



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo

GABRIELA MARTINS SOUZA BRISOLA

**ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DA FRATURA EM
MODELOS COESIVOS COM O MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO**

CAMPINAS

2018

GABRIELA MARTINS SOUZA BRISOLA

**ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DA FRATURA EM
MODELOS COESIVOS COM O MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO**

Dissertação de Mestrado apresentada a Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, para obtenção do título de Mestra em Engenharia Civil na área de Estruturas e Geotecnia.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Palermo Junior

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO OU TESE DEFENDIDA PELA ALUNA GABRIELA MARTINS SOUZA BRISOLA E ORIENTADO PELO PROF. DR. LEANDRO PALERMO JUNIOR.

ASSINATURA DO ORIENTADOR:

CAMPINAS

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7286-3364>

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

B774a Brisola, Gabriela Martins Souza, 1985-
Análise da propagação da fratura em modelos coesivos com o método dos elementos de contorno / Gabriela Martins Souza Brisola. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Leandro Palermo Junior.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Método dos elementos de contorno. 2. Fissuras. 3. Fraturas. 4. Mecânica da fratura. I. Palermo Junior, Leandro, 1960-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Analysis of fracture propagation using linear cohesive models with the boudary element method

Palavras-chave em inglês:

Boundary element method

Fissures

Fractures

Mechanics of fracture

Área de concentração: Estruturas e Geotécnica

Titulação: Mestra em Engenharia Civil

Banca examinadora:

Leandro Palermo Junior [Orientador]

Leandro Mouta Trautwein

José Claudio de Faria Telles

Data de defesa: 06-11-2018

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Civil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E
URBANISMO**

**ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DA FRATURA EM
MODELOS COESIVOS COM O MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO**

GABRIELA MARTINS SOUZA BRISOLA

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:

**Prof. Dr. Leandro Palermo Junior
Presidente e Orientador/FEC/UNICAMP**

**Prof. Dr. Leandro Mouta Trautwein
FEC/UNICAMP**

**Prof. Dr. José Cláudio de Faria Telles
COPPE/UFRJ**

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

Campinas, 06 de novembro de 2018

DEDICATÓRIA

*Dedico a Deus.
Aos meus pais e irmão, por acreditarem
nas minhas escolhas.
Ao Thiago, incentivador de sonhos.*

AGRADECIMENTOS

Minha gratidão ao Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior pela inestimável orientação, confiança e às inúmeras oportunidades que me proporcionou, desde o início dos meus estudos na pós-graduação. Agradeço pela dedicação do seu tempo, paciência e pela confiança depositada em mim;

Aos professores Luiz Carlos de Almeida e Leandro Mouta Trautwein pela participação da banca de exame de qualificação deste trabalho e pelas importantes contribuições dadas durante o meu desenvolvimento acadêmico;

Aos membros da banca examinadora, por aceitarem o convite em avaliar a dissertação;

Aos amigos do Departamento de Estruturas da UNICAMP, que me proporcionaram imensurável assistência e valiosas contribuições para o meu aprendizado acadêmico e vida pessoal;

A todos os professores e funcionários do Departamento de Estruturas da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, que de muitas formas contribuíram para a realização deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, José Carlos e Marília, e irmão Rodrigo, pelo amor incondicional e apoio infindável. Ao meu companheiro de vida, Thiago, pelo seu carinho e incentivo em todos os meus passos e a Deus, pela oportunidade de desfrutar da vida e de seu amor.

EPÍGRAFE

*“Sem a curiosidade que me move, que me inquieta, que me insere na busca,
não aprendo nem ensino”*

(Paulo Freire)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma análise numérica pelo Método dos Elementos de Contorno Dual (MEC Dual), da propagação de fraturas em modelos coesivos bidimensionais. O método emprega a equação integral de contorno de forças de superfície em conjunto com a equação integral de contorno de deslocamentos, na região da fissura. O modelo de fissura fictícia é adotado no sentido de simular numericamente as forças atrativas na região de descontinuidade. A propagação da fissura na direção perpendicular à tensão principal máxima ocorre quando a tensão na ponta da fissura fictícia excede a máxima tensão resistente à tração do concreto. O fenômeno de amolecimento do concreto será tratado com as leis constitutivas do tipo linear e adotando uma ou duas retas para a curva tensão-abertura da fissura na fase de amolecimento. O modo I de abertura de fissura é estudado com uma viga de concreto solicitada à flexão em três pontos. O operador diferencial tangente é empregado no núcleo da hipersingular da equação integral de forças de superfície do MEC Dual para reduzir a singularidade e é avaliada a eficiência do uso de elementos quadráticos contínuos ao longo da fissura. Os exemplos numéricos para a análise da fissura coesiva são comparados a resultados da literatura, os quais foram retratados através de ensaios experimentais e numéricos. Os resultados obtidos evidenciam a eficiência da formulação proposta, corroborando aos estudos de problemas em fissuras em materiais quase frágeis.

Palavras Chave: Método dos Elementos de Contorno; Propagação de fissura; Materiais quase frágeis.

ABSTRACT

A numerical implementation of the Dual Boundary Element Method, for the analysis of two-dimensional crack problems in cohesive materials is presented. The dual equations of the method are the displacement and the traction boundary integral equations, while the displacement equation is applied on one of the crack surfaces and the traction equation on the other. The fictitious crack model is used to simulate the fracture zone with forces acting on crack surface. When the force at the fictitious crack tip exceeds the maximum tensile strength of the concrete, the crack will propagate in the direction perpendicular to the principal stress. During the fracture process, the softening constitutive law for stress-crack opening displacement curve is linear with one or two straight lines. Three-point bending specimens were used to check the numerical results for crack opening mode I. The tangent operator technique is introduced in the hyper-singular kernel of the traction integral equation to reduce the order of the singularity, so the efficiency of continuous quadratic elements along the crack is analyzed. The numerical examples for cohesive crack are compared with those in the literature, which specimens were used in experimental and numerical studies. Obtained results evidenced the efficiency of the proposed formulation, collaborating to the study of crack problems in quasi-brittle materials.

Keywords: Boundary Element Method; Crack propagation; Quasi-brittle materials.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1. Modos de Fratura.	38
Figura 2. Placa de dimensões infinitas com fratura central de comprimento $2a$, sob estado de tensão σ	40
Figura 3. Distribuição de tensões na ponta da fissura do material elástico-linear.....	43
Figura 4. Fissura de comprimento a em meio infinito.....	44
Figura 5. Nós na ponta da fissura de elementos contínuos quadráticos.	46
Figura 6. Diferença conceitual para o material fissurado em comportamento: (A) frágil, (B) plástico e (C) quase-frágil.	48
Figura 7. No Modelo de Fissura Fictícia, tem-se (A) a zona de fratura na ponta da fissura alterada por (B) uma fissura capaz de transmitir tensões.	49
Figura 8. Representação do Modelo de fissura de Dugdale.	50
Figura 9. Representação do Modelo de fissura de Hillerborg.	51
Figura 10. Regime elástico-linear da curva tensão-deformação devido ao ensaio do concreto à tração.	52
Figura 11. Gráfico da relação tensão e abertura da fissura na fase pós-pico do ensaio do concreto à tração.....	52
Figura 12. Representação gráfica da relação tensão e abertura da fissura na Lei coesiva linear.	53
Figura 13. Representação gráfica da relação tensão e abertura da fissura na Lei coesiva bilinear.	54
Figura 14. Representação do ponto fonte x_0 e ponto campo X	62
Figura 15. Posicionamento do ponto no contorno considerando superfície adicional $\Gamma\epsilon$	63
Figura 16. Discretização de um problema.	69
Figura 17. Mudança de coordenadas dos pontos de um elemento.	70
Figura 18. Direções de aplicação do ponto de colocação.....	75
Figura 19. Ilustração da matriz de coeficientes devido a H_{ij}	76
Figura 20. Faces da fissura na região coesiva.	87

Figura 21. Modelo de viga utilizado sob teste de flexão de três pontos.....	94
Figura 22. Parâmetros utilizados nas leis constitutivas de uma e duas retas.....	95
Figura 23. Viga com discretização dos elementos de contorno.	95
Figura 24. Comparação entre os resultados obtidos nesse estudo e demonstrados por Saleh e Aliabadi (1995).....	96
Figura 25. Comparação entre os resultados obtidos nesse estudo e demonstrados por Petersson (1981).	97
Figura 26. Comparação entre os resultados obtidos nesse estudo e demonstrados por Petersson (1981).	97
Figura 27. Modelo de viga utilizado sob teste de flexão de três pontos.....	98
Figura 28. Regiões a frente da fissura e parâmetros para a lei constitutiva bilinear.	99
Figura 29. Parâmetros utilizados na lei constitutiva de duas retas.	100
Figura 30. Viga com discretização dos elementos de contorno.	101
Figura 31. Curva comparativa dos resultados da amostra A150-80-A.....	102
Figura 32. Curva comparativa dos resultados da amostra A150-80-B.....	102
Figura 33. Curva comparativa dos resultados da amostra B250-80.....	103
Figura 34. Curva comparativa dos resultados da amostra B150-80.....	104
Figura 35. Curva comparativa dos resultados da amostra B63-80.....	105
Figura 36. Parâmetros utilizados nas leis constitutivas de duas retas.	108
Figura 37. Curva comparativa dos resultados para $d=125$ mm para o concreto simples.	109
Figura 38. Curva comparativa dos resultados para $d=250$ mm para o concreto simples.	109
Figura 39. Curva comparativa dos resultados para $d=500$ mm para o concreto simples.	110
Figura 40. Curva comparativa dos resultados para $d=125$ mm para o concreto reforçado com fibras SFRC-1.....	112
Figura 41. Curva comparativa dos resultados para $d=250$ mm para o concreto reforçado com fibras SFRC-1.....	112
Figura 42. Curva comparativa dos resultados para $d=500$ mm para o concreto reforçado com fibras SFRC-1.....	113

Figura 43. Curva comparativa dos resultados para $d=125$ mm para o concreto reforçado com fibras SFRC-2.....	115
Figura 44. Curva comparativa dos resultados para $d=250$ mm para o concreto reforçado com fibras SFRC-2.....	115
Figura 45. Curva comparativa dos resultados para $d=500$ mm para o concreto reforçado com fibras SFRC-2.....	116
Figura 46. Curva comparativa dos resultados para $d=125$ mm para o concreto reforçado com fibras Micro-FRC.....	118
Figura 47. Curva comparativa dos resultados para $d=250$ mm para o concreto reforçado com fibras Micro-FRC.....	118
Figura 48. Curva comparativa dos resultados para $d=500$ mm para o concreto reforçado com fibras Micro-FRC.....	119
Figura 49. Curva comparativa dos resultados para $d=125$ mm para o concreto reforçado com fibras Macro-FRC.....	121
Figura 50. Curva comparativa dos resultados para $d=250$ mm para o concreto reforçado com fibras Macro-FRC.....	121
Figura 51. Curva comparativa dos resultados para $d=500$ mm para o concreto reforçado com fibras Macro-FRC.....	122

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Propriedades mecânicas de acordo com leis constitutivas, por Petersson (1981). ...	94
Tabela 2. Parâmetros mecânicos para concreto simples, por Bruggi e Venini (2012).	100
Tabela 3. Parâmetros mecânicos para concreto simples e reforçado com fibras, por Bruggi e Venini (2012).	107

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MFEL	Mecânica da Fratura Elástico Linear
MDF	Método das diferenças finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEC Dual	Método dos Elementos de Contorno Dual
MEF	Método dos Elementos Finitos
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
ZPC	Zona de Processo Coesivo

LISTA DE SÍMBOLOS

K	Fator de Intensidade de Tensões
K_c	Fator de Intensidade de Tensões crítico
a	Comprimento da fissura
a_o	Comprimento da fissura real
W	Energia de deformação
U	Energia superficial associada à fissura
G	Taxa de liberação de energia
G_c	Taxa de energia crítica de deformação elástica
θ	Ângulo associado a coordenada na ponta da fissura
f_t	Resistência à tração do material
f_1	Resistência à tração do material na lei constitutiva linear de dois parâmetros
P_n	Força coesiva na direção normal a superfície da fissura
Δ_u	Valor de abertura da fissura
$\Delta_{u n}$	Valor de abertura da fissura na direção normal
$\Delta_{u cr}$	Valor de abertura crítica da fissura
$\Delta_{u cr}^*$	Valor de abertura crítica da fissura na lei constitutiva linear de dois parâmetros
ϕ_j	Deslocamento total da fissura
σ_{ij}	Tensor de tensões
ε_{ij}	Tensor de deformações

n_i	Componente normal à superfície
n_t	Componente tangencial à superfície
F_i	Campo de forças de volume
u_i	Campo de deslocamentos
p_i	Campo de forças de superfície
δ_{ij}	Delta de Kronecker
λ, μ	Constantes de Lamé
C_{ijkl}	Tensor de constantes elásticas
E	Módulo de elasticidade longitudinal
G	Módulo de elasticidade transversal
ν	Coefficiente de Poisson
g	Vetor de Galerkin
∇^2	Operador de Laplace
$r(p, Q)$	Distância entre o ponto fonte e o ponto campo
$\Delta(x, \xi)$	Delta de Dirac
ξ	Coordenada do ponto fonte no elemento
U_{ij}^*	Solução fundamental de deslocamentos
P_{ij}^*	Solução fundamental de forças de superfície
Ω	Domínio
Ω_ε	Domínio infinitesimal

ε	Raio da parte infinitesimal do domínio dividido
Γ	Contorno
Γ_ε	Contorno do semicírculo do domínio a parte
$\varphi_i(\xi)$	Funções de forma
l	Comprimento do elemento
J	Jacobiano
$[G]_{ij}$	Matriz que contém os núcleos da equação integral de deslocamentos
$[H]_{ij}$	Matriz que contém os núcleos da equação integral de forças de superfície
D_{ikj}	Combinação linear da derivada da solução fundamental de deslocamentos
S_{ikj}	Combinação linear da derivada da solução fundamental de forças de superfície
D_{kp}	Operador diferencial tangente
d	Altura da viga estrutural

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	20
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	20
1.2 OBJETIVOS DO ESTUDO.....	22
1.3 ESTRUTURAÇÃO DO TEXTO.....	23
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	24
2.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .	24
2.2 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A MECÂNICA DA FRATURA.....	29
2.3 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A MECÂNICA DA FRATURA APLICADA AO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	32
3. MECÂNICA DA FRATURA	36
3.1 MODOS DE FRATURA	37
3.2 MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICO LINEAR (MFEL).....	38
3.3 FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÕES.....	42
3.4 MÉTODO DA EXTRAPOLAÇÃO DE DESLOCAMENTOS	45
3.5 MECÂNICA DA FRATURA APLICADA AO CONCRETO	47
3.6 MODELO DE FISSURA COESIVA	49
4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	55
4.1 APRESENTAÇÃO	55
4.2 TEOREMA DE GREEN.....	56
4.3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL	57
4.4 TEOREMA DA RECIPROCIDADE DE BETTI.....	59
4.5 EQUAÇÃO INTEGRAL DE DESLOCAMENTOS	61
4.6 EQUAÇÃO INTEGRAL PARA PONTO NO CONTORNO	62
4.7 APLICAÇÃO NUMÉRICA	68
4.8 MONTAGEM DAS MATRIZES DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	72
4.9 DESLOCAMENTOS EM PONTOS INTERNOS AO DOMÍNIO	77
4.10 TENSÕES EM PONTOS INTERNOS AO DOMÍNIO	78
4.11 OPERADOR DIFERENCIAL TANGENTE.....	81

4.12	TENSÕES EM PONTOS NO CONTORNO.....	83
5.	APLICAÇÃO DO MEC DUAL PARA MODELO DE FISSURA COESIVA.....	84
5.1	AS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO NO MEC DUAL	84
5.2	ESTRATÉGIA PARA MODELAGEM DA FISSURA FICTÍCIA	86
6.	EXEMPLO DE APLICAÇÃO	91
6.1	EXEMPLO 01.....	93
6.2	EXEMPLO 02.....	98
6.2.1	AMOSTRA A150-80-A.....	101
6.2.2	AMOSTRA A150-80-B.....	101
6.2.3	AMOSTRA B250-80	103
6.2.4	AMOSTRA B150-80	103
6.2.5	AMOSTRA B63-80	104
6.3	EXEMPLO 03.....	105
6.3.1	AMOSTRA DE CONCRETO SIMPLES.....	108
6.3.2	AMOSTRA DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS SFRC-1	111
6.3.3	AMOSTRA DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS SFRC-2	114
6.3.4	AMOSTRA DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS MICRO-FRC	117
6.3.5	AMOSTRA DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS MACRO-FRC.....	120
7.	CONCLUSÃO	123
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	127

1. INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As fissuras estão presentes em todas as estruturas, seja por consequência das características da microestrutura dos materiais que as constituem, modo de utilização das peças ou pelo processo de fabricação das mesmas. Nesse contexto, o estudo da mecânica da fratura é de grande importância para a integridade das estruturas, contribuindo para o entendimento da falha e do processo de propagação das fissuras, evitando a deterioração que pode levar a peça à ruína. Dada uma estrutura ou componente mecânico com uma fissura ou falha pré-existente, cabe a ciência descrever quais carregamentos a estrutura pode suportar em função do tamanho da fissura e sua configuração. Ainda, devem-se compreender as questões que englobam quão rápido e para quais direções uma fissura irá se desenvolver a partir de uma determinada força atuante, determinando o maior tamanho de fissuras que podem existir antes de levar a estrutura ao colapso (ZEHNDER, 2012).

A mecânica da fratura surgiu efetivamente após a segunda guerra mundial para investigar as grandes catástrofes relatadas em estruturas de navios, aviões e locomotivas contendo fissuras ou defeitos, mesmo funcionando em níveis de tensões abaixo dos limites prescritos em projetos. Dentre vários acontecimentos, o caso dos navios do tipo Liberty é citado por Anderson (1995) como uma curiosidade para esta disciplina da engenharia. Nos primeiros dias da Segunda Guerra Mundial, os Estados Unidos da América (EUA) forneciam navios e aviões para a Grã-Bretanha, a qual tinha como maior necessidade o uso de navios de carga que transportassem suprimentos. Sob orientação do engenheiro Henry Kaiser, os EUA desenvolveram um procedimento para economizar tempo na montagem dos navios. Os novos navios Liberty tinham um casco totalmente soldado (ao contrário dos modelos tradicionais rebitados), viabilizando a produção industrial em massa e de baixo custo. Contudo, um dos navios rompeu bruscamente, dividindo a estrutura em duas partes, enquanto navegava entre a Sibéria e o Alasca. Em torno de 2700 navios Liberty foram construídos durante a Guerra e desses, aproximadamente 400 unidades apresentaram fraturas, dos quais 20 navios apresentaram falha total, levando metade desses à ruína completa com separação total das partes do navio. Alguns desses acidentes demonstraram que os critérios para as análises da época eram insuficientes para estruturas propensas a ocorrência de fissuras (ANDERSON, 1995).

O fenômeno se destaca no meio científico e estudos são desenvolvidos com o propósito de prever o comportamento das estruturas, avaliar os parâmetros correspondentes e compará-los com a resistência do material ao fraturamento.

Nesse contexto, os primeiros conceitos da mecânica da fratura eram baseados em materiais frágeis, nos quais a fissura podia ser avaliada como elástica linear. Após estudos apresentados por Kaplan (1961), sobre o processo de fratura no concreto, o qual era tratado como material elástico linear em muitos casos, atribuiu-se a variação de efeitos plásticos não-lineares e um crescimento lento da fissura antes da propagação instável. Em materiais quase frágeis, como o concreto, o fenômeno da fissura ocorre de maneira particular. As duas superfícies da fissura não ficam completamente separadas no início do processo de fraturamento. Verifica-se a perda de rigidez do material quando a fissura se inicia e com isso, a perda da capacidade resistente do elemento. O modelo de uma fissura discreta que corresponda a essa perda de rigidez do material durante a propagação da fissura é feito através do modelo de fissura fictícia, desenvolvido com o objetivo de permitir o estudo dos comportamentos dos materiais quase frágeis fissurados.

Para a formulação numérica, métodos para análise estrutural foram desenvolvidos, tornando-se ferramentas essenciais para engenheiros de projetos e pesquisadores. Esse acontecimento é consequência do grande avanço tecnológico computacional, de métodos de modelagem e programas eficientes capazes de aproximar os modelos à realidade. A simulação do comportamento das estruturas denota economia de tempo e garantia contra riscos ao propiciar o conhecimento, com antecedência, do desempenho das estruturas que apresentam falhas (SOUZA, 2001).

Segundo Leonel e Venturini (2009), o método dos elementos de contorno (MEC) tem sido considerado como uma ferramenta numérica importante e eficiente para análise dos problemas de fissuras. Muitos anos de pesquisas científicas revelam que a formulação das equações integrais de contorno e sua implementação através do MEC trouxeram contribuições importantes para as análises da mecânica da fratura em duas e três dimensões. Ademais, os autores acima mencionados preconizam como vantagem da análise de fissuras através do MEC, se comparado ao método dos elementos finitos (MEF), a eficiência de redução de dimensionalidade, pois apenas o contorno é discretizado, de tal forma a simplificar a modelagem das superfícies da fissura.

No entanto, a solução para uma análise de mecânica da fratura não pode ser determinada com a aplicação direta da formulação clássica do MEC, pois as equações integrais de contorno em deslocamento para dois pontos sobrepostos nas duas superfícies da fissura geram equações idênticas, resultando um sistema de equações algébricas singular. Para evitar esse problema, algumas técnicas numéricas adaptadas ao MEC surgiram ao longo dos anos.

Dentre as opções, a formulação dual do MEC (MEC Dual) é adotada, na qual equações integrais de deslocamento e de forças de superfícies são aplicadas.

Nos primeiros modelos propostos para análise dos problemas de fissuras, eram apresentadas formulações baseadas no conceito de que as tensões declinavam abruptamente até se dissiparem. No entanto, esse tratamento não é adequado para representar materiais heterogêneos, pois nesses casos as faces opostas da fissura têm capacidade de transmitir tensões de tração até determinado nível de carregamento. Sendo assim, a implementação dos métodos numéricos propõe a utilização de uma lei constitutiva na fase inicial do problema (fase elástico linear) e uma lei que represente o comportamento não linear, que inclui uma descontinuidade após o sólido fissurar e iniciar a propagação da fissura.

O presente trabalho aborda o desenvolvimento de uma estratégia para análise da propagação de fissuras em materiais coesivos através do MEC Dual utilizando técnicas para tratamento de integrais singulares.

1.2 OBJETIVOS DO ESTUDO

O objetivo principal desse trabalho é aprimorar uma formulação computacional desenvolvido e apresentado por Gonçalves (2015). Utilizando o modelo de fissura fictícia para análise numérica do processo de propagação de fissuras em domínios planos de materiais quase frágeis, esse estudo tem a finalidade de utilizar a lei constitutiva linear com uma reta, para verificar a estabilidade do programa quando comparado a formulação original e, além disso, introduzir à formulação o uso da lei constitutiva linear com duas retas, para representar o modelo de fissura fictícia.

Pretende-se representar o comportamento não linear devido ao crescimento da fissura, a qual envolve o fenômeno de perda de rigidez do material. A formulação deve ser verificada através da análise da propagação de fissura para o modo I de abertura e o processo incremental de carregamento é utilizado na solução, a fim de se obter o comportamento não linear.

É propósito desse trabalho, aplicar essa formulação para análises de propagação da fissura comparando resultados com exemplos da literatura, desenvolvidos por métodos numéricos utilizando Método dos Elementos Finitos (MEF) e modelos experimentais, para casos de misturas de concretos simples e misturas de concretos reforçados com fibras de aço,

visando garantir a eficiência e aplicação do método sob diferentes comportamentos dos materiais.

1.3 ESTRUTURAÇÃO DO TEXTO

Para melhor compreensão do trabalho, esse tópico visa explicitar a organização dessa dissertação.

O capítulo um aborda a introdução ao tema e objetivos da pesquisa, juntamente com a justificativa.

No capítulo dois é apresentado uma breve revisão da literatura com os principais trabalhos relacionados ao método dos elementos de contorno e mecânica da fratura, com o anseio de pormenorizar os principais passos do método no desenvolvimento das equações integrais até sua utilização em materiais coesivos, identificando importantes contribuições dos temas a fim de se obter uma fundamentação adequada para desenvolvimento do projeto.

O capítulo três é dedicado à explicação do comportamento da mecânica da fratura. Primeiramente é abordado o caso da fratura em meio elástico linear e hipóteses consideradas para o estudo de tensões nas proximidades da ponta da fissura. Na sequência, trata-se das características particulares de fissuras em materiais quase-frágeis, como o caso do concreto, e os processos inelásticos que influenciam o processo de fraturamento da estrutura.

Para o quarto capítulo, citam-se as bases para o desenvolvimento do MEC aplicado aos problemas de elasticidade. Nesta etapa, é desenvolvida a estratégia usada na formulação das equações singulares e hipersingulares.

O quinto capítulo mostra como é aplicado o MEC Dual ao modelo de fissura coesiva. Nessa etapa, abordam-se as equações integrais de contorno de deslocamentos e forças de superfície e estratégia para modelagem da fissura fictícia em material quase-frágil.

No sexto capítulo são apresentados os resultados obtidos para diversos tipos de exemplos de vigas de concreto sob ensaio de flexão, utilizando-se diferentes amostras e lei constitutiva de uma e duas retas para representar a zona coesiva, de acordo com as características de cada amostra ensaiada.

O sétimo capítulo mostra uma análise dos resultados obtidos, mostrando as conclusões alcançadas no decorrer do presente trabalho e são propostas algumas considerações para trabalhos futuros.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

A utilização de métodos numéricos vem se estabelecendo para resolver problemas de engenharia. O MEC é uma técnica eficiente para análise em diversas áreas de estudo pois apresenta soluções aproximadas de boa exatidão para muitos problemas, inclusive em casos de maior complexidade. A formulação do MEC é baseada na transformação das equações diferenciais dos problemas físicos em equações integrais sobre o contorno do corpo em análise. Sendo assim, faz-se essencial conhecer uma solução fundamental para o problema a ser estudado.

Para Cheng e Cheng (2005), quando os computadores eletrônicos se tornaram disponíveis, por volta de 1960, o surgimento definitivo da técnica numérica conhecida como MEC se potencializou e vem se estabilizando até os dias atuais.

Segundo Love (1944), Kelvin estudou o comportamento de um corpo elástico e isotrópico, solicitado por uma força concentrada agindo em um ponto e posteriormente, a formulação para esse problema se tornou conhecida como a Solução de Kelvin e ainda é utilizada para resolver problemas de elasticidade utilizando métodos numéricos.

As equações diferenciais que regem o problema físico passam manipulações matemáticas, como integração por partes e teorema da divergência ou teorema de Green, é são transformadas em equações integrais sobre o contorno. A solução de problemas físicos com equações integrais foi abordada por Lagrange e Laplace. A redução da dimensão espacial na equação integral, quando usam integrais no contorno, foi tratada por Gauss em 1813 e por Stokes em 1854, porém, o trabalho mais importante para a formulação das equações integrais de contorno em problemas de potencial é atribuído a Green, em 1828, que apresentou três identidades utilizadas para a formulação.

Segundo Cheng e Cheng (2005), na teoria da elasticidade, Betti em foi o primeiro a estudar equações integrais relacionando forças de superfície e deslocamento no contorno, publicando seu estudo em 1872.

Somigliana apresentou, em 1886, a equação integral que relaciona forças e deslocamentos no contorno de um corpo com seus deslocamentos internos e a esse estudo foi dado o nome de identidade de Somigliana.

Inspirado pelo uso de funções como um método para resolver problemas de flexão em vigas submetidas a um carregamento distribuído, Fredholm estudou equações integrais e provou, em 1903, a existência de uma solução da equação linear integral. Em seu estudo, propôs equações integrais discretizadas em problemas de potencial harmônico, que fundamentaram a base do MEC por aproximação indireta. A técnica citada adota funções de densidades fictícias, isto é, não têm sentido físico, porém, permitem o cálculo de deslocamento e tensões a partir das condições de contorno.

Kellog (1929) foi pioneiro na utilização dessas equações integrais para resolver problemas governados pela equação fundamental de Laplace.

Posteriormente, outros trabalhos podem ser citados como Muskhelishvili (1953), Mikhlin (1957) e Smirnov (1964) para resolução de problemas de engenharia utilizando equações integrais restritas, devido a necessidade de solução analítica das integrais. Kupradze (1965) apresentou a utilização da formulação indireta, no contexto da teoria da elasticidade para problemas estáticos e dinâmicos.

Jaswon (1963) e Symm (1963) aplicaram as equações integrais de contorno para problemas bidimensionais da teoria de potencial, desenvolvendo uma técnica de aproximação com base nas equações integrais de Fredholm. O surgimento do MEC como um método computacional é atribuído a esses estudos. A técnica abordava a discretização de um contorno em uma série de segmentos, ou elementos, e as equações integrais de contorno de um problema potencial foram aplicadas a um número de pontos pertencente ao contorno. Um sistema linear de equações foi obtido e, por meio de análise computacional, as incógnitas foram determinadas.

Muitos pesquisadores consideram a técnica de aproximação direta do MEC como mais confiável que aproximação indireta, por adotar variáveis físicas do problema como incógnitas no sistema de equações. Em elasticidade, as forças e deslocamentos são obtidos diretamente da solução do sistema de equações. Rizzo (1967) apresentou a primeira publicação utilizando a técnica direta para resolver equações integrais dos problemas de elasticidade bidimensionais no contorno. Em seu estudo, as variáveis resultantes da solução eram os deslocamentos e as forças de superfície, enquanto o contorno do problema foi segmentado por elementos lineares.

Cruse (1969) avançou nos estudos propostos por Rizzo (1967) e abordou problemas elásticos em três dimensões admitindo uma superfície do domínio discretizadas em elementos triangulares de um nó, com aproximação constante para as grandezas do contorno. Núcleos

regulares eram integrados numericamente enquanto os núcleos singulares eram integrados de forma analítica.

Cruse (1972) desenvolve uma revisão completa sobre as formulações das equações integrais de contorno em caso de potencial e de elasticidade, estendendo para problemas elastoplásticos. Em suas publicações posteriores, Cruse (1973) estudou problemas tridimensionais e comparou os resultados obtidos, além do tempo gasto computacionalmente, nas análises pelo MEC e pelo método dos elementos finitos (MEF). Cruse (1974) abordou elementos triangulares lineares, apresentando integração analítica por meio da redução da integral bidimensional a uma integral de linha.

As formulações existentes se baseavam em soluções analíticas particulares complexas para as integrais envolvidas e um grande avanço no desenvolvimento do método foi proposto por Lachat. A publicação de Lachat (1975) contribuiu para a generalização do MEC, considerado como o primeiro estudo que incorpora ideias do MEF ao MEC. Lachat propôs técnicas de resolução das integrais de forma numérica por meio de quadratura de Gauss e elementos de contorno isoparamétricos, com aproximação geométrica quadrática permitindo que superfícies curvas fossem modeladas adequadamente.

O entusiasmo, adquirido pela abordagem do MEC nas diversas áreas da Mecânica dos Sólidos e em outras áreas da Engenharia, levou o desenvolvimento de novas formulações, de integrais com núcleos singulares de ordens superiores e análises complexas. Acrescido a isso, o avanço dos recursos computacionais permite obter soluções cada vez mais aprimoradas das integrais envolvidas nas formulações. Diante disso, vários estudos se seguem, até os dias atuais, em procurar soluções claras e computacionalmente viáveis, para o cálculo de integrais não singulares (ou regulares), quase singulares, fracamente singulares, fortemente singulares e hipersingulares. Muitas pesquisas foram realizadas e muitas técnicas foram propostas para lidar com a integral singular.

Lachat e Watson (1976) apresentaram técnicas numéricas, através de uma transformada de coordenadas degeneradas para integrais fracamente singulares e seu método ficou conhecido como Mapeamento Degenerado. O estudo tratava integrais em problemas elásticos tridimensionais, com elementos quadráticos e funções de interpolação quadráticas ou cúbicas para o contorno. Essas novas técnicas foram amplamente aceitas e utilizadas para resolução de novos problemas, como termoelásticos em Rizzo e Shippy (1977) e elásticos com materiais anisotrópicos, por Wilson e Cruse (1978).

No início dos anos 80, um grande volume de publicações foi apresentado e segundo Cheng e Cheng (2005), o método das equações integrais passou a ser conhecido por método dos elementos de contorno conforme C.A. Brebbia, J. Dominguez, P. K. Banerjee e R. Butterfield. O novo termo foi utilizado pela primeira vez nas publicações de Brebbia e Dominguez (1977) abordando problemas potenciais, Banerjee e Butterfield (1977) em livro com problemas clássicos de fluxo potencial, fluxo transiente e problemas elastostáticos, e Dominguez (1977) em sua tese sobre tensões em placas de ancoragem.

Brebbia (1978) deduziu a formulação integral dos problemas de elasticidade a partir do método de resíduos ponderados. Com isso, tornou-se viável relacionar e combinar o MEC com outras técnicas numéricas.

Pina e Fernandes (1981) propuseram um novo tipo de tratamento numérico para integrais singulares com uso de quadratura de Gauss para integrais fracamente singulares na formulação do MEC. Um conjunto de pesos especiais e pontos gaussianos foram derivados para a integral fracamente singular.

As técnicas de quadratura exigem atenção especial baseado no aumento da quantidade de pontos de integração para elementos próximos às regiões críticas. Para avaliação de tensões em pontos internos no caso de problemas planos, como em Chien et al. (1997), pode ser usar um esquema adaptativo, onde a divisão dos elementos é feita de forma iterativa, aplicando subdivisões sucessivas para o cálculo de cada elemento, até que se resultem valores convergentes.

Para integrar de forma numérica os núcleos fortemente singulares, Kutt (1975) desenvolve um método para calcular integrais para a parte finita do valor principal da integral singular, através de quadratura gaussiana da integral singular desconsiderando a parte divergente. Esse método foi estendido para casos bidimensionais ou tridimensionais, resultando em uma boa exatidão dos valores.

Aliabadi et al. (1985) apresentaram o método da subtração de singularidade baseado em expansões em série de Taylor dos núcleos originais para o tratamento de problemas tridimensionais. Foi subtraída a singularidade dos núcleos de integração de forma que a integral se torne regular e a parte singular subtraída possa ser resolvida analiticamente. Mais tarde, Aliabadi (1985) e Aliabadi e Hall (1989) aplicaram o método para casos bidimensionais.

Segundo Crouch (1976), na área de formulações hipersingulares, os primeiros trabalhos estão relacionados à mecânica da fratura, concentrando grande parte das pesquisas.

Muitas estratégias são abordadas na literatura para solução de equações hipersingulares como pode ser visto em Iokamidis (1982), Gray et al. (1990), Bonnet (1999) e Dominguez et al. (2000). No entanto, o seu cálculo permanece abrangendo grande dificuldade.

Telles (1987), para o tratamento das integrais fracamente singulares, apresentou uma técnica autoadaptiva de transformação de coordenadas em casos bidimensionais. Telles admite que a derivada da transformação seja nula no ponto singular e assim, concentra pontos de integração próximos da região de tratamento singular. Telles e Oliveira (1994) avançaram os estudos para que a transformação se adaptasse a singularidades mais fortes. Cruz (2001) confirma a eficiência da técnica de Telles em problemas de potencial. Johnston e Elliott (2001) apresentam uma transformação para melhorar a precisão de avaliar integrais fracamente singulares conforme a generalização do método de Telles, utilizando polinômios superiores aos de terceiro grau, com a ideia de utilizar os mesmo pontos da quadratura de Gauss usados em integrais não singulares em uma implementação típica do MEC.

Cruse e Aithal (1993) também abordaram subtração de singularidade através de uma expansão em série de Taylor. Os resultados comprovam a eficiência do método principalmente no tratamento de integrais quase singulares.

Uma das formas de se evitar o tratamento de integrais singulares no MEC é através do uso de pontos de colocação fora do domínio do problema. Ribeiro (1992) e Cruz (2001) apresentaram essa técnica no caso de placas e potencial, respectivamente. Os principais problemas desta técnica se referem à instabilidade dos resultados ao externar o ponto fonte a uma distância muito próxima do contorno (CRUZ, 2001).

Carley (2009) apresentou um método para criar quadraturas para funções fracamente singulares sem a necessidade de conhecer exatamente os coeficientes das singularidades. O trabalho foi motivado pela necessidade de avaliar integrais em problemas potenciais.

Gao (2010) apresenta um método numérico para integrais fracamente singulares, fortemente singulares e hipersingulares que existem no sentido do valor principal de Cauchy em problemas de duas e três dimensões.

Fenner (2014) descreveu a integração de integrais singulares utilizando a quadratura logarítmica, técnica significativa para o cálculo das integrais quando o ponto fonte está localizado no elemento a ser integrado.

2.2 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A MECÂNICA DA FRATURA

Com o intuito de prever o limite da capacidade resistente dos materiais, desde os tempos antigos, estudos buscam o conhecimento dos meios responsáveis pela perda da integridade dos corpos sólidos submetidos a carregamentos externos.

Conforme abordado por Kzam (2009), o primeiro estudo relacionado à fratura pertence ao pesquisador Galileu Galilei (1564-1642), considerado como um dos precursores da mecânica dos sólidos. Galilei apresentou um entendimento dos mecanismos de resistência dos materiais e resistência dos sólidos à fratura, intitulando-as de *duas novas ciências*. No seu livro, apresentou informações sobre a capacidade resistente de um material no momento da ruptura.

Saint-Venant (1797-1886) orientou os estudos para o desenvolvimento da teoria da plasticidade, concentrado no comportamento limite dos materiais devido à plasticodinâmica. Pode-se afirmar que sua contribuição impulsionou os estudos posteriores para a mecânica da fratura (TIMOSHENKO, 1953).

Inglis (1913) publicou sobre os fundamentos analíticos da mecânica da fratura. Foi apresentada uma formulação matemática para determinar a distribuição de tensões em torno da abertura elíptica inserida na região central de uma chapa, em meio elástico e finita. Com base nos seus modelos experimentais, Inglis (1913) introduziu o conceito de singularidade na ponta da fissura.

Posteriormente aos resultados de Inglis (1913), Griffith (1920) estabeleceu uma relação quantitativa entre a força (ou carga de ruptura) com o comprimento da fissura. Em seu modelo plano, a fissura é representada por um furo elíptico cujas dimensões lineares variam de acordo com o comprimento $2a$ do eixo maior da elipse. O autor instituiu um critério para equilíbrio energético e calculou a redução da energia potencial devido à formação de novas superfícies de fissura. Griffith propôs calcular essa energia com base na densidade superficial de energia (γ), que ele denomina como uma propriedade intrínseca do material. Ele apresentou que, como as fissuras crescem no interior dos sólidos a partir de vazios preexistentes, se trabalhasse com material de alta resistência e baixo índice de vazios, então a tensão limite de fratura poderia ser aumentada. Por isso utilizou a fibra de vidro e então, concluiu que a resistência do material não estava relacionada apenas com a coesão das moléculas, mas, também, com o índice de vazios existentes entre elas. Sendo assim, Griffith mostrou importante o conhecimento da tenacidade do material, ou seja, uma propriedade relacionada à capacidade do material de impedir o crescimento de fissuras no seu interior. E para fornecer um critério

capaz de aferir a integridade mecânica do sólido, é mister a comparação da tenacidade com a taxa de liberação de energia. Porém, Griffith conseguiu prever a propagação de fissuras apenas em materiais frágeis, como o vidro.

O grande progresso em mecânica da fratura ocorre entre as décadas de 1940 e 1970, com a introdução do trabalho de Irwin (1948, 1957) e de Orowan (1948). Em Irwin foram apresentados os modos de propagação da fratura e os campos de tensão na extremidade da fissura. Irwin fomentou a ideia sobre o estado de tensão na vizinhança da ponta da fissura para materiais elásticos lineares e isotrópicos e propôs uma nova interpretação da taxa de liberação de energia de Griffith: o fator de intensidade de tensão (K), como uma ferramenta para análise de falhas que dependem da geometria do elemento, da fratura e intensidade do esforço externo. Tal grandeza, segundo Irwin, seria capaz de caracterizar o estado de uma peça, desde que a zona de acomodação plástica na ponta da fissura não tivesse extensão relevante.

Modelos com tensões coesivas foram apresentados por Dugdale (1960) e Barenblatt (1962), visando representar essencialmente o comportamento de materiais dúcteis e assim apresentar um modelo relativamente simples para trabalhar com plasticidade na ponta da fissura. Barenblatt admitiu um limite das tensões nas extremidades das fissuras e foi estabelecido o modelo de fissura coesiva.

Paris et al. (1961, 1963) publicaram um trabalho pioneiro com a tarefa de prever, ou ao menos entender, a propagação de fissuras. Eles sugeriram o fator de intensidade de tensão de Irwin para caracterizar a velocidade da propagação da fissura através de um ciclo.

Wells (1961) introduziu uma nova abordagem para o processo de fratura. Trabalhando com aços estruturais de alta tenacidade, apresentou a existência de uma deformação plástica na ponta da fissura antes da propagação da mesma. Com isso, propôs que a propagação da fissura se deve ao deslocamento crítico da abertura da ponta da fissura, nomeado CTOD (*crack-tip opening displacement*).

Segundo Bazant (2000), a primeira aplicação da mecânica da fratura para o concreto foi abordada por Kaplan em 1961. Ele testou o problema em fissuras pré-introduzidas em vigas (*pre-notched beams*) de ensaios experimentais e concluiu que o valor crítico da taxa de energia potencial liberada, G_c , permanecia constante para diferentes comprimentos das fissuras e só diminuía ao trabalhar com vigas de tamanhos menores. Kaplan concluiu que este poderia ser utilizado como um parâmetro de estabilidade para o fraturamento do concreto.

Rice (1968) abordou ideias para o tratamento de problemas não lineares e admitiu uma grandeza igual à taxa de liberação de energia potencial total. Considerou um caminho arbitrário no entorno da ponta da fissura e com isso definiu uma integral (J) de contorno aplicada em um corpo fissurado (KANNINEN, (1985).

Hutchinson (1968) apresentou estudos sobre comportamento não lineares aplicando a integral J e abrangendo o comprimento de fissura.

Naus e Lott (1969) executaram estudos experimentais em pasta de cimento, argamassa e concreto para valores da tenacidade ao fraturamento. Concluíram que os valores de tenacidade aumentam quando a quantidade de ar contido diminui em todos os materiais testados.

Hillerborg et. al (1976) desenvolveu a fissura fictícia através de ensaios de tração uniaxial e admitiu que o processo de dissipação, localizado na frente a fissura é aproximado pelo fenômeno de amolecimento ao longo da fissura fictícia. A propagação da fissura, por sua vez, ocorre quando a tensão na ponta da fissura se iguala ao valor de resistência à tração do material.

Petersson (1981) apresentou um modelo de cálculo, com base na mecânica da fratura e no MEF. A aplicação da mecânica da fratura elástica linear (MFEL) para o concreto foi feita através do uso do modelo de fissura fictícia e Petersson concluiu que o uso da integral J , a abordagem de CTOD e a análise da curva R se mostraram limitado quando se trata de materiais cimentícios.

Catalano (1983) foi o primeiro a utilizar corpos-de-prova com entalhe, conhecidos por *short-rod*, para ensaios de tenacidade ao fraturamento de argamassas e concretos. Catalano concluiu que a MFEL é aplicável a esses materiais para caracterizar o comportamento ao fraturamento do concreto, porém, os valores de tenacidade obtidos eram dependentes dos constituintes do concreto, das condições de cura e da idade do material.

Outro importante fator para a mecânica da fratura é o efeito de escala. Bazant e Kazemi (1990) analisaram peças de concreto armado de diferentes dimensões e apresentaram estudos de falha por corte (modo II) para o efeito de escala para materiais quase frágeis, denominado Modelo do Efeito de Escala (*size effect law*), para medir a energia de fraturamento do material. O efeito escala estuda a influência das dimensões da estrutura sobre as propriedades dos materiais. Bazant e Kazemi (1990) simularam a fratura em materiais frágeis, com uma série de vigas similares, onde a relação tamanho inicial da fissura pela altura da seção transversal da

viga foi mantida constante, bem como a largura da seção transversal da peça em todos os modelos. Concluíram a influência do tamanho da estrutura quando solicitada a um mesmo nível de tensão.

Nitidamente, o estudo dos processos de fraturamento em materiais quase frágeis é vasto. Atualmente, é dada importante atenção à caracterização de novos modelos constitutivos eficientes para simular computacionalmente o comportamento de estruturas de concreto em processos de fraturamento.

2.3 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A MECÂNICA DA FRATURA APLICADA AO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

A aplicação dos métodos numéricos nas estruturas de engenharia é o resultado de anos de dedicação sobre as técnicas matemáticas obtidas por pesquisadores. No campo da mecânica da fratura, a aplicação do método dos elementos de contorno (MEC) tem se demonstrado como uma ferramenta numérica apropriada para o estudo do comportamento de fissuras. Conforme Cruse (1969), muito anos de pesquisas científicas nessa área demonstram que a formulação da equação integral de contorno e sua utilização através do MEC comprovam importante contribuições para análises de mecânica da fratura.

Cruse e Van Buren (1971) apresentaram um primeiro estudo de fratura através do MEC para a análise elástica de tensões em corpos com fissura de borda. Segundo os autores, os resultados foram compatíveis com análise feita pelo MEF, conforme apresentados por Chan et al. (1968). O tratamento dos problemas de fissuras com a utilização do MEC era limitado, devido à degeneração matemática de duas faces das fissuras coplanares (ALIABADI, 2002).

Cruse (1972) apresentou exemplos de fissura em formato elíptico, em modelos bi e tridimensionais. Esse estudo mostrou que a aplicação direta do MEC ao problema elástico linear com fissuras levava a uma singularidade no sistema de equações, devido às superfícies coplanares da fissura. Para resolver esse problema, Cruse aproximou a forma da fissura a um entalhe arredondado. Neste caso, um ponto negativo é que a modelagem exigia muitos elementos para discretização da ponta da fissura elíptica. Foram observados erros da ordem de grandeza de quatorze por cento e a análise foi considerada não eficiente.

Snyder e Cruse (1975) introduziram uma forma especial de soluções fundamentais no método das equações integrais de contorno. A solução fundamental (função de Green) para fissuras em meio anisotrópico contém a forma de fratura livre de forças superficiais em meio

infinito e, portanto, não era necessária a modelagem de superfícies. A técnica da função de Green permitiu que os termos das integrais do contorno da fissura se anulassem e a solução se tornasse mais precisa, porém, limitada a fissuras retas bidimensionais. Os fatores de intensidade de tensões eram analisados sem o estudo de propagação da fissura. O estudo apresentado por Telles et al. (1995) contribuiu no desenvolvimento e generalização desta formulação, pois apresentaram um método para geração automática das funções de Green em problemas de fissuras simples ou múltiplas em geometria qualquer. Silveira et al. (2005) apresentou um estudo em que a função de Green é obtida numericamente pela equação integral de contorno hipersingulares, para problemas bidimensionais da MFEL.

O primeiro método que aceitou a existência de duas superfícies de fissura coplanares foi apresentado por Blandford et al. (1981). Esta aproximação, baseada na formulação de domínio múltiplo (ou método de sub-regiões) é geral e foi aplicada para problemas de fissuras simétricas e assimétricas, de configurações bidimensional e tridimensional. Este método permite simular o crescimento da fissura entre dois contornos, pois aborda contornos superficiais e com isso permite a ligação da fissura com o contorno. A grande desvantagem desse método estava em introduzir esses contornos artificiais devido à dificuldade da implementação de forma automática. Ainda assim, segundo Aliabadi (2002), esse método foi largamente utilizado em problemas com fissuras.

O método da descontinuidade de deslocamento foi proposto por Crouch (1976) e Crouch e Starfield (1983). Nesse caso, a fissura é tratada como superfície única, porém com deslocamento descontínuos e assim, seria necessário apenas a discretização de uma das faces da fissura.

Cruse (1978) apresentou uma equação integral de contorno para força de superfície, baseado na identidade Somigliana para tensão. Em mesmo período, outros autores elaboram as equações integrais de contorno para diferentes áreas de aplicação e essas são comumente chamadas de equação integral de contorno hipersingulares.

Polch et al (1987) demonstrou uma formulação da equação integral de contorno para força de superfície para modelos de fissuras em uma superfície única descontínua.

A formulação singular Liang e Li (1991) foi utilizada para modelagem de fraturamento coesivo e com isso, foi considerado um dos estudos pioneiros no uso do MEC para tratar fissuras. Ainda que esse modelo de sub-regiões fosse muito utilizado na análise das fissuras, cabe ressaltar que apresentava o mesmo problema computacional encontrado no MEF,

pois era necessário prever o crescimento da superfície com uma interface definida e depois modificar a malha de acordo com a resposta obtida.

A técnica utilizada na análise de problemas da Mecânica da Fratura abordada por Gray et al. (1990) e por Watson (1986), se baseia no uso de equações integrais de deslocamentos e forças de superfície para nós localizados nas superfícies da fissura.

Hong e Chen (1988) estudaram a técnica do método dos elementos de contorno dual (MEC Dual), que foi difundido por Portela (1992) para problemas bidimensionais e por Mi e Aliabadi (1992) para problemas tridimensionais. Esse método se mostrou como um modelo geral e computacionalmente eficiente, que permite estudar o problema da fissura considerando suas faces coincidentes em uma única linha.

O método utiliza duas equações integrais de contorno distintas, ou seja, em uma face da fissura mantém a equação integral para deslocamentos e na face oposta, a equação integral de forças de superfície. As equações apresentam o mesmo caminho de integração de acordo com os pontos fontes coincidentes, porém, com equações integrais de contorno distintas, obtém-se equações algébricas independentes. Com isso, o problema resulta em um sistema de equações de dimensões menores que o sistema obtido pela técnica da sub-região. A vantagem da aplicação deste método está na análise dos problemas de propagação da fissura, visto que não é necessário o rearranjo da malha a cada incremento de fissura.

Portela et al. (1993) apresentou um problema elástico de propagação de fissura em modo misto, a partir da análise incremental de extensão da fissura baseado no critério de tensão máxima.

Mi e Aliabadi (1992) aplicaram o MEC Dual para analisar a propagação da fissura em problema tridimensional de modo misto.

Fedelinski et al. (1996) e Leitão et al. (1995) abordaram a propagação de fissura em problema dinâmico e elastoplástico. O comportamento não linear da propagação da fissura em materiais quase frágeis (concreto) foi modelado através do MEC Dual por Saleh e Aliabadi (1995). Os pesquisadores admitiram a simulação computacional eficiente na propagação da fissura. Lacerda e Wrobel (2002) compararam soluções analíticas e soluções obtidas pelo MEC ao MEF e confirmaram a eficácia do método MEC Dual. Uma revisão completa do método dual é apresentada em Aliabadi (1997).

Vera-Tudela (2003) apresenta duas formulações do MEC utilizando a função de Green numérica. A primeira aborda a dupla reciprocidade, adequado e eficaz para solução de

problemas com ações no domínio, pois transforma a integral de domínio de uma força de volume, em uma integral de contorno. A outra formulação trata do método da quadratura operacional, como estratégia alternativa na solução de problemas dinâmicos da mecânica da fratura.

Gonçalves (2015) aborda o desenvolvimento de uma estratégia onde considera o modelo de fissura de forma direta na formulação do MEC Dual, o qual elabora análise numérica do processo representando o comportamento não linear mediante crescimento da fissura, utilizando elementos lineares isoparamétricos em sua formulação.

Gomes et al. (2016) emprega o uso do MEC Dual para problemas com trincas e apresenta um programa de análise, escrito em linguagem de programação *C++* para modelagem e análise para elementos bidimensionais e, em mesmo estudo, uma interface do programa com o MATLAB para etapas de pré e pós-processamento. A utilização do programa e metodologia foi avaliada e testada por Leite (2017).

Os estudos na área do MEC para resolver problemas da mecânica da fratura apresentaram grandes avanços ao longo dos anos e continua ainda sendo um campo de pesquisa com possibilidade de investigação científica.

3. MECÂNICA DA FRATURA

A existência de falhas concernentes a fissuras em estruturas de engenharia é observada desde os tempos pretéritos. Embora grande parte desta preocupação não tenha sido registrada, algumas evidências de experimentos acadêmicos relatam sua existência.

Com o crescente uso do aço nas estruturas no século XIX, percebeu-se a necessidade de pesquisas específicas sobre os critérios convencionais adotados nos projetos de engenharia. O evento das duas grandes guerras mundiais impulsionou a análise do comportamento mecânico dos componentes estruturais na presença de fissuras ou falhas. Segundo Broek (1987), a ocorrência de fissuras sob baixas tensões em materiais frágeis conduziu ao desenvolvimento da mecânica da fratura.

O primeiro estudo sistemático sobre fratura foi apresentado por Griffith (1920), que construiu uma teoria baseado em princípios de energia aplicando em material frágil, como o vidro. Nesse estudo, afirmou que a fissura se propaga quando o material, sob tensão externa, apresenta uma variação de energia elástica armazenada maior do que a energia necessária ao desenvolvimento de novas superfícies. A contribuição do engenheiro inglês se deve particularmente ao material amorfo e foi modificado para observar o comportamento de materiais cristalinos, particularmente tendo em vista que a deformação em materiais é descontínua. Para Rubbra (1964), essa publicação foi a maior contribuição de Griffith para a ciência do comportamento dos materiais.

As teorias anteriores de Griffith foram concebidas para resolver a discrepância entre a força ideal e a observada, admitindo a concentração de tensões local para os casos de materiais fissurados ou com falhas. Pode-se afirmar que a importância do trabalho de Griffith estava em apontar que fissuras podem levar materiais a ruptura. Assim sendo, as teorias de resistência à fratura subsequentes levam em conta a existência de microfissuras, sejam existentes no material ou geradas após processo de deformação.

A concentração de tensões nas proximidades da ponta da fissura é tratada por Griffith ao apresentar que as fissuras podem teoricamente produzir tensões infinitas nessa região. De forma geral, o problema proposto se desenvolve através de uma fenda em uma chapa sob tensão.

Para testar a teoria, Griffith utilizou tubos de ensaio e cilindros de paredes finas e com o uso de cortador, introduziu fissuras nas amostras. Esses modelos foram pressurizados com acompanhamento da pressão no ponto de fratura instável. Os valores de tensões foram

calculados para cada teste e os resultados demonstraram a linearidade dos valores, caracterizando materiais com comportamento frágil na ruptura (ZEHNDER, 2012).

A abordagem da fratura como um problema significativo no mundo industrializado como uma disciplina de engenharia, visando bases teóricas e práticas, pode ser o resultado das contribuições de George Irwin nos anos seguintes à Segunda Guerra Mundial. Por complementar a teoria existente, Irwin é usualmente conhecido como o pai da mecânica da fratura, pelas suas primeiras publicações em 1948. Após esse período, Irwin direcionou suas principais pesquisas para a organização e compreensão dos comportamentos da fratura por meio de testes e planos de controle. Conforme relatado por Cotterell (1997), Irwin realizou suas principais contribuições técnicas na área da mecânica da fratura, quando introduziu conceitos básicos, procedimentos para realização de testes e métodos de análises que seriam fundamentais tanto para aplicação prática como para pesquisa da mecânica da fratura moderna. Com isso, suas publicações entabulam o estabelecimento de uma nova disciplina, a qual é conhecida por Mecânica da Fratura.

Os desenvolvimentos que seguiram a partir do trabalho de Irwin foram focados na MFEL em sua maioria e em seguida ao tratamento de problemas não lineares. Ele demonstrou que a taxa de liberação de energia para formar as novas superfícies era equivalente a um estado de solitação crítico em pontos próximos à ponta da fissura, criando assim o conceito de fator de intensidade de tensão. Esse fator é usado desde então como parâmetro de resistência local aplicado aos problemas de fissura.

Pode-se assim atribuir ao critério de energia proposto por Griffith (1920) e ao fator de intensidade, abordado por Irwin (1957), as bases teóricas fundamentais da formulação da MFEL.

3.1 MODOS DE FRATURA

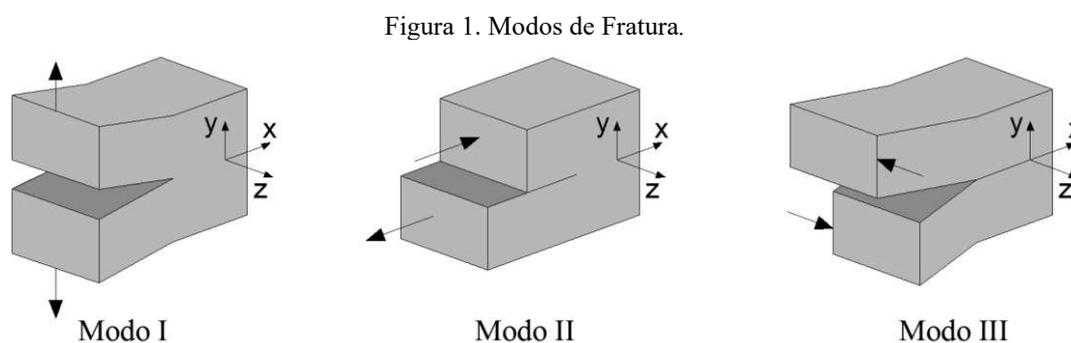
A formação de fissuras pode ser um processo completo de fratura, que depende efetivamente da microestrutura de um elemento sólido cristalino ou amorfo, do carregamento aplicado e do ambiente inserido. O fenômeno da fratura dá origem, fisicamente, a duas superfícies de separação devido à descontinuidade introduzida ao material íntegro.

A fissura em um sólido pode se propagar em um modo de deslocamento ou em uma combinação de três modos de deslocamentos devido a um tipo de carregamento ou combinações de carregamentos, respectivamente.

O modo I (Figura 1) é chamado modo de abertura e consiste em deslocar as faces da fissura de modo perpendicular ao plano da fissura a partir de uma tensão de tração normal à fratura. Neste modo de deslocamento, as faces da fissura permanecem simétricas em relação do plano xz .

O modo II de fratura, ou *modo de cisalhamento* no plano, a fratura é solicitada por forças atuantes paralelamente ao eixo (x), ou a superfície da fratura.

No modo III, denominado *cisalhamento antiplano*, ocorre o deslizamento das partes fora do plano do sólido. A fratura é solicitada por forças atuantes paralelamente à superfície da fratura, porém, na direção perpendicular à propagação.



Fonte: Adaptado de Broek, 1987.

De acordo com Broek (1987), a sobreposição dos três modos descritos na Figura 1 representa o modo geral de fraturamento. Porém, tecnicamente, o Modo I é o mais importante. Neste estudo de investigação será considerado, essencialmente, a ruptura induzida por tensão de tração.

3.2 MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICO LINEAR (MFEL)

A base do entendimento da fratura dos materiais solidifica-se no conhecimento dos campos de tensão e deformação nas regiões próximas da ponta da fissura, e para isso, este tópico aborda a análise linear dos campos, aplicável para todas as condições de fissura, estrutura e carregamento, onde a deformação inelástica inerente ao redor da fissura é pequena.

A problema a qual a MFEL é válida pode ser categorizada como satisfatória em casos de escoamento em pequena escala. Ou seja, a sua validade exige que as tensões aplicadas sejam pequenas o suficiente para que o escoamento plástico não ocorra no elemento.

A MFEL relaciona o tamanho da fissura com o carregamento atuante no sólido, relacionando assim a análise de tensão da estrutura carregada e as medidas experimentais das propriedades de fraturamento do material. Expressando em termos quantitativos, tem-se que a fratura ocorrerá quando:

$$K(a, D, \sigma) = K_c(T, \dot{\sigma}, B) \quad (3.1)$$

Sendo K um parâmetro calculado que, conforme indicado em (3.1), depende de a , a dimensão da fissura, de D , dimensões do elemento e σ , da tensão aplicada. Por outro lado, K_c é um parâmetro do material referente a tenacidade à fratura do material, ou seja, a resistência do material à propagação da fissura, que depende de T , temperatura na ponta da fissura, de $\dot{\sigma}$ ($\equiv d\sigma/dt$), taxa de carregamento e B , espessura da seção fissurada. Este parâmetro é medido experimentalmente. (KANNINEN, POPELAR, 1985).

É importante compreender que ambos os parâmetros são relevantes. A resistência de um material é a tensão necessária para romper um espécime do material, ou seja, um valor determinado usualmente por meio de ensaio de tensão uniaxial. A resistência da estrutura consiste na força necessária para se ter a tensão máxima atuante na estrutura igual a resistência do material, sendo essa tensão máxima independente do material. Assim, a relação $\sigma_{\max} = \sigma_y$ é uma contrapartida direta da equação (3.1) e seus valores são relevantes em um sentido relativo.

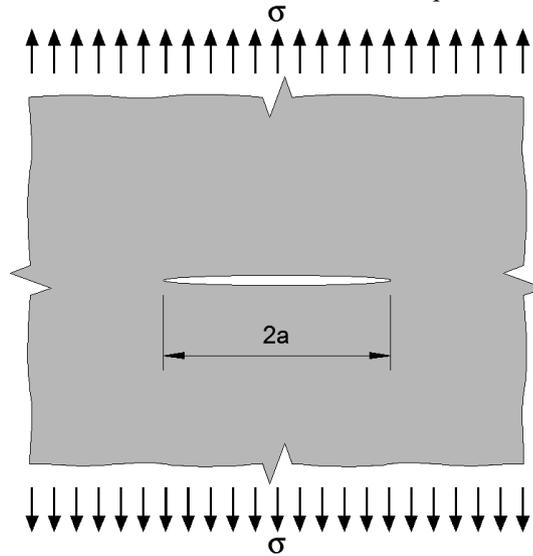
A base sobre os procedimentos de ruptura nos elementos fraturados foi concebida por Griffith (1920). Pode-se afirmar que, os resultados de concentração de tensões na borda de um furo elíptico em uma placa tensionada obtidos por Inglis (1913), foram resolvidos por Griffith após publicações sobre estudos em fibras de vidro por volta de 1920.

Considerando uma placa de vidro (material amorfo elástico-linear com ruptura frágil) tensionada, com um furo elíptico de comprimento $2a$ (onde a é a medida do comprimento do eixo maior da elipse) introduzido ao centro da placa, de tamanho desprezível se comparado às dimensões da placa (Figura 2), Griffith (1920) formulou uma teoria embasada no balanço termodinâmico das energias existentes na fratura.

O critério do balanço energético de Griffith consiste no balanço entre o processo envolvendo a parcela de energia potencial elástica armazenada na placa e a quantidade de energia de superfície para propagação da fissura. Ou seja, com base na Primeira Lei da Termodinâmica, onde trata do balanço energético entre as energias em um sistema, Griffith

propôs que a formação de nova fissura provoca uma diminuição da energia de deformação existente no corpo e esta parcela de energia liberada deve ser maior ou igual ao trabalho necessário para produzir novas fissuras (BROEK, 1987).

Figura 2. Placa de dimensões infinitas com fratura central de comprimento $2a$, sob estado de tensão σ .



Fonte: Adaptado de Petersson, 1981.

É conhecido que, no desenvolvimento de uma fissura em um sólido composto de moléculas que se atraem, o trabalho deve ser feito contrário às forças aderentes das moléculas em cada face da fissura. Esse trabalho aparece como energia potencial de energia, e se a dimensão da fissura é maior que a distância conhecida por “raio de ação molecular”, a energia por unidade de área é constante no material, ou seja, conhecida por tensão de superfície.

A variação da energia de deformação foi realizada a partir da comparação do estado de tensões entre a chapa sem furo e chapa com furo. Griffith assumiu as fissuras em formato elíptico e com o desenvolvimento matemático existente de Inglis (1913), determinou que a formação de uma fissura de comprimento $2a$ em uma placa larga resultará na variação de energia de deformação definida por:

$$U = -\frac{\sigma^2 \pi a^2}{E} \quad (3.2)$$

Sendo σ , a tensão aplicada à placa, a é o comprimento de meia fissura, conforme Figura 2 e E é o módulo de elasticidade do material. O sinal negativo expõe que essa mudança se refere a uma diminuição da energia armazenada na placa.

Griffith supôs também que, a criação de novas superfícies de fratura no sólido idealmente frágil absorverá a quantidade de energia definida conforme equação (3.3), sendo γ_s um parâmetro de energia superficial. Assim, W_s representa o aumento da energia necessária para produzir nova superfície de fissura:

$$W_s = 2(2 a \gamma_s) \quad (3.3)$$

Como resultado, a condição para propagação da fratura se deve a:

$$\frac{dU}{da} = \frac{dW_s}{da} \quad (3.4)$$

Para a propagação da fissura sob tensão constante σ , deve-se ter:

$$\frac{dW_s}{da} + \frac{dU}{da} < 0 \quad (3.5)$$

Substituindo as equações 3.2 e 3.3 em 3.4 e derivando-as, tem-se a tensão de fratura:

$$\sigma = \left(\frac{2 E \gamma_s}{\pi a} \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

Em 1948, Irwin (1957) prosseguindo com o desenvolvimento da teoria de Griffith, estabeleceu a taxa de liberação de energia por unidade de crescimento da fissura – G (em homenagem a Griffith) ou força motriz para o crescimento da fissura. O crescimento da fissura foi chamado de R por Irwin. Tem-se assim a condição para propagação da fratura:

$$G = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} > 2 \gamma_s = R \quad (3.7)$$

Em estado plano de deformações, R é considerado uma constante, chamado também de G_c . A condição de energia agora evidencia que G deve ser ao menos igual a R antes de ocorrer a propagação da fissura. Sendo R uma constante, pode-se entender que G deve exceder a certo valor crítico, G_c . Sendo assim, o crescimento da fissura ocorre quando

$$G_c = \frac{\pi \sigma_c^2 a}{E} \text{ ou } \sigma_c = \left(\frac{E G_c}{\pi a} \right)^{1/2} \quad (3.8)$$

Sendo G_c a taxa crítica de liberação de energia e da mesma forma, σ_c a tensão correspondente.

Griffith desenvolveu sua equação para o material frágil, como o vidro e assumiu que a energia necessária para produzir novas fissuras consiste em energia de superfície. Com materiais dúcteis, como os metais, ocorre a deformação plástica na ponta da fissura. A energia necessária para propagação da fratura deve ser considerada como a energia para formação da zona plástica se a ocorrência dessa região for necessária para a propagação da fratura. Em outras palavras, ainda que a energia suficiente para a propagação da fissura seja fornecida, a fissura não irá se propagar a menos que o material na frente da fratura esteja próximo a ruptura (BROEK, 1987).

3.3 FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÕES

Adicionalmente, posterior aos trabalhos de Griffith (1920) e acrescentando a solução obtida por Westergaard (1939), Irwin (1957) propôs uma abordagem de fissura relacionando o tratamento energético da fratura a um Fator de Intensidade de Tensão K , de modo a conectar os conceitos de Griffith a um parâmetro mais evidente para cálculo, a taxa de energia crítica de deformação elástica:

$$G_c = \frac{K^2}{E'} \quad (3.9)$$

Sendo, para estado plano de tensão,

$$E' = E \quad (3.10)$$

Para estado plano de deformação, a partir do coeficiente de Poisson, ν , tem-se:

$$E' = \frac{E}{(1 - \nu')} \quad (3.11)$$

A partir dessa contribuição, a MFEL também pode ser apresentada como Mecânica de Fraturas de Griffith-Irwin (KANNINEN, 1985)

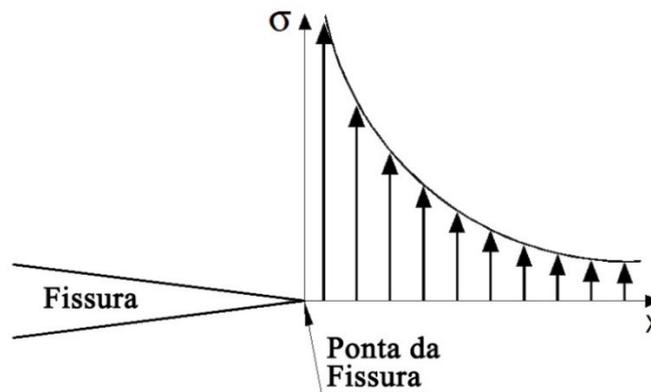
Assim como Griffith (1921) utilizou dos conceitos matemáticos de Inglis (1913), analogamente, Irwin (1957) foi capaz de manipular as soluções do elemento fraturado de Westergaard (1939) e propor uma abordagem de fissura com base no campo de tensões na

região da ponta da fissura, correlacionando o critério de balanço de energia, sendo esse facilmente obtido a partir de K , o fator de intensidade de tensões.

Irwin (1957) resolveu vários problemas de fissuras em duas dimensões na elasticidade linear, e mostrou assim que o campo de tensões na vizinhança da ponta da fissura (Ver Figura 3) apresentava sempre a mesma forma. Assim, mostrou que os componentes do campo de tensões σ_{ij}^I próximo à frente da fissura (para Modo I de fratura), no ponto (r, θ) podem ser descritos como:

$$\sigma_{ij}^I(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \text{outros termos} \quad (3.12)$$

Figura 3. Distribuição de tensões na ponta da fissura do material elástico-linear.



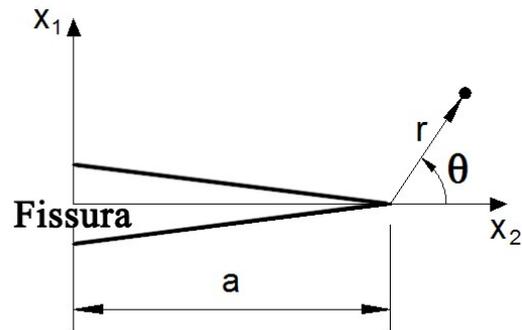
Fonte: Adaptado de Petersson, 1981.

Onde f_{ij} representa uma função trigonométrica dependente do ângulo θ , da carga, da geometria, do fator de intensidade de tensões (K) e as coordenadas polares com origem na ponta da fissura (r, θ) , conforme Figura 4. Quando a coordenada r tende a zero, o termo principal da equação (3.12) é dominante, então os outros termos são constantes ou tendem a zero.

Em geral, o fator de intensidade de tensões K pode ser escrito por:

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (3.13)$$

Onde Y representa uma função adimensional em função da geometria e a , o comprimento da fissura (Figura 4).

Figura 4. Fissura de comprimento a em meio infinito.

Fonte: Adaptado de Gonçalves, 2015.

A equação (3.12) está fundamentada para um material de comportamento elástico linear, no Modo I de fratura. O método de Westergaard (1939) foi desenvolvido para abranger o fator de intensidade de tensão K nas expressões do campo de tensões em todos os modos básicos de fratura. Assim sendo, os campos de tensões a frente da fissura, para $\theta > 0$, são descritos como:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (3.14)$$

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (3.15)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (3.16)$$

Sendo $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$.

Para os Modos II, tem-se:

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (3.17)$$

$$\sigma_x = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\sin \frac{\theta}{2} \right) \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (3.18)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (3.19)$$

E as distribuições de tensões no modo III,

$$\tau_{xy} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2 \pi r}} \left(-\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.20)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2 \pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.21)$$

De acordo com a equação (3.12), a intensidade de tensão localizada na ponta da fissura depende apenas do fator K. Com isso, o critério de propagação de fratura pode ser determinado através da igualdade:

$$K = K_c \quad (3.22)$$

onde se tem por K_c um parâmetro do material, uma vez que denota um valor crítico para o fator de intensidade de tensões. Para o caso na chapa infinita, adotado por Griffith (1920), o valor crítico do fator de intensidade de tensão para cada extremidade da fissura de comprimento $2a$ é dado por:

$$K_{Ic} = \sigma_c \sqrt{\pi a} \quad (3.23)$$

Desta forma, é claro perceber que, à medida que a tensão aplicada aumente, a intensidade das tensões na frente da fissura aumenta proporcionalmente, até o valor de K atingir um valor crítico, K_{Ic} , o qual corresponde a tenacidade à fratura do material.

Em outras palavras, o aumento do fator de intensidade de tensão evidencia o momento em que se inicia a propagação da fissura.

3.4 MÉTODO DA EXTRAPOLAÇÃO DE DESLOCAMENTOS

O fator intensidade de tensão pode ser obtido por diversas técnicas, a partir de elementos convencionais ou especiais próximos a ponta da fissura.

Dentre os diferentes métodos, pode-se equiparar soluções de elementos de contorno com expressões teóricas para se obter os deslocamentos próximo a frente da fissura.

A extrapolação dos deslocamentos próximos a frente da fissura é um método usado para obter os fatores de intensidade de tensão e será apresentado a partir da equação de deslocamento desenvolvida por Irwin.

Seja o sistema de coordenadas polares, dado por r e θ , com origem na ponta da fissura, definindo a superfície da fissura com $\theta = \pm\pi$. Os campos de deslocamentos na superfície da fissura podem ser escritos, para os modos I e II, conforme apresentado por ALIABADI (2002):

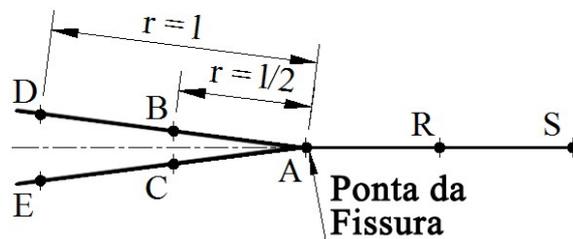
$$\begin{aligned} u_2(\theta = \pi) - u_2(\theta = -\pi) &= \frac{k+1}{\mu} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \\ u_1(\theta = \pi) - u_1(\theta = -\pi) &= \frac{k+1}{\mu} K_{II} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sendo μ o módulo transversal do elemento; k é dado pela relação $k = 3 - 4\eta$, de modo que η permite a transformação para o estado plano de tensões, $\eta = \frac{\nu}{(1+\nu)}$ e para estado plano de deformação $\eta = \nu$, a partir do coeficiente de Poisson, ν .

Assim sendo, determinados os deslocamentos nos pontos nodais dos elementos posicionados na extremidade da fissura, é possível encontrar valores dos fatores de intensidade de tensões.

Para elementos quadráticos contínuos de comprimento l , conforme Figura 5, tem-se que para os nós B e C, com $r = l/2$ os fatores de intensidade de tensões nos modos I e II são respectivamente:

Figura 5. Nós na ponta da fissura de elementos contínuos quadráticos.



Fonte: Adaptado de Gonçalves, 2015.

$$K_I^{BC} = \frac{2\mu}{k+1} \sqrt{\frac{\pi}{l}} (u_2^B - u_2^C) \quad (3.25)$$

$$K_{II}^{BC} = \frac{2\mu}{k+1} \sqrt{\frac{\pi}{l}} (u_1^B - u_1^C)$$

Da mesma forma, para os nós *D* e *E*, com $r = l$, tem-se:

$$K_I^{DE} = \frac{\mu}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} (u_2^D - u_2^E) \quad (3.26)$$

$$K_{II}^{DE} = \frac{\mu}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} (u_1^D - u_1^E)$$

Sendo assim, os valores de K_I e K_{II} são obtidos por extrapolação lineares de K_I^{BC} , K_I^{DE} e K_{II}^{BC} , K_{II}^{DE} na ponta da fissura, e portando:

$$K_I = 2K_I^{BC} - K_I^{DE} \quad (3.27)$$

$$K_{II} = 2K_{II}^{BC} - K_{II}^{DE}$$

3.5 MECÂNICA DA FRATURA APLICADA AO CONCRETO

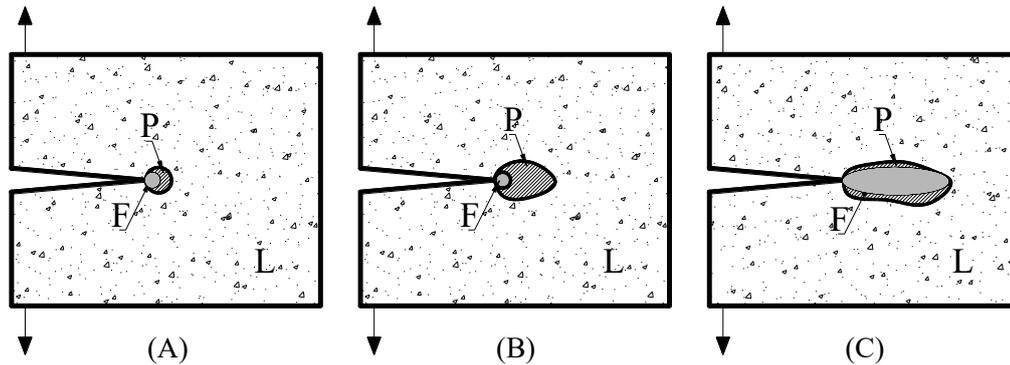
O concreto é um material heterogêneo constituído de agregados e massa de cimento aderida nas superfícies. O material é inerentemente fraco devido à baixa força de ligação e existência de fissuras e falhas que se desenvolvem durante o endurecimento da matriz. Sob ação de carga externa, uma zona de tensão se forma próximo a frente da fissura e fenômenos são classificados no entorno.

O material elástico linear, não fraturado, sujeito a um carregamento, apresenta um relação tensão-deformação uniforme que, graficamente se assemelha a uma reta, ou seja, seu comportamento é de fato linear até sua ruptura.

Contudo, devido à natureza heterogênea dos materiais – bem como do concreto – o comportamento mecânico das estruturas é fundamentado por características particulares que levam a uma curva tensão-deformação de comportamento idealizado de acordo com os materiais constituintes e, ao redor de uma fissura, pode-se admitir três diferentes zonas, conforme abordado por Petersson (1981), a zona elástica linear (indicado na Figura 6 pela letra L), onde devido à baixa tensão atuante, o material apresenta comportamento elástico linear; a

zona plástica (indicado pela letra P), onde a relação tensão-deformação não é linear, porém existe aumento de tensão e deformação; zona de fratura (ou zona de processo), onde a tensão decresce com o excessivo aumento de deformações (indicado pela letra F). Essas regiões estão relacionadas à essência do material em nível da microestrutura envolvida.

Figura 6. Diferença conceitual para o material fissurado em comportamento: (A) frágil, (B) plástico e (C) quase-frágil.



Fonte: Adaptado de Rosa, 2010.

Quando a zona plástica e zona de fratura são pequenas em relação às dimensões da fissura, torna-se adequado o uso da MFEL. Nos materiais frágeis a zona de processos se mostra relevante, porém, ainda assim pequena o suficiente para negligenciar os efeitos não-lineares. A zona plástica nesses casos é reduzida.

Para os materiais dúcteis, como os metais, ocorre uma ampla zona plástica, uma vez que se deformam governados pela tensão de escoamento e, portanto, outros métodos devem ser utilizados, como a mecânica da fratura elástico-plástico.

Diferentemente do que se admite em MFEL, a qual classifica tensões tendendo ao infinito na ponta da fissura, na zona de processo as tensões não excedem a força coesiva ou resistência do material, devido ao comportamento do material heterogêneo do concreto (GONÇALVES, 2015).

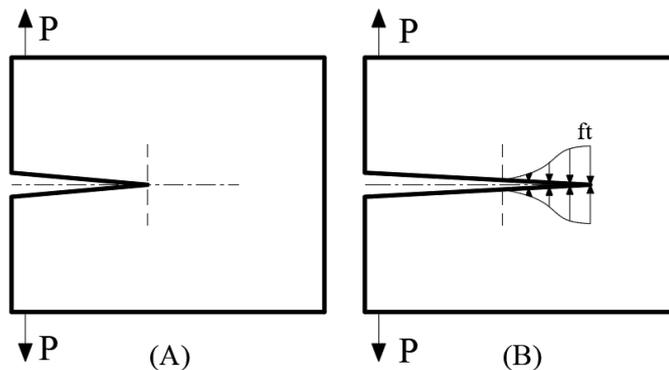
Para Surenda e Ouyang (1992), vários fatores são responsáveis pela formação da zona de processo que promove um enrijecimento na região, como o desenvolvimento das microfissuras na região a frente da ponta da fissura. Devido às altas tensões, as microfissuras dissipam uma parte da energia externa causada pelo carregamento. Outro fator a ser citado é o efeito de ponte promovido pelos agregados rígidos entre as faces da fissura.

3.6 MODELO DE FISSURA COESIVA

Para os materiais quase-frágeis, como o concreto, admite-se uma região de processos inelásticos (ou zona de fratura) na ponta da fissura, influenciando no processo de fraturamento. A zona de fratura é grande o suficiente para produzir efeitos não-lineares que não podem ser desprezados. No caso de um elemento fissurado, sob ação de tensão, uma zona de microfissuras se origina à frente da fissura, na extremidade do entalhe, reduzindo substancialmente a concentração de tensões nesse local. A zona de fratura em frente a um entalhe normalmente desenvolve um campo de tensão de tração e, portanto, as propriedades desta região são aproximadas aos resultados da zona de fratura de um teste de tração direta. De tal maneira, Petersson (1981) esclarece ser possível aproximar a zona de fratura a frente da fissura a um entalhe capaz de transmitir a tensão (Figura 7).

A fissura de transferência não é uma fissura real, por isso é considerada como fissura fictícia. E assim, o modelo coesivo aparece como uma forma eficiente de considerar esses efeitos. A importância em se conhecer a zona de fratura e sua dimensão está em que somente assim pode-se estabelecer limites que assegurem a aplicação da MFEL.

Figura 7. No Modelo de Fissura Fictícia, tem-se (A) a zona de fratura na ponta da fissura alterada por (B) uma fissura capaz de transmitir tensões.



Fonte: Adaptado de Petersson, 1981.

Desta forma, Dugdale (1960) apresentou o primeiro modelo de fissura coesiva. Ele demonstrou um estudo através de um material elástico plástico de espessura restringida, com um corte reto – simulando uma fissura – e carregado na direção perpendicular ao corte e assim, sugeriu que forças coesivas representando a resistência do material à fratura são aplicadas como forças externas próximas a fissura de modo a anular a singularidade de tensão na ponta da fissura. Dessarte, admitiu que escoamentos ocorrem em uma determinada extensão a frente do

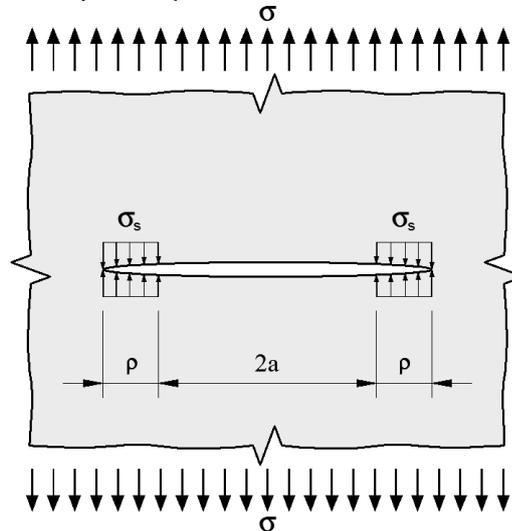
corde, ou seja, a zona de fratura pode ser representada por uma de tensão efetiva igual à tensão de escoamento do material de forma a desenvolver um modelo de fraturamento de comprimento de fissura fictícia.

A fissura real foi estendida por uma fissura teórica de comprimento $2a + 2\rho$, conforme Figura 8. A partir do cálculo da parte estendida ρ , seria possível conhecer a abertura da ponta da fissura a fim de se obter um critério de estabilidade da fissura.

A importância do modelo Dugale-Barenblatt se deve ao fato de supor uma fissura que transmite tensões entre as superfícies (fratura coesiva), retratando assim uma hipótese do comportamento físico na região próxima a ponta da fissura. (ROSA, 2010).

Barenblatt (1962) já estudava o equilíbrio de fissuras em materiais frágeis. Em seu trabalho, demonstrou que as tensões na ponta da fissura são finitas para um nível de carregamento e as superfícies opostas da fissura se unem de forma suave. Barenblatt chamou à atenção que a teoria da elasticidade não era eficiente para a solução de problemas de fissuras, pois existem forças coesivas moleculares agindo nas faces da fissura.

Figura 8. Representação do Modelo de fissura de Dugdale.



Fonte: Adaptado de Rosa, 2010.

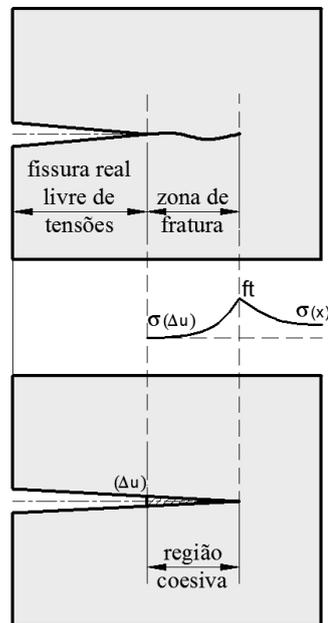
Contudo, o modelo de fissura coesiva adequado para materiais quase-frágeis, pertence a Hillerborg et. al (1976). A ideia do processo de dissipação que ocorre na ponta da fissura é relacionada ao fenômeno de amolecimento do material e mostra que a abertura normal das faces da fissura fictícia e as forças coesivas, ou forças na superfície da fissura, ocorrem ao

longo das faces da fissura e, portanto, ao contrário do proposto por Dugdale (1960), diminuem de forma gradual até cessar a transmissão de esforços entre as superfícies da fissura.

Hillerborg et. al. (1976) admitiram que a tensão coesiva fosse em função da abertura da fissura fictícia, assim sendo, $\sigma_c = \sigma_c(\Delta u)$. A distribuição de tensão atinge a resistência à tração do concreto na região coesiva f_t e decresce em direção à ponta da fissura real, se anulando no valor crítico de abertura da fissura fictícia Δu_{cr} . Em um ponto qualquer além da região coesiva, o estado de tensão é regido pela lei constitutiva conforme um material não fissurado (Figura 9). Neste modelo, a curva de tensão-abertura de fissura (ou curva de amolecimento) representa o valor da energia a ser absorvida por área de fissura unitária, ou energia dissipada. É dado matematicamente conforme Equação (3.28). Sendo G_c a energia necessária para fraturar o sólido.

Hillerborg et. al. (1976) configura o comportamento do concreto à tração representando a parte ascendente do gráfico tensão-deformação e desprezando assim às deformações inelásticas, conforme Figura 10.

Figura 9. Representação do Modelo de fissura de Hillerborg.



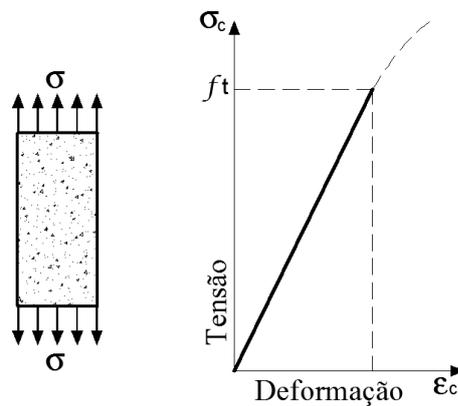
Fonte: Adaptado de Rosa, 2010.

$$\int_0^{\Delta u_{cr}} \sigma d\Delta u = G_c \quad (3.28)$$

O gráfico produzido pela relação tensão-abertura da fissura, conforme Figura 10, denota o aspecto da curva de amolecimento para o concreto ou, perda de rigidez do material fissurado.

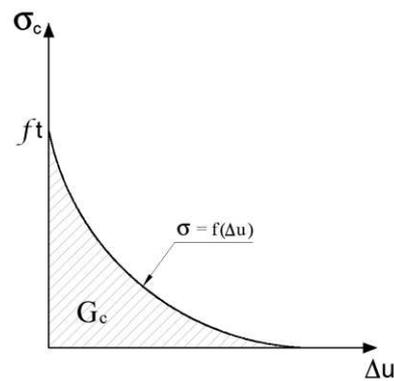
Dessa forma, a área sob a curva (Figura 11) representa a energia necessária para fratura do sólido, G_c .

Figura 10. Regime elástico-linear da curva tensão-deformação devido ao ensaio do concreto à tração.



Fonte: Adaptado de Gonçalves, 2015.

Figura 11. Gráfico da relação tensão e abertura da fissura na fase pós-pico do ensaio do concreto à tração.



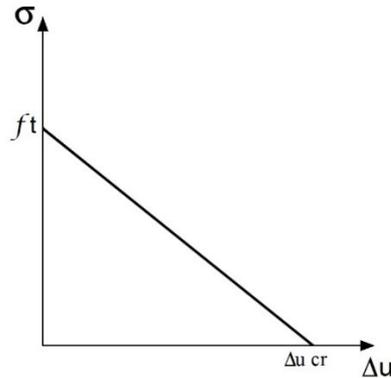
Fonte: Adaptado de Petersson, 1981.

Visando otimizar parâmetros, é plausível aproximar a curva tensão-abertura de fissuras a linhas retas. O aspecto da curva possui um trecho inicial que pode ser substituída por um segmento linear, e ainda, a curva completa pode ser representada por uma curva bilinear. Nesse último caso, o primeiro trecho da reta é responsável pela microfissuração à frente da

ponta da fissura, caracterizado pela máxima tensão suportada. Neste contexto, para realizar análises do comportamento da zona coesiva, leis constitutivas são aplicadas a fim de se aproximar a curva real do material. Ainda, diferentes formas para a curva $\sigma = (\Delta u)$ são encontradas na literatura, através de testes de concreto submetido a tensão uniaxial (SOUSA e GETTU, 2006).

A lei coesiva linear (Figura 12) é disposta neste trabalho para desenvolvimento da modelagem da zona de fissura fictícia. Esse caso de aproximação demonstra simplicidade, porém, permite obter resultados adequados para análises numéricas em materiais de características distintas.

Figura 12. Representação gráfica da relação tensão e abertura da fissura na Lei coesiva linear.



Fonte: Adaptado de Petersson, 1981.

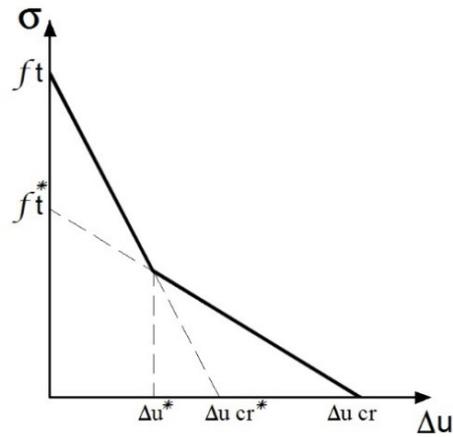
A zona de fissura fictícia, limitada ao valor crítico de abertura Δu_{cr} , apresenta a seguinte expressão analítica do gráfico linear:

$$\sigma(\Delta u) = \begin{cases} f_t \left(1 - \frac{\Delta u}{\Delta u_{cr}} \right) & \text{se } 0 \leq \Delta u \leq \Delta u_{cr} \\ 0 & \text{se } \Delta u > \Delta u_{cr} \end{cases} \quad (3.32)$$

Outra lei constitutiva a ser apresentada é a lei coesiva bilinear (Figura 13). Conforme Petersson (1981), a aproximação em duas linhas tem comportamento mais próximo ao esperado na maioria dos tipos de concreto.

Essa curva descreve as propriedades da zona de fratura do concreto de forma mais realista se comparada com a curva linear.

Figura 13. Representação gráfica da relação tensão e abertura da fissura na Lei coesiva bilinear.



Fonte: Adaptado de Petersson, 1981.

Neste caso, para cada trecho de reto, tem-se:

$$\sigma(\Delta u) = \begin{cases} f_t \left(1 - \frac{\Delta u}{\Delta u_{cr}^*}\right) & \text{se } 0 \leq \Delta u \leq \Delta u^* \\ f_t^* \left(1 - \frac{\Delta u}{\Delta u_{cr}}\right) & \text{se } \Delta u^* \leq \Delta u \leq \Delta u_{cr} \\ 0 & \text{se } \Delta u > \Delta u_{cr} \end{cases} \quad (3.29)$$

Para os valores de tensões f_t^* e Δu^* relativos ao ponto de inflexão, admitir $f_t/3$ e $0,80 \cdot G_f/f_t$ respectivamente.

Por fim, uma terceira lei constitutiva pode ser apresentada, se referindo a uma relação exponencial em relação as forças coesivas e abertura de fissuras. Tem-se:

$$\sigma(\Delta u) = f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_t} \Delta u\right) \quad (3.30)$$

4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4.1 APRESENTAÇÃO

Os métodos computacionais para análises de estruturas têm alcançado um nível de desenvolvimento que os tornam ferramentas essenciais para projetos de engenharia. A elaboração de modelos capazes de representar as mais complexas situações da mecânica dos meios contínuos permite obter soluções com alto grau de precisão. Para isso, as técnicas numéricas utilizadas estão relacionadas, basicamente, com soluções aproximadas de equações diferenciais em conjunto com relações constitutivas para descrever, com maior precisão possível, o comportamento de um corpo.

O primeiro método utilizado, método das diferenças finitas (MDF), tem como base transformar as equações diferenciais que regem o problema físico em expressões de diferenças finitas, com o objetivo de converter um problema composto por equações diferenciais em um problema de equações algébricas. Segundo Becker (1992), esse método é mais difundido para problemas de transferência de calor e movimentos de fluídos.

No caso do método dos elementos finitos (MEF), o domínio é segmentado em pequenas partes finitas e, cada parte (ou elemento) tem seu comportamento descrito por uma equação diferencial. A formulação do método permite escrever equações de compatibilidade e equilíbrio entre os segmentos finitos e determina funções interpoladoras contínuas para representar as incógnitas do problema.

O MDF e o MEF admitem, fundamentalmente, equações diferenciais na solução do problema sobre um domínio, o qual é composto de pontos nodais e elementos internos. Por isso, esses métodos de aproximação são comumente conhecidos por métodos de domínio.

O método dos elementos de contorno (MEC) aborda diretamente as equações integrais de contorno, diferentemente dos métodos de domínio. Neste caso, o método transforma equações diferenciais que regem determinado problema físico em equações integrais que são, numericamente, integradas sobre o contorno, de uma determinada superfície. A vantagem do MEC pode ser atribuída a redução da dimensionalidade do problema pois, em casos bidimensionais, é necessária apenas a discretização do contorno em pequenos elementos e, para casos tridimensionais, apenas a superfície do corpo deve ser discretizadas em elementos.

4.2 TEOREMA DE GREEN

As equações integrais são descritas para representar funções como de deslocamentos, tensões ou forças de superfície sobre um domínio. Através de transformações matemáticas é possível reduzir uma integral de volume em uma integral de superfície, distinguindo assim as Equações Integrais de Contorno.

A transformação das integrais pode ser feita por diversas deduções, como pelo Teorema da Reciprocidade devido a Betti, pelo Teorema de Green através da segunda identidade de Green ou ainda, pela Técnica dos Resíduos Ponderados.

Neste estudo, o Teorema de Green, ou teorema da divergência, é apresentado considerando um volume Ω , envolto por uma superfície Γ , sendo:

$$\int_{\Omega} \nabla f \, d\Omega = \oint_{\Gamma} f n \, d\Gamma \quad (4.1)$$

Ou, em notação tensorial,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, d\Omega = \int_{\Gamma} f_i n_i \, d\Gamma \quad (4.2)$$

Na qual a variável f representa uma função integral com derivadas de primeira ordem em relação as coordenadas cartesianas (x, y, z) e o termo n representa um vetor unitário normal à superfície de contorno.

Admitindo a existência de duas variáveis (ϕ e ψ) no volume (Ω), a equação do Teorema da Divergência pode ser escrita com derivadas contínuas de primeira e segunda ordem em relação ao contorno Γ :

$$\int_{\Omega} \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \, d\Gamma \quad (4.3)$$

onde $\partial/\partial n$ representa a derivada das funções na direção do vetor normal.

A equação (4.3) é conhecida por segunda identidade de Green.

4.3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Seja um elemento infinitesimal de dimensões dx , dy e dz , em equilíbrio e sujeito a tensões internas. A equação de equilíbrio de forças em ponto qualquer de uma pequena parte de um sólido, onde os componentes de tensor de tensão são expressos por σ_{ij} e F_i representa vetores das forças de volume, tem-se:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + F_i = 0 \quad (4.4)$$

As componentes do tensor de tensão σ_{ij} estão em equilíbrio com as forças superficiais agindo em um elemento diferencial. Para a superfície do elemento, as forças de superfície P_i são dadas por:

$$P_i = \sigma_{ij} n_j \quad (4.5)$$

onde n_j são cossenos diretores da normal à superfície do elemento em relação aos eixos (x, y, z) .

Para um material elástico linear, aplicando-se as relações deformação-deslocamento e substituindo adequadamente nas equações de equilíbrio, obtém-se a equação de equilíbrio de Navier, sendo base para a formulação direta das equações integrais de contorno. Na forma de vetor, a expressão é dada por:

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{-\mathbf{f}}{\mu} \quad (4.6)$$

onde ν representa o coeficiente de Poisson e μ o módulo de elasticidade transversal.

As soluções fundamentais são soluções singulares para a equação de Navier, sendo que, para cada problema fundamental uma solução particular é determinada.

As equações de Navier são complexas para se resolver analiticamente devido ao acoplamento dos termos das equações. Becker (1992) apresenta um método para desacoplamento acompanhado por substituições estratégicas de algumas funções para o componente deslocamento. O vetor deslocamento u_i é substituído por uma expressão em função de outros vetores, sendo:

$$u_i = \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.7)$$

Ou, na forma do operador Laplaciano,

$$u_i = \nabla^2 g - \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla(\nabla \cdot g) \quad (4.8)$$

A segunda derivada de um vetor é conhecida por vetor Galerkin (g). A substituição do vetor deslocamento da equação (4.8) em termos do vetor Galerkin na equação (4.6), transforma as equações diferenciais em tipo bi-harmônica, que podem ser manipuladas analiticamente com maior facilidade.

$$\nabla^4 g_i = \nabla^2(\nabla^2 g_i) = \frac{-f}{\mu} \quad (4.9)$$

A solução fundamental está baseada na solução clássica tridimensional de uma força concentrada aplicada no interior de um domínio infinito, conhecida por solução de Kelvin.

Admite-se que uma força unitária é aplicada em um ponto interno p com o objetivo de analisar os efeitos desta força em outro ponto Q , em qualquer local do domínio. A solução deve satisfazer a duas condições (BECKER, 1992):

- a. Todas as tensões devem desaparecer quando a distância entre p e Q tende ao infinito;
- b. As tensões devem ser singulares no ponto p , ou seja, tende ao infinito quando a distância entre p e Q tende a zero.

Segundo Cruse (1977), o vetor Galerkin que satisfaz as condições acima (a, b) para a equação (4.9) é dado por:

$$g_i = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} r(p, Q) \quad (4.10)$$

A função raio $r(p, Q)$ representa a distância geométrica entre os pontos p e Q .

A solução fundamental para o problema plano de tensão pode ser obtida substituindo a equação (4.10) na equação (4.7), e assim o vetor deslocamento é dado por:

$$u_{ij}(p, Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \delta_{ij} + \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right] \quad (4.11)$$

O índice i representa a direção de aplicação da força concentrada unitária em um ponto no domínio e o índice j representa a direção da resposta, devido à aplicação da carga unitária, em outro ponto no domínio.

Utilizando as equações constitutivas (Lei de Hooke) que relaciona tensões e deslocamentos conforme:

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (4.12)$$

Sendo possível escrever uma expressão similar para as forças de superfície,

$$\begin{aligned} P_{ij}(p, Q) = & \frac{1}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left(\frac{\partial r(p, Q)}{\partial n} \right) \left[(1-2\nu) \delta_{ij} \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right] \\ & + \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left[\frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} n_j \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.4 TEOREMA DA RECIPROCIDADE DE BETTI

Para dois sistemas sujeitos a campos de tensão e deformação distintos (A) e (B), as equações constitutivas para materiais elásticos lineares isotrópicos são descritas a partir do teorema da reciprocidade de Betti, representado por:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(A)} \varepsilon_{ij}^{(B)} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(B)} \varepsilon_{ij}^{(A)} d\Omega \quad (4.14)$$

onde o trabalho realizado pelas tensões do estado em (A) nos deslocamentos do estado em (B) é igual ao trabalho realizado pelas tensões do estado em (B) nos deslocamentos do estado em (A). A equação (4.14) pode ser escrita com os componentes do tensor de deformações ε_{ji} a partir dos deslocamentos u :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(A)} \frac{\partial u_i^{(B)}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(B)} \frac{\partial u_i^{(A)}}{\partial x_j} d\Omega \quad (4.15)$$

Aplicando a regra da cadeia no termo à esquerda da equação (4.15), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(A)} \frac{\partial u_i^{(B)}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} (\sigma_{ij}^{(A)} u_i^{(B)}) - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(A)}}{\partial x_j} u_i^{(B)} \right] d\Omega \quad (4.16)$$

Separando o termo a direita da equação (4.16) em duas integrais:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(A)} \frac{\partial u_i^{(B)}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} (\sigma_{ij}^{(A)} u_i^{(B)}) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial \sigma_{ij}^{(A)}}{\partial x_j} u_i^{(B)} \right] d\Omega \quad (4.17)$$

A equação de equilíbrio (4.4) pode ser utilizada para substituir o último termo da segunda integral à direita de (4.17) pelo componente de forças de volume F_i , resultando:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(A)} \frac{\partial u_i^{(B)}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} (\sigma_{ij}^{(A)} u_i^{(B)}) \right] d\Omega + \int_{\Omega} [F_i^{(A)} u_i^{(B)}] d\Omega \quad (4.18)$$

A equação da divergência, abordado em (4.2) pode ser aplicada no segundo termo da equação (4.18) de forma a se obter:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(A)} \frac{\partial u_i^{(B)}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma} [\sigma_{ij}^{(A)} u_i^{(B)} n_j d\Gamma] + \int_{\Omega} [F_i^{(A)} u_i^{(B)}] d\Omega \quad (4.19)$$

Utilizando-se do conceito do vetor de tensão σ_{ij} , de equilíbrio com as forças superficiais agindo em um elemento diferencial, representado na equação (4.5), pode-se substituir os valores da segunda integral de (4.19) para ter:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(A)} \frac{\partial u_i^{(B)}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma} [P_i^{(A)} u_i^{(B)}] d\Gamma + \int_{\Omega} [F_i^{(A)} u_i^{(B)}] d\Omega \quad (4.20)$$

Retornando na equação (4.15) e utilizando o mesmo procedimento para a tensão $\sigma_{ij}^{(B)}$, resulta-se na seguinte expressão do Teorema de Betti:

$$\int_{\Gamma} [P_i^{(A)} u_i^{(B)}] d\Gamma + \int_{\Omega} [F_i^{(A)} u_i^{(B)}] d\Omega = \int_{\Gamma} [P_i^{(B)} u_i^{(A)}] d\Gamma + \int_{\Omega} [F_i^{(B)} u_i^{(A)}] d\Omega \quad (4.21)$$

Onde o segundo termo do lado direito da equação (4.21) pode se associar à função delta de Dirac, considerando $F_i^{(B)}$ uma força singular. A função delta de Dirac possui uma

propriedade importante quando utilizada na obtenção das equações integrais de contorno, sendo:

$$\int_{\Omega} [F_i^{(B)} u_i^{(A)}] d\Omega = u_i \quad (4.22)$$

4.5 EQUAÇÃO INTEGRAL DE DESLOCAMENTOS

Para se chegar a um sistema de equações algébricas com uma única solução, pode-se usar o Teorema de Betti para tratar equações integrais no contorno dois estados distintos de deslocamentos e tensões (A) e (B), sendo:

- (A) é o atual problema a ser resolvido, onde os vetores deslocamentos e tensões $u_i^{(A)}$ e $P_i^{(A)}$ são desconhecidos;
- (B) deve ser um estado conhecido, com os vetores deslocamentos e tensões $u_i^{(B)}$ e $P_i^{(B)}$ válidos para qualquer geometria em equilíbrio.

Para a equação (4.21), as seguintes substituições serão admitidas:

$$\begin{aligned} u_i^{(A)} &= u_i(X) & u_i^{(B)} &= U_{ij}^*(X, x_0) \\ P_i^{(A)} &= p_j(X) & P_i^{(B)} &= P_{ij}^*(X, x_0) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$F_i^{(A)} = F_j(X)$$

Onde os valores de U_{ij}^* e P_{ij}^* são soluções fundamentais para os deslocamentos, obtidos através da solução de Kelvin e, utilizando equações constitutivas, forças de superfície, respectivamente. A força de volume $F_i^{(A)}$, é uma integral de volume e x_0 é um ponto interno no domínio.

Portanto, conforme ilustrado na Figura 14, x_0 representa o ponto fonte, onde se aplica a carga unitária e X , o ponto campo.

A partir da equação (4.21), a equação integral de deslocamentos associado à função delta de Dirac, exposta em (4.22), pode-se admitir que:

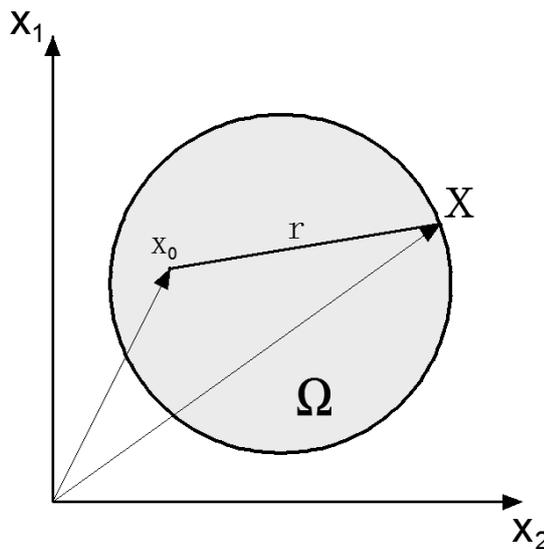
$$u_i(x_0) = - \int_{\Gamma} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X)] d\Gamma + \int_{\Gamma} [p_j(X) U_{ij}^*(X, x_0)] d\Gamma \quad (4.24)$$

$$+ \int_{\Omega} [F_j(X) U_{ij}^*(X, x_0)] d\Omega$$

A equação (4.24) é conhecida como Identidade de Somigliana para deslocamentos e fornece os valores de deslocamentos e tensões em qualquer ponto do domínio associado aos valores conhecidos de deslocamentos e forças de superfície sobre o contorno, de forças de volume e das soluções fundamentais.

A distância geométrica entre os pontos fonte e campo é representada por um raio de dimensão r , na equação (4.24).

Figura 14. Representação do ponto fonte x_0 e ponto campo X .



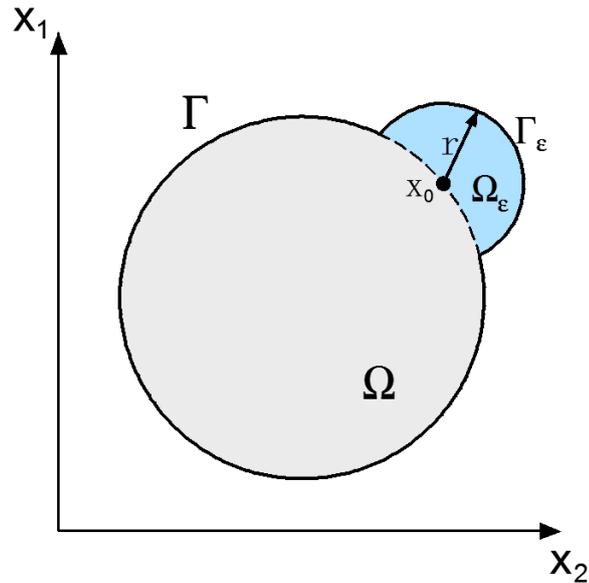
Fonte: Adaptado de Gonçalves, 2015.

4.6 EQUAÇÃO INTEGRAL PARA PONTO NO CONTORNO

Sendo o MEC uma técnica para problemas de contorno, se torna necessário reescrever a identidade de Somigliana, válida para todo o domínio, para um ponto fonte situado na região do contorno. Esse desenvolvimento estabelece uma formulação singular no sistema de equações integrais. Tem-se como estratégia admitir, inicialmente, o acréscimo de uma superfície esférica Γ_ε , de raio ε , com centro em x_0 , conforme exposto na Figura 15. Ao

aproximar o ponto x_0 do contorno, a superfície original do sólido Γ é interceptada por Γ_ε e assim, pode-se escrever uma equação integral para deslocamentos em pontos no contorno. Portanto, essa estratégia se baseia em admitir uma divisão do domínio em duas regiões, $\Omega + \Omega_\varepsilon$, delimitada pelo contorno $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon$.

Figura 15. Posicionamento do ponto no contorno considerando superfície adicional Γ_ε .



Fonte: Adaptado de Gonçalves, 2015.

A equação integral é escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 u_i(x_0) = & - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X)] d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X)] d\Gamma \\
 & + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [p_j(X) U_{ij}^*(X, x_0)] d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} [p_j(X) U_{ij}^*(X, x_0)] d\Gamma \quad (4.25) \\
 & + \int_{\Omega} [F_j(X) U_{ij}^*(X, x_0)] d\Omega + \int_{\Omega_\varepsilon} [F_j(X) U_{ij}^*(X, x_0)] d\Omega
 \end{aligned}$$

De forma que, os termos da equação (4.25) escritos em função de Γ_ε representam a integração de superfície da região acrescida no contorno. Faz-se nessa equação a forma limite $\varepsilon \rightarrow 0$ para o raio da esfera, de modo a não alterar o contorno original do sólido. Com isso, a

divisão em equações integrais de contorno resulta em equações integrais regulares e singulares, de forma que a superfície ao redor da singularidade tende a zero.

Essas equações integrais, sobre o contorno, devem ser consideradas no sentido de Valor Principal de Cauchy (KANE, 1994).

Ao considerar que não há forças de volume, pode-se reescrever a equação:

$$\begin{aligned} u_i(x_0) + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X)] d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X)] d\Gamma \\ = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [p_j(X) U_{ij}^*(X, x_0)] d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} [p_j(X) U_{ij}^*(X, x_0)] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.26)$$

O desenvolvimento dos termos U_{ij}^* e P_{ij}^* , deslocamento e força de superfície no ponto campo respectivamente, deve ser feito a partir da solução fundamental de Kelvin, conforme equações (4.11) e (4.13), reescritas em função dos pontos (X, x_0) :

$$U_{ij}^*(X, x_0) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r(X, x_0)} \right] \delta_{ij} + \frac{\partial r(X, x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial r(X, x_0)}{\partial x_j} \right] \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} P_{ij}^*(X, x_0) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r(X, x_0)} \left(\frac{\partial r(X, x_0)}{\partial n} \right) \left[(1-2\nu)\delta_{ij} \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial r(X, x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial r(X, x_0)}{\partial x_j} \right] \\ + \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)r(X, x_0)} \left[\frac{\partial r(X, x_0)}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r(X, x_0)}{\partial x_i} n_j \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

A solução das integrais de (4.26) sobre o contorno Γ_ε é obtida da derivada da solução fundamental.

Sendo assim, resolvendo cada integral da equação separadamente, tem-se, para a solução da segunda integral singular da equação (4.26) sobre o contorno Γ_ε o seguinte termo representando a integral sobre o semicírculo:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_0^\pi \left[\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left((1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i) - \frac{\partial r}{\partial n} \left((1-2\nu) \delta_{ij} + 2 r_i r_j \right) \right) \right] u_j d\Gamma \quad (4.29)$$

Devido ao domínio adicional ser circular, $dr(\mathbf{x}) = r \cdot d\theta$, a direção do raio ε coincide com a normal, portanto tem-se as seguintes condições a serem admitidas:

- a. $r_i n_j = r_j n_i = 0$
- b. $\frac{\partial r}{\partial n} = 1$

E com isso, a equação (4.29) pode ser reescrita em coordenadas cilíndricas,

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ij}^* u_j d\Gamma = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \int_0^\pi [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2 r_i r_j] u_j r d\theta \quad (4.30)$$

E cancelando a variável \mathbf{r} , destacada na equação acima, tem-se:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ij}^* u_j d\Gamma = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\pi [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2 r_i r_j] u_j d\theta \quad (4.31)$$

Na sequência, para desenvolvimento da integral à direita da equação (4.31), as manipulações matemáticas devem ser executadas ao igualar os índices do termo à direita da equação e separar o termo em duas integrais, como:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ij}^* u_j d\Gamma = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\pi [(1-2\nu) u_i d\theta] + \int_0^\pi [2 r_i (r_i u_i) d\theta] \quad (4.32)$$

Admite-se na equação (4.32) um índice variando de 1 a 2 no produto $r_i u_i$, obtendo:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ij}^* u_j d\Gamma = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\pi (1-2\nu) u_i d\theta + \int_0^\pi 2 r_i (r_1 u_1 + r_2 u_2) d\theta \quad (4.33)$$

Impõe-se na equação (4.33), o índice i variando de 1 a 2 no produto $r_i u_i$, obtendo:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ij}^* u_j d\Gamma = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\pi (1-2\nu) u_i d\theta + \int_0^\pi 2r_1^2 u_1 + 2r_1 r_2 u_2 d\theta \quad (4.34)$$

Sendo que, para a última integral à direita, o primeiro termo é dado por:

$$2u_1 \int_0^{\pi} r_1^2 d\theta = 2u_1 \int_0^{\pi} \cos^2\theta d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right] \Big|_0^{\pi} = u_1 \pi \quad (4.35)$$

E, da mesma forma, o segundo termo:

$$2u_2 \int_0^{\pi} r_1 r_2 d\theta = 2u_2 \int_0^{\pi} \sin\theta \cos 2\theta d\theta = \left[2u_2 \frac{\sin^2\theta}{2} \right] \Big|_0^{\pi} = 0 \quad (4.36)$$

Com essas definições (4.35) e (4.36) para $i=1$, é possível substituir o lado direito da equação (4.34), chegando a:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ij} u_i d\Gamma &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} [(1-2\nu)\pi u_1 + u_1 \pi] \\ &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} (\pi u_1(1-2\nu) + 1) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} 2(1-\nu)u_1 \\ &= -\frac{1}{2}u_1 \end{aligned} \quad (4.37)$$

No caso de r_i com $i = 2$,

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ij}^* u_j d\Gamma = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^{\pi} (1-2\nu) u_2 d\theta + \int_0^{\pi} (2r_2 r_1 u_1 + 2r_2^2 u_2) d\theta \quad (4.38)$$

Sendo os dois termos da última integral à direita nulos, pois:

$$2u_2 \int_0^{\pi} r_1 r_2 d\theta = 0 \quad (4.39)$$

$$2u_2 \int_0^{\pi} r_2^2 d\theta = 2u_2 \int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta = 0 \quad (4.40)$$

De tal forma que, substituindo (4.39) e (4.40) em (4.38), determine-se que:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ij}^* u_j d\Gamma = -\frac{1}{2}u_2 \quad (4.41)$$

Portanto, é possível escrever a solução das integrais de (4.26) sobre o contorno Γ_ε como sendo:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X)] d\Gamma = -\frac{1}{2} u_i(x_0) \quad (4.42)$$

Admitindo a mesma condição matemática, para a outra integral de (4.26) sobre o contorno Γ_ε , de permitir que os índices i e j variem na equação e separando a integral em duas partes, tem-se:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} p_j U_{ij}^* d\Gamma = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_0^\pi -(3-4\nu) \ln r P_j r d\theta + \int_0^\pi r_1(r_1 P_1 + r_2 P_2) r d\theta \quad (4.43)$$

Ao admitir que o valor de r aproximar-se de zero na equação (4.43), a segunda integral à direita terá valor zero, portanto:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} p_j U_{ij}^* d\Gamma = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_0^\pi -(3-4\nu) \ln r P_j r d\theta \quad (4.44)$$

Sendo assim, retornando para a equação de deslocamento (4.26) e substituindo os valores das integrais de acordo com as equações (4.42) e (4.44), pode-se escrever:

$$u_i(x_0) + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X)] d\Gamma - \frac{1}{2} u_i(x_0) = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [p_j(X) U_{ij}^*(X, x_0)] d\Gamma + 0 \quad (4.45)$$

Ou ainda, reescrevendo a equação (4.45) após operações matemáticas,

$$u_i(x_0) \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X)] d\Gamma = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [p_j(X) U_{ij}^*(X, x_0)] d\Gamma \quad (4.46)$$

Levando o ponto de colocação para o contorno, ou seja, fazendo $r \rightarrow 0$, as integrais $\Gamma - \bar{\Gamma}$ são obtidas no sentido do valor principal de Cauchy, sendo para o contorno suave (KANE, 1994):

$$\frac{1}{2} u_i(x_0) + \int_{\Gamma} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X)] d\Gamma = \int_{\Gamma} [p_j(X) U_{ij}^*(X, x_0)] d\Gamma \quad (4.47)$$

Utilizando essas propriedades, é possível escrever a identidade de Somigliana, tendo-se a equação integral para o ponto no contorno de forma geral,

$$C_{ij}(x_0) u_i(x_0) + \int_{\Gamma} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X)] d\Gamma = \int_{\Gamma} [U_{ij}^*(X, x_0) p_j(X)] d\Gamma \quad (4.48)$$

Onde $u_j(X)$ e $p_j(X)$ são as variáveis de deslocamentos e forças de superfície no ponto campo respectivamente. U_{ij}^* e P_{ij}^* são deslocamentos e forças de superfície na direção j no ponto campo X devido à carga concentrada unitária aplicada na direção i no ponto de colocação x_0 (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1992).

O termo $C_{ij}(x_0)$ é um valor constante e uma abordagem ampla foi apresentada por Cruse (1977). Para pontos internos e externos ao contorno Γ , o valor do termo é dado em função do ponto fonte, definido por:

$$C_{ij}(x_0) = \delta_{ij} \text{ para } x_0 \text{ no interior do sólido ou, dentro do contorno.} \quad (4.49)$$

$$C_{ij}(x_0) = 0 \text{ para } x_0 \text{ no exterior do sólido ou, fora do contorno.} \quad (4.50)$$

Sendo δ_{ij} a função delta de Kronecker, ou seja, um tensor isotrópico que permite converter ou contrair índices. A função é definida por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.51)$$

Na equação (4.48), o núcleo da primeira integral é regular para pontos internos, porém, apresenta uma singularidade da ordem de $(1/r)$ quando o ponto de colocação se aproxima do ponto campo, sendo tratada no sentido do valor principal de Cauchy (PORTELA et al., 1993).

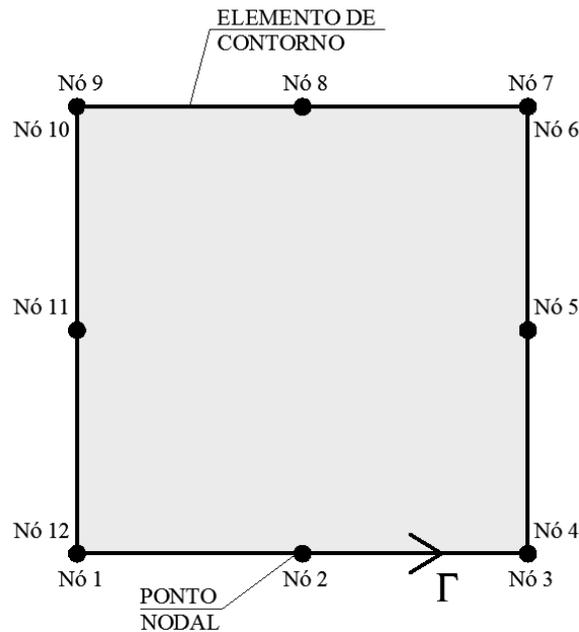
4.7 APLICAÇÃO NUMÉRICA

Obtidas as soluções fundamentais e equações integrais de contorno para problemas elásticos bidimensionais, para a implementação numérica, o problema deve ser discretizado no seu perímetro em diversos elementos de contorno, de modo que a equação integral de contorno seja determinada a partir do somatório dos elementos.

O presente estudo aborda elementos quadráticos e cada elemento de contorno é definido por pontos, chamados por nós. A Figura 16 apresenta uma discretização de elementos

de contorno. O contorno do problema foi dividido em elementos conectados por pontos nodais. Cada nó tem quatro variáveis, pois devido a um problema estático plano, são dois deslocamentos u_1 e u_2 e duas forças de superfície, p_1 e p_2 .

Figura 16. Discretização de um problema.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para cada elemento, a variação da geometria e as variáveis devem ser descritas. Sendo assim, para um problema de única solução, parte das variáveis deve ser descrita e parte será considerada como incógnita do problema. Portanto, um nó deve conter informações prescritas para deslocamentos e/ou forças de superfície. Esses valores prescritos, ou seja, as condições de contorno, são necessárias para solução do problema. Para cada nó associam-se duas equações integrais, onde a carga unitária utilizada na equação fundamental é aplicada em uma direção na primeira equação e em direção perpendicular à primeira, na segunda equação.

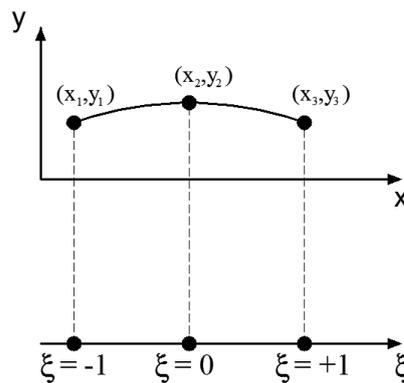
Considerando a solução fundamental, é possível obter deslocamento e forças de superfície em todos os nós da malha e, para cada nó, é escrita uma equação do sistema linear. A equação integral de deslocamento (4.48) é, portanto, utilizada na forma de somatório em função do número de elementos do problema, N :

$$C_{ij}(x_0) u_i(x_0) + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X)] d\Gamma = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} [U_{ij}^*(X, x_0) p_j(X)] d\Gamma \quad (4.52)$$

A Figura 16 apresenta o uso de nós duplos nos cantos, ou seja, trechos no contorno com ângulos que impõem uma situação de singularidade no sistema de equações à formulação do MEC. O presente estudo utiliza a técnica abordada por Venturini e Paiva (1993) e Palermo Jr. (2000) para nós duplos em cantos com elementos perpendiculares entre si. A utilização de nós duplos facilita a manipulação do sistema final de equações, a qual consiste em deslocar os pontos de colocação para o interior dos elementos concorrentes ao canto, e com isso escrever equações integrais da solução fundamental.

No que se refere ao uso de elementos quadráticos, a mudança de variáveis entre as coordenadas cartesianas e coordenadas intrínsecas facilita a integração de cada elemento ao longo do contorno. As integrais serão avaliadas no intervalo de -1 a 1, correspondendo ao intervalo da coordenada intrínseca (Figura 17). Sendo assim, serão abordados as funções de forma responsáveis pela mudança de variáveis e o jacobiano da transformação.

Figura 17. Mudança de coordenadas dos pontos de um elemento.



Fonte: Adaptado de Gao, 2006.

Os elementos descrevem a geometria do problema de forma aproximada e para isso, o grau de aproximação das grandezas envolvidas na solução é dado através de funções polinomiais, denominada funções de forma. De acordo com a função de forma adotada os elementos de contorno podem assim a forma constante, linear, quadrática, cúbica ou ordens superiores.

A formulação matemática das funções aproximadoras pode ser escrita na seguinte forma:

$$S(\xi) = \varphi_i(\xi) S_i(\xi) \quad (4.53)$$

Em que S representa uma das coordenadas geométricas em um nó. As funções de forma são descritas por φ_i e para elementos quadráticos, são utilizadas conforme (BECKER, 1992):

$$\begin{aligned}\varphi_1(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\ \varphi_2(\xi) &= (\xi + 1)(\xi - 1) \\ \varphi_3(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)\end{aligned}\tag{4.54}$$

Desta forma, uma coordenada de um nó no sistema bidimensional (x, y) passa a ser escrito uma função da coordenada intrínseca ξ , variado de -1 a 1 (Figura 17), sendo expressa pela somatória das funções de forma dos nós de um elemento multiplicado pela coordenada dos próprios nós:

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\xi) x_i(\xi)\tag{4.55}$$

$$y(\xi) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\xi) y_i(\xi)\tag{4.56}$$

Ou, expressa a equação completa da somatória, têm-se as seguintes coordenadas para um nó do elemento:

$$x(\xi) = \left[\left(\frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \right) x_1 \right] + [(\xi + 1)(\xi - 1) x_2] + \left[\left(\frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \right) x_3 \right]\tag{4.57}$$

$$y(\xi) = \left[\left(\frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \right) y_1 \right] + [(\xi + 1)(\xi - 1) y_2] + \left[\left(\frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \right) y_3 \right]\tag{4.58}$$

Definida as funções $x(\xi)$ e $y(\xi)$ dos nós, se faz necessário o conhecimento da solução fundamental e das parcelas que a constitui, para todos os pontos de colocação do modelo.

4.8 MONTAGEM DAS MATRIZES DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Com as equações integrais, derivadas da identidade de Somigliana, para todos os pontos do modelo, determina-se um sistema linear resultante com equações da ordem de duas vezes o número de nós existentes na malha.

O processo de integração das soluções fundamentais no MEC pode ser considerado complexo se comparado a outros métodos numéricos. Como as integrais são analisadas conforme a distância (raio) entre ponto fonte de colocação e ponto campo, quando o ponto de colocação pertence ao elemento que está sendo integrado, o raio apresenta valor tendendo a zero e, portanto, ocorre a presença de uma singularidade nesse local. Em elementos de menor ordem, como os lineares, existe a possibilidade da utilização da integração analítica nas soluções fundamentais. Porém, para os elementos quadráticos, essas expressões se tornam difíceis e por isso serão desenvolvidas de forma numérica no presente estudo. Essas integrais singulares necessitam de um tratamento especial para serem calculadas corretamente. Os métodos de integração singulares serão desenvolvidos em capítulo posterior. A integração numérica, quando permitida, utilizará da técnica da quadratura de Gauss (GAO, 2006).

A partir das funções de forma (4.54) e da equação integral de deslocamentos (4.48), pode-se definir as matrizes H e G correspondentes a solução fundamental do sistema linear de equações.

Cada parcela da solução fundamental é determinada em relação do raio entre o ponto fonte aplicado $x(\xi)$ e o ponto campo analisado, x_f . Sendo definida, em relação as coordenadas x e y, por:

$$\begin{aligned} dx(\xi) &= x(\xi) - x_f \\ dy(\xi) &= y(\xi) - y_f \end{aligned} \quad (4.59)$$

A distância final entre os pontos, definida por raio (r) é

$$r(\xi) = \sqrt{(dx(\xi))^2 + (dy(\xi))^2} \quad (4.60)$$

Dessa forma, a derivada do raio para distância em relação à x é

$$r_{,1}(\xi) = \frac{dx(\xi)}{r(\xi)} \quad (4.61)$$

De forma análoga, para y ,

$$r_{,2}(\xi) = \frac{dy(\xi)}{r(\xi)} \quad (4.62)$$

O jacobiano da transformação de coordenadas, é dado por:

$$J(\xi) = \sqrt{\left(dx_{,\xi}(\xi)\right)^2 + \left(dy_{,\xi}(\xi)\right)^2} \quad (4.63)$$

Os componentes do vetor normal ao contorno são calculados como:

$$dx_{,N}(\xi) = n_x = \frac{1}{J(\xi)} dy_{,\xi}(\xi) \quad (4.64)$$

$$dy_{,N}(\xi) = n_y = \frac{1}{J(\xi)} dx_{,\xi}(\xi) \quad (4.65)$$

A derivada normal com relação ao raio é obtida sendo:

$$r_{,N}(\xi) = r_{,1}(\xi) n_x + r_{,2}(\xi) n_y \quad (4.66)$$

Sendo assim, as matrizes em termos de coordenadas locais, são dadas da seguinte forma:

$$H_{ij} = \int_{-1}^1 P_{ij}^*(X, x_0) \varphi(\xi) J(\xi) d\xi \quad (4.67)$$

$$G_{ij} = \int_{-1}^1 U_{ij}^*(X, x_0) \varphi(\xi) J(\xi) d\xi$$

Portanto, a equação integral de deslocamentos (4.48), escrita em termos de coordenadas locais, para todos os nós e todos os elementos, escrita na forma de somatório, é dada por:

$$\begin{aligned}
C_{ij}u_i(x_0) + \sum_{m=1}^M \sum_{K=1}^N \left[\int_{-1}^1 P_{ij}^*(X, x_0) \varphi(\xi) J(\xi) d\xi \right] u_i(X) \\
= \sum_{m=1}^M \sum_{K=1}^N \left[\int_{-1}^2 U_{ij}^*(X, x_0) \varphi(\xi) J(\xi) d\xi \right] p_i(X)
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Onde X apresenta o ponto campo e x_0 o campo fonte. O termo M representa o número total de elementos do problema, com N variando de 1 a 3 de para o número de nós em elementos quadráticos. Substituindo a equação (4.64), em (4.65), pode-se escrever que:

$$C_{ij}U_i(x_0) + \sum_{m=1}^M \sum_{K=1}^N [H_{ij}] u_i(X) = \sum_{m=1}^M \sum_{K=1}^N [G_{ij}] p_i(X) \tag{4.69}$$

Para o exemplo da figura 18, foram considerados 4 elementos quadráticos, sendo que o primeiro elemento é composto pelos nós 1, 2 e 3. O segundo elemento contém os nós 4, 5 e 6 e assim sucessivamente com os outros dois elementos.

Elaborada a discretização dos elementos e nós no contorno, se faz necessária a aplicação do método da colocação do ponto fonte ao longo dos nós, o qual é usado para escrever as equações integrais de acordo com a solução de Kelvin para uma carga unitária aplicada em um domínio. Posicionar o ponto fonte em cada nó do contorno objetiva preencher o sistema de equações com incógnitas a serem resolvidas (BREBBIA, 1992).

As soluções fundamentais são calculadas a partir da distância (raio) entre o elemento em análise e o ponto fonte. Na figura 18, inicia-se o processo colocando o ponto fonte no nó 1 e, com a distância do raio (r) entre este ponto e o primeiro elemento, integram-se as equações fundamentais utilizando os nós do primeiro elemento.

Integram-se as soluções fundamentais a partir do raio (r) entre o nó 1 e o segundo elemento, e assim sucessivamente com todos os elementos discretizados do problema.

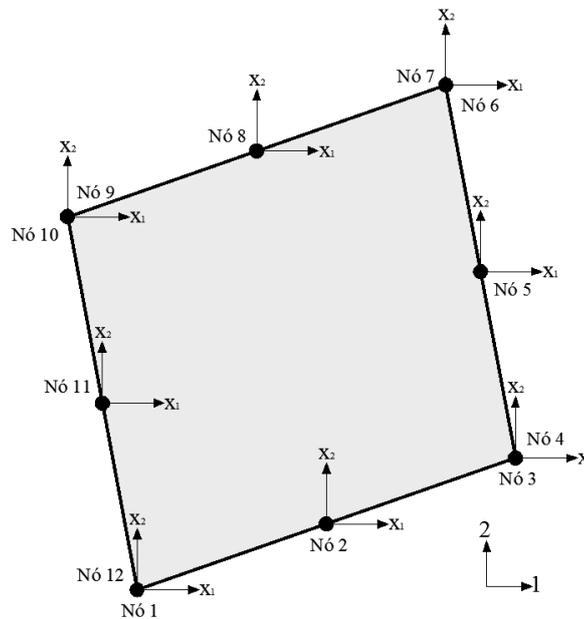
Como os efeitos da aplicação do ponto de colocação em cada nó são computados nas direções ortogonais x_1 e x_2 (Figura 18), nota-se que feito esse procedimento, obtém-se as duas primeiras linhas do sistema de equações principais.

Portanto, a equação (4.69) pode ser escrita de forma explicativa para o primeiro ponto (KANE,1994):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} C_{11}(x_0) & C_{12}(x_0) \\ C_{21}(x_0) & C_{22}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(x_0) \\ U_2(x_0) \end{bmatrix} + \sum_{m=1}^M \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(X) \\ u_2(X) \end{bmatrix} \\ & = \sum_{m=1}^M \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(X) \\ p_2(X) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Na sequência do processo, colocando o ponto fonte no segundo nó (Figura 18), duas novas equações são calculadas (4.70) ocupando assim a terceira e quarta linha das matrizes H e G do sistema linear. Após todos os nós do contorno, obtém-se o sistema final de equações.

Figura 18. Direções de aplicação do ponto de colocação



Fonte: Elaborada pela autora.

Resumidamente, cada par linha das matrizes H e G corresponde às direções ortogonais de um ponto de colocação. As colunas das matrizes condizem às direções dos efeitos devido a aplicação de uma carga, em todos os elementos. A equação integral de contorno, portanto, pode ser representada por um sistema matricial,

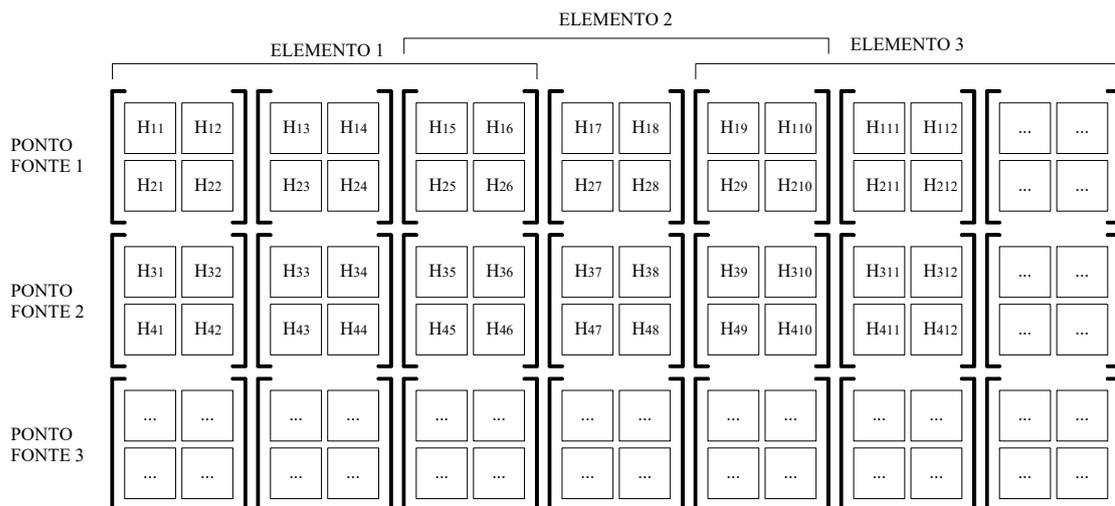
$$[H][U] = [G][P] \quad (4.71)$$

Onde cada contribuição da matriz será multiplicada pela variável correspondente, como o vetor deslocamento U para o caso da matriz H e pelo vetor correspondente a força de superfície P para a matriz G .

Como se utiliza elementos contínuos no presente trabalho, deve-se somar a contribuição dos elementos que compartilham o mesmo nó. Deve-se, portanto, somar a contribuição do último nó de um elemento com a contribuição do primeiro nó do elemento seguinte. Esse procedimento deve se repetir sempre que elementos compartilharem um nó.

De forma geral, a Figura 19 ilustra graficamente a matriz parcial de coeficientes H_{ij} , sendo da mesma forma equivalente para a matriz G_{ij} , dada por:

Figura 19. Ilustração da matriz de coeficientes devido a H_{ij} .



Fonte: Adaptado de Soares Jr, 2015.

Após montagem das matrizes H e G é necessária a aplicação das condições de contorno do problema. No presente estudo, cada nó possui quatro variáveis (u_1, u_2, p_1, p_2) sendo necessária duas variáveis com valores prescritos, ou seja, condições de contorno de dois componentes.

De forma numérica, para introduzir as condições de contorno na resolução do sistema matricial de equações, as matrizes H e G devem ser organizadas de forma que todas as variáveis prescritas (ou conhecidas) estejam ao lado direito do sistema matricial, enquanto as incógnitas estejam localizadas no lado esquerdo, de forma que se tenha:

$$[H^*]\{x\} = [G^*]\{y\} \quad (4.72)$$

Sendo x representando um vetor que contem as incógnitas relativas aos graus de liberdade e y um vetor dos valores prescritos. As matrizes H^* e G^* representam matrizes modificadas de H e G , para incluírem as condições de contorno na solução do problema.

Dessa forma, o sistema linear final pode ser representado na forma de

$$[H^*]\{x\} = [B] \quad (4.73)$$

onde a matriz B seja o produto da matriz G^* com um vetor de valores conhecidos.

Após a alteração de posicionamento desses valores, a resolução do sistema linear é obtida de forma que as incógnitas ficam determinadas e os deslocamentos e forças de superfície do problema são conhecidos.

4.9 DESLOCAMENTOS EM PONTOS INTERNOS AO DOMÍNIO

Com os valores de deslocamentos e forças de superfície obtidos no contorno, é possível determinar incógnitas no interior do domínio (KANE, 1994). Para isso, a partir da identidade de Somigliana é possível obter valores de deslocamentos e tensões de forma direta. Como nos pontos internos não haverá singularidades nas equações integrais, se torna possível utilizar a quadratura de Gauss na integração dos núcleos da solução fundamental. Na forma matricial, trata-se da equação:

$$u_{ij}(x_0) + \sum_{K=1}^M \int_{\Gamma} [P_{ij}^*(X, x_0)] d\Gamma u_j(X) = \sum_{K=1}^M \int_{\Gamma} [U_{ij}^*(X, x_0)] d\Gamma p_j(X) \quad (4.74)$$

Sendo que M representa o número de elementos no contorno, x_0 é o ponto de colocação interno e X representa o ponto campo no contorno. Substituindo as equações (4.67) na (4.74) acima, tem-se uma equação dos deslocamentos nos pontos internos mais compacta:

$$u_{ij}(x_0) + \sum_{K=1}^M [H'] u_j(X) = \sum_{K=1}^M [G'] p_j(X) \quad (4.75)$$

Na equação (4.75), as matrizes H' e G' representam contribuições referente ao ponto de colocação no interior do domínio, diferenciando-as de H e G , as quais são utilizadas para obter deslocamentos e forças de superfície no contorno.

4.10 TENSÕES EM PONTOS INTERNOS AO DOMÍNIO

As tensões e deformações de um corpo sólido podem ser relacionadas pelas equações constitutivas. Na mecânica dos sólidos, a lei de Hooke relaciona as componentes de tensão e de deformação para um material elástico de Cauchy:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (4.76)$$

Na equação (4.76), o termo C_{ijkl} representa um tensor de quarta ordem, mencionado anteriormente nesse estudo.

As componentes de tensões nos pontos internos são obtidas a partir do gradiente da equação integral de deslocamento no tensor constitutivo de Hooke, encontrando então as deformações em pontos internos. Com isso, é necessário que se estabeleça uma relação envolvendo os campos tensoriais de tensões e deformações, para determinação das tensões. Essas relações são admitidas como constitutivas e nesse contexto, utiliza-se a lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos, escrita inicialmente como:

$$\sigma_{ik} = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ik} \epsilon_{mm} + \epsilon_{ik} \right) \quad (4.77)$$

Nessa equação, μ representa uma das constantes de Lamé e ν é o coeficiente de Poisson, representando as características dos materiais, enquanto σ_{ik} e ϵ_{ik} são valores de tensão e deformação.

Pela relação de compatibilidade, as deformações podem ser escritas em termos de deslocamentos,

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i}) \quad (4.78)$$

De forma que, substituindo a equação de compatibilidade na lei de Hooke generalizada, decorre:

$$\sigma_{ik} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ik} u_{m,m} + \mu(u_{i,k} + u_{k,i}) \quad (4.79)$$

À vista disso, as tensões nos pontos internos podem ser obtidas empregando a derivada da identidade de Somigliana (4.48) e considerando forças de volume nulas.

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_{0m}} \left[- \int_{\Gamma} P_{mj}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{mj}^*(X, x_0) p_j(X) d\Gamma \right] \\ & + \mu \frac{\partial}{\partial x_{0k}} \left[- \int_{\Gamma} P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{ij}^*(X, x_0) p_j(X) d\Gamma \right] \dots \quad (4.80) \\ & \dots + \mu \frac{\partial}{\partial x_{0j}} \left[- \int_{\Gamma} P_{kj}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{kj}^*(X, x_0) p_j(X) d\Gamma \right] \end{aligned}$$

Nota-se que as derivadas em relação ao ponto fonte correspondem às derivadas em relação ao ponto campo, com sinal invertido.

Em uma forma compacta, a equação integral para tensões em pontos internos acima pode ser escrita na forma

$$\sigma_{ik}(x_0) = - \int_{\Gamma} S_{ikj}(X, x_0) u_j(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ikj}(X, x_0) p_j(X) d\Gamma \quad (4.81)$$

com os termos S_{ikj} e D_{ikj} sendo núcleos de terceira ordem, resultados das combinações das derivadas da solução fundamental de forças de superfície P_{ij}^* e de deslocamentos U_{ij}^* , em relação ao ponto campo X nas direções k e i , sendo:

$$\frac{\partial U_{ij}^*}{\partial x_k} = \frac{1}{8\pi\mu(1-2\nu)r} \left[-(3-4\nu)\delta_{ij}r_k + \delta_{ik}r_j + \delta_{jk}r_i - 2r_i r_j r_k \right] \quad (4.82)$$

$$\frac{\partial U_{kj}^*}{\partial x_i} = \frac{1}{8\pi\mu(1-2\nu)r} \left[-(3-4\nu)\delta_{jk}r_i + \delta_{ik}r_j + \delta_{ij}r_k - 2r_i r_j r_k \right] \quad (4.83)$$

Substituindo as equações (4.82) e (4.83) na relação de compatibilidade de deformações e deslocamentos, apresentada em (4.78), tem-se:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{16\pi\mu(1-2\nu)r} \left[-(2-4\nu)(\delta_{jk}r_i + \delta_{ij}r_k) + 2\delta_{ik}r_j - 4r_i r_j r_k \right] \quad (4.84)$$

Simplificando todos os termos do lado direito da equação (4.84) por dois, e reescrevendo o termo ε_{mm} da equação (4.79) fazendo $i = k = m$, tem-se:

$$\varepsilon_{mm} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r} \left[-(1-2\nu)(\delta_{jm}r_m + \delta_{jm}r_m) + \delta_{mm}r_j - 2r_j r_m r_m \right] \quad (4.85)$$

Reescrevendo na forma de:

$$\varepsilon_{mm} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r} \left[-(1-2\nu)(r_j + r_j) + 2r_j - 2r_j \right] \quad (4.86)$$

Substituindo as equações (4.84) e (4.85) na equação (4.77), tem-se:

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[-(1-2\nu)(\delta_{jk}r_i + \delta_{ij}r_k) + (1-2\nu)\delta_{ik}r_j - 2r_i r_j r_k \right] \quad (4.87)$$

Ao considerar a derivada da solução fundamental de deslocamentos em relação ao ponto fonte, com sinal inverso de (4.87), para definir o termo D_{ikj} , pode-se escrever:

$$D_{ikj} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{jk}r_i + \delta_{ij}r_k - \delta_{ik}r_j) + 2r_i r_j r_k \right] \quad (4.88)$$

Da mesma forma, o tensor S_{ikj} é definido a partir da derivada da solução fundamental de forças de superfície P_{ij}^* , em relação a um ponto campo X nas mesmas direções citadas anteriormente, chegando a:

$$\begin{aligned} S_{ikj} = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)r^2} \{ & 2r_n n_n \left[-(1-2\nu)\delta_{ik}r_j + 4r_i r_j r_k - \nu(\delta_{ij}r_k - \delta_{kj}r_i) \right] \\ & - 2\nu[r_k r_j n_i + r_i r_j n_k] - (1-2\nu)(2r_i r_k n_j + \delta_{jk}n_k + \delta_{jk}n_i) \\ & + (1-4\nu)\delta_{ik}n_j \} \end{aligned} \quad (4.89)$$

Contudo, nota-se a presença de singularidade forte no núcleo de tensão S_{ikj} no espaço bidimensional. A técnica para reduzir a forte singularidade usada nesse estudo é a introdução da técnica do operador tangente (ODT) e será abordada posteriormente.

4.11 OPERADOR DIFERENCIAL TANGENTE

Na diferenciação da solução fundamental da equação integral de deslocamentos para adquirir a equação integral de tensões, nota-se a presença da forte singularidade existente no núcleo da integral de forças de superfície P_{ij}^* . Nesse caso, a estratégia adotada para reduzir essa singularidade de ordem $1/r^2$ é uma combinação do uso do operador diferencial tangente (ODT) e uma integração por partes, para casos que utilizam a solução fundamental de Kelvin.

Como precursor, Kupradze (1979) apresentou a técnica citada na formulação de problemas tridimensionais. Sladek e Sladek (1983) aplicaram o ODT na solução de fissura curva. Bonnet (1999) aplicou o ODT em formulações regularizadas em equações integrais de contorno para problemas bidimensionais em problemas de potencial e de elasticidade, incluindo definições para mecânica da fratura.

A formulação da equação integral de forças de superfície do MEC Dual com o uso do ODT para casos bidimensionais de fratura foi analisada por Palermo et al. (2006). Essa estratégia permitiu a aplicação do ODT em problemas utilizando interpolação não conforme, demonstrada por em casos tridimensionais de elasticidade para aplicação em modelagens com elementos descontínuos e mistos. (PALERMO e ALMEIDA, 2008).

O estudo sobre o desenvolvimento da fissura em materiais quase frágeis utilizando o MEC Dual acoplado a técnica do ODT foi discorrida por Gonçalves et al. (2011).

Conforme discorrido por Gonçalves (2015), a equação integral de contorno para um ponto interno x_0 , com a derivada em relação ao ponto fonte correspondente à derivada em relação às variáveis de campo com sinal inverso, pode ser reescrita na forma:

$$u_{ij}(x_0) = \int_{\Gamma} P_{ij,k}^*(x_0, X) u_j(X) d\Gamma - \int_{\Gamma} U_{ij,k}^*(x_0, X) p_j(X) d\Gamma \quad (4.90)$$

Sendo que u_j e p_j correspondem aos vetores de deslocamento e forças de superfície em pontos no contorno, respectivamente.

A introdução do ODT no núcleo da primeira integral do lado direito em (4.90), visando reduzir a ordem da forte singularidade para $1/r$, admite as seguintes relações:

$$\int_{\Gamma} P_{ij,k}^*(x_0, X) u_j(X) d\Gamma = \int_{\Gamma} n_p(X) \sigma_{ipj,k}(x_0, X) u_j(X) d\Gamma \quad (4.91)$$

Sendo

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} n_p(X) \sigma_{ipj,k}(x_0, X) u_j(X) d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} \{D_{pk}[\sigma_{ipj}(x_0, X)] + n_k(X) \sigma_{ipj,p}(x_0, X)\} u_j(X) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.92)$$

Onde $D_{pk}(\)$ representa o operador diferencial tangente, a qual tem por definição matemática em função de coordenadas normais, na seguinte forma:

$$D_{kp}[f(X)] = n_k(X) f_{,p}(X) - n_p(X) f_{,k}(X) \quad (4.93)$$

Onde, a partir do produto vetorial dos vetores normal e tangente, pode-se reescrever os termos a direita da equação (4.93) como:

$$\begin{aligned} n_k(X) \frac{\partial f(X)}{\partial x_p} - n_p(X) \frac{\partial f(X)}{\partial x_k} \\ = n_k \left[\frac{\partial f(X)}{\partial n} n_p + \frac{\partial f(X)}{\partial s} s_p \right] - n_p \left[\frac{\partial f(X)}{\partial n} n_k + \frac{\partial f(X)}{\partial s} s_k \right] \end{aligned} \quad (4.94)$$

Ou, após simplificações algébricas em (4.94),

$$n_k(X) \frac{\partial f(X)}{\partial x_p} - n_p(X) \frac{\partial f(X)}{\partial x_k} = n_k s_p \left[\frac{\partial f(X)}{\partial s} s_p \right] - n_p s_k \left[\frac{\partial f(X)}{\partial s} s_k \right] \quad (4.95)$$

representando assim uma equação diferencial utilizando a derivada em relação à tangente, advindo o termo operador diferencial tangente.

Utilizando a integração por partes no restante da equação (4.92) do termo a direita, tem-se:

$$\int_{\Gamma} D_{pk}[\sigma_{ipj}(x_0, X)] u_j(X) d\Gamma = \int_{\Gamma} \sigma_{ipj}(x_0, X) D_{pk}[u_j(X)] d\Gamma \quad (4.96)$$

Na qual a derivada da equação integral de contorno para deslocamentos por ser escrita, em termos do ODT, como:

$$u_{i,k}(x_0) = \int_{\Gamma} \sigma_{ipj}(x_0, X) D_{kp} [u_j(X)] d\Gamma - \int_{\Gamma} U_{ij,k}^*(x_0, X) p_j(X) d\Gamma \quad (4.97)$$

com integrais regulares em pontos internos e singularidade de ordem $1/r$ quando o ponto fonte se aproxima do ponto campo (raio = zero).

4.12 TENSÕES EM PONTOS NO CONTORNO

A equação integral para tensões no contorno pode ser obtida a partir da equação (4.97) utilizando o tensor constitutivo de Hooke, propriedade simétrica presente no vetor $U_{ij,k}^*(x_0, X)$ e tensor de quarta ordem, e com isso, admitindo que a linha de contorno seja suave no ponto de colocação, tem-se em (4.76):

$$\frac{1}{2} \sigma_{ik}(x_0) = C_{ikbm} \int_{\Gamma} \sigma_{bpj}(x_0, X) D_{ip} [u_j(X)] d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{jik}(x_0, X) p_j(X) d\Gamma \quad (4.98)$$

De posse das considerações citadas, quando o ponto de colocação se aproxima do contorno, é possível obter a equação integral de tensões para pontos no contorno em termos dos núcleos D_{ikj} e S_{ikj} , sendo:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ik}(x_0) = \int_{\Gamma} S_{ikj}(x_0, X) u_j(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ikj}(x_0, X) p_j(X) d\Gamma \quad (4.99)$$

Ou ainda, com sinal inverso devido ao ponto de colocação:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ik}(x_0) = - \int_{\Gamma} S_{ikj}(X, x_0) u_j(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ikj}(X, x_0) p_j(X) d\Gamma \quad 4.100)$$

5. APLICAÇÃO DO MEC DUAL PARA MODELO DE FISSURA COESIVA

A fissura coesiva, na modelagem do MEC, é elaborada de forma a ser representada por uma linha com faces coincidentes. Dessa forma, os elementos de contorno nessas faces apresentam pontos nodais com as mesmas coordenadas geométrica. A técnica para viabilizar essa questão é apresentada no MEC Dual, o qual utiliza duas equações integrais distintas para cada face da fissura. O método utiliza a equação integral de deslocamentos em uma das faces da fissura e no contorno físico da estrutura e a equação integral de forças de superfície na outra face da fissura. Essa estratégia, utilizando duas equações integrais ao longo da fissura, permite a solução geral para problemas bidimensionais.

Inicialmente, a abordagem do MEC Dual com a formulação geral que incorporava equações integrais de contorno para deslocamentos e equações integrais de contorno para forças de superfície foi apresentada por Watson (1986), Hong e Chen (1988) e Gray et. al (1990).

Esse capítulo visa apresentar a equação de forças de superfície utilizada na modelagem da fissura, bem como o tratamento realizado para incorporação da técnica do ODT ao núcleo da equação integral de forças de superfície, com a finalidade de reduzir a forte singularidade existente no núcleo da equação integral.

5.1 AS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO NO MEC DUAL

Inicialmente, a primeira equação integral de contorno utilizada, para os componentes de deslocamento u_i (Identidade de Somigliana) foi desenvolvida anteriormente, sendo reescrita como:

$$C_{ij}(x_0) u_i(x_0) + \int_{\Gamma} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X)] d\Gamma = \int_{\Gamma} [U_{ij}^*(X, x_0) p_j(X)] d\Gamma \quad (5.1)$$

Na sequência, a segunda equação integral de contorno manuseada no método MEC Dual é escrita a partir da equação integral de tensões no contorno, reescrita abaixo como:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ik}(x_0) = - \int_{\Gamma} S_{ikj}(X, x_0) u_j(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ikj}(X, x_0) p_j(X) d\Gamma \quad (5.2)$$

Onde, os termos S_{ikj} e D_{ikj} da equação (5.2) foram previamente notados como combinações lineares advindos das soluções fundamentais de deslocamentos e forças de superfície, U_{ij}^* e P_{ij}^* .

Substituindo a relação

$$p_k = \sigma_{ik}n_i \quad (5.3)$$

na equação (5.2), se perfaz a segunda equação integral de contorno utilizada no MEC Dual:

$$\frac{1}{2}p_k(x) + n_i(x) + \int_{\Gamma} S_{ikj}(X, x_0)u_j(X)d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{ikj}(X, x_0)p_j(X)d\Gamma \quad (5.4)$$

Em problemas bidimensionais, a primeira e a segunda integral utilizada na equação (5.3) são regulares para pontos internos e apresentam singularidade de ordem $1/r^2$ e $1/r$, respectivamente, em pontos próximos.

A estratégia utilizada nesse estudo para reduzir a forte singularidade $1/r^2$ é a introdução da técnica ODT na formulação MEC Dual em problemas que usam a solução fundamental tipo Kelvin. Sendo assim, reescrevendo as equações (5.2) e (5.4) em função do ODT, tem-se:

$$\frac{1}{2}\sigma_{ab}(x) = C_{abik} \int_{\Gamma} \sigma_{ipj}(x, y)D_{kp}[u_j(y)]d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{jab}(x, y)p_j(y)d\Gamma \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{2}p_b(x) = n'_a(x)C_{abik} \int_{\Gamma} \sigma_{ipj}(x, y)D_{kp}[u_j(y)]d\Gamma \quad (5.6)$$

$$- n'_a(x) \int_{\Gamma} \sigma_{jab}(x, y)p_j(y)d\Gamma$$

Onde o termo C_{abik} é o tensor de Hooke para meio isotrópico.

A equação integral de contorno para forças de superfície, incorporada à técnica ODT, apresentada em (5.6), é utilizada nesse estudo na discretização de uma face da fissura. De outro modo, destina-se à face oposta e o contorno do domínio estudado, a equação integral de contorno para deslocamentos, visto em (5.1).

5.2 ESTRATÉGIA PARA MODELAGEM DA FISSURA FICTÍCIA

A modelagem dos elementos na região da fissura aberta foi realizada com elementos quadráticos e nós duplos nos limites da abertura, permitindo dessa forma a descontinuidade de carregamento no contorno.

O modelo de fissura considerando a zona de processos coesivos é proposto em materiais como concreto, polímeros, compósitos reforçados com fibras, entre outros materiais, onde as superfícies da fissura não se encontram completamente separadas na região coesiva, possibilitando a transferência de forças ao longo dessa região.

Para a fissura fictícia, a estratégia utilizada para representar a zona de processos coesivos, admite o uso de leis constitutivas do tipo linear e bilinear, nas quais as forças coesivas de tração (simulando molas) nas faces da fissura são relacionadas com a descontinuidade dos deslocamentos nessa região.

As forças de superfície e os deslocamentos são escritos segundo as direções normais e tangenciais em relação à superfície do contorno. As coordenadas tangenciais, n_t , dá-se a partir das componentes x e y e das matrizes de transformação rotacional, sendo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_n \\ p_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_n \\ u_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Durante a fase inicial do carregamento aplicado, o sistema de equações apresenta um comportamento elástico linear e as componentes de forças de superfície normais e tangenciais garantem que os deslocamentos sejam contínuos na região. A componente de força de superfície tangencial tende a zero quando a fissura fictícia se desenvolve e as faces da fissura se separam, conduzindo à propagação da fissura.

A influência da descontinuidade de deslocamentos na resistência coesiva é assumida para componentes de deslocamentos normais, Δu_n . Dessa forma, ocorre o deslizamento relativo livre entre as faces da fissura e a diferença dos deslocamentos normais nas faces, a e b (Figura 20), é dada por

$$\Delta u_n = u_n^b - u_n^a \quad (5.8)$$

Assim, resultando na abertura da fissura na direção normal à superfície.

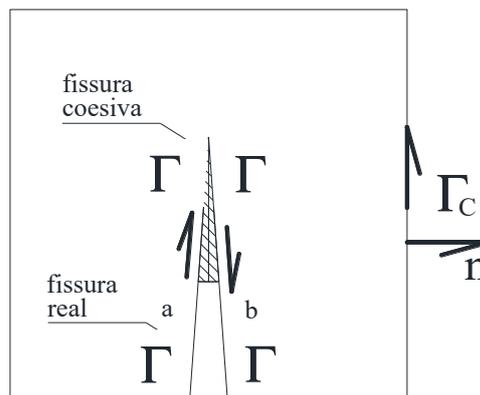
Tendo em vista o modo de abertura I da fissura, com abertura maior que zero é possível descrever a lei de separação de forças para a zona coesiva.

O material coesivo é modelado através de uma linha, em formato de mola, de comportamento:

$$p = k(\Delta u_{cr})\Delta u_{cr} \quad (5.9)$$

Onde p é o vetor de forças de superfície (com componentes normal, p_n e tangencial, p_t), Δu_{cr} é a abertura máxima entre dois pontos coincidentes na face da fratura, utilizando como parâmetro ao dano. A rigidez da zona coesiva do material é definida por $k(\Delta u_{cr})$, sendo essa uma função de Δu , indicando o comportamento de amolecimento do material.

Figura 20. Faces da fissura na região coesiva.



Fonte: Adaptado de Gonçalves, 2015.

Há dois pontos relevantes a ser admitidos na estratégia para modelagem da fissura fictícia. O primeiro relata o momento em que a abertura da fissura Δu tem valor zero e p tem valor máximo, representando a resistência à tração do concreto na região coesiva (f_t). Para além a esse valor crítico, o processo de separação se inicia e o valor de Δu acresce. Esse ponto se refere como extremidade fictícia da fissura ou, extremidade da zona coesiva (Figura 20).

O outro ponto importante ao dano acontece quando Δu tem valor Δu_{cr} , e p tem valor zero, representando o máximo salto de deslocamento na zona coesiva que pode ser suportando antes da propagação da fissura. Para valores além desse limite, a força de superfície tem valor zero e os dois pontos inicialmente coincidentes agora estão separados. Assim, a equação (5.8)

representa o processo de separação das faces em uma fissura, quando Δu tem valor maior que zero.

A lei coesiva linear, mencionada previamente na seção 3.6, é admitida como:

$$\sigma_n = f_t \left(1 - \frac{\Delta u_n}{\Delta u_{cr}} \right) \quad (5.10)$$

Sendo σ_n a tensão de superfície na direção normal, f_t a resistência à tração do material, Δu_n o salto de deslocamento na região da descontinuidade na direção normal a superfície e Δu_{cr} é o valor de abertura crítica (ou máximo), que torna nulo o valor de σ_n .

Na formulação MEC Dual utilizada nesse estudo, as tensões na região coesiva, determinadas pela lei constitutiva da equação (5.10), são citadas por forças coesivas, p_n , a partir da multiplicação da tensão pela espessura do modelo estrutural.

Da mesma forma, os termos das equações integrais foram dispostos a permitir os tratamentos para a região da fissura aberta e fechada, conforme Figura 20, onde as relações referentes ao modelo de fissura fictícia são acrescidas na região fechada da fissura, baseado em propostas apresentadas por Bonnet (1999), através do método da descontinuidade de deslocamentos.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_i(x) &= \int_{\Gamma} [P_{ij}^*(x, y) u_j(y) d\Gamma] + \int_{\Gamma_a} [P_{ij}^*(x, y) u_j^a(y) d\Gamma] + \\ &+ \int_{\Gamma_b} [P_{ij}^*(x, y) u_j^b(y) d\Gamma] = \int_{\Gamma_c} [U_{ij}^*(x, y) p_j(y) d\Gamma] + \\ &\int_{\Gamma_a} [U_{ij}^*(x, y) p_j^a(y) d\Gamma] + \int_{\Gamma_b} [U_{ij}^*(x, y) p_j^b(y) d\Gamma] \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} p_b(x) &= n'_m(x) C_{mbik} \int_{\Gamma_c} \sigma_{ipj}(x, y) D_{kp} [u_j(y)] d\Gamma \\
&+ n'_m(x) C_{mbik} \int_{\Gamma_a} \sigma_{ipj}(x, y) D_{kp} [u_j^a(y)] d\Gamma \\
&+ n'_m(x) C_{mbik} \int_{\Gamma_b} \sigma_{ipj}(x, y) D_{kp} [u_j^b(y)] d\Gamma \\
&- n'_m(x) \int_{\Gamma_c} \sigma_{jmb}(x, y) p_j(y) d\Gamma \\
&- n'_m(x) \int_{\Gamma_a} \sigma_{jmb}(x, y) p_j^a(y) d\Gamma \\
&- n'_m(x) \int_{\Gamma_b} \sigma_{jmb}(x, y) p_j^b(y) d\Gamma
\end{aligned} \tag{5.12}$$

O termo Γ utilizado nas equações (5.11) e (5.12), ilustrado na Figura 20, corresponde ao contorno total do domínio, com as faces opostas das fissuras nas regiões abertas e fechadas, a e b, identificadas no sentido da integração.

Admite-se que sejam usados elementos de contorno contínuos ao longo das faces da fissura, para simplicidade de notação e admitindo que a linha de contorno seja suave no ponto de colocação. As equações integrais podem ser simplificadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} u_i(x) + \int_{\Gamma} [P_{ij}^*(x, y) u_j(y) d\Gamma] &= \int_{\Gamma_c} [U_{ij}^*(x, y) p_j(y) d\Gamma] + \\
&\int_{\Gamma_2} [U_{ij}^*(x, y) p_j^2(y) d\Gamma] - \int_{\Gamma_3} [U_{ij}^*(x, y) p_j^2(y) d\Gamma]
\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \mathbf{t}_k(\mathbf{x}) = n_a(\mathbf{x}) & \left[C_{akim} \int_{\Gamma} \sigma_{ibj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) D_{mb}[u_j(\mathbf{y})] d\Gamma - \int_{\Gamma_e} \sigma_{jak}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma \right] \\
& - n_a(\mathbf{x}) \int_{\Gamma_2} \sigma_{jak}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_j^2(\mathbf{y}) d\Gamma \\
& + n_a(\mathbf{x}) \int_{\Gamma_3} \sigma_{jak}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_j^2(\mathbf{y}) d\Gamma
\end{aligned} \tag{5.14}$$

A propagação da fissura é diretamente relacionada à máxima tensão principal, que deve ser na direção normal às superfícies da abertura e, a extensão, é dada na posição onde a tensão máxima principal na ponta da fissura atinge o valor f_t crítico durante o carregamento.

6. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

O modelo neste exemplo numérico consiste na aplicação do modelo MEC Dual, para um modelo de fissura fictícia no sistema matricial de equações e um processo incremental de carregamento para a solução. As forças de superfície ao longo de uma superfície da fissura são as incógnitas no sistema de equações obtido das equações (5.13) e (5.14). O sistema de equações obtidos a partir dessas equações é dado com valores desconhecidos, incluindo as forças de superfície na zona coesiva (p^2). A lei coesiva é a equação adicional utilizada para encontrar a solução. Essa estratégia permite o cálculo direto de forças de superfície na zona coesiva em cada etapa do carregamento incremental.

$$\begin{bmatrix} H_{ee} & H_{eo} & H_{ez} & -G_{e2} \\ H_{oe} & H_{oo} & H_{oz} & -G_{o2} \\ H_{ze} & H_{zo} & H_{zz} & -G_{z2} \\ 0 & 0 & A & B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^e \\ u^o \\ u^z \\ p^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ee} & 0 \\ G_{oe} & 0 \\ G_{ze} & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p^e \\ \Delta u \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

A matriz (6.1) resume o sistema de equações na qual as duas equações (5.13) e (5.14) são convertidas em submatrizes $[H_{ij}]$, cujo núcleo da integral contém os deslocamentos, e $[G_{ij}]$, a qual o núcleo da integral contém forças de superfície, respectivamente. A lei coesiva originou as submatrizes A, B e C. Os índices e, o e z estão relacionados com as porções limite e correspondem ao limite externo, ao limite de abertura da fissura e abertura na zona coesiva, respectivamente. Tais submatrizes A e B correspondem aos deslocamentos e forças de superfície nas direções normal e tangente, respectivamente, às superfícies da fissura aberta e região coesiva. As forças de superfície e os deslocamentos são comumente escritos em componente segundo as direções normais e tangenciais em relação à superfície de contorno das faces da fissura. O critério para amolecimento na zona coesiva é para forças de superfície e abertura na direção normal e, componente de força de superfície tangencial tendendo a zero quando a fissura fictícia se desenvolve e as faces da fissura se separam.

O algoritmo numérico é resumido a seguir, considerando as integrais de contorno mostradas na Figura 20 e curva tensão-abertura de fissura com aproximações lineares, conforme Figura 12.

- a) Na fase inicial, as tensões atuantes, ou as forças de superfície na direção normal, são menores ou iguais à tensão resistente do material (f_i), ou seja, a propagação da fissura não ocorre na zona coesiva e, portanto, os pontos ao longo das superfícies da fissura apresentam os mesmos deslocamentos. As submatrizes B e C são zero, enquanto a

submatriz A apresenta cossenos diretores que relacionam os deslocamentos nas direções de forma que as aberturas nas direções normal e tangente são zero;

$$u_i^2 n_i^2 + u_i^3 n_i^3 = 0 \quad (6.2)$$

$$u_i^2 s_i^2 + u_i^3 s_i^3 = 0 \quad (6.3)$$

- b) Na sequência, com as cargas subsequentes, após a tração normal ter atingido a tensão de resistência máxima do material f_t , a abertura ocorre na zona coesiva de acordo com a lei coesiva. As submatrizes B e C são modificadas para introduzir a lei coesiva na linha que contém a abertura na direção normal. As forças de superfície na direção tangente são zero e essa é uma condição introduzida na superfície que descreve a abertura na direção da tangente. As equações (6.2) e (6.3) nas linhas correspondentes são substituídas por:

$$(u_i^2 n_i^2 + u_i^3 n_i^3) - \frac{\Delta u_{cr}^*}{f_t} n_i^2 p_i^2 = -\Delta u_{cr} \quad (6.4)$$

$$s_i^2 p_i^2 = 0 \quad (6.5)$$

- c) Quando a abertura atinge o seu valor crítico (Δu_{cr}), nas cargas subsequentes, as forças de superfície devem ser iguais a zero. A ausência de forças de superfície nas direções normal e tangente faz com que na direção x_i , essas forças também sejam iguais a zero. Dessa forma, os valores de forças de superfície p_i^c nesse ponto na superfície da fissura são eliminados do sistema de equações. Equações (6.4) e (6.5) nas linhas correspondentes das matrizes A e B são substituídas por:

$$p_1^2 = 0 \quad (6.6)$$

$$p_2^2 = 0 \quad (6.7)$$

O valor da abertura de fissura crítico da região não coesiva, ou ponto de quebra (Δu_{cr}^*), é introduzido no algoritmo numérico quando a lei constitutiva utiliza duas linhas retas, como mostrado na Figura 13. A lei constitutiva na equação (6.4) utiliza a relação tanto para a primeira como para a segunda linha da lei constitutiva bilinear, de acordo com os valores de abertura da fissura (Δu) e abertura crítica da fissura no ponto de quebra (Δu_{cr}^*). A primeira linha é usada no carregamento subsequente após as forças de superfície atingirem o valor limite da tensão de resistência a tração f_t e a abertura ocorrer na região coesiva. Sendo assim, a segunda linha para a lei constitutiva substitui a primeira linha quando o valor de abertura (Δu) é maior do que o valor de abertura crítica (Δu_{cr}^*). As forças de superfície passam a ser zero quando a

abertura normal (Δu) atinge o valor de abertura crítica (Δu_{cr}) no processo de carregamento e assim, as equações (6.6) e (6.7) devem ser usadas no lugar das equações (6.4) e (6.5).

O código do elemento de contorno foi desenvolvido com base no apresentado por Gonçalves (2015) e Gonçalves et al (2017), contudo, trabalhando com elementos isoparamétricos quadráticos. Funções de mapeamento são usadas para representar os deslocamentos e forças de superfície nos elementos de contorno. A mesma função de mapeamento é usada para interpolações conforme e não conformes, com parâmetros nodais posicionados nas extremidades dos elementos. Os pontos de colocação são posicionados na linha de contorno, nos nós dos elementos em interpolações conformes, sendo a posição (ξ') nos intervalos (-1,0) e deslocados para o interior dos elementos de contorno no caso de interpolações não conformes, com $\xi' = \pm 0,67$ e $\xi' = 0$. Contudo, para satisfazer os requisitos de continuidade na equação integral de contorno de forças de superfície, os pontos de colocação para esse caso são sempre posicionados dentro dos elementos para ambos os tipos de interpolação, ou seja, $\xi' = \pm 0,67$ para interpolações conformes e para interpolações não conformes, $\xi' = \pm 0,67$ e $\xi' = 0$.

A subtração de singularidade foi usada em integrações do tipo Cauchy, o tratamento de Telles foi empregado para integrações com singularidade fraca e o método de Gauss-Legendre foi utilizado nas integrais regulares.

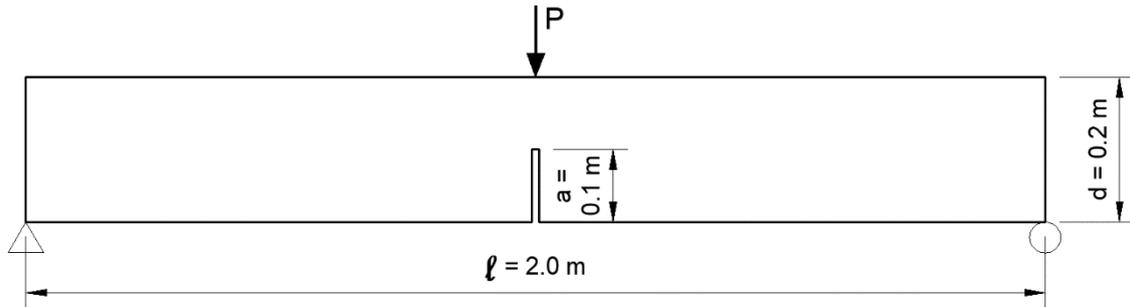
6.1 EXEMPLO 01

Análises experimentais e numéricas foram realizadas e apresentadas por Petersson (1981) para casos de vigas com entalhe, solicitada à flexão em três pontos. A altura da viga (d) é de 0,20 metros, com espessura de 0,05 metros e comprimento de 2,0 metros. A relação adotada entre a altura da viga e altura total do entalhe (a/d) é de 0,50. O módulo de Young (E) foi de 30 GPa, o coeficiente de Poisson (ν) foi de 0,20 e a tensão de resistência à tração foi de 3,33 MPa. A Tabela 1 apresenta as propriedades utilizadas na análise da propagação da fissura, conforme Petersson (1981), para cada uma das leis constitutivas, apresentadas na Figura 21.

Petersson (1981) apresentou resultados para propagação de fissuras, os quais foram obtidos experimentalmente para dois valores de energia de fratura (G_f): 115 Nm⁻¹ e 137 Nm⁻¹. Em seu estudo, Petersson (1981) elaborou análises numéricas utilizando o método dos

elementos finitos (MEF) com energia de fratura (G_f) de 124 Nm^{-1} , que foi a média dos valores usados nos casos experimentais.

Figura 21. Modelo de viga utilizado sob teste de flexão de três pontos.



Fonte: Adaptado de Gonçalves, 2015.

Duas leis constitutivas foram consideradas nas análises numéricas no estudo referenciado, linear (*Straight line* - SL) e bilinear (C), demonstrado na Figura 22, utilizando dados da Tabela 1. Petersson (1981) utilizou a letra C para representar a lei constitutiva bilinear porque considerou esta lei melhor para representar o comportamento do concreto.

Tabela 1. Propriedades mecânicas de acordo com leis constitutivas, por Petersson (1981).

Curva $\sigma - \Delta u$	G_f (N.m^{-1})	f_t (MPa)	F_1 (MPa)	Δu_{cr} (mm)	Δu^* (mm)	E_C (MPa)
Linear (SL)	124	3.33	-	0.07450	-	30.000
Bilinear (C)	124	3.33	1.11	0.13400	0.02979	30.000

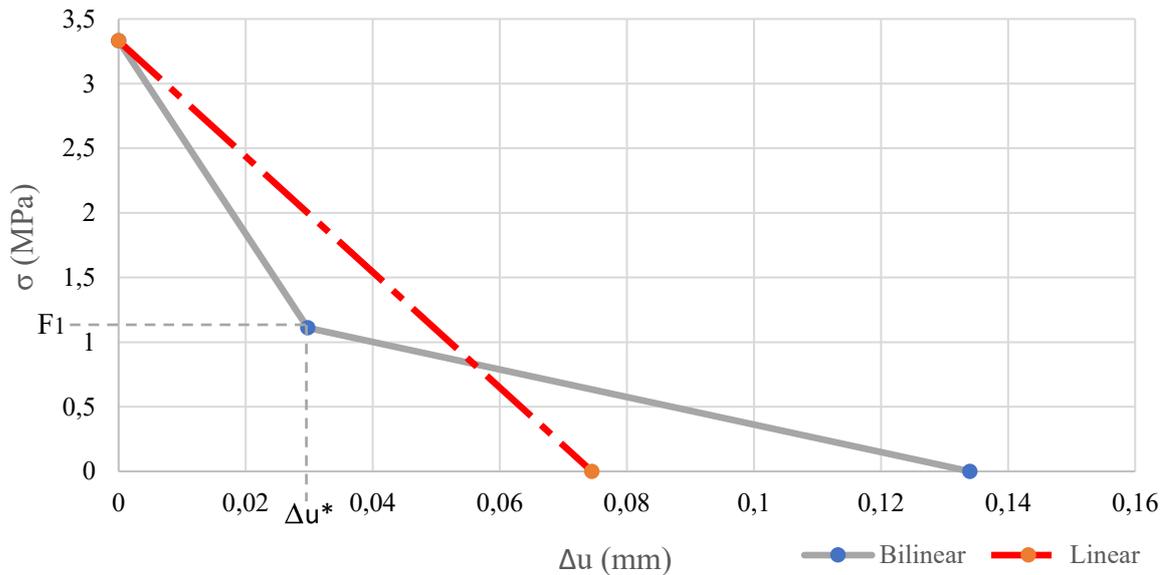
Fonte: Elaborado pela autora.

A tensão resistente do material é dada por f_t e a abertura crítica é Δu_{cr} . O valor do ponto de quebra, F_1 e Δu^* , usado pelo autor para a lei constitutiva bilinear foi relacionado ao seguinte valor da tração normal:

$$\Delta u^* = \frac{2}{9} \Delta u_{cr} \xrightarrow{\text{yields}} F_1 = \frac{1}{3} f_t \quad (6.8)$$

Saleh e Aliabadi (1995) apresentaram resultados para esse problema utilizando o MEC Dual com elementos quadráticos descontínuos, a lei constitutiva na zona coesiva era linear e as propriedades mecânicas eram as mesmas apresentadas por Petersson (1981).

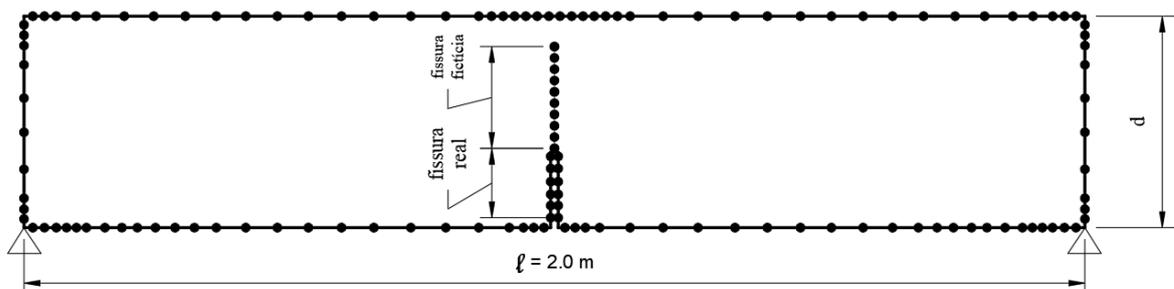
Figura 22. Parâmetros utilizados nas leis constitutivas de uma e duas retas.



Fonte: Elaborado pela autora.

A malha de elementos de contorno usada nas análises em ambas as leis constitutivas foi definida por 156 elementos quadráticos de contorno, com nós duplos nos cantos da viga e na ponta da fissura fictícia, representada na Figura 23. A eficiência da distribuição e discretização dos elementos foi abordada de acordo com o admitido no estudo apresentado por Gonçalves (2015), as quais apresentaram bons resultados quando comparados com a literatura.

Figura 23. Viga com discretização dos elementos de contorno.

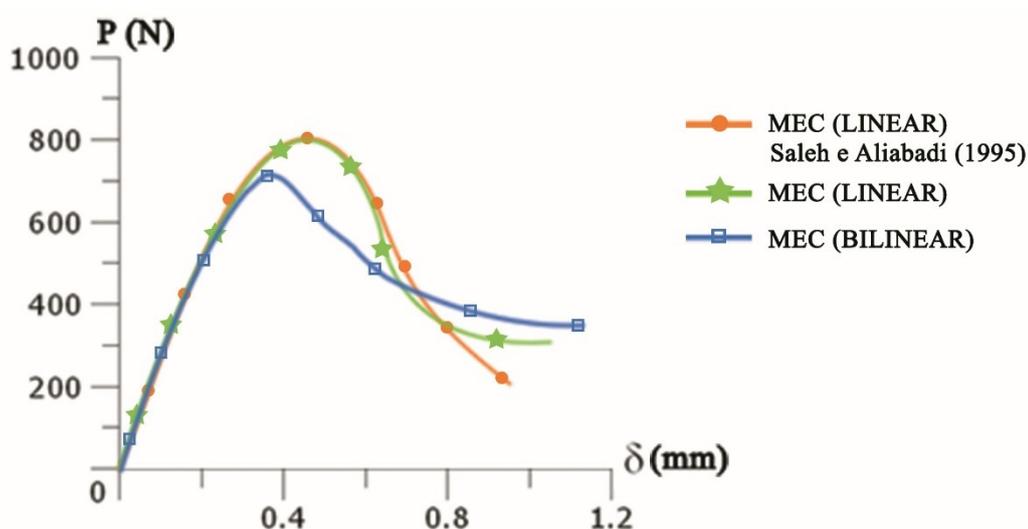


Fonte: Elaborado pela autora.

Os resultados obtidos com a formulação apresentada nesse exemplo são mostrados na Figura 24 e comparados com as curvas apresentadas graficamente por Gonçalves (2015). A comparação dos resultados foi elaborada graficamente. As ilustrações foram reproduzidas, acrescidas das curvas obtidas através do método dos elementos de contorno dual nesse estudo. Dois tipos de leis constitutivas foram utilizados com a presente formulação: a) linear e b) bilinear.

De acordo com a Figura 24, a carga de pico obtida com a lei constitutiva linear (curva verde) foi semelhante ao resultado obtido por Saleh e Aliabadi (1995), que também utilizou uma lei constitutiva linear, e maior que a obtida com a lei constitutiva bilinear (curva azul).

Figura 24. Comparação entre os resultados obtidos nesse estudo e demonstrados por Saleh e Aliabadi (1995).



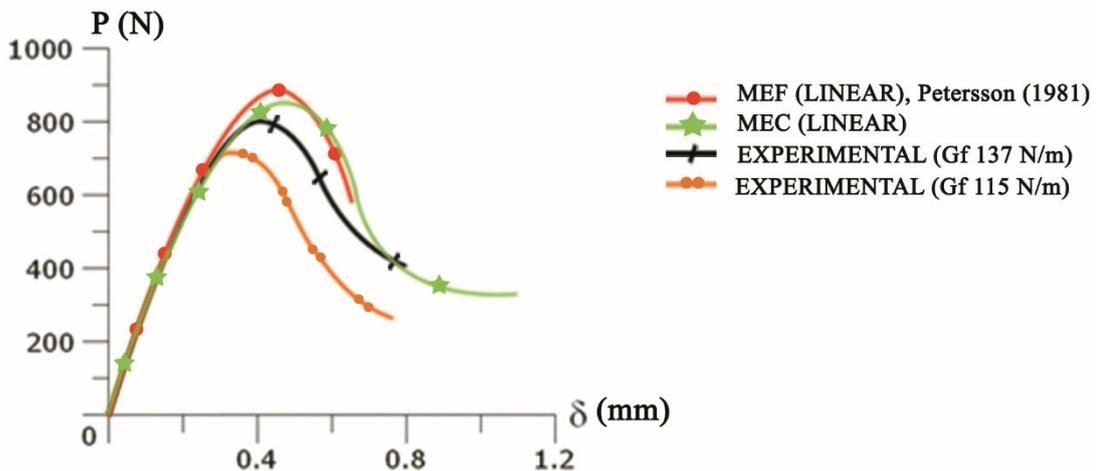
Fonte: Elaborado pela autora.

Uma comparação dos resultados numéricos e experimentais apresentados por Petersson (1981) é mostrada nas Figuras 25 e 26. Os resultados obtidos com a presente formulação MEC Dual para ambos os tipos de leis constitutivas são muito semelhantes aos apresentados pelo autor, obtidos a partir de uma análise MEF. Além disso, os resultados obtidos com a lei constitutiva bilinear (Figura 26) demonstram que o uso de duas linhas retas é melhor para representar o comportamento concreto, como observado pela primeira vez por Petersson (1981).

Na Figura 25, os resultados numéricos da presente formulação MEC e MEF (Pettersson, 1981) usando a lei constitutiva linear (curvas verde e vermelha), e na Figura 26, utilizando a lei constitutiva bilinear (curvas azul e roxa), utilizando o valor médio da energia de fratura, com as curvas obtidas experimentalmente para o superior e menor valor da energia de fratura (G_f), de 137 Nm^{-1} (curva preta) e 115 Nm^{-1} (curva laranja).

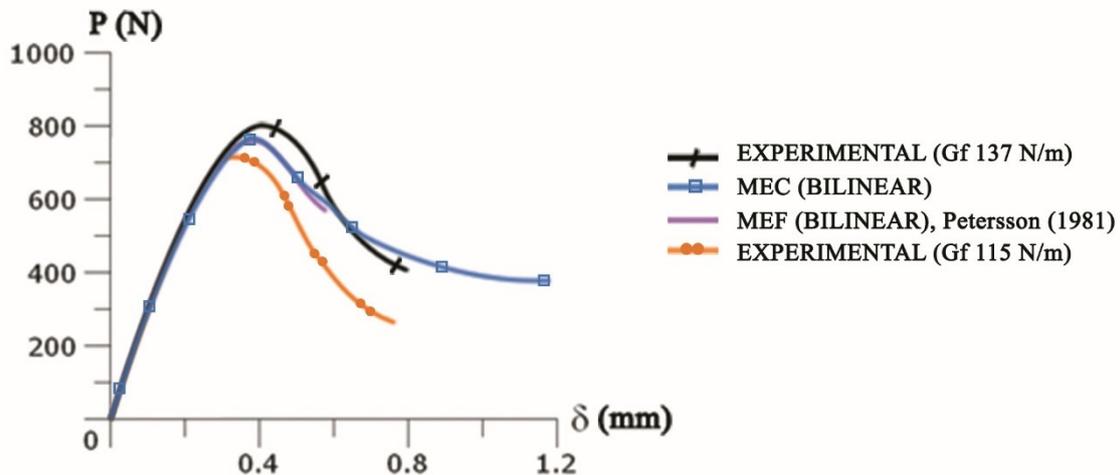
Por outro lado, análises numéricas usando uma linha reta para a lei constitutiva e com o valor médio da energia de fratura (124 Nm^{-1}) apresentaram um pico de carga (curvas marrom e azul) maior do que o obtido com a análise experimental (curva preta) com o valor superior para a energia de fratura (137 Nm^{-1}).

Figura 25. Comparação entre os resultados obtidos nesse estudo e demonstrados por Pettersson (1981).



Fonte: Extraído de Gonçalves (2015) e adaptado pela autora.

Figura 26. Comparação entre os resultados obtidos nesse estudo e demonstrados por Pettersson (1981).

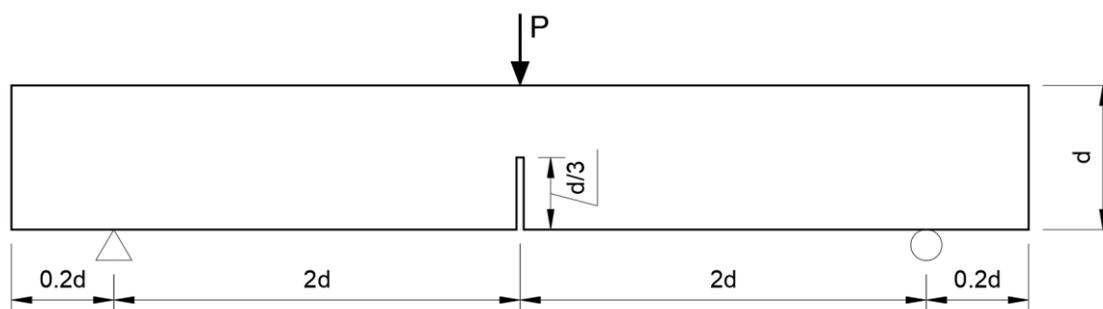


Fonte: Extraído de Gonçalves (2015) e adaptado pela autora.

6.2 EXEMPLO 02

A presente análise considerou a viga com um entalhe, sob o teste de flexão de três pontos e conforme as características geométricas apresentadas na Figura 27. O entalhe inicial em corpos de prova de concreto permite o desenvolvimento de uma zona coesiva, ou região de fraturamento devido a concentração de tensões na frente da fissura.

Figura 27. Modelo de viga utilizado sob teste de flexão de três pontos.



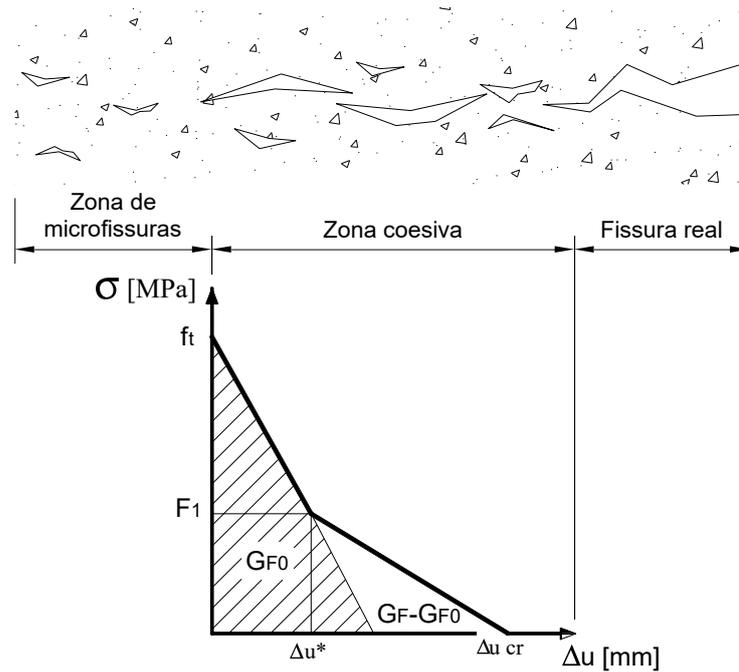
Fonte: Adaptado de Bruggi e Venini (2012).

A função linear é empregada inicialmente para estabelecer a relação tensão-abertura da fissura, descrevendo o amolecimento no material para o crescimento da fissura, em amostras de concreto simples para o modo I de abertura. A função da abertura da fissura que representa o comportamento de tração nesse caso utiliza duas linhas retas. Da mesma forma do exemplo anterior, os trechos estabelecidos na propagação de fissuras são definidos como: a) uma região de microfissuras distribuídas, b) uma região coesiva com transmissão de esforços e c) uma região de macro fissura, sem transmissão de esforços, conforme apresentado na Figura 28.

Para avaliar a precisão do modelo numérico proposto, é apresentada uma comparação entre as curvas de força e abertura da fissura utilizando resultados experimentais de vigas moldadas com diferentes misturas de concreto simples (Park et. al, 2008) e vigas de diferentes tamanhos (Roesler et. al, 2007). A comparação também apresenta resultados através de análise numérica, utilizando o método dos elementos finitos, apresentado por Bruggi e Venini (2012). Nos casos citados, os autores calcularam os parâmetros de fratura relevantes para cada um dos modelos experimentados e forneceram resultados numéricos baseados no modelo coesivo bilinear.

A Tabela 2 reporta os parâmetros mecânicos relevantes para os exemplos, apresentado por Bruggi e Venini (2012), utilizados para a lei constitutiva de duas retas, ilustrado na Figura 29.

Figura 28. Regiões a frente da fissura e parâmetros para a lei constitutiva bilinear.



Fonte: Adaptado de Park et al. (2010)

A primeira e segunda amostras (referidos por A150-80-A e A150-80-B) foram originalmente ensaiados por Park et. al (2008) com vigas de altura de 150 mm e diferentes projetos de mistura para o concreto em função dos agregados utilizados. As amostras B250-80, B150-80 e B63-80 são vigas ensaiadas com dimensão de referência igual a 250, 150 e 63 mm, respectivamente, todos compartilhando a mesma mistura de concreto.

Os autores determinaram quatro parâmetros para definir a relação entre tensão de tração e deslocamento da abertura da fissura com a lei coesiva bilinear. O parâmetro f_t é a tensão resistente a tração do material, G_F é a energia de fratura total, G_{F0} é a energia de fratura inicial ou seja, a área abaixo da primeira inclinação de reta do modelo coesivo (área hachurada na Figura 28) e Ψ é um parâmetro que define o ponto de quebra das coordenadas F_1 e Δu^* (Figura 28), conforme desenvolvimento apresentado por Bruggi e Venini (2012):

$$F_1 = \Psi \cdot f_t \quad \Delta u^* = \frac{2G_{F0}}{f_t} (1 - \Psi) \quad (6.9)$$

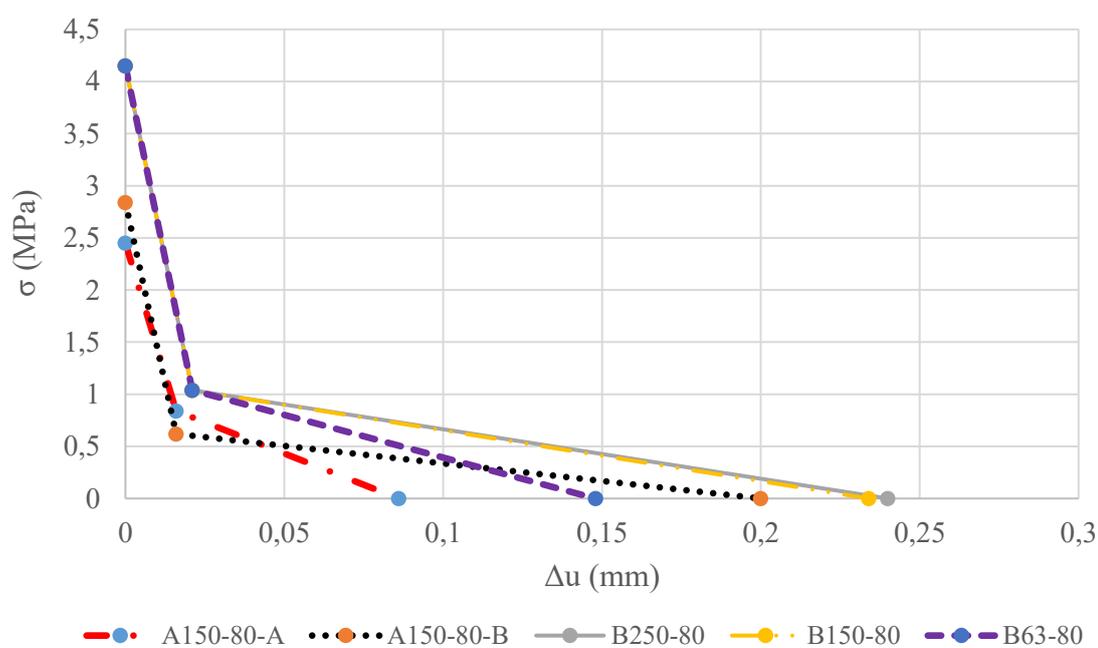
$$\Delta u_{cr} = \frac{2}{\Psi f_t} (G_F - (1 - \Psi)G_{F0}) \quad (6.10)$$

Tabela 2. Parâmetros mecânicos para concreto simples, por Bruggi e Venini (2012).

Amostra	G_F ($N.m^{-1}$)	G_{F0} ($N.m^{-1}$)	f_t (MPa)	Ψ	F_1 (MPa)	Δu_{cr} (mm)	Δu^* (mm)	E (MPa)
A150-80-A	55.5	29.6	2.45	0.341	0.84	0.086	0.016	28.0
A150-80-B	84.8	29.3	2.84	0.218	0.62	0.200	0.016	27.4
B250-80	167.0	56.6	4.15	0.250	1.04	0.240	0.021	32.0
B150-80	164.0	56.6	4.15	0.250	1.04	0.234	0.021	32.0
B63-80	119.0	56.6	4.15	0.250	1.04	0.148	0.021	32.0

Fonte: Adaptado de Bruggi e Venini (2012).

Figura 29. Parâmetros utilizados na lei constitutiva de duas retas.



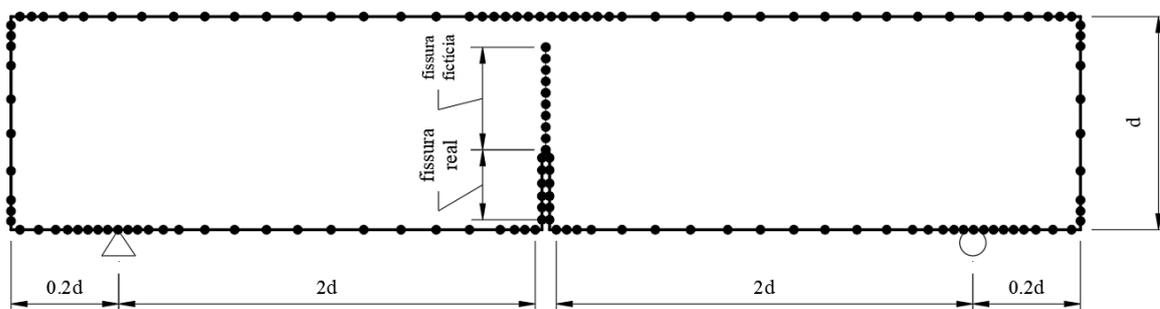
Fonte: Elaborado pela autora.

A discretização dos elementos de contorno para essa análise foi feita conforme simplificado na Figura 30, empregando 271 elementos quadráticos contínuos e descontínuos, de comprimentos variáveis.

Os resultados foram comparados com as curvas apresentadas graficamente por Bruggi e Venini (2012), com base em figuras ilustradas no referido artigo. Não se teve acesso aos valores numéricos das análises dos autores supracitados. As ilustrações foram adaptadas,

acrescidas das curvas obtidas através do método dos elementos de contorno dual e reproduzidas abaixo, nas curvas de cor laranja.

Figura 30. Viga com discretização dos elementos de contorno.



Fonte: Elaborado pela autora.

6.2.1 AMOSTRA A150-80-A

Para as vigas de concreto desse caso, utilizou-se agregado de concreto reciclado (ACR) em substituição ao agregado graúdo natural (Park et al., 2008).

A Figura 31 mostra uma comparação entre os dados experimentais medidos a partir dos ensaios utilizando a mistura A150-80-A em vigas com altura de 150 mm, juntamente com resultados obtidos por meio de simulação numérica realizada por Park et al. (2008) e simulação numérica com a abordagem de malha proposta por Bruggi e Venini (2012) para o método dos elementos finitos, referida por MEF JM.

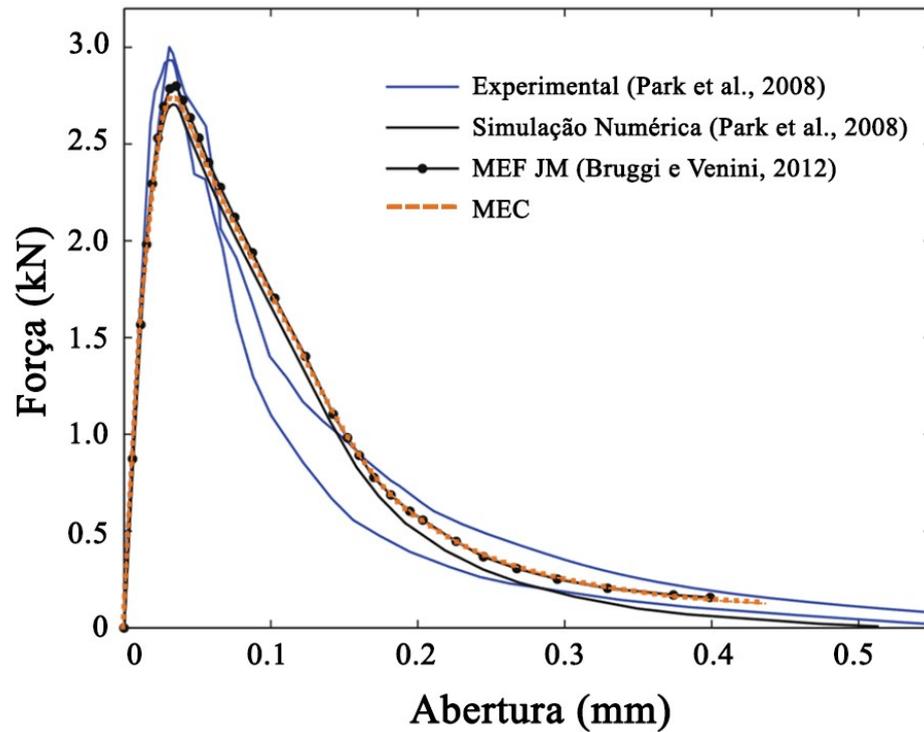
Os resultados mostram concordância do método dos elementos de contorno com os métodos adotados pelos autores citados, não apenas na região do pico de carga, como também na parte crescente da abertura de fissura.

6.2.2 AMOSTRA A150-80-B

As vigas de concreto do item B utilizam uma mistura de agregados graúdos virgens e agregados de concreto reciclado, com a mesma quantidade de cada tipo (Park et al., 2008).

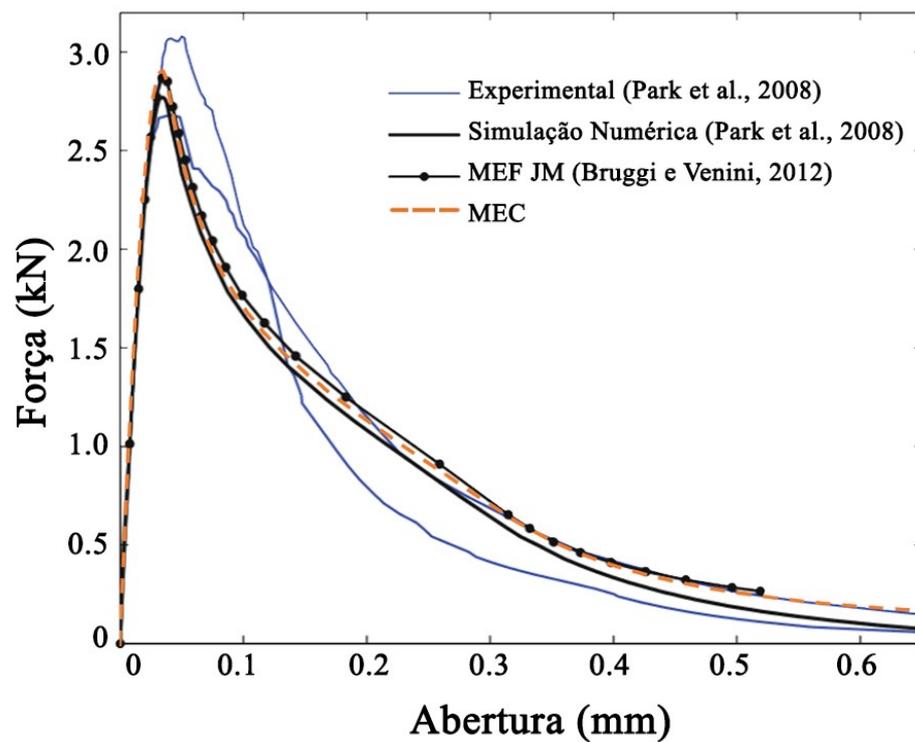
Os resultados atestam concordância com o método analisado por Bruggi e Venini (2012) e estão demonstrados na Figura 32.

Figura 31. Curva comparativa dos resultados da amostra A150-80-A.



Fonte: Extraído de Bruggi e Venini (2012) e adaptado pela autora.

Figura 32. Curva comparativa dos resultados da amostra A150-80-B.



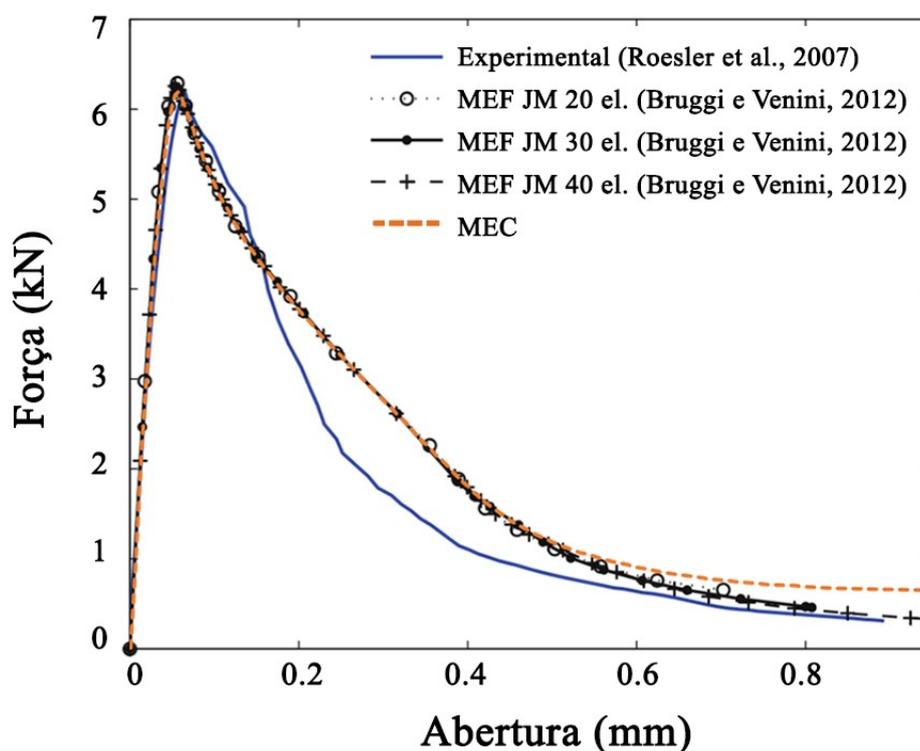
Fonte: Extraído de Bruggi e Venini (2012) e adaptado pela autora.

6.2.3 AMOSTRA B250-80

A análise apresentada inicialmente por Roesler et al. (2007) e abordado por Bruggi e Venini (2012) tem por base a realização de ensaios experimentais e simulações numéricas em vigas de concreto de diferentes alturas geométricas e mesma mistura de concreto. Os parâmetros utilizados nas relações constitutivas para a região coesiva da fissura fictícia foram obtidos por meio de ensaios à flexão em três pontos.

Na Figura 33, a carga de pico do ensaio experimental (curva azul), a qual é essencial para determinar as propriedades de fratura do material, foi comparada a carga de pico obtida através de simulações numéricas propostas por Bruggi e Venini (2007) através do método dos elementos finitos, utilizando quantidades diferentes de elementos na malha ao longo da fissura, descritos na legenda do diagrama.

Figura 33. Curva comparativa dos resultados da amostra B250-80.



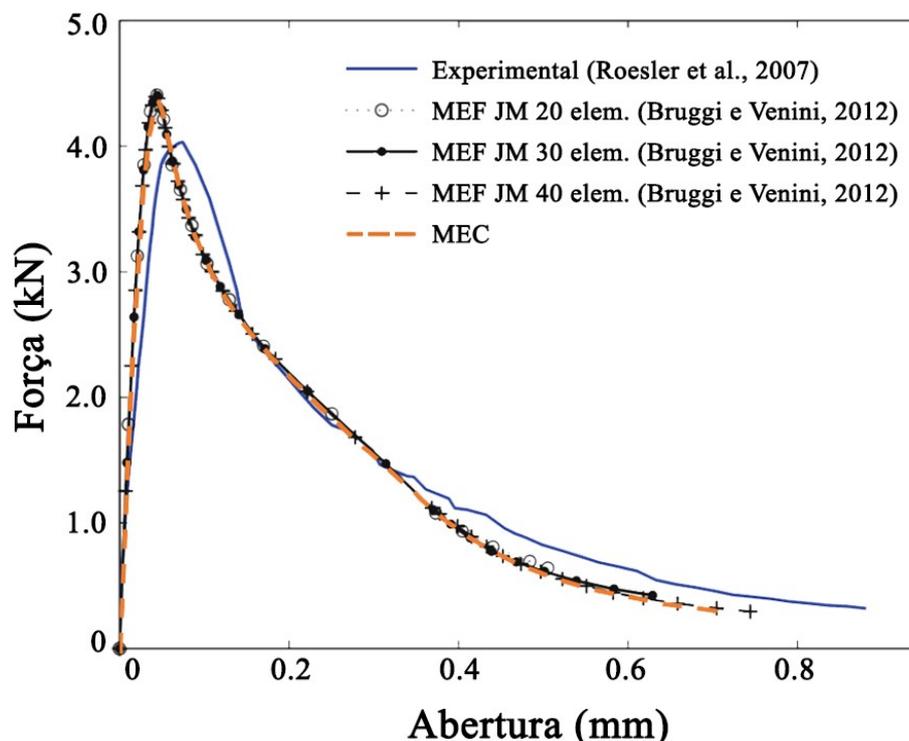
Fonte: Extraído de Bruggi e Venini (2012) e adaptado pela autora.

6.2.4 AMOSTRA B150-80

Segundo Bruggi e Venini (2012), a análise da viga de concreto com diferentes alturas deve ser apresentada para verificar se o modelo utilizado prevê o pico de carga e o

comportamento de amolecimento do concreto para múltiplas alturas de amostras. Dessa forma, é prevista a análise da viga com altura de 150 mm.

Figura 34. Curva comparativa dos resultados da amostra B150-80.



Fonte: Extraído de Bruggi e Venini (2012) e adaptado pela autora.

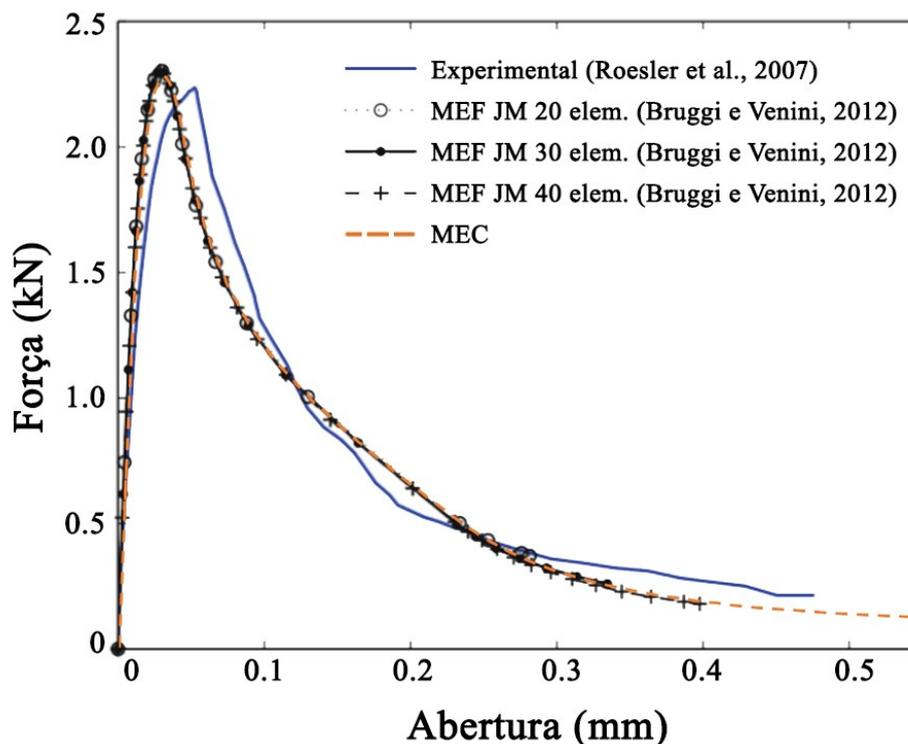
A Figura 34 apresenta as curvas de força-abertura para o caso experimental e análises numéricas, apresentados por Roesler et al. (2007) e Bruggi e Venini (2012), respectivamente. A curva obtida através do método dos elementos de contorno dual demonstra eloquência no gráfico comparado aos resultados obtidos pelos autores citados.

6.2.5 AMOSTRA B63-80

A viga B63 é definida em função da altura de 63 mm. Segundo Roesler et al. (2007), a curva força-abertura da fissura para espécimes geometricamente semelhantes pode ser prevista com base nas propriedades de fratura medidas usando teste padrão. Essa afirmação prevê o comportamento esperado da baixa carga de pico desse ensaio.

A comparação entre os valores obtidos mediante ensaio experimental e simulações numéricas é visto na Figura 35.

Figura 35. Curva comparativa dos resultados da amostra B63-80.



Fonte: Extraído de Bruggi e Venini (2012) e adaptado pela autora.

6.3 EXEMPLO 03

Os resultados obtidos nos exemplos anteriores, utilizando vigas de concreto simples com diferentes características de dosagem e variações geométricas, motivaram a continuidade das análises, direcionando as simulações numéricas para concretos de comportamento diferentes em relação a propagação de fissuras.

Dessa forma, o procedimento descrito na seção anterior é implementado para investigação numérica do efeito de propagação da fissura em concretos reforçados com fibras. A adição de fibras no concreto tem sido utilizada para alcançar melhores condições no desempenho de materiais de concreto simples, atuando como reforço na estrutura desses elementos.

A resistência do material e a largura das aberturas de fissuras, são itens que apresentam um comportamento favorável, incentivando a crescente introdução de aplicações estruturais, podendo utilizar combinações de diferentes tipos de fibras. As pesquisas, ao longo dos anos, demonstram que o modelo fictício de fissura é eficiente para descrever o

comportamento à tração do concreto reforçado com fibras (FRC) nas implementações numéricas apresentadas por Hillerborg (1976, 1980) e Carpinteri (1989).

Uma avaliação das resistências à flexão de compósitos reforçados com fibra e a capacidade em servir como ponte de transferência de tensões, acarretando mudanças no comportamento estrutural geral foram estudadas por Maalej (1994), Li (1998). Sousa e Gettu (2006) e Slowik et al. (2006) estudaram modelos coesivos lineares por partes para CRF, minimizando a diferença entre simulação numérica e resultados de testes experimentais. Os resultados obtidos nas análises com CRF são comparados com os resultados apresentados por Bruggi e Venini (2012), conforme o teste de flexão em três pontos em viga com entalhe, de acordo com as condições geométricas apresentadas na Figura 27.

Algumas simulações são realizadas, utilizando valores para altura da viga de 125 mm, 250 mm e 500 mm. Os diagramas força-abertura são usados para demonstrar os resultados em termos da força e deslocamento da abertura da boca da fissura durante a propagação.

As comparações envolvem o concreto simples e dois conjuntos de misturas reforçadas com fibras de aço, experimentadas e caracterizadas anteriormente por Meda e Plizzari (2004) e Sorelli et al. (2005). Detalhes sobre os espécimes de teste e parâmetros alcançados em relação às características das misturas reforçadas com fibras são extensamente abordados nos trabalhos citados acima.

A primeira comparação aborda o concreto simples. Na sequência, o primeiro conjunto de misturas reforçadas é analisado com o uso de (macro) fibras de aço, com uma geometria em formato de gancho, comprimento de 50 mm e resistência à tração de 1100 MPa. Nesse conjunto, dois conteúdos de fibras são analisados. O modelo referido por SFRC-1 tem uma fração de 30 kg/m³ (ou 0,38% em volume) e o modelo SFRC-2 contém o dobro da quantidade, ou seja, 60 kg/m³ (ou 0,76% em volume). Todos os casos são modelados com leis bilineares.

O segundo conjunto de comparações se refere ao uso de diferentes formas de fibras de aço. Dois tipos de elementos são considerados, uma microfibras com comprimento de 12 mm e resistência à tração de 1800 MPa (Micro – FRC) e, uma macro fibra com comprimento de 30 mm e resistência à tração de 1100 MPa (Macro – FRC). A fração volumétrica de microfibras é de 30 kg/m³ (0,38% em volume) e a mesma quantidade é adotada para o caso de macro fibras.

A Tabela 3 apresenta as características utilizadas por Bruggi e Venini (2012), denotando na Figura 36, os parâmetros utilizados para a lei constitutiva linear de duas retas.

Tabela 3. Parâmetros mecânicos para concreto simples e reforçado com fibras, por Bruggi e Venini (2012).

Amostra	G_f (Nm^{-1})	f_t (MPa)	F_1 (MPa)	Δu_{cr} (mm)	Δu^* (mm)	E (MPa)
Concreto simples	72	2.81	0.55	0.18	0.016	25.127
SFRC - 1	3,160	2.77	0.9	6.9	0.04	36.162
SFRC - 2	3,878	2.77	1.52	5.03	0.04	36.162
Micro - FRC	730	2.81	0.47	3.0	0.0175	25.127
Macro - FRC	22,520	2.81	0.9	50.0	0.014	25.127

Fonte: Adaptado de Bruggi e Venini (2012).

A discretização dos elementos foi estabelecida conforme demonstrado de forma simplificada na Figura 30, empregando elementos quadráticos contínuos e descontínuos, de tamanhos variáveis.

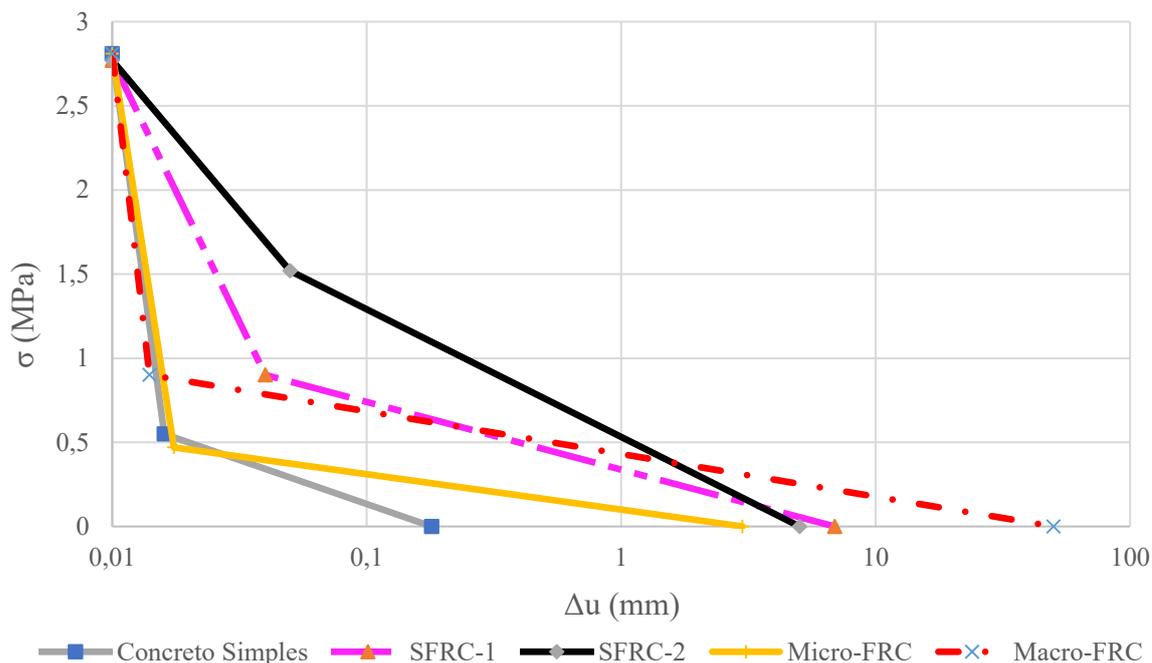
Foram utilizados 271, 511 e 627 elementos lineares de comprimentos variáveis, para os exemplos de viga com alturas de 125 mm, 250 mm e 500 mm, respectivamente. Para esse caso, aumentou-se a quantidade de elementos mantendo a proporcionalidade em que se aumentava a altura das vigas.

Adicionalmente, foi realizada uma comparação no comportamento da estrutura na hipótese de manter a mesma quantidade de elementos de contorno, de comprimentos variáveis, para todas as alturas. Assim, conforme utilizado no Exemplo 02 desse estudo e para a viga de 125 mm de altura desse caso, foi admitido 271 elementos de contorno para as demais vigas com alturas de 250 mm e 500 mm.

Conforme exemplo anterior, os resultados foram comparados graficamente com as curvas apresentadas por Bruggi e Venini (2012), com base em figuras ilustradas no referido artigo. Não se teve acesso aos valores numéricos das análises dos autores mencionados.

Nas figuras apresentadas na sequência desse capítulo, para exibição dos resultados em gráficos produzidos para essa análise através do MEC Dual, adotou-se curvas em cor azul para as vigas com altura $d=125$ mm, curvas em cor verde para vigas com altura de $d=250$ mm e cor laranja para os resultados das vigas com altura $d=500$ mm.

Figura 36. Parâmetros utilizados nas leis constitutivas de duas retas.



Fonte: Elaborado pela autora.

6.3.1 AMOSTRA DE CONCRETO SIMPLES

Essa primeira análise se concentra no concreto simples, abordando variações em função das dimensões do modelo numérico adotado. As Figuras 37, 38 e 40 demonstram graficamente a força externa P (dividida pela área da seção transversal da peça, versus a abertura, comparados aos resultados de Bruggi e Venini (2012), para os três valores de parâmetros geométricos adotados, com vigas de altura (d) de 125 mm, 250 mm e 500 mm, respectivamente. As Figuras 39 e 41 apresentam a comparação entre o Método dos Elementos de Contorno com diferentes quantidades de elementos quadráticos na discretização da viga. As abscissas mostram o deslocamento da abertura da fissura, dividido por d , enquanto a carga é reduzida pela resistência do material f_t e pela área seccional.

As três curvas confirmam o comportamento de espécimes de concreto geometricamente semelhantes e denotam que vigas de maior porte tem uma menor capacidade de carga não-dimensional e um comportamento pós-pico mais frágil em relação às vigas de menor porte.

Visando comparar o modelo utilizado no Exemplo 02, com 271 elementos de contorno, com o modelo utilizado no Exemplo 03, com 511 elementos de contorno, avaliou-se o comportamento da curva, conforme Figura 39.

Figura 37. Curva comparativa dos resultados para $d=125$ mm para o concreto simples.

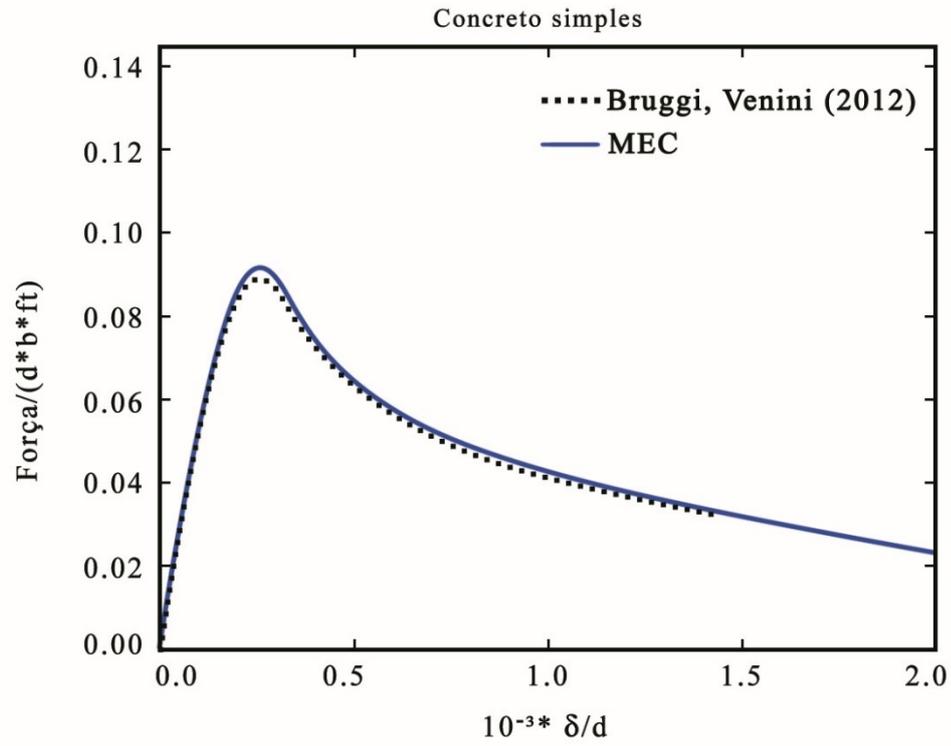


Figura 38. Curva comparativa dos resultados para $d=250$ mm para o concreto simples.

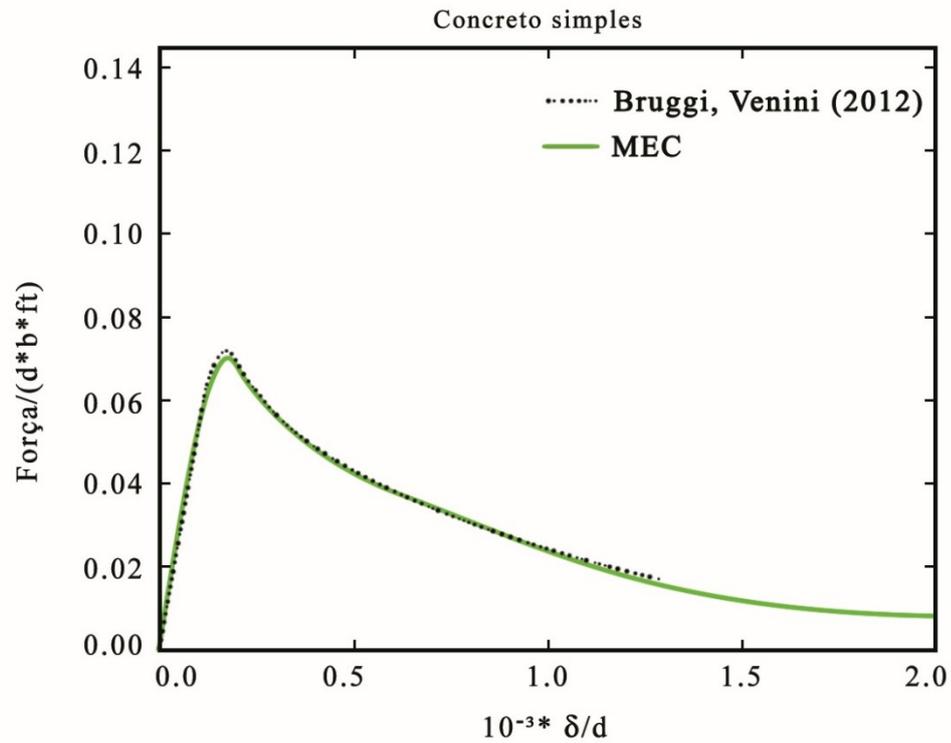


Figura 39. Curva comparativa dos resultados através do método dos elementos de contorno.

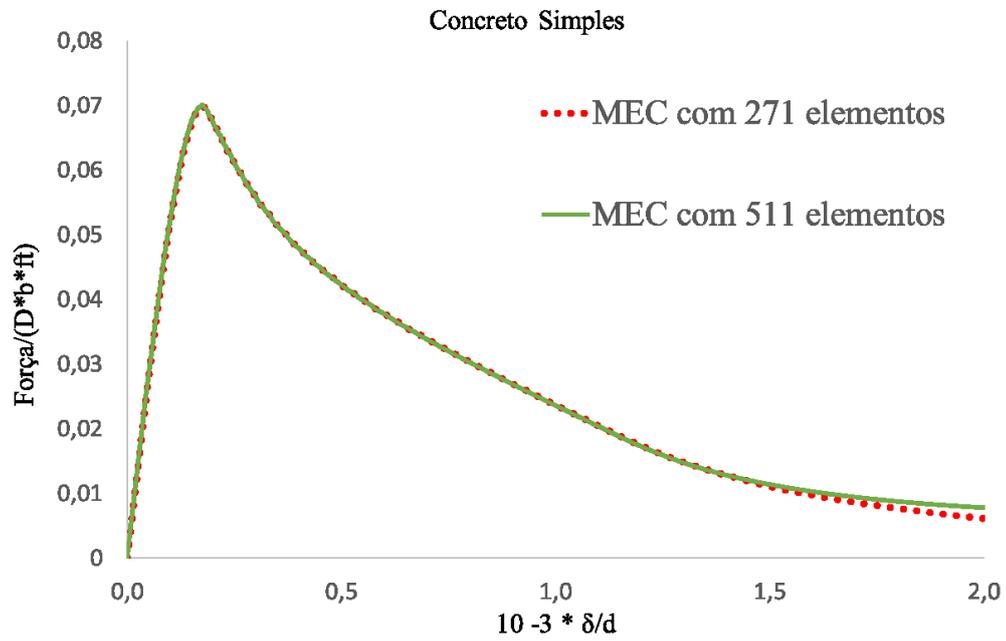


Figura 40. Curva comparativa dos resultados para $d=500$ mm para o concreto simples.

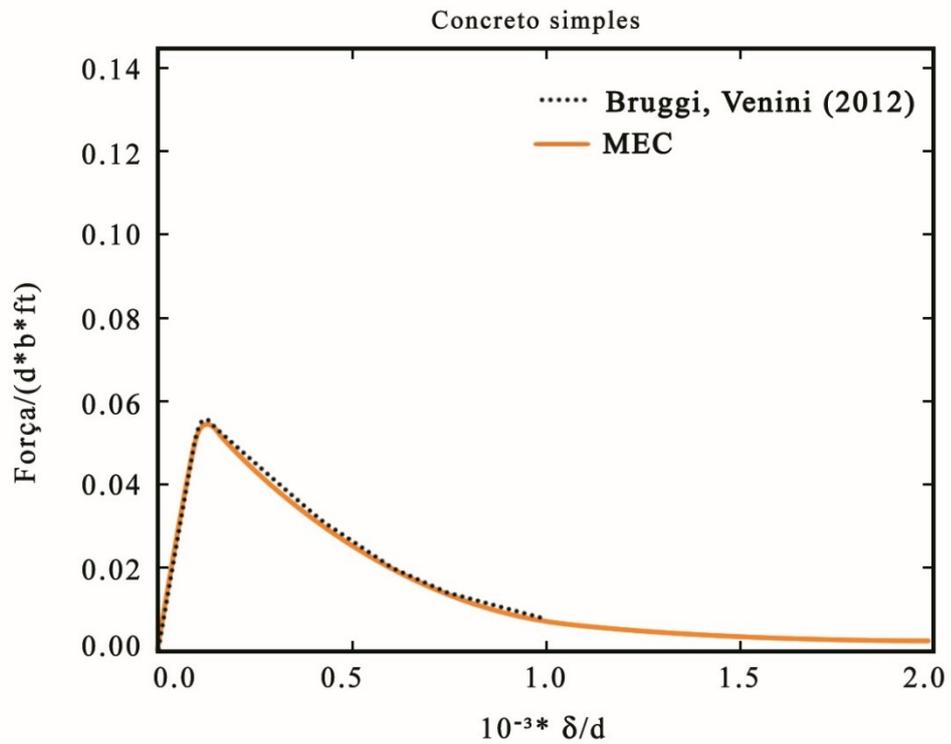
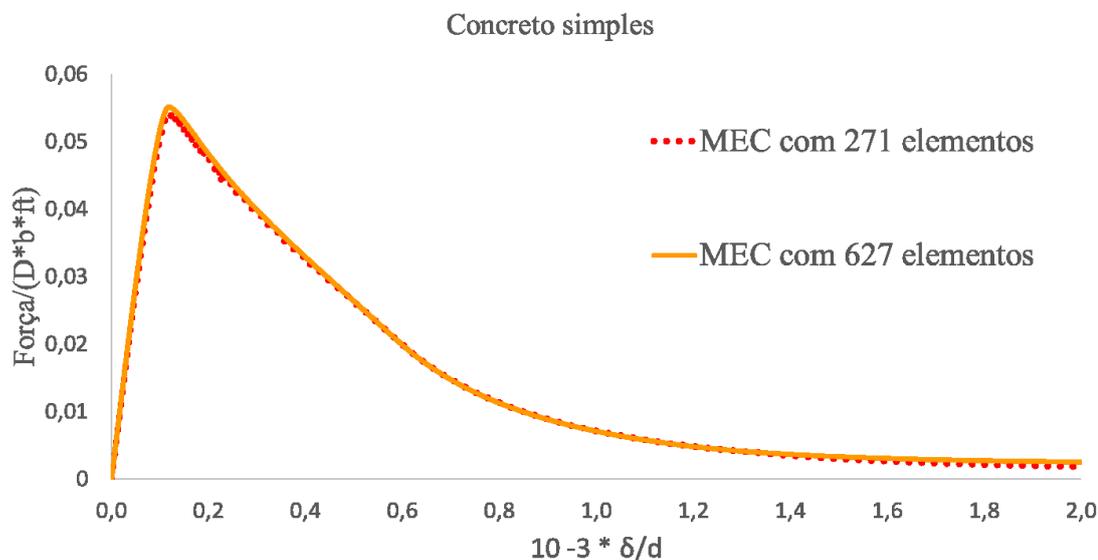


Figura 41. Curva comparativa dos resultados através do método dos elementos de contorno.



Fonte: Elaborado pela autora.

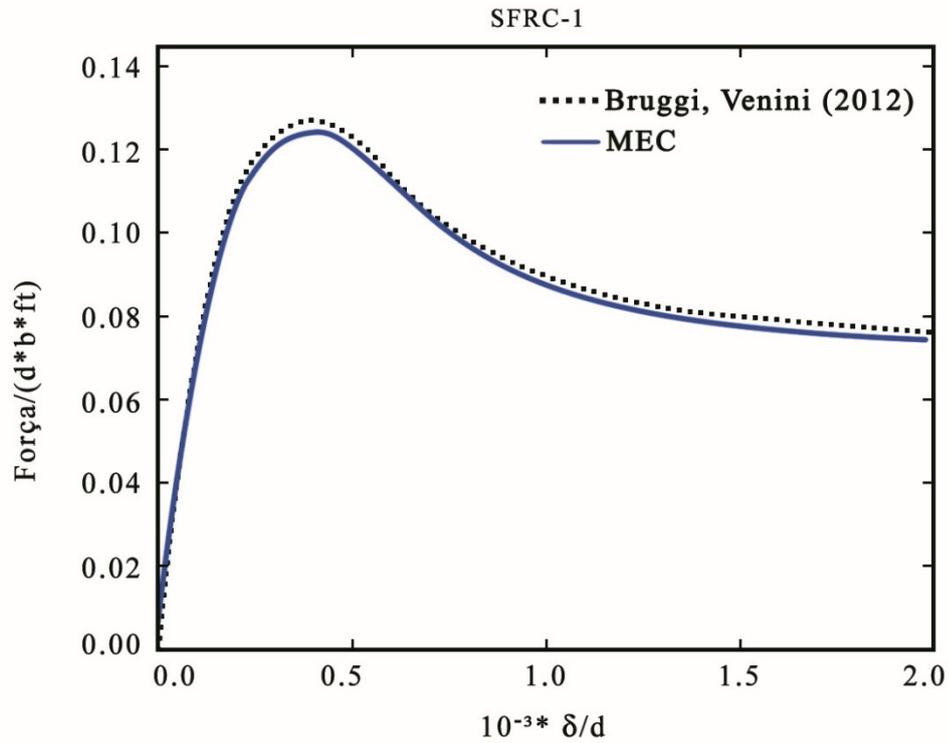
6.3.2 AMOSTRA DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS SFRC-1

Essa seção enfoca os concretos reforçados com fibras de aço, conforme as características anteriormente descritas, para os três parâmetros geométricos adotados. Os resultados mostram um comportamento pré-pico semelhante aos obtidos no concreto simples, porém, o amolecimento pós-pico aponta uma maior ductilidade para a mistura reforçada com fibras. Dentro do intervalo de deslocamentos de abertura representado nas Figuras 42, 43 e 45, as curvas aproximam-se do mesmo limite em termos de capacidade de carga e comportamento pós-pico. As Figuras 44 e 46 apresentam a comparação entre o Método dos Elementos de Contorno com diferentes quantidades de elementos quadráticos na discretização da viga.

A alta energia de fratura e o grande valor de abertura crítica permitem um desenvolvimento completo da zona coesiva em todo o comprimento da fissura, durante as etapas do processo de propagação da fissura. Isso explica o comportamento semelhante das curvas pós-pico para cada um dos modelos abaixo.

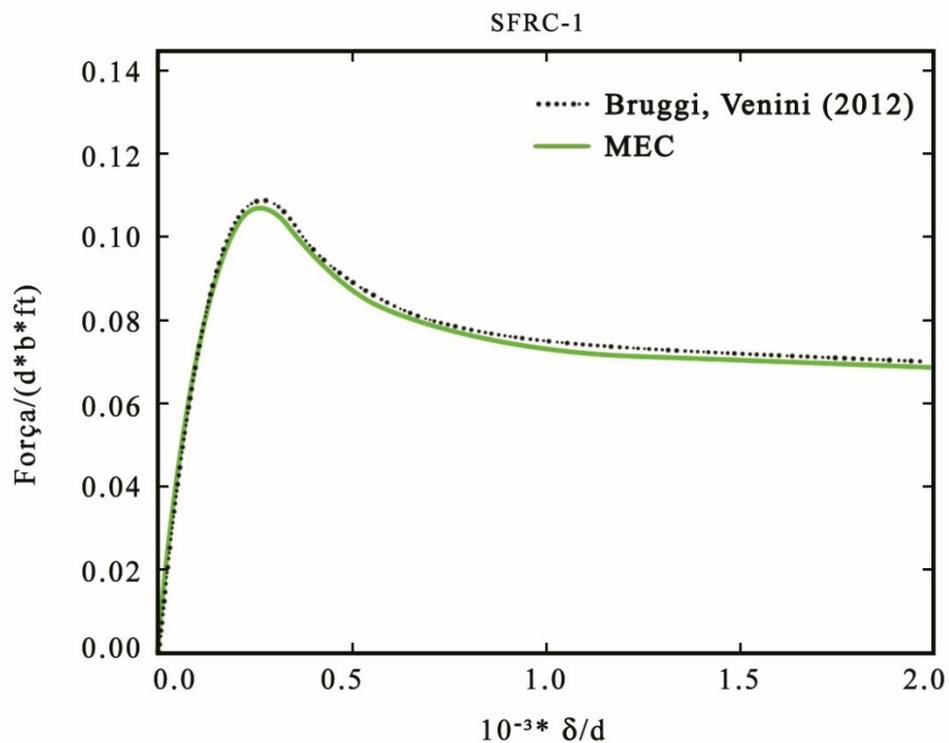
Essa breve análise permite constatar também que a introdução da mistura reforçada com fibras para o caso SFRC-1 proporciona um maior controle da propagação de fissuras após o término do pico de carga, mas não apresenta um resultado notável na fragilidade geral relacionada ao efeito de tamanho do modelo.

Figura 42. Curva comparativa dos resultados para $d=125$ mm para o concreto reforçado com fibras SFRC-1.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 43. Curva comparativa dos resultados para $d=250$ mm para o concreto reforçado com fibras SFRC-1.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 44. Curva comparativa dos resultados através do método dos elementos de contorno.

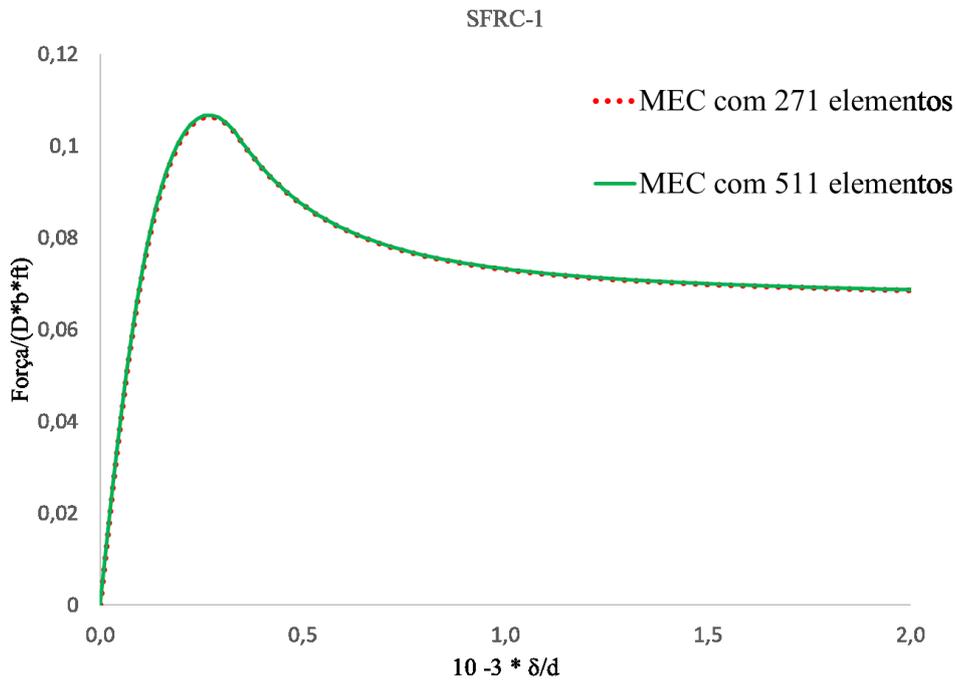


Figura 45. Curva comparativa dos resultados para $d=500$ mm para o concreto reforçado com fibras SFRC-1.

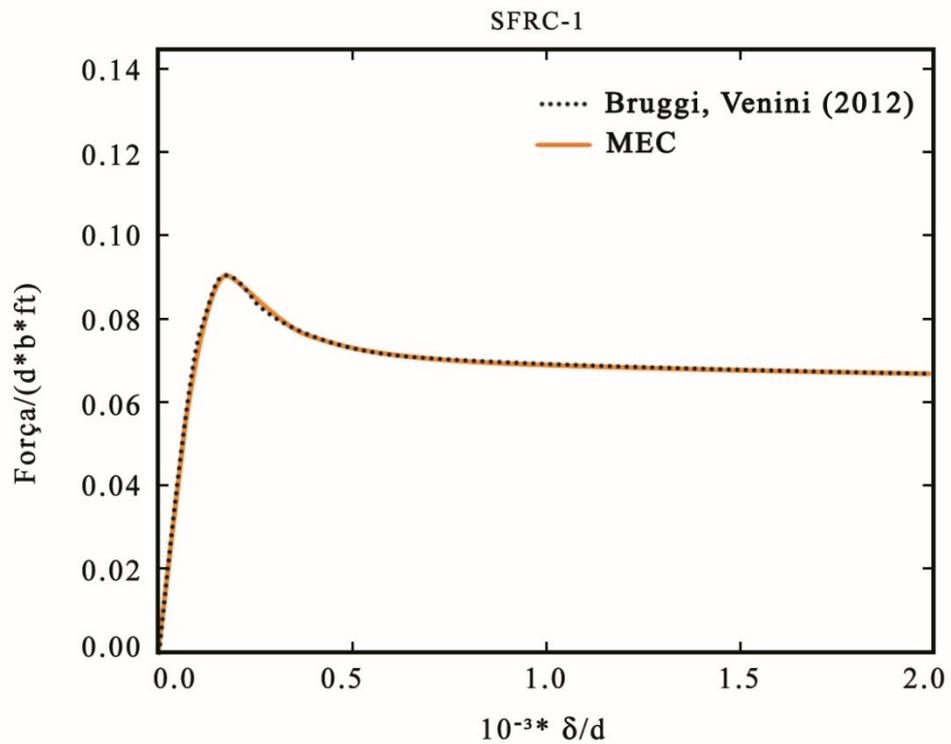
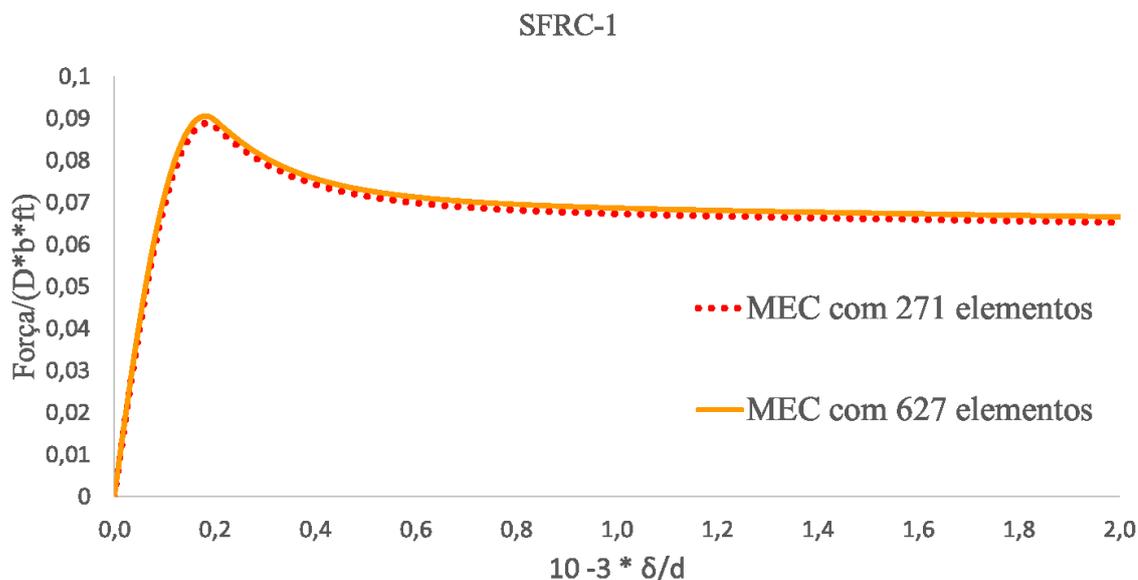


Figura 46. Curva comparativa dos resultados através do método dos elementos de contorno.



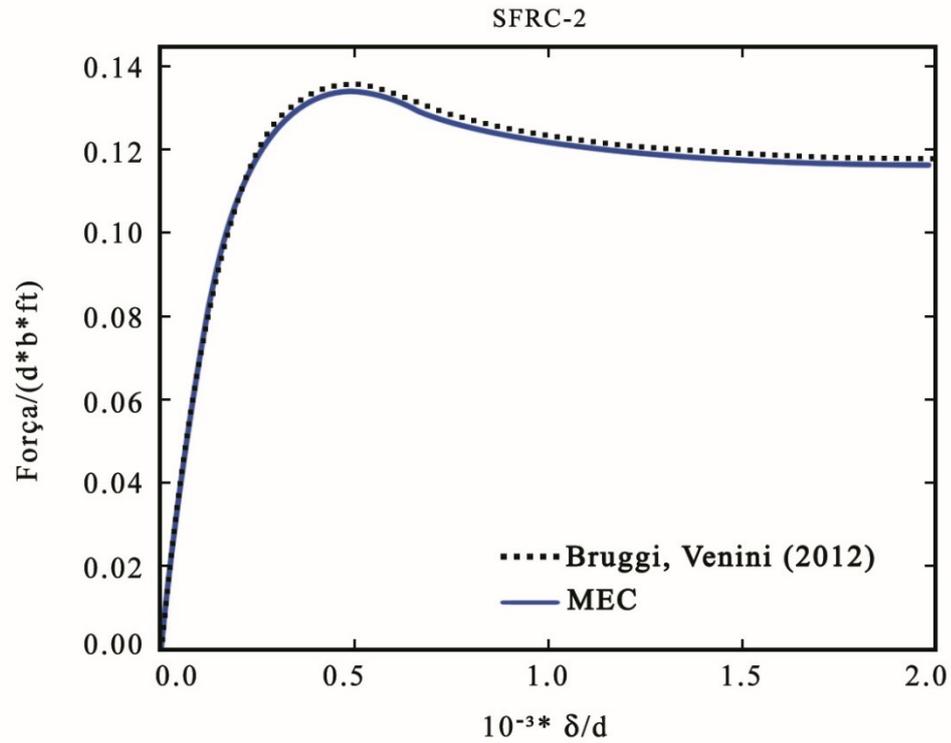
Fonte: Elaborado pela autora.

6.3.3 AMOSTRA DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS SFRC-2

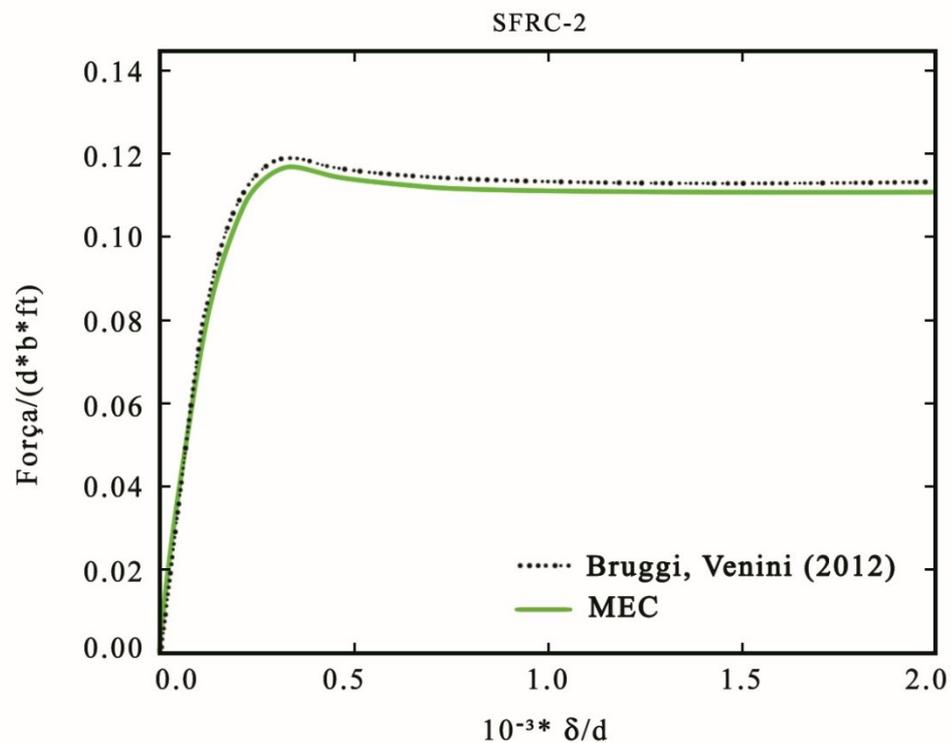
O concreto reforçado com fibras do tipo SFRC-2 apresenta características similares em relação ao item anterior, porém, os gráficos de força-abertura são caracterizados por uma posição mais elevada do ponto de pico de carga.

As Figuras 47, 48 e 50 apresentam as curvas para os três tamanhos de referência previamente considerados. As Figuras 49 e 51 apresentam a comparação entre o Método dos Elementos de Contorno com diferentes quantidades de elementos quadráticos na discretização da viga. O modelo com altura d de 125 mm tem comportamento similar às curvas correspondentes para as vigas do item SFRC-1 das Figuras 42, 43 e 45. Todas apresentam um trecho de amolecimento pós-pico que decresce em direção a um mesmo comportamento. Ao contrário disso, a curva para o caso d com 500 mm tem uma forma que encontra o pico de carga após um ramo ascendente mais longo, comparado aos demais do mesmo conjunto.

A mistura adotada em SFRC-2 tem consequências relevantes no efeito de tamanho de modelos de grande porte. Em todos os casos dessa seção, o pico de carga é atingido em valores mais altos da relação aos resultados anteriores e, comparados aos valores apresentados por Bruggi e Venini (2012), o modelo utilizado nesse estudo apresenta um comportamento similar.

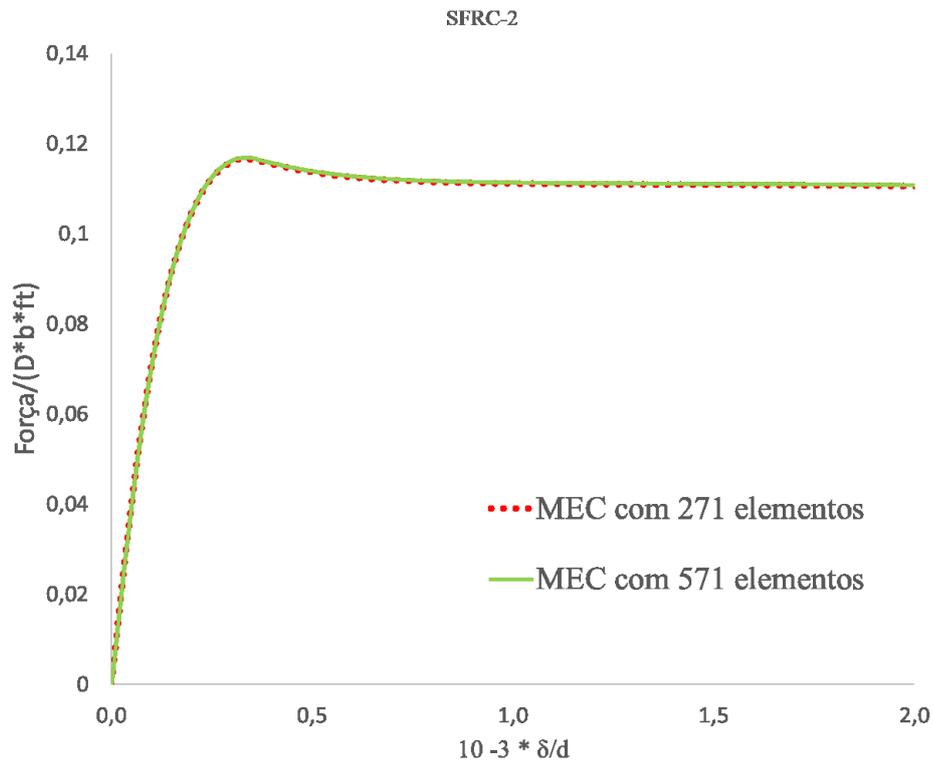
Figura 47. Curva comparativa dos resultados para $d=125$ mm para o concreto reforçado com fibras SFRC-2.

Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 48. Curva comparativa dos resultados para $d=250$ mm para o concreto reforçado com fibras SFRC-2.

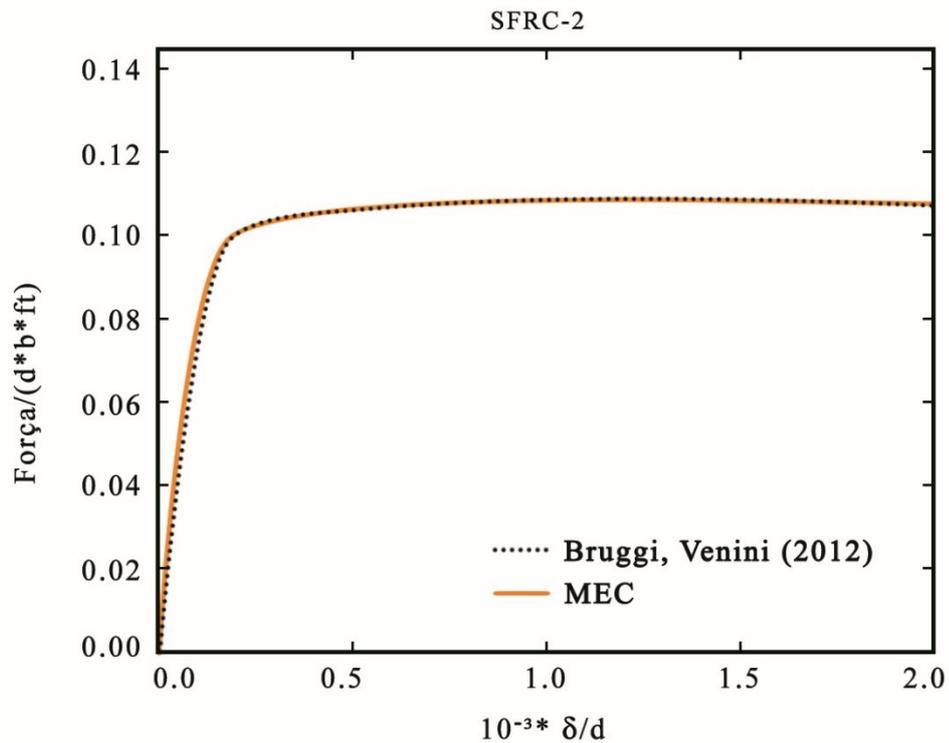
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 49. Curva comparativa dos resultados através do método dos elementos de contorno.



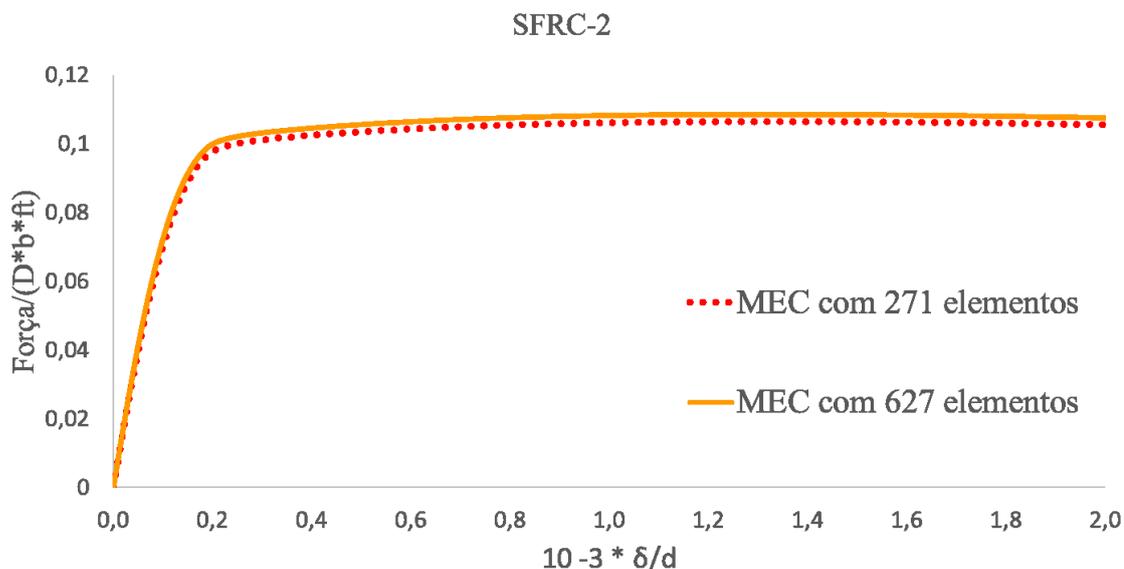
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 50. Curva comparativa dos resultados para $d=500$ mm para o concreto reforçado com fibras SFRC-2.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 51. Curva comparativa dos resultados através do método dos elementos de contorno.



Fonte: Elaborado pela autora.

6.3.4 AMOSTRA DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS MICRO-FRC

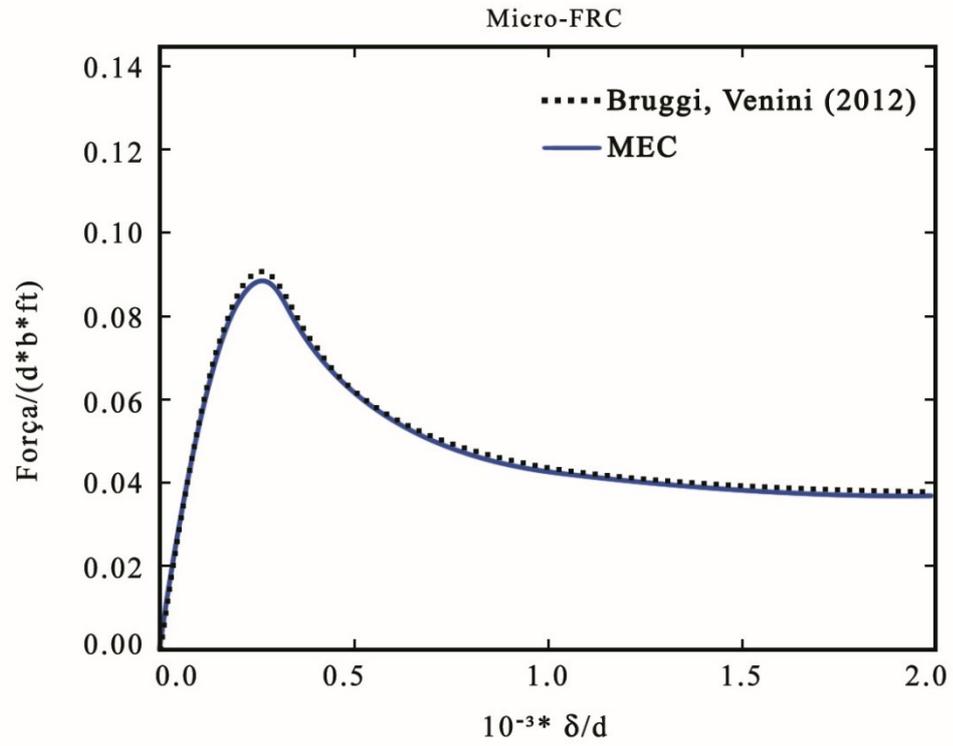
Esse item enfoca o efeito de acordo com a forma da fibra, conforme descrito anteriormente.

Através dos resultados obtidos nas Figuras 52, 53 e 55, é possível notar que a mistura referida por Micro-FRC compartilha de valores próximos aos demonstrados com o modelo de concreto simples. O concreto simples e o concreto reforçado referido por Micro-FRC também compartilham o mesmo valor de resistência f_t (Tabela 3). As Figuras 54 e 56 apresentam a comparação entre o Método dos Elementos de Contorno com diferentes quantidades de elementos quadráticos na discretização da viga.

Sendo assim, é esperado um comportamento semelhante em termos de cargas de pico, enquanto o ramo de amolecimento dúctil é conhecido através da simulação numérica.

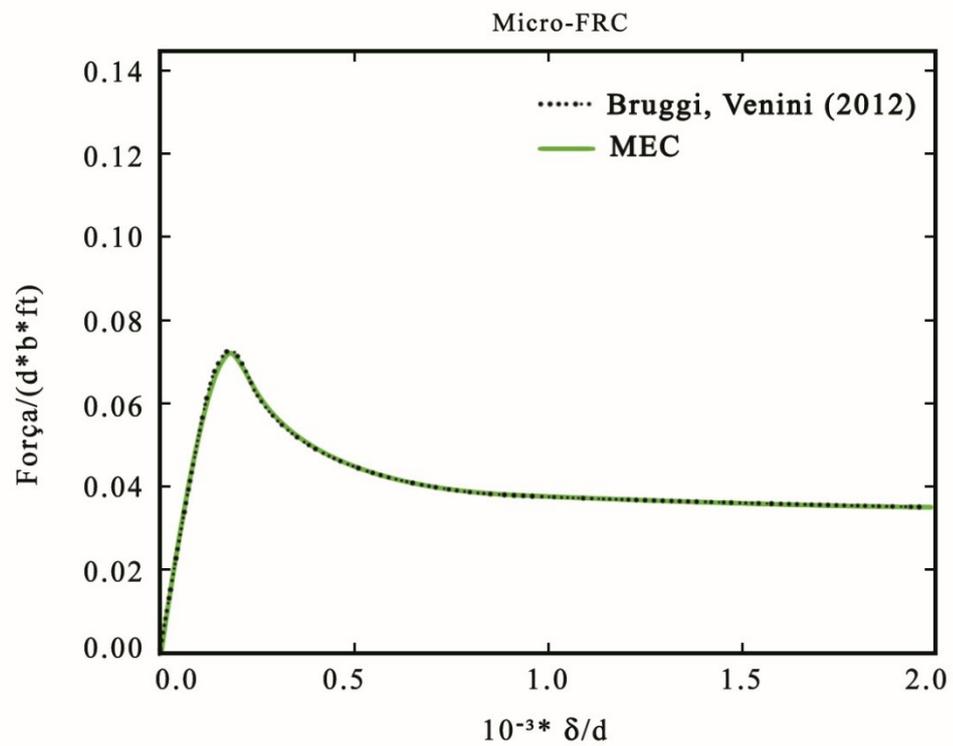
Os resultados mostrados nesse item apontam que o efeito de tamanho das vigas de concreto pode ser determinado através da definição de concretos reforçados com fibras adequadas. Os resultados das curvas de força e abertura da fissura nesse estudo atestam eloquência com os resultados comparados por Bruggi e Venini (2012).

Figura 52. Curva comparativa dos resultados para $d=125$ mm para o concreto reforçado com fibras Micro-FRC.



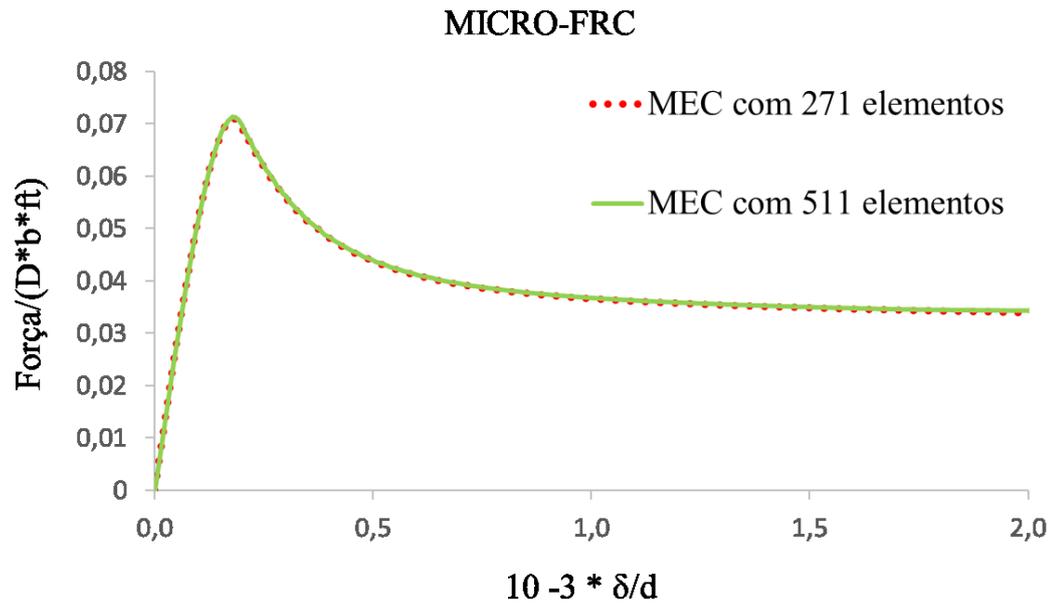
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 53. Curva comparativa dos resultados para $d=250$ mm para o concreto reforçado com fibras Micro-FRC.



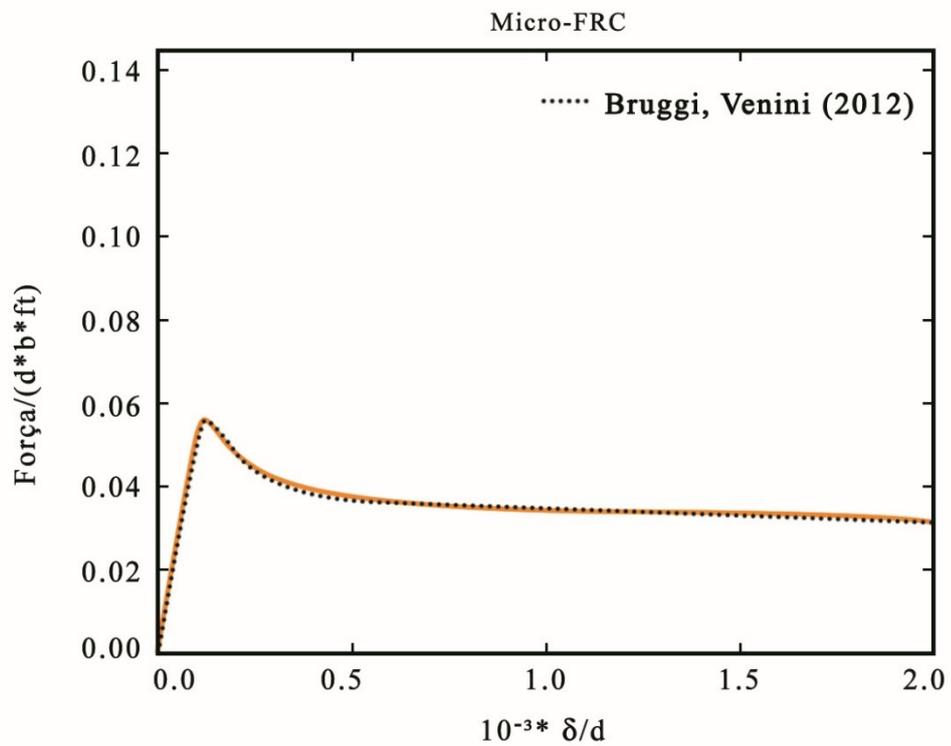
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 54. Curva comparativa dos resultados através do método dos elementos de contorno.



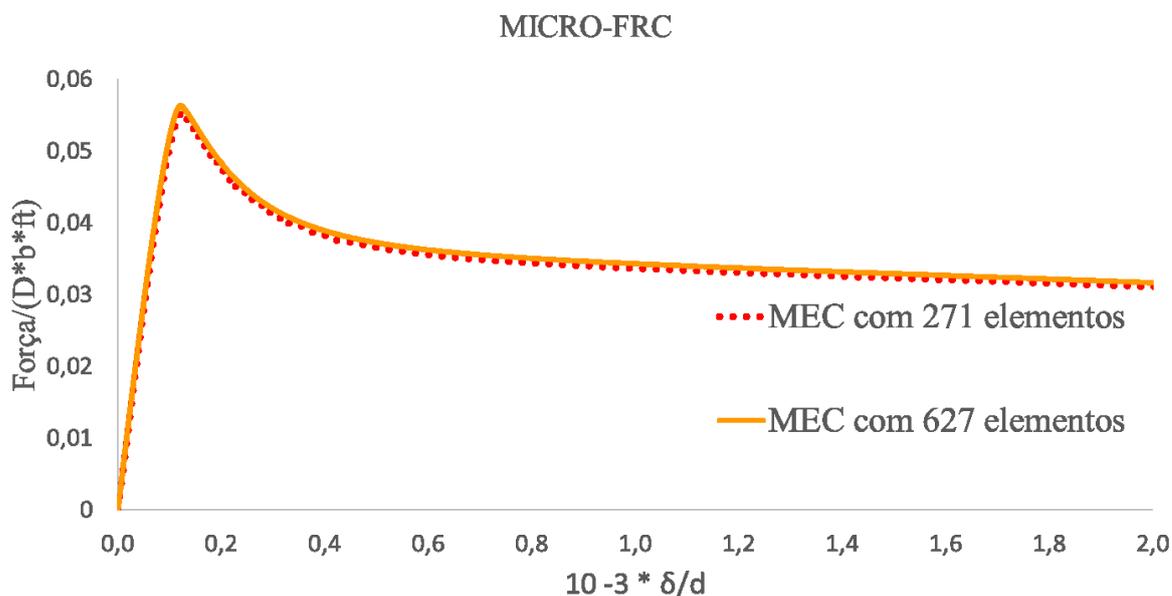
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 55. Curva comparativa dos resultados para $d=500$ mm para o concreto reforçado com fibras Micro-FRC.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 56. Curva comparativa dos resultados através do método dos elementos de contorno.



Fonte: Elaborado pela autora.

6.3.5 AMOSTRA DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS MACRO-FRC

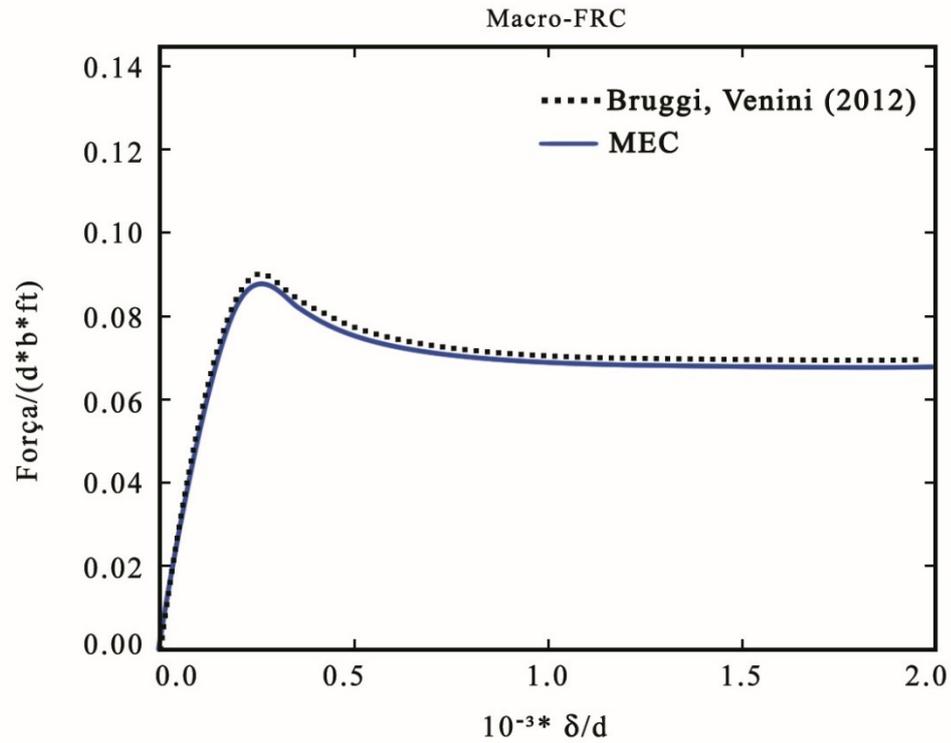
Nessa etapa do estudo, as comparações se referem a mistura referida por Macro-FRC. Novamente, o primeiro segmento da lei coesiva tem uma inclinação muito semelhante em relação ao concreto simples.

Como anteriormente, os diagramas de força-abertura de fissura são analisados nas Figuras 57, 58 e 60 para as três dimensões de referência, conforme apresentadas em Bruggi e Venini (2012). As Figuras 59e 61 apresentam a comparação entre o Método dos Elementos de Contorno com diferentes quantidades de elementos quadráticos na discretização da viga.

A Figura 57 mostra que a capacidade de carga da viga de menor altura (com d igual a 125 mm), é alcançada e na sequência, evidencia-se a ductilidade do concreto reforçado durante o processo de amolecimento. De modo inverso, a viga de maior altura, com d de 500 mm, exibe uma rápida diminuição do deslocamento da abertura da fissura regida pela primeira inclinação do gráfico.

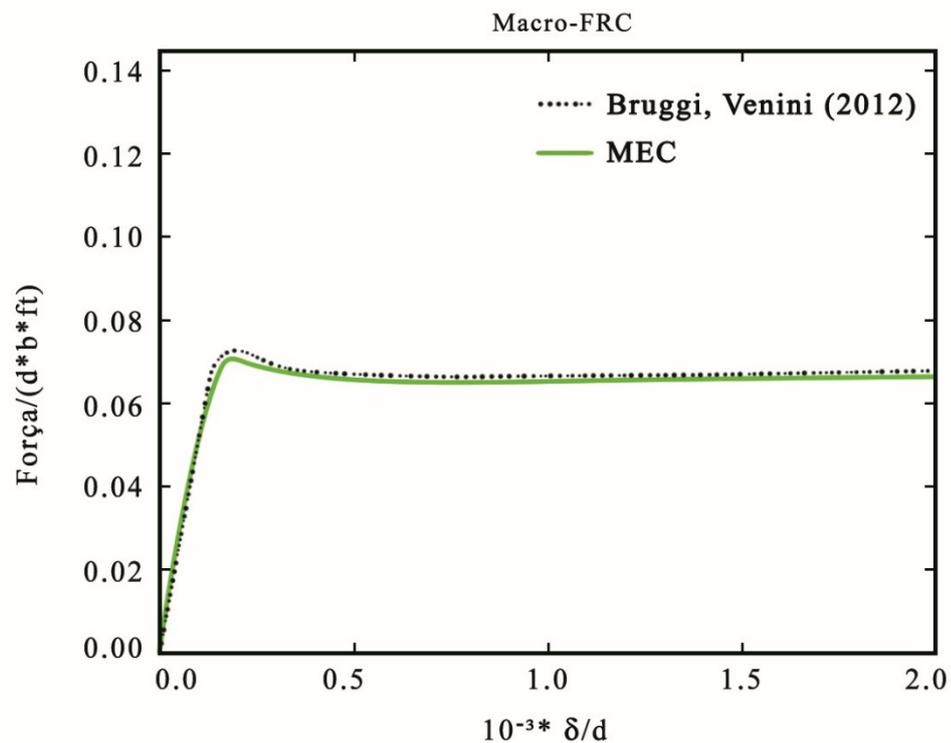
Em resumo, os resultados nesse estudo apresentam similaridade com os resultados comparados, confirmando a eficácia do método utilizado.

Figura 57. Curva comparativa dos resultados para $d=125$ mm para o concreto reforçado com fibras Macro-FRC.



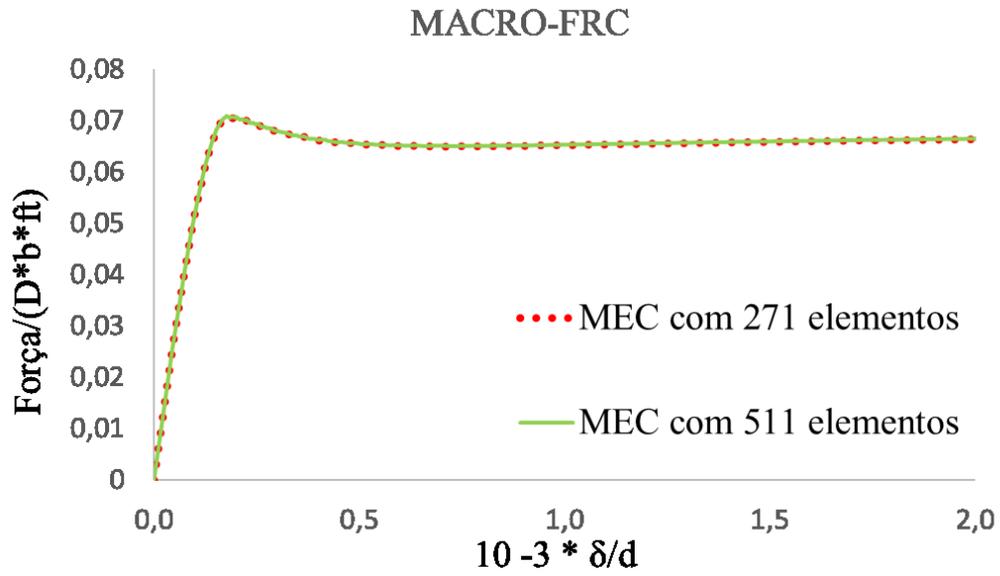
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 58. Curva comparativa dos resultados para $d=250$ mm para o concreto reforçado com fibras Macro-FRC.



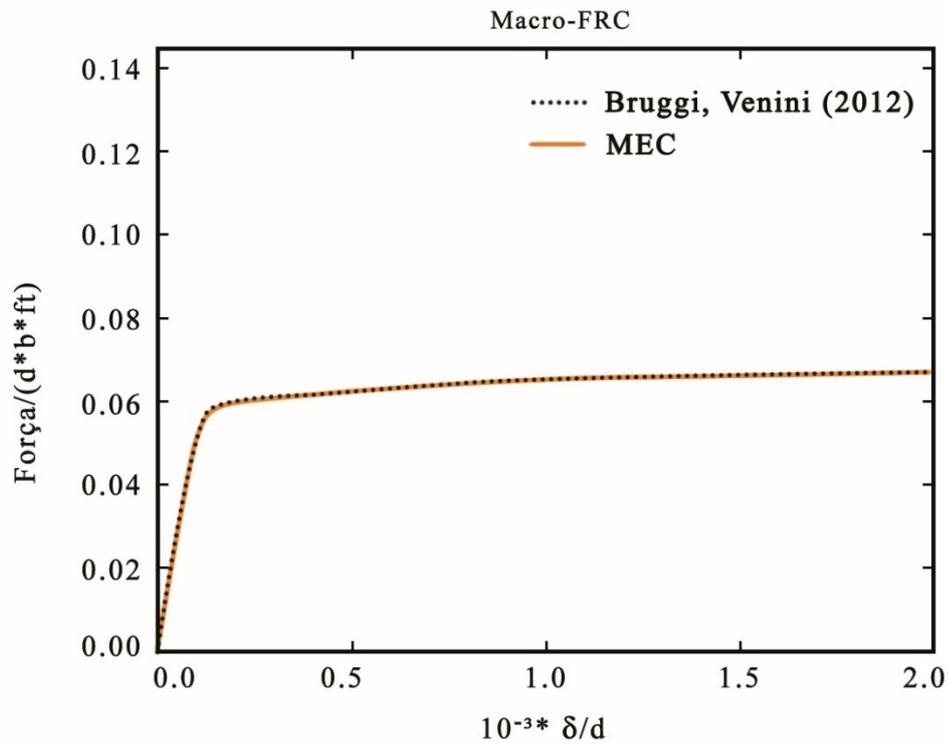
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 59. Curva comparativa dos resultados através do método dos elementos de contorno.



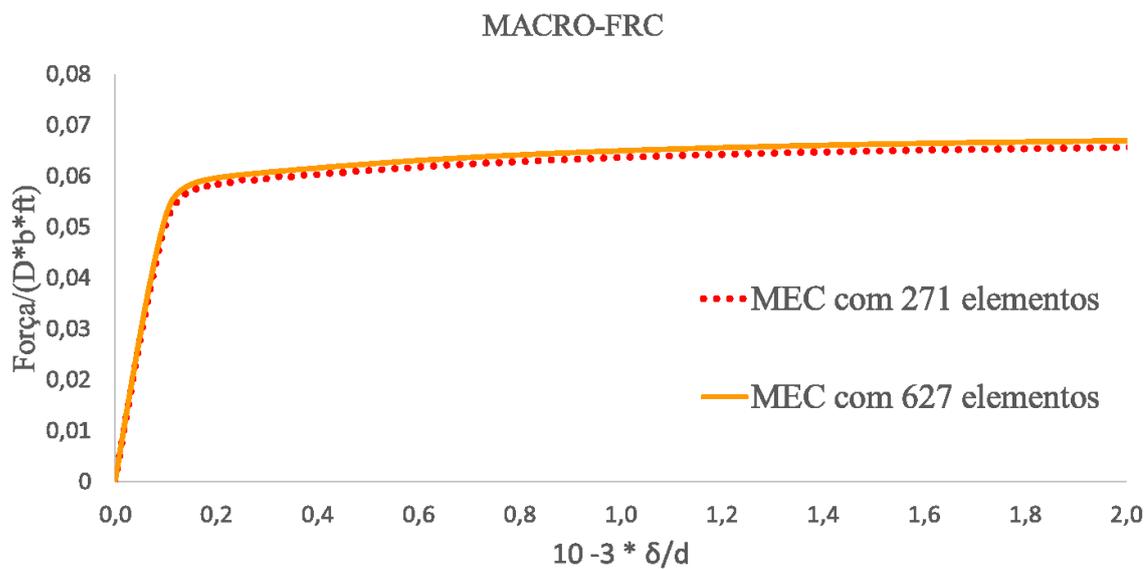
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 60. Curva comparativa dos resultados para $d=500$ mm para o concreto reforçado com fibras Macro-FRC.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 61. Curva comparativa dos resultados através do método dos elementos de contorno.



Fonte: Elaborado pela autora.

Em todos os casos apresentados acima, as curvas comparativas demonstraram que há convergência da formulação utilizada nesse estudo quando comparado a outro método apresentado na literatura.

7. CONCLUSÃO

O Método dos Elementos de Contorno Dual foi uma alternativa para o estudo da propagação de fissuras em materiais quase frágeis que apresentou estabilidade e precisão nos exemplos abordados neste trabalho.

O código computacional para análise do problema de fissura em domínios planos bidimensionais, utilizou o modelo de fissura fictícia com a utilização de elementos de contorno quadráticos. Gonçalves (2015) usou o modelo de fissura fictícia com elementos de contorno lineares e uma equação integral com termos diferentes na região coesiva. Além disso, foi introduzido à formulação o uso da lei constitutiva bilinear para representar o modelo de fissura fictícia. A presente formulação com a lei constitutiva bilinear apresentou melhor estabilidade em relação a Gonçalves (2015) e foi possível estudar modelos com concreto reforçado com fibras.

O modelo coesivo foi analisado em espécimes com entalhe, submetidos ao ensaio de flexão em três pontos e foram empregadas leis constitutivas com uma ou duas retas. Os resultados obtidos na formulação proposta foram confrontados com os resultados apresentados na literatura de referência, através do Método dos Elementos Finitos e modelos experimentais. Com isso, foi possível afirmar que o comportamento dos modelos se demonstrou consistente. Quando comparados às análises numéricas por meio de outros métodos, o método apresentado pela formulação proposta nesse estudo apresentou como vantagem a quantidade relativamente menor de elementos na discretização da viga para atingir resultados similares.

Para o Exemplo 01, a carga de pico alcançada neste estudo apresentou valores similares aos apresentados por Saleh e Aliabadi (1995), exceto no trecho pós-pico de carga durante a fase de amolecimento do material. A presença de uma carga residual menor foi mais consistente com o obtido em ensaios experimentais, na comparação com a literatura sobredita. Para o caso da curva utilizando a lei constitutiva linear, identificado por MEC (Linear), a eficiência do programa foi verificada ao comparar resultados com os apresentados por Petersson (1981). No caso em que se utilizou lei constitutiva bilinear, identificado no exemplo por MEC (Bilinear), o programa utilizado nesse estudo apresentou boa convergência quando comparado aos resultados de Petersson (1981), validando assim com êxito o aprimoramento do código computacional utilizado, o qual foi mencionado como objetivo principal desse estudo. Em todos os exemplos analisados nessa etapa, os valores principais da carga de pico se mostraram compatíveis e próximos aos valores apresentados por Petersson (1981), o qual foi precedente na realização dos ensaios e análises numéricas usados para comparação.

Os resultados alcançados nessa primeira análise motivaram a continuidade dos estudos para validação do comportamento do programa ao considerar diferentes exemplos de vigas de concreto sob ensaio de flexão, utilizando-se diferentes amostras e lei constitutiva de uma e duas retas para representar a zona coesiva na propagação da fissura.

No Exemplo 02, os resultados são comparados a dois conjuntos de amostras de vigas de concreto. A comparação dos valores obtidos através de ensaio experimental foi inicialmente apresentada por Bruggi e Venini (2012), contudo, o Método dos Elementos de Contorno Dual se mostrou eficiente quando comparado ao Método dos Elementos Finitos, abordado pelos autores mencionados. Nos dois conjuntos de amostras, a carga de pico atingida pelo MEC Dual apresentou similaridade com os valores demonstrados por Bruggi e Venini (2012) e o comportamento pós-pico apresentou conformidade com o esperado no trecho final da curva.

O Exemplo 03 foi incitado pela continuidade das análises em vigas de concreto sob diferentes comportamentos em relação a propagação de fissuras. Como o comportamento do modelo se mostrou eficiente nos casos analisados anteriormente, adotou-se como continuidade dos estudos, a análise em estruturas de concreto reforçado com fibras, o qual apresentam comportamento diferente sobre a propagação de fissuras.

O esforço computacional se mostrou variável em relação às quantidades de elementos de contorno para cada grupo de amostras adotado.

Para o caso do concreto simples, admitido como o primeiro grupo de amostras com vigas de 125 mm, 250 mm e 500 mm de altura, as curvas comparativas apresentam valores similares de carga de pico e desenvolvimento da curva no trecho pós-pico.

Para os grupos seguintes de amostras com o concreto reforçado com fibras identificado por SFRC-1, SFRC-2, Micro-FRC e Macro-FRC, os valores apresentados pelo MEC Dual se apresentam similares com pequena inferioridade na maioria dos casos. Notou-se que, para as amostras com altura de 500 mm, a carga de pico e a curva de amolecimento do material, a concordância das curvas foi mais aproximada.

Nesse exemplo, desenvolveu-se uma comparação entre valores apresentados pelo próprio MEC Dual com diferentes quantidades e dimensões dos elementos de contorno, em vigas com altura de 250 mm e 500 mm, visando analisar os resultados ao adotar 271 elementos de contorno em todos os casos das vigas com diferentes alturas. A comparação desses resultados atesta uma diferença da ordem de 1,80% nos valores obtidos com um número maior e menor

de elementos de contorno para todos os casos analisados, fato esse que está diretamente ligado ao maior ou menor esforço computacional exigido pelo método proposto.

Mediante as observações mencionadas, acredita-se que este trabalho possa ter contribuído na análise numérica do comportamento de propagação de fissuras em materiais quase frágeis usando a formulação MEC Dual.

Como propostas para trabalhos futuros, mediante o aprimoramento do programa desenvolvido, é notável investigar a que se refere às rotinas de cálculo para que permitam a análise da propagação da fissura para uma condição geral de carregamento.

Este trabalho motiva os estudos para análise da fratura em materiais coesivos considerando a influência das tensões de cisalhamento na região coesiva, além das tensões na direção normal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALIABADI, M. H.; HALL, W. S.; PHEMISTER, T. G. Taylor expansions for singular kernels in the boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 21, p.2221-2236, 1985.

ALIABADI, M. H. Exact evaluation of the integrals in two-dimensional boundary element method. Report No. EMR/10/1, Engineering Materials, Southampton University, Southampton, UK, 1985.

ALIABADI, M. H.; HALL, W. S. Two-dimensional boundary element kernel integration using series expansions. *Engineering Analysis*, v. 6, p.140-143, 1989.

ALIABADI, M. H. A new generation of boundary element methods in fracture mechanics, *International Journal of Fracture*, v. 86, p. 91-125, 1997.

ALIABADI, M. H. *The Boundary Element Method*. London: John Wiley, Vol 2, 2002.

ANDERSON, T. L. *Fracture Mechanics: Fundamentals and applications*. 2 ed. New York: CRC Press, 1995.

BANERJEE, P. K.; BUTTERFIELD, R. Boundary element method in geomechanics. In: Gudehus G, editor. *Finite elements in geomechanics*. New York: Wiley, p.70-529, 1977.

BARENBLATT, G. I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. In: *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 7, p.55-129. 1962.

BAZANT, Z. P.; KAZEMI, M. T. Determination of fracture energy, process zone length and brittleness number from size effect, with application to rock and concrete. *International Journal of Fracture*, p.111-131, 1990.

BAZANT, Z. P. Size Effect. *International Journal of Solids and Structures*, n.37, p.69-80. 2000.

BECKER, A. A. *The Boundary Element Method in Engineering: A Complete Course*, McGraw-Hill, London, UK, 1992.

BLANDFORD, E. G.; INGRAFFEA, A. R.; LIGGET, J. A. Two-dimensional stress intensity factor computations using boundary elements method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 17, p.387-404, 1981.

BONNET, M. *Boundary Integral Equations Methods for Solids and Fluids*. John Wiley & Sons, Ltd., 1999.

- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. Boundary element methods for potential problems. In: *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 1, p.372-378, 1977.
- BREBBIA, C. A. *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London; Halstead Press, New York, 1978.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements: An Introductory Course*. McGraw-Hill, 2 ed., New York, USA, 1992.
- BROEK, D. *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1987.
- BRUGGI, M.; VENINI, P. A numerical investigation on the size effect of fiber-reinforced concrete specimens in crack propagation, *Computer Mechanics*, 50, p.99–117, 2012.
- CATALANO, D. M. *Concrete fracture: A linear elastic fracture mechanics approach*. M.Sc. Dissertation, Cornell University, Ithaca, NY, 1983.
- CARLEY, M. Numerical quadratures for near-singular and near-hypersingular integrals in boundary element methods. In *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy*, v. 109, p.49-60, 2009.
- CARPINTERI, A. Post-peak and post-bifurcation analysis of cohesive crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*. V. 32; 265–78. 1989.
- CHAN, S. K.; TUBA, I. S.; WILSON, W. K. On the Finite Element Method in Linear Fracture Mechanics, *Scientific Paper 68-1D7-FMPWR-P1*, Pittsburg: Westinghouse Research Laboratories, April 1968.
- CHENG, A. H. D.; CHENG, D. T. Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. Vol. 29. 268–302, 2005.
- CHIEN, C. C.; YOU, Z. Y.; CHUNG, Y. L. Internal Stress Calculation Using an Iterative Subdivision Scheme in the boundary Element Method; *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 20, n.2, p.145-153, 1997.
- COTTERELL, B. *Fracture research in retrospect: an anniversary volume in honour of George R. Irwin's 90th birthday / edited by H.P. Rossmanith*. Rotterdam, Brookfield, VT: Balkema, 1997.
- CROUCH, S. L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 10, p.301-343, 1976.

CROUCH, S. L.; STARFIELD, A. M. Boundary Element Methods in solid mechanics George Allen and Uwin Publishers, London, 1983.

CRUSE, T. A. Numerical Solution in Three Dimensional Elastostatics. International Journal Solids and Structures. Vol. 5, p.1259-1274, 1969.

CRUSE, T. A.; VAN BUREN, W. Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. International Journal Fracture Mechanics. Vol. 7, 1971.

CRUSE, T. A Numerical Evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary integral equation method. In: The surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions. Swedlon J.L., New York, p. 153-170, 1972.

CRUSE, T. A. Application of the boundary integral equation method to three-dimensional stress analysis. J. Computer & Structures, vol. 3, p.509–527, 1973.

CRUSE, T. A. An improved boundary integral equation method for three-dimensional elastic stress analysis, Computers and Structures, vol. 4, p.741–754, 1974.

CRUSE, T. A. Mathematical foundations of the boundary integral equation method in solid mechanics. Pratt and Whitney Aircraft Group. Report AFOSR-IR-1002, 1977.

CRUSE, T. A. Two-Dimensional BIE Fracture Mechanics Analysis, Applied. Mathematical Modeling, v.2, p.287-293, 1978.

CRUSE, T. A.; AITHAL, R. Non-singular Boundary Integral Equation Implementation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 36, p.237-254, 1993.

CRUSE, T. A. Boundary Integral Equations – A personal Review, Electronic Journal of Boundary Elements, v.1, p.19-25, 2003.

CRUZ, J. P. Formulações não-singulares do Método dos Elementos de Contorno Aplicadas a Problemas Bidimensionais de Potencial. Belo Horizonte, Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais – EEUFMG; Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), 81p, 2001.

DOMINGUEZ, J. Stress analysis around anchor plates: a boundary element method application. PhD Thesis. Universidad de Sevilla, 1977.

DOMINGUEZ, J.; ARIZA, M. P.; GALLEGO, R. Flux and Traction Boundary Elements Without Hypersingular or Strongly Singular Integrals. Int. J. Num. Meth. Eng., v.48, p.111-135, 2000.

DUGDALE, D. S. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol.8, p.100-104, 1960.

FEDELINSKI, P.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. Boundary element formulations for the dynamic analysis of cracked structures, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, p.45-56, 1996.

FENNER; R. *Boundary Element Methods for Engineers: Part I*. Imperial College London, 2014.

GAO, X. W. Numerical evaluation of two-dimensional singular boundary integrals – Theory and Fortran code. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v.188(1), p.44-64, 2006.

GOMES, G.; DELGADO NETO, A. M.; WROBEL, L. C. Modelagem e visualização de trincas 2D usando equação integral de contorno Dual. In: XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 37, Brasília: Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia, 2016.

GONÇALVES, P. C.; FIGUEIREDO, L. G.; PALERMO Jr., L.; PROENÇA, S. P. B. The Dual-Boundary-Element Formulation Using the Tangential Differential Operator and Incorporating a Cohesive Zone Model for Elastostatic Cracks. *Advances in Boundary Element and Meshless Techniques XII*, pp.269-274. International conference, Brasilia, Brasil, 2011.

GONÇALVES, P. C. *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno ao Estudo da Propagação de Fissura Discreta para Modelos Coesivos*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil). Universidade Estadual de Campinas, 2015.

GRAY, L. J.; MARTHA, L. F.; INGRAFFEA, A. R. Hypersingular Integrals in Boundary Element Fracture Analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.29, p.1135-1158, 1990.

GRIFFITH, A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Vol. A 221, p.163-198, 1920.

HILLERBORG, A.; MODEER, M.; PETERSSON, P. E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, p.773–782, 1976.

HILLERBORG, A. Analysis of fracture by means of the fictitious crack model, particularly for fiber-reinforced concrete, *Int. J. Cement. Comp.*, 2(4), 177–184, 1980.

- HONG, H.; CHEN, J. Derivations of integral equations of elasticity. *Journal Engineering Mechanics ASCE*. Vol. 114, p.1028-1044, 1988.
- HUTCHINSON, J. W. Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16, p.13-31, 1968.
- INGLIS, C. E. Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners, *Transactions of the Institute of Naval Architects*, 55, p.219-241, 1913.
- IOAKIMIDIS, N. I. Remarks on the Gauss Quadrature Rule for a Class of Finite-Part Integrals. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.38, p.2433-2448, 1995.
- IRWIN, G. R. *Fracturing of Metals*, American Society for Metals. Cleveland, p.147-166, 1948.
- IRWIN, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, v. 24, p.361-364, 1957.
- JASWON, M. A. Integral equation methods in potential theory: I. *Royal Society London*. Vol. A275, p.23-32, 1963.
- JOHNSTON, P. R.; ELLIOTT, D. A generalisation of Telles' method for evaluating weakly singular boundary element integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 131, p.223-241, 2001.
- KANE, J. H. *Boundary Element Mechanics in Continuum Mechanics*. Clarkson University. Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- KANNINEN, M. F., POPELAR, C. H., *Advanced Fracture Mechanics*. New York: Oxford University, 1985.
- KAPLAN, M. F. Crack propagation and the fracture of concrete. *J. of the American Concrete Institute*, Vol. 58, pp. 591-609, 1961.
- KARAM, V. J. *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Redisser para flexão de placas*. Rio de Janeiro. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1986.
- KELLOG, O. D. *Foundations of Potential Theory*. Springer, Berlin, 1929.
- KUPRADZE, V. D. *Potential methods in theory of elasticity*. Daniel Davy, New York, 1965.
- KUTT, H. R. The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration, *Number. Math.*, v. 24, p.205-210, 1975.

- KZAM, A. K. L. Formulação Dual em Mecânica da Fratura Utilizando Elementos de Contorno Curvos de Ordem Qualquer. Dissertação de Mestrado, São Carlos, Universidade de São Paulo, 2009.
- KZAM, A. K. L.; CODA, H. B. Tratamento das integrais singulares do método dos elementos de contorno. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, v. 12, n. 54, p. 17-30, 2010.
- LACERDA, L. A., WROBEL, L.C. A general boundary element method for axisymmetric crack analysis, *International Journal of Fracture*, v.113, p.267-284, 2002.
- LACHAT, J. C. A further development of the boundary integral technique for Elastostatics. PhD Thesis, Southampton, University of Southampton, US, 1975.
- LACHAT, J. C.; WATSON, J. O. Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: A Formulation for Three-Dimensional Elastostatics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, p.991- 1005, 1976.
- LEITÃO, V., ALIABADI, M. H., ROOKE, D. P. The dual boundary formulation for elastoplastic fracture mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, p.315-333, 1995.
- LEITE, P. G. P. Simulação numérica de propagação de trinca por fadiga em modo misto (I+II) utilizando o BEMCRACKER2D. Dissertação de Mestrado, Brasília, Universidade de Brasília, 2017.
- LEONEL, E. D.; VENTURINI, W, S. Análise da propagação de fissuras em fadiga usando método dos elementos de contorno. In *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, v. 11, n. 53, p.135-139, 2009.
- LI, V.C.; LIN, Z.; MATSUMOTO, T. Influence of fiber bridging on structural size effect. *Int J Solids Struct* 35, p. 4223–4238, 1998.
- LIANG, R. Y.; LI, Y. N. Simulations of non-linear fracture process zone in cementitious material a boundary element approach, *Journal Computational Mechanics*, Vol.7, p.413-427, 1991.
- LOVE, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4 ed. New York, Dover Publications, 1944.
- MAALEJ, M.; LI, V.C. Flexural Strength of fiber cementitious composites. *J Mater Civil Eng.*, p.390–406, 1994.

- MEDA, A.; PLIZZARI, G.A. New design approach for steel fiber reinforced concrete slabs-on-ground based on fracture mechanics. *ACI Struct J* 101, p.298–303, 2004.
- MI, Y.; ALIABADI, M. H. Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. Vol.10, p.161-171, 1992.
- MIKHLIN, S. G. *Integral Equations*. Pergamon Press, Oxford, 1957.
- MILROY, J.; HINDUJA, S.; DAVEY, K. The Elastostatic Three-Dimensional Boundary Element Method. *Analytical Integration for Linear Isoparametric Triangular Elements; Applied Math. Modelling*, vol. 21, p.763-782, 1997.
- MUSKHELISVILI, N. I. *Some Basic Problem of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Holland Publishing, 1953.
- NAUS, D.; LOTT, J. L. Fracture toughness of Portland cement concrete. *Jl of ACI*, vol. 66, p.481-498, 1969.
- OLESEN, JF, Fictitious crack propagation in fiber-reinforced concrete beams, *Journal of Engineering Mechanics*, p.272-280, 2001.
- OROWAN, E. *Fracture and Strength of Solids*. Reports on Progress in Physics, XII, 1948.
- PALERMO JR., L. *Análise de peças de seção delgada com associação de placas pelo método dos elementos de contorno*. Tese Doutorado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, p.7-97, 1989.
- PALERMO JR., L. *A análise de placas e o Método dos Elementos de contorno*. Livre docência. Universidade Estadual de Campinas, 2000.
- PALERMO JR., L.; ALMEIDA, L. P. C. P. F.; GONÇALVES, P. C. The use of the tangential differential operator in the traction boundary integral equation, *Structural Durability & Health Monitoring*, vol. 2, no. 2, p.123-130, Tech Science Press, 2006.
- PALERMO JR., L.; ALMEIDA, L. P. C. P. F. On the use of the tangential differential operator in the traction boundary integral equation of the dual boundary element method for three dimensional problems, *ICCES*, vol. 7, no. 2, p.83-87, Tech Science Press, 2008.
- PARIS, P.; GOMEZ, M., ANDERSON, W. A rational analytic theory of fatigue. *Trends Eng.* 13, p.9–14, 1961.
- PARIS, P.; ERDOGAN, F. A critical analysis of crack propagation laws. *J. Basic Eng. Trans. ASME*, p.528–534, 1963

- PETERSSON, P. E. Crack growth and development of Fracture Zone in Plain Concrete and similar materials. Report N° TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund Sweden, 1981.
- PINA, H. L. G.; FERNANDES, J. L. M. Some numerical integration formulae over triangles and squares with $1/r$ singularity. *Appl. Math. Modelling*, vol. 5, p.209-211, 1981.
- POLCH, E. Z., CRUSE, T. A., HUANG, C. J. Traction BIE Solutions for Flat Cracks. *Comp. Mech.*, v.2, p.253-267, 1987.
- PORTELA, A. Dual boundary element incremental analysis of crack growth. PhD Thesis, Wessex Institute of Technology, Univ. of Portsmouth, Southampton, 1992
- PORTELA, A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. The Dual Boundary Element Method: Effective Implementation for Crack Problemas. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 33, p.1269-1257, 1992.
- PORTELA, A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. Dual boundary element incremental analysis of crack propagation. *Computers & Structures*. Vol.46, p.237-247, 1993.
- RIBEIRO, G. O. Sobre a formulação do método dos elementos de contorno para a flexão de placas usando as hipóteses de Redisser. São Carlos, Escolha de Engenharia de São Carlos, EESC/USP, Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas), 1992.
- RICE, J. R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentrations by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35, p.379-386, 1968.
- RIZZO, F. J. An integral approach to boundary value problems of classical Elastostatics. *Quarterly Applied Mathematics*. Vol.25, n.1, p.83-95, 1967.
- RIZZO, F. J.; SHIPPY, D. J. An advanced boundary integral equation method for three-dimensional thermoelasticity. *Int. J. Num. Math. Eng.*, vol. 11. p.1753-1768, 1977.
- ROSA, A. L. Estudo da Influência da Taxa de Solicitação na Resposta em Fratura Quase-Frágil. Tese (Doutorado em Engenharia Civil), Campinas, Universidade Estadual de Campinas, 2010.
- RUBBRA, A. A. Alan Arnold Griffith, 1893-1963. *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, 1964.
- SALEH, A. L., ALIABADI, M. H. Crack growth analysis in concrete using boundary element method. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 25, p.533-545, 1995.

SILVEIRA, N. P. P.; GUIMARÃES, S.; TELLES J.C.F., A numerical Green's function BEM formulation for crack growth simulation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.29, p.978-985, 2005.

SMIRNOV, V. J. Integral equations and partial differential equations. In: *A Course in higher mathematics*, v. IV, London: Addison-Wesley, 1964.

SMITH, R.N.L. From rags to riches? - development in the BEM for the solution of elastic fracture problems. *Boundary Elements X*, Computational Mechanics Publications, Southampton. Vol. 3, 155-176, 1988.

SNYDER, M. D.; CRUSE, T.A. Boundary-integral analysis of anisotropic cracked plates, *International Journal of Fracture*, v.11, p.315-328, 1975.

SOARES JR., R.A. Aplicação do método dos elementos de contorno na análise de instabilidade de placas perfuradas. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade Estadual de Campinas, 2015.

SORELLI, L.G.; MEDA, A.; PLIZZARI, G.A. Bending and uniaxial tensile tests on concrete reinforced with hybrid steel fibers. *J Mater Civil Eng.* p.519–527. 2005.

SLOWIK, V.; VILLMANN, B.; BRETSCHEIDER, N.; VILLMANN, T. Computational aspects of inverse analyses for determining softening curves of concrete, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (52). 7223–7236, 2006.

SOUSA, J. L. A. O.; GETTU, R. Determining the Tensile Stress-Crack Opening Curve of Concrete by Inverse Analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, p.141-148, 2006.

SOUZA, R. A. de. Análise de Fraturamento em Estruturas de Concreto utilizando programas de análise estrutural. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade Estadual de Campinas, 2001.

SURENDRA, P. S.; OUYANG, C. Failure of concrete: Fracture mechanics approach. *Anales de Mecanica de la Fractura*. Vol. 9, p.352-375, 1992.

SYMM, G. T. Integral equation methods in potential theory – II. *Proc. Royal Society London*. Vol.A275, p.33-46, 1963.

TELLES, J. C. F. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 24, p.959-973, 1987.

TELLES, J. F. C.; CASTOR, G. S.; GUIMARÃES, S. A numerical Green's function approach for boundary elements applied to fracture mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, p.3259-3274, 1995.

TELLES, J. F. C.; OLIVEIRA, R. Third degree polynomial transformation for boundary element integrals. Further improvements, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 13, p.135-141, 1994.

TIMOSHENKO, S. P. *History of the Strength of Materials*. McGraw-Hill: New York, 1953.

VENTURINI, W. S.; PAIVA, J. B. Boundary element for plate bending analysis. *Engineering analysis with boundary elements*, v. 11, n. 1, p.1-8, 1993.

VERA-TUDELA, C. A. R. *Formulações alternativas do MEC para problemas elastodinâmicos de mecânica da fratura com o uso da função de Green numérica*. Tese de Doutorado, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2003.

WATSON, J. O. Hermitian cubic end singular elements for plane strain. In: Banerjee P K & Watson J O. *Developments in boundary element methods 4*. Elsevier Applied Science Publ. 1-28, 1986.

WELLS, A. A. Unstable crack propagation in metals: cleavage and fast fracture. *Proceedings of the Crack Propagation Symposium*, vol. 1, p.210-230, Cranfield, UK, 1961.

WESTERGAARD, H. M. Bearing Pressures and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 6, 49-53, 1939.

WILSON, R. B.; CRUSE, T. A. Efficient implementation of anisotropic three-dimensional boundary integral equation stress analysis. *Int. J. for Numerical Methods in Eng.*, vol. 12, p.1383-1397, 1978.

ZEHNDER, A. T. *Fracture Mechanics*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, v. 62. Springer Netherlands, Ithaca, 2012.