



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo

MARÍLIA GONÇALVES MARQUES

**PUNÇÃO EM LAJES LISAS DE CONCRETO ARMADO COM
ABERTURAS ADJACENTES AO PILAR E ARMADURA DE
CISALHAMENTO**

CAMPINAS

2018

MARÍLIA GONÇALVES MARQUES

**PUNÇÃO EM LAJES LISAS DE CONCRETO ARMADO COM
ABERTURAS ADJACENTES AO PILAR E ARMADURA DE
CISALHAMENTO**

Tese de Doutorado apresentada a
Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e
Urbanismo da Unicamp, para obtenção do título
de Doutora em Engenharia Civil, na área de
Estruturas e Geotécnicas.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Mouta Trautwein

**ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE
DEFENDIDA PELA ALUNA MARÍLIA GONÇALVES MARQUES
E ORIENTADA PELO PROF. DR. LEANDRO MOUTA
TRAUTWEIN.**

ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 142037/2016-8

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

M348p Marques, Marília Gonçalves, 1988-
Punção em lajes lisas de concreto armado com aberturas adjacentes ao pilar e armadura de cisalhamento / Marília Gonçalves Marques. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Leandro Mouta Trautwein.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Concreto Armado. 2. Lajes. 3. Lajes de concreto. 4. Lajes de concreto - Projeto e construção. 5. Análise numérica. I. Trautwein, Leandro Mouta, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Punching in reinforced concrete flat slabs with openings adjacent to column and shear reinforcement

Palavras-chave em inglês:

Reinforced Concrete

Slabs

Concrete slabs

Concrete slabs - Design and construction

Numerical Analysis

Área de concentração: Estruturas e Geotécnica

Titulação: Doutora em Engenharia Civil

Banca examinadora:

Leandro Mouta Trautwein [Orientador]

Luiz Carlos de Almeida

Ronaldo Barros Gomes

Alessandra Luciano Carvalho

Rafael Alves de Souza

Data de defesa: 05-12-2018

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Civil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E
URBANISMO

PUNÇÃO EM LAJES LISAS DE CONCRETO ARMADO COM
ABERTURAS ADJACENTES AO PILAR E ARMADURA DE
CISALHAMENTO

MARÍLIA GONÇALVES MARQUES

Tese de Doutorado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:

Prof. Dr. Leandro Mouta Trautwein
Presidente e Orientador / FEC / UNICAMP

Prof. Dr. Luiz Carlos de Almeida
FEC / UNICAMP

Prof. Dr. Ronaldo Barros Gomes
Universidade Federal de Goiás

Prof. Dr. Rafael Alves de Souza
Universidade Estadual de Maringá

Profa. Dra. Alessandra Luciano Carvalho
PUC - Goiás

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no
SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

Campinas, 05 de dezembro de 2018.

Dedico este trabalho a Deus e à minha família.

AGRADECIMENTOS

Ao meu bom DEUS, sempre presente iluminando e me guiando para os melhores caminhos, e pela proteção durante tantos quilômetros rodados durante os quatro anos.

Agradeço aos meus amados pais, Aparecida e Lásaro, por sempre acreditarem em meu potencial, compreendendo e me dando apoio aos meus esforços e dedicação diária, sem o apoio de vocês eu não estaria aqui hoje.

Ao meu irmão, Leandro, por sempre estar comigo nesta caminhada.

Ao meu amigo e orientador Prof. Dr. Leandro Mouta Trautwein. Minha eterna gratidão pela sua orientação, pelo seu companheirismo, pelo seu constante incentivo e pelas excelentes oportunidades que me proporcionou dentro e fora da Unicamp.

Ao estimado Prof. Dr. Ronaldo Barros Gomes pela amizade, disposição e dedicação em me passar todo o conhecimento a respeito da modelagem teórica.

Ao Prof. Dr. Mário Jorge de Seixas Pimentel, meus agradecimentos pela sua imensurável acolhida e orientação na Universidade do Porto, bem como, pela sua enorme disposição em me passar seu profundo conhecimento a respeito da modelagem numérica.

Ao Prof. Dr. Luiz Carlos de Almeida, pela confiança, aprendizado, acompanhamento e disponibilidade na orientação deste trabalho.

Ao CNPQ, processo 142037/2016-8, por me contemplar com auxílio em parte do doutorado.

Ao banco Santander por me contemplar com uma bolsa no doutorado sanduíche. A Arcelormittal Brasil S.A. pela doação das barras de aço utilizadas nesta pesquisa.

A todos os amigos da pós-graduação da FEC-UNICAMP, que sempre estiveram de uma forma ou de outra motivando o desenvolvimento desse trabalho. Em especial, aqueles que estiveram

comigo nos ensaios experimentais, Elyson, Diego e Carlos, vocês foram fundamentais para a realização deste sonho.

Em especial ao Elyson, por estar comigo nesta caminhada desde o primeiro semestre, me ajudando e incentivando em todas as etapas, sua amizade foi fundamental para eu concluir este trabalho.

A toda minha família, aos amigos de Patos de Minas e de Viçosa, vocês são a minha base.

A todas as pessoas que me receberam com tanto carinho no período que morei em Portugal, em especial a Daiana e ao Aurélio.

Aos meus colegas da Universidade Federal de Viçosa – Campus Rio Paranaíba, que não mediram esforços para que eu pudesse concluir este sonho.

A todos professores e funcionários da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da UNICAMP, que contribuíram de inúmeras maneiras para a minha formação acadêmica.

RESUMO

O dimensionamento de lajes lisas de concreto armado necessita de um cuidado especial quanto a resistência à punção, especialmente quando no pavimento com essas lajes houver aberturas próximas ao pilar. Esta ligação torna-se ainda mais crítica por reduzir a resistência da laje nas adjacências dos pilares. Atualmente não há um método teórico capaz de explicar o fenômeno da punção em todas as suas variáveis, sendo normalmente utilizadas para o seu dimensionamento as prescrições das normas disponíveis. Os códigos recomendam que, quando necessário, as armaduras para resistir à punção em lajes devem ser constituídas por estribos verticais ou conectores (*studs*), com preferência pela utilização dos conectores. No presente trabalho foram realizados ensaios em lajes lisas com 130 mm de espessura e 1800 x 1800 mm de comprimento, pilares com dimensões de 150 x 150 mm e com a presença de aberturas e armadura de cisalhamento do tipo conectores. Com o objetivo de desenvolver um método teórico para lajes lisas com aberturas e, com ou sem armaduras de cisalhamento. Foi desenvolvida a adaptação do método teórico de Gomes (1991) de dimensionamento de lajes com a presença de aberturas adjacentes ao pilar. Realizou-se também uma análise numérica por meio do *software* em elementos finitos, DIANA, para validação dos resultados experimentais. E por fim, compararam-se os resultados obtidos experimentalmente com os modelos numéricos, com os resultados obtidos pelo método teórico proposto com aberturas e pelas recomendações normativas. Os resultados obtidos pelo método teórico proposto representaram o comportamento das lajes lisas com aberturas analisadas no programa experimental.

Palavras chaves: Concreto Armado. Lajes. Punção. Análise Teórica. Análise Numérica.

ABSTRACT

The design of reinforced concrete flat slabs requires special care in terms of punching resistance, especially when on the floor with these slabs above mentioned there is the presence of openings near the column. This connection becomes even more critical as it reduces the resistance close to the column. Nowadays there is no theoretical method capable of explaining the phenomenon of punching in all its variables, being normally used for its dimensioning the prescriptions of the available codes. The Brazilian code NBR 6118 (2014) recommends that, when necessary, reinforcements to resist punching in slabs should consist of vertical stirrups or *studs*, preferably using the connectors. The test of flat slabs with 130 mm of thickness and 1800 x 1800 mm of length, columns with dimensions of 150 x 150 mm and with the presence of holes and shear reinforcement of the connectors type was carried out. It was varied the dimension (75, 100 and 150 mm) and the quantity of openings besides the distribution of shear reinforcement. It was developed the adaptation of the theoretical method of Gomes (1991) of slab dimensioning with addition of openings adjacent or near to the column. A numerical analysis was also performed using the finite element software, DIANA, to validate the experimental results. Finally, it was compared the results obtained experimentally with the numerical models, the results obtained by the theoretical method proposed with openings, and by the normative recommendations. The results obtained by the proposed theoretical method represented the behaviour of the slabs with openings analysed in the experimental program.

Keywords: Reinforced Concrete. Slabs. Punching. Theoretical Analysis. Numerical Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1- Ruptura por punção.....	28
Figura 1.2 - Aberturas existentes nas lajes, próximas às faces dos pilares do Shopping Rio Poty.	29
Figura 2.1 - Modos de ruptura por punção em lajes com armadura de cisalhamento.	33
Figura 2.2 - Influência da armadura de cisalhamento.	34
Figura 2.3 - Lajes estudadas por Andrade e Gomes (1995).	37
Figura 2.4 - Características das lajes da série II ensaiadas por Salakawy <i>et al.</i> (2000).	38
Figura 2.5 - Características das lajes L5, L6, L7 e L8 ensaiadas por Souza (2004).....	40
Figura 2.6 – Esquema de ensaio, unidades em mm.	41
Figura 2.7 – Desenho esquemático da armadura de cisalhamento em relação à de flexão.	42
Figura 2.8 – Laje 7 (Borges et al. (2013)).	44
Figura 2.9 - Detalhe da armadura de cisalhamento.	44
Figura 2.10 - Características das lajes ensaiadas por Oukaili e Salman (2014).	46
Figura 2.11 - Esquema de ensaio.....	46
Figura 2.12 - Fissuras para o modelo SF0 (Abertura de 100 x 100 mm) após a ruptura.	47
Figura 2.13 - Fissuras para o modelo CF0 (Abertura de 100 x 100 mm) após a ruptura.	48
Figura 2.14 - Características e carregamento das lajes ensaiadas por Oliveira et al. (2014). ..	49
Figura 2.15 - Superfície de ruptura da laje L1.....	51
Figura 2.16 - Superfície de ruptura da laje L2.....	51
Figura 2.17 - Superfície de ruptura da laje L3.....	52
Figura 2.18 - Configuração geométrica de cada modelo.....	52
Figura 2.19 - Fissuras nas lajes.....	53
Figura 2.20 - Armadura de cisalhamento utilizada na pesquisa de Silva <i>et al.</i> (2017). Unidades em mm.	54
Figura 2.21 - Perímetro de controle ACI 318 (2014).	56
Figura 2.22 - Perímetro de controle para lajes com aberturas.	56
Figura 2.23 - Perímetro de controle distante 0,5d a partir da última camada de armadura de cisalhamento.	57
Figura 2.24 - Perímetro de controle das áreas carregadas.	58
Figura 2.25 - Perímetro crítico com a presença de aberturas.	58
Figura 2.26 - Perímetros de controle para pilares internos.....	60
Figura 2.27 - Perímetro de controle.....	61

Figura 2.28 - Disposição da armadura de punção e da superfície crítica C''	61
Figura 2.29 - Representação das curvas obtidos pelo método do <i>fib</i> Model Code (2010).	65
Figura 2.30 - Redução do perímetro crítico na presença de a) aberturas e b) tubos.	65
Figura 2.31 – Armadura considerada na resistência ao cisalhamento na região interna.	66
Figura 2.32 - Perímetro crítico de acordo com o modelo empírico proposto por Gomes (1991).	68
Figura 2.33 - Modelo Proposto por Kinnunen e Nylander (1960).	70
Figura 2.34 - Modelo de ruptura de punção e forças envolvidas proposto por Shehata.	73
Figura 2.35 - Modelo proposto por Gomes (1991).	76
Figura 2.36 - Tronco de pirâmide na face do pilar.	77
Figura 2.37 - a) Curva tensão-deformação do concreto para compressão uniaxial. b) Diagrama simplificado bi-linear de tensão-deformação do concreto.	80
Figura 2.38 - Diagrama de Deformação do Aço e do Concreto.	81
Figura 2.39 - Curva idealizada de tensão-deformação do aço.	83
Figura 2.40 - Gráfico em função de χ por r_y / r_3 adotado por Andersson (1963).	84
Figura 2.41 - Diagrama das forças da armadura de cisalhamento adotado por Gomes (1991).	85
Figura 2.42 – Modelo em elementos finitos da laje ensaiada.	90
Figura 2.43 – Modelo em elementos finitos da laje ensaiada.	90
Figura 2.44 – Fissuras desenvolvidas nas lajes.	91
Figura 2.45 - Desenho esquemático das lajes.	93
Figura 2.46 - <i>Truss/beam</i> , configuração da armadura de cisalhamento.	93
Figura 2.47 - Elementos de <i>shell</i> simulando a armadura de cisalhamento.	94
Figura 2.48 - Elementos sólidos simulando a armadura de cisalhamento.	94
Figura 2.49 - Carga <i>versus</i> deslocamento da laje SB4 por diferentes modelos da armadura de cisalhamento.	95
Figura 2.50 - Modelo numérico da laje SB1.	96
Figura 2.51 - Comparação carga <i>versus</i> deformação experimental e numérico.	96
Figura 2.52 – Comparação entre as fissuras pós ruptura numérico e experimental das lajes PG1 e PG2b.	97
Figura 3.1 – Pórtico hipotético caracterizando a região estudada da pesquisa.	98
Figura 3.2 - Modelos das lajes do Grupo 1. Unidades em mm.	99
Figura 3.3 - Modelo das lajes do Grupo 2. Unidades em mm.	100

Figura 3.4 – Vista superior da laje. Dimensões em mm.....	102
Figura 3.5 - Fotografia do esquema de ensaio.....	102
Figura 3.6 - Esquema de ensaio. Vista lateral e superior.	103
Figura 3.7 - Armadura de flexão da laje LR e LR-8s.....	104
Figura 3.8 - Armadura de flexão da laje L2-150, L2-150-8s e L2-150-6s.....	105
Figura 3.9 - Armadura de flexão da laje L4-75.....	105
Figura 3.10 – Armadura de flexão da Laje L2-100-8s.....	106
Figura 3.11 – Armadura de flexão da Laje L4-75-8s e L4-75-4s.....	106
Figura 3.12 – Dimensões das armaduras de cisalhamento (mm).	107
Figura 3.13 - Fotografia da armadura de cisalhamento.....	107
Figura 3.14 - Posicionamento da armadura de cisalhamento.....	108
Figura 3.15 – Armadura de cisalhamento da laje LR-8s posicionada para receber o concreto.	108
Figura 3.16 – Distribuição da armadura de cisalhamento	109
Figura 3.17 - Fotografia após a concretagem.....	110
Figura 3.18 - Fotografia do esquema de ensaio da armadura de cisalhamento.....	110
Figura 3.19 - Fotografia do posicionamento dos transdutores de deslocamentos.....	111
Figura 3.20 - Posicionamento dos transdutores de deslocamentos e dos relógios analógicos. Dimensões em mm.	112
Figura 3.21 - Posicionamento e identificação dos extensômetros na armadura de flexão.	113
Figura 3.22 - Fotografia dos extensômetros nas armaduras.....	114
Figura 3.23 - Posicionamento e identificação dos extensômetros na armadura de cisalhamento.	114
Figura 3.24 - Posicionamento e identificação dos extensômetros no concreto.....	115
Figura 3.25 - Fotografia dos extensômetros de concreto na laje L4-75.....	116
Figura 3.26 - Equipamentos para aplicação do carregamento.....	116
Figura 4.1 – Superfície de ruptura das lajes do Grupo 1.....	122
Figura 4.2 – Superfície de ruptura das lajes do Grupo 2.....	123
Figura 4.3 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de LR.....	125
Figura 4.4 - Gráfico carga <i>versus</i> deslocamento vertical da laje LR.....	126
Figura 4.5 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no aço de LR.....	126
Figura 4.6 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no concreto de LR.....	127
Figura 4.7 - Laje LR após a ruptura.....	127
Figura 4.8 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de L2-150.....	128

Figura 4.9 - Gráfico carga <i>versus</i> deslocamento vertical da laje L2-150.....	129
Figura 4.10 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no aço de L2-150.....	129
Figura 4.11 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no concreto de L2-150.	130
Figura 4.12 - Laje L2-150 após a ruptura.	130
Figura 4.13 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de L4-75.	131
Figura 4.14 - Gráfico carga <i>versus</i> deslocamento vertical da laje L4-75.....	132
Figura 4.15 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no aço de L4-75.....	132
Figura 4.16 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no concreto de L4-75. ..	133
Figura 4.17 - Laje L4-75 após a ruptura.	133
Figura 4.18 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de LR-8s.	135
Figura 4.19 - Gráfico carga <i>versus</i> deslocamento vertical da laje LR-8s.....	135
Figura 4.20 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no aço de LR-8s.	136
Figura 4.21 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no concreto de LR-8s. ..	136
Figura 4.22 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros na armadura de cisalhamento de LR-8s.	137
Figura 4.23 – Laje LR-8s pós ruptura.	137
Figura 4.24 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de L2-150-8s.	138
Figura 4.25 - Gráfico carga <i>versus</i> deslocamento vertical da laje L2-150-8s.	139
Figura 4.26 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no aço de L2-150-8s....	139
Figura 4.27 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no concreto de L2-150-8s.	140
Figura 4.28 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros na armadura de cisalhamento de LR-150-8s.	140
Figura 4.29 - Laje LR-150-8s pós ruptura.	141
Figura 4.30 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de L2-150-6s.	142
Figura 4.31 - Gráfico carga <i>versus</i> deslocamento vertical da laje L2-150-6s.	142
Figura 4.32 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no aço de L2-150-6s....	143
Figura 4.33 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no concreto de L2-150-6s.	143
Figura 4.34 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros na armadura de cisalhamento de L2-150-6s.....	144
Figura 4.35 - Laje L2-150-6s após a ruptura.	144

Figura 4.36 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de L2-100-8s.	145
Figura 4.37 - Gráfico carga <i>versus</i> deslocamento vertical da laje L2-100-8s.	146
Figura 4.38 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no aço de L2-100-8s.	146
Figura 4.39 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no concreto de L2-100-8s.	147
Figura 4.40 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros na armadura de cisalhamento de L2-100-8s.....	147
Figura 4.41 - Laje L2-100-8s pós ruptura.....	148
Figura 4.42 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de L4-75-8s.	149
Figura 4.43 - Gráfico carga <i>versus</i> deslocamento vertical da laje L4-75-8s.	149
Figura 4.44 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no aço de L4-75-8s.....	150
Figura 4.45 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no concreto de L4-75-8s.	150
Figura 4.46 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros na armadura de cisalhamento de L4-75-8s.....	151
Figura 4.47 - Laje L4-75-8s pós ruptura.....	151
Figura 4.48 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de L4-75-4s.	152
Figura 4.49 - Gráfico carga <i>versus</i> deslocamento vertical da laje L4-75-4s.	153
Figura 4.50 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no aço de L4-75-4s.....	153
Figura 4.51 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros no concreto de L4-75. ..	154
Figura 4.52 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação dos extensômetros na armadura de cisalhamento de L4-75-4s.....	154
Figura 4.53 – Laje L4-75-4s pós ruptura.	155
Figura 4.54 – Vista superior e inferior da laje LR-8s pós ruptura.....	156
Figura 4.55 – Vista superior e inferior da laje L2-150-8s pós ruptura.	156
Figura 4.56 – Vista superior e inferior da laje L2-150-6s pós ruptura.	157
Figura 4.57 – Vista superior e inferior da laje L2-100-8s pós ruptura.	157
Figura 4.58 – Vista superior e inferior da laje L4-75-8s pós ruptura.	157
Figura 4.59 – Vista superior e inferior da laje L4-75-4s pós ruptura.	158
Figura 4.60 - Posicionamento e distância dos <i>studs</i>	158
Figura 4.61 - Gráfico carga <i>versus</i> deslocamento máximo das lajes.....	160
Figura 4.62 - Gráfico das rotações máximas atingidas para a carga de ruptura de cada laje.	161
Figura 4.63 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação do concreto próximo ao pilar.....	162

Figura 4.64 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação do extensômetro e4.	163
Figura 4.65 - Gráfico carga <i>versus</i> deformação do primeiro <i>stud</i>	164
Figura 4.66: Desenvolvimento das fissuras da laje LR.	165
Figura 4.67: Desenvolvimento das fissuras da laje L2-150.....	166
Figura 4.68: Desenvolvimento das fissuras da laje L4-75.....	166
Figura 4.69 - Desenvolvimento das fissuras da laje LR-8s.	166
Figura 4.70 - Desenvolvimento das fissuras da laje L2-150-8s.	166
Figura 4.71 - Desenvolvimento das fissuras da laje L2-150-6s.	167
Figura 4.72 - Desenvolvimento das fissuras da laje L2-100-8s	167
Figura 4.73 - Desenvolvimento das fissuras da laje L4-75-8s	167
Figura 4.74 - Desenvolvimento das fissuras da laje L4-75-4s.	167
Figura 4.75 - Carga experimental e prevista em função da rotação das lajes LR e L2-150... 172	
Figura 4.76 - Carga experimental e prevista em função da rotação das lajes L4-75 e LR-8s. 172	
Figura 4.77 - Carga experimental e prevista em função da rotação das lajes L2-150-8s e L2-150-6s.	172
Figura 4.78 - Carga experimental e prevista em função da rotação das lajes L2-100-8s, L4-75-8s e L4-75-4s.	173
Figura 4.79 – Perímetro crítico efetivo. a) lajes com abertura. b) lajes com abertura e armadura de cisalhamento.	175
Figura 4.80 - Perímetro efetivo para lajes com armadura de cisalhamento após a abertura. .	176
Figura 4.81 - Fotografia da armadura de flexão antes da concretagem.....	178
Figura 5.1 - Modelo teórico para lajes com abertura.....	182
Figura 5.2 - Carga <i>versus</i> rotação para a laje LR.	192
Figura 5.3 - Carga <i>versus</i> rotação para a laje L2-150.....	193
Figura 5.4 - Carga <i>versus</i> rotação para a laje L4-75.....	193
Figura 5.5 - Carga <i>versus</i> rotação para a laje LR-8s.	194
Figura 5.6 - Carga <i>versus</i> rotação para a laje L2-150-8s.....	194
Figura 5.7 - Carga <i>versus</i> rotação para a laje L2-150-6s.....	195
Figura 5.8 - Carga <i>versus</i> rotação para a laje L4-75-8s.....	195
Figura 5.9 - Carga <i>versus</i> rotação para a laje L4-75-4s.....	196
Figura 6.1 – Relação de amolecimento proposta por Hordijk (1991).	203
Figura 6.2 - Efeito do fator de retenção β na curva carga <i>versus</i> deslocamento.	204
Figura 6.3 - Curva Parabólica proposta por Feenstra (1993).	205
Figura 6.4 - Carga <i>versus</i> deslocamento da laje LR para diferentes curvas de beta.	208

Figura 6.5 - Carga <i>versus</i> deslocamento da laje LR para diferentes valores do coeficiente A.	209
Figura 6.6 - Curva do parâmetro de retenção ao cisalhamento <i>versus</i> a deformação normal da abertura de fissuras para $A = 5000$	210
Figura 6.7 - Modelo Numérico da laje LR.	211
Figura 6.8 - Ponto de medição do deslocamento das lajes.	212
Figura 6.9 - Evolução dos deslocamentos máximos com a carga aplicada nos modelos do Grupo 1.	214
Figura 6.10 - Evolução dos deslocamentos máximos com a carga aplicada nos modelos do Grupo 2.	215
Figura 6.11 - Fissuração pós ruptura experimental e numérico das lajes LR, L2-150, LR-8s e L4-75-8s.	216
Figura 6.12 - Panorama das deformações principais de tração das lajes do Grupo 1.	217
Figura 6.13 - Panorama das deformações principais de tração das lajes do Grupo 2.	218
Figura 6.14 - Carga <i>versus</i> deformação no concreto dos modelos numéricos e experimentais (LR, L2-150, L4-75 e LR-8s).	219
Figura 6.15 - Carga <i>versus</i> deformação no concreto dos modelos numéricos e experimentais (L2-150-8s, L2-150-6s, L2-100-8s, L4-75-8s e L4-75-4s).	220
Figura 6.16 - Carga <i>versus</i> deformação nos <i>studs</i> dos modelos numéricos e experimentais do Grupo 2.	221
Figura 6.17 - Demonstração da rotação das lajes.	222
Figura 6.18- Carga <i>versus</i> rotação dos modelos experimentais, teóricos e numéricos das lajes do Grupo 1.	224
Figura 6.19 - Carga <i>versus</i> rotação dos modelos experimentais, teóricos e numéricos das lajes do Grupo 2.	225
Figura A.1 - Gráfico resistência à compressão <i>versus</i> idade do concreto das lajes do Grupo 1.	238
Figura A.2 - Gráfico resistência à tração <i>versus</i> idade do concreto das lajes do Grupo 1.	238
Figura A.3 - Gráfico módulo de elasticidade <i>versus</i> idade do concreto das lajes do Grupo 1.	239
Figura A.4 - Gráfico resistência à compressão <i>versus</i> idade do concreto das lajes do Grupo 2.	240
Figura A.5 - Gráfico resistência à tração <i>versus</i> idade do concreto das lajes do Grupo 2.	240

Figura A.6 - Gráfico módulo de elasticidade <i>versus</i> idade do concreto das lajes do Grupo 2.	241
Figura A.7 - Gráfico tensão <i>versus</i> deformação do aço 6.3 mm das lajes do Grupo 1.	241
Figura A.8 - Gráfico tensão <i>versus</i> deformação do aço 12.5 mm das lajes do Grupo 1.	242
Figura A.9 - Gráfico tensão <i>versus</i> deformação do aço 6.3 mm das lajes do Grupo 2.	242
Figura A.10 - Gráfico tensão <i>versus</i> deformação do aço 8.0 mm das lajes do Grupo 2.	243
Figura A.11 - Gráfico tensão <i>versus</i> deformação do aço 12.5 mm das lajes do Grupo 2.	243
Figura C.1 - Definição dos segmentos das lajes para o cálculo a flexão.....	247
Figura D.1 - Delimitação do ângulo θ . a) Abertura circular e adjacente b) Abertura quadrado e não adjacente.	250
Figura D.2 - Demonstração dos novos valores de θ_1 e θ_2	251
Figura H.1 - Detalhe das lajes LR, L2-150, L4-75 e LR-8s.	270
Figura H.2 - Detalhe das lajes L2-150-8s, L2-150-6s, L2-100-8s e L4-75-8s.	271
Figura H.3 - Detalhe da laje L4-75-4s.	272

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Características das lajes.....	35
Tabela 2.2 - Modo e carga de ruptura das lajes.	36
Tabela 2.3 - Características das lajes e carga de ruptura.	39
Tabela 2.4 - Características das lajes ensaiadas por Souza (2004).....	40
Tabela 2.5 - Modo e Carga de Ruptura das Lajes.	43
Tabela 2.6 - Características e carga de ruptura das lajes.	45
Tabela 2.7 - Características das lajes.....	48
Tabela 2.8 - Características e carga de ruptura das lajes.	50
Tabela 2.9 - Comparativo entre os métodos de cálculo para previsão da carga de ruptura de lajes lisas.	69
Tabela 2.10 - Cálculo de F_{ct} conforme a posição do raio da laje.....	82
Tabela 3.1 - Características principais das lajes.	101
Tabela 4.1 - Propriedades mecânicas do concreto no dia de ensaio.....	118
Tabela 4.2 - Propriedades mecânicas do aço.....	119
Tabela 4.3 - Cargas de ruptura das lajes.....	120
Tabela 4.4 - Características dos <i>studs</i> nas lajes.....	156
Tabela 4.5 - Carga do início de fissuração das lajes ensaiadas.	165
Tabela 4.6 - Comparação entre a carga experimental e a estimada pelo ACI 318 (2014).	168
Tabela 4.7 - Comparação entre a carga experimental e a estimada pelo EC2 (2004).	169
Tabela 4.8 - Comparação entre a carga experimental e a estimada pela NBR6118 (2014). ..	170
Tabela 4.9 - Comparação entre a carga experimental e a estimada pelo Model Code (2010).	171
Tabela 4.10 - Comparação entre a carga experimental e a estimada pela Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (MUTTONI, 2008).	174
Tabela 4.11 - Comparação entre as cargas experimentais e estimadas pelos códigos.	174
Tabela 4.12 - Carga de ruptura por diferentes perímetro de controle.....	177
Tabela 4.13 - Modo de ruptura de acordo com a NBR6118 (2014) conforme Perímetro Efetivo 1 e Perímetro Efetivo 2.....	177
Tabela 4.14 - Carga de ruptura por flexão das lajes.	178
Tabela 5.1 - Cálculo de F_{cth} conforme a posição e o tamanho da abertura.....	184
Tabela 5.2 - Cálculo de F_{sth} conforme a posição e o tamanho da abertura.	185
Tabela 5.3 - Dados de entrada para o cálculo teórico das lajes.	189

Tabela 5.4 - Resultados teóricos das lajes.	191
Tabela 5.5 - Resultados carga de ruptura, rotação e linha neutra experimental e teórico.	191
Tabela 5.6 – Resultados da carga de ruptura experimental e teórico de trabalhos da literatura.	197
Tabela 6.1 – Valores de G_{f0} em função do tamanho máximo do agregado.....	203
Tabela 6.2 - Cargas de ruptura e deslocamento central das lajes do Grupo 1.	212
Tabela 6.3 - Cargas de ruptura e deslocamento central das lajes do Grupo 2.	213
Tabela 6.4 - Carga e rotação dos modelos experimentais, teóricos e numéricos.	223
Tabela A.1 - Resultados dos ensaios de compressão e tração do concreto utilizado nas lajes do Grupo 1.....	237
Tabela A.2 - Resultados dos ensaios de compressão e tração do concreto utilizado nas lajes do Grupo 2.....	239
Tabela B.0.1 - Cálculo da taxa de armadura das lajes.....	245
Tabela C.1 - Cargas de ruptura por flexão.....	249
Tabela E.1 – Resultados obtidos para lajes com aberturas.....	252
Tabela E.2 – Carga experimental e carga teórica para lajes com armadura e sem armadura.....	253
Tabela E.3 – Resultados carga experimental e teórica para lajes com abertura e armadura de cisalhamento	254
Tabela F.1 - Dados de entrada no programa PunCalc das lajes de Gomes (1991) e Gomes e Andrade (1999).....	255
Tabela F.2 - Dados de entrada no programa PunCalc das lajes de Silva et. al. (2017) e Souza (2004).	256
Tabela F.3 - Dados de entrada no programa PunCalc das lajes de Oukaili e Salman (2014) e Ha et al. (2015).....	257
Tabela F.4 - Dados de entrada no programa PunCalc das lajes de Anil et al. (2014), Lourenço (2018) e Liberati (2018).	258

LISTA DE SÍMBOLOS

A_c	Área de concreto na qual a força radial é aplicada
A_v	Área da armadura de cisalhamento dentro do perímetro de controle
A_{sw}	Área da armadura de cisalhamento em uma camada ao redor do pilar
b_1	Distância do centro do pilar a face da abertura mais próxima ao pilar
b_2	Distância entre as faces da abertura
b_0	Perímetro de controle
C	Coesão interna do concreto
$c_{máx}$	Maior dimensão da seção transversal do pilar
$c_{mín}$	Menor dimensão da seção transversal do pilar
d	Altura útil da laje
d_g	Diâmetro máximo do agregado
d_x	Altura útil da laje medida na direção x
d_y	Altura útil da laje medida na direção y
E_c	Módulo de deformação longitudinal do concreto
E_s	Módulo de deformação longitudinal do aço
F_{cr}	Força radial do concreto
F_{ct}	Força tangencial do concreto
F_{cth}	Força tangencial do concreto referente à abertura
F_e	Força da armadura de cisalhamento
F_{sr}	Força radial da armadura de flexão
F_{st}	Força tangencial da armadura de flexão
F_{sh}	Força tangencial da armadura de flexão referente à abertura
f_c	Resistência à compressão do concreto medida em corpos de prova cilíndricos
f_{cd}	Resistência de cálculo do concreto à compressão
f_{ck}	Resistência característica à compressão do concreto
f_{bd}	Resistência de aderência do concreto
f_{sp}	Resistência à compressão diametral do concreto
f_{ct}	Resistência à tração do concreto
f_u	Resistência na ruptura do aço da armadura
f_y	Resistência ao escoamento do aço da armadura de flexão
f_{ywd}	Resistência ao escoamento de projeto do aço da armadura de cisalhamento

$f_{ywd,ef}$	Resistência efetiva ao escoamento do aço da armadura de cisalhamento
G_f	Energia de Fratura à tração
G_c	Energia de Fratura à compressão
h	Altura total da laje
k	Parâmetro de ruptura interna
k_c	Razão entre a tensão normal máxima e f_c
n_f	Quantidade de aberturas na laje
k_x	Razão entre a tensão média no bloco até o valor máximo
P	Carga de punção
$r_{contrib}$	Comprimento dentro do qual as armaduras de cisalhamento contribuem para a força F_e
r_0	Raio o pilar
r_l	Raios de seção crítica de ruptura externa, situado a $1,35d$ da última camada de armadura de cisalhamento
r_3	Raio da laje
r_{ec1}	Raio na laje onde ocorre a deformação ε_{c1}
r_y	Raio de escoamento da armadura de flexão
r_w	Raio de punção
s_0	Distância radial entre a face do pilar e o primeiro elemento da armadura de cisalhamento
s_r, s	Distância radial entre elementos da armadura de cisalhamento
u, u_l	Perímetro de controle
u_0	Perímetro do pilar
u_{ext}, u_{out}	Perímetro de controle afastado da última camada de armadura de cisalhamento
V_c	Força nominal resistente oferecida pelo concreto
V_{exp}	Carga de ruptura experimental
V_n	Força nominal resistente
V_s	Força nominal resistente oferecida pela armadura
V_{teo}	Carga de ruptura teórica, obtida pelos códigos normativos e pelo método teórico
V_u	Força nominal atuante
x	Altura da linha neutra da laje
z	Braço de alavanca

LETRAS GREGAS

α	Ângulo entre a armadura de cisalhamento e o plano da laje
α_e	E_s/E_c
α_s	Coeficiente relacionado ao posicionamento do pilar em relação à laje
β	Ângulo da força da armadura de cisalhamento com o plano horizontal
β	Ângulo de inclinação da força F_e com a horizontal
β_c	Relação entre maior e menor dimensão da seção transversal do pilar
β_0	Coeficiente relacionado com a excentricidade da carga do pilar
γ	Ângulo de superfície com o mecanismo de ruptura interna
γ_c	Coeficiente de redução da resistência do concreto
γ_p	Coeficiente utilizado para lajes com aberturas que define o modo de ruptura
γ_{nn}	Distorção da fissura
ε	Deformação normal do concreto
ε_{cl}	$0,85f_c / (4250f_c^{1/2})$
ε_{cr}	Deformação radial do concreto
ε_{ct}	Deformação tangencial do concreto
ε_{cu}	Deformação do concreto na ruptura (0,0035)
ε_{nn}	Deformação normal à fissura
ε_y	Deformação de início do escoamento do aço
ε_{sr}	Deformação radial do aço
ε_{st}	Deformação tangencial do aço
η	Gradiente de tensões do concreto atuantes na face do pilar
θ	Ângulo referente à posição da abertura na laje
μ	Coeficiente de fricção interna do concreto
ζ	Efeito de tamanho (<i>size effect</i>)
ρ	Taxa geométrica de armadura de flexão
ρ_x	Taxa geométrica de armadura de flexão medida na direção x
ρ_y	Taxa geométrica de armadura de flexão medida na direção y
σ	Tensão normal
σ_x	Tensão normal na direção x
σ_y	Tensão normal na direção y
$\sigma_{m\acute{a}x}$	Tensão normal máxima
τ	Tensão de cisalhamento

τ_{xy}	Tensão de cisalhamento no plano xy
χ	Coefficiente de redução relativo à diferença entre as forças radiais exercidas pela armadura ortogonal e aquelas devidas às armaduras radial e circunferencial
ψ	Rotação da laje

ABREVIATURAS

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas;
 ASTM - American Society for Testing and Materials;
 PTV - Princípio do Trabalho Virtual;
 MEF - Método dos Elementos Finitos;
 DIANA - DIplacement ANAlyser.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	28
1.1. OBJETIVOS	30
1.2. ESTRUTURA DA TESE.....	31
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	32
2.1. PUNÇÃO.....	32
2.2. ESTUDOS REALIZADOS NO BRASIL E NO EXTERIOR	34
2.2.1. Gomes e Andrade (1995).....	34
2.2.2. Salakawy et al. (2000).....	37
2.2.3. Souza (2004)	39
2.2.4. Trautwein <i>et al.</i> (2011)	41
2.2.5. Borges <i>et al.</i> (2013).....	43
2.2.6. Oukaili e Salman (2014).....	45
2.2.7. Oliveira <i>et al.</i> (2014)	49
2.2.8. Ha <i>et al.</i> (2015)	52
2.2.9. Silva <i>et al.</i> (2017).....	53
2.3. RECOMENDAÇÕES DOS CÓDIGOS E MÉTODOS EMPÍRICOS	55
2.3.1. ACI 318 (2014)	55
2.3.2. EUROCODE 2 (2004)	57
2.3.3. NBR 6118 (2014).....	60
2.3.4. <i>fib</i> Model Code (2010)	63
2.3.5. Método Empírico de Gomes (1991)	66
2.3.6. Comparação entre os Códigos e os Métodos de Cálculo.....	68
2.4. MODELOS TEÓRICOS PARA LAJES LISAS	69
2.4.1. Modelo Teórico proposto por Kinnunen e Nylander (1960)	69
2.4.2. Modelo Teórico proposto por Shehata (1985)	72
2.4.3. Modelo Teórico proposto por Gomes (1991)	75
2.5. ESTUDOS NUMÉRICOS	89
2.5.1. Shu <i>et al.</i> (2015).....	89
2.5.2. Genikomsou e Polak (2016)	92
2.5.3. Shu et al. (2016)	95
3. PROGRAMA EXPERIMENTAL	98

3.1.	CONSIDERAÇÕES GERAIS	98
3.2.	CARACTERÍSTICAS DOS MODELOS ENSAIADOS.....	99
3.3.	ESQUEMA DE ENSAIO	101
3.4.	CARACTERÍSTICAS DAS ARMADURAS.....	104
3.4.1.	Armadura de Flexão	104
3.4.2.	Armadura de Cisalhamento	107
3.5.	MATERIAIS.....	109
3.5.1.	Concreto	109
3.5.2.	Aço	110
3.6.	INSTRUMENTAÇÃO	111
3.6.1.	Deslocamento Vertical da Laje	111
3.6.2.	Deformação Específica.....	112
3.6.3.	Aplicação da carga	116
4.	APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS..	118
4.1.	MATERIAIS.....	118
4.1.1.	Concreto	118
4.1.2.	Aço	119
4.2.	CARGAS E MODOS DE RUPTURA	119
4.3.	DESLOCAMENTO, DEFORMAÇÃO E FISSURAS DAS LAJES	124
4.3.1.	Lajes Grupo 1	124
4.3.2.	Lajes Grupo 2	133
4.4.	COMPARATIVO ENTRE AS LAJES DO GRUPO 1 E GRUPO 2.....	155
4.4.1.	Cargas e Modos de Ruptura dos Modelos Estudados.....	155
4.4.2.	Deslocamento Máximo e Rotação das Lajes	159
4.4.3.	Deformações do Concreto, Armaduras de Flexão e de Cisalhamento	161
4.4.4.	Desenvolvimento das Fissuras.....	164
4.5.	RESISTÊNCIA AO PUNÇIONAMENTO EXPERIMENTAL COMPARADA AOS MÉTODOS DE CÁLCULO	168
4.5.1.	ACI 318 (2014)	168
4.5.2.	EC2 (2004).....	169
4.5.3.	NBR6118 (2014)	170
4.5.4.	<i>fib</i> Model Code (2010)	170
4.5.6.	Resumo dos Métodos.....	174

4.6.	PERÍMETRO DE CONTROLE EM LAJES COM ABERTURAS E ARMADURA DE CISALHAMENTO.....	175
4.7.	RESISTÊNCIA À FLEXÃO DAS LAJES ENSAIADAS	177
5.	MODELO TEÓRICO PARA LAJES LISAS COM ABERTURA	180
5.1.	FORÇAS ATUANTES NO MODELO	180
5.1.1.	Determinação das Forças.....	182
5.2.	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	186
5.3.	CRITÉRIOS DE RUPTURA	187
5.4.	RESULTADOS TEÓRICOS	188
5.4.1.	Resultados teóricos das lajes ensaiadas	188
5.4.2.	Resultados teóricos das lajes da literatura	196
6.	ANÁLISE NUMÉRICA DE LAJES LISAS DE CONCRETO ARMADO.....	201
6.1.	CONSIDERAÇÕES GERAIS	201
6.2.	O PROGRAMA DIANA	201
6.3.	RESULTADOS NUMÉRICOS	207
6.3.1.	Carga de ruptura, deslocamento máximo vertical e modo de ruptura das lajes do modelo numérico	212
6.3.2.	Deformações do concreto e do aço	216
6.4.	COMPARAÇÃO DAS CURVAS CARGA <i>VERSUS</i> ROTAÇÃO DOS RESULTADOS EXPERIMENTAL, TEÓRICO E MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)	222
7.	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	226
7.1.	CONCLUSÕES DO PROGRAMA EXPERIMENTAL.....	226
7.2.	CONCLUSÕES DO MODELO TEÓRICO	228
7.3.	CONCLUSÕES DO MODELO NUMÉRICO	229
7.4.	RECOMENDAÇÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	230
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	232
	APÊNDICE A	237
	APÊNDICE B	244
	APÊNDICE C	246
	APÊNDICE D	250
	APÊNDICE E	252
	APÊNDICE F.....	255

APÊNDICE G	259
G.1 DERIVADA DA FORÇA F_{CR} EM RELAÇÃO A X ($\partial F_{CR}/\partial X$)	259
G.2 DERIVADA DA FORÇA F_{CR} EM RELAÇÃO A A ($\partial F_{CR}/\partial A$)	260
G.3 DERIVADA $\varepsilon.F_{CR}.\cos A$ EM RELAÇÃO A A ($\partial F_{CR1}/\partial A$)	262
G.4 DERIVADA DA FORÇA F_{CT} EM RELAÇÃO A X ($\partial F_{CT}/\partial X$).....	262
G.5 DERIVADA DA FORÇA F_{CTH} EM RELAÇÃO A X ($\partial F_{CTH}/\partial X$).....	264
G.6 DERIVADAS DAS FORÇAS DA ARMADURA DE FLEXÃO EM RELAÇÃO A X	266
G.6 DERIVADAS DA FORÇA F_{STH} EM RELAÇÃO A X ($\partial F_{STH}/\partial X$)	267
APÊNDICE H	270
APÊNDICE I.....	273

1. INTRODUÇÃO

A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) NBR 6118 (2014) – Projeto de estruturas de concreto prescreve que lajes lisas são estruturas laminares planas, horizontais e apoiadas diretamente sobre pilares. Este tipo de concepção estrutural é apresentado como alternativa para o sistema convencional e, por não utilizar vigas, apresenta algumas vantagens como: economia de formas, diminuição do pé direito, aumento das possibilidades com relação ao projeto e execução de instalações elétricas, hidráulicas e de ar condicionado, além de proporcionar uma maior flexibilidade quanto ao projeto arquitetônico.

Koppitz *et. al.* (2013) afirmam que a maior desvantagem da estrutura de lajes lisas é a combinação de momentos de flexão negativos localmente elevados e forças de cisalhamento em torno dos pilares, pois aumenta a possibilidade à ruptura por punção. Nesse modo de ruptura, inicialmente, a laje colapsa em torno do cone truncado acima do pilar, conforme Figura 1.1.

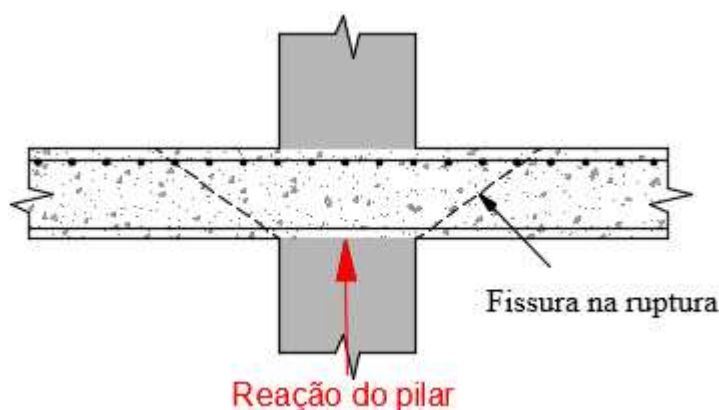


Figura 1.1- Ruptura por punção.
Fonte: CEB FIP Model Code (1991).

A ligação do pilar com as lajes lisas é complexa e ainda são necessários muitos estudos, pois as principais normas e códigos apresentam divergências entre si. Feliciano (2011) afirma que a distribuição dos esforços internos nessa região dificulta o desenvolvimento de equações analíticas. Segundo o mesmo autor, a realização de ensaios experimentais é um dos melhores caminhos para entender o fenômeno, pois permite a comparação com as prescrições normativas e a adequação destas normas a um dimensionamento seguro e econômico.

Para tornar a ligação laje com o pilar mais segura, aumentar a ductilidade e a capacidade resistente de uma laje lisa, faz-se uso de armaduras de combate à punção. Pesquisas como as de Regan (1985), Gomes (1991), Andrade (1999), Silva (2003) e Trautwein (2006)

mostraram que o uso de armaduras de cisalhamento pode ser extremamente eficiente no combate à punção, podendo até mesmo mudar o modo de ruptura para flexão.

Em um edifício com lajes lisas é muito comum a presença de aberturas adjacentes ao pilar e momentos desbalanceados na ligação laje com opilar, mesmo no caso de pilares internos. Park e Choi (2006) relata que o motivo dos momentos desbalanceados ocorrerem é a presença de aberturas, variações nos vãos e nos carregamentos ou devido à ação de forças horizontais na estrutura, causadas por ventos ou terremotos.

O Conselho Regional de Engenharia e Agronomia do Piauí (CREA/PI) analisou o desabamento da obra do Shopping Rio Poty, em Teresina, Piauí, ocorrida em setembro de 2013. No edifício, havia a existência de aberturas junto às quatro faces dos pilares, conforme Figura 1.2. A resistência à punção da laje foi comprometida pela presença de abertura na laje próximas às quatro faces dos pilares. Essas aberturas induziram maiores concentrações de tensões e dificultaram, podendo inclusive impossibilitar, a colocação mais eficiente das armaduras de flexão e de punção.



Figura 1.2 - Aberturas existentes nas lajes, próximas às faces dos pilares do Shopping Rio Poty.

Fonte: Relatório CREA – PI (2013).

É essencial a realização de pesquisas sobre punção sendo o concreto armado tradicionalmente o material mais escolhido para utilizar nesse tipo de estrutura. Os sistemas de lajes lisas são construtivamente mais adequados quando se utiliza o concreto como material estrutural.

Gomes (1991) apresenta um modelo teórico para analisar a resistência à punção de lajes lisas com armadura de cisalhamento. Na modelagem teórica desenvolvida ele cita dois modos de ruptura que podem ocorrer nas lajes lisas: ruptura interna e externa. O modelo foi baseado em métodos teóricos da literatura, entre eles Kinnunen & Nylander (1960), Andersson (1963) e Shehata (1985), e nos testes experimentais com armaduras tipo “*studs*”.

Sendo assim, no presente trabalho, buscou-se desenvolver uma modelagem teórica para investigar a resistência à punção e o modo de ruptura de lajes lisas com e sem armadura de cisalhamento e com a presença de aberturas. Desta forma, adaptou-se o método de Gomes (1991) para lajes lisas com a presença de aberturas. Por meio da interação entre os resultados dos ensaios experimentais e os da simulação numérica executada através do software DIANA, o melhor modelo foi identificado, utilizando-os como medida de calibração das equações do método de Gomes (1991) adaptado.

1.1. OBJETIVOS

Objetivo Geral

Diante da necessidade de aberturas em lajes para a passagem de tubulações e da necessidade de aumentar a resistência à punção em um projeto estrutural, o presente trabalho propõe-se a analisar lajes lisas com aberturas e lajes com e sem armadura de cisalhamento. Além de propor um método teórico para prever a carga de ruptura de lajes lisas com aberturas e armaduras de cisalhamento.

Objetivos Específicos

- Desenvolver um modelo teórico para previsão da carga e modo de ruptura à punção em lajes lisas com aberturas;
- Verificar o modelo teórico proposto com os resultados da literatura;
- Estudar a resistência à punção em lajes lisas com aberturas com e sem armadura de cisalhamento;
- Utilizar a simulação numérica para definir os modelos constitutivos do aço e do concreto que permitem visualizar a ruptura por punção e o modo de ruptura da laje lisa com abertura e com armadura de cisalhamento.

1.2. ESTRUTURA DA TESE

Este trabalho está dividido em 7 capítulos, sendo o primeiro deles esta Introdução, com o restante dos itens constituídos das principais abordagens e relevâncias sobre a pesquisa realizada neste trabalho.

No Capítulo 2, intitulado como Revisão Bibliográfica, são abordados resultados de trabalhos nacionais e internacionais realizados com experimentos de lajes lisas de concreto armado com e sem aberturas, e com e sem armadura de cisalhamento. Apresentando também as teorias e abordagens de normas nacionais e internacionais sobre o método de cálculo de lajes lisas. E, por último, trabalhos que realizaram a simulação numérica de lajes lisas.

No Capítulo 3 está apresentado o programa experimental, detalhando o esquema de ensaio implementado, as características dos modelos ensaiados, instrumentação utilizada e os procedimentos de ensaio.

Os resultados das propriedades mecânicas dos materiais utilizados durante a confecção dos modelos e os resultados experimentais das cargas e dos modos de ruptura das lajes são apresentados no Capítulo 4. Além disso, o Capítulo 4 mostra os resultados das deformações específicas na armadura de flexão e armadura de cisalhamento, os deslocamentos verticais das lajes, a formação e o desenvolvimento de fissuras, a resistência ao puncionamento de acordo com os códigos nacionais e internacionais e a resistência à flexão de cada modelo.

O desenvolvimento do modelo teórico proposto para lajes lisas com abertura e armadura de cisalhamento está apresentado no Capítulo 5. O cálculo de todas as forças, as equações de equilíbrio e os resultados do cálculo das lajes da literatura conforme o modelo proposto está contido também no Capítulo 5.

No Capítulo 6 são apresentados os resultados da análise numérica utilizando o *software* DIANA, que servirão de comparativo aos resultados experimentais. Com base nos resultados numéricos finais e calibrados, comparou-se com os resultados experimentais a carga de ruptura, deslocamento máximo vertical, modo de ruptura, deformações do concreto e do aço de cada modelo. E, por fim, foi feita uma análise carga *versus* rotação dos modelos experimentais, modelos teóricos propostos no Capítulo 5 e dos modelos numéricos.

No capítulo 7 são apresentadas as conclusões dos ensaios experimentais, do modelo teórico proposto e dos resultados da simulação numérica, e sugestões para futuras investigações.

Apresentam-se nos apêndices os cálculos utilizados no trabalho com mais detalhe.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo de punção em lajes lisas tem como objetivo entender a atuação de uma força concentrada sobre uma área de um elemento estrutural plano. Tal área pode ter armadura de cisalhamento, que ajuda nas elevadas tensões cisalhantes. Outra forma de minimizar as tensões atuantes na região próxima ao pilar é com o aumento da espessura da laje inteira ou na região onde ocorre o esforço de punção, com o uso de capitéis.

2.1. PUNÇÃO

O mecanismo de punção pode ser encontrado em fundações ou em lajes. O pavimento é composto por uma laje de concreto armado de espessura constante que é suportada por pilares, com ou sem aumento da espessura da laje em torno do pilar, geralmente dispostas de forma padronizada no edifício. Lajes sem armadura de cisalhamento são estruturas particularmente indesejáveis, pois levam a um modo de ruptura frágil, que deve ter uma atenção considerável durante o projeto e a execução.

Einpaul et al. (2016) comentam que a adição de um capitel em laje lisa nem sempre é viável devido às considerações arquitetônicas, e o uso de materiais de alto desempenho na laje inteira pode não ser economicamente justificado. Assim, o uso de armadura de cisalhamento é estabelecido como uma solução comum que permite a construção de lajes esbeltas evitando problemas de punção. A protensão também pode ser usada para reforçar as lajes com capacidade insuficiente.

A superfície de ruptura de uma laje lisa sem armadura de cisalhamento faz um ângulo de 25° a 30° em relação ao plano da laje, segundo o *fib* CEB MC (1990). As fissuras em ensaios laboratoriais nem sempre são formadas com ordem precisa, o seu desenvolvimento mostra diferentes fases desde o início do carregamento até a ruína. Ao contrário dos testes de vigas, em que se consegue visualizar nos ensaios apenas as fissuras superiores e inferiores na superfície da laje.

Os possíveis modos de ruptura de uma laje lisa são por flexão ou por punção. No caso de lajes sem armadura transversal, a ruptura ao cisalhamento é caracterizada por baixas tensões na armadura longitudinal e há o desenvolvimento de uma fissura diagonal com inclinação variável, a partir do pilar até a face superior da laje.

De acordo com Oliveira *et. al.* (2013) a taxa de armadura de cisalhamento por camada e o número de camadas utilizadas influenciam diretamente no modo de ruptura por punção, que pode ocorrer por esmagamento da diagonal comprimida próxima da face do pilar ou por tração diagonal dentro ou fora da região da armadura de cisalhamento, conforme ilustrado na Figura 2.1.

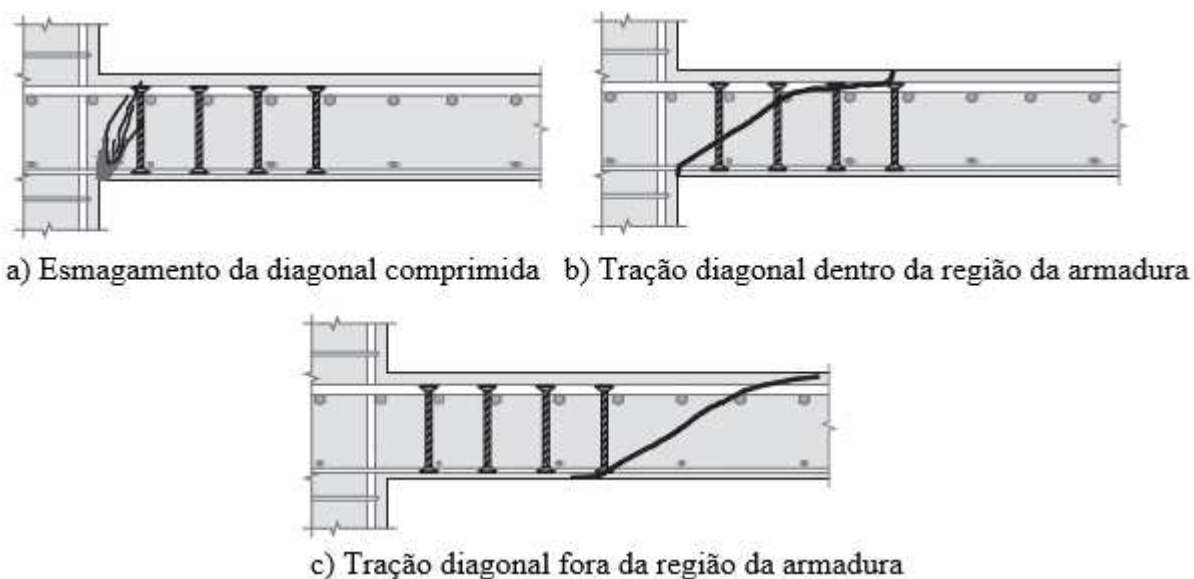


Figura 2.1 - Modos de ruptura por punção em lajes com armadura de cisalhamento.

Fonte: *fib* CEB – FIP (2010).

Dilger e Ghali (1981) mostra na curva carga *versus* rotação da laje que quando a ruptura ocorre fora da região armada ao cisalhamento, a ruína pode ser tão brusca quanto no caso de lajes sem armadura de cisalhamento. Evidências experimentais indicam que a posição da superfície de ruptura por punção, influencia significativamente na ductilidade da ligação laje-pilar após a ruptura, como apresentado a Figura 2.2.

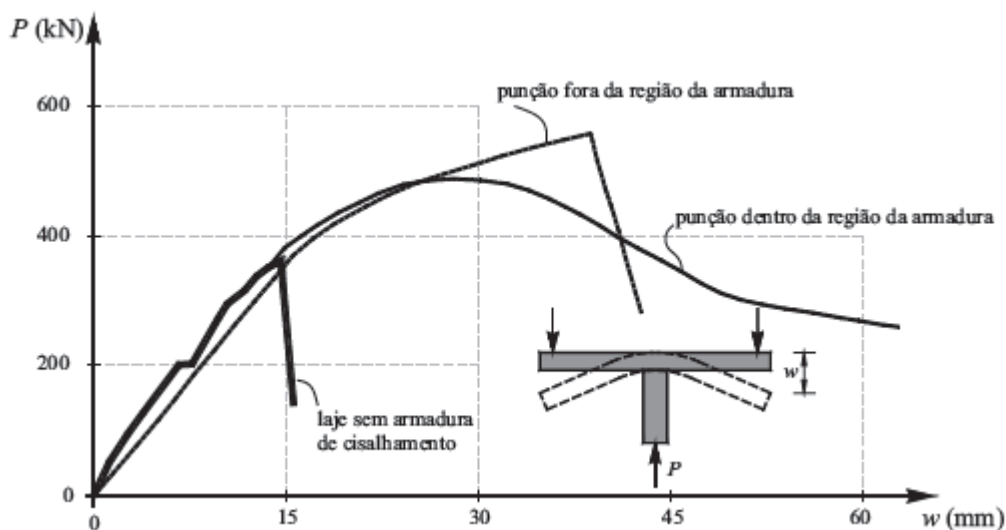


Figura 2.2 - Influência da armadura de cisalhamento.
 Fonte: Dilger e Ghali (1981).

2.2. ESTUDOS REALIZADOS NO BRASIL E NO EXTERIOR

2.2.1. Gomes e Andrade (1995)

O trabalho desenvolvido pelos autores analisou a influência de aberturas próximas ao pilar na resistência ao punção. Foram testadas 16 lajes da seguinte maneira: presença de armadura de cisalhamento com e sem aberturas.

As principais variáveis consideradas nos ensaios foram: a existência da abertura, área da abertura e o número e distribuição dos elementos da armadura de cisalhamento. As lajes possuíam 200 mm de espessura, dimensão de 3000 x 3000 mm² e a placa simulando o pilar no centro da laje tinha 200 mm de lado.

Todas as lajes, exceto a laje L12 A e a laje L16, possuíam aberturas posicionados próximo ao pilar. As lajes L13, L14, L17 e L18 possuíam uma abertura de 90 mm, 151 mm, 90 mm e 166 mm, respectivamente. As lajes L15, L19, L21 e L22 possuíam duas aberturas com diâmetro de 166 mm cada. As outras lajes tinham quatro aberturas e nas lajes L26, L27 foram usados quatro tubos de aço de 202 mm de diâmetro e 190 mm de altura cada um, inseridos ao redor das aberturas. Na Tabela 2.1 é apresentado um resumo das características das lajes.

Tabela 2.1 - Características das lajes.

Fonte: Gomes e Andrade (1995).

Lajes		Aberturas		Armadura de Cisalhamento			
Grupo	Nº	Quantidade	Diâmetro (mm)	Linhas	Camadas	Diâmetro (mm)	$A_{se}f_{ywd}/\text{camada}$ (kN)
WD	L12 A	-	-	-	-	-	-
	L13	1	90	-	-	-	-
	L14	1	151	-	-	-	-
	L15	2	166	-	-	-	-
2	L16	-	-	8	4	10	314,2
	L17	1	90	8	4	10	314,2
	L18	1	166	8	4	10	314,2
	L19	2	166	8	4	10	314,2
	L20	4	166	8	4	10	314,2
3	L21	2	166	8	6	8	201,1
	L22	2	166	8	6	6	113,1
1	L23	4	166	-	-	-	-
2	L24	4	166	8	4	10	314,2
	L25	4	166	8/8	6/3	10	314,2 ⁽¹⁾
	L26	4	166	8/8	6/3	10	157,1 ⁽¹⁾
	L27	4	166	8/8	10/5	10	157,1 ⁽¹⁾

(1) $A_{se}f_{ywd}/\text{camada}$; valor para cada uma das três camadas mais internas. As outras camadas tinham valor duplo de $A_{se}f_{ywd}/\text{camada}$.

Na Tabela 2.2 são apresentados os modos de ruptura das lajes. A comparação entre as lajes do grupo 1 e do grupo 2 (com armadura de cisalhamento), revela que a carga de ruptura aumentou de 550 kN, laje L23, para 1140 kN, laje L16, com a mudança do modo de ruptura de interno (fissura iniciando na borda do pilar) para externo (fissura iniciando após a última camada de armadura de cisalhamento), conforme Figura 2.3.

A superfície de ruptura das lajes L16 a L19 ocorreu na região fora da armadura de cisalhamento, a carga de ruptura mais alta ocorreu para laje L16 que não possuía abertura. A altura efetiva da laje L16 foi a menor deste grupo e a resistência do concreto foi similar às demais lajes do grupo.

Os autores concluíram que a utilização da armadura de cisalhamento em lajes com aberturas próximas ao pilar central pode acarretar em um ganho significativo na resistência ao funcionamento. O ganho da carga de ruptura foi de 42 %, L20 *versus* L23.

A existência de um determinado número de aberturas próximas ao pilar pode alterar o mecanismo de ruptura, e isto pode ser observado nas lajes L19 e L20. O aumento de duas

aberturas na L20 foi, provavelmente, a razão da mudança da posição da superfície de ruptura de externa à armadura de cisalhamento para região interna e reduzindo a carga de ruptura da L20.

Tabela 2.2 - Modo e carga de ruptura das lajes.

Fonte: Gomes e Andrade (1995).

Laje		f_c (MPa)	d (mm)	Carga de Ruptura (kN)	Modo de Ruptura (kN)
Gp	Nº				
1	L12 A	36,5	163	650	Punção
	L13	31,4	153	600	Punção
	L14	31,4	155	556	Punção
	L15	27,8	148	554	Punção
2	L16	34,6	156	1140	Externa
	L17	34,1	166	1096	Externa
	L18	36,8	165	992	Externa
	L19	36,6	165	1010	Externa
	L20	33,8	159	780	Interna
3	L21	36,3	165	896	Interna
	L22	34,5	164	832	Interna
1	L23	36,4	160	550	Punção
2	L24	35,0	161	890	Externa
	L25	34,2	160	900	Interna
	L26	36,7	169	985	Externa
	L27	30,7	169	985	Flexão

Os autores ressaltaram também que a laje L19 rompeu com a superfície de ruptura externa à região da armadura de cisalhamento, indicando que, nesta região, a área externa apresenta deficiência em relação à região interna. Porém as lajes L21 e L22 foram confeccionadas com armadura de cisalhamento que reforçou a região externa e diminuiu a região interna. Desta forma, justifica-se a ruptura na região interna das lajes L21 e L22.

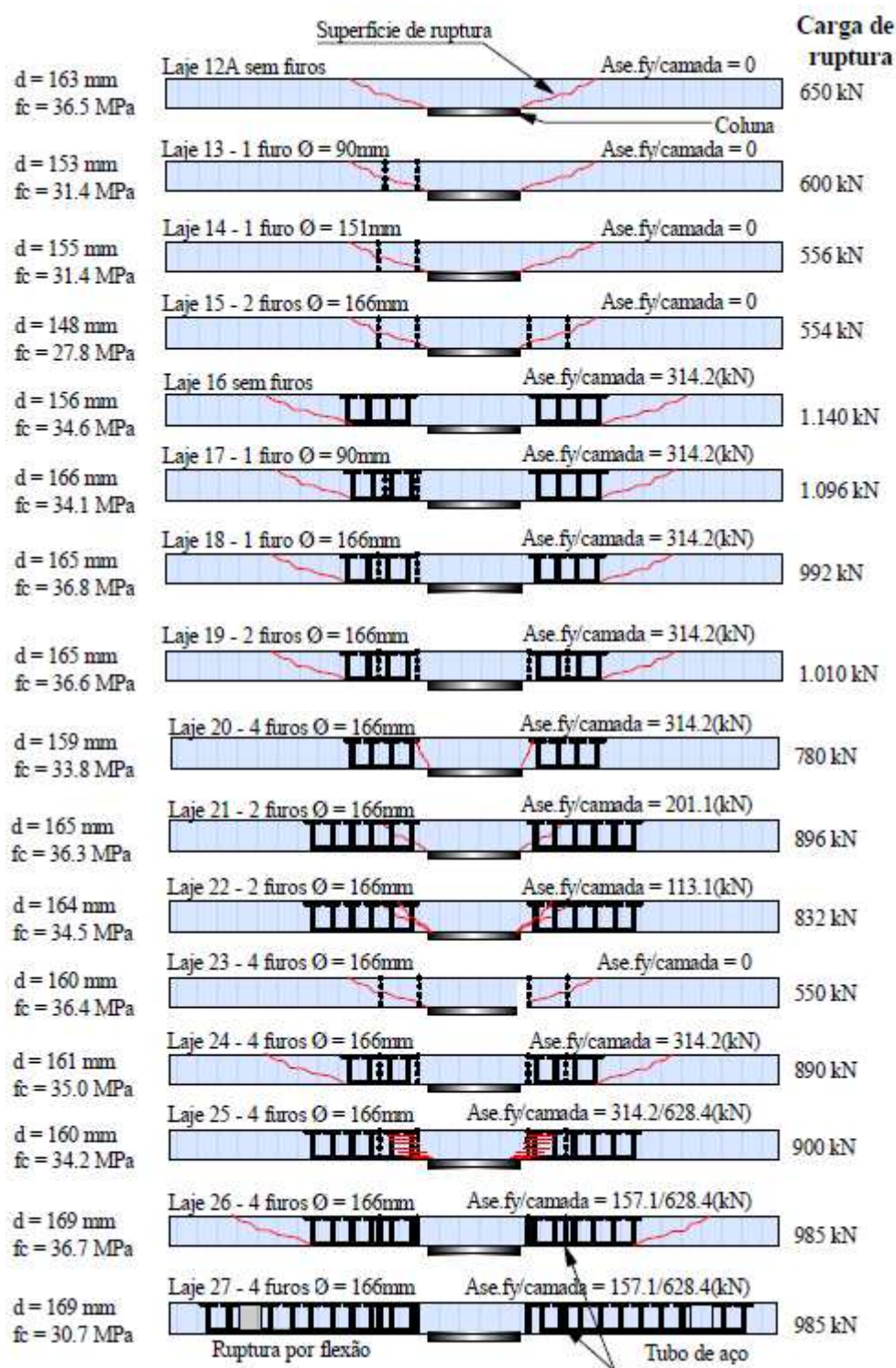


Figura 2.3 - Lajes estudadas por Andrade e Gomes (1995).

Fonte: Andrade (1999).

2.2.2. Salakawy et al. (2000)

O artigo traz os resultados de uma investigação experimental sobre a influência de armadura de cisalhamento no comportamento das lajes lisas de concreto armado com aberturas.

Os parâmetros de teste foram a localização das aberturas ao redor do pilar, o tamanho das aberturas e a existência de armadura de cisalhamento.

Os modelos testados foram divididos em duas séries. Cada série consistia de quatro lajes, sendo três lajes com aberturas e uma sem abertura. A série I incluiu as lajes XXX, SE0, SF0 e CF0 sem armadura de cisalhamento e a série II (XXX-R, SEO-R, SF0-R e CF0-R), possuía armadura de cisalhamento do tipo *stud*, conforme a Figura 2.4 e a Tabela 2.3. Ambas as séries foram submetidas a uma excentricidade constante ($e = M / V$) de 0,3 m.

Nas lajes da série II, as armaduras de cisalhamento foram dispostas em seis linhas ao redor do pilar e cada linha possuía 6 *studs* verticais de 75 mm de comprimento, 9,5 mm de diâmetro. Os *studs* tinham uma cabeça circular de 5 mm de espessura, 30 mm de diâmetro na parte superior e foram soldadas a uma tira de aço de 5 mm de espessura, 25 mm de largura na parte inferior. O espaçamento entre os *studs* foi de 60 mm.

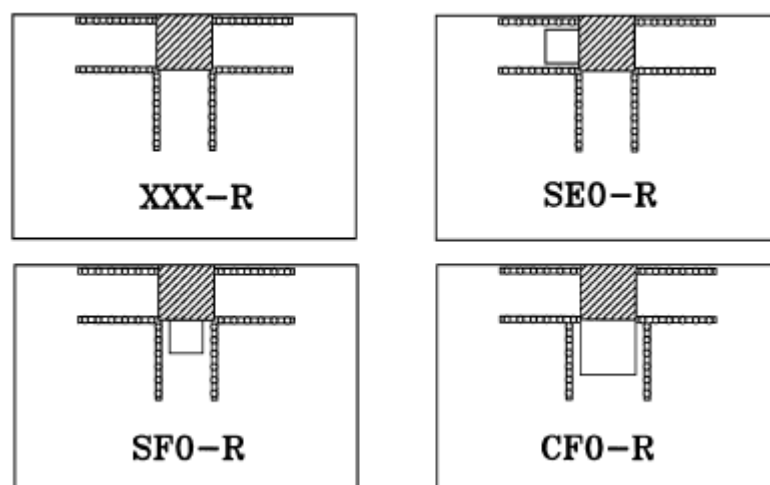


Figura 2.4 - Características das lajes da série II ensaiadas por Salakawy *et al.* (2000).

Fonte: Salakawy *et al.* (2000).

Os autores afirmaram que a construção de aberturas próximas aos pilares reduz a resistência ao cisalhamento e a ductilidade da ligação laje/pilar. A partir dos ensaios eles concluíram que o reforço ao cisalhamento corretamente colocado e ancorado pode reforçar a laje e proporcionar a ductilidade necessária. Em todos os casos, a resistência e a ductilidade dos modelos com reforço por cisalhamento foram maiores do que as dos seus homólogos sem o reforço.

Tabela 2.3 - Características das lajes e carga de ruptura.Fonte: Salakawy *et al.* (2000).

Série	Laje	f_c (MPa)	Armadura de Cisalhamento	Dimensão da abertura (mm)	Localização da abertura	V_u (kN)	M_u (kN)
I	XXX	33,0	não	-	-	125	37,5
	SF0	31,5	não	150 x 150	Em frente	110	33,0
	SE0	32,5	não	150 x 150	Na borda	120	36,0
	CF0	30,5	não	250 x 250	Em frente	86	25,8
II	XXX-R	32,0	sim	-	-	154	46,2
	SF0-R	32,0	sim	150 x 150	Em frete	146	43,8
	SE0-R	31,5	sim	150 x 150	Na borda	150	45,0
	CF0-R	32,0	sim	250 x 250	Em frente	105	31,5

Observa-se que, nos pilares de borda submetidos à transferência de momentos perpendiculares ao bordo, o comportamento da abertura localizada ao lado do pilar é menos afetado que a localizada na região frontal ao pilar.

Para Salakawy *et al.* (2000), pilares com abertura e largura similares não devem ser construídas em lajes lisas, pois estas ligações não podem ser eficazmente reforçadas por armadura de cisalhamento.

2.2.3. Souza (2004)

Souza (2004) trabalhou com lajes lisas de concreto com e sem aberturas, com o objetivo de estudar a influência de aberturas situadas a diferentes distâncias da face de um pilar central e variando suas dimensões. Ensaiou oito lajes quadradas com 1800 mm de lado e 130 mm de espessura. Todas as lajes foram submetidas a um carregamento central aplicado no bordo inferior através de uma placa metálica quadrada com 150 mm de lado e 25 mm de espessura. Neste trabalho não foram utilizadas armaduras de cisalhamento. Na Tabela 2.4 e na Figura 2.5 estão apresentadas as principais características das lajes ensaiadas.

O autor concluiu que as lajes com aberturas apresentaram cargas inferiores em média 36 % em relação à laje referência (excetuando-se nesta média as lajes L3 e L4 que apresentaram cargas superiores). As lajes com aberturas adjacentes ao pilar (L2, L5 e L6) apresentaram cargas inferiores em 25 %, 48 % e 63 % em relação à laje referência.

As lajes L7 e L8, com aberturas situadas a $2d$ da face do pilar, apresentaram cargas inferiores em relação à laje de referência em 18 % e 23 % com abertura maior resultando em maior redução da carga.

Tabela 2.4 - Características das lajes ensaiadas por Souza (2004).

Fonte: Souza (2004).

Laje	Altura útil média (mm)	Taxa de armadura (%)	Aberturas	Dimensões das aberturas (mm)		Distância entre o pilar e as aberturas (mm)
				a (x)	b (y)	
L1	91	1,36	não	-	-	-
L2	90	1,71	sim	150	150	0
L3	89	1,64		150	150	180
L4	91	1,54		150	150	360
L5	91	1,36		150	300	0
L6	91	0,96		150	450	0
L7	92	1,56		150	300	180
L8	92	1,56		150	450	180

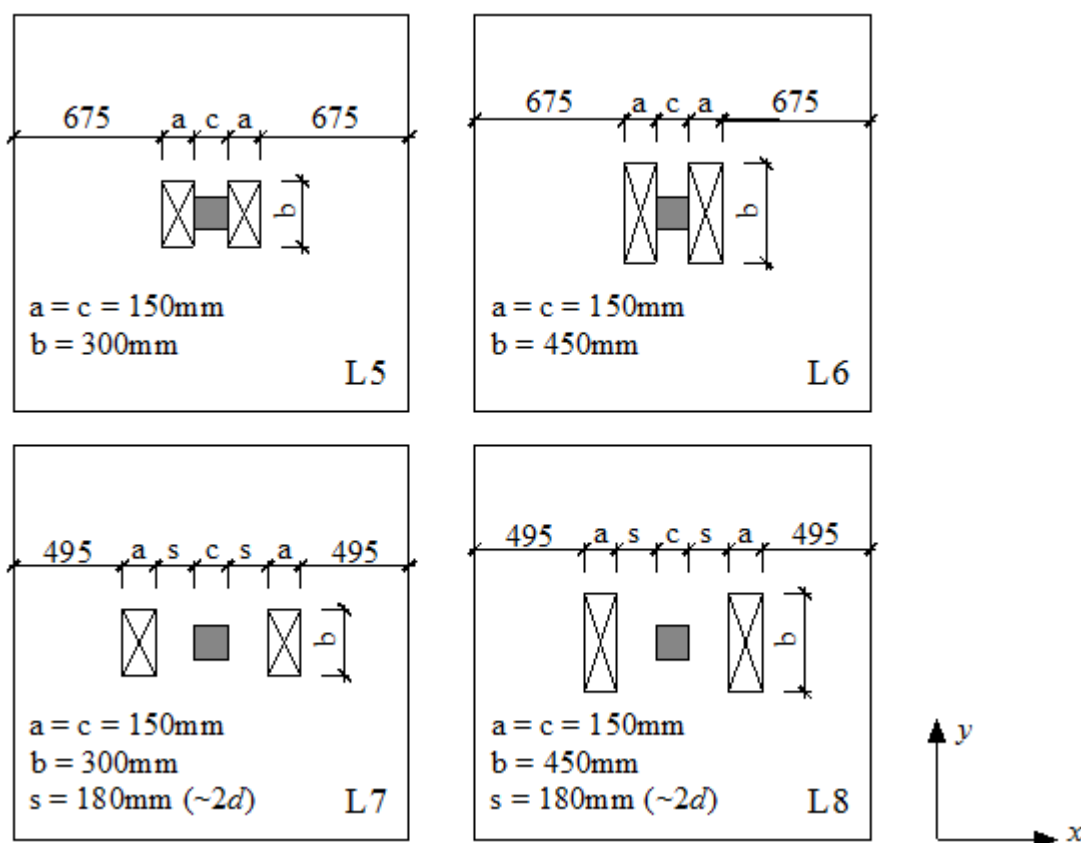


Figura 2.5 - Características das lajes L5, L6, L7 e L8 ensaiadas por Souza (2004).

Fonte: Souza (2004).

2.2.4. Trautwein *et al.* (2011)

Trautwein *et al.* (2011) ensaiaram onze lajes lisas de concreto armado com dimensão de 3000 mm x 3000 mm e 200 mm de espessura. O carregamento aplicado foi centrado por uma chapa que simulava um pilar de 200 mm x 200 mm, como pode ser visto na Figura 2.6. O programa experimental compôs-se de dois grupos de lajes de concreto armado com as mesmas dimensões e armadura de flexão, com o objetivo de verificar a eficácia da armadura de cisalhamento do tipo *stud* interno. O Grupo 1 teve a armadura dimensionada para que a superfície de ruptura ocorresse externamente à região armada transversalmente, e o Grupo 2, para que a superfície de ruptura cruzasse a região com armadura transversal.

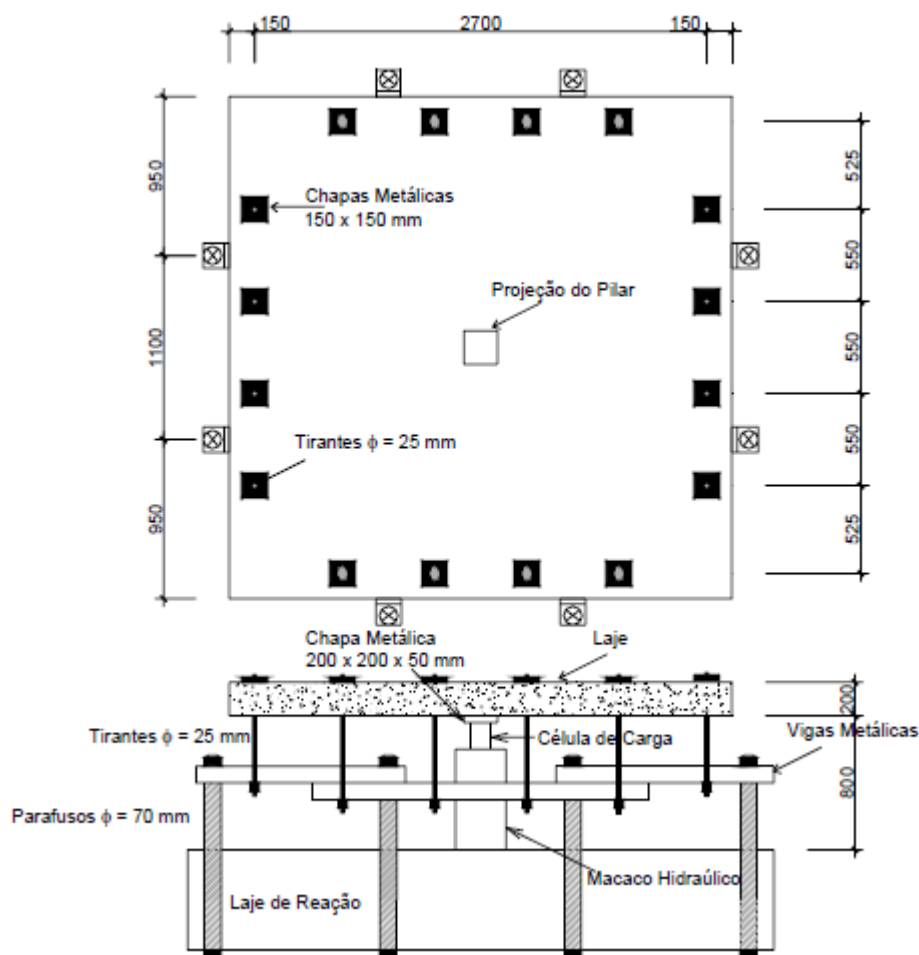


Figura 2.6 – Esquema de ensaio, unidades em mm.

Fonte: Trautwein et al. (2011).

A armadura de flexão foi composta por 31 barras de 16 mm em cada direção, espaçada a cada 150 mm. Para garantir uma adequada ancoragem das barras superiores, foram acrescentadas 31 barras em formas de U com 12,5 mm de diâmetro em cada lado da laje.

A armadura de cisalhamento utilizada em todas as lajes foi do tipo *stud*, onde barras de aço CA-50 (comprimento de 95 mm) foram soldadas, em suas extremidades, às chapas de aço de 30 mm de largura e 10 mm de espessura. A altura total dos *studs* é de 115 mm, conforme Figura 2.7.

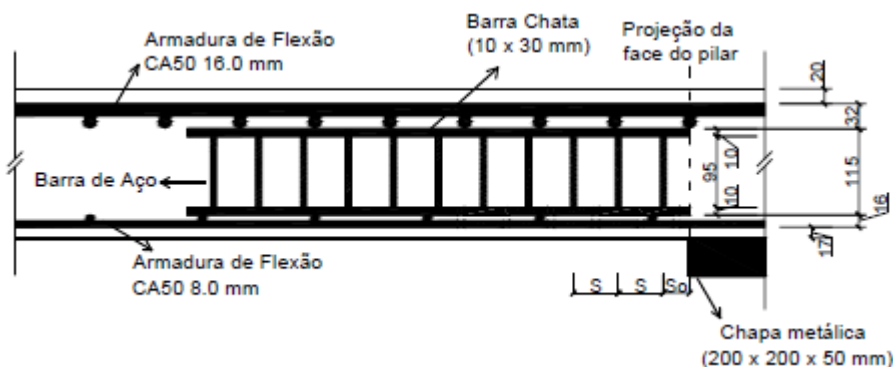


Figura 2.7 – Desenho esquemático da armadura de cisalhamento em relação à de flexão.
Fonte: Trautwein *et al.* (2011).

As dimensões da chapa de aço utilizada na confecção dos *studs* foram escolhidas de maneira que se garantisse a ancoragem da armadura de cisalhamento no decorrer do ensaio. Os *studs* foram colocados de forma interna à armadura flexão, sem envolver as barras da armadura superior e inferior.

Nas lajes E1, E3, E4 e E5 a armadura de cisalhamento é composta de doze linhas de *studs*, distribuídas em planta de forma radial, com onze elementos espaçados de 60 mm. Quatro linhas de *studs* estão posicionadas perpendicularmente às faces do pilar e as outras oito são situadas a 30° dos eixos verticais e horizontais. O diâmetro das barras utilizadas para confecção da armadura de cisalhamento para as cinco lajes foi de 10 mm, totalizando uma área de aço por camada de 942 mm².

O Grupo 2 foi composto por seis lajes, sendo as principais variáveis entre os ensaios: o número de camadas, o diâmetro e o espaçamento entre as barras da armadura de cisalhamento. Estas lajes apresentam uma densidade de armadura de cisalhamento reduzida em relação ao Grupo 1, induzindo a ruptura junto ao pilar ou cruzando a região armada por punção.

O resultado experimental inclui a carga de ruptura, modo de ruptura, valor máximo da deflexão e deformação da armadura de cisalhamento. Na Tabela 2.5 apresenta os resultados.

A partir dos resultados, Trautwein *et al.* (2011) observaram que os *studs* internos sem aderência na armadura de flexão podem ser efetivos como reforço à punção de lajes lisas. As cargas de ruptura mostraram uma melhoria razoável da punção com o uso de *studs* internos

em comparação com uma laje sem armadura de cisalhamento. A ruptura à punção da laje E5 mostrou uma melhoria de 118 % em relação a uma laje semelhante sem armadura de cisalhamento.

Tabela 2.5 - Modo e Carga de Ruptura das Lajes.

Fonte: Trautwein et al. (2011).

Laje	f_c (MPa)	Nº de camadas	Nº de Camadas de ganchos U	A_{sw}/S_r (mm ² /mm)	V_{teste} (kN)	Modo de Ruptura
E1	35,2	11	-	15,7	1100	Externo
E2	36,6	11	-	15,7	990	Interno
E3	41,1	11	3	15,7	1090	Externo
E4	40,6	11	4	15,7	1205	Externo
E5	42,1	11	7	15,7	1222	Externo
I6	39,1	11	8	4,2	830	Interno
I7	39,6	11	8	10,7	978	Interno
I8	35,4	11	8	6,7	856	Interno
I9	43,6	5	5	2,0	853	Interno
I10	44,4	5	5	5,0	975	Interno
I11	41,4	5	5	3,2	945	Interno

Os autores afirmaram que os resultados obtidos na análise das lajes do Grupo I são suficientes para afirmar que quando a relação A_{sw}/S_r (mm²/mm) aumenta, a carga de ruptura também aumenta. Os resultados do artigo são comparáveis com os resultados de diferentes tipos de armadura de cisalhamento em lajes lisas similares. Os autores concluíram que a execução deste tipo de armadura é mais simples. A fissura que surgiu na face inferior da laje entre a armadura de flexão e a armadura de cisalhamento foi controlada pelo uso de ganchos U.

2.2.5. Borges *et al.* (2013)

O trabalho experimental de Borges *et al.* (2013) foi composto por treze lajes de concreto armado com dimensões constantes e iguais a 3000 mm x 3000 mm x 200 mm, conforme é mostrada na Figura 2.8. Dentre as lajes ensaiadas, três não tinham aberturas, três possuíam uma abertura e sete duas aberturas. Foi utilizado armadura de cisalhamento em seis lajes, como apresenta a Figura 2.9.

O objetivo do trabalho foi avaliar a contribuição da armadura de cisalhamento na resistência e ductilidade de lajes lisas apoiadas em pilares internos de seção transversal com

aberturas adjacentes a estes. Foi acrescentada armadura em formato de ganchos “U” próximo às aberturas com objetivo de ancorar as armaduras de flexão.

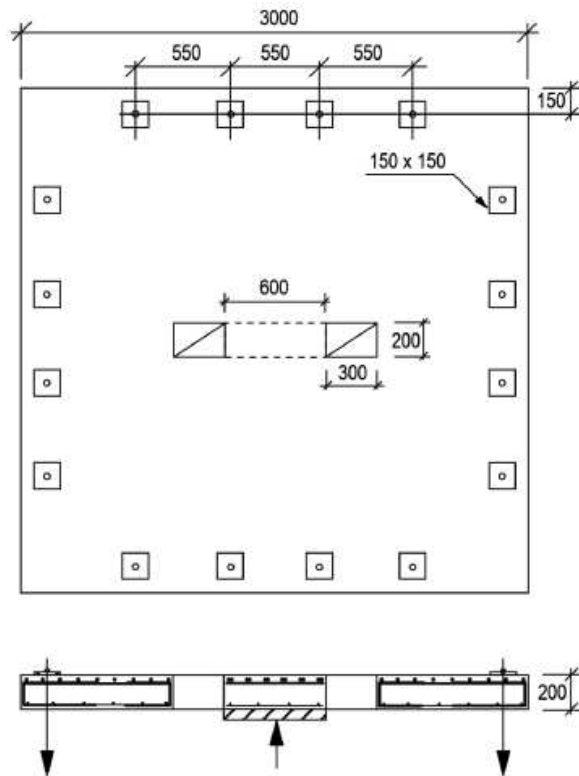


Figura 2.8 – Laje 7 (Borges et al. (2013)).

Fonte: Borges *et al.* (2013).

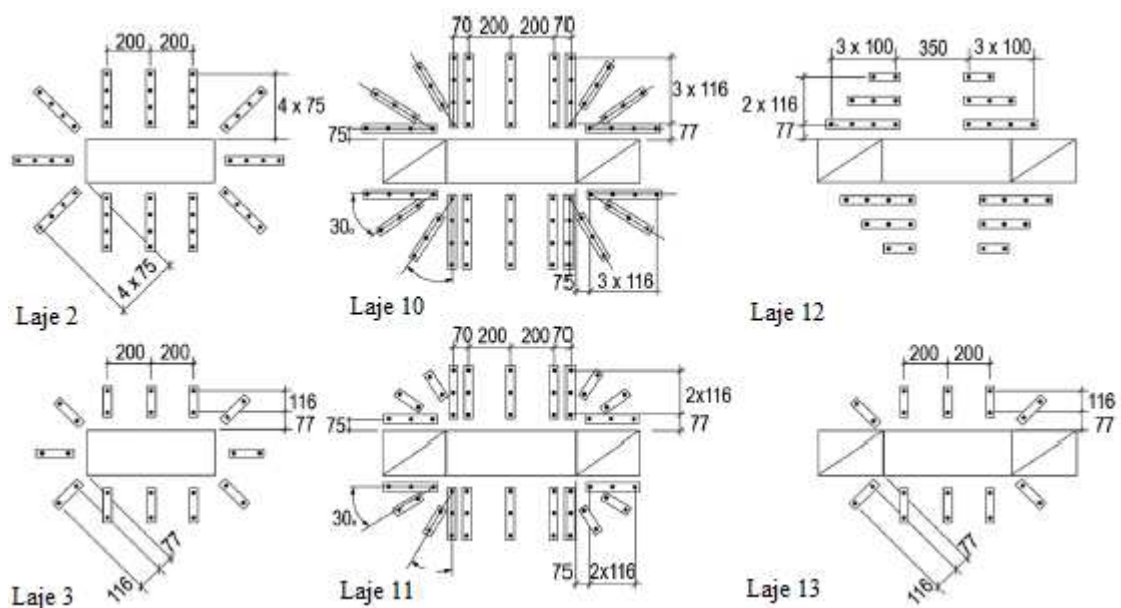


Figura 2.9 - Detalhe da armadura de cisalhamento.

Fonte: Borges *et al.* (2013).

Segundo os autores o modo de ruptura de todas as lajes foi por punção de forma frágil e repentina, até mesmo nas lajes que possuíam aberturas. A presença das aberturas, bem como a quantidade, alterou a rigidez das lajes. As lajes com apenas uma abertura tiveram deslocamento maior que a laje de referência e, ao passo que, as lajes com duas aberturas deslocaram mais do que as que tinham uma abertura. O autor observou que dentro da abertura surgiram fissuras que evoluíram até a ruptura da laje.

As lajes com uma abertura adjacente ao pilar romperam com cargas próximas, diferenciando-se entre si em no máximo 6 % e perderam entre 6 % e 11 % de resistência comparadas à de referência. As lajes com duas aberturas adjacentes ao pilar perderam em média 13 % de resistência comparadas com a laje de referência, conforme Borges *et al.* (2013) Na Tabela 2.6 estão apresentados as principais características e carga de ruptura das lajes testadas.

Tabela 2.6 - Características e carga de ruptura das lajes.

Fonte: Borges *et al.* (2013).

Laje	Pilar (mm)	Altura útil (mm)	Aberturas	Armadura de Cisalhamento	f_c (MPa)	Carga de ruptura (kN)
L1	200 x 600	154	não	não	42,0	843
L2		154	não	sim	39,0	1250
L3		154	não	sim	41,1	1092
L4		154	1	não	41,4	776
L5		154	1	não	40,5	792
L6		154	1	não	39,0	750
L7		144	2	não	37,0	685
L8		154	2	não	41,6	750
L9		164	2	não	40,6	850
L10		154	2	sim	43,8	1230
L11		154	2	sim	39,4	1050
L12		154	2	sim	43,2	885
L13		154	2	sim	40,7	837

2.2.6. Oukaili e Salman (2014)

Os autores estudaram o efeito da presença de aberturas no comportamento ao cisalhamento na ligação laje com o pilar em lajes lisas. Os parâmetros de teste foram a localização e o tamanho das aberturas. Foi utilizado como parâmetro uma laje sem abertura, outras cinco lajes com abertura ao redor do pilar compõem as amostras. Todas foram ensaiadas com aproximadamente 30 MPa de resistência à compressão.

As aberturas são quadradas, com os lados paralelos aos lados do pilar. Foram utilizados três tamanhos de aberturas: o mesmo tamanho do pilar (150 x 150 mm), 67 % do tamanho do pilar (100 x 100 mm) e 150 % do tamanho do pilar (225 x 225 mm).

As amostras eram compostas de meia escala com dimensões definidas por meio da análise de um sistema de piso típico. As placas de teste resultantes tinham 70 mm de espessura com dimensões no plano de 1000 x 1000 mm. As seções transversais dos pilares eram de 150 mm quadradas e a altura dos pilares acima da laje era de 200 mm. Todas as lajes estão apresentadas nas Figuras 2.10 e 2.11, onde mostra-se o esquema de ensaio.

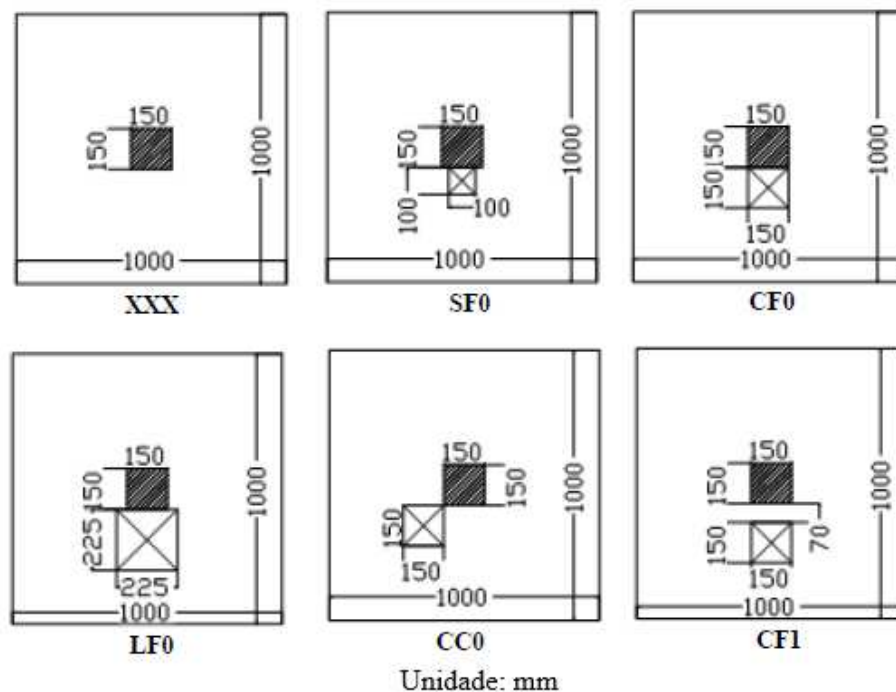


Figura 2.10 - Características das lajes ensaiadas por Oukaili e Salman (2014).
Fonte: Oukaili e Salman (2014).



Figura 2.11 - Esquema de ensaio.
Fonte: Oukaili e Salman (2014).

Todas as lajes foram ensaiadas com carregamento aplicado no centro da laje, com a carga aumentando até a ruptura. Os medidores de relógio foram fixados em cinco pontos, quatro pontos a 250 mm do centro do pilar e um no centro.

Em cada estágio de carregamento foram coletadas as medidas que incluíram a magnitude da carga aplicada, a deflexão da laje em cinco locais, a largura da fissura e a deformação na face comprimida da laje. No final de cada ensaio, mediu-se o ângulo ao qual as fissuras de cisalhamento se propagavam, afastando-a da face do pilar e examinou-se cuidadosamente o padrão de cada fissura e o modo de ruptura para cada laje.

De acordo com os autores o modo de ruptura das lajes foi frágil. As primeiras fissuras de flexão ocorreram a uma carga de cerca de 21,1 % a 28,6 % da capacidade total de cada laje. As primeiras fissuras a surgirem foram as radiais. Estas começaram no topo do pilar em direção às bordas da laje. À medida que a carga foi aumentada, as fissuras circunferenciais surgiram num local mais afastado do topo do pilar e desenvolvidas gradualmente sobre toda a laje. Com carga de ruptura dos modelos variando entre 54,9 % a 63 %, as fissuras de flexão atingiram toda a laje.

Oukaili e Salman (2014) informam que nas lajes SF0, CF0 e LF0 (aberturas imediatamente adjacentes à face do pilar), as primeiras fissuras começaram nos cantos mais próximos da abertura para o pilar e propagaram-se para os bordos da laje. No carregamento correspondente ao intervalo de 48 % a 59 % da carga de ruptura, fissuras nos cantos mais distantes da abertura surgiram e foram propagadas para os cantos das lajes, como apresentado nas Figuras 2.12 e 2.13.

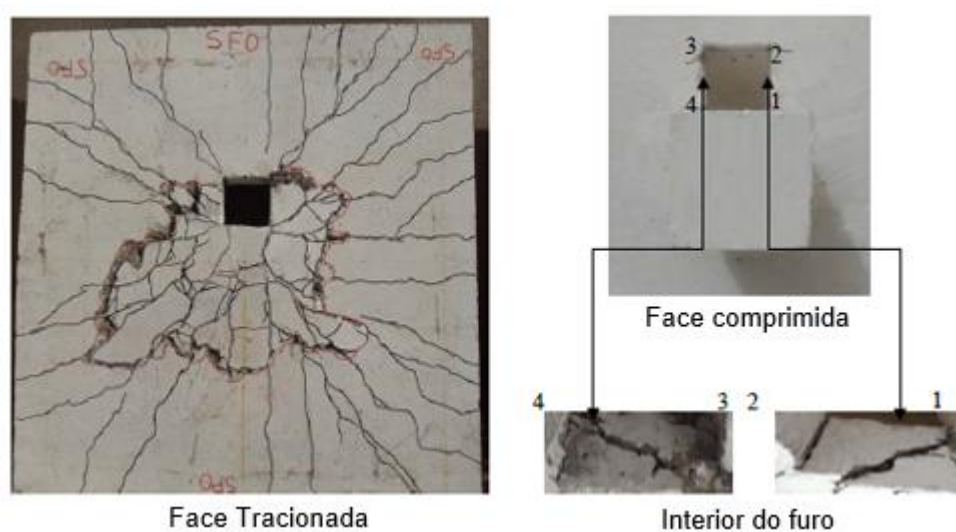


Figura 2.12 - Fissuras para o modelo SF0 (Abertura de 100 x 100 mm) após a ruptura.

Fonte: Oukaili e Salman (2014).

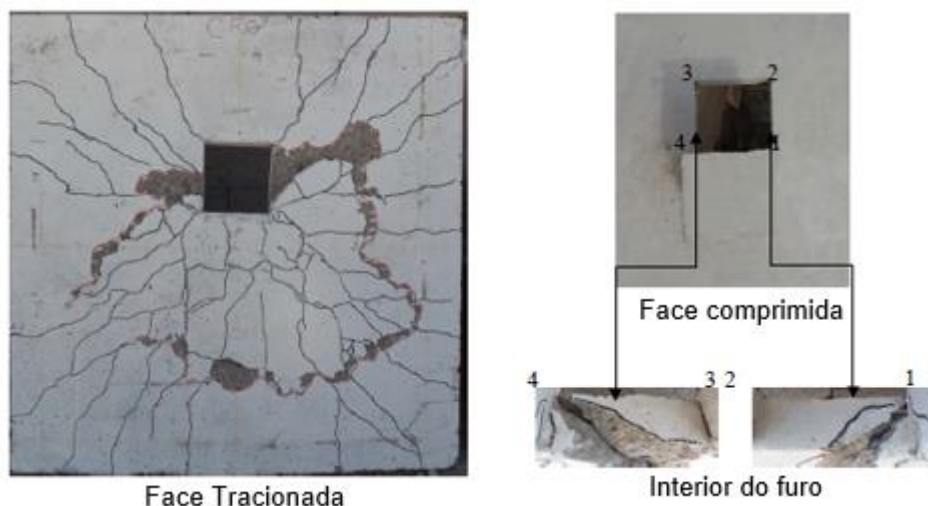


Figura 2.13 - Fissuras para o modelo CF0 (Abertura de 100 x 100 mm) após a ruptura.
 Fonte: Oukaili e Salman (2014).

Os autores concluíram que o tamanho da abertura afeta a capacidade da laje e diminui a rigidez, dependendo do tamanho e posição da abertura. A resistência máxima da laje lisa com a abertura maior diminuiu em 29,25 % em relação à resistência final da laje de referência, como mostra a carga de ruptura na Tabela 2.7. Para a amostra com abertura menor, a diminuição da capacidade foi de 12,42 %. Para a laje com abertura distante de 70 mm da face do pilar, a capacidade de cisalhamento diminuiu 13,47 %. Para a amostra com a abertura ao lado do pilar, a diminuição na capacidade foi de 19,65 %.

Tabela 2.7 - Características das lajes.
 Fonte: Oukaili e Salman (2014).

Laje	Pilar (mm)	d (mm)	f_c (MPa)	ρ (%)	Abertura (mm)	Pu (kN)
XXX	150 x 150	54	35,7	0,68	-	101,6
SF0			37,1		100x100	90,8
CF0			34,1		150x150	79,9
LF0			32,8		225x225	69,0
CC0			36,3		150x150	90,8
CF1			36,5		150x150	88,9

A abertura localizada na parte frontal do pilar diminui a capacidade de resistência da laje lisa mais do que quando está localizada no canto do pilar. A laje com abertura adjacente e em frente à face do pilar diminuiu a capacidade de cisalhamento em 19,65 %, enquanto que adjacente ao canto do pilar diminuiu a capacidade em 11,43 %.

2.2.7. Oliveira *et al.* (2014)

O trabalho apresenta os resultados de uma investigação do comportamento estrutural e a resistência última à punção de ligações laje-pilar de regiões internas das lajes lisas, com uma abertura adjacente ao pilar, e com ou sem transferência de momento fletor da laje ao pilar.

O ensaio foi feito até a ruptura de sete lajes (L1 a L7). As lajes foram divididas em dois modelos: o modelo 1, lajes L1 e L2, trata de uma laje maciça sem abertura. O modelo 2 é composto por exemplares com uma abertura quadrada de 400 mm de lado adjacente ao menor lado do pilar, lajes L3 a L7, ligado monoliticamente a um tronco de pilar protendido, de seção retangular com lados de 200 x 500 mm e com 850 mm de altura (300 mm acima da laje e 400 mm abaixo).

Na Figura 2.14 são apresentadas as características e o carregamento das lajes. O valor P é a carga genérica utilizada para comparar a intensidade da aplicação de carga em cada canto da amostra.

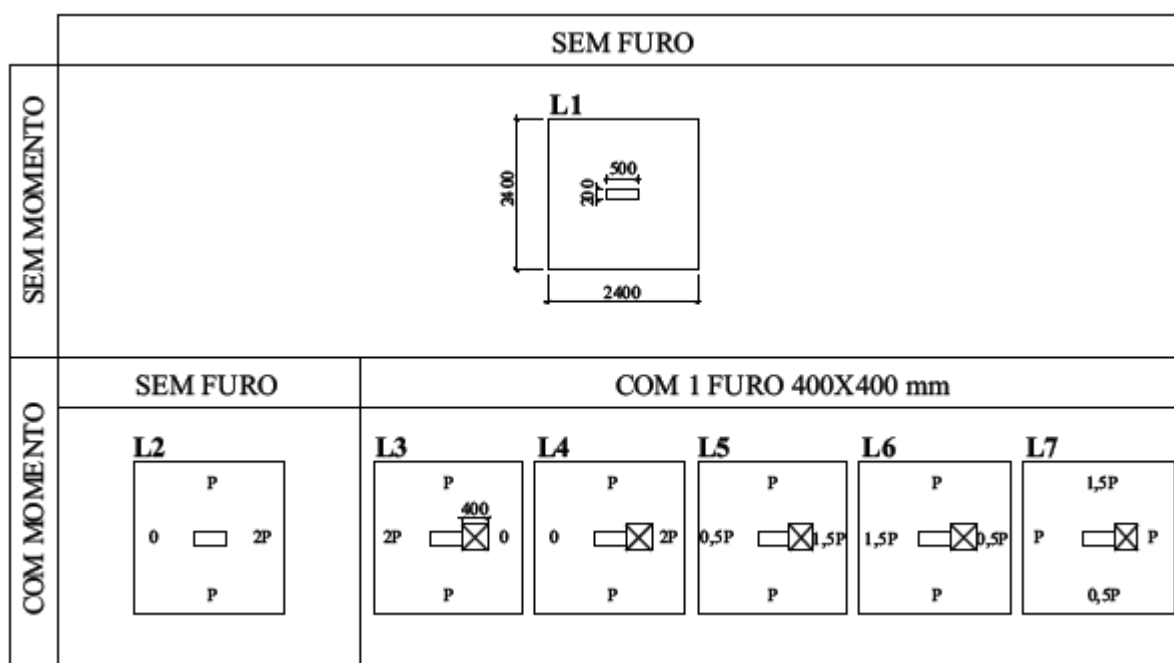


Figura 2.14 - Características e carregamento das lajes ensaiadas por Oliveira *et al.* (2014).

Fonte: Oliveira *et al.* (2014).

Os autores constataram que todas as lajes romperam por punção. Na Tabela 2.8 é apresentado um resumo das principais características das lajes e suas cargas de ruptura. A laje L2 ($V_u = 266$ kN, $M_u = 116,8$ kNm), sem abertura e com momento aplicado paralelo ao maior

lado do pilar, teve perda de 38 % em relação à laje L1 (laje de referência). Esta redução da carga de ruptura ocorreu devido à transferência de momento fletor da laje para o pilar naquela amostra.

Tabela 2.8 - Características e carga de ruptura das lajes.

Fonte: Oliveira *et al.* (2014).

Laje	f_c (MPa)	Abertura	d (mm)	ρ (%)	V_u (kN)	M_u (kNm)
L1	44,7	não	120	1,22	426	0
L2	44,1	não	122	1,19	266	116,8
L3	42,8	sim	125	1,17	250	113,7
L4	44,6	sim	123	1,20	137	59,0
L5	44,5	sim	122	1,22	213	27,0
L6	45,6	sim	124	1,19	305	65,8
L7	46,8	sim	121	1,24	257	41,0

Compararam-se as lajes com aberturas e com transferência de momento (L3 a L7) com a laje L2, sem abertura e com transferência de momento, e observou-se que a redução do perímetro da ligação laje-pilar (devido à existência de abertura adjacente) não resulta em perda de carga se o momento fletor não estiver aplicado no sentido da abertura. As lajes L2 ($V_u = 266$ kN, $M_u = 116,8$ kNm) e L3 ($V_u = 250$ kN, $M_u = 113,7$ kNm), apesar da existência de abertura nesta última, apresentaram cargas de ruptura bastante próximas.

Conforme os autores as superfícies de ruptura, das lajes L1 a L7, surgiram na face superior da laje (face tracionada) e se estenderam em direção da junção da laje com o pilar, na face inferior da laje (face comprimida), formando inclinações variadas, que originaram o “cone” de punção. Nas lajes com abertura, foi possível ver a formação da superfície de ruptura através do mesmo. A inclinação da superfície de ruptura em relação à face inferior na laje L1 variou entre 31° e 53° . Na laje L2 as superfícies de ruptura se desenvolveram com inclinações que variaram de 27° a 85° . Na laje L3, essa variação foi de 26° a 32° , conforme as Figuras 2.15 a 2.17.

Os autores concluíram que, quando a intensidade do momento aplicado foi reduzida na laje com abertura, Laje L6 ($V_u = 305$ kN, $M_u = 65,8$ kNm), isso resultou em uma carga de ruptura inclusive superior à laje L2, sem abertura. Isto indica que a transferência de momento fletor da laje para o pilar é mais prejudicial para a resistência ao cisalhamento que a existência de abertura adjacente ao pilar.

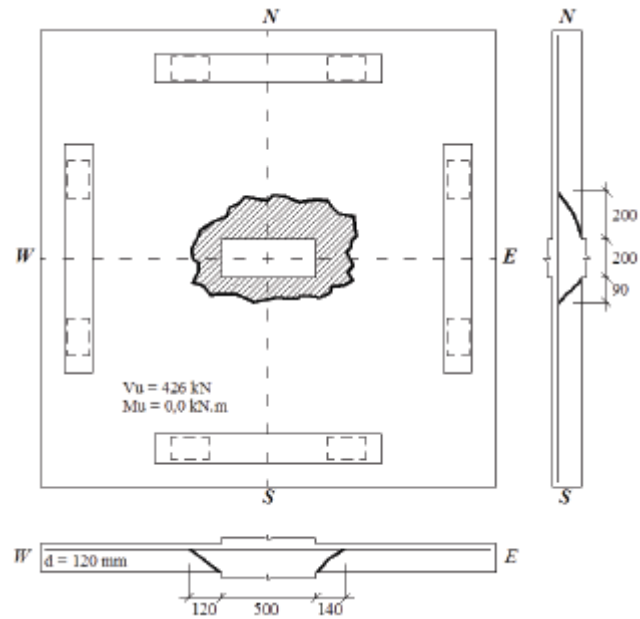


Figura 2.15 - Superfície de ruptura da laje L1.
Fonte: Oliveira *et al.* (2014).

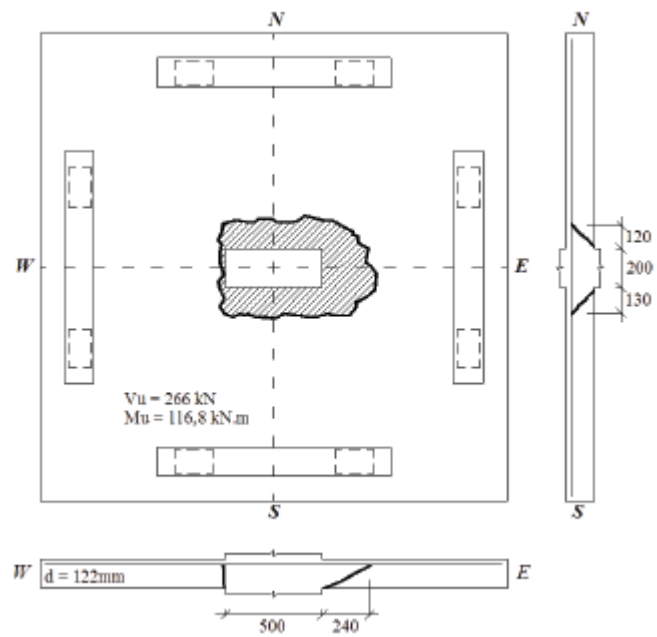


Figura 2.16 - Superfície de ruptura da laje L2.
Fonte: Oliveira *et al.* (2014).

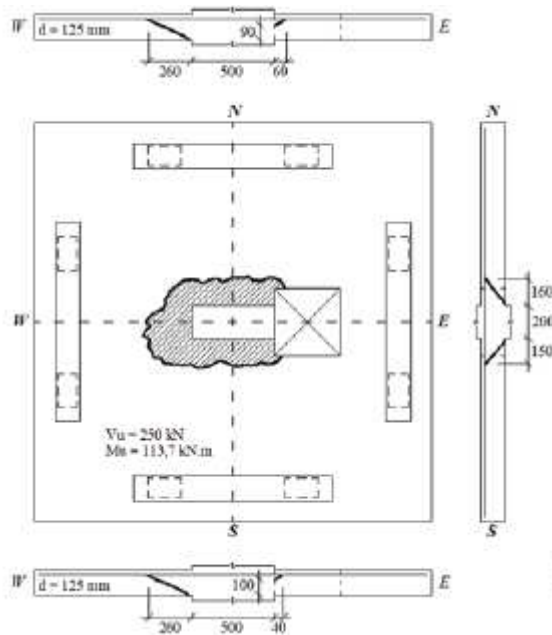


Figura 2.17 - Superfície de ruptura da laje L3.

Fonte: Oliveira *et al.* (2014).

2.2.8. Ha *et al.* (2015)

O estudo apresenta o experimento de oito lajes com aberturas circulares variando a posição e o número de aberturas e sem armadura de cisalhamento. As reduções na resistência ao cisalhamento devido à existência de aberturas foram, geralmente, proporcionais à perda de seções críticas efetivas. Na Figura 2.18 as diferentes aberturas adotadas são apresentadas.

Segundo Ha *et al.* (2015) a presença da abertura nas lajes no sentido N-S fez com que surgissem fissuras no sentido W-E, exceto para a laje L3, de acordo com a Figura 2.19.

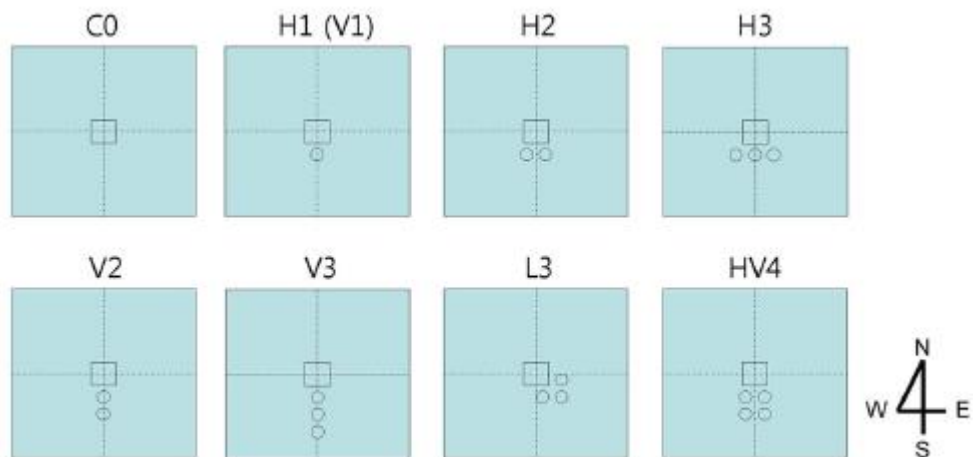


Figura 2.18 - Configuração geométrica de cada modelo.

Fonte: Ha *et al.* (2015).

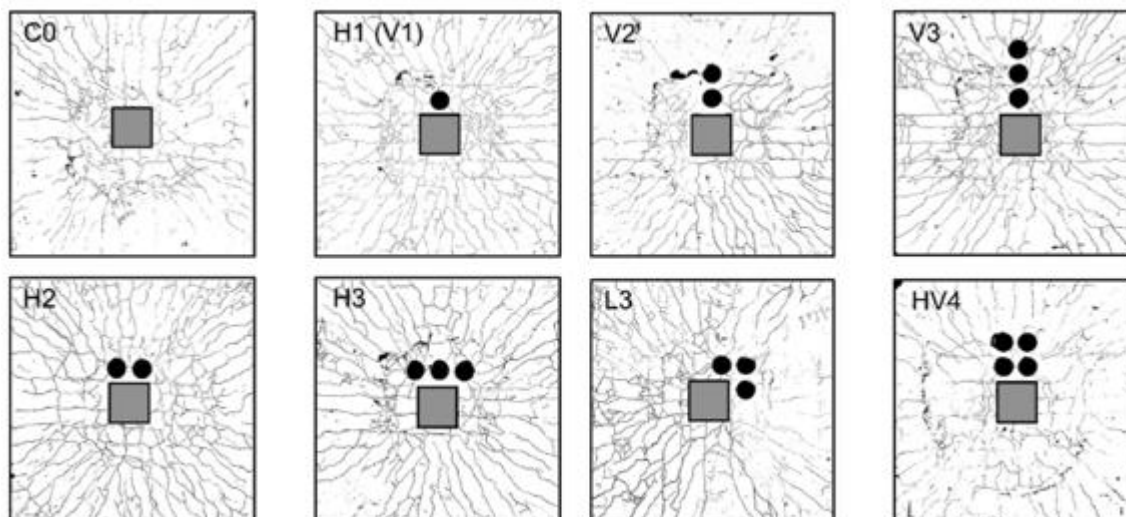


Figura 2.19 - Fissuras nas lajes.

Fonte: Ha *et al.* (2015).

Os autores afirmam que os resultados dos ensaios mostraram que os comprimentos de perímetro críticos efetivos são geralmente proporcionais às cargas de ruptura. Isto confirma a validade do pressuposto de que a redução na força de cisalhamento devido à existência de aberturas é proporcional à perda de perímetro de seção crítica.

O autor conclui que na série H dos modelos, tanto os resultados de teste como as previsões de código mostraram uma tendência em que a resistência ao cisalhamento diminui à medida que o número de aberturas aumenta. Em contraste, a força de cisalhamento é quase idêntica, independentemente do número de aberturas na série V. A disposição das aberturas em forma de L em volta do canto de um pilar pode resultar numa redução adicional.

2.2.9. Silva *et al.* (2017)

Nesta pesquisa realizou-se uma análise experimental da resistência à punção de lajes lisas de concreto armado submetidas a um carregamento simétrico. Foram testadas até a ruptura doze lajes quadradas com 130 mm de espessura e 1800 mm de lado, carregadas no centro pelo bordo inferior.

As características mais importantes das lajes ensaiadas foram: a) dimensões do pilar com um lado constante “a” igual a 150 mm e o outro lado “b” com valores de 150 mm, 300 mm e 450 mm; b) altura efetiva mantida constante e igual a 90 mm; c) taxa da armadura de flexão de 1,45 % (lajes sem aberturas) e 1,57 % (lajes com aberturas); d) existência de duas aberturas

de 150 mm x 150 mm, dispostas adjacentes ao maior lado do pilar; e) presença de armadura de cisalhamento com 3 camadas e distribuídas de forma radial e diâmetro de 8 mm.

Apenas nas lajes L7, L8, L9, L10 e L11 foram utilizadas armaduras de cisalhamento do tipo *stud*. A armadura de cisalhamento foi distribuída radialmente em 3 camadas em todas as lajes, sendo as lajes L7 e L8 possuíam 8 linhas e as lajes L9, L10 e L11, 6 linhas.

As lajes que possuíam apenas 6 linhas continuaram praticamente com a mesma distribuição das outras com 8 linhas, retirando-se apenas as duas linhas perpendiculares à dimensão de menor lado do pilar. Na laje L9, como a dimensão “b” do pilar era maior que o perímetro da armadura, foram retiradas as duas linhas da armadura que permaneceriam dentro da área do pilar. Para as lajes L10 e L11, a razão pelas duas linhas da armadura a menos foi a presença das aberturas que impossibilitavam a existências destas linhas. A Figura 2.20 apresenta os detalhes da armadura de cisalhamento utilizada por Silva *et al.* (2017).

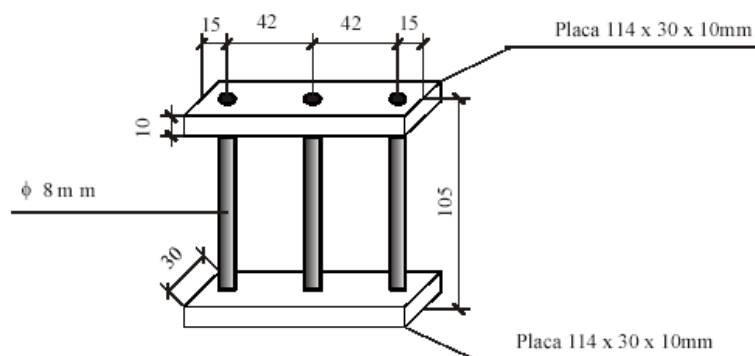


Figura 2.20 - Armadura de cisalhamento utilizada na pesquisa de Silva *et al.* (2017). Unidades em mm.
Fonte: Silva *et al.* (2017).

As lajes L1, L2, L3 e L12 romperam com cargas de 273 kN, 401 kN, 469 kN e 525 kN, respectivamente, enquanto que as lajes L4, L5 e L6 similares, respectivamente, às lajes supracitadas, mas com duas aberturas e dispostas adjacentes ao lado de menor dimensão do pilar, apresentaram cargas de 225 kN (L4), 350 kN (L5) e 375 kN (L6).

O autor concluiu que, com o aumento de uma das dimensões do pilar, e, conseqüentemente, aumentando o perímetro de controle, ocorre um acréscimo na carga de ruptura de uma laje lisa de concreto armado. A existência de aberturas adjacentes à coluna pode diminuir a resistência à punção de lajes lisas. Silva (2017) afirma ainda que o uso de armadura de cisalhamento do tipo *stud* em lajes sem aberturas apresenta resultados bastante satisfatórios, como já foi dito por outros pesquisadores. Os resultados também mostraram que o uso desta

armadura pode ser uma possibilidade ao aumento da resistência ao puncionamento em lajes lisas com aberturas. Este aumento pode até ser superior quando comparado com laje sem armadura de cisalhamento sem aberturas.

2.3. RECOMENDAÇÕES DOS CÓDIGOS E MÉTODOS EMPÍRICOS

Os códigos fornecem uma previsão da carga de ruptura de lajes lisas sujeitas à punção, através de um modelo empírico de cálculo que relaciona a tensão nominal de cisalhamento, atuante em uma determinada superfície de controle, com a resistência nominal ao cisalhamento. Diferencia-se entre as normas e códigos a superfície de controle a ser considerada e a resistência ao cisalhamento.

Para estimar a resistência à punção das lajes ensaiadas, foram utilizadas prescrições normativas de projetos.

2.3.1. ACI 318 (2014)

Para o dimensionamento de lajes sujeitas à punção, a norma estabelece que:

(2.1)

$$V_n = V_c + V_s$$

sendo que:

V_c : força resistente do concreto;

V_s : força resistente da armadura de cisalhamento.

Para as lajes sem armadura de cisalhamento, a carga de ruptura à punção da ligação laje-pilar deve ser igual ao menor resultado obtido por meio de aplicação das Equações 2.2, 2.3 e 2.4:

$$V_c = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{2}{\beta_c} \right) \sqrt{f_c} b_0 d \quad (2.2)$$

$$V_c = \frac{1}{12} \left(\frac{\alpha_s d}{b_0} + 2 \right) \sqrt{f_c} b_0 d \quad (2.3)$$

$$V_c = \frac{1}{3} \sqrt{f_c} b_0 d \quad (2.4)$$

onde:

α_s : 40 para pilares internos, 30 para pilares de borda e 20 para pilares de canto;

β_c : razão entre o maior e o menor lado do pilar (a/b);

b_0 : perímetro crítico (mm);

d : altura útil da laje ao longo do contorno crítico (mm);

f_c : resistência a compressão do concreto (MPa).

O perímetro de controle para verificação da tensão resistente é dado a uma distância de “0,5d” medida da face do pilar. Para uma laje lisa, com pilar interno de seção retangular, o perímetro crítico é o mostrado na Figura 2.21.

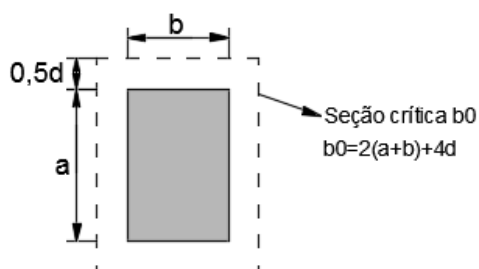


Figura 2.21 - Perímetro de controle ACI 318 (2014).

Fonte: ACI 318 (2014).

Quando a laje apresenta aberturas, cuja distância para o centroide do pilar é inferior a 10 vezes a espessura da laje e não apresenta armadura de combate à punção, a parte do perímetro de controle que se encontra delimitada por linhas retas projetadas do centroide do pilar tangente à abertura é considerado ineficiente, conforme mostra a Figura 2.22.

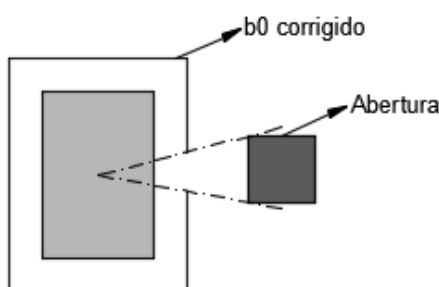


Figura 2.22 - Perímetro de controle para lajes com aberturas.

Fonte: ACI 318 (2014).

Em lajes com armadura de cisalhamento, para determinar a resistência à punção, devem ser consideradas as parcelas de contribuição do concreto e do aço, conforme as Equações 2.5 e 2.6.

$$V_c \leq 0,17 \sqrt{f'_c} b_0 d \quad (2.5)$$

$$V_c + V_s \leq (0,17 + 0,33)\sqrt{f'_c}b_0d \leq 0,5\sqrt{f'_c}b_0d \quad (2.6)$$

A contribuição da armadura de cisalhamento é calculada pela Equação 2.7:

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \quad (2.7)$$

onde:

A_v : área da armadura de cisalhamento em um espaçamento “s”;

f_y : é a tensão específica de escoamento do aço (MPa);

s : é o espaçamento entre os elementos da armadura de cisalhamento.

O código ACI 318 (2014) sugere que o espaçamento radial dos elementos da armadura de cisalhamento não deve ser maior que $0,5d$. Na Figura 2.23 está apresentado o cálculo do perímetro de controle distante a $0,5d$ da última camada da armadura de cisalhamento.

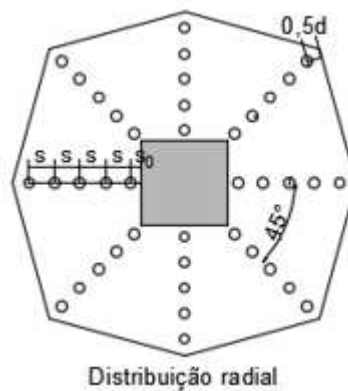


Figura 2.23 - Perímetro de controle distante $0,5d$ a partir da última camada de armadura de cisalhamento.

Fonte: Adaptado de ACI 318 (2014).

2.3.2. EUROCODE 2 (2004)

Para lajes sem armadura de combate à punção, a norma recomenda que a resistência ao cisalhamento proveniente de cargas concentradas ou reações de apoio deve ser verificada no perímetro de controle distante a $2d$ da face do pilar, de acordo com a Figura 2.24.

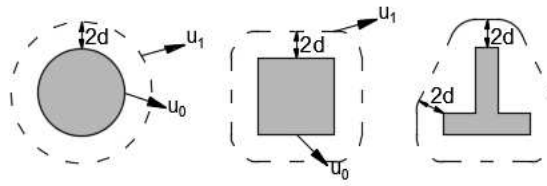


Figura 2.24 - Perímetro de controle das áreas carregadas.

Fonte: Eurocode 2 (2004).

Para áreas carregadas situadas perto de aberturas, se a distância mais curta entre o perímetro da área carregada e da borda da abertura não exceder $6 \cdot d$, parte do perímetro de controle contida entre duas tangentes desenhadas para o contorno da abertura do centro da área carregada é considerada ineficaz, conforme exposto na Figura 2.25.

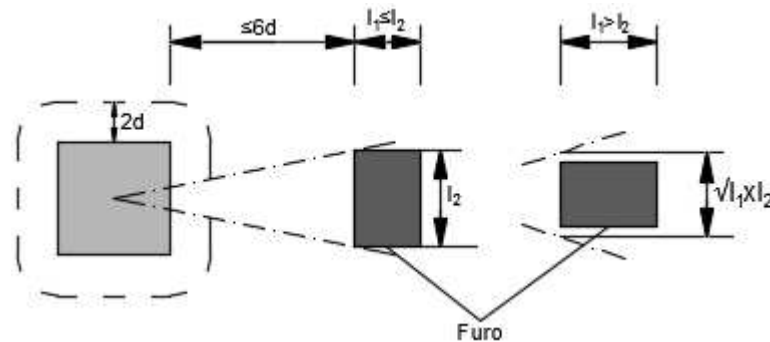


Figura 2.25 - Perímetro crítico com a presença de aberturas.

Fonte: Eurocode 2 (2004).

A norma estabelece que para o dimensionamento adequado de lajes sujeitas à punção, a tensão máxima de cisalhamento solicitante não deve exceder a tensão máxima resistente de acordo com as Equações 2.8 a 2.10.

$$V_{Ed} \leq V_{Rd} \quad (2.8)$$

$$V_{Ed} = \beta \frac{F_{sd}}{\mu_1 d} \quad (2.9)$$

$$d = \frac{(d_x + d_y)}{2} \quad (2.10)$$

onde:

β : para o caso de punção simétrica, sem a existência de momentos desbalanceados, o valor de β será 1;

d_x e d_y : altura úteis das lajes ao longo do contorno crítico nas duas direções ortogonais (mm);

F_{sd} : força ou reação concentrada de cálculo (kN);

μ_l : perímetro crítico (mm).

Para lajes sem armadura de cisalhamento, o Eurocode 2 (2004) estabelece que apenas a parcela oriunda do concreto ($V_{Rd,c}$) contribui para a carga última resistente à punção da laje. A Equação 2.11 apresenta a tensão resistente proveniente do concreto.

$$V_{Rd,c} = 0,18k(100\rho f_{ck})^{1/3} \geq V_{\min} \quad (2.11)$$

onde:

f_{ck} : resistência à compressão característica do concreto;

$$V_{\min} = 0,035k^{2/3} f_{ck}^{1/2}$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0, \text{ d em mm.}$$

$$\rho = \sqrt{\rho_x \rho_y} \leq 0,02$$

O Eurocode 2 (2004) prescreve que para o cálculo das taxas de armadura nas direções ortogonais (ρ_x e ρ_y), devem-se considerar as barras em uma região de comprimento igual à dimensão do pilar mais 3d para cada um dos lados do mesmo, ou até a borda da laje, caso esta estiver mais próxima.

Nas lajes com armadura de cisalhamento, a resistência à punção deverá ser avaliada em quatro regiões: duas verificações adjacentes à face do pilar, nas regiões com armadura de cisalhamento e externa a essa armadura, conforme Equação 2.12 e 2.13.

$$V_{Ed} = V_{Rd,cs} \quad (2.12)$$

$$V_{Rd,cs} = 0,75V_{R,dc} + 1,5 \frac{d}{s_r} A_{sw} f_{ywd,ef} \left(\frac{1}{u_1 d} \right) \sin \alpha \quad (2.13)$$

onde:

u_1 : perímetro de controle situado a uma distância “2d” a partir da face da coluna;

s_r : espaçamento radial das camadas da armadura de cisalhamento (mm);

A_{sw} : área da armadura de cisalhamento em uma camada ao redor da coluna (mm^2);

$f_{ywd,ef} = 250 + 0,25d \leq f_{ywd}$ em MPa;

α : ângulo entre a armadura de cisalhamento e o plano da laje.

Para a região externa à armadura de cisalhamento, obedece às equações 2.14 e 2.15:

$$V_{Ed} \leq V_{Rdc,ext} \quad (2.14)$$

$$V_{Rd,cs,ext} = V_{Rd,c} \mu_{out} d \quad (2.15)$$

Na Equação 2.27, u_{out} é o perímetro de controle traçado a uma distância kd após a última camada da armadura de cisalhamento, conforme Figura 2.26. O valor de k é adotado igual a 1,5.

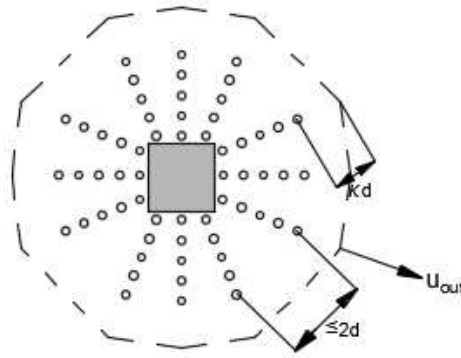


Figura 2.26 - Perímetros de controle para pilares internos.

Fonte: Eurocode 2 (2004).

2.3.3. NBR 6118 (2014)

O modelo de cálculo que a NBR 6118 (2014) propõe corresponde à verificação do cisalhamento em duas ou mais superfícies críticas definidas no entorno de forças concentradas. No contorno C da superfície crítica do pilar ou da carga concentrada, deve ser verificada indiretamente a tensão de compressão diagonal do concreto através da tensão de cisalhamento.

Na segunda superfície crítica (contorno C') afastada $2d$ do pilar ou carga concentrada, deve ser verificada a capacidade da ligação à punção, associada à resistência à tração diagonal, retratado na Figura 2.27. Essa verificação também se faz através de uma tensão de cisalhamento.

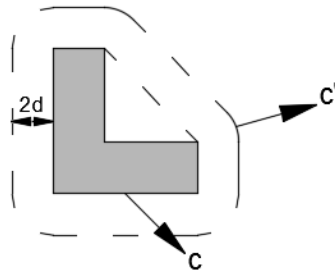


Figura 2.27 - Perímetro de controle.
Fonte: NBR6118 (2014).

A terceira superfície crítica (contorno C'') apenas deve ser verificada quando for necessário colocar armadura transversal, como demonstrado na Figura 2.28.

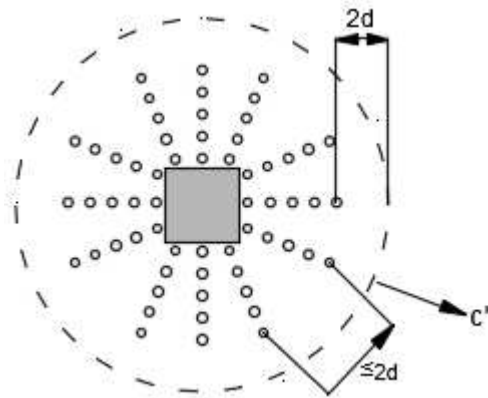


Figura 2.28 - Disposição da armadura de punção e da superfície crítica C''.
Fonte: NBR6118 (2014).

A definição da tensão solicitante nas superfícies críticas C e C' para pilar interno, com carregamento simétrico é conforme a Equação 2.16:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{\mu d} \quad (2.16)$$

sendo:

$$d = \frac{d_x + d_y}{2}$$

d : altura útil da laje ao longo do contorno crítico C';

d_x e d_y : alturas úteis nas duas direções ortogonais;

μ : perímetro do contorno crítico C';

F_{sd} : força concentrada de cálculo.

Para evitar uma ruptura por compressão diagonal do concreto na superfície crítica C, uma verificação deve ser feita para lajes com ou sem armadura de punção, conforme Equação 2.17:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd2} = 0,27 \alpha_v f_{cd} \quad (2.17)$$

onde:

τ_{sd} : tensão atuante ou de projeto;

τ_{Rd2} : tensão resistente;

f_{cd} : resistência à compressão do concreto em MPa ($f_c \leq 90$ MPa).

sendo:

$$\alpha_v = (1 - \frac{f_{ck}}{250}), f_{ck} \text{ em MPa}$$

Para evitar uma ruptura por puncionamento da laje na superfície crítica C' (perímetro crítico μ multiplicado pela espessura da laje) em elementos estruturais ou trechos sem armadura de punção, deve ser feita uma nova verificação, de acordo com a Equação 2.18:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd1} = 0,13(1 + \sqrt{\frac{20}{d}})(100 - \rho f_{ck})^{1/3} \quad (2.18)$$

sendo:

ρ : taxa geométrica de armadura de flexão aderente (armadura não aderente deve ser desprezada) nas direções ortogonais, considerando só as barras dentro de uma distância $3d$ da face do pilar.

Para evitar uma ruptura por puncionamento da laje na superfície crítica C' (perímetro crítico μ multiplicado pela espessura da laje) em elementos estruturais ou trechos com armadura de punção deve ser feita uma nova verificação, de acordo com a Equação 2.19:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd1} = 0,13(1 + \sqrt{\frac{20}{d}})(100 - \rho f_{ck})^{1/3} + 1,5 \frac{d}{s_r} \frac{A_{sw} f_{ywd} \sin \alpha}{\mu d} \quad (2.19)$$

sendo:

s_r : espaçamento radial entre as linhas de armadura de punção, não maior do que $0,75d$;

A_{sw} : área da armadura de punção em um contorno completo paralelo a C’;

α : ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje;

μ : perímetro crítico ou perímetro crítico reduzido no caso de pilares de canto ou de borda.

f_{ywd} : resistência de cálculo da armadura de punção, não maior que 300 MPa para conectores ou 250 MPa para estribos.

2.3.4. *fib* Model Code (2010)

O *fib* Model Code (2010) baseia-se no modelo físico da Teoria da Fissura Crítica (Critical Shear Crack Theory) proposto por Muttoni (2008). Recomenda-se que o perímetro de controle se localize a uma distância $d/2$ a partir da região de suporte da área carregada. O valor da resistência máxima ao puncionamento, sem armadura de cisalhamento, é calculado pela Equação 2.20:

$$V_{Rc} = k_{sys} k_{\psi} \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_0 d_v \leq \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_0 d_v \quad (2.20)$$

onde:

O coeficiente k_{sys} é 2,8 para *studs*, 2,4 para estribos com comprimento de ancoragem suficiente e para outros casos pode ser adotado 2,0.

f_{ck} é a resistência à compressão do concreto em MPa;

γ_c é o coeficiente de segurança com valor de 1,5;

k_{ψ} é um parâmetro relacionado com as rotações das lajes em torno do pilar, calculada através da expressão 2.21:

$$k_{\psi} = \frac{1}{1,5 + 0,9 \psi d_v k_{dg}} \leq 0,6 \quad (2.21)$$

sendo:

k_{dg} um parâmetro relacionado com o tamanho do agregado, calculado como:

$$k_{dg} = \frac{32}{16 + d_g}, \text{ e } d_g \text{ o tamanho máximo do agregado;}$$

d_v é a altura útil em ambas direções;

ψ é a rotação da laje em torno ao pilar. O *fib* Model Code (2010) dispõe de quatro níveis de aproximação (LoA) para calcular este parâmetro. Quanto maior o nível melhor é a precisão.

LoA I:

$$\psi = 1,5 \frac{r_s}{d} \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (2.22)$$

LoA II:

$$\psi = 1,5 \frac{r_s}{d} \frac{f_{yd}}{E_s} \left(\frac{m_{sd}}{m_{Rd}} \right)^{3/2} \quad (2.23)$$

LoA III:

$$\psi = 1,2 \frac{r_s}{d} \frac{f_{yd}}{E_s} \left(\frac{m_{sd}}{m_{Rd}} \right)^{3/2} \quad (2.24)$$

LoA IV: ψ é calculado através de uma análise de elementos finitos linear.

Com os termos:

r_s : é a distância a partir do eixo do pilar até o raio onde o momento fletor for zero;

f_{yd} : é o valor de cálculo da tensão de escoamento do aço;

E_s : módulo de elasticidade do aço;

m_{Rd} : é a resistência à flexão média de projeto por unidade de comprimento numa faixa carregada, conforme a Equação 2.25.

$$m_{Rd} = \rho f_{ys} d^2 \left(1 - \frac{\rho f_{ys}}{2f_c} \right) \quad (2.25)$$

m_{sd} é o momento médio atuante por unidade de comprimento da armadura de flexão numa faixa.

Dessa forma, utilizando a Equação 2.20 correspondente a V_{Rc} e qualquer das expressões de rotação, segundo o LoA escolhido, é possível traçar as curvas, conforme Figura 2.29. O ponto de interseção determina a carga última resistente pela laje.

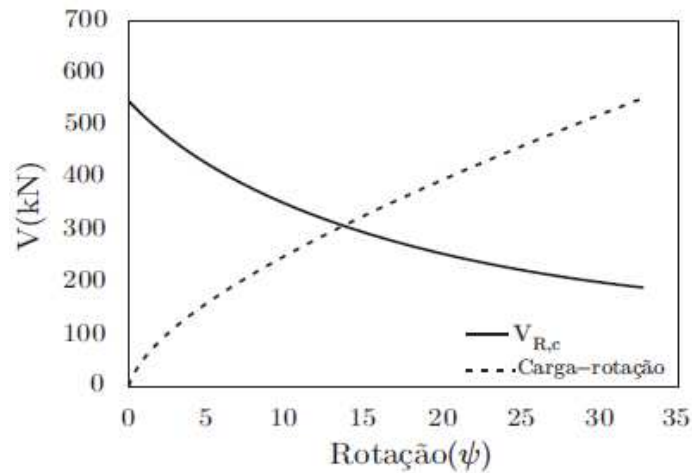


Figura 2.29 - Representação das curvas obtidos pelo método do *fib* Model Code (2010).
 Fonte: *fib* Model Code (2010).

Como pode ser visto na Figura 2.30 para os casos de aberturas distanciadas a menos de “ $5,5d_v$ ” do contorno do pilar ou devido à presença de tubulação ou feixes de tubos, a norma *fib* Model Code (2010) prevê a utilização do perímetro crítico b_0 reduzido no cálculo da resistência a punção.

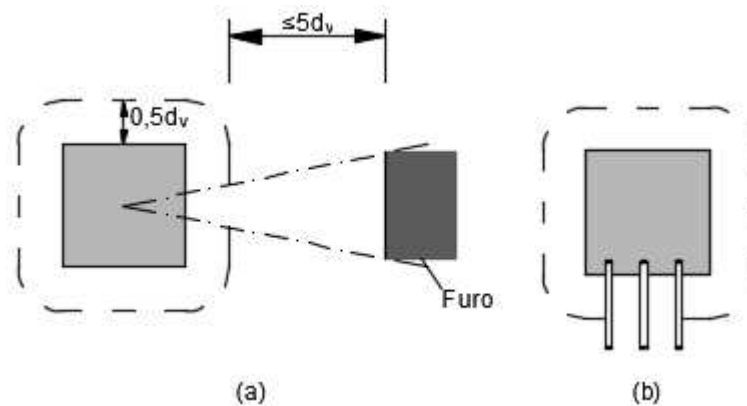


Figura 2.30 - Redução do perímetro crítico na presença de a) aberturas e b) tubos.
 Fonte: *fib* Model Code (2010).

Em lajes com armadura de cisalhamento, é necessário verificar a tensão resistente interna e externa à armadura de cisalhamento. A força resistente à punção é a soma da força resistente do concreto e a força resistente da armadura. A contribuição do concreto é a mesma para uma laje sem armadura de cisalhamento, conforme definido na Equação 2.20. A resistência ao cisalhamento é dada pelas Equações 2.26 e 2.27:

$$V_{Rd,s} = \sum A_{sw} k_e \sigma_{swd} \quad (2.26)$$

$$\sigma_{swd} = \frac{E_s \psi}{6} \left(1 + \frac{f_{bd}}{f_{ywd}} \frac{d}{\phi_w} \right) \leq f_{ywd} \quad (2.27)$$

Sendo que:

E_s : módulo de elasticidade do aço;

ϕ_w : diâmetro da armadura de cisalhamento;

f_{bd} : pode ser adotado igual a 3 MPa em muitos casos;

f_{ywd} : tensão de escoamento da armadura de cisalhamento;

k_e : coeficiente de excentricidade, para carregamento centrado adota-se igual a 0,9;

A_{sw} : contribuição da armadura presente em $0,65d$ conforme a Figura 2.31.

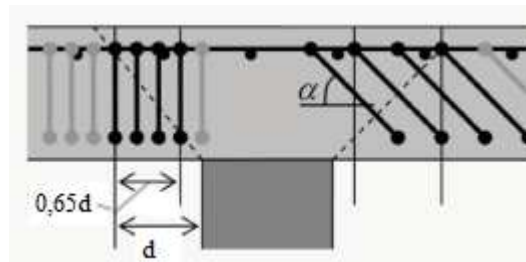


Figura 2.31 – Armadura considerada na resistência ao cisalhamento na região interna.

Fonte: *fib* Model Code 2010.

A capacidade resistente de uma laje lisa no perímetro externo à armadura de cisalhamento é considerada conforme Equação 2.28:

$$V_{Rd,out} = k_{\psi} \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_2 d \quad (2.28)$$

Onde b_2 é o perímetro externo a armadura de cisalhamento afastado $0,5d$ da última camada de armadura de cisalhamento.

2.3.5. Método Empírico de Gomes (1991)

Gomes (1991) adotou algumas condições iniciais para simplificar o modelo de cálculo como: utilização de armadura de cisalhamento vertical do tipo perfil I, ou *studs*; espaçamento radial de $0,5d$ entre camadas e entre o pilar e a camada mais próxima a ele; laje com a mesma resistência do concreto ao longo de toda a sua área.

O método traz duas regiões para verificação dos esforços de puncionamento:

- a) Superfície de ruptura adjacente ao pilar, cruzando a armadura de cisalhamento segundo um ângulo em torno de 25°.

A resistência ao cisalhamento (V_k) pode ser assumida como a soma da resistência do concreto (V_{ck}) e da armadura de cisalhamento (V_{sk}):

$$V_k = V_{ck} + V_{sk} \quad (2.29)$$

A contribuição do concreto é calculada por:

$$V_{ck} = \xi v_{ck} U d \quad (2.30)$$

onde:

$$\xi = 4 \sqrt{\frac{400}{d}} \geq 1$$

$$v_{ck} = 0,273 \sqrt{100 \rho f_{cu}}$$

$$\rho \leq 0,03$$

$$20 N / mm^2 \leq f_{cu} \leq 50 N / mm^2$$

$$U = 4b + 12d \text{ para um pilar retangular de lado } b,$$

$$U = 4B + 12d \text{ para um pilar circular de diâmetro } B,$$

A contribuição do aço é tomada igual ao somatório das forças na armadura de cisalhamento localizada até uma distância de 1,75d a partir da face do pilar, sendo n o número de elementos da armadura de cisalhamento.

$$V_{sk} = n A_s f_{yv} \quad (2.31)$$

- b) Superfície de ruptura fora da armadura de cisalhamento

$$V_k = \alpha_1 \xi v_{ck} U d \quad (2.32)$$

onde:

α_1 : coeficiente igual à unidade para seções 2d ou mais a partir do pilar e igual a 0,9 para seções a uma distância de até 1d a partir do pilar;

U : perímetro circular localizado a 2,5d além da última camada de armadura, conforme Figura 2.32.

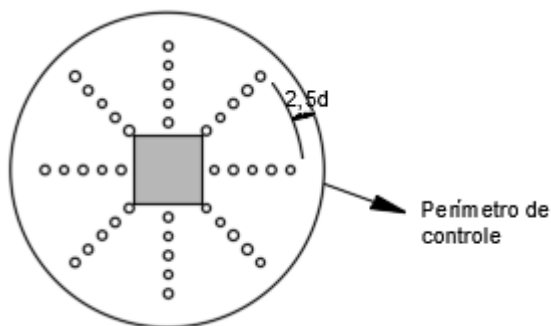


Figura 2.32 - Perímetro crítico de acordo com o modelo empírico proposto por Gomes (1991).

Fonte: Gomes (1991).

2.3.6. Comparação entre os Códigos e os Métodos de Cálculo

Os códigos e métodos de cálculo são utilizados adotando-se diferentes parâmetros para a previsão da carga de ruptura de lajes lisas de concreto armado submetidas a um carregamento simétrico, estas considerações podem ser vistas na Tabela 2.9.

A resistência última à punção em lajes lisas pode ser prevista através do cálculo da tensão nominal de cisalhamento atuando em um dado perímetro de controle. Os perímetros de controle adotados em cada código são diferentes e são divididos em perímetros internos e externos à armadura de cisalhamento.

O código ACI 318 (2014) adota um perímetro de controle afastado a $0,5d$ da face do pilar, para o cálculo da resistência à punção com a superfície de ruptura cruzando a armadura de cisalhamento e para superfície de ruptura ser externa a região armada, o perímetro de controle é traçado a uma distância de $0,5d$ a partir da última camada de armadura de cisalhamento, como no *fib* Model Code (2010). O Eurocode 2 (2004) considera $2d$ e $1,5d$, e a NBR6118 (2014) adota $2d$ para o perímetro interno e externo a armadura de cisalhamento. O método de Gomes (1991) considera um perímetro afastado a $1,5d$ da face do pilar e outro a $2,45d$ a partir do último elemento da armadura de cisalhamento.

A parcela de contribuição da armadura de cisalhamento na resistência à punção para superfície de ruptura cruzando a região armada, também é outro fator que se difere entre os códigos. O ACI 318 (2014) considera que apenas a parcela $\frac{d}{s_r} A_{sw} f_{ywd}$ contribui para a resistência ao cisalhamento. Para o Eurocode 2 (2004) e a NBR 6118 (2014) a contribuição é maior, com 1,5 vezes este valor. O *fib* Model Code (2010) admite que a parcela que contribui a resistência ao cisalhamento está entre $0,35d$ e d .

Tabela 2.9 - Comparativo entre os métodos de cálculo para previsão da carga de ruptura de lajes lisas.

Códigos	Espaçamento radial máximo (mm)	f_{ywd} (MPa)	Parcela de contribuição da armadura de cisalhamento (kN)	Perímetro de controle da face do pilar (mm)	Perímetro de controle a partir da última camada da armadura de cisalhamento (mm)
ACI 318 (2014)	0,5d	420	$\frac{d}{s_r} A_{sw} f_{ywd}$	0,5d	0,5d
Eurocode 2 (2004)	0,75d	250+0,25d	$1,5 \frac{d}{s_r} A_{sw} f_{ywd}$	2d	1,5d
NBR 6118 (2014)	0,75d	300	$1,5 \frac{d}{s_r} A_{sw} f_{ywd}$	2d	2d
<i>fib</i> Model Code (2010)	3,0d	$\frac{E_s \psi}{6}$	$A_{sw}^* f_{ywd}$	0,5d	0,5d
Gomes (1991)	0,5d	F_{yd}	$1,75 \frac{d}{s_r} A_{sw} f_{ywd}$	1,5d	2,45d

A_{sw}^* é a área da armadura dentro da zona delimitada por 0,35d e d a partir da face do pilar.

2.4. MODELOS TEÓRICOS PARA LAJES LISAS

2.4.1. Modelo Teórico proposto por Kinnunen e Nylander (1960)

Kinnunen & Nylander (1960) propuseram a primeira teoria racional sobre punção baseada em testes experimentais em lajes circulares sem armadura de cisalhamento e suportadas por pilar circular central. A transferência da carga à laje de reação localizada no piso do laboratório foi feita por cabos de aço posicionados ao longo da circunferência da laje, simulando peças carregadas uniformemente ao longo dos bordos livres e apoiadas centralmente em pilares circulares. O modelo supõe que cada segmento da laje, considerado como corpo rígido, seja carregado por uma casca cônica comprimida que se estende desde o pilar até a origem da fissura de cisalhamento.

Observando a Figura 2.33, percebe-se que o segmento de laje é carregado pela carga externa $P \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$, e atua no tronco de cone uma força oblíqua $F_{cr} \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$ proveniente do concreto, uma força tangencial F_{st} na armadura de flexão, perpendicularmente às fissuras radiais, originando a componente radial $F_{st} \Delta\varphi$.

Atuam ainda no modelo, a força F_{sr} na direção radial, causada pela armadura de flexão atravessada pela fissura de cisalhamento e a força tangencial de compressão do concreto abaixo do centro de rotação, acarretando na resultante radial $F_{ct}\Delta\varphi$. A força da armadura de cisalhamento é assumida igual a zero, por ausência da mesma.

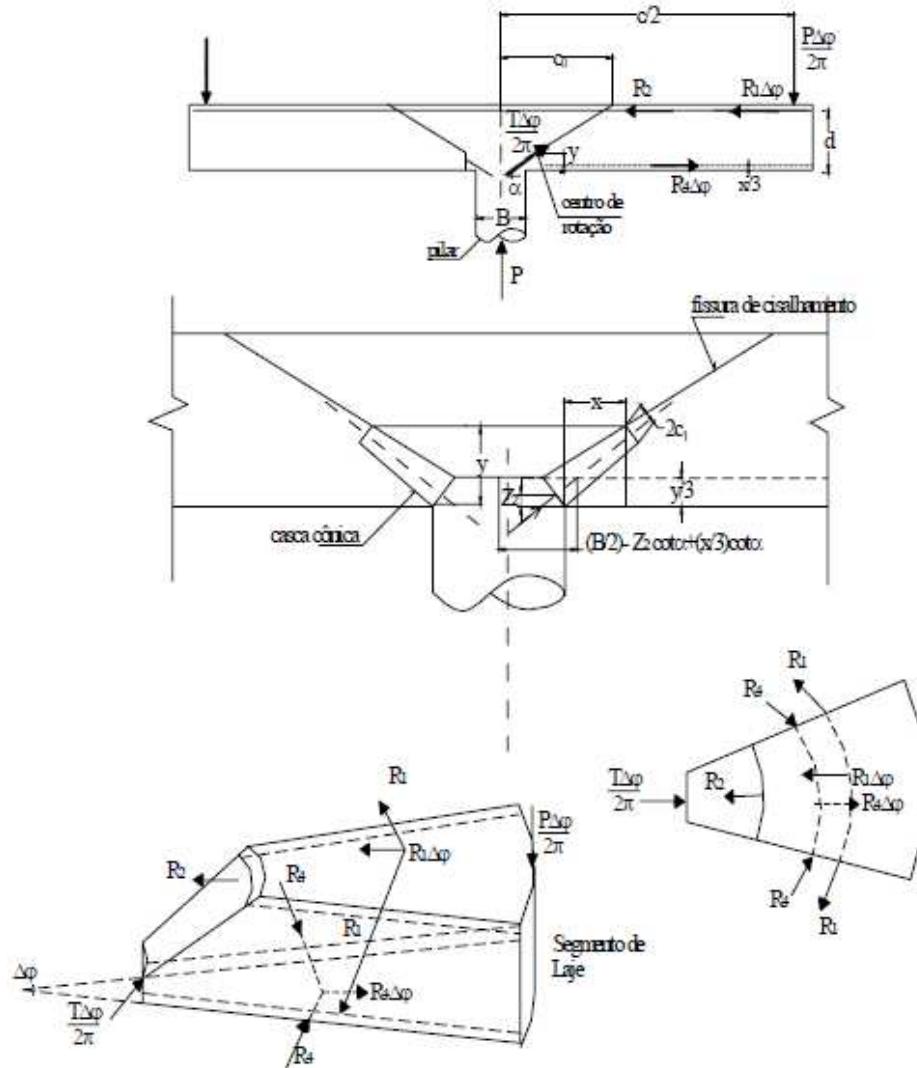


Figura 2.33 - Modelo Proposto por Kinnunen e Nylander (1960).

Fonte: Kinnunen & Nylander (1960).

A força vertical P , que é transmitida através da casca cônica, é dada por:

$$P = T \sin \alpha = 2\pi \frac{B}{2h} \frac{y}{h} \frac{1 + 2 \frac{y}{B}}{1 + \frac{y}{B}} \sigma_t f(\alpha) h^2 \quad (2.33)$$

onde:

h = altura efetiva da laje;

$$f(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha (1 - \tan \alpha)$$

Três tipos de armadura de flexão são definidos pelo modelo proposto por Kinnunen & Nylander (1960). As disposições das armaduras analisadas no trabalho são: armadura circunferencial, armadura circunferencial e radial e armadura ortogonal com espaçamento constante. Aborda-se somente o terceiro caso neste trabalho, mais utilizado recentemente.

No interior do segmento de laje, a tensão σ_{sy} é alcançada devido aos altos valores de $\psi \left(1 - \frac{x}{d}\right)$. O limite do raio $r = r_s$ entre o ponto de escoamento e da fase elástica da armadura de flexão é dada pela Equação 2.34.

$$r_y = d \frac{E_s}{\sigma_{sy}} \psi \left(1 - \frac{x}{d}\right) \quad (2.34)$$

A resultante de forças F_{st} proveniente da armadura de flexão é:

$$F_{st} = \sigma_{sy} \left[\sum_{r=r_{c0}}^{r=r_y} A_s + \sum_{r=r_y}^{r=r_3} \frac{A_s}{r} \right] \quad (2.35)$$

A componente radial dessa força, é dada por $F_{st} \Delta \varphi$ Para espaçamento constante, a área de armadura total é dada por:

$$A_s = \rho d dr \quad (2.36)$$

Sendo r_{c0} o raio onde a fissura de cisalhamento intercepta a armadura de flexão, dado pela Equação 2.38, tem-se para $r_y > r_{c0}$ que:

$$F_{st} = \rho \sigma_{sy} d^2 \left[\left(\frac{r_y}{d} - \frac{r_{c0}}{d} \right) + \frac{r_y}{d} \ln \frac{r_3}{r_y} \right] \quad (2.37)$$

$$r_{c0} = d \frac{\rho \sigma_s}{7,5 + \frac{\sigma_{cubo}}{20}} \quad (2.38)$$

E para $r_y \leq r_{c0}$:

$$F_{st} = \rho \sigma_{sy} d^2 \frac{r_y}{d} \ln \frac{r_3}{r_y} \quad (2.39)$$

Para a determinação da força F_{sr} que atua no raio $r_c = r_{c0}$ na direção radial, a armadura ortogonal é considerada como uma malha circular sujeita a uma força de tração uniformemente distribuída $\frac{F_{cr}}{c_0 \Delta \varphi}$ por unidade de comprimento que atua na direção radial.

Para $r_y > r_{c0}$, onde a tensão das armaduras de flexão alcançaram o ponto de escoamento ($\sigma_s = \sigma_{sy}$), tem-se:

$$F_{sr=r_0} = \rho \sigma_{sy} d^2 \frac{r_{c0}}{d} \Delta \varphi \quad (2.40)$$

E para $r_y \leq r_{c0}$, tem-se:

$$F_{sr=r_0} = \rho \sigma_{sy} d^2 \frac{r_y}{d} \Delta \varphi \quad (2.41)$$

Tensões de compressão no concreto na direção tangencial ocorrem com o acréscimo de carregamento e eventual rotação da laje, sob um plano horizontal passando pelo centro de rotação. Na fase elástica, as tensões aumentam linearmente em função do aumento da linha neutra x .

A força total de compressão F_{ct} , obtém-se após integração na direção vertical de zero a x na direção radial de $r = r_0 + x$ até $r = r_3$.

$$F_{ct} = E_c \frac{1}{2} d^2 \left(\frac{x}{d} \right)^2 \psi \ln \frac{r_3}{r_0 + x} \quad (2.42)$$

Sendo que a componente radial da força é dada por $F_{ct} \Delta \varphi$.

A ruptura da laje ocorre quando a deformação tangencial do concreto abaixo da fissura de cisalhamento atinge um determinado valor limite na base da laje a uma certa distância da face do pilar. A deformação limite é função da razão entre a dimensão do pilar e a espessura da laje.

2.4.2. Modelo Teórico proposto por Shehata (1985)

O modelo proposto por Shehata (1985) considera a laje dividida em segmentos rígidos. Com o incremento de carga, formam-se fissuras, sendo que cada segmento formado é dividido por duas fissuras radiais, por uma circunferencial e pela extremidade da laje. Além disso, possuem perfis de deflexão praticamente lineares, conforme ilustra a Figura 2.34.

As lajes abordadas são sem armadura de cisalhamento, sendo que as tensões originadas de cisalhamento causam fissura interna inclinada, considerada igual a 20° para lajes com armadura de flexão distribuída ortogonalmente. O concreto comprimido na face inferior da laje, próximo à face da coluna, é considerado no estado plástico.

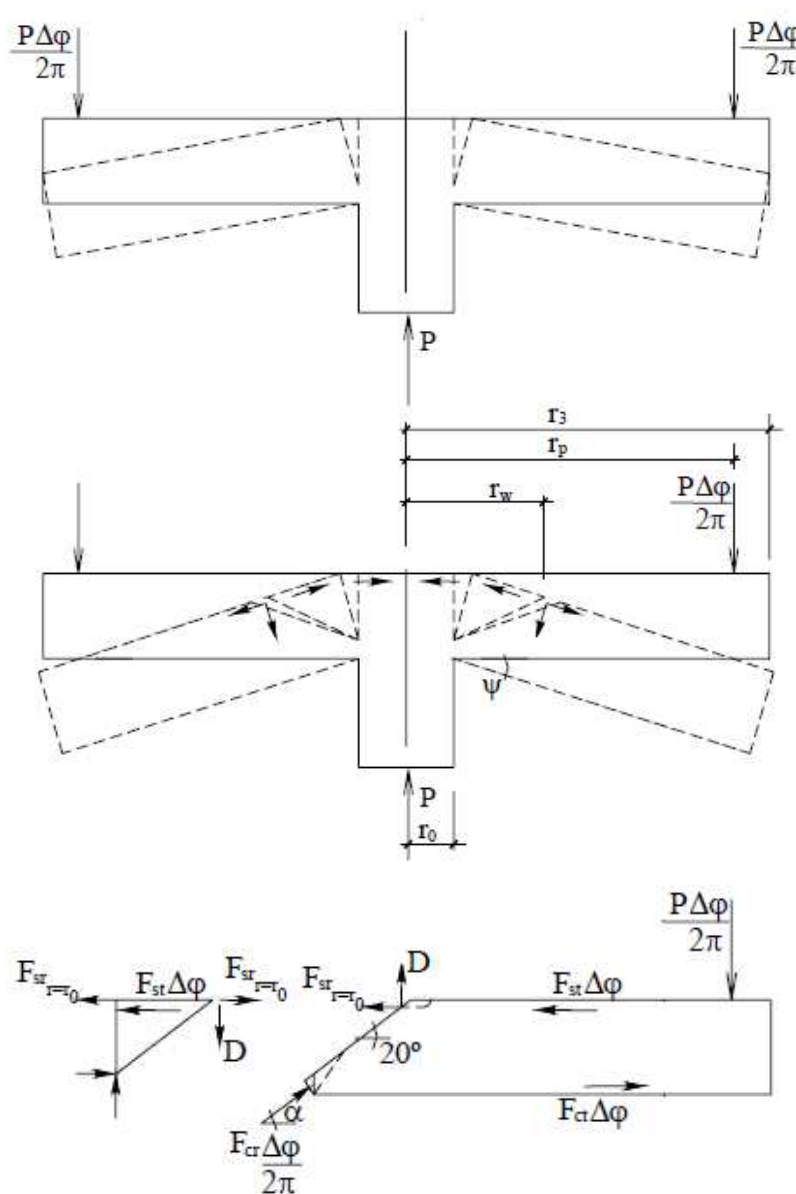


Figura 2.34 - Modelo de ruptura de punção e forças envolvidas proposto por Shehata.

Fonte: Shehata (1985).

Assume-se que cada segmento de laje é suportado por uma força inclinada na face do pilar com inclinação máxima de 20° e por forças correspondentes à parcela da armadura de flexão que não tenha entrado em escoamento no raio limitado pela fissura de cisalhamento.

O critério de ruptura considera três situações críticas:

- Uma compressão diametral do concreto quando a força radial de compressão alcança uma inclinação de 20°;

- Um esmagamento radial do concreto quando a deformação radial média na face comprimida alcança o valor de 0,0035 em um comprimento plástico de 150 mm começando na face do pilar;

- Um esmagamento tangencial do concreto se a deformação tangencial da face comprimida alcança 0,0035 na distância da face do pilar igual à altura da linha neutra.

De acordo com Shehata (1990), as equações de equilíbrio vertical, horizontal e rotacional das forças no plano radial são dadas pelas equações 2.43 a 2.45:

$$P \left(\frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right) = dF_{cr} \sin \alpha + D \quad (2.43)$$

$$F_{cr} \cos \alpha + F_{ct} \Delta\varphi = F_{sr} + F_{st} \Delta\varphi \quad (2.44)$$

$$P \frac{\Delta\varphi}{2\pi} (r_3 - r_0) = (F_{sr} + F_{st} \Delta\varphi) z + D(r_w - r_0) \quad (2.45)$$

onde:

$$D = 0,364 \rho f_y d r_y \ln \left(\frac{r_w}{r_y} \right) \Delta\varphi$$

F_{cr} : Força radial do concreto que atua no concreto junto à coluna;

F_{ct} : Força tangencial do concreto;

F_{sr} : Força radial do aço;

F_{st} : Força tangencial do aço;

x : altura da linha neutra;

r_0 : raio do pilar;

r_w : raio da punção, definido pela extremidade superior da fissura de cisalhamento;

r_3 : raio definido pela borda da cunha submetida à punção;

d : altura efetiva da laje;

z : braço de alavanca dado por $d - 0,45x$.

A altura da linha neutra pode ser calculada por:

$$\frac{x_0}{d} = 0,8\sqrt{(n\rho_e)}\sqrt{\frac{35}{f_c}} \quad (2.46)$$

onde:

f_c é a resistência à compressão do concreto em MPa;

ρ_e taxa de armadura para a tensão de escoamento de 500 MPa $\leq 2\%$.

O fator de concentração de tensões η_c teve a seguinte simplificação:

$$\eta_c = 1,4\sqrt{\frac{2d}{r_0}} \geq 1,25 \quad (2.47)$$

Substituindo as equações 2.28 a 2.32, obtém-se:

$$P = 2\pi r_0 x n_c f_c \tan 10^\circ \sqrt[3]{\frac{500}{d}} \quad (2.48)$$

Onde $\sqrt[3]{\frac{500}{d}}$ é um valor experimental para o efeito de forma (*size effect*)

2.4.3. Modelo Teórico proposto por Gomes (1991)

Este modelo tem como premissa os estudos de Kinnunen e Nylander (1960), lajes com armadura de cisalhamento e Shehata (1985) com lajes sem armadura de cisalhamento. Estudou-se também o trabalho de Andersson (1963), Regan (1985), Shehata (1985) e testes experimentais da literatura

Em consequência da complexidade do ensaio, foram adotadas algumas simplificações necessárias:

- Pilar limitado por uma fissura circunferencial no topo da laje e próxima às faces do pilar;
- Cunhas limitadas pela fissura circunferencial no topo da laje e próxima às faces do pilar;
- Segmentos da laje limitados pela fissura circunferencial de cisalhamento, fissuras radiais de flexão e pelo bordo da laje.

O método de Gomes (1991) pode ser representado por um sistema de quatro equações, sendo três equações de equilíbrio e uma em função do critério de ruptura. Desta forma, surgem quatro incógnitas: rotação (ψ), altura da linha neutra (x), ângulo de aplicação da

força radial do concreto (α) e carga de ruptura (P). O procedimento para a solução deste sistema consiste em um processo iterativo com cinco etapas:

- 1) Adoção de valores iniciais para ψ , x e α ;
- 2) Determinação de x , a partir da equação de equilíbrio horizontal;
- 3) Determinação de $P \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$, a partir da equação de equilíbrio rotacional;
- 4) Determinação de α , com base na equação de equilíbrio vertical;
- 5) Aplicação do critério de ruptura.

Na Figura 2.35 é apresentada a idealização do modelo de lajes lisas de concreto armado submetidas a punção.

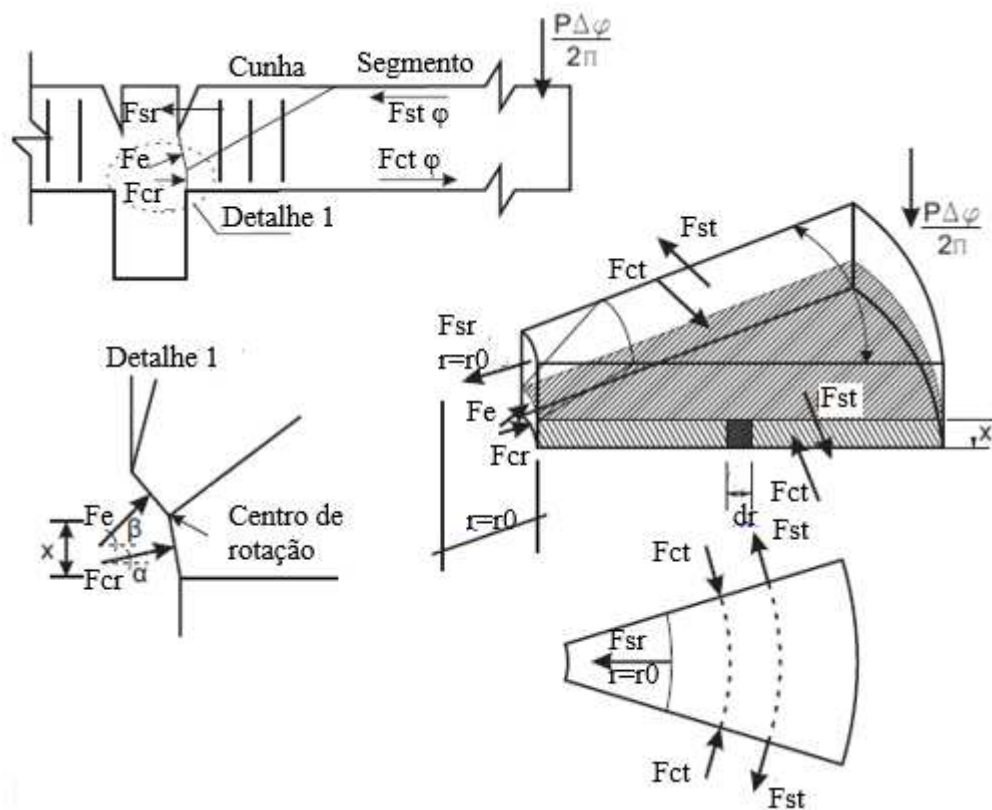


Figura 2.35 - Modelo proposto por Gomes (1991).

Fonte: Gomes (1991).

Com a aplicação do carregamento na laje, surge uma rotação na laje (ψ). Esta rotação dá origem a cinco forças.

- Força radial do concreto (F_{cr}): atua diretamente no segmento de laje e na extremidade da fissura de cisalhamento localizada na face do pilar;

- Força tangencial do concreto (F_{ct}): atua tangencialmente ao segmento da laje abaixo do centro de rotação. Supõe-se que a resultante radial desta força ($F_{cr(r0 \rightarrow r3)} \Delta \varphi$) atue externamente a uma determinada distância abaixo da linha neutra.

-Força tangencial (F_{st}) e Força radial da armadura de flexão (F_{sr}): atuam na região das fissuras radial e circunferencial, nos limites do segmento de laje;

-Força da armadura de cisalhamento (F_e): transferida ao segmento de laje através da cunha pela armadura de cisalhamento. Somente a armadura de cisalhamento localizada na cunha pode transferir força do pilar ao segmento da laje, conforme Figura 2.36.

Gomes (1991) concluiu que as flechas aumentavam em proporções aproximadamente linear em função da distância do apoio, e esta observação possibilitou o tratamento das lajes como rotação de corpo rígido, excetuando-se a área da coluna, considerada fixa.

2.3.2.1. Determinação das forças

- Força radial do Concreto (F_{cr})

A força radial do concreto exprime a capacidade total do tronco de pirâmide na face do pilar, levando em conta o efeito do gradiente radial de tensão. Isso significa que a força radial é calculada como se o concreto estivesse em compressão uniaxial. Gomes (1991) propôs uma seção de tronco de pirâmide inserida na laje com uma base formada na face da coluna para considerar o gradiente de tensões, conforme ilustra a Figura 2.37. Esta hipótese adotada não resulta em grande erro porque a parte da força tangencial do concreto, F_{ct} , afetada por um estado de tensão multiaxial é relativamente pequena.

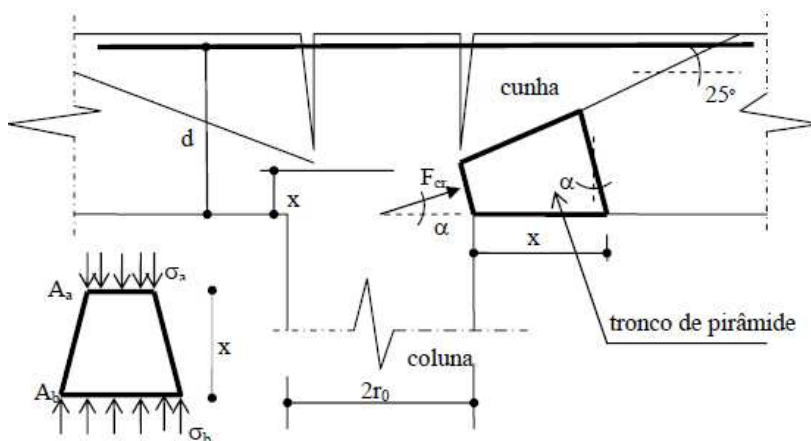


Figura 2.36 - Tronco de pirâmide na face do pilar.

Fonte: Amorim (2000).

O gradiente de tensões, ξ , pode ser obtido de acordo com as Equações 2.49 a 2.53.

$$\xi = \frac{\frac{\sigma_a - \sigma_b}{f_c}}{\frac{x}{f_c}} = \frac{\sigma_a - \sigma_b}{f_c} = \frac{\sigma_a}{f_c} \left(1 - \frac{A_a}{A_b} \right) \quad (2.49)$$

Onde σ_a , σ_b são as tensões existentes nas áreas A_a e A_b , respectivamente, do tronco de pirâmide. Tem-se que $\sigma_a A_a = \sigma_b A_b$.

$$A_a = 2\pi r_0 \frac{x}{\cos \alpha} \quad (2.50)$$

$$A_b = 2\pi \frac{(r_0 + x)}{\cos \alpha} \left(\frac{x \tan 25^\circ}{1 + \tan \alpha \tan 25^\circ} + x \right) \quad (2.51)$$

A partir das considerações geométricas da Figura 2.37, e utilizando as Equações 2.49 a 2.51, tem-se que:

$$\xi = \frac{\sigma_a}{f_c} \frac{2r_0(k-1) + x(\tan \alpha + k_1)}{2r_0k + xk_1} \quad (2.52)$$

onde:

$$k = 1 + \tan \alpha + \tan(25^\circ - \alpha) \quad \text{e} \quad k_1 = \frac{2k}{\cos^2 \alpha} - k^2 \tan \alpha \quad (2.53)$$

De acordo com os resultados dos ensaios de Shehata (1985) a tensão σ_a pode ser assumida como uma função linear de ξ .

$$\frac{\sigma_a}{f_c} = 1 + 0,9\xi \quad (2.54)$$

A tensão na sessão pode ser obtida pela substituição das equações 2.52 em 2.54:

$$\sigma_a = f_c \eta (\alpha, r_0 / d, x / d) \quad (2.55)$$

Onde:

$$\eta = \frac{\frac{2r_0}{d}k + \frac{x}{d}k_1}{\frac{r_0}{d}(1,8 + 0,2k) + \frac{x}{d}(0,1k + 0,9 \tan \alpha)} \quad (2.56)$$

$$k = 1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} (25^\circ - \alpha) \quad (2.57)$$

$$k_1 = \frac{2k}{\cos^2 \alpha} - k^2 \operatorname{tg} \alpha \quad (2.58)$$

A Força radial do concreto (F_{cr}) pode ser determinada fazendo-se o produto da área na qual atua a força radial pelo gradiente longitudinal de tensões e pela resistência do concreto. Tem-se que:

$$F_{cr} = A_c \eta f_c \quad (2.59)$$

onde:

f_c é a resistência a compressão do concreto;

A_c é a área de concreto onde a força é aplicada:

$$A_c = \frac{2\pi x}{\cos \alpha} \left(r_0 - \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{2} \right)$$

x é a altura da linha neutra;

α é a inclinação da força radial do concreto;

r_0 é o raio do pilar.

- Força tangencial do Concreto (F_{ct})

O diagrama tensão-deformação, obtido para corpos de prova cilíndricos de concreto, submetidos à compressão simples com uma curva parabólica, atingem a tensão máxima f_c à qual corresponde uma deformação ε_{c1} , sendo que, a partir desse ponto, a tensão decresce até determinado ponto de deformação ε_{cu} , ponto de deformação última do concreto, como visto na Figura 2.37 a. Os diversos códigos internacionais permitem que se faça uma simplificação da curva, onde se obtém um diagrama bi-linear de tensão-deformação para concretos de resistência f_c entre 20 e 50 N/mm², Figura 2.37 b.

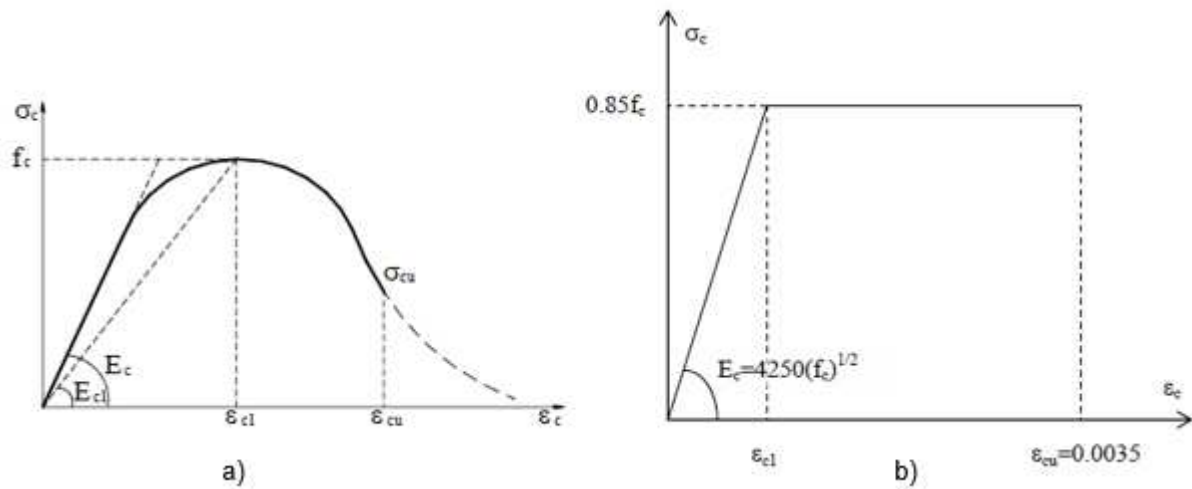


Figura 2.37 - a) Curva tensão-deformação do concreto para compressão uniaxial. b) Diagrama simplificado bi-linear de tensão-deformação do concreto.

Fonte: Gomes (1991).

A força tangencial do concreto ($F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta \varphi$) pode ser determinada pela Equação 2.60, considerando um elemento circular de largura dr no raio r . A Figura 2.38 mostra os diagramas de deformação no aço e no concreto de uma faixa rígida de laje e a variação do bloco de tensões tangenciais do concreto ao longo do raio.

$$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta \varphi = \Delta \varphi \int_{r_0}^{r_3} k_c f_c k_x x dr \quad (2.60)$$

Onde:

k_c e k_x são funções da deformação tangencial na fibra extrema (ε_{ct})

k_c : razão entre a tensão máxima e f_c ;

k_x : razão da tensão média no bloco até o valor máximo.

$$k_x = \begin{cases} 0,5 & \text{para } r_{\varepsilon_{c1}} \leq r \leq r_3 \\ 0,5 + 0,35 \left(\frac{\varepsilon_{ct} - \varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1}} \right) \leq 0,85 & \text{para } r_{\varepsilon_{cu}} \leq r \leq r_{\varepsilon_{c1}} \end{cases} \quad (2.61)$$

$$k_c = \begin{cases} 0,85 \frac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{c1}} & \text{para } r_{\varepsilon_{c1}} \leq r \leq r_3 \\ 0,85 & \text{para } r \leq r_{\varepsilon_{c1}} \end{cases} \quad (2.62)$$

$$\varepsilon_{c1} = \frac{\sqrt{f_c}}{5000}; \quad \varepsilon_{cu} = 0,0035, \text{ com } f_c \text{ em N/mm}^2 \quad (2.63)$$

sendo que:

Tabela 2.10 - Cálculo de Fct conforme a posição do raio da laje.

Intervalos	Equações
$r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$	$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi f_c x^2 \left[\frac{k_0 \psi}{\varepsilon_{c1}} - \frac{0,723 r_0}{x} + \frac{0,425 \psi}{\varepsilon_{c1}} \ln \left(\frac{r_3 \varepsilon_{c1}}{\psi x} \right) \right]$ Onde: $k_0 = 0,425 + \frac{0,298 \ln \alpha_0}{(\alpha_0 - 1)}$ $\alpha_0 = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{c1}}$
$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$	$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi f_c x^2 \left[0,425 - \frac{0,298}{\alpha_0 - 1} \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{c1}} - \frac{r_0}{x} \right) \right] +$ $+ 2\pi f_c x^2 \left[\frac{0,298 \psi}{(\alpha_0 - 1) \varepsilon_{c1}} \ln \left(\frac{\psi x}{r_0 \varepsilon_{c1}} \right) + 0,425 \frac{\psi}{\varepsilon_{c1}} \ln \left(\frac{r_0 \varepsilon_{c1}}{\psi x} \right) \right]$
$r_0 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{cu}}$	$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi f_c x^2 \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha_0 - 1} \right) \left(\frac{0,298 \psi}{\varepsilon_{cu}} + \frac{0,425 r_3}{x} \right) \right] +$ $+ 2\pi f_c x^2 \left[- \frac{0,723}{x} \left(r_0 + \frac{r_3}{\alpha_0 - 1} \right) + \frac{0,298 \psi}{(\alpha_0 - 1) \varepsilon_{c1}} \ln \left(\frac{r_3 \varepsilon_{cu}}{\psi x} \right) \right]$
$r_0 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}}$	$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi 0,723 f_c x (r_3 - r_0)$
$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$	$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi f_c x^2 \left[\left(\frac{r_3 - r_0}{x} \right) \left(0,425 - \frac{0,298}{\alpha_0 - 1} \right) + \right.$ $\left. + \frac{0,298}{(\alpha_0 - 1) \varepsilon_{c1}} \ln \left(\frac{r_3}{r_0} \right) \right]$
$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_0 \leq r_3$	$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi f_c x^2 \left[0,425 \frac{\psi}{\varepsilon_{c1}} \ln \left(\frac{r_3}{r_0} \right) \right]$

- Força Tangencial da Armadura de Flexão (F_{st})

Para a determinação das forças da armadura de flexão é adotado o diagrama de tensão-deformação para o aço, supondo um material com comportamento elástico perfeitamente plástico, conforme a Figura 2.39.

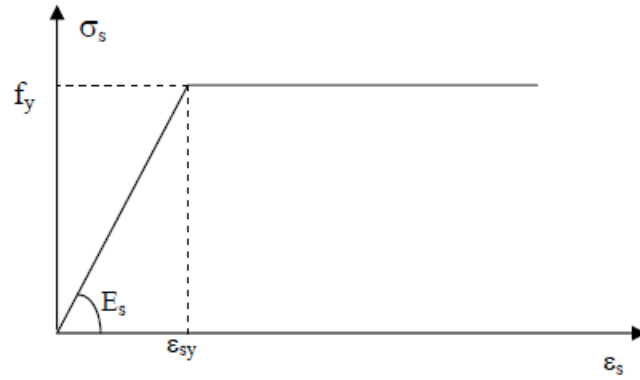


Figura 2.39 - Curva idealizada de tensão-deformação do aço.

Fonte: Gomes (1991).

A componente radial da força tangencial da armadura de flexão é dada pela Equação

2.66:

$$F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta \varphi = \left[\int_{r_0}^{r_y} \rho f_y ddr + \int_{r_y}^{r_3} \rho f_y d \frac{r_y}{r} \right] dr \Delta \varphi \chi \quad (2.66)$$

Admitindo os intervalos:

$$r_0 \leq r_y \leq r_3$$

$$F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi \rho \chi \frac{f_y}{100} d \left[(r_y - r_0) + r_y \ln \left(\frac{r_3}{r_y} \right) \right] \quad (2.67)$$

Onde:

$$r_y = \psi \frac{(d - x)}{\varepsilon_{sy}}$$

$$\varepsilon_{sy} = \frac{f_y}{2000000}$$

$$r_0 \leq r_3 \leq r_y$$

$$F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi \rho \chi \frac{f_y}{100} d [(r_3 - r_0)] \quad (2.68)$$

Onde χ é um coeficiente relativo à diferença entre as forças radiais exercidas pela armadura ortogonal e aquelas devidas às armaduras radial e circunferencial, resultando em uma mesma taxa de armadura de flexão. Amorim (2000) e Carvalho (2000) trazem que o coeficiente

χ depende de r_y e r_3 , sendo r_y o raio onde o ponto de tensão de escoamento é alcançado na direção tangencial da armadura de flexão na ruptura, podendo ser visualizado na Figura 2.40.

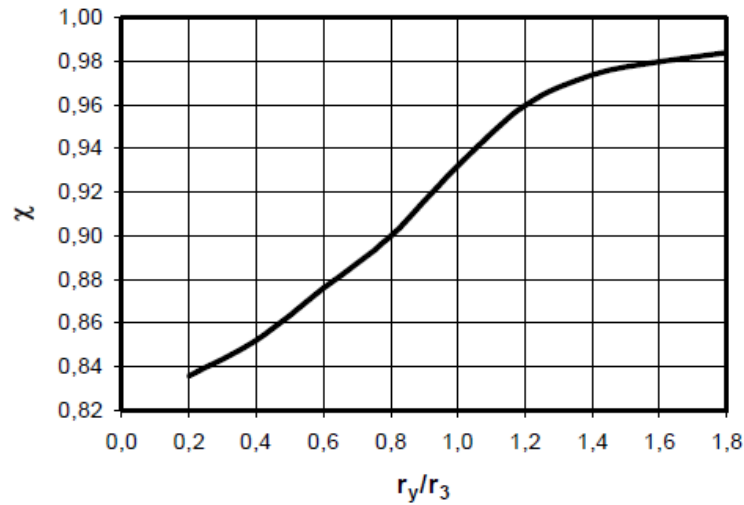


Figura 2.40 - Gráfico em função de χ por r_y / r_3 adotado por Andersson (1963).

Fonte: Andersson (1963).

A Equação 2.69 corresponde ao estudo de linhas de tendências adequadas ao gráfico da Figura 2.40, que representa χ como função da relação entre o raio da região onde ocorre a punção e o raio da laje.

$$\chi = -0,0671 \left(\frac{r_y}{r_3} \right)^3 + 0,1669 \left(\frac{r_y}{r_3} \right)^2 + 0,002 \left(\frac{r_y}{r_3} \right) + 0,829 \quad (2.69)$$

- Força Radial da Armadura de Flexão (F_{sr})

A força radial da armadura de flexão é dada pela Equação 2.70:

$$F_{sr(r=r_0)} = 2\pi\rho\chi \frac{f_y}{100} d(r_0) \quad (2.70)$$

- Força da Armadura Cisalhamento (F_e)

Na Figura 2.41 mostra um diagrama das forças na armadura de cisalhamento. Considera-se como contribuição para a força de cisalhamento, apenas a armadura localizada dentro da cunha. O comprimento dentro do qual as armaduras contribuem para a força pode ser estimado de acordo com o cálculo do raio de contribuição pela Equação 2.71.

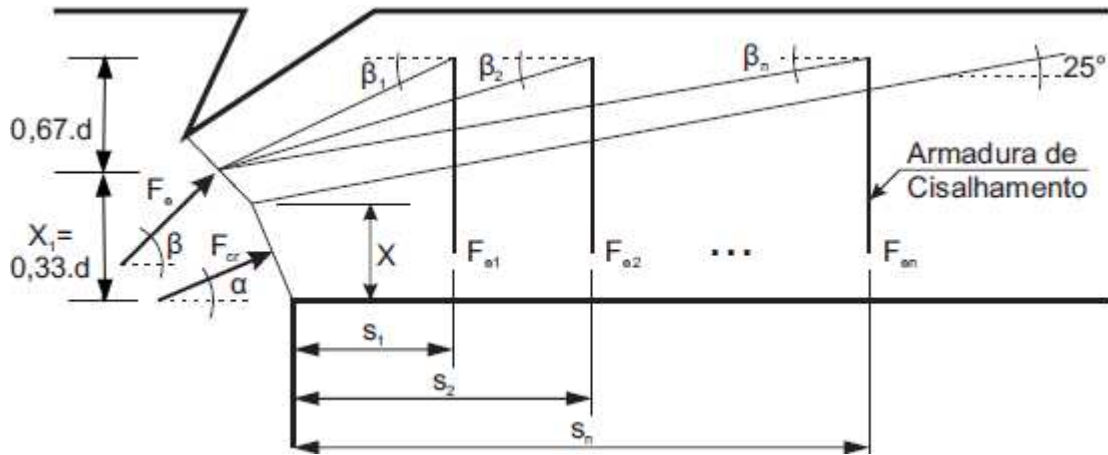


Figura 2.41 - Diagrama das forças da armadura de cisalhamento adotado por Gomes (1991).

Fonte: Gomes (1991).

$$r_{contrib.} = r_0 + (d - x) \cot g 25^\circ \quad (2.71)$$

$$r_{contrib.} \cong r_0 + 1,56d$$

A componente vertical da força da armadura de cisalhamento é obtida pelo somatório das forças verticais que cruzam a fissura de cisalhamento.

$$F_e \sin \beta = A_{s1} f_{e1} + A_{s2} f_{e2} + \dots + A_{sn} f_{en} \quad (2.72)$$

onde:

β : ângulo entre F_e e o plano horizontal;

A_{sn} : área do n-ésimo elemento de combate ao cisalhamento;

f_{en} : tensão do n-ésimo elemento.

A componente horizontal é dada por:

$$F_e \cos \beta = F_{e1} \cos \beta_1 + F_{e2} \cos \beta_2 + \dots + F_{en} \cos \beta_n \quad (2.73)$$

Onde:

$$F_{en} = \frac{A_{sn} f_{en}}{\sin \beta_n} \quad (2.74)$$

Considerando $\cot \beta_n$ aproximadamente igual a $\frac{s_n}{(d - x)}$, sendo s_n a distância entre

o n-ésimo elemento da armadura de cisalhamento e a face do pilar, tem-se:

$$F_e \cos \beta = \frac{1}{(d - x)} (A_{s1} f_{e1} s_1 + A_{s2} f_{e2} s_2 + \dots + A_{sn} f_{en} s_n) \quad (2.75)$$

Adotando $x_1 = 0,33d$, obtém-se:

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{0,67d \sum_{i=1}^n A_{si} f_{ei}}{\sum_{i=1}^n A_{si} f_{ei} s_i} \right] \quad (2.76)$$

$$F_e = \frac{\sum_{i=1}^n A_{si} f_{ei}}{\operatorname{sen} \beta} \quad (2.77)$$

2.3.2.2. Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio horizontal, vertical e rotacional podem ser obtidas com base no modelo apresentado na Figura 2.35 e de acordo com as Equações 2.78 a 2.80:

a) Equação de equilíbrio horizontal

$$F_{sr(r=r_0)} + F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta \varphi = F_e \cos \beta + \xi F_{cr} \cos \alpha + F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta \varphi \quad (2.78)$$

b) Equação de equilíbrio vertical

$$\xi F_{cr} \operatorname{sen} \alpha + F_e \operatorname{sen} \beta = \frac{P \Delta \varphi}{2\pi} \quad (2.79)$$

c) Equação de equilíbrio rotacional

$$P \frac{\Delta \varphi}{2\pi} = \frac{z(F_{sr(r-r_0)} + F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta \varphi)}{r_3 - r_0} \quad (2.80)$$

onde:

$$\xi = (400/d)^{1/4} \quad (\text{size effect})$$

$$z = d - 0,45x$$

A soma dos momentos para determinação da equação de equilíbrio rotacional é feita em relação ao ponto do centro de rotação, conforme ilustrado na Figura 2.35, sendo que as

forças F_e (Força da armadura de cisalhamento) e F_{cr} (Força radial do concreto) são desconsideradas, pois produzem momentos desprezíveis devido à pequena distância entre suas linhas de ação e o centro de rotação.

2.3.2.3. Critérios de Ruptura

Gomes (1991) considera dois critérios de ruptura para a verificação de lajes submetidas à punção: critério de ruptura interna e critério de ruptura externa.

A ruptura que ocorre na região da armadura de cisalhamento é definida como ruptura interna e quando a ruptura ocorre externamente a armadura de cisalhamento é definida como ruptura externa.

a) Ruptura na região da armadura de cisalhamento

A ruptura interna à região da armadura de cisalhamento, abaixo da fissura de punção e próximo ao pilar, ocorre quando a tensão de cisalhamento τ atinge a resistência de deslizamento.

Esta tensão é dada por:

$$\tau = C - \mu\sigma \quad (2.81)$$

onde:

C : é a coesão interna do concreto $= f_c/4$ (BRAESTRUP, 1976);

μ é o coeficiente de fricção interna $= \tan\phi=0,75$ ($\phi=37^\circ$);

σ é a tensão normal no plano de deslizamento.

O trabalho externo, dado pelo produto da força pelo deslocamento, pode ser calculado por:

$$W_e = \sigma b t v \sin(\theta - \phi) \quad (2.82)$$

O trabalho interno pode ser expresso da seguinte forma:

$$W_i = v C \cos\phi \frac{\sin(90^\circ + \gamma)}{\sin(90^\circ - \theta - \gamma)} \quad (2.83)$$

Estabelecendo a igualdade entre trabalho externo e trabalho interno, tem-se:

$$\sigma = \frac{C \cos \varphi \operatorname{sen}(90^\circ + \gamma) b t}{\operatorname{sen}(\theta - \varphi) \operatorname{sen}(90^\circ - \theta - \gamma)} \quad (2.84)$$

O valor mínimo para θ é dado por:

$$\theta = \frac{\varphi + 90^\circ - \gamma}{2} \quad (2.85)$$

Substituindo a Equação 2.85 na Equação 2.84 tem-se:

$$\sigma_{\min} = \frac{C \cos \varphi \operatorname{sen}(90^\circ + \gamma)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{90^\circ - \gamma - \varphi}{2}\right)} = k f_c \quad (2.86)$$

O parâmetro k de ruptura interna é dado por:

$$k = 0,2 \frac{\operatorname{sen}(90^\circ + \gamma)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{53^\circ - \gamma}{2}\right)} \quad (2.87)$$

Sendo

$$\gamma = 25^\circ - \alpha \text{ para } \alpha \leq 12,5^\circ;$$

$$\gamma = \alpha \text{ para } \alpha \geq 12,5^\circ$$

O parâmetro k (Equação 2.87) deve ser comparado com η (Equação 2.56) para avaliação do critério de ruptura interna, segundo modelo proposto por Gomes (1991). Ocorrendo a igualdade, acontece a ruptura interna à região da armadura de cisalhamento da laje.

b) Ruptura externa à região de armadura de cisalhamento

A ruptura na região externa à armadura de cisalhamento ocorre quando a tensão normal máxima ($\sigma_{máx}$), na seção 1,35d, além da armadura de cisalhamento, atingem a resistência à compressão diametral do concreto (f_{sp}). Gomes (1991) obteve a definição desta seção com base em seus resultados experimentais.

A tensão normal máxima é expressa por:

$$\sigma_{máx} = \frac{1}{2} \sigma_x \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = f_{sp} \quad (2.88)$$

onde:

$$\sigma_x = \frac{H}{bh}$$

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{P\Delta\varphi}{bh}$$

$$H = F_{st(r_1 \rightarrow r_3)}\Delta\varphi - F_{ct(r_1 \rightarrow r_3)}\Delta\varphi$$

$$F_{st(r_1 \rightarrow r_3)}\Delta\varphi = F_{st(r_0 \rightarrow r_3)}\Delta\varphi - F_{st(r_0 \rightarrow r_1)}\Delta\varphi$$

$$F_{ct(r_1 \rightarrow r_3)}\Delta\varphi = F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)}\Delta\varphi - F_{ct(r_0 \rightarrow r_1)}\Delta\varphi$$

$$\text{Sendo } b = 2\pi r_1$$

2.5. ESTUDOS NUMÉRICOS

Na atual pesquisa em engenharia estrutural, as análises em elementos finitos são essenciais para complementar os estudos experimentais. Estas análises são capazes de fornecer informações sobre o comportamento estrutural, formação e propagação de fissuras, deflexões e possíveis mecanismos de falhas, resultados que não são possíveis nos testes experimentais. Tais análises, se bem calibradas, podem reproduzir um ensaio de um modo mais barato.

2.5.1. Shu *et al.* (2015)

A simulação numérica de Shu *et al.* (2015) baseou-se nos ensaios de lajes lisas de concreto armado de Fall (2014). Foram ensaiadas nove lajes octaédricas, com 1000 mm de lado, com a carga aplicada no centro da laje por uma placa metálica de 280 x 280 x 30 mm. As lajes foram apoiadas em 20 pontos e a resistência média à compressão foi de 50,9 MPa. As lajes possuíam barras de 6 mm, espaçadas a 96 mm na direção norte-sul e 194 mm na direção leste-oeste.

Por meio do *software* Diana 9.4.4, os autores modelaram as lajes em 3D com elementos sólidos. Em virtude da simetria e do tempo de processamento da estrutura, foi modelado apenas um quarto da laje. Conforme as Figuras 2.42 e 2.43, o sistema de carregamento e apoios foram modelados utilizando interface entre os elementos.

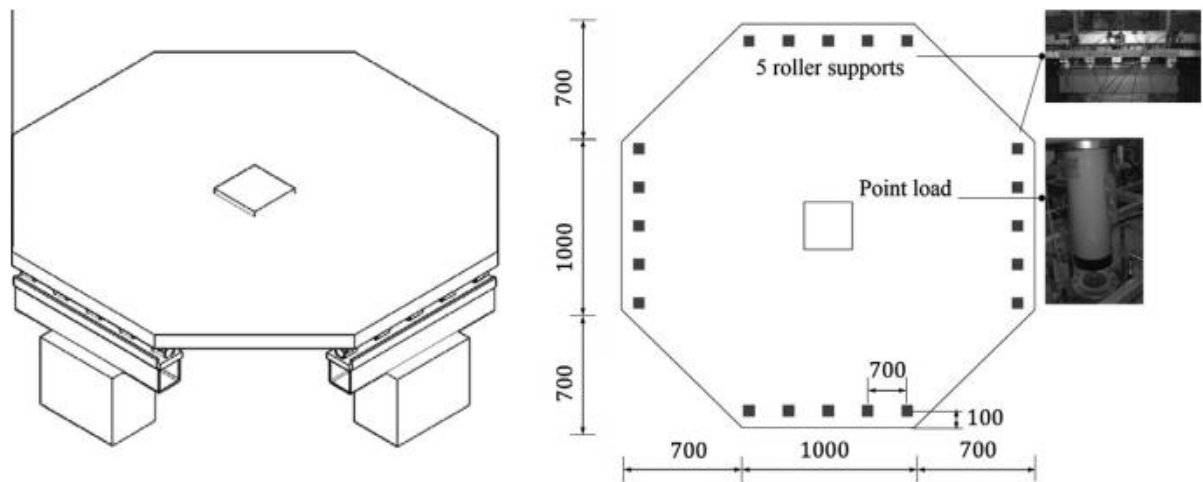


Figura 2.42 – Modelo em elementos finitos da laje ensaiada.

Fonte: Shu et al. (2015).

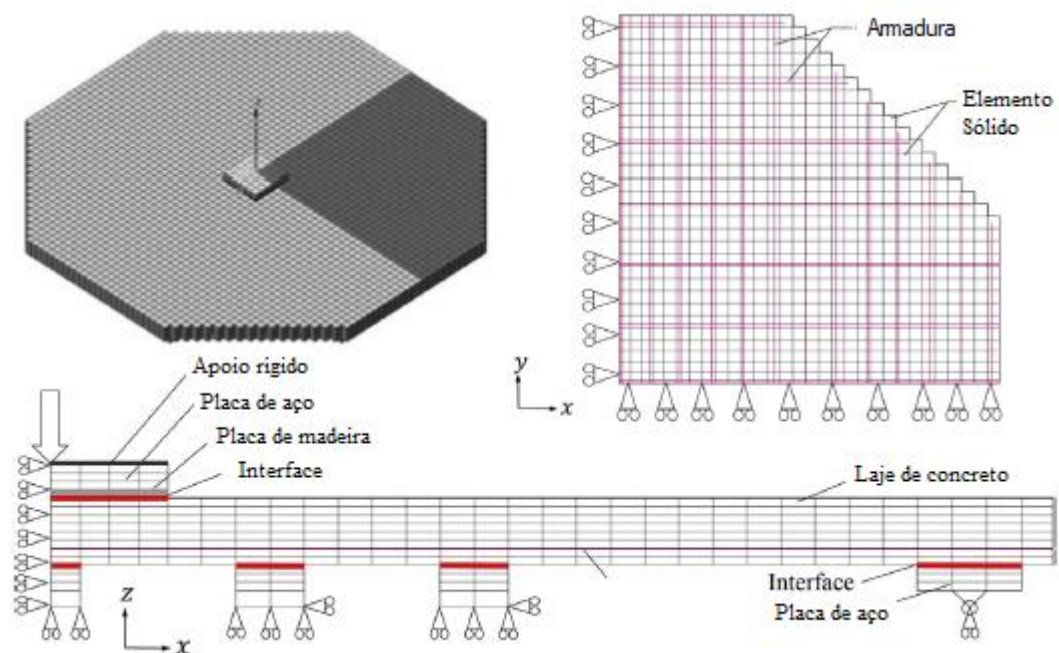


Figura 2.43 – Modelo em elementos finitos da laje ensaiada.

Fonte: Shu et al. (2015).

O concreto foi modelado baseado no modelo de fissuração *total strain rotating*, e o modelo constitutivo adotado foi desenvolvido por Vecchio & Collins (1986). A influência da não-linearidade geométrica foi incluída neste estudo devido a grandes deflexões observadas durante os testes. Os parâmetros relativos ao modelo do material do concreto, como *crack band*, foram incluídos para estudar o efeito na modelagem.

Shu *et al.* (2015) comparou carga *versus* deslocamento, variando a largura da *crack band*, coeficiente *Poisson*, tamanho do elemento utilizado, armaduras como barras ou em *grids*, modelo de vinculação e a rigidez dos apoios.

Na figura 2.44, as curvas "Oeste", "Leste", "Norte" e "Sul" indicam os resultados do teste experimental e numérico. Pode-se observar que a força de reação foi distribuída mais uniformemente sobre os apoios na direção norte-sul do que na direção leste-oeste. Tal distribuição poderia ser esperada, pois a armadura mais densa possibilita melhor transferência de carga para suportar após a fissura. Nos testes, observou-se que as fissuras percorreram a direção norte-sul.

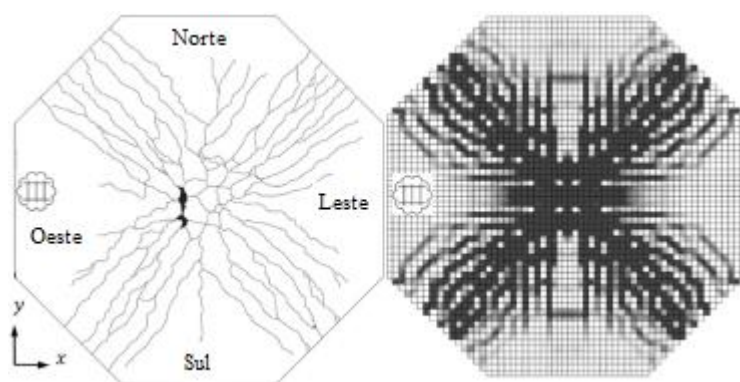


Figura 2.44 – Fissuras desenvolvidas nas lajes.

Fonte: Shu *et al.* (2015).

Comparando os resultados da análise com elementos finitos aos resultados do experimento, os autores concluíram que os modelos foram capazes de prever a capacidade de carga, o padrão de fissuração e a distribuição da carga das lajes nas duas direções com precisão razoável.

O modelo também foi capaz de descrever o padrão de fenda nos estágios inicial e final, mas não conseguiu prever o número exato de rachaduras no estágio final. A análise descreveu corretamente a distribuição da força de reação entre as duas direções principais, proporcionalmente à quantidade de reforço nas diferentes direções. No entanto, a distribuição da força de reação ao longo das arestas de suporte pode ser descrita corretamente somente depois de ajustar a rigidez vertical dos suportes.

Através do estudo de parâmetros, Shu *et al.* (2015) concluiu que a capacidade prevista pela análise da laje armada em duas direções foi significativamente afetada por parâmetros como a não-linearidade geométrica, a largura *crack band* e pelo coeficiente *Poisson*. A não-linearidade geométrica deve ser incluída quando ocorrem grandes deformações. A

largura da *crack band* pode ser assumida como a distância média das fissuras quando a armadura de flexão é utilizada.

Supondo que o tamanho do elemento como largura da *crack band* resultasse em uma superestimação da carga final, a utilização de uma proporção reduzida do coeficiente de *Poisson* levou a resultados mais próximos, mas um pouco de superestimação. O padrão de fissuração na análise foi influenciado pelo tamanho do elemento, forma do elemento, ordem dos elementos, se a armadura foi modelada com barras individuais ou como uma grade, bem como se a interação total ou não foi assumida entre o concreto e a armadura. (Shu *et al.* (2015))

2.5.2. Genikomsou e Polak (2016)

O trabalho foi feito com análise de elementos finitos no software *Abaqus* para lajes reforçadas ao cisalhamento e foi limitado devido à complexidade dos modelos de elementos finitos não-lineares e devido à dificuldade em modelar o reforço de cisalhamento. Foram feitas simulações 3D de elementos finitos de quatro lajes lisas de concreto armado (SB1, SB2, SB3 e SB4) que foram previamente testadas por Adetifa e Polak (2005). A laje SB1 não possuía armadura de cisalhamento e as lajes SB2, SB3 e SB4 possuíam 2, 3 e 4 linhas com distribuição da armadura em forma de cruz, conforme Figura 2.45.

O principal objetivo desta pesquisa é fornecer informações e propor métodos avançados de modelagem do reforço de cisalhamento das lajes e, em particular, dos chumbadores de cisalhamento.

Todas as lajes possuem 1800 x 1800 x 120 mm e o pilar 150 x 150 mm, a armadura de cisalhamento utilizada nos testes experimentais foi chumbadores espaçados a cada 80 mm, eles possuíam 9,5 mm de diâmetro e foram fixados nas lajes pós concretagem. A laje SB4 foi considerada como a amostra de controle para as lajes com armadura de cisalhamento e para a modelagem do chumbador. Foram examinados quatro modos numéricos diferentes para modelar o sistema de parafusos de cisalhamento. O concreto no pilar foi simulado como elástico linear para evitar problemas numéricos como falha na própria coluna.

As questões levantadas acerca dos chumbadores foram: (1) que tipo de elementos finitos (*trusses/beams/shells/solids*) deve ser usado para modelar os parafusos de cisalhamento, (2) que tipo de geometria devem ser adotadas, e (3) que tipo de restrições devem ser aplicadas.

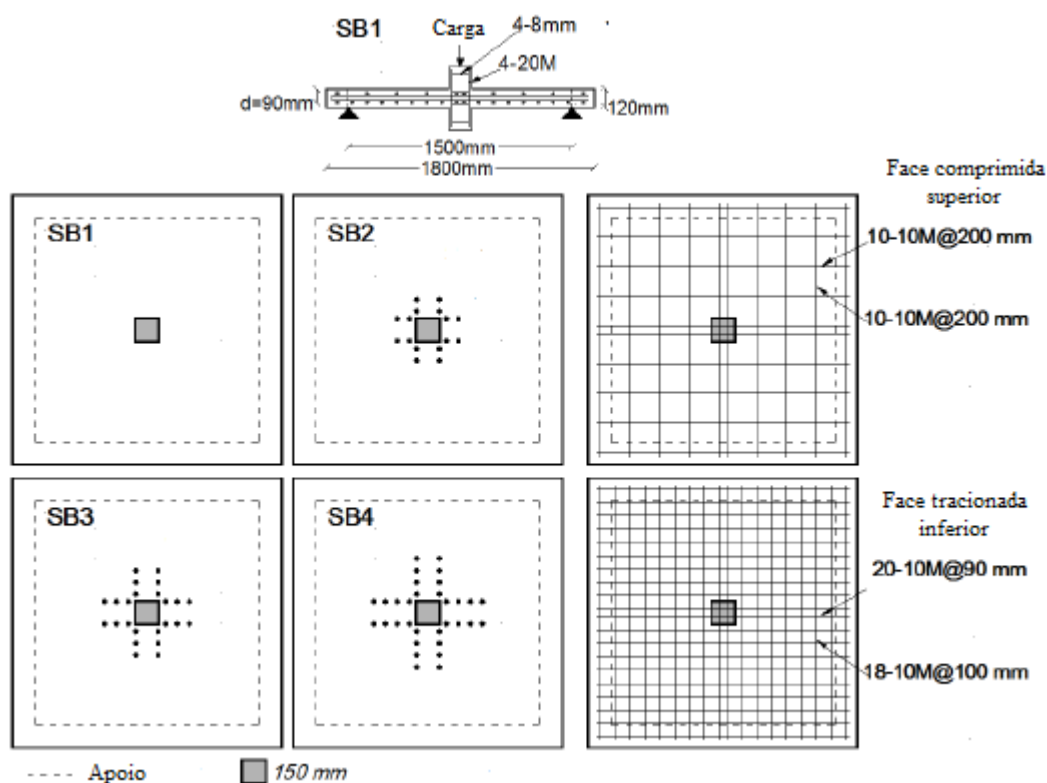


Figura 2.45 - Desenho esquemático das lajes.

Fonte: Genikomsou e Polak (2016).

Foi utilizado o modelo linear *truss* para simular os chumbadores, contudo, uma desvantagem apresentada foi que eles recebem apenas cargas de tração e compressão, não há resistência à flexão devido aos três graus de liberdade. No entanto, foram utilizados elementos adicionais nos nós para resolver este problema, conforme Figura 2.46.

Como segunda opção, os chumbadores foram modelados com resistência à flexão, modelos *beam* que possuem 6 graus de liberdade.

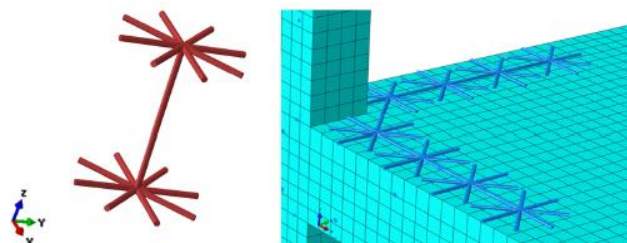


Figura 2.46 - Truss/beam, configuração da armadura de cisalhamento.

Fonte: Genikomsou e Polak (2016).

Elementos de *shell* também foram adotados para modelar a armadura de cisalhamento. Os chumbadores foram considerados como uma chapa de espessura constante. Foi calculada igual à área da seção transversal do chumbador dividido pelo espaçamento entre

eles. A Figura 2.47 ilustra a configuração do parafuso de cisalhamento usando elementos de *shell*.

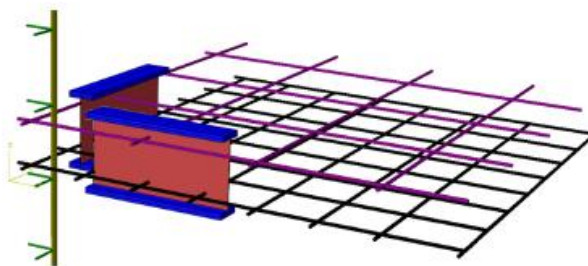


Figura 2.47 - Elementos de *shell* simulando a armadura de cisalhamento.

Fonte: Genikomsou e Polak (2016).

A última solução examinada para simular os parafusos de cisalhamento foi usar elementos sólidos em 3D, como apresentado na Figura 2.48. O diâmetro do parafuso é de 9,5 mm, e os diâmetros do sólido superior e inferior são de 30 mm e 44 mm, respectivamente. As restrições de ligação são adotadas para modelar a interação entre o parafuso e a superfície da laje e o contato entre as diferentes partes do parafuso. As restrições unem duas superfícies separadas para que nenhum movimento relativo entre elas exista.

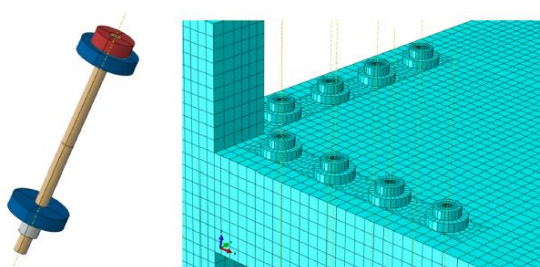


Figura 2.48 - Elementos sólidos simulando a armadura de cisalhamento.

Fonte: Genikomsou e Polak (2016).

A comparação entre carga *versus* deslocamento da laje SB4 dos modelos adotados pode ser vista na Figura 2.49. Com base na resposta obtida o uso do elemento *beam* representou melhor o ensaio experimental. Os elementos *truss* utilizados não contribuem com o aumento da resistência à punção, no entanto eles melhoram a ductilidade da laje.

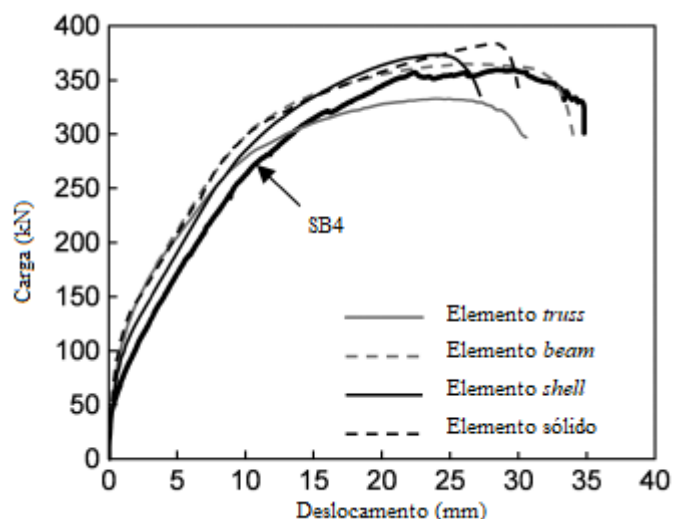


Figura 2.49 - Carga versus deslocamento da laje SB4 por diferentes modelos da armadura de cisalhamento.

Fonte: Genikomsou e Polak (2016).

Genikomsou e Polak (2016) mostraram que a análise de elementos finitos fornece uma ferramenta útil que permite uma visão sobre o comportamento e a ruptura do cisalhamento. No entanto, a modelagem adequada do concreto e da armadura de cisalhamento deve ser considerada para obter uma precisão numérica. Após a modelagem dos chumbadores de quatro formas diferentes, percebeu-se que a modelagem aplicável às lajes SB2, SB3 e SB4 foi com o modelo *beam*. Este tipo de modelagem pode ser aplicável também para modelar outros tipos de armadura de cisalhamento.

2.5.3. Shu et al. (2016)

O estudo fez a análise numérica de lajes sem armadura de cisalhamento, testadas por Guandalini e Muttoni (2004). Onze lajes foram testadas com três tamanhos diferentes. O primeiro grupo (PG1, PG2b, PG4, PG5, PG10 e PG11) possui 3000 x 3000 x 250 mm, segundo grupo (PG6, PG7, PG8 e PG9) tem dimensões de 1500 x 1500 x 125 mm e uma laje, PG3 possui 6000 x 6000 x 500 mm.

A modelagem numérica foi realizada por meio do *software* Diana 9.5, para realização de modelos de laje em 3D. Para reduzir o tempo de processamento e aproveitar a simetria, foi modelado apenas um quarto da laje. As armaduras foram modeladas como barras e com aderência perfeita ao concreto. As condições de contorno e a aplicação de deslocamento podem ser vistas na Figura 2.50. Foi utilizado um incremento de deslocamento de 0,1 mm até

o surgimento da primeira fissura e depois adotou-se deslocamento de 0,5 mm. A análise foi executada com o método de Newton-Raphson.

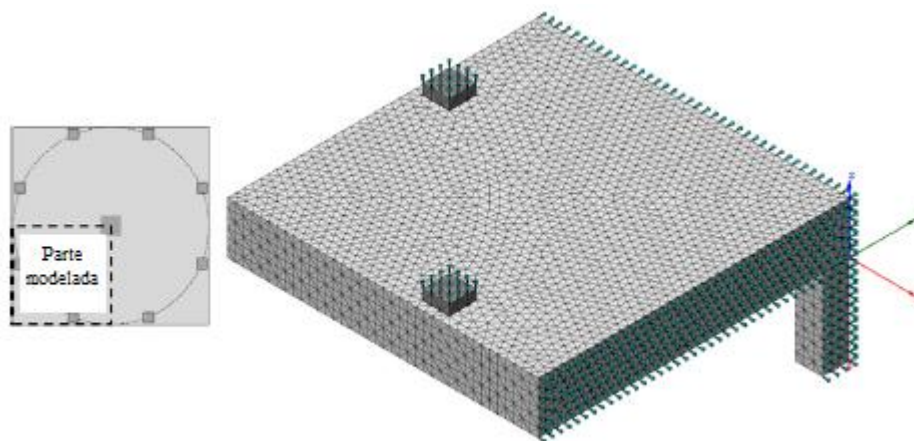


Figura 2.50 - Modelo numérico da laje SB1.

Fonte: Shu et al. (2016).

As comparações entre carga e deslocamentos calibrados de acordo com o modelo experimental podem ser vistas na Figura 2.51. Para a laje PG1, a rigidez da curva representa o comportamento do teste, mas a capacidade de carga da laje do teste ficou subestimada em 28 %. Na laje PG2b, tanto a rigidez como a capacidade de carga foram semelhantes ao resultado experimental, apenas a deflexão final ficou subestimada.

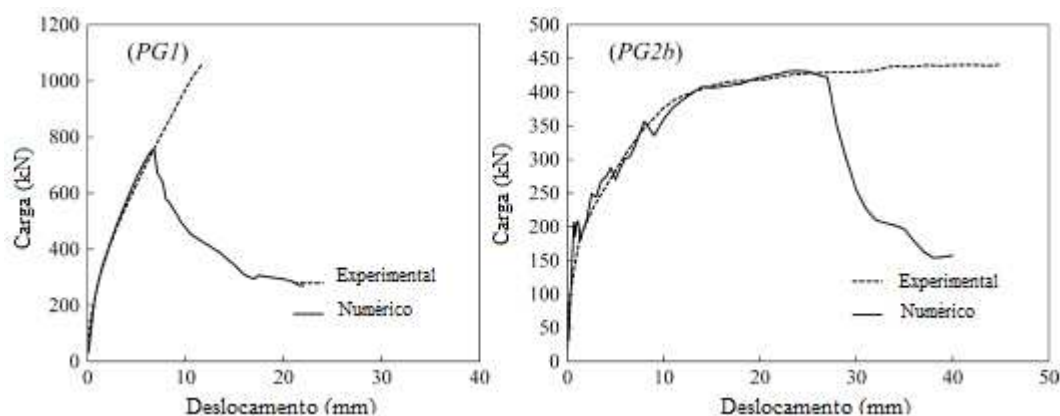


Figura 2.51 - Comparação carga versus deformação experimental e numérico.

Fonte: Shu et al. (2016).

Os padrões de fissuração após a ruptura do modelo de referência e os experimentais também foram comparados (ver Figura 2.52). Isso indica que o modelo numérico foi capaz de simular a propagação de fissuras de cisalhamento em geral, mesmo que a direção das fissuras

críticas não sejam as mesmas; na análise experimental, a fissura de cisalhamento é menos inclinada que na análise feita no *software* Diana 9.5.

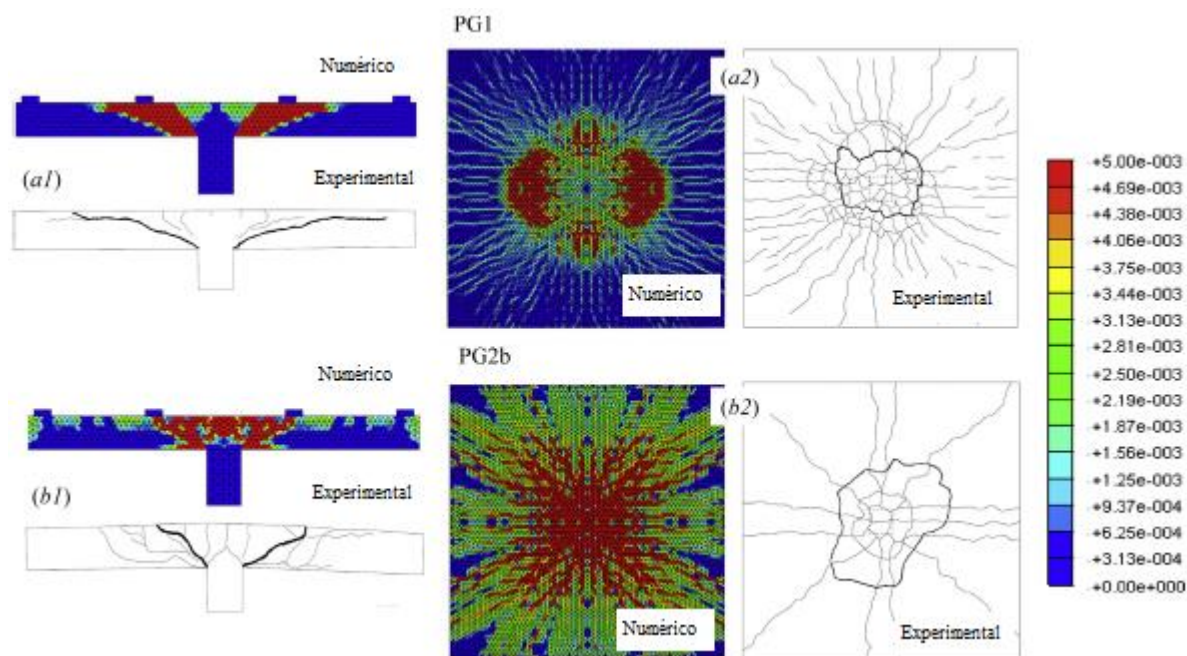


Figura 2.52 – Comparação entre as fissuras pós ruptura numérico e experimental das lajes PG1 e PG2b.
Fonte: Shu et al. (2016).

Os autores também investigaram qual a influência da porcentagem da armadura de flexão na capacidade de resistir à punção. A análise numérica refletiu qualitativamente a mesma mudança no comportamento estrutural que os testes, embora a capacidade seja subestimada para altos índices de armadura; quando a taxa de armadura aumenta de 0,25 % (PG2b) para 1,5 % (PG1), tanto a rigidez quanto a resistência à punção aumentam e a ductilidade diminui.

Os resultados do estudo mostraram que o comportamento estrutural realizado por análise de elementos finitos foi significativamente afetado por diferentes escolhas dos parâmetros. Para o modelo de fissuração *Total Strain Rotating*, a energia da fratura foi um importante fator de influência. Para o modelo de *Total Strain Fixed*, a capacidade à punção foi consideravelmente afetada pelo fator de retenção ao cisalhamento.

3. PROGRAMA EXPERIMENTAL

3.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Neste capítulo descreve-se o programa experimental, com o objetivo de avaliar o comportamento de lajes lisas apoiadas em pilares com carregamento simétrico. Os ensaios foram realizados no Laboratório de Estruturas da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, analisando a influência do posicionamento, tamanho e quantidade de aberturas na resistência à punção de laje lisa.

Foram ensaiadas nove lajes lisas de concreto armado, quadradas, com dimensões de 1800 mm x 1800 mm de comprimento e 130 mm de espessura, dentre estas, cinco lajes possuíam abertura e armadura de cisalhamento. As lajes e o esquema de ensaio adotados são semelhantes aos utilizados por Souza (2004), Musse (2004) e Silva *et al.* (2017), e procuraram simular uma região de momento *fletor* negativo, delimitada pelos pontos de inflexão com um comprimento de aproximadamente dois quintos (2×825 mm) do vão total entre pilares (4125 mm), conforme Figura 3.1.

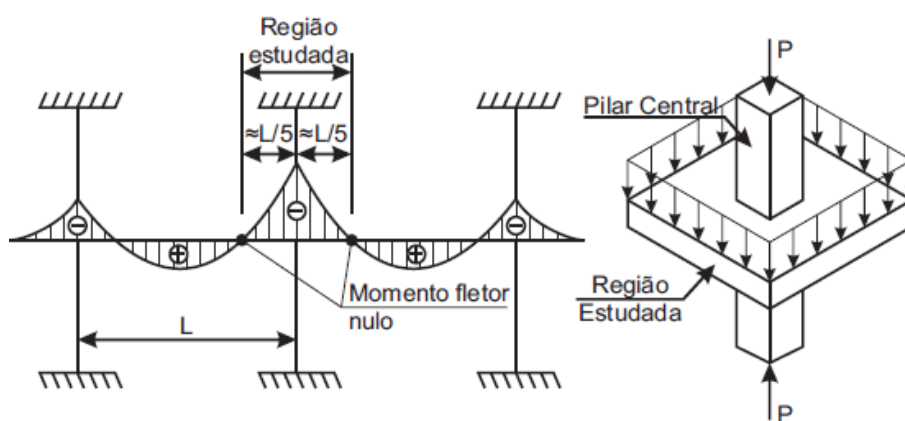


Figura 3.1 – Pórtico hipotético caracterizando a região estudada da pesquisa.

Fonte: Silva *et al.* (2017).

Dentre as lajes ensaiadas, duas não possuem abertura (lajes de referência) e sete possuem aberturas. Três lajes não possuem armadura de cisalhamento e seis possuem armadura de cisalhamento. As lajes foram divididas em dois grupos, Grupo 1 e Grupo 2. O primeiro grupo são as lajes que não possuem armadura de cisalhamento e o segundo grupo são as lajes que possuem armadura de cisalhamento.

3.2. CARACTERÍSTICAS DOS MODELOS ENSAIADOS

As principais variáveis das lajes são a existência ou não de aberturas, tamanho da abertura, quantidade de aberturas, utilização de armadura de cisalhamento e taxa de armadura de flexão, que depende do tamanho da abertura. A área que representa o pilar de 150 mm x 150 mm, simulado por uma placa metálica posicionada na parte inferior da laja, manteve-se constante. Foi adotado aberturas de 75, 100 e 150 mm por ser as dimensões usuais das tubulações hidráulicas presentes no mercado. As características das lajes dos grupos 1 e 2 estão representadas nas Figuras 3.2 e 3.3.

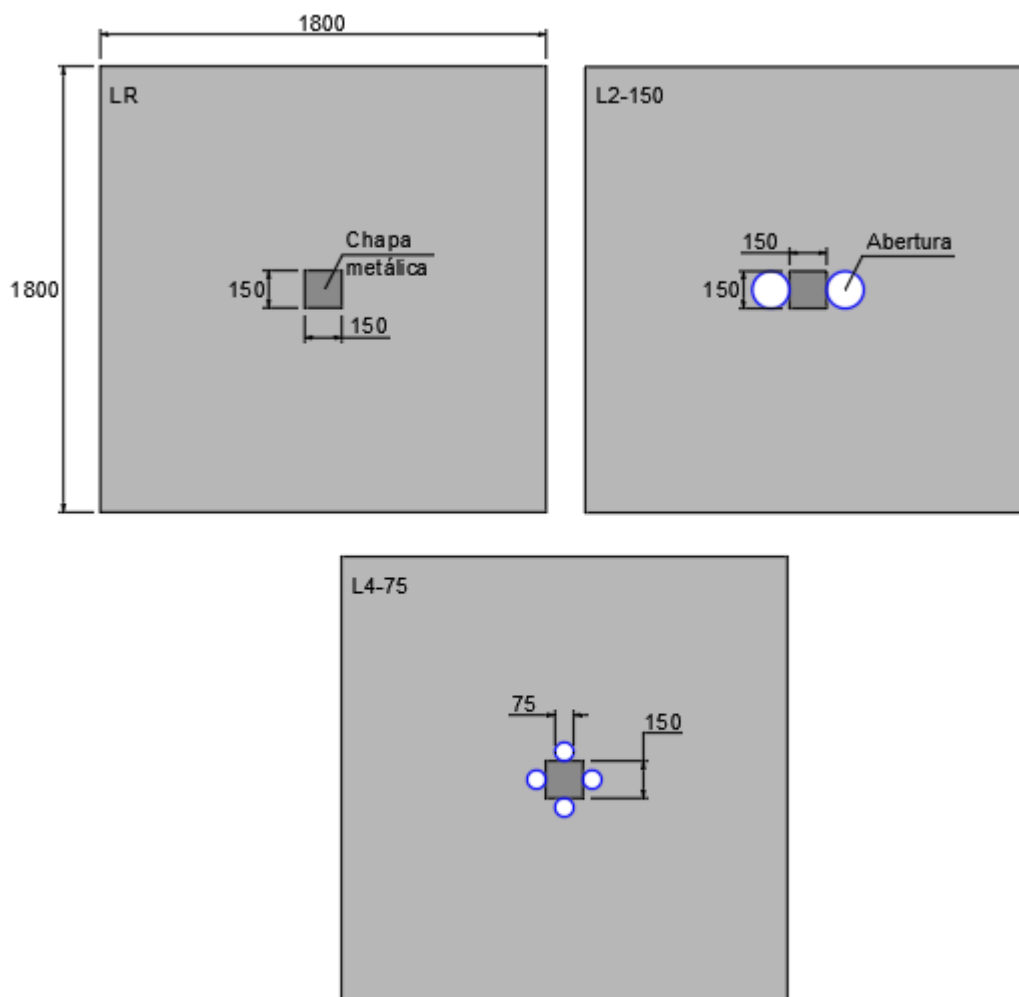


Figura 3.2 - Modelos das lajes do Grupo 1. Unidades em mm.

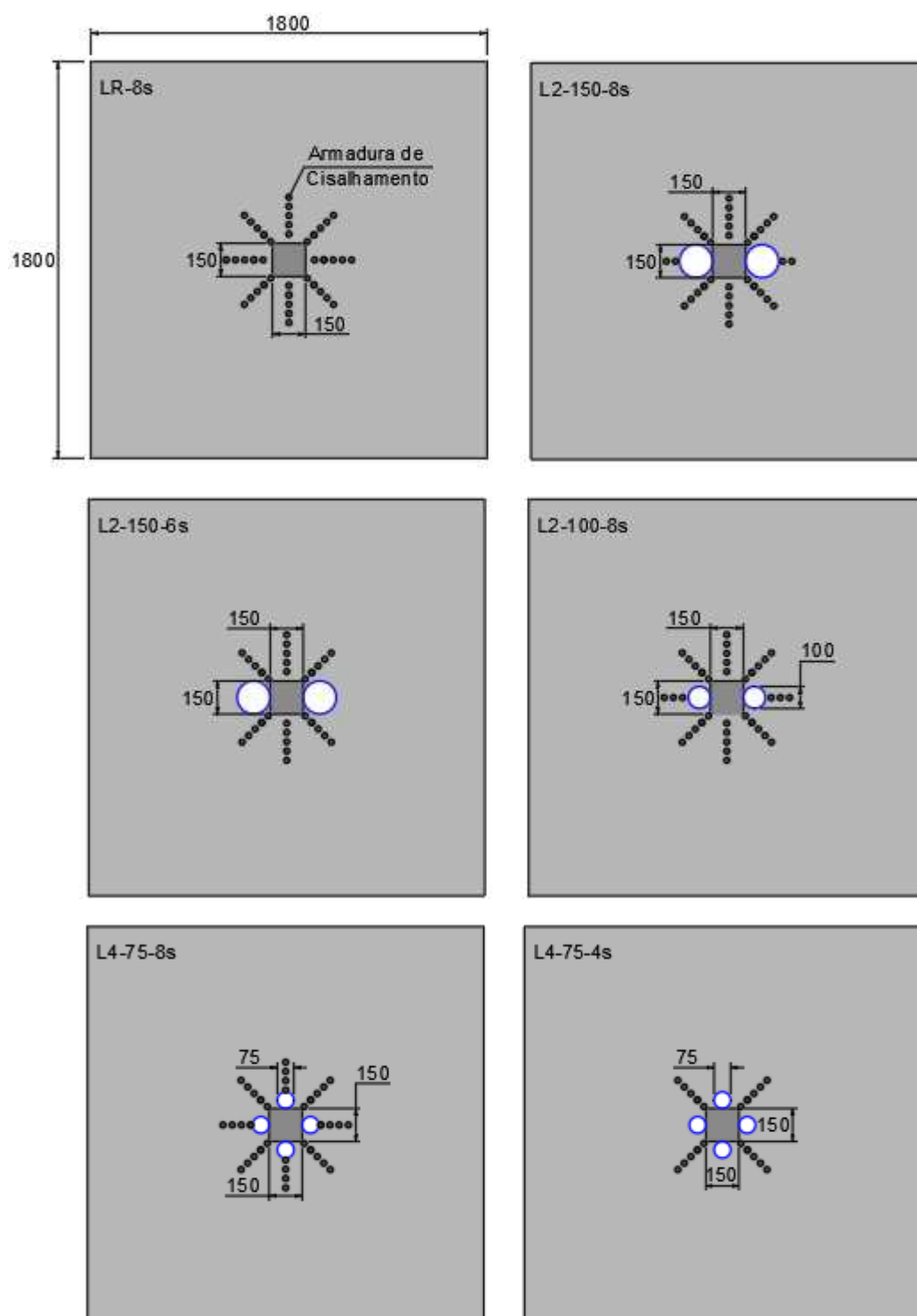


Figura 3.3 - Modelo das lajes do Grupo 2. Unidades em mm.

A nomenclatura de cada laje foi definida da seguinte forma: LR, para laje referência e para as demais lajes o nome traz a quantidade de aberturas, o diâmetro da abertura e a quantidade de linhas de armadura de cisalhamento, respectivamente. A nomenclatura da laje L2-150-8s representa que ela possui duas aberturas de 150 mm de diâmetro e oito linhas de

armadura de cisalhamento. Na Tabela 3.1 estão apresentadas as características principais das lajes.

Tabela 3.1 - Características principais das lajes.

Grupo	Laje	Dimensões do pilar		Altura efetiva “d” (mm)	ρ (%) ⁽¹⁾	Quantidade de abertura	Dimensão da abertura	AC ⁽²⁾ “stud”
		a (mm)	b (mm)					
1	LR	150	150	90	1,58	-	-	não
	L2-150	150	150	91	1,17	2	150	não
	L4-75	150	150	93	1,29	4	75	não
2	LR-8s	150	150	90	1,58	-	-	sim
	L2-150-8s	150	150	90	1,19	2	150	sim
	L2-150-6s	150	150	90	1,19	2	150	sim
	L2-100-8s	150	150	90	1,19	2	100	sim
	L4-75-8s	150	150	90	1,58	4	75	sim
	L4-75-4s	150	150	90	1,58	4	75	sim

⁽¹⁾ $\rho = \sqrt{\rho_x \rho_y}$, taxa de armadura calculada com a largura de acordo com “d”

⁽²⁾ AC: Armadura de Cisalhamento.

3.3. ESQUEMA DE ENSAIO

Com o objetivo de simular uma laje centrada, utilizaram-se oito apoios equidistantes do centro da laje. A aplicação da carga foi realizada de baixo para cima, utilizando-se um atuador hidráulico com capacidade de 1000 kN. Sobre o atuador hidráulico foi utilizada uma célula de carga com capacidade de 500 kN. O cilindro hidráulico, célula de carga e placa metálica ficaram com seus centros de cargas coincidindo com o eixo da chapa metálica, que representa o pilar, e da laje.

Este arranjo foi admitido para propiciar uma melhor distribuição dos esforços e a aproximar da situação estudada, apresentada na Figura 3.1. Para que o sistema de vigas metálicas reagisse apenas nos oito pontos adotados, utilizaram-se placas metálicas com dimensões de 120 x 170 mm, localizadas entre as vigas metálicas e as lajes, conforme a Figura 3.4.



Figura 3.4 – Vista superior da laje. Dimensões em mm.

Nas Figuras 3.5 e 3.6 estão apresentadas uma fotografia do esquema de ensaio e o desenho do esquema de ensaio.

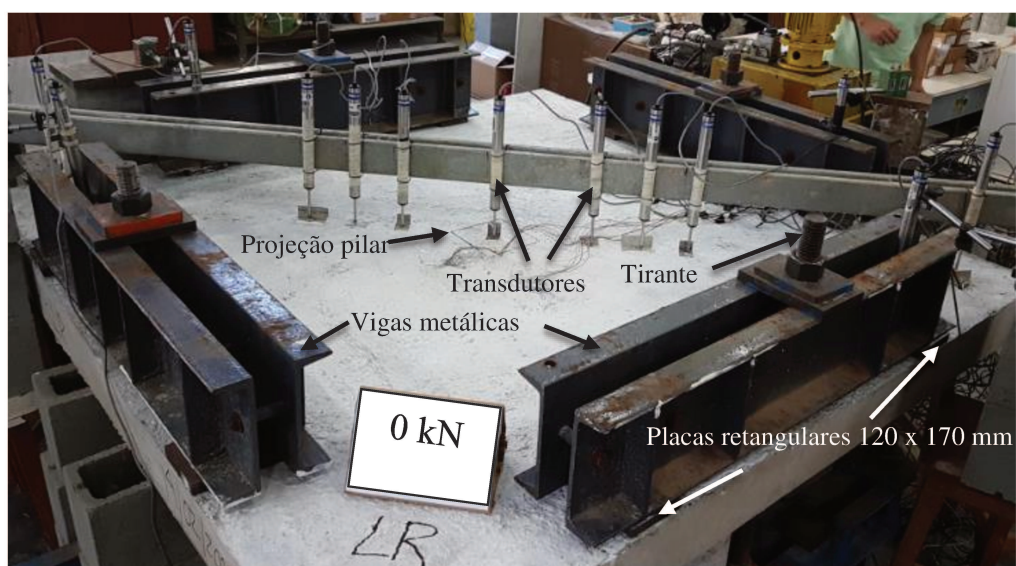


Figura 3.5 - Fotografia do esquema de ensaio.

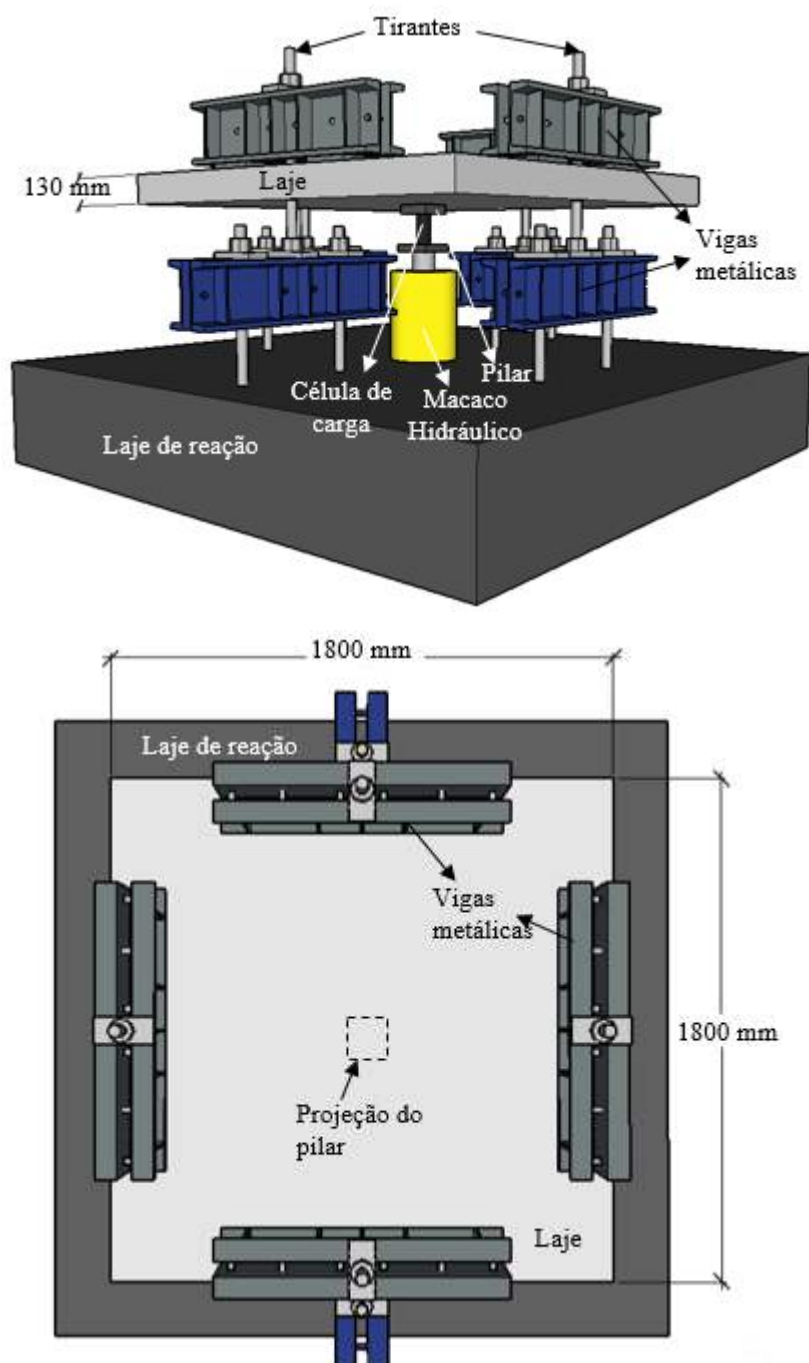


Figura 3.6 - Esquema de ensaio. Vista lateral e superior.

A preparação para realização do ensaio seguiu as seguintes etapas principais:

- Posicionamento da laje, apoiando-a nos blocos;
- Fixação das oito placas de apoio com gesso;
- Marcação da projeção da área de carregamento e dos pontos das leituras dos deslocamentos verticais;
- Montagem do sistema de reação, colocação das vigas e tirantes;

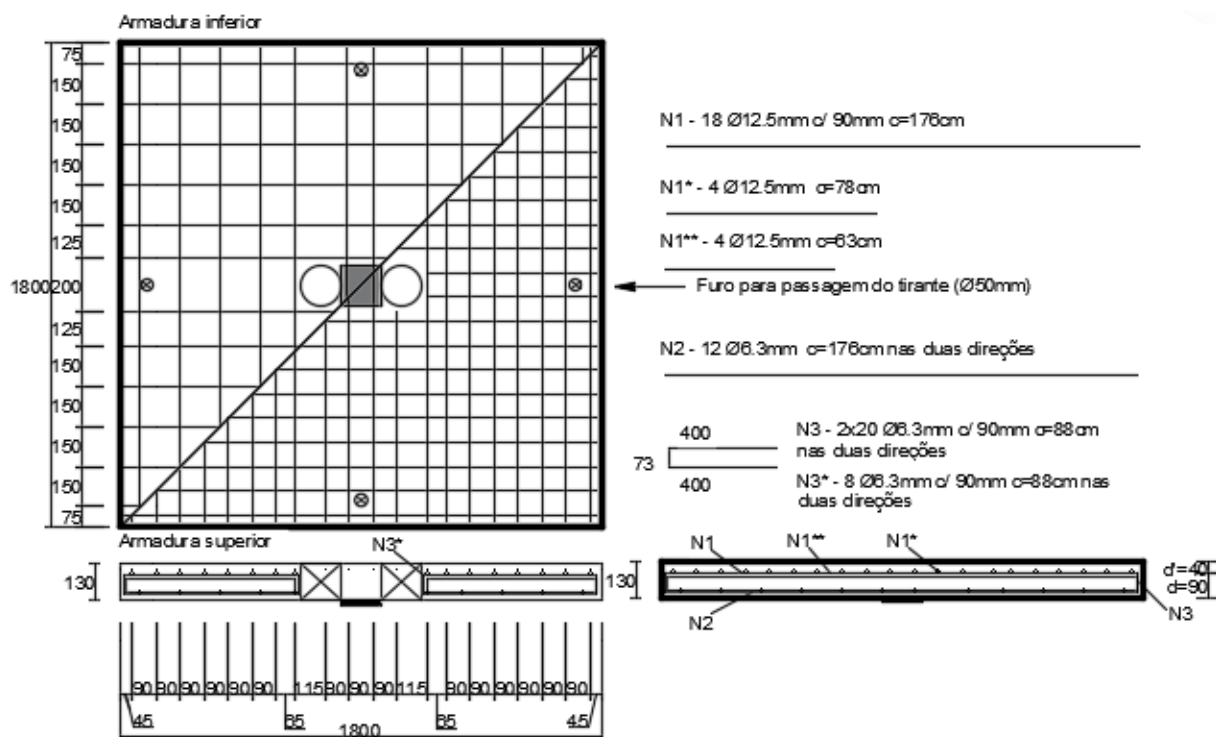


Figura 3.8 - Armadura de flexão da laje L2-150, L2-150-8s e L2-150-6s.

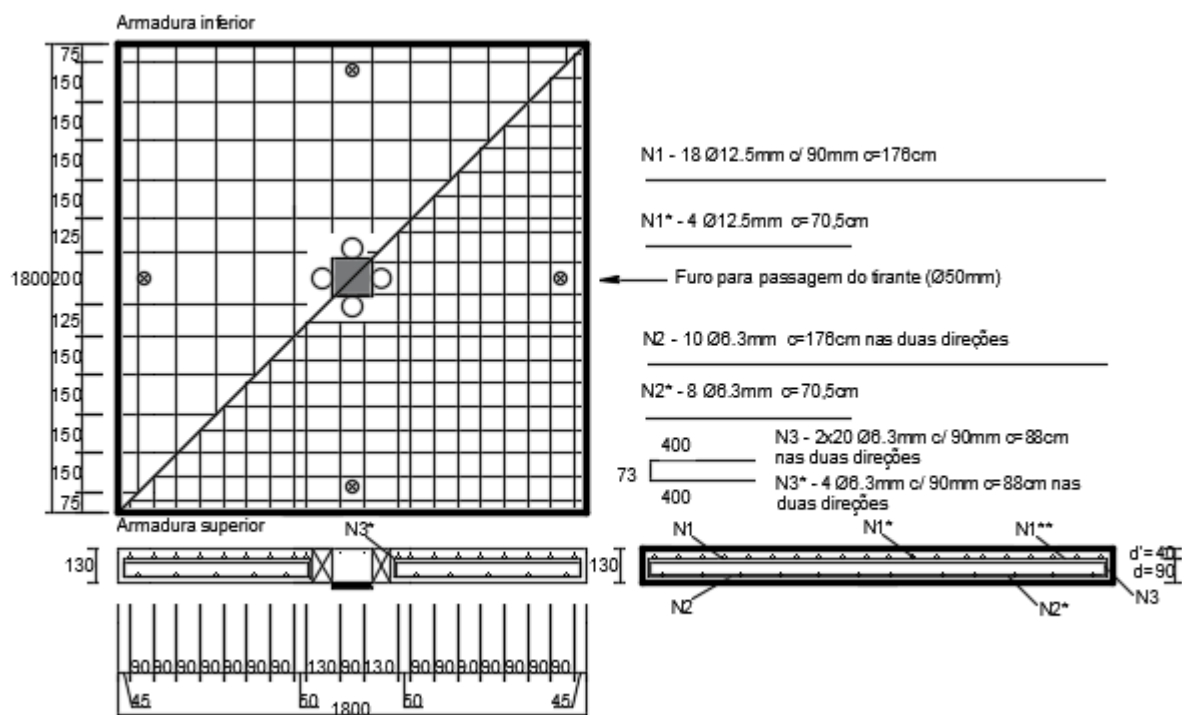
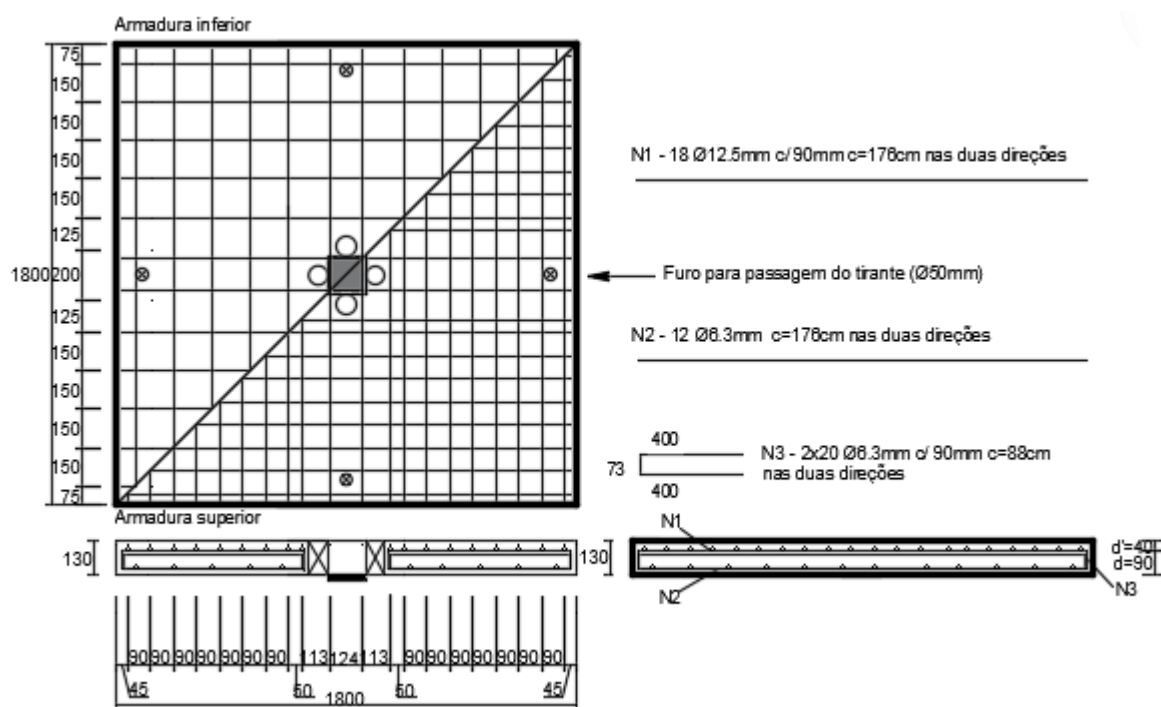
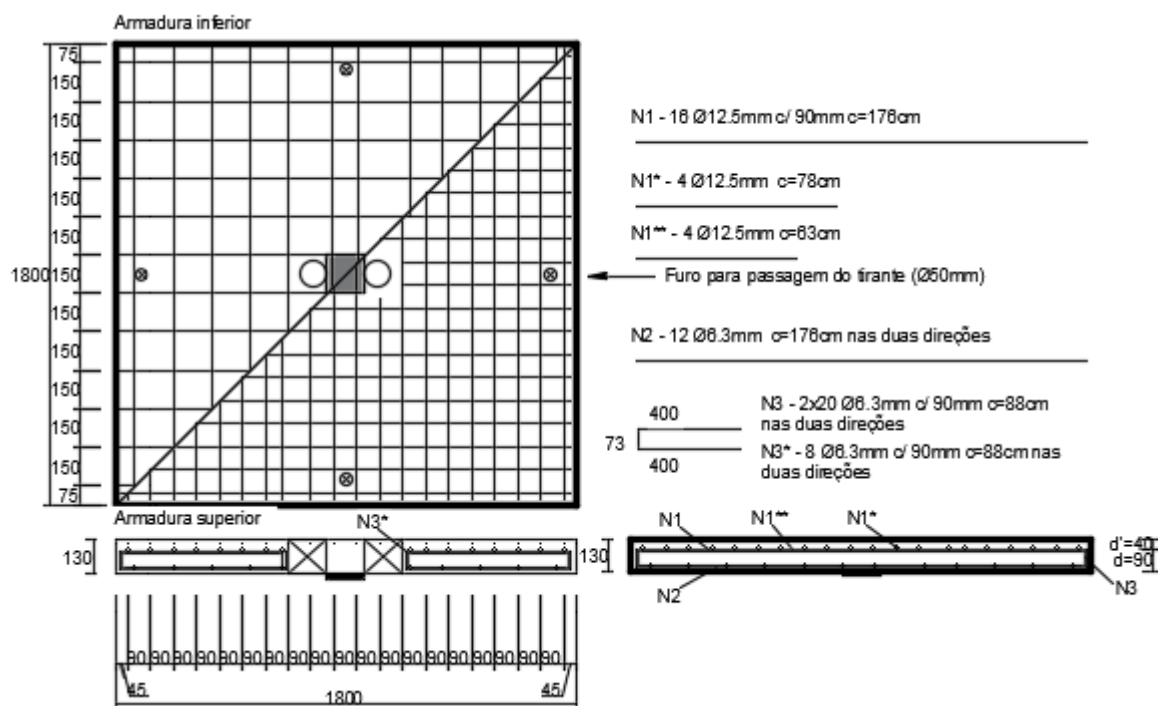


Figura 3.9 - Armadura de flexão da laje L4-75.



3.4.2. Armadura de Cisalhamento

A armadura de cisalhamento utilizada nas lajes do Grupo 2 foi do tipo “stud”, composta por barras de aço CA-50 de 8 mm de diâmetro e comprimento de 85 mm. Foram soldadas, em suas extremidades, chapas de aço de 30 mm de largura e 10 mm de espessura. A altura total dos *studs* é de 105 mm. Os *studs* foram confeccionados de forma a garantir a ancoragem da armadura de cisalhamento no decorrer do ensaio.

As dimensões da chapa de ancoragem seguem recomendações de Gomes (1991), ou seja, que a chapa tivesse uma área de ancoragem com largura três vezes o diâmetro da barra do *stud* e uma espessura com dimensão de uma vez o diâmetro da barra.

Na Figura 3.12 é apresentado um desenho com as dimensões para a confecção da armadura de cisalhamento e na Figura 3.13 pode-se visualizar a fotografia de um *stud* pronto.

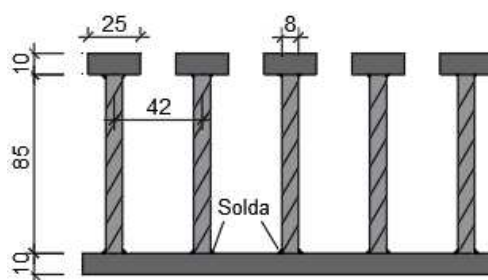


Figura 3.12 – Dimensões das armaduras de cisalhamento (mm).



Figura 3.13 - Fotografia da armadura de cisalhamento.

A armadura de cisalhamento foi posicionada de maneira que envolvesse a armadura de flexão. Na Figura 3.14 apresentam-se as dimensões adotadas no posicionamento dos *studs*. A distância do primeiro elemento à face do pilar (S_0) e a distância entre elementos (S) foi de 42 mm, o mesmo valor adotado por Silva (2003).

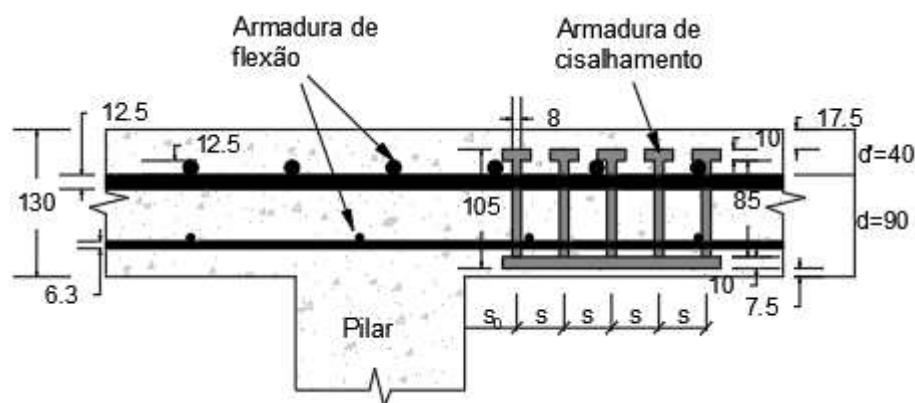


Figura 3.14 - Posicionamento da armadura de cisalhamento.

A distribuição da armadura de cisalhamento foi radial, com, no máximo, 5 camadas (5 barras para cada linha) em todas as lajes. As lajes LR-8s, L2-150-8s, L2-100-8s e L4-75-8s possuem 8 linhas, a laje L2-150-6s e a laje L4-75-4s contém 6 e 4 linhas, respectivamente. Nem todas as lajes com abertura possuem linhas com cinco camadas, a quantidade de camadas depende do tamanho da abertura. Na Figura 3.15 está apresentada a armadura de cisalhamento da laje LR-8s na fôrma pronta para receber o concreto.



Figura 3.15 – Armadura de cisalhamento da laje LR-8s posicionada para receber o concreto.

O ângulo formado entre as linhas distribuídas equidistantes radialmente foi de 45°. A laje L4-75-4s, que possui 4 linhas, a distribuição da armadura de cisalhamento foi radial com ângulo de 90°. Na Figura 3.16 é mostrada a distribuição da armadura de cisalhamento, caracterizando as dimensões dos pilares, algumas distâncias importantes como S_0 , S (distância do primeiro elemento ao centro do pilar) e a distância radial entre os *studs*.

Todos os *studs* utilizados foram confeccionados com diâmetro de 8 mm, totalizando uma área de aço por camada (A_{sw}/s) igual a 402 mm², 301 mm² e 201 mm², para lajes com 8, 6

e 4 linhas, respectivamente. A área de aço por camada multiplicada pela tensão de escoamento do aço, parcela resistente do aço ($A_s f_y$) para todas as lajes foi igual a 215,4 kN, 161,6 kN e 107,8 kN, para as lajes com 8, 6 e 4 linhas, respectivamente. O valor adotado para a tensão de escoamento foi obtido de acordo com os ensaios de tração realizados em amostras das barras de aço, que será apresentado no capítulo 4.

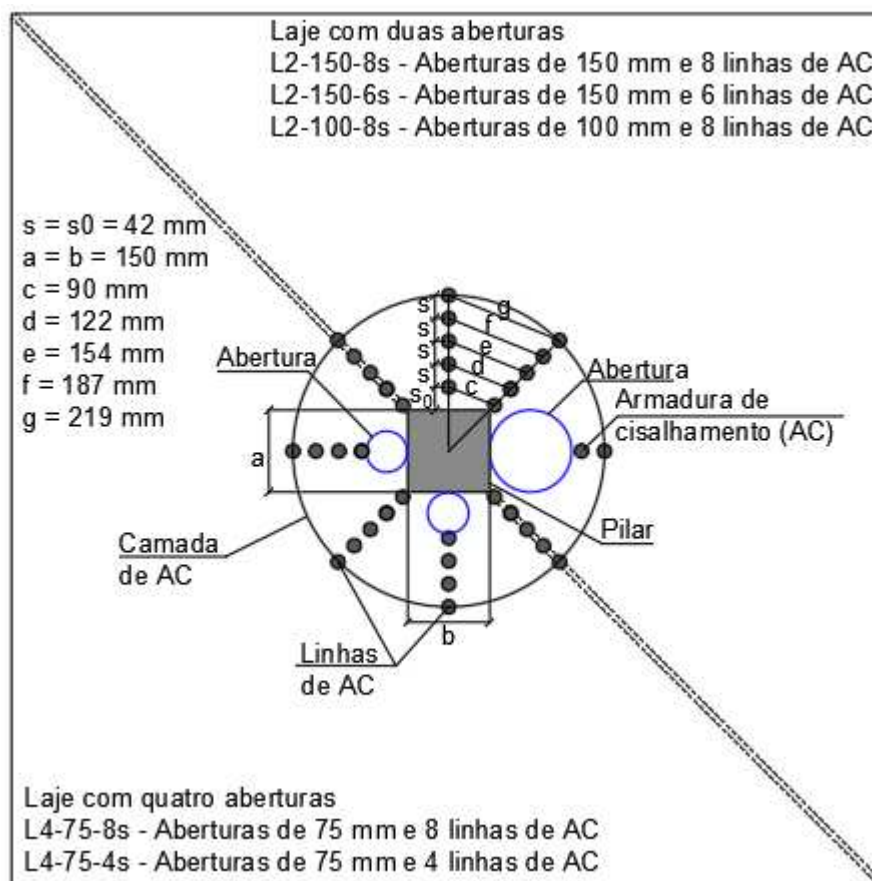


Figura 3.16 – Distribuição da armadura de cisalhamento

3.5. MATERIAIS

3.5.1. Concreto

Para a moldagem das lajes foi utilizado concreto com resistência à compressão aos 28 dias da ordem de 40 MPa, fornecido por uma empresa de serviços de concretagem local. A concretagem foi realizada em duas etapas, a primeira concretagem foi das lajes do Grupo 1 e a segunda das lajes do Grupo 2. Para determinar as propriedades mecânicas do concreto (resistência à compressão, tração e módulo de elasticidade) foram confeccionados corpos de

prova e foram ensaiados nas idades de 7, 14, 21 e 28 dias e seguindo as normas brasileiras NBR 5739 (2007), NBR 7222 (2011) e NBR 8522 (2008). A Figura 3.17 é uma fotografia da laje após a concretagem.



Figura 3.17 - Fotografia após a concretagem.

3.5.2. Aço

Foram utilizadas neste trabalho barras de aço para a armadura de flexão do tipo CA-50 de dois diâmetros diferentes: 12,5 mm e 6,3 mm. Para cada concretagem foi utilizado um lote das armaduras. Para obtenção das propriedades mecânicas dos materiais foram feitos ensaios com duas amostras de cada barra por lote, conforme a ABNT NBR ISSO 6892 (2015).

A avaliação do comportamento da solda utilizada na confecção da armadura de cisalhamento e do próprio conjunto de *stud* foi realizada mediante ensaios à tração utilizando um dispositivo em forma de gancho que segura o elemento apenas pelas chapas superior e inferior, pode ser observado na Figura 3.18.

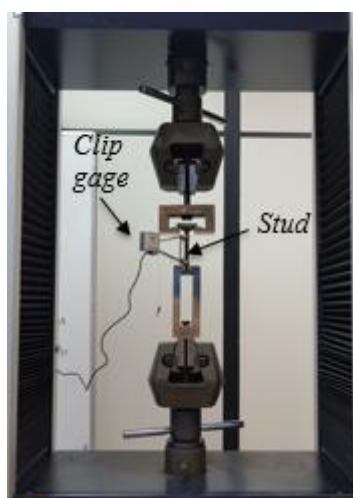


Figura 3.18 - Fotografia do esquema de ensaio da armadura de cisalhamento.

3.6. INSTRUMENTAÇÃO

3.6.1. Deslocamento Vertical da Laje

Com o objetivo de medir os deslocamentos verticais das lajes, foram utilizados transdutores de deslocamentos identificados por D1 a D11 dispostos de modo semelhante ao adotado por Silva (2003), como mostrado nas Figuras 3.19 e 3.20. Nas lajes do Grupo 2 foram utilizados relógios analógicos para medir o deslocamento em mais quatro pontos (R1, R2, R3 e R4).

Os transdutores foram denominados de D1 a D11, com D1 simétrico a D10, D2 simétrico a D11; D3, D4, D5 simétricos a D9, D8 e D7, respectivamente. O transdutor D6 foi posicionado no centro da laje que coincide com o centro da placa metálica que simulou o pilar. Os transdutores D1, D2, D10 e D11 foram posicionados com a agulha em cima das chapas que fazem a transferência da força da laje para as vigas de bordo com a finalidade de medir o deslocamento dos apoios em relação à laje de reação.

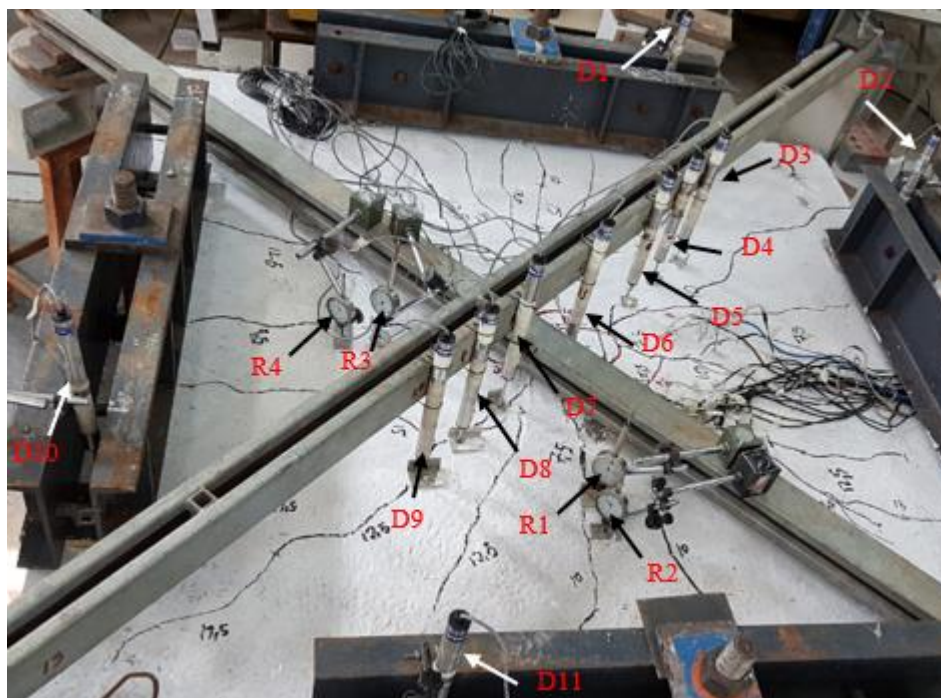


Figura 3.19 - Fotografia do posicionamento dos transdutores de deslocamentos.

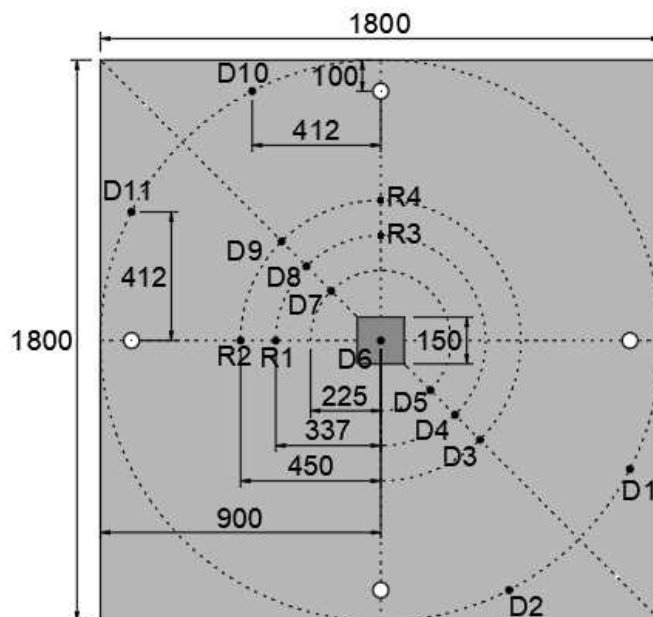


Figura 3.20 - Posicionamento dos transdutores de deslocamentos e dos relógios analógicos. Dimensões em mm.

3.6.2. Deformação Específica

Foram utilizados extensômetros elétricos de resistência (EER) da marca KYOWA ELETRONICS INSTRUMENTS CO. LTD do tipo KFG-5-120-C1-11 para monitorar as deformações das armaduras de flexão e de cisalhamento. Para medir as deformações do concreto foi utilizado extensômetros elétricos de resistência da marca EXCEL SENSORES do modelo PA-06-201ba-120L. Os EERs foram ligados em dois sistemas de leitura com capacidade para 20 canais cada um, controlados pelo *software Strain Smart*. A ligação do EER à caixa de aquisição de dados foi feita soldando um fio (de cabo telefônico – CCI) ao extensômetro, com o cuidado com a isolamento para obter os dados.

a) Armadura de Flexão

A instrumentação das barras obedeceu aos seguintes procedimentos: regularização da superfície com a utilização de um boleador esmeril, limpeza da superfície, fixação dos extensômetros com cola instantânea e a proteção mecânica.

O posicionamento dos pontos de medição das deformações não foi o mesmo para todas as lajes. Isso porque as lajes com aberturas apresentaram um detalhamento da armadura de flexão negativa diferente entre si e das demais lajes. Na Figura 3.21 são mostrados o

posicionamento e a numeração dos extensômetros e na Figura 3.22 mostra a fotografia dos extensômetros no aço antes da concretagem da laje LR.

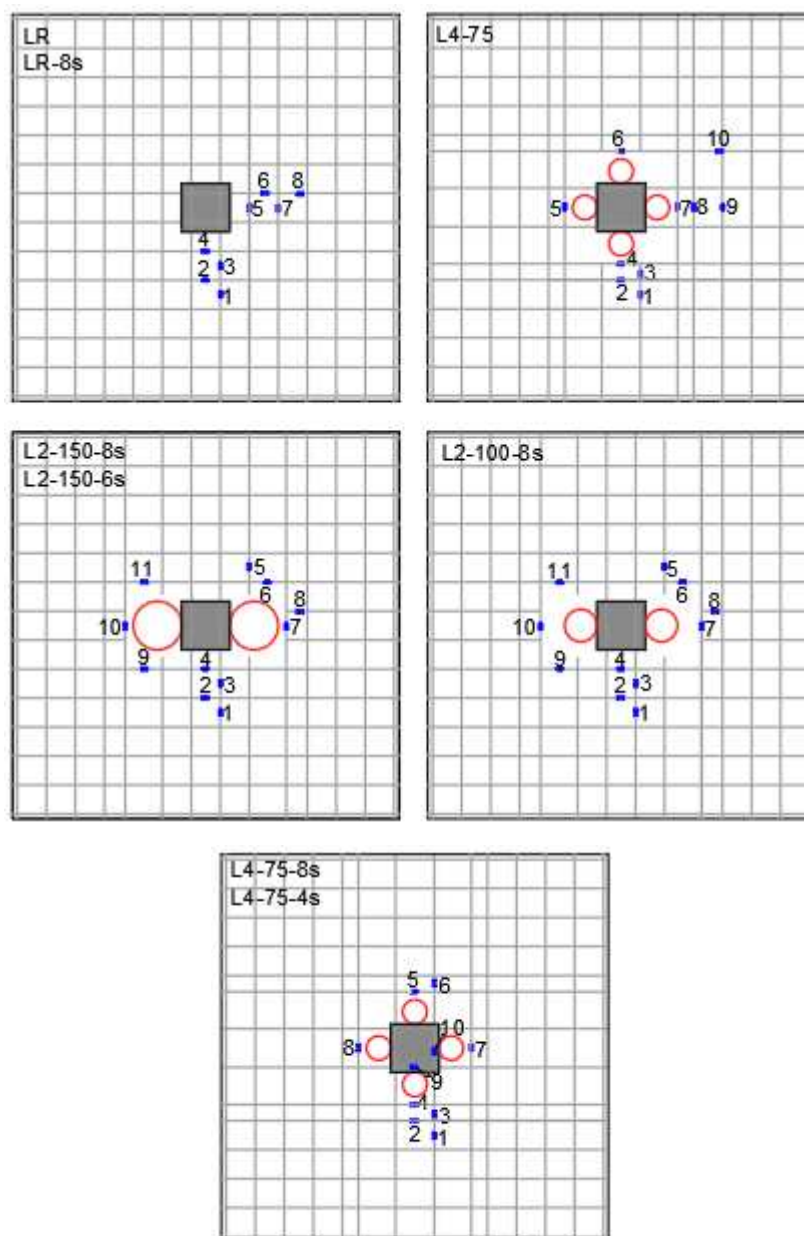


Figura 3.21 - Posicionamento e identificação dos extensômetros na armadura de flexão.

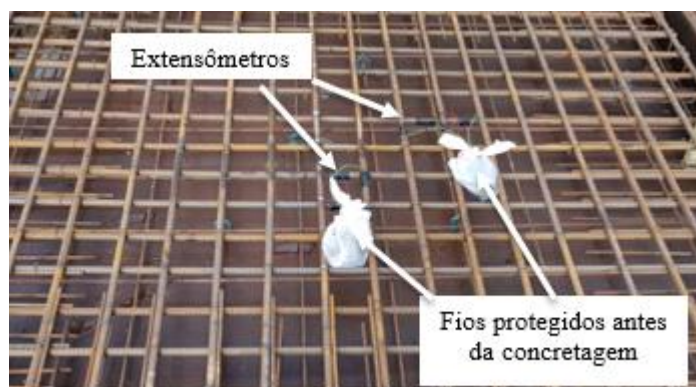


Figura 3.22 - Fotografia dos extensômetros nas armaduras.

b) Armadura de Cisalhamento

A instrumentação das barras ocorreu da mesma forma que as armaduras de flexão. Foi utilizado um extensômetro em cada barra do *stud*. Na Figura 3.23 está apresentado o detalhamento das barras que foram instrumentadas. Como não foi possível instrumentar todas as armaduras, admite-se que as barras simétricas às instrumentadas alcançaram deformações semelhantes.

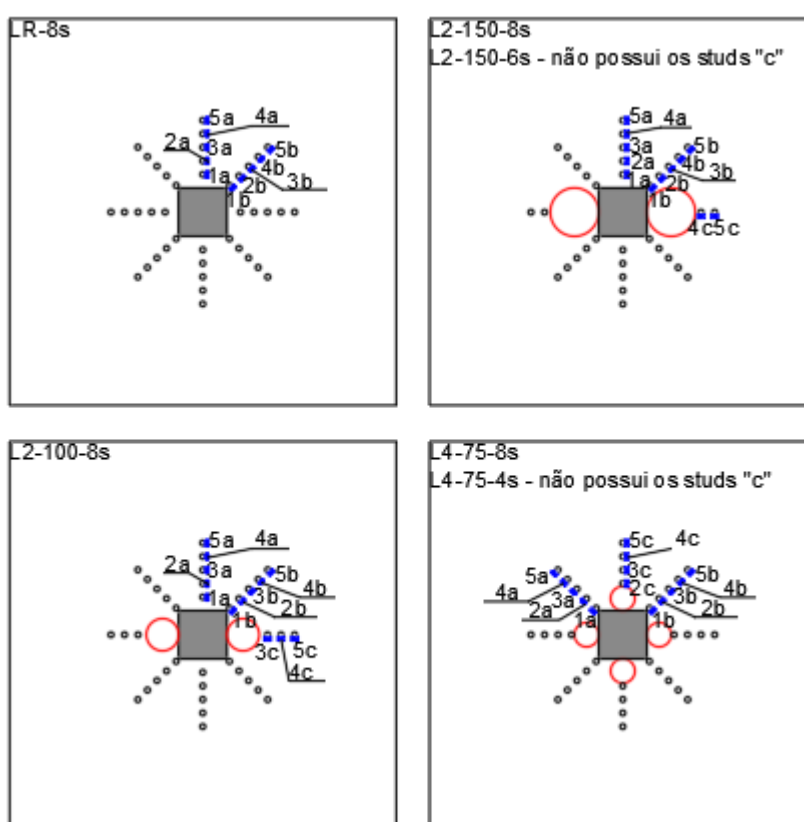


Figura 3.23 - Posicionamento e identificação dos extensômetros na armadura de cisalhamento.

c) Concreto

O monitoramento das deformações do concreto foi realizado através de extensômetros elétricos de dimensões $(84 \times 5) \text{ mm}^2$, posicionados na face inferior da laje a uma distância de 20 mm da face do pilar, conforme mostra a Figura 3.24. A fixação dos mesmos seguiu os seguintes procedimentos: limpeza do local, regularização da superfície com lixa e fixação dos extensômetros com cola instantânea. Na Figura 3.25 estão expostos os extensômetros na face inferior da laje.

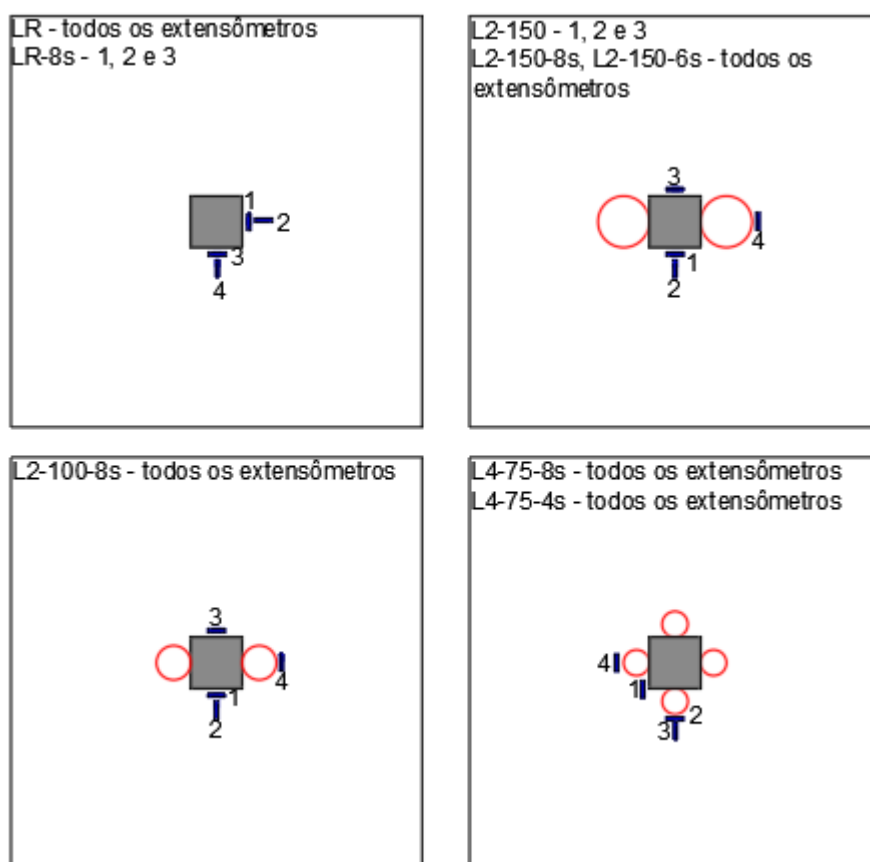


Figura 3.24 - Posicionamento e identificação dos extensômetros no concreto.



Figura 3.25 - Fotografia dos extensômetros de concreto na laje L4-75.

3.6.3. Aplicação da carga

Para monitorar o carregamento das lajes foi utilizada uma célula de carga com capacidade de 500 kN, conforme Figura 3.26, ligada ao mesmo sistema utilizado para leitura dos EERs e LVDTs, controlada pelo *software* computacional *StrainSmart*. O valor do carregamento aplicado é mostrado na tela do computador possibilitando o seu controle.



Figura 3.26 - Equipamentos para aplicação do carregamento.

Na realização de todos os ensaios, com os tirantes folgados, aplicou-se, inicialmente, um carregamento correspondente ao peso próprio da laje, estimado em 10 kN, e

o peso das quatro vigas (2 kN), totalizando uma carga inicial de 12 kN. Após a aplicação da carga, ajustava-se a rosca de todos os quatro tirantes de modo a ficarem igualmente solicitados. Assim, iniciava o ensaio das lajes com todas as leituras das deformações, deslocamentos e carga igual a zero. As lajes foram submetidas a um carregamento com passos de carga de 25 kN e todas as lajes foram carregadas até a ruptura.

4. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos nos ensaios de caracterização dos materiais (propriedades mecânicas do concreto e do aço) utilizados nos modelos e os resultados dos experimentos, como: cargas e modos de ruptura, deslocamentos verticais das lajes, deformações nas armaduras de flexão, nas armaduras de cisalhamento e no concreto, como também, mapas de fissuras.

4.1. MATERIAIS

4.1.1. Concreto

O concreto foi usinado e a concretagem foi realizada no pátio do laboratório de estruturas da Faculdade de Engenharia Civil da Unicamp. Os ensaios da propriedade mecânica do concreto (compressão, tração por compressão diametral e módulo de elasticidade) foram realizados em idades pré-determinadas com a finalidade de traçar uma curva da resistência ao longo do tempo para obtenção dos dados nas idades de ensaio. As curvas com os resultados encontram-se no Apêndice A.

Os valores médios das propriedades mecânicas do concreto avaliados nos dias dos ensaios de cada laje são apresentados na Tabela 4.1. As lajes do Grupo 1 foram concretadas na mesma concretagem e as lajes do Grupo 2 foram concretadas em uma segunda concretagem.

Tabela 4.1 - Propriedades mecânicas do concreto no dia de ensaio.

Grupo	Laje	Idade (dias)	f_c (MPa)	f_{ct} (MPa)	E_c (GPa)
1	LR	19	39,8	3,4	31,2
	L2-150	26	41,4	3,6	31,6
	L4-75	20	40,0	3,5	31,3
2	LR-8s	29	40,2	3,7	32,4
	L2-150-8s	22	38,0	3,5	31,8
	L2-150-6s	21	37,6	3,5	31,7
	L2-100-8s	30	40,4	3,7	32,5
	L4-75-8s	31	40,7	3,7	32,5
	L4-75-4s	38	42,3	3,8	32,9
Média			40,0	3,6	31,9

4.1.2. Aço

Na Tabela 4.2 está apresentado um resumo das propriedades mecânicas dos aços utilizados na montagem das lajes (diâmetro de 6,3 mm, 8,0 mm e 12,5 mm), com valores médios obtidos dos resultados dos corpos de provas. Os ensaios das barras de aço foram realizados no Laboratório de Modelagem Estrutural e Monitoração (LabMem) da Unicamp. Os aços utilizados foram divididos em dois lotes, aços utilizados na primeira concretagem, lajes do Grupo 1 e aços utilizados na segunda concretagem, lajes do Grupo 2.

Tabela 4.2 - Propriedades mecânicas do aço

Diâmetro (mm)	Local de aplicação	Concretagem	f_y (MPa)	E_s (GPa)	ϵ_y (mm/m)	f_u (MPa)
6,3	AF _{inf} ⁽¹⁾	1 ^a	601,0	189,67	3,15	712,1
		2 ^a	601,0	200,10	2,86	765,4
8,0	Armadura de cisalhamento	2 ^a	535,6	197,41	2,88	536,15
12,5	AF _{sup} ⁽²⁾	1 ^a	583,0	196,15	3,20	727,9
		2 ^a	571,0	194,98	3,02	738,9

(1) armadura de flexão do bordo inferior da laje;

(2) armadura de flexão do bordo superior da laje.

f_y : tensão de início do escoamento do aço;

f_u : tensão na ruptura do aço.

A leitura de deformação da barra de aço no decorrer do ensaio, foi feita através de um *Clip Gage* e foi retirado quando atingia a deformação de 10 mm/m. Desta forma, com os dados obtidos neste ensaio foram determinados as tensões de escoamento e de ruptura além da deformação de escoamento.

4.2. CARGAS E MODOS DE RUPTURA

As lajes foram ensaiadas em intervalos de carregamento até que se atingisse a ruptura, que foi por puncionamento em todos os modelos da pesquisa. A carga adotada no momento da ruptura das lajes foi o valor máximo atingido na leitora da célula de carga, desconsiderando o peso próprio das lajes e dos equipamentos sobre as lajes. Na Tabela 4.3 estão apresentadas as principais características das lajes e as cargas de ruptura obtidas nos ensaios.

A taxa de armadura das lajes foi calculada de acordo com a distribuição da armadura de flexão. Em consequência da presença da abertura, algumas barras foram cortadas e a taxa de armadura na direção x ficou diferente em relação a direção y. O cálculo detalhado da taxa de armadura de cada laje está no Apêndice B.

Tabela 4.3 - Cargas de ruptura das lajes.

Grupo	Laje	f_c (MPa)	d (mm)	ρ_x (%)	ρ_y (%)	ρ (%)	$A_s f_y^{(1)}$ (kN)	V_{exp} (kN)	V_{exp}/V_{LR}	Modo de Ruptura
1	LR	39,8	90	1,48	1,70	1,58	-	232,3	1,00	Punção
	L2-150	41,4	91	1,09	1,25	1,17	-	208,4	0,90	Punção
	L4-75	40,0	93	1,05	1,60	1,29	-	184,0	0,79	Punção
2	LR-8s	40,2	90	1,48	1,70	1,58	215,4	323,0	1,39	PE ⁽²⁾
	L2-150-8s	38,0	90	1,11	1,27	1,19	215,4	258,5	1,11	PE ⁽²⁾
	L2-150-6s	37,6	90	1,11	1,27	1,19	161,6	227,3	0,98	PE ⁽²⁾
	L2-100-8s	40,4	90	1,11	1,27	1,19	215,4	268,0	1,15	PE ⁽²⁾
	L4-75-8s	40,7	90	1,48	1,70	1,58	215,4	269,6	1,16	PI ⁽³⁾
	L4-75-4s	42,3	90	1,48	1,70	1,58	107,8	277,0	1,19	PE ⁽²⁾

(1) $A_s f_y$: parcela resistente da armadura de cisalhamento, área de aço por camada multiplicada pela tensão de escoamento do aço.

(2) Punção Externa; (3) Punção Interna.

A presença da abertura nas lajes do Grupo 1 afetou a resistência ao puncionamento. A laje L4-75 apresentou maior redução da resistência em relação à laje L2-150. Parâmetros que são diretamente proporcionais ao aumento da resistência à punção da laje é a altura útil (d) a resistência do concreto (f_c) e a taxa de armadura de flexão (ρ). Quanto maior for o valor da altura útil, da resistência do concreto e da taxa de armadura de flexão, maior é a carga de ruptura da laje. Porém, esta relação não aconteceu nas lajes L2-150 e L4-75. Observou-se que dois furos maiores foi mais prejudicial para a resistência à punção das lajes do que quatro furos menores, com aberturas possuindo o mesmo perímetro.

Nas lajes com armadura de cisalhamento (Grupo 2), a perda de resistência à punção foi maior nas lajes com duas aberturas de 150 mm e a resistência das lajes com quatro aberturas foi semelhante à laje com duas aberturas de 100 mm. Todas as lajes do Grupo 2, exceto a laje L2-150-6s, alcançaram resistência à punção superior da laje de referência sem armadura de cisalhamento (LR), comprovando a eficácia dos *studs* quando há necessidade de aumentar a carga de ruptura das lajes com abertura.

A utilização de quantidades maiores de linhas de *studs* aumentou a resistência ao funcionamento das lajes, exceto para as lajes com quatro aberturas. As lajes com quatro aberturas (L4-75-8s e L4-75-4s) apresentaram diferença na carga de ruptura de 2,67 %, o maior valor obtido foi para a laje L4-75-4s. O aumento da carga de ruptura da laje L4-75-4s em relação a laje L4-75-8s pode estar relacionado com o modo de ruptura destas lajes. Possivelmente as quatro aberturas adjacentes ao pilar e com oito linhas de armadura de cisalhamento fez com que reforçasse a região externa e enfraquecesse a região próximo ao pilar, ocorrendo desta forma, a ruptura adjacente ao pilar.

A contribuição da armadura de cisalhamento na resistência das lajes ($A_s f_y$) foi maior para as lajes com oito linhas (215,4 kN) e menor nas lajes com quatro linhas (107,8 kN). A força referente à parcela de contribuição das armaduras de cisalhamento está relacionada com o diâmetro, com a quantidade de linhas e camadas dos *studs*.

O uso dos *studs* na laje referência aumentou a carga de ruptura em 28 %, laje LR-8s em relação a laje LR. Na laje com aberturas de 150 mm e 75 mm, a utilização dos *studs* acarretou no aumento de 19 % (L2-150-8s) e 32 % (L4-75-8s), respectivamente.

O modo de ruptura das lajes sem armadura de cisalhamento foi classificado como por punção, uma vez que as linhas de ruptura nestas lajes iniciaram-se nas faces inferiores do pilar, conforme Figura 4.1.

Para as demais lajes, o modo de ruptura foi classificado como punção externa, quando a linha de ruptura surgiu após a última camada de *studs* e punção interna, onde a linha de ruptura iniciou-se no pilar e se encerrou antes da última camada de *studs* ou adjacente ao pilar. A laje L4-75-8s foi a única laje em que ocorreu a ruptura interna. Nesta laje, a linha de ruptura iniciou no pilar e terminou entre a primeira e a segunda camada de *studs*. Na Figura 4.2 está apresentado duas linhas de ruptura, a mais próxima ao pilar (início da ruptura) e mais externa (fim da linha de ruptura).

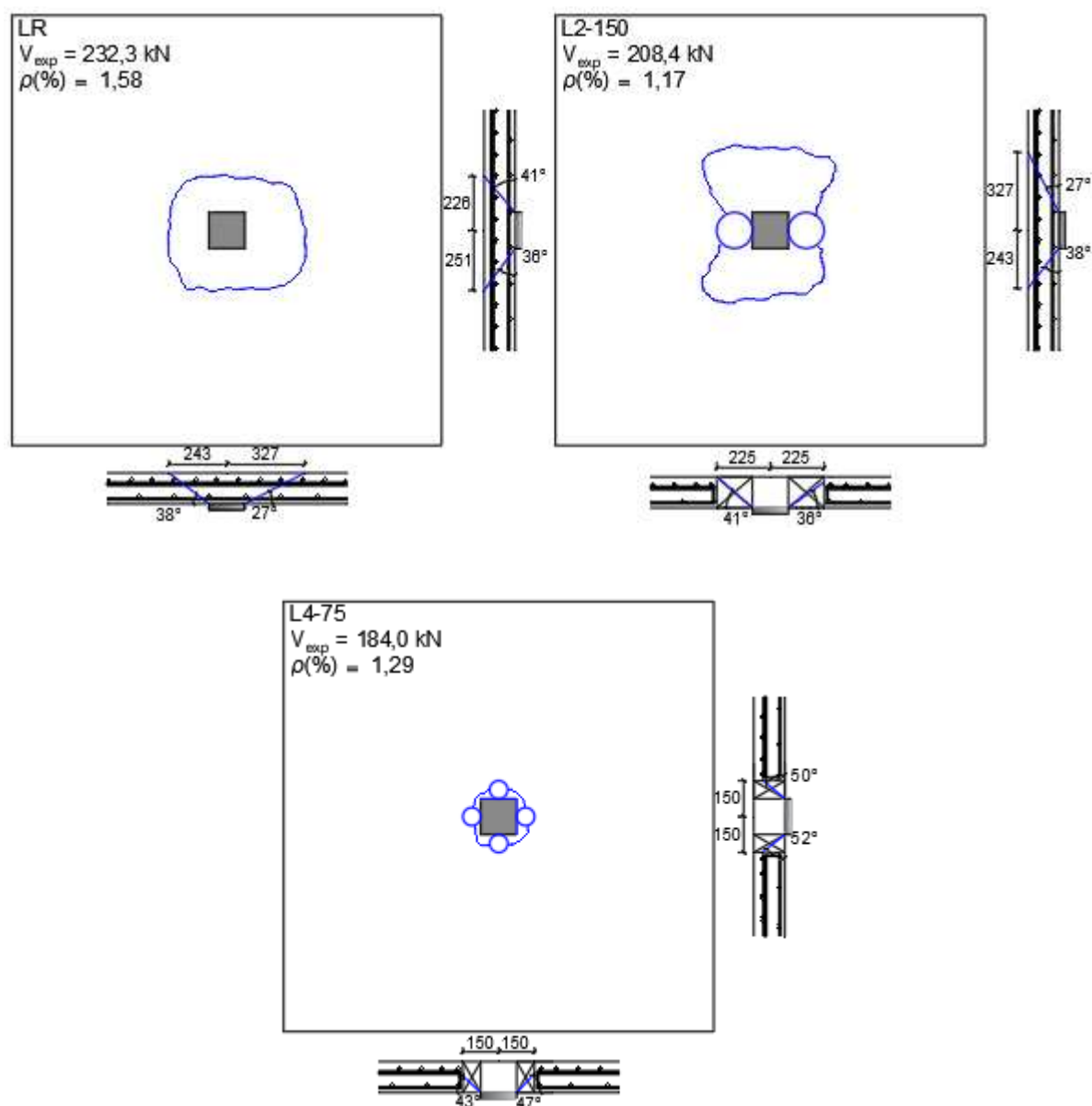


Figura 4.1 – Superfície de ruptura das lajes do Grupo 1.

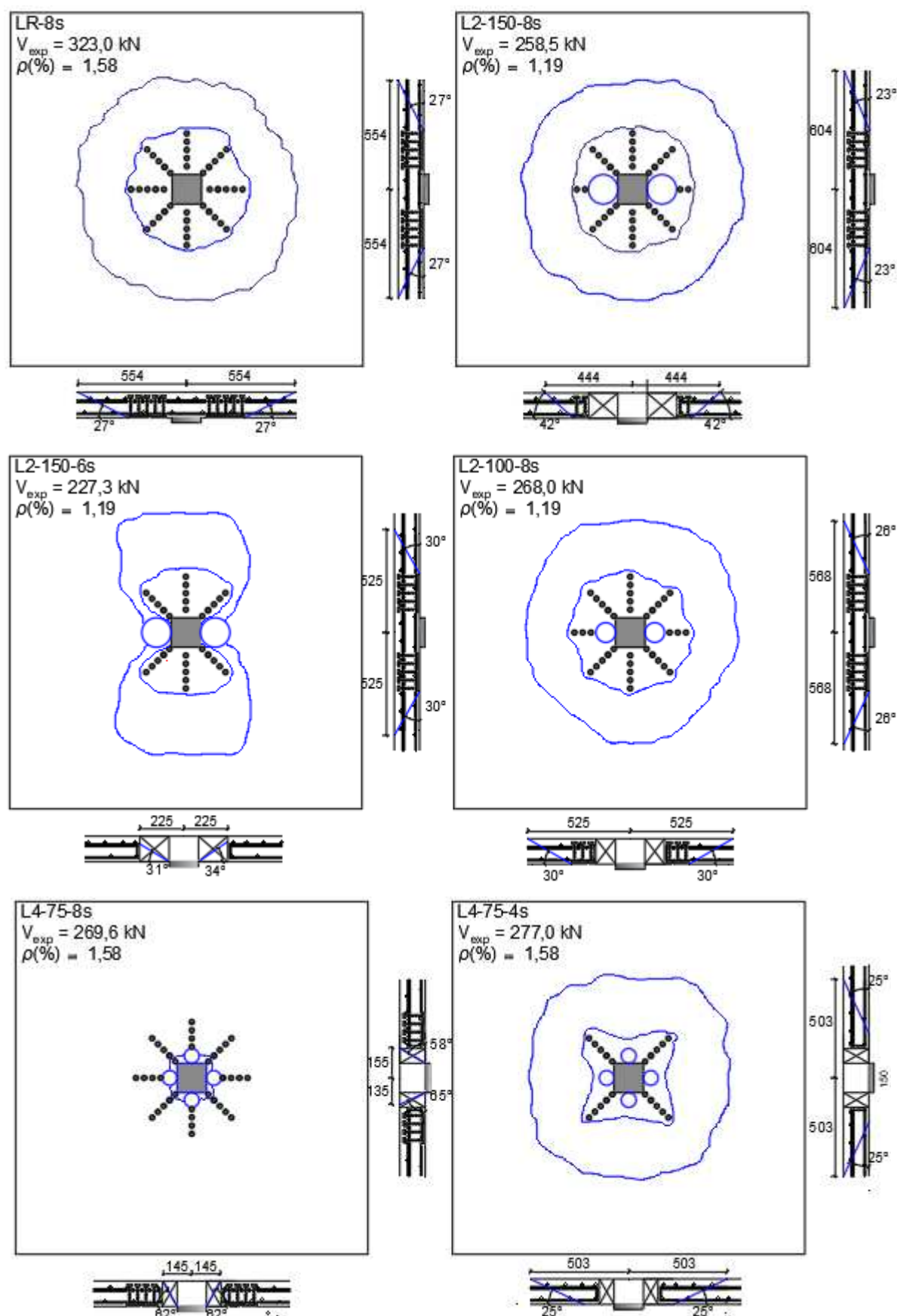


Figura 4.2 – Superfície de ruptura das lajes do Grupo 2.

4.3. DESLOCAMENTO, DEFORMAÇÃO E FISSURAS DAS LAJES

4.3.1. Lajes Grupo 1

Nos itens 4.3.1.1 a 4.3.1.3 estão apresentados os principais resultados obtidos de cada laje: deslocamento vertical, deformação na armadura de flexão, deformação no concreto e modo de ruptura.

Os deslocamentos das lajes foram determinados por onze transdutores de deslocamentos. Os transdutores D1, D2, D10 e D11 ficaram posicionados na linha de inflexão de momento fletor, para monitorar possíveis translações da laje. Desta forma, os outros deslocamentos obtidos foram subtraídos pelos deslocamentos do corpo rígido.

As deformações da armadura de flexão e deformação do concreto foram coletadas a cada incremento de carga. Alguns extensômetros não funcionaram no ensaio, provavelmente devido à concretagem, desta forma não foi possível medir as deformações. Os valores das deformações foram registrados a cada segundo, desde o início do ensaio até a última leitura do carregamento.

4.3.1.1. Laje LR

A laje referência (LR) é semelhante às lajes de referência adotadas por Souza (2004) e Silva *et al.* (2017), lajes com mesmas dimensões (1800 x 1800 mm²) e com área de carregamento igual a 150 x 150 mm². O esquema de ensaio proposto apresentou um perfil simétrico para os deslocamentos obtidos na diagonal da laje, e de acordo com as Figuras 4.3 e 4.4 o ponto D6 posicionado no centro da laje foi o que obteve os maiores valores de deslocamento verticais. A simetria também pode ser observada através da leitura dos extensômetros e5 e e4, e3 e e6, por estarem equidistantes do centro da laje.

Os deslocamentos medidos nos pontos D1, D2, D10 e D11 referem-se aos deslocamentos dos apoios da laje, mostrando que a laje obteve um deslocamento de corpo rígido referente ao alongamento dos tirantes que estão fixos na laje de reação. Estes deslocamentos não atingiram o valor de 5 mm.

Na Figura 4.4 está evidenciada a mudança de inclinação das curvas próximo a carga de 50 kN, medidas nos pontos D4 a D8. A mudança de inclinação na região próxima ao centro da laje está relacionada com o surgimento das primeiras fissuras. No ponto D6 a inclinação da curva é maior em relação aos demais pontos. Esta mudança de inclinação também é evidente no gráfico da Figura 4.5.

A armadura de flexão não atingiu o limite de escoamento nos pontos onde foram obtidas as deformações, indicando que provavelmente a ruptura deveu-se a fragilidade do concreto, ocorrendo, possivelmente, uma ruptura por tração diagonal do concreto, conforme Figuras 4.5 e 4.6.

As primeiras fissuras a surgir em todas as lajes foram as radiais. Inicialmente ao redor do pilar, propagaram-se, com o aumento do carregamento, em direção aos bordos dela. Na Figura 4.7 estão apresentados as fissuras radiais e circunferências da laje LR.

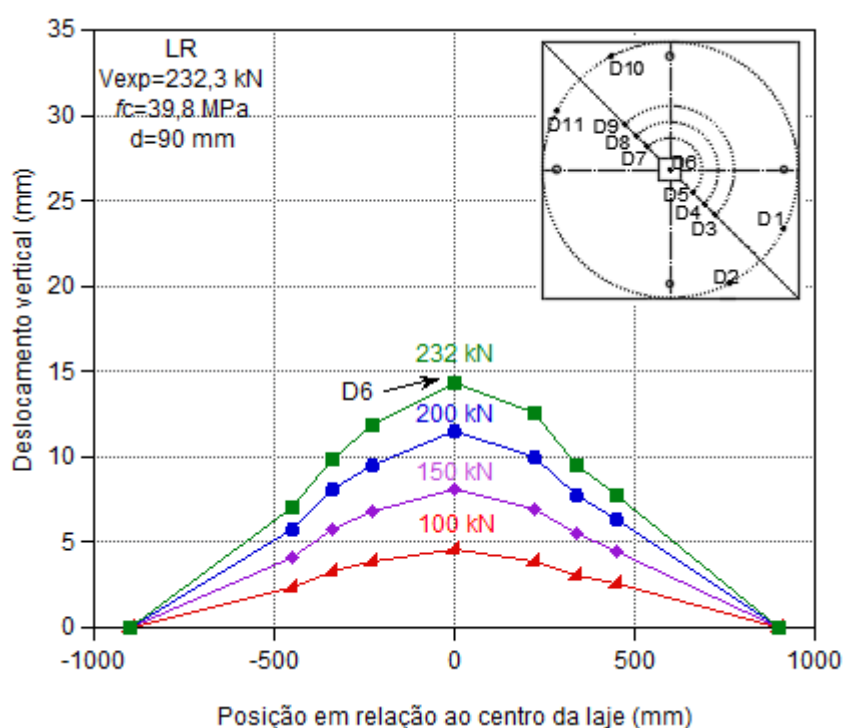


Figura 4.3 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de LR.

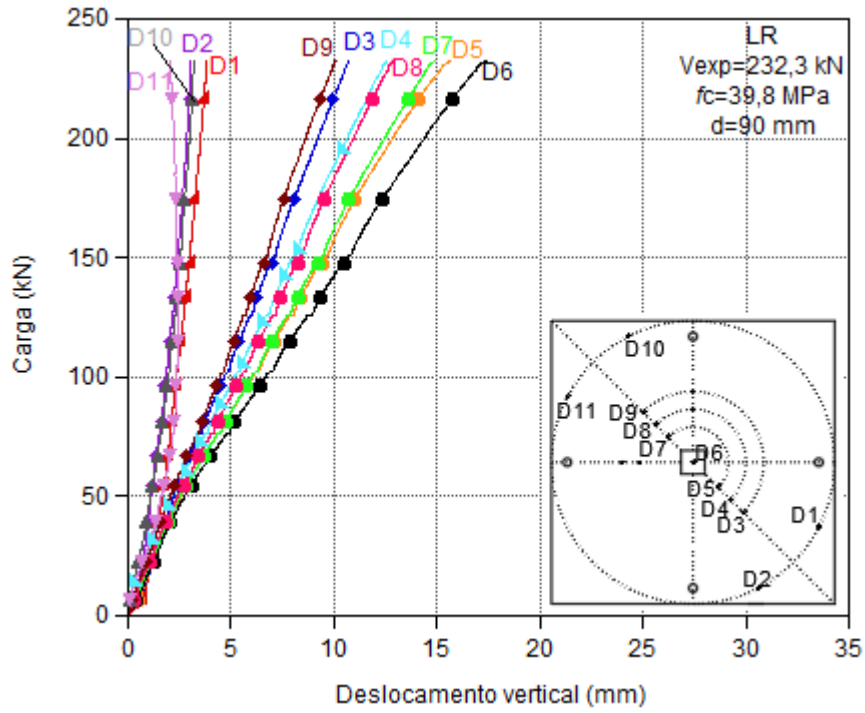


Figura 4.4 - Gráfico carga *versus* deslocamento vertical da laje LR.

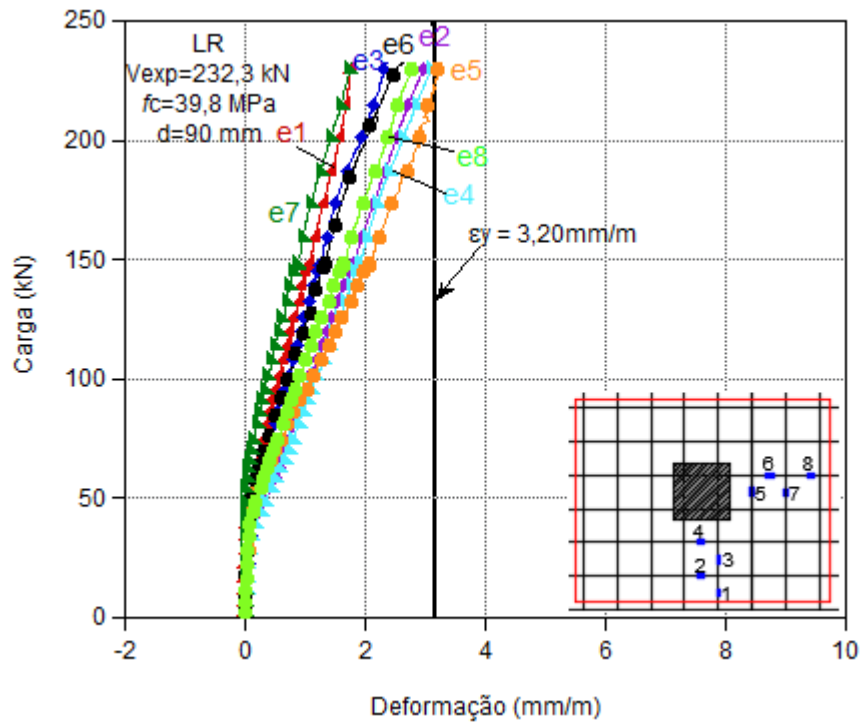


Figura 4.5 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros no aço de LR.

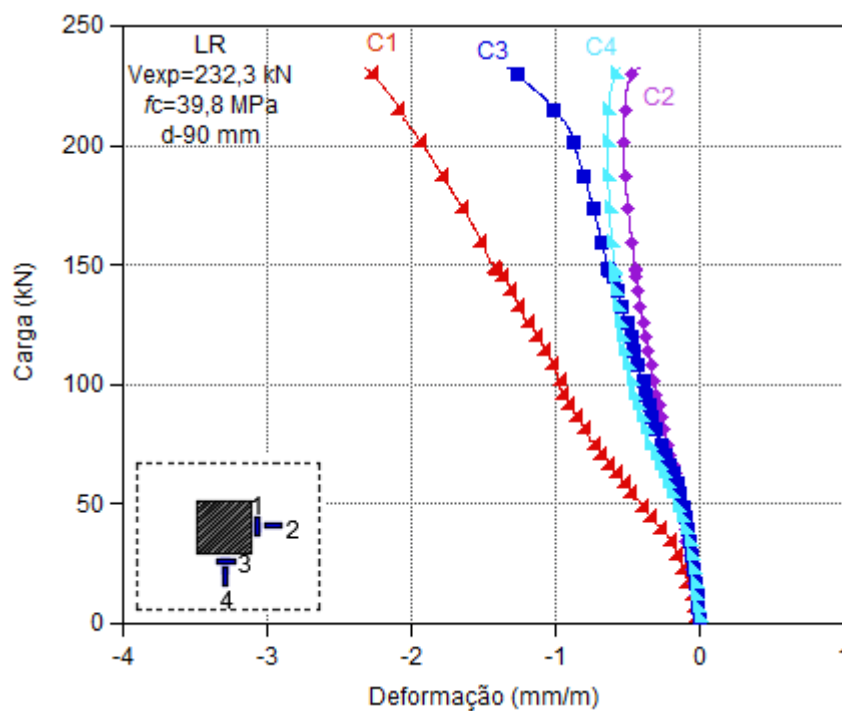


Figura 4.6 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros no concreto de LR.

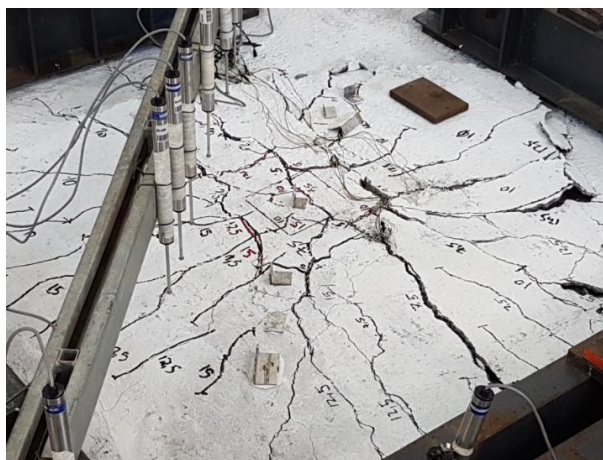


Figura 4.7 - Laje LR após a ruptura.

4.3.1.2. Laje L2-150

A presença de duas aberturas de 150 mm na laje L2-150 não alterou a simetria da laje, conforme demonstrado nas Figuras 4.8 a 4.10. As fissuras na laje L2-150 não surgiram após a abertura como aconteceu na face do pilar que não há abertura, como pode ser visto na

Figura 4.12. As fissuras radiais surgiram no pilar e foram até os apoios paralelos à linha das aberturas, demonstrando que houve pouca concentração de tensão após as aberturas.

A armadura de flexão próxima ao pilar atingiu a deformação de escoamento, os extensômetros e11 e e4 alcançaram maiores valores de deformação próximo à carga de ruptura, como aconteceu com a laje LR. Nas barras onde foram fixados os extensômetros e7 e e10, após a abertura, a deformação foi menor, comprovando que após as aberturas as tensões solicitantes foram menores. A leitura do extensômetro e8 foi próxima de zero, trata-se de uma barra cortada e ancorada por um gancho na extremidade do corte.

As curvas mostradas nas Figuras 4.9 a 4.11 mostra a mudança de inclinação das curvas próximas à carga de 50 kN, possivelmente relacionado com o surgimento de fissuras. Os deslocamentos medidos nos pontos D1, D2, D10 e D11 não obtiveram mudanças significativas nas curvas, evidenciando que as fissuras não atingiram estes pontos.

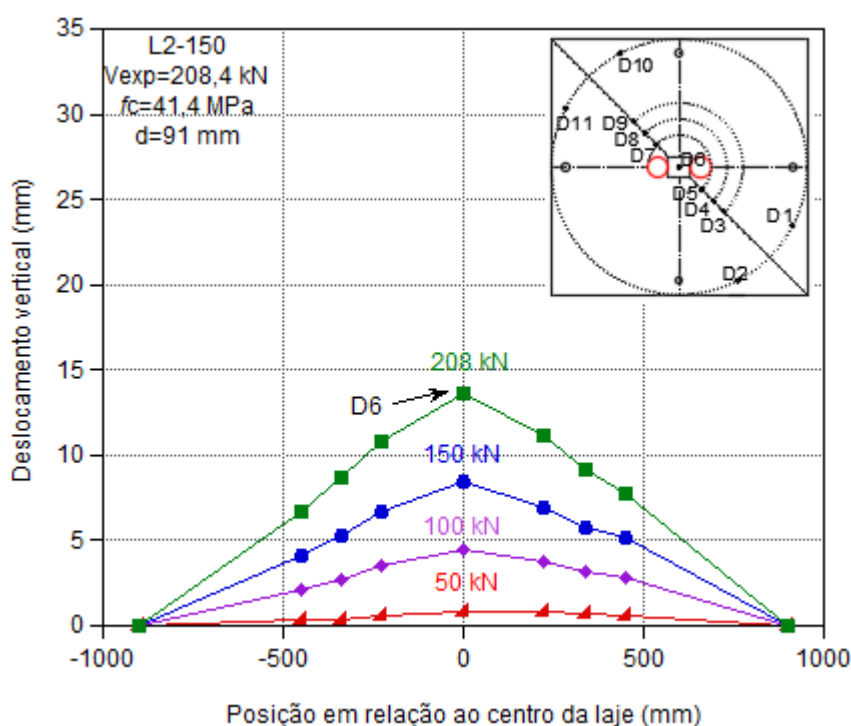


Figura 4.8 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de L2-150.

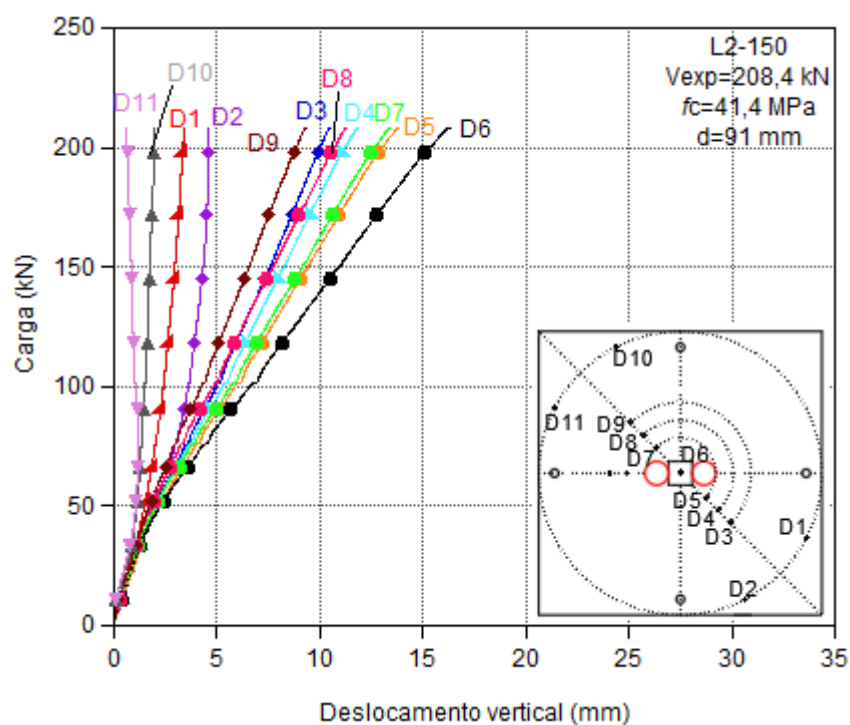


Figura 4.9 - Gráfico carga versus deslocamento vertical da laje L2-150.

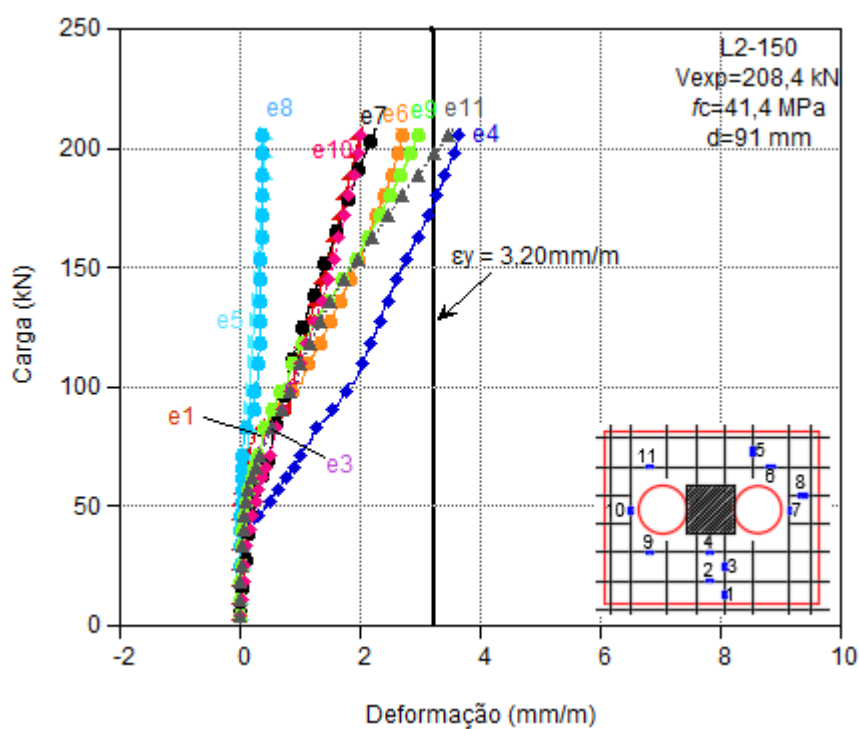


Figura 4.10 - Gráfico carga versus deformação dos extensômetros no aço de L2-150.

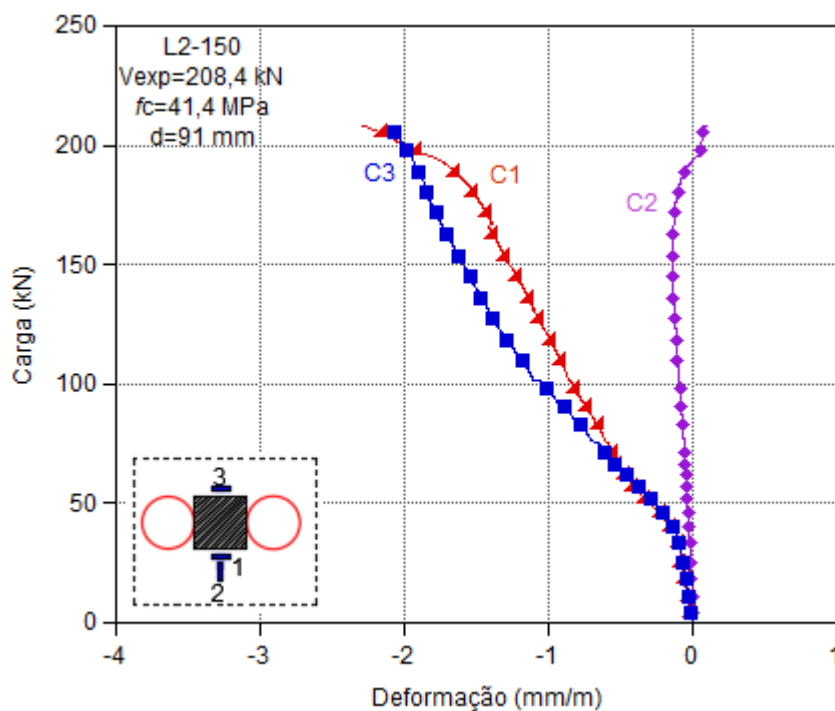


Figura 4.11 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros no concreto de L2-150.

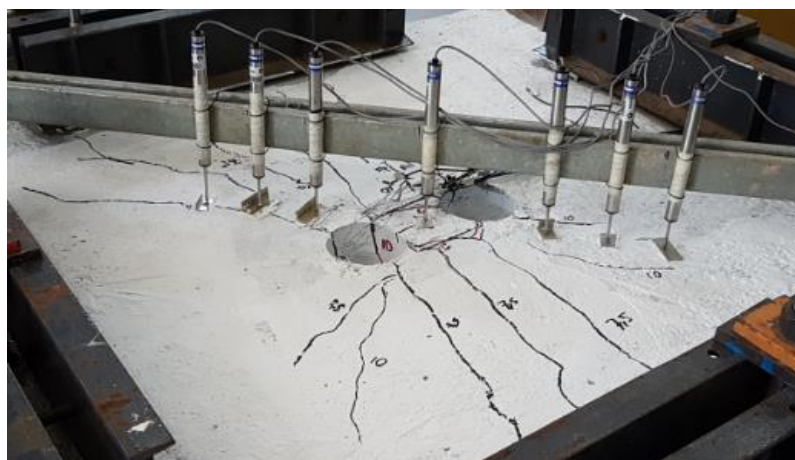


Figura 4.12 - Laje L2-150 após a ruptura.

4.3.1.3. Laje L4-75

A laje com quatro aberturas expõe um comportamento de fissuração radial semelhante à laje referência. A presença das quatro aberturas aumentou a rigidez da laje, uma vez que o concreto e a armadura deformaram-se menos, apresentando valores mais distantes da deformação de escoamento. Isto indica um comportamento mais frágil, conforme verificado nas Figuras 4.13 a 4.15.

Observa-se, por meio da Figura 4.17, que a ruptura foi iniciada antes das fissuras percorrerem até o apoio, ressaltando a fragilidade da laje. Próximo à carga de ruptura, a fissura circunferencial que surgiu ligando as aberturas aumentou de espessura, indicando que houve fragilidade nesta região, que provavelmente levou a laje ao colapso.

As barras que foram cortadas próximo ao pilar provavelmente não transmitiram esforços, com isso os extensômetros e1 e e3 não deformaram. Observou-se que na direção x, (ver Figura 4.17), direção onde não houve o corte das barras, a laje apresentou um número maior de fissuras após a abertura ao comparar com a direção y, em que houve o corte das barras que passam no pilar.

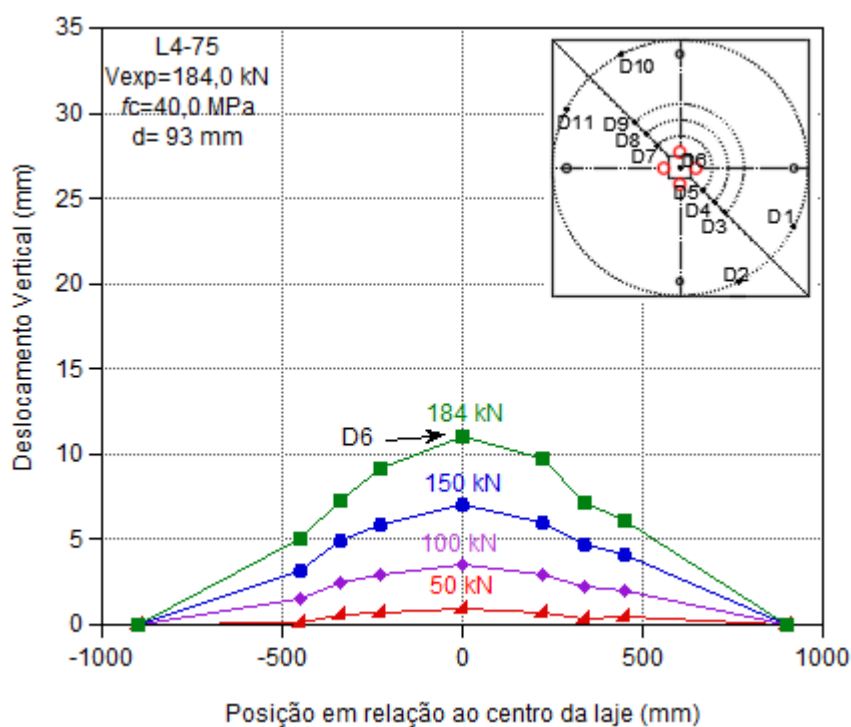


Figura 4.13 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de L4-75.

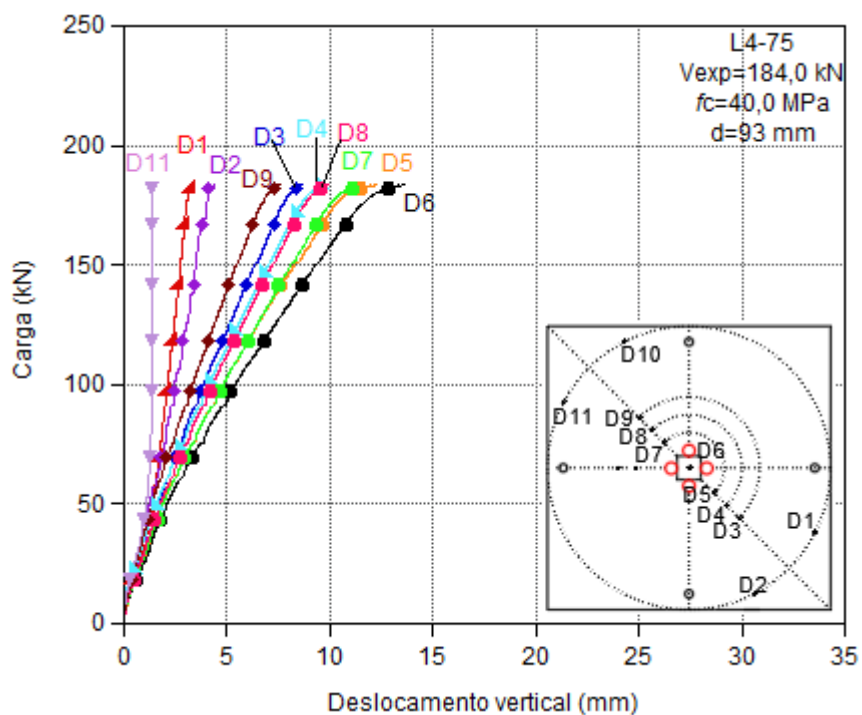


Figura 4.14 - Gráfico carga *versus* deslocamento vertical da laje L4-75.

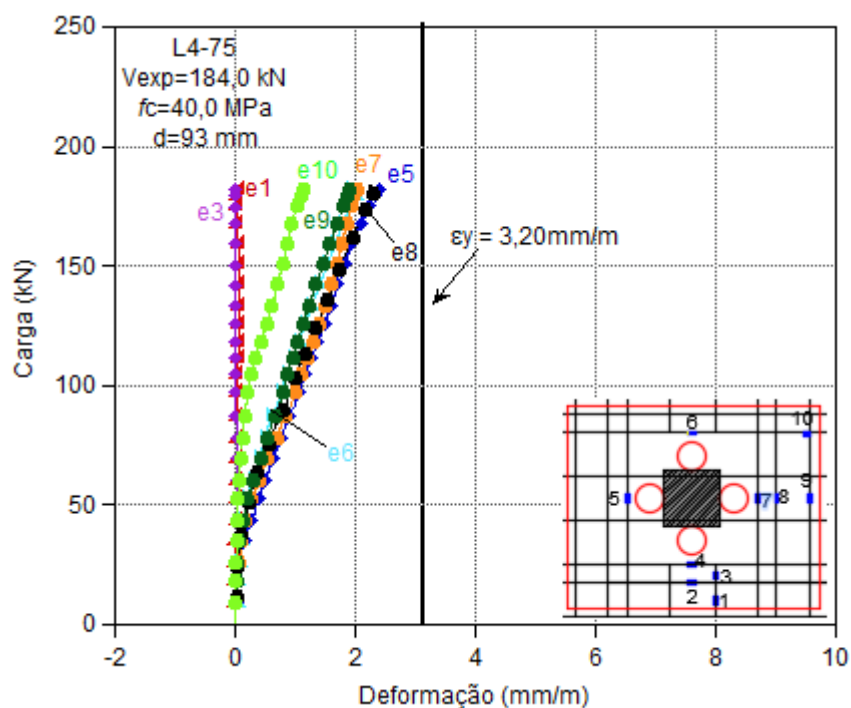


Figura 4.15 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros no aço de L4-75.

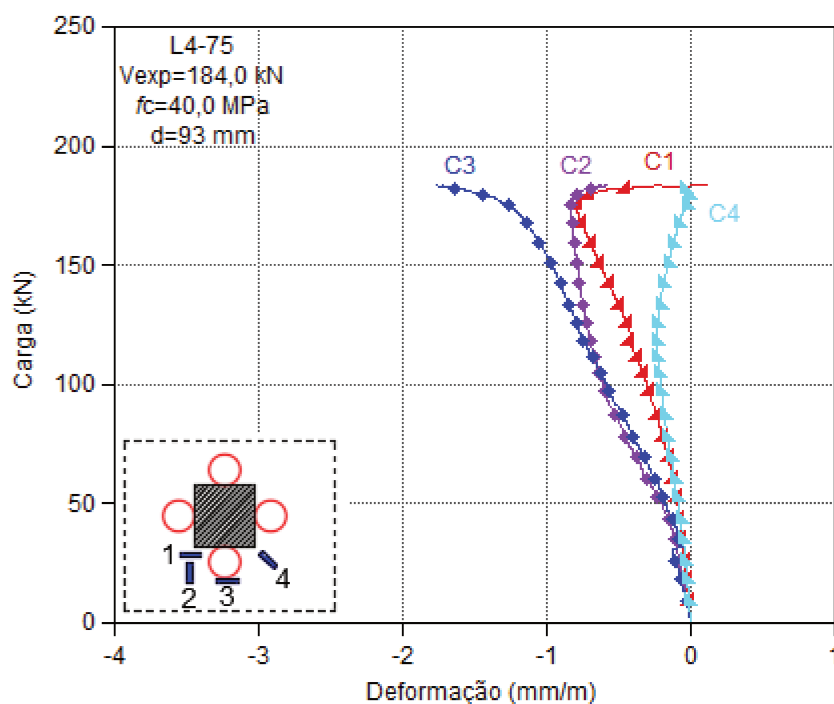


Figura 4.16 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros no concreto de L4-75.

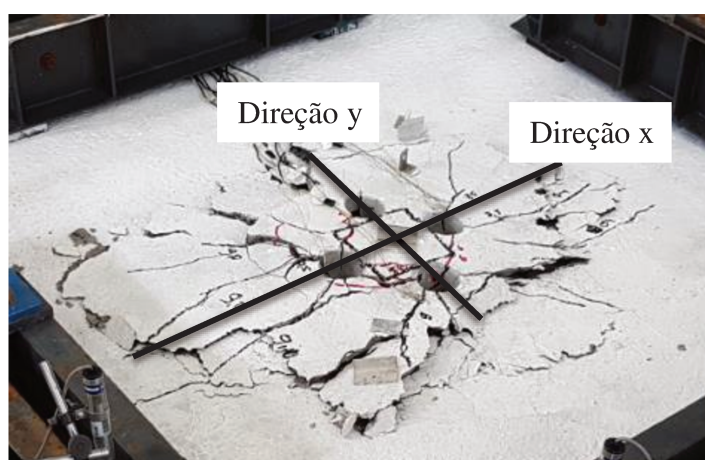


Figura 4.17 - Laje L4-75 após a ruptura.

4.3.2. Lajes Grupo 2

A armadura de cisalhamento do tipo *stud* foi adotada nas lajes do Grupo 2. As lajes deste grupo foram moldadas com o mesmo lote de concreto e foi utilizado o mesmo lote de armadura em todas as lajes. As deformações medidas pelos extensômetros seguiu o mesmo padrão das lajes do Grupo 1.

Os deslocamentos verticais das lajes foram determinados por onze transdutores de deslocamentos. Os transdutores D1, D2, D10 e D11 ficaram posicionados na linha de inflexão de momento fletor, para monitorar possíveis translações da laje. Desta forma, os outros deslocamentos obtidos foram subtraídos pelos deslocamentos do corpo rígido.

Nas lajes do Grupo 2, foram adicionados quatro relógios analógicos com o mesmo raio dos deslocamentos D3 e D7 igual a R3 e R1; e D4 e D8 igual a R2 e R4, com a finalidade de medir o deslocamento em mais duas direções. Não foi possível fazer a leitura de todos os relógios próximo à carga de ruptura, pois foram retirados para não ocorrer danos no equipamento.

4.3.2.1. Laje LR-8s

A simetria também ocorreu nas lajes com armadura de cisalhamento, isto é nítido nas Figuras 4.18 a 4.22. Os extensômetros fixados nas barras de flexão denominados e2, e4, e5 e e7 alcançaram valores próximos de 10 mm/m e apenas dois extensômetros (e1 e e8) que estavam posicionados mais afastados do centro do pilar, não escoaram.

Os extensômetros, c1 e c3, fixados no concreto, atingiram o máximo de deformação de compressão na carga de 275 kN. Após esta carga os extensômetros diminuíram o valor da deformação de compressão. Conforme mencionado no item 2.1 este comportamento pode estar relacionado com o rearranjo das bielas próximo à ruptura.

A deformação dos *studs* foi medida em apenas duas linhas, totalizando dez *studs*. Os extensômetros e1a, e1b, e3a e e3b registraram as maiores deformações, evidenciando o surgimento de fissuras próximo à localização destes *studs*. Pelo fato de nenhuma armadura de cisalhamento ter atingido o valor de escoamento (2,88 mm/m), supôs-se, inicialmente, que a fissura de ruptura se iniciou após a última camada de armadura. Esta hipótese pôde ser confirmada visualmente na face inferior da laje.

Está demonstrado na Figura 4.23 a laje pós ruptura, em que não foi possível constatar a fissura circunferencial de ruptura na face superior da laje, após o ensaio.

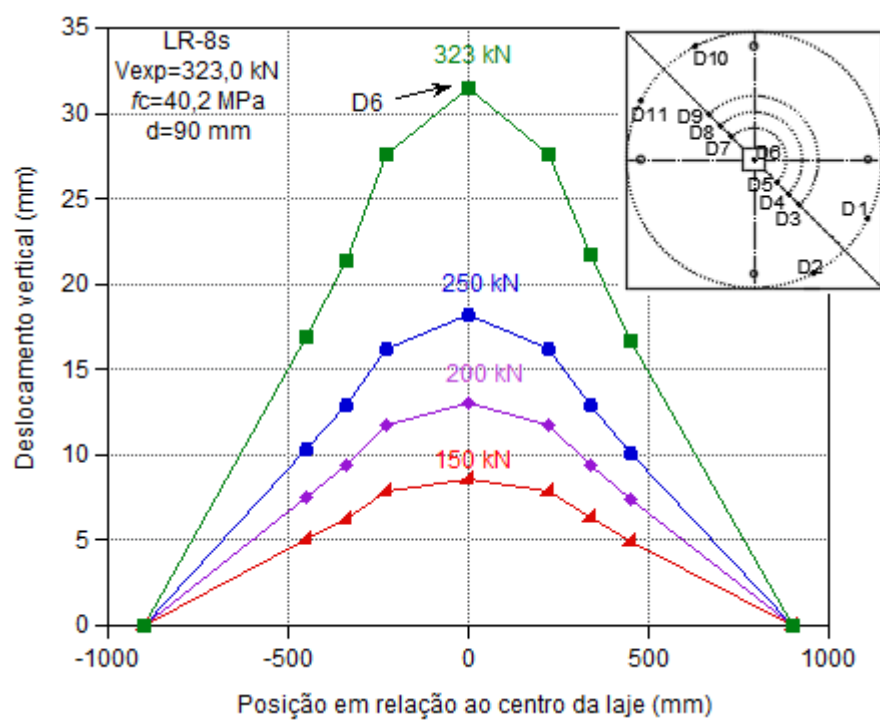


Figura 4.18 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de LR-8s.

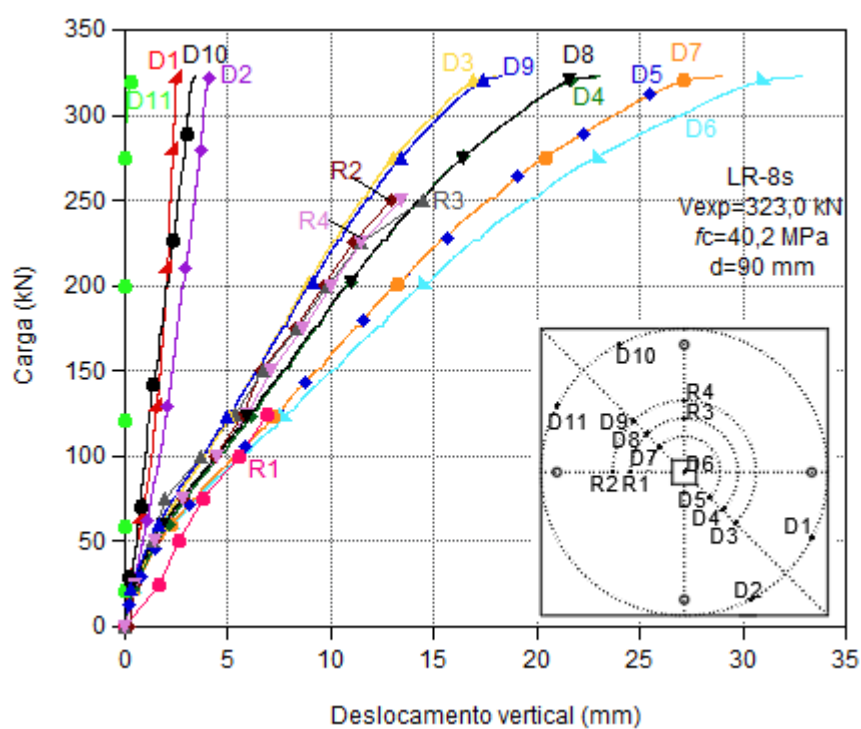


Figura 4.19 - Gráfico carga *versus* deslocamento vertical da laje LR-8s.

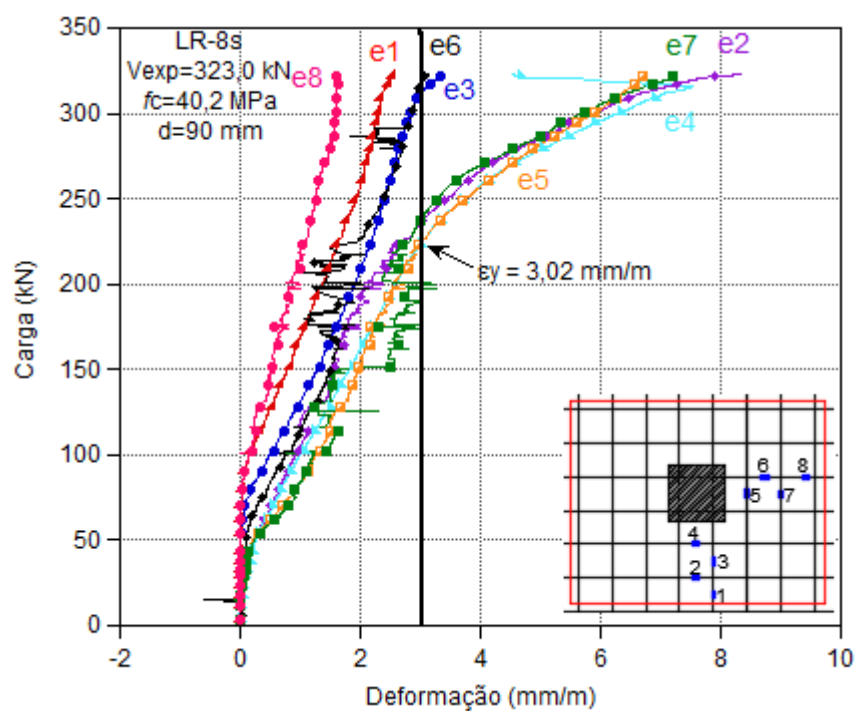


Figura 4.20 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros no aço de LR-8s.

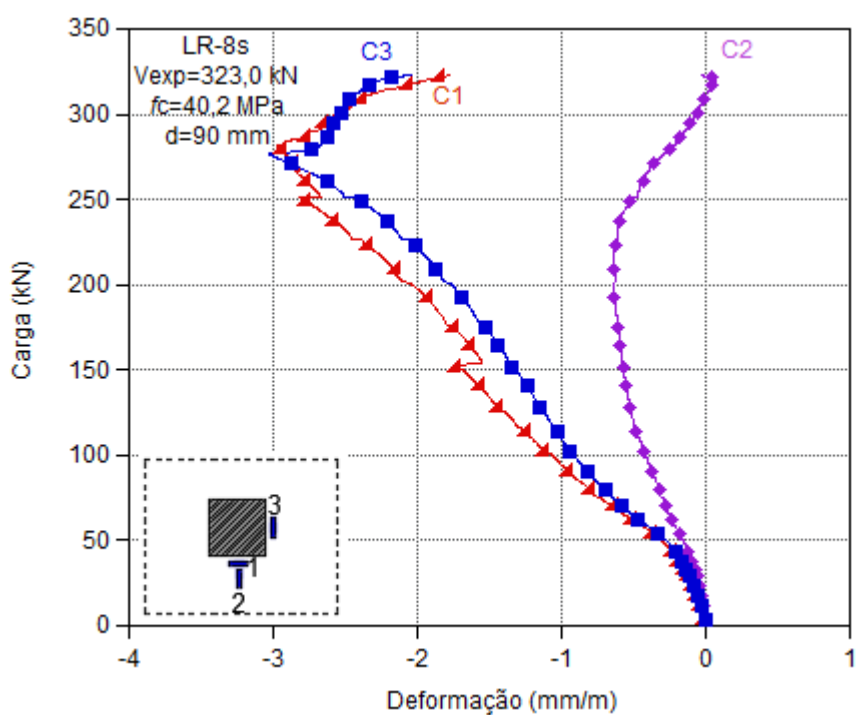


Figura 4.21 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros no concreto de LR-8s.

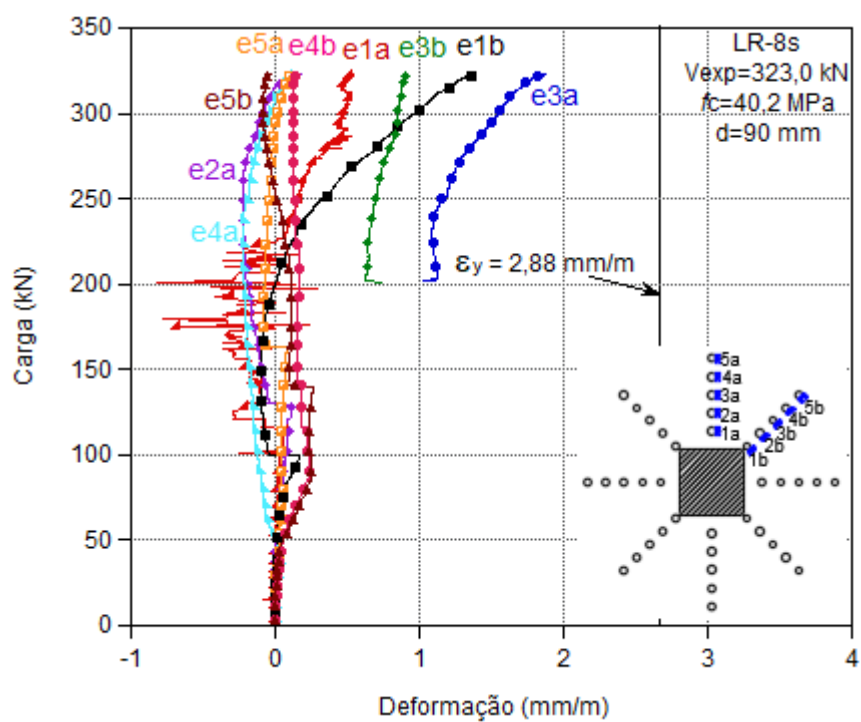


Figura 4.22 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros na armadura de cisalhamento de LR-8s.



Figura 4.23 – Laje LR-8s pós ruptura.

4.3.2.2. Laje L2-150-8s

Nas Figuras 4.24 a 4.28 estão apresentados os deslocamentos e as deformações medidos na laje L2-150-8s. Os extensômetros fixados nas armaduras de flexão deformaram mais ao comparar com a laje semelhante L2-150 sem armadura de cisalhamento, e as fissuras surgiram de forma radial e seguiram até o apoio nos quatro lados da laje, diferente do ocorrido na laje citada.

Os extensômetros fixados na face inferior da laje diminuíram a compressão próximo à carga de ruptura, como aconteceu com a laje LR-8s. Os extensômetros colados nos *studs* apresentaram comportamento de compressão e tração. Aqueles fixados após a abertura praticamente não deformaram, induzindo que a fissura circunferencial de ruptura não passou após a abertura, como confirmado na laje pós ruptura. As fissuras radiais e circunferenciais ocorridas na laje pós ruptura podem ser vistos na Figura 4.29.

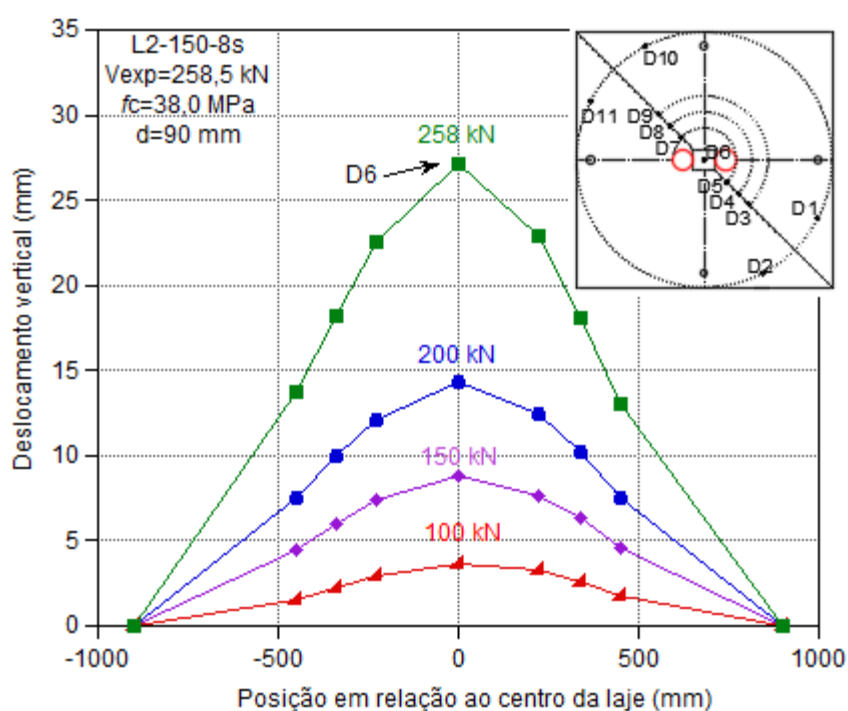


Figura 4.24 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de L2-150-8s.

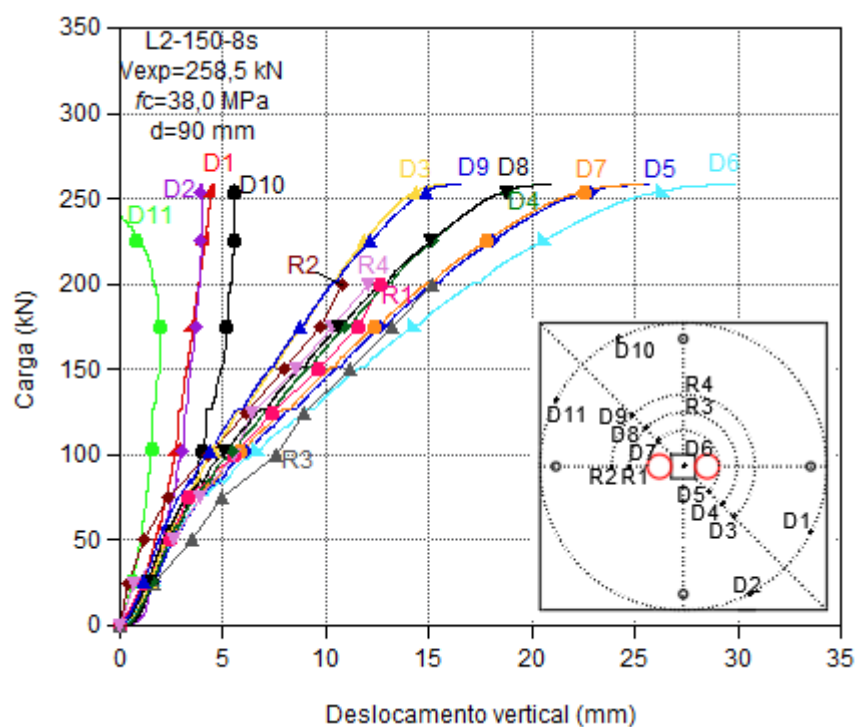


Figura 4.25 - Gráfico carga versus deslocamento vertical da laje L2-150-8s.

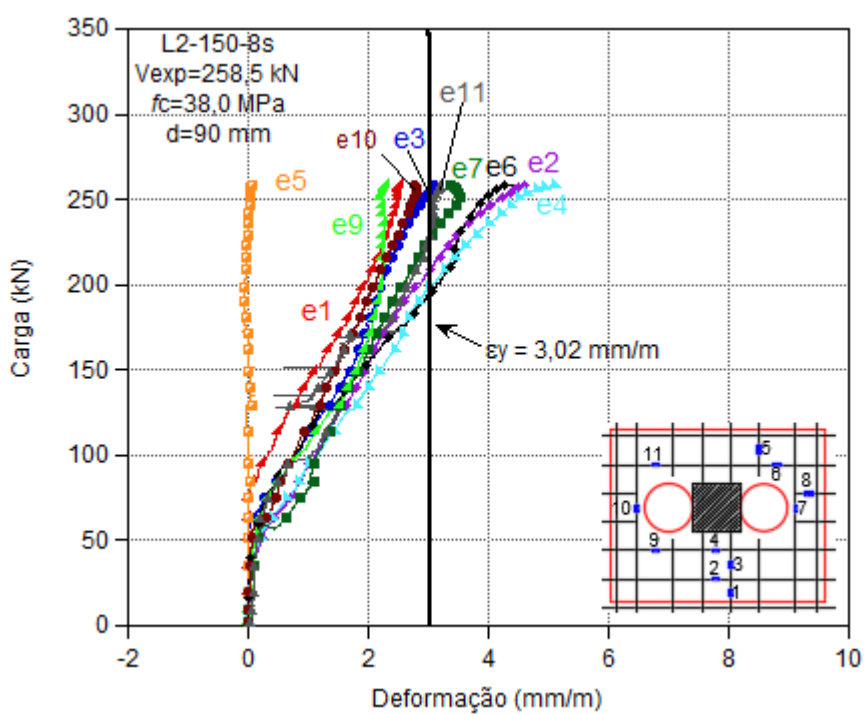


Figura 4.26 - Gráfico carga versus deformação dos extensômetros no aço de L2-150-8s.

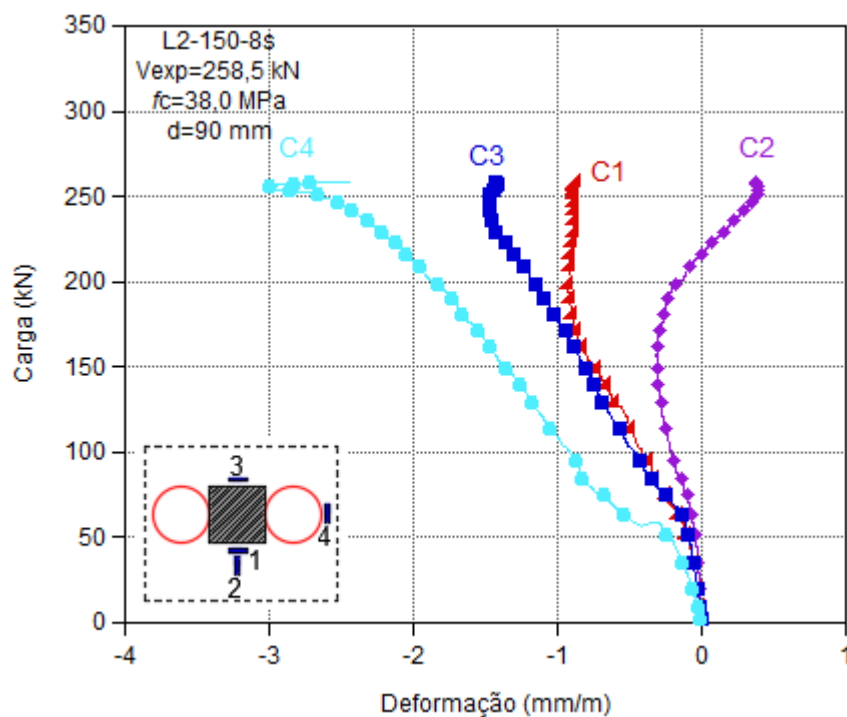


Figura 4.27 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros no concreto de L2-150-8s.

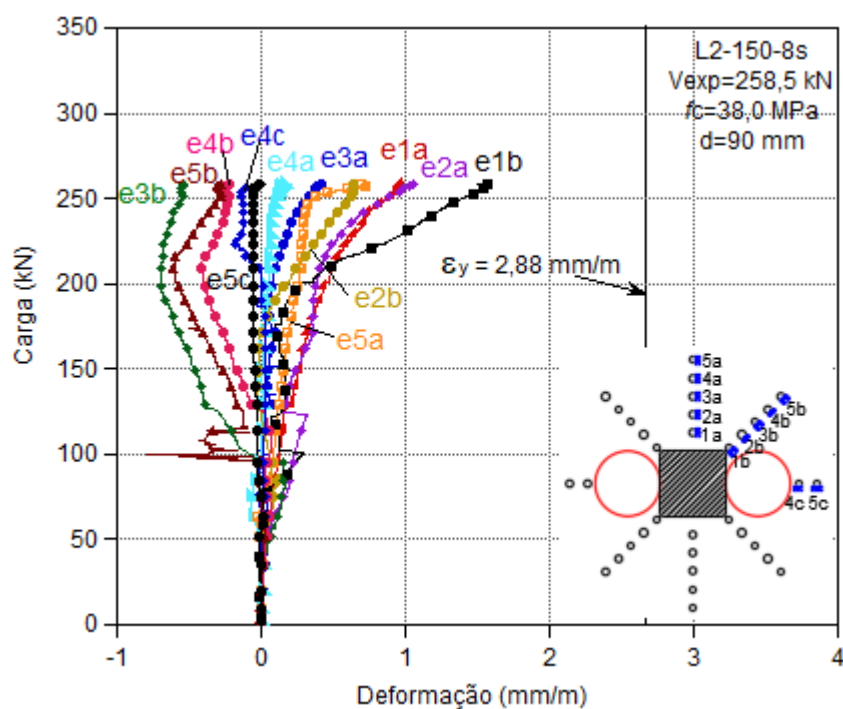


Figura 4.28 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros na armadura de cisalhamento de LR-150-8s.

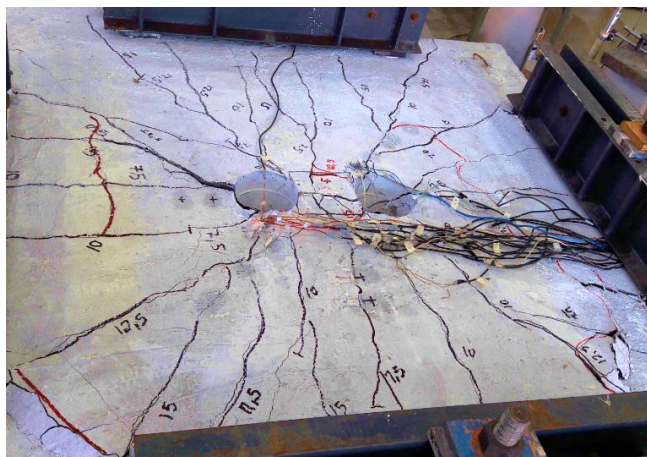


Figura 4.29 - Laje LR-150-8s pós ruptura.

4.3.2.3. Laje L2-150-6s

A laje L2-150-6s não possuía *studs* após as aberturas e a distribuição das armaduras de cisalhamento adotada ocasionou em uma redução da resistência à punção de 12 %, em comparação com a laje L2-150-8s. Os extensômetros colados no aço e no concreto mediram deformações menores e a laje obteve um deslocamento vertical menor, conforme demonstrado nas Figuras 4.30 e 4.34. Na leitura da carga de 200 kN, a laje L2-150-6s deslocou mais que a laje L2-150-8s para o mesmo ponto medido D6, 20 mm e 17 mm, respectivamente. A disposição das fissuras pós ruptura estão apresentadas na Figura 4.35 e foi semelhante ao observado para a laje L2-150-8s.

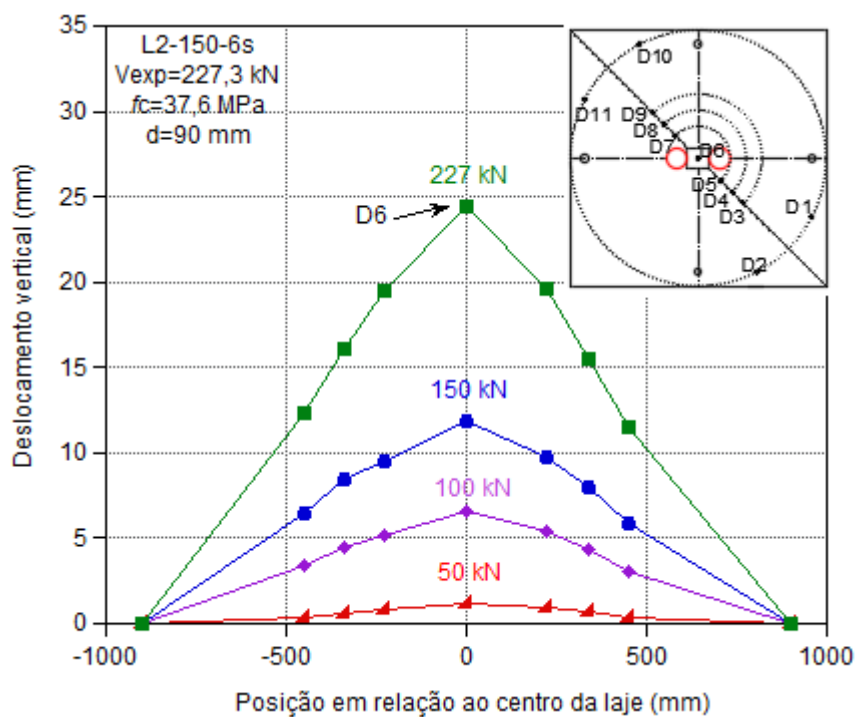


Figura 4.30 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de L2-150-6s.

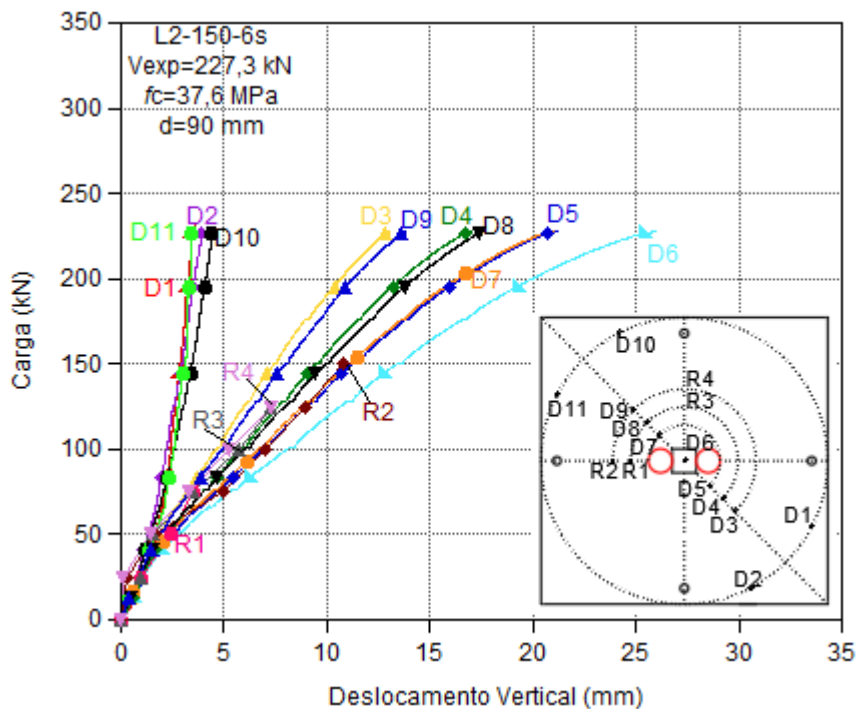


Figura 4.31 - Gráfico carga versus deslocamento vertical da laje L2-150-6s.

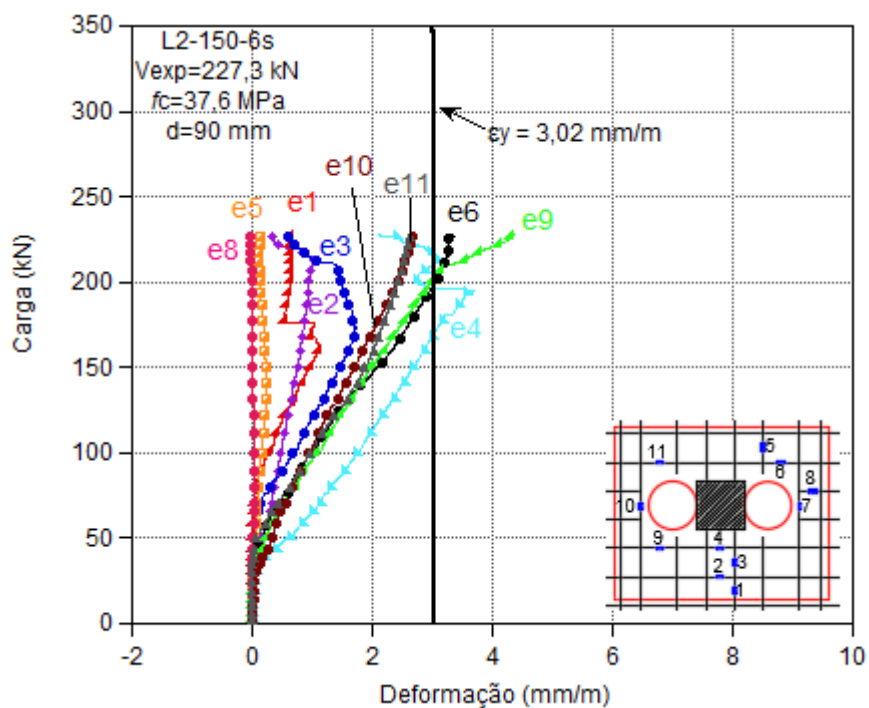


Figura 4.32 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros no aço de L2-150-6s.

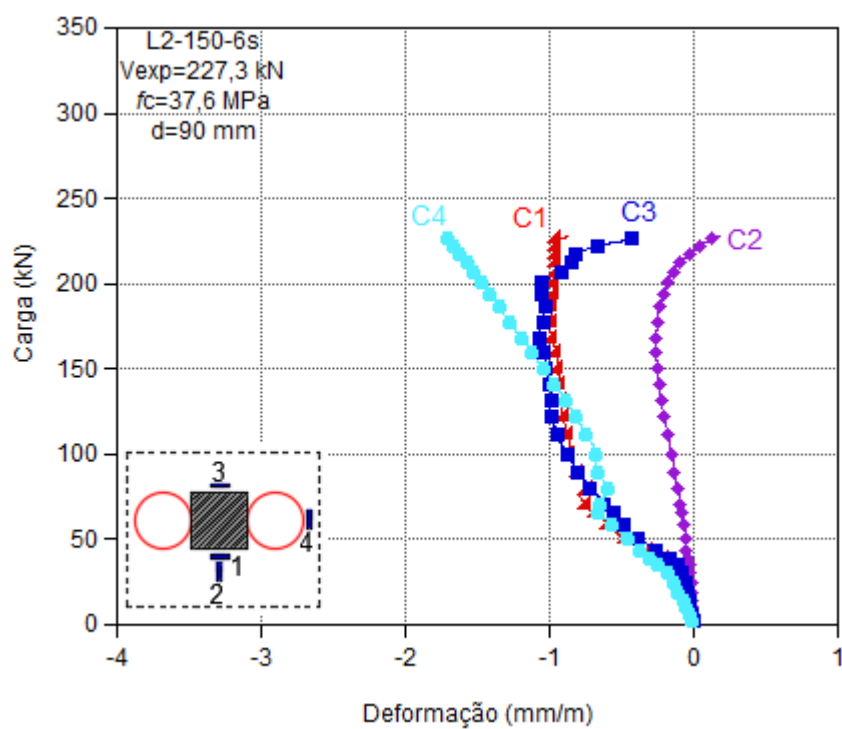


Figura 4.33 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros no concreto de L2-150-6s

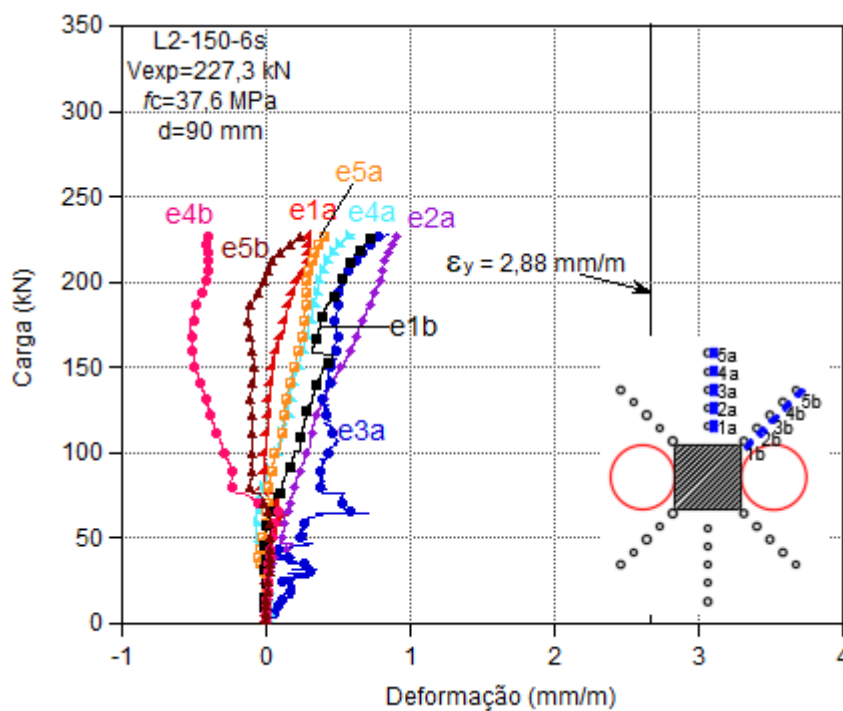


Figura 4.34 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros na armadura de cisalhamento de L2-150-6s.



Figura 4.35 - Laje L2-150-6s após a ruptura.

4.3.2.4. Laje L2-100-8s

A presença de duas aberturas de 100 mm de diâmetro, além de ter aumentado a carga de ruptura em relação às lajes com duas aberturas de 150 mm, resultou no aumento dos deslocamentos verticais da laje. Todos os extensômetros da armadura de flexão escoaram, exceto o e5, como pode ser visto nas Figuras 4.36 a 4.40. A fissuração da laje pós ruptura distribuiu-se uniformemente por toda a laje, conforme Figura 4.40.

As curvas relacionadas com os deslocamentos medidos nos pontos D3 a D9 apresentaram mudanças de inclinação também próximo à carga de 50 kN. A alteração na inclinação também ficou evidente nas Figuras 4.38 e 4.39.

Como observado anteriormente, os extensômetros do concreto fixados no bordo inferior da laje L2-100-8s também registraram redução das deformações de compressão próximo à carga de ruptura. Nas armaduras de cisalhamento os extensômetros e1a, e1b, e2a e e2b obtiveram os maiores valores próximo a carga de ruptura, mas não alcançaram deformações de 2,88 mm/m, indicando que possivelmente a fissura de ruptura não passou pelos *studs*. Na Figura 4.41 está apresentada a fotografia da laje pós ruptura, com comportamento semelhante às demais lajes do Grupo 2. A fissura de ruptura circunferencial não ultrapassou as aberturas.

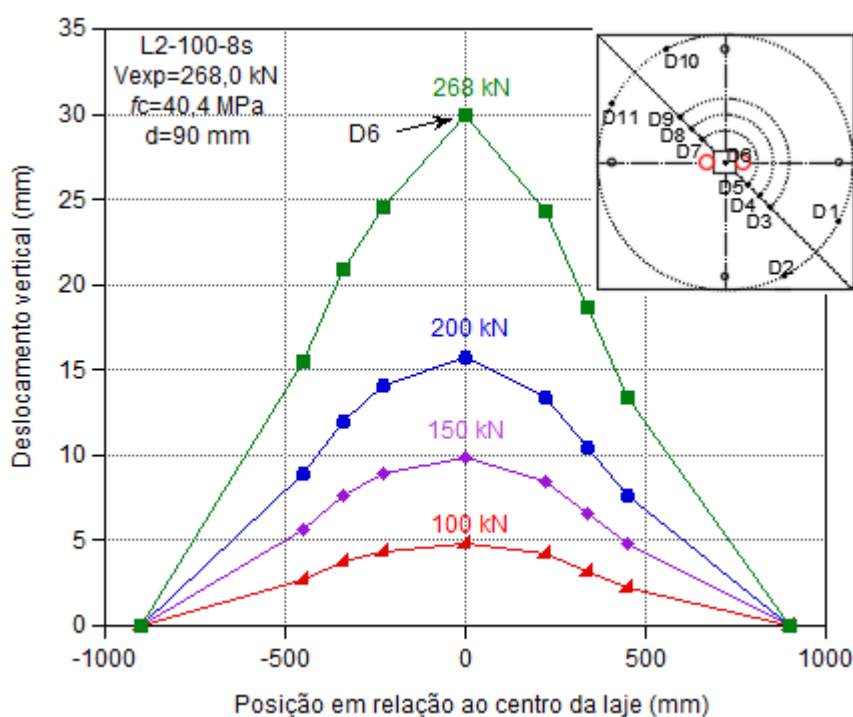


Figura 4.36 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de L2-100-8s.

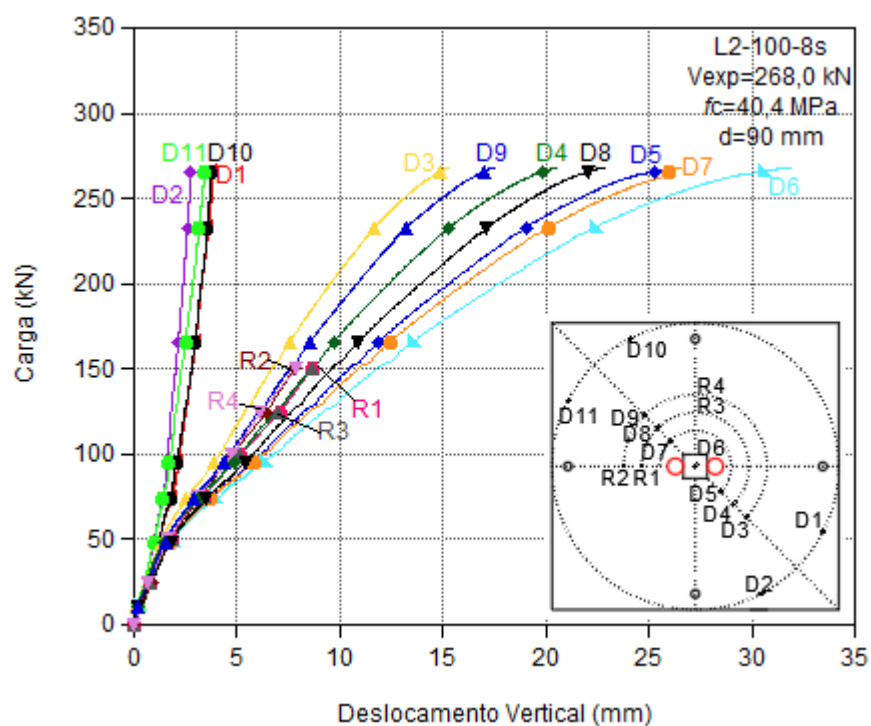


Figura 4.37 - Gráfico carga versus deslocamento vertical da laje L2-100-8s.

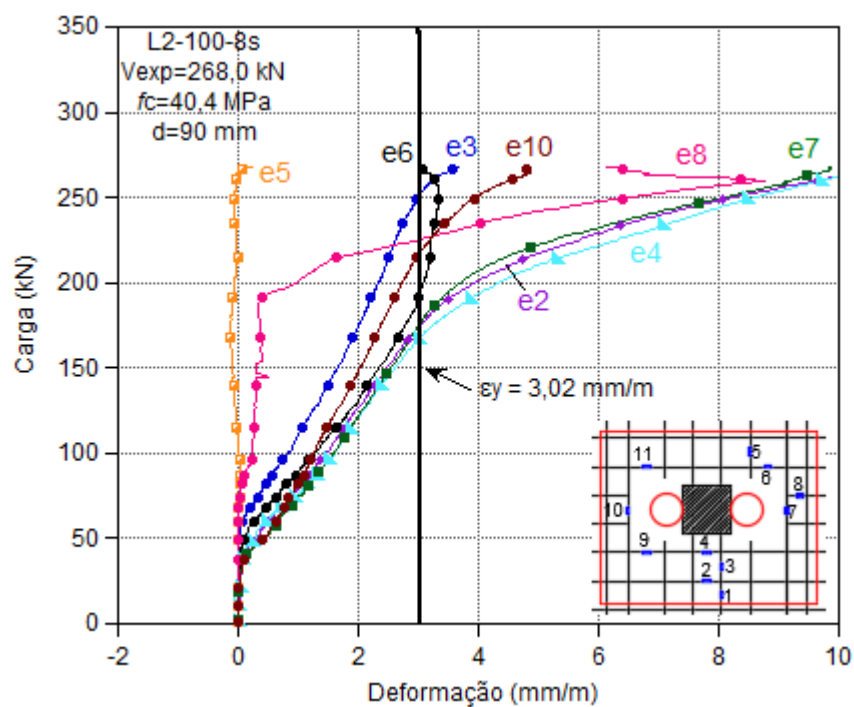


Figura 4.38 - Gráfico carga versus deformação dos extensômetros no aço de L2-100-8s.

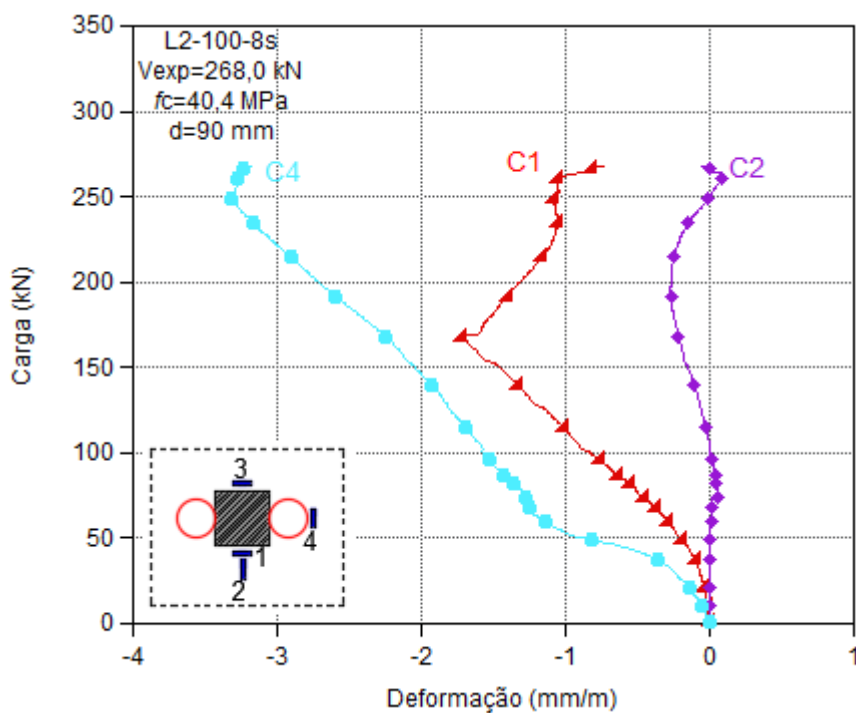


Figura 4.39 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros no concreto de L2-100-8s.

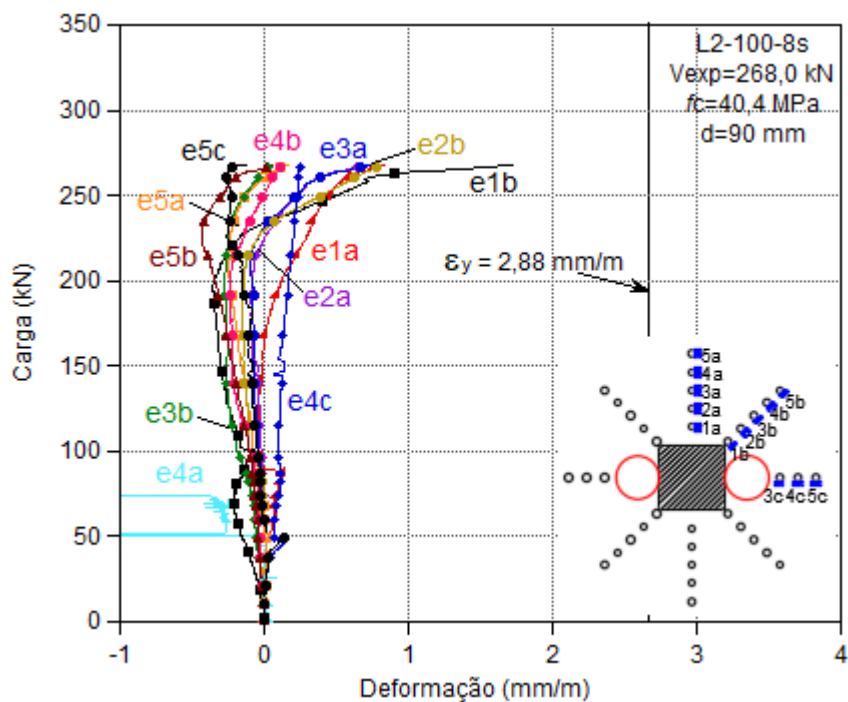


Figura 4.40 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros na armadura de cisalhamento de L2-100-8s.



Figura 4.41 - Laje L2-100-8s pós ruptura.

4.3.2.5. Laje L4-75-8s

As lajes com quatro aberturas também apresentaram um comportamento simétrico em termos de deslocamentos e deformações, conforme Figuras 4.42 a 4.46. As deformações na armadura de flexão foram maiores ao comparar com a laje L4-75, sendo que o uso dos *studs* aumentou a carga de ruptura e levou ao escoamento do aço da armadura de flexão, exceto os extensômetros e1, e3 e e6.

Os extensômetros fixados no concreto após a abertura chegaram a valores altos de deformação (Figura 4.45), mas na face inferior da laje não foi observado esmagamento do concreto. Os *studs* posicionados próximos à área carregada (e1a, e1b, e2a, e2b e e2c) apresentaram valores de deformação próximos ao valor de escoamento. Verificou-se ainda que a fissura de ruptura se desenvolveu entre as aberturas e entre a primeira e segunda camada nas linhas posicionadas no vértice da área carregada, conforme Figura 4.47.

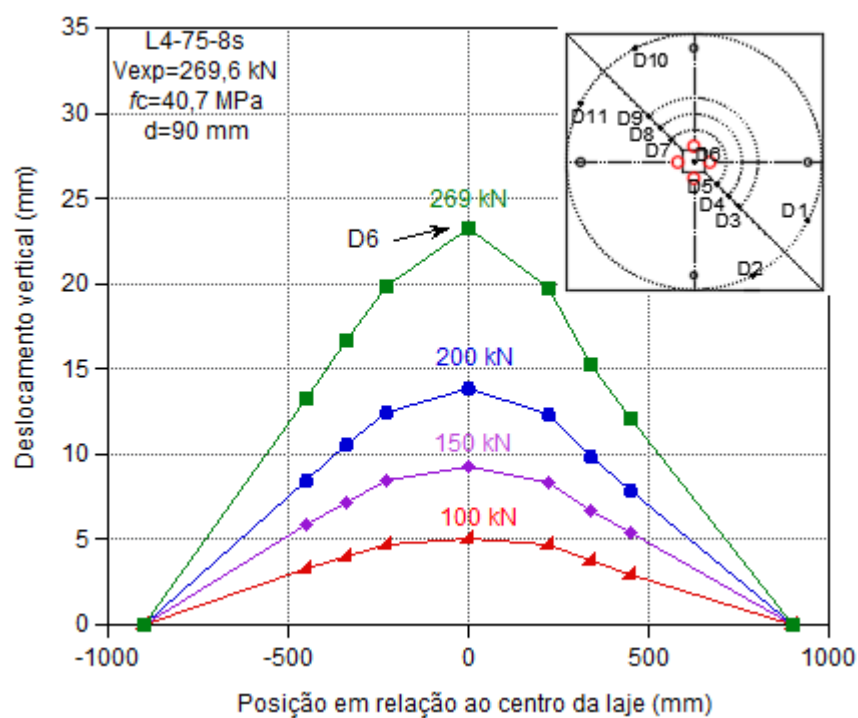


Figura 4.42 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de L4-75-8s.

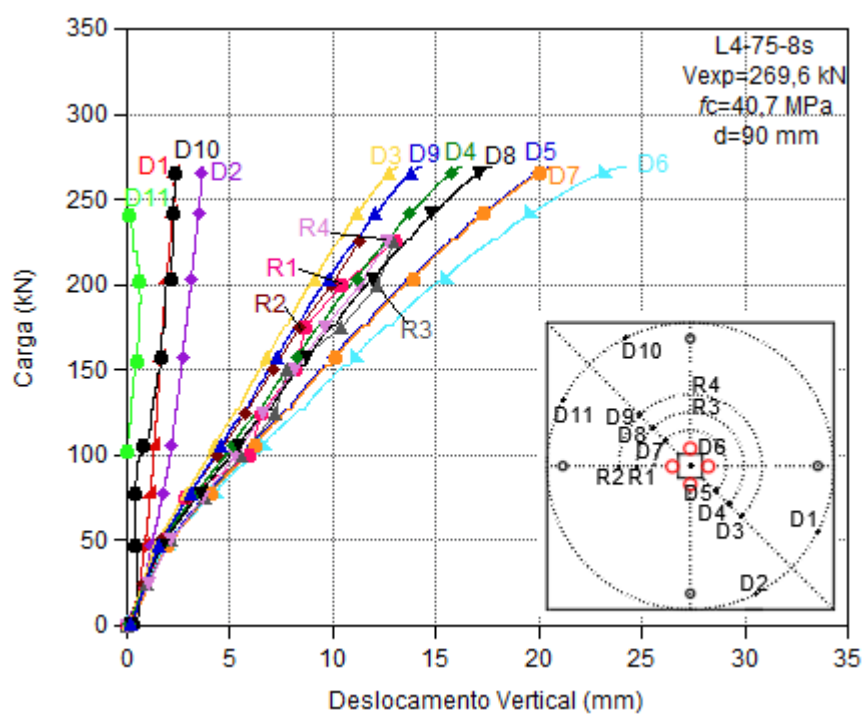


Figura 4.43 - Gráfico carga *versus* deslocamento vertical da laje L4-75-8s.

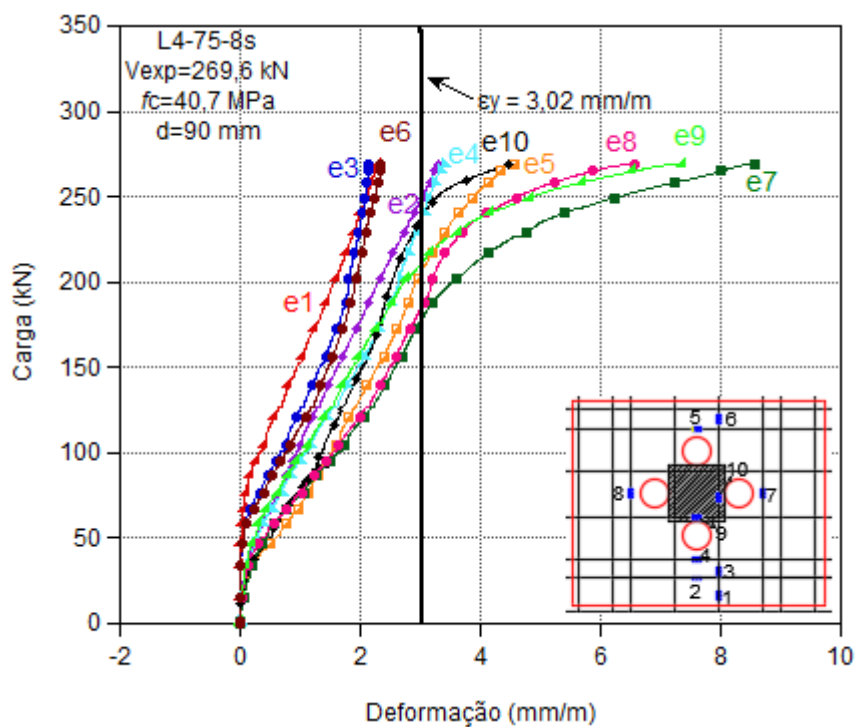


Figura 4.44 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros no aço de L4-75-8s.

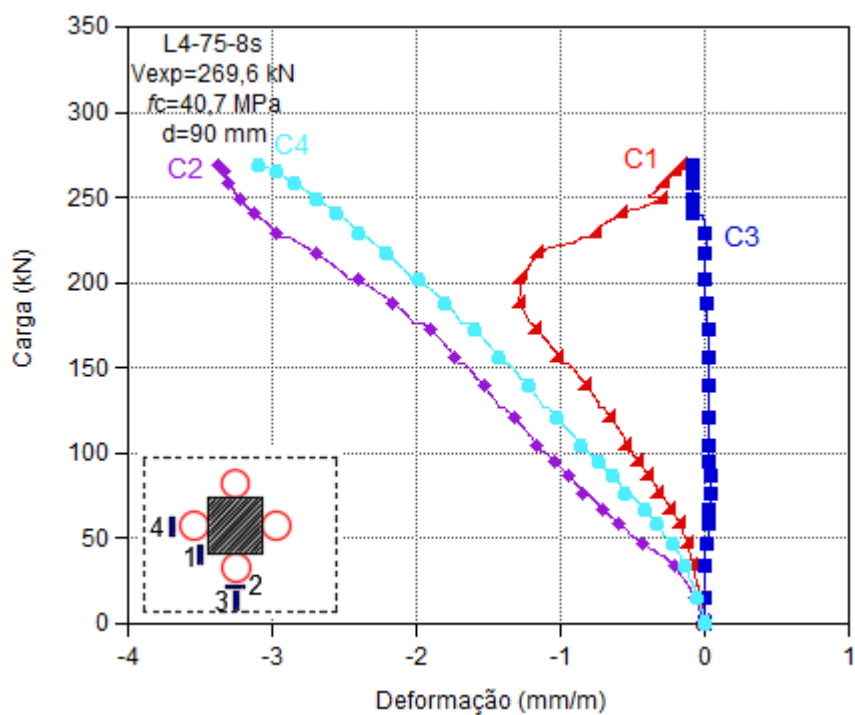


Figura 4.45 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros no concreto de L4-75-8s.

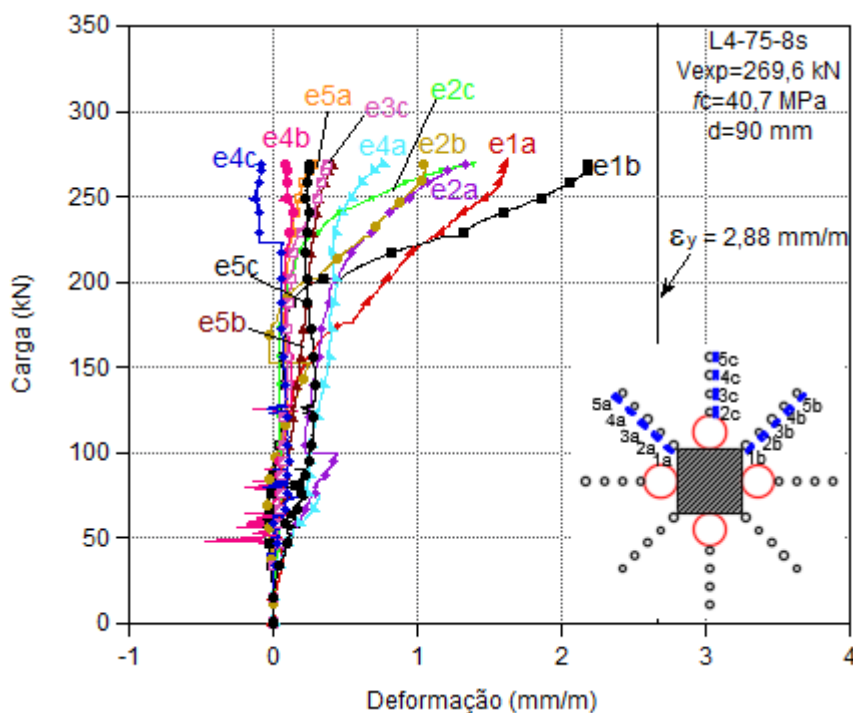


Figura 4.46 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros na armadura de cisalhamento de L4-75-8s.



Figura 4.47 - Laje L4-75-8s pós ruptura.

4.3.2.6. Laje L4-75-4s

As lajes L4-75-4s e L4-75-8s apresentaram um comportamento semelhante, mesmo que a primeira tenha apresentado resistência à punção 2,6 % maior e quatro linhas de *studs* a menos.

A ruptura, que ocorreu externa às linhas de *studs*, indica que o concreto e todos os *studs* trabalharam para aumentar a resistência à punção. Na Figura 4.53 está apresentada a fotografia da laje pós ruptura.

A deformação da armadura de flexão e do concreto foram semelhantes aos resultados obtidos na laje L4-75-4s. A maioria das barras de flexão atingiram o escoamento e os extensômetros c2 e c4 fixados no concreto chegaram próximos da deformação 3 mm/m e, também, não foi visualizado esmagamento do concreto na face inferior da laje, como apresentado nas Figuras 4.48 a 4.52.

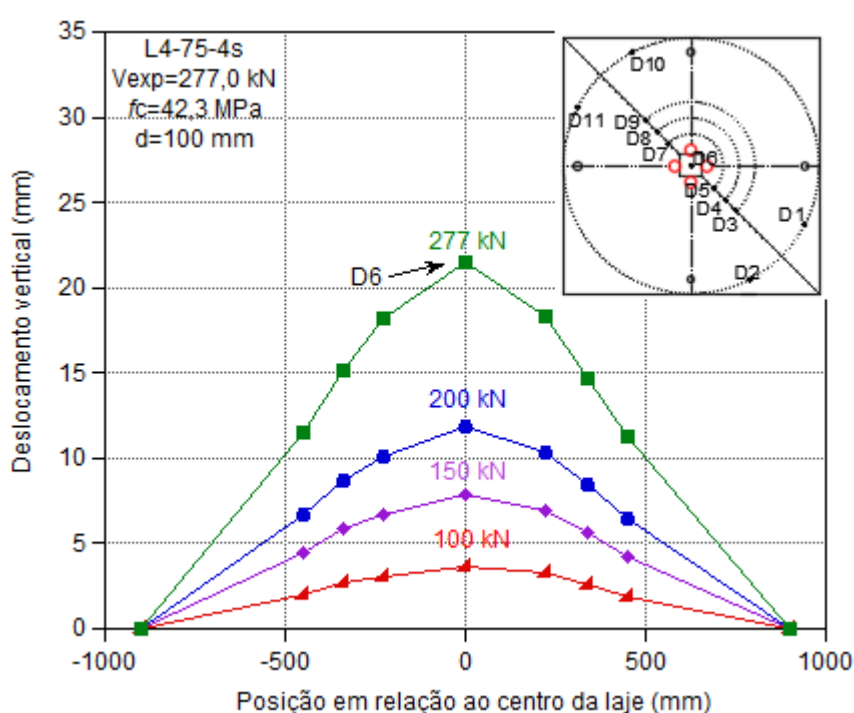


Figura 4.48 - Gráfico dos deslocamentos verticais ao longo do carregamento de L4-75-4s.

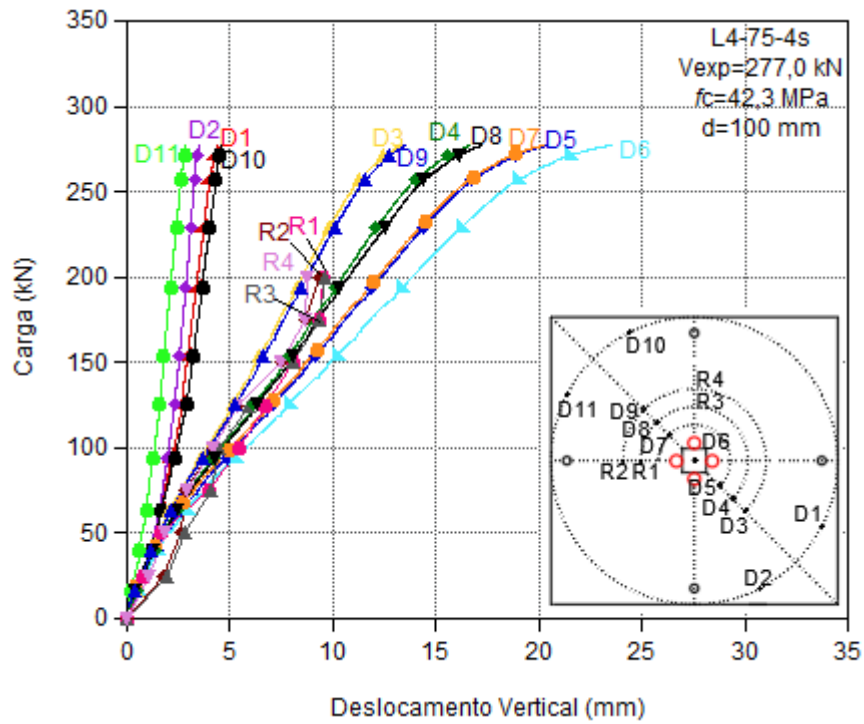


Figura 4.49 - Gráfico carga *versus* deslocamento vertical da laje L4-75-4s.

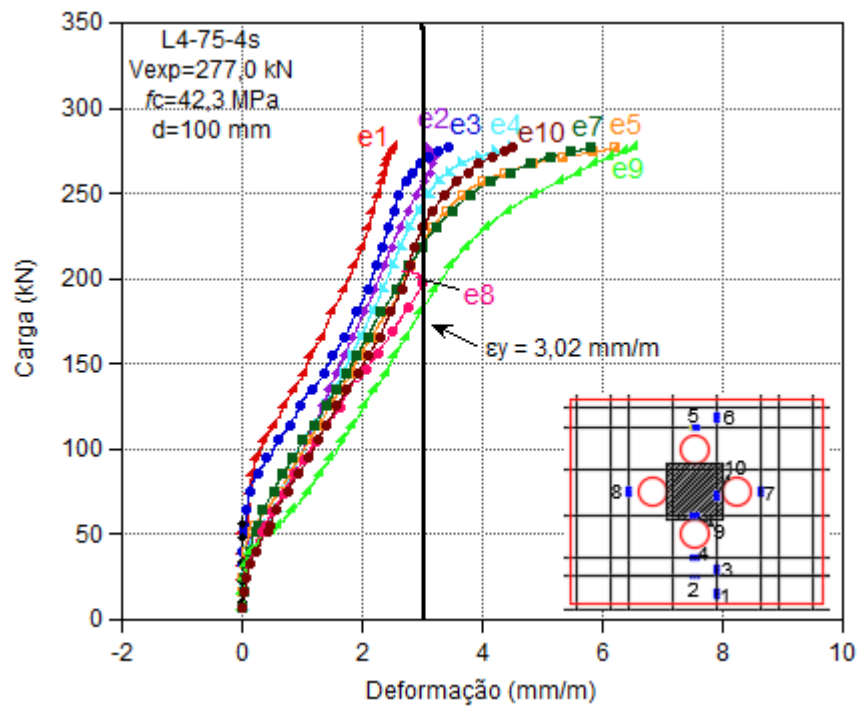


Figura 4.50 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros no aço de L4-75-4s.

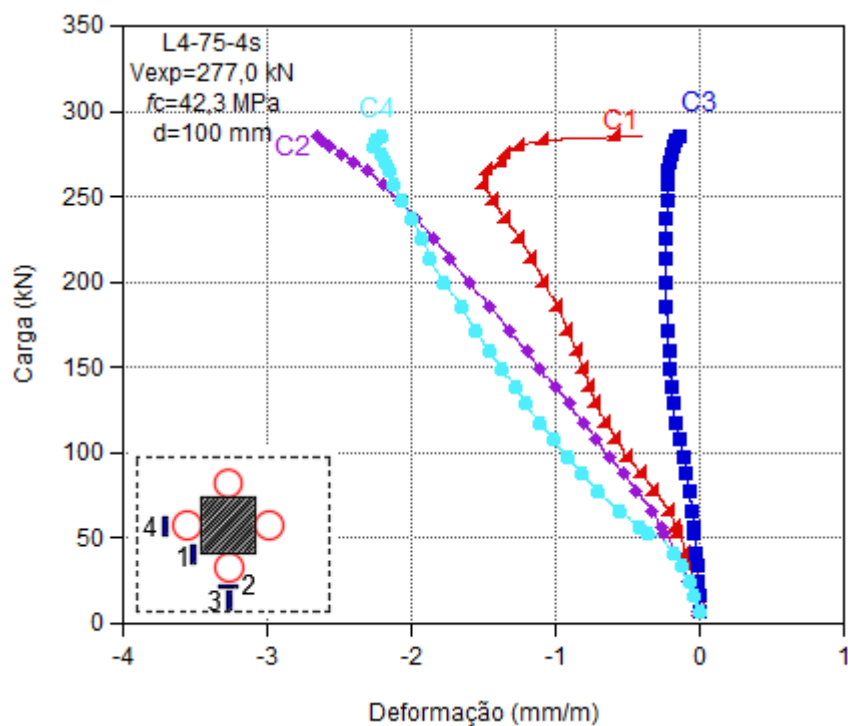


Figura 4.51 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros no concreto de L4-75.

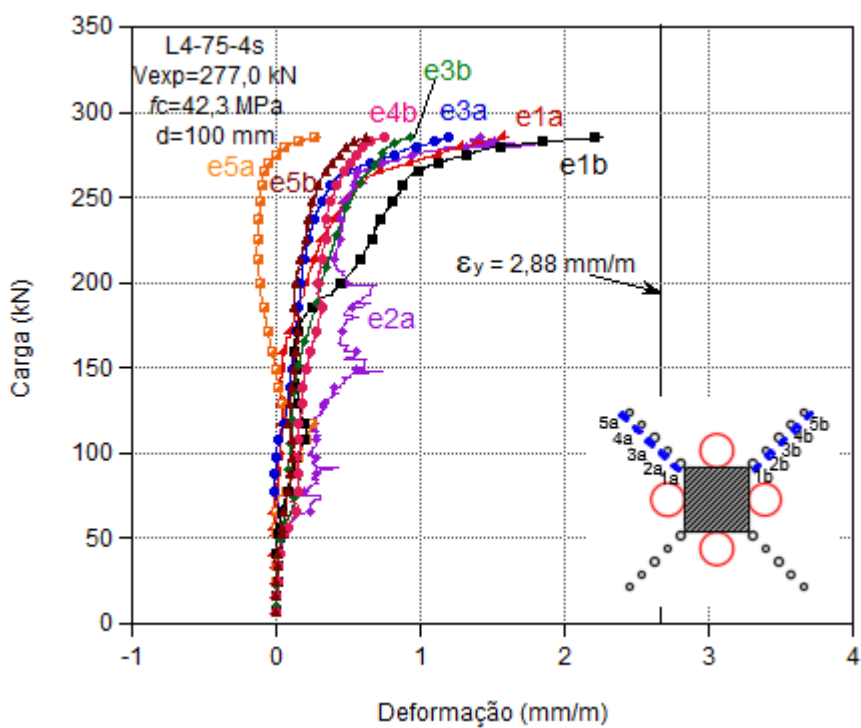


Figura 4.52 - Gráfico carga *versus* deformação dos extensômetros na armadura de cisalhamento de L4-75-4s.



Figura 4.53 – Laje L4-75-4s pós ruptura.

4.4. COMPARATIVO ENTRE AS LAJES DO GRUPO 1 E GRUPO 2

4.4.1. Cargas e Modos de Ruptura dos Modelos Estudados

Na Tabela 4.4 estão apresentados a carga de ruptura das lajes e as características dos *studs* presentes nelas. As lajes com oito linhas não possuíam 5 camadas em todas as linhas devido à presença das aberturas. A área de aço da armadura de cisalhamento por camada ($A_{sw}/camada$) foi igual a 402,1 mm², 301,6 mm² e 201,1 mm² para as lajes com 8, 6 e 4 linhas respectivamente. O aumento da área de aço da armadura de cisalhamento nem sempre ocasionou o aumento da resistência à punção, conforme o comportamento das lajes com quatro aberturas.

Esta apresentada nas Figuras 4.54 a 4.59 a vista superior e inferior das lajes do Grupo 2. Após as análises e a retirada do concreto solto na face inferior das lajes, identificou-se o modo de ruptura de cada laje. A laje L4-75-8s foi a única que apresentou fissura de ruptura cruzando a armadura de cisalhamento. Nas demais lajes a fissura de ruptura iniciou-se após a última camada de *studs*.

O aumento da carga de ruptura da laje L4-75-4s em relação à laje L4-75-8s pode estar relacionado com o modo de ruptura ocorrido. O modo de ruptura externo (L4-75-4s) está associado com a resistência do concreto e a resistência de todas as armaduras de cisalhamento. A ruptura interna, por sua vez, abrange somente a armadura de cisalhamento que ficou no interior do cone de ruptura.

Tabela 4.4 - Características dos *studs* nas lajes

Grupo	Laje	V_{exp} (kN)	f_c (MPa)	d (mm)	Aberturas (mm)	Linhas	Camadas/ Camadas após a abertura	A_{sw} /Camada (mm ²)
1	LR	232,3	39,8	90	-	0	0	0
	L2-150	208,4	41,4	91	150	0	0	0
	L4-75	184,0	40,0	93	75	0	0	0
2	LR-8s	323,0	40,2	90	-	8	5	402,1
	L2-150-8s	258,5	38,0	90	150	8	5/2	402,1
	L2-150-6s	227,3	37,6	90	150	6	5	301,6
	L2-100-8s	268,0	40,4	90	100	8	5/3	402,1
	L4-75-8s	269,6	40,7	90	75	8	5/4	402,1
	L4-75-4s	277,0	42,3	90	75	4	5	201,1

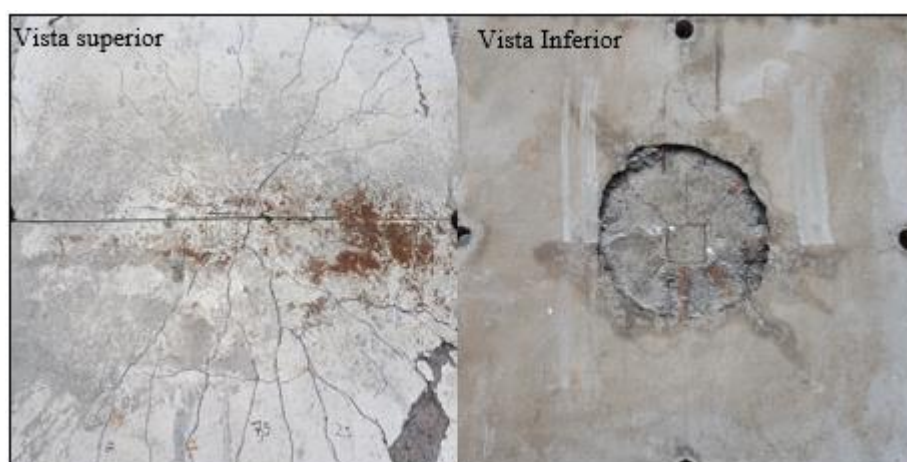


Figura 4.54 – Vista superior e inferior da laje LR-8s pós ruptura.

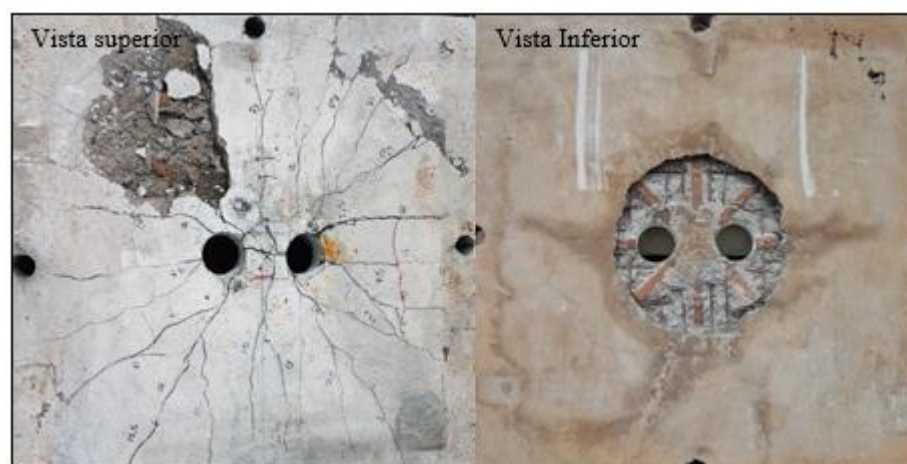


Figura 4.55 – Vista superior e inferior da laje L2-150-8s pós ruptura.



Figura 4.56 – Vista superior e inferior da laje L2-150-6s pós ruptura.

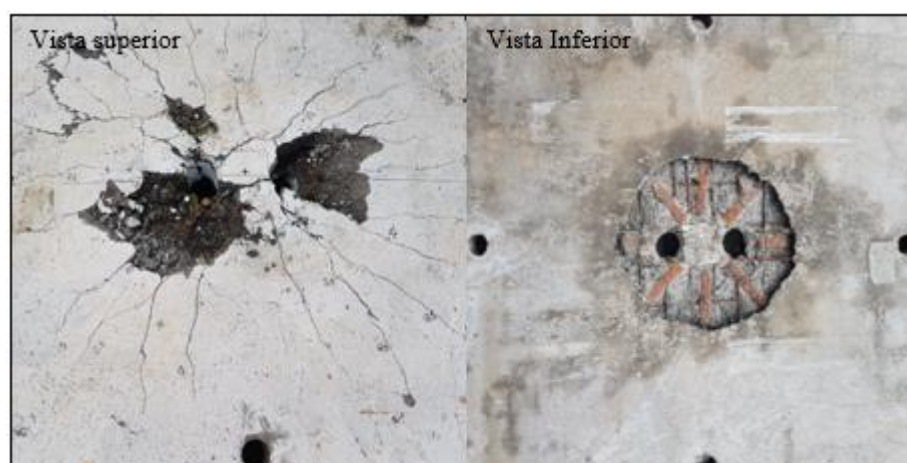


Figura 4.57 – Vista superior e inferior da laje L2-100-8s pós ruptura.

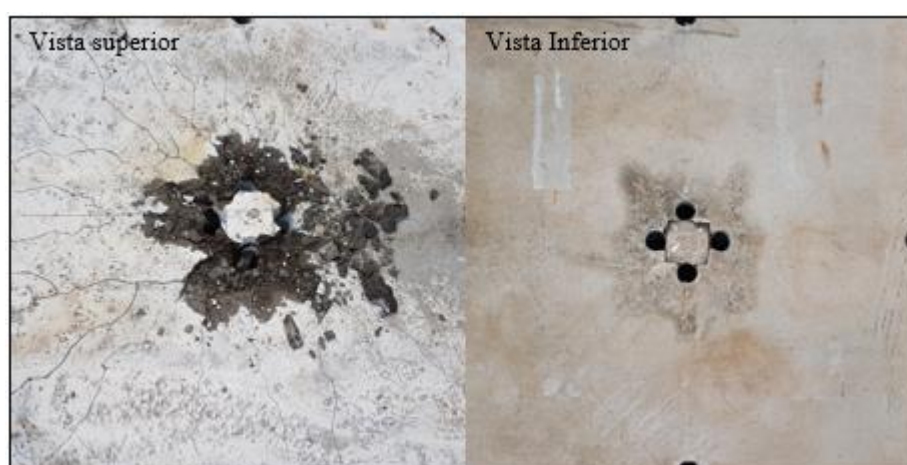


Figura 4.58 – Vista superior e inferior da laje L4-75-8s pós ruptura.



Figura 4.59 – Vista superior e inferior da laje L4-75-4s pós ruptura.

Na Figura 4.60 estão apresentadas as distâncias do posicionamento dos *studs* nas lajes. As lajes que possuíam oito linhas de *studs* (LR-8s, L2-150-8s, L2-150-6s e L2-100-8s) apresentaram distâncias entre as linhas dos *studs* na última camada igual a $2,43d$, exceto na região da abertura.

Nas lajes L2-150-6s e L4-75-4s a distância máxima entre as últimas camadas foi de $4,50d$. A terceira e a segunda camada das lajes, respectivamente L2-150-8s e L2-100-8s respectivamente, apresentaram as maiores distâncias entre os *studs* em razão da presença da abertura. O que, provavelmente, enfraqueceu a resistência da laje foram estas maiores distâncias entre os *studs*.

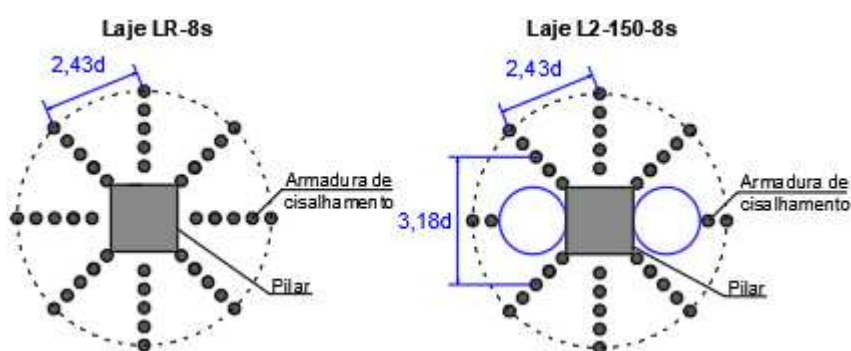


Figura 4.60 - Posicionamento e distância dos *studs*.

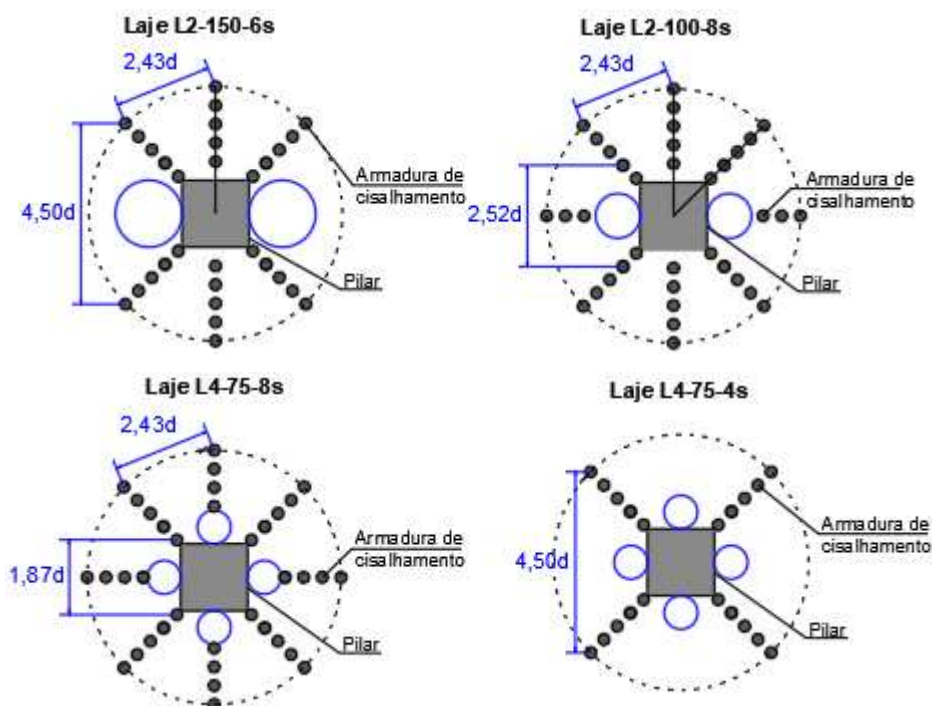


Figura 4.60 - Posicionamento e distância dos studs. (continuação)

4.4.2. Deslocamento Máximo e Rotação das Lajes

As curvas carga *versus* deslocamento medido pelo transdutor D6, que está no centro do pilar, de todas as lajes ensaiadas estão apresentadas na Figura 4.61. No início do carregamento as curvas mudam de inclinação, próximo à carga de 20 kN e, no geral, próximo à carga de 50 kN as curvas tendem a inclinar um pouco mais, mostrando a perda de rigidez nas lajes.

Einpaal et al. (2016) verificaram que o uso de diferentes modelos de armadura de cisalhamento pouco influencia a rigidez das lajes em relação a lajes sem armadura de cisalhamento. Os autores constataram também que as lajes sem armadura de cisalhamento apresentaram um comportamento um pouco mais rígido que as lajes com *studs*. Nesta pesquisa, por sua vez, a laje sem abertura e as lajes com quatro aberturas e com armadura de cisalhamento (LR-8s, L4-75-8s e L4-75-4s) denotaram rigidez semelhante às lajes sem *studs*.

Assim como foi observado por Silva (2003), para a carga de até 75kN, a variação das flechas foi pequena e para níveis de carregamento acima de 75kN, os acréscimos dos deslocamentos foram maiores para um mesmo incremento de carga. Para um mesmo nível de carregamento, a laje L2-150-6s apresentou os maiores deslocamentos no ponto D6.

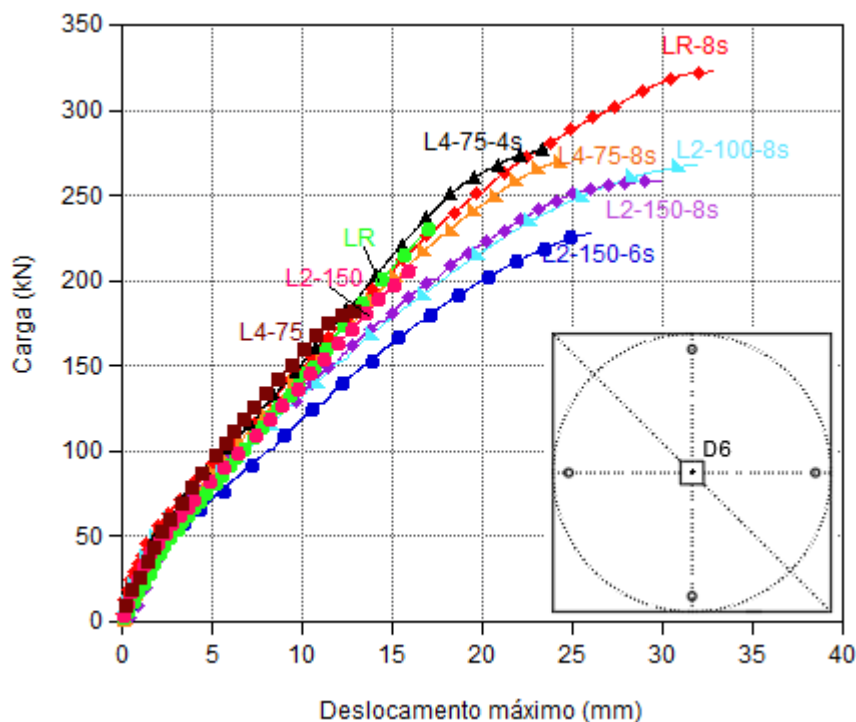


Figura 4.61 - Gráfico carga *versus* deslocamento máximo das lajes.

A Figura 4.62 apresenta um gráfico com as rotações máximas (determinadas com os deslocamentos verticais centrais em relação ao ponto de inflexão distante em 900 mm) para os valores máximos de carregamento atingido para cada laje. As menores rotações verificadas em função da carga de ruptura de cada laje foram para as lajes sem armadura de cisalhamento.

Nota-se que a laje LR e L2-150-6s apresentaram rotações diferentes para cargas de ruptura próximas. Logo, o aumento da rotação da laje L2-150-6s pode estar associado com o aumento da ductilidade da laje com o uso de armadura de cisalhamento. Por outro lado, a rotação das lajes L2-150-6s e L4-75-8s foram semelhantes, porém com diferente resistência à punção. A adição de mais linhas de *studs* nas lajes com quatro aberturas (L4-75-8s e L4-75-4s) aumentou a rotação da laje para cargas de ruptura semelhantes, indicando que os *studs* tornaram a laje mais flexível.

As lajes testadas por Silva (2003) apresentaram rotações similares às lajes testadas neste trabalho. A rotação variou de 100 a 250×10^{-4} rad, sendo que a menor rotação obtida foi na laje L4 e a maior na laje L8. A laje referência de Silva (2003), que possuía as mesmas características da laje LR, atingiu rotação de 130×10^{-4} rad, enquanto a LR alcançou 159×10^{-4} rad, ou seja, diferença de 18 %.

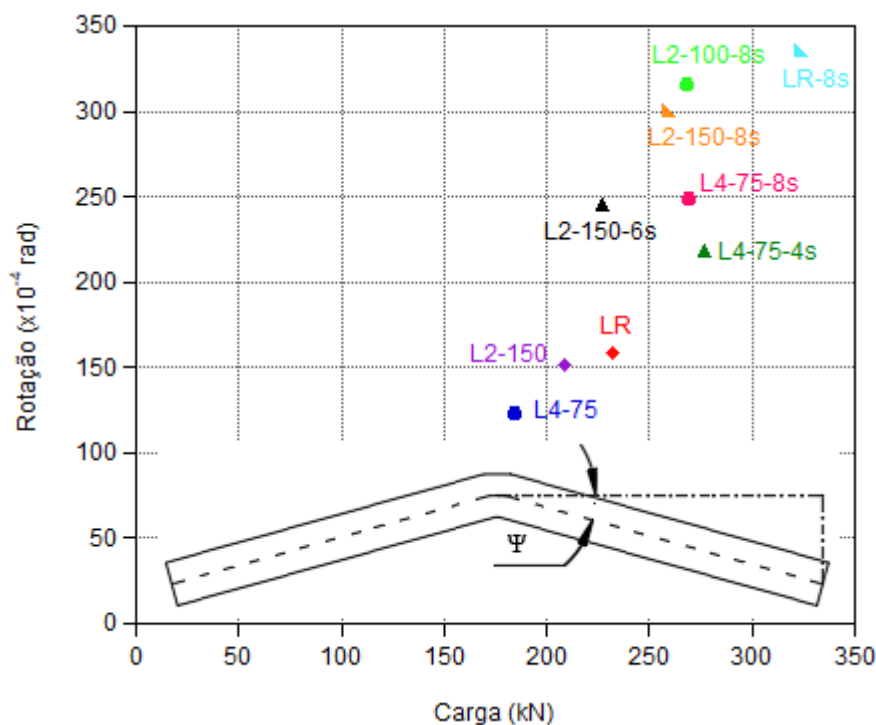


Figura 4.62 - Gráfico das rotações máximas atingidas para a carga de ruptura de cada laje.

4.4.3. Deformações do Concreto, Armaduras de Flexão e de Cisalhamento

Na Figura 4.63 estão apresentadas as curvas carga *versus* deformação do concreto próximo à placa que simulou o pilar. Neste gráfico, apresenta-se que a deformação na face inferior das lajes não atingiu a deformação de esmagamento do concreto especificado pelo ACI 318 (2014) igual a 3 mm/m. A laje LR-8s atingiu deformação mais próxima deste valor. Nos ensaios não foi visualizado esmagamento do concreto na parte inferior da laje. As curvas apresentadas pelas lajes L4-75, LR-8s, L2-100-8s, L4-75-8s e L4-75-4s apresentaram diminuição da deformação em cargas mais altas.

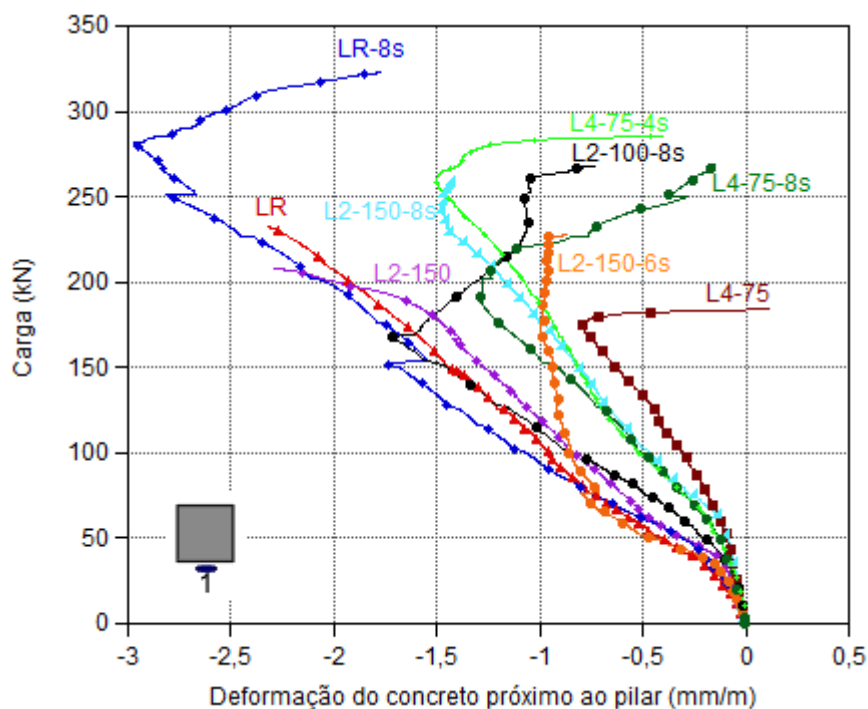


Figura 4.63 - Gráfico carga *versus* deformação do concreto próximo ao pilar

As armaduras de flexão utilizadas nas lajes do Grupo 1 e 2 foram de diferentes lotes. As armaduras utilizadas no primeiro grupo apresentaram deformação de escoamento $\varepsilon_y = 3,20$ mm/m e as armaduras utilizadas no segundo grupo, $\varepsilon_y = 3,02$ mm/m. O gráfico apresentado na Figura 4.64 traz a curva carga *versus* deformação no extensômetro e4, sendo este, utilizado na mesma barra para todas as lajes e fixado na barra mais próxima à área carregada. A laje L4-75 não apresenta o resultado em consequência da não obtenção da leitura no ensaio, pois houve falha no extensômetro.

Nota-se que as lajes que possuíam armadura de cisalhamento apresentaram maiores deformações se comparadas às lajes sem armadura de cisalhamento. Isto deve-se ao fato de que as lajes com armadura de cisalhamento alcançaram maiores valores de resistência à punção. A armadura de flexão das lajes L2-100-8s ultrapassou o valor de 10 mm/m, e da laje LR-8s chegou a próximo de 8 mm/m. As lajes L2-150-6s e L4-75-8s, que apresentaram rotações semelhantes na carga de ruptura, também apresentaram deformação da armadura de flexão semelhante próximo na ruptura, 3,7 mm/m e 3,4 mm/m, respectivamente.

O comportamento das armaduras de flexão das lajes com quatro aberturas e com armadura de cisalhamento (L4-75-8s e L4-75-4s) demonstrou-se semelhante. Na laje L4-75-4s, a barra próxima ao pilar tendeu ao escoamento, possivelmente por ter uma maior resistência à punção. As lajes com duas aberturas de 150 mm (L2-150-8s e L2-150-6s) apresentaram curvas

diferentes, sendo que a primeira obteve um comportamento mais rígido, isto é, a partir da carga de 50 kN a laje L2-150-6s apresentou maiores deformações para a mesma carga.

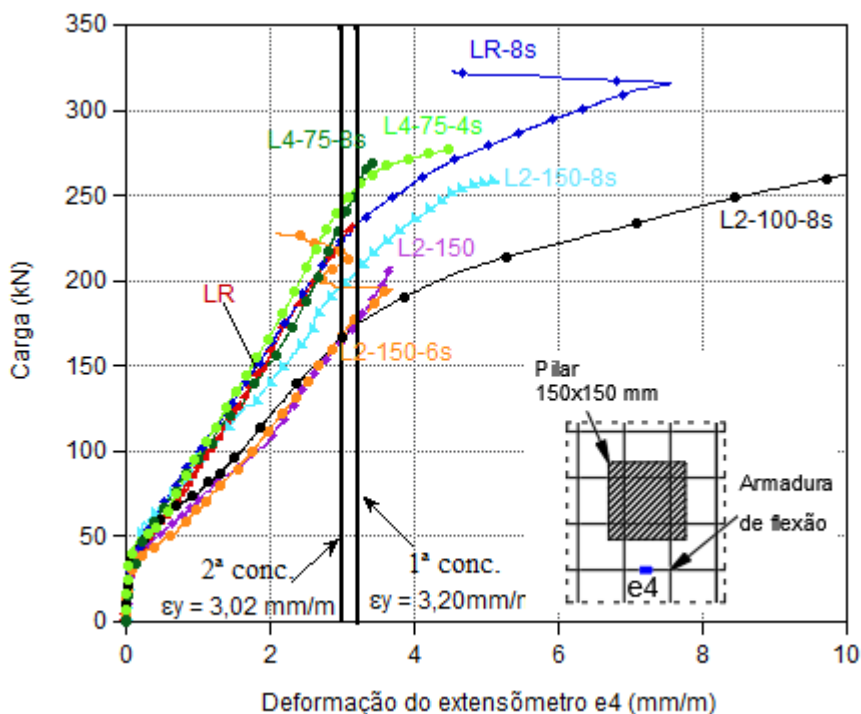


Figura 4.64 - Gráfico carga *versus* deformação do extensômetro e4.

As barras das armaduras de cisalhamento monitoradas (lajes do Grupo 2) não alcançaram a deformação de 2,88 mm/m, correspondente ao início do escoamento. Aquelas posicionadas próximas ao vértice do pilar apresentaram maiores deformação. Na Figura 4.65 mostra-se a curva carga *versus* deformação dos *studs* posicionados no vértice do pilar de todas as lajes.

Até a carga de 175 kN os *studs* deformaram no máximo 0,5 mm/m. Após a carga de 200 kN a deformação aumentou e na laje L4-75-4s o *stud* monitorado tendeu ao escoamento, indicando que alguma fissura cruzou o *stud* posicionado próximo ao pilar.

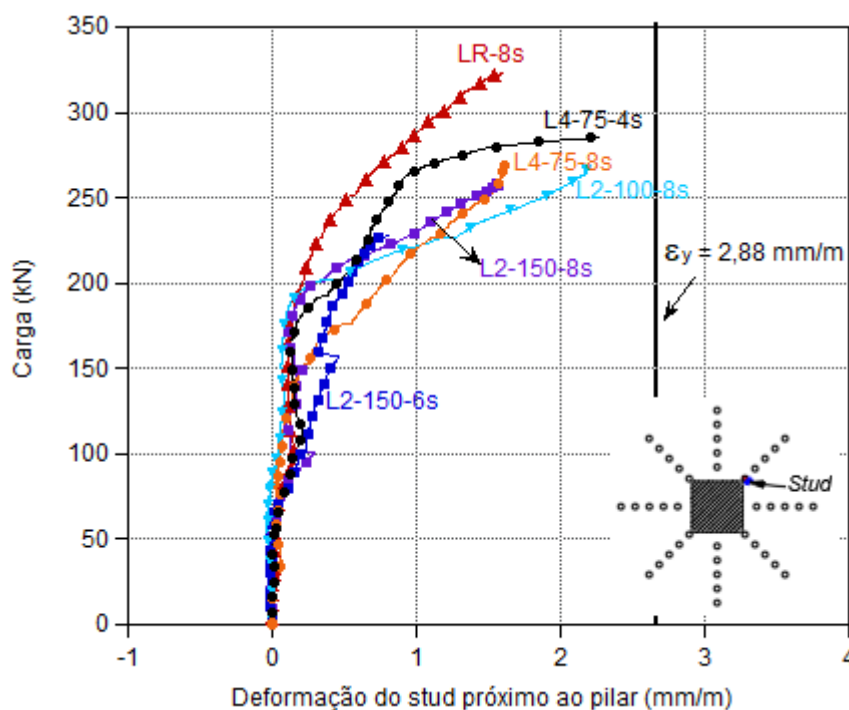


Figura 4.65 - Gráfico carga *versus* deformação do primeiro stud.

4.4.4. Desenvolvimento das Fissuras

As primeiras fissuras a surgirem foram as radiais, seguidas pelas circunferenciais ligando-se às radiais. Na Tabela 4.5 são apresentados os carregamentos correspondentes ao surgimento das primeiras fissuras radiais, circunferenciais e as fissuras representadas pela primeira inclinação da curva dos gráficos carga *versus* deformação na armadura de flexão de todas as lajes ensaiadas. Estas últimas fissuras mostram que quando surgem fissuras a laje perde rigidez e o gráfico muda de inclinação.

Em todas as lajes, as fissuras foram marcadas a cada passo de carga de 25 kN. Apenas na laje L4-75, a observação do surgimento e desenvolvimento das fissuras foi realizado com passos de carga de 15 kN. Optou-se por diminuir o incremento de carga nesta laje por possuir quatro aberturas e por ter tido uma previsão de carga de ruptura menor que as demais lajes sem armadura de cisalhamento.

Tabela 4.5 - Carga do início de fissuração das lajes ensaiadas.

Laje	Fissuras Radiais (kN)	Fissuras Circunferenciais (kN)	Fissuras obtidas na inclinação da curva da armadura de flexão (kN)	Vexp (kN)
LR	50	75	28,52	232,3
L2-150	75	75	32,72	208,4
L4-75	45	60	26,00	184,0
LR-8s	75	75	28,19	323,0
L2-150-8s	75	125	19,96	258,5
L2-150-6s	50	100	29,36	227,3
L2-100-8s	50	75	21,14	268,0
L4-75-8s	75	75	15,26	269,6
L4-75-4s	75	75	16,44	277,0

As primeiras fissuras a surgirem foram as radiais e depois surgiram as fissuras circunferenciais ligando as fissuras radiais. As fissuras radiais surgiram entre 19 % e 36 %, e as fissuras circunferenciais surgiram com 23 % a 48 % da carga de ruptura. As fissuras obtidas através da curva carga *versus* deformação da armadura de flexão surgiram entre 6 % e 16 % da carga de ruptura. Tais fissuras mostraram-se não visíveis por serem imperceptíveis a olho nu. As características de fissuração desenvolvidas nas lajes são mostradas nas Figuras 4.66 a 4.74.



Figura 4.66: Desenvolvimento das fissuras da laje LR.



Figura 4.67: Desenvolvimento das fissuras da laje L2-150.



Figura 4.68: Desenvolvimento das fissuras da laje L4-75.

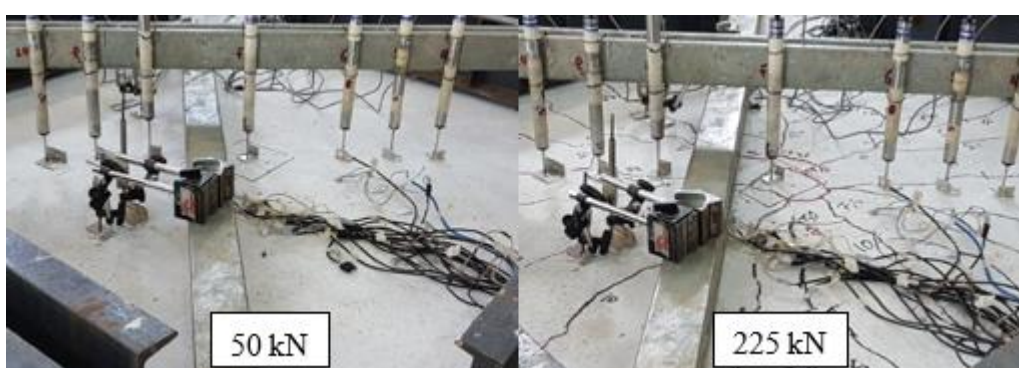


Figura 4.69 - Desenvolvimento das fissuras da laje LR-8s.

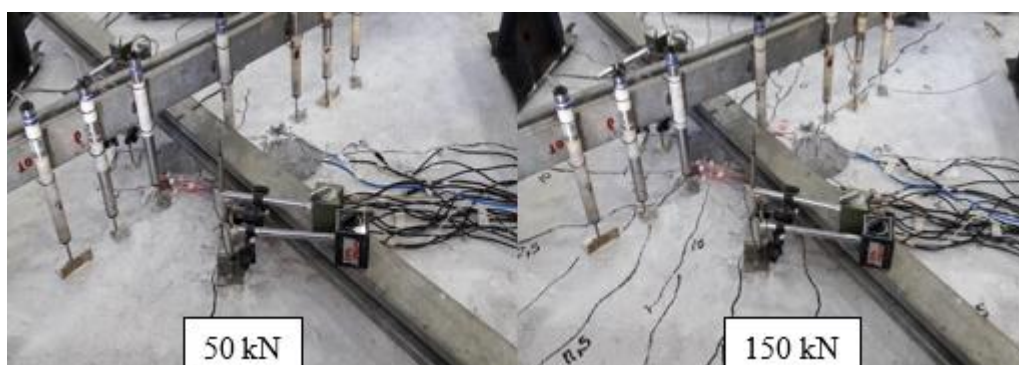


Figura 4.70 - Desenvolvimento das fissuras da laje L2-150-8s.



Figura 4.71 - Desenvolvimento das fissuras da laje L2-150-6s.



Figura 4.72 - Desenvolvimento das fissuras da laje L2-100-8s



Figura 4.73 - Desenvolvimento das fissuras da laje L4-75-8s

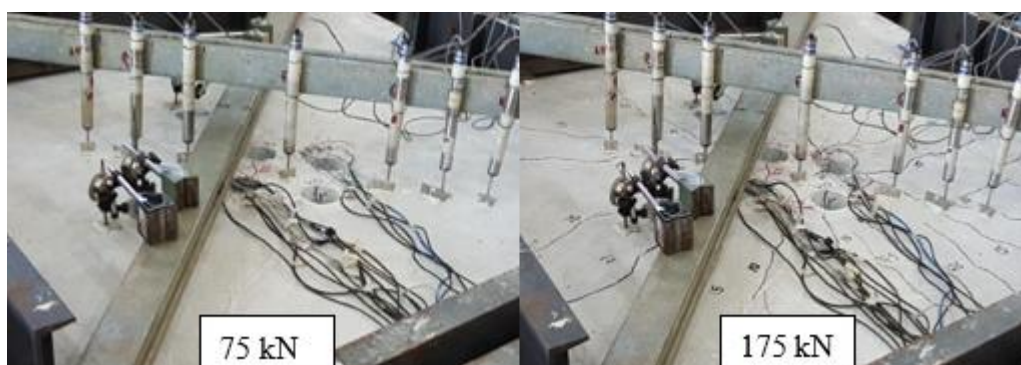


Figura 4.74 - Desenvolvimento das fissuras da laje L4-75-4s.

4.5. RESISTÊNCIA AO PUNÇONAMENTO EXPERIMENTAL COMPARADA AOS MÉTODOS DE CÁLCULO

Com base nas características das lajes apresentadas no item 4.3 foram feitas as comparações entre as cargas experimentais com as estimadas pelos códigos: ACI318 (2014), EC2 (2004), NBR 6118 (2014), *fib* Model Code (2010) e Teoria da Fissura Crítica. Não foi utilizado nenhum coeficiente de segurança no dimensionamento.

4.5.1. ACI 318 (2014)

Na Tabela 4.6 apresenta-se a comparação entre os resultados obtidos experimentalmente e os estimados pelo ACI 318 (2014), adotando o perímetro de controle quadrado e afastado a 0,5d da borda dos pilares e 0,5d da última camada da armadura de cisalhamento. Os resultados V_{exp}/V_{teo} são conservadores, as estimativas que mais deferiram dos resultados obtidos no ensaio foram das lajes L4-75-8s e L4-75-4s, 129 % e 131 %, respectivamente, inferiores aos obtidos experimentalmente. O resultado conservador está relacionado com o perímetro de controle considerado para estas lajes com quatro aberturas e pela não consideração do *size effect* no dimensionamento. O perímetro de controle externo às armaduras de cisalhamento é 40 % inferior ao comparar com a laje LR-8s sem abertura. A laje LR obteve a menor relação V_{exp}/V_{teo} , com resultado igual a 1,29.

Tabela 4.6 - Comparação entre a carga experimental e a estimada pelo ACI 318 (2014).

Laje	$V_{n,semAC}^{(1)}$ (kN)	$V_{n,adj}^{(2)}$ (kN)	$V_{n,int}^{(3)}$ (kN)	$V_{n,ext}^{(4)}$ (kN)	V_{teo} (kN)	V_{exp} (kN)	V_{exp}/V_{teo}	Modo de Ruptura	
								Previsto	Real
LR	181	0	0	0	181	232,3	1,29	Punção	Punção
L2-150	125	0	0	0	125	208,4	1,66	Punção	Punção
L4-75	123	0	0	0	123	184,0	1,50	Punção	Punção
LR-8s	182	363	499	196	196	323,0	1,65	Externo	Externo
L2-150-8s	126	252	367	132	133	258,5	1,95	Externo	Externo
L2-150-6s	125	251	366	132	132	227,3	1,72	Externo	Externo
L2-100-8s	142	285	379	145	145	268,0	1,85	Externo	Externo
L4-75-8s	120	240	272	118	118	269,6	2,29	Externo	Interno
L4-75-4s	122	245	274	120	120	277,0	2,31	Externo	Externo

(1) Carga para laje sem armadura de cisalhamento;

(2) Carga para laje com armadura de cisalhamento na superfície adjacente ao pilar;

(3) Carga na superfície cruzando à região com armadura de cisalhamento;

(4) Carga na superfície externa à região com armadura de cisalhamento.

O modo de ruptura experimental para a laje L4-75-8s foi interno as armaduras de cisalhamento, diferentemente do previsto pelo código ACI 318 (2014). As quatro aberturas adjacentes ao pilar e o posicionamento das armaduras de cisalhamento após as aberturas e na quina do pilar fortaleceu a região externa e enfraqueceu a região interna a armadura de cisalhamento. Os códigos não consideram a contribuição dos *studs* posicionados após as aberturas e isso pode estar relacionado com a previsão de ruptura externa a armadura de cisalhamento pelos códigos.

4.5.2. EC2 (2004)

De acordo com a Tabela 4.7 constata-se que os valores estimados pelo EC2 (2004) variaram entre -5 % do valor da carga experimental e 57 %. A norma apresentou resultados mais compatíveis com os obtidos experimentalmente ao comparar com o código ACI 318 (2014). As lajes com aberturas apontaram resultados mais conservadores, isto pode estar relacionado com a desconsideração de parte do perímetro de controle de forma radial, desprezando inclusive o efeito de armadura de cisalhamento após as aberturas. Foi adotado o perímetro de controle afastado 2d da borda do pilar e 1,5d da última camada de armadura de cisalhamento conforme sugere o código.

Tabela 4.7 - Comparação entre a carga experimental e a estimada pelo EC2 (2004).

Laje	$V_{rdc,SAC}^{(1)}$ (kN)	$V_{ed}^{(2)}$ (kN)	$V_{rdc,CAC}^{(3)}$ (kN)	$V_{rd1,ext}^{(4)}$ (kN)	V_{teo} (kN)	V_{exp} (kN)	V_{exp}/V_{teo}	Modo de Ruptura	
								Previsto	Real
LR	223	434	0	0	223	232,3	1,04	Punção	Punção
L2-150	133	453	0	0	133	208,4	1,57	Punção	Punção
L4-75	130	450	0	0	130	184,0	1,41	Punção	Punção
LR-8s	224	437	520	341	341	323,0	0,95	Externo	Externo
L2-150-8s	134	418	365	202	203	258,5	1,27	Externo	Externo
L2-150-6s	133	414	365	201	202	227,3	1,12	Externo	Externo
L2-100-8s	152	439	378	229	229	268,0	1,17	Externo	Externo
L4-75-8s	136	442	278	194	194	269,6	1,39	Externo	Interno
L4-75-4s	138	455	279	197	197	277,0	1,41	Externo	Externo

(1) Carga para laje sem armadura de cisalhamento;

(2) Carga para laje com armadura de cisalhamento na superfície adjacente ao pilar;

(3) Carga na superfície cruzando à região com armadura de cisalhamento;

(4) Carga na superfície externa à região com armadura de cisalhamento.

4.5.3. NBR6118 (2014)

Na Tabela 4.8 é apresentada uma comparação da carga experimental com a estimada pela NBR6118 (2014). Observa-se que os resultados alcançados na relação (V_{exp}/V_{teo}) foi de 0,95 a 1,75, e o menor valor obtido foi na laje LR-8s. As lajes sem armadura de cisalhamento e com abertura, L2-150 e L4-75, apresentaram as maiores resistências à punção ao comparar com a calculada de acordo com o código, 75 % e 58 % respectivamente.

Constatou-se que o perímetro de controle afastado a 2d da última camada de armadura de cisalhamento apresentou resultados menos conservador ao comparar com os outros códigos citados. O valor da carga de ruptura obtida com este perímetro de controle foi menor.

Tabela 4.8 - Comparação entre a carga experimental e a estimada pela NBR6118 (2014).

Laje	$F_{sd1,SAC}^{(1)}$ (kN)	$F_{sd2}^{(2)}$ (kN)	$F_{sd3}^{(3)}$ (kN)	$F_{sd1,ext}^{(4)}$ (kN)	V_{teo} (kN)	V_{exp} (kN)	V_{exp}/V_{teo}	Modo de Ruptura	
								Previsto	Real
LR	201	488	0	0	201	232,3	1,16	Punção	Punção
L2-150	119	509	0	0	119	208,4	1,75	Punção	Punção
L4-75	116	506	0	0	116	184,0	1,58	Externo	Punção
LR-8s	201	492	543	340	340	323,0	0,95	Externo	Externo
L2-150-8s	120	470	383	201	202	258,5	1,28	Externo	Externo
L2-150-6s	120	466	383	200	202	227,3	1,13	Externo	Externo
L2-100-8s	137	494	396	228	228	268,0	1,17	Externo	Externo
L4-75-8s	122	497	288	194	194	269,6	1,39	Externo	Interno
L4-75-4s	124	512	289	196	196	277,0	1,41	Externo	Externo

(1) Carga para laje sem armadura de cisalhamento;

(2) Carga para laje com armadura de cisalhamento na superfície adjacente ao pilar;

(3) Carga na superfície cruzando à região com armadura de cisalhamento;

(4) Carga na superfície externa à região com armadura de cisalhamento.

4.5.4. *fib* Model Code (2010)

Na Tabela 4.9 estão expostos os valores calculados de acordo com o *fib* Model Code (2010), bem como a comparação com os resultados obtidos nos ensaios. Do mesmo modo como no ACI 318 (2014), o perímetro de controle é afastado 0,5 d da face do pilar e da última camada de armadura de cisalhamento. Os resultados apresentam as cargas previstas pelo método de cálculo nível de aproximação II. As lajes com armadura de cisalhamento apresentaram valores entre 38 % e 68 % ao recomendado pelo código. Os resultados mais conservadores foram

alcançados pelas lajes com duas aberturas L2-150 e L2-150-8s, com 74 % e 45 %, respectivamente.

O modo de ruptura das lajes com *studs* foi calculado como interno às armaduras de cisalhamento, não atendendo ao que aconteceu no experimento para cinco lajes, exceto na laje L4-75-8s que a ruptura experimental foi interna a armadura de cisalhamento. O modo de ruptura interno pode estar relacionado com a consideração da quantidade de camadas de armadura de cisalhamento em um intervalo menor, entre apenas 0,35d e 0,65d, diminuindo a contribuição da resistência das armaduras de cisalhamento.

Tabela 4.9 - Comparação entre a carga experimental e a estimada pelo Model Code (2010).

Laje	$V_{Rd}^{(1)}$ (kN)	$V_{Rd,Wit}^{(2)}$ (kN)	$V_{k,out}^{(3)}$ (kN)	V_{teo} (kN)	V_{exp} (kN)	V_{exp}/V_{teo}	Modo de Ruptura	
							Previsto	Real
LR	196	0	0	196	232,3	1,18	Punção	Punção
L2-150	120	0	0	120	208,4	1,74	Punção	Punção
L4-75	134	0	0	134	184,0	1,37	Punção	Punção
LR-8s	155	260	351	260	323,0	1,24	Interno	Externo
L2-150-8s	101	178	231	178	258,5	1,45	Interno	Externo
L2-150-6s	111	193	254	193	227,3	1,18	Interno	Externo
L2-100-8s	112	195	254	195	268,0	1,37	Interno	Externo
L4-75-8s	110	192	242	192	269,6	1,40	Interno	Interno
L4-75-4s	111	164	246	164	277,0	1,44	Interno	Externo

(1) Carga para laje sem armadura de cisalhamento;

(2) Carga na superfície cruzando à região com armadura de cisalhamento;

(3) Carga na superfície externa à região com armadura de cisalhamento.

4.5.5. Teoria da Fissura Crítica (TFC) de Cisalhamento (MUTTONI, 2008)

A Teoria da Fissura Crítica recomenda que a força resistente à punção depende da abertura e da rugosidade de uma fissura crítica. Portanto, os principais parâmetros para prever a carga de ruptura são a rotação da laje, a altura efetiva e o tamanho do agregado. Os dois últimos parâmetros são similares para todas as lajes. Neste caso, a resistência à punção é função da rotação da laje. Esta função pode ser observada nas Figuras 4.75 a 4.78, o ponto de interseção das curvas de carga solicitante (V_E) e carga resistente ($V_{Rd,c}$) em função da rotação das lajes, corresponde a previsão de carga de ruptura dos modelos.

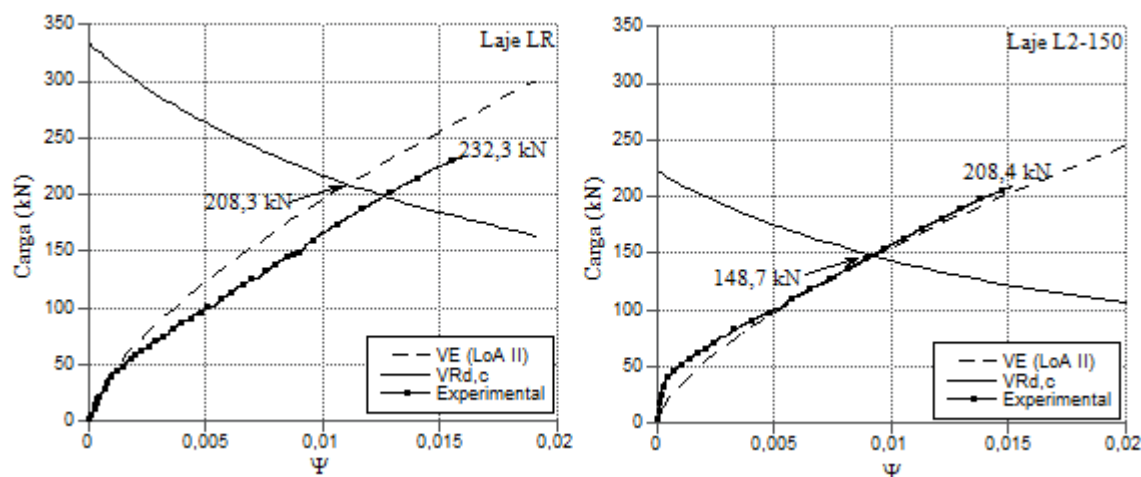


Figura 4.75 - Carga experimental e prevista em função da rotação das lajes LR e L2-150.

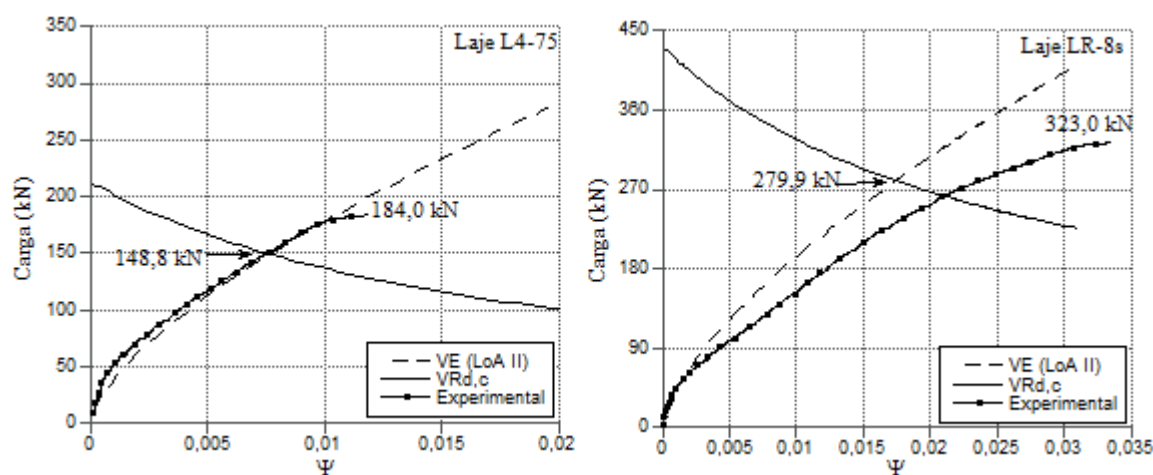


Figura 4.76 - Carga experimental e prevista em função da rotação das lajes L4-75 e LR-8s.

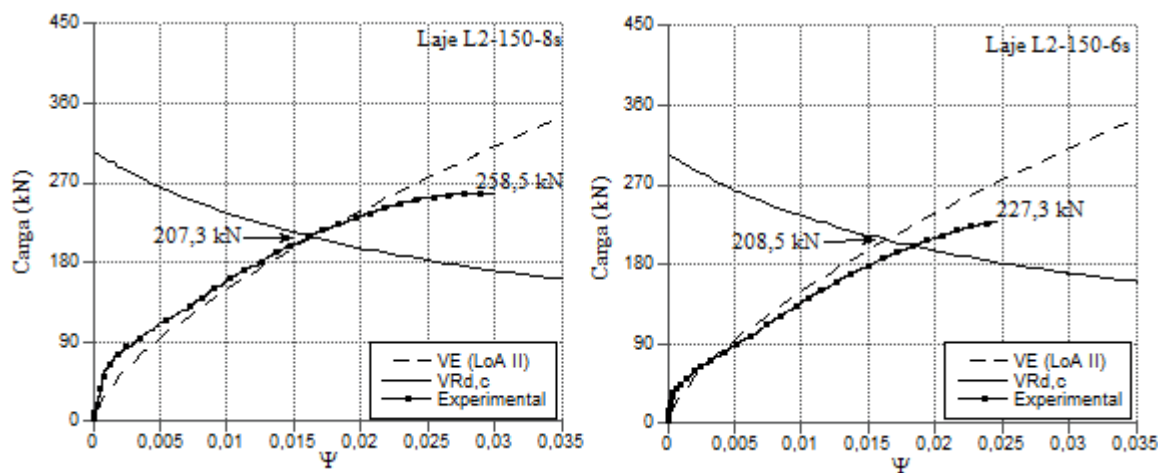


Figura 4.77 - Carga experimental e prevista em função da rotação das lajes L2-150-8s e L2-150-6s.

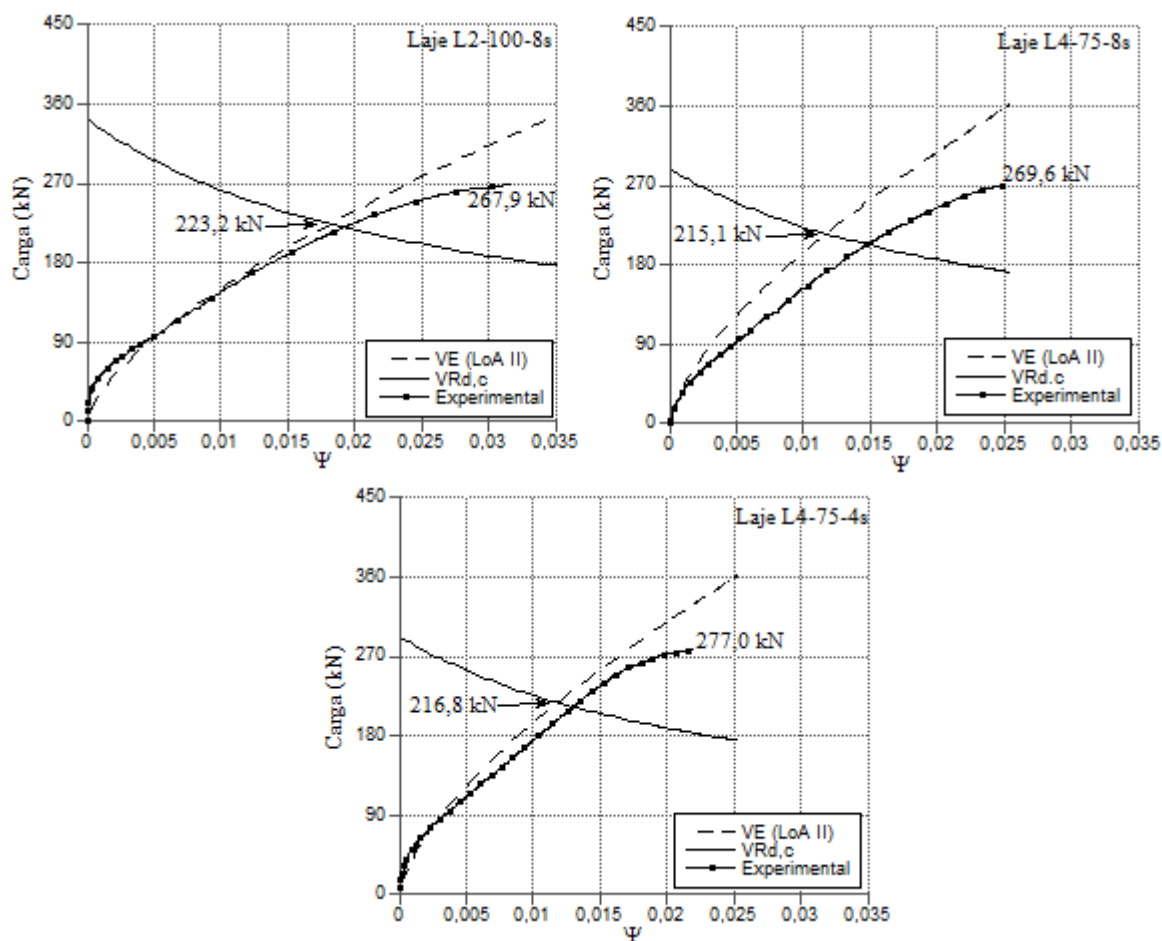


Figura 4.78 - Carga experimental e prevista em função da rotação das lajes L2-100-8s, L4-75-8s e L4-75-4s.

Conforme a Tabela 4.10, as curvas apresentam semelhanças com os resultados obtidos experimentalmente. O ponto de interseção das curvas foi abaixo da carga de ruptura experimental, variando entre 9 % e 40 %.

Tabela 4.10 - Comparação entre a carga experimental e a estimada pela Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (MUTTONI, 2008).

Laje	$V_{R,crush}^{(1)}$ (kN)	$V_{R,in}^{(2)}$ (kN)	$V_{R,out}^{(3)}$ (kN)	V_{teo} (kN)	V_{exp} (kN)	V_{exp}/V_{teo}	Modo de Ruptura	
							Previsto	Real
LR	208	0	0	208	232,3	1,12	Punção	Punção
L2-150	149	0	0	149	208,4	1,40	Punção	Punção
L4-75	149	0	0	149	184,0	1,24	Punção	Punção
LR-8s	461	280	517	280	323,0	1,15	Interno	Externo
L2-150-8s	456	207	356	207	258,5	1,25	Interno	Externo
L2-150-6s	453	209	354	209	227,3	1,09	Interno	Externo
L2-100-8s	453	223	375	223	268,0	1,20	Interno	Externo
L4-75-8s	534	215	358	215	269,6	1,25	Interno	Interno
L4-75-4s	523	217	351	217	277,0	1,28	Interno	Externo

(1) Carga para laje sem armadura de cisalhamento;

(2) Carga na superfície cruzando à região com armadura de cisalhamento;

(3) Carga na superfície externa à região com armadura de cisalhamento.

4.5.6. Resumo dos Métodos

Os resultados experimentais e os recomendados pelos códigos, válidos para todas as lajes, estão expostos na Tabela 4.11, nota-se que para a maioria das lajes os códigos foram conservadores.

Tabela 4.11 - Comparação entre as cargas experimentais e estimadas pelos códigos.

Laje	ACI 318 (2014)	EC2 (2004)	NBR6118 (2014)	fib Model Code (2010)	TFC Muttoni (2008)
	V_{exp}/V_{teo}	V_{exp}/V_{teo}	V_{exp}/V_{teo}	V_{exp}/V_{teo}	V_{exp}/V_{teo}
LR	1,29	1,04	1,16	1,11	1,12
L2-150	1,66	1,57	1,75	1,64	1,40
L4-75	1,50	1,41	1,58	1,30	1,24
LR-8s	1,65	0,95	0,95	1,45	1,15
L2-150-8s	1,95	1,27	1,28	1,59	1,25
L2-150-6s	1,72	1,12	1,13	1,31	1,09
L2-100-8s	1,85	1,17	1,17	1,53	1,20
L4-75-8s	2,29	1,39	1,39	1,56	1,25
L4-75-4s	2,31	1,41	1,41	1,60	1,28

O ACI 318 (2014) prescreve cargas de ruptura com menor valor ao comparar com os demais códigos citados, o resultado (V_{exp}/V_{teo}) foi maior para todas as lajes, atingindo duas vezes maior para a laje L4-75-8s e L4-75-4s. O resultado conservador está relacionado com a não consideração do efeito do tamanho das lajes (*size effect*) e ao menor perímetro de controle adotado pelo ACI 318 (2014), afastado 0,5d do perímetro do pilar, como sugere também o *fib* Model Code (2010). A NBR 6118 (2014) e o EC2 (2004) são códigos que apresentaram resultados semelhantes por considerarem perímetros de controles iguais exceto externamente a última camada de armadura de cisalhamento, onde a distância é 2,0d e 1,5d, respectivamente.

4.6. PERÍMETRO DE CONTROLE EM LAJES COM ABERTURAS E ARMADURA DE CISALHAMENTO

A norma brasileira e as internacionais definem o perímetro de controle, sendo o contorno que forma a região resistente à punção. Quando a laje possui abertura, as normas recomendam que é necessário retirar parte do perímetro de controle em consequência da queda da resistência com a presença da abertura, conforme Figura 4.79. A armadura de cisalhamento compreendida entre as linhas que desconsidera parte do perímetro crítico efetivo pela presença da abertura não é considerada no cálculo da resistência à punção.

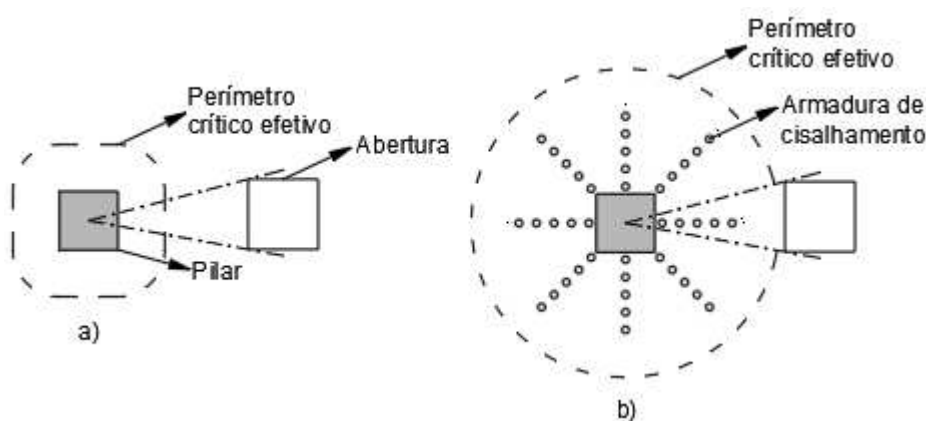


Figura 4.79 – Perímetro crítico efetivo. a) lajes com abertura. b) lajes com abertura e armadura de cisalhamento.

A perda de resistência é notada em vários trabalhos da literatura, seguindo um conceito linear: quanto maior a abertura, maior a perda de resistência à punção da laje, e quanto mais afastada a abertura, menor é a perda da resistência à punção.

A partir dos resultados obtidos neste trabalho (L2-150-8s, L2-100-8s e L4-75-8s) e seguindo parte das prescrições normativas, sugere-se o cálculo do perímetro efetivo para lajes

com armadura de cisalhamento após a abertura de duas formas diferentes, como pode ser visto na Figura 4.80. No perímetro efetivo 1 (PE1) traçam-se as linhas que partem do centro do pilar, conforme as normas, acrescentando a região à frente da abertura que contém armadura de cisalhamento. No perímetro efetivo 2 (PE2), as linhas que irão retirar parte da contribuição do perímetro efetivo, partem das faces do pilar e são tangentes à abertura, desconsiderando a região à frente da abertura.

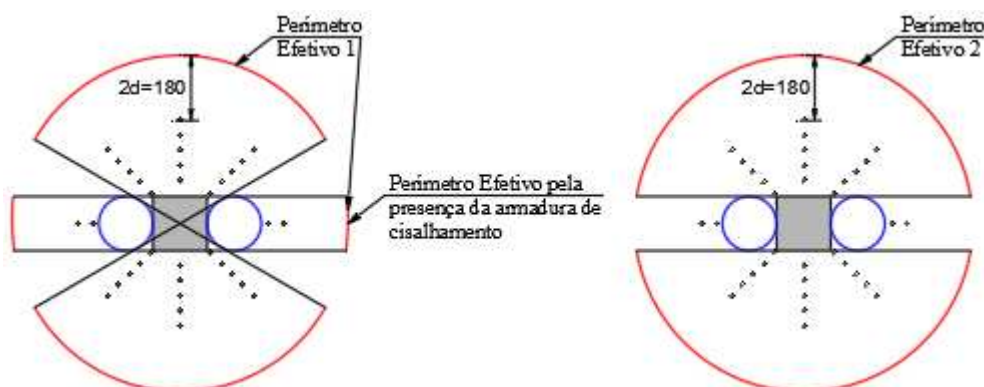


Figura 4.80 - Perímetro efetivo para lajes com armadura de cisalhamento após a abertura.

O cálculo do perímetro efetivo de acordo com a NBR6118 (2014), e pelas sugestões apresentadas na Figura 4.80 estão mostradas na Tabela 4.12. A relação da carga de ruptura experimental obtida conforme cada perímetro de controle foi informado na Tabela 4.13. A NBR6118 (2014) exibe valores mais conservadores para o perímetro de controle quando há aberturas, por não considerar a região à frente das aberturas que contém armadura de cisalhamento. O perímetro efetivo 2 é o menos conservador, por desconsiderar uma parcela menor do perímetro de controle.

A relação V_{exp}/V_{PE1} exibiu resultados mais próximos de 1, por consequência, seria o perímetro de controle que melhor representa lajes com armadura de cisalhamento após as aberturas para as lajes testadas neste trabalho. Na laje L2-150-8s o perímetro efetivo 2 aumentou em 26 %, contribuindo com o aumento da carga V_{PE2} . O perímetro efetivo 1 apresentou a maior relação V_{exp}/V_{PE2} na laje L4-75-8s em 18 %.

Tabela 4.12 - Carga de ruptura por diferentes perímetro de controle.

Laje	Perímetro Efetivo NBR6118:2014 (mm)	Perímetro Efetivo 1 (mm)	Perímetro Efetivo 2 (mm)	V_{exp}/V_{6118} (kN)	V_{exp}/V_{PE1} (kN)	V_{exp}/V_{PE2} (kN)
L2-150-8s	1947,8	2248,9	2620,2	1,28	1,11	0,95
L2-100-8s	2156,2	2356,6	2621,2	1,17	1,07	0,96
L4-75-8s	1657,2	1957,8	2721,2	1,39	1,18	0,94

PE1: Perímetro Efetivo 1 definido na Figura 4.79;

PE2: Perímetro Efetivo 2 definido na Figura 4.79.

Na Tabela 4.13 está apresentado o modo de ruptura das lajes conforme a NBR6118 (2014) e de acordo com os perímetros efetivos 1, 2. O modo de ruptura segundo o perímetro efetivo 2 foi idêntico ao modo de ruptura experimental em todas as lajes. Este fato não aconteceu para as recomendações conforme a norma brasileira. A laje L4-75-8s obteve ruptura interna às armaduras de cisalhamento experimentalmente e de acordo com o perímetro efetivo 2.

Tabela 4.13 - Modo de ruptura de acordo com a NBR6118 (2014) conforme Perímetro Efetivo 1 e Perímetro Efetivo 2.

Laje	Modo de Ruptura Experimental	Modo de Ruptura NBR6118 (2014)	Modo de Ruptura Perímetro Efetivo 1	Modo de Ruptura Perímetro Efetivo 2
L2-150-8s	Externo	Externo	Externo	Externo
L2-100-8s	Externo	Externo	Externo	Externo
L4-75-8s	Interno	Externo	Externo	Interno

4.7. RESISTÊNCIA À FLEXÃO DAS LAJES ENSAIADAS

Na Tabela 4.14 estão apresentados os resultados obtidos para o cálculo da carga de ruptura à flexão das lajes. A disposição da armadura de flexão das lajes do Grupo 1 e Grupo 2 permaneceram semelhantes. Devido à presença da abertura, foi necessário o corte de algumas barras, mas a quantidade de barras contínuas efetivas para o combate do esforço à flexão foi mantida. Conforme a Figura 4.81, a presença de duas aberturas na laje L2-150-6s ocasionou o corte de duas barras resistente à flexão.



Figura 4.81 - Fotografia da armadura de flexão antes da concretagem.

Tabela 4.14 - Carga de ruptura por flexão das lajes.

Laje	Segmentos de Laje		m_u (kNm/m)	Carga de flexão (kN)	Carga Experimental (kN)	$V_{exp}/V_{flexão}$
	Nome	Quantidade				
LR	A	4	64,4	473,8	232,3	0,49
	B	4				
L2-150	A	2	51,0	272,0	258,5	0,95
	B	4				
L4-75	A	4	57,8	425,3	184,0	0,43
	B	8				
LR-8s	A	4	63,4	466,3	323,0	0,69
	B	4				
L2-150-8s	A	2	48,5	362,1	258,5	0,71
	B	4				
L2-150-6s	A	2	48,4	356,3	227,3	0,63
	B	4				
L2-100-8s	A	2	49,6	361,6	268,0	0,74
	B	4				
L4-75-8s	A	4	63,5	467,2	269,3	0,58
	B	8				
L4-75-4s	A	4	63,9	469,8	277,0	0,59
	B	8				

m_u : momento radial da laje, definido no Apêndice C.

As lajes foram divididas em segmentos de acordo com a fissuração observada em cada laje na ruptura, conforme Apêndice C. O modelo de cálculo fundamenta-se na divisão da

laje em segmentos de acordo com a linha de ruptura de cada laje observado no ensaio experimental. Para o cálculo à flexão, baseou-se no trabalho de Bompá *et al.* (2016), o qual calculou a flexão como sugeriu Elstner and Hognestad (1956) e, também, pelo modelo teórico proposto por Muttoni (2008). Este método prevê que a plastificação se dará em algumas regiões definidas por linhas. O momento fletor atuante no segmento é o momento último resistente da seção e o carregamento último é determinado usando o princípio do trabalho virtual ou as equações de equilíbrio. No Apêndice C está apresentado o cálculo detalhado à flexão das lajes.

As cargas calculadas à flexão foram comparadas com as cargas obtidas no experimento. A carga de ruptura a flexão variou de 272,0 a 473,8 kN, sendo o maior valor observado na laje LR. As relações carga de ruptura experimental por carga última prevista para ruptura a flexão ($V_{\text{exp}}/V_{\text{flexão}}$) variaram de 0,43 a 0,95. A menor resistência à flexão calculada foi para a laje L2-150, devido ao fato das fissuras não espalharem radialmente por toda a laje como as demais. Porém, foi a laje que obteve a maior relação $V_{\text{exp}}/V_{\text{flexão}}$ de 0,95. No ensaio observou-se que as fissuras surgiram em apenas um sentido, supondo até que ela poderia ter chegado à ruptura por flexão.

5. MODELO TEÓRICO PARA LAJES LISAS COM ABERTURA

Gomes (1991) propôs um método teórico para estimativa da carga de ruptura e o modo de ruptura em lajes lisas sem aberturas, com e sem armadura de cisalhamento. Com a necessidade da utilização de tubulações perfurando as lajes lisas, principalmente próximos aos pilares, viu-se a necessidade de estudar o comportamento das lajes lisas com aberturas.

Conforme comentado no item 2.3.3, o modelo proposto para determinação da resistência à punção em lajes lisas de concreto armado divide a laje em três partes: pilar; cunha e segmentos de laje. Foi apresentado também que para o equilíbrio da laje, quando se tem a atuação de uma carga, surgem cinco forças.

Com a necessidade de estimar a carga e o modo de ruptura de lajes lisas com a presença de aberturas, com e sem armadura de cisalhamento, utilizaram-se as mesmas premissas básicas adotadas por Gomes (1991). Este baseou-se nos resultados experimentais e nos métodos teóricos proposto por Kinnunen and Nylander (1960) e Shehata (1985), que desenvolveram equações para lajes lisas sem armadura de cisalhamento, e Andersson (1963) para lajes com armadura de cisalhamento.

5.1. FORÇAS ATUANTES NO MODELO

A Figura 5.1 ilustra a apresentação das forças atuantes no modelo idealizado para lajes lisas com aberturas e com armadura de cisalhamento. Cinco forças atuantes no modelo são semelhantes a Gomes (1991), acrescentando duas forças referentes à abertura F_{sth} e F_{cth} , força tangencial da armadura de flexão referente à abertura e força tangencial do concreto referente à abertura, respectivamente. As forças radial e tangencial do concreto, radial e tangencial da armadura de flexão e a força referente à armadura de cisalhamento são as mesmas descritas no item 2.4.3.

- a) Força Radial do Concreto (F_{cr}), que atua com uma inclinação α no segmento de laje abaixo da origem da fissura de cisalhamento na seção próxima à coluna.
- b) Força Tangencial do Concreto (F_{ct}), que atua tangencialmente ao segmento de laje e abaixo do centro de rotação, com sentido do exterior para o interior do mesmo. Para o modelo, utiliza-

se a componente radial da força tangencial do concreto ($F_{ct\ r0 \rightarrow r3\Delta\varphi}$) que leva em consideração apenas a contribuição da seção situada abaixo da linha neutra, x.

c) Força Tangencial da Armadura de Flexão (F_{st}), proveniente das armaduras de flexão nas fissuras radiais. Para o modelo, é importante a componente radial da força tangencial da armadura de flexão ($F_{st\ r0 \rightarrow r3\Delta\varphi}$).

d) Força Radial da Armadura de Flexão (F_{sr}), que aparece junto à fissura circunferencial da cunha na seção próxima à coluna na direção radial, atuando também na parte superior da laje, onde está a armadura negativa de flexão.

e) Força da Armadura de Cisalhamento (F_e), que é transmitida para o segmento de laje através da cunha pela armadura de cisalhamento, seguindo um determinado ângulo β com a horizontal. É importante a observação de que somente as armaduras que cruzam a fissura de cisalhamento contribuem para produzir esta força.

f) Força Tangencial da Armadura de Flexão Referente à Abertura (F_{sth}), proveniente das armaduras de flexão internas à abertura (força que é descontada nas equações de equilíbrio). Para o modelo utiliza-se a componente radial da força tangencial da armadura de flexão presente no interior da abertura ($F_{sth\ r0 \rightarrow r3\theta}$).

g) Força Tangencial do Concreto Referente à Abertura (F_{cth}), atuando tangencialmente ao seguimento da laje e presente internamente à abertura (esta força também é descontada nas equações de equilíbrio). Para o modelo, utiliza-se a componente radial da força tangencial do concreto ($F_{cth\ r0 \rightarrow r3\theta}$) que leva em consideração apenas a contribuição da seção situada abaixo da linha neutra, x.

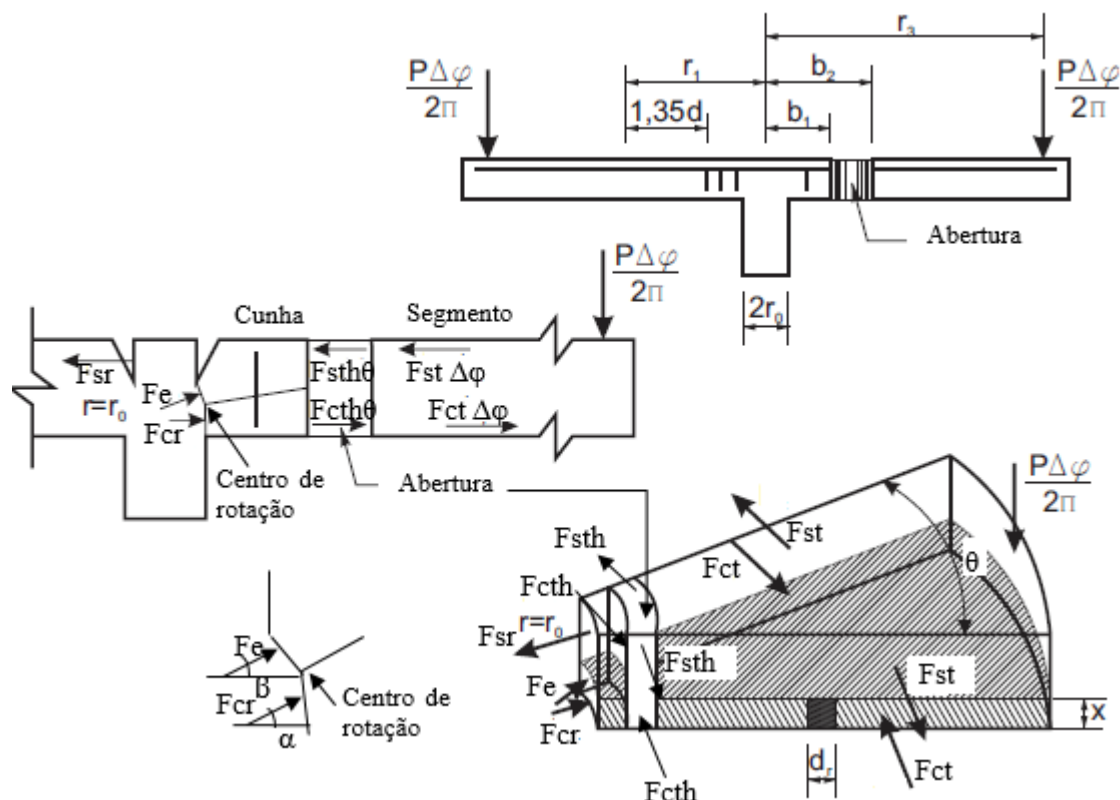


Figura 5.1 - Modelo teórico para lajes com abertura.

Observa-se na Figura 5.1 que a presença da abertura nas lajes lisa gera a redução nos valores das forças F_{st} e F_{ct} . Para a cunha entre θ (cunha que possui a abertura) o valor da força F_{st} é descontado de F_{sth} , e o mesmo acontece com F_{ct} que sofre a redução do valor de F_{cth} . As forças F_{sr} e F_{cr} também sofrem redução com a presença da abertura. O Apêndice D traz a demonstração do ângulo θ e das forças no intervalo θ .

5.1.1. Determinação das Forças

a) Força Radial do Concreto (F_{cr})

A força radial do concreto é prevista levando-se em consideração a capacidade última de um tronco de pirâmide na face da coluna, calculando-se o efeito radial do gradiente de tensões. A força tangencial do concreto é determinada com o concreto estando em compressão uniaxial.

A Força radial do concreto (F_{cr}) pode ser determinada fazendo-se o produto da área na qual atua a força radial pelo gradiente longitudinal de tensões e pela resistência do concreto, como descrito no item 2.3.2.

A presença da abertura adjacente ao pilar origina a redução da área de concreto contribuinte para esta força. Quanto mais distante a abertura está do pilar, menor é a influência da abertura no cálculo de F_{cr} . Lourenço (2018) analisou lajes com abertura e variou a distância da abertura em relação ao centro do pilar, e desta forma, foi possível concluir que a abertura mais distante tem menos interferência na resistência da laje à punção.

Como é apresentado nas equações 5.1 a 5.5 descontou-se a área de concreto referente a abertura adjacente ao pilar.

$$F_{cr} = A_c \eta f_c \quad (5.1)$$

onde:

x : altura da linha neutra;

α : inclinação da força radial do concreto;

r_0 : raio do pilar;

n_f : número de aberturas presentes na laje;

A_c : área de concreto onde a força é aplicada.

$$A_c = \frac{(2\pi - n_f \theta)x}{\cos \alpha} \left(r_0 - \frac{x \tan \alpha}{2} \right) \quad (5.2)$$

θ é o ângulo que define a cunha que contém a abertura

$$\eta = \frac{\frac{2r_0}{d} k + \frac{x}{d} k_1}{\frac{r_0}{d} (1,8 + 0,2k) + \frac{x}{d} (0,1k + 0,9 \tan \alpha)} \quad (5.3)$$

$$k = 1 + \tan \alpha + \tan(25^\circ - \alpha) \quad (5.4)$$

$$k = \frac{2k}{\cos^2 \alpha} - k^2 \tan \alpha \quad (5.5)$$

b) Força Tangencial do Concreto (F_{ct})

Na Força Tangencial do Concreto (F_{ct}) não houve modificações em relação ao método teórico de Gomes (1991), mostrado no item 2.4.3. Optou-se por desenvolver uma força referente à presença da abertura (F_{cth}) e subtrair de F_{ct} .

c) Força Tangencial do Concreto referente à abertura (F_{cth})

Como apresentado na Figura 5.1, a presença da abertura em lajes reduz o valor da força F_{ct} . Esta redução é calculada em função do tamanho e posição da abertura em relação ao pilar. A Equação 5.6 foi utilizada a partir de Gomes (1991) com os valores de k_x e k_c apresentados no item 2.3.3. As Equações na Tabela 5.1 apresentam o cálculo de F_{cth} conforme a posição e tamanho da abertura.

$$F_{cth(b_1 \rightarrow b_2)} = \theta \int_{b_1}^{b_2} k_c f_c k_x x dr \quad (5.6)$$

Tabela 5.1 - Cálculo de F_{cth} conforme a posição e o tamanho da abertura.

Intervalos	Equações
$r_0 \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$ $r_0 \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_2 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$ $r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}}$	$F_{cth} = \theta n_f f_c [0,723x(\frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} - b_1) + 0,425x(b_2 - \frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}}) +$ $+ \frac{0,298\psi x^2}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \ln(\frac{b_2 \varepsilon_{cu}}{\psi x}) - \frac{0,298\varepsilon_{c1} x}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} (b_2 - \frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}})]$
$r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$ $r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$	$F_{cth} = \theta n_f f_c [0,723x(b_2 - b_1)]$
$r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$ $r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$ $r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$	$F_{cth} = \theta n_f f_c [0,425x(b_2 - b_1) + \frac{0,298\psi x^2}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \ln(\frac{b_2}{b_1}) -$ $- \frac{0,298\varepsilon_{c1} x}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} (b_2 - b_1)]$
$r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq b_2 \leq r_3$ $r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq b_2 \leq r_3$	$F_{cth} = \theta n_f f_c [0,425x(\frac{\psi x}{\varepsilon_{c1}} - b_1) + \frac{0,298\psi x^2}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \ln(\frac{\psi x}{b_1 \varepsilon_{c1}}) -$ $- \frac{0,298\varepsilon_{c1} x}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} (\frac{\psi x}{\varepsilon_{c1}} - b_1) + \frac{0,423x^2 \psi}{\varepsilon_{c1}} \ln(\frac{b_2 \varepsilon_{c1}}{\psi x})]$
$r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$ $r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$ $r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$ $r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$	$F_{cth} = \theta n_f f_c [\frac{0,425x^2 \psi}{\varepsilon_{c1}} \ln(\frac{b_2}{b_1})]$
$r_0 \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq b_1 \leq r_3$	$F_{cth} = \theta n_f f_c [0,723x(\frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} - b_1) + 0,425x^2 \psi (\frac{1}{\varepsilon_{c1}} - \frac{1}{\varepsilon_{cu}}) +$ $+ \frac{0,298\psi x^2}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \ln(\frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{c1}}) - \frac{0,298\varepsilon_{c1} \psi x^2}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} (\frac{1}{\varepsilon_{c1}} - \frac{1}{\varepsilon_{cu}}) +$ $+ \frac{0,425x^2 \psi}{\varepsilon_{c1}} \ln(\frac{b_2 \varepsilon_{c1}}{\psi x})]$

d) Força Tangencial do Aço (F_{st})

Como discutido no cálculo da Força Tangencial do Concreto (F_{ct}), também não houve modificações em relação ao adotado por Gomes (1991) e desenvolveu-se uma força referente à presença da abertura (F_{sth}), subtraindo-se de F_{st} .

e) Força Tangencial do Aço referente a abertura (F_{sth})

A componente radial da força tangencial da armadura presente na abertura é fornecida pela integral:

$$F_{sth(b_1 \rightarrow b_2)} \theta = \left[\int_{r_0}^{r_y} \rho f_y ddr + \int_{r_y}^{r_3} \rho f_y d \frac{r_y}{r} dr \right] \theta \chi \quad (5.7)$$

Onde χ é o coeficiente de redução que depende de r_y e r_3 , sendo r_y o raio onde o ponto de tensão de escoamento é alcançado na direção tangencial da armadura de flexão na ruptura, como discutido no item 2.3.3. É considerado no cálculo da Equação 5.7 apenas no intervalo de b_1 até b_2 e, conforme a Tabela 5.2, o cálculo de F_{sth} depende da posição e do tamanho da abertura.

Tabela 5.2 - Cálculo de F_{sth} conforme a posição e o tamanho da abertura.

Intervalos	Equações
$r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_y \leq r_3$	$F_{sth} = \theta n_f \chi f_y \frac{\rho}{100} d(b_2 - b_1)$
$r_0 \leq b_1 \leq r_y \leq b_2 \leq r_3$	$F_{sth} = \theta n_f \chi f_y \frac{\rho}{100} d[(r_y - b_1) + r_y \ln(\frac{b_2}{r_y})]$
$r_0 \leq r_y \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$	$F_{sth} = \theta n_f \chi f_y \frac{\rho}{100} d[r_y \ln(\frac{b_2}{b_1})]$
$r_0 \leq r_y \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$	$F_{sth} = \theta n_f \chi f_y \frac{\rho}{100} d[r_y \ln(\frac{b_2}{b_1})]$

f) Força Radial do Aço (F_{sr})

A força radial da armadura de flexão na seção $r = r_0$ junto ao pilar, é dada pela equação 5.8 e ρ é a taxa de armadura de flexão da laje.

$$F_{sr(r=r_0)} = 2\pi\rho\chi \frac{f_y}{100} d(r_0) \quad (5.8)$$

g) Forças da Armadura de Cisalhamento (F_e)

A força da armadura de cisalhamento não se modifica com a presença da abertura. A armadura será distribuída de forma a não preencher a abertura. O cálculo fica como apresentado no item 2.3.2.

5.2. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

As equações de equilíbrio horizontal, vertical e rotacional podem ser obtidas com base no modelo apresentado na Figura 5.1 e de acordo com as equações 5.9 a 5.14.

a) Equação de equilíbrio horizontal

$$F_{sr(r=r_0)} + F'_{st(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi = F_e \cos\beta + \xi F_{cr} \cos\alpha + F'_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi \quad (5.9)$$

b) Equação de equilíbrio vertical

$$\xi F_{cr} \sin\alpha + F_e \sin\beta = \frac{P \Delta\varphi}{2\pi} \quad (5.10)$$

c) Equação de equilíbrio rotacional

$$P \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{z(F_{sr(r=r_0)} + F'_{st(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi)}{r_3 - r_0} \quad (5.11)$$

$$z = d - 0,45x \text{ (braço de alavanca)} \quad (5.12)$$

Onde:

$$\xi = \left(\frac{400}{d} \right)^{1/4} \text{ (efeito escala, "size effect")} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} F'_{st(r_0 \rightarrow r_3)} &= F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} - F_{sth(b_2 \rightarrow b_1)} \\ F'_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} &= F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} - F_{cth(b_2 \rightarrow b_1)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.3. CRITÉRIOS DE RUPTURA

O critério de ruptura considerado é semelhante ao adotado por Gomes (1991) para lajes submetidas à punção: critério de ruptura interna e critério de ruptura externa. O primeiro critério analisa a ruptura ocorrida na região da armadura de cisalhamento e o segundo critério fora da região com armadura de cisalhamento. No item 2.3.2.3 estão descritos os dois critérios de ruptura.

Para definir os critérios de ruptura de lajes com aberturas foram utilizados os resultados obtidos experimentalmente neste trabalho e também os dados obtidos na literatura de outros autores. Lajes com abertura e armadura de cisalhamento foram importantes para definir o modo de ruptura interna e/ou externa. As análises foram baseadas em trabalhos disponíveis na literatura com os parâmetros necessários para o cálculo.

-Ruptura na região da armadura de cisalhamento

A ruptura na região da armadura de cisalhamento ocorre quando a tensão de cisalhamento (τ) em qualquer superfície atinge uma parcela da resistência ao cisalhamento. Para que seja verificado o critério de ruptura interna, deve-se obedecer a condição da equação 5.15, onde o parâmetro (η) foi definido na equação 2.55 e o parâmetro (κ) definido na equação 2.93.

$$\eta > \gamma_P \kappa \quad (5.15)$$

O coeficiente γ_P foi definido após investigar lajes de concreto armado com aberturas circulares e retangulares; aberturas simétricas e não simétricas, adjacentes e afastadas do pilar, e com pilares circulares e retangulares presentes na bibliografia. Investigou o coeficiente γ_P para valores iguais a 0,45, 0,5, 0,55, 0,6, 0,65, 0,7, 0,75, 0,8, 0,85, 0,9, 0,95 e 1,0, os resultados encontram-se no Apêndice E. Assim, o coeficiente γ_P ficou definido como: $\gamma_P = 0,6$ para lajes com abertura e $\gamma_P = 1,0$ para lajes sem abertura.

-Ruptura externa à região da armadura de cisalhamento

A ruptura na região externa à armadura de cisalhamento ocorre quando a tensão normal máxima ($\sigma_{m\acute{a}x}$), na seção $1,35d$ além da armadura de cisalhamento, atinge uma parcela da compressão diametral do concreto (f_{sp}), conforme equação 5.16. A distância de $1,35d$ foi definida experimentalmente nos ensaios de Gomes (1991), os dados de entrada estão no Apêndice F. A tensão normal máxima ($\sigma_{m\acute{a}x}$) foi definida na equação 2.92.

$$\sigma_{m\acute{a}x} \geq \gamma_P f_{sp} \quad (5.16)$$

5.4. RESULTADOS TEÓRICOS

As lajes do trabalho foram calculadas seguindo o roteiro das equações apresentadas nos itens 5.1 a 5.3. O método teórico tem o objetivo de descrever o comportamento das lajes que possuem aberturas e armadura de cisalhamento. Os resultados foram comparados com os resultados obtidos nos testes experimentais, com a finalidade de validar as equações propostas.

Foi implementado o roteiro das equações teóricas na linguagem de programação FORTRAN, aplicou-se o método de convergência de newton-raphson e foi desenvolvido o programa PunCalc. O método de newton-raphson pode ser visto no Apêndice G. Desta forma, fez-se o processamento das lajes lisas de concreto armado com e sem abertura, e com e sem armadura de cisalhamento presentes na literatura.

5.4.1. Resultados teóricos das lajes ensaiadas

Na Tabela 5.3 estão apresentados os dados de entrada para o cálculo teórico das lajes, (características geométricas e de posicionamento das aberturas, porcentagem de escoamento das camadas de armadura de cisalhamento obtida experimentalmente, taxa de armadura de flexão, e resistência à compressão e tração do concreto). Os demais dados são os mesmos sugeridos pelo modelo teórico de Gomes (1991). Conforme a Figura 2.42 para estas lajes consideram-se no máximo três camadas de *studs* contribuindo para a força de cisalhamento.

O valor para r_0 , raio do pilar, e r_3 , raio de laje, foram iguais a 75 mm e 900 mm, respectivamente, o espaçamento entre as camadas de armadura de cisalhamento é igual a 42 mm, a altura da laje igual a 130 mm, dados iguais para todas as lajes.

Tabela 5.3 - Dados de entrada para o cálculo teórico das lajes.

Laje	Dados das aberturas				% Escoamento da Armadura de Cisalhamento ⁽²⁾	Armadura de Flexão		Concreto	
	$n^{(1)}$	θ (graus)	b_1 (mm)	b_2 (mm)		$\rho^{(4)}$ (%)	f_y (MPa)	f_c (MPa)	$f_{sp}^{(5)}$ (MPa)
LR	-	-	-	-	-	1,58	583	39,8	3,4
L2-150	2	43	75	150	-	1,17	583	41,4	3,6
L4-75	4	29	75	75	-	1,29	583	40,0	3,5
LR-8s	-	-	-	-	80/40 ⁽³⁾	1,58	571	40,2	3,7
L2-150-8s	2	43	75	150	50/30/15	1,19	571	38,0	3,5
L2-150-6s	2	43	75	150	40/30/30	1,19	571	37,6	3,5
L2-100-8s	2	35	75	100	50/30/30	1,19	571	40,4	3,7
L4-75-8s	4	29	75	75	30/30/20	1,58	571	40,7	3,7
L4-75-4s	4	29	75	75	90/80/60	1,58	571	42,3	3,8

(1) n: quantidade de aberturas na laje;

(2) Resultado obtido experimentalmente. A porcentagem foi medida em cada camada de armadura de cisalhamento, em camadas que não houve deformação foi admitido igual a zero.

(3) A laje possui cinco camadas e somente duas apresentaram deformações, a primeira camada escoou 80 % do início da deformação de escoamento da armadura de cisalhamento e a segunda camada 40 %. As camadas restantes não apresentaram deformações.

(4) Taxa de armadura de flexão (diâmetro de 12 mm) de acordo com a NBR6118:2014, com a presença da abertura algumas barras foram cortadas;

(5) Resistência a tração diametral do concreto.

A ruptura na região externa à armadura de cisalhamento ocorre quando a tensão normal máxima ($\sigma_{m\acute{a}x}$) na seção $1,35d$ ($r_1 = 1,35d$) além da última camada de armadura de cisalhamento alcança a resistência à compressão diametral do concreto. O valor 1,35 foi encontrado experimentalmente nos testes realizados por Gomes and Regan (1999). Este valor foi proposto para satisfazer a condição do critério de ruptura. O raio r_1 das lajes L2-150 e LR-8s não foi atendido para o valor de $1,35d$, a ruptura aconteceu distante $3,05d$ e $0,89d$ da última camada de armadura de cisalhamento, respectivamente.

Os testes foram realizados sucessivamente supondo uma superfície de ruptura externa localizada a $1,35d$ a partir da última camada de armadura de cisalhamento das lajes, com o objetivo de encontrar o posicionamento que fornecesse resultados, como carga de ruptura (P) e rotação da laje (ψ), mais compatíveis aos valores experimentais. Os testes com diferentes valores de r_1 ($3,05d$ e $0,89d$) confirmaram que os referidos valores apresentam resultados da

carga de ruptura (P) e da rotação da laje (ψ) mais compatíveis em relação aos resultados experimentais.

Os valores diferentes para r_1 também foram discutidos no trabalho de Gomes (1991). A diferença pode ser explicada pelo fato de que os valores utilizados para a porcentagem de escoamento por camada da armadura de cisalhamento, obtidos experimentalmente, não apresentaram precisão adequada no sentido de atingir o equilíbrio dos sistemas não-lineares calculados pelo método teórico. Uma vez que foi coletada nas lajes a deformação de no máximo duas linhas de *studs*.

Após o processamento das lajes no programa PunCalc foi possível obter os resultados expostos nas Tabelas 5.4 e 5.5. Os resultados teóricos da carga de ruptura (V_{teo}), linha neutra (x) e rotação (ψ) das lajes foram comparados com os resultados experimentais. As variáveis tensão máxima ($\sigma_{máx}$) e o valor do ângulo (α) não se consegue extrair dos resultados experimentais. A porcentagem da deformação da armadura de cisalhamento foi extraída dos dados obtidos experimentalmente. Calculou-se a média da deformação de cada camada de armadura de cisalhamento e comparou-se com a deformação de escoamento do aço utilizado. Algumas camadas não apresentaram deformação e foi admitida deformação igual a zero.

O ângulo α foi acima de 12° para as lajes sem *studs* e abaixo de 5° para as lajes com *studs*. Quanto maior o valor de α , maior a contribuição da força radial do concreto (F_{cr}). O valor do ângulo maior pode estar relacionado com o modo de ruptura das lajes. Nas lajes com armadura de cisalhamento há contribuição do aço, desta forma diminui a influência do concreto na resistência à punção. A resistência da laje sem *studs* é dependente da resistência do concreto, necessitando de um valor maior de α .

As rotações das lajes com armadura de cisalhamento foram maiores ao comparar com as lajes sem armadura de cisalhamento, exceto para a laje L2-150. Os maiores valores de rotação mostraram que as lajes deslocaram mais e desta forma a armadura de flexão apresentou maiores deformações de tração. A tensão máxima ($\sigma_{máx}$) variou de 2,16 a 5,21 MPa e a posição da linha neutra variou entre 21 e 25 mm.

A relação entre as cargas de ruptura experimental e teórica variaram no máximo 7 %, valor obtido para a laje L4-75-8s. O resultado da rotação, obtido experimentalmente, das lajes foi maior do que os resultados teóricos para todas as lajes, exceto para a laje L2-150. O maior valor obtido foi de 77 % para a laje L4-75-8s.

O cálculo da linha neutra a partir dos resultados experimentais é variável e tem dependência significativa do ponto que mediu a deformação da armadura longitudinal e da

deformação do concreto. Não foi possível coletar as deformações do aço e do concreto exatamente na mesma seção transversal, desta forma o resultado calculado a partir das deformações experimentais pode não transmitir bons resultados reais.

Tabela 5.4 - Resultados teóricos das lajes.

Laje	V_{teo} (kN)	$\Psi_{teórico}$ (10^{-4} rad)	$x_{teórico}$ (mm)	$\sigma_{máx,teórico}$ (MPa)	$\alpha_{teórico}$ (graus)
LR	228	111	25	5,21	12,28
L2-150	207	158	23	2,16	15,75
L4-75	190	108	25	3,74	14,84
LR-8s	325	202	24	3,70	3,53
L2-150-8s	246	222	22	2,36	4,51
L2-150-6s	230	196	21	2,38	3,23
L2-100-8s	266	236	24	2,75	3,05
L4-75-8s	278	141	25	2,35	3,65
L4-75-4s	267	150	24	2,28	2,61

Tabela 5.5 - Resultados carga de ruptura, rotação e linha neutra experimental e teórico.

Laje	Carga de Ruptura (kN)			Ψ (rotação) (10^{-4} rad)			x (linha neutra) (mm)		
	V_{exp}	V_{teo}	V_{exp}/V_{teo}	Ψ_{exp}	Ψ_{teo}	Ψ_{exp}/Ψ_{teo}	x_{exp}	x_{teo}	x_{exp}/x_{teo}
LR	232,2	228	1,02	159	111	1,43	37,32	25	1,49
L2-150	208,4	207	1,01	152	158	0,96	34,53	23	1,52
L4-75	184,0	190	0,97	123	108	1,14	37,77	25	1,52
LR-8s	323,0	325	1,00	335	202	1,66	20,82	24	0,87
L2-150-8s	258,5	246	1,05	299	222	1,35	19,45	22	0,89
L2-150-6s	227,3	230	0,99	246	196	1,25	15,02	21	0,72
L2-100-8s	267,9	266	1,01	316	236	1,34	20,68	24	0,88
L4-75-8s	269,6	278	1,07	249	141	1,77	36,37	25	1,44
L4-75-4s	277,0	267	1,04	219	150	1,46	33,23	24	1,38

Nas Figuras 5.2 a 5.9 estão apresentados os gráficos da carga V (kN) versus a rotação ψ ($\times 10^{-4}$) experimentais e teóricos para as lajes ensaiadas neste trabalho com e sem armadura de cisalhamento. As curvas carga V (kN) versus a rotação (ψ) obtidas nos testes experimentais e pelo método teórico possuem resultados próximos. Nas curvas obtidas pelo método teórico traçou-se também os resultados pós ruptura. As cargas de ruptura, V , em função das rotações, ψ , foram obtidas no programa PunCal. O programa calcula as incógnitas α

(inclinação da força radial do concreto, F_{cr}), x (altura da linha neutra) e a carga de ruptura, necessárias para o equilíbrio das equações de determinada rotação.

Nas lajes L2-150-8s, L2-150-6s, L2-100-8s e L4-75-8s a primeira carga a atingir o equilíbrio dos sistemas não-lineares calculados pelo método teórico foi a carga de ruptura do modelo. Desta forma, não foi possível obter resultados convergidos em passos anteriores, permitindo o cálculo somente para rotações elevadas. Este mesmo fato foi encontrado no trabalho de Amorim (2000) para as curvas carga *versus* rotação das lajes de Gomes (1991).

As curvas dos resultados teóricos apresentaram um comportamento mais rígido do que as curvas dos resultados experimentais, ou seja, em uma mesma carga a rotação da laje foi menor. Esta diferença foi maior nos resultados obtidos nas lajes LR e LR-8s, lajes sem aberturas. As curvas foram semelhantes para as lajes L2-150 e L4-75, para as mesmas cargas, as rotações obtidas foram próximas.

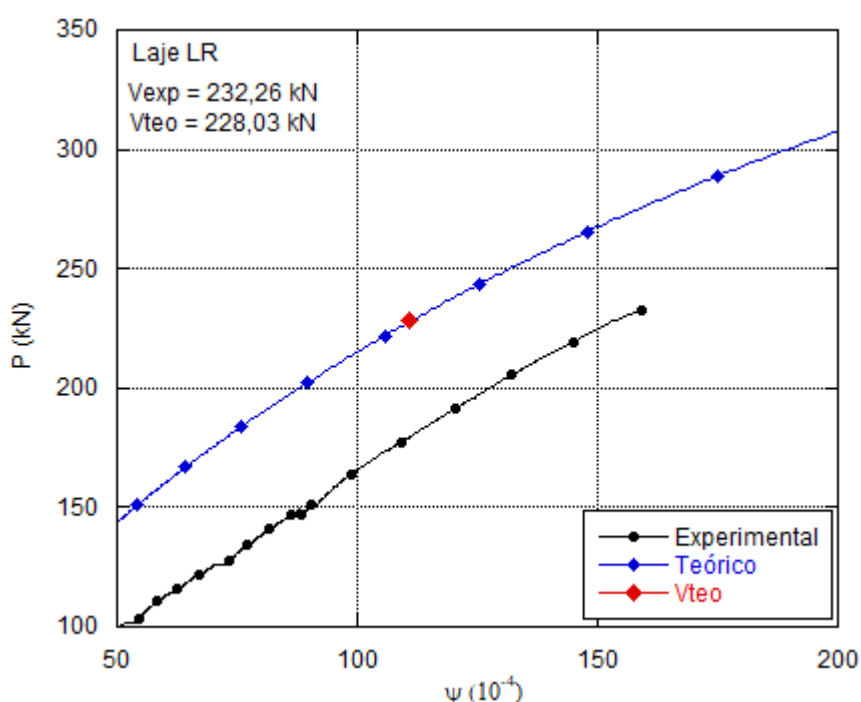


Figura 5.2 - Carga *versus* rotação para a laje LR.

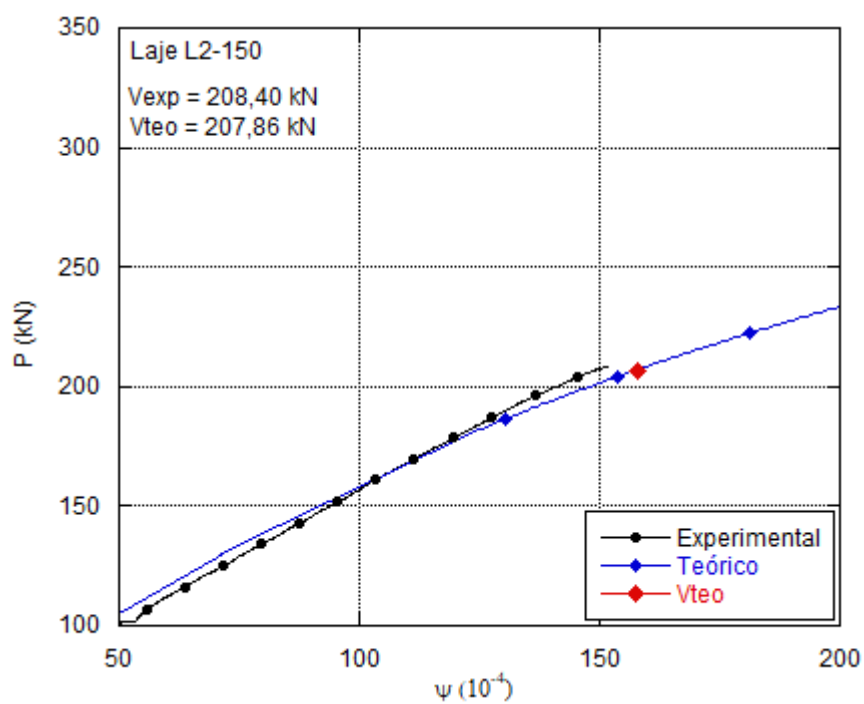


Figura 5.3 - Carga *versus* rotação para a laje L2-150.

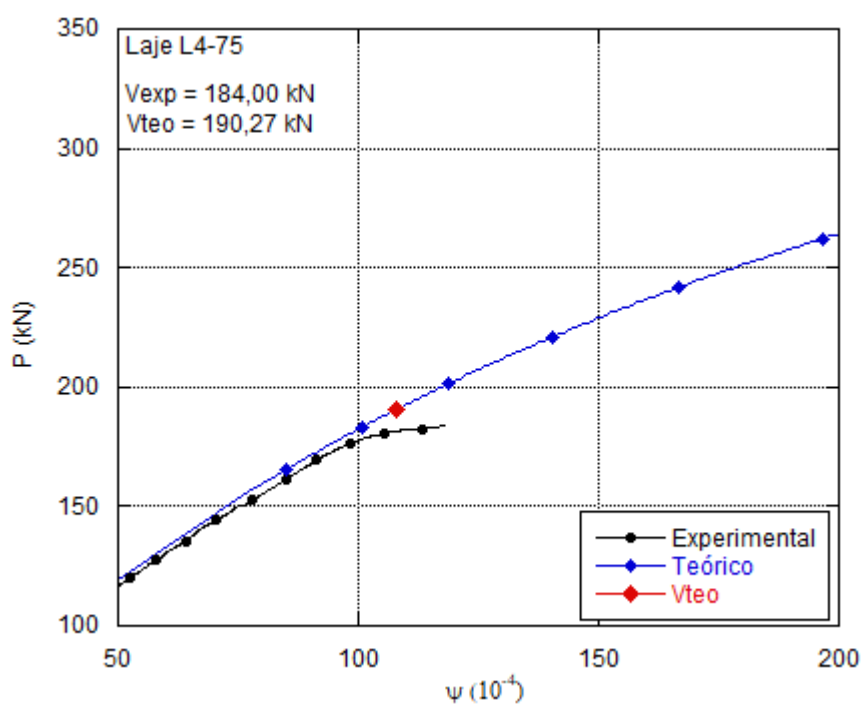


Figura 5.4 - Carga *versus* rotação para a laje L4-75.

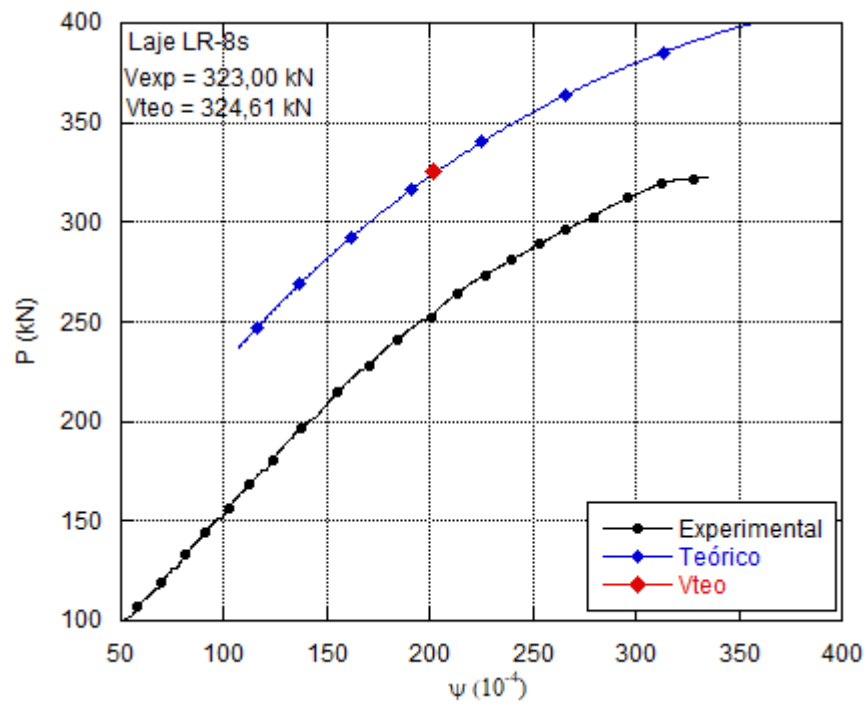


Figura 5.5 - Carga *versus* rotação para a laje LR-8s.

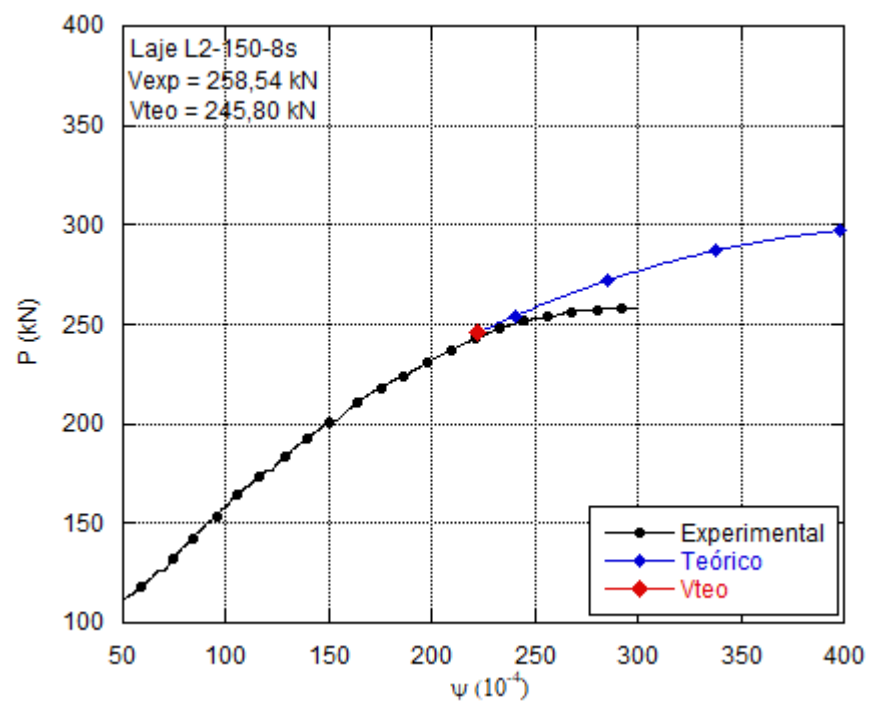


Figura 5.6 - Carga *versus* rotação para a laje L2-150-8s.

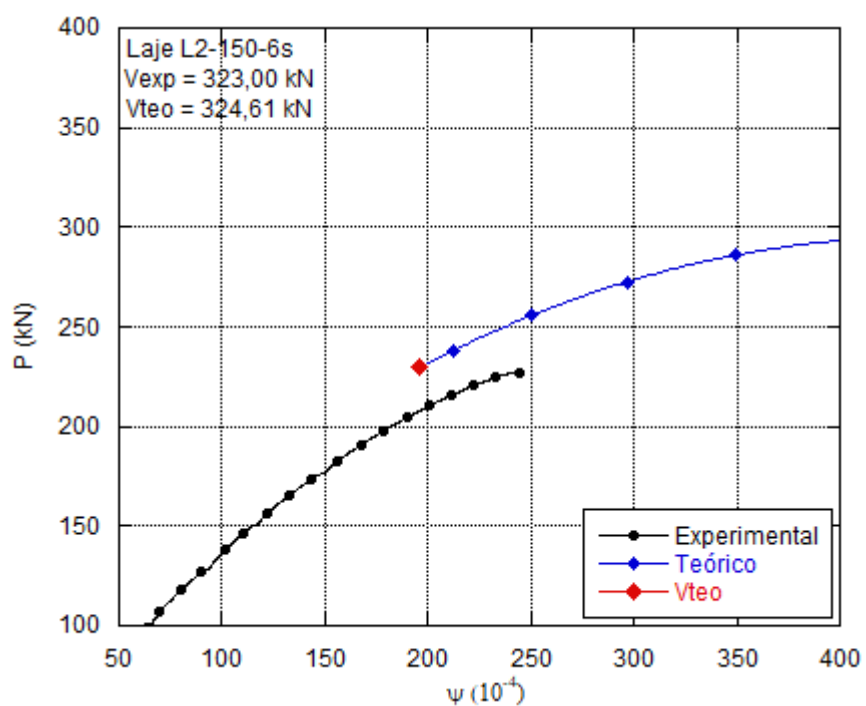


Figura 5.7 - Carga *versus* rotação para a laje L2-150-6s.

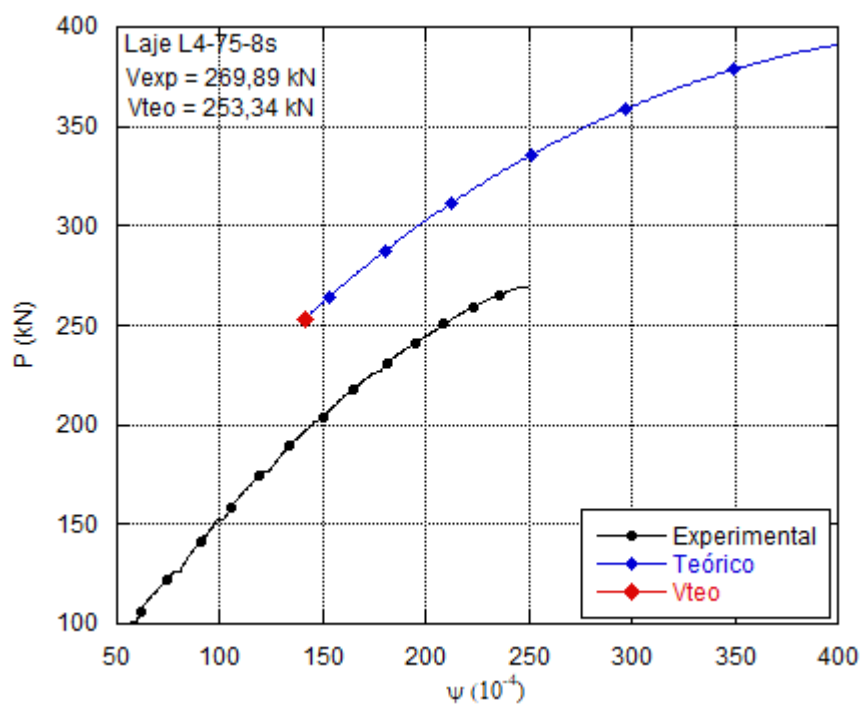


Figura 5.8 - Carga *versus* rotação para a laje L4-75-8s.

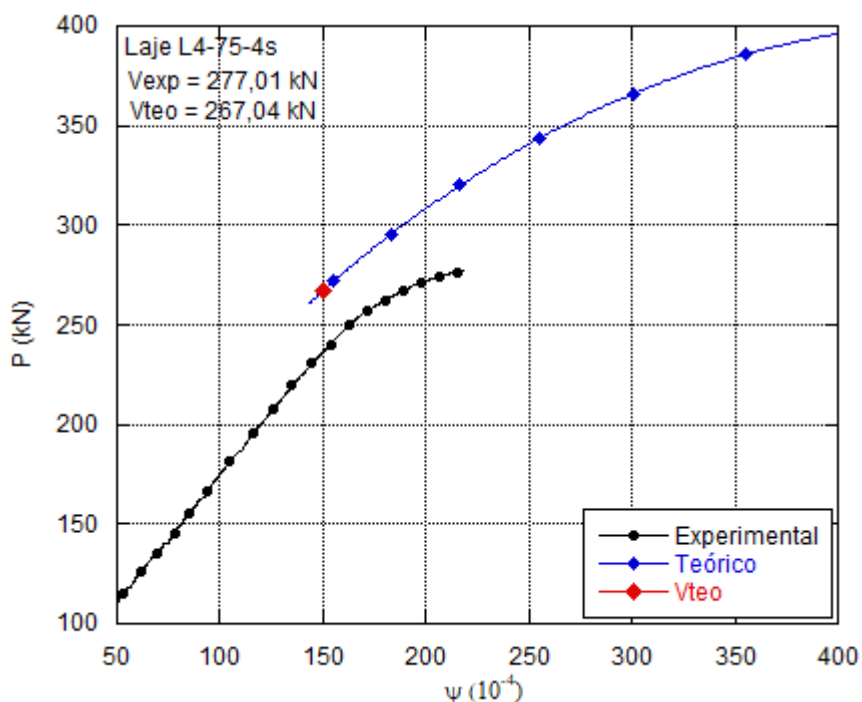


Figura 5.9 - Carga *versus* rotação para a laje L4-75-4s.

5.4.2. Resultados teóricos das lajes da literatura

Na Tabela 5.6 estão apresentados os resultados das lajes que estavam disponíveis todos os dados necessários para o cálculo teórico, uma vez que, devido à natureza das variáveis necessárias ao estudo, não são encontrados os dados completos nos trabalhos de outros autores disponíveis na literatura. O valor da rotação, linha neutra, disposição da armadura de flexão, porcentagem de escoamento por camada da armadura de cisalhamento, resistência à tração do concreto, módulo de elasticidade do concreto e do aço são dados que não são encontrados com facilidade em artigos. Os dados de entrada das lajes da literatura estão no Apêndice F.

Ajustes foram feitos para encontrar carga de ruptura e modo de ruptura próxima aos valores experimentais, em razão das variáveis de entrada serem sensíveis aos resultados do programa, o que implica na necessidade da obtenção de resultados precisos, o que nem sempre é possível. A porcentagem de escoamento da armadura de cisalhamento, o ângulo de inclinação da Força Radial do Concreto (α), a rotação inicial e a distância após a última camada de armadura de cisalhamento onde a tensão normal máxima ($\sigma_{máx}$) atingem a resistência à compressão diametral do concreto (f_{sp}), foram alguns dados ajustados conforme cada modelo.

Para uniformizar os dados de entrada foi calculada uma nova taxa de armadura para todas lajes da bibliografia de acordo com a NBR6118 (2014) e conforme apresentado por Lourenço (2018) para lajes com aberturas.

Tabela 5.6 – Resultados da carga de ruptura experimental e teórico de trabalhos da literatura.

Trabalho	Laje	% Escoamento	V_{exp}	V_{teo}	V_{exp}/V_{teo}	MR Experimental	MR Teórico
Gomes (1991)	L2	100/100	693	731	0,95	Interna	Interna
	L3	100/100	773	803	0,96	Interna	Interna
	L4	100/100/96	853	843	1,01	Externa	Externa
	L5	100/90/75	853	855	1,00	Externa	Externa
	L6	100/100/96	1040	995	1,05	Externa	Externa
	L7	100/100/80	1120	1121	1,00	Externa	Externa
	L8	100/100/100	1200	1172	1,02	Externa	Externa
	L9	100/95/84	1227	1128	1,09	Externa	Externa
	L10	100/100/100	800	827	0,97	Interna	Interna
	L11	100/100/100	907	924	0,98	Interna	Interna
Gomes e Andrade (1999)	L13	NAC	600	597	1,01	Punção	Punção
	L14	NAC	565	562	1,01	Punção	Punção
	L15	NAC	554	546	1,01	Punção	Punção
	L16	70/60/30	1140	846	1,27	Externa	Externa
	L17	55/40	1096	816	1,34	Externa	Externa
	L18	50/40	992	743	1,33	Externa	Externa
	L19	60/50/20	1010	645	1,57	Externa	Externa
	L20	50/20	780	426	1,83	Interna	Interna
	L21	90/40/40	896	483	1,86	Interna	Interna
	L22	100/90/70	832	468	1,78	Interna	Interna
Silva (2003)	L1	NAC	273	283	0,96	Punção	Punção
	L2	NAC	401	383	1,05	Punção	Punção
	L3	NAC	469	437	1,07	Punção	Punção
	L4	NAC	225	219	1,03	Punção	Punção
	L5	NAC	350	322	1,08	Punção	Punção
	L6	NAC	375	371	1,01	Punção	Punção
	L7	60/50/30	420	378	1,11	Externa	Externa
	L8	20/50	452	373	1,21	Externa	Externa
	L9	20/0	452	420	1,08	Externa	Externa
	L10	30/20/0	325	304	1,01	Externa	Interna
	L11	50/30	350	327	1,07	Externa	Externa
	L12	NAC	525	479	1,10	Punção	Punção

Tabela 5.6 - Resultados da carga de ruptura experimental e teórico de trabalhos da literatura.
(continuação).

Trabalho	Laje	% Escoamento	V _{exp}	V _{teo}	V _{exp} /V _{teo}	MR Experimental	MR Teórico
Souza (2004)	L1	NAC	274	268	1,02	Punção	Punção
	L2	NAC	205	206	0,98	Punção	Punção
	L3	NAC	275	265	1,04	Punção	Punção
	L4	NAC	300	293	1,02	Punção	Punção
	L5	NAC	140	137	1,02	Punção	Punção
	L6	NAC	101	88	1,14	Punção	Punção
	L7	NAC	225	228	0,99	Punção	Punção
	L8	NAC	210	195	1,19	Punção	Punção
Oukaili e Salman (2014)	XXX	NAC	102	83	1,22	Punção	Punção
	SF0	NAC	91	77	1,19	Punção	Punção
	CF0	NAC	80	76	1,05	Punção	Punção
	LF0	NAC	69	55	1,24	Punção	Punção
	CC0	NAC	91	63	1,44	Punção	Punção
	CF1	NAC	89	71	1,25	Punção	Punção
Anil et al. (2014)	L2	NAC	99	70	1,42	Punção	Punção
	L3	NAC	126	86	1,47	Punção	Punção
	L4	NAC	77	67	1,15	Punção	Punção
	L9	NAC	139	96	1,45	Punção	Punção
Ha et al. (2015)	C0	NAC	590	587	1,01	Punção	Punção
	H1=V1	NAC	550	538	1,02	Punção	Punção
	H2	NAC	517	510	1,01	Punção	Punção
	H3	NAC	453	448	1,01	Punção	Punção
	V2	NAC	557	519	1,07	Punção	Punção
	V3	NAC	547	525	1,04	Punção	Punção
	L3	NAC	418	448	0,93	Punção	Punção
	HV4	NAC	518	515	1,01	Punção	Punção
Lourenço (2018)	LF1	NAC	206	236	0,92	Punção	Punção
	LF2	NAC	235	224	1,05	Punção	Punção
	LF3	NAC	216	223	0,95	Punção	Punção
	LF4	NAC	258	227	1,06	Punção	Punção

**Tabela 5.6 - Resultados da carga de ruptura experimental e teórico de trabalhos da literatura.
(continuação).**

Trabalho	Laje	% Escoamento	V_{exp}	V_{teo}	V_{exp}/V_{teo}	MR Experimental	MR Teórico
Liberati (2018)	LR-A	NAC	250	248	1,01	Punção	Punção
	LR-B	NAC	216	222	0,97	Punção	Punção
	LR-C	NAC	259	258	1,00	Punção	Punção
	LF1-A	NAC	188	208	0,90	Punção	Punção
	LF1-B	NAC	178	204	0,87	Punção	Punção
	LF1-C	NAC	234	233	1,01	Punção	Punção
	LF2-A	NAC	188	187	1,00	Punção	Punção
	LF2-B	NAC	214	211	1,01	Punção	Punção
	LF2-C	NAC	195	193	1,01	Punção	Punção

MR: Modo de Ruptura;

NAC: Não há Armadura de Cisalhamento;

Punção: Ruptura por punção em lajes que não há armadura de cisalhamento;

Interna: Ruptura na região da armadura de cisalhamento;

Externa: Ruptura externa a região da armadura de cisalhamento.

Os resultados expostos na Tabela 5.6 indicam que a carga de ruptura experimental e teórica apresentaram diferença máxima nas lajes de Gomes e Andrade (1999). Esta diferença foi obtida na laje L21, igual a 1,86. As lajes com armadura de cisalhamento são sensíveis a porcentagem de escoamento das camadas inseridas no programa, o que pode ter aumentado a relação V_{exp}/V_{teo} . Nos experimentos não se coleta a deformação de todas as armaduras de cisalhamento, desta forma, supõe-se uma simetria polar. As armaduras de cisalhamento que foram colocadas na mesma distância do centro da laje, apresentaram a mesma deformação.

A média apresentada pela relação V_{exp}/V_{teo} foi igual a 1,03 com desvio padrão de 0,20. O coeficiente de variação dos resultados foi igual a 19 %, considerado dados de média dispersão. Para os resultados das lajes sem armadura de cisalhamento, a média da relação V_{exp}/V_{teo} foi igual a 1,02 e com armadura de cisalhamento igual a 1,08. O modo de ruptura de todas as lajes foi atendido, exceto a laje L10 de Silva (2017), onde o modo de ruptura experimental foi externo à região da armadura de cisalhamento e pelo modelo teórico foi interno à armadura de cisalhamento.

A porcentagem de escoamento das camadas de armadura de cisalhamento da laje L10 de Silva (2017) foi admitida igual a 30 % de escoamento na primeira camada e 20 % na segunda camada, conforme os resultados experimentais. Alterando para três camadas escoando,

70 %, 50 % e 50 % a laje rompe externamente a última camada de armadura de cisalhamento com $V_{\text{exp}}/V_{\text{teo}}$ igual a 1,05.

6. ANÁLISE NUMÉRICA DE LAJES LISAS DE CONCRETO ARMADO

6.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

A modelagem numérica foi feita através do *software* DIANA 10.1 (*Displacement Method ANAlysis*). O DIANA é um *software* de elementos finitos que permite fazer análises não lineares em elementos tridimensionais de concreto armado. Neste capítulo apresenta-se uma descrição dos principais parâmetros utilizados pelo *software* para caracterizar o concreto e as armaduras, assim como os resultados obtidos com a simulação numérica.

Foram realizadas simulações utilizando modelos tridimensionais de lajes lisas de concreto armado com e sem armadura de cisalhamento, objetivando-se reproduzir numericamente os resultados experimentais obtidos nesta pesquisa e correlacionar as análises numéricas com os modelos produzidos em laboratório.

6.2. O PROGRAMA DIANA

Em simulações numéricas baseadas em elementos finitos, o modelo que representa a estrutura em uma análise é dividido em vasta quantidade de elementos finitos, interligados pelos nós, que, geralmente, estão situados nos vértices ou a meio das arestas deles, formando uma malha contínua. Para representar o comportamento mecânico do concreto, o *software* DIANA disponibiliza os modelos de fissuração discreta (*discrete crack model*) e o modelo de fissuração distribuída (*smeared crack model*).

No modelo de fissuração discreta, a fissura é representada como uma descontinuidade geométrica na malha de elementos, e cria novos nós ou elementos de interface quando surge uma nova fissura. Como consequência, a malha é atualizada em função da propagação da fissura em cada incremento de carga, o que por sua vez gera um alto esforço computacional.

No modelo de fissuração distribuída, o material fissurado é considerado como um meio contínuo. Em vez de representar uma fissura como uma descontinuidade geométrica, as fissuras são distribuídas uniformemente nos elementos. Desta forma, após a propagação da fissura, apenas a relação tensão *versus* deformação é atualizada.

A relação tensão *versus* deformação do concreto foi adotada para o modelo de fissuração distribuída utilizando-se dois modelos matemáticos: Modelo de Deformações Totais (*Total Strain*) e Modelo de Decomposição de Deformações (*Decomposed Strain*). O modelo *Decomposed Strain* utiliza Múltiplas Fissuras Fixas (*Fixed Multidirectional*) e o *Total Strain* disponibiliza duas considerações para as fissuras: Fissuras Fixas (*Fixed Crack Model*) e Fissuras Rotativas (*Rotating Crack Model*).

No modelo de fissuração fixa, a formação das fissuras ocorre quando as tensões principais excedem a resistência à tração do material. A fissura se propaga com o ângulo de inclinação definido no momento de sua abertura, mesmo que as direções da tensão principal mudem. Mantém-se o mesmo valor do ângulo de inclinação até ocorrer uma variação maior que 90° em relação ao ângulo inicial do momento da abertura da fissura. No modelo de fissuras rotativas permite-se que a fissura mude sua inclinação à medida que o carregamento progride. Estes dois modelos citados dependem das propriedades mecânicas dos materiais e do comportamento do concreto à tração e à compressão.

O comportamento do concreto armado à tração pode-se dar de maneira linear-elástica antes da primeira fissura. Após a fissuração, pode ser utilizada uma lei constitutiva baseada na energia de fratura (G_f) que relaciona a tensão de tração normal (f_t) com a deformação normal à fissura (ϵ_{nn}). No concreto armado, devido ao enrijecimento à tração proporcionado pela aderência, a redução da tensão de tração normal ao plano de fissura não se dá de maneira total, mas de modo progressivo com o aumento das deformações. A representação do amolecimento à tração do concreto pode ser realizada estabelecendo uma lei constitutiva, que relaciona a tensão normal com a deformação normal da fissura (efeito de *tension softening*).

A energia de fratura (G_f) é definida como a quantidade de energia necessária para propagar uma fissura de superfície unitária. O DIANA possui quinze tipos de curvas tensão *versus* deformação, definidas de acordo com a energia de fatura (G_f) e do comprimento equivalente da fissura (h). O comprimento equivalente da fissura deve corresponder a uma dimensão representativa dos elementos da malha, sendo dependente do tipo do elemento e de sua forma. A relação tensão *versus* deformação proposta por Hordijk (1991) é utilizada neste trabalho para representar o comportamento não-linear do concreto tracionado, conforme Figura 6.1.

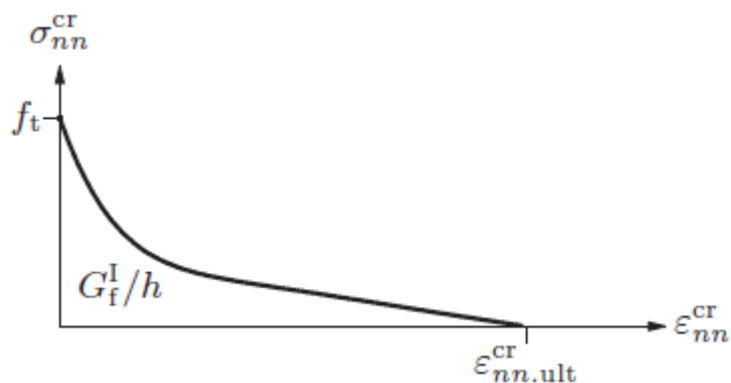


Figura 6.1 – Relação de amolecimento proposta por Hordijk (1991).
Fonte: DIANA TNO, 2017.

A energia de fratura pode ser determinada experimentalmente ou através de relações empíricas. No MC90 CEB-FIP (1993) o parâmetro G_f é determinado de acordo com a Equação 6.1, que depende da resistência média à compressão do concreto e da parcela G_{f0} , que é função da dimensão máxima do agregado $d_{máx}$, conforme Tabela 6.1:

$$G_f = G_{f0} \left(\frac{f_{cm}}{f_{cm0}} \right)^{0,7} \quad (6.1)$$

onde:

$$f_{cm0} = 10 \text{ MPa}$$

Tabela 6.1 – Valores de G_{f0} em função do tamanho máximo do agregado.

$d_{máx}$ (mm)	G_{f0} (N mm/mm ²)
8	0,025
16	0,030
32	0,058

O *Model Code* 2010 traz uma nova equação para o cálculo da energia de fratura, que depende apenas da resistência média à compressão:

$$G_f = 73 f_{cm}^{0,18} \text{ com } f_{cm} \text{ em MPa} \quad (6.2)$$

De acordo com Feenstra & Borst (1993), a energia de fraturamento à tração (G_f), é aproximadamente 50 a 100 vezes maior que a energia de fraturamento à compressão (G_c).

O surgimento de fissuras reduz a rigidez ao cisalhamento das estruturas de concreto, no entanto o concreto armado após a fissuração ainda consegue transferir forças cisalhantes por meio do engrenamento de agregados ou atrito e efeito pino das armaduras. A respeito do efeito

da redução da rigidez ao cisalhamento (β) o DIANA oferece a possibilidade de utilizar sete relações diferentes.

Para levar em conta a capacidade de transferência de esforços cortantes no concreto fissurado, sugere-se para o módulo de elasticidade transversal (G) um valor reduzido na energia de fraturamento à compressão (G_c), definido através de ($G_c = \beta G$). Para uma retenção completa do cisalhamento o módulo de elasticidade G não é reduzido. Em caso de uma redução da rigidez ao cisalhamento, o parâmetro β varia de 0 até 1. O valor do módulo de elasticidade transversal é multiplicado por esse fator após iniciado o processo de fissuração.

Rots et al. (1985) discute sobre três resultados para o parâmetro β , igual a 0,01, 0,2 e 0,99, afirmando que a influência do parâmetro β é considerada relevante em elementos que o efeito do cisalhamento é significativo. Valores baixos do parâmetro de cisalhamento simula superfícies lisas sem atrito e valores altos representa uma superfície de trincas completamente intertravadas.

Na Figura 6.2 está apresentada a curva carga *versus* deslocamento central de vigas de concreto armado, para β igual a 0,01 o modelo não converge para cargas altas e para β igual a 0,02 e 0,99 o modelo atinge maiores valores de carga e deslocamento, acima do obtido experimentalmente.

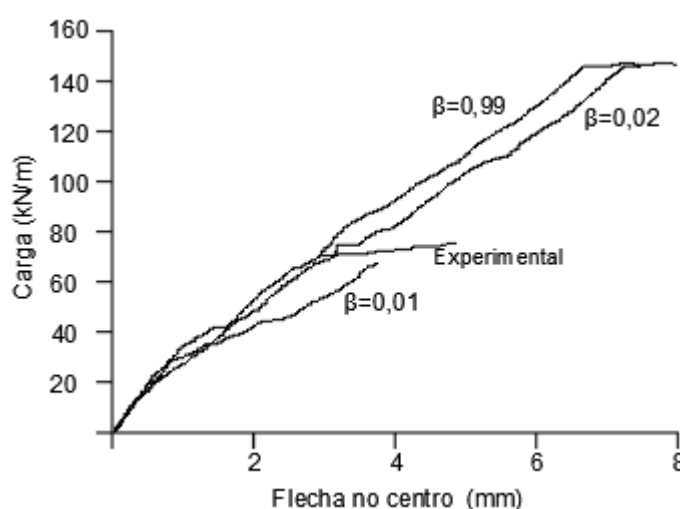


Figura 6.2 - Efeito do fator de retenção β na curva carga versus deslocamento.

Fonte: Adaptado de Rots et al. (1985)

A fissuração para o parâmetro de retenção ao cisalhamento próximo de 1 parece concentrar as fissuras em uma faixa menor de elementos. Para valores baixos, não aparece nenhuma fissura diagonal que represente o efeito do cisalhamento na peça, as fissuras são

distribuídas em todo o comprimento da viga. Além disso, as características de convergência tornaram-se mais fracas, o que pode ser deduzido a partir da curva carga *versus* deslocamento, que exibe "irregularidades" ao longo de toda a curva. E, finalmente, a divergência numérica ocorre.

Cervenka et al. (2012) afirmam que o fator de redução da rigidez ao cisalhamento diminui à medida que a fissura se abre, sugerindo dessa forma adotar o parâmetro β variável. Em problemas em que a fissuração por cisalhamento é determinante, é melhor adotar uma formulação de β variável que permita representar adequadamente a dependência observada entre a rigidez ao cisalhamento e a deformação correspondente à abertura de fissura (PRUIJSSERS, 1988; ROTS; BLAAUWENDRAAD, 1989).

O comportamento do concreto à compressão é descrito em função de uma relação, em geral não-linear, entre as tensões e as deformações. A versão 10.1 do *software* DIANA possibilita a modelagem do comportamento à compressão segundo treze curvas diferentes. A curva proposta por Feenstra (1993), sugere que o comportamento do concreto à compressão seja dividido em quatro regiões diferentes, primeira ($0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_c/3$) região elástica linear, segunda ($\varepsilon_c/3 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_c$) atinge a deformação na qual a tensão de compressão é igual a resistência à compressão do concreto, terceira ($\varepsilon_c \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u$) e por último ($\varepsilon > \varepsilon_u$) quando a deformação atinge a deformação última na qual o concreto amolece completamente, conforme Figura 6.3.

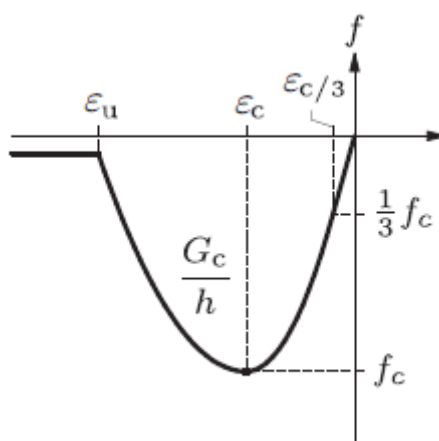


Figura 6.3 - Curva Parabólica proposta por Feenstra (1993).
Fonte: DIANA TNO, 2017.

Para cada trecho da curva, as tensões à compressão são calculadas conforme a equação 6.3:

- $\varepsilon_c/3 < \varepsilon < 0$

$$\sigma(\varepsilon) = -\frac{1}{3} \frac{f_c \varepsilon}{\varepsilon_c/3}$$

- $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_c/3$

$$\sigma(\varepsilon) = -\frac{f_c}{3} \left[1 + 4 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_c/3}{\varepsilon_c - \varepsilon_c/3} \right) - 2 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_c/3}{\varepsilon_c - \varepsilon_c/3} \right)^2 \right] \quad (6.3)$$

- $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_u$

$$\sigma(\varepsilon) = -\frac{f_c}{3} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{\varepsilon_u - \varepsilon_c} \right)^2 \right]$$

- $\varepsilon < \varepsilon_u$

$$\sigma(\varepsilon) = 0$$

Onde:

$$\varepsilon_c/3 = -\frac{1}{3} \frac{f_c}{E}$$

$$\varepsilon_c = -\frac{5}{3} \frac{f_c}{E}$$

$$\varepsilon_u = \varepsilon_c - \frac{3}{2} \frac{G_c}{hf_c}$$

Observa-se que o amolecimento do concreto depende da energia de fratura à compressão G_c , da largura de banda do elemento h e da resistência à compressão do concreto f_c . O parâmetro G_c representa a área sob a curva após atingir a resistência à compressão.

Utilizou-se uma formulação para modelar a aderência entre as barras de aço e o concreto, definida por armadura embebida (*embedded reinforcement*), as tensões nas armaduras são calculadas a partir do deslocamento dos elementos do concreto, os nós dos elementos das barras de aço compartilham os graus de liberdade do elemento de concreto no qual estão localizadas. Isto implica uma ligação perfeita entre o aço e o concreto.

As análises numéricas utilizando elementos finitos comumente apresentam uma constante mudança de sua matriz de rigidez, fazendo com que a medida que apresentem variações nos carregamentos atuantes, estas mudanças representem renumerações constantes

desta matriz. Este fato está relacionado com o complexo mecanismo de fratura ocorrente em peças de concreto armado.

A metodologia básica para a solução de sistemas não-lineares consiste na utilização de métodos iterativos que busquem o equilíbrio entre a força externa atuante, força interna resultante e consequentes variações nos deslocamentos nodais, conforme Belletti et. al. (2016). Os métodos de Newton-Raphson, Quase-Newton, o método da Rigidez Constante e da Rigidez Linear são implementados pelo software DIANA para solucionar os sistemas não-lineares.

Para determinar as condições de equilíbrio que regem o sistema de equações, as interações devem ser interrompidas por critérios de parada que representem satisfatoriamente a convergência de resultados. A solução das análises no DIANA é estabelecida por critérios de convergência que obtêm a resposta com uma precisão mais refinada. O DIANA disponibiliza três opções de critérios: critério de convergência em termos de deslocamentos, forças e energia. Gomes (2001) ressalta que o critério em termos de energia é o mais atrativo, pois leva em conta simultaneamente o critério das forças e de deslocamentos. Em cada incremento, um procedimento iterativo é aplicado para obter a solução de equilíbrio do modelo.

6.3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste item, são apresentados e discutidos os resultados da análise numérica das lajes de concreto armado com e sem aberturas e com e sem armadura de cisalhamento, de acordo com o capítulo 3. As análises paramétricas partiram do modelo de referência LR, laje sem abertura e sem armadura de cisalhamento.

Em princípio buscou-se calibrar a laje LR, variando os parâmetros: módulo de elasticidade do concreto, resistência a tração do concreto, energia de fratura à tração e a compressão, o parâmetro β que reduz a rigidez ao cisalhamento do concreto e a malha do modelo.

O módulo de elasticidade obtido experimentalmente era em média 32 GPa, e adotou-se para todas as lajes o valor de 30 GPa. A resistência à tração do concreto obtido experimentalmente variou de 2,69 MPa para a laje LR a 4,14 MPa para a laje L4-75-4s. Para todos os modelos, a resistência à tração adotada foi de 2 MPa, valor que melhor representou os resultados experimentais. A resistência a compressão e a tensão de escoamento dos aços dos modelos foram adotados iguais aos valores obtidos experimentalmente.

A energia de fratura adotada nos modelos seguiu o recomendado pelo MC90 CEB-FIP (1993), conforme a equação 6.1, com $G_{f0} = 0,03 \text{ Nmm/mm}^2$, $f_{cm} = 40 \text{ MPa}$, ocasionando $G_f = 0,08 \text{ N/mm}$ e a energia de fratura à compressão igual a $G_c \cong 400 G_f = 32 \text{ N/mm}$.

O parâmetro β adotado inicialmente foi constante e testaram-se os valores: 0,01, 0,02, 0,03, 0,05, 0,1, 0,2 e 0,3. Usando o fator de retenção ao cisalhamento baixo como 0,01, a laje não convergia com cargas baixas e, para valores mais altos, a laje apresentava uma ruptura semelhante a flexão e com cargas elevadas, em torno de 400 kN.

Na Figura 6.4 estão demonstrados os resultados obtidos para a laje LR utilizando o fator de retenção β constante, em três situações distintas, β igual a 0,05, 0,1 e 0,2 e curva multilinear, esta depende da deformação normal da abertura de fissuras. Para valores de β constante e acima de 0,1, a ruptura acontece provavelmente à flexão, e para β igual a 0,05 não foi possível constatar a ruptura por punção. Os melhores resultados obtidos foram adotando o fator de retenção multilinear.

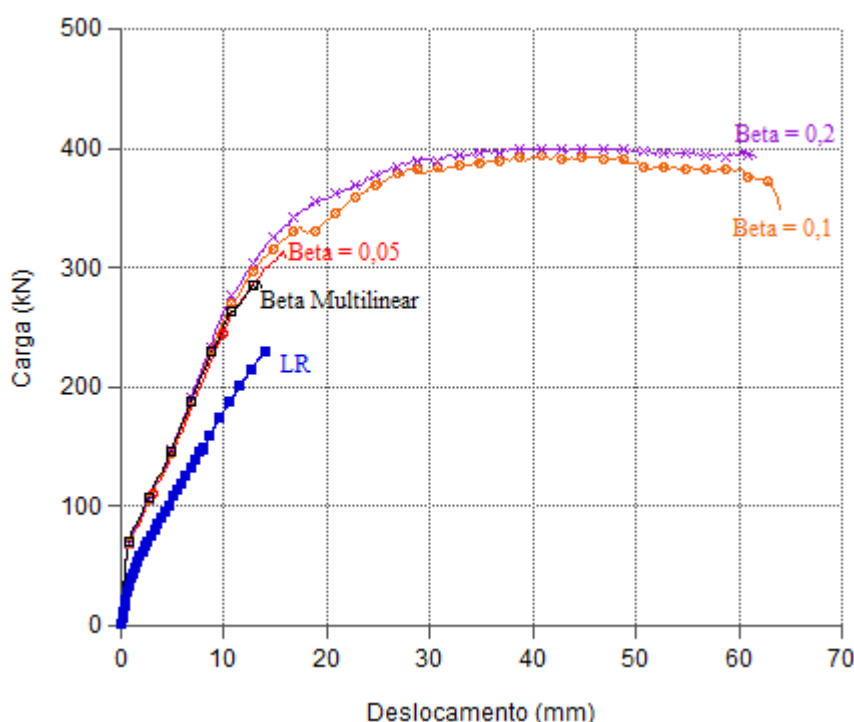


Figura 6.4 - Carga versus deslocamento da laje LR para diferentes curvas de beta.

Optou-se por adotar no trabalho a lei de retenção variável ao cisalhamento sugerida por Pruijssers (1988), beta multilinear conforme Figura 6.4 e equações 6.4 e 6.5. O fator de retenção variável β depende da deformação normal da abertura de fissura (ε_{nm}^{cr}) e também da

distorção da fissura (γ_{nt}^{cr}), através da relação $\xi = \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\lambda_{nt}^{cr}}$. Nos modelos trabalhou-se com valor constante para a relação e igual a 1 ($\xi = 1$). Puijssers (1988) apresenta resultados com ξ igual a 1, 3 e 10, para o diâmetro máximo do agregado ($d_{máx}$) igual a 19 mm.

$$\beta = \frac{1}{1 + P \varepsilon_{nn}^{cr}} \quad (6.4)$$

Com P, definido por:

$$P = \frac{A}{d_{\max}^{0,14} \left[0,76 - 0,16 \xi \left(1 - \exp\left(\frac{6}{\xi}\right) \right) \right]} \quad (6.5)$$

Puijssers (1988) sugere $A = 2500$, analisou a influência do coeficiente “A” na carga última e no deslocamento total das lajes para “A” igual a 2500, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000 e 8000. O valor que melhor se ajustou ao comportamento experimental das lajes ensaiadas no laboratório foi $A = 5000$. Na Figura 6.5 está apresentado os resultados obtidos para a laje LR.

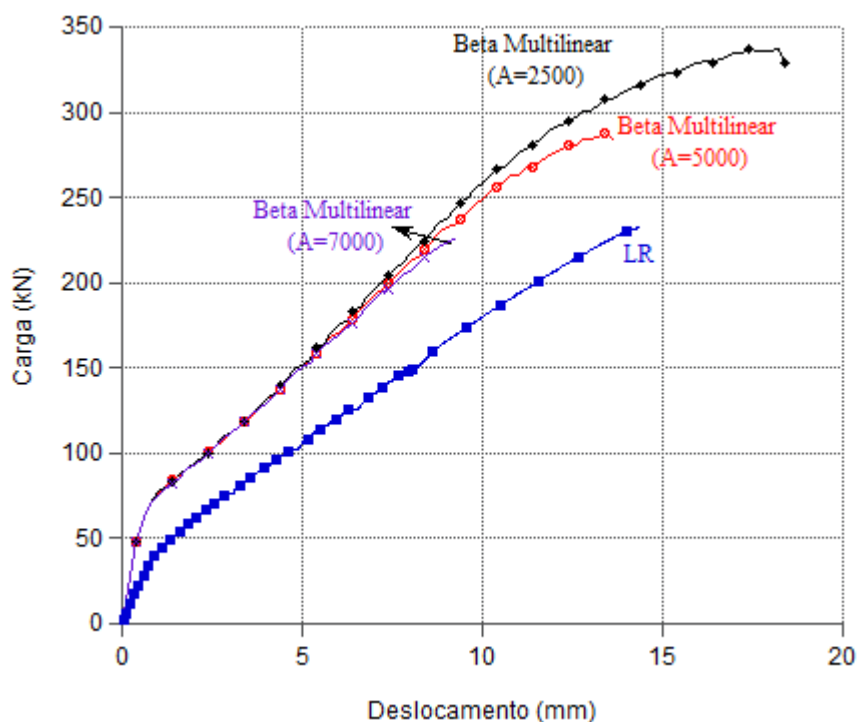


Figura 6.5 - Carga versus deslocamento da laje LR para diferentes valores do coeficiente A.

A representação do β multilinear indica que, para pequenos valores de deformação normal da abertura de fissuras, o valor de β é alto, apresentando fissuras ao cisalhamento significativas. Conforme a carga aumenta, e apresenta maiores valores de deformação normal

da abertura de fissuras, o valor de β cai para próximo de zero. E, desta forma, não há intertravamento das fissuras. A curva do parâmetro de retenção ao cisalhamento *versus* a deformação normal da abertura de fissuras, para $A = 5000$, o qual foi utilizado nos modelos, pode ser vista na Figura 6.6.

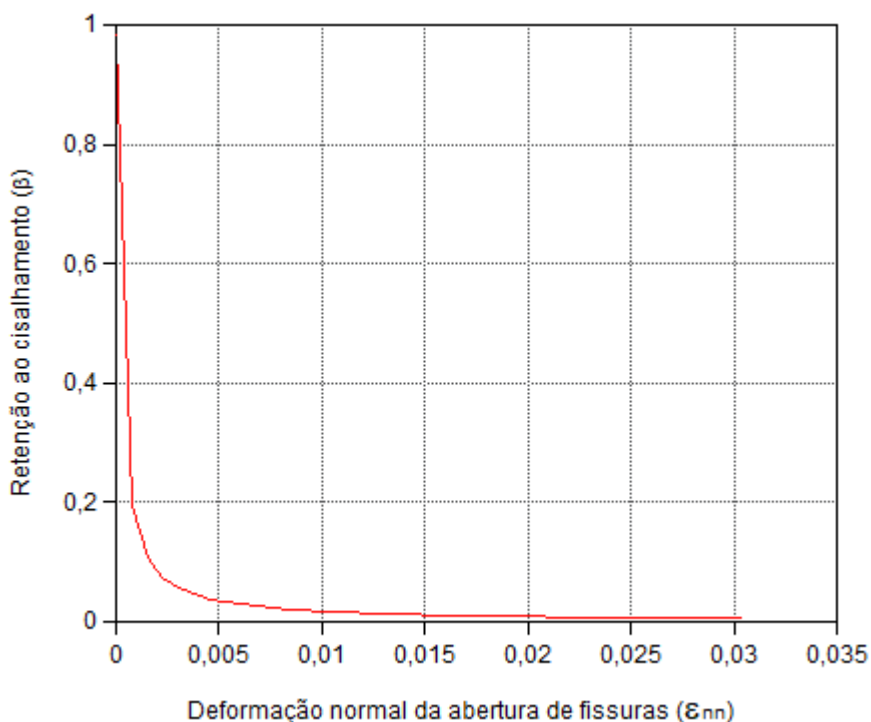


Figura 6.6 - Curva do parâmetro de retenção ao cisalhamento versus a deformação normal da abertura de fissuras para $A = 5000$.

As armaduras presentes nas lajes foram admitidas com um comportamento elástico linear até atingir o limite de escoamento, considerando um comportamento perfeitamente plástico. Para as análises numéricas desenvolvidas neste trabalho, o critério de *Von Mises* foi utilizado como modelo constitutivo de plasticidade das armaduras, uma vez que considerando a influência de estados de tensões biaxiais, este possa melhor representar a influência do efeito pino e tração axial conjuntamente.

Os modelos testados em laboratório foram reproduzidos no *software* Diana 10.1 de forma a representar o comportamento das lajes com e sem armadura de cisalhamento, e também, com e sem aberturas. Foi utilizada a simetria na análise numérica não linear, modelando um quarto da laje. Para os eixos de simetria, não foram permitidos deslocamentos horizontais, nem rotações. Os ensaios experimentais e numéricos foram efetuados com deslocamento prescrito

no centro do pilar, mantendo fixas com apoios verticais as chapas localizadas na zona de momentos nulos. Esses apoios são pontuais, de forma a não restringir rotações.

O concreto foi modelado com elementos finitos hexaédricos de 8 nós com integração dos elementos por quadratura de Gauss adotada como regular, e as armaduras foram modeladas como embebidas. O concreto e o aço foram admitidos com aderência perfeita entre eles.

Nas análises incrementais não lineares a carga externa foi aplicada por incremento de deslocamento, 300 passos de 0,2 mm, totalizando no máximo 60 mm de deslocamento no centro do pilar. Em relação à técnica de solução e os parâmetros de convergência, utilizou-se o processo iterativo Quasi-Newton (Secante) com formulação BFGS junto com a técnica *line-search*. Foram utilizadas as normas de energia com os valores de 10^{-4} e um número máximo de 200 iterações.

O modelo numérico representativo da laje LR pode ser visto na Figura 6.4. O detalhamento de todas as lajes utilizado para modelar no *software* Diana encontra-se no Apêndice H. Na figura 6.7 estão expostas as condições de contornos e o ponto de aplicação do deslocamento (a) e a representação da malha (b), sendo adotada uma malha mais refinada na região próxima ao pilar. As mesmas condições foram admitidas para os demais modelos.

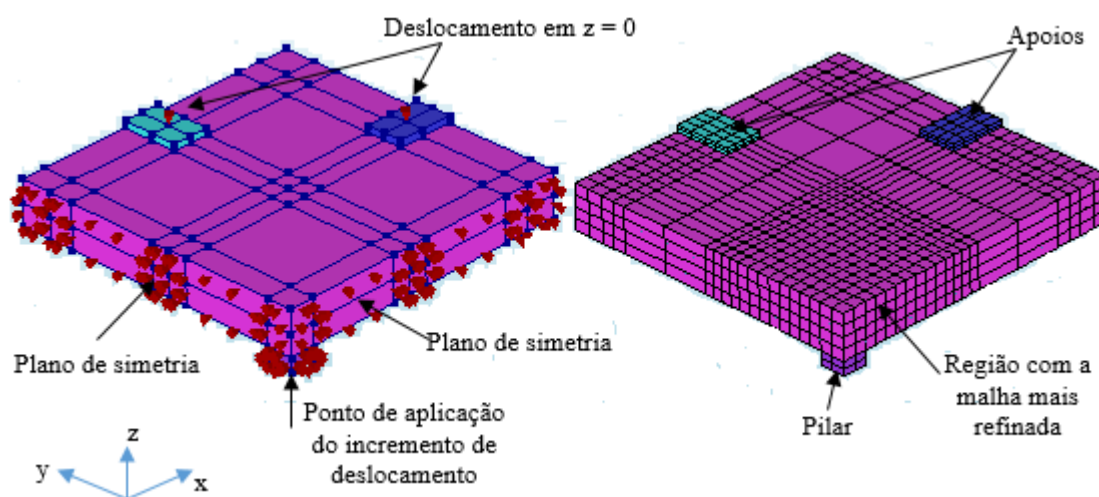


Figura 6.7 - Modelo Numérico da laje LR.

6.3.1. Carga de ruptura, deslocamento máximo vertical e modo de ruptura das lajes do modelo numérico

Foram coletados deslocamentos no centro da laje, que coincide com o centro do pilar no modelo numérico (Figura 6.8) e comparou-se com os deslocamentos medidos no experimento. Os resultados da carga de ruptura, deslocamento máximo vertical medidos no centro da laje e o tipo de ruptura obtidos experimentalmente e pelos Modelos de Elementos Finitos (MEF) são apresentados nas Tabelas 6.2 e 6.3.



Figura 6.8 - Ponto de medição do deslocamento das lajes.

Tabela 6.2 - Cargas de ruptura e deslocamento central das lajes do Grupo 1.

	LR	L2-150	L4-75
V_{exp} (kN)	232,3	208,4	184,0
V_{MEF} (kN)	263,6	206,8	198,0
V_{exp}/V_{MEF}	0,88	1,01	0,93
δ_{exp} (mm)	14,3	13,7	10,6
δ_{MEF} (mm)	11,0	10,6	10,0
$\delta_{exp}/\delta_{MEF}$	1,30	1,29	1,06
Modo de Ruptura Experimental e MEF	Punção		

V_{exp} : Carga de ruptura obtida nos ensaios experimentais;

V_{MEF} : Carga de ruptura obtida no modelo numérico;

δ_{exp} : Deslocamento medido no centro das lajes ensaiadas experimentalmente;

δ_{MEF} : Deslocamento medido no centro das lajes do modelo numérico.

Tabela 6.3 - Cargas de ruptura e deslocamento central das lajes do Grupo 2.

	LR-8s	L2-150-8s	L2-150-6s	L2-100-8s	L4-75-8s	L4-75-4s
V_{exp} (kN)	323,0	258,5	227,3	268,0	269,6	277,0
V_{MEF} (kN)	368,4	282,0	272,0	270,0	272,0	268,8
V_{exp}/V_{MEF}	0,88	0,87	0,84	0,99	0,99	1,03
δ_{exp} (mm)	30,2	27,0	22,2	28,5	22,4	19,7
δ_{MEF} (mm)	34,6	20,6	22,6	17,2	15,7	16,0
$\delta_{exp}/\delta_{MEF}$	0,87	1,31	0,98	1,66	1,43	1,23
Modo de Ruptura Experimental/MEF	Externa/ Interna	Externa/ Interna	Externa/ Interna	Externa/ Interna	Interna/ Interna	Externa/ Interna

δ : Deslocamento medido no centro da laje

Nota-se uma boa aproximação entre as cargas de ruptura obtidas experimentalmente e as cargas máximas alcançadas pelos modelos numéricos. Os piores resultados foram obtidos nos modelos numéricos da laje L2-150-6s, onde a relação entre o resultado experimental e numérico foi de 0,84. Os resultados de deslocamentos máximos mostram que o modelo numérico apresentou um comportamento mais rígido, como mostrado nas Figuras 6.9 e 6.10. As relações entre os deslocamentos máximos experimentais e numéricos foram entre 0,81 a 1,66.

Alguns fatores podem ter aumentado a rigidez nos modelos numéricos, como:

- A utilização da armadura embebida no concreto, pois na realidade sempre há algum deslocamento relativo entre o aço e o concreto;
- A acomodação do sistema de ensaio, ao iniciar a aplicação do carregamento nos modelos experimentais, não é reproduzida pelo modelo numérico;
- A dificuldade em caracterizar com precisão o módulo de elasticidade do concreto e do aço e obter a energia de fratura do concreto.
- O resultado computacional para os modelos depende muito da representação das fissuras de cisalhamento adotada. Valores altos de retenção ao cisalhamento produziram fissuras ao cisalhamento, enquanto valores muito baixos não gera fissuras.

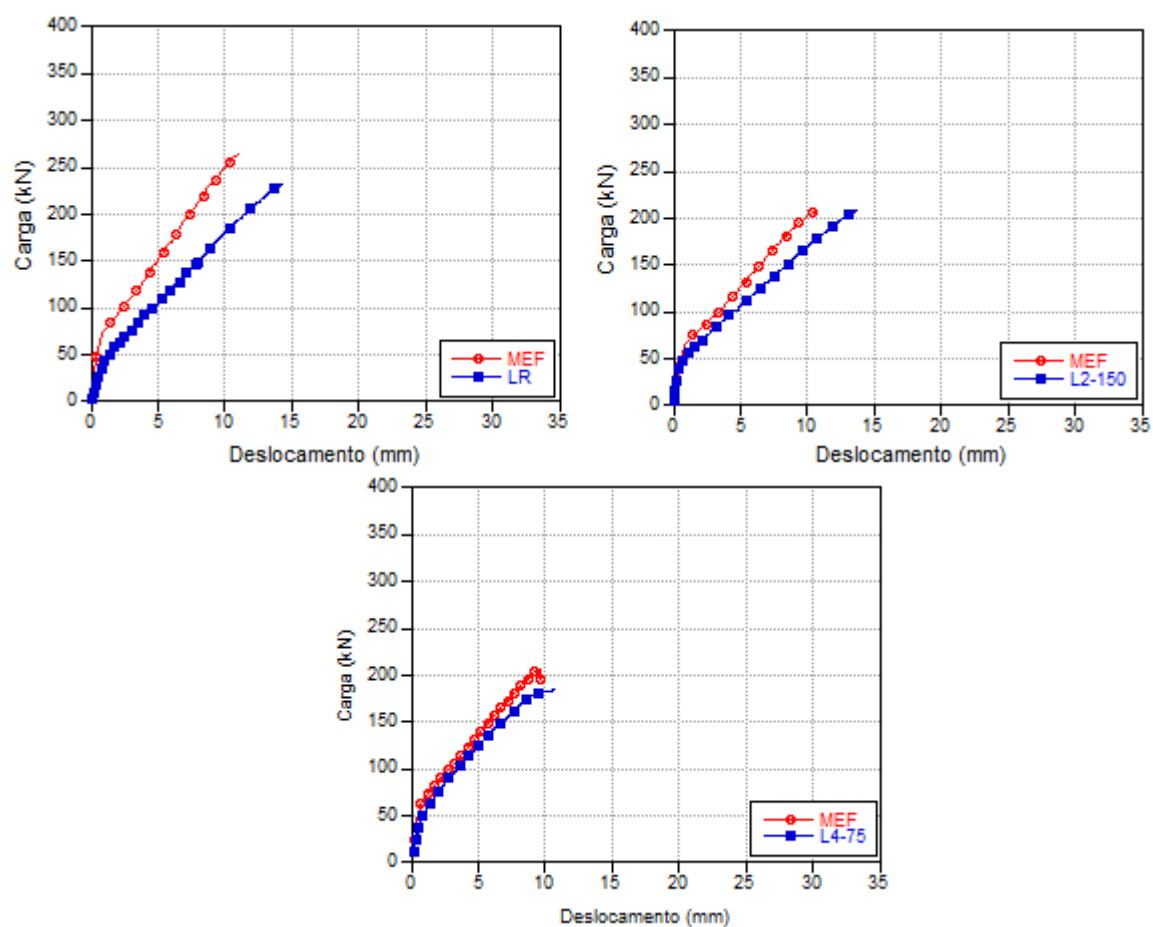


Figura 6.9 - Evolução dos deslocamentos máximos com a carga aplicada nos modelos do Grupo 1.

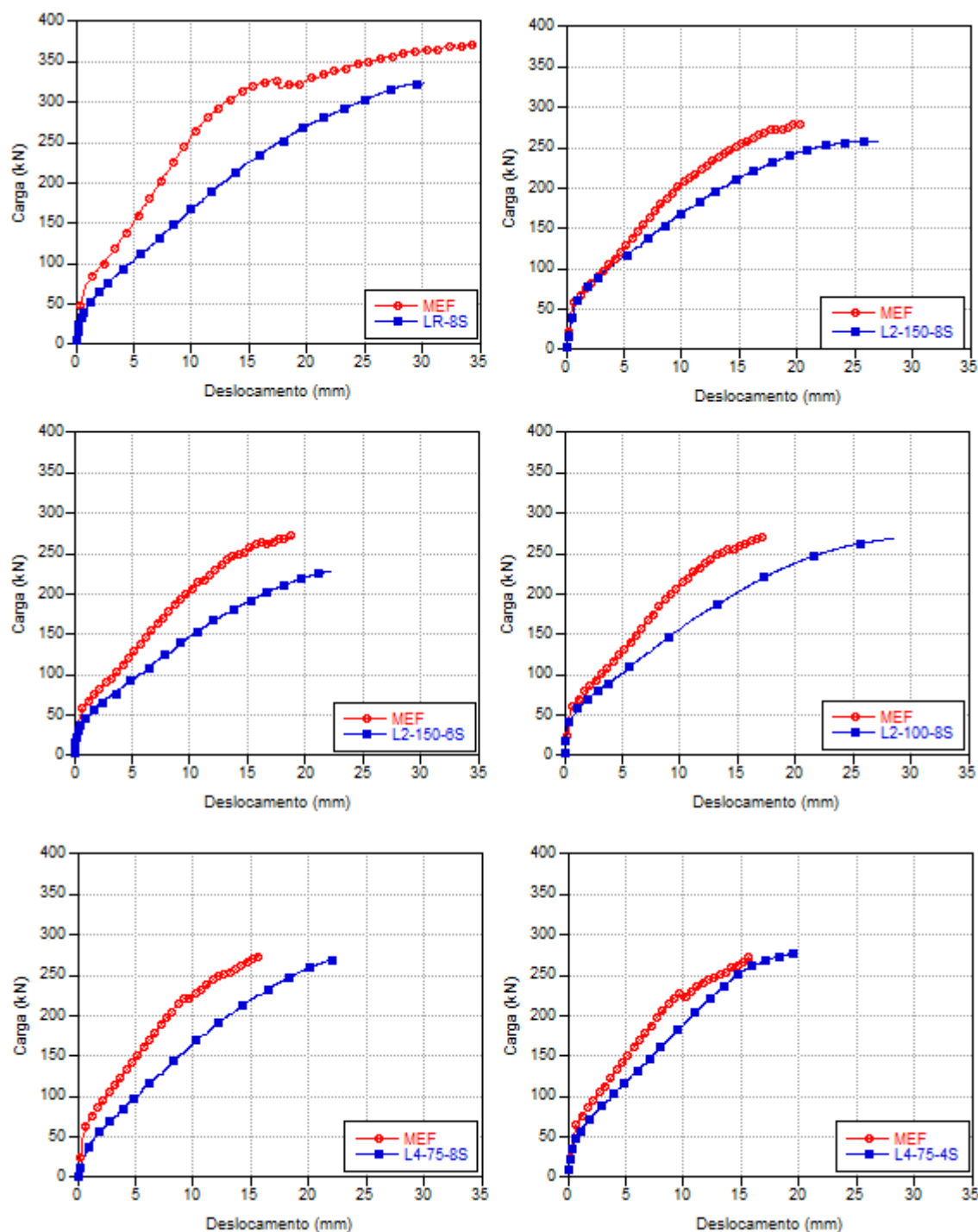


Figura 6.10 - Evolução dos deslocamentos máximos com a carga aplicada nos modelos do Grupo 2.

Na Figura 6.11 está apresentada a superfície de ruptura das lajes LR, L2-150, LR-8s, L4-75-8s. A superfície de ruptura da laje L2-150 cruzou as aberturas nos resultados experimentais e numéricos. O resultado obtido no MEF da laje LR foi conclusivo para perceber a ruptura à punção do modelo. A análise não linear das lajes do Grupo 2 apresentou superfícies de rupturas internas à armadura de cisalhamento. Dessa forma, o modelo não conseguiu prever

o modo de ruptura externo às armaduras de cisalhamento, como foi observado nos testes experimentais, exceto a laje L4-75-8s, na qual a ruptura foi interna.

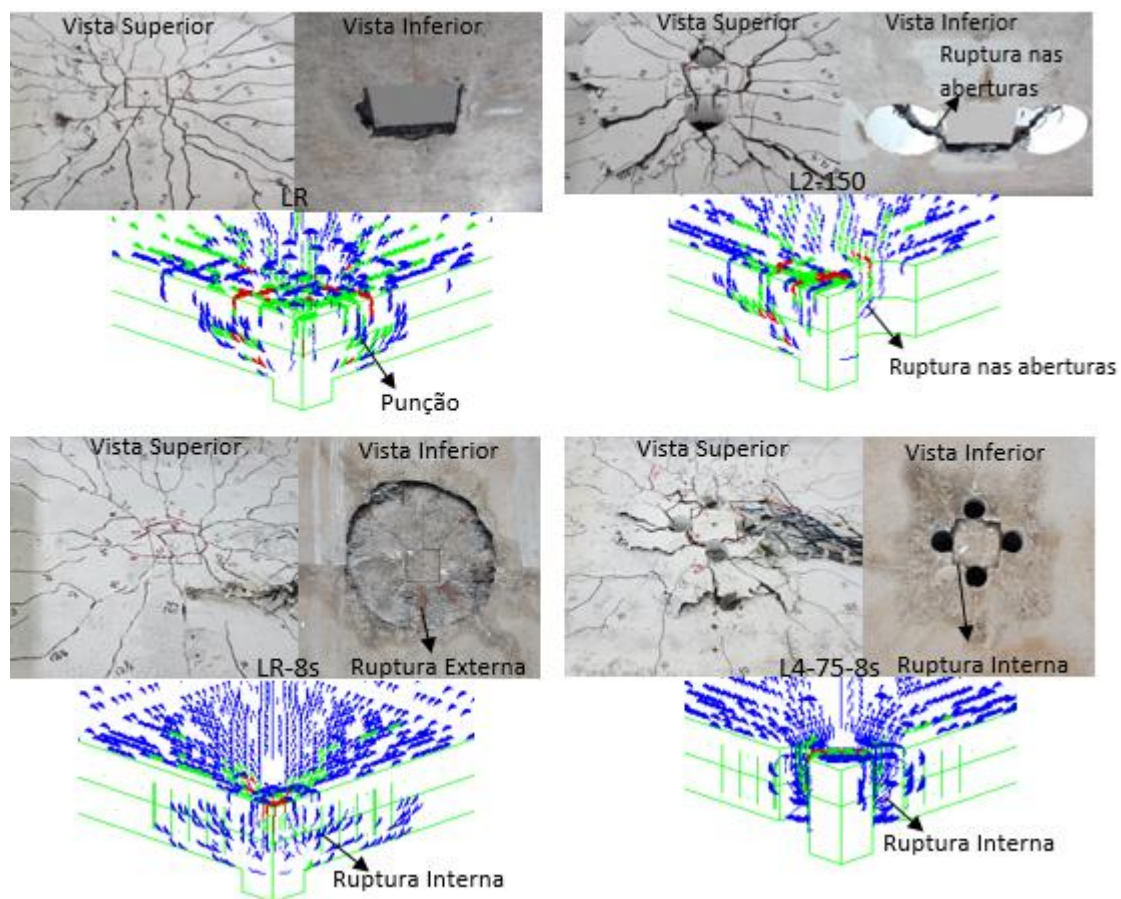


Figura 6.11 - Fissuração pós ruptura experimental e numérico das lajes LR, L2-150, LR-8s e L4-75-8s.

6.3.2. Deformações do concreto e do aço

O panorama das deformações principais de tração das lajes do Grupo 1 e 2 pode ser visto nas Figuras 6.12 e 6.13, respectivamente. Os resultados foram obtidos para o último passo convergido para todas as lajes, antes de ocorrer a ruptura do modelo. A correta localização das tensões principais de tração é um importante fator do estudo dos mecanismos resistentes ao cisalhamento, garantindo uma clara identificação da fissuração da laje e da inclinação da fissura crítica. As tensões principais de tração nas lajes do Grupo 1 se concentraram nas aberturas e próximas ao pilar, apresentando uma boa aproximação dos modelos numéricos e experimentais.

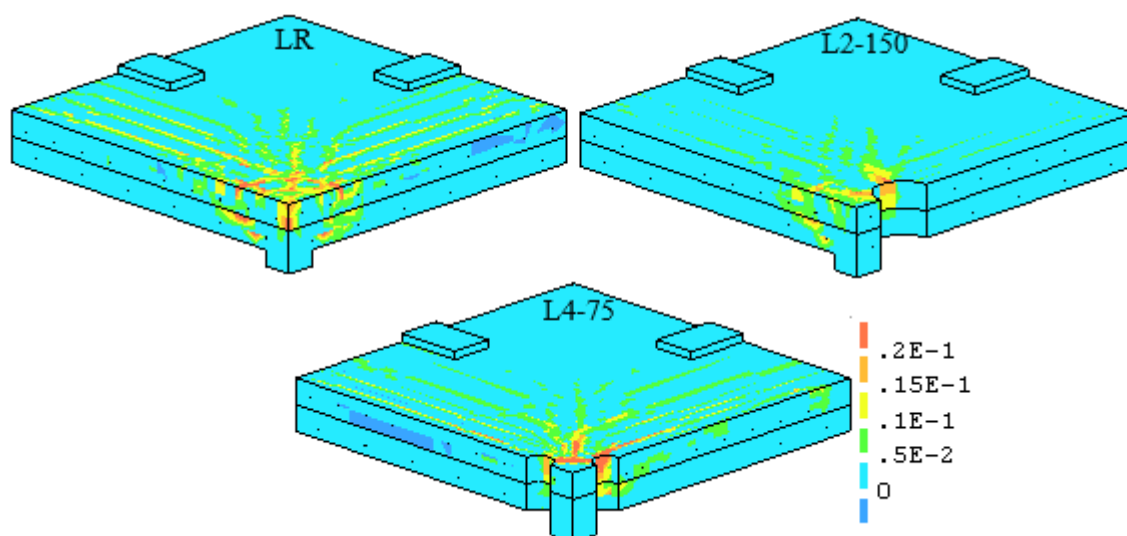


Figura 6.12 - Panorama das deformações principais de tração das lajes do Grupo 1.

Nas lajes do Grupo 2, Figura 6.13, os maiores valores obtidos para as deformações principais de tração foram próximo aos pilares e entre as camadas de *studs*. O modo de ruptura não foi previsto com exatidão, apenas para a laje L4-75-8s que as tensões principais de tração se concentraram na região interna da abertura, como aconteceu no ensaio experimental. Não foi possível identificar a ruptura ocorrendo através dos *studs* ou pelo exterior dos *studs*, o que ocorreu nos ensaios experimentais.

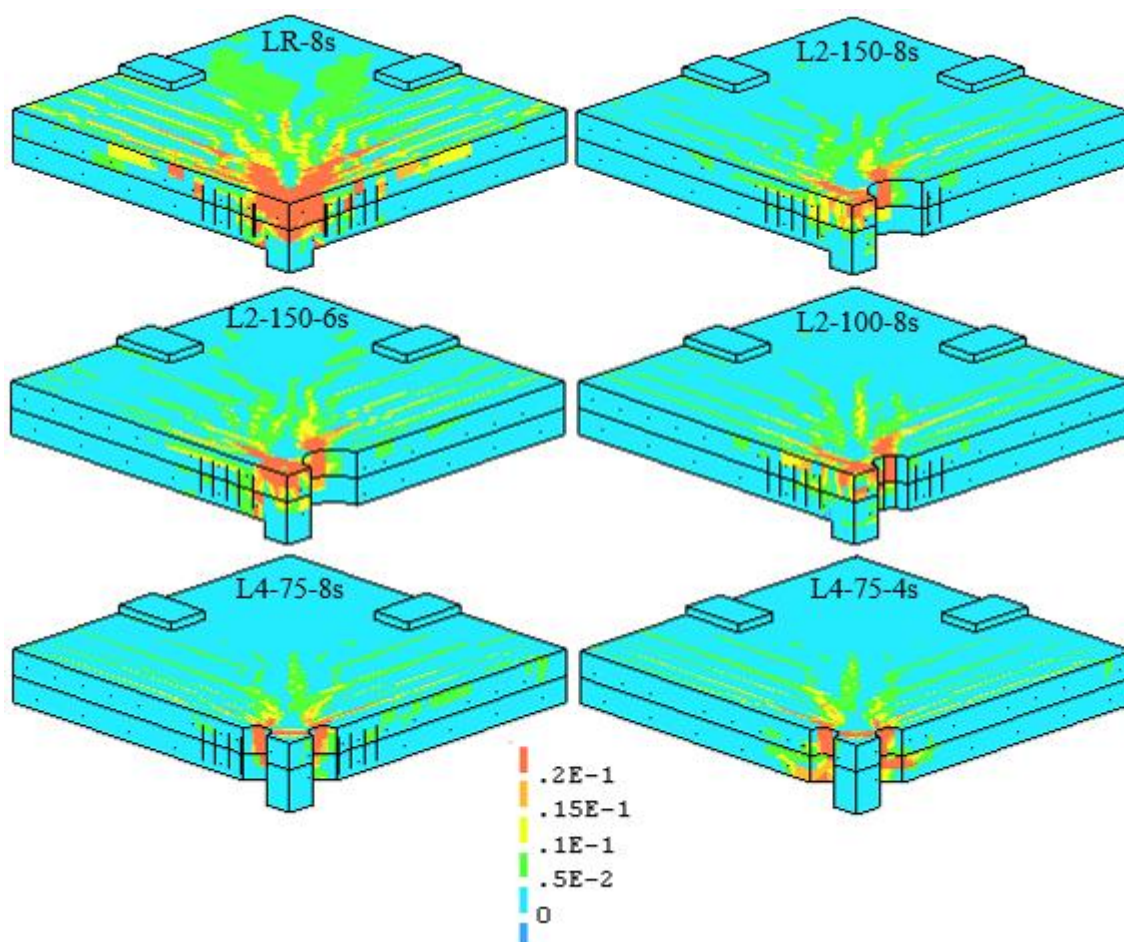


Figura 6.13 - Panorama das deformações principais de tração das lajes do Grupo 2.

As curvas carga *versus* deformação no concreto dos modelos numéricos e experimentais estão apresentadas nas Figuras 6.14 e 6.15. Foram escolhidos alguns pontos medidos no experimento para traçar os gráficos. Nos ensaios experimentais os extensômetros foram fixados a 20 mm afastados da face do pilar, já no modelo numérico, os pontos escolhidos são dependentes do tamanho da malha. Os pontos analisados no MEF foram na face do pilar ou afastado um elemento (35 mm), optou-se pelo nó que apresentou o resultado similar aos resultados experimentais.

A análise dos resultados experimentais e numéricos foi satisfatória, pois as curvas apresentaram comportamento semelhantes. A descompressão observada nos ensaios experimentais nas lajes L4-75, LR-8s, L2-150-6s e L4-75-8s também foi verificado nos modelos numéricos.

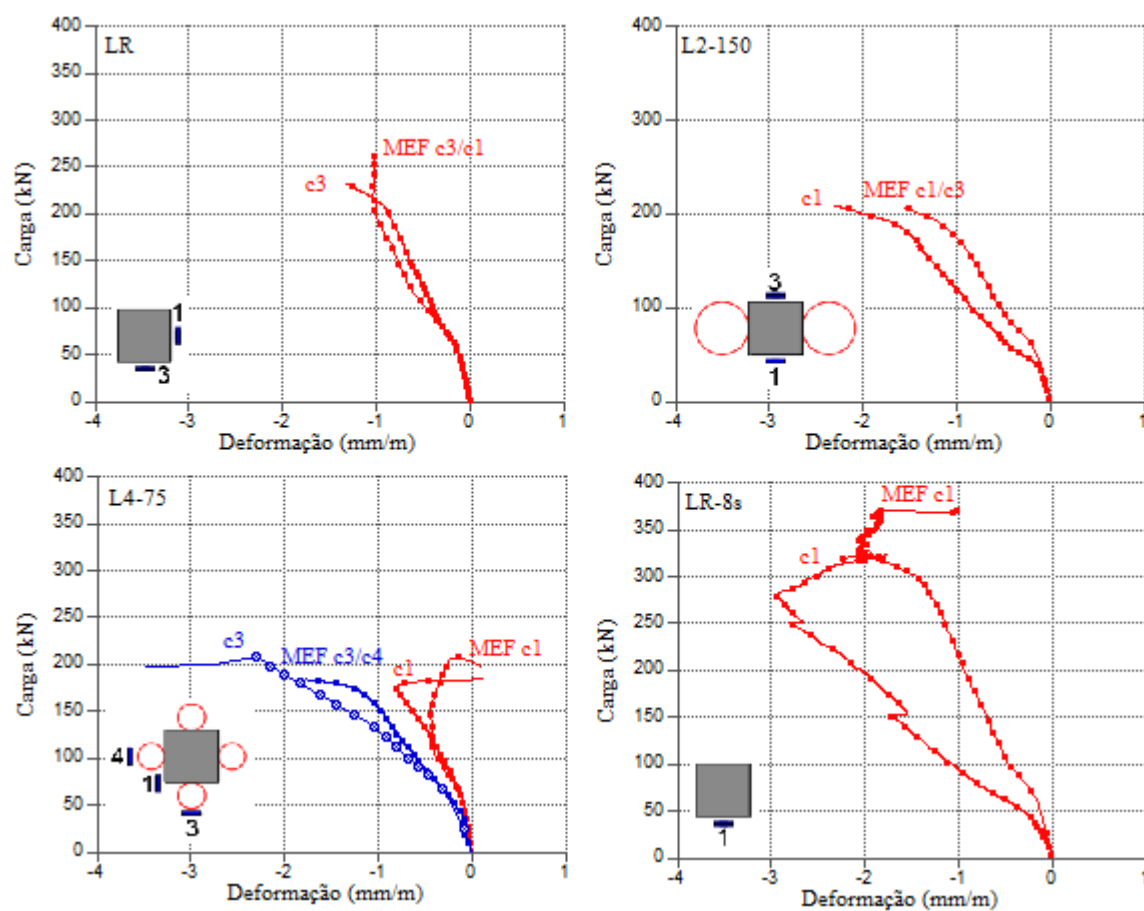


Figura 6.14 - Carga versus deformação no concreto dos modelos numéricos e experimentais (LR, L2-150, L4-75 e LR-8s).

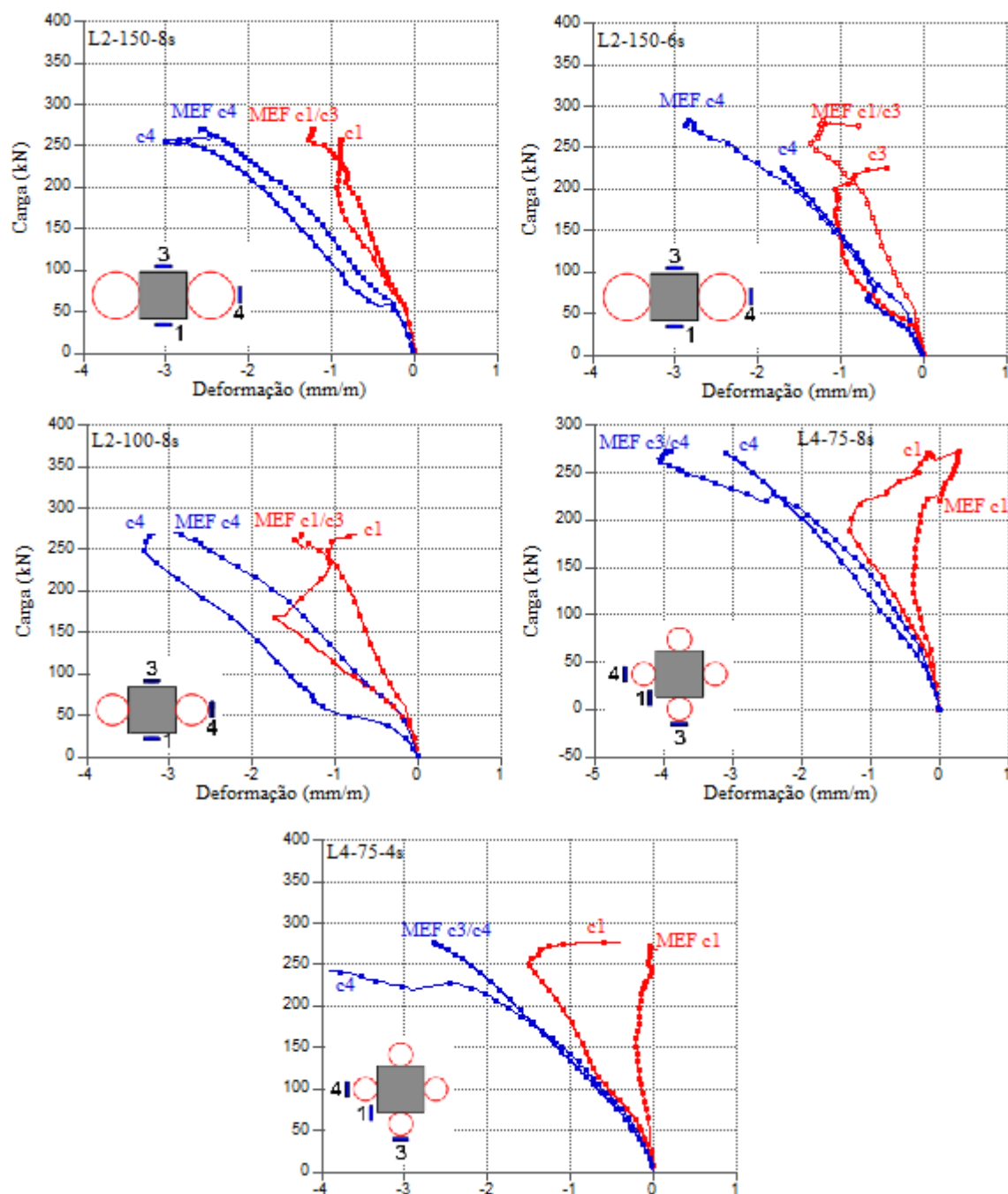


Figura 6.15 - Carga versus deformação no concreto dos modelos numéricos e experimentais (L2-150-8s, L2-150-6s, L2-100-8s, L4-75-8s e L4-75-4s).

Avaliou-se o comportamento dos *studs* nas lajes do Grupo 2, conforme a Figura 6.16. Nos modelos numéricos, o elemento de barra que representa o *stud* foi dividido em 4 segmentos, portanto os resultados de deformação são referentes aos elementos centrais, da mesma forma como foram fixados os extensômetros nos modelos experimentais.

Em geral, os resultados analisados apresentaram curvas semelhantes. Nenhum resultado ultrapassou a deformação de 2,88 mm/m (deformação de escoamento), confirmando que nos modelos numéricos os *studs* também não chegaram ao escoamento.

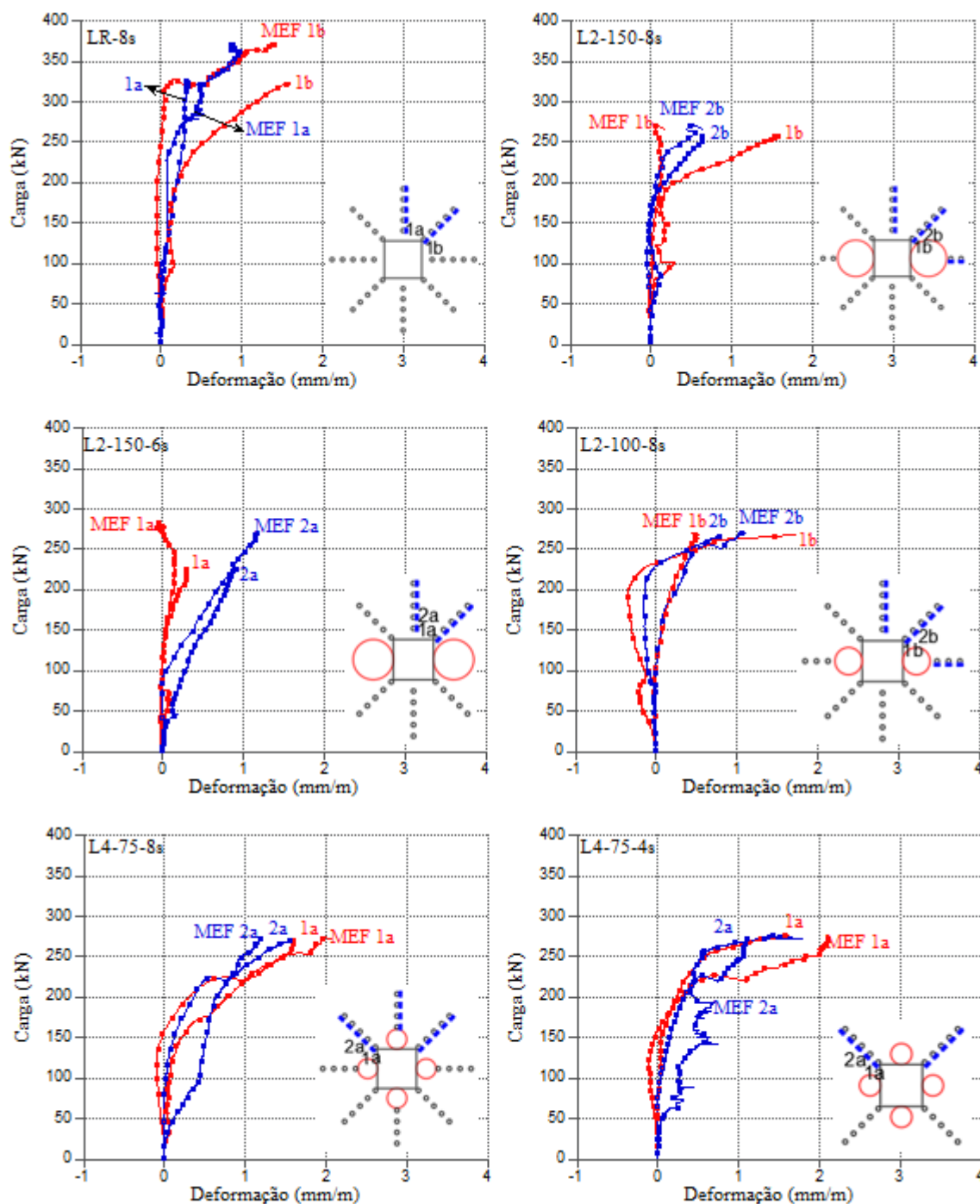


Figura 6.16 - Carga versus deformação nos *studs* dos modelos numéricos e experimentais do Grupo 2.

6.4. COMPARAÇÃO DAS CURVAS CARGA *VERSUS* ROTAÇÃO DOS RESULTADOS EXPERIMENTAL, TEÓRICO E MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Na Tabela 6.4 estão apresentados os resultados carga e rotação dos modelos experimentais, teóricos e numéricos na ruptura. A média, desvio padrão e o coeficiente de variação para cada laje em relação a carga de ruptura e ao deslocamento foram calculados. O coeficiente de variação calculado para a carga de ruptura foi de baixa dispersão com valor máximo de 10,3 % para a laje L2-150-6s. As rotações das lajes na ruptura apresentaram maiores dispersões nos resultados, 7% a 30,7 % de coeficiente de variação.

Calculou-se a rotação das lajes dos modelos experimental, teórico e numérico a cada passo de carregamento, conforme a Figura 6.17. O comportamento da rotação dos modelos com o aumento da carga de ruptura experimental, teórico (calculado conforme o Capítulo 5) e pelo método dos elementos finitos pode ser visto nas Figuras 6.18 e 6.19. As curvas carga *versus* rotação das lajes apresentaram semelhanças nos três resultados. Nas lajes LR, LR-8s, L4-75-8s e L4-75-4s o comportamento teórico aproximou-se do MEF, nos demais casos as curvas carga x rotação semelhou-se aos resultados experimentais. Em todos os casos, o resultado experimental apresentou-se mais flexível, atingindo maiores rotações para as mesmas cargas de ruptura.

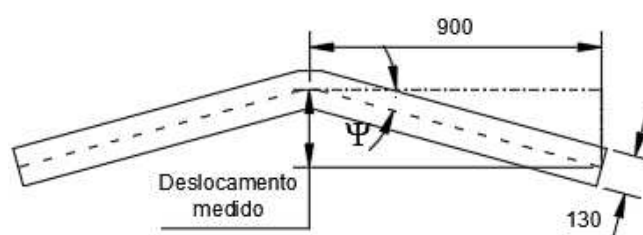


Figura 6.17 - Demonstração da rotação das lajes.

Tabela 6.4 - Carga e rotação dos modelos experimentais, teóricos e numéricos.

	LR	L2-150	L4-75	LR-8s	L2-150-8s	L2-150-6s	L2-100-8s	L4-75-8s	L4-75-4s
V_{exp} (kN)	232,2	208,4	184,0	323,0	258,5	227,3	268,0	269,6	277,0
V_{teo} (kN)	228,0	207,0	190,0	325,0	246,0	230,0	266,0	278,0	267,0
V_{MEF} (kN)	263,6	206,8	198,0	368,4	282,0	272,0	270,0	272,0	268,8
Média	241,3	207,4	190,7	338,8	262,2	243,1	268,0	273,2	270,9
Desvio Padrão	19,5	0,9	7,0	25,7	18,3	25,1	2,0	4,3	5,3
Coefficiente de Variação (%)	8,1	0,4	3,7	7,6	7,0	10,3	0,7	1,6	2,0
ψ_{exp} (10^{-4} rad)	159	152	123	335	299	246	316	249	219
ψ_{teo} (10^{-4} rad)	111	158	108	202	222	196	236	141	150
ψ_{MEF} (10^{-4} rad)	122	118	111	384	229	251	191	174	178
Média	130,7	142,7	114,0	307,0	250,0	231,0	247,7	188,0	182,3
Desvio Padrão	25,1	21,6	7,9	94,2	42,6	30,4	63,3	55,3	34,7
Coefficiente de Variação (%)	19,2	15,1	7,0	30,7	17,0	13,2	25,6	29,4	19,0

A carga de ruptura obtida pelos três procedimentos não se diferenciou mais do que 6 % nas relações V_{exp}/V_{teo} , V_{exp}/V_{MEF} , V_{teo}/V_{MEF} , a maior distinção obtida nestas relações foi na laje L2-150-6s para V_{exp}/V_{MEF} , V_{teo}/V_{MEF} . Este fato ocorreu pelo modelo numérico ter alcançado uma carga de ruptura maior, $V_{MEF} = 272,00$ kN, próxima à carga de ruptura da laje L2-150-8s, 282,00 kN.

A inclinação das curvas da laje do Grupo 1 foram próximas, a maior diferença foi na laje LR. Para uma carga de 200 kN, a rotação da laje LR foi de $127,96 \times 10^{-4}$, diferença de 36 % e 31 % para o modelo numérico e o modelo teórico, respectivamente. Entre o modelo numérico e teórico, a diferença foi de apenas 7 %.

Nas lajes do Grupo 2, não foi possível obter resultados para rotações pequenas para o modelo teórico, conforme citado no capítulo 5. Na Figura 6.18, as curvas apresentadas pelo modelo teórico aproximaram-se das curvas do modelo numérico, exceto para as lajes com duas aberturas. A curva referente ao modelo teórico da laje L2-150-8s teve início em um ponto da curva experimental, e as curvas das lajes L2-150-6s e L2-100-8s apresentaram rigidez intermediária aos resultados experimentais e numéricos.

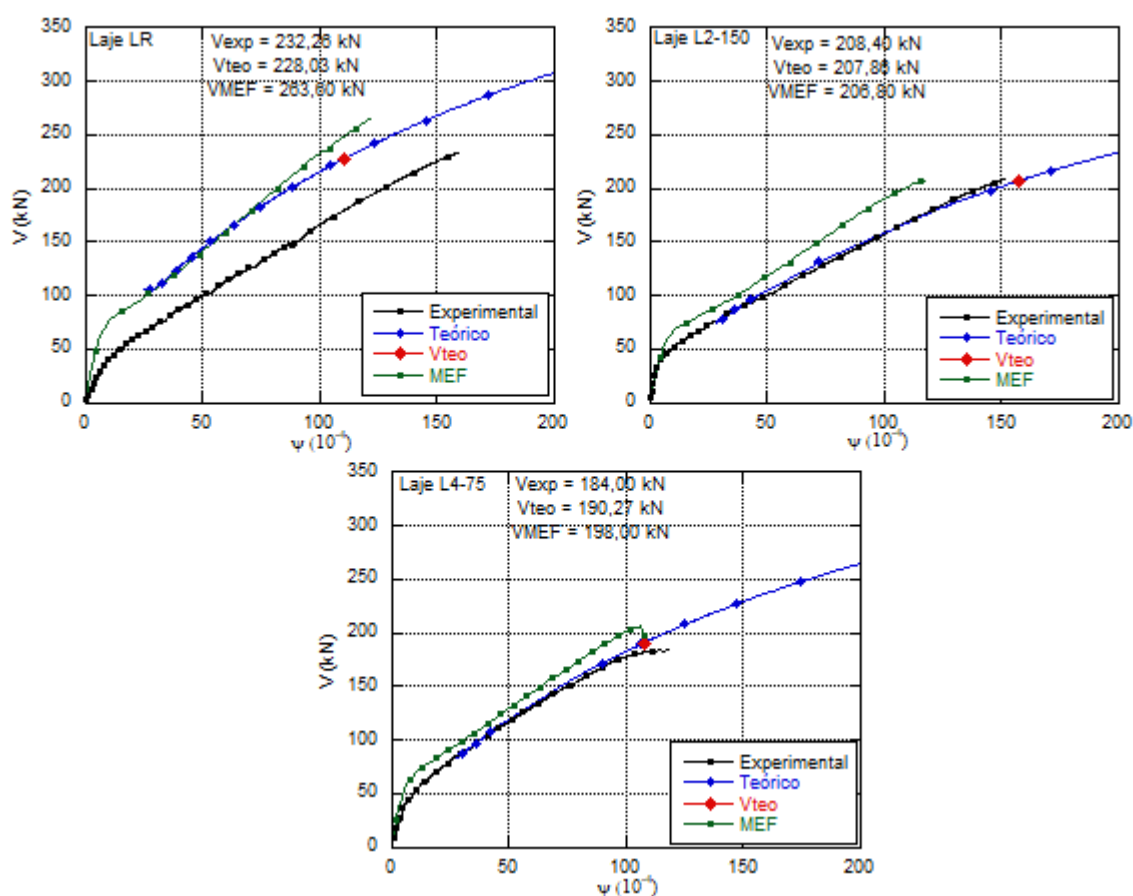


Figura 6.18- Carga *versus* rotação dos modelos experimentais, teóricos e numéricos das lajes do Grupo 1.

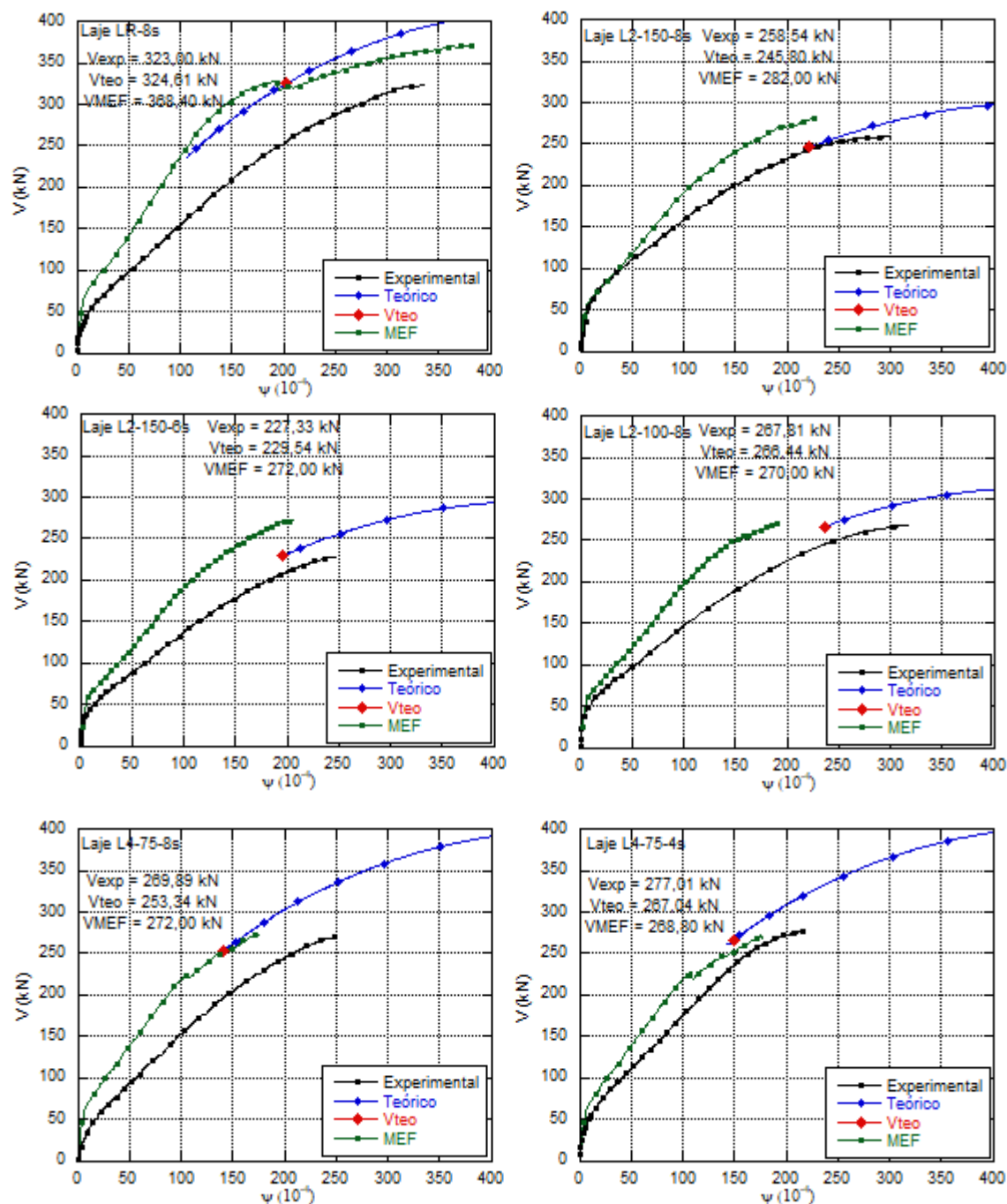


Figura 6.19 - Carga versus rotação dos modelos experimentais, teóricos e numéricos das lajes do Grupo 2.

7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O objetivo deste trabalho foi investigar experimentalmente o comportamento de lajes lisas de concreto armado, variando a quantidade e o tamanho das aberturas; e o uso de armadura de cisalhamento do tipo *stud*. A partir dos resultados experimentais, a proposta foi desenvolver um modelo teórico de cálculo da carga de ruptura de lajes lisas com abertura.

As conclusões apresentadas neste capítulo baseiam-se nos resultados dos ensaios experimentais, do modelo teórico proposto para lajes com aberturas e os resultados obtidos nas análises numéricas. Foram realizados nove ensaios em lajes lisas de concreto armado com aberturas de 75, 100 e 150 mm e utilizou-se armadura de cisalhamento em seis lajes.

7.1. CONCLUSÕES DO PROGRAMA EXPERIMENTAL

A – CARGAS E MODOS DE RUPTURA

As lajes foram divididas em dois grupos, lajes do Grupo 1 sem armadura de cisalhamento e lajes do Grupo 2, lajes com armadura de cisalhamento. As lajes do Grupo 2 apresentaram um incremento de carga com o uso dos *studs*, em 23 %, e houve o aumento da resistência à punção nas lajes com aberturas. O maior ganho de resistência foi observado na laje L4-75-4s, que chegou a 16 % a mais ao comparar com a laje sem abertura e sem armadura de cisalhamento (LR). A única laje com *studs* que não alcançou a resistência da LR foi a L2-150-6s, possivelmente pela maior área descontada referente a abertura e a não utilização de *studs* após a abertura. Lajes com duas aberturas apresentaram menor carga ao comparar com as lajes com quatro aberturas. O uso dos *studs* próximos ao pilar e das aberturas supriu a perda de resistência provocada pelas aberturas, ao comparar com a lajes do Grupo 1 com abertura em 25 %.

A posição dos *studs* influenciou na resistência à punção e no modo de ruptura das lajes lisas. O modo de ruptura das lajes com quatro aberturas foi interno e externo à armadura de cisalhamento. Os resultados obtidos nesta pesquisa indicaram que o uso de mais linhas de AC em lajes com quatro aberturas enfraqueceu a região próxima ao pilar e o modo de ruptura foi interno para a laje L4-75-8s. Com o uso de quatro linhas de AC a ruptura aconteceu externamente à última camada de armadura, provocando o aumento da resistência da laje. Para as lajes com duas aberturas, a ruptura foi externa a última camada de AC e para valores maiores

da relação entre a quantidade de armadura de cisalhamento por camada ($A_{sw}/\text{camada (mm}^2\text{)}$), a resistência à punção aumenta.

B – FISSURAS E SUPERFÍCIES DE RUPTURA

O processo de formação das fissuras na superfície superior das lajes ensaiadas foi semelhante para as lajes dos Grupos 1 e 2. As primeiras fissuras a surgirem foram as radiais e depois surgiram as fissuras circunferenciais ligando as fissuras radiais. As fissuras radiais surgiram entre 19 % e 36 % da carga de ruptura, e as fissuras circunferenciais surgiram com 23 % a 48 % da carga de ruptura. A laje L2-150 apresentou fissuras radiais predominantemente na direção perpendicular as aberturas, possivelmente a direção das aberturas ficou enfraquecida.

C – DESLOCAMENTOS VERTICAIS

Foi observado, para todas as lajes, um padrão de comportamento aproximadamente linear e simétrico em relação ao centro da laje, com os deslocamentos verticais aumentando com o acréscimo de carga. As lajes com duas aberturas e armadura de cisalhamento (L2-150-8s, L2-150-6s e L2-100-8s) alcançaram maiores deslocamentos verticais para um mesmo carregamento. O modo de ruptura e a presença de armadura de cisalhamento parecem não influenciar o padrão de deslocamento vertical da laje.

D – DEFORMAÇÕES NO CONCRETO E NAS ARMADURAS

Nenhuma das lajes ensaiadas ultrapassou a deformação no concreto de 3,5 %, que caracteriza a ruptura por esmagamento do concreto durante a flexão, limite estabelecido pela norma NBR 6118 (2014). A presença e o posicionamento das aberturas não alteraram de modo significativo o comportamento quanto à deformação das regiões instrumentadas do concreto. No ponto onde mediu-se a deformação do concreto, houve descompressão nas lajes do Grupo 2 e na laje L4-75 do Grupo 1.

Em todas as lajes ensaiadas, as barras de flexão que apresentaram maiores deformações foram as próximas ao centro de gravidade da laje e ultrapassaram o limite da deformação de escoamento. Com relação às armaduras de cisalhamento, estas não atingiram a deformação correspondente ao escoamento de 2,88 mm/m. Nas lajes com quatro aberturas, os *studs* próximos ao pilar chegaram a 80 % da deformação de escoamento próximo à carga de ruptura. As camadas mais solicitadas nas seis lajes foram as três primeiras. Os *studs* utilizados

após as aberturas não apresentaram deformações significativas, exceto a laje L4-75-8s, em que o primeiro *stud* após a abertura atingiu 50 % da deformação de escoamento.

E – CÓDIGOS E NORMAS DE PROJETO

A carga de ruptura obtida experimentalmente de todas as lajes foi comparada com os códigos ACI318 (2014), EC2 (2004), NBR 6118 (2014), *fib* Model Code (2010) e pela Teoria da Fissura Crítica. Todas as normas previram, na maioria, resultados calculados acima dos valores encontrados experimentalmente. Dentre as expressões analisadas, a que mais se aproximou dos resultados obtidos foi a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento de MUTTONI (2008).

As previsões obtidas pelo ACI 318 (2014) foram todas superiores às cargas experimentais, maior valor foi para a laje L4-75-4s, a relação carga experimental por carga teórica foi de 2,31. Em parte, estes resultados podem estar relacionados com o menor perímetro de controle, 0,5d da face do pilar ou da última camada de AC, admitido pelo código. E, também, pelo código não considerar o *size effect*, como é considerado nas demais normas. As previsões de acordo com a NBR 6118 (2014) foram mais próximas as obtidas nos resultados experimentais das lajes do Grupo 2, lajes com armadura de cisalhamento.

Os códigos apresentaram melhores resultados para as lajes sem aberturas LR e LR-8s. As sugestões para modificação no perímetro de controle em lajes com abertura e armadura de cisalhamento devem ser consideradas. Conforme apresentado no item 4.6, o perímetro efetivo 1 apresenta melhores resultados, aumenta o valor do perímetro efetivo. A maior diferença na relação V_{exp}/V_{teo} foi para a laje L4-75-8s. Para a NBR 6118 (2014) o valor obtido foi igual a 1,39 e conforme o perímetro 1 foi igual a 1,18.

O modo de ruptura para as lajes do Grupo 2 foram previstas todas externas a armadura de cisalhamento, exceto pela Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento de MUTTONI (2008), segundo o qual a ruptura prevista foi interna aos *studs*.

7.2. CONCLUSÕES DO MODELO TEÓRICO

As recomendações de projeto para cálculo da resistência à punção presentes nos códigos são geralmente baseadas em resultados experimentais realizados em elementos de placa isoladas representando o pilar, na maioria dos casos, como uma placa metálica. As principais

conclusões sobre a análise do método teórico proposto por Gomes (1991) adicionando aberturas nas lajes foram:

- O uso da armadura de cisalhamento aumentou a resistência da laje ao puncionamento e as aberturas diminuíram a resistência. Quanto maior a abertura e mais próxima do pilar estiver a abertura, menor será a resistência à punção.
- O modelo teórico proposto foi satisfatório para as lajes do trabalho e para as setenta e duas lajes analisadas de acordo com os resultados obtidos da bibliografia. No entanto, são necessários mais resultados em lajes com abertura e armadura de cisalhamento para ter uma análise mais profunda. O modo de ruptura, interno ou externo a armadura de cisalhamento foi atendida para 99,9 % das lajes.
- Armadura de cisalhamento que forem distribuídas de forma não simétricas e não circular pode não conceber bons resultados. O modelo é ideal para pilares quadrados ou circular, para pilar retangular, os resultados podem não ser satisfatórios.
- Mais testes com armadura de cisalhamento e abertura são necessários para verificar o modo de ruptura proposto no trabalho, interno e externo a armadura de cisalhamento.

7.3. CONCLUSÕES DO MODELO NUMÉRICO

Os métodos de elementos finitos não-lineares em 3D podem ser seguramente usados em simulações de lajes lisas de concreto armado para investigar o efeito da punção nesses elementos estruturais. Os resultados obtidos na análise de lajes lisas isoladas podem ser utilizados após uma calibração adequada e com a correta verificação dos parâmetros inseridos. O modelo calibrado utilizando o *software* DIANA prevê resultados satisfatórios as respostas das lajes lisas. Os resultados deste documento fornecem as seguintes conclusões:

- Com a análise paramétrica variando o fator de retenção β , confirmou que utilizando a lei de retenção variável com o fator multilinear foram obtidos melhores resultados. Os valores constantes para β sugeriram-se ruptura a flexão das lajes.
- A carga de ruptura obtida experimentalmente foi próxima aos valores obtidos pelo MEF. As curvas carga *versus* deslocamento das lajes sem armadura de cisalhamento foram mais próximas ao experimental ao comparar com as lajes com *studs*. A análise não linear apresentou resultados mais rígidos, principalmente próximo à carga de ruptura. A maior diferença foi na laje L2-100-8s, o deslocamento do MEF foi 40 % menor que o resultado experimental, para as demais lajes os resultados foram satisfatórios.

- Numericamente a fissuração das lajes do Grupo 1 foi similar ao obtido experimentalmente. O modo de ruptura das lajes com armadura de cisalhamento (Grupo 2) foi externamente à armadura de cisalhamento para todas lajes, exceto a laje L4-75-8s. Na análise não linear não foi possível representar com exatidão as fissuras dos resultados experimentais obtidos nas lajes do Grupo 2. Estudos futuros podem investigar diferentes tipos de armadura de cisalhamento para obter precisão nos modos de ruptura.

- Os códigos de projeto atuais para previsão da carga à punção de lajes lisas sugerem diferentes fórmulas e propõe diferentes arranjos para a armadura de cisalhamento. Os resultados das cargas de ruptura obtidos foram na maioria abaixo dos valores experimentais. O MEF pode ser usado após a calibração apropriada para examinar a resposta dos modelos de lajes lisas de concreto armado, posto que atingiu valores mais próximos ao experimental.

7.4. RECOMENDAÇÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A seguir serão apresentadas algumas sugestões para estudos futuros envolvendo punção em lajes lisas de concreto armado com aberturas:

- Execução de ensaios para avaliar o modo de ruptura em lajes com abertura e armadura de cisalhamento, variando a quantidade de linhas e camadas de *studs* para diferentes tamanhos e quantidades de aberturas.

- Execução de ensaios para o estudo do perímetro de controle para superfície de ruptura na região externa à armadura de cisalhamento quando a laje contém aberturas. As normas analisadas prescrevem perímetros de controle posicionados em diferentes distâncias além da última camada da armadura de cisalhamento. O estudo mais aprofundado da necessidade e do valor deste limite, e a forma de considerar a abertura é importante para subsidiar o uso da armadura de cisalhamento.

- Execução de ensaios similares a esta pesquisa e com pilares retangulares. Avaliar o índice de retangularidade dos pilares e o modo de ruptura destas lajes com aberturas e armadura de cisalhamento.

- Aprimorar os critérios de ruptura para o caso da superfície de ruptura externa à região da armadura de cisalhamento, substituindo o índice empírico de $1,35d$ para o cálculo da posição do raio da superfície de ruptura (r_1), visto que não são todas as lajes com ou sem abertura e com ou sem armadura de cisalhamento que ajustam a este índice.

- Na modelagem numérica buscar o modo de ruptura externo as armaduras de cisalhamento. Uma das possíveis formas seria alterar o modelo dos *studs*; geometria, tipo de elemento finito ou o tipo de restrições a serem aplicadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADETIFA, B., POLAK, M. A. **Retrofit of slab column interior connections using shear bolts.** ACI Structural. J., 102(2), 268–274. 2005.

American Concrete Institute. ACI 318-14. **Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (ACI 318R-11).** Farmington Hills, Michigan, 2014.

AMORIM, R. R. **Resistência à Punção em Lajes Cogumelo de Concreto Armado Análise Teórico-Computacional.** Goiânia, Abril, 2000. 152p. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia Civil - UFG, 2000.

ANDERSSON, J. A. **Punching of concrete slabs with shear reinforcement.** Stockholm, Sweden. Meddelander nr. 47 fran. Inst. för Byggnadsstatik, Kungl. Tekniska Högskolands Handligar, Nr.212, 59p., 1963.

ANDRADE, M.A.S. **Punção em Lajes Cogumelo – Estudo do Posicionamento da Armadura de Cisalhamento em Relação à Armadura de Flexão.** Goiânia, Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia Civil / UFG. 1999.

ANIL, O.; KINA, T.; SALMANI, V. Effect of opening size and location on punching shear behaviour of two-way RC slabs. Magazine of Concrete Research. 955-966. 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 5739** – Concreto – Ensaio de compressão de corpos-de-prova cilíndricos. Rio de Janeiro, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118:** Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR ISO 6892** – Materiais metálicos – Ensaio de Tração Parte 1: Método de ensaio a temperatura ambiente. Rio de Janeiro, 2015.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 7222** – Concreto e argamassa — Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos de prova cilíndricos. Rio de Janeiro, 2011.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 8522** – Concreto - Determinação do módulo estático de elasticidade à compressão. Rio de Janeiro, 2008.

BELLETTI, B; DE BOER, A; HENDRIKS, M. **Guidelines for Nonlinear Finite Element Analysis of Concrete Structures.** Rijkswaterstaat Ministry of Infrastructure and the Environment. Rijkswaterstaat Technical Document; V.2.0, 2016, 66 p.

BOMPA, D.V.; GOSAV, A. V.; KISS, Z. I.; ONET, T. **Failure assessment of flat slab-to-column members.** Magazine of Concrete Research, V. 68, N° 17, 2016. pp. 887-901.

BORGES L.L.J, MELO G.S. and GOMES R.B., **Punching shear of reinforced concrete flat plates with openings**. ACI Structural Journal, V110, No.4, July-Aug. 2013, pp1-10.

BRAESTRUP, M. W. **Axisymmetric Punching of Plain and Reinforced Concrete**. Report R75. Structural Research Laboratory. Copenhagen, Technical University of Denmark, 1976.

CARVALHO, A. L. **Análise Teórica da Resistência à Punção em Lajes Cogumelo com Armadura de Cisalhamento**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Goiás. Goiânia. 2000. 161 p.

CERVENKA, V; JENDELE, L.; CERVENKA, J. **ATENA Program Documentation - Part 1 Theory**. Prague, Czech Republic, 2012.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON, CEB - FIP. CEB – FIP Model Code Design Code 1990: Final Draft. Bulletin d'Information, CEB, Lousanne, July 1991.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990. London: Thomas Telford, 1993.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON, CEB – fib Model Code Design Code 2010: Final Draft. Bulletin d'Information, CEB, Lousanne, April 2010.

CREA – PI. Relatório Técnico Sobre o Desabamento da Obra do Shopping Rio Poty. Teresina, PI. Set. 2013.

DIANA TNO. **Diana finite element analysis user's manual release 10.1**. Delft, The Netherlands, 2017.

DILGER, W.H., and GHALI, A., **Shear Reinforcement for Concrete Slabs**, ASCE Journal of Structural Division, Proceedings, V. 107, No. ST12, Dec. 1981, pp. 2403- 2420.

ELSTNER, R.C.; HOGNESTAD, E. **Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs**. ACI Journal, Vol. 53, n° 1, Jul, 1956. pp. 29-58.

EINPAUL J., BRANTSCHEN, F., RUIZ M. F., MUTTONI A. **Performance of Punching Shear Reinforcement under Gravity Loading: Influence of Type and Detailing**. ACI Structural Journal. Vol. 113, No 4. pp. 827-838. 2016.

EUROCODE 2, **Design of Concrete Structures—Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings**, CEN, EN 1992D1, Brussels, Belgium, 2004, 225 pp.

FALL, D., SHU, J., REMPLING, R., LUNDGREN, K., ZANDI, K. **Two-way slabs: Experimental investigation of load redistributions in steel fibre reinforced concrete**. Engineering Structures. 61-74. 2014.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON – FIB. Model Code for Concrete Structures. Lausanne, Switzerland, 2010.

FEENSTRA, P. H. **Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete**. Tese (Doutorado) — TU Delft, Delft University of Technology, 1993.

FEENSTRA, P. H.; BORTS, R. Aspects of Robust Computational Modeling for Plain and Reinforced Concrete, 1993. Heron, v.38, n.4, Delft, Netherlands, p.3-76.

FELICIANO, F. M. H. **Punção em Lajes Lisas de Concreto Armado com Pilares de Borda e Excentricidade Externa.** Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-004A/11, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 149p. 2011.

fib CEB-FIP. **Shear and punching shear in RC and FRC elements.** Workshop 15-16 October 2010, Salò (Italy).

GENIKOMSOU, A. S.; POLAK, M. A. **Finite-Element Analysis of Reinforced Concrete Slabs with Punching Shear Reinforcement.** American Society of Civil Engineers. 2016.

GUANDALINI, S., and MUTTONI, A., **Symmetrical Punching Tests on Slabs without Transverse Reinforcement.** Test Report, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Switzerland, 2004, 85 pp. (in French)

GOMES, R. B. **Punching Resistance of Reinforced Concrete Flat Slabs with Shear Reinforcement.** Polytechnic of Central London, M.Phil / PhD Thesis / October, 1991, 185 p.

GOMES, R.B.; ANDRADE, M.A.S. **Resistência à Punção de Lajes Cogumelo de Concreto Armado com Furos Próximos da Coluna e Armadura de Cisalhamento.** Revista Ibracon, v. 4, n. 10, p.26-29, nov. 1994.

GOMES, R.B.; ANDRADE, M.A.S. **Punching in Reinforced Concrete Flat Slabs with Holes.** In Proceedings of Developments in Computer Aided Design and Modeling for Structural Engineering. Endinburgh-UK, 1995. P185-193.

GOMES, R. B. REGAN, P. E. **Punching Strength of slabs reinforced for shear with offcuts of rolled steel I-section beams.** Magazine of Concrete Research. 1999.

HA, T.; LEE, M.; PARK, J.; KIM, D. **Effects of openings on the punching shear strength of RC flat-plate slabs without shear reinforcement.** The Structural Design of Tall and Special Buildings. 895-911 p. 2015.

HORDIJK, D. A. Local Approach to Fracture of Concrete. PhD thesis, Doctoral Thesis. Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1991.

KINNUNEN, S.; NYLANDER, H. **Punching of Concrete Slabs without Shear Reinforcement.** Meddelande NR 38. Institutionen för Byggnadsstatik, Kungliga Tekniska Högskolan, Stockholm, 1960.

KOPPITZ, R.; KENEL, A., KELLER, T. **Punching shear of RC flat slabs – Review of analytical models for new and strengthening of existing slabs.** Engineering Structures 52, 123–130. 2013.

KRÜGER, G., BURDET, O., FAVRE, R., **Punching Strength of R.C. Flat Slabs with Moment Transfer. International Workshop on Punching Shear Capacity of RC Slabs – Proceedings**, TRITADBKN Bulletin 57, Kungliga Tekniska Högskolan, Stockholm, 2000.

LIBERATI, E. A. P. **Análise de Confiabilidade em Lajes Lisas de Concreto Armado Submetidas à Punção**. Tese de Doutorado (Em andamento). Unicamp. Campinas. 2018.

LOURENÇO, D. S. **Punção em lajes lisas de concreto armado com furo: análise experimental**. 2018. 179f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2018.

MUSSE, T. H. **Punção em lajes cogumelo: fibras de aço e armadura de cisalhamento**. 2004, 189p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2004.

MUTTONI, A. **Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs Without Transverse Reinforcement**. ACI Structural Journal, July/August 2008.

MUTTONI, A.; SCHUARTZ, J. **Behaviour of Beams and Punching in Slabs Without Shear Reinforcement**. IABESE Colloquium, Zurich, Switzerland, 1991.

NETO, B. N. M. **Comportamento à Punção de Lajes Lisas em Concreto Reforçado com Fibras de Aço sob Carregamento Simétrico**. Tese de Doutorado. UnB. Brasília. 343 p. 2013.

OLIVEIRA, D. C.; GOMES, R. B.; MELO, G. S. **Punching shear in reinforced concrete flat slabs with hole adjacent to the column and moment transfer**. RIEM. IBRACON Structures and Materials Journal. Volume 7. Number 3. 2014

OLIVEIRA, M. H., PEREIRA FILHO, M. J. M., OLIVEIRA, D. R. C., FERREIRA, M. P., MELO, G. S. S. A. **Punching resistance of internal slab-column connections with double-headed shear studs**. RIEM. IBRACON Structures and Materials Journal. Volume 6. Number 5. 2013.

OUKAILI, N. K.; SALMAN, T. S. **Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Flat Plates with Openings**. *Journal of Structural Engineering*. Volume 20, Número 1, 2014.

PARK, H., CHOI, K., **Improved Strength Model for Interior Flat Plate–Column Connections Subject to Unbalanced Moment**. ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 132, No. 5, May 2006, pp. 694D704.

PINTO, V. C. **Punção em Lajes Lisas Bidirecionais de Concreto Armado com Furos e Pilares com Secção Transversal em “L”**. Dissertação de Mestrado. Belém. 2015.

PRUIJSSERS; A, F. **Aggregate interlock and dowel action under monotonic and cyclic loading**. PhD thesis, TU Delft, Delft University of Technology. 1988.

REGAN, P. E. **Shear combs, reinforcement against punching**. London, UK. The Structural Engineer, Volume 63B, N°. 4, p.76-84, Dec, 1985.

ROTS, J. G.; NAUTA, P.; KUSTERS, G. M. A; BLAAUWENDRAAD, J. **Smeared Crack Approach and Fracture Localization in Concrete**. Heron, v.30, n.1, Delft, Netherlands, p.1-48, 1985.

ROTS, J. G.; BLAAUWENDRAAD, J. **Crack Models for Concrete: Discrete or Smeared Fixed, Multi-directional or Rotating**. Heron, v.34, n.1, Delft, Netherlands, p.1-60, 1989.

SALAKAWAY E. F. E.; POLAK, M. A.; SOLIMAN, M. H. **Reinforced concrete slab-column edge connections with shear studs**. International Workshop on Punching Shear Capacity on RC Slabs – Stockholm. 2000.

SHEHATA, I. A. E. M. **Theory of Punching in Concrete Slabs**. London, October, 1985. PhD Thesis. The Polytechnic of Central London, 1985.

SHU, J., FALL, D., PLOS, M., ZANDI, K., LUNDGREN, K. **Development of modelling strategies for two-way RC slabs**. Engineering Structures. 439-449. 2015.

SHU, J., PLOS, M., ZANDI, K., JOHANSSON, M., NILENIUS, F. **Prediction of punching behaviour of RC slabs using continuum nonlinear FE analysis** Engineering Structures. 15-25. 2016.

SILVA, J. A. **Punção em Lajes Cogumelo – Pilares Retangulares, Furos e Armadura de Cisalhamento**. Goiânia, Dissertação de Mestrado–Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás. 2003.

SILVA, J. A., MARQUES, M. G., TRAUTWEIN, L. M., GOMES, R. B., GUIMARÃES, G. N. **Punching of reinforced concrete flat slabs with holes and shear reinforcement**. Revista Escola de Minas. 407-403. 2017.

SOUZA, R. M. **Punção em Lajes Cogumelo de Concreto Armado com Furos Adjacentes ou Distante de um Pilar Interno**. Brasília. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, 2004, 171 p.

TRAUTWEIN, L. M.; Bittencourt, T. N.; Gomes, R.B. Bella, J.C.D. **Punching Strength of Flat Slabs with unbraced shear reinforcement**. ACI Structural Journal. 2011.

VECCHIO, F.J.; COLLINS M.P. **The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear**. ACI J., 83(2):219–231, 1986.

APÊNDICE A

RESULTADOS DO CONCRETO E DO AÇO

Foram realizadas duas concretagens, sendo que a primeira concretagem foi feita para as lajes do Grupo 1 e a segunda concretagem para as lajes do Grupo 2. Nas Tabelas A.1 e A.2 estão apresentados os resultados obtidos nos ensaios de compressão e de tração por compressão diametral. Nas Figuras A.1 a A.6 estão as curvas de resistências à tração e compressão, e módulo de elasticidade *versus* idade do concreto.

1) RESULTADOS DO CONCRETO

-Lajes Grupo 1

Tabela A.1 - Resultados dos ensaios de compressão e tração do concreto utilizado nas lajes do Grupo 1.

Data	Ensaio de compressão			Ensaio de tração por compressão diametral	
	P (kgf)	f_c (MPa)	f_{ckj} (MPa)	P (kgf)	f_{ctk} (MPa)
02/02/2017 7 dias	29000	36,92	34,38	8400	2,67
	25000	31,83			
09/02/2017 14 dias	29800	37,94	37,37	11000	3,50
	28900	36,80			
17/02/2017 22 dias	34000	43,29	42,97	11000	3,50
	33500	42,65			
23/02/2017 28 dias	31000	39,47	40,43	12400	3,95
	32500	41,38			
06/03/2017 39 dias	31200	39,73	39,47	12400	3,95
	30800	39,22			
17/03/2017 50 dias	34200	43,55	44,69	11200	3,57
	36000	45,84			

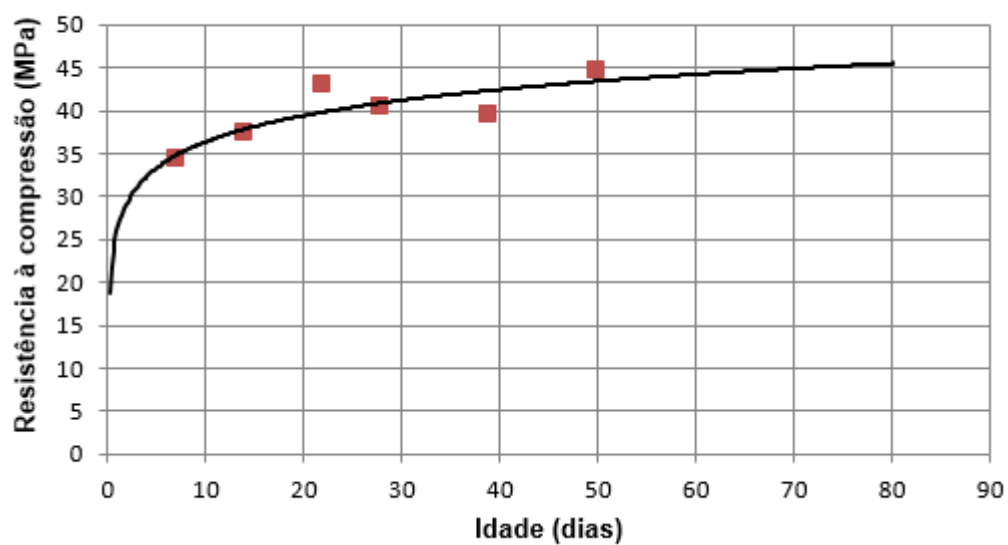


Figura A.1 - Gráfico resistência à compressão *versus* idade do concreto das lajes do Grupo 1.

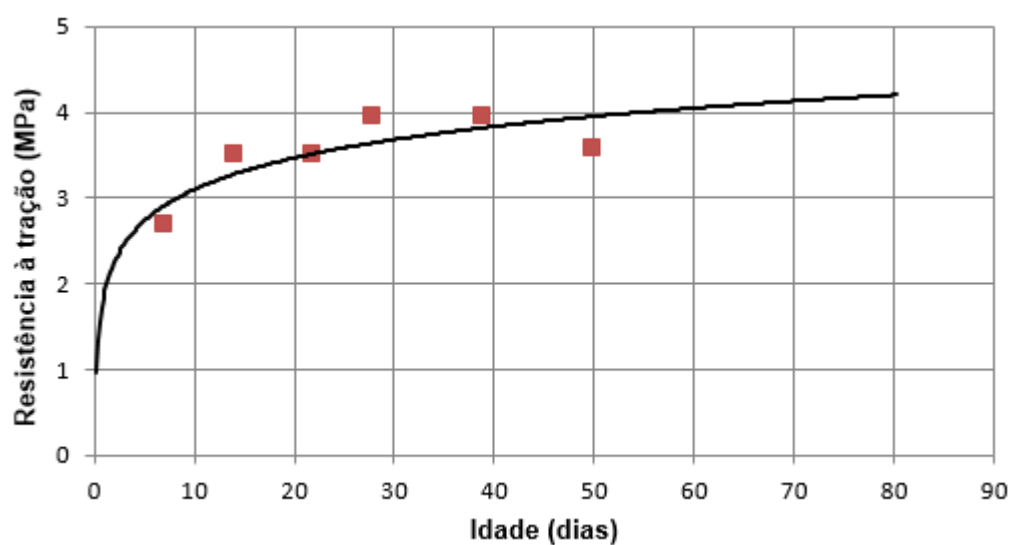


Figura A.2 - Gráfico resistência à tração *versus* idade do concreto das lajes do Grupo 1.

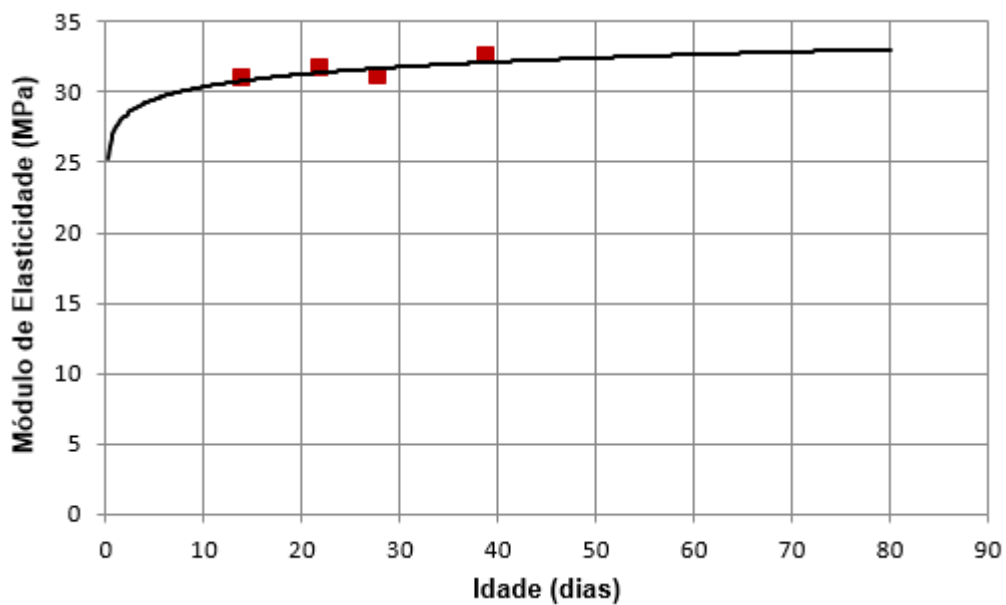


Figura A.3 - Gráfico módulo de elasticidade *versus* idade do concreto das lajes do Grupo 1.

- Lajes Grupo 2

Tabela A.2 - Resultados dos ensaios de compressão e tração do concreto utilizado nas lajes do Grupo 2.

Data	Ensaio de compressão			Ensaio de tração por compressão diametral	
	P (kgf)	f_c (MPa)	f_{ckj} (MPa)	P (kgf)	f_{ct} (MPa)
30/05/2017 7 dias	22800	29,03	28,65	11300	3,60
	22200	28,27			
06/06/2017 14 dias	26200	33,36	33,55	11800	3,76
	26500	33,74			
14/06/2017 22 dias	31500	40,11	39,60	11800	3,76
	30700	39,09			
20/06/2017 28 dias	30500	38,83	39,79	12100	3,85
	32000	40,74			
06/07/2017 44 dias	34200	43,55	42,85	13000	4,14
	33100	42,15			

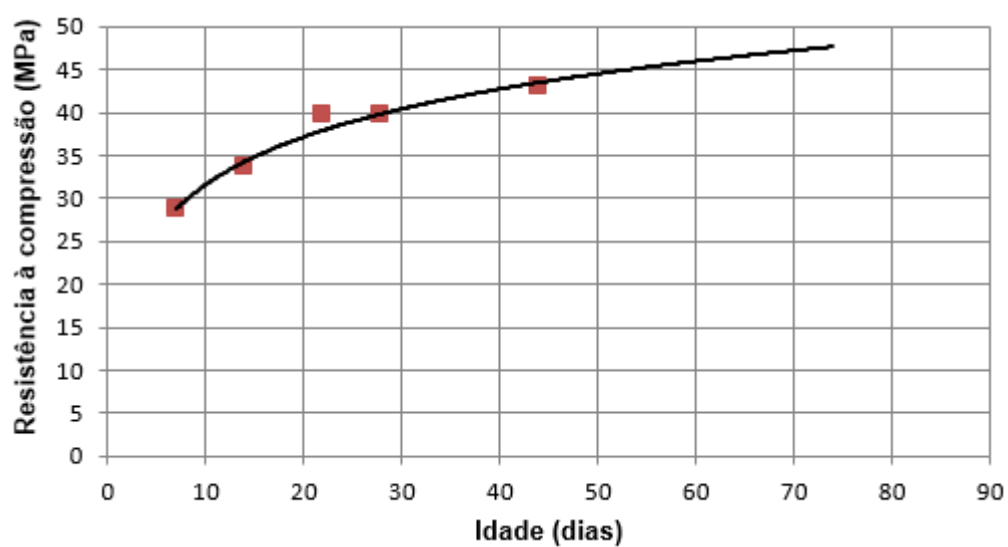


Figura A.4 - Gráfico resistência à compressão *versus* idade do concreto das lajes do Grupo 2.

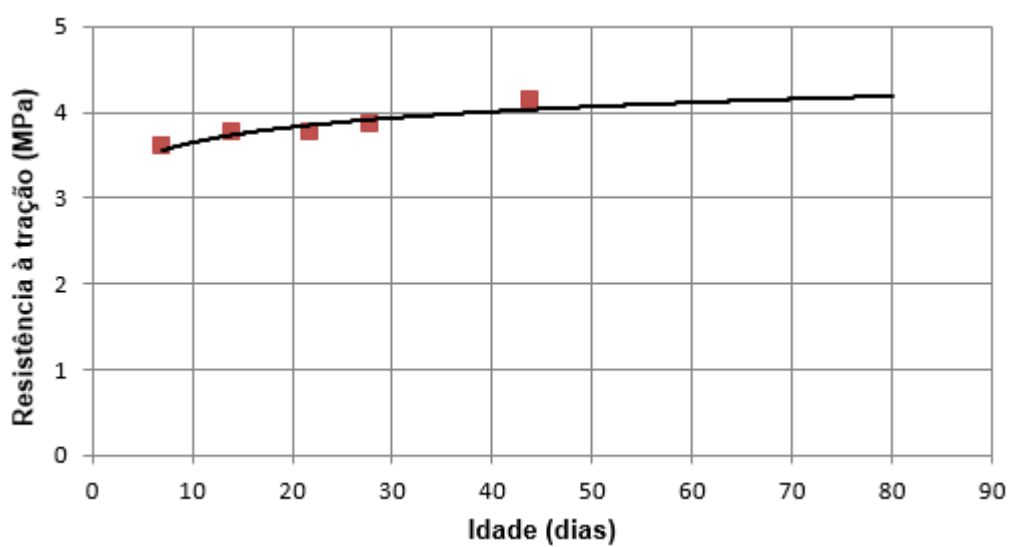


Figura A.5 - Gráfico resistência à tração *versus* idade do concreto das lajes do Grupo 2.

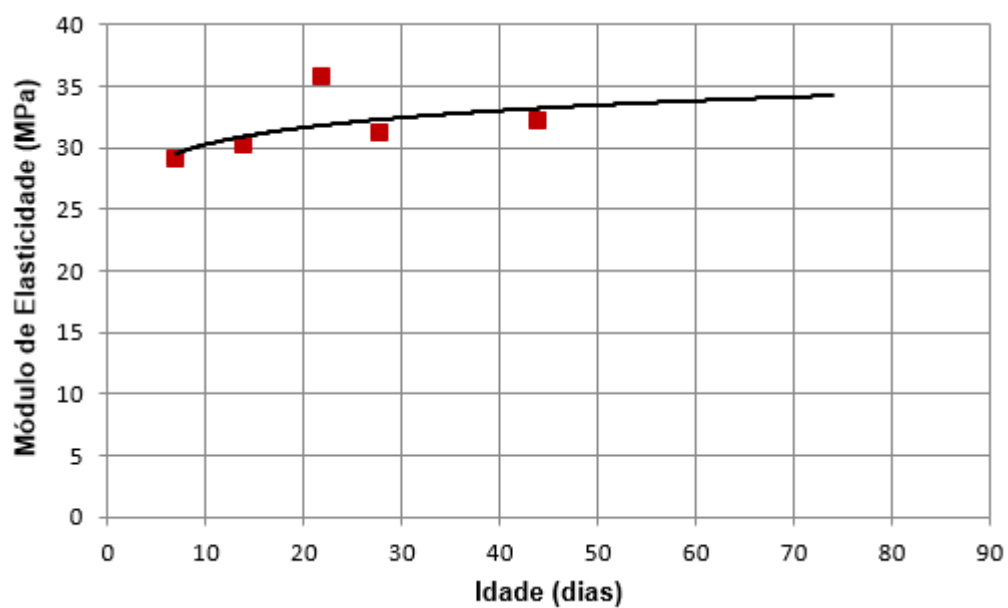


Figura A.6 - Gráfico módulo de elasticidade *versus* idade do concreto das lajes do Grupo 2.

2) RESULTADOS DO AÇO

- Lajes do Grupo 1

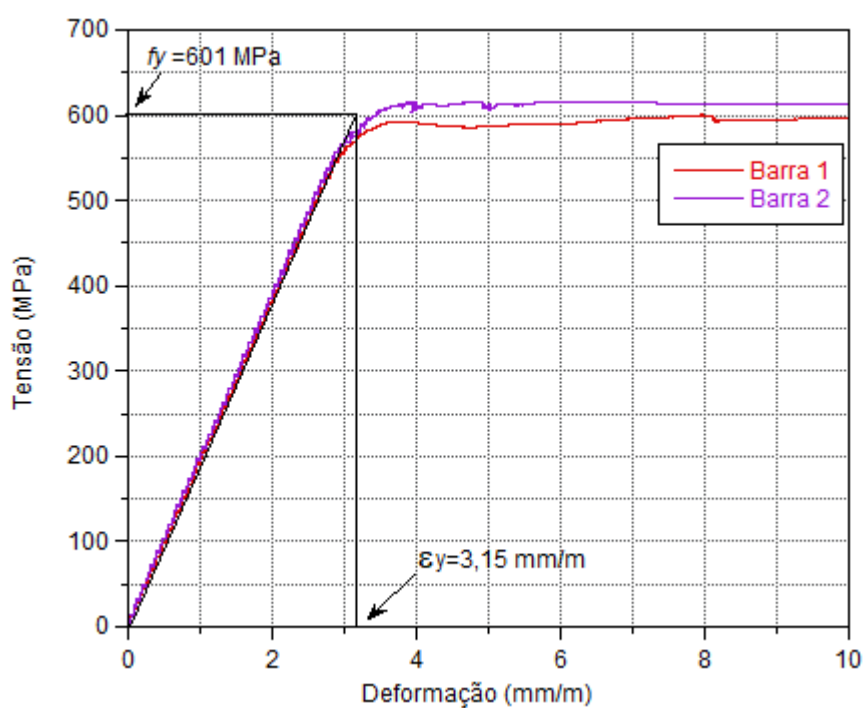


Figura A.7 - Gráfico tensão *versus* deformação do aço 6.3 mm das lajes do Grupo 1.

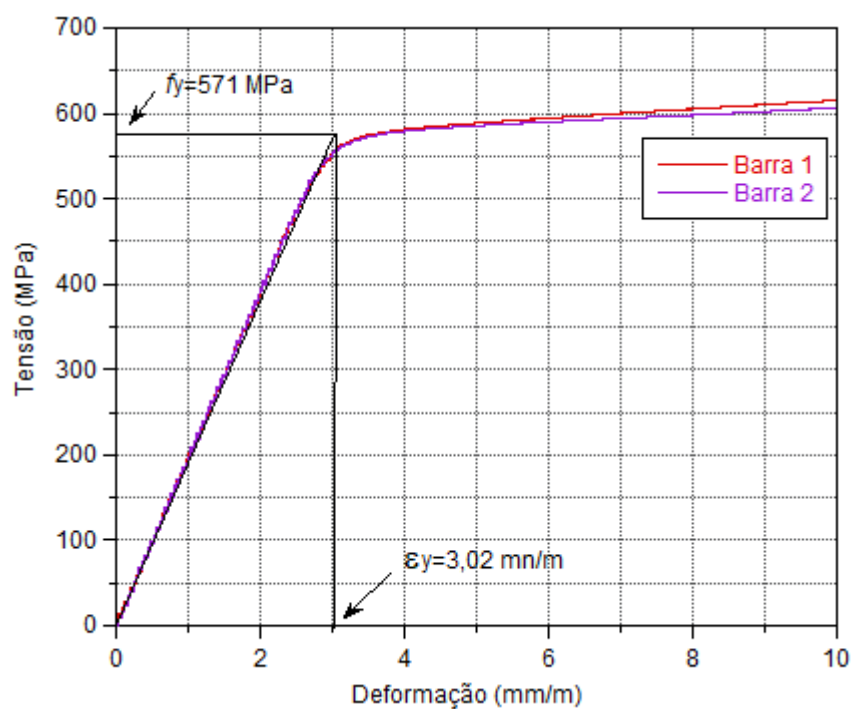


Figura A.8 - Gráfico tensão *versus* deformação do aço 12.5 mm das lajes do Grupo 1.

- Lajes do Grupo 2

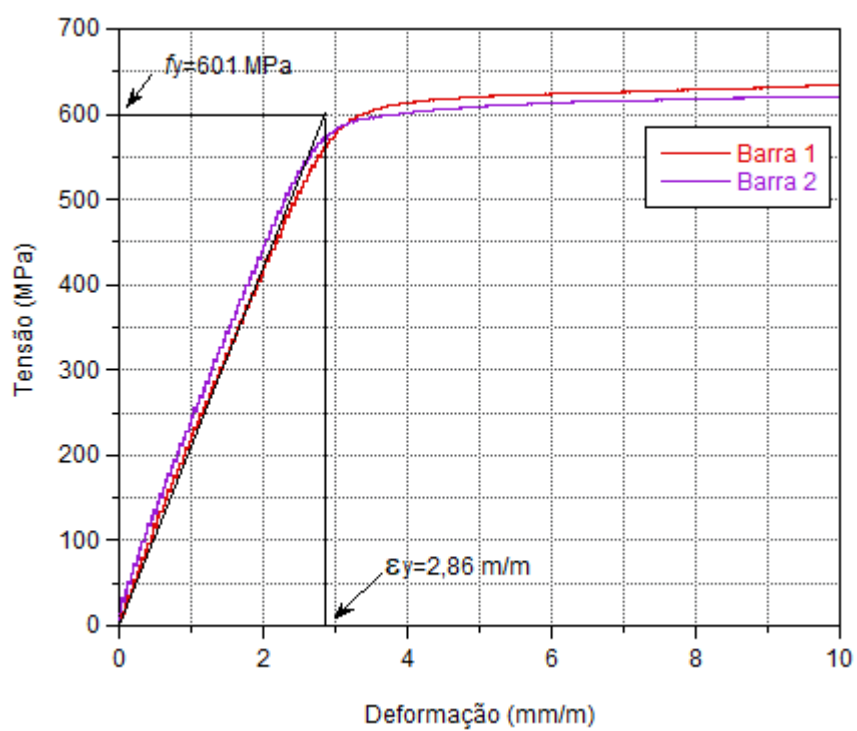


Figura A.9 - Gráfico tensão *versus* deformação do aço 6.3 mm das lajes do Grupo 2.

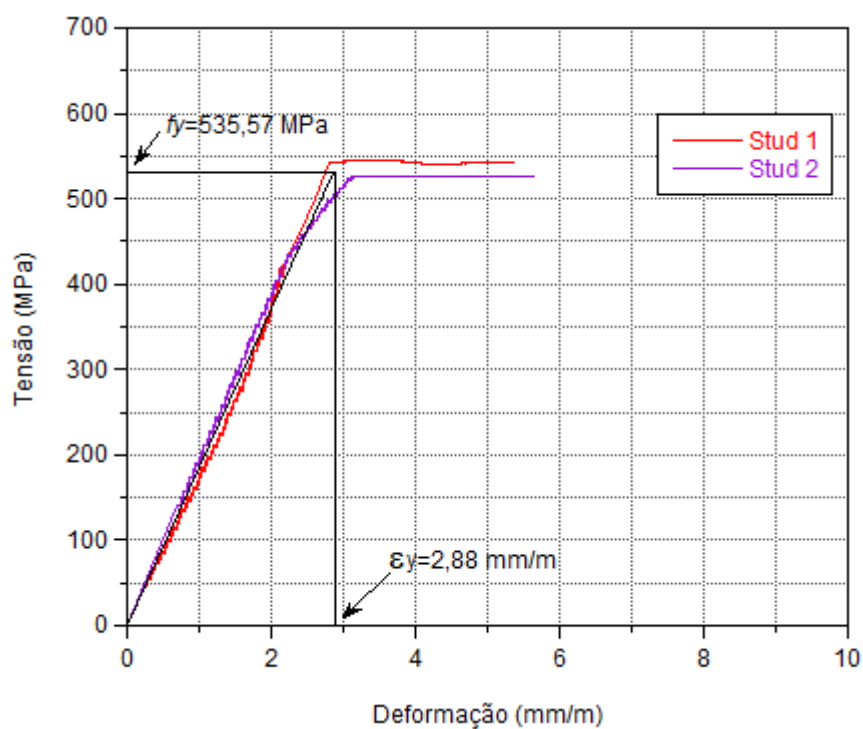


Figura A.10 - Gráfico tensão *versus* deformação do aço 8.0 mm das lajes do Grupo 2.

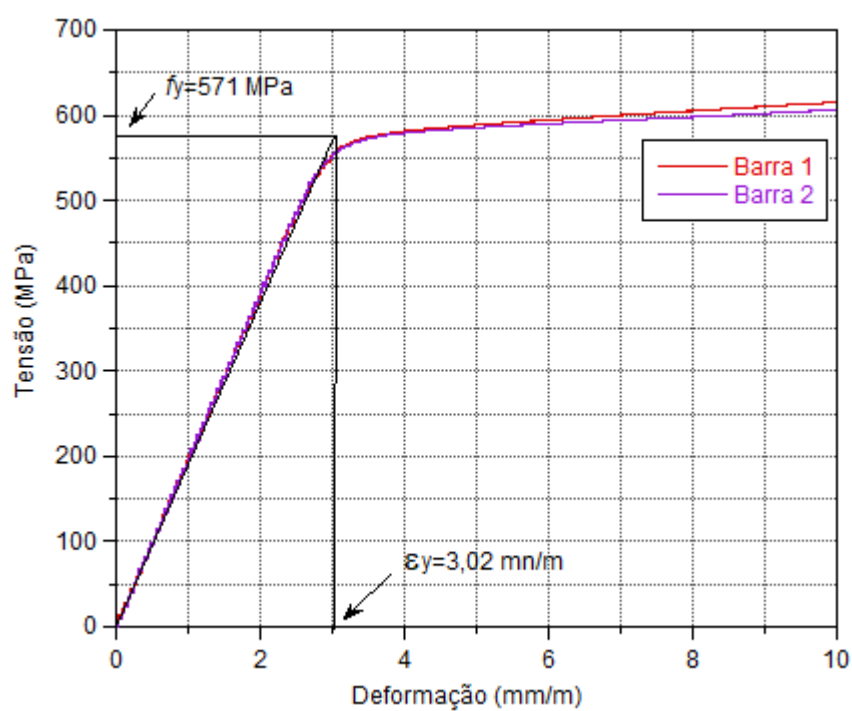


Figura A.11 - Gráfico tensão *versus* deformação do aço 12.5 mm das lajes do Grupo 2.

APÊNDICE B

CÁLCULO DA TAXA DE ARMADURA PARA AS LAJES

Devido a existência de aberturas em algumas lajes e com diferentes áreas, a armadura de flexão utilizada nas lajes apresenta detalhamentos diferenciados. De acordo com ABNT NBR6118:2014 e como sugerido por Lourenço (2018) o cálculo da taxa de armadura depende da área carregada do pilar acrescida de 3d para cada um dos lados. Os resultados do cálculo da taxa de armadura encontram-se na Tabela B.1.

1) Cálculo da taxa de armadura da laje (ρ)

Expressões da taxa de armadura em x e y de acordo com a ABNT NBR 6118 (2014):

$$\rho_x = \frac{100n_x A_{\phi=12,5}}{A_{cx}} \quad (\text{B.1})$$

$$\rho_y = \frac{100n_y A_{\phi=12,5}}{A_{cy}} \quad (\text{B.2})$$

Onde:

n_x : número de barras que cortam o eixo x , internas ao comprimento do pilar (150 mm) mais 3d para cada lado. No caso das lajes com abertura, as barras cortadas foram desconsideradas.

n_y : número de barras que cortam o eixo y , internas ao comprimento do pilar (150 mm) mais 3d para cada lado. No caso das lajes com abertura, as barras cortadas foram desconsideradas.

$A_{\phi=12,5}$: Área da seção transversal da barra para $\phi = 12,5mm$.

$$A_{\phi=12,5} = \pi(12,5)^2 / 4 = 122,7mm^2$$

A_{cx} : Área de concreto no eixo x , calculada pela multiplicação da altura útil no eixo “ x ” (d_x) pela largura do pilar (150 mm) mais 3d de cada lado.

A_{cy} : Área de concreto no eixo y , calculada pela multiplicação da altura útil no eixo “ y ” (d_y) pela largura do pilar (150 mm) mais 3d de cada lado.

Expressão da taxa da armadura:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \rho_y}$$

B.3

Tabela B.0.1 - Cálculo da taxa de armadura das lajes

Laje	n_x	n_y	$d_{efetivo}^{(1)}$ (mm)	$d_x^{(2)}$ (mm)	$d_y^{(3)}$ (mm)	A_{cx} (mm ²)	A_{cy} (mm ²)	ρ_x (%)	ρ_y (%)	ρ (%)
LR	8	8	90	96	84	66413	57788	1,48	1,70	1,58
L2-150	6	6	93	97	85	67686	58986	1,09	1,25	1,17
L4-75	6	8	91	99	87	70269	61419	1,05	1,60	1,29
LR-8s	8	8	90	96	84	66413	57788	1,48	1,70	1,58
L2-150-8s	6	6	90	96	84	66413	57788	1,11	1,27	1,19
L2-150-6s	6	6	90	96	84	66413	57788	1,11	1,27	1,19
L2-100-8s	6	6	90	96	84	66413	57788	1,11	1,27	1,19
L4-75-8s	8	8	90	96	84	66413	57788	1,48	1,70	1,58
L4-75-4s	8	8	90	96	84	66413	57788	1,48	1,70	1,58

(1) Valores obtidos experimentalmente;

(2) $d_x = d + \phi/2$;(3) $d_y = d - \phi/2$.

APÊNDICE C

CÁLCULO DA RESISTÊNCIA À FLEXÃO DAS LAJES

Na Figura C.1 estão apresentadas as divisões dos segmentos de cada laje para o cálculo da resistência à flexão das lajes. Para o cálculo a flexão, baseou-se no trabalho de Bompa *et al.* (2016), o qual calculou a flexão como sugeriu Elstner and Hognestad (1956) e, também, pelo modelo teórico proposto por Muttoni (2008). O modelo de cálculo fundamenta-se na divisão da laje em segmentos de acordo com a linha de ruptura de cada laje. Na laje L2-150 que possui duas aberturas de 150 mm, foi desconsiderada parte da laje após a abertura que não resiste à flexão, por não apresentar fissuras de flexão na laje pós ruptura.

Este método prevê que a plastificação se dará em algumas regiões definidas por linhas. O momento fletor atuante no segmento é o momento último resistente da seção, e o carregamento último é determinado usando o princípio do trabalho virtual ou as equações de equilíbrio.

Desta forma, aplicou-se um deslocamento virtual unitário igual a um no pilar e foi considerado o deslocamento nos apoios igual a zero. O cálculo da resistência à flexão foi determinado de acordo com o princípio dos trabalhos virtuais, onde o trabalho produzido externamente é igual ao trabalho produzido internamente na laje, como pode ser visto nas Equações C.1 a C.3. Na Tabela C.1 está apresentado os valores das cargas de ruptura à flexão como sugerido por Elstner and Hognestad (1956).

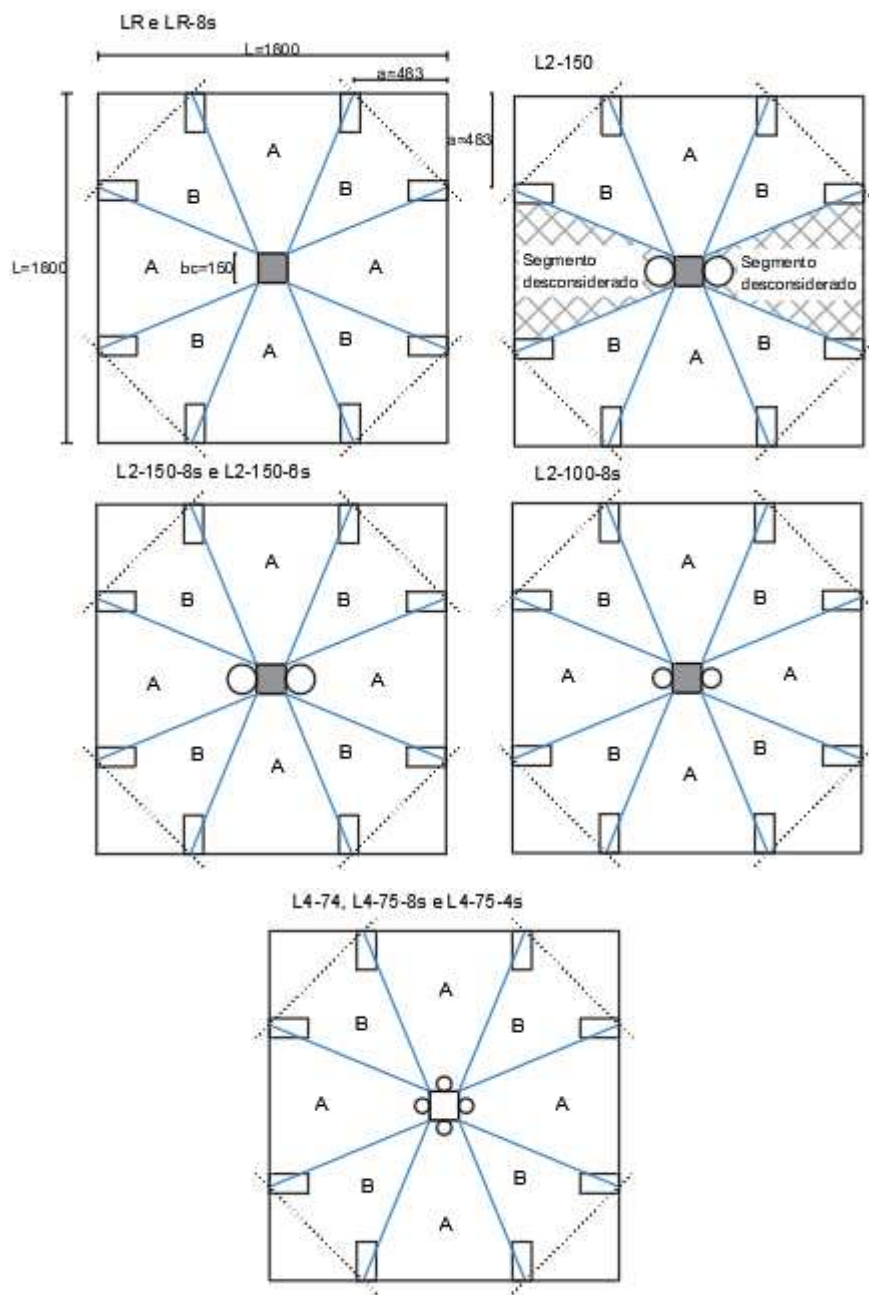


Figura C.1 - Definição dos segmentos das lajes para o cálculo a flexão.

Deslocamento unitário aplicado no pilar e cálculo do princípio dos trabalhos virtuais:

$$\theta = \frac{\delta}{L_1} \quad (C.1)$$

onde:

θ : rotação do segmento da laje;

δ : deslocamento unitário;

L_1 : distância da face do pilar até o lado apoiado da laje.

$$\begin{aligned} W_{ext.} &= W_{int.} \\ V_{flexão} \delta &= \sum m_u l \theta \\ V_{flexão} &= \sum m_u l \frac{\delta}{L_1} \end{aligned} \quad (C.2)$$

sendo:

l : dimensão do lado apoiado do segmento de laje;

m_u : momento radial definido por:

$$m_u = \rho f_y d^2 \left(1 - \left(0,59 \rho \left(\frac{f_y}{f_c} \right) \right) \right) \quad (C.3)$$

dado que:

ρ : taxa de armadura;

f_y : tensão de escoamento da armadura de flexão;

f_c : resistência a compressão do concreto;

d : altura útil da laje.

Laje	f_c (MPa)	f_y (MPa)	d (mm)	Segmento	Quantidade	L (cm)	bc (cm)	ρ (%)	μ (kNm/m)	V_{flex} (kN)
LR	39,8	583,0	90	A	4	180	15	1,58	64,4	473,8
				B	4					
L2-150	41,1	583,0	91	A	4	180	15	1,17	51,0	272,0
				B	2					
L4-75	40,0	583,0	93	A	4	180	15	1,29	57,8	425,3
				B	4					
LR-8s	40,2	571,0	90	A	4	180	15	1,58	63,4	466,3
				B	4					
L2-150-8s	38,0	571,0	90	A	4	180	15	1,19	49,2	362,1
				B	4					
L2-150-6s	37,6	571,0	90	A	4	180	15	1,19	49,2	361,6
				B	4					
L2-100-8s	40,4	571,0	90	A	4	180	15	1,19	49,6	364,6
				B	4					
L4-75-8s	40,7	571,0	90	A	4	180	15	1,58	63,5	467,2
				B	4					
L4-75-4s	42,3	571,0	90	A	4	180	15	1,58	63,9	469,8
				B	4					

Tabela C.1 - Cargas de ruptura por flexão.

APÊNDICE D

DEMONSTRAÇÃO DAS FORÇAS NO SEGUIMENTO θ

Para determinar o efeito que a abertura faz nas forças radial e tangencial do concreto e do aço, delimitou-se por tangentes a abertura. Estas iniciam no centro do pilar, como indicado nos códigos. As forças F_{sth} e F_{cth} são forças atuantes no intervalo de b_1 até b_2 , como apresentado nas Figuras D.1. Onde b_1 é a distância do centro do pilar à face mais próxima da abertura e b_2 é definido como a distância entre as faces da abertura.

O valor de θ depende da geometria da abertura. Com a finalidade de determinar corretamente o efeito da abertura nas lajes lisas, é apresentada na Figura D.1 a obtenção do ângulo citado para as aberturas circulares e retangulares. O ângulo θ é constituído pelas retas que iniciam no centro do pilar e vão até o limite circular formado pela laje. Quando a abertura na laje é retangular, o ponto de interseção na abertura é o ponto médio da face do retângulo, se a abertura for circular, é necessário encontrar o correto valor de θ onde a área descontada no cálculo seja igual a área real da abertura. Conforme a Figura D.2, é possível encontrar o ponto de interseção de acordo com as Equações D.1 e D.2, que são baseadas em semelhança de áreas. Desta forma, desconsidera-se na resistência à punção apenas a região da abertura.

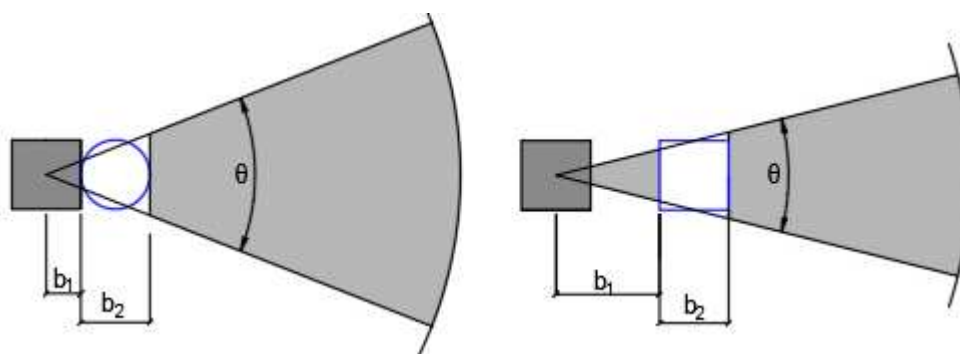


Figura D.1 - Delimitação do ângulo θ . a) Abertura circular e adjacente b) Abertura quadrado e não adjacente.

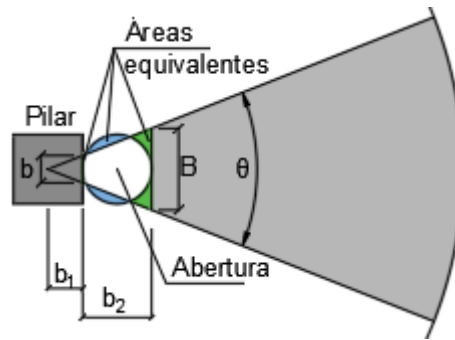


Figura D.2 - Demonstração dos novos valores de θ_1 e θ_2 .

$$B = b \left(\frac{r_0 + D_{furo}}{r_0} \right) \quad (\text{D.1})$$

$$B + b = b \left(\frac{\pi D_{furo}}{2} \right) \quad (\text{D.2})$$

Onde:

b : base menor do trapézio;

B : base maior do trapézio;

D_{furo} : diâmetro do furo.

APÊNDICE E

ANÁLISE DO COEFICIENTE γ_P

O coeficiente γ_P foi definido após investigar lajes de concreto armado com aberturas e armadura de cisalhamento. Observou-se que adotar $\gamma_P = 1,0$ para lajes com abertura não representou o que aconteceu no ensaio experimental. Para obter a carga de ruptura e modo de ruptura semelhante ao experimental, investigou-se o coeficiente γ_P para valores iguais a 0,45, 0,5, 0,55, 0,6, 0,65, 0,7, 0,75, 0,8, 0,85, 0,9, 0,95 e 1,0. Foram analisadas 54 lajes com aberturas, destas 45 são lajes sem armadura de cisalhamento e 13 lajes com armadura de cisalhamento.

Na Tabela E.1 estão apresentados os resultados convergidos para todas as lajes com aberturas. Consideraram-se lajes convergidas as lajes que conseguiram alcançar a ruptura. Lajes que atingiram a rotação de 1 rad e não atingiram a ruptura, foram consideradas lajes não convergidas. Para as lajes testadas neste trabalho, a rotação máxima considerada pelo programa PunCalc seria para um deslocamento máximo de 900 mm.

Para coeficientes maiores, acima de 0,6, o número de lajes convergidas diminui. Para valor de γ_P igual a 1,0, 56 % das lajes apresentaram resultado, o restante das lajes não atingiu a ruptura. Calculou-se o desvio padrão da relação V_{exp}/V_{teo} e para todos os valores de γ_P o desvio padrão ficou entre 0,22 a 0,26.

Tabela E.1 – Resultados obtidos para lajes com aberturas

γ_P	Lajes com resultados convergidos (%)	V_{exp}/V_{teo}	Desvio Padrão	Coeficiente de Variação (%)
0,45	93	1,21	0,25	20,7
0,50	94	1,20	0,25	20,8
0,55	98	1,17	0,24	20,5
0,60	100	1,13	0,24	21,2
0,65	93	1,08	0,26	24,1
0,70	95	1,05	0,27	25,7
0,75	89	1,04	0,24	23,1
0,80	83	1,01	0,22	21,2
0,85	80	1,02	0,24	23,5
0,90	70	1,02	0,26	25,5
0,95	67	1,04	0,26	25,0
1,00	56	1,12	0,25	22,3

Na Tabela E.2 separaram-se os resultados V_{exp}/V_{teo} das lajes sem armadura de cisalhamento e com armadura de cisalhamento. Estão apresentados também os resultados onde o modo de ruptura experimental foi igual ao modo de ruptura teórico, obtido no programa PunCalc. Para as lajes sem armadura de cisalhamento, a relação V_{exp}/V_{teo} ficou mais próxima de 1 para γ_P igual a 0,75, em um total de 39 lajes analisadas, as demais não convergiram. O melhor resultado para lajes com armadura de cisalhamento foi para γ_P igual a 0,8. Entretanto, o modo de ruptura experimental foi igual ao modo de ruptura teórico somente em 30,8 % das lajes analisadas para γ_P igual a 0,8.

Tabela E.2 – Carga experimental e carga teórica para lajes com armadura e sem armadura

γ_P	Lajes sem armadura e resultados convergidos	V_{exp}/V_{teo} sem AC	Lajes com armadura e resultados convergidos	V_{exp}/V_{teo} com AC	MR iguais para lajes com AC (%)
0,45	37	1,17	13	1,40	69,2
0,50	38	1,14	13	1,38	69,2
0,55	40	1,16	13	1,35	69,2
0,60	41	1,12	13	1,30	92,3
0,65	39	1,06	11	1,28	53,8
0,70	40	1,05	11	1,26	46,2
0,75	39	1,04	9	1,11	46,2
0,80	37	0,89	8	1,08	30,8
0,85	37	0,89	5	1,21	30,8
0,90	34	0,97	5	1,21	30,8
0,95	37	0,91	4	1,34	30,8
1,0	26	0,91	4	1,45	0,0

AC: Armadura de Cisalhamento;

MR: Modo de Ruptura.

Na investigação de lajes somente com armadura de cisalhamento, a Tabela E.3 traz resultados separados para lajes com ruptura interna e ruptura externa obtidos experimentalmente. E para estes resultados o valor de γ_P igual 0,8, a relação V_{exp}/V_{teo} foi mais próximo de 1,0, tanto para as lajes com ruptura interna como para as lajes com ruptura externa, embora tenha analisado 8 lajes em um total de 13 lajes.

Tabela E.3 – Resultados carga experimental e teórica para lajes com abertura e armadura de cisalhamento

γ_P	Lajes com armadura e resultados convergidos	$V_{\text{exp}}/V_{\text{teo}}$ ruptura interna	$V_{\text{exp}}/V_{\text{teo}}$ ruptura externa
0,45	13	1,63	1,30
0,50	13	1,63	1,26
0,55	13	1,65	1,22
0,60	13	1,63	1,16
0,65	11	1,63	1,08
0,70	11	1,61	1,06
0,75	9	1,38	1,04
0,80	8	1,25	1,03
0,85	5	1,33	1,13
0,90	5	1,31	1,14
0,95	4	1,28	1,40
1,0	4	1,44	1,46

Na escolha do melhor γ_P para utilizar no modelo teórico para lajes com abertura optou-se trabalhar com o $\gamma_P = 0,6$, após as seguintes conclusões:

-Optou-se por escolher apenas um coeficiente para todos os tipos de laje, lajes com armadura e sem armadura de cisalhamento;

-É o coeficiente que gera o maior número de lajes convergidas, que alcançaram a ruptura. Para valores maiores de γ_P algumas lajes não chegaram a ruptura.

-O modo de ruptura teórico foi 92% igual ao modo de ruptura experimental e em apenas uma laje o modo de ruptura experimental e teórico não foi o mesmo.

APÊNDICE F

DADOS DE ENTRADA DAS LAJES DA REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Autor	Lajes	AC	Nº de aberturas	r0 (mm)	b ₁ (mm)	b ₂ (mm)	θ (graus)	Ajustes
Gomes (1991)	L2	Sim	-	100	-	-	-	(1,4d) ⁽¹⁾
	L3	Sim	-	100	-	-	-	(1,55d) ⁽¹⁾
	L4	Sim	-	100	-	-	-	-
	L5	Sim	-	100	-	-	-	(0,8d) ⁽¹⁾
	L6	Sim	-	100	-	-	-	-
	L7	Sim	-	100	-	-	-	(1,73d) ⁽¹⁾
	L8	Sim	-	100	-	-	-	(1,39d após a 5ª camada) ⁽¹⁾
	L9	Sim	-	100	-	-	-	(1,35d após a 6ª camada) ⁽¹⁾
	L10	Sim	-	100	-	-	-	-
	L11	Sim	-	100	-	-	-	-
Gomes e Andrade (1999)	L13	Não	1	100	196,7	90	16,63	(3,6d) ⁽¹⁾
	L14	Não	1	100	166,2	151	27,50	(3,35d) ⁽¹⁾
	L15	Não	2	100	158,7	166	30,20	(2,93d) ⁽¹⁾
	L16	Sim	-	100	-	-	-	(0,7d) ⁽¹⁾ e (1/0,2d) ⁽²⁾
	L17	Sim	2	100	196,7	90	16,63	(1,5d) ⁽¹⁾
	L18	Sim	2	100	158,7	166	30,20	(2d) ⁽¹⁾
	L19	Sim	3	100	158,7	166	30,20	(2d) ⁽¹⁾
	L20	Sim	5	100	158,7	166	30,20	(0,4d após a 1ª camada) ⁽¹⁾ , (1/26d) ⁽²⁾ e (α=11)
	L21	Sim	3	100	158,7	166	30,20	(r1=0,4d após a 4ª camada) ⁽¹⁾ , (1/26d) ⁽²⁾ e (α=11)
	L22	Sim	3	100	158,7	166	30,20	(r1=1d após a 3ª camada) ⁽¹⁾ , (1/26d) ⁽²⁾ e (α=11)

(1) Valor alterando na equação do r1, conforme item 2.3.2.3; (2) rotação inicial da laje.

Tabela F.1 - Dados de entrada no programa PuncCalc das lajes de Gomes (1991) e Gomes e Andrade (1999).

Autor	Lajes	AC	Nº de aberturas	r0 (mm)	b ₁ (mm)	b ₂ (mm)	θ (graus)	Ajustes
Silva (2003)	L1	Não		75	-	-	-	(1,35d) ⁽¹⁾ e (1/0,6d) ⁽²⁾
	L2	Não	-	112,5	-	-	-	(2,6d) ⁽¹⁾ e (1/0,3d) ⁽²⁾
	L3	Não	-	225	-	-	-	(2,1d) ⁽¹⁾
	L4	Não	2	75	150	150	37	(2,6d) ⁽¹⁾ e (1/1,5d) ⁽²⁾
	L5	Não	2	112,5	150	150	37	(3,85d) ⁽¹⁾
	L6	Não	2	150	225	150	28	(3d) ⁽¹⁾ e (1/0,3d) ⁽²⁾
	L7	Sim	-	75	-	-	-	(1,35d) ⁽¹⁾ e (1/0,2d) ⁽²⁾
	L8	Sim	-	112,5	-	-	-	(1,95d) ⁽¹⁾
	L9	Sim	-	150	-	-	-	(1,5d) ⁽¹⁾ e (1/0,3d) ⁽²⁾
	L10	Sim	2	75	75	150	53	(1,5d) ⁽¹⁾
	L11	Sim	2	112,5	150	150	37	(3,1d) ⁽¹⁾
	L12	Não	-	201	-	-	-	(2,8d) ⁽¹⁾
Souza (2004)	L1	Não	-	75	-	-	-	(1,35d) ⁽¹⁾ e (1/0,6d) ⁽²⁾
	L2	Não	2	75	150	150	53	(1,35d) ⁽¹⁾ e (1/1,3d) ⁽²⁾
	L3	Não	2	75	225	150	26	(4d) ⁽¹⁾ e (1/1,5d) ⁽²⁾
	L4	Não	2	75	435	150	17	(4,4d) ⁽¹⁾
	L5	Não	2	75	75	150	90	(1,35d) ⁽¹⁾
	L6	Não	2	75	75	150	113	(1,35d) ⁽¹⁾ e (1/7,7d) ⁽²⁾
	L7	Não	2	75	225	150	49	(3,5d) ⁽¹⁾
	L8	Não	2	75	225	150	69	(4,5d) ⁽¹⁾ e (1/1,5d) ⁽²⁾

(1) Valor alterando na equação do r1, conforme item 2.3.2.3; (2) rotação inicial da laje.

Tabela F.2 - Dados de entrada no programa PuncCalc das lajes de Silva et. al. (2017) e Souza (2004).

Autor	Lajes	AC	Nº de aberturas	r0 (mm)	b ₁ (mm)	b ₂ (mm)	θ (graus)	Ajustes
Oukaili e Salman (2014)	XXX	Não	-	75	-	-	-	(2d) ⁽¹⁾
	SF0	Não	1	75	75	100	44	(1/0,3d) ⁽²⁾
	CF0	Não	1	75	75	150	53	(1/0,4d) ⁽²⁾
	LF0	Não	1	75	75	225	62	-
	CC0	Não	1	75	106	212	28	(1/0,7d) ⁽²⁾
	CF1	Não	1	75	145	150	38	(1/0,9d) ⁽²⁾
Ha et al. (2015)	C0	Não	-	150	-	-	-	(2,5d) ⁽¹⁾
	H1=V1	Não	1	150	225	150	22,2	(3,4d) ⁽¹⁾
	H2	Não	2	150	245,2	150	20,8	(3,4d) ⁽¹⁾
	H3	Não	3	150	300	150	17,9	(3d) ⁽¹⁾
					225	150	22,2	
	V2	Não	2	150	225	150	22,2	(3,36d) ⁽¹⁾
					450	150	12,8	
	V3	Não	3	150	225	150	22,2	(3,5d) ⁽¹⁾
					450	150	12,8	
					675	150	9,0	
	L3	Não	3	150	234,1	150	21,6	(2,9d) ⁽¹⁾
					349,3	150	15,8	
					234,2	150	21,6	
	HV4	Não	4	150	234,1	150	21,6	(3,5d) ⁽¹⁾
					349,3	150	15,8	

(1) Valor alterando na equação do r1, conforme item 2.3.2.3; (2) rotação inicial da laje.

Tabela F.3 - Dados de entrada no programa PunCalc das lajes de Oukaili e Salman (2014) e Ha et al. (2015).

Tabela F.4 - Dados de entrada no programa PuncCalc das lajes de Anil et al. (2014), Lourenço (2018) e Liberati (2018).

Autor	Lajes	AC	Nº de aberturas	r0 (mm)	b ₁ (mm)	b ₂ (mm)	θ (graus)	Ajustes
Anil et al. (2014)	L2	Não	1	100	100	300	62	(1,5d) ⁽¹⁾
	L3	Não	1	100	141,4	424,3	46	(1,5d) ⁽¹⁾
	L4	Não	1	100	100	500	71	(2,9d) ⁽¹⁾
	L9	Não	1	100	441,2	707,1	32	(3,3d) ⁽¹⁾ e (1/1,5d) ⁽²⁾
Lourenço (2018)	LF1	Não	-	75	75	150	44	(1/1,5d) ⁽²⁾
	LF2	Não	1	75	165	150	35	(3,3d) ⁽¹⁾ e (1/1,5d) ⁽²⁾
	LF3	Não	1	75	255	150	26	(3,3d) ⁽¹⁾ e (1/1,5d) ⁽²⁾
	LF4	Não	1	75	345	150	20	(3,3d) ⁽¹⁾ e (1/1,5d) ⁽²⁾
Liberati (2018)	LR-A	Não	-	75	-	-	-	(1,9d) ⁽¹⁾
	LR-B	Não	-	75	-	-	-	-
	LR-C	Não	-	75	-	-	-	(1,97d) ⁽¹⁾
	LF1-A	Não	1	75	75	150	43	(1,9d) ⁽¹⁾ e (1/1,5d) ⁽²⁾
	LF1-B	Não	1	75	75	150	43	(1,3d) ⁽¹⁾ e (1/1,4d) ⁽²⁾
	LF1-C	Não	1	75	75	150	43	(2,9d) ⁽¹⁾ e (1/1,6d) ⁽²⁾
	LF2-A	Não	2	75	75	150	43	(2,65d) ⁽¹⁾ e (1/1,6d) ⁽²⁾
	LF2-B	Não	2	75	75	150	43	(2,9d) ⁽¹⁾ e (1/1,6d) ⁽²⁾
	LF2-C	Não	2	75	75	150	43	(2,7d) ⁽¹⁾ e (1/1,6d) ⁽²⁾

(1) Valor alterando na equação do r1, conforme item 2.3.2.3; (2) rotação inicial da laje.

APÊNDICE G

DERIVADAS UTILIZADAS NO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON AO MODELO TEÓRICO

As derivadas das equações de equilíbrio horizontal (EH) e vertical rotacional (EVR) em relação aos parâmetros x e α podem ser determinadas por meio das Equações G.1 a G.4.

$$\frac{\partial EH}{\partial x} = \left(\frac{\partial F'_s}{\partial x} - \chi \frac{\partial F_{cr}}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial F'_{ct}}{\partial x} \right) \quad (G.1)$$

$$\frac{\partial EH}{\partial \alpha} = - \left(\frac{\partial F_{cr1}}{\partial x} \right) \quad (G.2)$$

$$\frac{\partial EVR}{\partial x} = \left[\frac{\partial F_{cr}}{\partial x} \chi \text{sen} \alpha - \frac{\left(z \frac{\partial F'_s}{\partial x} \right) - 0,45(F_{sr} + F'_{st})}{r_3 - r_0} \right] \quad (G.3)$$

$$\frac{\partial EVR}{\partial \alpha} = \frac{\partial F_{cr}}{\partial x} \chi \text{sen} \alpha + \chi f_c A_c \eta \cos \alpha \quad (G.4)$$

G.1 DERIVADA DA FORÇA F_{cr} EM RELAÇÃO A x ($\partial F_{cr}/\partial x$)

As Equações G.5 a G.11 demonstram a dedução da derivada da força radial do concreto (F_{cr}), em relação a posição da linha neutra (x).

$$F_{cr} = A_c \eta f_c \xi \cos \alpha \quad (G.5)$$

$$\frac{\partial F_{cr}}{\partial x} = \xi f_c \cos \alpha \left(\frac{\partial A_c}{\partial x} \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} A_c \right) \quad (G.6)$$

$$A_c = \frac{2\pi x}{\cos \alpha} \left(r_0 - \frac{x t g \alpha}{2} \right) \quad (G.7)$$

$$\frac{\partial A_c}{\partial x} = \frac{2\pi}{\cos\alpha} (r_0 - xt g\alpha) \quad (\text{G.8})$$

$$\eta = \frac{2r_0k + xk_1}{r_0(1,8 + 0,2k) + x(0,1k + 0,9tg\alpha)} \quad (\text{G.9})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{k_1r_0(1,8 + 0,2k) - 2r_0k(0,1k + 0,9tg\alpha)}{[r_0(1,8 + 0,2k) + x(0,1k + 0,9tg\alpha)]^2} \quad (\text{G.10})$$

$$\frac{\partial F_{cr}}{\partial x} = \xi f_c \cos\alpha \left\{ \begin{aligned} &\frac{2\pi}{\cos\alpha} (r_0 - xt g\alpha) \eta + \\ &+ \left[\frac{k_1r_0(1,8 + 0,2k) - 2r_0k(0,1k + 0,9tg\alpha)}{[r_0(1,8 + 0,2k) + x(0,1k + 0,9tg\alpha)]^2} \right] A_c \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.11})$$

Para lajes lisas com aberturas, a Equação G11 pode ser reescrita como a Equação G.12:

$$\frac{\partial F_{cr}}{\partial x} = \xi f_c \cos\alpha \left\{ \begin{aligned} &\frac{(2\pi - n_f \theta)}{\cos\alpha} (r_0 - xt g\alpha) \eta + \\ &+ \left[\frac{k_1r_0(1,8 + 0,2k) - 2r_0k(0,1k + 0,9tg\alpha)}{[r_0(1,8 + 0,2k) + x(0,1k + 0,9tg\alpha)]^2} \right] A_c \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.12})$$

G.2 DERIVADA DA FORÇA F_{cr} EM RELAÇÃO A α ($\partial F_{cr}/\partial \alpha$)

As Equações G.13 a G.23 demonstram a dedução da derivada da força radial do concreto (F_{cr}), em relação ao ângulo α .

$$\frac{\partial F_{cr}}{\partial \alpha} = \xi f_c \left(\frac{\partial A_c}{\partial \alpha} \eta + \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} A_c \right) \quad (\text{G.13})$$

Derivando a componente $\partial A_c/\partial \alpha$, tem-se:

$$\frac{\partial A_c}{\partial \alpha} = \frac{2\pi x}{\cos^2 \alpha} \left[r_0 \operatorname{sen} \alpha - \frac{x}{2 \cos \alpha} (\operatorname{sen}^2 \alpha + 1) \right] \quad (\text{G.14})$$

A partir da G.14, pode-se considerar:

$$C = 2r_0 k + x k_1 \quad (\text{G.15})$$

$$D = r_0(1,8 + 0,2k) + x(0,1k + 0,9 \operatorname{tg} \alpha) \quad (\text{G.16})$$

Onde,

$$k = 1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(25^\circ - \alpha) \quad (\text{G.17})$$

$$k_1 = \frac{2[1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(25^\circ - \alpha)]}{\cos^2 \alpha} - [1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(25^\circ - \alpha)]^2 \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{G.18})$$

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha} = 2r_0 E + \frac{2x}{\cos^3 \alpha} (\cos \alpha E + 2 \operatorname{sen} \alpha k) - \frac{k}{\cos \alpha} \left(2E \operatorname{sen} \alpha + \frac{k}{\cos \alpha} \right) \quad (\text{G.19})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha} = 0,2r_0 E + 0,1xE + \frac{0,9x}{\cos^2 \alpha} \quad (\text{G.20})$$

Sendo que,

$$E = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2(25^\circ - \alpha)} \quad (\text{G.21})$$

Portanto, a componente $\partial \eta / \partial \alpha$ pode ser expressa como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = \frac{D \left(\frac{\partial C}{\partial \alpha} \right) - C \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha} \right)}{D^2} \quad (\text{G.22})$$

Sendo assim,

$$\frac{\partial F_{cr}}{\partial \alpha} = \xi f_c \left(\frac{\partial A_c}{\partial \alpha} \eta + \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} A_c \right) \quad (\text{G.23})$$

Para lajes lisas com aberturas adjacentes ao pilar, a área de concreto (A_c) pode ser determinada por meio da Equação G.24 e a Equação G.25 apresenta a derivada em relação a α .

$$A_c = \frac{(2\pi - n_f\theta)x}{\cos\alpha} \left(r_0 - \frac{xtg\alpha}{2} \right) \quad (\text{G.24})$$

$$\frac{\partial A_c}{\partial \alpha} = \frac{(2\pi - n_f\theta)x}{\cos^2\alpha} \left[r_0 \operatorname{sen}\alpha - \frac{x}{2\cos\alpha} (\operatorname{sen}^2\alpha + 1) \right] \quad (\text{G.25})$$

G.3 DERIVADA $\xi F_{cr} \cos\alpha$ EM RELAÇÃO A α ($\partial F_{cr1}/\partial \alpha$)

$$\frac{\partial F_{cr1}}{\partial \alpha} = \frac{\partial F_{cr}}{\partial \alpha} \cos\alpha - A_c \eta f_c \xi \operatorname{sen}\alpha \quad (\text{G.26})$$

G.4 DERIVADA DA FORÇA F_{ct} EM RELAÇÃO A x ($\partial F_{ct}/\partial x$)

As Equações G.27 a G.34 demonstram as deduções das derivadas da força tangencial do concreto (F_{ct}), em relação a posição da linha neutra x , nos seis casos considerados no método teórico.

• **Caso 1:** $r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$

$$\frac{\partial F_{ct}}{\partial x} = 2\pi f_c \left\{ \frac{2xk_0\psi}{\varepsilon_{c1}} - 0,723r_0 + \frac{0,425\psi x}{\varepsilon_{c1}} \left[2\ln\left(\frac{r_3\varepsilon_{c1}}{\psi x}\right) - 1 \right] \right\} \quad (\text{G.27})$$

sendo,

$$k_0 = 0,425 + \frac{0,298 \ln\alpha_0}{(\alpha_0 - 1)} \quad (\text{G.28})$$

$$\alpha_0 = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{c1}} \quad (\text{G.29})$$

- **Caso 2:** $r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$

$$\frac{\partial F_{ct}}{\partial x} = 2\pi f_c \left\{ \begin{aligned} &\left(0,425 - \frac{0,298}{\alpha_0 - 1}\right) \left(\frac{2\psi x}{\varepsilon_{c1}} - r_0\right) + \\ &+ \frac{0,298\psi x}{(\alpha_0 - 1)\varepsilon_{c1}} \left[2\ln\left(\frac{\psi x}{r_0\varepsilon_{c1}}\right) + 1\right] \\ &+ \frac{0,425\psi x}{\varepsilon_{c1}} \left[2\ln\left(\frac{r_0\varepsilon_{c1}}{\psi x}\right) - 1\right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.30})$$

- **Caso 3:** $r_0 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{cu}}$

$$\frac{\partial F_{ct}}{\partial x} = 2\pi f_c \left\{ \begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{\alpha_0 - 1}\right) \left(\frac{0,596\psi x}{\varepsilon_{cu}} + 0,425r_3\right) + \\ &-0,723 \left(r_0 + \frac{r_3}{\alpha_0 - 1}\right) + \\ &+ \frac{0,298\psi x}{(\alpha_0 - 1)\varepsilon_{c1}} \left[2\ln\left(\frac{r_3\varepsilon_{cu}}{\psi x}\right) - 1\right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.31})$$

- **Caso 4:** $r_0 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}}$

$$\frac{\partial F_{ct}}{\partial x} = 2\pi f_c [0,723x(r_3 - r_0)] \quad (\text{G.32})$$

- **Caso 5:** $r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$

$$\frac{\partial F_{ct}}{\partial x} = 2\pi f_c \left\{ \begin{aligned} &(r_3 - r_0) \left(0,425 - \frac{0,298}{\alpha_0 - 1}\right) + \\ &+ \frac{0,298\psi}{(\alpha_0 - 1)\varepsilon_{c1}} \left[2x\ln\left(\frac{r_3}{r_0}\right)\right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.33})$$

- **Caso 6:** $r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_0 \leq r_3$

$$\frac{\partial F_{ct}}{\partial x} = 4\pi f_c x \left[0,425 \frac{\psi}{\varepsilon_{c1}} \ln \left(\frac{r_3}{r_0} \right) \right] \quad (\text{G.34})$$

G.5 DERIVADA DA FORÇA F_{cth} EM RELAÇÃO A x ($\partial F_{cth}/\partial x$)

As Equações G.35 a G.40 demonstram as deduções das derivadas da força tangencial do concreto devido as aberturas (F_{cth}), em função da posição da linha neutra x , nos casos considerados no método teórico.

• **Caso 1:** $r_0 \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$

$$r_0 \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_2 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$$

$$r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}}$$

$$\frac{\partial F_{cth}}{\partial x} = n_f \theta f_c \left\{ \begin{array}{l} 0,298 \left(\frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} \right) + 0,298 \frac{\psi x \varepsilon_{c1}}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1}) \varepsilon_{cu}} + \\ + 0,425 \left(b_2 - \frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} \right) - 0,298 \frac{\left(b_2 - \frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} \right) \varepsilon_{c1}}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} + \\ 0,723 \left(\frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} - b_1 \right) - 0,298 \left[\frac{\psi x}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \right] + \\ + 0,596 \left[\frac{\psi x}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \right] \ln \left(\frac{b_2 \varepsilon_{cu}}{\psi x} \right) + \end{array} \right\} \quad (\text{G.35})$$

• **Caso 2:** $r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$

$$r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$$

$$\frac{\partial F_{cth}}{\partial x} = n_f \theta f_c [0,723(b_2 - b_1)] \quad (\text{G.36})$$

• **Caso 3:** $r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$

$$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3$$

$$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{cl}}$$

$$\frac{\partial F_{cth}}{\partial x} = n_f \theta f_c \left\{ \begin{aligned} &0,425(b_2 - b_1) - 0,298 \left[\frac{(b_2 - b_1)\varepsilon_{c1}}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \right] + \\ &+ 0,596 \left[\frac{\psi x}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \right] \ln \left(\frac{b_2}{b_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.37})$$

• **Caso 4:** $r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_{\varepsilon_{cl}} \leq r_3$

$$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{cl}} \leq b_2 \leq r_3$$

$$r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{cl}} \leq b_2 \leq r_3$$

$$\frac{\partial F_{cth}}{\partial x} = n_f \theta f_c \left\{ \begin{aligned} &0,425 \left(\frac{\psi x}{\varepsilon_{c1}} - b_1 \right) - 0,298 \frac{\left(\frac{\psi x}{\varepsilon_{c1}} - b_1 \right) \varepsilon_{c1}}{(\varepsilon_u - \varepsilon_{c1})} + \\ &+ 0,845 \left(\frac{\psi x}{\varepsilon_{c1}} \right) \ln \left(\frac{b_2 \varepsilon_{c1}}{\psi x} \right) + \\ &0,596 \left[\frac{\psi x}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \right] \ln \left(\frac{\psi x}{b_1 \varepsilon_{c1}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.38})$$

• **Caso 5:** $r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{cl}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$

$$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq r_{\varepsilon_{cl}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$$

$$r_0 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{cl}}$$

$$r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{cl}} \leq r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$$

$$\frac{\partial F_{cth}}{\partial x} = n_f \theta f_c \left[0,85 \left(\frac{\psi x}{\varepsilon_{c1}} \right) \ln \left(\frac{b_2}{b_1} \right) \right] \quad (\text{G.39})$$

• **Caso 6:** $r_0 \leq b_1 \leq r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_{\varepsilon_{cl}} \leq b_1 \leq r_3$

$$\frac{\partial F_{cth}}{\partial x} = n_f \theta f_c \left\{ \begin{array}{l} 0,85\psi x \left(\frac{1}{\varepsilon_{c1}} - \frac{1}{\varepsilon_{cu}} \right) + 0,723 \left(\frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} \right) + \\ -0,596 \left[\frac{\psi x \varepsilon_{c1}}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \right] \left(\frac{1}{\varepsilon_{c1}} - \frac{1}{\varepsilon_{cu}} \right) + \\ 0,723 \left(\frac{\psi x}{\varepsilon_{cu}} - b_1 \right) + 0,596 \left[\frac{\psi x}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1})} \right] \ln \left(\frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{c1}} \right) + \\ + 0,85 \left(\frac{\psi x}{\varepsilon_{c1}} \right) \ln \left(\frac{b_2 \varepsilon_{c1}}{\psi x} \right) - 0,425 \left(\frac{\psi x}{\varepsilon_{c1}} \right) \end{array} \right\} \quad (\text{G.40})$$

A resultante da derivada da força tangencial do concreto (F_{ct}) em relação a posição da linha neutra x para lajes lisas com aberturas pode ser expressa pela Equação G.41.

$$\frac{\partial F'_{ct}}{\partial x} = \frac{\partial F_{ct}}{\partial x} - \frac{\partial F_{cth}}{\partial x} \quad (\text{G.41})$$

G.6 DERIVADAS DAS FORÇAS DA ARMADURA DE FLEXÃO EM RELAÇÃO A x

As Equações G.42 a G.49 demonstram as deduções das derivadas das forças da armadura de flexão (F_{sr} e F_{st}), em relação a posição da linha neutra x , nos casos considerados no método teórico.

$$F_s = F_{sr} + F_{st} \quad (\text{G.42})$$

• **Caso 1:** $r_0 \leq r_y \leq r_3$

$$F_s = 2\pi\rho\chi \frac{f_y}{100} dr_y \left[1 + \ln \left(\frac{r_3}{r_y} \right) \right] \quad (\text{G.43})$$

$$\frac{\partial F_s}{\partial x} = 2\pi\rho \frac{f_y}{100} d \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \chi}{\partial x} r_y \left[1 + \ln \left(\frac{r_3}{r_y} \right) \right] + \chi \frac{\partial r_y}{\partial x} \left[1 + \ln \left(\frac{r_3}{r_y} \right) \right] + \\ \frac{\partial \left[1 + \ln \left(\frac{r_3}{r_y} \right) \right]}{\partial x} + \chi r_y \frac{\partial \left[1 + \ln \left(\frac{r_3}{r_y} \right) \right]}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (\text{G.44})$$

Onde,

$$\frac{\partial r_y}{\partial x} = \frac{-\psi}{\varepsilon_{sy}} \quad (\text{G.45})$$

$$\chi = -0,0671 \left(\frac{r_y}{r_3}\right)^3 + 0,1669 \left(\frac{r_y}{r_3}\right)^2 + 0,0020 \left(\frac{r_y}{r_3}\right) + 0,829 \quad (\text{G.46})$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \left\{ \left[-0,2013 \left(\frac{r_y}{r_3}\right)^2 + 0,3338 \left(\frac{r_y}{r_3}\right) + 0,0020 \right] \left(\frac{-\psi}{\varepsilon_{sy}}\right) \right\} \quad (\text{G.47})$$

• **Caso 2:** $r_0 \leq r_3 \leq r_y$

$$F_s = 2\pi\rho\chi \frac{f_y}{100} dr_3 \quad (\text{G.48})$$

$$\frac{\partial F_s}{\partial x} = 2\pi\rho \frac{f_y}{100} dr_3 \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right) \quad (\text{G.49})$$

G.6 DERIVADAS DA FORÇA F_{sth} EM RELAÇÃO A x ($\partial F_{sth}/\partial x$)

As Equações G.50 a G.54 demonstram as deduções das derivadas da força tangencial da armadura de flexão (F_{sth}), em função da posição da linha neutra x , nos casos considerados no método teórico.

• **Caso 1:** $r_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq r_y \leq r_3$

$$\frac{\partial F_{sth}}{\partial x} = f_{yd} \frac{\rho}{100} dn_f \theta (b_2 - b_1) \left(\begin{array}{c} \frac{-0,002\psi}{\varepsilon_{sy}r_3} + \\ -0,3338(d-x) \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{sy}r_3}\right)^2 + \\ +0,2013(d-x)^2 \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{sy}r_3}\right)^3 \end{array} \right) \quad (\text{G.50})$$

• **Caso 2:** $r_0 \leq b_1 \leq r_y \leq b_2 \leq r_3$

$$\frac{\partial F_{sth}}{\partial x} = f_{yd} \frac{\rho}{100} dn_f \theta \left\{ \left[\left(\frac{(d-x)\psi}{\varepsilon_{sy}} - b_1 \right) + \frac{(d-x)\psi}{\varepsilon_{sy}} \ln \left(\frac{b_2 \varepsilon_{sy}}{(d-x)\psi} \right) \right] \left(\frac{-0,002\psi}{\varepsilon_{sy} r_3} + \right. \right. \\ \left. \left. -0,3338(d-x) \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{sy} r_3} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. +0,2013(d-x)^2 \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{sy} r_3} \right)^3 \right) + \right. \\ \left. + \left(0,829 + 0,002(d-x) \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{sy} r_3} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. +0,1669(d-x)^2 \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{sy} r_3} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. -0,0671(d-x)^3 \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{sy} r_3} \right)^3 \right) \left[- \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{sy}} \right) \ln \left(\frac{b_2 \varepsilon_{sy}}{(d-x)\psi} \right) \right] \right\} \quad (\text{G.51})$$

• **Caso 3:** $r_0 \leq r_y \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$

$$\frac{\partial F_{sth}}{\partial x} = f_{yd} \frac{\rho}{100} dn_f \theta \left\{ \left[\frac{(d-x)\psi}{\varepsilon_{sy}} \ln \left(\frac{b_{2,i}}{b_{1,i}} \right) \right] \left(\frac{-0,002\psi}{\varepsilon_{sy} r_3} + \right. \right. \\ \left. \left. -0,3338(d-x) \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{sy} r_3} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. +0,2013(d-x)^2 \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{sy} r_3} \right)^3 \right) + \right. \\ \left. + \left(-0,829 + 0,002(d-x) \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{sy} r_3} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. -0,1669(d-x)^2 \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{sy} r_3} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. +0,0671(d-x)^3 \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{sy} r_3} \right)^3 \right) \left[\left(\frac{\psi}{\varepsilon_{sy}} \right) \ln \left(\frac{b_2}{b_1} \right) \right] \right\} \quad (\text{G.52})$$

• **Caso 4:** $r_0 \leq r_y \leq b_1 \leq b_2 \leq r_3$

$$\frac{\partial F_{sth}}{\partial x} = f_{yd} \frac{\rho}{100} dn_f \theta (b_2 - b_1) \left(\frac{-0,002\psi}{\varepsilon_{sy} r_3} + \right. \\ \left. -0,3338(d-x) \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{sy} r_3} \right)^2 + \right. \\ \left. +0,2013(d-x)^2 \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{sy} r_3} \right)^3 \right) \quad (\text{G.53})$$

A resultante da derivada das forças da armadura de flexão ($\partial F_s'/\partial x$) pode ser expressa pela Equação G.54.

$$\frac{\partial F_s'}{\partial x} = \frac{\partial F_s}{\partial x} - \frac{\partial F_{sth}}{\partial x} \quad (\text{G.54})$$

APÊNDICE H

DETALHAMENTO DAS LAJES ENSAIADAS

Na análise numérica foi simulado apenas um quarto da laje, conforme a simetria das lajes. De acordo com as Figuras H.1 a H.3, está indicada a posição de cada armadura, dos extensômetros na armadura de flexão, as armaduras de cisalhamento que foram monitoradas as deformações e a posição dos extensômetros no concreto; e também, como foram colocados os medidores dos deslocamentos, representados pelos D1, D2, D10 e D11, sendo os demais posicionados de acordo com o item 3.6.1.

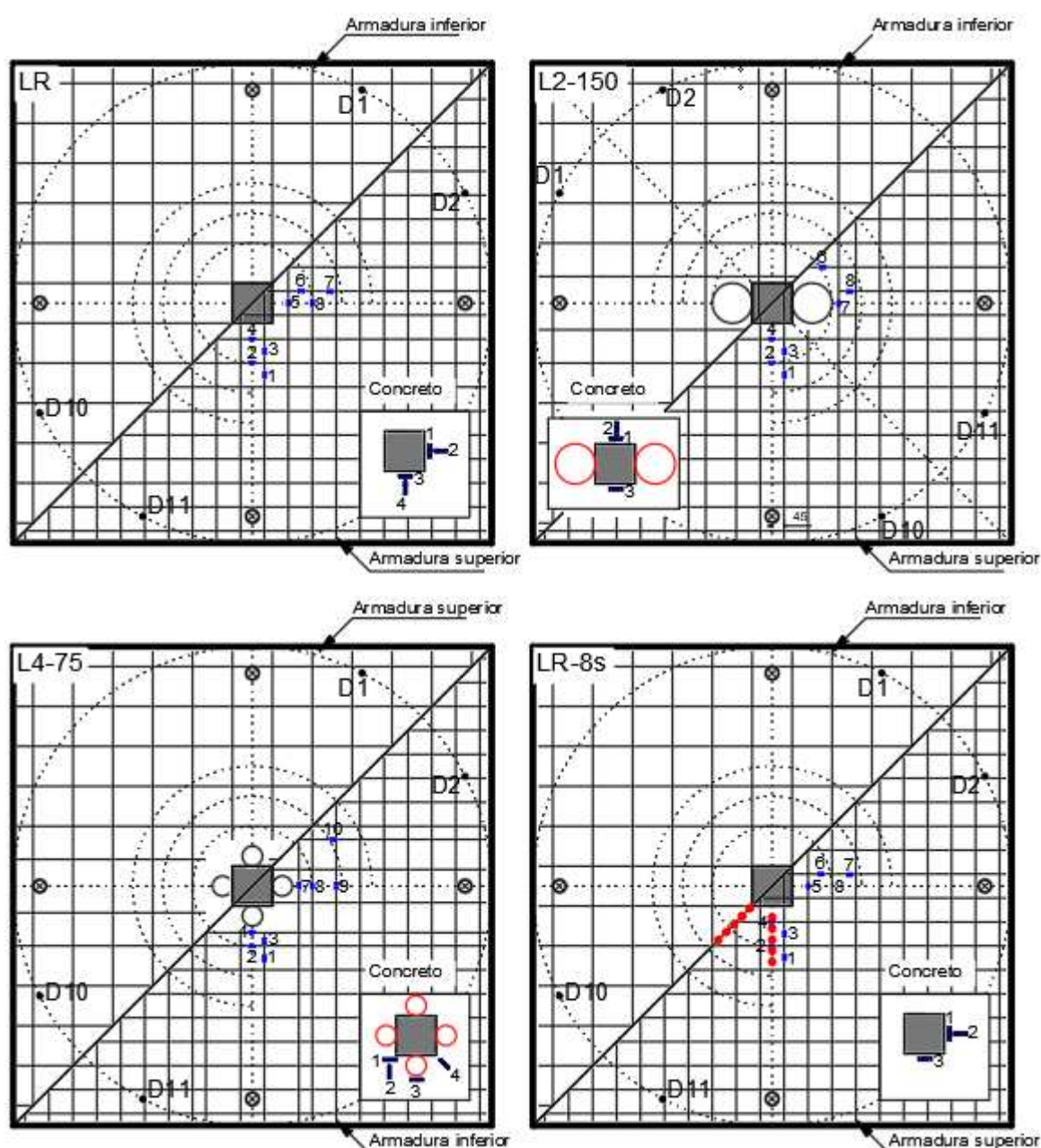


Figura H.1 - Detalhe das lajes LR, L2-150, L4-75 e LR-8s.

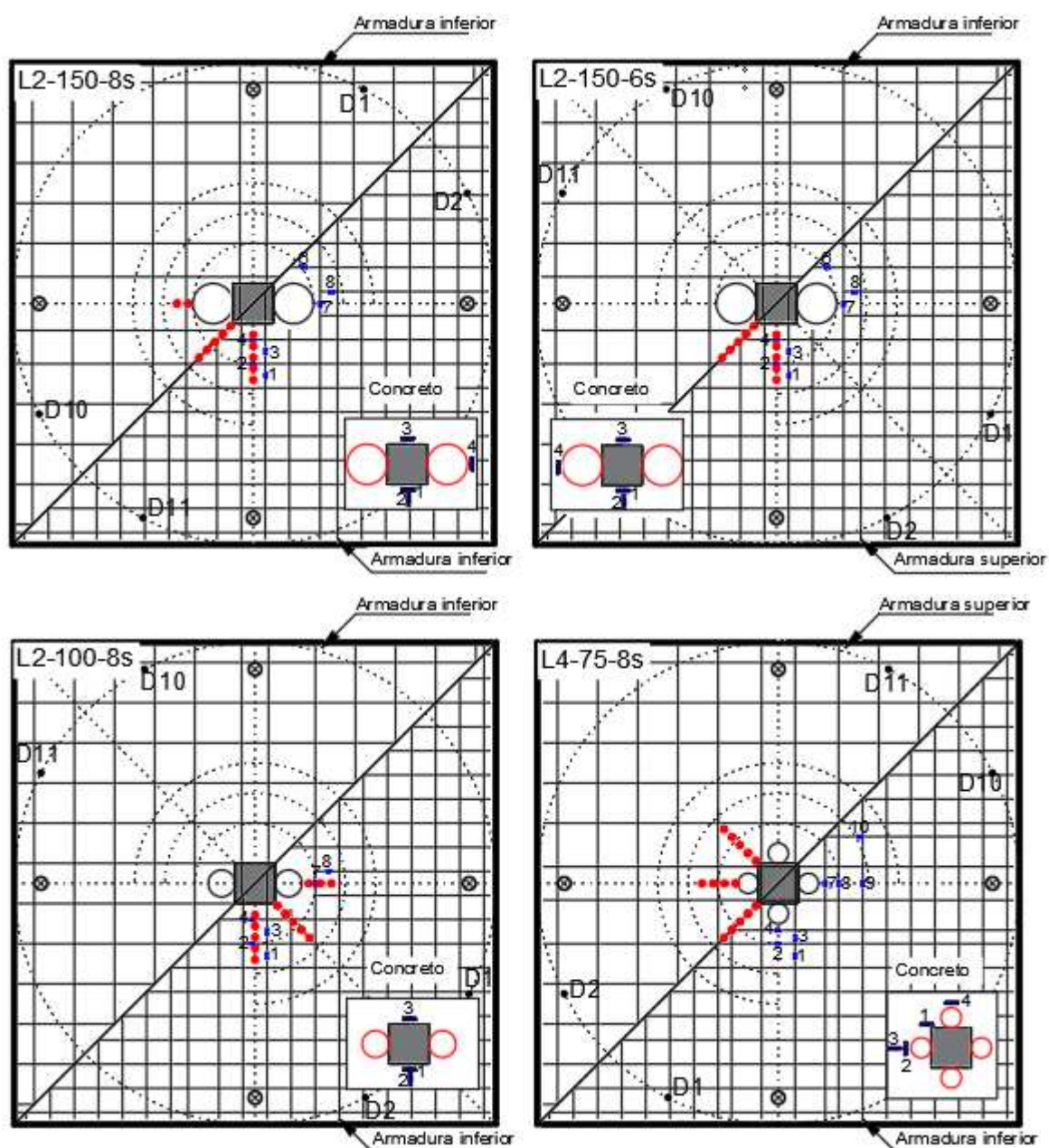


Figura H.2 - Detalhe das lajes L2-150-8s, L2-150-6s, L2-100-8s e L4-75-8s.

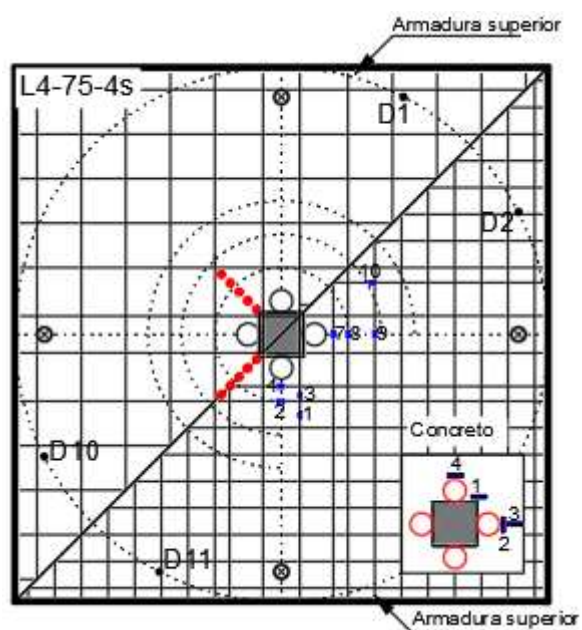


Figura H.3 - Detalhe da laje L4-75-4s.

APÊNDICE I

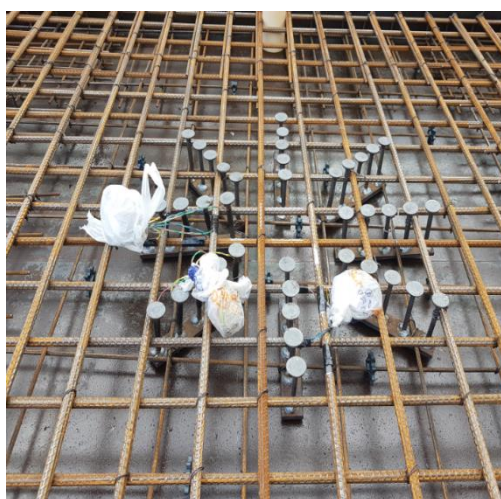
REGISTRO FOTOGRÁFICO



Lajes prontas para a concretagem



Lajes concretadas



Armadura de cisalhamento da laje
LR



Ensaio à tração da armadura de
cisalhamento



Armadura de cisalhamento pós ruptura do ensaio a tração



Laje LR preparada para iniciar o ensaio



Face inferior da laje LR pós ruptura



Face superior da laje L4-75-8s pós ruptura