os valores obtidos não são aleatórios, mas sim pseudoaleatórios (NOGUEIRA, 2005).

Por meio do método de Monte Carlo, a probabilidade de falha é calculada pela Equação 6.21.

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_{X_i}(x_i) dx_i = \int_{\Omega} I(x_i) \cdot f_{X_i}(x_i) dx_i = E(I(x)) \quad (6.21)$$

O estimador  $I(x)$  é definido como:

$$I(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega_f \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega_f \end{cases} \quad (6.22)$$

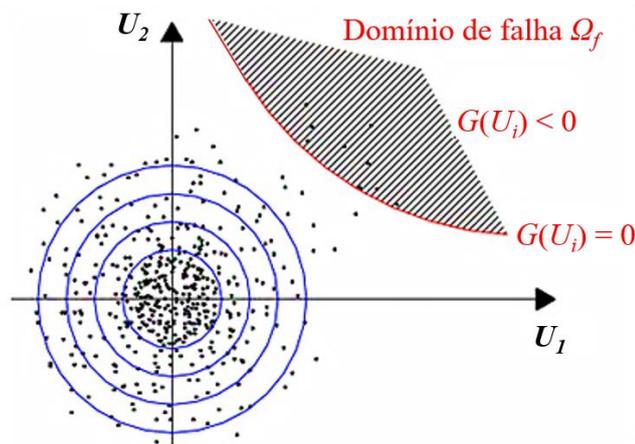
Repetindo as análises para um número de simulações conveniente,  $n_s$ , a média empírica dos valores de  $I(x)$  é um estimador da probabilidade de falha. Ou seja:

$$\bar{P}_f = \frac{1}{n_s} \cdot \sum_{i=1}^{n_s} I(x_i) \quad (6.23)$$

A variância do estimador  $I(x)$  é dado por:

$$\sigma_{I(x)}^2 = \frac{1}{n_s} \cdot \left[ n_s \sum_{i=1}^{n_s} I^2(x_i) - \left( \sum_{i=1}^{n_s} I(x_i) \right)^2 \right] \quad (6.24)$$

Graficamente, cada experimento, em uma análise, via simulação de Monte Carlo, pode ser visualizada na Figura 6.5. Os pontos que se encontram no domínio de falha fornecem uma aproximação da probabilidade relativa dessa região.



**Figura 6.5 - Sorteio de pontos na simulação de Monte Carlo**

Fonte: Nogueira, 2005 - modificado.

A grande vantagem das simulações de Monte Carlo é que elas permitem substituir o cálculo de integrais complexas que não possuem soluções analíticas fechadas. A simulação entra exatamente nesse ponto, ou seja, produz como resultado um valor para a integral que tende a se estabilizar em torno da média à medida que o número de simulações se aproxima do infinito (NOGUEIRA, 2005).

Entretanto, um inconveniente do método é que há um elevado gasto de tempo de processamento, pois é preciso de um grande número de eventos para se atingir a convergência. Nos problemas de confiabilidade, para se obter uma probabilidade de falha da ordem de  $10^{-n}$ , o número de simulações deve estar compreendido entre  $10^{n+2}$  e  $10^{n+3}$  (NOGUEIRA, 2005; NEVES, 2004; SOARES, 2001).

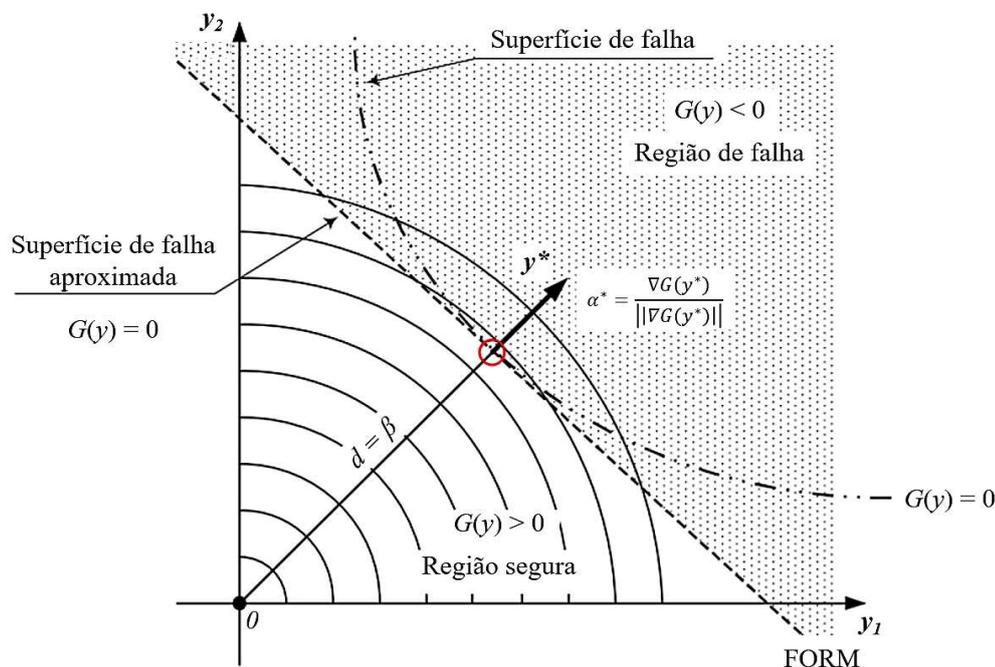
Estratégias de amostragem inteligente e redução da variância foram desenvolvidas para que as variáveis aleatórias sejam deslocadas para os pontos importantes do domínio de falha. Desse modo, há uma expressiva redução no número de simulações necessárias, viabilizando o uso de MCS (SANTOS, 2014). Dentre as técnicas, destaca-se o uso de Amostragem por Importância Adaptativa, Amostragem Assintótica (*Asymptotic Simulation*), Hipercubo Latino (*Latin Hypercube Sampling - LHS*) e Amostragem por Sub-Conjunto (*Subset Simulation*). Contudo, no presente trabalho optou-se por utilizar apenas o MCS sem técnicas de amostragem inteligente.

## 6.8 MÉTODO DE CONFIABILIDADE DE PRIMEIRA ORDEM (FORM)

O método FORM (*First Order Reliability Method*) fornece uma estimativa da probabilidade de falha da estrutura através da linearização da função de estado limite no ponto de projeto no espaço normal padrão. A linearização se faz através de um hiper-plano tangente à superfície de falha no ponto de projeto. O método de primeira ordem não fornece estimativas para o erro cometido com a linearização da equação de estado limite. No entanto, esse erro pode ser avaliado com base na Figura 6.6.

Na Figura 6.6 destaca-se que a precisão da aproximação de primeira ordem depende do grau de não linearidade da equação de estado limite no ponto de projeto. A área hachurada nessa figura entre a superfície de falha e a superfície de falha aproximada corresponde ao conteúdo de probabilidade negligenciado e, portanto, corresponde ao erro da aproximação. Ao se interpretar esta figura, deve-se lembrar de que o maior conteúdo de probabilidades no domínio de falha está nas proximidades do ponto de projeto. Ressalta-se ainda que a

aproximação de primeira ordem é assintótica, isto é, ela melhora a medida que  $\beta$  aumenta (DU, 2005; BECK, 2012).



**Figura 6.6 - Representação gráfica do método FORM**

Fonte: Du, 2005 - adaptado.

O método FORM parte da construção de uma função conjunta de distribuição de probabilidades  $f_X(x)$ , utilizando as distribuições de probabilidades marginais (distribuições de probabilidades de cada uma das variáveis aleatórias do problema) e uma matriz de correlação formada pelos coeficientes de correlação entre pares de variáveis (GOMES, 2010). Nessa construção, as distribuições marginais originais são transformadas em distribuições normais equivalentes (conjunto de variáveis aleatórias correlacionadas), são determinados os coeficientes de correlação equivalentes para as distribuições marginais normais e em seguida a correlação é eliminada, ou seja, incorporada às distribuições marginais. Dessa forma, a função  $f_X(x)$  é transformada em uma distribuição normal padrão multivariada  $f_Y(y)$ .

Este processo envolve a transformação do vetor de variáveis aleatórias  $X$ , com média e desvios-padrão qualquer, em um conjunto  $Y$  de variáveis aleatórias normais com média nula e desvio-padrão unitário. Essa operação é feita por meio da chamada transformação de Hassofer e Lind, conforme Equação 6.25.

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (6.25)$$

Aplicando-se a transformação às variáveis aleatórias  $R$  e  $S$  do problema de confiabilidade fundamental, obtém-se as variáveis transformadas  $Y_1$  e  $Y_2$ . A margem de segurança pode ser reescrita por meio da Equação 6.26.

$$m(y_1, y_2) = R - S = y_1\sigma_R + \mu_R - y_2\sigma_S - \mu_S \quad (6.26)$$

Para  $m(y_1, y_2) = 0$  obtém-se  $y_2$  em função de  $y_1$ :

$$y_2 = \frac{y_1\sigma_R + \mu_R - \mu_S}{\sigma_S} \quad (6.27)$$

O quadrado da distância entre um ponto qualquer  $(y_1, y_2)$  e a origem é dado por  $dist^2 = y_1^2 + y_2^2$ . Derivando essa equação em relação a  $y_1$  e igualando a zero (condição de mínimo), obtém-se a coordenada  $y_1^*$  do ponto sobre a equação  $m(y_1, y_2) = 0$  mais próximo da origem, conforme apresentado na Equação 6.28.

$$y_1^* = -\frac{\sigma_R(\mu_R - \mu_S)}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (6.28)$$

Derivando o quadrado da distância em relação a  $y_2$  e igualando a zero, obtém-se a respectiva coordenada  $y_2^*$

$$y_2^* = -\frac{\sigma_S(\mu_R - \mu_S)}{\sigma_R^* + \sigma_S^*} \quad (6.29)$$

Substituindo o chamado ponto de projeto  $(y_1^*, y_2^*)$  na expressão  $dist^2 = y_1^2 + y_2^2$ , encontra-se a expressão para a mínima distância entre a equação  $m(y_1, y_2) = 0$  e a origem.

$$dist_{min} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sigma_R^* + \sigma_S^*} \quad (6.30)$$

Observa-se que o índice de confiabilidade  $\beta$  é igual a  $dist_{min}$ , ou seja, corresponde à mínima distância entre a equação de estado limite e a origem do espaço normal padrão. A

solução do problema de confiabilidade via FORM envolve a solução de um problema de otimização para busca do ponto de projeto. A seguir é descrito superficialmente um método que foi desenvolvido especificamente para solução do problema de otimização em confiabilidade estrutural, denominado HLRF (*Hassofer, Lind, Rackwitz e Fiessler*).

### 6.8.1 Algoritmo para o cálculo do índice de confiabilidade

Na maioria dos métodos utilizados para análise da confiabilidade, é necessário um algoritmo de otimização para encontrar o ponto de projeto ( $y^*$ ). Nesses métodos, a otimização é utilizada para encontrar a mínima distância entre um ponto sobre a superfície de falha e o centro do sistema de coordenadas no espaço normal padrão não correlacionado.

O algoritmo conhecido como algoritmo de Hassofer, Lind, Rackwitz e Fiessler, ou HLRF, foi desenvolvido especificamente para a solução do problema de otimização em confiabilidade estrutural. Esse algoritmo está baseado na aproximação de um ponto,  $y$ , a superfície de falha,  $G(y) = 0$ , e na perpendicularização entre o vetor posição,  $y$ , e a superfície de falha,  $G(y) = 0$  (HASOFER e LIND, 1974 *apud* BECK, 2012).

Esse algoritmo pode ser descrito nos seguintes passos:

1. Escolha do ponto inicial, geralmente, a origem do espaço normal padrão  $\{y_i^0\} = 0$ .
2. Cálculo da função de estado limite no ponto  $\{y_i^k\} = 0$ ,  $G^k = G(y_1^k, y_2^k, \dots, y_n^k)$ .
3. Cálculo do vetor gradiente da função de estado limite,  $\{\nabla G_i^k\}$ , e de sua respectiva norma,  $\|\nabla G\|^k$ .
4. Cálculo do vetor de cossenos diretores,  $\{\alpha_i^k\}$  e do índice de confiabilidade  $\beta^k$ , por meio das seguintes relações:

$$\{\alpha_i^k\} = \frac{\nabla G_i^k}{\|\nabla G\|^k} \quad (6.31)$$

$$\{\beta^k\} = \frac{G^k - \{\nabla G_i^k\}^T \{y_i^k\}}{\|\nabla G\|^k} \quad (6.32)$$

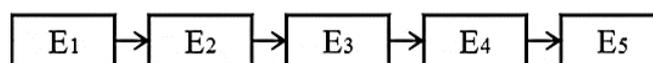
5. Cálculo do próximo ponto  $\{y_i^{k+1}\}$ ,  $\{y_i^{k+1}\} = -\beta^k \cdot \{\alpha_i^k\}$ .

6. Os passos 2 a 5 devem ser repetidos até a convergência, ou seja, até que a diferença do índice de confiabilidade entre duas iterações consecutivas seja menor que determinada tolerância.

## 6.9 CONFIABILIDADE DE SISTEMAS

A análise de confiabilidade de um sistema estrutural aborda a definição dos vários estados limites possíveis assim como o cálculo da probabilidade de se atingir um desses estados limites, usualmente definidos como falha (NEVES, 2004).

Um sistema estrutural pode ser classificado em série ou em paralelo (BECK, 2012). Em série, quando a falha de um componente caracteriza a falha da estrutura. Por isso, sistemas em série são conhecidos como sistemas de correntes (Figura 6.7), para os quais a falha acontece no elo mais fraco (*weakest link system*).



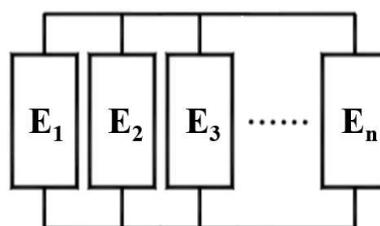
**Figura 6.7 - Sistema em série**

Fonte: Arquivo pessoal.

A probabilidade de falha deste sistema é, então, definida pelo evento união das probabilidades de falha individuais de todos os componentes,  $E_i$ , conforme Equação 6.33.

$$P_f = P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5) \quad (6.33)$$

No sistema em paralelo (Figura 6.8), apenas a falha de todos os componentes em paralelo caracteriza a falha da estrutura. Segundo Neves (2004), em estruturas estaticamente indeterminadas, com muitas seções possíveis de falha, não há o colapso total até que várias dessas seções se encontrem em uma situação limite.



**Figura 6.8 - Sistema em paralelo**

Fonte: Arquivo pessoal.

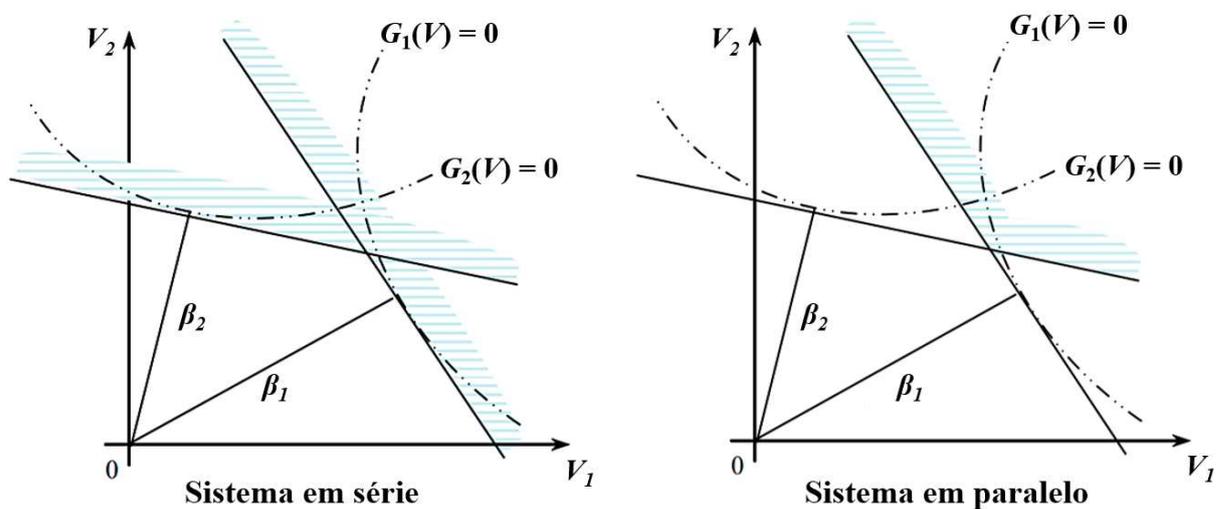
A probabilidade de falha do sistema em paralelo é definida pela intersecção entre os eventos de falha individuais dos componentes. Assim:

$$P_f = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \dots \cap E_n) \quad (634)$$

De acordo com Nogueira (2010), sistemas em paralelo são também chamados de redundantes do tipo ativa ou passiva. Na redundância ativa todos os elementos contribuem simultaneamente para o desempenho da estrutura, mesmo em pequenas intensidades de carregamento; na redundância passiva, um determinado elemento só passa a contribuir depois que outro falhe, ficando dessa forma em caráter de espera até que sua presença seja necessária para o funcionamento da estrutura.

A probabilidade de falha de cada função de estado limite pode ser calculada usando o método FORM, sendo depois avaliada a probabilidade do sistema falhar como um todo, considerando a contribuição de todos os modos como demonstrado na Figura 6.9.

Neste trabalho, a probabilidade de falha foi avaliada para cada equação de estado limite considerada, assim como para equações associadas em um sistema em série.



**Figura 6.9 - Definição de sistemas em série e paralelo na análise de confiabilidade de estruturas pelo método FORM**

Fonte: Almeida, 2008.

## 7 RESULTADOS DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos nas análises estatísticas da variável erro de modelo e de confiabilidade. As análises foram feitas para cada código de projeto e para o modelo teórico de previsão da carga de ruptura de lajes lisas de concreto armado considerados nesta pesquisa.

### 7.1 ANÁLISE DE ERRO DE MODELO

Como visto no Capítulo 6, a variável aleatória erro de modelo ( $E_m$ ) relaciona a carga de ruptura experimental da laje ( $V_{exp}$ ) com o valor dessa carga estimado por códigos normativos ou modelos teóricos ( $V_{teo}$ ), ou seja,  $E_m = V_{exp}/V_{teo}$ . Neste trabalho, o valor de  $V_{teo}$  foi calculado para 249 lajes lisas por meio dos códigos de projeto EUROCODE 2 (2004), ACI 318 (2014) e ABNT NBR 6118 (2014). Para a norma CEB-FIP/MC (2010), a estimativa dessa variável foi feita para 237 lajes (apenas lajes quadradas contidas na Base de Dados).

No modelo de Marques (2018), o valor de  $E_m$  foi avaliado de duas formas distintas: a primeira, com o valor de  $r_l$  (seção crítica de ruptura externa) determinado computacionalmente e a segunda, com  $r_l = 1,35d$ , conforme previsto originalmente no método de Gomes (1991). Para o primeiro caso, pelas restrições do método, o valor de  $V_{teo}$  foi determinado para 171 lajes lisas, sendo elas quadradas e com pilares também quadrados. No segundo caso, avaliou-se a relação  $V_{exp}/V_{teo}$  das lajes desta pesquisa e das lajes ensaiadas por Gomes (1991), totalizando 21 lajes. Em ambos os casos, as estimativas das cargas de ruptura das lajes foram obtidas por meio do programa *PunCalc*, desenvolvido neste trabalho.

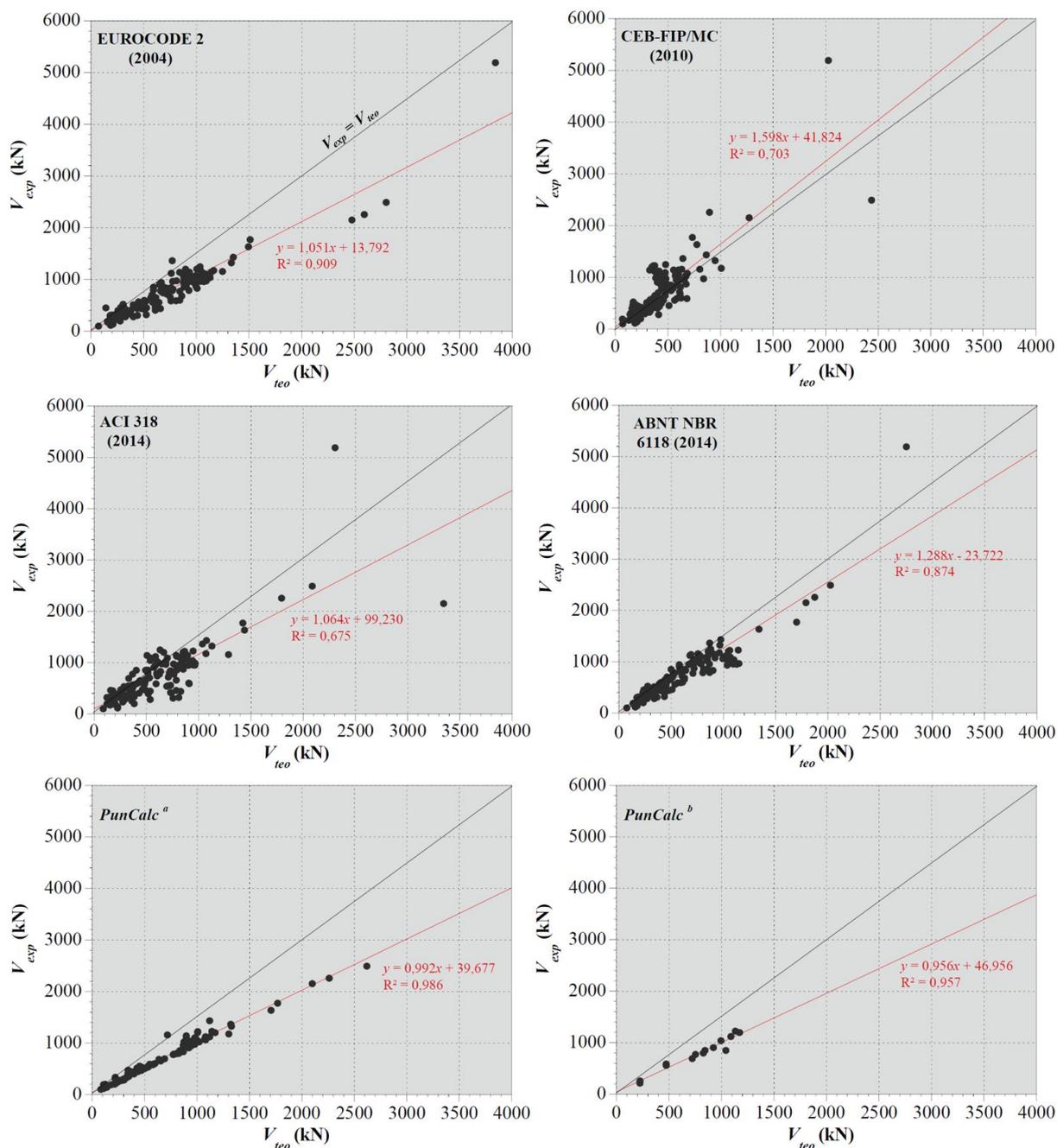
Para a determinação de  $V_{teo}$ , foram adotados os valores médios de resistência dos materiais e sem a consideração dos coeficientes parciais de segurança. O Apêndice E contém os valores estimados para cada modelo de cálculo.

Os resultados das análises estatísticas foram obtidos por meio programa *R 2017 (R Core Team)*, que trata-se de um *software* livre para análise de dados.

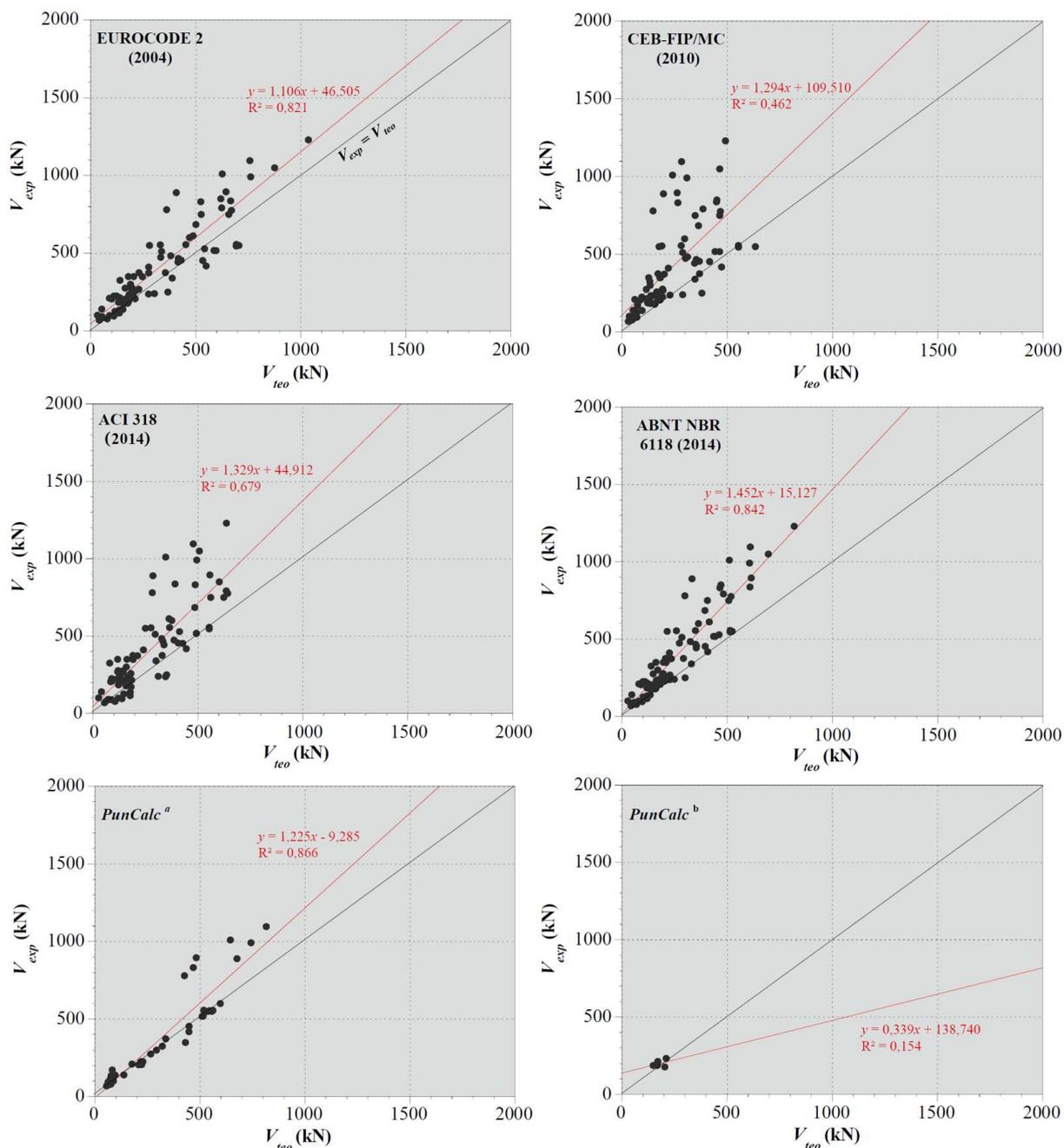
#### 7.1.1 Análise estatística da variável erro de modelo

Os resultados apresentados nas Figuras 7.1 a 7.4 avaliam os desempenhos dos códigos e do modelo teórico em prescrever a resistência última à punção das lajes lisas de

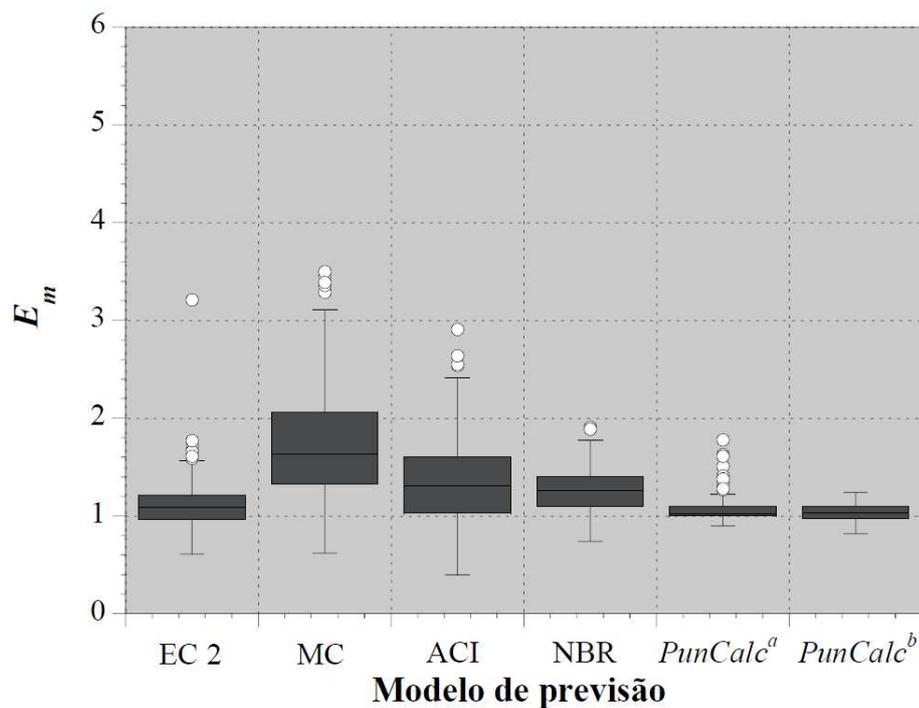
concreto armado com ou sem aberturas. Nessas figuras, *PunCalc*<sup>a</sup> representa os resultados de  $E_m$  obtidos através do programa computacional implementado com o ajuste da variável  $r_l$  para cada laje testada. E ainda, *PunCalc*<sup>b</sup> descreve os resultados estimados das lajes ensaiadas nesta pesquisa e das lajes de Gomes (1991), adotando-se  $r_l$  afastado  $1,35d$  da face do pilar.



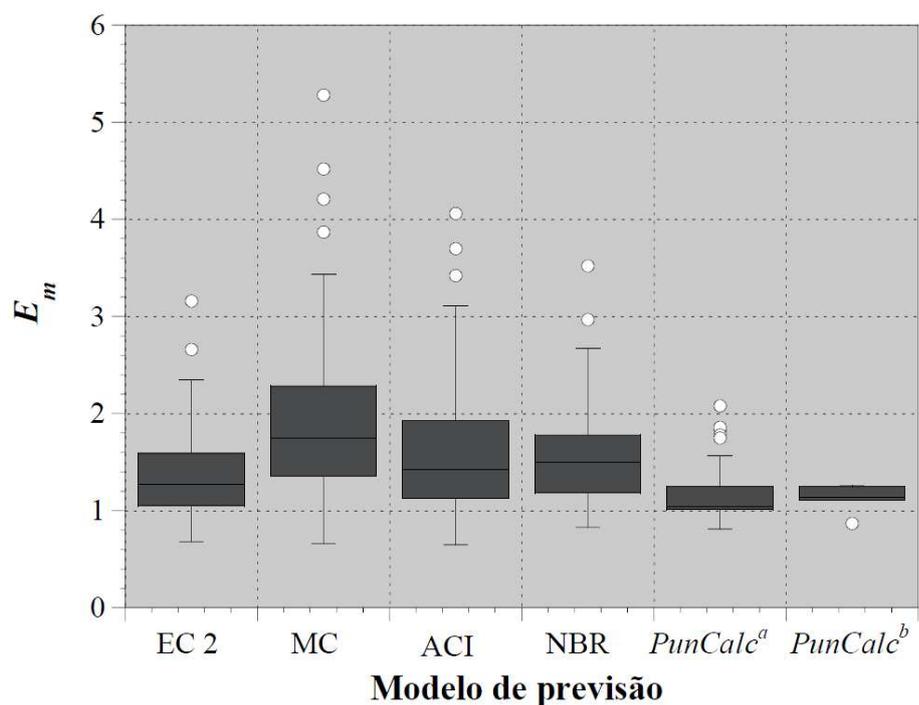
**Figura 7.1 - Avaliação dos resultados quanto à precisão ( $V_{exp}$  versus  $V_{teo}$ ) para lajes sem aberturas**



**Figura 7.2 - Avaliação dos resultados quanto à precisão ( $V_{exp}$  versus  $V_{teo}$ ) para lajes com aberturas**



**Figura 7.3 - Avaliação dos resultados quanto à segurança e à dispersão para lajes sem aberturas**



**Figura 7.4 - Avaliação dos resultados quanto à segurança e à dispersão para lajes com aberturas**

O resumo das análises é apresentado nas Tabelas 7.1 e 7.2 para lajes sem e com aberturas, respectivamente. Essas tabelas, além de exibir a classificação dos códigos segundo a

adaptação do critério de Collins (2001), conforme apresentado no Item 6.2.1, apresenta também valores estatísticos como a média e o coeficiente de variação da variável erro de modelo ( $E_m$ ).

**Tabela 7.1 - Classificação segundo o critério de Collins (2001) para lajes sem aberturas**

Previsões		Intervalos de $E_m^a$					Total	$E_m$ , médio	CV (%)
		I	II	III	IV	V			
EC 2 (2004)	Nº lajes	0	16	88	58	1	163	1,11	25,02
	<b>Penalidade</b>	<b>0</b>	<b>80</b>	<b>0</b>	<b>58</b>	<b>2</b>	<b>140</b>		
MC (2010)	Nº lajes	0	4	18	90	41	153	1,71	35,17
	<b>Penalidade</b>	<b>0</b>	<b>20</b>	<b>0</b>	<b>90</b>	<b>82</b>	<b>192</b>		
ACI 318 (2014)	Nº lajes	2	20	35	92	14	163	1,34	34,71
	<b>Penalidade</b>	<b>20</b>	<b>100</b>	<b>0</b>	<b>92</b>	<b>28</b>	<b>240</b>		
NBR 6118 (2014)	Nº lajes	0	7	40	116	0	163	1,27	18,81
	<b>Penalidade</b>	<b>0</b>	<b>35</b>	<b>0</b>	<b>116</b>	<b>0</b>	<b>151</b>		
<i>PunCalc</i> <sup>b</sup>	Nº lajes	0	0	89	21	0	110	1,08	13,63
	<b>Penalidade</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>21</b>	<b>0</b>	<b>21</b>		
<i>PunCalc</i> <sup>c</sup>	Nº lajes	0	1	11	3	0	15	1,04	9,89
	<b>Penalidade</b>	<b>0</b>	<b>5</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>0</b>	<b>8</b>		

<sup>a</sup> Intervalos de  $E_m$ : < 0,50 (I); [0,50 - 0,85[ (II); [0,85 - 1,15[ (III); [1,15 - 2,00[ (IV) e  $\geq 2,00$  (V).

<sup>b</sup> Resultados obtidos considerando  $r_l$  calculado computacionalmente.

<sup>c</sup> Resultados obtidos considerando  $r_l$  afastado  $1,35d$  da face do pilar.

**Tabela 7.2 - Classificação segundo o critério de Collins (2001) para lajes com aberturas**

Previsões		Intervalos de $E_m^a$					Total	$E_m$ , médio	CV (%)
		I	II	III	IV	V			
EC 2 (2004)	Nº lajes	0	8	22	48	8	86	1,36	32,91
	<b>Penalidade</b>	<b>0</b>	<b>40</b>	<b>0</b>	<b>48</b>	<b>16</b>	<b>104</b>		
MC (2010)	Nº lajes	0	2	11	40	31	84	1,93	44,11
	<b>Penalidade</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>0</b>	<b>40</b>	<b>62</b>	<b>112</b>		
ACI 318 (2014)	Nº lajes	0	9	15	44	18	86	1,59	43,18
	<b>Penalidade</b>	<b>0</b>	<b>45</b>	<b>0</b>	<b>44</b>	<b>36</b>	<b>125</b>		
NBR 6118 (2014)	Nº lajes	0	1	17	56	12	86	1,56	31,17
	<b>Penalidade</b>	<b>0</b>	<b>5</b>	<b>0</b>	<b>56</b>	<b>24</b>	<b>85</b>		
<i>PunCalc</i> <sup>b</sup>	Nº lajes	0	1	40	19	1	61	1,16	23,69
	<b>Penalidade</b>	<b>0</b>	<b>5</b>	<b>0</b>	<b>19</b>	<b>2</b>	<b>26</b>		
<i>PunCalc</i> <sup>c</sup>	Nº lajes	0	0	3	3	0	6	1,13	12,55
	<b>Penalidade</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>0</b>	<b>3</b>		

<sup>a</sup> Intervalos de  $E_m$ : < 0,50 (I); [0,50 - 0,85[ (II); [0,85 - 1,15[ (III); [1,15 - 2,00[ (IV) e  $\geq 2,00$  (V).

<sup>b</sup> Resultados obtidos considerando  $r_l$  calculado computacionalmente.

<sup>c</sup> Resultados obtidos considerando  $r_l$  afastado  $1,35d$  da face do pilar.

A partir das Figuras 7.1 e 7.3 e da Tabela 7.1 constata-se que as prescrições dos códigos EUROCODE 2 (2004) e ABNT NBR 6118 (2014) foram as mais satisfatórias em prever a carga de ruptura das lajes sem aberturas contidas na Base de Dados desta pesquisa. Nesses códigos, foram verificados resultados mais precisos e menos dispersos, com valores médios da variável  $E_m$  iguais a 1,11 e 1,27, nessa ordem, e coeficientes de variação iguais a 25,02% para a norma europeia e 18,81% para a norma brasileira.

Com base no critério de classificação de Collins (2001) contido na Tabela 7.1, verifica-se que 54% e 25% dos valores obtidos pelas normas EUROCODE 2 (2004) e ABNT NBR 6118 (2014), nessa ordem, encontravam-se dentro do intervalo de 0,85 a 1,15, considerado como intervalo ideal (segurança apropriada).

As instruções normativas CEB-FIP/MC (2010) e ACI 318 (2014) apresentaram resultados mais conservadores, com valores médios de  $E_m$  iguais a 1,71 e 1,34, nessa ordem, e coeficientes de variação praticamente iguais. Avaliando os pontos de demérito, essas normas foram as que mais pontuaram, obtendo 192 e 240 pontos, respectivamente. A obtenção de valores mais conservadores pode ser explicada pelo fato de que em ambos os códigos o efeito de tamanho não é considerado. Além disso, a norma americana não considera a taxa de armadura de flexão em suas formulações.

Vale ressaltar que o código CEB-FIP/MC (2010) baseia-se na Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento. Dentre os quatro níveis de aproximação previstos para a determinação da rotação da laje ao redor da área carregada ( $\psi$ ), neste trabalho foi considerado o nível de aproximação II (LoA II).

Nas Figuras 7.2 e 7.4 e na Tabela 7.2 observa-se, novamente, valores mais precisos da variável  $E_m$  para lajes com aberturas obtidos pelas normas EUROCODE 2 (2004) e ABNT NBR 6118 (2014). Os valores médios da variável  $E_m$  para esses códigos de projeto resultaram iguais a 1,36 para a norma europeia e 1,56 para a norma brasileira e coeficientes de variação iguais a 32,91% e 31,17%, nessa ordem.

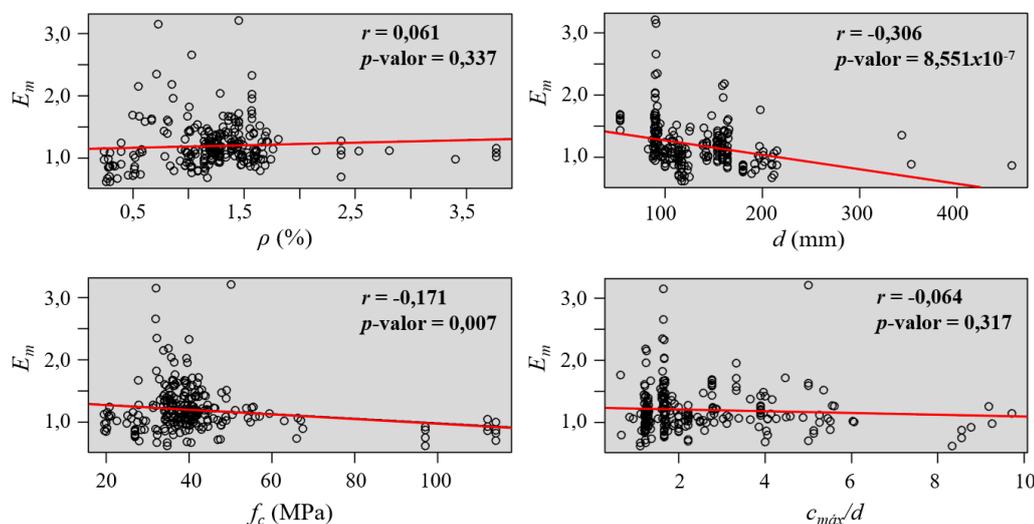
Os resultados obtidos pelo programa *PunCalc* para lajes sem aberturas demonstraram-se satisfatórios para os dois casos considerados ( $r_1$  ajustado computacionalmente e  $r_1 = 1,35d$ ), com  $E_{m, \text{médio}}$  iguais a 1,10 e 1,07 e coeficientes de variação de 18,46% e 11,14%.

Para as lajes com aberturas, os resultados estimados pelo programa *PunCalc* também foram satisfatórios para os casos analisados, com valores médios da variável  $E_m$  iguais a 1,16 e 1,13 e coeficientes de variação de 23,69% e 12,55%.

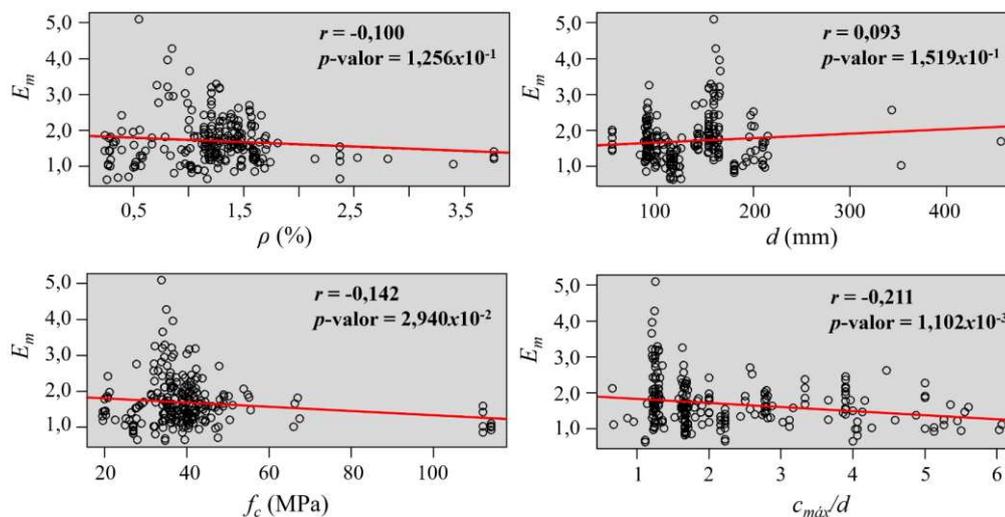
Foi realizada uma análise de correlação (também chamada de análise bivariada) entre o erro de modelo ( $E_m$ ) e outras variáveis candidatas a explicar a relação  $V_{exp}/V_{teo}$ . As variáveis utilizadas nessa análise foram: taxa de armadura de flexão ( $\rho$ ), altura útil da laje ( $d$ ), resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ) e relação entre a maior dimensão do pilar e a altura útil da laje ( $c_{m\acute{a}x}/d$ ).

Nas Figuras 7.5 a 7.9 é possível observar os resultados das análises de correlação entre as variáveis contínuas descritas anteriormente e a variável resposta, sendo esses resultados obtidos para cada modelo de previsão. A Figura 7.9 apresenta os resultados obtidos por meio do programa *PunCalc* para  $r_l = 1,35d$ . Nessa figura, a correlação entre  $E_m$  é avaliada também com a variável  $r_l$ .

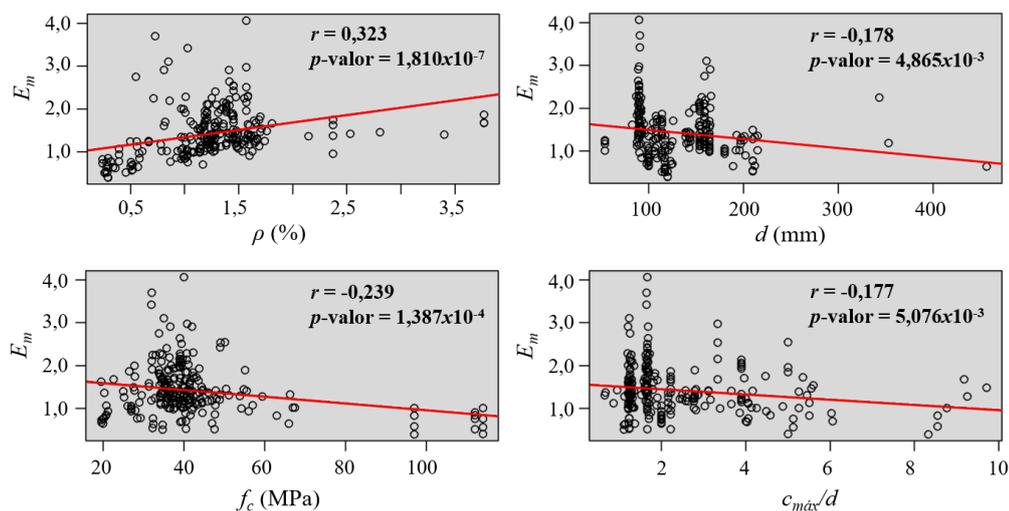
A partir das Figuras 7.5 a 7.9 pode-se observar, primeiramente, que as variáveis contínuas mais correlacionadas com a variável resposta  $E_m$  foram diferentes para cada instrução normativa. No código EUROCODE 2 (2004), a maior correlação foi observada entre o erro de modelo e a altura útil, com valor de -0,306 e  $p$ -valor igual a  $8,551 \times 10^{-7}$ . Para o CEB-FIP/MC (2010), a relação  $c_{m\acute{a}x}/d$  apresentou correlação igual a -0,211 e  $p$ -valor =  $1,102 \times 10^{-3}$ .



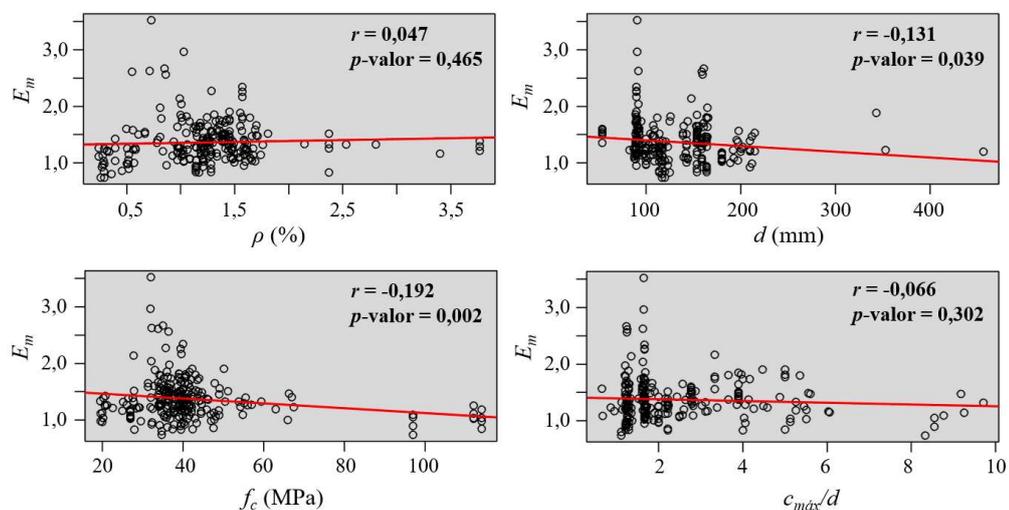
**Figura 7.5 –Análise de correlação da variável resposta  $E_m$  de acordo com EUROCODE 2 (2004)**



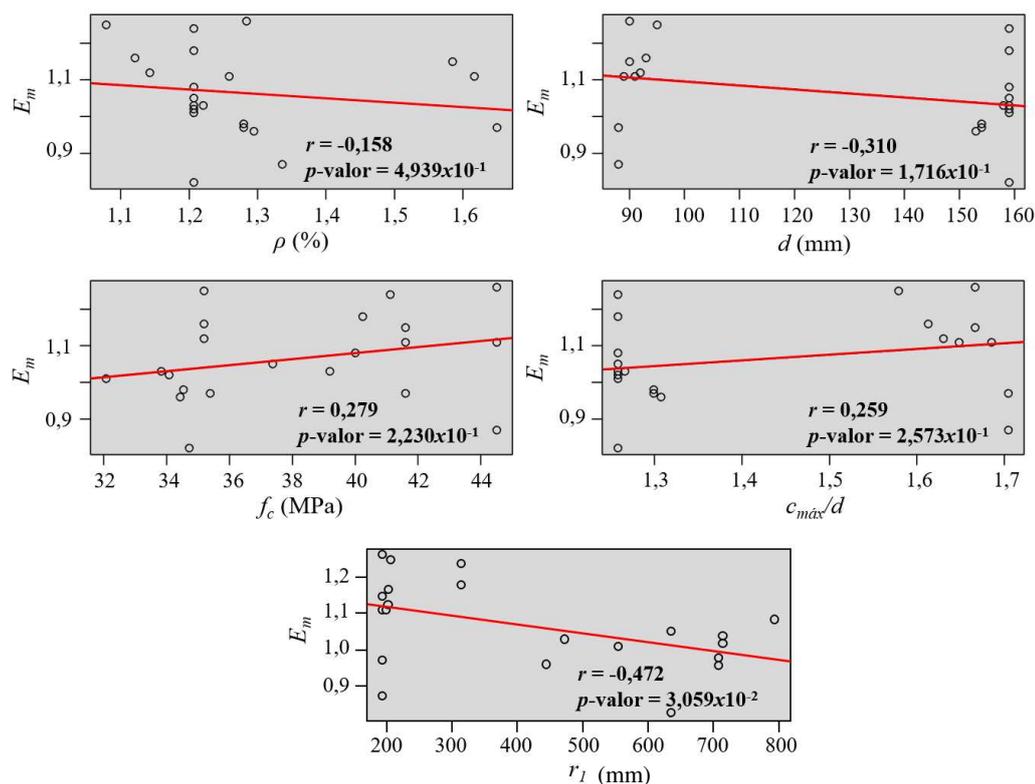
**Figura 7.6 - Análise de correlação da variável resposta  $E_m$  de acordo com CEB-FIP/MC (2010)**



**Figura 7.7 - Análise de correlação da variável resposta  $E_m$  de acordo com ACI 318 (2014)**



**Figura 7.8 - Análise de correlação da variável resposta  $E_m$  de acordo com ABNT NBR 6118 (2014)**



**Figura 7.9 - Análise de correlação da variável resposta  $E_m$  de acordo com o programa *PunCalc* com  $r_l = 1,35d$**

Para as normas americana e brasileira, a taxa de armadura de flexão ( $r = 0,323$  e  $p\text{-valor} = 1,810 \times 10^{-7}$ ) e a resistência à compressão de concreto ( $r = -0,192$  e  $p\text{-valor} = 2,000 \times 10^{-3}$ ), nessa ordem foram as variáveis mais correlacionadas, respectivamente. Vale ressaltar que, embora o código ACI 318 (2014) não apresente em suas formulações a taxa de armadura de flexão para a estimativa da carga de ruptura de lajes lisas, nas análises de correlação desenvolvidas nesta pesquisa, avaliou-se a relação  $V_{exp}/V_{teo}$ , ou seja, o erro de modelo ( $E_m$ ). Dessa forma, a influência da taxa de armadura está associada no valor da carga de ruptura experimental das lajes ( $V_{exp}$ ).

Observa-se ainda que, com relação as variáveis menos significativas ( $p\text{-valor}$  maior que 0,1), a taxa de armadura de flexão mostrou-se pouco importante para o erro de modelo calculado segundo as normas europeia e brasileira (0,335 e 0,465, respectivamente). Já para os códigos CEB-FIP/MC (2010) e ACI 318 (2014) os parâmetros  $d$  e  $c_{m\acute{a}x}/d$  apresentaram os menores níveis de significância com valores iguais a  $1,519 \times 10^{-1}$  e  $5,076 \times 10^{-3}$ , nessa ordem.

Com relação aos resultados obtidos pelo programa *PunCalc*, verifica-se que o parâmetro  $r_l$  apresenta a maior correlação entre as covariáveis analisadas com  $r = -0,472$  e significância igual a  $3,059 \times 10^{-2}$ .

Vale ressaltar que em uma análise bivariada, as correlações entre as variáveis consideradas com  $E_m$  são avaliadas apenas de forma isolada. Diante disso, outros métodos também devem ser aplicados para tentar explicar a relação  $V_{exp}/V_{teo}$ , como por exemplo, através da aplicação de um modelo linear generalizado (MLG). Nesse tipo de modelo, consideram-se todas as variáveis pertinentes na análise conjuntamente, bem como as possíveis interações entre elas.

### 7.1.2 Modelos Lineares Generalizados

Modelos de regressão, conhecidos como modelos lineares generalizados (MLG) foram ajustados a fim de descrever a variável resposta ( $E_m$ ) em função de covariáveis significativas.

Dessa forma, a variável  $E_m$  foi descrita neste trabalho em função das seguintes covariáveis: presença de aberturas na laje ( $Ab$ ), taxa de armadura de flexão ( $\rho$ ), altura útil da laje ( $d$ ), resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ), armadura de cisalhamento ( $A_{sw}$ ) e da relação  $c_{máx}/d$ , sendo  $c_{máx}$  a maior dimensão do pilar. Além dessas covariáveis, as interações mais significativas entre elas também foram consideradas.

A definição da distribuição da variável  $E_m$  foi realizada a partir de critérios de bondades de Akaike (AIC) e Bayesiano de Akaike (BIC) e ainda, a partir do critério de Akaike corrigido (AICc), que utiliza uma correção em razão do número de parâmetros do modelo e o tamanho da amostra. A ideia é que quanto menor for o valor desses critérios, melhor ajustado aos dados está o modelo. Dessa forma, para todos os casos estudados, a distribuição escolhida foi do tipo Gama com função de ligação logarítmica.

Portanto, o modelo geral para a  $i$ -ésima observação, com  $i = 1, \dots, 249$  (número total de lajes levantadas na Base de Dados), que foi testado para as normas é dado por:

$$E_{m_i} = \exp[\lambda_0 + \lambda_1 Ab_i + \lambda_2 \rho_i + \lambda_3 d_i + \lambda_4 f_{c_i} + \lambda_5 A_{sw_i} + \lambda_6 (c_{máx}/d)_i + \lambda_7 (Ab_i \times (c_{máx}/d)_i) + \lambda_8 (\rho_i \times (c_{máx}/d)_i)] \quad (7.1)$$

Nessa equação,  $\lambda_0$  representa o valor esperado de  $E_m$  para o nível de referência considerado no modelo (ausência de aberturas na laje). Os coeficientes  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  e  $\lambda_6$  são os efeitos de  $\rho$ ,  $d$ ,  $f_c$  e  $c_{máx}/d$ , respectivamente. Os efeitos das variáveis indicadoras  $Ab$  e  $A_{sw}$  são

expressos pelos parâmetros  $\lambda_1$  e  $\lambda_5$ . Por fim,  $\lambda_7$  e  $\lambda_8$  simbolizam os efeitos associados às interações  $Ab \times c_{m\acute{a}x}/d$  e  $\rho \times c_{m\acute{a}x}/d$ , nesta ordem.

Para o modelo teórico de Marques (2018), o MLG considerado foi o contido na Equação 7.2, onde  $\lambda_9$  representa o efeito da covariável  $r_1$ .

$$E_{m_i} = \exp[\lambda_0 + \lambda_1 Ab_i + \lambda_2 \rho_i + \lambda_3 d_i + \lambda_4 f_{c_i} + \lambda_5 A_{sw_i} + \lambda_6 (c_{m\acute{a}x}/d)_i + \lambda_9 r_{1_i}] \quad (7.2)$$

A Tabela 7.3 contém as estimativas dos parâmetros  $\lambda_i$  obtidos por meio dos MLG discutidos anteriormente e a Tabela 7.4 apresenta as respectivas probabilidades de significância ( $p$ -valor) desses parâmetros, ao nível de significância 5%. As Figuras 7.10 a 7.14 apresentam a análise de resíduos dos modelos considerados.

**Tabela 7.3 - Estimativas dos parâmetros  $\lambda_i$**

Parâmetro	EUROCODE 2 (2004)	CEB-FIP/MC (2010)	ACI 318 (2014)	ABNT NBR 6118 (2014)	<i>PunCalc</i>
	Estimativa ( $\times 10^{-2}$ )				
$\lambda_0$	38,95	77,76	29,22	34,50	1.382,40
$\lambda_1$	32,63	39,23	39,14	34,87	23,18
$\lambda_2$	-508,66	-2.956,00	1.469,09	-374,56	9.842,15
$\lambda_3$	-0,18	-0,02	-0,15	-0,03	-3,74
$\lambda_4$	-0,17	-0,21	-0,31	-0,13	0,88
$\lambda_5$	17,56	39,57	36,97	3,61	-16,00
$\lambda_6$	-4,56	-10,41	-9,89	-4,69	-735,34
$\lambda_7$	-5,84	-10,05	-6,18	-5,84	-
$\lambda_8$	444,81	1.034,00	698,27	441,73	-
$\lambda_9$	-	-	-	-	0,60

Tabela 7.4 – Probabilidades de significância

Parâmetro	EUROCODE 2 (2004)	CEB-FIP/MC (2010)	ACI 318 (2014)	ABNT NBR 6118 (2014)	<i>PunCalc</i>
	<i>p</i> -valor				
$\lambda_0$	$4,69 \times 10^{-4}$	$7,44 \times 10^{-6}$	$2,27 \times 10^{-2}$	$1,05 \times 10^{-3}$	$2,97 \times 10^{-2}$
$\lambda_1$	$1,10 \times 10^{-6}$	$6,77 \times 10^{-5}$	$4,88 \times 10^{-7}$	$4,66 \times 10^{-8}$	$5,92 \times 10^{-1}$
$\lambda_2$	$4,10 \times 10^{-1}$	$5,13 \times 10^{-3}$	$4,10 \times 10^{-2}$	$5,22 \times 10^{-1}$	$4,65 \times 10^{-1}$
$\lambda_3$	$1,04 \times 10^{-6}$	$7,97 \times 10^{-1}$	$1,89 \times 10^{-4}$	$3,70 \times 10^{-1}$	$3,06 \times 10^{-2}$
$\lambda_4$	$1,09 \times 10^{-1}$	$1,37 \times 10^{-1}$	$1,36 \times 10^{-2}$	$2,14 \times 10^{-1}$	$3,16 \times 10^{-1}$
$\lambda_5$	$8,05 \times 10^{-7}$	$2,00 \times 10^{-16}$	$2,00 \times 10^{-16}$	$2,72 \times 10^{-1}$	$1,75 \times 10^{-1}$
$\lambda_6$	$1,13 \times 10^{-1}$	$5,28 \times 10^{-2}$	$3,21 \times 10^{-3}$	$8,49 \times 10^{-2}$	$6,31 \times 10^{-2}$
$\lambda_7$	$7,96 \times 10^{-3}$	$5,72 \times 10^{-3}$	$1,53 \times 10^{-2}$	$5,07 \times 10^{-3}$	-
$\lambda_8$	$4,25 \times 10^{-2}$	$1,37 \times 10^{-2}$	$6,22 \times 10^{-3}$	$3,35 \times 10^{-2}$	-
$\lambda_9$	-	-	-	-	$7,50 \times 10^{-1}$

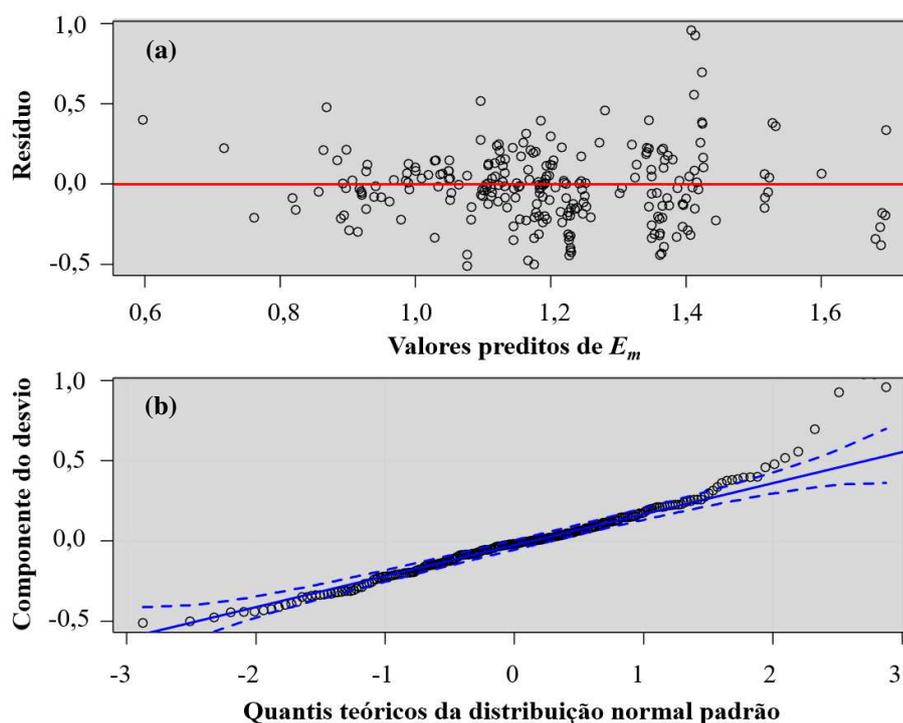
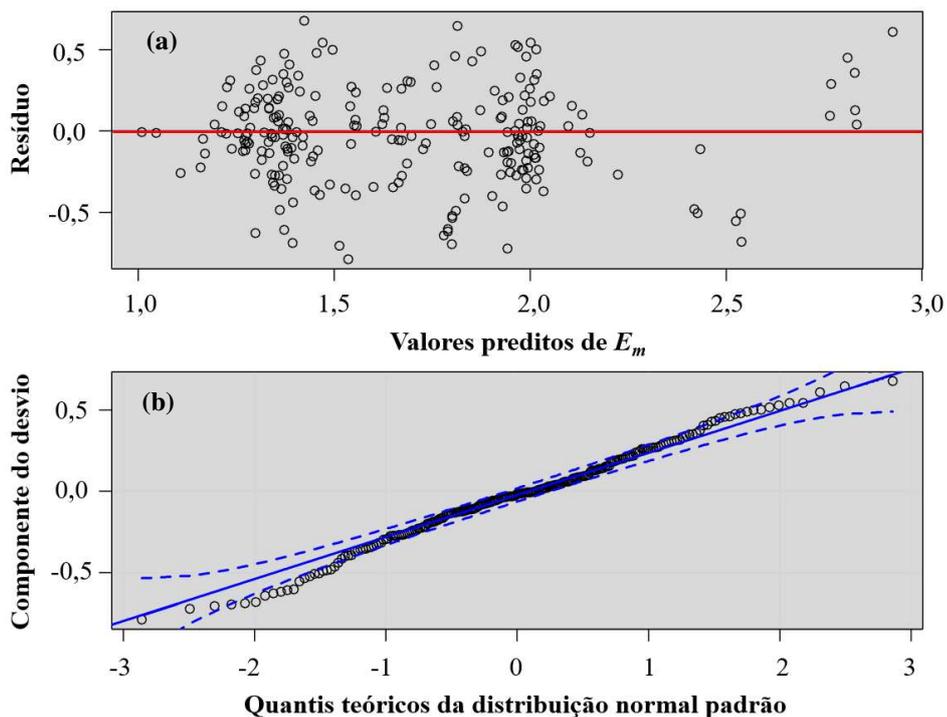
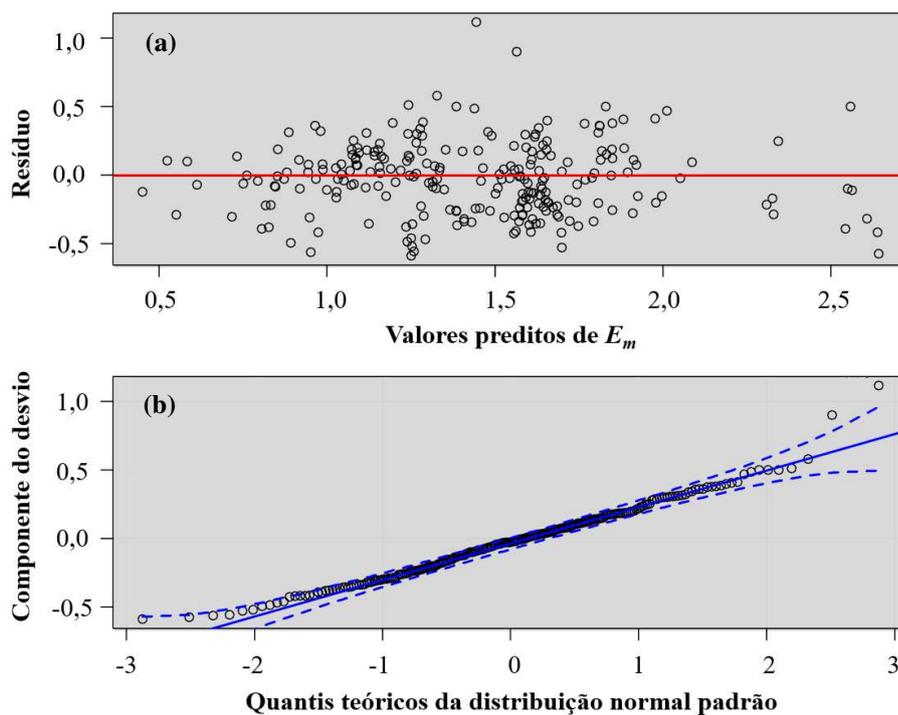


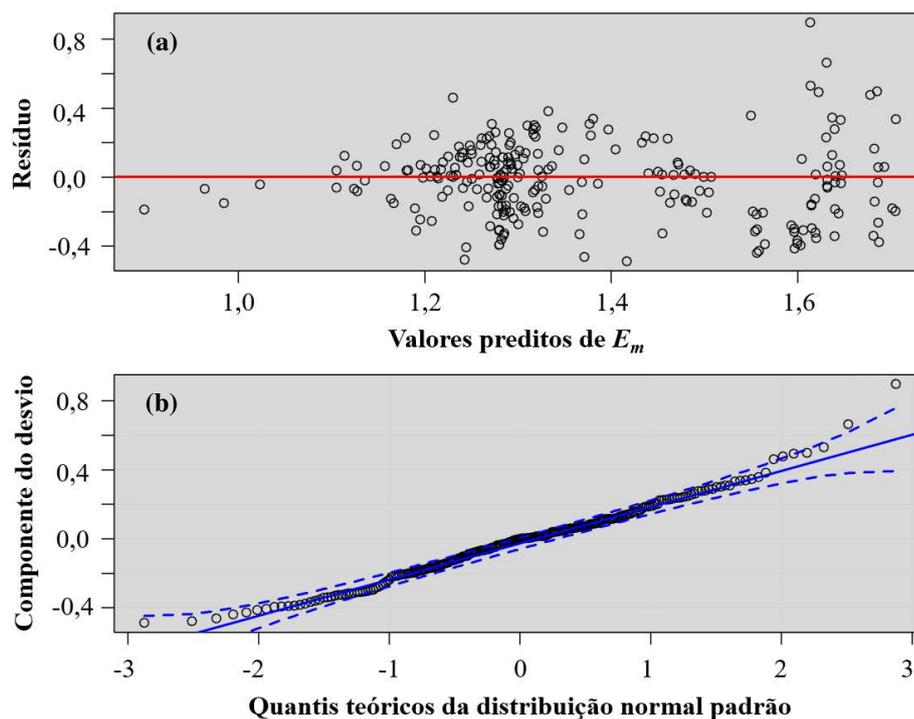
Figura 7.10 – Gráficos de resíduos em (a) e de probabilidade normal com envelope com grau de confiança de 95% em (b) para o modelo do EUROCODE 2 (2004)



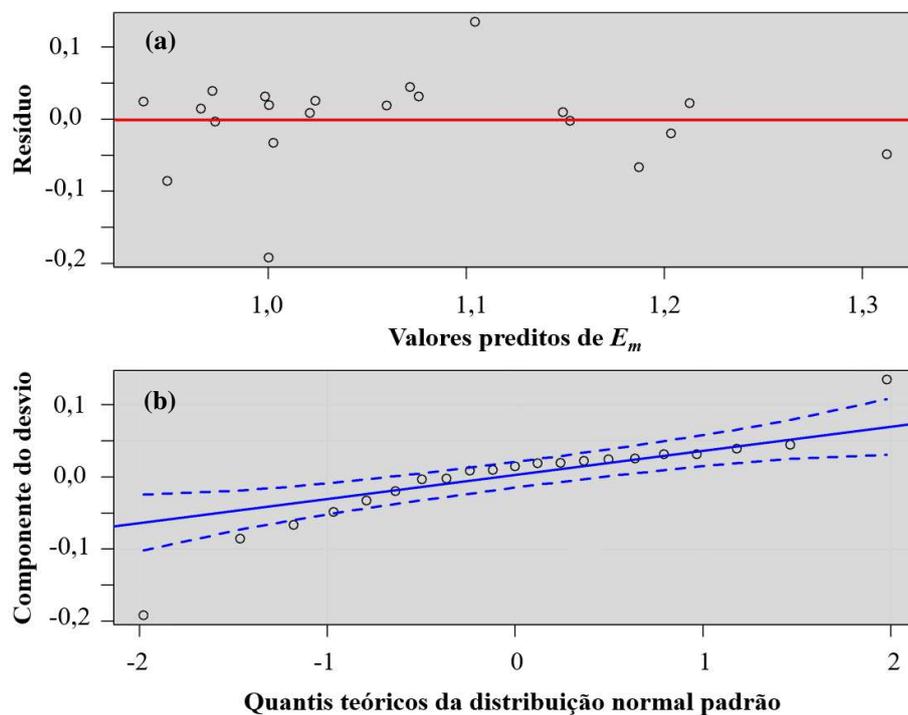
**Figura 7.11 - Gráficos de resíduos em (a) e de probabilidade normal com envelope com grau de confiança de 95% em (b) para o modelo do CEB-FIP/MC (2010)**



**Figura 7.12 – Gráficos de resíduos em (a) e de probabilidade normal com envelope com grau de confiança de 95% em (b) para o modelo do ACI 318 (2014)**



**Figura 7.13 - Gráficos de resíduos em (a) e de probabilidade normal com envelope com grau de confiança de 95% em (b) para o modelo da ABNT NBR 6118 (2014)**



**Figura 7.14 – Gráficos de resíduos em (a) e de probabilidade normal com envelope com grau de confiança de 95% em (b) para o modelo do programa *PunCalc* para  $r_1 = 1,35d$**

Por meio das Figuras 7.10 a 7.14 é possível verificar que os resíduos apresentaram comportamento oscilatório em torno do zero. Sendo assim, as covariáveis dos modelos

explicam a maior parte da variabilidade da variável resposta, indicando um bom ajuste desses modelos.

Com base na Tabela 7.4, observa-se graus de significância diferenciados para cada método de previsão com  $p$ -valor entre  $10^{-6}$  a  $10^{-2}$ . Constata-se que em todos os códigos de projeto estudados, a existência de aberturas ( $Ab$ ) mostrou-se um dos parâmetros mais significativos. O mesmo não ocorreu no modelo empregado para a obtenção de  $E_m$  através do programa *PunCalc*, onde os parâmetros com maior nível de significância foram a altura útil da laje ( $d$ ) e a relação  $c_{m\acute{a}x}/d$ .

Além da variável  $Ab$ , nas instruções normativas EUROCODE 2 (2004) e ACI 318 (2014) a altura útil da laje ( $d$ ), a existência de armadura de cisalhamento ( $A_{sw}$ ) e a relação  $c_{m\acute{a}x}/d$  também foram significativos. Já nos códigos CEB-FIP/MC (2010) e ABNT NBR 6118 (2014) as interações entre as variáveis  $Ab \times c_{m\acute{a}x}/d$  e  $\rho \times c_{m\acute{a}x}/d$  foram também significativas.

## 7.2 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

### 7.2.1 Detalhamento das equações de estados limites baseadas nos códigos de projeto

As funções de estados limites consideradas nesta pesquisa representam a probabilidade de que a estimativa da carga de ruptura obtida por cada método de cálculo seja contra a segurança, ou seja, acima do valor obtido nos ensaios experimentais.

As funções de estados limites adotadas nesta pesquisa com base no código EUROCODE 2 (2004) são detalhadas por meio das Equações 7.3 a 7.5.

$$G_1 = V_{exp} - 0,4 \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_c u_0 d \quad (7.3)$$

$$G_2 = V_{exp} - \text{Maior} \left\{ \begin{array}{l} 0,18 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) (100 \rho f_c)^{1/3} u_1 d \\ 0,035 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right)^{2/3} f_c^{1/2} u_1 d \end{array} \right. \quad (7.4)$$

$$G_3 = V_{exp} - E_m \text{Maior} \begin{cases} 0,18 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) (100\rho f_c)^{1/3} u_1 d \\ 0,035 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right)^{2/3} f_c^{1/2} u_1 d \end{cases} \quad (7.5)$$

Nessas equações, as variáveis aleatórias são: carga de ruptura experimental da laje ( $V_{exp}$ ), resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ) e altura útil da laje ( $d$ ). A taxa de armadura foi calculada em função da altura útil da laje, conforme as Equações 4.1 a 4.3 apresentadas no Capítulo 4.

O valor de do perímetro de controle ( $u_l$ ) foi estimado por meio da Equação 7.6, onde  $c_{máx}$  é a maior dimensão do pilar e  $n_{Ab}$  é o número de aberturas na laje.

$$u_1 = 2\pi \left( \frac{c_{máx}}{2} + 2,2d \right) - n_{Ab} \left[ 60\pi \frac{\left( \frac{c_{máx}}{2} + 2,2d \right)}{180} \right] \quad (7.6)$$

A variável erro de modelo ( $E_m$ ) para o código EUROCODE 2 (2004), pode ser determinada por meio da Equação 7.7, como visto no Item 7.1.2.

$$E_m = \exp[(38,95 + 32,63Ab - 508,66\rho - 0,18d - 0,17f_c + 17,56A_{sw} + -4,56(c_{máx}/d) - 5,84(Ab(c_{máx}/d)) + 444,81(\rho(c_{máx}/d)))10^{-2}] \quad (7.7)$$

As Equações 7.8 e 7.9 detalham as equações de estados limites para a instrução normativa CEB-FIP/MC (2010).

$$G_1 = V_{exp} - \left\{ \left( \frac{1}{1,5 + 0,9 \left( \frac{32}{16 + d_g} \right) \left[ 1,2 \frac{r_s f_y}{d E_s} \left( \frac{m_S}{m_R} \right)^{1,5} \right]} \right) \sqrt{f_c} b_0 d \right\} \quad (7.8)$$

$$G_2 = V_{exp} - E_m \left\{ \left[ \frac{1}{1,5 + 0,9 \left( \frac{32}{16 + d_g} \right) \left[ 1,2 \frac{r_s f_y}{d E_s} \left( \frac{m_S}{m_R} \right)^{1,5} \right]} \right] \sqrt{f_c} b_0 d \right\} \quad (7.9)$$

sendo que,

$$m_S = V_{exp}/8 \quad (7.10)$$

$$m_R = \rho f_y d^2 \left( 1 - \frac{\rho f_y}{2 f_c} \right) \quad (7.11)$$

Nessas equações, as variáveis aleatórias são: carga de ruptura experimental da laje ( $V_{exp}$ ), resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ), altura útil da laje ( $d$ ), tensão de escoamento e o módulo de elasticidade do aço ( $f_y$  e  $E_s$ , respectivamente).

O perímetro de controle  $b_0$  foi estimado de acordo com a Equação 7.12, onde  $k_e$  é o coeficiente de excentricidade, calculado por meio da Equação 2.12.

$$b_0 = \left[ (2c_{m\acute{a}x} + 2c_{m\acute{i}n}) + \frac{360\pi}{180} \left( \frac{d}{2} \right) - n_{Ab} \tan \left( \frac{30\pi}{180} \right) (c_{m\acute{a}x} + d) \right] k_e \quad (7.12)$$

A variável erro de modelo ( $E_m$ ) para o código CEB-FIP/MC (2010), pode ser determinada por meio da Equação 7.13.

$$E_m = \exp[(77,76 + 39,23Ab - 2956,00\rho - 0,02d - 0,21f_c + 39,57A_{sw} + -10,41(c_{m\acute{a}x}/d) - 10,05(Ab(c_{m\acute{a}x}/d)) + 1034,00(\rho(c_{m\acute{a}x}/d)))10^{-2}] \quad (7.13)$$

As Equações 7.14 e 7.15 detalham as equações de estados limites para o código ACI 318 (2014).

$$G_1 = V_{exp} - Menor \begin{cases} 2\sqrt{f_c}b_0d \\ \frac{1}{12}\left(\frac{40d}{b_0} + 2\right)\sqrt{f_c}b_0d \\ \frac{1}{3}\sqrt{f_c}b_0d \end{cases} \quad (7.14)$$

$$G_2 = V_{exp} - E_m Menor \begin{cases} 2\sqrt{f_c}b_0d \\ \frac{1}{12}\left(\frac{40d}{b_0} + 2\right)\sqrt{f_c}b_0d \\ \frac{1}{3}\sqrt{f_c}b_0d \end{cases} \quad (7.15)$$

Nessas equações, as variáveis aleatórias são: carga de ruptura experimental da laje ( $V_{exp}$ ), resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ) e altura útil da laje ( $d$ ). O perímetro de controle  $b_0$  foi estimado de acordo com a Equação 7.16.

$$b_0 = 2c_{máx} + 2c_{mín} + 4d - n_{Ab} \left[ \tan\left(\frac{30\pi}{180}\right) (c_{máx} + d) \right] \quad (7.16)$$

A variável erro de modelo ( $E_m$ ) para a instrução normativa ACI 318 (2014), pode ser determinada por meio da Equação 7.17.

$$E_m = \exp[(29,22 + 39,14Ab + 1.469,09\rho - 0,15d - 0,31f_c + 36,97A_{sw} + -9,89(c_{máx}/d) - 6,18(Ab(c_{máx}/d)) + 698,27(\rho(c_{máx}/d)))10^{-2}] \quad (7.17)$$

Para o código ABNT NBR 6118 (2014), as equações de estado limite são demonstradas por meio das Equações 7.18 a 7.20.

$$G_1 = V_{exp} - 0,13 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) (100\rho f_c)^{1/3} C' d \quad (7.18)$$

$$G_2 = V_{exp} - 0,27 \left(1 - \frac{f_c}{250}\right) f_c C d \quad (7.19)$$

$$G_3 = V_{exp} - E_m \left[ 0,13 \left(1 + \sqrt{\frac{200}{d}}\right) (100\rho f_c)^{1/3} C' d \right] \quad (7.20)$$

Nessas equações, as variáveis aleatórias são: carga de ruptura experimental da laje ( $V_{exp}$ ), resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ) e altura útil da laje ( $d$ ). A taxa de armadura foi calculada em função da altura útil da laje, conforme as Equações 4.1 a 4.3 apresentadas no Capítulo 4. O perímetro de controle  $C'$  foi estimado de acordo com a Equação 7.21.

$$C' = 2\pi \left(\frac{c_{m\acute{a}x}}{2} + 2,2d\right) - n_{Ab} \left[ 60\pi \frac{\left(\frac{c_{m\acute{a}x}}{2} + 2,2d\right)}{180} \right] \quad (7.21)$$

A variável erro de modelo ( $E_m$ ) para a instrução normativa ABNT NBR 6118 (2014), pode ser determinada por meio da Equação 7.22.

$$E_m = \exp[(34,50 + 34,87Ab - 374,56\rho - 0,03d - 0,13f_c + 3,61A_{sw} + -4,69(c_{m\acute{a}x}/d) - 5,84(Ab(c_{m\acute{a}x}/d)) + 441,73(\rho(c_{m\acute{a}x}/d)))10^{-2}] \quad (7.22)$$

## 7.2.2 Variáveis aleatórias

A Tabela 7.5 apresenta as variáveis aleatórias consideradas nas análises de confiabilidade deste trabalho.

As distribuições de probabilidades contidas na Tabela 7.5 foram adotadas de acordo com o Melchers (1987), Nowak e Collins (2000) e JCSS (2001). Os parâmetros estatísticos foram determinados a partir de amostras ensaiadas experimentalmente, conforme detalhado nos Capítulos 4 e 5. A determinação dos parâmetros estatísticos relativos às propriedades mecânicas do concreto foi feita em função das duas etapas de concretagem executadas.

**Tabela 7.5 – Variáveis aleatórias com as distribuições e parâmetros**

Variável aleatória	Séries	Média	CV (%)	Distribuição de probabilidades
$f_c$ [MPa]	Séries 1	41,56	3,29	Lognormal
	Séries 2	44,54	6,69	
	Série 3	35,22	2,84	
$f_{ct}$ [MPa]	Séries 1	4,13	4,77	Lognormal
	Série 2	4,29	9,38	
	Série 3	3,25	4,00	
$f_y$ [MPa]	Séries 1, 2 e 3	575,93	3,81	Lognormal
$E_c$ [GPa]	Séries 1	25,19	3,57	Lognormal
	Série 2	28,48	12,76	
	Série 3	23,60	5,08	
$E_s$ [GPa]	Séries 1, 2 e 3	178,68	8,18	Lognormal
$d$ [mm]	Séries 1, 2 e 3	90,67	2,59	Normal
$h$ [mm]	Séries 1, 2 e 3	141,25	4,41	Normal
$V_{exp}$ [kN]	Série 1	241,83	9,31	Gumbel – Tipo 1 Máximos
	Série 2	199,77	14,92	
	Série 3	198,75	6,84	

### 7.2.3 Probabilidades de falha e índices de confiabilidade

Anas análises de confiabilidade desenvolvidas neste trabalho representam o cálculo da chance matemática ( $P_f$ ) de que os métodos de cálculo considerados estimem a capacidade à punção das lajes contra a segurança, ou seja,  $G(x_i) \leq 0$ .

Para a determinação das probabilidades de falha e índices de confiabilidade foi realizado com o acoplamento de algoritmos de confiabilidade aos modelos mecânicos de previsão da carga de ruptura de lajes lisas de concreto armado aqui estudados. Os algoritmos utilizados foram o Método de Simulação de Monte Carlo (MCS) e o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM), detalhados no Capítulo 6.

As análises de confiabilidade foram feitas nesta pesquisa por meio de programas computacionais implementados em linguagem de programação FORTRAN.

A determinação da probabilidade de falha ( $P_f$ ) e do índice de confiabilidade ( $\beta$ ) via MCS foi realizada após análise de convergência de cada função de estado limite. As Figuras 7.15 a 7.19 apresentam os resultados dessas análises feitas para as instruções normativas e para o programa *PunCalc*. O processo de amostragem foi realizado com  $10^{10}$  simulações de cada equação de estado limite, sendo verificado a convergência do valor de  $P_f$  após  $10^6$  simulações.

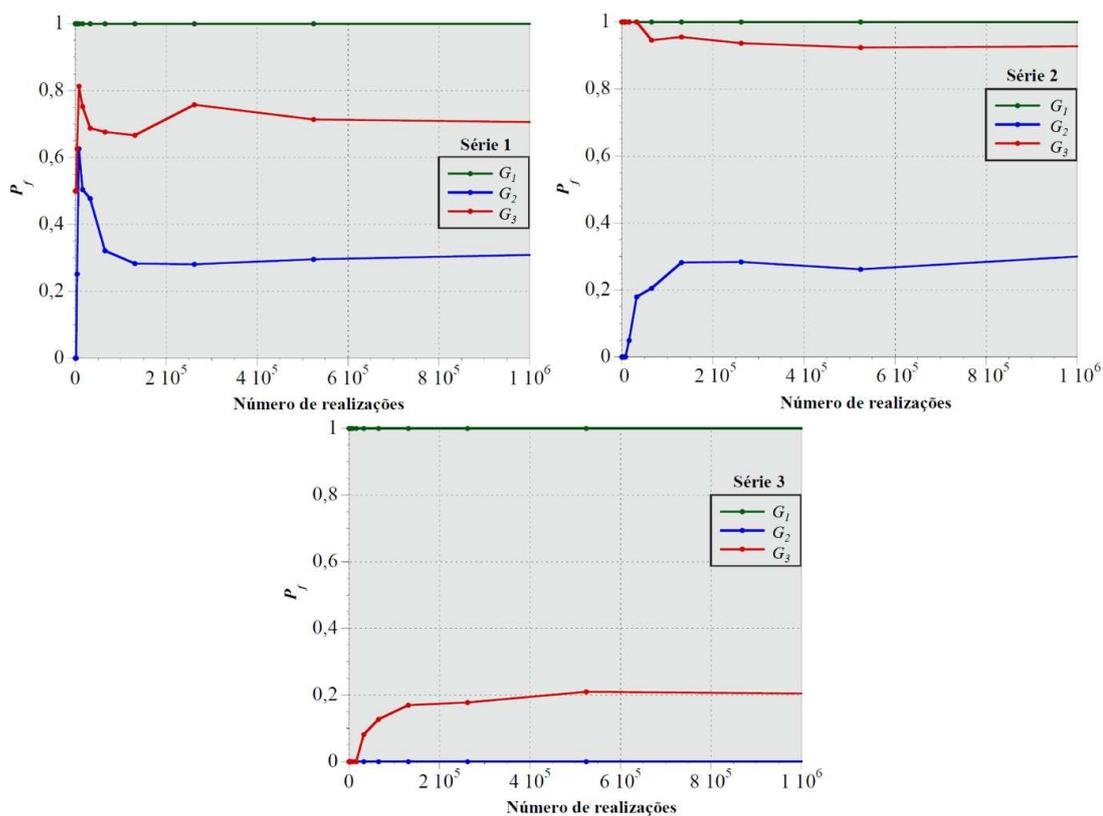


Figura 7.15 - Análise de convergência das equações de estados limites da norma EUROCODE 2 (2004)

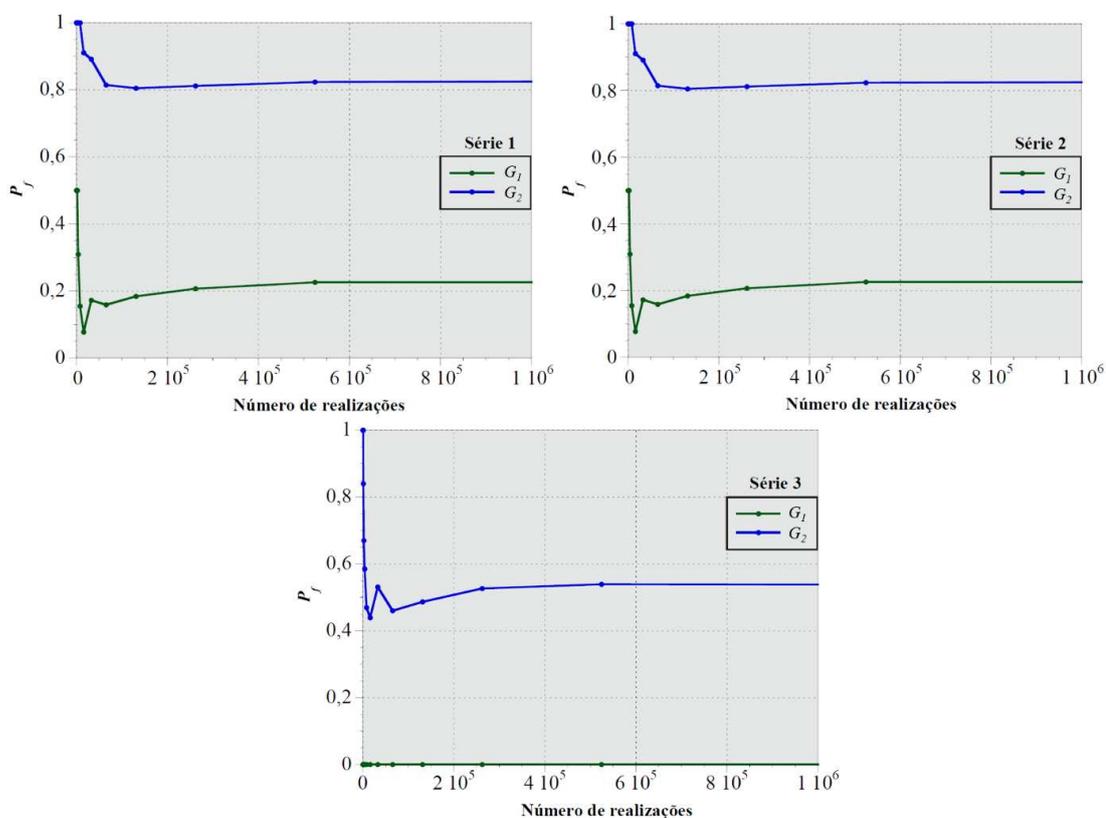


Figura 7.16 - Análise de convergência das equações de estados limites da norma CEB-FIP/MC (2010)

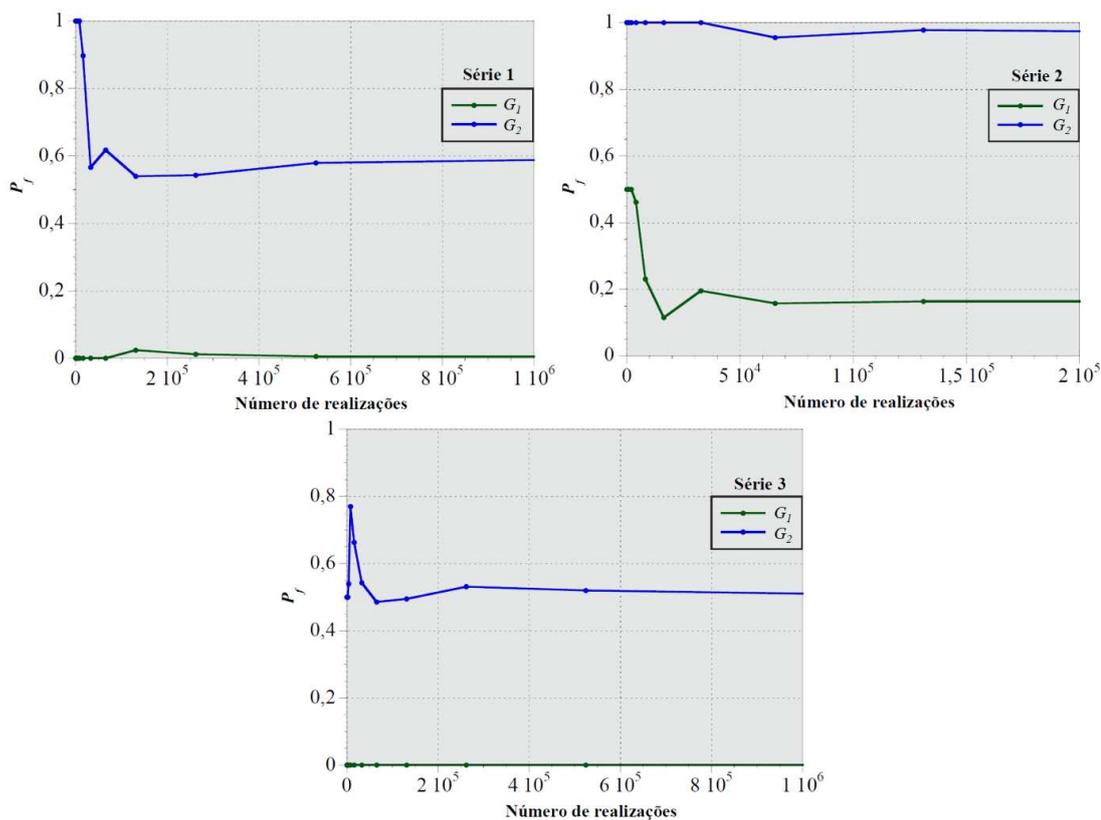


Figura 7.17 - Análise de convergência das equações de estados limites da norma ACI 318 (2014)

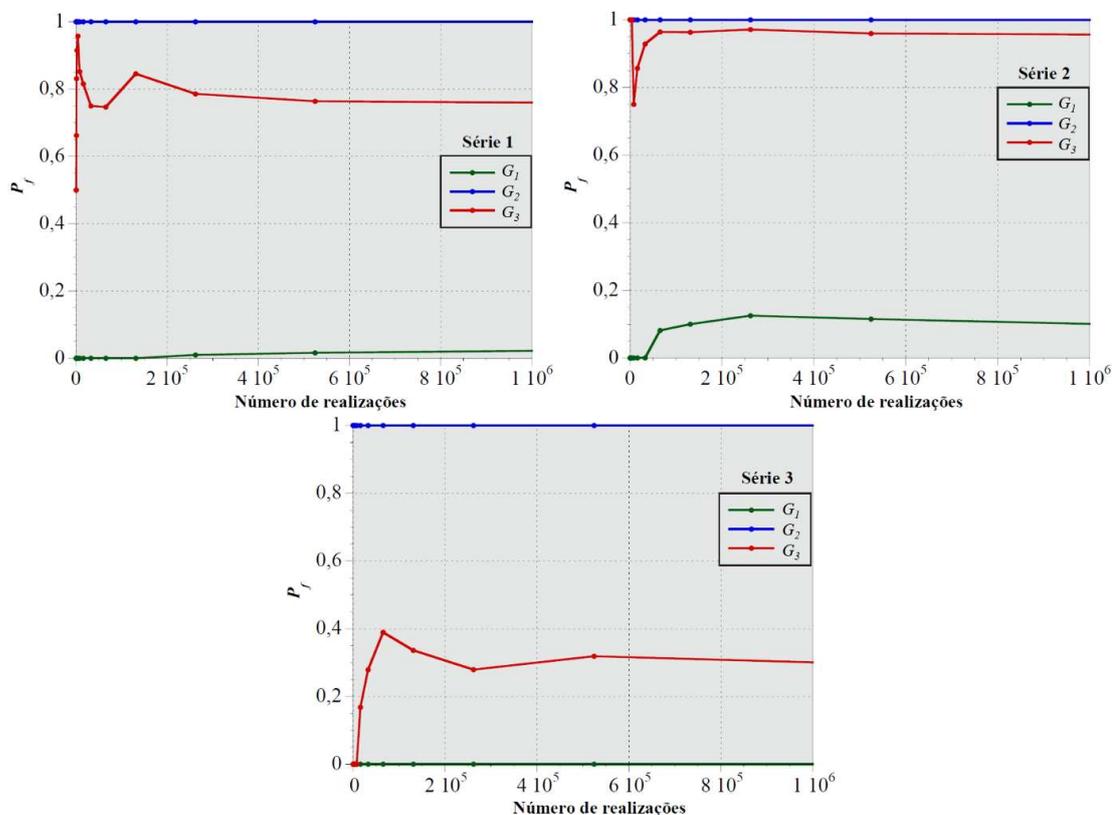
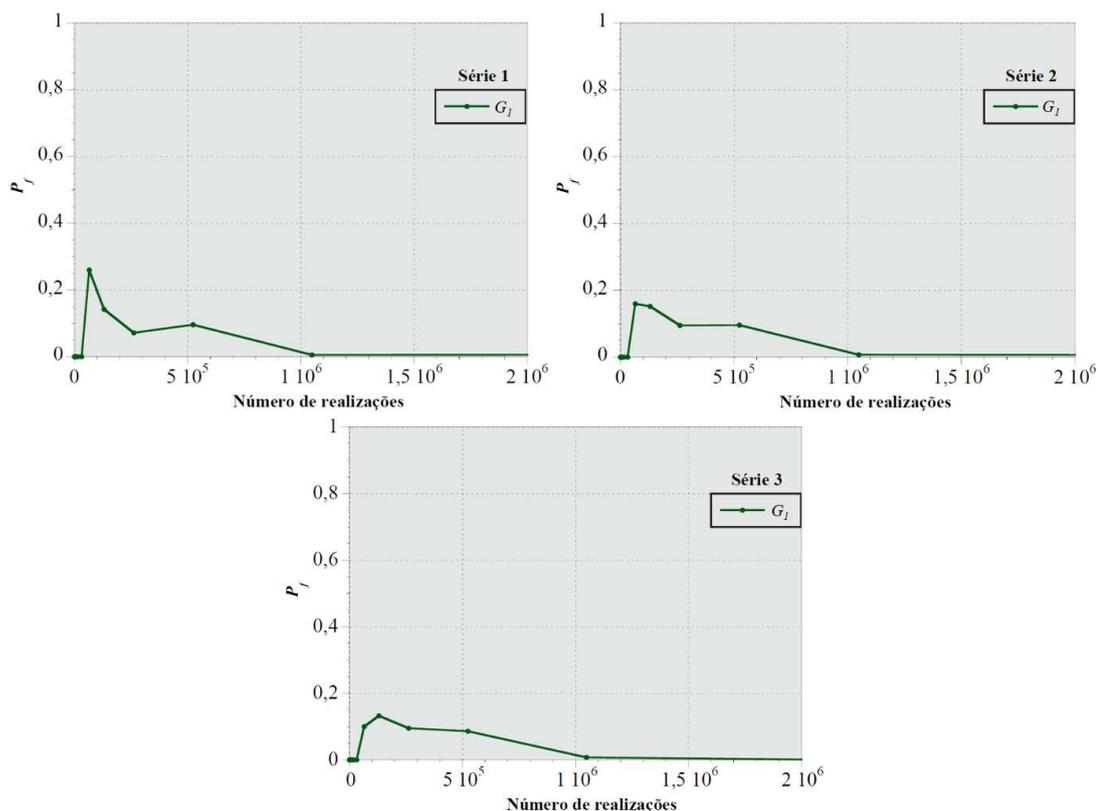


Figura 7.18 - Análise de convergência das equações de estados limites da norma ABNT NBR 6118 (2014)



**Figura 7.19 - Análise de convergência da equação de estado limite do programa *PunCalc* ( $r_I = 1,35d$ )**

A Tabela 7.6 apresenta os resultados obtidos das análises de confiabilidade via Método de Simulação de Monte Carlo (MCS). As probabilidades de falha e os respectivos índices de confiabilidade foram determinados para cada equação de estado limite e para as equações associadas em série.

O JCSS (2001) recomenda que para o caso de edifícios residenciais e comerciais, com risco de vida humana dada a ocorrência de uma falha, o índice de confiabilidade alvo para estados limites últimos seja da ordem de 4,2. Diante disso, observou-se que para a interface direta da ligação da laje com o pilar interno, os modelos do EUROCODE 2 (2004) e ABNT NBR 6118 (2014) proporcionaram um alto grau de segurança. Por conta disso, não foi possível obter os índices das simulações de Monte Carlo, já que necessitariam de grande quantidade de pontos (amostra superior à  $10^{10}$ ) para simular esse cenário de falha para ambos os códigos.

**Tabela 7.6 - Resultados das análises de confiabilidade por meio MCS**

Previsão	$G_i$	Série 1	Série 2	Série 3
EUROCODE 2 (2004)	$G_1$	NC	NC	NC
	$G_2$	$\beta = 0,48$ ( $P_f \approx 3,15 \times 10^{-1}$ )	$\beta = 0,48$ ( $P_f \approx 3,14 \times 10^{-1}$ )	NC
	$G_3$	$\beta = -0,53$ ( $P_f \approx 7,01 \times 10^{-1}$ )	$\beta = -1,47$ ( $P_f \approx 9,29 \times 10^{-1}$ )	$\beta = 2,16$ ( $P_f \approx 2,12 \times 10^{-1}$ )
	$G_1 \cup G_2$	NC	NC	NC
	$G_2 \cup G_3$	$\beta = -0,53$ ( $P_f \approx 7,01 \times 10^{-1}$ )	$\beta = -1,47$ ( $P_f \approx 9,29 \times 10^{-1}$ )	$\beta = 2,16$ ( $P_f \approx 2,12 \times 10^{-1}$ )
CEB-FIP/MC (2010)	$G_1$	$\beta = 1,07$ ( $P_f \approx 1,42 \times 10^{-1}$ )	$\beta = 0,76$ ( $P_f \approx 2,24 \times 10^{-1}$ )	$\beta = 3,72$ ( $P_f \approx 1,00 \times 10^{-4}$ )
	$G_2$	$\beta = -0,30$ ( $P_f \approx 6,18 \times 10^{-1}$ )	$\beta = -0,93$ ( $P_f \approx 8,23 \times 10^{-1}$ )	$\beta = -0,10$ ( $P_f \approx 5,40 \times 10^{-1}$ )
ACI 318 (2014)	$G_1$	$\beta = 2,62$ ( $P_f \approx 4,34 \times 10^{-3}$ )	$\beta = 0,93$ ( $P_f \approx 1,75 \times 10^{-1}$ )	NC
	$G_2$	$\beta = -0,21$ ( $P_f \approx 5,84 \times 10^{-1}$ )	$\beta = -1,79$ ( $P_f \approx 9,63 \times 10^{-1}$ )	$\beta = 0,07$ ( $P_f \approx 4,71 \times 10^{-1}$ )
ABNT NBR 6118 (2014)	$G_1$	$\beta = 2,07$ ( $P_f \approx 1,94 \times 10^{-2}$ )	$\beta = -1,66$ ( $P_f \approx 9,52 \times 10^{-1}$ )	NC
	$G_2$	NC	NC	NC
	$G_3$	$\beta = -0,71$ ( $P_f \approx 7,60 \times 10^{-1}$ )	$\beta = -1,72$ ( $P_f \approx 9,57 \times 10^{-1}$ )	$\beta = 0,46$ ( $P_f \approx 3,21 \times 10^{-1}$ )
	$G_1 \cup G_2$	NC	NC	NC
	$G_2 \cup G_3$	NC	NC	NC
<i>PunCalc</i>	$G_1$	$\beta = 2,62$ ( $P_f \approx 4,34 \times 10^{-3}$ )	$\beta = 2,54$ ( $P_f \approx 5,57 \times 10^{-3}$ )	$\beta = 3,29$ ( $P_f \approx 4,96 \times 10^{-4}$ )

Na Tabela 7.6 é possível observar a influência das aberturas no aumento dos valores de  $P_f$ , principalmente nas lajes da Série 2 em relação as demais lajes ensaiadas para todos os métodos de previsão estudados. O maior aumento foi constatado para função de estado limite  $G_1$  do código ACI 318 (2014), cujo valor de  $P_f$  passou de  $4,34 \times 10^{-3}$  (lajes da Série 1) para  $1,75 \times 10^{-1}$  (lajes da Série 2), ou seja, um aumento de 4.032,3%.

Além disso, os resultados obtidos para a função  $G = V_{exp} - E_m V_{teo}$  demonstram que os menores valores de probabilidades de falha nas análises das lajes das Séries 1 e 2 foram gerados pelas prescrições da norma ACI 318 (2014) e CEB-FIP/MC (2010), com valores iguais a  $5,84 \times 10^{-1}$  e  $6,18 \times 10^{-1}$ , nessa ordem. Para as lajes da Série 3, o código EUROCODE 2 (2004) apresentou o menor valor, com  $P_f = 2,12 \times 10^{-1}$ . Entretanto, esses valores refletem níveis de segurança inferiores aos especificados pela JCSS (2001) para o fenômeno estudado ( $P_f \approx 10^{-5}$  a  $10^{-4}$ ).

Com relação aos resultados gerados pelo programa *PunCalc* (para  $r_I = 1,35d$ ), os valores de  $P_f$  foram mais seguros do que às normas estudadas.

A Tabela 7.7 contém os resultados obtidos através do método FORM. Considerou-se apenas a avaliação da probabilidade de falha e do índice de confiabilidade via FORM das instruções normativas.

**Tabela 7.7 - Resultados das análises de confiabilidade por meio do método FORM**

Previsão	$G_i$	Série 1	Série 2	Série 3
EUROCODE 2 (2004)	$G_1$	$\beta = 7,64$ ( $P_f \approx 1,09x10^{-14}$ )	$\beta = 7,09$ ( $P_f \approx 6,78x10^{-13}$ )	$\beta = 10,50$ ( $P_f = \text{NC}$ )
	$G_2$	$\beta = -0,66$ ( $P_f \approx 7,45x10^{-1}$ )	$\beta = -0,65$ ( $P_f \approx 7,44x10^{-1}$ )	$\beta = -4,87$ ( $P_f \approx 9,99x10^{-1}$ )
	$G_3$	$\beta = 0,52$ ( $P_f \approx 3,00x10^{-1}$ )	$\beta = 1,66$ ( $P_f \approx 4,80x10^{-2}$ )	$\beta = -1,05$ ( $P_f \approx 8,53x10^{-1}$ )
	$G_1 \cup G_2$	$\beta = -0,66$ ( $P_f \approx 7,45x10^{-1}$ )	$\beta = -0,65$ ( $P_f \approx 7,44x10^{-1}$ )	$\beta = -4,87$ ( $P_f \approx 9,99x10^{-1}$ )
	$G_2 \cup G_3$	$\beta = -0,66$ ( $P_f \approx 7,45x10^{-1}$ )	$\beta = -0,65$ ( $P_f \approx 7,44x10^{-1}$ )	$\beta = -4,87$ ( $P_f \approx 9,99x10^{-1}$ )
CEB-FIP/MC (2010)	$G_1$	$\beta = 0,39$ ( $P_f \approx 3,47x10^{-1}$ )	$\beta = -0,60$ ( $P_f \approx 7,27x10^{-1}$ )	$\beta = 2,53$ ( $P_f \approx 5,73x10^{-3}$ )
	$G_2$	$\beta = 2,33$ ( $P_f \approx 9,88x10^{-3}$ )	$\beta = 1,37$ ( $P_f \approx 8,47x10^{-2}$ )	$\beta = 3,64$ ( $P_f \approx 1,35x10^{-4}$ )
ACI 318 (2014)	$G_1$	$\beta = -2,37$ ( $P_f \approx 9,91x10^{-1}$ )	$\beta = -1,15$ ( $P_f \approx 8,74x10^{-1}$ )	$\beta = 5,36$ ( $P_f \approx \text{NC}$ )
	$G_2$	$\beta = 0,10$ ( $P_f \approx 4,59x10^{-1}$ )	$\beta = 2,10$ ( $P_f \approx 1,80x10^{-2}$ )	$\beta = -0,15$ ( $P_f \approx 5,61x10^{-1}$ )
ABNT NBR 6118 (2014)	$G_1$	$\beta = -1,68$ ( $P_f \approx 9,54x10^{-1}$ )	$\beta = -1,27$ ( $P_f \approx 8,98x10^{-1}$ )	$\beta = 5,94$ ( $P_f \approx \text{NC}$ )
	$G_2$	$\beta = 9,35$ ( $P_f = \text{NC}$ )	$\beta = 8,26$ ( $P_f \approx 7,48x10^{-17}$ )	$\beta = 12,52$ ( $P_f = \text{NC}$ )
	$G_3$	$\beta = 0,73$ ( $P_f \approx 2,33x10^{-1}$ )	$\beta = 1,98$ ( $P_f \approx 2,35x10^{-2}$ )	$\beta = -0,64$ ( $P_f \approx 7,37x10^{-1}$ )
	$G_1 \cup G_2$	$\beta = -1,68$ ( $P_f \approx 9,54x10^{-1}$ )	$\beta = -1,27$ ( $P_f \approx 8,98x10^{-1}$ )	$\beta = 5,94$ ( $P_f \approx \text{NC}$ )
	$G_2 \cup G_3$	$\beta = 0,73$ ( $P_f \approx 2,33x10^{-1}$ )	$\beta = 1,98$ ( $P_f \approx 2,35x10^{-2}$ )	$\beta = -0,64$ ( $P_f \approx 7,37x10^{-1}$ )

A partir dos valores de  $P_f$  e  $\beta$  contidos na Tabela 7.7, observa-se que esses parâmetros são próximos aos contidos na Tabela 7.6, validando portanto, os resultados gerados pelo método FORM. Apenas os valores obtidos as funções de estado limite da instrução normativa CEB-FIP/MC (2010) não corresponderam aos respectivos resultados obtidos pelo

MCS. Isso pode ser explicado por conta da não linearidade das funções de estados limites desse código de projeto.

A solução de problemas envolvendo equações de estado limite não lineares pelo método de primeira ordem (FORM) implica na busca pelo ponto de projeto e na aproximação da equação de estado limite por um hiper-plano centrado nesse ponto. O nome do método decorre justamente do fato do domínio de falha ser aproximado por uma função linear, o que irá resultar em uma boa aproximação da probabilidade de falha verdadeira quando a equação de estado limite no espaço normal padrão  $Y$  for plana ou aproximadamente plana na vizinhança do ponto de projeto, o que não ocorreu na avaliação da norma CEB-FIP/MC (2010).

Ressalta-se que as análises de confiabilidade foram feitas considerando lajes sem armaduras de cisalhamento e, por isso, apenas as verificações contidas nas instruções normativas para esse caso foram estudadas.

## 8 CONCLUSÕES

Este trabalho teve por objetivo aplicar os conceitos das teorias de probabilidade e de confiabilidade estrutural no projeto de lajes lisas de concreto armado com ou sem aberturas quando submetidas à punção. Para isso, foram realizados ensaios experimentais até a ruptura de nove lajes lisas quadradas com 1.800 mm de lado e 130 mm de espessura, o que possibilitou a avaliação do comportamento desses elementos sob influência de aberturas nas lajes. Foram considerados três séries de repetições: Série 1 - lajes sem abertura (também chamada de lajes de referências), Série 2 - lajes com uma abertura e Série 3 - lajes com duas aberturas.

Uma investigação de modelos analíticos de previsão da carga de ruptura de lajes lisas de concreto armado complementou o programa experimental. Foram analisadas quatro especificações de projeto: EUROCODE 2 (2004), CEB-FIP/MC (2010), ACI 318 (2014) e ABNT NBR 6118 (2014). Os resultados obtidos nessas análises foram comparados com aqueles determinados através da modelagem teórica de Marques (2018).

Para a obtenção de resultados de carga de ruptura de lajes lisas através do modelo de Marques (2018), o programa *PunCalc* foi implementado computacionalmente neste trabalho em linguagem de programação FORTRAN.

Além dos resultados experimentais obtidos nesta pesquisa, o estudo envolveu a análise de 240 resultados experimentais de carga de ruptura presentes na literatura. Diversas características físicas e geométricas foram levantadas na tentativa de investigar ao máximo o fenômeno de punção em lajes lisas com ou sem aberturas.

Uma análise de erro de modelo foi contemplada por meio de modelos lineares generalizados. Desse modo, ao ser inserida nas análises de confiabilidade, a incerteza de modelo foi considerada na avaliação do nível de segurança das instruções normativas e modelo teórico avaliados.

A seguir, as principais conclusões obtidas nas análises realizadas nesta pesquisa.

### 8.1 ANÁLISE EXPERIMENTAL

Os modelos experimentais foram analisados em termos de carga e superfície de ruptura, formação e desenvolvimento de fissuras, deslocamentos verticais e deformações do concreto e das barras da armadura de flexão.

Todas as lajes testadas apresentaram ruptura por punção com carga experimental bem abaixo da resistência prevista à flexão, tendo sido a pesquisa direcionada para este modo de ruptura. Os resultados mostraram que a presença de aberturas adjacentes ao pilar reduziu a carga de ruptura das lajes. As lajes da Série 2 apresentaram, em média, carga 17,39% inferior as lajes de referência. Já nas lajes com duas aberturas, a carga de ruptura média resultou em um valor 17,80% menor em comparação com as lajes da Série 1.

As superfícies de ruptura nas lajes com aberturas desenvolveram-se de forma diferente daquelas registradas nas lajes da Série 1, com inclinações em relação ao plano médio da laje entre 22 a 66 graus para a Série 2 e entre 31 a 58 graus para a Série 3.

As primeiras fissuras a surgir nas lajes foram as radiais, seguidas pelas circunferenciais em níveis maiores de carregamento. A primeira fissura radial surgiu entre 29% a 40% da carga de ruptura nas lajes da Série 1, entre 32% a 40% nas lajes da Série 2 e entre 23% a 27% para as lajes da Série 3.

Nas lajes com aberturas, as fissuras radiais surgiram inicialmente adjacentes às aberturas e desenvolveram-se em direção às bordas da laje. As fissuras circunferenciais foram observadas nas faces internas das aberturas e evoluíram conforme o aumento de carregamento, até tornarem-se as próprias fissuras críticas de ruptura.

Com relação aos deslocamentos verticais, as lajes das Séries 1 e 3 apresentaram um padrão de comportamento aproximadamente linear e simétrico em relação ao centro da laje, com os deslocamentos verticais aumentando conforme o acréscimo de carga. Já nas lajes com apenas uma abertura (Série 2), os deslocamentos verticais obtidos nos pontos próximos da abertura não foram simétricos com os respectivos pontos equidistantes ao pilar. A abertura reduziu a rigidez das lajes dessa série e conduziu a uma maior deflexão na região próxima à abertura.

Todas as lajes apresentaram deslocamentos máximos inferiores aos das lajes de referência. Sob esse enfoque, as lajes com aberturas puderam ser consideradas menos rígidas que as lajes da Série 1. A laje LF1-C não apresentou o mesmo comportamento, resultando em um maior deslocamento vertical central. Isto pode ser explicado devido à valores maiores de resistência à compressão do concreto e altura efetiva desta laje em comparação com as lajes sem aberturas.

A capacidade de dissipação de energia de uma laje lisa decresce conforme aumenta a quantidade ou as dimensões da abertura. A presença de uma abertura nas lajes da Série 2

resultou em uma redução média de 23,1% dessa capacidade, enquanto que para as lajes da Série 3, esta redução foi de 36,6%.

As barras centrais instrumentadas de todas as lajes tiveram suas maiores deformações nos pontos situados próximos a face do pilar. As barras da armadura de flexão descontínuas (que foram interceptadas pelas aberturas) das lajes das Séries 2 e 3 praticamente não foram solicitadas. Os pontos instrumentados das armaduras que registraram maiores deformações também foram aqueles localizados próximos da região laje-pilar.

Na face comprimida das lajes, as deformações tangenciais na superfície foram superiores às radiais para todas as lajes. Contudo, em nenhuma das lajes ensaiadas a deformação ultrapassou o valor limite de 3,5%, que caracteriza a ruptura por esmagamento do concreto durante a flexão estabelecido pela norma ABNT NBR 6118 (2014).

Para as lajes das Séries 1 e 3, houve um alívio das deformações radiais do concreto a partir do estágio de carregamento em torno de 50% da carga de ruptura, chegando a passar de compressão para tração na laje LF2-C. Nas lajes da Série 2, esse comportamento de descompressão foi verificado próximo a carga de ruptura.

Para as lajes testadas, o programa *PunCalc*, baseado em modelagem teórica proposta por Marques (2018), forneceu resultados satisfatórios quando comparados com os resultados experimentais. A diferença máxima observada entre a carga de ruptura experimental e a carga de ruptura obtida pelo programa foi de 13% para a laje LF1-B. Em termos de rotação, a laje LR-B apresentou rotação experimental 30% superior àquela calculada computacionalmente. Entretanto, o programa estimou a carga última dessa laje um valor apenas 3% superior ao obtido no ensaio.

## 8.2 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

Por meio dos parâmetros estatísticos, média e coeficiente de variação da variável erro de modelo ( $E_m$ ), determinada para cada código normativo e para o modelo teórico de Marques (2018), foi possível concluir que as prescrições dos códigos EUROCODE 2 (2004) e ABNT NBR 6118 (2014) foram as mais satisfatórias em prever a carga de ruptura das 249 lajes contidas na Base de Dados desta pesquisa. Nesses códigos, os resultados foram mais precisos e menos dispersos, com valores médios da variável  $E_m$  para lajes sem aberturas iguais a 1,11 e 1,27, respectivamente e coeficientes de variação iguais a 25,02% para a norma europeia e 18,81% para a norma brasileira.

Para as análises considerando as aberturas nas lajes, os códigos EUROCODE 2 (2004) e ABNT NBR 6118 (2014) apresentaram  $E_{m,médio}$  iguais a 1,36 e 1,56, respectivamente, e coeficientes de variação iguais a 32,91% para a norma europeia e 31,17% para a norma brasileira.

As instruções normativas CEB-FIP/MC (2010) e ACI 318 (2014) apresentaram resultados mais conservadores, com valores médios de  $E_m$  para lajes sem aberturas iguais a 1,71 e 1,34, nessa ordem, e coeficientes de variação praticamente iguais (em torno de 35%). Para as análises considerando as aberturas nas lajes, os códigos CEB-FIP/MC (2010) e ACI 318 (2014) apresentaram  $E_{m,médio}$  iguais a 1,93 e 1,59, respectivamente e coeficientes de variação em torno de 44% para ambos os códigos.

Os resultados obtidos pelo programa *PunCalc*, baseado no modelo de Marques (2018), demonstraram-se satisfatórios para os casos considerados neste estudo, com  $r_I$  determinado computacionalmente e para  $r_I = 1,35d$ . Para lajes sem aberturas,  $E_{m,médio}$  resultou igual a 1,08 e 1,04, nessa ordem e coeficientes de variação de 13,63% e 9,85%. Já para lajes com aberturas, os valores de  $E_{m,médio}$  resultaram iguais a 1,16 e 1,13, respectivamente e coeficientes de variação em torno de 23,65% e 12,55%.

Os modelos lineares generalizados construídos para descrever a variável resposta  $E_m$  em função de covariáveis significativas apresentaram resíduos com comportamento oscilatório em torno de zero. Sendo assim, as covariáveis dos modelos explicaram a maior parte da variabilidade de  $E_m$ , o que indicou um bom ajuste desses modelos.

Dentre as covariáveis contidas nos modelos citados anteriormente, a existência de aberturas mostrou-se um dos parâmetros mais significativos. O mesmo não ocorreu no modelo empregado para a obtenção de  $E_m$  através do programa *PunCalc*, onde os parâmetros com maior nível de significância foram a altura útil da laje ( $d$ ) e a relação entre a maior dimensão do pilar e a altura útil ( $c_{máx}/d$ ).

As funções de estados limites consideradas neste trabalho representaram a probabilidade de que a estimativa da carga de ruptura obtida por cada método de cálculo considerado fosse contra a segurança, ou seja, acima do valor obtido nos ensaios experimentais ( $V_{exp}$ ).

Os resultados de probabilidades de falha ( $P_f$ ) e índices de confiabilidade ( $\beta$ ) obtidos para as instruções normativas EUROCODE 2 (2004), ACI 318 (2014) e ABNT NBR 6118 (2014) por meio do Método de Simulação de Monte Carlo (MCS) foram semelhantes aos valores obtidos pelo Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM). Nesses resultados,

constatou-se a influência das aberturas no aumento dos valores de  $P_f$ , principalmente nas lajes da Série 2 em relação as demais lajes ensaiadas. O maior aumento ocorreu para função de estado limite  $G_I$  do código ACI 318 (2014), cujo valor de  $P_f$  passou de  $4,34 \times 10^{-3}$  (lajes da Série 1) para  $1,75 \times 10^{-1}$  (lajes da Série 2), ou seja, um aumento de 4.032,3%.

As equações  $G_i$  relativas a verificação isolada da força resistente de cisalhamento na primeira superfície crítica das normas EUROCODE 2 (2004) e ABNT NBR 6118 (2014) resultaram em valores condizentes com os índices de confiabilidade alvo ( $\beta$ ) e as correspondentes probabilidades de falha apresentados nas recomendações propostas pelo JCSS (2001) para Estados Limites Últimos (ELU).

Os valores de falha obtidos pelo método FORM para as equações de estados limites baseadas no código CEB-FIP/MC (2010) foram inferiores em comparação com aqueles obtidos pelo método MCS. A aproximação FORM é suficientemente precisa para os casos em que a curvatura da superfície de falha é pequena e a probabilidade de falha tem um valor pequeno. Além disso, nesse tipo de aproximação o erro depende da concavidade da superfície de falha, ou seja, para superfícies côncavas, a aproximação é a favor da segurança, ao passo que para superfícies convexas, o FORM resulta contra a segurança.

Assim, conclui-se que a teoria de confiabilidade pode ser aplicada com sucesso na verificação da segurança à punção das ligações laje-pilar em lajes lisas, permitindo um melhor conhecimento desse sistema estrutural.

### 8.3 SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DO TRABALHO

A seguir serão apresentadas algumas sugestões para estudos futuros envolvendo punção em lajes lisas de concreto armado com aberturas:

- Realização de ensaios experimentais de lajes lisas de concreto armado com aberturas e armadura de cisalhamento.
- Aplicação de algoritmos heurísticos para resolução do sistema de equações não lineares contidas no método teórico de Marques (2018).
- Adaptação da modelagem teórica de Marques (2018) e do programa *PunCalc* para lajes com pilares retangulares.
- Avaliação dos níveis de confiabilidade de modelos analíticos de previsão da carga de ruptura de lajes lisas de concreto armado com armadura de cisalhamento e associado ou não à existência de aberturas na laje.

## 9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADOLFS, D. V. **Análise de confiabilidade de peças de madeira fletidas dimensionadas segundo a NBR: 7190/97**. 2011. 95f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

ALBUQUERQUE, E. J. P. **Punção em lajes lisas com armadura de cisalhamento e pilares de centro retangulares**. 2010. 299f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade de Brasília. Brasília, DF, 2010.

ALMEIDA, A. F. **Projeto ótimo baseado em confiabilidade de pórticos planos de concreto armado**. 2008. 147f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2008.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ACI 318-14. **Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (ACI 318R-11)**. Farmington Hills, Michigan, 2014.

AMORIM, R. R. **Resistência à Punção em Lajes Cogumelo de Concreto Armado Análise Teórico-Computacional**. 2000. 161f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, 2000.

ANDERSSON, J. A. **Punching of concrete slabs with shear reinforcement. Stockholm, Sweden**. Meddelander nr. 47 fran. Inst. för Byggnadsstatik, Kungl. Tekniska Högskolands Handligar, Nr.212, 59f., 1963.

ANDRADE, M. A. S. **Punção em Lajes Cogumelo – Estudo do Posicionamento da Armadura de Cisalhamento em Relação à Armadura de Flexão**. 1999. 197f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, 1999.

ANG, A. H. S.; TANG, W. H. **Probability concepts in engineering: emphasis on applications to civil and environmental engineering**. 2nd. Edition. John Wiley & Sons, 2007.

ANIL Ö.; KINA, T.; SALMANI, V. Effect of opening size and location on punching shear behaviour of two-way RC slabs. **Magazine of Concrete Research**, v.66, p. 955-966, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 5739**: Concreto – Ensaio de compressão de corpos-de-prova cilíndricos. Rio de Janeiro, 2007.

\_\_\_\_\_. **ABNT NBR 6118**: Projeto de Estruturas de Concreto Armado. Rio de Janeiro, 2003.

\_\_\_\_\_. **ABNT NBR 6118**: Projeto de Estruturas de Concreto Armado. Rio de Janeiro, 2014.

\_\_\_\_\_. **ABNT NBR 7222**: Concreto e argamassa - Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos de prova cilíndricos. Rio de Janeiro, 2011.

\_\_\_\_\_. **ABNT NBR 8522**: Concreto - Determinação do módulo estático de elasticidade à compressão. Rio de Janeiro, 2008.

\_\_\_\_\_. **ABNT NBR 8681**: Ações e segurança nas estruturas. Rio de Janeiro, 2003.

\_\_\_\_\_. **ABNT NBR ISO 6892-1**: Materiais metálicos - Ensaio de Tração, Parte 1: Método de ensaio à temperatura ambiente. Rio de Janeiro, 2013.

\_\_\_\_\_. **ABNT NM 67**: Concreto - Determinação da consistência pelo abatimento do tronco de cone. Rio de Janeiro, 1998.

BECK, A. T. **Curso de confiabilidade estrutural**. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

BECK, A. T.; OLIVEIRA, W. L. A.; NARDIM, S.; ELDEBS, A. L. H. C. Reliability-based evaluation of design code provisions for circular concrete-filled steel columns. **Engineering Structures**, v. 31, p. 2299-2308, 2009.

BERNARDO, T. R. R. **Contribuição à análise da confiabilidade em pavimentos de edifícios de concreto armado**. 1999. 175f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

BOLANDIM, E. A. **Análise de confiabilidade em ligações parafusadas em chapas finas e perfis de aço formados a frio**. 2011. 336f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

BOLANDIM, E. A.; BECK, A. T.; MALITE, M. Bolted connections in cold-formed steel: reliability analysis for rupture in net section. **Journal of Structural Engineering**, v.139, p. 748-756, 2013.

BORGES, L. L. J. **Comportamento ao puncionamento de lajes cogumelo de concreto armado com pilares retangulares e furos de grandes dimensões**. 2004. 392 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, 2004.

BRANTSCHEN, F. **Influence of bond and anchorage conditions of the shear reinforcement on the punching strength of RC slabs**. 2016. 27 p. Thèse (Doctorat ès Sciences) – Faculté de L’environnement Naturel, Architectural et Construit, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 2016

CARVALHO, A. L. **Análise teórica da resistência à punção em lajes cogumelo com armadura de cisalhamento**. 2000. 161f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, 2000.

COELHO, K. O. **Modelos numéricos aplicados à modelagem probabilística da degradação mecânica do concreto e corrosão de armaduras**. 2017. 189f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

COLLINS, M. P. **Evaluation of shear design procedures for concrete structures**. A Report prepared for the CSA technical committee on reinforced concrete design. 2001

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB – fib Model Code Design Code 2010**: Final Draft. Bulletin d'Information, CEB, Lousanne, April 2010.

CONSELHO REGIONAL DE ENGENHARIA E AGRONOMIA DO PIAUÍ. **CREA-PI**: Relatório técnico sobre o desabamento da obra do Shopping Rio Poty. Teresina, 2013.

CORDEIRO, E. S. B. **Análise de confiabilidade de estruturas com paredes portantes de concreto pré-moldado**. 2016. 131f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

DAMASCENO, L. S. R. **Análise experimental de lajes lisas unidirecionais de concreto armado com pilares retangulares ao punçionamento**. 2007. 237f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Instituto de Tecnologia, Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.

DU, X. First Order and Second Reliability Methods. **Probabilistic Engineering Design**, chapter 7, University of Missouri – Rolla, 2005.

ELSTNER, R. C.; HOGNESTAD, E. Shearing strength of reinforced concrete slabs. **ACI Structural Journal**, v. 53, n. 1, p. 29-58, 1956.

EUROCODE 2, **Design of Concrete Structures—Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings**, CEN, EN 1992D1D1, Brussels, Belgium, 2004, 225 p.

FERREIRA, M. P. **Punção em lajes lisas de concreto com armaduras de cisalhamento e momentos desbalanceados**. 2010. 299 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2010.

FERREIRA, M. P.; MELO, G. S.; REGAN, P. E.; VOLLUM, R. L. Punching of reinforced concrete flat slabs with double-headed shear reinforcement. **ACI Structural Journal**, v. 111, n. 2, p. 363-374, 2014.

GENIKOMSOU, A. S.; POLAK, M. A. Effect of Openings on Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs—Finite Element Investigation. **ACI Structural Journal**, v. 114, n. 5, p. 1249-1262, 2017.

GOMES, R. B. **Punching resistance of reinforced concrete flat slabs with shear reinforcement**. 1991. 185p. Polytechnic of Central London, M.Phil. PhD Thesis, London, 1991.

GOMES, R. B.; ANDRADE, M.A.S. **Punching in reinforced concrete flat slabs with holes**. In Proceedings of Developments in Computer Aided Design and Modeling for Structural Engineering. Endinburgh-UK, p. 185-193, 1995.

GOMES, W. J. S. **Estudo do efeito de incertezas na otimização estrutura**. 2010. 96f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

\_\_\_\_\_. **Otimização de riscos sob processos aleatórios de corrosão e fadiga**. 2013. 188f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

GUANDALINI, S.; BURDET, O.; MUTTONI, A. Punching tests of slabs with low reinforcement ratios. **ACI Structural Journal**, v. 106, n. 1, p. 87-95, 2009.

HA, T.; LEE, M.; PARK, J.; KIM, D. Effects of openings on the punching shear strength of RC flat-plate slabs without shear reinforcement. **The Structural Design of Tall and Special Buildings**, v. 24, p. 895-911, 2015.

HARAJLI, M. H.; MAALOUF, D.; KHATIB, H. Effect of fibers on the punching shear strength of slab-column connections. **Cement & Composites**, v. 17, p. 161-170, 1995.

JAPAN CONCRETE INSTITUTE. **JCI-S-001-2003**: Method of test for fracture energy of concrete by use of notched beam. Japan, 2003.

JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY, JCSS. **Probabilistic Model Code**, 2001.

KINNUNEN, S.; NYLANDER, H. **Punching of Concrete Slabs without Shear Reinforcement**. Meddelande NR 38. Institutionen för Byggnadsstatik, Kungliga Tekniska Högskolan, Stockholm, 1960.

KOPPITZ, R.; KENEL, A.; KELLER, T. Punching shear of RC flat slabs – Review of analytical models for new and strengthening of existing slabs. **Engineering Structures**, v. 52, p. 123-130, 2013.

LEMAIRE, M. Reliability and Mechanical Design. **Reliability Engineering & System Safety**, v.55, n.1, p. 163-170, 1997.

LEONEL, E. D. **Modelos não lineares do método dos elementos de contorno para análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas à fadiga**. 2009. 421f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

LIPS, S.; RUIZ, M. F.; MUTTONI, A. Experimental investigation on punching strength and deformation capacity of shear-reinforced slabs. **ACI Structural Journal**, v. 109, n. 6, p. 889-900, 2012.

LOURENÇO, D. S. **Punção em lajes lisas de concreto armado com furo: análise experimental**. 2018. 179f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2018.

MARQUE, N. L. A.; NOGUEIRA, C. G. Comparação entre modelos de cálculo de códigos de projeto quanto à punção em ligações laje-pilar: análise paramétrica e caracterização estatística do erro de modelo. In 60° CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 9., 2018, Foz do Iguaçu. **Anais...** Foz do Iguaçu, 2018.

MARQUES, M. G. **Punção em lajes lisas de concreto armado com aberturas adjacentes ao pilar e armadura de cisalhamento**. 2018. 259f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2018.

MCCULLAGH, P.; NELDER, J. A. **Generalized Linear Models**. 2º Ed. Chapman & Hall, London, 1989.

MELCHERS, R. E. **Structural reliability analysis and prediction**. Ellis Horwood, Wiley, Chichester, 1987.

MELGES, J. L. P. **Análise experimental da punção em lajes de concreto armado e protendido**. 2001, 414 f. Dissertação – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2001.

MEHTA, P.K.; MONTEIRO, P.J.M. **Concreto: microestrutura, propriedades e materiais**. Tradução da 3. ed. em inglês. São Paulo: Ibracon, 2008.

MONTGOMERY D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. LTC editora. 2º Ed. Rio de Janeiro, RJ, 2003.

MORAES NETO, B. N. **Comportamento à punção de lajes lisas em concreto reforçado com fibras de aço sob carregamento simétrico**. 2013, 363p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2013.

MUSSE, T. H. **Punção em lajes cogumelo: fibras de aço e armadura de cisalhamento**. 2004, 189p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2004.

MUTTONI, A. Punching shear strength of reinforced concrete slabs without transverse reinforcement. **ACI Structural Journal**, v. 105, n. 4, p. 440-450, 2008.

NELDER, J.; WEDDERBURN, R. Generalized linear models. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 135, n. 3, p. 370–384, 1972.

NEVES, R. A. **Desenvolvimento de modelos mecânico-probabilísticos para estruturas de pavimentos de edifícios**. 2004. 200f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

NOGUEIRA, C. G. **Um modelo de confiabilidade e otimização aplicado às estruturas de barras de concreto armado**. 2005. 166f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

\_\_\_\_\_. **Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado**. 2010. 353f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

NOGUEIRA, C. G.; PINTO, M. D. T. Avaliação da variabilidade da segurança de vigas em concreto armado submetidas ao momento fletor considerando os coeficientes parciais de segurança da NBR 6118: 2014. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, v. 9, n. 5, p. 682-709, 2016.

NOGUEIRA, C. G.; VENTURINI, W. S.; BECK, A., T. Avaliação da confiabilidade de ligações laje-pilar à punção a partir do modelo da NBR 6118:2003. In XXVIII CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 6., 2007, Porto, Portugal. **Anais...** Porto, 2007.

NOVA, S. J. S. **Avaliação da segurança de pontes de concreto protendido sob solicitações normais com base na teoria da confiabilidade**. 2017. 124f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2017.

NOVA, S. J. S.; SILVA, M. S. A. T. Cálculo dos coeficientes parciais de segurança para pontes de concreto protendido sob solicitações normais com base na teoria da confiabilidade. In 59° CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 10., 2017, Bento Gonçalves. **Anais...** Bento Gonçalves, 2017.

NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R. **Reliability of structures**. Michigan: McGraw-Hill, 2000.

OUKAILI, N. K.; SALMAN, T. S. Punching shear strength of reinforced concrete flat plates with openings. **Journal of Structural Engineering**, v. 20, n. 1, p. 1-20, 2014.

OLIVEIRA, D. R. C. **Análise experimental de lajes cogumelo de concreto armado com pilares retangulares**. 2003. 237f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2003.

OLIVEIRA, M., H. **Punção em lajes lisas com armadura de cisalhamento submetidas a carregamento excêntrico e apoiadas sobre pilares retangulares**. 2008. 251f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2013.

OLIVEIRA, W. L. A. **Análise teórico-experimental de pilares preenchidos de seção circular**. 2008. 251f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

PAULA, G. A. **Modelos de regressão com apoio computacional**. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

PINTO, V. C. **Punção em lajes lisas bidirecionais de concreto armado com furos e pilares com seção transversal em “L”**. 2015. 200f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2015.

RABELLO, F. T. **Análise comparativa de normas para a punção em lajes de concreto armado**. 2010. 250f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

RUIZ, M. F.; MIRZAEI, Y.; MUTTONI, A. Post-punching behavior of flat slabs. **ACI Structural Journal**, v. 110, n. 5, p. 801-812, 2013.

RUIZ, M. F.; MUTTONI, A. Applications of critical shear crack theory to punching of reinforced concrete slabs with transverse reinforcement. **ACI Structural Journal**, v. 106, p. 485-494, 2009.

SAGASETA, J.; MUTTONI, A. RUIZ, M. F.; TASSINARI, L. Non-axis-symmetrical punching shear around internal columns of RC slabs without transverse reinforcement. **Magazine of Concrete Research**, v. 63, n. 6, p. 441-457, 2011.

SANTOS, E. S. **Avaliação estatística do erro de modelos de resistência para elementos lineares de concreto armado da ABNT NBR 6118:2007**. 2012. 128f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

SANTOS, K. R. M. **Técnicas de amostragem inteligente em simulação de Monte Carlo**. 2014. 193f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

SHEHATA, I. A. E. M. **Theory of Punching in Concrete Slabs**. London, October, 1985. PhD Thesis. The Polytechnic of Central London, 1985.

SHU, J.; BELLETTI, B.; MUTTONI, A.; SCOLARI, M.; PLOS, M. Internal force distribution in RC slabs subjected to punching shear. **Engineering Structures**, v. 153, p. 766-781, 2017.

SILVA, J. A. **Análise experimental de lajes cogumelo de concreto armado com armadura de cisalhamento**. 2003, 184p. Dissertação – Escola da Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2003.

SILVA, J. A.; MARQUES, M. G.; TRAUTWEIN, L. M.; GOMES, R. B.; GUIMARÃES, G. N. Punching of reinforced concrete flat slabs with holes and shear reinforcement. **REM – International Engineering Journal**, v. 70, p. 407-413, 2017.

SILVA, J. L. **Análise de tubos circulares de concreto armado para o ensaio de compressão diametral com base na teoria de confiabilidade**. 2011. 172f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

SILVANO, C. C. **Modelos lineares generalizados mistos para dados longitudinais**. 2003. 125f. Tese (Doutorado Estatística e Experimentação Agronômica) - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2003.

SOARES, R.C. **Um estudo sobre modelos mecânico-probabilísticos para Pórticos de concreto armado**. 2001. 282f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

SORENSEN, J. D. **Generic, Notes in Structural Reliability Theory And Risk Analysis**. 2004.

SOUZA, R. M. **Punção em Lajes Cogumelo de Concreto Armado com Furos Adjacentes ou Distante de um Pilar Interno**. 2004, 171f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, Brasília, 2004.

SOUZA, R. M. **Punção em lajes lisas de concreto armado com furos adjacentes ao pilar e transferência de momento.** 2008, 442 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília. Brasília, 2008.

TENG, S.; CHEONG, H. K.; KUANG, K. L.; GENG, J. Z. Punching shear strength of slabs with openings and supported on rectangular columns. **ACI Structural Journal**, v. 101, n. 5, p. 678-687, 2004.

TENG, S.; CHANTHABOUALA, K.; LIM, D. T. Y.; HIDAYAT, R. Punching shear strength of slabs and influence of low reinforcement ratio. **ACI Structural Journal**, v. 1115, n. 1, p. 139-179, 2018.

TESSARI, R. K. **Projeto baseado em desempenho de torres metálicas sujeitas à ação do vento.** 2016. 163f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

TRAUTWEIN, L. M. **Punção em lajes cogumelo de concreto armado com armadura de cisalhamento tipo “stud” interno e tipo estribo inclinado.** 2001, 185f. Dissertação – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília. Brasília, 2001.

\_\_\_\_\_. **Punção em lajes cogumelo de concreto armado: análise experimental e numérica.** 2006. 350f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

VAZ, A. P. R. **Resistência à punção em lajes cogumelo de concreto armado uma contribuição para definição de armadura mínima de cisalhamento.** 2007. 157f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2007.

## APÊNDICE A

### ALGORITMO IMPLEMENTADO DO MODELO TEÓRICO DE MARQUES (2018)

#### • **Programa PunCalc:**

```

!-----
PROGRAM PunCalc
!-----
!--- Declaração de Módulos ---
USE MSIMSL
USE MEC_MOD
!
!--- Tempo inicial do processamento: chamada inicial ---
CALL CPU_TIME (Time1)
!
!--- Abertura dos arquivos de entrada e saída de dados ---
OPEN (10,FILE = 'IN_Parameters.txt')
OPEN (20,FILE = 'OUT_Results.txt')
!
!--- Leitura dos arquivos de entrada de dados ---
CALL READ_Parameters
!
!--- Processamento da análise ---
CALL Puncao_run
!
!--- Tempo final do processamento: chamada final ---
CALL CPU_TIME (Time2)
!
!--- Tempos de processamento: segundos, minutos e horas ---
Ts = Time2 - Time1
Tm = Ts / 60.d0
Th = Tm / 60.d0
!
!--- Impressão na tela do tempo de processamento ---
WRITE(*,*)
WRITE(*,*)
WRITE(*,*) '-- Tempo de Processamento:', Ts, 'segundos',';','--'
WRITE(*,*) '-- Tempo de Processamento:', Tm, 'minutos ',';','--'
WRITE(*,*) '-- Tempo de Processamento:', Th, 'horas ',';','--'
WRITE(*,*)

```

#### **Subrotina: Puncao\_run**

```

SUBROUTINE Puncao_run
!
!--- Declaração de Módulos ---
USE MSIMSL
USE MEC_MOD

!--- Parâmetros iniciais ---
!CALL Neutral_Line
!
!--- Valores iniciais das variáveis ---
!Tolerancia = 0.0001d0
krup = 10000.d0
tmax = 1.d0
eta = 10000.d0
Pascar = 1
INR = 1
Erro3 = 100.d0

```

```

!
!--- Ajuste do critério de parada para lajes com ou sem aberturas ---
!IF (LF.EQ.'N') THEN
    CoefAber = 1.d0
ELSEIF (LF.EQ.'S') THEN
    CoefAber = 0.6d0
ENDIF

!--- Início da iteração dos critérios de ruptura ---
DO WHILE
((alfa.LT.12.5d0*PI/180.d0).AND.(eta.LT.CoefAber*krup).AND.(Erro3.GT.1.d0)).OR.(tmax.LT.CoefAber*fsp))
!
!--- Impressão na tela: processo incremental ---
!     WRITE(*,*) 'INCREMENTO:', ' ',...,Pascar
!
!--- Dados iniciais do processamento iterativo ---
    Iterat    = 1
    Erro1 = 1.d0
    Erro2 = 1.d0
!
!--- Início da iteração do equilíbrio das forças ---
!     DO WHILE ((Erro1.GT.Tolerancia).OR.(Erro2.GT.Tolerancia))

!--- Impressão na tela: processo iterativo ---
!     WRITE(*,*) 'Iteracao:', ' ',...,Iterat
!
!--- Determinação da força radial do concreto (Fcr) ---
!     CALL Radial_Force

!--- Determinação da força tangencial do concreto (Fct) ---
!     CALL Tangencial_Force
!
!--- Determinação da força da armadura de cisalhamento (Fe) ---
!     CALL Shear_Reinf_Force
!
!--- Determinação da força tangencial da armadura de flexão (Fst) ---
!     CALL Tangencial_Reinf_Force
!
!--- Determinação da força radial da armadura de flexão (Fsr) ---
!     Fsr = 2.D0*PI*ro*Xi*(fyd/100.D0)*d*r0/1000.D0
!
!--- Equações de equilíbrio ---
!     CALL Equations_Eq
!
!--- Método de Newton-Raphson ---
!     CALL Newton_Raphson
!
!     Iterat = Iterat+1

!     IF (Iterat.GT.20000) THEN
!         Rotation = Rotation*1.05D0
!         Iterat = 1
!     ENDIF
!
!     ENDDO !fim do processo iterativo das variáveis x e alfa.
!
!--- Critérios de ruptura ---
!     CALL Breakages_Criteria
!
!     RotationPrint = Rotation !Armazena o valor da rotação relativo á carga de ruptura para posterior impressão do
!     resultado.
!
!     IF (P.LT.0.D0) THEN
!         WRITE(*,*)
!         WRITE(*,*)'Carga de ruptura com valor negativo.'
!         WRITE(*,*)'Reveja os dados iniciais de x, alfa e rotacao e reinicie o programa.'
!         WRITE(*,*)

```

```

                STOP          !Se P resultar em um valor negativo, o programa se encerrará.
            ENDIF
        !
        Pascas = Pascas + 1 !Atualiza a contagem do incremento de rotação aplicado.
    !
    !-- Atualização do passo de rotação --
        Rotation = Rotation*1.005D0
    !
    ENDDO !fim do processo iterativo.
    !
    !--- Tipos de ruptura (Punção e Externo/Interno à armadura de cisalhamento) ---
    !
    IF (Ase.EQ.0.d0) THEN
        R = ' Punção'
    ELSEIF (Ase.NE.0.d0) THEN
        IF (eta.GT.CoeffAber*krup) THEN
            IF (tmax.LT.CoeffAber*fsp) THEN
                R = 'Ruptura Interna'
            ELSEIF (tmax.GT.CoeffAber*fsp) THEN
                IF (Erro3.GT.Erro4) THEN
                    R = 'Ruptura Externa'
                ELSEIF (Erro3.LT.Erro4) THEN
                    R = 'Ruptura Interna'
                ELSEIF ((Erro3.EQ.Erro4)) THEN
                    R = 'Ruptura Interna/Externa'
                ENDIF
            ENDIF
        ELSEIF (eta.LT.CoeffAber*krup) THEN
            IF (tmax.GT.CoeffAber*fsp) THEN
                R = 'Ruptura Externa'
            ENDIF
        ENDIF
    ENDIF
    !
    !--- Impressão dos Resultados ---
    !
    CALL PRINT1
    !
    RETURN
END SUBROUTINE Puncao_run
!-----

```

### **Subrotina: Linha Neutra**

```

SUBROUTINE Linha_Neutra
!
USE MSIMSL
USE MEC_MOD
!
!Altura Efetiva Inicial da Linha Neutra
!
Rotation = (1.D0/d)
Ec = 4250.D0*DSQRT(fc)
x = 0.8D0*d*DSQRT(35.D0*(200000.D0/Ec)*ro/(100D0*fc))
!
!
RETURN
END SUBROUTINE Linha_Neutra

```

### **Subrotina: Radial Force**

```

SUBROUTINE Radial_Force
!

```

```

!--- Declaração de Módulos ---
USE MSIMSL
USE MEC_MOD
!
!--- Declaração de Variáveis ---
INTEGER      :: I

TetR = 0.d0 !Valor inicial da diferença dos ângulos de abertura das aberturas adjacentes ao pilar

!--- Determinação da Força Radial do Concreto (Fcr) ---
k = 1+DTAN(alfa)+DTAN(25.D0*PI/180.D0-alfa)
k1 = (2.D0*k/(DCOS(alfa)**2.D0))-(k**2.D0)*DTAN(alfa)
eta = (((2.D0*r0*k)+(x*k1))/(r0*(1.8D0+0.2D0*k)+x*(0.1D0*k+0.9D0*DTAN(alfa))))
!
!--- Laje sem aberturas ---
IF (LF.EQ.'N') THEN
    Ac = (2.D0*PI*x*(r0-(x*DTAN(alfa))/2.D0)/DCOS(alfa)
!
! --- Laje com aberturas adjacentes ao pilar ---
ELSEIF (LF.EQ.'S') THEN
    IF (Adj.NE.0) THEN
        DO I = 1, Aber
            IF (b1(I).EQ.r0) THEN
                TetR = TetR+(Teta2(I)-Teta1(I))
            ENDIF
        ENDDO
!
        Ac = ((2.D0*PI-TetR)*x*(r0-(x*DTAN(alfa))/2.D0)/DCOS(alfa)
!
        ELSEIF (Adj.EQ.0) THEN
            Ac = (2.D0*PI*x*(r0-(x*DTAN(alfa))/2.D0)/DCOS(alfa)
!
        ENDIF
    ENDIF
Fcr = (Ac*eta*fc)/1000.D0
RETURN
END SUBROUTINE Radial_Force
!-----

```

### **Subrotina: Tangencial Force**

```

SUBROUTINE Tangencial_Force
!
!--- Declaração de Módulos ---
USE MSIMSL
USE MEC_MOD

!--- Declaração de Variáveis ---
INTEGER      :: I
!
ecu = 0.0035D0
ec1 = DSQRT(fc)/5000.D0
rec1 = Rotation*x/ec1
recu = Rotation*x/ecu
alfa0 = ecu/ec1
k0 = 0.425D0+(0.298D0*DLOG(alfa0))/(alfa0-1.D0)
!
!--- Laje sem aberturas---
!
!--- Determinação da força tangencial do concreto (Fct) ---
IF ((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r3)) THEN
    Tipo = 1
    Fct = 2.D0*PI*fc*x*x*((k0*Rotation/ec1)-(0.723D0*r0/x)+
        +(0.425D0*Rotation*DLOG(r3*ec1/(Rotation*x)/ec1))/1000.D0
!
!

```

```

ELSEIF ((recu.LE.r0).AND.(r0.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r3)) THEN
  Tipo = 2
  Fct = 2.D0*PI*fc*(0.425D0*(x**2*Rotation/ec1)
    -0.425D0*x*r0+0.297D0*(Rotation*x**2)/(ecu-ec1)*DLOG(Rotation*x/(ec1*r0))
    -0.297D0*(x*ec1/(ecu-ec1))*(Rotation*x/ec1-r0)
    +0.425D0*(Rotation*x**2/ec1)*DLOG(r3*ec1/(Rotation*x)))/1000.D0
!
ELSEIF ((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.r3).AND.(r3.LE.rec1)) THEN
  Tipo = 3
  Fct = 2.D0*PI*fc*x*x*((1.D0+1.D0/(alfa0-1.D0))*(0.298D0*Rotation/ecu+0.425D0*r3/x)
    -(0.723D0/x)*(r0+r3/(alfa0-1.D0))
    +(0.298D0*Rotation/(ec1*(alfa0-1.d0)))*DLOG((r3*ecu)/(Rotation*x)))/1000.D0
!
ELSEIF ((r0.LE.r3).AND.(r3.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1)) THEN
  Tipo = 4
  Fct = 2.D0*0.723D0*PI*fc*x*(r3-r0)/1000.D0
!
ELSEIF ((recu.LE.r0).AND.(r0.LE.r3).AND.(r3.LE.rec1)) THEN
  Tipo = 5
  Fct = 2.D0*PI*fc*x*x*((r3-r0)/x*(0.425D0-0.298D0/(alfa0-1.D0))
    +0.298D0*Rotation/((alfa0-1.D0)*ec1)*DLOG(r3/r0))/1000.D0
!
ELSEIF ((recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r0).AND.(r0.LE.r3)) THEN
  Tipo = 6
  Fct = 2.D0*PI*fc*x*x*(0.425D0*(Rotation/ec1)*DLOG(r3/r0))/1000.D0
ENDIF
!
!--- Laje com aberturas ---
!--- Determinação da força tangencial do concreto devido à abertura (Fctd) ---
IF (LF.EQ.'S') THEN
  DO I = 1,Aber
    IF
      ((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r3).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.recu).AND.(recu.LE.b2(I)).AND.(b
      2(I).LE.rec1).AND.(rec1.LE.r3)) THEN
        Tipod = 1
        IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
          Fctd(I) = 0.d0
        ELSE
          Fctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.7225D0*x*(Rotation*x/ecu-
          b1(I)+0.425*x*(b2(I)-Rotation*x/ecu)+0.298D0*(Rotation*x*x/(ecu-ec1))*DLOG(b2(I)*ecu/(Rotation*x))-
          0.298D0*ec1*x*(b2(I)-Rotation*x/ecu)/(ecu-ec1))/1000.D0
        ENDIF
      !
        ELSEIF
          ((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r3).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.recu).AND.(
          recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r3)) THEN
            Tipod = 2
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
              Fctd(I) = 0.d0
            ELSE
              Fctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.7225D0*x*(b2(I)-b1(I)))/1000.D0
            ENDIF
          !
            ELSEIF
          ((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r3).AND.(r0.LE.recu).AND.(recu.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b
          2(I).LE.rec1).AND.(rec1.LE.r3)) THEN
            Tipod = 3
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
              Fctd(I) = 0.d0
            ELSE
              Fctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*x*(b2(I)-
          b1(I)+0.298D0*(Rotation*x*x/(ecu-ec1))*DLOG(b2(I)/b1(I))-0.298D0*ec1*x*(b2(I)-b1(I))/(ecu-ec1))/1000.D0
            ENDIF
          !
            ELSEIF
          ((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r3).AND.(r0.LE.recu).AND.(recu.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.rec1).AND.(re
          c1.LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r3)) THEN

```

```

        Tipod = 4
        IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
            Fctd(I) = 0.d0
        ELSE
            Fctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*x*(rec1-b1(I))+0.298*(Rotation*x*x/(ecu-
            ecu1))*DLOG(rec1/b1(I))-0.298D0*(ec1*x*(rec1-b1(I)))/(ecu-
            ecu1)+0.425D0*(Rotation*x*x/ec1)*DLOG(b2(I)/rec1))/1000.D0
        ENDIF
    !
        ELSEIF
        ((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r3).AND.(r0.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.b1(I)).AND.(b1
        (I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r3)) THEN
            Tipod = 5
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fctd(I) = 0.d0
            ELSE
                Fctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*(Rotation*x*x/ec1)*DLOG(b2(I)/b1(I)))/1000.D0
            ENDIF
        !
        ELSEIF
        ((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r3).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(re
        cu.LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r3)) THEN
            Tipod = 6
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fctd(I) = 0.d0
            ELSE
                Fctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.7225D0*x*(recu-b1(I))+0.425*x*(rec1-
                recu)+0.298D0*(Rotation*x*x/(ecu-ecu1))*DLOG(rec1/recu)-0.298D0*(ec1*x/(ecu-ecu1))*(rec1-
                recu)+0.425D0*(Rotation*x*x/ec1)*DLOG(b2(I)/rec1))/1000.D0
            ENDIF
        !
        ELSEIF
        ((recu.LE.r0).AND.(r0.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r3).AND.(recu.LE.r0).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).
        LE.rec1).AND.(rec1.LE.r3)) THEN
            Tipod = 7
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fctd(I) = 0.d0
            ELSE
                Fctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*x*(b2(I)-
                b1(I))+0.298D0*(Rotation*x*x/(ecu-ecu1))*DLOG(b2(I)/b1(I))-0.298D0*ec1*x*(b2(I)-b1(I))/(ecu-ecu1))/1000.D0
            ENDIF
        !
        ELSEIF
        ((recu.LE.r0).AND.(r0.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r3).AND.(recu.LE.r0).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.rec1).AND.(rec1.L
        E.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r3)) THEN
            Tipod = 8
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fctd(I) = 0.d0
            ELSE
                Fctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*x*(rec1-b1(I))+0.298*(Rotation*x*x/(ecu-
                ecu1))*DLOG(rec1/b1(I))-0.298D0*(ec1*x*(rec1-b1(I)))/(ecu-
                ecu1)+0.425D0*(Rotation*x*x/ec1)*DLOG(b2(I)/rec1))/1000.D0
            ENDIF
        !
        ELSEIF
        ((recu.LE.r0).AND.(r0.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r3).AND.(recu.LE.r0).AND.(r0.LE.rec1).AND.(rec1.LE.b1(I)).AND.(b1(I).L
        E.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r3)) THEN
            Tipod = 9
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fctd(I) = 0.d0
            ELSE
                Fctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*(Rotation*x*x/ec1)*DLOG(b2(I)/b1(I)))/1000.D0
            ENDIF
        !
        ELSEIF
        ((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.r3).AND.(r3.LE.rec1).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.recu).AND.(re
        cu.LE.r3).AND.(r3.LE.rec1)) THEN

```

```

        Tipod = 10
        IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
            Fctd(I) = 0.d0
        ELSE
            Fctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.7225D0*x*(b2(I)-b1(I)))/1000.D0
        ENDIF
    !
        ELSEIF
        ((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.r3).AND.(r3.LE.rec1).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.recu).AND.(recu.LE.b2(I)).AND.(b2(
        I).LE.r3).AND.(r3.LE.rec1)) THEN
            Tipod = 11
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fctd(I) = 0.d0
            ELSE
                Fctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.7225D0*x*(Rotation*x/ecu-b1(I))+0.425*x*(b2(I)-
                Rotation*x/ecu)+0.298D0*(Rotation*x*x/(ecu-ec1))*DLOG(b2(I)*ecu/(Rotation*x))-0.298D0*ec1*x*(b2(I)-
                Rotation*x/ecu)/(ecu-ec1))/1000.D0
            ENDIF
        !
        ELSEIF
        ((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.r3).AND.(r3.LE.rec1).AND.(r0.LE.recu).AND.(recu.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(
        I).LE.r3).AND.(r3.LE.rec1)) THEN
            Tipod = 12
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fctd(I) = 0.d0
            ELSE
                Fctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*(Rotation*x*x/ec1)*DLOG(b2(I)/b1(I)))/1000.D0
            ENDIF
        !
        ELSEIF
        ((r0.LE.r3).AND.(r3.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r3).AND.(r3.L
        E.recu).AND.(recu.LE.rec1)) THEN
            Tipod = 13
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fctd(I) = 0.d0
            ELSE
                Fctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.7225D0*x*(Rotation*x/ecu-b1(I))+0.425*x*(b2(I)-
                Rotation*x/ecu)+0.298D0*(Rotation*x*x/(ecu-ec1))*DLOG(b2(I)*ecu/(Rotation*x))-0.298D0*ec1*x*(b2(I)-
                Rotation*x/ecu)/(ecu-ec1))/1000.D0
            ENDIF
        !
        ELSEIF
        ((recu.LE.r0).AND.(r0.LE.r3).AND.(r3.LE.rec1).AND.(recu.LE.r0).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).L
        E.r3).AND.(r3.LE.rec1)) THEN
            Tipod = 14
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fctd(I) = 0.d0
            ELSE
                Fctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*x*(b2(I)-
                b1(I))+0.298D0*(Rotation*x*x/(ecu-ec1))*DLOG(b2(I)/b1(I))-0.298D0*ec1*x*(b2(I)-b1(I))/(ecu-ec1))/1000.D0
            ENDIF
        !
        ELSEIF
        ((recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r0).AND.(r0.LE.r3).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r0).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).L
        E.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r3)) THEN
            Tipod = 15
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fctd(I) = 0.d0
            ELSE
                Fctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*(Rotation*x*x/ec1)*DLOG(b2(I)/b1(I)))/1000.D0
            ENDIF
        ENDIF
    ENDDO
    !
    Fct = Fct-(Fctd(1)+Fctd(2)+Fctd(3)+Fctd(4)) !Atualização da força devido aabertura.
ENDIF
!
RETURN

```

```
END SUBROUTINE Tangencial_Force
```

```
!-----
```

### **Subrotina: Shear\_Reinf\_Force**

```
SUBROUTINE Shear_Reinf_Force
```

```
!--- Declaração de Módulos ---
```

```
USE MSIMSL
```

```
USE MEC_MOD
```

```
!
```

```
!--- Declaração de Variáveis ---
```

```
INTEGER          :: I
```

```
REAL(8)         :: Aux1,Aux2
```

```
!
```

```
!--- Determinação da força da armadura de cisalhamento (Fe) ---
```

```
rcon = 1.56D0*d
```

```
Esplim = 0.D0
```

```
Aux1 = 0.D0
```

```
Aux2 = 0.D0
```

```
IF (Nce.EQ.0) THEN
```

```
    Fe = 0.D0
```

```
ELSEIF (Nce.NE.0) THEN
```

```
    DO I = 1,Nce
```

```
        IF (Esplim.LE.rcon) THEN
```

```
            Aux1 = Aux1+(fye*Pce(I)*Ase)/100.D0
```

```
            Esplim = Esplim+Esp(I)
```

```
            Aux2 = Aux2+(Esplim*fye*Ase*Pce(I))/100.D0
```

```
        ENDIF
```

```
    ENDDO
```

```
!
```

```
Bta = DATAN(0.67D0*d*Aux1/Aux2)
```

```
!Ângulo entre Fe e o plano horizontal.
```

```
Fe = (Nce*Aux1/DSIN(Bta))/1000.D0
```

```
!
```

```
ENDIF
```

```
!
```

```
RETURN
```

```
END SUBROUTINE Shear_Reinf_Force
```

```
!-----
```

### **Subrotina: Tangencial\_Reinf\_Force**

```
SUBROUTINE Tangencial_Reinf_Force
```

```
!--- Declaração de Módulos ---
```

```
USE MSIMSL
```

```
USE MEC_MOD
```

```
!--- Declaração de Variáveis ---
```

```
INTEGER          :: I
```

```
!
```

```
esy = fyd/Es
```

```
ry = Rotation*(d-x)/esy
```

```
Xi = -0.0671D0*(ry/r3)**3.D0+0.1669D0*(ry/r3)**2.D0+0.0020D0*(ry/r3)+0.829D0
```

```
!
```

```
!--- Laje sem aberturas ---
```

```
!
```

```
!--- Determinação da força tangencial da armadura de flexão (Fst) ---
```

```
IF ((r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r3)) THEN
```

```
    Fst = 2.D0*PI*ro*Xi*(fyd/100.D0)*d*((ry-r0)+ry*DLOG(r3/ry))/1000.D0
```

```
!
```

```
ELSEIF ((r0.LE.r3).AND.(r3.LT.ry)) THEN
```

```

      Fst = 2.D0*PI*ro*Xi*(fyd/100.D0)*d*(r3-r0)/1000.D0
!
ENDIF
!
!--- Laje com aberturas ---
!
!--- Determinação da força tangencial da armadura de flexão devido à abertura (Fstd) ---
IF (LF.EQ.'S') THEN
  DO I = 1,Aber
    IF
((r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r3).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.ry).AND.(ry.LE.r3)) THEN
      IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fstd(I) = 0.d0
      ELSE
        Fstd(I) = ((Teta2(I)-Teta1(I))*Xi*fyd*(ro/100.D0)*d*(b2(I)-b1(I)))/1000.D0
      ENDIF
!
      ELSEIF
((r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r3).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.ry).AND.(ry.LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r3)) THEN
      IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fstd(I) = 0.d0
      ELSE
        Fstd(I) = ((Teta2(I)-Teta1(I))*Xi*fyd*(ro/100.D0)*d*((ry-b1(I))+ry*DLOG(b2(I)/ry)))/1000.D0
      ENDIF
!
      ELSEIF
((r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r3).AND.(r0.LE.ry).AND.(ry.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r3)) THEN
      IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fstd(I) = 0.d0
      ELSE
        Fstd(I) = ((Teta2(I)-Teta1(I))*Xi*fyd*(ro/100.D0)*d*(ry*DLOG(b2(I)/b1(I))))/1000.D0
      ENDIF
!
      ELSEIF
((r0.LE.r3).AND.(r3.LE.ry).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r3).AND.(r3.LE.ry)) THEN
      IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fstd(I) = 0.d0
      ELSE
        Fstd(I) = ((Teta2(I)-Teta1(I))*Xi*fyd*(ro/100.D0)*d*(b2(I)-b1(I)))/1000.D0
      ENDIF
!
    ENDIF
  ENDDO
!
  Fst = Fst-(Fstd(1)+Fstd(2)+Fstd(3)+Fstd(4)) !Atualização da força devido a abertura.
ENDIF
!
RETURN
END SUBROUTINE Tangencial_Reinf_Force
!-----

```

### Subrotina: Equations Eq

```

SUBROUTINE Equations_Eq

!--- Declaração de Módulos ---
USE MSIMSL
USE MEC_MOD

!--- Declaração de Variáveis ---
REAL(8)      :: Aux1,Aux2,Aux3
INTEGER      :: I
!
!--- Equações de Equilíbrio ---

```

```

Csi = (400.D0/d)**(1.D0/4.D0)      !Em mm.
z = (d-0.45D0*x)  !Braço de alavanca.
!
!--- Laje sem aberturas ---
!
!--- Derivada de Fcr em relação a alfa ---

Aux1 = (1.D0/((DCOS(alfa)**2.D0)-(1.D0/((DCOS(25.D0*PI/180.D0-alfa)**2.D0)))
Da = 2.D0*r0*Aux1+(2.D0*x/((DCOS(alfa)**3.D0))*(DCOS(alfa)*Aux1+2.D0*k*DSIN(alfa))-
(k/DCOS(alfa))*(2.D0*Aux1*DSIN(alfa)+k/DCOS(alfa))
Db = 0.2D0*r0*Aux1+0.1*x*Aux1+0.9D0*x/((DCOS(alfa)**2.D0)
Aux2 = r0*(1.8D0+0.2D0*k)+x*(0.1*k+0.9D0*DTAN(alfa))
Aux3 = 2.D0*r0*k+x*k1
Deta = (Aux2*Da-Aux3*Db)/(Aux2**2.D0)
Dac = (2.D0*PI*x/((DCOS(alfa)**2.D0))*(r0*DSIN(alfa)-x*((DSIN(alfa)**2.D0+1.D0)/(2.D0*DCOS(alfa)))

!--- Laje com aberturas ---
!
IF (LF.EQ.'S') THEN
    DO I = 1,Aber
        Daca(I) = ((Teta2(I)-Teta1(I))*x/((DCOS(alfa)**2.D0))*(r0*DSIN(alfa)-
x*((DSIN(alfa)**2.D0+1.D0)/(2.D0*DCOS(alfa)))
        ENDDO
!
    Dac = Dac-(Daca(1)+Daca(2)+Daca(3)+Daca(4))
ENDIF
!
DFcr = 0.001*Csi*fc*(Dac*eta+Deta*Ac) !Derivada de Fcr em relação a alfa considerando a presença da abertura.
!
!--- Derivada de csi.Fcr.cos(alfa) em relação a alfa ---

Dfcr1 = DFcr*DCOS(alfa)-0.001D0*Csi*fc*Ac*eta*DSIN(alfa)
!
!--- Derivada de Fcr em relação a x ---
!DFcrx = (0.001D0*Csi*fc*DCOS(alfa)*(((2.D0*PI-((Teta2(1)-Teta1(1))+Teta2(2)-Teta1(2))+Teta2(3)-
Teta1(3))+Teta2(4)-Teta1(4)))/DCOS(alfa))*(r0-x*DTAN(alfa))*eta+Ac*(k1*r0*(1.8D0+0.2D0*k)-
2.D0*r0*k*(0.1D0*k+0.9D0*DTAN(alfa)))/(r0*(1.8D0+0.2*k)+x*(0.1D0*k+0.9D0*DTAN(alfa))**2.D0)))
!--- Laje sem aberturas ---
!
!--- Derivada de Fct em relação a x ---
!
IF (Tipo.EQ.1) THEN
    DFct = 0.001D0*2.D0*PI*fc*((2.D0*x*k0*Rotation/ec1)-
0.723D0*r0+(0.425D0*Rotation*x/ec1)*(2.D0*DLOG(r3*ec1/(Rotation*x))-1.D0))
!
ELSEIF (Tipo.EQ.2) THEN
    DFct = 0.001D0*2.D0*PI*fc*(-0.425D0*r0+0.298D0*x*Rotation/(ecu-ec1)-0.298D0*(ec1/(ecu-
ec1))*(x*Rotation/ec1-
r0)+0.85D0*x*Rotation/ec1+0.85D0*(x*Rotation/ec1)*DLOG(ec1*r3/(Rotation*x))+0.594*(x*Rotation/(ecu-
ec1))*DLOG(x*Rotation/(ec1*r0))-0.425D0*Rotation*x/ec1-0.298D0*Rotation*x/(ecu-ec1))
!
ELSEIF (Tipo.EQ.3) THEN
    DFct = 0.001D0*2.D0*PI*fc*((1.D0+1.D0/(alfa0-1.D0))*((0.596D0*Rotation*x/ecu)+0.425D0*r3)-
0.723D0*(r0+r3/(alfa0-1.D0))+0.298D0*Rotation*x/((alfa0-1.D0)*ec1))*(2.D0*DLOG(r3*ecu/(Rotation*x))-1.D0))
!
ELSEIF (Tipo.EQ.4) THEN
    DFct = 0.001D0*2.D0*PI*0.723D0*fc*(r3-r0)
!
ELSEIF (Tipo.EQ.5) THEN
    DFct = 0.001D0*2.D0*PI*fc*((r3-r0)*(0.425D0-0.298/(alfa0-1.D0))+0.298D0*Rotation*x/((alfa0-
1.D0)*ec1))*(2.D0*DLOG(r3/r0))
!
ELSEIF (Tipo.EQ.6) THEN
    DFct = 0.001D0*4.D0*PI*fc*x*(0.425*Rotation*DLOG(r3/r0)/ec1)
!
ENDIF
!

```

```

!--- Derivadas de Fsr e Fst em relação a x ---
!
Dexa = (-Rotation*Es/(fyd*r3))*((-0.2013*(Rotation*(d-x)*Es/(fyd*r3))**2.D0)+0.3338D0*(Rotation*(d-
x)*Es/(fyd*r3))+0.002D0)
!
IF ((r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r3)) THEN
    DFs = 0.001D0*4000.D0*PI*ro*d*Rotation*(Dexa*(d-x)+DLOG(r3*fyd/(Rotation*(d-x)*Es))*(-Xi+Dexa*(d-x)))
!
ELSEIF ((r0.LE.r3).AND.(r3.LT.ry)) THEN
    DFs = 0.001D0*4000.D0*PI*ro*d*Rotation*(-Xi+Dexa*(d-x))
ENDIF
!
!--- Laje com abertura ---
!
!--- Derivada de Fctd (abertura) em relação a x ---
!
IF (LF.EQ.'S') THEN
    DO I = 1,Aber
!
        IF (Tipod.EQ.1) THEN
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                DFctd(I) = 0.d0
            ELSE
                DFctd(I) = 0.001D0*(Teta2(I)-
Teta1(I))*fc*(0.298D0*x*Rotation/ecu+0.298D0*x*ec1*Rotation/(ecu*(ecu-ec1))+0.425D0*(b2(I)-x*Rotation/ecu)-
0.298D0*ec1*(b2(I)-x*Rotation/ecu)/(ecu-ec1)+0.723*(x*Rotation/ecu-b1(I))+0.596D0*(x*Rotation/(ecu-
ec1))*DLOG(b2(I)*ecu/(x*Rotation))-0.298D0*x*Rotation/(ecu-ec1))
            ENDIF
!
        ELSEIF (Tipod.EQ.2) THEN
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                DFctd(I) = 0.d0
            ELSE
                DFctd(I) = 0.001D0*(Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.723D0*(b2(I)-b1(I)))
            ENDIF
!
        ELSEIF (Tipod.EQ.3) THEN
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                DFctd(I) = 0.d0
            ELSE
                DFctd(I) = 0.001D0*(Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*(b2(I)-b1(I))-0.298D0*(b2(I)-b1(I))*ec1/(ecu-
ec1)+0.596D0*x*Rotation/(ecu-ec1)*DLOG(b2(I)/b1(I)))
            ENDIF
!
        ELSEIF (Tipod.EQ.4) THEN
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                DFctd(I) = 0.d0
            ELSE
                DFctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425*x*Rotation/ec1-0.298D0*x*Rotation/(ecu-
ec1)+0.425D0*(x*Rotation/ec1-b1(I))-0.298D0*ec1*(x*Rotation/ec1-b1(I))/(ecu-
ec1)+0.845D0*x*Rotation/ec1*DLOG(b2(I)*ec1/(x*Rotation))+0.596D0*x*Rotation/(ecu-
ec1)*DLOG(x*Rotation/(b1(I)*ec1))-0.4225D0*x*Rotation/ec1+0.298D0*x*Rotation/(ecu-ec1))
            ENDIF
!
        ELSEIF (Tipod.EQ.5) THEN
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                DFctd(I) = 0.d0
            ELSE
                DFctd(I) = 0.001D0*(Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.85D0*x*Rotation/ec1*DLOG(b2(I)/b1(I)))
            ENDIF
!
        ELSEIF (Tipod.EQ.6) THEN
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                DFctd(I) = 0.d0
            ELSE

```

```

DFctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.85D0*x*Rotation*(1.D0/ec1-1.D0/ecu)+0.723D0*x*Rotation/ecu-
0.596D0*x*Rotation*(ec1/(ecu-ec1))*(1.D0/ec1-1.D0/ecu)+0.723D0*(x*Rotation/ecu-b1(I))+0.596D0*(x*Rotation/(ecu-
ec1))*DLOG(ecu/ec1)+0.85D0*(x*Rotation/ec1)*DLOG(b2(I)*ec1/(x*Rotation))-0.425D0*Rotation*x/ec1)
ENDIF
!
ELSEIF (Tipod.EQ.7) THEN
  IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
    DFctd(I) = 0.d0
  ELSE
    DFctd(I) = 0.001D0*(Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*(b2(I)-b1(I))-0.298D0*(b2(I)-b1(I))*ec1/(ecu-
ecu-ec1)+0.596D0*x*Rotation/(ecu-ec1)*DLOG(b2(I)/b1(I)))
ENDIF
!
ELSEIF (Tipod.EQ.8) THEN
  IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
    DFctd(I) = 0.d0
  ELSE
    DFctd(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425*x*Rotation/ec1-0.298D0*x*Rotation/(ecu-
ecu-ec1)+0.425D0*(x*Rotation/ec1-b1(I))-0.298D0*ec1*(x*Rotation/ec1-b1(I))/(ecu-
ecu-ec1)+0.845D0*x*Rotation/ec1*DLOG(b2(I)*ec1/(x*Rotation))+0.596D0*x*Rotation/(ecu-
ecu-ec1)*DLOG(x*Rotation/(b1(I)*ec1))-0.4225D0*x*Rotation/ec1+0.298D0*x*Rotation/(ecu-ec1))
ENDIF
!
ELSEIF (Tipod.EQ.9) THEN
  IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
    DFctd(I) = 0.d0
  ELSE
    DFctd(I) = 0.001D0*(Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.85D0*x*Rotation/ec1*DLOG(b2(I)/b1(I)))
ENDIF
!
ELSEIF (Tipod.EQ.10) THEN
  IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
    DFctd(I) = 0.d0
  ELSE
    DFctd(I) = 0.001D0*(Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.723D0*(b2(I)-b1(I)))
ENDIF
!
ELSEIF (Tipod.EQ.11) THEN
  IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
    DFctd(I) = 0.d0
  ELSE
    DFctd(I) = 0.001D0*(Teta2(I)-
Teta1(I))*fc*(0.298D0*x*Rotation/ecu+0.298D0*x*ec1*Rotation/(ecu*(ecu-ec1))+0.425D0*(b2(I)-x*Rotation/ecu)-
0.298D0*ec1*(b2(I)-x*Rotation/ecu)/(ecu-ec1)+0.723*(x*Rotation/ecu-b1(I))+0.596D0*(x*Rotation/(ecu-
ecu-ec1))*DLOG(b2(I)*ecu/(x*Rotation))-0.298D0*x*Rotation/(ecu-ec1))
ENDIF
!
ELSEIF (Tipod.EQ.12) THEN
  IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
    DFctd(I) = 0.d0
  ELSE
    DFctd(I) = 0.001D0*(Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.85D0*x*Rotation/ec1*DLOG(b2(I)/b1(I)))
ENDIF
!
ELSEIF (Tipod.EQ.13) THEN
  IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
    DFctd(I) = 0.d0
  ELSE
    DFctd(I) = 0.001D0*(Teta2(I)-
Teta1(I))*fc*(0.298D0*x*Rotation/ecu+0.298D0*x*ec1*Rotation/(ecu*(ecu-ec1))+0.425D0*(b2(I)-x*Rotation/ecu)-
0.298D0*ec1*(b2(I)-x*Rotation/ecu)/(ecu-ec1)+0.723*(x*Rotation/ecu-b1(I))+0.596D0*(x*Rotation/(ecu-
ecu-ec1))*DLOG(b2(I)*ecu/(x*Rotation))-0.298D0*x*Rotation/(ecu-ec1))
ENDIF
ELSEIF (Tipod.EQ.14) THEN
  IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
    DFctd(I) = 0.d0
  ELSE

```

```

DFctd(I) = 0.001D0*(Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*(b2(I)-b1(I))-0.298D0*(b2(I)-
b1(I))*ec1/(ecu-ec1)+0.596D0*x*Rotation/(ecu-ec1)*DLOG(b2(I)/b1(I)))
ENDIF
!
ELSEIF (Tipod.EQ.15) THEN
  IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
    DFctd(I) = 0.d0
  ELSE
    DFctd(I) = 0.001D0*(Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.85D0*x*Rotation/ec1*DLOG(b2(I)/b1(I)))
  ENDIF
!
ENDIF
ENDDO
!
!
--- Atualização da derivada de DFct em relação a x devido à abertura ---
DFct = DFct-(DFctd(1)+DFctd(2)+DFctd(3)+DFctd(4))
!
!
--- Derivadas de Fstd em relação a x devido à abertura ---
!
DO I = 1,Aber
  IF
((r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r3).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.ry).AND.(ry.LE.r3)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
      DFsd(I) = 0.d0
    ELSE
      DFsd(I) = 0.001D0*(d*fyd/100D0*((b2(I)-b1(I))*(Teta2(I)-Teta1(I))*ro)*(-0.002D0*Rotation/(esy*r3)
-0.3338D0*(d-x)*(Rotation/(esy*r3))**2
+0.2013D0*(d-x)**2*(Rotation/(esy*r3))**3))
    ENDIF
!
  ELSEIF
((r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r3).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.ry).AND.(ry.LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r3)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
      DFsd(I) = 0.d0
    ELSE
      DFsd(I) = 0.001D0*(d*fyd/100D0*(-0.002D0*Rotation/(esy*r3)-0.3338D0*(d-
x)*(Rotation/(esy*r3))**2+0.2013D0*((d-x)**2*(Rotation/(esy*r3))**3)*((Teta2(I)-Teta1(I))*ro*((d-x)*Rotation/esy-
b1(I)+(d-x)*(Rotation/esy)*DLOG(b2(I)*esy/((d-x)*Rotation))))+d*fyd*(Teta2(I)-
Teta1(I))*ro/100D0*(0.829D0+0.002D0*(d-x)*Rotation/(esy*r3)+0.1669D0*((d-x)**2*(Rotation/(esy*r3))**2-
0.0671D0*((d-x)**3*(Rotation/(esy*r3))**3)*(-Rotation/esy-(Rotation/esy)*DLOG(b2(I)*esy/((d-
x)*Rotation))+Rotation/esy))
    ENDIF
!
  ELSEIF
((r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r3).AND.(r0.LE.ry).AND.(ry.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r3)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
      DFsd(I) = 0.d0
    ELSE
      DFsd(I) = 0.001D0*(-d*fyd*(Teta2(I)-Teta1(I))*ro*Rotation*(0.829D0+0.002D0*(d-
x)*Rotation/(esy*r3)+0.1669D0*((d-x)**2*(Rotation/(esy*r3))**2-0.0671D0*((d-
x)**3*(Rotation/(esy*r3))**3)*DLOG(b2(I)/b1(I)))/(100.D0*esy+d*fyd/100D0*(-0.002D0*Rotation/(esy*r3)-
0.3338D0*(d-x)*(Rotation/(esy*r3))**2+0.2013D0*((d-x)**2*(Rotation/(esy*r3))**3)*((d-x)*(Teta2(I)-
Teta1(I))*ro*Rotation*DLOG(b2(I)/b1(I))/esy))
    ENDIF
!
  ELSEIF
((r0.LE.r3).AND.(r3.LE.ry).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r3).AND.(r3.LE.ry)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
      DFsd(I) = 0.d0
    ELSE
      DFsd(I) = 0.001D0*(d*fyd/100.D0*((b2(I)-b1(I))*(Teta2(I)-Teta1(I))*ro)*(-0.002D0*Rotation/(esy*r3)-
0.3338*(d-x)*(Rotation/(esy*r3))**2+0.2013D0*(d-x)**2*(Rotation/(esy*r3))**3))
    ENDIF
  ENDIF
ENDDO
!
!
--- Atualização da derivada de DFs em relação a x devido à abertura (caso haja) ---

```

```

                DFs = DFs-(DFsd(1)+DFsd(2)+DFsd(3)+DFsd(4))
ENDIF
!
RETURN
END SUBROUTINE Equations_Eq
!-----

```

### **Subrotina: Newton Raphson**

```

SUBROUTINE Newton_Raphson
!
!--- Declaração de Módulos ---
USE MSIMSL
USE MEC_MOD
!
!--- Declaração de Variáveis ---
INTEGER      :: I
!
!--- Método de Newton-Raphson ---
!
EH = Fsr+Fst-Fe*DCOS(Bta)-Csi*Fcr*DCOS(alfa)-Fct
EVR = Csi*Fcr*DSIN(alfa)-z*(Fsr+Fst)/(r3-r0)+Fe*DSIN(Bta)
DEHx = DFs-Csi*DFcrx*DCOS(alfa)-DFct
DEHa = -DFcr1
DEVrx = DFcrx*Csi*DSIN(alfa)-(z*DFs-0.45D0*(Fsr+Fst))/(r3-r0)
DEVra = Csi*DFcr*DSIN(alfa)+0.001D0*Csi*fc*Ac*eta*DCOS(alfa)
Res1 = -DEHa*DEVrx+DEVra*DEHx
Rx = -EH*DEVra+DEHa*EVR
Ra = EH*DEVrx-EVR*DEHx
alfa1 = alfa+Ra/Res1      !Valor de alfa após a iteração.
x1 = x+Rx/Res1           !Valor de x após a iteração.
!!
!--- Atualização dos valores de x, alfa e rotação --
!
IF ((alfa1.GT.0.D0).AND.(x1.GE.0.D0).AND.(x1.LE.d)) THEN
    Erro1 = DABS(1.D0-(alfa1/alfa))
    Erro2 = DABS(1.D0-(x1/x))
    alfa = alfa1
    x = x1
!
ELSEIF ((alfa1.LE.0.D0).OR.(x1.LT.0.D0).OR.(x1.GT.d)) THEN
    Rotation = Rotation*1.005D0
ENDIF
!
!--- Avaliação de descontinuidade da carga de ruptura ---
!
IF (RotAux.EQ.Rotation) THEN
    IF (INR.GT.50) THEN
        DO I = 1, 50
            IF (XNR(I).EQ.x) THEN
                Rotation = Rotation*1.005d0
                GOTO 105
            ENDIF
        ENDDO
        INR = 1
!
    ELSEIF (INR.LE.50) THEN
        XNR(INR) = x
        INR = INR+1
    ENDIF
ENDIF
!
RotAux = Rotation !Captura o valor da rotação do passo anterior.
!
IF (Rotation.GT.1.d0) THEN

```

```

WRITE(*,*)
WRITE(*,*)'Rotacao com valor excessivo (maior que 1,0 rad).'
```

WRITE(\*,\*)'Reveja os dados iniciais de x, alfa e rotacao e reinicie o programa.'

```

WRITE(*,*)
STOP          !Se Rotacao resultar maior que 1,0 rad, o programa se encerrará.
ENDIF
!!
105    RETURN
END SUBROUTINE Newton_Raphson
!-----
```

### **Subrotina: Breakages Criteria**

```

SUBROUTINE Breakages_Criteria
!
!--- Declaração de Módulos ---
USE MSIMSL
USE MEC_MOD

!--- Declaração de Variáveis ---
INTEGER          ::      I
!
P = (d-0.45d0*x)*(Fsr+Fst)/(r3-r0) !VALOR DA CARGA DE RUPTURA.
!
!--- Ângulo para avaliar o criterio de ruptura interno ---
!
IF (alfa.GE.12.5d0*PI/180.d0) THEN
    gama = alfa
ELSEIF (alfa.LT.12.5d0*PI/180.d0) THEN
    gama = 25*PI/180.d0-alfa
ENDIF
!
krup = 0.2d0*DSIN(90.D0*PI/180.D0+gama)/((DSIN((53.D0*PI/180.D0-gama)/2.D0))**2.D0) !Parâmetro de ruptura
interna.
Espac = 0.D0
!
DO I = 1,(Ntot)
    Espac = Espac+Esp(I)
ENDDO
!
r1 = r0+Espac+1.35*d !Raio de seção crítica de ruptura externa, situado à 1.35d da última camada da armadura de
cisalhamento.
!
!--- Laje sem abertura ---
!
!--- Cálculo de Fst do raio r0 ao raio r1 (Fst01) ---
!
IF ((r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r1)) THEN
    Fst01 = 2.D0*PI*ro*Xi*(fyd/100.D0)*d*((ry-r0)+ry*DLOG(r1/ry))/1000.D0
!
ELSEIF ((r0.LE.r1).AND.(r1.LT.ry)) THEN
    Fst01 = 2.D0*PI*ro*Xi*(fyd/100.D0)*d*(r1-r0)/1000.D0
ENDIF
!
!--- Laje com abertura ---
!
!--- Cálculo de Fst do raio r0 ao raio r1 devido à abertura (Fstd01) ---
!
IF (LF.EQ.'S') THEN
    DO I = 1,Aber
        IF
((r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r1).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.ry).AND.(ry.LE.r1)) THEN
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fstd01(I) = 0.d0
            ELSE
```

```

                Fstd01(I) = ((Teta2(I)-Teta1(I))*Xi*fyd*(ro/100.D0)*d*(b2(I)-b1(I)))/1000.D0
            ENDIF
!
            ELSEIF
((r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r1).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.ry).AND.(ry.LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r1)) THEN
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fstd01(I) = 0.d0
            ELSE
                Fstd01(I) = ((Teta2(I)-Teta1(I))*Xi*fyd*(ro/100.D0)*d*(ry-
b1(I)+ry*DLOG(b2(I)/ry)))/1000.D0
            ENDIF
!
            ELSEIF
((r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r1).AND.(r0.LE.ry).AND.(ry.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r1)) THEN
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fstd01(I) = 0.d0
            ELSE
                Fstd01(I) = ((Teta2(I)-
Teta1(I))*Xi*fyd*(ro/100.D0)*d*(ry*DLOG(b2(I)/b1(I)))/1000.D0
            ENDIF
!
            ELSEIF
((r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r1).AND.(r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r1).AND.(r1.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I))) THEN
                Fstd01(I) = 0.D0
!
            ELSEIF
((r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r1).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.ry).AND.(ry.LE.r1).AND.(r1.LE.b2(I))) THEN
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fstd01(I) = 0.d0
            ELSE
                Fstd01(I) = ((Teta2(I)-Teta1(I))*Xi*fyd*(ro/100.D0)*d*((b1(I)-r0)+(ry-
b1(I))+ry*DLOG(r1/ry)))/1000.D0
            ENDIF
!
            ELSEIF
((r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r1).AND.(r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r1).AND.(r1.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I))) THEN
                Fstd01(I) = 0.D0
!
            ELSEIF
((r0.LE.ry).AND.(ry.LE.r1).AND.(r0.LE.ry).AND.(ry.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.r1).AND.(r1.LE.b2(I))) THEN
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fstd01(I) = 0.d0
            ELSE
                Fstd01(I) = ((Teta2(I)-Teta1(I))*Xi*fyd*(ro/100.D0)*d*((ry-
r0)+ry*DLOG(b1(I)/ry)+ry*DLOG(r1/b1(I)))/1000.D0
            ENDIF
!
            ELSEIF
((r0.LE.r1).AND.(r1.LE.ry).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r1).AND.(r1.LE.ry)) THEN
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fstd01(I) = 0.d0
            ELSE
                Fstd01(I) = ((Teta2(I)-Teta1(I))*Xi*fyd*(ro/100.D0)*d*(b2(I)-b1(I)))/1000.D0
            ENDIF
!
            ELSEIF
((r0.LE.r1).AND.(r1.LE.ry).AND.(r0.LE.r1).AND.(r1.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.ry)) THEN
                Fstd01(I) = 0.D0
!
            ELSEIF
((r0.LE.r1).AND.(r1.LE.ry).AND.(r0.LE.r1).AND.(r1.LE.ry).AND.(ry.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I))) THEN
                Fstd01(I) = 0.D0
!
            ELSEIF
((r0.LE.r1).AND.(r1.LE.ry).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.r1).AND.(r1.LE.ry).AND.(ry.LE.b2(I))) THEN
            IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                Fstd01(I) = 0.d0

```

```

ELSE
    Fstd01(I) = ((Teta2(I)-Teta1(I))*Xi*fyd*(ro/100.D0)*d*((b1(I)-r0)+(r1-
b1(I)))/1000.D0
ENDIF
!
ELSEIF
((r0.LE.r1).AND.(r1.LE.ry).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.r1).AND.(r1.LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.ry)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fstd01(I) = 0.d0
    ELSE
        Fstd01(I) = ((Teta2(I)-Teta1(I))*Xi*fyd*(ro/100.D0)*d*((b1(I)-r0)+(r1-
b1(I)))/1000.D0
    ENDIF
!
ELSEIF
((r0.LE.r1).AND.(r1.LE.ry).AND.(r0.LE.r1).AND.(r1.LE.ry).AND.(ry.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I))) THEN
    Fstd01(I) = 0.D0
!
ELSEIF
((r0.LE.r1).AND.(r1.LE.ry).AND.(r0.LE.r1).AND.(r1.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.ry).AND.(ry.LE.b2(I))) THEN
    Fstd01(I) = 0.D0
!
ENDIF
ENDDO
!
    Fst01 = Fst01-(Fstd01(1)+Fstd01(2)+Fstd01(3)+Fstd01(4)) !Atualização da força devido a abertura.
!
ENDIF
!--- Cálculo de Fst do raio r1 ao raio r3 considerando a presença da abertura (caso haja) (Fst13) ---
!
Fst13 = Fst-Fst01
!
!--- Laje sem abertura ---
!
!--- Cálculo de Fct do raio r0 ao raio r1 (Fct01) ---
!
IF ((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r1)) THEN
    Fct01 = 2.D0*PI*fc*x*x*((k0*Rotation/ec1)-
(0.723D0*r0/x)+(0.425D0*Rotation*DLOG(r1*ec1/(Rotation*x))/ec1))/1000.D0
!
ELSEIF ((recu.LE.r0).AND.(r0.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r1)) THEN
    Fct01 = 2.D0*PI*fc*(0.425D0*(x**2*Rotation/ec1)-0.425D0*x*r0+0.297D0*(Rotation*x**2)/(ecu-
ec1)*DLOG(Rotation*x/(ec1*r0))-0.297D0*(x*ec1/(ecu-ec1))*(Rotation*x/ec1-
r0)+0.425D0*(Rotation*x**2/ec1)*DLOG(r1*ec1/(Rotation*x)))/1000.D0
!
ELSEIF ((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.r1).AND.(r1.LE.rec1)) THEN
    Fct01 = 2.D0*PI*fc*x*x*((1.D0+1.D0/(alfa0-1.D0))*(0.298D0*Rotation/ecu+0.425D0*r1/x)-
(0.723D0/x)*(r0+r1/(alfa0-1.D0)))+(0.298D0*Rotation/(ec1*(alfa0-1.d0)))*DLOG((r1*ecu)/(Rotation*x)))/1000.D0
!
ELSEIF ((r0.LE.r1).AND.(r1.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1)) THEN
    Fct01 = 2.D0*0.723D0*PI*fc*x*(r1-r0)/1000.D0
!
ELSEIF ((recu.LE.r0).AND.(r0.LE.r1).AND.(r1.LE.rec1)) THEN
    Fct01 = 2.D0*PI*fc*x*x*((r1-r0)/x*(0.425D0-0.298D0/(alfa0-1.D0))+0.298D0*Rotation/((alfa0-
1.D0)*ec1)*DLOG(r1/r0))/1000.D0
!
ELSEIF ((recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r0).AND.(r0.LE.r1)) THEN
    Fct01 = 2.D0*PI*fc*x*x*(0.425D0*(Rotation/ec1)*DLOG(r1/r0))/1000.D0
!
ENDIF
!
!--- Laje com abertura ---
!
!--- Cálculo de Fct do raio r0 ao raio r1 devido à abertura (Fctd01) ---
!
IF (LF.EQ.'S') THEN
    DO I = 1,Aber

```

```

IF
((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r1).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.recu).AND.(recu.LE.b2(I)).AND.(b
2(I).LE.rec1).AND.(rec1.LE.r1)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fctd01(I) = 0.d0
    ELSE
        Fctd01(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.7225D0*x*(Rotation*x/ecu-
b1(I))+0.425*x*(b2(I)-Rotation*x/ecu)+0.298D0*(Rotation*x*x/(ecu-ec1))*DLOG(b2(I)*ecu/(Rotation*x))-
0.298D0*ec1*x*(b2(I)-Rotation*x/ecu)/(ecu-ec1))/1000.D0
    ENDIF
!
ELSEIF
((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r1).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.recu).AND.(
recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r1)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fctd01(I) = 0.d0
    ELSE
        Fctd01(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.7225D0*x*(b2(I)-b1(I)))/1000.D0
    ENDIF
!
ELSEIF
((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r1).AND.(r0.LE.recu).AND.(recu.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b
2(I).LE.rec1).AND.(rec1.LE.r1)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fctd01(I) = 0.d0
    ELSE
        Fctd01(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*x*(b2(I)-
b1(I))+0.298D0*(Rotation*x*x/(ecu-ec1))*DLOG(b2(I)/b1(I))-0.298D0*ec1*x*(b2(I)-b1(I))/(ecu-ec1))/1000.D0
    ENDIF
!
ELSEIF
((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r1).AND.(r0.LE.recu).AND.(recu.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.rec1).AND.(re
c1.LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r1)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fctd01(I) = 0.d0
    ELSE
        Fctd01(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*x*(rec1-
b1(I))+0.298*(Rotation*x*x/(ecu-ec1))*DLOG(rec1/b1(I))-0.298D0*(ec1*x*(rec1-b1(I)))/(ecu-
ec1)+0.425D0*(Rotation*x*x/ec1)*DLOG(b2(I)/rec1))/1000.D0
    ENDIF
!
ELSEIF
((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r1).AND.(r0.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.b1(I)).AND.(b1
(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r1)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fctd01(I) = 0.d0
    ELSE
        Fctd01(I) = (Teta2(I)-
Teta1(I))*fc*(0.425D0*(Rotation*x*x/ec1)*DLOG(b2(I)/b1(I)))/1000.D0
    ENDIF
!
ELSEIF
((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r1).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(re
c1.LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r1)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fctd01(I) = 0.d0
    ELSE
        Fctd01(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.7225D0*x*(recu-b1(I))+0.425*x*(rec1-
recu)+0.298D0*(Rotation*x*x/(ecu-ec1))*DLOG(rec1/recu)-0.298D0*(ec1*x/(ecu-ec1))*(rec1-
recu)+0.425D0*(Rotation*x*x/ec1)*DLOG(b2(I)/rec1))/1000.D0
    ENDIF
!
ELSEIF
((recu.LE.r0).AND.(r0.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r1).AND.(recu.LE.r0).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).
LE.rec1).AND.(rec1.LE.r1)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fctd01(I) = 0.d0

```

```

ELSE
    Fctd01(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*x*(b2(I)-
b1(I))+0.298D0*(Rotation*x*x/(ecu-ec1))*DLOG(b2(I)/b1(I))-0.298D0*ec1*x*(b2(I)-b1(I))/(ecu-ec1))/1000.D0
    ENDIF
!
ELSEIF
((recu.LE.r0).AND.(r0.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r1).AND.(recu.LE.r0).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.rec1).AND.(rec1.L
E.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r1)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fctd01(I) = 0.d0
    ELSE
        Fctd01(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*x*(rec1-
b1(I))+0.298*(Rotation*x*x/(ecu-ec1))*DLOG(rec1/b1(I))-0.298D0*(ec1*x*(rec1-b1(I)))/(ecu-
ec1)+0.425D0*(Rotation*x*x/ec1)*DLOG(b2(I)/rec1))/1000.D0
    ENDIF
!
ELSEIF
((recu.LE.r0).AND.(r0.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r1).AND.(recu.LE.r0).AND.(r0.LE.rec1).AND.(rec1.LE.b1(I)).AND.(b1(I).L
E.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r1)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fctd01(I) = 0.d0
    ELSE
        Fctd01(I) = (Teta2(I)-
Teta1(I))*fc*(0.425D0*(Rotation*x*x/ec1)*DLOG(b2(I)/b1(I)))/1000.D0
    ENDIF
!
ELSEIF
((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.r1).AND.(r1.LE.rec1).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.recu).AND.(re
cu.LE.r1).AND.(r1.LE.rec1)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fctd01(I) = 0.d0
    ELSE
        Fctd01(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.7225D0*x*(b2(I)-b1(I)))/1000.D0
    ENDIF
!
ELSEIF
((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.r1).AND.(r1.LE.rec1).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.recu).AND.(recu.LE.b2(I)).AND.(b2(
I).LE.r1).AND.(r1.LE.rec1)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fctd01(I) = 0.d0
    ELSE
        Fctd01(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.7225D0*x*(Rotation*x/ecu-
b1(I))+0.425*x*(b2(I)-Rotation*x/ecu)+0.298D0*(Rotation*x*x/(ecu-ec1))*DLOG(b2(I)*ecu/(Rotation*x))-
0.298D0*ec1*x*(b2(I)-Rotation*x/ecu)/(ecu-ec1))/1000.D0
    ENDIF
!
ELSEIF
((r0.LE.recu).AND.(recu.LE.r1).AND.(r1.LE.rec1).AND.(r0.LE.recu).AND.(recu.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(
I).LE.r1).AND.(r1.LE.rec1)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fctd01(I) = 0.d0
    ELSE
        Fctd01(I) = (Teta2(I)-
Teta1(I))*fc*(0.425D0*(Rotation*x*x/ec1)*DLOG(b2(I)/b1(I)))/1000.D0
    ENDIF
!
ELSEIF
((r0.LE.r1).AND.(r1.LE.recu).AND.(recu.LE.rec1).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r1).AND.(r1.L
E.recu).AND.(recu.LE.rec1)) THEN
    IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
        Fctd01(I) = 0.d0
    ELSE
        Fctd01(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.7225D0*x*(Rotation*x/ecu-
b1(I))+0.425*x*(b2(I)-Rotation*x/ecu)+0.298D0*(Rotation*x*x/(ecu-ec1))*DLOG(b2(I)*ecu/(Rotation*x))-
0.298D0*ec1*x*(b2(I)-Rotation*x/ecu)/(ecu-ec1))/1000.D0
    ENDIF

```

```

                ELSEIF
((recu.LE.r0).AND.(r0.LE.r1).AND.(r1.LE.rec1).AND.(recu.LE.r0).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).LE.b2(I)).AND.(b2(I).L
E.r1).AND.(r1.LE.rec1)) THEN
                IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                    Fctd01(I) = 0.d0
                ELSE
                    Fctd01(I) = (Teta2(I)-Teta1(I))*fc*(0.425D0*x*(b2(I)-
b1(I))+0.298D0*(Rotation*x*x/(ecu-ec1))*DLOG(b2(I)/b1(I))-0.298D0*ec1*x*(b2(I)-b1(I))/(ecu-ec1))/1000.D0
                ENDIF
!
                ELSEIF
((recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r0).AND.(r0.LE.r1).AND.(recu.LE.rec1).AND.(rec1.LE.r0).AND.(r0.LE.b1(I)).AND.(b1(I).L
E.b2(I)).AND.(b2(I).LE.r1)) THEN
                IF ((b1(I).EQ.0).AND.(b2(I).EQ.0)) THEN
                    Fctd01(I) = 0.d0
                ELSE
                    Fctd01(I) = (Teta2(I)-
Teta1(I))*fc*(0.425D0*(Rotation*x*x/ec1)*DLOG(b2(I)/b1(I)))/1000.D0
                ENDIF
            ENDIF
        ENDDO
!
        Fct01 = Fct01-(Fctd01(1)+Fctd01(2)+Fctd01(3)+Fctd01(4)) !Atualização da força devido a abertura.
!
    ENDIF
!
!--- Cálculo de Fct do raio r1 ao raio r3 considerando a presença da abertura (caso haja) ---
!
Fct13 = Fct-Fct01
!
agah = Fst13-Fct13                !Força resultante na seção de raio r1.
!
txy = 1.5D0*P*1000.D0/(2.D0*PI*r1*h)    !Tensão Cisalhante atuante no raio r1.
!
tx = agah*1000.D0/(2.D0*PI*r1*h)    !Tensão Normal atuante no raio r1.
!
tmax = (tx/2.D0)+((tx/2.D0)**2.D0+txy**2.D0)**0.5D0 !Tensão máxima.
!
Erro3 = DABS(1.D0-(eta/(CoefAber*krup)))*100.D0
Erro4 = DABS(1.D0-(tmax/(CoefAber*fsp)))*100.D0
!
!
RETURN
END SUBROUTINE Breakages_Criteria
!-----

```

### **Subrotina: PRINT1**

```

SUBROUTINE PRINT1
!
!--- Declaração de Módulos ---
USE MSIMSL
USE MEC_MOD
!
!--- Impressões no arquivo de saída ---
WRITE(20,01)
WRITE(20,02)
WRITE(20,01)
!
!--- Tensões obtidas ---
WRITE(20,*)
WRITE(20,03)
WRITE(20,04)

```

```

WRITE(20,*)
WRITE(20,05)eta,krup,tmax
!
!-- Carga de ruptura ---
WRITE(20,*)
WRITE(20,06)
WRITE(20,07)
WRITE(20,*)
!
alfa = alfa*180.D0/PI !Convertendo o ângulo alfa para graus.
!
WRITE(20,08) P,R,alfa
!
!-- Altura da linha neutra, Rotação e Força da armadura de cisalhamento ---
WRITE(20,*)
WRITE(20,09)
WRITE(20,10)
WRITE(20,*)
WRITE(20,11) x, RotationPrint,Fe
WRITE(20,01)
WRITE(20,*)
!
WRITE(20,12)
WRITE(20,13)
WRITE(20,14)
WRITE(20,15)
!
!
!-- Formatações utilizadas para Impressão dos Resultados ---
01   FORMAT(3X,'-----',1X)
02   FORMAT(3X,'----- ARQUIVO PRINCIPAL DE SAIDA DE DADOS DO PROGRAMA PunCalc -----
',1X)

03   FORMAT(3X,'----- PARÂMETROS DE RESISTÊNCIA DA LAJE -----',1X)
04   FORMAT(14X,'Eta',20X,'Krup',14X,'Tensão Máxima (N/mm2)',1X)
05   FORMAT(3X,F15.3,7X,F15.3,12X,F15.3,1X)

06   FORMAT(3X,'----- CARGA E TIPO DE RUPTURA -----',1X)
07   FORMAT(12X,'Vteo (kN)',12X,'Tipo de Ruptura',10X,'Ângulo alfa (Graus)',1X)
08   FORMAT(4X,F15.2,4X,A30,1X,F15.2,1X)

09   FORMAT(3X,'----- LINHA NEUTRA E ROTAÇÃO -----',1X)
10   FORMAT(13X,'x (mm)',15X,'Rotação (rad)',16X,'Fe (kN)',1X)
11   FORMAT(3X,F15.2,13X,E15.5,8X,F15.2,1X)

12   FORMAT(3X,'Este programa foi desenvolvido por:',1X)
13   FORMAT(3X,'- Doutorando Elyson Andrew Pozo Liberati (FEC/UNICAMP)',1X)
14   FORMAT(3X,'- Marília Gonçalves Marques (FEC/UNICAMP)',1X)
15   FORMAT(3X,'- Orientador: Prof. Dr. Leandro Mouta Trautwein',1X)
!
RETURN
END SUBROUTINE PRINT1
!-----

```

### **Módulo: MEC\_MOD**

```

MODULE MEC_MOD
!
!
!-- Declaração de Variáveis ---

INTEGER           :: Nce,Ntot,nf,Aber
INTEGER           :: Necc,Tip0,Tipod
INTEGER           :: Iterat,Pascar,INR
!

```

```

REAL(8) :: ro,r0,r3,ro1
REAL(8) :: h,d
REAL(8) :: fyd,fc,fsp,fye
REAL(8) :: Es,Ec
REAL(8) :: alfa,Adj
REAL(8) :: Ase
REAL(8) :: x,Rotation
REAL(8) :: krup,tmax,eta
REAL(8) :: k,k0,k1,Ac
REAL(8) :: Fcr,Fct,Fe,Fst,Fsr,Fst01,Fst13,Fct01,Fct13
REAL(8) :: ec1,ecu,ect,rec1,recu,alfa0
REAL(8) :: rcon,Esplim,Bta
REAL(8) :: esy,ry,Xi
REAL(8) :: Csi,z,Da,Db,Detd,DFcr,Dfcr1,DFct,Dexa,DFs
REAL(8) :: Dac,Dacc,DFcrx
REAL(8) :: EH,EVR,DEHx,DEHa,DEVrx,DEVra,Res1,Rx,Ra,alfa1,X1
REAL(8) :: P,gama,Espac,r1,agah,txy,tx,ecr,ecl
REAL(8) :: PI,TetR
REAL(8) :: Erro1,Erro2,Erro3,Erro4,CoefAber,RotAux
REAL(8) :: Tolerancia,RotationPrint
!
REAL(8),ALLOCATABLE,DIMENSION(:) :: Esp,Pce,b1,b2,Ifu,Teta1,Teta2
REAL(8),ALLOCATABLE,DIMENSION(:) :: Fstd,Fctd,DFctd,DFsd,Daca
REAL(8),ALLOCATABLE,DIMENSION(:) :: Fstd01,Fctd01
REAL(8),ALLOCATABLE,DIMENSION(:) :: XNR
CHARACTER(20) :: R,ang,LF
!
END MODULE MEC_MOD
!-----

```

## APÊNDICE B

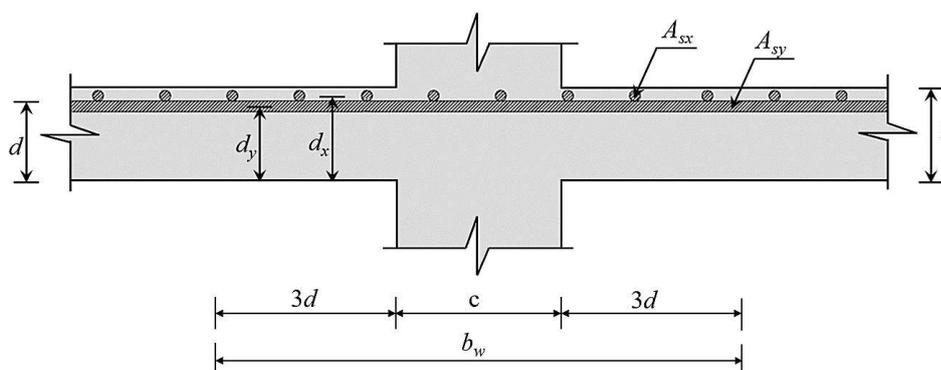
### CÁLCULO DA TAXA DE ARMADURA DE FLEXÃO DAS LAJES LISAS

As expressões para o cálculo da taxa de armadura de flexão nas direções  $x$  e  $y$  são apresentadas nas Equações B.1 e B.2.

$$\rho_x = 100n_x \frac{A_{s,x}}{A_{c,x}} \quad (\text{B.1})$$

$$\rho_y = 100n_y \frac{A_{s,y}}{A_{c,y}} \quad (\text{B.2})$$

Nestas equações,  $n_x$  e  $n_y$  referem-se, nesta ordem, ao número de barras que cortam os eixos  $x$  e  $y$ , dispostas em uma região compreendida entre as faces do pilar, acrescida de um comprimento  $3d$  a partir de cada face ( $b_w$ ). Vale ressaltar que, as barras interrompidas devido a presença de aberturas nas lajes não foram consideradas no cálculo, conforme apresentado por Lourenço (2018).



**Figura B.1- Definição das variáveis para o cálculo da taxa de armadura de flexão**  
Fonte: Arquivo pessoal.

As variáveis  $A_{s,x}$  e  $A_{s,y}$  nas Equações B.1 e B.2 tratam-se das áreas das seções transversais das armaduras de flexão consideradas neste trabalho ( $A_{s,x} = A_{s,y} = 122,72 \text{ mm}^2$ ). As variáveis  $A_{c,x}$  e  $A_{c,y}$  são descritas como a área de concreto nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. São calculadas pela multiplicação da altura útil correspondente a cada eixo ( $d_x$  e  $d_y$ ) com a largura da região considerada para a determinação de  $n_x$  e  $n_y$ .

As Equações B.3 e B.4 apresentam o cálculo das alturas  $d_x$  e  $d_y$ , nesta ordem.

$$d_x = d + \frac{\phi}{2} \quad (\text{B.3})$$

$$d_y = d - \frac{\phi}{2} \quad (\text{B.4})$$

sendo  $\phi$ , o diâmetro das barras que constituem a armadura de flexão ( $\phi = 12,5$  mm).

Portanto, a taxa de armadura resultante pode ser calculada pela Equação B.5.

$$\rho = \sqrt{\rho_x \rho_y} \quad (\text{B.5})$$

A Tabela B.1 apresenta os valores obtidos para a taxa de armadura para as lajes desta pesquisa.

**Tabela B.1 - Cálculo da taxa de armadura das lajes**

Laje	$n_x$	$n_y$	$d_{efetivo}$ (mm)	$d_x$ (mm)	$d_y$ (mm)	$A_{cx}$ (mm <sup>2</sup> )	$A_{cy}$ (mm <sup>2</sup> )	$\rho_x$ (%)	$\rho_y$ (%)	$\rho$ (%)
LR-A	8	8	89	95	83	65.151	56.601	1,51	1,73	1,62
LR-B	8	8	88	94	82	63.902	55.427	1,54	1,77	1,65
LR-C	8	8	90	96	84	66.413	57.788	1,48	1,70	1,58
LF1-A	7	6	90	96	84	66.413	57.788	1,29	1,27	1,28
LF1-B	7	6	88	94	82	63.902	55.427	1,34	1,33	1,34
LF1-C	7	6	91	97	85	67.686	58.986	1,27	1,25	1,26
LF2-A	6	6	92	98	86	68.972	60.197	1,07	1,22	1,14
LF2-B	6	6	95	101	89	72.900	63.900	1,01	1,15	1,08
LF2-C	6	6	93	99	87	70.269	61.419	1,05	1,20	1,12

## APÊNDICE C

### CÁLCULO DA RESISTÊNCIA À FLEXÃO DAS LAJES A PARTIR DA TEORIA DAS LINHAS DE RUPTURA

Para o cálculo da resistência à flexão foi considerado o método proposto por Guandalini, Burdet e Muttoni (2009), o qual está fundamentado na ocorrência de charneiras plásticas ao longo das linhas de ruptura, dividindo a laje em porções rígidas e planas entre linhas de plastificação. Neste método, o colapso é verificado quando as linhas de ruptura formam um mecanismo deformável. A Equação C.1 traz a formulação analítica proposta pelos autores para o cálculo da carga que produziria a ruptura por flexão das lajes.

$$V_{flex} = \left( \frac{4m_R}{r_q(\cos\theta + \sin\theta) - c} \right) \left( \frac{B^2 - Bc - c^2/4}{B - c} \right) \quad (C.1)$$

Nesta equação,  $m_R$  é o momento resistente da seção transversal de laje com largura unitária e as variáveis  $r_q$ ,  $\theta$ ,  $B$  e  $c$  estão definidas na Figura C.1.

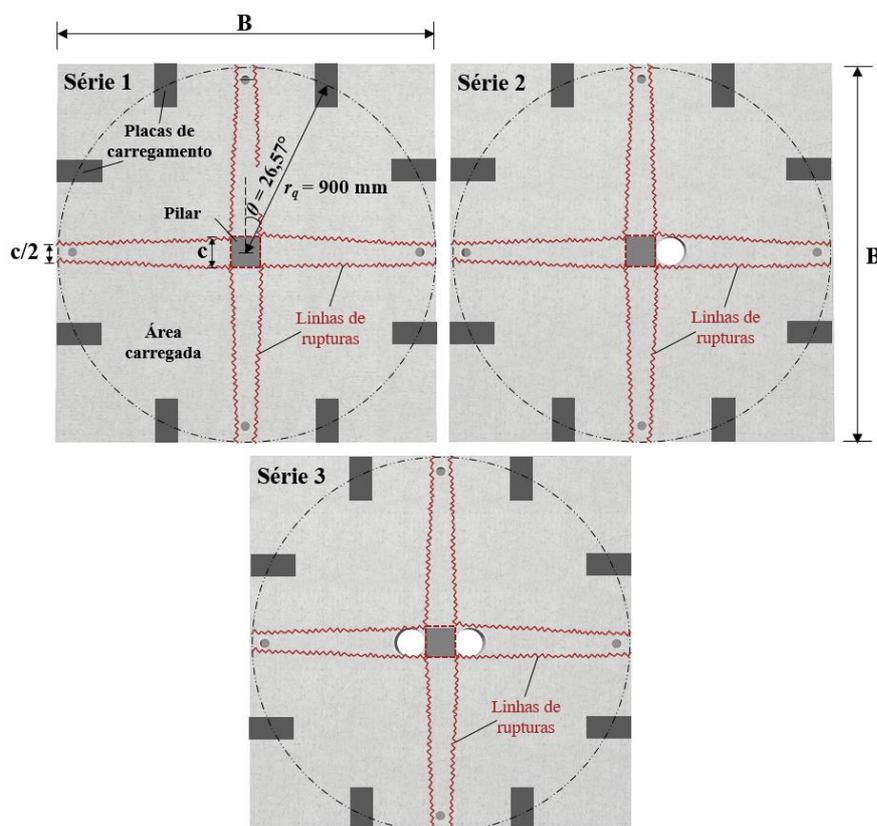
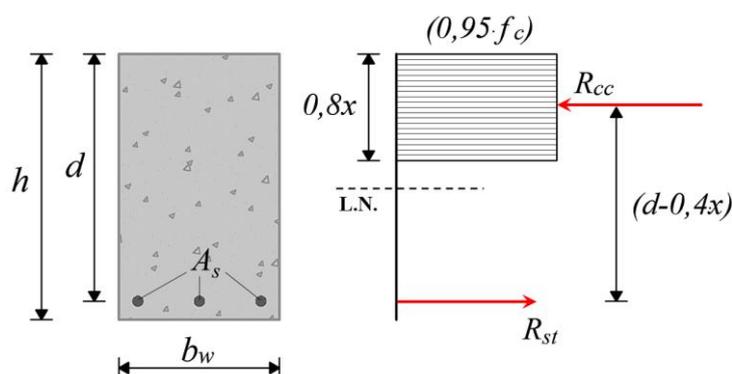


Figura C.1 - Mecanismos de ruptura para as lajes ensaiadas

Fonte: Arquivo pessoal.

Com base na ABNT NBR 6118 (2014), o momento resistente ( $m_R$ ) por unidade de comprimento pode ser obtido pela análise do diagrama simplificado apresentado na Figura C.2 para concretos com resistência à compressão até 50 MPa, que representa os esforços atuantes em uma seção retangular de concreto armado submetido a flexão. Neste diagrama, o valor da tensão do concreto  $0,95f_c$  foi obtido desconsiderando o efeito Rüschi (influência da carga de longa duração) e o efeito do aumento da resistência do concreto com a idade devido ao processo de hidratação do cimento.



**Figura C.2 - Diagrama simplificado de tensões no concreto**

Fonte: ABNT NBR 6118, 2014 – adaptado.

A força resultante das tensões de compressão no concreto, considerando o diagrama retangular simplificado, pode ser escrita como:

$$R_{cc} = 0,95f_y(0,8xb_w) \quad (\text{C.2})$$

e a força resultante das tensões de tração na armadura tracionada:

$$R_{st} = \sum A_s f_y \quad (\text{C.3})$$

onde:

$f_c$ : Resistência à compressão do concreto;

$x$ : Profundidade da linha neutra, obtida por  $x = \frac{\sum A_s f_y}{0,95f_y 0,8b_w}$ ;

$b_w$ : Largura unitária de faixa de laje;

$d$ : Altura útil da laje;

$A_s$ : Área de aço da armadura de flexão tracionada da faixa unitária da laje;

$f_y$ : Tensão de escoamento do aço.

Para o caso experimental, o momento resistente foi calculado como:

$$m_R = \rho f_y d^2 \left( 1 - 0,53 \rho \frac{f_y}{f_c} \right) \quad (\text{C.4})$$

A Tabela C.1 apresenta o cálculo detalhado da resistência última a flexão, sem a consideração de coeficientes de segurança.

**Tabela C.1 – Cálculo do momento resistente à flexão**

Laje	$f_c$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$d$ (cm)	$B$ (cm)	$r_q$ (cm)	$\theta$ (°)	$c$ (cm)	$\rho$ (%)	$m_R$ (kNm/m)	$V_{flex}$ (kN)
LR-A	41,56	575,93	8,9	180,0	90,0	26,57	15,0	1,62	65,11	542,93
LR-B	41,56	575,93	8,8	180,0	90,0	26,57	15,0	1,65	64,67	539,28
LR-C	41,56	575,93	9,0	180,0	90,0	26,57	15,0	1,58	65,15	543,30
LF1-A	44,54	575,93	9,0	180,0	90,0	26,57	15,0	1,28	54,47	454,24
LF1-B	44,54	575,93	8,8	180,0	90,0	26,57	15,0	1,34	54,28	452,59
LF1-C	44,54	575,93	9,1	180,0	90,0	26,57	15,0	1,26	54,90	457,82
LF2-A	35,22	575,93	9,2	180,0	90,0	26,57	15,0	1,14	50,08	417,61
LF2-B	35,22	575,93	9,5	180,0	90,0	26,57	15,0	1,08	50,88	424,28
LF2-C	35,22	575,93	9,3	180,0	90,0	26,57	15,0	1,12	50,37	420,05

## APÊNDICE D

### BASE DE DADOS (BD) DE LAJES LISAS DE CONCRETO ARMADO

A Tabela D.1 apresenta as principais características físicas e geométricas de lajes lisas de concreto armado, assim como valores de carga de ruptura obtidos experimentalmente por diversos autores.

**Tabela D.1 - Base de dados com características de lajes ensaiadas por diversos autores**

Autor	Laje	h (mm)	Abertura			Dim. do Pilar (mm)		Armadura de Cisalhamento					$f_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)	d (mm)	$f_y$ (MPa)	$\rho$ (%)	$V_{exp}$ (kN)	
			Nº	Dimensão (mm)				Lin.	Cam.	S <sub>o</sub> (mm)	S <sub>r</sub> (mm)	$\phi_w$ (mm)							A <sub>sw</sub> (mm <sup>2</sup> )
<b>Elstner e Hognestad (1956)</b>	A-1b	152	-	-	-	254	254	0	0	0	0	0,0	0,0	25,2	2,5	118	332	1,27	365
	A-1c	152	-	-	-	254	254	0	0	0	0	0,0	0,0	29,0	2,9	118	332	1,27	356
	A-1d	152	-	-	-	254	254	0	0	0	0	0,0	0,0	36,6	3,7	118	332	1,27	351
	A-1e	152	-	-	-	254	254	0	0	0	0	0,0	0,0	20,3	2,0	118	332	1,27	356
	A-2b	152	-	-	-	254	254	0	0	0	0	0,0	0,0	19,5	2,0	114	321	2,37	400
	A-2c	152	-	-	-	254	254	0	0	0	0	0,0	0,0	37,4	3,7	114	321	2,37	467
	A-7b	152	-	-	-	254	254	0	0	0	0	0,0	0,0	27,9	2,8	114	321	2,37	512
	A-3b	152	-	-	-	254	254	0	0	0	0	0,0	0,0	22,6	2,3	114	321	3,77	445
	A-3c	152	-	-	-	254	254	0	0	0	0	0,0	0,0	26,5	2,7	114	321	3,77	534
	A-3d	152	-	-	-	254	254	0	0	0	0	0,0	0,0	34,5	3,5	114	321	3,77	547
	A-4	152	-	-	-	356	356	0	0	0	0	0,0	0,0	26,1	2,6	118	332	1,15	400
	A-5	152	-	-	-	356	356	0	0	0	0	0,0	0,0	27,8	2,8	114	321	2,53	534
	A-6	152	-	-	-	356	356	0	0	0	0	0,0	0,0	25,0	2,5	114	321	3,40	498
	A-7a	152	-	-	-	254	254	0	0	0	0	0,0	0,0	27,9	2,8	114	321	2,37	280
	B-2	152	-	-	-	254	254	0	0	0	0	0,0	0,0	47,6	4,8	114	320	0,46	200
	B-4	152	-	-	-	254	254	0	0	0	0	0,0	0,0	47,7	4,8	114	303	0,92	334

Autor	Laje	h (mm)	Abertura			Dim. do Pilar (mm)		Armadura de Cisalhamento						$f_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)	d (mm)	$f_y$ (MPa)	$\rho$ (%)	$V_{exp}$ (kN)
			Nº	Dimensão (mm)				Lin.	Cam.	$s_o$ (mm)	$s_r$ (mm)	$\phi_w$ (mm)	$A_{sw}$ (mm <sup>2</sup> )						
Elstner e Hognestad (1956)	B-9	152	-	-	-	254	254	0	0	0	0	0,0	0,0	43,9	4,4	114	341	2,15	505
	B-14	152	-	-	-	254	254	0	0	0	0	0,0	0,0	50,5	5,1	114	325	2,81	578
Gomes (1991)	1	200	-	-	-	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	40,2	3,4	159	680	1,21	560
	1A	200	-	-	-	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	41,1	3,3	159	680	1,21	587
	2	200	-	-	-	200	200	8	2	80	80	6,0	28,3	34,4	3,0	153	680	1,29	693
	3	200	-	-	-	200	200	8	2	80	80	6,9	37,4	39,2	3,4	158	670	1,22	773
	4	200	-	-	-	200	200	8	3	80	80	8,0	50,3	32,1	3,1	159	670	1,21	853
	5	200	-	-	-	200	200	8	4	80	80	10,0	78,5	34,7	3,5	159	670	1,21	853
	6	200	-	-	-	200	200	8	4	80	80	10,0	78,5	37,4	3,5	159	670	1,21	1.040
	7	200	-	-	-	200	200	8	5	80	80	12,0	113,1	33,8	3,0	159	670	1,21	1.120
	8	200	-	-	-	200	200	8	6	80	80	12,0	113,1	34,1	3,4	159	670	1,21	1.200
	9	200	-	-	-	200	200	8	9	80	80	11,0	117,5	40,0	3,0	159	670	1,21	1.227
	10	200	-	-	-	200	200	8	5	80	80	6,0	28,3	35,4	3,0	154	670	1,28	800
11	200	-	-	-	200	200	8	5	80	80	6,9	37,4	34,5	3,1	154	670	1,28	907	
Gomes e Andrade (1995)	L12A	200	-	-		200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	36,5	3,3	163	529	1,15	650
	L13	200	1	90		200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	31,4	2,8	153	529	1,18	600
	L14	200	1	151		200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	31,4	2,8	155	529	1,15	556
	L15	200	2	166		200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	27,8	3,3	148	529	0,99	554
	L23	200	4	166		200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	36,4	3,6	160	529	0,86	550
	L16	200	-	-		200	200	8	4	80	80	10,3	83,6	34,6	3,7	156	529	1,25	1.140
	L17	200	1	90		200	200	8	4	80	80	10,3	83,6	34,1	4,1	166	529	1,01	1.096
	L18	200	1	166		200	200	8	4	80	80	10,3	83,6	36,8	3,4	165	529	0,97	992
	L19	200	2	166		200	200	8	4	80	80	10,3	83,6	36,6	3,2	165	529	0,81	1.010
	L20	200	4	166		200	200	8	4	80	80	10,3	83,6	33,8	3,6	159	529	0,55	780
L24	200	4	166		200	200	8	4	40	80	10,3	83,6	35,0	3,4	161	529	0,85	890	

Autor	Laje	h (mm)	Abertura			Dim. do Pilar (mm)		Armadura de Cisalhamento						f <sub>c</sub> (MPa)	f <sub>ct</sub> (MPa)	d (mm)	f <sub>y</sub> (MPa)	ρ (%)	V <sub>exp</sub> (kN)
			Nº	Dimensão (mm)				Lin.	Cam.	s <sub>0</sub> (mm)	s <sub>r</sub> (mm)	φ <sub>w</sub> (mm)	A <sub>sw</sub> (mm <sup>2</sup> )						
Gomes e Andrade (1995)	L21	200	2	166	200	200	8	6	80	80	8,0	50,6	36,3	36,3	4,6	165	540	0,81	896
	L22	200	2	166	200	200	8	6	80	80	6,3	31,5	34,5	34,5	3,4	164	597	0,82	832
Andrade (1999)	L301	210	-	-	-	200	200	8	6	80	80	10,0	78,5	37,8	3,7	164	538	1,15	830
	L302	210	-	-	-	200	200	8	12	40	40	10,0	78,5	34,2	2,7	164	538	1,14	790
	L303	210	-	-	-	200	200	8/8	18/9	40	40/40	10,0	78,5	42,4	3,3	154	538	1,28	966
	L304	210	-	-	-	200	200	8/8	20/10	-40	40/40	10,0	78,5	36,1	3,4	164	538	1,14	956
	L305	210	-	-	-	200	200	8	8	60	60	10,0	78,5	29,6	2,9	154	538	1,28	785
	L306	210	-	-	-	200	200	8/16	14	-40	40/80	10,0	78,5	37,4	2,8	164	538	1,14	950
	L307	210	-	-	-	200	200	8/8	8	40	60	12,5	122,7	34,0	3,7	164	538	1,14	1.090
	L308	210	-	-	-	200	200	8/8	8	40	60	12,5	122,7	37,5	2,8	154	538	1,28	1.020
Trautwein (2001)	L1	200	-	-	-	200	200	8/8	11/7	35	60	12,5	122,7	36,8	2,8	159	561	1,21	1.050
	L4	200	-	-	-	200	200	8/8	11/7	35	60	16,0	201,1	43,4	2,7	164	561	1,14	1.038
	L9	200	-	-	-	200	200	8/8	11/7	35	60	10,0	78,5	39,4	4,0	154	561	1,28	933
Oliveira (2003)	L1C	130	-	-	-	120	120	0	0	0	0	0,0	0,0	59,4	5,6	107	749	1,06	318
	L2C	130	-	-	-	120	240	0	0	0	0	0,0	0,0	57,0	5,7	107	749	0,98	331
	L3C	130	-	-	-	120	360	0	0	0	0	0,0	0,0	54,2	3,3	106	749	1,06	358
	L4C	130	-	-	-	120	480	0	0	0	0	0,0	0,0	56,0	4,7	107	749	0,99	404
	L5C	130	-	-	-	120	600	0	0	0	0	0,0	0,0	63,0	4,6	109	749	1,00	446
Silva (2003)	L1	130	-	-	-	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	39,6	3,8	90	538	1,45	273
	L2	130	-	-	-	300	150	0	0	0	0	0,0	0,0	40,4	3,9	90	538	1,45	401
	L3	130	-	-	-	450	150	0	0	0	0	0,0	0,0	40,8	4,0	90	538	1,45	469
	L4	130	2	150	150	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	39,4	4,0	90	538	1,57	225
	L5	130	2	150	150	300	150	0	0	0	0	0,0	0,0	39,6	4,1	90	538	1,57	350
	L6	130	2	150	150	450	150	0	0	0	0	0,0	0,0	39,1	4,3	90	538	1,57	375
	L7	130	-	-	-	150	150	8	3	42	42	8,0	50,3	49,0	3,7	90	538	1,45	420

Autor	Laje	h (mm)	Abertura			Dim. do Pilar (mm)		Armadura de Cisalhamento						$f_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)	d (mm)	$f_y$ (MPa)	$\rho$ (%)	$V_{exp}$ (kN)
			Nº	Dimensão (mm)				Lin.	Cam.	$s_o$ (mm)	$s_r$ (mm)	$\phi_w$ (mm)	$A_{sw}$ (mm <sup>2</sup> )						
Silva (2003)	L8	130	-	-	-	300	150	8	3/2	42	42	8,0	50,3	49,1	3,7	90	538	1,45	452
	L9	130	-	-	-	450	150	6	3	42	42	8,0	50,3	50,2	3,7	90	538	1,45	452
	L10	130	2	150	150	150	150	6	3	42	42	8,0	50,3	40,0	3,6	90	538	1,57	325
	L11	130	2	150	150	300	150	6	3	42	42	8,0	50,3	40,8	3,7	90	538	1,57	350
	L12	130	-	-	-	402		0	0	0	0	0,0	0,0	42,3	3,7	90	538	1,45	525
Teng et al. (2004)	OC11	150	-	-	-	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	36,0	3,6	105	453	1,81	423
	OC11H30	150	1	400	200	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	33,9	3,4	108	453	1,70	349
	OC11V23	150	1	200	400	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	34,1	3,4	109	453	1,69	373
	OC11V20	150	1	200	400	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	38,6	3,9	105	453	1,74	207
	OC13	150	-	-	-	600	200	0	0	0	0	0,0	0,0	35,8	3,6	107	453	1,71	568
	OC13H50	150	1	400	200	600	200	0	0	0	0	0,0	0,0	36,3	3,6	110	453	1,67	443
	OC13V43	150	1	200	400	600	200	0	0	0	0	0,0	0,0	36,6	3,7	114	453	1,61	467
	OC13V23	150	1	200	400	600	200	0	0	0	0	0,0	0,0	36,9	3,7	108	453	1,70	484
	OC13V40	150	1	200	400	600	200	0	0	0	0	0,0	0,0	43,0	4,3	109	453	1,69	340
	OC13H02	150	1	400	200	600	200	0	0	0	0	0,0	0,0	43,1	4,3	112	453	1,64	512
	OC15	150	-	-	-	1000	200	0	0	0	0	0,0	0,0	40,2	4,0	103	453	1,76	649
OC15H70	150	1	400	200	1000	200	0	0	0	0	0,0	0,0	37,9	3,8	108	453	1,67	529	
OC15V43	150	1	200	400	1000	200	0	0	0	0	0,0	0,0	36,0	3,6	109	453	1,66	612	
Borges (2004)	L42	200	-	-	-	200	400	0	0	0	0	0,0	0,0	43,2	4,0	139	604	1,41	703
	L42A	200	-	-	-	200	400	0	0	0	0	0,0	0,0	36,2	3,6	164	604	1,24	743
	L45	200	-	-	-	200	600	0	0	0	0	0,0	0,0	42,0	4,3	154	604	1,38	843
	L46	200	-	-	-	200	800	0	0	0	0	0,0	0,0	39,3	4,4	164	604	1,24	947
	L41	200	-	-	-	150	250	0	0	0	0	0,0	0,0	44,7	4,3	139	604	1,40	600
	L41A	200	-	-	-	150	250	0	0	0	0	0,0	0,0	38,9	3,4	164	604	1,25	650
	L43A	200	-	-	-	150	450	0	0	0	0	0,0	0,0	38,7	3,3	164	604	1,25	776

Autor	Laje	h (mm)	Abertura			Dim. do Pilar (mm)		Armadura de Cisalhamento						f <sub>c</sub> (MPa)	f <sub>ct</sub> (MPa)	d (mm)	f <sub>y</sub> (MPa)	ρ (%)	V <sub>exp</sub> (kN)
			Nº	Dimensão (mm)				Lin.	Cam.	s <sub>o</sub> (mm)	s <sub>r</sub> (mm)	φ <sub>w</sub> (mm)	A <sub>sw</sub> (mm <sup>2</sup> )						
Borges (2004)	L44	200	-	-	-	150	600	0	0	0	0	0,0	0,0	40,0	3,7	164	604	1,27	814
	L45FS_CG	200	1	200	300	200	600	0	0	0	0	0,0	0,0	40,5	3,6	154	601	1,14	792
	L45FD_CG	200	1	200	300	200	600	0	0	0	0	0,0	0,0	39,0	4,2	154	601	1,38	750
	L45FD	200	1	200	300	200	600	0	0	0	0	0,0	0,0	41,4	4,0	154	601	1,38	776
	L45FFS_CG	200	2	200	300	200	600	0	0	0	0	0,0	0,0	41,6	4,2	154	601	1,00	750
	L45FFD_CG	200	2	200	300	200	600	0	0	0	0	0,0	0,0	40,6	4,2	164	601	1,24	850
	L45FFD	200	2	200	300	200	600	0	0	0	0	0,0	0,0	37,0	4,3	144	601	1,33	685
	L45FFD_AC2	200	2	200	300	200	600	22	4	77	116	10,0	78,5	43,8	4,1	154	601	1,38	1.230
	L45FFD_AC3	200	2	200	300	200	600	22	3	77	116	8,0	50,3	39,4	3,5	154	601	1,38	1.050
	L45FFD_AC5	200	2	200	300	200	600	10	2	77	116	8,0	50,3	40,7	3,2	154	601	1,38	837
	L45_AC1	200	-	-	-	200	600	12	4	75	75	10,0	78,5	39,0	3,2	154	601	1,38	1.250
L45_AC5	200	-	-	-	200	600	12	2	77	116	8,0	50,3	41,1	3,4	154	601	1,38	1.092	
Musse (2004)	L1	130	-	-	-	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	41,7	3,7	91	508	1,36	309
	L2	130	-	-	-	150	150	8	3	42	42	10,0	78,5	42,0	3,8	89	508	1,41	460
	L3	130	-	-	-	150	150	8	5	42	63	10,0	78,5	42,2	3,8	88	508	1,44	472
	L4	130	-	-	-	150	150	8	7	42	42	5,0	19,6	42,5	3,8	93	508	1,31	467
Souza (2004)	L1	130	-	-	-	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	35,5	3,3	91	538	1,36	274
	L2	130	2	150	150	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	35,7	3,3	90	538	1,28	205
	L3	130	2	150	150	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	36,0	3,4	89	538	1,31	275
	L4	130	2	150	150	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	36,2	3,4	91	538	1,43	300
	L5	130	2	150	300	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	31,9	3,2	91	555	1,03	140
	L6	130	2	150	450	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	32,0	3,2	91	555	0,73	101
	L7	130	2	150	300	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	32,1	3,2	92	555	1,01	225
	L8	130	2	150	450	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	32,2	3,2	92	555	0,71	210

Autor	Laje	h (mm)	Abertura			Dim. do Pilar (mm)		Armadura de Cisalhamento						f <sub>c</sub> (MPa)	f <sub>ct</sub> (MPa)	d (mm)	f <sub>y</sub> (MPa)	ρ (%)	V <sub>exp</sub> (kN)
			Nº	Dimensão (mm)				Lin.	Cam.	s <sub>o</sub> (mm)	s <sub>r</sub> (mm)	φ <sub>w</sub> (mm)	A <sub>sw</sub> (mm <sup>2</sup> )						
Trautwein (2006)	E1	200	-	-	-	200	200	12	11	35	60	10,0	78,5	35,2	3,3	159	559	1,21	1.100
	E3	200	-	-	-	200	200	12	11	35	60	10,0	78,5	41,1	3,7	159	559	1,21	1.090
	E4	200	-	-	-	200	200	12	11	35	60	10,0	78,5	40,6	4,5	154	559	1,28	1.205
	E3	200	-	-	-	200	200	12	11	35	60	10,0	78,5	41,1	3,7	159	559	1,21	1.090
	E4	200	-	-	-	200	200	12	11	35	60	10,0	78,5	40,6	4,5	154	559	1,28	1.205
	E5	200	-	-	-	200	200	12	11	35	60	10,0	78,5	42,1	3,2	154	559	1,28	1.222
	I6	200	-	-	-	200	200	8/8	11	35	60	6,3	31,2	39,1	3,7	159	559	1,21	830
	I7	200	-	-	-	200	200	8/8	11	35	60	10,0	78,5	39,6	3,4	159	559	1,21	978
	I8	200	-	-	-	200	200	8/8	11	35	60	8,0	50,3	35,4	2,6	159	559	1,21	856
	I9	200	-	-	-	200	200	8	5	80	80	5,0	19,6	43,6	4,0	161	559	1,18	853
	I10	200	-	-	-	200	200	8	5	80	80	8,0	50,3	44,4	3,2	161	559	1,18	975
I11	200	-	-	-	200	200	8	5	80	80	6,3	31,2	41,4	3,7	161	559	1,18	945	
Vaz (2007)	L1	130	-	-	-	150		0	0	0	0	0,0	0,0	39,0	3,3	83	555	1,60	203
	L2	130	-	-	-	150		8	2	42	42	5,0	19,6	39,0	3,3	89	555	1,41	321
	L3	130	-	-	-	150		8	3	42	42	5,0	19,6	39,0	3,3	87	555	1,47	325
	L4	130	-	-	-	150		8	4	42	42	5,0	19,6	39,0	3,3	89	555	1,41	357
	L1-A	130	-	-	-	150		0	0	0	0	0,0	0,0	38,7	3,5	92	555	1,33	286
	L5	130	-	-	-	150		4	3	42	42	4,2	13,9	38,9	3,5	89	555	1,41	200
	L6	130	-	-	-	150		4	3	42	67	4,2	13,9	38,9	3,5	91	555	1,36	300
	L7	130	-	-	-	150		5	3	42	42	4,2	13,9	39,1	3,5	89	555	1,41	303
	L8	130	-	-	-	150		5	3	42	67	4,2	13,9	39,2	3,5	90	555	1,39	309
L9	130	-	-	-	150		6	3	42	67	4,2	13,9	39,4	3,5	91	555	1,36	315	
Damasceno (2007)	L1A	110	-	-	-	85	85	0	0	0	0	0,0	0,0	41,3	2,2	89,3	600	1,33	189
	L2A	110	-	-	-	85	255	0	0	0	0	0,0	0,0	40,0	2,4	89,3	600	1,18	254
	L3A	110	-	-	-	85	425	0	0	0	0	0,0	0,0	39,7	2,1	99,7	600	1,02	297

Autor	Laje	h (mm)	Abertura			Dim. do Pilar (mm)		Armadura de Cisalhamento						f <sub>c</sub> (MPa)	f <sub>ct</sub> (MPa)	d (mm)	f <sub>y</sub> (MPa)	ρ (%)	V <sub>exp</sub> (kN)
			Nº	Dimensão (mm)				Lin.	Cam.	s <sub>o</sub> (mm)	s <sub>r</sub> (mm)	φ <sub>w</sub> (mm)	A <sub>sw</sub> (mm <sup>2</sup> )						
Damasceno (2007)	L4A	110	-	-	-	85	595	0	0	0	0	0,0	0,0	40,4	2,9	98,6	600	1,02	325
	L1B	110	-	-	-	85	85	0	0	0	0	0,0	0,0	41,4	3,4	98,1	553	0,56	172
	L2B	110	-	-	-	85	255	0	0	0	0	0,0	0,0	42,0	3,4	90,5	553	0,58	195
	L3B	110	-	-	-	85	425	0	0	0	0	0,0	0,0	41,6	2,5	92,7	553	0,58	232
	L4B	110	-	-	-	85	595	0	0	0	0	0,0	0,0	40,5	2,8	98,1	553	0,52	255
Souza (2008)	L1	150	-	-	-	200	500	0	0	0	0	0,0	0,0	37,8	3,6	121	595	0,93	475
	L2	150	1	400	400	200	500	0	0	0	0	0,0	0,0	32,3	3,4	123	595	0,87	240
	L3	150	1	400	400	200	500	0	0	0	0	0,0	0,0	39,5	4,0	125	595	1,17	250
	L4	150	1	400	400	200	500	0	0	0	0	0,0	0,0	39,1	3,9	124	595	0,52	237
	L7	150	1	200	200	200	500	0	0	0	0	0,0	0,0	37,2	4,0	123	595	1,48	455
	L9	150	2	200	200	200	500	0	0	0	0	0,0	0,0	34,2	3,4	123	595	1,48	375
	L16	150	1	200	300	200	500	0	0	0	0	0,0	0,0	44,0	3,6	125	583	1,01	474
	L19	150	2	200	300	200	500	0	0	0	0	0,0	0,0	39,0	3,5	126	583	1,05	411
Guandalini et al. (2009)	PG1	250	-	-	-	260	260	0	0	0	0	0,0	0,0	27,6	2,8	210	573	1,48	1.023
	PG-2b	250	-	-	-	260	260	0	0	0	0	0,0	0,0	40,5	4,1	210	552	0,27	440
	PG-4	250	-	-	-	260	260	0	0	0	0	0,0	0,0	32,2	3,2	210	541	0,27	408
	PG-5	250	-	-	-	260	260	0	0	0	0	0,0	0,0	29,3	2,9	210	555	0,32	550
	PG-10	250	-	-	-	260	260	0	0	0	0	0,0	0,0	28,5	2,9	210	577	0,32	540
	PG-3	500	-	-	-	520	520	0	0	0	0	0,0	0,0	32,4	3,2	456	520	0,34	2.153
	PG-6	125	-	-	-	130	130	0	0	0	0	0,0	0,0	34,7	3,5	96	526	1,59	238
	PG-7	125	-	-	-	130	130	0	0	0	0	0,0	0,0	34,7	3,5	100	550	0,97	241
	PG-8	125	-	-	-	130	130	0	0	0	0	0,0	0,0	34,7	3,5	117	525	0,36	140
PG-9	125	-	-	-	130	130	0	0	0	0	0,0	0,0	34,7	3,5	117	525	0,26	115	
Sagaseta et al. (2011)	PT21	250	-	-	-	260	260	0	0	0	0	0,0	0,0	67,5	6,8	192	575	1,19	959
	PT22	250	-	-	-	260	260	0	0	0	0	0,0	0,0	67,0	6,7	196	552	0,79	989

Autor	Laje	h (mm)	Abertura			Dim. do Pilar (mm)		Armadura de Cisalhamento						$f_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)	d (mm)	$f_y$ (MPa)	$\rho$ (%)	$V_{exp}$ (kN)
			Nº	Dimensão (mm)				Lin.	Cam.	$s_o$ (mm)	$s_r$ (mm)	$\phi_w$ (mm)	$A_{sw}$ (mm <sup>2</sup> )						
Sagasetta et al. (2011)	PT23	250	-	-	-	260	260	0	0	0	0	0,0	0,0	66,0	6,6	189	560	0,57	591
	PT31	250	-	-	-	260	260	0	0	0	0	0,0	0,0	66,3	6,6	212	540	1,45	1.433
	PT32	250	-	-	-	260	260	0	0	0	0	0,0	0,0	40,0	4,0	215	549	1,05	1.157
	PT33	250	-	-	-	260	260	0	0	0	0	0,0	0,0	47,0	4,7	212	546	0,50	602
Lips et al. (2012)	PL1	250	-	-	-	130	130	0	0	0	0	0,0	0,0	36,2	3,6	193	583	1,65	682
	PL6	250	-	-	-	130	130	12	6	80	160	14,0	153,9	36,6	3,7	198	583	1,57	1.363
	PV1	250	-	-	-	260	260	0	0	0	0	0,0	0,0	34,0	3,4	210	709	1,48	974
	PL7	250	-	-	-	260	260	16	7	80	160	14,0	153,9	35,9	3,6	197	583	1,66	1.773
	PL3	250	-	-	-	520	520	0	0	0	0	0,0	0,0	36,5	3,7	197	583	1,59	1.324
	PL8	250	-	-	-	520	520	24	7	80	160	14,0	153,9	36,0	3,6	200	583	1,55	2.256
	PL5	400	-	-	-	440	440	0	0	0	0	0,0	0,0	31,9	3,2	353	580	1,47	2.491
	PL10	400	-	-	-	440	440	16	5	130	260	22,0	380,1	33,0	3,3	343	580	1,55	5.193
	PL11	250	-	-	-	260	260	8	7	80	160	10,0	78,5	34,2	3,4	201	554	1,60	1.175
	PL12	250	-	-	-	260	260	16	7	80	160	10,0	78,5	34,6	3,5	201	554	1,60	1.633
Oliveira (2013)	LN01	180	-	-	-	200	400	14	3	70	100	8,0	50,3	55,1	4,7	143	577	1,44	1.084
	LN02	180	-	-	-	200	400	14	6	70	100	8,0	50,3	53,8	4,1	143	577	1,44	1.144
	LN03	180	-	-	-	200	400	0	0	0	0	0,0	0,0	51,2	4,2	143	577	1,44	786
	LN04	180	-	-	-	200	400	14	4	70	100	6,3	31,2	55,5	4,7	143	577	1,44	966
	LN05	180	-	-	-	200	400	14	5	70	100	12,5	122,7	54,8	4,1	142	577	1,46	1.143
Oukaili e Salman (2014)	XXX	70	-	-	-	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	35,7	3,6	54	598	0,78	102
	SF0	70	1	100	100	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	37,1	3,5	54	598	0,67	91
	CF0	70	1	150	150	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	34,1	3,4	54	598	0,67	80
	LF0	70	1	225	225	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	32,8	3,0	54	598	0,50	69
	CC0	70	1	150	150	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	36,3	3,3	54	598	0,56	91
	CF1	70	1	150	150	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	36,5	3,4	54	598	0,61	89

Autor	Laje	h (mm)	Abertura			Dim. do Pilar (mm)		Armadura de Cisalhamento						$f_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)	d (mm)	$f_y$ (MPa)	$\rho$ (%)	$V_{exp}$ (kN)
			Nº	Dimensão (mm)				Lin.	Cam.	$s_o$ (mm)	$s_r$ (mm)	$\phi_w$ (mm)	$A_{sw}$ (mm <sup>2</sup> )						
Anil et al. (2014)	1	120	-	-	-	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	20,8	2,1	100	480	0,39	193
	2	120	1	300	300	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	20,6	2,1	100	480	0,24	99
	3	120	1	300	300	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	20,9	2,1	100	480	0,29	126
	4	120	1	500	500	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	19,6	2,0	100	480	0,24	77
	5	120	1	500	500	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	19,6	2,0	100	480	0,29	95
	6	120	1	300	300	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	20,0	2,0	100	480	0,28	135
	7	120	1	300	300	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	21,2	2,1	100	480	0,39	172
	8	120	1	500	500	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	20,1	2,0	100	480	0,28	116
	9	120	1	500	500	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	20,2	2,0	100	480	0,39	139
Ferreira et al. (2014)	C1	180	-	-	-	270		10	6	70	100	10,0	78,5	47,8	4,4	143	557	1,50	858
	C2	180	-	-	-	360		10	6	70	100	10,0	78,5	46,9	4,3	140	557	1,55	956
	C3	180	-	-	-	450		10	6	70	100	10,0	78,5	48,9	4,6	142	557	1,52	1.077
	C4	180	-	-	-	360		12	6	70	100	10,0	78,5	47,9	4,3	140	557	1,55	1.122
	C7	180	-	-	-	360		10	7	55	80	10,0	78,5	49,0	3,8	144	557	1,48	1.110
	C8	180	-	-	-	360		12	6	70	100	10,0	78,5	48,1	3,9	144	557	1,48	1.059
Ha et al. (2015)	C0	180	-	-	-	300	300	0	0	0	0	0,0	0,0	27,0	2,7	180	443	1,14	590
	H1	180	1	150		300	300	0	0	0	0	0,0	0,0	27,0	2,7	180	443	1,14	550
	H2	180	2	150		300	300	0	0	0	0	0,0	0,0	27,0	2,7	180	443	1,02	517
	H3	180	3	150		300	300	0	0	0	0	0,0	0,0	27,0	2,7	180	443	1,02	453
	V2	180	2	150		300	300	0	0	0	0	0,0	0,0	27,0	2,7	180	443	1,08	557
	V3	180	3	150		300	300	0	0	0	0	0,0	0,0	27,0	2,7	180	443	1,08	547
	L3	180	3	150		300	300	0	0	0	0	0,0	0,0	27,0	2,7	180	443	1,03	418
	HV4	180	4	150		300	300	0	0	0	0	0,0	0,0	27,0	2,7	180	443	0,97	518
Shu et al. (2017)	PG1	250	-	-	-	260	260	0	0	0	0	0,0	0,0	27,6	2,8	210	542	1,48	1.023
	PT32	250	-	-	-	260	260	0	0	0	0	0,0	0,0	40,0	4,0	215	549	0,83	871
	AM04	250	-	-	-	260	780	0	0	0	0	0,0	0,0	44,6	4,5	202	516	0,98	1.157

Autor	Laje	h (mm)	Abertura			Dim. do Pilar (mm)		Armadura de Cisalhamento						$f_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)	d (mm)	$f_y$ (MPa)	$\rho$ (%)	$V_{exp}$ (kN)
			Nº	Dimensão (mm)				Lin.	Cam.	$s_o$ (mm)	$s_r$ (mm)	$\phi_w$ (mm)	$A_{sw}$ (mm <sup>2</sup> )						
Lourenço (2018)	LR	130	-	-	-	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	39,8	3,4	90	576	1,58	232
	LF1	130	1	150	150	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	46,0	3,8	92	563	1,23	206
	LF2	130	1	150	150	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	46,3	3,8	91	563	1,26	235
	LF3	130	1	150	150	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	45,9	3,8	92	563	1,23	216
	LF4	130	1	150	150	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	41,2	3,6	93	576	1,49	258
Marques (2018)	LR	130	-	-	-	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	39,8	3,4	90	583	1,58	232
	L2-150	130	1	150	150	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	41,4	3,6	91	583	1,17	208
	L4-75	130	4	75	75	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	40,0	3,5	93	583	1,29	184
	LR-8s	130	2	-	-	150	150	8	5	42	42	8,0	50,3	40,2	3,7	90	571	1,58	323
	L2-150-8s	130	2	150	150	150	150	8	5/2	42	42	8,0	50,3	38,0	3,5	90	571	1,19	259
	L2-150-6s	130	2	150	150	150	150	6	5	42	42	8,0	50,3	37,6	3,5	90	571	1,19	227
	L2-100-8s	130	2	100	100	150	150	8	5/3	42	42	8,0	50,3	40,4	3,7	90	571	1,19	268
	L4-75-8s	130	4	75	75	150	150	8	5/4	42	42	8,0	50,3	40,7	3,7	90	571	1,58	270
L4-75-4s	130	4	75	75	150	150	4	5	42	42	8,0	50,3	42,3	3,8	90	571	1,58	277	
Teng et al. (2018)	S11-028	150	-	-	-	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	112,0	11,2	120	459	0,28	280
	S11-050	150	-	-	-	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	112,0	11,2	117	537	0,50	394
	S11-090	150	-	-	-	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	112,0	11,2	117	537	1,01	440
	S11-139	150	-	-	-	200	200	0	0	0	0	0,0	0,0	112,0	11,2	114	501	1,60	454
	S13-028	150	-	-	-	600	200	0	0	0	0	0,0	0,0	114,0	11,4	120	459	0,29	308
	S13-050	150	-	-	-	600	200	0	0	0	0	0,0	0,0	114,0	11,4	117	537	0,51	418
	S13-090	150	-	-	-	600	200	0	0	0	0	0,0	0,0	114,0	11,4	117	537	1,03	558
	S13-143	150	-	-	-	600	200	0	0	0	0	0,0	0,0	114,0	11,4	114	501	1,63	718
	S15-028	150	-	-	-	1000	200	0	0	0	0	0,0	0,0	97,0	9,7	120	459	0,29	322
	S15-050	150	-	-	-	1000	200	0	0	0	0	0,0	0,0	97,0	9,7	117	537	0,52	458

Autor	Laje	h (mm)	Abertura			Dim. do Pilar (mm)		Armadura de Cisalhamento						$f_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)	d (mm)	$f_y$ (MPa)	$\rho$ (%)	$V_{exp}$ (kN)
			Nº	Dimensão (mm)				Lin.	Cam.	$s_o$ (mm)	$s_r$ (mm)	$\phi_w$ (mm)	$A_{sw}$ (mm <sup>2</sup> )						
Teng et al. (2018)	S15-090	150	-	-	-	1000	200	0	0	0	0	0,0	0,0	97,0	9,7	117	537	0,97	658
	S15-143	150	-	-	-	1000	200	0	0	0	0	0,0	0,0	97,0	9,7	114	501	1,53	776
Lajes testadas nesta pesquisa	LR-A	130	-	-	-	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	41,6	4,1	89	576	1,62	250
	LR-B	130	-	-	-	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	41,6	4,1	88	576	1,65	216
	LR-C	130	-	-	-	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	41,6	4,1	90	576	1,58	259
	LF1-A	130	1	150	-	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	44,5	4,3	90	576	1,28	188
	LF1-B	130	1	150	-	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	44,5	4,3	88	576	1,34	178
	LF1-C	130	1	150	-	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	44,5	4,3	91	576	1,26	234
	LF2-A	130	2	150	-	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	35,2	3,2	92	576	1,14	188
	LF2-B	130	2	150	-	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	35,2	3,2	95	576	1,08	214
LF2-C	130	2	150	-	150	150	0	0	0	0	0,0	0,0	35,2	3,2	93	576	1,12	195	

## APÊNDICE E

### RESULTADOS OBTIDOS DA VARIÁVEL ERRO DE MODELO

As Tabelas E.1 a E.6 apresentam os resultados da variável erro de modelo ( $E_m$ ) obtidos por meio das instruções normativas estudadas neste trabalho, como também através do programa *PunCalc*. Nas Tabelas E.5 e E.6, considerou-se, nessa ordem, o valor de  $r_1$  ajustado computacionalmente e  $1,35d$ .

**Tabela E.1 - Resultados da variável erro de modelo ( $E_m$ ) para EUROCODE 2 (2004)**

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>
<b>Elstner e Hognestad (1956)</b>	A-1b	331,5	365,0	1,10
	A-1c	347,4	356,0	1,02
	A-1d	375,5	351,0	0,93
	A-1e	308,5	356,0	1,15
	A-2b	356,9	400,0	1,12
	A-2c	443,4	467,0	1,05
	A-7b	402,1	512,0	1,27
	A-3b	437,3	445,0	1,02
	A-3c	461,1	534,0	1,16
	A-3d	503,5	547,0	1,09
	A-4	378,0	400,0	1,06
	A-5	479,9	534,0	1,11
	A-6	511,0	498,2	0,97
	A-7a	402,2	280,2	0,70
	B-2	277,5	200,2	0,72
	B-4	351,1	333,6	0,95
	B-9	452,3	505,0	1,12
B-14	518,3	578,0	1,12	
<b>Gomes (1991)</b>	1	584,3	560,0	0,96
	1A	588,6	587,0	1,00
	2	585,9	693,0	1,18
	3	666,6	773,0	1,16
	4	676,3	853,0	1,26
	5	694,4	853,0	1,23
	6	880,3	1.040,0	1,18
	7	893,0	1.120,0	1,25
	8	898,6	1.200,0	1,34
	9	1.025,7	1.227,0	1,20
10	593,8	800,0	1,35	

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	$V_{teo}$ <b>(kN)</b>	$V_{exp}$ <b>(kN)</b>	$E_m$
<b>Gomes e Andrade (1995)</b>	11	651,3	907,0	1,39
	L12A	580,9	650,0	1,12
	L13	469,9	600,0	1,28
	L14	453,0	556,0	1,23
	L15	331,7	554,0	1,67
	L23	280,8	550,0	1,96
	L16	843,3	1.140,0	1,35
	L17	757,5	1.096,0	1,45
	L18	762,1	992,0	1,30
	L19	625,8	1.010,0	1,61
	L20	361,9	780,0	2,16
	L24	407,3	890,0	2,19
	L21	644,0	896,0	1,39
	L22	524,7	832,0	1,59
<b>Andrade (1999)</b>	L301	1.007,7	830,0	0,82
	L302	929,6	790,0	0,85
	L303	1.041,1	966,0	0,93
	L304	972,6	956,0	0,98
	L305	771,6	785,0	1,02
	L306	1.001,5	950,0	0,95
	L307	925,0	1.090,0	1,18
	L308	942,5	1.020,0	1,08
<b>Trautwein (2001)</b>	L1	958,1	1.050,0	1,10
	L4	1.129,3	1.038,0	0,92
	L9	981,4	933,0	0,95
<b>Oliveira (2003)</b>	L1C	279,6	318,0	1,14
	L2C	304,0	331,0	1,09
	L3C	337,5	358,0	1,06
	L4C	373,7	404,0	1,08
	L5C	438,7	446,0	1,02
<b>Silva (2003)</b>	L1	216,4	273,0	1,26
	L2	255,6	401,0	1,57
	L3	294,3	469,0	1,59
	L4	110,9	225,0	2,03
	L5	179,3	350,0	1,95
	L6	230,0	375,0	1,63
	L7	304,9	420,0	1,38
	L8	299,2	452,0	1,51
	L9	140,7	452,0	3,21
	L10	139,5	325,0	2,33

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	$V_{teo}$ <b>(kN)</b>	$V_{exp}$ <b>(kN)</b>	$E_m$
<b>Silva (2003)</b>	L11	204,9	350,0	1,71
	L12	305,9	525,0	1,72
<b>Teng et al. (2004)</b>	OC11	325,0	423,0	1,30
	OC11H30	246,0	349,0	1,42
	OC11V23	276,0	373,0	1,35
	OC11V20	211,2	207,0	0,98
	OC13	450,7	568,0	1,26
	OC13H50	415,8	443,0	1,07
	OC13V43	417,4	467,0	1,12
	OC13V23	381,4	484,0	1,27
	OC13V40	388,0	340,0	0,88
	OC13H02	337,7	512,0	1,52
	OC15	567,9	649,0	1,14
	OC15H70	542,1	529,0	0,98
	OC15V43	487,8	612,0	1,25
	<b>Borges (2004)</b>	L42	579,5	703,0
L42A		684,7	743,0	1,09
L45		759,2	843,0	1,11
L46		878,7	947,0	1,08
L41		506,3	600,0	1,19
L41A		615,7	650,0	1,06
L43A		701,0	776,0	1,11
L44		778,4	814,0	1,05
L45FS_CG		623,7	792,0	1,27
L45FD_CG		657,3	750,0	1,14
L45FD		670,5	776,0	1,16
L45FFS_CG		525,9	750,0	1,43
L45FFD_CG		619,2	850,0	1,37
L45FFD		500,8	685,0	1,37
L45FFD_AC2		1.036,2	1.230,0	1,19
L45FFD_AC3		875,6	1.050,0	1,20
L45FFD_AC5		666,3	837,0	1,26
L45_AC1		1.036,2	1.250,0	1,21
L45_AC5	875,1	1.092,0	1,25	
<b>Musse (2004)</b>	L1	219,4	309,0	1,41
	L2	282,4	460,0	1,63
	L3	404,8	472,0	1,17
	L4	312,1	467,0	1,50
<b>Souza (2004)</b>	L1	208,0	274,0	1,32
	L2	100,4	205,0	2,04
	L3	164,2	275,0	1,68

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	$V_{teo}$ <b>(kN)</b>	$V_{exp}$ <b>(kN)</b>	$E_m$
<b>Souza (2004)</b>	L4	189,7	300,0	1,58
	L5	52,7	140,0	2,66
	L6	32,0	101,0	3,16
	L7	123,6	225,0	1,82
	L8	89,5	210,0	2,35
<b>Trautwein (2006)</b>	E1	923,3	1.100,0	1,19
	E3	1.048,4	1.090,0	1,04
	E4	1.005,5	1.205,0	1,20
	E5	1.035,2	1.222,0	1,18
	I6	721,3	830,0	1,15
	I7	1.017,4	978,0	0,96
	I8	883,1	856,0	0,97
	I9	594,0	853,0	1,44
	I10	811,5	975,0	1,20
	I11	667,1	945,0	1,42
	<b>Vaz (2007)</b>	L1	179,5	203,0
L2		226,7	321,0	1,42
L3		253,3	325,0	1,28
L4		281,1	357,0	1,27
L1-A		200,6	286,0	1,43
L5		193,4	200,0	1,03
L6		179,8	300,0	1,67
L7		205,7	303,0	1,47
L8		185,6	309,0	1,66
L9		195,9	315,0	1,61
<b>Damasceno (2007)</b>	L1A	178,8	188,5	1,05
	L2A	209,4	254,0	1,21
	L3A	280,3	297,0	1,06
	L4A	318,9	325,0	1,02
	L1B	158,6	172,0	1,08
	L2B	171,6	194,5	1,13
	L3B	211,1	232,0	1,10
	L4B	252,7	254,5	1,01
<b>Souza (2008)</b>	L1	417,3	475,0	1,14
	L2	303,5	240,0	0,79
	L3	367,2	250,0	0,68
	L4	275,4	237,0	0,86
	L7	431,3	455,0	1,05
	L9	355,9	375,0	1,05

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	$V_{teo}$ <b>(kN)</b>	$V_{exp}$ <b>(kN)</b>	$E_m$
<b>Souza (2008)</b>	L16	333,6	474,0	1,42
	L19	276,5	411,0	1,49
<b>Guandalini et al. (2009)</b>	PG1	1.020,9	1.023,0	1,00
	PG-2b	658,9	440,0	0,67
	PG-4	610,4	408,0	0,67
	PG-5	625,3	550,0	0,88
	PG-10	619,6	540,0	0,87
	PG-3	2.478,2	2.153,0	0,87
	PG-6	236,8	238,0	1,00
	PG-7	216,4	241,0	1,11
	PG-8	208,9	140,0	0,67
	PG-9	186,8	115,0	0,62
	<b>Sagaseta et al. (2011)</b>	PT21	1.071,5	959,0
PT22		968,4	989,0	1,02
PT23		807,3	591,0	0,73
PT31		1.350,6	1.433,0	1,06
PT32		1.047,5	1.157,0	1,10
PT33		843,8	602,0	0,71
<b>Lips et al. (2012)</b>	PL1	862,5	682,0	0,79
	PL6	772,0	1.363,0	1,77
	PV1	1.094,4	974,0	0,89
	PL7	1.511,8	1.773,0	1,17
	PL3	1.333,3	1.324,0	0,99
	PL8	2.595,6	2.256,0	0,87
	PL5	2.803,3	2.491,0	0,89
	PL10	3.840,5	5.193,0	1,35
	PL11	1.165,0	1.175,0	1,01
PL12	1.495,6	1.633,0	1,09	
<b>Oliveira (2013)</b>	LN01	881,5	1.084,0	1,23
	LN02	935,3	1.144,0	1,22
	LN03	660,9	786,0	1,19
	LN04	776,7	966,0	1,24
	LN05	1.142,5	1.143,0	1,00
<b>Oukaili e Salman (2014)</b>	XXX	71,0	101,7	1,43
	SF0	55,7	90,8	1,63
	CF0	49,9	79,9	1,60
	LF0	40,8	69,0	1,69
	CC0	54,3	90,8	1,67

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	$V_{teo}$ <b>(kN)</b>	$V_{exp}$ <b>(kN)</b>	$E_m$
<b>Oukaili e Salman (2014)</b>	CF1	56,1	88,9	1,59
<b>Anil et al. (2014)</b>	1	155,5	193,0	1,24
	2	89,8	99,0	1,10
	3	115,9	125,9	1,09
	4	79,2	77,0	0,97
	5	110,5	94,7	0,86
	6	136,7	134,8	0,99
	7	156,5	172,2	1,10
	8	136,8	115,5	0,84
	9	154,0	138,8	0,90
<b>Ferreira et al. (2014)</b>	C1	905,5	858,4	0,95
	C2	926,4	955,7	1,03
	C3	993,7	1.076,8	1,08
	C4	762,2	1.122,1	1,47
	C7	1.083,3	1.110,0	1,02
	C8	1.056,1	1.059,0	1,00
<b>Ha et al. (2015)</b>	C0	759,3	590,2	0,78
	H1	705,5	550,2	0,78
	H2	597,4	517,3	0,87
	H3	533,8	452,9	0,85
	V2	693,6	556,9	0,80
	V3	693,1	546,5	0,79
	L3	549,9	418,2	0,76
	HV4	587,1	517,9	0,88
<b>Shu et al. (2017)</b>	PG1	1.020,9	1.023,0	1,00
	PT32	996,7	871,0	0,87
	AM04	1.248,5	1.157,0	0,93
<b>Lourenço (2018)</b>	LR	223,3	232,0	1,04
	LF1	167,7	206,0	1,23
	LF2	192,2	235,0	1,22
	LF3	204,3	216,0	1,06
	LF4	214,0	258,2	1,21
<b>Marques (2018)</b>	LR	223,3	232,3	1,04
	L2-150	141,4	208,4	1,47
	L4-75	133,3	184,0	1,38
	LR-8s	341,5	323,0	0,95
	L2-150-8s	203,0	258,5	1,27
	L2-150-6s	202,3	227,3	1,12

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	$V_{teo}$ <b>(kN)</b>	$V_{exp}$ <b>(kN)</b>	$E_m$
<b>Marques (2018)</b>	L2-100-8s	229,4	268,0	1,17
	L4-75-8s	194,5	269,6	1,39
	L4-75-4s	197,0	277,0	1,41
<b>Teng et al. (2018)</b>	S11-028	325,6	280,0	0,86
	S11-050	376,2	394,0	1,05
	S11-090	474,0	440,0	0,93
	S11-139	527,7	454,0	0,86
	S13-028	441,1	308,0	0,70
	S13-050	511,7	418,0	0,82
	S13-090	644,7	558,0	0,87
	S13-143	720,9	718,0	1,00
	S15-028	525,2	322,0	0,61
	S15-050	610,9	458,0	0,75
	S15-090	752,7	658,0	0,87
	S15-143	843,9	776,0	0,92
<b>Lajes testadas nesta pesquisa</b>	LR-A	223,9	249,9	1,12
	LR-B	221,2	216,4	0,98
	LR-C	226,6	259,2	1,14
	LF1-A	180,8	187,6	1,04
	LF1-B	176,6	178,0	1,01
	LF1-C	182,9	233,7	1,28
	LF2-A	136,6	187,6	1,37
	LF2-B	139,2	213,9	1,54
	LF2-C	136,1	194,8	1,43

Tabela E.2 - Resultados da variável erro de modelo ( $E_m$ ) para CEB-FIP/MC (2010)

Autor	Laje	$V_{teo}$ (kN)	$V_{exp}$ (kN)	$E_m$
<b>Elstner e Hognestad (1956)</b>	A-1b	261,5	365,0	1,40
	A-1c	288,6	356,0	1,23
	A-1d	331,6	351,0	1,06
	A-1e	235,2	356,0	1,51
	A-2b	279,1	400,0	1,43
	A-2c	376,2	467,0	1,24
	A-7b	298,2	512,0	1,72
	A-3b	344,6	445,0	1,29
	A-3c	350,1	534,0	1,53
	A-3d	408,2	547,0	1,34
	A-4	296,6	400,0	1,35
	A-5	389,5	534,0	1,37
	A-6	436,9	498,2	1,14
	A-7a	410,5	280,2	0,68
	B-2	238,6	200,2	0,84
	B-4	278,5	333,6	1,20
	B-9	372,3	505,0	1,36
	B-14	429,5	578,0	1,35
<b>Gomes (1991)</b>	1	455,6	560,0	1,23
	1A	445,4	587,0	1,32
	2	473,9	693,0	1,46
	3	491,6	773,0	1,57
	4	434,4	853,0	1,96
	5	467,9	853,0	1,82
	6	404,9	1.040,0	2,57
	7	369,8	1.120,0	3,03
	8	347,3	1.200,0	3,46
	9	373,1	1.227,0	3,29
	10	452,4	800,0	1,77
11	399,1	907,0	2,27	
<b>Gomes e Andrade (1995)</b>	L12A	376,3	650,0	1,73
	L13	297,5	600,0	2,02
	L14	281,4	556,0	1,98
	L15	189,5	554,0	2,92
	L23	176,5	550,0	3,12
	L16	326,0	1.140,0	3,50
	L17	282,9	1.096,0	3,87
	L18	308,1	992,0	3,22
L19	239,9	1.010,0	4,21	

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>
<b>Gomes e Andrade (1995)</b>	L20	147,7	780,0	5,28
	L24	196,9	890,0	4,52
	L21	262,6	896,0	3,41
	L22	265,2	832,0	3,14
<b>Andrade (1999)</b>	L301	534,2	830,0	1,55
	L302	548,5	790,0	1,44
	L303	467,0	966,0	2,07
	L304	431,6	956,0	2,22
	L305	439,4	785,0	1,79
	L306	443,0	950,0	2,14
	L307	425,0	1.090,0	2,56
	L308	430,4	1.020,0	2,37
<b>Trautwein (2001)</b>	L1	469,0	1.050,0	2,24
	L4	570,1	1.038,0	1,82
	L9	474,9	933,0	1,96
<b>Silva (2003)</b>	L1	161,3	273,0	1,69
	L2	158,5	401,0	2,53
	L3	171,6	469,0	2,73
	L4	96,2	225,0	2,34
	L5	127,1	350,0	2,75
	L6	171,2	375,0	2,19
	L7	217,8	420,0	1,93
	L8	208,2	452,0	2,17
	L9	207,9	452,0	2,17
	L10	132,0	325,0	2,46
	L11	182,9	350,0	1,91
	L12	168,9	525,0	3,11
<b>Teng et al. (2004)</b>	OC11	243,1	423,0	1,74
	OC11H30	180,7	349,0	1,93
	OC11V23	201,0	373,0	1,86
	OC11V20	181,1	207,0	1,14
	OC13	331,2	568,0	1,72
	OC13H50	344,5	443,0	1,29
	OC13V43	352,7	467,0	1,32
	OC13V23	311,6	484,0	1,55
	OC13V40	347,4	340,0	0,98
OC13H02	288,2	512,0	1,78	
<b>Borges (2004)</b>	L42	407,9	703,0	1,72
	L42A	529,4	743,0	1,40
	L45	573,1	843,0	1,47

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	$V_{teo}$ <b>(kN)</b>	$V_{exp}$ <b>(kN)</b>	$E_m$
<b>Borges (2004)</b>	L46	654,1	947,0	1,45
	L41	360,4	600,0	1,66
	L41A	473,1	650,0	1,37
	L43A	532,9	776,0	1,46
	L44	619,3	814,0	1,31
	L45FS_CG	384,8	792,0	2,06
	L45FD_CG	464,4	750,0	1,61
	L45FD	467,4	776,0	1,66
	L45FFS_CG	347,6	750,0	2,16
	L45FFD_CG	450,9	850,0	1,89
	L45FFD	364,0	685,0	1,88
	L45FFD_AC2	491,5	1.230,0	2,50
	L45FFD_AC3	464,6	1.050,0	2,26
	L45FFD_AC5	448,7	837,0	1,87
	L45_AC1	478,2	1.250,0	2,61
L45_AC5	474,5	1.092,0	2,30	
<b>Musse (2004)</b>	L1	146,1	309,0	2,12
	L2	167,3	460,0	2,75
	L3	191,2	472,0	2,47
	L4	167,6	467,0	2,79
<b>Souza 2004)</b>	L1	151,7	274,0	1,81
	L2	87,3	205,0	2,35
	L3	116,0	275,0	2,37
	L4	133,6	300,0	2,25
	L5	52,8	140,0	2,65
	L6	35,3	101,0	2,86
	L7	94,0	225,0	2,39
	L8	61,0	210,0	3,44
<b>Trautwein (2006)</b>	E1	382,9	1.100,0	2,87
	E3	419,9	1.090,0	2,60
	E4	358,8	1.205,0	3,36
	E5	360,7	1.222,0	3,39
	I6	499,5	830,0	1,66
	I7	456,4	978,0	2,14
	I8	468,9	856,0	1,83
	I9	523,6	853,0	1,63
	I10	480,7	975,0	2,03
	I11	466,2	945,0	2,03
<b>Vaz (2007)</b>	L1	149,4	203,0	1,36
	L2	192,3	321,0	1,67

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>
<b>Vaz (2007)</b>	L3	183,5	325,0	1,77
	L4	176,2	357,0	2,03
	L1-A	139,0	286,0	2,06
	L5	226,6	200,0	0,88
	L6	179,7	300,0	1,67
	L7	169,6	303,0	1,79
	L8	171,6	309,0	1,80
	L9	201,0	315,0	1,57
<b>Damasceno (2007)</b>	L1A	154,5	188,5	1,22
	L2A	187,8	254,0	1,35
	L3A	280,4	297,0	1,06
	L4A	322,6	325,0	1,01
	L1B	127,3	172,0	1,35
	L2B	142,2	194,5	1,37
	L3B	176,9	232,0	1,31
	L4B	215,7	254,5	1,18
<b>Souza (2008)</b>	L1	307,6	475,0	1,54
	L2	287,9	240,0	0,83
	L3	379,3	250,0	0,66
	L4	228,5	237,0	1,04
	L7	367,2	455,0	1,24
	L9	368,5	375,0	1,02
	L16	301,5	474,0	1,57
	L19	220,0	411,0	1,87
<b>Guandalini et al. (2009)</b>	PG1	671,1	1.023,0	1,52
	PG-2b	418,6	440,0	1,05
	PG-4	400,4	408,0	1,02
	PG-5	330,6	550,0	1,66
	PG-10	336,9	540,0	1,60
	PG-3	1.271,8	2.153,0	1,69
	PG-6	202,5	238,0	1,18
	PG-7	173,6	241,0	1,39
	PG-8	205,9	140,0	0,68
	PG-9	185,9	115,0	0,62
<b>Sagaseta et al. (2011)</b>	PT21	577,3	959,0	1,66
	PT22	382,9	989,0	2,58
	PT23	584,1	591,0	1,01
	PT31	863,9	1.433,0	1,66
	PT32	631,3	1.157,0	1,83
	PT33	625,7	602,0	0,96

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>
<b>Lips et al. (2012)</b>	PL1	614,7	682,0	1,11
	PL6	641,9	1.363,0	2,12
	PV1	839,1	974,0	1,16
	PL7	732,4	1.773,0	2,42
	PL3	948,2	1.324,0	1,40
	PL8	895,6	2.256,0	2,52
	PL5	2.436,2	2.491,0	1,02
	PL10	2.026,2	5.193,0	2,56
	PL11	1.007,3	1.175,0	1,17
	PL12	775,7	1.633,0	2,11
<b>Oliveira (2013)</b>	LN01	592,5	1.084,0	1,83
	LN02	554,5	1.144,0	2,06
	LN03	487,5	786,0	1,61
	LN04	655,1	966,0	1,47
	LN05	599,2	1.143,0	1,91
<b>Oukaili e Salman (2014)</b>	XXX	69,1	101,7	1,47
	SF0	50,8	90,8	1,79
	CF0	49,8	79,9	1,60
	LF0	30,8	69,0	2,24
	CC0	39,0	90,8	2,32
	CF1	54,3	88,9	1,64
<b>Anil et al. (2014)</b>	1	66,7	193,0	2,89
	2	45,3	99,0	2,19
	3	59,3	125,9	2,12
	4	47,3	77,0	1,63
	5	70,5	94,7	1,34
	6	64,6	134,8	2,09
	7	74,6	172,2	2,31
	8	68,8	115,5	1,68
	9	95,7	138,8	1,45
<b>Ferreira et al. (2014)</b>	C1	589,5	858,4	1,46
	C2	619,8	955,7	1,54
	C3	683,3	1.076,8	1,58
	C4	415,8	1.122,1	2,70
	C7	581,2	1.110,0	1,91
	C8	600,5	1.059,0	1,76
<b>Ha et al. (2015)</b>	C0	680,6	590,2	0,87
	H1	633,7	550,2	0,87
	H2	463,3	517,3	1,12
	H3	416,2	452,9	1,09

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>
<b>Ha et al. (2015)</b>	V2	552,6	556,9	1,01
	V3	553,3	546,5	0,99
	L3	473,0	418,2	0,88
	HV4	442,2	517,9	1,17
<b>Shu et al. (2017)</b>	PG1	666,8	1.023,0	1,53
	PT32	672,6	871,0	1,30
	AM04	803,2	1.157,0	1,44
<b>Lourenço (2018)</b>	LR	183,9	232,0	1,26
	LF1	130,4	206,0	1,58
	LF2	149,1	235,0	1,58
	LF3	172,2	216,0	1,25
	LF4	164,8	258,2	1,57
<b>Marques (2018)</b>	LR	194,6	232,3	1,19
	L2-150	126,5	208,4	1,65
	L4-75	134,3	184,0	1,37
	LR-8s	260,1	323,0	1,24
	L2-150-8s	177,6	258,5	1,46
	L2-150-6s	192,7	227,3	1,18
	L2-100-8s	195,3	268,0	1,37
	L4-75-8s	192,6	269,6	1,40
L4-75-4s	193,2	277,0	1,43	
<b>Teng et al. (2018)</b>	S11-028	180,3	280,0	1,55
	S11-050	227,1	394,0	1,73
	S11-090	405,0	440,0	1,09
	S11-139	509,4	454,0	0,89
	S13-028	279,0	308,0	1,10
	S13-050	369,1	418,0	1,13
	S13-090	562,8	558,0	0,99
	S13-143	611,2	718,0	1,17
<b>Lajes testadas nesta pesquisa</b>	LR-A	179,7	249,9	1,39
	LR-B	193,9	216,4	1,12
	LR-C	177,7	259,2	1,46
	LF1-A	157,3	187,6	1,19
	LF1-B	155,6	178,0	1,14
	LF1-C	137,0	233,7	1,71
	LF2-A	121,8	187,6	1,54
	LF2-B	117,3	213,9	1,82
	LF2-C	121,2	194,8	1,61

Tabela E.3 - Resultados da variável erro de modelo ( $E_m$ ) para ACI 318 (2014)

Autor	Laje	$V_{teo}$ (kN)	$V_{exp}$ (kN)	$E_m$
Elstner e Hognestad (1956)	A-1b	289,6	365,0	1,26
	A-1c	310,6	356,0	1,15
	A-1d	349,0	351,0	1,01
	A-1e	259,9	356,0	1,37
	A-2b	245,4	400,0	1,63
	A-2c	339,8	467,0	1,37
	A-7b	293,5	512,0	1,74
	A-3b	264,2	445,0	1,68
	A-3c	286,1	534,0	1,87
	A-3d	326,4	547,0	1,68
	A-4	375,6	400,0	1,06
	A-5	374,1	534,0	1,43
	A-6	355,0	498,2	1,40
	A-7a	293,6	280,2	0,95
	B-2	383,3	200,2	0,52
	B-4	383,8	333,6	0,87
	B-9	368,2	505,0	1,37
B-14	394,9	578,0	1,46	
Gomes (1991)	1	478,0	560,0	1,17
	1A	483,2	587,0	1,21
	2	330,5	693,0	2,10
	3	366,9	773,0	2,11
	4	403,8	853,0	2,11
	5	492,2	853,0	1,73
	6	537,2	1.040,0	1,94
	7	587,3	1.120,0	1,91
	8	666,2	1.200,0	1,80
	9	946,6	1.227,0	1,30
	10	514,3	800,0	1,56
11	571,7	907,0	1,59	
Gomes e Andrade (1995)	L12A	471,9	650,0	1,38
	L13	376,5	600,0	1,59
	L14	365,7	556,0	1,52
	L15	277,1	554,0	2,00
	L23	250,5	550,0	2,20
	L16	505,5	1.140,0	2,26
	L17	478,3	1.096,0	2,29
	L18	494,5	992,0	2,01
L19	347,3	1.010,0	2,91	

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>
<b>Gomes e Andrade (1995)</b>	L20	283,2	780,0	2,75
	L24	286,3	890,0	3,11
	L21	557,5	896,0	1,61
	L22	487,8	832,0	1,71
<b>Andrade (1999)</b>	L301	726,6	830,0	1,14
	L302	718,6	790,0	1,10
	L303	937,2	966,0	1,03
	L304	946,9	956,0	1,01
	L305	599,0	785,0	1,31
	L306	963,8	950,0	0,99
	L307	700,5	1.090,0	1,56
	L308	605,6	1.020,0	1,68
<b>Trautwein (2001)</b>	L1	838,9	1.050,0	1,25
	L4	941,9	1.038,0	1,10
	L9	837,6	933,0	1,11
<b>Oliveira (2003)</b>	L1C	247,1	318,0	1,29
	L2C	306,0	331,0	1,08
	L3C	356,4	358,0	1,00
	L4C	430,2	404,0	0,94
	L5C	535,6	446,0	0,83
<b>Silva (2003)</b>	L1	179,4	273,0	1,52
	L2	237,9	401,0	1,69
	L3	254,1	469,0	1,85
	L4	89,5	225,0	2,51
	L5	162,6	350,0	2,15
	L6	191,3	375,0	1,96
	L7	173,3	420,0	2,42
	L8	178,0	452,0	2,54
	L9	177,4	452,0	2,55
	L10	80,0	325,0	4,06
	L11	117,7	350,0	2,97
	L12	298,6	525,0	1,76
<b>Teng et al. (2004)</b>	OC11	254,5	423,0	1,66
	OC11H30	191,7	349,0	1,82
	OC11V23	212,8	373,0	1,75
	OC11V20	164,8	207,0	1,26
	OC13	368,6	568,0	1,54
	OC13H50	338,6	443,0	1,31
	OC13V43	333,8	467,0	1,40
	OC13V23	328,6	484,0	1,47

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>
<b>Teng et al. (2004)</b>	OC13V40	300,8	340,0	1,13
	OC13H02	296,6	512,0	1,73
	OC15	437,4	649,0	1,48
	OC15H70	413,0	529,0	1,28
	OC15V43	362,8	612,0	1,69
<b>Borges (2004)</b>	L42	529,4	703,0	1,33
	L42A	604,4	743,0	1,23
	L45	729,8	843,0	1,16
	L46	901,1	947,0	1,05
	L41	415,9	600,0	1,44
	L41A	491,5	650,0	1,32
	L43A	624,9	776,0	1,24
	L44	738,0	814,0	1,10
	L45FS_CG	635,4	792,0	1,25
	L45FD_CG	623,5	750,0	1,20
	L45FD	642,4	776,0	1,21
	L45FFS_CG	561,6	750,0	1,34
	L45FFD_CG	602,3	850,0	1,41
	L45FFD	485,6	685,0	1,41
	L45FFD_AC2	635,9	1.230,0	1,93
	L45FFD_AC3	508,0	1.050,0	2,07
	L45FFD_AC5	391,8	837,0	2,14
L45_AC1	631,5	1.250,0	1,98	
L45_AC5	537,7	1.092,0	2,03	
<b>Musse (2004)</b>	L1	186,9	309,0	1,65
	L2	158,3	460,0	2,91
	L3	256,0	472,0	1,84
	L4	273,0	467,0	1,71
<b>Souza (2004)</b>	L1	172,5	274,0	1,59
	L2	85,2	205,0	2,41
	L3	143,7	275,0	1,91
	L4	159,2	300,0	1,88
	L5	40,9	140,0	3,42
	L6	27,3	101,0	3,70
	L7	117,5	225,0	1,91
	L8	93,2	210,0	2,25
<b>Trautwein (2006)</b>	E1	820,4	1.100,0	1,34
	E3	886,5	1.090,0	1,23
	E4	850,9	1.205,0	1,42
	E5	866,4	1.222,0	1,41

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>
<b>Trautwein (2006)</b>	I6	634,5	830,0	1,31
	I7	842,2	978,0	1,16
	I8	787,2	856,0	1,09
	I9	516,5	853,0	1,65
	I10	646,6	975,0	1,51
	I11	584,8	945,0	1,62
<b>Vaz (2007)</b>	L1	125,2	203,0	1,62
	L2	121,5	321,0	2,64
	L3	142,4	325,0	2,28
	L4	171,0	357,0	2,09
	L1-A	143,6	286,0	1,99
	L5	140,9	200,0	1,42
	L6	139,1	300,0	2,16
	L7	136,5	303,0	2,22
	L8	145,4	309,0	2,12
	L9	155,7	315,0	2,02
<b>Damasceno (2007)</b>	L1A	132,0	188,5	1,43
	L2A	193,3	254,0	1,31
	L3A	294,1	297,0	1,01
	L4A	362,8	325,0	0,90
	L1B	152,6	172,0	1,13
	L2B	201,7	194,5	0,96
	L3B	274,4	232,0	0,85
	L4B	361,0	254,5	0,70
<b>Souza (2008)</b>	L1	462,5	475,0	1,03
	L2	311,4	240,0	0,77
	L3	351,6	250,0	0,71
	L4	346,2	237,0	0,68
	L7	406,7	455,0	1,12
	L9	330,8	375,0	1,13
	L16	386,5	474,0	1,23
	L19	240,5	411,0	1,71
<b>Guandalini et al. (2009)</b>	PG1	684,5	1.023,0	1,49
	PG-2b	829,1	440,0	0,53
	PG-4	739,3	408,0	0,55
	PG-5	705,2	550,0	0,78
	PG-10	695,5	540,0	0,78
	PG-3	3.344,0	2.153,0	0,64
	PG-6	168,7	238,0	1,41

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>
<b>Guandalini et al. (2009)</b>	PG-7	178,8	241,0	1,35
	PG-8	224,7	140,0	0,62
	PG-9	224,7	115,0	0,51
<b>Sagaseta et al. (2011)</b>	PT21	941,2	959,0	1,02
	PT22	965,7	989,0	1,02
	PT23	910,0	591,0	0,65
	PT31	1.075,5	1.433,0	1,33
	PT32	852,6	1.157,0	1,36
	PT33	905,5	602,0	0,66
<b>Lips et al. (2012)</b>	PL1	495,1	682,0	1,38
	PL6	1.037,3	1.363,0	1,31
	PV1	759,7	974,0	1,28
	PL7	1.424,1	1.773,0	1,25
	PL3	1.126,4	1.324,0	1,18
	PL8	1.794,5	2.256,0	1,26
	PL5	2.087,0	2.491,0	1,19
	PL10	2.305,6	5.193,0	2,25
	PL11	1.069,8	1.175,0	1,10
	PL12	1.438,9	1.633,0	1,13
<b>Oliveira (2013)</b>	LN01	572,4	1.084,0	1,89
	LN02	887,3	1.144,0	1,29
	LN03	598,3	786,0	1,31
	LN04	685,5	966,0	1,41
	LN05	785,9	1.143,0	1,45
<b>Oukaili e Salman (2014)</b>	XXX	86,9	101,7	1,17
	SF0	73,8	90,8	1,23
	CF0	63,7	79,9	1,25
	LF0	55,5	69,0	1,24
	CC0	73,0	90,8	1,24
	CF1	87,9	88,9	1,01
<b>Anil et al. (2014)</b>	1	180,7	193,0	1,07
	2	119,8	99,0	0,83
	3	146,9	125,9	0,86
	4	105,3	77,0	0,73
	5	139,0	94,7	0,68
	6	177,2	134,8	0,76
	7	182,5	172,2	0,94
	8	177,3	115,5	0,65
	9	178,1	138,8	0,78

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>
<b>Ferreira et al. (2014)</b>	C1	792,4	858,4	1,08
	C2	812,2	955,7	1,18
	C3	890,1	1.076,8	1,21
	C4	790,3	1.122,1	1,42
	C7	833,0	1.110,0	1,33
	C8	862,7	1.059,0	1,23
<b>Ha et al. (2015)</b>	C0	592,6	590,2	1,00
	H1	554,1	550,2	0,99
	H2	492,6	517,3	1,05
	H3	427,8	452,9	1,06
	V2	554,1	556,9	1,00
	V3	554,1	546,5	0,99
	L3	444,5	418,2	0,94
	HV4	492,6	517,9	1,05
<b>Shu et al. (2017)</b>	PG1	684,5	1.023,0	1,49
	PT32	852,6	871,0	1,02
	AM04	1.285,7	1.157,0	0,90
<b>Lourenço (2018)</b>	LR	179,9	232,0	1,29
	LF1	149,5	206,0	1,38
	LF2	174,6	235,0	1,35
	LF3	184,5	216,0	1,17
	LF4	181,2	258,2	1,43
<b>Marques (2018)</b>	LR	179,9	232,3	1,29
	L2-150	133,2	208,4	1,56
	L4-75	122,0	184,0	1,51
	LR-8s	196,0	323,0	1,65
	L2-150-8s	132,5	258,5	1,95
	L2-150-6s	131,8	227,3	1,72
	L2-100-8s	145,1	268,0	1,85
	L4-75-8s	117,8	269,6	2,29
L4-75-4s	120,1	277,0	2,31	
<b>Teng et al. (2018)</b>	S11-028	536,4	280,0	0,52
	S11-050	518,1	394,0	0,76
	S11-090	518,1	440,0	0,85
	S11-139	500,1	454,0	0,91
	S13-028	755,1	308,0	0,41
	S13-050	732,0	418,0	0,57
	S13-090	732,0	558,0	0,76
	S13-143	709,1	718,0	1,01

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>
<b>Teng et al. (2018)</b>	S15-028	810,1	322,0	0,40
	S15-050	786,6	458,0	0,58
	S15-090	786,6	658,0	0,84
	S15-143	763,2	776,0	1,02
<b>Lajes testadas nesta pesquisa</b>	LR-A	181,1	249,9	1,38
	LR-B	178,3	216,4	1,21
	LR-C	183,9	259,2	1,41
	LF1-A	163,2	187,6	1,15
	LF1-B	158,2	178,0	1,13
	LF1-C	165,7	233,7	1,41
	LF2-A	124,7	187,6	1,50
	LF2-B	130,6	213,9	1,64
	LF2-C	126,7	194,8	1,54

**Tabela E.4 - Resultados da variável erro de modelo ( $E_m$ ) para ABNT NBR (2014)**

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>
<b>Elstner e Hognestad (1956)</b>	A-1b	275,9	365,0	1,32
	A-1c	289,1	356,0	1,23
	A-1d	312,4	351,0	1,12
	A-1e	256,7	356,0	1,39
	A-2b	299,3	400,0	1,34
	A-2c	371,9	467,0	1,26
	A-7b	337,3	512,0	1,52
	A-3b	366,8	445,0	1,21
	A-3c	386,8	534,0	1,38
	A-3d	422,3	547,0	1,30
	A-4	314,5	400,0	1,27
	A-5	402,5	534,0	1,33
	A-6	428,7	498,2	1,16
	A-7a	337,4	280,2	0,83
	B-2	232,8	200,2	0,86
	B-4	294,5	333,6	1,13
	B-9	379,4	505,0	1,33
B-14	434,8	578,0	1,33	
<b>Gomes (1991)</b>	1	447,7	560,0	1,25
	1A	450,9	587,0	1,30
	2	511,3	693,0	1,36
	3	599,1	773,0	1,29

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>
<b>Gomes (1991)</b>	4	609,3	853,0	1,40
	5	633,0	853,0	1,35
	6	723,9	1.040,0	1,44
	7	776,1	1.120,0	1,44
	8	854,1	1.200,0	1,40
	9	1.141,7	1.227,0	1,07
	10	517,2	800,0	1,55
	11	577,8	907,0	1,57
<b>Gomes e Andrade (1995)</b>	L12A	442,1	650,0	1,47
	L13	363,7	600,0	1,65
	L14	349,4	556,0	1,59
	L15	259,0	554,0	2,14
	L23	214,8	550,0	2,56
	L16	690,5	1.140,0	1,65
	L17	610,0	1.096,0	1,80
	L18	606,3	992,0	1,64
	L19	510,6	1.010,0	1,98
	L20	298,6	780,0	2,61
	L24	333,3	890,0	2,67
	L21	614,6	896,0	1,46
<b>Andrade (1999)</b>	L22	465,6	832,0	1,79
	L301	900,0	830,0	0,92
	L302	867,9	790,0	0,91
	L303	1.149,4	966,0	0,84
	L304	1.094,1	956,0	0,87
	L305	802,7	785,0	0,98
	L306	1.126,7	950,0	0,84
	L307	847,1	1.090,0	1,29
L308	849,0	1.020,0	1,20	
<b>Trautwein (2001)</b>	L1	1.028,4	1.050,0	1,02
	L4	1.100,0	1.038,0	0,94
	L9	1.037,1	933,0	0,90
<b>Oliveira (2003)</b>	L1C	239,0	318,0	1,33
	L2C	259,9	331,0	1,27
	L3C	289,3	358,0	1,24
	L4C	319,5	404,0	1,26
	L5C	373,0	446,0	1,20
<b>Silva (2003)</b>	L1	194,6	273,0	1,40
	L2	229,9	401,0	1,74
	L3	264,7	469,0	1,77

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>	
<b>Silva (2003)</b>	L4	99,7	225,0	2,26	
	L5	161,3	350,0	2,17	
	L6	206,8	375,0	1,81	
	L7	288,9	420,0	1,45	
	L8	289,1	452,0	1,56	
	L9	237,4	452,0	1,90	
	L10	138,6	325,0	2,34	
	L11	196,7	350,0	1,78	
	L12	275,1	525,0	1,91	
	<b>Teng et al. (2004)</b>	OC11	279,4	423,0	1,51
		OC11H30	209,7	349,0	1,66
		OC11V23	234,7	373,0	1,59
OC11V20		181,5	207,0	1,14	
OC13		385,3	568,0	1,47	
OC13H50		352,6	443,0	1,26	
OC13V43		350,3	467,0	1,33	
OC13V23		325,2	484,0	1,49	
OC13V40		329,9	340,0	1,03	
OC13H02		284,9	512,0	1,80	
OC15		490,9	649,0	1,32	
OC15H70		462,1	529,0	1,14	
OC15V43		414,8	612,0	1,48	
<b>Borges (2004)</b>	L42	460,3	703,0	1,53	
	L42A	520,3	743,0	1,43	
	L45	586,6	843,0	1,44	
	L46	667,7	947,0	1,42	
	L41	402,1	600,0	1,49	
	L41A	467,9	650,0	1,39	
	L43A	532,7	776,0	1,46	
	L44	591,5	814,0	1,38	
	L45FS_CG	481,9	792,0	1,64	
	L45FD_CG	507,8	750,0	1,48	
	L45FD	518,1	776,0	1,50	
	L45FFS_CG	406,3	750,0	1,85	
	L45FFD_CG	470,5	850,0	1,81	
	L45FFD	394,0	685,0	1,74	
	L45FFD_AC2	818,2	1.230,0	1,50	
	L45FFD_AC3	695,7	1.050,0	1,51	
	L45FFD_AC5	608,1	837,0	1,38	
	L45_AC1	877,5	1.250,0	1,42	

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	$V_{teo}$ <b>(kN)</b>	$V_{exp}$ <b>(kN)</b>	$E_m$
<b>Borges (2004)</b>	L45_AC5	782,2	1.092,0	1,40
<b>Musse (2004)</b>	L1	196,7	309,0	1,57
	L2	268,4	460,0	1,71
	L3	386,2	472,0	1,22
	L4	311,4	467,0	1,50
<b>Souza (2004)</b>	L1	186,4	274,0	1,47
	L2	90,3	205,0	2,27
	L3	148,2	275,0	1,86
	L4	170,1	300,0	1,76
	L5	47,2	140,0	2,97
	L6	28,7	101,0	3,52
	L7	110,5	225,0	2,04
	L8	79,9	210,0	2,63
<b>Trautwein (2006)</b>	E1	1.012,4	1.100,0	1,09
	E3	1.066,0	1.090,0	1,02
	E4	1.047,4	1.205,0	1,15
	E5	1.060,1	1.222,0	1,15
	I6	638,5	830,0	1,30
	I7	1.052,9	978,0	0,93
	I8	809,5	856,0	1,06
	I9	499,7	853,0	1,71
	I10	723,8	975,0	1,35
	I11	577,2	945,0	1,64
	<b>Vaz (2007)</b>	L1	165,5	203,0
L2		233,1	321,0	1,38
L3		258,7	325,0	1,26
L4		284,1	357,0	1,26
L1-A		179,3	286,0	1,60
L5		187,5	200,0	1,07
L6		170,9	300,0	1,76
L7		201,0	303,0	1,51
L8		178,1	309,0	1,74
L9		188,5	315,0	1,67
<b>Damasceno (2007)</b>	L1A	161,1	188,5	1,17
	L2A	188,7	254,0	1,35
	L3A	244,6	297,0	1,21
	L4A	279,2	325,0	1,16
	L1B	139,0	172,0	1,24
	L2B	154,1	194,5	1,26

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>
<b>Damasceno (2007)</b>	L3B	188,2	232,0	1,23
	L4B	221,6	254,5	1,15
<b>Souza (2008)</b>	L1	344,5	475,0	1,38
	L2	249,4	240,0	0,96
	L3	300,4	250,0	0,83
	L4	225,8	237,0	1,05
	L7	354,3	455,0	1,28
	L9	292,4	375,0	1,28
	L16	272,9	474,0	1,74
	L19	225,7	411,0	1,82
<b>Guandalini et al. (2009)</b>	PG1	737,3	1.023,0	1,39
	PG-2b	475,9	440,0	0,92
	PG-4	440,8	408,0	0,93
	PG-5	451,6	550,0	1,22
	PG-10	447,5	540,0	1,21
	PG-3	1.789,8	2.153,0	1,20
	PG-6	209,0	238,0	1,14
	PG-7	188,7	241,0	1,28
	PG-8	174,1	140,0	0,80
	PG-9	155,6	115,0	0,74
<b>Sagasetta et al (2011)</b>	PT21	781,8	959,0	1,23
	PT22	703,0	989,0	1,41
	PT23	591,4	591,0	1,00
	PT31	975,4	1.433,0	1,47
	PT32	756,6	1.157,0	1,53
	PT33	609,4	602,0	0,99
<b>Lips et al. (2012)</b>	PL1	628,5	682,0	1,09
	PL6	868,5	1.363,0	1,57
	PV1	790,4	974,0	1,23
	PL7	1.700,7	1.773,0	1,04
	PL3	966,6	1.324,0	1,37
	PL8	1.874,6	2.256,0	1,20
	PL5	2.024,6	2.491,0	1,23
	PL10	2.751,4	5.193,0	1,89
	PL11	960,5	1.175,0	1,22
	PL12	1.340,0	1.633,0	1,22
<b>Oliveira (2013)</b>	LN01	833,3	1.084,0	1,30
	LN02	860,2	1.144,0	1,33
	LN03	520,9	786,0	1,51

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>
<b>Oliveira (2013)</b>	LN04	692,5	966,0	1,40
	LN05	1.043,2	1.143,0	1,10
<b>Oukaili e Salman (2014)</b>	XXX	75,0	101,7	1,35
	SF0	58,8	90,8	1,54
	CF0	52,7	79,9	1,52
	LF0	43,1	69,0	1,60
	CC0	57,3	90,8	1,58
	CF1	59,2	88,9	1,50
<b>Anil et al. (2014)</b>	1	135,5	193,0	1,42
	2	78,3	99,0	1,26
	3	101,0	125,9	1,25
	4	69,1	77,0	1,11
	5	96,3	94,7	0,98
	6	119,2	134,8	1,13
	7	136,4	172,2	1,26
	8	119,2	115,5	0,97
	9	134,2	138,8	1,03
<b>Ferreira et al. (2014)</b>	C1	848,3	858,4	1,01
	C2	865,8	955,7	1,10
	C3	919,9	1.076,8	1,17
	C4	679,1	1.122,1	1,65
	C7	1.020,9	1.110,0	1,09
	C8	993,1	1.059,0	1,07
<b>Ha et al. (2015)</b>	C0	563,2	590,2	1,05
	H1	523,3	550,2	1,05
	H2	443,1	517,3	1,17
	H3	395,9	452,9	1,14
	V2	514,5	556,9	1,08
	V3	514,1	546,5	1,06
	L3	407,9	418,2	1,03
	HV4	435,5	517,9	1,19
<b>Shu et al. (2017)</b>	PG1	737,3	1.023,0	1,39
	PT32	719,9	871,0	1,21
	AM04	901,7	1.157,0	1,28
<b>Lourenço (2018)</b>	LR	200,8	232,0	1,16
	LF1	149,8	206,0	1,38
	LF2	172,3	235,0	1,36
	LF3	182,6	216,0	1,18
	LF4	190,6	258,2	1,35

<b>Autor</b>	<b>Laje</b>	<b><math>V_{teo}</math> (kN)</b>	<b><math>V_{exp}</math> (kN)</b>	<b><math>E_m</math></b>
<b>Marques (2018)</b>	LR	200,8	232,3	1,16
	L2-150	126,8	208,4	1,64
	L4-75	118,7	184,0	1,55
	LR-8s	340,0	323,0	0,95
	L2-150-8s	202,1	258,5	1,28
	L2-150-6s	201,4	227,3	1,13
	L2-100-8s	228,4	268,0	1,17
	L4-75-8s	193,7	269,6	1,39
	L4-75-4s	196,2	277,0	1,41
<b>Teng et al. (2018)</b>	S11-028	269,4	280,0	1,04
	S11-050	313,5	394,0	1,26
	S11-090	395,0	440,0	1,11
	S11-139	443,0	454,0	1,02
	S13-028	364,9	308,0	0,84
	S13-050	426,4	418,0	0,98
	S13-090	537,2	558,0	1,04
	S13-143	605,1	718,0	1,19
	S15-028	434,5	322,0	0,74
	S15-050	509,0	458,0	0,90
	S15-090	627,2	658,0	1,05
	S15-143	708,3	776,0	1,10
<b>Lajes testadas nesta pesquisa</b>	LR-A	202,1	249,9	1,24
	LR-B	200,3	216,4	1,08
	LR-C	203,8	259,2	1,27
	LF1-A	162,6	187,6	1,15
	LF1-B	159,9	178,0	1,11
	LF1-C	164,0	233,7	1,43
	LF2-A	122,1	187,6	1,54
	LF2-B	123,2	213,9	1,74
	LF2-C	121,2	194,8	1,61

Tabela E.5 - Resultados da variável erro de modelo ( $E_m$ ) obtidos pelo programa *PunCalc* ( $r_1$  ajustado computacionalmente)

Autor	Laje	$\psi_{ini}$ ( $\times 10^{-4}$ )	$\Delta\theta_1$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_2$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_3$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_4$ ( $^\circ$ )	$r_1$ (mm)	$b_{1,1}$ (mm)	$b_{2,1}$ (mm)	$b_{1,2}$ (mm)	$b_{2,2}$ (mm)	$b_{1,3}$ (mm)	$b_{2,3}$ (mm)	$b_{1,4}$ (mm)	$b_{2,4}$ (mm)	Escoamento Studs (%)	$V_{teo}$ (kN)	$V_{exp}$ (kN)	$E_m$
Elstner e Hognestad (1956)	A-1b	1/d	-	-	-	-	2,47d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	347,6	365,0	1,05
	A-1c	1/d	-	-	-	-	2,23d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	349,1	356,0	1,02
	A-1d	1/d	-	-	-	-	1,83d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	349,3	351,0	1,00
	A-1e	1/d	-	-	-	-	2,84d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	342,5	356,0	1,04
	A-2b	1/d	-	-	-	-	2,89d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	399,2	400,0	1,00
	A-2c	1/d	-	-	-	-	2,47d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	468,0	467,0	1,00
	A-7b	1/d	-	-	-	-	2,90d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	428,0	512,0	1,20
	A-3b	1/1,6d	-	-	-	-	2,20d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	438,1	445,0	1,02
	A-3c	1/1,2d	-	-	-	-	2,20d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	530,8	534,0	1,01
	A-3d	1/1,4d	-	-	-	-	2,20d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	531,9	547,0	1,03
	A-4	1/d	-	-	-	-	2,07d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	340,9	400,0	1,17
	A-5	1/d	-	-	-	-	2,87d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	534,4	534,0	1,00
	A-6	1/1,5d	-	-	-	-	2,20d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	491,0	498,2	1,01
	A-7a	1/2,0d	-	-	-	-	1,00d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	302,4	280,2	0,93
	B-2	1/d	-	-	-	-	0,07d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	122,6	200,2	1,63
	B-4	1/1,5d	-	-	-	-	0,80d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	220,7	333,6	1,51
B-9	1/d	-	-	-	-	2,36d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	502,6	505,0	1,00	
B-14	1/d	-	-	-	-	2,34d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	577,6	578,0	1,00	
Gomes (1991)	1	1/d	-	-	-	-	1,55d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	542,9	560,0	1,03
	1A	1/d	-	-	-	-	1,65d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	548,1	587,0	1,07
	2	1/d	-	-	-	-	1,25d	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100	691,7	693,0	1,00
	3	1/d	-	-	-	-	1,42d	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100	774,1	773,0	1,00
	4	1/d	-	-	-	-	1,38d	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/96	852,8	853,0	1,00

Autor	Laje	$\psi_{ini}$ (x10 <sup>-4</sup> )	$\Delta\theta_1$ (°)	$\Delta\theta_2$ (°)	$\Delta\theta_3$ (°)	$\Delta\theta_4$ (°)	$r_1$ (mm)	$b_{1,1}$ (mm)	$b_{2,1}$ (mm)	$b_{1,2}$ (mm)	$b_{2,2}$ (mm)	$b_{1,3}$ (mm)	$b_{2,3}$ (mm)	$b_{1,4}$ (mm)	$b_{2,4}$ (mm)	Escoamento Studs (%)	$V_{teo}$ (kN)	$V_{exp}$ (kN)	$E_m$
Gomes (1991)	5	1/d	-	-	-	-	0,79d	-	-	-	-	-	-	-	-	100/90/75	851,1	853,0	1,00
	6	1/d	-	-	-	-	1,35d	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/96	995,2	1.040,0	1,05
	7	1/d	-	-	-	-	1,73d	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/80	1.121,2	1.120,0	1,00
	8	1/d	-	-	-	-	1,39d*	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/100	1.171,8	1.200,0	1,02
	9	1/d	-	-	-	-	1,36d*	-	-	-	-	-	-	-	-	100/95/84	1.141,5	1.227,0	1,07
	10	1/d	-	-	-	-	1,35d	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/100	827,1	800,0	0,97
	11	1/d	-	-	-	-	1,35d	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/100	923,8	907,0	0,98
Gomes e Andrade (1995)	L12A	1/0,8d	-	-	-	-	2,10d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	654,4	650,0	0,99
	L13	1/d	16,6	-	-	-	3,60d	196,7	90,0	-	-	-	-	-	-	-	596,9	600,0	1,01
	L14	1/d	27,5	-	-	-	3,35d	166,2	151,0	-	-	-	-	-	-	-	561,9	556,0	1,01
	L15	1/d	30,2	30,2	-	-	3,10d	158,7	166,0	158,7	166,0	-	-	-	-	-	545,9	554,0	1,01
	L23	1/d	30,2	30,2	30,2	30,2	3,20d	158,7	166,0	158,7	166,0	158,7	166,0	158,7	166,0	-	556,4	550,0	0,99
	L16	1/0,2d	-	-	-	-	0,70d	-	-	-	-	-	-	-	-	70/60/30	897,0	1.140,0	1,27
	L17	1/d	16,6	-	-	-	1,50d	196,7	90,0	-	-	-	-	-	-	55/40	816,1	1.096,0	1,34
	L18	1/d	30,2	-	-	-	2,00d	158,7	166,0	-	-	-	-	-	-	50/40	743,1	992,0	1,33
	L19	1/d	30,2	30,2	-	-	2,00d	158,7	166,0	158,7	166,0	-	-	-	-	60/50/20	644,5	1.010,0	1,57
	L20	1/26d	30,2	30,2	30,2	30,2	0,40d*	158,7	166,0	158,7	166,0	158,7	166,0	158,7	166,0	50/20	426,1	780,0	1,83
	L24	1/d	30,2	30,2	30,2	30,2	2,10d	158,7	166,0	158,7	166,0	158,7	166,0	158,7	166,0	100/80/35	676,0	890,0	1,32
	L21	1/26d	30,2	30,2	-	-	0,40d*	158,7	166,0	158,7	166,0	-	-	-	-	90/40/40	482,5	896,0	1,86
L22	1/26d	30,2	30,2	-	-	1,00d*	158,7	166,0	158,7	166,0	-	-	-	-	100/90/70	467,8	832,0	1,78	
Andrade (1999)	L301	1/d	-	-	-	-	1,35d	-	-	-	-	-	-	-	-	100	868,8	830,0	0,96
	L302	1/d	-	-	-	-	0,35d*	-	-	-	-	-	-	-	-	100	801,7	790,0	0,99
	L303	1/d	-	-	-	-	0,48d*	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100	888,1	966,0	1,09
	L304	1/d	-	-	-	-	1,00d	-	-	-	-	-	-	-	-	100	868,1	956,0	1,10
	L305	1/d	-	-	-	-	0,50d*	-	-	-	-	-	-	-	-	100	779,0	785,0	1,01
	L306	1/d	-	-	-	-	0,50d	-	-	-	-	-	-	-	-	100	872,1	950,0	1,09

\*Gomes (1991):  $r_1$  foi determinado considerando 1,39d distante da 5ª camada de studs para laje 8 e 1,36d distante da 6ª camada para a laje 9.

\*Andrade (1999):  $r_1$  foi determinado considerando 0,35d distante da 11ª camada de studs para laje L02; 0,48d distante da 11ª camada para laje L03 e 0,50d distante da 6ª camada para laje L05.

\*Andrade e Andrade (1995):  $r_1$  foi determinado considerando 0,40d distante da 1ª camada de studs e  $\alpha_{inicial} = 11^\circ$  para laje L20; 0,40d distante da 3ª camada e  $\alpha_{inicial} = 11^\circ$  para laje L21 e 1,00d distante da 3ª camada e  $\alpha_{inicial} = 11^\circ$  para laje L22.

Autor	Laje	$\psi_{ini}$ ( $\times 10^{-4}$ )	$\Delta\theta_1$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_2$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_3$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_4$ ( $^\circ$ )	$r_1$ (mm)	$b_{1,1}$ (mm)	$b_{2,1}$ (mm)	$b_{1,2}$ (mm)	$b_{2,2}$ (mm)	$b_{1,3}$ (mm)	$b_{2,3}$ (mm)	$b_{1,4}$ (mm)	$b_{2,4}$ (mm)	Escoamento Studs (%)	$V_{teo}$ (kN)	$V_{exp}$ (kN)	$E_m$
Andrade (1999)	L307	1/d	-	-	-	-	0,77d*	-	-	-	-	-	-	-	-	100	897,5	1.090,0	1,21
	L308	1/d	-	-	-	-	0,98d*	-	-	-	-	-	-	-	-	100	874,9	1.020,0	1,17
Trautwein (2001)	L1	1/d	-	-	-	-	0,60d*	-	-	-	-	-	-	-	-	100/55	1.001,2	1.050,0	1,05
	L4	1/d	-	-	-	-	0,60d*	-	-	-	-	-	-	-	-	100	926,1	1.038,0	1,12
	L9	1/d	-	-	-	-	0,60d	-	-	-	-	-	-	-	-	100/10	935,8	933,0	1,00
Silva (2003)	L1	1/0,6d	-	-	-	-	1,35d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	282,9	273,0	0,96
	L4	1/1,5d	53,0	53,0	-	-	2,60d	75,0	150,0	75,0	150,0	-	-	-	-	-	218,9	225,0	1,03
	L7	1/0,2d	-	-	-	-	1,35d	-	-	-	-	-	-	-	-	50/50/40	378,0	420,0	1,11
	L10	1/0,2d	53,0	53,0	-	-	1,35d	75,0	150,0	75,0	150,0	-	-	-	-	30/20	321,2	325,0	1,01
	L12	1/d	-	-	-	-	2,80d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	478,9	525,0	1,10
Teng et al. (2004)	OC11	1/d	-	-	-	-	2,30d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	364,0	423,0	1,16
	OC11H30	1/2,0d	36,9	-	-	-	0,30d	100,0	400,0	-	-	-	-	-	-	-	431,0	349,0	0,81
	OC11V23	1/2,0d	45,0	-	-	-	0,30d	141,4	447,2	-	-	-	-	-	-	-	336,8	373,0	1,11
	OC11V20	1/2,0d	90,0	-	-	-	0,30d	100,0	200,0	-	-	-	-	-	-	-	222,4	207,0	0,93
Musse (2004)	L1	1/d	-	-	-	-	2,35d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	219,2	309,0	1,41
	L2	1/d	-	-	-	-	1,45d	-	-	-	-	-	-	-	-	55/10	342,6	460,0	1,34
	L3	1/d	-	-	-	-	0,35d*	-	-	-	-	-	-	-	-	65	342,5	472,0	1,34
	L4	1/d	-	-	-	-	1,35d	-	-	-	-	-	-	-	-	100/50	347,3	467,0	1,38
Souza (2004)	L1	1/0,6d	-	-	-	-	1,35d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	268,0	274,0	1,02
	L2	1/0,75d	53,0	53,0	-	-	1,35d	75,0	150,0	75,0	150,0	-	-	-	-	-	208,4	205,0	0,98
	L3	1/1,5d	26,0	26,0	-	-	4,00d	255,0	150,0	255,0	150,0	-	-	-	-	-	265,3	275,0	1,04
	L4	1/d	17,0	17,0	-	-	4,40d	435,0	150,0	435,0	150,0	-	-	-	-	-	293,3	300,0	1,02
	L5	1/d	90,0	90,0	-	-	1,35d	75,0	150,0	75,0	150,0	-	-	-	-	-	137,4	140,0	1,02
	L6	1/1,77d	113,0	113,0	-	-	1,35d	75,0	150,0	75,0	150,0	-	-	-	-	-	88,2	101,0	1,14
	L7	1/d	49,0	49,0	-	-	3,50d	255,0	150,0	255,0	150,0	-	-	-	-	-	227,9	225,0	0,99
	L8	1/d	69,0	69,0	-	-	4,00d	255,0	150,0	255,0	150,0	-	-	-	-	-	176,2	210,0	1,19

\*Musse (2004):  $r_1$  foi determinado considerando 0,35d distante da 4ª camada de studs para a laje L3.

\*Trautwein (2001):  $r_1$  foi determinado considerando 0,60d distante da 9ª camada de studs para as lajes L1 e L4.

\*Andrade (1999):  $r_1$  foi determinado considerando 0,77d distante da 5ª camada de studs para laje L307 e 0,98d distante da 7ª camada para laje L308.

Autor	Laje	$\psi_{ini}$ ( $\times 10^{-4}$ )	$\Delta\theta_1$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_2$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_3$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_4$ ( $^\circ$ )	$r_1$ (mm)	$b_{1,1}$ (mm)	$b_{2,1}$ (mm)	$b_{1,2}$ (mm)	$b_{2,2}$ (mm)	$b_{1,3}$ (mm)	$b_{2,3}$ (mm)	$b_{1,4}$ (mm)	$b_{2,4}$ (mm)	Escoamento Studs (%)	$V_{teo}$ (kN)	$V_{exp}$ (kN)	$E_m$
Trautwein (2006)	E1	$1/d$	-	-	-	-	$0,78d^*$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/80	977,3	1.100,0	1,13
	E3	$1/d$	-	-	-	-	$0,50d^*$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/80	987,2	1.090,0	1,10
	E4	$1/d$	-	-	-	-	$0,38d^*$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/85	1.005,4	1.205,0	1,20
	E5	$1/d$	-	-	-	-	$0,40d^*$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/85	1.006,9	1.222,0	1,21
	I6	$1/d$	-	-	-	-	$0,40d^*$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100	826,7	830,0	1,00
	I7	$1/d$	-	-	-	-	$0,40d^*$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/70	978,9	978,0	1,00
	I8	$1/d$	-	-	-	-	$0,40d^*$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100	850,1	856,0	1,01
	I9	$1/d$	-	-	-	-	$0,40d$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/100	836,9	853,0	1,02
	I10	$1/d$	-	-	-	-	$0,40d$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/100/100	934,7	975,0	1,04
	I11	$1/d$	-	-	-	-	$0,77d$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/100/100	937,7	945,0	1,01
	Vaz (2007)	L1	$1/d$	-	-	-	-	$1,35d$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	206,8	203,0
L2		$1/d$	-	-	-	-	$2,37d$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100	321,05	321,0	1,00
L3		$1/d$	-	-	-	-	$1,99d$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100	325,1	325,0	1,00
L4		$1/d$	-	-	-	-	$1,82d$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/100	349,7	357,0	1,02
L1-A		$1/d$	-	-	-	-	$1,90d$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	223,2	286,0	1,28
L5		$1/d$	-	-	-	-	$0,40d$	-	-	-	-	-	-	-	-	100	215,5	200,0	0,93
L6		$1/d$	-	-	-	-	$1,20d$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/80	299,5	300,0	1,00
L7		$1/d$	-	-	-	-	$1,43d$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/80	303,2	303,0	1,00
L8		$1/d$	-	-	-	-	$1,20d$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/60	310,1	309,0	1,00
L9	$1/d$	-	-	-	-	$1,20d$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/50	318,4	315,0	1,00	
Damasceno (2007)	L1A	$1/1,5d$	-	-	-	-	$0,50d$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	180,3	188,5	1,05
Guandalini et al. (2009)	PG1	$1/d$	-	-	-	-	$1,66d$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.021,7	1.023,0	1,00
	PG-2b	$1/d$	-	-	-	-	$0,34d$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	385,3	440,0	1,14
	PG-4	$1/d$	-	-	-	-	$0,51d$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	366,5	408,0	1,11
	PG-5	$1/d$	-	-	-	-	$0,79d$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	452,3	550,0	1,22
	PG-10	$1/d$	-	-	-	-	$0,80d$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	463,1	540,0	1,17
	PG-3	$1/d$	-	-	-	-	$0,69d$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2.099,9	2.153,0	1,03

\*Trautwein (2006):  $r_1$  foi determinado considerando  $0,78d$  distante da 7ª camada de studs para as lajes E1;  $0,50d$  distante da 7ª camada para as lajes E3;  $0,38d$  distante da 6ª camada para as lajes E4;  $0,40d$  distante da 8ª camada para as lajes E5, I6 e I7;  $0,40d$  distante da 9ª camada para a laje I8.

Autor	Laje	$\psi_{ini}$ ( $\times 10^{-4}$ )	$\Delta\theta_1$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_2$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_3$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_4$ ( $^\circ$ )	$r_1$ (mm)	$b_{1,1}$ (mm)	$b_{2,1}$ (mm)	$b_{1,2}$ (mm)	$b_{2,2}$ (mm)	$b_{1,3}$ (mm)	$b_{2,3}$ (mm)	$b_{1,4}$ (mm)	$b_{2,4}$ (mm)	Escoamento Studs (%)	$V_{teo}$ (kN)	$V_{exp}$ (kN)	$E_m$
Guandalini et al. (2009)	PG-6	1/1,5d	-	-	-	-	0,50d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	231,2	238,0	1,03
	PG-7	1/d	-	-	-	-	1,90d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	239,3	241,0	1,01
	PG-8	1/d	-	-	-	-	0,88d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	140,4	140,0	1,00
	PG-9	1/d	-	-	-	-	0,58d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	108,5	115,0	1,06
Sagaseta et al. (2011)	PT21	1/d	-	-	-	-	0,97d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	889,5	959,0	1,08
	PT22	1/d	-	-	-	-	0,97d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	947,6	989,0	1,04
	PT23	1/d	-	-	-	-	0,53d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	584,1	591,0	1,01
	PT31	1/d	-	-	-	-	1,10d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.120,8	1.433,0	1,28
	PT32	1/d	-	-	-	-	0,90d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	718,1	1.157,0	1,61
	PT33	1/d	-	-	-	-	0,74d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	599,8	602,0	1,00
Lips et al. (2012)	PL1	1/1,5d	-	-	-	-	1,20d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	637,2	682,0	1,07
	PL6	1/d	-	-	-	-	1,10d*	-	-	-	-	-	-	-	-	100	1.322,1	1.363,0	1,03
	PV1	1/1,1d	-	-	-	-	1,25d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	978,6	974,0	1,00
	PL7	1/d	-	-	-	-	0,90d*	-	-	-	-	-	-	-	-	100	1.767,8	1.773,0	1,00
	PL3	1/d	-	-	-	-	1,45d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.328,7	1.324,0	1,00
	PL8	1/d	-	-	-	-	1,10d*	-	-	-	-	-	-	-	-	100	2.260,0	2.256,0	1,00
	PL5	1/1,5d	-	-	-	-	1,20d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2618,8	2.491,0	0,95
	PL10	1/d	-	-	-	-	1,32d*	-	-	-	-	-	-	-	-	100	5.193,3	5.193,0	1,00
	PL11	1/d	-	-	-	-	1,20d*	-	-	-	-	-	-	-	-	100	1.303,5	1.175,0	0,90
PL12	1/d	-	-	-	-	1,20d*	-	-	-	-	-	-	-	-	100	1.705,6	1.633,0	0,96	
Oukaili e Salman (2014)	XXX	1/d	-	-	-	-	2,00d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	83,1	101,7	1,22
	SF0	1/0,3d	62,0	-	-	-	1,35d	75,0	225,0	-	-	-	-	-	-	-	76,5	90,8	1,19
	CF0	1/0,4d	53,0	-	-	-	1,35d	75,0	150,0	-	-	-	-	-	-	-	75,8	79,9	1,05
	LF0	1/d	62,0	-	-	-	1,35d	75,0	225,0	-	-	-	-	-	-	-	55,5	69,0	1,24
	CC0	1/0,7d	28,0	-	-	-	1,35d	106,0	212,0	-	-	-	-	-	-	-	62,9	90,8	1,44
	CF1	1/0,9d	38,0	-	-	-	1,35d	145,0	38,0	-	-	-	-	-	-	-	71,2	88,9	1,25

\*Lips et al. (2011):  $r_1$  foi determinado considerando 1,10d distante da 2ª camada de studs para a laje PL6; 0,90d distante da 3ª camada para a laje PL7; 1,10d distante da 3ª camada para a laje PL8; 1,32d distante da 2ª camada para a laje PL10; 1,20d distante da 4ª camada para a laje PL11 e 1,20d distante da 4ª camada para a laje PL12.

Autor	Laje	$\psi_{ini}$ ( $\times 10^{-4}$ )	$\Delta\theta_1$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_2$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_3$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_4$ ( $^\circ$ )	$r_1$ (mm)	$b_{1,1}$ (mm)	$b_{2,1}$ (mm)	$b_{1,2}$ (mm)	$b_{2,2}$ (mm)	$b_{1,3}$ (mm)	$b_{2,3}$ (mm)	$b_{1,4}$ (mm)	$b_{2,4}$ (mm)	Escoamento Studs (%)	$V_{teo}$ (kN)	$V_{exp}$ (kN)	$E_m$
Anil et al. (2014)	1	$1/d$	-	-	-	-	$1,56d$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	108,3	193,0	1,78
	2	$1/d$	62,0	-	-	-	$1,50d$	100,0	300,0	-	-	-	-	-	-	-	69,6	99,0	1,42
	3	$1/d$	46,0	-	-	-	$1,50d$	141,4	424,3	-	-	-	-	-	-	-	85,5	125,9	1,47
	4	$1/d$	71,0	-	-	-	$1,30d$	100,0	500,0	-	-	-	-	-	-	-	67,0	77,0	1,15
	5	$1/1,6d$	57,0	-	-	-	$2,20d$	141,4	711,7	-	-	-	-	-	-	-	63,1	94,7	1,50
	6	$1/d$	31,0	-	-	-	$2,35d$	400,0	300,0	-	-	-	-	-	-	-	76,9	134,8	1,75
	7	$1/d$	22,0	-	-	-	$2,40d$	441,2	424,3	-	-	-	-	-	-	-	82,6	172,2	2,08
	8	$1/d$	42,0	-	-	-	$2,25d$	400,0	500,0	-	-	-	-	-	-	-	73,4	115,5	1,57
	9	$1/d$	32,0	-	-	-	$2,90d$	441,2	707,1	-	-	-	-	-	-	-	95,8	138,8	1,45
Ferreira et al. (2014)	C1	$1/d$	-	-	-	-	$0,60d^*$	-	-	-	-	-	-	-	-	100	858,3	858,4	1,00
	C2	$1/d$	-	-	-	-	$0,67d^*$	-	-	-	-	-	-	-	-	100	953,3	955,7	1,00
	C3	$1/d$	-	-	-	-	$0,50d^*$	-	-	-	-	-	-	-	-	100	1.073,0	1.076,8	1,00
	C4	$1/d$	-	-	-	-	$0,50d^*$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100	1.080,7	1.122,1	1,04
	C7	$1/d$	-	-	-	-	$0,67d^*$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100	1.087,1	1.110,0	1,02
	C8	$1/d$	-	-	-	-	$0,50d^*$	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100	1.081,2	1.059,0	0,98
Ha et al. (2015)	C0	$1/d$	-	-	-	-	$2,50d$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	587,0	590,2	1,01
	H1	$1/d$	22,2	-	-	-	$3,40d$	225,0	150,0	-	-	-	-	-	-	-	537,8	550,2	1,02
	H2	$1/d$	20,8	20,8	-	-	$3,40d$	245,2	150,0	245,2	150,0	-	-	-	-	-	510,5	517,3	1,01
	H3	$1/d$	17,9	17,9	22,7	-	$3,00d$	300,0	150,0	300,0	150,0	225,0	150,0	-	-	-	448,3	452,9	1,01
	V2	$1/d$	22,2	12,8	-	-	$3,36d$	225,0	150,0	450,0	150,0	-	-	-	-	-	518,5	556,9	1,07
	V3	$1/d$	22,2	12,8	9,0	-	$3,50d$	225,0	150,0	450,0	150,0	675,0	150,0	-	-	-	524,6	546,5	1,04
	L3	$1/d$	21,6	15,8	21,6	-	$2,90d$	234,1	150,0	349,3	150,0	234,2	150,0	-	-	-	447,6	418,2	0,93
	HV4	$1/d$	21,6	15,8	21,6	15,8	$3,55d$	234,1	150,0	349,3	150,0	234,1	150,0	349,3	150,0	-	515,1	517,9	1,01
Shu et al. (2017)	PG1	$1/d$	-	-	-	-	$1,71d$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.019,9	1.023,0	1,00
	PT32	$1/d$	-	-	-	-	$1,32d$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	872,7	871,0	1,00

\*Ferreira et al. (2014):  $r_1$  foi determinado considerando  $0,60d$  distante da 3ª camada de *studs* para a laje C1;  $0,67d$  distante da 3ª camada para a laje C2;  $0,50d$  distante da 3ª camada para a laje C3;  $0,50d$  distante da 3ª camada para a laje C4;  $0,67d$  distante da 5ª camada para a laje C7 e  $0,50d$  distante da 3ª camada para a laje C8.

Autor	Laje	$\psi_{ini}$ ( $\times 10^{-4}$ )	$\Delta\theta_1$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_2$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_3$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_4$ ( $^\circ$ )	$r_1$ (mm)	$b_{1,1}$ (mm)	$b_{2,1}$ (mm)	$b_{1,2}$ (mm)	$b_{2,2}$ (mm)	$b_{1,3}$ (mm)	$b_{2,3}$ (mm)	$b_{1,4}$ (mm)	$b_{2,4}$ (mm)	Escoamento Studs (%)	$V_{teo}$ (kN)	$V_{exp}$ (kN)	$E_m$
Lourenço (2018)	LR	1/1,5d	-	-	-	-	2,10d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	236,4	232,0	0,98
	LF1	1/1,5d	53,0	-	-	-	1,35d	75,0	150,0	-	-	-	-	-	-	-	224,5	206,0	0,92
	LF2	1/1,5d	35,0	-	-	-	3,30d	165,0	150,0	-	-	-	-	-	-	-	222,8	235,0	1,05
	LF3	1/1,5d	26,0	-	-	-	3,30d	255,0	150,0	-	-	-	-	-	-	-	226,5	216,0	0,95
	LF4	1/1,5d	20,0	-	-	-	3,30d	345,0	150,0	-	-	-	-	-	-	-	242,8	258,2	1,06
Marques (2018)	LR	1/d	-	-	-	-	1,35d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	228,0	232,3	1,02
	L2-150	1/1,5d	43,0	43,0	-	-	3,05d	75,0	150,0	75,00	150,00	-	-	-	-	-	206,9	208,4	1,01
	L4-75	1/d	29,0	29,0	29,0	29,0	1,35d	75,0	75,0	75,0	75,0	75,0	75,0	75,0	75,0	-	190,3	184,0	0,97
	LR-8s	1/d	-	-	-	-	0,89d	-	-	-	-	-	-	-	-	3030/50	324,6	323,0	1,00
	L2-150-8s	1/d	43,0	43,0	-	-	1,35d	75,0	150,0	75,0	150,0	-	-	-	-	70/40	245,8	258,5	1,05
	L2-150-6s	1/d	43,0	43,0	-	-	1,35d	75,0	150,0	75,0	150,0	-	-	-	-	40/50/30/20	229,5	227,3	0,99
	L2-100-8s	1/d	35,0	43,0	-	-	1,35d	75,0	100,0	75,0	100,0	-	-	-	-	50/40/30	266,4	268,0	1,01
	L4-75-8s	1/d	29,0	29,0	29,0	29,0	0,9d	75,0	75,0	75,0	75,0	75,0	75,0	75,0	75,0	70/40	253,3	269,6	1,06
L4-75-4s	1/d	29,0	29,0	29,0	29,0	1,35d	75	75	75	75	75	75	75	75	80/70/50/40	267,0	277,0	1,04	
Lajes testadas nesta pesquisa	LR-A	1/d	-	-	-	-	1,90d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	247,6	249,9	1,01
	LR-B	1/d	-	-	-	-	1,35d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	222,4	216,4	0,97
	LR-C	1/d	-	-	-	-	1,97d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	258,4	259,2	1,00
	LF1-A	1/1,5d	43,0	-	-	-	1,90d	75,0	150,0	-	-	-	-	-	-	-	210,6	187,6	0,89
	LF1-B	1/1,4d	43,0	-	-	-	1,30d	75,0	150,0	-	-	-	-	-	-	-	204,0	178,0	0,87
	LF1-C	1/1,6d	43,0	-	-	-	2,90d	75,0	150,0	-	-	-	-	-	-	-	232,6	233,7	1,00
	LF2-A	1/1,6d	43,0	43,0	-	-	2,65d	75,0	150,0	75,0	150,0	-	-	-	-	-	187,5	187,6	1,00
	LF2-B	1/1,6d	43,0	43,0	-	-	2,90d	75,0	150,0	75,0	150,0	-	-	-	-	-	211,2	213,9	1,01
	LF2-C	1/1,6d	43,0	43,0	-	-	2,70d	75,0	150,0	75,0	150,0	-	-	-	-	-	193,1	194,8	1,01

Tabela E.6 - Resultados da variável erro de modelo ( $E_m$ ) obtidos pelo programa *PunCalc* ( $r_1 = 1,35d$ )

Autor	Laje	$\psi_{ini}$ ( $\times 10^{-4}$ )	$\Delta\theta_1$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_2$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_3$ ( $^\circ$ )	$\Delta\theta_4$ ( $^\circ$ )	$r_1$ (mm)	$b_{1,1}$ (mm)	$b_{2,1}$ (mm)	$b_{1,2}$ (mm)	$b_{2,2}$ (mm)	$b_{1,3}$ (mm)	$b_{2,3}$ (mm)	$b_{1,4}$ (mm)	$b_{2,4}$ (mm)	Escoamento <i>Studs</i> (%)	$V_{teo}$ (kN)	$V_{exp}$ (kN)	$E_m$
Gomes (1991)	1	1/d	-	-	-	-	314,7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	474,4	560,0	1,18
	1A	1/d	-	-	-	-	314,7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	474,7	587,0	1,24
	2	1/d	-	-	-	-	446,6	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100	721,4	693,0	0,96
	3	1/d	-	-	-	-	473,3	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100	752,5	773,0	1,03
	4	1/d	-	-	-	-	554,7	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/96	843,0	853,0	1,01
	5	1/d	-	-	-	-	634,7	-	-	-	-	-	-	-	-	100/90/75	1.042,3	853,0	0,82
	6	1/d	-	-	-	-	634,7	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/96	995,2	1.040,0	1,05
	7	1/d	-	-	-	-	714,7	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/80	1.089,7	1.120,0	1,03
	8	1/d	-	-	-	-	714,7*	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/100	1.171,8	1.200,0	1,02
	9	1/d	-	-	-	-	794,7*	-	-	-	-	-	-	-	-	100/95/84	1.132,7	1.227,0	1,08
	10	1/d	-	-	-	-	707,9	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/100	827,1	800,0	0,97
11	1/d	-	-	-	-	707,9	-	-	-	-	-	-	-	-	100/100/100	923,8	907,0	0,98	
Lajes testadas nesta pesquisa	LR-A	1/d	-	-	-	-	195,2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	224,1	249,9	1,11
	LR-B	1/d	-	-	-	-	193,8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	222,4	216,4	0,97
	LR-C	1/d	-	-	-	-	196,5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	224,7	259,2	1,15
	LF1-A	1/1,5d	43,0	-	-	-	196,5	75,0	150,0	-	-	-	-	-	-	-	148,4	187,6	1,26
	LF1-B	1/1,4d	43,0	-	-	-	193,8	75,0	150,0	-	-	-	-	-	-	-	204,0	178,0	0,87
	LF1-C	1/1,5d	43,0	-	-	-	197,9	75,0	150,0	-	-	-	-	-	-	-	210,6	233,7	1,11
	LF2-A	1/1,6d	43,0	43,0	-	-	199,2	75,0	150,0	75,0	150,0	-	-	-	-	-	167,4	187,6	1,12
	LF2-B	1/1,6d	43,0	43,0	-	-	203,3	75,0	150,0	75,0	150,0	-	-	-	-	-	170,7	213,9	1,25
LF2-C	1/1,6d	43,0	43,0	-	-	200,6	75,0	150,0	75,0	150,0	-	-	-	-	-	168,6	194,8	1,16	

\*Gomes (1991):  $r_1$  foi determinado considerando 1,35d distante da 5ª e 6ª camada de *studs* para as lajes 8 e 9.