UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Faculdade de Engenharia Civil,

Arquitetura e Urbanismo

ANÁLISE DE PILARES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À FLEXÃO NORMAL COMPOSTA CONSIDERANDO AS NÃO-LINEARIDADES FÍSICA E GEOMÉTRICA

Eng[a] Susana de Lima Pires

Campinas, agosto de 2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo
Departamento de Estruturas

ANÁLISE DE PILARES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À FLEXÃO NORMAL COMPOSTA CONSIDERANDO AS NÃO-LINEARIDADES FÍSICA E GEOMÉTRICA

Eng[a] Susana de Lima Pires

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Maria Cecília Amorim Teixeira da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração de Estruturas.

Campinas, agosto de 2006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

P66a	Pires, Susana de Lima Análise de pilares de concreto armado submetidos à flexão normal composta considerando as não-linearidades física e geométrica / Susana de Lima Pires. --Campinas, SP: [s.n.], 2006. Orientador: Maria Cecília Amorim Teixeira da Silva. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. 1. Concreto armado. 2. Colunas. 3. Flexão (Engenharia civil). 4. Método dos elementos finitos. 5. Modelos númericos. I. Silva, Maria Cecília Amorim Teixeira da. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Título em Inglês: Analysis of reinforced concrete columns subjected to uniaxial bending considering the geometric and material nonlinearities
Palavras-chave em Inglês: Reinforced concrete, Columns, Flexure, Finite elements methods, Numerical models
Área de concentração: Estruturas
Titulação: Mestre em Engenharia Civil
Banca examinadora: Aloísio Ernesto Assan, Roberto Chust de Carvalho
Data da defesa: 29/08/2006
Programa de Pós Graduação: Mestre em Engenharia Civil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO

ANÁLISE DE PILARES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À FLEXÃO NORMAL COMPOSTA CONSIDERANDO AS NÃO-LINEARIDADES FÍSICA E GEOMÉTRICA

Eng[a] Susana de Lima Pires

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:

Prof[a]. Dr[a]. Maria Cecília Amorim Teixeira da Silva
Presidente e Orientadora / FEC - Unicamp

Aloísio E. Assan
Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan
FEC - Unicamp

Prof. Dr. Roberto Chust de Carvalho
UFSCar

Campinas, 29 de agosto de 2006

À minha filha Natália (em memória), por me ensinar
a ver a vida com o coração.

AGRADECIMENTOS

A Deus.

À prof^{a}. Dr^{a}. Maria Cecília Amorim Teixeira da Silva, pela atenção, orientação e exemplo de dedicação profissional.

Ao meu marido Fernando, pelo estímulo, compreensão e apoio.

Aos colegas da Unicamp Regina e Alaor, pelas infindáveis e proveitosas horas de estudo.

À minha mãe (em memória) pela vida.

Ao meu pai (em memória), pelo exemplo de amor aos livros.

À minha família, em especial à minha tia Teresa, meus irmãos Valdívia, Gustavo, Fábio e Valdênia e meus filhos Diego e Fernanda pelo amor de todo dia.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

PIRES, Susana de Lima –***Análise de pilares de concreto armado submetidos à flexão normal composta considerando as não-linearidades física e geométrica*** – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, 2006. 90 páginas. Dissertação (Mestrado)

Este trabalho apresenta um modelo numérico para o estudo de pilares isolados de concreto armado submetidos à flexão normal composta onde as não linearidades física e geométrica são levadas em conta de maneira rigorosa. O procedimento numérico desenvolvido para o cálculo dos deslocamentos é baseado no Método dos Elementos Finitos. Para a inclusão das não linearidades física e geométrica é utilizado o Método de Newton-Raphson Modificado que é um procedimento iterativo para a determinação de raízes de funções não lineares. A relação tensão-deformação do concreto é representada pelo diagrama parábola-retângulo. O aço é considerado um material elastoplástico perfeito. É admitida perfeita aderência entre o concreto e o aço. São desenvolvidos algoritmos para o dimensionamento de pilares e para o estudo da estabilidade do pilar. É desenvolvido um programa de computador utilizando os algoritmos mencionados acima. A eficiência do programa é verificada por meio da comparação com trabalhos experimentais e com o programa comercial CAD/TQS. Os resultados do dimensionamento feito com o programa proposto apresentaram boa concordância com os dados experimentais selecionados. Finalmente é feito um estudo comparativo entre os resultados do dimensionamento de pilares feito pelo programa elaborado, com os resultados obtidos pelas simplificações admitidas pela Norma Brasileira NBR 6118/2003. Esta comparação mostra que, para os exemplos apresentados, a NBR 6118/2003 superestima o dimensionamento de pilares esbeltos realizados através dos métodos simplificados. Para pilares com índice de esbeltez superiores a 90, a norma está certa em impedir o dimensionamento com os métodos simplificados pois podem apresentar resultados contra a segurança. Os efeitos causados pela deformação lenta não foram incluídos neste trabalho.

Palavras-chave: concreto armado, pilares, flexão normal composta, não linearidade física, não linearidade geométrica, elementos finitos.

ABSTRACT

PIRES, Susana de Lima - ***Analysis of reinforced concrete columns subjected to uniaxial bending considering the geometric and material nonlinearities*** - Campinas, Faculty of Civil Engineering, State University of Campinas, 2006. 90 pages. Dissertation (Master)

This work presents a numerical model for the study of reinforced concrete columns subjected to combined axial load and bending where the geometric and material nonlinearities are rigorously considered. The numerical procedure developed to calculate the displacements is based on the Finite Element Method. An iterative procedure for the determination of roots of nonlinear functions, the Modified Newton-Raphson Method, is used for including nonlinearities. The parabolic-rectangular diagram is adopted as the concrete stress-strain relationship. The steel is considered a perfect elastoplastic material, and a perfect concrete-to-steel bond is admitted. Algorithms are developed for dimensioning and studying the stability of columns. A computer program is developed using the algorithms mentioned above. The efficiency of the program is verified against available experimental data and commercial programs such as CAD/TQS. The values obtained from the program have presented good agreement with experimental data. Finally a comparative study is made among the results of the designed columns with values obtained from Brazilian Code NBR 6118/2003 approaches. This comparison shows that, for the presented examples, NBR 6118/2003 overestimates the slender columns design when using the approaches, and for columns with slenderness index over 90 the code is correct in preventing the design through the simplified methods, for it can lead to unsafe results. The effects caused by the creep are not enclosed in this work.

Key - words: reinforced concrete, columns, finite elements, uniaxial bending, material nonlinearity, geometric nonlinearity.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas Maiúsculas

Ac	-	área de concreto (Ac=b*h)
As	-	área aço da seção transversal
As_{calc}	-	área de aço da calculada
As_{dim}	-	área de aço resultado do dimensionamento no Dim_Pilar
As_{TQS}	-	área de aço resultado do dimensionamento no CAD/TQS
As_{exp}	-	área de aço da experimental
As_i	-	área de aço da camada i
E_c	-	módulo de deformação longitudinal do concreto
E_s	-	módulo de elasticidade do aço
F	-	vetor de ações nodais
F_i	-	vetor de ações nodais não lineares
K	-	matriz de rigidez do elemento
L	-	comprimento elemento finito
I_c	-	momento de inércia da seção de concreto
I_{si}	-	momento de inércia da camada genérica de armadura em relação ao baricentro da seção homogeneizada
N_d	-	esforço normal solicitante

N_k - força normal característica
M_d - momento fletor solicitante
$M_{d,total}$ - momento total máximo no pilar
$M_{1d,min}$ - momento mínimo de primeira ordem
M_{1d} - momento de primeira ordem
$M_{1d,A}$ - valor de cálculo de primeira ordem do momento M_A
P_u - carga de ruína
R_{cc} - resultante de compressão no concreto
R_s - resultante de tensões no aço
R_{si} - resultante de tensões em uma camada genérica de armadura
S - espaçamento entre as camadas
U - vetor dos deslocamentos nodais
W - deslocamento transversal do eixo do pilar
X - altura da linha neutra

Letras Romanas Minúsculas

b - largura da seção transversal
d´ - cobrimento da armadura
d_c - distância da resultante de compressão do concreto à borda comprimida
d_i - distância do centro da camada de aço *i* à borda menos comprimida
d_1 - distância do centro da camada de aço tracionada ou menos comprimida à borda de concreto tracionada ou menos comprimida
e_2 - excentricidade de segunda ordem
e_i - excentricidade inicial
f_c - resistência à compressão do concreto
f_{cm} - resistência média à compressão do concreto
f_{ck} - resistência característica à compressão do concreto
f_{cd} - resistência de cálculo à compressão do concreto
f_y - resistência à tração do aço
f_{yc} - resistência à compressão do aço

f_{yd} resistência de cálculo do aço à tração

f_{ycd} resistência de cálculo do aço à compressão

h - altura da seção transversal

i - raio de giração

l_e comprimento equivalente

l - comprimento do pilar

n_i - número de barras de armadura da camada i

n_{total} - número total de barras de armadura da seção transversal

n´ - número total de camadas de armadura da seção transversal

t - número de camadas de aço

u_o - deslocamento longitudinal do eixo do pilar

u_1 - deslocamento provocado pela rotação da seção transversal

1/r - curvatura

Letras Gregas

χ - curvatura

ε_0 - deformação axial do elemento

ε_c - deformação no concreto

ε_s - deformação no aço

ε_u - deformação última no concreto

ε_x - deformação normal em um ponto genérico da barra

ε_y - deformação de escoamento do aço

ϕ_i - iésima função de interpolação

ϕ'_i - derivada primeira da iésima função de interpolação

ϕ''_i - derivada segunda da iésima função de interpolação

γ_c - coeficiente de ponderação da resistência do concreto

κ - rigidez secante adimensional

λ - índice de esbeltez do pilar

λ_1 índice de esbeltez limite

ν - força normal adimensional

σ_s - tensão no aço

σ_{si} - tensão de cálculo em uma camada genérica de aço

σ_c - tensão no concreto

θ - rotação da seção transversal

1. INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

O concreto é um material constituído de cimento, agregado miúdo, agregado graúdo e água. Este material deve possuir características que garantam durabilidade, resistência e economia de acordo com as proporções em que são misturados. Entretanto o concreto é um material que possui baixa resistência à tração. Desta forma, o aço deve estar presente nas estruturas para suprir essa deficiência surgindo assim o concreto armado.

O concreto armado é formado por materiais que apresentam comportamento não linear, uma vez que no concreto e no aço não há linearidade entre as tensões e deformações. Essa não linearidade é denominada física. Devido à resposta não linear dos materiais, o momento interno não será mais uma função linear da curvatura.

Os pilares são elementos que têm um comportamento geometricamente não linear, ou seja, a análise do equilíbrio deve ser feita na condição deformada. Devido a essa não linearidade geométrica, os pilares devem ser analisados de acordo com a teoria de 2ª ordem, em que são levados em conta os efeitos dos deslocamentos nos esforços solicitantes.

Segundo a NBR6118/2003 (ABNT, 2003) os esforços locais de 2^a ordem em elementos isolados podem ser desprezados quando o índice de esbeltez (λ) for menor que o valor limite λ_1 estabelecido por esta norma (Apêndice C).

Em pilares de concreto armado, cuja esbeltez não é muito elevada ($\lambda_1 \leq \lambda \leq 90$), a NBR-6118/2003 (ABNT, 2003) permite algumas simplificações de cálculo de modo que os momentos de 2^a ordem sejam avaliados de forma aproximada (Tabela 1.1). No método do pilar-padrão com curvatura aproximada a não linearidade geométrica é considerada de forma aproximada, supondo-se que a deformação da barra seja senoidal e a não-linearidade física é considerada através de uma expressão aproximada da curvatura na seção crítica. No método do pilar-padrão com rigidez aproximada a não linearidade geométrica também é considerada supondo-se que a deformação da barra ocorre de forma senoidal, entretanto a não linearidade física é considerada através de uma expressão aproximada da rigidez.

A determinação dos esforços locais de 2^a ordem em pilares com esbeltez (λ) ≤ 140 pode ser feita pelo método do pilar-padrão acoplado a diagramas M, N, 1/r ou pilar-padrão melhorado, utilizando-se para a curvatura da seção crítica valores obtidos de diagramas Momento Fletor (M) x Força Normal (N), Curvatura (1/r) específicos para o caso.

Se o pilar for considerado esbelto ($\lambda>140$), essas simplificações não são permitidas, e as não linearidades física e geométrica devem ser levadas em conta de maneira rigorosa através do método geral .

Tabela 1-1 - Exigências da NBR 6118/2003

λ	CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS LOCAIS DE 2ª ORDEM	MÉTODOS DE CÁLCULO			
		MÉTODO GERAL	MÉTODOS APROXIMADOS		
			PILAR-PADRÃO CURVATURA APROXIMADA	PILAR-PADRÃO COM RIGIDEZ APROXIMADA	PILAR-PADRÃO ACOPLADO A DIAGRAMAS M,N,1/r
$140 \leq \lambda \leq 200$	Obrigatória	Obrigatória	Não Permitido	Não Permitido	Não Permitido
$90 \leq \lambda \leq 140$	Obrigatória	Dispensável	Não Permitido	Não Permitido	Permitido
$\lambda_1 \leq \lambda \leq 90$	Obrigatória	Dispensável	Permitido	Permitido	Dispensável
$0 \leq \lambda \leq \lambda_1$	Dispensável	-	-	-	-

O presente trabalho consiste na análise e dimensionamento de pilares de concreto armado submetidos à flexão normal composta, de forma que as não linearidades física e geométrica sejam levadas em conta de maneira rigorosa, ou seja, com a utilização do Método Geral. O Método Geral, de acordo com a NBR 6118/2003 (ABNT, 2003), consiste na análise não linear de 2ª ordem, efetuada com discretização adequada da barra, consideração da relação momento-curvatura real em cada seção, e consideração da não linearidade geométrica de maneira não aproximada.

Atualmente, com o uso de computadores de alto desempenho, com grande capacidade de cálculo, não se justifica mais o uso de fórmulas aproximadas no dimensionamento de estruturas de concreto armado, cuja eficácia nem sempre é comprovada, justificando-se assim o estudo que foi realizado neste trabalho.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver procedimentos de análise da estabilidade e de dimensionamento de pilares de concreto armado submetidos à flexão normal composta, incluindo as não linearidades física e geométrica de maneira rigorosa, ou seja, com o uso do Método Geral.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

São objetivos específicos deste trabalho:

- Elaborar um programa para dimensionamento e análise de estabilidade de pilares de concreto armado de seção retangular com distribuição simétrica de armadura submetidos à flexão normal composta, incluindo as não linearidades física e geométrica de maneira rigorosa, ou seja, com a utilização do Método Geral;

- Verificar a eficiência do programa por meio de comparação com trabalhos experimentais e com o programa comercial CAD/TQS.

- Fazer um estudo comparativo entre os resultados do dimensionamento feito pelo programa elaborado, com os resultados obtidos pelas simplificações admitidas pela NBR 6118/2003 (ABNT, 2003).

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Araújo (1984) apresentou um trabalho cujo objetivo foi o dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado sob carga de curta e longa duração. Nesse trabalho o autor apresentou três algoritmos – algoritmo com rigidez constante, algoritmo com rigidez secante, algoritmo com rigidez tangente - para obtenção das relações momento fletor – esforço normal – curvatura de uma seção arbitrária de concreto armado sob flexo-compressão normal e desenvolveu um algoritmo alternativo para dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado, em que as não linearidades são levadas em conta de maneira simultânea. O autor fez uma comparação dos processos simplificados de dimensionamento propostos por diversas normas, com o algoritmo alternativo desenvolvido e concluiu que os processos simplificados propostos em normas que foram testados mostraram-se relativamente precisos para aplicações práticas. A principal crítica do autor à NB-1/78 é que a fluência do concreto pode ter influência significativa na estabilidade de pilares e não pode simplesmente ser desprezada para $\lambda \leq 80$. Com relação à esbeltez, o autor conclui que não se pode desprezar os efeitos de segunda ordem somente em função de λ e que para se classificar um pilar como curto, deve-se levar em consideração além desse índice, a excentricidade relativa à força normal.

Paula (1988) apresentou um trabalho que fornece procedimentos para estudo de pilares esbeltos solicitados à flexão normal composta, dimensionamento, estudo da estabilidade e elaboração de diagramas de interação, usando a teoria do método geral e o processo aproximado do pilar padrão. O autor concluiu que o processo do pilar padrão constitui uma grande ferramenta de cálculo, pela sua simplicidade e rapidez. Entretanto, caso se disponha de um equipamento veloz e se pretenda obter resultados mais exatos, o autor sugere o uso do método geral.

Mallikarjuna e Mahadevappa (1992) desenvolveram um programa para análise de pilares de seção L submetidas à flexão normal composta e oblíqua e apresentaram as curvas de interação para tais pilares. Para obter uma seção L, os autores reduziram do canto de uma seção quadrada de lados B x B uma seção quadrada menor B_1 x B_1. Para diferentes valores de B_1, vários tamanhos de seção L são obtidos. Os mesmos autores, em outro trabalho (Mallikarjuna e Mahadevappa, 1994), fizeram análise e geração das curvas de interação para pilares de seção T.

Araújo (1993) apresentou os principais métodos de minimização empregados em análise não linear de estruturas: Newton-Raphson modificado, Broyden, Davidon-Fletcher-Powell, Pearson n°1, Pearson n°2, BFGS, Secante-Newton e Minimização bidirecional. O autor analisou um problema estrutural não linear, avaliou a eficiência computacional dos métodos e concluiu que os algoritmos de Pearson, o método BFGS e o algoritmo de minimização bidirecional apresentaram um melhor comportamento. Os algoritmos de Pearson apresentaram uma oscilação na relação tempo de processamento versus número de graus de liberdade, o que, segundo o autor, pode indicar que esse método tem a tendência de se tornar instável. O método BFGS apresentou uma relação estável na relação tempo de processamento versus número de graus de liberdade (aproximadamente linear), assim como o método bidirecional. O autor considerou que o ponto favorável do BFGS é que ele não apresenta componente empírico, tendo como único inconveniente o fato de ocupar mais memória de computador. Entretanto, com o esquema de armazenamento apresentado, isto não se torna um fator limitante, o que levou o autor a concluir que esse método parece ser o mais indicado para uma análise não-linear geral.

Claeson e Gylltoft (1998) apresentaram um estudo experimental do comportamento de pilares de concreto armado e resultados de uma análise não linear com elementos finitos. Doze pilares com seção quadrada foram testados sob cargas excêntricas. Os efeitos de parâmetros tais como resistência do concreto, espaçamento do estribo, esbeltez do pilar, excentricidade da força normal, foram estudados. Os autores constataram ganhos significativos na capacidade de carga com o aumento da resistência do concreto. Os autores obtiveram boa correlação dos resultados da análise de elementos finitos com os resultados dos testes. Um estudo paramétrico foi realizado para examinar a diferença na carga de ruptura para diferentes resistências do concreto, razão comprimento-altura do pilar e excentricidade da carga. Os autores concluíram que quando a excentricidade foi aumentada, a resistência de pilares com concreto de alta resistência diminuiu mais rapidamente do que aqueles pilares com concreto de resistência normal. Entretanto, os pilares de concreto de alta resistência ainda exibiram melhor capacidade de carga do que os de resistência normal.

Araújo (2001) avaliou os principais métodos simplificados disponíveis para a consideração dos efeitos de segunda ordem no dimensionamento de pilares de concreto armado. O autor analisou dois métodos apresentados no projeto da nova NBR 6118(2001), os métodos do CEB/78 e do CEB/90, dois métodos sugeridos na norma espanhola e o método simplificado do ACI. As armaduras obtidas com os métodos simplificados foram comparadas com aquela derivada do dimensionamento rigoroso, considerando-se as não linearidades física e geométrica do problema. O autor considerou apenas o caso de carga de curta duração e concluiu que o método do pilar padrão com curvatura aproximada do projeto da nova NBR 6118(2001), o método aproximado da norma espanhola e o método do CEB/78 possuem o mesmo nível de precisão. O autor concluiu que em alguns casos esses métodos ficam contra a segurança, porém com um erro inferior a 10%; o método do pilar padrão com rigidez aproximada e o método do CEB/90 possuem a mesma precisão e fornecem uma solução a favor da segurança; o método do ACI é o mais impreciso, devido à dificuldade de se avaliar corretamente a rigidez à flexão.

Mendes Neto (2001) fez considerações sobre o dimensionamento exato da área de armadura de seções transversais de concreto armado. O autor discutiu algumas simplificações possíveis (diagrama tensão-deformação retangular do concreto comprimido, fórmulas de dimensionamento, parametrização das curvas de interação), e, ainda, como tais simplificações podem ser avaliadas objetivamente. O autor concluiu que os processos simplificados devem ser abolidos das normas e das práticas de engenharia, sendo que o dimensionamento exato está, hoje em dia, ao alcance de qualquer engenheiro, uma vez que a informática, além de realidade, é ferramenta básica de trabalho.

Souza (2003) apresentou resultados de estudos paramétricos em pilares de concreto armado considerando as não linearidades física e geométrica. Dois modelos computacionais, utilizando as recomendações da NB-1/78 e da nova NB-1, respectivamente, foram adotados. Esse estudo trata da fixação do índice de esbeltez limite λ_1 dos pilares de concreto armado e do cálculo da excentricidade equivalente dos pilares com excentricidades quaisquer nos extremos. De acordo com os resultados do estudo, o autor concluiu que, na fixação do índice de esbeltez limite $\lambda_{1,}$ os valores propostos pela nova NB-1 tendem contra a segurança em relação a outras normas estrangeiras. De acordo com o autor, isso ocorre quando os valores da excentricidade relativa de primeira ordem, e_1/h, estão entre 0,2 e 1,2. Para valores inferiores a 0,14, freqüentes em edifícios residenciais, os valores de λ_1 propostos pela nova NB-1 tendem a ser mais conservadores. O autor verificou que a adoção de valor mínimo de 0,4 para o coeficiente $\alpha_{b,}$ proposto pela NB-1, não se mostrou justificável para colunas bi-rotuladas sem cargas horizontais ao longo do vão, quando se deseja efetuar uma avaliação da excentricidade equivalente das colunas com relações quaisquer entre as excentricidades nodais para as situações de projeto. Porém, segundo o autor, para a avaliação da esbeltez limite (λ_1) o coeficiente α_b deve ter um valor mínimo de 0,4, visando limitar a consideração excessivamente otimista em termos de capacidade resistente das colunas com curvatura reversa.

Mendes Neto e Pimenta (2003) fizeram considerações sobre as três rigidezes das seções transversais de concreto armado submetidas à Flexão Normal Composta, sendo elas: EI (Rigidez à Flexão – produto do módulo de elasticidade E do material pela inércia I da seção transversal), EA (Rigidez Axial - onde A é a área da seção transversal) e ES (onde S é o momento estático de área da seção transversal). Nesse estudo, a variabilidade dessas rigidezes foi discutida e exemplificada. Os autores observaram que as rigidezes variam com uma enorme quantidade de fatores e, aparentemente, não há simplificações possíveis para sua obtenção. Concluíram que fórmulas simplificadas para a avaliação das rigidezes não são adequadas para a análise de estruturas, principalmente as não lineares.

Prazeres *et alli* (2003) realizaram um estudo do comportamento de seções de concreto armado de peças submetidas a solicitações normais. Segundo os autores um dos principais objetivos desta pesquisa foi verificar a precisão das diversas técnicas de integração numérica na análise de seções de concreto armado. Para isso, os autores desenvolveram um programa para modelagem numérica de uma seção de concreto armado, de forma a reproduzir o seu comportamento mecânico em situações reais de carregamento ou em ensaios de laboratório. Os autores fizeram comparações entre os métodos numéricos de integração utilizados (Método do Ponto Médio, Método dos Trapézios, Método de Simpson, Método de Gauss) assim como uma análise de convergência entre os métodos apresentados. Os autores constataram que o Método do Ponto Médio, apesar de ser o mais simples, foi o que melhor convergiu na média, porém todos os métodos se mostraram apropriados. Quanto ao cálculo dos deslocamentos em vigas e pilares, os autores observaram que, para as deformações no regime elástico, as equações da resistência dos materiais são bastante precisas, porém, para deformações fora do regime elástico, tais equações podem levar a erros substanciais.

Scadelai e Pinheiro (2003) apresentaram um trabalho de dimensionamento de pilares de concreto armado utilizando os métodos aproximados do Pilar Padrão com Curvatura Aproximada e do Pilar Padrão com Rigidez Aproximada de acordo com o projeto de revisão da NBR 6118 (2001) – Projeto de Estruturas de Concreto Armado, com alguns exemplos numéricos para melhor compreensão do trabalho. Como resultado desse estudo, os autores observaram que a excentricidade de primeira ordem e_1 não inclui a excentricidade acidental e_a, apenas a excentricidade inicial e_i. Um outro aspecto observado pelos autores é que, para diferentes casos de apoio de pilares, para o cálculo de α_b, os resultados da área de armadura diferem de 21%, que os autores consideraram uma diferença muito grande. Os autores ainda destacaram que, no cálculo de $\lambda_{1,}$ a NBR 6118 (2001) não deixa claro em qual seção se deve considerar a excentricidade $e_{1,}$ e que no caso de α_b = 0,40, o Método da Rigidez Aproximada não convergiu.

Bastos e Oliveira Neto (2004) desenvolveram um trabalho para mostrar as modificações, com relação aos pilares de extremidade de concreto armado, introduzidas pela NBR6118/2003. Foram apresentados um roteiro de cálculo e quatro exemplos numéricos de aplicação das novas prescrições para o dimensionamento dos pilares de extremidade. Os resultados foram analisados e comparados com aqueles obtidos segundo a metodologia contida na NBR 6118/78. Na comparação dos resultados numéricos, calculados segundo as duas normas, os autores encontraram variação de armadura longitudinal de 6% a até 46%, conforme a direção da flexão do pilar.

Kwak e Kim (2004) apresentaram um modelo numérico para simular as não linearidades física e geométrica em pilares de concreto armado. Após estudos de correlação de dados experimentais com resultados numéricos para verificar a precisão do modelo numérico desenvolvido, os autores conduziram numerosos estudos paramétricos e propuseram uma fórmula de regressão para calcular a capacidade resistente de pilares esbeltos de concreto armado. Finalmente diagramas de interação NxM, construídos a partir de dados calculados pela fórmula, foram comparados com aqueles construídos a partir de uma análise linear rigorosa com o objetivo de obter precisão na fórmula proposta. Com os resultados obtidos, os autores constataram que a equação proposta é efetiva na determinação da seção inicial de pilares esbeltos de concreto armado na fase preliminar de projeto.

Araújo et alli (2005) desenvolveram um trabalho com o objetivo de avaliar o comportamento de pilares de concreto armado submetidos à flexão normal composta. Foi realizado um programa experimental que foi dividido em três séries de três pilares com variações na excentricidade e na taxa de armadura longitudinal. O modelo estrutural adotado foi de pilar bi-articulado com excentricidades idênticas em suas extremidades. Além de pilares de concreto simples, os autores estudaram as taxas de armadura longitudinal de 314 mm^2 e 371 mm^2 para analisar a influência destas na resistência limite das peças submetidas à flexão excêntrica. O trabalho detalha a evolução dos deslocamentos horizontais e verticais, as deformações na armadura e no concreto, a formação de fissuras e as cargas de ruptura do pilares. Os autores concluíram que as taxas de armadura influenciam em todas as características observadas nos três grupos, principalmente nas maiores excentricidades.

Kwak e Kim (2005a) apresentaram um modelo analítico que simula o comportamento de pilares esbeltos de concreto armado, e o sugerido modelo foi verificado pela comparação com resultados baseados em estudos analíticos e experimentais. Nesse trabalho os autores consideraram a inclusão das não linearidades física e geométrica. Os autores concluíram que o efeito de segunda ordem aparece mais significantemente quando há o decréscimo da taxa de armadura, ou seja, o aumento da taxa de armadura leva a um menor decréscimo da capacidade resistente, quando se aumenta a esbeltez do pilar. Além disso, os autores mostraram que o uso de um concreto com maior resistência à compressão leva a um maior decréscimo na capacidade resistente do pilar, quando há um aumento da esbeltez do pilar.

Kwak e Kim (2005b) propuseram uma fórmula utilizando o modelo proposto por Kwak e Kim (2005a) para calcular a capacidade resistente de pilares esbeltos de concreto armado. Baseados no resultado desse trabalho, os autores chegaram às seguintes conclusões: (1) a fórmula do ACI (ACI 318-99) dá bons resultados na análise dos efeitos de segunda ordem de pilares de concreto armado submetidos a carregamentos de curta duração, quando a resistência à compressão do concreto, o índice de esbeltez e a taxa de armadura são relativamente pequenos; mas (2) dá resultados muito conservadores quando o índice de esbeltez é incrementado; e (3) a fórmula do ACI precisa ser aperfeiçoada para simular com mais precisão os efeitos que dependem do tempo; (4) a razoável estimativa da capacidade resistente última, dada pela fórmula do ACI, não deve ser esperada para pilares de concreto armado que possuem índice de esbeltez maior do que 30, submetidos a longos períodos de carregamentos; e (5) a fórmula proposta pelos autores dá bons resultados e fornece uma satisfatória margem de segurança, para pilares de qualquer esbeltez.

De acordo com revisão bibliográfica exposta, observa-se que o assunto referente a pilares de concreto armado ainda está longe de ser esgotado. Apesar de existir uma vasta bibliografia sobre o assunto, o fato dos pilares de concreto armado terem comportamento não linear tanto físico quanto geométrico, deixa margem para simplificações na intenção de facilitar os cálculos de dimensionamento. Dessa forma, a tendência dos pesquisadores está em verificar a validade dessas simplificações e ainda averiguar os novos conceitos introduzidos pela nova NBR 6118(ABNT, 2003).

É importante ressaltar que pelo fato do presente trabalho avaliar as simplificações permitidas pela NBR 6118/2003 (ABNT, 2003) a revisão bibliográfica aqui exposta apresenta trabalhos predominantemente nacionais.

4. METODOLOGIA

4.1. ASPECTOS INICIAIS

O desenvolvimento de um programa computacional para cálculo e dimensionamento de pilares está sendo proposto e se aplica a pilares isolados de concreto armado submetidos à flexão normal composta, com a inclusão das não linearidades física e geométrica, de maneira rigorosa, ou seja, com o uso do Método Geral.

Os pilares de concreto armado podem atingir a ruína de duas maneiras diferentes: ruína por ruptura da seção e ruína por instabilidade do equilíbrio.

A ruptura de uma seção transversal de concreto armado ocorre quando os esforços solicitantes são maiores que a capacidade resistente da seção.

Os pilares esbeltos de concreto armado possuem um tipo característico de ruína que é a instabilidade do equilíbrio. Esse tipo de ruína ocorre quando, acrescentando carga ao pilar, há um aumento dos deslocamentos transversais do seu eixo até que atinjam um valor crítico onde não haja mais equilíbrio, ou seja, o equilíbrio se torna instável. Com o aumento dos deslocamentos, crescem também os momentos fletores de segunda ordem e, após a instabilidade, pode ocorrer a ruptura da seção. Entretanto o estado limite foi alcançado por instabilidade do equilíbrio e não por ruptura da seção.

Para a análise e dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado é necessário o estudo da estabilidade do pilar. Se o pilar for estável para um dado carregamento, significa que existe uma posição deformada para a qual ocorre o equilíbrio do pilar, senão o pilar é instável.

Para incluir as duas não linearidades, física e geométrica, no dimensionamento dos pilares esbeltos, ocorre que, para que seja feito o estudo da estabilidade do pilar, é necessário conhecer a sua armadura, sendo que esta é a incógnita do problema. Para resolver esta questão, neste trabalho, a armadura necessária para que o equilíbrio seja possível é encontrada através de um processo de busca. O dimensionamento do pilar é feito através da verificação da mínima área de aço capaz de verificar a estabilidade do pilar. Quando os deslocamentos nodais divergirem, é constatada a instabilidade do pilar, e quando o par de esforços, momento fletor e força normal, não puder ser equilibrado no estado limite último, é constatada a ruína por ruptura da seção transversal.

O método numérico utilizado para cálculo dos deslocamentos nodais é o Método dos Elementos Finitos. Esse método permite realizar a análise do pilar com diversas condições de contorno e de carga, dando maior versatilidade ao programa.

Para a inclusão das não linearidades física e geométrica é empregado o método de Newton-Raphson Modificado. Esse método resolve o sistema linear repetidas vezes até a convergência dos deslocamentos nodais, onde é detectada a estabilidade do pilar.

Na determinação das tensões nas diversas camadas de armadura e nas fibras de concreto, são considerados os diagramas tensão-deformação não-lineares para o concreto e bilinear para o aço, fazendo, desta forma, a inclusão da não linearidade física no programa proposto.

Os resultados obtidos no programa são comparados com os resultados obtidos por um pacote computacional comercial (Sistemas Integrados CAD/TQS) e com trabalhos experimentais encontrados na literatura, a fim de validar o programa computacional desenvolvido. É realizado então um estudo comparativo entre o programa elaborado e os resultados obtidos pela aplicação dos métodos simplificados permitidos pela NBR 6118/2003 (ABNT, 2003). Nos pilares estudados não foi considerado carregamento transversal.

4.2. MODELO TEÓRICO

4.2.1. HIPÓTESES BÁSICAS

Algumas hipóteses básicas são admitidas no dimensionamento de uma seção transversal de concreto armado submetida à flexão simples ou composta:

- manutenção das seções planas após as deformações do elemento;
- a deformação em uma fibra genérica da seção é diretamente proporcional à sua distância até a linha neutra;
- aderência perfeita entre as barras da armadura e o concreto que as envolve;
- a resistência à tração do concreto é totalmente desprezada;
- emprego do diagrama parábola-retângulo para representar a relação tensão/deformação do concreto;

- emprego do diagrama elasto-plástico prefeito para representar a relação tensão/deformação do aço.

- a seção transversal de concreto é considerada não fissurada para o cálculo da matriz de rigidez.

4.2.2. SEÇÃO TRANSVERSAL DO PILAR

A seção transversal do pilar a ser analisado é retangular e constante e possui várias camadas de armadura (Figura 4-1) espaçadas uniformemente ao longo de sua altura h. As camadas são numeradas de baixo para cima.

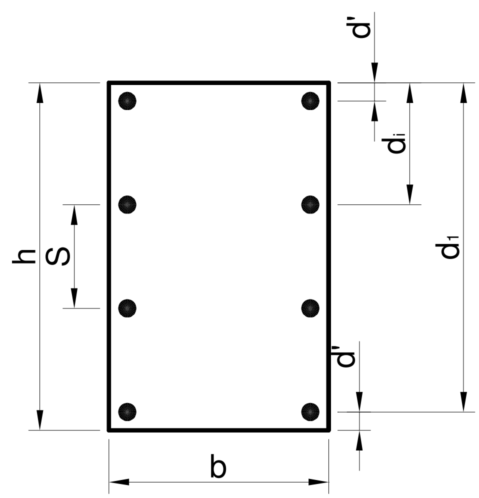

Figura 4-1– Seção Transversal de Concreto Armado

Como todas as barras possuem o mesmo diâmetro, constata-se que:

$$As_i = \frac{n_i}{n_{total}} As \tag{4.1}$$

4.2.3. Equações de Equilíbrio

Na Figura 4-2 estão representados os esforços solicitantes N_d e M_d, a resultante de compressão no concreto R_{cc} e a resultante das tensões em uma camada genérica de amadura, R_{si}.

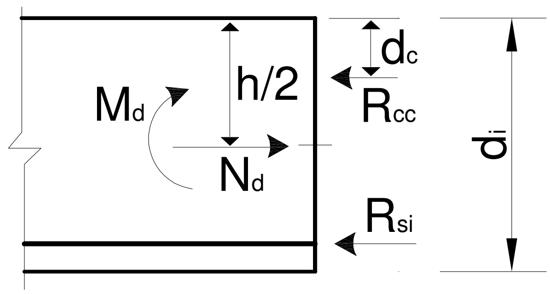

Figura 4-2-Resultante das tensões e esforços solicitantes

A resultante R_s é dada por:

$$R_s = \sum_{i=1}^{t} As_i \sigma_{si} \tag{4.2}$$

Substituindo a equação (4.1) na equação (4.2):

$$R_s = \frac{As}{n_{total}} \sum_{i=1}^{t} n_i . \sigma_{si} \tag{4.3}$$

onde *t* é o número de camadas de aço da seção transversal.

A resultante R_{cc} é dada por:

$$R_{cc} = \int_{0}^{X} b\sigma_c d_z \tag{4.4}$$

O equilíbrio de forças e dado por:

$$N_d = R_{cc} + R_s \tag{4.5}$$

O equilíbrio de momentos é dado por:

$$M_d = N_d \cdot \frac{h}{2} - R_{cc}.d_c - \sum_{i=1}^{t} R_{si}.d_i \tag{4.6}$$

4.2.4. MODELOS MATERIAIS

Neste item são apresentados os diagramas tensão-deformação do aço e do concreto. O diagrama proposto depende do objetivo da análise a ser feita. Para representar o comportamento do concreto quando o objetivo for o dimensionamento estrutural, é adotado o diagrama tensão-deformação proposto pela NBR 6118/2003 (ABNT, 2003) (Figura 4-3). Quando o objetivo é comparar os resultados do programa com dados experimentais, é adotado o diagrama tensão-deformação do concreto proposto pelo CEB (Comitê Euro-International du Béton, 1993) mostrado na

Figura 4-4, pois neste caso usa-se a resistência média à compressão do concreto.

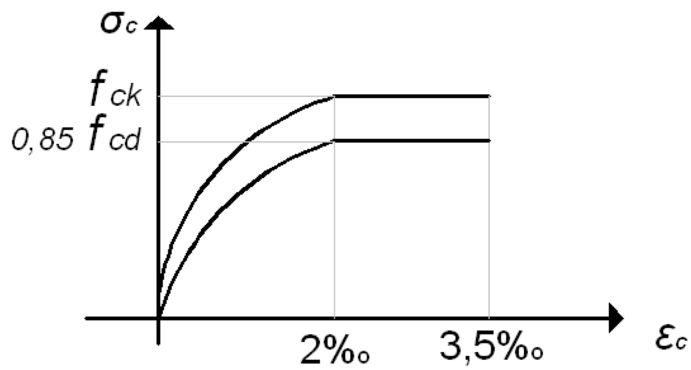

Figura 4-3 - Diagrama tensão-deformação proposto pela NBR 6118/2003 (ABNT, 2003)

No diagrama proposto pela NBR 6118/2003 (ABNT, 2003) as relações tensão-deformação são estabelecidas pelas seguintes equações:

$$\sigma_c = 0{,}85 * f_c \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{0{,}002} \right)^2 \right] \text{ se } \varepsilon_c < \varepsilon_0 \tag{4.7}$$

$$\sigma_c = 0{,}85 fcd \text{ se } 0{,}2\% < \varepsilon_c < 0{,}35\% \tag{4.8}$$

$$\sigma_c = 0 \text{ se } \varepsilon_c > 0{,}35\% \tag{4.9}$$

No diagrama proposto pelo CEB (Comitê Euro-International du Béton ,1993) as relações tensão-deformação são estabelecidas pelas seguintes equações:

$$\sigma_c = f_{cm} \left(\frac{\kappa\eta - \eta^2}{1 + (\kappa - 2)\eta} \right) \tag{4.10}$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{0{,}22\%} \;;\; \kappa = \frac{E_c * 0{,}22\%}{f_{cm}} \tag{4.11}$$

$$E_c = 21500\left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{1/3}, MPa \qquad (4.12)$$

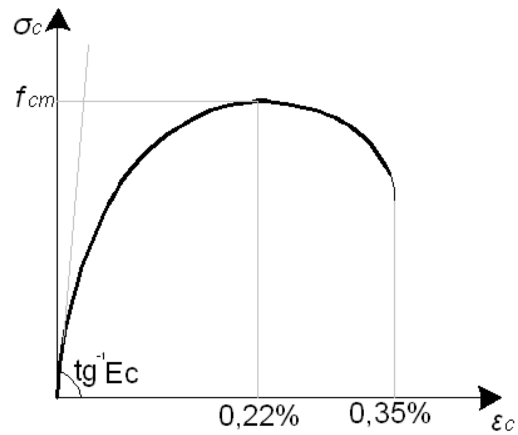

Figura 4-4 – Diagrama tensão-deformação proposto pelo CEB

Observa-se que na fórmula do CEB o módulo de deformação longitudinal do concreto, E_c, é uma função de sua resistência média à compressão, f_{cm}, e não da sua resistência característica à compressão, f_{ck}. Em geral, nos dados experimentais, é conhecida a resistência média à compressão do concreto, por isso o diagrama tensão-deformação proposto pelo CEB foi escolhido quando o programa foi comparado com dados experimentais.

Para o aço adotou-se um comportamento elasto-plástico perfeito. A Figura 4-5 apresenta o diagrama utilizado, para tração, e para compressão. As equações constitutivas para o aço estão mostradas nas equações (4.13) a (4.15).

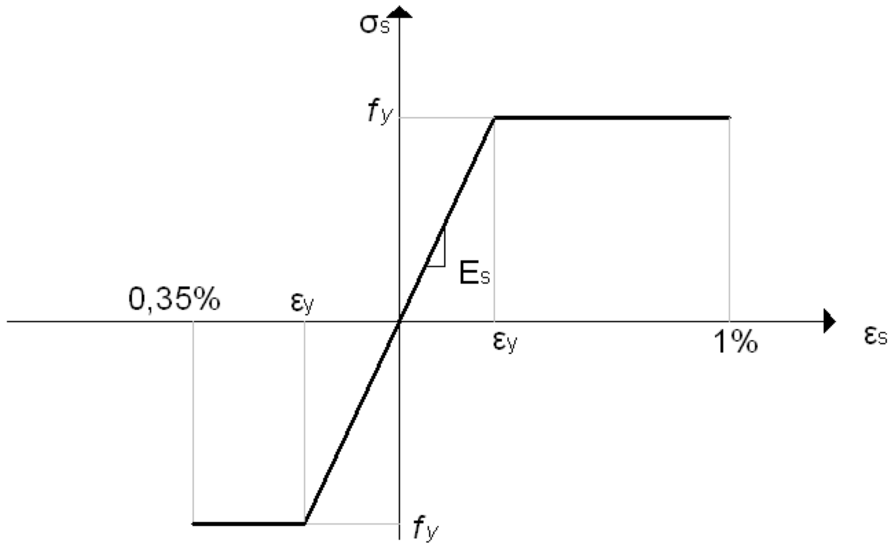

Figura 4-5 - Diagrama tensão-deformação do aço (fonte: ABNT, 2003)

$$\sigma_s = E_s\, \varepsilon_s \text{, se } \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \tag{4.13}$$

$$\sigma_s = f_y \text{, se } \varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq 1\% \;\; \Rightarrow \textit{tração} \tag{4.14}$$

$$\sigma_s = f_y \text{, se } \left|\varepsilon_y\right| \leq \left|\varepsilon_s\right| \leq 0{,}35\% \;\; \Rightarrow \textit{compressão} \tag{4.15}$$

onde ε_y é a deformação específica do aço no início do patamar de escoamento e depende da classe do aço utilizado.

4.2.5. DESLOCAMENTOS EM BARRAS ESBELTAS

Para se obter os deslocamentos em barras esbeltas adota-se a hipótese das seções planas, ou seja, admite-se que as seções transversais ao eixo do pilar, inicialmente planas, permanecem planas e normais ao eixo deformado e que essa condição é cumprida até a ruptura, desprezando-se assim as deformações por cisalhamento. Outra hipótese a ser adotada é a de que os deslocamentos transversais

(W) do eixo do pilar sejam pequenos em relação a seu comprimento (*l*). Sendo assim, a curvatura média (χ) das seções do pilar pode ser a obtida pela expressão aproximada, equação (4.16), onde *x* é medido ao longo do eixo indeformado, e o esforço normal se mantém praticamente constante independente das deformações do pilar:

$$\chi = -\frac{\mathrm{d}^2 W(x)}{dx^2} \tag{4.16}$$

A Figura 4-6 mostra uma barra nas posições indeformada e deformada. As cargas são aplicadas no plano *x-z*. A barra está sob flexão normal composta. De acordo com Araújo (2003b) o eixo da barra sofre um deslocamento u_o na direção *x*, um deslocamento *W* na direção *z*. e a seção transversal sofre uma rotação θ .

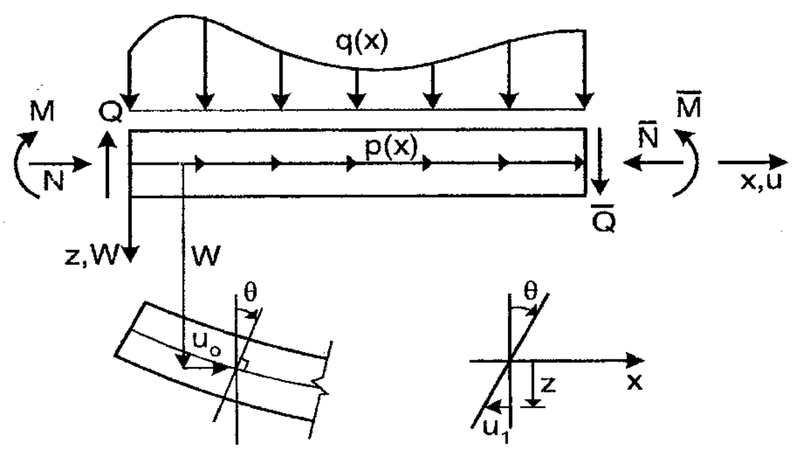

Figura 4-6 - Deslocamentos e forças em uma barra esbelta (fonte: ARAÚJO, 2003b)

Dessa forma, o deslocamento *u(x,z)* em uma fibra genérica da seção, situada a uma distância z do eixo da barra, é dado por:

$$u(x,z) = u_o(x) + u_1(x,z) \tag{4.17}$$

onde u_1 é o deslocamento provocado pela rotação da seção transversal.

O deslocamento u_1 é dado por:

$$u_1(x,z) = -z\theta = -z\frac{dW}{dx} \tag{4.18}$$

Substituindo a equação (4.18) na equação (4.17), o deslocamento no interior da barra é dado por:

$$u\ \ (x,z) = u_o(x) - z\frac{dW}{dx} \tag{4.19}$$

4.2.6. DEFORMAÇÕES

A relação da deformação normal em um ponto genérico da barra com os deslocamentos do seu eixo é dada pelas seguintes equações:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + z\chi \tag{4.20}$$

onde:

$$\varepsilon_0 = \frac{du_o}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 \tag{4.21}$$

Estas relações estão demonstradas em Araújo (2003b).

4.2.7. CRITÉRIOS DE RUPTURA DA SEÇÃO TRANSVERSAL

Na compressão axial, os concretos atingem picos máximos de tensões para deformações de 0,2%. Na flexão simples a capacidade máxima de absorver os esforços ocorre aproximadamente a 0,35% de deformação. O máximo alongamento do aço permitido foi estipulado em 1%.

Com base nesses critérios, no presente trabalho os valores limites de encurtamento do concreto e de alongamento do aço são adotados de acordo com a Tabela 4-1.

Tabela 4-1 - Limites de deformação do concreto e do aço

Condição	Deformação
Alongamento da armadura tracionada	$\varepsilon_s \leq 0{,}010$
Encurtamento do concreto em seções parcialmente comprimidas	$\varepsilon_c \leq 0{,}0035$
Encurtamento do concreto em seções submetidas à compressão não-uniforme	$0{,}002 \leq \varepsilon_c \leq 0{,}0035$
Encurtamento do concreto em seções totalmente comprimidas	$\varepsilon_c \leq 0{,}002$

4.3. PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS

4.3.1. CÁLCULO DA RESULTANTE R_{CC}

A resultante Rcc é dada por:

$$R_{cc} = \int_0^X b\sigma_c d_z \tag{4.22}$$

Desprezando-se as contribuições do concreto tracionado, as integrais de concreto podem ser resolvidas numericamente, dividindo-se a seção em faixas de largura b e altura Δh (Figura 4-7). As tensões de concreto são calculadas dentro de cada faixa. A variável K indica o número de faixas a ser utilizado e é obtida pela razão entre a altura da linha neutra, x, e a altura da faixa, Δh, previamente estabelecida (equação (4.23)). A resultante R_{cc} é então obtida pela equação (4.24).

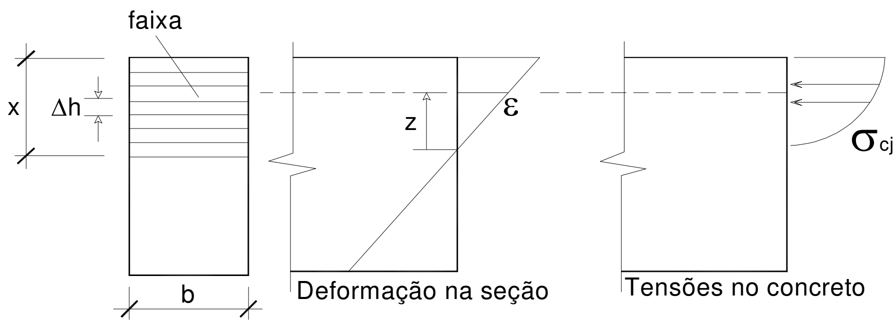

Figura 4-7 Divisão da seção em faixas para integração numérica

$$K = \frac{x}{\Delta h} \tag{4.23}$$

$$R_{cc} = \sum_{j=1}^{K} \Delta h.b.\sigma_{cj} \tag{4.24}$$

4.3.2. CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS

O procedimento numérico desenvolvido para o cálculo dos deslocamentos é baseado no Método dos Elementos Finitos empregando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais.

No Método dos Elementos Finitos o eixo do pilar é discretizado em pequenos elementos de comprimento L que são interligados por seus nós. Cada nó possui um deslocamento transversal, um deslocamento axial e uma rotação (Figura 4-8).

Através das funções de interpolação apresentadas nas equações (4.25) a (4.30), os deslocamentos em um ponto genérico do elemento finito são obtidos em função dos deslocamentos nodais.

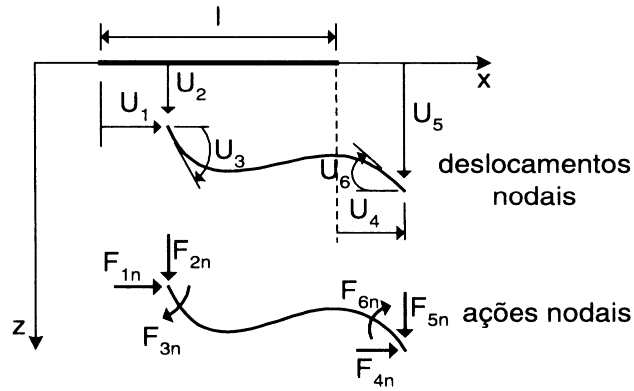

Figura 4-8- Ações e deslocamentos nodais do elemento

$$\phi_1 = 1 - \left(\frac{x}{L}\right) \tag{4.25}$$

$$\phi_2 = 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1 \tag{4.26}$$

$$\phi_3 = L\left(\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)\right) \tag{4.27}$$

$$\phi_4 = \left(\frac{x}{L}\right) \tag{4.28}$$

$$\phi_5 = -2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 \tag{4.29}$$

$$\phi_6 = L\left(\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right) \tag{4.30}$$

Os deslocamentos u_o e W do eixo do elemento são interpolados na forma:

$$u_o = \phi_1 U_1 + \phi_4 U_4 \tag{4.31}$$

$$W = \phi_2 U_2 + \phi_3 U_3 + \phi_5 U_5 + \phi_6 U_6 \tag{4.32}$$

As equações que determinam as ações nodais não lineares de cada elemento são dadas por:

$$F_{1n} = \int_0^l N_d \phi_1^{'} dx \tag{4.33}$$

$$F_{2n} = \int_0^l -M_d \phi_2^{''} dx + \int_0^l N_d (\phi_2^{'} U_2 + \phi_3^{'} U_3 + \phi_5^{'} U_5 + \phi_6^{'} U_6)\phi_2^{'} dx \tag{4.34}$$

$$F_{3n} = \int_0^l -M_d \phi_3^{''} dx + \int_0^l N_d (\phi_2^{'} U_2 + \phi_3^{'} U_3 + \phi_5^{'} U_5 + \phi_6^{'} U_6)\phi_3^{'} dx \tag{4.35}$$

$$F_{4n} = \int_0^l N_d \phi_4^{'} dx \tag{4.36}$$

$$F_{5n} = \int_0^l -M_d \phi_5^{''} dx + \int_0^l N_d (\phi_2^{'} U_2 + \phi_3^{'} U_3 + \phi_5^{'} U_5 + \phi_6^{'} U_6)\phi_5^{'} dx \tag{4.37}$$

$$F_{6n} = \int_0^l -M_d \phi_6^{''} dx + \int_0^l N_d (\phi_2^{'} U_2 + \phi_3^{'} U_3 + \phi_5^{'} U_5 + \phi_6^{'} U_6)\phi_6^{'} dx \tag{4.38}$$

Para a resolução dessas equações é utilizada a técnica de integração numérica denominada Quadratura de Gauss-Legendre, que consiste em aproximar a integral de uma função através de um somatório, de modo que a integral é calculada somando-se os produtos do peso em cada ponto pelo valor da função no mesmo ponto.

No programa proposto, para a resolução das integrais das equações (4.33) a (4.38) foram considerados três pontos de integração. Os pontos, as coordenadas dos pontos e seus respectivos pesos estão apresentados na Tabela 4-2.

Para ilustrar o procedimento utilizado no programa foi desenvolvido no apêndice A a resolução da equação (4.33).

Tabela 4-2- Pontos de Integração da Quadratura de Gauss-Legendre

i	ξ_i	ϖ_i
1	$\sqrt{0,6}$	5/9
2	0	8/9
3	$-\sqrt{0,6}$	5/9

onde *i* é número do ponto de integração, ξ_i é a coordenada do ponto *i* e ϖ_i é o peso associado ao ponto *i.*

Com os deslocamentos nodais e as funções interpoladoras conhecidas, através das seis equações de equilíbrio, chega-se ao sistema de equações:

$$\underline{F}_n^{(e)} = \underline{K}^{(e)}.\underline{U}^{(e)} \tag{4.39}$$

onde $\underline{F}_n^{(e)}$ é o vetor de ações nodais, $\underline{U}^{(e)}$ é o vetor com os deslocamentos nodais e $\underline{K}^{(e)}$ é a matriz de rigidez do elemento (ver apêndice B).

A matriz de rigidez $\underline{K}^{(e)}$ do elemento será:

$$\underline{K}^{(e)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 12b & 6bL & 0 & -12b & 6bL \\ 0 & 6bL & 4bL^2 & 0 & -6bL & 2bL^2 \\ -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -12b & -6bL & 0 & 12b & -6bL \\ 0 & 6bL & 2bL^2 & 0 & 6bL & 4bL^2 \end{vmatrix} \tag{4.40}$$

Para cálculo das rigidezes axial e à flexão é considerada a seção transversal de concreto armado homogeneizada. As variáveis *a* e *b* mostradas na matriz de rigidez de cada elemento finito, *K* (equação (4.40)), são dadas por:

$$a = \frac{1}{L}\left(E_c A_c + E_s \sum_{i=1}^{n} A_{si} \right) \tag{4.41}$$

$$b = \frac{1}{L^3}\left(E_c I_c + E_s \sum_{i=1}^{n} I_{si} \right) \tag{4.42}$$

onde I_c e A_c são o momento de inércia e a área da seção bruta de concreto, respectivamente.

4.3.3. INCLUSÃO DAS NÃO LINEARIDADES FÍSICA E GEOMÉTRICA

A inclusão da não linearidade geométrica é feita através do último termo das equações (4.34), (4.35), (4.37), (4.38). A não-linearidades física é considerada no cálculo do esforço normal N_d (equação (4.5)) e do momento fletor M_d (equação (4.6)).

Com a inclusão das não linearidades através do vetor de ações nodais não lineares, haverá um desequilíbrio $\underline{\Delta F}$ entre o vetor de cargas externas $\underline{F}$ e o vetor de ações nodais não lineares $\underline{F}_i$. Dessa forma, considerando a matriz de rigidez constante, é possível obter um novo vetor de deslocamentos nodais $\underline{U}_i$. Desenvolve-se então um processo iterativo que fornece uma seqüência de deslocamentos nodais de forma que a cada iteração diminua o desequilíbrio, havendo dessa forma a convergência dos deslocamentos.

O processo numérico escolhido foi o Método de Newton–Raphson Modificado com Rigidez Constante (Figura 4-9), que é um processo iterativo para a determinação de raízes de funções não lineares. No caso do programa proposto, os deslocamentos nodais são as incógnitas do problema.

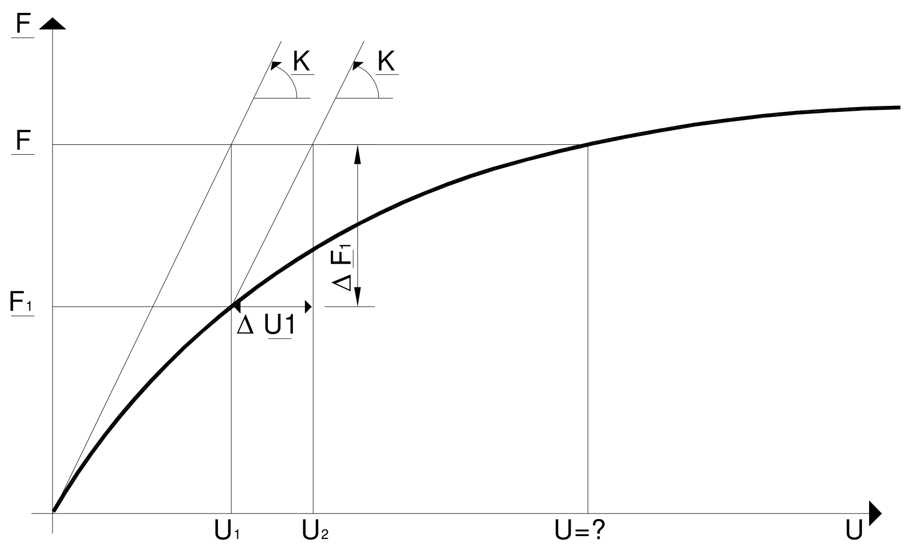

Figura 4-9- Método de Newton-Raphson Modificado com Rigidez Constante (fonte: ARAÚJO, 1993)

4.3.4. CÁLCULO DA ARMADURA LONGITUDINAL

O dimensionamento de pilares usando a teoria do Método Geral requer um processo iterativo para a determinação da mínima área de aço (As) capaz de verificar a estabilidade do pilar.

Os valores limites utilizados como referência na determinação da armadura longitudinal de pilares foram extraídos da norma brasileira NBR 6118/2003 (ABNT, 2003) .

A armadura longitudinal mínima deve ser:

$$As_{\min} \geq \begin{Bmatrix} 0,15 * N_d \,/\, fyd \\ 0,004 * Ac \end{Bmatrix} \tag{4.43}$$

A armadura longitudinal máxima deve ser:

$$As_{\max} = 0,08 * Ac \tag{4.44}$$

5. PROGRAMA COMPUTACIONAL

5.1. DESCRIÇÃO GERAL

São estabelecidos como dados de entrada os seguintes parâmetros: características geométricas da estrutura, propriedades mecânicas dos materiais, dimensões da seção do elemento, posição da armadura, cargas nodais, cargas distribuídas e condições de contorno.

Inicialmente é montado o vetor de cargas externas $\underline{F}$ e a matriz de rigidez global $\underline{K}$ (equação (4.40)). Em uma iteração *i*, são conhecidos os deslocamentos nodais $U_i^{(e)}$ de cada elemento finito através do sistema de equações (4.39). A partir desses deslocamentos é possível determinar os deslocamentos u_o e W (equações (4.31) e (4.32)) do eixo de cada elemento através das funções de interpolação (equações (4.25) a (4.30)).

É determinada uma área mínima de aço (As_{min}) (equação (4.43)) e com essa área de aço é verificada a estabilidade do pilar, da seguinte forma:

a partir dos esforços solicitantes N_d (equação (4.5)) e M_d (equação (4.6)), incluindo as não linearidades, é possível obter o vetor de ações nodais não lineares $\underline{F}_n$

(equações (4.33) a (4.38)) para cada elemento finito. Nesse conjunto de equações é introduzida a não linearidade geométrica. O vetor de ações nodais não-lineares $\underline{F}_n$ corresponde aos deslocamentos nodais U_i da iteração atual. O vetor $\Delta\underline{F}$ é obtido da diferença entre o vetor de ações nodais não lineares da estrutura completa $\underline{F}_i$ e o vetor de cargas externas da estrutura completa $\underline{F}$. Para reduzir essa diferença são realizadas *n* iterações até a convergência do processo iterativo. O processo iterativo utilizado nesta fase é o método de Newton-Raphson Modificado com rigidez constante. Quando ocorrer a convergência, significa que o pilar é estável com a mínima área de aço possível, portanto o pilar está dimensionado com armadura mínima.

Se não ocorrer a convergência do processo, a estabilidade do pilar deve ser verificada com a máxima área de aço (As_{max}) (equação (4.44)). Se a convergência do processo não for verificada, significa que o pilar não é estável com a máxima área de aço (As_{max}) permitida, e portanto o pilar não pode ser dimensionado. Se for constatada a estabilidade do pilar, uma nova área de aço adotada será a média da máxima e da mínima área de aço, fazendo novamente o estudo da estabilidade do pilar. Este procedimento é repetido até que o pilar seja estável para a menor área de aço que o equilibre (Figura 5-1).

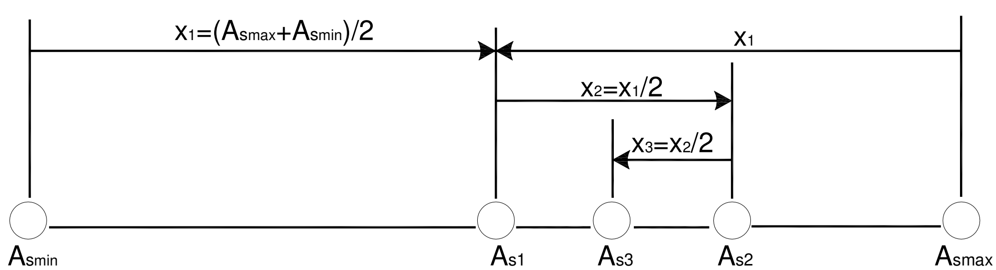

Figura 5-1– Convergência do Processo Interativo

O programa foi desenvolvido na linguagem Pascal.

5.2. ALGORITMOS E FLUXOGRAMAS

Neste item são desenvolvidos os algoritmos utilizados no programa proposto. No item 5.2.1 é apresentado o algoritmo para dimensionamento de pilares utilizando o método geral. Nesse caso é necessário fazer um estudo da estabilidade do pilar que está apresentado no algoritmo do item 5.2.2. Para a inclusão das não linearidades no cálculo dos esforços foi desenvolvido o algoritmo do item 5.2.3.

5.2.1. CÁLCULO DA ARMADURA LONGITUDINAL

a) Montagem do vetor de cargas externas $\underline{F}$ e da matriz de rigidez global $\underline{K}$ (equação (4.40)).

b) Introdução das condições de contorno.

c) Solução do sistema de equações lineares $\underline{F} = \underline{K}\ \underline{U}$. Determinar os deslocamentos nodais U_i, sendo *i* a iteração atual.

d) Adotar como ponto de partida um valor mínimo para área de aço (As_{min}) (equação (4.43)).

e) Estudar a estabilidade do pilar com área de aço atual (As) igual a As_{min} (item 5.2.2).

f) Se a estabilidade do pilar for verificada passa-se para o passo (*l*), senão passa-se para o passo (g)

g) Adota-se um valor máximo para área de aço da seção (As_{max}) (equação (4.44)).

h)Verifica-se novamente a estabilidade do pilar (item 5.2.2) com área de aço atual (As) igual a As_{max}. Se a estabilidade do pilar não for verificada passa-se para o passo (k), caso contrário passa-se para o passo (i).

i)Calcula-se um novo valor para a área de aço (As_m), usando-se a expressão:

$$As_m = \frac{As_{\max} + As_{\min}}{2} \tag{5.1}$$

j)Verifica-se a estabilidade do pilar (item 5.2.2) com a área de aço atual (As) igual a As_m. Se a estabilidade do pilar for verificada adota-se $As_{max}=As_m$, caso contrário $As_{min} = As_m$. Retorna-se para o passo (i) se a diferença entre dois valores consecutivos de As for maior que a tolerância pré-estabelecida. Caso contrário o pilar está dimensionado.

k)O procedimento deve ser interrompido pois o valor máximo de área de aço não foi suficiente para estabilizar o pilar.

l)O pilar está dimensionado com armadura mínima.

5.2.2. ALGORITMO PARA VERIFICAR A ESTABILIDADE DO PILAR

a)Através dos deslocamentos nodais U_i e das funções de interpolação (equações (4.25) a (4.30)) é possível determinar os deslocamentos u_o (equação (4.31)) e W (equação (4.32)), a curvatura χ (equação (4.16)) e a deformação axial ε_o (equação (4.21)) de cada elemento finito em cada ponto de integração.

b)Calcular z_o que é a distância do eixo da barra até a linha neutra através da equação (5.2).

$$z_o = \frac{\varepsilon_o}{\chi} \tag{5.2}$$

c)Verificar se há deformação excessiva do concreto ou do aço (equação (4.20)) de acordo com a Tabela 4-1. Se há deformação excessiva, voltar ao algoritmo do item 5.2.1 passo (i), senão passar para o passo (d)

d)A partir dos esforços N_d e M_d (item 5.2.3) incluindo as não linearidades, é possível obter o vetor de ações nodais não lineares $\underline{F}_n$ (equações (4.33) a (4.38)) para cada elemento finito em cada ponto de integração. Nessas equações é incluída a não linearidade geométrica. As integrais são resolvidas numericamente através da Quadratura de Gauss-Legendre (ver apêndice A)

e)O desequilíbrio ΔF_i entre as forças aplicadas F e as ações nodais não lineares F_i é dado por:

$$\Delta \underline{F}_i = \underline{F} - \underline{F}_i \tag{5.3}$$

f)Resolve-se o sistema linear:

$$\Delta \underline{F}_i = \underline{K} \Delta \underline{U}_i \tag{5.4}$$

e obtém-se $\Delta \underline{U}_i$.

g)Com $\Delta \underline{U}_i$, calcula-se um novo conjunto de deslocamentos nodais, fazendo-se:

$$\underline{U}_{i+1} = \underline{U}_i + \Delta \underline{U}_i \tag{5.5}$$

h)A estabilidade do pilar é verificada quando, em uma iteração genérica *i*, encontrar:

$$\frac{\left\| \Delta \underline{F}_i \right\|}{\left\| \underline{F} \right\|} \leq tolerância \tag{5.6}$$

e simultaneamente

$$\frac{\left\| \underline{U}_{i+1} - \underline{U}_i \right\|}{\left\| \underline{U}_{i+1} \right\|} \leq tolerância \tag{5.7}$$

Se as tolerâncias não são menores que o mínimo pré-estabelecido transportar $\underline{U}_{i+1}$ para $\underline{U}_i$ e, voltar ao passo (a). A estabilidade do pilar não é verificada quando, após um número máximo de iterações pré-estabelecido, não há a convergência do processo.

5.2.3. CÁLCULO DOS ESFORÇOS M_D E N_D

a)Calcular a altura da linha neutra, X, através da seguinte equação:

$$X = \frac{h}{2} + z_o \tag{5.8}$$

b)Dividir a seção de concreto em faixas de concreto através da equação (4.23), entretanto se $z_o > h/2$ então:

$$\Delta h = \frac{h}{K} \tag{5.9}$$

c)Calcular as deformações, ε_c, em cada faixa de concreto através da equação (4.20).

d)Calcular as tensões, σ_c, em cada faixa de concreto através das equações (4.7) a (4.9) se for utilizar as fórmulas da NBR 6118/2003, ou as equações (4.10) a (4.12) se for utilizar as fórmula do CEB.

e)Calcular a resultante da tensões, R_{cc}, através da equação (4.4).

f)Calcular as deformações, ε_s, em cada camada de aço através da equação (4.20).

g)Calcular as tensões, σ_s, em cada camada de aço através das equações (4.13) a (4.15).

h)Calcular a resultante das tensões do aço, R_s, através da equação (4.3).

i)Calcular os esforços N_d e M_d através das equações (4.5) e (4.6).

5.2.4. FLUXOGRAMAS

Um esquema simplificado do programa proposto está apresentado na Figura 5.2.

Para melhor explicar os algoritmos, os respectivos fluxogramas do programa desenvolvido neste trabalho estão apresentados nas figuras 5.3, 5.4 e 5.5.

Figura 5-2 - Esquema simplificado do programa proposto

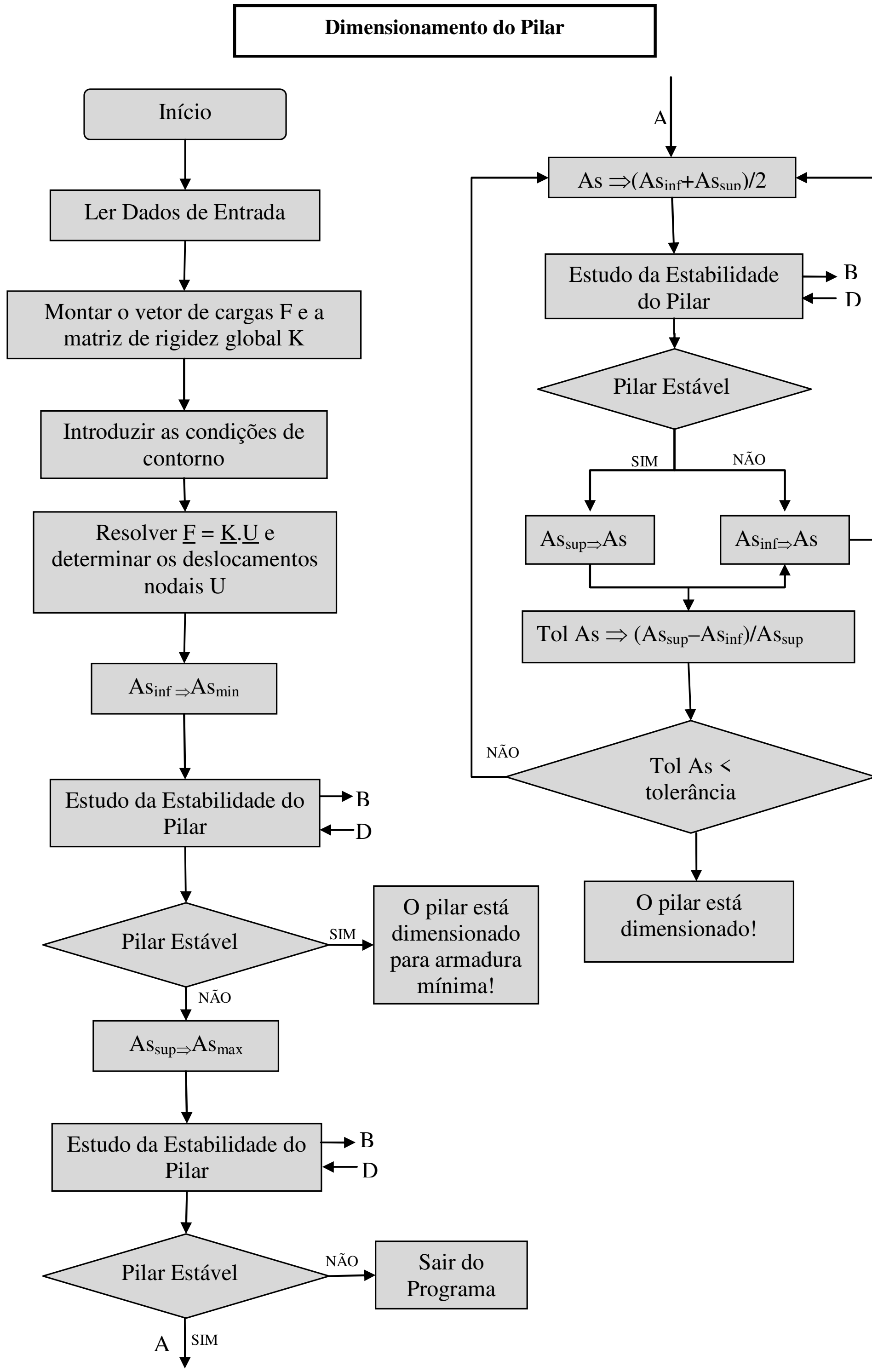

Figura 5-3- Fluxograma para dimensionamento do pilar

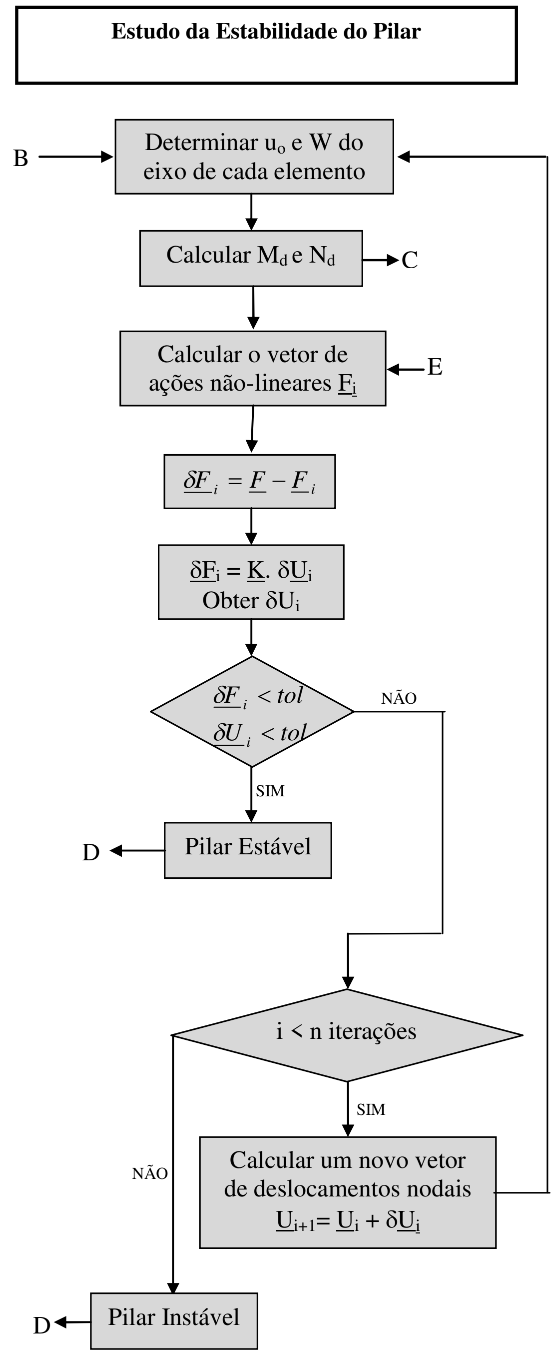

Figura 5-4– Fluxograma para estudo da estabilidade do pilar

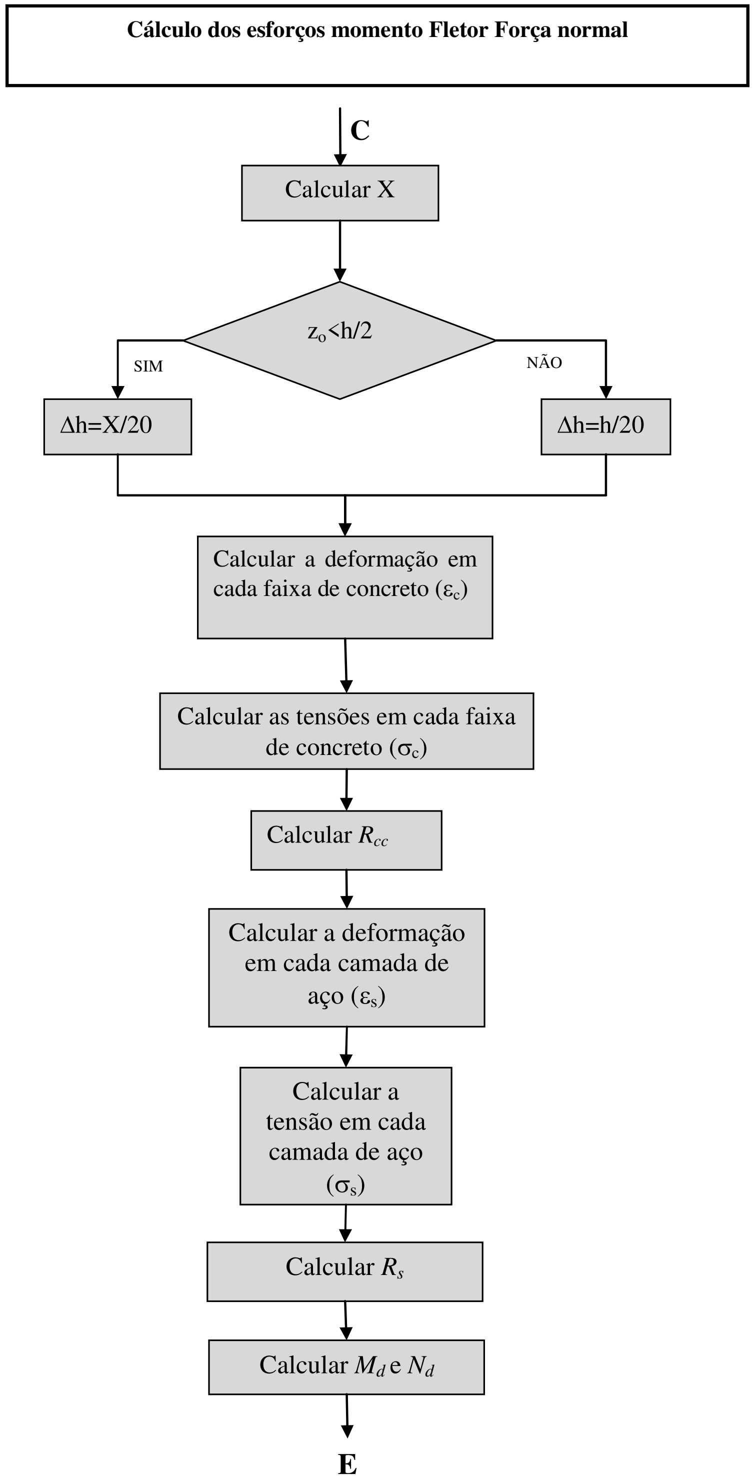

Figura 5-5– Fluxograma para cálculo dos esforços momento fletor e força normal

6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para validar o programa de dimensionamento de pilares isolados (Dim_Pilar) desenvolvido neste trabalho, neste capítulo são apresentadas três formas de análise:

-uma análise comparativa dos resultados obtidos no programa com resultados experimentais;

-uma análise comparativa dos resultados obtidos no programa com resultados extraídos de um pacote computacional comercial (Sistema Integrados CAD/TQS);

-uma análise comparativa dos resultados obtidos no programa com resultados de dimensionamentos realizados através de fórmulas aproximadas permitidas pela norma NBR 6118/2003, verificando dessa forma, a precisão dos processos simplificados.

6.1. RESULTADOS EXPERIMENTAIS X DIM_PILAR

É apresentada neste item uma série de 17 pilares (GOYAL & JACKSON, 1971) que foram divididos em três grupos de acordo com os seguintes parâmetros: área de aço (A_{sexp}), tensão de escoamento do aço (f_y) e comprimento do pilar (l). Os valores adotados são apresentados na Tabela 6-1. Os pilares têm seção transversal constante (Figura 6-1) ao longo de todo seu comprimento inclusive armaduras e foram levados à ruína em aproximadamente 45 minutos após o início do ensaio, aos 28 dias de idade.

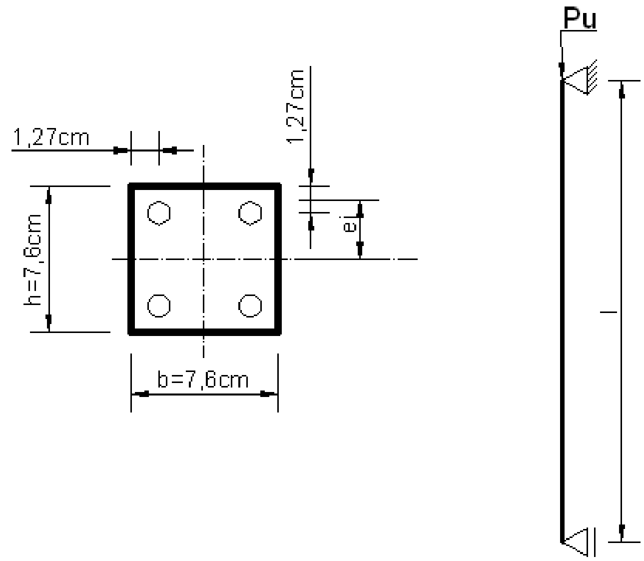

Figura 6-1 – Detalhes dos pilares da série experimental

Para determinação da resistência à compressão do concreto foram ensaiados dois tipos de corpos de prova. Um primeiro corpo de prova é o cilíndrico de 15 cm de diâmetro e 30 cm de altura, padrão da Associação Brasileira de Normas Técnicas, ABNT. A resistência obtida neste corpo de prova denomina-se f_c. Um segundo corpo de prova, de forma prismática, tem a mesma seção transversal dos pilares e altura igual a três vezes o lado da seção. A resistência obtida neste corpo de prova denomina-se f_{pr}. As resistências obtidas para os dois corpos de prova são diferentes uma vez que a forma e dimensões dos mesmos diferem. Para a análise numérica foi adotado o corpo de prova prismático, pois o mesmo retrata melhor a realidade, já que tem a mesma forma e dimensões da seção transversal dos pilares. Uma vez que se estão sendo comparados resultados teóricos com experimentais, a determinação da ruptura é feita com a própria resistência fpr que foi obtida de forma única para cada dois pilares.

O aço utilizado tem patamar de escoamento definido, com uma tensão de escoamento denominada fy. Para módulo de elasticidade adotou-se o valor de 21000 KN/cm2, pela falta de determinação experimental. As cargas de ruína (Pu) e as excentricidades iniciais (ei) obtidas nos ensaios foram adotadas como cargas e excentricidades de projeto para os pilares. Os valores obtidos para a armadura Ascalc, calculada pelo programa Dim_Pilar, são comparados com a armadura existente nos pilares, Asexp. As figuras 6.2, 6.3 e 6.4 ilustram as comparações entre Ascalc e Asexp para os grupos 1, 2 e 3 respectivamente. Na

Tabela 6-2 além dos valores das áreas de aço calculadas, são apresentadas as taxas mecânicas de armadura experimental e um fator Δ (equação 6.1) que indica a variação dos valores das taxas mecânicas de armaduras calculadas em relação às taxas mecânicas das armaduras experimentais.

$$\Delta = \frac{\omega_{t,\,calc} - \omega_{t,\,\exp}}{\omega_{t,\,\exp}} \qquad (6.1)$$

A taxa mecânica é calculada pela equação (6.2):

$$\omega_t = \frac{A_s}{A_{conc}} \cdot \frac{f_y}{f_c} \qquad (6.2)$$

Essa taxa é utilizada como parâmetro de comparação já que a resistência à compressão do concreto e a tensão de escoamento do aço variam de acordo com os grupos de pilares analisados experimentalmente.

Tabela 6-1- Dados experimentais para os grupos de pilares analisados

Grupo	**f_y (KN/cm^2)**	**L (cm)**	**b (cm)**	**h (cm)**	**As_{exp} (cm^2)**	**λ**
1	35,9	182,9	7,6	7,6	1,42	83
2	31,6	182,9	7,6	7,6	1,00	83
3	31,6	274,3	7,6	7,6	1,00	125

Tabela 6-2 - Comparação: Resultados Dim_Pilar x Dados Experimentais

Grupo	**Pilar**	**P_u (KN)**	**e_i (cm)**	**fc (KN/cm^2)**	**As_{cal} (cm^2)**	**As_{cal} / As_{exp}**	**$\omega_{t,calc}$**	**$\omega_{t,exp}$**	**Δ(%)**
1	P1	33.79	3.81	2	1.37	0.96	0.43	0.44	**-2.3**
1	P2	34.02			1.39	0.98	0.43		**-2.3**
1	P3	45.36	2.54	2.4	1.31	0.92	0.34	0.37	**-8.1**
1	P4	47.71			1.41	0.99	0.37		**0**
1	P5	68.03	1.27	2.25	1.39	0.98	0.38	0.39	**-2.6**
1	P6	66.67			1.33	0.94	0.37		**-5.1**
1	P7	6.47	1.91		1.50	1.06	0.41		**+5.1**
1	P8	4.06			1.39	0.98	0.38		**-2.6**
2	P9	1.23	.27	2,3	1.04	1.04	0.25	0.24	**+4.2**
2	P10	8.51			0.91	0.91	0.22		**-8.3**
2	P11	7.49	.91		1.10	1.10	0.26		**+8.3**
2	P12	6.49			1.06	1.06	0.25		**+4.2**
2	P13	7.87	.54		1.04	1.04	0.25		**+4.2**
2	P14	7.74			1.03	1.03	0.25		**+4.2**
3	P15	1.75	.27	2,2	0.86	0.86	0.21	0.25	**-16.0**
3	P16	4.81	.91	,1	1.08	1.08	0.28	0.26	**+7.7**
3	P17	0.95	.54		1.11	1.11	0.29		**+11.5**

Com base nos valores de Δ, verifica-se que para os pilares do grupo 1, com resistência do aço igual a 35,9 KN/cm2, a armadura calculada apresentou valores inferiores à armadura experimental. A variação, contudo é pouco significativa: das oito pilares analisados, cinco apresentaram variação Δ menor que 2.3% e dois apresentaram variação em torno de 5.1%. O único resultado não coerente neste bloco é o referente ao pilar P3, que apresentou variação de 8.1% , e que mostra inconsistência comparativamente ao pilar P4, que com as mesmas características do pilar P3, apresenta variação nula. Uma justificativa para explicar porque os valores obtidos para a armadura calculada foram inferiores à armadura experimental foi pautada no seguinte aspecto: no grupo 1, a resistência do aço é superior à resistência do aço utilizado nos pilares dos grupos 2 e 3. Assim a parcela de esforços absorvida pela armadura tende a ser mais significativa. Para o cálculo das tensões no aço, foi utilizado o módulo de elasticidade fixado pela norma brasileira que é de 21000 KN/cm2, valor ligeiramente superior ao adotado pelo CEB, de 20000 KN/cm2. Como o trabalho experimental não cita qual o valor do módulo de elasticidade do aço utilizado nos experimentos, é possível que esse valor fique mais próximo ao proposto pelo CEB. Nesse caso, o aço estaria sendo superestimado no cálculo, levando a valores menores de armadura. Essa diferença, contudo, não é significativa.

Já nos valores relativos aos pilares dos grupos 2 e 3, a armadura calculada apresentou , na maioria dos casos, valores superiores aa armadura experimental. Nesses grupos, a tensão de escoamento do aço adotada foi de 31,6 KN/cm2, inferior ao adotado no grupo 1. Nesse caso, o concreto passa a absorver uma parcela maior dos esforços. Na análise experimental, há uma colaboração do concreto tracionado mas ,no cálculo, essa colaboração é desprezada, o que possivelmente pode ter levado a valores mais conservadores para a armadura calculada. As diferenças nos pilares dos grupo 2 e 3 ficaram entre 4% e 11%. O pilar P15 não apresentou resultado consistente.

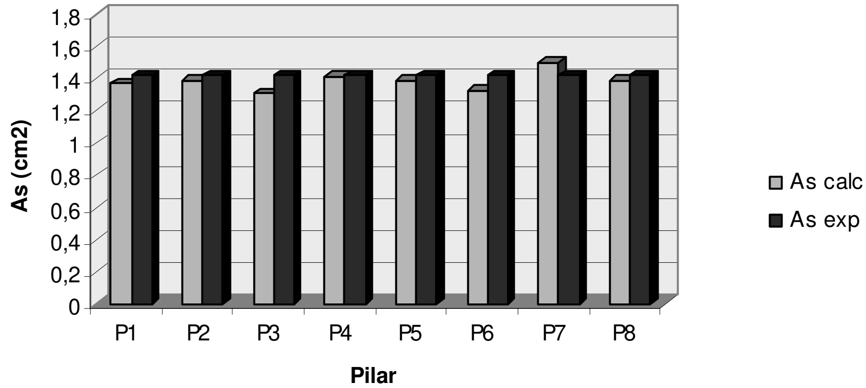

Figura 6-2 – Comparação Dim_Pilar com Dados Experimentais: Pilares 1 a 8

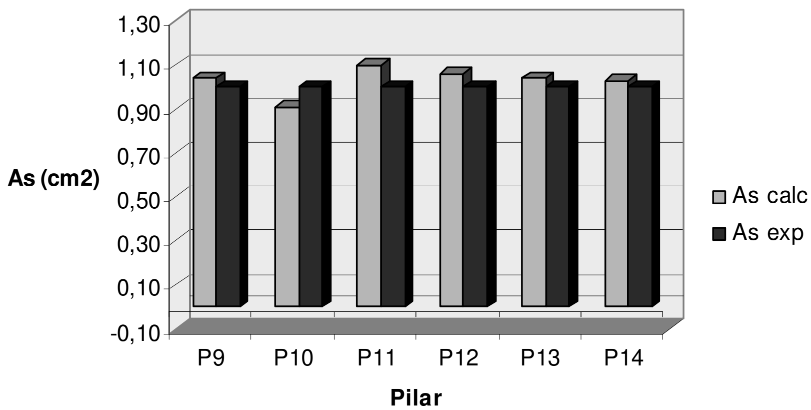

Figura 6-3– Comparação Dim_Pilar com Dados Experimentais: Pilar 9 a 14

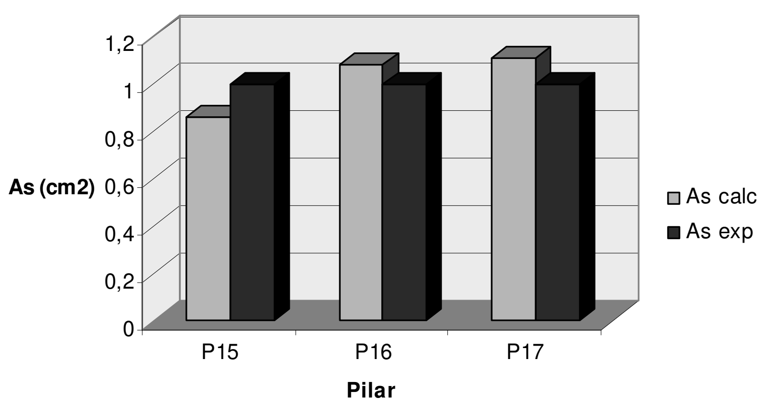

Figura 6-4- Comparação Dim_Pilar com Dados Experimentais: Pilar 15 a 16

6.2. SISTEMAS INTEGRADOS CAD/TQS X DIM_PILAR

Neste item é apresentada uma série de 5 pilares. Os pilares são dimensionados utilizando o programa proposto Dim_Pilar e o programa CAD/TQS. Os sistemas CAD/TQS são compostos por um conjunto de ferramentas computacionais que permitem o cálculo, o dimensionamento, o detalhamento e o desenho de estruturas de concreto armado e protendido. Para o dimensionamento do pilar no CAD/TQS, foi adotado o Método Geral de acordo com a NBR 6118/2003.

Os índices de esbeltez dos pilares variam de 80 a 133. Os pilares têm seção transversal retangular com altura (*h*) de 40 cm e largura (*b*) de 26 cm. A armadura é composta de 12 barras de acordo com a figura 6.5. A resistência à compressão característica do concreto é igual a 25 MPa e a tensão de escoamento característica do aço 50 KN/cm^2. O comprimento dos pilares varia entre 6 e 10 metros. A força normal (N_k) aplicada é de 930 KN e a excentricidade inicial (e_i) é igual a 2,28 cm.

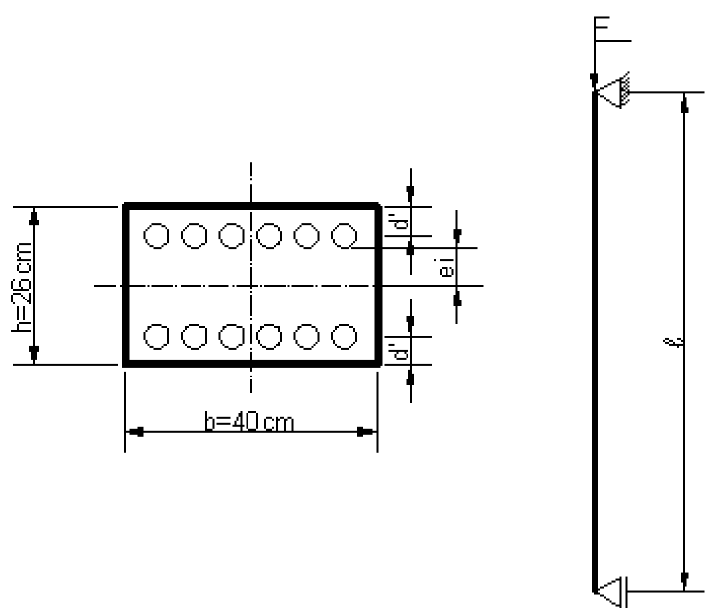

Figura 6-5- Detalhes do pilar utilizado na comparação Dim_Pilar x CAD/TQS

Os pilares são bi-apoiados com momentos provocados pelas excentricidades das cargas aplicados nas extremidades tracionando a mesma face do pilar e sem carregamento transversal.

Em ambos os programas foi adotada a mesma configuração de armadura. Os resultados desses dimensionamentos estão expostos na tabela 6.3.

Tabela 6-3 – Comparação Dim_Pilar x CAD/TQS (Método Geral)

Pilar	l (cm)	λ	Dim_Pilar $As_{Dim}(cm^2)$	Método Geral TQS $As_{TQS}(cm^2)$	$(As_{Dim}-As_{TQS})/As_{TQS}$ (%)
P1	600	80	10,21	12,30	-17,0%
P2	675	90	20,12	22,30	-9,8%
P3	750	100	27,73	30,80	-10,0%
P4	800	107	34,75	39,30	-11,6%
P5	1000	133	71,51	92,00	-22,3%

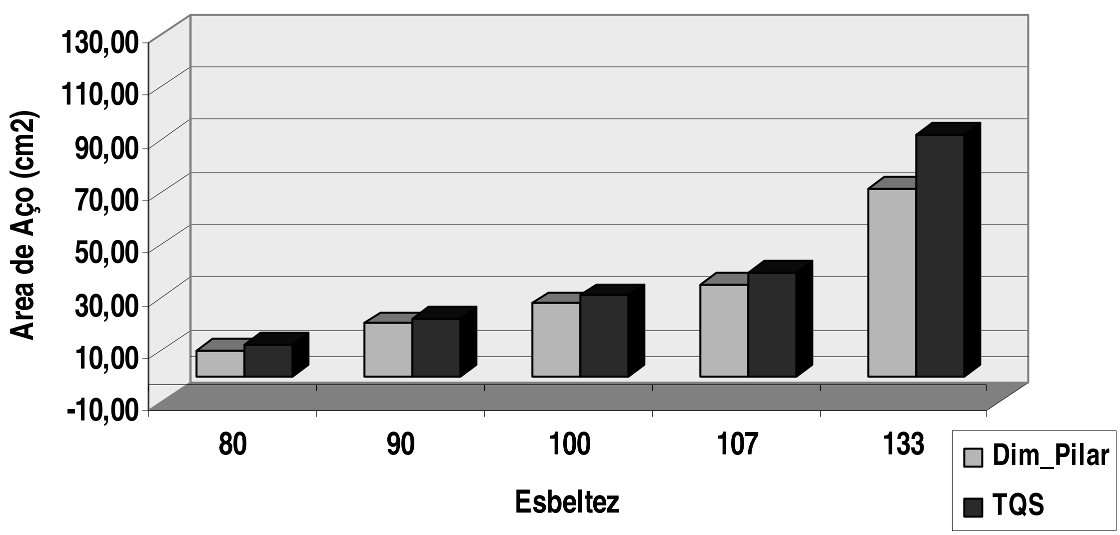

Figura 6-6 - Comparação Dim_Pilar x CAD/TQS

Na comparação entre os valores obtidos pelo programa Dim_Pilar e os valores fornecidos pelos sistemas CAD/TQS, observa-se que as áreas de aço obtidas pelo programa Dim_Pilar são menores que as fornecidas pelo pacote comercial. Isso indica que no programa Dim_Pilar, o pilar está sendo considerado mais rígido, já que tanto a área de concreto A_c como o módulo de elasticidade I_c são considerados relativamente à seção bruta de concreto.

O presente trabalho não tem como proposta analisar o programa CAD/TQS de maneira aprofundada, porém, uma possível explicação para tal divergência seria o uso da matriz de rigidez constante (equação (4.40)) no programa proposto, onde as rigidezes EI (Rigidez à Flexão – produto do módulo de elasticidade E do material e a inércia I da seção transversal) e EA (Rigidez Axial - onde A é a área da seção transversal) são calculadas pelas equações (4.41) e (4.42). Mendes Neto & Pimenta (2003) observam que as rigidezes EI, EA e ES (onde S é o momento estático de área da seção transversal) dependem tanto das características do concreto e da armadura como da distribuição de deformações da seção transversal, ou seja, do nível de solicitação da mesma. Os autores mostram ainda que as rigidezes podem ser interpretadas fisicamente como as derivadas dos esforços resistentes da seção transversal:

$$EA = \frac{\partial N_r}{\partial \delta \varepsilon_o} \tag{6.3}$$

$$EI = \frac{\partial M_r}{\partial k} \tag{6.4}$$

onde: N_r é o esforço normal resistente; ε_o é a deformação na origem do sistema de coordenadas (CG da seção); M_r é o momento fletor resistente; k é a rotação específica

Dessa forma, para uma melhor representação da rigidez do pilar, nas várias iterações, a matriz de rigidez deveria ser atualizada utilizando as equações (6.3) e (6.4) pois dessa forma as deformações das seções estariam também representadas nesta matriz.

6.3. MÉTODOS APROXIMADOS X DIM_PILAR

A mesma série de pilares apresentada no item 6.2 foi dimensionada de acordo com os métodos aproximados do pilar padrão com curvatura aproximada e com rigidez aproximada propostos pena norma NBR 6118/2003 (ver apêndice C). Os ábacos utilizados para o dimensionamento são de autoria de Venturini & Rodrigues, 1987. Os resultados desses dimensionamentos foram comparados com o programa proposto Dim_Pilar e são mostrados na tabela 6.4.

Tabela 6-4 – Comparação Dim_Pilar com Métodos Aproximados

	l(cm)	λ	d'/h	Dim_Pilar $As_{Dim}(cm^2)$	Curvatura Ap $As_{aprox}(cm^2)$	$(As_{Dim}-As_{aprox})/As_{Dim}$ (%)	Rigidez Ap $As_{aprox}(cm^2)$	$(As_{Dim}-As_{aprox})/As_{Dim}$ (%)
Pilar 1	600	80	0,16	10,21	24,3	-138,5%	21,78	-113,4%
Pilar 2	675	90	0,18	19,73	32,1	-62,8%	30,33	-53,7%
Pilar 3	750	100	0,17	27,26	36,4*	-33,5%	40,83*	-49,8%
Pilar 4	800	107	0,17	34,18	42,3*	-23,7%	52,97*	-55,0%
Pilar 5	1000	133	0,18	71,51	64,9*	+9,2%	79,19*	-10,7%

* De acordo com a NBR 6118/2003 os métodos simplificados não devem ser aplicados nestes casos.

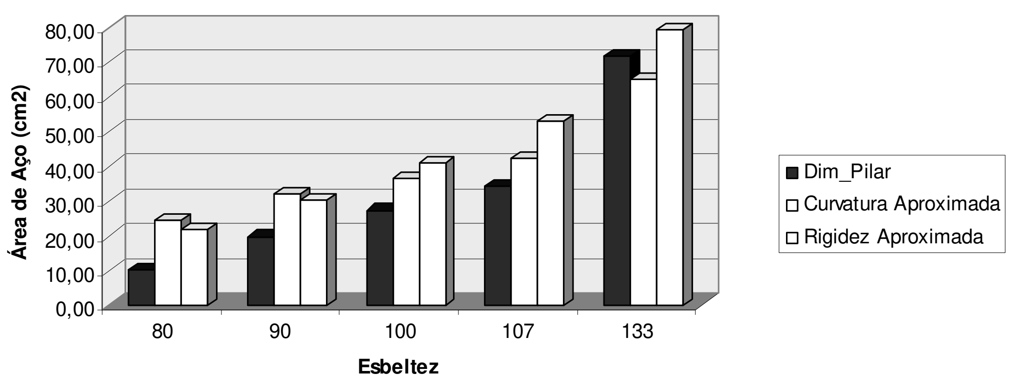

Figura 6-7 - Comparação Dim_Pilar com Métodos Aproximados permitidos pela NBR 6118/2003 (ABNT,2003)

Na comparação entre as armaduras fornecidas pelo programa Dim_Pilar e as obtidas pelos métodos aproximados propostos pela norma NBR 6118/ 2003, observa-se que as armaduras calculadas apresentam valores significativamente inferiores aos obtidos pelos métodos aproximados. Além disso observa-se que a diferença entre as armaduras fornecidas pelo programa e as obtidas pelos métodos aproximados é tanto menor quanto maior é a esbeltez do pilar.

Comparando-se, por exemplo, os valores obtidos para os pilares 1 e 2, observa-se que:

o pilar 1 (λ=80) apresentou desvios de -138,5% e -113,4%, quando se comparam as armaduras obtidas pelo programa Dim_Pilar com as armaduras obtidas utilizando-se o método da curvatura aproximada e o método da rigidez aproximada, respectivamente. Para o pilar 2 (λ=90), onde a utilização dos métodos aproximados ainda é permitida, os desvios encontrados foram de -62,8% e -53,7%, quando os valores obtidos pelo programa Dim_Pilar são comparados com os valores obtidos pelo método da curvatura aproximada e pelo método da rigidez aproximada, respectivamente.

Esses resultados apontam para a seguinte consideração:

a majoração aplicada aos momentos de 1ª ordem pelos métodos aproximados nestas circunstâncias mostra-se excessiva, levando a momentos muito superiores àqueles que de fato atuam no pilar. À medida que o pilar se torna mais esbelto, quando os momentos de 2ª ordem passam a ter papel relevante, os valores propostos pelos métodos aproximados tendem a ser mais compatíveis com os momentos reais.

O pilar 5 (λ=133), quando dimensionado pelo método da curvatura aproximada, apresentou valores contra a segurança, o que mostra a ineficiência deste método quando o pilar é considerado esbelto.

7. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido um programa para dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado onde as não linearidades física e geométrica são levadas em conta de maneira rigorosa com o uso do método geral.

O programa proposto mostrou boa concordância com os dados experimentais extraídos da literatura corrente.

Quando comparado com o programa comercial CAD/TQS, o programa proposto apresentou divergência de resultados que se situaram ente 10% e 20%. Foi atribuída à escolha do processo de Newton-Raphson com rigidez constante a causa principal de tais diferenças. A matriz de rigidez deveria ser atualizada a cada interação e as deformações da seção transversal também deveriam estar incluídas nesta matriz.

Comparando o programa apresentado com os métodos aproximados propostos pela norma brasileira NBR 6118/2003 (ABNT,2003), os resultados mostram que o dimensionamento dos pilares utilizando os métodos aproximados apresentam uma área de aço superestimada, resultando em estruturas anti-econômicas. Pode-se observar ainda que é acertada a limitação que a norma impõe para o uso de métodos aproximados, relativamente aos valores de esbeltez, pois os valores resultantes podem levar a dimensionamentos contra a segurança, no caso de pilares esbeltos.

O presente trabalho alcançou seu objetivo principal de desenvolver uma ferramenta computacional que permite analisar pilares esbeltos sujeitos à flexão normal composta, levando em consideração as não-linearidades física e geométrica. Entende-se, contudo, que esse é o término de uma primeira etapa de investigação. Aspectos importantes, tais como a consideração da rigidez do pilar e a inclusão da deformação lenta se apresentam como abordagens imprescindíveis para um aprofundamento do tema. Também a ampliação de conjuntos de valores, tanto numéricos como experimentais, deve ser realizada, de forma a permitir uma análise estatística consistente dos resultados. Ainda, como continuidade do trabalho, propõe-se a análise de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexão oblíqua.

ANEXO A

Programa Dim_Pilar

A seguir é apresentado o programa Dim_Pilar desenvolvido neste trabalho.

```
program Dim_Pilar;

{*Programa para c lculo de pilares de concreto armado - Metodo Geral*}
{*Autora: Susana de Lima Pires - julho/2006*}

const
nsec_max      = 5;
ncamadas_max  = 6;
niterax_max   = 100;
nno_max       = 11;
nba_max       = 10;
nitermax      = 100;

{Definicao do tipo de vari veis}

Type
mat1  =array[1..nsec_max,1..8]            of real;
mat2  =array[1..nsec_max,1..6]            of real;
mat3  =array[1..6,1..6]                   of real;
mat4  =array[1..3*nno_max,1..3*nno_max]   of real;
mat5  =array[1..nba_max,1..2]             of real;
mat6  =array[1..nba_max,1..6]             of real;
mat7  =array[1..3,1..3]                   of real;
mat8  =array[1..nba_max,1..3]             of real;
mat9  =array[1..nitermax,1..3*nno_max]    of real;
vet1  =array[1..20]                       of real;
```

```
vet2  =array[1..ncamadas_max]            of real;
vet3  =array[1..niterax_max]             of real;
vet4  =array[1..nsec_max]                of integer;
vet5  =array[1..nno_max]                 of real;
vet6  =array[1..3*nno_max]               of integer;
vet7  =array[1..nba_max]                 of integer;
vet8  =array[1..nba_max]                 of real;
vet9  =array[1..6]                       of integer;
vet10 =array[1..3*nno_max]               of real;
vet11 =array[1..6]                       of real;
vet12 =array[1..nsec_max]                of real;


var
 DadSec                                                    :mat1;
 distcam,nbar                                              :mat2;
 SM,SMD                                                    :mat3;
 St                                                        :mat4;
 w                                                         :mat5;
 AEP                                                       :mat6;
 rt                                                        :mat7;
 Mi,Ni,LN,As,curvat,Mdl                                    :mat8;
 Z,a,ci,Zc,ci1,Zc1                                         :vet1;
 zaco,b,d,b1                                               :vet2;
 x,fx                                                      :vet3;
 ncamadas,naco                                             :vet4;
 corx,cory                                                 :vet5;
 R                                                         :vet6;
 Sec,noini,nofin                                           :vet7;
 Lba,Sen,Co                                                :vet8;
 IG                                                        :vet9;
 Ao,F,ANE,U,AM,DL                                          :vet10;
 Fnaolinear,DeltaF,DeltaU                                  :vet10;
 Fn                                                        :vet11;
 KNd,KMd                                                   :vet12;
 ent                                                       :text;
 saida                                                     :text;
 resu                                                      :text;
 Nd,ds,bw,h,fck,fyk,fyck,dlinha,Es,Md,
 atotal,ctotal,L,c,U1,U2,U3,U4,U5,U6,deltah,curv,
 defc,Ec,sigmac,sigmas,efexis,defzero,uzerolinha,
 btotal,p,xis,wlinha,dtotal,ncamada,d1,d2,d3,d4,xi,
 d5,d6,n1,n2,n3,n4,n5,n6,eyd,defs,eycd,xo,fo,xu,fu,
 wl1,wl2,wl3,wl4,ai,bi,cs,s,Dx,Dy,ntotal,ki,
 As_sec,xa,Mi_sec,Ni_sec,h11,h12,h13,o,p21,p22,p23,
 p31,p32,p33,p51,p52,p53,p61,p62,p63,c1,c2,c3,E1,E2,
 E3,jacob,Ftotal,DeltaFtotal,normaF,normaDeltaF,tolF,
 Utotal,DeltaUtotal,normaU,normaDeltaU,tolU,curvlim,
 xinf,def, defs1,zzero,defcon,defcon37,AreaS,Is,
 somAreas,somIs,K1,K2,Eco,As_sec1,Rcc,Mcc,sigmatotal,
 ze,Asi1,Asi2,zzero1,F1,F2,F3,o2,o3,o5,o6,q2,q3,q5,q6,
 tolAs,Asi,Ass,Asa,BA,AB,CD,eta,defs11,defcon1,
 defcon371                                               :real;
 nlinha,k,m,t,ncama,nno,nba,nnr,nsec,nnc,nbc,
 restx,resty,restz,ncgx,ncgy,ncgz,i,j,n,q,no,y,
 est_pil,g                                               :integer;
```

```
 letra                                                :char;
 label 2 ;

{Subrotina para c lculo da Matriz de Rigidez Local}

Procedure rigidez_barra (i:integer;DadSec:mat1;Sec:vet7;Lba:vet8;var SM:mat3;
var KNd,KMd:vet12);
var ai,bi,AreaS,Is,SomAreaS,SomIs,Eco,K1,K2:real;j,n,k:integer;

     begin
      SomAreaS:=0;
      SomIs:=0;

          for k:=1 to ncamadas[Sec[i]] do
             begin
                AreaS:=(nbar[Sec[i],k]*3.1416*2.303*2.303)/4;
                Is:=AreaS*sqr(distcam[Sec[i],k]-((DadSec[Sec[i],2])/2));
                SomAreaS:=SomAreaS+AreaS;
                SomIs:=SomIs+Is;
             end;
             Eco:=0.85*((5600*sqrt(DadSec[Sec[i],3]*10))/10);
             K1:=(Eco*DadSec[Sec[i],7])+(DadSec[Sec[i],6]*SomAreaS);
             K2:=(Eco*DadSec[Sec[i],8])+(DadSec[Sec[i],6]*SomIs);

             KNd[Sec[i]]:=K1;
             KMd[Sec[i]]:=K2;

          ai:=K1/Lba[i];
          bi:=K2/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]);

          SM[1,1]:= ai;
          SM[2,1]:= 0;
          SM[3,1]:= 0;
          SM[4,1]:=-ai;
          SM[5,1]:= 0;
          SM[6,1]:= 0;
          SM[1,2]:= 0;
          SM[2,2]:= 12*bi;
          SM[3,2]:= 6*bi*Lba[i];
          SM[4,2]:= 0;
          SM[5,2]:=-12*bi;
          SM[6,2]:= 6*bi*Lba[i];
          SM[1,3]:= 0;
          SM[2,3]:= 6*bi*Lba[i];
          SM[3,3]:= 4*bi*Lba[i]*Lba[i];
          SM[4,3]:= 0;
          SM[5,3]:=-6*bi*Lba[i];;
          SM[6,3]:= 2*bi*Lba[i]*Lba[i];
          SM[1,4]:=-ai;
          SM[2,4]:= 0;
          SM[3,4]:= 0;
          SM[4,4]:= ai;
          SM[5,4]:= 0;
          SM[6,4]:= 0;
          SM[1,5]:= 0;
          SM[2,5]:=-12*bi;
```

```
        SM[3,5]:=-6*bi*Lba[i];
        SM[4,5]:= 0;
        SM[5,5]:= 12*bi;
        SM[6,5]:=-6*bi*Lba[i];;
        SM[1,6]:= 0;
        SM[2,6]:= 6*bi*Lba[i];
        SM[3,6]:= 2*bi*Lba[i]*Lba[i];;
        SM[4,6]:= 0;
        SM[5,6]:=-6*bi*Lba[i];
        SM[6,6]:= 4*bi*Lba[i]*Lba[i];
    end;

{Subrotina para calculo da Matriz de Rigidez Girada}

Procedure Rigidez_Girada(i:integer;SM:mat3;Co,Sen:vet8;DadSec:mat1;
Sec:vet7;Lba:vet8;var SMD:mat3;var KNd,KMd:vet12);
var cs,s:real;
begin

Rigidez_barra(i,DadSec,Sec,Lba,SM,KNd,KMd);

cs:=Co[i];
s:=Sen[i];

SMD[1,1]:=(SM[1,1]*cs*cs)+(SM[2,2]*s*s);
SMD[2,1]:=(SM[1,1]-SM[2,2])*cs*s;
SMD[3,1]:=(-SM[2,3]*s);
SMD[4,1]:=-((SM[1,1]*cs*cs)+(SM[2,2]*s*s));
SMD[5,1]:=-((SM[1,1]-SM[2,2])*cs*s);
SMD[6,1]:=(-SM[2,3]*s);
SMD[1,2]:=(SM[1,1]-SM[2,2])*cs*s;
SMD[2,2]:=(SM[1,1]*s*s)+(SM[2,2]*cs*cs);
SMD[3,2]:=(SM[2,3]*cs);
SMD[4,2]:=-((SM[1,1]-SM[2,2])*cs*s);
SMD[5,2]:=-((SM[1,1]*s*s)+(SM[2,2]*cs*cs));
SMD[6,2]:=(SM[2,3]*cs);
SMD[1,3]:=(-SM[2,3]*s);
SMD[2,3]:=(SM[2,3]*cs);
SMD[3,3]:=SM[3,3];
SMD[4,3]:=(SM[2,3]*s);
SMD[5,3]:=(-SM[2,3]*cs);
SMD[6,3]:=(SM[6,3]);
SMD[1,4]:=-((SM[1,1]*cs*cs)+(SM[2,2]*s*s));
SMD[2,4]:=-((SM[1,1]-SM[2,2])*cs*s);
SMD[3,4]:=(SM[2,3]*s);
SMD[4,4]:=(SM[1,1]*cs*cs)+(SM[2,2]*s*s);
SMD[5,4]:=((SM[1,1]-SM[2,2])*cs*s);
SMD[6,4]:=(SM[2,3]*s);
SMD[1,5]:=-((SM[1,1]-SM[2,2])*cs*s);
SMD[2,5]:=-((SM[1,1]*s*s)+(SM[2,2]*cs*cs));
SMD[3,5]:=(-SM[2,3]*cs);
SMD[4,5]:=((SM[1,1]-SM[2,2])*cs*s);
SMD[5,5]:=(SM[1,1]*s*s)+(SM[2,2]*cs*cs);
SMD[6,5]:=(-SM[2,3]*cs);
SMD[1,6]:=(-SM[2,3]*s);
SMD[2,6]:=(SM[2,3]*cs);
```

```
SMD[3,6]:=(SM[3,6]);
SMD[4,6]:=(SM[2,3]*s);
SMD[5,6]:= (-SM[2,3]*cs);
SMD[6,6]:=SM[6,6];

end;

{Sub-rotina Engastamento Perfeito}

Procedure Eng_Perfeito(w:mat5;Lba:vet8;var AEP:mat6);

var i:integer;

begin

for i:=1 to nba do
begin
AEP[i,2]:=(Lba[i]*((7*w[i,1])+(3*w[i,2])))/20;
AEP[i,3]:=((Lba[i]*Lba[i])*((3*w[i,1])+(2*w[i,2])))/60;
AEP[i,5]:=(Lba[i]*((3*w[i,1])+(7*w[i,2])))/20;
AEP[i,6]:=((Lba[i]*Lba[i])*((2*w[i,1])+(3*w[i,2])))/60;
end;
end;

{Subrotina para resolver o sistema S.U=F pelo m,todo de Choleski}
Procedure Resolve_Sistema(nno:integer;St:mat4;F:vet10; var U:vet10);
var n,v,j,k:integer;
soma,temp:real;
label 1;

begin

      n:=3*nno;
      for j:=2 to n do
        begin
          if j=2 then
          goto 1;
          for v:=2 to j-1 do
            begin
              soma:=St[v,j];
                for k:=1 to v-1 do
                  begin
                  soma:=soma-St[k,v]*St[k,j];
                  end;
                  St[v,j]:=soma;
            end;
                  1:soma:=St[j,j];
                  for k:=1 to j-1 do
                  begin
                  temp:=St[k,j]/St[k,k];
                  soma:=soma-temp*St[k,j];
                  St[k,j]:=temp;
                  end;
                  St[j,j]:=soma;
        end;
                  U[1]:=F[1];
```

```
                for v:=2 to n do
                begin
                  soma:=F[v];
                  for k:=1 to v-1 do
                    begin
                      soma:=soma-St[k,v]*U[k];
                    end;
                  U[v]:=soma;
                end;
                for v:=1 to n do
                begin
                U[v]:=U[v]/St[v,v];
                end;
                for v:=n-1 downto 1 do
                  begin
                    soma:=U[v];
                      for k:=v+1 to n do
                        begin
                          soma:=soma-St[v,k]*U[k];
                        end;
                      U[v]:=soma;
                    end;
end;

{Subrotina para resolver o sistema S*DeltaU=DeltaF pelo m,todo de Choleski}

Procedure Resolve_Sistema_DeltaU(nno:integer;St:mat4;DeltaF:vet10; var
DeltaU:vet10);
var n,v,j,k:integer;
soma,temp:real;
label 1;

begin

      n:=3*nno;
      for j:=2 to n do
        begin
          if j=2 then
          goto 1;
          for v:=2 to j-1 do
            begin
              soma:=St[v,j];
                for k:=1 to v-1 do
                  begin
                  soma:=soma-St[k,v]*St[k,j];
                  end;
                  St[v,j]:=soma;
            end;
                  1:soma:=St[j,j];
                  for k:=1 to j-1 do
                  begin
                  temp:=St[k,j]/St[k,k];
                  soma:=soma-temp*St[k,j];
                  St[k,j]:=temp;
                  end;
                  St[j,j]:=soma;
```

```
        end;
                  DeltaU[1]:=DeltaF[1];
                for v:=2 to n do
                begin
                  soma:=DeltaF[v];
                  for k:=1 to v-1 do
                    begin
                      soma:=soma-St[k,v]*DeltaU[k];
                    end;
                  DeltaU[v]:=soma;
                end;
                for v:=1 to n do
                begin
                DeltaU[v]:=DeltaU[v]/St[v,v];
                end;
                for v:=n-1 downto 1 do
                  begin
                    soma:=DeltaU[v];
                      for k:=v+1 to n do
                        begin
                          soma:=soma-St[v,k]*DeltaU[k];
                        end;
                      DeltaU[v]:=soma;
                    end;
end;

{Subrotina Calculo dos Esforcos Resistentes}

Procedure calc_As
(L,c,U1,U2,U3,U4,U5,U6,Nd,Md,curv,defzero,zzero,zzero1,uzerolinha,wlinha:real
;
i,m,t,j:integer;Sec:vet7;DadSec:mat1;distcam,nbar:mat2;LN:mat8;
var As_sec,Mi_sec,Ni_sec:real);

var atotal,ctotal,ntotal,deltah,defc,sigmac,btotal,sigmatotal,ze,
dtotal,defs,eyd,eycd,sigmas,wl1,wl2,wl3,wl4,xa,As_sec1,Rcc,Mcc,Eco,ki,eta:rea
l;
k:integer;Z,Zc,a,ci:vet1;zaco,b,d:vet2;

begin

atotal:=0.0;
ctotal:=0.0;
sigmatotal:=0.0;
defc:=0.0;
deltah:=0.0;
xa:=LN[i,j];


            for k:=1 to 20 do
              begin

                    if zzero1 < (DadSec[Sec[i],2])/2
                       then
                       deltah:=((DadSec[Sec[i],2]/2)+zzero1)/20
                       else
```

```
                     deltah:=DadSec[Sec[i],2]/20;

                   Zc[k]:=(k*deltah)-(deltah/2);
                   Z[k]:=Zc[k]-DadSec[Sec[i],2]/2;
                   if zzero < 0
                   then Z[k]:=-Z[k];
                   defc:=defzero-(Z[k]*curv);

                   if (defc <= -0.002)
                      then sigmac:=-0.85*(DadSec[Sec[i],3]);

                   if (defc <= 0) and (defc >= -0.002)
                      then
                      sigmac:=-((0.85*((DadSec[Sec[i],3])))*(1-(sqr(1-
(defc/-0.002)))));

                   a[k]:=deltah*sigmac;
                   ci[k]:=sigmac*Z[k];
                   sigmatotal:=sigmatotal+sigmac;
                   atotal:= atotal+a[k];
                   ctotal:= ctotal+ci[k];
              end;
                   Rcc:=atotal*DadSec[Sec[i],1];
                   if sigmatotal=0
                   then Mcc:=0
                   else
                   begin
                   ze:=ctotal/sigmatotal;
                   Mcc:=Rcc*ze;
                   end;

btotal:=0.0;
dtotal:=0.0;
ntotal:=0.0;
for k:=1 to t do

begin

defs:=defzero-(distcam[Sec[i],k]-(DadSec[Sec[i],2]/2))*curv;
eyd:=DadSec[Sec[i],4]/DadSec[Sec[i],6];
eycd:=-DadSec[Sec[i],5]/DadSec[Sec[i],6];
if (defs >= eycd) and (defs <= eyd)
   then sigmas:=defs*DadSec[Sec[i],6];
if defs > eyd
   then sigmas:=DadSec[Sec[i],5];
if defs < eycd
   then sigmas:=-DadSec[Sec[i],4];

b[k]:=nbar[Sec[i],k]*sigmas*(distcam[Sec[i],k]-(DadSec[Sec[i],2]/2));
d[k]:=nbar[Sec[i],k]*sigmas;
ntotal:=ntotal+nbar[Sec[i],k];
btotal:=btotal+b[k];
dtotal:=dtotal+d[k];
end;

Ni_sec:=(Rcc+(As_sec/ntotal)*dtotal){/1.1};
```

```
Mi_sec:=(Mcc+(As_sec/ntotal)*btotal){/1.1};

end;


{Subrotina para calculo do vetor de acoes globais nao lineares}

Procedure acao_naolinear
(i:integer;U1,U2,U3,U4,U5,U6:real;Lba:vet8;Ni,Mi:mat8;
var Fnaolinear:vet10);
var
k:integer;
E1,E2,E3,c1,c2,c3,jacob,h11,h12,h13,o,p21,p22,p23,p31,p32,p33,p51,p52,
p53,p61,p62,p63,o2,o3,o5,o6,q2,q3,q5,q6:real;
Fn: vet11;
IG:vet9;

Begin

  for k:=1 to 6 do
  begin
  Fn[k]:=0.0;
  end;

  E1:=-sqrt(0.6);
  E2:=0;
  E3:=sqrt(0.6);
  c1:=((Lba[i]/2)*E1)+(Lba[i]/2);
  c2:=((Lba[i]/2)*E2)+(Lba[i]/2);
  c3:=((Lba[i]/2)*E3)+(Lba[i]/2);

  jacob:=(1/2)*Lba[i];

  h11:=(-(6*c1)/(Lba[i]*Lba[i]))*U2+((6*c1*c1)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]))*U2+
       U3-((4*c1)/(Lba[i]))*U3+((3*c1*c1)/(Lba[i]*Lba[i]))*U3+
       ((6*c1)/(Lba[i]*Lba[i]))*U5-((6*c1*c1)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]))*U5-
       ((2*c1)/(Lba[i]))*U6+((3*c1*c1)/(Lba[i]*Lba[i]))*U6;

  h12:=(-(6*c2)/(Lba[i]*Lba[i]))*U2+((6*c2*c2)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]))*U2+
       U3-((4*c2)/(Lba[i]))*U3+((3*c2*c2)/(Lba[i]*Lba[i]))*U3+
       ((6*c2)/(Lba[i]*Lba[i]))*U5-((6*c2*c2)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]))*U5-
       ((2*c2)/(Lba[i]))*U6+((3*c2*c2)/(Lba[i]*Lba[i]))*U6;

  h13:=-((6*c3)/(Lba[i]*Lba[i]))*U2+((6*c3*c3)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]))*U2+
       U3-((4*c3)/(Lba[i]))*U3+((3*c3*c3)/(Lba[i]*Lba[i]))*U3+
       ((6*c3)/(Lba[i]*Lba[i]))*U5-((6*c3*c3)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]))*U5-
       ((2*c3)/(Lba[i]))*U6+((3*c3*c3)/(Lba[i]*Lba[i]))*U6;

  o2:=jacob*((Ni[i,1]*(5/9)*h11*(((-
6*c1)/(Lba[i]*Lba[i]))+((6*c1*c1)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]))))+
             (Ni[i,2]*(8/9)*h12*(((-
6*c2)/(Lba[i]*Lba[i]))+((6*c2*c2)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]))))+
             (Ni[i,3]*(5/9)*h13*(((-
6*c3)/(Lba[i]*Lba[i]))+((6*c3*c3)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i])))));
```

```
  o3:=jacob*((Ni[i,1]*(5/9)*h11*(1-
((4*c1)/Lba[i])+((3*c1*c1)/(Lba[i]*Lba[i]))))+
             (Ni[i,2]*(8/9)*h12*(1-
((4*c2)/Lba[i])+((3*c2*c2)/(Lba[i]*Lba[i]))))+
             (Ni[i,3]*(5/9)*h13*(1-
((4*c3)/Lba[i])+((3*c3*c3)/(Lba[i]*Lba[i])))));

  o5:=jacob*((Ni[i,1]*(5/9)*h11*(((6*c1)/(Lba[i]*Lba[i]))-
((6*c1*c1)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]))))+
             (Ni[i,2]*(8/9)*h12*(((6*c2)/(Lba[i]*Lba[i]))-
((6*c2*c2)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]))))+
             (Ni[i,3]*(5/9)*h13*(((6*c3)/(Lba[i]*Lba[i]))-
((6*c3*c3)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i])))));

  o6:=jacob*((Ni[i,1]*(5/9)*h11*(((-
2*c1)/Lba[i])+(3*c1*c1)/(Lba[i]*Lba[i])))+
             (Ni[i,2]*(8/9)*h12*(((-
2*c2)/Lba[i])+(3*c2*c2)/(Lba[i]*Lba[i])))+
             (Ni[i,3]*(5/9)*h13*(((-
2*c3)/Lba[i])+(3*c3*c3)/(Lba[i]*Lba[i]))));


  p21:=(-6/(Lba[i]*Lba[i]))+((12*c1)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]));
  p22:=(-6/(Lba[i]*Lba[i]))+((12*c2)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]));
  P23:=(-6/(Lba[i]*Lba[i]))+((12*c3)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]));

  p31:=(-4/(Lba[i]))+((6*c1)/(Lba[i]*Lba[i]));
  p32:=(-4/(Lba[i]))+((6*c2)/(Lba[i]*Lba[i]));
  p33:=(-4/(Lba[i]))+((6*c3)/(Lba[i]*Lba[i]));

  p51:=(6/(Lba[i]*Lba[i]))-((12*c1)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]));
  p52:=(6/(Lba[i]*Lba[i]))-((12*c2)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]));
  p53:=(6/(Lba[i]*Lba[i]))-((12*c3)/(Lba[i]*Lba[i]*Lba[i]));

  p61:=(-2/(Lba[i]))+((6*c1)/(Lba[i]*Lba[i]));
  p62:=(-2/(Lba[i]))+((6*c2)/(Lba[i]*Lba[i]));
  p63:=(-2/(Lba[i]))+((6*c3)/(Lba[i]*Lba[i]));

  q2:=jacob*((-Mi[i,1]*(5/9)*p21)+(-Mi[i,2]*(8/9)*p22)+(-Mi[i,3]*(5/9)*p23));
  q3:=jacob*((-Mi[i,1]*(5/9)*p31)+(-Mi[i,2]*(8/9)*p32)+(-Mi[i,3]*(5/9)*p33));
  q5:=jacob*((-Mi[i,1]*(5/9)*p51)+(-Mi[i,2]*(8/9)*p52)+(-Mi[i,3]*(5/9)*p53));
  q6:=jacob*((-Mi[i,1]*(5/9)*p61)+(-Mi[i,2]*(8/9)*p62)+(-Mi[i,3]*(5/9)*p63));

  Fn[1]:=-jacob*(5/9)*Ni[i,1]/Lba[i]-jacob*(8/9)*Ni[i,2]/Lba[i]-
jacob*(5/9)*Ni[i,3]/Lba[i];
  Fn[2]:=q2+o2;
  Fn[3]:=q3+o3;

Fn[4]:=jacob*(5/9)*Ni[i,1]/Lba[i]+jacob*(8/9)*Ni[i,2]/Lba[i]+jacob*(5/9)*Ni[i
,3]/Lba[i];
  Fn[5]:=q5+o5;
  Fn[6]:=q6+o6;

  IG[1]:=3*Noini[i]-2;
  IG[2]:=3*Noini[i]-1;
  IG[3]:=3*Noini[i];
```

```
  IG[4]:=3*Nofin[i]-2;
  IG[5]:=3*Nofin[i]-1;
  IG[6]:=3*Nofin[i];

  for k:=1 to 6 do
  Fnaolinear[IG[k]]:= Fnaolinear[IG[k]]+Fn[k];

end;

{-Analise de Estabilidade da Estrutura }

Procedure Estabilidade (nno:integer;R:vet6;F,U:vet10;As:mat8;var y:integer);
var
i,j,k:integer;
tolF,tolU,L,U1,U2,U3,U4,U5,U6t,curv,uzerolinha,wl1,wl2,wl3,wl4,wlinha,defzero
,
zzero,xis,defs1,defcon,defcon37,E1,E2,E3,c,As_sec,Mi_sec,Ni_sec,Ftotal,DeltaF
total,
Utotal,DeltaUtotal,normaF,normaDeltaF,normaU,normaDeltaU,defs11,defcon1,defco
n371,zzero1:real;
Mi,Ni,LN,curvat:mat8;
Fnaolinear,DeltaF,DeltaU:vet10;
label 2;

begin

writeln(resu,'');
writeln(resu,'An lise da estabilidade do pilar');
writeln(resu,'');

tolF:=1000;
tolU:=1000;
y:=1;
while (tolF>0.0001) or (tolU>0.0001)  do
begin
writeln(resu,'Iteracao - ',y:0);
for i:=1 to nba_max do
   begin
      for j:=1 to 3 do
         begin
            Mi[i,j]:=0.0;
            Ni[i,j]:=0.0;
            LN[i,j]:=0.0;
            curvat[i,j]:=0.0;
         end;
    end;

for i:=1 to 3*nno_max do
   begin
      Fnaolinear[i]:=0.0;
      DeltaF[i]:=0.0;
      DeltaU[i]:=0.0;
   end;

for i:=1 to nba do
begin
```

```
writeln(resu,'Barra - ',i:0);
writeln(resu,'         LN(cm)    As(cm2)    Mi(KN.cm)    Ni(KN)      curvatur
defaco(o/oo)  defcon(o/oo) defcon3/7(o/oo)');
L:=0.0;
U1:=0.0;
U2:=0.0;
U3:=0.0;
U4:=0.0;
U5:=0.0;
U6:=0.0;
t:=0;

for j:=1 to 3 do
begin
curv:=0.0;
uzerolinha:=0.0;
wl1:=0.0;
wl2:=0.0;
wl3:=0.0;
wl4:=0.0;
wlinha:=0.0;
defzero:=0.0;
zzero:=0.0;
xis:=0.0;
defs1:=0.0;
defs11:=0.0;
defcon:=0.0;
defcon1:=0.0;
defcon37:=0.0;
defcon37:=0.0;

E1:=-sqrt(0.6);;
E2:=0;
E3:=sqrt(0.6);

         if j<2 then
            c:=((Lba[i]/2)*E1)+(Lba[i]/2);
         if (j>1) and (j<3) then
            c:=((Lba[i]/2)*E2)+(Lba[i]/2);
         if j>2 then
            c:=((Lba[i]/2)*E3)+(Lba[i]/2);

         t:=ncamadas[Sec[i]];
         L:=Lba[i];
         U1:=U[3*noini[i]-2];
         U2:=U[3*noini[i]-1];
         U3:=U[3*noini[i]];
         U4:=U[3*nofin[i]-2];
         U5:=U[3*nofin[i]-1];
         U6:=U[3*nofin[i]];

         curv:=(-((6*U2)/(L*L))+((12*c*U2)/(L*L*L))-
((4*U3)/L)+((6*c*U3)/(L*L))+((6*U5)/(L*L))
         -((12*c*U5)/(L*L*L))-((2*U6)/L)+((6*c*U6)/(L*L)));
         uzerolinha:=(-U1/L)+(U4/L);
         curvat[i,j]:=curv;
```

```
        wl1:=-((6*c*U2)/(L*L))+((6*(c*c)*U2)/(L*L*L));
        wl2:=+U3-(4*c*U3/L)+((3*(c*c)*U3)/(L*L));
        wl3:=+((6*c*U5)/(L*L))-((6*(c*c)*U5)/(L*L*L));
        wl4:=-(2*c*U6/L)+((3*(c*c)*U6)/(L*L));
        wlinha:=wl1+wl2+wl3+wl4;
        defzero:=uzerolinha+(1/2*((wlinha)*(wlinha)));
        zzero:=defzero/curv;
        defs1:=1000*(defzero-(distcam[Sec[i],1]-DadSec[Sec[i],2]/2)*curv);
        defcon:=1000*(defzero-(0-DadSec[Sec[i],2]/2)*curv);
        defcon37:=1000*(defzero-(((3/7)*DadSec[Sec[i],2])-
DadSec[Sec[i],2]/2)*curv);
        BA:=2;
        AB:=10;
        CD:=3.5;

        if defs1<0
        then defs11:=defs1*(-1)
        else defs11:=defs1;
        if defcon<0
        then defcon1:=defcon*(-1)
        else defcon1:=defcon;
        if defcon37<0
        then defcon371:=defcon37*(-1)
        else defcon371:=defcon37;

        if zzero<0
        then zzero1:=zzero*(-1)
        else zzero1:=zzero;

        xis:=(DadSec[Sec[i],2]/2)+zzero1;
        LN[i,j]:=xis;

        if zzero1 > (DadSec[Sec[i],2])/2
         then
           begin
             if ( defcon371 >=  BA) or (  defs11 >= AB)
             then
                begin
                   y:=200;
                   goto 2;
                end;
             end

        else
           begin
             if ( defcon1 >= CD) or (  defs11 >= AB)
             then
                begin
                  y:=200;
                  goto 2;
                end;
            end;

        As_sec:=As[i,j];
```

```
calc_As(L,c,U1,U2,U3,U4,U5,U6,Nd,Md,curv,defzero,zzero,zzero1,uzerolinha,wlin
ha,
         i,m,t,j,Sec,DadSec,distcam,nbar,LN,As_sec,Mi_sec,Ni_sec);

         Mi[i,j]:=Mi_sec/1.1;
         Ni[i,j]:=Ni_sec/1.1;


writeln(resu,'Ponto',j:0,LN[i,j]:9:3,As[i,j]:9:2,Mi[i,j]:13:2,Ni[i,j]:13:2,cu
rvat[i,j]:14:8,
         defs1:10:5,defcon:14:5,defcon37:14:5,defzero:14:5);
         end;
         writeln(resu,'');

 {Calculo do vetor de acao global nao linear}

 acao_naolinear (i,U1,U2,U3,U4,U5,U6,Lba,Ni,Mi,Fnaolinear);
end;

{Imposicao das Condicoes de Contorno ao vetor Fnaolinear}

for k:=1 to 3*nno do
  begin
    if R[k]=1 then
        begin
          for j:=1 to 3*Nno do

              Fnaolinear[k]:=0.0;

        end;
    end;


{Impressao do vetor de acao global nao linear da iteracao atual}

writeln(resu,'');
writeln(resu,'Vetor de Acoes Totais (F); Vetor de Acao Global Nao
Linear(Fnaolinear)');
writeln(resu,'');
   for j:=1 to 3*Nno do
     begin
       write(resu,'F[',j:2,']=',F[j]:15:8,'     F nao
linear[',j:2,']=',Fnaolinear[j]:15:8);
       writeln(resu,'');
     end;
writeln(resu,'');


{Calcular Delta_F}

Ftotal:=0.0;
DeltaFtotal:=0.0;
Utotal:=0.0;
DeltaUtotal:=0.0;
```

```
for k:=1 to 3*nno do
begin
DeltaF[k]:=F[k]-Fnaolinear[k];
Ftotal:=Ftotal+(F[k]*F[k]);
DeltaFtotal:=DeltaFtotal+(DeltaF[k]*DeltaF[k]);
end;

{Calcular Delta_U}

Resolve_Sistema_DeltaU(nno,St,DeltaF,DeltaU);
for k:=1 to 3*nno do
begin
U[k]:=U[k]+DeltaU[k];
Utotal:=Utotal+(U[k]*U[k]);
DeltaUtotal:=DeltaUtotal+(DeltaU[k]*DeltaU[k]);
end;

{Impressao de DeltaF e DeltaU}
writeln(resu,'');
writeln(resu,'Vetor Delta Deslocamento(DeltaU); Vetor Delta Fnaolinear
(DeltaF)');
writeln(resu,'');
   for j:=1 to 3*Nno do
     begin
       write(resu,'DeltaF[',j:2,']=',DeltaF[j]:15:8,'
DeltaU[',j:2,']=',DeltaU[j]:20:8);
       writeln(resu,'');
     end;
writeln(resu,'');


writeln(resu,'');
writeln(resu,'Resultados');
writeln(resu,'');
writeln(resu,'Deslocamentos Globais Devido aos Esforcos de 2 Ordem');
writeln(resu,'(U1: Deslocamento Horizontal, U2: Deslocamento Vertical, U3:
Giro)');
writeln(resu,'');
writeln(resu,'No             U1                U2                U3');
for i:=1 to nno do
   begin
     ncgx:=3*i-2;
     ncgy:=3*i-1;
     ncgz:=3*i;
     writeln(resu,i:2,U[ncgx]:15:10,U[ncgy]:17:10,U[ncgz]:17:10);
   end;
writeln(resu,'');

normaF:=0.0;
normaDeltaF:=0.0;
tolF:=0.0;
normaU:=0.0;
normaDeltaU:=0.0;
tolU:=0.0;

normaF:=sqrt(Ftotal);
```

```
normaDeltaF:=sqrt(DeltaFtotal);
tolF:=normaDeltaF/normaF;
normaU:=sqrt(Utotal);
normaDeltaU:=sqrt(DeltaUtotal);
tolU:=normaDeltaU/normaU;
y:=y+1;
if (y>=nitermax) then goto 2
end;

2:end;



{Inicio do programa}

{1-Abrir arquivos}

begin

  assign(ent,'c:\exemplos\exem_7.txt');
  assign(saida,'c:\exemplos\saida_7.txt');
  assign(resu,'c:\exemplos\resul_7.txt');
  reset(ent);
  rewrite(saida);
  rewrite(resu);

{2-Zerando as matrizes e vetores}

for i:=1 to nsec_max do
  begin
    for j:=1 to 8 do
      begin
        DadSec[i,j]:=0.0;
      end;
    end;


for i:=1 to nsec_max do
  begin
     for j:=1 to 6 do
       begin
          distcam[i,j]:=0.0;
          nbar[i,j]:=0.0;
       end;
   end;

for i:=1 to 6 do
   begin
      for j:=1 to 6 do
         begin
            SM[i,j]:=0.0;
            SMD[i,j]:=0.0;
         end;
   end;

for i:=1 to 3*nno_max do
```

```
   begin
      for j:=1 to 3*nno_max do
         begin
            St[i,j]:=0.0;
         end;
   end;

for i:=1 to nba_max do
   begin
      for j:=1 to 2 do
         begin
            w[i,j]:=0.0;
         end;
   end;

for i:=1 to nba_max do
   begin
      for j:=1 to 6 do
         begin
            AEP[i,j]:=0.0;
         end;
   end;

for i:=1 to 3 do
   begin
      for j:=1 to 3 do
         begin
            rt[i,j]:=0.0;
         end;
   end;

for i:=1 to nba_max do
   begin
      for j:=1 to 3 do
         begin
            Mi[i,j]:=0.0;
            Ni[i,j]:=0.0;
            LN[i,j]:=0.0;
            As[i,j]:=0.0;
            curvat[i,j]:=0.0;
         end;
    end;

for i:=1 to 20 do
   begin
     Z[i]:=0.0;
     Zc[i]:=0.0;
     a[i]:=0.0;
     ci[i]:=0.0;
   end;

for i:=1 to ncamadas_max do
   begin
      zaco[i]:=0.0;
      b[i]:=0.0;
      d[i]:=0.0;
```

```
   end;

for i:=1 to niterax_max do
   begin
      x[i]:=0.0;
      fx[i]:=0.0;
   end;

for i:=1 to nsec_max do
   begin
     ncamadas[i]:=0;
     naco[i]:=0;

  end;

for i:= 1 to nno_max do
   begin
      corx[i]:=0.0;
      cory[i]:=0.0;
   end;

for i:= 1 to 3*nno_max do
      R[i]:=0;

for i:=1 to nba_max do
   begin
      Sec[i]:=0;
      noini[i]:=0;
      nofin[i]:=0;
   end;

for i:=1 to nba_max do
   begin
      Lba[i]:=0.0;
      Sen[i]:=0.0;
      Co[i]:=0.0;
   end;

for i:=1 to 6 do
   IG[i]:=0;

for i:=1 to 3*nno_max do
   begin
      Ao[i]:=0.0;
      F[i]:=0.0;
      ANE[i]:=0.0;
      U[i]:=0.0;
      AM[i]:=0.0;
      DL[i]:=0.0;
      Fnaolinear[i]:=0.0;
      DeltaF[i]:=0.0;
      DeltaU[i]:=0.0;
   end;

for i:=1 to 6 do
     Fn[i]:=0.0;
```

```
for i:=1 to nsec_max do
   begin
     KNd[i]:=0.0;
     KMd[i]:=0.0;
   end;

{3-Leitura dos parametros iniciais}

writeln(saida,'***PROGRAMA DIMENSIONAMENTO DE PILARES***');
writeln(saida,'');
writeln(saida,'Leitura dos Dados Iniciais');
writeln(saida,'');
writeln(saida,'Nnos____Nbarras____Nnosrest___NSecoes___Nnos
carga___Nbarracarga');
readln(ent,nno,nba,nnr,nsec,nnc,nbc);
writeln(saida,nno:0,nba:9,nnr:12,nsec:14,nnc:11,nbc:14);

writeln(saida,'');
writeln(saida,'Leitura das coordenadas dos n¢s');
writeln(saida,'');
writeln(saida,'No_______Xi________Yi');
for k:=1 to nno do
   begin
     readln(ent,i,corx[i],cory[i]);
     writeln(saida,i:0,corx[i]:11:1,cory[i]:10:1);
   end;

{4-Leitura das Resticoes nos nos}

writeln(saida,'');
writeln(saida,'Leitura das restricoes dos nos');
writeln(saida,'');
writeln(saida,'No com restricao_________restx_________resty________restz');
for k:=1 to nnr do
   begin
     readln(ent,i,restx,resty,restz);
     ncgx:=3*i-2;
     ncgy:=3*i-1;
     ncgz:=3*i;
     R[ncgx]:=restx;
     R[ncgy]:=resty;
     R[ncgz]:=restz;
     writeln(saida,i:0,restx:25,resty:14,restz:13);
   end;

{5-Leitura dos Dados Sobre as Secoes}

writeln(saida,'');
writeln(saida,'Leitura dos Dados Sobre as Secoes');
writeln(saida,'');
writeln(saida,'secao___b(cm)___h(cm)___fck(KN/cm2)___fyk(KN/cm2)___fyck(KN/cm
2)___Es(KN/cm2)___ncama___Area(cm2)___I(cm3)');
for k:=1 to nsec do
  begin
```

```
readln(ent,i,bw,h,fck,fyk,fyck,Es,d1,n1,d2,n2,d3,n3,d4,n4,d5,n5,d6,n6,ncama);
    DadSec[i,1]:=bw;
    DadSec[i,2]:=h;
    DadSec[i,3]:=fck;
    DadSec[i,4]:=fyk;
    DadSec[i,5]:=fyck;
    DadSec[i,6]:=Es;
    DadSec[i,7]:=DadSec[i,1]*DadSec[i,2];
    DadSec[i,8]:=(DadSec[i,1]*DadSec[i,2]*DadSec[i,2]*DadSec[i,2])/12;

    distcam[i,1]:=d1;
    distcam[i,2]:=d2;
    distcam[i,3]:=d3;
    distcam[i,4]:=d4;
    distcam[i,5]:=d5;
    distcam[i,6]:=d6;

    nbar[i,1]:=n1;
    nbar[i,2]:=n2;
    nbar[i,3]:=n3;
    nbar[i,4]:=n4;
    nbar[i,5]:=n5;
    nbar[i,6]:=n6;

    ncamadas[i]:=ncama;


writeln(saida,i:0,bw:11:1,h:8:1,fck:8:1,fyk:14:0,fyck:14:0,Es:15:0,ncama:13,D
adSec[i,7]:10:1,DadSec[i,8]:12:1);
    writeln(saida,'');
    writeln(saida,'Distancia das armaduras ate a borda superior da
secao(cm)');
    writeln(saida,'');
    writeln(saida,'Secao_____d1_____d2_______d3_____d4_____d5_____d6');
    writeln(saida,i:3,d1:10:2,d2:7:2,d3:7:0,d4:7:0,d5:7:0,d6:7:0);
    writeln(saida,'');
    writeln(saida,'Numero de barras de cada camada da secao');
    writeln(saida,'');
    writeln(saida,'Secao_____n1_____n2_____n3_____n4_____n5_____n6');
    writeln(saida,i:3,n1:8:0,n2:7:0,n3:7:0,n4:7:0,n5:7:0,n6:7:0);
  end;

{6-Leitura dos Dados das Barras}

  writeln(saida,'');
  writeln(saida,'Dados das barras');
  writeln(saida,'');
  writeln(saida,'Barra______No inicial______No final______L(cm)_____Secao');

  for k:=1 to nba do
   begin
     readln(ent,i,j,n,q);
     noini[i]:=j;
     nofin[i]:=n;
     Sec[i]:=q;
```

```
      Dx:=corx[n]-corx[j];
      Dy:=cory[n]-cory[j];
      Lba[i]:=sqrt(Dx*Dx+Dy*Dy);
      Co[i]:=Dx/Lba[i];
      Sen[i]:=Dy/Lba[i];
      writeln(saida,i:0,j:11,n:16,Lba[i]:18:1,q:6);
    end;

      writeln(resu,'***Programa Dimensionamento de Pilar***');
      writeln(resu,'');

{7-Leitura das Cargas Aplicadas Diretamente nos nos}

writeln(saida,'');
writeln(saida,'Leitura das cargas aplicadas diretamente nos nos');
writeln(saida,'');
writeln(saida,'Acoes nos nos (Ao)');

for k:=1 to nnc do
  begin
    readln(ent,i,F1,F2,F3);
    ncgx:=(3*i)-2;
    ncgy:=(3*i)-1;
    ncgz:=(3*i);
    Ao[ncgx]:=F1;
    writeln(saida,'Ao[',ncgx:3,']=',F1:10:2);
    Ao[ncgy]:=F2;
    writeln(saida,'Ao[',ncgy:3,']=',F2:10:2);
    Ao[ncgz]:=F3;
    writeln(saida,'Ao[',ncgz:3,']=',F3:10:2);
  end;

{8-Leitura das cargas aplicadas nas barras e calculo
das acoes de engastamento perfeito}

writeln(saida,'');
writeln(saida,'Leitura das cargas aplicadas nas barras');
writeln(saida,'');
writeln(saida,'Barra______w inicial_________w final');

for k:=1 to nbc do
  begin
    readln(ent,i,w[i,1],w[i,2]);
    writeln(saida,i:0,w[i,1]:17:2,w[i,2]:17:2);
    Eng_Perfeito(w,Lba,AEP);
  end;

{9-Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura}

writeln(resu,'Matriz de Rigidez Local da Estrutura');
writeln(resu,'');
for i:=1 to nba do

  begin
    Rigidez_Girada(i,SM,Co,Sen,DadSec,Sec,Lba,SMD,KNd,KMd);
    writeln(resu,'Barra=',i);
```

```
    for k:=1 to 6 do
       begin
       writeln(resu,'');
          for j:=1 to 6 do
             begin
             write(resu,SMD[k,j]:20:10);
             write(resu,'');
             end;
       end;
       writeln(resu,'');
    IG[1]:=3*noini[i]-2;
    IG[2]:=3*noini[i]-1;
    IG[3]:=3*noini[i];
    IG[4]:=3*nofin[i]-2;
    IG[5]:=3*nofin[i]-1;
    IG[6]:=3*nofin[i];

      for j:=1 to 6 do
        begin
           for n:=1 to 6 do
              begin
                St[IG[j],IG[n]]:=St[IG[j],IG[n]]+SMD[j,n];
              end;
        end;
   end;
writeln(resu,'');
writeln(resu,'Matriz de Rigidez Global da Estrutura');
writeln(resu,'');
  for j:=1 to 3*Nno do
     begin
       writeln(resu,' ');
         for k:=1 to 3*Nno do
           begin
              write(resu,St[j,k]:20:10);
              write(resu,'');
           end;
      end;

writeln(resu,'');

{10-Acao nodal equivalente}

for i:=1 to nba do
begin
  IG[1]:=3*Noini[i]-2;
  IG[2]:=3*Noini[i]-1;
  IG[3]:=3*Noini[i];
  IG[4]:=3*Nofin[i]-2;
  IG[5]:=3*Nofin[i]-1;
  IG[6]:=3*Nofin[i];

  rt[1,1]:=Co[i];
  rt[1,2]:=-Sen[i];
  rt[1,3]:=0.0;
  rt[2,1]:=Sen[i];
```

```
  rt[2,2]:=Co[i];
  rt[2,3]:=0.0;
  rt[3,1]:=0.0;
  rt[3,2]:=0.0;
  rt[3,3]:=1.0;


  for no:=1 to 2 do
    begin
      for j:=1 to 3 do
        begin
          for k:=1 to 3 do
            begin
    ANE[IG[3*(no-1)+j]]:=ANE[IG[3*(no-1)+j]]-rt[j,k]*AEP[i,(3*(no-1)+k)];
              end;
            end;
          end;
end;

{11-Acoes Totais nos nos da Estrutura}

for k:=1 to 3*nno do
   begin
      F[k]:=Ao[k]+ANE[k];
   end;

{12-Imposicao das Condicoes de Contorno}

for k:=1 to 3*nno do
  begin
    if R[k]=1 then
        begin
          for j:=1 to 3*Nno do
            begin
              St[j,k]:=0.0;
              St[k,j]:=0.0;
            end;
              St[k,k]:=1.0;
              F[k]:=0.0;
        end;
    end;

{13-Impressao da Matriz de Rigidez com condicoes de contorno}

   writeln(resu,'');
   writeln(resu,'Matriz de Rigidez com condicoes de contorno');
   writeln(resu,'');
   for j:=1 to 3*Nno do
     begin
       writeln(resu,' ');
         for k:=1 to 3*Nno do
           begin
              write(resu,St[j,k]:20:10);
              write(resu,'');
           end;
      end;
```

```
     writeln(resu,'');

{14-Impressao dos vetores de acao nos nos Ao e vetor de acoes totais nos nos
F}

writeln(resu,'');
writeln(resu,'Acoes nos nos (Ao); Acoes de Engastamento Perfeito (ANE); Acoes
Totais com condicoes de contorno (F)');
writeln(resu,'');
   for j:=1 to 3*Nno do
     begin
       write(resu,'Ao[',j:2,']=',Ao[j]:21:8,'    ANE[',j:2,']=',ANE[j]:21:8,'
F[',j:2,']=',F[j]:21:8);
       writeln(resu,'');
     end;

{15-Calculo dos deslocamentos no sistema global}

Resolve_sistema(Nno,St,F,U);

{16-Imprime os deslocamentos no sistema global}

writeln(resu,'');
writeln(resu,'Resultados');
writeln(resu,'');
writeln(resu,'Deslocamentos Globais Devido aos Esforcos de 1 Ordem');
writeln(resu,'(U1: Deslocamento Horizontal, U2: Deslocamento Vertical, U3:
Giro)');
writeln(resu,'');
writeln(resu,'No            U1                U2                U3');
for i:=1 to nno do
   begin
     ncgx:=3*i-2;
     ncgy:=3*i-1;
     ncgz:=3*i;
     writeln(resu,i:2,U[ncgx]:15:10,U[ncgy]:17:10,U[ncgz]:17:10);
   end;
writeln(resu,'');

{17-Dimensionamento}

   for i:=1 to nba do
      begin
         for j:=1 to 3 do
            begin

               Asi1:=(0.15*Ao[1])/(DadSec[Sec[i],4]/1.15);
               Asi2:=0.004*DadSec[Sec[i],7];
               if (Asi1 > Asi2)
               then
                begin
                 Asi:=Asi1;
                 As[i,j]:=Asi
                end
               else
                 begin
```

```
                 Asi:=Asi2;
                 As[i,j]:=Asi
                 end
            end;
      end;

Estabilidade (nno,R,F,U,As,y);

if y<nitermax
   then est_pil:=1
   else est_pil:=0;

if (est_pil<1)
   then
      begin
         for i:=1 to nba do
            begin
               for j:=1 to 3 do
                  begin
                     Ass:=0.08*DadSec[Sec[i],7];
                     As[i,j]:=Ass;
                  end;
            end;
            Estabilidade (nno,R,F,U,As,y);
            if y<nitermax
               then est_pil:=1
               else est_pil:=0;

            if est_pil>0
               then
                  begin
                     tolAs:=1000;
                     while (tolAs > 0.0005) or (est_pil=0) do
                     begin
                     for i:=1 to nba do
                             begin
                                for j:=1 to 3 do
                                   begin
                                      Asa:=(Asi+Ass)/2;
                                      As[i,j]:=Asa;
                                   end;
                             end;

                           Estabilidade (nno,R,F,U,As,y);
                             if y<nitermax
                                then est_pil:=1
                                else est_pil:=0;

                             if est_pil=1
                                then
                                  begin
                                   Ass:=Asa;
                                   Asa:=(Asi+Ass)/2 ;
                                   tolAs:= (abs(Asa-Ass))/(Ass)
                                  end
                                else
```

```
                                 begin
                                  Asi:=Asa;
                                  Asa:=(Asi+Ass)/2;
                                  tolAs:= (abs(Asa-Asi))/(Asi)
                                 end;
                      end;
                 end
              else
                 writeln(resu,'O pilar nao pode ser dimensionado com
armadura maxima');
   end
   else
      writeln(resu,'O pilar est  dimensionado com armadura m¡nima');

close(ent);
close(saida);
close(resu);
end.
```

8.REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE.** São Paulo: Érica, 2000.

ARAÚJO, J. M. **Dimensionamento de Pilares Esbeltos de Concreto Armado.** (Dissertação de Mestrado), UFRGS, Porto Alegre, 1984.

ARAÚJO, J. M. **Pilares Esbeltos de Concreto Armado: Algoritmos para Análise e Dimensionamento.** Rio Grande: FURG, 1993.

ARAÚJO, J. M. **Métodos Simplificados para Consideração dos Efeitos de Segunda Ordem no Projeto de Pilares de Concreto Armado.** Revista IBRACON – Ano IX, n°27, p. 04-12, 2001.

ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado.** Rio Grande: Dunas, 2003a. v.2, 2.ed

ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado.** Rio Grande: Dunas, 2003b. v.3, 2.ed.

ARAÚJO, J. M.; BIGNON, P. G. **Métodos de Minimização para Análise Não-Liner de Estruturas.** Relatório de Pesquisa-110/93-UFRGS, Porto Alegre, outubro, 1993.

ARAÚJO, L. M. B.; GOMES, R. B.; CLÍMACO, J. C. T. S. **Análise de Pilares de Concreto Armado Submetidos à Flexão Normal Composta.** IBRACON – Volume VI – Projeto de Estruturas de Concreto – Trabalho CBC0047 – pg. VI 127 – VI 141.

ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos.** – 2 ª ed.- Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projetos de Estruturas de Concreto - Procedimento.** NBR 6118. Rio de Janeiro, 2003.

BASTOS, P. S. S.; OLIVEIRA NETO, L. **Dimensionamento de Pilares de Extremidade Segundo a NBR 6118/2003.** IBRACON- Volume VI – Projeto de Estruturas de Concreto – Trabalho CBC0256 – pg. VI. 596 – VI. 613.

CLAESON, C.; GYLLTOFT, K. **Slender Hight-Strenght Concrete Columns Subjected to Eccentric Loading.** Journal of Structural Engineering, Vol. 124, N_o. 3, March, 1998.

CHUANG, P. H.; KONG, F. K. **Large-Scale Tests on Slender Reinforced Concrete Columns.** The Structural Engineer, Volume 75/N_{os} 23 & 24, December, 1997.

COMITÊ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP model code 1990.** London: Thomas Telford, 1993.

GOYAL, B. B.; JACKSON, N. **Slender concrete columns under sustained load**. Journal of Structural Division. New York, ASCE, V.97 (11). P.2729-50, NOV. 1971.

KWAK, H.G; KIM, J. K. **Ultimate Resisting Capacity of Slender R C Columns.** Computers and Structures, Vol. 82, pp. 901-915, 2004.

KWAK, H.G; KIM, J. K. **Nonlinear Behavior of Slender RC Columns (1) Numerical Formulation.** Construction and Building Materials, 2005 a.

KWAK, H.G; KIM, J. K. **Nonlinear Behavior of Slender RC Columns (2) Introduction of design formula.** Construction and Building Materials, 2005 b.

MALLIKARJUNA; MAHADEVAPPA, P. **Computer Aided Analysis of Reinforced Concrete Columns Subjected to Axial Compression and Bending – I L-Shaped Sections.** Computers and Structures, Vol. 44, n° 5, pp. 1121-1138, 1992.

MALLIKARJUNA; MAHADEVAPPA, P. **Computer Aided Analysis of Reinforced Concrete Columns Subjected to Axial Compression and Bending – Part II: T-Shaped Sections.** Computers and Structures, Vol. 53, n° 6, pp. 1317-1356, 1994.

MENDES NETO, F. **Simplificar Complica!** Revista IBRACON – Ano IX – n°26, p. 11-16, 2001.

MENDES NETO, F.; PIMENTA P. M. **As Rigidezes Teóricas das Seções Transversais de Concreto Armado** In: V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo, junho, 2003.

PAULA, J. A. **Algoritmos para o Estudo de Pilares Esbeltos de Concreto Armado Solicitados a Flexão Normal Composta** (Dissertação de Mestrado), EESC, São Carlos, 1988.

PRAZERES, P. G. C.; GOMES, J. J. S.; SOUZA, R. M. **Aplicação de Métodos Numéricos na Análise Computacional de Seções de Concreto Armado Submetidos à Flexão Composta Reta.** In: V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo, junho, 2003.

SCADELAI, M. A.; PINHEIRO. L. M. **Dimensionamento de Pilares de Acordo com a Nova NBR 6118.** In: V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo, junho, 2003.

SOUZA, T. J. M. **Considerações Sobre os Efeitos Locais de 2ª Ordem.** In: V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo, junho, 2003.

VENTURINI, W. S.; RODRIGUES, R. O. **Dimensionamento de Peças Retangulares de Concreto Armado Solicitadas à Flexão Reta.** Universidade de São Paulo – Escola de Engenharia de São Carlos – Departamento de Engenharia de Estruturas, São Carlos, 1987.

APÊNDICE A

A.1 Integração Numérica – Quadratura de Gauss Legendre

Segundo Assan (2003) a integração numérica consiste em aproximar o integral de uma função através de um somatório. Existem diversas técnicas para integrar numericamente uma função. A técnica aqui demonstrada é a Quadratura de Gauss Legendre.

Considera-se inicialmente uma função contínua, f, com apenas uma variável, x, definida num intervalo [a,b], tal que $a \leq x \leq b$. Para calcular o valor aproximado da integral definida, utiliza-se uma combinação linear de valores da função *f(x)* em certos pontos x_i tal que: $a \leq x_i \leq b$ e certos valores w_i , que são os pesos, de modo que a integral é calculada somando-se os produtos do peso em cada ponto pelo valor da função no mesmo ponto, resultando:

$$\int_a^b f(x)dx \cong w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + ... + w_n f(x_n) \tag{A.1}$$

Os pontos x_i e os pesos w_i são determinados de modo que a regra seja exata para qualquer polinômio de grau ($2n - 1$), sendo n o número de pontos tomados no intervalo [-1,1]. Esse intervalo corresponde a uma mudança da variável x para ε (adimensional). Assim, procede-se a seguinte transformação da integral:

$$\int_a^b f(x)dx = J\int_{-1}^{1} g(\varepsilon)d\varepsilon \tag{A.2}$$

O fator J é o Jacobiano da transformação, obtido fazendo:

$$\begin{vmatrix} x & \varepsilon & 1 \\ a & -1 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{A.3}$$

Onde resulta que:

$$x = \frac{b-a}{2}\varepsilon + \frac{a+b}{2} \tag{A.4}$$

$$dx = \frac{b-a}{2}d\varepsilon \quad \text{ou} \quad J = \frac{dx}{d\varepsilon} = \frac{1}{2}(b-a) \tag{A.5}$$

Logo, tem-se:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(\varepsilon)d\varepsilon \tag{A.6}$$

Os pontos de integração são localizados simetricamente em relação ao centro do intervalo de integração. Os pares simétricos têm o mesmo peso. A expressão que representa a integração numérica passa a ser:

$$\int_a^b f(x)dx = J\int_{-1}^{1} g(\varepsilon)d\varepsilon = J\sum_{j=1}^{i} w_j g(\varepsilon_j) \quad \text{(A.7)}$$

Sendo:

n = ordem do polinômio;

i = número de pontos de integração;

ε_i = coordenada do ponto i;

w_i =peso associado ao ponto i.

Para a escolha do número de pontos de integração foi verificado, pela regra geral, que: “um polinômio de grau *(2n-1)* é integrado exatamente usando *n* pontos de integração”.

A.2 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Tome-se como exemplo a função apresentada na equação (4.33):

$$F_{1n} = \int_0^l N_d \phi_1' dx \quad \text{(A.8)}$$

da equação (4.25) temos:

$$\phi_1 = 1 - \left(\frac{x}{\ell}\right) \Rightarrow \phi_1' = -\frac{1}{\ell} \quad \text{(A.9)}$$

$$\Rightarrow F_{1n} = \int_0^l N_d \left(-\frac{1}{\ell}\right) dx$$

Da equação (A.7) temos que:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = J\int_{-1}^{1} g(\varepsilon)d\varepsilon = J\sum_{j=1}^{i}\omega_j g(\varepsilon_j) \qquad \text{(A.10)}$$

$$\Rightarrow F_{1n} = \int_{0}^{l} N_d\left(-\frac{1}{\ell}\right)dx = J\int_{-1}^{1} -\frac{N}{\ell}d\varepsilon = J\sum_{j=1}^{i}\omega_j(-\frac{N_j}{\ell}d\varepsilon) \qquad \text{(A.11)}$$

Substituindo os pontos de integração, as coordenadas dos pontos e seus respectivos pesos apresentados na tabela 4.2, temos:

$$F_{1n} = J\left(\omega_1\frac{N_1}{\ell} + \omega_2\frac{N_2}{\ell} + \omega_3\frac{N_3}{\ell}\right) \qquad \text{(A.12)}$$

$$F_{1n} = J\left(\frac{5}{9}\frac{N_1}{\ell} + \frac{8}{9}\frac{N_2}{\ell} + \frac{5}{9}\frac{N_3}{\ell}\right) \qquad \text{(A.13)}$$

Substituindo (A.5):

$$F_{1n} = \frac{1}{2}(b-a).\left(\frac{5}{9}\frac{N_1}{\ell} + \frac{8}{9}\frac{N_2}{\ell} + \frac{5}{9}\frac{N_3}{\ell}\right) \qquad \text{(A.14)}$$

APÊNDICE B

B.1 A Matriz de Rigidez do Elemento

Segundo Alves Filho (2000), os termos da matriz de rigidez do elemento finito representam relações de causa e efeito. A causa é um deslocamento unitário imposto em um grau de liberdade, e os efeitos são as forças que surgem nas direções dos graus de liberdade do elemento devido a esse deslocamento.

Para a determinação dos coeficientes da matriz de rigidez do elemento finito com seis graus de liberdade (figura B.1), impõem-se deslocamentos unitários isoladamente nos diversos graus de liberdade enquanto os outros são mantidos bloqueados (figura B.2). As forças que surgem nas direções dos demais graus de liberdade serão determinadas e representarão os coeficientes da matriz de rigidez. O coeficiente k_{ij} da matriz de rigidez de um elemento finito representa a força no grau de liberdade "i" devido ao deslocamento "j", mantendo-se os outros graus de liberdade bloqueados.

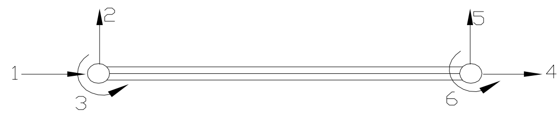

Figura B-1– Graus de Liberdade do Elemento do Pilar com Rigidez Axial e Rigidez à Flexão.

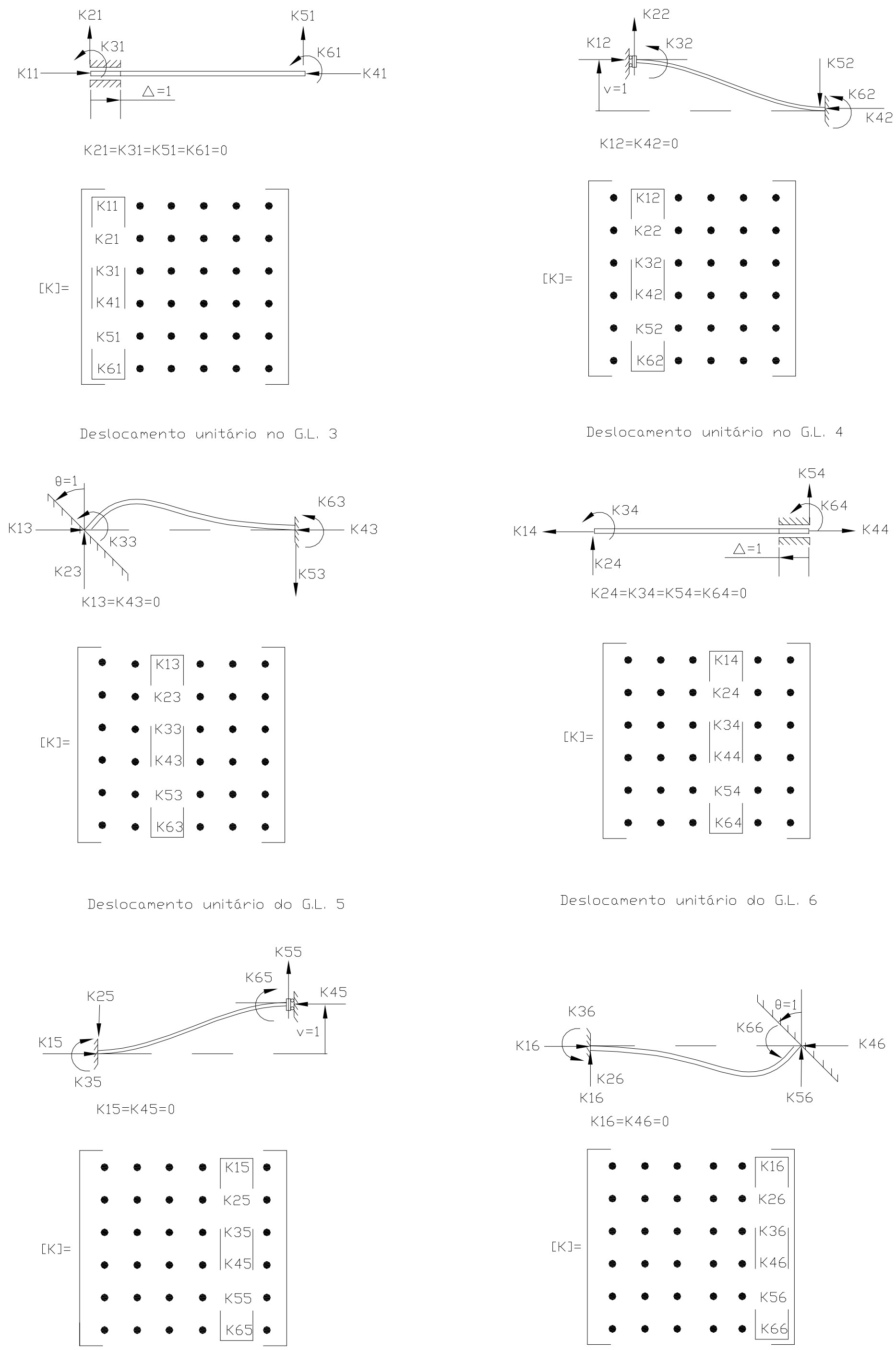

Figura B-2– Coeficientes da Matriz de Rigidez (fonte: ALVES FILHO, 2000)

Desta forma, os coeficientes da matriz de rigidez do elemento com rigidez axial e rigidez á flexão serão dados no sistema local de coordenadas do elemento por:

K11=E.A/L	K12=0	K13=0	K14=-E.A/L	K15=0	K16=0
K21=0	K22=12E.I/L^3	K23=6.E.I/L^2	K24=0	K25=-12.E.I/L^3	K26=6.E.I/L^2
K31=0	K32=6.E.I/L^2	K33=4.E.I/L	K34=0	K35=6.E.I/L^2	K36=2.E.I/L
K41=-E.A/L	K42=0	K43=0	K44=E.A/L	K45=0	K46=0
K51=0	K52=-12.E.I/L^3	K53=-6.E.I/L^2	K54=0	K55=-12.E.I/L^3	K56=-6.E.I/L^2
K61=0	K62=6.E.I/L^2		K64=0	K65=6.E.I/L^2	K66=4.E.I/L

$$[k]^e = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 12b & 6bL & 0 & -12b & 6bL \\ 0 & 6bL & 4bL^2 & 0 & -6bL & 2bL^2 \\ -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -12b & -6bL & 0 & 12b & -6bL \\ 0 & 6bL & 2bL^2 & 0 & 6bL & 4bL^2 \end{vmatrix} \tag{B.1}$$

Para cálculo das rigidezes axial e à flexão é considerada a seção transversal de concreto armado homogeneizada. As variáveis *a* e *b* mostradas na matriz de rigidez de cada elemento finito, *K*, são dadas por:

$$a = \frac{1}{L}(E_c A_c + E_s \sum_{i=1}^{n} A_{si}) \tag{B.2}$$

$$b = \frac{1}{L^3}(E_c I_c + E_s \sum_{i=1}^{n} I_{si}) \tag{B.3}$$

APÊNDICE C

C.1 Métodos Aproximados

Os métodos aproximados propostos pela norma NBR 6118/2003 (ABNT,2003) para cálculo de pilares com esbeltez maior do que a esbeltez limite (λ_1) e menor do que 90 ($\lambda_1 \leq \lambda \leq 90$) são desenvolvidos a seguir. Os métodos só podem ser aplicados a pilares com seção constante e armadura simétrica.

O índice de esbeltez é definido pela relação:

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i} \tag{C.1}$$

onde : i – raio de giração da seção bruta; l_e – comprimento equivalente do elemento isolado.

O índice de esbeltez limite pode ser calculado pelas expressões:

$$\lambda_1 = \frac{(25 + 12{,}5 e_1 / h)}{\alpha_b} \tag{C.2}$$

respeitada a restrição $35 \leq \lambda_1 \leq 90$.

O coeficiente α_b deve ser obtido conforme estabelecido a seguir:

a. Para pilares biapoiados sem forças transversais:

$$\alpha_b = 0,60 + 0,40 \frac{M_B}{M_A} \geq 0,40 \qquad \text{(C.3)}$$

onde:

M_A – Momento fletor de 1ªordem no extremo A do pilar (maior valor absoluto ao longo do pilar biapoiado).

M_B - Momento fletor de 1aordem no extremo B do pilar (toma-se para MB o sinal positivo se tracionar a mesma face que MA e negativo caso contrário).

b. Para pilares biapoiados com forças transversais significativas ao longo de sua altura:

$$\alpha_b = 1 \qquad \text{(C.4)}$$

c. Para pilares em balanço:

$$\alpha_b = 0,80 + 0,20 \frac{M_C}{M_A} \geq 0,85 \qquad \text{(C.5)}$$

onde:

M_A – Momento fletor de 1aordem no engaste;

M_C - Momento fletor de 1aordem no meio do pilar em balanço.

d. Para pilares bi-apoiados ou em balanço com momentos fletores menores que o momento mínimo:

$$\alpha_b = 1 \tag{C.6}$$

Os dois métodos aproximados apresentados a seguir são baseados no processo do pilar padrão, no qual a não linearidade geométrica é considerada de forma aproximada, supondo ser senoidal a elástica da barra.

C.2 Método do Pilar Padrão com Curvatura Aproximada

Neste método a não linearidade física é levada em conta através de uma expressão aproximada da curvatura na seção crítica.

O momento total máximo no pilar é calculado pela expressão:

$$M_{d,total} = \left(\alpha_b M_{1d} + N_d e_2\right) \geq M_{1d} \tag{C.7}$$

sendo:

$$e_2 = \frac{\ell_e^2}{10}\frac{1}{r} \tag{C.8}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{0{,}005}{h(\nu + 0{,}5)} \leq \frac{0{,}005}{h} \tag{C.9}$$

$$\nu = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} \tag{C.10}$$

O momento de primeira ordem deve respeitar o valor mínimo dado por:

$$M_{1d,\min} = N_d\,(0{,}015 + 0{,}03h) \qquad \text{(C.11)}$$

C.3 Método do Pilar Padrão com Rigideza Aproximada

A não linearidade física é levada em conta através de uma expressão aproximada da rigidez .

O momento total máximo no pilar é dado por:

$$M_{d,total} = \frac{\alpha_b M_{1d}}{1 - \dfrac{\lambda^2}{120\kappa / \nu}} \geq M_{1d,A} \qquad \text{(C.12)}$$

κ é o valor da rigidez adimensional, dado aproximadamente por:

$$\kappa = 32\left(1 + 5.\frac{M_{d,total}}{h.N_d}\right).\nu \qquad \text{(C.13)}$$

Para o cálculo da rigidez adimensional κ é necessário conhecer o momento total máximo ($M_{d.total}$) e para o cálculo de $M_{d,total}$ utiliza-se κ. Portanto a solução só pode ser obtida por tentativas.