

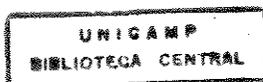


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**ANÁLISE DE PÓRTICOS METÁLICOS PLANOS COM CONEXÕES
SEMI-RÍGIDAS CONSIDERANDO A
NÃO LINEARIDADE FÍSICA E GEOMÉTRICA**

Eng^o. Wagner Luiz de Mello
Orientador: Prof. Dr. João Alberto Venegas Requena

Campinas, Novembro de 1999





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**ANÁLISE DE PÓRTICOS METÁLICOS PLANOS COM CONEXÕES
SEMI-RÍGIDAS CONSIDERANDO A
NÃO LINEARIDADE FÍSICA E GEOMÉTRICA**

Eng^o. Wagner Luiz de Mello
Orientador: Prof. Dr. João Alberto Venegas Requena

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Civil como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil – Área de concentração em Engenharia de Estruturas.

Atesto que esta é a versão definitiva da dissertação. 22/2/2000
Prof. Dr. [Handwritten Signature]
Matrícula: 22294-1

Campinas, Novembro de 1999

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA:	T/UNICAMP
	M489a
	Es
TOMO BC/	41093
FOL. 278/00	
	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO R\$	11,00
DATA	15-06-00
Nº CDU	

CM-00142457-0

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M489a Mello, Wagner Luiz de
Análise de pórticos metálicos planos com conexões semi-rígidas considerando a não linearidade física e geométrica. / Wagner Luiz de Mello.--Campinas, SP: [s.n.], 1999.

Orientador: João Alberto Venegas Requena
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

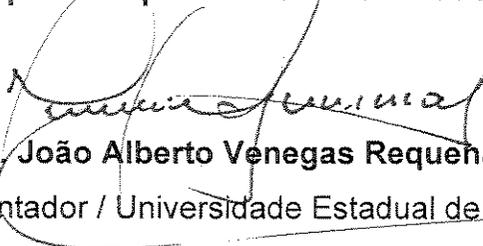
1. Estruturas metálicas. 2. Teorias não-lineares. 3. Estabilidade estrutural. 4. Ligações metálicas. 5. Juntas (Engenhria). I. Requena, João Alberto Venegas. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE DE PÓRTICOS METÁLICOS PLANOS COM
CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS CONSIDERANDO
A NÃO LINEARIDADE FÍSICA E GEOMÉTRICA

Eng^o. Wagner Luiz de Mello

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



Prof. Dr. João Alberto Venegas Requeña

Presidente e Orientador / Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes

Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Ernani Carlos de Araújo

Universidade Federal de Ouro Preto

Campinas, 12 de Novembro de 1999.

Dedico aos meus pais Antonio e Júlia.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. João Alberto Venegas Requena pelo carinho, atenção, dedicação e orientação no desenvolvimento deste trabalho.

À todos professores que me incentivaram e contribuíram no desenvolvimento deste trabalho.

À Faculdade de Engenharia Civil da Unicamp pela oportunidade que me foi oferecida.

Ao CNPQ pela bolsa de estudo concedida por intermédio da Unicamp.

À minha família pelo apoio, carinho e compreensão.

SUMÁRIO

Lista de Tabelas.....	i
Lista de Figuras.....	iii
Lista de Símbolos.....	vi
Resumo.....	xii

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Gerais.....	1
1.2 Situação do Problema.....	2
1.2.1 Flambagem Elástica de Barras por Flexão.....	2
1.2.2 Flambagem Inelástica de Barras por Flexão.....	7
1.2.3 Conexões Semi-Rígidas.....	12
1.2.4 Instabilidade de Estruturas Reticulares Planas.....	17
1.2.4.1 Instabilidade Elástica de Estruturas Reticulares Planas.....	17
1.2.4.2 Instabilidade Inelástica de Estruturas Reticulares Planas.....	18
1.3 Proposta do Trabalho.....	22

Capítulo 2

INELASTICIDADE DAS BARRAS

2.1 Introdução.....	24
2.2 Efeito da Não Linearidade Física do Material.....	25
2.3 Teoria do Módulo Tangente.....	28

2.4 Teoria do Módulo Reduzido	33
2.5 Teoria de Shanley	39
2.5.1 Análise Matemática de Shanley.....	41
2.5.2 Comparação com a Teoria do Módulo Reduzido.....	46
2.5.3 Variação da Deformação com a Força Axial.....	47
2.5.4 Conclusões sobre a Teoria de Shanley.....	48
2.6 Curvas de Tensão-Deformação	49
2.6.1 Introdução.....	49
2.6.2 Curva Proposta pelo “Column Research Council”.....	49
2.6.3 Curva Proposta pela “AISC Load and Resistance Factor Design”.....	51
2.6.4 Curva Proposta pela “NBR 8800”.....	53
2.6.5 Comparação das Curvas Apresentadas.....	57

Capítulo 3

CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS

3.1 Introdução	59
3.2 Tipos de Conexões Semi-Rígidas	60
3.2.1 Conexão de Cantoneira Simples na Alma e Placa Simples.....	60
3.2.2 Conexões de Cantoneira Dupla na Alma.....	60
3.2.3 Conexões de Cantoneira de Topo e Assentamento com Cantoneira Dupla na Alma.....	61
3.2.4 Conexões de Cantoneira de Topo e Assentamento.....	61
3.2.5 Conexões de Chapa de Topo Estendida e Chapa de Topo Ligada a Mesa.....	62
3.2.6 Conexões de Chapa de Encabeçamento.....	64
3.3 Comportamento Não Linear das Conexões	64
3.4 Classificação	65
3.5 Modelos das Conexões	69

3.5.1 Observações Gerais.....	69
3.5.2 Modelo Polinomial de Frye-Morris.....	72
3.5.3 Modelo Cúbico-B de Jones-Kirby-Nethercot.....	75
3.5.4 Modelo de Colson.....	75
3.5.5 Modelo de Ang-Morris.....	76
3.5.6 Modelo Exponencial de Lui e Chen.....	78
3.5.7 Modelo de Três Parâmetros de Kishi e Chen.....	79
3.5.8 Outros Modelos Não Linear das Conexões.....	80
3.6 Base de Dados das Conexões.....	81
3.6.1 Base de Dados de Goverdhan.....	81
3.6.2 Base de Dados de Nethercot.....	82
3.6.3 Base de Dados de Kishi & Chen.....	83

Capítulo 4

ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETICULADAS

4.1 Introdução.....	86
4.2 Análise Elástica de Segunda Ordem de Estruturas Reticulares Planas.....	88
4.2.1 Sistema de Referência Global de Eixos para Estruturas de Pórtico Plano.....	88
4.2.2 Sistema de Referência Local de Eixos para o Elemento de Barra.....	89
4.2.3 Coeficientes da Matriz de Rigidez do Elemento de Barra com Funções de Rigidez.....	90
4.2.3.1 Força Axial Nula.....	92
4.2.3.2 Força Axial de Compressão.....	95
4.2.3.3 Força Axial de Tração.....	98
4.2.3.4 Funções de Rigidez.....	102
4.2.4 Ações de Extremidades Devido a Carregamento ao Longo das Barras.....	103

4.2.4.1 Força Axial Nula.....	104
4.2.4.2 Força Axial de Compressão.....	107
4.2.4.3 Força Axial de Tração.....	110
4.2.4.4 Vetor de Ações de Extremidade.....	113
4.2.5 Coeficientes da Matriz de Rigidez do Elemento de Barra com Funções de Rigidez para Conexões Semi-Rígidas.....	113
4.2.5.1 Funções de Rigidez.....	119
4.2.6 Ações de Extremidade Devido a Carregamento ao Longo das Barras para Conexões Semi-Rígidas.....	122
4.2.6.1 Vetor das Ações de Extremidade.....	125
4.2.7 Coeficientes da Matriz de Rigidez do Elemento de Barra com Funções de Rigidez no Regime Inelástico.....	127
4.2.7.1 Funções de Rigidez e Vetor de Ações de Extremidade.....	130
4.2.8 Matriz de Rigidez da Estrutura Formada por Elemento de Barra.....	131
4.2.9 Cálculo dos Esforços e Deslocamentos da Estrutura em Teoria de Primeira e Segunda Ordem.....	134
4.2.10 Processo Iterativo com Aproximações Sucessivas.....	134
4.2.11 Verificação da Estabilidade da Estrutura Submetida a um Determinado Carregamento.....	136
4.2.12 Carregamento Crítico de Instabilidade de Pórtico Plano.....	137
4.2.13 Considerações de Outros Efeitos Não Lineares.....	140

Capítulo 5

EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.1 Exemplo Numérico 1.....	143
5.2 Exemplo Numérico 2.....	144
5.3 Exemplo Numérico 3.....	146
5.4 Exemplo Numérico 4.....	147

5.5 Exemplo Numérico 5	148
5.6 Exemplo Numérico 6	150
5.7 Exemplo Numérico 7	151
5.8 Exemplo Numérico 8	154
5.9 Exemplo Numérico 9	155
5.10 Exemplo Numérico 10	159
5.11 Exemplo Numérico 11	162
5.12 Exemplo Numérico 12	165

Capítulo 6

Considerações Finais	169
-----------------------------------	-----

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	171
---	-----

Abstract	178
-----------------------	-----

Lista de Tabelas

Tabela 3.1	- Constantes para o modelo polinomial de Frye-Morris	73
Tabela 3.2	- Modelo de Ang-Morris	77
Tabela 4.1	- Funções de rigidez de barra com interação entre força axial e flexão	102
Tabela 4.2	- Ações de extremidade de barra com interação entre força axial e flexão para ação uniformemente distribuída	113
Tabela 4.3	- Funções de rigidez de barra com conexões semi-rígidas com interação entre força axial e flexão	120
Tabela 4.4	- Funções de rigidez de barra com conexões semi-rígidas com interação entre força axial e flexão, utilizando o fator fixo	121
Tabela 4.5	- Ações de extremidade de barra considerando as conexões semi-rígidas	126
Tabela 4.6	- Ações de extremidade de barra considerando as conexões semi-rígidas, utilizando o fator fixo	126
Tabela 4.7	- Funções de rigidez de barra com interação entre força axial e flexão na teoria do módulo tangente	130
Tabela 4.8	- Ações de extremidade de barra com interação entre força axial e flexão para carregamento uniformemente distribuída na teoria do módulo tangente	131
Tabela 5.1	- Resultados obtidos na análise realizada por Haldorsson & Wang e pelo autor	145
Tabela 5.2	- Resultados comparativos	147
Tabela 5.3	- Relação tensão crítica x índice de esbeltez	148
Tabela 5.4	- Relação entre a ação na barra e o deslocamento horizontal	150

Tabela 5.5	- Resultados comparativos	151
Tabela 5.6	- Comparação das teorias utilizadas para a consideração das ações de extremidade no cálculo de segunda ordem no regime elástico	153
Tabela 5.7	- Relação entre a carga crítica e a rigidez da mola	155
Tabela 5.8	- Deslocamento lateral	161
Tabela 5.9	- Momento máximo absoluto	161
Tabela 5.10	- Deslocamento lateral	163
Tabela 5.11	- Momento máximo absoluto	164
Tabela 5.12	- Parâmetros utilizados para descrever o comportamento da conexão com o modelo dos três parâmetros	166
Tabela 5.13	- Deslocamentos calculados pelo programa proposto pelo autor	167

Lista de Figuras

Figura 1.1	- Barra para determinação da carga de flambagem elástica	6
Figura 1.2	- Influência da tensão residual na relação tensão-deformação	8
Figura 1.3	- Relação da carga crítica com a esbeltez da barra	12
Figura 1.4	- Resumo do histórico da instabilidade	13
Figura 2.1	- Diagrama de tensão deformação representando o efeito da não linearidade física do material	26
Figura 2.2	- Representação da flambagem inelástica de barras	29
Figura 2.3	- Teoria do módulo tangente	30
Figura 2.4	- Teoria do módulo reduzido	35
Figura 2.5	- Modelo de barra proposto na teoria de Shanley	41
Figura 2.6	- Variação de carga axial em relação ao deslocamento lateral da barra, assumindo o " E_t " constante (Shanley)	45
Figura 2.7	- Curvas de flambagem	58
Figura 2.8	- Redução do módulo de elasticidade em função da força axial	58
Figura 3.1	- Deformação rotacional na conexão	59
Figura 3.2	- Conexões típicas de vigas com colunas	63
Figura 3.3	- Conexão de cantoneira de topo e assentamento na posição deformada devido a uma flexão	65
Figura 3.4	- Classificação das conexões segundo Bjorhovde et alli	66
Figura 3.5	- Classificação das conexões segundo Eurocode 3	68
Figura 3.6	- Relação momento-rotação nos modelos	71
Figura 3.7	- Parâmetros do modelo de Colson	76
Figura 3.8	- Parâmetros do modelo de Ang-Morris	77
Figura 3.9	- Comportamento da conexão no carregamento e no descarregamento segundo o modelo exponencial de Lui & Chen	78

Figura 3.10	- Modelo dos três parâmetros proposto por Kishi e Chen	80
Figura 3.11	- Conexões típicas	84
Figura 3.12	- Curvas típicas da relação momento-rotação	85
Figura 4.1	- Sistema de referência no plano	89
Figura 4.2	- Sistema de coordenadas locais para barra	90
Figura 4.3	- Estado de deslocamentos	91
Figura 4.4	- Matriz de rigidez da barra com funções de rigidez	92
Figura 4.5	- Matriz de rigidez da barra com funções de rigidez	102
Figura 4.6	- Sistema de coordenadas para ações uniformemente distribuídas ao longo da barra	104
Figura 4.7	- Vetor das ações de extremidade para carregamento uniformemente distribuído	113
Figura 4.8	- Sistema de coordenadas locais para barra com conexões semi-rígidas	114
Figura 4.9	- Primeiro estado de deslocamento	116
Figura 4.10	- Segundo estado de deslocamento	118
Figura 4.11	- Matriz de rigidez da barra com conexões semi-rígidas	119
Figura 4.12	- Sistema de coordenadas para ação uniformemente distribuída ao longo da barra com conexões semi-rígidas	122
Figura 4.13	- Estado de carregamento transversal ao longo da barra considerando o engastamento elástico	124
Figura 4.14	- Vetor das ações de extremidade com conexões semi-rígidas	125
Figura 4.15	- Submatriz de transformação $[b]_i$ do elemento de barra	133
Figura 5.1	- Barra bi-articulada de Euler	144
Figura 5.2	- Estrutura reticulada plana analisada por Haldorsson & Wang	145
Figura 5.3	- Estrutura do edifício industrial	146
Figura 5.4	- Análise de instabilidade elástica e inelástica de uma barra bi-articulada de comprimento variável	147
Figura 5.5	- Tensão crítica x índice de esbeltez	148

Figura 5.6	- Barra bi-articulada com carregamento excêntrico	149
Figura 5.7	- Carregamento aplicado na barra x deslocamento horizontal	149
Figura 5.8	- Pórtico analisado por Vogel	151
Figura 5.9	- Barra bi-engastada com carregamento uniformemente distribuído	152
Figura 5.10	- Esforço axial "P" x momento de extremidade "M"	152
Figura 5.11	- Barra bi-engastada com molas nas extremidades	154
Figura 5.12	- Carga crítica x rigidez na mola	154
Figura 5.13	- Pórtico com conexões de molas no encontro das barras	156
Figura 5.14	- Gráfico de esforço x deslocamento para os nós 1 e 2 rigidamente conectados	156
Figura 5.15	- Gráfico de esforço x deslocamento para os nós 1 e 2 articulados	157
Figura 5.16	- Gráfico de esforço x deslocamento para os nós 1 e 2 com conexões semi-rígidas	157
Figura 5.17	- Gráfico de esforço x deslocamento para análise em primeira ordem no regime inelástico	158
Figura 5.18	- Gráfico de esforço x deslocamento para análise em segunda ordem no regime elástico	158
Figura 5.19	- Gráfico de esforço x deslocamento para análise em segunda ordem no regime inelástico	159
Figura 5.20	- Pórtico analisado por Bhatti & Hingtgen	160
Figura 5.21	- Tipo da conexão e comportamento adotado por Bhatti & Hingtgen para considerar as conexões semi-rígidas	160
Figura 5.22	- Estrutura analisada por Bhatti & Hingtgen	162
Figura 5.23	- Conexão utilizada no pórtico analisado por Kim & Chen	166
Figura 5.24	- Comportamento da relação momento-rotação da conexão semi-rígida	166
Figura 5.25	- Pórtico analisado por Kim & Chen	167
Figura 5.26	- Comparação do deslocamento lateral	168

Lista de Símbolos

a) Letras romanas maiúsculas

A	- área da seção transversal da barra
$\{A\}$	- vetor das ações totais
$\{A_e\}$	- vetor das ações de extremidade
$\{A_n\}$	- vetor das ações nodais
B	- constante de interseção entre a hipérbole de Euler e a parábola do campo inelástico
C_1	- constante de ajuste de curva
C_2	- constante de ajuste de curva
C_3	- constante de ajuste de curva
C_c	- ponto de interseção entre a hipérbole de Euler e a parábola do campo inelástico
C_j	- parâmetros do modelo de conexão
$\{D\}$	- vetor dos deslocamentos da estrutura
$\{D_L\}$	- vetor dos deslocamentos do elemento nas coordenadas locais
E	- módulo de elasticidade longitudinal
E_1	- módulo de elasticidade efetivo relativo a parte da seção transversal carregada
E_2	- módulo de elasticidade efetivo relativo a parte da seção transversal aliviada
E_{eff}	- módulo de elasticidade efetivo
E_r	- módulo de elasticidade reduzido
E_t	- módulo de elasticidade tangente
F_f	- força cortante no nó final da barra

F'_f	- força cortante, no nó final da barra, dado pela ação de extremidade considerando engastamento perfeito
F_i	- força cortante no nó inicial da barra
F'_i	- força cortante, no nó inicial da barra, dado pela ação de extremidade considerando engastamento perfeito
F_y	- tensão de escoamento do material
$\{F\}$	- vetor das ações da estrutura
$\{F_e\}$	- vetor das ações de extremidade dado pelos carregamentos ao longo da barra
I	- momento de inércia da seção transversal
I_1	- momento de inércia relativo a área da seção transversal carregada
I_2	- momento de inércia relativo a área da seção transversal aliviada
IBC	- barra com força axial mais próxima da carga crítica de Euler
I_d	- momento de inércia relativo a parte da seção transversal comprimida
I_e	- momento de inércia relativo a parte da seção transversal tracionada
K	- parâmetro padronizador
$K1...K5$	- coeficientes de rigidez para elemento de barra plana pelo método das funções de rigidez considerando as conexões semi-rígidas
KL	- largura efetiva de flambagem
L	- largura da barra
L_{fl}	- comprimento efetivo de flambagem
M	- momento fletor atuando na barra
M_0	- momento inicial
M_{cu}	- capacidade ao momento último da conexão
M_e	- momento atuante externo
M_f	- momento fletor no nó final da barra
M'_f	- momento fletor, no nó final da barra, dado pela ação de extremidade considerando engastamento perfeito
M_i	- momento fletor no nó inicial da barra

M'_i	- momento fletor, no nó inicial da barra, dado pela ação de extremidade considerando engastamento perfeito
M_{int}	- momento resistente interno
M_p	- capacidade máxima ao momento plástico
M_y	- momento de plastificação da seção transversal
$M-\theta_r$	- comportamento da relação momento rotação da conexão
P	- força axial atuando na barra
P_1	- força axial no elemento de célula relativo a parte da seção transversal carregada
P_2	- força axial no elemento de célula relativo a parte da seção transversal aliviada
P_{cr}	- carga crítica de uma barra
P_{Euler}	- carga crítica de Euler
P_r	- carga crítica na teoria do módulo reduzido
P_t	- carga crítica na teoria do módulo tangente
P_y	- força axial de plastificação da seção transversal
$P-\Delta$	- efeito de rotação da corda que altera a rigidez a flexão da barra a medida que o elemento se desloca
$P-\delta$	- efeito de curvatura da barra ao se deslocar que altera a rigidez a flexão do elemento
R	- relação entre P/P_t
R_A	- parâmetro adimensional no nó inicial da barra dado pela razão entre $k_A L/EI$
R_B	- parâmetro adimensional no nó final da barra dado pela razão entre $k_B L/EI$
R_k	- rigidez tangente da conexão
R_{ki}	- rigidez inicial da conexão
R_{kf}	- rigidez a deformação rotacional da conexão

$S1...S5$	- coeficientes de rigidez para elemento de barra plana pelo método das funções de rigidez
$[S]$	- matriz de rigidez da estrutura
$[S_{KB}]$	- matriz de rigidez do elemento de barra em coordenadas locais
$[S_{KG}]$	- matriz de rigidez da estrutura em coordenadas globais
TOL	- tolerância adotada para o processo iterativo
W	- módulo de resistência elástico
WA	- limite inferior do parâmetro do carregamento
WB	- limite superior do parâmetro do carregamento
W_{cr}	- parâmetro que representa o carregamento crítico
W_{max}	- parâmetro máximo das cargas vivas que um pórtico pode suportar sem perder a estabilidade
Z	- módulo de resistência plástico

b) Letras romanas minúsculas

$[b]$	- matriz de transformação que relaciona os deslocamentos da estrutura com os deslocamentos dos elementos
d	- deslocamento lateral da barra de Shanley
d_1	- distância da fibra mais aliviada da seção transversal
d_2	- distância da fibra mais carregada da seção transversal
e_1	- deslocamento na célula unitária carregada de Shanley
e_2	- deslocamento na célula unitária aliviada de Shanley
h	- altura da seção transversal
k	- relação entre E/E_t
k_A	- rigidez tangente da conexão semi-rígida no nó inicial da barra
k_B	- rigidez tangente da conexão semi-rígida no nó final da barra
\bar{m}	- relação entre M/M_p
n	- parâmetro de ajustamento de curva

nb	- número de elementos de barra
q	- carga uniformemente distribuída ao longo da barra
r	- raio de giração da seção transversal
x	- posição na direção do eixo axial da barra
y	- deslocamento transversal da barra no plano da estrutura
y^I	- derivada primeira do deslocamento transversal da barra
y^{II}	- derivada segunda do deslocamento transversal da barra
y^{III}	- derivada terceira do deslocamento transversal da barra
y^{IV}	- derivada quarta do deslocamento transversal da barra
y_1	- distância de uma fibra qualquer na face aliviada
y_2	- distância de uma fibra qualquer na face carregada
w	- carregamento transversal uniformemente distribuído ao longo do comprimento da barra

c) Letras gregas maiúsculas

ΔP	- incremento de força axial
$\Delta \varepsilon$	- variação de deformação normal na seção transversal
$\Delta \varepsilon_1$	- variação de deformação normal em uma fibra aliviada
$\Delta \varepsilon_2$	- variação de deformação normal em uma fibra carregada
$\Delta \sigma$	- variação de tensão normal
$\Delta \sigma_1$	- variação de tensão normal em uma fibra aliviada
$\Delta \sigma_2$	- variação de tensão normal em uma fibra carregada
Φ	- curvatura da seção transversal

d) Letras gregas minúsculas

α	- constante de ajustamento das curvas europeias de acordo com o perfil utilizado
----------	--

α^2	- coeficiente obtido pela relação de $ P /EI$
β	- coeficiente utilizado para simplificar a fórmula da carga crítica a compressão da norma NBR 8800
δ	- distância entre a linha neutra e o centro de gravidade da seção transversal
δ_0	- deslocamento no meio da barra ou imperfeição geométrica inicial da barra
ε	- deformação normal
ε_c	- deformação normal de compressão
ε_t	- deformação normal de tração
ϕ	- curvatura da barra
η	- parâmetro adimensional de imperfeição geométrica da barra
λ_c	- parâmetro de esbeltez
π	- constante pi = 3,14159
θ_A	- rotação relativa no nó inicial da barra
θ_B	- rotação relativa no nó final da barra
θ_0	- referência plástica a rotação M_u/R_{ki}
θ_r	- rotação relativa
ρ	- relação entre P/P_y
ρ_A	- fator fixo no nó inicial da barra
ρ_B	- fator fixo no nó final da barra
σ	- tensão normal
σ_{Euler}	- tensão de Euler
σ_c	- tensão normal de compressão
σ_{cr}	- tensão crítica da barra
σ_p	- tensão do limite de proporcionalidade do material
σ_y	- tensão de escoamento do material
τ	- relação entre E_s/E

Resumo

Neste trabalho, utilizando processo numérico, são apresentadas análises de barras planas de aço, deformáveis por flexão e por força axial. Nestas análises, são considerados os efeitos da não linearidade geométrica da estrutura, da não linearidade física do material associados ao comportamento das conexões semi-rígidas. São apresentados os modelos para a consideração dos comportamentos não lineares, bem como, o desenvolvimento de toda a teoria utilizada. Um programa computacional foi desenvolvido, em teoria dos pequenos deslocamentos, para possibilitar a determinação dos parâmetros de instabilidade global da estrutura. A técnica empregada foi a matricial, utilizando funções de rigidez. Esta técnica possibilita análise considerando, simultaneamente, a não linearidade física e geométrica das barras com pouco esforço computacional. O regime inelástico foi considerado para barras axialmente solicitadas, predominantemente, utilizando as curvas de flambagem do CRC (Column Research Council), LRFD (American Institute of Steel Construction) e NBR 8800 (Associação Brasileira de Normas Técnicas). O comportamento da relação momento-rotação, das conexões semi-rígidas, pode ser considerado de forma linear, rigidez constante da conexão, ou utilizando modelos para descrever seu comportamento não linear, rigidez da conexão dada de acordo com o momento na conexão. Além da análise, utilizando a teoria de segunda ordem, é apresentado um processo para encontrar a instabilidade global da estrutura, na qual será atingida quando um determinado carregamento provocar a degeneração da matriz de rigidez global da estrutura, ou seja, tornando-a singular. Serão apresentados exemplos numéricos comparando os tipos de análises, nos regimes elástico e inelástico das barras, além das considerações das conexões semi-rígidas, de forma simultânea.

1.1 Considerações Gerais

Recentemente, o grande avanço nas concepções estruturais, foi possível graças ao surgimento de computadores pessoais cada vez mais potentes, que possibilitaram aos engenheiros uma análise mais completa e detalhada das estruturas, proporcionando vantagens como: segurança, economia, redução do peso próprio, vãos maiores, redução do tempo e mão-de-obra durante a execução.

Com a possibilidade de programação com algoritmos capazes de serem utilizados em computadores pessoais, a engenharia moderna busca aperfeiçoar as estruturas através de refinamentos dos processos de cálculo, surgindo os programas computacionais capazes de realizarem análises estruturais mais complexas. Entre estes, um dos mais difundidos no país é o programa comercial SAP90¹ (Structural Analysis Program), baseado no método dos elementos finitos, com análise elasto-linear de estruturas, atualmente, em sua versão SAP2000². Como complemento para o programa SAP90¹ foi criado o programa SAPSTL³, que utilizando-se dos resultados do programa SAP90¹, faz verificações dos perfis que foram utilizados na análise, baseado no método das tensões admissíveis, de acordo com a AISC⁴ (American Institute of Steel Construction).

Programas mais recentes utilizados no mercado, como o CYPECAD METÁLICAS 3D⁵, capazes de executarem análises estruturais e o dimensionamento

das estruturas metálicas, de forma automatizada, também foram desenvolvidos para auxiliarem os calculistas e propiciarem análises estruturais mais complexas, com várias opções em suas concepções e carregamentos, em um curto espaço de tempo, facilitando a escolha da estrutura mais eficiente.

Estes programas baseiam-se no comportamento elasto-linear das estruturas e nem sempre são capazes de retratar o real comportamento, sendo necessário formulações mais adequadas para suas análises. O comportamento elasto-linear retrata a estrutura na sua posição indeslocada e considerando o material sempre no regime elástico, o que não ocorre na prática, devido as ações estarem atuando na posição de equilíbrio das estruturas, na posição deslocada, havendo alterações na rigidez das estruturas. As tensões atuantes nas barras podem ultrapassar o limite de proporcionalidade do material, plastificando parte da seção transversal, degradando a rigidez da estrutura. Estes efeitos são chamados de Não Linearidade Geométrica e Não Linearidade Física do Material.

Com a aplicação destes dois efeitos pode-se encontrar o ponto de instabilidade de estruturas reticulares e o carregamento crítico, ou seja, carregamento máximo que a estrutura pode suportar considerando sua plastificação ou considerando grandes deslocamentos tornando-a imprópria para o uso.

A teoria da instabilidade teve seu início com Leonard Euler em 1744 quando apresentou o estudo do problema de instabilidade de barras por flexão. Desde então muitas pesquisas visaram a instabilidade de estruturas reticulares, procurando aproximar os modelos matemáticos à prática.

1.2 Situação do Problema

1.2.1 Flambagem Elástica de Barras por Flexão

Euler apresentou, em 1744, a equação para o cálculo do carregamento crítico de flambagem elástica por flexão de uma barra esbelta, sendo esta fórmula uma das

mais antigas usadas até hoje em engenharia. Esta equação foi alterada por Engesser, Considère e Shanley para retratar o comportamento inelástico das barras, fornecendo a base para a história da instabilidade de barras que vem desenvolvendo-se a mais de 254 anos.

Em 1678, Robert Hooke (1635-1703) verificou que o deslocamento de um corpo elástico era proporcional ao carregamento que provoca este deslocamento (JOHNSTON⁶). Afirmou também que esta relação poderia ser aplicada a todos os corpos elásticos (TIMOSHENKO⁷). Mais tarde, esta relação serviria de base para o desenvolvimento da teoria da flambagem elástica. Suas deduções foram obtidas através de experimentos realizados e ficou conhecida como lei de Hooke.

Jacob Bernoulli (1667-1748) estudou o deslocamento e a curvatura de uma viga retangular (TIMOSHENKO⁷). Baseando-se na lei de Hooke, afirmou em 1705, que a curvatura de qualquer ponto em uma viga fletida era proporcional ao momento interno resistente desenvolvido ao longo do comprimento desta. Esta afirmação foi usada por outros matemáticos incluindo Euler em suas considerações sobre curvas elásticas.

Daniel Bernoulli (1700-1782), sobrinho de Jacob Bernoulli, professor de Euler, além de matemático era um experimentador e suas experiências forneciam novos problemas matemáticos a Euler. Daniel sugeriu a Euler que aplicasse o cálculo variacional para obter as equações das curvas elásticas (TIMOSHENKO⁷). Euler usando a sugestão de Daniel e a teoria de Jacob de que a curvatura de uma barra era proporcional ao momento resistente atuante, apresentou a fórmula para a flambagem de barras que leva o seu nome até hoje. A carga de Euler é a carga crítica para a qual uma barra esbelta elástica pode suportar um carregamento axial em uma configuração ligeiramente fletida.

Euler baseou sua fórmula na hipótese de que o “momento de rigidez” em qualquer ponto da barra era igual a $E k^2 / \rho$, sendo “ ρ ” o raio de curvatura da barra fletida e a constante “ $E k^2$ ” deveria ser determinado através de experimentos (TIMOSHENKO⁷). Euler teve idéias errôneas a respeito da relação entre a forma

geométrica da seção transversal e “ $E k^2 / \rho$ ”. Em tratado publicado em 1759, Euler disse “Parece que o momento de rigidez é proporcional ao quadrado da espessura, ou mesmo ao cubo; desta forma, pode-se dizer que se a barra for cilíndrica seu momento de resistência será proporcional a terceira potência, ou possivelmente a quarta potência do diâmetro da base” (JOHNSTON⁶). Desta forma, Euler demonstrou o seu desconhecimento a respeito do momento de inércia da seção transversal, das distribuições das tensões e da localização do eixo neutro de uma barra fletida. Christian Huygens (1629-1695) foi o primeiro a estabelecer o conceito de momento de inércia (TIMOSHENKO⁷).

A força axial necessária para fletir uma barra, segundo Euler, é dado por:

$$P_{\text{Euler}} = \frac{\pi^2 E k^2}{L^2} \quad (1.1)$$

sendo, “E” uma propriedade elástica do material e “ k^2 ” uma propriedade dimensional da barra. Esta não foi apenas a primeira solução teórica para um problema de instabilidade, mas também a primeira solução de um problema de auto valores (THÜRLIMANM⁸).

Apesar do desconhecimento de Euler a respeito do momento de inércia, ele propôs corretamente a determinação do termo “ $E k^2$ ”, o qual seria determinado por um ensaio de uma viga em balanço com carga “P” na extremidade, no qual “ Δ ” é o deslocamento da viga, como mostra a equação (1.2)

$$E k^2 = \frac{P L^3}{3 \Delta} \quad (1.2)$$

A fórmula de Euler poderia ser deduzida da seguinte forma.

Da resistência dos materiais, tem-se:

$$M = -EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (1.3)$$

Pode-se dizer que para o caso de uma barra com rótulas e com restrições aos deslocamentos perpendicular ao eixo axial, nas extremidades, figura 1.1, carregada com uma ação "P" centrada no eixo axial da barra, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{Py}{EI} = -\frac{d^2y}{dx^2} \quad (1.4)$$

Fazendo, $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}$,

$$y'' + \alpha^2 y = 0 \quad (1.5)$$

A solução desta equação diferencial resulta em:

$$y = C_1 \text{sen}(\alpha x) + C_2 \text{cos}(\alpha x) \quad (1.6)$$

Aplicando as condições de contorno, $y=0$ para $x=0$ e $x=L$, obtém-se:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \quad (1.7)$$

$$x = L \quad \Rightarrow \quad C_1 \text{sen}(\alpha L) = 0 \quad (1.8)$$

Pode-se dizer que, para $C_1=0$ tem-se a barra reta e para $\sin(\alpha L)=0$ tem-se a barra fletida ($C_1 \neq 0$). Portanto, a condição de flambagem da barra está em $\alpha L=n\pi$ sendo “n” um número inteiro diferente de zero.

Como $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ e $\alpha = \frac{n\pi}{L}$, pode-se encontrar, para $n=1$, a menor aplicação teórica da ação “P” em que esta barra flambará.

$$P_{\text{critico}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (1.9)$$

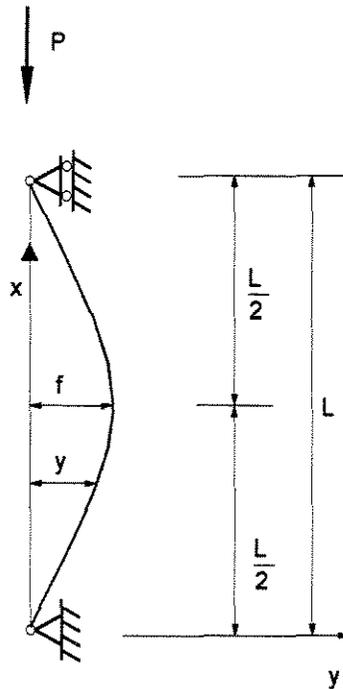


Figura 1.1 - Barra para Determinação da Carga de Flambagem Elástica.

Huygens, Beeckman e Hooke verificaram que na flexão, as fibras inferiores mais afastadas estão estendidas enquanto que as fibras superiores mais afastadas

estão encurtadas (TIMOSHENKO⁷). Mariote, em 1680, realizou experimentos em vigas que confirmavam estas observações (TIMOSHENKO⁷).

Leibniz, em 1684, realizou a primeira análise de tensões nas fibras inferiores de uma viga carregada, e concluiu que o momento de flexão era proporcional ao momento de inércia da seção transversal, para variação linear das tensões na seção transversal (TIMOSHENKO⁷).

Jacob Bernoulli descobriu a existência de uma relação linear entre o alongamento e a tensão produzida pela força. Parent, em 1713, mostrou a correta distribuição de tensões para uma viga retangular fletida. Coulomb, em 1773, aplicou corretamente a lei de Hooke e as equações de equilíbrio da estática, desenvolvendo a expressão que relaciona o momento devido a flexão com as tensões normais em uma viga retangular fletida (TIMOSHENKO⁷). O efeito das deformações por cisalhamento foram negligenciadas por este.

1.2.2 Flambagem Inelástica de Barras por Flexão

O comportamento inelástico de barras de perfis de aço laminado ocorre devido a existência de tensões residuais. Em outros materiais em que, mesmo que ausente as tensões residuais, a relação tensão-deformação é elasto não perfeitamente plástico, possui um comportamento não linear acima de seu limite de proporcionalidade elástico. Portanto, mesmo em materiais que possuem a relação tensão-deformação elasto-plástico perfeito, devido a um carregamento qualquer na barra, este material pode apresentar uma região em que algumas fibras podem atingir o regime plástico, enquanto que as outras permanecem no regime elástico, ocorrendo um comportamento inelástico (SALMON & JOHNSON⁹).

As tensões residuais são tensões que permanecem em uma barra depois de sua formação em um produto final ou devido a processos na sua montagem. Nas estruturas metálicas as tensões residuais podem ocorrer por vários motivos, como:

- resfriamento desigual após a formação da barra, em perfis de aço laminado;

- operações de cortes e furos, principalmente por puncionamento; e,
- soldagem, que proporciona um resfriamento desigual causado pelo aquecimento durante o processo.

Na fabricação de aço laminado as regiões externas, borda do perfil ou região superficial, perdem calor mais rapidamente que as internas, com superfícies menos expostas, impedindo parcialmente a contribuição da contração existente, devido ao resfriamento das partes interiores, ainda quentes. Deste fato resulta, em geral, um estado de compressão nas partes que se esfriam primeiro e um de tração nas outras.

As tensões residuais dependem principalmente da forma e das dimensões da seção transversal, e não da tensão de escoamento, sendo que estes fatores influenciam no resfriamento desigual.

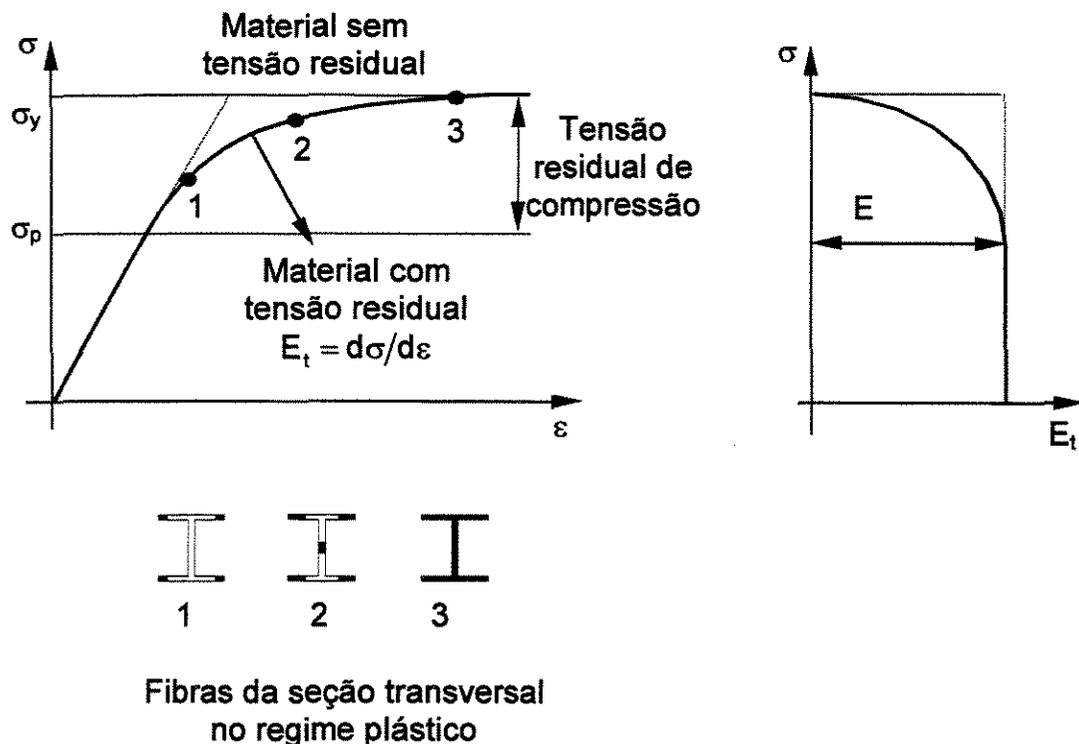


Figura 1.2 - Influência da Tensão Residual na Relação Tensão-Deformação.

O processo de produção de perfil metálico soldado é de igual importância quando comparado ao processo de produção de perfil laminado. As chapas usadas na

produção geralmente não possuem tensões residuais muito significativas, devido ao seu resfriamento relativamente uniforme depois de laminadas. Entretanto, o aquecimento produzido pelo processo de corte e soldagem, e subseqüentemente o resfriamento desigual, causa grandes tensões residuais.

Euler quando apresentou seus estudos sobre flambagem demonstrou seu entendimento do comportamento inelástico quando limitou a aplicação de sua fórmula ao regime elástico. De acordo com VAN DEN BROEK¹⁰, Euler disse que “para começar, eu gostaria de indicar que este momento de rigidez não está apenas limitado a corpos elásticos...”. Esta declaração demonstrou sua intuitiva compreensão do processo de flambagem.

Em 1889, Engesser propôs a teoria do módulo tangente para descrever o comportamento de flambagem de barras cujas tensões de flambagem encontram-se acima do limite de proporcionalidade do material, regime inelástico. Sugeriu que a capacidade resistente de uma barra no campo inelástico poderia ser obtida pela simples substituição do módulo de elasticidade elástico “E” pelo módulo de elasticidade tangente “E_t” (CHEN & LUI¹¹). Assim, a carga crítica de flambagem pode ser obtida pela seguinte equação:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \quad (1.10)$$

sendo, “E_t” o módulo tangente do material obtido no diagrama de tensão-deformação para cada tensão no regime inelástico; “I” o momento de inércia da barra e “L” o comprimento da barra.

Considère, em 1889, desenvolveu um trabalho em paralelo ao de Engesser. Baseado no trabalho de Euler, realizou uma série de 32 ensaios em barras. Com os resultados obtidos, sugeriu que se a flambagem ocorresse no regime inelástico, e que o módulo elástico “E”, da fórmula de Euler, deveria ser substituído pelo módulo efetivo “E_{eff}”. Ele declarou que o módulo efetivo estaria em algum lugar entre o módulo elástico e o módulo tangente (JOHNSTON⁶).

Em 1895, Jasinski mostrou que o conceito adotado por Engesser desconsiderava a não reversibilidade do diagrama tensão-deformação em regime plástico, ou seja, na bifurcação do equilíbrio a barra encontra-se solicitada por um momento fletor que provoca um aumento das tensões de compressão em um dos lados da seção transversal e conseqüentemente uma redução das tensões no outro lado.

No mesmo ano, com a contribuição do trabalho de Considère, Engesser publicou a fórmula correta e geral do módulo reduzido. Declarou que o módulo reduzido dependia de “E” e “E_t”, e também da forma geométrica da seção transversal. Em 1910, Theodor Von Kármán apresentou expressões para o módulo reduzido para barras de seção transversal retangular e “H” (JOHNSTON⁶). A equação da carga crítica para uma barra bi-articulada utilizando o conceito do módulo reduzido é dada por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2} \quad (1.11)$$

e,

$$E_r = E \frac{I_e}{I} + E_t \frac{I_d}{I} \quad (1.12)$$

sendo, “I_e” a inércia relativa a parte da seção transversal tracionada com relação ao momento fletor provocado na bifurcação, descarregamento; “I_d” a inércia relativa a parte da seção transversal comprimida com relação ao momento fletor provocado na bifurcação, carregamento; e, “I” é a inércia da seção transversal. “I_e” e “I_d” estão relacionados com a posição da linha neutra. Pela necessidade da utilização dos dois módulos de elasticidade, “E” e “E_t”, o módulo reduzido também é chamado de duplo módulo.

O que difere estas duas teorias, módulo reduzido e módulo tangente, é a diminuição das tensões do lado convexo da barra, devido ao aparecimento de uma parcela de momento ocasionado pela flambagem da barra, que é considerado pela teoria do módulo reduzido com parte da seção transversal da barra no regime elástico, “E”, devido ao descarregamento, não reversibilidade do diagrama tensão deformação,

e parte no regime inelástico, " E_t ". Enquanto que na teoria do módulo tangente toda a seção transversal encontra-se no regime inelástico, " E_t " (CHEN & LUI¹²).

Durante vários anos os engenheiros se viram diante de um dilema para o cálculo da flambagem no regime inelástico, pois, pelo conceito teórico da instabilidade clássica, a teoria do módulo reduzido, sem dúvida, era mais correta. Entretanto os resultados obtidos em laboratório mostravam que as barras flambavam com cargas bem mais próximas da carga do módulo tangente, figura 1.3.

Em 1947, Shanley conciliou esta controvérsia, mostrando teoricamente e experimentalmente que a carga de flambagem depende essencialmente de como o ensaio é realizado. Ele mostrou que era possível que uma barra iniciasse a fletir simultaneamente a um acréscimo de carga axial, encontrando-se a flambagem com a carga crítica próxima ao dado pelo módulo tangente. Como na prática é difícil evitar carregamentos excêntricos e associado com a dificuldade em encontrar uma barra sem imperfeição geométrica, os ensaios e o uso prático correspondem à solicitação do tipo flexo-compressão, onde a carga não permanece constante nas vizinhanças da carga crítica, produzindo resultados com valores mais próximos do obtido com o módulo tangente. Constata-se também que, para uma seção transversal de determinado material, o valor de seu módulo reduzido é superior ao do seu correspondente módulo tangente.

Shanley analisou um modelo de flambagem de duas barras rígidas conectadas no centro com dois pontos separados com concentração da inelasticidade, validando assim sua teoria. Em uma carta publicada por Von Kármán, em 1947, redefiniu o conceito de carregamento crítico tangente tendo como suporte o conceito de Shanley.

"O carregamento crítico tangente é o menor valor da carga axial para o qual a bifurcação do equilíbrio pode ocorrer apesar de esta transição para a posição fletida requerer ou não um aumento de carregamento axial" (JOHNSTON⁶).

Duberg e Wilder aplicaram o conceito de Shanley a uma seção H idealizada com uma curva de tensão-deformação não linear do material. Eles analisaram o comportamento inelástico ao longo de todo o comprimento da barra, confirmando o conceito de Shanley e melhorando a definição:

“Se o comportamento de uma barra perfeitamente reta for considerado como comportamento limite de uma barra fletida quando sua imperfeição inicial desaparece, então o carregamento crítico tangente é o carregamento crítico da barra, ou seja, o carregamento para a qual a flexão inicia” (JOHNSTON⁶).

Para materiais que apresentam relação tensão-deformação não linear, a definição de Engesser-Shanley é geralmente aceita para a carga crítica de barras. O histórico da instabilidade de barras é ilustrado de forma resumida na figura 1.4.

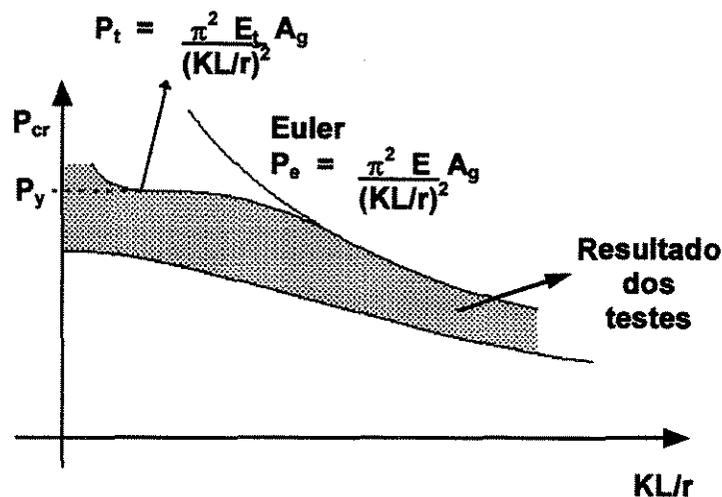


Figura 1.3 - Relação da Carga Crítica com a Esbelteza da Barra.

1.2.3 Conexões Semi-Rígidas

Muitas pesquisas e trabalhos desenvolvidos foram tratados e projetados baseando-se nas ligações das barras idealizadas como totalmente rígidas ou totalmente articuladas. As ligações das barras consideradas como totalmente rígidas implicam que o ângulo original entre as barras permanecem inalterados após a deformação e conseqüentemente os momentos são transferidos totalmente das vigas para as colunas. Por outro lado, para as ligações das barras idealizadas como totalmente articuladas implicam que as barras são simplesmente apoiadas e não transmitem nenhuma parcela de momento entre as vigas e colunas.

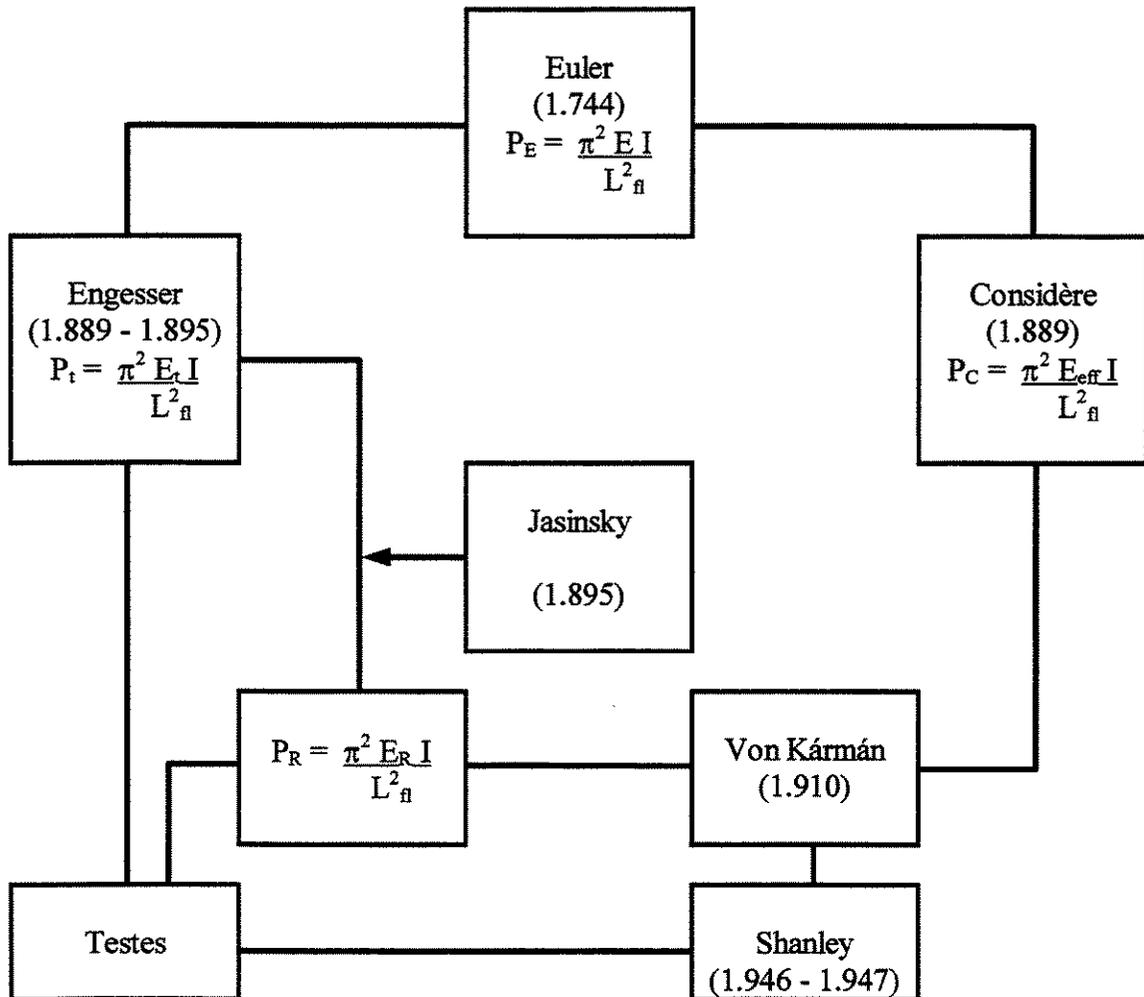


Figura 1.4 - Resumo do Histórico da Instabilidade.

Apesar destas idealizações do comportamento das conexões simplificarem muito o processo de análise, muitas vezes não retratam o real comportamento destas, pois muitos tipos de conexões, atualmente usadas, transmitem parcialmente o momento entre as barras, sendo necessário incorporar o efeito das conexões para uma análise mais realista do comportamento das estruturas (LUI & CHEN¹³).

Na realidade, o verdadeiro comportamento da estrutura depende das conexões e características dos nós. Amplas pesquisas evidenciam a existência, observando o comportamento das ligações, de uma realidade diferente dos modelos idealizados que são assumidos. Dependendo da rigidez, resistência e capacidade de deformação, as

conexões podem influenciar no comportamento das estruturas em vários casos. Submetido a ações estáticas, a deformação das conexões contribuem para as deformações verticais das vigas. O momento resistente das conexões irão influenciar a distribuição dos esforços internos e a estabilidade global das barras. O real comportamento das estruturas estará entre os extremos idealizados.

Utilizando-se da influência potencial das conexões na execução das barras, o Instituto Americano de Construções em Aço (AISC 1986¹⁴, 1989⁴) introduziu possibilidades para projetistas considerarem o comportamento das conexões nos projetos de estruturas de aço (LUI & CHEN¹⁵).

As especificações da ASD⁴ (AISC, 1989) apresenta três tipos de construções para projeto:

1- tipo 1 ou “rígidas”. Esta construção assume que as ligações de vigas com pilares possuem rigidez suficiente para permanecer com o ângulo original entre a intersecção das barras. Conexões rígidas são assumidas para análise elástica da estrutura;

2- tipo 2 ou “articuladas”. Esta construção assume que, quando a estrutura é carregada com carregamentos gravitacionais, a conexão entre a barra e a barra adjacente, transfere apenas as reações verticais. Estas conexões permitem rotação tornando livre esta restrição; e,

3- tipo 3 ou “semi-rígidas”. Esta construção assume que as conexões podem transferir forças verticais e também possuem rigidez suficiente e capacidade de transferir momentos.

As especificações da AISC-LRFD¹⁴ (1986) designava dois tipos de construção em suas considerações: tipo FR (totalmente restringida) e tipo PR (parcialmente restringida) (LUI & CHEN¹⁵).

As especificações do Eurocode 3¹⁶ (1992) provem de diretrizes endereçadas sobre o comportamento das conexões em estruturas de aço. Existem vários critérios básicos para a classificação e modelagem da relação momento-rotação das conexões de viga-coluna no Eurocode 3¹⁶ (LIEW et alli¹⁷).

Os importantes efeitos que afetam as estruturas formadas de barras de aço podem ser agrupadas em três categorias: conexões, geometria e material não lineares. As conexões não lineares indicam a não linearidade da relação momento-rotação nas conexões. A não linearidade geométrica inclui os efeitos de segunda-ordem, associando os efeitos $P-\delta$ e $P-\Delta$ e imperfeições geométricas. A não linearidade do material inclui a degradação da rigidez devido a influência das tensões residuais. As conexões semi-rígidas influenciam na distribuição de momentos nas vigas e colunas, bem como, no efeito $P-\Delta$ das barras. Uma maneira de avaliar todos estes efeitos em projetos de forma mais completa é o uso direto de análise inelástica em segunda ordem, considerando o comportamento das conexões, conhecida como "Análise Avançada" (KIM & CHEN¹⁸).

As especificações da AISC-LRFD¹⁴ (1994) para cálculo tipo PR é raramente usada em projetos, embora ela possa oferecer análises mais realistas e racionais. Para tornar este tipo de análise mais popular entre os engenheiros projetistas, vários obstáculos devem ser superados, como: implementação de modelos simples que representem a relação momento-rotação não linear das conexões, estimativas de rigidez ao momento das barras considerando os efeitos de segunda-ordem; e, o cálculo da fator efetivo de flambagem para barras com conexões semi-rígidas.

Alguns modelos que podem ser facilmente implementados em projetos de barras com conexões semi-rígidas são: o modelo polinomial de Frye-Morris (1976) e o modelo Kishi-Chen (1990). Estes modelos consideram as características não lineares das conexões e são fórmulas com termos usando os parâmetros das conexões (KISHI et alli¹⁹).

Para estimar o momento em segunda-ordem no regime elástico, Barakat e Chen (1990) e Kim e Chen (1993) introduziram relações de momento-rotação linearizadas para incluir as conexões semi-rígidas em análise de primeira-ordem para barras contraventadas e sem contraventamentos com o método de fator de amplificação B_1/B_2 recomendado pela AISC-LRFD¹⁴ (1986).

Lui (1985) propôs um processo simples em que a rigidez inicial da conexão são tomados pelas condições de descarregamento e carregamento, respectivamente. Barakat e Chen (1990) recomendaram a modificação do fator relativo de rigidez no método linearizado usando a rigidez secante da conexão. Goto et alli (1993) estudaram o comportamento crítico e pós-crítico das barras com conexões semi-rígidas sem contraventamentos para vários modelos de conexões e condições de carregamentos. Com estes estudos, pode-se dizer que: o modelo elástico linear das conexões pode ser limitado na análise do ponto de bifurcação e que não pode ser usado na análise do comportamento pós-crítico das estruturas com conexões semi-rígidas; o ponto de bifurcação submetido a carregamento distribuído fornecem limites inferiores e poderia ser usado para definir um valor conservador do fator efetivo de flambagem, e, já que o carregamento distribuído de sobrecarga pode igualmente aumentar até a bifurcação alcançando o ponto limite, a rigidez tangente da conexão mostrou ser considerada pela avaliação do fator efetivo de flambagem com a consideração do modelo de Shanley para flambagem de coluna inelástica (KISHI et alli¹⁹).

Em comparação com outros métodos, o método de Lui é simplesmente o primeiro mas não considera a não linearidade das conexões. São dadas constantes para o fator efetivo de flambagem para diferentes níveis de carregamento. Por outro lado, o método de Barakat e Chen considera o efeito da não linearidade da conexão. Entretanto, este método freqüentemente fornece pequenos valores do fator efetivo de flambagem, e conseqüentemente altos valores de carregamento crítico, um dos motivos é que a rigidez da conexão usada é obtida pela secante e não pela tangente para encontrar a flambagem. Para melhorar os processos de cálculo considerando as conexões semi-rígidas baseados nas especificações da AISC-LRFD¹⁴, métodos mais racionais e convenientes poderiam ser estabelecidos para avaliar o fator efetivo de flambagem considerando a não linearidade da rigidez da conexão (KISHI et alli¹⁹).

1.2.4 Instabilidade de Estruturas Reticulares Planas

1.2.4.1 Instabilidade Elástica de Estruturas Reticulares Planas

Para análise da instabilidade elástica de estruturas reticulares planas serão assumidas as seguintes hipóteses: teoria de pequenos deslocamentos, as barras são consideradas geometricamente perfeitas e os deslocamentos fora do plano não são considerados. A equação diferencial que governa uma barra plana para pequenos deslocamentos e pequenas deformações é dada como:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = w \quad (1.13)$$

sendo, “w” o carregamento transversal distribuído ao longo do comprimento da barra no plano da estrutura; “y” o deslocamento transversal da barra no plano da estrutura; “x” a posição na direção do eixo axial ao longo do comprimento da barra; “EI” a rigidez à flexão; e “P” a força axial atuando na barra. Esta equação pode ser encontrada no trabalho de TIMOSHENKO⁷ e será abordada no capítulo 4.

Pode-se tratar a instabilidade através de processos aproximados, como o caso do método dos elementos finitos, ou pela própria solução da equação diferencial, processo das funções de rigidez.

Um dos primeiros a levar em consideração a influência da não linearidade geométrica foi JAMES²⁰, utilizando processos aproximados, porém um dos primeiros a tabular estas funções de estabilidade foi LIVESLEY & CHANDLER²¹ e HORNE & MERCHANT²², em teoria dos pequenos deslocamentos.

Desde então, a matriz de rigidez da barra que consideram a não linearidade geométrica pode ser escrita de várias formas.

A equação elementar da matriz de rigidez no processo das funções de rigidez pode ser escrita da seguinte forma:

$$[S] \{D\} = \{F\} \quad (1.14)$$

sendo, $[S]$ a matriz de rigidez baseada nas funções de rigidez; $\{D\}$ o vetor dos deslocamentos da estrutura; e, $\{F\}$ o vetor das ações.

1.2.4.2 Instabilidade Inelástica de Estruturas Reticulares Planas

Uma barra submetida a esforços solicitantes pode produzir um estado de tensões superiores ao limite de proporcionalidade do material, criando assim um comportamento não linear da relação tensão deformação, plastificando parcialmente as fibras da seção transversal, este comportamento é conhecido como regime inelástico. A equação diferencial que governa o problema, em teoria dos pequenos deslocamentos, para barras no regime inelástico, utilizando a teoria do módulo tangente, é dada por:

$$E_t I \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = w \quad (1.15)$$

sendo, a única diferença em relação a equação (1.13) é que o módulo de elasticidade elástico “E” é substituído pelo módulo de elasticidade tangente “E_t”, teoria do módulo tangente, esta equação será abordada no capítulo 4. A solução desta equação diferencial pode ser feita através de processos aproximados ou pela própria solução da equação diferencial.

O regime inelástico, de uma maneira geral, pode ser tratado de duas formas básicas, a inelasticidade pode ser considerada concentrada nos nós extremos das barras ou considerada ao longo de todo o comprimento e também em toda a extensão da seção transversal da barra.

Publicações considerando o comportamento inelástico das estruturas foram realizadas por Hrennikoff (1948) e Sawyer (1955), mas estas não consideravam os efeitos das deformações e das forças axiais na relação momento-curvatura das barras. Outros estudos feitos por Ang (1960), Rawlings (1956) e Roderick (1960) consideravam as deformações no regime inelástico mas a influência das forças axiais eram desprezadas (OJALVO & LU²³). Uma das primeiras análises de instabilidade de estruturas aporticadas considerando o efeito do regime inelástico foi realizada por OJALVO & LU²³, em 1961. Esta análise considerava a ação do regime inelástico concentrado nos nós de extremidades das barras, os efeitos das forças axiais e a forma de carregamento. Foi utilizado um processo numérico de integração para determinar as relações momento-curvatura considerando o esforço axial presente na barra, as propriedades geométricas da seção transversal e as propriedades do material. Através de fórmulas desenvolvidas para determinar a carga crítica da estrutura, foi analisado um pórtico composto por uma viga e dois pilares sujeito a carregamento simétrico.

CHU & PABARCIUS²⁴, em 1964, desenvolveram uma análise em regime inelástico que determinava a carga crítica, considerando cargas atuando na horizontal e na vertical. O efeito inelástico era considerado através de curvas de momento-curvatura, as quais apresentavam um comportamento não linear devido a presença de tensões residuais adotadas no perfil metálico I. Foi analisado um pórtico composto por uma viga e dois pilares sujeito a carregamentos horizontais e verticais.

MOSES²⁵ apresentou no mesmo ano, 1964, um método para resolver o problema de instabilidade no regime inelástico de estruturas aporticada. Este método consiste em uma técnica numérica iterativa para plotar a curva do carregamento aplicado versus o deslocamento da estrutura. A solução foi baseada no método das diferenças finitas e o efeito do regime inelástico foi considerado concentrado nos nós. Resultados numéricos foram dados para barras com diferentes geometrias, carregamentos verticais e forças laterais.

Em 1965, LU²⁶ calculou manualmente a instabilidade inelástica de um pórtico plano composto por três barras. O comportamento do regime inelástico foi considerado

através das curvas que relacionam o momento com a rotação nas extremidades das barras, em perfil I. Foi utilizado um procedimento numérico de integração desenvolvido por T. Von Karman para obter estas curvas. Funções de rigidez simplificadas foram utilizadas nestes cálculos.

Em 1968, KORN & GALAMBOS²⁷ desenvolveram um programa, em teoria de pequenos deslocamentos, para análise de instabilidade no regime inelástico utilizando as funções de rigidez. Foi assumido a relação tensão-deformação como elasto-plástico perfeito e a capacidade ao momento plástico na presença da carga axial eram dados por uma fórmula bi-linear em torno do eixo de maior inércia. Permitia a formação de rótulas plásticas.

ALVAREZ & BIRNSTIEL²⁸, em 1969, utilizando-se do método dos elementos finitos, apresentaram uma análise de instabilidade inelástica. Para determinar a instabilidade da estrutura, o carregamento era aplicado em incrementos.

Nos estudos de VOGEL²⁹, em 1985, é apresentado um ensaio de uma estrutura apertada, os resultados foram comparados com os obtidos teoricamente baseados na teoria da plasticidade distribuída ao longo do elemento e ao longo da altura da seção transversal.

MOHAMED & SIMITSES³⁰, em 1990, publicaram um estudo de instabilidade de pórticos planos que considera a análise elasto-plástica não linear e a influência das conexões flexíveis. A análise é baseada nas relações não lineares da cinemática. O efeito do regime inelástico é considerado concentrado nas extremidades das barras.

Em 1991, AL-MASHARY & CHEN³¹ publicaram um método prático para análise no regime inelástico em teoria de segunda-ordem para estruturas reticulares planas. A degradação da rigidez, devido ao regime inelástico, é considerada nas extremidades das barras, onde são incorporadas molas para representar a redução da rigidez a flexão. As funções de rigidez são alteradas para considerar o efeito das molas.

KING et alli³², em 1992, baseado no método dos elementos finitos, desenvolveu um programa de instabilidade de pórticos planos. Para considerar o comportamento inelástico foi introduzida a expressão do Column Research Council (CRC) para o módulo de elasticidade tangente. É utilizado um parâmetro “ ρ ” para considerar o

aumento de plastificação produzido pela flexão nas extremidades das barras. O estudo permite formação de rótulas plásticas nas extremidades.

LIEW & CHEN³³, em 1993, desenvolveram um método de análise inelástica para estruturas reticulares considerando as conexões semi-rígidas. As funções de rigidez foram alteradas para simular um comportamento de mola nas extremidades das barras. São utilizadas as expressões propostas pela AISC-LRFD¹⁴ para calcular o módulo de elasticidade tangente. Um parâmetro escalar " ϕ " também é introduzido para considerar o aumento da plastificação devido a flexão. É permitida a formação de rótulas plásticas nesta análise.

Em 1994 foi apresentado um programa para análise inelástica desenvolvido por YAU & CHAN³⁴, baseado no método dos elementos finitos. Foram utilizadas molas conectadas nas extremidades das barras para a degradação da rigidez da estrutura. As ligações semi-rígidas podem ser consideradas neste programa.

CHEN & CHAN³⁵ desenvolveram uma análise elasto-plástica, em 1995, sendo que, os elementos de barra são dividido em dois, permitindo a introdução de molas para simular o efeito do comportamento inelástico nas extremidades e no meio das barras. Admite a formação de rótulas plásticas. Devido a consideração da degradação adicional no meio da barra, este processo fornece melhores resultados.

Em 1996, KIM & CHEN³⁶ apresentaram um estudo sobre análise de estruturas reticulares planas contraventadas fora do plano considerando o comportamento inelástico. São consideradas as tensões residuais e as imperfeições geométricas através da redução do módulo de elasticidade tangente. Este método trata também da redução gradual da rigidez devido a flexão.

CHAN & CHUI³⁷, em 1997 propuseram um método para análise de pórticos planos pelo método dos elementos finitos. São utilizadas molas para simular o efeito do regime inelástico na extremidade das barras. As tensões residuais também foram consideradas.

1.3 Proposta do Trabalho

O tipo de análise estrutural usado pela grande maioria dos projetistas e adotado, geralmente, para aplicação nas normas ou especificações, é baseado na teoria de primeira ordem em regime elástico e as hipóteses assumidas sobre o comportamento das conexões são bastantes simples, não sendo capazes de retratar o real comportamento da estrutura. As normas ou especificações, geralmente, tentam retratar muitos destes comportamentos através de fatores de amplificação nas fórmulas de dimensionamento das barras da estrutura. A introdução de fatores como, a capacidade última à compressão " P_u " e a capacidade última à flexão " M_u ", nas expressões dadas pelas normas, tentam representar o comportamento elasto-plástico. A degradação da rigidez da barra tenta reproduzir os efeitos da não linearidade física do material. Critérios usados para estimar o comprimento efetivo de flambagem para estruturas contínuas, utilizando ábacos ou gráficos, tentam reproduzir os efeitos de segunda ordem no regime elástico, a não linearidade geométrica da estrutura, considerando a contribuição das barras adjacentes. Nestes critérios, apenas são consideradas as conexões rígidas, não sendo aplicável as conexões semi-rígidas.

Estas análises são simplificadas e de fácil acesso aos projetistas, mas nem sempre são capazes de representar o comportamento real da estrutura.

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um programa de computador capaz de realizar análise de estrutura metálica plana. Será exposto toda a formulação e apresentação de um programa de análise estrutural, o qual será desenvolvido em teoria dos pequenos deslocamentos, podendo considerar simultaneamente o regime inelástico e o comportamento das conexões, tratando assim, a não linearidade geométrica da estrutura, a não linearidade física do material e o comportamento não linear das conexões semi-rígidas. Será possível também encontrar o ponto de instabilidade global de uma estrutura com estas considerações. O trabalho será baseado no método dos deslocamentos utilizando funções de rigidez.

O programa desenvolvido terá a facilidade para proporcionar uma interação com o calculista para a escolha do tipo de análise a ser executada: primeira ordem,

segunda ordem ou instabilidade; bem como, os comportamentos a serem considerados na análise: regime elástico, regime inelástico com ou sem a introdução das conexões semi-rígidas. O cálculo da instabilidade global em teoria de segunda ordem proporcionará uma análise mais realista das contribuições das barras adjacentes.

O principal objetivo destas análises é a verificação do comportamento das estruturas, e a comparação com as análises atualmente realizadas.

Capítulo 2

INELASTICIDADE DAS BARRAS

2.1 Introdução

Em algumas barras, nas quais o material permanece totalmente elástico e obedecendo a lei de Hooke, a flambagem ocorre somente por uma tensão com uma intensidade inferior ao limite de proporcionalidade da relação tensão-deformação do material. A instabilidade ocorre quando for atingida a carga de Euler. Mas para muitas barras isso não é a realidade, pois a flambagem é causada por uma tensão com intensidade superior ao limite de proporcionalidade. Esse tipo de flambagem é conhecido como flambagem no regime inelástico. Para barras que flambam inelasticamente, algumas das fibras da seção transversal apresentam plastificação antes da flambagem ocorrer. Como resultado, somente as fibras que permanecem elásticas são capazes de resistir a força adicional aplicada.

Desde que apenas uma parte da seção transversal seja capaz de resistir a força axial a flambagem, o módulo de elasticidade elástico, “E”, deve ser trocado por um módulo de elasticidade efetivo, “ E_{eff} ”, para descrever o comportamento da flambagem no regime inelástico.

Para retratar o comportamento de flambagem de uma barra perfeitamente reta no regime inelástico foram desenvolvidas a teoria do módulo tangente, apresentada por Engesser e a teoria do módulo reduzido, apresentada por Considère-Engesser que serão apresentadas neste capítulo. Para mostrar a diferença entre as duas teorias

citadas anteriormente, torna-se necessário apresentar a teoria da barra inelástica de Shanley. Com esta teoria, foram resolvidas as controvérsias a respeito de qual das duas teorias era capaz de representar o comportamento inelástico de uma barra. Shanley mostrou que a máxima tensão suportada por uma barra estaria contida entre os intervalos fornecidos pela teoria do módulo tangente e do módulo reduzido.

2.2 Efeito da Não Linearidade Física do Material

A não linearidade física do material é causada pelos efeitos de flexão na seção transversal, efeitos das tensões residuais e das imperfeições geométricas das barras. Os esforços de flexão são causados pela rigidez a flexão que as barras apresentam a este tipo de solicitação. As tensões residuais, como explicado no capítulo 1, são ocasionadas no processo de fabricação e devido a processos de soldas e furos durante o processo de montagem. As imperfeições geométricas podem ocorrer durante a fabricação dos perfis, no transporte e no processo de montagem.

É mostrado na figura 2.1, quatro estágios do diagrama de tensões que podem ocorrer em uma barra. Neste caso não são consideradas as tensões residuais. No estágio 1 é mostrado o diagrama de tensões totalmente no regime elástico, onde todas as fibras da seção transversal estão no regime elástico, pois, a máxima tensão encontra-se abaixo da tensão de escoamento do material. A barra é considerada no regime elástico. No estágio 2 é mostrado o diagrama de tensões em que a tensão máxima de compressão, calculada no regime elástico, encontra-se acima da tensão de escoamento, gerando assim a plastificação de parte da seção transversal e um rearranjo das tensões que permanecem no regime elástico. É admitido aqui que este rearranjo é linear. Em consequência desta plastificação somente a parte da seção transversal que permanece no regime elástico é capaz de absorver um acréscimo de solicitação de esforços. Neste caso, a capacidade portante da barra foi reduzida devido ao efeito de plastificação parcial da seção transversal, a barra encontra-se no regime inelástico e o módulo de elasticidade, "E", deve ser substituído por um módulo de elasticidade efetivo, " E_{eff} ".

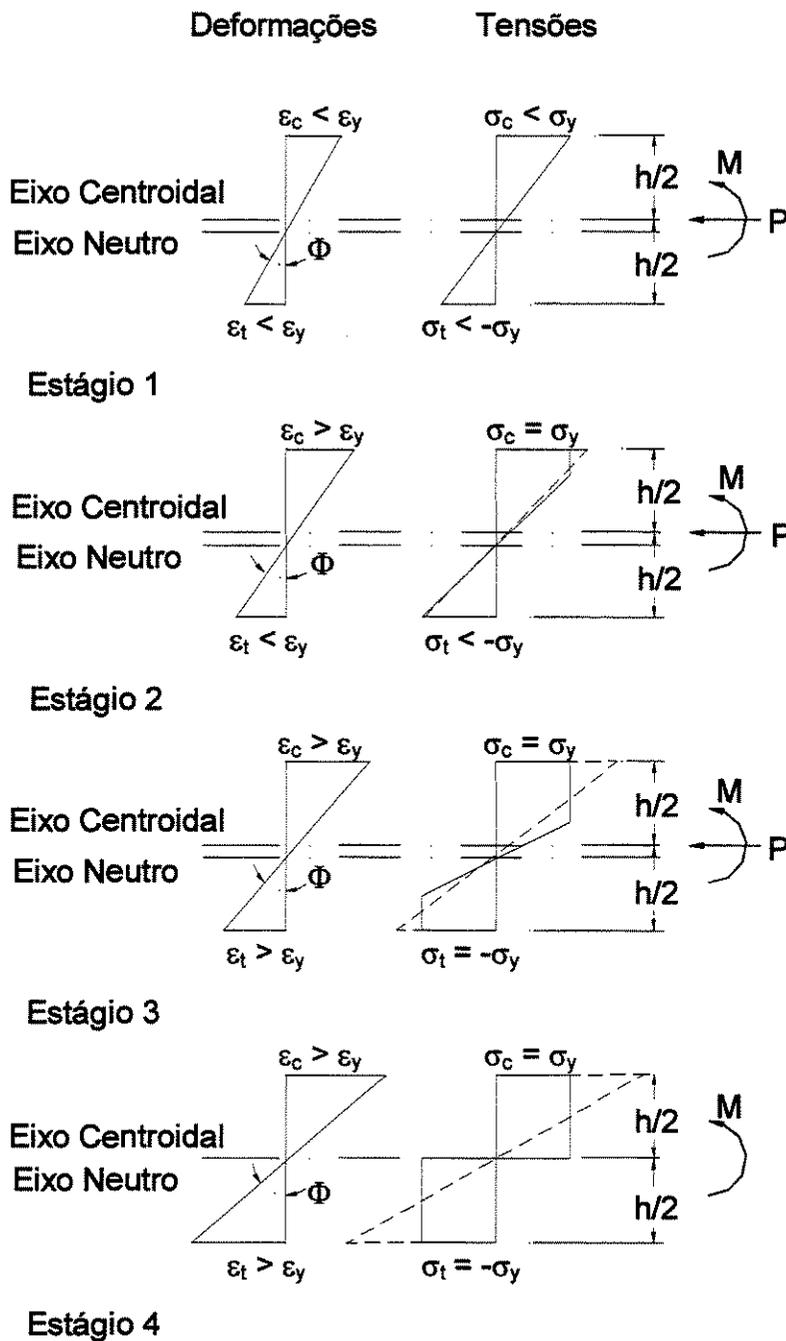


Figura 2.1 - Diagrama de Tensão Deformação Representando o Efeito da Não Linearidade Física do Material.

No estágio 3, a tensão máxima de tração também se encontra acima da tensão de escoamento do material, quando calculada no regime elástico, e conseqüentemente, ocorre a plastificação de maior parte da seção transversal e a capacidade portante da barra é ainda mais reduzida. No estágio 4, a seção transversal está completamente plastificada, sendo que, todas as fibras alcançaram a tensão de escoamento do material.

As fibras plastificadas apresentam um módulo de elasticidade aproximadamente igual a zero, enquanto que as fibras que permanecem no regime elástico possuem o módulo de elasticidade elástico do material. Para representar este comportamento é necessário determinar um módulo de elasticidade para a seção transversal, um módulo de elasticidade efetivo, " E_{eff} ", que considere estas variações devido a plastificação de parte das fibras da seção transversal. Este módulo sempre será inferior ao módulo de elasticidade elástico do material, e conseqüentemente, as deformações médias da seção transversal serão superiores quando comparadas com cálculos no regime elástico. Quando as tensões ultrapassarem o limite de proporcionalidade do material, parte das fibras da seção transversal fica plastificada, o módulo efetivo é introduzido na análise e as deformações não serão mais linearmente proporcionais as tensões.

Quando o efeito das tensões residuais são considerados na análise, o comportamento das fibras da seção transversal são modificados. As tensões residuais são somadas as tensões devido ao momento fletor e forças axiais, gerando assim, uma plastificação antecipada ou atrasada de parte das fibras, dependendo da resultante desta soma. Os efeitos de imperfeições geométrica, quando atuando em conjunto com forças axiais de compressão, introduzem mais flexão na barra, influenciando assim, na plastificação das fibras da seção transversal. É importante ressaltar que neste trabalho serão considerados os efeitos das tensões residuais, imperfeições geométricas, excentricidade de carregamentos e efeitos de flexão como agentes redutores da capacidade portante da barra devido ao fenômeno da não linearidade física do material.

2.3 Teoria do Módulo Tangente

A teoria do módulo tangente foi proposta por Engesser, em 1889. Ela descreve o comportamento de flambagem das barras cujas tensões de flambagem encontram-se aproximadamente no limite de proporcionalidade do material.

Na teoria do módulo tangente são seguidas as seguintes hipóteses:

- a) diagrama tensão-deformação do material conhecido;
- b) teoria dos pequenos deslocamentos;
- c) na flexão, seção plana permanece plana;
- d) a barra perfeitamente reta;
- e) carregamento no eixo centroidal da seção transversal;
- f) as extremidades da barra são consideradas articuladas; e,
- g) durante a flexão não ocorre deformações inversas através da seção transversal, não ocorre descarregamento.

Para uma barra, que está solicitada apenas por uma força axial de compressão e as tensões nas fibras da seção transversal encontram-se aproximadamente no limite proporcional do material, a flambagem ocorrerá no regime inelástico.

Quando esta barra sofre instabilidade inelástica, parte das fibras da seção transversal estão plastificadas e apresentam um comportamento como mostrado na figura 2.2. Neste caso, o comportamento da barra será governado pelo módulo tangente " E_t ".

Na figura 2.3(a) pode-se observar a barra bi-apoiada flambando no regime inelástico, teoria do módulo tangente, carregada por uma força axial de compressão, " P_t ". São mostradas também, figura 2.3(b), as tensões e deformações da seção transversal, sendo, " σ_t " e " ϵ_t ", respectivamente a tensão e a deformação da carga do módulo tangente durante a flambagem. Quando a carga crítica tangente é alcançada e a barra flamba, assume-se que ocorra um acréscimo de força axial, " ΔP ", em conjunto com um acréscimo de momento fletor, " ΔM ". Esse acréscimo da força axial combinado com o acréscimo do momento fletor causará um acréscimo na deformação axial da

seção transversal da barra de tal forma que nenhuma fibra da seção transversal sofrerá alívio de deformação. Como resultado, o módulo tangente “ E_t ” governará o comportamento tensão-deformação de todas as fibras da seção transversal, como é mostrado na figura 2.3(b).

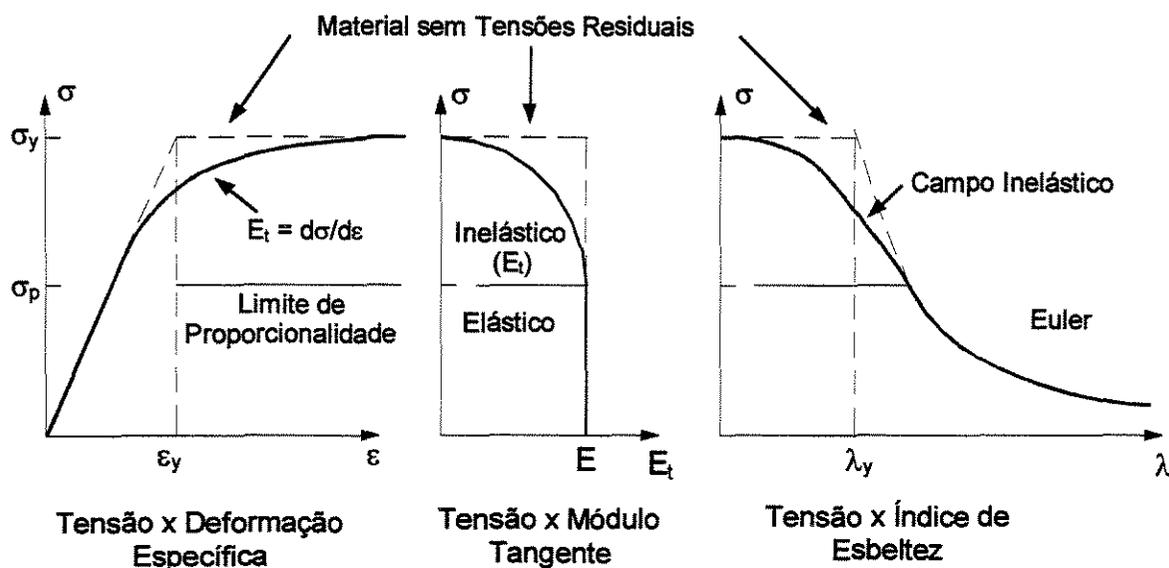


Figura 2.2 - Representação da Flambagem Inelástica de Barras.

Para um segmento de barra de comprimento “ x ”, figura 2.3(a), a equação de equilíbrio pode ser escrita como:

$$-M_{int} + Py = 0 \quad (2.1)$$

sendo, “ P ” a força aplicada no eixo centroidal da barra e “ y ” a distância da linha de ação da força axial ao eixo centroidal da seção transversal da barra quando a barra se flexiona.

O momento interno resistente da seção transversal da barra devido a flexão tem a seguinte forma genérica:

$$M_{\text{int}} = \int_A \sigma y \, dA \quad (2.2)$$

sendo, “ σ ” a tensão longitudinal de uma fibra da seção transversal e “ y ” a distância da fibra ao eixo centroidal da seção transversal.

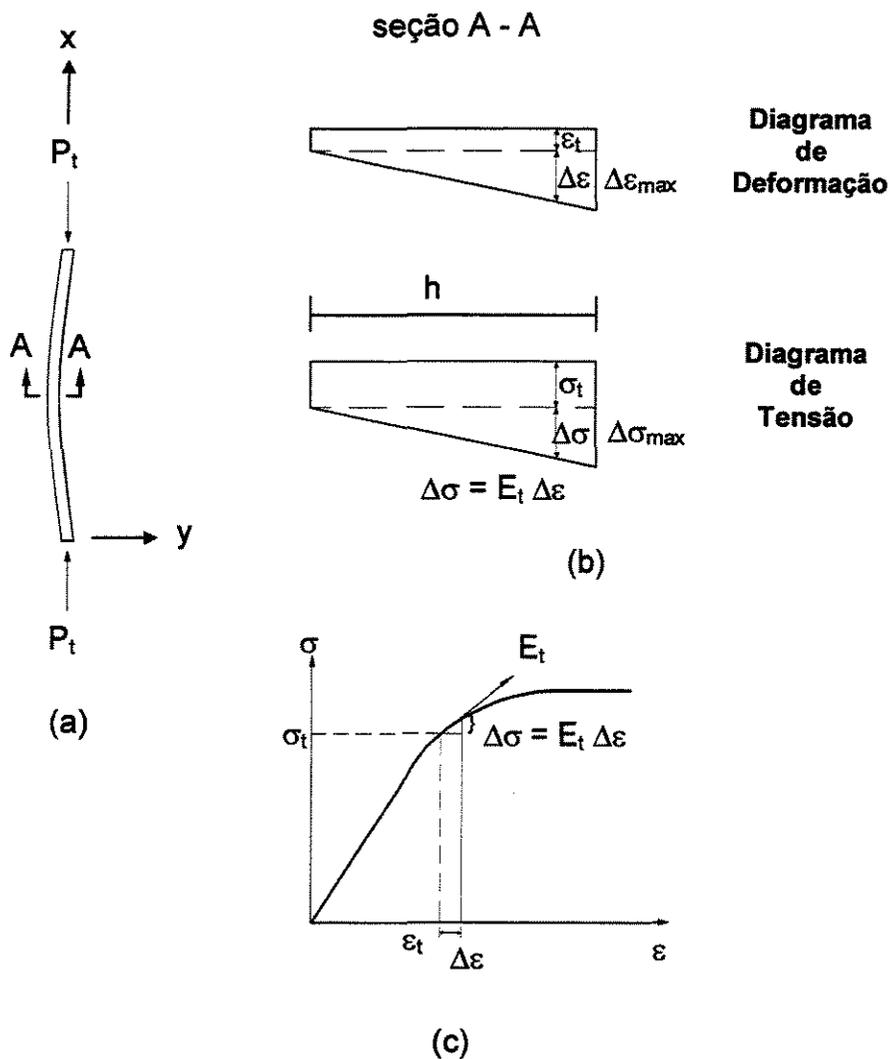


Figura 2.3 - Teoria do Módulo Tangente

Como pode-se observar no diagrama de tensão mostrado na figura 2.3(b) a tensão “ σ ” em uma fibra qualquer da seção transversal pode ser escrita como:

$$\sigma = \sigma_t + \Delta\sigma = \sigma_t + \frac{\Delta\sigma_{\max}}{h} \left(y + \frac{h}{2} \right) \quad (2.3)$$

sendo, “ $\Delta\sigma$ ”, “ $\Delta\sigma_{\max}$ ”, “ σ_t ” e “ h ” mostrados na figura 2.3(b).

Substituindo a equação (2.3) em (2.2), tem-se que:

$$M_{\text{int}} = \int_A \left[\sigma_t + \frac{\Delta\sigma_{\max}}{h} \left(y + \frac{h}{2} \right) \right] y \, dA \quad (2.4)$$

Desenvolvendo a equação (2.4), obtém-se:

$$M_{\text{int}} = \sigma_t \int_A y \, dA + \frac{\Delta\sigma_{\max}}{h} \int_A y^2 \, dA + \frac{\Delta\sigma_{\max}}{2} \int_A y \, dA \quad (2.5)$$

Como a integral de área da seção transversal, “ A ”, com a medida de uma fibra qualquer em relação ao eixo centroidal da seção transversal, “ y ” pode ser calculado como:

$$\int_A y \, dA = 0 \quad (2.6)$$

$$\int_A y^2 \, dA = I \quad (2.7)$$

sendo, “ I ” o momento de inércia da seção transversal.

A equação (2.5) pode ser escrita como:

$$M_{\text{int}} = \frac{\Delta\sigma_{\max}}{h} I = \Delta M \quad (2.8)$$

Substituindo " $\Delta\sigma_{\max} = E_t \Delta\varepsilon_{\max}$ " na equação (2.8) e lembrando que " $\Delta\varepsilon_{\max} / h$ " é a curvatura " ϕ " da seção transversal da barra após fletir, pode-se encontrar a equação (2.8) como:

$$M_{\text{int}} = E_t I \phi \quad (2.9)$$

Assumindo a teoria dos pequenos deslocamentos e pequenas deformações, a curvatura " ϕ " pode ser aproximado pela segunda derivada dos deslocamentos ou " $\phi = -y''$ ". Como resultado, a equação (2.9) pode ser escrita como:

$$M_{\text{int}} = -y'' E_t I \quad (2.10)$$

Substituindo a equação (2.10) na equação de equilíbrio (2.1), pode-se obter:

$$y'' + \frac{P}{E_t I} y = 0 \quad (2.11)$$

A equação (2.11) é a equação diferencial que descreve o comportamento de uma barra durante a flambagem no regime inelástico no princípio fundamental da teoria do módulo tangente. Como resultado, segue-se o mesmo procedimento para encontrar a carga de Euler, mostrado no primeiro capítulo deste trabalho, observando que o coeficiente " E " será substituído por " E_t ". Desta forma, tem-se que:

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} = \frac{E_t}{E} P_{\text{Euler}} \quad (2.12)$$

sendo, " L " o comprimento da barra e " P_{Euler} " a carga crítica de Euler.

Em 1895 Jasinsky mostrou que esse conceito adotado por Engesser não estava correto, pois desconsiderava a não reversibilidade do diagrama tensão-deformação em regime plástico. No mesmo ano Engesser corrigiu a sua teoria, apresentando o conceito do módulo reduzido (CHEN & LUI¹¹).

2.4 Teoria do Módulo Reduzido

No desenvolvimento da teoria do módulo reduzido, Engesser considerou que, ao flambar, a barra ficará solicitada por um momento fletor que provocará um aumento das tensões de compressão em um dos lados da seção transversal e uma conseqüente redução das tensões do outro lado. No módulo reduzido, foi considerado a não reversibilidade do diagrama tensão-deformação no regime plástico, ou seja, já na fase plástica os acréscimos de carregamento são governados pelo módulo tangente, " E_t ", e os decréscimo (descarregamentos) governados pelo módulo elástico, " E ", mostrado na figura 2.4(c). Devido a necessidade desses dois módulos para descrever o módulo reduzido, ele também ficou conhecido como módulo duplo.

O conceito do módulo reduzido é baseado nas seguintes hipóteses:

- a) diagrama tensão-deformação do material conhecido;
- b) teoria dos pequenos deslocamentos;
- c) na flexão, seção plana permanece plana;
- d) a barra perfeitamente reta;
- e) carregamento no eixo centroidal da seção transversal;
- f) as extremidades da barra são consideradas articuladas; e,
- g) nenhuma mudança de carga é associada com a bifurcação do equilíbrio.

Na figura 2.4(a) pode-se observar a barra bi-apoiada flambando no regime inelástico, teoria do módulo reduzido, carregada por uma força axial de compressão, " P_r ". As distribuições de tensão e deformação na seção transversal da barra são apresentadas na figura 2.4(b).

Para um segmento de barra de comprimento " x ", a equação de equilíbrio pode ser escrita como:

$$-M_{int} + Py = 0 \quad (2.13)$$

sendo, “P” a força axial aplicada no eixo centroidal da seção transversal e “y” a distância da linha de ação da força axial ao eixo centroidal da seção transversal quando a barra se flexiona.

A linha neutra, mostrada na figura 2.4(b), considera somente as tensões de flexão e divide a seção em duas partes sujeitas, respectivamente, aos carregamentos e descarregamentos indicados.

Seja “ ϕ ” a curvatura causada pela flambagem e “ $\Delta\varepsilon_1$ ” e “ $\Delta\varepsilon_2$ ” as deformações longitudinais nas regiões de tração (descarregamento) e compressão (carregamento).

Os diagramas de tensões normais indicam, respectivamente, o aumento de tensão de compressão, governado pelo módulo tangente “ E_t ”, e a diminuição, devida à tensão de tração, governada pelo módulo elástico “E”, e pode-se encontrar:

$$\Delta\sigma_1 = E_t \Delta\varepsilon_1 \quad (2.14)$$

$$\Delta\sigma_2 = E \Delta\varepsilon_2 \quad (2.15)$$

A geometria de distribuição de deformação da seção transversal é linear, figura 2.4(b). Relacionando a fibra mais aliviada com a fibra mais estendida, obtém-se:

$$\Delta\varepsilon_{1(max)} = \frac{d_1}{d_2} \Delta\varepsilon_{2(max)} \quad (2.16)$$

A tensão na fibra estendida mais afastada da seção transversal é dada por:

$$\Delta\sigma_{1(max)} = \frac{d_1 \Delta\varepsilon_{2(max)}}{d_2} E_t \quad (2.17)$$

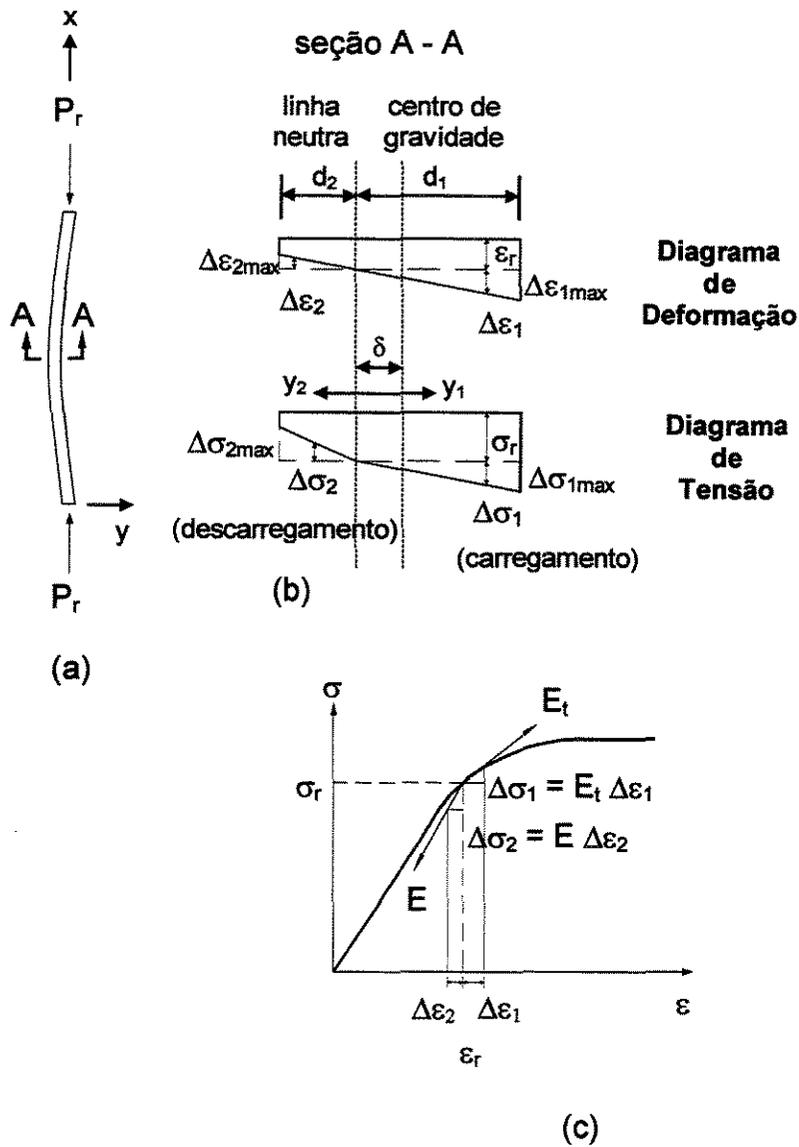


Figura 2.4 - Teoria do Módulo Reduzido

Conforme mostrado na figura 2.4(b), a curvatura da seção transversal pode ser escrita por:

$$\phi = \frac{\Delta\epsilon_{2(max)}}{d_2} \quad (2.18)$$

Substituindo a equação (2.18) na equação (2.17), pode-se obter:

$$\Delta\sigma_{2(max)} = E d_2 \phi \quad \text{e} \quad \Delta\sigma_{1(max)} = E_t d_1 \phi \quad (2.19)$$

O momento resistente interno é dado pela condição de tensão, mostrada na figura 2.4(b), e pode ser escrito como:

$$M_{int} = \int_b^{d_1} \Delta\sigma_1 (y_1 - \delta) dA_1 + \int_b^{d_2} \Delta\sigma_2 (y_2 + \delta) dA_2 \quad (2.20)$$

Utilizando a equação (2.19) para determinar as tensões em uma fibra estendida posicionada a uma distância “ y_1 ” e as tensões em uma fibra aliviada posicionada a uma distância “ y_2 ”, pode-se escrever:

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_{1(max)} \frac{y_1}{d_1} = E_t y_1 \phi \quad (2.21)$$

$$\Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_{2(max)} \frac{y_2}{d_2} = E y_2 \phi \quad (2.22)$$

Para teoria de pequenos deslocamento e pequenas deformações, a curvatura “ ϕ ” pode ser aproximada pela segunda derivada dos deslocamentos:

$$\phi = -y'' \quad (2.23)$$

Substituindo a equação (2.23) nas equações (2.21) e (2.22), pode-se escrever:

$$\Delta\sigma_1 = -E_t y_1 y'' \quad (2.24)$$

$$\Delta\sigma_2 = -Ey_2y'' \quad (2.25)$$

Substituindo as equações (2.24) e (2.25) na equação(2.20) e utilizando a equação de equilíbrio (2.13), chega-se em:

$$E_1y'' \int_0^{d_1} y_1(y_1 - \delta)dA_1 + Ey'' \int_0^{d_2} y_2(y_2 + \delta)dA_2 + Py = 0 \quad (2.26)$$

A condição de equilíbrio de forças na seção transversal é dada por:

$$\int_0^{d_1} \Delta\sigma_1 dA_1 = \int_0^{d_2} \Delta\sigma_2 dA_2 \quad (2.27)$$

Desenvolvendo a equação (2.27), pode-se encontrar a seguinte igualdade:

$$E_1y'' \int_0^{d_1} y_1 dA_1 = Ey'' \int_0^{d_2} y_2 dA_2 \quad (2.28)$$

Desenvolvendo a equação (2.26) e utilizando a equação (2.23), nota-se que as integrais envolvendo “ δ ” se cancelam e pode-se escrever:

$$y'' \left[E_1 \int_0^{d_1} y_1^2 dA_1 + E \int_0^{d_2} y_2^2 dA_2 \right] + Py = 0 \quad (2.29)$$

Esta equação diferencial depende da geometria da seção transversal da barra. Pode-se concluir sobre as integrais desta equação que:

$$I_1 = \int_0^{d_1} y_1^2 dA_1 \quad \text{e} \quad I_2 = \int_0^{d_2} y_2^2 dA_2 \quad (2.30)$$

sendo, “ I_1 ” e “ I_2 ” os momentos de inércia das respectivas áreas, carregada e descarregada, em relação à linha neutra.

Substituindo a equação (2.30) na equação (2.29) e seguindo o mesmo procedimento para encontrar a carga de Euler, mostrado no primeiro capítulo deste trabalho, tem-se que:

$$P_r = \frac{\pi^2}{L^2} (E_t I_1 + E I_2) \quad (2.31)$$

Adotando:

$$E_r = \frac{E_t I_1}{I} + \frac{E I_2}{I} \quad (2.32)$$

sendo, “ I ” o momento de inércia da seção transversal da barra. Pode-se escrever a carga crítica do módulo reduzido como:

$$P_r = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2} = \frac{E_r}{E} P_{Euler} \quad (2.33)$$

sendo, “ L ” o comprimento da barra e “ P_{Euler} ” a carga crítica de Euler.

Von Karman, em 1.910, determinou expressões explícitas para o módulo reduzido de barras de seção retangular e seção “ I ” idealizada, isto é, a espessura da alma é considerada desprezível. No trabalho de CHEN & LUI¹¹ pode-se, também, encontrar a fórmula da elasticidade do módulo reduzido para seção transversal retangular, (2.34), e “ I ”, (2.35), dada por:

$$E_r = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \quad (2.34)$$

$$E_r = \frac{2EE_t}{E + E_t} \quad (2.35)$$

Comparando os diferentes módulos de elasticidade apresentados, lembrando que a elasticidade tangente sempre será menor que a elasticidade elástica, pode-se concluir que: o módulo tangente sempre será o menor módulo de elasticidade, pois a elasticidade que rege o comportamento de todas as fibras da seção transversal será o módulo da elasticidade tangente; e, o módulo de elasticidade reduzido será sempre maior que o módulo tangente e menor que o módulo elástico, pois, o módulo de elasticidade que rege o comportamento de parte das fibras será o módulo tangente, porém, no restante das fibras o comportamento será regido pelo módulo elástico, tendo assim, um valor intermediário quando comparado aos outros módulos. A equação (2.36) descreve esta comparação.

$$E_t < E_r < E \quad (2.36)$$

e, conseqüentemente:

$$P_t < P_r < P_{Euler} \quad (2.37)$$

2.5 Teoria de Shanley

Como mostrado anteriormente, no módulo tangente, um pequeno incremento da força axial no começo da flambagem é assumido. Desse modo, não ocorre deformação reversa em nenhuma fibra da seção transversal da barra durante a flambagem com a carga do módulo tangente. Por outro lado, na teoria do módulo reduzido, a força axial é assumida que permaneça constante na flambagem. Deste modo, a deformação reversa complementar ocorre no lado convexo da barra durante a flambagem com a carga do módulo reduzido. Embora a teoria do módulo reduzido seja

conceitualmente mais completa, para barra perfeitamente reta, que a teoria do módulo tangente, durante muito tempo os engenheiros encontravam-se sobre um dilema, pois, na maioria dos ensaios, a carga crítica da barra se aproximava mais da carga crítica dada pelo módulo tangente que a dada pelo módulo reduzido.

Na publicação feita por SHANLEY³⁷, em 1946, é feita uma discussão a respeito deste dilema. Segundo ele, não há nada que previna uma barra solicitada a um carregamento axial de fletir, exceto a rigidez a flexão da barra, e sobre estas condições, as deformações de compressão poderiam aumentar de um lado da seção transversal enquanto que as deformações do outro lado permaneceriam constantes ou poderiam aumentar de forma diferente em ambos os lados. O módulo tangente poderia ser aplicado em toda a seção transversal e a carga de flambagem seria dada pela teoria do módulo tangente. Isto ocasionaria um paradoxo, porque, se todas as deformações forem iguais ou superiores ao valor do módulo tangente, a média das deformações será maior que a deformação dada pela teoria do módulo tangente.

As hipóteses assumidas na teoria do módulo reduzido também representam um paradoxo. Esta teoria se baseia na hipótese da barra permanecer perfeitamente reta até que alcance a carga crítica, mas mostra também uma deformação reversa na seção transversal, necessária para prover a rigidez adicional na barra. É impossível ocorrer deformação reversa em uma barra reta.

Em 1947, SHANLEY³⁸ afirmou que o início da flexão ocorrerá quando a barra, perfeitamente reta, estiver solicitada pela carga crítica dada pela teoria do módulo tangente, e que o limite do carregamento está entre as cargas dadas pelas duas teorias, módulo tangente e módulo reduzido. Afirmou também, que o comportamento da flambagem de barras no regime inelástico deve ser reconsiderado, tendo como base, que o carregamento axial e a flexão da barra podem ocorrer simultaneamente.

2.5.1 Análise Matemática de Shanley

Shanley estudou um modelo composto por duas barras rígidas conectadas por uma célula deformável formada por dois pequenos elementos, mostrada na figura 2.5. Este estudo pode ser encontrado na publicação de SHANLEY³⁸, em 1947. As duas barras que compõe o modelo são consideradas infinitamente rígidas. Os dois elementos da célula do modelo são assumidos que possuem deflexões em direções opostas com uma distância “ e_1 ” e “ e_2 ” que podem ser compreendidas como as deformações que ocorrem quando a barra for ligeiramente fletida, mostrada na figura 2.5.

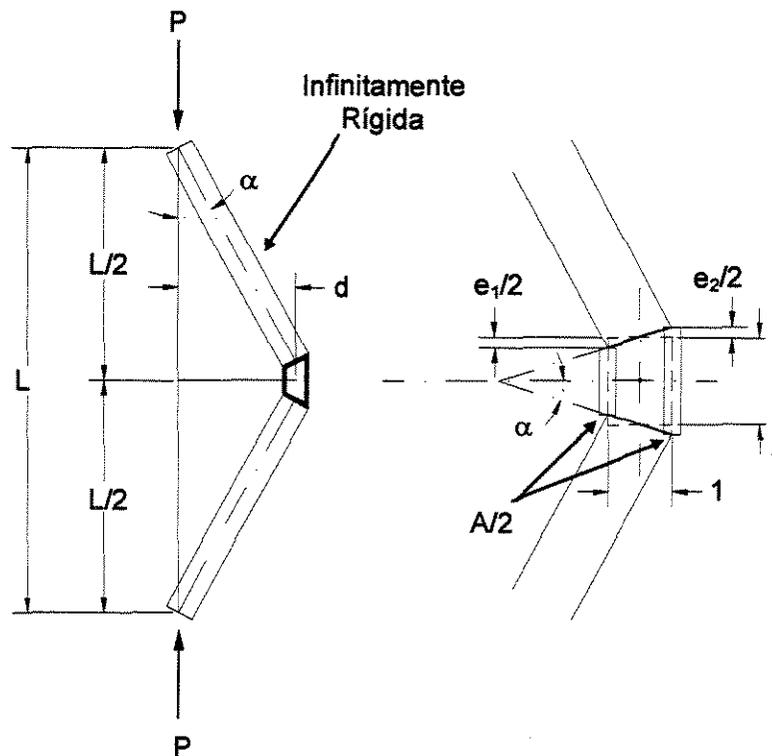


Figura 2.5 - Modelo de Barra Proposto na Teoria de Shanley.

A carga crítica, desta coluna, é facilmente determinada pelo equilíbrio de esforços externo e interno da barra. O deslocamento lateral “d” pode ser expressado nos termos das deformações como:

$$d = \frac{\alpha L}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{e_1}{2} + \frac{e_2}{2} \right) L = \frac{L}{4} (e_1 + e_2) \quad (2.38)$$

O momento externo da célula é dado por:

$$M_e = Pd = \frac{PL}{4} (e_1 + e_2) \quad (2.39)$$

A força axial em cada elemento da célula, devido a flexão, pode ser escrito como:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= e_1 E_1 \frac{A}{2} \\ P_2 &= e_2 E_2 \frac{A}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

sendo que, “E₁” e “E₂” indicam o valor do módulo de elasticidade considerados em cada elemento de célula.

O momento interno na célula de comprimento unitário, em relação ao centro dos elementos, pode ser escrito como:

$$M_{int} = \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2 = \frac{A}{4} (e_1 E_1 + e_2 E_2) \quad (2.41)$$

Equacionando o momento interno (2.41) com o momento externo (2.39), pode-se encontrar:

$$\frac{PL}{4}(e_1 + e_2) = \frac{A}{4}(e_1 E_1 + e_2 E_2) \quad (2.42)$$

Isolando "P" da equação (2.42), obtém-se:

$$P = \frac{A (e_1 E_1 + e_2 E_2)}{L (e_1 + e_2)} \quad (2.43)$$

Observa-se que a equação de Euler pode ser obtida admitindo " $E_1 = E_2 = E$ " na equação (2.43). O mesmo acontece com a equação de Engesser, na teoria do módulo tangente, admitindo " $E_1 = E_2 = E_t$ ". Se assumirmos que a tensão em um elemento da célula é diminuída enquanto no outro é aumentada, então " E_1 " terá o mesmo valor da elasticidade tangente, " E_t ", e " E_2 " o valor da elasticidade elástica, " E ". Tomando " $k = E/E_t$ " e substituindo na equação (2.43):

$$P = \frac{AE_t (e_1 + ke_2)}{L (e_1 + e_2)} \quad (2.44)$$

Utilizando a equação (2.38), a equação (2.44) pode ser escrita como:

$$P = \frac{AE_t}{L} \left[1 + \frac{L}{4d} (k - 1)e_2 \right] \quad (2.45)$$

Pode ser obtida uma outra expressão para "P", se considerado que quando o carregamento crítico previsto pelo módulo tangente é atingido, o carregamento na barra continua a aumentar. O aumento de força axial é dado pela diferença entre o carregamento nos elementos " P_1 " e " P_2 ".

$$\Delta P = P_1 - P_2 = e_1 E_1 \frac{A}{2} - e_2 E_2 \frac{A}{2} = \frac{A}{2} E_t (e_1 - ke_2) \quad (2.46)$$

Utilizando a equação (2.38), a equação (2.46) pode ser escrita como:

$$\Delta P = \frac{A}{2} E_t \left[\frac{4d}{L} - (1+k)e_e \right] \quad (2.47)$$

Este valor deve ser somado à carga crítica do módulo tangente para obter o valor total de "P".

$$P = \frac{AE_t}{L} \left\{ 1 + \left[2d - \frac{L}{2}(1+k)e_2 \right] \right\} \quad (2.48)$$

Comparando a equação (2.48) com (2.45), pode-se obter a seguinte expressão:

$$\frac{L}{4d}(k-1)e_2 = 2d - \frac{L}{2}(1+k)e_2 \quad (2.49)$$

Isolando "e₂", pode-se encontrar a equação (2.49), como:

$$e_2 = \frac{8d^2}{L[k-1+2d(1+k)]} \quad (2.50)$$

Substituindo a equação (2.50) na equação (2.45), obtém-se:

$$P = \frac{AE_t}{L} \left[1 + \frac{2d(k-1)}{k-1+2d(1+k)} \right] \quad (2.51)$$

Esta equação pode ser reduzida a:

$$P = \frac{AE_t}{L} \left[1 + \frac{1}{\frac{1}{2d} + \left(\frac{k+1}{k-1} \right)} \right] \quad (2.52)$$

Adotando o símbolo “ τ ” como a razão “ E_t/E ” e a razão “ P/P_t ” como “ R ”, a equação (2.52) pode ser escrita como:

$$R = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2d} + \left(\frac{1+\tau}{1-\tau} \right)} \quad (2.53)$$

Na figura 2.6, a razão dada pela carga da teoria do módulo tangente e a carga axial atuante, “ R ” é plotada em relação ao deslocamento lateral da barra, “ d ”, para dois valores diferentes de “ τ ”. Se for assumido que o módulo tangente diminui com o aumento das tensões, a curva irá aumentar para um valor máximo e então começará a cair.

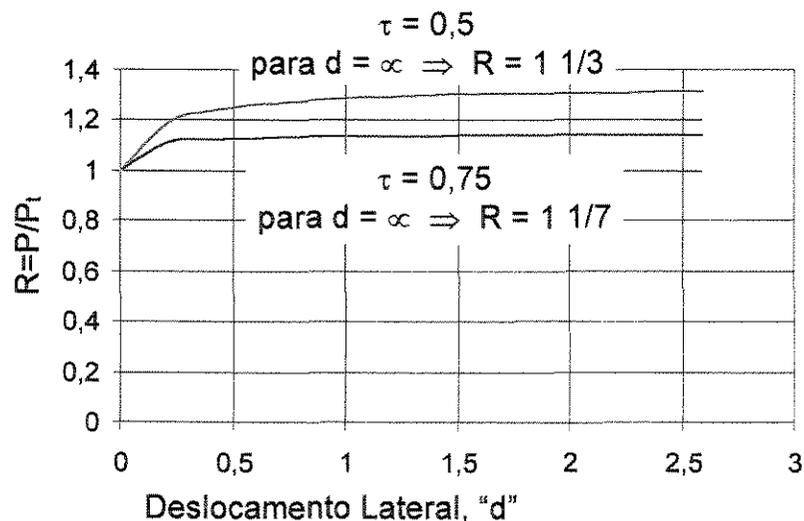


Figura 2.6 - Variação da Carga Axial em Relação ao Deslocamento Lateral da Barra, Assumindo o “ E_t ” Constante (SHANLEY³⁸)

2.5.2 Comparação com a Teoria do Módulo Reduzido

A equação da carga crítica de uma barra será baseada nas hipóteses assumidas na teoria do módulo reduzido, ou seja, a barra permanecerá perfeitamente reta até alcançar a carga crítica dada pelo módulo reduzido. A dedução da carga crítica segue o mesmo desenvolvimento até a equação (2.45). Será assumido o aumento do carregamento nulo, “ $\Delta P=0$ ”, portanto, “ $P_1=P_2$ ” e “ $E_1e_1=E_2e_2$ ” e pode-se encontrar:

$$e_2 = e_1 \frac{E_t}{E} = \frac{e_1}{k} \quad (2.54)$$

Utilizando a equação (2.38), a equação (2.54) pode ser escrita como:

$$e_2 = \frac{1}{1+k} \frac{4d}{L} \quad (2.55)$$

Substituindo a equação (2.55) na equação (2.52), pode-se encontrar a carga crítica segundo as hipótese da teoria do módulo reduzido como:

$$P_r = \frac{AE_t}{L} \left(1 + \frac{k-1}{k+1} \right) \quad (2.56)$$

Pode-se observar que a equação (2.56) representa a equação (2.52) para valores do deslocamento lateral “d” próximos ao infinito. A carga crítica do módulo reduzido, fornece o valor limite para uma barra comprimida axialmente quando o deslocamento lateral desta aproxima-se do infinito, assumindo que o módulo tangente permaneça constante.

2.5.3 Variação da Deformação com a Força Axial

As equações deduzidas podem ser usadas para encontrar a deformação nos elementos da célula. Das equações (2.52), (2.38) e (2.50) pode-se deduzir as seguintes equações:

$$e_1 = \frac{2}{L} \left[\frac{k-R}{\left(\frac{k-1}{R-1}\right) - (k+1)} \right] \quad (2.57)$$

$$e_2 = \frac{2}{L} \left[\frac{R-1}{\left(\frac{k-1}{R-1}\right) - (k+1)} \right] \quad (2.58)$$

As equações (2.57) e (2.58) somente são aplicadas quando a barra inicia a flexão, com a carga crítica do módulo tangente "P_t". A tensão da carga crítica tangente pode ser obtida pela equação (2.51) como:

$$\frac{P_t}{A} = \frac{E_t}{L} \quad (2.59)$$

A deformação correspondente a esta tensão pode ser obtida do diagrama de tensão-deformação do material. Se a tensão estiver no regime elástico, a deformação será dada por:

$$e_t = \frac{P}{AE} = \frac{E_t}{EL} = \frac{1}{kL} \quad (2.60)$$

A deformação adicional em cada elemento da célula, para valores superiores a “R=1”, será dada em termos da deformação “e_t”, como:

$$\frac{\Delta e_1}{e_t} = 2 \left[\frac{k(k-R)}{\left(\frac{k-1}{R-1}\right) - (k+1)} \right] \quad (2.61)$$

$$\frac{\Delta e_2}{e_t} = 2 \left[\frac{k(R-1)}{\left(\frac{k-1}{R-1}\right) - (k+1)} \right] \quad (2.62)$$

2.5.4 Conclusões sobre a Teoria de Shanley

Pode-se concluir, baseado na teoria desenvolvida por SHANLEY³⁸, que a carga crítica dada pela teoria do módulo tangente será a máxima carga axial para a qual uma barra permanecerá perfeitamente reta. Conclui-se também, que a carga axial que uma barra pode suportar não poderá ser superior a carga crítica dada pela teoria do módulo reduzido. Lembrando-se que a carga crítica dada pelo módulo tangente sempre será inferior a dada pelo módulo reduzido, e que em projetos reais de engenharia, exige-se uma limitação nos deslocamentos. O uso da teoria do módulo tangente proporciona um comportamento em que a barra se encontra estável e segura, podendo assim, ser convenientemente considerada para a determinação da capacidade máxima de uma barra, sujeita a uma força axial de compressão.

2.6 Curvas de Tensão-Deformação

2.6.1 Introdução

O módulo tangente, utilizado para representar o comportamento inelástico das barras pode ser obtido através de curvas de tensão-deformação do material. Estas curvas podem ser obtidas através de métodos experimentais ou numéricos.

As normas e especificações utilizam expressões para descrever as curvas que representam o comportamento do regime inelástico nas barras, considerando assim a degradação da capacidade portante da barra, quando estas encontram-se solicitadas acima do limite de proporcionalidade do material.

Esta degradação é conhecida como a não linearidade física do material, sendo capaz de retratar o comportamento das tensões residuais e imperfeições geométricas.

A determinação das curvas pelos métodos experimentais é feita através de um ensaio em uma barra submetida a esforço axial, o qual produz uma curva que relaciona a tensão aplicada com a deformação obtida. Pode-se observar que esta relação, para perfil de aço laminado, não produz um comportamento elasto-plástico perfeito, demonstrando assim a existência de um regime intermediário, em que parte da seção transversal encontra-se plastificada, enquanto que o restante da seção permanece no regime elástico linear, este regime intermediário é conhecido como regime inelástico.

2.6.2 Curva Proposta pelo "Column Research Council"

Baseado no estudo de colunas idealizadas com distribuição linear e parabólica das tensões residuais, bem como em ensaios experimentais, em perfis laminados utilizados em estruturas metálicas, as recomendações do CRC - Column Research Council - na primeira e segunda edição do seu guia propõem, para representar o comportamento da barra no regime inelástico, a seguinte parábola:

$$\sigma_{cr} = \sigma_y - B \left(\frac{KL}{r} \right)^2 \quad (2.63)$$

sendo, “ σ_{cr} ” a tensão crítica na barra, “ σ_y ” a tensão de escoamento do material, “ KL ” o comprimento efetivo de flambagem e “ r ” o raio de giração da seção transversal da barra.

Entretanto, a flambagem das barras no regime elástico será representada pela fórmula de Euler. O ponto limite entre o comportamento no regime elástico e inelástico será encontrado quando “ $\sigma_{cr} = 0,5 \sigma_y$ ” (CHEN & LUI¹¹). Para obter uma transição suave da hipérbole de Euler para a parábola dada pelas recomendação do CRC, representando assim, o comportamento inelástico, a constante “ B ” da equação (2.63) deverá ser tomada como “ $\sigma_y^2/4\pi^2E$ ”. A esbelteza correspondente a “ $\sigma_{cr} = 0,5 \sigma_y$ ” é denominada de “ C_c ”, sendo:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2E}{\sigma_y}} \quad (2.64)$$

Substituindo o valor de “ B ” na equação (2.63) e lembrando que o valor de “ C_c ” dado pela equação (2.64) é o ponto limite entre o comportamento elástico e inelástico da barra, pode-se obter:

$$\sigma_{cr} = \begin{cases} \sigma_y \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c^2} \right] & \frac{KL}{r} \leq C_c \\ \frac{\pi^2E}{(KL/r)^2} & \frac{KL}{r} > C_c \end{cases} \quad (2.65)$$

Com o propósito de comparação, a equação (2.65) pode ser rescrita em função dos seguintes termos adimensionais, “ σ_{cr}/σ_y ” e “ λ_c ” como:

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} = \begin{cases} 1 - 0,25\lambda_c^2 & \lambda_c \leq \sqrt{2} \\ \lambda_c^{-2} & \lambda_c > \sqrt{2} \end{cases} \quad (2.66)$$

sendo, “ λ_c ” um parâmetro de esbeltez dado por $\lambda_c = (KL/r)\sqrt{\sigma_y/\pi^2E}$ ou $\lambda_c = \sqrt{\sigma_y/\sigma_{Euler}}$.

Utilizando a teoria do módulo tangente, pode-se dizer que $\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{Euler}} = \frac{E_t}{E}$ e pode-se encontrar, fazendo as devidas transformações algébricas, a equação (2.66) como:

$$\frac{E_t}{E} = \begin{cases} \frac{4\sigma}{\sigma_y} \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_y}\right) & \sigma > 0,5\sigma_y \\ 1 & \sigma \leq 0,5\sigma_y \end{cases} \quad (2.67)$$

Nota-se que o módulo de elasticidade permanece constante até a tensão atingir a metade da tensão de plastificação do material, regime elástico, a partir deste ponto, o módulo de elasticidade é reduzido gradativamente caracterizando assim o comportamento do regime inelástico, módulo tangente, até que a tensão plastifique toda a seção transversal da barra, tensão de plastificação, o módulo de elasticidade tangente neste ponto será aproximadamente zero.

2.6.3 Curva Proposta pela “AISC Load and Resistance Factor Design – LRFD¹⁴ⁿ”

Nas especificações da “LRFD¹⁴ⁿ” a resistência de cálculo a uma solitação de compressão simples, é dada pelas seguintes expressões:

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} = \begin{cases} 0,658\lambda_c^2 & \lambda_c \leq 1,5 \\ \frac{0,877}{\lambda_c^2} & \lambda_c > 1,5 \end{cases} \quad (2.68)$$

Esta curva considera as tensões residuais e imperfeições geométricas, sendo que “ λ_c ” já foi definido anteriormente. Como pode-se observar, quando a barra encontra-se no regime elástico, a carga crítica de Euler é reduzida por um fator de segurança constante “0,877”. Pode-se encontrar uma relação entre as expressões dadas pela “LRFD¹⁴”, no regime elástico e no regime inelástico, para encontrarmos uma curva que relacione o módulo de elasticidade tangente com o módulo de elasticidade elástico, “ E_t/E ”, como:

$$\frac{E_t}{E} = \frac{0,658\lambda_c^2}{0,877/\lambda_c^2} \leq 1,0 \quad (2.69)$$

A expressão (2.69) pode ser expressa em função de “ σ/σ_y ” como:

$$\frac{E_t}{E} = \begin{cases} -2,7243 \frac{\sigma}{\sigma_y} \ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_y}\right) & \sigma > 0,39\sigma_y \\ 1 & \sigma \leq 0,39\sigma_y \end{cases} \quad (2.70)$$

Nota-se que o módulo de elasticidade dado pelas especificações da AISC-LRFD¹⁴ permanece constante até a tensão atingir 0,39 da tensão de escoamento, regime elástico, e que a partir deste ponto o módulo de elasticidade é reduzido gradativamente, módulo tangente no regime inelástico, até praticamente zero, plastificação total da seção transversal da barra. Na expressão dada pelo LRFD¹⁴ o regime inelástico começa com tensão inferior ao dado pelo CRC, pois as especificações do LRFD¹⁴ levam em consideração, além das tensões residuais, o

acréscimo de tensão devido a flexão causada pelas imperfeições geométricas, sendo esta não considerada pelo CRC.

2.6.4 Curva Proposta pela “NBR 8800 - Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios”³⁹

A norma brasileira “NBR 8800 - Projetos e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios”³⁹ apresenta quatro curvas de flambagem para a determinação da resistência de cálculo de barras axialmente comprimidas. A utilização de quatro curvas se deve ao fato de que diferentes tipos de perfis possuam diferentes tipos de distribuição de tensões residuais, já que a tensão residual está ligada diretamente à geometria da seção transversal da barra, e o comportamento das tensões residuais depende também do eixo de inércia analisado, pois a combinação das tensões residuais com as tensões devido ao carregamento nas barras nem sempre são iguais nos dois eixos principais de inércia. Nestas expressões não existe um limite definido para o regime elástico e o regime inelástico.

As curvas utilizadas pela “NBR - 8800”³⁹ foram baseadas nas especificações do “European Recommendations for Steel Construction - ECCS”¹⁶, o qual adota várias curvas para representar o comportamento de barras axialmente comprimidas. As curvas utilizadas pelo “ECCS”¹⁶ foram inicialmente obtidas através de uma variedade de ensaios de barras. A utilização de apenas uma curva para representar o comportamento dos perfis metálicos axialmente comprimidos tem como vantagem facilitar o dimensionamento das barras, entretanto, não consegue descrever o comportamento com precisão de cada tipo de perfil metálico existente.

Como pode ser visto no trabalho de CHEN & LUI¹¹, o limite de carregamento suportado por uma barra, sujeita a uma combinação de momento fletor e força normal de compressão, é dado por:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M}{M_y} = 1 \quad (2.71)$$

Considerando que o momento fletor máximo "M" ao longo da barra é gerado pelo efeito de segunda ordem, ocasionado pela força axial e a imperfeição geométrica. Pode-se escrever, a partir da fórmula secante que:

$$M = \frac{P\delta_0}{1 - P/P_{Euler}} \quad (2.72)$$

sendo, " δ_0 " o deslocamento no meio da barra ou a imperfeição inicial adotada na barra.

Substituindo a equação (2.72) na equação (2.71), pode-se escrever:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{P\delta_0}{(1 - P/P_{Euler})M_y} = 1 \quad (2.73)$$

ou,

$$\frac{P}{P_y} + \frac{P\delta_0}{(1 - (P/P_y)(P_y/P_{Euler}))M_y} = 1 \quad (2.74)$$

Lembrando que $M_y = Z\sigma_y$ e que $\bar{\lambda}^2 = \lambda_c^2 = P_y/P_{Euler}$, lembrando que o símbolo $\bar{\lambda}$ é usado na NBR8800³⁹, e definindo o parâmetro $\eta = \delta_0 A/Z$, sendo "Z" o módulo de resistência plástico. A equação (2.74) pode ser expressa por:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{\frac{P}{P_y}}{1 - \frac{P}{P_y}\lambda_c^2} \eta = 1 \quad (2.75)$$

Utilizando-se do parâmetro adimensional $\rho = \frac{P}{P_y}$ e isolando este, é possível encontrar a equação (2.75) como:

$$\rho = \frac{(1 + \eta + \lambda_c^2) - \sqrt{(1 + \eta + \lambda_c^2)^2 - 4\lambda_c^2}}{2\lambda_c^2} \quad (2.76)$$

sendo que “ η ” é obtido experimentalmente, considerando os efeitos de imperfeições geométricas e tensões residuais.

As curvas propostas pelo “ECCS¹⁶” são caracterizadas pela existência de um patamar na região de esbeltez entre $0 \leq \lambda_c \leq 0,2$, pois nestes casos, segundo esta especificação, os perfis metálicos conseguem atingir completamente a plastificação durante o ensaio $\rho = 1$. A “ECCS¹⁶” propõem quatro formulações para a expressão de “ η ” como:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \alpha_1(\lambda_c - 0,2) \\ \eta_2 &= \alpha_2\sqrt{\lambda_c^2 - 0,04} \\ \eta_3 &= \alpha_3(\lambda_c - 0,2)^2 \\ \eta_4 &= \alpha_4(\lambda_c^2 - 0,04) \end{aligned} \quad (2.77)$$

sendo, “ α_i ” uma constante que define o tipo de curva adotada de acordo com o tipo de perfil utilizado.

A especificação européia adota como parâmetro “ η ” o valor da primeira expressão “ η_1 ” enquanto que a norma brasileira adota a segunda expressão “ η_2 ”. Substituindo o valor de “ η_2 ” na equação (2.76), pode-se encontrar a expressão da norma brasileira como:

$$\rho = \frac{\left(1 + \alpha\sqrt{\lambda_c^2 - 0,04} + \lambda_c^2\right) - \sqrt{\left(1 + \alpha\sqrt{\lambda_c^2 - 0,04} + \lambda_c^2\right)^2 - 4\lambda_c^2}}{2\lambda_c^2} \quad (2.78)$$

Adotando $\beta = \left(1 + \alpha\sqrt{\lambda_c^2 - 0,04} + \lambda_c^2\right) / 2\lambda_c^2$ e substituindo na equação (2.78) pode-se encontrar a expressão da norma brasileira como esta é apresentada nas suas especificações:

$$\rho = \begin{cases} \rho = 1 & 0 \leq \lambda_c < 0,20 \\ \rho = \beta - \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{\lambda_c^2}} & \lambda_c \geq 0,20 \end{cases} \quad (2.79)$$

sendo,

$\alpha = 0,158$ para a curva "a";

$\alpha = 0,281$ para a curva "b";

$\alpha = 0,384$ para a curva "c"; e,

$\alpha = 0,572$ para a curva "d".

Como pode-se observar a redução do módulo de elasticidade inicia-se desde o começo do parâmetro "ρ", ou seja, quando a barra encontra-se no regime elástico a carga crítica encontra-se abaixo da carga crítica de Euler.

Pode-se também encontrar uma expressão que relacione o parâmetro adimensional "E_t/E" com o parâmetro "P/P_y". Lembrando que:

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{Euler}} = \rho\lambda_c^2 = \frac{E_t}{E} \quad (2.80)$$

Pode-se encontrar a equação (2.75), utilizando a relação dada pela equação (2.80) como:

$$\left(\frac{E_t}{E}\right)^2 (\rho^2 - 2\rho + 1) + \frac{E_t}{E} (4\rho - 2\rho^2 - 2 - \rho\alpha^2) + \rho^2 - 2\rho + 1 + 0,04\rho^2\alpha^2 = 0 \quad (2.81)$$

Pode-se calcular o valor de E_t/E como:

$$\frac{E_t}{E} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.82)$$

sendo:

$$\begin{aligned} a &= \rho^2 - 2\rho + 1 \\ b &= 4\rho - 2\rho^2 - 2 - \rho\alpha^2 \\ c &= \rho^2 - 2\rho + 1 + 0,04\rho^2\alpha^2 \end{aligned}$$

2.6.5 Comparação das Curvas Apresentadas

Na figura 2.7 são apresentadas as diversas curvas de flambagem discutidas neste capítulo, mostrando o gráfico de “ ρ ” em função de “ λ_c ”. Nota-se que todas as curvas encontram-se abaixo da sugerida pelo “CRC”, exceto pelas curvas sugeridas pela “NBR 8800³⁹”, no trecho inicial onde “ ρ ” é tomado igual a “1”. A justificativa para tal é que assume-se neste trecho a plastificação total da seção transversal do perfil, antes deste atingir a instabilidade da barra.

Na figura 2.8 apresenta-se a relação entre “ E_t/E ” em função de “ P/P_y ”. Nota-se claramente que, ao contrário das curvas propostas pela “LRFD¹⁴” e “CRC”, as curvas da “NBR 8800³⁹” assumem um comportamento não linear desde o início do carregamento.

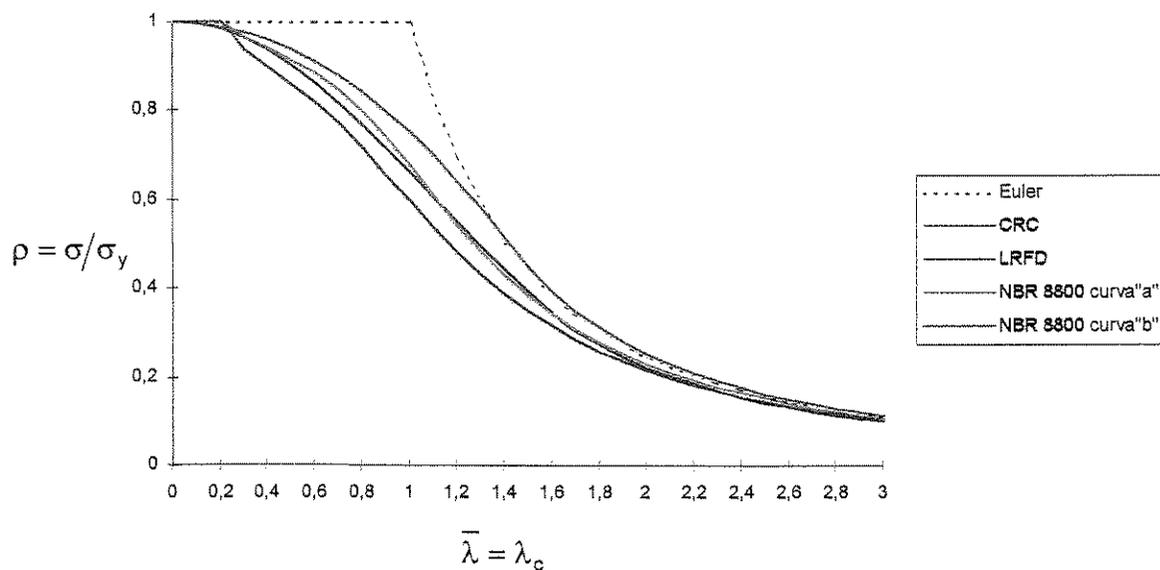


Figura 2.7 - Curvas de Flambagem.

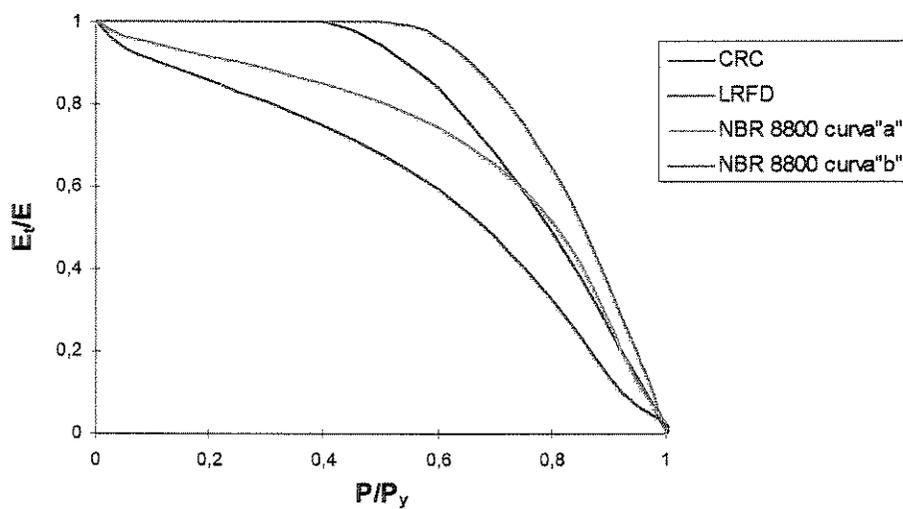


Figura 2.8 - Redução do Módulo de Elasticidade em Função da Força Axial.

Capítulo 3

CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS

3.1 Introdução

A deformação nas conexões de aço entre vigas e colunas é dada pelo seu deslocamento rotacional, " θ_r ", causado pela curvatura dada pelo momento " M " no plano (figura 3.1). O efeito da deformação angular da conexão pode alterar o efeito da estabilidade das barras desde que a rotação adicional cause como resultado a redução na rigidez efetiva das barras para a qual as conexões são designadas. O acréscimo de rotação nas barras podem aumentar o efeito "P- Δ " e conseqüentemente, a estabilidade global da estrutura pode ser afetada.

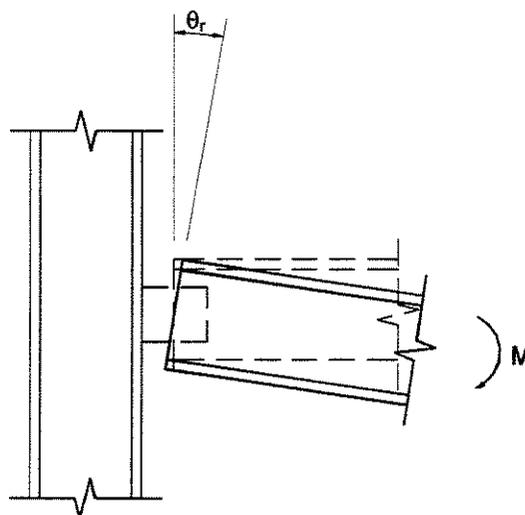


Figura 3.1 - Deformação Rotacional na Conexão.

A característica não linear da relação momento-rotação das conexões de vigas com colunas torna-se uma importante função para a estabilidade das barras.

Para estabelecer critérios para cálculo de barras com ligações semi-rígidas, é necessário conhecer o comportamento "M- θ_r " da conexão entre viga e coluna e uma formulação apropriada do modelo "M- θ_r " para uso no cálculo e análise de estruturas reticuladas. Nos últimos anos, várias pesquisas foram publicadas discutindo a influência da rigidez das conexões em estruturas de barras de aço, para todos os tipos de conexões.

3.2 Tipos de Conexões Semi-Rígidas

3.2.1 Conexões de Cantoneira Simples na Alma e Placas Simples

Conexões de cantoneira simples na alma consiste em uma cantoneira qualquer, parafusada ou soldada na alma da viga e na mesa da coluna, mostrada na figura 3.2(a). Por outro lado, as conexões de chapa simples usam chapas no lugar de cantoneiras. Este tipo de conexão requer menos material que a de cantoneira simples na alma (figura 3.2(b)). Geralmente, no cálculo dessas conexões, a de cantoneira simples na alma possui rigidez ao momento aproximadamente igual a metade da de cantoneira dupla na alma, e a conexão de chapa simples possui rigidez igual ou maior que a de cantoneira simples na alma, a chapa é totalmente soldada com a mesa da coluna.

3.2.2 Conexões de Cantoneira Dupla na Alma

As conexões de cantoneira dupla na alma consistem em duas cantoneiras qualquer parafusadas ou soldada na alma da viga e na mesa da coluna, mostrada na figura 3.2(c). Nos primeiros ensaios conduzidos por Rathbun (1936) foram usados

rebites. Nos anos 50, mais especificações admitiam, para o projeto de estruturas de aço, o uso de parafusos de alta resistência no lugar de rebites. Para esclarecer o efeito dos parafusos de alta resistência no comportamento das conexões, quando usados no lugar de rebites, Bell (1958) e Lewitt (1966) conduziram experimentos sobre conexões rebitadas e parafusadas de viga-coluna. Hoje, parafusos de alta resistência são popularmente usados para fixar estes tipos de conexões. Embora a rigidez da conexão de cantoneira dupla na alma seja maior que das conexões de cantoneira simples na alma e de chapa simples, as especificações da AISC-ASD⁴ (1989) consideram este tipo de conexão como construção do Tipo 2, conexão simples ou conexão cortante.

3.2.3 Conexões de Cantoneira de Topo e Assentamento com Cantoneira Dupla na Alma

Este tipo de conexão, é uma combinação da conexão de cantoneira de topo e assentamento com conexão de cantoneira dupla na alma. A típica conexão de cantoneira de topo e assentamento com cantoneira dupla na alma é mostrada na figura 3.2(d). A cantoneira dupla na alma é usada para melhorar as características das restrições da conexão de cantoneira de topo e assentamento, e para transmitir a cortante. Este tipo de conexão é considerado como Tipo 3 nas especificações da AISC-ASD⁴ (1989), que é conhecida como conexão semi-rígida.

3.2.4 Conexões de Cantoneira de Topo e Assentamento

A típica conexão de cantoneira de topo e assentamento é mostrada na figura 3.2(e). As especificações da AISC-ASD⁴ (1989) descrevem este tipo de conexão como segue: a cantoneira de topo é usada para suprir o escoramento lateral da mesa comprimida da viga e a cantoneira de assentamento é usada para transmitir apenas as reações verticais da viga para a coluna e não apresenta significativa resistência ao

momento na extremidade da viga. Entretanto, segundo os resultados experimentais, estas conexões mostraram-se capazes de transmitir não apenas as reações verticais, mas também alguma parcela de momento da viga para a coluna.

3.2.5 Conexões de Chapa de Topo Estendida e Chapa de Topo Ligada a Mesa

De um modo geral as conexões de chapa de topo são soldadas na extremidade das vigas juntamente com a alma e a mesa, na sua fabricação, e parafusada com a coluna durante a montagem, foram muito usadas nos anos 60. As conexões de chapa de topo estendida são classificadas em dois tipos: as placas de topo estendida somente do lado de tração ou em ambos os lados de tração e de compressão, mostradas nas figuras 3.2(f) e 3.2(g). A típica conexão de chapa de topo ligada a mesa é mostrada na figura 3.2(h). Como algumas conexões de chapa de topo são consideradas como construções do tipo FR, rígida, mais propriamente que construções do tipo PR, semi-rígida, nas especificações da AISC-LRFD¹⁴ (1986), elas podem muitas vezes serem usadas para transferirem momento da extremidade da viga para a coluna. As conexões de chapa de topo estendida em ambos os lados é preferida quando a conexão é submetida a momentos reversos. Embora as conexões de chapa de topo ligada a mesa sejam mais frágeis que as conexões de chapa de topo estendida, este tipo de conexão é muitas vezes usado em detalhes de coberturas. O comportamento das conexões de chapa de topo dependem da relação entre a rigidez da mesa da coluna e a rigidez da conexão. A rigidez da mesa da coluna funciona para prevenir deformação por flexão na coluna, deste modo, influencia no comportamento da chapa e dispositivos de fixação.

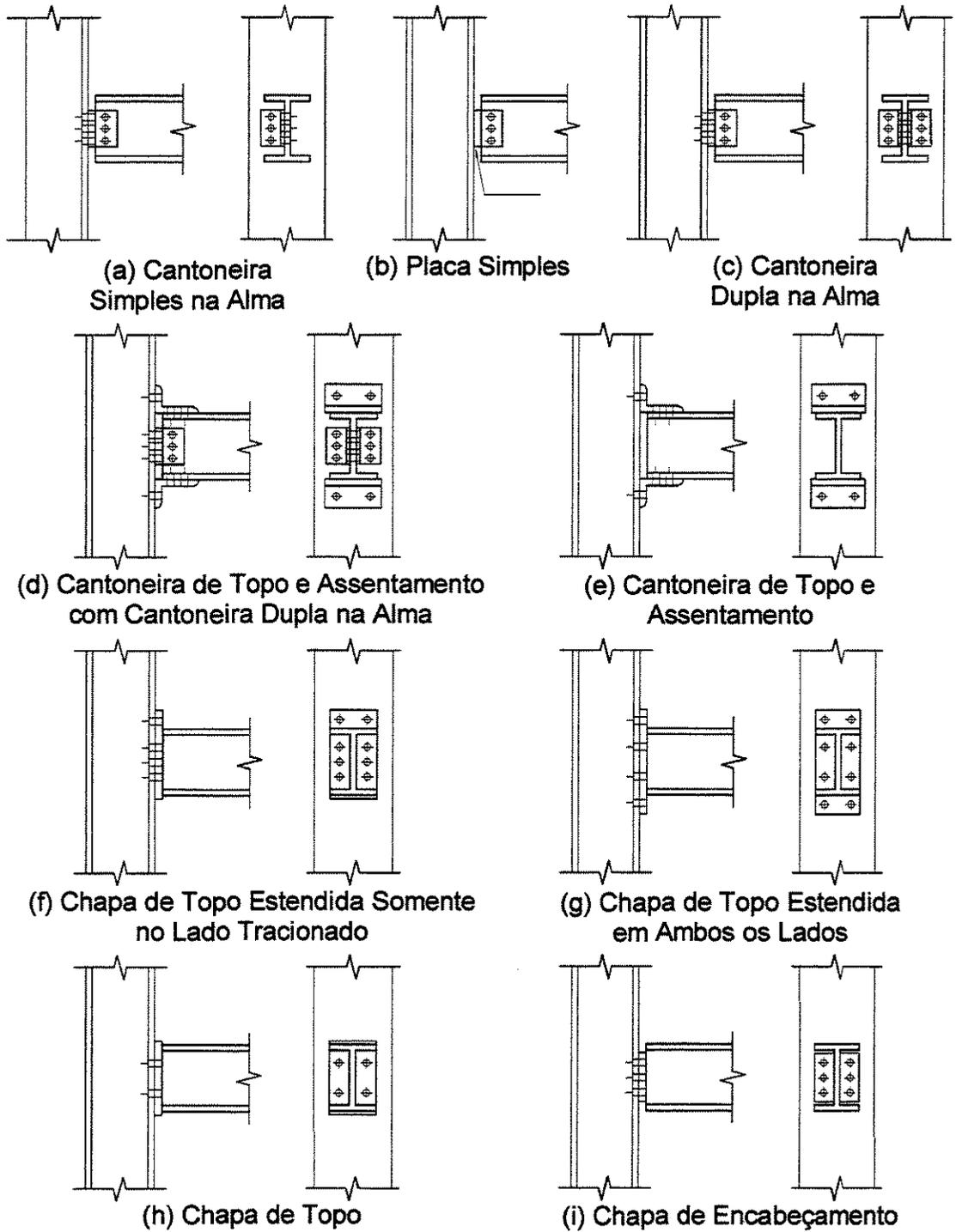


Figura 3.2 - Conexões Típicas de Vigas com Colunas.

3.2.6 Conexões de Chapa de Encabeçamento

As conexões de chapa de encabeçamento consistem em uma chapa de extremidade, na qual o comprimento é menor que a altura da viga, soldada na alma da viga, e parafusada na coluna como mostrado na figura 3.2(i). As características da relação momento-rotação desta conexão é semelhante a da conexão de cantoneira dupla na alma. As conexões de chapa de encabeçamento são usadas para transferir as reações verticais das vigas para as colunas e são classificadas como tipo 2 pelas especificações da AISC-ASD⁴ (1989), conexão simples ou conexão cortante.

3.3 Comportamento Não Linear das Conexões

Os esforços transmitidos pela conexão entre uma viga e uma coluna consistem em força axial, de cisalhamento, momento fletor e momento torçor. O efeito das forças axiais e de cisalhamento são negligenciadas, devido a suas deformações serem pequenas quando comparadas com as deformações rotacionais na maioria dos casos (KIM & CHEN¹⁸). O efeito causado pela torção será negligenciado devido a este estudo ser limitado a estruturas planas.

De um modo geral, os efeitos que causam a não linearidade da relação momento-rotação nas conexões semi-rígidas são muitos, como por exemplo: a concentração das tensões devido ao tipo de dispositivo de ligação, podendo causar flambagem local da ligação ou do perfil; o acréscimo de tensões residuais ocasionado pela fabricação dos dispositivos de ligação; plastificação local; e, flexão nos dispositivos de ligação.

Para o caso de conexões que usam cantoneiras como dispositivos de ligação, a flexão nas cantoneiras são de grande importância na determinação do comportamento não linear, a flexão na cantoneira pode criar rótulas plásticas neste dispositivo. Pode-se observar também que uma flambagem local na mesa do pilar não

é difícil de acontecer. Na figura 3.3 é mostrada uma conexão com dispositivos de cantoneiras deformadas por flexão.

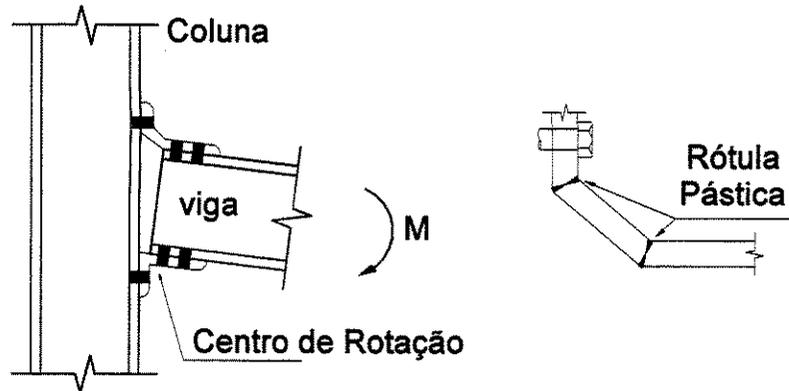


Figura 3.3 - Conexão de Cantoneira de Topo e Assentamento na Posição Deformada Devido a uma Flexão.

3.4 Classificação

No início de um projeto, é necessário estimar as influências das conexões no comportamento da estrutura, a não ser que seja realizada uma análise não linear. Isto pode ser realizado por categorias de conexões em que as relações de momento-rotação podem ser divididas em três: conexões flexíveis (articuladas); conexões rígidas; e, conexões semi-rígidas. Dois sistemas de classificação, propostos pelo Eurocode 3 (1992) e Bjorhovde et alli (1990), serão descritas. Estes sistemas de classificações são usados em análise de estruturas de aço com conexões semi-rígidas entre vigas e colunas (LIEW et alli¹⁷).

O sistema adimensional de Bjorhovde et alli (1990), para classificação compara a rigidez das conexões com a rigidez das barras (CHEN & TOMA⁴⁰).

Os parâmetros adimensionais usados na classificação das conexões são:

$$\bar{m} = \frac{M}{M_p} \quad \bar{\theta} = \frac{\theta_r}{\theta_p} \quad (3.1)$$

sendo, “ θ_r ” o ângulo de deformação relativa da conexão, $\theta_p = M_p/(EI/5d)$, “ I ” e “ L ” o momento de inércia e o comprimento da barra, “ M_p ” a capacidade máxima ao momento plástico da barra e “ d ” a altura da viga. A classificação é baseada na resistência e rigidez das conexões com região limite mostrado na figura 3.4. As três diferentes regiões da figura 3.4 são definidas como:

(1) Conexão rígida;

Em termos de resistência: $\bar{m} \geq 0,7$

Em termos de rigidez: $\bar{m} \geq 2,5 \bar{\theta}$

(2) Conexão semi-rígida; e,

Em termos de resistência: $0,7 > \bar{m} > 0,2$

Em termos de rigidez: $2,5 \bar{\theta} > \bar{m} > 0,5 \bar{\theta}$

(3) Conexão flexível.

Em termos de resistência: $\bar{m} \leq 0,2$

Em termos de rigidez: $\bar{m} \leq 0,5 \bar{\theta}$

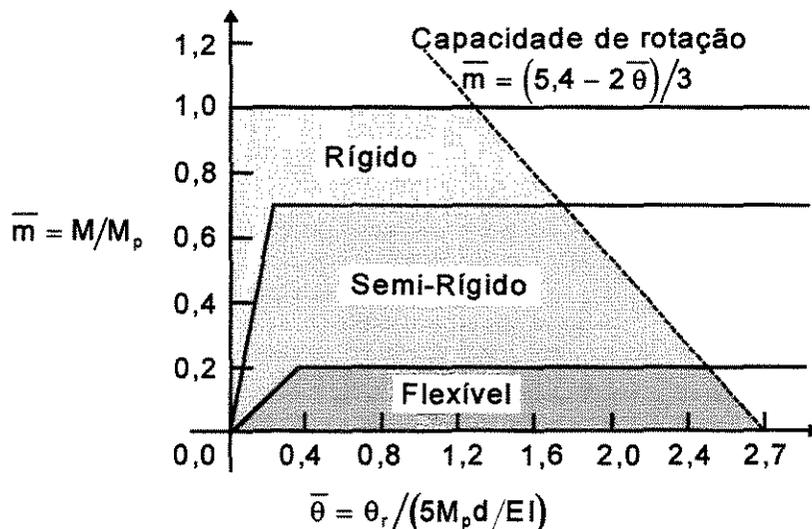


Figura 3.4 - Classificação das Conexões Segundo Bjorhovde et alii (1990).

Bjorhovde et alli, 1990, também propôs uma expressão para calcular a capacidade de rotação da conexão com referência ao comprimento da barra e pela curva média com resultados de ensaios (CHEN & TOMAS⁴⁰). Sua expressão simplificada é dada por:

$$\bar{m} = \frac{(5,4 - 2\bar{\theta})}{3} \quad (3.2)$$

De acordo com esta fórmula, a capacidade de rotação de uma conexão entre duas barras depende da razão da capacidade final de momento da conexão para o momento totalmente plástico da barra e isto é inversamente proporcional à rigidez inicial da conexão “ R_{ki} ”. Em outras palavras, pequena rigidez inicial da conexão, grande capacidade de rotação. A equação (3.2) é representada na figura 3.4. Este sistema de classificação de conexões pode ser usado para escolher a conexão a ser usada na análise e projeto de estruturas.

As especificações do EUROCODE 3¹⁶ incluem também alguns critérios básicos para a classificação da relação momento-rotação das conexões de viga-coluna. Este sistema de classificação depende do tipo de estrutura, contraventada ou sem contraventamento (LIEW et alli¹⁷). Os parâmetros adimensionais usados na classificação das conexões são iguais aos da equação (3.1) sendo, $\theta_p = M_p/(EI/L)$, “ I ” e “ L ” o momento de inércia e o comprimento da barra e “ M_p ” a capacidade máxima ao momento plástico da mesma. A localização e os limites que separam as conexões entre rígidas e semi-rígidas é mostrado na figura 3.5.

As regiões para a classificação das conexões semi-rígidas podem ser escritas como:

Para barras sem contraventamentos:

$$\bar{m} < 25\bar{\theta} \quad \text{para, } \bar{m} < \frac{2}{3}$$

e,

$$\bar{m} < \frac{(25\bar{\theta} + 4)}{7} \quad \text{para, } \frac{2}{3} < \bar{m} < 1$$

Para barras contraventadas:

$$\bar{m} < 8\bar{\theta} \quad \text{para, } \bar{m} < \frac{2}{3}$$

e,

$$\bar{m} < \frac{(20\bar{\theta} + 3)}{7} \quad \text{para, } \frac{2}{3} < \bar{m} < 1$$

Do ponto de vista de resistência, a capacidade última ao momento plástico da viga é usado como limite. Na recomendação final, o EUROCODE 3¹⁶ usa a curva tri-linear no lugar da simples curva bi-linear, porque muitas conexões semi-rígidas comportam-se de maneira não linear.

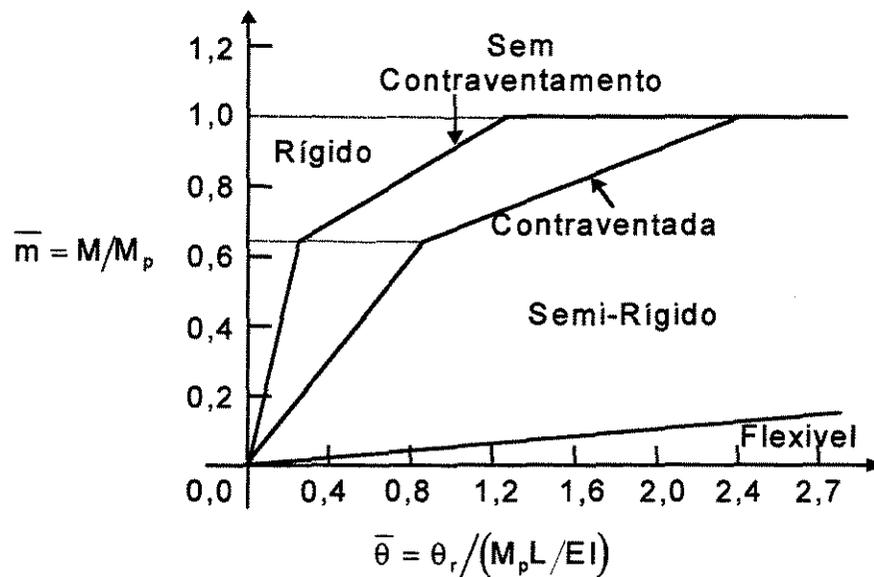


Figura 3.5 - Classificação das Conexões Segundo Eurocode 3.

3.5 Modelos das Conexões

3.5.1 Observações Gerais

Para análises computacionais de estruturas reticulares considerando a influência das conexões semi-rígidas são necessários modelos exatos do comportamento da relação momento-rotação das conexões. Por isso existe uma grande dificuldade em formular funções genéricas que retratem o comportamento de todos os tipos e tamanhos de conexões utilizadas nas estruturas metálicas. Estas funções são expressas em termos que dependem dos parâmetros da geometria para cada tipo de conexão. Quando a análise computacional de estrutura está sendo executada, os parâmetros da geometria das conexões podem ser introduzidos nas funções para reproduzir o comportamento da relação momento-rotação da conexão na estrutura.

Embora mais de 700 ensaios de conexões entre vigas e colunas tenham sido executados (Nethercot 1985), somente 330 destes forneceram dados corretamente úteis (Attiogbe & Morris 1991). Mais tarde, os estudos de alguns parâmetros foram executados para determinar os efeitos das diferentes geometrias das conexões no comportamento da relação momento-rotação (SHERBOURNE & BAHARI⁴¹).

O número de estudos analíticos do comportamento das conexões, usando o método dos elementos finitos, são muitos e podem ser relatados nas publicações de: Krishnamurthy, 1979; Patel & Chen, 1984; Driscoll, 1987; e, Kukreti, 1987. Entretanto, estas aproximações são inaceitáveis para uso prático, porque cálculos mais trabalhosos são exigidos para considerar o material e a geometria não linear (CHEN & TOMA⁴⁰). Atualmente, a aproximação mais usada para descrever a curva "M- θ_r " são as curvas ajustadas vindas dos dados experimentais, utilizando-se de expressões simples. Vários modelos analíticos podem ser desenvolvidos para representar as conexões flexíveis usando a avaliação dos dados de ensaios experimentais.

Primeiramente, foram desenvolvidos modelos usando apenas a rigidez inicial da conexão num modelo linear da relação “ $M-\theta_r$ ” (Rathbun, 1936; Moforton & Wu, 1963; Lighfoot & LeMessurier, 1974), segundo CHEN & TOMA⁴⁰. De um modo geral, o modelo linear é muito fácil de ser usado, mas possui uma série de desvantagens. É adequado somente para um pequeno limite da rotação inicial relativa. A aproximação fechada para o comportamento real das conexões pode ser obtida de modo idêntico com o uso do modelo bi-linear (Tarpay & Cardinal, 1981; e, Lui & Chen, 1983) ou o modelo da parte da forma linear (CHEN & TOMA⁴⁰). O modelo da parte da forma linear é composto de uma série de segmentos de linha reta. Nestes modelos, a repentina mudança na rigidez da conexão para a transição de pontos faz seu uso prático difícil. JONES et alli⁴² (1980,1981) propôs o modelo cúbico-B para obter uma função mais adequada. Entretanto, este modelo requer um grande número de dados de amostra durante o processo de formulação. Frye & Morris (1975) relataram o modelo polinomial para avaliar o comportamento de vários tipos de conexões. Neste modelo, o comportamento da relação “ $M-\theta_r$ ” é representado por um polinômio governante.

A diferença entre estes modelos é mostrada na figura 3.6. Pode-se encontrar também a representação gráfica destes modelos na publicação de JONES et alli⁴².

Lui & Chen (1986) usaram uma função exponencial de ajustamento de curva para os dados experimentais de “ $M-\theta_r$ ”. Este modelo permite uma boa representação do comportamento não linear das conexões. Entretanto, se existir alguma mudança brusca na inclinação da curva “ $M-\theta_r$ ” este modelo não pode representá-la adequadamente. Kishi & Chen (1986) refinou o modelo exponencial de Lui & Chen acomodando-o para qualquer mudança brusca na inclinação da curva “ $M-\theta_r$ ” (modelo exponencial modificado). O modelo de Kishi-Chen pode ser realmente usado nos dados experimentais de “ $M-\theta_r$ ”. Outros modelos exponenciais (modelo de Yee-Melchers, 1986; e, o modelo de Wu-Chen, 1990) foram publicados (CHEN & TOMA⁴⁰). Foi também desenvolvido o modelo de quatro parâmetros que usa a rigidez inicial da conexão, o endurecimento-deslocamento na rigidez da conexão, a capacidade ao momento plástico e uma constante. Mais tarde surgiu o modelo com três parâmetros que é

composto da rigidez inicial da conexão, a capacidade do momento último e um parâmetro de forma.

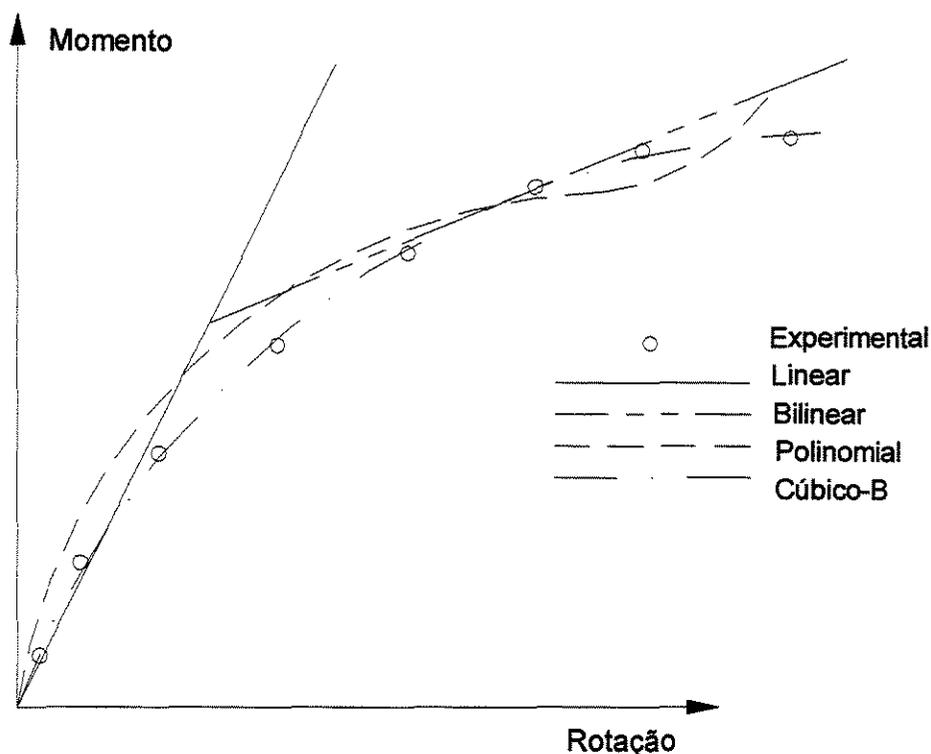


Figura 3.6 - Relação Momento-Rotação nos Modelos

Modelos usando funções simples, isto é, modelos simples, também foram relatados. Colson & Loueau (1983) e Kishi & Chen (1990) propuseram modelos similares independentes usando três parâmetros: rigidez inicial da conexão, capacidade ao momento último, e parâmetros de forma. Como estes modelos usam apenas três parâmetros, eles não são tão precisos quando comparados com a curva cúbica-B ou com o modelo exponencial modificado. Entretanto o número de dados requerido para estes modelos são drasticamente reduzidos. Ang & Morris (1984) usaram a função de Ramberg-Osgood (Ramberg & Osgood, 1943) para criar um modelo para as conexões (CHEN & TOMA⁴⁰). O modelo de Ang-Morris é composto de três parâmetros. Richard et alli (1980) descreveu analiticamente a curva “M- θ ,” de

conexões simples de chapa com um modelo adimensional. O processo usado para estabelecer este modelo foi baseado no método não linear dos elementos finitos, e o comportamento não linear dos parafusos e chapas conectadas foram modelados pelo uso da relação força-deformação obtidos de ensaios de parafusos com cisalhamento simples.

3.5.2 Modelo Polinomial de Frye-Morris

Um dos modelos mais populares para análise estrutural é a função polinomial proposta por Frye & Morris (1975). O modelo de Frye-Morris teve seu desenvolvimento baseado no comportamento formulado por Sommer (1969) (ANG & MORRIS⁴³). Foi usado o método do mínimo quadrado para determinar as constantes do polinômio. Este modelo tem sua forma geral mostrada na equação (3.3).

$$\theta_r = C_1(KM) + C_2(KM)^3 + C_3(KM)^5 \quad (3.3)$$

sendo, "K" um parâmetro padronizador que depende do tipo de conexão e geometria, e "C₁", "C₂", e "C₃" são constantes de ajuste de curva.

Este modelo representa o comportamento "M-θ_r" razoavelmente bem. O principal prejuízo é que a qualidade do polinômio está dentro dos limites do pico e a certa distância da depressão. Sendo que, a primeira derivada desta função, que indica a rigidez tangente da conexão, pode tornar-se negativa para alguns valores de momento na conexão. Isto é fisicamente inaceitável. Esta rigidez negativa torna a análise estrutural difícil, se o método da análise usado for o da rigidez tangente da conexão.

Tabela 3.1 - Constantes para o Modelo Polinomial de Frye-Morris		
Tipos de Conexões	Constantes de Ajustamento de Curva	Constantes Padronizadoras
Cantoneira Simples Na Alma	$C_1 = 4,28 \times 10^{-3}$ $C_2 = 1,45 \times 10^{-9}$ $C_3 = 1,51 \times 10^{-16}$	$K = d_a^{-2,4} t_a^{-1,81} g^{0,15}$
Cantoneira Dupla Na Alma	$C_1 = 3,66 \times 10^{-4}$ $C_2 = 1,15 \times 10^{-6}$ $C_3 = 4,57 \times 10^{-8}$	$K = d_a^{-2,4} t_a^{-1,81} g^{0,15}$
Cantoneira de Topo e Assentamento com Cantoneira Dupla na Alma	$C_1 = 2,23 \times 10^{-5}$ $C_2 = 1,85 \times 10^{-8}$ $C_3 = 3,19 \times 10^{-12}$	$K = d^{-1,287} t^{-1,128} t_c^{-0,415} l_a^{-0,694} g_a^{1,350}$
Cantoneira de Topo e Assentamento	$C_1 = 8,46 \times 10^{-4}$ $C_2 = 1,01 \times 10^{-4}$ $C_3 = 1,24 \times 10^{-8}$	$K = d^{-1,5} t^{-0,5} l_a^{-0,7} d_b^{-1,1}$
Chapa de Topo	$C_1 = 1,83 \times 10^{-3}$ $C_2 = -1,04 \times 10^{-4}$ $C_3 = 6,38 \times 10^{-6}$	$K = d_g^{-2,4} t_p^{-0,4} t_f^{-1,5}$
Chapa de Topo com Enrigecimento da Coluna	$C_1 = 1,79 \times 10^{-3}$ $C_2 = -1,76 \times 10^{-4}$ $C_3 = 2,04 \times 10^{-4}$	$K = d_g^{-2,4} t_p^{-0,6}$
Chapa de Encabeçamento	$C_1 = 5,1 \times 10^{-5}$ $C_2 = 6,2 \times 10^{-10}$ $C_3 = 2,4 \times 10^{-13}$	$K = t_p^{-1,6} g^{1,6} d_p^{-2,3} t_w^{-0,5}$

sendo:

d_a , altura da cantoneira;

d_b , diâmetro do furo;

d_g , distância entre os parafusos externos;

d_p , altura da chapa;

d , altura do perfil I;

t_a , espessura da cantoneira;

t , espessura da cantoneira de topo;

t_c , espessura da cantoneira na alma;

t_p , espessura da chapa de topo;

t_f , espessura da mesa do pilar;

t_w , espessura da alma da viga;

l_a , largura da cantoneira de topo;

l_t , largura da conexão;

g , largura da mesa em relação a conexão, para conexão simples na alma será tomado a metade da largura da mesa e para conexão de cantoneira dupla na alma será tomado a largura da mesa; e,

g_a , distância entre o topo do perfil I e o centro dos parafusos de fixação da cantoneira de topo.

Próximo do procedimento de Frye-Morris, Picard et alli (1976) e Altman et alli (1982) desenvolveram equações de prognóstico para descrever o comportamento para conexões de tira de cantoneira e conexões de cantoneira de topo e assentamento com cantoneira dupla na alma, respectivamente. Goverdhan (1983) reestimou os parâmetros padrões das constantes padronizadas "K" para conexões de chapa de topo, para obter um bom entendimento com a curva " $M-\theta_r$ " obtida de resultados experimentais. As constantes de ajustamento de curva " C_1 ", " C_2 ", e " C_3 " e a constante padronizada "K" para cada tipo de conexão são resumidas na tabela 3.1 (CHEN & TOMA⁴⁰).

3.5.3 Modelo Cúbico-B de JONES-KIRBY-NETHERCOT⁴²

Neste modelo, os dados experimentais da relação momento-rotação das conexões são divididos em subconjuntos. A curva cúbica-B é usada para ajustar e forçar a continuidade da primeira e a segunda derivada de todos os subconjuntos de dados para suas interseções. Este modelo evita o problema da rigidez negativa e representa a não linearidade do comportamento da relação momento-rotação extremamente bem. Entretanto, um grande número de dados são necessários neste processo de ajustamento de curva (RODRIGUES et all⁴⁴).

3.5.4 Modelo de Colson

Este modelo usa uma função simples na seguinte forma:

$$\theta_r = \frac{|M|}{R_{ki}} \frac{1}{\left(1 - \frac{|M|}{M_{cu}}\right)^n} \quad (3.4)$$

sendo, “ R_{ki} ” a rigidez inicial da conexão, “ M_{cu} ” a capacidade ao momento último da conexão e “ n ” o parâmetro de ajustamento de curvatura da relação momento-rotação, mostrado na figura 3.7.

Este modelo possui apenas três parâmetros (R_{ki} , M_{cu} e n). Devido a isto, não possui a mesma precisão que os modelos mais sofisticados como o da curva cúbica-B. Entretanto, o número de dados necessários para este modelo é reduzido (LUI & CHEN¹³).

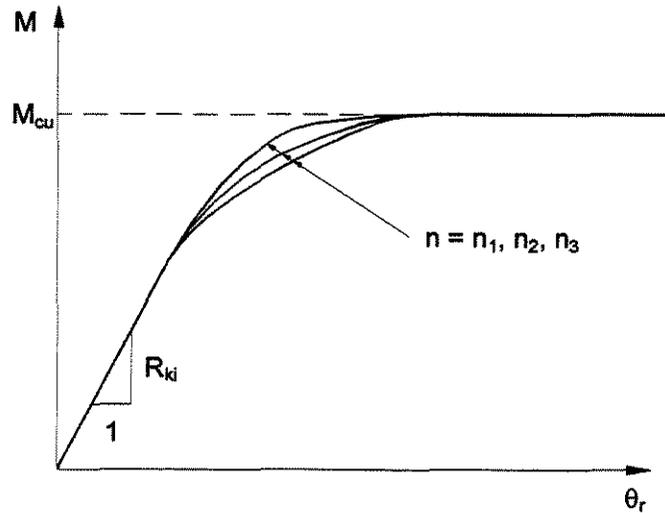


Figura 3.7 - Parâmetros do Modelo de Colson.

3.5.5 Modelo de ANG-MORRIS⁴³

O modelo de Ang-Morris possui a seguinte forma:

$$\frac{\theta_r}{(\theta_r)_0} = \left| \frac{KM}{(KM)_0} \right| \left[1 + \left(\left| \frac{KM}{(KM)_0} \right| \right)^{n-1} \right] \quad (3.5)$$

sendo que “ $(\theta_r)_0$ ”, “ $(KM)_0$ ” e “ n ” são definidos como mostrado na figura 3.8 e “ K ” uma constante padronizada dependendo do tipo de conexão e geometria, estes parâmetros podem ser encontrados na tabela 3.2. Este modelo é conhecido como modelo dos quatro parâmetros. Ele é capaz de representar o comportamento da relação momento-rotação para vários tipos de conexões razoavelmente bem (LUI & CHEN¹³).

Tabela 3.2 - Modelo de ANG-MORRIS			
Tipos de Conexões	Constante Padronizada	Equação da Relação Momento-Rotação	Desv Máx.
Cantoneira Simples na Alma	$K = d^{-2,09} t^{-1,64} g^{2,06}$	$\frac{\theta_r}{1,03 \times 10^{-2}} = \left \frac{KM}{32,75} \right \left[1 + \left(\frac{KM}{32,75} \right)^{2,93} \right]$	-11
Cantoneira Dupla na Alma	$K = d^{-2,2} t^{0,08} g^{-0,28}$	$\frac{\theta_r}{3,98 \times 10^{-3}} = \left \frac{KM}{0,63} \right \left[1 + \left(\frac{KM}{0,63} \right)^{3,94} \right]$	-18
Chapa de Encabeçamento	$K = d^{-2,41} t^{-1,54} g^{2,12} w^{-0,45}$	$\frac{\theta_r}{7,04 \times 10^{-3}} = \left \frac{KM}{186,77} \right \left[1 + \left(\frac{KM}{186,77} \right)^{3,32} \right]$	-12
Cantoneira de Topo e Assentamento	$K = d^{-1,06} t^{-0,54} g^{0,85} f^{-1,28}$	$\frac{\theta_r}{5,17 \times 10^{-3}} = \left \frac{KM}{745,94} \right \left[1 + \left(\frac{KM}{745,94} \right)^{4,61} \right]$	-4

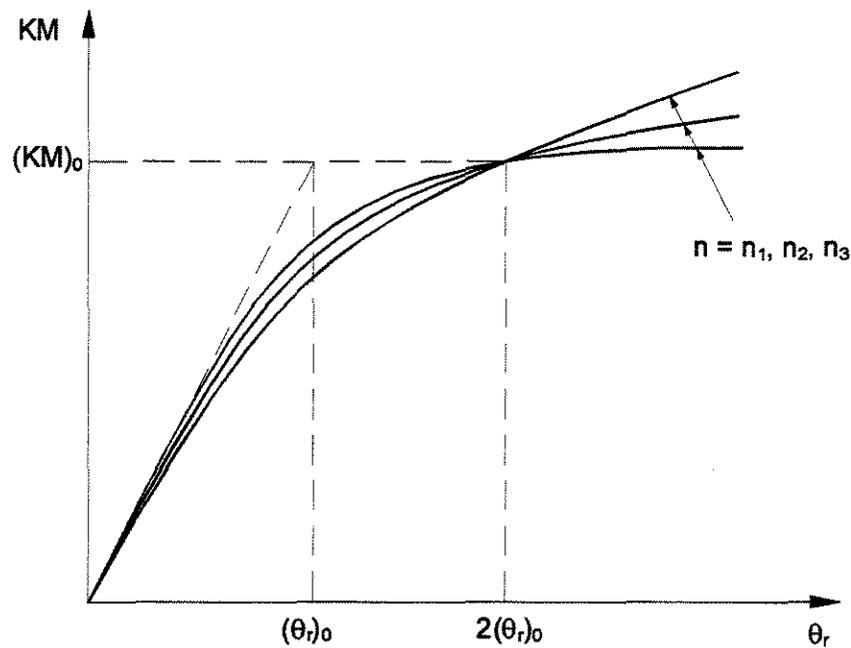


Figura 3.8 - Parâmetros do modelo de Ang-Morris.

3.5.6 Modelo Exponencial de LUI & CHEN¹⁵

Uma função exponencial é usada para representar o comportamento não linear da conexão. Ela possui a seguinte forma:

$$M = \sum_{j=1}^m C_j \left\{ 1 - \exp\left(\frac{-|\theta_r|}{2j\alpha}\right) \right\} + M_0 + R_{kf} |\theta_r| \quad (3.6)$$

sendo, “ M_0 ” o momento inicial, “ R_{kf} ” a rigidez a deformação rotacional da conexão, “ α ” o fator de escala e “ C_j ” os parâmetros do modelo de conexão determinado pelo ajustamento de curva dos dados da relação momento-rotação.

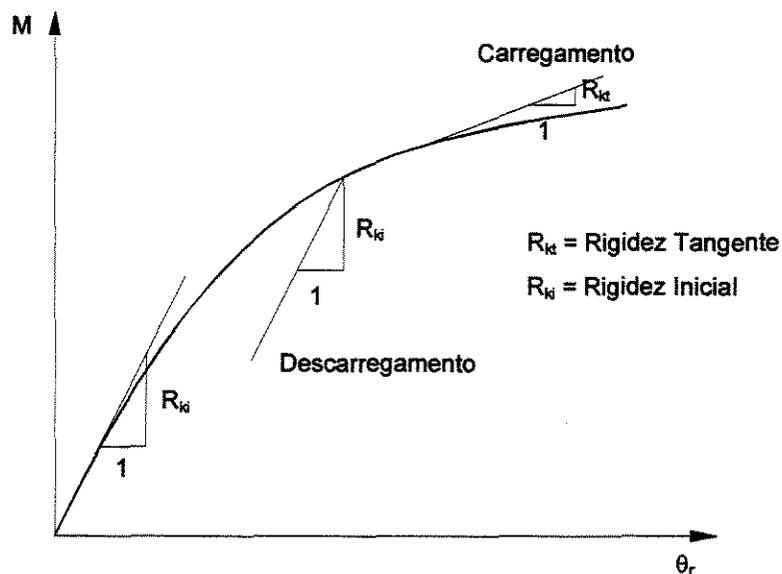


Figura 3.9 - Comportamento da Conexão no Carregamento e no Descarregamento Segundo o Modelo Exponencial de LUI & CHEN¹⁵.

Este modelo necessita de muitos parâmetros. O número de parâmetros necessários é de “ $m + 3$ ”, sendo “ m ” o número de constantes de ajustamento de curva (C_j) na equação (3.6). Geralmente, é suficiente um número de “ m ” entre 4 e 6 para a maioria dos casos. Este modelo representa o comportamento não linear da conexão

extremamente bem. É permitido também calcular a rigidez para uma conexão submetida a um descarregamento, conforme mostrado na figura 3.9.

3.5.7 Modelo de Três Parâmetros de Kishi & Chen

Por um outro ponto de vista, Chen & Kishi (1987) e Kishi et alli (1987) desenvolveram um outro processo para determinar as características da relação momento-rotação das conexões. Neste processo, a rigidez inicial e a capacidade final ao momento da conexão são determinados por um modelo analítico simples. Usando estes valores, o modelo de três parâmetros dado por Richard & Abbott (1975) foi adotado para representar a relação momento-rotação da conexão (CHEN & TOMAS⁴⁰).

Este modelo possui a seguinte forma:

$$M = \frac{R_{ki}\theta_r}{\left[1 + \left(\frac{\theta_r}{\theta_0}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}} \quad (3.7)$$

sendo, “ R_{ki} ” a rigidez inicial da conexão, “ θ_0 ” a referência plástica a rotação (M_u/R_{ki}), “ M_u ” a capacidade última ao momento e “ n ” o parâmetro de forma. A equação (3.7) tem a forma mostrada na figura 3.10. É reconhecido a grandeza da influência do índice “ n ”, na solução da curva. O parâmetro de forma “ n ” pode ser determinado pelo uso do método do mínimo quadrado para as diferenças provenientes dos momentos calculados e dos dados de ensaios experimentais.

Este modelo é uma ferramenta eficiente para os projetistas executarem a análise estrutural não linear em teoria de segunda-ordem de forma rápida e precisa. Isto ocorre porque a rigidez tangente da conexão “ R_k ” e a rotação relativa “ θ_r ” pode ser determinado diretamente pela equação (3.7) sem interações. A rigidez tangente da conexão “ R_k ” é dada por:

$$R_k = \frac{dM}{d\theta_r} = \frac{R_{ki}}{\left[1 + \left(\frac{\theta_r}{\theta_0}\right)^n\right]^{\frac{n+1}{n}}} \quad (3.8)$$

e a rotação “ θ_r ”:

$$\theta_r = \frac{M}{R_{ki} \left[1 - \left(\frac{M}{M_u}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}} \quad (3.9)$$

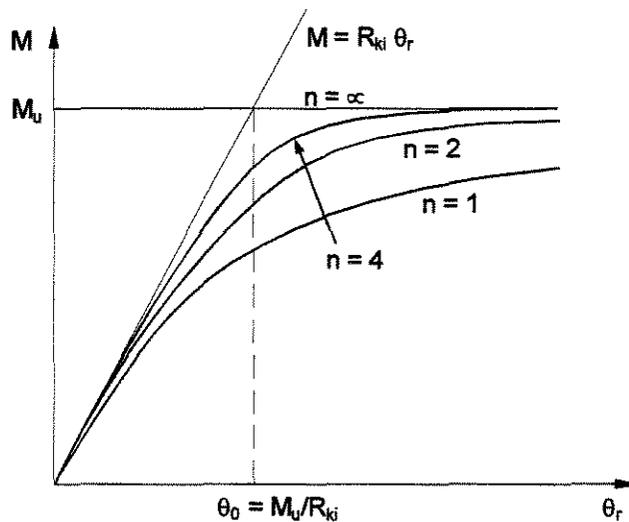


Figura 3.10 - Modelo dos Três Parâmetros Proposta por Kishi e Chen.

3.5.8 Outros Modelos Não Lineares das Conexões

Além destes modelos descritos, numerosas pesquisas foram desenvolvidas e podem ser encontrados diversos outros modelos na literatura para descrever o comportamento não linear da relação momento-rotação das conexões baseados em

ensaios experimentais. Alguns exemplos são: o modelo exponencial modificado de Kishi & Chen (1986) (CHEN & TOMA⁴⁰); para conexões de cantoneira dupla na alma encontra-se um modelo proposto por Lewitt, Chesson e Munse (1969); para conexões de placa de encabeçamento encontra-se um modelo proposto por Sommer (1969); e, para conexões de chapa de topo encontra-se um modelo proposto por Yee & Melchers (1986) (LUI & CHEN¹³).

3.6 Base de Dados das Conexões

Uma base de dados de conexões é a coleção dos ensaios experimentais para vários tipos de conexões de barras. Estes dados são colecionados com seus correspondentes detalhes e dimensões da viga, coluna e conexão. Vários modelos de prognósticos para relações de momento-rotação são também incorporados na base de dados para simular os resultados dos ensaios e para generalização da curva momento-rotação ($M-\theta_r$) para uso em projeto.

3.6.1 Base de Dados de Goverdhan

Goverdhan (1983) coletou dados de ensaios experimentais para várias conexões feitos após 1950. Os dados da relação momento-rotação foram colecionados em um computador na forma de base de dados. As varias equações de prognósticos foram apresentadas para cada tipo de conexão. As curvas experimentais da relação momento-rotação foram comparadas com as equações de prognósticos disponíveis para cada tipo de conexão. A validade e a aproximação das equações foram discutidas a respeito de seu uso em projetos (CHEN & TOMA⁴⁰). Esta coleção envolve os seguintes tipos de conexões.

- (1) cantoneira dupla na alma;
- (2) cantoneira simples na alma e chapa simples;
- (3) placa de encabeçamento;

- (4) chapa de topo; e,
- (5) cantoneira de topo e assentamento.

3.6.2 Base de Dados de Nethercot

Nethercot (1985) escreveu sobre dados de mais de 70 estudos experimentais independentes sobre conexões de aço entre vigas e colunas. Além de examinar mais de 700 ensaios individuais, Nethercot selecionou os dados proveitosos para sua análise. O ajuste da curva dos dados experimentais foram conduzindo os estudos, muitas análises preliminares comparativas das funções com diferentes parâmetros dos nós e das curvas da relação momento-rotação foram incorporadas (CHEN & TOMA⁴⁰). Este estudo envolve 10 tipos de conexões.

- (1) cantoneira simples na alma;
- (2) chapa simples na alma;
- (3) cantoneira dupla na alma;
- (4) cantoneira na mesa;
- (5) placa de encabeçamento;
- (6) chapa de topo estendida ligada a mesa do pilar;
- (7) combinação de cantoneiras na alma e mesa;
- (8) ligações em T;
- (9) cantoneiras de topo e assento; e,
- (10) ligação em T e cantoneiras na alma.

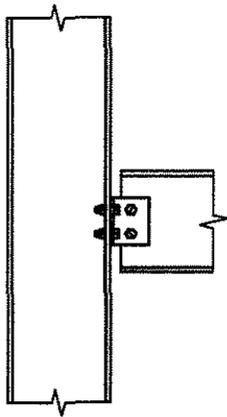
Algumas das conexões tratadas por Goverdhan (1984) e Nethercot (1985) são mostradas na figura 3.11. A curva típica de momento-rotação para estas conexões são ilustradas na figura 3.12. É notado que para qualquer tipo de conexão, a rigidez e a resistência são dependentes de parâmetros geométricos como: a espessura da chapa ou cantoneira, dimensão do parafuso, método de apertar e a largura da conexão. As mais flexíveis são as conexões de cantoneira simples e dupla na alma, aproximando-se das conexões com pinos, articuladas, representadas pelo eixo horizontal da figura.

Estes tipos de conexões são classificados como “flexíveis”. As mais rígidas são as conexões de chapa de topo, que são classificadas como “rígidas”, representada pelo eixo vertical. As conexões que possuem rigidez intermediárias são classificadas como “semi-rígidas”. As conexões de solda não foram mostradas na figura 3.11, e tendem a ser extremamente rígidas e são geralmente projetadas para transmitir toda a capacidade de momento à barra adjacente. Por este propósito de projeto, elas podem ser assumidas como perfeitamente rígidas (CHEN & TOMA⁴⁰).

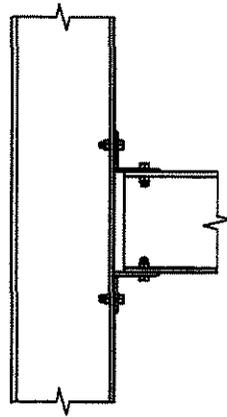
3.6.3 Base de Dados de Kishi & Chen

Em 1986, Kishi & Chen publicaram uma pesquisa incluindo dados das conexões de vigas com colunas. Características responsáveis pelos resultados da curva da relação momento-rotação e os parâmetros correspondentes das conexões de vigas com colunas freqüentemente usadas em construções de aço foram coletadas e armazenadas numa base de dados. A base de dados considerava dados experimentais de conexões rebitadas, parafusadas, e soldadas que foram publicadas de 1936 até 1986. A coleção de dados experimentais foram comparadas com várias equações de prognóstico e organizada para desenvolver um método racional em análise de projetos de estruturas considerando as conexões semi-rígidas (CHEN & TOMA⁴⁰).

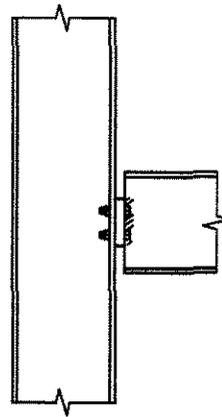
Em particular, três equações de prognóstico foram discutidas em detalhe. A primeira foi a equação polinomial proposta por Frye & Morris (1976). A segunda foi a equação da curva-rigidez usando o modelo exponencial modificado proposto por Kishi & Chen (1990). O terceiro modelo utiliza a influência de três parâmetros, modelo proposto por Kishi & Chen (1990), como é um modelo analítico simplificado é adequado para o uso na análise e projetos de barras de aço.



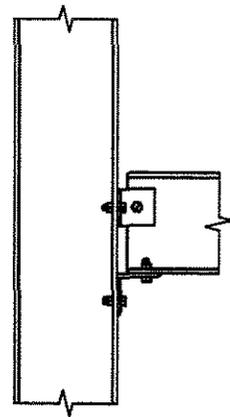
Cantoneira
Simples ou
Dupla na
Alma



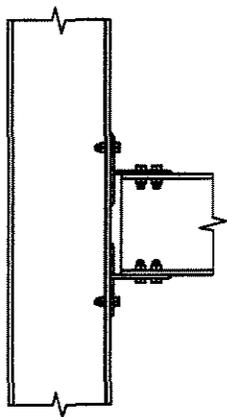
Cantoneira de
Topo e
Assentamento



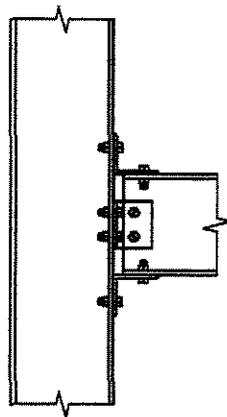
Placa de
Encabeçamento



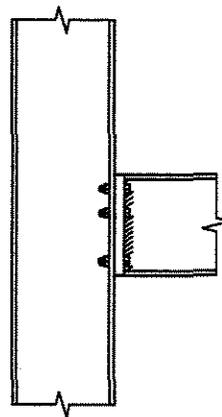
Combinação
de Cantoneira
na Alma e na
Mesa



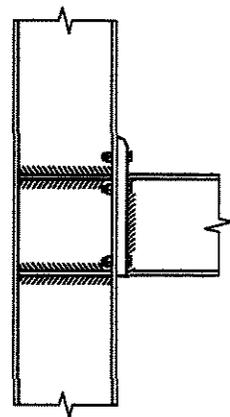
Ligação em T



Cantoneira de
Topo e
Assentamento
com Cantoneira
Dupla na Alma



Chapa de
Topo



Chapa de
Topo
Estendida

Figura 3.11 - Conexões Típicas.

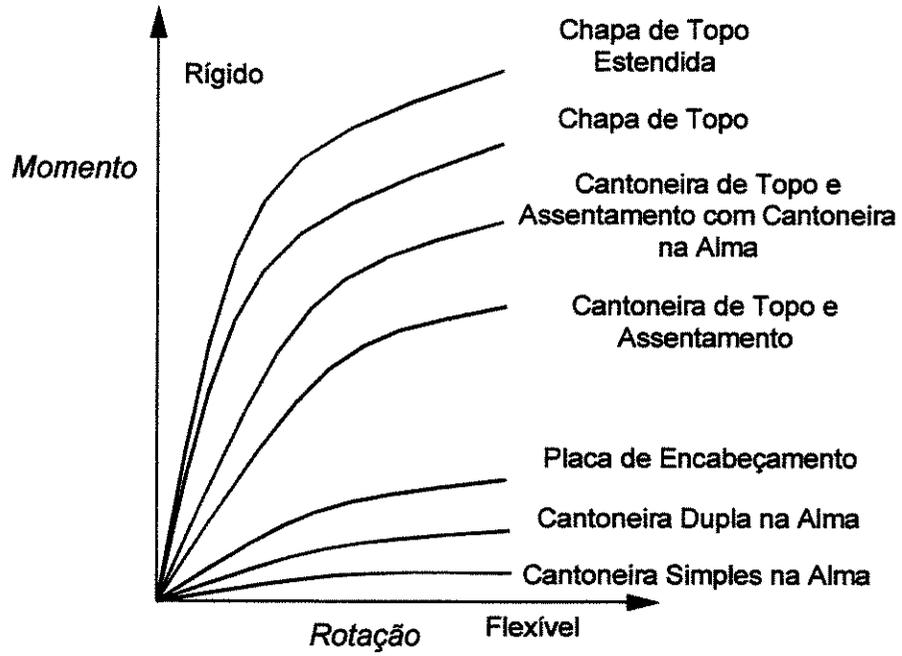


Figura 3.12 - Curvas Típicas da Relação Momento-Rotação.

Capítulo 4

ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETICULADAS PLANAS

4.1 Introdução

A análise de estruturas reticuladas tem o objetivo de compreender o comportamento das estruturas quando sujeitas a carregamentos externos. Existem vários tipos de análises para retratar este comportamento. Estas análises podem ser realizadas tendo como hipótese pequenos deslocamentos com o equilíbrio da estrutura feito na posição indeslocada (teoria de primeira ordem) e na posição deslocada (teoria de segunda ordem). Na teoria de segunda ordem apresenta-se fatores que influenciam o comportamento das estruturas devido as forças axiais, interferindo na rigidez da estrutura, possibilitando assim uma análise de instabilidade.

A instabilidade de uma estrutura é considerada como o primeiro modo de falha de uma estrutura reticulada (GALAMBOS⁴⁵). A análise de instabilidade possibilita estudo do comportamento da estrutura para vários incrementos de carregamentos, possibilitando encontrar o carregamento máximo em que a estrutura se encontra estável.

Existem vários efeitos que influenciam na instabilidade. Estes efeitos podem ser considerados como efeitos geométricos e efeitos físicos.

Os efeitos geométricos podem ocorrer por:

- efeito da força axial, produzindo uma alteração na rigidez da barra. No caso de flexão, a força de compressão reduz, devido à amplificação dos momentos, o momento necessário para rotacionar os nós de extremidade de uma barra para um determinado ângulo e a força de tração provoca efeito contrário;

- efeito do deslocamento transversal ao eixo axial, conhecido como efeito $P-\Delta$, produzido pelos carregamentos externos, modificam os esforços alterando o equilíbrio da estrutura, sendo necessário a consideração da estrutura na sua posição deslocada;

- efeito de curvamento da barra, conhecido como $P-\delta$, altera a rigidez à flexão devido ao curvamento da barra, a medida que a estrutura se desloca, alterando o equilíbrio da estrutura juntamente com o efeito $P-\Delta$;

- efeito das conexões semi-rígidas, transmite parcialmente os momentos entre uma barra e outra, alterando assim a rigidez na extremidade das barras;

- efeito das imperfeições geométricas da barra, as barras reais possuem sempre algum curvamento causado durante o processo de fabricação ou durante o processo de montagem, o qual influencia diretamente na instabilidade; e,

- efeito dos recalques de fundação, estes alteram a posição de equilíbrio da estrutura, influenciando os esforços.

Os efeitos físicos podem ocorrer por:

- relação tensão-deformação não linear, algumas partes da estrutura podem estar trabalhando com tensões acima do limite de proporcionalidade do material, trabalhando no regime inelástico; e,

- efeito das tensões residuais, as tensões que permanecem nos elementos devido a sua fabricação ou processo de montagem, associadas as tensões de solicitação da estrutura devido a carregamentos externos podem plastificar algumas fibras da seção transversal, causando um comportamento semelhante ao da relação tensão-deformação não linear.

4.2 Análise Elástica de Segunda Ordem de Estruturas Reticulares Planas

Existem vários métodos de análise de segunda ordem para estruturas reticulares. Este capítulo apresenta o método das funções de rigidez, também conhecido como funções de estabilidade.

Nesta análise admite-se que as barras permaneçam no regime elástico, considerando assim, apenas a não linearidade geométrica.

Deve-se assumir as seguintes hipóteses para a análise:

- os elementos de barra são considerados perfeitamente retos;
- as forças axiais são aplicadas ao longo do eixo centroidal das barras;
- o material obedece a lei de Hooke, tensões proporcionais as deformações;
- as seções permanecem planas após a deformação, não há distorção na seção transversal;
- a estrutura é considerada constituída de elementos de barras deformáveis por flexão e por força axial em seu plano;
- a técnica matricial é desenvolvida com base no processo dos deslocamentos para estruturas no regime elástico;
- as ações são aplicadas apenas no plano do pórtico;
- na não linearidade geométrica é levado em consideração a influência da força axial nos elementos de barra; e,
- o desenvolvimento matricial é baseado na teoria de pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

4.2.1 Sistema de Referência Global de Eixos para Estruturas de Pórtico Plano

O sistema de referência global de eixos adotado para estruturas planas será dextroso, com eixos " X_G ", " Y_G ", " Z_G " e origem "O" num ponto qualquer. O eixo " X_G ", horizontal, será orientado da esquerda para a direita e o eixo " Y_G ", vertical, será orientado de baixo para cima, figura 4.1, definindo o plano da estrutura do pórtico. O

eixo " Z_G " será adotado na direção ortogonal ao plano da estrutura no sentido saindo do plano.

4.2.2 Sistema de Referência Local de Eixos para o Elemento de Barra

O sistema de referência local de eixos adotado para o elemento de barra "i" plano será dextroso, com eixos " x ", " y ", " z " e origem " O_i " no nó inicial "j" da barra "i", no centro de gravidade da seção transversal da barra neste ponto, conforme mostra a figura 4.1. O eixo " x " será o próprio eixo da barra orientado do nó inicial "j" para o nó final "k". O eixo " y " será orientado perpendicularmente ao eixo " x " com início no nó "j" da barra. O ângulo " γ " formado entre o eixo " X_G ", global da estrutura e o eixo " x ", local do elemento de barra, medido a partir do primeiro, define a relação entre os sistemas de referência global e local. Os eixos " x_s ", " y_s " são eixos paralelos aos eixos globais com origem " O_s " coincidentes com a origem do sistema local " O_i " da barra "i".

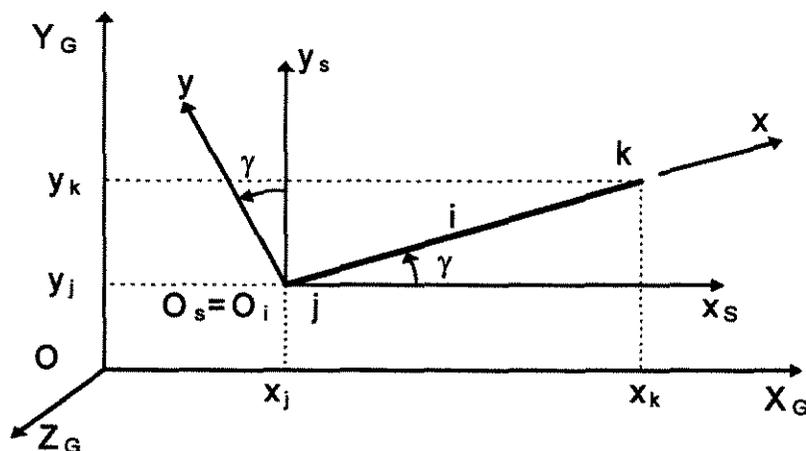


Figura 4.1 - Sistema de Referência no Plano

4.2.3 Coeficientes da Matriz de Rigidez do Elemento de Barra com Funções de Rigidez

A teoria de segunda ordem para análise de estruturas reticulares planas será baseada no processo dos deslocamentos.

As funções de rigidez serão obtidas da solução da equação diferencial que descreve o comportamento das barras e impondo as condições de contorno em cada caso.

A matriz de rigidez para cálculo de pórticos planos utilizando as funções de rigidez é encontrada nos trabalhos de CHEN & LUI¹¹ e GERE & WEAVER⁴⁶. Esta matriz é capaz de considerar as deformações nos elementos de barras através da interação entre forças axiais e flexão, desprezando o efeito da cortante.

YAGUI⁴⁷, SERRA⁴⁸, REQUENA⁴⁹ e CALLEJAS⁵⁰ apresentam matrizes com novas funções de rigidez capazes de considerar simultaneamente deformações por força axial, força cortante e flexão, tratando o efeito da não linearidade geométrica de forma mais completa.

Será apresentado as deduções dessas funções de rigidez, admitindo que o elemento de barra que constitui o pórtico plano é deformável por flexão e por força axial, desprezando o efeito da deformação por cortante, obedecendo as orientações do sistema de referência já descrito.

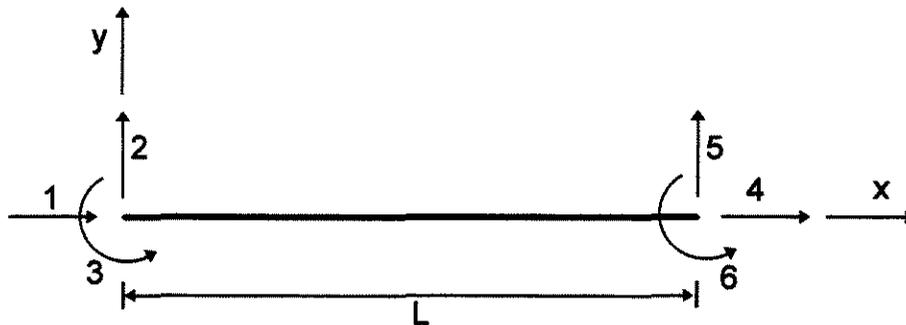


Figura 4.2 - Sistema de Coordenadas Locais para Barras

O sistema de coordenadas para uma barra de seção prismática, engastada nas extremidades é esquematizada na figura 4.2. O comprimento da barra será denominado de "L", a área da seção transversal de "A" e o momento de inércia transversal ao plano de flexão da estrutura de "I", sendo que "A" e "I" são considerados constantes ao longo da barra.

Os coeficientes da matriz de rigidez do elemento de barra são as ações exercidas pelas restrições quando são impostos em cada extremidade da barra deslocamentos unitários de translações e giros. Estes deslocamentos unitários são considerados como produzidos um de cada vez, enquanto que os outros deslocamentos de extremidade se mantêm nulos, processo dos deslocamentos, cada caso de deslocamento a considerar neste processo é mostrado na figura 4.3. Desta forma, é possível obter uma matriz que relaciona os deslocamentos " D_L " com as ações "F", figura 4.4.

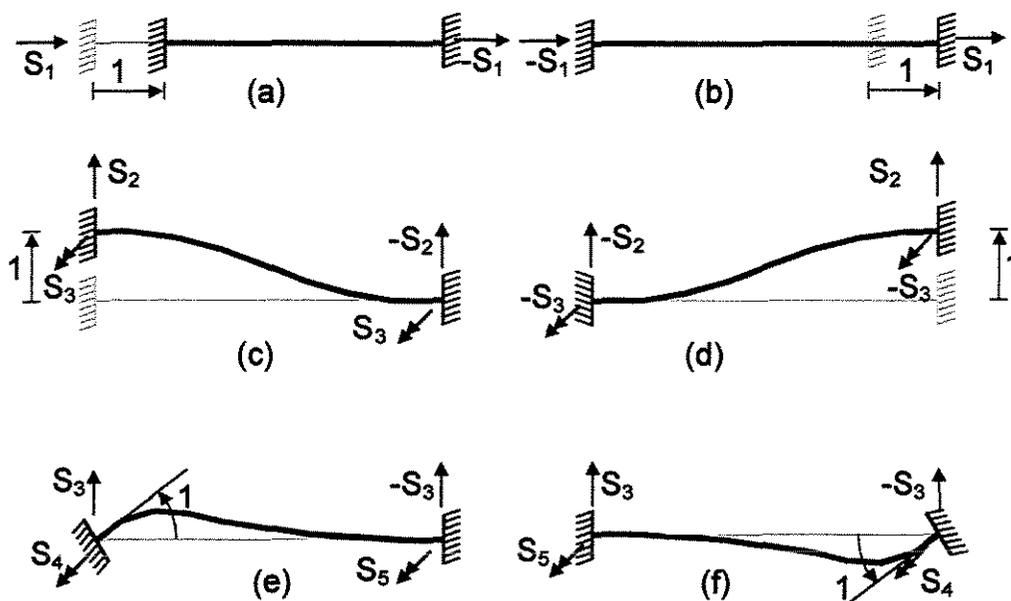


Figura 4.3 - Estado de Deslocamentos: (a) e (b) Translação Unitária na Direção Axial da Barra, (c) e (d) Translação Unitária na Direção Transversal ao Longo da Barra, (e) e (f) Giro Unitário Rotacionando o Eixo Fora do Plano da Estrutura.

Considerando as condições de equilíbrio da barra e a simetria da matriz de rigidez, devido ao teorema da reciprocidade, os coeficientes de rigidez se reduzem a cinco, como mostrado na figura 4.4.

$$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & -S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & S_3 & 0 & -S_2 & S_3 \\ 0 & S_3 & S_4 & 0 & -S_3 & S_5 \\ -S_1 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & -S_2 & -S_3 & 0 & S_2 & -S_3 \\ 0 & S_3 & S_5 & 0 & -S_3 & S_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{L1} \\ D_{L2} \\ D_{L3} \\ D_{L4} \\ D_{L5} \\ D_{L6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}$$

Figura 4.4 - Matriz de Rigidez da Barra com Função de Rigidez

O coeficiente “ S_1 ” é o valor da rigidez axial da barra, e o seu valor não é afetado com o esforço axial “ P ” na barra. Desta forma, tem-se:

$$S_1 = \frac{EA}{L} \quad (4.1)$$

4.2.3.1 Força Axial Nula

Fazendo o equilíbrio de momentos em um ponto qualquer de uma barra, figura 4.2, na posição deformada sem carregamento ao longo desta, para força normal “ P ” igual a zero, tem-se:

$$M = -M_i + F_i x \quad (4.2)$$

sendo: M_i - momento no nó inicial da barra; e,
 F_i - força cortante no nó inicial da barra.

como $y'' = -\frac{M}{EI}$, derivando duas vezes esta equação pode-se encontrar a equação diferencial que rege o comportamento da barra:

$$y^{IV} = 0 \quad (4.3)$$

E como solução geral desta equação diferencial, tem-se:

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (4.4)$$

Fazendo-se as três primeiras derivadas, obtém-se:

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C \quad (4.5)$$

$$y'' = 6Ax + 2B \quad (4.6)$$

$$y''' = 6A \quad (4.7)$$

Determinando as constantes "A", "B", "C" e "D" em função dos deslocamentos transversais dos nós inicial e final da barra, " $y_{(0)}$ " e " $y_{(L)}$ ", e o giro dos nós inicial e final, " $y'_{(0)}$ " e " $y'_{(L)}$ ", tem-se:

$$y_{(0)} = D \quad (4.8)$$

$$y_{(L)} = AL^3 + BL^2 + CL + D \quad (4.9)$$

$$y'_{(0)} = C \quad (4.10)$$

$$y'_{(L)} = 3AL^2 + 2BL + C \quad (4.11)$$

Resolvendo este sistema,

$$D = y_{(0)} \quad (4.12)$$

$$C = y'_{(0)} \quad (4.13)$$

$$B = \frac{-6(y_{(0)} - y_{(L)}) - L(4y'_{(0)} + 2y'_{(L)})}{2L^2} \quad (4.14)$$

$$A = \frac{2(y_{(0)} - y_{(L)}) + L(y'_{(0)} + y'_{(L)})}{L^3} \quad (4.15)$$

Aplicando-se as condições de contorno no caso da figura 4.3 (c), onde $y_{(0)}=1$, $y_{(L)}=0$, $y'_{(0)}=0$ e $y'_{(L)}=0$, obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{-6}{L^2} \quad (4.16)$$

$$y'''_{(0)} = \frac{12}{L^3} \quad (4.17)$$

Como $M = -Ely''$ e $F = Ely'''$, tem-se:

$$S_2 = \frac{12EI}{L^3} \quad (4.18)$$

$$S_3 = \frac{6EI}{L^2} \quad (4.19)$$

Aplicando-se as condições de contorno nos caso da figura 4.3 (e), onde $y_{(0)}=0$, $y_{(L)}=0$, $y'_{(0)}=1$ e $y'_{(L)}=0$, obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{-4}{L} \quad (4.20)$$

$$y''_{(L)} = \frac{2}{L} \quad (4.21)$$

Como $M = -EIy''$, tem-se:

$$S_4 = \frac{4EI}{L} \quad (4.22)$$

$$S_5 = \frac{2EI}{L} \quad (4.23)$$

4.2.3.2 Força Axial de Compressão

Fazendo o equilíbrio de momentos em um ponto qualquer de uma barra, figura 4.2, na posição deformada sem carregamento ao longo desta, para "P" de compressão, tem-se:

$$M = -M_i + F_i x + |P|y \quad (4.24)$$

sendo: M_i - momento no nó inicial da barra;

F_i - força cortante no nó inicial da barra; e,
 P - força normal no nó inicial da barra.

como $y'' = -\frac{M}{EI}$, adotando $\alpha^2 = \frac{|P|}{EI}$ e derivando duas vezes esta equação pode-se encontrar a equação diferencial que rege o comportamento da barra:

$$y^{IV} + \alpha^2 y'' = 0 \quad (4.25)$$

E como solução geral desta equação diferencial, tem-se:

$$y = A\text{sen}(\alpha x) + B\text{cos}(\alpha x) + Cx + D \quad (4.26)$$

Fazendo-se as três primeiras derivadas, obtém-se:

$$y' = \alpha A\text{cos}(\alpha x) - \alpha B\text{sen}(\alpha x) + C \quad (4.27)$$

$$y'' = -\alpha^2 A\text{sen}(\alpha x) - \alpha^2 B\text{cos}(\alpha x) \quad (4.28)$$

$$y''' = -\alpha^3 A\text{cos}(\alpha x) + \alpha^3 B\text{sen}(\alpha x) \quad (4.29)$$

Determinando as constantes "A", "B", "C" e "D" em função dos deslocamentos transversais dos nós inicial e final da barra, " $y_{(0)}$ " e " $y_{(L)}$ ", e o giro dos nós inicial e final, " $y'_{(0)}$ " e " $y'_{(L)}$ ", tem-se:

$$y_{(0)} = B + D \quad (4.30)$$

$$y_{(L)} = A\text{sen}(\alpha L) + B\text{cos}(\alpha L) + CL + D \quad (4.31)$$

$$y'_{(0)} = \alpha A + C \quad (4.32)$$

$$y'_{(L)} = \alpha A \cos(\alpha L) - \alpha B \sin(\alpha L) + C \quad (4.33)$$

Resolvendo este sistema,

$$D = y_{(0)} - B \quad (4.34)$$

$$C = y'_{(0)} - \alpha A \quad (4.35)$$

$$B = \frac{\alpha A \cos(\alpha L) - y'_{(L)} + y'_{(0)} - \alpha A}{\alpha \sin(\alpha L)} \quad (4.36)$$

$$A = \frac{y'_{(L)}(1 - \cos(\alpha L)) + y'_{(0)}(\cos(\alpha L) + L\alpha \sin(\alpha L) - 1) + (y_{(0)} - y_{(L)})\alpha \sin(\alpha L)}{L\alpha^2 \sin(\alpha L) + 2\alpha \cos(\alpha L) - 2\alpha} \quad (4.37)$$

Aplicando-se as condições de contorno nos caso da figura 4.3 (c), onde $y_{(0)}=1$, $y_{(L)}=0$, $y'_{(0)}=0$ e $y'_{(L)}=0$, obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{\alpha^2(1 - \cos(\alpha L))}{L\alpha \sin(\alpha L) + 2\cos(\alpha L) - 2} \quad (4.38)$$

$$y'''_{(0)} = \frac{-\alpha^3 \sin(\alpha L)}{L\alpha \sin(\alpha L) + 2\cos(\alpha L) - 2} \quad (4.39)$$

Como $M = -Ely''$ e $F = Ely'''$, tem-se:

$$S_2 = \frac{E\alpha^3 \sin(\alpha L)}{2 - 2\cos(\alpha L) - L\alpha \sin(\alpha L)} \quad (4.40)$$

$$S_3 = \frac{E\alpha^2(1 - \cos(\alpha L))}{2 - 2\cos(\alpha L) - L\alpha \sin(\alpha L)} \quad (4.41)$$

Aplicando-se as condições de contorno nos caso da figura 4.3 (e), onde $y_{(0)}=0$, $y_{(L)}=0$, $y'_{(0)}=1$ e $y'_{(L)}=0$, obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{\alpha(L\alpha \cos(\alpha L) - \sin(\alpha L))}{2 - 2\cos(\alpha L) - L\alpha \sin(\alpha L)} \quad (4.42)$$

$$y''_{(L)} = \frac{\alpha(L\alpha - \sin(\alpha L))}{2 - 2\cos(\alpha L) - L\alpha \sin(\alpha L)} \quad (4.43)$$

Como $M = -Ely''$, tem-se:

$$S_4 = \frac{E\alpha(\sin(\alpha L) - L\alpha \cos(\alpha L))}{2 - 2\cos(\alpha L) - L\alpha \sin(\alpha L)} \quad (4.44)$$

$$S_5 = \frac{E\alpha(L\alpha - \sin(\alpha L))}{2 - 2\cos(\alpha L) - L\alpha \sin(\alpha L)} \quad (4.45)$$

4.2.3.3 Força Axial de Tração

Fazendo o equilíbrio de momentos em um ponto qualquer de uma barra, figura 4.2, na posição deformada sem carregamento ao longo desta, para "P" de tração, tem-se:

$$M = -M_i + F_i x - |P|y \quad (4.46)$$

sendo: M_i - momento no nó inicial da barra;
 F_i - força cortante no nó inicial da barra; e,
 P - força normal no nó inicial da barra.

como $y'' = -\frac{M}{EI}$, adotando $\alpha^2 = \frac{|P|}{EI}$ e derivando duas vezes esta equação pode-se encontrar a equação diferencial que rege o comportamento da barra:

$$y^{IV} - \alpha^2 y'' = 0 \quad (4.47)$$

E como solução geral desta equação diferencial, tem-se:

$$y = A \operatorname{senh}(\alpha x) + B \operatorname{cosh}(\alpha x) + Cx + D \quad (4.48)$$

Fazendo-se as três primeiras derivadas, obtém-se:

$$y' = \alpha A \operatorname{cosh}(\alpha x) + \alpha B \operatorname{senh}(\alpha x) + C \quad (4.49)$$

$$y'' = \alpha^2 A \operatorname{senh}(\alpha x) + \alpha^2 B \operatorname{cosh}(\alpha x) \quad (4.50)$$

$$y''' = \alpha^3 A \operatorname{cosh}(\alpha x) + \alpha^3 B \operatorname{senh}(\alpha x) \quad (4.51)$$

Determinando as constantes "A", "B", "C" e "D" em função dos deslocamentos transversais dos nós inicial e final da barra, " $y_{(0)}$ " e " $y_{(L)}$ ", e o giro dos nós inicial e final, " $y'_{(0)}$ " e " $y'_{(L)}$ ", tem-se:

$$y_{(0)} = B + D \quad (4.52)$$

$$y_{(L)} = A \sinh(\alpha L) + B \cosh(\alpha L) + CL + D \quad (4.53)$$

$$y'_{(0)} = \alpha A + C \quad (4.54)$$

$$y'_{(L)} = \alpha A \cosh(\alpha L) + \alpha B \sinh(\alpha L) + C \quad (4.55)$$

Resolvendo este sistema,

$$D = y_{(0)} - B \quad (4.56)$$

$$C = y'_{(0)} - \alpha A \quad (4.57)$$

$$B = \frac{-\alpha A \cosh(\alpha L) + y'_{(L)} - y'_{(0)} + \alpha A}{\alpha \sinh(\alpha L)} \quad (4.58)$$

$$A = \frac{(y_{(L)} - y_{(0)}) (\alpha \sinh(\alpha L)) + y'_{(0)} (\cosh(\alpha L) - L \alpha \sinh(\alpha L) - 1) - y'_{(L)} (\cosh(\alpha L) - 1)}{-L \alpha^2 \sinh(\alpha L) + 2 \alpha \cosh(\alpha L) - 2 \alpha} \quad (4.59)$$

Aplicando-se as condições de contorno no caso da figura 4.3 (c), onde $y_{(0)}=1$, $y_{(L)}=0$, $y'_{(0)}=0$ e $y'_{(L)}=0$, obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{\alpha^2 (1 - \cosh(\alpha L))}{L \alpha \sinh(\alpha L) - 2 \cosh(\alpha L) + 2} \quad (4.60)$$

$$y'''_{(0)} = \frac{\alpha^3 \sinh(\alpha L)}{L\alpha \sinh(\alpha L) - 2\cosh(\alpha L) + 2} \quad (4.61)$$

Como $M = -Ely''$ e $F = Ely'''$, tem-se:

$$S_2 = \frac{E\alpha^3 \sinh(\alpha L)}{2 - 2\cosh(\alpha L) + L\alpha \sinh(\alpha L)} \quad (4.62)$$

$$S_3 = \frac{E\alpha^2 (\cosh(\alpha L) - 1)}{2 - 2\cosh(\alpha L) + L\alpha \sinh(\alpha L)} \quad (4.63)$$

Aplicando-se as condições de contorno nos caso da figura 4.3 (e), onde $y_{(0)}=0$, $y_{(L)}=0$, $y'_{(0)}=1$ e $y'_{(L)}=0$, obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{\alpha(\sinh(\alpha L) - L\alpha \cosh(\alpha L))}{2 - 2\cosh(\alpha L) + L\alpha \sinh(\alpha L)} \quad (4.64)$$

$$y''_{(L)} = \frac{\alpha(\sinh(\alpha L) - L\alpha)}{2 - 2\cosh(\alpha L) + L\alpha \sinh(\alpha L)} \quad (4.65)$$

Como $M = -Ely''$, tem-se:

$$S_4 = \frac{E\alpha(L\alpha \cosh(\alpha L) - \sinh(\alpha L))}{2 - 2\cosh(\alpha L) + L\alpha \sinh(\alpha L)} \quad (4.66)$$

$$S_5 = \frac{E\alpha(\sinh(\alpha L) - L\alpha)}{2 - 2\cosh(\alpha L) + L\alpha \sinh(\alpha L)} \quad (4.67)$$

4.2.3.4 Funções de Rigidez

Para facilitar a utilização da matriz de rigidez do elemento de barra, seus termos serão apresentados em uma tabela sob variação da força axial, como mostra a tabela 4.1.

$$S_{KB} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & -S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & S_3 & 0 & -S_2 & S_3 \\ 0 & S_3 & S_4 & 0 & -S_3 & S_5 \\ -S_1 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & -S_2 & -S_3 & 0 & S_2 & -S_3 \\ 0 & S_3 & S_5 & 0 & -S_3 & S_4 \end{bmatrix}$$

Figura 4.5 - Matriz de Rigidez da Barra com Funções de Rigidez

Tabela 4.1 - Funções de Rigidez de Barra com Interação entre Força Axial e Flexão			
	Compressão (P<0)	(P=0)	Tração (P>0)
S ₁	$\frac{EA}{L}$	$\frac{EA}{L}$	$\frac{EA}{L}$
S ₂	$\frac{E\alpha^3 \text{sen}(\alpha L)}{\phi_c}$	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{E\alpha^3 \text{senh}(\alpha L)}{\phi_t}$
S ₃	$\frac{E\alpha^2(1 - \cos(\alpha L))}{\phi_c}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{E\alpha^2(\cosh(\alpha L) - 1)}{\phi_t}$
S ₄	$\frac{E\alpha(\text{sen}(\alpha L) - L\alpha \cos(\alpha L))}{\phi_c}$	$\frac{4EI}{L}$	$\frac{E\alpha(L\alpha \cosh(\alpha L) - \text{senh}(\alpha L))}{\phi_t}$
S ₅	$\frac{E\alpha(L\alpha - \text{sen}(\alpha L))}{\phi_c}$	$\frac{2EI}{L}$	$\frac{E\alpha(\text{senh}(\alpha L) - L\alpha)}{\phi_t}$
	$\phi_c = 2 - 2\cos(\alpha L) - L\alpha \text{sen}(\alpha L)$	$\alpha = \sqrt{\frac{ P }{EI}}$	$\phi_t = 2 - 2\cosh(\alpha L) + L\alpha \text{senh}(\alpha L)$

4.2.4 Ações de Extremidades Devido a Carregamento ao Longo das Barras

O cálculo dos deslocamentos numa estrutura, mediante equações matriciais, requer que a estrutura esteja sujeita a ações atuando unicamente nos nós. Em geral, porém, as ações reais numa estrutura não cumprem com este requisito. Em vez disso, as ações podem ser divididas em dois tipos: ações nodais e ações que atuam nas barras. As ações do último tipo devem ser substituídas por ações estaticamente equivalentes que atuem nos nós, para cumprir com o requisito anteriormente estabelecido. As ações nodais determinadas a partir das ações que atuam nas barras denominam-se ações de extremidades. Quando estas ações, $\{A_e\}$, são adicionadas às ações nodais reais, $\{A_n\}$, tem-se como resultante as ações totais, $\{A\}$.

$$\{A\} = \{A_n\} + \{A_e\} \quad (4.68)$$

As forças e momentos de extremidade, devido a ações transversais ao eixo axial, ao longo das barras dependem das condições de apoio ou das conexões de extremidade; do tipo, distribuição e magnitude das ações transversais aplicadas; e, do tipo, distribuição e intensidade das ações axiais (compressão ou tração).

As ações de extremidades para ações parcialmente distribuída e ação concentrada podem ser encontrados nos estudos de LUI & CHEN¹³ e OCHOA⁵¹.

Para o cálculo das ações de extremidade, para carregamentos ao longo da barra, em teoria de segunda ordem, é necessário considerar os deslocamentos, ao longo da barra, proporcionado pela aplicação dos carregamentos, os quais, trabalhando em conjunto com as ações axiais, provocarão um aumento na rotação nas extremidades das barras.

Apenas o carregamento uniformemente distribuído ao longo de toda a barra, associado as ações axiais de extremidades serão aqui considerados, como mostrado na figura 4.6.

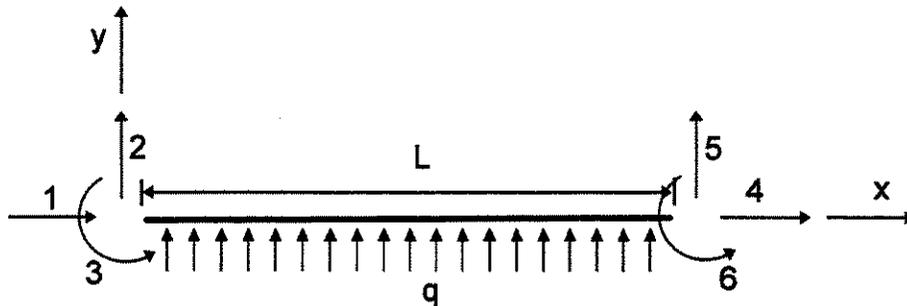


Figura 4.6 - Sistema de Coordenadas para Ações Uniformemente Distribuídas ao Longo da Barra.

4.2.4.1 Força Axial Nula

Fazendo o equilíbrio de momentos em um ponto qualquer de uma barra, figura 4.6, na posição deformada com ação uniformemente distribuída, “q”, ao longo desta, para força normal “P” igual a zero, tem-se:

$$M = -M_i + F_i x + \frac{q x^2}{2} \quad (4.69)$$

sendo: M_i - momento no nó inicial da barra;
 F_i - força cortante no nó inicial da barra; e,
 q - carga uniformemente distribuída ao longo da barra.

como $y'' = -\frac{M}{EI}$, derivando duas vezes esta equação pode-se encontrar a equação diferencial que rege o comportamento da barra:

$$y^{IV} = -\frac{q}{EI} \quad (4.70)$$

E como solução geral desta equação diferencial, tem-se:

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D - \frac{qx^4}{24EI} \quad (4.71)$$

Fazendo-se as três primeiras derivadas, obtém-se:

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C - \frac{qx^3}{6EI} \quad (4.72)$$

$$y'' = 6Ax + 2B - \frac{qx^2}{2EI} \quad (4.73)$$

$$y''' = 6A - \frac{qx}{EI} \quad (4.74)$$

Determinando as constantes "A", "B", "C" e "D" em função dos deslocamentos transversais dos nós inicial e final da barra, " $y_{(0)}$ " e " $y_{(L)}$ ", e o giro dos nós inicial e final, " $y'_{(0)}$ " e " $y'_{(L)}$ ", tem-se:

$$y_{(0)} = D \quad (4.75)$$

$$y_{(L)} = AL^3 + BL^2 + CL + D - \frac{qL^4}{24EI} \quad (4.76)$$

$$y'_{(0)} = C \quad (4.77)$$

$$y'_{(L)} = 3AL^2 + 2BL + C - \frac{qL^3}{6EI} \quad (4.78)$$

Resolvendo este sistema,

$$D = y_{(0)} \quad (4.79)$$

$$C = y'_{(0)} \quad (4.80)$$

$$B = \frac{-3(y_{(0)} - y_{(L)}) - L(2y'_{(0)} + y'_{(L)}) - \frac{qL^4}{24EI}}{L^2} \quad (4.81)$$

$$A = \frac{2(y_{(0)} - y_{(L)}) + L(y'_{(0)} + y'_{(L)}) + \frac{qL^4}{12EI}}{L^3} \quad (4.82)$$

Aplicando-se as condições de contorno para engastamento nas extremidades, figura 4.6, sendo $y_{(0)}=0$, $y_{(L)}=0$, $y'_{(0)}=0$ e $y'_{(L)}=0$, obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{-qL^2}{12EI} \quad (4.83)$$

$$y'''_{(0)} = \frac{qL}{2EI} \quad (4.84)$$

Como $M = -Ely''$ e $F = Ely'''$, tem-se:

$$M_i = \frac{qL^2}{12} \quad (4.85)$$

$$F_i = \frac{qL}{2} \quad (4.86)$$

sendo:

M_i - momento no nó inicial; e,
 F_i - força cortante no nó inicial.

4.2.4.2 Força Axial de Compressão

Fazendo o equilíbrio de momentos em um ponto qualquer de uma barra, figura 4.6, na posição deformada com ação uniformemente distribuída, "q", ao longo desta, para "P" de compressão, tem-se:

$$M = -M_i + F_i x + |P|y + \frac{qx^2}{2} \quad (4.87)$$

sendo: M_i - momento no nó inicial da barra;
 F_i - força cortante no nó inicial da barra; e,
 P - força normal no nó inicial da barra.

como $y'' = -\frac{M}{EI}$, adotando $\alpha^2 = \frac{|P|}{EI}$ e derivando duas vezes esta equação pode-se encontrar a equação diferencial que rege o comportamento da barra:

$$y^{IV} + \alpha^2 y'' = -\frac{q}{EI} \quad (4.88)$$

E como solução geral desta equação diferencial, tem-se:

$$y = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x) + Cx + D - \frac{qx^2}{2P} \quad (4.89)$$

Fazendo-se as três primeiras derivadas, obtém-se:

$$y' = \alpha A \cos(\alpha x) - \alpha B \sin(\alpha x) + C - \frac{qx}{P} \quad (4.90)$$

$$y'' = -\alpha^2 A \sin(\alpha x) - \alpha^2 B \cos(\alpha x) - \frac{q}{P} \quad (4.91)$$

$$y''' = -\alpha^3 A \cos(\alpha x) + \alpha^3 B \sin(\alpha x) \quad (4.92)$$

Determinando as constantes "A", "B", "C" e "D" em função dos deslocamentos transversais dos nós inicial e final da barra, " $y_{(0)}$ " e " $y_{(L)}$ ", e o giro dos nós inicial e final, " $y'_{(0)}$ " e " $y'_{(L)}$ ", tem-se:

$$y_{(0)} = B + D \quad (4.93)$$

$$y_{(L)} = A \sin(\alpha L) + B \cos(\alpha L) + CL + D - \frac{qL^2}{2P} \quad (4.94)$$

$$y'_{(0)} = \alpha A + C \quad (4.95)$$

$$y'_{(L)} = \alpha A \cos(\alpha L) - \alpha B \sin(\alpha L) + C - \frac{qL}{P} \quad (4.96)$$

Resolvendo este sistema,

$$D = y_{(0)} - B \quad (4.97)$$

$$C = y'_{(0)} - \alpha A \quad (4.98)$$

$$B = \frac{\alpha A \cos(\alpha L) - y'_{(L)} + y'_{(0)} - \alpha A - \frac{qL}{P}}{\alpha \operatorname{sen}(\alpha L)} \quad (4.99)$$

$$A = \frac{y'_{(L)}(1 - \cos(\alpha L)) + y'_{(0)}(\cos(\alpha L) + L\alpha \operatorname{sen}(\alpha L) - 1) + (y_{(0)} - y_{(L)})(\alpha \operatorname{sen}(\alpha L))}{L\alpha^2 \operatorname{sen}(\alpha L) + 2\alpha \cos(\alpha L) - 2\alpha} - \frac{qL}{2\alpha P} \quad (4.100)$$

Aplicando-se as condições de contorno para engastamento nas extremidades, figura 4.6, sendo $y_{(0)}=0$, $y_{(L)}=0$, $y'_{(0)}=0$ e $y'_{(L)}=0$, obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{q}{P} \left(\frac{\alpha L \operatorname{sen}(\alpha L)}{2(1 - \cos(\alpha L))} - 1 \right) \quad (4.101)$$

$$y'''_{(0)} = \frac{q\alpha^2 L}{2P} \quad (4.102)$$

Como $M = -Ely''$ e $F = Ely'''$, tem-se:

$$M_i = \frac{q}{\alpha^2} \left(1 - \frac{\alpha L \operatorname{sen}(\alpha L)}{2(1 - \cos(\alpha L))} \right) \quad (4.103)$$

$$F_i = \frac{qL}{2} \quad (4.104)$$

sendo:

M_i - momento no nó inicial; e,
 F_i - força cortante no nó inicial.

4.2.4.3 Força Axial de Tração

Fazendo o equilíbrio de momentos em um ponto qualquer de uma barra, figura 4.6, na posição deformada com ação uniformemente distribuída, “q”, ao longo desta, para “P” de tração, tem-se:

$$M = -M_i + F_i x - |P|y + \frac{qx^2}{2} \quad (4.105)$$

sendo: M_i - momento no nó inicial da barra;
 F_i - força cortante no nó inicial da barra; e,
 P - força normal no nó inicial da barra.

como $y'' = -\frac{M}{EI}$, adotando $\alpha^2 = \frac{|P|}{EI}$ e derivando duas vezes esta equação pode-se encontrar a equação diferencial que rege o comportamento da barra:

$$y^{IV} - \alpha^2 y'' = -\frac{q}{EI} \quad (4.106)$$

E como solução geral desta equação diferencial, tem-se:

$$y = A \sinh(\alpha x) + B \cosh(\alpha x) + Cx + D + \frac{qx^2}{2P} \quad (4.107)$$

Fazendo-se as três primeiras derivadas, obtém-se:

$$y' = \alpha A \cosh(\alpha x) + \alpha B \sinh(\alpha x) + C + \frac{qx}{P} \quad (4.108)$$

$$y'' = \alpha^2 A \sinh(\alpha x) + \alpha^2 B \cosh(\alpha x) + \frac{q}{P} \quad (4.109)$$

$$y''' = \alpha^3 A \cosh(\alpha x) + \alpha^3 B \sinh(\alpha x) \quad (4.110)$$

Determinando as constantes "A", "B", "C" e "D" em função dos deslocamentos transversais dos nós inicial e final da barra, " $y_{(0)}$ " e " $y_{(L)}$ ", e o giro dos nós inicial e final, " $y'_{(0)}$ " e " $y'_{(L)}$ ", tem-se:

$$y_{(0)} = B + D \quad (4.111)$$

$$y_{(L)} = A \sinh(\alpha L) + B \cosh(\alpha L) + CL + D + \frac{qL^2}{2P} \quad (4.112)$$

$$y'_{(0)} = \alpha A + C \quad (4.113)$$

$$y'_{(L)} = \alpha A \cosh(\alpha L) + \alpha B \sinh(\alpha L) + C + \frac{qL}{P} \quad (4.114)$$

Resolvendo este sistema,

$$D = y_{(0)} - B \quad (4.115)$$

$$C = y'_{(0)} - \alpha A \quad (4.116)$$

$$B = \frac{-\alpha A \cosh(\alpha L) + y'_{(L)} - y'_{(0)} + \alpha A - \frac{qL}{P}}{\alpha \sinh(\alpha L)} \quad (4.117)$$

$$A = \frac{y'_{(L)}(\cosh(\alpha L) - 1) + y'_{(0)}(L\alpha \sinh(\alpha L) - \cosh(\alpha L) + 1) + (y_{(0)} - y_{(L)})\alpha \sinh(\alpha L)}{L\alpha^2 \sinh(\alpha L) - 2\alpha \cosh(\alpha L) + 2\alpha} + \frac{qL}{2\alpha P}$$

(4.118)

Aplicando-se as condições de contorno para engastamento nas extremidades, figura 4.6, sendo $y_{(0)}=0$, $y_{(L)}=0$, $y'_{(0)}=0$ e $y'_{(L)}=0$, obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{q}{P} \left(\frac{\alpha L \sinh(\alpha L)}{2(1 - \cosh(\alpha L))} + 1 \right) \quad (4.119)$$

$$y'''_{(0)} = \frac{q\alpha^2 L}{2P} \quad (4.120)$$

Como $M = -Ely''$ e $F = Ely'''$, tem-se:

$$M_i = -\frac{q}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha L \sinh(\alpha L)}{2(1 - \cosh(\alpha L))} + 1 \right) \quad (4.121)$$

$$F_i = \frac{qL}{2} \quad (4.122)$$

sendo:

M_i - momento no nó inicial; e,

F_i - força cortante no nó inicial.

4.2.4.4 Vetor de Ações de Extremidade

Considerando apenas ação uniformemente distribuída ao longo de toda a barra e aplicando as condições de equilíbrio, o vetor de ações de extremidade é dado pela figura 4.7 e a tabela 4.2.

$$A_e^T = \{0 \quad F_i \quad M_i \quad 0 \quad F_i \quad -M_i\}$$

Figura 4.7 - Vetor das Ações de Extremidade para Carregamento Uniformemente Distribuído

Tabela 4.2 - Ações de Extremidade de Barra com Interação entre Força Axial e Flexão para Ação Uniformemente Distribuída			
	Compressão (P<0)	(P=0)	Tração (P>0)
F_i	$\frac{qL}{2}$	$\frac{qL}{2}$	$\frac{qL}{2}$
M_i	$\frac{q}{\alpha^2} \left(1 - \frac{\alpha L \sin(\alpha L)}{2(1 - \cos(\alpha L))} \right)$	$\frac{qL^2}{12}$	$-\frac{q}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha L \sinh(\alpha L)}{2(1 - \cosh(\alpha L))} + 1 \right)$
$\alpha = \sqrt{\frac{ P }{EI}}$			

4.2.5 Coeficientes da Matriz de Rigidez do Elemento de Barra com Funções de Rigidez para Conexões Semi-Rígidas

Os nós de estruturas reticulares geralmente são idealizados como articulações ou como completamente rígidos. Contudo, as próprias ligações podem ter um grau de flexibilidade significativo que podem ser importantes na análise.

Vários tipos de ligações elásticas são teoricamente possíveis de acordo com as translações e rotações relativas que podem ocorrer nos nós de uma estrutura. Serão tratados apenas os graus de liberdade do tipo rotacional. Para tratar tal problema considera-se uma barra bi-engastada com uma mola a uma distância infinitesimalmente pequena de cada um dos nós de extremidade, figura 4.8.

A matriz de rigidez, utilizada para tratar tal comportamento pode ser encontrada nos trabalhos de CHEN & TOMA⁴⁰ e OCHOA⁵¹.

Considerando-se que " k_A " e " k_B " sejam as respectivas constantes de rigidez para a ligação elástica em cada extremidade de barra. Estas constantes são definidas como uma relação entre momento e rotação na ligação elástica.

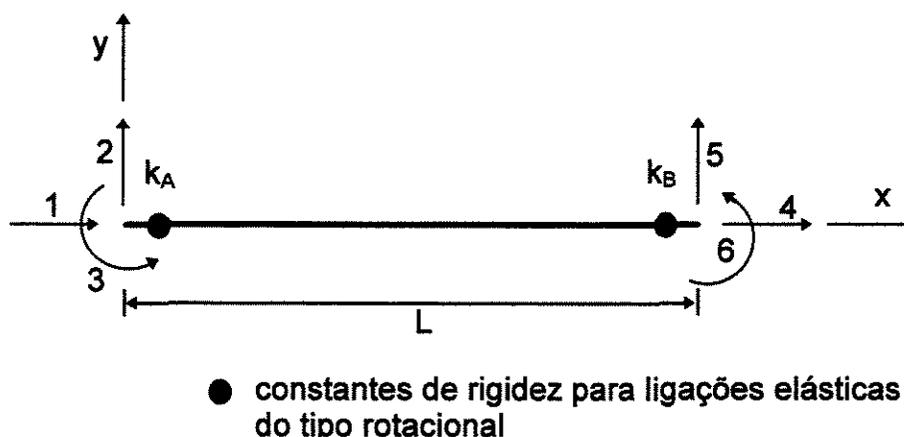


Figura 4.8 - Sistema de Coordenadas Locais para Barras com Conexões Semi-Rígidas

As constantes de rigidez " k " serão incorporadas a matriz de rigidez do elemento " S_{KB} " e as ações nodais de extremidades geradas por ação aplicada ao longo das barras.

Na primeira situação de deslocamento, um recalque de translação unitário no nó inicial, considerando o engastamento elástico na barra, não obtém-se giros nulos nas extremidades. As ações na barra para causar tal configuração é determinada através de uma superposição de efeitos entre um recalque de translação unitário no nó

inicial de uma barra bi-engastada somado aos giros de extremidade produzidos pelas ligações elásticas sobre o efeito desta translação.

Sabe-se que pelo princípio da ação e reação, os momentos trocados entre as “molas”, representando o comportamento das conexões, e as extremidades da barra serão iguais, figura 4.9.

Calculando os momentos nas extremidades, tem-se:

$$S_3 - S_4 \theta_A - S_5 \theta_B = k_A \theta_A \quad (4.123)$$

$$S_3 - S_5 \theta_A - S_4 \theta_B = k_B \theta_B \quad (4.124)$$

Resolvendo o sistema dado pelas equações (4.123) e (4.124), obtém-se:

$$\theta_A = \frac{S_3 (S_4 - S_5 + k_B)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2} \quad (4.125)$$

$$\theta_B = \frac{S_3 (S_4 - S_5 + k_A)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2} \quad (4.126)$$

Admitindo “ $k_A \theta_A = K_3$ ” e “ $k_B \theta_B = K_4$ ”, encontra-se:

$$K_3 = \frac{S_3 k_A (S_4 - S_5 + k_B)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2} \quad (4.127)$$

$$K_4 = \frac{S_3 k_B (S_4 - S_5 + k_A)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2} \quad (4.128)$$

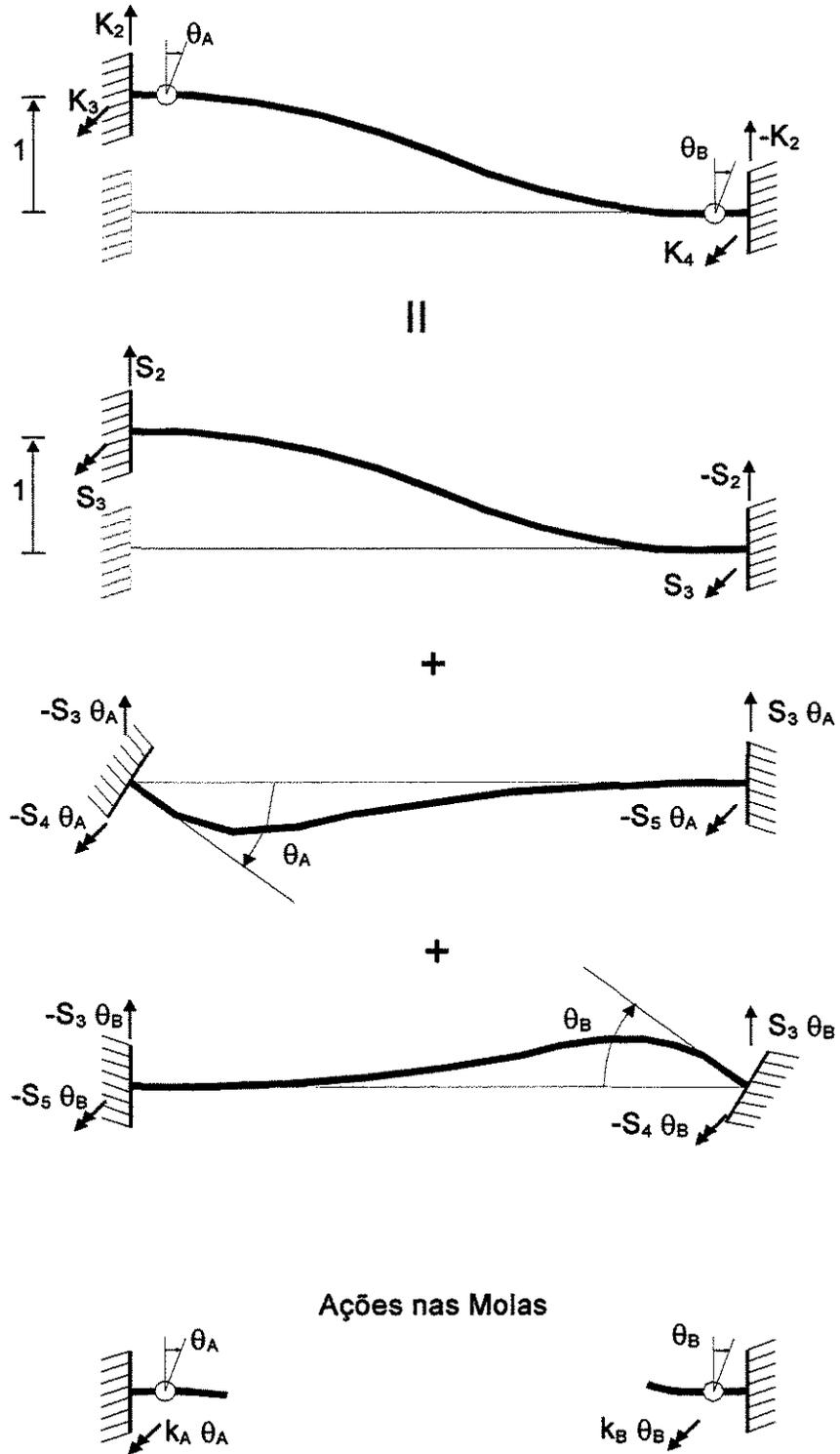


Figura 4.9 - Primeiro Estado de Deslocamento, Translação Unitária na Direção Transversal ao Longo da Barra.

Calculando as forças nas extremidades, e admitido que a força no nó inicial é igual a “ K_2 ” e a do nó final “ $-K_2$ ”, tem-se:

$$K_2 = S_2 - S_3 \theta_A - S_3 \theta_B \quad (4.129)$$

Substituindo nas equações (4.125) e (4.126), obtém-se:

$$K_2 = S_2 - \frac{S_3^2 (2S_4 - 2S_5 + k_A + k_B)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2} \quad (4.130)$$

Na segunda situação de deslocamento, uma rotação unitária no nó inicial, considerando o engastamento elástico na barra, não obtém-se giro nulo no nó final e o giro unitário não se mantém na “mola” do nó inicial. As ações na barra para causar tal configuração é determinada através de uma superposição de efeitos entre uma rotação unitária no nó inicial de uma barra bi-engastada somado aos giros de extremidade produzidos pelas ligações elásticas sobre o efeito desta rotação, figura 4.10.

Calculando os momentos nas extremidades, tem-se:

$$S_4 - S_4 \theta_A - S_5 \theta_B = k_A \theta_A \quad (4.131)$$

$$S_5 - S_5 \theta_A - S_4 \theta_B = k_B \theta_B \quad (4.132)$$

Resolvendo o sistema dado pelas equações (4.131) e (4.132), obtém-se:

$$\theta_A = \frac{S_4^2 + S_4 k_B - S_5^2}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2} \quad (4.133)$$

$$\theta_B = \frac{S_5 k_A}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2} \quad (4.134)$$

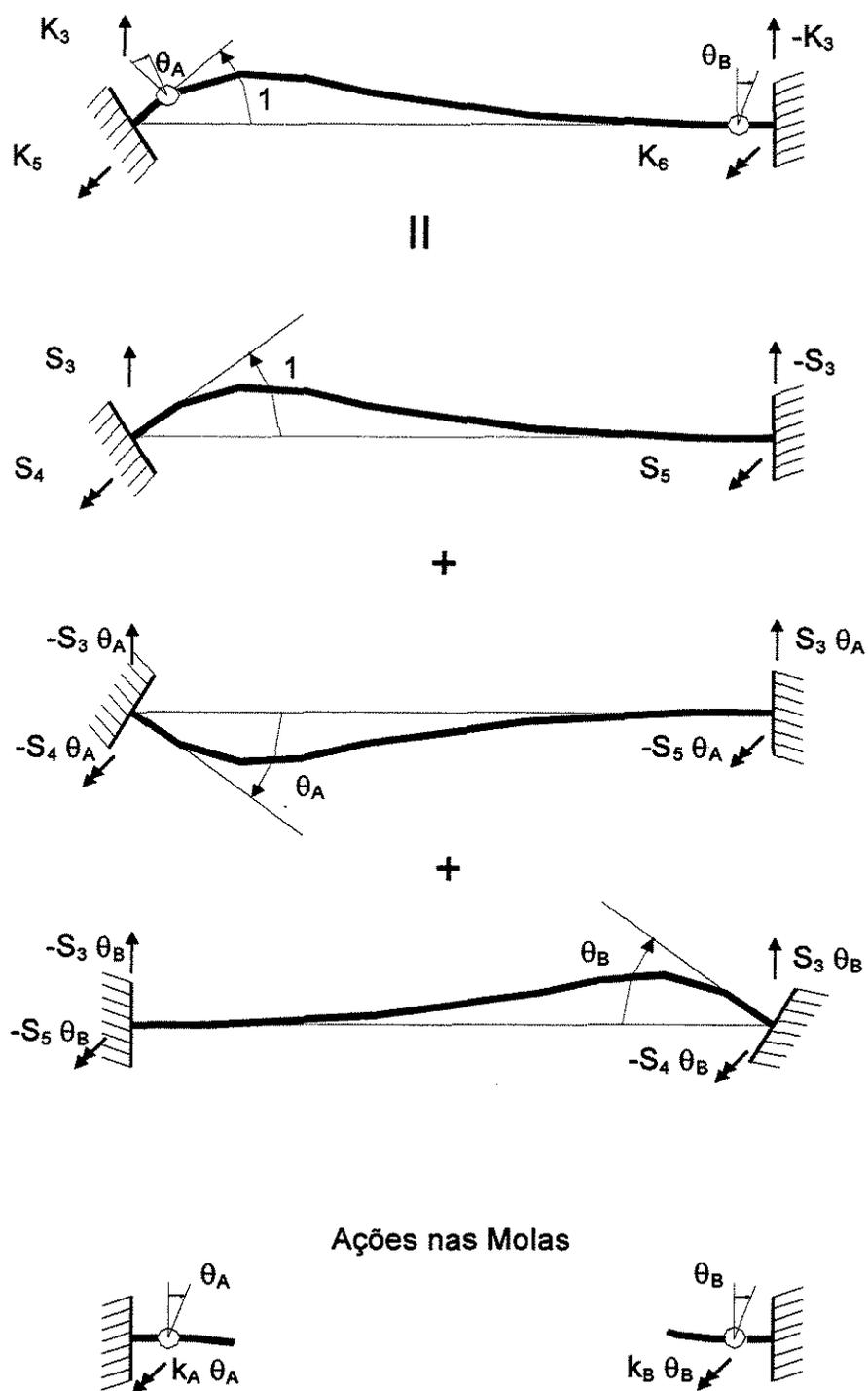


Figura 4.10 - Segundo Estado de Deslocamento, Rotação Unitária no Nó Inicial da Barra.

Admitindo " $k_A \theta_A = K_5$ " e " $k_B \theta_B = K_6$ ", encontra-se:

$$K_5 = \frac{k_A (S_4^2 + S_4 k_B - S_5^2)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2} \quad (4.135)$$

$$K_6 = \frac{S_5 k_A k_B}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2} \quad (4.136)$$

4.2.5.1 Funções de Rigidez

Para facilitar a utilização da matriz de rigidez do elemento de barra, seus termos serão representados em uma tabela sob variação da força axial, como mostra a tabela 4.3. Lembrando-se que " S_1 ", " S_2 ", " S_3 ", " S_4 " e " S_5 " são as funções de rigidez de barra para nós completamente rígidos, tabela 4.1, e considerando as condições de equilíbrio da barra e a simetria da matriz de rigidez, devido ao teorema da reciprocidade, tem-se:

$$K_{KB} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & -K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & K_3 & 0 & -K_2 & K_4 \\ 0 & K_3 & K_5 & 0 & -K_3 & K_6 \\ -K_1 & 0 & 0 & K_1 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & -K_3 & 0 & K_2 & -K_4 \\ 0 & K_4 & K_6 & 0 & -K_4 & K_7 \end{bmatrix}$$

Figura 4.11 - Matriz de Rigidez da Barra com Conexões Semi-Rígidas.

Tabela 4.3 - Funções de Rigidez de Barra com Conexões Semi-Rígidas com Interação entre Força Axial e Flexão	
K_1	S_1
K_2	$S_2 - \frac{S_3^2 (2S_4 - 2S_5 + k_A + k_B)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2}$
K_3	$\frac{S_3 k_A (S_4 - S_5 + k_B)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2}$
K_4	$\frac{S_3 k_B (S_4 - S_5 + k_A)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2}$
K_5	$\frac{k_A (S_4^2 + S_4 k_B - S_5^2)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2}$
K_6	$\frac{S_5 k_A k_B}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2}$
K_7	$\frac{k_B (S_4^2 + S_4 k_A - S_5^2)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2}$

No trabalho de OCHOA⁵¹ a rigidez da conexão, “ k_A ” e “ k_B ”, foi trocada por outro parâmetro, “ ρ_A ” e “ ρ_B ”. Este parâmetro é chamado de fator fixo, e possui a vantagem de variar de 0 a 1, para considerações de articulado a totalmente restringido, respectivamente, enquanto que o parâmetro da rigidez da conexão varia de 0 a ∞ , para considerações de articulado a totalmente restringido, respectivamente. O fator fixo será dado em função da rigidez da conexão pela fórmula deduzida no trabalho de Wang, em 1983, como:

$$\rho_A = \frac{1}{1 + \frac{3}{R_A}} \quad \text{e} \quad \rho_B = \frac{1}{1 + \frac{3}{R_B}} \quad (4.137)$$

sendo, “ R_a ” e “ R_b ” um parâmetro adimensional calculado pela razão entre a rigidez da conexão, “ k_A ” e “ k_B ”, respectivamente, e “ EI/L ”, em que “ E ” é a elasticidade do material, “ I ” o momento de inércia e “ L ” o comprimento da barra. Desta forma, tem-se:

$$R_A = \frac{k_A L}{EI} \quad \text{e} \quad R_B = \frac{k_B L}{EI} \quad (4.138)$$

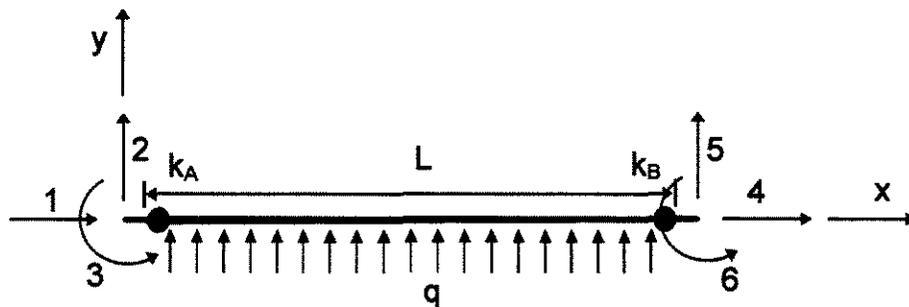
Tabela 4.4 - Funções de Rigidez de Barra com Conexões Semi-Rígidas com Interação entre Força Axial e Flexão, Utilizado o Fator Fixo.	
K_1	S_1
K_2	$\frac{3\rho_A(r^2 - s^2)(1 - \rho_B) + 3\rho_B(r^2 - s^2)(1 - \rho_A) + 18\rho_A\rho_B(r + s)}{L^2\varphi} + \frac{P}{L}$
K_3	$\frac{3\rho_A(r^2 - s^2)(1 - \rho_B) + 9\rho_A\rho_B r + 9\rho_A\rho_B s}{L\varphi}$
K_4	$\frac{3\rho_B(r^2 - s^2)(1 - \rho_A) + 9\rho_A\rho_B r + 9\rho_A\rho_B s}{L\varphi}$
K_5	$\frac{3\rho_A(r^2 - s^2)(1 - \rho_B) + 9\rho_A\rho_B r}{\varphi}$
K_6	$\frac{9\rho_A\rho_B s}{\varphi}$
K_7	$\frac{3\rho_B(r^2 - s^2)(1 - \rho_A) + 9\rho_A\rho_B r}{\varphi}$
Sendo,	$r = S_4 \frac{L}{EI} \quad \text{e} \quad s = S_5 \frac{L}{EI}$
	$\varphi = \frac{L}{EI} [(r^2 - s^2)(1 - \rho_A)(1 - \rho_B) + 3r(\rho_A + \rho_B - 2\rho_A\rho_B) + 9\rho_A\rho_B]$

Substituindo a equação (4.137), e as funções de rigidez da matriz do elemento e fazendo as devidas transformações algébricas, pode-se encontrar as funções da tabela 4.3 modificada como as dadas pela tabela 4.4.

4.2.6 Ações de Extremidade Devido a Carregamento ao Longo das Barras para Conexões Semi-Rígid

A ação uniformemente distribuída ao longo de toda a barra associada as ações axiais de extremidades serão consideradas com conexões semi-rígidas.

Considerando o engastamento elástico na barra, não obtém-se giros nulos nas extremidades. As ações na barra para equilibrar tal configuração são determinadas através de uma superposição de efeitos entre uma barra bi-engastada onde atuam os carregamentos somado aos giros de extremidade produzidos pelas ligações elásticas sobre o efeito destes carregamentos, figura 4.12.



- constantes de rigidez para ligações elásticas do tipo rotacional

Figura 4.12 - Sistema de Coordenadas para Ação Uniformemente Distribuída ao Longo da Barra com Conexões Semi-Rígid.

Sabe-se que pelo princípio da ação e reação, os momentos trocados entre as “molas”, representando o comportamento das conexões, e as extremidades da barra serão iguais, figura 4.13.

Calculando os momentos nas extremidades, tem-se:

$$M'_i - S_4\theta_A + S_5\theta_B = k_A\theta_A \quad (4.139)$$

$$M'_f - S_5\theta_A + S_4\theta_B = -k_B\theta_B \quad (4.140)$$

Resolvendo o sistema dado pelas equações (4.139) e (4.140), obtém-se:

$$\theta_A = \frac{k_B M'_i + S_4 M'_i - S_5 M'_f}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2} \quad (4.141)$$

$$\theta_B = \frac{-k_A M'_f - S_4 M'_f + S_5 M'_i}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2} \quad (4.142)$$

Admitindo “ $k_A \theta_A = M_i$ ” e “ $-k_B \theta_B = M_f$ ”, encontra-se:

$$M_i = \frac{k_A (k_B M'_i + S_4 M'_i - S_5 M'_f)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2} \quad (4.143)$$

$$M_f = \frac{k_B (k_A M'_f + S_4 M'_f - S_5 M'_i)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2} \quad (4.144)$$

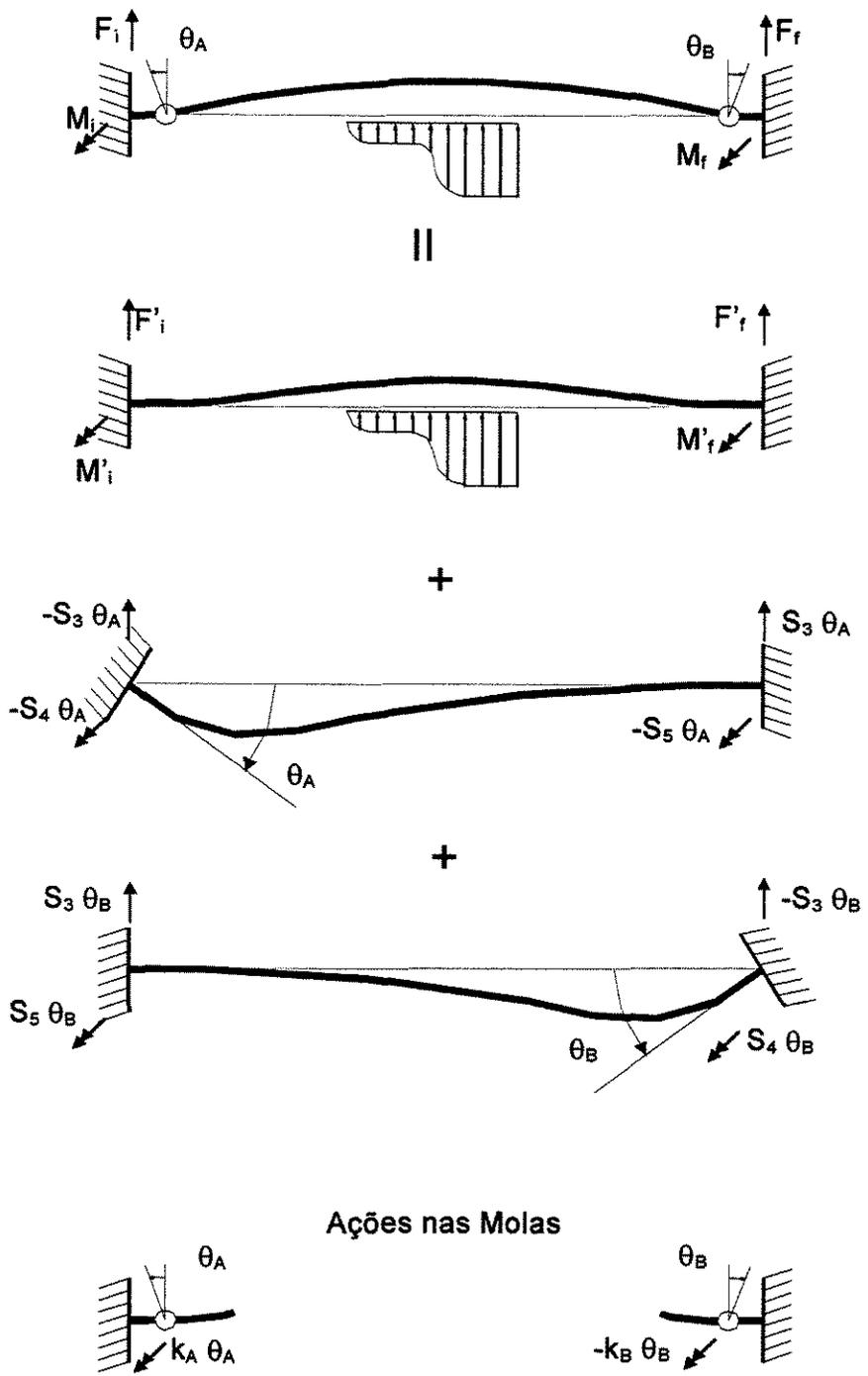


Figura 4.13 - Estado de Carregamento Transversal ao Longo da Barra Considerando o Engastamento Elástico.

Calculando as forças nas extremidades, tem-se:

$$F_i = F'_i - S_3\theta_A + S_3\theta_B \quad (4.145)$$

$$F_f = F'_f + S_3\theta_A - S_3\theta_B \quad (4.146)$$

Substituindo nas equações (4.141) e (4.142), obtém-se:

$$F_i = F'_i - S_3 \frac{M'_i(k_B + S_4 - S_5) + M'_f(k_A + S_4 - S_5)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2} \quad (4.147)$$

$$F_f = F'_f + S_3 \frac{M'_i(k_B + S_4 - S_5) + M'_f(k_A + S_4 - S_5)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2} \quad (4.148)$$

4.2.6.1 Vetor das Ações de Extremidade

O vetor das ações de extremidade pode ser escrito como:

$$A_e^T = \{0 \quad F_i \quad M_i \quad 0 \quad F_f \quad M_f\}$$

Figura 4.14 - Vetor das Ações de Extremidade com Conexões Semi-Rígidias.

Na tabela 4.5 pode-se encontrar as funções das ações de extremidade de barra considerando as conexões semi-rígidias, obtidas através das ações de extremidade de barra com conexões rígidas e da rigidez das conexões.

Tabela 4.5 – Ações de Extremidade de Barra Considerando as Conexões Semi-Rígidas.	
F_i	$F_i' - S_3 \frac{M_i'(k_B + S_4 - S_5) + M_f'(k_A + S_4 - S_5)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2}$
F_f	$F_f' + S_3 \frac{M_i'(k_B + S_4 - S_5) + M_f'(k_A + S_4 - S_5)}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2}$
M_i	$\frac{k_A (k_B M_i' + S_4 M_f' - S_5 M_f')}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2}$
M_f	$\frac{k_B (k_A M_i' + S_4 M_f' - S_5 M_f')}{k_A k_B + S_4 k_A + S_4 k_B + S_4^2 - S_5^2}$

Fazendo as mesmas considerações que as feita no trabalho de OCHOA⁵¹, utilizando os fatores fixos, “ ρ_A ” e “ ρ_B ”, substituindo a equação (4.137) nas funções das ações de extremidade do elemento e fazendo as devidas transformações algébricas, pode-se encontrar as funções da tabela 4.5 modificada como as dadas pela tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Ações de Extremidade de Barra Considerando as Conexões Semi-Rígidas, Utilizado o Fator Fixo.	
M_i	$\frac{3\rho_A \{ [3\rho_B + r(1-\rho_B)]M_i' - s(1-\rho_B)M_f' \}}{[3\rho_A + r(1-\rho_A)][3\rho_B + r(1-\rho_B)] - s^2(1-\rho_A)(1-\rho_B)}$
M_f	$\frac{3\rho_B \{ -s(1-\rho_A)M_i' + [3\rho_A + r(1-\rho_A)]M_f' \}}{[3\rho_A + r(1-\rho_A)][3\rho_B + r(1-\rho_B)] - s^2(1-\rho_A)(1-\rho_B)}$
Sendo,	$r = S_4 \frac{L}{EI} \quad e \quad s = S_5 \frac{L}{EI}$

4.2.7 Coeficientes da Matriz de Rigidez do Elemento de Barra com Funções de Rigidez no Regime Inelástico

As hipóteses assumidas na análise no regime inelástico, quando a barra encontra-se solicitada por tensões acima do limite de proporcionalidade do material, não linearidade física do material, são:

- O sistema é considerado conservativo, ou seja, não há dissipação de energia no sistema;
- a curva tensão-deformação é considerada elasto-plástica, até o limite de proporcionalidade do material a relação tensão deformação é linear, acima deste ponto, esta relação torna-se não linear até a plastificação total da seção transversal;
- a relação tensão-deformação é igual tanto na tração quanto na compressão;
- caso aconteça descarregamento em alguma barra da estrutura, este se dará ao longo da curva da relação tensão-deformação;
- a tensão de plastificação do material é igual a " σ_y ", limite de escoamento do material, não sendo considerado o efeito de endurecimento do aço; e,
- será considerada que a redução da capacidade portante da barra devido a não linearidade física do material seja provocada pelas tensões normais de compressão ou tração e tensões normais de flexão presentes nas barra, não considerando as tensões de cisalhamento.

A não linearidade física do material é baseada no fato da rigidez a flexão da seção transversal da barra se reduzir gradualmente da rigidez elástica, quando as tensões encontram-se acima do limite de proporcionalidade do material, para a rigidez inelástica, até atingir praticamente zero, plastificação total da seção transversal. Pode-se utilizar curvas da relação de tensão-deformação para representar esta degradação da rigidez. Os limites de proporcionalidade do material, bem como a degradação da rigidez, é dado por cada expressão destas curvas, como as mostradas no capítulo II.

A tensão atuante na barra devido a flexo-compressão é determinada pela expressão tradicional da resistências dos materiais como:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{W} \quad (4.149)$$

sendo, “P” o esforço axial presente na seção transversal da barra, “M” o momento fletor presente na seção transversal da barra, “A” a área da seção transversal da barra e “W” o módulo elástico de resistência da barra.

A tensão atuante na barra, calculada pela equação (4.149), será utilizada nas curvas de relação tensão-deformação para encontrar o módulo de elasticidade no regime inelástico obedecendo a teoria do módulo tangente.

A plastificação do perfil será dada quando a tensão atuante na barra for maior que a tensão de escoamento do material.

Este método é muito eficiente quando as tensões devido aos esforços normais são predominantes, quando comparados com as tensões originada pelo momento fletor. Isto ocorre devido as curvas serem obtidas através de ensaios simples de tração ou compressão, onde as tensões na seção transversal são constantes, o que não acontece quando é feita a somatória das tensões devido a esforços normais e de flexão, diagrama de tensões trapezoidal.

Por outro lado, para a verificação da plastificação da seção transversal do perfil deverão ser considerados os efeitos combinados de força axial de compressão ou tração e de momento fletor atuando na barra. Para considerar estes efeitos será admitido como hipótese que a barra esteja contida lateralmente por vinculações adequadas. Desta forma, a resistência do perfil ao momento fletor é dado por:

$$M_y = \sigma_y Z \quad (4.150)$$

sendo, “M_y” o momento de plastificação da seção transversal, “σ_y” a tensão de escoamento do material e “Z” o módulo de resistência plástico da seção transversal da barra.

A resistência do perfil ao esforço axial de tração ou compressão será dado quando a tensão atingir o escoamento da seção transversal da barra, dado por:

$$P_y = A\sigma_y \quad (4.151)$$

sendo "A" a área da seção transversal da barra e " σ_y " a tensão de escoamento do material.

Admitindo que as tensões das fibras mais afastadas não podem ultrapassar a tensão de escoamento do aço, pode-se representar a plastificação do perfil solicitado por esforços combinados de força normal e momento fletor como:

$$\frac{P}{A} + \frac{M}{Z} = \sigma_y \quad (4.152)$$

Considerando que a plastificação do perfil é dada pela equação (4.152) e lembrando que a plastificação do perfil dada pelas curvas de tensão-deformação apresentadas no capítulo II é dada quando a tensão atuante, a qual é calculada pela equação (4.149), atinge a tensão de escoamento, " σ_y ", conclui-se também que o método acima proposto não considera a degradação do módulo de resistência a flexão, no regime inelástico, o qual encontra-se entre os limites dados pelo módulo de resistência elástico a flexão, "W", e o módulo de resistência plástico a flexão, "Z".

Para considerar a degradação da rigidez a flexão da seção transversal da barra, não linearidade física do material, quando as solicitações ocasionadas pelo momento fletor produzem tensões normais significativas, quando comparadas as tensões normais ocasionadas pelas solicitações dos esforços axiais, são necessários métodos mais complexos para retratar o comportamento de uma forma mais realística.

4.2.7.1 Funções de Rigidez e Vetor de Ações de Extremidade

Para introduzir o efeito da não linearidade física do material na análise de estruturas reticulares planas é necessário modificar a matriz de rigidez do elemento de barra e o vetor das ações de extremidade. Esta modificação é feita pela substituição do módulo de elasticidade elástico do material, quando a barra encontra-se solicitada por tensões superiores ao limite de proporcionalidade do material, pelo módulo de elasticidade tangente, teoria do módulo tangente, o qual pode ser obtido através das expressões que representam as curvas da relação tensão-deformação, como mostrado no capítulo 2.

Tabela 4.7 – Funções de Rigidez de Barra com Interação entre Força Axial e Flexão na Teoria do Módulo Tangente			
	Compressão (P<0)	(P=0)	Tração (P>0)
S ₁	$\frac{E_t A}{L}$	$\frac{E_t A}{L}$	$\frac{E_t A}{L}$
S ₂	$\frac{E_t \alpha^3 \text{sen}(\alpha L)}{\phi_c}$	$\frac{12E_t I}{L^3}$	$\frac{E_t \alpha^3 \text{senh}(\alpha L)}{\phi_t}$
S ₃	$\frac{E_t \alpha^2 (1 - \cos(\alpha L))}{\phi_c}$	$\frac{6E_t I}{L^2}$	$\frac{E_t \alpha^2 (\cosh(\alpha L) - 1)}{\phi_t}$
S ₄	$\frac{E_t \alpha (\text{sen}(\alpha L) - L\alpha \cos(\alpha L))}{\phi_c}$	$\frac{4E_t I}{L}$	$\frac{E_t \alpha (L\alpha \cosh(\alpha L) - \text{senh}(\alpha L))}{\phi_t}$
S ₅	$\frac{E_t \alpha (L\alpha - \text{sen}(\alpha L))}{\phi_c}$	$\frac{2E_t I}{L}$	$\frac{E_t \alpha (\text{senh}(\alpha L) - L\alpha)}{\phi_t}$
	$\phi_c = 2 - 2\cos(\alpha L) - L\alpha \text{sen}(\alpha L)$	$\alpha = \sqrt{\frac{ P }{E_t I}}$	$\phi_t = 2 - 2\cosh(\alpha L) + L\alpha \text{senh}(\alpha L)$

Tabela 4.8 - Ações de Extremidade de Barra com Interação entre Força Axial e Flexão para Carregamento Uniformemente Distribuída na Teoria do Módulo Tangente			
	Compressão (P<0)	(P=0)	Tração (P>0)
F_i	$\frac{qL}{2}$	$\frac{qL}{2}$	$\frac{qL}{2}$
M_i	$\frac{q}{\alpha^2} \left(1 - \frac{\alpha L \sin(\alpha L)}{2(1 - \cos(\alpha L))} \right)$	$\frac{qL^2}{12}$	$-\frac{q}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha L \sinh(\alpha L)}{2(1 - \cosh(\alpha L))} + 1 \right)$
$\alpha = \sqrt{\frac{ P }{E_i I}}$			

A tabela 4.7 substitui a tabela 4.1 e a tabela 4.8 substitui a tabela 4.2 quando é considerado a não linearidade física do material, podendo ser utilizada simultaneamente com o efeito das conexões semi-rígidas.

4.2.8 Matriz de Rigidez da Estrutura Formada por Elemento de Barra

A matriz de rigidez de um elemento de barra $[S_{KB}]_i$ relaciona o vetor dos esforços $\{F\}_i$ com o vetor dos deslocamentos $\{D_L\}_i$ nas coordenadas locais do elemento, sendo $\{F_e\}_i$ o vetor dos esforços de extremidade dado pelos carregamentos ao longo da barra. A formulação matricial para o i-ésimo elemento da estrutura é dado por:

$$\{F\}_{i(6 \times 1)} = [S_{KB}]_{i(6 \times 6)} \{D_L\}_{i(6 \times 1)} + \{F_e\}_{i(6 \times 1)} \quad (4.153)$$

Da mesma forma que para o elemento de barra, a matriz de rigidez da estrutura $[S_{KG}]$ relaciona o vetor das ações $\{A\}$ com o vetor dos deslocamentos $\{D\}$ da estrutura nas "n" coordenadas do sistema global.

$$\{A\}_{(n \times 1)} = [S_{KG}]_{(n \times n)} \{D\}_{(n \times 1)} \quad (4.154)$$

A matriz de rigidez da estrutura $[S_{KG}]$ pode ser obtida através da contribuição dos elementos de barra (GERE & WEAVER⁴⁶) como:

$$[S_{KG}]_{(n \times n)} = \sum_{i=1}^{nb} [b]_{i(n \times 6)}^T [S_{KB}]_{i(6 \times 6)} [b]_{i(6 \times n)} \quad (4.155)$$

sendo,

n - número total de coordenadas da estrutura formada apenas por elementos de barra, no sistema global;

nb - número de elementos de barra;

$[b]_i$ - submatriz de ordem $6 \times n$ correspondente ao elemento "i" da matriz de transformação $[b]$ de ordem $6nb \times n$, que relaciona os deslocamentos da estrutura com os deslocamentos dos elementos:

$$\begin{Bmatrix} \{D_L\}_{i1} \\ \{D_L\}_{i2} \\ \vdots \\ \{D_L\}_{i6nb} \end{Bmatrix}_{(6nb \times 1)} = \begin{bmatrix} [b]_{i1} \\ [b]_{i2} \\ \vdots \\ [b]_{i6nb} \end{bmatrix}_{(6nb \times n)} \{D\}_{(n \times 1)} \quad (4.156)$$

$[S_{KB}]_i$ - matriz de rigidez do elemento "i" de ordem 6×6 nas coordenadas locais;

$[S_{KG}]$ - matriz de rigidez da estrutura de ordem $n \times n$ nas coordenadas globais;

$\{D_L\}_i$ - vetor dos deslocamentos do elemento de barra "i" no sistema local de coordenadas de ordem 6×1 ; e,

$\{D\}$ - vetor dos deslocamentos da estrutura no sistema global de coordenadas de ordem $n \times 1$.

4.2.9 Cálculo dos Esforços e Deslocamentos da Estrutura em Teoria de Primeira e Segunda Ordem

As formulações matriciais, mostradas nas expressões (4.153) e (4.154), permitem determinar os deslocamentos nas coordenadas do sistema global e os esforços nos elementos de barra nas suas coordenadas locais, a partir das ações nas coordenadas do sistema global. A análise da estrutura em regime de primeira ordem é realizada através de um sistema de equações lineares de solução direta, porém, a análise da estrutura em regime de segunda-ordem, depende de um sistema de equações não lineares, em termos de forças axiais "P". Neste caso, como elas são incógnitas, é inviável a sua solução direta.

Para resolver o problema de obtenção dos esforços e deslocamentos na estrutura submetida a um carregamento em regime de segunda-ordem, será adotado um processo iterativo com aproximações sucessivas.

4.2.10 Processo Iterativo com Aproximações Sucessivas

Este processo iterativo pode ser encontrado nos trabalhos de CALLEJAS⁵⁰ e REQUENA⁵². A técnica utilizada é a da iteração direta, que consiste em atualizar a matriz de rigidez da estrutura devido a variação do esforço axial que se modifica em cada iteração.

Inicialmente será desprezada a influência da força axial no cálculo das matrizes de rigidez dos elementos de barra que contribuirão para a montagem da matriz de rigidez da estrutura, em regime de primeira-ordem. Dado um carregamento e determinada a matriz de rigidez da estrutura, é possível determinar os deslocamentos globais da estrutura. Com os deslocamentos globais, calcula-se os deslocamentos nos elementos de barra. Com estes deslocamentos, torna-se possível determinar os esforços axiais "P" atuante em cada barra.

Com os valores iniciais das forças axiais “P” obtidas em regime de primeira-ordem, é iniciado o processo iterativo para determinar a matriz de rigidez com termos não lineares, em regime de segunda-ordem. Com estas forças axiais, recalcula-se a matriz de rigidez do sistema com seus coeficientes afetados por estas forças, utilizando as funções de rigidez. Com o mesmo procedimento anterior recalculam-se os novos deslocamentos da estrutura e as novas forças axiais “P”, nos elementos de barra, submetidos ao mesmo carregamento anterior. Com os novos valores, o processo é repetido, mantendo o carregamento e assim sucessivamente a iteração é processada até que na n-ésima vez, o vetor dos deslocamentos $\{D_n\}$ seja praticamente coincidente com $\{D_{n-1}\}$ da (n-1)-ésima aproximação.

Como o processo é iterativo, este somente terminará quando ocorrer a convergência dos deslocamentos para valores definidos em cada etapa. Para agilizar o processo, é necessário definir uma tolerância para as iterações. No presente trabalho foi adotada a seguinte expressão:

$$\left| \frac{2(\{D_n\} - \{D_{n-1}\})}{\{D_n\} + \{D_{n-1}\}} \right| \leq \text{TOL} \quad (4.157)$$

sendo,

$\{D_n\}$ - vetor deslocamento na n-ésima iteração;

$\{D_{n-1}\}$ - vetor deslocamento da (n-1)-ésima iteração; e,

TOL - tolerância adotada.

Apesar da tolerância recomendada por alguns pesquisadores ser um valor fixo de 10^{-3} , é recomendado instalar no programa uma entrada interativa para facilitar alterações que se fazem necessárias na determinação de algumas estruturas, próximas do limite de estabilidade, devido a dificuldade de convergência no processo em termos de precisão e tempo de computação.

4.2.11 Verificação da Estabilidade da Estrutura Submetida a um Determinado Carregamento

Uma estrutura será considerada estável sob um certo carregamento se sua matriz de rigidez for definida positiva, ou seja, todos os seus autovalores são positivos. Portanto, o produto dos autovalores que é o determinante da matriz de rigidez também será positivo e conseqüentemente a matriz de rigidez será dita não singular.

Cada autovalor negativo ou nulo corresponde a um modo de flambagem. Desta forma, para um carregamento definido, o número de elementos negativos ou nulos na diagonal é igual ao número de graus de liberdade que tem o modo de flambagem para esse carregamento.

Segundo JENNINGS⁵³ e GOLUB⁵⁴, para verificar se uma matriz é definida positiva, basta tentar decompô-la por Cholesky, pois é uma condição necessária e suficiente, demonstrada por ambos. Como o processo é muito simples de ser programado, foi utilizado neste trabalho. Portanto, a verificação da estabilidade da estrutura submetida a um determinado carregamento passa pela verificação da matriz da estrutura, ser ou não definida positiva e conseqüentemente, ser possível decompô-la por Cholesky. Ao detectar um termo negativo ou nulo na diagonal, durante a decomposição da matriz, o processo pode ser interrompido.

Para cada incremento de carga, a matriz de rigidez é calculada buscando a sua convergência, em regime de segunda-ordem e com isso a sua estabilidade. O valor de seu determinante será menor que o determinante correspondente à matriz de rigidez em que os coeficientes não são afetados pela força axial, predominantemente de compressão, e em conseqüência disto, os deslocamentos resultantes serão maiores. A medida que o carregamento da estrutura sofra incrementos crescentes, e conseqüentemente o aumento das forças axiais de compressão, o valor do determinante correspondente à nova matriz de rigidez irá diminuindo até que será nulo e os deslocamentos serão indeterminados, então o carregamento crítico foi atingido. O processo é válido para problemas tanto de primeira quanto de segunda espécie.

4.2.12 Carregamento Crítico de Instabilidade de Pórtico Plano

O processo aqui descrito para determinar o carregamento crítico de instabilidade pode ser encontrado nos estudos de REQUENA⁵². A determinação do carregamento crítico para a estrutura do pórtico, submetida às ações permanentes e às ações variáveis, como a de vento e ponte rolante, será considerada através de dois carregamentos distintos: o primeiro carregamento composto pelas ações cujas intensidades serão mantidas constantes, como por exemplo as permanentes, chamado de cargas constantes, e o segundo carregamento cujas intensidades serão afetadas por um parâmetro de proporcionalidade, “W”, chamado de cargas variáveis, como por exemplo as ações do vento. Após a definição dos carregamentos, a busca do parâmetro crítico “ W_{cr} ”, parâmetro para o qual o carregamento total será o crítico da estrutura, ficará restrito à análise do parâmetro “W”.

Inicialmente a matriz de rigidez é calculada em regime de primeira ordem. Com esta matriz de rigidez são calculados os esforços internos, em especial as forças axiais nas barras, através das cargas constantes e das cargas variáveis multiplicada pelo parâmetro “ $W = 1$ ”.

Em seguida, é calculado o parâmetro “W” que iniciará o processo de carregamentos e verificações de instabilidade da estrutura. A determinação de “W” inicial será feita através das seguintes etapas:

a) Procura-se a barra “i” com força axial mais próxima da flambagem de Euler. Isto é feito através de uma variável “ ρ ” dado por:

$$\rho_{max} = \frac{P_i}{P_{Ei}} \Rightarrow IBC \quad (4.158)$$

$$P_{Ei} = \frac{\pi^2 E_i I_i}{L_i^2} \quad (4.159)$$

sendo,

P_i - força axial da barra "i" para o carregamento aplicado na estrutura;

P_{Ei} - força axial da barra "i" obtida da expressão de Euler para barras bi-articuladas;

IBC - barra "i" obtida com força axial " P_i " mais próxima da flambagem de Euler produzido pelo " ρ_{max} ".

b) Encontrada a barra "IBC", mais próxima da flambagem de Euler, passa-se agora para a determinação do parâmetro "W" para a barra "IBC" para que esta atinja o limite de estabilidade. Este parâmetro será calculado da seguinte forma:

$$W = \frac{P_{Ei}}{P_i} \quad (4.160)$$

sendo,

W - parâmetro multiplicador das cargas variáveis;

Nesta etapa a barra "IBC" alcançou a instabilidade por flexão, se considerada bi-articulada nas condições de Euler, porém, como as barras da estrutura podem ser rigidamente ligadas, o limite máximo do parâmetro " W_{max} " será alcançado quando as barras forem consideradas bi-engastadas, neste caso:

$$P_{Emax} = 4 P_{Ei} \quad (4.161)$$

$$W_{max} = \frac{4P_{Ei}}{P_i} \quad (4.162)$$

sendo,

W_{max} - Parâmetro máximo das cargas variáveis que um pórtico pode suportar sem perder a estabilidade.

Encontrado o parâmetro máximo " W_{max} ", a primeira verificação da estabilidade da estrutura será feita com o valor de " W " médio dado por zero e o parâmetro máximo. O processo convergirá rapidamente pesquisando os intervalos:

$$W = \frac{(WA + WB)}{2} \quad (4.163)$$

sendo,

WA - limite inferior do parâmetro do carregamento, inicialmente adotado igual a zero; e,

WB - limite superior do parâmetro do carregamento, inicialmente adotado igual a " W_{max} ".

Como o carregamento será sempre a soma das cargas constantes com as cargas variáveis multiplicadas pelo parâmetro " W ", este parâmetro será pesquisado sempre no intervalo entre um limite superior " WB ", para o qual a estrutura pode alcançar ou ultrapassar o limite de estabilidade e um limite inferior " WA ", para o qual a estrutura é considerada estável.

Definido o carregamento, inicia-se a fase de cálculo da estrutura em regime de segunda-ordem, já descrito nos itens anteriores. No caso de êxito na convergência, significa que a estrutura está estável, logo, altera-se o limite inferior " WA " para o valor atual de " W ", mantendo " WB " inalterado. Repete-se o processo com o novo valor de " W ", intermediário entre os novos limites. Caso a matriz de rigidez da estrutura não possa ser decomposta por Cholesky, isto significará estrutura instável, logo, altera-se o limite superior " WB " para o valor atual de " W ", mantendo " WA " inalterado. O processo é novamente repetido buscando a igualdade entre os limites " WA " e " WB ". O processo é repetido até que verificada a tolerância do valor pesquisado, " W_{cr} ", com:

$$\frac{2(WB - WA)}{WB + WA} \leq TOL \quad (4.164)$$

sendo,

TOL - tolerância adotada (sugerido 10^{-3}).

A convergência satisfeita, com valores de “WA” e “WB” praticamente coincidentes, significará que o parâmetro crítico máximo “ W_{cr} ” foi encontrado. Neste caso, pode-se afirmar que a estrutura submetida ao carregamento majorado pelo parâmetro “ W_{cr} ” nas cargas variáveis terá alcançado o limite de estabilidade.

4.2.13 Considerações de Outros Efeitos Não Lineares

Pode-se considerar na análise outros efeitos não lineares, como por exemplo, o comportamento da maioria das conexões semi-rígidas e o comportamento inelástico das barras. Para considerar estes efeitos será necessário utilizar a matriz de rigidez do elemento e as ações equivalentes modificadas demonstradas neste capítulo.

Assim, como o efeito da força axial nas barras modifica a matriz de rigidez do elemento, os momentos fletores alteram a rigidez das conexões semi-rígidas, sendo necessário, para a utilização da matriz de rigidez do elemento, inserir modelos que, dado o momento fletor nas extremidades, encontre a rigidez da conexão que será utilizada para tal construção, mostrados no capítulo 3.

Para considerar o comportamento inelástico das barras será importante utilizar-se das forças axiais e dos momentos fletores nas barras, pois estes alteram o valor do módulo de elasticidade, quando a barra encontra-se no regime inelástico, mostrado no capítulo 2. Este módulo de elasticidade também é utilizado na montagem da matriz de rigidez do elemento.

Sendo assim, em cada passo de iteração, no cálculo de segunda-ordem, é necessário, além da verificação da força axial nos elementos, a verificação do momento fletor e a utilização de modelos para considerar as conexões semi-rígidas e o regime inelástico na estrutura.

Para a consideração do regime inelástico, foram introduzidos no programa três modelos para a representação do comportamento da relação força-deslocamento, sendo utilizado o modelo proposto pelo Column Research Council (CRC), o modelo proposto pela AISC Load and Resistance Factor Design (LRFD)¹⁴ e um modelo proposto pela NBR-8800 – Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios³⁹, mostrados no capítulo 2.

Para a análise em teoria de primeira ordem, segunda ordem ou instabilidade, o processo para considerar o efeito do regime inelástico é introduzido em cada iteração do cálculo. Para cada iteração são calculadas as tensões em cada barra e calculado o módulo de elasticidade tangente segundo o modelo adotado. O módulo de elasticidade tangente de cada barra é utilizado na próxima iteração, e assim sucessivamente, até que a convergência seja atingida.

Como neste trabalho não são tratadas as rótulas plásticas, quando qualquer nó da estrutura encontrar-se plastificado, é assumido que a estrutura encontra-se instável, não assumindo assim as rótulas plásticas causadas pela plastificação de pontos isolados na barra e possíveis redistribuições dos esforços para as estruturas hiperestáticas.

A introdução do comportamento semi-rígido das conexões pode-se dividir em dois tipos de análise, considerando a rigidez da conexão como constante, modelo linear, e utilizando-se de modelos considerando a rigidez da conexão dada por expressões matemáticas não lineares, como mostrado no capítulo 3.

Para a análise considerando a rigidez da conexão constante, a rigidez tangente da conexão de cada barra é informado no início do cálculo e esta é usada para todo o processo iterativo, não sendo alterada pelos esforços.

A análise considerando os modelos não lineares que descrevem o comportamento da relação momento-rotação da conexão são mais complexos. Para

seu uso, faz-se necessário, a utilização de incrementos de carregamentos. Estes incrementos de carregamentos serão dados em passos, inicialmente com um carregamento pequeno e um pequeno aumento de carregamento em cada passo, até atingir o carregamento total desejado. Com isso consegue-se que a curva do modelo da conexão seja percorrida, proporcionando assim análises mais realistas.

Para a consideração destes incrementos de carregamentos será adotado inicialmente que todas as ações atuantes na estrutura, no primeiro passo serão assumidas como 1% do seu valor, utiliza-se a rigidez tangente inicial de cada conexão e faz-se todas as iterações necessárias para o tipo de análise, até alcançar a convergência. Com os esforços calculados no primeiro passo, calcula-se novamente a rigidez tangente de cada conexão, utilizando os modelos adotados, e faz-se um incremento apenas nas ações da estrutura, somando o valor das ações utilizadas no passo anterior mais 1% das ações totais. Com as novas ações e as novas rigidezes das conexões, inicia-se novamente todas as iterações necessárias. Repete-se este processo até que as ações totais sejam alcançadas.

Capítulo 5

EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.1 Exemplo Numérico 1

Este exemplo tem como objetivo avaliar os resultados obtidos através de análise computacional, utilizando as funções de rigidez em teoria de pequenos deslocamentos, no regime elástico. Para isto, determinou-se a carga (ação) de instabilidade de uma barra bi-articulada. Este exemplo representa um problema de auto-valor, carga crítica, de solução conhecida, obtida pela equação de Euler. Os dados geométricos da barra são apresentados na figura 5.1. Na análise computacional utilizando o método das funções de rigidez, a barra foi representada por apenas um elemento.

É importante ressaltar que o valor encontrado para “ W_α ” representa um parâmetro que multiplica o vetor das ações que estão aplicadas na barra em análise.

A carga crítica dado por Euler é dada por:

$$P_{\text{Euler}} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (5.1)$$

A carga crítica dada pelo programa computacional utilizando as funções de rigidez é de 232,68 kN, a qual produz o mesmo valor dado pela equação de Euler.

Para o regime inelástico, utilizando a teoria do módulo tangente, considerando a curva do CRC, pode-se encontrar a instabilidade da barra, tanto teoricamente, equação 2.66, quanto através do programa computacional, dada por 199,64 kN, com o

módulo de elasticidade tangente “ E_t ” calculado, equação 2.67, igual a 17.589,21 kN/cm².

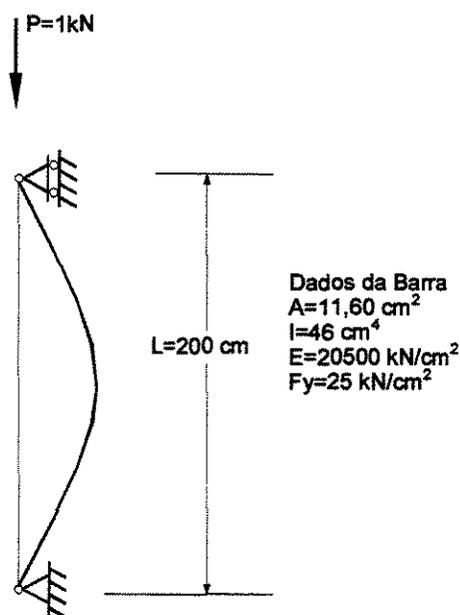


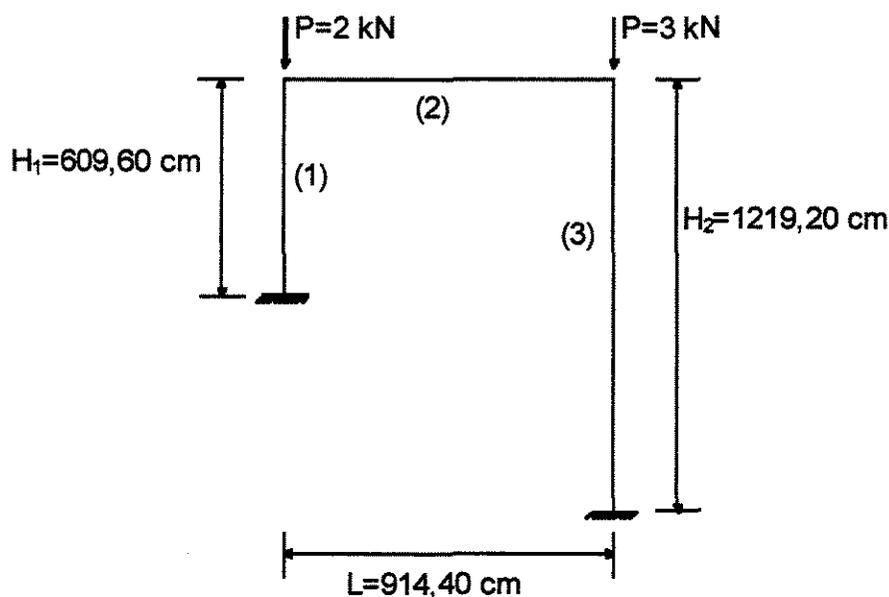
Figura 5.1 – Barra Bi-articulada de Euler.

5.2 Exemplo Numérico 2

Este segundo exemplo foi extraído do artigo escrito por HALDORSSON & WANG⁵⁵, o qual apresenta uma estrutura reticulada geometricamente não simétrica e carregamento aplicado com intensidades diferentes nos nós da estrutura. Os dados geométricos da estrutura são apresentados na figura 5.2. A análise de instabilidade da estrutura realizada pelos autores HALDORSSON & WANG⁵⁵ foi baseado no método das funções de rigidez no regime elástico. Os resultados são apresentados na tabela 5.1.

Como pode-se observar, o resultado obtido pela análise descrita neste trabalho e o valor encontrado pelos autores do artigo são muito próximos.

Tabela 5.1 – Resultados Obtidos na Análise Realizada por HALDORSSON & WANG ⁵⁵ e pelo Autor.	
HALDORSSON & WANG (W_{cr})	Programa desenvolvido pelo autor (W_{cr})
1.814,87	1.815,07



Dados da Estrutura		
(1)	(2)	(3)
$A=337,74\text{cm}^2$	$A=468,56\text{cm}^2$	$A=400,73\text{cm}^2$
$I=11987,47\text{cm}^4$	$I=31966,56\text{cm}^4$	$I=19979,11\text{cm}^4$
$E=20684,27\text{kN/cm}^2$	$E=20684,27\text{kN/cm}^2$	$E=20684,27\text{kN/cm}^2$

Figura 5.2 – Estrutura Reticulada Plana Analisada por HALDORSSON & WANG⁵⁵.

Embora a formulação feita por HALDORSSON & WANG⁵⁵ e a formulação utilizada neste trabalho tenham algumas diferenças devido as simplificações adotadas, pode-se observar que o valor da carga crítica encontrado neste trabalho está muito próximo do valor encontrado pelos autores do artigo.

5.3 Exemplo Numérico 3

Neste exemplo, a carga crítica de instabilidade elástica do edifício industrial, mostrado na figura 5.3, pode ser encontrada no trabalho de REQUENA⁴⁹ o qual utilizou as funções de rigidez no regime elástico para solução do problema. Para resolver este exemplo foram utilizados seis elementos de barra. Os resultados obtidos nestas análises são apresentados na tabela 5.2.

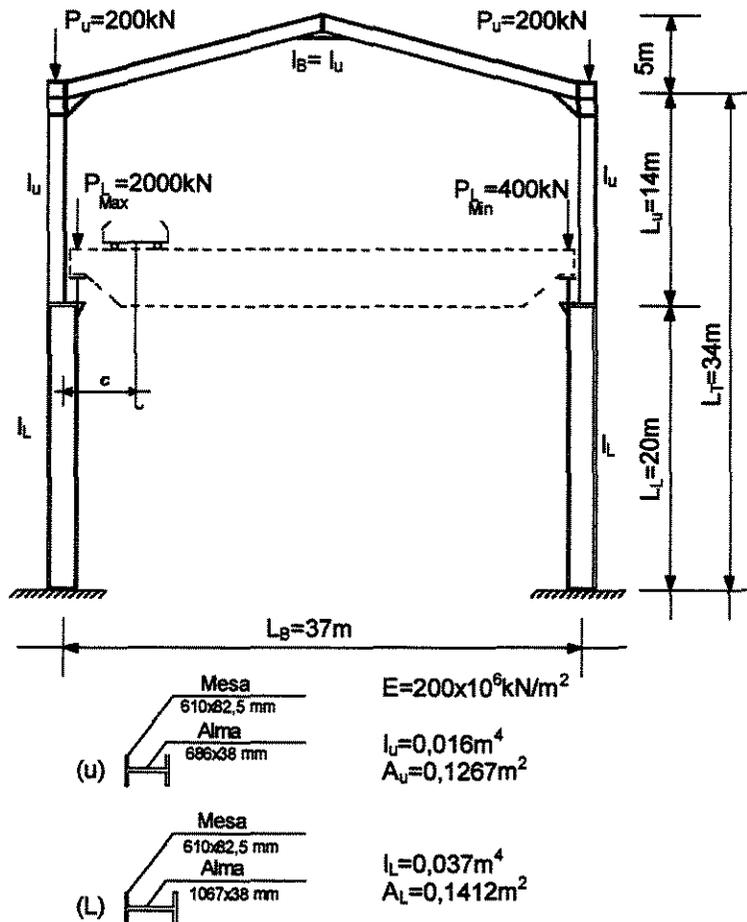


Figura 5.3 – Estrutura do Edifício Industrial.

Tabela 5.2 – Resultados Comparativos.	
Programa desenvolvido por REQUENA ⁴⁹ (W_{cr})	Programa desenvolvido pelo Autor (W_{cr})
35,898	35,902

A pequena diferença entre os resultados apresentados neste exemplo deve-se as precisões e tolerâncias empregadas nos programas, tendo em vista que usam a mesma técnica.

5.4 Exemplo Numérico 4

Este exemplo tem como objetivo testar o programa desenvolvido, obtendo através do cálculo da carga de instabilidade elástica e inelástica de uma barra bi-articulada mostrada na figura 5.4, as curvas de flambagem dadas pelas normas. Para testar o programa desenvolvido, variou-se a esbeltez da barra para fazer com que, inicialmente, a barra atingisse a instabilidade na fase elástica e posteriormente na fase inelástica.

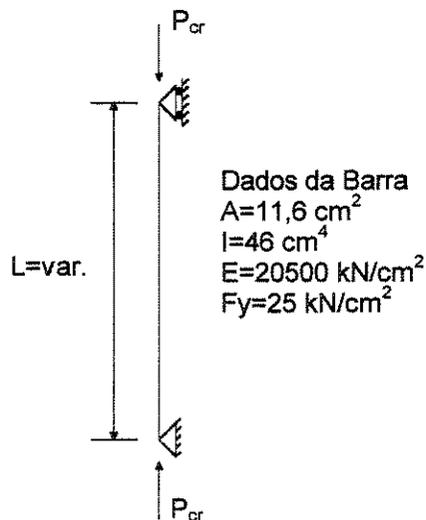


Figura 5.4- Análise de Instabilidade Elástica e Inelástica de uma Barra Bi-Articulada de Comprimento Variável.

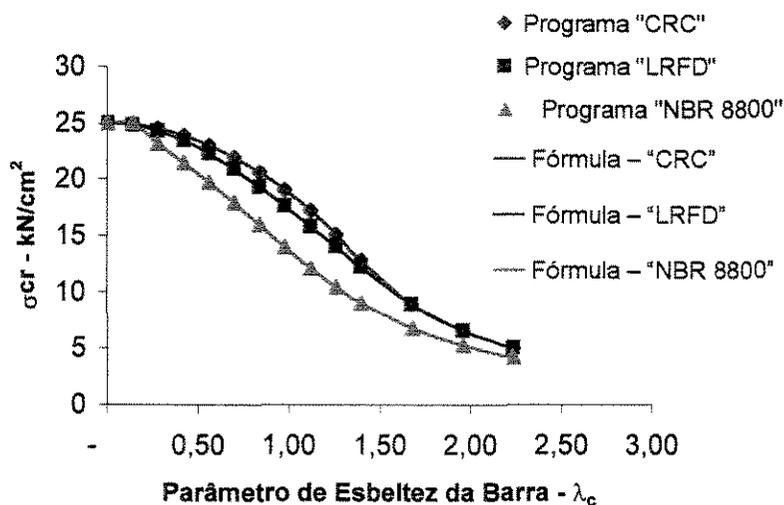


Figura 5.5 - Tensão Crítica x Parâmetro de Esbeltez.

Tabela 5.3 – Relação Tensão Crítica x Parâmetro de Esbeltez						
λ_c	Fórmula "CRC"	Programa "CRC"	Fórmula "LRFD"	Programa "LRFD"	Fórmula "NBR8800"	Programa "NBR8800"
0,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00
0,28	24,51	24,51	24,30	24,30	23,14	23,14
0,56	23,05	23,05	22,30	22,30	19,76	19,76
0,84	20,62	20,62	19,33	19,33	15,97	15,97
1,12	17,21	17,21	15,82	15,82	12,11	12,11
1,40	12,83	12,83	12,23	12,23	9,00	9,00
1,95	6,55	6,55	6,55	6,55	5,25	5,25
2,23	5,01	5,01	5,01	5,01	4,16	4,16

5.5 Exemplo Numérico 5

Neste exemplo, foi analisada uma barra bi-articulada com pequena excentricidade na aplicação da ação. O objetivo deste exemplo foi obter as várias curvas de carregamento em função dos deslocamentos horizontais no centro da barra,

denominada “ δ ”. Para considerar o comportamento do regime inelástico da barra foi utilizado a curva dada pelas especificações do “LRFD”. A primeira curva foi obtida através da análise em primeira-ordem em regime elástico, a segunda curva representa a análise em primeira-ordem em regime inelástico, já a terceira curva representa a análise em segunda-ordem no regime elástico e finalmente a quarta curva representa a análise em segunda-ordem no regime inelástico.

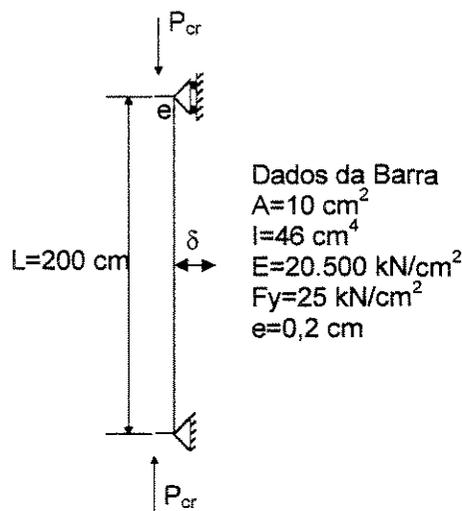


Figura 5.6 - Barra Bi-Articulada Com Carregamento Excêntrico.

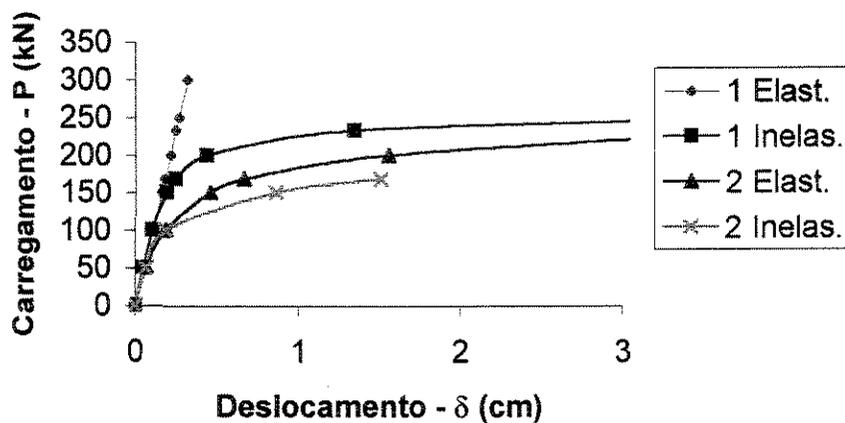


Figura 5.7 – Carregamento Aplicado na Barra x Deslocamento Horizontal.

Tabela 5.4 Relação entre a Ação na Barra e o Deslocamento Horizontal				
P (kN)	1ª Ordem	1ª Ordem	2ª Ordem	2ª Ordem
	Elástico (cm)	Inelástico (cm)	Elástico (cm)	Inelástico (cm)
0	0	0	0	0
50	0,053	0,053	0,068	0,068
100	0,106	0,106	0,188	0,189
150	0,159	0,191	0,456	0,856
168,5	0,179	0,247	0,662	
200	0,212	0,436	1,551	
232,5	0,247	1,341		
250	0,265			
300	0,318			

Pode-se observar que o comportamento do regime inelástico só começa a alterar os valores dos deslocamentos após as tensões ultrapassarem o limite de proporcionalidade, a qual é adotada pela "LRFD" como "0,39 Fy", ou seja, "P=97,5 kN". Pode-se calcular a carga crítica de instabilidade para a análise em segunda ordem no regime elástico, "P=232,68 kN", e a carga crítica de instabilidade no regime inelástico, "P=168,52 kN".

5.6 Exemplo Numérico 6

VOGEL²⁹ no seu artigo "Calibrating Frames" apresenta uma série de análise de instabilidade em estruturas reticuladas. Nesta análise foi considerado a inelasticidade das barras concentrada nos nós da estrutura. O objetivo deste exemplo é determinar a instabilidade da estrutura. O pórtico analisado (figura 5.8) está sujeito a forças verticais e horizontais que são incrementadas durante a análise para a determinação do parâmetro de instabilidade.

A estrutura apresenta carga de instabilidade com barras no regime inelástico. Ela também foi analisada por LIEW et alii⁵⁶ através de um programa desenvolvido

utilizando o método das funções de rigidez. Os resultados destas análises podem ser encontrados na tabela 5.5.

Observa-se que os resultados obtidos utilizando a curva do “CRC” aproximam-se mais dos resultados de VOGEL²⁹, consideração apenas da inelasticidade do material. Para os resultados obtidos utilizando a curva do “LRFD” aproxima-se mais dos resultados de LIEW et alli⁵⁶, pois estes resultados consideram além do comportamento inelástico o efeito da imperfeição geométrica das barras. Para a convergência desta análise foi adotado uma tolerância de 3%.

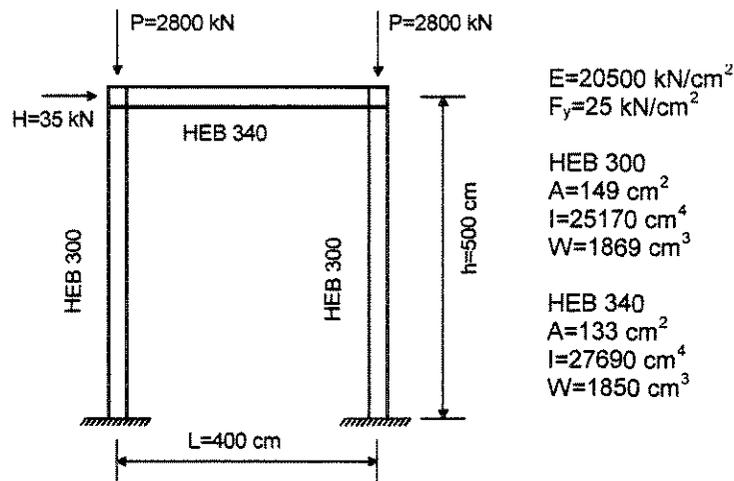


Figura 5.8 – Pórtico Analisado por VOGEL²⁹.

Tabela 5.5 – Resultados Comparativos.

Instabilidade Inelástica	VOGEL ²⁹	LIEW et alli ⁵⁶	Programa (CRC)	Programa (LRFD)
W_{cr}	1,017	0,945	0,987	0,959

5.7 Exemplo Numérico 7

Este exemplo mostra a variação do momento de extremidade devido a um carregamento uniformemente distribuído em uma barra na presença de uma força axial.

Para representar este efeito foi analisado uma barra bi-engastada solicitada por um carregamento uniformemente distribuído ao longo desta, associado a um esforço axial, figura 5.9. A análise considera o efeito de segunda-ordem no regime elástico, tanto no cálculo da estrutura como no cálculo das ações de extremidade. A ação distribuída foi mantida constante enquanto que a ação axial foi considerada como uma variável. Os resultados são mostrados na figura 5.10.

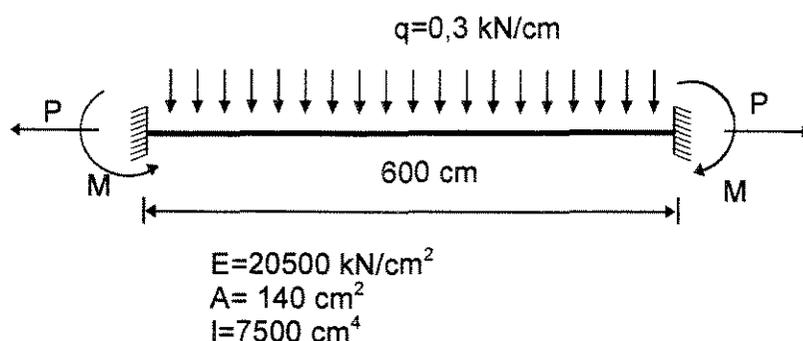


Figura 5.9 – Barra Bi-Engastada com Carregamento Uniformemente Distribuído.

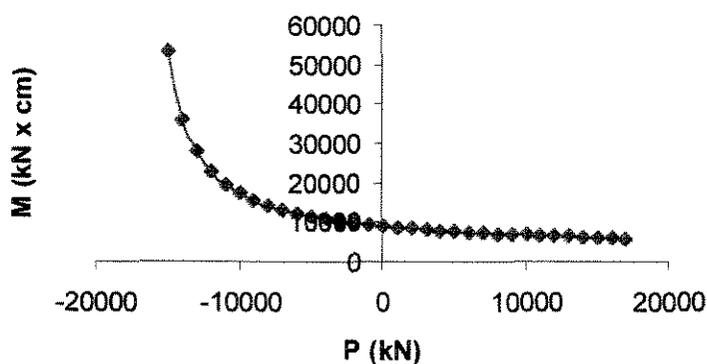


Figura 5.10 – Esforço Axial “P” x Momento de Extremidade “M”.

Para obter os resultados em análise de segunda-ordem, considerando as ações de extremidades em primeira-ordem, adotado por muitos pesquisadores, é necessário subdividir a barra em sub-elementos, tabela 5.6, enquanto que quando é adotado as

ações de extremidades em teoria de segunda-ordem, como mostrado no capítulo 4 deste trabalho, esta divisão não se faz necessária.

Para mostrar esta diferença será adotado o esforço axial "P" como "P=±15000 kN".

Esforço Axial "P" (kN)	Número de Elementos	Ações de Extremidade em Primeira-Ordem "M" (kN×cm)	Ações de Extremidade em Segunda-Ordem "M" (kN×cm)
P = -15000 (Compressão)	1	9.000	53.606
	2	53.189	53.606
	3	53.534	53.606
	4	53.584	53.606
	6	53.601	53.606
	10	53.605	53.606
P = 15000 kN (Tração)	1	9.000	6.086
	2	6.358	6.086
	3	6.145	6.086
	4	6.105	6.086
	6	6.090	6.086
	10	6.086	6.086

A figura 5.10 demonstra que valores pequenos de força axial não alteram significativamente as ações de extremidades da barra.

Na tabela 5.6 pode-se observar que quando é utilizada as ações de extremidades em teoria de primeira-ordem, para cálculo em teoria de segunda-ordem, para a barra descrita com apenas um único elemento, o momento calculado na extremidade da barra é igual ao momento dado em teoria de primeira-ordem, não

sendo alterado pela força axial presente na barra, isso se deve a vinculação adotada neste exemplo.

5.8 Exemplo Numérico 8

Este exemplo mostra uma barra bi-engastada com duas molas nas extremidades, as quais variam a rigidez igualmente até tornar a barra bi-articulada, foi verificada a relação entre a carga crítica e a rigidez das molas. Pode-se observar que a carga crítica varia entre a carga crítica de Euler, 232,68kN, para a barra bi-articulada até quatro vezes a carga crítica de Euler, 930,70kN, para a barra bi-engastada, ou seja, o valor do comprimento efetivo de flambagem varia de “L” até “0,5L”.

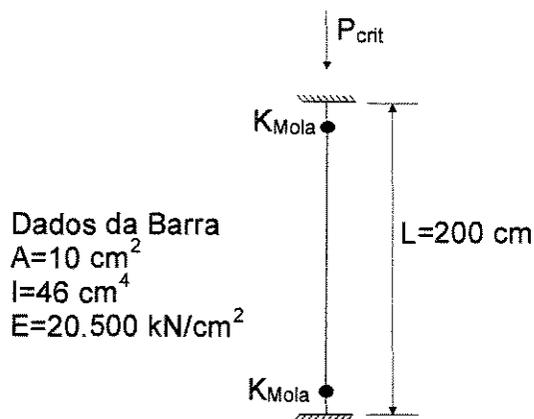


Figura 5.11 – Barra Bi-Engastada com Molas nas Extremidades.

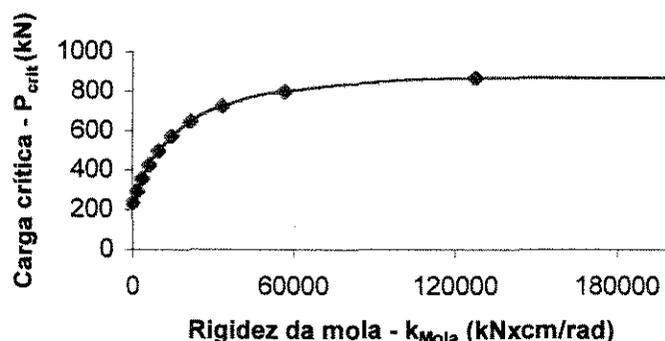


Figura 5.12 – Carga Crítica x Rigidez da Mola.

Tabela 5.7 – Relação entre a Carga Crítica e a Rigidez da Mola

k_{Mola} (kNxcn/rad)	Carga Crítica (kN)	k_{Mola} (kNxcn/rad)	Carga Crítica (kN)
1E+10	930,71	9430	388,21
56580	695,98	3536	298,23
21218	515,11	0	232,68

Para desenvolver este exemplo numérico, variou-se a rigidez da mola " K_{Mola} ", nas duas extremidades da barra, de zero até um valor razoavelmente grande, suficiente para a rigidez da conexão representar uma ligação rígida. A rigidez da "mola" é fixada para cada análise. O comportamento da conexão foi considerado linear, rigidez constante.

5.9 Exemplo Numérico 9

Neste exemplo foi analisado um pórtico com carregamento horizontal e vertical, figura 5.13, na análise foi alterada a condição de contorno dos nós 1 e 2, sendo que na primeira análise, foi considerado que estes nós eram capazes de transmitir totalmente o momento de uma barra para a outra, rigidamente conectada. Na segunda análise foi considerado que estes nós não possuíam rigidez para transferir nenhum momento entre as barras adjacentes, articulação. Na terceira análise foi considerado que os nós possuíam uma capacidade de transferir parcialmente o momento entre as barras adjacentes, conexões semi-rígidas. Foram levantadas curvas da relação força x deslocamento para mostrar a influência dos diversos tipos de cálculos, em primeira ou segunda ordem, com ou sem a consideração do regime inelástico e a influência das conexões semi-rígidas.

Na figura 5.14, são plotadas as curvas da relação esforço aplicado na vertical com deslocamento horizontal, neste exemplo os nós foram considerados rigidamente conectados e foram executadas as análises em teoria de primeira ordem no regime elástico e inelástico, "1 Elast." e "1 Inelas." respectivamente, e em teoria de segunda ordem no regime elástico e inelástico, "2 Elast." e "2 Inelas." respectivamente. Os

valores de instabilidade encontrados para este exemplo foram, no regime elástico, " $P_v = 527,41\text{kN}$ ", no regime inelástico, " $P_v = 260,23\text{kN}$ ", e o deslocamento lateral em primeira ordem é de " $\delta=0,083\text{ cm}$ ", valor do deslocamento inicial, " $P_v=0$ ", para todos os tipos de análises.

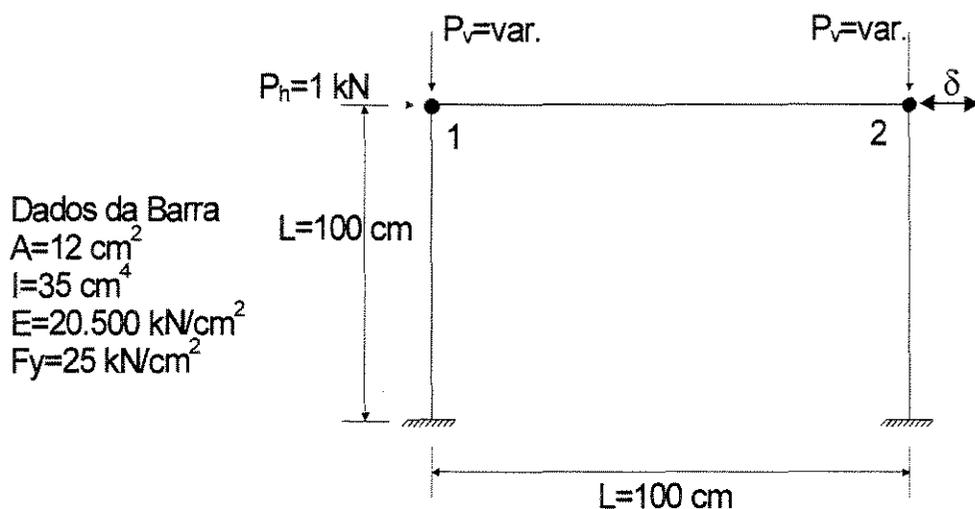


Figura 5.13 – Pórtico com Conexões de Molas no Encontro das Barra.

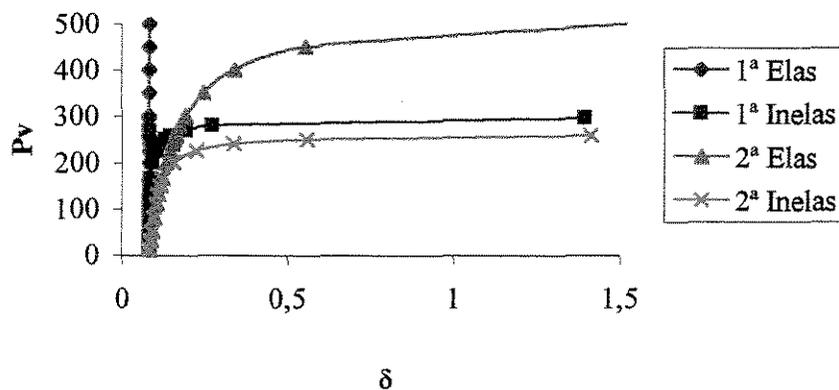


Figura 5.14 – Gráfico de Esforço x Deslocamento para os Nós 1 e 2 Rigidamente Conectados.

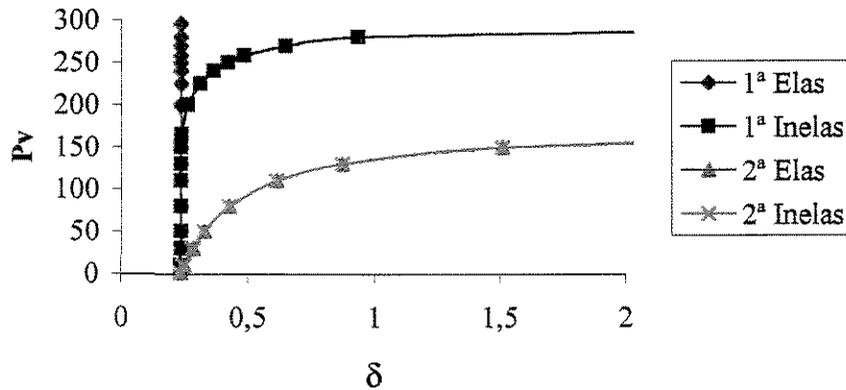


Figura 5.15 – Gráfico de Esforço x Deslocamento para os Nós 1 e 2 Articulados.

Na figura 5.15, os nós 1 e 2 foram considerados como articulados para as análises. Os valores de instabilidade encontrados para este exemplo foram, no regime elástico, " $P_v = 176,95\text{kN}$ ", no regime inelástico, " $P_v = 172,97\text{kN}$ ", e o deslocamento lateral em primeira ordem é de " $\delta=0,2322\text{ cm}$ ", valor do deslocamento inicial, " $P_v=0$ ", para todos os tipos de análises.

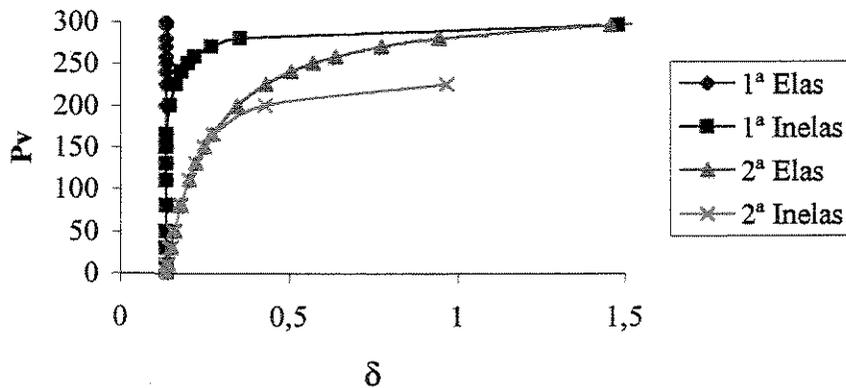


Figura 5.16 – Gráfico de Esforço x Deslocamento para os Nós 1 e 2 com Conexões Semi-Rígidas, com Rigidez das Conexões da Viga, nos Nós 1 e 2, de " $k=12.300\text{ kNxcn/rad}$ ".

Na figura 5.16, os nós 1 e 2, na viga, foram considerados como conexões semi-rígidas com capacidade de transferir parcialmente o momento entre as barras adjacentes para as análises. Os valores de instabilidade encontrados para este exemplo foram, no regime elástico, " $P_v = 324,13 \text{ kN}$ ", no regime inelástico, " $P_v = 238,04 \text{ kN}$ ", e o deslocamento lateral em primeira ordem é de " $\delta = 0,1327 \text{ cm}$ ", valor do deslocamento inicial, " $P_v = 0$ ", para todos os tipos de análises.

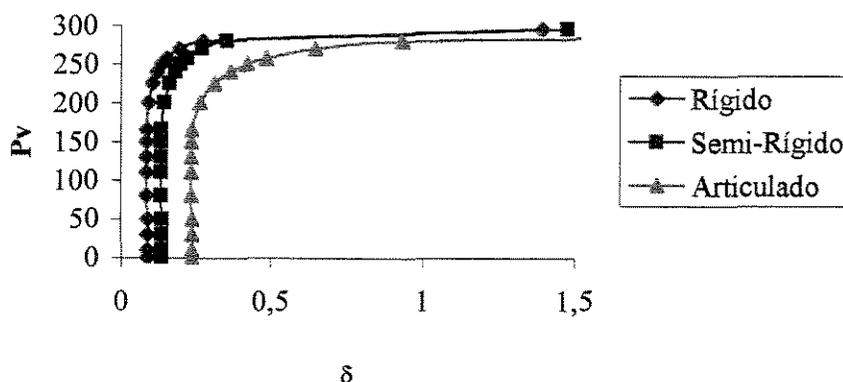


Figura 5.17 – Gráfico de Esforço x Deslocamento para Análise em Primeira Ordem no Regime Inelástico.

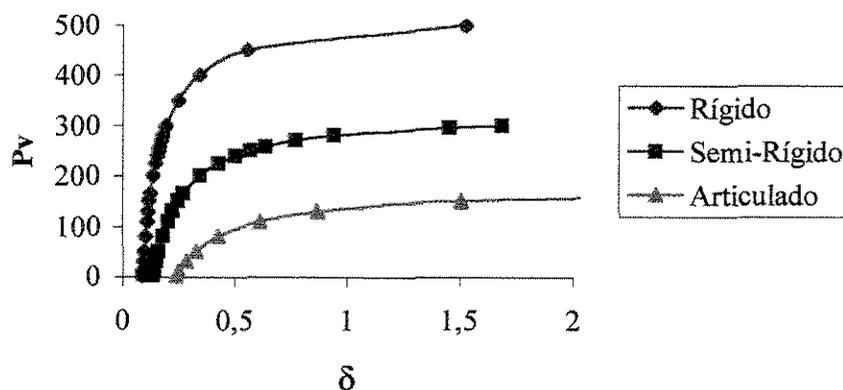


Figura 5.18 – Gráfico de Esforço x Deslocamento para Análise em Segunda Ordem no Regime Elástico.

Na figura 5.17 são apresentadas as curvas da relação esforço-deslocamento da estrutura, em teoria de primeira ordem no regime inelástico, para as três condições de contorno consideradas neste exemplo.

Na figura 5.18 são plotadas as curvas da relação esforço-deslocamento da estrutura, em teoria de segunda ordem no regime elástico, para as três condições de contorno consideradas neste exemplo.

Na figura 5.19 são apresentadas as curvas da relação esforço-deslocamento da estrutura, em teoria de segunda ordem no regime inelástico, para as três condições de contorno consideradas neste exemplo.

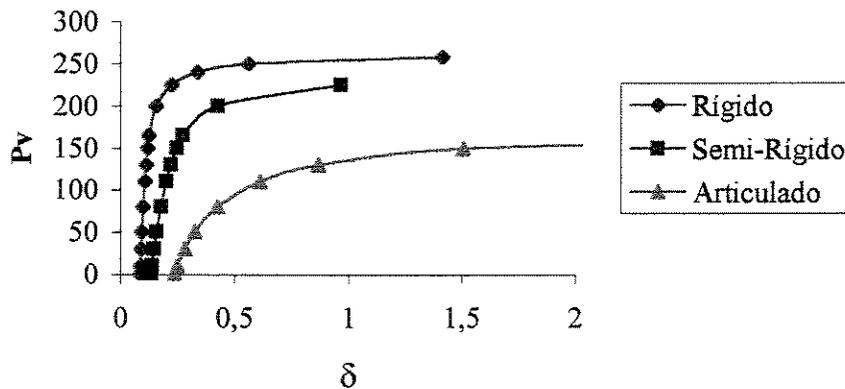


Figura 5.19 – Gráfico de Esforço x Deslocamento para Análise em Segunda Ordem no Regime Inelástico.

5.10 Exemplo Numérico 10

Este exemplo apresenta um pórtico analisado por BHATTI & HINGTGEN⁵⁷. Os dados geométricos da estrutura são apresentados na figura 5.20. Nas análises foi assumido que a estrutura se comportaria com todas as ligações rígidas ou com ligações semi-rígidas, utilizando teoria de primeira e segunda ordem no regime elástico. Foram consideradas que apenas as vigas eram conectadas aos pilares com conexões semi-rígidas, foi utilizado a conexão de chapa de topo estendida. Para esta análise foi adotado uma simplificação do comportamento da conexão semi-rígida, assumindo seu

comportamento como bi-linear, rigidez constante, tendo como parâmetro apenas a rigidez inicial e o momento de plastificação da conexão, figura 5.21. Os resultados comparativos deste exemplo são apresentados na tabela 5.8 e tabela 5.9. As unidades são mostradas no sistema original do artigo pesquisado e no sistema internacional.

Dados da Estrutura:

Pilares

$$A = 181,94 \text{ cm}^2 \text{ (28,2 in}^2\text{)}$$

$$I = 34.672 \text{ cm}^4 \text{ (833 in}^4\text{)}$$

$$E = 19.995,5 \text{ kN/cm}^2 \text{ (29.000 ksi)}$$

Vigas

$$A = 90,97 \text{ cm}^2 \text{ (14,1 in}^2\text{)}$$

$$I = 20.187 \text{ cm}^4 \text{ (485 in}^4\text{)}$$

$$E = 19.995,5 \text{ kN/cm}^2 \text{ (29.000 ksi)}$$

Cargas

$$P = 444,8 \text{ kN (100 kips)}$$

$$H = 44,48 \text{ kN (10 kips)}$$

Conexão semi-rígida (o)

$$K_i = 8.888.435 \text{ kN cm/rad}$$

$$\text{(786.732 k-in/rad)}$$

$$M_u = 22.472 \text{ kN cm}$$

$$\text{(1.989 k-in)}$$

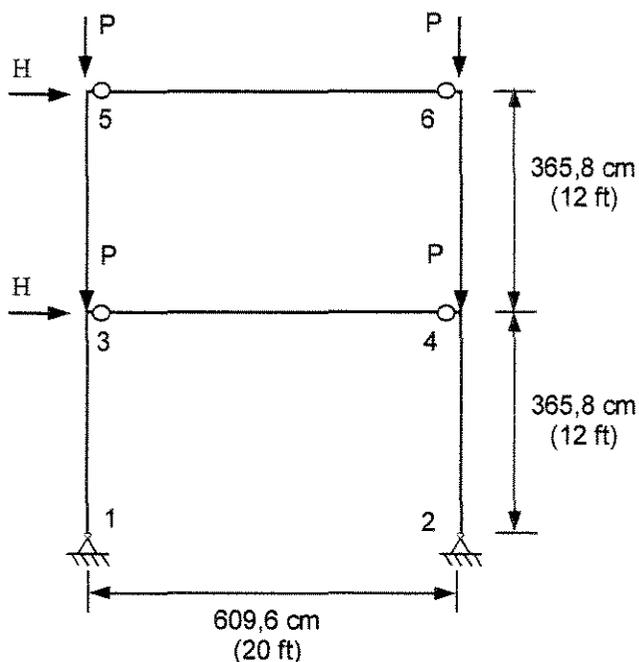


Figura 5.20 – Pórtico Analisado por BHATTI & HINGTGEN⁵⁷.

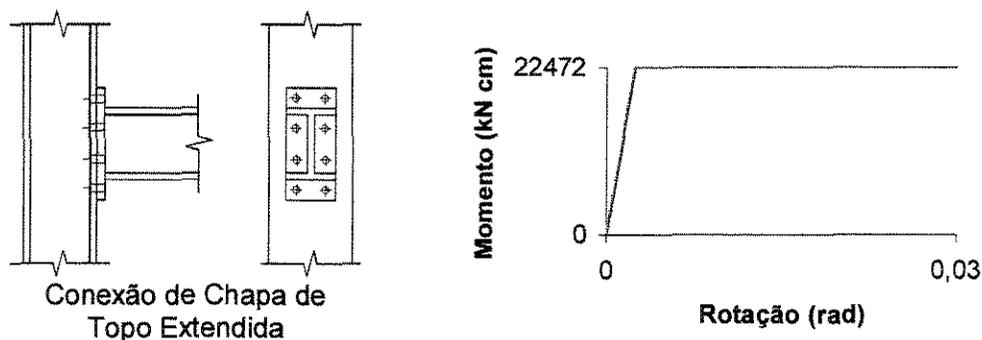


Figura 5.21 – Tipo da Conexão e Comportamento Adotado por BHATTI & HINGTGEN⁵⁷ para Considerar as Conexões Semi-Rígidas.

Tabela 5.8 – Deslocamento Lateral (cm (in))

Nó	1ª Ordem Conexões Rígidas		2ª Ordem Conexões Rígidas		2ª Ordem Conexões Semi-Rígidas	
	BHATTI & HINGTGEN	Programa Autor	BHATTI & HINGTGEN	Programa Autor	BHATTI & HINGTGEN	Programa Autor
3	2,568 (1,011)	2,568 (1,011)	2,967 (1,168)	2,967 (1,168)	3,752 (1,477)	3,752 (1,477)
5	3,833 (1,509)	3,833 (1,509)	4,397 (1,731)	4,397 (1,731)	5,822 (2,292)	5,822 (2,292)

Tabela 5.9 – Momento Máximo Absoluto (kN cm (kip-in))

Barra nó _i – nó _r	1ª Ordem Conexões Rígidas		2ª Ordem Conexões Rígidas		2ª Ordem Conexões Semi-Rígidas	
	BHATTI & HINGTGEN	Programa Autor	BHATTI & HINGTGEN	Programa Autor	BHATTI & HINGTGEN	Programa Autor
1 3 – 4	16.382 (1.450)	16.382 (1.450)	18.687 (1.654)	18.709 (1.656)	18.461 (1.634)	18.483 (1.636)
2 5 – 6	8.033 (711)	8.033 (711)	8.982 (795)	8.982 (795)	10.191 (902)	10.191 (902)
3 1 – 3	16.303 (1.443)	16.303 (1.443)	18.947 (1.677)	18.947 (1.677)	19.647 (1.739)	19.647 (1.739)
4 2 – 4	16.235 (1.437)	16.235 (1.437)	18.856 (1.669)	18.856 (1.669)	19.557 (1.731)	19.557 (1.731)
5 3 – 5	8.033 (711)	8.033 (711)	8.971 (794)	8.971 (794)	10.191 (902)	10.179 (901)
6 4 – 6	8.033 (711)	8.033 (711)	8.982 (795)	8.982 (795)	10.191 (902)	10.191 (902)

5.11 Exemplo Numérico 11

Neste exemplo é apresentado um pórtico plano, figura 5.22, analisado por BHATTI & HINGTGEN⁵⁷. Foram assumidos primeiramente que as conexões entre vigas e colunas se comportassem como perfeitamente rígidas e depois que estas conexões se comportassem com rigidez constante, utilizando o mesmo modelo do exemplo anterior, figura 5.21. Na análise foi utilizada a teoria de segunda ordem no regime elástico. Os resultados comparativos deste exemplo são mostrados na tabela 5.10 e tabela 5.11. As unidades são mostradas no sistema original do artigo pesquisado e no sistema internacional.

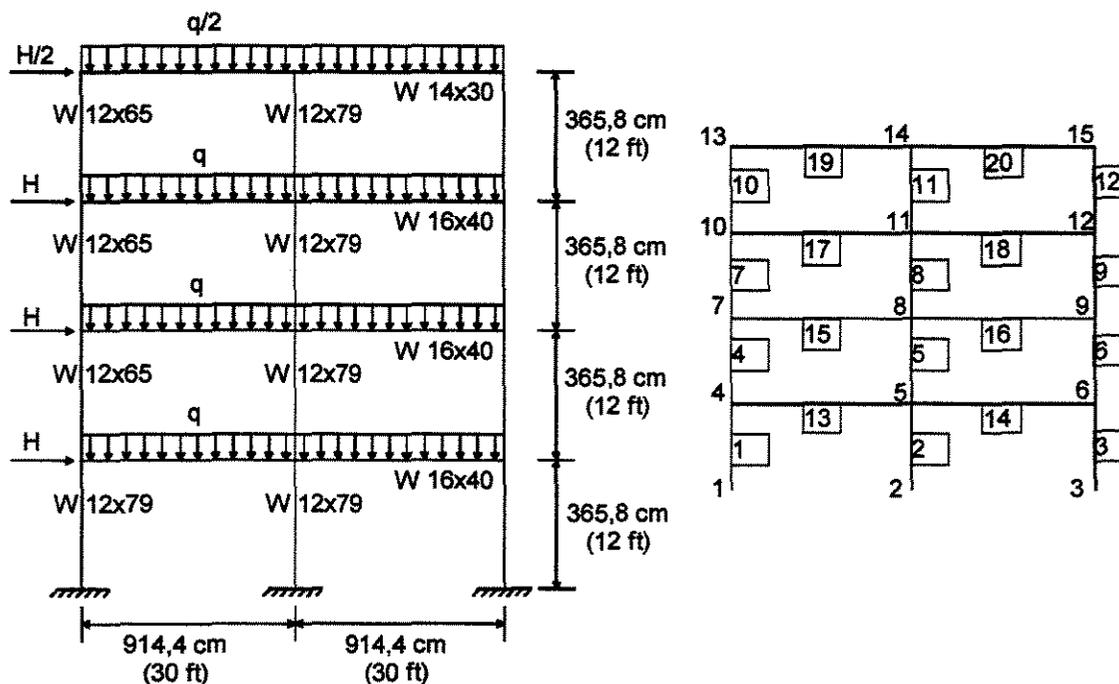


Figura 5.22 – Estrutura Analisada por BHATTI & HINGTGEN⁵⁷

Dados da estrutura:

Módulo de elasticidade - $E = 19.995,5 \text{ kN/cm}^2$ (29.000 ksi)

Perfil W 12x79:

Área da seção transversal - $A = 149,68 \text{ cm}^2$ (23,2 in²)

Inércia ao Momento Fletor – $I = 27.555 \text{ cm}^4$ (662 in^4)

Perfil W 12x65:

Área da seção transversal – $A = 123,23 \text{ cm}^2$ (19,1 in^2)

Inércia ao Momento Fletor – $I = 22.185 \text{ cm}^4$ (533 in^4)

Perfil W 16x40:

Área da seção transversal – $A = 76,13 \text{ cm}^2$ (11,8 in^2)

Inércia ao Momento Fletor – $I = 21.561 \text{ cm}^4$ (518 in^4)

Perfil W 14x30:

Área da seção transversal – $A = 57,10 \text{ cm}^2$ (8,85 in^2)

Inércia ao Momento Fletor – $I = 12.112 \text{ cm}^4$ (291 in^4)

Cargas:

Carga horizontal – $H = 31,14 \text{ kN}$ (7,0 kips)

Carregamento uniformemente distribuído – $q = 0,263 \text{ kN/cm}$ (0,15 kips/in)

Conexões semi-rígidas:

Rigidez da conexão - $K_i = 8.888.435 \text{ kN cm/rad}$ (786.732 k-in/rad)

Momento último de plastificação – $M_u = 22.472 \text{ kN cm}$ (1.989 k-in)

Tabela 5.10 – Deslocamento Lateral (cm (in))				
Nó	Conexões Rígidas		Conexões Semi-Rígidas	
	BHATTI & HINGTGEN	Programa Autor	BHATTI & HINGTGEN	Programa Autor
4	0,683 (0,269)	0,683 (0,269)	0,772 (0,304)	0,772 (0,304)
7	1,684 (0,663)	1,684 (0,663)	1,958 (0,771)	1,958 (0,771)
10	2,390 (0,941)	2,390 (0,941)	2,835 (1,116)	2,832 (1,115)
13	2,817 (1,109)	2,817 (1,109)	3,373 (1,328)	3,371 (1,327)

Tabela 5.11 – Momento Máximo Absoluto (kN cm (kip-in))					
Barra	Conexões Rígidas		Conexões Semi-Rígidas		
	BHATTI & HINGTGEN	Programa Autor	BHATTI & HINGTGEN	Programa Autor	Dif %
1	6.033 (534)	6.033 (534)	6.993 (619)	7.095 (628)	0,72%
2	10.812 (957)	10.812 (957)	11.479 (1.016)	11.479 (1.016)	0,00%
3	13.580 (1.202)	13.580 (1.202)	14.168 (1.254)	14.066 (1245)	0,36%
4	5.141 (455)	5.141 (455)	4.564 (404)	4.350 (385)	2,41%
5	7.423 (657)	7.423 (657)	7.332 (649)	7.332 (649)	0,00%
6	12.450 (1.102)	12.450 (1.102)	12.021 (1.064)	11.829 (1047)	0,81%
7	6.948 (615)	6.948 (615)	6.677 (591)	6.474 (573)	1,55%
8	5.355 (474)	5.344 (473)	5.604 (496)	5.604 (496)	0,00%
9	11.626 (1.029)	11.626 (1.029)	11.354 (1.005)	11.140 (986)	0,95%
10	7.954 (704)	7.954 (704)	7.762 (687)	7.592 (672)	1,10%
11	2.260 (200)	2.260 (200)	2.542 (225)	2.542 (225)	0,00%
12	9.264 (820)	9.264 (820)	9.174 (812)	9.050 (801)	0,68%

5.12 Exemplo Numérico 12

A estrutura reticulada apresentada na figura 5.25 foi analisada por KIM & CHEN¹⁸. Esta estrutura foi ensaiada por Stelmack. O pórtico de Stelmack foi construído com perfil de aço A36 com seção transversal W5x16. As conexões usadas nesta estrutura são de cantoneiras de topo e assentamento, L4x4x½ A36, parafusadas, figura 5.23. A relação do comportamento momento-rotação é mostrada na figura 5.24. O modelo utilizado para descrever o comportamento da conexão foi o modelo dos três parâmetros proposto por Kishi & Chen. Este modelo é composto de três parâmetros: rigidez inicial da conexão, “ R_{ki} ”; capacidade última ao momento, “ M_U ”; e, parâmetro de forma, “ n ”. Este modelo possui a seguinte forma:

$$M = \frac{R_{ki}\theta_r}{\left[1 + \left(\frac{\theta_r}{\theta_0}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}} \quad (5.2)$$

Sendo, “ M ” o momento fletor, “ θ_r ” a rotação na conexão e “ θ_0 ” a referência plástica a rotação, (M_U/R_{ki}).

Os parâmetros utilizados neste modelo foram dados pelos estudos de Kishi-Chen e Kim-Chen, mostrados na tabela 5.12.

O pórtico foi analisado em teoria de segunda ordem, no regime elástico, considerando as conexões semi-rígidas. Para a consideração das conexões semi-rígidas foi utilizado a rigidez tangente, “ R_k ”, a qual é dada pela primeira derivada da função que descreve o comportamento da relação momento-rotação da conexão, dada pela seguinte forma:

$$R_k = \frac{R_{ki}}{\left[1 + \left(\frac{\theta_r}{\theta_0}\right)^n\right]^{\frac{1}{n} + 1}} \quad (5.3)$$

Os resultado das análises deste exemplo são mostrados na figura 5.26 e na tabela 5.13.

Tabela 5.12 – Parâmetros Utilizados para Descrever o Comportamento da Conexão com o Modelo dos Três Parâmetros			
Autor	R_{ki}	M_u	n
Kim-Chen	4.250 kN-m/rad	24,9 kN-m	0,91
Kishi-Chen	4.499 kN-m/rad	23,5 kN-m	1,50

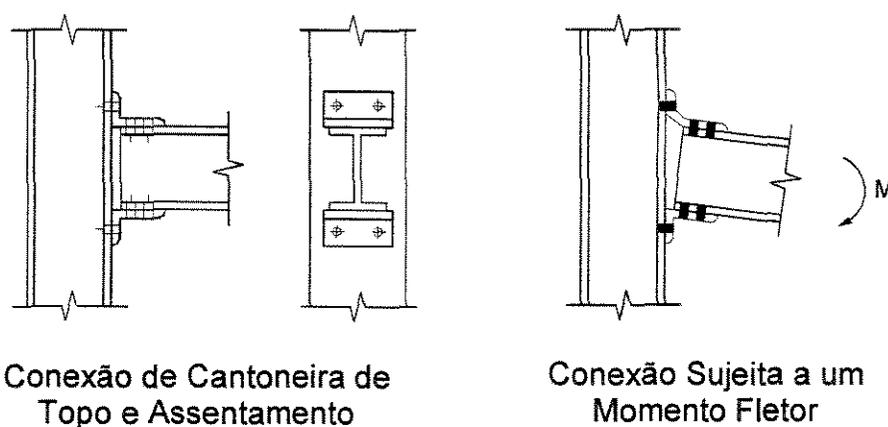


Figura 5.23 – Conexão Utilizada no Pórtico Analisado por KIM & CHEN¹⁸.

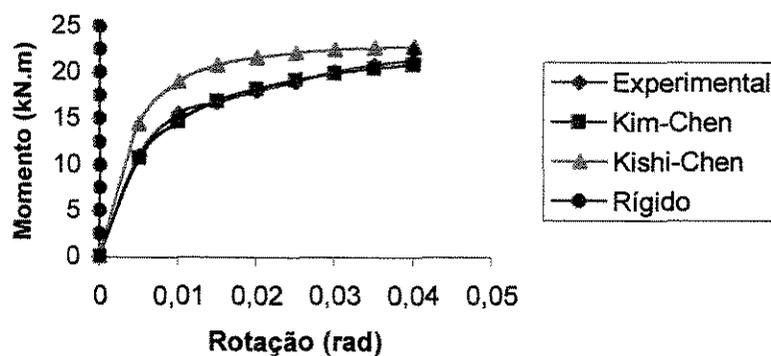


Figura 5.24 – Comportamento da Relação Momento-Rotação da Conexões Semi-Rígidas.

Dados da Estrutura:**Pilares e Vigas**

$$A = 3,02 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I = 8,866 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$E = 2,05 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$$

Cargas

$$P = 10,7 \text{ kN}$$

$$H = \text{Variável}$$

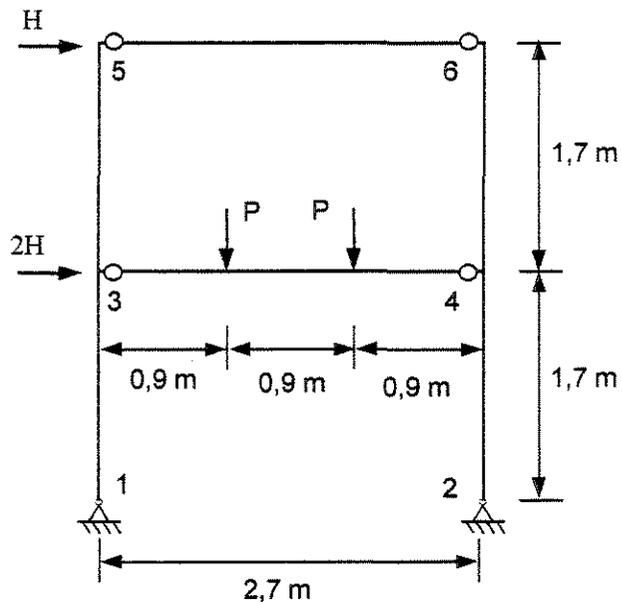


Figura 5.25 – Pórtico Analisado por KIM & CHEN¹⁸.

Tabela 5.13 – Deslocamentos Calculados pelo Programa Proposto pelo Autor. (mm)

Força "H"	Dados Experimentais	Modelo de Kim-Chen	Modelo de Kishi-Chen	Rígido
0	0	0	0	0
5	8,5	9,2	8,1	5,5
10	20	20,2	17,2	10,9
15	33,5	34,1	28,1	16,4
20	55	51,4	41,7	21,9
22,5	69	61,2	50,1	24,6

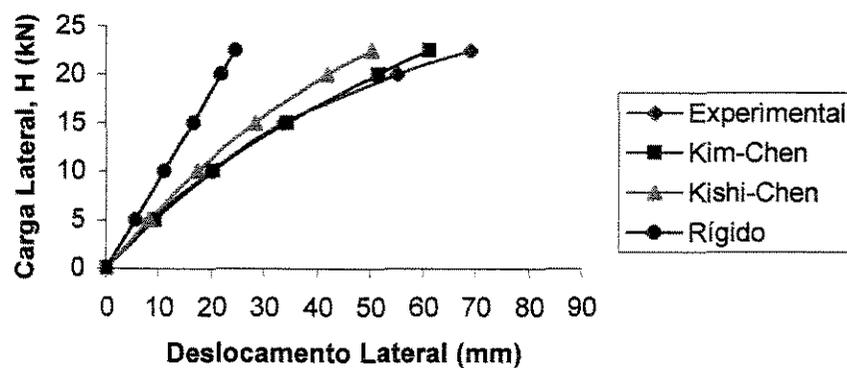


Figura 5.26 – Comparação do Deslocamento Lateral.

Os resultados demonstraram que o programa proposto está bem adaptado para análises que representam os resultados experimentais, utilizando modelos complexos desenvolvidos para descrever o comportamento não linear da conexão.

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A introdução do efeito da não linearidade geométrica da estrutura juntamente com a não linearidade física do material e o comportamento das conexões semi-rígidas proporcionam análises de estruturas metálicas, formada por barras planas, de forma mais completa.

Ao se considerar estes efeitos nas análises estruturais, verificou-se modificações nos resultados obtidos dos esforços e deslocamentos da estrutura, quando comparados com a análise em teoria de primeira ordem no regime elasto-linear.

Foi demonstrado também que a carga crítica de uma estrutura, quando é considerado a não linearidade física do material e o comportamento das conexões semi-rígidas, será inferior ao dado por análises considerando as barras elásticas e com as conexões totalmente rígidas. Isso se deve ao fato de que estes dois efeitos fazem com que diminua a rigidez da estrutura.

Além da instabilidade ser alcançada com carregamentos menores, os deslocamentos calculados, considerando estes efeitos, são maiores para o mesmo estado de carregamento. Com isto, demonstra-se a necessidade de uma maior preocupação dos calculistas, visando a otimização das estruturas com melhor conhecimento de sua segurança.

O trabalho desenvolvido foi baseado no método dos deslocamentos com o auxílio da técnica matricial utilizando as funções de rigidez. Este processo possui a facilidade de não necessitar de subdivisões dos elementos de barra, como no método dos elementos finitos, e demonstrou grande eficiência e precisão nos resultados.

A utilização das funções de rigidez e das ações de extremidade da barra, devido a carregamento uniformemente distribuído, transversalmente ao eixo axial da barra, considerando a não linearidade física e geométrica usada nas análises, favoreceram o estudo global da estrutura.

A análise conjunta das conexões semi-rígidas com a não linearidade das barras proporcionou uma análise global da estrutura, principalmente de edifícios de andares múltiplos, de forma mais realista.

Através dos resultados obtidos nos exemplos numéricos, pode-se verificar que o processo desenvolvido comporta-se de forma bastante satisfatória, quando comparados com análises feitas por outros autores, utilizando técnicas semelhantes, e quando comparados com resultados de experimentações reais de estrutura.

Todo esse estudo foi realizado através de um programa computacional desenvolvido em linguagem "Microsoft Visual Basic 5", o qual necessita de um equipamento básico com um processador Pentium com Windows 95, o que demonstra a possibilidade de qualquer engenheiro usufruir das atuais técnicas de análise estrutural que consideram o comportamento de forma mais completa, que associam, como neste trabalho, a não linearidade física e geométrica das barras planas associadas ao comportamento das conexões semi-rígidas. Todo este esforço demonstra a grande preocupação na busca do conhecimento da segurança das estruturas.

Como sugestão para estudos futuros, visando uma melhor compreensão do real comportamento das estruturas e como complemento a teoria aqui apresentada, pode-se citar: a consideração do comportamento do regime inelástico, devido a esforços de flexão, com a utilização de molas nos nós, possibilitando assim uma representação mais refinada do comportamento das estruturas; o estudo de formação de rótulas plásticas devido a plastificação da barra e ou da conexão; e, novos estudos sobre diversos tipos de conexões normalmente usadas nas estruturas metálicas, utilizando-se de ensaios experimentais e análises numéricas, produzindo assim novos modelos matemáticos para representarem o comportamento destas conexões e um melhor entendimento dos fatores significativos no comportamento não linear.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1) WILSON, E. L., HALIBULLAH, A. **SAP90 - A Series of Computer Programs of The Static and Dinamic Finite Element Analysis of Structural, User Manual.** California. Computers and Structures, 1988.
- 2) **SAP2000 – Analysis Reference.** California. Computers and Structures, 1997
- 3) WILSON, E. L., HALIBULLAH, A. **SAPSTL - A Steel Stress Check Postprocessor foe Sap90.** California. Computers and Structures, 1988.
- 4) AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. **AISC - Allowable Stress Design Specification for Structural Steel Building.** Chicago. 1989
- 5) CYPECAD – 3D, **Software do Calculista Moderno.** São Paulo: Multiplus Computação Gráfica, 1997, 143 p.
- 6) JOHNSTON, B. G. Column Buckling: Historic Highlights. **Journal of Structural Engineering**, New York, v. 109, n. 9, p. 2086-2096, Sept. 1983.
- 7) TIMOSHENKO, S. **History of Strenght of Materials.** New York: McGraw-Hill, 1953. 452p.
- 8) THÜRLIMANN, B. Column Buckling - Historical and Actual Notes. **Journal of Constructional Steel Research**, Oxford, n. 17, p. 95-111, 1990.

- 9) SALMON, C. G., JOHNSON, J. E. **Steel Structures: Design and Behavior**. New York: Harper&Row, 1980. ed.2, 1024p.
- 10) VAN DEN BROEK, J. A. Euler's Classic Paper "On The Strength of Columns". **Journal of Physics**. v. 15, p. 309, 1947.
- 11) CHEN, W. F., LUI, E. M. **Structural Stability: Theory and Implementation**. London: Elsevier Science Publishing Co., 1987. 489p.
- 12) CHEN, W. F., LUI, E. M. Columns with End Restraint and Bending in Load and Resistance Design Factor. **Engineering Journal**. v. 22, n. 3 (Third Quarter), p. 105-132. 1985.
- 13) LUI, E. M., CHEN, W. F. Steel Frame Analysis with Flexible Joints. **Journal of Constructional Steel Research**. Oxford,v. 8, p. 161-202, 1987.
- 14) AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. **AISC - Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings**. Chicago. 1986.
- 15) LUI, E. M., CHEN, W. F. Analysis and Behaviour of Flexibly-Jointed Frames. **Engineering Structures**. v. 8, p. 107-118, Apr. 1986
- 16) EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDISATION (CEN). **EUROCODE 3 - Design of Steel Structures**. 1992.
- 17) LIEW, J. R., WHITE, D. W., CHEN, W. F. Limit States Design of Semi-Rigid Frames Using Advanced Analysis: Part 1: Connection Modeling and Classification. **Journal of Constructional Steel Research**. Oxford,v. 26, p. 1-27, 1993.

- 18) KIM, S. E., CHEN. W. F. Practical Advanced Analysis for Semi-Rigid Frame Design. **Engineering Journal**. Four Quarter, p. 129-141. 1996.
- 19) KISHI, N., CHEN, W. F., GOTO, Y. Effective Length Fator of Columns in Semirigid and Unbraced Frames. **Journal of Structural Engineering**. v. 123, n. 3, p. 313-320, Mar. 1997.
- 20) JAMES, B. W. Principal Effects of Axial Load on Moment-Distribution Analysis in Rigid Structures. Technical Note 534, **National Advisory Committee to Aeronautics** (now NASA), 1935.
- 21) LIVESLEY, R. K., CHANDLER, D. B. **Stability Functions for Structural Framework**. Manchester: Manchester University Press, 1956.
- 22) HORNE, M. R., MERCHANT, W. **The Stability of Frames**. Oxford: Pergamon Press, 1965. 179p.
- 23) OJALVO, M., LU, L. W. Analysis of Frames Loaded into The Plastic Range. **Journal of The Engineering Mechanics Division**. New York, v. 87, n. EM4, p. 35-48, Aug. 1961.
- 24) CHU, K. H., PABARCIUS, A. Elastic and Inelastic Buckling of Portal Frames. **Journal of The Engineering Mechanics Division**. New York, v. 90, n. EM5, p. 221-249, Oct. 1964.
- 25) MOSES, F. Inelastic Frame Buckling. **Journal of The Structural Division**. New York, v. 90, n. ST6, p. 105-121, Dec. 1964.
- 26) LU, L. W. Inelástic Buckling of Steel Frames. **Journal of The Structural Division**. New York, v. 91, n. ST6, p. 185-214, Dec. 1965.

- 27) KORN, A., GALAMBOS, T. V. Behavior of Elastic-Plastic Frames. **Journal of The Structural Division**. New York, v. 94, n. ST5, p. 1119-1142, May. 1968.
- 28) ALVAREZ, R. J., BIRNSTIEL, C. Inelastic Analysis of Multistory Multibay Frames. **Journal of The Structural Division**. New York, v. 95, n. ST11, p. 2477-2503, Nov. 1969.
- 29) VOGEL, U. Calibrating Frames. **Stahlbau**. Berlin. v. 10. p. 295-301. 1985.
- 30) MOHAMED, S. E., SIMITSES, G. J. Stability and Collapse of Semirigidly Connected Portal Frames. **Journal of Aerospace Engineering**. New York. v. 3. n. 1. p. 46-63. Jan. 1990.
- 31) AL-MASHARY, F., CHEN, W. F. Simplified Second-Order Inelastic Analysis for Steel Frame. **The Structural Engineer**. London. v. 69. n. 23/3. p. 395-399. Dec. 1991.
- 32) KING, W. S., WHITE, D. W., CHEN, W. F. Second-Order Inelastic Analysis Methods for Steel-Frame Design. **Journal of Structural Engineering**. New York. v. 118. n. 2. p. 408-428. Feb. 1992.
- 33) LIEW, J. Y. R., WHITE, D. W., CHEN, W. F. Limit States Design of Semi-Rigid Frames Using Advanced Analysis: Part 2: Analysis and Design. **Journal of Constructional Steel Research**. Oxford, v. 26, p. 28-57, 1993.
- 34) YAU, C. Y., CHAN, S. L. Inelastic and Stability Analysis of Flexibly Connected Steel Frames by Springs-in-Series Model. **Journal of Structural Engineering**. New York. v. 120. n. 10. p. 2803-2819. Oct. 1994.

- 35) CHEN, W. F., CHAN, S. L. Second-Order Inelastic Analysis of Steel Frames Using Element with Midspan and End Springs. **Journal of Structural Engineering**. New York. v. 121. n. 3. p. 530-541. Mar. 1995.
- 36) KIM, S. E., CHEN, W. F. Practical Advanced Analysis for Braced Steel Frame Design. **Journal of Structural Engineering**. New York. v. 122. n. 11. p. 1266-1274. Nov. 1996.
- 37) SHANLEY, F. R. The Column Paradox. **Journal of The Aeronautical Sciences**. New York. v. 13. n. 12. p. 678. Dez. 1946.
- 38) SHANLEY, F. R. Inelastic Column Theory. **Journal of The Aeronautical Sciences**. New York. v. 14. n. 5. p. 261-267. May. 1947.
- 39) ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. RIO DE JANEIRO. **NBR 8800: Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios: Método dos Estados Limites**. Rio de Janeiro, 1988.
- 40) CHEN, W. F., TOMA, S. **Advanced Analysis of Steel Frames: Theory, Software and Applications**. New York: CRC Press, 1994. 384p.
- 41) SHERBOURNE, A. N., BAHARI, M. R. Finite Element Prediction of End Plate Bolted Connection Behavior. I: Parametric Study. **Journal of Structural Engineering**. v. 123, n. 2, p. 157-164, Feb. 1997.
- 42) JONES, S. W., KIRBY, P. A., NETHERCOT, D. A. Columns with Semirigid Joints. **Journal of The Structural Division**. New York, v. 108, n. ST2, p. 361-372, Feb. 1982.

- 43) ANG, K. M., MORRIS, G. A. Analysis of Three-Dimensional Frames with Flexible Beam-Column Connections. **Canadian Journal of Civil Engineering**. v. 11, n. 2, p. 245-254, Jun. 1984.
- 44) RODRIGUES, F. C., SALDANHA, A. C., PFEIL, M. S. Análise Não-Linear do Comportamento de Pórticos Planos Metálicos com Ligações Semi-Rígidas. In: **XV CILANCE - Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia**. 15. 1994. Brasília, Anais ... Brasília: Associação para métodos Computacionais em Engenharia, 1994. v. 1, p. 1512-1521.
- 45) GALAMBOS, T. V. **Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures**. New York: John Wiley, 1988. 786p.
- 46) GERE, J. M., WEAVER, W.Jr. **Análise de Estruturas Reticuladas**. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987.
- 47) YAGUI, T. Critical Loading of Tall Core-Supported Structures. **Computer & Structures**. Oxford, v. 26, n. 2, p. 223-235, 1990.
- 48) SERRA, J. L. F. A. **Contribuição ao Estudo de Núcleos Resistentes de Concreto Armado**. São Carlos: EESC-USP, 1994. Tese de Doutorado - Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, 1994. 128p.
- 49) REQUENA, J. A. V. **Carregemento Crítico de Instabilidade Geral de Pilares de Seção Composta Variável de Edifícios Industriais Metálicos**. São Carlos: EESC-USP, 1995. Tese de Doutorado - Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, 1995. 157p.

- 50) CALLEJAS, I. J. A. **Análise e Dimensionamento de Estruturas Metálicas Planas Formadas por Barras Considerando a Não Linearidade Geométrica e Física**. Campinas: UNICAMP, 1998. Dissertação de Mestrado - Faculdade de Engenharia Civil, Departamento de Estruturas, 1998. 35p.
- 51) OCHOA, J. D. A. First- and Second-Order Stiffness Matrices and Load Vector of Beam-Columns with Semirigid Connections. **Journal of Structural Engineering**. New York. v. 123. n. 5. p. 669-678. May. 1997.
- 52) REQUENA, J. A. V. **Instabilidade de Pórticos Planos: Análise dos Pórticos Constituídos de Pilares com Variação Brusca de Seção Transversal**. Apostila P-PR-634-200. Unicamp FEC, Agosto 1997.
- 53) JENNINGS, A. **Matrix Computation for Engineers and Scientists**. A. Wiley, 1977. (Reimpressão 1978)
- 54) GOLUB, G. H., VAN LOAN, C. F. **Matrix Computations**. Baltimor: John Hop Kings, 1990. 642p.
- 55) HALLDORSSON, O. P., WANG, F. C. Stability Analysis of Frameworks by Matrix Methods. **Journal of The Structural Divion**. New York, v. 94, n. ST7, p. 1745-1760, July 1968.
- 56) LIEW, J. Y. R., WHITE, D. W., CHEN, F. W. Second-Order Refined Plastic-Hinge Analysis For Frame Design. Part I. **Journal of Structural Engineering**. New York, v. 119, n. 9, p. 3196-3216, Nov. 1993.
- 57) BHATTI, M. A., HINGTGEN, J. D. Effects of Connection Stiffness and Plasticity on the Service Load Behavior of Unbraced Steel Frames. **Engineering Journal**. p. 21-33, First Quarter 1995.

Abstract

In this work, utilizing numeric process, are presented analyses of plane steel frames, deformables by flexion and axial force. In this analyses, are considered the effects of the structure geometric nonlinearity, of the material physical nonlinearity associated to the behaviour of semi-rigid connections. Are presented the models to the consideration of the nonlinear behaviour, such as, the development of all the theory utilized. A software was developed, in the theory of the small displacements, to enable the determination of the structure global instability parameters. The adopted technique was the matrix, utilizing the functions of stiffness. This technique possibility analysis considering, simultaneously, the physical and geometric nonlinearity of the frames with a small computational effort. The inelasticity was considered for frames axially requested, predominantly, utilizing the buckling curves of CRC (Column Research Council), LRFD (American Institute of Steel Construction) e NBR 8800 (Associação Brasileira de Normas Técnicas). The behaviour of the moment-rotation relationship, of the semi-rigid connections, can be considered in a linear way, initial connection stiffness, or utilizing models to describe its nonlinear behaviour, connection stiffness give according to the connection moment. Besides the analyses, utilizing second order theory, it is presented a process to find the structure global instability, which will be found when a certain loading provoke a degeneration of the global stiffness matrix of the structure, making it singular. Will be presented numericals examples comparing the types of analyses, considering the frames as elastic and inelastic, besides the semi-rigid connections considerations, in a simultaneous way.