UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo
Departamento de Estruturas

Sandra Hiromi Sakanakaa
Engenheira Civil

Determinação de Freqüências Naturais e Cargas Críticas em Placas incluindo o Efeito da Deformação por Cortante com o Método dos Elementos de Contorno

Dissertação apresentada à comissão de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil na área de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Palermo Jr.

CAMPINAS – SP
2006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

	Sakanaka, Sandra Hiromi
Sa29d	Determinação de freqüências naturais e cargas críticas em placas, incluindo o efeito da deformação por cortante, com método dos elementos de contorno / Sandra Hiromi Sakanaka.--Campinas, SP: [s.n.], 2006.
	Orientador: Leandro Palermo Junior Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.
	1. Métodos de elementos de contorno. 2. Placas (Engenharia). 3. Vibração. 4. Inércia (Mecânica). 5. Flambagem (Mecânica). I. Palermo Junior, Leandro. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Titulo em Inglês: Natural frequencies and buckling loads computation including shear deformations effects using the boundary element method
Palavras-chave em Inglês: Boundary element method, Plates, Mindlin, Free vibration, Rotatory inertia, Buckling
Área de concentração: Estruturas
Titulação: Mestre em Engenharia Civil
Banca examinadora: Isaías Vizotto e Paulo Sollero
Data da defesa: 29/08/2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo
Departamento de Estruturas

Sandra Hiromi Sakanaka
Engenheira Civil

Determinação de Freqüências Naturais e Cargas Críticas em Placas incluindo o Efeito da Deformação por Cortante com o Método dos Elementos de Contorno

Dissertação aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Dr. Leandro Palermo Jr.
Presidente e Orientador/FEC-UNICAMP

Prof. Dr. Paulo Sollero
FEM-UNICAMP

Prof. Dr. Isaías Vizotto
FEC-UNICAMP

Campinas, 29 de agosto de 2006.

Aos meus pais Paulo e Muriel e
minhas irmãs Lyssa e Tania, com amor.

Agradecimentos

Aos meus pais, Paulo e Muriel e minhas irmãs Lyssa e Tania pelo carinho, apoio e confiança desde sempre. Ao Beto, pelo amor e paciência. Às minhas amigas de coração Cristiane Lucia, Laura, Marina e Renata que me acompanham há tantos anos, principalmente nos momentos mais difíceis. À toda minha grande família e à minha segunda família, Marly, Carlão, Patri e Edu, sempre estando do meu lado. Aos colegas da pós Rogério, Paulo e Pedro pelas extensas horas de trocas de experiência. Às minhas amigas e amigos de faculdade que mesmo estando longe me inspiram a seguir em frente. À Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, pela oportunidade oferecida, à Usiminas-Cosipa pelo auxílio oferecido para realização deste trabalho e ao meu orientador, Prof. Dr. Leandro Palermo Jr., em especial pelo mérito de possibilitar a realização desta pesquisa.

“De cuanto he dejado escrito en estas páginas se desprenderán siempre – como en las arboletas de otoño y como en el tiempo de las viñas – las hojas amarillas que van a morir y las uvas que revivirán en el vino sagrado.” *Pablo Neruda*

Resumo

A análise de vibração livre e de instabilidade de placas finas e placas moderadamente espessas é apresentada através do método dos elementos de contorno (MEC) considerando o efeito da deformação pela força cortante e, particularmente para o cálculo de freqüências naturais, o efeito da inércia rotatória é também considerado. A formulação da solução fundamental é baseada na teoria de *Mindlin* (1951) mas resultados para a teoria de *Kirchhoff* (1850) também podem ser obtidos [*Palermo Jr.* (2000)]. O presente trabalho usa a técnica da iteração inversa através do coeficiente de Rayleigh para a determinação das menores freqüências naturais e cargas críticas de instabilidade das placas. A implementação numérica emprega elementos de contorno isoparamétricos lineares contínuos e descontínuos. Elementos constantes de domínio são usados. Os parâmetros nodais são posicionados nos extremos dos elementos e os pontos de carregamento dos elementos descontínuos são deslocados para o interior a uma distância igual a um quarto do comprimento do elemento. Expressões analíticas das integrais de contorno são desenvolvidas para os casos em que o elemento contém o ponto de carregamento e integração numérica de Gauss-Legendre é feita nos outros casos. As integrais de domínio foram transformadas em integrais de contorno para cada célula e foram tratadas como cargas de superfície atualizadas através de um processo iterativo. Os resultados obtidos foram comparados com valores encontrados na literatura para demonstrar a precisão do presente trabalho.

Palavras Chaves: Método dos Elementos de Contorno, Placas, Mindlin, Vibração Livre, Inércia Rotatória, Instabilidade.

Abstract

Free-vibration analysis and static buckling loads analysis of thin and thick plates considering the shear deformation effects using the Boundary Element Method (BEM) is presented. For the calculation of natural frequencies, the rotatory inertia is also counted. The formulation of the fundamental solution considers Mindlin's plates but results according to the classic theory can also be obtained [*Palermo Jr.* (2000)]. The present article makes use of the inverse iteration with Rayleigh coefficient to determine the smallest natural frequencies and the smallest static buckling loads of the plates. The numerical implementation employed continuous or discontinuous isoparametric linear boundary elements according to the characteristics of the problem to be solved. Constant domain elements are used. Nodal parameters have been placed at the ends of the elements and the source point of the discontinuous elements were positioned at a distance equal to one quarter of the element length. Analytical expressions have been employed in the integration on elements containing the source point and Gauss-Legendre numerical integration scheme otherwise. The domain integrals containing the inertia effects or non-linear effect have been transformed into boundary integrals for each cell and were treated as surface loads updated in an iterative process. The obtained results were compared to those in literature to demonstrate the precision of this proposal.

Keywords: Boundary Element Method, Plates, Mindlin, Free vibration, Rotatory Inertia, Buckling.

Lista de Figuras

Lista de Gráficos

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

Γ	coordenada que percorre o contorno da placa
Γ_j	elemento de contorno
Ω	coordenada que percorre o domínio da placa
Ω_q	área do carregamento distribuído
$\Delta(x - \xi)$	função *Delta de Dirac* no argumento (x - ξ)
Φ	função potencial
$\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}$	deformações normais e cisalhantes
η	variável que percorre o contorno da placa
η_d	variável que percorre o domínio da placa
κ	parâmetro constante da teoria de *Mindlin*
ν	coeficiente de *Poisson*
ξ	ponto onde se aplica a equação integral
δ_{ij}	*Delta de Kronecher*
σ_{ij}, τ_{ij}	tensões internas normais e cisalhantes
ϕ	função de interpolação

ψ_i	funções para a teoria de *Mindlin*
ψ_n	rotação normal ao contorno para a teoria de *Mindlin*
ψ_s	rotação tangente ao contorno para a teoria de *Mindlin*
M_{ij}	momento interno por unidade de comprimento
M_{nn}	momento fletor externo por unidade de comprimento na direção normal ao contorno
M_{ns}	momento volvente externo por unidade de comprimento
$\mathbf{n}$	vetor unitário normal ao contorno
$\mathbf{n_j}$	cosseno diretor da normal em relação ao eixo $\mathbf{x_i}$
$\mathbf{Q_{ij}}$	cortante interna por unidade de comprimento
$\mathbf{Q_n}$	cortante externa por unidade de comprimento na direção normal ao contorno
$\mathbf{Q_s}$	cortante externa por unidade de comprimento na direção tangencial ao contorno
$\mathbf{r}$	distância onde se aplica o carregamento unitário ao ponto onde se deseja obter a força ou deslocamento na solução fundamental
$\mathbf{r}\ \theta\ \mathbf{x_3}$	sistema de coordenadas cilíndricas
$\mathbf{s}$	vetor unitário tangente ao contorno
$\mathbf{t_i}$	componentes de forças de superfície
$\mathbf{u_i}$	deslocamento generalizado na direção do eixo $\mathbf{i}$
$\mathbf{u_r}$	deslocamento na direção de $\mathbf{r}$
$\mathbf{u_\theta}$	deslocamento na direção de θ
$\mathbf{w}, \mathbf{u_3}$	deslocamento na direção de $\mathbf{x_3}$
$\mathbf{x_1}\ \mathbf{x_2}\ \mathbf{x_3}$	sistema de coordenadas cartesianas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE PLACAS PELO MEC

1.1 GENERALIDADES

As placas, como um tipo de elemento estrutural, em conjunto ou não com outros elementos estruturais, como as membranas, diafragmas, etc, são amplamente empregadas em diversos ramos da engenharia devido, principalmente, a sua grande capacidade portante em relação às próprias dimensões.

Para o meio científico, as estruturas citadas constituem os chamandos problemas da mecânica do contínuo simplificadamente representados por modelos matemáticos. Assim definem-se os modelos das placas, consideradas como uma aproximação bidimensional de um problema tridimensional genérico.

As equações dos problemas físicos em geral, excetuando-se os casos restritos de geometria e de carregamento simples, podem ter uma solução analítica difícil de ser obtida. Neste sentido, métodos numéricos emergem como uma importante ferramenta de simulação para a obtenção de uma solução aproximada por meio de alguns pontos discretos. Usualmente entre estes métodos numéricos, encontram-se o *Método das Diferenças Finitas*, *Método dos Elementos Finitos* (*MEF*) e o *Método dos Elementos de Contorno* (*MEC*).

Como objeto deste estudo, estes modelos matemáticos têm como base a teoria da elasticidade. A chamada teoria clássica, já exaustivamente estudada por vários pesquisadores, há quase dois séculos, dentre estes *Neuber, Navier, Poisson, Kirchhoff, Timoshenko, Galerkin, Vlassov, Kalmanok, Girkmann, Saint-Germain*, adota hipóteses simplificadoras que a restringe a casos específicos, usualmente tabelados para somente algumas condições de borda e onde apenas os valores de centro da placa apresentam uma melhor aproximação.

Desta maneira, estudos para adequação à teoria exata surgiram, levando às teorias de *Mindlin* (1951) e *Reissner* (1945), por exemplo. Nestas teorias, as três condições físicas necessárias para o problema real de placas são atendidas, incluindo a deformação pela força cortante não tratada pela teoria clássica. Consequentemente, os valores calculados nas bordas das placas ou ao redor de furos são mais próximos da realidade, inclusive para o caso de placas espessas.

Neste sentido, este estudo visa implementar numericamente a teoria de *Mindlin* através do Método dos Elementos de Contorno, *MEC*, fazendo uso da formulação alternativa desenvolvida em *Palermo Jr.* (2000). Nesta formulação evidencia-se a grande conexão entre a teoria de *Mindlin* (1951) com a teoria clássica de *Kirchhoff* (1850) através da teoria dos campos vetoriais. Possibilita-se assim, uma comparação direta do efeito da deformação pela força cortante nos deslocamentos e esforços das placas entre as duas teorias. No presente trabalho, são calculadas as frequências angulares naturais das placas e as cargas críticas de instabilidade, segundo esta teoria de três parâmetros e resultados para a teoria de *Kirchhoff* (1850) também são obtidos.

O material envolvido é perfeitamente elástico, homogêneo e isotrópico. Consideram-se suficientemente pequenas as deformações tal que a relação entre as deformações e as tensões sejam lineares.

O equilíbrio é na posição indeslocada para a obtenção das freqüências naturais e não se verifica o amortecimento das oscilações.

Para a obtenção de cargas críticas de instabilidade, na condição de regime linear, o equilíbrio é na posição deslocada e o termo com dependência temporal é nulo.

Nesta seção é feita a revisão bibliográfica sobre as teorias de flexão das placas, sobre o *MEC* aplicado à estas teorias, bem como sobre o estudo da vibração natural e da instabilidade à flexão das placas.

Na **seção 2** são abordados os conceitos gerais da elastodinâmica linear tridimensional necessários para a formulação e resolução das equações de problemas de um meio contínuo sólido. São apresentadas as propriedades do material que compõe este sólido, bem como as relações entre as tensões e deformações destas com o movimento e equilíbrio das placas.

Na **seção 3** a teoria de placas é apresentada a partir da teoria de elasticidade tridimensional para as hipóteses de *Mindlin* (1951) e as hipóteses da teoria clássica de *Kirchhoff* (1850), evidenciando o efeito da deformação pela força cortante. Na análise dinâmica, são apresentadas as equações diferenciais de movimento incluindo-se o efeito da inércia rotatória.

Na **seção 4**, as equações diferenciais de equilibrio e de movimento das placas obtidas na seção anterior são transformadas em equações integrais de contorno para a resolução pelo do Método dos Elementos de Contorno (MEC). São também obtidas as soluções fundamentais estáticas, por meio da formulação alternativa desenvolvida em *Palermo Jr.* (2000). Estas soluções são desenvolvidas para uma carga unitária, bem como para um binário unitário na direção α.

Na **seção 5**, o meio contínuo é discretizado em elementos de contorno isoparamétricos lineares através do *MEC* e é transformado em um sistema de equações linear cuja solução determina valores de deslocamentos e esforços para pontos no contorno da placa. Um segundo sistema de equações linear pode ser escrito para determinar valores de deslocamentos no domínio. Combinando este com o primeiro, formam um sistema de equações linear de autovalor e obtém-se as frequências naturais e cargas críticas de instabilidade das placas. Integrais analíticas são desenvolvidas para obtenção de uma melhor aproximação do método.

Na **seção 6**, são apresentados os resultados comentados de exemplos numéricos obtidos com este estudo.

Algumas conclusões sobre este estudo são feitas na **seção 7**, bem como os passos complementares que podem ser desenvolvidos em trabalhos futuros.

Neste trabalho, as equações são apresentadas em coordenadas cartesianas e cilíndricas, onde os índices destas em latim **{i, j, k, m, n,...}** têm valores entre **{1-3}** e os índices em grego **{**α, β, γ **,...}** têm valores entre **{1-2}**.

1.2 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivos:

a) Cálculo das freqüências naturais das placas;
b) Cálculo das cargas críticas de instabilidade das placas.

Para este fim será usada teoria de *Mindlin* (1951), que inclui o efeito da deformação pela força cortante. Esta teoria permite a obtenção dos valores mais próximos do modelo real que os obtidos pela teoria clássica.

A implementação no MEC será feita com a formulação alternativa, desenvolvida em *Palermo Jr.* (2000), que possibilita uma conexão direta entre a teoria de *Mindlin* (1951) com a teoria clássica, tratando o efeito da deformação pela força cortante como uma parcela independente. Conseqüentemente, há possibilidade de obtenção de valores da teoria clássica para uma comparação com a teoria de *Mindlin* (1951) a partir de um único programa. Serão usadas integrais analíticas na implementação do MEC para melhoria da aproximação dos resultados.

Na análise dinâmica será incluído o efeito da inércia rotatória para avaliação de seu efeito nas freqüências naturais através da solução fundamental estática.

As frequências naturais e as cargas críticas de instabilidade das placas são determinadas resolvendo o problema de autovalor através do método iterativo.

1.3. CONSIDERAÇÕES SOBRE O ESTUDO DE PLACAS

Encontra-se na literatura que a primeira equação descrevendo a flexão de placas que se tem conhecimento foi proposta por *Navier* em 1823, em *Love* (1944), onde a rigidez à flexão é definida em termos de uma constante elástica e para sua resolução são necessárias três condições de contorno naturais. Em uma tentativa para melhorar a teoria de placas, *Bernoulli*, em *Love* (1944), obtém uma nova equação diferencial para placas que consiste em uma aproximação através de dois sistemas de vigas e *Poisson* (1829) obtém um problema com três condições de contorno naturais.

Kirchhoff (1850) estabelece as hipóteses fundamentais da teoria de placas, derivando a expressão da energia potencial em termos de extensão, componentes de curvaturas e torção para uma placa inclinada e aplicando o princípio dos trabalhos virtuais. A equação diferencial obtida é de quarta ordem e resolvida com duas condições de contorno, pois *Kirchhoff* (1850) demonstra que as três condições naturais propostas por *Poisson* (1829) poderiam ser reduzidas a duas. Nesta equação, portanto, a rigidez à flexão é definida em termos do módulo de *Young* e do coeficiente de *Poisson*. Adicionalmente, todos os deslocamentos da placa são dados em função de duas coordenadas no plano médio da placa, reduzindo o problema a um caso bidimensional. Bons resultados são obtidos a partir desta teoria para placas com pequenos deslocamentos para diversos casos de carregamentos e geometrias. A imprecisão desta teoria na análise estática se torna significativa na região dos cantos das placas poligonais, ao longo de bordas, ao redor de furos com diâmetros menores que a espessura da placa e em placas com espessuras consideráveis.

Entre os estudos que surgiram para solucionar esta questão, encontram-se as teorias de *Reissner* (1945) e *Mindlin* (1951). Estas têm como hipótese uma deformação pela cortante constante na espessura da placa que, para levarem em conta a real distribuição não uniforme desta deformação, introduzem o parâmetro κ no módulo de elasticidade transversal. As curvaturas nas equações constitutivas não são mais diretamente relacionadas com a derivada do deslocamento fora do plano da placa, a equação diferencial passa à sexta ordem e três condições de contorno são necessárias para resolver o problema de valor de contorno.

Datam na literatura estudos sobre a vibração livre de placas a partir do início de 1800. *Chladni* (1802) apresenta a vibração livre de uma placa com bordas totalmente livres. *Navier* (1827) e *Cauchi* (1828) apresentam teorias sobre a equação de movimento de corpos elásticos. *Rayleigh* (1877) faz o estudo de um método generalizado para o cálculo de freqüências naturais. *Ritz* (1909), visando uma melhora do método anterior, introduz funções com coeficientes de amplitudes independentes, resultando no conhecido método de Rayleigh-Ritz ou método de Ritz amplamente encontrado na literatura.

A partir daí, encontram-se diversos estudos de vibração livre de placas para várias formas, condições de apoio e carregamentos onde o efeito da deformação pela cortante é negligenciado, como em *Bares* (1964), *Timoshenko et al.* (1974), *Leissa* (1969, 1977a, 1977b, 1981a, 1981b, 1987), *Hinton* (1988). Os resultados obtidos são satisfatórios para placas finas e para o caso onde se deseja obter as freqüências naturais mais baixas.

No caso de placas com espessuras maiores, o efeito da deformação pela cortante torna-se relevante e sua desconsideração leva à obtenção de freqüências naturais maiores que o valor real. Trabalhos apresentados por *Srinivas and Rao* (1970), *Senthilnathan* (1989), para a análise de vibração livre de placas isotrópicas moderadamente espessas, demonstram os bons resultados da aproximação usada pelas teorias de *Reissner* (1945) e *Mindlin* (1951) em conjunto com o parâmetro κ.

Estudos sobre a instabilidade de placas datam mais de 150 anos, em *Walker* (1984). A literatura é extensa para a teoria clássica, sendo encontrados tanto trabalhos com a solução analítica exata quanto com distintos métodos numéricos existentes, como em *Timoshenko and Gere* (1961), *Bulson* (1970), *Kobayashi and Sonoda* (1990, 1991).

Na aplicação da teoria de *Mindlin* (1951), encontram-se *Leissa* (1982), *Brunelle* (1971), *Brunelle and Robertson* (1974), *Rao et al*. (1975), *Dawe and Roufaiel* (1982), *Mizusawa* (1991), *Smith* (1995), Matsunaga (1997), para várias condições de apoios e carregamentos em placas e utilizando diversos métodos numéricos.

Kitipornchai et al. (1993) trabalha com placas esconsas. *Xiang* (2002) apresenta resultados para placas triangulares com apoios eláticos.

Purbolaksono and Aliabadi (2005) aplica o MEC e *Shufrin and Eisenberger* (2005) aplica o método de Kantorovich. *Srinivas and Rao* (1969) estudaram uma solução exata tridimensional.

Por último, destaca-se o caso de bordas livres. *Chinosi* (2005) apresenta o trabalho baseado na teoria de Reissner/Mindlin como tentativa de diminuir a irregularidade da solução, particularmente para as deformações pela cortante que causa perda de convergência na aplicação das técnicas numéricas.

1.4. CONSIDERAÇÕES SOBRE O MEC APLICADO À FLEXÃO DE PLACAS

As equações diferenciais de placas podem ser representadas na forma de equações integrais de placas, alternativamente. Neste sentido, entre os pioneiros, detaca-se o trabalho de *Betti* (1872) que apresenta a teoria da elasticidade com equações integrais. Além deste, tem-se os trabalhos de *Somigliana* (1886) que, empregando o teorema de reciprocidade devido a Betti, estabelece uma relação entre forças de volume e superfície com os deslocamentos do contorno conhecida como a identidade de *Somigliana*; e o trabalho de *Fredholm* (1903), um estudo rigoroso sobre equações integrais baseado no processo de discretização do problema da elasticidade linear. O desenvolvimento das equações integrais pode ser considerado como um dos passos mais importantes para as técnicas de contorno e os trabalhos de *Somigliana* (1886) e *Fredholm* (1903) formam a base para o atual Método dos Elementos de Contorno.

Entretanto, estes trabalhos precediam a era dos computadores, sendo negligenciados até meados da década de 1950 e 1960, onde uma série de trabalhos notadamente de autores russos, *Muskhelishvili* (1953), *Mikhlin* (1957), *Smirnov* (1964), estudaram enfaticamente as equações integrais em problemas físicos. *Kupradze* (1965) estabelece as bases das formulações indiretas considerando a solução fundamental de *Kelvin*, em *Love* (1944). Porém, as funções complexas empregadas dificultaram a popularidade destes trabalhos entre engenheiros.

Por outro lado, com o desenvolvimento dos computadores, as técnicas numéricas levaram *Jaswon* (1963) e *Symm* (1963) a utilizarem o MEC como ferramenta numérica pela primeira vez, através das equações de *Fredholm* para problemas de *Laplace*. Adicionalmente, propõem uma formulação mais geral através da aplicação da Segunda Identidade de Green com potenciais e suas derivadas desconhecidas no contorno em *Jaswon and Ponter (1963)*. No entanto, adotaram a formulação indireta onde as funções densidade no contorno não têm significado físico, como no caso da formulação direta.

Neste contexto, baseado nas hipóteses da teoria clássica de *Kirchhoff* (1850), identifica-se o trabalho de *Jaswon et al*. (1968) como a referência inicial das formulações indiretas para a análise de placas através do Método dos Elementos de Contorno – MEC e, paralelamente, o trabalho de *Rizzo* (1967) como a primeira formulação direta do MEC. O problema da elastodinâmica tridimensional foi inicialmente estudado por *Cruse e Rizzo* (1968), além de *Watson* (1972a e 1972b), *Cruse* (1977a e 1977b) e *Cruse et al.* (1977).

Lachat (1975) e *Lachat and Watson* (1975, 1976) evidenciaram a eficiência do MEC como ferramenta numérica resolvendo problemas com configurações complexas.

Banerjee e Butterfield (1977) e *Brebbia* (1978) publicam os primeiros livros sobre o MEC onde, *Brebbia* (1978), através de uma formulação partindo da técnica dos resíduos ponderados, faz uma generalização do Método dos Elementos de Contorno e impulsiona o estudo deste método em diversos centros de pesquisa.

Entre os trabalhos que utilizam a formulação direta, destacam-se *Bézine and Gamby* (1978), *Bézine* (1978), *Stern* (1979) e *Danson* (1979) apresentam outros trabalhos utilizando a formulação direta para a teoria clássica.

Em 1979, *Tottenhan* (1979) apresentou uma discussão sobre as formulações direta e indireta aplicadas às placas delgadas, placas apoiadas sobre base elástica e cascas abatidas.

Venturini and Brebbia (1983) apresentaram uma formulação para materiais não resistentes à tração e com descontinuidades.

Costa Jr. and Brebbia (1984a e 1984b), através do método direto, resolveram problemas de placas quanto à flexão, flexão em base elástica, vibração e flambagem.

Guo-Shu and Mukherjee (1986) e *Paiva* (1995) usaram a teoria clássica com um grau de liberdade adicional para a rotação tangente ao contorno e mostraram que muitos dos problemas associados com o tratamento com quatro parâmetros podem ser contornados.

Hartmann and Zotemantel (1986) discutem o tratamento das integrais de domínio, vínculos no domínio e singularidades através de uma formulação direta do MEC.

Hartley and Abdell-Akher (1988 e 1989) e *Hartley and Ahmed* (1989) sugeriram um esquema de integração analítica para os problemas de instabilidade numérica devidos às singularidades. Além disso, discutem a determinação de valores nos pontos internos.

Palermo Jr. (1989), através da formulação direta pela técnica dos resíduos ponderados, faz a análise de peças de seção delgada. Também é verificado o comportamento destas peças com a adição de diafragmas.

Oliveira Neto (1998) apresentou uma nova formulação admitindo três parâmetros nodais (deslocamento transversal e suas derivadas nas direções normal e tangencial ao contorno), usando dois valores nodais para os esforços (momento fletor normal e força cortante equivalente).

Sobre a teoria de Kirchhoff (1850), encontram-se ainda os estudos de Tanaka e Miyasaki (1985), Venturini e Paiva (1988) e Paiva e Aliabadi (2000).

Nas aplicações do MEC para a teoria de placas de Mindlin/Reissner, *Weeën* (1982) introduz uma formulação MEC aplicada à teoria de *Reissner*, estabelecendo um sistema de três equações integrais em termos de um deslocamento e duas rotações e aproximação por elementos isoparamétricos quadráticos.

Vilmann (1985 e 1992) e *de Barcellos & Silva* (1987) estudaram a aplicação das técnicas de elementos de contorno aplicadas às placas de *Mindlin* (1951).

Westphal and de Barcellos (1989) e por *Westphal et al.* (1992, 2001) estudaram as formulações para tratar a teoria de *Reissner* e *Mindlin*.

Katsikadelis and Armenakas (1989) combinaram para a solução simultânea de duas equações integrais e duas equações diferenciais das placas de Reissner, o Método dos Elementos de Contorno com o Método das Diferenças Finitas.

Katsikadelis and Armenakas (1993) apresentaram uma formulação do MEC para a teoria de *Reissner* que foi expressa em termos de dois potenciais, um bi-harmônico e um de Bessel. As placas quando analisadas com esta estratégia precisaram três equações integrais e mais três equações de diferenças finitas.

Sanches (1998) e *Palermo Jr*. (2000) apresentaram uma solução alternativa para as placas de *Mindlin*. O vetor das rotações é decomposto em dois campos, irrotacional e solenoidal, onde o campo irrotacional é relacionado à teoria clássica e o campo solenoidal à deformação por cortante. Tem-se ainda o trabalho de *Andrade* (2001) para placas espessas.

1.5. CONSIDERAÇÕES SOBRE A VIBRAÇÃO LIVRE DE PLACAS

Encontra-se na literatura os trabalhos de *Vivoli* (1972) e *Vivoli and Filippi* (1974) como sendo os primeiros sobre vibração livre de placas através do método indireto relacionado ao MEC, adotando elementos de contorno constantes, empregando a solução fundamental dinâmica e apresentando resultados numéricos.

Niwa et al. (1981, 1982) e *Kitahara* (1985) apresentaram resultados numéricos detalhados para o método indireto e para o método direto pela primeira vez. No entanto, não consideraram nos cálculos o efeito da reação de canto.

Wong and Hutchinson (1979), através do método direto, apresentaram resultados numéricos para placas totalmente apoiadas e totalmente engastadas. Adicionalmente, em 1981, estes mesmos autores apresentaram a formulação completa do problema de vibração livre de placas incluindo o efeito da reação de canto, mas sem resultados numéricos.

Heuer, R. and Irschik, H. (1987) apresentam o método indireto para vibrações livres utilizando funções de Green que reduzem a discretização de contorno.

Uma outra aproximação para a resolução de problemas dinâmicos de placas é introduzida por *Bézine* (1980), onde a força de inércia através de uma discretização do domínio em células constantes, emprega a chamada solução fundamental estática. Esta formulação simplifica as soluções fundamentais dinâmicas.

O'Donoghue and Atluri (1986, 1987), *Costa Jr.* (1988), *Providakis & Beskos* (1987, 1988, 1989a) e *Tanaka et al*. (1987) apresentam estudos a partir de *Bézine* (1980).

Os trabalhos de *Beskos* (1987, 1997) e *Manolis and Beskos* (1988) apresentam uma revisão sobre elastodinâmica e *Providakis & Beskos* (1989b) uma revisão sobre o MEC aplicado a vibração livre e forçada de placas.

Simões (2001) apresenta o trabalho na teoria de Kirchhoff para cálculo de dinâmica e instabidade de placas.

Antes (1991) e *Palermo Jr.* (2005) apresentaram soluções fundamentais dinâmicas levando em conta o efeito da deformação pela cortante e inércia rotatória.

1.6. CONSIDERAÇÕES SOBRE A INSTABILIDADE DE PLACAS

A análise de instabilidade de placas através do MEC tem sido desenvolvida mais recentemente. *Costa and Brebbia* (1985), *Tanaka* (1986), *Syngellakis and Kang* (1986) apresentaram trabalhos baseados na teoria clássica.

Syngellakis and Elzein (1994) publicou vários exemplos com carregamentos e condições de apoio diversas.

Nerantzaki and Katsikadelis (1996) aplicou o MEC para cargas com variação de espessura e *Lin et al.* (1999) desenvolveu uma formulação genérica par avários tipos de carrregamentos e modos de flambagem.

Purbolaksono and Aliabadi (2005) estudam o problema de instabilidade de placas de Reissner/Mindlin utilizando a solução estática fundamental. Neste trabalho, as integrais de domínio são avaliadas por meio de células e através do método da reciprocidade dual.

2 ELASTICIDADE LINEAR TRIDIMENSIONAL

2.1 INTRODUÇÃO

Nesta seção são abordados os conceitos gerais da elastodinâmica linear tridimensional necessários para a formulação e resolução das equações de problemas de um meio contínuo sólido. Para isto é necessário conhecer as hipóteses adotadas para as propriedades deste sólido, bem como as relações destas com os deslocamentos do sólido.

Neste trabalho, o material envolvido é perfeitamente elástico, homogêneo, isotrópico e consideram-se suficientemente pequenas as deformações tal que a relação entre as deformações e as tensões sejam lineares.

O equilíbrio é na posição indeslocada para a obtenção das freqüências naturais e não se verifica o amortecimento das oscilações.

Para a obtenção de cargas críticas de instabilidade, na condição de regime linear, o equilíbrio é na posição deslocada e o termo com dependência temporal da equação de movimento é nulo.

2.2 PROPRIEDADES DO MATERIAL

O material adotado tem as seguintes propriedades:

a) são perfeitamente elásticos, ou seja, estes retomam sua forma inicial após cessarem a atuação das forças externas;
b) a matéria do corpo é homogênea e distribuída continuamente no seu volume, ou seja, as propriedades físicas e geométricas são as mesmas para qualquer elemento infinitesimal deste;
c) é isotrópico, ou seja, estas propriedades são iguais em todas as direções;
d) no regime linear, têm um módulo de Young $\mathcal{E}$ e um coeficiente de Poisson ν constantes.

2.3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ELASTICIDADE LINEAR

O problema de elasticidade objetiva encontrar os deslocamentos e os esforços de um corpo sujeito às forças externas. Entretanto, é essencial a consideração das características instrísecas a este como as frequências naturais e respectivos modos de vibração e as cargas de instabilidade e respectivos modos de flambagem que determinam estados críticos do corpo.

A resolução deste problema é determinada com as relações:

a) entre as deformações e os deslocamentos (compatibilidade cinemática ou geométrica);
b) entre tensão-deformação (lei constitutiva do material, Lei de Hooke);
c) entre as tensões e as forças externas (equação de movimento do corpo);
d) as condições de contorno do corpo.

2.3.1 Relação deformação-deslocamento

A deformação do meio contínuo sólido é obtida através de compatibilidade cinemática (ou geométrica), ou seja, é uma relação algébrica que independe das relações físicas.

Na teoria da elasticidade é presumido que existem suficientes restrições que impedem o deslocamento do corpo elástico como um corpo rígido, ou seja, não há deslocamento do corpo sem que haja deformação deste.

Em um sistema de coordenadas cartesianas, seja um corpo homogêneo e contínuo posicionado genericamente no espaço *(Figura 2.1)* que contém dois pontos $\mathcal{P}$ (x_1, x_2, x_3) e Q (x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3), próximos entre si a uma distância igual à ds, com componentes dx_1, dx_2, dx_3. Após a deformação devido à ocorrência de um deslocamento, os pontos passam para $\mathcal{P}^*$ (ω_1, ω_2, ω_3) e Q^* ($\omega_1+d\omega_1$, $\omega_2+d\omega_2$, $\omega_3+d\omega_3$), distantes de ds^*, com componentes $d\omega_1$, $d\omega_2$, $d\omega_3$, sendo u (u_1, u_2 e u_3) o vetor deslocamento e du (du_1, du_2, du_3) o vetor de deslocamento relativo.

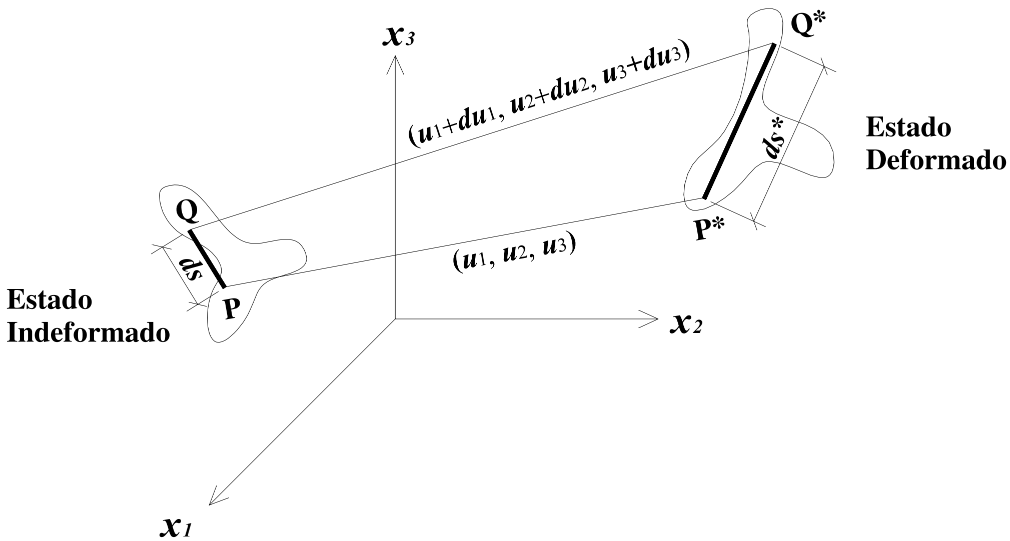


Figura 2.1 Estado de deformação de um corpo.

Expandindo o deslocamento de Q $(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$ em série de Taylor no ponto de referência P (x_1, x_2, x_3) até o termo linear, obtém-se:

$$u_i + du_i = (u_i)_P + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_P dx_j \tag{2.3.1}$$

As posições de P^* e Q^* podem ser escritas em termos do deslocamento u_i e das coordenadas iniciais dadas pelo ponto P (x_1, x_2, x_3), em notação indicial, têm-se:

$$\varphi_i = x_i + u_i \tag{2.3.2}$$

$$\varphi_i + d\varphi_i = x_i + dx_i + u_i + du_i$$

(2.3.3)

Substituindo a Eq.(2.3.1) na Eq.(2.3.3) e subtraindo a Eq. (2.3.2), otém-se:

$$d\omega_i = (dx_i)_P + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_P dx_j$$

(2.3.4)

A Eq. (2.3.4) é uma transformação linear, ou seja, transforma o vetor dx (dx_1, dx_2, dx_3) de comprimento ds no vetor $d\omega$ ($d\omega_1, d\omega_2, d\omega_3$) de comprimento ds^*. É a transformação linear desta equação que impõe a condição reta ao vetor e não uma curva. Uma melhor aproximação é obtida quanto menor for o elemento ds. A transformação escrita em termos de coordenadas inicias é conhecida como o Método de Lagrange.

A hipótese de deslocamentos e de deformações pequenos é adotada para validade da linearidade geométrica.

A mudança de comprimento do elemento ds após a deformação é obtida fazendo a diferença dos módulos dos vetores $d\omega$ e dx, através dos produtos escalares e a partir de Eq.(2.3.4):

$$(du_i)^2 = (ds^*)^2 - (ds)^2 = (d\varphi_i.d\varphi_i.) - (dx_i.dx_i.) = 2\varepsilon_{ij}dx_i dx_j \tag{2.3.5}$$

Sendo ε_{ij} o chamado tensor Lagrangeano, composto pelas componentes da deformação de um elemento ds no ponto $\mathcal{P}$ (x_1, x_2, x_3), dadas por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\delta_{mm}\right] \tag{2.3.6}$$

O tensor Lagrangeano de deformação ε_{ij} , descrito pela Eq.(2.3.6), pode ser decomposto em duas parcelas, uma simétrica e_{ij} (dilatação cilíndrica) e uma antimétrica ω_{ij} (rotação):

$$\begin{Bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{12} & 0 & -\omega_{23} \\ -\omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} \tag{2.3.7}$$

O alongamento E_{PQ} por unidade de comprimento do elemento ds, é dado por:

$$E_{PQ} = \frac{ds^* - ds}{ds} \tag{2.3.8}$$

E_{PQ} é conhecido usualmente na engenharia como deformação. Observa-se nitidamente a diferença entre as definições de deformação E_{PQ} e ε_{ij}:

$$E_{PQ}\left(1+\frac{E_{PQ}}{2}\right)=\varepsilon_{ij}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_j}{ds} \tag{2.3.9}$$

Contudo as magnitudes destas deformações são na prática da ordem de 10^{-3} e, portanto, para a hipótese de pequenas deformações, as duas quantidades são aproximadamente iguais. Além disso, as rotações ω_{ij} do corpo são desprezadas e os termos quadráticos da Eq. (2.3.6), se comparados com os termos lineares, também têm valores negligenciáveis e esta equação fica simplificada para:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \tag{2.3.10}$$

Finalmente, ε_{ij}, função apenas da dilatação cilíndrica e_{ij}, é o tensor das seis componentes de deformação linear. Para $i = j$, tem-se a deformação normal e para $i \neq j$, a deformação angular ou distorção.

Portanto, as relações entre as componentes de deformação e as componentes de deslocamento em coordenadas cartesianas necessárias para a formulação das equações do problema, a partir da Eq. (2.3.10), são:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \tag{2.3.11}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \tag{2.3.12}$$

A transformação do sistema de coordenadas cartesino para o sistema de coordenadas cilíndrico é apresentado na *Figura 2.2*. Esta transformação é feita para facilitar a formulação das equações de placas no decorrer do trabalho.

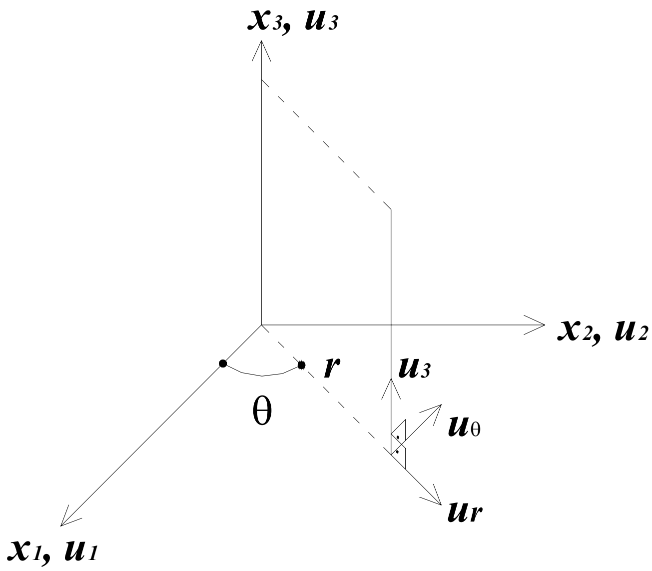


Figura 2.2 Transformação de sistemas de coordenadas.

As mesmas seis relações em coordenadas cilíndricas, representando os deslocamentos por (***u***$_r$, ***u***$_\upsilon$, ***u***$_3$), são:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \tag{2.3.13}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{r3} \\ \gamma_{\theta 3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r} \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial x_3} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_3}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \tag{2.3.14}$$

2.3.2 Lei constitutiva

A Lei constitutiva relaciona a tensão com a deformação de um corpo. Resultados experimentais evidenciaram uma relação de proporcionalidade entre estas grandezas para um grande número de sólidos e de forças externas atuantes nestes. Esta lei é conhecida como a Lei de Hooke, e é apresentada na sua forma generalizada como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn} \tag{2.3.15}$$

Onde $\boldsymbol{C}$ é o tensor das propriedades do sólido elástico linear, homogêneo e contínuo. Este tensor é quarta ordem (n = 4) e possui 3^n constantes independentes (81 constantes). Pode ser simplificado devido às condições de simetria citadas a seguir.

A simetria do tensor de tensões permite intercambiar o primeiro par de índices, ou seja:

$$C_{ijmn} = C_{jimn} \tag{2.3.16a}$$

$$C_{ijmn} = C_{ijnm} \tag{2.3.16b}$$

Tem-se 36 constantes independentes. A existência de uma função de densidade de energia de deformação, quando o sistema é adiabático ou isotérmico, permite mais uma simplificação, pois demonstra mais uma simetria das constantes elásticas, ou seja:

$$C_{ijmn} = C_{mnij} \tag{2.3.17}$$

Obtém-se 21 constantes independentes. A simetria de rotação em relação a dois eixos perpendiculares, ou a propriedade de isotropia do material, descreve as constantes do tensor $\boldsymbol{C}$ como funções de apenas duas outras constantes, $\boldsymbol{E}$, conhecido como o módulo de elasticidade longitudinal, e ν, conhecido como o coeficiente de Poisson. A Eq. (2.3.15) finalmente pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\varepsilon_{mm} + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij} \tag{2.3.18}$$

O coeficiente de Poisson é relacionado com o módulo de elasticidade transversal $\boldsymbol{G}$:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.3.19}$$

Portanto, as seis relações entre as componentes de tensão e as componentes de deformação em coordenadas cartesianas necessárias para a formulação das equações do problema, a partir da Eq. (2.3.18), são:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} \tag{2.3.20}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \tag{2.3.21}$$

E a transformação de coordenadas cartesianas para cilíndricas resulta em:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} \tag{2.3.22}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \tau_{r3} \\ \tau_{\theta 3} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{r3} \\ \gamma_{\theta 3} \end{Bmatrix} \tag{2.3.23}$$

A relação constitutiva Eq. (2.3.18) pode ser invertida e escrita para deformações em termos de tensões, ou seja:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{mm} \tag{2.3.24}$$

Portanto, as seis relações entre as componentes de tensão e as componentes de deformação em coordenadas cartesianas necessárias para a formulação das equações do problema, a partir da Eq. (2.3.24), são:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \tag{2.3.25}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \frac{1}{G} \begin{Bmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} \tag{2.3.26}$$

A transformação para coordenadas cilíndricas resulta em:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \tag{2.3.27}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{r3} \\ \gamma_{\theta 3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{G} \begin{Bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \tau_{r3} \\ \tau_{\theta 3} \end{Bmatrix} \tag{2.3.28}$$

2.3.3 Equação de movimento e de equilíbrio

A formulação da equação de movimento do corpo pode ser feita diretamente a partir do equilíbrio de forças pelo princípio de D'Alembert [*Clough* (1975)], onde a massa desenvolve uma de força de inércia proporcional e resistente à aceleração desta. Desta maneira, a equação de movimento de um corpo representa a segunda lei de Newton.

Considerando ainda as hipóteses de pequenas deformações, equilíbrio na posição indeslocada, e a não consideração de amortecimento, esta relação pode ser expressa matematicamente como a seguinte equação diferencial:

$$p_i(t) = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \tag{2.3.29}$$

Onde $p_i(t)$ é a resultante vetorial das forças externas aplicadas e $u_i(t)$ é o vetor deslocamento da massa por unidade de volume ρ. O segundo termo da equação Eq. (2.3.29) é conhecido como a força de inércia.

Pode-se encontrar as equações de equilíbrio de um pequeno paralelepípedo retângulo de arestas dx_1, dx_2, dx_3 *da Figura 2.3* considerando a variação de tensão após a mudança de posição de um ponto. As forças de volume não podem ser desprezadas, pois têm a mesma ordem de grandeza das variáveis envolvidas no equilíbrio.

O equilíbrio na direção x_1 deste elemento infinitesimal de volume dV no interior do corpo com as forças externas atuantes, é:

$$[(\sigma_{11})_1 - (\sigma_{11})_2]dx_2 dx_3 + [(\sigma_{12})_1 - (\sigma_{12})_2]dx_1 dx_3 + [(\sigma_{13})_1 - (\sigma_{13})_2]dx_1 dx_2 + F_1 dx_1 dx_2 dx_3 = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

(2.3.30)

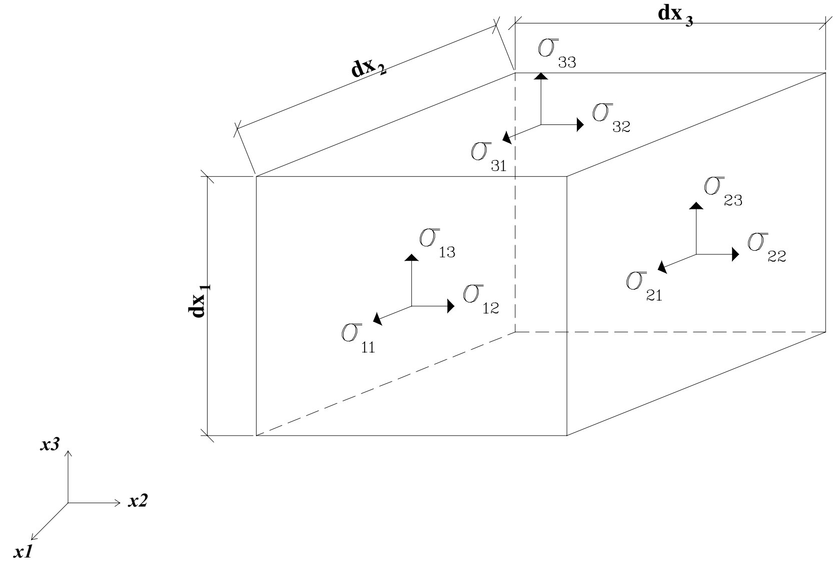


Figura 2.3 Tensões em um paralelepípedo infinitesimal.

As equações nas direções x_2 e x_3 serão análogas e a equação de movimento do corpo em notação indicial é dada por:

$$\sigma_{ij,j} - F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{2.3.31}$$

Em coordenadas cartesianas a equação de movimento é escrita:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + + F_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \tag{2.3.32a}$$

$$\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}++F_2=\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \tag{2.3.32b}$$

$$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}++F_3=\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \tag{2.3.32c}$$

Em coordenadas cilíndricas a equação de movimento é escrita:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{3r}}{\partial x_3}+\frac{1}{r}(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})+F_r=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \tag{2.3.33a}$$

$$\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{3\theta}}{\partial x_3}+\frac{2}{r}\sigma_{r\theta}+F_\theta=\rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \tag{2.3.33b}$$

$$\frac{\partial\sigma_{r3}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta 3}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+\frac{1}{r}\sigma_{r3}+F_3=\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \tag{2.3.33c}$$

2.3.4 Condições de contorno

As equações Eq. (2.3.31) a Eq. (2.3.33) devem ser satisfeitas em todos os pontos no volume do sólido, de tal maneira que estejam em equilíbrio dinâmico também com as forças de superfície do sólido, pois a solução obtida para as tensões e os deslocamentos são funções das coordenadas, e os valores dos pontos de coordenadas localizadas no volume do sólido para os pontos correspondentes às coordenadas da superfície do corpo devem coincidir. Este equilíbrio pode ser feito a partir do tetraedro elementar *Figura 2.4*:

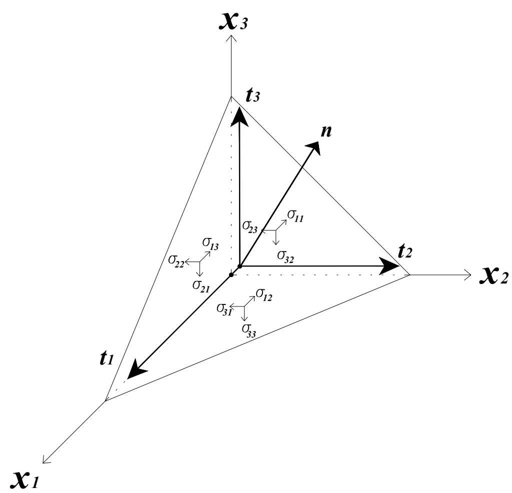


Figura 2.4 Tensões nas faces de um tetraedro infinitesimal.

Na análise de tensões de um corpo elástico qualquer, a tensão t_i que atua num plano inclinado qualquer, passando pelo ponto O qualquer, pode ser determinada pelas equações da estática de equilíbrio do tetraedro elementar, se as componentes de tensão deste ponto forem conhecidas. E uma vez tomando um elemento infinitesimal para o equilíbrio, as forças de volume (ou massa) podem ser desprezadas, pois estas são reduzidas ao cubo das dimensões lineares, enquanto as de superfície são reduzidas com o quadrado. Obtém-se assim:

$$t_i = \sigma_{ij}.n_j \tag{2.3.34}$$

Onde n_j são os cossenos diretores das componentes de tensão do plano inclinado.

2.3.5 Resumo do problema de elasticidade linear

No problema tridimensional existe, portanto, um total de quinze variáveis desconhecidas: seis componentes de tensão, seis componentes de deformação e três componentes de deslocamento. Quinze relações são necessárias para a resolução deste problema:

a) seis relações entre as deformações e os deslocamentos (compatibilidade cinemática ou geométrica);

b) seis relações entre tensão-deformação (Lei constitutiva do material, Lei de Hooke);

c) três relações entre as tensões e as forças externas (equação de movimento do corpo);

Estas 15 equações podem ser reduzidas a três em termos de componentes de deslocamento, substituindo as relações deformação-deslocamento Eq.(2.3.10) e tensão-deformação Eq.(2.3.18) nas equações de movimento do corpo Eq. (2.3.31), recapituladas abaixo:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \tag{2.3.10}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\varepsilon_{mm} + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij} \tag{2.3.18}$$

$$\sigma_{ij,j} - F_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{2.3.31}$$

Sendo estas relações em coordenadas cartesianas:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \tag{2.3.11}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \tag{2.3.12}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} \tag{2.3.20}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \tag{2.3.21}$$

As deformações, neste caso, já satisfazem à relação de compatibilidade cinemática que não precisa ser verificada para garantir a unicidade da solução.

Obtém-se, finalmente, a função solução das equações diferenciais que governam os problemas elásticos para as condições de contorno dadas através da equação Eq. (2.3.34):

$$t_i = \sigma_{ij}.n_j \tag{2.3.34}$$

3 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE PLACAS

3.1 INTRODUÇÃO

Nesta seção a teoria de placas é apresentada a partir da teoria de elasticidade tridimensional estudada anteriormente. Primeiramente as hipóteses de *Mindlin* (1951) são estabelecidas e, posteriormente, a redução para a teoria de *Kirchhoff* (1850) é feita, evidenciando o efeito da deformação pela força cortante que a primeira teoria considera. A equação de movimento da placa pode ser estabelecida diretamente de um equilíbrio dinâmico através do princípio de D'Alembert ou fazendo uso de grandezas de energia através da forma variacional dado pelo princípio de Hamilton [*Clough* (1975)]. Anulando-se o termo com dependência temporal, a equação de equilíbrio da placa para a análise estática é encontrada. Na análise dinâmica supõe-se que o regime é harmônico para o cálculo das frequências naturais, inclui-se o efeito da inércia rotatória e não se verifica o amortecimento nas oscilações. A equação de instabilidade de placas pode ser calculada também através do método variacional onde o equilíbrio é atingido quando a energia potencial atinge um mínimo. Outra maneira é estabelecendo o equilíbrio em uma posição deslocada [*Timoshenko* (1961)]. As placas têm espessura constante.

3.2 DEFINIÇÃO DE PLACAS

O modelo de placas é definido em *Saada* (1974) como 'um corpo limitado por duas superfícies paralelas planas onde a distância, chamada de espessura, é muito pequena em comparação com as dimensões destas superfícies, e cujo plano, paralelo às superfícies paralelas e que bissecciona a espessura, é chamado de plano médio'.

O plano médio é usado como referência para o carregamento aplicado na placa e para estabelecer as equações de equilíbrio e de movimento da placa, como mostra a *Figura 3.1.* No sistema cartesiano, os eixos coordenados x_1 e x_2 estão contidos neste plano, assim como a origem do eixo x_3. E h corresponde à espessura da placa.

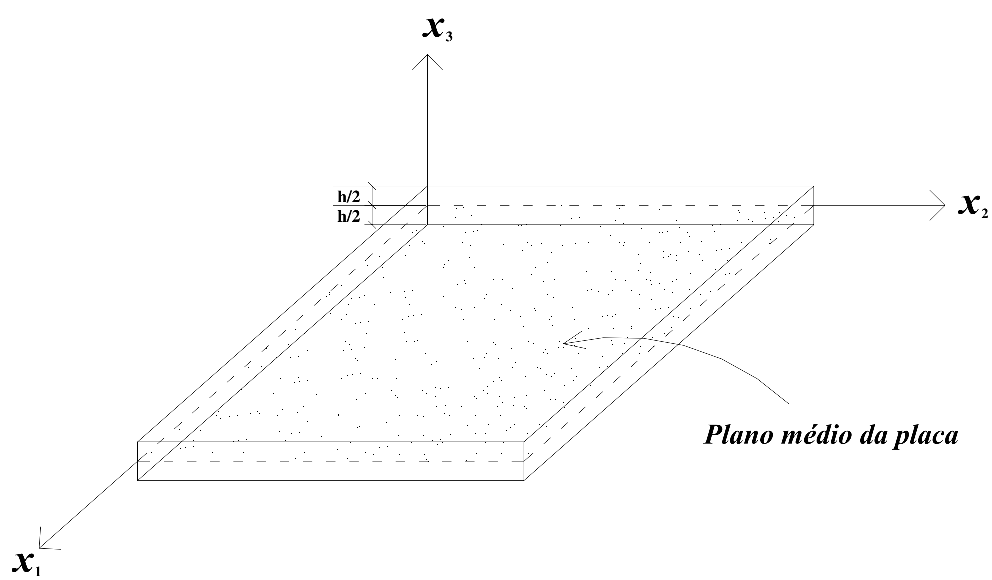


Figura 3.1 Plano médio de uma placa no sistema de coordenadas cartesianas.

Em um caso geral de carregamento $q\ (x_1, x_2, t)$, o caso tridimensional oblíquo aos eixos coordenados, o carregamento pode ser dividido em duas componentes paralelas ao plano médio da placa e uma componente normal a este.

As tensões, por sua vez, são relacionadas aos esforços de momento fletor e de força cortante através da regra da mão direita, ilustradas na *Figura 3.2*, partindo de suas resultantes:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 \tag{3.2.1a}$$

$$Q_{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \tag{3.2.1b}$$

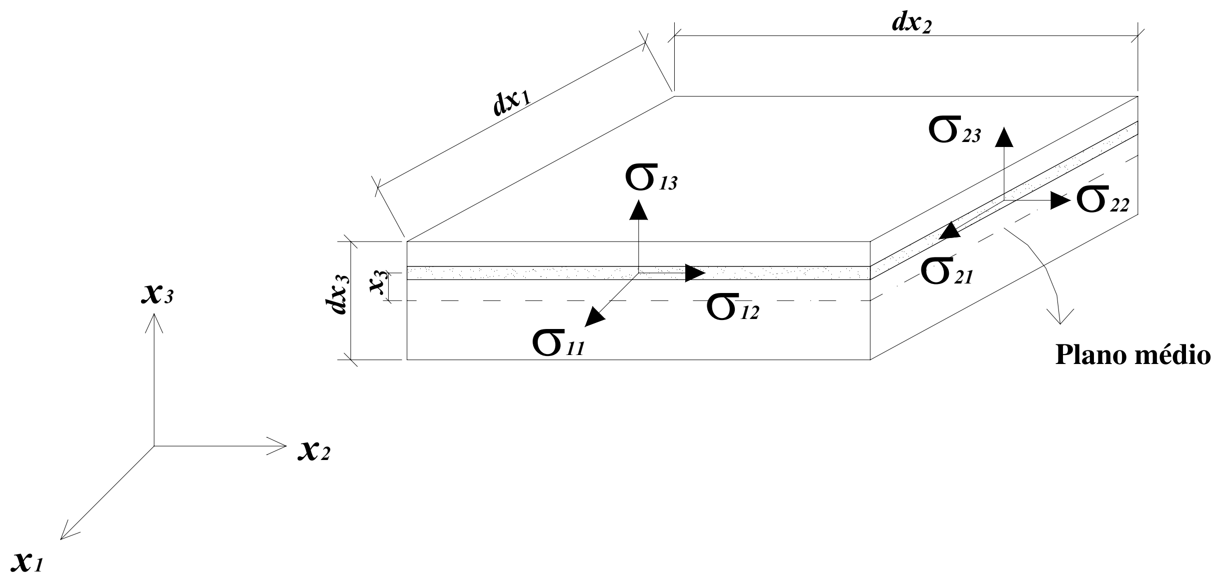


Figura 3.2 Componentes de tensão $\sigma_{\alpha\beta}$ em um elemento de placa em flexão.

3.3 TEORIA DE MINDLIN

A teoria de *Mindlin* (1951), baseada na elasticidade linear tridimensional, é apresentada para placas elásticas isotrópicas através de uma equação diferencial de sexta ordem. Os três esforços $\boldsymbol{Q_\alpha}$ e $\boldsymbol{M_{\alpha\beta}}$ (força cortante, momento fletor e momento torsor) e os três deslocamentos $\boldsymbol{u_i}$ (deslocamento normal ao plano da placa, rotação normal e tangencial ao plano da espessura da placa) constituintes de um problema real são assim representados. As hipóteses desta teoria incluem o efeito da deformação pela força cortante e o efeito da inércia rotatória. Nesta teoria a deformação de cisalhamento na espessura da placa causada pela força cortante é constante.

3.3.1 Hipóteses de Mindlin

As seguintes hipóteses são adotadas por *Mindlin* (1951):

a) A componente de deslocamento normal ao plano médio da placa $\boldsymbol{u_3}$ é pequena e, portanto, o equilíbrio é feito na posição indeslocada;

b) A componente de deslocamento normal ao plano médio da placa $\boldsymbol{u_3}$ é independente da espessura da placa;

c) As componentes de deslocamento contidas no plano da placa $\boldsymbol{u_1}$ e $\boldsymbol{u_2}$ variam linearmente com a espessura da placa;

d) As deformações na direção da espessura ε_{33} são pequenas o suficiente para serem desprezadas;

e) As deformações por cisalhamento γ_{23} e γ_{13} são constantes na espessura da placa;

f) As tensões de cisalhamento σ_{13} e σ_{23} nas faces externas paralelas ao plano médio da placa são nulas;

g) O efeito médio linearmente ponderado das tensões normais σ_{33} ao plano médio da placa é desprezado.

Das hipóteses **a)** a **e)**, no sistema cartesiano, obtém-se:

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \qquad (3.3.1)$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{G'}\sigma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = K_1 \tag{3.3.2a}$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{G'}\sigma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = K_2 \tag{3.3.2b}$$

Sendo $\boldsymbol{K_\alpha}$ e G' valores constantes. G' tem a seguinte relação com o módulo de elasticidade transversal G:

$$G' = \kappa^2 G = \frac{\pi^2}{12} G \tag{3.3.3}$$

κ é o parâmetro definido por *Mindlin* (1951) para considerar o efeito das tensões de cisalhamento na distorção, cuja determinação depende do coeficiente de Poisson e da velocidade das ondas de superfície de Rayleigh. Neste trabalho, κ terá o valor $\pi^2/12$ independentemente do valor do coeficiente de Poisson.

Das hipóteses **f)** e **g)**, obtém-se respectivamente:

$$\sigma_{13} = 0 \text{, para } u_3 = +h/2 \text{ ou } -h/2 \tag{3.3.4a}$$

$$\sigma_{23} = 0 \text{, para } u_3 = +h/2 \text{ ou } -h/2 \tag{3.3.4b}$$

$$\sigma_{33} = -q(x_1, x_2, t) \text{, para } u_3 = +h/2 \text{ ou } -h/2 \tag{3.3.5}$$

Sendo q **(x_1, x_2, t)** o carregamento normal aplicado ao plano médio da placa.

3.3.1.1 Relações deslocamentos-deformações

Manipulando as equações Eq. (3.3.1) e Eq. (3.3.2), obtém-se:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = K_1 - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \tag{3.3.6a}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = K_2 - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \tag{3.3.6b}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \tag{3.3.6c}$$

Integrando as equações Eq.(3.3.6) em $\boldsymbol{x_3}$:

$$u_1 = x_3\left(K_1 - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \tag{3.3.7a}$$

$$u_2 = x_3\left(K_2 - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \tag{3.3.7b}$$

$$u_3 = w(x_1, x_2) \tag{3.3.7c}$$

A partir deste ponto, a função ψ_α, representando as rotações normal e tangencial ao plano da espessura da placa, será adotada neste trabalho como:

$$\psi_\alpha = K_\alpha - \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \tag{3.3.8}$$

As funções ψ_α são análogas às apresentadas por *Timoshenko* (1937) na teoria de barras.

Obtidas as expressões dos deslocamentos das placas de *Mindlin* (1951), Eq.(3.3.7) e Eq.(3.3.8), pode-se escrever as equações das deformações em função destes, através das equações Eq.(2.3.11) e Eq.(2.3.12):

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = x_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \tag{3.3.9a}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = x_3 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \tag{3.3.9b}$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = x_3 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right) \tag{3.3.9c}$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \psi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \tag{3.3.9d}$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \psi_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{3.3.9e}$$

Recapitulando-se, a equação dada pela hipótese ***d*** é:

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \tag{3.3.1}$$

3.3.2 Lei constitutiva: relação tensão-deformação

No problema tridimensional da elasticidade apresentado na seção **2** foram definidas as seis relações tensão-deformação Eq.(2.3.18) pela Lei de Hooke, recapituladas abaixo:

$$\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ij} \tag{2.3.18}$$

Sendo estas relações, em coordenadas cartesianas, dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} \tag{2.3.20}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \tag{2.3.21}$$

Pela teoria de *Mindlin* (1951), as equações constitutivas Eq.(2.3.20) e Eq.(2.3.21) têm as seguintes considerações: as integrais contendo σ_{33} são desprezadas e os coeficientes das integrais contendo γ_{13} e γ_{23} são substituídos pelo valor de G'.

Desta maneira, as equações constitutivas do modelo de placas de *Mindlin* (1951), em termos das tensões e deslocamentos e em coordenadas cartesianas, são encontradas a partir de Eq.(2.3.20) e Eq.(2.3.21) simplificadas, substituindo-se os valores de deformações dadas pelas equações Eq.(3.3.2a) e Eq.(3.3.9):

$$\sigma_{11} = \frac{Ex_3}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) \tag{3.3.10a}$$

$$\sigma_{22} = \frac{Ex_3}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) \tag{3.3.10b}$$

$$\sigma_{12} = \frac{E(1-\nu)x_3}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right) = Gx_3 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right) \tag{3.3.10c}$$

$$\sigma_{13} = G` \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \psi_1 \right) \tag{3.3.10d}$$

$$\sigma_{23} = G` \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \psi_2 \right) \tag{3.3.10e}$$

Considerando as definição de $\boldsymbol{G'}$ dada pela equação Eq. (3.3.3), substituindo-se as equações Eq.(3.3.10) nas definições dos esforços dadas pela Eq.(3.2.1) e integrando-se em $\boldsymbol{x_3}$, os esforços pela teoria de *Mindlin* (1951) são dados por:

$$M_{\alpha\beta} = D\frac{1-\nu}{2}\left(\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu}\psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right) \tag{3.3.11}$$

$$Q_{\alpha} = D\frac{1-\nu}{2}\lambda^2\left(\psi_{\alpha} + w_{,\alpha}\right) \tag{3.3.12}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{3.3.13}$$

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2}{h^2} \tag{3.3.14}$$

Sendo $\boldsymbol{D}$ o módulo de rigidez à flexão, $\boldsymbol{E}$ o módulo de Young e ν o coeficiente de Poisson, $\boldsymbol{h}$ a espessura da placa, $\delta_{\alpha\beta}$ é o delta de Kronecker, ψ_α são as rotações na direção α, $\boldsymbol{w}$ é função representando a flecha, $\boldsymbol{Q_\alpha}$ é a força cortante na direção α, $\boldsymbol{M_{\alpha\beta}}$ é o momento fletor quando os índices α e β são iguais e o momento volvente em caso contrário, onde todos os esforços são definidos por unidade de comprimento. Os sub-índices que seguem uma vírgula representam as derivadas em relação à variável com este índice. Observa-se que o valor de λ^2 provém do parâmetro κ^2 definido por Mindlin (1951) na equação Eq.(3.3.3).Explicitamente, as equações Eq. (3.3.11) e Eq. (3.3.12) são escritas:

$$M_{11} = D\left(\psi_{1,1} + \nu\psi_{2,2}\right) \tag{3.3.15a}$$

$$M_{22} = D\left(\psi_{2,2} + \nu\psi_{1,1}\right) \tag{3.3.15b}$$

$$M_{12} = D\frac{(1-\nu)}{2}\left(\psi_{1,2} + \psi_{2,1}\right) \tag{3.3.15c}$$

$$Q_1 = D\frac{1-\nu}{2}\lambda^2\left(\psi_1 + w_{,1}\right) \tag{3.3.16a}$$

$$Q_2 = D\frac{1-\nu}{2}\lambda^2\left(\psi_2 + w_{,2}\right) \tag{3.3.16b}$$

3.3.3 Equação de movimento de placas em coordenadas cartesianas

As equações de movimento de uma placa, incluindo o efeito da inércia rotatória, são dadas por *Mindlin* (1951) em coordenadas $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ pelo equilíbrio dos esforços de momentos e de força cortante agindo sobre o elemento de placa, como na *Figura 3.3:*

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_1 = \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \tag{3.3.17a}$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_2 = \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \tag{3.3.17b}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q = \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.3.17c}$$

Substituindo as relações constitutivas das placas dadas pelas equações Eq. (3.3.11) e Eq. (3.3.12) nas Eq.(3.3.17a) e Eq. (3.3.17b), obtém-se as equações das forças cortantes $\boldsymbol{Q_\alpha}$:

$$Q_1 = D\left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right] + D\frac{(1-\nu)}{2}\left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right] - \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \tag{3.3.18a}$$

$$Q_2 = D\left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right] + D\frac{(1-\nu)}{2}\left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right] - \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \tag{3.3.18b}$$

Substituindo-se as derivadas das equações Eq.(3.318) na equação de equilíbrio de forças verticais Eq.(3.3.17c), obtém-se a equação diferencial das placas de *Mindlin* (1951) com inércia rotatória:

$$D\left[\frac{\partial^3\psi_1}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^3\psi_1}{\partial x_1\partial x_2^2}+\frac{\partial^3\psi_2}{\partial x_2^3}+\frac{\partial^3\psi_2}{\partial x_1^2\partial x_2}\right]-\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[w+\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)\right]=q \qquad (3.3.19)$$

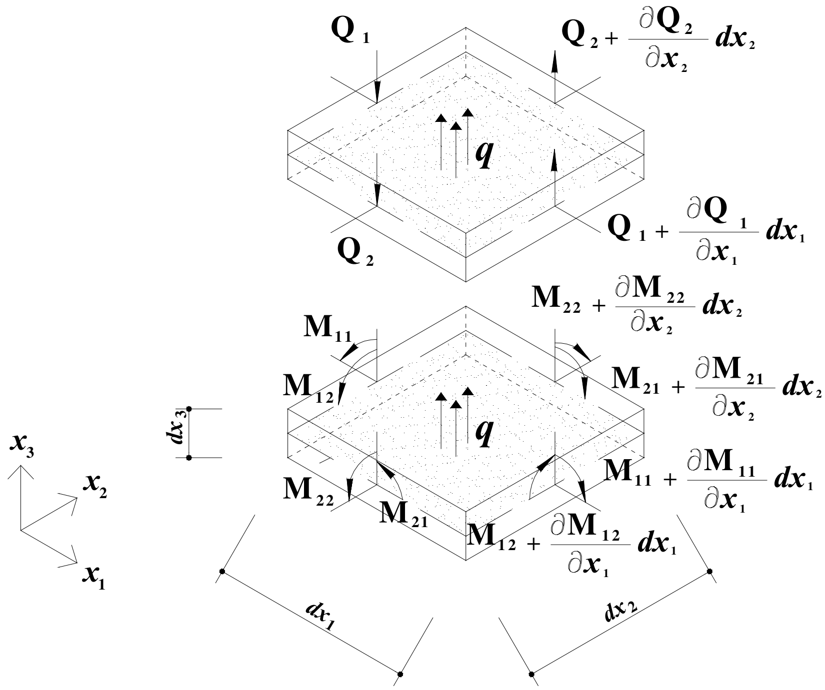


Figura 3.3 Esforços em um elemento de placa em flexão.

Na forma implícita a equação Eq.(3.3.19) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$D\nabla^2\Phi-\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[w+\frac{h^2}{12}\Phi\right]=q \qquad (3.3.20)$$

Onde:

$$\Phi=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} \qquad (3.3.21)$$

E ∇^2 é um operador diferencial definido por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \tag{3.3.22}$$

Para a análise de carregamento estático, o termo com dependência temporal é nulo e a equação Eq.(3.3.20) é escrita:

$$D\nabla^2\Phi = q \tag{3.3.23}$$

3.3.4 Vibração Livre de Placas

No problema de vibração livre de placas, onde a carga é zero *(q=0),* a Eq.(3.3.19) é escrita da seguinte maneira:

$$D\left[\frac{\partial^3\psi_1}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3\psi_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3\psi_2}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3\psi_2}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right] - \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[w + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)\right] = 0 \tag{3.3.24}$$

Em uma análise de regime harmônico, supõe-se que a placa tem uma oscilação de freqüência angular ω e as variáveis ψ_α e w da Eq.(3.3.24) podem ser escritas como sendo:

$$\psi_\alpha(x_1, x_2, t) = \psi_\alpha(x_1, x_2)e^{i\omega t} \tag{3.3.25a}$$

$$w(x_1, x_2, t) = w(x_1, x_2)e^{i\omega t} \tag{3.3.25b}$$

A Eq.(3.3.24) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$D\nabla^2\Phi + \rho h\omega^2\left[w + \frac{h^2}{12}\Phi\right] = 0 \tag{3.3.26}$$

Introduzindo χ^4 como o fator dinâmico, a equação Eq.(3.3.26) é escrita:

$$D\nabla^2\Phi + \chi^4\left[w + \frac{h^2}{12}\Phi\right] = 0 \qquad (3.3.27)$$

Onde:

$$\chi^4 = \rho h\omega^2 \qquad (3.3.28)$$

A resolução do problema de vibração livre consiste em determinar o valor de ω, com a qual as expressões Eq.(3.3.25) satisfazem a Eq.(3.3.27) dadas as condições de contorno da placa. Observa-se que o segundo valor no termo entre colchetes na Eq. (3.3.27) corresponde à parcela da inércia rotatória.

3.3.5 Instabilidade de placas

As equações de uma placa, dadas pelo equilíbrio dos esforços de momentos e de força cortante agindo sobre o elemento de placa em posição deslocada, são:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_1 = 0 \qquad (3.3.29a)$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_2 = 0 \qquad (3.3.29b)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q = N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \qquad (3.3.29c)$$

A equação de instabilidade de placas onde a carga é zero *(q=0),* na forma compacta é dada pela seguintes expressões:

$$D\nabla^2\Phi = N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \tag{3.3.30}$$

Onde, para a teoria de Mindlin (1951), tem-se:

$$\Phi = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \tag{3.3.21}$$

Sendo ψ_α as rotações na direção α, w a função representando o deslocamento vertical, $N_{\alpha\beta}$ as cargas de compressão aplicadas no plano da placa dadas por unidade de comprimento.

A resolução do problema consiste em determinar o valor de $N_{\alpha\beta}$ que satisfazem a Eq.(3.3.30), dadas as condições de contorno da placa. No presente trabalho, apenas N_{11} será considerado.

3.3.6 Transformação de coordenadas x_i para ns

Para expressar genericamente as condições de contorno da placa é feita a transformação de coordenadas dos esforços de momentos fletores e força cortante.

As coordenadas x_i são relacionadas com as coordenadas ns através da matriz transformação **[T]** e de sua transposta **[T]^t** dadas por:

$$[T] = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2 \end{Bmatrix} \tag{3.3.31a}$$

$$[T]^t = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & s_2 \end{Bmatrix} \tag{3.3.31b}$$

A *Figura 3.4* mostra as coordenadas:

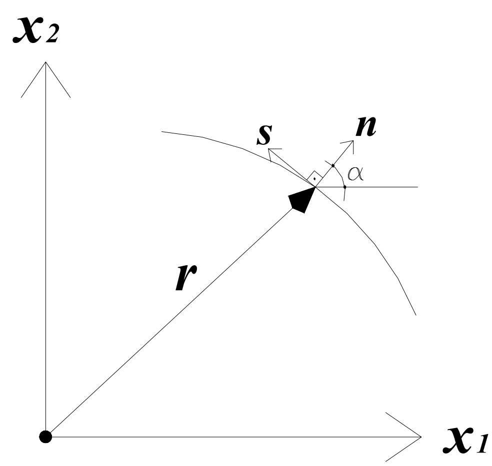


Figura 3.4 Transformação de coordenadas x_i em coordenadas ns.

As componentes de momentos fletores e de força cortante nas coordenadas x_i são transformadas em coordenadas ns através de transformações tensoriais:

$$[M_{ns}] = [T]^t [M_{12}][T] \tag{3.3.32a}$$

$$[Q_{ns}] = [T]^t [M_{12}] \tag{3.3.32b}$$

Explicitamente, as equações Eq.(3.3.32) são escritas:

$$M_n = M_{11} \cos^2 \alpha + 2M_{12} \cos\alpha sen\alpha + M_{22} sen^2 \alpha \tag{3.3.33a}$$

$$M_s = M_{11} sen^2 \alpha - 2M_{12} \cos\alpha sen\alpha + M_{22} \cos^2 \alpha \tag{3.3.33b}$$

$$M_{ns} = (M_{22} - M_{11}) \cos\alpha sen\alpha + M_{12} (\cos^2 \alpha - sen^2 \alpha) \tag{3.3.33c}$$

$$Q_n = Q_1 \, cos\,\alpha + Q_2 sen\alpha \tag{3.3.33d}$$

$$Q_s = Q_2 \, cos\,\alpha - Q_1 sen\alpha \tag{3.3.33e}$$

3.3.7 Condições de Contorno

São três as condições de contorno necessárias para a resolução do problema de placas de Mindlin. Em um sistema genérico de coordenadas, segundo a *Figura 3.4*, as condições de contorno podem ser naturais ou essenciais, dadas pelas vinculações da placa, da seguinte maneira:

a) No caso de um engaste: deslocamento vertical $\boldsymbol{w}$ e rotações ψ_n e ψ_s são nulos, conhecidas como condições essenciais (ou fixadas), sendo $\boldsymbol{Q_n}$, $\boldsymbol{M_n}$ e $\boldsymbol{M_{ns}}$ as incógnitas na condição hard. Na condição soft $\boldsymbol{M_{ns}}$ é nulo e ψ_s é incógnita.

b) No caso de uma borda livre (ou em balanço): $\boldsymbol{Q_n}$, $\boldsymbol{M_n}$ e $\boldsymbol{M_{ns}}$ são conhecidos, dados pela força cortante ou momento fletor ou volvente distribuídos na superfície, ou nulos na inexistência destes, conhecidas como condições naturais, sendo $\boldsymbol{w}$, ψ_n e ψ_s as incógnitas.

c) No caso de um apoio simples: $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{M_n}$ e $\boldsymbol{M_{ns}}$ são conhecidos, dados pelo deslocamento vertical ou momento fletor ou torsor distribuídos na superfície, ou nulos na inexistência destes, sendo $\boldsymbol{Q_n}$, ψ_n e ψ_s as incógnitas na condição hard. Na condição soft $\boldsymbol{M_{ns}}$ é nulo e ψ_s é incógnita.

Na condição hard há restrição à torção ao longo da espessura, ou seja, a rotação tangente ao plano da espessura é nula. Na condição soft esta restrição é liberada e o momento volvente ao longo da espessura é nulo.

3.4 TEORIA DE KIRCHHOFF (Teoria clássica)

Na teoria clássica de *Kirchhoff* (1850), o efeito da deformação pela força cortante devido às tensões tangenciais (de cisalhamento) é negligenciado. Desta maneira, a função ψ_α adotada por *Mindlin* (1951) para representar as rotações da placa se reduz à derivada do deslocamento u_3, sendo nulo o valor K_α.

3.4.1 Hipóteses de Kirchhoff

Neste sentido, as hipóteses **e)** e **g)** adotadas por *Kirchhoff* (1850) se diferem das de *Mindlin* (1951) da seguinte maneira:

e) As deformações por cisalhamento γ_{23} e γ_{13} que causam distorção são desprezadas, ou seja, retas normais ao plano médio da placa na posição indeformada permanecem normais após a deformação;

g) As tensões normais σ_{33} atuando nos planos paralelos ao plano médio da placa são pequenas quando comparadas às outras componentes de tensão e podem ser desprezadas.

Segue-se com um procedimento análogo ao adotado em **3.3**. Da hipótese *e*), obtém-se:

$$\gamma_{13} = \frac{1}{G}\sigma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \tag{3.4.1a}$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{G}\sigma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \tag{3.4.1b}$$

3.4.1.1 Relação deslocamento-deformação

Manipulando as equações Eq.(3.4.1), obtém-se:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \tag{3.4.2a}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \tag{3.4.2b}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \tag{3.4.3}$$

Integrando as Eq. (3.4.3) em $\boldsymbol{x_3}$:

$$u_1 = x_3\left(-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \tag{3.4.4a}$$

$$u_2 = x_3\left(-\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \tag{3.4.4b}$$

$$u_3 = w(x_1, x_2, t) \tag{3.4.4c}$$

Obtidas as expressões dos deslocamentos das placas de *Kirchhoff* (1850), Eq.(3.4.4), pode-se escrever as equações das deformações em função destes, através das equações Eq.(2.3.11) e Eq.(2.3.12):

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -x_3\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \tag{3.4.5a}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \qquad (3.4.5b)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -2x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad (3.4.5c)$$

Recapitulando-se que as outras deformações são desprezadas nas hipóteses:

$$\gamma_{13} = \frac{1}{G}\sigma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \qquad (3.4.1a)$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{G}\sigma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \qquad (3.4.1b)$$

3.4.2 Lei constitutiva: relação tensão-deformação

As equações constitutivas do modelo de placas de *Kirchhoff* (1850), em termos das tensões e deslocamentos e em coordenadas cartesianas, são encontradas substituindo-se as deformações dadas pelas Eq.(3.4.1) e Eq.(3.4.5) nas equações constitutivas Eq.(2.3.25) e Eq.(2.3.26), obtendo-se assim:

$$\sigma_{11} = -\frac{Ex_3}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) \qquad (3.4.6a)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{Ex_3}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) \qquad (3.4.6b)$$

$$\sigma_{12} = \frac{Ex_3(1-\nu)}{2(1-\nu^2)}\left(-2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = -2Gx_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad (3.4.6c)$$

$$\sigma_{13} = 0 \tag{3.4.6d}$$

$$\sigma_{23} = 0 \tag{3.4.6e}$$

Substituindo-se as equações Eq.(3.4.2) e Eq.(3.4.6) nas definições dos esforços dadas pela Eq.(3.3.1) e integrando-se em $\boldsymbol{x_3}$, os esforços pela teoria de *Kirchhoff* (1850) são dados por:

$$M_{\alpha\beta} = -D(1-\nu)\left(w_{,\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} w_{,\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right) \tag{3.4.7}$$

$$Q_\alpha = -D\left(w_{,\gamma\gamma\alpha}\right) \tag{3.4.8}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{3.3.13}$$

Sendo $\boldsymbol{D}$ o módulo de rigidez à flexão, $\boldsymbol{E}$ o módulo de Young e $\boldsymbol{\nu}$ o coeficiente de Poisson, $\boldsymbol{h}$ a espessura da placa, $\boldsymbol{\delta_{\alpha\beta}}$ é o delta de Kronecker, $\boldsymbol{w}$ é função representando a flecha, $\boldsymbol{w_{,\alpha}}$ são as rotações na direção α, $\boldsymbol{Q_\alpha}$ é Sa força cortante na direção α, $\boldsymbol{M_{\alpha\beta}}$ é o momento fletor quando os índices $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ são iguais e o momento volvente em caso contrário, onde todos os esforços são definidos por unidade de comprimento. Os sub-índices que seguem uma vírgula representam as derivadas em relação à variável com este índice.

Explicitamente, as equações Eq. (3.4.7) e Eq. (3.4.8) são escritas:

$$M_{11} = -D\left(w_{,11} + \nu w_{,22}\right) \tag{3.4.9a}$$

$$M_{22} = -D\left(w_{,22} + \nu w_{,11}\right) \tag{3.4.9b}$$

$$M_{12} = -D(1-\nu)\left(w_{,12}\right) \tag{3.4.9c}$$

$$Q_1 = -D\frac{\partial}{\partial x_1}\left(w_{,11} + w_{,22}\right) \tag{3.4.10a}$$

$$Q_2 = -D\frac{\partial}{\partial x_2}\left(w_{,11} + w_{,22}\right) \tag{3.4.10b}$$

3.4.3 Equação de movimento de placas em coordenadas cartesianas

As equações de movimento de uma placa, incluindo a inércia rotatória, são dadas por *Kirchhoff* (1850) de maneira análoga à apresentada para a teoria de *Mindlin* (1951):

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_1 = \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(w_{,11}\right) \tag{3.4.11a}$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_2 = \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(w_{,22}\right) \tag{3.4.11b}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q = \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.4.11c}$$

De maneira análoga ao item 3.3.3, substituindo as relações constitutivas das placas dadas pelas equações Eq.(3.4.7) e Eq. (3.4.8) nas Eq.(3.4.11a) e Eq.(3.4.11b), obtém-se as equações das cortantes e substituindo-se as derivadas destas na equação de equilíbrio de forças verticais Eq.(3.4.11c), obtém-se a equação diferencial das placas da teoria clássica de *Kirchhoff* (1850):

$$D\nabla^2\left(\nabla^2 w\right) - \rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(w + \frac{h^2}{12}\left(\nabla^2 w\right)\right) = q \tag{3.4.12}$$

Para a análise de carregamento estático, onde o termo com dependência temporal é nulo, a equação Eq.(3.4.12) é escrita:

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} \tag{3.4.13}$$

3.4.4 Vibração Livre de Placas

No problema de vibração livre de placas, a carga é zero *(q=0),* e a Eq(3.4.12) é escrita da seguinte maneira:

$$D\nabla^2\left(\nabla^2 w\right)-\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(w+\frac{h^2}{12}\left(\nabla^2 w\right)\right)=0 \tag{3.4.14}$$

Supõe-se que a placa tem uma oscilação de freqüência angular ω e as rotações $w_{,\alpha}$ e deslocamento vertical w da Eq.(3.3.19) podem ser escritas como sendo:

$$w_{,\alpha}(x_1,x_2,t)=w_{,\alpha}(x_1,x_2)e^{i\omega t} \tag{3.4.15a}$$

$$w(x_1,x_2,t)=w(x_1,x_2)e^{i\omega t} \tag{3.4.15b}$$

Onde ω é a freqüência angular no caso da vibração livre.

Desta maneira, a Eq.(3.4.14) na forma implícita pode ser escrita da seguinte maneira:

$$D\nabla^2\left(\nabla^2 w\right)-\rho h\omega^2\left[w+\frac{h^2}{12}\left(\nabla^2 w\right)\right]=0 \tag{3.4.16}$$

Introduzindo χ^4 como o fator dinâmico, a equação Eq.(3.4.16) é escrita:

$$D\nabla^2\left(\nabla^2 w\right)+\chi^4\left[w+\frac{h^2}{12}\left(\nabla^2 w\right)\right]=0 \tag{3.4.17}$$

Onde:

$$\chi^4=\rho h\omega^2 \tag{3.3.28}$$

A resolução do problema de vibração livre consiste em determinar o valor de ω com a qual as expressões Eq.(3.4.15) satisfazem a Eq.(3.4.17) dadas as condições de contorno da placa. Observa-se que o segundo valor no termo entre colchetes na Eq. (3.4.17) corresponde à parcela de inércia rotatória.

3.4.5 Instabilidade de placas

As equações de uma placa, dadas pelo equilíbrio dos esforços de momentos e de força cortante agindo sobre o elemento de placa em posição deslocada, são:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}-Q_1=0 \qquad (3.4.18a)$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}-Q_2=0 \qquad (3.4.18b)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}+q=N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+2N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}+N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \qquad (3.4.18c)$$

A equação de instabilidade de placas onde a carga é zero (*q=0*), para a teoria de *Kirchhoff* (1850) na forma compacta é dada pela seguintes expressões:

$$D\nabla^2\left(\nabla^2 w\right)=N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+2N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}+N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \qquad (3.4.19)$$

Sendo $\boldsymbol{w}$ a função representando o deslocamento vertical, $N_{\alpha\beta}$ as cargas de compressão aplicadas no plano da placa dadas por unidade de comprimento e $w_{,\alpha\alpha}$ as curvaturas na direção α.

A resolução do problema consiste em determinar o valor de $N_{\alpha\beta}$ que satisfazem a Eq.(3.4.19), dadas as condições de contorno da placa. No presente trabalho, apenas N_{11} será considerado.

3.4.6 Condições de Contorno

São três as condições de contorno necessárias para a resolução do problema de placas de Mindlin. Em um sistema genérico de coordenadas, segundo a *Figura 3.4*, as condições de contorno podem ser naturais ou essenciais, dadas pelas vinculações da placa, da seguinte maneira:

a) No caso de um engaste: deslocamento vertical w, rotação ψ_n e momento volvente M_{ns} são nulos, conhecidas como condições essenciais (ou fixadas), sendo Q_n , M_n e ψ_s as incógnitas.

b) No caso de uma borda livre (ou em balanço): Q_n, M_n e M_{ns} são conhecidos, dados pela força cortante ou momento fletor ou volvente distribuídos na superfície, ou nulos na inexistência destes, conhecidas como condições naturais, sendo w, ψ_n e ψ_s as incógnitas.

c) No caso de um apoio simples: w, M_n e M_{ns} são conhecidos, dados pelo deslocamento vertical ou momento fletor ou torsor distribuídos na superfície, ou nulos na inexistência destes, sendo Q_n, ψ_n e ψ_s as incógnitas.

Observa-se que para a teoria clássica M_{ns} é sempre nulo no contorno e, consequentemente, $w_{,s}$ é sempre incógnita no contorno.

4 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL E EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS PARA O MEC

4.1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais das placas obtidas na seção anterior devem ser transformadas em equações integrais de contorno para a resolução pelo do Método dos Elementos de Contorno (MEC). A transformação das equações integrais contendo tanto integrais de domínio quanto integrais de superfície pode ser feita de diversas maneiras, pelo *Teorema da Reciprocidade devido a Betti*, pelo *Teorema de Green*, ou ainda pela *Técnica dos Resíduos Ponderados*. E, posteriormente, através do *Teorema da Divergência* são obtidas as equações integrais de contorno.

Além disso, é necessário determinar inicialmente as chamadas soluções fundamentais, definidas como soluções relativas à equação diferencial das placas para uma excitação pontual. Encontram-se basicamente duas distintas soluções fundamentais para a resolução de placas pelo MEC, a solução dinâmica fundamental e a solução estática fundamental. Na comparação entre as duas soluções, em problemas cuja solução fundamental empregada é a segunda solução, há necessidade de uma discretização do domínio da placa e, em contrapartida, a forma final da solução reduz a dificuldade da implementação computacional da primeira.

Neste trabalho, o *Teorema de Betti* foi aplicado para a obtenção das equações integrais de placa e a formulação MEC para a determinação das frequências naturais e cargas críticas de instabilidade emprega a solução estática fundamental que leva à obtenção de uma equação integral de contorno e uma integral de domínio. Esta última integral que representa a força de inércia ou a força normal ao plano da espessura da placa, sofre um segundo tratamento para a transformação em uma integral de contorno através de uma mudança de variáveis ou da reaplicação do *Teorema da Divergência*.

A solução fundamental alternativa desenvolvida em *Palermo Jr.* (2000) para problemas estáticos foi adotada. Nesta solução fundamental em específico, evidencia-se a grande conexão entre a teoria de *Mindlin* (1951) com a teoria clássica de *Kirchhoff* (1850) através da teoria dos campos vetoriais. Além do mais, estas soluções são desenvolvidas para uma carga unitária normal ao plano da placa e para as derivadas desta, um binário unitário em torno da direção do vetor normal ao elemento e um binário unitário em torno da direção do vetor tangencial ao elemento, permitindo a colocação dos pontos de carregamento diretamente no contorno da placa, não externemente a este, levando a uma melhor precisão de resultados. Para simplificação, estes carregamentos serão nomeados ao longo do trabalho apenas como *carga unitária*, *binário unitário* na direção α *(n ou s)*, respectivamente. As funções adotadas como solução fundamental são representadas neste trabalho com *.

4.2 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Um conceito matemático importante envolvido no método é a função *Delta de Dirac*, pois é uma alternativa para representar grandezas físicas, como por exemplo, a excitação pontual das cargas concentradas nos problemas da mecânica. Em *Brebbia e Dominguez* (1989) a solução fundamental é definida como uma solução singular da equação de *Laplace* dada pela função *Delta de Dirac* $\Delta\,(\xi, x)$. Algumas propriedades desta função são dadas por:

a) $\Delta(x-\xi)=0$, para $x \neq \xi$;

b) $\Delta(x-\xi)=\infty$, para $x=\xi$;

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x-\xi)dx = 1$, para ξ contido no intervalo de integração;

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x-\xi)dx = 0$, para ξ não contido no intervalo de integração;

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\Delta(x-\xi)dx = f(\xi)$.

A função *Delta de Dirac* é mostrada na *Figura 4.1*.

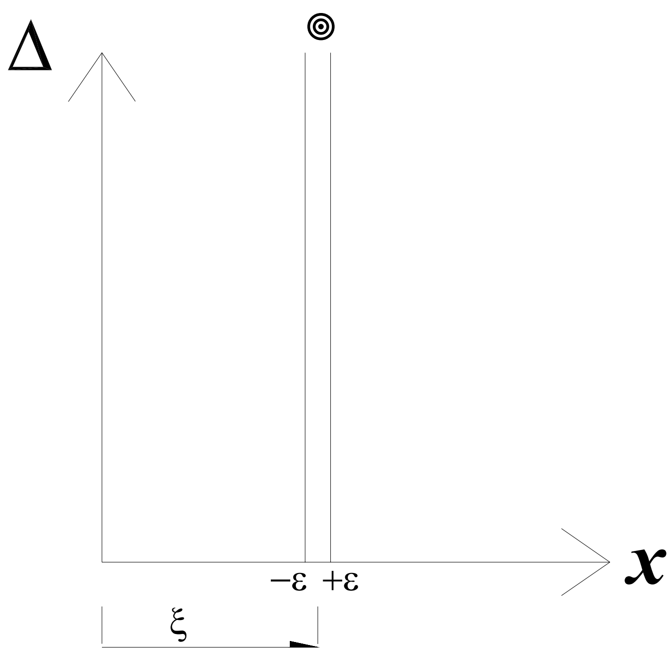


Figura 4.1 Função delta de *Dirac*.

A formulação alternativa para as soluções fundamentais para as placas de *Mindlin* (1951) é brevemente apresentada a seguir e a dedução mais detalhada é encontrada em *Palermo Jr.* (2000).

Estas soluções fundamentais são desenvolvidas para as seguintes forças de volumes aplicadas nas placas: uma carga unitária normal ao plano da placa, e as derivadas desta, um binário unitário na direção do vetor normal ao plano da espessura da placa e um binário unitário na direção do vetor tangencial ao plano da espessura da placa. Observa-se que a carga vertical **q** distribuída no domínio da placa é nula para o cálculo destas soluções.

Os deslocamentos de rotação ψ_α^* no plano médio da placa são decompostos em dois campos vetoriais, um irrotacional (ou longitudinal) e um solenoidal (ou transversal). De maneira análoga à eletrostática, estes campos correspondem, respectivamente, ao gradiente de uma função potencial escalar ϕ_α e ao rotacional de uma função potencial vetorial H_α:

$$\left(\psi_1^*, \psi_2^*, 0\right) = \nabla\left(\phi\left(x_1, x_2\right)\right) + \nabla \times \left(0, 0, H\left(x_1, x_2\right)\right) \tag{4.2.1}$$

Onde o operador ∇ é dado por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{4.2.2}$$

Para o caso de placas, pode-se simplificar:

$$\left(\psi_1^*, \psi_2^*\right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}\right) \tag{4.2.3}$$

Sejam definidas em termos do vetor ψ_α^*, a dilatação e a rotação, sendo estas respectivamente:

$$\Delta = \psi^*_{1,1} + \psi^*_{2,2} \tag{4.2.4}$$

$$\varpi = \psi^*_{2,1} - \psi^*_{1,2} \tag{4.2.5}$$

As equações de equilíbrio de placas em termos da dilatação e das rotações dadas pelas equações Eq.(4.2.4) e Eq. (4.2.5) podem, portanto, ser escritas:

$$D\frac{1-\nu}{2}\lambda^2\left(\Delta + \nabla^2 w^*\right) + F_1 = 0 \tag{4.2.6}$$

$$D\Delta_{,2} - D\frac{1-\nu}{2}\varpi_{,1} - D\frac{1-\nu}{2}\lambda^2\left(\psi^*_2 + \varpi_{,2}\right) + F_2 = 0 \tag{4.2.7}$$

$$D\Delta_{,1} - D\frac{1-\nu}{2}\varpi_{,2} - D\frac{1-\nu}{2}\lambda^2\left(\psi^*_1 + \varpi_{,1}\right) + F_3 = 0 \tag{4.2.8}$$

Onde F_i é a força de volume aplicada externamente à placa, sendo F_1 relacionada à carga unitária e F_α relacionada ao binário unitário na direção α.

Portanto, para a determinação das soluções fundamentais é necessário encontrar as funções potenciais incógnitas ϕ_α e H_α.

4.2.1 Solução fundamental w^* para carga unitária

A partir das equações de equilíbrio Eq.(4.2.7) e Eq.(4.2.8), para o problema cujo carregamento é uma carga unitária, a solução do campo solenoidal $\mathbf{H}$ é nula devido à simetria radial do problema da carga unitária e, portanto, as rotações ψ_α^* da placa dadas pela Eq.(4.2.1) e Eq. (4.2.2) correspondem ao gradiente de ϕ, semelhantes àquelas obtidas a partir das hipóteses da teoria clássica. As forças volumétricas F_α correspondentes aos binários unitários são também nulas e as equações Eq.(4.2.7) e Eq.(4.2.8) são homogêneas. Portanto, as forças cortantes podem ser escritas a partir da derivada dos momentos fletores como na teoria clássica.

A partir da equação de equilíbrio de forças verticais Eq.(3.4.13) da teoria de Kirchhoff (1850) e a equação da dilatação Eq. (4.2.4), obtém-se:

$$D\nabla^2\Delta + F_3 = 0 \tag{4.2.9}$$

Sendo a carga unitária F_3 dada pela função *Delta de Dirac*, a função incógnita ϕ é:

$$\phi = -\frac{1}{\pi D}\left[\frac{1}{8}r^2\left(\ln(\lambda r) - 1\right)\right] \tag{4.2.10}$$

A equação de equilíbrio de forças verticais Eq.(4.2.6) é recapitulada:

$$D\frac{1-\nu}{2}\lambda^2\left(\Delta + \nabla^2 w^*\right) + F_3 = 0 \tag{4.2.6}$$

A partir da Eq.(4.2.6) e sendo a carga unitária F_3 dada pela função *Delta de Dirac*, a solução fundamental w^* obtida para a carga unitária é:

$$w^* = \frac{1}{\pi D}\left[\frac{1}{8}r^2\left(\ln(\lambda r) - 1\right) - \frac{\ln(\lambda r)}{(1-\nu)\lambda^2}\right] \tag{4.2.11}$$

A grande diferença nas hipóteses da teoria de *Mindlin* (1951) e da teoria de *Kirchhoff* (1850) aparece no deslocamento vertical $\boldsymbol{w^*}$ (deflexão). O primeiro termo da expressão Eq. (4.2.11) corresponde à deflexão obtida da teoria clássica e o segundo ao efeito da deformação pela força cortante.

Sendo as rotações ψ_α^* da placa dadas pelo gradiente de ϕ, os momentos fletor e volvente tem expressões similares das obtidas para a teoria clássica de *Kirchhoff* (1850) e suas expressões em componentes $\boldsymbol{ns}$ a partir das definições Eq.(3.4.7a) e Eq.(4.2.10), são dadas por:

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln(\lambda r) - \frac{(1-\nu)}{2} + (1-\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)^2\right] \tag{4.2.12}$$

$$M_{ns}^* = -\frac{1-\nu}{4\pi}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial s} \tag{4.2.13}$$

Do mesmo modo, a cortante em componentes $\boldsymbol{ns}$ a partir das definições Eq.(3.4.7b) e Eq.(4.2.10), é dada por:

$$Q_n^* = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial r}{\partial n} \tag{4.2.14}$$

As rotações ψ_n^* e ψ_s^* em componentes $\boldsymbol{ns}$ são dadas por:

$$\psi_n^* = -\frac{1}{4\pi D} r\left[\ln(\lambda r) - \frac{1}{2}\right]\frac{\partial r}{\partial n} \tag{4.2.15}$$

$$\psi_s^* = -\frac{1}{4\pi D} r\left[\ln(\lambda r) - \frac{1}{2}\right]\frac{\partial r}{\partial s} \tag{4.2.16}$$

4.2.2 Solução fundamental w^* para o binário unitário na direção α

Para um problema cujo carregamento corresponde a um binário unitário na direção α, $\boldsymbol{F_\alpha}$, a carga unitária $\boldsymbol{F_1}$ neste problema é nula e, portanto, a equação de equilíbrio de placas em termos da dilatação e da rotações Eq. (4.2.6) é homogênea. A integração desta leva à solução:

$$\phi(x_1, x_2) = -w^*(x_1, x_2) + E(x_1, x_2) \tag{4.2.17}$$

Onde $E(x_1, x_2)$ é uma função não singular cujo Laplaciano é zero, considerada nula no estudo apresentado em *Palermo Jr.* (2000).

Substituindo-se as equações Eq.(4.2.6) e Eq.(4.2.17) nas equações de equilíbrio de momentos Eq.(4.2.7) e Eq.(4.2.8), obtêm-se:

$$D\left(\nabla^2 \phi\right)_{,1} - D\frac{1-\nu}{2}\left(\nabla^2 H - \lambda^2 H\right)_{,2} + F_2 = 0 \tag{4.2.18}$$

$$D\left(\nabla^2 \phi\right)_{,2} - D\frac{1-\nu}{2}\left(\nabla^2 H - \lambda^2 H\right)_{,1} + F_3 = 0 \tag{4.2.19}$$

As forças de volume $\boldsymbol{F_2}$ e $\boldsymbol{F_3}$, de maneira análoga às rotações em Eq. (4.2.1), são:

$$\left(F_2, F_3, 0\right) = \nabla\left(\Phi\left(x_1, x_2\right)\right) + \nabla \times \left(0, 0, N\left(x_1, x_2\right)\right) \tag{4.2.20}$$

Onde as funções potenciais representando os campos vetoriais irrotacional (ou longitudinal) e solenoidal (ou transversal), de acordo com em *Palermo Jr.* (2000), são respectivamente:

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} F_1^0 \frac{\partial\left(ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)}{\partial x_1} - \frac{1}{2\pi} F_2^0 \frac{\partial\left(ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)}{\partial x_2} \tag{4.2.21}$$

$$N = \frac{1}{2\pi} F_2^0 \frac{\partial\left(ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)}{\partial x_1} - \frac{1}{2\pi} F_1^0 \frac{\partial\left(ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)}{\partial x_2} \tag{4.2.22}$$

Substituindo-se as equações Eq.(4.2.20) a Eq.(4.2.22) nas equações equilíbrio de momentos Eq.(4.2.18) e Eq.(4.2.19), obtém-se finalmente as funções potenciais incógnitas para o binário unitário na direção α, $\boldsymbol{F_\alpha}$:

$$\phi = \frac{1}{8\pi D} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[r^2\left(\ln(\lambda r) - 1\right)\right] = -w^* \tag{4.2.23}$$

$$H = \frac{1}{\pi D(1-\nu)\lambda^2}\left[F_1^0 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\ln(\lambda r) + K_0(\lambda r)\right) - F_2^0 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\ln(\lambda r) + K_0(\lambda r)\right)\right] \tag{4.2.24}$$

$\boldsymbol{K_0}$ é uma função de *Bessel* modificada. Observa-se que $\boldsymbol{F_\alpha^0}$ nas equações Eq. (4.2.21) a Eq. (4.2.24) é introduzido para distinguir o efeito de cada binário na direção α e pode ser entendido como um resultado unitário da integral de domínio em uma circunferência contendo a função *Delta de Dirac* na direção α. Ou seja, ao trabalhar com binário na direção $\boldsymbol{x_1}$, este equivale a $\boldsymbol{F_1^0}$ vale 1 e omite-se o efeito da direção $\boldsymbol{x_2}$, e vice-versa.

O deslocamento de translação (deflexão $\boldsymbol{w^*}$) devido ao binário unitário na direção α $\boldsymbol{F_\alpha}$, é portanto similar à obtida da teoria clássica de *Kirchhoff* (1850). A Eq. (4.2.23) mostra que a deflexão $\boldsymbol{w^*}$ é $\boldsymbol{-\phi}$, e pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$w^{*} = \frac{1}{4\pi D} r\left[\left(ln(\lambda r) - \frac{1}{2}\right)\right] r_{\alpha} = -\phi \tag{4.2.25}$$

A equação Eq. (4.2.3) pode ser reecrita da seguinte maneira:

$$\left(\psi^{*}_{1}, \psi^{*}_{2}\right) = \left(-\frac{\partial w}{\partial x_1}, -\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}\right) \tag{4.2.26}$$

A relação constitutiva da cortante dada pela Eq. (3.3.12) é recapitulada:

$$Q_{\alpha} = D\frac{1-\nu}{2}\lambda^2\left(\psi_{\alpha} + w_{,\alpha}\right) \tag{3.3.12}$$

As componentes $\boldsymbol{Q_n}^{*}$ e $\boldsymbol{Q_s}^{*}$, a partir das equações Eq.(4.2.26), Eq.(3.3.12) e da equação de transformação de coordenadas Eq.(3.3.31) a Eq.(3.3.33), são:

$$Q^{*}_{n} = D\frac{1-\nu}{2}\lambda^2 \frac{\partial H}{\partial s} \tag{4.2.27a}$$

$$Q^{*}_{s} = D\frac{1-\nu}{2}\lambda^2 \frac{\partial H}{\partial n} \tag{4.2.27b}$$

Substituindo-se as equações Eq.(4.2.26) e Eq.(4.2.27) na equação dos deslocamentos $\boldsymbol{\psi_{\alpha}}^{*}$ Eq.(4.2.1), em componentes $\boldsymbol{ns}$, obtém-se:

$$\left(\psi^{*}_{n}, \psi^{*}_{s}, 0\right) = \left(-w^{*}_{,n}, -w^{*}_{,s}, 0\right) + \frac{2}{\lambda^2 D(1-\nu)}\left(Q^{*}_{,n}, Q^{*}_{,s}, 0\right) \tag{4.2.28}$$

A cortante $\boldsymbol{Q_n}^{*}$ pode ser dividida nas parcelas devido à teoria clássica e à correção de *Mindlin* (1951):

$$Q_n^* = \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\left(-\frac{1}{r^2}\right)n_\alpha + \left(\frac{2}{r^2}\right)r_{,\alpha}\frac{\partial r}{\partial n}\right] + \left[\left(K_0 + \frac{K_1}{z}\right)n_\alpha - \left(K_0 + \frac{2K_1}{z}\right)r_{,\alpha}\frac{\partial r}{\partial n}\right]\lambda^2\right\} \quad (4.2.29)$$

O primeiro termo entre os colchetes na Eq. (4.2.29) é igual à cortante devido ao binário unitário obtido pela teoria clássica de *Kirchhoff* (1850). O segundo termo é a correção devido à hipótese de *Mindlin* (1951).

Os momentos fletor e volvente são dados por:

$$M_{nn}^* = D\left[(1-\nu)w_{,ss}^* - \nabla^2 w^*\right] + \frac{2}{\lambda^2}Q_{n,n}^* \quad (4.2.30)$$

$$M_{ns}^* = -D(1-\nu)w_{,ns}^* + \frac{1}{\lambda^2}\left(Q_{n,s}^* + Q_{s,n}^*\right) \quad (4.2.31)$$

As expressões dos momentos contêm a relação clássica mais a correção introduzida pelo efeito da deformação pela força cortante. A parcela clássica da equação dos momentos fletores, Eq.(4.2.30), é dada por:

$$D\left[(1-\nu)w_{,ss}^* - \nabla^2 w^*\right] = -\frac{1}{2\pi r}r_{,\alpha} + \frac{1-\nu}{4\pi r}\left[r_{,\alpha} + 2s_\alpha\frac{\partial r}{\partial s} - 2r_{,\alpha}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right] \quad (4.2.32)$$

A parcela correspondente ao efeito da deformação pela força cortante na equação dos momentos fletores, Eq.(4.2.30), é dada por:

$$\frac{2}{\lambda^2}\frac{\partial Q_n^*}{\partial n} = \frac{\lambda}{\pi}\left\{K_1\left[r_\alpha\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)^2 - n_\alpha\frac{\partial r}{\partial n}\right] + \frac{B}{z}\left[4r_{,\alpha}\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)^2 - 2n_{,\alpha}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right) - r_{,\alpha}\right]\right\} \quad (4.2.33)$$

A parcela clássica da equação dos momentos volventes, Eq.(4.2.31), é dada por:

$$D(1-\nu)w^*_{,ns} = -\frac{1-\nu}{4\pi r}\left[s_{,\alpha}\frac{\partial r}{\partial n} + n_\alpha\frac{\partial r}{\partial s} - 2r_{,\alpha}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial s}\right] \tag{4.2.34}$$

A parcela correspondente ao efeito da deformação pela força cortante na equação dos momentos volventes, Eq.(4.2.31), é dada por:

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial Q^*_n}{\partial s} = \frac{\lambda}{2\pi}\left\{K_1\left[r_\alpha\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial s} - n_\alpha\frac{\partial r}{\partial s}\right] + \frac{B}{z}\left[4r_{,\alpha}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial s} - n_{,\alpha}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right) - s_{,\alpha}\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)\right]\right\} \tag{4.2.35a}$$

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial Q^*_s}{\partial n} = \frac{\lambda}{2\pi}\left\{K_1\left[r_\alpha\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial s} - s_\alpha\frac{\partial r}{\partial n}\right] + \frac{B}{z}\left[4r_{,\alpha}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial s} - n_{,\alpha}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right) - s_{,\alpha}\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)\right]\right\} \tag{4.2.35b}$$

A deflexão $\boldsymbol{w}^*$, as rotações $\psi_\alpha{}^*$ e os esforços $\boldsymbol{Q}_\alpha{}^*$ e $\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}{}^*$ correspondem aos valores encontrados nos pontos campo, para um binário unitário na direção α aplicado no ponto fonte.

4.2.3 Solução fundamental ψ_α^* para carga unitária e binário unitário na direção α

Para incluir o efeito da inércia rotatória no cálculo das frequências naturais empregando-se a solução estática fundamental, é necessária a inclusão das soluções fundamentais ψ_1^* e ψ_2^*. A partir da definição de ψ_α^* dada pela equação Eq.(4.2.3) e da definição de ϕ dada pela equação Eq.(4.2.15), obtém-se a ***Tabela 4.1***:

	Deslocamento normal ao plano da placa	*Rotação na direção **1***	*Rotação na direção **2***
Carga unitária	w^*	$\psi_1^* = \dfrac{\partial w^*}{\partial x_1} = -\phi_{(1)}$	$\psi_2^* = \dfrac{\partial w^*}{\partial x_2} = -\phi_{(2)}$
*Binário unitário na direção **n***	$\dfrac{\partial w^*}{\partial n} = \phi_{(n)}$	$\psi_{1,n}^* = \dfrac{\partial \phi_{(n)}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial H_{(n)}}{\partial x_2}$	$\psi_{2,n}^* = \dfrac{\partial \phi_{(n)}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial H_{(n)}}{\partial x_1}$
*Binário unitário na direção **s***	$\dfrac{\partial w^*}{\partial s} = \phi_{(s)}$	$\psi_{1,s}^* = \dfrac{\partial \phi_{(s)}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial H_{(s)}}{\partial x_2}$	$\psi_{2,s}^* = \dfrac{\partial \phi_{(s)}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial H_{(s)}}{\partial x_1}$

Tabela 4.1 Solução fundamental ψ_α^* para carga unitária e binário unitário

Para o deslocamento normal ao plano da placa devido à carga e binários unitários as soluções fundamentais já foram determinadas em **4.2.1** e **4.2.2**.

Para incluir o efeito da inércia rotatória nas integrais de domínio através das rotações ψ_α^* nas direções ***1*** e ***2***, faz-se uso do *Teorema da Divergência* da seguinte maneira:

$$\int_\Omega \frac{\partial f(r)}{\partial x_\alpha} d\Omega = \oint_\Gamma f(r) \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} d\Gamma \tag{4.2.36}$$

4.2.4 Solução fundamental $\dfrac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2}$ para carga unitária

Para o cálculo das cargas críticas de instabilidade empregando-se a solução estática fundamental, é necessária a determinação das curvaturas na placa. Para isso, calcula-se a derivada segunda das soluções fundamentais em relação a x_α e x_β. Para este trabalho, α e β correspondem apenas à direção 1 pois é considerado apenas um carregamento normal ao plano da espessura da placa formado pelos eixos 2 e 3. Derivando, portanto, as equação Eq.(4.2.31) a Eq.(4.2.36) em relação a x_α e x_β e para α e β correspondendo à direção 1, obtém-se:

A solução fundamental da segunda derivada de w^*:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} = \frac{1}{\pi D}\left[\frac{1}{4}\left(\delta_{\alpha\beta}\left(ln(\lambda r) - \frac{1}{2}\right) + r_\alpha r_\beta\right) - \frac{1}{(1-\nu)\lambda^2}\frac{1}{r^2}\left(\delta_{\alpha\beta} - 2r_\alpha r_\beta\right)\right] \tag{4.2.37}$$

Onde:

$$r_\alpha = \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} \tag{4.2.38}$$

$$r_\beta = \frac{\partial r}{\partial x_\beta} \tag{4.2.39}$$

Nota-se que a diferença nas hipóteses da teoria de *Mindlin* (1951) e da teoria de *Kirchhoff* (1850) continua apenas no deslocamento vertical w^* (deflexão). O primeiro termo da expressão Eq. (4.2.37) corresponde à deflexão obtida da teoria clássica e o segundo ao efeito da deformação pela força cortante.

Para derivadas na direção $\boldsymbol{x_1}$:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} = \frac{1}{\pi D}\left[\frac{1}{4}\left(ln(\lambda r) - \frac{1}{2} + (r_1)^2\right) - \frac{1}{(1-\nu)\lambda^2}\frac{1}{r^2}\left(1-(r_1)^2\right)\right] \tag{4.2.40}$$

O momento fletor é dado por:

$$\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r^2}\left\{(1+\nu)\left[1-2r_{,\alpha}r_{,\beta}\right] + 2(1-\nu)\left[-2r_\beta n_\alpha \frac{\partial r}{\partial n} - 2r_\alpha n_\beta \frac{\partial r}{\partial n} + n_\beta n_\alpha + 4r_\beta r_\alpha\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)^2 - \delta_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)^2\right]\right\} \tag{4.2.41}$$

Onde:

$$n_\alpha = \frac{\partial x_\alpha}{\partial n} \tag{4.2.42a}$$

$$n_\beta = \frac{\partial x_\beta}{\partial n} \tag{4.2.42b}$$

Para derivadas na direção $\boldsymbol{x_1}$:

$$\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r^2}\left\{(1+\nu)\left[1-2(r_1)^2\right] + 2(1-\nu)\left[-4r_1 n_1 \frac{\partial r}{\partial n} + (n_1)^2 + 4(r_1)^2\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)^2 - \left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)^2\right]\right\} \tag{4.2.43}$$

O momento volvente é dado por:

$$\frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -\frac{1-\nu}{4\pi}\frac{1}{r^2}\left\{s_\beta n_\alpha + n_\beta s_\alpha - 2r_\beta\left(\frac{\partial r}{\partial s}n_\alpha + \frac{\partial r}{\partial n}s_\alpha\right) - 2\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial s} + 8r_\beta r_\alpha \frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial s} - 2r_\alpha n_\beta \frac{\partial r}{\partial s} - 2r_\alpha s_\beta \frac{\partial r}{\partial n}\right\} \tag{4.2.44}$$

Onde:

$$s_\alpha = \frac{\partial x_\alpha}{\partial s} \tag{4.2.45a}$$

$$s_\beta = \frac{\partial x_\beta}{\partial s} \tag{4.2.45b}$$

Para derivadas na direção $\boldsymbol{x_1}$:

$$\frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_1^2} = -\frac{1-\nu}{4\pi}\frac{1}{r^2}\left\{2s_1 n_1 - 4r_1\left(\frac{\partial r}{\partial s}n_1 + \frac{\partial r}{\partial n}s_1\right) - 2\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial s} + 8(r_1)^2\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial s}\right\} \tag{4.2.46}$$

A cortante é dada por:

$$\frac{\partial^2 Q_n^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{r^3}\left\{8r_\beta r_\alpha\frac{\partial r}{\partial n} - 2\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial r}{\partial n} - 2r_\alpha n_\beta - 2r_\beta n_\beta\right\} \tag{4.2.47}$$

Para derivadas na direção $\boldsymbol{x_1}$:

$$\frac{\partial^2 Q_n^*}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{r^3}\left\{4(r_1)^2\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\partial r}{\partial n} - 2r_1 n_1\right\} \tag{4.2.48}$$

As rotações ψ_n^* e ψ_s^* são dadas por:

$$\frac{\partial^2 \psi_n^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -\frac{1-\nu}{4\pi}\frac{1}{r^2}\left\{n_\alpha r_\beta + \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial r}{\partial n} - 2r_\beta r_\alpha\frac{\partial r}{\partial n} + r_\alpha n_\beta\right\} \tag{4.2.49}$$

Para derivadas na direção x_1:

$$\frac{\partial^2 \psi_n^*}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{4\pi D}\frac{1}{r}\left\{2r_1 n_1 + \frac{\partial r}{\partial n} - 2(r_1)^2 \frac{\partial r}{\partial n}\right\} \tag{4.2.50a}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_s^*}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{4\pi D}\frac{1}{r}\left\{2r_1 s_1 + \frac{\partial r}{\partial s} - 2(r_1)^2 \frac{\partial r}{\partial s}\right\} \tag{4.2.50b}$$

4.3 EQUAÇÕES INTEGRAIS

Estabelecidas as soluções fundamentais, segue-se com a obtenção das equações integrais para a resolução do problema de placas pelo *Método dos Elementos de Contorno* (*MEC*). A transformação das equações integrais de domínio em integrais de contorno é feita aplicando-se o *Teorema da Divergência*.

$$\int_\Omega \nabla^2 f(r) d\Omega = \int_\Omega \nabla . \nabla f(r) d\Omega = \oint_\Gamma \nabla f(r) \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \tag{4.3.1}$$

Os pontos de carregamento (ou ponte fonte ou ponto de colocação) são os pontos correspondentes à singularidade, seja a carga unitária na direção x_3, seja o binário unitário na direção n ou s, representados matematicamente pela função *Delta de Dirac*. Equações integrais de contorno são desenvolvidas para pontos de carregamento no domínio e para pontos no contorno da placa.

4.3.1 Equação integral de deslocamentos em pontos de carregamento no domínio

Seja uma placa isotrópica de domínio finito Ω e contorno Γ contida em outra de domínio infinito $\Omega_{:}$ e contorno $\Gamma_{:}$. A placa finita está submetida a um carregamento $\mathbf{q}$ distribuído em uma área $\Omega_{\mathbf{q}}$.

Pelo *Teorema de Betti, a* placa de domínio finito é submetida a dois carregamentos não simultâneos $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}^*$, associados a superfícies elásticas $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{w}^*$, respectivamente. São identificados dois estados de tensão σ e σ^*, com seus respectivos estados de deformação ε e ε^* relacionados da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
&\int_V \left(\sigma_{11}^*\varepsilon_{11} + \tau_{12}^*\varepsilon_{12} + \tau_{13}^*\varepsilon_{13} + \sigma_{22}^*\varepsilon_{22} + \tau_{21}^*\varepsilon_{21} + \tau_{23}^*\varepsilon_{23} + \sigma_{33}^*\varepsilon_{33} + \tau_{31}^*\varepsilon_{31} + \tau_{32}^*\varepsilon_{32}\right) dV = \\
&\int_V \left(\sigma_{11}\varepsilon_{11}^* + \tau_{12}\varepsilon_{12}^* + \tau_{13}\varepsilon_{13}^* + \sigma_{22}\varepsilon_{22}^* + \tau_{21}\varepsilon_{21}^* + \tau_{23}\varepsilon_{23}^* + \sigma_{33}\varepsilon_{33}^* + \tau_{31}\varepsilon_{31}^* + \tau_{32}\varepsilon_{32}^*\right) dV
\end{aligned}
\tag{4.3.2}
$$

Na integral do segundo membro da equação Eq. (4.3.2), chamada de $\mathbf{I}$ a partir deste ponto, substituindo as relações de deformação-deslocamento Eq. (3.3.9) e Eq. (3.3.1) e as equações constitutivas Eq. (3.3.10), obtém-se:

$$
\begin{aligned}
I = \int_V \Bigg\{ &\frac{E x_3^2}{(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \psi_1^*}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x_2} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \psi_1^*}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x_1} \right) \right] \\
&+ G' \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \psi_1 \right) \left(\frac{\partial w^*}{\partial x_1} + \psi_1^* \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \psi_2 \right) \left(\frac{\partial w^*}{\partial x_2} + \psi_2^* \right) \right] \Bigg\} dV
\end{aligned}
\tag{4.3.3}
$$

Transformam-se as integrais de volume para uma placa cuja espessura é constante em integrais de domínio da seguinte maneira:

$$dV = dx_3 d\Omega \tag{4.3.4}$$

Integrando a Eq. (4.3.3) ao longo da espessura ***h*** da placa, de *–h/2* a *+h/2* obtém-se:

$$I = \int_\Omega \left\{ D\left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \psi_1^*}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x_2} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \psi_1^*}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x_1} \right) \right] \right.$$
$$\left. + G' h \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \psi_1 \right) \left(\frac{\partial w^*}{\partial x_1} + \psi_1^* \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \psi_2 \right) \left(\frac{\partial w^*}{\partial x_2} + \psi_2^* \right) \right] \right\} d\Omega$$

(4.3.5)

Das definições de momentos e forças cortantes da Eq.(3.3.11) e Eq.(3.3.12), tem-se:

$$I = \int_\Omega \left\{ M_{11} \frac{\partial \psi_1^*}{\partial x_1} + M_{22} \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x_2} + M_{12} \left(\frac{\partial \psi_1^*}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x_1} \right) + Q_1 \left(\frac{\partial w^*}{\partial x_1} + \psi_1^* \right) + Q_2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial x_2} + \psi_2^* \right) \right\} d\Omega \tag{4.3.6}$$

Aplicando-se a regra da cadeia em todos os termos da equação Eq.(4.3.5), obtém-se:

$$I = \int_\Omega \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(M_{11} \psi_1^* \right) - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} \psi_1^* + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(M_{22} \psi_2^* \right) - \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} \psi_2^* + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(M_{12} \psi_1^* \right) - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \psi_1^* + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(M_{12} \psi_1^* \right) - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \psi_1^* \right] \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(Q_1 w^* \right) - \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} w^* + Q_1 \psi_1^* + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(Q_2 w^* \right) - \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} w^* + Q_2 \psi_2^* \right] \right\} d\Omega$$

(4.3.7)

Reagrupando-se convenientemente os termos da Eq. (4.3.7), tem-se:

$$I = \int_\Omega \left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(M_{11} \psi_1^* + M_{12} \psi_1^* + Q_1 w^* \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(M_{22} \psi_2^* + M_{12} \psi_1^* + Q_2 w^* \right) - \\ \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_1 \right) \psi_1^* - \left(\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_2 \right) \psi_2^* - \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} \right) w^* \end{array} \right] d\Omega$$

(4.3.8)

A partir das equações de movimento Eq.(3.3.17) e as equações de instabilidade Eq.(3.3.29), transfoma-se os dois primeiros termos da integral de domínio Ω da equação Eq. (4.3.8) em integrais de contorno Γ, pelo *Teorema da Divergência*:

$$I = \int_{\Gamma} \left[\left(M_{11} \psi_1^* + M_{12} \psi_1^* + Q_1 w^* \right) n_1 + \left(M_{22} \psi_2^* + M_{12} \psi_1^* + Q_2 w^* \right) n_2 \right] d\Gamma + \int_{\Omega} q w^* d\Omega$$

(4.3.9)

Onde $\boldsymbol{n_1}$ e $\boldsymbol{n_2}$ são cossenos diretores de um ponto no contorno:

$$n_\alpha = \frac{\partial x_\alpha}{\partial n_{campo}} \tag{4.3.10}$$

Para o problema de frequências naturais:

$$q = \rho h \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[w + \frac{h^2}{12} \Phi \right] \tag{4.3.11}$$

Para o problema de cargas críticas de instabilidade:

$$q = N_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \tag{4.3.12}$$

A Eq.(4.3.9) de forma generalizada para representar convenientemente a teoria de *Mindlin* (1951) que considera as três condições físicas necessárias para a resolução do problema de placas, e rearranjando-se os termos desta, obtém-se:

$$I = \int_{\Gamma} \left[\left(M_{11} n_1 + M_{12} n_2 \right) \psi_1^* + \left(M_{12} n_1 + M_{22} n_2 \right) \psi_2^* + \left(Q_1 n_1 + Q_2 n_2 \right) w^* \right] d\Gamma + \int_{\Omega} q w^* d\Omega$$

(4.3.13)

A Eq. (4.3.13) é o desenvolvimento do segundo membro do teorema de *Betti* definido pela Eq. (4.3.2). De forma análoga, o primeiro membro desta equação pode ser escrito:

$$\int_{V} \left(\sigma_{11}^* \varepsilon_{11} + \tau_{12}^* \varepsilon_{12} + \tau_{13}^* \varepsilon_{13} + \sigma_{22}^* \varepsilon_{22} + \tau_{21}^* \varepsilon_{21} + \tau_{23}^* \varepsilon_{23} + \sigma_{33}^* \varepsilon_{33} + \tau_{31}^* \varepsilon_{31} + \tau_{32}^* \varepsilon_{32} \right) dV =$$
$$\int_{\Gamma} \left[\left(M_{11}^* n_1 + M_{12}^* n_2 \right) \psi_1 + \left(M_{12}^* n_1 + M_{22}^* n_2 \right) \psi_2 + \left(Q_1^* n_1 + Q_2^* n_2 \right) w \right] d\Gamma + \int_{\Omega} q^* w d\Omega$$

(4.3.14)

Os esforços de superfície são representados pela Eq.(2.3.34), recapitulada:

$$t_i = \sigma_{ij}.n_j \tag{2.3.34}$$

Explicitamente, a Eq.(2.3.34):

$$t_1 = M_{11} n_1 + M_{12} n_2 \tag{4.3.15a}$$

$$t_2 = M_{21} n_1 + M_{22} n_2 \tag{4.3.15b}$$

$$t_3 = Q_1 n_1 + Q_2 n_2 \tag{4.3.15c}$$

Desta maneira, a equação integral da teoria de *Mindlin* (1951), Eq.(4.3.14), é escrita da seguinte maneira:

$$\oint_{\Gamma} \left[T_1^* u_1 + T_2^* u_2 + T_3^* u_3 \right] d\Gamma + \int_{\Omega} q^* u_3 d\Omega = \oint_{\Gamma} \left[U_1^* t_1 + U_2^* t_2 + U_3^* t_3 \right] d\Gamma + \int_{\Omega} U_3^* q d\Omega \tag{4.3.16}$$

Para o carregamento **q***, supondo este uma carga concentrada unitária aplicada em um ponto ξ do domínio da placa e tomando-se a solução fundamental como uma função ponderadora, as propriedades da função *Delta de Dirac* permitem a simplificação:

$$\int_{\Omega} q^{*} w d\Omega = u_j(\xi) \tag{4.3.17}$$

É necessário um artifício para transformar a equação Eq. (4.3.16) escrita em termos de valores de domínio numa relação com apenas valores no contorno e C_{ij} é definido por:

$$C_{ij} = \frac{\beta}{2\pi} \tag{4.3.18}$$

Onde β corresponde ao ângulo entre elementos lineares consecutivos que possuem tangente contínua. Para o caso de elementos no contorno, este ângulo vale π. Portanto, C_{ij} tem os seguintes valores:

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 & para \quad \xi \in \Omega \\ 0{,}5 & para \quad \xi \in \Gamma \\ 0 & para \quad \xi \notin (\Omega \cup \Gamma) \end{cases} \tag{4.3.19}$$

E a equação integral das placas de *Mindlin* pode ser escrita:

$$C_{ij} u_j(\xi) + \oint_{\Gamma} \left[T_1^{*}(\xi,\eta) u_1(\eta) + T_2^{*}(\xi,\eta) u_2(\eta) + T_3^{*}(\xi,\eta) u_3(\eta) \right] d\Gamma(\eta) =$$
$$\oint_{\Gamma} \left[U_1^{*}(\xi,\eta) t_1(\eta) + U_2^{*}(\xi,\eta) t_2(\eta) + U_3^{*}(\xi,\eta) t_3(\eta) \right] d\Gamma(\eta) + \int_{\Omega} U_3^{*}(\xi,\eta_d) q(\eta_d) d\Omega(\eta_d)$$

(4.3.20)

Na forma generalizada, pela teoria de *Mindlin* (1951):

$$C_{ij}u_j(\xi)+\oint_\Gamma T_{ij}^*(\xi,\eta)u_j(\eta)d\Gamma(\eta)=\oint_\Gamma U_{ij}^*(\xi,\eta)t_j(\eta)d\Gamma(\eta)+\int_\Omega U_{i3}^*(\xi,\eta_d)q(\eta_d)d\Omega(\eta_d) \tag{4.3.21}$$

Onde a solução fundamental $U_{ij}^*(\xi,\eta)$ corresponde à rotação (*j=1,2*) ou deslocamento vertical (*j=3*) e $T_{ij}^*(\xi,\eta)$ corresponde aos esforços de superfície para um carregamento aplicado de binário unitário (*i=1,2*) ou de força unitária (*i=3*) no ponto singular ξ de uma placa infinita. η é uma variável que percorre o contorno, η_d percorre o domínio.

As coordenadas x_i são relacionadas com as coordenadas ns através da matriz transformação **[T]** dada por:

$$[T]=\begin{Bmatrix}\cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2\end{Bmatrix} \tag{3.3.31a}$$

A transformação é feita da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix}x_1 \\ x_2\end{Bmatrix}=[T]\begin{Bmatrix}n \\ s\end{Bmatrix} \tag{4.3.22}$$

A equação integral para estudo das placas com efeito da deformação por cortante pela teoria de *Mindlin* (1951) é escrita nas coordenadas ns na seguinte forma geral:

$$C_{ij}u_j+\oint_\Gamma\left(M_n^*\psi_n+M_{ns}^*\psi_s+Q_n^*w\right)d\Gamma=\oint_\Gamma\left(M_n\psi_n^*+M_{ns}\psi_s^*+Q_nw^*\right)d\Gamma+\int_\Omega w^*qd\Omega \tag{4.3.23}$$

Recapitulando as equações, para o problema de frequências naturais:

$$q=\rho h\omega^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[w+\frac{h^2}{12}\Phi\right] \tag{4.3.11}$$

Para o problema de cargas críticas de instabilidade:

$$q = N_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \tag{4.3.12}$$

Os seis parâmetros incógnitos ou conhecidos da equação de *Mindlin* são: $\boldsymbol{M_n}$, $\boldsymbol{M_{ns}}$, $\boldsymbol{Q_n}$, ψ_n, ψ_s *e* $\boldsymbol{w}$ que representam o momento fletor na direção normal ao contorno, o momento volvente, a cortante na direção normal, a rotação em torno de $\boldsymbol{n}$ ou a rotação em torno de $\boldsymbol{s}$ e o deslocamento transversal em $\boldsymbol{x_3}$, respectivamente. $\boldsymbol{u_j}$ está relacionado com o deslocamento transversal $\boldsymbol{w}$ para a carga unitária *(j=3)* ou a rotação em torno de $\boldsymbol{n}$, ψ_n, e a rotação em torno de $\boldsymbol{s}$, ψ_s, para o binário unitário *(j=1 ou 2,* respectivamente). Os termos na equação Eq.(4.3.23) contendo (*) correspodem à solução fundamental.

A formulação apresentada do *MEC* para análise de placas permite incluir ou não o efeito da deformação por cortante. Quando a equação integral de contorno é usada para análise clássica pela teoria de *Kirchhoff* (1850), as componentes (ψ_n, ψ_s) são aproximadas por derivadas dos deslocamentos, e deve-se ser considerar da solução fundamental sem os termos correspondentes ao efeito da deformação por cortante. Além do mais, os momentos volventes $\boldsymbol{M_{ns}}$ devem ser desprezados no contorno, ou seja, a condição *soft* de restrição é empregada. Essa estratégia foi chamada de técnica irrotacional para resposta de placas por *Palermo Jr.* (2000) e corresponde às formulações usadas por *Mukherjee* (1986) *e Paiva* (1995). Despreza-se, portanto, o efeito do campo solenoidal $\boldsymbol{H}$ tanto nas soluções fundamentais quanto nas relações constitutivas do problema incógnito na teoria clássica. Isto leva a ψ_n e ψ_s iguais a $-\boldsymbol{w}_{,n}$ e $-\boldsymbol{w}_{,s}$ respectivamente.

De maneira análoga para obtenção da equação Eq.(4.3.23) e substituindo nos locais respectivos as relações deformação-deslocamento Eq.(3.4.1) e Eq.(3.4.5), as definições de momentos e cortantes Eq.(3.4.7) e Eq.(3.4.8), a equação de movimento Eq.(3.4.11) e de instabilidade Eq.(3.4.18), a equação integral para a teoria clássica de *Kirchhoff* (1850) é escrita nas coordenadas $\boldsymbol{ns}$ por:

$$\frac{1}{2}C_{ij}u_j + \oint_\Gamma \left(-M_n^* w_{,n} + M_{ns}^* w_{,s} + Q_n^* w\right) d\Gamma = \oint_\Gamma \left(-M_n w_{,n}^* + M_{ns} w_{,s}^* + Q_n w^*\right) d\Gamma + \int_\Omega w^* q d\Omega \tag{4.3.24}$$

São cinco os parâmetros incógnitos ou conhecidos da equação de *Kirchhoff* (1850), respectivamente: $\boldsymbol{M_n}$, $\boldsymbol{Q_n}$, $\boldsymbol{w_{,n}}$, $\boldsymbol{w_{,s}}$ *e* $\boldsymbol{w}$ que representam o momento fletor na direção normal ao contorno, a cortante na direção normal, a rotação em torno de $\boldsymbol{n}$ ou a rotação em torno de $\boldsymbol{s}$ e o deslocamento transversal em $\boldsymbol{x_3}$. O momento volvente $\boldsymbol{M_{ns}}$ é adotado como zero (condição soft). $\boldsymbol{u_j}$ está relacionado com o deslocamento transversal $\boldsymbol{w}$ para a carga unitária *(j=3)* ou a rotação em torno de $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{w_{,n}}$, e a rotação em torno de $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{w_{,s}}$, é adotada sempre como incógnita para o binário unitário *(j=1 ou 2,* respectivamente). Os termos na equação Eq.(4.3.24) contendo (*) são derivados da solução fundamental.

4.3.2 Tratamento para a equação integral de domínio

A integral de domínio obtida na formulação MEC para a determinação das frequências naturais e cargas críticas de instabilidade empregando-se a solução estática fundamental sofre um segundo tratamento antes da completa transformação em uma integral de contorno.

A equação integral da teoria de *Mindlin* (1951), Eq.(4.3.23), e a equação integral da teoria de *Kirchhoff* (1850), Eq.(4.3.24), definem a integral de domínio devido ao carregamento $\mathbf{q}$ distribuído na área $\mathbf{\Omega_q}$ dada por:

$$\int_{\Omega_q} w^*(\xi, x) q(x) d\Omega_q(x) \tag{4.3.25}$$

4.3.2.1 Solução fundamental para o binário unitário na direção α

A transformação da integral de domínio devido ao binário unitário na direção α para uma integral de contorno é feita através do *Teorema da Divergência* recapitulado a seguir:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 f(r) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla . \nabla f(r) d\Omega = \oint_{\Gamma} \nabla f(r) \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \qquad (4.3.1)$$

Para a solução fundamental $\boldsymbol{w}^*$ devida ao binário unitário na direção $\boldsymbol{x_\alpha}$, definida na equação Eq.(4.2.16), pode-se fazer uso do seguinte artifício:

$$\int_{\Omega_q} w^*(\xi, x) q(x) d\Omega_q(x) = \int_{\Omega_q} q(x) \frac{\partial \left[\frac{1}{8\pi D} r^2 \left(ln(\lambda r) - 1 \right) \right]}{\partial x_\alpha} d\Omega_q(x) \qquad (4.3.26)$$

Aplicando na equação da teoria de *Mindlin* (1951), Eq.(4.3.23), ou na equação da teoria de *Kirchhoff* (1850), Eq.(4.3.24), o *Teorema da Divergência* dado por Eq.(4.3.1) e considerando-se uma carga distribuída uniforme $\boldsymbol{q}$, obtém-se:

$$\int_{\Omega_q} w^*(\xi, x) q(x) d\Omega_q(x) = q \int_{\Gamma_q} \left[\frac{R^2}{8\pi D} \left(\ln(\lambda R) - 1 \right) \right] n_\alpha d\Gamma_q(x) \qquad (4.3.27)$$

Onde $\mathbf{R}$ corresponde à distância do ponto fonte até o ponto campo e $\boldsymbol{n_\alpha}$ corresponde à derivada da componente do elemento que contém o binário unitário na direção α em relação à normal do elemento que contém o ponto campo:

$$n_\alpha = \frac{\partial x_\alpha}{\partial n_{campo}} \qquad (4.3.28a)$$

Observa-se que para o binário unitário na direção *n* a equação Eq.(4.3.28a) é:

$$n_\alpha = \frac{\partial n_{fonte}}{\partial n_{campo}} \tag{4.3.28b}$$

E para o binário unitário na direção *s* a equação Eq.(4.3.28a) é:

$$n_\alpha = \frac{\partial s_{fonte}}{\partial n_{campo}} \tag{4.3.28c}$$

4.3.2.2 Solução fundamental para a carga unitária

Para a carga unitária distribuída em um domínio Ω_p, a transformação da integral de domínio da teoria de *Mindlin* (1951), Eq.(4.3.23), ou na equação da teoria de *Kirchhoff* (1850), Eq.(4.3.24), para uma integral de contorno é feita através do esquema apresentado na *Figura 4.2* a seguir:

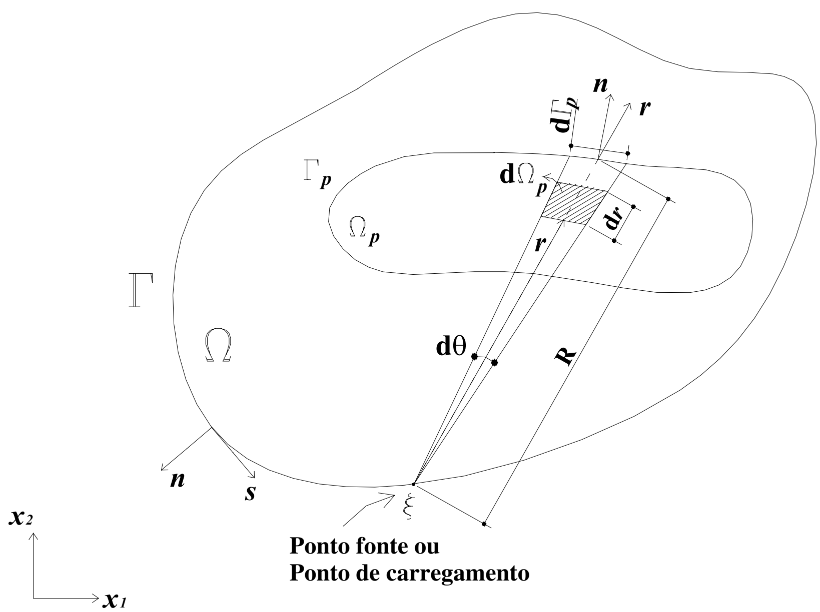


Figura 4.2 Integração sobre uma sub-região carregada.

Um elemento infinitesimal $d\Omega_p$ pode ser escrito como:

$$d\Omega_p = rdrd\theta \tag{4.3.29}$$

A equação Eq.(4.3.23) ou a equação Eq.(4.3.24) pode ser escrita:

$$\int_{\Omega_q} q(x)w^*(\xi,x)d\Omega_q(x) = \int_{\theta}\left[\int_0^R q(x)w^*(\xi,x)r(\xi,x)dr(x)\right]d\theta \tag{4.3.30}$$

Fazendo a mudança de variáveis nas integrações sobre o ângulo θ, obtém-se:

$$d\theta = \frac{1}{R(\xi,t)} r_{,\gamma} n_\gamma d\Gamma_q(t) \tag{4.3.31}$$

Nas Eq.(4.3.23) e Eq.(4.3.24), estas transformações resultam em:

$$\int_{\Omega_q} q(x)w^*(\xi,x)d\Omega_q(x) = \int_{\Gamma_q}\left[\int_0^{R(\xi,t)} q(x)w^*(\xi,x)r(\xi,x)dr(x)\right]\frac{1}{R(\xi,t)} r_{,\gamma} n_\gamma d\Gamma_q(t) \tag{4.3.32}$$

Para a solução fundamental devida à carga unitária, considerando $\boldsymbol{q}$ constante no domínio, obtém-se assim:

$$\int_{\Omega_q} q(x)w^*(\xi,x)d\Omega_q(x) = q\int_{\Gamma_q}\left[\frac{R^3}{32\pi D}\left(ln(\lambda r) - \frac{5}{4}\right) - \frac{R}{2\pi D\lambda^2(1-\nu)}\left(ln(\lambda r) - \frac{1}{2}\right)\right]R_{,\gamma} n_\gamma d\Gamma_q \tag{4.3.33}$$

Onde **R** corresponde à distância do ponto de carregamento ou fonte até o ponto campo e o produto $\boldsymbol{R_{,\gamma} . n_\gamma}$ é o produto escalar:

$$R_{,\gamma} n_\gamma = \frac{\partial R}{\partial x_\gamma}\frac{\partial x_\gamma}{\partial n_{campo}} = \frac{\partial R}{\partial n_{campo}} \tag{4.3.34}$$

4.3.2.3 Solução fundamental $\dfrac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2}$ para carga unitária

A transformação da integral de domínio devido ao binário unitário na direção α para uma integral de contorno é feita como no item **I**, através do *Teorema da Divergência*.

Para a segunda derivada solução fundamental $\boldsymbol{w}^*$, em relação a $\boldsymbol{x_1}$, devida a carga unitária, definida na equação Eq.(4.2.37), pode-se fazer uso do seguinte artifício usando $\boldsymbol{x_\alpha}$ e $\boldsymbol{x_\beta}$ genéricos:

$$\int_{\Omega_q} \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}^* (\xi, x) q(x) d\Omega_q(x) = \int_{\Omega_q} q(x) \frac{\partial \left[\dfrac{\partial w^*}{\partial x_\beta} \right]}{\partial x_\alpha} d\Omega_q(x) \tag{4.3.35}$$

Aplicando na equação da teoria de *Mindlin* (1951), Eq.(4.3.23), ou na equação da teoria de *Kirchhoff* (1850), Eq.(4.3.24), o *Teorema da Divergência* dado por Eq.(4.3.1) e considerando-se uma carga distribuída uniforme $\boldsymbol{q}$, obtém-se:

$$\int_{\Omega_q} q(x) \frac{\partial \left[\dfrac{\partial w^*}{\partial x_\beta} \right]}{\partial x_\alpha} d\Omega_q(x) = q \oint_{\Gamma_q} \frac{\partial w^*}{\partial x_\beta} n_\alpha d\Gamma_q \tag{4.3.36}$$

Substituindo a equação da segunda derivada solução fundamental $\boldsymbol{w}^*$, em relação a $\boldsymbol{x_\alpha}$ e $\boldsymbol{x_\beta}$, devida a carga unitária, Eq.(4.3.35), na equação Eq.(4.3.36), obtém-se:

$$q\oint_{\Gamma_q}\frac{\partial w^*}{\partial x_\beta}n_\alpha d\Gamma_q = q\oint_{\Gamma_q}\left[\frac{1}{4\pi D}R\left(ln\left(\lambda R\right)-\frac{1}{2}\right)R_{,\beta}\right]n_\alpha d\Gamma_q \qquad (4.3.37)$$

Onde **R** corresponde à distância do ponto fonte até o ponto campo, $\boldsymbol{n_\alpha}$ corresponde à derivada da componente $\boldsymbol{x_\alpha}$ do elemento que contém o binário unitário na direção α em relação à normal do elemento que contém o ponto campo dada pela equação Eq.(4.3.28a) e $\boldsymbol{R_{,\beta}}$ corresponde a seguinte derivada:

$$R_{,\beta} = \frac{\partial R}{\partial x_\beta} \qquad (4.3.38)$$

5 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS PELO MEC

5.1 INTRODUÇÃO

Para as equações dos problemas físicos em geral, incluindo as placas no caso deste trabalho, e excetuando-se os casos restritos de geometria e de carregamento simples, a solução analítica pode ser difícil de ser obtida. Neste sentido, métodos numéricos emergem como uma importante ferramenta de simulação para a obtenção de uma solução aproximada por meio de alguns pontos discretos. Entre estes métodos numéricos, em destaque, encontram-se o *Método dos Elementos Finitos* (*MEF*) e *Método dos Elementos de Contorno* (*MEC*), sendo este último a ferramenta escolhida para este trabalho.

No início desta seção são definidos os conceitos e as grandezas envolvidas no processo de discretização do perímetro da placa em elementos de contorno, adotados como isoparamétricos lineares. Devido à utilização da solução fundamental estática, como mencionado na seção 4, o domínio da placa será discretizado em células quadradas constantes. Em seguida, o problema é transformado em um sistema de equações algébricas cuja solução determina valores de deslocamentos e esforços para pontos no contorno da placa. A partir desta solução, é possível a obtenção destes valores para quaisquer pontos no domínio da placa. As frequências naturais e as cargas críticas de instabilidade das placas são determinadas resolvendo o problema de autovalor formado pelo sistema de equações citados acima. Por fim, integrais analíticas são desenvolvidas para que as três equações necessárias para a equação integral das placas de *Mindlin* (1951) sejam obtidas para pontos de carregamento situados no contorno da placa, melhorando os resultados obtidos pela aproximação do método.

5.2 ELEMENTOS DE CONTORNO

No MEC, a discretização do domínio e contorno da placa divide este em um número finito de partes chamadas de elementos células e elementos de contorno, respectivamente. Os **elementos** adotados neste trabalho são **isoparamétricos**, ou seja, a função de interpolação adotada para a variação da geometria do elemento e dos deslocamentos e esforços em seu interior é de mesma ordem. No caso dos elementos células adotados neste trabalho, a função de interpolação é **constante**. A função de interpolação adotada para os elementos de contorno é **linear**. Os pontos (ou nós) de extremidade de um elemento são definidos como pontos nodais.

Adota-se um sistema de coordenadas locais normalizadas nos elementos de contorno, onde a variável intrínseca ξ adimensional tem origem no ponto médio do elemento e é válida no intervalo $-1 \leq \xi \leq +1$. Esta função de interpolação linear é representada por (*Figura 5.1)*:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi) \tag{5.2.1a}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{5.2.1b}$$

Um elemento linear possibilita ter a grandeza v, correspondente às coordenadas cartesianas x_i de um ponto interno ao elemento ou aos deslocamentos u_i ou aos esforços t_i no elemento, definida pelas coordenadas de seus nós de extremidade, como mostra a *Figura 5.1.*

Desta maneira, v, correspondente às coordenadas cartesianas x_i de um ponto interno ao elemento ou aos deslocamentos u_i ou aos esforços t_i no elemento, é escrita da seguinte maneira:

$$v(\xi) = \Phi_\gamma(\xi) V_i^\alpha \tag{5.2.2}$$

Onde Φ_γ corresponde à função de interpolação (φ_1, φ_2), e os índices correspondem respectivamente, $\boldsymbol{i}$ à direção (*1, 2 ou 3*) e α ao número do nó de extremidade do elemento (*nó 1 = nó inicial ou nó 2 = nó final*).

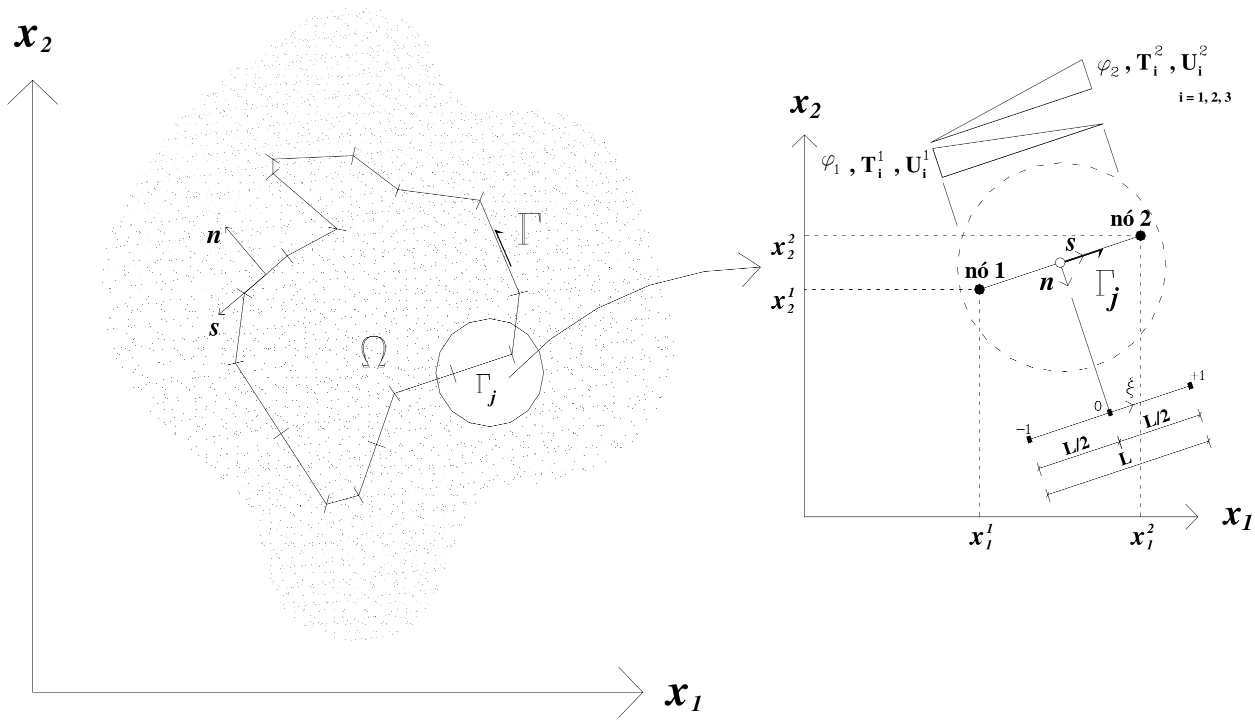


Figura 5.1 Função de interpolação linear, descrição geométrica do elemento linear e coordenada intrínseca ξ.

No caso dos elementos lineares, a Eq.(5.2.2) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$v(\xi) = \varphi_1(\xi)V_i^{\alpha} + \varphi_2(\xi)V_i^{\alpha} \tag{5.2.3}$$

Na forma matricial, a Eq.(5.2.2) para uma coordenada de qualquer ponto do elemento, incluindo os nós, é apresentada por:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \\ X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} \tag{5.2.4}$$

De maneira análoga, os esforços e deslocamentos de um ponto interno são:

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \end{Bmatrix} \tag{5.2.5}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \end{Bmatrix} \tag{5.2.6}$$

Onde os esforços são:

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_n \\ M_n \\ M_{ns} \end{Bmatrix} \tag{5.2.7}$$

$$\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_n^1 \\ M_n^1 \\ M_{ns}^1 \\ Q_n^2 \\ M_n^2 \\ M_{ns}^2 \end{Bmatrix} \tag{5.2.8}$$

Os deslocamentos para a análise de placas pela teoria de *Mindlin* (1951) são:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \psi_n \\ \psi_s \end{Bmatrix} \tag{5.2.9}$$

$$\begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w^1 \\ \psi_n^1 \\ \psi_s^1 \\ w^2 \\ \psi_n^2 \\ \psi_s^2 \end{Bmatrix} \tag{5.2.10}$$

A posição dos nós dos elementos determina se estes são contínuos, descontínuos ou mistos. Suas definições, ilustradas na *Figura 5.2*, são as seguintes:

a) **elemento contínuo**: ocorre quando os nós de um elemento são comuns aos elementos adjacentes e estes têm valores únicos. É geralmente usado em contornos sem angulosidades e sem variação de vinculações;

b) **elemento descontínuo**: ocorre quando há introdução de nós duplos, ou seja, em um único lugar geométrico são associados dois nós, cada qual com valores distintos de esforços ou deslocamentos. Permite-se assim uma descontinuidade.

Neste caso, os pontos de colocação são deslocados para o seu interior para a obtenção de duas integrais distintas. Este elemento representa uma angulosidade, por exemplo;

c) **elemento misto**: ocorre quando há necessidade da descontinuidade em apenas uma das extremidades do elemento.

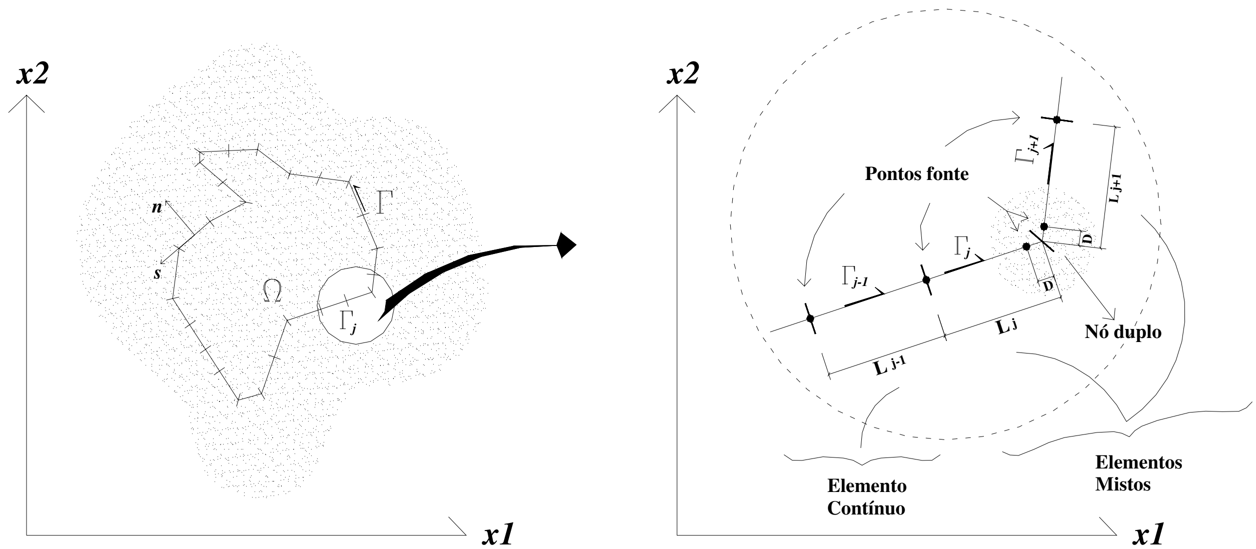


Figura 5.2 Tipos de elementos.

Neste trabalho os nós permanecem sempre nas extremidades dos elementos. Os elementos mistos e descontínuos são obtidos com a utilização de dois nós de mesma coordenada no contorno para introdução de descontinuidade.

Os **pontos de carregamento** (ou ponte fonte ou ponto de colocação) são os pontos correspondentes à singularidade, seja a carga unitária na direção x_3, seja o binário unitário na direção n ou s, representados matematicamente pela função *Delta de Dirac*.

5.3 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS

Um problema físico com condições de geometria e de carregamento genéricas é representado na *Figura 5.3* **A**. Para a resolução aproximada pelo *Método dos Elementos de Contorno – MEC*, o volume do corpo é primeiramente descrito em um domínio Ω com contorno Γ. Em seguida, este contorno é subdividido em elementos de contorno Γ_j, como mostra a *Figura 5.3* **C**.

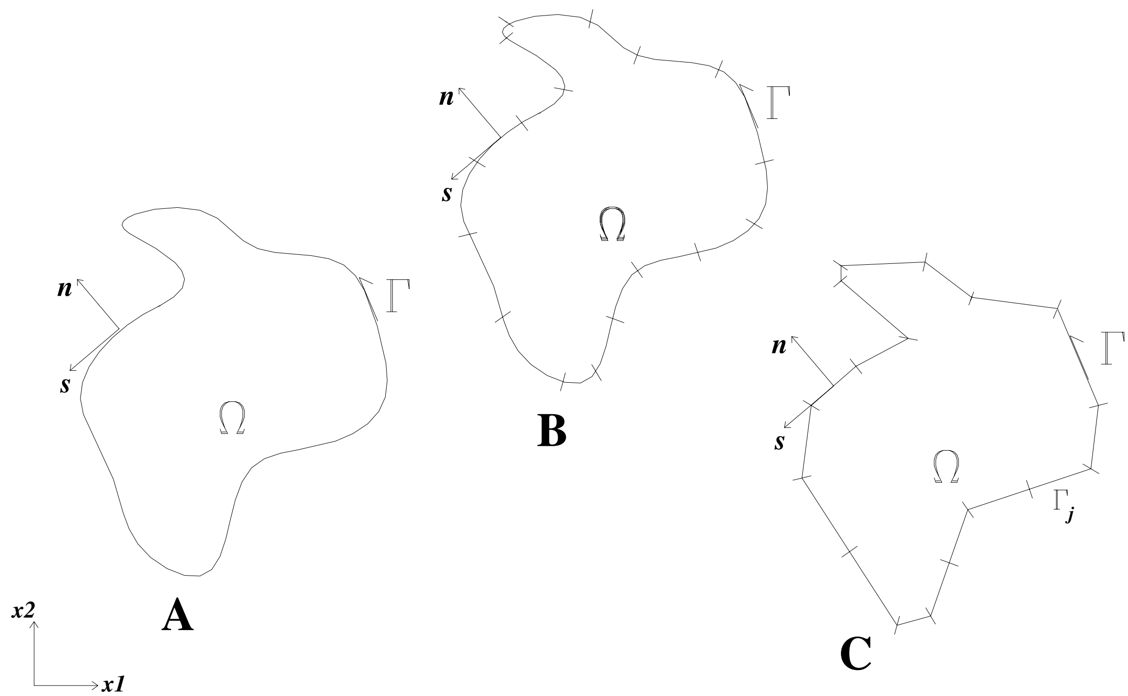


Figura 5.3 Discretização do contorno da placa.

A equação integral da teoria de *Mindlin* (1951) na forma generalizada é recapitulada:

$$C_{ij}u_j(\xi)+\oint_{\Gamma}T_{ij}^{*}(\xi,\eta)u_j(\eta)d\Gamma(\eta)=\oint_{\Gamma}U_{ij}^{*}(\xi,\eta)t_j(\eta)d\Gamma(\eta)+\int_{\Omega}U_{i3}^{*}(\xi,\eta_d)q(\eta_d)d\Omega(\eta_d) \tag{4.3.21}$$

Onde η é uma variável que percorre o contorno, η_d percorre o domínio e ξ é o ponto de carregamento. Os termos da equação Eq.(4.3.21) contendo (*) são correspondentes à solução fundamental e C_{ij} é a matriz que depende apenas da geometria, definidos na seção 4. Considerando que a integração de superfície é feita para cada elemento do contorno, a discretização desta é trivial e exata. Desta maneira, reescrevendo a Eq.(4.3.21), obtém-se:

$$C_{ij}u_j(\xi)+\sum_{N=1}^{E}\int_{\Gamma_E}T_{ij}^*(\xi,\eta)u_j(\eta)d\Gamma(\eta)=\sum_{N=1}^{E}\int_{\Gamma_E}U_{ij}^*(\xi,\eta)t_j(\eta)d\Gamma(\eta)+\sum_{Nc=1}^{N_{cel}}\int_{\Omega}U_{i3}^*(\xi,\eta_d)q(\eta_d)d\Omega(\eta_d) \tag{5.3.1}$$

Onde E é o número de elementos de contorno e N_{cel} é o número de elementos células. Nota-se que a integral de domínio é transformada em uma integral de contorno segundo item (4.3.3) da seção 4. Recapitulando:

a) solução fundamental devido ao binário unitário na direção α, a partir da Eq. (4.3.27):

$$\int_{\Omega}U_{i3}^*(\xi,\eta_d)q(\eta_d)d\Omega(\eta_d)=q\int_{\Gamma}\left[\frac{R^2}{8\pi D}\left(ln(\lambda R)-1\right)\right]n_\alpha d\Gamma(\eta) \tag{5.3.2}$$

b) solução fundamental devido à carga unitária, a partir da Eq. (4.3.33):

$$\int_{\Omega}q(\eta_d)U_{i3}^*(\xi,\eta_d)d\Omega(\eta_d)=q\int_{\Gamma}\left[\frac{R^3}{32\pi D}\left(ln(\lambda r)-\frac{5}{4}\right)-\frac{R}{2\pi D\lambda^2(1-\nu)}\left(ln(\lambda r)-\frac{1}{2}\right)\right]R_{,\gamma}n_\gamma d\Gamma \tag{5.3.3}$$

c) segunda derivada em relação a x_1 da solução fundamental para carga unitária, a partir da Eq. (4.3.40):

$$\int_{\Omega}\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}^*(\xi,\eta_d)q(\eta_d)d\Omega(\eta_d)=q\oint_{\Gamma}\left[\frac{1}{4\pi D}R\left(ln(\lambda R)-\frac{1}{2}\right)R_{,1}\right]n_1 d\Gamma \tag{5.3.4}$$

A transformação da variável de contorno Γ para a variável intrínseca ξ, é necessária para a integração das Eq.(5.3.1) a Eq.(5.3.4) em um elemento genérico. Esta é feita da seguinte maneira:

$$d\Gamma = \sqrt{\left(dx_1(\xi)\right)^2 + \left(dx_2(\xi)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx_1(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(\xi)}{d\xi}\right)^2}\, d\xi = \frac{L}{2} d\xi \qquad (5.3.5)$$

Onde $\boldsymbol{L}$ é o comprimento do elemento a ser integrado.

Substituindo-se a equação Eq. (5.2.2), onde a grandeza $\boldsymbol{v}$, corresponde aos deslocamentos $\boldsymbol{u_i}$ e dos esforços $\boldsymbol{t_i}$ no elemento (neste caso, não corresponde às coordenadas cartesianas $\boldsymbol{x_i}$ de um ponto interno ao elemento), e a aproximação Φ_γ, correspondente à função de interpolação (φ_1, φ_2) dada pela Eq.(5.2.2) para a transformação da variável de contorno Γ para a variável intrínseca ξ, na Eq.(5.3.1), obtém-se:

$$C_{ij}u_j(\xi) + \left\{ \int_{-1}^{+1} T_{ij}^*(\xi,\eta) \left[\sum_{N=1}^{3} \Phi_\gamma(\eta) U_i^\alpha \right] \frac{L}{2} d\xi(\eta) \right\}^E = \left\{ \int_{-1}^{+1} U_{ij}^*(\xi,\eta) \left[\sum_{N=1}^{3} \Phi_\gamma(\eta) T_i^\alpha \right] \frac{L}{2} d\xi(\eta) \right\}^E$$
$$+ \left\{ \int_{-1}^{+1} U_{i3}^*(\xi,\eta_d) \sum_{N=1}^{3} [q(\eta_d)] n \frac{L}{2} d\xi(\eta) \right\}^{N_{cel}} \qquad (5.3.6)$$

Na Eq.(5.3.6) percebe-se que os valores de $\boldsymbol{U_i}$, $\boldsymbol{T_i}$ ou $\boldsymbol{q}$ correspondentem a um ponto nodal que não é função da variável de integração, podendo ser retiradas do interior da integral do elemento. Nota-se que $\boldsymbol{n}$ e $[q(\eta_d)]$ variam de acordo com as equações Eq.(5.3.2) a Eq.(5.3.4).

Desta maneira, a equação discretizada final é a seguinte:

$$C_{ij}u_j(\xi)+\left\{\sum_{N=1}^{3}\int_{-1}^{+1}T_{ij}^{*}(\xi,\eta)\Phi_{\gamma}(\eta)\frac{L}{2}d\xi(\eta)\right\}^{E}U_i^{\alpha}=\left\{\sum_{N=1}^{3}\int_{-1}^{+1}U_{ij}^{*}(\xi,\eta)\Phi_{\gamma}(\eta)\frac{L}{2}d\xi(\eta)\right\}^{E}T_i^{\alpha}$$
$$+\left\{\sum_{N=1}^{3}\int_{-1}^{+1}U_{i3}^{*}(\xi,\eta_d)n\frac{L}{2}d\xi(\eta)\right\}^{N_{cel}}q(\eta_d)$$

(5.3.7)

As variáveis deste problema são os valores de deslocamentos $\boldsymbol{U_i}$ ($\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{\psi_n}$ e $\boldsymbol{\psi_s}$) ou esforços $\boldsymbol{T_i}$ ($\boldsymbol{Q_n}$, $\boldsymbol{M_n}$ e $\boldsymbol{M_{ns}}$).

Entretanto, a partir das condições naturais e essenciais de cada problema (condições de contorno), dadas pelas vinculações da placa, sempre são conhecidos três destes parâmetros da seguinte maneira:

a) No caso de um engaste: $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{\psi_n}$ e $\boldsymbol{\psi_s}$ são nulos, conhecidas como condições essenciais (ou fixadas), sendo $\boldsymbol{Q_n}$, $\boldsymbol{M_n}$ e $\boldsymbol{M_{ns}}$ as incógnitas.

b) No caso de uma borda livre (ou em balanço): $\boldsymbol{Q_n}$, $\boldsymbol{M_n}$ e $\boldsymbol{M_{ns}}$ são conhecidos, dados pela força cortante ou momento fletor ou torsor distribuídos na superfície, ou nulos na inexistência destes, conhecidas como condições naturais, sendo $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{\psi_n}$ e $\boldsymbol{\psi_s}$ as incógnitas.

c) No caso de um apoio simples: $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{M_n}$ e $\boldsymbol{M_{ns}}$ são conhecidos, dados pelo deslocamento transversal ou momento fletor ou torsor distribuídos na superfície, ou nulos na inexistência destes, sendo $\boldsymbol{Q_n}$, $\boldsymbol{\psi_n}$ e $\boldsymbol{\psi_s}$ as incógnitas.

Desta maneira, são três as incógnitas resultantes no problema de placas pela teoria de *Mindlin* (1951) e, portanto, são necessárias três equações integrais para a resolução deste.

A formulação alternativa dada em *Palermo Jr*. (2000), adotada neste trabalho, permite escrever as três equações integrais para um mesmo ponto de aplicação da carga, ou seja, são escritas as equações integrais para uma carga unitária, e duas outras para as derivadas desta, um binário unitário em torno da direção do vetor normal ao elemento e um binário unitário em torno da direção do vetor tangencial ao elemento. Além disso, quando os pontos de aplicação das cargas pertencem ao contorno do elemento, são feitas integrais analíticas nos elementos que contenham as cargas. A necessidade disto é devido ao fato desta situação gerar uma singularidade no ponto de aplicação da carga, pois o argumento da função logarítimo envolvida é nulo.

Para a resolução do problema pelas hipóteses dadas na teoria de *Kirchhoff* (1850) com três parâmetros, as variáveis relacionadas ao problema são as mesmas da teoria anterior, salvo ψ_s que é sempre incógnita. Consequentemente, M_{ns} é sempre nulo no contorno, pois conforme a dedução proposta em *Palermo Jr.* (2000), a solução fundamental desta teoria cássica é dada pela aproximação irrotacional e, portanto, o termo relacionado à função H (deformação pela força cortante) é zero.

5.4 DESENVOLVIMENTOS DAS INTEGRAIS NUMÉRICAS E ANALÍTICAS

A equação integral discretizada das placas, Eq.(5.3.5), usada para resolução através do *Método dos Elementos de Contorno*, é repetida a seguir:

$$C_{ij}u_j(\xi)+\left\{\sum_{N=1}^{3}\int_{-1}^{+1}T_{ij}^{*}(\xi,\eta)\Phi_{\gamma}(\eta)\frac{L}{2}d\xi(\eta)\right\}^{E}U_i^{\alpha}=\left\{\sum_{N=1}^{3}\int_{-1}^{+1}U_{ij}^{*}(\xi,\eta)\Phi_{\gamma}(\eta)\frac{L}{2}d\xi(\eta)\right\}^{E}T_i^{\alpha}$$
$$+\left\{\sum_{N=1}^{3}\int_{\Omega}U_{i3}^{*}(\xi,\eta_d)n\frac{L}{2}d\xi(\eta)\right\}^{N_{cel}}q(\eta_d) \tag{5.3.7}$$

A integração numérica é feita através da quadratura de Gauss.

As integrações analíticas são tratadas no sentido do valor principal de Cauchy ou na parte finita da integral de Hadammad.

Na integração analítica, é possível fazer uma simplificação da variável intrínseca ξ. Esta passa a ser escrita em função de $\boldsymbol{a}$, correspondente à distância entre o ponto de aplicação da carga e uma das extremidades do elemento, e em função de r.

As funções de intepolação para a integração analítica podem ser simplificadas a:

$$\varphi_1=\begin{cases}1+\dfrac{r-a}{l} & para \quad (\Gamma\leq 0)\\[2ex] 1-\dfrac{r+a}{l} & para \quad (\Gamma>0)\end{cases} \tag{5.4.1a}$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} \dfrac{a-r}{l} & para \quad (\Gamma \leq 0) \\[2ex] \dfrac{a+r}{l} & para \quad (\Gamma > 0) \end{cases} \tag{5.4.1b}$$

A integração é manipulada de seguinte maneira:

$$\int_0^l \Phi_\gamma f^* d\Gamma = \int_{-a}^0 \Phi_\gamma f^* d\Gamma + \int_0^{l-a} \Phi_\gamma f^* d\Gamma = -\int_a^0 \Phi_\gamma f^* dr + \int_0^{l-a} \Phi_\gamma f^* dr = \int_0^a \Phi_\gamma f^* dr + \int_0^{l-a} \Phi_\gamma f^* dr \tag{5.4.2}$$

Onde $\boldsymbol{f}^{\,*}$ tem os valores das funções de deslocamentos $\boldsymbol{w}$, $\psi_{\boldsymbol{n}}$, $\psi_{\boldsymbol{s}}$ ou esforços $\boldsymbol{Q_n}$, $\boldsymbol{M_n}$, $\boldsymbol{M_{ns}}$ e Φ_γ, corresponde à função de interpolação (φ_1, φ_2).

5.5 MONTAGEM DO SISTEMA LINEAR DE EQUAÇÕES

Uma vez realizadas as operações das integrais numéricas e integrais analíticas, através da equação Eq.(5.3.7) sobre cada elemento de contorno, para cada uma das três cargas unitárias (uma força e dois binários) aplicadas aos **N** nós de contorno da placa, são obtidas **3N** equações lineares, resultando no seguinte sistema linear de equações:

$$H.U = G.T + F \tag{5.5.1}$$

Onde:

a) $\boldsymbol{U}$: São os deslocamentos generalizados (deslocamentos transversais $\boldsymbol{w}$, as rotações na direção normal $\psi_{\boldsymbol{n}}$ e as rotações na direção tangencial ao contorno $\psi_{\boldsymbol{s}}$ para a teoria de Mindlin ou $\boldsymbol{w}$, $\partial w/\partial n$, $\partial w/\partial s$, para a teoria de Kirchhoff);

b) $\boldsymbol{T}$: São os esforços generalizados (a força cortante $\boldsymbol{Q_n}$ na direção normal, o momento fletor $\boldsymbol{M_n}$ na direção normal ao contorno e o momento volvente $\boldsymbol{M_{ns}}$ na direção tangencial ao contorno);

c) $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{G}$: São as matrizes globais de influência, *Figura 5.4.*, dependentes apenas da geometria do problema (a matriz $\boldsymbol{H}$ em coordenadas $\boldsymbol{ns}$ corresponde às soluções fundamentais $\boldsymbol{Q_n}^*$, $\boldsymbol{M_n}^*$e $\boldsymbol{M_{ns}}^*$, a matriz $\boldsymbol{G}$ às soluções fundamentais $\boldsymbol{w}^*$, ψ_n^* *e* ψ_s^* para a teoria de Mindlin ou $\boldsymbol{w}^*$, $\partial w^*/\partial n$, $\partial w^*/\partial s$, para a teoria de Kirchhoff);

d) $\boldsymbol{F}$: É o carregamento resultante do domínio.

Considerando as condições de contorno, impõem-se as **3N** variáveis conhecidas.

Com uma conveniente troca de membros das colunas das matrizes $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{G}$, para que os valores conhecidos estejam apenas no lado direito da equação e as incógnitas do lado esquerdo, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$A.X = B \tag{5.5.2}$$

O vetor $\boldsymbol{X}$ contém as **3N** variáveis incógnitas do contorno que podem ser tanto os deslocamentos $\boldsymbol{w}$, ψ_n, ψ_s para a teoria de Mindlin ou $\boldsymbol{w}$, $\partial w/\partial n$, $\partial w/\partial s$, para a teoria de Kirchhoff, quanto os esforços $\boldsymbol{Q_n}$, $\boldsymbol{M_n}$, $\boldsymbol{M_{ns}}$. O vetor $\boldsymbol{B}$ contém os deslocamentos e esforços prescritos no contorno dados pelas condições de contorno, bem como pelo carregamento de domínio $\boldsymbol{F}$. Finalmente, a matriz $\boldsymbol{A}$ acumula coeficientes das variáveis de deslocamentos e esforços incógnitas, obtidos do processo de integração numérica e analítica. Observa-se que esta última matriz é função apenas da geometria do problema, não dependendo das cargas externa aplicadas e tem dimensão **3N** x **3N**.

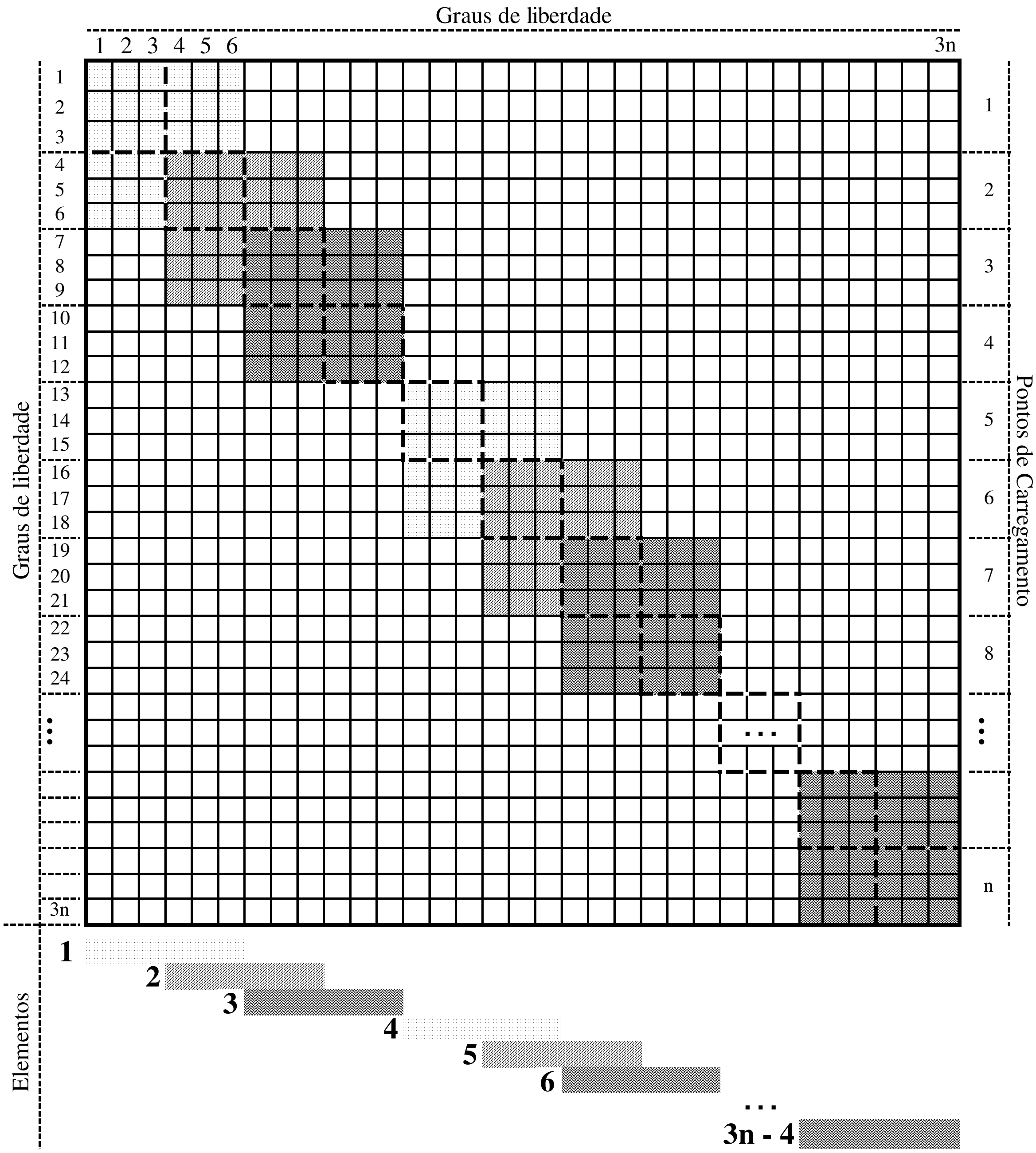


Figura 5.4 Matrizes $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{G}$.

5.6 DESLOCAMENTOS EM PONTOS INTERNOS (DOMÍNIO DA PLACA)

Os deslocamentos em pontos do domínio são determinados de maneira direta a partir dos valores encontrados no contorno e com o efeito do carregamento no domínio.

Para um ponto situado no domínio da placa, a partir da Eq.(4.3.19), sabe-se que:

$$C_{ij} = 1 \tag{5.6.1}$$

De maneira análoga à feita para a discretização para pontos de carregamento situados no contorno, da Eq.(4.3.21) obtém-se:

$$U^{\text{int}} = -H^{\text{int}}.U + G^{\text{int}}.T + F^{\text{int}} \tag{5.6.3}$$

Onde:

a) U^{int} : São os deslocamentos nos pontos do domínio;

b) U : São os deslocamentos generalizados (deslocamentos transversais $\boldsymbol{w}$, as rotações na direção normal $\psi_{\boldsymbol{n}}$ e as rotações na direção tangencial ao contorno $\psi_{\boldsymbol{s}}$ para a teoria de Mindlin ou $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{jw/jn}$, $\boldsymbol{jw/js}$, para a teoria de Kirchhoff);

c) $\boldsymbol{T}$: São os esforços generalizados (a força cortante $\boldsymbol{Q_n}$ na direção normal, o momento fletor $\boldsymbol{M_n}$ na direção normal ao contorno e o momento volvente $\boldsymbol{M_{ns}}$ na direção tangencial ao contorno);

d) H^{int} e G^{int} : São as matrizes globais de influência, dependentes apenas da geometria do problema (a matriz $\boldsymbol{H}$ em coordenadas $\boldsymbol{ns}$ corresponde às soluções fundamentais $\boldsymbol{Q_n}^*$, $\boldsymbol{M_n}^*$e $\boldsymbol{M_{ns}}^*$, a matriz $\boldsymbol{G}$ às soluções fundamentais $\boldsymbol{w}^*$, $\psi_{\boldsymbol{n}}^*$ *e* $\psi_{\boldsymbol{s}}^*$ para a teoria de Mindlin ou $\boldsymbol{w}^*$, $\boldsymbol{jw^*/jn}$, $\boldsymbol{jw^*/js}$, para a teoria de Kirchhoff, para os pontos de domínio;

e) F^{int} : É o carregamento resultante do domínio.

5.7 ESFORÇOS EM PONTOS INTERNOS (DOMÍNIO DA PLACA)

Os momentos fletores e forças cortantes em pontos do domínio da placa são determinados a partir dos deslocamentos (de transação ou de rotação) nos pontos escolhidos.

A equação discretizada é obtida analogamente às equações para deslocamentos nos pontos de contorno e nos pontos do domínio, Eq.(5.3.5) e Eq.(5.6.3) respectivamente, obtendo-se:

$$M_{\alpha\beta}(\xi) = \sum_{N=1}^{E} \int_{\Gamma_E} T^{*}_{\alpha\beta k}(\xi,\eta)\Phi^{k}(\eta) d\Gamma(\eta) U^{k} + \sum_{N=1}^{E} \int_{\Gamma_E} U^{*}_{\alpha\beta k}(\xi,\eta)\Phi^{k}(\eta) d\Gamma(\eta) T^{k} \quad (5.7.1a)$$

$$Q_{3\beta}(\xi) = -\sum_{N=1}^{E} \int_{\Gamma_E} T^{*}_{3\beta k}(\xi,\eta)\Phi^{k}(\eta) d\Gamma(\eta) U^{k} + \sum_{N=1}^{E} \int_{\Gamma_E} U^{*}_{3\beta k}(\xi,\eta)\Phi^{k}(\eta) d\Gamma(\eta) T^{k} \quad (5.7.1b)$$

Na forma matricial:

$$M = -H^{*}.U + G^{*}.T + F^{*} \quad (5.7.2a)$$

$$Q = -H^{**}.U + G^{**}.T + F^{**} \quad (5.7.2b)$$

Onde:

a) U : São os deslocamentos generalizados (deslocamentos transversais $\boldsymbol{w}$, as rotações na direção normal ψ_n e as rotações na direção tangencial ao contorno ψ_s para a teoria de Mindlin ou $\boldsymbol{w}$, jw/jn, jw/js, para a teoria de Kirchhoff);

b) $\boldsymbol{T}$: São os esforços generalizados (a força cortante $\boldsymbol{Q_n}$ na direção normal, o momento fletor $\boldsymbol{M_n}$ na direção normal ao contorno e o momento vovlente $\boldsymbol{M_{ns}}$ na direção tangencial ao contorno);

c) H^* , H^{**} , G^* e G^{**} : São as matrizes globais de influência, dependentes apenas da geometria do problema (a matriz H^* em coordenadas ***ns*** corresponde às soluções fundamentais $\boldsymbol{Q_n}^*$, $\boldsymbol{M_n}^*$ e $\boldsymbol{M_{ns}}^*$, a matriz G^* às soluções fundamentais $\boldsymbol{w}^*$, ψ_n^* *e* ψ_s^* para a teoria de Mindlin ou $\boldsymbol{w}^*$, $\boldsymbol{jw^*/jn}$, $\boldsymbol{jw^*/js}$, para a teoria de Kirchhoff, para os pontos de domínio escolhidos;

d) $\boldsymbol{F^*}$ e $\boldsymbol{F^{**}}$: São correspondentes ao carregamento resultante do domínio.

5.8 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALORES APLICADO À VIBRAÇÃO LIVRE EM PLACAS

A equação integral para deslocamentos em pontos do contorno na forma matricial, a partir da Eq. (3.2) é a seguinte:

$$H \cdot U = G.P + \chi^4 M_c \cdot w_c \tag{5.8.1}$$

A matriz $\boldsymbol{H}$ em coordenadas $\boldsymbol{ns}$ corresponde à integração das soluções fundamentais $\boldsymbol{Q_n}^*$, $\boldsymbol{M_n}^*$ e $\boldsymbol{M_{ns}}^*$ para pontos situados ao longo do contorno. A matriz $\boldsymbol{G}$ em coordenadas $\boldsymbol{ns}$ corresponde à integração das soluções fundamentais $\boldsymbol{w}^*$, $\psi_n{}^*$ e $\psi_s{}^*$ para pontos situados ao longo do contorno. A matriz $\boldsymbol{M_c}$ em coordenadas $\boldsymbol{ns}$ corresponde à integração das soluções fundamentais $\boldsymbol{w}^*$ para ponto central situado no domínio de cada célula. Para a inclusão do efeito da inércia rotatória esta matriz corresponde também à integração das soluções fundamentais $\psi_1{}^*$ *e* $\psi_2{}^*$ nas colunas 2 e 3. O vetor $\boldsymbol{w_c}$ contém os deslocamentos no centro do domínio de cada célula correspondentes a $\boldsymbol{w}$, ψ_1 e ψ_2. O vetor $\boldsymbol{P}$ contém os esforços no contorno: a cortante na direção normal $\boldsymbol{Q_n}$, o momento volvente $\boldsymbol{M_{ns}}$ e o momento fletor na direção normal $\boldsymbol{M_n}$ no contorno; e o vetor $\boldsymbol{U}$ é um vetor contendo deslocamentos no contorno, deslocamentos transversais $\boldsymbol{w}$, as rotações na direção normal ψ_n e as rotações na direção tangencial ao contorno ψ_s para a teoria de Mindlin ou $\boldsymbol{w}$, jw/jn, jw/js, para a teoria de Kirchhoff.

χ^4 é uma constante relacionada à freqüência natural expressa por:

$$\omega = \sqrt{\frac{\chi^4}{\rho h}} \tag{5.8.2}$$

De maneira análoga, a equação integral para deslocamentos em pontos do domínio na forma matricial, a partir da Eq. (3.3) para a teoria de Mindlin (1951), ou Eq.(3.5) para a teoria clássica, é a seguinte:

$$w_i = -IH.U + IG.P + \chi^4 M_{ic}.w_c \tag{5.8.3}$$

A matriz $\boldsymbol{IH}$ em coordenadas $\boldsymbol{ns}$ corresponde à integração das soluções fundamentais $\boldsymbol{Q_n}^*$, $\boldsymbol{M_n}^*$ **e** $\boldsymbol{M_{ns}}^*$ para pontos situados no domínio de cada célula a partir dos valores obtidos no contorno. A matriz $\boldsymbol{IG}$ em coordenadas $\boldsymbol{ns}$ corresponde à integração das soluções fundamentais $\boldsymbol{w}^*$ para pontos situados no domínio de cada célula a partir dos valores obtidos no contorno. A matriz $\boldsymbol{M_{ic}}$ em coordenadas $\boldsymbol{ns}$ corresponde à integração das soluções fundamentais $\boldsymbol{w}^*$ para pontos situados no domínio de cada célula. Para a inclusão do efeito da inércia rotatória esta matriz corresponde também à integração das soluções fundamentais ψ_1^* *e* ψ_2^* nas colunas 2 e 3. O vetor $\boldsymbol{w_i}$ contém os deslocamentos no centro do domínio de cada célula correspondentes a $\boldsymbol{w}$, ψ_1 e ψ_2.

Um sistema de equações pode ser montado, tal que representa um problema clássico de autovalor, a partir de Eq. (5.8.1) e Eq.(5.8.3):

$$\mathrm{S_{cc}} \cdot \mathrm{X} - \chi^4 \mathrm{M_c} \cdot \mathrm{w_c} = 0 \tag{5.8.4}$$

$$\mathrm{w_i} = -\mathrm{S_{ci}}.\mathrm{X} + \chi^4 \mathrm{M_{ic}}.\mathrm{w_c} \tag{5.8.5}$$

Correspondendo $\mathbf{S_{cc}}$ à matriz proveniente da integração das soluções fundamentais dos pontos situados no contorno, descrita pelas matrizes $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{G}$, valores conhecidos e invariáveis com relação à frequência, $\boldsymbol{X}$ ao vetor de deslocamentos ou esforços incógnitos dos pontos do contorno e $\mathbf{S_{ci}}$ à matriz proveniente da integração das soluções fundamentais dos pontos situados no centro de cada célula do domínio, também valores conhecidos e invariáveis com relação à frequência. Substituindo a equação Eq.(5.8.4) na equação Eq.(5.8.5):

$$w_i = \chi^4 (-S_{ci}.S_{cc}^{-1}.M_c + M_{ic}).w_c \tag{5.8.6}$$

O fator dinâmico é encontrado com o quociente de Rayleigh, calculado pela iteração inversa, convergente mesmo em problemas de autovalores mal condicionados, como se sabe da literatura [Wilkinson (1988)]:

$$\chi^4 = \frac{w_i \cdot w_c}{w_i \cdot w_i} \tag{5.8.7}$$

5.9 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALORES APLICADO À INSTABILIDADE DE PLACAS

A equação integral para deslocamentos em pontos do contorno na forma matricial, a partir da Eq. (3.327) é a seguinte:

$$H \cdot U = G.P + N_{\alpha\beta} M_c \cdot w_c \tag{5.9.1}$$

A matriz $\boldsymbol{H}$ em coordenadas $\boldsymbol{ns}$ corresponde à integração das soluções fundamentais $\boldsymbol{Q_n}^*$, $\boldsymbol{M_n}^*$ e $\boldsymbol{M_{ns}}^*$ para pontos situados ao longo do contorno. A matriz $\boldsymbol{G}$ em coordenadas $\boldsymbol{ns}$ corresponde à integração das soluções fundamentais $\boldsymbol{w}^*$, $\boldsymbol{\psi_n}^*$ e $\boldsymbol{\psi_s}^*$ para pontos situados ao longo do contorno. A matriz $\boldsymbol{M_c}$ em coordenadas $\boldsymbol{ns}$ corresponde à integração das soluções fundamentais $\boldsymbol{w}^*$ para ponto central situado no domínio de cada célula. O vetor $\boldsymbol{w_c}$ contém as curvaturas no centro do domínio de cada célula correspondentes à segunda derivada dos deslocamentos transversais $\boldsymbol{w}$ na direção $\boldsymbol{x_\alpha}$. O vetor $\boldsymbol{P}$ contém os esforços no contorno: a cortante na direção normal $\boldsymbol{Q_n}$, o momento volvente $\boldsymbol{M_{ns}}$ e o momento fletor na direção normal $\boldsymbol{M_n}$ no contorno; e o vetor $\boldsymbol{U}$ é um vetor contendo deslocamentos no contorno, deslocamentos transversais $\boldsymbol{w}$, as rotações na direção normal ψ_n e as rotações na direção tangencial ao contorno ψ_s para a teoria de Mindlin ou $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{\partial w/\partial n}$, $\boldsymbol{\partial w/\partial s}$, para a teoria de Kirchhoff. O vetor $N_{\alpha\beta}$ contém o carregamento normal ao plano da espessura da placa.

De maneira análoga, a equação integral para deslocamentos em pontos do domínio na forma matricial, a partir da Eq. (3.328) é a seguinte:

$$w_i = -IH.U + IG.P + N_{\alpha\beta} M_{ic}.w_c \tag{5.9.2}$$

A matriz $\boldsymbol{IH}$ em coordenadas $\boldsymbol{ns}$ corresponde à integração da segunda derivada das das soluções fundamentais $\boldsymbol{Q_n^*}$, $\boldsymbol{M_n^*}$ **e** $\boldsymbol{M_{ns}^*}$ para pontos situados no domínio de cada célula a partir dos valores obtidos no contorno. A matriz $\boldsymbol{IG}$ em coordenadas $\boldsymbol{ns}$ corresponde à integração da segunda derivada das soluções fundamentais $\boldsymbol{w^*}$, $\boldsymbol{\psi_n^*}$ e $\boldsymbol{\psi_s^*}$ para pontos situados no domínio de cada célula a partir dos valores obtidos no contorno. A matriz $\boldsymbol{M_{ic}}$ em coordenadas $\boldsymbol{ns}$ corresponde à integração da segunda derivada das soluções fundamentais $\boldsymbol{w^*}$ para pontos situados no domínio de cada célula a partir dos valores obtidos no contorno. O vetor $\boldsymbol{w_i}$ contém as curvaturas no centro do domínio de cada célula correspondentes à segunda derivada dos deslocamentos transversais $\boldsymbol{w}$ na direção $\boldsymbol{x_\alpha}$.

Um sistema de equações pode ser montado, tal que representa um problema clássico de autovalor, a partir de Eq. (5.9.1) e Eq.(5.9.2):

$$S_{cc} \cdot X - N_{\alpha\beta} M_c \cdot w_c = 0 \tag{5.9.3}$$

$$w_i = -S_{ci}.X + N_{\alpha\beta} M_{ic}.w_c \tag{5.9.4}$$

Correspondendo $\mathbf{S_{cc}}$ à matriz proveniente da integração das soluções fundamentais dos pontos situados no contorno, descrita pelas matrizes $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{G}$, valores conhecidos e invariáveis com relação à frequência, $\boldsymbol{X}$ ao vetor de deslocamentos ou esforços incógnitos dos pontos do contorno e $\mathbf{S_{ci}}$ à matriz proveniente da integração das soluções fundamentais dos pontos situados no centro de cada célula do domínio, também valores conhecidos e invariáveis com relação à frequência. Substituindo a equação Eq.(5.9.3) na equação Eq.(5.9.4):

$$w_i = N_{\alpha\beta}(-S_{ci}.S_{cc}^{-1}.M_c + M_{ic}).w_c \tag{5.9.5}$$

O autovalor é calculado pela iteração inversa como no problema de vibração livre:

$$N_{\alpha\beta} = \frac{w_i \cdot w_c}{w_i \cdot w_i} \tag{5.9.6}$$

6 RESULTADOS

6.1 INTRODUÇÃO

Nesta seção são apresentados exemplos numéricos para a análise das placas finas e de espessura moderada de acordo com a teoria de *Kirchhoff* (1850) e de *Mindlin* (1951). Diversos exemplos foram testados variando-se as condições de apoio e a espessura de placas quadradas.

Condições de contorno *hard* e *soft* foram prescritas de acordo com as considerações de *Bathe et al.* (1990), ou seja, é permitido considerar nula a rotação tangencial (*condição hard*) ou é permitido considerar o contrário, o momento volvente nulo (*condição soft*).

É usada a formulação do MEC apresentada em *Palermo Jr.* (2000) que inclui o efeito da deformação por cortante na sua forma completa e usa a aproximação irrotacional para obter os valores correspondentes à teoria clássica.

Todos os parâmetros nodais foram posicionados nos extremos dos elementos. Funções lineares foram usadas para a aproximação dos deslocamentos e dos esforços nos elementos de contorno. Os pontos de carregamento (carga vertical unitária ou binário unitário na direção α) foram posicionados no contorno da placa. São utilizados elementos descontínuos quando os vetores tangenciais ao contorno sofrem variações bruscas de direção e elementos contínuos no caso contrário. O emprego de elementos descontínuos resulta em nós duplos nos cantos das placas e em reposicionamento dos pontos fonte para dentro do elemento numa distância igual a um quarto do comprimento deste.

Expressões analíticas foram usadas para integração feita nos elementos situados no contorno das placas que continham o ponto de carregamento para tratamento das singularidades das funções aplicadas ao problema e integração de Gauss-Legendre foi feita para os elementos que não continham este ponto fonte. O programa computacional desenvolvido para o Método dos Elementos de Contorno – MEC – foi escrito na linguagem Fortran.

Os resultados obtidos de momentos fletores e momentos volventes com carregamento estático, de freqüências naturais e de cargas críticas de instabilidade de placas são comparados com valores analíticos ou valores obtidos pelo MEC e por outros métodos numéricos aplicados à teoria clássica e à de *Mindlin* encontrados na literatura.

6.2 CARREGAMENTO ESTÁTICO

6.2.1 Variação das condições de apoio das placas

Placas quadradas com *2,00 m* de lado foram testadas com quinze condições de apoio e os valores dos deslocamentos e esforços obtidos são mostrados nas tabelas a seguir. Foram adotados os valores de Módulo de Young $E = 2,05 \times 10^{11}\ N/m^2$, coeficiente de Poisson variável, carregamento vertical uniforme $q = -400,00\ N/m^2$, 24 pontos de Gauss e espessura da placa fina $h = 0,06\ m$ e placa moderamente espessa de $h = 0,20\ m$. A discretização do contorno adotada foi de *4x10* elementos de contorno com *44* nós de contorno, sendo os nós duplos posicionados nos quatro cantos das placas.

Estes dados foram usados por *Sanches* (1998), *Simões* (2001) e por *Andrade* (2001), trabalhos também baseados no MEC e que apresentam bons resultados quando comparados com outras discretizações de contorno. Os trabalhos de *Sanches* (1998) e *Simões* (2001) basearam-se na teoria clássica de placas e o trabalho de *Andrade* (2001), na teoria de *Reissner* (1947) e na teoria de *Mindlin* (1951), com a formulação da solução fundamental de *Weeën* (1982); os pontos de carregamento são aplicados externamente ao contorno das placas.

Os resultados para placas com carregamento estático, ***Tabela 6.1*** e ***Tabela 6.2***, são comparados com valores obtidos em *Bares* (1969) pelo Método das Diferenças Finitas e em *Andrade* (2001) pelo MEC para validação do programa implementado.

Tabela 6.1 Momento Fletor e Momento Volvente nas Placas Finas.

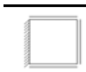
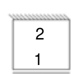
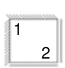
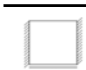
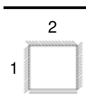
Placas Finas AE - Carga Estática

Apoio das Placas	ν	y, x [N.m/m]	Teoria Clássica			Teoria de Reissner (1947)		Teoria de Mindlin (1951)			
			Bares (1969) Diferenças Finitas	**Andrade (2001)** *MEC* *8 elem./ lado*	**Sakanaka (2006)** *MEC* *10 elem./ lado*	**Andrade (2001)** *MEC* *10 elem./ lado*		**Andrade (2001)** *MEC* *10 elem./ lado*		**Sakanaka (2006)** *MEC* *10 elem./ lado*	
						Soft	***Hard***	***Soft***	***Hard***	***Soft***	***Hard***
AAAA	0,0	M_{xx}	58,88	58,99	59,03514	60,53	58,91	60,70	58,94	60,55171	58,80223
		M_{yy}	58,88	58,99	59,03514	60,53	58,91	60,70	58,94	60,55171	58,80223
AAAE	0,0	M_{eng}	-134,40	-135,42	-135,02670	-136,80	-134,63	-136,92	-134,65	-136,6790	-134,40891
		M_{xx}	50,88	51,03	50,97451	51,91	50,98	51,96	51,00	51,84786	50,89266
		M_{yy}	38,88	38,93	38,96342	39,50	39,02	39,54	39,03	39,50224	38,99607
AEAE	0,0	M_{eng}	-111,84	---*	-112,25891	-113,16	-112,18	-113,14	-112,19	-113,0017	-112,04464
		M_{xx}	45,60	45,58	45,47995	46,08	45,55	46,07	45,56	45,98160	45,47187
		M_{yy}	25,28	25,34	25,39804	25,42	25,51	25,42	25,51	25,45046	25,53184
AAEE	0,0	M_{eng}	-108,32	-109,71	-109,22057	-110,01	-108,96	-110,06	-108,97	-109,88574	-108,79661
		M_{xx}	37,44	37,46	37,45329	37,84	37,51	37,86	37,51	37,82136	37,47974
		M_{yy}	37,44	37,46	37,45329	37,84	37,51	37,86	37,51	37,82136	37,47974
AEEE	0,0	M_{eng1}	-95,36		-96,67809					-96,94517	-96,43076
		M_{eng2}	-87,36		-88,93807					-88,96797	-88,61495
		M_{xx}	36,32		36,28278					36,52423	36,30069
		M_{yy}	26,88		26,88805					26,93775	26,97169
EEEE	0,0	M_{eng}	-82,40	-83,41	-82,94151	-82,90	-82,74	-82,91	-82,74	-82,83790	-82,66399
		M_{xx}	28,16	28,19	28,19449	28,23	28,22	28,23	28,22	28,23670	28,23416
		M_{yy}	28,16	28,19	28,19449	28,23	28,22	28,23	28,22	28,23670	28,23416

* Inconsistência de valores nas páginas 139 e 140.

Tabela 6.2 Momento Fletor e Momento Volvente nas Placas Finas com Borda Livre.

Placas Finas com bordas livres AEL - Carga Estática

Apoio das Placas	ν	y, x [N.m/m]	Teoria Clássica			Teoria de Reissner (1947)		Teoria de Mindlin (1951)			
			Bares (1969) Diferenças Finitas	Andrade (2001) *MEC* *8 elem./ lado*	Sakanaka (2006) *MEC* *10 elem./ lado*	Andrade (2001) *MEC* *10 elem./ lado*		Andrade (2001) *MEC* *10 elem./ lado*		Sakanaka (2006) *MEC* *10 elem./ lado*	
						Soft	***Hard***	***Soft***	***Hard***	***Soft***	***Hard***
	0,2	M_{eng}			-868,8141					-880,3922	-881,1388
		M_{xx}			-212,4447					-216,4312	-216,4031
LLLE		M_{yy}			-28,73173					-30,93626	-30,88907
	0,3										
		M_{xx}	196,00		211,09357					215,23130	215,15935
LALA		M_{yy}	43,36		31,75651					26,81082	27,37639
	0,3										
		M_{xx}	127,84	128,61	132,94969	130,01	128,41	129,49	127,85	136,10220	134,05778
LAAA		M_{yy}	62,40	61,03	57,84094	62,73	62,29	62,41	61,96	56,38333	55,90926
	0,2	M_{eng}	-177,28	-190,76	-193,62200	-190,79	-189,56	-190,18	-189,00	-195,15668	-193,82591
		M_{xx1}	67,84	66,26	67,68900	66,86	66,49	66,61	66,22	68,81728	68,33660
		M_{yy1}	28,64	27,04	24,79500	27,53	27,77	27,38	27,67	23,46256	23,80804
		M_{xx2}	106,08	105,98	109,42600	106,59	105,84	106,13	105,35	111,64762	110,72814
LAEA*		M_{yy2}	41,92	41,24	37,70100	42,57	42,77	41,99	42,22	35,51933	35,67718
	0,15	M_{eng}			-166,88339					-167,91414	-166,61889
		M_{xx}			78,08193					78,91020	78,26706
ALEA		M_{yy}			27,54278					26,70958	26,56702
	0,3	M_{eng}	-134,40	-129,92	-130,82554	-131,74	-131,21	-130,28	-130,18	-130,48687	-130,38937
		M_{xx}	65,60	65,08	64,97786	65,56	65,42	64,93	64,87	64,84998	64,80121
LELE		M_{yy}	17,60	16,98	13,74501	18,10	17,87	17,18	17,17	11,65630	11,66640
	0,2	M_{eng}	-220,56	-199,90	-208,96284	-204,86	-204,17	-203,85	-203,69	-211,17187	-211,19818
		M_{xx1}	-11,04	-11,87	-17,32734	-11,54	-11,77	-12,42	-12,44	-16,29034	-16,28550
		M_{yy1}	-11,04	-11,87	-17,32734	-11,54	-11,77	-12,42	-12,44	-16,29034	-16,28550
		M_{xx2}	21,12	20,66	14,35189	21,54	21,27	19,64	19,58	14,32582	14,33394
LLEE**		M_{yy2}	21,12	20,66	14,35189	21,54	21,27	19,64	19,58	14,32582	14,33394
	0,15	M_{eng}	-123,36		-121,99985					-121,97656	-121,51499
		M_{xx}	57,92		57,74807					57,94358	57,71205
LEAE		M_{yy}	20,16		19,05259					18,42163	18,42091
	0,15	M_{eng1}	-106,24	-105,18	-106,02480	-106,68	-106,44	-105,99	-105,88	-105,65210	-105,52945
		M_{eng2}	-89,44	-91,94	-91,08194	-91,50	-91,27	-91,25	-91,05	-90,61855	-90,40464
		M_{xx}	46,08	48,47	48,51177	48,72	48,71	48,45	48,44	48,53471	48,51985
LEEE		M_{yy}	20,00	20,43	19,29699	20,86	20,75	20,52	20,52	18,61480	18,60770

*Os pontos 1 e 2 estão a 0,4 L distantes da borda horizontal mais próxima e a 0,5 L das bordas verticais, sendo L o comprimento do lado da placa.

**Os pontos 1 e 2 estão a 0,4 L distantes das bordas mais próximas, sendo L o comprimento do lado da placa.

Entre os casos de placas finas AE sem borda livre observa-se pequenas diferenças entre os valores obtidos neste trabalho com os valores encontrados na literatura, sendo estas menores que 2%. Já nos casos AEL as diferenças foram maiores, destacando a interferência da borda livre nos resultados. Notadamente, nos casos com duas bordas livres LALA, LELE e LLEE, onde a diferença média está em torno de 24%, sendo os piores resultados são para os momentos calculados perpendicularmente às bordas livres. Nos casos com apenas uma borda livre, a diferença média desce para 6%. Estes valores estão nas ***Tabela 6.3*** e ***Tabela 6.4***.

Tabela 6.3 Diferenças de Momento Fletor e Momento Volvente nas Placas Finas.

Diferenças - Placas Finas AE (%)

Apoio das Placas	y / x	**Teoria Clássica** Dif. Bares (1969)	**Teoria Clássica** Dif. Andrade (2001)	**Teoria de Reissner (1947)** Diferença com Andrade (2001) *Soft*	**Teoria de Reissner (1947)** Diferença com Andrade (2001) *Hard*	**Teoria de Mindlin (1951)** Diferença com Andrade (2001) *Soft*	**Teoria de Mindlin (1951)** Diferença com Andrade (2001) *Hard*	Teoria clássica e Teoria de Mindlin *Hard*
AAAA	M_{xx}	0	0	0	0	0	0	0
	M_{yy}	0	0	0	0	0	0	0
AAAE	M_{eng}	0	0	0	0	0	0	0
	M_{xx}	0	0	0	0	0	0	0
	M_{yy}	0	0	0	0	0	0	0
AEAE	M_{eng}	0	*	0	0	0	0	0
	M_{xx}	0	0	0	0	0	0	0
	M_{yy}	0	0	0	0	0	0	1
AAEE	M_{eng}	1	0	0	0	0	0	0
	M_{xx}	0	0	0	0	0	0	0
	M_{yy}	0	0	0	0	0	0	0
AEEE (1, 2)	M_{eng1}	1						0
	M_{eng2}	2						0
	M_{xx}	0						0
	M_{yy}	0						0
EEEE	M_{eng}	1	1	0	0	0	0	0
	M_{xx}	0	0	0	0	0	0	0
	M_{yy}	0	0	0	0	0	0	0

* Inconsistência de valores nas páginas 139 e 140.

Tabela 6.4 Diferenças de Momento Fletor e Volvente nas Placas Finas com Borda Livre.

Diferenças - Placas Finas AEL (%)

Apoio das Placas	(y, x)	Teoria Clássica – Dif. Bares (1969)	Teoria Clássica – Dif. Andrade (2001)	Teoria de Reissner (1947) – Diferença com Andrade (2001) – *Soft*	Teoria de Reissner (1947) – Diferença com Andrade (2001) – *Hard*	Teoria de Mindlin (1951) – Diferença com Andrade (2001) – *Soft*	Teoria de Mindlin (1951) – Diferença com Andrade (2001) – *Hard*	Teoria clássica e Teoria de Mindlin – *Hard*
	M_{eng}							1
	M_{xx}							2
LLLE	M_{yy}							8
	M_{xx}	7						2
LALA	M_{yy}	37						14
	M_{xx}	4	3	4	4	5	5	1
LAAA	M_{yy}	8	6	11	11	11	11	3
	M_{eng}	8	1	2	2	3	2	0
2	M_{xx1}	0	2	3	3	3	3	1
1	M_{yy1}	16	9	17	17	17	16	4
	M_{xx2}	3	3	5	4	5	5	1
LAEA*	M_{yy2}	11	9	20	20	18	18	5
	M_{eng}							0
	M_{xx}							0
ALEA	M_{yy}							4
	M_{eng}	3	1	1	1	0	0	0
	M_{xx}	1	0	1	1	0	0	0
LELE	M_{yy}	28	24	55	53	47	47	15
	M_{eng}	6	4	3	3	3	4	1
1	M_{xx1}	36	31	29	28	24	24	6
2	M_{yy1}	36	31	29	28	24	24	6
	M_{xx2}	47	44	50	48	37	37	0
LLEE**	M_{yy2}	47	44	50	48	37	37	0
	M_{eng}	1						0
	M_{xx}	0						0
LEAE	M_{yy}	6						3
2	M_{eng1}	0	1	1	1	0	0	0
1	M_{eng2}	2	1	1	1	1	1	1
	M_{xx}	5	0	0	0	0	0	0
LEEE	M_{yy}	4	6	12	10	9	9	4

* Os pontos 1 e 2 estão a 0,4 L distantes da borda horizontal mais próxima e a 0,5 L das bordas verticais, sendo L o comprimento do lado da placa.

** Os pontos 1 e 2 estão a 0,4 L distantes das bordas mais próximas, sendo L o comprimento do lado da placa.

Tabela 6.5 Momento Fletor e Momento Volvente nas Placas Espessas.

Placas Espessas AE - Carga Estática

Apoio das Placas	ν	y, x [N.m/m]	Teoria de Reissner (1947)		Teoria de Mindlin (1951)			
			Andrade (2001) *MEC* *10 elem./ lado*		**Andrade (2001)** *MEC* *10 elem./ lado*		**Sakanaka (2006)** *MEC* *10 elem./ lado*	
			Soft	***Hard***	***Soft***	***Hard***	***Soft***	***Hard***
AAAA	0,0	M_{xx}	64,75	58,89	67,28	59,62	64,41343	58,82994
		M_{yy}	64,75	58,89	67,28	59,62	64,41343	58,82994
AAAE	0,0	M_{eng}	-139,56	-131,15	-139,34	-130,31	-138,81499	-130,79411
		M_{xx}	53,96	50,76	55,68	51,30	53,77503	50,71540
		M_{yy}	41,95	40,10	43,33	40,50	41,91003	40,13603
AEAE	0,0	M_{eng}	-114,47	-110,31	-72,22	-90,82	-114,12821	-110,12660
		M_{xx}	46,82	45,08	47,92	45,61	46,70786	45,05372
		M_{yy}	27,00	27,08	26,97	27,08	27,09223	27,16492
AAEE	0,0	M_{eng}	-137,64	-133,98	-113,42	-134,28	-109,45993	-109,45993
		M_{xx}	39,16	37,93	32,01	38,21	37,55773	37,95603
		M_{yy}	39,16	37,93	32,01	38,21	37,55773	37,95603
AEEE	0,0	M_{eng1}					-88,13879	-85,93324
		M_{eng2}					-96,80929	-94,18700
		M_{xx}					37,00436	36,24052
		M_{yy}					27,89623	27,88337
EEEE	0,0	M_{eng}	-82,25	-80,66	-77,31	-80,52	-81,73935	-80,16534
		M_{xx}	28,53	28,46	28,47	28,41	28,58778	28,50923
		M_{yy}	28,53	28,46	28,47	28,41	28,58778	28,50923

As ***Tabela 6.5*** e ***Tabela 6.6*** apresentam os resultados das placas moderadamente espessas. Observa-se menores diferenças entre este trabalho e os valores obtidos em *Andrade* (2001) na comparação para a teoria de *Reissner* (1947). Entre os casos de placas AE sem borda livre estas são menores que 4%, salvo o caso AAEE[1]. Nos casos de placas AEL com borda livre, são menores que 30%, sendo os piores resultados para os momentos calculados perpendicularmente às bordas livres, como nas placas finas. Estas diferenças são apresentadas na ***Tabela 6.7***.

[1] Em *Andrade* (2001) há uma nota sobre ocorrência de singularidade na espessura de 0,20 m na placa AAEE.

Tabela 6.6 Momento Fletor e Momento Volvente nas Placas Espessas com Borda Livre.

Placas Espessas AEL - Carga Estática

Apoio das Placas	ν	y [N.m/m]	Teoria de Reissner (1947)		Teoria de Mindlin (1951)			
			Andrade (2001) *MEC* *10 elem./ lado*		Andrade (2001) *MEC* *10 elem./ lado*		Sakanaka (2006) *MEC* *10 elem./ lado*	
			Soft	***Hard***	***Soft***	***Hard***	***Soft***	***Hard***
		M_{eng}					-861,61830	-858,93513
	0,2	M_{xx}					-208,43680	-208,44785
LLLE		M_{yy}					-25,50648	-25,78113
	0,3	M_{xx}					208,98399	209,01125
LALA		M_{yy}					30,04785	32,02363
	0,3	M_{xx}	133,62	128,05	135,52	127,74	137,76293	131,92634
LAAA		M_{yy}	62,49	61,02	66,09	63,61	58,65842	57,37516
		M_{eng}	-246,08	-239,37	-235,08	-232,35	-190,64393	-185,54823
1		M_{xx1}	70,47	68,97	70,57	68,85	71,87928	70,18819
2	0,2	M_{yy1}	26,53	27,44	28,01	28,80	23,77498	24,89491
		M_{xx2}	110,27	107,56	109,77	106,70	113,84620	110,83452
LAEA*		M_{yy2}	40,22	40,82	42,46	44,08	35,98600	36,58592
		M_{eng}					-167,76317	-163,58375
	0,15	M_{xx}					80,00187	78,03889
ALEA		M_{yy}					28,67276	28,15209
		M_{eng}	-130,33	-130,05	-685,47	-233,10	-131,58865	-131,29431
	0,3	M_{xx}	65,61	65,47	65,59	65,80	64,70700	64,56109
LELE		M_{yy}	17,40	17,18	30,43	23,61	13,51795	13,51923
		M_{eng}	-206,91	-206,70	-198,40	-226,98	-210,97944	-210,95698
1		M_{xx1}	-14,41	-14,47	-10,64	6,08	-17,22870	-17,11167
2	0,2	M_{yy1}	-14,41	-14,47	-10,64	6,08	-17,22870	-17,11167
		M_{xx2}	17,56	17,37	22,42	28,08	13,36847	13,36822
LLEE**		M_{yy2}	17,56	17,37	22,42	28,08	13,36847	13,36982
		M_{eng}					-122,45126	-120,68678
	0,15	M_{xx}					58,22921	57,49333
LEAE		M_{yy}					19,96100	19,87031
2		M_{eng1}	-105,33	-104,51	-158,90	-124,74	-105,05844	-104,31474
1	0,15	M_{eng2}	-89,70	-88,05	-43,61	-74,80	-88,68670	-87,11799
		M_{xx}	49,00	48,91	49,14	49,01	48,68391	48,58326
LEEE		M_{yy}	20,74	20,65	22,99	22,69	19,26838	19,22601

* Os pontos 1 e 2 estão a 0,4 L distantes da borda horizontal mais próxima e a 0,5 L das bordas verticais, sendo L o comprimento do lado da placa.

** Os pontos 1 e 2 estão a 0,4 L distantes das bordas mais próximas, sendo L o comprimento do lado da placa.

Tabela 6.7 Diferenças de Momento Fletor e Momento Volvente nas Placas Espessas.

Diferenças - Placas Espessas (%)

Apoio das Placas	ν		Teoria de Reissner (1947) – Diferença com Andrade (2001) – *Soft*	Teoria de Reissner (1947) – Diferença com Andrade (2001) – *Hard*	Teoria de Mindlin (1951) – Diferença com Andrade (2001) – *Soft*	Teoria de Mindlin (1951) – Diferença com Andrade (2001) – *Hard*
AAAA	0,0					
		M_{xx}	1	0	4	1
		M_{yy}	1	0	4	1
AAAE	0,0	M_{eng}	1	0	0	0
		M_{xx}	0	0	4	1
		M_{yy}	0	0	3	1
AEAE	0,0	M_{eng}	0	0	37	18
		M_{xx}	0	0	3	1
		M_{yy}	0	0	0	0
AAEE	0,0	M_{eng}	26	22	4	23
		M_{xx}	4	0	15	1
		M_{yy}	4	0	15	1
EEEE	0,0	M_{eng}	1	1	5	0
		M_{xx}	0	0	0	0
		M_{yy}	0	0	0	0
LAAA	0,3					
		M_{xx}	3	3	2	3
		M_{yy}	7	6	13	11
LAEA*	0,2	M_{eng}	29	29	23	25
		M_{xx1}	2	2	2	2
		M_{yy1}	12	10	18	16
		M_{xx2}	3	3	4	4
		M_{yy2}	12	12	18	20
LELE	0,3	M_{eng}	1	1	421	78
		M_{xx}	1	1	1	2
		M_{yy}	29	27	125	75
LLEE**	0,2	M_{eng}	2	2	6	8
		M_{xx1}	16	15	38	136
		M_{yy1}	16	15	38	136
		M_{xx2}	31	30	68	110
		M_{yy2}	31	30	68	110
LEEE	0,15	M_{eng1}	0	0	51	20
		M_{eng2}	1	1	51	14
		M_{xx}	1	1	1	1
		M_{yy}	8	7	19	18

* Os pontos 1 e 2 estão a 0,4 L distantes da borda horizontal mais próxima e a 0,5 L das bordas verticais, sendo L o comprimento do lado da placa.

** Os pontos 1 e 2 estão a 0,4 L distantes das bordas mais próximas, sendo L o comprimento do lado da placa.

6.2.2 Perturbação de furos nas placas

As placas quadradas com *8 m* de lado têm um furo no centro de *20 cm* de raio. Foram adotados os valores de módulo de Young $E = 2{,}05 \times 10^{11}\ N/m^2$, de coeficiente de Poisson $\nu = 0{,}33$ e a espessura da placa é variável. Foram colocados nós duplos apenas nos cantos do contorno da placa. Momentos fletores unitários $\boldsymbol{M_0}$ são aplicados ao longo dos lados apoiados. A discretização adotada é de *64* elementos no furo e *128* elementos no contorno da placa após verificação da convergência dos resultados. Estas condições tentam representar a placa infinita calculada por *Reissner* (1947), referenciada por *Timoshenko* (1970).

O coeficiente de concentração de tensão $\boldsymbol{K_b}$ é calculado segundo *Timoshenko* (1970):

$$K_b = \frac{(M_t)_{\max}}{M_0} \tag{6.1}$$

Onde $\boldsymbol{M_0}$ é o momento fletor aplicado e $\boldsymbol{(M_t)_{máx}}$ é o momento fletor máximo na direção tangencial à borda da placa.

Fazendo o gráfico da relação **a/h** dada pelo quociente raio do furo **a** e espessura da placa **h**, com o coeficiente de concentração de tensão $\boldsymbol{K_b}$ e aplicando a teoria de *Mindlin* (1951), a partir dos dados da ***Tabela 6.8*** apresentada a seguir, tem-se:

Tabela 6.8 Coeficiente de Concentração de Tensão K_b.

Placa AAAA com furo - Carga Estática

Raio do Furo (m) a	Espessura da placa (m) h	a/h	K_b [1] Reissner (1947)	K_b
0,20	1,20	0,17	3,00	3,02555
0,20	1,00	0,20	2,65	2,87799
0,20	0,90	0,22	2,55	2,79274
0,20	0,80	0,25	2,50	2,69806
0,20	0,70	0,29	2,45	2,59225
0,20	0,60	0,33	2,40	2,47329
0,20	0,50	0,40	2,30	2,33887
0,20	0,40	0,50	2,20	2,18650
0,20	0,32	0,63	2,15	2,05035
0,20	0,25	0,80	2,05	1,92100
0,20	0,20	1,00	2,00	1,82437
0,20	0,15	1,33	1,97	1,72844
0,20	0,125	1,60	1,95	1,68375
0,20	0,10	2,00	1,93	1,64469
0,20	0,07	2,86	1,80	1,61244

[1] Valores tabelados são obtidos do gráfico dado em Reissner (1947).

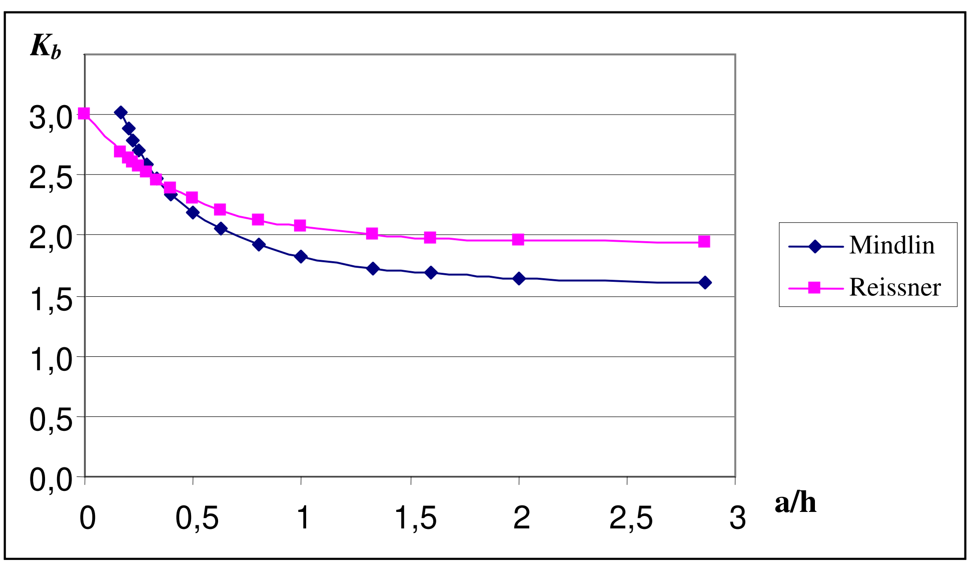


Gráfico 6.1 Coeficiente de Concentração de Tensão K_b.

6.3 FREQÜÊNCIAS NATURAIS

6.3.1 Teoria de *Kirchhoff* (1850) e teoria de *Mindlin* (1951) para placas finas

Placas quadradas com *2,00 m* de lado são testadas para quinze condições de apoio e os resultados são mostrados nas ***Tabela 6.9*** e ***Tabela 6.10***. Foram usados Módulo de Young $E = 2{,}05 \times 10^{11}\ N/m^2$, espessura de placa $h = 0{,}06\ m$, densidade do material $\rho = 7860{,}00\ kg/m^3$, *4x10* elementos de contorno, valores baseados nos trabalhos anteriormente citados no ***item 6.2.1***, e três discretizações de domínio, *4x4*, *8x8* e *16x16* células são testadas.

Tabela 6.9 Fator dinâmico Λ para placas finas.

Fator Dinâmico (Λ) - Placas Finas AE

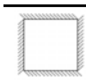
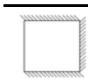
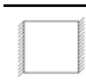
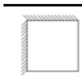
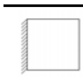
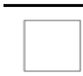
Apoio das Placas	Teoria Clássica				Teoria de Mindlin (1951)			
	Bares (1969) *Diferenças Finitas* $\nu = 0{,}30$	**Simões (2001)** *MEC* $\nu = 0{,}3$	**Sakanaka (2006)** *sem inércia rotatória* $\nu = 0{,}3$	**Sakanaka (2006)** *com inércia rotatória* $\nu = 0{,}3$	**Sakanaka (2006)** *sem inércia rotatória* $\nu = 0{,}3$ $\kappa^2 = \pi^2/12$		**Sakanaka (2006)** *com inércia rotatória* $\nu = 0{,}3$ $\kappa^2 = \pi^2/12$	
					Soft	***Hard***	***Soft***	***Hard***
 EEEE	3,660	3,671	3,6035	3,5959	3,5667	3,5671	3,5594	3,5597
 EEEA	3,239	3,248	3,1884	3,1835	3,1540	3,1614	3,1493	3,1563
 AEAE	2,938	2,946	2,9010	2,8976	2,8683	2,8790	2,8650	2,8751
 AAEE	2,755	2,763	2,7103	2,7079	2,6785	2,6952	2,6761	2,6923
 AAAE	2,401	2,408	2,3685	2,3672	2,3382	2,3597	2,3368	2,3578
 AAAA	1,999	2,005	1,9759	1,9756	1,9465	1,9744	1,9461	1,9734

Tabela 6.10 Fator dinâmico Λ para placas finas com borda livre.

Fator Dinâmico (Λ) - Placas Finas AEL

Apoio das Placas	Teoria Clássica			Teoria de Mindlin (1951)			
	Simões (2001) *BEM* $\nu = 0,3$	**Sakanaka (2006)** *sem inércia rotatória* $\nu = 0,3$	**Sakanaka (2006)** *com inércia rotatória* $\nu = 0,3$	**Sakanaka (2006)** *sem inércia rotatória* $\nu = 0,3$ $\kappa^2 = \pi^2/12$		**Sakanaka (2006)** *com inércia rotatória* $\nu = 0,3$ $\kappa^2 = \pi^2/12$	
				Soft	***Hard***	***Soft***	***Hard***
LEEE	2,417	2,2953	2,2925	2,2308	2,2317	2,2281	2,2291
LEAE		2,2529	2,2498	2,1940	2,1957	2,1910	2,1927
LELE	2,241	2,1431	2,1407	2,0954	2,0962	2,0932	2,0940
LEAA		1,6057	1,6033	1,5665	1,5726	1,5642	1,5706
LAEA		1,2020	1,2004	1,1709	1,1793	1,1694	1,1784
LAAA	1,179	1,1088	1,1072	1,0811	1,0904	1,0795	1,0893
LALA		0,9041	0,9036	0,8865	0,8869	0,8861	0,8865
LLEE		0,6668	0,6671	0,6526	0,6525	0,6529	0,6528
LLLE	0,351	0,3356	0,3357	0,3321	0,3320	0,3321	0,3320

A maior diferença deste trabalho (na teoria clássica) com *Bares* (1964) cai de 3% (caso EEEE) para menos de 0,5% (caso EEEE) na maior discretização de domínio, sendo a última tabelada nas ***Tabela 6.9*** e ***Tabela 6.10***.

O fator dinâmico Λ adimensional é utilizado como meio de comparação entre os trabalhos encontrados na literatura e corresponde a:

$$\Lambda = \frac{\omega L^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\rho h}{D}} = \frac{L^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\chi^4}{D}} \tag{6.3.1}$$

Os fatores dinâmicos resultantes da teoria de *Mindlin* (1951) são menores que os obtidos pela teoria de *Kirchhoff* (1850). Além disso, constata-se que a diferença entre estas teorias aumenta com o aumento da restrição no apoio. Tal comportamento existe devido à influência da deformação pela força cortante e da inércia rotatória, relacionadas ao aumento da flexibilidade da placa. No entanto, a redução do valor dos fatores dinâmicos é pequena para placas finas. A maior diferença encontrada tanto entre *Bares* (1969) quanto para *Simões* (2001) e este trabalho usando a teoria de *Mindlin* (1951) é para a placa EEEE, em 3%, e a menor para a placa AAAA em 1% e 2%, respectivamente. No caso das placas com borda livre a diferença entre *Simões* (2001) e este trabalho usando a teoria de *Mindlin* (1951) foi maior para a placa EEEL, em 8 % e a menor, placa ELLL, em 6 %.

6.3.2 Teoria de *Mindlin* (1951) para placas com espessura variável

Uma placa quadrada de *0,50 m* de lado simplesmente apoiada nos quatro lados na condição *hard* foi testada pela teoria de *Mindlin* (1951) com várias espessuras e os valores das freqüências naturais obtidos são mostrados na ***Tabela 6.11***. Foram adotados os valores de Módulo de Young $E = 2,069 \times 10^{11}\ N/m^2$ e densidade do material $\rho = 7860,00\ kg/m^3$. A discretização do contorno adotada foi de *4x10* elementos de contorno e *44* nós de contorno, baseada nos trabalhos anteriormente citados no ***item 6.2.1***. Foram testadas três discretização de domínio de *4x4*, *8x8* e *16x16* células. A maior diferença entre as discretizações de domínio citadas com os resultados de *Mindlin* (1956) cai de 9% para 6%, respectivamente, quando a parcela da inércia rotatória não é considerada e de 3%, para 1% no caso contrário. Bons resultados também foram obtidos para os valores de freqüências naturais quando comparados com os valores calculados através do MEC com a solução fundamental dinâmica em *Palermo Jr.* (2005). A diferença cai de 17% para 14% quando o efeito da inércia rotatória não é incluído e cai de 10% para 7% com tal efeito.

Tabela 6.11 Freqüências angulares naturais para placa AAAA com espessura variável.

Frequências Naturais (rad/s)
Placa AAAA com espessura variável

h/L	3 D	Teoria de Mindlin (1951)							
	Levinson (1985) *3D Theory* $\nu = 0,30$	**Mindlin (1956)** $\nu = 0,30$	**Palermo Jr. (2005)** *BEM* $\nu = 0,30$	**Sakanaka (2006)** *sem inércia rotatória* $\nu = 0,3$ $\kappa^2 = \pi^2/12$			**Sakanaka (2006)** *com inércia rotatória* $\nu = 0,3$ $\kappa^2 = \pi^2/12$		
				16 células	64 células	256 células	16 células	64 células	256 células
0,05	3016	3049	3015	3127	3067	3054	3122	3063	3048
0,1	5906	5918	5825	6123	6007	5978	6082	5966	5938
0,2	10880	10820	10370	11354	11143	11089	11056	10856	10806
0,4	17315	17073	15740	18190	17865	17780	17256	16976	16907
0,6	20734	20306	18910	22065	21682	21580	20666	20224	20177
0,8	22653	22079	21480	23194	22798	22691	22518	22189	22093
1	23805	23125	23510	24183	23773	23662	23527	23300	23204

Tal precisão também foi confirmada inclusive quando comparado com a solução tridimensional de *Levinson* (1985), para todas as espessuras. Observando-se que para valores de *h/L* maiores que 0,4 a estrutura já não corresponde exatamente a uma placa. Além disso, os valores tabelados se extendem até *h/L* = 1, ou seja, a estrutura chega a dimensões de um cubo. A diferença cai de menos de 6% para 4% quando o efeito da inércia rotatória não é incluído e cai de 4% para 3% quando é considerado tal efeito. Nota-se que as freqüências naturais resultantes sem a influência da inércia rotatória são mais distantes dos valores obtidos por *Mindlin* (1956) com a influência desta, como esperado.

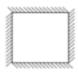
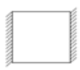
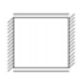
Nos exemplos seguintes, as placas quadradas de *2,00 m* de lado com outras condições de apoio foram testadas pela teoria de *Mindlin* (1951) com várias espessuras e os valores das fatores dinâmicos obtidos são mostrados na ***Tabela 6.12***. Foram adotados os valores de Módulo de Young $E = 2{,}05 \times 10^{11}\ N/m^2$ e densidade do material $\rho = 7860{,}00\ \ kg/m^3$. A discretização do contorno adotada foi de *40* elementos de contorno e *44* nós de contorno, baseada nos trabalhos anteriormente citados no ***item 6.2.1***. Quanto à discretização de domínio, esta foi de *16x16* células, conforme resultados obtidos na ***Tabela 6.11***.

Bons resultados foram obtidos para os valores de freqüências naturais quando comparados com os valores encontrados na literatura, calculados por *Mizusawa* (1993) através do *Spline strip method* e *Shufrin and Eisenberger* (2005) pelo *Kantorovich method*. As diferenças encontradas ficaram entre 0% a 2%. Entre os casos de borda livre, as diferenças estavam entre 2% a 6%.

Tal precisão também foi confirmada inclusive quando comparado com a solução tridimensional de *Liew et al.* (1993), para todas as espessuras. Observando-se que para valores de *h/L* maiores que 0,4 a estrutura já não corresponde exatamente a uma placa mas confirmam a precisão. As diferenças encontradas ficaram entre 0% a 4%. Entre os casos de borda livre, as diferenças estavam entre 4% a 6%.

Tabela 6.12 Fator dinâmico Λ para placas com espessura variável.

Fator Dinâmico Λ - Placas AEL com espessura variável

Apoio das Placas	h/L	Teoria de Mindlin (1951)				3D Theory
		Mizusawa [1] **(1993)** *Spline Strip Method* $\nu = 0,30$ $\kappa^2 = \pi^2/12$	**Shufrin and Eisenberger (2005)** *Kantorovich Method* $\nu = 0,3$ $\kappa^2 = 5/6$	**Sakanaka (2006)** *com inércia rotatória* $\nu = 0,3$ $\kappa^2 = \pi^2/12$		**Liew et al. (1993)** *Ritz* $\nu = 0,30$
				Soft	***Hard***	
	0,010			3,6475	3,6475	3,6492
	0,100		3,2978	3,2524	3,2598	3,3215
	0,200		2,6889	2,6120	2,6294	2,7261
EEEE	0,400		1,7897	1,7386	1,7511	1,8330
	0,010	2,9306		2,9342	2,9378	2,9351
	0,100	2,6997		2,6605	2,6894	2,7188
	0,200	2,2604		2,1904	2,2337	2,2366
AEAE	0,400			1,5041	1,5524	
	0,010	2,3944		2,3931	2,4017	
	0,100	2,2672		2,2132	2,2675	
	0,200	1,9931		1,8996	1,9761	
AAAE	0,400			1,3741	1,4567	
	0,010	1,9993		1,9944	2,0059	1,9993
	0,100	1,9310	1,9317	1,8664	1,9375	1,9342
	0,200	1,7659	1,7679	1,6610	1,7629	1,7758
AAAA				1,2774	1,3791	
	0,010					2,2482
	0,100			2,2210	2,0318	2,1050
	0,200			2,1751	1,7299	1,7996
LELE	0,400			1,9916	1,2026	1,2582
	0,010	1,2844				
	0,100	1,2407		1,1586	1,1890	
	0,200	1,1501		1,0613	1,1111	
LAEA	0,400			0,8729	0,9234	
	0,010	1,1831				
	0,100	1,1520		1,0725	1,1034	
	0,200	1,0831		0,9885	1,0414	
LAAA	0,400			0,8150	0,8840	
	0,010	0,9755				0,9755
	0,100	0,9564	0,9564	0,9054	0,9068	0,9571
	0,200	0,9096	0,9096	0,8632	0,8647	0,9120
LALA	0,400			0,7461	0,7466	0,7883
	0,010		0,3556			
	0,100		0,3516	0,3403	0,3406	
	0,200		0,3418	0,3353	0,3365	
LLLE	0,400		0,3126	0,3155	0,3188	

[1] O fator dinâmico apresentado é dividido por π^2.

Observa-se com os gráficos ***Gráfico 6.2*** e ***Gráfico 6.3*** que as freqüências naturais resultantes decrescem com o aumento da relação *h/L*, ou seja, é mais significativa a influência da deformação pela força cortante e da inércia rotatória com o aumento da espessura. Além disso, comparando-se as várias combinações de apoio, constata-se que as freqüências naturais descrescem mais com o aumento da restrição no apoio.

As diferenças encontradas variando-se a relação h/L de 0,01 a 0,4 e normalizando-se os valores obtidos com o fator dinâmico da placa fina correspodente a cada caso, nos casos de placas com bordas livres, ficaram de aproximadamente 30% (caso AAAA, condição *hard*) a quase 50% (caso EEEE, condição *soft*). Entre os casos de borda livre, variando-se a relação h/L de 0,1 a 0,4, as diferenças estavam entre 6% (caso ELLL, condição *hard*) a 40% (caso LELE, condição *hard*). O gráfico ***Gráfico 6.4***, até h/L = 0,2, e o ***Gráfico 6.5*** mostram estas variações mais claramente.

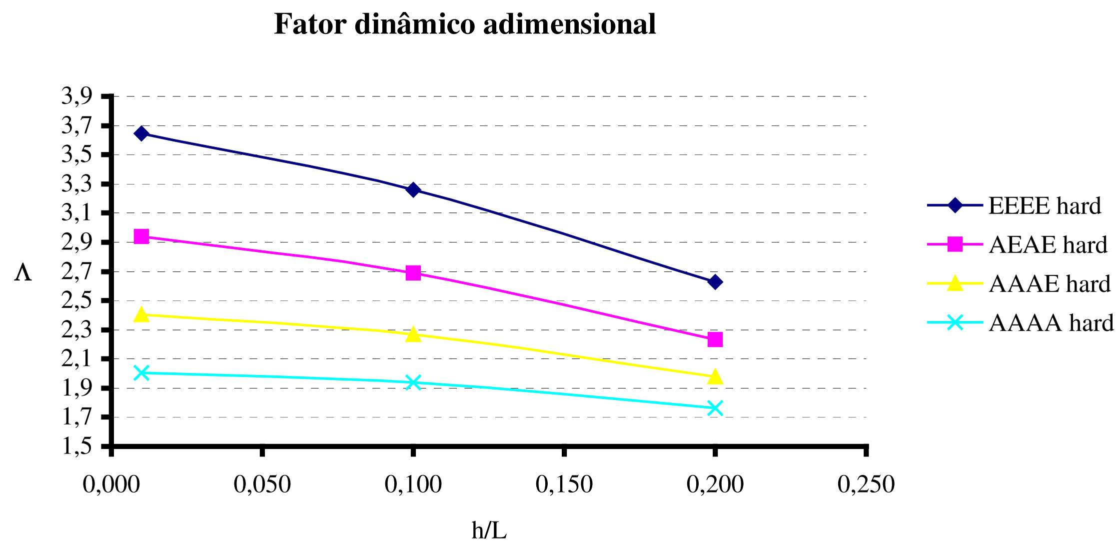


Gráfico 6.2 Fator dinâmico adimensional Λ para placas quadradas AE.

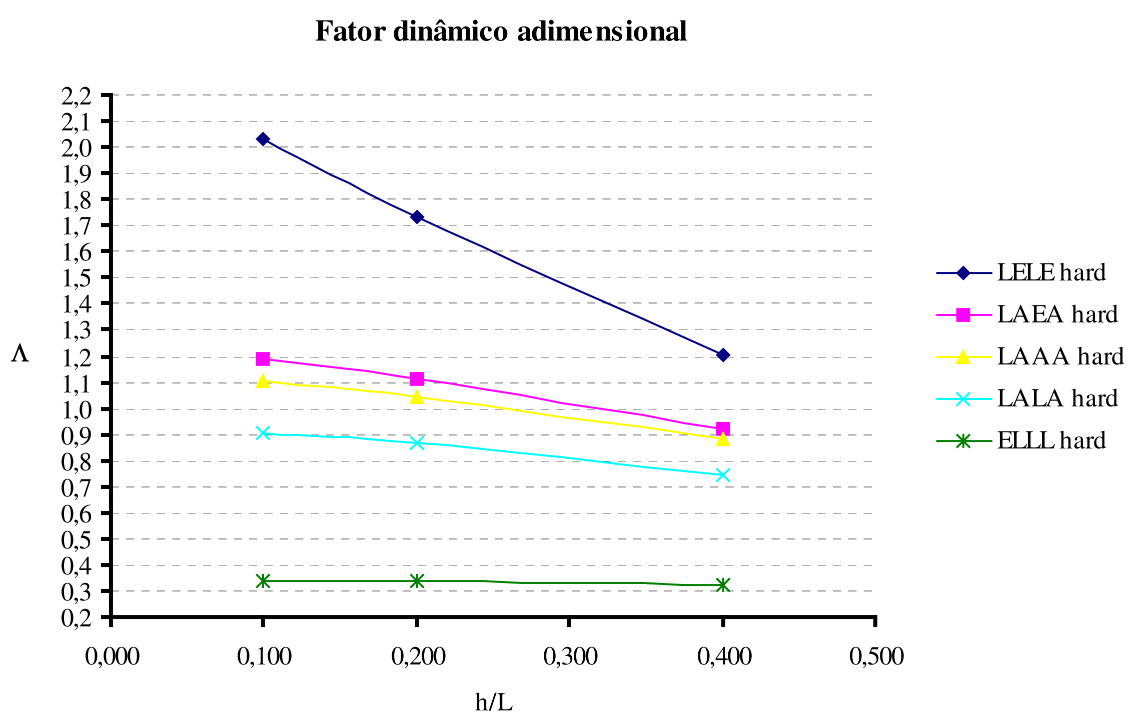


Gráfico 6.3 Fator dinâmico adimensional Λ para placas quadradas AEL (com borda livre).

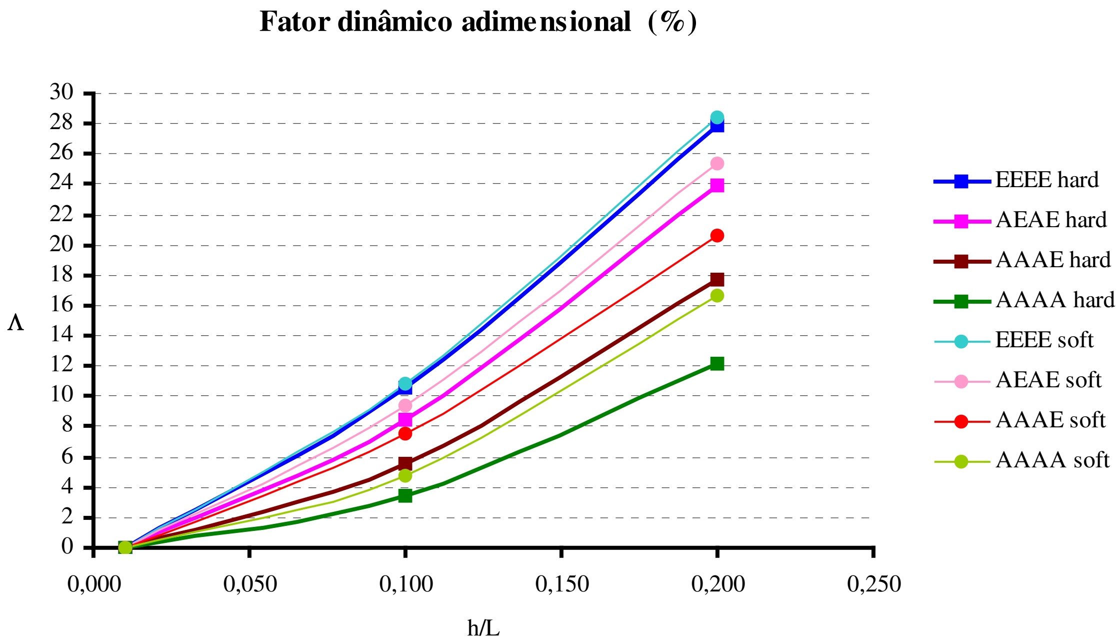


Gráfico 6.4 Fator dinâmico normalizado com placa *h/L* = 0,01.

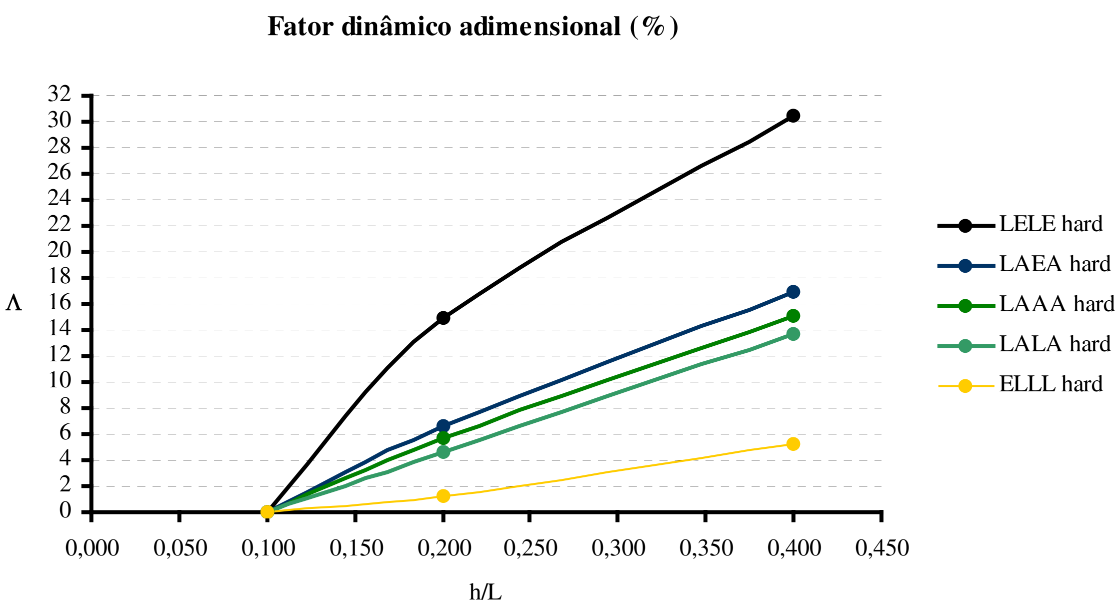


Gráfico 6.5 Fator dinâmico normalizado com placa de *h/L* = 0,1.

6.4 CARGAS CRÍTICAS DE INSTABILLIDADE

6.4.1 Estudo de Convergência

Na investigação da discretização a ser adotada para o cálculo das cargas críticas de instabilidade, duas placas quadradas de *2,00 m* de lado, uma totalmente apoiada e uma totalmente engastada, foram testadas pela teoria de *Kirchhoff* (1850) e comparadas com os valores calculados por *Timoshenko* (1961), como mostrados no ***Gráfico 6.6***. Neste, tem-se o quociente **k/ko**, onde **ko** = *4,0* para placa totalmente apoiada e **ko** = *10,7* para a placa totalmente engastada e **k** corresponde aos valores adimensionais do fator de carga crítica de instabilidade calculados neste trabalho para cada discretização de domínio, *4x4, 5x5, 6x6, 7x7, 8x8, 9x9, 10x10, 12x12, 15x15, 20x20* e *25x25* células. A discretização de contorno é fixada em 40 elementos de contorno e 44 nós de contorno, baseada nos trabalhos já citados no ***item 6.2.1***. Foram adotados os valores de coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$, módulo de Young $E = 2,05 \times 10^{11}\ N/m^2$ e carga de compressão apenas na direção x_1 no lados apoiados simetricamente opostos.

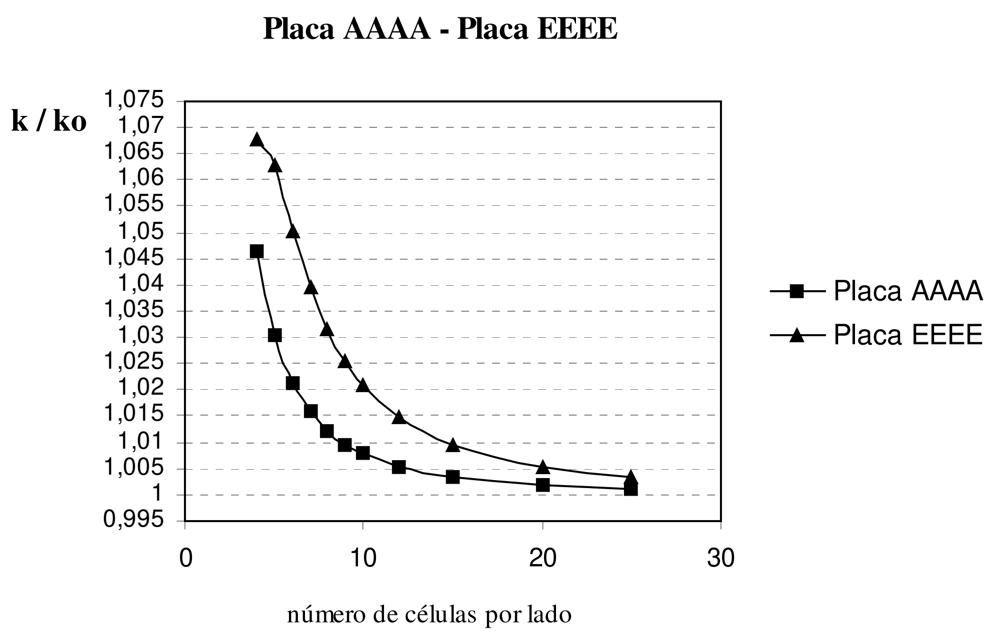


Gráfico 6.6 Convergência das placas AAAA e EEEE com *4x10* elementos de contorno.

Para as placas com bordas livres, foram testadas pela teoria de *Kirchhoff* (1850) e comparadas com os valores calculados por *Timoshenko* (1961), os casos com três apoios e uma borda livre, AAAL, e dois apoios, um engaste e uma borda livre, LAEA. Os valores obtidos são mostrados no ***Gráfico 6.7.***. Neste, tem-se o quociente **k/ko**, onde **ko** = 1,44 para placa AAAL, **ko** = 1,6150 para a placa LAEA e **k** correspondente aos valores obtidos neste trabalho para cada discretização de domínio, 4x4, 5x5, 6x6, 7x7, 8x8, 9x9, 10x10, 12x12, 15x15, 20x20 e 25x25 células. Inicialmente a discretização de contorno é fixada em 40 elementos de contorno e 44 nós de contorno. Foram adotados os valores de coeficiente de Poisson ν = 0,30, módulo de Young $E = 2{,}05 \ x \ 10^{11} \ N/m^2$ e carga de compressão aplicada apenas em x_1 no lados apoiados simetricamente opostos.

Investigando se a ocorrência do valor de pico em 10x10 células de domínio com 4x10 elementos de contorno é devida a discretização de domínio adotada, recalculam-se os valores graficados para 4x20 elementos de contorno e obtém-se o ***Gráfico 6.8***.

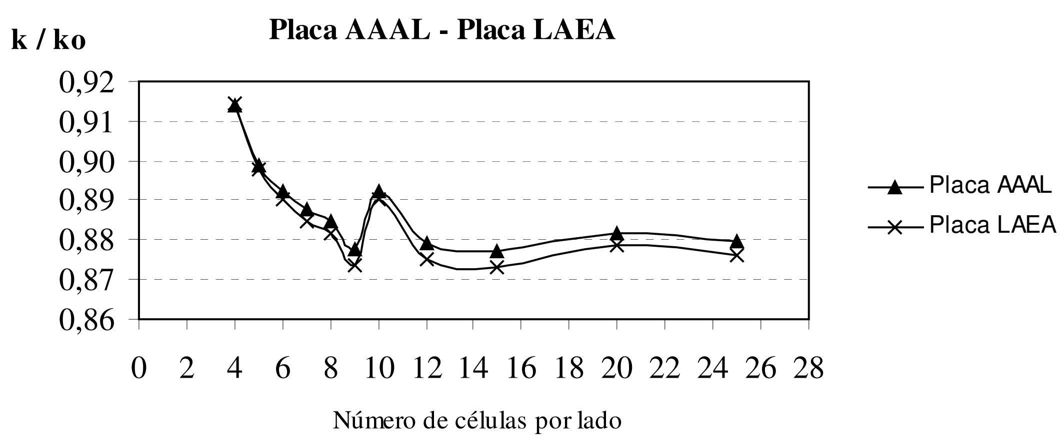


Gráfico 6.7 Convergência das placas AAAL e LAEA com *4x10* elementos de contorno.

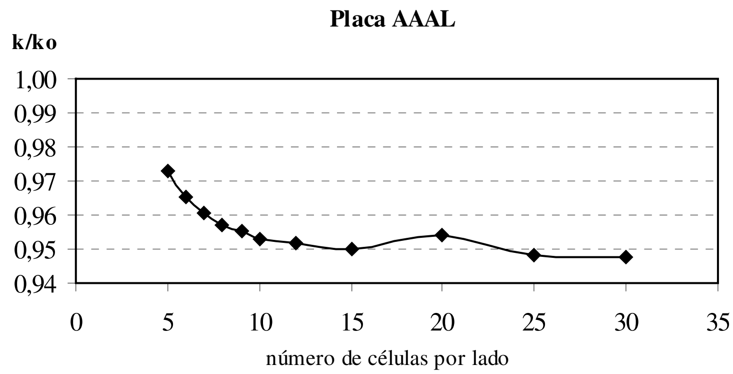


Gráfico 6.8 Convergência da placa AAAL com *4x20* elementos de contorno.

Observa-se nos ***Gráfico 6.7*** e ***Gráfico 6.8*** que o valor de pico se mantém nos casos: *10x10* células de domínio com *4x10* elementos de contorno e *20x20* células de domínio com *4x20* elementos de contorno e estes pontos representam as menores diferenças entre os resultados deste trabalho usando a teoria de *Kirchhoff* (1850) e os valores tabelados por *Timoshenko* (1961).

Fixando, por outro lado, a discretização de domínio em *20x20* células, pois esta apresenta uma diferença menor que 0,5% nas placas AAAA e EEEE no ***Gráfico 6.6***, e variando a discretização de contorno em *4x10, 4x20, 4x25 e 4x40* elementos, têm-se os gráficos ***Gráfico 6.9*** e ***Gráfico 6.10*** a seguir:

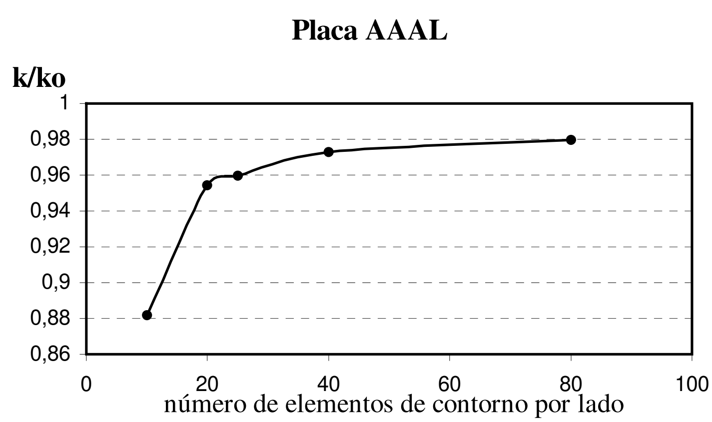


Gráfico 6.9 Convergência em placa AAAL com *20x20* células de domínio.

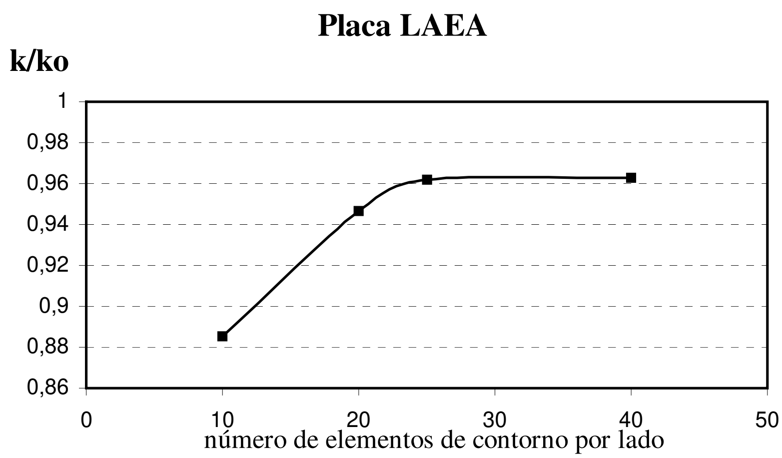


Gráfico 6.10 Convergência em placa LAEA com *20x20* células de domínio.

Portanto, nota-se que os resultados apresentados no ***Gráfico 6.6*** têm boa convergência para os casos das placas AAAA e EEEE com *10x10* células de domínio e *40* elementos de contorno, sendo a diferença menor que 1% em comparação com *Timoshenko* (1961). Esta discretização será adotada nos resultados calculados para as cargas críticas apresentados nos próximos itens para os casos que envolvem apoio e engaste.

Para os casos AAAL e LAEA, houve uma necessidade de aumentar a discretização de contorno, passando para *80* elementos de contorno e *20x20* células de domínio para obter uma diferença menor que 6%, segundo os ***Gráfico 6.9*** e ***Gráfico 6.10***. Esta discretização será adotada nos resultados calculados para as cargas críticas apresentados nos próximos itens para os casos que envolvem borda livre.

6.4.2 Teoria de *Kirchhoff* (1850) e teoria de *Mindlin* (1951) para placas finas

Placas quadradas de 2 m de lado com diversas condições de apoio foram testadas pela teoria de *Kirchhoff* (1850) e de *Mindlin* (1951) e os valores de fatores de carga crítica obtidos são mostrados nas ***Tabela 6.13*** e ***Tabela 6.14***. Foi adotado como Módulo de Young o valor $E = 2{,}05 \times 10^{11}\ N/m^2$ e carga de compressão apenas em $\boldsymbol{x_1}$.

Bons resultados foram obtidos para os valores de cargas críticas de instabilidade quando calculados pela teoria de *Kirchhoff* (1850) e comparados com a solução analítica de *Timoshenko* (1961), com o método das diferenças finitas calculado por *Bares* (1964) e com o MEC com teoria de dois parâmetros calculado por *Simões* (2001). As diferenças foram menores que 5%, 4% e 1% respectivamente. Para os casos com borda livre, estas foram menores que 2%, 2% e 9% respectivamente. Quanto à teoria de *Mindlin* (1951), bons resultados foram obtidos para os valores de cargas críticas de instabilidade quando comparados com o Spline Strip Method calculado por *Mizusawa* (1992), com o método de Rayleigh-Ritz calculado por *Kitipornchai et al.* (1993) e com o MEC calculado por *Purbolaksono and Aliabadi* (2005), com diferenças menores que 4%, 5% e 3% respectivamente. Para os casos com borda livre, estas foram menores que 6%.

O fator de carga crítica de instabilidade adimensional é utilizado como meio de comparação entre os trabalhos encontrados na literatura e corresponde a:

$$\mathbf{k} = \frac{N_{\alpha\beta} L^2}{\pi^2 D} \tag{6.4.1}$$

Tabela 6.13 Fator de carga crítica de instabilidade adimensional **k** para placas finas.

Fator de Carga Crítica de Instabilidade k - Placas Finas AE

Apoio das Placas	Teoria Clássica				Teoria de Mindlin					
	Timoshenko (1961) *Analítica*	**Bares[1] (1964)** *Dif. Finitas*	**Simões[2] (2001)** MEC *(ν= 0,30) (h/L=0,03)*	**Sakanaka (2006)[3]** *(h/L=0,001)*	**Mizusawa (1992)** *Spline Strip Method* ν = 0,30 $\kappa^2 = \pi^2/12$ *(h/L=0,001)*	**Kitipornchai et al. (1993)** *Rayleigh-Ritz* ν = 0,30 k^2 = 5/6 *(h/L=0,001)* *Soft*	*Hard*	**Purbolaksono and Aliabadi (2005)** *MEC*	**Sakanaka (2006)[3]** $\kappa^2 = \pi^2/12$ *(h/L=0,001)* *Soft*	*Hard*
EEEE	10,0700	10,3400		10,5752		10,0738		10,3870	10,5750	10,5750
AEEE		8,1000	8,1460	8,2564					8,2552	8,2575
EEEA		7,9000	8,1910	8,2387					8,2366	8,2389
EAEA	7,6900 (ν = 0,25)	7,6900		7,9670 (ν = 0,25)	7,6910			7,7570	7,9285 (ν = 0,25)	7,9673 (ν = 0,25)
AEAE	6,7400	6,7400		6,8900	6,7430			6,9720	6,8893	6,8923
AAEE		6,3500		6,3008					6,2983	6,3111
EAAA		5,8300	5,7720	5,8189	5,7400				5,8162	5,8310
AAAE		4,8500	4,8830	4,9105	4,8470				4,9080	4,9235
AAAA	4,0000	4,0000	4,0200	4,0321	4,0000	3,9998	4,0000	4,0410	4,0294	4,0480

[1] Em *Bares* (1969) o coeficiente k é calculado para placas quadradas

[2] O coeficiente k é calculado em função das cargas críticas tabeladas, onde $k = N_{ab}.L^2/\pi^2.D$

[3] O coeficiente de Poisson ν vale 0,30 salvo indicação contrária na tabela

Tabela 6.14 Fator de carga crítica de instabilidade **k** para placas finas com borda livre.

Apoio das Placas	Teoria Clássica				Teoria de Mindlin					
	Timoshenko (1961) *Analítica*	**Bares[1] (1969)** *Dif. Finitas*	**Simões[2] (2001)** MEC *(ν = 0,30) (h/L=0,03)*	**Sakanaka (2006)[3]** *(20 cel) (h/L=0,03)*	**Mizusawa (1992)** *Spline Strip Method* *ν = 0,30* *$\kappa^2 = \pi^2/12$* *(h/L=0,001)*	**Kitipornchai et al. (1993)** *Rayleigh-Ritz* *ν = 0,30 k^2 = 5/6 (h/L=0,001)* ***Soft***	***Hard***	**Purbolaksono and Aliabadi (2005)** *MEC*	**Sakanaka (2006)[3]** *$\kappa^2 = \pi^2/12$ (h/L=0,03)* ***Soft***	***Hard***
LELE				3,8714			3,9193		3,7294	3,7299
LAEA	1,7000 (ν = 0,25)	1,7000	1,8210	1,6704 (ν = 0,25)	1,6530			1,7240	1,6010 (ν = 0,25)	1,6225 (ν = 0,25)
LAAA	1,4400 (ν = 0,25)	1,4400	1,5170	1,4101 (ν = 0,25)	1,4020			1,4170	1,3533 (ν = 0,25)	1,3751 (ν = 0,25)
LALA				0,9277	0,9523	0,9523	0,9523		0,8985	0,8994

Table title: **Fator de Carga Crítica de Instabilidade k - Placas Finas AEL**

[1] Em *Bares* (1969) o coeficiente k é calculado para placas quadradas

[2] O coeficiente k é calculado em função das cargas críticas tabeladas, onde $k = N_{ab}.L^2/\pi^2.D$

[3] O coeficiente de Poisson ν vale 0,30 salvo indicação contrária na tabela

As cargas críticas de instabilidade resultantes da teoria de *Mindlin* (1951) são menores que as obtidas pela teoria de *Kirchhoff* (1850). Além disso, constata-se que a diferença entre estas teorias aumenta com o aumento da restrição no apoio. Tal comportamento existe devido à influência da deformação pela força cortante, pois a teoria clássica não considera o aumento de flexibilidade da placa devido às tensões cisalhantes.

No entanto, a redução do valor das cargas críticas de instabilidade é pequena para placas finas. A maior diferença foi encontrada entre *Bares* (1964) e *Mindlin* (1951) na condição hard para as placas EEEE e a placa LAEA, no caso das placas com borda livre, ambas em 5%.

6.4.3 Teoria de *Mindlin* (1951) para placas com espessura variável

Placas quadradas de *2,00 m* de lado com diversas condições de apoio foram testadas pela teoria de *Mindlin* (1951) com várias espessuras e os valores das cargas críticas de instabilidade obtidos são mostrados nas ***Tabela 6.15*** e ***Tabela 6.16***. Foi adotado como Módulo de Young o valor $E = 2{,}05 \times 10^{11}\ N/m^2$.

Foram adotados para os casos das placas apoiadas e engastadas, *10x10* células de domínio e *40* elementos de contorno. Para os casos com borda livre, houve uma necessidade de aumentar a discretização de contorno, passando para *80* elementos de contorno e *20x20* células de domínio, visto no ***item 6.4.1***.

Bons resultados foram obtidos para os valores de cargas críticas de instabilidade quando calculados pela teoria de *Mindlin* (1951). Neste sentido, as diferenças encontradas nas ***Tabela 6.15*** e ***Tabela 6.16*** com relação aos trabalhos encontrados na literatura estavam em média 4%.

A diferença foi maior no caso EEEE no trabalho de *Dawe & Roufaeil* (1982), nos valores com a relação h/L igual a 0,2 no trabalho de *Mizusawa* (1992) e no valor com h/L igual a 0,4 do trabalho de *Shufrin & Eisenberger* (2005). Observando-se mais uma vez que para valores de h/L maiores que 0,4 a estrutura já não corresponde exatamente a uma placa, bem como a influência da deformação pela força cortante com o aumento da espessura e restrição de apoio.

Observa-se dos gráficos ***Gráfico 6.11*** a ***Gráfico 6.13*** que as cargas críticas de instabilidade resultantes decrescem com o aumento da relação h/L, ou seja, é mais significativa a influência da deformação pela força cortante com o aumento da espessura. Além disso, comparando-se as várias combinações de apoio, constata-se que as cargas críticas de instabilidade descrescem mais com o aumento da restrição no apoio.

As maiores diferenças encontradas foram para a placa espessa (relação h/L 0,2), do caso EEEE, com até 50% de descréscimo do valor da placa fina (relação h/L 0,001) e caso LELE de aproximadamente 30%, entre os casos com borda livre. E as menores foram para o caso AAAA, em torno de 20% e o caso LALA, entre os com borda livre, em torno de 10%. Os gráficos ***Gráfico 6.14*** e ***Gráfico 6.15*** mostram estas variações mais claramente.

Tabela 6.15 Fator de carga crítica de instabilidade **k** para placas com espessura variável.

Fator de Carga Crítica de Instabilidade k

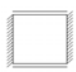
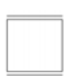
Placas AE com espessura variável

Apoio das Placas	**h/L**	**Dawe and Roufaeil (1982)** *Rayleigh-Ritz (and Finite Strips)* $\nu = 0,3$ $\kappa^2 = 0,833$	**Mizusawa (1992)** *Spline Strip Method* $\nu = 0,30$ $\kappa^2 = \pi^2/12$	**Kitipornchai et al. (1993)** *Rayleigh-Ritz* $\nu = 0,30$ $k^2 = 5/6$		**Smith (1995)** ***FEM***	**Shufrin and Eisenberger (2005)** *Kantorovich Method* $\nu = 0,3$ $\kappa^2 = 5/6$	**Sakanaka (2006)** $\nu = 0,3$ $\kappa^2 = \pi^2/12$	
				Soft	***Hard***			***Soft***	***Hard***
	0,001			10,0738				10,5750	10,5750
	0,050			9,5588				10,1063	10,1133
	0,100	8,0470		8,2917			8,3231	8,8195	8,8608
	0,200			5,3156			5,3293	5,3896	5,4672
EEEE	0,400						2,0547	2,1143	2,1104
	0,001		7,6910					7,9285	7,9673
	0,050		7,2280					7,4409	7,5346
	0,100	6,1980	6,1780					6,3880	6,5342
	0,200		4,0560					4,3235	4,4696
EAEA	0,400	(κ^2= 0,822)						2,0783	2,0887
	0,001		6,7430					6,8893	6,8923
	0,050		6,4620					6,5760	6,6597
	0,100	5,8040	5,7650					5,9158	6,0566
	0,200		4,1090					4,3065	4,4540
AEAE	0,400							1,9645	2,0128
	0,001		5,7400					5,8162	5,8310
	0,050		5,5740					5,4941	5,6878
	0,100		5,1400					4,9901	5,3116
	0,200		3,8760					3,8215	4,1930
EAAA	0,400							1,9911	2,0813
	0,001		4,8470					4,9080	4,9235
	0,050		4,7170					4,6600	4,8161
	0,100		4,3720					4,2657	4,5248
	0,200		3,4180					3,3358	3,6467
AAAE	0,400							1,8217	2,1072
	0,001	4,0000	4,0000	3,9998	4,0000	4,0200		4,0294	4,0480
	0,050	3,9290	3,9280	3,7835	3,9444			3,8142	3,9879
	0,100	3,7310	3,7290	3,4950	3,7865	3,4500	3,7865	3,5286	3,8227
	0,200	3,1250	3,1190	2,8766	3,2637		3,2637	2,8943	3,2850
AAAA	0,400						1,9196	1,8183	2,0867

Tabela 6.16 Fator de carga crítica de instabilidade **k** para placas com espessura variável e borda livre.

Fator de Carga Crítica de Instabilidade k

Placas AEL com borda livre e espessura variável

Apoio das Placas	h/L	**Dawe and Roufaeil (1982)** *Rayleigh-Ritz (and Finite Strips)* $\nu = 0,3$	**Mizusawa (1992)** *Spline Strip Method* $\nu = 0,30$ $\kappa^2 = \pi^2/12$	**Kitipornchai et al. (1993)** *Rayleigh-Ritz* $\nu = 0,30$ $k^2 = 5/6$		**Shufrin and Eisenberger (2005)** *Kantorovich Method* $\nu = 0,3$ $\kappa^2 = 5/6$	**Sakanaka (2006)** $\nu = 0,3$ $\kappa^2 = \pi^2/12$	
				Soft	***Hard***		***Soft***	***Hard***
	0,001				3,9193			
	0,050				3,8007		3,6871	3,6890
	0,100				3,5077		3,4194	3,4244
	0,150				3,1152		3,0411	3,0506
LELE	0,200				2,6961		2,6331	2,6449
	0,001		1,6530					
	0,050		1,6150				1,5286	1,5628
	0,100		1,5390				1,4446	1,5074
	0,150						1,3424	1,4276
LAEA	0,200		1,3230				1,2349	1,3321
	0,001		1,4020					
	0,050		1,3780				1,3001	1,33364
	0,100	1,382	1,3270				1,2378	1,3003
	0,150						1,1622	1,2474
LAAA	0,200		1,1730				1,0809	1,1785
	0,001		0,9523	0,9523	0,9523			
	0,050		0,9412	0,9421	0,9433	0,9433	0,8992	0,90071
	0,100		0,9146	0,9199	0,9222	0,9222	0,8808	0,88363
	0,150			0,8877	0,8908	0,8908	0,8501	0,85368
LALA	0,200		0,8274	0,8477	0,8512	0,8512	0,8117	0,81517

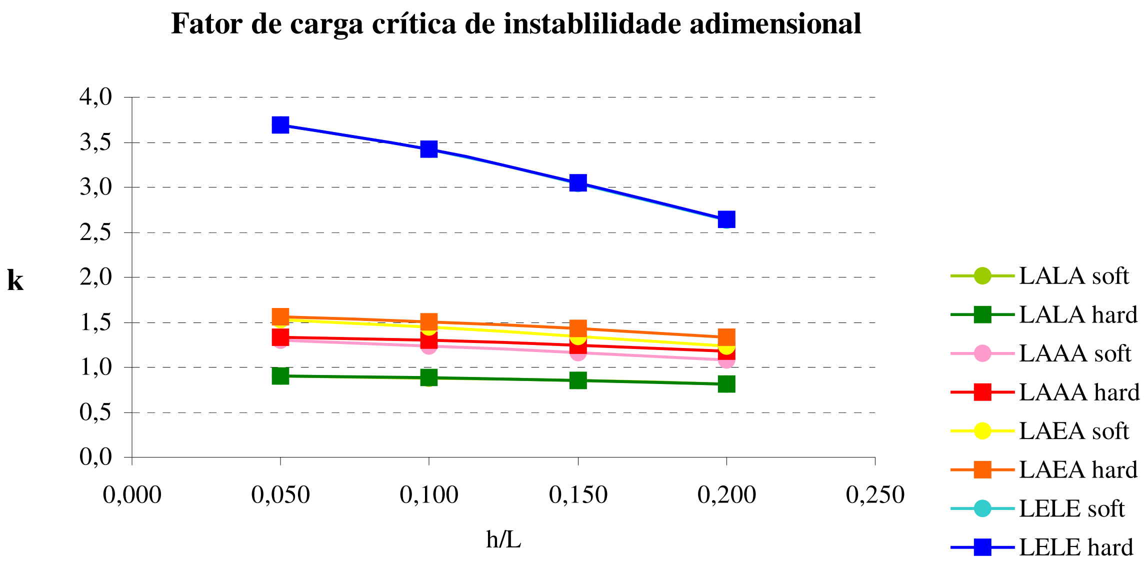


Gráfico 6.11 Fator de carga crítica de instabilidade adimensional **k** para placas com borda livre.

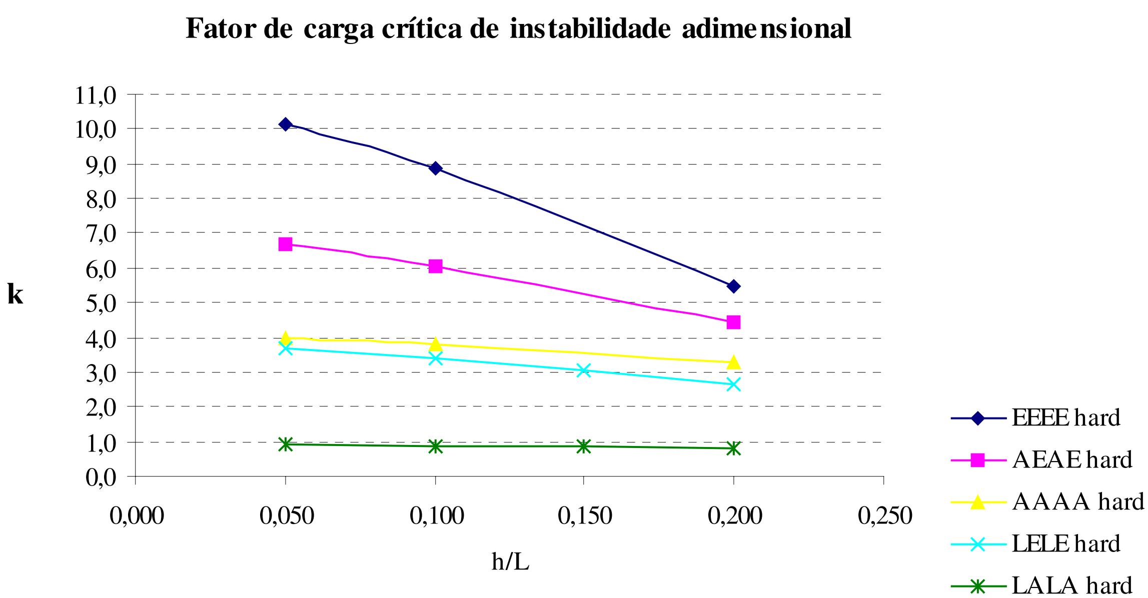


Gráfico 6.12 Fator de carga crítica de instabilidade adimensional **k** para placas.

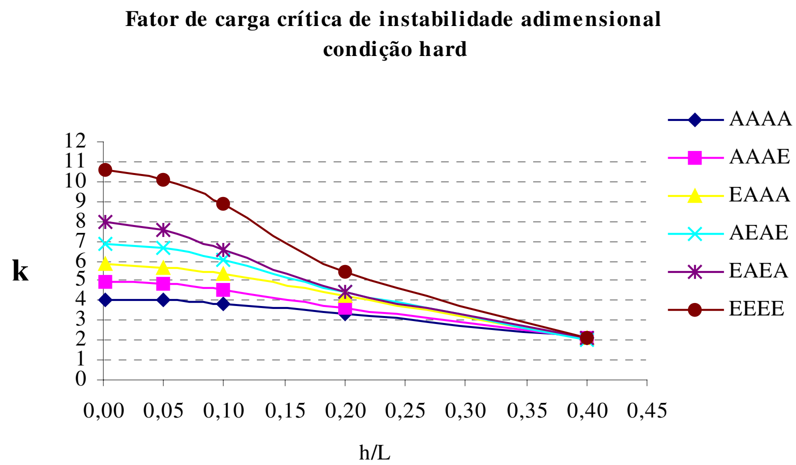


Gráfico 6.13 Fator de carga crítica de instabilidade adimensional **k** para placas para 0,001 < *h/L* < 0,4.

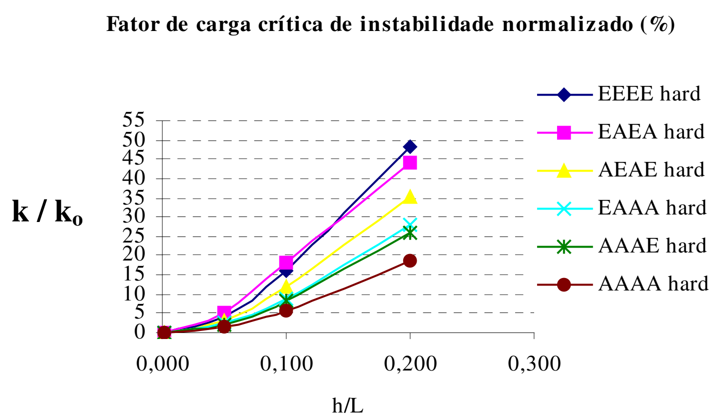


Gráfico 6.14 Fator de carga crítica de instabilidade normalizado **k / k $_o$** para placas.

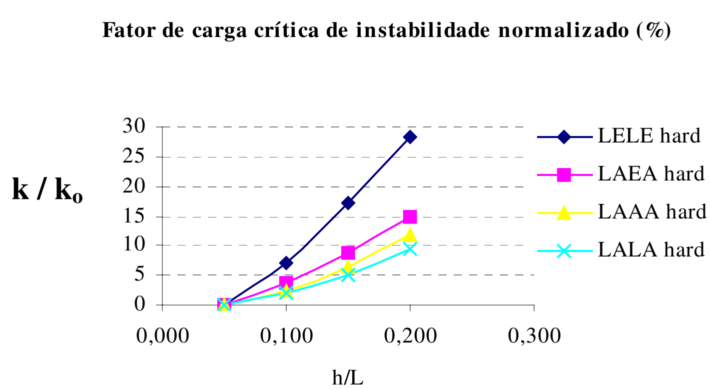


Gráfico 6.15 Fator de carga crítica de instabilidade normalizado **k / k $_o$** para placas com borda livre.

7 CONCLUSÃO

O grande número de exemplos resultantes deste presente trabalho demonstra a aplicabilidade e a versatilidade do Método dos Elementos de Contorno para as placas. Além disso, a teoria de *Mindlin* (1951) que considera o efeito da deformação pela força cortante e o efeito da inércia rotatória foi aplicada com sucesso para a análise destas. Esta teoria pode representar a distribuição dos esforços de uma maneira mais eficiente, como no caso do exemplo de uma placa com furo. Neste, verificou-se que o coeficiente de concentração tensão $\boldsymbol{K_b}$ pode quase duplicar de valor na região próxima aos furos com reduzidos raios de até três vezes a espessura da placa.

Com relação ao método numérico escolhido, a utilização da solução fundamental estática alternativa de *Palermo Jr.* (2000) simplifica a implemetação numérica do problema pois possibilita uma conexão direta entre a teoria de *Mindlin* (1951) com a teoria clássica. Esta formulação inclui os efeitos da deformação pela força cortante e da inércia rotatória como parcelas dependentes de integração de domínio na equação integral de contorno. Observou-se assim que a discretização do domínio da placa influi na precisão procurada.

Neste trabalho são aplicadas também, além das soluções fundamentais dos deslocamentos e esforços no contorno, as soluções fundamentais no domínio da placa e a derivada segunda com relação à x_1 destas, para o cálculo das freqüências naturais e cargas críticas de instabilidade respectivamente. Os elementos isoparamétricos lineares e a técnica de colocação dos pontos de carregamento no contorno da placa, através de integrais analíticas, apresentaram resultados satisfatórios.

As freqüências naturais e cargas críticas de instabilidade de placas quadradas moderadamente espessas com diversas condições de apoio foram calculadas com o método dos elementos de contorno e apresentaram bons resultados quando comparados com outros trabalhos encontrados na literatura, entre eles as soluções analíticas bi e tridimensionais e distintos métodos numéricos.

No cálculo do fator dinâmico de placas finas, a maior diferença deste trabalho na teoria clássica com *Bares* (1969) é de 3% para o caso EEEE. Para placas com espessuras maiores, a maior diferença deste trabalho na teoria de *Mindlin* (1951), levando em conta o efeito da inércia rotatória, com os resultados de *Mindlin* (1956), de *Palermo Jr.* (2005) e de *Levinson* (1985) é de 1%, 7% e 3%, respectivamente, no caso AAAA testado. Nos outros casos, em comparação com *Mizusawa* (1993) e *Shufrin and Eisenberger* (2005), as maiores diferenças encontradas ficaram em 2% (sem borda livre) e 6% (com borda livre). Tal precisão também foi confirmada inclusive quando comparado com a solução tridimensional de *Liew et al.* (1993), em 4% (sem borda livre) e 6% (com borda livre).

Bons resultados também foram obtidos para os valores do fator de carga crítica de instabilidade quando calculados pela teoria de *Kirchhoff* (1850) e comparados com a solução analítica de *Timoshenko* (1961), com o método das diferenças finitas calculado por *Bares* (1969) e com o MEC usando a teoria de dois parâmetros calculado por *Simões* (2001). As diferenças foram menores que 5%, 4% e 1% respectivamente. Para os casos com borda livre, estas foram menores que 2%, 2% e 9% respectivamente.

Quanto à teoria de *Mindlin* (1951), bons resultados foram obtidos para os valores do fator de carga crítica de instabilidade quando comparados com o Spline Strip Method calculado por *Mizusawa* (1992), com o método de Rayleigh-Ritz calculado por *Kitipornchai et al.* (1993) e com o MEC calculado por *Purbolaksono and Aliabadi* (2005), com diferenças menores que 4% em média tanto para os casos com borda livre como os casos sem borda livre.

Os fatores adimensionais das freqüências naturais e cargas críticas de instabilidade de placas quadradas moderadamente espessas são dependentes da relação *h/L* e das condições de apoio. Com o aumento da espessura das placas, os fatores decrescem e a diferença com a teoria clássica aumenta, pois a teoria clássica não considera o aumento de flexibilidade da placa devido às tensões cisalhantes. Além disso, a diferença entre as teorias de *Kirchhoff* (1850) e de *Mindlin* (1951) aumenta com o aumento da restrição no apoio e para caso específico do fator dinâmico, este resultado é mais significativo quando calculado com o efeito da inércia rotatória.

As maiores diferenças foram encontradas comparando-se as variações da relação h/L usando a teoria de Mindlin (1951). As diferenças no fator dinâmico ficaram entre 30% no caso AAAA (hard) a quase 50% no caso EEEE (soft). Entre os casos de borda livre, as diferenças estavam entre 6% no caso ELLL (hard) a 40% no caso LELE (hard).

Para as cargas críticas de instabilidade, as maiores diferenças encontradas foram para a placa espessa (relação h/L 0,2), do caso EEEE (hard), com até 50% de descréscimo do valor da placa fina (relação h/L 0,001) e caso LELE (hard) de aproximadamente 30%, entre os casos com borda livre. E as menores foram para o caso AAAA, em torno de 20% (hard) e 30% (soft) e o caso LALA, entre os com borda livre, em torno de 10%.

Nota-se que para os casos de cargas críticas de instabilidade tabelados na ***Tabela 6.14.*** sem simetria das condições de borda, os valores obtidos estão mais afastados dos valores apresentados na literatura. Além disso, no caso da placa EAEA, o programa convergiu para o autovalor correspondente a um modo com duas semiondas, mas houve necessidade de influir no modo de flambagem para início do processo iterativo. Deve-se observar que esse procedimento não seria necessário se fosse usada a técnica de determinação dos menores autovalores, em *Wilkinson* (1988), que poderá ser implementada em um trabalho futuro a partir do desenvolvimento das matrizes mostrado nesse estudo.

Neste sentido, para outros trabalhos futuros, propõe-se:

a) Implementação de cargas dinâmicas harmônicas ou de impulso;
b) No cálculo de cargas críticas de instabilidade, verificação dos modos de instabilidade e da variação da ordem em que aparecem com as dimensões da placa, bem como o cálculo de valores superiores;
c) Aplicação de teorias com variação parabólica ou superiores para a deformação da força cortante ou teorias não lineares para cargas de compressão ou introdução de não linearidade física.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. **Handbook of mathematical functions**. New York: Dover, 1965.

ALIABADI, M. H. **The boundary element method applications in solids and structures**. John Wiley & Sons, 2002.

ALTIERO, N. J.; SIKARSKIE, D. L. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. **Computers & Structures**, v. 9, p. 163-168, 1978.

ANDRADE, R. C. **Uma análise das soluções fundamentais aplicáveis às placas espessas pela teorias de Reissner e Mindlin e suas relações com a teoria clássica para o uso no método dos elementos de contorno**. Campinas: Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, 2001. Dissertação (Mestrado), UNICAMP, 2001.

ANTES, H. Static and Dynamic Analysis of Reissner-Mindlin Plates. In: BESKOS, D. E. (Ed.). **Boundary Element Analysis of Plates and Shells**. Springer-Verlag, 1991.

BAREš, R. **Tables pour le Calcul des Dalles et des Parois**. Dunod, 1969.

BETTI, E. Teoria dell'elasticità. **Il Nuovo Ciemento**, p.7-10, 1872.

BÉZINE, G. A. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. **Mech. Res. Commum.**, vol. 5, pp. 197-206, 1978.

BÉZINE, G. A. A mixed boundary integral-finite element approach to plate vibration problems. **Mech. Res. Commum.**, vol. 7, pp. 141-150, 1980.

BÉZINE, G. P.; Gamba, D. A. A new integral equation formulation for plate bending problems. In: BREBBIA, C. A. (Ed.). **Recent advances in BEM**, London: Pentech Press, p. 327-342, 1978.

BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. London: Pentech Press, 1978.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary element techniques**. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

CHUEIRI, L. H. M. **Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas**, 1994. Tese (Doutorado)- EESC-USP, São Carlos, SP.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. McGraw-Hill, 1975. 634p.

COSTA JR., J. A.; BREBBIA, C. A. Plate ending problems using boundary elements method. In: BREBBIA, C. A. **Boundary elements method**. Berlin: Springer-Verlag, p. 343-363, 1984.

COSTA JR., J. A.; BREBBIA, C. A. Elastic buckling of plate using boundary element method. In: BREBBIA, C. A.; MAIER, G. **Boundary elements VII**. Berlin: Springer-Verlag, p. 4.29-4.42, 1985.

COSTA JR., J. **The boundary element method applied to plate problems**, 1985. PhD Thesis - University of Southampton, Southampton, US.

CRUSE, T. A. Numerical solution in three dimensional elastostatics. **Int. J. Solids Struct.**, v. 25, p. 1259-1274, 1969.

CRUSE, T. A. **Mathematical foundations of the boundary integral equation method in solids mechanics**. East Hartford: United Technologies, 1977.

CRUSE, T. A.; SNOW, D. W.; WILSON, R. B. Numerical solutions in axisymetric elasticity. **Computers & Structures**, v. 7, p. 445-451, 1977.

DAWE, D. J.; ROUFAEIL, O. Buckling of rectangular Mindlin plates. **Computers & Structures**, v. 15, p. 461-471, 1982.

DANSON, D. J. **Analysis of plate bending problems by direct boundary element method**, 1979. M.Sc. Dissertation - University of Southampton, Southampton, US.

DE BARCELLOS, C. S.; SILVA, L. H. M. A boundary element formulation for the Mindlin's plate model. In: BREBBIA, C. A.; VENTURINI, W. S. (Ed.). **Boundary element techniques**: applications in stress analysis and heat transfer, 1989. p. 122-30.

ELZEIN, A. Plate stability by boundary elements method. In: BREBBIA, C. A.; ORSZAG, S. A. **Lecture notes in engineering**. New York: Springer-Verlag, 1991.

EL-ZAFRANY, A. **Techniques of the boundary element method**. Ellis Horwood, 1993. 321 p.

FREDHOLM, I. Sur une classe d'equations fonctionelles. **Acta Math.**, v. 27, p. 365-390, 1903.

GUO-SHU, S.; MUKHERJEE, S. Boundary element method: analysis of bending of elastic plates of arbitrary shape with general boundary conditions. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 3, p. 36-44, 1986.

HARTMANN, F.; ZOTEMANTEL, R. The direct boundary element method in plate bending. **Int. J. Num. Meth. Engng.**, v. 23, n. 11, p. 2049-2069, 1986.

HARTMANN, F. Static analysis of plates. In: BESKOS, D. E. **Boundary elements análisis of plates and shell**. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

HARTLEY, G. A.; ABDEL-AKHER, A. Analytic integration procedures for plate bending análisis. In: BREBBIA, C. A. (Ed.). **Boundary Elements X**. 1988. p. 391-405.

HARTLEY, G. A.; ABDEL-AKHER, A. Boundary integration and interpolation procedures for plate bending. **Int. Num. Meth. Engng.**, v. 28, n. 6, p. 1389-1408, 1989.

HARTLEY, G. A.; AHMED, A. Evaluation of boundary integrals for plate bending. **Int. Num. Meth. Engng.**, v. 28, n. 2, p. 75-93, 1989.

HEUER, R.; IRSCHIK, H., A boundary element method for eigenvalue problems of polygonal membranes and plates. **Acta Mech.**, v. 66, p. 9-20, 1987.

HUTCHINSON, J. R.; WONG, G. K. K., The boundary element method for plate vibrations. In: CONFERENCE ON ELECTRONIC COMPUTATION, 7^{th}, 1979, St. Louis, Missouri. **Proceedings…** New York: ASCE, 1979. p. 297-311.

IRSCHIK, H.; HEUER, R.; ZIEGER, F. BEM using Green's functions of rectangular domains: static and dynamic problems of bending plates. In: BREBBIA, C. A.; WENDLAND, W. L.; KUHN, G. (Ed.). **Boundary Elements**, 1987. p. 35-45, v. 2.

JASWON, M. A. Integral equation methods in potencial theory. **Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A.**, v. 275, p. 23-32, 1963.

JASWON, M. A., PONTER, A. R. Integral equation solution of the torsion problem. **Proc. Roy. Soc. Ser. A.**, v. 273, p. 237-246, 1963.

JASWON, M. A.; MAITI, M.; SYMM, G. J. Numerical biharmonic analysis and some applications. **Int. J. Solids Struct.**, v. 3, p. 309-332, 1967.

KATSIKADELIS, J. T.,;ARMENAKAS, A. E. A. A new boundary equation solution to the plate problem, **J. Appl. Mech.**, v. 56, p. 364-374,1989.

KATSIKADELIS, J. T. **Boundary elements theory and applications**. Elsevier, 2002.

KELLOG, O. D. **Foundations of potencial theory**. Berlin: Springer, 1929.

KIRCHHOFF, G.R. Über das Gleichgewicht und Die Bewegung Einer Elastischen Scheibe, **J. Math.**, Crelle, v. 40, p. 55-58, 1850.

KITAHARA, M. **Boundary integral equation methods in eigenvalue problems of elastodynamics and thin plates**. Elsevier, 1985.

KITIPORNCHAI, S.; XIANG, Y.; LIEW, K. M. Buckling of thick skew plates. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, v. 36, p. 1299-1310, 1993.

KUPRADZE, O. D. **Potencial methods in theory of elasticity**. New York: Daniel Davy, 1965.

LACHAT, J. C. **A further development of the boundary integral technique for elastostatics**. Southampton: University of Southampton, 1975. PhD Thesis, University of Southampton, 1975.

LACHAT, J. C.; WATSON, J. O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics. **Int. J. Numer. Meth. in Engng.**, v. 10, p. 991-1005, 1976.

LEVINSON, M. Free vibrations of a simply supported rectangular plate: an exact elasticity solution, **J. Sound and Vibration**, v. 98., p. 289-298, 1985.

LOVE, A. E. H. **A treatise on the mathematical theory of elasticity**. New York: Dover, 1944.

MACKERLE, J.; BREBBIA, C. A. **The boundary element reference book**. Springer-Verlag, 1988. 382p.

MANOLIS, G. D.; BESKOS, D. E. **Boundary element methods in elastodynamics**. Unwin Hyman, 1988. 282 p.

MATSUNAGA, H. Buckling intabilities of thick elastic plates subjected to in-plane stress. **Computers & Structures**, v. 62, p. 205-214, 1997.

MIKHLIN, S. G**. Integral equations**. Oxford: Pergamon Press, 1957.

MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates, **Journal of Applied Mechanics**, v. 18, p. 31-38, 1951.

MIZUSAWA, T. Vibration of rectangular plates by the spline strip method. **Journal of Sound and Vibration**, v. 163, n. 2, p. 193-205, 1993.

MINDLIN, R.D.; SCHACKNOW, A.; DERESIEWICZ, H. Flexural vibrations of rectangular plates, **J. Appl. Mech.**, v. 23, p. 430-436, 1956.

MOSHAIOV, A.; VORUS, W. S. Elasto-plastic bending análisis by a boundary element method with inicial plastics moments. **Int. J. Solids Struct**., v. 22, n. 11, p. 1213-1229, 1986.
MUSKHELISHVILI, N. I. **Some basic problems of the mathematical theory of elasticity**. Noordhoff, 1953.

NIWA, Y., KOBAYASHI, S., KITAHARA, M. Eingenfraquency analysis of a plate by the integral equation method. **Theor. Applied Mechanics**, v. 29, p. 287-307, 1981.

NIWA, Y.; KOBAYASHI, S.; KITAHARA, M. Determination of eigenvalues by boundary element methods. In: BANERJEE, P. K.; SHAW, R. P. (Ed.). **Developments in boundary element method**. Applied Science, 1982. p.143-176, v. 2.

PAIVA, J. B. **Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas**. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, 1987. Tese (Doutorado), USP, 1987. 195 f.

PALERMO JR., L. **Análise de placas de seção delgada como associação de placas pelo método dos elementos de contorno**. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, 1989. Tese (Doutorado), USP, 1989. 152 f. (Parcialmente financiada pela Fapesp, Orientador: Munir Rachid).

PALERMO JR., L. **Análise elástica de placas e o método dos elementos de contorno**. Campinas: Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, 2000. Tese (Livre Docência), Universidade Estadual de Campinas, 2000.

PALERMO JR., L. Plate analysis using classical or Reissner/Mindlin theories. In: BESKOS; D. E.; BREBBIA, C. A.; KATSIKADELIS, J. T.; MANOLIS, G. D. (Ed.). CONFERENCE ON THE BOUNDARY ELEMENT METHOD, 23rd, 2001. **Proceedings…** p. 373-384.

PALERMO JR., L. Plate bending analysis using the classical or the Reissner-Mindlin models, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, p. 603-609, 2003.

PALERMO JR., L. On the plate bending analysis under dynamic loads using the Reissner and the Mindlin models, In: CONFERENCE ON MECHANICS AND MATERIALS McMat2005, 2005. **Proceedings…** ASME/ASCE/SES, 2005.

POISSON, S. D. Memoire sur l'equilibre et le mouvement des corps solids. **J. Math. Physics**, v. 12, n. 8, 1829.

PROVIDAKIS, C. P.; BESKOS, D. E. Dynamics analysis of elastic plates. In: BREBBIA, C. **Boundary elements X**. Berlin: Springer-Verlag, 1988. p. 403-413, v. 4.

PROVIDAKIS, C.P.; BESKOS, D. E. Free and forced vibrations of plates by boundary elements. **Comp. Mth. Appl. Mech. Engng**., v. 74, p. 231-250, 1989.

PROVIDAKIS, C.P.; BESKOS, D. E. Free and forced vibrations of plates by boundary interior elements. **Int. J. for Numer. Meth. in Eng.**., v. 28, p. 1977-1994, 1989.

PROVIDAKIS, C.P.; BESKOS, D.E. Dynamics analysis of plates by the boundary elements. **Appl. Mech. Rev**., vol. 52, n. 7, p. 213-236, 1999.

PURBOLAKSONO, J.; ALIABADI, M. H. Buckling analysis of sher deformable plates by boundary element method. **Int. J. for Numer. Meth. in Eng.**, v. 62, p. 537-563, 2005.

REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. **Journal of Applied Mechanics**, A69-A76, 1945.

REISSNER, E. On the bending of elastic plates. **Q. Appl. Math.**, v. 5, p. 55-68, 1947.

RIZZO, F. J. An integral approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Q. Appl. Math.**, v. 25, n. 1, p. 83-92, 1967.

ROUFAEIL, O. L.; DAWE, D. J. Vibration analysis of rectangular plates by the finite strip method. **Computers & Structures**, v. 12, p. 83-92, 1967.

SAADA, A. S. **Elasticity: theory and applications**. New York: Pergamon Press, 1974.

SANCHES, L. C. F., **Uma resolução de placas com a teoria de Mindlin através do Método dos Elementos de Contorno**. Campinas, SP: Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, 1998. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, 1998.

SIMÕES, R. **Um estudo de placas sob cargas dinâmicas estacionárias e com o efeito da não linearidade geométrica sob cargas estáticas usando o método dos elementos de contorno**. Campinas, SP: Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, 2001. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, 2001.

SMIRNOV, V. J. Integral equations and partial differential equations. In: **Course in higher mathematics**. London: Addison-Wesley, v. 4, 1964.

SMITH, J. P. Buckling of shear deformable plates using the p-version of the finite element method. **Computers & Structures**, v. 57, p. 527-532, 1995.

STEN, M. A. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. **International Journal Solids Structures**, v. 15, p. 769-82, 1979.

SYMM, G. T. Integral equation methods in potencial theory. **Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A.**, v. 275, p. 33-46, 1963.

SYNGELLAKIS, S.; KANG, M. A. A boundary element solution of the plate buckling problem. **Engineering Analysis**, v. 4, 1987.

TANAKA, M.; YAMAGIWA, K.; MIYAZAKI, K.; UEDA, T. Integral equation approach to free vibration problems of assembled plate structures. In: TANAKA, M.; DU, Q. (Ed.). **Theory and applications of boundary element methods**, Pergamon Press, 1987. p. 375-384.

TANAKA, M.; YAMAGIWA, K.; MIYAZAKI, K.; UEDA, T. Free vibration analysis of elastic plate strucutres by boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 5, n. 4, p. 182-188, 1988.

TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. McGraw-Hill, 1959.

TIMOSHENKO, S.; YOUNG, D.H.; WEAVER JR., W. **Vibration problems in Engineering**. Ed. John Wiley, 1990.

TOTTENHAM, H. The boundary elements for plates and shells. In: **Development in BEM**, Applied Science, 1979. v.1, p.173-205.
VENTURINI, W. S.; BREBBIA, C. Formulação do método dos elementos de contorno para domínios descontínuos. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, Nov, 1983, Santiago, Chile. **Anais**... 1983. p.7-11.

VILMANN, O.; DASGUPTA, G. Fundamental solutions of Mindlin plates with variable thickness for stochastic boundary elements. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 9, p. 47-59, 1992.

VIVOLI, J. Vibrations de plaqueset potentials de couches. **Acústica**, v. 26, p. 305-314, 1972.

VIVOLI, J. 1974. Eingenfrequencies of thin plates and layer potencials. **Journal Acoust. Soc**., v. 55, p. 562-67, 1974.

WATSON, J. O. **The analysis of thick shells with holes by integral representation of displacement.** 1972 - PhD Thesis, University of Southampton, Southampton.

WEEËN, F.V. Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model, **Int. J. Num. Meth. in Engng**, v. 18, p. 1-10, 1982.

WESTPHAL Jr., T., DE BARCELLOS, C. S. Reissner/Mindlin's plates models and the boundary element method. In: BREBBIA, C. A., (Ed.). **International Conference on Boundary Element Technology**, p. 589-604, 1992.

WESTPHAL Jr., T.; ANDRÄ, H.; SCHNACK, E. Some fundamental solutions for the Kirchoff, Reissner and Mindlin plates and a unified BEM formulation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 25, p. 129-39, 2001.

WILKINSON, J. H. **The algebraic eingenvalue problem**. London: Oxford University, 1988.

WONG, G. K. K.; HUTCHINSON, J. R. An improved boundary element method for plate vibration. In: BREBBIA, C. A. (Ed.). Springer-Verlag, 1981. p. 272-89.

WU, B. C.; ALTIERO, N. J. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. **Computers & Structures**, v. 10, p. 703-707, 1979.