

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO

**IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS ESTRUTURAIS COM
EMPREGO DE ANÁLISE INVERSA**

Ms. Luiz Carlos de Almeida

**Campinas – SP
Dezembro – 2006**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO

**IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS ESTRUTURAIS COM
EMPREGO DE ANÁLISE INVERSA**

Ms. Luiz Carlos de Almeida

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa

Tese de Doutorado apresentada Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil, na área de concentração em Estruturas.

Campinas – SP

Dezembro – 2006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

AL64i Almeida, Luiz Carlos de
Identificação de parâmetros estruturais com
emprego de análise inversa / Luiz Carlos de
Almeida.--Campinas, SP: [s.n.], 2006.

Orientador: José Luiz Antunes de Oliveira e
Sousa

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Civil,
Arquitetura e Urbanismo.

1. Metodo dos elementos finitos. 2. Materiais
deformação. 3. Simulação (Computadores). 4.
Concreto – Propriedades mecanicas. I. Sousa,
José Luiz Antunes de Oliveira e. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia
Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Titulo em Inglês: Identification of structural parameters using inverse
analysis

Palavras-chave em Inglês: Parameter identification, Inverse analysis, Finite
elements, Creep models, Monitoring

Área de concentração: Engenharia de Estruturas

Titulação: Doutor em Engenharia Civil

Banca examinadora: Leandro Palermo Junior, Vinicius Fernando Arcaro,
Isaías Vizotto, Athail Rangel Pulino Filho e Túlio
Nogueira Bittencourt

Data da defesa: 11/12/2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

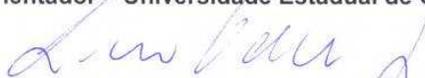
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO

**IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS ESTRUTURAIS COM
EMPREGO DE ANÁLISE INVERSA**

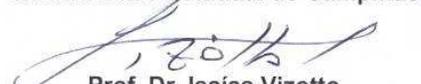
Ms. Luiz Carlos de Almeida

Tese de Doutorado aprovada pela Banca Examinadora constituída por:

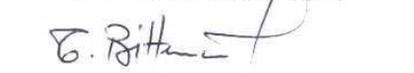
Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa
Orientador – Universidade Estadual de Campinas


Prof. Dr. Leandro Palermo Junior
Universidade Estadual de Campinas


Prof. Dr. Vinicius Fernando Arcaro
Universidade Estadual de Campinas


Prof. Dr. Isaiás Vizotto
Universidade Estadual de Campinas


Prof. Dr. Athail Rangel Pulino Filho
Universidade de Brasília


Prof. Dr. Túlio Nogueira Bittencourt
Universidade de São Paulo

Campinas, 11 de Dezembro de 2006.

Aos meus pais (em memória), pelas oportunidades oferecidas.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, agradeço por colocar tantas pessoas iluminadas e queridas em meu caminho.

Aos meus familiares, pela compreensão da ausência de seu convívio.

Ao amigo Vinicius Fernando Arcaro, pelas contribuições e incentivos para a realização deste trabalho.

A amiga Maria Teresa Françoso, pelo constante apoio e horas dedicadas à discussão das diversas etapas de realização deste trabalho.

Ao meu filho Carlos Eduardo, que muito colaborou no desenvolvimento dos programas computacionais.

Ao amigo e orientador José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa pelo incentivo na busca de novos desafios para realização do trabalho e pela paciência na orientação.

Ao Professor Joaquim de Azevedo Figueiras pela oportunidade de estágio na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto – Portugal.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a finalização deste trabalho.

RESUMO

ALMEIDA, L.C., **Identificação de parâmetros estruturais com emprego de análise inversa**, Campinas, Brasil: UNICAMP, FEC, 2006. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, 2006. 184p.

Esse trabalho pretende contribuir para a interpretação do comportamento de estruturas de concreto a partir da utilização de técnicas de análise inversa. Estas técnicas permitem a determinação consistente dos diversos parâmetros envolvidos em seus modelos matemáticos, tomando-se por base a observação de estruturas de concreto. A utilização desses procedimentos permite a identificação de parâmetros envolvidos no cálculo de deformações e deslocamentos das estruturas de concreto armado. Para este fim foi desenvolvido um programa computacional para identificação desses parâmetros integrando a análise via elementos finitos e a minimização da função erro estabelecida entre as variáveis calculadas e as medidas. O programa foi testado com dados de ensaios e modelos teóricos, para materiais com comportamento elástico linear isotrópico ou ortotrópico, embora o método de estimativas de parâmetros, de forma iterativa e incremental, seja também aplicável a problemas com não-linearidades. Neste trabalho o método é aplicado também para ajustes de modelos de fluência em concreto. Apresentam-se, por último, a relevância do sistema desenvolvido, bem como algumas perspectivas para complementações futuras.

Palavras-Chave: identificação de parâmetros, análise inversa, elementos finitos; modelos de fluência do concreto; monitoração.

ABSTRACT

ALMEIDA, L.C., **identification of structural parameters using inverse analysis**, Campinas, Brasil: UNICAMP, FEC, 2006. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, 2006. 184p.

This work is intended to contribute to the interpretation of concrete structures using inverse analysis techniques. These techniques allow a consistent determination of the several parameters involved in the mathematical models, starting from the observation of concrete structures. The use of these procedures led to the identification of the parameters involved in the computation of strains and displacements of reinforced concrete structures. For this, a computational program has been developed to identify the parameters, integrating the finite element analysis and the minimization of the error between computed and observed variables. The program has been validated with test data and theoretical models for linear elastic, isotropic or anisotropic materials, although the parameter estimation method is applicable also to nonlinear problems. In this work, the method is applied also to fit creep models for concrete. The main conclusions and perspectives for future development are presented.

Keywords: parameter identification, inverse analysis, finite elements, creep models, monitoring.

ÍNDICE

<u>CAPÍTULO 1</u>	<u>INTRODUÇÃO</u>	5
1.1	CONSIDERAÇÕES GERAIS	6
1.2	IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS E PROBLEMAS INVERSOS	10
1.3	OBJETIVOS	13
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	14
<u>CAPÍTULO 2</u>	<u>CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS</u>	17
2.1	LEI DE HOOKE GENERALIZADA	18
2.1.1	INTRODUÇÃO	18
2.1.2	MATERIAL SEM PLANO DE SIMETRIA ELÁSTICA	18
2.1.3	MATERIAL COM UM PLANO DE SIMETRIA ELÁSTICA	21
2.1.4	MATERIAL COM TRÊS PLANOS DE SIMETRIA ELÁSTICA – MATERIAL ORTOTRÓPICO	22
2.1.5	MATERIAL COM UM PLANO DE ISOTROPIA	24
2.1.6	MATERIAL ISOTRÓPICO	27
2.1.7	DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES ELÁSTICAS PARA UM NOVO SISTEMA DE COORDENADAS	28
2.2	ESTADOS PLANOS DE TENSÃO E DE DEFORMAÇÃO	31
2.2.1	INTRODUÇÃO	31
2.2.2	MATRIZ DOS COEFICIENTES ELÁSTICOS PARA O ESTADO PLANO DE TENSÃO	32
2.2.3	MATRIZ DOS COEFICIENTES ELÁSTICOS PARA O ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO	33
2.2.4	MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DE COMPONENTES DA DEFORMAÇÃO PARA OS ESTADOS PLANOS	35
2.3	FLUÊNCIA DO CONCRETO	37
2.3.1	INTRODUÇÃO	37
2.3.2	DEFINIÇÕES	38
2.3.3	MODELOS DE FLUÊNCIA	39
2.3.4	MODELOS DE PREVISÃO DE FLUÊNCIA	43
2.3.5	MODELO DE ATUALIZAÇÃO DA FLUÊNCIA COM BASE EM ENSAIOS DE CURTA DURAÇÃO	53

CAPÍTULO 3	MÉTODO DE ANÁLISE INVERSA	57
3.1	INTRODUÇÃO	58
3.2	MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO	59
3.3	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ANÁLISE INVERSA	61
3.4	ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS PELOS MÍNIMOS QUADRADOS GENERALIZADOS	63
3.5	SEQÜÊNCIA PARA ESTIMATIVA DE PARÂMETROS BASEADA EM CONHECIMENTO PRÉVIO DOS PARÂMETROS PARA SISTEMAS LINEARES	66
3.6	SEQÜÊNCIA PARA ESTIMATIVA DE PARÂMETROS COM BASE NO CONHECIMENTO PRÉVIO DOS PARÂMETROS PARA SISTEMAS NÃO LINEARES	70
3.7	DETERMINAÇÃO DA MATRIZ H DAS DERIVADAS DAS OBSERVAÇÕES EM RELAÇÃO AOS PARÂMETROS	73
3.8	SUMÁRIO	74
CAPÍTULO 4	FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS	77
4.1	INTRODUÇÃO	78
4.2	LEI DE HOOKE	78
4.2.1	ESTADO PLANO DE TENSÃO	79
4.2.2	ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO	80
4.3	EQUAÇÕES DE DESLOCAMENTOS NO PLANO	81
4.4	DEFORMAÇÕES	83
4.5	ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	85
4.6	FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES	86
4.7	DERIVADAS DOS DESLOCAMENTOS EM RELAÇÃO AOS PARÂMETROS	89
4.7.1	INTRODUÇÃO	89
4.7.2	DERIVADA DA MATRIZ DE RIGIDEZ PARA O CASO DE MATERIAIS ELÁSTICOS LINEARES	90
CAPÍTULO 5	IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS ESTRUTURAIS	99
5.1	INTRODUÇÃO	100
5.2	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	100
5.3	FORMATO DO ARQUIVO DE ENTRADA	104
5.4	VALIDAÇÃO DAS ROTINAS PARA ESTIMATIVA DE PARÂMETROS	107

5.4.1	INTRODUÇÃO	107
5.4.2	EXEMPLO 1	109
5.4.3	EXEMPLO 2	110
5.4.4	EXEMPLO 3	111
5.4.5	EXEMPLO 4	112
5.4.6	EXEMPLO 5	113
5.4.7	EXEMPLO 6	113
5.4.8	EXEMPLO 7	114
5.4.9	EXEMPLO 8	115

CAPÍTULO 6 EXPERIMENTOS LABORATORIAIS **117**

6.1	INTRODUÇÃO	118
6.2	ENSAIO DE COMPRESSÃO DIAMETRAL EM CILINDROS DE CONCRETO (BRAZILIAN TEST)	118
6.2.1	CARACTERIZAÇÃO DO CONCRETO	119
6.2.2	DESCRIÇÃO DO ENSAIO	120
6.3	ENSAIO DE COMPRESSÃO DIAMETRAL EM CILINDROS DE GESSO (BRAZILIAN TEST)	122
6.4	ENSAIO DO PÓRTICO DEMONSTRADOR	123
6.4.1	CARACTERIZAÇÃO DO PÓRTICO	123
6.4.2	ENSAIO DE CARGA	127
6.4.3	ENSAIOS DE FLUÊNCIA	129

CAPÍTULO 7 RESULTADOS **133**

7.1	INTRODUÇÃO	134
7.2	ENSAIO DE COMPRESSÃO DIAMETRAL EM GESSO - MODELAGEM NUMÉRICA UTILIZANDO O PROGRAMA DIANA	134
7.3	ENSAIO DE COMPRESSÃO DIAMETRAL EM CILINDROS DE CONCRETO - MODELAGEM NUMÉRICA UTILIZANDO O PROGRAMA DIANA	135
7.4	ENSAIO NO PÓRTICO DEMONSTRADOR - MODELAGEM NUMÉRICA UTILIZANDO O PROGRAMA DIANA	138
7.4.1	ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS	141
7.5	RESULTADO DA ATUALIZAÇÃO DOS MODELOS DE PREVISÃO DE FLUÊNCIA	144
7.6	RESULTADOS OBTIDOS NO AJUSTE DE PARÂMETROS DE FLUÊNCIA	146

7.7	ANÁLISE INVERSA DO ENSAIO DE COMPRESSÃO DIAMETRAL EM CILINDROS DE CONCRETO	150
7.8	ANÁLISE INVERSA DO ENSAIO DO PÓRTICO DEMONSTRADOR	151
7.9	ANÁLISE INVERSA DA MEMBRANA ELÁSTICA ORTOTRÓPICA	153
<u>CAPÍTULO 8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</u>		<u>157</u>
8.1	CONCLUSÕES GERAIS	158
8.2	RELEVÂNCIAS DO SISTEMA COMPUTACIONAL DESENVOLVIDO	159
8.2.1	VALIDAÇÃO DO SISTEMA	159
8.2.2	PREVISÃO DE FLUÊNCIA	160
8.3	TÓPICOS PARA TRABALHOS FUTUROS	160
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>		<u>163</u>
<u>ANEXO 1 – MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO PARA AS PROPRIEDADES ELÁSTICAS DOS MATERIAIS ORTOTRÓPICOS</u>		<u>169</u>
TRANSFORMAÇÃO COORDENADA PARA A DEFORMAÇÃO NO PLANO		170
RELAÇÃO TENSÃO DEFORMAÇÃO		171
ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMAÇÃO		173
<u>ANEXO 2 – MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DAS TENSÕES E DEFORMAÇÕES NO PLANO</u>		<u>175</u>
TRANSFORMAÇÃO DE DEFORMAÇÕES NO PLANO		176
DEFORMAÇÕES DE ENGENHARIA		179
TRANSFORMAÇÃO COORDENADA PARA A TENSÃO NO PLANO		182

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

As estruturas de engenharia civil estão sujeitas, ao longo de sua vida útil, a esforços e a fatores climáticos que podem provocar alterações físicas e químicas nos materiais constituintes. Com o passar do tempo, essas alterações, se não detectadas e adequadamente tratadas, podem provocar a degradação e, eventualmente, o colapso das estruturas, resultando em consideráveis custos econômicos e sociais, podendo incluir a perda de vidas. Diante disto, a análise estrutural desempenha um papel importante no desenvolvimento do projeto de grandes estruturas. Modelos matemáticos, cada vez mais sofisticados, permitem simulações de etapas construtivas com o nível de detalhamento desejado pelos projetistas, as quais fornecem subsídios para análises paramétricas, propiciando soluções inimagináveis até alguns anos atrás.

Os projetos de grandes estruturas que envolvem dados de difícil definição têm utilizado, cada vez mais, o recurso de monitoração durante a construção de obras para tomadas de decisões. Como exemplo pode-se destacar a construção da ponte Dom Infante, sobre o Rio Douro na cidade do Porto em Portugal (FONSECA, 2003). Nesse momento, as comparações entre resultados da monitoração com os obtidos por modelos matemáticos têm permitido a continuidade na execução dessas obras com maior controle e qualidade.

A monitoração de obras concluídas tem fornecido uma série de informações que permitem a aferição dos modelos e parâmetros adotados, a avaliação de critérios heurísticos de projeto e mesmo o acompanhamento da evolução do comportamento dessas obras, o que propicia a detecção de eventuais falhas na estrutura permitindo intervenções que garantam sua segurança, a um menor custo. Esse é o contexto que torna cada vez mais relevante o aprimoramento das técnicas de análise inversa ou retro-análise.

Em virtude dos significativos avanços no campo de materiais e produtos voltados à construção civil, do aumento e inovações da industrialização dos processos construtivos e das decorrentes mudanças nas seções transversais de elementos estruturais, têm sido verificadas respostas não previstas nas estruturas mais recentes, ocasionando, não raramente, deformações exageradas que se encontram relacionadas com patologias dos mais diversos tipos e graus, comprometendo a segurança e o conforto dos usuários quando da sua utilização. Em estruturas civis mais antigas, como pontes, viadutos e estádios, verifica-se por vezes a necessidade de interdição, decorrente da associação de fatores como a ocorrência de carregamentos diferentes ou maiores que os previstos em projeto, degradação dos materiais constituintes dos elementos estruturais e aumento da agressividade ambiental (Figura 1.1).



Figura 1.1 – Ponte dos Remédios, em São Paulo: problema típico causado pela falta de manutenção (COZZA, 1997).

A importância dos sistemas de monitoração pode ser avaliada pela possibilidade de adquirir dados relativos ao comportamento estrutural de obras reais, ou mesmo de protótipos em laboratório, e que permitam obter, por meio de técnicas de análise inversa ou retro-análise, parâmetros relevantes para a caracterização dos fenômenos estruturais envolvidos e de sua evolução por comparação com modelos teóricos.

Em situação de serviço, as estruturas podem apresentar várias condições de integridade ou degradação, que dependem de fatores como período prolongado de uso

sem a devida manutenção, presença de carregamentos além dos previstos em projeto, falhas de concepção decorrentes da utilização de normas que não contemplam adequadamente a construção ou ataque proveniente de condições ambientais adversas ou agentes químicos não previstos. Recentes pesquisas realizadas pela American Society of Civil Engineers (ASCE) estimam o custo de reparo e recuperação de estruturas nos Estados Unidos em US\$ 1,3 trilhão (WAWRZYNEK, 2003).

Nas últimas décadas, uma das principais ocorrências de patologias pós-obra em edifícios com estruturas de concreto armado consiste na ruptura de vedação (Figura 1.2). O volume de casos relatados de destacamentos de argamassa de assentamento, de esmagamento de fiadas de encunhamento e outros, tem sido a causa de sérios prejuízos ao setor da construção imobiliária. Cabe ressaltar ainda o desgaste na relação de confiança entre os construtores e seus clientes finais, que não conseguem conviver com tais fenômenos sem se sentirem inseguros e ou mesmo enganados. Mesmo quando atendidos prontamente com iniciativas de reparo por parte da construtora, é inegável o desconforto da situação desagradável.

Tais patologias vêm ocorrendo com maior freqüência nos últimos quinze a vinte anos e sua intensidade tem crescido, apesar do esforço de inúmeras construtoras na contratação de consultoria especializada. Normalmente, são oferecidas soluções de natureza empírica e conseqüentemente, não se consegue estabelecer procedimentos eficazes visando evitar o problema.

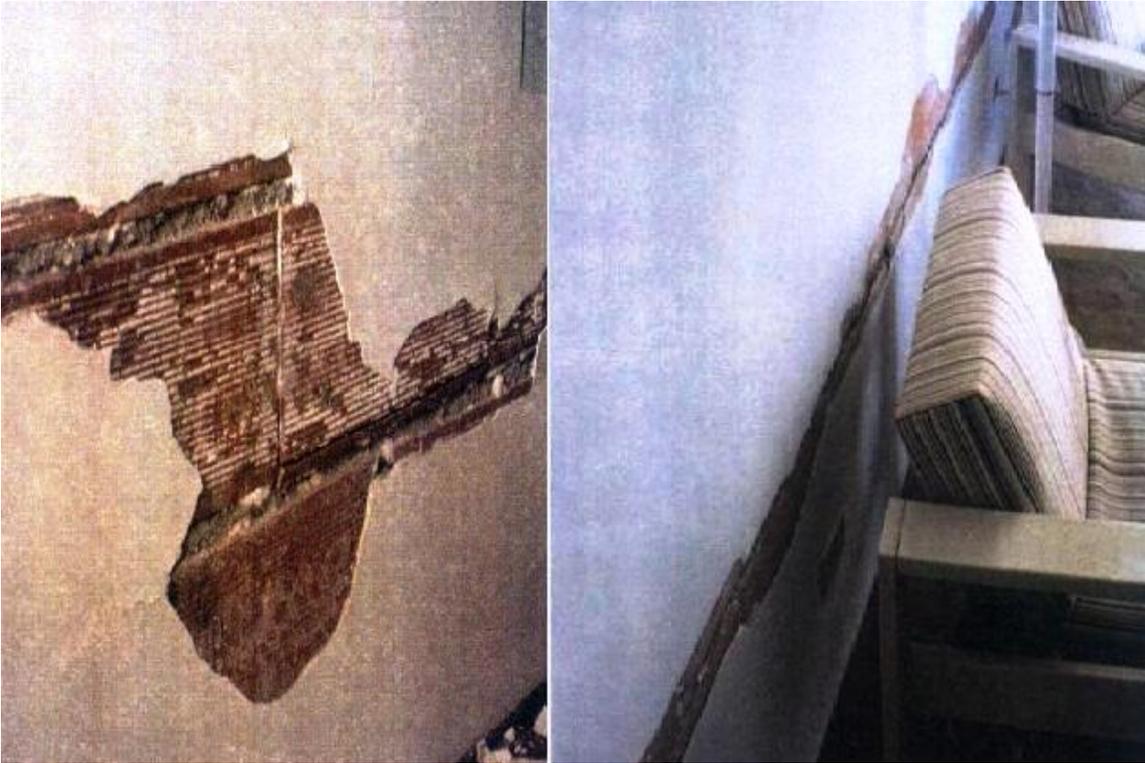


Figura 1.2 – Problemas de fissuração em alvenarias e revestimentos (apud BITTENCOURT, 2005) .

O envelhecimento do material geralmente reduz a capacidade de carga de elementos estruturais que levam a uma redistribuição de tensão, a qual pode resultar em carregamentos que são substancialmente diferentes daqueles esperados a partir do projeto estrutural original (GAO, 2005).

A fluência em peças de concreto, que vem sendo apontada como a causa mãe do fenômeno, é conhecida. Cabe destacar que, o seu comportamento para concretos feitos com os cimentos nacionais atuais é pouco conhecido. Por outro lado, o mecanismo de distribuição das deformações, entre a estrutura de concreto e as vedações, e a intensidade das deformações esperadas, têm apresentado resultados muito variáveis, ressaltando a deficiência de informação tecnológica na avaliação deste fenômeno.

Tendo em vista estas dificuldades, projetos estruturais têm sido elaborados com parâmetros pessimistas de deformação por fluência e retração, visando minorar

interação entre a estrutura e a alvenaria, recurso freqüentemente associado a um rigor exagerado quanto a tempos de fixação e quantidade de reescoramentos, aumentando o custo das estruturas de concreto armado e reduzindo sua competitividade sem, no entanto, resolver de forma definitiva o problema.

1.2 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS E PROBLEMAS INVERSOS

Uma conceituação de modelo, no contexto de sistemas estruturais, é apresentada em Zagottis (1976): "Em sistemas estruturais, o modelo decorrente da geometria da estrutura e das propriedades reológicas dos materiais estruturais que deve ser capaz de simular o comportamento da estrutura em todas as condições de solicitação, denominado conceitual, é bastante complexo. Porém, na análise do comportamento da estrutura em uma determinada situação de interesse, nem todas as características geométricas e reológicas do modelo conceitual são necessárias. Sendo assim, em cada situação considerada podem ser introduzidas simplificações no modelo conceitual, que dão origem aos modelos derivados". Esses modelos derivados podem ser organizados hierarquicamente, sendo os mais complexos aqueles de hierarquia superior.

Definir um sistema consiste em estabelecer as relações entre os seus principais componentes: os sinais de entrada, as propriedades e os sinais de saída. Os sinais de entrada correspondem às ações que o meio aplica ao sistema, os de saída são as respostas que caracterizam o comportamento do mesmo e as propriedades são os parâmetros presentes nas relações entre os dois sinais.

Na análise de sistemas, em que se inserem os problemas diretos, os sinais de entrada e as propriedades são conhecidos, busca-se a determinação dos sinais de saída. Na identificação de sistemas, em que se inserem os problemas de análise inversa, os resultados de medições das respostas são utilizados ou com as

propriedades para determinar os sinais de entrada ou com os sinais de entrada para determinar as propriedades do sistema (LEDESMA, 1987).

É fundamental, na utilização da abordagem inversa, a definição de uma relação explícita entre os parâmetros a identificar e os valores observados. Outra condição é que o número de medidas disponíveis seja maior ou igual ao número de parâmetros desconhecidos (GENS, 1996).

Em engenharia de estruturas os modelos são normalmente bem conhecidos e, portanto, o problema de análise inversa se reduz à identificação de parâmetros do modelo visando à melhor aderência entre valores medidos e os calculados pelo modelo, sejam eles relacionados com a geometria da estrutura, com as propriedades dos materiais, ou com a caracterização das ações (CASTRO, 1997).

É significativo o número de trabalhos em análise inversa realizados de uma forma intuitiva ou utilizando o procedimento de tentativas e que, para ter possibilidade de sucesso, depende da grande experiência e da correta intuição do projetista ou do pesquisador. Entretanto, mesmo contando com a experiência e com a correta intuição é indispensável que a aplicação das técnicas de análise inversa seja executada com base em procedimentos sistemáticos e racionais.

A identificação de parâmetros adequados para projetos de engenharia, assim como a sua confirmação a partir de medidas obtidas na obra é um problema relevante de engenharia estrutural. Uma das técnicas utilizadas para esse fim é a análise inversa, ou retro-análise, realizada a partir de dados de testes laboratoriais ou da monitoração de estruturas. Como exemplo de aplicação deste método pode-se destacar a identificação de parâmetros em geotecnia aplicada à escavação de túneis (LEDESMA, 1987), identificação do comportamento mecânico de materiais sólidos (HENDRIKS, 1991), determinação de módulo de elasticidade e coeficiente de empuxo do solo (LEDESMA, 1996), estimativa de parâmetros em engenharia geotécnica (GENS, 1996 1996a), identificação de parâmetros de comportamento de barragens de concreto (TAVARES DE CASTRO, 1997), determinação de parâmetros de solos parcialmente

saturados a partir de ensaios de campo (VELLOSO, 2000), análise inversa aplicada a ensaios laboratoriais para determinação do comportamento termo-hidráulico de bentonitas (PINTADO, 2002), identificação de parâmetros físicos na escavação de túneis (COSTA, 2003), determinação dos momentos fletores e deslocamentos em barragens de enrocamento com laje de concreto (GOULART, 2003), entre outros.

Problemas de análise inversa podem ser estabelecidos pela abordagem inversa ou pela direta. Na abordagem inversa as equações definidas no modelo são reescritas de modo que alguns sinais de entrada são desconhecidos (parâmetros a identificar) e alguns dados de saída são do problema (medidas experimentais). A abordagem direta utiliza os valores calculados em um modelo matemático, determinados em função dos parâmetros a estimar, estabelecendo-se uma função erro, a qual relaciona os valores medidos com os calculados (CASTRO, 1997).

Não se deve subestimar as dificuldades para atingir os parâmetros nos problemas de análise inversa, tendo em vista a possível não-unicidade, da instabilidade ou da inexistência de solução. Tais dificuldades indicam os desafios que se colocam para as diversas classes de problemas (HENDRIKS, 1991).

Uma das medidas de realização mais corrente em estruturas de concreto é a determinação da deformação linear. A interpretação dessas medidas e a sua decomposição em parcelas, de acordo com a sua origem, têm se constituído num permanente desafio aos pesquisadores do tema (OLIVEIRA, 2002; FIGUEIRAS, 2004; CASTRO, 1995). Essas dificuldades resultam fundamentalmente da mudança de suas características físicas no tempo, responsáveis pelos fenômenos de retração e de fluência, como exemplo, a influência da idade no módulo de elasticidade. No caso do concreto armado existe uma dificuldade adicional decorrente do efeito resistente das armaduras que estão aderentes ao concreto.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um sistema computacional integrando a análise estrutural via o método dos elementos finitos com a análise inversa, via programação matemática, visando identificar os parâmetros da estruturas, sejam materiais ou de cargas. Esse sistema é validado por comparação com exemplos disponíveis na literatura e também por sua aplicação a experimentos laboratoriais e obras em campo.

O sistema computacional desenvolvido é composto por uma rotina de análise pelo método dos elementos finitos para materiais elásticos lineares isotrópicos ou ortotrópicos e quatro módulos de análise inversa para a estimativa dos parâmetros a partir da minimização da função erro entre as grandezas observadas (deslocamentos, deformações, forças) e as calculadas pelo modelo de elementos finitos, a saber:

- `par_displ`: estimativas de parâmetros para materiais a partir dos deslocamentos medidos;
- `par_load`: estimativas de parâmetros de carregamentos a partir dos deslocamentos ou deformações observadas;
- `par_strain`: estimativas dos parâmetros materiais a partir das deformações observadas;
- `par_creep`: ajustes de parâmetros do coeficiente de fluência do concreto dos modelos disponíveis em normas técnicas e na literatura, como também o ajuste desses parâmetros, a partir de ensaios de curta duração.

O sistema de identificação de parâmetros foi validado a partir das grandezas medidas em protótipos de estruturas de concreto ensaiados em laboratório.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está organizado em oito capítulos, o primeiro dos quais é constituído pela presente introdução.

O capítulo 2 é dedicado à descrição do comportamento dos materiais elásticos através da lei de Hooke generalizada, particularizado para os materiais isotrópicos e ortotrópicos. Também estão contemplados neste capítulo a descrição do comportamento do concreto à fluência e os diferentes modelos de cálculo do coeficiente de fluência do concreto.

No capítulo 3 são apresentadas as metodologias adotadas no trabalho para a realização da análise inversa, que consiste na obtenção de uma função erro entre valores calculados e valores observados, para a estimativa dos parâmetros, bem como a minimização desta função através de uma técnica de busca do mínimo considerando o conhecimento prévio acerca dos parâmetros.

O capítulo 4 mostra a formulação básica pelo método dos elementos finitos para estados planos de tensão e de deformação em regime elástico para materiais isotrópicos e ortotrópicos. Também é apresentada a obtenção das derivadas necessárias ao método de minimização adotado.

O capítulo 5 é dedicado aos comentários e à descrição do programa computacional desenvolvido com orientações de uso dos diversos módulos de análise inversa. Faz-se uma breve descrição do arquivo de entrada do programa.

No capítulo 6 estão descritas as principais características dos ensaios laboratoriais realizados com a apresentação dos resultados obtidos em forma de gráficos e tabelas.

No capítulo 7 é efetuada a análise inversa pelo programa desenvolvido com a utilização dos resultados dos modelos ensaiados. Nas análises inversas realizadas

foram obtidos os módulos de elasticidade, coeficientes de Poisson, coeficientes de cargas e os coeficientes de ajustes dos modelos de fluência. Também foi efetuada a comparação entre os resultados obtidos pelo programa de análise inversa e com os obtidos pelo DIANA.

Finalmente, no capítulo 8 é apresentada uma síntese do trabalho realizado, salientando-se as principais conclusões, bem como sugestões para os desenvolvimentos futuros, os quais poderão contribuir para esclarecer algumas questões não resolvidas neste trabalho.

CAPÍTULO 2 CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

2.1 LEI DE HOOKE GENERALIZADA

Apresenta-se, a seguir, uma descrição do comportamento dos materiais elásticos através da lei de Hooke generalizada, particularizando-a para os materiais isotrópicos e ortotrópicos nos estados planos de tensão e de deformação.

2.1.1 INTRODUÇÃO

A Lei de Hooke generalizada é uma relação entre as componentes de tensões e deformações de um corpo elástico linear. Para pequenas deformações, o modelo de um corpo elástico é tomado como um contínuo que obedece a essa Lei. Em outras palavras, as componentes de deformação são funções lineares das componentes de tensão.

Quanto às propriedades elásticas de um corpo, pode-se dizer que o mesmo é homogêneo quando são iguais quaisquer pontos, e não homogêneo quando forem variáveis. Além disso, um corpo é denominado de isotrópico quando em um dado ponto, as propriedades elásticas são as mesmas em todas as direções, e anisotrópico quando são distintas para diferentes direções (LEKHNITSKII, 1981).

2.1.2 MATERIAL SEM PLANO DE SIMETRIA ELÁSTICA

Considerando um corpo homogêneo elástico possuindo anisotropia de um tipo geral, isto é, não há simetria elástica em um sistema arbitrário de coordenadas (x,y,z), pode-se escrever a lei de Hooke generalizada da seguinte forma:

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{xz} + a_{26}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_z = a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = a_{14}\sigma_x + a_{24}\sigma_y + a_{34}\sigma_z + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} + a_{46}\tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = a_{15}\sigma_x + a_{25}\sigma_y + a_{35}\sigma_z + a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz} + a_{56}\tau_{xy}$$

$$\gamma_{xy} = a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{36}\sigma_z + a_{46}\tau_{yz} + a_{56}\tau_{xz} + a_{66}\tau_{xy}$$

Onde a_{11} , a_{12} , ... a_{66} são as constantes elásticas ou coeficientes de deformação. Em geral, o número de constantes é 21 (sendo 18 delas independentes) (LEKHNISTSKII, 1981).

Ou na forma matricial:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \tag{2.1}$$

Onde:

$\boldsymbol{\varepsilon}$: é a vetor das deformações;

$\boldsymbol{\sigma}$: é o vetor das tensões;

\mathbf{D}^{-1} : matriz com as constantes elásticas a_{ij} .

Um corpo elástico linear acumula energia potencial enquanto sofre deformação. A expressão para a energia potencial de deformação por unidade de volume é dada por:

$$\pi = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{xy} \gamma_{xy})$$

Ou na forma matricial:

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.2)$$

A energia potencial total do corpo todo pode ser encontrada pela integração com relação ao volume total do corpo V:

$$\Pi = \int_V \pi dV$$

Quando um corpo possui simetria na estrutura interna, também apresenta em suas propriedades elásticas. Essa simetria elástica, como é usualmente chamada, é apresentada da seguinte maneira: em cada ponto de um corpo que tem direções simétricas, há nas direções correspondentes propriedades elásticas idênticas. As equações da lei de Hooke generalizada e as expressões para a energia de deformação são simplificadas quando existem de simetrias elásticas no material. Algumas das constantes elásticas a_{ij} tornam-se iguais a zero e aparecem relações de dependências entre outras.

2.1.3 MATERIAL COM UM PLANO DE SIMETRIA ELÁSTICA

Admite-se que em cada ponto de um corpo passa um plano que possui a seguinte propriedade: quaisquer duas direções que são simétricas com respeito a esse plano são equivalentes em todas as propriedades elásticas consideradas; em um corpo homogêneo todos esses planos passando por diferentes pontos são paralelos. Quando o eixo z é perpendicular ao plano de simetria elástica, a lei de Hooke generalizada pode ser expressa da seguinte forma:

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{16}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{26}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_z = a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{36}\tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz}$$

$$\gamma_{xy} = a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{36}\sigma_z + a_{66}\tau_{xy}$$

Onde:

$$a_{14} = a_{15} = a_{24} = a_{25} = a_{34} = a_{35} = a_{46} = a_{56} = 0$$

O número de constantes elásticas independentes para este caso reduz para 13.

2.1.4 MATERIAL COM TRÊS PLANOS DE SIMETRIA ELÁSTICA – MATERIAL ORTOTRÓPICO

Quando três planos mutuamente perpendiculares de simetria elástica passam por todos os pontos de um corpo homogêneo, as equações da lei de Hooke generalizada, quando referenciadas a um sistema de coordenadas (x,y,z) com eixos normais a esses planos, são as seguintes:

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z$$

$$\varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z$$

$$\varepsilon_z = a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z$$

$$\gamma_{yz} = a_{44}\tau_{yz} \quad , \quad \gamma_{xz} = a_{55}\tau_{xz} \quad , \quad \gamma_{xy} = a_{66}\tau_{xy} \quad (2.3)$$

O número das constantes elásticas independentes é 9. Três direções principais, mutuamente perpendiculares passam por todos os pontos. Um corpo homogêneo com três planos de simetria elásticas mutuamente perpendiculares passando por todos os pontos é denominado ortogonal anisotrópico ou, simplesmente ortotrópico.

Um elemento paralelepípedo de um corpo ortotrópico com lados paralelos aos planos de simetria elástica permanece sem alteração de forma quando submetidos a tração ou compressão em uma direção. O comprimento do lado do elemento altera durante o carregamento, mas os ângulos dos lados permanecem os mesmos.

As equações (2.3) tornam-se mais óbvias quando são trocados os coeficientes a_{ij} por outras constantes mais conhecidas da área da engenharia, isto é, módulos de

elasticidade longitudinal, coeficientes de Poisson e módulos de elasticidade transversal. Assim podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_y - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_z,$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_x + \frac{1}{E_2} \sigma_y - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_z$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_y + \frac{1}{E_3} \sigma_z$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G_{23}} \tau_{yz} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G_{13}} \tau_{xz} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{xy} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Onde E_1 , E_2 , E_3 são módulos de elasticidade longitudinais para tração (compressão) ao longo das direções principais de elasticidade (x, y, z); ν_{12} é o

coeficiente de Poisson que caracteriza o decréscimo (acrécimo) na direção y durante tração (compressão) aplicada na direção x ; similarmente definem-se $\nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{32}, \nu_{13}$ e ν_{31} ; G_{23}, G_{13}, G_{12} , são os módulos de elasticidade transversal que caracterizam a mudanças dos ângulos entre as direções principais $(y,z), (x,z), (x,y)$, respectivamente. Devido à simetria das equações (2.4), existem as seguintes relações entre os módulos de elasticidade longitudinal e os coeficientes de Poisson:

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12} \quad , \quad E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23} \quad , \quad E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31}$$

As constantes elásticas de um corpo ortotrópico, como apresentadas nas equações acima, correspondem às direções principais de elasticidade (x,y,z) , e são chamadas de constantes elásticas principais.

A simetria elástica considerada acima é muito importante, pois é uma propriedade encontrada em muitos materiais de uso corrente na engenharia. Podem ser considerados homogêneos e ortotrópicos, como primeira aproximação, os seguintes materiais: madeiras com anéis anulares regulares, compensados de madeiras, entre outros.

2.1.5 MATERIAL COM UM PLANO DE ISOTROPIA

Para o caso em que se passa um plano por um ponto qualquer de um dado corpo, e nesse plano todas as direções são equivalentes com respeito às propriedades elásticas, pode-se então utilizar a lei do Hooke generalizada, para um sistema de coordenadas, em que o eixo z é normal a esse plano, da seguinte forma:

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z$$

$$\varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{11}\sigma_y + a_{13}\sigma_z$$

$$\varepsilon_z = a_{13}(\sigma_x + \sigma_y) + a_{33}\sigma_z$$

$$\gamma_{yz} = a_{44}\tau_{yz} \quad , \quad \gamma_{xz} = a_{44}\tau_{xz} \quad , \quad \gamma_{xy} = 2(a_{11} - a_{12})\tau_{xy} \quad (2.6)$$

O número de constantes elásticas independentes agora é 5. Um corpo que apresenta anisotropia deste tipo é denominado isotrópico transversalmente. Uma direção que é normal ao plano de isotropia e todas as direções nesse plano são direções principais. Substituindo-se as constantes elásticas a_{ij} por outras mais comumente utilizadas nas formulações de engenharia, na equação (2.6), tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu'}{E'} \sigma_z$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x + \frac{1}{E} \sigma_y - \frac{\nu'}{E'} \sigma_z$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu'}{E'} \sigma_x - \frac{\nu'}{E'} \sigma_y + \frac{1}{E'} \sigma_z$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G'} \tau_{yz} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G'} \tau_{xz} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu'}{E'} & \frac{-\nu'}{E'} & \frac{1}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Onde:

E : é o módulo de elasticidade longitudinal para as direções no plano de isotropia;

E' : é o módulo de elasticidade longitudinal para a direção perpendicular a esse plano;

ν : é o coeficiente de Poisson que caracteriza a contração no plano de isotropia quando a tração é aplicada no mesmo plano;

ν' : é o coeficiente de Poisson que caracteriza a contração no plano de isotropia quando a tração é aplicada na direção perpendicular a esse plano;

$G = E / 2 (1 + \nu)$: é o módulo de elasticidade transversal para o plano de isotropia;

G' : é o módulo de elasticidade transversal que caracteriza a distorção dos ângulos entre os planos de isotropia e o normal a este.

Agrupando as constantes elásticas em uma matriz denominada matriz de constantes elásticas D^{-1} , tem-se:

2.1.6 MATERIAL ISOTRÓPICO

Qualquer plano de um corpo isotrópico apresenta simetria elástica e, portanto, todas as direções são principais. A lei de Hooke generalizada para um corpo isotrópico é dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

Agrupando as constantes elásticas em uma matriz denominada de D^{-1} , tem-se:

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Onde E é o módulo de elasticidade longitudinal; ν é o coeficiente de Poisson e $G = E / 2 (1 + \nu)$ é o módulo de elasticidade transversal. O número de constantes elásticas independentes neste caso é dois.

Para corpos isotrópicos as propriedades elásticas são as mesmas para qualquer sistema de coordenadas. Por outro lado, no caso de corpos anisotrópicos, os coeficientes da matriz \mathbf{D}^{-1} alteram-se com a mudança de coordenadas.

2.1.7 DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES ELÁSTICAS PARA UM NOVO SISTEMA DE COORDENADAS

Um problema freqüentemente encontrado quando as constantes elásticas a_{ij} são conhecidas para certo sistema de coordenadas (x,y,z) , é a necessidade de encontrá-las em um novo sistema (x',y',z') , rotacionado de um ângulo φ em torno do eixo comum $z = z'$ (Figura 2.1). Para tanto, aplica-se o seguinte método:

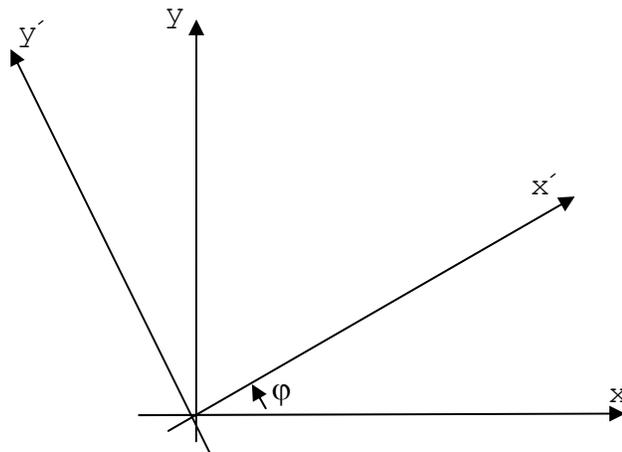


Figura 2.1 - Ângulo de ortotropia

A partir da equação (2.2), obtém-se a expressão da energia potencial para os dois sistemas de coordenadas e igualam-se essas expressões, na forma matricial, como segue:

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}' \boldsymbol{\sigma}' \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}' \boldsymbol{\sigma}' \quad (2.10)$$

Para cada sistema de coordenadas pode-se escrever a lei de Hooke generalizada, conforme as equações (2.1). Colocando na forma matricial, tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \text{ para o sistema } (x, y, z)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{D}'^{-1} \boldsymbol{\sigma}' \text{ para o sistema } (x', y', z')$$

A equação de mudança de componentes de tensão em forma matricial é dada por:

$$\sigma = \mathbf{T}\sigma' \quad (2.11)$$

Onde \mathbf{T} é a matriz de transformação de componentes, segundo Lekhnistskii, (1981), é dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & 0 & 0 & 0 & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi \cos \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -2\sin \varphi \cos \varphi & 2\sin \varphi \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Substituindo as deformações em função das tensões e a equação de mudança de componentes nas tensões na expressão da igualdade de energia potencial, vem:

$$\mathbf{D}^{-1}\sigma\sigma = \mathbf{D}'^{-1}\sigma'\sigma' \Rightarrow \mathbf{D}^{-1}\mathbf{T}\sigma'\mathbf{T}\sigma' = \mathbf{D}'^{-1}\sigma'\sigma'$$

$$\mathbf{D}'^{-1} = \mathbf{T}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{T} \quad (2.13)$$

A equação acima fornece a matriz das constantes elásticas para o novo sistema de coordenadas.

2.2 ESTADOS PLANOS DE TENSÃO E DE DEFORMAÇÃO

2.2.1 INTRODUÇÃO

As relações particulares para problemas no estado plano de tensão e de deformação serão obtidas a partir da formulação geral.

Em ambos os problemas o campo de deslocamento é dado unicamente através dos deslocamentos u e v na direção dos eixos cartesianos ortogonais (x,y) e, somente, as três componentes de tensão e deformação existentes no plano (x,y) são consideradas.

Por definição todas as outras componentes de tensão fora do plano são iguais a zero e, portanto, não contribuem para o cálculo da energia de deformação, isto é:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0 \quad (2.14)$$

Como exemplo de estrutura a ser analisada no estado plano de tensão generalizado pode-se considerar aquelas em que a espessura (dimensão em z) é pequena quando comparada com as outras dimensões contidas em (x,y) e cujas cargas atuam somente no plano (x,y) .

No estado plano de deformação, a tensão perpendicular ao plano (x,y) é diferente de zero, entretanto, pela definição, a deformação nessa direção é zero e, desse modo, essa tensão não contribui no cálculo da energia potencial (ZIENKIEWICZ, 2000), isto é:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{zy} = 0 \quad (2.15)$$

Como exemplo de estrutura a ser estudada no estado plano de deformação podem-se considerar aquelas em que a espessura do elemento estrutural em análise é muito grande (dimensão z) quando comparado com seção transversal contida no plano (x,y) e estão sujeitas as cargas que atuam somente nas direções (x,y) e não variam ao longo da direção z (CAMP, 2006).

2.2.2 MATRIZ DOS COEFICIENTES ELÁSTICOS PARA O ESTADO PLANO DE TENSÃO

2.2.2.1 MATERIAL ORTORÓPICO

Aplicando-se as hipóteses do estado plano de tensão dados pela equação (2.14) na matriz dada em (2.5) tem-se:

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Da matriz dada pela equação (2.16) acima, obtém-se por simples inversão a matriz D, dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \begin{bmatrix} E_1^2 & \nu_{12} E_1 E_2 & 0 \\ \nu_{12} E_1 E_2 & E_1 E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} (E_1 - \nu_{12}^2 E_2) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

2.2.2.2 MATERIAL ISOTRÓPICO

Aplicando-se as hipóteses do estado plano de tensão dados pela equação (2.14) na matriz dada em (2.9) tem-se:

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Substituindo-se na matriz dada pela expressão (2.18) $G = E/2(1 + \nu)$, obtém-se, por simples inversão, a matriz \mathbf{D} , dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

2.2.3 MATRIZ DOS COEFICIENTES ELÁSTICOS PARA O ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO

2.2.3.1 MATERIAL ORTORÓPICO

Aplicando-se as hipóteses do estado plano de deformação dada pela equação (2.15) na matriz dada em (2.5) tem-se:

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E_1 E_2} \begin{bmatrix} E_2 (1 - \nu_{12}^2) & - (E_1 \nu_{12} + E_2 \nu_{12}^2) & 0 \\ - (E_1 \nu_{12} + E_2 \nu_{12}^2) & E_1 (1 - \nu_{12}^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1 E_2}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Da matriz dada pela expressão (2.20) obtém-se, por simples inversão, a matriz \mathbf{D} dada por:

$$h_0 = \frac{E_1}{(1 + \nu_{12}) (E_2 - E_2 \nu_{12} - 2E_1 \nu_{12}^2)}$$

$$h_{33} = \frac{G_{12}}{E_1} (1 + \nu_{12}) (E_2 - E_2 \nu_{12} - 2E_1 \nu_{12}^2) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{D} = h_0 \begin{bmatrix} (E_2 - E_1 \nu_{12}^2) & \nu_{12} (E_2 + E_1 \nu_{12}) & 0 \\ \nu_{12} (E_2 + E_1 \nu_{12}) & \frac{E_2^2}{E_1} (1 - \nu_{12}^2) & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} \end{bmatrix}$$

2.2.3.2 MATERIAL ISOTRÓPICO

Aplicando-se as hipóteses do estado plano de deformação dada pela equação (2.15) na matriz apresentada em (2.9), tem-se:

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu^2}{E} & -\frac{(\nu + \nu^2)}{E} & 0 \\ -\frac{(\nu + \nu^2)}{E} & \frac{1 - \nu^2}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Substituindo-se $G = E / 2(1 + \nu)$ na matriz (2.22) obtém-se, por simples inversão, a matriz **D** dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

2.2.4 MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DE COMPONENTES DA DEFORMAÇÃO PARA OS ESTADOS PLANOS

Eliminando-se as linhas correspondentes às hipóteses dadas pela equação (2.14), na matriz dada pela expressão (2.12), obtém-se:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ -2\sin \varphi \cos \varphi & 2\sin \varphi \cos \varphi & (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Onde **T** é a matriz de transformação de coordenadas para os estados planos.

Através de transformações trigonométricas aplicadas na expressão (2.24), encontra-se:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}(\varphi)^2} \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{tg}(\varphi)^2 & 2\operatorname{tg}(\varphi) \\ \operatorname{tg}(\varphi)^2 & 1 & -2\operatorname{tg}(\varphi) \\ -\operatorname{tg}(\varphi) & \operatorname{tg}(\varphi) & 1 - \operatorname{tg}(\varphi)^2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

2.3 FLUÊNCIA DO CONCRETO

2.3.1 INTRODUÇÃO

Um longo tempo se passou desde as primeiras observações de retração do concreto no século passado e a descoberta da fluência do concreto em 1907 por Hatt (RILEM, 1998). Desde então, muitas pesquisas estão sendo dedicadas na busca da resolução dos complexos problemas envolvendo a retração e a fluência. Grandes sucessos foram alcançados, entretanto, os fenômenos de retração e fluência estão longe de serem completamente resolvidos (BAŽANT, 2001). Tendo sido estudados por algumas das mentes mais brilhantes no campo da pesquisa do concreto e da ciência dos materiais, onde se destacam: Glanville, Dischinger, Troxell em 1958, Pickett, McHenry, L'Hermite em 1965, Arutyunian, Aleksandrovskii nos anos de 1959, Powers, Hansen e Mattock em 1966, Rusch, Neville em 1983, Trost, Dilger, Wittman, Hilsdorf, Muller, Huet, Carol, Bažant, Gardner entre outros (BAŽANT, 2001).

A retração e a fluência de concretos com cimentos portland são fenômenos complexos determinados por diversos processos físico-químicos. O processo básico origina-se no interior da fração da pasta cimentícia, em consequência das propriedades dos produtos de hidratação e da microestrutura da pasta, e são modificadas pela natureza composta do concreto (BAŽANT, 1988).

Retração e fluência do concreto são fenômenos intrínsecos, e uma equação constitutiva que seja tanto aplicável de maneira geral como realista é de difícil formulação. Antes do aparecimento dos computadores, as análises estruturais que consideravam os efeitos de retração e fluência não podiam ser realizadas com modelos matemáticos sofisticados. Após 1970, entretanto, tornaram-se disponíveis grandes computadores que poderiam aceitar complicados modelos constitutivos. Contudo, se um bom modelo constitutivo não fosse disponível nada de útil poderia ser feito com estes computadores. Assim, os computadores têm fornecido um ímpeto para o

desenvolvimento de relações constitutivas realísticas para a retração e fluência do concreto, e grandes progressos têm ocorrido nesses últimos anos (BAŽANT, 1988).

Modelar o comportamento de longa-duração de estruturas de concreto armado e protendido requer equações para prever o comportamento ao longo do tempo da retração e da fluência do concreto. A prática corrente norte-americana está baseada nas recomendações do ACI 209-82 (1982). Desde 1970 o Comité European du Béton (CEB) desenvolveu sucessivas recomendações de código modelo que foram modificadas e adotadas como base para regulamentos de vários países. O Eurocode 2 já em 1991 adotou as propostas do código modelo CEB 1990 para a retração e fluência (CEB,1990). Em 1999 o CEB atualizou seu método de previsão para a retração e a fluência do concreto. A versão 2002 de Eurocode 2 (EC2, 2003) endossou o uso das equações de retração e fluência da versão 1999 (FIB, 1999) do código modelo 1990 do CEB, Mc1990-99. Bažant e Baweja (1995) e Gardner e Lockman (2001), partindo de bases diferentes, propuseram métodos de previsão para substituir as do ACI 209-82 (GARDNER, 2004).

2.3.2 DEFINIÇÕES

A fluência total observada é a soma da fluência básica e de secagem. Na prática, entretanto, essa distinção nem sempre é feita. Existe também uma arbitrariedade em como se separam as deformações de fluência a partir da assim chamada deformação instantânea. A fluência ocorre a partir do início imediato do carregamento, entretanto é tomado um tempo finito para a medida da deformação instantânea (BAŽANT, 1988). Uma nomenclatura muito utilizada é aquela sugerida por Neville (1970), como segue:

- fluência básica: é a designação da deformação dependente do tempo que ocorre quando o concreto é carregado em uma condição selada de modo que a umidade não consegue escapar;
- fluência de secagem também conhecida por efeito Pickett: é definida como a deformação de fluência adicional à fluência básica observada

quando o concreto pode secar enquanto está sob carregamento (NEVILLE, 1970).

A fluência no concreto tem tanto deformações irrecuperáveis como uma parcela recuperável. Quando o concreto é descarregado, a deformação de fluência acumulada é parcialmente recuperada, enquanto que a deformação imediata é praticamente toda recuperada.

Outros dois termos são comumente usados:

- coeficiente de fluência que expressa a deformação de fluência como uma fração da deformação elástica. Normalmente atinge um valor que fica entre 2,0 a 6,0 para a máxima fluência atingida pelo sistema;
- fluência específica é a quantidade de fluência por unidade de tensão aplicada. É utilizada para comparar o potencial de fluência do concreto carregado em diferentes níveis de tensão. Pode ser utilizado $1,5 \times 10^{-4}$ (MPa)⁻¹ na ausência de um valor específico (BAŽANT, 1988).

2.3.3 MODELOS DE FLUÊNCIA

Segundo Bažant (2001), a previsão matemática correta da fluência do concreto requer a compreensão do mecanismo físico, os quais, juntamente com suas influencias, têm sido estudados como:

- escoamento plástico;
- teoria da consolidação;
- quantidades de água transportada da camada superficiais dos microporos sujeitos às fortes forças de superfície (*load-bearing hindered adsorbed water*);

- dano estrutural no deslizamento e seu novo formato (*bond breakage in slip and its reformation*);
- deformações não lineares e fissuração como uma contribuição ao efeito de Pickett;
- teoria da solidificação para envelhecimento em curto prazo de Bažant e Prasannan;
- micro-protensão de locais de fluência na microestrutura do gel do cimento, causando o efeito de Pickett e o envelhecimento em longo prazo (BAŽANT et al, 1997).

Os modelos matemáticos recentes foram formulados com uma visão para facilitar a análise estrutural. Mas os computadores tornaram possível usar qualquer tipo de modelo. Assim, modelos recentes devem buscar representar o mais próximo possível os dados experimentais. Os seguintes modelos de previsão (BAŽANT, 1988) foram propostos:

- teoria de Dischinger-Glanville ou modelo de taxa de fluência (ou teoria do envelhecimento);
- atualização do modelo de Dischinger ou modelo da taxa de fluência;
- modelo de Arutyunian-Maslov;
- lei de dupla exponencial e lei logarítmica-exponencial para a fluência básica (*double power law and log-double power law for basic creep*);
- modelos BP e BPKX e também a última versão do Modelo B3. (BAŽANT, 1995).

Os primeiros três modelos tentam alguma simplificação da análise estrutural. Neste caso, os métodos mais simples de se utilizar são:

- Método do módulo efetivo (muito mais simples do que métodos de Dischinger, contudo não envolvendo um grande erro).
- Método do módulo de elasticidade efetivo com ajuste na idade (AAEM)

Formulação de um modelo detalhado de previsão é uma tarefa muito difícil. Em vista do conhecimento limitado que se possui o problema da formulação do modelo não tem uma única resposta. Provavelmente modelos diferentes podem descrever igualmente bem o conhecimento atual. Entretanto, não podem ser muito diferentes porque um modelo aceitável hoje não deve somente ajustar bem aos dados existentes, mas deve também conformar-se às conseqüências matemáticas dos diversos fenômenos físicos (BAŽANT, 2001), incluindo:

- Teoria da energia da ativação dos limites de rupturas (dependência da temperatura de envelhecimento e da viscosidade de fluência).
- Teoria da difusão, particularmente suas propriedades assintótica simples para a secagem ou retração inicial e final.
- Modelagem das fissuras devido a tensões residuais na seção transversal como um mecanismo da redução aparente da retração.
- Teoria da solidificação, particularmente o fato de o envelhecimento é uma característica aparente e deve ser causado pela solidificação e deposição de camadas sem tensão de produtos de hidratação nas paredes dos poros.
- Micro-protensões, que causam o envelhecimento adicional aparente em longo prazo e que não podem ser explicado pelo crescimento do volume de produtos de hidratação.
- Efeito do crescimento da fratura na fluência aparente (a parte não linear da fluência é provavelmente nada além do efeito do crescimento da fissura dependente do tempo).

Com a disponibilidade de programas computacionais, a prática deve substituir os modelos para o comportamento da seção transversal para o uso direto da equação constitutiva. Isto naturalmente significa dividir a seção transversal em um número de elementos finitos. Somente esta aproximação pode satisfazer à expectativa para boas previsões.

Aproximações computacionais de vários tipos como, por exemplo, em Bažant, (1994, 1995); recomendação de RILEM, (1998) foram desenvolvidas soluções:

- aproximadas de uma etapa usando método de ajuste da idade do módulo efetivo.
- de acordo com o modelo de fluência do tipo integral baseado no princípio da superposição.
- com base com um modelo de fluência do tipo taxa baseado na cadeia de Kelvin ou de Maxwell.

Avanços consideráveis foram feitos nas modelagens probabilísticas, fato que é muito importante tendo em vista a elevada variabilidade estatística, e do efeito micro mecânicos da composição do concreto sobre a fluência e a retração, como por exemplo, encontra-se em Granger e Bažant, (1995) e Baweja et al., (1998).

Não obstante, a melhor maneira de se conseguir boas previsões de retração e fluência ao longo do tempo é através da realização de ensaios de curta duração em um dado concreto e extrapolar os resultados tendo como base um bom modelo de previsão, (BAŽANT, 2001).

2.3.4 MODELOS DE PREVISÃO DE FLUÊNCIA

A fluência do concreto depende da umidade ambiente, das dimensões dos elementos estruturais, da composição, da maturidade quando é aplicado o primeiro carregamento e da duração e magnitude do mesmo.

Nos itens seguintes, são apresentadas as expressões de previsão do coeficiente de fluência dos modelos do Eurocode 2, do ACI 209, da NBR 6118, no B3 de Bažant e no GL2000 de Gardner, que serão utilizadas nos procedimentos de ajuste de parâmetros. Optou-se por conservar as unidades que aparecem nas referências consultadas, pois existem nas expressões coeficientes ajustados a partir de ensaios laboratoriais que poderiam ser comprometidos em uma eventual conversão de unidades.

2.3.4.1 EUROCODE 2 (EC2 2003)

O modelo de previsão de fluência do Eurocode-2 está restrito a tensões constantes de serviço σ , isto é, até da ordem de $0,45 f_{ck}(t_0)$, para o qual a fluência é admitida ser linearmente dependente da tensão.

A seguir são apresentadas as expressões de previsão do coeficiente de fluência $\varphi(t, t_0)$, entre o tempo t e t_0 , em relação à deformação elástica aos 28 dias, do modelo adotado pelo EuroCode (EC, 2003).

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \beta_c(t, t_0) \quad (2.26)$$

φ_0 : coeficiente ideal de fluência: $\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \beta(t_0)$

φ_{RH} : fator que considera a umidade relativa:

$$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH / 100}{0,1\sqrt[3]{h_0}} \quad \text{para } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa}$$

$$\varphi_{RH} = \left[1 + \frac{1 - RH / 100}{0,1\sqrt[3]{h_0}} \alpha_1 \right] \alpha_2 \quad \text{para } f_{cm} \geq 35 \text{ MPa}$$

$\beta(f_{cm})$: fator que considera a resistência característica do concreto:

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}}$$

$\beta(t_0)$: fator que considera o efeito da idade da aplicação do concreto:

$$\beta(t_0) = \frac{1}{(0,1 + t_0^{0,20})}$$

h_0 : fator que leva em conta a dimensão do elemento de concreto em mm:

$$h_0 = \frac{2A_c}{u}$$

$\beta_c(t, t_0)$: coeficiente que define o desenvolvimento de fluência ano tempo:

$$\beta_c(t, t_0) = \left(\frac{t - t_0}{\beta_H + t - t_0} \right)^{0,3}$$

β_H : coeficiente que depende da umidade relativa (RH em %) e a noção do tamanho do elemento (h_0 em mm)

$$\beta_H = 1,5 \left(1 + (0,012RH)^{18}\right) h_0 + 250 \leq 1500 ; \text{ para } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa}$$

$$\beta_H = 1,5 \left(1 + (0,012RH)^{18}\right) h_0 + 250\alpha_3 \leq 1500 ; \text{ para } f_{cm} \geq 35 \text{ MPa}$$

$\alpha_{1/2/3}$: coeficientes para considerar a influência da resistência do concreto

$$\alpha_1 = \left[\frac{34}{f_{cm}}\right]^{0,7} \quad \alpha_2 = \left[\frac{34}{f_{cm}}\right]^{0,2} \quad \alpha_3 = \left[\frac{34}{f_{cm}}\right]^{0,5}$$

Onde:

RH: umidade relativa do meio ambiente em %;

f_{cm} : resistência média à compressão do concreto em MPa aos 28 dias;

A_c : área da seção transversal do concreto em mm^2 ;

u : perímetro do elemento de concreto em contato com a atmosfera em mm;

t : idade do concreto em dias no momento considerado;

t_0 : idade do concreto expresso em dias a partir da data da aplicação da carga.

2.3.4.2 MODELO DA NBR 6118 (ABNT,2003)

O modelo de previsão de fluência do NBR 6188-2003 está restrito a tensões constantes de serviço σ até da ordem de $0,5 f_c$, no instante de aplicação do primeiro carregamento, para o qual o comportamento da fluência é admitido como sendo linearmente dependente da tensão.

A seguir são apresentadas as expressões de previsão do coeficiente de fluência $\varphi(t, t_0)$, válido também para a tração, entre o tempo t e t_0 , em relação à deformação elástica aos 28 dias, do modelo adotado pelo NBR 6188-2003.

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_a + \varphi_{f\infty}[\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \varphi_{d\infty}\beta_d \quad (2.27)$$

$$\varphi_a: \text{coeficiente de fluência rápida: } \varphi_a = 0,8 \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right]$$

$\varphi_{f\infty}$: valor final do coeficiente de fluência irreversível: $\varphi_{f\infty} = \varphi_{1c}\varphi_{2c}$

φ_{2c} : coeficiente de fluência dependente da espessura fictícia h_{fic} da peça:

$$\varphi_{2c} = \frac{42 + h_{fic}}{20 + h_{fic}}$$

φ_{1c} : coeficiente de dependência da umidade relativa do ambiente U , em %:

$\varphi_{1c} = 0,75(4,45 - 0,0035U) \rightarrow$ abatimentos de 0 a 4 cm e $U \leq 90\%$

$\varphi_{1c} = 4,45 - 0,0035U \rightarrow$ abatimentos de 5 a 9 cm e $U \leq 90\%$

$\phi_{1c} = 1,25 (4,45 - 0,0035U)$ abatimentos de 10 a 15cm e $U \leq 90\%$

h_{fic} : espessura fictícia, em centímetros: $h_{fic} = \gamma \frac{2A_c}{u_{ar}}$

γ : coeficiente que depende da umidade relativa do ambiente (U%)

$$\gamma = 1 + e^{(-7,8+0,1U)}$$

$\beta_d(t)$: coeficiente relativo deformação lenta reversível do tempo $(t - t_0)$ decorrido após o carregamento:

$$\beta_d(t) = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70}$$

$B_f(t)$ ou $B_f(t_0)$: coeficiente relativo a deformação lenta irreversível, função da idade do concreto:

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 + At + B}{t^2 + Ct + D}$$

Onde:

$$A = 42h^3 - 350h^2 + 588h + 113$$

$$B = 768h^3 - 3060h^2 + 3234h - 23$$

$$C = -200h^3 + 13h^2 + 1090h + 183$$

$$D = 7579h^3 - 31916h^2 + 35343h + 1931$$

h : espessura fictícia em metros, para valores de h fora do intervalo $(0,05 \leq h \leq 1,6)$, adotam-se os valores extremos correspondentes;

t : é a idade fictícia do concreto no instante considerado, em dias ($t \geq 3$);

t_0 : idade fictícia do concreto ao ser feito o carregamento único, em dias;

t_{0i} : idade fictícia do concreto ao ser feito o carregamento, em dias;

A_c : área da seção transversal da peça em cm^2 ;

u_{ar} : perímetro externo da seção transversal da peça em contato com o ar em cm;

U : umidade relativa ambiente, em %.

2.3.4.3 B3 DE BAŽANT E BAWEJA (BAŽANT 1995)

O presente modelo de previsão está restrito as tensões de serviço, da ordem de $0,4f'_c$, para a qual o comportamento da fluência é admitido como sendo linearmente dependente da tensão.

A seguir são apresentadas as expressões de previsão do coeficiente de fluência $\varphi(t,t')$, entre o tempo t e t' , em relação a deformação elástica aos 28 dias, apresentados por Bažant e Baweja (1995) e denominado simplesmente por modelo B3 de previsão de fluência para análise e projetos de estruturas de concreto.

$$\varphi(t, t') = E_c(t') [C_0(t, t')] + E_c(t') C_d(t, t', t_0) - E_c(t') / E_{c28} \quad (2.28)$$

$C_0(t,t')$: função específica de deformação para fluência básica (fluência para umidade constante), em 10^{-6} psi^{-1} ($1 \text{ psi} = 6,895 \times 10^{-3} \text{ MPa}$)

$$C_0(t, t') = q_2 Q(t, t') + q_3 \ln [1 + (t - t')^n] + q_4 \ln \left(\frac{t}{t'} \right)$$

Onde:

$$Q(t, t') = Q_f(t') \left[1 + \left(\frac{Q_f(t')}{Z(t, t')} \right)^{r(t')} \right]^{-1 / r(t')}$$

$$r(t') = 1,7(t')^{0,12} + 8 \quad ; \quad Z(t, t') = (t')^{-m} \ln [1 + (t - t')^n]$$

$$Q_f(t') = \left[0,086 (t')^{2/9} + 1,21 (t')^{4/9} \right]^{-1}$$

$C_d(t, t', t_0)$: fluência adicional devido a secagem (fluência por secagem)

$$C_d(t, t', t_0) = q_5 [\exp\{-8H(t)\} - \exp\{-8H(t')\}]^{1/2} \quad , \quad p / t' \geq t_0$$

H: média espacial da umidade relativa dos poros no interior da seção transversal

$$H(t) = 1 - (1 - h)S(t)$$

S(t): função do tempo para a retração

$$S(t) = tgh \left(\frac{t - t_0}{\tau_{sh}} \right)^{1/2}$$

τ_{sh} : retração ao meio tempo em dias

$$\tau_{sh} = k_t (k_s D)^2$$

D: espessura efetiva da seção transversal em in, (1in = 25,4 mm)

$$D = 2v / s$$

K_h : coeficiente de dependência da umidade

$$k_h = \begin{cases} 1 - h^3 & \text{para } h \leq 0,98 \\ -0,2 & \text{para } h=1 \text{ (expansão em água)} \\ \text{interpolar} & \text{para } 0,98 \leq h \leq 1 \end{cases}$$

K_s : coeficiente de dependência da forma:

$$k_s = \begin{cases} 1,00 & \text{para uma laje infinita} \\ 1,15 & \text{para um cilindro infinito} \\ 1,25 & \text{para um prisma quadrado infinito} \\ 1,30 & \text{para uma esfera} \\ 1,35 & \text{para um cubo} \end{cases}$$

E_{c28} : módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias, em psi;

q_1 , q_2 e q_4 : coeficientes empíricos

$$q_1 = 0,6 * 10^6 / E_{28} \quad , \quad E_{28} = 57000(f'_c)^{1/2}$$

$$q_2 = 451, 1c^{0,5}(f'_c)^{-0,9} \quad ; \quad q_4 = 0, 14 (a / c)^{-0,7}$$

Onde:

t: idade do concreto em dias;

t': idade do carregamento em dias;

t₀: idade do início da secagem em dias (somente t₀ ≤ t' são considerados);

h: umidade relativa do ambiente, na forma decimal (0 ≤ h ≤ 1);

h: média espacial da umidade relativa dos poros no interior da seção transversal;

v/s: relação entre o volume por área de superfície em in;

a/c: relação água por agregado para o cimento em peso

f'_c: resistência à compressão de corpos de provas cilindros padrão em psi (se somente a resistência de projeto é conhecida f_{ck}, então f'_c = f_{ck} + 1200 psi).

2.3.4.4 GL2000 DE GARDNER E LOCKMAN (GARDNER, 2001)

O presente modelo de previsão está restrito a tensões da ordem de 40% da resistência do concreto, assumindo que a retração, a fluência básica e a de secagem podem ser somadas.

A seguir são apresentadas as expressões de previsão do coeficiente de fluência $\varphi(t, t_0)$, entre o tempo t e t₀, em relação a deformação elástica aos 28 dias, apresentados por Gardner e Lockman (2001) e denominado simplesmente por modelo GL2000 de previsão de fluência para análise e projetos de estruturas de concreto.

$$\varphi(t, t_0) = \varphi(t_c) \left[2 \left(\frac{(t - t_0)^{0,3}}{(t - t_0)^{0,3} + 14} \right) + \left(\frac{7}{t_0} \right)^{0,5} \left(\frac{t - t_0}{t - t_0 + 7} \right)^{0,5} + 2,5 (1 - 1,086h^2) \left(\frac{t - t_0}{t - t_0 + 0,15 (V/S)^2} \right)^{0,5} \right] \quad (2.29)$$

$\varphi(t_c)$: termo que considera a secagem antes do carregamento:

$$\varphi(t_c) = \left[1 - \left(\frac{t_0 - t_c}{t_0 - t_c + 0,12 (V/S)^2} \right)^{0,5} \right]^{0,5} \quad \text{para } t_0 > t_c$$

$$\varphi(t_c) = 1,0 \quad \text{para } t_0 = t_c$$

Onde:

t: é a idade do concreto no instante considerado, em dias;

t_0 : idade do concreto quando carregado, em dias;

t_c : idade do concreto no início do processo de secagem;

h: umidade ambiente, em decimal;

V / S: relação entre o volume e a área superficial, em mm.

2.3.4.5 FUNÇÃO DENSIDADE DE FLUÊNCIA

Das expressões dos coeficientes de fluência para cada modelo, pode-se obter a função densidade de fluência $J(t, t_0)$, como segue:

$$J(t, t_0) = \left(\frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c28}} + \frac{1}{E_{ct_0}} \right) \quad (2.30)$$

Onde:

E_{c28} : módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias

E_{ct_0} : módulo de elasticidade do concreto aos t_0 dias

A adoção da função densidade em lugar do coeficiente de fluência está relacionada com o fato de explicitar os módulos de elasticidade no instante da aplicação da carga e o obtido aos 28 dias.

A partir da expressão (2.30) será realizada a determinação de parâmetros que melhor ajustam os valores experimentais aos estabelecidos pelos modelos acima descritos, também será utilizada para o ajuste dos modelos de previsão de fluência a partir de ensaios laboratoriais de curta duração.

2.3.5 MODELO DE ATUALIZAÇÃO DA FLUÊNCIA COM BASE EM ENSAIOS DE CURTA DURAÇÃO

Previsões de fluência em concreto com valores mais próximos dos observados nos ensaios e nas estruturas usuais podem ser alcançadas quando os modelos são ajustados com resultados observados em ensaios de curta duração, como o que está apresentado em Bažant (1995).

A função específica $J(t, t')$ do Modelo B3 de previsão de fluência mostrada em Bažant (1995) apresenta todos os parâmetros livres para a fluência com a deformação elástica contidos em fórmulas lineares. Conseqüentemente, regressão linear baseada no método dos mínimos quadrados pode ser utilizada para identificar esses parâmetros a partir dos resultados experimentais.

A maior fonte de incertezas do modelo de previsão da fluência é a dependência dos parâmetros do modelo em relação à resistência de projeto e da composição do concreto. Essas incertezas podem ser significativamente reduzidas se forem realizados ensaios de curta duração com o concreto especificado, com o subsequente ajuste dos parâmetros do modelo. Para o caso de concretos especiais, tais como os de alta resistência, é de fundamental importância a realização de ensaios de curta duração (1 a 3 meses) de fluência. Os vários tipos de aditivos, de superplastificantes e de materiais pozolânicos usados nesses concretos têm apresentado efeitos significativos na fluência do concreto. Devido à grande variedade de aditivos e das diferentes combinações utilizadas, fórmulas empíricas para representar os efeitos de todos esses materiais nos parâmetros dos modelos são difíceis de formular.

Considera-se que a função específica de fluência foi atualizada somente por dois parâmetros p_1 , p_2 da seguinte forma:

$$J(t, t') = p_1 + p_2 F(t, t') \quad (2.31)$$

Onde:

$$F(t, t') = C_0(t, t') + C_a(t, t, t_0') \quad (2.32)$$

A função é $F(t, t')$ calculada de acordo com o modelo, usando as fórmulas que levam em conta os parâmetros da composição e da resistência do concreto. Se os dados experimentais crescessem da mesma forma que o modelo, o gráfico de $J(t, t')$ versus $F(t, t')$ resultaria exatamente uma linha reta, para todos os valores de t , t' e t_0 . A variação vertical dos pontos experimentais a partir dessa linha reta representa os erros, os quais podem ser considerados aleatórios e são minimizados pela regressão dos mínimos quadrados. Considera-se então o gráfico dos valores conhecidos e medidos nos ensaios de fluência de curta duração de até 28 dias $Y = J(t, t')$ versus os valores

correspondentes de $X = F(t, t')$, calculados a partir do modelo, e passando através desses pontos a reta de regressão $Y = AX + B$. Então a inclinação A e B o ponto de intersecção de Y com a linha, fornecem os valores de p_1 e p_2 que são ótimos no sentido do método dos quadrados mínimos: $A = p_2$ e $B = p_1$. De acordo com as já conhecidas equações da regressão linear dos quadrados dos mínimos, tem-se:

$$p_2 = \frac{n \sum (F_i J_i) - (\sum F_i) (\sum J_i)}{n \sum (F_i^2) - (\sum F_i)^2} \quad (2.33)$$

$$p_1 = \bar{J} - p_2 \bar{F} \quad (2.34)$$

Onde o índice $i = 1, 2, \dots, n$ designa os dados experimentais conhecidos, n é o seu número total, $F = F(t, t')$, $J = J(t, t')$, \bar{J} é a média de todos os valores medidos de J , \bar{F} é a média de todos os correspondentes F . As fórmulas bem conhecidas da regressão linear também propiciam o coeficiente de variação de p_1 e p_2 , que por sua vez fornece o coeficiente de variação de $J(t, t')$ para quaisquer valores de t e t' .

No planejamento de ensaios de curta duração de fluência, deve ser observado que os ganhos na previsão baseada em dados desse ensaio são mais bem sucedidos se as medidas da fluência iniciar o mais breve possível após o carregamento. A razão é que as curvas de fluência são suaves ao longo do tempo. Em qualquer caso, para a previsão de confiança sobre cinco anos de fluência, é recomendado que os testes de curta duração se realizem com pelo menos 28 dias (com a primeira leitura realizada imediatamente após o carregamento e as demais leituras espaçadas igualmente na escala logarítmica para a duração da fluência em horas) (BAŽANT, 2001).

CAPÍTULO 3 MÉTODO DE ANÁLISE INVERSA

3.1 INTRODUÇÃO

O processo de identificação de parâmetros de um dado sistema desenvolve-se em quatro fases distintas: observação do sistema a identificar, elaboração de um modelo matemático, estimativa dos parâmetros e validação do modelo (HENDRIKS, 1991). A Figura 3.1 - Processo de identificação de parâmetros. ilustra o processo.

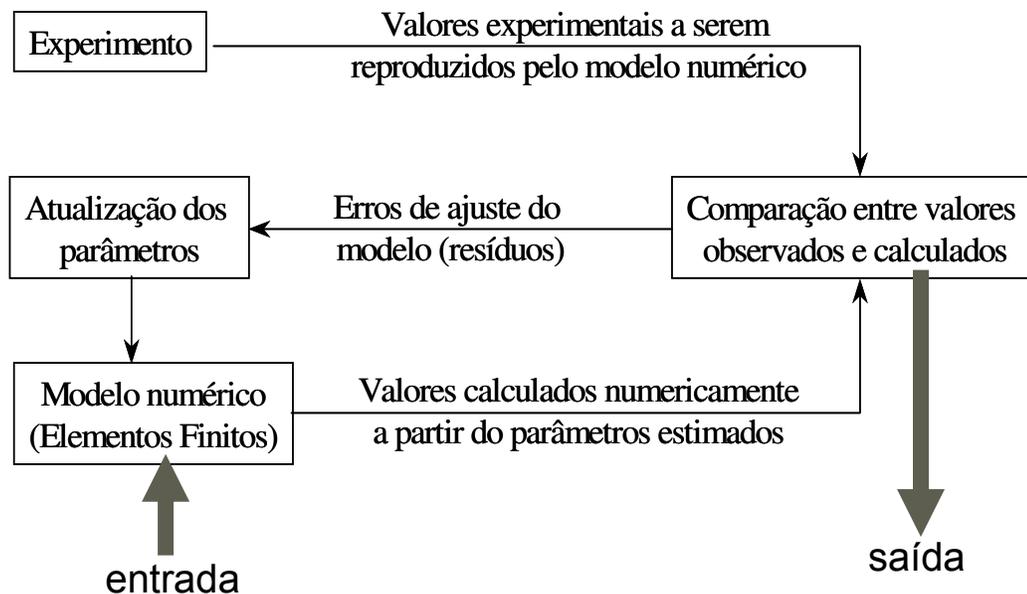


Figura 3.1 - Processo de identificação de parâmetros.

A análise inversa ou problemas de retroanálise podem ser estabelecidos pela abordagem inversa ou pela direta. Na abordagem inversa as equações definidas no modelo são reescritas de modo que alguns sinais de entrada são desconhecidos (parâmetros a identificar) e alguns dados de saída são do problema (medidas experimentais). A abordagem direta utiliza os valores calculados em um modelo matemático, determinados em função dos parâmetros a estimar, estabelecendo-se uma função erro, a qual relaciona os valores medidos e os calculados no modelo.

Nos problemas de análise inversa, que envolvem a determinação de parâmetros, não se deve subestimar as dificuldades para atingir esses objetivos em vista da possível não-unicidade, da instabilidade ou da inexistência de solução, que podem ocorrer nas diferentes classes de problemas. Tais dificuldades indicam os desafios que se colocam para as diversas classes de problemas.

3.2 MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO

Segundo o método de identificação proposto por Hendriks (1991), dois requisitos básicos devem ser satisfeitos:

- disponibilidade de um modelo numérico que forneça uma descrição adequada do comportamento mecânico do material que está sendo analisado. O problema é a determinação quantitativa dos parâmetros do material nessa relação constitutiva;
- disponibilidade de um algoritmo computacional preciso e eficiente para a solução do problema de minimização.

Existe uma diferença importante entre os métodos de identificação e os métodos tradicionais de determinação direta dos parâmetros materiais. Para os métodos de identificação não é necessário que o campo de deformações seja homogêneo em alguma parte do espécime sob investigação. Pelo contrário, é preferível que o campo de deformações seja não homogêneo. Argumentos que justificam esse fato são encontrados em Hendriks (1991), onde se pode destacar que os campos não homogêneos de deformação contêm muito mais informações sobre as propriedades materiais que em espécimes com campos de deformação homogêneos. Entretanto, o uso de campos de deformações não homogêneos leva ao surgimento de três problemas:

- obtenção experimental do campo de deformações não homogêneo para diferentes carregamentos aplicados;
- tratamento dos dados experimentais, realizado numericamente tendo em vista sua complexidade.
- definição de um critério para confrontar resultados experimentais e numéricos e, a partir daí, determinar os parâmetros do material.

A solução dos três problemas acima envolve o método de identificação, conforme esquematizado na Figura 3.1. Medidas de deformação são coletadas no espécime e, a partir de um modelo numérico, por exemplo, método dos elementos finitos, o campo de deformações é determinado em função dos valores dos parâmetros estimados inicialmente. Um algoritmo de minimização dos erros entre os valores medidos e calculados numericamente é então utilizado para o ajuste dos parâmetros estimados.

Procedimentos adequados devem estar disponíveis para análise de resultados de experimentos com materiais não homogêneos, de diversas formas e submetidos a diferentes tipos carregamentos. O método dos elementos finitos é adequado para esse tipo de problema. Uma análise numérica pode ser realizada para um dado conjunto de parâmetros a determinar. Isto significa que valores iniciais dos parâmetros devem ser estimados. Usando um procedimento iterativo, melhores estimativas dos parâmetros são obtidas.

As comparações entre os campos de deformação medidos e calculados devem conduzir a uma determinação quantitativa dos parâmetros materiais desconhecidos. É necessário encontrar um algoritmo que leve a uma rápida convergência aos parâmetros preferivelmente com estimativas confiáveis. No campo da identificação de sistemas isso é um problema bem conhecido de estimação ou reconstrução. O problema de estimação trata da determinação dessas quantidades físicas que não podem ser medidas diretamente das que podem ser medidas

O método de identificação está baseado na combinação de três elementos:

- medidas em quantidade suficiente para caracterizar o campo de deformações sobre uma grande área do espécime ensaiado;
- modelagem numérica via método dos elementos finitos;
- uma técnica que ajusta os parâmetros do material fornecidos ao modelo de elementos finitos, através da comparação entre estes e os dados experimentais.

O terceiro elemento em que se baseia o método de identificação compreende a comparação entre os valores experimentais e aqueles resultantes do modelo de elementos finitos seguida pela atualização da estimativa dos parâmetros materiais. O problema da estimativa de parâmetros pode ser aproximado de forma determinística pelo método dos mínimos quadrados ou através de uma formulação estatística (HENDRIKS, 1991). Neste trabalho será adotada a primeira aproximação.

3.3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ANÁLISE INVERSA

Admitindo-se que os dados das observações sejam agrupados em um conjunto finito de vetores \mathbf{y}_k , $k=1,2,\dots$, onde k representa cada observação e pode ser interpretada como um parâmetro discreto de tempo ou um caso de carregamento no espécime sob investigação. Um vetor $\mathbf{y}_k = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ poderá conter componentes de deslocamentos de pontos materiais, como também outras propriedades medidas, como força, deformação, velocidade e pressão, onde m é o número pontos observados. O comportamento quantitativo do material está representado por um conjunto finito de incógnitas n e agrupadas em um vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Admite-se que existe um algoritmo para calcular \mathbf{y}_k a partir de um dado \mathbf{x} . Esse algoritmo, baseado no método dos elementos finitos, é simbolizado por uma função $h_k(\mathbf{x})$. A função $h_k(\mathbf{x})$ descreve a

dependência das k-ésimas observações sobre \mathbf{x} sob a hipótese de não existissem erros de observação. Esses erros são representados por um vetor \mathbf{v}_k .

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_k \quad (3.1)$$

O vetor \mathbf{x} pode ser chamado de “vetor dos parâmetros” e pode conter, por exemplo, módulo de elasticidade, coeficientes dependentes do tempo, coeficiente de Poisson, coeficientes multiplicadores de carga ou uma função não linear dessas propriedades materiais. É permitido que para cada vetor \mathbf{y}_k se tenha uma função diferente $\mathbf{h}_k(\mathbf{x})$ dependente de \mathbf{x} , indicado pelo índice k. Isso significa que diferentes modelos de elementos finitos devem ser usados, indicados pelo índice k, se o vetores das observações são obtidos a partir de diferentes experimentos. Neste caso, para cada experimento, é utilizado um modelo apropriado de elementos finitos.

Para o caso de dependência linear de \mathbf{x} , a equação (3.1) toma a seguinte forma:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x} + \mathbf{v}_k \quad (3.2)$$

Onde a matriz \mathbf{H}_k é uma matriz prescrita. Em procedimentos recursivos de estimativa, \mathbf{H}_k representa a matriz das medidas. Em análise de regressão estatística, \mathbf{H}_k representa a matriz de regressão e o vetor \mathbf{x} são os coeficientes da regressão (HENDRIKS, 1991).

Têm-se dois aspectos relevantes nos problemas de estimativas de parâmetros. O primeiro está na utilização de valores medidos de deslocamentos \mathbf{y}_k para estimar os parâmetros do vetor \mathbf{x} . A estimativa pode ser feita a partir do modelo matemático das equações (3.1) ou (3.2), ou de um modelo avaliação do vetor de erro \mathbf{v}_k e do conhecimento prévio do vetor \mathbf{x} . O segundo é determinar quão perto o vetor estimado dos parâmetros \mathbf{x}_{est} está do vetor do parâmetros verdadeiro \mathbf{x}_{verd} . Uma vez que o valor

numérico do erro ($\mathbf{x}_{\text{verd}} - \mathbf{x}_{\text{est}}$) não é conhecido, o problema é desenvolver um modelo para a estimativa de ($\mathbf{x}_{\text{verd}} - \mathbf{x}_{\text{est}}$) (HENDRIKS, 1991).

3.4 ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS PELOS MÍNIMOS QUADRADOS GENERALIZADOS

Considere o problema como formulado em (3.1) para uma observação. Um procedimento “generalizado de mínimos quadrados” para se obter uma estimativa do vetor dos parâmetros \mathbf{x} a partir da k -ésima observação é definido como segue. Defina-se uma função positiva ψ_k por:

$$\psi_k = (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\mathbf{x}))^T \mathbf{W}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\mathbf{x})) \quad (3.3)$$

Onde:

\mathbf{W}_k : é uma matriz positiva definida, de pesos.

Por definição, um procedimento para a estimativa do vetor \mathbf{x} é obtido pela minimização de ψ_k em relação a \mathbf{x} . O adjetivo generalizado adotado é para diferenciar do procedimento clássico dos mínimos quadrados que utiliza a matriz \mathbf{W}_k diagonal e em geral igual à matriz identidade, enquanto neste procedimento é possível utilizar uma matriz não diagonal. Não há nenhuma perda de generalidade em escolher \mathbf{W} simétrica. Para o caso não linear, muitos métodos iterativos podem ser encontrados na literatura para minimização de ψ_k tais como os métodos de Newton, do gradiente etc. (LUENBERG, 1989).

Para o caso linear descrito em (3.2), tem-se:

$$\Psi_k = (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x})^T \mathbf{W}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}) \quad (3.4)$$

Expandindo-se a forma quadrática, vem:

$$\Psi_k = \mathbf{y}_k^T \mathbf{W}_k \mathbf{y}_k - 2\mathbf{y}_k^T \mathbf{W}_k \mathbf{H}_k \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k \mathbf{H}_k \mathbf{x}$$

Derivando Ψ_k em relação a \mathbf{x} e igualando a zero, tem-se:

$$\frac{\partial \Psi_k}{\partial \mathbf{x}} = - (2\mathbf{y}_k^T \mathbf{W}_k \mathbf{H}_k \mathbf{x})^T + 2\mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k \mathbf{H}_k \mathbf{x} = 0$$

A solução da equação fornece o valor da estimativa de \mathbf{x} , dada por:

$$\mathbf{x}_k = (\mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k \mathbf{y}_k \quad (3.5)$$

Sem dúvida o \mathbf{x} obtido a partir da equação (3.5) minimiza a função Ψ_k da equação (3.4) pelo fato que:

$$\frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial \mathbf{x}_k^2} = 2\mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k \mathbf{H}_k > 0 \quad (3.6)$$

A relação (3.6) é verdadeira se \mathbf{W}_k for positiva definida, por construção, admitindo-se que \mathbf{H}_k é de posto máximo.

Reescrevendo a equação (3.5),

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k \mathbf{y}_k \quad (3.7)$$

Onde:

$$\mathbf{P}_k = \left(\mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k \mathbf{H}_k \right)^{-1} \quad (3.8)$$

A inversa nas equações (3.7) e (3.8) existe se \mathbf{W}_k é positiva definida, e se a matriz tem posto ($\mathbf{H}_k = n$) (SIEGEL, 1961). Se as medidas são pouco espaçadas, as colunas da matriz \mathbf{H}_k tornar-se-ão muitos similares. Por outro lado se as medidas forem suficientemente espaçadas, o campo de deformação conterà informações suficientes para a estimativa dos parâmetros.

As dimensões dos vetores \mathbf{x}_k e \mathbf{y}_k são respectivamente n (número de parâmetros materiais a serem estimados) e m (número de observações). Se $m < n$, tem-se menor número de equações que incógnitas e, portanto, um sistema de equações indeterminado que não fornecerá um único ou significativo valor para \mathbf{x} . Se $m = n$, tem-se o mesmo número de equações e incógnitas, com o que \mathbf{H}_k é uma matriz quadrada e inversível conforme está mostrado em Hendriks, (1991). Assim sendo, \mathbf{x} pode ser obtido diretamente por:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{y}_k$$

Se $m > n$, há mais equações que incógnitas e o sistema é superdeterminado. Neste caso, que é o mais geral, a solução para o problema de ajuste de parâmetros consiste em encontrar o vetor \mathbf{x}_k que corresponda ao mínimo da função ψ_k vista como uma avaliação do erro entre as os valores calculados e os observados.

3.5 SEQÜÊNCIA PARA ESTIMATIVA DE PARÂMETROS BASEADA EM CONHECIMENTO PRÉVIO DOS PARÂMETROS PARA SISTEMAS LINEARES

A seqüência para estimativa de parâmetros está baseada na condição de conhecimento prévio de um valor para os parâmetros materiais, os quais podem ser obtidos a partir de experimentos anteriores do material em consideração. Um possível procedimento de modelar essas informações é o que segue:

Seja o vetor \mathbf{x}_k uma estimativa prévia de \mathbf{x} ; isto é,

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{\text{verd}} + \mathbf{e}_k$$

Onde:

\mathbf{e}_k : é um vetor da estimativa do erro de \mathbf{x} , de média zero e covariância \mathbf{P}_k .

Dessa forma, pode-se escrever:

$$\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T = (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{\text{verd}}) (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{\text{verd}})^T \quad (3.9)$$

Seja \mathbf{y}_{k+1} um vetor de observções e, de acordo com a equação (3.2), na forma linear, tem-se:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x} + \mathbf{v}_{k+1} \quad (3.10)$$

Onde:

\mathbf{v}_{k+1} : é um vetor com os erros das observações, de média zero e covariância \mathbf{R}_{k+1} .

Utilizando-se o método dos mínimos quadrados é possível combinar as informações nas equações (3.9) e (3.10), isto é:

$$\psi_k = (\mathbf{x}_k - \mathbf{x})^T \mathbf{P}_k^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) + (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1}\mathbf{x})^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1}\mathbf{x}) \quad (3.11)$$

A solução da equação (3.11) é encontrada pela diferenciação da função ψ_k em relação aos parâmetros \mathbf{x}_k e igualando-a a zero, como segue:

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial \mathbf{x}} = -2\mathbf{P}_k^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) - 2\mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1}\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{x}_k - \mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{H}_{k+1}\mathbf{R}_{k+1}^{-1}\mathbf{y}_{k+1} + \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1}\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1}\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{x} = 0$$

Reagrupando os termos:

$$\left(\mathbf{P}_k^{-1} - \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{H}_{k+1} \right) \mathbf{x} = \mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{x}_k + \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1}\mathbf{y}_{k+1}$$

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{P}_k^{-1} - \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{H}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{x}_k + \left(\mathbf{P}_k^{-1} - \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{H}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1}\mathbf{y}_{k+1}$$

Definindo-se:

$$\mathbf{P}_{k+1} = \left(\mathbf{P}_k^{-1} - \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{H}_{k+1} \right)^{-1} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} \mathbf{P}_k^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \quad (3.14)$$

e substituindo na equação acima, tem-se:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{x}_k + \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{x}_k + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{y}_{k+1}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{x}_k + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_k + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{y}_{k+1}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_k + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_k) \quad (3.15)$$

Substituindo-se a equação (3.12) em (3.13), encontra-se a matriz de ponderação ou ganho:

$$\mathbf{K}_{k+1} = (\mathbf{P}_k^{-1} - \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{H}_{k+1})^{-1} \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \quad (3.16)$$

De acordo com a equação (3.14) a matriz de atualização da covariância pode ser calculada por:

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_k \quad (3.17)$$

Para o caso em que a dimensão (m) do vetor \mathbf{y}_k das observações é menor que a (n) do vetor dos parâmetros, cálculos computacionais mais simples podem ser realizados se trocarmos a forma de atualização da matriz de ganho \mathbf{K}_{k+1} , portanto, multiplicando-se os dois lados da equação (3.17) por \mathbf{H}_{k+1}^T , tem-se::

$$\mathbf{P}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^T = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+1}^T - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+1}^T$$

$$\mathbf{P}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+1}^T - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+1}^T$$

Substituindo-se a equação (3.13), na equação acima, tem-se:

$$\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+1}^T = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+1}^T$$

Finalmente encontra-se outra forma de cálculo da matriz de ganho, como:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+1}^T \left(\mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+1}^T \right)^{-1} \quad (3.18)$$

Uma possível modificação que pode ser feita na seqüência de estimativas de parâmetros é colocar mais peso nos novos dados e, no lugar da equação (3.11), pode ser adotada a seguinte forma quadrática:

$$\Psi_k = (\mathbf{x}_k - \mathbf{x})^T (\mathbf{P}_k + \mathbf{Q}_k)^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) + (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x})^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}) \quad (3.19)$$

Na equação acima \mathbf{Q}_k é uma matriz positiva definida e simétrica. É claro que com a introdução de \mathbf{Q}_k torna possível colocar menor peso nas estimativas iniciais \mathbf{x}_k (e mais peso para os novos dados). A escolha exata para \mathbf{Q}_k , que pode ser diferente para cada iteração, não está ainda bem especificada, e a forma usual de encontrar é por tentativa e erro.

A solução da equação (3.19) é encontrada pela diferenciação da função ψ_k em relação aos parâmetros \mathbf{x}_k e igualando-a a zero. Com esse procedimento chega-se a um resultado um pouco diferente para as equações (3.18) e (3.17), como pode ser observado a seguir:

$$\mathbf{K}_{k+1} = (\mathbf{P}_k + \mathbf{Q}_k) \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{H}_{k+1} (\mathbf{P}_k + \mathbf{Q}_k) \mathbf{H}_{k+1}^T)^{-1} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) (\mathbf{P}_k + \mathbf{Q}_k) \quad (3.21)$$

Uma outra forma de atualização da matriz das covariâncias dos parâmetros \mathbf{P}_{k+1} , dada pelas equações (3.17) ou (3.21), pode ser encontrada pela substituição da equação (3.20) em (3.21) e com simplificações algébricas, tem-se:

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) (\mathbf{P}_k + \mathbf{Q}_k) (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{K}_{k+1}^T \quad (3.22)$$

3.6 SEQÜÊNCIA PARA ESTIMATIVA DE PARÂMETROS COM BASE NO CONHECIMENTO PRÉVIO DOS PARÂMETROS PARA SISTEMAS NÃO LINEARES

Seja o modelo dado pela equação abaixo, em que $\mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x})$ é não linear:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_k \quad (3.23)$$

Admitindo-se que seja conhecido o vetor atual $\bar{\mathbf{x}}$ dos parâmetros e para o cálculo das derivadas escreve-se:

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \quad (3.24)$$

Se a derivada é suficientemente pequena o vetor \mathbf{y}_k é dado por:

$$\mathbf{h}_k(\bar{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x}) + \mathbf{v}_k \approx \mathbf{h}_k(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{H}_k \delta \mathbf{x} + \mathbf{v}_k \quad (3.25)$$

Para $\|\delta \mathbf{x}\| \rightarrow 0$, onde a matriz \mathbf{H}_k pode ser obtida pela definição de derivada por:

$$\frac{\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x}) - \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})}{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{H}_k = \left(\frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \quad (3.26)$$

Com a notação:

$$\bar{\mathbf{y}}_k = \mathbf{h}_k(\bar{\mathbf{x}})$$

e

$$\delta \mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \delta \mathbf{x} + \mathbf{v}_k \quad (3.27)$$

Da equação (3.25):

$$\mathbf{y}_k = \bar{\mathbf{y}}_k + \delta \mathbf{y}_k \quad (3.28)$$

Nota-se que a equação (3.27) representa um sistema linear, isto é $\delta \mathbf{y}_k$ depende linearmente de $\delta \mathbf{x}$. A estimativa dos parâmetros para o sistema (3.27) que é similar ao

fornecido por (3.10), pode ser feita de forma análoga àquela fornecida pela equação (3.15), como segue:

$$\delta \mathbf{x}_{k+1} = \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{K}_{k+1} (\delta \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \delta \mathbf{x}_k) \quad (3.29)$$

Onde as matrizes \mathbf{P}_{k+1} e \mathbf{K}_{k+1} são as fornecidas pelas equações (3.17) e (3.18), respectivamente. No lugar da equação (3.29), de atualização das estimativas de $\delta \mathbf{x}$, é preferível que seja em \mathbf{x} , que pode ser obtida como segue.

De acordo com a equação (3.24) e (3.28), tem-se:

$$\delta \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \bar{\mathbf{x}} \quad ; \quad \delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}} \quad \text{e} \quad \delta \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1} - \bar{\mathbf{y}}_{k+1}$$

De acordo com a equação (3.25), tem-se:

$$\mathbf{H}_{k+1} \delta \mathbf{x} \approx \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}_{k+1}(\bar{\mathbf{x}})_k = \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{y}}_{k+1} \quad (3.30)$$

Substituindo-se as equações, acima na equação (3.29), tem-se:

$$\mathbf{x}_{k+1} - \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{y}}_{k+1})$$

Cancelando-se os termos, chega-se na equação de atualização do vetor dos parâmetros como segue:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_k)) \quad (3.31)$$

As equações (3.31), (3.20) e (3.21) representam a linearização do processo de estimativa de parâmetros.

3.7 DETERMINAÇÃO DA MATRIZ H DAS DERIVADAS DAS OBSERVAÇÕES EM RELAÇÃO AOS PARÂMETROS

Para o processo iterativo da estimativa de parâmetros com conhecimento prévio, como descrito nos itens anteriores, faz-se necessária a determinação da matriz \mathbf{H}_k , definida pela equação (3.26), onde cada coluna dessa matriz é formada pelas derivadas dos valores calculados em função dos parâmetros, em relação a cada um deles.

Nos casos estudados, que seguem a equação (3.1), as observações representadas pelo vetor \mathbf{y}_k podem ser os deslocamentos e/ou as deformações, o vetor \mathbf{x} dos parâmetros podem ser as constantes dos materiais para o caso de identificação dos parâmetros materiais ou os coeficientes multiplicativos das cargas aplicadas, para o caso de ajuste dos coeficientes de cargas. A resposta do modelo estrutural adotado em função dos parâmetros é representada pela função $\mathbf{h}_k(\mathbf{x})$. Para o caso em que foi adotado o modelo de cálculos pelo método dos elementos finitos, as seguintes igualdades são válidas:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{h}_k(\mathbf{x}) &= \mathbf{d}_k(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}_k(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}_k(\mathbf{x}) &= (\mathbf{d}_k(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x}))^T \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Onde:

\mathbf{d}_k : é o vetor com as componentes dos deslocamentos calculados em função dos parâmetros, nos mesmos pontos dos medidos na observação k ;

$\boldsymbol{\varepsilon}_k$: é o vetor com as componentes das deformações calculadas em função dos parâmetros, nos mesmos pontos das medidas na observação k;

n: número de parâmetros;

Com a equação (3.32) pode-se reescrever a equação (3.26) da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_k = \left(\frac{\partial \mathbf{d}_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{d}_k(\mathbf{x})}{\partial x_{k1}}, \frac{\partial \mathbf{d}_k(\mathbf{x})}{\partial x_{k2}}, \dots, \frac{\partial \mathbf{d}_k(\mathbf{x})}{\partial x_{kn}} \right\}$$

$$\mathbf{H}_k = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k} = \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x})}{\partial x_{k1}}, \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x})}{\partial x_{k2}}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x})}{\partial x_{kn}} \right\}$$

$$\mathbf{H}_k = \left(\frac{\partial (\mathbf{d}_k(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x}))^T}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{d}_k(\mathbf{x})}{\partial x_{k1}} + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x})}{\partial x_{k1}}, \dots, \frac{\partial \mathbf{d}_k(\mathbf{x})}{\partial x_{kn}} + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x})}{\partial x_{kn}} \right\}$$

3.8 SUMÁRIO

As equações básicas para identificação dos parâmetros a partir de valores prévios são sintetizadas. Para problemas não lineares as seguintes equações de atualização são usadas:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_k)) \quad (3.33)$$

Onde k é a variável de ordenação das observações. A diferença $\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_k)$ representa a nova informação. Essa diferença é multiplicada pela matriz de ganho \mathbf{K}_{k+1} , dada por:

$$\mathbf{K}_{k+1} = (\mathbf{P}_k + \mathbf{Q}_k) \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{H}_{k+1} (\mathbf{P}_k + \mathbf{Q}_k) \mathbf{H}_{k+1}^T)^{-1} \quad (3.34)$$

Ou alternativamente pode-se utilizar a equação (3.16), dada por:

$$\mathbf{K}_{k+1} = (\mathbf{P}_k^{-1} - \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{H}_{k+1})^{-1} \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \quad (3.35)$$

A matriz \mathbf{P}_k na equação (3.34) é atualizada pela equação (3.22), dada por:

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) (\mathbf{P}_k + \mathbf{Q}_k) (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1})^T + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{K}_{k+1}^T \quad (3.36)$$

Ou alternativamente para atualização de equação (3.35), deve-se utilizar a equação (3.17), dada por:

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_k \quad (3.37)$$

Os valores iniciais de \mathbf{x}_0 e \mathbf{P}_0 e das matrizes pesos \mathbf{Q}_k e \mathbf{R}_k para $k = 1, \dots, n$ devem ser especificados. As equações acima definem o modelo de estimativa de parâmetros a partir dos mínimos quadrados.

Uma orientação para escolha de \mathbf{P}_0 é tal que os elementos da diagonal principal não devem ser muito menores que o quadrado do maior erro inicial que deverá ser não

singular (HENDRIKS, 1991). Geralmente grande valores de \mathbf{P}_0 , resultam em pequenas influências em \mathbf{x}_0 .

\mathbf{R}_k representa a matriz da covariância dos erros das observações \mathbf{y}_k . Admiti-se que os ruídos em todas as observações são suaves. Note-se que a covariância \mathbf{R}_k é entre todos os ruídos variáveis para uma dada observação \mathbf{y}_k , e não descreve correlação entre observações sucessivas.

Na prática \mathbf{Q}_k previne que o erro da covariância dos parâmetros \mathbf{P}_k torne-se muito pequeno. Recomenda-se escolher \mathbf{Q}_k pequeno, mas não igual a zero, mesmo se o modelo é perfeito (apud HENDRIKS, 1991).

CAPÍTULO 4 FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

4.1 INTRODUÇÃO

A tradicional formulação por elementos finitos pode ser reduzida a um problema de minimização da energia potencial total, definida nos termos de um número finito de parâmetros nodais (ZIENKIEWICZ, 2000).

O objetivo aqui é equacionar, em termos de energia potencial total, o problema no estado plano de tensão ou de deformação para um material com comportamento elástico linear, utilizando-se um elemento triangular com deformação constante, conhecido na literatura como CST ("*constant strain triangle*"), para materiais isotrópicos ou ortotrópicos.

4.2 LEI DE HOOKE

Para o comportamento do material elástico linear é adotada a relação entre as tensões e deformações estabelecida pela Lei de Hooke generalizada, conforme a equação (2.1), e que pode ser escrita na forma matricial da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.1)$$

Onde:

$\boldsymbol{\sigma}$: vetor das tensões para estado plano;

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

ε : vetor das deformações para estado plano;

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

D : matriz com as propriedades dos materiais;

$$D = h_0 \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 \\ h_{12} & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} \end{bmatrix}$$

Onde:

h_0 , h_{11} , h_{12} , h_{22} e h_{33} : constantes com as propriedades dos materiais ajustadas para o estado plano de tensão ou de deformação.

4.2.1 ESTADO PLANO DE TENSÃO

Para o caso do estado plano de tensão as constantes h_0 , h_{11} , h_{12} , h_{22} e h_{33} são dadas pelas expressões indicadas a seguir para os casos de materiais isotrópicos e ortotrópicos.

4.2.1.1 MATERIAL ISOTRÓPICO

Da equação (2.18), tem-se:

$$h_0 = \frac{E}{(1 - \nu^2)} ; h_{11} = h_{22} = 1 ; h_{12} = \nu , h_{33} = \frac{(1 - \nu)}{2}$$

4.2.1.2 MATERIAL ORTOTRÓPICO

Da equação (2.16), tem-se:

$$h_0 = \frac{1}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} ; h_{11} = E_1^2 ; h_{12} = \nu_{12} E_1 E_2$$

$$h_{22} = \frac{E_2}{E_1} ; h_{33} = G_{12} (E_1 - \nu_{12}^2 E_2)$$

4.2.2 ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO

Já para o caso do estado plano de deformação as constantes h_0 , h_{11} , h_{12} , h_{22} e h_{33} são definidas como indicado a seguir.

4.2.2.1 MATERIAL ISOTRÓPICO

Da equação (2.22), tem-se:

$$h_0 = \frac{E(1 - \nu)}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} ; h_{11} = h_{22} = 1$$

$$h_{12} = \frac{\nu}{1 - \nu} ; h_{33} = \frac{(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)}$$

4.2.2.2 MATERIAL ORTOTRÓPICO

Da equação (2.20), tem-se:

$$h_0 = \frac{E_1}{(1 + \nu_{12})(E_2 - E_2\nu_{12} - 2E_1\nu_{12}^2)}$$

$$h_{11} = (E_2 - E_1\nu_{12}^2) ; h_{22} = \frac{E_2^2}{E_1}(1 - \nu_{12}^2)$$

$$h_{33} = \frac{G_{12}}{E_1}(1 + \nu_{12})(E_2 - E_2\nu_{12} - 2E_1\nu_{12}^2)$$

4.3 EQUAÇÕES DE DESLOCAMENTOS NO PLANO

A Figura 4.1 apresenta o típico elemento triangular considerado, com nós i, j, k numerado no sentido anti-horário.

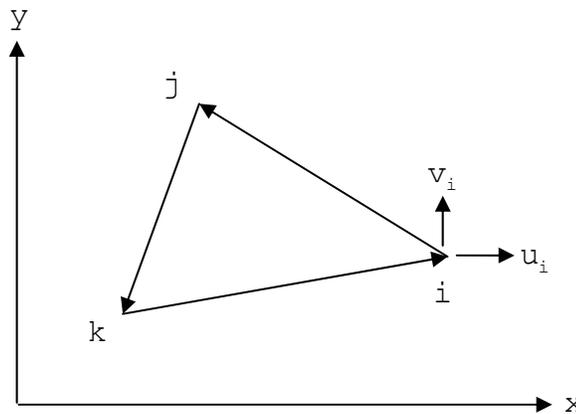


Figura 4.1 – Típico elemento triangular.

Os vetores deslocamentos \mathbf{u} e \mathbf{v} de qualquer ponto do elemento no plano são definidos de forma única pelas equações vetoriais a seguir:

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y} + c_3 \tag{4.2}$$

$$\mathbf{v} = c_4 \mathbf{x} + c_5 \mathbf{y} + c_6 \quad (4.3)$$

As constantes c_1, c_2, \dots, c_6 , podem ser obtidas em função das coordenadas (x_i, y_i) , (x_j, y_j) e (x_k, y_k) dos nós do elemento. As três primeiras constantes c_1, c_2, c_3 da equação (4.2) são obtidas a partir da equação matricial apresentada seguir:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Resolvendo a equação acima encontram-se os valores das constantes, ou seja:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (y_j - y_k) & (y_k - y_i) & (y_i - y_j) \\ (x_k - x_j) & (x_i - x_k) & (x_j - x_i) \\ (x_j y_k - x_k y_j) & (x_k y_i - x_i y_k) & (x_i y_j - x_j y_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix}$$

Onde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} = (x_j y_k - x_k y_j) + (x_k y_i - x_i y_k) + (x_i y_j - x_j y_i)$$

Sendo que:

Δ : representa o dobro da área do elemento de nós i, j, k .

Com um procedimento similar ao apresentado, podem-se determinar as constantes c_i da equação (4.3) que representa o deslocamento vertical, verificando-se que:

$$C_1 = C_4 \ ; \ C_2 = C_5 \ ; \ C_3 = C_6$$

Reescrevendo de forma matricial tem-se:

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\Delta} \mathbf{C}\mathbf{u} \quad \text{ou} \quad \mathbf{c} = \frac{1}{\Delta} \mathbf{C}\mathbf{v} \tag{4.4}$$

Onde:

\mathbf{C} é a matriz para a determinação das constantes c_i das equações (4.2) e (4.3), a partir das coordenadas dos nós dos elementos;

\mathbf{u} e \mathbf{v} : deslocamento dos nós.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (Y_j - Y_k) & (Y_k - Y_i) & (Y_i - Y_j) \\ (x_k - x_j) & (x_i - x_k) & (x_j - x_i) \\ (x_j Y_k - x_k Y_j) & (x_k Y_i - x_i Y_k) & (x_i Y_j - x_j Y_i) \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

4.4 DEFORMAÇÕES

A partir das equações (4.2) e (4.3) dos deslocamentos em função das coordenadas nodais, obtêm-se as deformações no elemento, como:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = c_1$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = c_2$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = c_2 + c_1$$

Substituindo c_1 e c_2 a partir da equação (4.4), tem-se:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{\Delta} (c_{11}u_i + c_{12}u_j + c_{13}u_k)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{\Delta} (c_{21}v_i + c_{22}v_j + c_{23}v_k)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{\Delta} (c_{21}u_i + c_{22}u_j + c_{23}u_k) + \frac{1}{\Delta} (c_{11}v_i + c_{12}v_j + c_{13}v_k)$$

Onde: c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{21} , c_{22} e c_{23} são componentes da matriz \mathbf{C} , da equação (4.5).

Reescrevendo as equações acima em forma matricial obtém-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\Delta} \mathbf{M}\mathbf{d} \tag{4.6}$$

Onde:

M: matriz com as componentes de C agrupadas de forma adequada;

d: vetor com as componentes de deslocamentos dos nós do elemento.

$$M = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{12} & 0 & c_{13} & 0 \\ 0 & c_{21} & 0 & c_{22} & 0 & c_{23} \\ c_{21} & c_{11} & c_{22} & c_{12} & c_{23} & c_{13} \end{bmatrix} ; d = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

A equação (4.6) pode ser expandida na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{12} & 0 & c_{13} & 0 \\ 0 & c_{21} & 0 & c_{22} & 0 & c_{23} \\ c_{21} & c_{11} & c_{22} & c_{12} & c_{23} & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

4.5 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Para o caso de materiais com comportamento elástico linear, pode-se calcular a energia de deformação de um elemento plano com a expressão mostrada a seguir:

$$\phi = \frac{1}{2} \int_v \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dv = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\Delta}{2} t$$

Onde:

ϕ : representa a energia de deformação;

t: espessura do elemento.

Substituindo na equação acima a tensão dada pela lei de Hooke (4.1) e a deformação dada pela equação (4.6), tem-se:

$$\phi = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta} (\mathbf{M}\mathbf{d})^T \frac{1}{\Delta} \mathbf{D}\mathbf{M}\mathbf{d} \frac{\Delta}{2} t = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \left(\frac{t}{2\Delta} \mathbf{M}^T \mathbf{D}\mathbf{M} \right) \mathbf{d}$$

Chamando de \mathbf{S} a matriz de rigidez do elemento, dada por:

$$\mathbf{S} = \frac{t}{2\Delta} (\mathbf{M}^T \mathbf{D}\mathbf{M}) \quad (4.7)$$

Substituindo \mathbf{S} na equação acima, tem-se:

$$\phi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{S}\mathbf{d} \quad (4.8)$$

4.6 FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES

Seja \mathbf{q}^e um vetor com as componentes das forças equivalentes aplicadas nos nós do elemento estaticamente equivalente às forças de massa e as aplicadas no elemento, que deve conter o mesmo número e direções das componentes do vetor de deslocamentos do elemento \mathbf{d} .

No caso particular do estado plano de tensão as forças nodais são, por exemplo:

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} q_{ix} \\ q_{iy} \\ q_{jx} \\ q_{jy} \\ q_{kx} \\ q_{ky} \end{Bmatrix}$$

Onde q_{ix} representa a força nodal no nó i e na direção x , e assim sucessivamente.

Seja um deslocamento virtual igual a $\delta \mathbf{d}$ aplicado aos nós dos elementos e substituindo-o nas equações (4.2) e (4.3) dos deslocamentos e na equação (4.6) das deformações, resulta em:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{C} \delta \mathbf{d} \quad \text{e} \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\Delta} \mathbf{M} \delta \mathbf{d}$$

Igualando-se o trabalho externo realizado pelas forças nodais ao trabalho interno realizado pelas forças internas, tem-se:

$$\delta \mathbf{d}^T \mathbf{q}^e = \int_{\text{vol}} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\text{vol}$$

Substituindo na equação acima os valores dados pelas equações (4.1) e (4.6), tem-se:

$$\delta \mathbf{d}^T \mathbf{q}^e = \int_{\text{vol}} \left(\left(\frac{1}{\Delta} \mathbf{M} \delta \mathbf{d} \right)^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \right) d\text{vol} = \int_{\text{vol}} \left(\left(\frac{1}{\Delta} \mathbf{M} \delta \mathbf{d} \right)^T \mathbf{D} \left(\frac{1}{\Delta} \mathbf{M} \mathbf{d} \right) \right) d\text{vol}$$

Para os problemas no estado plano de tensão ou deformação, em que o material tem comportamento elástico linear, tem-se:

$$\delta \mathbf{d}^T \mathbf{q}^e == \delta \mathbf{d}^T \frac{1}{\Delta} \mathbf{M}^T \mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{d} \frac{1}{2\Delta} \Delta t = \delta \mathbf{d}^T \left(\frac{t}{2\Delta} \mathbf{M}^T \mathbf{D} \mathbf{M} \right) \mathbf{d}$$

Substituindo-se a expressão (4.7) na equação acima, e simplificando-a, encontra-se a equação de equilíbrio do elemento, como mostrada a seguir:

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{S} \mathbf{d} \tag{4.9}$$

A extensão do equilíbrio do elemento para o corpo todo pode ser realizada através de procedimentos estruturais simples apresentados em Zienkiewicz (2000) e, para o caso elástico linear, encontra-se o sistema linear de equações representado a seguir na forma matricial:

$$\bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{a} \tag{4.10}$$

Onde:

$\bar{\mathbf{S}}$: é a matriz de rigidez global da estrutura, obtida pela contribuição ($\bar{\mathbf{S}} = \sum_1^{ne} \mathbf{S}$) das matrizes \mathbf{S} de todos os elementos;

ne: número de elementos;

$\bar{\mathbf{d}}$: vetor dos deslocamentos nodais independentes;

\mathbf{a} : vetor forças externas aplicadas nos nós do elementos, para compatibilidade, deve ter a mesma dimensão de $\bar{\mathbf{d}}$.

4.7 DERIVADAS DOS DESLOCAMENTOS EM RELAÇÃO AOS PARÂMETROS

4.7.1 INTRODUÇÃO

Conforme visto no Capítulo 3, na resolução dos problemas de análise inversa para a determinação dos parâmetros das estruturas, são necessários os cálculos das derivadas dos deslocamentos em relação a esses parâmetros.

O método dos elementos finitos, que está sinteticamente representado pela equação (4.10) fornece os deslocamentos em função dos parâmetros. Assim, derivando-se esta equação em relação aos parâmetros obtêm-se a derivada dos deslocamentos em relação aos parâmetros, como segue:

$$\frac{\partial}{\partial p_k} (\bar{\mathbf{s}}\bar{\mathbf{d}}) = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial p_k} \Rightarrow \frac{\partial \bar{\mathbf{s}}}{\partial p_k} \bar{\mathbf{d}} + \bar{\mathbf{s}} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}}{\partial p_k} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial p_k}$$

Reagrupando, tem-se:

$$\bar{\mathbf{s}} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}}{\partial p_k} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial p_k} - \frac{\partial \bar{\mathbf{s}}}{\partial p_k} \bar{\mathbf{d}} \quad (4.11)$$

Da equação acima pode-se observar o seguinte:

- no caso do vetor \mathbf{a} representar as componentes das forças externas e estas são conhecidas, tem-se: $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial p_k} = \mathbf{0}$;
- na identificação dos coeficientes multiplicadores das cargas, as quais não contribuem na matriz de rigidez, pode-se concluir que $\frac{\partial \bar{\mathbf{s}}}{\partial p_k} = \mathbf{0}$;
- para o caso linear ou linear por partes, a equação (4.11) leva a um sistema de equações lineares para cada parâmetro.

Antes de resolver o sistema dado pela equação (4.11) é necessária a obtenção das derivadas da matriz de rigidez $\bar{\mathbf{s}}$ com relação a cada parâmetro.

4.7.2 DERIVADA DA MATRIZ DE RIGIDEZ PARA O CASO DE MATERIAIS ELÁSTICOS LINEARES

Lembrando que $\bar{\mathbf{s}} = \sum_1^{ne} \mathbf{s}$, e substituindo na expressão da derivada da matriz de rigidez da equação (4.11), tem-se:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{s}}}{\partial p_k} = \frac{\partial \sum_1^{ne} \mathbf{s}}{\partial p_k} = \sum_1^{ne} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial p_k} \quad (4.12)$$

Da equação (4.12) pode-se concluir que a partir das derivadas da matriz de rigidez dos elementos em relação aos parâmetros é obtida a derivada da matriz global de rigidez em relação aos mesmos, com o procedimento semelhante ao da montagem da matriz de rigidez global

No caso de materiais elásticos a matriz de rigidez do elemento é dada pela equação (4.7), e derivando-se em relação aos parâmetros, obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{t}{2\Delta} (\mathbf{M}^T \mathbf{D} \mathbf{M}) \right) = \frac{t}{2\Delta} \left(\mathbf{M}^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial p_k} \mathbf{M} \right) \quad (4.13)$$

Como \mathbf{M} é a matriz geométrica e não depende dos parâmetros, a derivada é feita somente para os elementos de \mathbf{D} , matriz dos parâmetros materiais. Dessa forma, tantas serão as derivadas da matriz de rigidez, quantos forem os parâmetros.

4.7.2.1 ESTADO PLANO DE TENSÃO - DERIVADAS DA MATRIZ D DOS MATERIAIS ISOTRÓPICOS

Derivando a equação (2.18) que fornece a matriz \mathbf{D} em relação ao módulo de elasticidade E, tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial E} = \frac{1}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu^2}{2(1 + \nu)} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Agora com relação ao coeficiente de Poisson ν , tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \nu} = \frac{E}{(1 - \nu^2)^2} \begin{bmatrix} 2\nu & (1 + \nu^2) & 0 \\ (1 + \nu^2) & 2\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(1 - \nu^2)^2}{2(1 + \nu)^2} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

4.7.2.2 ESTADO PLANO DE TENSÃO - DERIVADAS DA MATRIZ D DOS MATERIAIS ORTOTRÓPICOS

Derivando a equação (2.16), apresentada abaixo, que fornece a matriz **D** em relação aos parâmetros E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12} , tem-se:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \begin{bmatrix} E_1^2 & \nu_{12} E_1 E_2 & 0 \\ \nu_{12} E_1 E_2 & E_1 E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} (E_1 - \nu_{12}^2 E_2) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial E_1} = \frac{1}{[E_1 - \nu_{12}^2 E_2]^2} \begin{bmatrix} (E_1^2 - 2\nu_{12}^2 E_1 E_2) & -\nu_{12}^3 E_2^2 & 0 \\ -\nu_{12}^3 E_2^2 & -\nu_{12}^2 E_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial E_2} = \frac{1}{[E_1 - \nu_{12}^2 E_2]^2} \begin{bmatrix} \nu_{12}^2 E_1^2 & \nu_{12}^2 E_1^2 & 0 \\ \nu_{12}^2 E_1^2 & E_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \nu_{12}} = \frac{1}{[E_1 - \nu_{12}^2 E_2]^2} \begin{bmatrix} 2\nu_{12} E_1^2 E_2 & E_1^2 E_2 + \nu_{12}^2 E_1 E_2^2 & 0 \\ E_1^2 E_2 + \nu_{12}^2 E_1 E_2^2 & 2\nu_{12} E_1 E_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial G_{12}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

4.7.2.3 ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO - DERIVADAS DA MATRIZ **D** DOS MATERIAIS ISOTRÓPICOS

Derivando a equação (2.22) que fornece a matriz **D** em relação ao módulo de elasticidade E, tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial E} = \frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Agora com relação ao coeficiente de Poisson ν , tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \nu} = \frac{E}{(1 + \nu)^2 (1 - 2\nu)^2} \begin{bmatrix} 2\nu(2 - \nu) & & 0 \\ (2\nu^2 + 1) & \frac{2\nu}{(2 - \nu)} & 0 \\ 0 & 0 & -2(1 - 2\nu)^2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

4.7.2.4 ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO - DERIVADAS DA MATRIZ **D** DOS MATERIAIS ORTOTRÓPICOS

Derivando a equação (2.19) que fornece a matriz **D** em relação aos parâmetros $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$, tem-se:

Derivada da matriz **D** em relação a E_1 :

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial E_1} = d_k \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Onde:

$$d_k = \frac{1}{(1 + \nu_1) (E_2 - E_2 \nu_1 - 2E_1 \nu_2^2)^2}$$

$$d_{11} = (E_2^2) (1 - \nu_{12}) - 2E_1 E_2 (\nu_{12}^2 - \nu_{12}^3) + 2E_1^2 \nu_{12}^3$$

$$d_{12} = -\nu \left[(E_2^2) (\nu_{12} - 1) + 2E_1 E_2 (\nu_{12}^2 - \nu_{12}) + 2E_1^2 \nu_{12}^3 \right]$$

$$d_{22} = 2E_2^2 \nu_{12}^2 (1 - \nu_{12}^2)$$

$$d_{33} = G_{12} (\nu_{12} + 1) E_2 \frac{\nu_{12} - 1}{E_1^2} \frac{1}{d_k}$$

Derivada de \mathbf{D} em relação a E_2 :

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial E_2} = d_k \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Onde:

$$d_k = \frac{1}{(E_2 - E_2 v_1 - 2E_1 v_2^2)^2}$$

$$d_{11} = (-E_1^2) v_{12}^2$$

$$d_{12} = (-E_1^2) v_{12}^2$$

$$d_{22} = \frac{(v_{12}^2 - 1)(-E_2^2) + E_2^2 v_{12} + E_1 E_2 v_{12}^2}{(1 + v_{12})}$$

$$d_{33} = G_{12} (v_{12} + 1) E_2^2 \frac{v_{12} - 1}{E_1} \frac{1}{d_k}$$

Derivada de **D** em relação a v_{12} :

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial v_{12}} = d_k \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Onde:

$$d_k = \frac{1}{(1 + v_{12})^2 (E_2 - E_2 v_{12} - 2E_1 v_{12}^2)^2}$$

$$d_{11} = (-2E_1) v_{12} \left[(-E_2^2) - 3E_1 E_2 v_{12} + E_1^2 v_{12}^3 - E_1 E_2 \right]$$

$$d_{12} = E_1 \left[E_2^2 (v_{12}^2 + 1) + 2E_1 E_2 (2v_{12}^3 + v_{12}^2 + v_{12}) + 2E_1 v_{12}^2 \right]$$

$$d_{22} = (-2E_2^2) v_{12} (v_{12}^2 - 1) (E_2 + 3E_1 v_{12} + 2E_1)$$

$$d_{33} = (-2) G_{12} v_{12} \frac{E_2 + 3E_1 v_{12} + 2E_1}{E_1} \frac{1}{d_k}$$

Derivada de **D** em relação a G_{12} :

$$d_{33} = (v - 1) \frac{E_2 (v - 1) + 2E_1 v^2}{E_1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial G_{12}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

4.7.2.5 ESTADO PLANO - DERIVADAS DA MATRIZ T DE TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Derivando a equação (2.23) que fornece a matriz **T** em relação ao ângulo de ortotropia, tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -\text{sen}(2\varphi) & \text{sen}(2\varphi) & \cos(2\varphi) \\ \text{sen}(2\varphi) & -\text{sen}(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \\ -2\cos(2\varphi) & 2\cos(2\varphi) & -2\text{sen}(2\varphi) \end{bmatrix}$$

Ou

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \varphi} = \frac{1}{1 + \text{tg}(\varphi)^2} \begin{bmatrix} -2\text{tg}(\varphi) & 2\text{tg}(\varphi) & -2(\text{tg}(\varphi)^2 - 1) \\ 2\text{tg}(\varphi) & -2\text{tg}(\varphi) & 2(\text{tg}(\varphi)^2 - 1) \\ (\text{tg}(\varphi)^2 - 1) & -(\text{tg}(\varphi)^2 - 1) & -4\text{tg}(\varphi) \end{bmatrix}$$

4.7.2.6 DERIVADAS DAS DEFORMAÇÕES EM RELAÇÃO AOS PARÂMETROS

Derivando a equação (4.6) das deformações para o estado plano em relação aos parâmetros, tem-se:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial p_k} = \frac{1}{\Delta} \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial p_k} \quad (4.26)$$

Da equação acima, pode-se concluir que as derivadas das deformações de um determinado elemento em relação aos parâmetros são obtidas a partir das derivadas dos deslocamentos nodais do referido elemento.

4.7.2.7 DERIVADAS DO VETOR A EM RELAÇÃO AOS COEFICIENTES DE CARGA

Da equação (4.10) do método dos elementos finitos, o vetor \mathbf{a} pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, \gamma_i a_i, \dots, \gamma_j a_j, \dots, \gamma_n a_n]^T \quad (4.27)$$

Onde:

γ_i : representa os coeficientes multiplicadores das cargas que se deseja estimar.

Derivando-se a equação (4.27) em relação aos coeficientes de carga, encontra-se:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \gamma_i} = a_k \quad (4.28)$$

Da equação acima, pode-se concluir que as derivadas do vetor de carga em relação aos coeficientes multiplicadores resultam na própria carga que está sendo multiplicada.

CAPÍTULO 5 IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS ESTRUTURAIS

5.1 INTRODUÇÃO

A utilização dos métodos de estimativas de parâmetros em estruturas está condicionada, em parte, pela possibilidade de usar modelos complexos com a metodologia exposta no capítulo 3. Para tanto, é conveniente que esta metodologia possa ser aplicada ao problema inverso utilizando-se técnicas similares às utilizadas na resolução dos problemas diretos. Na maioria dos casos as condições de contorno são tais que não permitem uma solução analítica do problema formulado. Por este motivo, os métodos numéricos de cálculo, em particular o método dos elementos finitos, têm sido muito utilizados em engenharia estrutural. A versatilidade deste método permite resolver problemas com geometrias gerais e, em princípio, com qualquer modelo de comportamento do material.

A possibilidade de utilização prática dos modelos de estimativas de parâmetros passa, portanto, por sua formulação acoplada ao método dos elementos finitos, para a identificação dos parâmetros em estruturas.

5.2 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Os módulos de estimativas de parâmetros são acoplados ao programa de elementos finitos para os estados planos de tensão e deformação, formulado por Arcaro (2006), o qual resolve o problema de equilíbrio da estrutura, fornecendo os deslocamentos calculados. Os módulos de estimativas são responsáveis pela minimização da função erro estabelecida entre os valores calculados e os observados, sejam estes deslocamentos ou deformações.

A Figura 5.1 apresenta, de forma resumida, os principais passos do programa computacional desenvolvido. Uma descrição de cada segmento é realizada segundo a numeração colocada ao lado da caixa de instrução, como segue:

1. Entrada dos dados da estrutura como: tipo de estado de plano, tipo de material, coordenadas, incidências, restrições, cargas.
2. Entrada dos dados referentes à estimativa de parâmetros tais como: definição e número de parâmetro a serem estimado (materiais ou de cargas) e tipo de observações (deslocamentos ou deformações).
3. Fornecimento dos parâmetros iniciais x_0 , das matrizes de covariância P_0 e R_0 e da matriz de peso Q_0 .
4. Procedimento de cálculo da matriz que compatibiliza na mesma posição os valores calculados e os observados.
5. Leitura do número e valores das observações (deslocamentos ou deformações).
6. Procedimento de atualização dos parâmetros para uma nova iteração com a mesma observação.
7. Procedimento de cálculo dos deslocamentos, deformações e tensões na estrutura pelo método dos elementos finitos.
8. Procedimento de obtenção das derivadas das grandezas calculadas (deslocamentos e/ou deformações) em relação a cada parâmetro a ser estimado.
9. Rotinas de estimativas dos parâmetros, a saber:
 - **par_displ** – observações são deslocamentos e os parâmetros são os do material;
 - **par_strain** – observações são deformações e os parâmetros são os do material;

- **par_load** – observações podem ser tanto deslocamentos como deformações e os parâmetros são os de carga.

10. Impressão final dos resultados obtidos

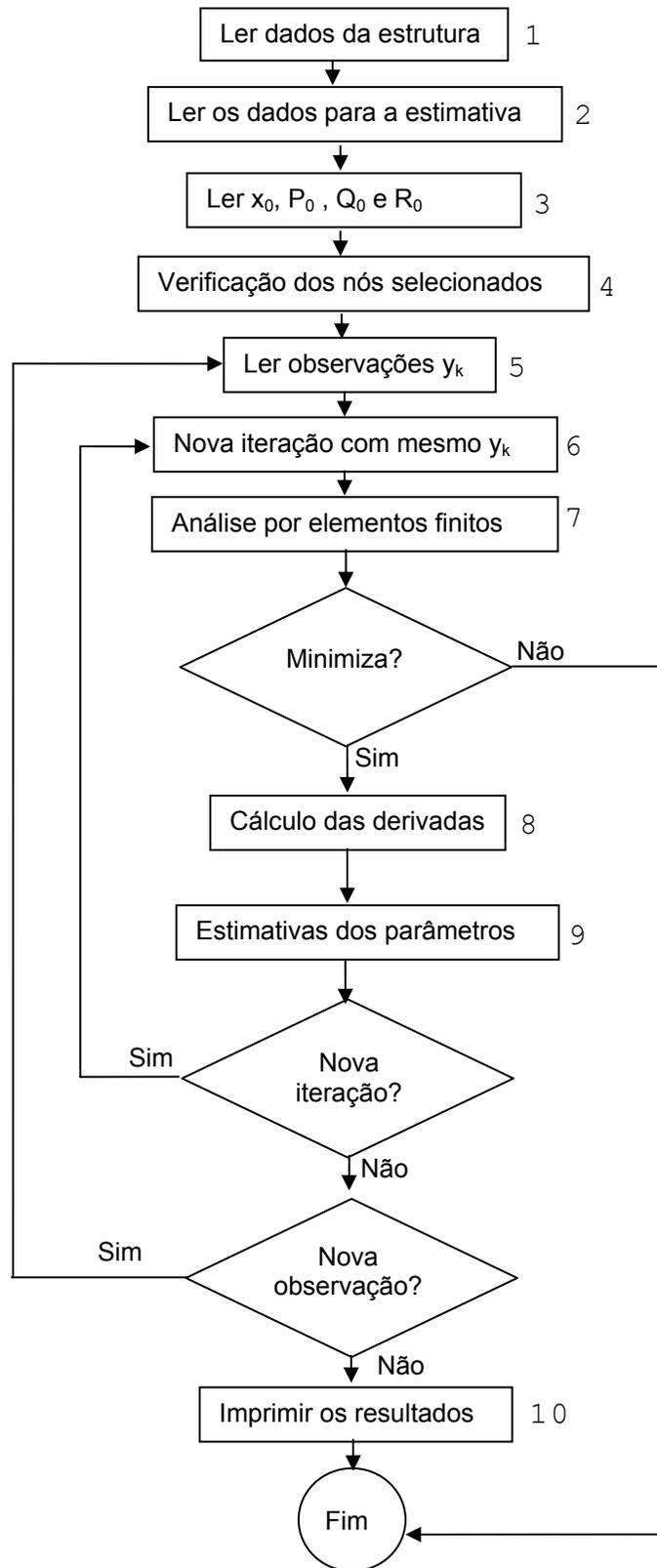


Figura 5.1 - Fluxograma resumido do programa computacional.

5.3 FORMATO DO ARQUIVO DE ENTRADA

O arquivo de entrada de dados do programa deve ser escrito em um arquivo tipo texto em formato txt, organizado como exemplificado abaixo, onde cada linha deve conter a informações que aparecem em negrito, podendo ser string ou numéricas, as explicações estão apresentadas em texto itálico, como segue:

tipo_de_material *[isotrópico ou ortotrópico]*

tipo_de_estado_plano *[strain ou stress]*

nj ne nr nrj t young1 young2 poisson g12 fi qx qy gamma

nj: número de nós da estrutura

ne: número de elementos da estrutura

nr: número de restrições

nrj: número de nós com restrições

t: espessura

young1: módulo de elasticidade na direção 1

young2: módulo de elasticidade na direção 2

g12: módulo de deformação transversal

fi: ângulo de rotação do plano das tensões

qx: Pressão na direção X

qy: pressão na direção Y

gamma: peso específico do material

j x y

j: nº do nó

.....

x: coordenado do nó em x

Repetir nj vezes

j x y	<i>y: coordenada do nó em y</i>	
j ii jj kk	<i>ii: n^o do nó</i>	Repetir ne vezes
.....	<i>jj: n^o do nó</i>	
j ii jj kk	<i>kk: n^o do nó</i>	
j rx ry	<i>nós com restrição</i>	Repetir nrj vezes
.....	<i>ry: [1 ou 0]</i>	
j rx ry	<i>ry: [1 ou 0]</i>	
nlj nle	<i>nlj: n^o de nós carregados</i>	
j ax ay	<i>nle: n^o de elem. carregados</i>	Repetir nlj vezes
.....	<i>ax: ação em x</i>	
j ax ay	<i>ay: ação em y</i>	
e gx gy	<i>e: n^o do elemento</i>	Repetir nle vezes
.....	<i>gx: carga na dir x</i>	
e gx gy	<i>gy: carga na dir y</i>	
j dx dy	<i>deslocamentos impedidos</i>	
.....	<i>dx: valor em x</i>	Repetir nr vezes
j dx dy	<i>dy: valor em y</i>	
fazer_minimização:	<i>[false/true]</i>	
tipo_de_estimativa:	<i>[par_dipl; par_strain; par_load]</i>	
precisão adotada	<i>maior de 10⁻⁰⁴</i>	
número_de_P p1 p2 ... pn	<i>n^o de elem. da matriz P, valores iniciais</i>	

número_de_Q q1 q2 ... qn *nº de elem. da matriz Q, valores iniciais*

número_de_R r1 r2 ... rn *nº de elem. da matriz R, valores iniciais*

par_load:

n_load *nº de cargas a serem estimadas*

j dir valor *j: nó de aplicação da carga*

..... *dir: direção [x ou y]*

j dir valor *valor: valor inicial da carga*

Repetir
n_load
vezes

n_displ *nº de deslocamentos medidos*

j dir deslocamento *j: nó em que foi medido*

..... *dir: direção [x ou y]*

j dir displ *displ: valor do desloca/to*

Repetir
n_displ
vezes

par_displ:

n_par *número dos parâmetros materiais*

parâmetros *ni E1 E2 G12 fi : [igual a n_par]*

n_displ *nº de deslocamentos medidos*

j dir deslocamento *j: nó em que foi medido*

..... *dir: direção [x ou y]*

j dir displ *displ: valor do desloca/to*

Repetir
n_displ
vezes

par_strain:

n_par *número dos parâmetros materiais*

parâmetros *ni E1 E2 G12 fi : [igual a n_par]*

n_de_strain	<i>nº de deformações medidas</i>
e dir strain	<i>e: nº do elemento</i>
.....	<i>dir: direção [x ou y].</i>
e dir strain	<i>strain: valor da deformação</i>

Repetir n_strainl vezes

5.4 VALIDAÇÃO DAS ROTINAS PARA ESTIMATIVA DE PARÂMETROS

5.4.1 INTRODUÇÃO

A seguir, é apresentado um exemplo ilustrativo, para aplicação do método exposto, em uma viga no estado plano de tensão na qual será simulada a realização de medidas de deslocamentos e deformações.

Com a finalidade de mostrar a formulação e os detalhes teóricos da mesma, desenvolveu-se um exemplo teórico em que as supostas medidas de deslocamentos e deformações são as encontradas pelo cálculo dos elementos finitos para parâmetros conhecidos. O processo de identificação dos parâmetros deve conduzir de maneira natural para a obtenção desses mesmos parâmetros.

Utilizou-se a malha de elementos finitos apresentados na Figura - 5.2, com espessura $t = 1,0$ cm, onde também estão mostradas as dimensões geométricas, a numeração dos nós e dos elementos, as vinculações e o carregamento aplicado.

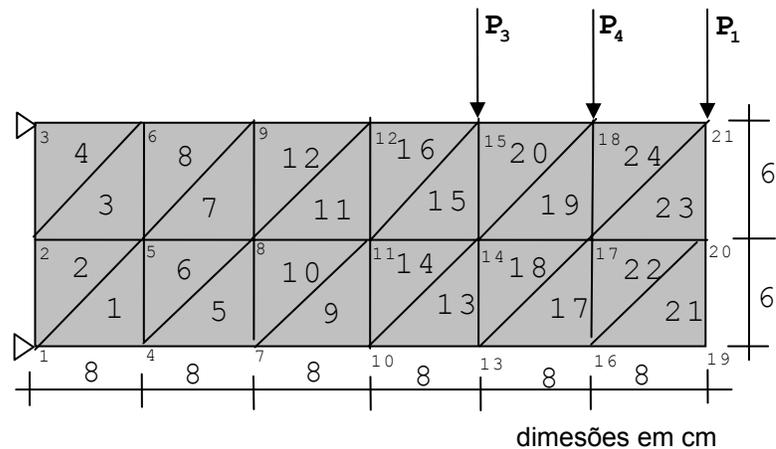


Figura - 5.2 – Detalhes da malha de elementos finitos adotada.

Para o exemplo adotou-se o modelo no estado plano de tensão com material elástico linear, sendo que em alguns testes considerou-se um comportamento isotrópico e em outros ortotrópico, com as seguintes constantes materiais:

Tabela 5.1 - Características elásticas do material.

Material	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν	G_{12} (GPa)	ϕ
Isotrópico	21,0	0	0,30	0,0	0,0
Ortotrópico	21,0	25,0	0,30	3,0	0,0*

As seguintes cargas foram adotadas nos exemplos que se seguem:

- $P_1 = 0,070$ kN $P_2 = 0,060$ kN $P_3 = 0,050$ kN *

* Observação: Em alguns exemplos os valores de P ou ϕ assumirão valores diferentes dos aqui indicados, nesses casos serão devidamente destacados.

5.4.2 EXEMPLO 1

Para este exemplo foi adotado material isotrópico, com 8 deslocamentos medidos (d_{med}), apresentados na Tabela 5.2, para a estimativa de dois parâmetros, o coeficiente de Poisson (ν) e módulo de elasticidade (E), através da rotina **par_displ**.

Os seguintes valores iniciais foram adotados para os elementos das matrizes P_0 , Q_0 e R_0 : $p_1 = 0,001$; $p_2 = 0,100$; $q_1 = q_2 = 0,0001$; $r = 10^{-08}$.

Os valores dos parâmetros iniciais e os obtidos pela análise inversa realizada pela rotina **par_displ** estão apresentados na Tabela 5.2. Também estão mostrados o valor da função objetivo, a precisão e o número de iterações. Pode-se observar que deslocamentos calculados (d_{calc}) após a estimativa dos parâmetros estão iguais aos medidos (d_{med}), o que indica uma boa convergência do método empregado, visto que os parâmetros encontrados foram exatamente aqueles utilizados para gerar os dados de entrada do exemplo.

Tabela 5.2 – Comparação entre os parâmetros iniciais e finais

Dados	Entrada	Resultado	Nó	Dir.	d_{med} (mm)	d_{calc} (mm)
ν	0,15	0,30	10	y	-0,31207	-0.31207
E(GPa)	15,0	21,0	13	y	-0,49464	-0.49464
			16	x	-0,14511	-0.14511
			16	y	-0,69032	-0.69032
			19	x	-0,14673	-0.14673
Precisão	10^{-06}	$2,94 \times 10^{-07}$	19	y	-0,88765	-0.88765
Objetivo		$4,87 \times 10^{-11}$	20	x	-0,00159	-0.00159
Nº de iter.		9	21	x	0,14445	0.14445

5.4.3 EXEMPLO 2

Para este exemplo, também foi adotado material isotrópico, com 8 deformações medidas (ϵ_{med}), mostradas na Tabela 5.3, para a estimativa de dois parâmetros, o coeficiente de Poisson (ν) e módulo de elasticidade (E), através da rotina **par_strain**.

Os seguintes valores iniciais foram adotados para os elementos das matrizes P_0 , Q_0 e R_0 : $p_1 = 10^{-04}$ $p_2 = 0,100$; $q_1 = 10^{-04}$ $q_2 = 10^{-04}$; $r = 10^{-14}$.

Na Tabela 5.3 podem ser encontrados os valores dos parâmetros iniciais e os obtidos pela análise inversa realizada pela rotina **par_strain**. Também são mostrados o valor da função objetivo, a convergência, a precisão e o número de iterações. São apresentados os resultados da estimativa de parâmetros, onde se pode observar que as deformações calculadas (ϵ_{calc}) estão iguais às medidas (ϵ_{med}), fato este que indica que a metodologia utilizada na análise inversa está conduzindo à bons resultados.

Tabela 5.3 – Comparação entre os parâmetros iniciais e finais

Dados	Entrada	Resultado	Nó	Dir.	ϵ_{med}	ϵ_{calc}
ν	0,15	0,2989	13	x	-0.002210	-0,002210
E(GPa)	15,0	21,0038	17	x	-0.001002	-0,001002
			17	y	0.000121	0,000121
			21	x	-0.000203	-0,000203
			21	y	-0.000064	-0,000064
Precisão	10^{-06}	$6,03 \times 10^{-08}$	22	x	0.000062	0,000062
Objetivo		$2,35 \times 10^{-13}$	22	y	0.000121	0,000121
Nº de iter		6	23	x	0.000062	0,000062

5.4.4 EXEMPLO 3

Para este exemplo foi adotado material isotrópico, com 8 deslocamentos medidos (d_{med}), apresentados na Tabela 5.4, para a estimativa de três parâmetros, os coeficientes de ajuste das cargas, através da rotina **par_load**.

Foram adotados os seguintes valores iniciais para as cargas:

- $P_1 = 0,0025$ $P_2 = 0,030$ $P_3 = 0,035$

Os seguintes valores iniciais foram adotados para os elementos das matrizes P_0 , Q_0 e R_0 : p_1 a $p_3 = 0,10$; q_1 a $q_3 = 0,001$; $r = 10^{-11}$.

A Tabela 5.4 apresenta os valores dos parâmetros iniciais e os obtidos pela análise inversa realizada pela rotina **par_load**. Também se pode avaliar a convergência, a precisão e o número de iterações.

Na Tabela 5.4 são apresentados os resultados da análise inversa, os deslocamentos calculados e os coeficientes de multiplicação das cargas (γ). Pode-se observar que os deslocamentos encontrados (d_{calc}) estão com valores muito próximos aos medidos (d_{med}), indicando um bom comportamento da rotina implementada.

Tabela 5.4 – Comparação entre os parâmetros iniciais e finais.

Dados	Entrada	Resultado	Nó	Dir.	d_{med} (mm)	d_{calc} (mm)
γ_1	0,10	2,0037	10	y	-0,31207	-0.31207
γ_2	0,10	1.9950	13	y	-0,49464	-0.49464
γ_3	0,10	2,0019	16	x	-0,14511	-0.14511
			16	y	-0,69032	-0.69032
			19	x	-0,14673	-0.14673
Precisão	10^{-06}	$1,91 \times 10^{-11}$	19	y	-0,88765	-0.88765
Objetivo		$8,77 \times 10^{-07}$	20	x	-0,00159	-0.00159
Nº de iter		9	21	x	0,14445	0.14445

5.4.5 EXEMPLO 4

Para este exemplo foi adotado material ortotrópico, com 8 deslocamentos medidos (d_{med}), apresentados na Tabela 5.5, para a estimativa de quatro parâmetros: o coeficiente de Poisson (ν), os módulos de elasticidade (E_1 e E_2) e o módulo de elasticidade transversal (G_{12}), através da rotina **par_displ**.

Os seguintes valores iniciais foram adotados para os elementos das matrizes P_0 , Q_0 e R_0 : p_1 a $p_3 = 0,01$ e $p_4 = 0,001$; q_1 a $q_4 = 0,001$; $r = 10^{-11}$.

A Tabela 5.5 mostra os valores dos parâmetros iniciais e os obtidos pela análise inversa realizada pela rotina **par_displ**. Também se pode avaliar a função objetivo, a precisão e o número de iterações.

Na Tabela 5.5 também estão apresentados os deslocamentos calculados (d_{calc}) após a estimativa de parâmetros, os quais são muito parecidos aos medidos (d_{med}), indicando que os parâmetros encontrados foram praticamente os mesmos utilizados para os cálculos iniciais

Tabela 5.5 – Comparação entre os parâmetros iniciais e finais.

Dados	Entrada	Resultado	Nó	Dir.	dmed (mm)	dcalc (mm)
ν	0,15	0,2996	10	y	-0,436772	-0,436770
E_1 (GPa)	11,00	21,0001	13	y	-0,676727	-0,676730
E_2 (GPa)	15,00	24,9374	16	x	-0,171951	-0,171950
G_{12} (GPa)	1,00	3,0000	16	y	-0,926381	-0,926380
			19	x	-0,174130	-0,174130
Precisão	10^{-06}	$8,35 \times 10^{-07}$	19	y	-1,170710	-1,170710
Objetivo		$2,22 \times 10^{-11}$	20	x	-0,000878	-0,000880
Nº de iter		8	21	x	0,173248	0,173250

5.4.6 EXEMPLO 5

Neste exemplo procura-se mostrar que para a estimativa dos parâmetros materiais ν , E_1 , E_2 e G_{12} , de um material ortotrópico, o valores a serem adotados inicialmente podem ser bem diferentes dos reais, como pode ser visto na Tabela 5.6, quando se comparado com a Tabela 5.5. Os demais dados do exemplo 4 foram mantidos.

Tabela 5.6 – Comparação entre os parâmetros iniciais e finais.

Dados	Entrada	Resultado	Nó	Dir.	dmed (mm)	dcalc (mm)
ν	0,05	0,2996	10	y	-0,436772	-0,436770
E_1 (GPa)	1,00	21,0001	13	y	-0,676727	-0,676730
E_2 (GPa)	1,00	24,9374	16	x	-0,171951	-0,171950
G_{12} (GPa)	0,10	3,0000	16	y	-0,926381	-0,926380
			19	x	-0,174130	-0,174130
Precisão	10^{-06}	$2,25 \times 10^{-07}$	19	y	-1,170710	-1,170710
Objetivo		$2,23 \times 10^{-11}$	20	x	-0,000878	-0,000880
Nº de iter		11	21	x	0,173248	0,173250

5.4.7 EXEMPLO 6

Para este exemplo foi adotado material ortotrópico, com cinco deslocamentos medidos (d_{med}), apresentados na Tabela 5.7, para a estimativa de 2 parâmetros, o módulo de elasticidade (E_1) e o ângulo de ortotropia (φ) através da rotina **par_dipl**.

Os deslocamentos iniciais foram obtidos com os mesmos dados dos demais exemplos, com exceção do ângulo de ortotropia (φ) que foi alterado para 20 graus.

Os seguintes valores iniciais foram adotados para os elementos das matrizes P_0 , Q_0 e R_0 : $p_1 = 10^{-5}$ e $p_3 = 0,01$; $q_1 = 10^{-7}$ e $q_2 = 10^{-4}$; $r = 10^{-14}$.

Na Tabela 5.3 podem ser encontrados os valores dos parâmetros iniciais e os obtidos pela análise inversa realizada pela rotina **par_displ**. Também são mostrados o valor da função objetivo, a convergência, a precisão e o número de iterações.

Na Tabela 5.7 pode-se observar que deslocamentos calculados (d_{calc}) após a estimativa dos parâmetros, estão iguais aos medidos (d_{med}), o que indica uma boa convergência do método empregado, visto que os parâmetros encontrados foram praticamente os mesmos utilizados para gerar os dados de entrada do exemplo.

Tabela 5.7 – Comparação entre os parâmetros iniciais e finais

Dados	Entrada	Resultado	Nó	Dir.	dmed (mm)	dcalc (mm)
E_1 (GPa)	15,00	21,0020	10	y	-0,425530	-0,425530
φ	30,0	20,0015	13	y	-0,686211	-0,686210
			16	y	-0,971881	-0,971880
Precisão	10^{-06}	$2,02 \times 10^{-07}$	19	y	-1,269098	-1,269100
Objetivo		$6,52 \times 10^{-11}$	21	x	0,231370	0,231370
Nº de iter		8				

5.4.8 EXEMPLO 7

Para este exemplo foi adotado material ortotrópico, com cinco deslocamentos medidos (d_{med}), apresentados na Tabela 5.8, para a estimativa de 4 parâmetros, o coeficiente de Poisson (ν), os módulos de elasticidades (E_1 e E_2) e o ângulo de ortotropia (φ), através da rotina **par_displ**.

Os deslocamentos iniciais foram obtidos com os mesmos dados dos demais exemplos, com exceção do ângulo de ortotropia (φ) que foi alterado para 20 graus.

Os seguintes valores iniciais foram adotados para os elementos das matrizes P_0 , Q_0 e R_0 : $p_1 = 10^{-7}$; $p_2 = 0,01$; $p_3 = 10^{-4}$; $p_4 = 0,01$; $q_1 = 10^{-9}$; $q_2 = 10^{-5}$; $q_3 = 10^{-5}$; $q_4 = 10^{-5}$; $r = 10^{-14}$.

Na Tabela 5.8 podem ser encontrados os valores dos parâmetros iniciais e os obtidos pela análise inversa realizada pela rotina **par_displ**. Também estão mostrados o valor da função objetivo, a convergência, a precisão e o número de iterações.

Tabela 5.8 – Comparação entre os parâmetros iniciais e finais

Dados	Entrada	Resultado	Nó	Dir.	dmed (mm)	dcalc (mm)
ν	0,15	0,2983	10	y	-0,425530	-0,425530
E_1 (GPa)	15,00	21,0270	13	y	-0,686211	-0,686210
E_2 (GPa)	20,00	25,0107	16	y	-0,971881	-0,971880
φ	30,00	20,0065	19	y	-1,269098	-1,269100
			21	x	0,231370	0,231370
Precisão	10^{-06}	$4,53 \times 10^{-07}$				
Objetivo		$2,99 \times 10^{-13}$				
Nº. de iter.		11				

5.4.9 EXEMPLO 8

Para este exemplo foi adotado material ortotrópico, com cinco deslocamentos medidos (d_{med}), apresentados na Tabela 5.9, para a estimativa de 5 parâmetros, o coeficiente de Poisson (ν), os módulos de elasticidade (E_1 e E_2), módulo de elasticidade transversal (G_{12}) e o ângulo de ortotropia (φ), através da rotina **par_displ**.

Os deslocamentos iniciais foram obtidos com os mesmos dados dos demais exemplos, a menos do ângulo de ortotropia (φ) que foi alterado para 20 graus.

Os seguintes valores iniciais foram adotados para os elementos das matrizes P_0 , Q_0 e R_0 : $p_1 = 10^{-6}$; $p_2 = 0,01$; $p_3 = 10^{-4}$; $p_4 = 0,01$; $p_5 = 0,001$; $q_1 = 10^{-8}$; $q_2 = 10^{-5}$; $q_3 = 10^{-5}$; $q_4 = 10^{-6}$; $q_5 = 10^{-6}$; $r = 10^{-17}$.

Na Tabela 5.9 pode-se observar que os deslocamentos calculados (d_{calc}) após a estimativa dos parâmetros, estão iguais aos medidos (d_{med}), o que indica uma boa convergência do método empregado, visto que os parâmetros encontrados foram praticamente os mesmos utilizados para os cálculos iniciais.

Tabela 5.9 – Comparação entre os parâmetros iniciais e finais

Dados	Entrada	Resultado	Nó	Dir.	dmed (mm)	dcalc (mm)
ν	0,15	0,3031	10	y	-0,425530	-0,425530
E_1 (GPa)	15,00	20,9888	13	y	-0,686211	-0,686210
E_2 (GPa)	20,00	24,9944	16	y	-0,971881	-0,971880
φ	30,00	19,9863	19	y	-1,269098	-1,269100
G_{12} (GPa)	2,00	2,9923	21	x	0,231370	0,231370
Precisão	10^{-06}	$1,29 \times 10^{-06}$				
Objetivo		$3,16 \times 10^{-14}$				
Nº de iter.		10				

Cabe destacar que para o caso de materiais ortotrópicos, quando se estiver procedendo a estimativa do ângulo de ortotropia (φ), deve-se ter um cuidado especial com a escolha do valor inicial, pois a função de minimização desse parâmetro pode apresentar mínimos locais.

CAPÍTULO 6 EXPERIMENTOS LABORATORIAIS

6.1 INTRODUÇÃO

Para o desenvolvimento desta pesquisa fez-se um estágio no Laboratório de Tecnologia do Betão e do Comportamento Estrutural, da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (LABEST/FEUP), no Porto, Portugal. Nesse período foram realizados três experimentos, sendo um ensaio de compressão diametral em cilindros de concreto (*Brazilian Test*) e outros dois ensaios de carga em um pórtico demonstrador, visando obter resultados experimentais para posterior utilização nos modelos de análise inversa desenvolvidos.

Para o caso de retração e fluência foram utilizados os dados disponibilizados pelo Engenheiro Carlos Felix, pesquisador da FEUP (FELIX, 2005).

Também foram utilizados os resultados dos ensaios de compressão diametral em cilindros de gesso (*Brazilian Test*) realizados por Junior Sosimo Villegas (pós-graduando do Curso de Pós-Graduação em Ciências e Engenharia de Petróleo), no Laboratório de Petróleo do Departamento de Engenharia de Materiais da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp.

6.2 ENSAIO DE COMPRESSÃO DIAMETRAL EM CILINDROS DE CONCRETO (BRAZILIAN TEST)

Apresenta-se a seguir a descrição e os resultados obtidos neste ensaio realizado no LABEST/FEUP.

6.2.1 CARACTERIZAÇÃO DO CONCRETO

O concreto utilizado na moldagem dos corpos de prova cilíndricos, de 15 cm de diâmetro e 30 cm de altura, foi do tipo auto-compactável. Foram ensaiados à ruptura aos 7 e aos 28 dias de idade, tendo sido obtidas as resistências médias e características a compressão apresentadas na Tabela 6.1, e o módulo de elasticidade aos 28 dias, de acordo com as especificações LNEC-E-397-1993 (1993), apresentado na Tabela 6.2.

Tabela 6.1 – Resistência à compressão do concreto.

Idade (dias)	f_{cm} (MPa)	f_{ck} (MPa)
7	68,4	63,4
28	76,9	71,9

Segundo a NBR 6118-2003 (2003), o módulo de elasticidade do concreto pode ser estimado pela equação apresentada abaixo:

$$E_{ci} = 5600\sqrt{f_{ck}} \quad (\text{Mpa})$$

(6.1)

e, segundo o Eurocode 2003, por:

$$E_{cm} = 22 \left(f_{cm} / 10 \right)^{0,3} \quad (\text{MPa})$$

(6.2)

Tabela 6.2 – Módulos de elasticidade do concreto.

	Experimental	NB-1/2003	EuroCode-2003
E_c (GPa)	45,2	47,5	40,6

6.2.2 DESCRIÇÃO DO ENSAIO

Para a realização do ensaio de compressão diametral de corpos-de-prova cilíndricos de concreto foi montado um aparato para a instalação de dois LVDT's (*linear variable differential transformer*), conforme Figura 6.1, para medir o encurtamento do diâmetro no sentido de aplicação da carga e o alongamento do mesmo na direção perpendicular. A intensidade de carga foi estimada em 40% do valor de ruptura de outros corpos-de-prova do mesmo concreto, ensaiados anteriormente. O carregamento foi aplicado a uma taxa de 1,0 kN/s, de forma contínua, sob controle de deformação, e os dados foram coletados a cada 3 segundos.



Figura 6.1 – Instrumentação e ensaio de compressão diametral.

A Figura 6.2 apresenta os eixos principais, sendo a direção y a de carregamento e a direção x perpendicular a esta.

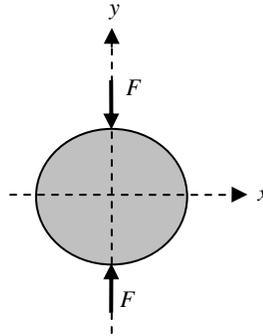


Figura 6.2 – Esquema das direções de carga e deslocamentos medidos.

A partir do ensaio foram obtidas as curvas de carga versus deslocamentos verticais (direção y) e horizontais (direção x), apresentadas na Figura 6.3, sem qualquer tratamento para a eliminação de ruídos dos equipamentos de interrogação.

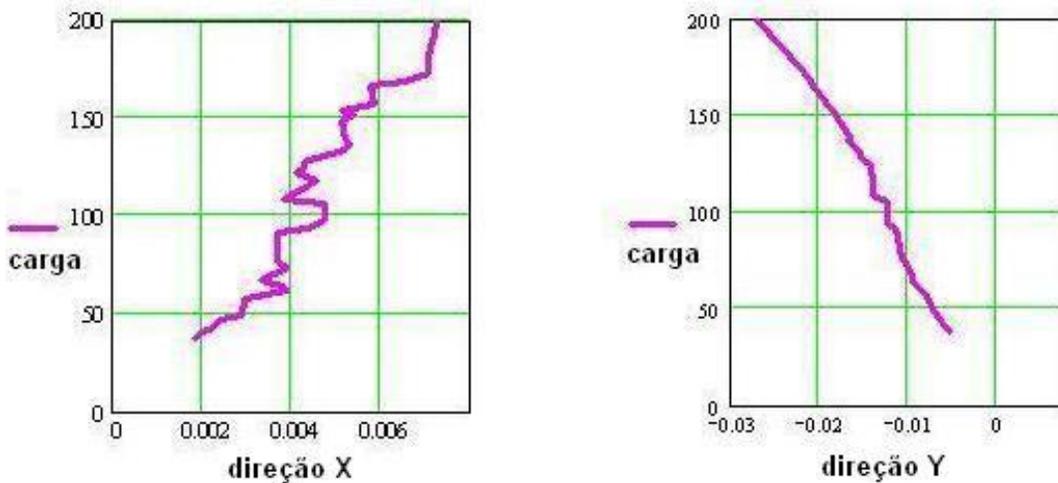


Figura 6.3 – Deslocamentos medidos no ensaio de compressão diametral.

A Figura 6.4 apresenta os deslocamentos obtidos no ensaio brasileiro, após um processo de eliminação de ruído dos equipamentos de interrogação, que consiste em ajustar o valor lido em função da média ponderada de 5 pontos anteriores e 5 posteriores ao da leitura.

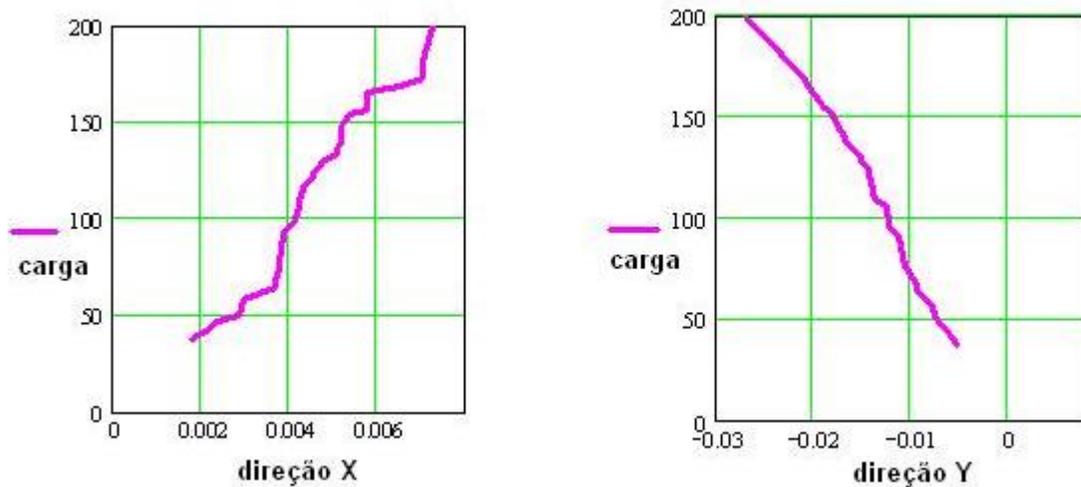


Figura 6.4 – Deslocamentos medidos no ensaio, após eliminação de ruídos.

6.3 ENSAIO DE COMPRESSÃO DIAMETRAL EM CILINDROS DE GESSO (BRAZILIAN TEST)

Corpos-de-prova cilíndricos de gesso, com diâmetro 50 mm e espessura 28,7 mm, foram ensaiados sob compressão diametral no Laboratório de Petróleo do Departamento de Engenharia de Materiais da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp. O esquema de ensaio é apresentado Figura 6.2.

A Figura 6.5 apresenta os deslocamentos obtidos no ensaio brasileiro, após um processo de eliminação de ruído dos equipamentos de interrogação, que consiste em ajustar o valor lido em função da média ponderada de 5 pontos anteriores e 5 posteriores ao da leitura.

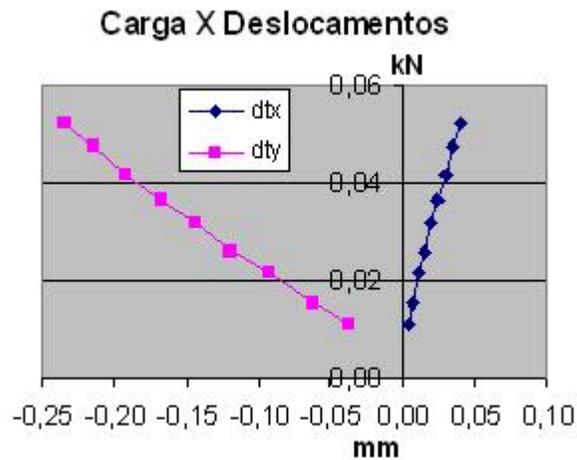


Figura 6.5 - Deslocamentos na direção x e y.

6.4 ENSAIO DO PÓRTICO DEMONSTRADOR

6.4.1 CARACTERIZAÇÃO DO PÓRTICO

Os dados experimentais foram obtidos a partir de uma estrutura em pórtico conforme mostrada na Figura 6.6, com dimensões exteriores de 1,50 m de altura, 3,20 m de comprimento, base de 0,40 m e 0,50 m de largura por 0,20m de espessura, construída e ensaiada no LABEST.

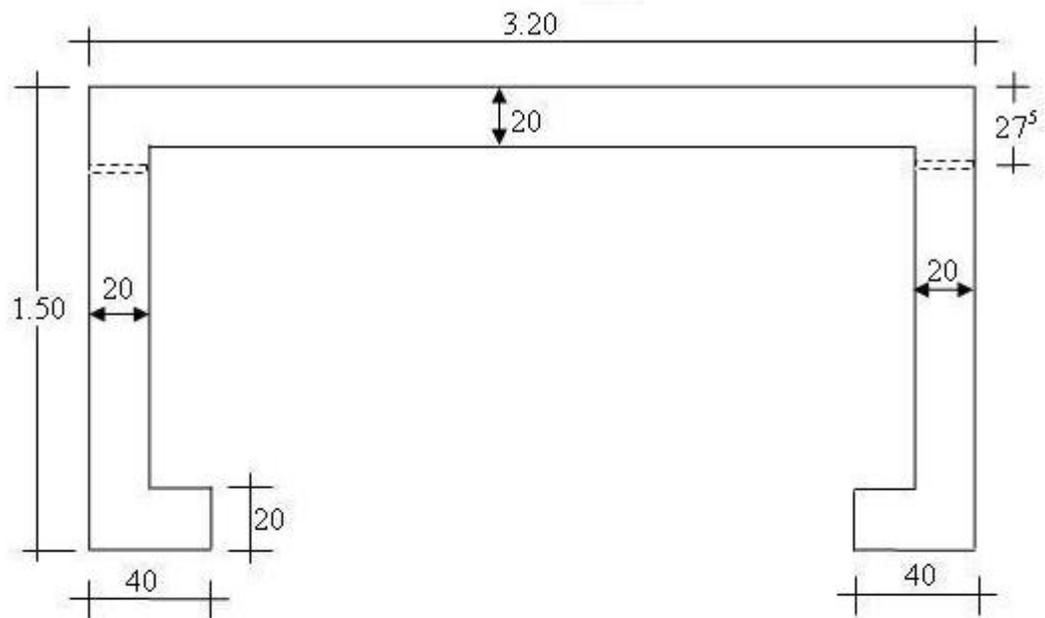


Figura 6.6 - Dimensões do pórtico e foto com a instrumentação do ensaio de carga.

As armaduras longitudinais e transversais estão apresentadas na Figura 6.7 São constituídas por armaduras passivas em aço da classe A500NR, e de protensão por dois cordões não aderentes de sete fios, centrados, afastados entre si de 25 cm, com secção transversal de $1,40 \text{ cm}^2$ cada, $f_{\text{pu}} = 1860,0 \text{ MPa}$ e módulo de elasticidade nominal de $195,0 \text{ GPa}$ (FELIX, 2005).

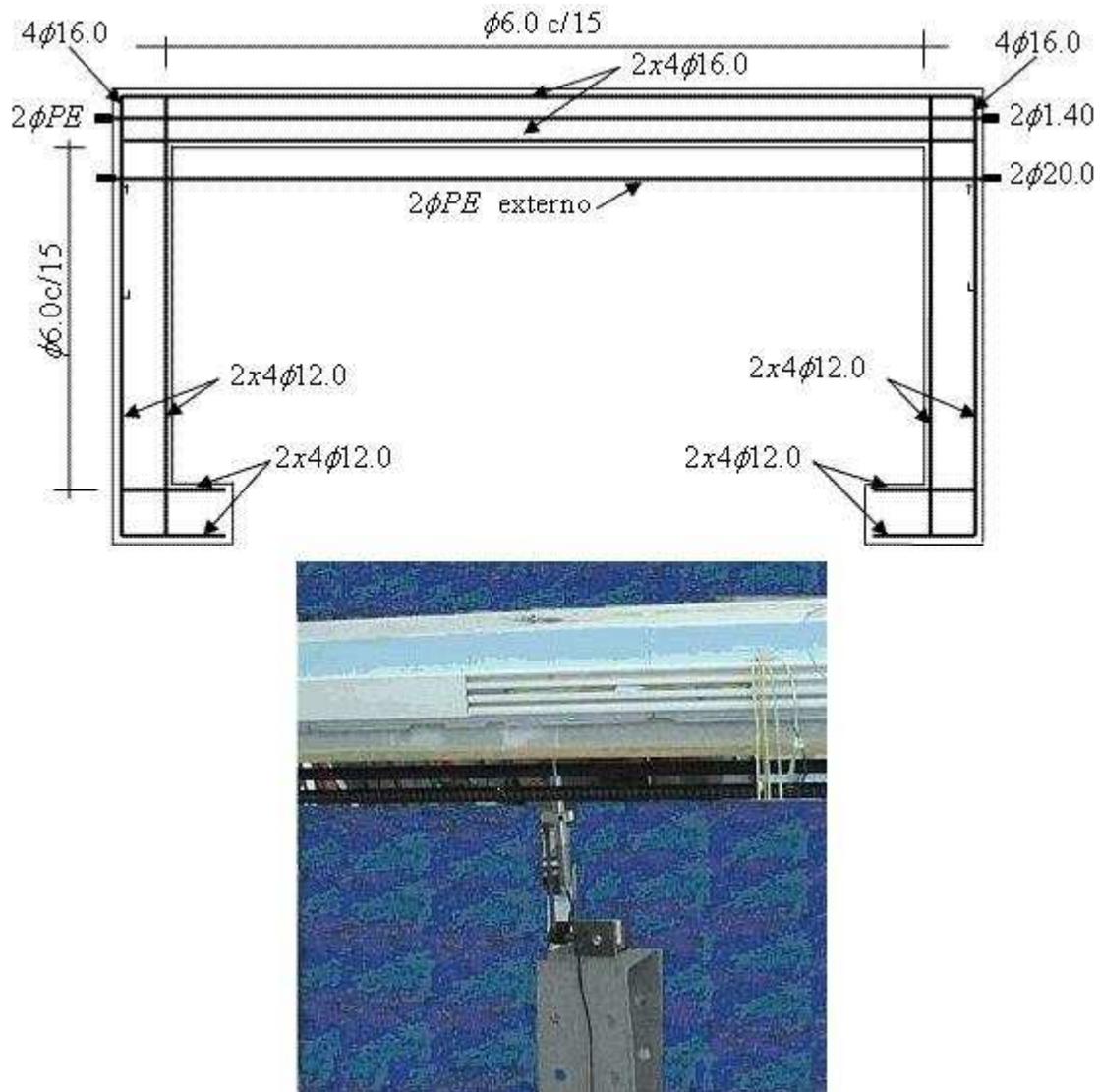


Figura 6.7 - Esquema de armadura do pórtico e detalhe de instalação de Lvdt.

O pórtico demonstrador está instrumentado em cinco seções, sendo 3 na viga e duas nos pilares, denominadas de S1 a S5 (Felix, 2005), conforme mostrado na Figura 6.8. Em cada uma dessas seções estão colocados extensômetros de resistência

elétrica embebidos no concreto designados pela sigla EB, extensômetros de resistência elétrica colados na armadura, denominados por EC e extensômetros ópticos de três tipos diferentes referenciados por OA, OB e OC. Também foram instalados sensores de temperatura do concreto e do ambiente e sensores de unidade ambiente.

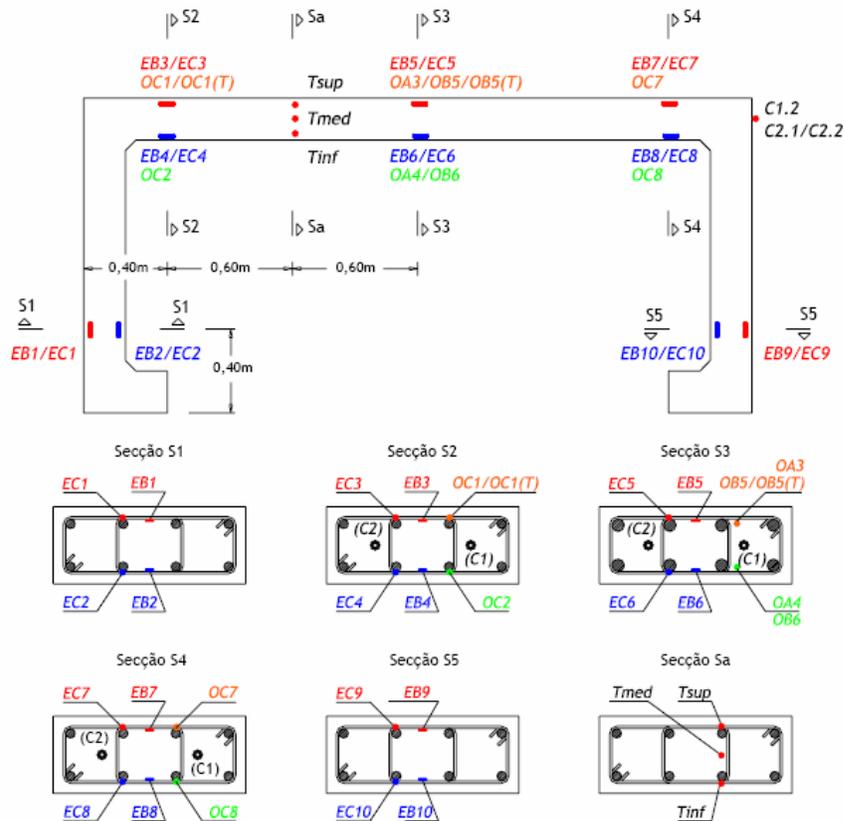


Figura 6.8 – Instrumentação interna do demonstrador.

Além dos extensômetros existentes, conforme Figura 6.8, foram instalados 5 Lvdts (*linear variable differential transformer*) sendo dois no pilar da esquerda, dois no pilar da direita e um no meio vão da viga, para a leitura dos deslocamentos nos pontos de maior relevância (Figura 6.9) e duas células de carga nas extremidades das barras para protensão externa.

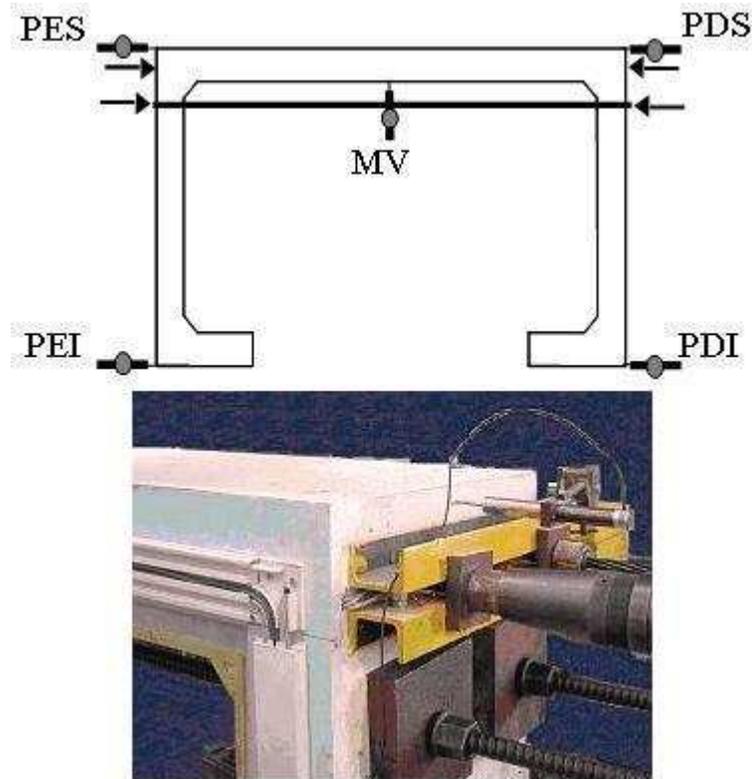


Figura 6.9 - Vista do pórtico demonstrador com localização dos equipamentos e fotografia da aplicação da protensão.

6.4.2 ENSAIO DE CARGA

O ensaio de carga do pórtico foi realizado no LABEST/FEUP. Para tanto, foi montado um aparato para a instalação dos cinco Lvdt's, conforme Figura 6.9, a fim de medir os deslocamentos dos pontos mais importantes da estrutura.

Por se tratar de um pórtico modelo, disponível no LABEST/FEUP para várias aplicações, para não provocar fissuração ou quaisquer alterações não reversíveis, optou-se pela aplicação de cargas de protensão e força excêntrica com relação ao eixo da viga.

As cargas foram aplicadas na seguinte seqüência:

- Aplicação da protensão nos cordões centrados na viga com uma previsão inicial de 380,0 kN total. Após a realização das ancoragens a força de protensão estabilizou-se em 376,3 kN.
- Aplicação da força nos varões excêntricos à viga e com previsão de atingir um valor total máximo de 98,0 kN. Devido as dificuldades que ocorreram durante o processo de aplicação, foi necessária a interrupção quando a carga atingiu 70,0 kN, que após a ancoragem, estabilizou-se em 63,3 kN.

A partir do ensaio foi obtido o gráfico de carga versus deslocamentos nos cinco pontos de onde foram instalados os Lvd't's, apresentados na Figura 6.10, sem qualquer tratamento para a eliminação de ruídos dos equipamentos de interrogação.

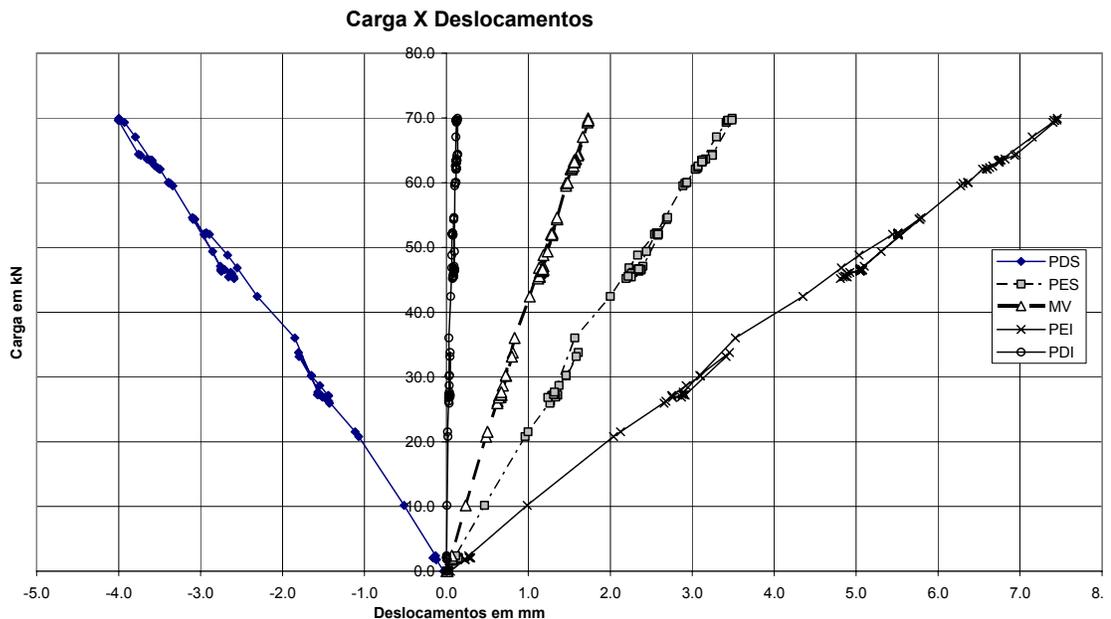


Figura 6.10 – Deslocamentos medidos no ensaio de carga.

A Figura 6.11 mostra o gráfico de carga versus deslocamento no meio vão da viga (MV) e no pilar esquerdo inferior (PEI), juntamente com a regressão linear passando pela origem e o erro R^2 , onde se pode observar o comportamento elástico e linear do pórtico durante o ensaio de carga.

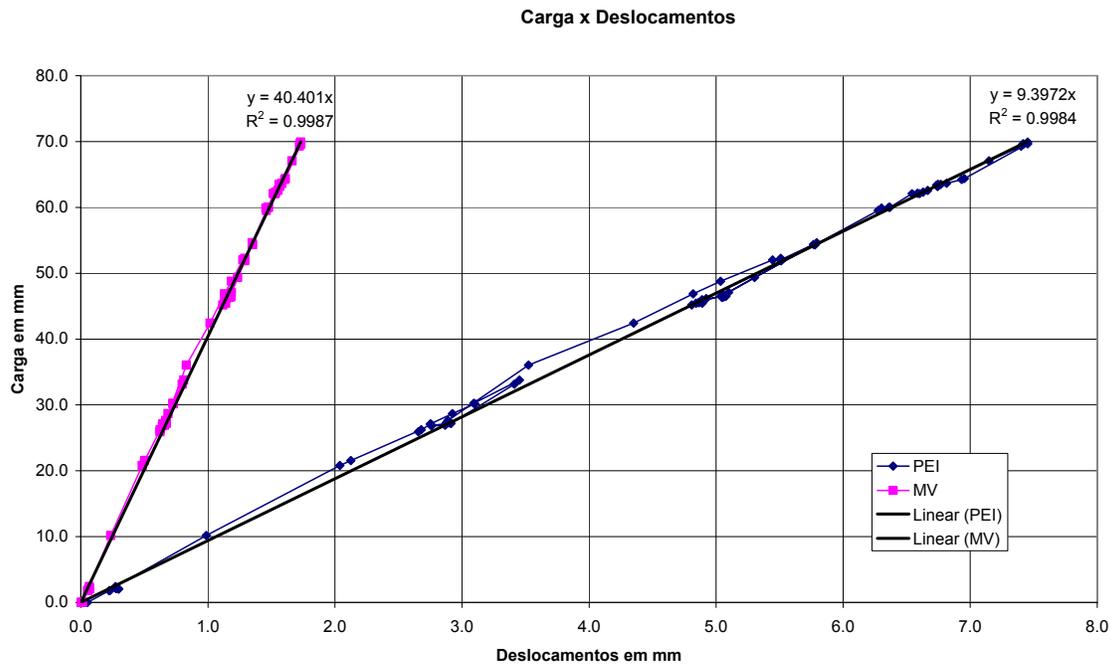


Figura 6.11 – Gráfico com a regressão linear em dois pontos medidos.

6.4.3 ENSAIOS DE FLUÊNCIA

Os ensaios de fluência foram realizados no LABEST/FEUP (FELIX, 2005). Os ensaios de fluência foram realizados em corpos de prova de concreto com as características descritas na Tabela 6.3, com seção transversal (15 cm x 15 cm) e altura 50 cm, fabricado com um cimento de endurecimento normal (classe N) e agregados normais.

Tabela 6.3 Característica do concreto

Idade(dias)	f_{cm} (MPa)	f_{ck} (MPa)	E_{ci} (GPa)
7	27,3	22,3	29,7
28	31,3	26,3	29,9

Após a concretagem, o corpo de prova foi mantidos em cura selada até o oitavo dia e, em seqüência, o exemplar de fluência foi colocado no bastidor, conforme mostrado na Figura 6.12, e submetido a uma tensão constante de 8,80 MPa.,

permanecendo no interior do laboratório a uma umidade média de 54%, durante todo o período do ensaio.



Figura 6.12 – Bastidor de fluência

Na Figura 6.13 estão apresentados os resultados do coeficiente de fluência versus o tempo em dias obtidos a partir do ensaio do corpo de prova realizado por Felix (2005)

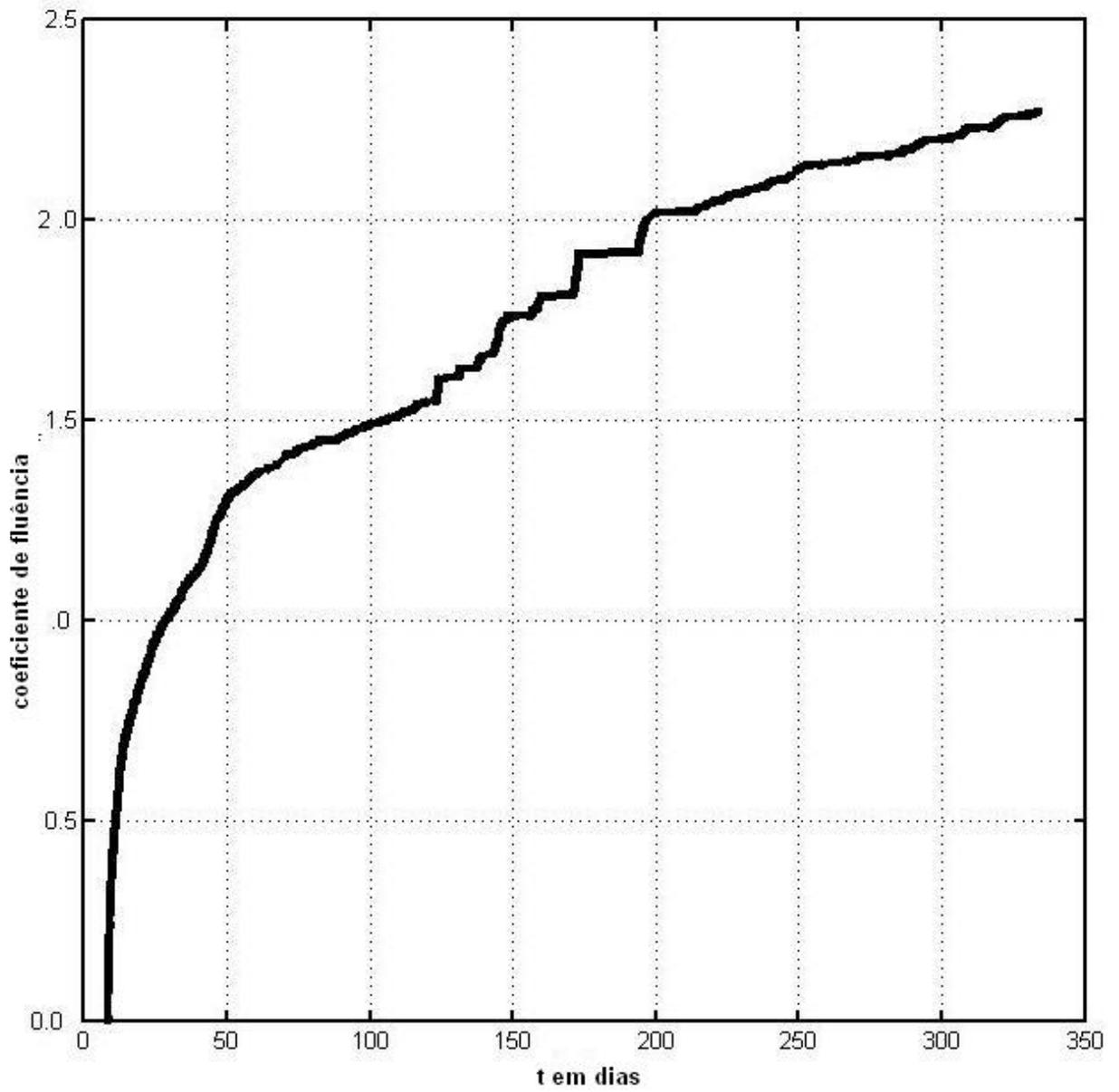


Figura 6.13 – Resultado do ensaio de fluência

CAPÍTULO 7 RESULTADOS

7.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta os resultados obtidos pela aplicação do programa computacional desenvolvido para estimativa de parâmetros, descrito no capítulo 5, a partir de resultados das medidas dos ensaios realizados.

Com a finalidade de validar as rotinas implementadas, compararam-se alguns resultados obtidos no referido programa com os do DIANA – Finite Element Analysis, (WHITE, 2003), e com outros exemplos existentes na literatura.

7.2 ENSAIO DE COMPRRESSÃO DIAMETRAL EM GESSO - MODELAGEM NUMÉRICA UTILIZANDO O PROGRAMA DIANA

Aplicando-se o método de análise inversa existente no programa DIANA com o módulo de estimativa de parâmetros PAREST, com os valores iniciais $E = 1,0$ GPa, $\nu = 0,1$ e com os deslocamentos medidos apresentados na Figura 6.5 (item 6.3 do capítulo 6), foram obtidos os parâmetros do gesso que melhor se ajustam os valores de deslocamentos medidos e os calculados. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 - Resultados obtidos para cilindro de gesso.

	Inicial	Resultado
E (GPa)	1,00	0,664
ν	0,10	0,200
erro		$0,77 \times 10^{-06}$

Neste exemplo, como não havia resultados experimentais dos parâmetros para se comparar com os obtidos numericamente, observou-se que a norma (diferença entre duas estimativas consecutivas) atingiu um pequeno valor, indicando que houve convergência entre os deslocamentos calculados e os obtidos pelo ensaio.

7.3 ENSAIO DE COMPRESSÃO DIAMETRAL EM CILINDROS DE CONCRETO - MODELAGEM NUMÉRICA UTILIZANDO O PROGRAMA DIANA

A modelagem numérica do ensaio de compressão diametral em cilindros de concreto, no programa DIANA, foi realizada levando-se em conta a simetria do modelo, pelo tipo de carregamento e a forma cilíndrica do corpo de prova. Pode-se adotar o estado plano de deformação em regime elástico linear para materiais isotrópicos. Metade da seção transversal foi discretizada com o elemento tipo Q8EPS (WHITE, 2003), conforme indicado na Figura 7.1.

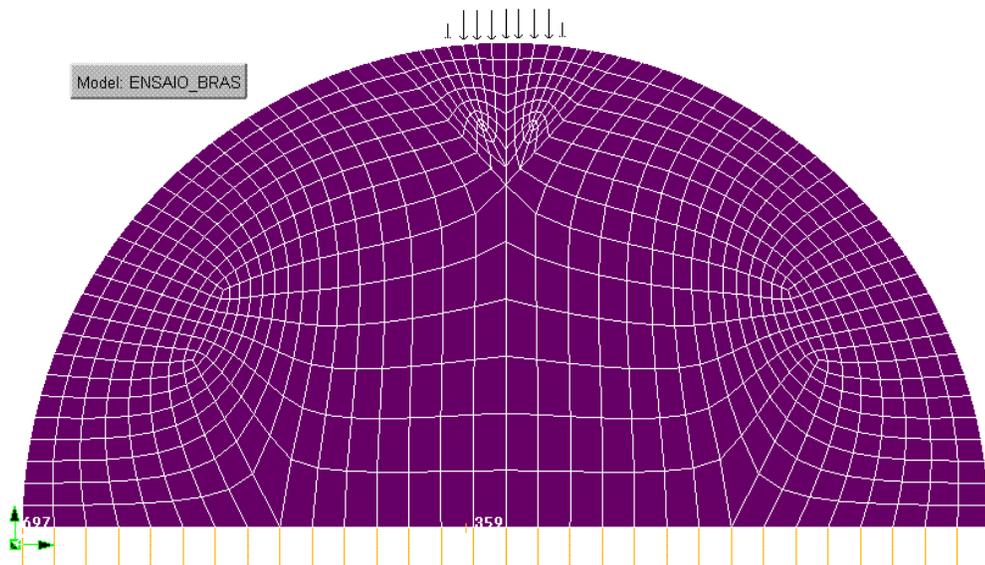


Figura 7.1 – Discretização dos elementos, esquema de carregamento e vinculação adotada.

Os carregamentos foram aplicados de forma distribuída em uma pequena faixa de 15 mm de largura na seção transversal, reproduzindo a forma com que a aplicação é realizada no ensaio físico. Na Figura 7.2, pode-se observar a configuração deformada, após a aplicação do carregamento.

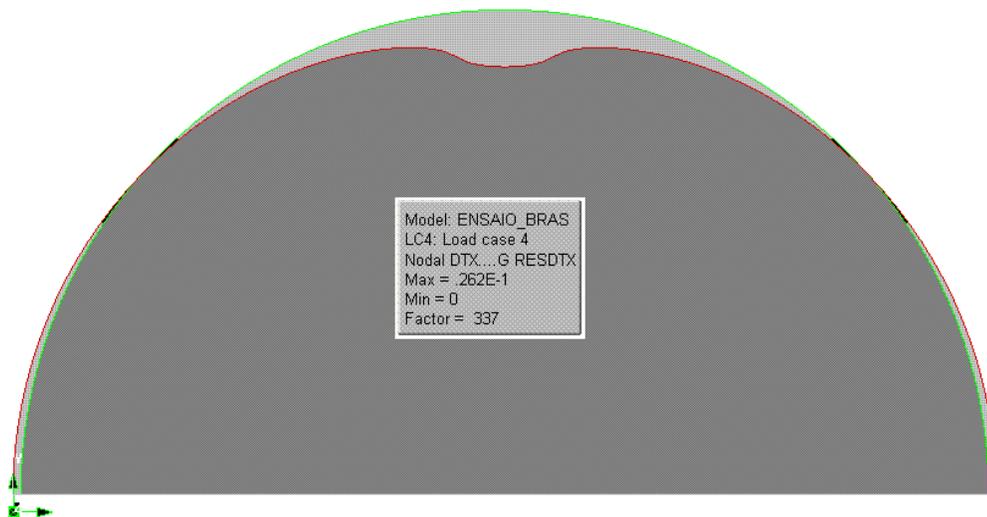


Figura 7.2 – Vista da seção deformada apresentada pelo DIANA.

Os deslocamentos na direção x (DTX) e y (DTY), ao longo dos eixos, para um dado carregamento são mostrados na Figura 7.3.

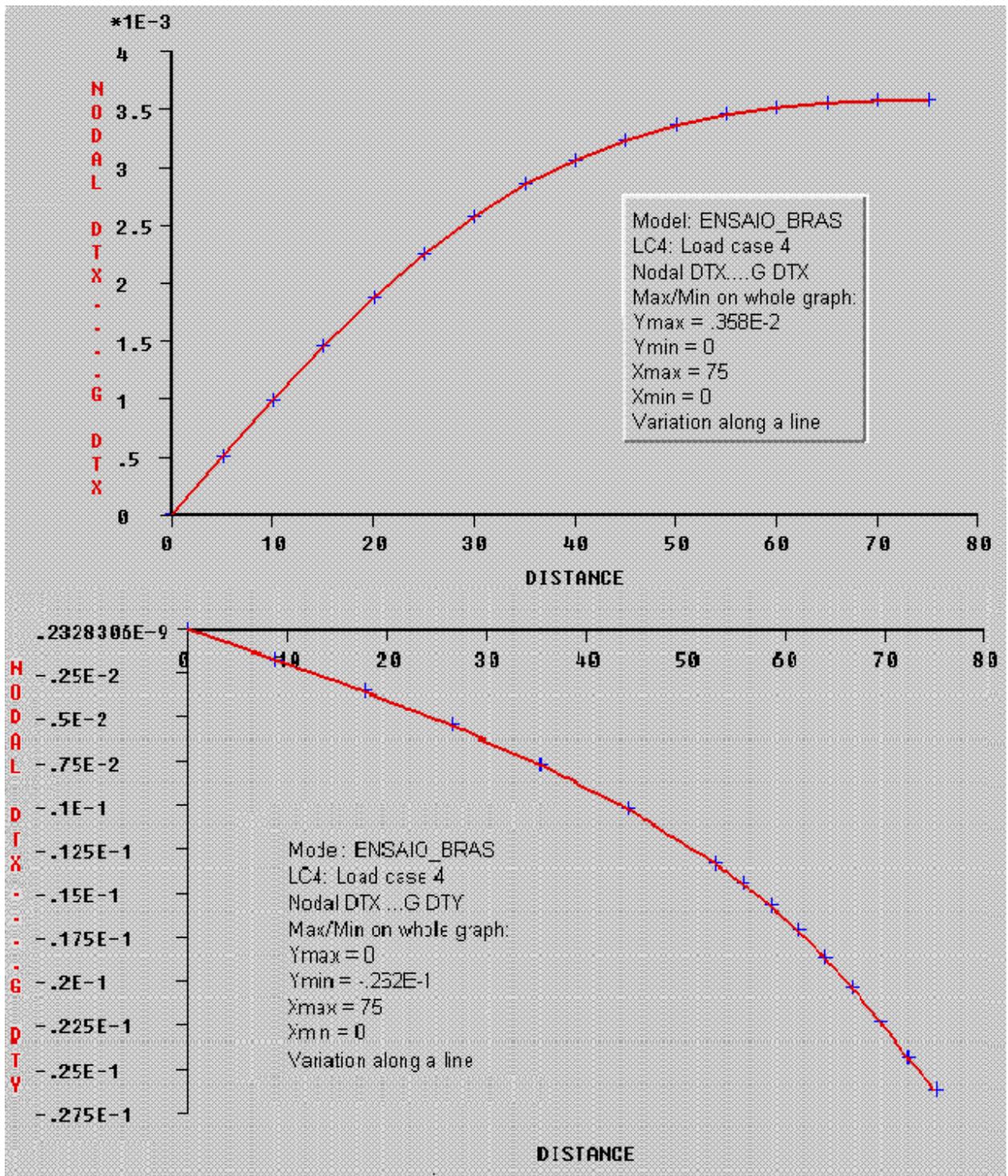


Figura 7.3 – Deslocamentos ao longo do eixos x e y respectivamente, medidos do centro do espécime para as bordas.

Aplicando-se aos corpos-de-prova de concreto o método o procedimento testado anteriormente com os de gesso aos resultados do ensaio de compressão diametral

apresentados na Figura 6.4 (item 6.2.2 do capítulo 6), e adotando-se como valores iniciais $E = 40,0 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,10$, obtém-se os parâmetros do concreto que melhor ajustam os valores de deslocamentos relativos medidos (variações nos diâmetros paralelo e normal à carga, respectivamente) aos calculados. Os resultados são apresentados na Tabela 7.2.

Tabela 7.2 - Resultados obtidos para cilindros de concreto.

	Inicial	Resultado
E (GPa)	40,0	42,71
ν	0,10	0,1749
erro		$0,16 \times 10^{-10}$

Comparando-se o valor encontrado para o módulo de elasticidade do concreto, a partir da estimativa de parâmetros com o obtido experimentalmente, apresentado na Tabela 6.2 (item 6.2.1 do capítulo 6), encontra-se uma diferença de 5.9 %, a qual é aceitável tendo em vista que os métodos empregados são diferenciados e os erros inerentes aos ensaios.

7.4 ENSAIO NO PÓRTICO DEMONSTRADOR - MODELAGEM NUMÉRICA UTILIZANDO O PROGRAMA DIANA

Com as características do pórtico demonstrador descritas no item 6.4 (capítulo 6) foi realizada a modelagem do ensaio no programa DIANA foi realizada em regime elástico linear para materiais isotrópicos, no estado plano de tensão, com os elementos do tipo Q8MEM (WHITE, 2003) e com barras de armadura embebidas, conforme apresentado na Figura 7.4.

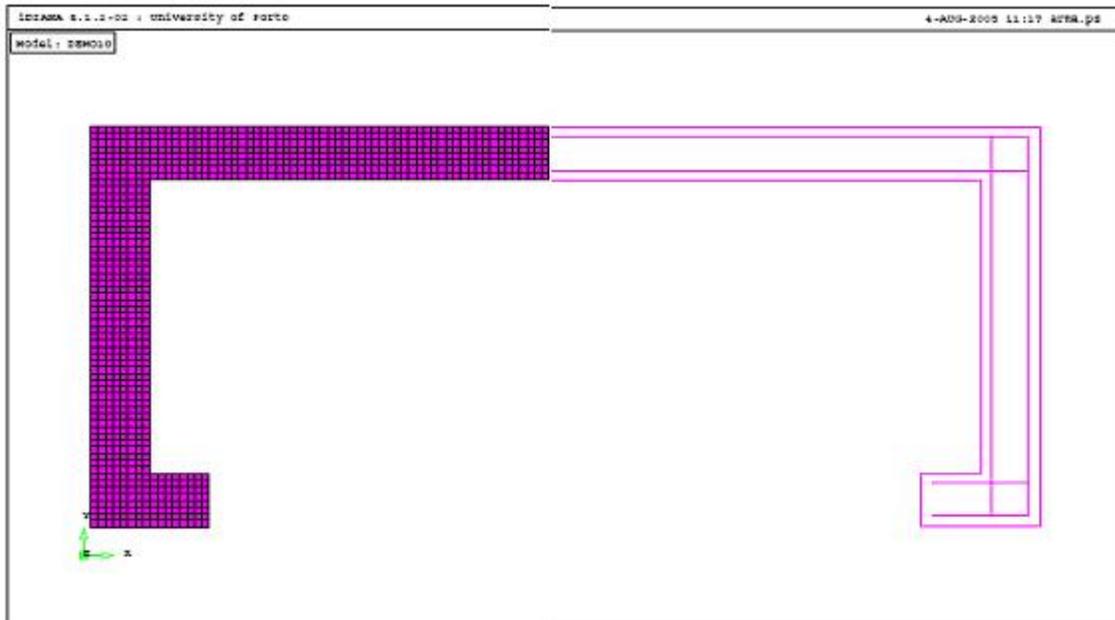


Figura 7.4 - Modelagem do pórtico em elementos Q8MEM e armaduras embebidas.

A Figura 7.5 apresenta a distribuição de tensões devidas às cargas do ensaio e a variação das tensões normais na direção x ao longo da altura na seção do meio vão da viga.

Para a carga aplicada excêntrica ao eixo da viga, na Figura 7.6 mostra os deslocamentos na direção x .

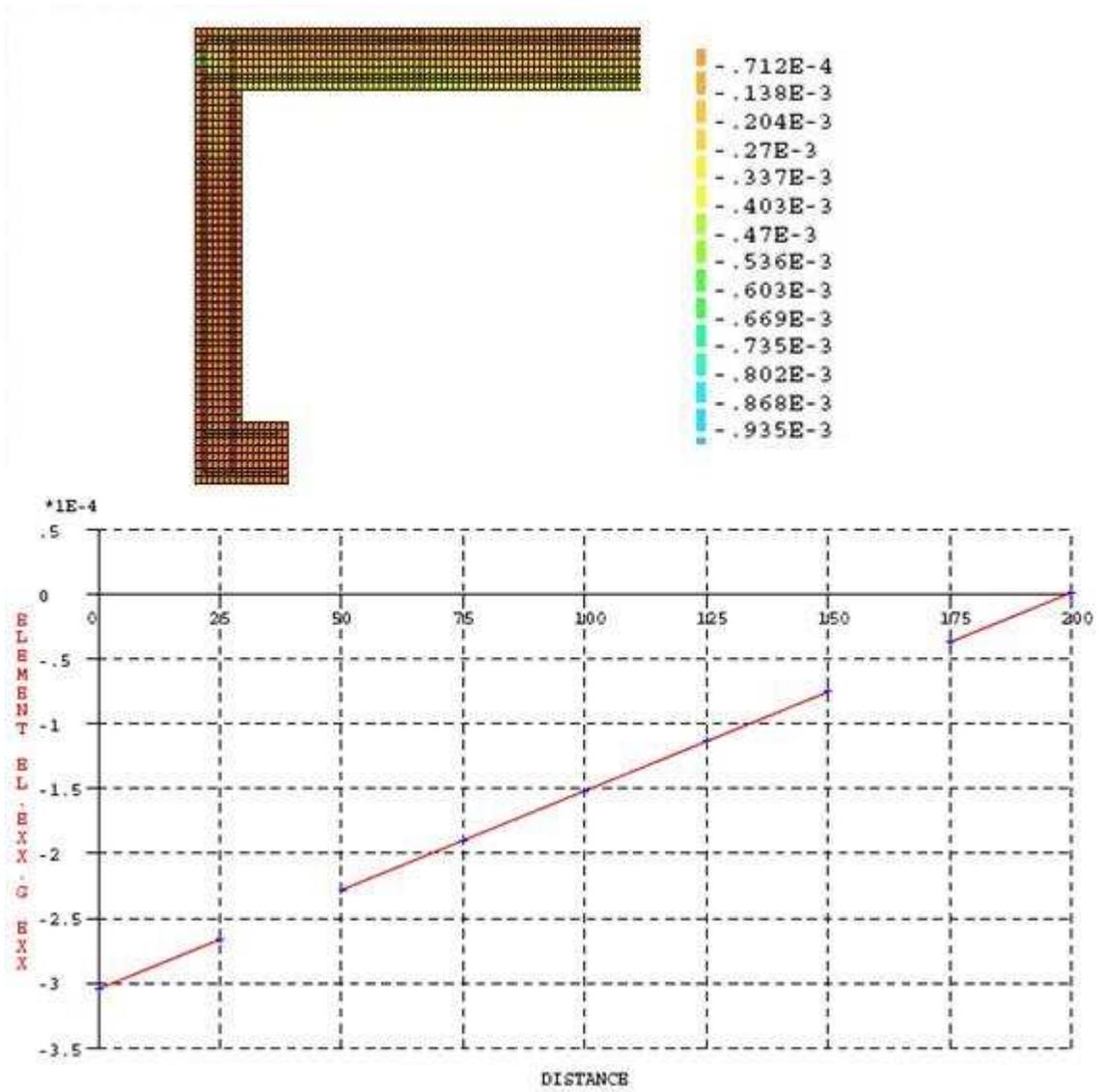


Figura 7.5 - Tensões normais na direção x: no pórtico e ao longo da seção central.

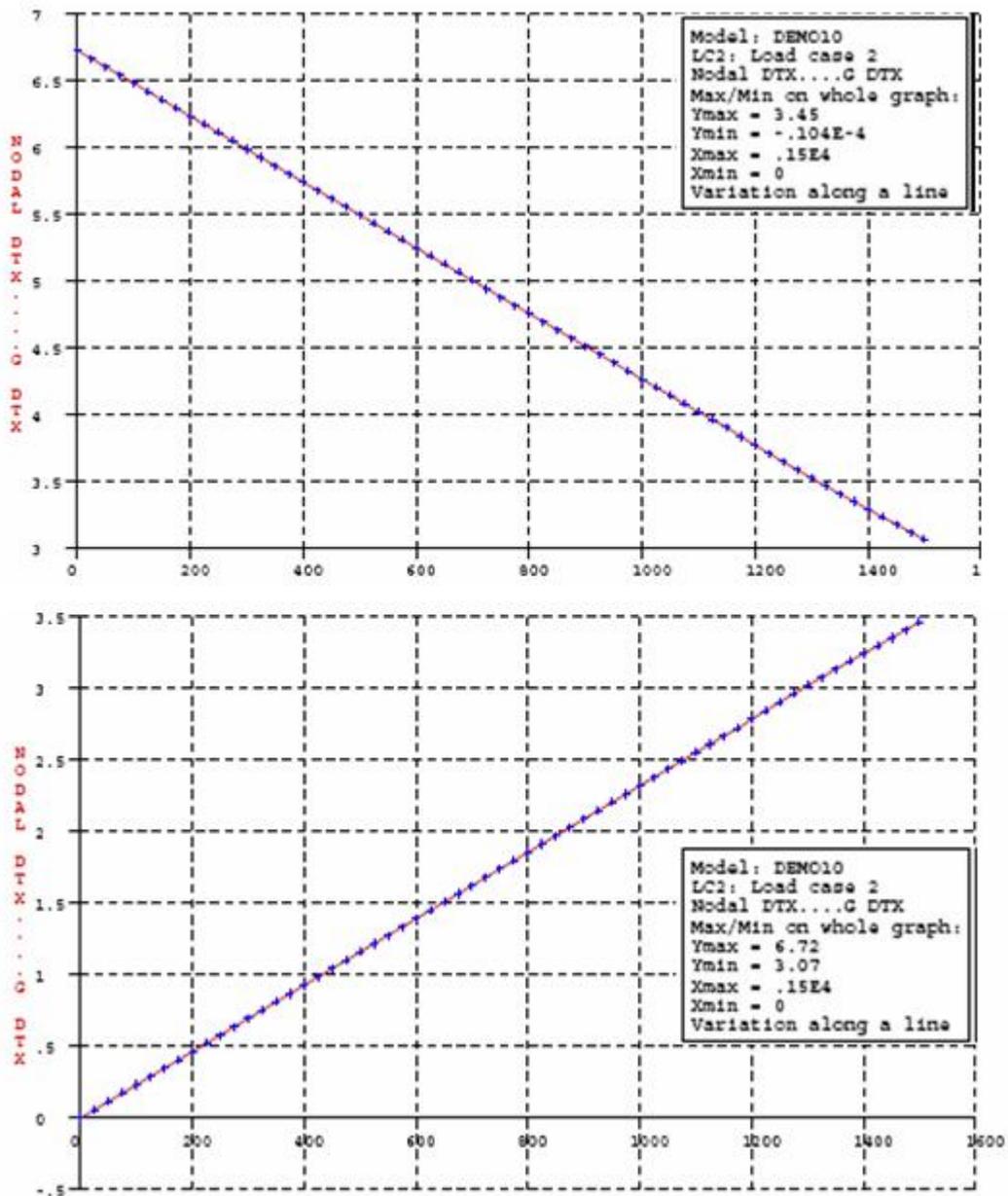


Figura 7.6 - Deslocamentos em x do Pórtico e dos Pilares.

7.4.1 ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS

Através da aplicação das técnicas de análise inversa aos resultados do ensaio de carga no pórtico apresentado no item 6.4.2 do capítulo 6, determina-se inicialmente o módulo de elasticidade global da estrutura, utilizando-se o programa DIANA com a rotina PAREST. Em seguida, adotando-se o módulo de elasticidade encontrado,

também com o programa DIANA utilizando-se a rotina BALANC determina-se a carga aplicada excentricamente ao eixo da viga.

7.4.1.1 MÓDULO DE ELASTICIDADE

Aplicou-se ao pórtico de concreto armado e protendido o método de análise inversa para a determinação do módulo de elasticidade, apresentado e testado em corpo-de-prova cilíndrico submetido à compressão diametral (ALMEIDA, 2005), aos resultados do ensaio de carga apresentados na Figura 6.10 (item 6.4.2 do capítulo 6). Adotando-se o coeficiente de Poisson $\nu = 0,18$ e o valor inicial para o módulo de elasticidade do concreto $E = 29,0$ GPa, obteve-se o valor de E que melhor ajusta os deslocamentos medidos aos determinados numericamente. A Tabela 7.3 apresenta esses valores de E , em função dos pontos adotados para a medição dos deslocamentos utilizados no ajuste.

Tabela 7.3 – Resultados obtidos no módulo de elasticidade.

Pontos utilizados na análise		Deslocamentos em mm		Resultados
Localização	Número	Ensaio	DIANA PAREST	E (GPa)
PEI, PES, PDS e MV	4	7,452	7,416	25,3
PEI, PES e MV	3	7,452	7,425	25,5
PEI e PES	2	7,452	7,434	25,6

Observa-se na Tabela 7.3 que o número de pontos de deslocamentos medidos tem pouca influência no resultado da análise inversa, pois para a obtenção de um parâmetro, seria suficiente um ponto de observação na estrutura.

Comparando o valor encontrado para o módulo de elasticidade global do concreto do pórtico, obtido a partir de análise inversa, com o obtido experimentalmente, em corpos de prova cilíndricos do mesmo concreto, encontra-se uma diferença de 13%

aceitável tendo em vista que os métodos adotados para a obtenção desses valores são diferentes.

7.4.1.2 DETERMINAÇÃO DA CARGA APLICADA

Aplicando-se ao pórtico de concreto armado e protendido o método apresentado, aos resultados do ensaio de carga apresentados na Tabela 7.4, e considerando-se o módulo de elasticidade da estrutura o obtido no item anterior ($E = 25,6$ GPa) e o coeficiente de Poisson adotado inicialmente $\nu = 0,18$, obtêm-se os parâmetros de carga que melhor ajustam os valores de deslocamentos medidos nos pontos indicados na Figura 6.9 (item 6.4.1 do capítulo 6) e os calculados, como mostra a Tabela 7.4.

Tabela 7.4 – Deslocamentos medidos

nos LVDT's no ensaio de carga.

Deslocamentos em mm			
PEI	PES	PDS	MV
7,015	3,397	3,650	1,587

Tabela 7.5 – Resultados obtidos de Carga.

Pontos utilizados na análise		Cargas em kN		Variação nos Resultados
Localização	Número	Ensaio	DIANA BALANC	
PEI, PES, PDS e MV	4	63,33	64,45	1,77%
PEI, PES e MV	3	63,33	64,42	1,72%
PEI e PES	2	63,33	63,43	0,16%

Verificando os valores obtidos para a estimativa de carga com valores obtidos experimentalmente no ensaio de carga, encontra-se uma aproximação muito boa, devido ao ajuste inicial do módulo de elasticidade global da estrutura.

7.5 RESULTADO DA ATUALIZAÇÃO DOS MODELOS DE PREVISÃO DE FLUÊNCIA

Aos resultados obtidos no ensaio do prisma de fluência realizado no LABEST/FEUP, apresentado no item 6.4.3 (capítulo 6), foi aplicado o método de atualização dos modelos de previsão de fluência com base em resultados de ensaio de curta duração apresentados por Bažant (2001).

Para realização da regressão linear foram utilizadas 5 medidas de deformação, dentro de um intervalo de tempo de 28 dias após a aplicação da carga, conforme apresentado na Tabela 7.6.

Tabela 7.6 - Valores adotados na regressão.

Idade em dias	1	7	14	21	28
J(t,t') Exper.(x10 ⁻⁶)	44,809	57,382	62,456	65,323	67,970

A Figura 7.7 mostra as curvas da função específica de fluência (J(t,t'), ver item 2.3.4.5 do capítulo 2) obtida a partir do ensaio e a do modelo da NBR 6118 (2003), bem como a resultante da regressão no modelo, identificadas por NBR. Os pontos adotados para a regressão estão destacados por círculos.

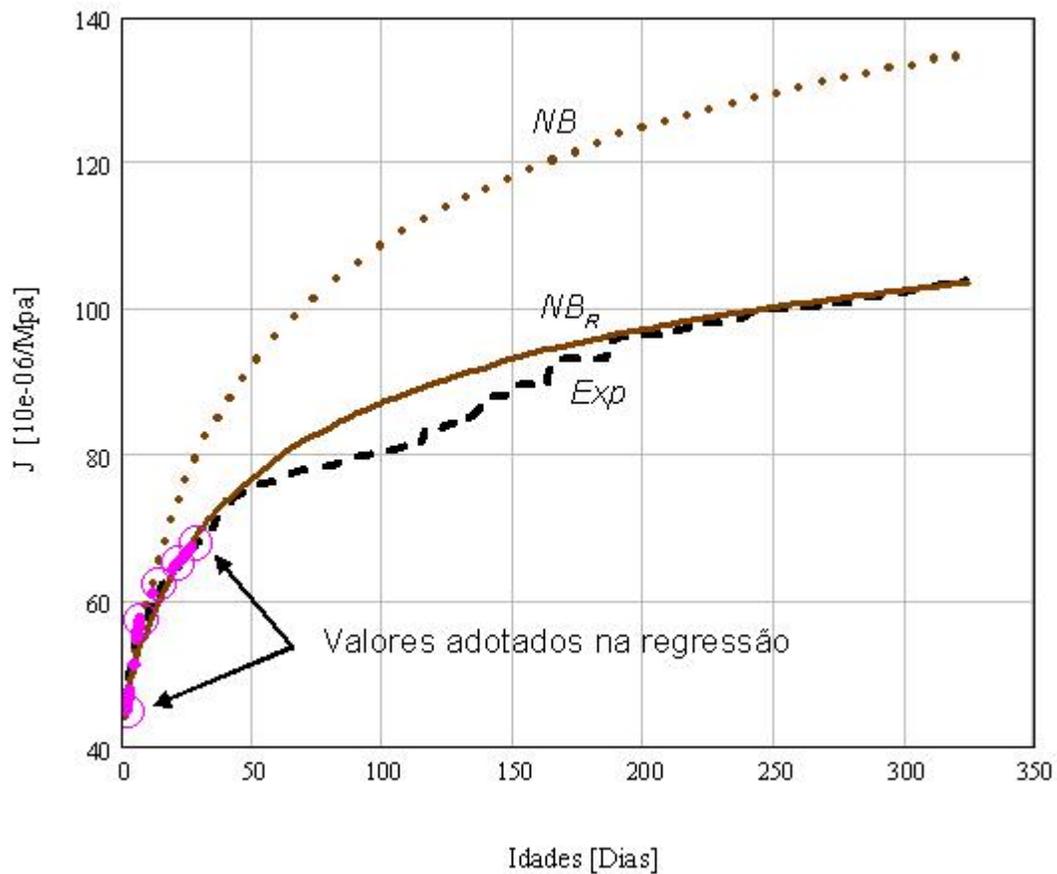


Figura 7.7 - Gráfico da função específica de fluência (J) versus tempo em dias para o modelo da NBR6118, a respectiva curva ajustada do modelo e os pontos adotados da regressão.

A Figura 7.8 apresenta as curvas da função específica de fluência $J(t, t')$ obtidas a partir do ensaio e dos modelos escolhidos: Eurocode 2 (EC), o de Gardner-Lockman (GL), o de Bažant (B3) e o da NBR 6118 (NB). Mostra, também, as curvas resultantes das regressões nos modelos, identificadas pelo índice R.

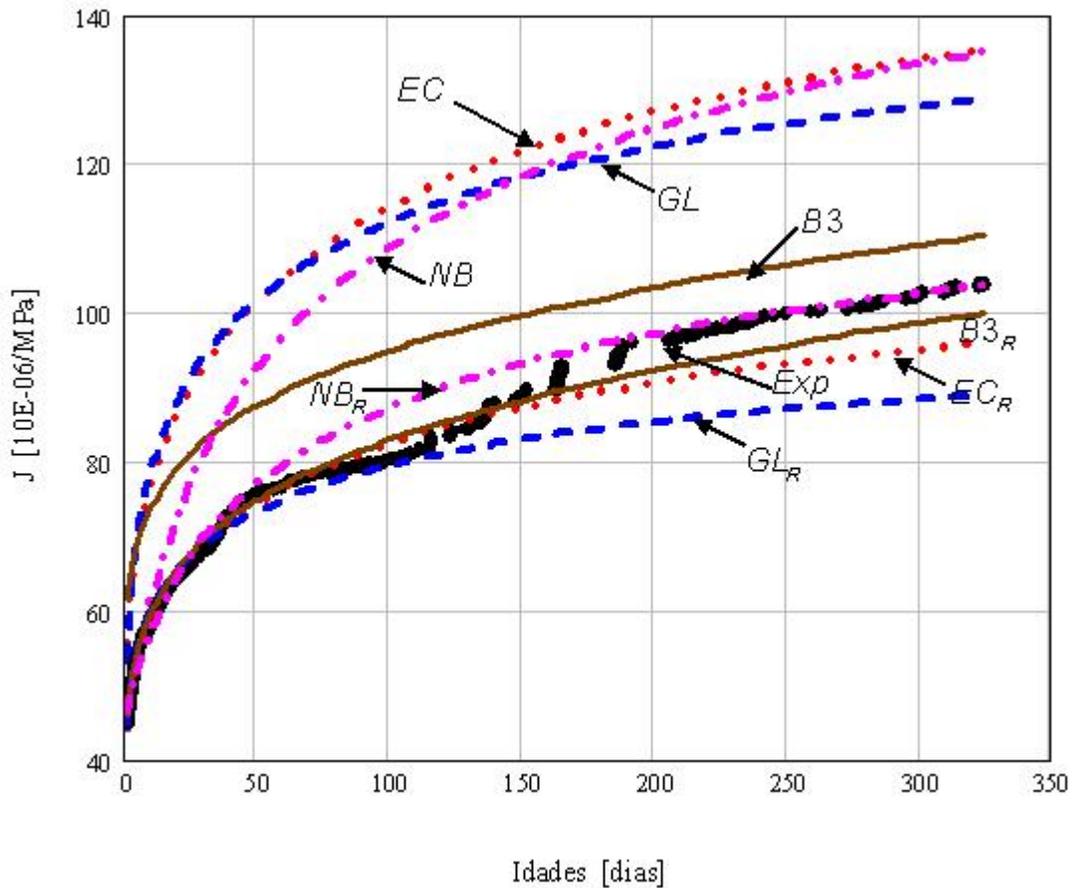


Figura 7.8 - Gráfico da função específica de fluência (J) versus tempo em dias para os modelos adotados e as respectivas regressões.

O método de atualização, desenvolvido por Bažant (1995), para aplicação ao modelo B3, pode ser empregado para ajuste de outros modelos de previsão de fluência, como se observa nos gráficos da Figura 7.7.

7.6 RESULTADOS OBTIDOS NO AJUSTE DE PARÂMETROS DE FLUÊNCIA

Neste item serão apresentados os resultados obtidos no ajuste dos parâmetros de fluência do concreto caracterizado no item 6.4.3 (capítulo 6).

Nos modelos de previsão do coeficiente de fluência descritos no item 2.3.4 (capítulo 2), foram introduzidos dois coeficientes C_3 e C_4 de forma a ajustá-los às curvas de fluência obtidas experimentalmente, apresentadas na Figura 7.1.

Aplicando-se o método descrito de análise inversa e implementada em uma rotina no programa MatLab, foram obtidos os coeficientes para ajuste dos modelos de fluência aos dados experimentais.

A Tabela 7.7 apresenta os coeficientes C_3 e C_4 que melhor ajustam os modelos de fluência aos dados experimentais.

Tabela 7.7 - Coeficientes obtidos no ajuste dos modelos de fluência.

Modelos	C_3	C_4	Norma
Eurocode 2	0,7375	1,2152	$3,42 \times 10^{-10}$
GL2000	0,5247	1,3331	$1,70 \times 10^{-22}$
ACI209	0,8132	1,0522	$2,39 \times 10^{-20}$
B3	0,6080	1,0137	$1,52 \times 10^{-22}$
NBr61118	0,5743	1,1134	$1,79 \times 10^{-16}$

A Figura 7.9 mostra as curvas do coeficiente de fluência dos modelos escolhidos para esse estudo e a obtida a partir das deformações medidas no ensaio laboratorial (FELIX, 2005). Cabe salientar que todas apresentam diferenças significativas em relação ao experimental, variando de 25 a 50 % no resultado final da fluência, o que leva à necessidade de uma melhor calibração dos modelos.

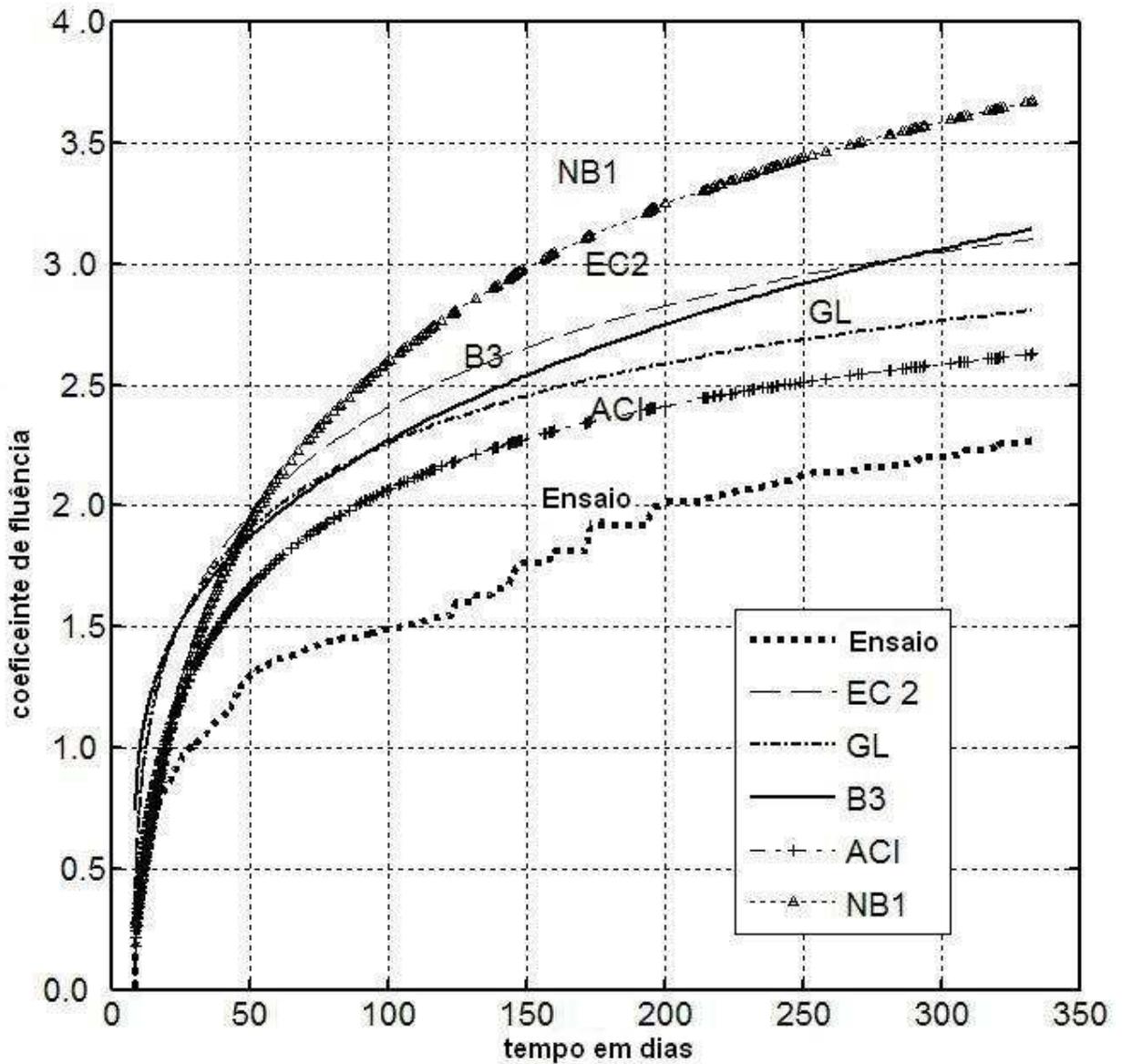


Figura 7.9 - Modelos de fluência e resultados experimentais

Apresentam-se na Figura 7.10 as curvas do coeficiente de fluência para os modelos escolhidos, ajustadas com os coeficientes C_3 e C_4 , mostrados na Tabela 7.7.

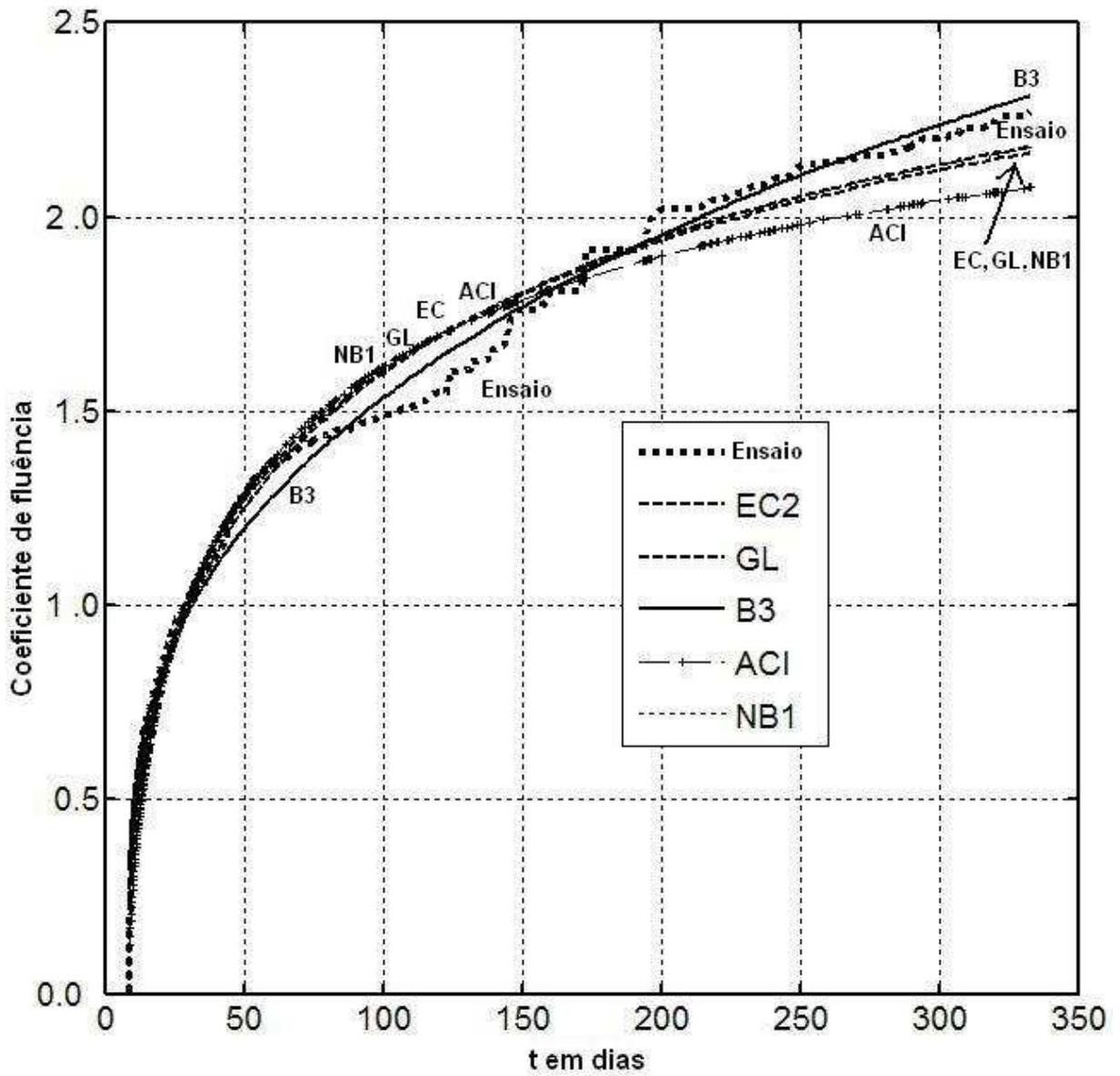


Figura 7.10 - Identificação de parâmetros a partir de 363 dados experimentais.

7.7 ANÁLISE INVERSA DO ENSAIO DE COMPRESSÃO DIAMETRAL EM CILINDROS DE CONCRETO

Na modelagem do cilindro, adotou-se material elástico linear isotrópico no estado plano de deformação discretizado com o elemento triangular denominado CST (*constant strain triangle*), mostrada na Figura 7.11.

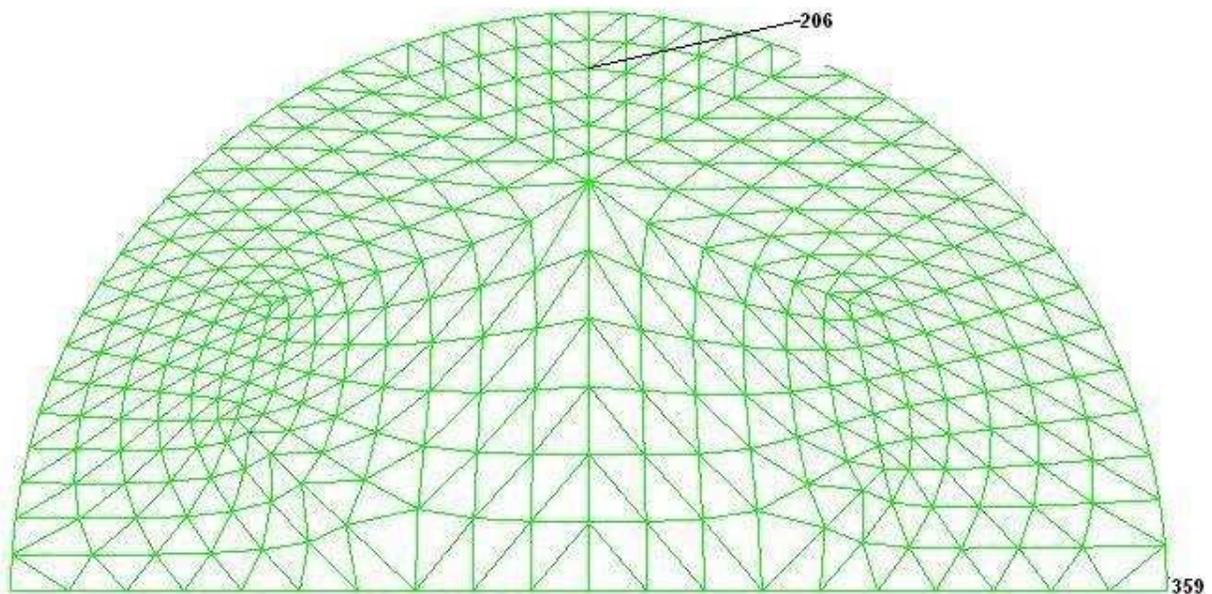


Figura 7.11 – Discretização e os elementos adotadas para a análise no programa de elementos finitos e determinação dos parâmetros.

Com deslocamentos medidos nos nós 206 (vertical) e 359 (horizontal) da Figura 7.11, e valores apresentados na Figura 6.4 (item 6.2.2 do capítulo 6), para a estimativa de dois parâmetros materiais, através da rotina **par_dipl**, adotaram-se os seguintes valores iniciais: $E = 40,0$ GPa; $\nu = 0,10$; $p_1 = p_2 = 0,001$; $q_1 = q_2 = 0,0001$; $r = 10^{-11}$.

A Tabela 7.8 apresenta os resultados obtidos da análise inversa utilizando-se o programa desenvolvido. Comparando-se o valor encontrado para o módulo de elasticidade do concreto, a partir da estimativa de parâmetros com o obtido experimentalmente, apresentado na Tabela 6.2 (item 6.2.1 do capítulo 6), encontra-se

uma diferença de 5.95 %, aceitável tendo em vista que os métodos empregados são diferenciados, os erros inerentes aos ensaios e as diferentes idades em que foram realizados os ensaios.

Tabela 7.8 - Resultados obtidos para cilindros de concreto.

	Programa	DIANA
E (GPa)	42.66	42,71
ν	0,2133	0,1749
erro	$7,88 \times 10^{-07}$	$0,16 \times 10^{-10}$
valor da função objetivo	$3,61 \times 10^{-19}$	

Quando se compara o valor encontrado para o módulo de elasticidade do concreto, a partir da estimativa de parâmetros realizada pelo programa e o obtido pelo DIANA, apresentado na Tabela 7.8, encontra-se uma diferença de 0,12 %, indicando que o sistema desenvolvido é robusto e com uma boa convergência quando se observa o valor da função objetivo atingida.

7.8 ANÁLISE INVERSA DO ENSAIO DO PÓRTICO DEMONSTRADOR

Na modelagem do pórtico demonstrador, adotou-se material elástico linear isotrópico no estado plano de deformação discretizado com o elemento triangular denominado CST (constant strain triangle), mostrada na Figura 7.12.

Com deslocamentos medidos nos nós 605 e 343 (horizontal) e 160 (vertical) da Figura 7.12, e valores apresentados na Figura 6.10 (item 6.4.2 do capítulo 6), para a estimativa do módulo de elasticidade do pórtico demonstrado, através da rotina **par_dipl**, adotou-se: $E = 29,0 \text{ GPa}$; $\nu_1 = 0,001$; $q_1 = 0,0001$; $r = 10^{-11}$.

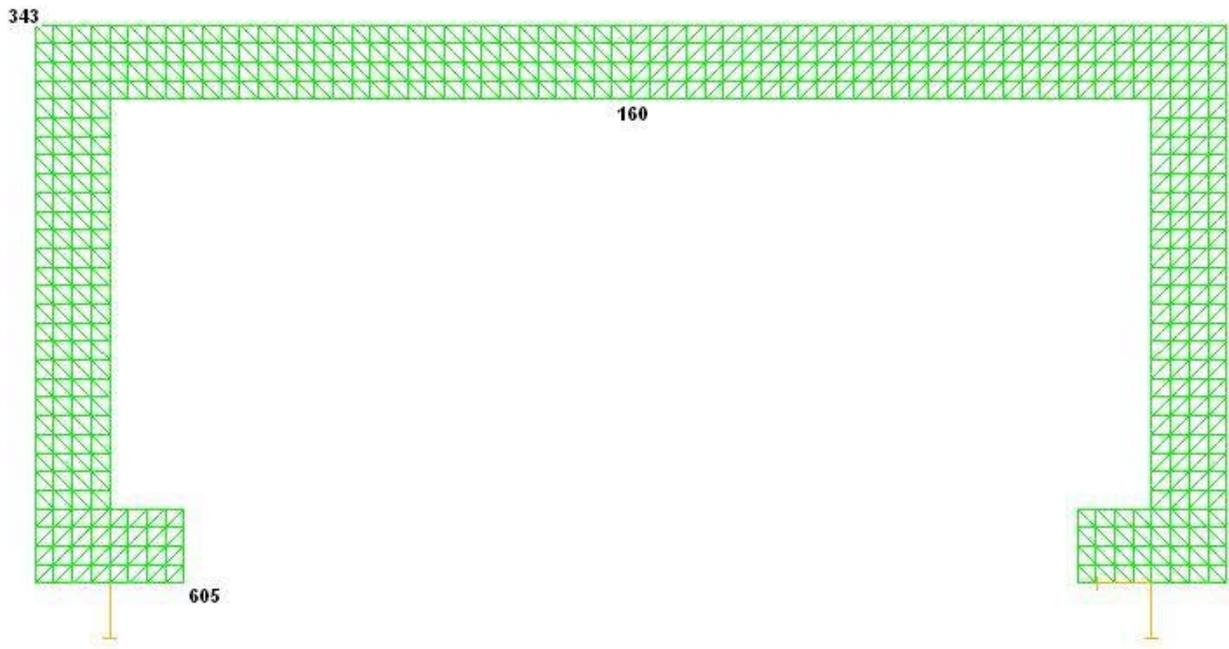


Figura 7.12 – Discretização e os elementos adotados para a análise no programa de elementos finitos e determinação de parâmetros.

Quando se compara o valor encontrado para o módulo de elasticidade do pórtico demonstrador, a partir da estimativa de parâmetros realizada pelo programa e o obtido pelo DIANA, apresentado na Tabela 7.9, encontra-se uma diferença de 1,04 %, indicando que o sistema desenvolvido é robusto e com uma boa convergência quando se observa o valor da norma atingida nas 4 iterações.

Tabela 7.9 - Resultados obtidos para cilindros de concreto.

	Programa	DIANA
E (GPa)	26,73	25,63
Norma	$7,61 \times 10^{-08}$	$0,16 \times 10^{-10}$

Aplicando-se ao pórtico de concreto armado e protendido a método apresentado, aos resultados do ensaio de carga apresentados na Tabela 7.4, e considerando-se o módulo de elasticidade da estrutura o obtido no item anterior ($E = 26,73$ GPa) e o coeficiente de Poisson adotado inicialmente $\nu = 0,18$, obtêm-se os parâmetros de

carga que melhor ajustam os valores de deslocamentos medidos nos pontos indicados na Figura 6.9 (item 6.4.1 do capítulo 6) e os calculados, como mostra a Tabela 7.10.

Tabela 7.10 - Resultados obtidos para a estimativa da carga aplicada ao pórtico demonstrador.

	Programa	DIANA
Carga (kN)	66,74	64,45
Norma	$6,78 \times 10^{-08}$	$5,28 \times 10^{-10}$

Verificando os valores obtidos para a estimativa de carga com o programa de estimativa de parâmetros com valores do DIANA, encontra-se uma aproximação muito boa, devido ao ajuste inicial do módulo de elasticidade global da estrutura.

7.9 ANÁLISE INVERSA DA MEMBRANA ELÁSTICA ORTOTRÓPICA

Para a validação do módulo desenvolvido de identificação de parâmetros elásticos em materiais ortotrópicos foi utilizado o exemplo encontrado em White (2003), de uma membrana quadrada de 100 mm de lado e 0,20 mm de espessura e, mostrada na Figura 7.13, com oitenta e um pontos de observações dos deslocamentos.

A discretização da membrana em elementos finitos, do tipo CST, a numeração dos nós (121), as vinculações externas, impedidas nas direções X e Y e as cargas aplicadas estão apresentadas na Figura 7.14.

Com a aplicação do método desenvolvido são identificados os seguintes parâmetros: os dois módulos de deformação longitudinal (E_1 e E_2), o coeficiente de Poisson (ν_{12}), o módulo de deformação transversal (G_{12}) e o ângulo de ortotropia (φ).

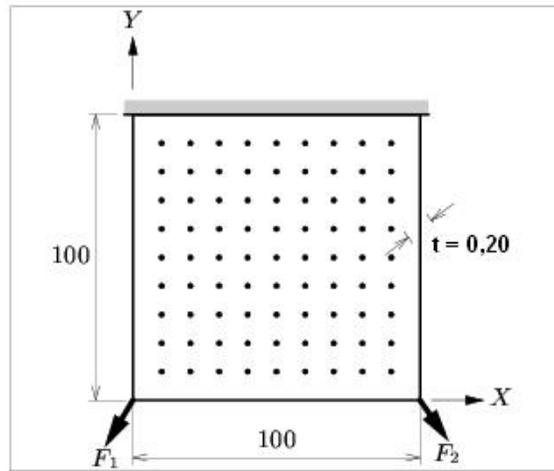


Figura 7.13 – Localização dos pontos de observação dos deslocamentos, espaçados de 10 mm em ambas as direções.

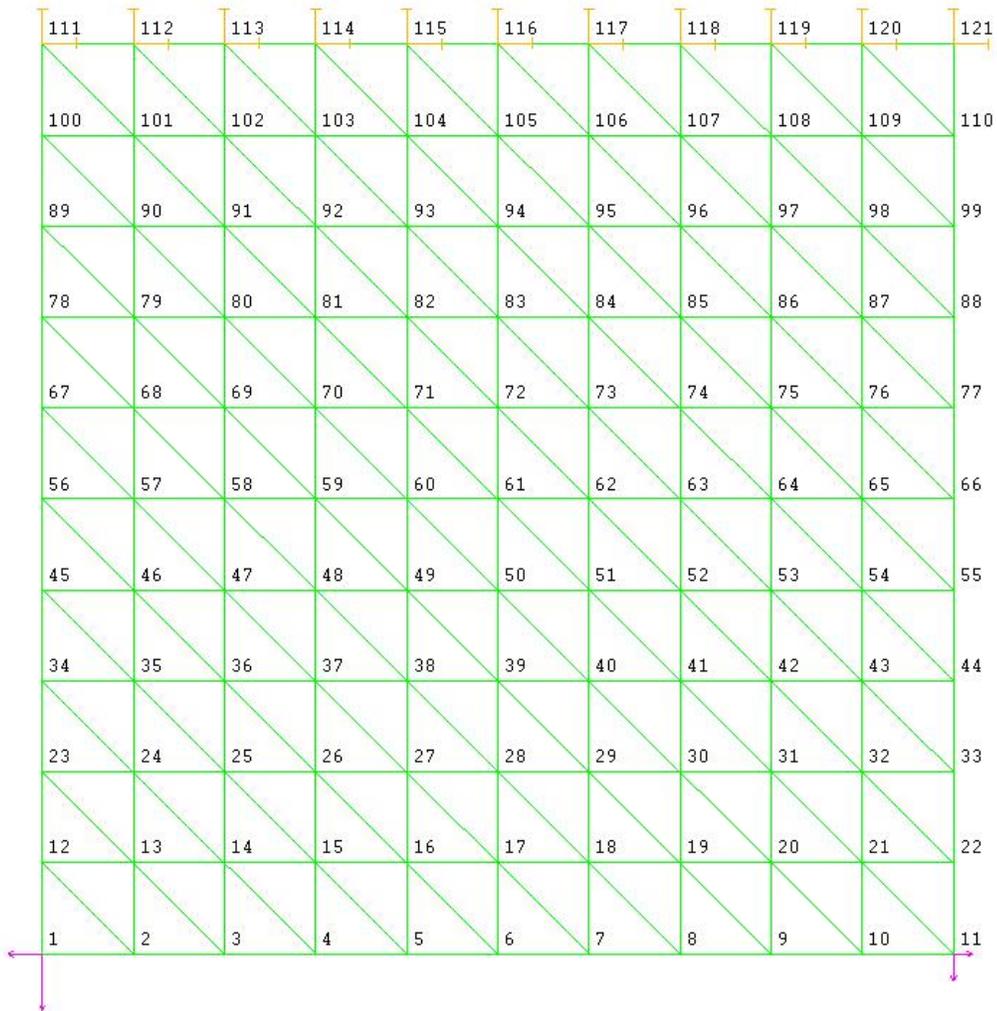


Figura 7.14 – Vista da discretização em elementos finitos da membrana.

Com os deslocamentos medidos nas direções X e Y nos 81 nós, destacados com um ponto preto no interior da membrana, apresentados na Figura 7.14 (WHITE, 2003), com os valores iniciais para os cinco parâmetros materiais: $E_1 = 0,50$ [kN/mm²], $E_2 = 0,50$ [kN/mm²], $\nu_{12} = 0,25$, $G_{12} = 0,15$ [kN/mm²], $\varphi = 52,73^\circ$, com os seguintes valores para os coeficientes das matrizes de covariância: $p_1 = 10^{-4}$; $p_2 = 10^{-3}$; $p_3 = 10^{-4}$; $p_4 = 10^{-8}$; $p_5 = 10^{-6}$; $r = 10^{-8}$; e de peso: $q_1 = 10^{-6}$; $q_2 = 10^{-4}$; $q_3 = 10^{-5}$; $q_4 = 10^{-9}$; $q_5 = 10^{-7}$; com a utilização da rotina **par_dipl**. encontram-se os valores dos parâmetros que melhor ajustam os deslocamentos medidos aos calculados, apresentados na Tabela 7.11.

Tabela 7.11 - Resultados obtidos para a estimativa dos parâmetros materiais da membrana ortotrópica.

	Programa	DIANA
E_1 (kN/mm²)	0,4006	0,4000
E_2 (kN/mm²)	0,5749	0,5999
ν_{12}	0,1556	0,1501
G_{12} (kN/mm²)	0,09998	0,1000
φ	44,202	45,00
erro	$5,58 \times 10^{-04}$	$1,83 \times 10^{-02}$

Observando-se os resultados da Tabela 7.11 pode-se concluir que o programa desenvolvido atingiu o objetivo, pois a norma do erro está muito pequena, indicando a convergência. Cabe destacar que os parâmetros encontrados pelo programa desenvolvido estão muito próximos aos obtidos com o DIANA.

O gráfico da Figura 7.15 mostra os deslocamentos calculados com os parâmetros encontrados pelo programa versus os obtidos experimentalmente, onde se pode observar uma excelente aderência entre os valores, indicando que a método empregado na estimativa foi adequado.

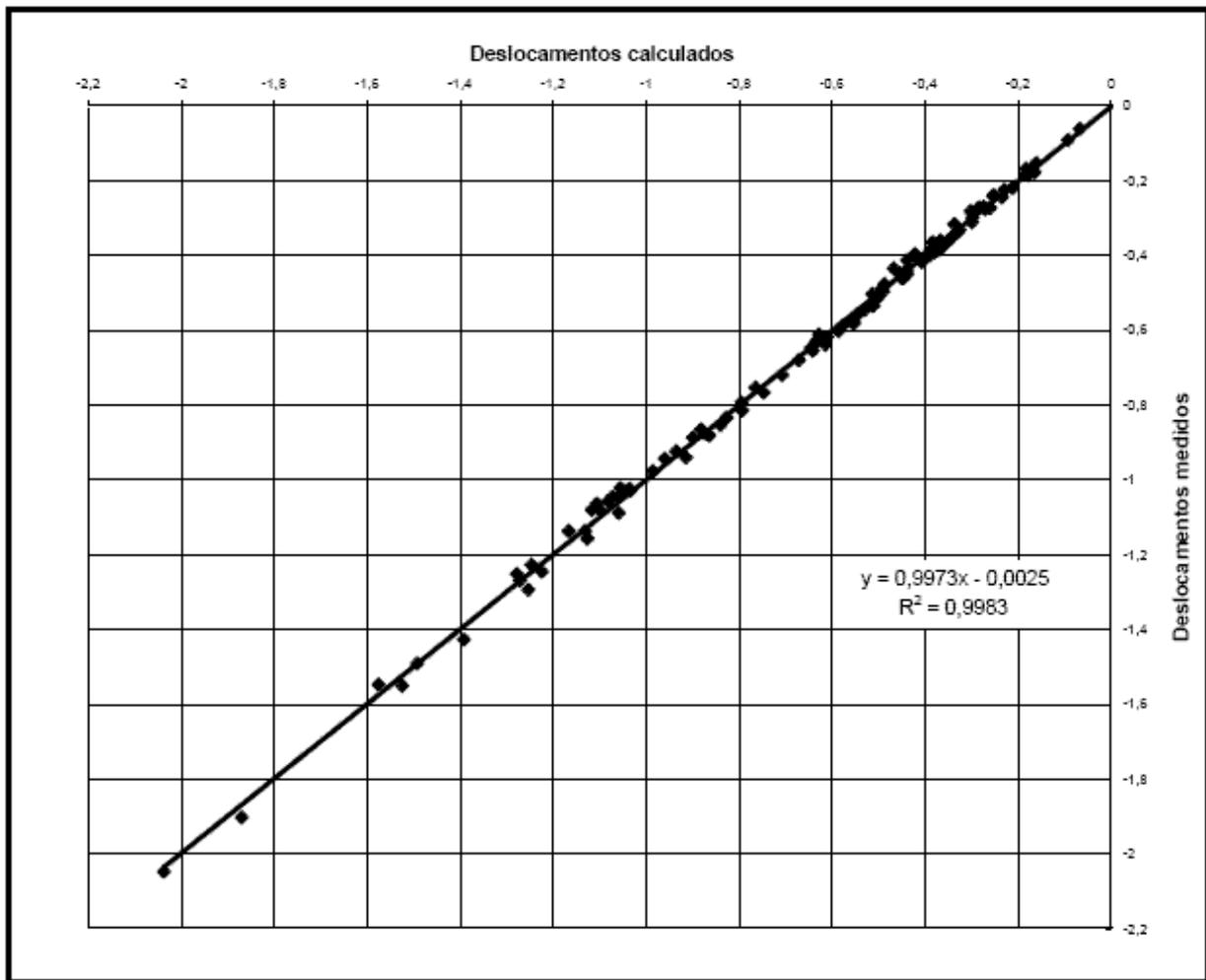


Figura 7.15 – Gráfico dos deslocamentos calculados versus os medidos.

CAPÍTULO 8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

8.1 CONCLUSÕES GERAIS

O principal resultado deste trabalho foi o desenvolvimento de uma metodologia, implementada em um programa computacional para a identificação de parâmetros adequados para projetos de engenharia estrutural. Podem ser utilizados para obtenção de parâmetros utilizando valores medidos a partir de monitoração tanto em protótipos ensaiados em laboratório quanto a partir de estruturas monitoradas em campo.

Uma contribuição significativa do programa foi o desenvolvimento do módulo de análise inversa que identifica parâmetros materiais e de cargas, a partir de deformações medidas. A utilização do programa computacional gerado irá aumentar as possibilidades de análise de experimentos e de estruturas em situações nas quais a obtenção dos deslocamentos é inviável ou de difícil realização.

A partir de dados de estruturas monitoradas em campo pode-se, com a utilização do programa, determinar parâmetros mais próximos da realidade, que contribuirão para o desenvolvimento de projetos futuros com maior segurança e economia.

Uma outra contribuição é a determinação de parâmetros materiais em estruturas existentes, a partir dos dados obtidos em uma prova de carga, possibilitando uma análise da estrutura mais confiável permitindo, inclusive, a elaboração de um projeto de reforço mais realista e seguro.

Quanto ao ajuste e previsão do coeficiente de fluência do concreto, o método utilizado mostrou-se eficiente e de fácil aplicação prática, indicando ser um modelo relevante para previsão do comportamento de concretos de alto desempenho ao longo do tempo, tendo em vista que os modelos disponíveis não podem ser aplicados ou resultam em valores muito diferentes dos reais. Isto é, a metodologia desenvolvida viabiliza a calibração dos parâmetros materiais com base não apenas em valores

obtidos em laboratório, mas também em valores obtidos de estruturas já construídas, desde que monitoradas desde sua construção.

8.2 RELEVÂNCIAS DO SISTEMA COMPUTACIONAL DESENVOLVIDO

O programa desenvolvido com base nessa metodologia integrou a análise inversa com a análise estrutural via elementos finitos, mostrando-se adequado e de fácil utilização. Sendo disponibilizado livremente, viabilizará as possibilidades de outros pesquisadores realizarem análises de experimentos para identificação de parâmetros.

8.2.1 VALIDAÇÃO DO SISTEMA

O sistema desenvolvido foi validado comparando-se os resultados obtidos a partir de exemplos teóricos e os encontrados em rotinas de análise inversa existentes no programa DIANA, além de resultados de ensaios laboratoriais.

- Exemplos teóricos

Nos exemplos de aplicação de identificação de parâmetros com a utilização do sistema, descritos na seção 5.4 (capítulo 5), apresentaram uma convergência do método de minimização da função erro com a obtenção do mínimo em um número reduzido de iterações, para uma norma adotada de 10^{-6} .

- Comparações com o programa DIANA

Tendo em vista as comparações efetuadas no capítulo 7 de análise inversa entre o sistema computacional desenvolvido e o DIANA, concluí-se que ambos apresentaram resultados semelhantes. O sistema apresenta boa consistência com vantagem de ser aberto, possibilitando a realização de estimativas de parâmetros a partir de deformações medidas, além da implementação de novos módulos.

- Ensaaios laboratoriais

Considerando as dificuldades de realização das medições de deslocamentos nos ensaios brasileiros, apresentadas no item 7.3 (capítulo), o resultado obtido a partir da análise inversa para o módulo de elasticidade do concreto ficou muito próximo do valor obtido no ensaio padronizado pelo LNEC.E 397-1993, o que vem, mais uma vez, comprovar a eficácia da técnica de análise inversa para a determinação de parâmetros elásticos do concreto.

Na validação dos resultados do pórtico demonstrador, descrito no item 7.4, o sistema mostrou-se adequado para a obtenção do módulo de elasticidade do concreto e de cargas em estruturas no regime elástico linear, tendo em vista os valores obtidos quando comparados como os experimentais.

8.2.2 PREVISÃO DE FLUÊNCIA

O método empregado mostrou-se eficiente para os ajustes:

- dos modelos de previsão da fluência no concreto, a partir de dados dos ensaios de curta duração, sendo uma boa alternativa para determinação de fluência em concretos especiais e
- das curvas do coeficiente de fluência e das deformações de retração, tendo em vista os valores obtidos quando comparados como os experimentais.

8.3 TÓPICOS PARATRALHOS FUTUROS

O sistema está preparado para tratar problemas relativos a comportamento não linear. Um trabalho interessante para desenvolvimento na seqüência é a codificação de novos módulos do sistema de análise inversa para materiais com comportamento não

linear, utilizando-se tanto das derivadas explícitas dos deslocamentos e matriz de rigidez tangente em relação aos parâmetros como também de derivadas numéricas por diferenças finitas.

A utilização do sistema computacional desenvolvido por outros pesquisadores pode ser viabilizada pelo desenvolvimento de um aplicativo de modo a tornar possível sua utilização, via internet.

A realização de novas análises com o módulo de identificação de parâmetros a partir das medidas de deformações em diversos experimentos e estruturas.

Aplicar o método de ajuste do coeficiente de previsão de fluência a partir de ensaios de curta duração para concretos em que o modelo apresentado na NBR6118 não fornece bons resultados, na busca de ajuste destes, visando contribuições para uma revisão das normas técnicas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnica. Projeto de estruturas de concreto - Procedimento: NBR 6118, Rio de Janeiro, RJ, 2003.

ACI Committee 209. Prediction of Creep, Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structures. American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 1982.

ALMEIDA, L.C., SOUSA, J.L.A.O., FIGUEIRAS, J.A., Determinação de parâmetros elásticos para o concreto por análise inversa de resultados de ensaios de compressão diametral, In: **Anais do 47º Congresso Brasileiro do Concreto**, Olinda, PE, 2005.

ALMEIDA, L.C., SOUSA, J.L.A.O., FIGUEIRAS, J.A., Aplicação de técnicas de análise inversa na determinação de cargas aplicadas em uma estrutura a partir de deslocamentos medidos, In: **Anais do XXVI CILAMCE**, Guarapari, ES, 2005a.

ALMEIDA, L.C., SOUSA, J.L.A.O., FIGUEIRAS, J.A., Análise inversa para ajuste de modelos de previsão fluência a partir de ensaios de curta duração, IV Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo, São Paulo, Brasil, Abril 2006.

ALMEIDA, SOUSA, J.L.A.O., FIGUEIRAS, J.A., Application of Inverse Analysis to Shrinkage and Creep Models, In: 16TH EUROPEAN CONFERENCE OF FRACTURE - MEASURING, MONITORING AND MODELING CONCRETE PROPERTIES, Alexandroupolis. Proceedings. Dordrecht, The Netherlands: Springer Science, v. 1, p. 1-8, 2006.

ARCARO, V.F., **Notas de aula de EC 834 - Técnicas de programação**, Disponível em: www.arcaro.org, Unicamp, 2006. Acesso em 10.11.2006

BAŽANT, Z.P., **Mathematical modeling of creep and shrinkage of concrete**. Jonh Wiley & Sons Ltd., Chichester and New York, 1988.

BAŽANT, Z.P., BAWEJA, S., **Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures – model B3**, Material Structures, 28, p. 357-365, 1995.

BAŽANT, Z.P., BAWEJA, S., **Justification and refinements of model B3 for concrete creep and shrinkage 2 Updating and theoretical basis**, Material and Structures, 28, p. 488-495, 1995a.

BAŽANT, Z.P., HAUGGAARD, B., BAWEJA, S., ULM, F.-J., **Microprestress-solidification theory for aging and drying creep of concrete**, J. Eng. Mech. ASCE 123, 1997.

BAWEJA, S., DVORAK, G.J., BAŽANT, Z.P. **Triaxial composite model for basic creep of concrete**, J. Eng. Mech. ASCE 124 (9), 959–966, 1998.

BAŽANT, Z.P., HUET, C., **Thermodynamic functions for ageing viscoelasticity: integral form without internal variables**, Int. J. Solids Struct. 36, 3993–4016, 1999.

BAŽANT, Z.P., BAWEJA, S., **Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures (Model B3)**, In: AlManasseer, A., (Ed.), Creep and Shrinkage of Concrete, ACI Special Publication, (extended and improved version of Bazant and Baweja, 1995a,b,c), 2000.

BAŽANT, Z.P. **Prediction of concrete creep and shrinkage: past, present and future**, Nuclear Engineering and Design, 203 p. 27-38, 2001.

BITTENCOURT, T. N., ANDRÉ, J.C., SOUSA, J.L.A.O., HELENE, P.R.L., **Monitoração e avaliação da deformabilidade, da fissuração e da segurança de estruturas de concreto**, Projeto de pesquisa, EPUSP, 2005

CAMP, C. V., **Finite elements in structural mechanics**, Memphis University – Department of Civil Engineering, Disponível em: <http://www.ce.memphis.edu/7117/>, 2006. Acesso em: 05.11.2006

CASTRO, A. T., SOUSA, L. R., **Interpretation of the monitored behaviour of a large underground powerhouse using back analysis techniques**, Conferência Internacional sobre Engineering Mechanics Today, Hanói, 1995.

CASTRO, A.T. **Métodos de retroanálise na interpretação do comportamento de barragens de betão**, Tese de Doutorado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal, 1997.

COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON. CEB-FIP, **Model code 1990. (Bulletin d'Information, 203)**, Lausanne, 1991.

COSTA, A., ANDRÉ, J.C. **Aplicação do método dos elementos finitos na identificação de parâmetros em problemas de retroanálise na escavação de túneis**, XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Ouro Preto, Brasil, 2003.

COZZA, E., **Faltou remédio**, Construção São Paulo, São Paulo, n. 2576, p. 4- 9, Jun. 1997.

EC2 – **Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1.1: General rules and rules for buildings**, CEN, 2003.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DE LA PRÉCONTRAINTE/COMITÉ EURO-INTERNATIONALE DU BETON, **Evaluation of the time dependent behavior of concrete**, (Bulletin d'Information, 1990), Chameleon Press, Londres, 1990

FELIX, C. M. S., **Monitorização e análise do comportamento de obras de arte**, Tese de doutorado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2005.

FONSECA, A. A., BASTOS, R., MORUJÃO, F. P., **Ponte Infante D. Henrique - Uma ponte inovadora**, V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo, São Paulo, Brasil, Abril 2003.

GAO, Y., **Structural health monitoring strategies for smart sensor networks**, PhD tesis of Doctor of Philosophy in Civil Engineering in the Graduate College of the University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, 2005.

GARDNER, N.J., LOCKMAN, M.J. **Design provisions for drying shrinkage and creep of normal-strength concrete**, ACI Materials Journal, 98(2), p.159-167, 2001.

GARDNER, N.J., **Comparison of predictions for drying shrinkage and creep of normal-strength concrete**, Can. J. Civ. Eng. 31, p. 767-775, 2004.

GENS, A., LEDESMA, A. ALONSO, E.E., **Estimation of parameters in geotechnical backanalysis – Maximum likelihood approach**, Computers and Geotechnics, V. 18, N° 1, 1-27, 1996

GENS, A., LEDESMA, A. ALONSO, E.E., **Estimation of parameters in geotechnical backanalysis – II Applications to a túnel excavation problem**, Computers and Geotechnics, V. 18, N° 1, 29-46, 1996a

GOULART, M.L.S., COSTA, A., ANDRÉ, J.C. Utilização de dados de eletrónicos para o dimensionamento da laje de uma barragem de enrocamento com face de concreto, **Anais do V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto**, São Paulo, Brasil, 2003.

GRANGER, L.P., Bažant, Z.P., **Effect of composition on basic creep of concrete and cement paste**, ASCE J. Eng. Mech. 121 (11), 1261–1270, 1995.

HENDRIKS, M.A.N. **Identification of the mechanical behavior of solid materials**, PhD. Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, The Netherlands, 1991.

LECAMPION, B. **Sur l'identification des paramètres de lois de comportement de roches argileuses** PhD Tesis. Ecole Polytechnique, 2002.

LEDESMA, A. **Identificación de parámetros en geotecnia: aplicación a la excavación de túneles**, Tesis Doctoral, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España, 1987.

LEDESMA, A., GENS, A., Alonso, E., **Estimation of parameters in geotechnical backanalysis - I. Maximum likelihood approach**, *Computers and Geotechnics*. Vol.18, No.1, pp. 1-27, 1996a.

LEDESMA, A., GENS, A., ALONSO, E., **Parameter and variance estimation in geotechnical backanalysis using prior information**, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v.20, n.2, p.119-41, 1996.

LEKHNISTSKII, S. G., Tsai, S. W., Cheron, T., **Anisotropic plates**, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1968.

LEKHNISTSKII, S. G., **Theory of elasticity of an anisotropic body**, Mir Publishers, Moscow, 1981.

LIU, G.R., Han, X., **Computational Inverse Techniques in Nondestructive Evaluation** CRC PRESS LCC, 2003.

LNEC-E 397 – 1993, **Betões. Determinação do Módulo de Elasticidade em Compressão**, Especificação LNEC, 1993.

LOCKMAN, M.L., **Compliance, relaxation and creep recovery of normal strength concrete**, tesis of masters of Applied ins Civil Engineering, Departament of Civil Engineering University of Ottawa, Ottawa, Ontario, Canada, 2000.

LUENBERGER, D. G., **Linear and Nonlinear Programming**, Addison Wesley, 1989.

MATHWORKS, INC. MatLab – **The language of technical computing**. Version 6.5 R13, Mathworks, Inc, 2002.

NEVILLE, A. M., **Creep of concrete: plain, reinforced and prestressed**, North Holland Publishing Co.. Amsterdam, 1970.

NEVILLE, A. M., **Propriedades do concreto**, São Paulo, PINI, 1997.

OLIVEIRA, S.; FARINHA,L.; PINHO,J.;FLORENTINO,C., **Determinação do campo de tensões em barragens de betão a partir da interpretação quantitativa de extensões observadas**, *Betão Estrutural* 2002. p.403-414. LNEC, Lisboa 2002.

PINTADO., X., LEDESMA, A., LLORET, .A, **Backanalysis of thermohydraulic bentonite properties from laboratory tests**, Engineering Geology 64, 91-115, 2002.

RILEM TC 107 **Guidelines for the formulation of creep and shrinkage prediction models**, Materials and Structures, v. 29, Dec. 1996.

RILEM Recommendation, **Measurement of time-dependent strains of concrete**, prepared by Subcomm. (4 of RILEM Committee TC107-CSP) In: Acker, P., Bazant, Z.P., Chern, J.-C., Huet, C., Wittmann, F.H., (Eds.), Mater. Struct. (RILEM, Paris) 31 (No. 212, October), pp. 507–512, 1998.

SIEGEL, M.R., **Schum's outline of theory and problems of statistics**, Schaum, New York, 1961.

SOUSA, J.L.A.O., GETTU, R.; BARRAGÁN, B. Análise inversa para obtenção de relações constitutivas para concreto a partir de ensaios em vigas ranhuradas, XXII CILAMCE - CONGRESSO IBERO-LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, Campinas, 2001.

VELHO, H. F. C., **Problemas inversos: conceitos básicos e aplicações** - notas Mini Curso - IV Encontro de Modelagem Computacional - IPRJ-UERJ. Nova Friburgo - Rio Janeiro, 2000.

VELLOSO, R. Q. **Estudo numérico da estimativa de parâmetros hidráulicos em solos parcialmente saturados**, Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2000.

WAWRZYNEK A., NOWAK A.J., BARTOSZEKA, M., DELPAK R., SHIH J.K.C., HU C.W., **Application of direct/inverse analysis to evaluate the structure integrity of concrete. Part I. Formulation for thermo-mechanical properties determination**, Vo. 36, pp. 101-110, NDT&International,N.Y - USA, 2003.

WITTE, F.C, SCHREPPERS, G. J., **DIANA - Finite elements analysis** - User's Manual – Release 8.1 -- Second ed. -- TNO DIANA BV, 2003.

ZAGOTTIS, D. L., **Os modelos matemáticos no projeto estrutural de barragens**, Seminário Nacional de Grandes Barragens, Fortaleza, Brasil, 1976.

ZIENKIEWICZ, O.C., Taylor, R.L., **The finite element method**, 15 Edition, Vol 1, Butterworth Heinemann, Oxford, 2000.

**ANEXO 1 – MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO PARA AS
PROPRIEDADES ELÁSTICAS DOS
MATERIAIS ORTOTRÓPICOS**

TRANSFORMAÇÃO COORDENADA PARA A DEFORMAÇÃO NO PLANO

A Figura 16 apresenta um sistema de referência (1,2) rotacionado de um ângulo θ a partir do sistema de referencia global (x,y).

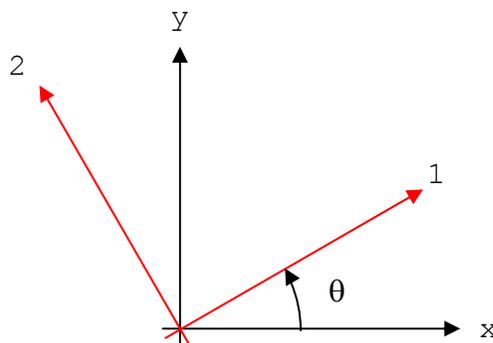


Figura 16 – Sistema de coordenadas

Pode-se escrever a transformação da tensão e da deformação em um novo sistema de coordenadas respectivamente, como segue:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\epsilon} = \mathbf{T}\epsilon \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\sigma} = \mathbf{T}\sigma \quad (\text{A.2})$$

Onde: $c = \cos \theta$, $s = \text{sen}\theta$

Multiplicando-se ambos os lados da terceira equação da transformação da tensão e da deformação por $\sqrt{2}$, obtém-se

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sqrt{2}\sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & \sqrt{2}cs \\ s^2 & c^2 & -\sqrt{2}cs \\ -\sqrt{2}cs & \sqrt{2}cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

Onde a matriz T obtida tem seguinte propriedade:

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{I} \tag{A.4}$$

RELAÇÃO TENSÃO DEFORMAÇÃO

A relação tensão-deformação (Lei de Hooke) para as direções onde se conhece as constantes do material pode ser escrita como:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{H}}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{A.5}$$

Onde:

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} & \frac{\nu_{12}E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} & \frac{E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{12} \end{bmatrix}$$

E_1 e E_2 : módulos de elasticidade para as direções materiais 1 e 2;

ν_{12} : coeficiente de Poisson para deformação na direção 2 correspondente à tensão na direção 1;

G_{12} :módulo de deformação transversal no plano (1,2);

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2 \tag{A.6}$$

Substituindo-se a equação (A.1) na equação (A.5), tem-se:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{H}}\mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Na equação acima substitui-se a equação (A.2), como segue:

$$\mathbf{T}\boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{H}}\mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{H}}\mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Substituindo-se na equação acima a propriedade apresentada na equação (A.4), pode-se escrever a relação tensão-deformação para o sistema global, como segue:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T\hat{\mathbf{H}}\mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{A.7}$$

Onde:

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{H}} \mathbf{T}$$

ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMAÇÃO

A densidade de energia potencial de deformação para um corpo elástico linear pode ser escrito como:

$$\varphi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo a equação (A.7) na equação acima, tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{A.9})$$

Da formulação do método de elementos finitos (capítulo 4) tem-se a equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}\mathbf{d} \quad (\text{A.10})$$

Substituindo a equação (A.10) na equação (A.9), tem-se:

$$\varphi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{M}^T \mathbf{H} \mathbf{M}) \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T [(\mathbf{T} \mathbf{M})^T \hat{\mathbf{H}} (\mathbf{T} \mathbf{M})] \mathbf{d} \quad (\text{A.11})$$

Desse modo, a matriz de rigidez para materiais ortotrópicos, quando os eixos materiais e globais não são coincidentes é dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{T} \mathbf{M})^T \hat{\mathbf{H}} (\mathbf{T} \mathbf{M}) \quad (\text{A.12})$$

**ANEXO 2 – MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DAS
TENSÕES E DEFORMAÇÕES NO
PLANO**

TRANSFORMAÇÃO DE DEFORMAÇÕES NO PLANO

A Figura 17 mostra um sistema de coordenadas (x, y) rotacionado de um ângulo θ a partir do sistema (x, y) .

A deformação na direção de um vetor unitário paralelo ao eixo x é definida como sendo ε_{xx} .

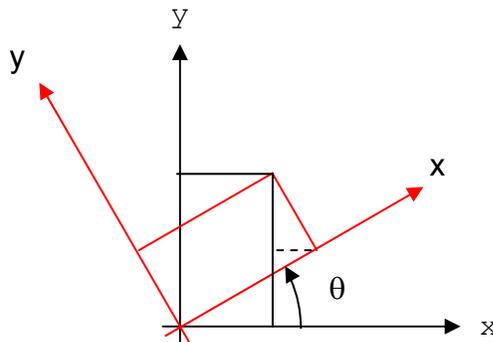


Figura 17 – Sistema de coordenadas

As expressões que fornecem a mudança de coordenadas para qualquer ponto do plano, quando o sistema de coordenadas está girado de um ângulo θ , são as seguintes:

$$\left. \begin{aligned} x &= x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta \\ y &= x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +c & -s \\ +s & +c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Onde: $c = \cos \theta$, $s = \operatorname{sen} \theta$

Quando um corpo é deformado, o ponto (x, y) passa para o ponto $(x + u, y + v)$, onde u, v são as componentes do deslocamento.

Com a matriz de mudança de coordenadas pode-se escrever a mudança os deslocamentos como segue:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +c & -s \\ +s & +c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + u \\ y + v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} +c & -s \\ +s & +c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Dessa forma o deslocamento no sistema material é dado por:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +c & -s \\ +s & +c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +c & +s \\ -s & +c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Determinação das derivadas do deslocamento u da equação: $u = cu + sv$

- Determinação da derivada de u em relação a x :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \right) + s \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \right) \quad (\text{A.14})$$

Da (A.13) obtém-se:

$$\frac{\partial x}{\partial x} = c \quad \frac{\partial y}{\partial x} = s \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -s \quad \frac{\partial y}{\partial y} = c$$

Substituindo-se na equação (A.14), tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = c \left(\frac{\partial u}{\partial x} c + \frac{\partial u}{\partial y} s \right) + s \left(\frac{\partial v}{\partial x} c + \frac{\partial v}{\partial y} s \right)$$

Finalmente:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} = c^2 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} + s^2 \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}} + cs \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (\text{A.15})$$

- Determinação da derivada de \mathbf{u} em relação a \mathbf{y} :

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{y}} = c \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}} \right) + s \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{y}} = -cs \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} + c^2 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{y}} - s^2 \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} + cs \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}} \quad (\text{A.16})$$

Determinação das derivadas do deslocamento \mathbf{v} da equação $\mathbf{v} = -s\mathbf{u} + c\mathbf{v}$

- Determinação da derivada de \mathbf{v} em relação a \mathbf{x} :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = -s \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right) + c \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = -cs \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} - s^2 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{y}} + c^2 \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} + cs \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}} \quad (\text{A.17})$$

- Determinação da derivada de \mathbf{v} em relação a \mathbf{y} :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -s \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} \right) + c \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = s^2 \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 \frac{\partial v}{\partial y} - cs \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{A.18})$$

DEFORMAÇÕES DE ENGENHARIA

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

- **Deformação em xx**

Da equação (A.15), tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = c^2 \frac{\partial u}{\partial x} + s^2 \frac{\partial v}{\partial y} + cs \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{xx} = c^2 \varepsilon_{xx} + s^2 \varepsilon_{yy} + 2cs \varepsilon_{xy} \quad (\text{A.19})$$

- **Deformação em yy:**

Da equação (A.18), tem-se:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = s^2 \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 \frac{\partial v}{\partial y} - cs \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{yy} = s^2\varepsilon_{xx} + c^2\varepsilon_{yy} - 2cs\varepsilon_{xy} \quad (\text{A.20})$$

- Deformação xy :

Das equações (A.16) e (A.17), tem-se:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -cs \frac{\partial u}{\partial x} + cs \frac{\partial v}{\partial y} + (c^2 - s^2) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{xy} = -cs\varepsilon_{xx} + cs\varepsilon_{yy} + (c^2 - s^2) \varepsilon_{xy} \quad (\text{A.21})$$

Colocando na forma matricial as equações(A.19), (A.20) e (A.21), encontra-se a matriz de transformação para as três componentes, como segue:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

Onde:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Substituindo na equação acima $\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$ e $\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Onde \mathbf{T}_e é a matriz de transformação de coordenadas para o caso de se adotar γ_{xy}

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

A seguinte relação existe entre as matrizes de transformação:

$$\mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{T}_e)^T \quad (\text{A.25})$$

TRANSFORMAÇÃO COORDENADA PARA A TENSÃO NO PLANO

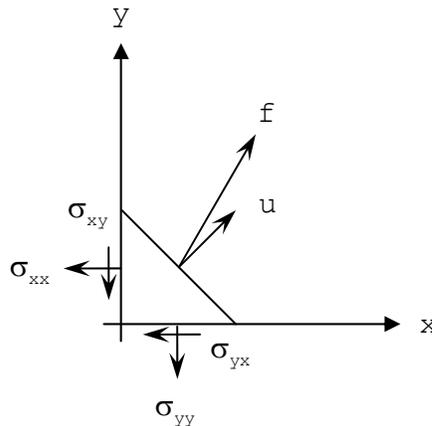


Figura 18 – Sistema de coordenadas.

O triângulo da Figura 18 tem duas de suas faces ortogonais com os eixos x e y respectivamente e a outra face, cuja área é igual a α , ortogonal ao vetor unitário u .

A projeção da área α sobre os planos ortogonais aos eixos x e y, pode ser escrita como:

$$\alpha_x = \alpha u_x \quad \alpha_y = \alpha u_y$$

O equilíbrio das forças que atuam nas faces do triângulo podem ser escrita como:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}\alpha_x + \sigma_{yx}\alpha_y \\ \sigma_{xy}\alpha_x + \sigma_{yy}\alpha_y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \sigma_{xx}u_x + \sigma_{yx}u_y \\ \sigma_{xy}u_x + \sigma_{yy}u_y \end{bmatrix}$$

O vetor tensão atuando na face ortogonal ao vetor u pode ser escrita como:

$$\frac{f}{\alpha} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}u_x + \sigma_{yx}u_y \\ \sigma_{xy}u_x + \sigma_{yy}u_y \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy} \Rightarrow \frac{f}{\alpha} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

A componente do vetor tensão, atuando no plano ortogonal ao vetor u^1 na direção de um vetor u^2 , pode ser escrito como:

$$\sigma = \begin{bmatrix} u_x^2 & u_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \sigma_{xx}u_x^1u_x^2 + \sigma_{yy}u_y^1u_y^2 + \sigma_{xy}(u_x^1u_y^2 + u_y^1u_x^2)$$

A Figura 19 apresenta um sistema de coordenadas $x'y'$ girado de um ângulo θ a partir do sistema (x,y)

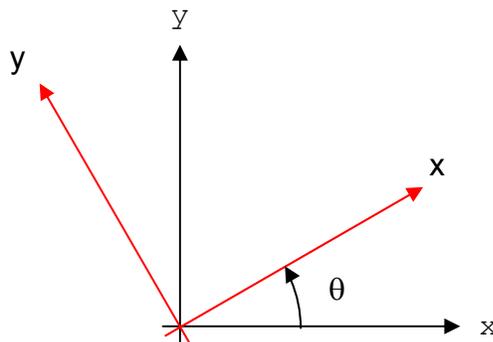


Figura 19 – Sistema de coordenadas

$$u^1 = \begin{bmatrix} +c \\ +s \end{bmatrix}, \quad u^2 = \begin{bmatrix} -s \\ +c \end{bmatrix}$$

Onde: $c = \cos \theta$, $s = \text{sen}\theta$

- Tensão xx

$$\sigma_{xx} = c^2\sigma_{xx} + s^2\sigma_{yy} + 2cs\sigma_{xy} \quad (\text{A.26})$$

- Tensão yy

$$\sigma_{yy} = s^2\sigma_{xx} + c^2\sigma_{yy} - 2cs\sigma_{xy} \quad (\text{A.27})$$

Tensão xy

$$\sigma_{xy} = -cs\sigma_{xx} + cs\sigma_{yy} + (c^2 - s^2)\sigma_{xy} \quad (\text{A.28})$$

A transformação para as três componentes de tensão pode ser escrita na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

Onde \mathbf{T}_σ é a matriz de transformação de coordenadas, dada por:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix}$$