

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E
URBANISMO

**CÁLCULO DO EMPUXO ATIVO COM
DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DA SUPERFÍCIE
FREÁTICA**

Petrucio José dos Santos Junior

Orientador: Prof. Pêrsio Leister de Almeida Barros

CAMPINAS

2010

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E
URBANISMO

**CÁLCULO DO EMPUXO ATIVO COM
DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DA SUPERFÍCIE
FREÁTICA**

Petrucio José dos Santos Junior

Orientador: Prof. Pêrsio Leister de Almeida Barros

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração de Geotecnia.

CAMPINAS

2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Sa59c Santos Junior, Petrucio José dos
Cálculo do empuxo ativo com determinação numérica da superfície freática / Petrucio José dos Santos Junior. -- Campinas, SP: [s.n.], 2010.

Orientador: Pérsio Leister de Almeida Barros.
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Muro de Contenção. 2. Método dos elementos de contorno. 3. Análise em fluxo. 4. Métodos numéricos. 5. Permeabilidade. I. Barros, Pérsio Leister de Almeida. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Título em Inglês: Calculation of active thrust with numerical determination of the phreatic surface

Palavras-chave em Inglês: Retaining wall, Boundary element method, Flow analysis, Numerical methods, Permeability

Área de concentração: Geotecnia

Titulação: Mestre em Engenharia Civil

Banca examinadora: Francisco Antonio Menezes, Waldemar Coelho Hachich

Data da defesa: 26/08/2010

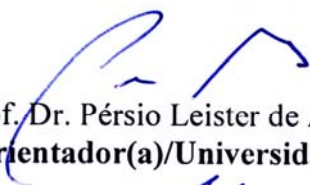
Programa de Pós Graduação: Engenharia Civil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E
URBANISMO

**CÁLCULO DO EMPUXO ATIVO COM
DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DA SUPERFÍCIE
FREÁTICA**

Petrucio José dos Santos Junior

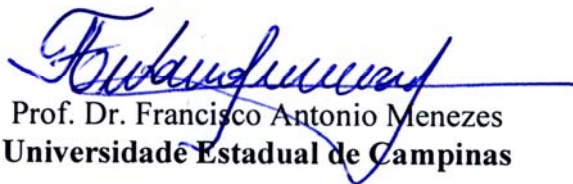
Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



Prof. Dr. Pêrsio Leister de Almeida Barros
Presidente e Orientador(a)/Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Waldemar Coelho Hachich
Universidade de São Paulo



Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes
Universidade Estadual de Campinas

Campinas, 26 de agosto de 2010

A todos os geotécnicos comprometidos com o avanço da
engenharia

AGRADECIMENTOS

A meus avós

Ao professor Pérsio. Pessoa que me fez conhecer o que é a geotecnia

A minha esposa e amiga Elisângela por nunca me deixar desistir ou mesmo fraquejar durante todos esses anos

A minha querida mãe por todo o apoio oferecido nesses anos

Aos meus colegas e amigos da Maccaferri, Jorge Santos, Alexandre Texeira, Jaime Duran, Lavoisier Machado e Gerardo Fracassi. Pessoas a quem aprendi a respeitar e valorizar no meu dia a dia

Ao amigo e irmão, Saulo por ser quem ele é

As soluções, eu já as possuo há muito tempo.
Mas ainda não sei como cheguei a elas.

Carl Friedrich Gauss

RESUMO

SANTOS, P. J. CÁLCULO DO EMPUXO ATIVO COM DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DA SUPERFÍCIE FREÁTICA. Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, 2010. 88p. Dissertação de Mestrado.

A determinação do empuxo ativo através de métodos de equilíbrio limite, para análise de muros de contenção é prática comum na engenharia geotécnica, principalmente pela simplicidade analítica de sua obtenção. Porém, havendo a presença de uma superfície freática no solo arrimado tal determinação não apresenta resultado analítico, sendo então requerido um estudo numérico para obter um valor que auxilie com certa precisão nessa análise. Poucos trabalhos foram feitos sobre esse tema e ainda assim sua importância não deixa de ser relevante para a verificação das condições de estabilidade de estruturas de arrimo drenantes. Nesse trabalho é feita uma abordagem numérica através do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para determinação da posição da superfície freática e posterior cálculo do empuxo ativo pelo Método de Coulomb considerando a influência dessa superfície. É implementado um programa de computador, cujo algoritmo de cálculo, baseado em MEC, apresenta a posição da freática, o valor da vazão total que chega ao sistema de drenagem e o empuxo ativo atuante sobre a estrutura de contenção.

PALAVRAS CHAVE: Superfície freática, Elementos de Contorno, Empuxo Ativo, Rede de fluxo, Potencial, Contenção.

ABSTRACT

SANTOS, P. J. CALCULATION OF ACTIVE THRUST WITH NUMERICAL DETERMINATION OF THE PHREATIC SURFACE. Campinas, School of Civil Engineering, Architecture and Urban Design, State University of Campinas, 2010. 88p. Master's Thesis.

The determination of active thrust in retaining wall analysis through limit equilibrium is a routine in geotechnical engineering, mostly due to analytic simplicity. However, when there is a phreatic surface in the retained soil, such determination does not present an analytic result. Then a numerical study is necessary to obtain a representative value of pore water pressures in the soil for the analysis. There are few technical publications about this theme, but its importance is recognized in drained retaining wall stability calculation. This work proposes a numerical approach using Boundary Element Method (BEM) to evaluate the position of phreatic surface and calculation of active thrust coefficient through Coulomb's method considering the influence of this position. A computer program, which calculation algorithm based on BEM is developed. It presents the results of the phreatic surface position, the total flow volume that arrives to the drainage system and the active thrust value.

KEYWORDS: Phreatic surface, Boundary Elements, Active earth thrust, Seepage, Potential, Retaining wall.

SUMÁRIO

RESUMO	xi
ABSTRACT	xiii
LISTA DE FIGURAS	xvii
LISTA DE SÍMBOLOS	xxi
1. Introdução	1
1.1 Objetivos.....	2
1.2 Estrutura do trabalho	2
2. Estruturas de contenção	3
2.1 Pressões laterais de Terra	3
2.2 Teoria de Rankine.....	6
2. 3 Teoria de Coulomb	12
2.3.1 Equilíbrio Limite	17
2. 4 Influência da percolação de água em maciços de solo	20
2.4.1 Muros de contenção de face vertical com drenagem ao seu tardo.....	21
3. Método dos elementos de contorno para problemas de potencial	30
3.1 Introdução.....	30
3.1.2 Equação Integral básica.....	31
3.1.3 Solução Fundamental	34

3.1.4 Descrição física do problema	36
3.2 Formulação da equação integral de contorno	40
3.2.1 Discretização das integrais de contorno usando elementos constantes	43
3.2.2 Discretização das integrais de contorno usando elementos lineares	45
3.2.3 Discretização das integrais de contorno usando elementos quadráticos	50
4. Métodos e critérios adotados	53
4.1 Construindo o modelo numérico	53
4.1.1 Determinação numérica da superfície freática	58
4.1.2 Determinação da interseção Parábola–Reta	62
5. Busca da superfície de ruptura crítica.....	65
5.1 Etapas de Cálculo	67
5.2 Exemplo de cálculo	73
6. Resultados obtidos.....	80
7. Conclusões e comentários finais	84
8. Sugestões para trabalhos futuros	87
Apêndices	89
A.1 Integração das equações principais.....	93
A.1.2 Equações integrais de contorno para problemas 2D.....	93
Referências Bibliográficas.....	95

LISTA DE FIGURAS

Figura 2. 1 - Empuxo atuante sobre um anteparo vertical móvel (Barros, 2005).	3
Figura 2. 2 - Aplicação do Empuxo Ativo.	7
Figura 2. 3 - Deslocamento produzido.	7
Figura 2. 4 - Aplicação do Empuxo Passivo.	8
Figura 2. 5 - Deslocamento produzido.	8
Figura 2. 6 - Tensão de Tração e profundidade da fenda de tração. a) Zona ativa ao tardo do muro; b) Profundidade da fenda de tração; c) Diagrama de Tensão sugerido para solos coesivos (Bowles, 1996).	10
Figura 2. 7 - Planos de ruptura nos estados ativo e passivo (Barros, 2005).	10
Figura 2. 8 - Profundidade da fenda de tração e altura crítica.....	11
Figura 2. 9 - Cunha de falha usada ao derivar a equação de Coulomb para a tensão ativa (Bowles, 1996).	13
Figura 2. 10 - Cunha de tensão ativa de Coulomb. a) Condições assumidas para que ocorra a falha; b) Indicação de que todos os vetores de força podem não passar pelo ponto O, conseqüentemente o equilíbrio estático não é satisfeito; c) Diagrama de forças para estabilizar P_a (Bowles, 1996).	13
Figura 2. 11 - Cunha de Empuxo passivo definida por Coulomb (Bowles, 1996).....	15

Figura 2. 12 - Método do equilíbrio limite, variando o empuxo com a superfície de ruptura (Barros, 2005).....	17
Figura 2. 13 - Cunha de Empuxo ativo definida por Coulomb para solos coesivos.	19
Figura 2. 14 - Rede de fluxo através do maciço arrimado. A) Muro de contenção em gabião, considerada autodrenante; b) Estrutura de contenção com dreno ao tardo (Barros, 2005).	20
Figura 2. 15 - Muro de contenção vertical com formação de rede de fluxo (Barros, 2006).	22
Figura 2. 16 - Rede de fluxo formada devido a uma chuva constante (Lambe, 1979).....	23
Figura 2. 17 - Determinação da força de poropressão para uma superfície com 45 graus de inclinação (Lambe, 1979).	23
Figura 2. 18 - Diagrama de forças para determinação do empuxo ativo, considerando uma superfície de falha com 45 graus de inclinação (Lambe, 1979).	24
Figura 2. 19 - Gráfico que mostra os resultados para vários ângulos de superfícies potenciais de falha (Lambe, 1979).	24
Figura 2. 20 - Descrição do problema de fluxo (Barros, 2006).....	26
Figura 2. 21 - Estrutura de contenção vertical. a) cunha que representa a massa de solo induzida pela superfície potencial de falha; b) diagrama de corpo rígido que representa as forças atuantes na cunha de solo (Barros, 2006).	29
Figura 3. 1 - Definições geométricas para equação de Laplace (Brebbia e Domínguez, 1989)....	32
Figura 3. 2 - Fluxo um cubo infinitesimal (Beer et al, 2008).	38
Figura 3. 3 - Potencial aplicado em um ponto G a partir de um ponto fonte F (Beer et al, 2008).	39
Figura 3. 4 - Ponto x se aproximando do trecho S_e (Liu, 2009).	41
Figura 3. 5 - Discretização do contorno usando elementos constantes (Liu, 2009).	43
Figura 3. 6 - Discretização do contorno S usando elementos lineares (Liu, 2009).	45
Figura 3. 7 - Discretização do contorno S usando elementos quadráticos (Liu, 2009).	52
Figura 4. 1 - Condições de contorno estabelecidas para o problema em estudo. a) condição inicial com nível d'água constante; b) condição final com a formação de uma superfície freática.	54
Figura 4. 2 - Diagrama de subpressão determinado através de pontos potenciais obtidos pelo método dos elementos de contorno.	56
Figura 4. 3 - Programa para cálculo do coeficiente de empuxo ativo com determinação numérica da superfície freática, WALLSEEP.	59
Figura 4. 4 - Representação esquemáticas dos elementos ao longo do contorno.	61

Figura 4. 5 – Interseção entre a reta de Coulomb com o elemento parametrizado da parábola. ...	63
Figura 5. 1 – Mudança de escala do resultado da freática obtido no modelo unitário para o modelo real.	65
Figura 5. 2 – Resultado esquemático obtido pelo programa WALLSEEP com muro de altura unitária.	66
Figura 5. 3 – Diferentes pesos específicos. a) Área acima da superfície freática – γ ; b) Área abaixo da superfície freática - γ_{sat}	66
Figura 5. 4 – Esquema do equilíbrio de forças atuantes no modelo real para o cálculo do Empuxo Ativo.	69
Figura 5. 5 – Versão final do programa WALLSEEP.	70
Figura 5. 6 – Fluxo total obtido pelo programa WALLSEEP.	71
Figura 5. 7 – Distribuição parametrizada da derivada do potencial para um elemento s.	72
Figura 5. 8 – Diagrama de bloco referente ao cálculo da superfície freática.	72
Figura 5. 9 – Diagrama de bloco referente ao cálculo do empuxo ativo máximo.	73
Figura 5. 10 – Cálculo do empuxo ativo sem influência da superfície freática pelo programa WALLSEEP, considerando o muro vertical.	74
Figura 5. 11 – Cálculo do empuxo ativo sem influência da superfície freática pelo programa WALLSEEP, considerando talude sobre o muro e inclinação do paramento frontal.	75
Figura 5. 12 – Cálculo do empuxo ativo com influência da superfície freática pelo programa WALLSEEP, considerando o muro vertical.	76
Figura 5. 13 – Cálculo do empuxo ativo com influência da superfície freática pelo programa GawacWin, considerando o muro vertical.	77
Figura 5. 14 – Resultados das análises do software GawacWin.	77
Figura 5. 15 – Determinação gráfica da força de poropressão referente ao exemplo 3.	78
Figura 6. 1 – Gráfico que possibilita a determinação do valor da vazão em função da altura de saída do nível d'água e a permeabilidade variando em relação a inclinação do paramento ao tardoz da contenção.	80
Figura 6. 2 – Gráfico que possibilita a determinação do valor da área saturada em função da altura de saída do nível d'água variando em relação a inclinação do paramento ao tardoz da contenção.	81

Figura 6. 3 – Gráfico que possibilita a determinação do valor da força de poropressão em função da altura de saída do nível d'água e o peso específico da água variando em relação a inclinação do paramento ao tardo da contenção.....	82
Figura 6. 4 – Gráfico que possibilita a determinação do valor do coeficiente de empuxo ativo com influência da freática variando com a relação entre a altura de saída do nível d'água e a altura do muro.....	83
Figura A. 1 - Integração analítica em um segmento de reta arbitrário.	94

LISTA DE SÍMBOLOS

E_a	- Empuxo ativo
$\bar{d}$	- altura de saída do nível d'água – modelo unitário
$\bar{U}$	- Força de poropressão – modelo unitário
τ	- Tensão cisalhante ao longo de uma superfície de ruptura
σ	- Tensão normal que age sobre a superfície de ruptura
ϕ	- Ângulo de atrito interno do solo
γ	- Peso específico do solo
α	- inclinação em relação a horizontal do plano de aplicação do empuxo ativo
ρ	- inclinação em relação a horizontal do plano de ruptura
δ	- ângulo de aplicação do empuxo ativo
σ_1	- Tensão principal
σ_3	- Tensão principal ortogonal a σ_1
Δ_a	- Deslocamento sob ação do empuxo ativo
σ_h	- Tensão horizontal
Δ_p	- Deslocamento sob ação do empuxo passivo
γ_{sat}	- Peso específico do solo saturado

σ_v	- Tensão vertical
γ_w	- Peso específico da água
A	- Área total da cunha
A_{sat}	- Área saturada da cunha
C	- Coesão do solo
d	- altura de saída do nível d'água
E_o	- Empuxo em repouso
E_p	- Empuxo passivo
G	- Constante de Catalan
H	- Altura do muro
h_{cr}	- Altura crítica
i	- inclinação do talude sobre o muro
i	- gradiente hidráulico
k	- permeabilidade
K_a	- Coeficiente de empuxo ativo
K_{as}	- coeficiente de empuxo ativo com ação da superfície freática
K_o	- Coeficiente de empuxo no repouso
K_p	- Coeficiente de empuxo passivo
N	- Força Normal
P	- Peso da cunha de solo
p_o	- Pressão lateral em repouso
p_v	- Pressão vertical atuante
P_w	- Pressão da água
q	- Fluxo normal a um plano
Q	- Vazão total
S	- Resistência ao cisalhamento
u	- Potencial em um ponto
U	- Força de poropressão
z_o	- Profundidade da fenda de tração

1. INTRODUÇÃO

Os problemas relativos à influência da água no solo normalmente são conhecidos por engenheiros geotécnicos e discutidos em vários trabalhos acadêmicos de maneira bem direta. Despertar a atenção para os métodos de cálculo existentes permite aos projetistas analisarem o problema de maneira simples e com clareza de resultados.

Harr (1962) já comentava em sua obra que embora os fundamentos das águas subterrâneas já estivessem estabelecidos há mais de um século o tratamento científico ainda era muito recente. Tal afirmação foi feita há mais de quarenta anos e os avanços científicos sobre águas subterrâneas ainda não se encontram totalmente consolidados, o que motiva o aprimoramento de métodos já consagrados através de modelagens numéricas atuais.

A obtenção da superfície freática através de cálculos analíticos ou aproximações empíricas é algo muito comum entre os modelos de projetos existentes. Porém isso leva a crer que tais aproximações carregam influência subjetiva que podem induzir a um erro ou mesmo a uma simplificação excessiva de uma proposta já aproximada. Mesmo assim, tal adoção serve como parâmetro ou dado de entrada em projeto para determinação do coeficiente de empuxo ativo atuante sobre estruturas de contenção, considerando no cálculo de equilíbrio de forças uma componente resultante da poropressão atuante sobre a superfície freática adotada.

Barros (2006) propôs em seu trabalho uma solução geral para o cálculo do empuxo ativo em muros de face vertical através da solução analítica para o fluxo d'água em um maciço de solo homogêneo e utilização da formulação de Coulomb. Tal procedimento apresenta basicamente duas limitações, muro apenas vertical e solo totalmente saturado. Foi baseado nessas duas limitações que esse trabalho teve sua principal motivação, obter através de análise numérica uma solução para o problema de fluxo com determinação da superfície freática para paramentos frontais verticais ou inclinados e posterior obtenção do coeficiente de empuxo ativo.

1.1 Objetivos

Esse trabalho tem como objetivo principal a criação de um programa computacional em linguagem de programação pascal orientada para objeto que calcula o valor do coeficiente de empuxo ativo pela formulação de Coulomb em função da determinação numérica da superfície freática, cujo problema de fluxo será solucionado pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC).

1.2 Estrutura do trabalho

Este trabalho está estruturado em seis capítulos descritos a seguir:

O primeiro capítulo apresenta uma introdução e os objetivos do trabalho, relatando de maneira simples a motivação para realização desse trabalho.

O segundo e terceiro capítulo apresentam uma revisão bibliográfica sobre os conceitos necessários sobre estruturas de contenção e método dos elementos de contorno, respectivamente. Tais capítulos são necessários para a compreensão de todos os aspectos envolvidos na temática do trabalho.

No quarto capítulo são apresentados os métodos e critérios adotados para a elaboração de um programa de computador capaz de realizar a análise numérica do problema em questão.

No quinto capítulo são apresentados os resultados obtidos no trabalho e no sexto capítulo são apresentadas as conclusões. Finalmente no sétimo capítulo são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

2. ESTRUTURAS DE CONTENÇÃO

2.1 Pressões laterais de Terra

Entende-se por pressão lateral de terra também comumente chamado de empuxo lateral ou empuxo de terra, como sendo o esforço produzido por um maciço de solo sobre uma determinada estrutura de contenção ou arrimo que deve suportá-lo. Essas pressões podem ser devidas ao peso próprio do solo ou a sobrecargas aplicadas sobre ele.

O valor do empuxo sobre uma estrutura depende do deslocamento que esta sofre sob a ação deste empuxo. Pode-se visualizar esta interação através de um experimento que utiliza um anteparo vertical móvel, como ilustrado na figura 2.1, suportando um desnível de terreno. Verifica-se que a pressão exercida pelo solo sobre o anteparo varia à medida que este se desloca.

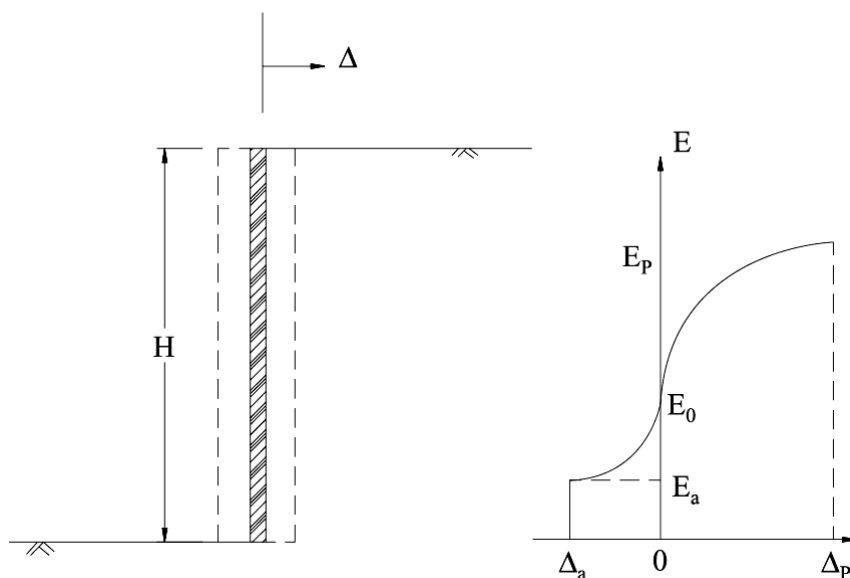


Figura 2. 1 - Empuxo atuante sobre um anteparo vertical móvel (Barros, 2005).

Quando o anteparo se afasta do solo arrimado, ocorre uma diminuição no valor do empuxo até um mínimo que corresponde à total mobilização da resistência interna do solo. Esta condição é atingida mesmo com um pequeno deslocamento do anteparo e é chamada de estado ativo. O empuxo atuante neste instante então é chamado empuxo ativo “ E_a ”.

Se ao contrário, o anteparo for movido contra o solo arrimado, haverá um aumento no empuxo até um valor máximo onde haverá novamente a mobilização total da resistência do solo. A este valor máximo é dado o nome de empuxo passivo “ E_p ”, e a condição de deformação em que ocorre é chamada estado passivo. Diferentemente do estado ativo, o estado passivo só é atingido após um deslocamento bem maior do anteparo.

Caso o anteparo, porém, se mantenha imóvel na posição inicial, o empuxo em repouso “ E_0 ”, se manterá entre os valores do empuxo ativo e do empuxo passivo. Nesta condição não há uma completa mobilização da resistência do solo.

Os muros de arrimo à gravidade em geral permitem a deformação do solo arrimado o suficiente para que sua resistência seja totalmente mobilizada. Assim devem ser dimensionados sob a ação do empuxo ativo.

O problema da determinação da magnitude e distribuição da pressão lateral do solo é, porém, estaticamente indeterminado e são necessárias hipóteses simplificadoras entre as tensões e as deformações do solo para que se possa chegar à solução.

Os métodos clássicos empregados na geotecnia na determinação dos empuxos ativos ou passivos adotam uma relação do tipo rígido-plástica entre as tensões e deformações do solo. Este modelo apresenta a vantagem de dispensar o cálculo dos deslocamentos da estrutura, já que qualquer deformação é suficiente para se alcançar a plastificação do material.

Levando em conta a plastificação do material, pode ser empregado quase que exclusivamente o critério de Mohr-Coulomb, onde, segundo este critério, a tensão cisalhante “ τ ”

ao longo de uma superfície de ruptura deve se igualar à resistência “s”, a fim de se determinar a tensão limite de ruptura, que é dada pela equação 2.1.

$$\tau \leq s \quad \rightarrow \quad s = c + \sigma \cdot \tan \phi \quad (2.1)$$

onde:

s é a resistência ao cisalhamento;

τ é a tensão cisalhante ao longo de uma superfície de ruptura;

σ é a tensão normal que age sobre a superfície de ruptura;

c é a coesão do solo;

ϕ é o ângulo de atrito interno do solo.

No desenvolvimento da solução, geralmente são tomadas fatias unitárias do maciço e da estrutura de arrimo, admitindo-se que todas as seções são iguais, o que equivale a se aproximar a um problema bidimensional de deformação. Esta aproximação simplifica bastante a análise e, além disso, é em geral mais conservadora que a análise tridimensional.

Quanto ao empuxo em repouso “E_o”, que age sobre estruturas que não permitem qualquer deslocamento, sua determinação é feita normalmente através de expressões empíricas, baseadas na determinação, em laboratório ou no campo, das pressões laterais. Jàky (1944) desenvolveu uma das expressões mais utilizadas para determinação do coeficiente de empuxo em repouso e ela é dada pela equação 2.2.

$$K_o = \frac{p_o}{p_v} = 1 - \sin \phi \quad (2.2)$$

onde:

p_o é a pressão lateral em repouso;

p_v é a pressão vertical atuante;

K_o é o coeficiente de empuxo em repouso.

Esta expressão é válida apenas para solos normalmente adensados. Para solos pré-adensados o valor da pressão lateral é mais elevado, dependendo principalmente do grau de pré-adensamento do material.

2.2 Teoria de Rankine

Essa teoria se baseia na equação de ruptura de Mohr (Caputo, 1988).

$$\sigma_1 = \sigma_3 \cdot \tan^2\left(45 + \frac{\phi}{2}\right) + 2 \cdot c \cdot \sqrt{\tan^2\left(45 + \frac{\phi}{2}\right)} \quad (2.3)$$

onde:

σ_1 e σ_3 são tensões principais;

ϕ é o ângulo de atrito interno do solo;

c é a coesão do solo.

O interior da massa de solo é considerado como um semi-espaco infinito, limitado apenas pela superfície do terreno e sem nenhuma sobrecarga. Uma das tensões principais tem a direção vertical e o seu valor é dado pelo peso próprio do solo. A direção da outra tensão principal será, conseqüentemente, horizontal.

Para solos não coesivos se admite que a parede AB da figura 2.2 se afasta do terrapleno e a pressão horizontal σ_h diminuirá até alcançar um valor mínimo (equação 2.4).

$$\sigma_h = \sigma_3 = K_a \gamma H \quad (2.4)$$

A pressão vertical σ_v será, nesse caso, a pressão principal maior (equação 2.5).

$$\sigma_v = \sigma_1 = \gamma H \quad (2.5)$$

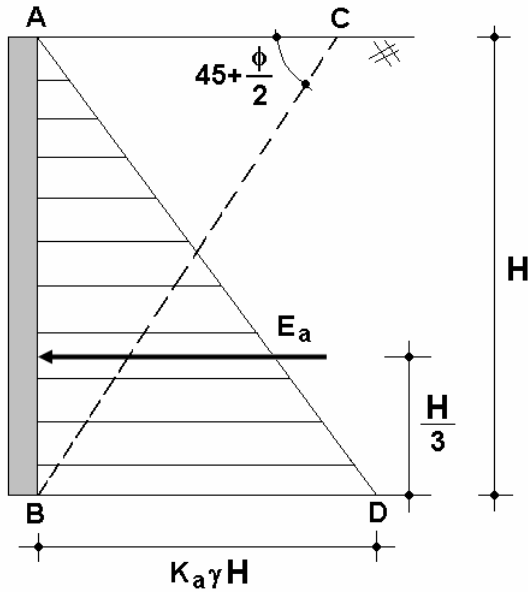


Figura 2. 2 - Aplicação do Empuxo Ativo.

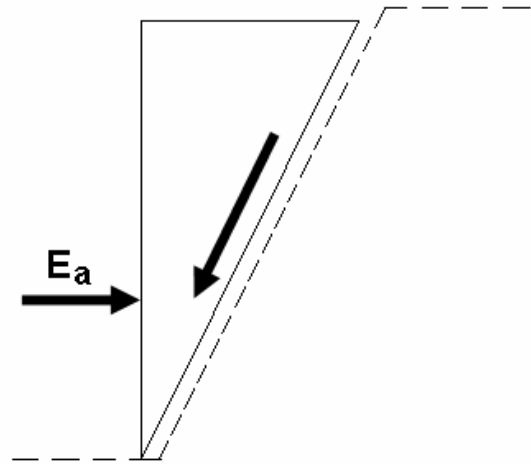


Figura 2. 3 - Deslocamento produzido.

Uma vez que o deslocamento do anteparo definido pelo segmento AB continue, deixará de haver continuidade das deformações e se produzirá o deslizamento (Figura 2.3) ao longo do segmento BC formado por um ângulo de $45 + \phi/2$ com a direção da pressão principal menor.

A relação σ_h/σ_v assume, para solos não coesivos, a relação representada em 2.6, chamada de *coeficiente de empuxo ativo*.

$$K = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = K_a = \frac{1}{45 + \frac{\phi}{2}} = \tan^2 \left(45 - \frac{\phi}{2} \right) \quad (2.6)$$

A expressão do empuxo ativo total, E_a , igual a área do triângulo ABD, será definida pela equação 2.7.

$$E_a = \int_0^h K_a \gamma z \cdot dz = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_a \quad (2.7)$$

onde, essa força será aplicada a 1/3 da altura da H .

Assumindo-se agora que o anteparo AB se desloque no sentido inverso, ou seja, contra o terrapleno (Figura 2.4), haverá ainda um deslizamento ao longo de BC, porém no sentido inverso ao anteriormente mostrado na figura 2.3 e formado por um ângulo de $45 - \phi/2$ (figura 2.5).

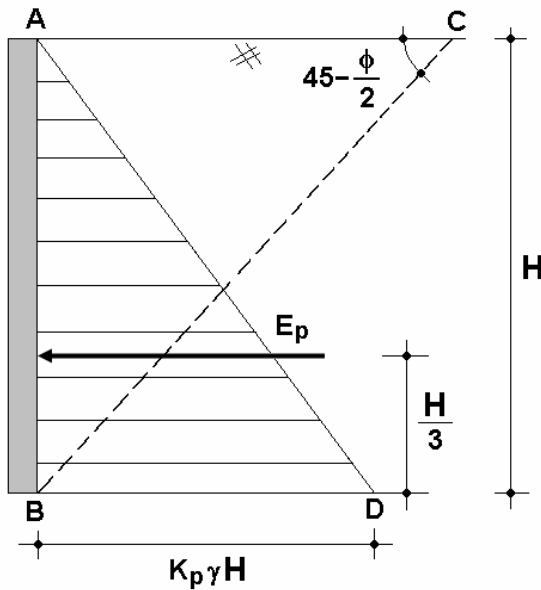


Figura 2. 4 - Aplicação do Empuxo Passivo.

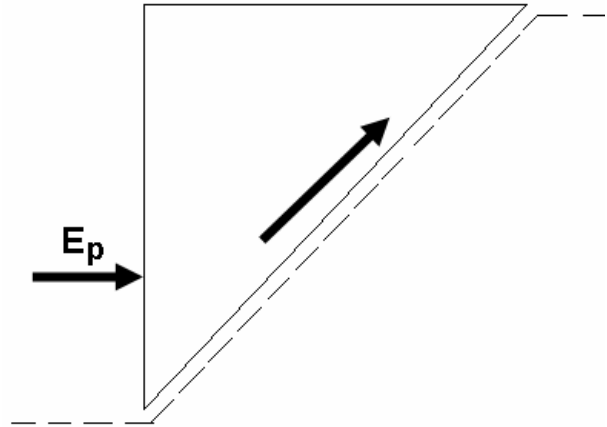


Figura 2. 5 - Deslocamento produzido.

Para que se produza o deslizamento, o empuxo deverá ser maior do que o peso do terrapleno. Assim, pode-se supor que a pressão principal maior é a horizontal, e a menor, a vertical.

Sob essas condições a relação σ_v/σ_h assume, para solos não coesivos, a relação representada em 2.8, chamada de *coeficiente de empuxo passivo*.

$$K = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = K_p = 45 + \frac{\phi}{2} = \tan^2 \left(45 + \frac{\phi}{2} \right) \quad (2.8)$$

A expressão do empuxo ativo total, E_p , igual a área do triângulo ABD, será definida pela equação 2.9.

$$E_p = \int_0^h K_p \gamma z \cdot dz = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_p \quad (2.9)$$

Para solos coesivos, partindo da equação Mohr (2.3) é possível escrever, considerando o estado ativo de equilíbrio limite ($\sigma_1 = \sigma_v = \gamma z$ e $\sigma_3 = \sigma_h$) a equação 2.10.

$$\sigma_h = \gamma z \tan^2 \left(45 - \frac{\phi}{2} \right) - 2 \cdot c \cdot \tan \left(45 - \frac{\phi}{2} \right) \quad (2.10)$$

Para $\sigma_h = 0$:

$$z = z_o = \frac{2c}{\gamma} \tan \left(45 + \frac{\phi}{2} \right) = \frac{2c}{\gamma \sqrt{K_a}} \quad (2.11)$$

A equação 2.11 mostra que a pressão horizontal se anula, sendo negativa acima de z_o e positiva abaixo dessa profundidade (Figura 2.6), ou seja, o solo coesivo no estado ativo fica sujeito a tensões de tração na sua porção superior até uma profundidade z_o . Como o solo normalmente não resiste a tensões de tração, abrem-se fendas na superfície até esta profundidade. Sendo assim, não se pode contar com estas tensões que diminuiriam o valor do empuxo ativo resultante. Além disso, estas fendas podem estar preenchidas com água proveniente de chuvas, o que pode aumentar ainda mais o valor do empuxo. O resultado é a distribuição de tensões mostrada na figura 2.6. Pode-se adotar para efeito de cálculo uma distribuição aproximada como a mostrada na mesma figura e sugerida por Bowles (1996).

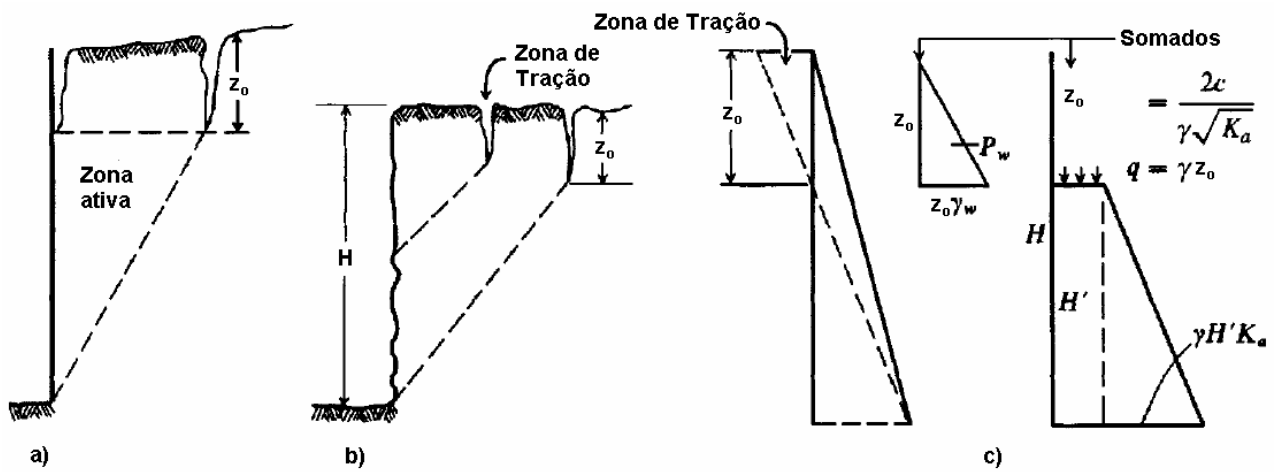


Figura 2. 6 - Tensão de Tração e profundidade da fenda de tração. a) Zona ativa ao tardoz do muro; b) Profundidade da fenda de tração; c) Diagrama de Tensão sugerido para solos coesivos (Bowles, 1996).

As direções das superfícies de ruptura nos estados ativo e passivo são mostradas na figura 2.7.

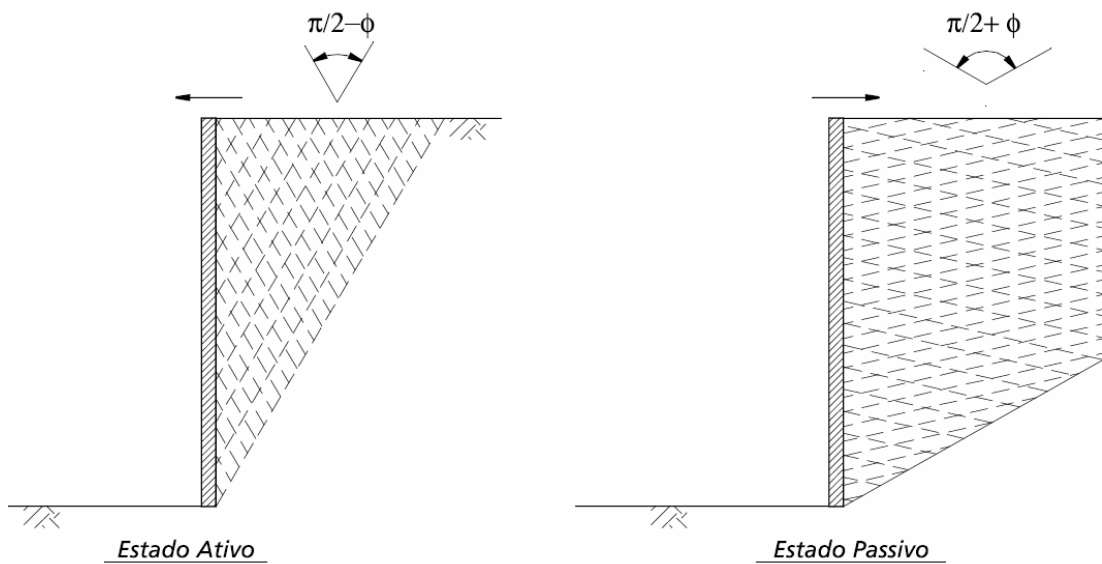


Figura 2. 7 - Planos de ruptura nos estados ativo e passivo (Barros, 2005).

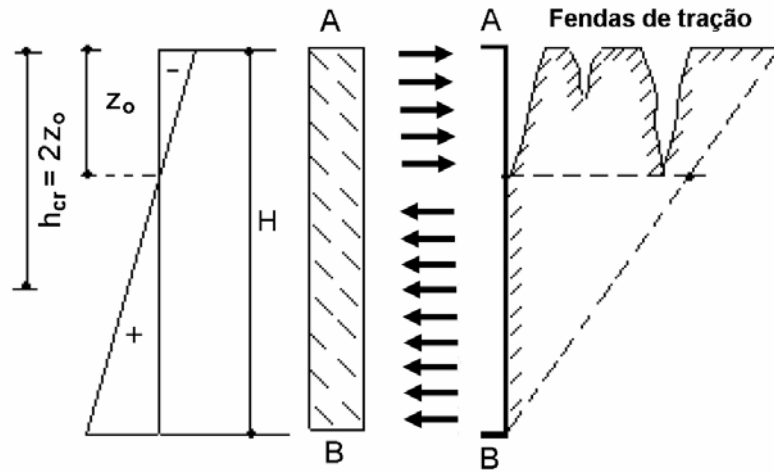


Figura 2. 8 - Profundidade da fenda de tração e altura crítica

De acordo com a Figura 2.8 a pressão lateral acima de z_o é negativa e abaixo desta profundidade é positiva. Calculando o empuxo ativo total, considerando agora a tensão de tração, é possível obter o resultado apresentado em 2.12.

$$E_a = \int_0^h \sigma_z dz = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left(45 - \frac{\phi}{2} \right) - 2 c H \tan \left(45 - \frac{\phi}{2} \right) \quad (2.12)$$

Quando $E_a = 0$, tem-se que:

$$\frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left(45 - \frac{\phi}{2} \right) = 2 c H \tan \left(45 - \frac{\phi}{2} \right),$$

que a uma profundidade crítica $H = h_{cr}$,

$$H = h_{cr} = \frac{4c}{\gamma} \tan \left(45 + \frac{\phi}{2} \right) = 2 z_o \quad (2.13)$$

onde, h_{cr} é a altura crítica teórica, profundidade onde a pressão lateral sobre a parede AB se anula. Para esta altura o maciço se mantém estável sem necessidade de nenhuma contenção.

2. 3 Teoria de Coulomb

Coulomb (1776) formulou um dos métodos mais conhecidos para determinação de empuxo aplicado sobre muros de contenção, admitindo que no instante da mobilização total da resistência do solo formam-se superfícies de deslizamento ou de ruptura no interior do maciço. Estas superfícies delimitariam então uma parcela do maciço que se movimentaria em relação ao restante do solo no sentido do deslocamento da estrutura. Se esta parcela do solo for considerada como um corpo rígido, o empuxo pode então ser determinado através do equilíbrio das forças atuantes sobre este corpo rígido.

Bowles (1996) cita as hipóteses admitidas por Coulomb em sua teoria. São elas:

1. Solo isotrópico e homogêneo e a existência de ângulo de atrito interno e coesão;
2. Superfície de ruptura plana e a superfície do terrapleno é planar, ou seja, admite talude, mas não formas irregulares, como por exemplo, bermas;
3. A resistência por atrito é uniformemente distribuída ao longo da superfície de ruptura e o coeficiente de atrito ocorre entre solo/solo, $f = \tan \phi$;
4. Um pequeno deslocamento da parede é suficiente para mobilizar estado limite;
5. Adota condição de equilíbrio limite, ou seja, a resistência ao cisalhamento é mobilizada instantaneamente e o estado plástico desenvolve-se numa cunha (como um bloco rígido);
6. Existe atrito de interface no muro, ou seja, como a cunha de falha se move com respeito a parte posterior do muro uma força de atrito se desenvolve entre o solo e o muro.
7. A falha é um problema de deformação plana, isto é, o problema é avaliado a partir de uma seção de largura unitária.

O método de Coulomb admite que tais superfícies de ruptura são planas e o empuxo é aquele que age sobre a mais crítica das superfícies de ruptura planas. A vantagem deste método reside no fato de que se pode considerar a ocorrência de atrito entre a estrutura de arrimo e o solo, além de possibilitar a análise de estruturas com o paramento não vertical.

As equações baseada na teoria de Coulomb para solos não coesivos podem ser derivadas a partir das figuras 2.9 e 2.10, usando várias relações trigonométricas. O peso da cunha de solo ABE, para uma espessura unitária perpendicular ao desenho (Figura 2.9) é:

$$P = \gamma A(1) = \frac{\gamma H^2}{2 \sin^2 \alpha} \left[\sin(\alpha + \rho) \frac{\sin(\alpha + i)}{\sin(\rho - i)} \right] \quad (2.14)$$

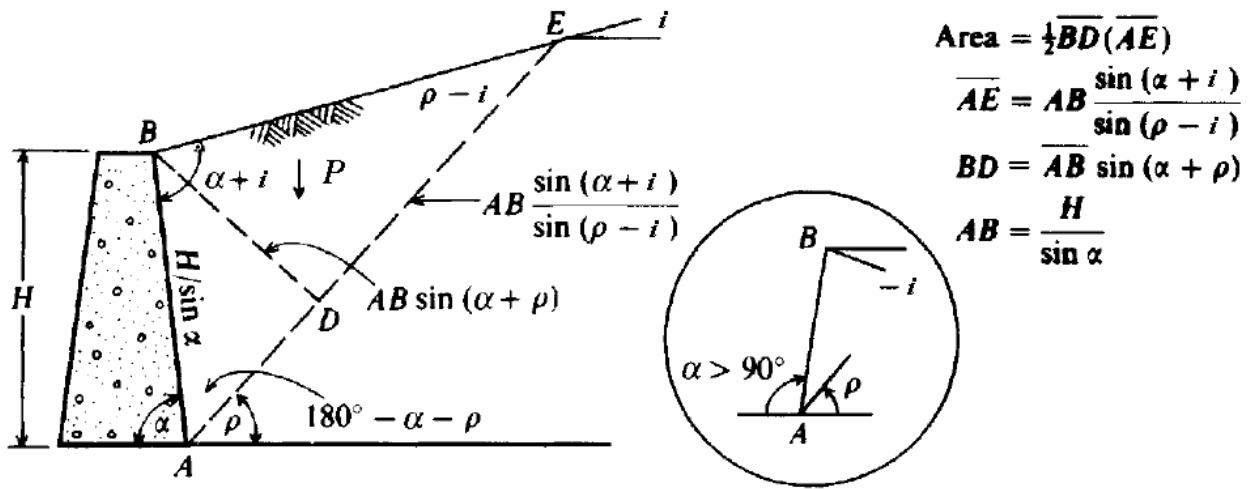


Figura 2.9 - Cunha de falha usada ao derivar a equação de Coulomb para a tensão ativa (Bowles, 1996).

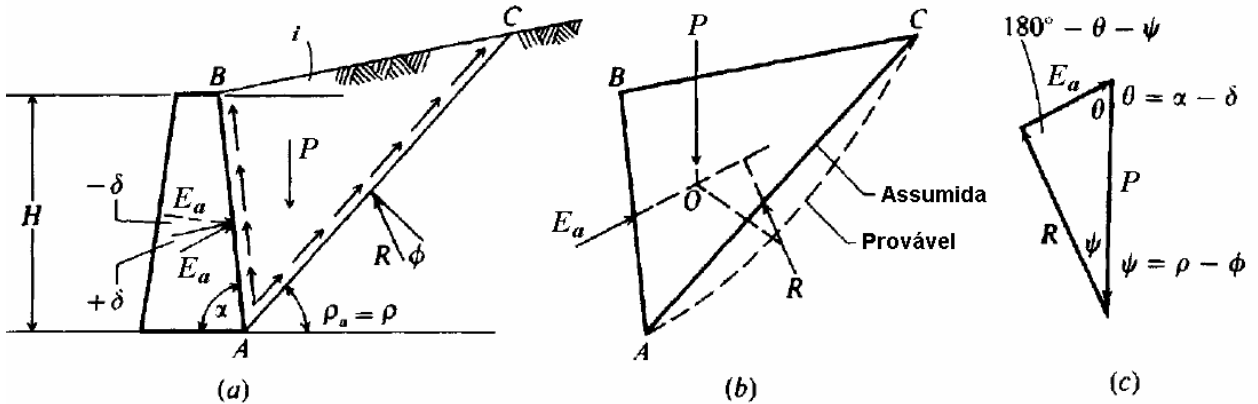


Figura 2.10 - Cunha de tensão ativa de Coulomb. a) Condições assumidas para que ocorra a falha; b) Indicação de que todos os vetores de força podem não passar pelo ponto O, consequentemente o equilíbrio estático não é satisfeito; c) Diagrama de forças para estabilizar P_a (Bowles, 1996).

A força ativa E_a é uma componente do vetor peso como ilustrado na figura 2.10c. Aplicando a lei dos senos, é possível obter,

$$\frac{E_a}{\text{sen}(\rho - \phi)} = \frac{P}{\text{sen}(180^\circ - \alpha - \rho + \phi + \delta)}$$

ou

$$E_a = \frac{P \text{sen}(\rho - \phi)}{\text{sen}(180^\circ - \alpha - \rho + \phi + \delta)} \quad (2.15)$$

A partir da equação 2.15 é possível perceber que o valor de E_a depende do ângulo ρ , isto é, todos os termos para um dado problema são constantes, e o valor de E_a passa ser além de principal, possível. Combinando as equações 2.14 e 2.15, obtém-se,

$$E_a = \frac{\gamma H^2}{2 \text{sen}^2 \alpha} \left[\text{sen}(\alpha + \rho) \frac{\text{sen}(\alpha + i)}{\text{sen}(\rho - i)} \right] \frac{\text{sen}(\rho - \phi)}{\text{sen}(180^\circ - \alpha - \rho + \phi + \delta)} \quad (2.16)$$

A força ativa máxima ou Empuxo ativo máximo é encontrado uma vez que $dE_a/d\rho = 0$, assim,

$$E_a = \frac{\gamma H^2}{2} \frac{\text{sen}^2(\alpha + \phi)}{\text{sen}^2 \alpha \text{sen}(\alpha - \delta) \left[1 + \sqrt{\frac{\text{sen}(\phi + \delta) \text{sen}(\phi - i)}{\text{sen}(\alpha - \delta) \text{sen}(\alpha + i)}} \right]^2} \quad (2.17)$$

Se $\beta = \delta = 0$ e $\alpha = 90^\circ$ (um muro vertical reto com aterro horizontal) e a equação 2.17 pode ser simplificada para,

$$E_a = \frac{\gamma H^2}{2} \frac{(1 - \text{sen}\phi)}{(1 + \text{sen}\phi)} = \frac{\gamma H^2}{2} \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\phi}{2} \right) \quad (2.18)$$

que é a mesma equação proposta por Rankine e apresentada na equação 2.7. De uma forma geral a equação 2.18 pode ser reescrita como:

$$E_a = \frac{\gamma H^2}{2} K_a$$

onde,

$$K_a = \frac{\text{sen}^2(\alpha + \phi)}{\text{sen}^2 \alpha \text{sen}(\alpha - \delta) \left[1 + \sqrt{\frac{\text{sen}(\phi + \delta) \text{sen}(\phi - i)}{\text{sen}(\alpha - \delta) \text{sen}(\alpha + i)}} \right]^2} \quad (2.19)$$

O empuxo passivo é determinado de forma similar ao ativo, exceto pelo fato de que o diagrama de forças apresenta ângulos distribuídos de maneira distinta (Figura 2.11). O valor da força peso, P , da massa de solo sujeita a falha é determinado através da equação 2.20.

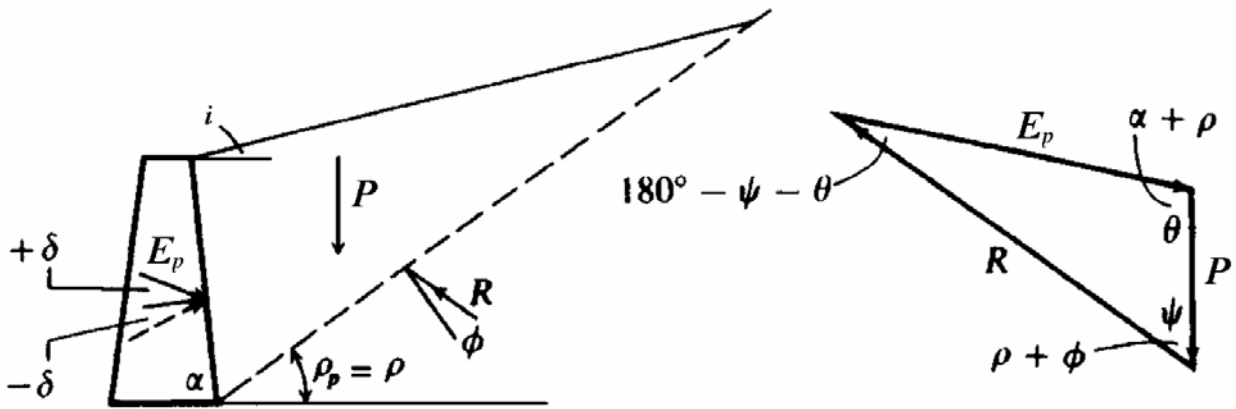


Figura 2. 11 - Cunha de Empuxo passivo definida por Coulomb (Bowles, 1996).

$$P = \frac{\gamma H^2}{2} \text{sen}(\alpha + \rho) \frac{\text{sen}(\alpha + i)}{\text{sen}(\rho - i)} \quad (2.20)$$

Aplicando a lei dos senos, é possível obter,

$$E_p = \frac{P \operatorname{sen}(\rho + \phi)}{\operatorname{sen}(180^\circ - \rho - \phi - \delta - \alpha)} \quad (2.21)$$

A força mínima que determina o Empuxo passivo é encontrado, uma vez que $dE_p/d\rho = 0$, assim,

$$E_p = \frac{\gamma H^2}{2} \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha - \phi)}{\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \delta) \left[1 + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\phi + \delta) \operatorname{sen}(\phi + i)}{\operatorname{sen}(\alpha + \delta) \operatorname{sen}(\alpha + i)}} \right]^2} \quad (2.22)$$

Se $\beta = \delta = 0$ e $\alpha = 90^\circ$ (um muro vertical reto com aterro horizontal) e a equação 2.22 pode ser simplificada para,

$$E_p = \frac{\gamma H^2}{2} \frac{(1 + \operatorname{sen}\phi)}{(1 - \operatorname{sen}\phi)} = \frac{\gamma H^2}{2} \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right) \quad (2.23)$$

De uma forma geral a equação 2.23 pode ser reescrita como:

$$E_p = \frac{\gamma H^2}{2} K_p$$

onde,

$$K_p = \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha - \phi)}{\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \delta) \left[1 - \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\phi + \delta) \operatorname{sen}(\phi + i)}{\operatorname{sen}(\alpha + \delta) \operatorname{sen}(\alpha + i)}} \right]^2} \quad (2.24)$$

2.3.1 Equilíbrio Limite

Segundo Barros (2005), caso o solo seja coesivo ou a superfície do maciço não seja plana, não há como aplicar diretamente a teoria de Coulomb. Tal afirmação passa a ser verdade quando não é feita uma extensão ou adaptação ao método. Nestes casos pode-se adotar um método de análise semelhante ao de Coulomb, mas voltado ao problema específico em questão.

Tome-se como exemplo o caso mostrado na Figura 2.12. Como a superfície do maciço possui uma descontinuidade no talude, ou seja, não apresenta inclinação constante, não é possível utilizar as expressões apresentadas na seção anterior para determinação do empuxo. Neste caso, pode-se fazer uma análise por tentativas, onde se consideram várias posições para a superfície de ruptura e para cada uma delas determina-se o valor do empuxo pelo equilíbrio de forças. Estes valores são colocados em função da superfície de ruptura que lhes deu origem e assim pode-se estimar a variação correspondente. Determina-se então a posição mais crítica da superfície de ruptura e o empuxo correspondente.

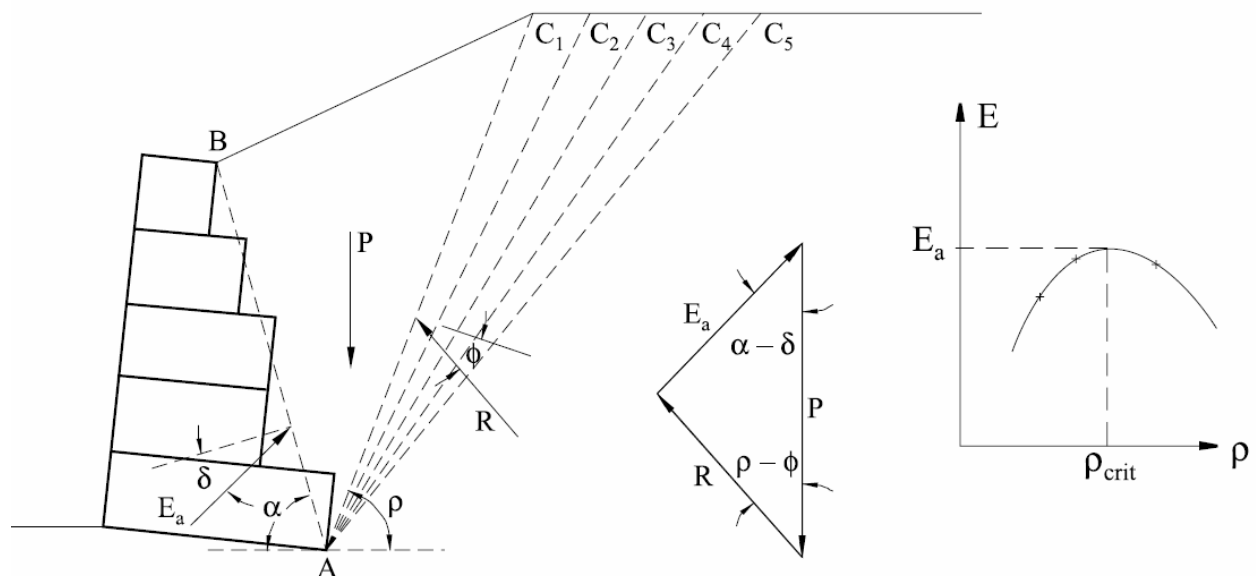


Figura 2. 12 - Método do equilíbrio limite, variando o empuxo com a superfície de ruptura (Barros, 2005).

O valor do empuxo ativo E_a é determinado então para cada uma das cunhas através do equilíbrio das forças que agem sobre ela.

$$E_a = \frac{P \operatorname{sen}(\rho - \phi)}{\operatorname{sen}(\alpha + \rho - \phi - \delta)} \quad (2.25)$$

A partir da equação (2.25) pode ser construído um gráfico como o da Figura 2.12, que relaciona o ângulo da superfície de ruptura com o empuxo ativo, interpolando-se uma curva que liga os pontos obtidos. O ponto máximo da curva de variação de E_a determina o valor do empuxo ativo que age sobre a estrutura e a posição da superfície de ruptura crítica (Figura 2.12).

O Método do equilíbrio limite visa determinar o empuxo ativo, E_a , a partir de algumas hipóteses básicas:

1. Assume-se a existência de uma superfície de ruptura plana;
2. A massa de solo ou rocha encontra-se em condições de ruptura generalizada iminente isto é, em um estado de equilíbrio limite;
3. Assume-se um critério de ruptura (em geral Mohr-Coulomb), o qual é satisfeito ao longo de toda a superfície de ruptura;

O ponto de aplicação do empuxo sobre a estrutura de arrimo é determinado através de uma reta paralela à superfície de ruptura mais crítica, passando pelo centro de gravidade da cunha crítica.

A teoria de Coulomb pode ser estendida para solos coesivos, utilizando as considerações do equilíbrio limite e introduzindo a parcela de adesão. Assume-se que trincas de tração possam se desenvolver até uma profundidade z_0 , a qual é estimada de acordo com a teoria de Rankine, como mostrado na seção anterior em 2.12. As superfícies potenciais de ruptura se desenvolvem conforme mostra a Figura 2.13. As forças atuantes na cunha ABCD são:

1. peso da cunha P ;
2. reação entre a parede e o solo (P), com inclinação δ ;
3. força devido a componente de adesão: $C_w = c_w \times EB$;
4. reação R no plano potencial de deslizamento, atuando a um ângulo ϕ ;
5. força no plano potencial de deslizamento devido a parcela de coesão $C = c \times BC$.

As direções de todas as componentes são conhecidas, assim como as magnitudes de P , C_w e C . Com o traçado do polígono de forças, determina-se o valor de E . Se a trinca for preenchida por água, esta parcela deve ser acrescida no polígono de forças.

Utilizando-se o método do equilíbrio limite, o empuxo é determinado através do equilíbrio de forças para cada superfície de ruptura calculada por tentativas até que se encontre a mais crítica. A cada uma dessas superfícies deve corresponder uma fenda de tração, pois a distribuição real destas fendas é aleatória, e a localização mais crítica é aquela que coincide com a superfície de ruptura mais crítica.

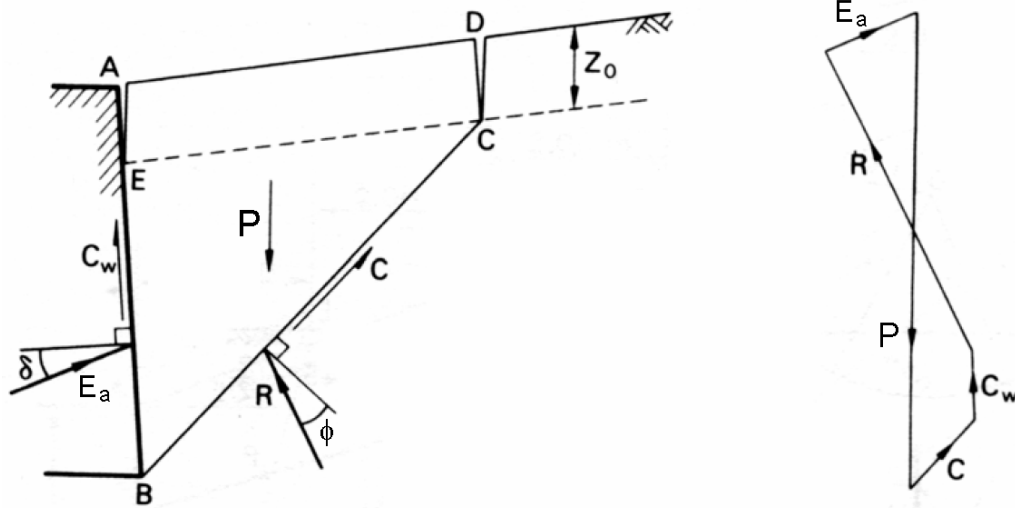


Figura 2. 13 - Cunha de Empuxo ativo definida por Coulomb para solos coesivos.

2. 4 Influência da percolação de água em maciços de solo

Segundo Barros (2005) outro caso bastante comum é a ocorrência de percolação d'água através do maciço arrimado. Isto acontece, por exemplo, quando o nível do lençol freático que se encontrava pouco abaixo da fundação da estrutura se eleva por ocasião da época das chuvas ou, ainda quando em estruturas parcialmente submersas, ocorre uma brusca redução do nível do curso d'água. Nestes casos há percolação d'água através do maciço na direção da estrutura de arrimo, o que faz aumentar o valor do empuxo sobre esta. Para que a água não fique retida atrás do muro, aumentando ainda mais o valor do empuxo, deve-se usar estruturas autodrenantes, como por exemplo, os gabiões, ou prover à estrutura de drenos e filtros que impeçam o carreamento das partículas do solo.

Para se analisar este tipo de problema deve-se determinar inicialmente a rede de fluxo formada como mostrado na figura 2.14.

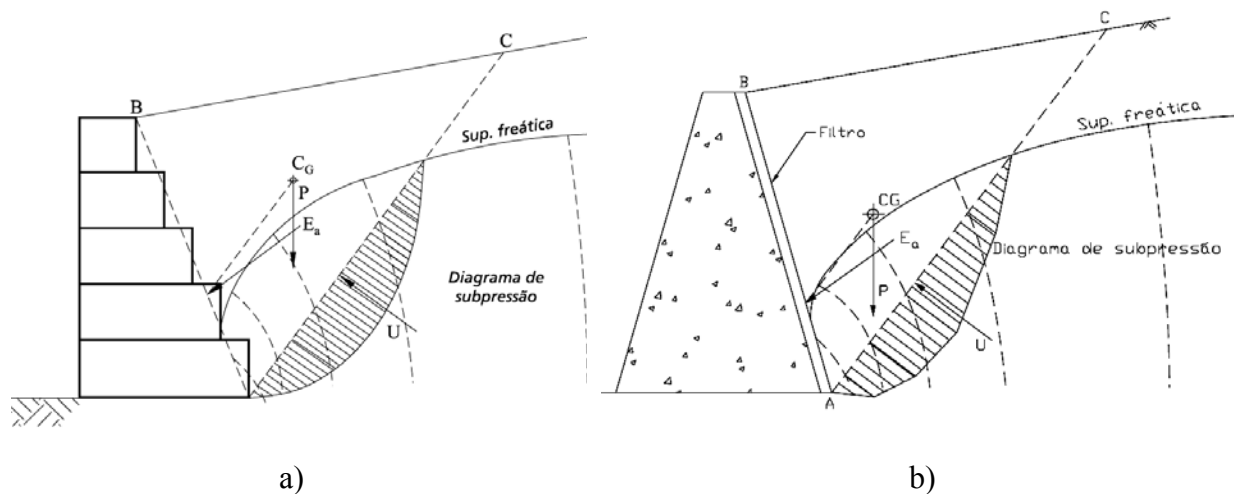


Figura 2. 14 - Rede de fluxo através do maciço arrimado. A) Muro de contenção em gabião, considerada autodrenante; b) Estrutura de contenção com dreno ao tardo (Barros, 2005).

As forças que atuam sobre a cunha de solo formada pela superfície de ruptura incluem o peso próprio desta (considerando o peso específico saturado γ_{sat} do solo) e a força U devido à resultante de poropressão que age sobre a superfície de escorregamento. Esta última é determinada a partir do diagrama de subpressões atuantes na superfície de ruptura (Figura 2.14). Esse diagrama é obtido através da determinação dos pontos de poropressão atuantes ao longo da superfície de ruptura.

Para cada uma das superfícies de ruptura analisadas traça-se o diagrama de subpressões que agem sobre ela e então se determina a força U devida à pressão da água ao longo da superfície de ruptura. O valor de U é dado pela área do diagrama de subpressão multiplicado pelo peso específico da água γ_w .

No cálculo do peso P de cada cunha deve-se utilizar o peso específico saturado γ_{sat} do solo para a parte da cunha que estiver abaixo da superfície freática.

2.4.1 Muros de contenção de face vertical com drenagem ao seu tardoz

Barros (2006) apresenta uma solução analítica para o problema de fluxo em muros de contenção de face vertical, obtendo os valores de poropressão dentro de uma massa de solo homogênea. Tal dedução permite traçar a rede de fluxo (Figura 2.15) e determinar a resultante de poropressão atuante ao longo de uma superfície de falha.

De maneira mais simplificada é possível obter o traçado gráfico de uma rede de fluxo segundo algumas hipóteses básicas. Estabelecem-se previamente as linhas tidas como equipotenciais e as linhas tidas como de fluxo e essas se desenham em intervalos constantes de tal maneira que o intervalo de potencial seja igual ao intervalo das funções de fluxo, sua interseção ocorre formando ângulos retos e a malha resultante forma um sistema de quadriláteros ou quadrados curvilíneos. Tal solução gráfica não apresenta boa precisão quanto ao seu resultado.

Uma vez que a poropressão é nula em todos os pontos ao longo do dreno vertical, o potencial total no dreno deve ser igual à carga geométrica. Se existir igual perda de carga entre sucessivas equipotenciais, essas equipotenciais devem ser espaçadas uniformemente ao longo do dreno (Figura 2.16).

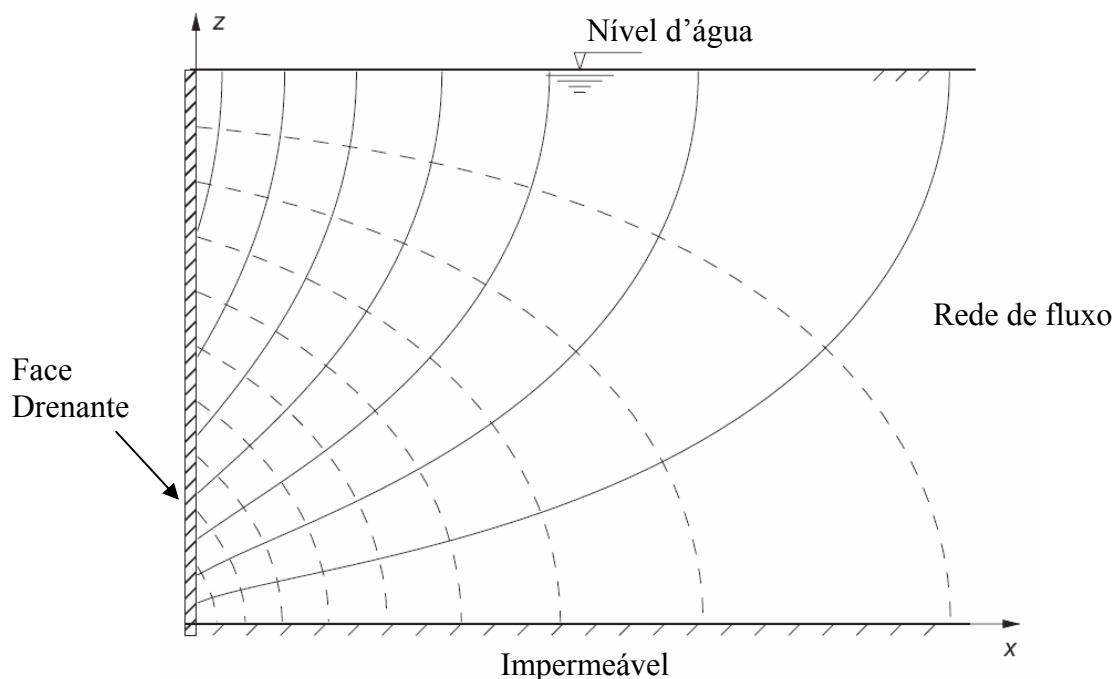


Figura 2. 15 - Muro de contenção vertical com formação de rede de fluxo (Barros, 2006).

Lambe (1979) apresenta um exemplo que ilustra a obtenção da força de poropressão, U , aplicada sobre uma superfície potencial de falha através da solução gráfica da rede de fluxo. Foi assumida uma superfície com 45 graus de inclinação, onde a Figura 2.17, juntamente com a tabela que a acompanha, mostra a distribuição de poropressão contra a superfície de falha adotada e o cálculo da resultante da força de poropressão, U , contra essa mesma superfície. A Figura 2.18 mostra o diagrama de forças e equação, derivada desse diagrama, para determinação do empuxo ativo. Para a superfície de falha a 45 graus, o empuxo calculado é de 148.8 kN por metro de muro. Os resultados para vários ângulos que representam possíveis superfícies potenciais de falha estão apresentados na Figura 2.19, onde o empuxo ativo máximo ocorre a aproximadamente 45 graus.

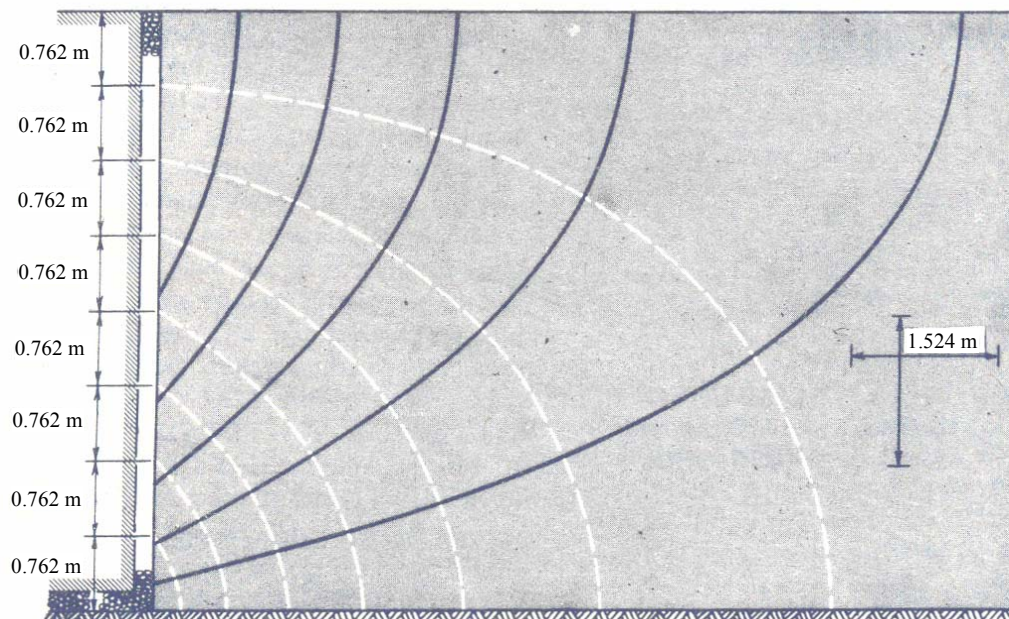
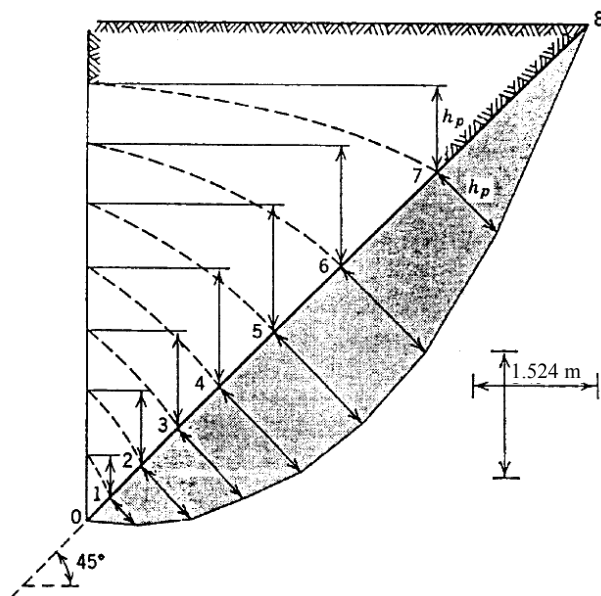


Figura 2. 16 - Rede de fluxo formada devido a uma chuva constante (Lambe, 1979).



Ponto	h_p (m)	ΔL (m)	$(h_p)_{med} \Delta L$
0	0		
1	0.457	0.366	0.084
2	0.915	0.518	0.355
3	1.189	0.640	0.673
4	1.463	0.701	0.930
5	1.555	0.945	1.426
6	1.494	1.159	1.767
7	1.067	1.677	2.147
8	0	2.591	1.382
			8.764 m²

Força de poropressão = $8.764 \text{ m}^2 \times 9.81 \text{ kN/m}^3 = 86.0 \text{ kN/m}$ de muro.

Figura 2. 17 - Determinação da força de poropressão para uma superfície com 45 graus de inclinação (Lambe, 1979).

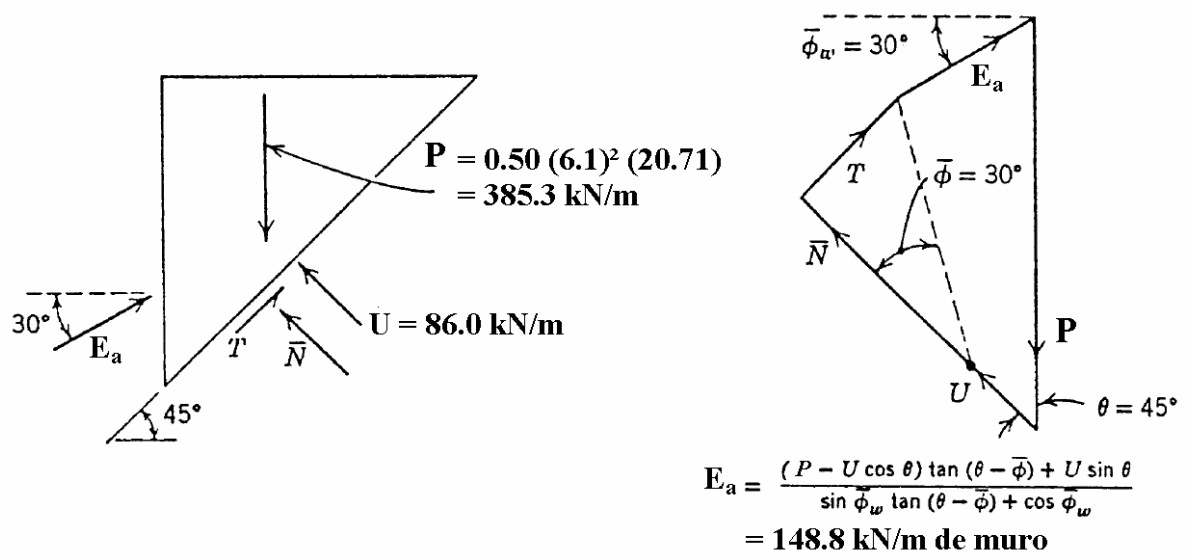


Figura 2. 18 - Diagrama de forças para determinação do empuxo ativo, considerando uma superfície de falha com 45 graus de inclinação (Lambe, 1979).

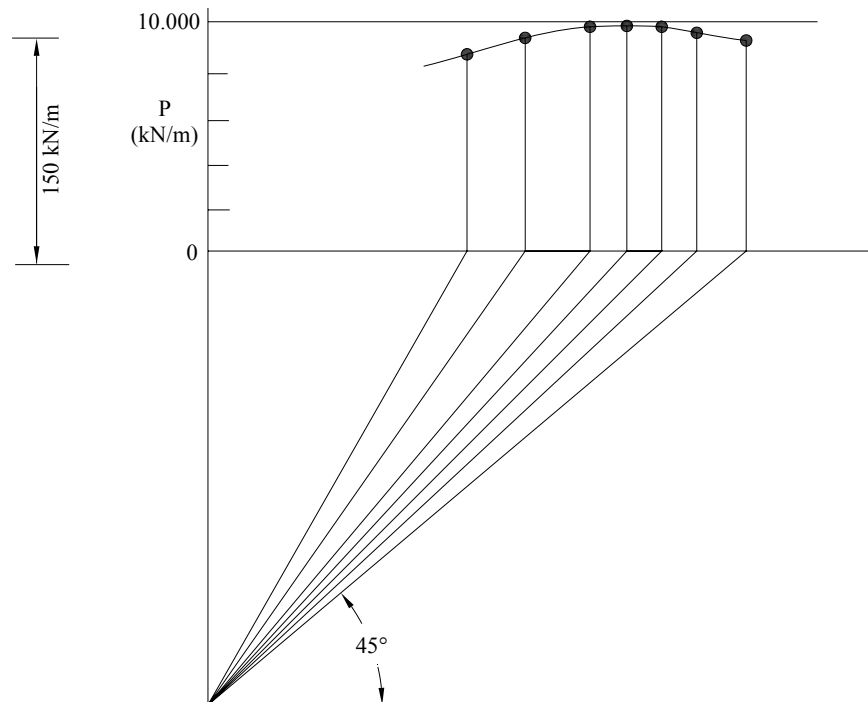


Figura 2. 19 - Gráfico que mostra os resultados para vários ângulos de superfícies potenciais de falha (Lambe, 1979).

Barros (2006) apresenta uma solução analítica para a mesma rede de fluxo considerando uma condição de fluxo constante sob um domínio definido por $x \geq 0$, $0 \leq z \leq H$ onde o solo é um meio isotrópico, homogêneo e saturado, cujo coeficiente de permeabilidade é denominado por k (Figura 2.20).

A solução analítica do problema consiste em determinar a distribuição do potencial total, $h(x, z)$ ao longo do domínio do fluxo. O nível d'água é mantido na superfície do terreno e dessa maneira o valor do potencial seja $h(x, H) = H$, enquanto ao longo da face frontal drenante $h(0, z) = z$. Como a superfície horizontal em $z = 0$ é uma camada impermeável, tem-se que, $\frac{\partial h(x, z)}{\partial z} = 0$.

Para que haja uma condição de fluxo contínuo a Lei de Darcy é válida, o que resulta na equação diferencial de Laplace (Harr, 1962), $\nabla^2 h(x, z) = 0$, a qual governa o problema de da distribuição potencial $h(x, z)$ através do domínio estabelecido.

Barros (2006) apresentou a solução final para o problema de fluxo, cujos valores de potencial para o domínio estabelecido anteriormente podem ser obtidos através da equação 2.26.

$$h(x, z) = H \left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} e^{-\frac{Mx}{H}} \cos \frac{Mz}{H} \right) \quad (2.26)$$

onde, H é a altura total do muro de contenção e $M = \frac{(2m+1)\pi}{2}$.

A poropressão em qualquer ponto internamente ao domínio estabelecido, ou seja, dentro da massa de solo contida é determinada pela equação 2.27.

$$u(x, z) = \gamma_w [h(x, z) - z] \quad (2.27)$$

onde γ_w é o peso específico da água.

É possível ainda obter a componente horizontal da velocidade de percolação ao longo da interface solo/estrutura, derivando a equação (2.26) e multiplicando o resultado obtido pelo coeficiente de permeabilidade k .

$$v_x(x, z)\Big|_{x=0} = -k \frac{\partial h(x, z)}{\partial x}\Big|_{x=0} = k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \cos \frac{Mz}{H} \quad (2.28)$$

Daí, é possível obter a vazão total do sistema,

$$Q = \int_0^H k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \cos \frac{Mz}{H} dz = \frac{8G}{\pi^2} kH \quad (2.29)$$

onde $G = 0.915966\dots$ é conhecido como constante de Catalan (Abramowitz & Stegun, 1972).

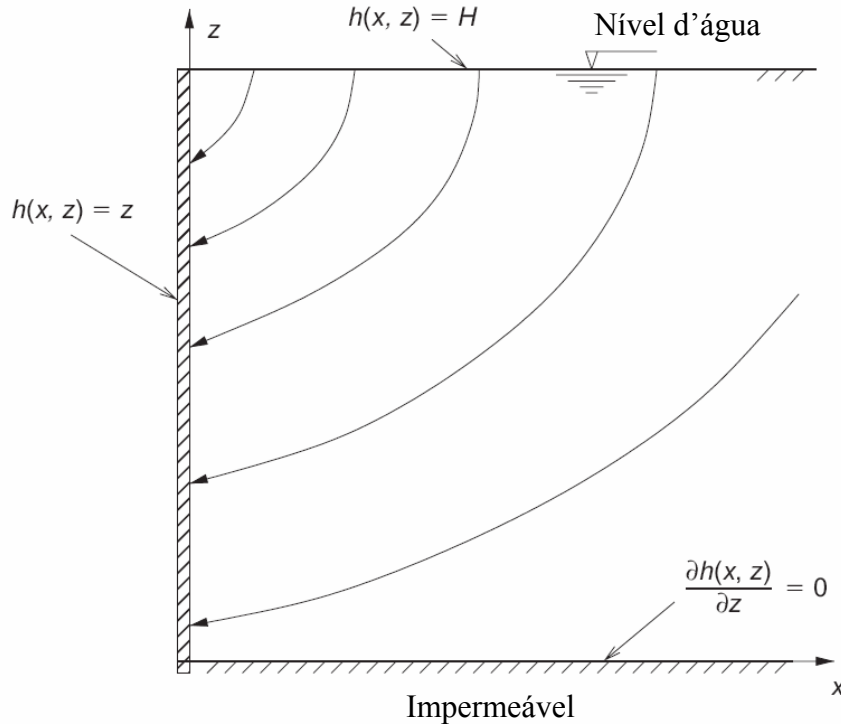


Figura 2. 20 - Descrição do problema de fluxo (Barros, 2006).

Segundo Barros (2006) se a interface solo/muro não possui atrito, o empuxo ativo atua na direção horizontal. Quando o movimento do muro é suficiente para mobilizar toda a resistência cisalhante na massa de solo (estado ativo), ocorre à formação da superfície de falha que é assumida como plana. A cunha de solo definida por essa superfície de falha é tratada como um corpo rígido e as forças atuantes ao longo de seu contorno são mostradas na Figura 2.21b.

De acordo com a Figura 2.21 o peso da cunha é dado por,

$$P = \frac{1}{2} \gamma_{sat} a H^2 \quad (2.30)$$

onde,

γ_{sat} é peso específico saturado,

H é a altura do muro,

θ é a inclinação da superfície de falha e $a = \cotg\theta$,

E_a é o empuxo ativo,

N é força normal

T é a força tangencial atuante sobre a superfície de ruptura.

A força de poropressão U é a resultante das poropressões atuantes ao longo da superfície de ruptura, dada por,

$$U = \int_0^H u(az, z) \sqrt{1+a^2} dz = \frac{1}{2} \gamma_w H^2 \bar{U}(a) \sqrt{1+a^2} \quad (2.31)$$

onde,

$$\bar{U}(a) = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4e^{-aM}}{(1+a^2)M^3} (a e^{aM} - a \cos M + \sin M) \quad (2.32)$$

Considerando o diagrama de corpo rígido, mostrado na Figura 2.21, expressa-se a condição de equilíbrio para o sistema de forças atuantes sobre a cunha de solo.

$$N = P \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + E_a \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} - U \quad (2.33)$$

$$T = fN = P \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} - E_a \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \quad (2.34)$$

onde $f = \tan \phi'$ é o coeficiente de atrito interno efetivo do solo.

Rearranjando as equações (2.33) e (2.34), obtém-se a equação (2.35) que determina o empuxo ativo P_a .

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma_{sat} H^2 \frac{a - a^2 f + g f \bar{U}(a)(1+a^2)}{a + f} \quad (2.35)$$

onde, $g = \gamma_w / \gamma_{sat} \approx 0.5$. O valor máximo de E_a é função de a que determina a superfície de ruptura crítica. Sendo assim, a equação (2.35), torna-se,

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma_{sat} H^2 K_{as} \quad (2.36)$$

onde K_{as} é o coeficiente de empuxo ativo com ação da superfície freática, dado por,

$$K_{as} = \max_{a>0} \frac{a - a^2 f + g f \bar{U}(a)(1+a^2)}{a + f} \quad (2.37)$$

Seguindo a proposta de Barros (2006) é possível calcular a força de poropressão U , para um muro vertical, cujo domínio respeita as condições de contorno para o fluxo como comentado anteriormente. Tomando como referência a Figura 2.21, calcula-se o peso da cunha que deve ser induzida pela superfície potencial de falha.

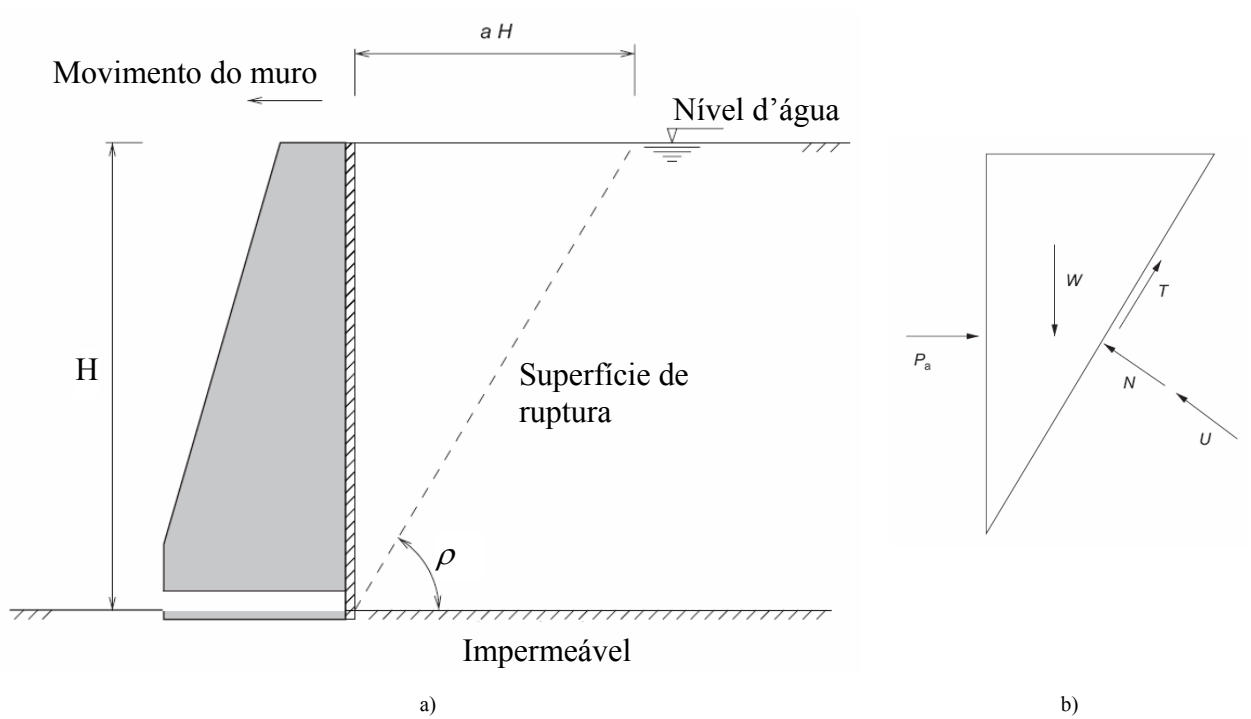


Figura 2. 21 - Estrutura de contenção vertical. a) cunha que representa a massa de solo induzida pela superfície potencial de falha; b) diagrama de corpo rígido que representa as forças atuantes na cunha de solo (Barros, 2006).

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS DE POTENCIAL

3.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos do método dos elementos de contorno aplicados à solução de problemas de potencial.

O Método dos elementos de contorno - MEC (Boundary Element Method – BEM) é um método computacional desenvolvido para solucionar sistemas de equações diferenciais, dispostas na forma de integral. É aplicado em áreas da engenharia que apresentam circunstâncias tais que, o domínio de estudo é infinito ou semi-infinito, casos que, comparados aos métodos dos elementos finitos, apresentam melhor desempenho.

A resolução de problemas formulados a partir de uma equação integral de contorno é obtida por uma aproximação que normalmente é definida por um conjunto de valores em pontos discretos localizados sobre o contorno da geometria do modelo analisado.

Segundo Noronha (2005) na resolução de problemas de potencial, o método dos elementos de contorno faz uso de equações integrais de contorno, tornando fundamental o conhecimento dos valores de potencial u e do fluxo normal q para um ponto genérico situado no contorno da geometria do modelo. A representação exata do contorno e das variáveis associadas do problema é inviável na prática, pois envolveria o conhecimento de valores em um número infinito de pontos. A estratégia adotada pelo MEC para resolver esta situação consiste em representar o contorno e os valores de potencial e fluxo de forma aproximada através de um número finito de valores nodais associados a um conjunto de pontos sobre o contorno. As aproximações da geometria e das variáveis de estado têm como base uma discretização do contorno utilizando um conjunto finito de nós e de elementos.

Ainda segundo Noronha (2005) na representação discretizada, o contorno fica dividido em um número de segmentos correspondentes aos elementos de contorno. A aproximação da geometria e das variáveis é feita através da interpolação sobre os elementos de contorno, que podem possuir um ou mais nós de acordo com o seu grau de interpolação.

O MEC permite representar um problema considerando apenas as variáveis no contorno do modelo proposto, o que além de reduzir o número de variáveis envolvidas, permite simplificar o procedimento de geração e discretização do modelo. Avaliando-se corretamente as integrais numéricas é possível obter alta precisão na utilização do MEC, isso porque as aproximações adotadas pelo método são introduzidas apenas no contorno discretizado.

A análise pelo MEC é efetuada basicamente em duas etapas. A primeira obtém os resultados de potencial e fluxo para o contorno discretizado e a segunda permite a obtenção dos resultados de potencial e fluxo para qualquer ponto do domínio. Tal procedimento torna o MEC mais flexível e com melhor desempenho que outros métodos de discretização de domínio.

3.1.2 Equação Integral básica

O texto a partir desse item foi extraído em grande parte de Brebbia e Dominguez (1989), a fim de explicitar os conceitos a serem utilizados nesse trabalho.

A equação integral de contorno requerida pelo método pode ser deduzida de uma maneira simples baseada nas considerações de resíduos ponderados, teorema da reciprocidade de Betti, Terceira identidade de Green ou princípios fundamentais tal como trabalho virtual. A vantagem de usar resíduos ponderados é sua generalidade, permitindo a extensão do método para resolver equações diferenciais parciais mais complexas. Isso pode também ser usado para relacionar elementos de contorno a outras técnicas numéricas e pode ser facilmente compreendida por engenheiros.

Considerando a busca para solução da equação de Laplace em um domínio Ω (duas ou três dimensões), Figura 3.1.

$$\nabla^2 u = 0 \text{ em } \Omega \quad (3.1)$$

com as seguintes condições de contorno Γ :

- Condição Essencial do tipo $u = \bar{u}$ em Γ_1 ;
 - Condição Natural onde $q = \partial u / \partial n = \bar{q}$ em Γ_2 ;
- (3.2)

onde n é a normal ao contorno, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ e as hachuras indicam que os valores são conhecidos. As condições de contorno se tornam mais complexas quando apresenta acima de duas combinações, ou seja,

$$\alpha u + \beta q = \gamma \quad (3.3)$$

onde α , β e γ são parâmetros conhecidos, podem ser facilmente incluídas, mas não serão consideradas agora por causa da simplicidade desejada.

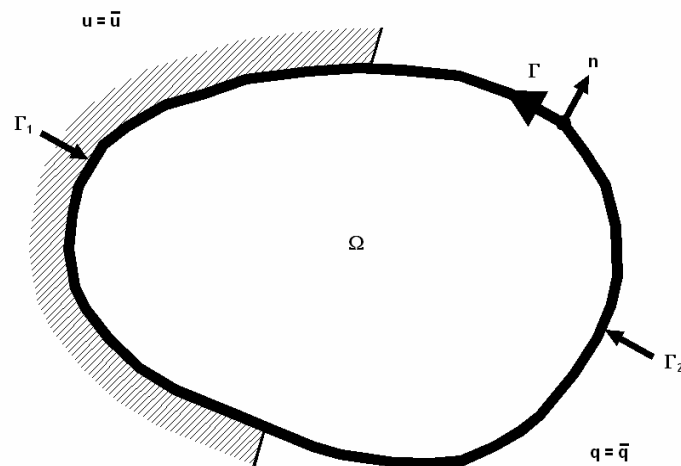


Figura 3. 1 - Definições geométricas para equação de Laplace (Brebbia e Domínguez, 1989).

A princípio o erro introduzido na equação anterior se os valores exatos (porém desconhecidos) de u e q forem substituídos por uma solução aproximada podem ser minimizados ortogonalizando-os em relação a uma função ponderadora u^* , com derivadas no contorno $q^* = \partial u^* / \partial n$.

Em outras palavras se R são os resíduos, em geral, pode-se escrever que,

$$R = \nabla^2 u \neq 0 \quad (3.4)$$

$$R_1 = u - \bar{u} \neq 0 \quad (3.5)$$

$$R_2 = q - \bar{q} \neq 0 \quad (3.6)$$

onde u e q são valores aproximados. (O fato de um ou mais dos resíduos poder ser igual à zero não prejudica a generalidade do argumento).

$$\int_{\Omega} R u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} R_2 u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} R_1 q^* d\Gamma \quad (3.7)$$

ou

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (3.8)$$

Integrando por partes o lado esquerdo dessa equação, obtém-se,

$$-\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \right\} d\Omega = -\int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \quad (3.9)$$

onde $k = 1, 2, 3$ e o somatório de Einstein para índices repetidos foram usados. Integrando por partes o lado esquerdo da equação 3.9, obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) \cdot u \cdot d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \quad (3.10)$$

A equação 3.10 é importante como um ponto de partida para as aplicações do Método dos elementos de contorno. A meta agora é apresentar a equação 3.10 dentro de uma equação integral de contorno. Isso pode ser feito usando um tipo especial de função ponderada u^* chamada *Solução Fundamental*.

3.1.3 Solução Fundamental

A solução fundamental u^* satisfaz a **equação de Laplace** e representa o campo gerado pela unidade de carga concentrada atuando no ponto i . O efeito dessa carga é propagado do ponto i até o infinito sem qualquer consideração de condições de contorno. Por causa disso a solução pode ser escrita como:

$$\nabla^2 u^* + \Delta^i = 0 \quad (3.11)$$

onde Δ^i representa uma função Delta de Dirac que tende a infinito no ponto $x = x^i$ e é igual a zero em qualquer lugar. A integral de Δ^i é igual a 1. O uso da função Delta de Dirac é uma maneira elegante de representar a unidade de cargas concentradas como forças quando se trabalha com equações diferenciais.

A integral de uma função Delta de Dirac multiplicada por qualquer outra função é igual ao valor da última no ponto x^i . Consequentemente:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) \cdot u \cdot d\Omega = \int_{\Omega} (-\Delta^i) \cdot u \cdot d\Omega = -u^i \quad (3.12)$$

A equação 3.10 agora pode ser escrita como,

$$u^i + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma \quad (3.13)$$

É necessário lembrar que a equação 3.13 se aplica para uma carga concentrada em “ i ” e consequentemente os valores de u^* e q^* são aqueles que correspondem à posição particular de carga. Para cada outra posição de x^i haverá uma nova equação integral.

Considerando agora uma função $G(x,y)$, cuja solução fundamental para problemas de potencial satisfaz a equação 3.11.

$$\nabla^2 G(x,y) + \delta(x,y) = 0, \quad \forall x,y \in R^2 / R^3, \quad (3.14)$$

onde as derivadas são tomadas no ponto y , isto é, $\nabla^2 = \partial^2(\cdot)/\partial y_i \partial y_i$, e R^2 e R^3 indicam os espaços bi e tridimensionais, respectivamente. A função $\delta(x,y)$, Δ^i de Dirac, representa uma fonte unitária no ponto fonte x , e $G(x,y)$ representa a resposta no ponto campo y devido ao fonte.

A solução fundamental $G(x,y)$ é dada por:

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right), & \text{para duas dimensões} \\ \frac{1}{4\pi r}, & \text{para três dimensões} \end{cases} \quad (3.15)$$

onde r é a distância entre o ponto fonte x e o ponto campo y , e sua derivada normal é:

$$F(x,y) \equiv \frac{\partial G(x,y)}{\partial n(y)} = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi r} r_{,k} n_k(y), & \text{para duas dimensões} \\ \frac{1}{4\pi r^2} r_{,k} n_k(y), & \text{para três dimensões} \end{cases} \quad (3.16)$$

com $r_{,k} = \partial r / \partial y_k = (y_k - x_k)/r$. A solução fundamental satisfaz a seguinte identidade integral:

$$\begin{array}{ll} \text{Primeira} & \int_S F(x, y) dS(y) = \begin{cases} -1, & \forall x \in V \\ 0, & \forall x \in E \end{cases} \\ \text{identidade} & \end{array} \quad (3.17)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Segunda} & \int_S \frac{\partial F(x, y)}{\partial n(x)} dS(y) = 0, \quad \forall x \in V \cup E \\ \text{identidade} & \end{array} \quad (3.18)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Terceira identidade} & \int_S \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(x)} n_k(y) dS(y) - \int_S \frac{\partial F(x, y)}{\partial n(x)} (y_k - x_k) dS(y) = \begin{cases} n_k(x), & \forall x \in V \\ 0, & \forall x \in E \end{cases} \end{array} \quad (3.19)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Quarta identidade} & \int_S F(x, y) (y_k - x_k) dS(y) - \int_S G(x, y) n_k(y) dS(y) = 0, \quad \forall x \in V \cup E \end{array} \quad (3.20)$$

onde S pode ser um contorno fechado arbitrário (para duas dimensões) ou superfície (para três dimensões), V é o domínio inserido em S , e E é o domínio infinito fora de S . É possível obter essas identidades prontamente pela equação 3.14 sobre o domínio V e invocando o teorema de Gauss.

3.1.4 Descrição física do problema

Segundo Beer et al. (2008) além de especificar as condições geométricas do problema é importante definir a resposta física do problema de maneira matemática. Isso é possível, discretizando-se uma porção infinitesimal do sólido a ser estudado. Isso facilita o entendimento do problema além de ajudar a definir de maneira clara as condições de contorno segundo a equação diferencial adotada.

Para o problema de potencial, tem-se que o fluxo por unidade de área q é relacionado ao potencial u , através da seguinte equação:

$$q = -D\nabla u \quad (3.21)$$

onde o sinal negativo é devido ao fato de que o fluxo ocorre sempre do maior para o menor potencial. O vetor fluxo é definido como:

$$q = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

o tensor D, que representa a permeabilidade, é dado por:

$$D = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

onde k_{xx} , k_{xy} , k_{xz} , etc., são permeabilidades medidas em [m/s]. Os coeficientes D representam o fluxo por unidade de gradiente de potencial.

O operador diferencial ∇ para problemas tridimensionais de potencial é definido como:

$$\nabla = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

e para problemas bidimensionais:

$$\nabla = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

A condição de conservação de energia indica que o fluxo que sai deve ser igual ao que entra, mais um fluxo por unidade de volume, $\hat{Q}$, gerado por uma fonte interna.

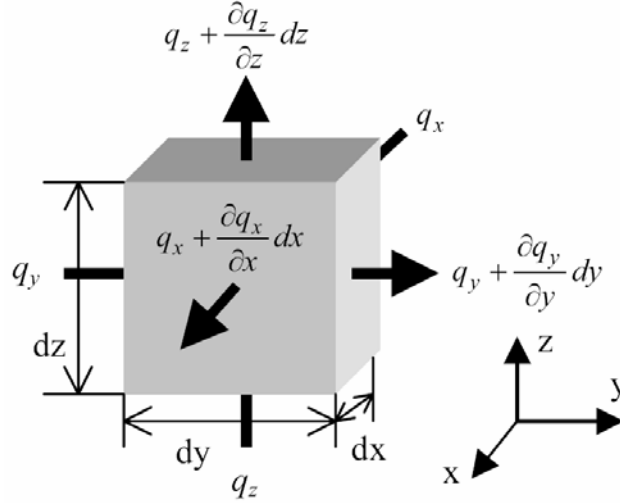


Figura 3. 2 - Fluxo um cubo infinitesimal (Beer et al, 2008).

Para o cubo infinitesimal da figura 3.2, tem-se que:

$$\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dydz + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) dx dy = q_x dydz + q_y dx dz + q_z dx dy + \hat{Q} dx dy dz$$

cancelando-se os termos, tem-se

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} - \hat{Q} = 0 \quad (3.26)$$

e considerando a lei de Darcy para materiais isotrópicos, ou seja, $k_{xx} = k_{yy} = k_{zz} = k$ e $k_{xy} = k_{xz} = k_{yz} = 0$, obtém-se a equação diferencial governante na qual se busca a solução fundamental.

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \hat{Q} = 0 \quad (3.27)$$

A solução fundamental para esse problema já foi mostrada na seção anterior, onde a partir de um ponto fonte F de magnitude unitária colocado em um domínio infinito homogêneo ocorre a geração de fluxo e em nenhum outro lugar além do ponto F .

Como comentado em 3.1.3 a função que descreve essa variação se refere a função Delta de Dirac que tende a infinito no ponto $x = x^i$ e é igual a zero em qualquer outro lugar. A integral de Δ^i , portanto é igual a 1. Portanto, é possível dizer que,

$$\begin{aligned} \delta(F - G) &= 0, \text{ onde } F \neq G \\ \int_{\Omega} \delta(F - G) d\Omega &= 1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde G é um ponto qualquer no domínio Ω . Devido a uma fonte unitária no ponto F o potencial G pode ser escrito de maneira tridimensional como descrito em 3.15.

$$U(F, G) = \frac{1}{4\pi rk} \quad (3.29)$$

onde $r = \sqrt{(x_G - x_F)^2 + (y_G - y_F)^2 + (z_G - z_F)^2}$ é a distância entre o ponto fonte F e o ponto campo G (Figura 3.3).

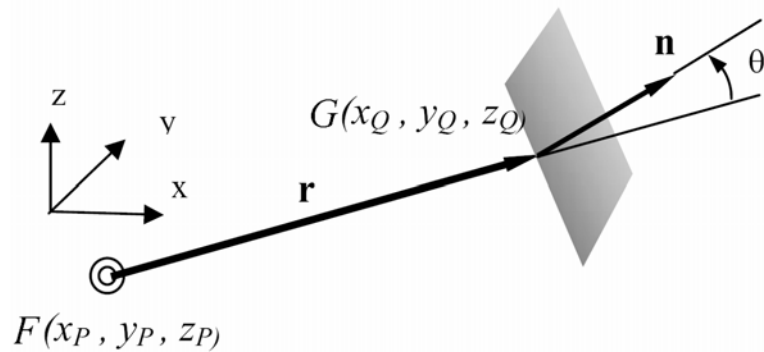


Figura 3. 3 - Potencial aplicado em um ponto G a partir de um ponto fonte F (Beer et al, 2008).

3.2 Formulação da equação integral de contorno

Para derivar a equação integral de contorno correspondente a equação diferencial parcial (3.11), aplica-se a segunda identidade de Green no Delta de Dirac,

$$\int_V [u \nabla^2 v - v \nabla^2 u] dV = \int_S \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS \quad (3.30)$$

tomando $v(y) = u(y)$, que satisfaz a equação 3.11, e $u(y) = G(x, y)$, que satisfaz a equação 3.14, Tem-se, da equação 3.30,

$$\int_V [G(x, y) \nabla^2 u(y) - u(y) \nabla^2 G(x, y)] dV(y) = \int_V \left[G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} - u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} \right] dS(y)$$

Aplicando as equações 3.11, 3.14 e o Delta de Dirac, obtém-se,

$$u(x) = \int_S [G(x, y) q(y) - F(x, y) u(y)] dS(y) + \int_V G(x, y) f(y) dV(y), \quad \forall x \in V \quad (3.31)$$

onde $q = \partial u / \partial n$.

A equação 3.31 é a representação integral da solução u dentro do domínio V para a equação 3.11. Uma vez que os valores de contorno de u e q sejam conhecidos em S , a equação 3.31 pode ser aplicada para calcular u em qualquer lugar em V .

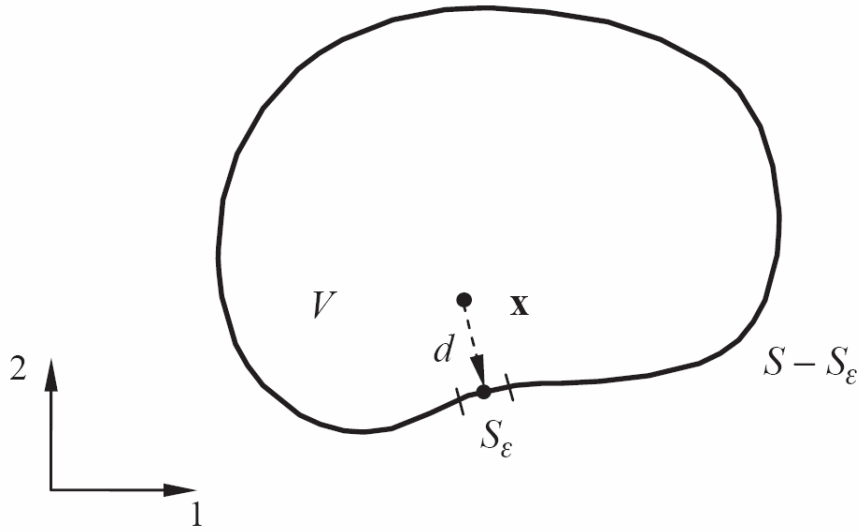


Figura 3. 4 - Ponto x se aproximando do trecho S_ε (Liu, 2009).

Para encontrar os valores das incógnitas de u e q que pertencem ao contorno em S , deixa-se x tender a S para obter uma equação integral de contorno da equação 3.31. Para fazer isso, considera-se o seguinte limite,

$$\lim_{x \rightarrow S} u(x) = \lim_{x \rightarrow S} \left\{ \int_S [G(x, y)q(y) - F(x, y)u(y)] dS(y) + \int_V G(x, y)f(y) dV(y) \right\} \quad (3.32)$$

Utilizando o caso 2D para calcular como se comporta os limites na equação 3.32, divide-se o contorno S em duas partes $S - S_\varepsilon$ e S_ε , onde S_ε é um pequeno segmento de comprimento 2ε centralizado ao redor do ponto no qual x abordará (Figura 3.4)

A primeira integral do lado direito da equação 3.32 é avaliada como,

$$\lim_{x \rightarrow S} \int_S G(x, y)q(y) dS(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S - S_\varepsilon} G(x, y)q(y) dS(y) + \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{S_\varepsilon} G(x, y) dS(y) q(y_\varepsilon),$$

onde y_ε é um ponto em S_ε . Quando ε é pequeno, S_ε pode ser considerado como um segmento reto (assumindo S como um contorno suave); a integração analítica de G neste segmento de reta está

apresentada no Apêndice A, equação A.5. Quando a equação A.5 for usada, o limite desta integral sai, tornando-se:

$$\lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{S_\varepsilon} G(x, y) dS(y) q(y_\varepsilon) = 0,$$

então,

$$\lim_{x \rightarrow S} \int_S G(x, y) q(y) dS(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S \rightarrow S_\varepsilon} G(x, y) q(y) dS(y) = \int_S G(x, y) q(y) dS(y) \quad (3.33)$$

onde a última integral é avaliada com a definição de um valor principal de Cauchy. De maneira análoga, a segunda integral do lado direito da equação 3.32 é avaliada como,

$$\lim_{x \rightarrow S} \int_S F(x, y) u(y) dS(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S \rightarrow S_\varepsilon} F(x, y) u(y) dS(y) + \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{S_\varepsilon} F(x, y) dS(y) u(y_\varepsilon)$$

Aplicado o resultado na equação A.6 do Apêndice A, tem-se,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{S_\varepsilon} F(x, y) dS(y) u(y_\varepsilon) &= -\frac{1}{2} u(x), \quad x \in S, \\ \lim_{x \rightarrow S} \int_S F(x, y) u(y) dS(y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S \rightarrow S_\varepsilon} F(x, y) u(y) dS(y) - \frac{1}{2} u(x) = \\ &= \int_S F(x, y) u(y) dS(y) - \frac{1}{2} u(x), \quad x \in S \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde a última integral é entendida como um valor principal de Cauchy que é avaliado em $S - S_\varepsilon$ onde $\varepsilon \rightarrow 0$. A terceira integral do lado direito da equação 3.32, torna-se,

$$\lim_{x \rightarrow S} \int_V G(x, y) f(y) dV(y) = \int_V G(x, y) f(y) dV(y) \quad (3.35)$$

Substituindo as equações 3.33, 3.35 em 3.32 e combinando os termos livre, alcança-se a seguinte equação integral de contorno,

$$c(x)u(x) = \int_S [G(x,y)q(y) - F(x,y)u(y)] dS(y) + \int_V G(x,y)f(y) dV(y), \quad \forall x \in S \quad (3.36)$$

onde $c(x)$ é um coeficiente igual 1/2 se S é suave ao redor x .

3.2.1 Discretização das integrais de contorno usando elementos constantes

Aplicam-se os elementos de contorno para discretizar as equações integrais do contorno a fim de encontrar numericamente as variáveis desconhecidas do contorno. Assumindo $f=0$ na equação 3.36 é possível resolver o problema em duas dimensões usando elementos constantes. Primeiramente, divide-se o contorno S em segmentos retos (elementos) ΔS_j e coloca-se um nó em cada elemento (Figura 3.5). O número total de elementos é M , e o número total de nós é N . Como o contorno está sendo discretizado em elementos constantes, $M = N$. Ao colocar o ponto fonte x no nó i , nota-se que, $u(y) = u_j$ e $q(y) = q_j$, no elemento ΔS_j .

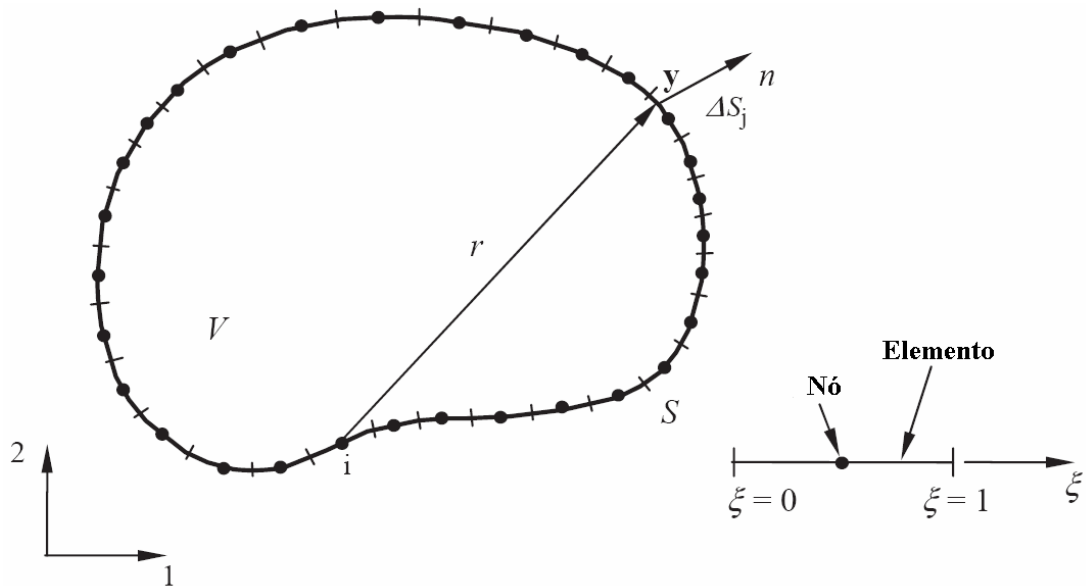


Figura 3. 5 - Discretização do contorno usando elementos constantes (Liu, 2009).

onde u_j e q_j ($j = 1, 2, \dots, N$) são os valores nos nós de ϕ e q , respectivamente, no elemento ΔS_j para elementos constantes. Daí, a equação integral de contorno se torna,

$$\frac{1}{2}u_i = \sum_{j=1}^N \int_{\Delta S_j} [G_i q_j - F_i u_j] dS = \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Delta S_j} G_i dS q_j - \int_{\Delta S_j} F_i dS u_j \right] \quad (3.37)$$

onde G_i e F_i são as funções principais do problema (definidas analiticamente no Apêndice A) com o ponto fonte x colocado no nó i . Discretizando a equação 3.36 para o nó i , obtém-se,

$$\frac{1}{2}u_i = \sum_{j=1}^N [g_{ij} q_j - f_{ij} u_i], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.38)$$

onde os coeficientes são dados por,

$$g_{ij} = \int_{\Delta S_j} G_i dS, \quad f_{ij} = \int_{\Delta S_j} F_i dS, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.39)$$

As integrais anteriores podem ser avaliadas analiticamente quando $i = j$ ou $i \neq j$ (ver Apêndice A). Na forma matricial a equação 3.38 pode ser escrita como,

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1} & f_{N2} & \cdots & f_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

onde $f_{ij} = f_{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ij}$. De maneira a criar um sistema de equações para determinar as incógnitas do problema rearranjando a matriz representada em 3.40.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{Bmatrix}, \quad \text{ou} \quad A\lambda = b \quad (3.41)$$

onde A é a Matriz coeficiente, λ é o vetor incógnita (com u ou q variável em cada nó), e b é o vetor que ordena os valores conhecidos. A solução do sistema determinado pela equação 3.41 pode ser obtida através do método de eliminação de Gauss. Dessa forma é possível obter os valores incógnitos de u e de q ao longo do contorno.

3.2.2 Discretização das integrais de contorno usando elementos lineares

Para discretização do contorno usando elementos lineares (Figura 3.6), cada elemento deve ser associado a dois nós colocados nas suas extremidades. Considera-se que o elemento é reto e que os valores apontados nos nós variam linearmente dentro do elemento.

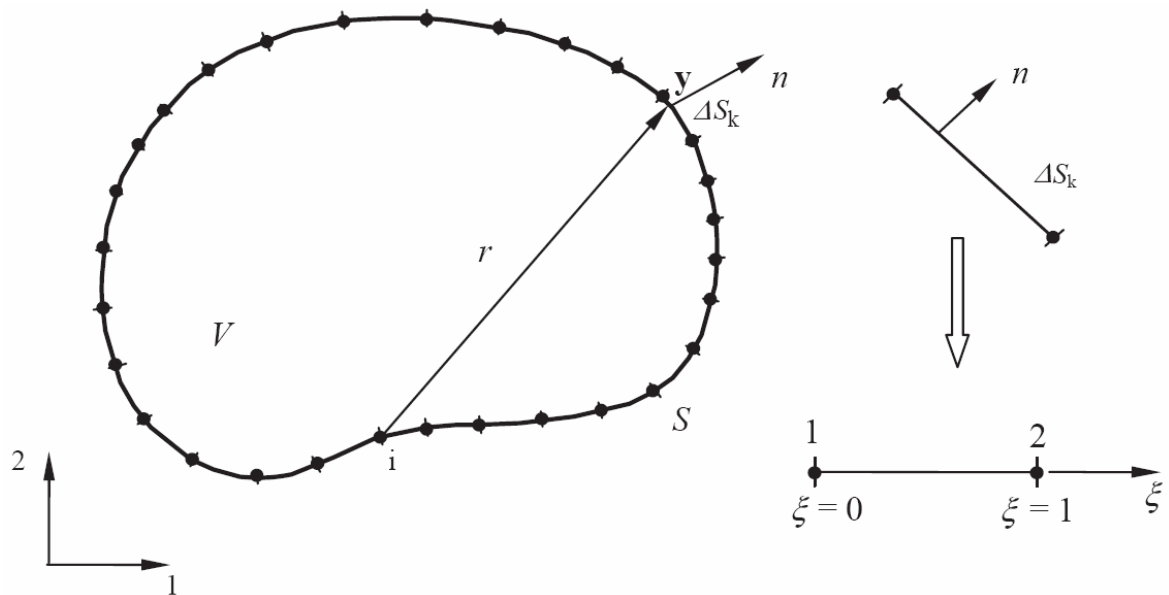


Figura 3. 6 - Discretização do contorno S usando elementos lineares (Liu, 2009).

Duas funções de forma são introduzidas para representar a função sobre um elemento. Por exemplo, no elemento ΔS_k ($k = 1, 2, 3, \dots, M$, onde M é número total de elementos), daí tem-se:

$$u(y) = u(\xi) = \sum_{\alpha=1}^2 N_{\alpha}(\xi) u^{\alpha} \quad (3.42)$$

$$q(y) = q(\xi) = \sum_{\alpha=1}^2 N_{\alpha}(\xi) q^{\alpha} \quad (3.43)$$

onde u^1, u^2 e q^1, q^2 são os valores nodais de u e q nos nós 1 e 2 respectivamente; ξ é a coordenada local definida no elemento e $N_1(\xi)$ e $N_2(\xi)$ são funções lineares de forma dadas por,

$$N_1(\xi) = 1 - \xi \quad \text{e} \quad N_2(\xi) = \xi \quad (3.44)$$

colocando o ponto fonte, x no nó i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$), tem-se,

$$\begin{aligned} c_i u_i &= \sum_{k=1}^M \int_{\Delta S_k} [G_i q - F_i u] dS \\ &= \sum_{k=1}^M \int_{\Delta S_k} \left[G_i \sum_{\alpha=1}^2 N_{\alpha} q^{\alpha} \right] dS - \sum_{k=1}^M \int_{\Delta S_k} \left[F_i \sum_{\alpha=1}^2 N_{\alpha} u^{\alpha} \right] dS \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{\alpha=1}^2 \left[\int_{\Delta S_k} G_i N_{\alpha} dS \right] q^{\alpha} - \sum_{k=1}^M \sum_{\alpha=1}^2 \left[\int_{\Delta S_k} F_i N_{\alpha} dS \right] u^{\alpha} \end{aligned} \quad (3.45)$$

ou seja,

$$c_i u_i = \sum_{k=1}^M \sum_{\alpha=1}^2 g_{ik}^{\alpha} q^{\alpha} - \sum_{k=1}^M \sum_{\alpha=1}^2 f_{ik}^{\alpha} u^{\alpha} \quad (3.46)$$

onde,

$$g_{ik}^{\alpha} = \int_{\Delta S_k} G_i N_{\alpha} dS, \quad f_{ik}^{\alpha} = \int_{\Delta S_k} F_i N_{\alpha} dS, \quad (3.47)$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, N$ (número de nós), $k = 1, 2, 3, \dots, M$ (número de elementos) e $\alpha = 1$ e 2 (número de nós locais em cada elemento). Rearranjando os termos de acordo com os nós globais, obtém-se da equação 3.46,

$$c_i u_i = \sum_{j=1}^N g_{ij} q_j - \sum_{j=1}^N f_{ij} u_j \quad (3.48)$$

onde g_{ij} e f_{ij} são somatórias das integrais g_{ik}^α e f_{ik}^α nos elementos em torno do nó j , respectivamente. Consequentemente, tem-se um sistema de equações similar ao da equação 3.38 e a forma matricial é idêntica a equação 3.40, onde $f_{ij} = f_{ij} + c_i \delta_{ij}$.

Em geral, o esquema de integração numérica precisa ser usado para avaliar os coeficientes na equação 3.40 usando as equações em 3.47. Por exemplo, para os termos fora da diagonal principal ($i \neq j$), tem-se que,

$$g_{ik}^\alpha = \int_{\Delta S_k} G_i N_\alpha dS = \int_0^1 G_i[x, y(\xi)] N_\alpha(\xi) |J| d\xi \quad (3.49)$$

onde a coordenada global y está relacionada a coordenada local por

$$y_l(\xi) = \sum_{\alpha=1}^2 N_\alpha(\xi) y_l^\alpha, \quad \text{para} \quad l = 1, 2$$

com y_l^α sendo o valor de y_l no nó, e

$$dS = \sqrt{\left(\frac{dy_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{d\xi}\right)^2} d\xi = |J| d\xi, \quad \text{onde} \quad |J| = \sqrt{\left(\frac{dy_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{d\xi}\right)^2}$$

é o jacobiano da transformação de coordenadas. A integral no lado direito da equação 3.49 pode ser avaliada pelo método da quadratura de Gauss.

O método da quadratura de Gauss é um dos mais utilizados para solucionar problemas de integrações numéricas. Neste método os pontos não são mais escolhidos pelo usuário, mas seguem um critério bem definido, com o objetivo de fornecer resultados exatos para polinômios escolhidos.

As integrais podem ser escritas como,

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) + E_n \quad (3.50)$$

onde n é o número de pontos de integração, ξ_i é a coordenada do ponto i de integração, w_i o fator peso associado ao número de pontos e E_n é o erro ou resíduo,

$$E_n = \frac{2^{n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n!)]^3} \frac{d^{2n} f(\xi)}{d\xi^{2n}}, \quad (-1 < \xi < 1) \quad (3.51)$$

A equação (3.50) é baseada na representação de $f(\xi)$ por meio do polinômio de Legendre $P_n(\xi)$. O valor de ξ_i é a coordenada em um ponto i onde P_n é zero e para o qual os pesos são dados por,

$$w_i = \frac{2}{(1 - \xi_i^2) \left[\frac{dP_n(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_i}^2} \quad (3.52)$$

Os valores ξ_i e w_i estão listados na tabela 3.1, onde os valores de ξ_i são simétricos com respeito à $\xi = 0$ e w_i simétrico para o mesmo valor. Para esse trabalho serão utilizados 10 pontos de integração.

Tabela 3.1 – Valores de ξ e w para um número n de pontos ($n = 2, 3 \dots 10$)

$\pm \xi_i$	w_i	$\pm \xi_i$	w_i
n = 2		n = 8	
0.577350291	1	0.1834346424	0.3626837833
		0.5255324099	0.3137066458
		0.7966664774	0.2223810344
		0.9602898564	0.1012285362
n = 3		n = 9	
0	0.8888888888	0	0.3302393550
0.7745966692	0.5555555555	0.3242534234	0.3123470770
		0.6133714327	0.2606106964
		0.8360311073	0.1806481606
		0.9681602395	0.0812743883
n = 4		n = 10	
0.3399810435	0.6521451548	0.1488743389	0.2955242247
0.8611363115	0.3478548451	0.4333953941	0.2692667193
		0.6794095682	0.2190863625
		0.8650633666	0.1494513491
		0.9739065285	0.0666713443
n = 5			
0	0.5688888888		
0.5384693101	0.4786286704		
0.9061798459	0.2369268850		
n = 6			
0.2386191860	0.4679139345		
0.6612093864	0.3607615730		
0.9324695142	0.1713244923		
n = 7			
0	0.4179591836		
0.4058451513	0.3818300505		
0.7415311855	0.2797053914		
0.9491079123	0.1294849661		

Para os termos na diagonal principal, é possível avaliar os coeficientes analiticamente usando a definição do valor principal de Cauchy. Os resultados são:

$$g_{ii} = \frac{L_a}{8\pi} \left[3 + 2 \log \left(\frac{1}{L_a} \right) \right] + \frac{L_a}{8\pi} \left[3 + 2 \log \left(\frac{1}{L_b} \right) \right], \quad f_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.53)$$

onde L_a e L_b são os comprimentos dos dois elementos antes e depois do nó i . Para o coeficiente f_{ii} , existe um modo simples de calcular seus valores. Suponha que haja um campo de potencial uniforme, com $\phi = 1$ e $q = 0$ em qualquer lugar. Então, a partir da equação 3.40 se obtém,

$$f_{ii} = -\sum_{j \neq i}^N f_{ij} \quad (3.54)$$

para problemas de domínio finito, onde se evita calcular o valor de c_i em cada nó. Para problemas de domínio infinito, as contribuições das integrais no infinito não desaparecem para potenciais uniformes. Consequentemente, a relação na equação 3.54 é mudada para,

$$f_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i}^N f_{ij} \quad (3.55)$$

Os resultados das equações 3.54 e 3.55 são exatos, isso significa que não foi introduzido erro adicional.

3.2.3 Discretização das integrais de contorno usando elementos quadráticos

Os elementos quadráticos podem ser usados para problemas que demandam maior precisão, como por exemplo, uma superfície freática, cujos elementos curvos apresentariam maior precisão para os pontos que definem os potenciais dessa superfície, considerando-a um domínio curvo. Existem três nós em um elemento quadrático (Figura 3.7). As três funções de forma quadráticas são dadas na coordenada local ξ , como apresentadas a seguir:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1), \quad N_2(\xi) = (1 - \xi)(1 + \xi), \quad N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1), \quad (3.56)$$

onde em cada elemento, tem-se:

$$\phi(y) = \phi(\xi) = \sum_{\alpha=1}^3 N_{\alpha}(\xi) \phi^{\alpha} \quad (3.57)$$

$$q(y) = q(\xi) = \sum_{\alpha=1}^3 N_{\alpha}(\xi) q^{\alpha} \quad (3.58)$$

e para a geometria,

$$y_l(\xi) = \sum_{\alpha=1}^3 N_{\alpha}(\xi) y_l^{\alpha}, \quad \text{para } l = 1, 2. \quad (3.59)$$

Usando elementos quadráticos, é possível escrever a forma discretizada da equação integral de contorno (Equação 3.36).

$$c_i \phi_i = \sum_{k=1}^M \sum_{\alpha=1}^3 g_{ik}^{\alpha} q^{\alpha} - \sum_{k=1}^M \sum_{\alpha=1}^3 \hat{f}_{ik}^{\alpha} \phi^{\alpha} \quad (3.60)$$

onde,

$$\begin{aligned} g_{ik}^{\alpha} &= \int_{\Delta S_k} G_i N_{\alpha} dS, \\ \hat{f}_{ik}^{\alpha} &= \int_{\Delta S_k} F_i N_{\alpha} dS \end{aligned} \quad (3.61)$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, N$, $k = 1, 2, 3, \dots, M$ e $\alpha = 1, 2, 3$.

Rearranjando os termos de acordo com as coordenadas globais dos nós, é possível obter um sistema de equações similar ao obtido em (3.40), onde g_{ij} e f_{ij} devem ser calculados numericamente através da quadratura de Gauss, exceto pelo valor de f_{ii} , que ainda será determinado pela equação (3.54) para um domínio finito.

A discretização com elementos quadráticos permite que os valores de fluxo em ambos os lados dos nós que conectam dois elementos sejam diferentes. Por exemplo, ao utilizar elementos quadráticos é possível ter algumas situações bem peculiares como:

- quando os fluxos são prescritos como diferentes em ambos os lados do nó, o potencial passa a ser a incógnita;
- quando o potencial e o fluxo em um dos lados são prescritos, o outro lado passa a apresentar o fluxo como incógnita;
- quando apenas o potencial é prescrito e o valor do fluxo em um dos lados é a incógnita e este será igual em ambos os lados do nó.

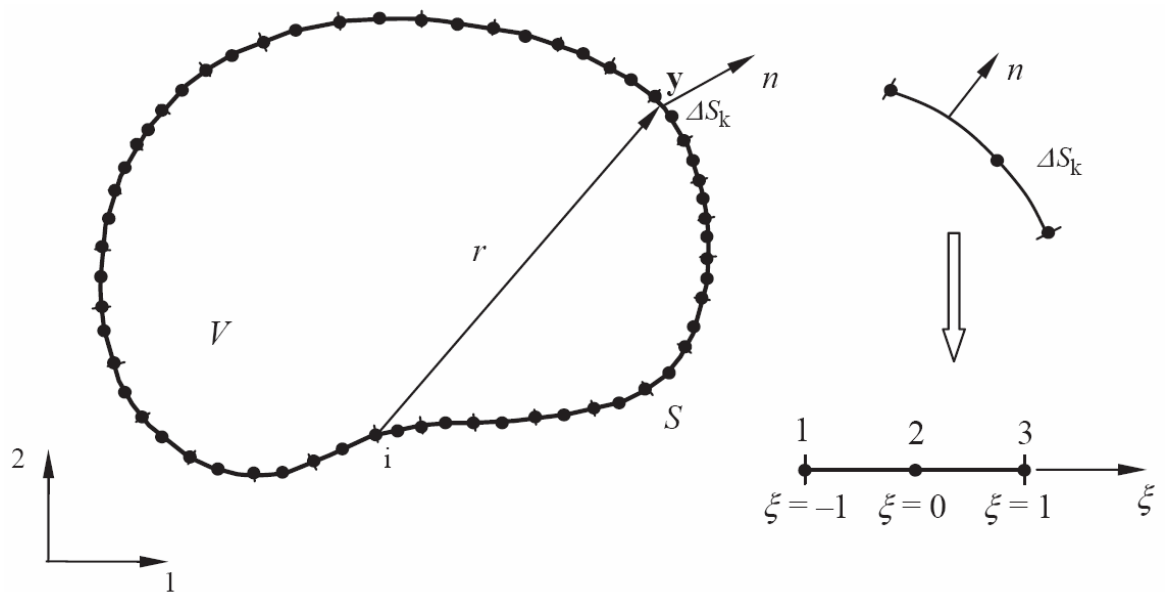


Figura 3. 7 - Discretização do contorno S usando elementos quadráticos (Liu, 2009).

4. MÉTODOS E CRITÉRIOS ADOTADOS

Esse capítulo aborda os detalhes sobre a construção de um programa computacional para a obtenção numérica da posição da superfície freática de um solo homogêneo através do MEC para problemas de potencial e determinação do coeficiente de empuxo ativo, através do método de Coulomb, sob a influência da variação dessa posição.

Propõem-se condições de contorno pré-estabelecidas para obter a solução numérica de um problema, onde analiticamente não há solução. Isso representa a determinação do coeficiente de empuxo ativo para uma estrutura de contenção influenciada pela existência de uma superfície freática, cujo paramento frontal encontra-se inclinado.

A partir do MEC é possível determinar a forma da superfície freática para um paramento frontal vertical ou inclinado, onde posteriormente, através do cálculo por tentativas se determina a superfície de falha para o maciço de solo arrimado que intercepta a curva freática, permitindo assim determinar o coeficiente de empuxo ativo com variação do nível freático.

Optou-se por fixar um padrão unitário para obter a superfície freática, onde a altura da estrutura de contenção é a referencia do modelo, sendo assim considerada como unitária.

4.1 Construindo o modelo numérico

Como em todo problema numérico, as condições de contorno são fundamentais para permitir que um problema tenha solução ou para que admita certo grau de generalidade. Partindo dessa premissa foram estimadas certas condições que respeitam os critérios estabelecidos pelo método dos elementos de contorno para um problema de potencial (Figura 4.1).

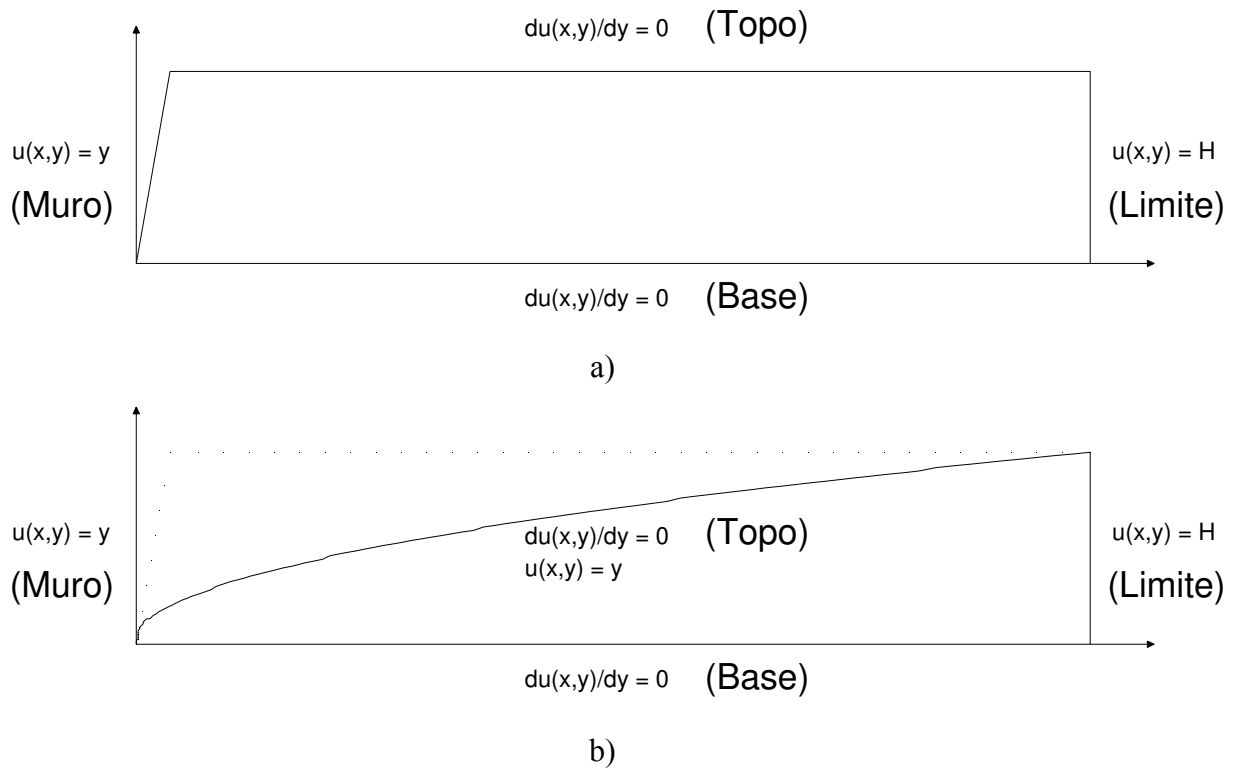


Figura 4. 1 - Condições de contorno estabelecidas para o problema em estudo. a) condição inicial com nível d'água constante; b) condição final com a formação de uma superfície freática.

Segundo as condições de contorno estabelecidas foram prescritos valores tanto para o fluxo quanto para o potencial. Isso permite que o modelo se assemelhe às condições de campo e seja possível assim tirar proveito dos resultados obtidos. Essa estratégia foi antes abordada e desenvolvida por Menezes e Pulino Filho (1984).

Ao adotar que o solo de fundação sob o qual a estrutura de contenção está apoiada seja composto por um solo impermeável, tem-se que nesse plano não haverá fluxo atravessando-o em nenhum dos lados, por esse motivo a derivada do potencial será igual a zero, $\partial u(x,y)/\partial y = 0$. Na parte superior, haverá variação da superfície freática e não haverá fluxo atravessando-a, sendo assim o valor da derivada do potencial também será igual a zero, $\partial u(x,y)/\partial y = 0$, em um instante inicial. Posteriormente haverá uma variação da posição dos pontos de contorno até que $u(x, y) = y$, formando assim a superfície freática pretendida. Restam dois outros planos, onde um deles representa a própria estrutura de contenção drenante e esse terá seu potencial variando em função

da altura, ou seja, $u(x,y) = y$. O outro plano receberá alimentação constante do fluxo, por esse motivo terá então uma carga constante e igual a altura do muro, $u(x,y) = H$.

Por fim, o problema de potencial tem suas condições de contorno estabelecidas com valores prescritos que definem as características físicas do problema. As Figuras 4.1a e Figura 4.1b ilustram as condições de contorno antes citadas e servirão como base para descrever a metodologia empregada neste trabalho.

O objetivo principal desse trabalho é determinar o coeficiente de empuxo ativo atuante sobre estruturas de contenção com a influência de superfície freática. Porém ao se determinar a solução numérica para a curva freática é possível obter outros resultados interessantes como, por exemplo, a altura de saída do nível d'água e o fluxo unitário no plano que representa a contenção.

Uma vez determinada numericamente a curva freática, é possível determinar o valor da força U que corresponde a cada superfície de ruptura de Coulomb e por tentativas é possível chegar à superfície de ruptura crítica.

Para determinar o valor da força U foi utilizado o método de integração de Gauss-Lobatto, que é uma variação do método da quadratura de Gauss utilizado no processo de integração numérica dos elementos do contorno.

O intervalo de integração que é estabelecido pela superfície de falha apresenta seu início na base da estrutura de contenção e o seu final na interseção com a superfície freática ambos tem seu valor de poropressão nulo (Figura 4.2), ou seja, apresentam um valor conhecido e que seria desprezado pelo método convencional de Gauss. Já a regra de quadratura de Gauss-Lobatto é definida por uma quadratura gaussiana nos quais os pontos extremos do intervalo de integração $[-1, 1]$ são incluídos em um total n de abscissas, dando $r = n-2$ abscissas dentro do intervalo, ou seja, os pontos extremos do intervalo são incluídos no processo de integração numérica (Hunter e Nikolov, 2000). As abscissas são simétricas sobre a origem e a equação geral proposta é,

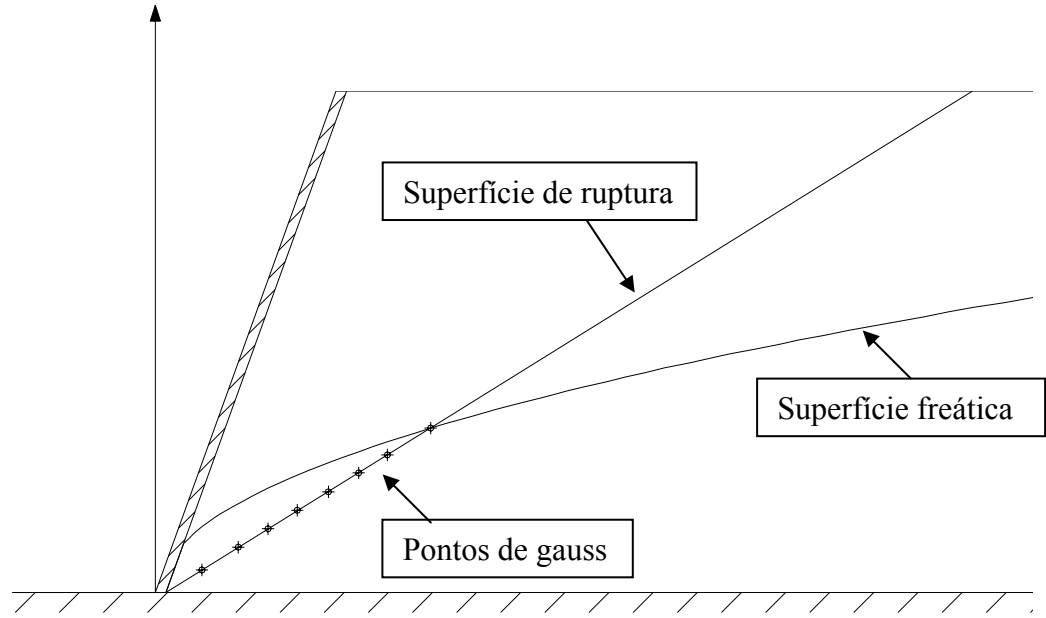


Figura 4. 2 - Diagrama de subpressão determinado através de pontos potenciais obtidos pelo método dos elementos de contorno.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = w_1 f(-1) + w_n f(1) + \sum_{i=2}^{n-1} w_i f(x_i) \quad (4.1)$$

As abscissas internas x_i para $i = 2, \dots, n-1$ são raízes do polinômio $P'_{n-1}(x)$, onde $P(x)$ é um polinômio de Legendre (Abramowitz e Stegun, 1972). Os pesos das abscissas internas são,

$$w_i = \frac{2n}{(1-x_i^2) P''_{n-1}(x_i) P'_m(x_i)} = \frac{2}{n(n-1) [P_{n-1}(x_i)]^2}, \quad (4.2)$$

e os pesos das abscissas nas extremidades do intervalos são,

$$w_{1,n} = \frac{2}{n(n-1)}. \quad (4.3)$$

O erro é dado por,

$$E = -\frac{n(n-1)^3 2^{2n-1} [(n-2)!]^4}{(2n-1)[(2n-2)!]^3} f^{(2n-2)}(\xi), \quad (4.4)$$

para $\xi \in (-1, 1)$. A Tabela 4.1 apresenta os parâmetros para a $3 \leq n \leq 6$. Beyer (1987) fornece uma tabela de parâmetros até $n = 11$ e Chandrasekhar (1960) até $n = 9$.

Tabela 4.1 – Abscissas e pesos correspondentes a $3 \leq n \leq 6$.				
n	x_i	x_i	w_i	w_i
3	0	0.00000	$\frac{4}{3}$	1.333333
	± 1	± 1.00000	$\frac{1}{3}$	0.333333
4	$\pm \frac{1}{5}\sqrt{5}$	± 0.447214	$\frac{5}{6}$	0.833333
	± 1	± 1.000000	$\frac{1}{6}$	0.166667
5	0	0.000000	$\frac{32}{45}$	0.711111
	$\pm \frac{1}{7}\sqrt{21}$	± 0.654654	$\frac{49}{90}$	0.544444
	± 1	± 1.000000	$\frac{1}{10}$	0.100000
6	$\sqrt{\frac{1}{21}(7-2\sqrt{7})}$	± 0.285232	$\frac{1}{30}(14+\sqrt{7})$	0.554858
	$\sqrt{\frac{1}{21}(7+2\sqrt{7})}$	± 0.765055	$\frac{1}{30}(14-\sqrt{7})$	0.378475
	± 1	± 1.000000	$\frac{1}{15}$	0.066667

4.1.1 Determinação numérica da superfície freática

A fim de determinar a superfície como mostrado na Figura 4.1b, foram propostas algumas condições geométricas para o problema.

1. A altura do muro será unitária. Tal procedimento permite generalizar o problema para qualquer altura, uma vez que se tenha a solução numérica para a superfície freática.
2. A distância entre o paramento frontal e o plano limite que define a fonte geradora de fluxo é de 5 vezes a altura, onde será avaliada sua influência sob o resultado obtido.
3. O paramento frontal poderá ser vertical ou inclinado, motivo pelo qual a solução numérica é necessária, uma vez que não há solução analítica para tais condições;

Nesta etapa do problema o MEC entra como ferramenta fundamental para que se encontre uma solução numérica, baseado nas condições comentadas anteriormente. A estratégia adotada pelo MEC para resolver o problema de potencial consiste em representar o contorno e os valores dos potenciais e fluxos de forma aproximada através de um número finito de valores nodais associados a um conjunto de pontos sobre o contorno. Essa aproximação se dá através de uma discretização do contorno utilizando um conjunto finito de nós e de elementos. A aproximação da geometria e das variáveis é feita através da interpolação sobre os elementos de contorno, que podem possuir um ou mais nós de acordo com o seu grau de interpolação. A interpolação sobre um elemento pode ser parametrizada usando uma coordenada local, variando de -1 a +1 entre as extremidades do elemento e para tanto se dispõe de funções de forma que definem a maneira como o elemento deve ser discretizado. O item 3.2 deste trabalho trata em detalhes das funções de forma normalmente utilizadas para o MEC.

Devido à forma curva da superfície freática, a solução para o problema apresenta uma discretização do contorno por elementos quadráticos que possuem três nós por elemento, dois nas extremidades e um terceiro variando entre as extremidades do elemento. Esse tipo de elemento apresenta resultados mais precisos, permitindo uma melhor representação de contorno com arestas curvas, simulando assim uma superfície freática mais suave (Figura 4.1b).

Obter a superfície freática a partir das condições de contorno pré-estabelecidas é o primeiro passo desse trabalho. A Figura 4.1a mostra a condição inicial do contorno onde a parte superior apresenta um valor prescrito igual a, $\partial u(x,y)/\partial y = 0$. Tal condição indica que o solo se encontra totalmente saturado e o nível d'água está na superfície do terreno. Em um dado instante o contorno superior deve alcançar o equilíbrio e assim tomar a forma da superfície freática. Tal condição indica que o domínio adquiriu um novo contorno, cuja parte superior se encontra com $\partial u(x,y)/\partial y = 0$ e $u(x,y) = y$.

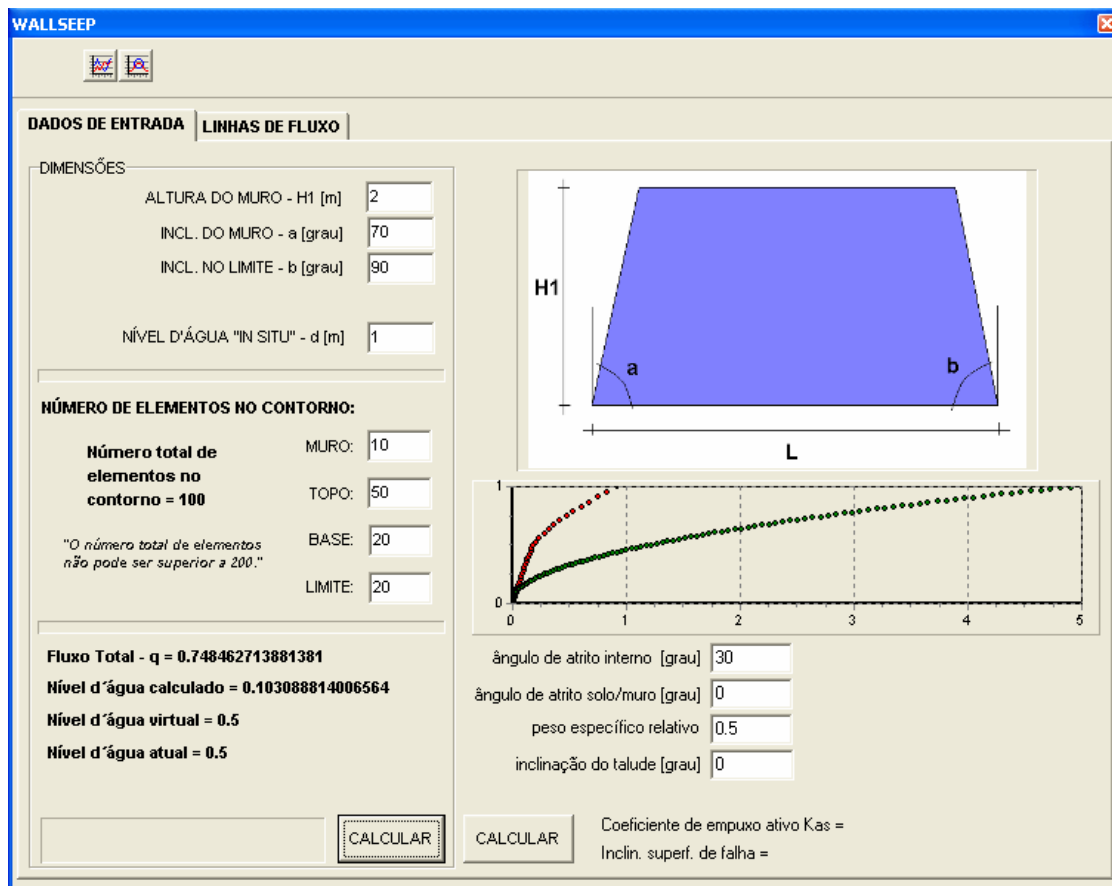


Figura 4. 3 - Programa para cálculo do coeficiente de empuxo ativo com determinação numérica da superfície freática, WALLSEEP.

Foi desenvolvido o programa WALLSEEP (Figura 4.3) baseado no programa POQUABE (Brebbia e Domínguez, 1989) que permite calcular a forma da superfície freática utilizando o MEC, segundo os procedimentos apresentados a seguir.

1. Entra-se com os números de elementos de contorno para cada lado do domínio considerado. No caso em questão um retângulo, com as seguintes denominações: MURO, TOPO BASE, LIMITE (Figura 4.1a).
2. Definem-se os valores prescritos segundo as condições de contorno apresentadas na Figura 4.1;
3. Uma vez definida a coordenada dos nós ao longo do contorno e definido seus valores prescritos, calcula-se as matrizes G e F , e dessa forma, o sistema de equações pode ser armado de forma matricial,

$$Fu = Gq, \quad (4.5)$$

4. Através de manipulações algébricas, a equação 4.5 pode ser expressa na forma usual de um sistema de equações através da consideração das condições de contorno prescritas do problema. A partir da identificação dos valores nodais incógnitos e conhecidos, realiza-se o pivotamento entre as colunas das matrizes F e G a fim de obter um sistema dado por:

$$A\lambda = b \quad (4.6)$$

onde x é o vetor das incógnitas, A é a matriz formada pelas colunas de H e G associadas aos valores de u e q incógnitos, que por sua vez são dispostos no vetor x e o vetor F é obtido pelo produto entre os valores nodais conhecidos $\bar{u}$ e $\bar{q}$ e as correspondentes colunas de F e G .

5. O vetor b é calculado multiplicando as condições de contorno prescritas pelos correspondentes termos de G e F .
6. Obtidos os valores do vetor b ao longo do contorno é possível compará-los com os valores de carga altimétrica nos pontos que correspondem ao trecho definido como TOPO com $n3$

elementos, começando a partir do primeiro ponto desse trecho indicado esquematicamente em vermelho na Figura 4.4.

$$\begin{aligned}
 c &= F_{2i+j-2} - y_{2i+j-2} \\
 y_{2i-2j} &= y_{2i-2j} + 0.5 \cdot c \\
 x_{2i-2j} &= x_{2i-2j} + 0.5 \cdot c \cdot der
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

onde, $i = n1+n2+1 \dots n1+n2+n3$ e $j = 2 \dots 3$, e *der* corrige a posição do ponto fazendo com que essa varie apenas sobre uma reta pré-definida, o que evita que as trajetórias dos pontos durante o processo iterativo se cruzem.

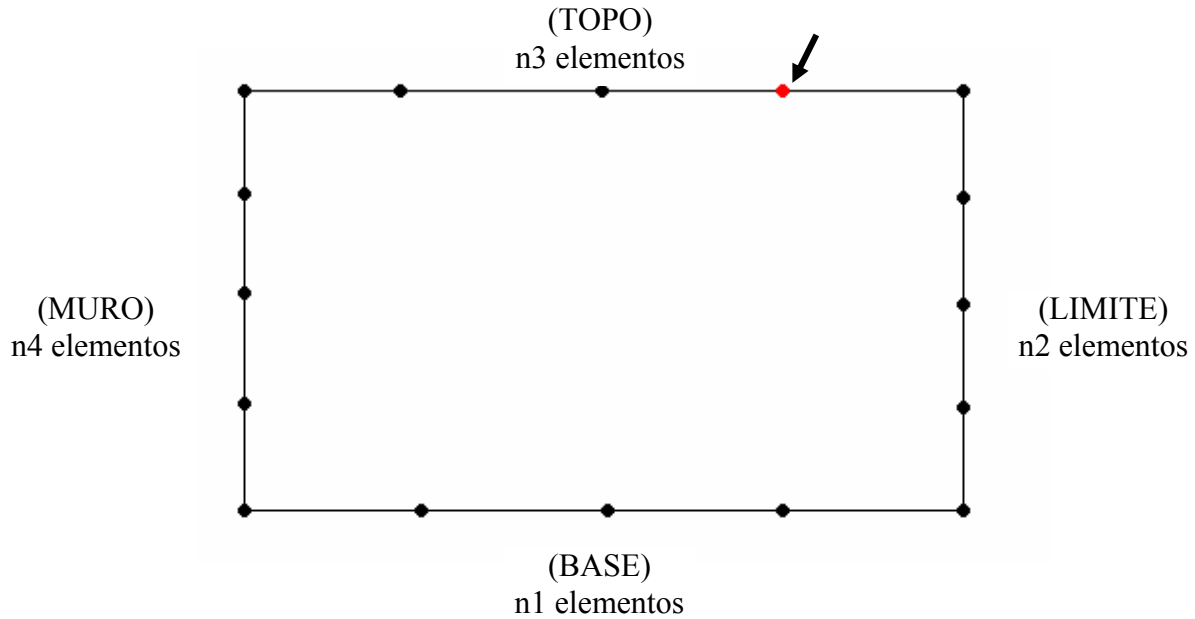


Figura 4. 4 - Representação esquemáticas dos elementos ao longo do contorno.

7. Verifica-se o módulo da diferença entre o novo valor prescrito calculado para o contorno e a nova carga altimétrica. Caso esse valor seja > 0.001 se inicia o processo voltando ao item 3. Essa checagem é feita até a diferença ser ≤ 0.001 , ou seja, quando o valor prescrito para o contorno for igual ou bem próximo da carga altimétrica no ponto.

4.1.2 Determinação da interseção Parábola–Reta

Uma vez determinada numericamente a superfície freática, deve-se obter sua interseção com a superfície de ruptura. Como tal superfície freática foi discretizada em elementos quadráticos e cada elemento possui três pontos, cujas coordenadas foram obtidas numericamente como citado no item 4.1.1, é possível determinar uma equação de parábola paramétrica no plano, para cada elemento do contorno. Como a superfície de ruptura é representada por uma reta com inclinação previamente definida, tem-se agora que criar um condicionante que ao variar essa inclinação se possa identificar qual elemento da freática está sendo interceptado e qual é a coordenada de interseção com esse elemento de equação paramétrica também definida. Ou seja, tem-se um caso de interseção entre reta e parábola variando ao longo da superfície freática, cujo critério de parada será a determinação da inclinação que representa a superfície de ruptura crítica.

Uma vez que se têm definido todos os pontos coordenados da superfície freática, é possível determinar a inclinação das retas que partem da origem (0,0) do sistema de coordenadas cartesianas globais e encontra os pontos localizados na extremidade de cada elemento (Figura 4.5).

Tomando s como um elemento qualquer e $n-1$ e $n+1$ como os pontos localizados na extremidade desse elemento, cujas coordenadas já foram definidas pela determinação numérica da superfície freática, tem-se de maneira simples os ângulos η_1 e η_2 , respectivamente (Figura 4.5). Sendo ρ a inclinação da reta que define a superfície de ruptura, a condição para que essa se encontre interceptando o elemento s é,

$$(\rho - \eta_2)(\rho - \eta_1) \leq 0 \quad (4.8)$$

ou seja, sendo a condição da equação (4.8) satisfeita a reta que define a superfície de ruptura está interceptando o elemento s , e como cada elemento é definido por uma equação paramétrica de parábola é possível calcular qual é o ponto de interseção entre as duas superfícies.

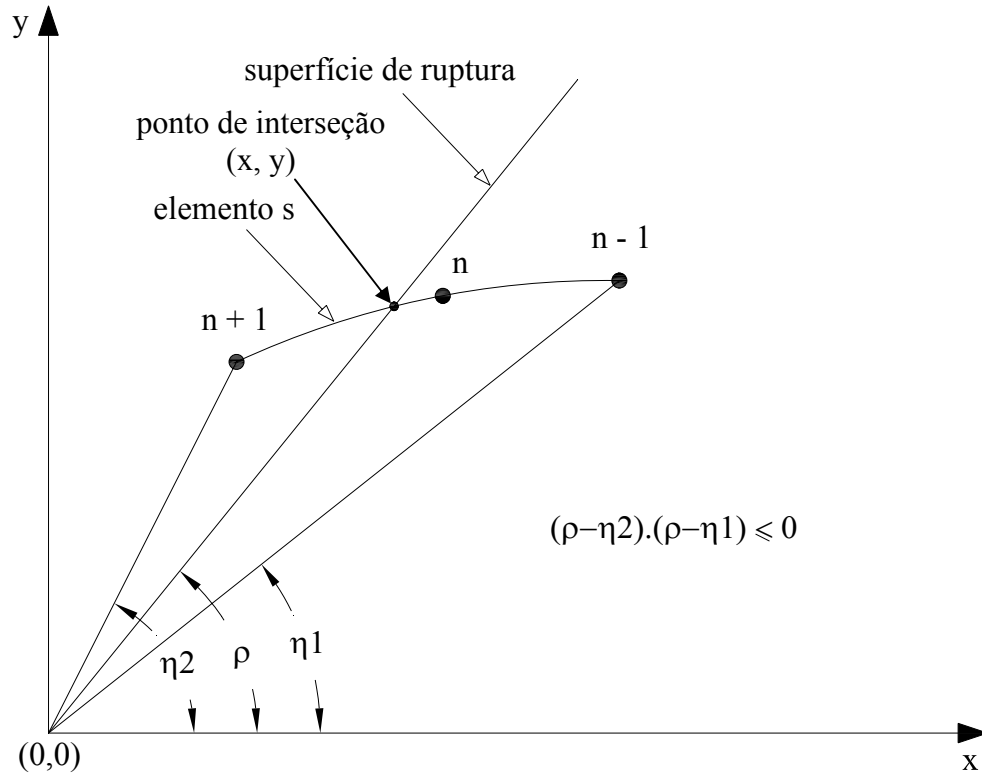


Figura 4. 5 – Interseção entre a reta de Coulomb com o elemento parametrizado da parábola.

A equação da parábola no plano pode ser obtida na forma paramétrica como:

$$x = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 + N_3(\xi)x_3 \quad (4.9)$$

$$y = N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2 + N_3(\xi)y_3 \quad (4.10)$$

onde,

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

$$N_2(\xi) = (1 - \xi)(1 + \xi)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$

e x_i, y_i são as coordenadas dos nós do elemento.

A equação da reta que representa a superfície de ruptura de Coulomb é dada por,

$$y = ax \quad (4.11)$$

onde, $a = \tan \rho$, e ρ é a inclinação da superfície de ruptura em relação ao plano horizontal. Note-se que a reta passa pela origem do sistema de coordenadas. O ponto de interseção entre a reta e a parábola é dado pela solução da seguinte equação,

$$N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2 + N_3(\xi)y_3 = a \left[N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 + N_3(\xi)x_3 \right] \quad (4.12)$$

A solução para a equação (4.12) é,

$$\xi_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (4.13)$$

onde,

$$A = a(x_1 - 2x_2 + x_3) - y_1 + 2y_2 - y_3$$

$$B = a(-x_1 + x_3) + y_1 - y_3$$

$$C = 2(ax_2 - y_2)$$

Se $-I \leq \xi_1 \leq +I$ ou $-I \leq \xi_2 \leq +I$, então a reta intercepta o elemento. As coordenadas do ponto de interseção são obtidas ao colocar o valor de ξ_1 ou ξ_2 na equação (4.9) e (4.10).

5. BUSCA DA SUPERFÍCIE DE RUPTURA CRÍTICA

O programa WALLSEEP fornece o valor do fluxo total obtido por ocasião da superfície freática numericamente determinada e o valor do coeficiente do ativo para uma superfície de ruptura crítica pelo método de Coulomb.

Como se optou por fixar um padrão unitário para a obtenção da superfície freática, a altura de saída do nível d'água é a referencia do modelo. Portanto, criou-se uma relação de escala para adequar o modelo unitário ao modelo real em função das alturas de saída do nível d'água real (d), encontrado no campo, e unitário ($\bar{d}$). Fixada essa relação é possível trazer as dimensões do modelo unitário para o modelo real e realizar o cálculo do empuxo ativo utilizando à posição da superfície freática adequada as condições de campo (Figura 5.1).

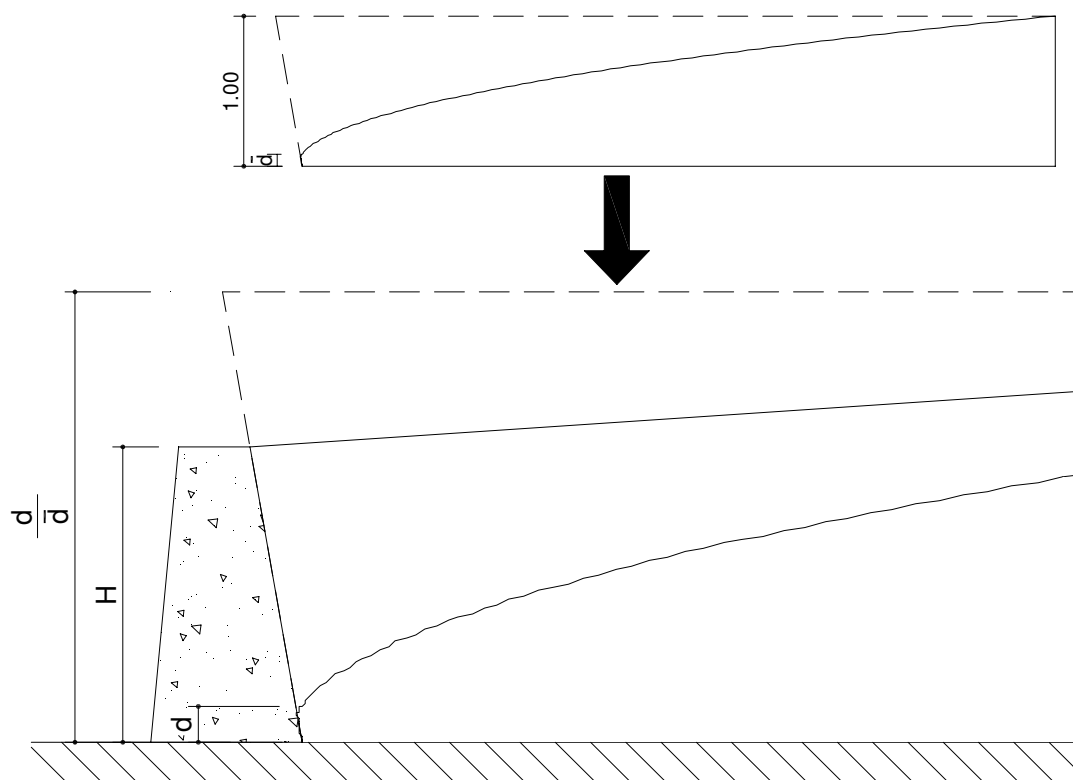


Figura 5. 1 – Mudança de escala do resultado da freática obtido no modelo unitário para o modelo real.

A Figura 5.2 mostra esquematicamente o resultado obtido pelo WALLSEEP para um muro unitário. Nessa figura é possível observar que são determinados os valores de $\bar{d}$, altura de saída do nível d'água, $\bar{U}$, força resultante da poropressão e $\bar{A}_{sat}$ que corresponde a área sob a superfície freática delimitada pela superfície de ruptura, todos os valores tirados do modelo unitário.

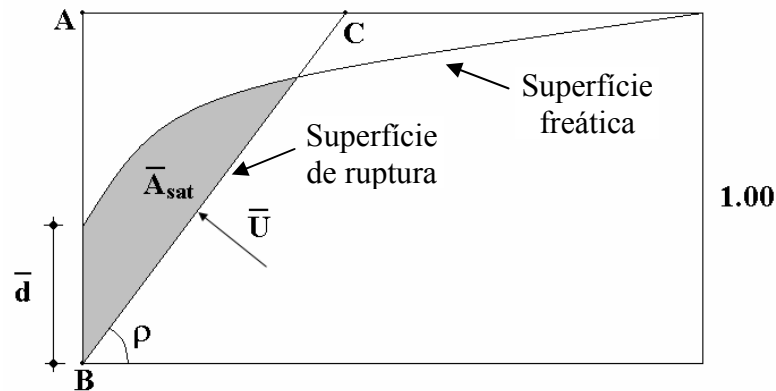


Figura 5. 2 – Resultado esquemático obtido pelo programa WALLSEEP com muro de altura unitária.

A presença do lençol freático faz com que existam duas áreas a considerar com dois pesos específicos distintos, um sobre e outro abaixo da curva freática (Figura 5.3), e por esse motivo devem ser determinados dois pesos para a cunha de ruptura, um definido pela área do triângulo ABC e outro pela área definida abaixo da curva freática.

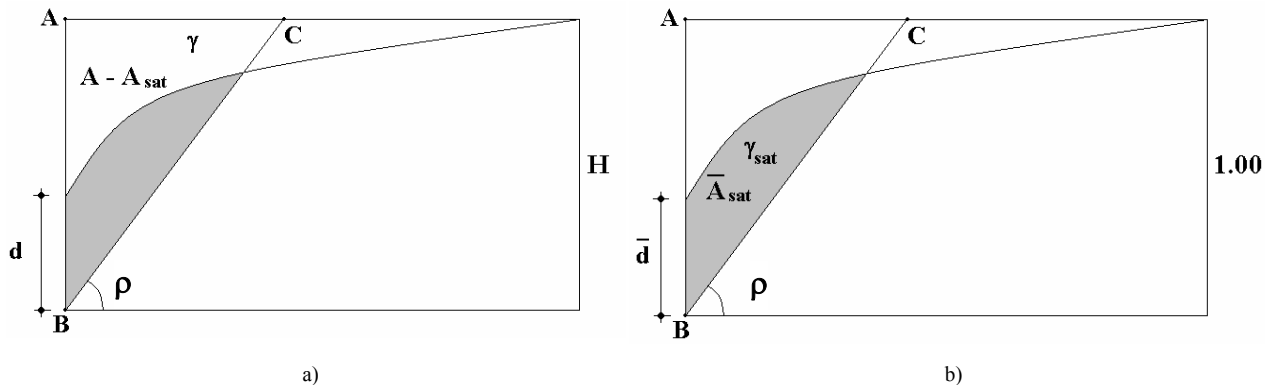


Figura 5. 3 – Diferentes pesos específicos. a) Área acima da superfície freática - γ ; b) Área abaixo da superfície freática - γ_{sat} .

5.1 Etapas de Cálculo

Uma vez determinada a numericamente a superfície freática, resta ajustar os valores obtidos no modelo unitário com o modelo real. Tal ajuste deve ser feito através de um fator de escala que obtido pela relação entre a altura de saída do nível d'água real com o a altura de saída do nível d'água no modelo unitário $(d / \bar{d})$.

As etapas de cálculo passam a ser:

- a) Determinação numérica da superfície freática, onde são obtidas as coordenadas cartesianas, os valores de potencial e de derivada do potencial em cada ponto e a altura de saída do nível d'água, todos resultados correspondentes ao modelo unitário, ou seja, muro com altura igual a 1.00;
- b) Defini-se uma inclinação para a superfície de ruptura ρ e a partir daí:
 - i. Calcula-se a interseção entre a inclinação da superfície de ruptura (modelo real) e a superfície freática, conforme descrito no item 4.1.2;
 - ii. Através do método de Gauss-Lobatto, determina-se o valor da poropressão em 10 pontos ao longo da superfície de ruptura, definido desde o ponto (0,0) até o ponto de interseção com a superfície freática, calculando-se assim o valor da força de poropressão $\bar{U}$ no modelo unitário;
 - iii. Calcula-se o valor da força de poropressão para o modelo real:

$$U = \bar{U} \left(\frac{d}{\bar{d}} \right)^2 \quad (5.1)$$

- iv. Calcula-se o valor da área saturada $\bar{A}_{sat}$ no modelo unitário. Esse valor foi obtido através do cálculo por coordenadas cartesianas de uma poligonal fechada.

- v. Calcula-se o valor da área saturada para o modelo real:

$$A_{sat} = \bar{A}_{sat} \left(\frac{d}{\bar{d}} \right)^2 \quad (5.2)$$

- vi. Calcula-se a área total do triângulo ABC para o modelo real, segundo Barros (2005),

$$A = \frac{H^2}{2 \sin^2(180 - \alpha)} \left[\sin((180 - \alpha) + \rho) \frac{\sin((180 - \alpha) + i)}{\sin(\rho - i)} \right] \quad (5.3)$$

- vii. Calcula-se o valor da força peso referente à área da cunha definida pelo triângulo ABC no modelo real. Lembrando que nesse caso têm-se dois pesos específicos distintos (Figura 5.3),

$$P = (A - A_{sat}) \gamma + A_{sat} \gamma_{sat} \quad (5.4)$$

- viii. Calcula-se o equilíbrio da cunha e se obtém o valor do empuxo ativo, E_a , através da equação abaixo obtida pelo equilíbrio de forças mostrado na Figura 5.4,

$$E_a = \frac{P \sin(\rho - \phi) + U \sin \phi}{\sin((180 - \alpha) + \phi + \delta - \rho)} \quad (5.5)$$

O valor de E_a corresponde à superfície de ruptura ρ definida no item b). As etapas de cálculo devem ser repetidas desde o item i ao item viii até que seja encontrada a inclinação ρ que corresponde ao Empuxo Ativo Máximo.

Para a busca do ângulo que determina o Empuxo Ativo Máximo, utilizou-se um método de maximização/minimização conhecido como razão áurea. Press et al (2007) apresenta em sua publicação uma rotina denominada GOLDEN que foi utilizado nesse trabalho para maximizar a

função definida na equação (5.5). Ou seja, as etapas propostas do item i ao viii foram incorporadas à rotina GOLDEN sendo determinado assim o valor do Empuxo Ativo Máximo.

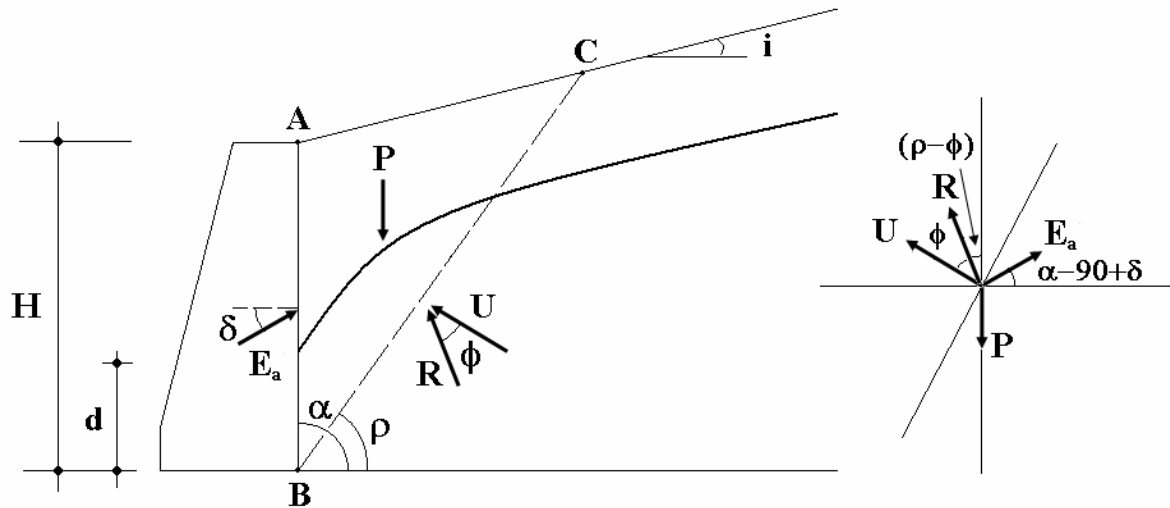


Figura 5. 4 – Esquema do equilíbrio de forças atuantes no modelo real para o cálculo do Empuxo Ativo.

Ao final o programa WALLSEEP permite ao usuário obter de maneira muito simples o valor do empuxo ativo em função dos seguintes dados:

- ✓ altura do muro;
- ✓ inclinação do muro, α ;
- ✓ altura de saída do nível d'água, d ;
- ✓ número de elementos no contorno;
- ✓ ângulo de atrito interno do solo, ϕ ;
- ✓ ângulo de atrito de interface solo/muro, δ ;
- ✓ peso específico do solo natural e saturado, γ e γ_{sat} ;
- ✓ inclinação do talude, i .

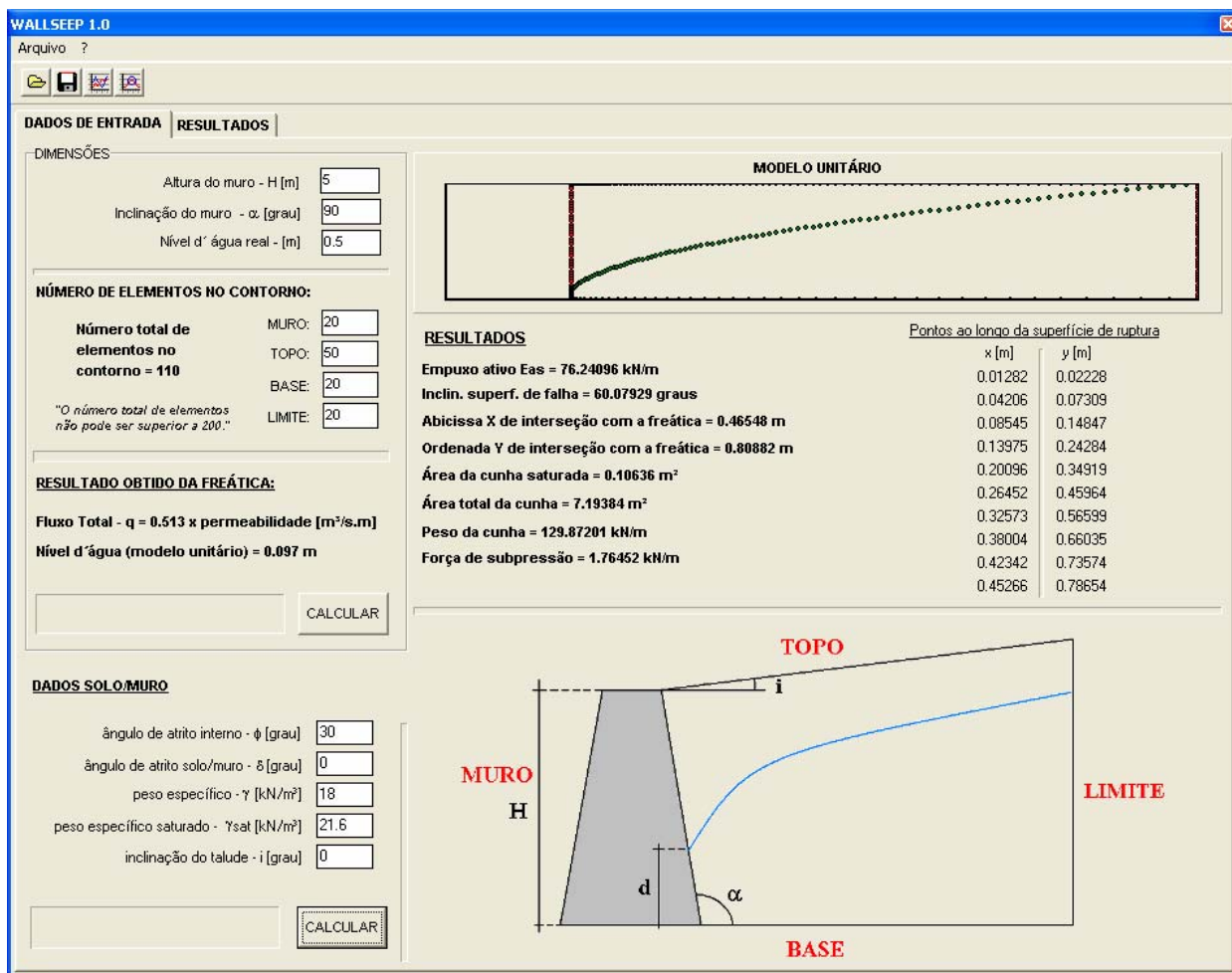


Figura 5.5 – Versão final do programa WALLSEEP.

Uma outra informação extraída do programa WALLSEEP é o valor do fluxo total, q obtido numericamente através dos valores da derivada dos potenciais no trecho referente à altura de saída do nível d'água. Esse valor pode ser útil principalmente no cálculo de um sistema de drenagem eficaz.

RESULTADO OBTIDO DA FREÁTICA:

Fluxo Total - q = 0.513 x permeabilidade [m³/s.m]

Nível d'água (modelo unitário) = 0.097 m

CALCULAR

Figura 5. 6 – Fluxo total obtido pelo programa WALLSEEP.

Considerando que a derivada do potencial foi obtida pelo MEC ao longo do contorno, é possível utilizar tais valores no trecho definido pela altura de saída do nível d'água, d .

O cálculo pode ser feito integrando a equação paramétrica da parábola ao longo de cada elemento (Figura 5.7). Daí, obtém-se,

$$q_s = \frac{(l_1 + l_2) \left(-f_c l_1^2 + 2(f_a + f_c) l_1 l_2 - f_a l_2^2 + f_b (l_1 + l_2)^2 \right)}{6 l_1 l_2} \quad (5.6)$$

onde:

l_1 distância entre o ponto 2_{n-1} e o 2_n

l_2 distância entre o ponto 2_n e o 2_{n+1}

f_a, f_b, f_c valor da derivada do potencial nos pontos, f_{3n-2}, f_{3n-1} e f_{3n} , respectivamente.

Somando o valor de cada vazão obtida por elemento definida na equação (5.6) ao longo de d , é possível obter o valor do fluxo total (Figura 5.6).

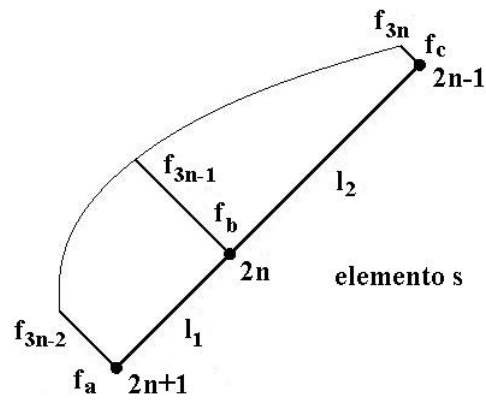


Figura 5. 7 – Distribuição parametrizada da derivada do potencial para um elemento s.

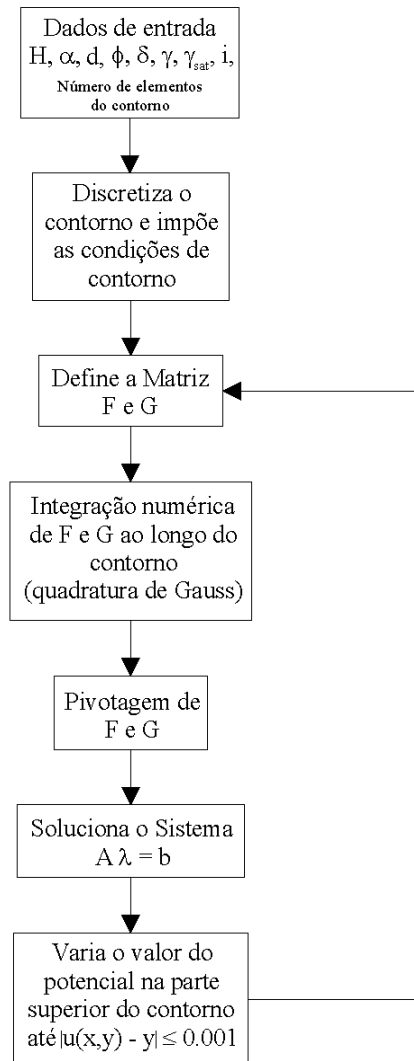


Figura 5. 8 – Diagrama de bloco referente ao cálculo da superfície freática.

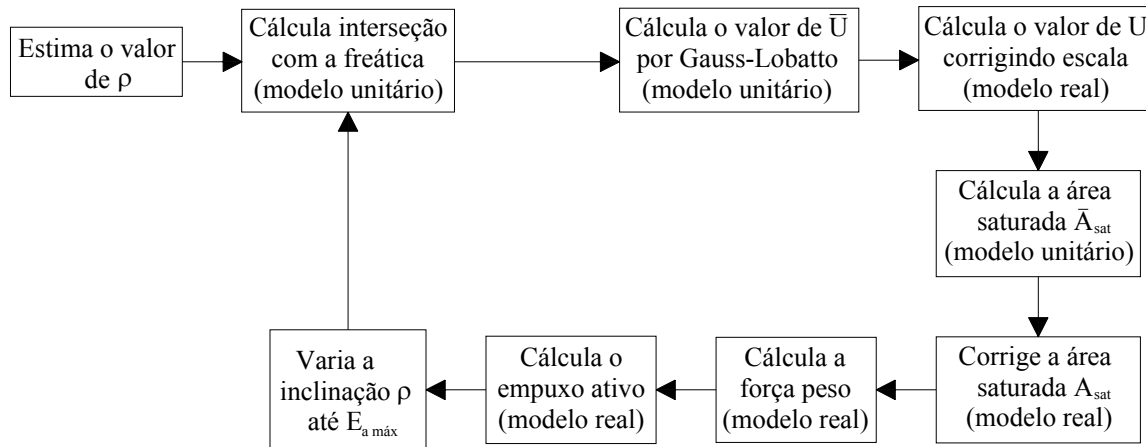


Figura 5. 9 – Diagrama de bloco referente ao cálculo do empuxo ativo máximo.

5.2 Exemplo de cálculo

Serão realizados três exemplos, os dois primeiros não considerando a presença da superfície freática e o último a considerando. A comparação dos resultados obtidos para o primeiro exemplo será feita pelo método de Rankine e o segundo pelo método de Coulomb, para o terceiro exemplo a comparação será feita com um software de cálculo conhecido e distribuído gratuitamente pela empresa Maccaferri, GawacWin® (Gabions Wall Calculation for Windows).

Os dados utilizados para o primeiro exemplo sem superfície freática são:

altura do muro, $H = 5.00\text{m}$

inclinação do muro, $\alpha = 90$ graus

altura de saída do nível d'água, $d = 0.00\text{m}$

ângulo de atrito interno do solo, $\phi = 30$ graus

ângulo de atrito de interface solo/muro, $\delta = 0$ graus

peso específico do solo natural, $\gamma = 18.00\text{kN/m}^3$

inclinação do talude, $i = 0$ graus

WALLSEEP 1.0	
Arquivo ?	
DADOS DE ENTRADA	RESULTADOS
DIMENSÕES Altura do muro - H [m] 5 Inclinação do muro - α [grau] 90 Nível d' água real - [m] 0	
NÚMERO DE ELEMENTOS NO CONTOURO: Número total de elementos no contorno = 65 <i>"O número total de elementos não pode ser superior a 200."</i> MURO: 5 TOPO: 20 BASE: 20 LIMITE: 20	
RESULTADO OBTIDO DA FREÁTICA: Fluxo Total - q = 0 x permeabilidade [m³/s.m] Nível d'água (modelo unitário) = 0.078 m	
CALCULAR	
DADOS SOLO/MURO ângulo de atrito interno - φ [grau] 30 ângulo de atrito solo/muro - δ [grau] 0 peso específico - γ [kN/m³] 18 peso específico saturado - γsat [kN/m³] 19 inclinação do talude - i [grau] 0 RESULTADOS Empuxo ativo Eas = 75 kN/m Inclin. superf. de falha = 60 graus Abicissa X de interseção com a freática = 0 m Ordenada Y de interseção com a freática = 0 m Área da cunha saturada = 0 m² Área total da cunha = 7.21688 m² Peso da cunha = 129.90392 kN/m Força de supressão = 0 kN/m	
CALCULO DO EMPUXO ATIVO Empuxo ativo Eas = 75 kN/m Empuxo ativo Ea = 75 kN/m Empuxo ativo Epa = 0 kN/m Empuxo ativo Eps = 0 kN/m Empuxo ativo Etotal = 75 kN/m MODELO UNITÁRIO	
DADOS DO TALUDE Altura do talude - H [m] 5 Inclinação do talude - i [grau] 0 Base do talude - B [m] 0 Topo do talude - T [m] 0 Largura da base - L [m] 0 Largura do topo - l [m] 0 RESULTADOS DO TALUDE Fator de segurança - FOS = 1.000 Força de ruptura - R = 0 kN/m Força de ruptura - Rps = 0 kN/m Força de ruptura - Rpsat = 0 kN/m Força de ruptura - Rtotal = 0 kN/m	
CALCULAR	

O resultado obtido foi $E_a = 75\text{kN/m}$.

$$K_a = \tan^2 (45^\circ - \phi / 2) = 0.33$$

74

No segundo exemplo será considerada uma inclinação de 10 graus para o talude sobre o muro e uma inclinação 96 graus segundo a Figura 2.10 para o método de Coulomb.

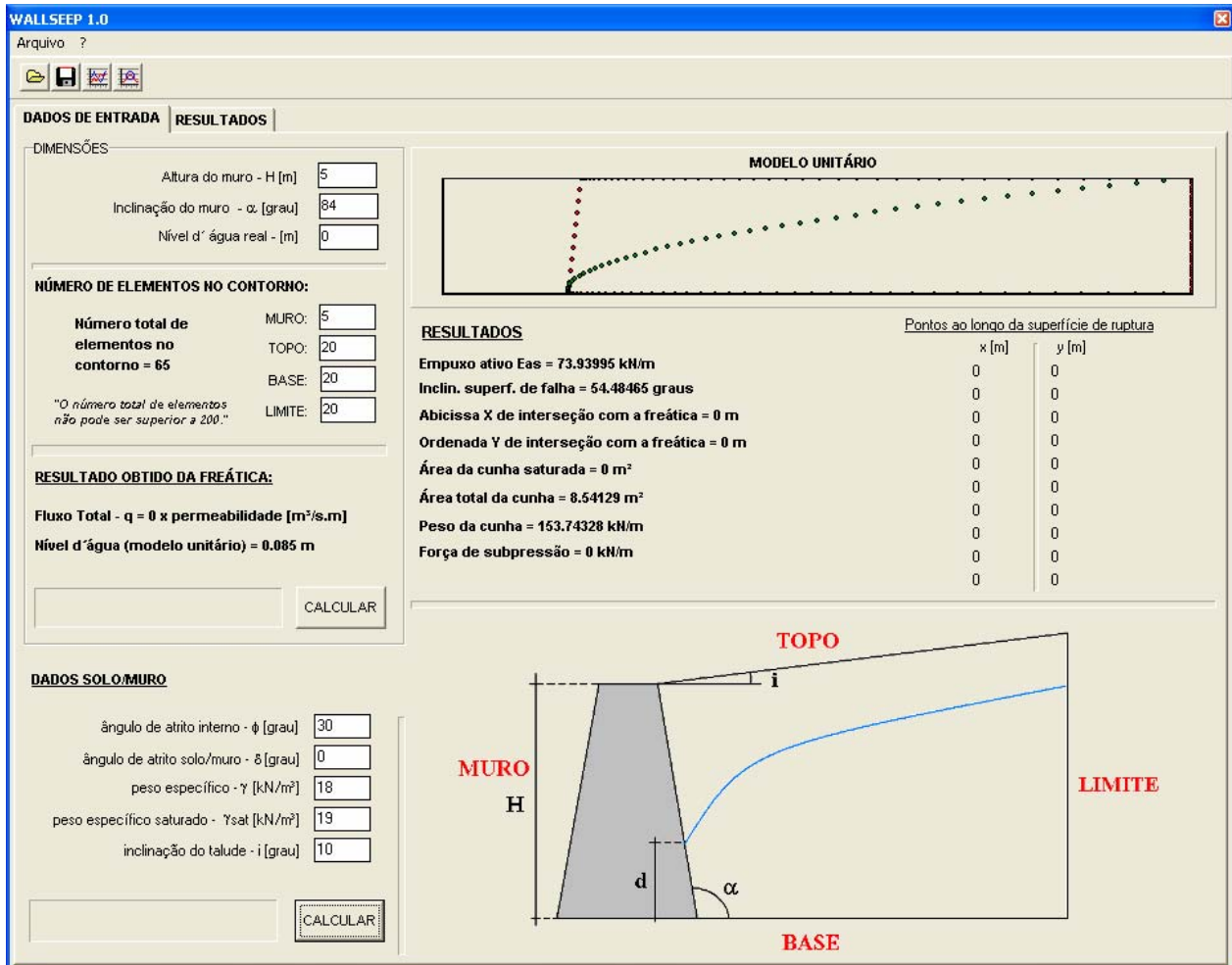


Figura 5. 11 – Cálculo do empuxo ativo sem influência da superfície freática pelo programa WALLSEEP, considerando talude sobre o muro e inclinação do paramento frontal.

Calculando agora por Coulomb, tem-se que o coeficiente de empuxo ativo é igual,

$$E_a = \frac{\gamma H^2}{2} \frac{\sin^2(\alpha + \phi)}{\sin^2 \alpha \sin(\alpha - \delta) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi + \delta) \sin(\phi - i)}{\sin(\alpha - \delta) \sin(\alpha + i)}} \right]^2} = 73.94 \text{ kN} / \text{m}$$

Os dois primeiros exemplos estão compatíveis com os modelos clássicos propostos. Resta agora realizar a verificação dos resultados considerando a influência da superfície freática.

No terceiro exemplo serão considerados os mesmos dados do primeiro.

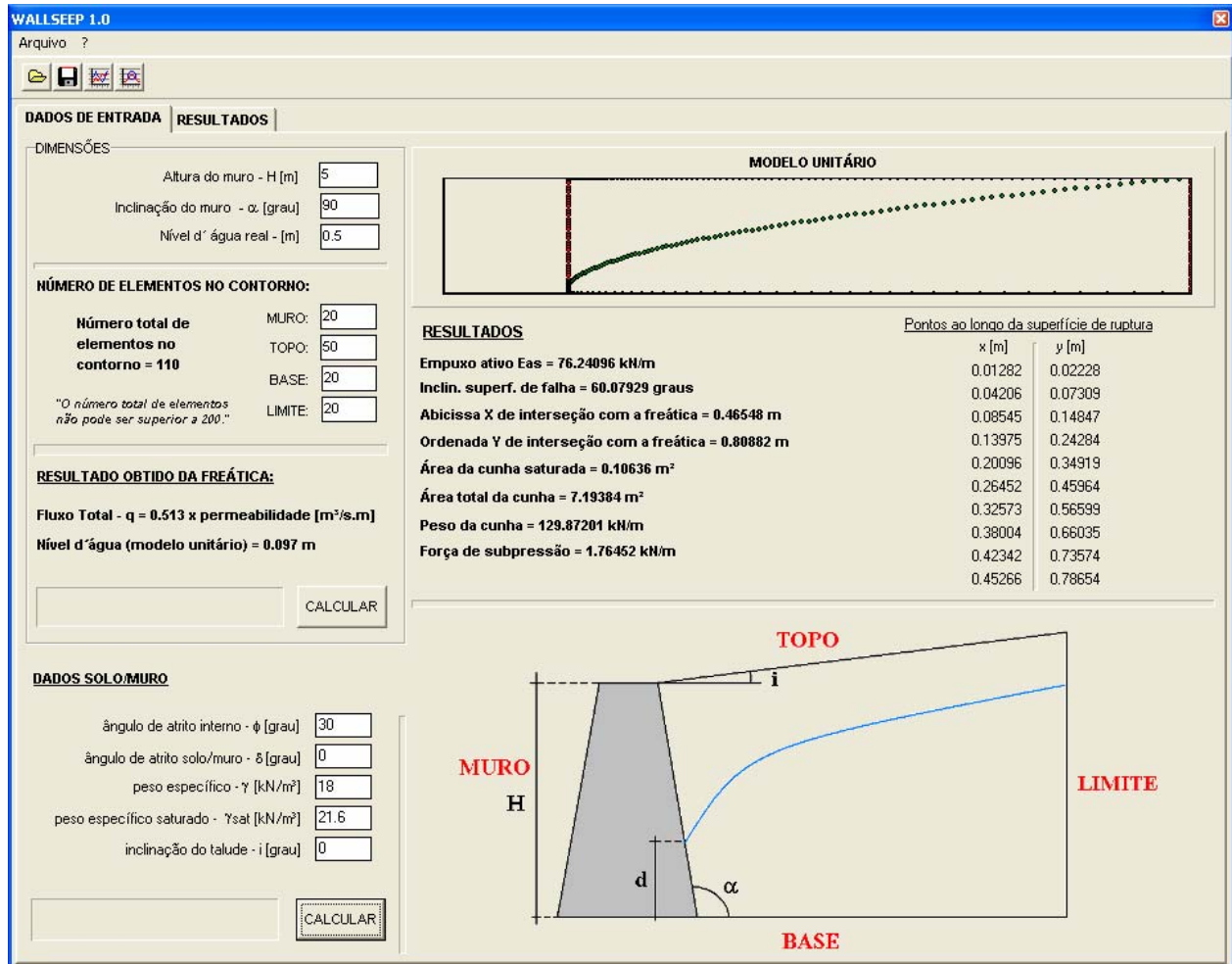


Figura 5. 12 – Cálculo do empuxo ativo com influência da superfície freática pelo programa WALLSEEP, considerando o muro vertical.

Esse terceiro exemplo terá seu resultado comparado como o software GawacWin que considera a influência da superfície freática pelo método gráfico proposto no item 2.4.1.

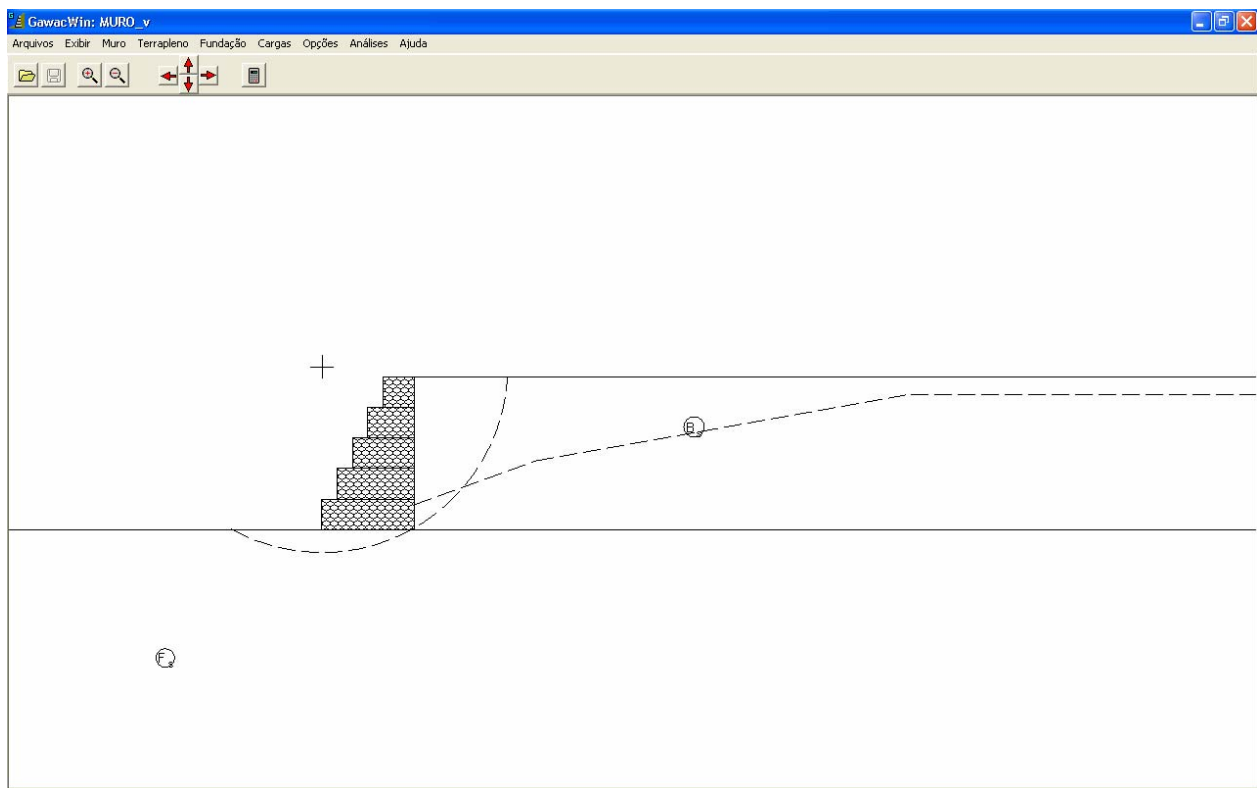


Figura 5. 13 – Cálculo do empuxo ativo com influência da superfície freática pelo programa GawacWin, considerando o muro vertical.

GawacWin 2003

Página 3

Programa licenciado para: CENTRAL DE ESTUDOS

Projeto:

Arquivo: MURO_v

Data: 20/07/2010

RESULTADOS DAS ANÁLISES

Empuxos Ativo e Passivo

Empuxo Ativo	:	70.73 kN/m
Ponto de apl. ref. ao eixo X	:	3.00 m
Ponto de apl. ref. ao eixo Y	:	1.70 m
Direção do empuxo ref. ao eixo X	:	15.00 graus
Empuxo Passivo	:	0.00 kN/m
Ponto de apl. ref. ao eixo X	:	0.00 m
Ponto de apl. ref. ao eixo Y	:	0.00 m
Direção do empuxo ref. ao eixo X	:	0.00 graus

Figura 5. 14 – Resultados das análises do software GawacWin.

Para confirmar de maneira aproximada o valor da força de poropressão obtida, foi feito um cálculo manual pelo método gráfico apresentado no item 2.4.1.

No problema em questão como existe fluxo dentro do maciço de solo a carga total ao longo da superfície freática varia. Portanto, a carga potencial ou altura de pressão ao longo da superfície de ruptura deveria ser determinada através do traçado de uma rede de fluxo. De maneira conservadora é possível determinar a altura de pressão (u/γ_w) como se o sistema se encontrasse sob condições de pressões hidrostáticas, tomando simplesmente a diferença de alturas entre a posição da freática e da superfície de ruptura crítica. Como a superfície de ruptura foi dividida em dez partes para determinar o valor da força U pelo método de integração de Gauss-Lobatto, tem-se dez valores definidos como cargas potenciais a serem usadas no processo gráfico do cálculo da força de poropressão. Foram tomadas as coordenadas cartesianas da curva freática e de ruptura obtida numericamente pelo programa WALLSEEP com a finalidade de obter graficamente os valores de potencial.

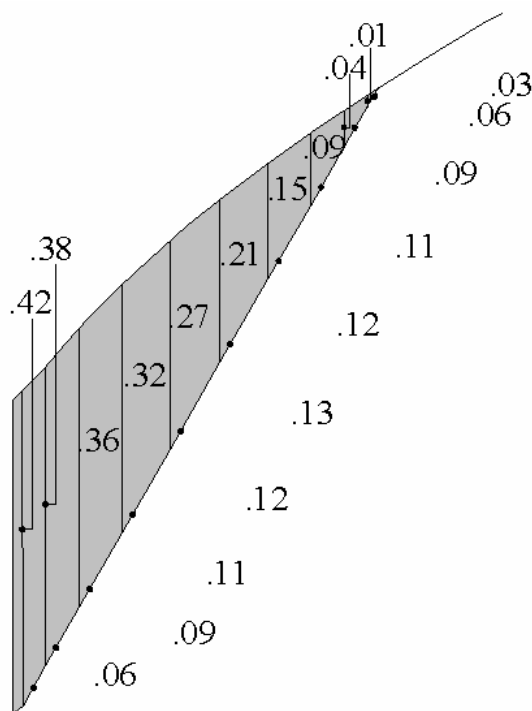


Figura 5. 15 – Determinação gráfica da força de poropressão referente ao exemplo 3.

A tabela 5.1 apresenta o resultado gráfico da força de poropressão extraído do desenho da Figura 5.14. Os resultado gráfico encontrado foi de 1.997 kN/m e o resultado numérico foi de 1.764 kN/m.

Tabela 5.1 – Resultado gráfico da força de poropressão.

Potencial	Potencial médio	Intervalo	(Potencial) x (intervalo)
0.000			
	0.050	0.030	0.00015
0.010			
	0.025	0.060	0.0015
0.040			
	0.065	0.090	0.00585
0.090			
	0.120	0.110	0.0132
0.150			
	0.180	0.120	0.0216
0.210			
	0.240	0.130	0.0312
0.270			
	0.295	0.120	0.0354
0.320			
	0.340	0.110	0.0374
0.36			
	0.370	0.090	0.0333
0.38			
	0.400	0.060	0.024
0.42			
			0.2036

$$\text{Força de poropressão} = 0.2036 \times 9.81 = 1.997 \text{ kN/m}$$

6. RESULTADOS OBTIDOS

A fim de apresentar de maneira prática os resultados obtidos através do programa WALLSEEP foram feitas algumas simulações de cálculo com parâmetros de entrada normalmente adotados em projetos.

A Figura 6.1 possibilita a determinação da vazão de saída de uma estrutura de contenção drenante em função da inclinação do paramento de tardoze variando de 70 a 110 graus.

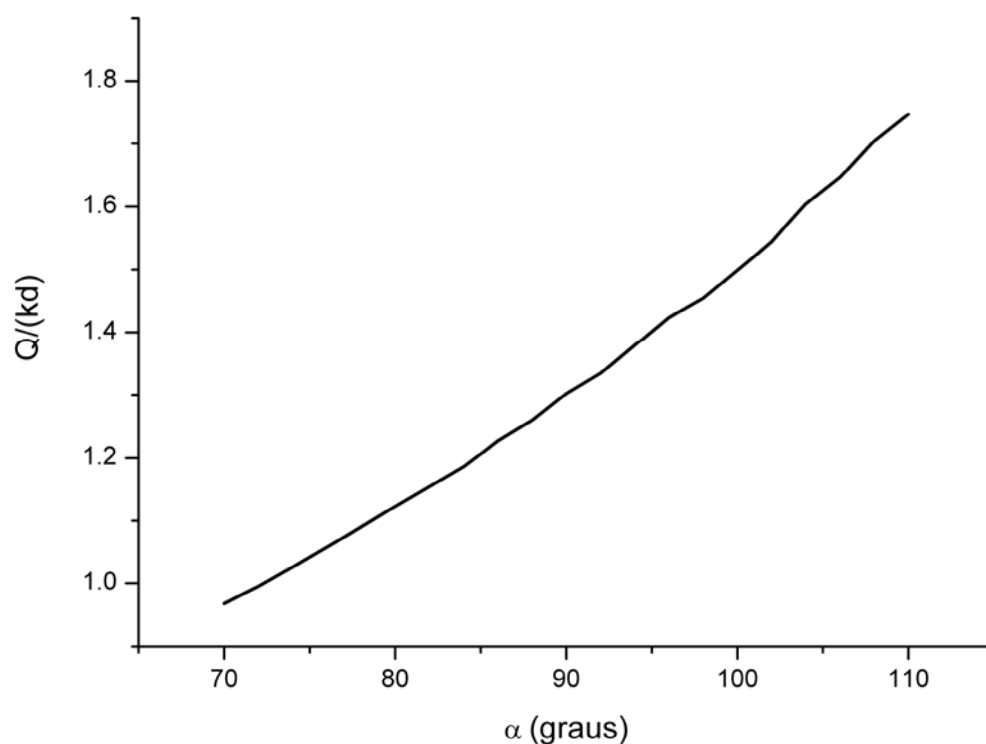


Figura 6. 1 – Gráfico que possibilita a determinação do valor da vazão em função da altura de saída do nível d'água e a permeabilidade variando em relação a inclinação do paramento ao tardoze da contenção.

Ao realizar o processo de busca por tentativas da força de poropressão atuante sobre a superfície de falha crítica, são determinadas varias áreas saturadas, o que possibilitou traçar um gráfico de tais áreas, variando com a altura de saída do nível d'água, em função das possíveis superfícies de ruptura (Figura 6.2). A fim de simplificar os resultados obtidos, foram adotados alguns parâmetros de entrada:

- inclinação do muro, α variando de 80 a 110 graus
- ângulo de atrito interno do solo, $\phi = 30$ graus
- ângulo de atrito de interface solo/muro, $\delta = 0$ graus
- peso específico do solo natural, $\gamma = 18.00\text{kN/m}^3$
- peso específico do solo saturado, $\gamma = 21.60\text{kN/m}^3$
- inclinação do talude, $i = 0$ graus

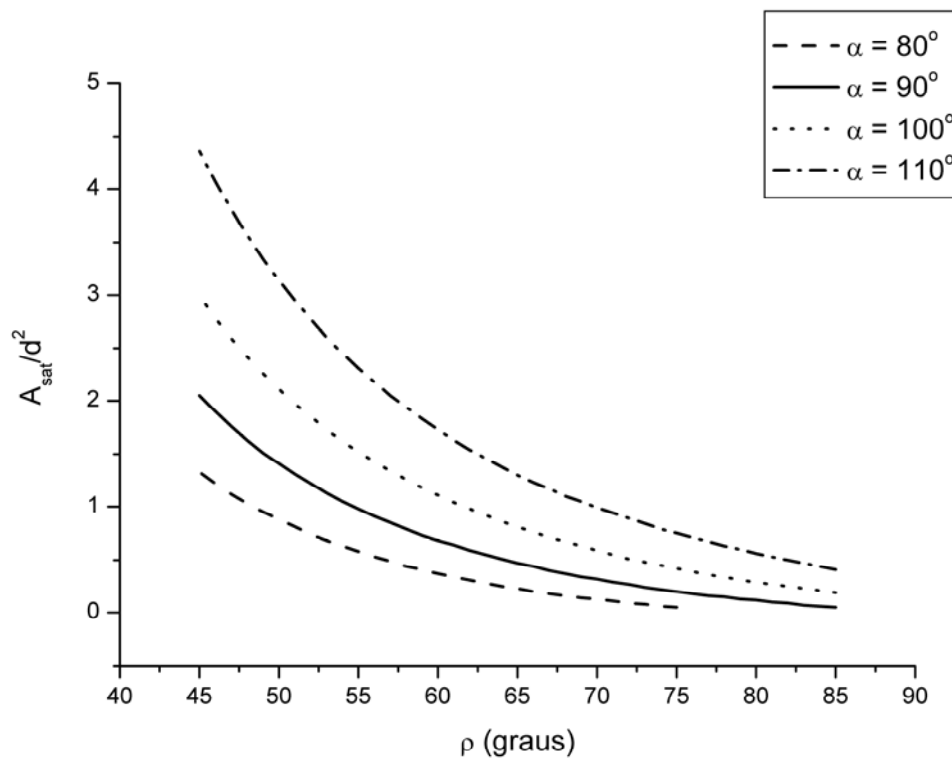


Figura 6. 2 – Gráfico que possibilita a determinação do valor da área saturada em função da altura de saída do nível d'água variando em relação a inclinação do paramento ao tardo da contenção.

Como descrito anteriormente na determinação do gráfico da Figura 6.2, segue-se um processo similar para determinação da força de poropressão, variando com o peso específico da água e a altura de saída do nível d'água, em função das possíveis superfícies de ruptura (Figura 6.3).

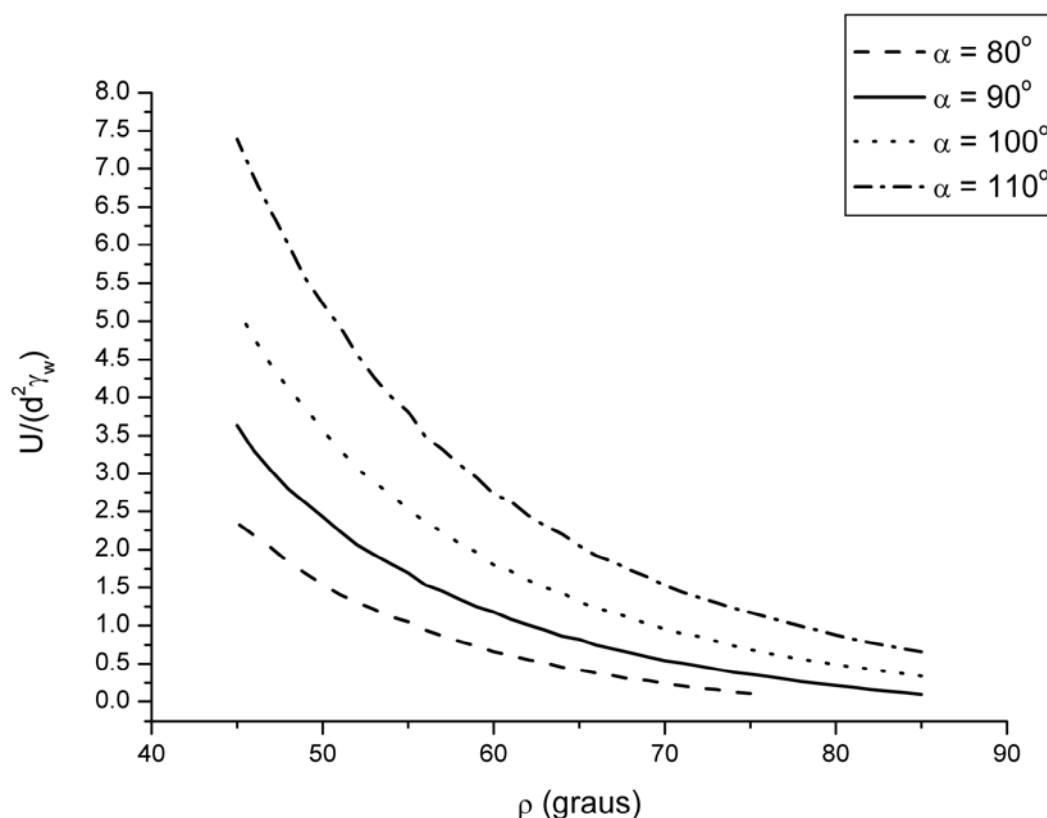


Figura 6. 3 – Gráfico que possibilita a determinação do valor da força de poropressão em função da altura de saída do nível d'água e o peso específico da água variando em relação a inclinação do paramento ao tardo da contenção.

O programa WALLSEEP possibilita o cálculo do empuxo ativo através da inserção dos parâmetros de entrada descritos no item 5.2, e a Figura 6.4 simplifica esse procedimento através da obtenção do coeficiente de empuxo ativo em função da relação entre a altura de saída do nível d'água e a altura do muro. Como existem muitas variáveis a serem declaradas para esse cálculo, foram adotados os seguintes parâmetros:

- inclinação do muro, $\alpha = 90$ graus
- ângulo de atrito interno do solo, $\phi = 30$ graus
- ângulo de atrito de interface solo/muro, $\delta = 0$ graus
- peso específico do solo natural, $\gamma = 20.00\text{kN/m}^3$
- inclinação do talude, $i = 0^\circ$, $i = 20^\circ$ e $i = 26.56^\circ$ (1V:2H)

A equação 6.1 determina o coeficiente de empuxo ativo em função dos parâmetros acima descritos e a Figura 6.4 representa graficamente os resultados obtidos.

$$k_a = \frac{E_a}{0.50\gamma H^2} \quad (6.1)$$

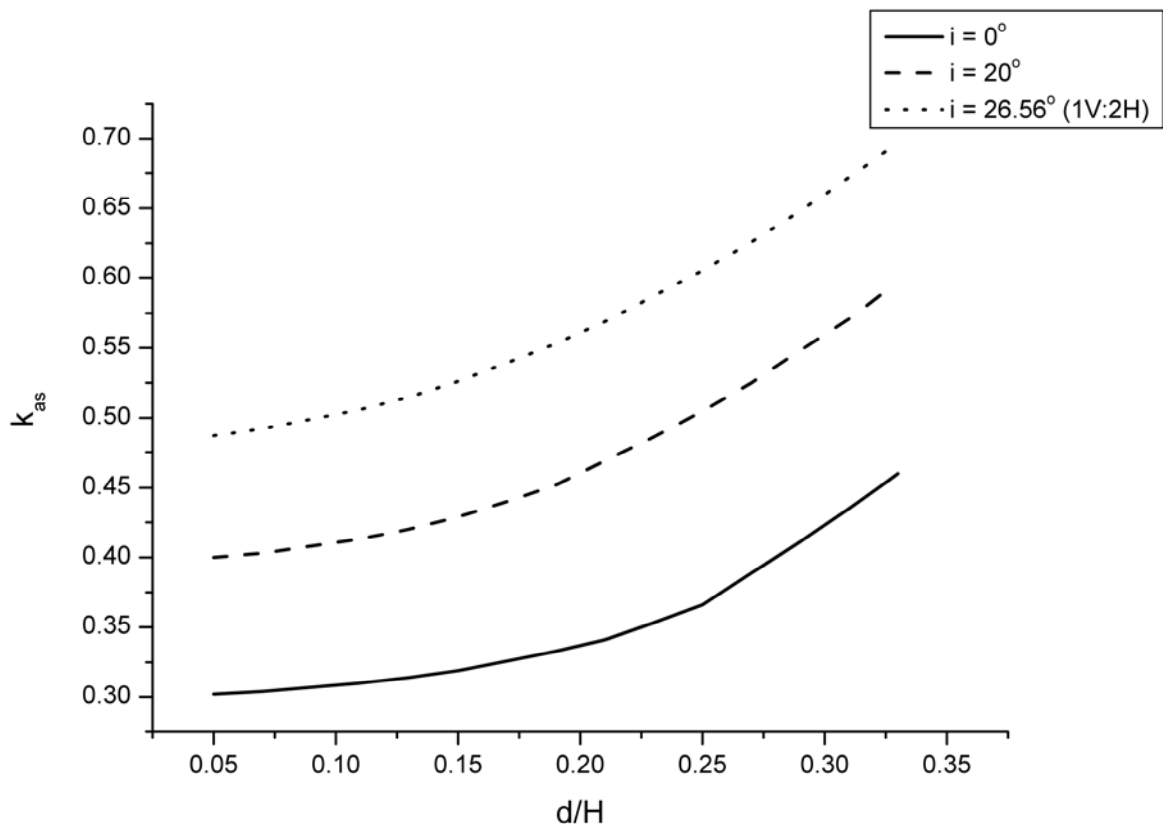


Figura 6. 4 – Gráfico que possibilita a determinação do valor do coeficiente de empuxo ativo com influência da freática variando com a relação entre a altura de saída do nível d'água e a altura do muro.

7. CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

Referente ao cálculo de empuxo ativo pelos métodos tradicionais, fica evidente a simplicidade das fórmulas clássicas encontradas na literatura estudada. O critério de Mohr-Coulomb empregado simplifica bastante a análise, além de ser mais conservador que a análise tridimensional. Sendo assim, o cálculo de empuxo, respeitando tais critérios, faz com que a teoria de Rankine e Coulomb apresente uma identidade matemática muito clara. Em particular a teoria utilizada por Coulomb, que foi um dos alicerces desse trabalho, apresenta diversidade geométrica suficiente para que a busca por tentativas da superfície de ruptura crítica justifique a necessidade de algoritmos matemáticos que possam fazer parte de modelagens computacionais mais complexas.

A idéia da realização desse trabalho foi baseada no artigo publicado por Barros (2006) que estuda a influência da percolação da água em maciços homogêneos no cálculo do empuxo ativo por Coulomb. Esse artigo despertou a necessidade em calcular o empuxo ativo sob condições geométricas variadas, uma vez que a solução analítica apresentada não possui solução para paramentos frontais inclinados.

O uso do Método dos Elementos de Contorno foi à alternativa escolhida para discretizar o problema e buscar uma aproximação numérica para o problema do fluxo. Essa escolha foi baseada mais uma vez nas condições geométricas do problema e na idéia de que a superfície freática faz parte do contorno e que esse pode variar em funções das condições prescritas a ele.

Brebbia e Dominguez (1989) trazem em sua obra várias rotinas computacionais que favorecem o leitor em usar o MEC, por esse motivo foi utilizada rotina POQUABE que discretiza o contorno em elementos quadráticos e possibilita a obtenção da solução numérica para problemas de potencial.

Baseado no que foi descrito por Brebbia e Dominguez (1989) foram feitas adaptações à rotina POQUABE, culminando na criação do WALLSEEP, que em um primeiro momento tornou

possível o cálculo da superfície freática, como descrito no item 4.1.1. Como resultado final, obteve-se o fluxo total para a curva freática proposta, além das coordenadas cartesianas de todos os pontos que a compõe. O fato de o programa fornecer as coordenadas cartesianas como valor de saída, possibilita a geração de arquivos de planilhas eletrônicas, o que facilita para o usuário no uso dessas coordenadas, por exemplo, em outros programas.

Em um segundo momento foi proposta uma rotina de cálculo para a busca por tentativas da superfície de ruptura. A maneira elegante encontrada foi à utilização de métodos de maximização/minimização de funções, como descrito por Press et al (2007). Utilizou-se uma rotina de minimização denominada por Press et al (2007) como GOLDEN. Como essa rotina é de minimização, buscou-se um valor negativo para a função.

Um ponto importante para se implementar o cálculo do empuxo ativo foi a busca pela interseção entre a superfície de ruptura de Coulomb com a superfície freática, a fim de determinar em qual trecho da reta de Coulomb a força de poropressão deve ser aplicada. O item 4.1.2 descreve muito bem esse processo sendo passível de aplicação em modelos matemáticos similares.

O programa WALLSEEP determina o valor do empuxo ativo sob a influência da superfície freática, porém não determina seu ponto de aplicação. Tal determinação é importante para a verificação da estabilidade externa (deslizamento, tombamento e tensões na base). Barros (2006) demonstra que o ponto de aplicação do empuxo ativo com a influência da curva freática está ligeiramente abaixo de $H/3$, o que sugere o uso desse valor como uma aproximação conservadora para o cálculo da estabilidade externa.

Os resultados apresentados no item 5.2 mostram que o programa está compatível com a teoria clássica sem considerar a influência da superfície freática e ao considerá-la apresenta similaridade numérica com o modelo gráfico utilizado (Tabela 5.1). É certo que a aproximação numérica utilizada pode trazer resultados mais precisos em função do número de elementos propostos no contorno, por esse motivo foram utilizados 110 elementos no contorno quando sob influência da superfície freática contra 65 elementos quando sem a presença da água.

Observou-se que um maior número de elementos no trecho denominado “TOPO” interfere principalmente no cálculo da interseção entre a superfície de ruptura e a curva freática. Isso se deve ao fato de que ocorre uma maior concentração de elementos no trecho da curva próxima ao paramento frontal o que gera maior precisão nos resultados para a interseção e posterior cálculo da força de poropressão, uma vez que o ângulo crítico deve estar próximo de $45^\circ + \phi/2$, ou seja, bem próximo do trecho denominado “MURO”. Por esse motivo se deve optar por utilizar um maior número de elementos na parte denominada “TOPO”, considerando o valor mínimo de 40 elementos.

8. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

As principais sugestões para realização de trabalhos futuros são:

- Aperfeiçoamento gráfico da interface do programa;
- Implementar o cálculo de taludes com superfície finitas;
- Determinação numérica do ponto de aplicação do Empuxo Ativo;
- Implementar visualmente ao usuário o traçado da rede de fluxo. Tarefa simples uma vez que se têm os valores do potencial e de sua derivada ao longo do contorno.
- Estudar a possibilidade analisar superfície de falha curvas.

APÊNDICES

Apêndice A – Integração analítica das equações principais

A.1 Integração das equações principais

A.1.2 Equações integrais de contorno para problemas 2D

Para os problemas potenciais em duas dimensões, tem-se quatro funções as equações integrais convencionais de contorno (Liu, 2009).

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right), \quad (\text{A.1})$$

$$F(x, y) = \frac{\partial G((x, y))}{\partial n(y)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} r_{,k} n_k(y), \quad (\text{A.2})$$

$$K(x, y) = \frac{\partial G((x, y))}{\partial n(x)} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} r_{,k} n_k(x), \quad (\text{A.3})$$

$$H(x, y) = \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n(x) \partial n(y)} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^2} [n_k(x) n_k(y) - 2r_{,k} n_k(x) r_{,l} n_l(y)]. \quad (\text{A.4})$$

As integrais das quatro funções no segmento reto ΔS , mostrado na figura A.1, podem ser avaliadas analiticamente. Sendo assim, considera-se que ΔS , $r = d/\cos\theta$, $dS = rd\theta/\cos\theta$.

$$\int_{\Delta S} G(x, y) dS = \frac{1}{2\pi} [-(\theta_2 - \theta_1)d + 2R - T_2 \log r_2 + T_1 \log r_1], \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{\Delta S} F(x, y) dS = -\frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1), \quad (\text{A.6})$$

$$\int_{\Delta S} K(x, y) dS = \frac{1}{2\pi} \left[(\theta_2 - \theta_1) n_k(y) + \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) t_k(y) \right] n_k(x), \quad (\text{A.7})$$

$$\int_{\Delta S} H(x, y) dS = \frac{1}{2\pi} \left[-\left(\frac{T_2}{r_2^2} - \frac{T_1}{r_1^2}\right) n_k(y) + d\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) t_k(y) \right] n_k(x), \quad (\text{A.8})$$

onde $2R (= T_2 - T_1)$ é o comprimento total do segmento linear e t_k é o componente do vetor tangencial t (Figura A.1). Esses resultados podem ser usados para avaliar diretamente os coeficientes das equações integrais de contorno para problemas de potencial bidimensionais usando elementos constantes. Se o ponto fonte x estiver no elemento de integração (no ponto médio do segmento), tem-se que $\theta_2 - \theta_1 = \pi$, $d = 0$, $r_1 = r_2 = R$, $T_1 = -T_2 = -R$, e as quatro integrais, A.5, A.6, A.7 e A.8 se tornam:

$$\int_{\Delta S} G(x, y) dS = \frac{R}{\pi} (1 - \log R), \quad (\text{A.9})$$

$$\int_{\Delta S} F(x, y) dS = -\frac{1}{2}, \quad (\text{A.10})$$

$$\int_{\Delta S} K(x, y) dS = \frac{1}{2}, \quad (\text{A.11})$$

$$\int_{\Delta S} H(x, y) dS = -\frac{1}{\pi R}, \quad (\text{A.12})$$

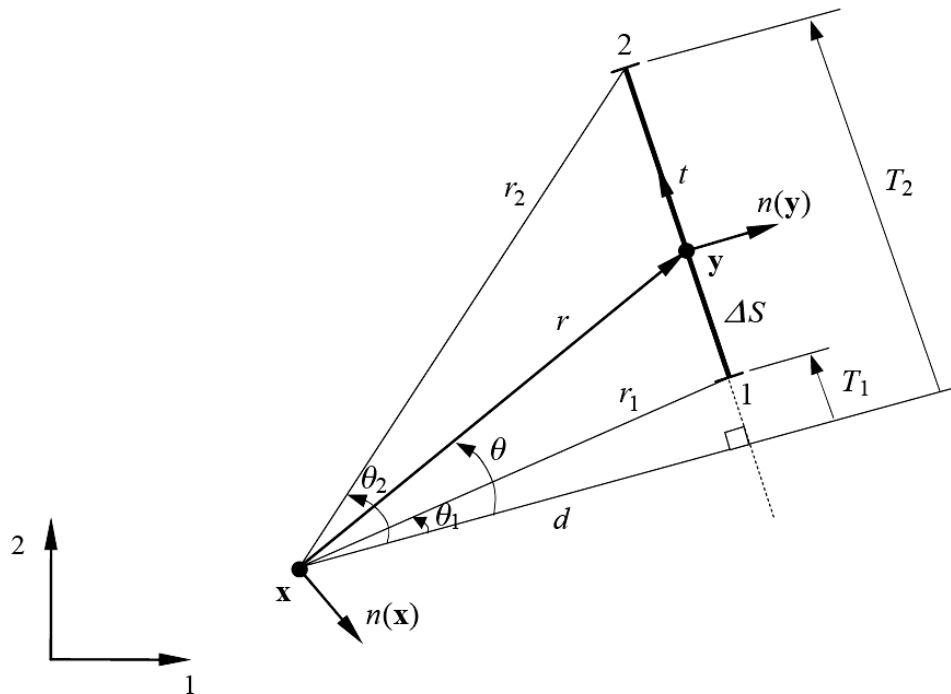


Figura A. 1 - Integração analítica em um segmento de reta arbitrário.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (eds) *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, 9th edn. New York: Dover, 1972.

Barros, P. L. A. “Empuxo exercido por maciço não homogêneo sobre muros de arrimo”, *Simpósio de Informática em Geotecnia*, Associação Brasileira de Mecânica dos Solos - NRSP, pp 159-166, 1994.

Barros, P. L. A. *Obras de Contenção – Manual Técnico*, Maccaferri, 2005.

Barros, P. L. A. “A Coulomb-type solution for active earth thrust with seepage”, *Geotechnique*, Vol. 56, No. 3, pp. 159-164, 2006.

Beer, G., Smith, I. M., & Duenser, C. *The boundary element method with programming: For engineers and scientists*. Wien: Springer, 2008.

Beyer, W. H. *CRC Standard Mathematical Tables*, 28th ed. Boca Raton, FL: CRC Press, p. 465, 1987.

Bowles, J. E. *Foundation analysis and design*, 5th edition, McGraw-Hill, 1996.

Brebbia, C. A. and Domínguez, J. *Boundary elements - an introductory course*, London, Computational Mechanics Publications, 1989.

Caputo, H. P. *Mecânica dos Solos e suas Aplicações*, Vol. 2, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 6ª edição, 1988.

Chandrasekhar, S. *Radiative Transfer*. New York: Dover, pp. 63-64, 1960.

Coulomb, C. A. “Essai sur une application des regles des maximis et minimis a` quelques problemes de statique relatifs a` l’arquiteture”. *Mem. Acad. Roy. Pres. Divers, Sav.*, Paris 5, No. 7, 1776.

Harr, M. E. *Groundwater and seepage*. New York: McGraw-Hill, 1962.

Hildebrand, F. B. *Introduction to Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill, pp. 343-345, 1956.

Hunter, D. and Nikolov, G. “On the Error Term of Symmetric Gauss-Lobatto Quadrature Formulae for Analytic Functions”., *Math. Comput.* 69, 269-282, 2000.

Jàky, J. “The coefficient of earth pressures at rest”, *Journal for Society of Hungarian Architects and Engineers*, Budapest, Hungary, pp 355–358, 1944.

Lambe, T.W. and Whitman, R.V. *Soil Mechanics*, SI Version, John Wiley & Sons, 1979.

Liu, Y. J. *Fast Multipole Boundary Element Method - Theory and Applications in Engineering*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

Menezes, F. A. ; Pulino Filho, A. R. “Uma aplicação do Método dos Elementos de Contorno na determinação de superfície livre em problemas de escoamento não confinado em regime permanente”. In: *V Congresso de Métodos Computacionais para Engenharia*, 1984, Salvador, 1984.

Noronha, M.A., BEM Basic Course, Europe Latin – American Boundary Element Network (ELBENet) - *BEM for potential problems: direct BEM for homogeneous region; higher order elements; indirect BEM formulations*, 2005.

Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. and Flannery, B.P., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Third Edition, p. 429-496, New York: Cambridge University Press, 2007.

Ueberhuber, C. W. *Numerical Computation 2: Methods, Software, and Analysis*. Berlin: Springer-Verlag, p. 105, 1997.

Vargas, M. *Introdução à Mecânica dos Solos*, Editora Mc Graw Hill do Brasil, 1978.