UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo

FÁBIO LUIS GEA DOS SANTOS

MODELO VISCO-COESIVO DE PROPAGAÇÃO DE FRATURA EM CONCRETO SOB INFLUÊNCIA DA TAXA DE CARREGAMENTO

CAMPINAS

2020

FÁBIO LUIS GEA DOS SANTOS

MODELO VISCO-COESIVO DE PROPAGAÇÃO DE FRATURA EM CONCRETO SOB INFLÊNCIA DA TAXA DE CARREGAMENTO

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil, na área de Estruturas e Geotécnica.

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO FÁBIO LUIS GEA DOS SANTOS E ORIENTADO PELO PROF. DR. JOSÉ LUIZ ANTUNES DE OLIVEIRA E SOUSA.

ASSINATURA DO ORIENTADOR(A)

CAMPINAS

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

Sa59m

Santos, Fábio Luis Gea dos, 1989-
Modelo visco-coesivo de propagação de fratura em concreto sob influência da taxa de carregamento / Fábio Luis Gea dos Santos. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Concreto - Propriedades mecânicas. 2. Concreto - Fratura. 3. Mecânica da fratura - Modelos matemáticos. I. Sousa, José Luiz Antunes de Oliveira e, 1951-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Viscous-cohesive model for concrete fracture propagation under the influence of the loading rate
Palavras-chave em inglês:
Concrete - Mechanical properties
Concrete - Fracture
Fracture mechanics - Mathematical models
Área de concentração: Estruturas e Geotécnica
Titulação: Doutor em Engenharia Civil
Banca examinadora:
José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa [Orientador]
Gustavo Henrique Siqueira
Túlio Nogueira Bittencourt
Edson Denner Leonel
Osvaldo Luís Manzoli
Data de defesa: 14-02-2020
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Civil

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-6941-4672
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/7086064599274487

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO

MODELO VISCO-COESIVO DE PROPAGAÇÃO DE FRATURA EM CONCRETO SOB INFLÊNCIA DA TAXA DE CARREGAMENTO

Fábio Luis Gea dos Santos

Tese de Doutorado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:

Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa
Presidente e Orientador – FEC/UNICAMP

Prof. Dr. Gustavo Henrique Siqueira
FEC/UNICAMP

Prof. Dr. Túlio Nogueira Bittencourt
Universidade de São Paulo (USP)

Prof. Dr. Edson Denner Leonel
Universidade de São Paulo (USP) – Campus São Carlos

Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli
Universidade Estadual Paulista (UNESP) – Campus Bauru

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

Campinas, 14 de fevereiro de 2020

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa por ser meu orientador ao longo de 9 anos. A sua orientação começa em 2010 com os projetos de iniciação científica e a aplicação da correlação de imagens digitais. No trabalho de conclusão de curso me propôs um novo desafio: aprender sobre mecânica da fratura, o modelo de fratura fictícia e implementar uma classe nova em seu programa de análise inversa Fit3PB. Entusiasmado com as possibilidades da análise inversa, pedi ao Prof. Antunes uma temática similar para o meu mestrado. Foi então que a temática de efeitos de taxa de carregamento começou. O mestrado propôs o ajuste de um modelo visco-coesivo utilizando a análise inversa. O uso da análise inversa possibilitou novas interpretações sobre o problema o que resultou no doutorado. É necessário também um agradecimento em especial à confiança do Prof. Antunes por acreditar que eu concluiria as pesquisas nos prazos mesmo trabalhando em paralelo ao mestrado e doutorado (sendo que no período do doutorado eu acumulei dois empregos).

Aos engenheiros Dr. Edimar Cesar Rylo, Dr. Tiago Luís Duarte Forti e Me. Gustavo Camargo Longhin por incentivar e apoiar o desenvolvimento acadêmico dos profissionais da SimWorx -Engenharia, Pesquisa e Desenvolvimento.

Ao Prof. Dr. Gonzalo Ruiz da University of Castilla-La Mancha (UCLM) por disponibilizar os dados experimentais do concreto de alta resistência.

Ao Prof. Me. Dener Altherman da Leonardi Pré-fabricados e do Centro Universitário Salesiano de São Paulo (UNISAL) por disponibilizar espécimes de concreto de ultra alta resistência para análise e por sempre ser muito prestativo quando tinha algumas dúvidas sobre a escolha de traço de concreto.

Ao Laboratório de Modelagem Estrutural e Monitoramento (LabMEM) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) por disponibilizar a máquina universal de ensaios

O Laboratório de Materiais do Centro Universitário Salesiano de São Paulo (UNISAL), Unidade São José – Campinas, por disponibilizar formas para moldagem dos corpos de prova do concreto convencional.

RESUMO

O concreto é um material quase-frágil em tração. Uma zona de processos inelásticos de dimensões não desprezíveis se desenvolve durante o processo de falha do material. Essa zona é caracterizada pela fissuração dispersa e pode ser matematicamente representada por uma lei coesiva que relaciona a tensão resistente do material com a abertura das faces de uma fratura. Observa-se, experimentalmente, que o comportamento do concreto durante a falha é dependente da taxa do carregamento. Com o aumento da taxa de carregamento ocorre o aumento da rigidez inicial, da resistência à tração e um comportamento mais frágil durante a falha. Este trabalho propõe um modelo que modifica a lei coesiva de acordo com a taxa de abertura entre as faces da fratura. Quanto maior a taxa de abertura maior é a tensão resistente e menor é a abertura limite que delimita atuação da lei coesiva. Foram selecionados diferentes tipos de concreto para a verificação do modelo proposto. Ensaios de flexão em três pontos em taxas de carregamento moderadas foram utilizados como comparativo experimental. Um programa de análise inversa foi desenvolvido e utilizado para ajustar os parâmetros do modelo proposto. O intuito da análise inversa é obter a melhor representação do modelo numérico, que simula o ensaio de flexão em três pontos, perante o conjunto experimental. O modelo apresenta uma boa congruência para o concreto convencional, de alta resistência e de ultra alta resistência. Concretos reforçados com fibra são bem representados pelo modelo até o pico de carga. Na fase pós-pico algumas variações são observadas. Tais variações podem estar ligadas à diferença de comportamento do concreto e das fibras sob efeito da taxa de carregamento.

Palavras Chave: Concreto – Propriedades mecânicas, Concreto – Fratura, Mecânica da Fratura – Modelos Matemáticos.

ABSTRACT

Concrete is a quasi-brittle material in tension. An inelastic process zone of non-negligible dimensions is developed during the material failure process. This zone is characterized by dispersed cracking and can be mathematically represented by a cohesive law that relates the tensile strength of the material to the opening between the fracture faces. Experimentally, the behavior of the concrete during failure is dependent on the loading rate. As the loading rate increases, the initial stiffness and the tensile strength also increase, and the material behavior is more brittle. This work proposes a model that modifies the cohesive law according to the opening rate of the fracture faces. The higher is the opening rate, the higher is the tensile strength and the smaller is the limit opening of the cohesive law. Different types of concrete were selected to validate the proposed model. Three-point bending tests at moderate loading rates were used as experimental comparative. An inverse analysis program was developed and used to adjust the parameters of the proposed model. The purpose of the inverse analysis is to find the parameters of the proposed model that best fit the experimental results. The model presents a good agreement for the conventional, high strength and ultra-high strength concrete. Fiber-reinforced concretes are well represented by the model up to the first peak load. In the post-peak phase, some discrepancies are observed. Such discrepancies may be related to the difference in behavior of concrete and fibers under the effect of loading rate.

Keywords: Concrete – Mechanical Properties, Concrete – Fracture, Fracture Mechanics – Mathematical Models.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CC – Concreto convencional.

CAR – Concreto de Alta Resistência.

CRFA – Concreto Reforçado com Fibra de Aço.

CRFA3530 – Concreto Reforçado com Fibra de Aço de 35 MPa de resistência e 30 kg/m³ de fibra.

CRFA4045 – Concreto Reforçado com Fibra de Aço de 40 MPa de resistência e 45 kg/m³ de fibra.

CRFP – Concreto Reforçado com Fibra de Polipropileno.

CRFP35 – Concreto Reforçado com Fibra de Polipropileno de 35 MPa de resistência a compressão e 3,75 kg/m³ de fibra.

CRFP40 – Concreto Reforçado com Fibra de Polipropileno de 40 MPa de resistência a compressão e 3,75 kg/m³ de fibra

CUAR – Concreto de Ultra Alta Resistência.

CMOD – *crack mouth opening displacement.*

MDC – Modelo de Dano Contínuo

MEC – Modelo de Elementos de Contorno.

MEF – Modelo de Elementos Finitos.

MFD – Modelo de Fissura Distribuída.

MFEL – Mecânica da Fratura Elástico Linear.

MFF – Modelo de Fratura Fictícia.

$P - CMOD$ – Curva de força aplicada pelo atuador em relação ao CMOD.

$P - \delta$ – Curva experimental de força aplicada pelo atuador em relação ao deslocamento vertical do atuador.

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

a – Distância média entre alinha de ruptura na face tracionada e a linha correspondente ao apoio mais próximo.

A_{lig} – área de ligação rompida pela fratura.

B – Largura da viga.

D – Diâmetro.

e – Espessura do corpo no estado plano de tensão.

E – Módulo de elasticidade.

E_0 – Módulo de elasticidade de referência.

E_{ci} – Módulo de elasticidade tangente inicial.

f_c – Tensão resistente de compressão.

f_{cm} – Tensão resistente de compressão média.

$f_{c,ef}$ – Tensão resistente de compressão efetiva (ensaio de compressão axial).

f_t – Tensão resistente de tração.

$f_{t,D}$ – Tensão resistente à tração por compressão diametral.

F_c – Força máxima de compressão.

g – Aceleração da gravidade.

G_f – Energia aparente de fratura.

G_{f0} – Energia aparente de fratura de referência.

h – Deslocamento medido (podendo ser δ ou $CMOD$, de acordo com o ensaio realizado).

h_i – Deslocamento medido inicial.

h_f – Deslocamento medido final.

H – Altura da viga.

H_c – Comprimento do corpo-de-prova cilíndrico.

m – Massa do corpo.

m_a – Massa do conjunto ensaiado.

m_{a1} – Massa da viga entre apoios.

m_{a2} – Massa do atuador.

n – Índice do efeito viscoso proposto por Rosa *et al.* (2012)

n_E – Índice de potência do efeito viscoso do módulo de elasticidade.

n_w – Índice do efeito viscoso da evolução de fragilidade do material.

N_i – função de forma do nó i.

P – Força aplicada pelo atuador.

P_{exp} – Função que representa a resposta P experimental.

P_{num} – Função que representa a resposta P numérica.

S – Vão livre da viga.

w – Abertura entre as faces da fratura.

w_c – Abertura crítica entre as faces da fratura.

$\dot{w}$ – Taxa de abertura entre as faces da fratura.

$\dot{w}_0$ – Taxa de abertura entre as faces da fratura de referência.

$\dot{w}_w$ – Taxa de abertura entre as faces da fratura de comportamento frágil.

W_0 – Trabalho realizado pelo atuador para romper a ligação, correspondente a área da curva carga versus deslocamento ($P - \delta$).

W_{jk} – Peso do ponto de integração.

- Símbolos Gregos

δ – Deslocamento do atuador da máquina de ensaio.

$\dot{\delta}$ – Taxa de deslocamento do atuador da máquina de ensaio.

ε – Deformação.

$\dot{\varepsilon}$ – Taxa de deformação.

$\dot{\varepsilon}_0$ – Taxa de deformação de referência.

η – Coordenada da função de mapeamento.

μ – Coeficiente de Poisson.

ρ – Densidade do material.

σ – Tensão.

$\dot{\sigma}$ – Taxa de tensão.

$\dot{\sigma}_0$ – Taxa de tensão de referência.

ξ – Coordenada da função de mapeamento.

Matrizes e Vetores

$[B]$ – Matriz das derivadas parciais das funções de forma ou matriz de deformação.

$[C]$ – Matriz de amortecimento.

$[D]$ – Matriz de elasticidade.

$\overrightarrow{\delta u}$ – Deslocamento virtual.

$\overrightarrow{\delta U}$ – Deslocamento virtual do sistema discreto.

$\overrightarrow{\delta \varepsilon}$ – Deformação virtual.

$\vec{\varepsilon}$ – Deformações do modelo discreto.

$\vec{\eta}$ – Forças de dissipação.

$\vec{F}$ – Conjunto de forças atuantes no corpo.

$\overrightarrow{F_\chi}$ – Vetor de forças devido a $\vec{\chi}$.

$\overrightarrow{F_\Phi}$ – Vetor de forças devido a $\vec{\Phi}$.

$[J]$ – Matriz Jacobiana.

$[K]$ – Matriz de rigidez do corpo.

$[M]$ – Matriz de massa do corpo.

$[N]$ – Matriz das funções de forma.

$\vec{p}$ – Conjunto de parâmetros a ser ajustados.

$\vec{P}$ – Cargas concentradas aplicadas nos pontos discretos do corpo.

$\vec{\Phi}$ – Forças de superfície.

$\vec{u}$ – Deslocamentos do sistema contínuo.

$\ddot{\vec{u}}$ – Aceleração do sistema contínuo.

$\vec{U}$ – Deslocamentos do sistema discreto.

$\ddot{\vec{U}}$ – Aceleração do sistema discreto.

$\vec{\chi}$ – Forças de corpo.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

A propagação de fraturas em elementos de concreto é um dos tópicos de estudo de engenheiros e pesquisadores. A resistência do concreto é sensível a falhas ou vazios existentes em sua composição, ao tamanho dos agregados e ao tamanho do espécime. Além disso, a taxa de carregamento também desempenha um papel importante no comportamento do material.

Kaplan (1961) realizou uma das primeiras análises sobre a temática. Nesse trabalho, compararam-se os resultados obtidos em vigas de concreto em flexão com os conceitos de mecânica da fratura apresentados por Griffith (1920) (tais conceitos, mais tarde, definem a conhecida teoria da mecânica da fratura elástica linear - MFEL). Kaplan (1961) considera, com algumas ressalvas, que os conceitos apresentados por Griffith (1920) eram adequados para a representação do comportamento de espécimes de concreto.

Kesler, Naus e Lott (1972), Walsh (1972), Naus (1973) e Walsh (1976) demonstram que a MFEL é inadequada para estruturas de concreto ao se comparar diferentes ensaios experimentais em diferentes geometrias. A existência de uma zona de microfissuras de tamanho considerável, ao longo da frente da fratura, limita a aplicação da MFEL.

O maior avanço no processo de modelagem acontece no trabalho de Hillerborg, Modeer e Petersson (1976), ao aplicar um modelo coesivo em uma fratura discreta gerada em uma malha de elementos finitos. A ideia do modelo coesivo é propagar uma fratura discreta após atingida a resistência de tração (f_t). Para que o efeito de fissuração distribuída seja contemplado, é adicionada uma tensão de fechamento (σ) ao longo das faces da fratura fictícia. Essa tensão é conhecida como tensão coesiva e sua intensidade está relacionada com a abertura entre as faces da fratura fictícia (w). Essa tensão coesiva é interrompida ao ser atingida a abertura limite ou abertura crítica entre as faces da fratura (w_c), representando assim a separação efetiva entre as faces. O modelo de Hillerborg, Modeer e Petersson (1976) é representado na Figura 1-1.

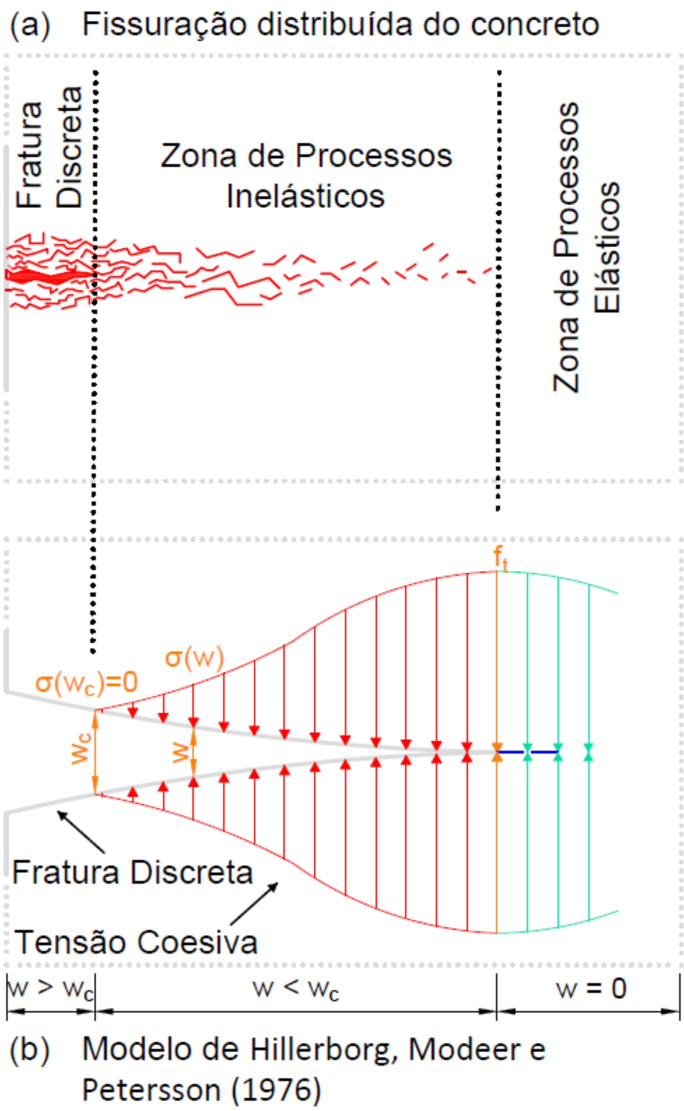


Figura 1-1: Representação do Modelo de Hillerborg, Modeer e Petersson (1976). Fonte: Autor.

A correspondência do modelo com o dado real depende, essencialmente, da escolha adequada do comportamento da curva coesiva. Três parâmetros físicos compõem a curva coesiva: A resistência à tração do material (f_t), a energia aparente de fratura (G_f) e a abertura crítica da fratura (w_c). Uma representação da curva coesiva com os parâmetros mencionados é apresentada na Figura 1-2. G_f expressa a energia por unidade de área necessária para que as faces do material sejam separadas. Esse parâmetro é equivalente à área sob a curva coesiva.

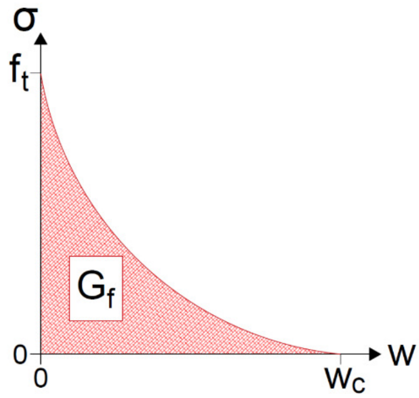


Figura 1-2: Representação da curva coesiva e seus parâmetros. Fonte: Autor.

As curvas coesivas são definidas por modelos matemáticos. Em geral são utilizadas curvas compostas por trechos retilíneos, sendo utilizadas uma (linear) e duas retas (bilinear) para concretos convencionais, três retas (trilinear) para concretos com fibras e, para casos mais específicos, curvas compostas por várias retas (polilinear). Planas e Elices (1990) e Hordjik (1991) definiram curvas coesivas exponenciais a partir de ensaios experimentais.

Os parâmetros da curva coesiva são obtidos por ensaios físicos, diretamente ou por análise inversa. O parâmetro f_t pode ser obtido pelo ensaio de compressão diametral (*Brazilian test*) ou pelo ensaio de flexão, e o parâmetro G_f pode ser calculado com base no ensaio de flexão em três pontos, conforme recomendado pela RILEM (1985). O parâmetro w_c acaba sendo determinado pela formulação matemática da curva coesiva utilizada, conforme os valores de f_t e G_f obtidos.

A análise inversa consiste no ajuste de parâmetros de algum modelo numérico de tal modo que a solução do modelo seja a mais próxima possível da observação experimental. Maier *et al.* (2006) faz uma revisão sobre os diferentes ensaios e métodos numéricos utilizados no ajuste da curva coesiva por análise inversa. Um programa em linguagem C++ foi desenvolvido por Sousa e Gettu (2006) para automatizar o processo de análise inversa de diferentes curvas coesivas, utilizando-se do ensaio em flexão em três pontos como comparativo ao ajuste. Slowik *et al.* (2006) e Skocek e Stang (2008) utilizam o *wedge-splitting test* para o ajuste. Ferreira, Venturini e Hild (2011) utilizam a técnica de correlação de imagens digitais para identificar a trajetória da fratura durante o ensaio de flexão em três pontos para, posteriormente, gerar uma modelo em elementos de contorno para ajustar os parâmetros da curva coesiva por análise inversa.

A resposta mecânica do concreto é influenciada pela taxa de carregamento. Rüsch (1960) estabelece uma relação do efeito da taxa de carregamentos em ensaios de flexão. Observa-se que quanto maior é a taxa de deformação, maior é a rigidez inicial, maior é o valor do pico de tensão e maior é o declive após o pico.

Wittmann *et al.* (1987) avaliaram o efeito da taxa de carregamento sobre o valor de G_f e os parâmetros de uma curva coesiva bilinear. Os resultados demonstram que nas taxas iniciais o valor de G_f reduz até atingir um valor mínimo. Essas taxas iniciais são definidas pelos autores como taxas moderadas de carregamento. Após as taxas moderadas, G_f volta a crescer nas chamadas altas taxas de carregamento. O mesmo comportamento ocorre em relação a w_c. Quanto à resistência à tração (f_t) e ao módulo de elasticidade (E), ambos aumentam com o aumento da taxa de carregamento.

Um modelo baseado na fluência do concreto é proposto por Zhou (1992). Em seu modelo de elementos finitos, a tensão atuante na zona coesiva é corrigida pelo modelo de fluência proposto. Ensaios de flexão em três pontos foram utilizados para avaliar o modelo. Os resultados simulados foram adequados nos trechos iniciais e nos picos das curvas no comparativo com os ensaios.

Utilizando *strain-gauges*, Zhang *et al.* (2010) ensaiaram vigas de concreto de alta resistência em taxas de carregamento que variam de $10^{-4}\,mm/s$ até $10^{3}\,mm/s$. Dentre os resultados, observa-se que o pico de carga durante o ensaio de flexão em três pontos aumenta com a taxa de carregamento. Em taxas de carregamento baixas, a fratura principal avança com velocidade crescente, enquanto em taxas de carregamento altas, a velocidade de propagação apresenta uma redução.

Ruiz *et al.* (2011) verificam a influência da taxa de carregamento sobre G_f em diferentes compostos de concreto de alta resistência. O comportamento de G_f é similar ao que foi observado em Wittmann *et al.* (1987): em taxas baixas de carregamento, o valor de G_f tende a diminuir, e em taxas altas, o valor de G_f tende a aumentar.

Concretos reforçados com fibra de aço foram avaliados em diferentes taxas de carregamento em Zhang *et al.* (2014), Zhang, Ruiz e Abd Elazim (2015) e Stephen, Gettu e Raphael (2016). Todos utilizaram o ensaio de flexão em três pontos, sendo que em Zhang *et al.* (2014) e Zhang, Ruiz e Abd Elazim (2015) a taxa de carregamento foi controlada pelo deslocamento na linha de atuação do atuador, variando de $3.33 \times 10^{-3}\ mm/s$ até $2.66 \times 10^{3}\ mm/s$, e em Stephen, Gettu e Raphael (2016) a taxa é controlada pela a abertura da boca da ranhura ($CMOD$ – *crack mouth opening displacement*), variando de $0.01\,\mu m/s$ até $10\,\mu m/s$. Nas análises de Zhang *et al.* (2014) e Zhang, Ruiz e Abd Elazim (2015) as fibras foram arrancadas em todos os ensaios, e tanto o pico de carga quanto G_f aumentaram com o aumento das taxas de carregamento.

Em Stephen, Gettu e Raphael (2016) observa-se que E e f_t aumentam com a taxa de carregamento, assim como o primeiro pico da curva de força versus $CMOD$ ($P - CMOD$). Entretanto, no segundo pico da curva $P - CMOD$, o ensaio com a maior taxa de carregamento teve um valor menor que a taxa de carregamento anterior. Os autores explicam que isso ocorre devido à mudança do modo de falha nas fibras. Na última taxa de carregamento as fibras foram rompidas enquanto nas taxas anteriores a fibras foram arrancadas.

Stephen, Gettu e Raphael (2016) também avaliaram o efeito da taxa de carregamento em concretos reforçados com fibras de polipropileno. Observa-se o aumento de E, f_t e do pico de carga com o aumento da taxa de carregamento.

Tandon *et al.* (1995) compararam ensaios experimentais com um modelo visco-coesivo (o modelo é descrito em dois trabalhos, Bažant e Li (1997) e Li e Bažant (1997)). O modelo modifica a curva coesiva com base na taxa da abertura da fratura ($\dot{w}$). A resistência à tração na coesão, w_c e, consequentemente, G_f têm os seus valores aumentados com o aumento de $\dot{w}$. Os resultados numéricos apresentaram similaridades com o experimental.

Rosa *et al.* (2012) propõem um outro modelo visco-coesivo em que as ordenadas da curva coesiva (σ) e a energia de fratura (G_f) aumentam com $\dot{w}$. O parâmetro w_c continua inalterado. São utilizados ensaios de flexão em três pontos como base comparativa. O trabalho faz um ajuste manual dos parâmetros viscosos para que exista correspondência entre os picos experimentais com os simulados.

Gea dos Santos e Sousa (2015) descrevem a implementação de um sistema computacional que determina por análise inversa os parâmetros da curva coesiva (de acordo com Sousa e Gettu, 2006) e os parâmetros do modelo viscoso de Rosa *et al.* (2012). As curvas de força versus deslocamento ($P - \delta$) de vigas de concreto de alta resistência em diferentes taxas de carregamento são utilizadas para o ajuste dos parâmetros. É observado que para os carregamentos com taxas mais altas a qualidade do ajuste utilizando o modelo de Rosa *et al.* (2012) decresce significativamente. Assim como feito em Wittmann *et al.* (1987), uma análise inversa utilizando a curva coesiva foi realizada individualmente para cada conjunto experimental, separado pela taxa de carregamento. As observações são similares às apontadas por Wittmann *et al.* (1987) e Ruiz *et al.* (2011).

Gea dos Santos e Sousa (2018) descrevem uma estratégia de introduzir efeitos dependentes do tempo em um modelo que simula o efeito visco-coesivo em condições quase-estáticas. No modelo proposto, as tensões coesivas aumentam com o aumento da taxa de carregamento, porém o valor de G_f é preservado. A comparação entre a envoltória experimental e os resultados numéricos indicam uma concordância razoável.

1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é propor um modelo visco-coesivo com base nas observações de Wittmann *et al.* (1987), Ruiz *et al.* (2011) e Gea dos Santos e Sousa (2015, 2018) para a propagação de fratura em taxas de carregamento baixas ou quase-estáticas.

São estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Implementar um modelo numérico adequado para simular o comportamento do espécime de concreto ensaiado.
- Adicionar o modelo numérico e a lei visco-coesiva proposta ao programa de análise inversa desenvolvido em Gea dos Santos e Sousa (2015).
- Estabelecer um conjunto de diferentes compósitos de concreto para avaliar o desempenho do modelo visco-coesivo proposto. Ensaios realizados pelos autores ou obtidos da literatura são utilizados para a validação da proposta.
- Avaliar a qualidade do modelo proposto e sua aplicabilidade.

1.3 Justificativa

O dimensionamento de uma estrutura deve cumprir as exigências de segurança e desempenho aliados à economia. A estrutura deve resistir às possíveis combinações de ações às quais esteja suscetível. Dentre as ações podem ser elencados o peso próprio dos elementos estruturais, as sobrecargas de uso (pessoas, equipamentos, máquinas, veículos, pressão de água, etc), ação do vento, variação da temperatura, recalques e ações excepcionais (impactos de veículos, explosões, incêndios, etc). Algumas ações tais como vento, movimentação de pessoas, tráfego de veículos, ação de equipamentos, explosões, possuem taxas de carregamento muito distintas. Como estas taxas podem ser lentas, graduais ou rápidas, o comportamento ou a resistência da estrutura também pode ser bastante diferente.

Algumas pesquisas já foram realizadas com a finalidade de encontrar um modelo que se aproxime do comportamento da fratura para diferentes taxas de carregamento, porém, encontrar um modelo apropriado é um desafio.

Simuladores já fazem parte do cotidiano de projetistas. Com o avanço tecnológico e o desenvolvimento de métodos numéricos é possível realizar análises mais próximas da realidade.

A justificativa deste trabalho encontra-se nas vantagens em que um modelo mais próximo do comportamento real pode proporcionar a um projeto não convencional. Tais benefícios são:

- Aumento da segurança do projeto, uma vez que os seus limites são mais bem conhecidos.
- Aumento da economia, já que se reduz a incerteza das propriedades.
- Incentivo ao avanço tecnológico do concreto como elemento estrutural, uma vez que o aumento do seu conhecimento pode incentivar novas pesquisas e novas possibilidades de uso.

1.4 Organização do Texto

O trabalho está estruturado em 7 capítulos. A apresentação da temática, a definição do objetivo principal, dos objetivos específicos e da justificativa estão no capítulo 1.

A revisão bibliográfica quanto ao concreto e o seu comportamento em diferentes taxas de carregamento é apresentada no capítulo 2. No início do capítulo é feita uma breve revisão sobre a microestrutura do concreto e como ocorre o processo de fissuração. Na parte intermediária são apresentados alguns conceitos de mecânica da fratura aplicados ao concreto, assim como a definição de curva coesiva e como são obtidos os seus parâmetros. O capítulo encerra-se com a revisão dos diferentes estudos sobre o comportamento do concreto em diferentes taxas de carregamento e alguns modelos propostos para representa-lo.

O modelo proposto por essa tese é definido no capítulo 3. O modelo visco-elástico proposto para a parcela não danificada do concreto segue uma lei de potência baseada na taxa de deformação do material. O modelo visco-coesivo segue duas leis de potência baseadas na taxa de abertura da fratura. Uma das leis aumenta a curva coesiva no sentido da ordenada (σ) enquanto, a outra, reduz a curva coesiva no sentido da abscissa (w).

Toda a parte de implementação computacional é descrita no capítulo 4. É descrito como é modelado e resolvido o problema de flexão em três pontos para diferentes taxas de carregamento. Por fim é apresentado o programa FitFG (Gea dos Santos, 2014) em que a parte numérica apresentada é implementada.

A metodologia para avaliação do modelo proposto é descrita no capítulo 5. São avaliados 7 tipos de concretos divididos em dois grupos: principal e secundário. O primeiro grupo é representado por concretos com diferentes resistências, variando de $30\,MPa$ até $120\,MPa$. É para o grupo principal que se espera que o modelo proposto seja coerente. O grupo secundário é um grupo extra composto por concretos reforçados com fibra de polipropileno e aço. Esse grupo serve como uma extensão avaliativa da capacidade do modelo proposto.

Os resultados do processo comparativo dos experimentos com os resultados experimentais são apresentados no capítulo 6. O capítulo é subdividido em subseções de acordo com os tipos de concreto avaliados. Apresenta-se um comparativo dos parâmetros E, f_t e G_f obtidos pelo procedimento de análise inversa com os obtidos por outros métodos experimentais, uma comparação gráfica das curvas experimentais com as curvas numéricas obtidas pela análise inversa e uma análise do comportamento do modelo visco-coesivo ajustado para cada tipo de concreto.

As considerações finais são realizadas no capítulo 7. O capítulo contém uma breve revisão dos principais pontos apresentados no corpo da tese, o modelo visco-coesivo proposto e os resultados obtidos com a comparação experimental. Propostas de pesquisa para trabalhos futuros são apresentadas no final do capítulo.

2 PROCESSOS E MODELOS DE FRATURA NO CONCRETO

2.1 Apresentação do Capítulo

Este capítulo tem como objetivos:

- Caracterizar a composição e estrutura do concreto.
- Revisar a evolução dos modelos de mecânica da fratura aplicados ao concreto.
- Caracterizar as propriedades da curva coesiva e descrever algumas formulações utilizadas.
- Descrever ensaios experimentais utilizados para definir as propriedades do concreto.
- Revisar e descrever os modelos visco-coesivos existentes na literatura aplicados ao concreto.

2.2 Composição do Concreto

O concreto é caracterizado como um material cerâmico heterogêneo. Os constituintes básicos são cimento, agregados miúdos, agregados graúdos e água.

O cimento é um aglomerante e é composto principalmente por Silicato de tricálcico (C_3S), Silicato dicálcico (C_2S), Aluminato tricálcico (C_3A) e Ferroaluminato tetracálcico (C_4AF). A partir dos minutos iniciais de sua hidratação, a interação entre cálcio, sulfato, aluminato e íons hidroxilas, gera cristais de trissulfoaluminato de cálcio hidratado, conhecidos como etringita. Horas mais tarde, formam-se cristais de hidróxido de cálcio e de silicato de cálcio hidratado. Após alguns dias, ocorre a instabilidade da etringita que se decompõe em monosulfoaluminato hidratado (Mehta e Monteiro, 2008).

Com base em seus constituintes e composição, o concreto pode ser dividido em três zonas: agregado, matriz e zona de transição.

Os agregados não reagem quimicamente ao contato com a água, sendo tratados como materiais de enchimento do concreto. As características mais relevantes dos agregados são: resistência, forma, textura superficial, módulo de elasticidade e absorção de água.

O cimento hidratado (pasta endurecida) corresponde à matriz. Além de sólidos, a pasta endurecida possui diferentes tipos de vazios que influenciam em suas propriedades mecânicas. Os vazios podem ser divididos em:

- **Espaço interlamelar no C-S-H:** são vazios na ordem de ångströms ($1\ \text{Å} = 10^{-10}\ m$). Esses vazios são tão pequenos que não interferem na resistência ou permeabilidade.
- **Capilaridades:** correspondem aos vazios não preenchidos pela hidratação da pasta de cimento. Possuem formas irregulares e dimensões que variam de nm até μm.
- **Vazios de ar:** diferentes das capilaridades, estes vazios possuem formas esféricas e são gerados durante o processo de mistura do concreto. Possuem dimensões maiores que μm e alteram a resistência e a permeabilidade.

A zona de transição é uma camada de hidróxido de cálcio localizada no limite físico entre o agregado e a matriz de cimento. Esta zona é, geralmente, a que possui menor resistência e rigidez das três, principalmente devido aos seus vazios. Possui uma estrutura similar à da matriz. A diferença encontra-se na relação de água/cimento maior durante o processo de hidratação, ocasionada pela película de água ao redor dos agregados. São gerados cristais maiores e pontiagudos de etringita, que, devido ao seu formato e expansão, contribuem para a formação de vazios.

2.3 Propagação de fissuras no concreto: processo de falha

Como descrito na seção 2.2, o concreto já possui vazios na sua formação, principalmente na zona de transição. Esses vazios são regiões preferenciais para propagação de microfissuras.

Dentro dos limites elásticos do material, os vazios existentes permanecem estáveis. O estado inelástico inicia-se com a propagação de microfissuras a partir dos vazios existentes na zona de transição. Conforme aumentam as solicitações, as microfissuras propagam-se, podendo se unir e formar fissuras mais perceptíveis (macrofissuras). Em estágio mais avançado, é possível que as fissuras também apareçam na matriz, iniciando-se a partir de vazios existentes nesta zona ou por propagação das fissuras da zona de transição.

Uma curva hipotética proveniente de um ensaio de tração uniaxial com carregamento controlado é apresentada na Figura 2-1. O eixo ε corresponde à deformação axial do espécime e o eixo σ à tensão axial. Durante o carregamento inicial, o concreto encontra-se em seu regime elástico, definido pelo intervalo (1). O intervalo (2) corresponde às primeiras microfissurações iniciadas na zona de transição. O fim da capacidade de suporte de carga do material inicia-se no final do intervalo (2). O intervalo (3) corresponde ao chamado comportamento de amolecimento. É nesse intervalo que ocorre a macrofissuração.

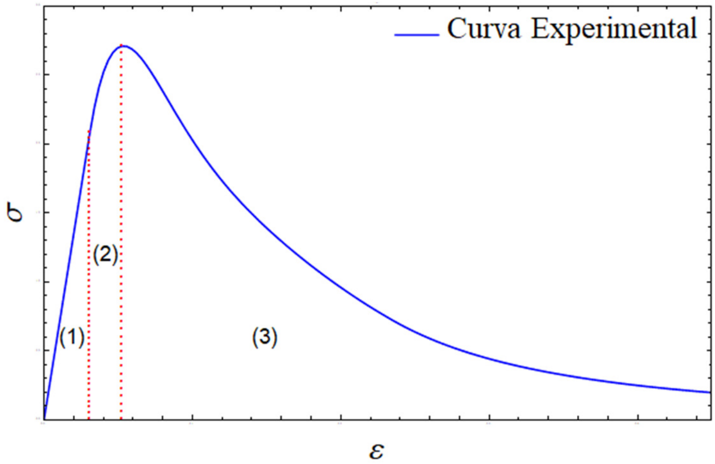


Figura 2-1: Ensaio de tração do concreto com carregamento controlado. (1) – Comportamento Elástico. (2) – Início da microfissuração. (3) – Início do amolecimento do concreto, formação de macrofissuras. Fonte: Autor.

O concreto é comumente tratado como um material frágil. Materiais frágeis são aqueles que falham bruscamente ao atingir sua tensão máxima resistente em valores relativamente baixos de deformação. Como apresentado na Figura 2-1, o concreto apresenta um comportamento de amolecimento (intervalo (3)) após atingir sua tensão resistente máxima, isto é, não apresenta uma ruptura brusca. Devido a isso, o correto é classificar o concreto como um material quase-frágil.

2.4 Mecânica da Fratura aplicada ao Concreto

Kaplan (1961) realizou uma das primeiras aplicações da mecânica da fratura no concreto. Nesse trabalho, resultados obtidos em vigas de concreto em flexão foram analisados considerando os conceitos de mecânica da fratura apresentados por Griffith (1920). O trabalho de Griffith propõe conceitos que hoje são aplicados na Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) e propõe um critério energético para a propagação de fraturas. Ao analisar seus resultados, Kaplan considera, com algumas ressalvas, que os conceitos apresentados por Griffith eram adequados para a representação do comportamento dos espécimes de concreto.

Kesler *et al.* (1972), Walsh (1972), Naus (1973) e Walsh (1976) demonstram que a MFEL é inadequada para estruturas de concreto ao se comparar diferentes ensaios experimentais em diferentes geometrias. A existência de uma zona de microfissuras de tamanho considerável ao longo da frente da fratura limita a aplicação da MFEL.

Nos anos seguintes, diferentes modelos foram propostos para introduzir os conceitos da mecânica da fratura ao concreto. Destes, dois são utilizados até hoje: o modelo de fratura fictícia (MFF), o modelo de fissuras distribuídas (MFD) e o modelo de dano contínuo (MDC).

A popularidade do MFF aplicado no concreto teve início no trabalho de Hillerborg, Modeer e Petersson (1976). É proposto um modelo coesivo para representar a fissuração distribuída do concreto. Tal modelo, como os próprios autores citam, é similar ao modelo proposto por Barenblatt (1962). O modelo de Bareblatt propõe a variação da tensão resistente do material com a deformação.

A ideia do modelo é propagar uma fratura fictícia após alcançada a tensão resistente de tração (f_t). Para que o efeito de fissuração distribuída seja contemplado, é adicionada uma tensão de fechamento (σ) ao longo das faces da fratura. Essa tensão é conhecida como tensão coesiva e é definida por uma curva que relaciona σ com a abertura entre as faces da fratura (w). Essa tensão coesiva é interrompida ao ser obtida a abertura limite ou abertura crítica (w_c), representando o rompimento efetivo entre as faces. O modelo de Hillerborg, Modeer e Petersson (1976) é representado na Figura 2-2.

Uma série de trabalhos subsequentes aplicam o conceito apresentado em Hillerborg, Modeer e Petersson (1976) no comparativo com ensaios experimentais. O ensaio mais utilizado para comparação é o ensaio de flexão em três pontos, como por exemplo: Hillerborg (1981), Petersson (1981), Carpinteri *et al.* (1987), Planas e Elices (1991), Bittencourt, Ingraffea e Llorca (1992), Olesen (2001), Park, Paulino e Roesler (2008), Zhao, Kwon e Shah (2008), Kwon, Zhao e Shah (2008), Cusatis e Schauffert (2009), Elices, Rocco e Roselló (2009), Carpinteri, Cadamuro e Ventura (2015), Choubey, Kumar e Rao (2016), Chen *et al.* (2018) e Carloni *et al.* (2019). Esse ensaio é uma forma indireta de avaliar o concreto em tração. A RILEM (1985) faz recomendações quanto a forma de realização desse ensaio e a dimensão do corpo-de-prova, e é utilizada para a maioria dos trabalhos citados. Zhao, Kwon e Shah (2008), Kwon, Zhao e Shah (2008) e Chen *et al.* (2018) realizaram comparações com o *wedge splitting test* além do ensaio de flexão em três pontos.

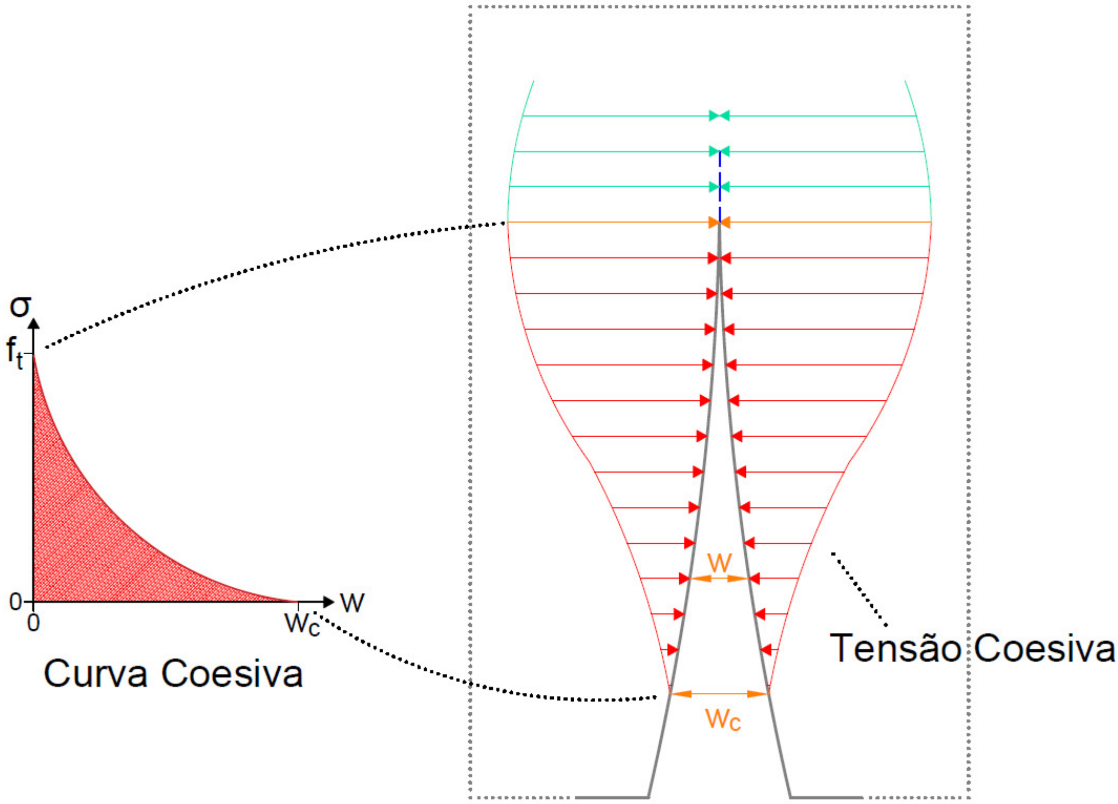


Figura 2-2: Representação do Modelo de Hillerborg, Modeer e Petersson (1976). Fonte: Autor.

Hillerborg (1981) discute a aplicabilidade do modelo em concretos simples e concretos reforçados com fibras. A adição de fibras ao concreto modifica consideravelmente o comportamento pós-fissuração. Nesse sentido, a curva coesiva possui um papel essencial na representação adequada do comportamento das fibras atuantes nas regiões fraturadas. Outros trabalhos relacionados são o de Olesen (2001) e Carpinteri, Cadamuro e Ventura (2015).

O MFF é comumente aplicado em modelos de elementos finitos (MEF) ou de elementos de contorno (MEC). Nos modelos de elementos finitos, a menos que o caminho da propagação da fratura seja previamente conhecido (como em casos de ensaios em que se conhece o sentido de propagação), a fratura é modelada alterandose a malha. A remodelagem da malha gera um retrabalho computacional e uso de algoritmos específicos. No caso dos elementos de contorno, a propagação é simples uma vez que basta refazer o contorno da malha com adição de elementos ao longo da fratura propagada, evitando-se assim a remodelagem da malha inicial.

Duas abordagens são comumente utilizadas para inclusão dos efeitos coesivos no MEF e MEC: uso de elementos de interface e uso de funções de tensão.

Os elementos de interface são adicionados entre as faces dos elementos que contornam a fratura e possuem uma função de rigidez não linear que seja equivalente ao comportamento da curva coesiva. Alguns trabalhos que aplicam os elementos de interface: Ingraffea *et al.* (1984), Ingraffea e Saouma (1985), Ingraffea e Gerstle (1985), Bocca, Carpinteri e Valente (1991), Bittencourt, Ingraffea e Llorca (1992), Gerstle e Xie (1992).

As funções de tensão são aplicadas diretamente às tensões coesivas sobre a interface fraturada. Li e Liang (1986), Planas e Elices (1991), Gopalaratnam e Ye (1991), Sousa e Gettu (2006) e Rosa *et al.* (2012) são exemplos de trabalhos que utilizam tal metodologia.

O Modelo de Fissuras Distribuídas (MFD) é comumente aplicado junto ao MEF. O intuito do MFD é modificar as propriedades do material no ponto de integração do elemento finito que está fissurado. Rashid (1968) é um dos primeiros trabalhos que aplica esse tipo de metodologia em análises de elementos de concreto.

Enquanto no MFF é necessário refazer a malha para contemplar a passagem da fratura, no MFD não existe a necessidade de modificar a malha uma vez que o efeito de fissuração afeta apenas a propriedade constitutiva dos elementos e não a geometria. Entretanto, o MFD clássico possui a suas desvantagens. Foi observada uma forte dependência do resultado com o tamanho e orientação dos elementos que formam a malha. Algumas abordagens foram propostas para contornar tais problemas, tais como modelos de fissuração baseados em banda e modelos baseados no gradiente.

Bažant (1976) estudou o aparecimento e comportamento de uma banda de fissuração durante o processo de falha do concreto. Este trabalho deu origem a mais três trabalhos sobre o mesmo tema (Bažant e Cedolin, 1979, 1980, 1983), porém, somente em Bažant e Oh (1983) foi introduzido o amolecimento gradual do concreto, assim como por Hillerborg, Modeer e Petersson (1976).

O modelo de dano contínuo (MDC) é similar ao MFD. O MFD trata o material como homogêneo e define um elemento volumétrico representativo cuja magnitude deve ser tal que o material deteriorado possa ser tratado como homogêneo (Penna, 2011).

Os primeiros modelos de dano tratavam o dano como uma redução da área da seção transversal a partir de modelos uniaxiais (Lemaitre e Dufailly, 1987). Posteriormente, o efeito do dano foi incorporado na degradação progressiva do módulo de elasticidade, chegando ao desenvolvimento de modelos anisotrópicos de dano (Chow e Wang, 1987, Scotta *et al.*, 2001, Sanches Júnior e Venturini, 2007).

Outros métodos que devem ser citados são: Método Estendido dos Elementos Finitos (*eXtended Finite Element Method* – XFEM), Método Embutido dos Elementos Finitos (EFEM) e o modelo de campo de fase (*Phase Field Model* – PFM). O XFEM (Moes, Dolbow e Belytschko, 1999) modela o corpo fratura como um meio contínuo sendo a fratura incorporada no meio por meio do enriquecimento da aproximação para o campo de deslocamentos. O EFEM (Oliver, 1996) é similar ao XFEM, as descontinuidades são embutidas na aproximação dos campos de deslocamentos por meio de um enriquecimento do elemento. O PFM (Feng e Wu, 2018) substitui as condições de contorno por uma equação diferencial parcial que representa a evolução de um campo auxiliar. Este campo auxiliar possui uma mudança suave na zona ao redor da interface a ser caracterizada a fratura.

2.5 A Curva Coesiva

A correspondência do modelo numérico com o dado real depende, essencialmente, da escolha adequada do comportamento da curva coesiva. Três parâmetros físicos estão presentes na curva coesiva: A resistência a tração do material (f_t), a energia aparente de fratura (G_f) e a abertura crítica da fratura (w_c). Uma representação da curva coesiva com os parâmetros mencionados é apresentada na Figura 2-3. G_f representa a energia por unidade de área de material necessária para que as faces do material sejam separadas, ou seja, a energia suficiente para que a fratura seja efetiva e não existam mais forças coesivas. Esse parâmetro é equivalente a área da curva coesiva.

As curvas coesivas são definidas por modelos matemáticos. Em geral são utilizadas curvas compostas por trechos retilíneos, sendo utilizadas uma (linear) e duas retas (bilinear) para concretos convencionais, três retas (trilinear) para concretos com fibras e, para casos mais específicos, curvas compostas por várias retas (polilinear). Planas e Elices (1990) e Hordijk (1991) definiram curvas coesivas baseadas em curvas exponenciais a partir de alguns ensaios experimentais.

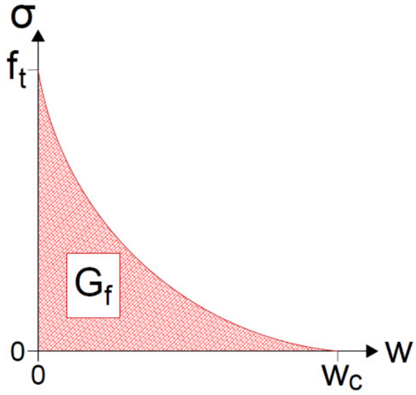


Figura 2-3: Representação da curva coesiva e seus parâmetros. Fonte: Autor.

A função coesiva linear é caracterizada pela Eq. (1) e seus parâmetros são representados pela Figura 2-4.

$$\sigma(w) = \begin{cases} f_t - a_1.w, & w < f_t/a_1 \\ 0, & w \geq f_t/a_1 \end{cases} \quad (1)$$

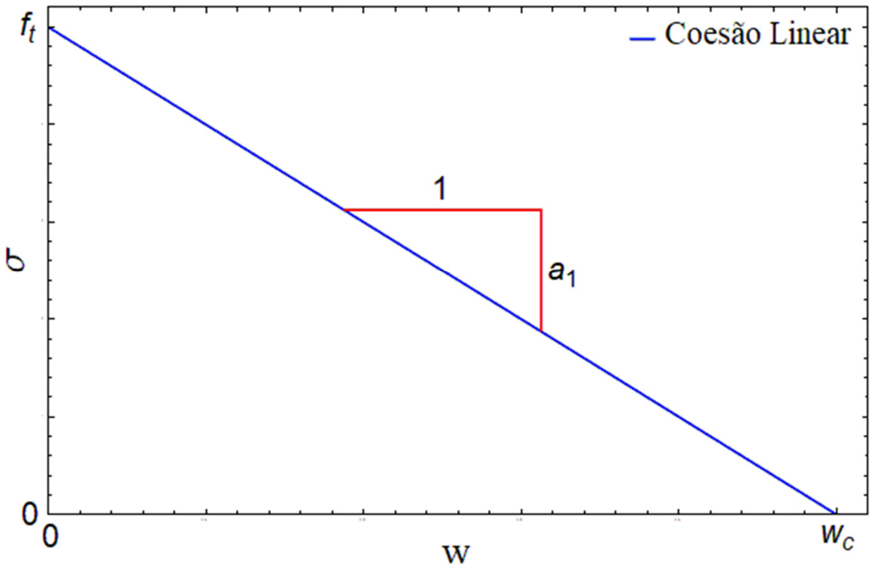


Figura 2-4: Parâmetros da coesão linear. Fonte: Autor.

A função coesiva bilinear é caracterizada pela Eq. (2) e seus parâmetros são representados pela Figura 2-5.

$$\sigma(w) = \begin{cases} f_t - a_1.w, \quad w < \dfrac{f_t.(1-b_2)}{a_1 - a_2} \\ b_2.f_t - a_2.w, \quad \dfrac{f_t.(1-b_2)}{a_1 - a_2} \le w < \dfrac{b_2.f_t}{a_2} \\ 0, \quad w \ge \dfrac{b_2.f_t}{a_2} \end{cases} \tag{2}$$

A função coesiva trilinear é caracterizada pela Eq. (3) e seus parâmetros são representados pela Figura 2-6.

$$\sigma(w) = \begin{cases} f_t - a_1.w, \quad w < \dfrac{f_t.(1-b_2)}{a_1 - a_2} \\ b_2.f_t - a_2.w, \quad \dfrac{f_t.(1-b_2)}{a_1 - a_2} \le w < \dfrac{f_t.(b_2 - b_3)}{a_2 - a_3} \\ b_3.f_t - a_3.w, \quad \dfrac{f_t.(b_2 - b_3)}{a_2 - a_3} \le w < \dfrac{b_3.f_t}{a_3} \\ 0, \quad w \ge \dfrac{b_3.f_t}{a_3} \end{cases} \tag{3}$$

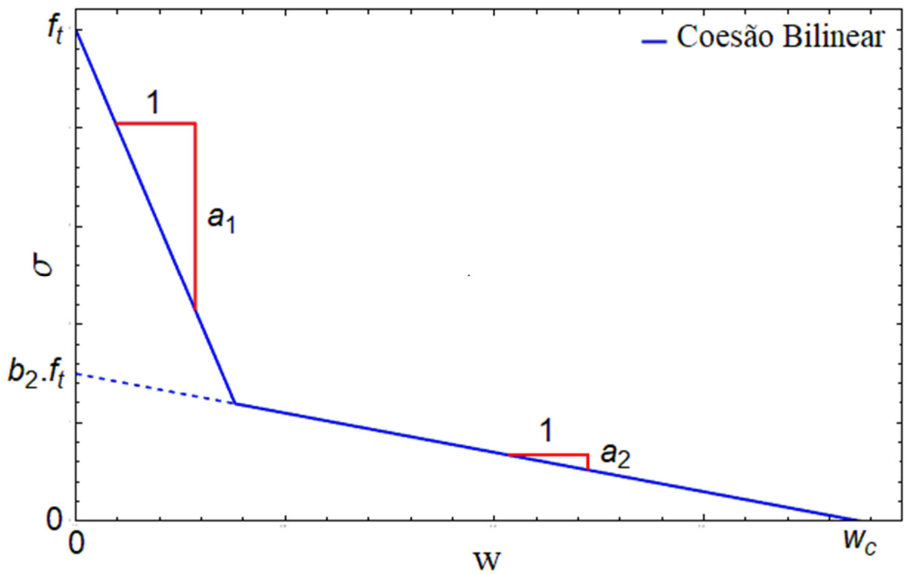


Figura 2-5: Parâmetros da coesão bilinear. Fonte: Autor.

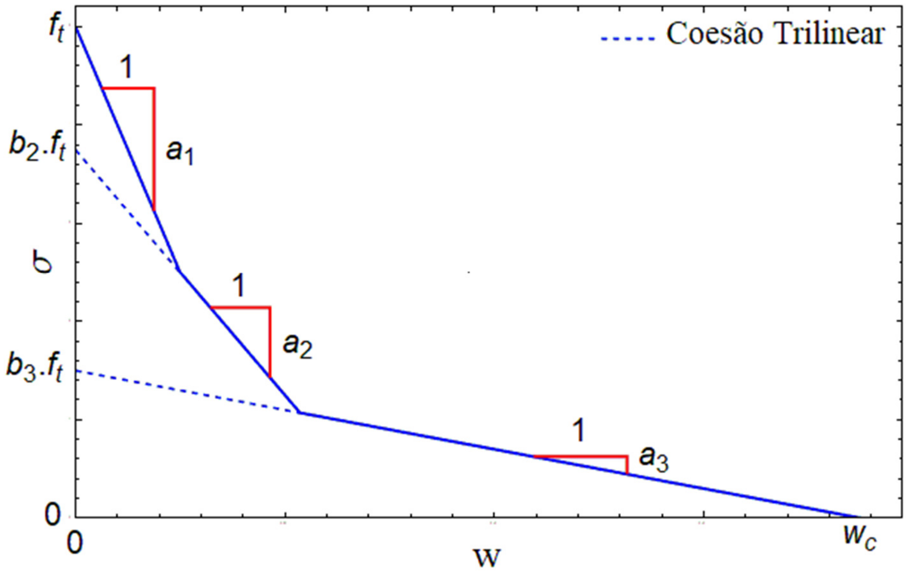


Figura 2-6: Parâmetros da coesão trilinear. Fonte: Autor.

A função coesiva de Planas e Elices (1990) é apresentada na Eq. (4), com $A = 0{,}0082896$ e $B = 0{,}96020$. A representação encontra-se na Figura 2-7.

$$\sigma(w) = \begin{cases} f_t.\left((1+A).\mathrm{Exp}\left(-\mathrm{B}.\mathrm{f_t}.\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{G_f}}\right) - \mathrm{A}\right), & w < \frac{5.G_f}{f_t} \\ 0, & w \geq \frac{5.G_f}{f_t} \end{cases} \tag{4}$$

A função coesiva de Hordijk (1991) é apresentada na Eq. (5), com $c_1 = 3{,}0$, $c_2 = 6{,}93$ e $w_c = 5{,}136.G_f/f_t$. Sua representação é apresentada na Figura 2-8.

$$\sigma(w) = \begin{cases} \sigma_{H1}(w) - \sigma_{H2}(w), & w < w_c \\ 0, & w \geq w_c \end{cases}$$

$$\sigma_{H1}(w) = f_t.\left(\left(1 + \left(\frac{c_1.w}{w_c}\right)^3\right).\mathrm{Exp}\left(\frac{-c_2.w}{w_c}\right)\right) \tag{5}$$

$$\sigma_{H2}(w) = f_t.\left(\frac{w}{w_c}.(1+c_1^3).\mathrm{Exp}(-c_2)\right)$$

O comparativo das curvas coesivas de Planas e Elices (1990) e Hordijk (1991) é apresentado na Figura 2-9, para $f_t = 5{,}0\ MPa$ e $G_f = 100\ J/m^2$.

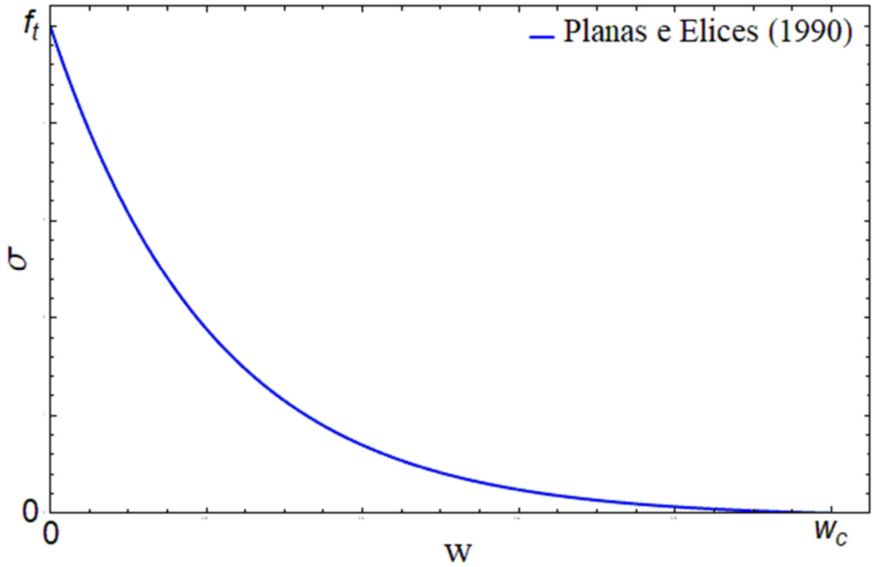


Figura 2-7: Representação da curva coesiva de Planas e Elices (1990). Fonte: Autor.

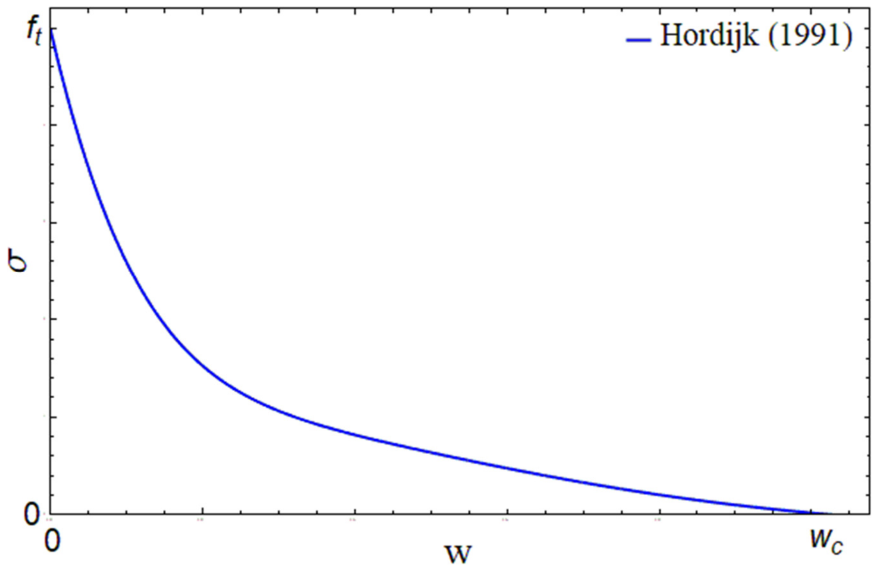


Figura 2-8: Representação da curva coesiva de Hordijk (1991). Fonte: Autor.

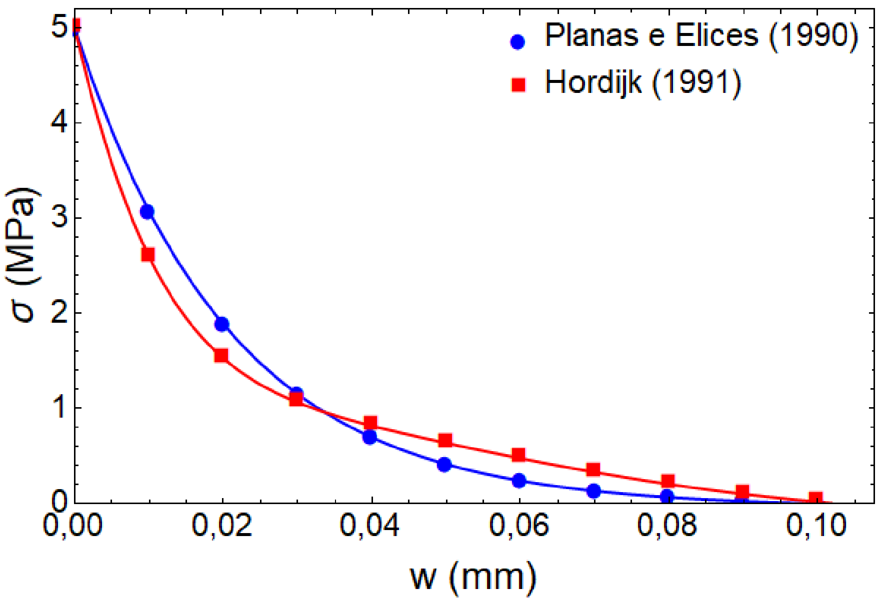


Figura 2-9: Comparativo das curvas de Elice e Planas (1990) e Hordijk (1991). Fonte: Autor.

2.5.1 Obtenção de Parâmetros da Curva Coesiva

Os parâmetros da curva coesiva podem ser obtidos a partir de ensaios específicos ou por análise inversa. Tratando-se de ensaios específicos, o parâmetro f_t pode ser obtido pelo ensaio de compressão diametral (Brazilian test) ou pelo ensaio de flexão, e o parâmetro G_f pode ser calculado com base no ensaio de flexão em três pontos, conforme recomendado pela RILEM (1985).

Na análise inversa é comum o uso do ensaio de flexão em três pontos para o ajuste dos parâmetros que definem a curva coesiva.

2.5.1.1 Ensaios Experimentais

2.5.1.1.1 Ensaio de compressão axial

Antes de descrever os ensaios específicos para os parâmetros da curva coesiva, é importante abordar o ensaio de compressão axial (Figura 2-10). Este ensaio determina o módulo de elasticidade (E) e a resistência a compressão (f_c). No Brasil a ABNT NBR 5739:2018 e a ABNT NBR 8522:2017 recomendam procedimentos para a obtenção de E e f_c.

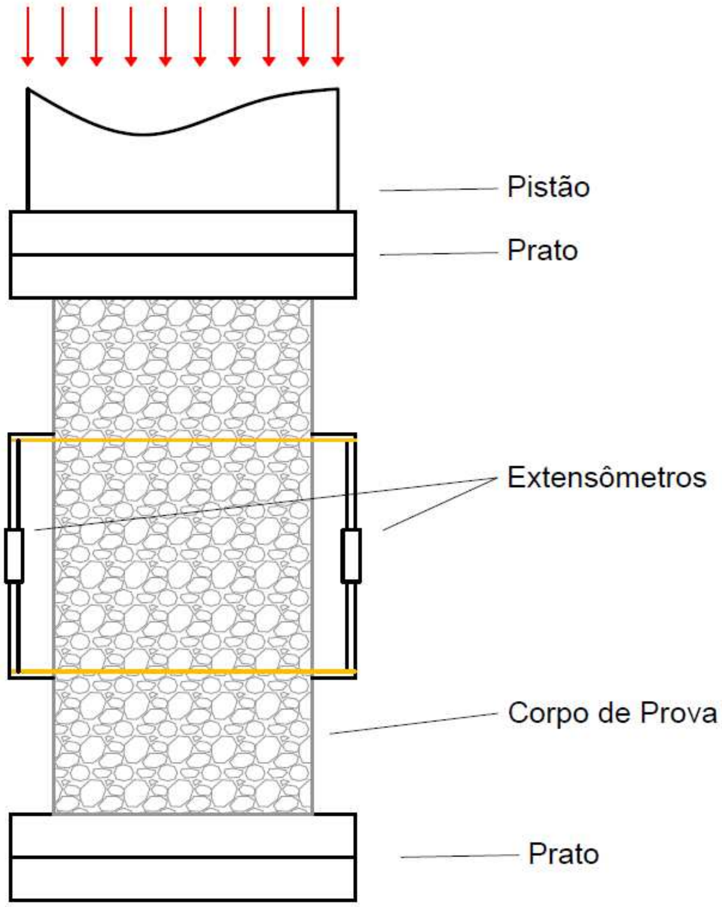


Figura 2-10: Representação do ensaio de compressão axial. Fonte: Autor.

Ambas as normas recomendam o uso de corpos-de-prova cilíndricos de acordo com os critérios de moldagem e cura da ABNT NBR 5738:2016. O diâmetro do corpo-de-prova deve estar entre 10 cm e 45 cm, variando de 5 cm e 5 cm dentro deste intervalo. A altura deve ser igual ao dobro do diâmetro. As medidas diametrais têm tolerância de 1% e a altura de 2%.

A máquina de ensaio para compressão deve atender aos valores máximos admissíveis determinados pela ABNT NBR ISO 7500-1:2016. A máquina deve ser equipada com pratos de aço, cujas superfícies de contato com o corpo-de-prova tenham sua menor dimensão 4% superior ao maior diâmetro do corpo-de-prova que deve ser ensaiado.

A resistência à compressão é calculada através da seguinte expressão:

$$f_c = \frac{4.F_c}{\pi.D^2} \tag{6}$$

sendo f_c a resistência à compressão em MPa, F_c a força máxima aplicada pelo atuador em N e D é o diâmetro do corpo-de-prova em mm.

Para a determinação do módulo de elasticidade é necessário que sejam instalados ao redor do compor de prova medidores de deformação, podendo ser tanto elétricos quanto mecânicos.

A ABNT NBR 8522:2017 recomenda que sejam ensaiados 3 corpos-de-prova. São propostas duas metodologias de ensaio: Metodologia A e Metodologia B.

A Metodologia A é iniciada repetindo-se o seguinte ciclo por 3 vezes:

- Carregar o corpo-de-prova até uma tensão $\sigma_b = 0{,}3. f_c$. Manter nessa tensão por $60\ s$.
- Descarregar o corpo-de-prova até que se obtenha uma tensão próxima de zero, sem que os pratos não percam o contato com o corpo-de-prova.
- Carregar o corpo-de-prova até uma tensão $\sigma_a = 0{,}5\ MPa$. Manter nessa tensão por $60\ s$.

Após a última etapa, quando $\sigma_a = 0{,}5\ MPa$, registrar as deformações (ε_a) dentro de $30\ s$. Em seguida, carregar até $\sigma_b = 0{,}3. f_c$ e mantê-la nesse nível por $60\ s$. Registrar as deformações lidas (ε_b) tomadas em no máximo $30\ s$. Após a leitura das deformações, carregar até a ruptura, obtendo-se a resistência efetiva $(f_{c,ef})$. Se $f_{c,ef}$ diferir de f_c em mais de 20%, os resultados do corpo-de-prova devem ser descartados.

A Metodologia B é iniciada repetindo-se o seguinte ciclo por 3 vezes:

- Carregar o corpo-de-prova até uma tensão $\sigma_b = 0{,}3. f_c$. Manter nessa tensão por $60\ s$.
- Descarregar o corpo-de-prova até que se obtenha uma tensão próxima de zero, sem que os pratos não percam o contato com o corpo-de-prova.
- Carregar o corpo-de-prova até que os medidores de deformação acusar uma deformação específica de $\varepsilon_a = 50 \times 10^{-6}$. Manter nessa tensão por $60\ s$.

Após a última etapa, quando $\varepsilon_a = 50 \times 10^{-6}$, registrar as tensões (σ_a) dentro de $30\ s$. Em seguida, carregar até $\sigma_b = 0{,}3. f_c$ e mantê-la nesse nível por $60\ s$. Registrar as deformações lidas (ε_b) tomadas em no máximo $30\ s$. Após a leitura das deformações, carregar até a ruptura, obtendo-se a resistência efetiva $\left(f_{c,ef}\right)$. Se $f_{c,ef}$ diferir de f_c em mais de 20%, os resultados do corpo-de-prova devem ser descartados.

O módulo de elasticidade tangente inicial (E_{ci}), em GPa, é calculado com a seguinte equação:

$$E_{ci} = \frac{(\sigma_b - \sigma_a).10^{-3}}{\varepsilon_b - \varepsilon_a} \tag{7}$$

2.5.1.1.2 Ensaio de compressão diametral

O ensaio de compressão diametral é uma maneira indireta de se determinar a resistência à tração do concreto (Figura 2-11). A ABNT NBR 7222:2011 traz recomendações quanto à realização do ensaio. A aparelhagem é a mesma definida na ABNT NBR 5739:2018, e os corpo-de-prova devem seguir as recomendações da ABNT NBR 5738:2016.

O corpo-de-prova deve ser posicionado de modo que fique em repouso sobre o prato inferior. Deve-se colocar duas tiras de chapa dura de madeira ente os pratos e o corpo-de-prova. A carga deve ser aplicada continuamente a uma velocidade de $(0{,}05 \pm 0{,}02)MPa/s$ até a ruptura do corpo-de-prova.

A resistência à tração por compressão diametral é calculada pela seguinte expressão:

$$f_{t,D} = \frac{2.P_{max}}{\pi.D.H_c} \tag{8}$$

sendo P_{max} a carga de ruptura aplicada pelo atuador, d o diâmetro do corpo-de-prova e H_c o comprimento do corpo-de-prova cilíndrico.

A ABNT NBR 6118:2014 considera que a resistência a tração direta do concreto pode ser adotada como $0{,}9.f_{t,D}$.

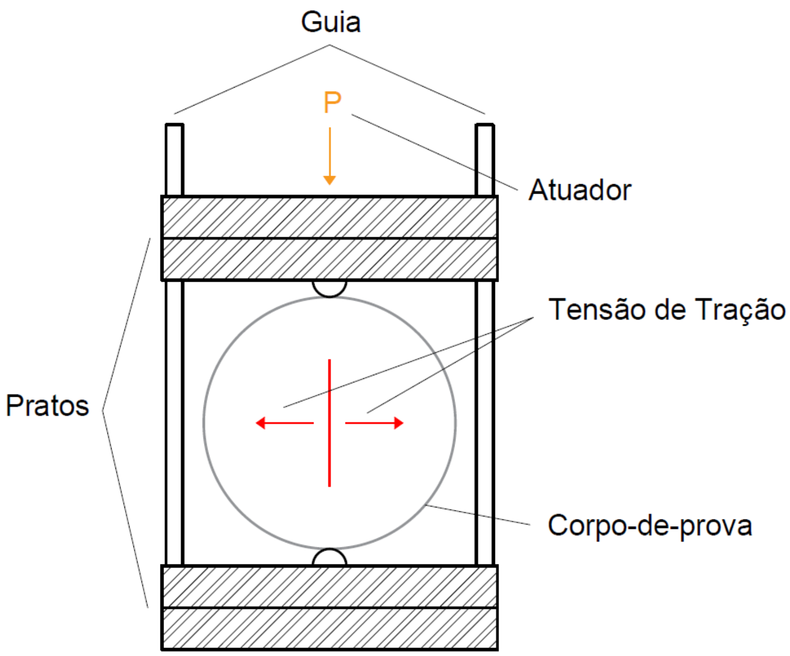


Figura 2-11: Representação do ensaio de compressão axial. Fonte: Autor.

2.5.1.1.3 Ensaio de Flexão

No Brasil, a ABNT NBR 12142:2010 estabelece as diretrizes para determinação da resistência à tração por flexão. O ensaio utilizado emprega o princípio de viga simplesmente apoiada com duas forças concentradas nos terços do vão, também conhecida como flexão em quatro pontos (Figura 2-12).

A aparelhagem utilizada é a mesma definida pela ABNT NBR 5739:2018. Os corpos-de-prova devem cumprir os critérios da ABNT NBR 5738:2016.

A resistência à tração na flexão é calculada, segundo a ABNT NBR 12142:2010, pela seguinte equação:

$$f_{t,f} = \frac{P_{max}.S}{B.H^2} \tag{9}$$

sendo P_{max} a carga máxima de ruptura aplicada pelo atuador, S o vão livre da viga, B a largura da viga e H a altura da viga. Como mostra a Figura 2-12, tanto B como H devem ser iguais a $S/3$.

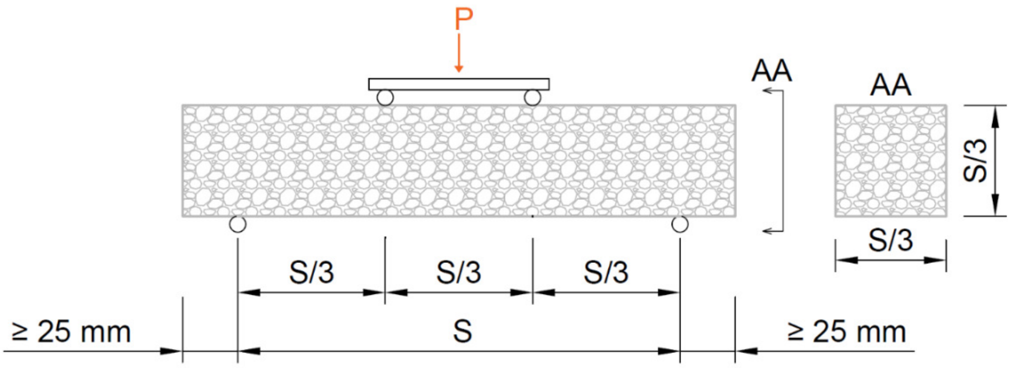


Figura 2-12: Representação do ensaio de flexão em quatro pontos. Fonte: Autor.

Caso a ruptura ocorra fora do terço médio, a uma distância deste não superior a 5% de S (Figura 2-13), a resistência à tração deve ser calculada pela seguinte expressão:

$$f_{t,f} = \frac{3.P_{max}.a}{B.H^2} \tag{10}$$

sendo a a distância média entre alinha de ruptura na face tracionada e a linha correspondente ao apoio mais próximo.

A ABNT NBR 6118:2014 considera que a resistência a tração direta do concreto pode ser adotada como $0{,}7.f_{t,f}$.

Outro ensaio de flexão bastante utilizado para o concreto é o ensaio de flexão em três pontos (Figura 2-14). Este ensaio é comumente utilizado para a obtenção da energia aparente de fratura (G_f), mas também pode ser utilizado para calcular a resistência à tração.

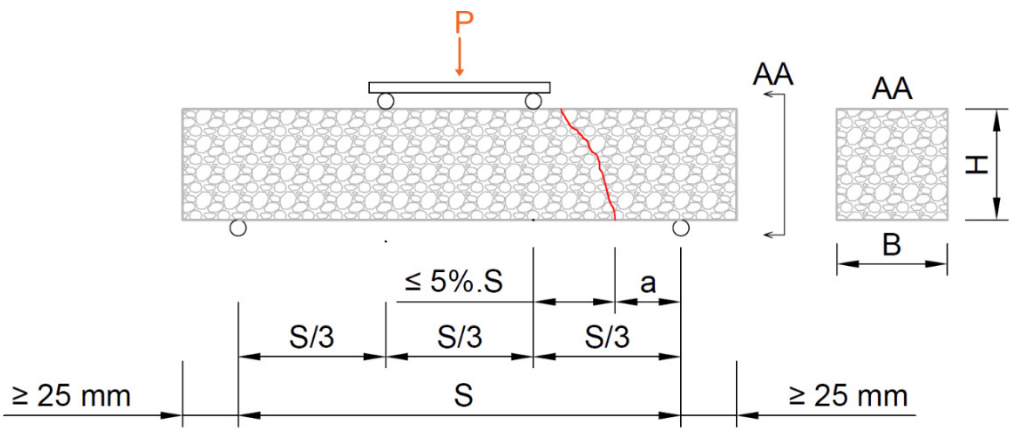


Figura 2-13: Representação da ruptura fora do terço médio no ensaio de flexão em quatro pontos. Fonte: Autor.

A RILEM *Draft Recommendation* 50-FMC (1985) faz recomendações quanto ao ensaio de flexão em três pontos para a obtenção de G_f. São recomendadas as dimensões das vigas, assim como a altura do entalhe (H_0) e sua precisão. O ensaio deve ser executado com uma taxa de deformação aproximadamente constante, que permita que a carga máxima seja alcançada entre 30 e 60 segundos a partir do início do ensaio. Devem ser coletadas tanto o deslocamento do atuador (δ) quanto a carga medida por esse (P). Um gráfico entre a carga e o deslocamento deve ser registrado durante o ensaio.

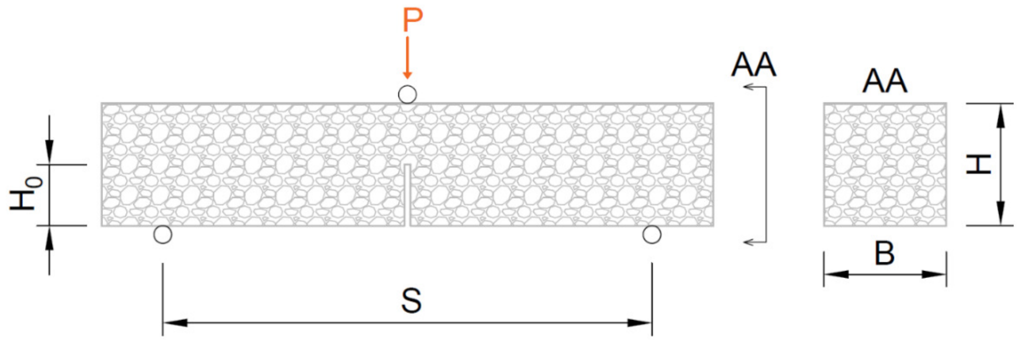


Figura 2-14: Representação do ensaio de flexão em três pontos. Fonte: Autor.

A G_f é calculado de acordo com a seguinte equação:

$$G_f = \frac{W_0 + m_a . g . \delta_0}{A_{lig}} \quad (11)$$

sendo:

- W_0: o trabalho realizado pelo atuador para romper a ligação, correspondente a área da curva carga *versus* deslocamento ($P - \delta$).
- m_a: a massa do conjunto ensaiado. m_a é composto pela massa da viga entre os apoios (m_{a1}) e a massa do atuador (m_{a2}), sendo que $m_a = m_{a1} + 2. m_{a2}$.
- g: a aceleração da gravidade.
- A_{lig}: a área de ligação rompida pela fratura.

A resistência a tração, f_t, pode ser calculada a partir do ensaio de flexão em três pontos pela seguinte expressão (como descrito no Anexo A da EN 14651:2005):

$$f_{t,f} = \frac{3. P_{max}. S}{2. B. (H - H_0)^2} \quad (12)$$

sendo H_0 a altura da ranhura.

2.5.1.2 Análise Inversa

A análise inversa consiste no ajuste de parâmetros de algum modelo numérico de tal modo que a solução do modelo seja a mais próxima da observação experimental. Com o intuito de exemplificar o conceito de análise inversa, vamos considerar um ensaio de flexão em três pontos em uma viga de concreto simples. Durante o ensaio foram coletados os valores da carga aplicada pelo atuador (P) e a abertura da boca da ranhura (*crack mouth open displacement*, $CMOD$), como apresenta a Figura 2-15.

Uma comparação de uma curva experimental $P - CMOD$ e um modelo numérico, que simula esse ensaio gerado a partir de uma tentativa dos parâmetros que compõem o modelo coesivo, é apresentada na Figura 2-16. Como observa-se, é evidente a diferença entre as duas curvas. O intuito da análise inversa é modificar os parâmetros da curva coesiva até que o modelo numérico fique o mais próximo da curva experimental. O resultado esperado após a análise inversa é apresentado na Figura 2-17.

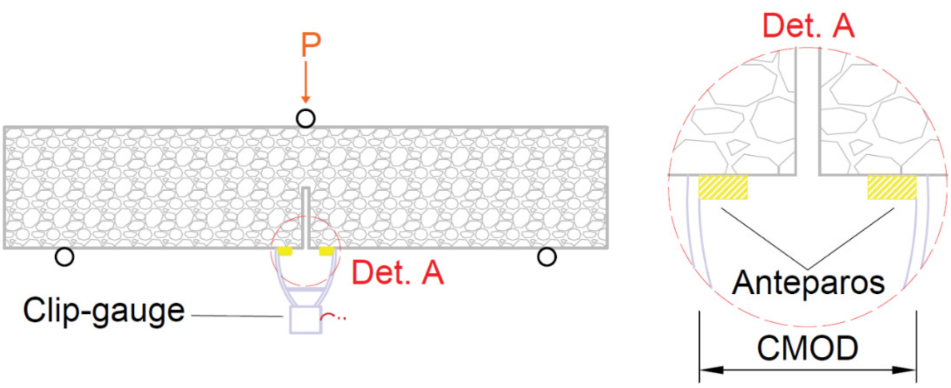


Figura 2-15: Representação do ensaio de flexão em três pontos com a medida do $P - CMOD$. Fonte: Autor.

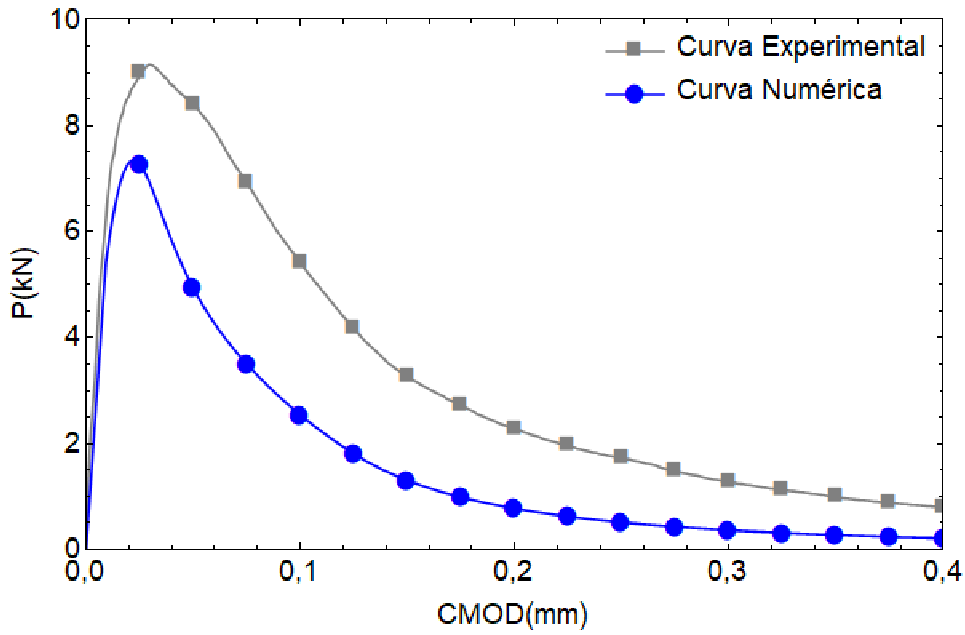


Figura 2-16: Comparação entre a curva experimental e a curva numérica criada a partir de uma curva coesiva inicial. Fonte: Autor.

A forma mais utilizada para se avaliar o quão próximo o resultado numérico encontra-se dos valores experimentais é por meio da minimização de uma função erro (ξ_{sqr}) utilizando a técnica de mínimos quadrados:

$$\xi_{sqr}(\vec{p}) = \int_{h_i}^{\mathrm{h}_f} \left[P_{exp}(h) - P_{num}(h,\vec{p})\right]^2 dh \tag{13}$$

sendo

- h o deslocamento medido (podendo ser δ ou $CMOD$, de acordo com o ensaio realizado).
- P_{exp} a função que representa a resposta P experimental para um dado x.
- P_{num} a função que representa a resposta P numérica para um dado x.
- $\vec{p}$ o conjunto de parâmetros a ser ajustados (os parâmetros da curva coesiva).
- h_i e h_f correspondem ao intervalo de início e fim, respectivamente, no qual as curvas devem ser comparadas.

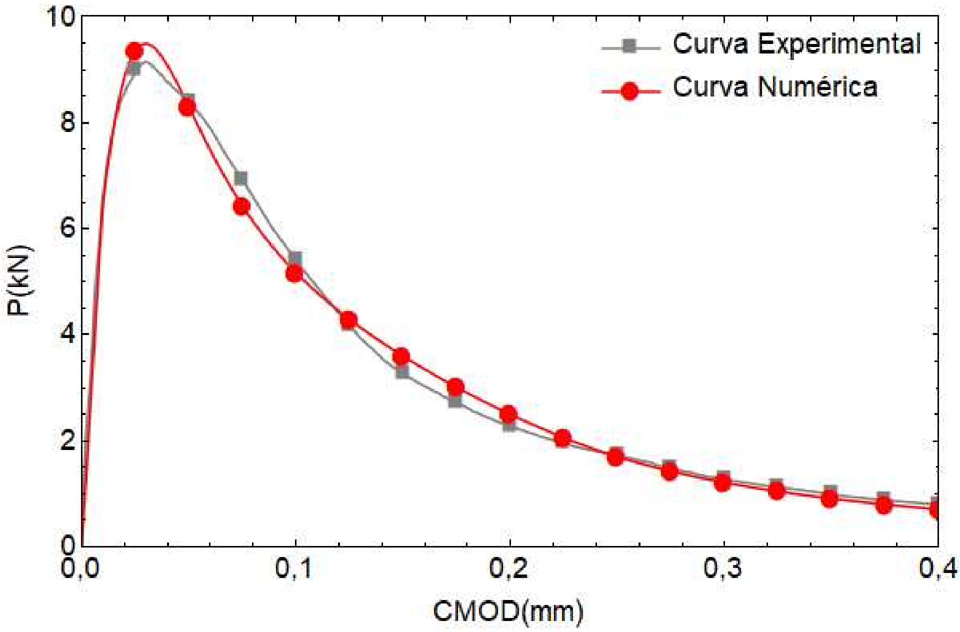


Figura 2-17: Comparação entre a curva experimental e a curva numérica ajustada pela análise inversa. Fonte: Autor.

O processo de análise inversa busca encontrar o conjunto de parâmetros $\vec{p}$ que sejam capazes de gerar o menor valor de $\xi_{sqr}(\vec{p})$, ou seja, trata-se de um problema de minimização de $\xi_{sqr}(\vec{p})$. Existem inúmeros algoritmos para a solução de problemas de minimização. Esses algoritmos são divididos em dois grupos: Métodos de Gradiente e Métodos Diretos. Os Métodos de Gradiente utilizam a primeira derivada (Gradiente) ou a segunda derivada (Hessiana) como informação para se chegar no ponto de mínimo. Exemplos de Métodos de Gradiente são: Método de Newton-Rahpson, Método Quase-Newton (Gill, Murray e Wright, 1981) e o Método de Levenberg-Marquardt (Levenberg, 1944; Marquardt, 1963). Métodos Diretos são aqueles que não utilizam derivadas. Exemplos são Nelder-Mead (Nelder e Mead, 1965; Lagarias *et al.*, 1998) e o algoritmo genético (Golberg, 1989). Maier *et al.* (2006) fazem uma revisão sobre os diferentes ensaios e métodos numéricos utilizados no ajuste da curva coesiva por análise inversa.

Um programa em linguagem C++, chamada *Fit3PB*, foi desenvolvido por Sousa e Gettu (2006), posteriormente revisto para incorporar algoritmo Levenberg-Marquardt (Sousa, 2011), para automatizar o processo de análise inversa de diferentes curvas coesivas, utilizando-se do ensaio em flexão em três pontos como comparativo ao ajuste. O programa possui várias curvas coesivas implementadas e podendo ser utilizadas tantas as curvas $P - \delta$ quanto as curvas $P - CMOD$ do ensaio de flexão em três pontos.

Slowik *et al.* (2006) e Skocek e Stang (2008) utilizam o *wedge-splitting test* (Figura 2-18) como parâmetro de comparação da análise inversa. O *wedge-splitting test* é uma alternativa ao ensaio de flexão em três pontos. O corpo-de-prova é uma placa de concreto no qual se realiza uma abertura para colocação de dois rolos metálicos. Os dois rolos metálicos são perpendicularmente pressionados por uma cunha metálica empurrada pela máquina de ensaio. O corpo-de-prova é submetido à um esforço de flexão. A curva $P - CMOD$ deste ensaio é utilizada para a análise inversa.

Ferreira, Venturini e Hild (2011) utilizam a técnica de correlação de imagem digital para identificar a trajetória da fratura durante o ensaio de flexão em três pontos para, posteriormente, gerar uma modelo em elementos de contorno para ajustar os parâmetros da curva coesiva por análise inversa.

Recentemente, o foco da análise inversa das curvas coesiva encontra-se em determiná-las para os novos compostos de concreto e seus estados (Kequan *et al.*, 2015, e Sucharda *et al.*, 2017).

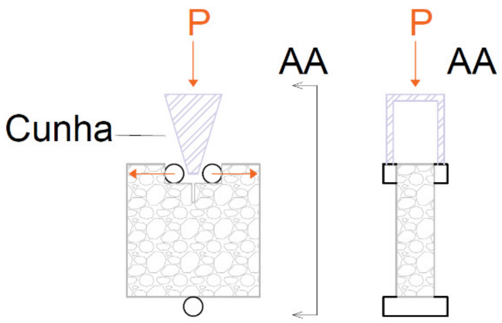


Figura 2-18: Representação do ensaio do wedge-splitting test. Fonte: Autor.

2.6 Efeito da Taxa de Carregamento

A resposta mecânica do concreto é influenciada pela taxa de carregamento. Rüsch (1960) faz um estudo sobre a relação da taxa de carregamento com a compressão e flexão de elementos de concreto. É apresentado que, quanto maior é a taxa de deformação, maior é a rigidez inicial, maior é o valor do pico de tensão e maior é o declive após o pico durante os ensaios com taxa controlada.

Wittmann *et al.* (1987) avaliaram o efeito da taxa de carregamento sobre o valor de G_f e os parâmetros de uma curva coesiva bilinear. Foram realizados ensaios de flexão em três pontos em diferentes taxas de carregamento. Para cada grupo amostral, foi estabelecida uma velocidade constante do atuador ($\dot{\delta}$) para gerar a variação na taxa de carregamento. Os valores de G_f foram calculados de acordo com as recomendações da RILEM (1985) e utilizando-se de um programa de análise inversa para ajustar a curva coesiva bilinear. Os resultados demonstram que nas taxas iniciais o valor de G_f reduz até atingir um valor mínimo, definidas pelos autores como taxas moderadas de carregamento. Após as taxas moderadas, G_f volta a crescer nas altas taxas de carregamento. O resultado gráfico apresentado em Wittmann *et al.* (1987) para G_f é apresentado na Figura 2-19. Os valores foram coletados com o auxílio do programa *WebPlotDigitizer* (Rohatgi, 2019).

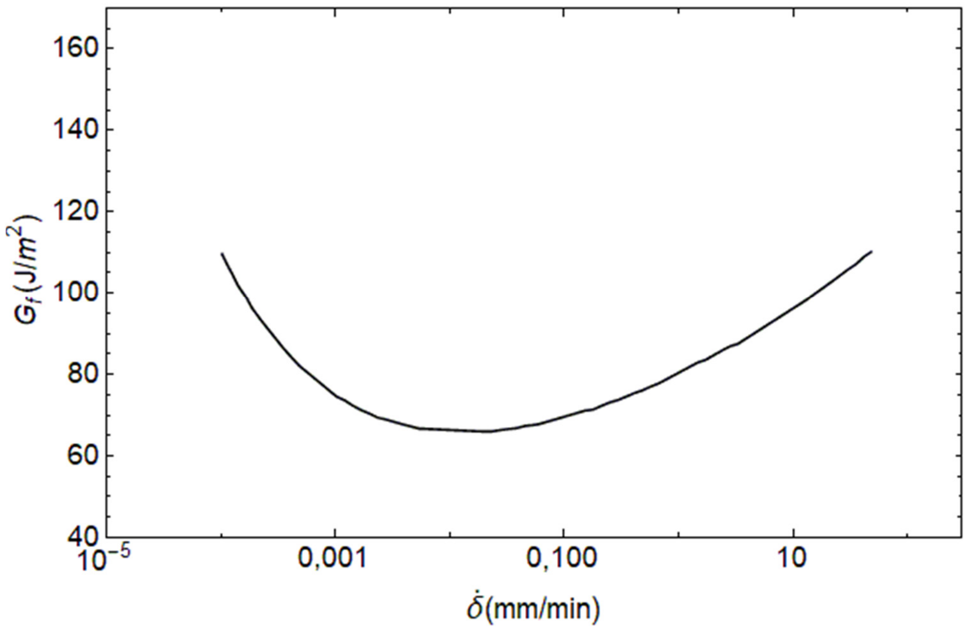


Figura 2-19: Relação de G_f e a taxa de carregamento ($\dot{\delta}$). Fonte: Adaptado de Wittmann et al. (1987).

Quanto à curva coesiva, Wittmann *et al.* (1987) observam que w_c possui um comportamento similar a G_f: reduz em taxas baixas e aumenta e taxas altas. Quanto a f_t e o módulo de elasticidade (E), ambos aumentam com o aumento da taxa de carregamento. A evolução das curvas coesivas ajustadas de acordo com a taxa de carregamento é apresentada na Figura 2-20. As curvas foram colocadas par a par para facilitar a visualização do comportamento.

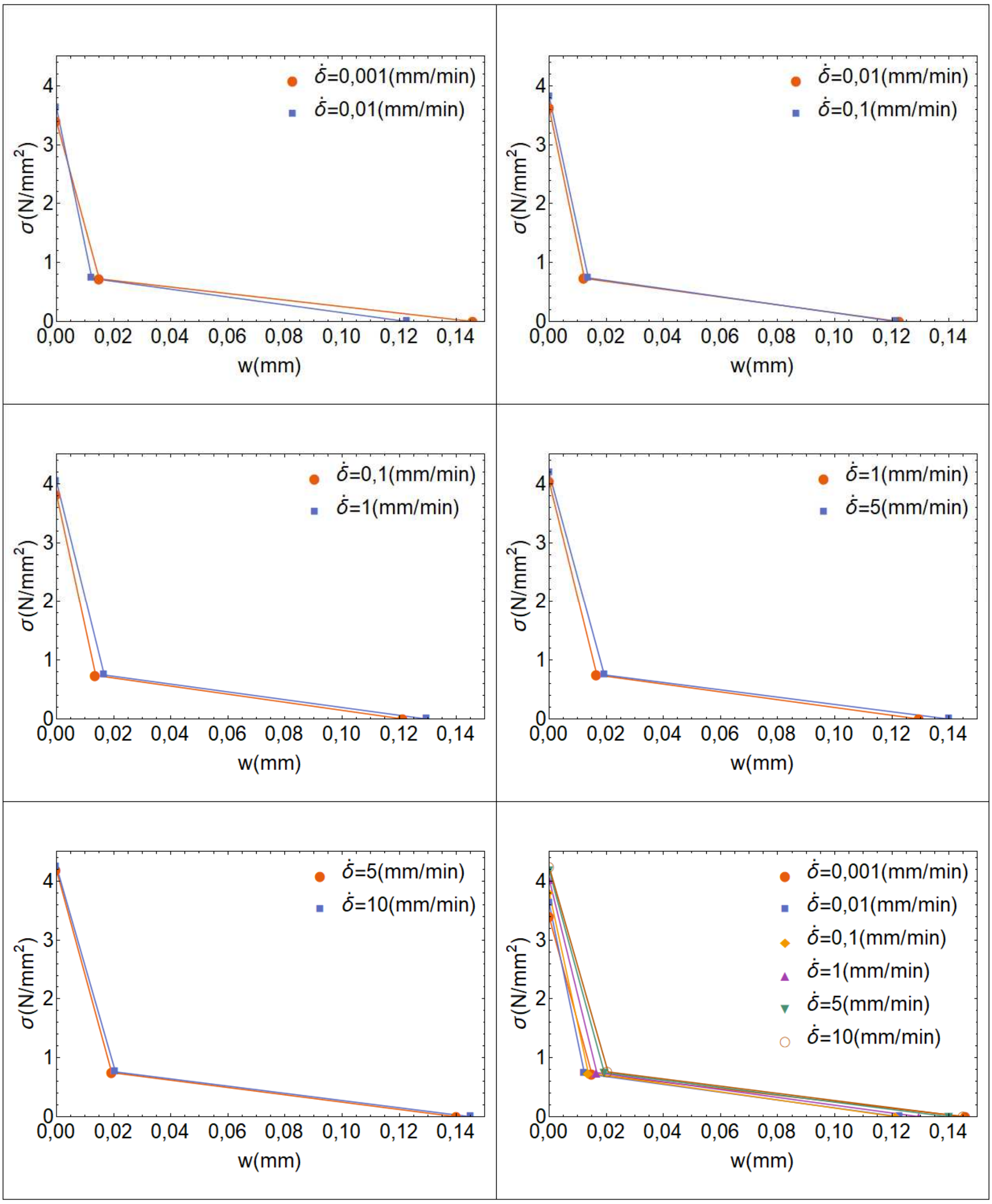


Figura 2-20:Evolução das curvas coesivas de acordo com a taxa de carregamento (Wittmann et al., 1987). Fonte: Autor.

Em suas análises, Reinhardt (1990) propõe uma relação de potência para o efeito da taxa de carregamento nas propriedades do concreto:

$$\frac{f_t}{f_{t0}} = \left(\frac{\dot{\sigma}}{\dot{\sigma}_0}\right)^{\mathrm{b}} \tag{14}$$

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{\dot{\sigma}}{\dot{\sigma}_0}\right)^{0,016} \quad (15)$$

$$\frac{G_f}{G_{f0}} = \left(\frac{\dot{w}}{\dot{w}_0}\right)^{\mathrm{b}} \quad (16)$$

$$b = \left(10 + \frac{f_{cm}}{2}\right)^{-1} \quad (17)$$

sendo $\dot{\sigma}$ a taxa de tensão, $\dot{w}$ a taxa de abertura de fratura, f_{t0} e E_0 são a resistência de tração e o módulo de elasticidade de referência para uma taxa de carregamento de referência $\dot{\sigma}_0$ e G_{f0} é a energia aparente de referência para uma taxa de abertura de fratura de referência $\dot{w}_0$. O parâmetro b é adimensional e requer que f_{cm}, a resistência de compressão média do concreto, seja fornecida em MPa.

Um modelo dependente da taxa de carregamento é proposto por Zhou (1992). Em seu modelo de elementos finitos, a tensão atuante na zona coesiva é corrigida pelo modelo de fluência proposto. O modelo foi comparado com ensaios de flexão em três pontos e o *Compact Tension Test*. Os resultados simulados foram adequados nos trechos iniciais e nos picos das curvas comparadas. No regime pós-pico os resultados simulados são diferentes dos experimentais.

Rossi *et al.* (1994) verificaram a influência da água livre e realizaram um estudo da relação água/cimento no comportamento dinâmico. Os resultados indicaram que o concreto úmido é mais sensível à taxa de carregamento que o concreto seco e que a variação da tensão resistente estática para a dinâmica é independente da relação água/cimento.

Vegt, Breugel e Weerheijm (2007) realizaram alguns ensaios com o intuito de verificar o padrão de formação de macro e microfissuras de acordo com a taxa de carregamento. Pela análise microscópica, os autores observam que, em taxas de carregamento quase-estáticas, as fissuras buscam os pontos mais fracos na pasta de cimento (zona de transição), contornando os agregados. É notada a existência de uma fissura principal (que leva a falha) e pequenas fissuras que se propagam a partir da principal. Em altas taxas de carregamento, os autores descrevem que as fissuras possuem menor tempo para buscar pelos pontos mais fracos, resultando em algumas fissuras passando pelos agregados. Também é observado que são formadas inúmeras microfissuras ao longo da fissura principal.

Utilizando *strain-gauges*, Zhang *et al.* (2010) ensaiaram vigas de concreto de alta resistência em taxas de carregamento que variam de baixas até impactos. Dentre os resultados observa-se que o pico de carga durante o ensaio de flexão em três pontos aumenta com a taxa de carregamento. Em taxas de carregamento baixas, a fratura principal avança com velocidade crescente, enquanto em taxas de carregamento altas, a velocidade de propagação apresenta uma redução.

Ruiz *et al.* (2011) verificam a influência da taxa de carregamento sobre G_f em diferentes compostos de concreto de alta resistência. O comportamento de G_f é similar ao que foi observado em Wittmann *et al.* (1987): em taxas baixas de carregamento, o valor de G_f tende a diminuir, e em taxas altas o valor de G_f aumenta. A variação de G_f para os diferentes tipos de concretos ensaiados é apresentada na Figura 2-21.

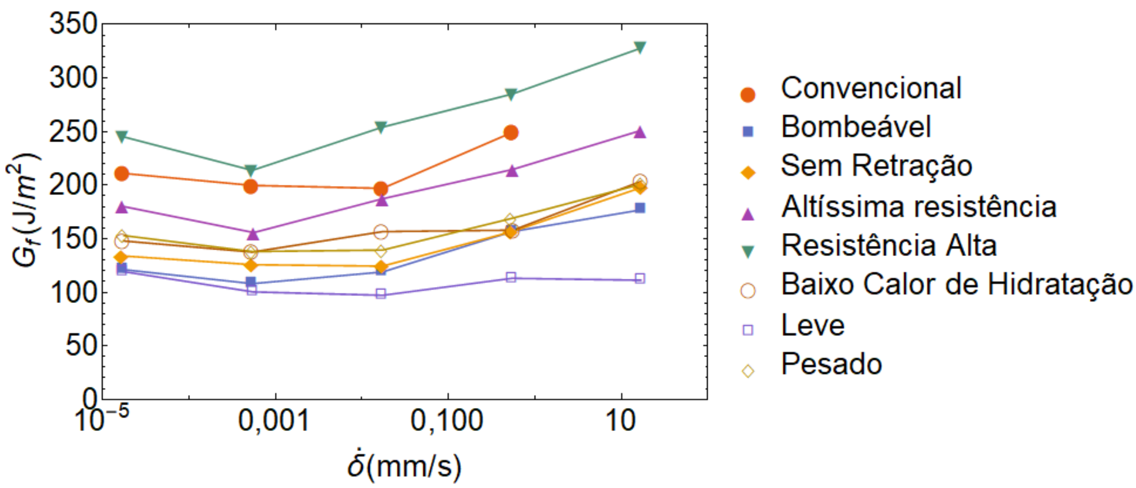


Figura 2-21: Variação de G_f em relação a taxa de carregamento. Fonte: Adaptado de Ruiz et al. (2011).

Concretos reforçados com fibra foram avaliados em diferentes taxas de carregamento em Zhang *et al.* (2014), Zhang, Ruiz e Abd Elazim (2015), Stephen, Gettu e Raphael (2016) e Stephen e Gettu (2019). Todos utilizaram o ensaio de flexão em três pontos, sendo que em Zhang *et al.* (2014) e Zhang, Ruiz e Abd Elazim (2015) a taxa de carregamento foi controlada pelo atuador, e em Stephen, Gettu e Raphael (2016) e Stephen e Gettu (2019) a taxa é controlada por clip-gauge, isto é, pela velocidade do CMOD.

Nas análises de Zhang *et al.* (2014) e Zhang, Ruiz e Abd Elazim (2015) as fibras foram arrancadas (perderam a aderência com o concreto) em todos os ensaios. Tanto o pico de carga quanto G_f aumentaram com o aumento da taxa de carregamento.

Em Stephen, Gettu e Raphael (2016) e Stephen e Gettu (2019) os valores de E e f_t aumentam com a taxa de carregamento, assim como o primeiro pico da curva P-CMOD. Em Stephen, Gettu e Raphael (2016) observa-se que no segundo pico da curva P-CMOD, o ensaio com a maior taxa de carregamento obteve um valor menor do segundo pico que a taxa de carregamento anterior (Figura 2-22). Os autores explicam que isso ocorre devido à mudança do modo de falha nas fibras, sendo que na última taxa de carregamento as fibras foram rompidas enquanto nas taxas anteriores a fibras foram arrancadas. Algo similar acontece em dois dos três grupos de concretos reforçados com fibras de aço de Stephen e Gettu (2019). Apenas o concreto com taxa de fibra de $45\ kg/m^3$ manteve o segundo pico crescente com o aumento da taxa de carregamento (Figura 2-23).

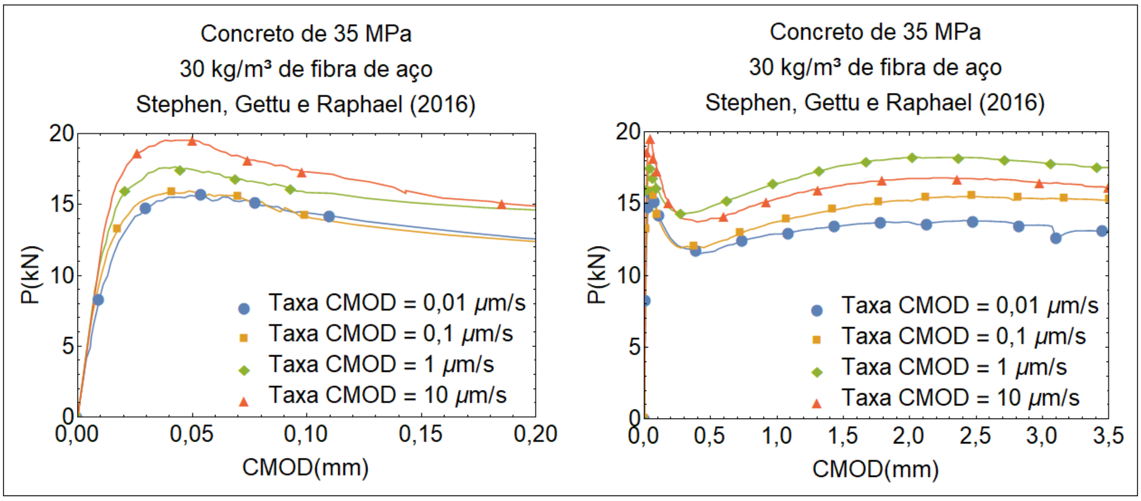


Figura 2-22: Ensaios em diferentes taxas de carregamento com concreto reforçado com fibra de aço realizados por Stephen, Gettu e Raphael (2016). Fonte: Autor.

Stephen, Gettu e Raphael (2016) e Stephen e Gettu (2019) também avaliaram o efeito da taxa de carregamento em concretos reforçados com fibras de polipropileno (Figura 2-24). Observa-se o aumento de E, f_t e do pico da curva P-CMOD com o aumento da taxa de carregamento.

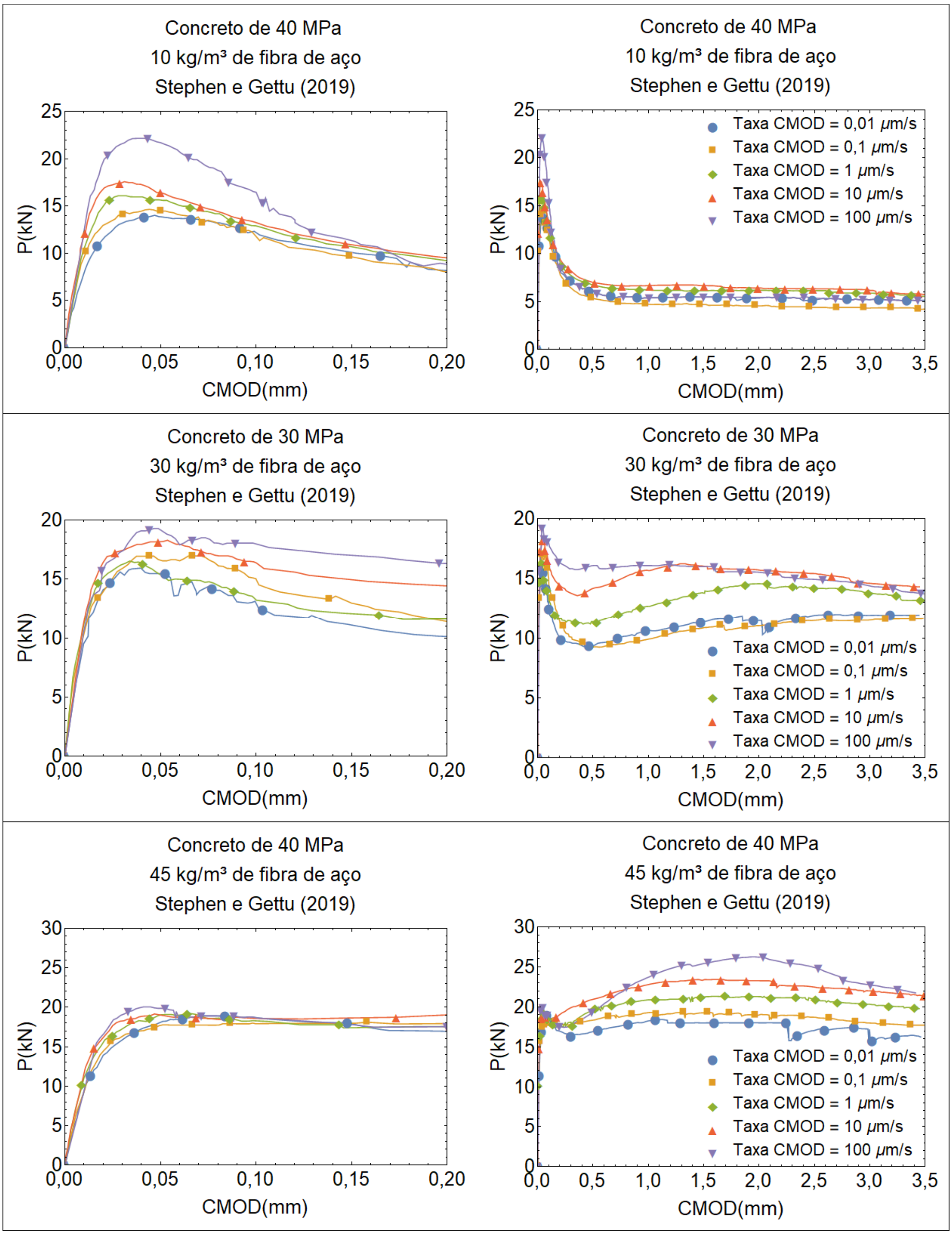


Figura 2-23: Ensaios em diferentes taxas de carregamento com concreto reforçado com fibra de aço realizados por Stephen e Gettu (2019). Fonte: Autor.

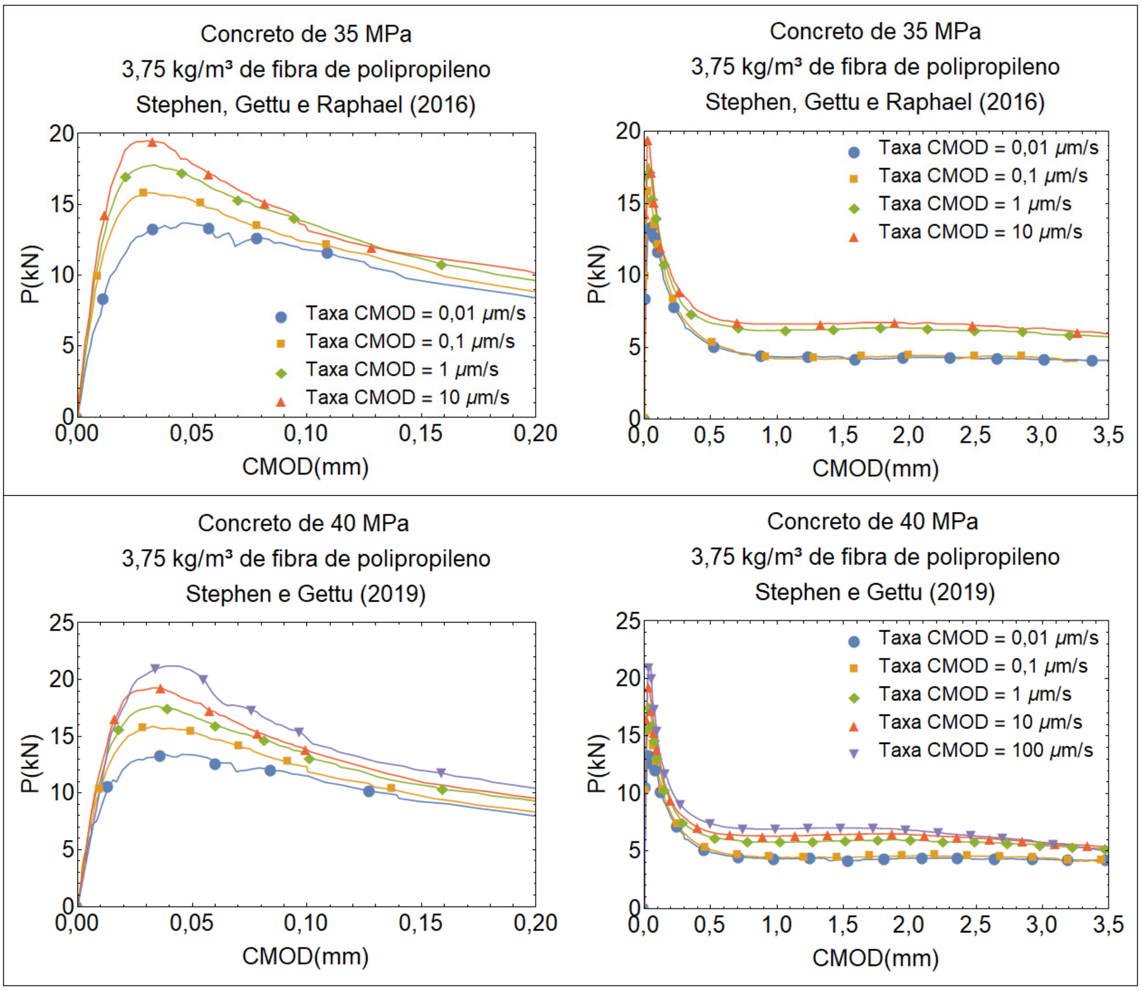


Figura 2-24: Ensaios em diferentes taxas de carregamento com concreto reforçado com fibra de polipropileno realizados por Stephen, Gettu e Raphael (2016) e Stephen e Gettu (2019). Fonte: Autor.

Tandon *et al.* (1995) realizaram uma comparação de ensaios experimentais com um modelo coesivo visco-elástico apresentado em Bažant e Li (1997) e Li e Bažant (1997). O modelo modifica a curva coesiva a partir da taxa da abertura da fratura ($\dot{w}$):

$$F(w, \dot{w}) = f(w) + \Psi(\dot{w}) \tag{18}$$

$$\Psi(\dot{w}) = f_t\ k\ sinh^{-1}\left(\frac{\dot{w}}{\dot{w}_0}\right) \tag{19}$$

sendo $f(w)$ a lei coesiva, $\Psi(\dot{w})$ a lei viscosa proposta, $F(w, \dot{w})$ a lei visco-coesiva resultante. O parâmetro k é um adimensional variando de $0{,}01$ até $0{,}05$, e $\dot{w}_0$ uma taxa de abertura de fratura de referência. Os resultados numéricos apresentaram similaridades com o experimental.

Rosa *et al.* (2012) propõem o seguinte modelo visco-coesivo:

$$\mathcal{F}(w,\dot{w}) = R(\dot{w}).f(w) \tag{20}$$

$$R(\dot{w}) = 1 + \left(\frac{\dot{w}}{\dot{w}_0}\right)^n \tag{21}$$

sendo $R(\dot{w})$ a lei viscosa proposta, $\dot{w}_0$ é a taxa de abertura de fratura de referência e n o índice adimensional que deve ser ajustado para cada concreto. O trabalho ajusta os parâmetros $\dot{w}_0$ e n para que exista coincidência do máximo valor experimental com a simulada.

Um exemplo do comportamento das duas curvas visco-coesivas citadas tendo como base uma curva coesiva linear e uma taxa de carregamento constante é apresentado na Figura 2-25. Os parâmetros utilizados para a curva coesiva linear são: $f_t = 5\,MPa$, $G_f = 90\,J/m^2$, $a_1 = 138{,}8889\,N/mm^3$. Para o modelo de Tandon *et al.* (1995) são adotados: $k = 0{,}05$, $\dot{w}_0 = 0{,}1\,mm/s$ e $\dot{w} = 1\,mm/s$. Para o modelo de Rosa *et al.* (2012) são adotados: $n = 0{,}8$, $\dot{w}_0 = 1\,mm/s$ e $\dot{w} = 0{,}11\,mm/s$. O modelo de Tandon *et al.* (1995) aumenta os valores de σ, G_f e w_c com o aumento da taxa de carregamento. No modelo de Rosa *et al.* (2012) os valores de σ e G_f aumentam com o aumento da taxa de carregamento, porém preservando o valor de w_c. Em nenhum dos modelos é possível representar a redução de G_f e w_c em taxas baixas de carregamento como foi observado por Wittmann *et al.* (1987) e Ruiz *et al.* (2011).

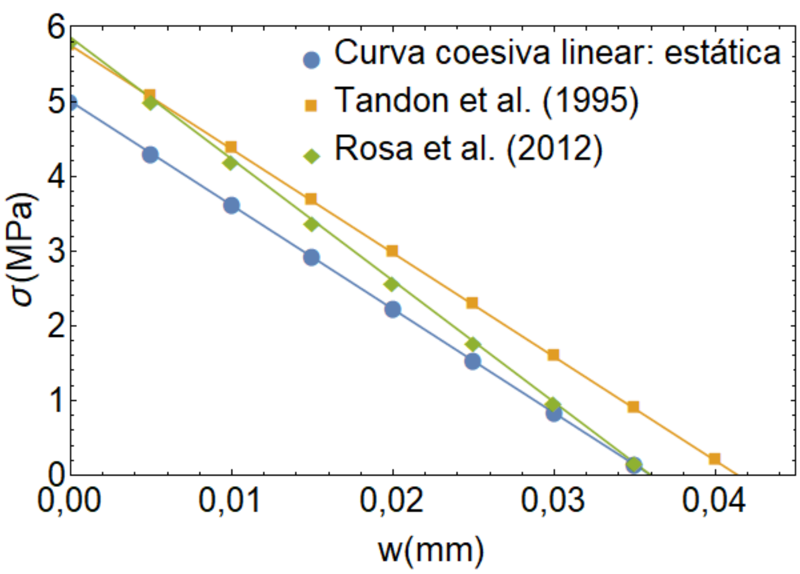


Figura 2-25: Exemplo do comportamento dos modelos visco-coesivos lineares segundo Tandon et al.(1995) e Rosa et al. (2012). Fonte: Autor.

Gea dos Santos e Sousa (2015) descrevem a implementação de um sistema computacional que determina por análise inversa os parâmetros da curva coesiva (de acordo com Sousa e Gettu, 2006) e os parâmetros do modelo viscoso de Rosa *et al.* (2012). As curvas $P - \delta$ de vigas de concreto de alta resistência em diferentes taxas de carregamento são utilizadas para o ajuste dos parâmetros. É observado que para os carregamentos com taxas mais altas, a qualidade do ajuste utilizando o modelo de Rosa *et al.* (2012) decresce significativamente. Uma análise inversa utilizando a curva coesiva de Hordijk (1991) foi realizada para cada conjunto experimental de taxa de carregamento individualmente (Figura 2-26). As observações são similares às apontadas por Wittmann *et al*. (1987) e Ruiz *et al.* (2011) (Figura 2-27).

Gea dos Santos e Sousa (2018) descrevem uma metodologia para introduzir os efeitos dependentes do tempo em um modelo que simula o efeito visco-coesivo em condições quase-estáticas. No modelo proposto as tensões coesivas aumentam com o aumento da taxa de carregamento, mas preservando o valor de G_f. A comparação entre a envoltória experimental e os resultados numéricos indicam uma concordância razoável

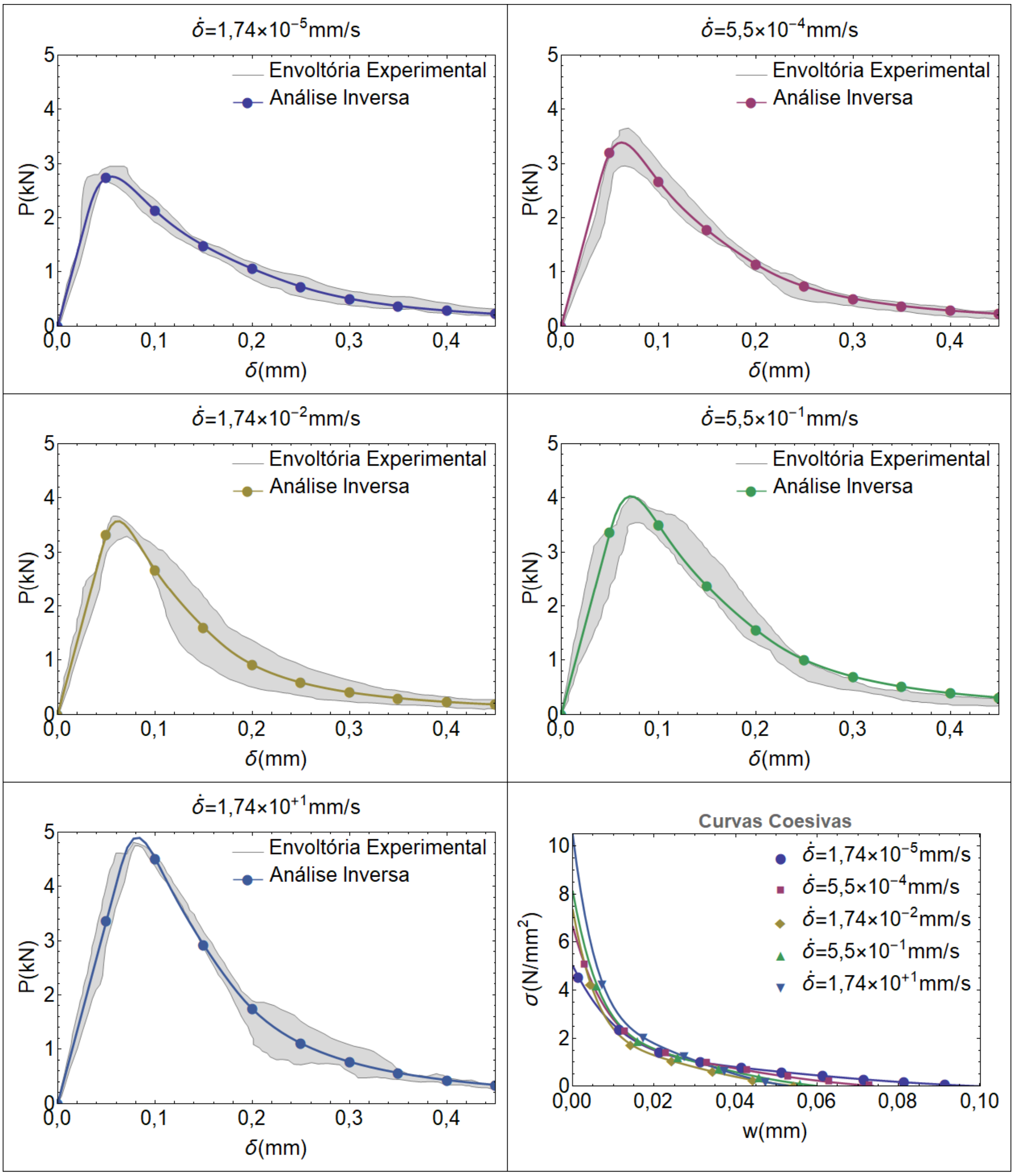


Figura 2-26: Análise inversa realizada por Gea dos Santos e Sousa (2015). Fonte: Autor.

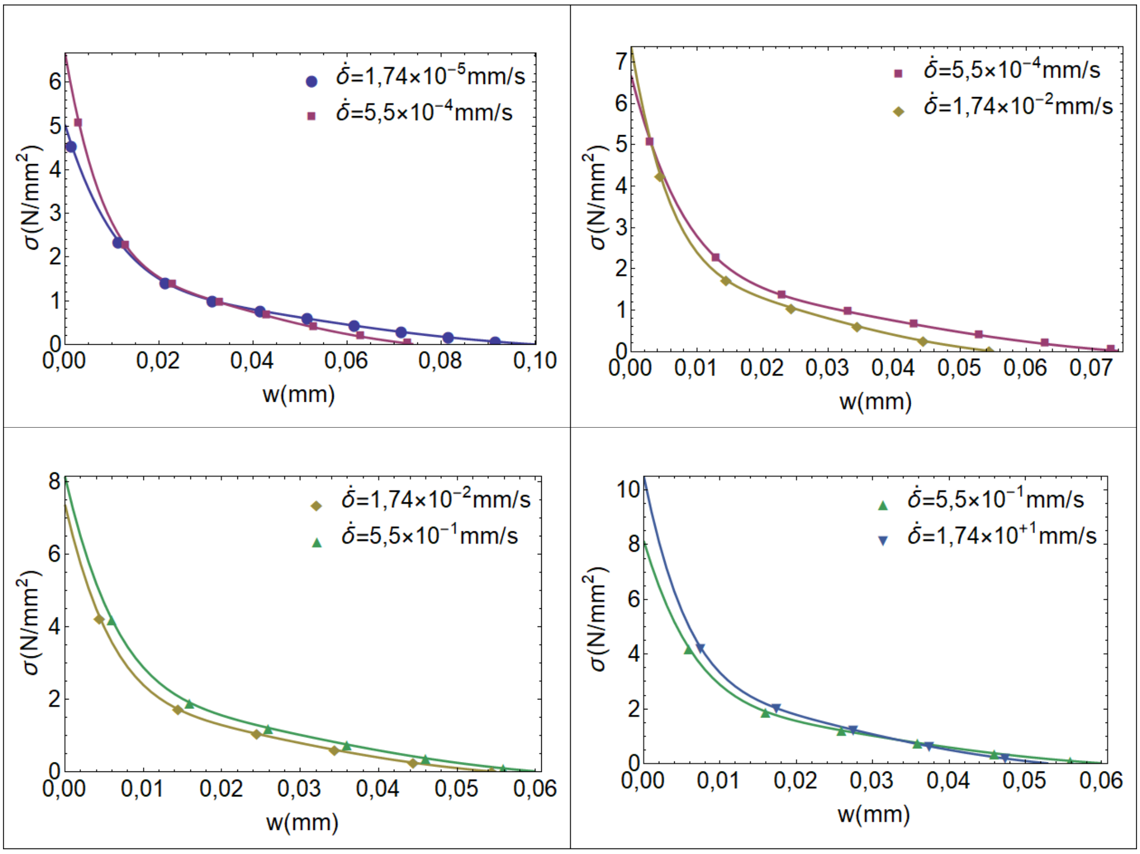


Figura 2-27: Evolução das curvas coesivas de acordo com a taxa de carregamento (Gea dos Santos e Sousa, 2015). Fonte: Autor.

3 PROPOSTA DE MODELO VISCO-ELÁSTICO E VISCO-COESIVO

3.1 Apresentação do Capítulo

Este capítulo descreve o modelo proposto para representar o comportamento viscoso do concreto em taxas baixas de carregamento. São consideradas taxas baixas de carregamentos aquelas nas quais os efeitos inerciais podem ser desprezados e que são caracterizadas pela redução da energia aparente de fratura (G_f) e da abertura crítica de fratura (w_c), como observado em algumas das referências da seção 2.6 (Wittmann *et al.*,1987, Ruiz *et al.*, 2011, Gea dos Santos e Sousa, 2015).

3.2 Modelo Visco-Elástico

Como observado em Rüsch (1960), Wittmann *et al.* (1987), Reinhardt (1990), Stephen, Gettu e Raphael (2016) e Stephen e Gettu (2019), com o aumento da taxa de carregamento ocorre o aumento do módulo de elasticidade (E).

Com intuito de verificar a sensibilidade do resultado numérico com a alteração do módulo de elasticidade, considera-se o exemplo de uma viga em um ensaio de flexão em três pontos. A viga tem comprimento de $700\ mm$, vão livre (S) de $500\ mm$, altura (H) de $150\ mm$, espessura (B) de $150\ mm$, e ranhura (H_0) de $25\ mm$ (Figura 2-14). Utiliza-se o modelo de Hordijk (1991) (Equação (5), Seção 2.5) para o modelo coesivo, com os parâmetros $f_t = 5\ MPa$ e $G_f = 90\ J/m^2$. O comportamento da curva $P - CMOD$ para diferentes valores de E é apresentado na Figura 3-1. As curvas foram obtidas com um modelo em elementos finitos. Observa-se que com o aumento de E, além de aumentar a inclinação inicial da curva, são obtidos picos maiores, e os decaimentos pós-pico são mais acentuados. Isso demonstra que E é significativo tanto durante o comportamento elástico quanto durante o comportamento danificado.

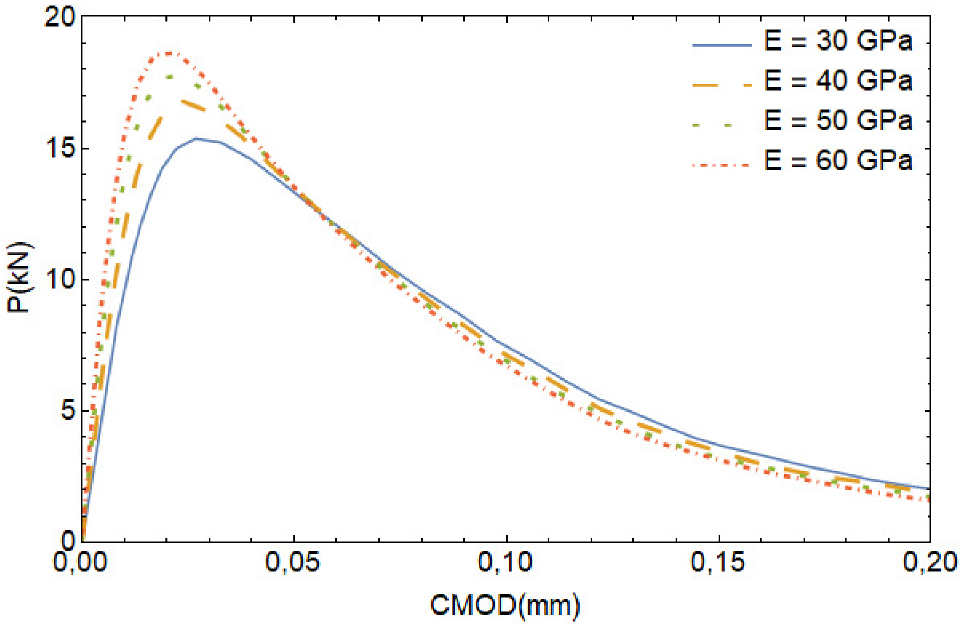


Figura 3-1: Exemplo do comportamento da curva numérica do ensaio de flexão em três pontos com a mudança do módulo de elasticidade. Fonte: Autor.

Além de Reinhardt (1990), The fib Model Code for Concrete Structures (2010, Seção 5.1.11.2.4 da respectiva norma) também recomenda uma relação de módulo com a taxa de carregamento baseado em um modelo de potência:

$$E_v = E_0 . \left(\frac{\dot{\sigma}}{\dot{\sigma}_0}\right)^{0.025} \tag{22}$$

ou

$$E_v = E_0 . \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{0.026} \tag{23}$$

sendo E_v o módulo de elasticidade modificado pelo efeito da taxa de carregamento, E_0 o módulo de elasticidade de referência, $\dot{\sigma}$ a taxa de tensão, $\dot{\sigma}_0$ a taxa de tensão de referência, $\dot{\varepsilon}$ a taxa de deformação e $\dot{\varepsilon}_0$ a taxa de deformação de referência. Para compressão, $\dot{\sigma}_0 = 1\ MPa/s$ e $\dot{\varepsilon}_0 = 30.10^{-6}\ s^{-1}$, e para tração, $\dot{\sigma}_0 = 0.03\ MPa/s$ e $\dot{\varepsilon}_0 = 1.10^{-6}\ s^{-1}$. Essa formulação é válida para compressões que se encontram entre $1\ MPa/s < \dot{\sigma} < 10^7\ MPa/s$ e $30.10^{-6}\ s^{-1} < \dot{\varepsilon} < 3.10^2\ s^{-1}$, e trações que se encontram entre $0{,}03\ MPa/s < \dot{\sigma} < 10^7\ MPa/s$ e $1.10^{-6}\ s^{-1} < \dot{\varepsilon} < 3.10^2\ s^{-1}$.

Os modelos de potência apresentados por Reinhardt (1990) e The fib Model Code for Concrete Structures 2010 são adequados para a representação do concreto a compressão e tração simples, porém, estão limitados a um domínio de confiabilidade que não considera uma condição estática ideal. Em uma condição estática ideal, $\dot{\sigma} = 0$ e $\dot{\varepsilon} = 0$, e, consequentemente, o valor de $E_v = 0$, o que não condiz com uma expectativa física do comportamento do material.

Com base no observado, propõe-se o seguinte modelo:

$$E_v = E_0.\left(1 + \left(\frac{|\dot{\varepsilon}|}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{n_E}\right) \tag{24}$$

sendo E_v o módulo de elasticidade modificado pelo efeito da taxa de carregamento, E_0 o módulo de elasticidade de referência $\dot{\varepsilon}$ a taxa de deformação, $\dot{\varepsilon}_0$ a taxa de deformação de referência e n_E um índice de potência para o efeito viscoso do módulo de elasticidade. Não existem valores propostos para $\dot{\varepsilon}_0$ e n_E, estes parâmetros devem ser ajustados para cada tipo de concreto.

Para uma condição ideal estática ($\dot{\varepsilon} = 0$), o modelo proposto retorna $E_v = E_0$, de tal modo que o E_0 está relacionado com o módulo de elasticidade estático ideal.

3.3 Modelo Visco-Coesivo

Com base nas observações de Wittmann *et al.* (1987), Ruiz *et al.* (2011) e Gea dos Santos e Sousa (2015, 2018), resumidas na seção 2.6, o seguinte modelo visco-coesivo, $V(w, \dot{w})$, é proposto para baixas taxas de carregamento:

$$V(w, \dot{w}) = R(\dot{w}).f\big(w, G(\dot{w})\big) \tag{25}$$

sendo $R(\dot{w})$ o fator proposto por Rosa *et al.* (2012), apresentado na Eq. (26), $f\big(w, G(\dot{w})\big)$ é o modelo coesivo modificado por um parâmetro adicional $G(\dot{w})$, descrito pela Eq. (27). A função do parâmetro $G(\dot{w})$ é reduzir o valor de w_c do modelo coesivo, reduzindo o intervalo de coesão. Quanto menor o intervalo de coesão, mais o processo de fratura se aproxima de um comportamento frágil.

$$R(\dot{w}) = 1 + \left(\frac{\dot{w}}{\dot{w}_0}\right)^n \tag{26}$$

$$G(\dot{w}) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\dot{w}}{\dot{w}_w}\right)^{n_w} & para\ \dot{w} \leq \dot{w}_w \\ 0 & para\ \dot{w} > \dot{w}_w \end{cases} \tag{27}$$

Na Eq. (26) $\dot{w}_0$ é a taxa de abertura de fratura de referência e n o índice adimensional. Na Eq. (27), o parâmetro $\dot{w}_w$ corresponde a taxa de abertura de fratura com que o material tende ao comportamento frágil, e n_w é o índice adimensional que expressa essa evolução da passagem de quase-frágil para frágil.

A Eq. (27) funciona como um controle da capacidade resistente do material, trabalhando de forma contrária à Eq. (26). Com o aumento da taxa de carregamento obtém-se o aumento da rigidez do material e, em termos de função coesiva, maior resistência e maior energia acumulada pelo material em uma abertura de fratura menor (Eq. (26)). Como existe um acumulo energético maior em uma abertura de fratura menor, tal energia extra acelera o rompimento das ligações do material (Eq. (27)). De acordo com o modelo, há uma taxa de carregamento em que a energia acumulada, quando atingida a resistência máxima de tração, é suficiente para romper todas as ligações. Tal taxa de carregamento corresponde ao parâmetro $\dot{w}_w$ da Eq. (27).

Para ilustrar o comportamento da Eq. (25), uma curva coesiva bilinear, apresentada pela Eq. (28) (Figura 3-2), é considerada.

$$\sigma(w) = \begin{cases} f_t - a_1.w, \;\; w < \dfrac{f_t.(1-b_2)}{a_1 - a_2} \\ b_2.f_t - a_2.w, \;\; \dfrac{f_t.(1-b_2)}{a_1 - a_2} \leq w < \dfrac{b_2.f_t}{a_2} \\ 0, \;\; w \geq \dfrac{b_2.f_t}{a_2} \end{cases} \tag{28}$$

A curva coesiva bilinear modificada pelo fator $G(\dot{w})$ é apresentada na Eq. (29).

$$f\big(w, G(\dot{w})\big) = \begin{cases} f_t - a_1^*.w, \;\; for \;\; w \leq \dfrac{f_t.(1-b_2)}{a_1^* - a_2^*} \\ f_t.b_2 - a_2^*.w, \;\; for \;\; \dfrac{f_t.(1-b_2)}{a_1^* - a_2^*} < w \leq w_c^* \\ 0, \;\; for \; w > w_c^* \end{cases} \tag{29}$$

sendo,

$$w_c^* = G(\dot{w}).\frac{f_t.b_2}{a_2} \tag{30}$$

$$a_1^* = \frac{a_1}{G(\dot{w})} \tag{31}$$

$$a_2^* = \frac{a_2}{G(\dot{w})} \tag{32}$$

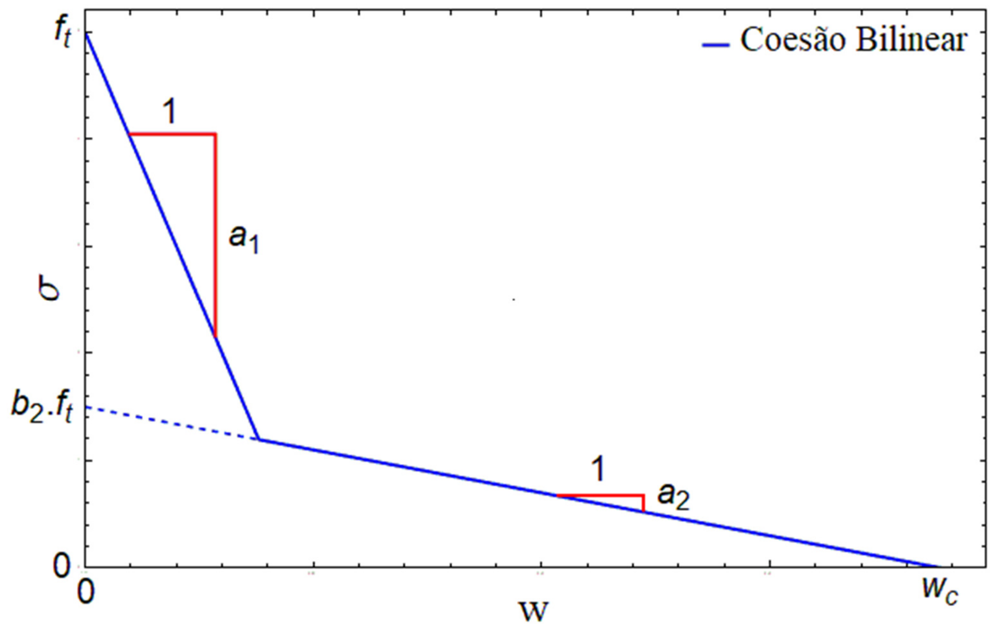


Figura 3-2: Parâmetros da curva coesiva bilinear. Fonte: Autor.

O comportamento do modelo visco-coesivo bilinear (Eq. 10) é ilustrado na Figura 3-3. O fator $R(\dot{w})$ provoca a expansão da curva coesiva na direção do eixo σ, enquanto o fator $G(\dot{w})$ provoca a redução da curva coesiva na direção do eixo w. Os parâmetros utilizados foram: $f_t = 5\ N/mm^2 = 5\ MPa$; $a_1 = 100\ N/mm^3 = 100\ MPa/mm$; $b_2 = 0.3$; $a_2 = 10N/mm^3\ = 10\ MPa/mm$; $\dot{w}_0 = 1\ mm/s$; $n = 0.25$; $\dot{w}_w = 1\ mm/s$; $n_w = 0.25$.

Fisicamente, o comportamento do modelo visco-coesivo proposto pode ser relacionado com as observações de Vegt, Breugel e Weerheijm (2007). Os autores analisaram o padrão de formação de macro e microfissuras de acordo com a taxa de carregamento. Pela análise microscópica, os autores observam que, em taxas de carregamento quase-estáticas, as fissuras buscam os pontos mais fracos na pasta de cimento (zona de transição), contornando os agregados. É observada a existência de uma fissura principal (que leva à falha) e pequenas fissuras que se propagam a partir da principal. Em altas taxas de carregamento, os autores descrevem que as fissuras possuem menos tempo para buscar pelos pontos mais fracos, resultando em algumas fissuras passando através dos agregados. Também é observado que são formadas inúmeras microfissuras ao longo da fissura principal.

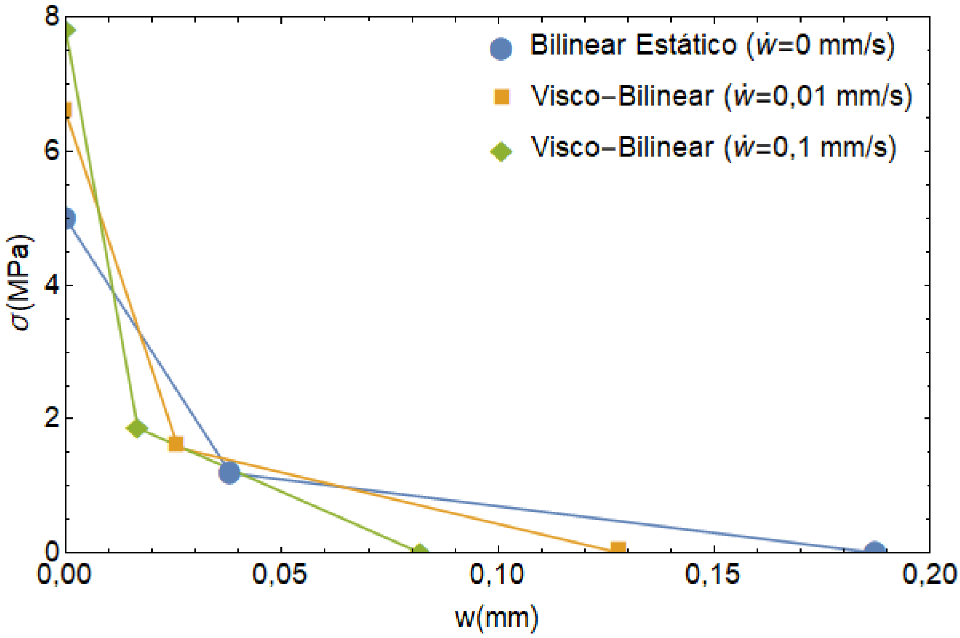


Figura 3-3: Comportamento do modelo visco-coesivo proposto. Fonte: Autor.

Correlacionando as observações de Vegt, Breugel e Weerheijm (2007) com o modelo proposto, em taxas de carregamento quase-estáticas, a distribuição de pequenas fissuras na zona de transição resulta em um valor menor de f_t e um comportamento mais plástico do modelo coesivo (mais fissuras prolongam a abertura crítica, w_c). Com o aumento da taxa de carregamento, a fissura principal passando pelos os agregados resulta em um valor maior de f_t e, devido à redução da distribuição de fissuras, menos plástico é o comportamento da curva coesiva, resultando em um valor menor de abertura crítica (w_c).

4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

4.1 Apresentação do Capítulo

O capítulo 3 apresentou a proposta de modelos visco-elástico e visco-coesivo. Os modelos possuem um conjunto de parâmetros que precisam ser determinados de acordo com o concreto a ser caracterizado. Para a obtenção dos valores desses parâmetros sugere-se que esses sejam obtidos por análise inversa.

Este capítulo busca apresentar a metodologia numérica utilizada para a obtenção destes parâmetros. Todos os métodos numéricos são implementados no programa FitFG (Gea dos Santos e Sousa, 2019). O FitFG foi inspirado no programa Fit3PB de Sousa e Gettu (2006) e Sousa (2011) e teve seu início no trabalho de Gea dos Santos (2014).

4.2 Equação de Movimento e a Viscosidade na Matriz de Elasticidade

A equação de movimento é expressa por (maiores detalhes no Apêndice A, Seção ii)

$$[M]\,\ddot{\vec{U}} + [C]\,\dot{\vec{U}} + [K]\,\vec{U} = \vec{P} + \overrightarrow{F_\chi} + \overrightarrow{F_\Phi} \qquad (33)$$

sendo

- $[M]$ a matriz de massa do corpo.
- $[C]$ a matriz de amortecimento do corpo.
- $[K]$ a matriz de rigidez do corpo.
- $\overrightarrow{F_\chi}$ o vetor de forças devido a $\vec{\chi}$.
- $\overrightarrow{F_\Phi}$ o vetor de forças devido a $\vec{\Phi}$.
- $\ddot{\vec{U}}$ o vetor de aceleração.
- $\dot{\vec{U}}$ o vetor de velocidade.
- $\vec{U}$ o vetor de deslocamentos.

O modelo visco-elástico proposto (Seção 3.2) inclui os efeitos de amortecimento no módulo de elasticidade. Devido ao uso desse modelo, a matriz de amortecimento $[C]$ é omitida da Eq. (33) e reescreve-se a equação de movimento do seguinte modo:

$$[M]\,\ddot{\vec{U}} + \left[K\left(\dot{\vec{U}}\right)\right]\,\vec{U} = \vec{P} + \overrightarrow{F_\chi} + \overrightarrow{F_\Phi} \tag{34}$$

em que $\left[K\left(\dot{\vec{U}}\right)\right]$ é a matriz de rigidez dependente do vetor de velocidade.

A taxa de deformação $\dot{\varepsilon}$ pode ser obtida a partir das taxas de deslocamento $\dot{U}$ (detalhado no apêndice A):

$$\dot{\vec{\varepsilon}} = [B]\,\dot{\vec{U}} \tag{35}$$

Reescrevendo a matriz de elasticidade (Eq. (69), Apêndice A, Seção v), considerando o modelo proposto de E_v (Eq. (24), Seção 3.2) e partindo-se do princípio de um comportamento ortotrópico, obtém-se:

$$\left[D\left(\dot{\vec{\varepsilon}}\right)\right] = \frac{1}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} E_v(\dot{\varepsilon}_{xx}) & \mu.E_v(\dot{\varepsilon}_{xx}) & 0 \\ \mu.E_v\left(\dot{\varepsilon}_{yy}\right) & E_v\left(\dot{\varepsilon}_{yy}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2}.E_v\left(\dot{\varepsilon}_{xy}\right) \end{bmatrix} \tag{36}$$

Apesar de ser interessante a aplicação de um modelo ortotrópico, o modelo viscoso proposto é, relativamente, simplificado. O modelo viscoso proposto não faz distinção entre a deformação normal e a cisalhante, de tal modo que o mesmo conjunto de parâmetros $\dot{\varepsilon}_0$ e n_E (Eq. (25), Seção 3.2) seriam utilizados para ambas. Outro ponto é que não estão sendo levadas em conta as deformações normais e tangentes de acordo com a orientação do elemento. De acordo com a orientação, podemos obter taxas relativamente diferentes.

Ao simular o ensaio de flexão em três pontos em baixas taxas de carregamento, observou-se que não existe grande diferenças entre $\dot{\varepsilon}_{xx}$ e $\dot{\varepsilon}_{yy}$ por ponto de integração. Desse modo, é possível adotar uma taxa média de deformação normal $(\dot{\varepsilon}_{med})$:

$$\dot{\varepsilon}_{med} = \frac{\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy}}{2} \tag{37}$$

A matriz de elasticidade é então descrita por:

$$[D(\dot{\varepsilon}_{med})] = \frac{E_v(\dot{\varepsilon}_{med})}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{38}$$

4.3 Modelagem do Ensaio de Flexão em Três Pontos

A modelagem adotada para representar o ensaio de flexão em três pontos é apresentada na Figura 4-1. Devido à simetria do problema, apenas metade da viga é discretizada pela malha de elementos finitos. Na interface em que se deve propagar a fratura são colocados elementos de interface. Os elementos de interface são idealmente rígidos enquanto as tensões nos nós forem menores que f_t. Atingido f_t, o elemento de interface assume o comportamento da lei visco-coesiva. Como condição de contorno adotou-se o deslocamento imposto δ pelo atuador.

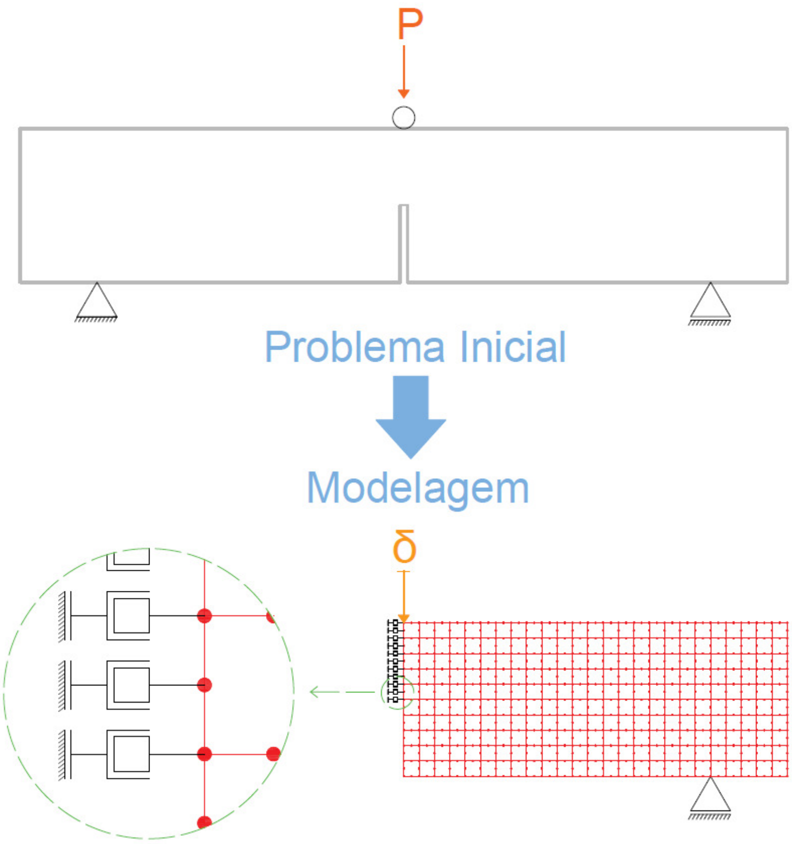


Figura 4-1: Representação da modelagem do ensaio de flexão em três pontos. Fonte: Autor.

O equacionamento do problema é expresso por:

$$[M]\overrightarrow{\Delta\ddot{U}_i} + \left[K\left(\vec{U}_m\right)\right]\overrightarrow{\Delta U_i} = \overrightarrow{\Delta F_i} \tag{39}$$

sendo $\overrightarrow{\Delta U_i}$ e $\overrightarrow{\Delta\ddot{U}_i}$ os vetores da variação de deslocamento e aceleração nodais no passo de integração (obtidos pelo método de Newmark, 1959, Eq. (74), Apêndice B), respectivamente. $[M]$ a matriz de massa, $\left[K\left(\vec{U}\right)\right]$ a matriz de rigidez dependente da velocidade nodal. $\overrightarrow{\Delta F_i}$ são as variações de forças nodais e o subíndice i corresponde ao instante atual do passo de integração. O termo $\vec{\dot{U}}_m$ corresponde a velocidade média no intervalo de integração:

$$\vec{\dot{U}}_m = \frac{\vec{\dot{U}}_{i+1} + \vec{\dot{U}}_i}{2} \tag{40}$$

Ao serem consideradas baixas taxas de carregamento, o termo $[M]\overrightarrow{\Delta \dot{U}_i}$ a Eq. (39) é numericamente desprezível em relação ao termo $\left[K\left(\vec{\dot{U}}_m\right)\right] \overrightarrow{\Delta U_i}$. Assim, simplifica-se a Eq. (39):

$$\left[K\left(\vec{\dot{U}}_m\right)\right] \overrightarrow{\Delta U_i} = \overrightarrow{\Delta F_i} \tag{41}$$

A Eq. (41) é um sistema não-linear e necessita de um método numérico para convergência. Inicialmente, enquanto a interface visco-coesiva ainda permanece intacta, apenas a parcela visco-elástica precisa convergir $\left(\left[K\left(\vec{\dot{U}}_m\right)\right] \overrightarrow{\Delta U_i}\right)$. É utilizado o método de Newton-Raphson (Apêndice C) para a determinação de $\overrightarrow{\Delta U_i}$ e o equilíbrio do sistema $\left[K\left(\vec{\dot{U}}_m\right)\right] \overrightarrow{\Delta U_i} - \overrightarrow{\Delta F_i} = 0$. A cada passo do processo iterativo, é verificado se o elemento em contato com a interface visco-coesiva superou a resistência a tração f_t. Em caso positivo, ignora-se a resposta obtida e inclui-se, no sistema de equações a serem resolvidas, a condição de equilíbrio entre a força visco-elástica proveniente da deformação da viga com a força visco-coesiva proveniente do elemento de interface.

Detalhes sobre o procedimento de resolução e obtenção das curvas $P - \delta$ e $P - CMOD$ são apresentados no Apêndice D.

4.4 O Programa FitFG.

O FitFG é desenvolvido na linguagem C++ e utiliza os recursos de interface gráfica, de distribuição livre, da plataforma Qt Creator (2019). O programa é dividido em dois processos principais, o primeiro para ajustes que desprezam os efeitos da taxa de carregamento, chamado de “Estático”, e o outro, que considera os efeitos da taxa de carregamento, chamado de “Viscoso”.

O C++ é uma linguagem orientada a objetos. A vantagem da orientação a objetos se deve ao fato de se criarem classes abstratas (classes “mães”) que podem ser sobrescritas por classes “filhas” que dividem as mesmas características básicas da “mãe”, porém com resultados diferentes para os mesmos métodos. Com base nos conceitos da programação orientada a objetos foi possível desenvolver um esquema de programação que trabalha com classes abstratas de simulação do ensaio experimental, modelos coesivos, visco-elásticos e visco-coesivos, e até mesmo métodos de análise inversa.

Para esta tese foram implementadas 3 classes “filhas” novas:

- O modelo numérico de simulação do ensaio de flexão em três pontos dependente da taxa de carregamento com integração ao longo do tempo de acordo com o método de Newmark (1959).
- O modelo visco-elástico proposto na Eq. (24), Seção 3.2.
- O modelo visco-coesivo proposto na Eq. (25), Seção 3.3.

Utilizaram-se as classes de leis coesivas e análise inversa já implementadas no programa para o desenvolvimento da pesquisa. O programa conta com a lei coesiva de Hordijk (1991), e as leis coesivas linear, bilinear e trilinear. Para a análise inversa, o programa possui uma classe que utiliza o Método de Levenberg-Marquardt (Marquardt, 1963, Levenberg, 1944), descrito no Apêndice E.

Uma descrição de como utilizar o programa FitFG é apresentada no Apêndice F.

5 METODOLOGIA

5.1 Apresentação do Capítulo

Este capítulo descreve a metodologia utilizada para avaliar o modelo visco-coesivo proposto. Faz parte da metodologia a definição dos tipos de concreto a serem avaliados. Estabelece-se um grupo principal de concretos com diferentes resistências de modo a representar os tipos de concretos mais usuais. Opta-se pela variabilidade da proveniência dos concretos e dos dados experimentais para que não ocorra um viés durante a avalição do modelo. Além do grupo principal, avalia-se alguns grupos de concretos reforçados com fibras. Concretos reforçados com fibra não são o enfoque do modelo proposto pois as fibras possuem um comportamento distinto da massa de concreto. Mesmo assim, avalia-se alguns concretos reforçados com fibra com intuito de verificar a capacidade do modelo visco-coesivo proposto para esse grupo de concreto.

5.2 Concretos: Grupo Principal

Define-se um grupo principal de concretos, composto por:

1. **Concreto Convencional (CC):** concreto com resistência à compressão de $f_c = 30\ MPa$.
2. **Concreto de Alta Resistência (CAR):** concreto com resistência a compressão de $f_c = 90\ MPa$.
3. **Concreto de Ultra Alta Resistência (CUAR):** concreto com resistência a compressão de $f_c = 120\ MPa$.

5.2.1 Concreto Convencional (CC)

O CC foi produzido pelo autor utilizando cimento tipo II, areia média grossa e brita 1. O traço utilizado é 1:2:3:0,55. A mistura e a moldagem de corpos-de-prova foi realizada no laboratório de materiais do Centro Universitário Salesiano de São Paulo (UNISAL), Unidade São José, Campinas – SP. Foram moldados 9 corpos-de-prova cilíndricos com 200 mm de altura e 100 mm de diâmetro, e 16 corpos-de-prova prismáticos com dimensões de 400 mm x 100 mm x 100 mm em formas de aço.

Após a moldagem os corpos-de-prova foram colocados em uma câmara úmida e foram desmoldados no dia seguinte. Ficaram submersos em água por 28 dias. Após os 28 dias foram colocados para secar.

Os corpos-de-prova cilíndricos foram ensaiados em compressão axial no Laboratório de Materiais da UNISAL São José. Foi realizado um entalhe de 23 mm no corpos-de-prova prismáticos com uma serra mármore. Esses corpos-de-prova foram ensaiados no Laboratório de Modelagem Estrutural e Monitoramento (LabMEM) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Foi utilizada uma máquina universal de ensaios que contempla a medição da força exercida pelo atuador, o deslocamento do atuador e a abertura de um *clip-gauge*, colocado na boca da ranhura (Figura 5-1). A taxa de aquisição do equipamento é de 0,1 s^{-1}. O vão livre entre os apoios foi de 365 mm. A geometria do ensaio de flexão em três pontos é ilustrada na Figura 5-2. Os corpos-de-prova prismáticos foram separados em três grupos de taxas de carregamento. As velocidades de atuação do atuador foram de $8{,}33 \times 10^{-4}\ mm/s$, $8{,}33 \times 10^{-3}\ mm/s$ e $8{,}33 \times 10^{-2}\ mm/s$.

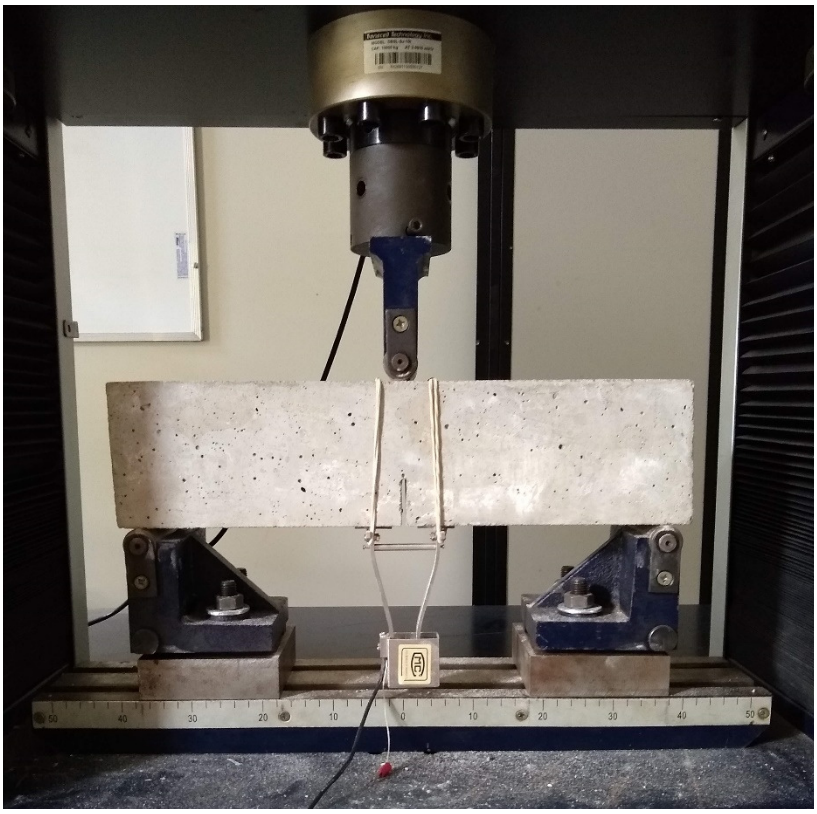


Figura 5-1: Ensaio de flexão em três pontos realizado no concreto convencional.
Fonte: Autor.

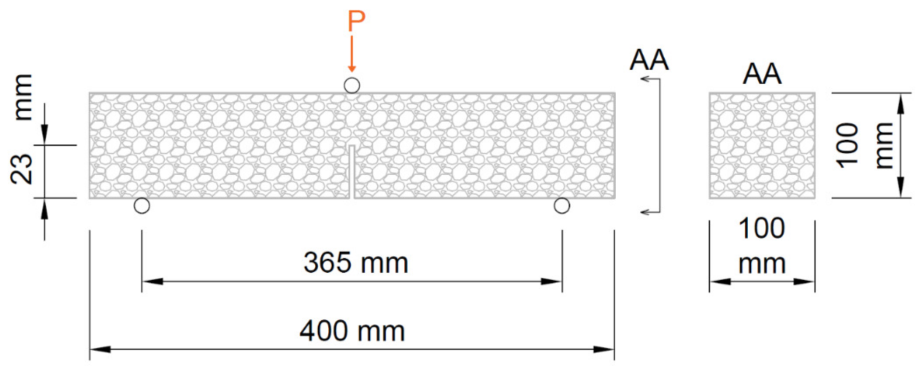


Figura 5-2: Dimensões do ensaio de flexão em três pontos do concreto convencional. Fonte: Autor.

5.2.2 Concreto de Alta Resistência (CAR)

Esse grupo de concreto foi ensaiado por Rosa *et al.* (2012) e suas curvas experimentais $(P - \delta)$ foram disponibilizas para análise. A dimensão do ensaio de flexão em três pontos é ilustrada na Figura 5-3. Foram realizados ensaios em cinco velocidades diferentes de atuação de atuador, sendo destas escolhidas três velocidades que são baixas: $1{,}74 \times 10^{-5}\ mm/s$, $5{,}5 \times 10^{-4}\ mm/s$ e $1{,}74 \times 10^{-3}\ mm/s$.

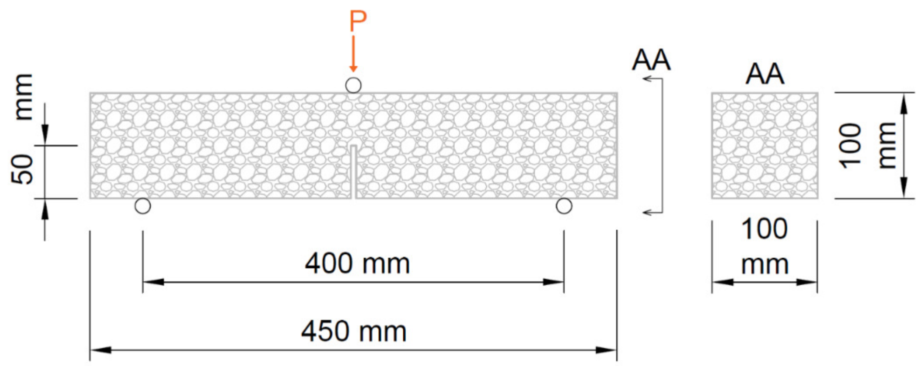


Figura 5-3: Dimensões do ensaio de flexão em três pontos do concreto de alta resistência. Fonte: Autor.

5.2.3 Concreto de Ultra Alta Resistência (CUAR)

Amostras do CUAR foram produzidas e disponibilizadas pelo Me. Dener Altheman, Gerente de Qualidade e SSMA da LEONARDI PRÉ FABRICADOS e Professor do curso de engenharia civil do Centro Universitário Salesiano de São Paulo (UNISAL), Unidade São José, Campinas – SP.

Corpos de prova cilíndricos com 200 mm de altura e 100 mm de diâmetro foram ensaiados em compressão axial na Faculdade de Ciências Aplicadas (FCA) da UNICAMP em Limeira – SP.

Os corpos-de-prova prismáticos foram ensaiados no Laboratório de Modelagem Estrutural e Monitoramento (LabMEM) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Foi utilizada uma máquina universal de ensaios que contempla a medição da força exercida pelo atuador, o deslocamento do atuador e a abertura de um *clip-gauge*, colocado na boca da ranhura. A taxa de aquisição do equipamento é de 0,1 s^{-1}. A geometria do ensaio de flexão em três pontos é ilustrada na Figura 5-4. Os corpos-de-prova prismáticos foram separados em três grupos de taxas de carregamento. As velocidades de atuação do atuador foram de $8{,}33 \times 10^{-4}\ mm/s$, $8{,}33 \times 10^{-3}\ mm/s$ e $8{,}33 \times 10^{-2}\ mm/s$.

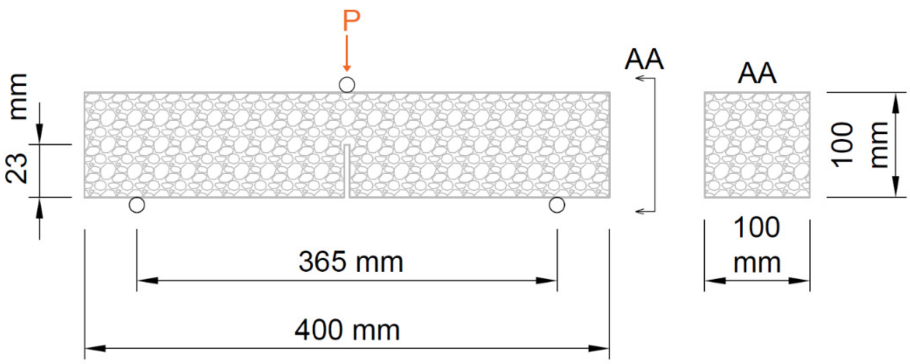


Figura 5-4: Dimensões do ensaio de flexão em três pontos do CUAR. Fonte: Autor.

5.3 Concretos: Grupo Secundário, reforçado com fibra

Os resultados experimentais deste grupo foram coletados nos trabalhos de Stephen, Gettu e Raphael (2016) e Stephen e Gettu (2019), já comentados na Seção 2.6. Foram selecionados:

1. O concreto reforçado com fibra de polipropileno de $35\ MPa$ de resistência a compressão e $3{,}75\ kg/m^3$ de fibra (CRFP35) de Stephen, Gettu e Raphael (2016).
2. O concreto reforçado com fibra de polipropileno de $40\ MPa$ de resistência a compressão e $3{,}75\ kg/m^3$ de fibra (CRFP40) de Stephen e Gettu (2019).

3. O concreto reforçado com fibra de aço de $35\ MPa$ de resistência a compressão e $30\ kg/m^3$ de fibra (CRFA3530) de Stephen, Gettu e Raphael (2016).
4. O concreto reforçado com fibra de aço de $40\ MPa$ de resistência a compressão e $45\ kg/m^3$ de fibra (CRFA4045) de Stephen e Gettu (2019).

A geometria do ensaio de flexão em três pontos, realizado tanto por Stephen, Gettu e Raphael (2016) quanto por Stephen e Gettu (2019), é ilustrada na Figura 5-5. Todos os ensaios foram controlados nas seguintes taxas de $CMOD$: $10^{-5}\ mm/s$, $10^{-4}\ mm/s$, $10^{-3}\ mm/s$ e $10^{-2}\ mm/s$.

Ambos os trabalhos apresentam apenas uma curva experimental por taxa de carregamento, mesmo sendo realizado mais de um ensaio por taxa. Como se teve acesso apenas aos gráficos dos trabalhos, e não aos dados experimentais, as análises inversas são realizadas com base nas curvas apresentadas (coletadas graficamente utilizando o programa *WebPlotDigitizer*, Rohatgi, 2019). É adicionado um valor de desvio padrão calculada a partir do desvio padrão da resistência a flexão apresentada em ambos os trabalhos.

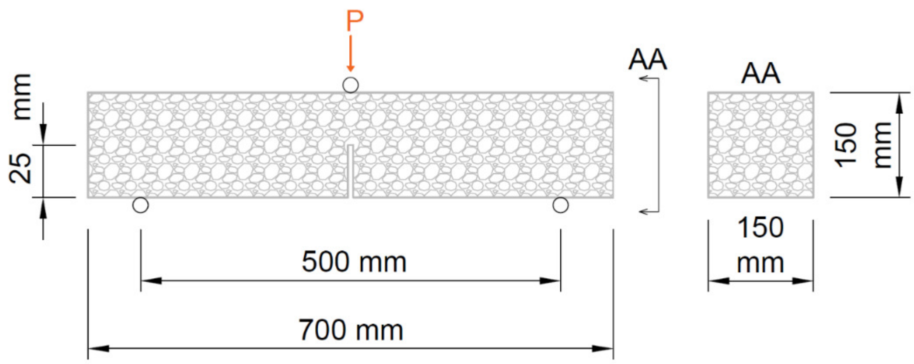


Figura 5-5: Dimensões do ensaio de flexão em três pontos realizado por Stephen, Gettu e Raphael (2016) e Stephen e Gettu (2019). Fonte: Autor.

5.4 Processo de análise inversa

Por mais que o FitFG seja capaz de ajustar os parâmetros elástico, coesivos e viscosos simultaneamente, tal processo não é vantajoso em tempo de execução. Para as análises é utilizado um computador notebook com processador Intel® Core™ i7-3632 CPU @ 2.20GHz/3.20 GHz (capaz de executar 8 *threads* em paralelo) com 12 GB de memória RAM. Por exemplo, sesse sistema computacional, uma simulação do ensaio de flexão em três pontos até o $CMOD$ de $0{,}4\,mm$, com discretização a cada $0{,}005\,mm$, possui um tempo médio de $3\,minutos$. Supondo um mínimo de 3 taxas de carregamentos, 3 parâmetros do modelo visco-elástico, 4 parâmetros de uma curva coesiva bilinear (por exemplo) e 4 parâmetros do modelo visco-coesivo proposto, obtém-se o total de 144 simulações para a determinação da iteração do método de Levenberg-Marquardt (Marquardt, 1963, Levenberg, 1944). Como o sistema computacional possui disponível 8 *threads*, seriam necessários 18 agrupamentos de 8 *threads*, gerando um tempo final de $54\,minutos$ por iteração.

Para reduzir o tempo computacional de análise inversa, é proposta a seguinte metodologia:

1. Realizar uma primeira análise inversa utilizando-se do procedimento de análise inversa estática do FitFG (Apêndice F, Seção i). Utiliza-se o grupo experimental com a menor taxa de carregamento e ajusta-se o módulo de elasticidade e a curva coesiva. Esses parâmetros “estáticos” ajustados servem como uma boa estimativa inicial para os parâmetros no modelo viscoso.
2. Cria-se um arquivo de análise inversa viscosa do FitFG (Apêndice F, Seção ii) com os parâmetros iniciais do módulo de elasticidade e curva coesiva baseados na etapa 1. Delimita-se o valor máximo de δ ou $CMOD$ de modo que a curva experimental ainda esteja no comportamento elástico. Ajusta-se os parâmetros do modelo visco-elástico, incluindo o módulo de elasticidade.
3. Aumenta-se, em etapas, o limite de análise das curvas experimentais (δ ou $CMOD$). Ajusta-se em cada etapa os parâmetros da curva visco-coesiva.
4. Ao atingir o limite desejável de δ ou $CMOD$, ajustar todos os parâmetros (visco-elástico e visco-coesivo).

5.5 Análise do Modelo Proposto

Para avaliar a qualidade do modelo proposto, são propostas duas análises:

1. O módulo de elasticidade E, a resistência a tração f_t e a energia aparente de fratura G_F obtidas pela análise inversa devem ser

similares aos valores obtidos pelos ensaios apresentados na Seção 2.5.1.1.

2. As curvas $P - \delta$ ou $P - CMOD$ simuladas com os parâmetros ajustados devem ser próximas das curvas experimentais.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

6.1 Apresentação

Este capítulo apresenta os resultados obtidos pela análise inversa de cada um dos grupos de concretos propostos. São realizadas as avaliações do modelo viscoso individualmente, para cada concreto, e por fim, é realizada uma avaliação geral.

6.2 Grupo Principal

6.2.1 Concreto Convencional (CC)

Seguindo a Seção 2.5.1.1, são obtidos os seguintes valores médios para os parâmetros:

- $E = 18{,}832\ GPa$ (Compressão Axial)
- $f_t = 2{,}09\ MPa$ (Flexão em Três Pontos)
- $G_f = 192{,}7\ J/m^2$ (Flexão em Três Pontos)

Pela análise inversa são obtidos os seguintes valores:

- Parâmetros visco-elásticos: $E_0 = 18{,}666\ GPa$, $\dot{\varepsilon}_0 = 1{,}593 \times 10^{-3}\ s^{-1}$, $n_E = 0{,}483$.
- Curva coesiva (Trilinear, Seção 2.5): $f_t = 1{,}904\ MPa$, $G_f = 219{,}6\ J/m^2$, $a_1 = 20{,}802\ MPa/mm$, $a_2 = 7{,}636\ MPa/mm$, $a_3 = 0{,}751\ MPa/mm$, $b_2 = 0{,}611$, $b_3 = 0{,}230$.
- Modelo Viscoso: $\dot{w}_0 = 1{,}119\ mm/s$, $n = 0{,}429$, $\dot{w}_w = 0{,}529\ mm/s$, $n_w = 0{,}322$.

Comparando-se os parâmetros obtidos pelos experimentos da Seção 2.5.1.1 com os obtidos pela análise inversa observa-se uma boa proximidade entre os valores de E, f_t e G_f (Tabela 6-1), sendo a mais expressiva em relação ao E, com uma diferença percentual de 0,88 %. A maior diferença foi em relação a G_f, com 13,96 %, enquanto f_t teve uma diferença de 8,90 %.

O comparativo da envoltória experimental com as curvas numéricas ajustadas são apresentados na Figura 6-1, Figura 6-2 e Figura 6-3. Observa-se uma boa representação das curvas numéricas com os dados experimentais.

Tabela 6-1: Comparação dos valores experimentais com os ajustados pela análise inversa para o CC. Fonte: Autor.

	$E\ (GPa)$	$f_t(MPa)$	$G_f(J/m^2)$
Experimental (Seção 2.5.1.1)	18,832	2,09	192,7
Análise Inversa (FitFG)	18,666	1,904	219,6
Diferença Percentual	0,88 %	8,90 %	13,96 %

O comportamento das curvas numéricas nas diferentes taxas de carregamento simuladas é ilustrado na Figura 6-4. Ao comparar as curvas numéricas, observa-se um aumento da rigidez inicial, com um aumento do pico da curva. Os pós-pico das curvas apresentam forças de atuador similares.

O comportamento da curva visco-coesiva ajustada para o CC é apresentado na Figura 6-5. Observa-se que com o aumento da taxa de carregamento ocorre o aumento da resistência à tração e uma redução da abertura crítica, justamente o que se observa no comportamento experimental.

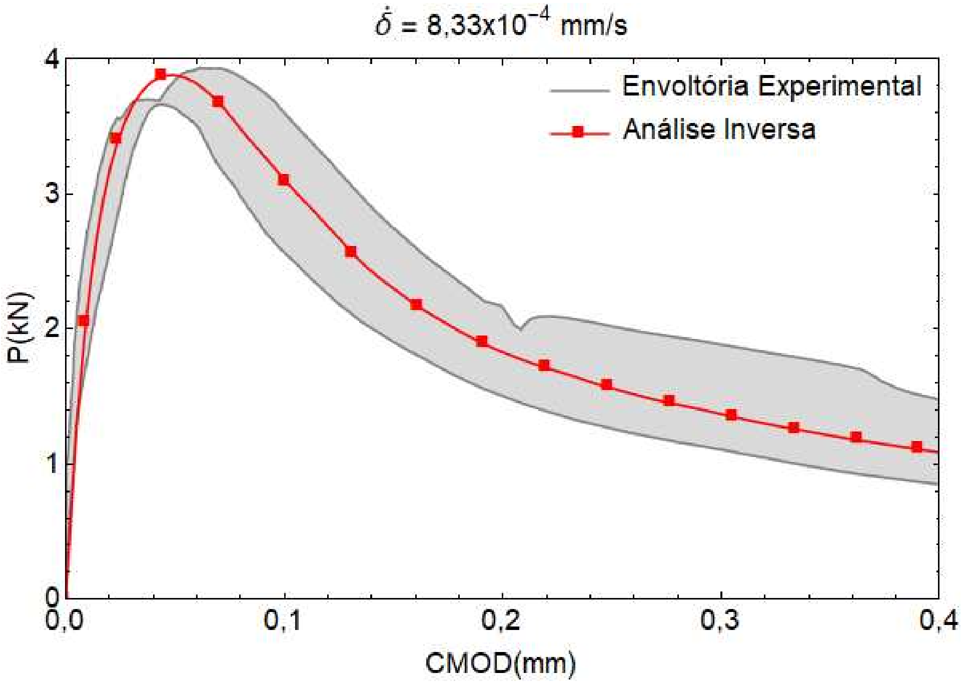


Figura 6-1: Comparação da envoltória experimental do CC com a análise inversa para a taxa de carregamento de $\dot{\delta} = 8{,}33 \times 10^{-4}\ mm/s$. Fonte: Autor.

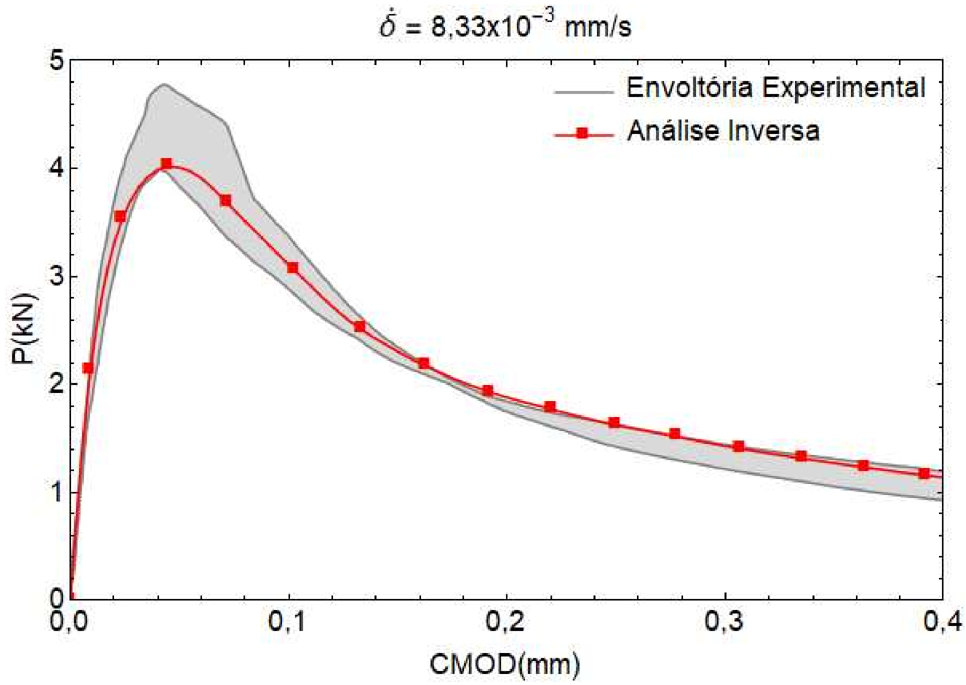


Figura 6-2: Comparação da envoltória experimental do CC com a análise inversa para a taxa de carregamento de $\dot{\delta} = 8{,}33 \times 10^{-3}\ mm/s$. Fonte: Autor.

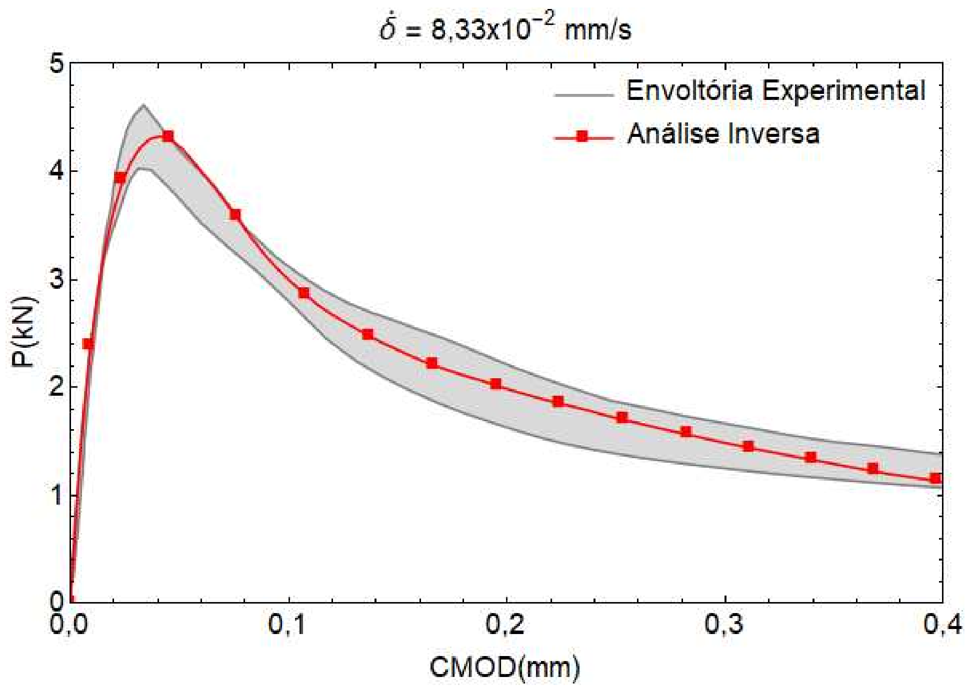


Figura 6-3: Comparação da envoltória experimental do CC com a análise inversa para a taxa de carregamento de $\dot{\delta} = 8{,}33 \times 10^{-2}\ mm/s$. Fonte: Autor.

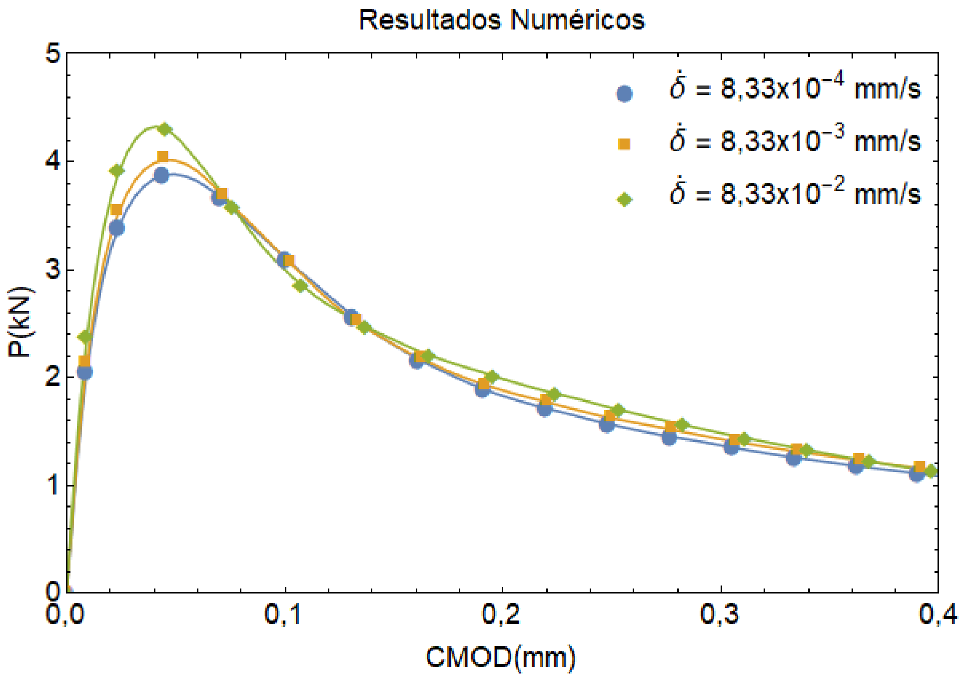


Figura 6-4: Comportamento do modelo numérico ajustado pela análise inversa. Fonte: Autor.

Com base no comparativo dos valores de E, f_t e G_f experimentais e numéricos e no comparativo gráfico das curvas $P - CMOD$, considera-se que a adoção do modelo visco-coesivo é adequada para a simulação da propagação de fratura no CC em baixas taxas de carregamento.

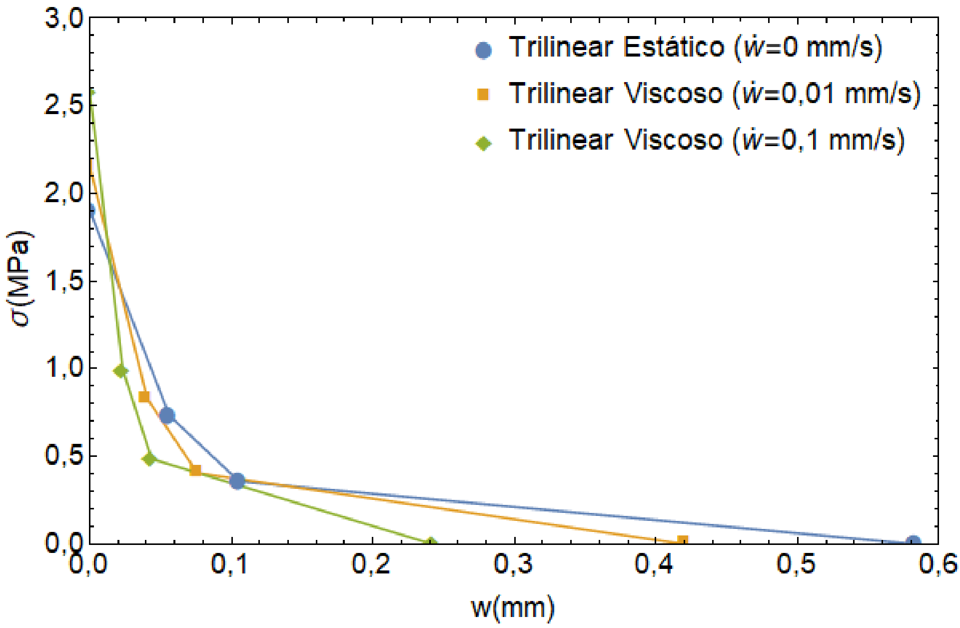


Figura 6-5: Comportamento da curva visco-coesiva ajustada para o CC. Fonte: Autor.

6.2.2 Concreto de Alta Resistência (CAR)

Rosa *et al.* (2012) apresentam os seguintes parâmetros obtidos pelos experimentos:

- $E = 33{,}900\ GPa$ (Compressão Axial)
- $f_t = 5{,}2\ MPa$ (Compressão Diametral)
- $G_f = 128\ J/m^2$ (Flexão em Três Pontos)

Pela análise inversa são obtidos os seguintes valores:

- Parâmetros visco-elásticos: $E_0 = 32{,}131\ GPa$, $\dot{\varepsilon}_0 = 5{,}301 \times 10^{-4}\ s^{-1}$, $n_E = 0{,}518$.
- Curva coesiva (Trilinear, Seção 2.5): $f_t = 4{,}9\ MPa$, $G_f = 106{,}9\ J/m^2$, $a_1 = 2142{,}58\ MPa/mm$, $a_2 = 122{,}8\ MPa/mm$, $a_3 = 2{,}305\ MPa/mm$, $b_2 = 0{,}875$, $b_3 = 0{,}092$.
- Modelo Viscoso: $\dot{w}_0 = 1{,}355 \times 10^{-3}\ mm/s$, $n = 0{,}451$, $\dot{w}_w = 0{,}106\ mm/s$, $n_w = 0{,}188$.

Comparando-se os parâmetros obtidos pelos experimentos de Rosa *et al.* (2012) com os obtidos pela análise inversa, observa-se uma boa proximidade entre os valores de E, f_t e G_f (Tabela 6-2), tendo-se a maior diferença percentual de $16{,}48\ \%$ para G_f, enquanto os demais parâmetros a diferença é inferior a $6\ \%$.

Tabela 6-2: Comparação dos valores experimentais com os ajustados pela análise inversa para o CAR. Fonte: Autor.

	$E\ (GPa)$	$f_t(MPa)$	$G_f(J/m^2)$
Experimental (Rosa *et al.*, *2012*)	33,900	5,2	128
Análise Inversa (FitFG)	32,131	4,9	106,9
Diferença Percentual	5,22 %	5,77 %	16,48 %

Os comparativos da envoltória experimental com as curvas numéricas ajustadas encontram-se na Figura 6-6, Figura 6-7 e Figura 6-8. Observa-se uma boa representação das curvas numéricas com os dados experimentais. Na última taxa de carregamento (Figura 6-8) a curva numérica ficou um pouco acima da envoltória experimental no trecho final. A comparação do comportamento das curvas numéricas é realizada na Figura 6-9.

O comportamento da curva visco-coesiva ajustada para o CAR encontra-se na Figura 6-10 e Figura 6-11. Observa-se que com o aumento da taxa de carregamento ocorre o aumento da resistência à tração e uma redução da abertura crítica, como esperado pela proposta do modelo visco-coesivo.

Com base no comparativo dos valores de E, f_t e G_f experimentais e numéricos e no comparativo gráfico das curvas $P - CMOD$, considera-se que a adoção do modelo visco-coesivo é adequada para a simulação da propagação de fratura no CAR em baixas taxas de carregamento.

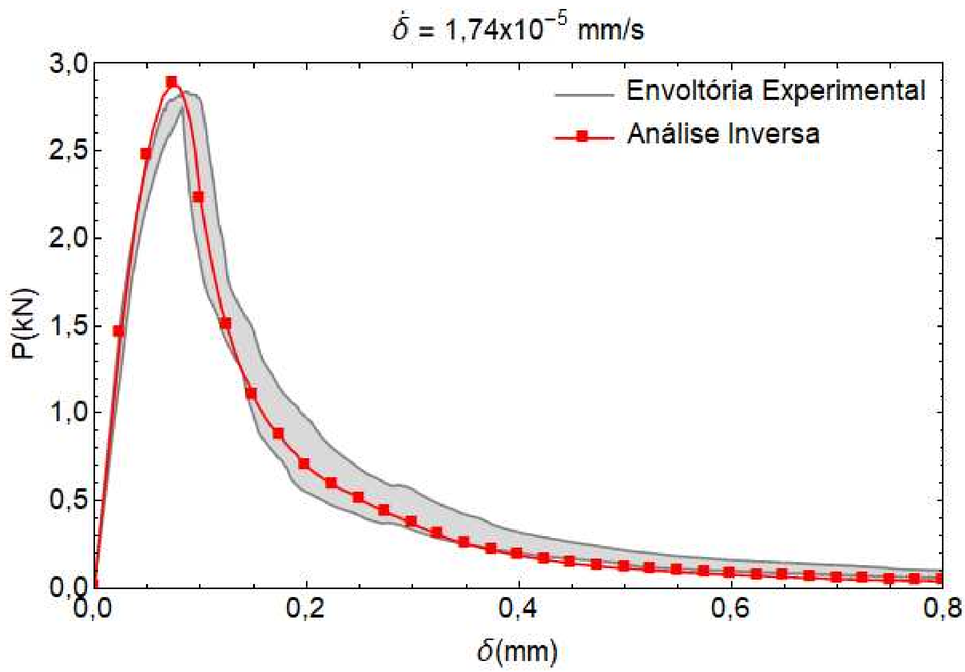


Figura 6-6: Comparação da envoltória experimental do CAR com a análise inversa para a taxa de carregamento de $\dot{\delta} = 1{,}74 \times 10^{-5}\ mm/s$. Fonte: Autor.

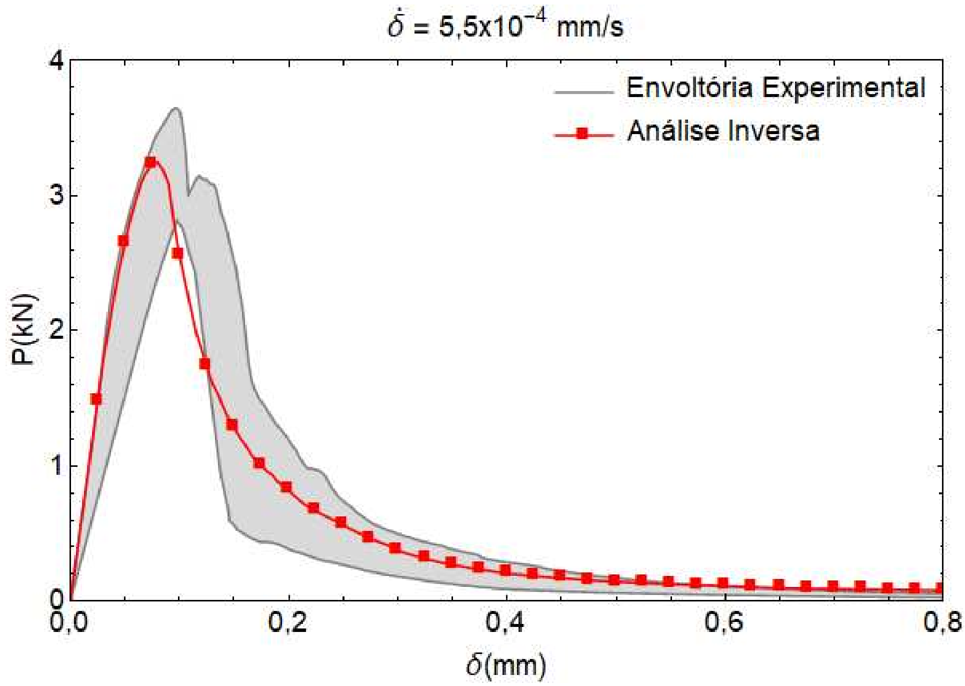


Figura 6-7: Comparação da envoltória experimental do CAR com a análise inversa para a taxa de carregamento de $\dot{\delta} = 5{,}5 \times 10^{-4}\ mm/s$. *Fonte: Autor.*

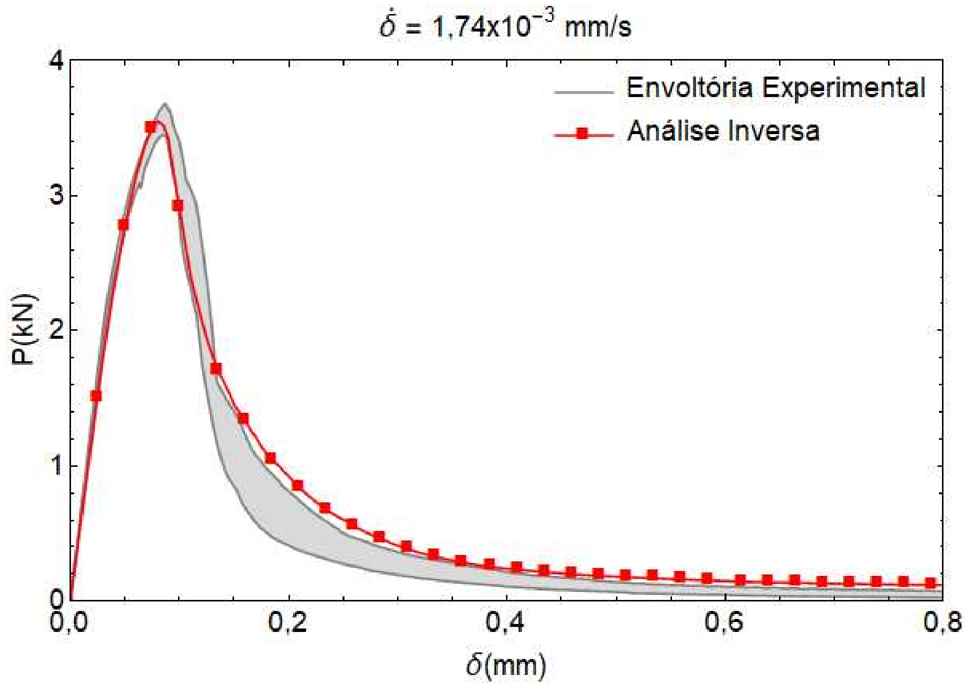


Figura 6-8: Comparação da envoltória experimental do CAR com a análise inversa para a taxa de carregamento de $\dot{\delta} = 1{,}74 \times 10^{-3}\ mm/s$. *Fonte: Autor.*

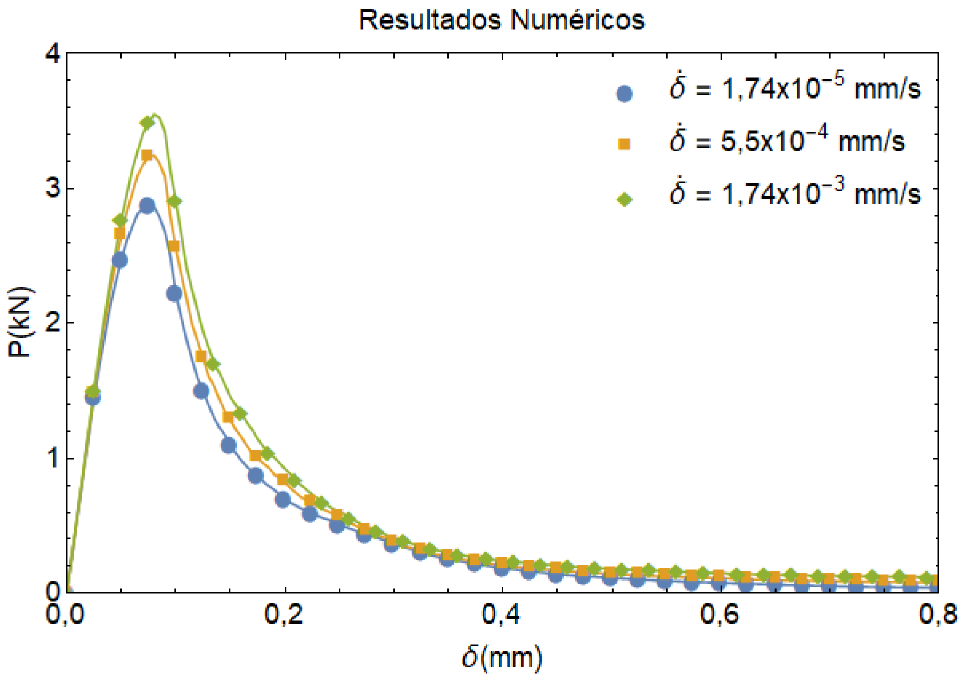


Figura 6-9: Comportamento do modelo numérico ajustado pela análise inversa. Fonte: Autor.

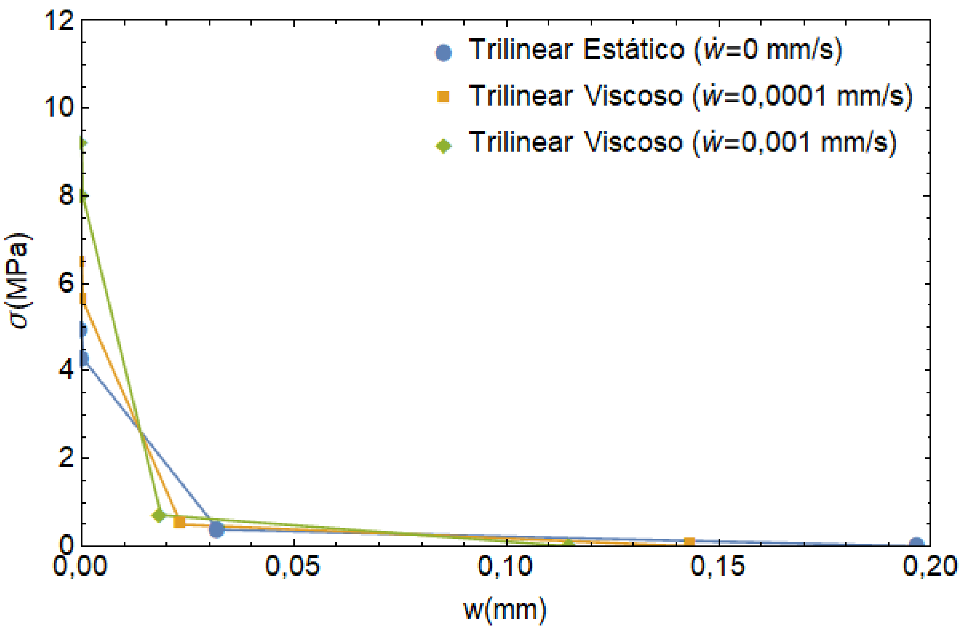


Figura 6-10: Comportamento da curva visco-coesiva ajustada para o CAR. Fonte: Autor.

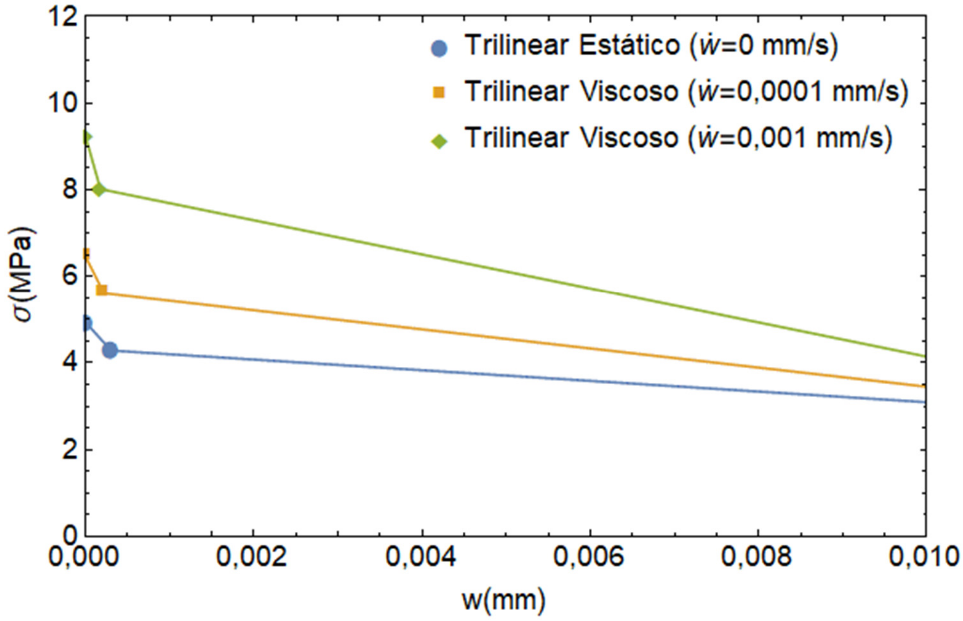


Figura 6-11: Comportamento da curva visco-coesiva ajustada para o CAR no intervalo de $w = 0\ mm$ até $w = 0{,}01$. Fonte: Autor.

6.2.3 Concreto de Ultra Alta Resistência (CUAR)

Seguindo a Seção 2.5.1.1, são obtidos os seguintes valores médios para os parâmetros:

- $E = 53{,}167\ GPa$ (Compressão Axial)
- $f_t = 6{,}09\ MPa$ (Flexão em Três Pontos)
- $G_f = 339{,}9\ J/m^2$ (Flexão em Três Pontos)

Pela análise inversa são obtidos os seguintes valores:

- Parâmetros visco-elásticos: $E_0 = 51{,}847\ GPa$, $\dot{\varepsilon}_0 = 1\ s^{-1}$, $n_E = 1$. Os parâmetros $\dot{\varepsilon}_0$ e n_E aparecem com valores unitários pois não existe mudança significativa da rigidez inicial nas três taxas de carregamento avaliadas.
- Curva coesiva (Trilinear, Seção 2.5): $f_t = 5{,}91\ MPa$, $G_f = 310{,}5\ J/m^2$, $a_1 = 118{,}190\ MPa/mm$, $a_2 = 39{,}317\ MPa/mm$, $a_3 = 5{,}419\ MPa/mm$, $b_2 = 0{,}692$, $b_3 = 0{,}206$.
- Modelo Viscoso: $\dot{w}_0 = 4{,}936\ mm/s$, $n = 0{,}474$, $\dot{w}_w = 2004{,}2\ mm/s$, $n_w = 5{,}245$.

Comparando-se os parâmetros obtidos pelos experimentos da Seção 2.5.1.1 com os obtidos pela análise inversa observa-se uma boa proximidade entre os valores de E, f_t e G_f (Tabela 6-3), sendo a diferença percentual inferior a $3\ \%$ para E e f_t, e inferior a $9\ \%$ para G_f.

Os comparativos da envoltória experimental com as curvas numéricas são ilustrados na Figura 6-12, Figura 6-13 e Figura 6-14. Observa-se uma boa representação das curvas numéricas com os dados experimentais nas duas primeiras taxas de carregamento (Figura 6-12 e Figura 6-13). Na última taxa de carregamento (Figura 6-14) observa-se um comportamento mais curvo no pós-pico da curva numérica enquanto a queda na envoltória experimental é retilínea. Tal efeito no resultado experimental é atribuído à taxa de aquisição de dados no aparelho de medição que precisaria ser menor.

Tabela 6-3: Comparação dos valores experimentais com os ajustados pela análise inversa para o CAR. Fonte: Autor.

	$\boldsymbol{E}\ (\boldsymbol{GPa})$	$\boldsymbol{f_t}(\boldsymbol{MPa})$	$\boldsymbol{G_f}(\boldsymbol{J/m^2})$
Experimental (Seção 2.5.1.1)	$53{,}167$	$6{,}09$	$339{,}9$
Análise Inversa (FitFG)	$51{,}847$	$5{,}91$	$310{,}5$
Diferença Percentual	$2{,}48\ \%$	$2{,}96\ \%$	$8{,}65\ \%$

O comportamento do modelo numérico ajustado de acordo com a taxa de carregamento é apresentado na Figura 6-15. Ao se comparar as curvas numéricas, observa-se que não ocorre variação na rigidez inicial, o que é esperado para esse concreto em taxas baixas de carregamento. Ocorre um pequeno aumento do pico com o aumento da taxa de carregamento.

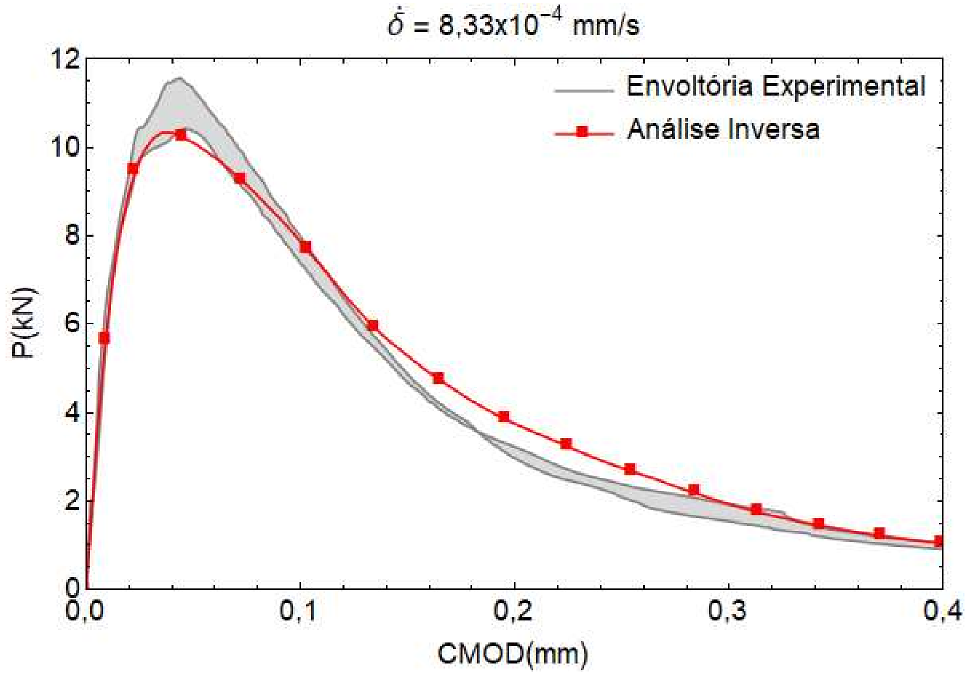


Figura 6-12: Comparação da envoltória experimental do CUAR com a análise inversa para a taxa de carregamento de $\dot{\delta} = 8{,}33 \times 10^{-4}\ mm/s$. *Fonte: Autor.*

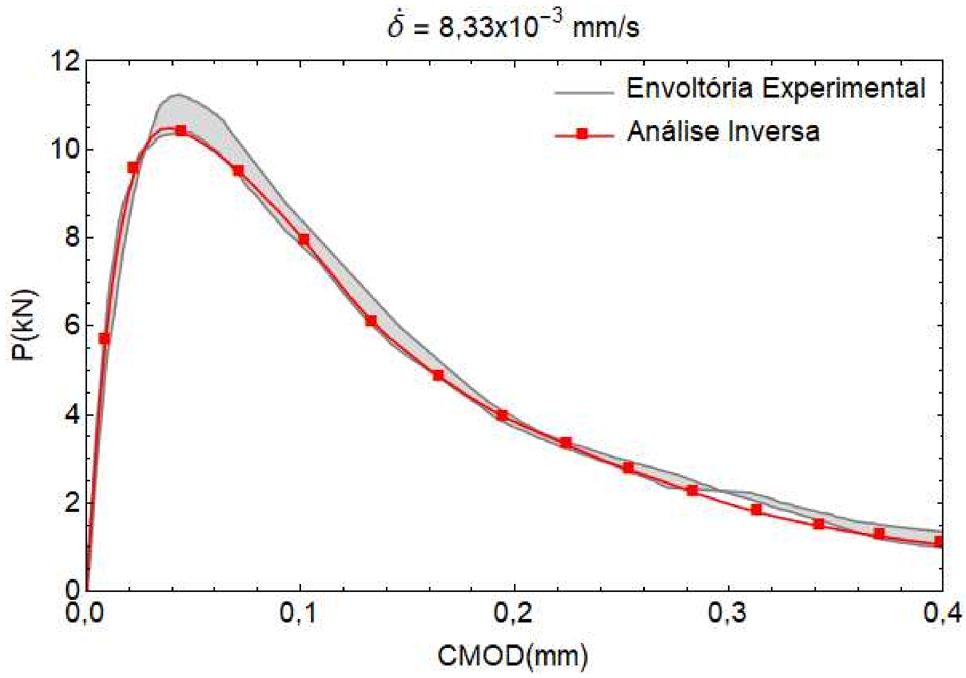


Figura 6-13: Comparação da envoltória experimental do CUAR com a análise inversa para a taxa de carregamento de $\dot{\delta} = 8{,}33 \times 10^{-3}\ mm/s$. *Fonte: Autor.*

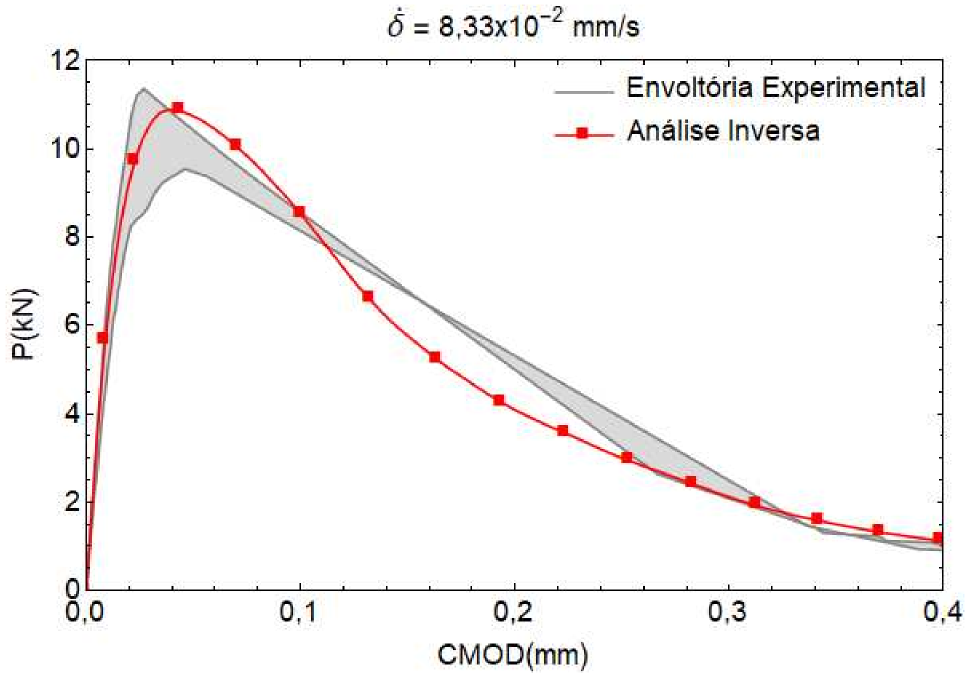


Figura 6-14: Comparação da envoltória experimental do CUAR com a análise inversa para a taxa de carregamento de $\dot{\delta} = 8{,}33 \times 10^{-2}\ mm/s$. Fonte: Autor.

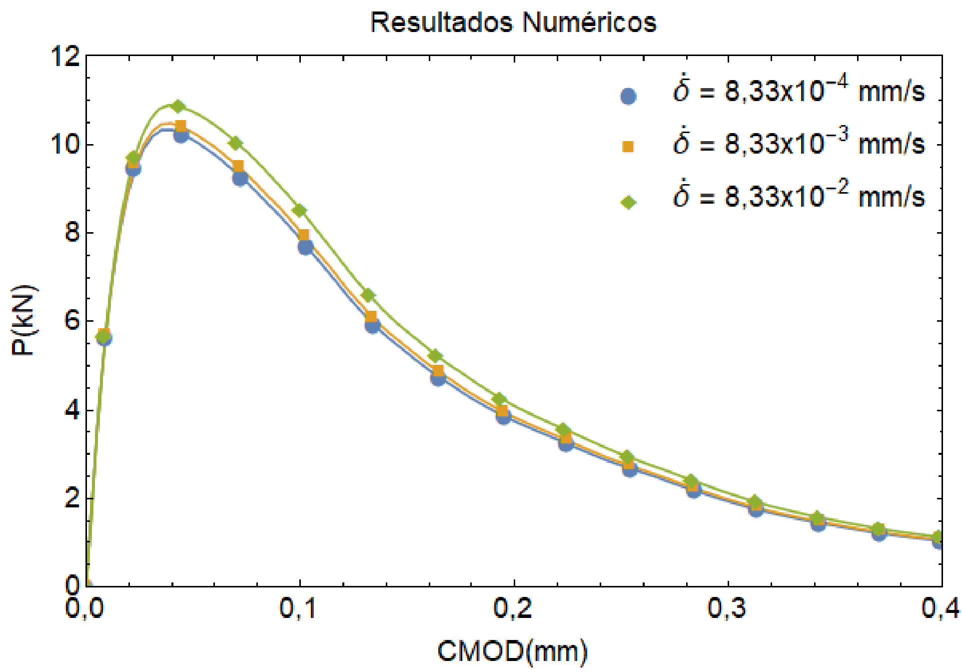


Figura 6-15: Comportamento do modelo numérico ajustado pela análise inversa. Fonte: Autor.

O comportamento da curva visco-coesiva ajusta para o CUAR é ilustrado na Figura 6-16. Observa-se que com o aumento da taxa de carregamento ocorre o aumento da resistência à tração e da energia aparente de fratura. Não ocorre nenhuma variação em relação a abertura crítica.

Com base no comparativo dos valores de E, f_t e G_f experimentais e numéricos e no comparativo gráfico das curvas $P - CMOD$ experimentais e numéricas, considera-se que a adoção do modelo visco-coesivo é adequada para a simulação da propagação de fratura no CUAR.

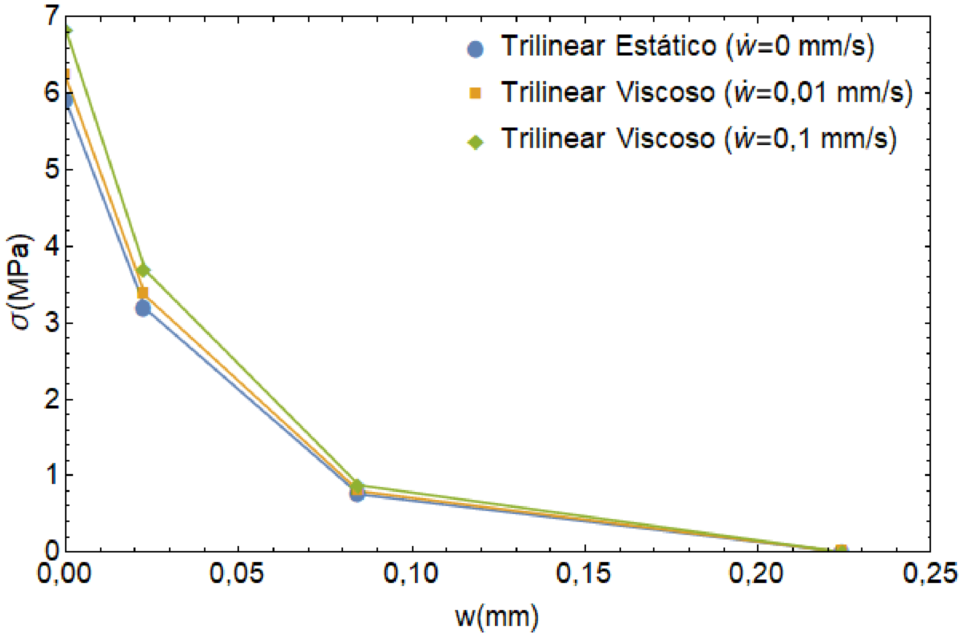


Figura 6-16: Comportamento da curva visco-coesiva ajustada para o CAR. Fonte: Autor.

6.2.4 Discussão sobre os resultados do Grupo Principal

Após a análise dos resultados dos três tipos, pode-se concluir que o modelo foi adequado na representação do comportamento do concreto na propagação da fratura em baixas taxas de carregamento.

É importante salientar a similaridades dos parâmetros E, f_t e G_f obtidos por ensaios e cálculos recomendados por norma com os obtidos pelo procedimento de análise inversa. Essa similaridade demonstra que o resultado obtido pela análise inversa não foi apenas um ajuste matemático de curvas, mas que possui alguma relação física.

As curvas $P - \delta$ e $P - CMOD$ obtidas pela análise inversa não passam perfeitamente pela média da envoltória experimental, e algumas vezes, saem da envoltória. Isso é aceitável uma vez que, mesmo escolhendo os três ensaios mais próximos por taxa de carregamento (para evitar envoltórias muito dispersas), não se é possível mensurar a variabilidade dos corpos-de-prova entre as taxas de carregamento. As curvas numéricas muito próximas das envoltórias experimentais já são satisfatórias uma vez que aproxima muito bem taxas distintas com uma simplificação da propagação da fratura e dos efeitos viscosos.

No CC e CAR observou-se o aumento da rigidez elástica e o comportamento completo do modelo visco-coesivo (aumento da resistência à tração e redução da abertura crítica, aproximando o material de um comportamento frágil). O CUAR não apresentou aumento da rigidez elástica.

6.3 Grupo Secundário: Concretos Reforçados com Fibra

6.3.1 Concreto Reforçado com Fibra de Polipropileno (CRFP35) de Stephen, Gettu e Raphael (2016)

No trabalho de Stephen, Gettu e Raphael (2016) não são apresentadas informações referentes aos valores de E, f_t e G_f provenientes de ensaios experimentais. Para esse conjunto de dados não são comparados os valores de E, f_t e G_f obtidos experimentalmente com os valores obtidos pela análise inversa.

Pela análise inversa são obtidos os seguintes valores:

- Parâmetros visco-elásticos: $E_0 = 32{,}154\ GPa$, $\dot{\varepsilon}_0 = 9{,}756 \times 10^{-4}\ s^{-1}$, $n_E = 0{,}276$.
- Curva coesiva (Trilinear, Seção 2.5): $f_t = 2{,}0\ MPa$, $G_f = 2142{,}9\ J/m^2$, $a_1 = 19{,}99\ MPa/mm$, $a_2 = 5{,}139\ MPa/mm$, $a_3 = 0{,}0358\ MPa/mm$, $b_2 = 0{,}530$, $b_3 = 0{,}190$.
- Modelo Viscoso: $\dot{w}_0 = 5{,}956 \times 10^{-3}\ mm/s$, $n = 0{,}182$, $\dot{w}_w = 0{,}0151\ mm/s$, $n_w = 0{,}398$.

Os comparativos dos ensaios experimentais fornecidos com as curvas numéricas ajustadas são apresentados da Figura 6-17 até a Figura 6-24. No comparativo foi adicionada uma envoltória baseada no desvio padrão da resistência a flexão residual calculada por Stephen, Gettu e Raphael (2016). Observa-se uma boa representatividade da rigidez inicial e do pico da curva para as quatro taxas de carregamento. No pós-pico, durante a tração das fibras, observa-se que, para a taxa de carregamento de $10^{-2}\ mm/s$, o modelo numérico ficou acima do experimental, porém dentro do desvio padrão.

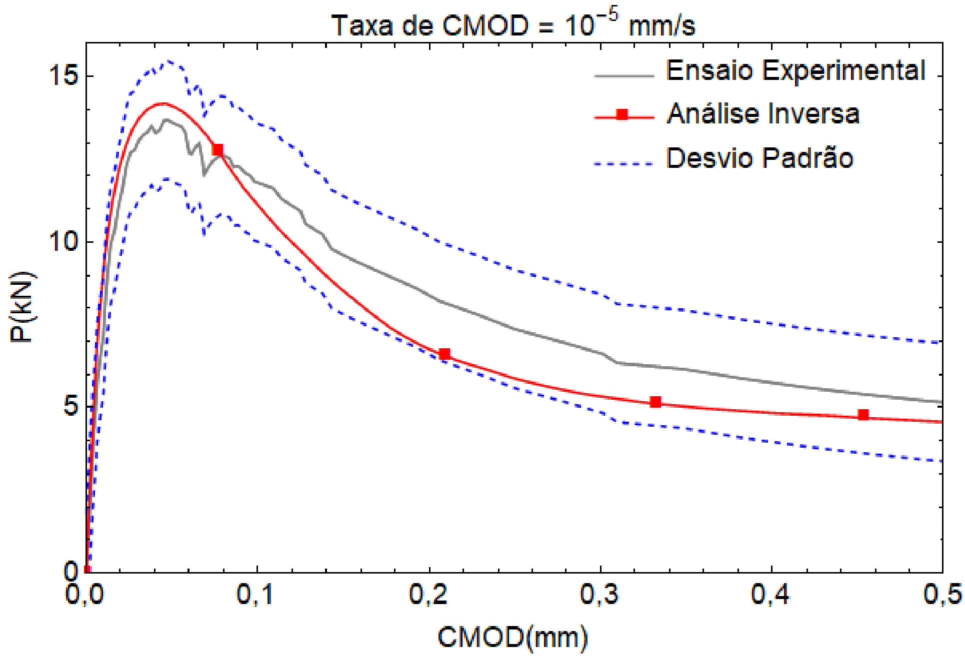


Figura 6-17: Comparação até CMOD de $0{,}5\ mm$ do ensaio experimental do CRFP35 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-5}\ mm/s$. Fonte: Autor.

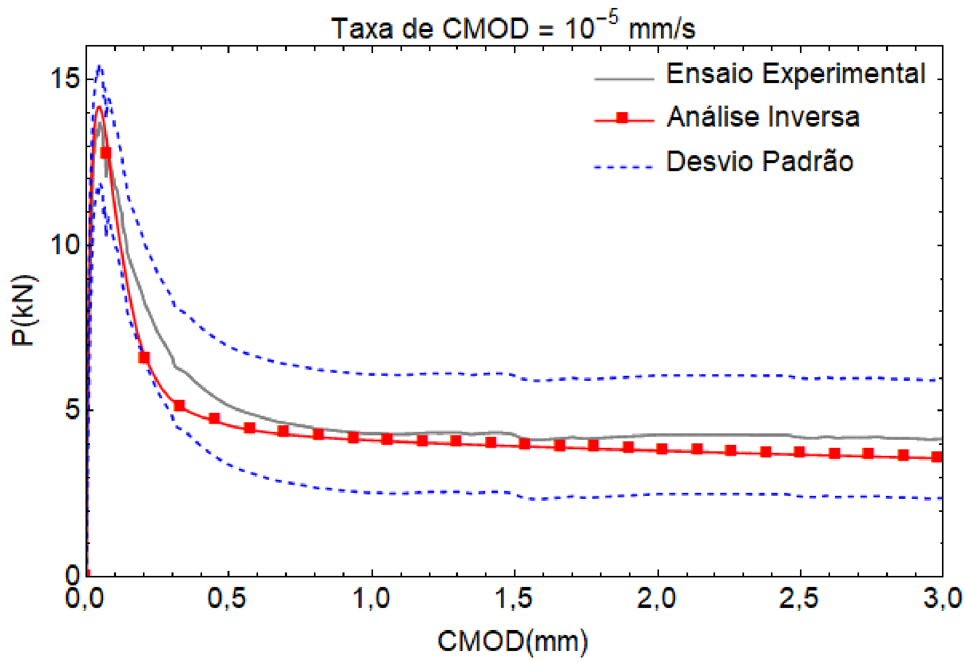


Figura 6-18: Comparação até CMOD de $3\ mm$ do ensaio experimental do CRFP35 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-5}\ mm/s$. Fonte: Autor.

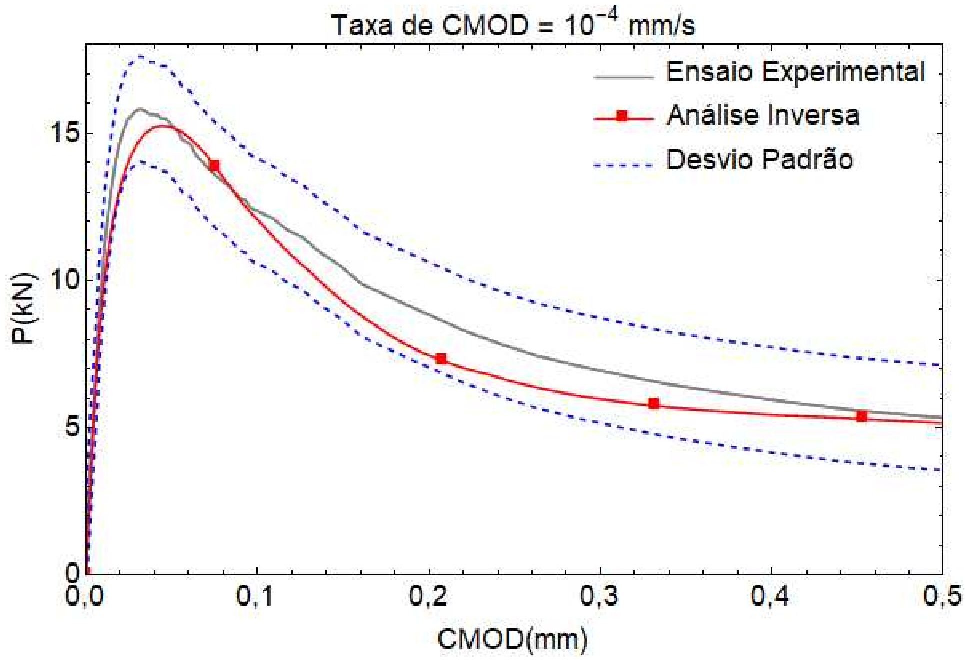


Figura 6-19: Comparação até CMOD de $0{,}5\ mm$ do ensaio experimental do CRFP35 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-4}\ mm/s$. Fonte: Autor.

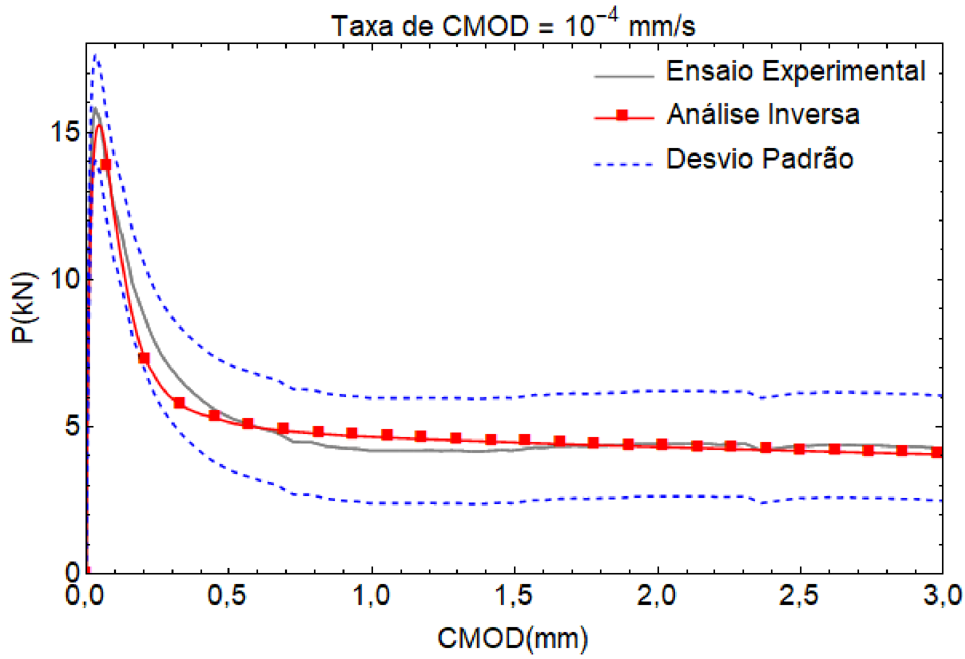


Figura 6-20: Comparação até CMOD de $3\ mm$ do ensaio experimental do CRFP35 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-4}\ mm/s$. Fonte: Autor.

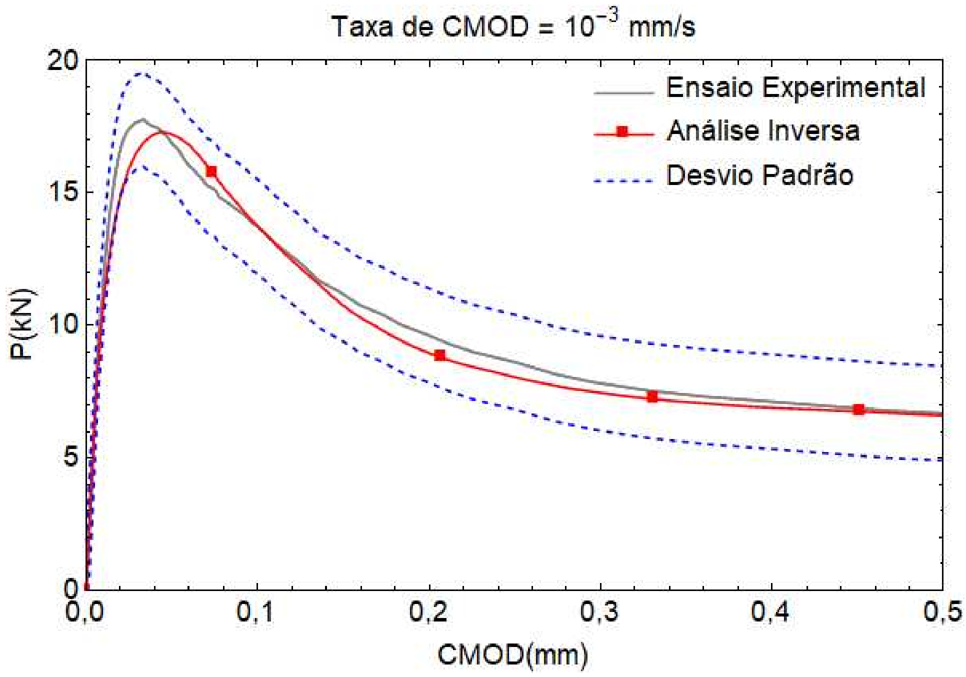


Figura 6-21: Comparação até CMOD de $0{,}5\ mm$ do ensaio experimental do CRFP35 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-3}\ mm/s$. Fonte: Autor.

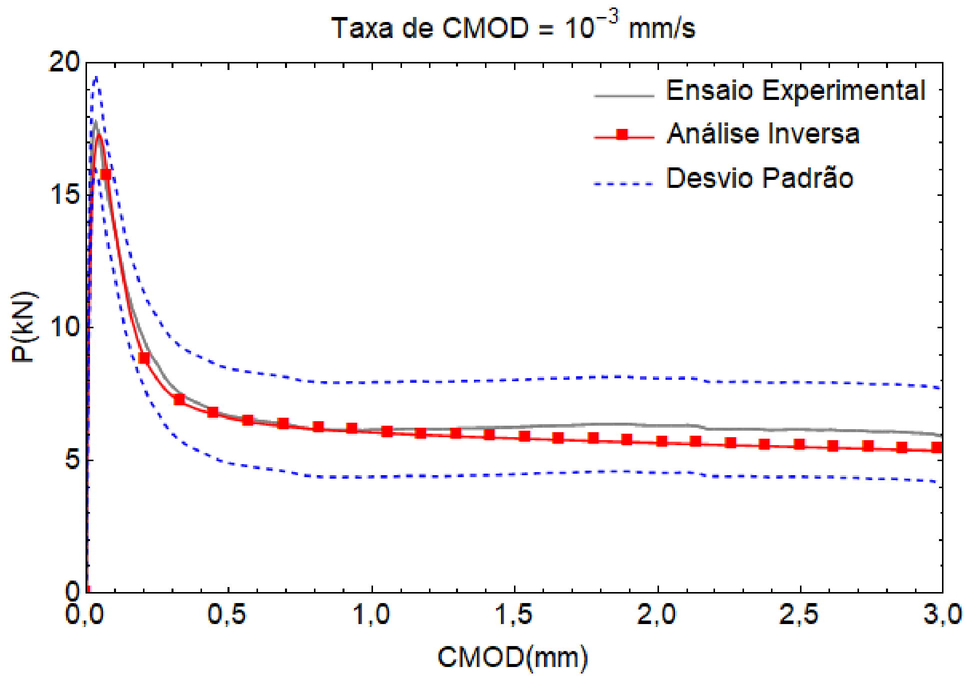


Figura 6-22: Comparação até CMOD de $3\ mm$ do ensaio experimental do CRFP35 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-3}\ mm/s$. Fonte: Autor.

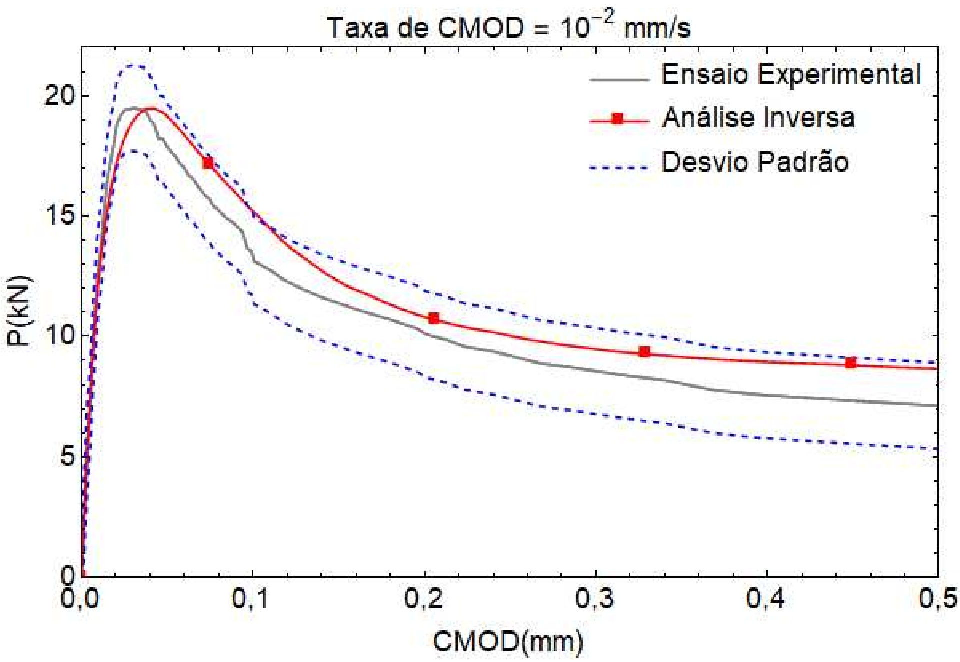


Figura 6-23: Comparação até CMOD de $0{,}5\ mm$ do ensaio experimental do CRFP35 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-2}\ mm/s$. Fonte: Autor.

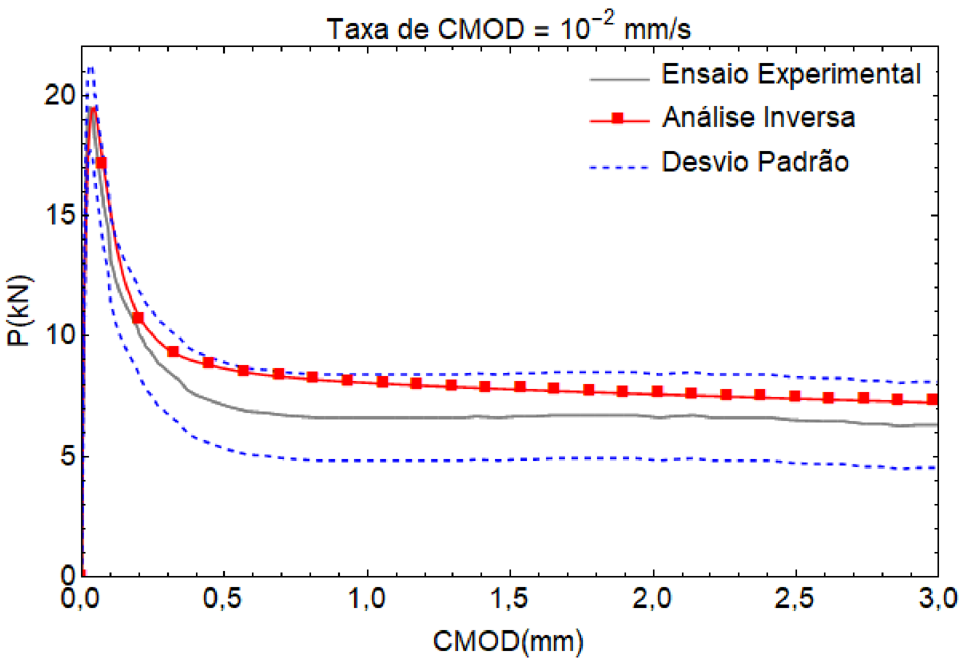


Figura 6-24: Comparação até CMOD de $3\ mm$ do ensaio experimental do CRFP35 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-2}\ mm/s$. Fonte: Autor.

O comportamento do modelo numérico nas diferentes taxas de carregamento é ilustrado na Figura 6-25 e na Figura 6-26. Observa-se um pequeno aumento na rigidez inicial, o aumento do pico de força do atuador e o aumento na resistência pós-pico.

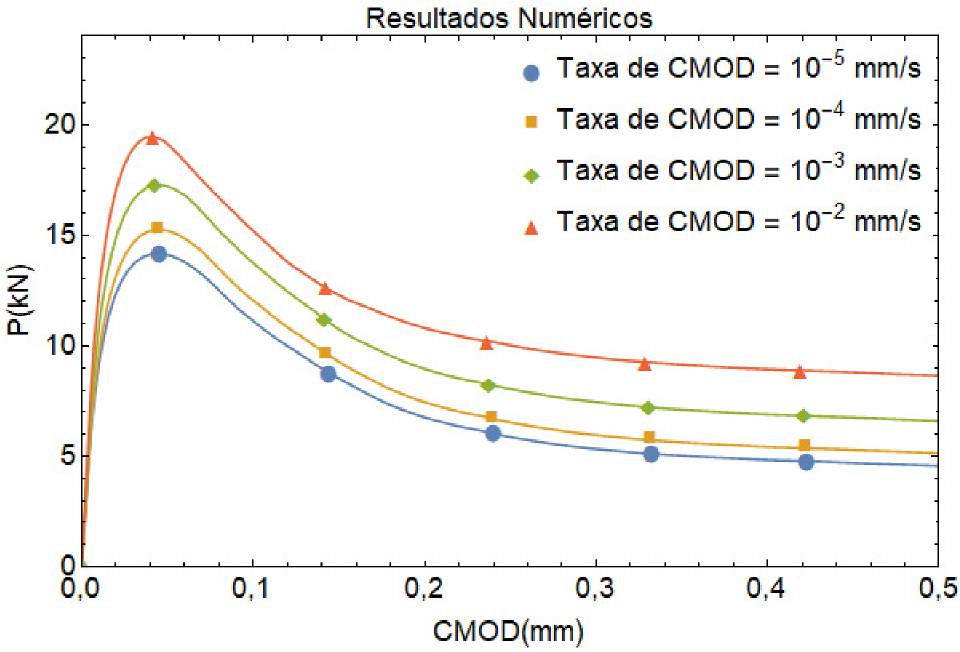


Figura 6-25: Comportamento do modelo numérico ajustado pela análise inversa até CMOD de 0,5 mm. Fonte: Autor.

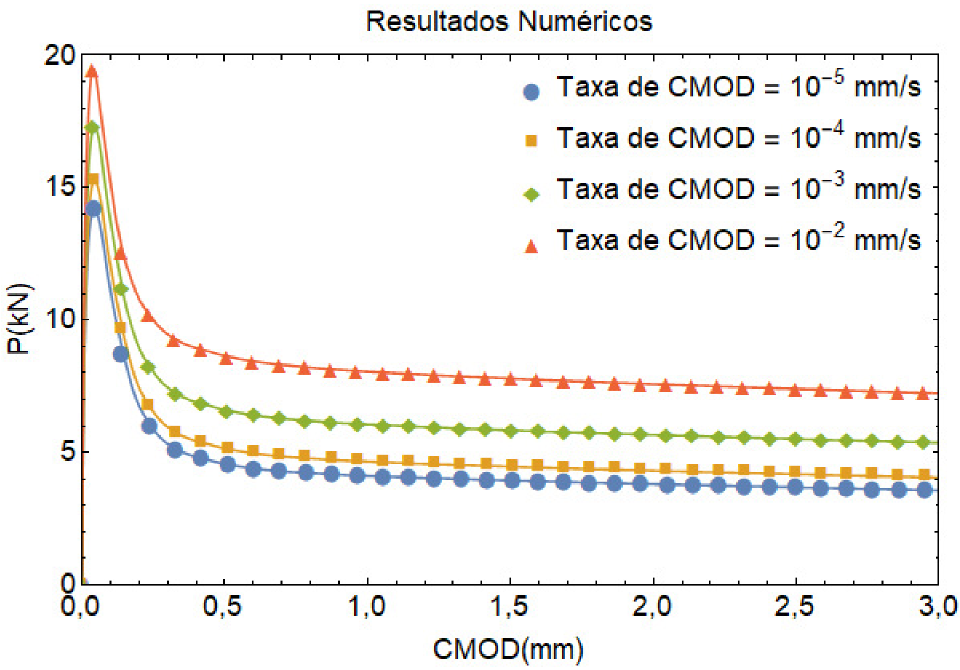


Figura 6-26: Comportamento do modelo numérico ajustado pela análise inversa até CMOD de 3 mm. Fonte: Autor.

O comportamento da curva visco-coesiva ajusta para o CRFP35 é apresentado na Figura 6-27 e na Figura 6-28. Observa-se que com o aumento da taxa de carregamento ocorre o aumento da resistência à tração e uma redução da abertura crítica.

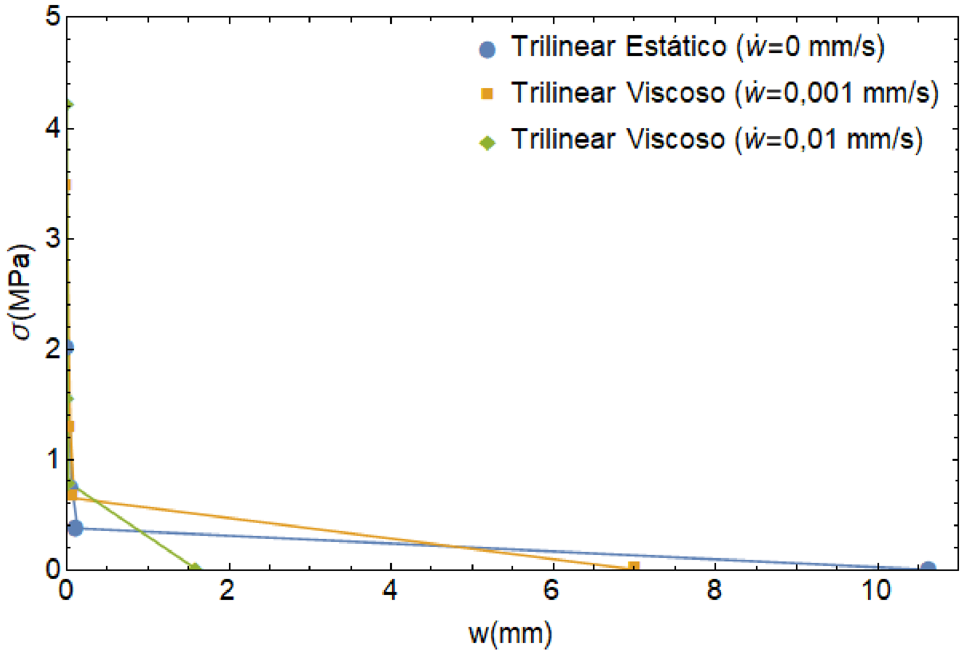


Figura 6-27: Comportamento da curva visco-coesiva ajustada para o CRFP35 de Stephen, Gettu e Raphael (2016). Fonte: Autor.

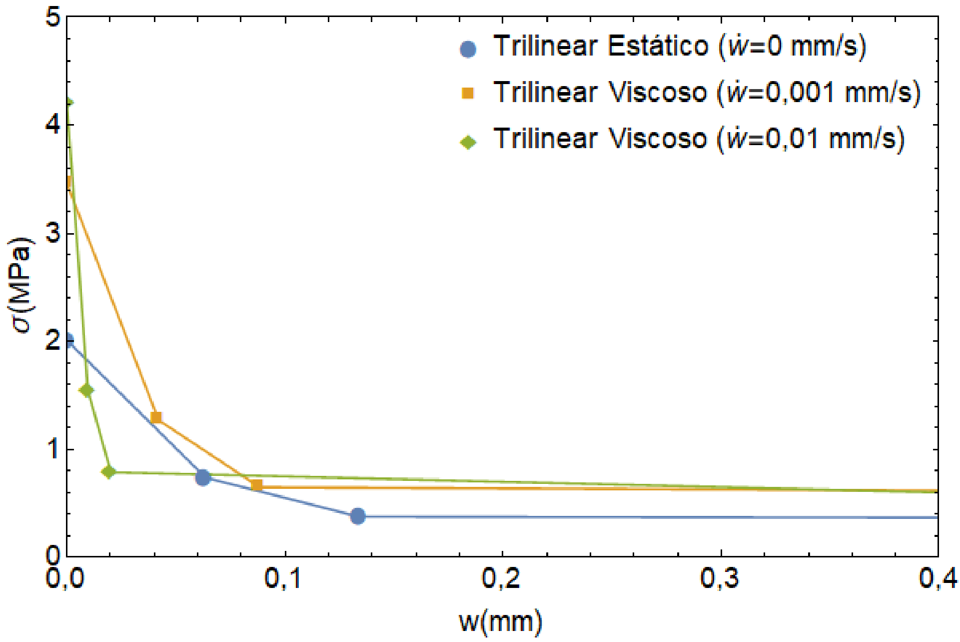


Figura 6-28: Comportamento da curva visco-coesiva ajustada para o CRFP35 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) até w de 0,4 mm. Fonte: Autor.

Observando-se o comparativo gráfico das curvas $P - CMOD$ experimentais e numéricas, considera-se que a adoção do modelo visco-coesivo é adequada para esse CRFP.

6.3.2 Concreto Reforçado com Fibra de Polipropileno (CRFP40) de Stephen e Gettu (2019)

No trabalho de Stephen, Gettu e Raphael (2016) não são apresentadas informações referentes aos valores de E, f_t e G_f provenientes de ensaios experimentais. Para esse conjunto de dados não são comparados os valores de E, f_t e G_f obtidos experimentalmente com os valores obtidos pela análise inversa.

Pela análise inversa são obtidos os seguintes valores:

- Parâmetros visco-elásticos: $E_0 = 39{,}006\ GPa$, $\dot{\varepsilon}_0 = 5{,}978 \times 10^{-2}\ s^{-1}$, $n_E = 0{,}238$.
- Curva coesiva (Trilinear, Seção 2.5): $f_t = 2{,}483\ MPa$, $G_f = 7996{,}8\ J/m^2$, $a_1 = 35{,}79\ MPa/mm$, $a_2 = 5{,}00\ MPa/mm$, $a_3 = 0{,}0135\ MPa/mm$, $b_2 = 0{,}551$, $b_3 = 0{,}186$.
- Modelo Viscoso: $\dot{w}_0 = 1{,}571 \times 10^{-3}\ mm/s$, $n = 0{,}291$, $\dot{w}_w = 0{,}0272\ mm/s$, $n_w = 0{,}171$.

Os comparativos dos ensaios experimentais fornecidos com as curvas numéricas ajustadas são apresentados na Figura 6-29 até a Figura 6-36. No comparativo foi adicionada uma envoltória baseada no desvio padrão da resistência a flexão residual calculado por Stephen e Gettu (2019). Observa-se uma boa representatividade da rigidez inicial e do pico da curva para as quatro taxas de carregamento. No pós-pico, durante a tração das fibras, observa-se que, para a taxa de carregamento de $10^{-2}\ mm/s$, o modelo numérico ficou acima do experimental, porém dentro do desvio padrão.

O comportamento do modelo numérico nas diferentes taxas de carregamento é ilustrado na Figura 6-37 e na Figura 6-38. Observa-se um pequeno aumento na rigidez inicial, o aumento do pico e o aumento na resistência pós-pico.

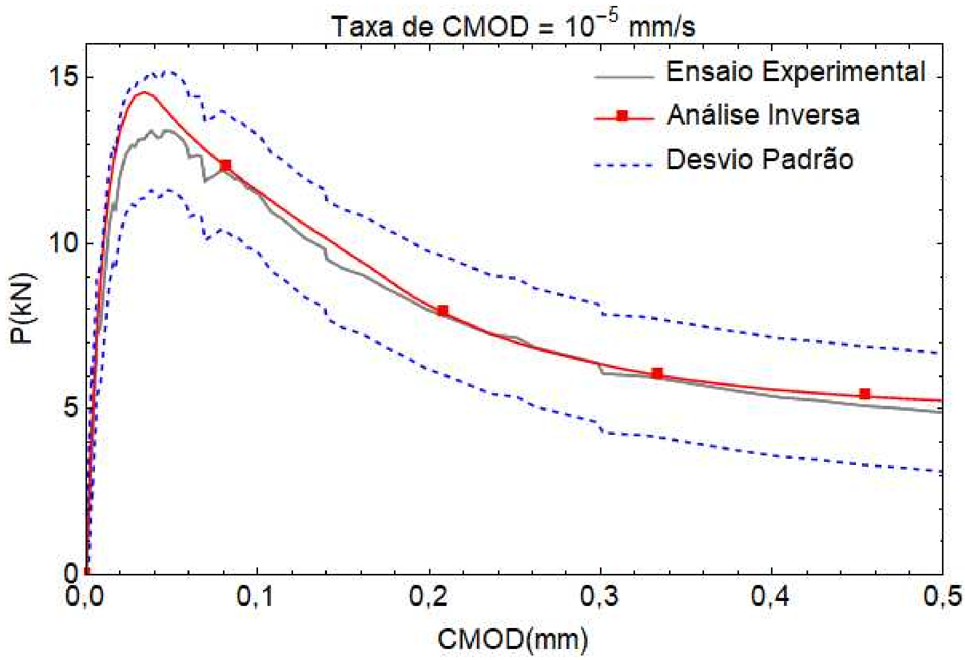


Figura 6-29: Comparação até CMOD de $0{,}5\ mm$ do ensaio experimental do CRFP40 de Stephen e Gettu (2019) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-5}\ mm/s$. Fonte: Autor.

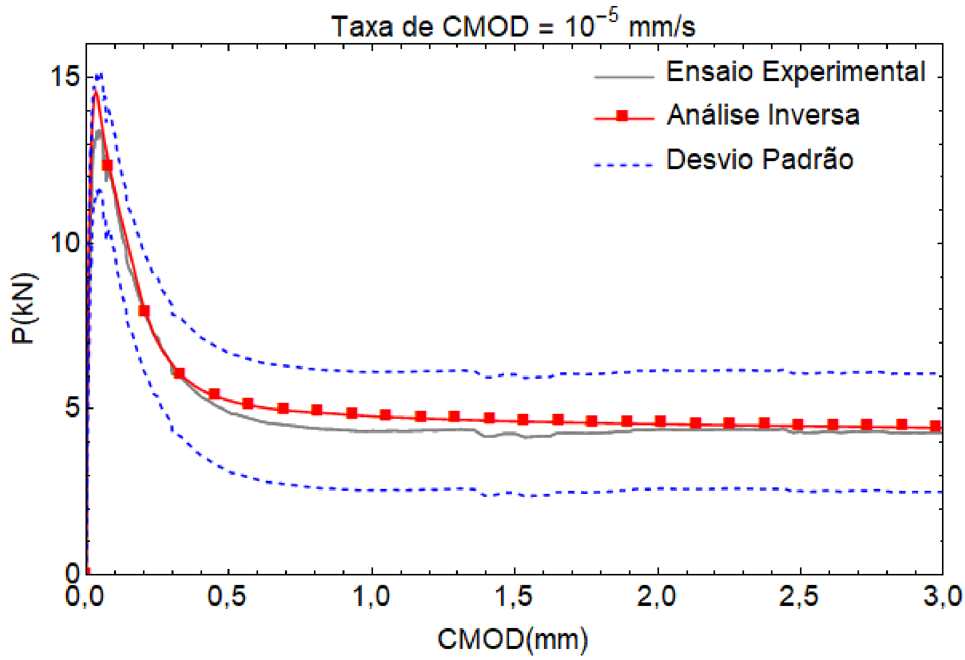


Figura 6-30: Comparação até CMOD de $3\ mm$ do ensaio experimental do CRFP40 de Stephen e Gettu (2019) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-5}\ mm/s$. Fonte: Autor.

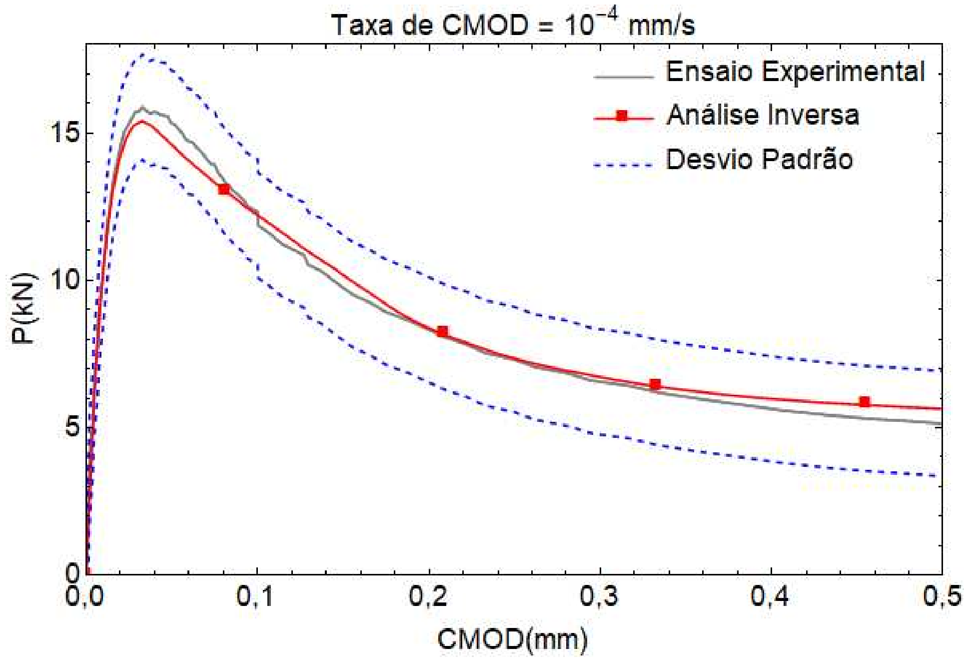


Figura 6-31: Comparação até CMOD de $0{,}5\ mm$ *do ensaio experimental do CRFP40 de Stephen e Gettu (2019) com a análise inversa para a taxa de CMOD de* $10^{-4}\ mm/s$*. Fonte: Autor.*

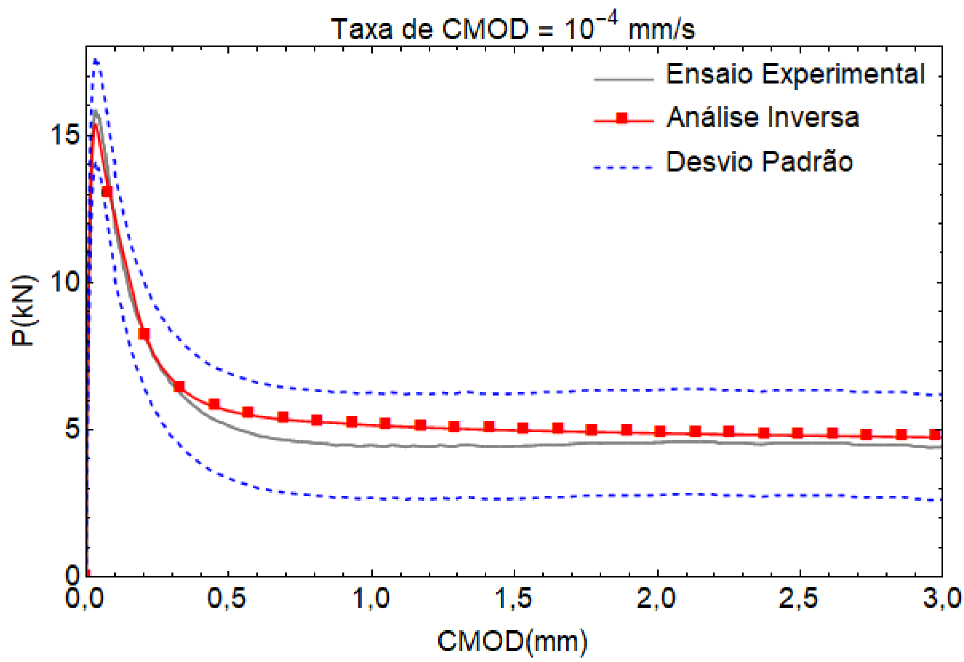


Figura 6-32: Comparação até CMOD de $3\ mm$ *do ensaio experimental do CRFP40 de Stephen e Gettu (2019) com a análise inversa para a taxa de CMOD de* $10^{-4}\ mm/s$*. Fonte: Autor.*

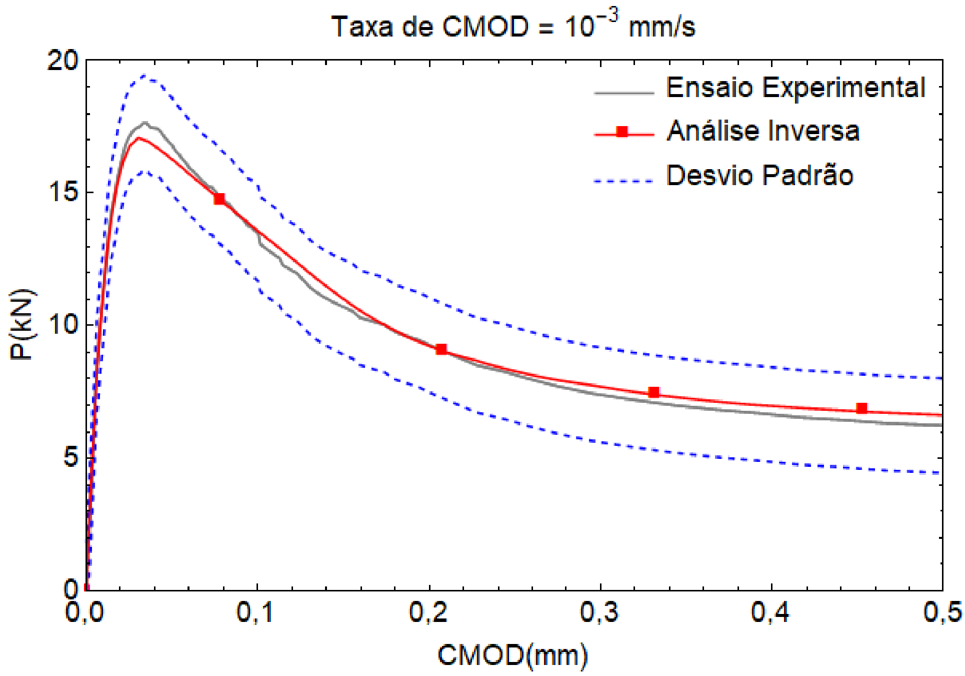


Figura 6-33: Comparação até CMOD de $0{,}5\ mm$ do ensaio experimental do CRFP40 de Stephen e Gettu (2019) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-3}\ mm/s$. Fonte: Autor.

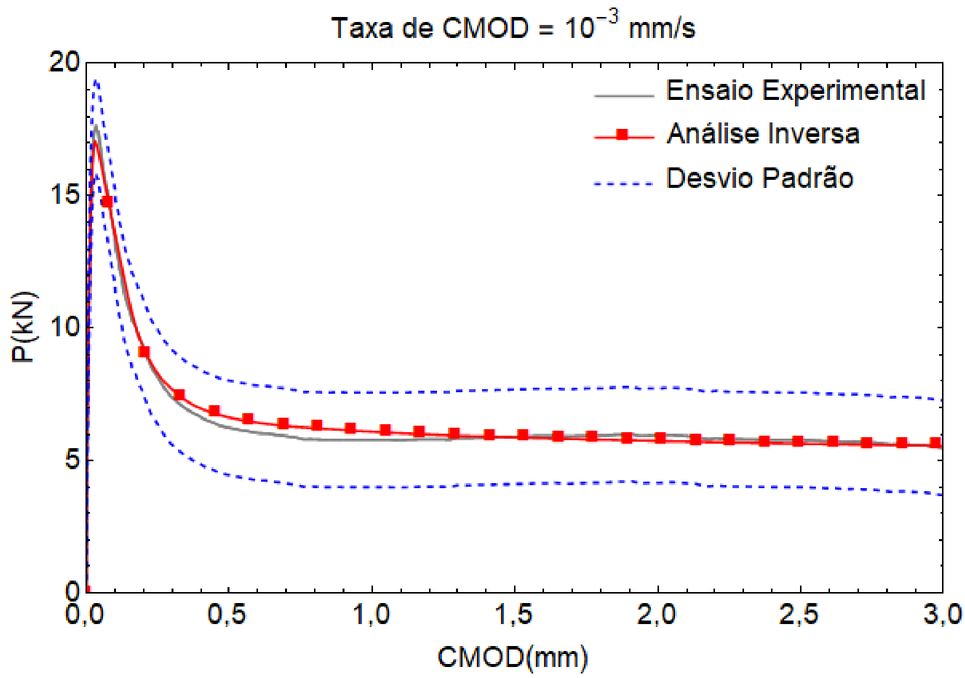


Figura 6-34: Comparação até CMOD de $3\ mm$ do ensaio experimental do CRFP40 de Stephen e Gettu (2019) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-3}\ mm/s$. Fonte: Autor.

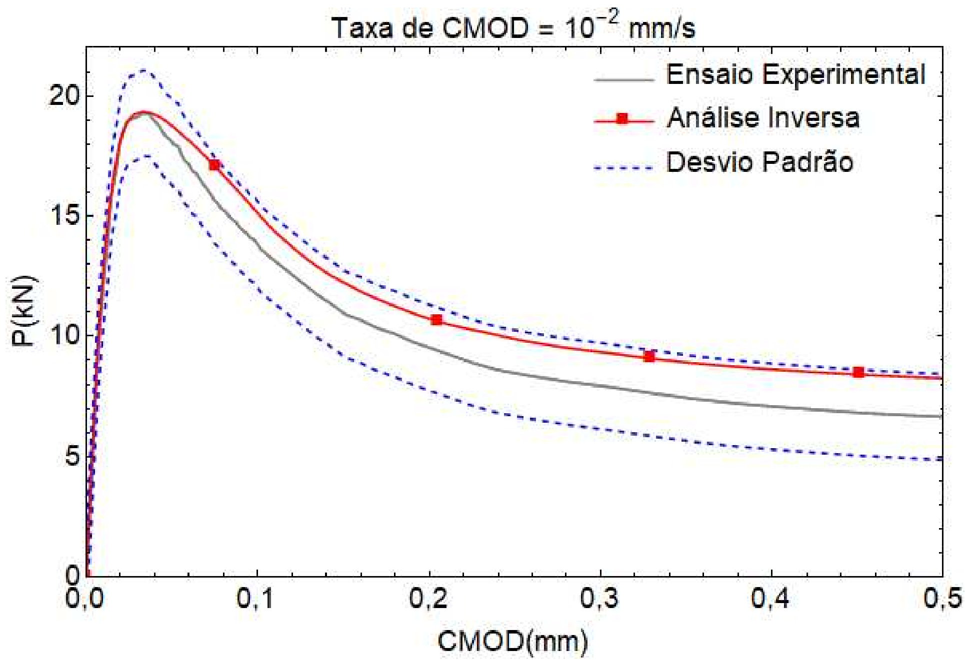


Figura 6-35: Comparação até CMOD de $0{,}5\ mm$ do ensaio experimental do CRFP40 de Stephen e Gettu (2019) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-2}\ mm/s$. Fonte: Autor.

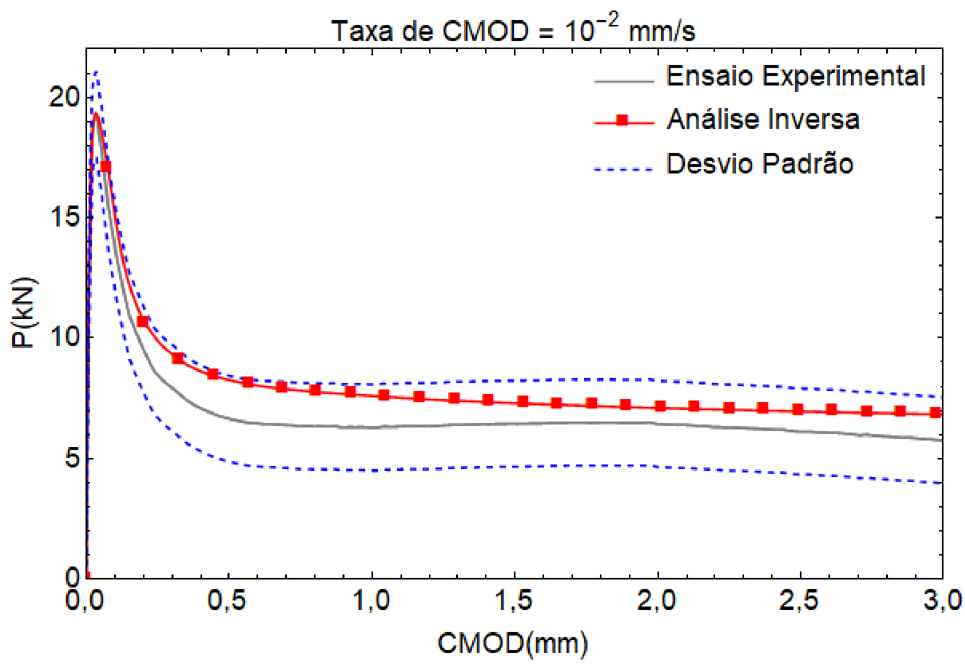


Figura 6-36: Comparação até CMOD de $3\ mm$ do ensaio experimental do CRFP40 de Stephen e Gettu (2019) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-2}\ mm/s$. Fonte: Autor.

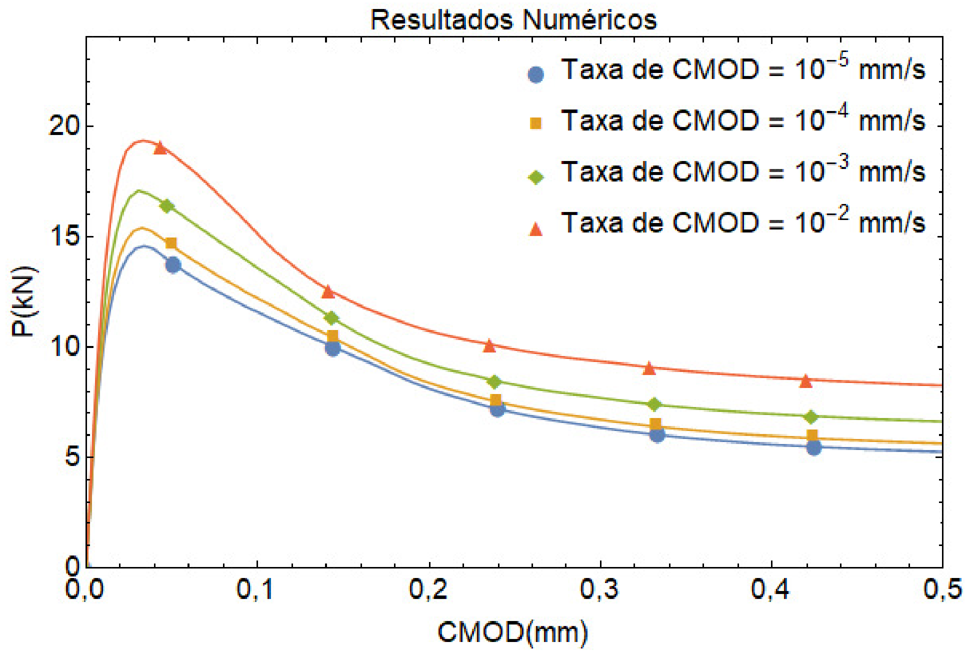


Figura 6-37: Comportamento do modelo numérico ajustado pela análise inversa até CMOD de 0,5 mm. Fonte: Autor.

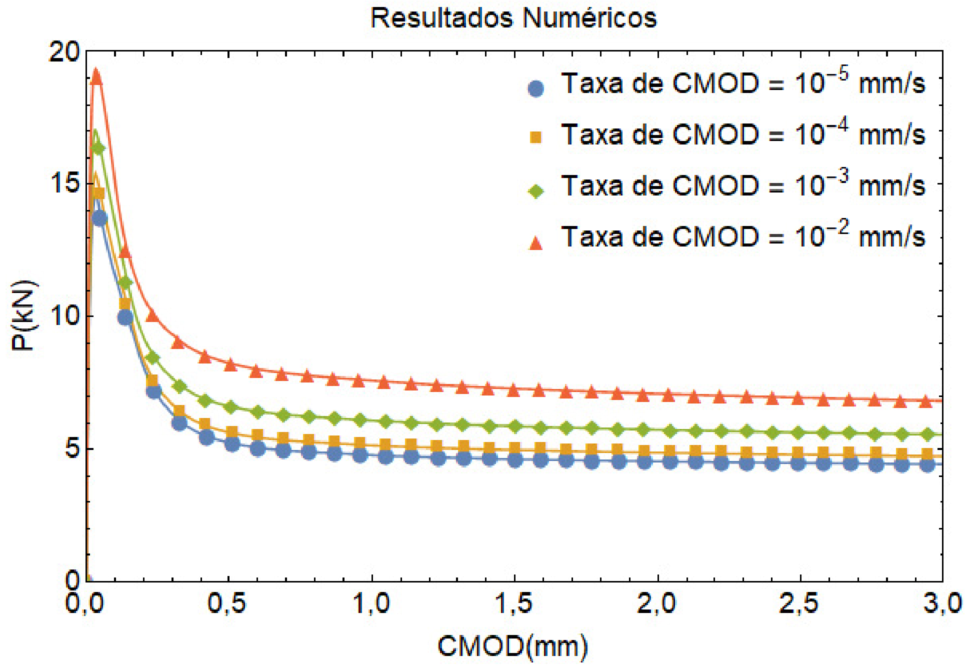


Figura 6-38: Comportamento do modelo numérico ajustado pela análise inversa até CMOD de 3 mm. Fonte: Autor.

O comportamento da curva visco-coesiva ajusta para o CRFP40 é apresentado na Figura 6-39 e Figura 6-40 . Observa-se que com o aumento da taxa de carregamento ocorre o aumento da resistência à tração e uma redução da abertura crítica.

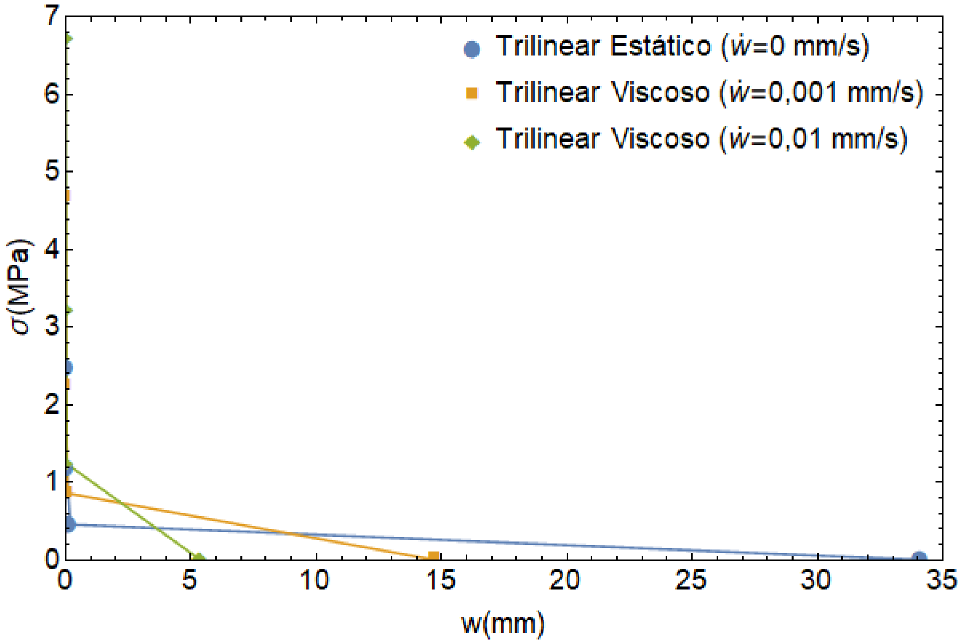


Figura 6-39: Comportamento da curva visco-coesiva ajustada para o CRFP40 de Stephen e Gettu (2019). Fonte: Autor.

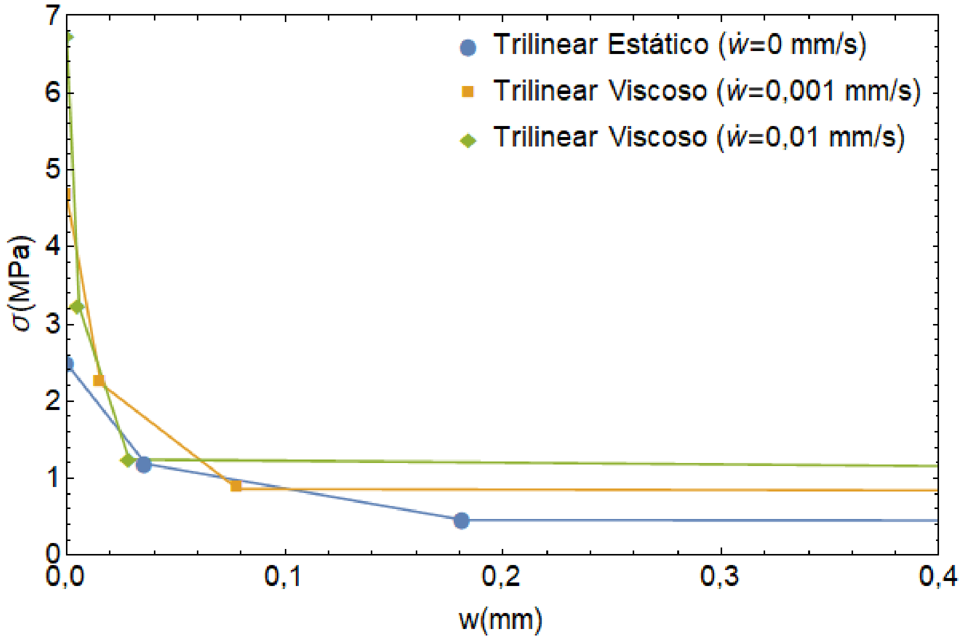


Figura 6-40: Comportamento da curva visco-coesiva ajustada para o CRFP40 de Stephen e Gettu (2019) até $w = 0{,}4\ mm$*. Fonte: Autor.*

Observando-se o comparativo gráfico das curvas $P - CMOD$ experimentais e numéricas, considera-se que a adoção do modelo visco-coesivo é adequada para esse CRFP.

6.3.3 Concreto Reforçado com Fibra de Aço (CRFA3530) de Stephen, Gettu e Raphael (2016)

No trabalho de Stephen, Gettu e Raphael (2016) não são apresentadas informações referentes aos valores de E, f_t e G_f provenientes de ensaios experimentais. Para esse conjunto de dados não são comparados os valores de E, f_t e G_f obtidos experimentalmente com os valores obtidos pela análise inversa.

Pela análise inversa são obtidos os seguintes valores:

- Parâmetros visco-elásticos: $E_0 = 30{,}846\ \ GPa$, $\dot{\varepsilon}_0 = 0{,}817\ s^{-1}$, $n_E = 0{,}118$.
- Curva coesiva (Trilinear, Seção 2.5): $f_t = 2{,}5\ MPa$, $G_f = 6638{,}8\ J/m^2$, $a_1 = 20{,}761\ MPa/mm$, $a_2 = -0{,}392\ MPa/mm$, $a_3 = 0{,}286\ MPa/mm$, $b_2 = 0{,}438$, $b_3 = 0{,}809$.
- Modelo Viscoso: $\dot{w}_0 = 0{,}286\ mm/s$, $n = 0{,}229$, $\dot{w}_w = 0{,}021\ mm/s$, $n_w = 1{,}530$.

Os comparativos dos ensaios experimentais fornecidos com as curvas numéricas ajustadas são apresentados da Figura 6-41 até a Figura 6-48. No comparativo do ensaio com as curvas numéricas, foi adicionado uma envoltória baseada no desvio padrão da resistência a flexão residual calculado por Stephen, Gettu e Raphael (2016). Observa-se uma boa representatividade da rigidez inicial e do pico da curva para as quatro taxas de carregamento. No pós-pico, durante a tração das fibras, observa-se algumas divergências do numérico com o experimental. A mudança do modo de falha das fibras nas diferentes taxas influência o resultado pós-pico. Para a taxa de $10^{-2}\ mm/s$ a falha é caracterizada pelo escorregamento da fibra com a interface do concreto, enquanto na taxa de $10^{-3}\ mm/s$ os autores descrevem que ocorre rompimento das fibras de aço. Na Figura 2-22 da Seção 2.6 é possível observar a diferença do segundo pico do ensaio na taxa de $10^{-3}\ mm/s$ em relação ao ensaio na taxa $10^{-2}\ mm/s$. O segundo pico na taxa de $10^{-3}\ mm/s$ atinge valores maiores de carga do que o segundo pico na taxa de $10^{-2}\ mm/s$. Essa descontinuidade no comportamento do segundo pico não é contemplada na formulação do modelo visco-coesivo proposto.

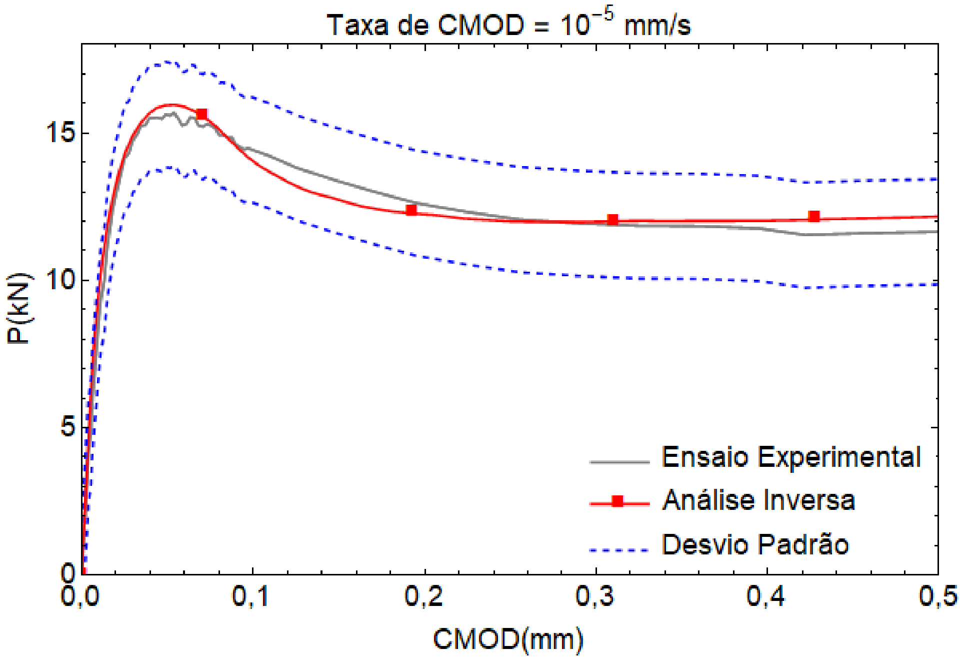


Figura 6-41: Comparação até CMOD de $0{,}5\ mm$ *do ensaio experimental do CRFA3530 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) com a análise inversa para a taxa de CMOD de* $10^{-5}\ mm/s$*. Fonte: Autor.*

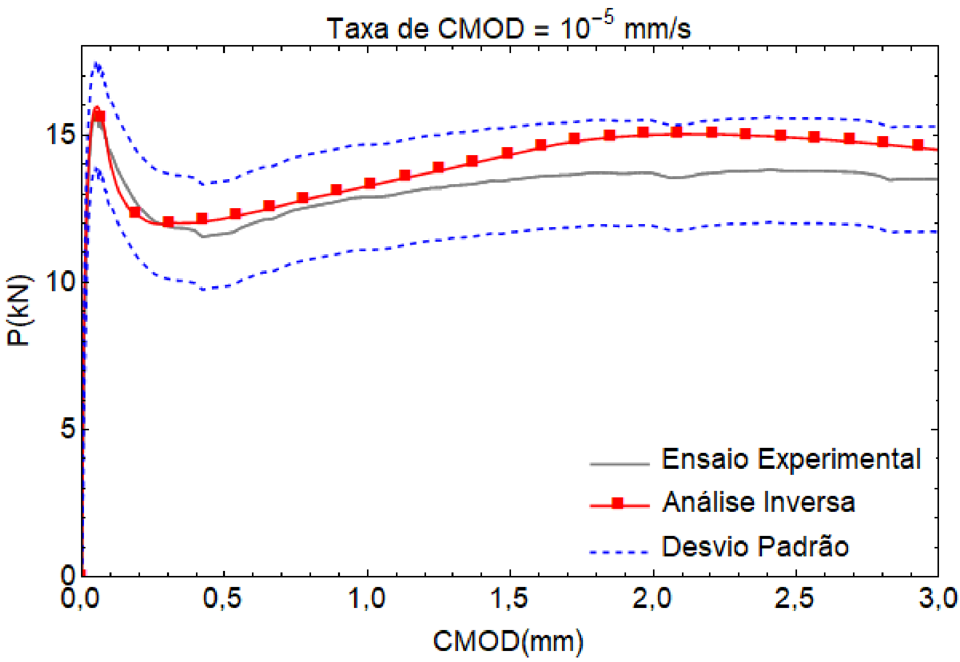


Figura 6-42: Comparação até CMOD de $3\ mm$ *do ensaio experimental do CRFA3530 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) com a análise inversa para a taxa de CMOD de* $10^{-5}\ mm/s$*. Fonte: Autor.*

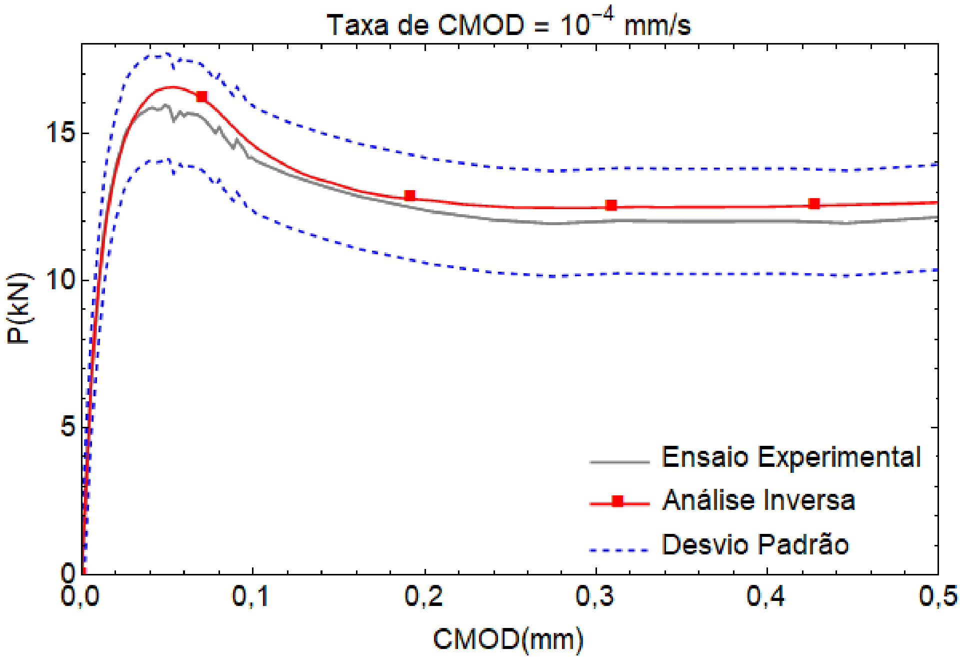


Figura 6-43: Comparação até CMOD de $0{,}5\ mm$ do ensaio experimental do CRFA3530 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-4}\ mm/s$. Fonte: Autor.

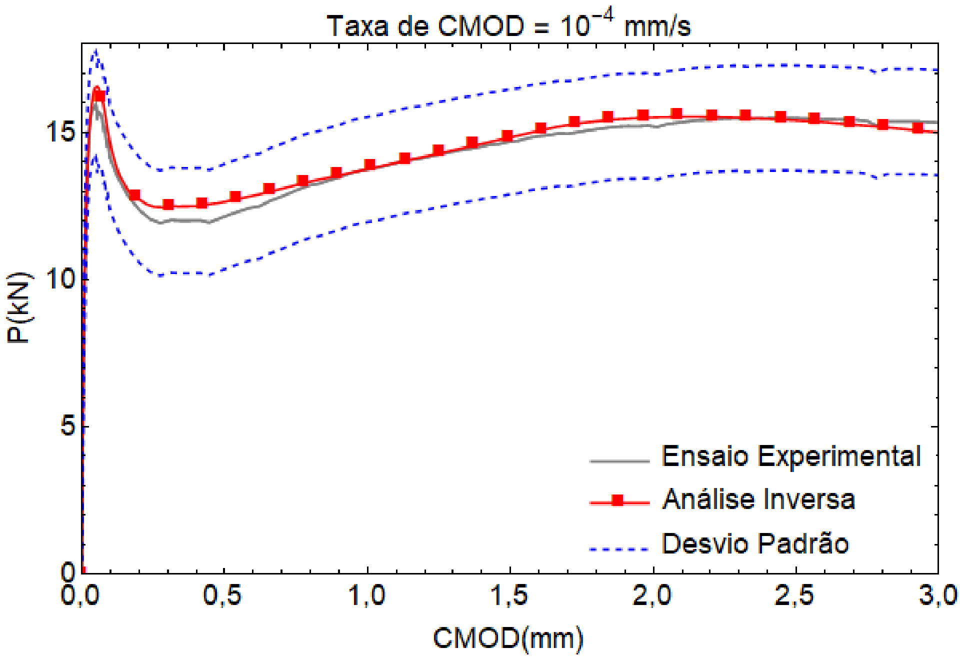


Figura 6-44: Comparação até CMOD de $3\ mm$ do ensaio experimental do CRFA3530 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-4}\ mm/s$. Fonte: Autor.

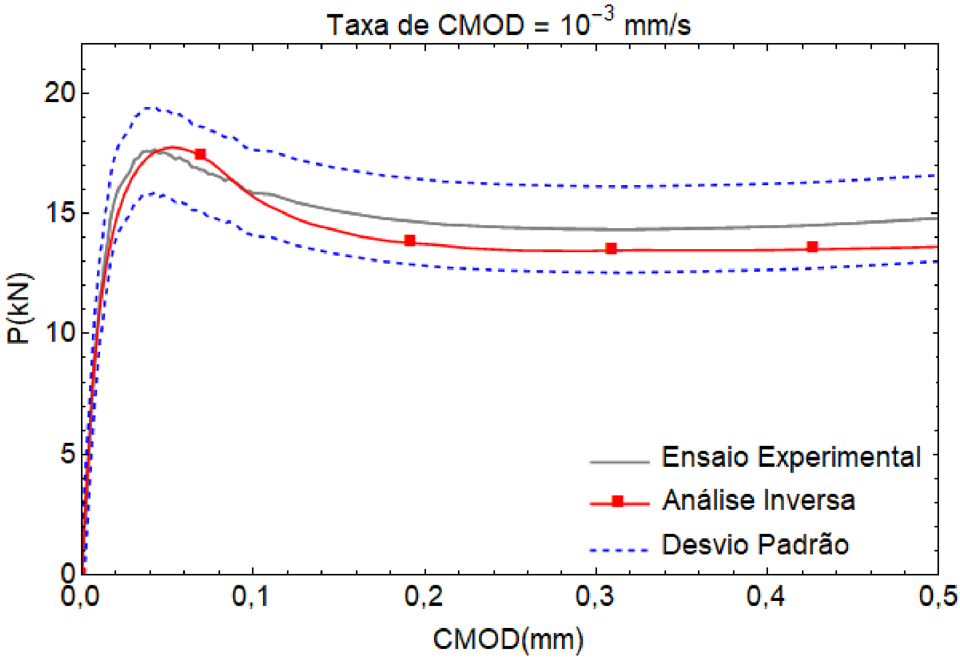


Figura 6-45: Comparação até CMOD de $0{,}5\ mm$ do ensaio experimental do CRFA3530 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-3}\ mm/s$. Fonte: Autor.

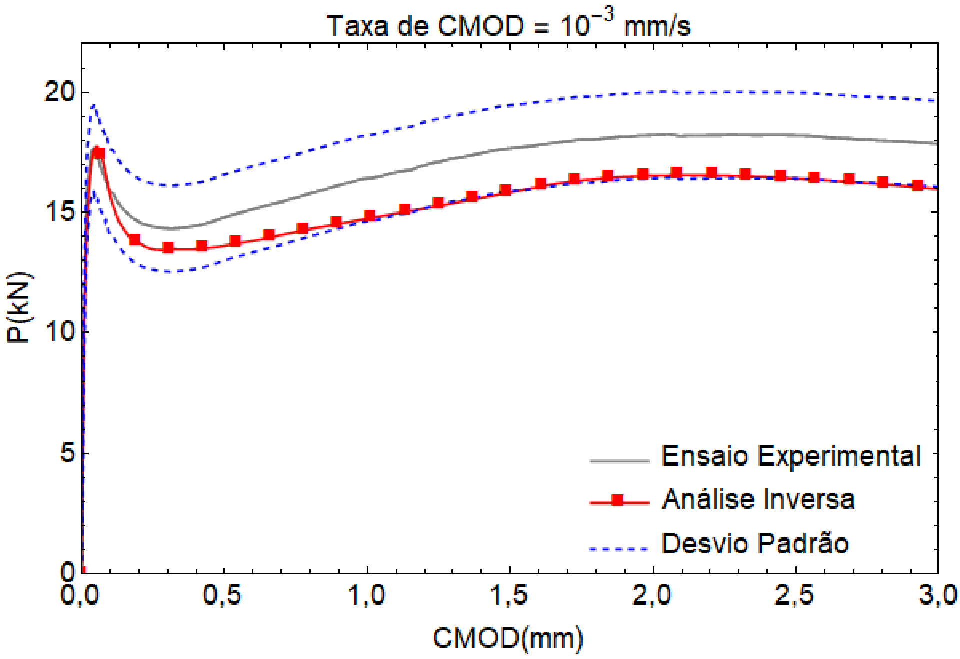


Figura 6-46: Comparação até CMOD de $3\ mm$ do ensaio experimental do CRFA3530 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-3}\ mm/s$. Fonte: Autor.

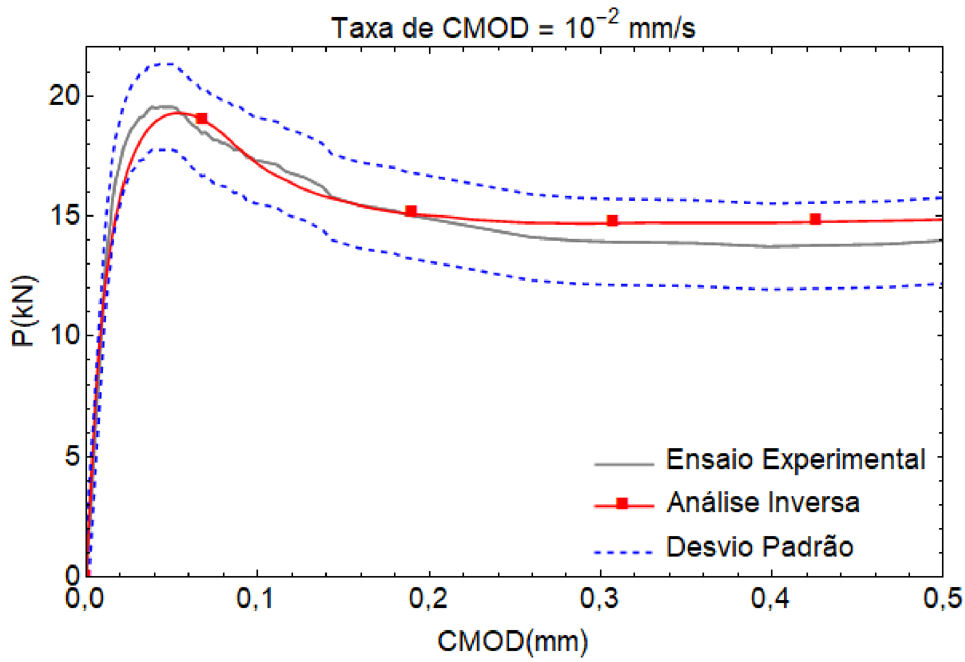


Figura 6-47: Comparação até CMOD de $0,5\ mm$ do ensaio experimental do CRFA3530 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-2}\ mm/s$. Fonte: Autor.

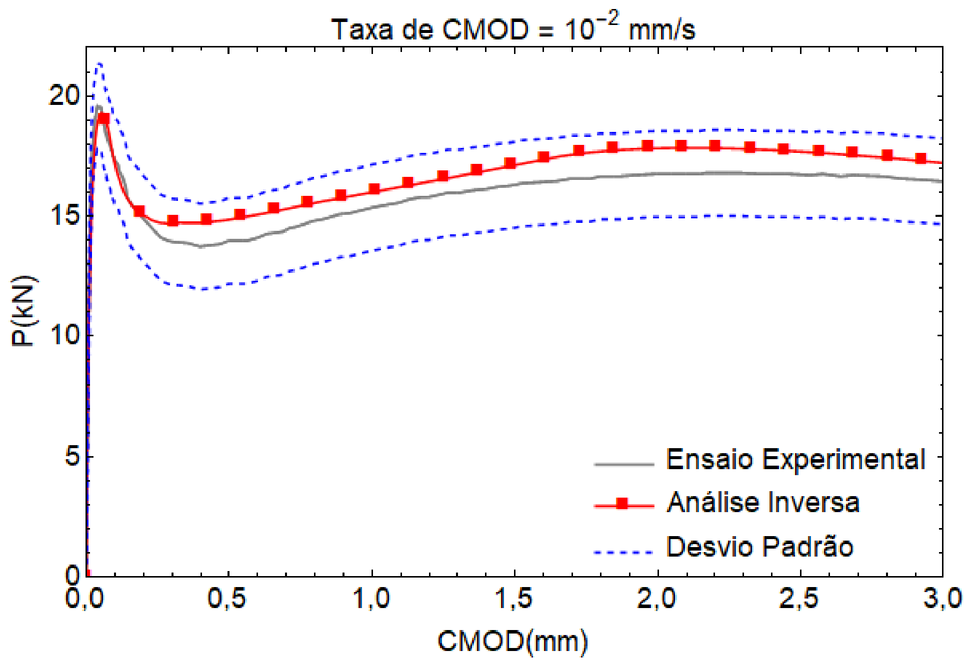


Figura 6-48: Comparação até CMOD de $3\ mm$ do ensaio experimental do CRFA3530 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-2}\ mm/s$. Fonte: Autor.

O comportamento do modelo numérico nas diferentes taxas de carregamento é ilustrado na Figura 6-49 e na Figura 6-50. Observa-se um pequeno aumento na rigidez inicial, o aumento do pico e o aumento na resistência pós-pico.

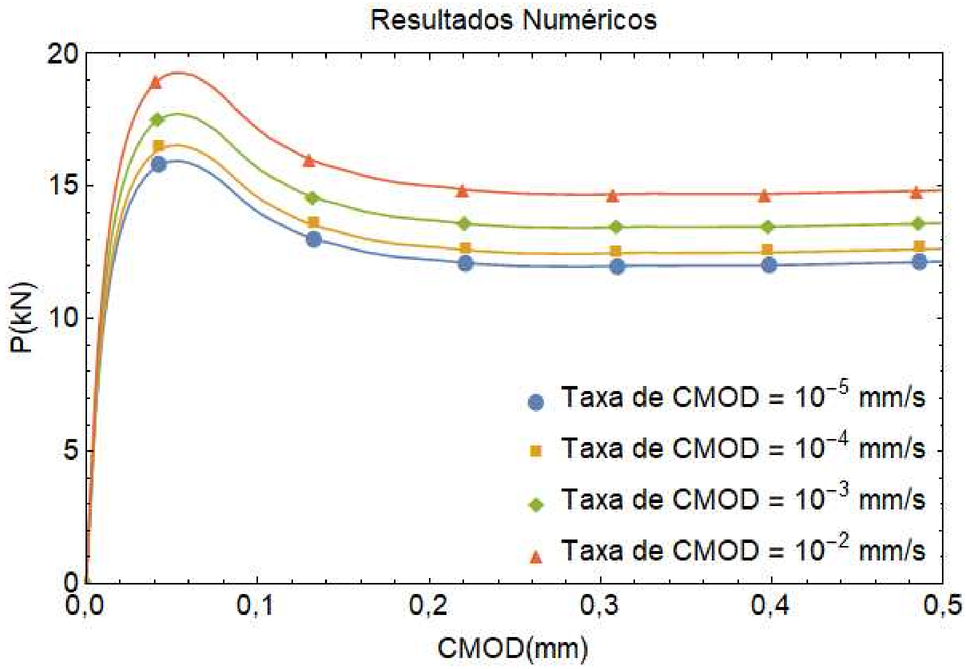


Figura 6-49: Comportamento do modelo numérico ajustado pela análise inversa até CMOD de 0,5 mm. Fonte: Autor.

O comportamento da curva visco-coesiva ajustada para o CRFA3530 é apresentado na Figura 6-51 e na Figura 6-52. Observa-se que o aumento da resistência acontece muito antes dos efeitos de redução da abertura crítica.

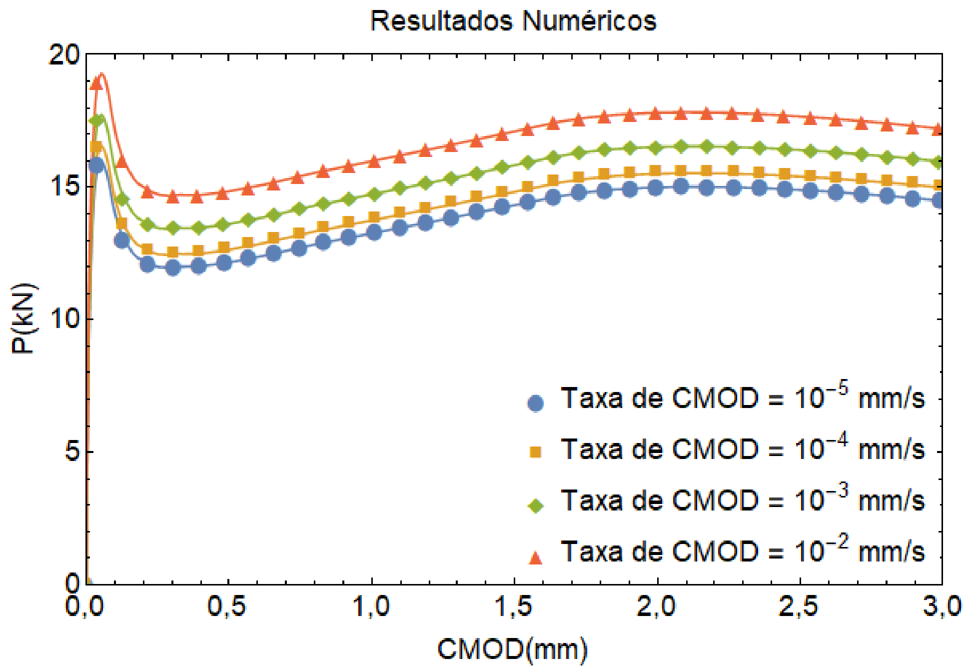


Figura 6-50: Comportamento do modelo numérico ajustado pela análise inversa até CMOD de 3 mm. Fonte: Autor.

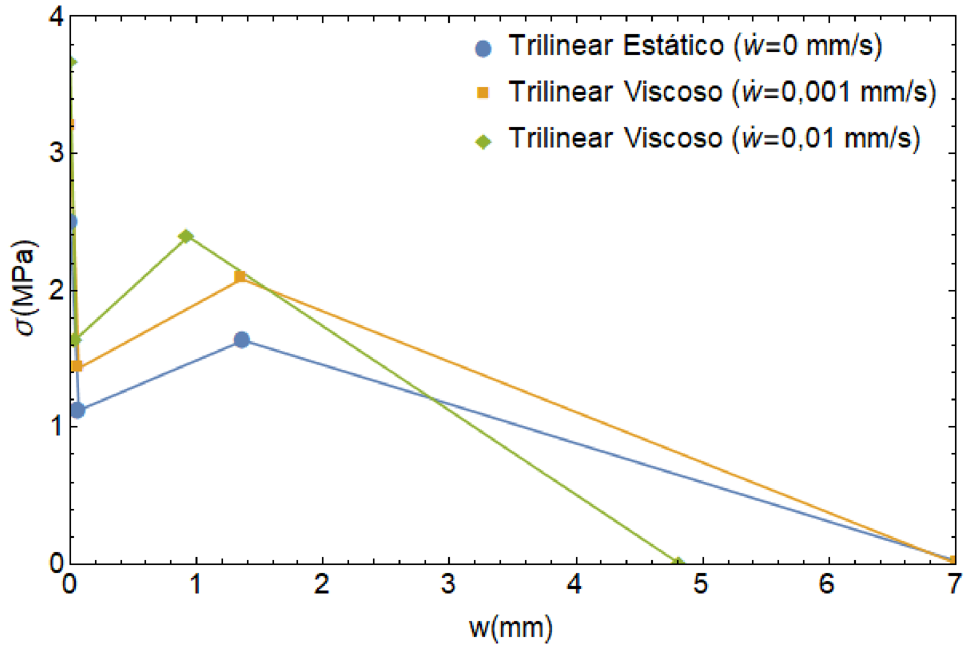


Figura 6-51: Comportamento da curva visco-coesiva ajustada para o CRFA3530 de Stephen, Gettu e Raphael (2016). Fonte: Autor.

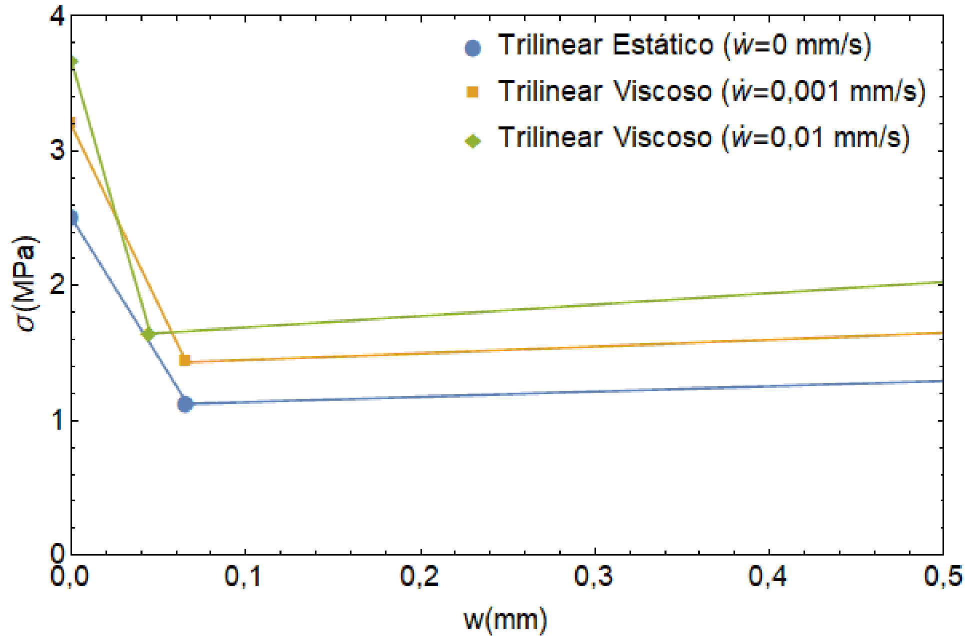


Figura 6-52: Comportamento da curva visco-coesiva ajustada para o CRFA3530 de Stephen, Gettu e Raphael (2016) até $w = 0{,}5\ mm$. Fonte: Autor.

Com base no gráfico comparativo das curvas $P - CMOD$ experimentais e numéricas, considera-se que a adoção do modelo visco-coesivo é adequada até o primeiro pico. No pós-pico, o comportamento da fibra de aço varia com a taxa de carregamento e difere do comportamento do concreto, de tal modo que o modelo proposto não é suficiente.

6.3.4 Concreto Reforçado com Fibra de Aço (CRFA4045) de Stephen e Gettu (2019)

No trabalho de Stephen e Gettu (2019) não são apresentadas informações referentes aos valores de E, f_t e G_f provenientes de ensaios experimentais. Para esse conjunto de dados não são comparados os valores de E, f_t e G_f obtidos experimentalmente com os valores obtidos pela análise inversa.

Pela análise inversa são obtidos os seguintes valores:

- Parâmetros visco-elásticos: $E_0 = 30{,}990\ GPa$, $\dot{\varepsilon}_0 = 1{,}566 \times 10^{-3}\ s^{-1}$, $n_E = 0{,}217$.
- Curva coesiva (Trilinear, Seção 2.5): $f_t = 3{,}06\ MPa$, $G_f = 10314{,}7\ J/m^2$, $a_1 = 14{,}80\ MPa/mm$, $a_2 = -0{,}635\ MPa/mm$, $a_3 = 0{,}234\ MPa/mm$, $b_2 = 0{,}494$, $b_3 = 0{,}721$.
- Modelo Viscoso: $\dot{w}_0 = 12{,}781\ mm/s$, $n = 0{,}201$, $\dot{w}_w = 0{,}0107\ mm/s$, $n_w = 0{,}214$.

Os comparativos dos ensaios experimentais fornecidos com as curvas numéricas ajustadas são apresentados da Figura 6-53 até a Figura 6-60. No comparativo do ensaio com as curvas numéricas, foi adicionado uma envoltória baseada no desvio padrão da resistência a flexão residual calculado por Stephen e Gettu (2019). Observa-se uma boa representatividade do segundo pico em todas as curvas. O primeiro pico não foi muito preciso. Os resultados experimentais apresentaram uma supressão do primeiro pico conforme aumentou-se a taxa de carregamento. Mesmo assim, os resultados numéricos permaneceram dentro da envoltória de desvio padrão.

O comportamento do modelo numérico nas diferentes taxas de carregamento é apresentado na Figura 6-61 e na Figura 6-62. Observa-se um pequeno aumento na rigidez inicial, o aumento do pico e o aumento na resistência pós-pico. Na última taxa de carregamento ($10^{-2}\ mm/s$) não se observou um aumento do primeiro pico em comparação à taxa anterior ($10^{-3}\ mm/s$).

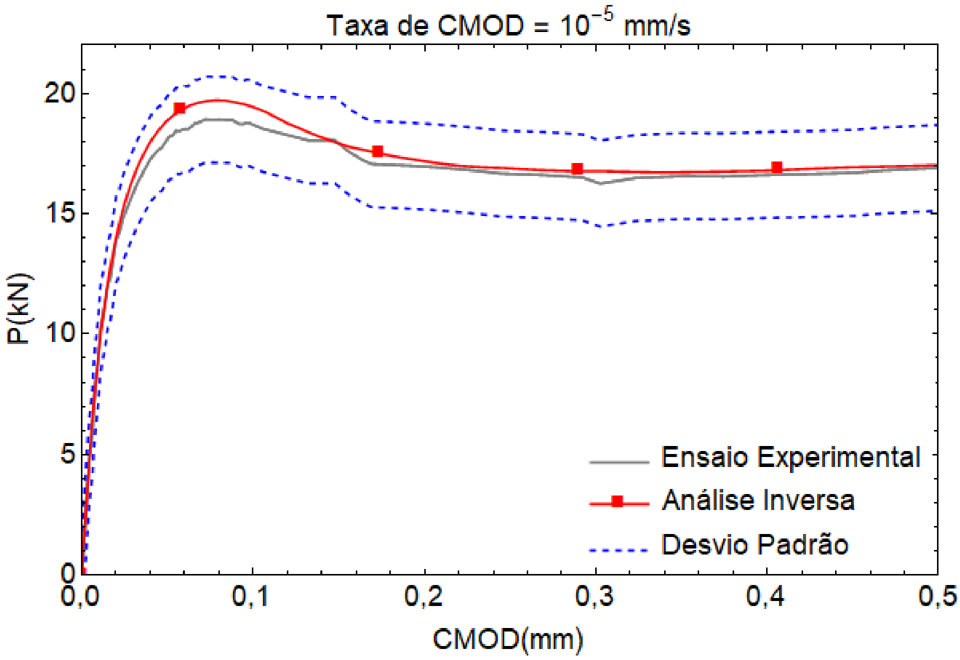


Figura 6-53: Comparação até CMOD de $0{,}5\ mm$ do ensaio experimental do CRFA4045 de Stephen e Gettu (2019) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-5}\ mm/s$. Fonte: Autor.

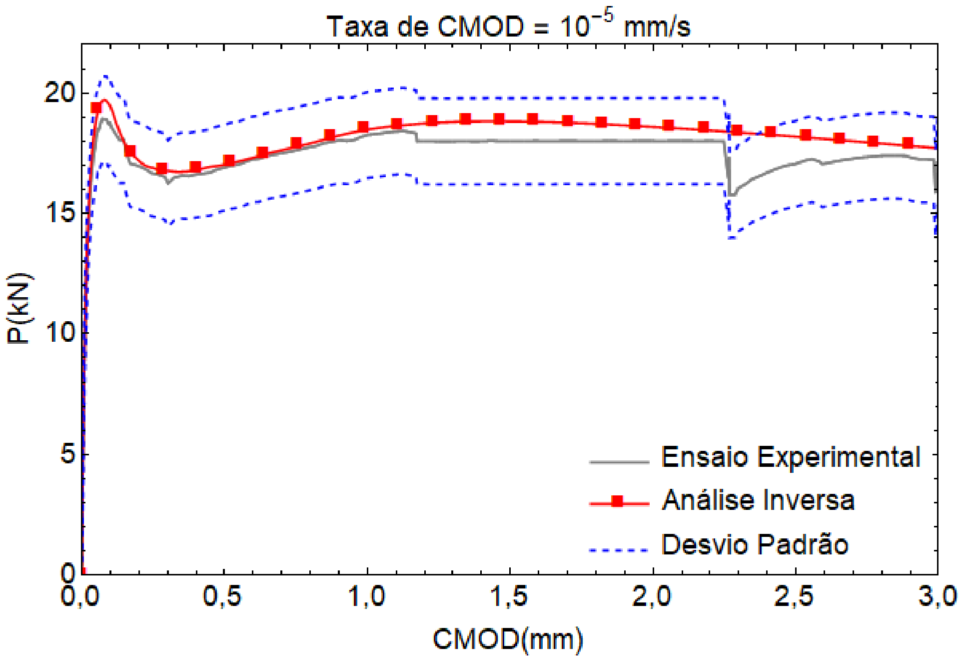


Figura 6-54: Comparação até CMOD de $3\ mm$ do ensaio experimental do CRFA4045 de Stephen e Gettu (2019) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-5}\ mm/s$. Fonte: Autor.

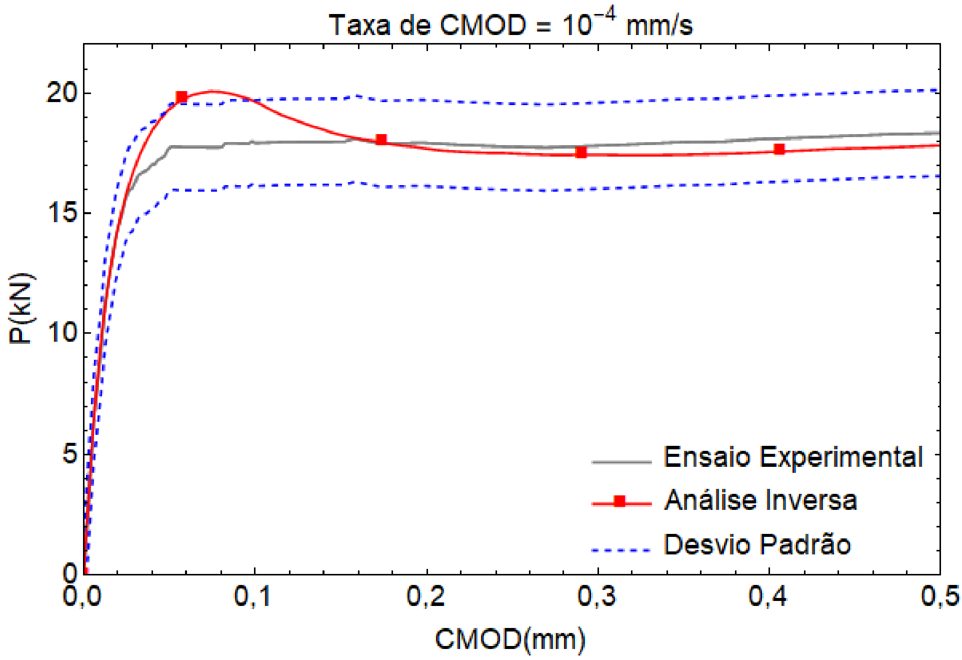


Figura 6-55: Comparação até CMOD de $0{,}5\ mm$ do ensaio experimental do CRFA4045 de Stephen e Gettu (2019) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-4}\ mm/s$. Fonte: Autor.

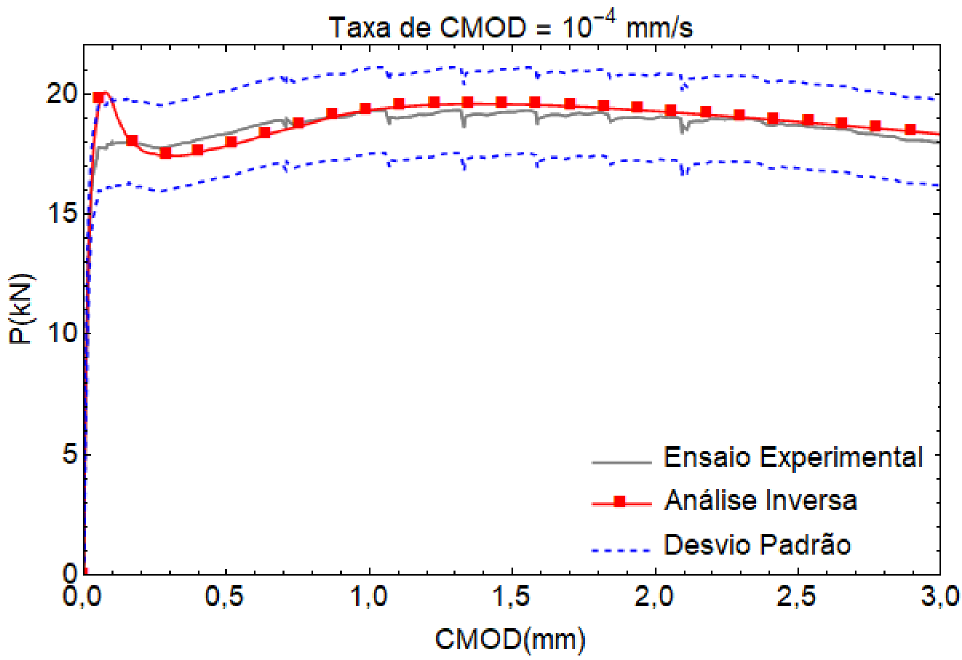


Figura 6-56: Comparação até CMOD de $3\ mm$ do ensaio experimental do CRFA4045 de Stephen e Gettu (2019) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-4}\ mm/s$. Fonte: Autor.

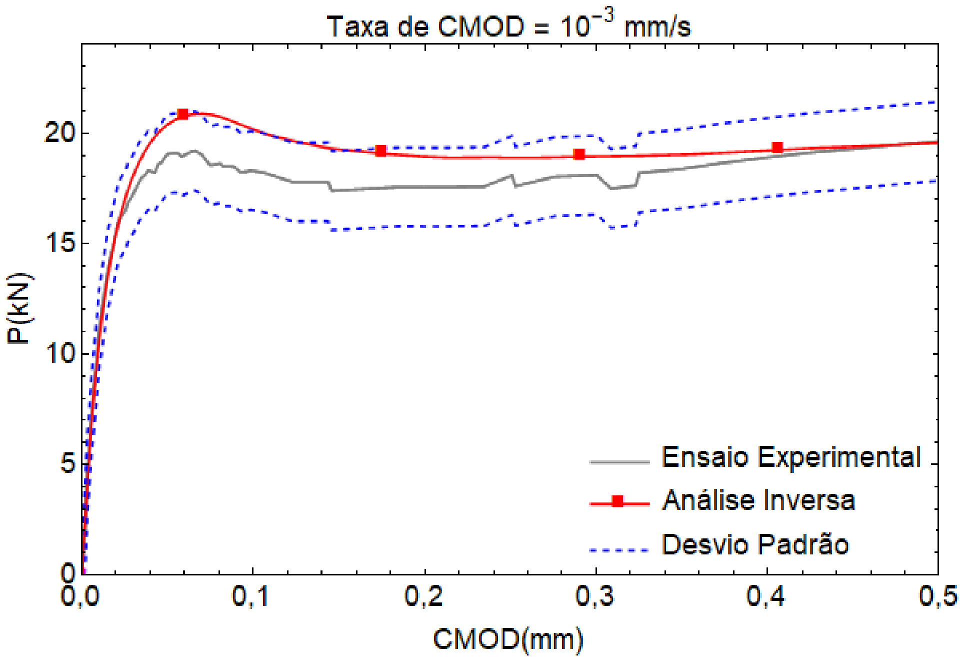


Figura 6-57: Comparação até CMOD de 0,5 mm do ensaio experimental do CRFA4045 de Stephen e Gettu (2019) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-3}\ mm/s$. Fonte: Autor.

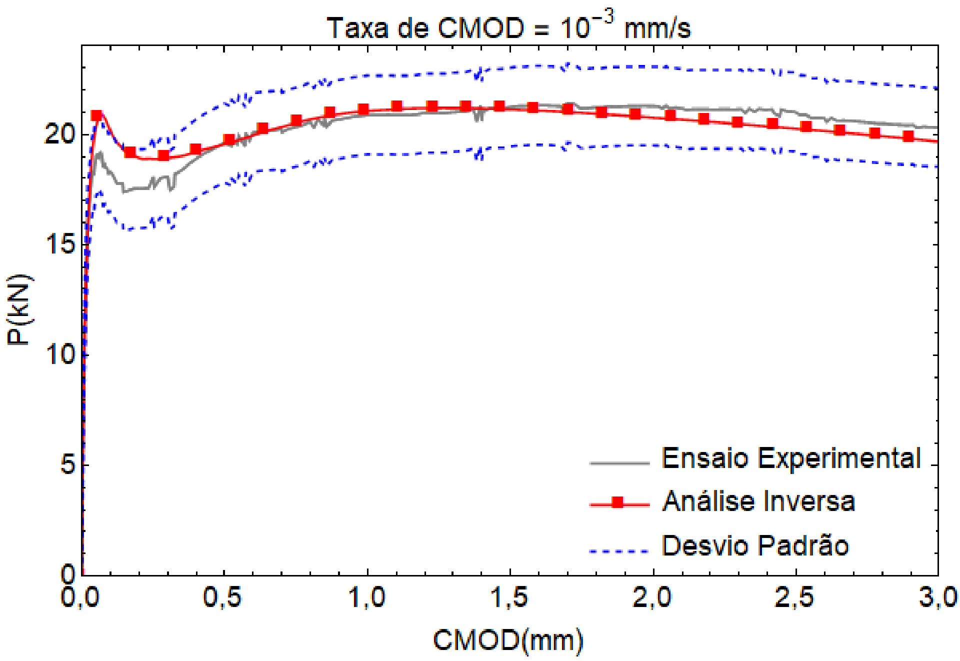


Figura 6-58: Comparação até CMOD de $3\ mm$ do ensaio experimental do CRFA4045 de Stephen e Gettu (2019) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-3}\ mm/s$. Fonte: Autor.

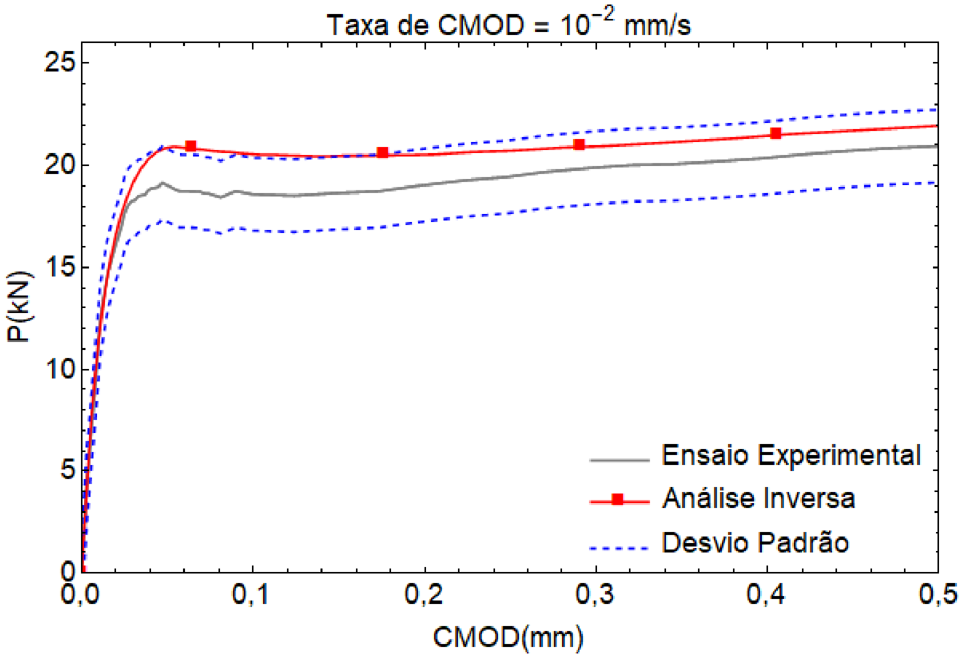


Figura 6-59: Comparação até CMOD de $0{,}5\ mm$ do ensaio experimental do CRFA4045 de Stephen e Gettu (2019) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-2}\ mm/s$. Fonte: Autor.

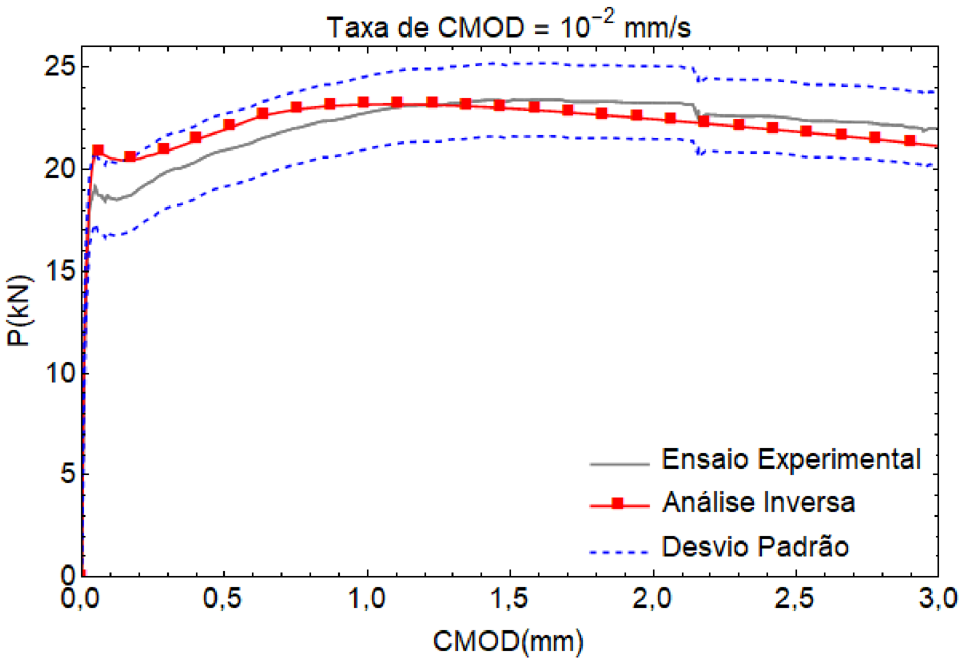


Figura 6-60: Comparação até CMOD de $3\ mm$ do ensaio experimental do CRFA4045 de Stephen e Gettu (2019) com a análise inversa para a taxa de CMOD de $10^{-2}\ mm/s$. Fonte: Autor.

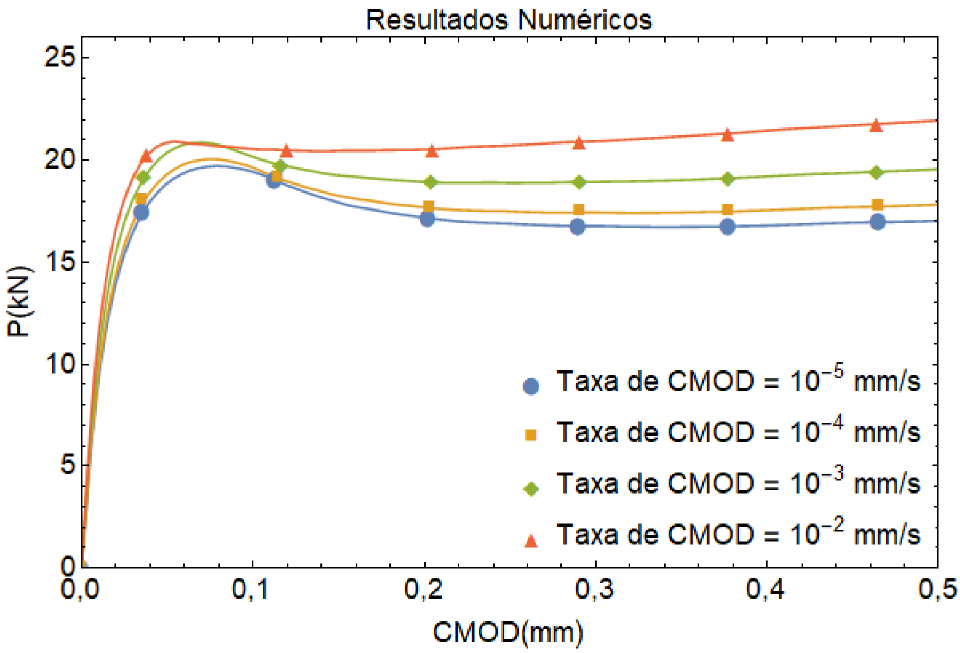


Figura 6-61: Comportamento do modelo numérico ajustado pela análise inversa até CMOD de 0,5 mm. Fonte: Autor.

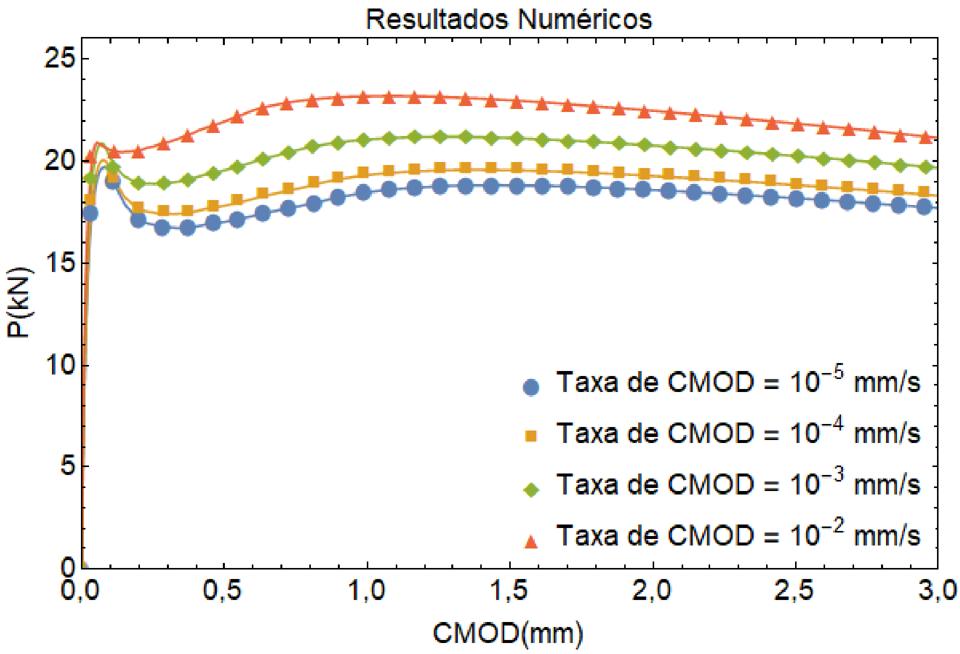


Figura 6-62: Comportamento do modelo numérico ajustado pela análise inversa até CMOD de 3 mm. Fonte: Autor.

O comportamento da curva visco-coesiva ajustada para o CRFA4045 é ilustrado na Figura 6-63 e na Figura 6-64. A redução da abertura crítica é mais eficiente que o aumento da resistência a tração.

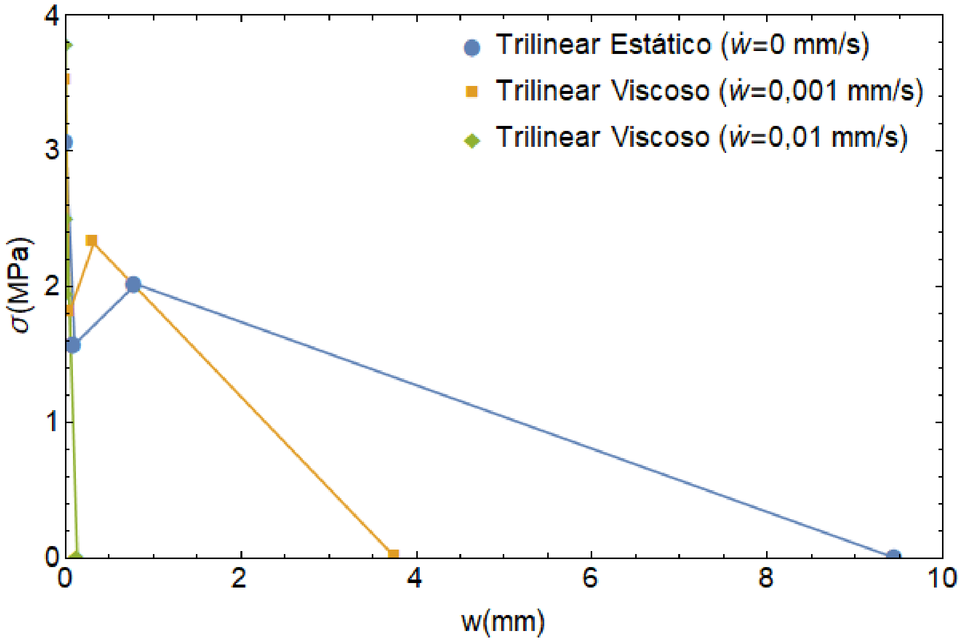


Figura 6-63: Comportamento da curva visco-coesiva ajustada para o CRFA4045 de Stephen e Gettu (2019). Fonte: Autor.

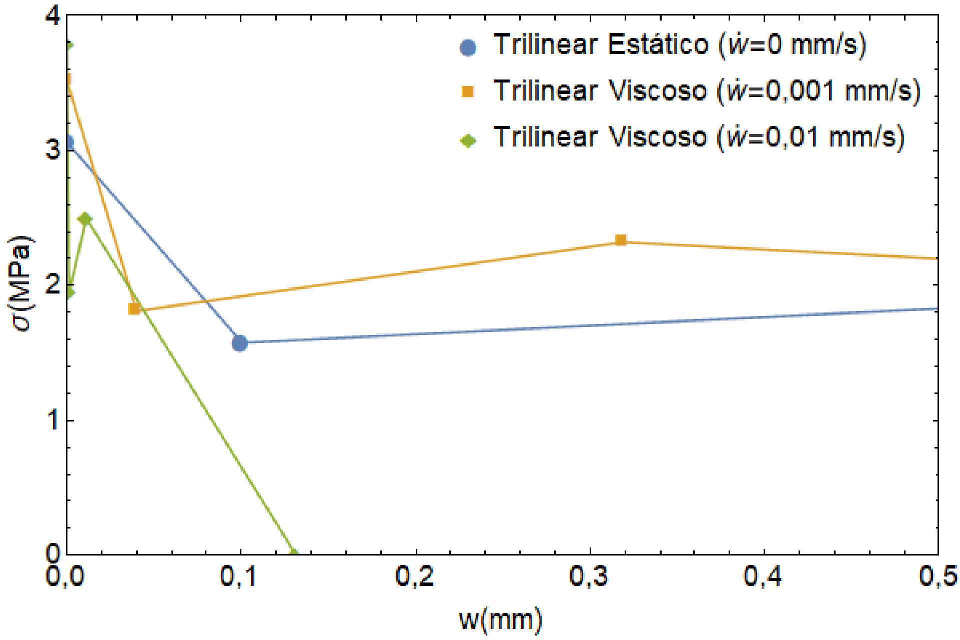


Figura 6-64: Comportamento da curva visco-coesiva ajustada para o CRFA4045 de Stephen e Gettu (2019) até $w = 0{,}5\ mm$. Fonte: Autor.

Com base no gráfico comparativo das curvas $P - CMOD$ experimentais e numéricas, considera-se que a adoção do modelo visco-coesivo foi adequada para o pós-pico, diferente do que foi observado no CRFA3530 (Seção 6.3.3).

6.3.5 Discussão sobre os resultados do Grupo Secundário

Após a análise dos resultados dos quatro concretos pode-se concluir que o modelo foi razoavelmente adequado para o concreto com fibra de polipropileno e não suficiente para o concreto reforçado com fibra de aço. Por mais que os resultados numéricos das curvas $P - CMOD$ tenham permanecido no interior da envoltória de desvio padrão, alguns comportamentos observados no resultado experimental não são contemplados no modelo numérico. O mais evidente é a alteração no modo de falha das fibras, que para o CRFA3530 mudou de escorregamento para ruptura.

O modelo visco-coesivo proposto pode ser aplicado para concretos reforçados com fibras desde que tomadas as devidas cautelas quanto ao comportamento do material. Ainda é necessário um avanço no modelo neste tipo de composição de concreto.

6.4 Considerações sobre os Resultados

Um modelo visco-coesivo é proposto com base nas observações de ensaios experimentais. Sete tipos de concreto ensaiados sob flexão em três pontos em diferentes taxas de carregamento são utilizados no programa de análise inversa para o ajuste dos parâmetros do modelo proposto.

Comparações com concreto convencional, concreto de alta resistência e concreto de ultra alta resistência (Grupo Principal) corroboram com o modelo proposto. É importante salientar a similaridades dos parâmetros E, f_t e G_f obtidos por ensaios e cálculos recomendados por norma com os obtidos pelo procedimento de análise inversa. Essa similaridade demonstra que o resultado obtido pela análise inversa não foi apenas um ajuste matemático de curvas, mas que possui relação física.

Os concretos reforçados com fibra de polipropileno apresentam uma boa concordância entre os resultados. O concreto reforçado com fibra de aço apresentou algumas divergências devido à mudança no modo de falha da fibra, devendo-se ter cautela na aplicação do modelo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 Objetivos Alcançados e Considerações Finais sobre os Resultados

O objetivo principal deste trabalho é a proposta de um modelo visco-coesivo com base nas observações de Wittmann *et al.* (1987), Ruiz *et al*. (2011) e Gea dos Santos e Sousa (2015, 2018) para a propagação de fratura em taxas de carregamento baixas ou quase-estáticas. O capítulo 2 descreve a formação e o comportamento do concreto, assim como a caracterização e representação de seu comportamento ao longo do processo de fratura. Na seção 2.6 é realizado um estudo da literatura quanto ao efeito da taxa de carregamento no concreto. Alguns modelos foram propostos, porém nenhum mostrou-se capaz de representar o comportamento apontado por Wittmann *et al.* (1987), Ruiz *et al*. (2011) e Gea dos Santos e Sousa (2015, 2018): com o aumento da taxa de carregamento observa-se o aumento da rigidez, da resistência à tração e da redução da abertura crítica de fratura.

O modelo proposto é apresentado na Seção 3.3 e sua formulação baseada em leis de potência, aumenta a tensão coesiva (σ) e reduz da abertura crítica de fratura (w_c) com o aumento da taxa de carregamento. Para que a rigidez do concreto aumente com a taxa de carregamento, um modelo visco-elástico, também baseado em uma lei de potência, é apresentado na Seção 3.2.

O capítulo 4 é dedicado à descrição da implementação computacional (objetivo específico). É realizada uma descrição da modelagem do ensaio de flexão em três pontos e dos procedimentos iterativos necessários. O modelo proposto foi implementado no programa FitFG (Gea dos Santos e Sousa, 2015), cumprindo outro objetivo específico.

A metodologia de análise do modelo proposto é descrita no capítulo 5. São propostos 7 tipos de concretos (objetivo específico), divididos em dois grupos: principal e secundário. O grupo principal é aquele composto por concreto de diferentes resistências em que se espera que o modelo proposto seja adequado para representar o comportamento em diferentes taxas de carregamento. O grupo secundário é um grupo composto por concretos reforçados por fibra que, a priori, não são o enfoque do modelo proposto, porém são analisados para avaliar os limites do modelo proposto. Para analisar a qualidade do modelo proposto (objetivo específico) é verificada a proximidade dos parâmetros E, f_t e G_f obtidos por metodologias experimentais (Seção

2.5.1.1) com os obtidos pelo processo de análise inversa, e a proximidade da curva $P - \delta$ ou $P - CMOD$ ajustada com as curvas experimentais.

Os resultados são apresentados no capítulo 6. Após a análise dos resultados do grupo principal pode-se concluir que o modelo foi adequado na representação do comportamento do concreto simples na propagação da fratura em baixas taxas de carregamento. É importante salientar a similaridades dos parâmetros E, f_t e G_f obtidos por ensaios e cálculos recomendados por norma com os obtidos pelo procedimento de análise inversa. Essa similaridade demonstra que o resultado obtido pela análise inversa não foi apenas um ajuste matemático de curvas, mas que possui relação física. No concreto convencional e no concreto de alta resistência observou-se o aumento da rigidez elástica e o comportamento completo do modelo visco-coesivo (aumento da resistência à tração e redução da abertura crítica, aproximando o material de um comportamento frágil). No concreto de ultra alta resistência não é observado o aumento da rigidez elástica. Neste último, o comportamento visco-coesivo resultou em uma solução em que o modelo de Rosa *et al.* (2012) também é adequado.

Após a análise do grupo secundário pode-se concluir que o modelo foi razoavelmente adequado para o concreto com fibra de polipropileno e não suficiente para o concreto reforçado com fibra de aço. Por mais que os resultados numéricos das curvas $P - CMOD$ tenham permanecido no interior da envoltória, alguns comportamentos observados nos resultados experimentais não são contemplados no modelo numérico. O mais evidente é a alteração no modo de falha das fibras de aço que mudou de escorregamento para ruptura.

O modelo visco-coesivo proposto pode ser aplicado para concretos reforçados com fibras desde que tomadas as devidas cautelas quanto ao comportamento do material. Ainda é necessário um avanço no modelo neste tipo de composição de concreto.

Um modelo visco-coesivo é proposto com base nas observações de ensaios experimentais: Wittmann *et al.* (1987), Ruiz *et al.* (2011) e Gea dos Santos e Sousa (2015, 2018). O modelo é original e contribui para o avanço na modelagem do comportamento da propagação da fratura no concreto massa sem contrapor as observações físicas (Vegt, Breugel e Weerheijm, 2007). O conhecimento gerado pelo modelo e sua aplicação incentiva o avanço tecnológico do concreto como elemento estrutural, uma vez que o aumento do conhecimento incentiva novas pesquisas e novas aplicações do elemento estrutural.

7.2 Propostas de Trabalhos Futuros

Após a análise do modelo visco-coesivo proposto com concretos reforçados com fibra fica evidente a necessidade de continuidade de estudos referentes a temática. O conjunto fibra mais massa de concreto não seguem a mesma lei viscosa de tal modo que não foi devidamente efetiva a adoção do modelo proposto. Outro ponto relevante é a mudança no modo de falha da fibra e como considerá-lo dentro de um modelo coesivo.

Cada tipo de concreto ensaiado seguia uma mesma geometria de corpo de prova, ou seja, todos os corpos de prova do concreto convencional tinham a mesma geometria. É muito discutido se o efeito escala influencia na determinação da curva coesiva. Em análises utilizando-se o FitFG para concretos em ensaios quase-estáticos (não apresentados neste trabalho) não são observadas diferenças nas curvas coesivas para diferentes geometrias. Entretanto, é importante avaliar se o modelo proposto é sensível à escala do experimento. Propõe-se que para um mesmo concreto sejam moldados grupos de corpos de prova com tamanhos ou geometrias diferentes e cada grupo seja dividido em subgrupos a serem ensaiados em taxa de carregamento diferentes. A análise e comparação do modelo visco-coesivo obtido para cada grupo vai indicar se existe ou não dependência da escala no modelo proposto.

Por fim, o modelo proposto foi formulado para baixas taxas de carregamento. Deve-se agora buscar uma extensão ou uma nova formulação para as altas taxas de carregamento, considerando-se os efeitos inerciais e uma possível modificação do comportamento visco-coesivo.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 5738: Concreto – Procedimento para moldagem e cura de corpos de prova**. Rio de Janeiro, p. 9, 2016.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 5739: Concreto – Ensaio de compressão de corpos de prova cilíndricos**. Rio de Janeiro, p. 9, 2018.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**. Rio de Janeiro, p. 238, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7222: Concreto e argamassa – Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos de prova cilíndricos**. Rio de Janeiro, p. 5, 2011.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8522: Concreto – Determinação dos módulos estáticos de elasticidade e de deformação à compressão**. Rio de Janeiro, p. 20, 2017.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 12142: Concreto – Determinação da resistência à tração na flexão de corpos de prova prismáticos**. Rio de Janeiro, p. 5, 2010.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR ISO 7500-1: Materiais metálicos – Calibração e verificação de máquinas de ensaio estático uniaxial. Parte 1: Máquinas de ensaio de tração/compressão – Calibração e verificação do sistema de medição da força**. Rio de Janeiro, p. 19, 2016.

BARENBLATT, G. I. **The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture**. Advances in Application Mechanics, v. 7, pp. 55-129, 1962.

BAŽANT, Z. P. **Instability, ductility, and size effect in strain-softening concrete.** Journal of The Engineering Mechanics Division, v. 102, pp. 331-344, 1976.

BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L. **Blunt crack band propagation in finite element analysis**. Journal of the Engineering Mechanics Division, v. 105, pp. 297-315, 1979.

BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L. **Fracture mechanics of reinforced concrete**. Journal of the Engineering Mechanics Division, v. 106, pp. 1287-1306, 1980.

BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L. **Finite element modeling of crack band propagation**. Journal of Structural Engineering, v. 109, n. 1, pp. 69-92, 1983.

BAŽANT, Z. P.; LI, Y. N. **Cohesive crack model with rate-dependent opening and viscoelasticity: I. mathematical model and scaling**. International Journal of Fracture, v. 86, pp. 247-265, 1997.

BAŽANT, Z. P.; OH, B. H. **Crack band for fracture of concrete**. Matériaux et Constructions, v. 16, n. 93, pp. 155-177, 1983.

BAŽANT, Z. P., GAMBAROVA, P. G. **Crack shear in concrete: crack band microplane model**. Journal of Structural Engineering, v. 110, n. 9, pp. 2015-2035, 1984.

BAŽANT, Z. P.; OH, B. H. **Microplane model for progressive fracture of concrete and rock.** Journal of Engineering Mechanics, v. 111, n. 4, pp. 559-582, 1985.

BITTENCOURT, M. L. **Análise Computacional de Estruturas: com aplicação do Método de Elementos Finitos.** Editora da Unicamp, Campinas – SP, 2010.

BITTENCOURT, T. N.; INGRAFFEA, A. R.; LLORCA, J. **Computer Simulation of Arbitrary, Cohesive Crack Propagation in Concrete**. Fracture Mechanics of Concrete Structures, Elsevier, London, pp. 339 – 350, 1992.

BOCCA, P.; CARPINTERI, A.; VALENTE, S. **Mixed mode fracture of concrete.** International Journal of Solids Structures, v. 27, n. 9, pp. 1139-1153, 1991.

CARLONI, C.; CUSATIS, G.; SALVIATO, M.; LE, J. L.; HOOVER, C. G.; BAŽANT, Z. **Critical comparison of the boundary effect model with cohesive crack model and size effect law**. Engineering Fracture Mechanics, v. 215, pp. 193-210, 2019.

CARPINTERI, A.; COLOMBO, G.; FERRARA, G.; GIUSEPPETTI, G. **Numerical simulation of concrete fracture through a bilinear softening stress-crack opening displacement law**. Fracture of Concrete and Rock, Proc. SEM_RILEM Int. Conf, pp. 178-191, 1987.

CARPINTERI, A.; CADAMURO, E.; VENTURA, G. **Fiber-reinforced concrete in flexure: a cohesive/overlapping crack model application**. Materials and Structures, v. 48, pp. 235-247, 2015.

CHEN, E.; LEUNG, C. K. Y.; TANG, S.; LU C. **Displacement discontinuity method for cohesive crack propagation**. Engineering Fracture Mechanics, v. 190, pp. 319-330, 2018.

CHOUBEY, R. K.; KUMAR, S.; RAO, M. C. **Modeling of fracture parameters for crack propagation in recycled aggregate concrete**. Construction and Building Materials, v. 106, pp. 168-178, 2016.

CHOW, C. L., WANG, J. **An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture.** Engineering Fracture Mechanics, v. 27, n. 5, pp. 547-558, 1987.

CUSATIS, G.; SCHAUFFERT, E. A. **Cohesive crack analysis of size effect**. Engineering Fracture Mechanics, v. 76, pp. 2163-2173, 2009.

ELICES, M.; ROCCO, C.; ROSELLÓ, C. **Cohesive crack modelling of a simple concrete: experimental and numerical results**. Engineering Fracture Mechanics, v. 76, pp. 1398-1410, 2009.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 14651: Test method for metallic fibered concrete – Measuring the flexural tensile strength (limit of proportionality (LOP), residual).** Brussels, p. 17, 2005.

FENG, D. C.; WU, J. Y. **Phase-field regularized cohesive zone model (CZM) and size effect of concrete**. Engineering Fracture Mechanics, v. 1997, pp. 66-79, 2018.

FERREIRA, M. D. C.; VENTURINI, W. S.; HILD, F. **On the Analysis of Notched Concrete Beams: From Measurement with Digital Image Correlation to Identification with Boundary Element Method of a Cohesive Model**. Engineering Fracture Mechanics, v. 78, pp. 71-84, 2011.

GEA DOS SANTOS, F. L. **Estudo e automação da influência da taxa de carregamento na resposta em fratura quase-frágil**. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo (FEC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, SP, 2014.

GEA DOS SANTOS, F. L.; SOUSA, J. L. A. O. **Determination of parameters of a viscous-cohesive fracture model by inverse analysis**. IBRACON Structures and Materials Journal, v. 8, n. 5, pp. 669-706, 2015.

GEA DOS SANTOS, F. L.; SOUSA, J. L. A. O. **A viscous model for the cohesive behavior in quasi-static tests**. 60° Congresso Brasileiro do Concreto, CBC2018, 2018.

GEA DOS SANTOS, F. L.; SOUSA, J. L. A. O. **FitFG: Softening curves for concrete**. LabMEM – Structural Modeling and Monitoring Laboratory. UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas, 2019. Disponível em: http://www.fec.unicamp.br/~labmem/.

GERSTLE, W. H.; XIE, M. **FEM modeling of fictitious crack propagation in concrete.** Journal of Engineering Mechanics, v. 118, n. 2, pp. 416-434, 1992.

GILL, P. E., MURRAY, W., WRIGHT, M. **Practical Optimization**. Systems Optimization Laboratory, Department of Operations Research, Standford University, California, USA, 1989.

GOPALARATNAM, V. S.; YE, B. S. **Numerical characterization of nonlinear fracture process in concrete.** Engineering Fracture Mechanics, v. 40, n. 6, pp. 991-1006, 1991.

GRIFFITH, A. A. **The phenomenon of rupture and flow in solids**. Philosophical Transactions, Royal Society of London, Series A, v. 221, pp. 163-198, 1920.

HILLERBORG, A.; MODEER, M.; PETERSSON, P. E. **Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements**. Cement and Concrete Research, v. 6, pp. 773-782, 1976.

HILLERBORG, A. **Analysis of fracture by means of the fictitious crack model, particularly for fiber reinforced concrete**. International Journal of Cement Composites, v. 2, pp. 177-184, 1981.

INGRAFFEA, A. R.; GERSTLE, W. H. **Non-linear fracture models for discrete crack propagation.** Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites, NATA, edited by S. P. Shah, pp. 247-285, 1985.

INGRAFFEA, A. R.; GERSTLE, W. H.; GERGELY, P.; SAOUMA, V. **Fracture mechanics of bond in reinforced concrete.** Journal of Structure Engineering, ASCE, v. 110, n. 4, pp. 871-890, 1984.

INGRAFFEA, A. R.; SAOUMA, V. **Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete.** Fracture Mechanics of Concrete: Structure Application and Numerical Calculation, edited by G. Sih and A. DiTommaso, Martinus Nijhoff, Hingham, Mass., pp. 171-225, 1985.

INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE (fib). **The fib Model Code for Concrete Structures 2010**. Switzerland, 2013.

HORDIJK, D. A. **Local approach to fatigue of concrete**. Doctoral Thesis, Delft University of Technology, The Netherlands, 1991.

SANCHES JÚNIOR, F., VENTURINI, W. S. **Damage modelling of reinforced concrete beams.** Advances in Engineering Software, v. 38, n. 8, pp. 538-546, 2007.

KAPLAN, M. F. **Crack propagation and the fracture of concrete**. ACI Journal, Proceedings, n. 58, n. 5, pp. 591-610, 1961.

KEQUAN, Y.; JIANGTAO, Y.; ZHOUDAO, L.; QINGYANG, C. **Determination of the softening curve and fracture toughness of high-strength concrete exposed to high temperature**. Engineering Fracture Mechanics, v. 149, pp. 156-169, 2015.

KESLER, C. E; NAUS, D. J.; LOTT, J. L. **Fracture mechanics – its applicability to concrete**. Proc. Int. Conf. on the Mechanical Behaviour of Materials, v. 4, pp. 113-124, 1972.

KWON, S. H.; ZHAO, Z.; SHAH, S. P. **Effect of specimen size on fracture energy and softening curve of concrete: Part II. Inverse analysis and softening curve**. Cement and Concrete Research, v. 38, pp. 1061-1069, 2008.

LAGARIAS, J. C., REEDS, J. A., WRIGHT, M. H., WRIGHT, P. E**. Convergence Properties of Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions**. SIAM Journal of Optimization, v. 9, n. 1, 1998.

LEMAITRE, J., DUFAILLY, J. **Damage measurements**. Engineering Fracture Mechanics, v. 28, n. 5, pp. 643-661, 1987.

LEVENBERG, K. **A method for the solution of certain non-linear problems in least squares**. Applied Mathematics, v. 2, pp. 164-168, 1944.

LI, Y. N.; BAŽANT, Z. P. **Cohesive crack model with rate-dependent opening and viscoelasticity: II. numerical algorithm, behavior and size effect**. International Journal of Fracture, v. 86, pp. 267-288, 1997.

LI, V. C.; LIANG, E. **Fracture processes in concrete and fiber reinforced cementitious composites.** Journal of Engineering Mechanics, ASCE, v. 112, n6, pp. 556-586, 1986.

MAIER, G.; BOCCIARELLI, M.; BOLZON, G.; FEDELE, R. **Inverse analyses in fracture mechanics**. International Journal of Fracture, v. 138, pp. 47-73, 2006.

MARQUARDT, D. **An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters**. Journal of Applied Mathematics, v. 11, pp. 431-441, 1963.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: Microestrutura, Propriedade e Materiais.** Editora IBRACON, 3ª edição, 2008.

MOES, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO. **A finite element method for crack growth without remeshing**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 46, pp. 131-150, 1999.

NAUS, D. J. **Fracture mechanics applicability to portland cement concretes**. Army Constructions Engineering Research, 1973.

NELDER, J. A.; MEAD, R. **A simplex method for function minimization**. The Computer Journal, v. 7, pp. 308–313, 1965.

NEWMARK, N. M. **A method of computation for structural dynamics**. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, v. 85, pp. 67-94, 1959.

OLESEN, J. F. **Fictitious crack propagation in fiber-reinforced concrete beams**. Journal of Engineering Mechanics, v. 127, n. 3, pp.272-280, 2001.

OLIVER, J. **Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 39, pp. 3575-3600, 1996.

PARK, K.; PAULINO, G. H.; ROESLER, J. R. **Determination of the kink point in the bilinear softening model for concrete**. Engineering Fracture Mechanics, v. 75, pp. 3806-3818, 2008.

PENNA, S. S. **Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estrutura de concreto.** Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Belo Horizonte, 2011.

PETERSSON, P. E. **Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials**. Report TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Sweden, 1981.

PLANAS, J.; ELICES, M. **Fracture criteria for concrete: mathematical approximations and experimental validation**. Engineering Fracture Mechanics, v. 35, n. 1/2/3, pp. 87-94, 1990.

PLANAS, J.; ELICES, M. A. **Nonlinear fractures of cohesive materials**. International Journal of Fracture, v. 51, pp. 139-157, 1991.

RASHID, Y. R. **Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels.** Nuclear Engineering and Design, v. 7, pp. 334-344, 1968.

REINHARDT, H. W. **Loading rate, temperature, and humidity effects. Fracture Mechanics test methods for concrete**. RILEM Report of Technical Committee 89-FMT, 1990.

RILEM Draft Recommendation (50-FMC). **Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend test on notched beams.** Materials and Structures, v. 18, pp. 285-290, 1985.

ROHATGI, A. WebPlotDigitizer. Version 4.2, Website: https://automeris.io/WebPlotDigitizer, April, 2019.

ROSA, A.L.; YU, R. C.; RUIZ, G.; SAUCEDO, L.; SOUSA, J. L. A. O. **A loading rate dependent cohesive model for concrete fracture**. Engineering Fracture Mechanics, v. 82, pp. 195-208, 2012.

ROSSI, P.; VAN MIER, J. G. M.; TOUTLEMONDE, F.; LE MAOU, F.; BOULAY, C. **Effect of loading rate on the strength of concrete subjected to uniaxial tension**. Materials and Structures, v. 27, pp. 260-264, 1994.

ROTS, J. G. **Computational modeling of concrete fracture**. Doctoral Thesis, Delft University of Technology, Delft, Holand, 1988.

RUIZ, G.; ZHANG, X. X.; YU, R. C.; PORRAS, P.; POVEDA, E.; del VISO, J. R. **Effect of loading rate on fracture energy of high-strength concrete**. Strain, v. 47, pp. 518-524, 2011.

RUSCH, H. **Researches toward a general flexural theory for structural concrete**. Journal of the American Concrete Institute, n. 57(1), 1960.

SCOTTA, R., VITALIANI, R., SAETTA, A., OÑATE, E., HANGANU, A. **A scalar damage model with a shear retention factor for the analysis of reinforced concrete structures: theory and validation.** Computers and Structures, v. 79, pp. 737-755, 2001.

SKOCEK, J.; STANG, H. **Inverse analysis of the wedge-splitting test**. Engineering Fracture Mechanics, v. 75, pp. 3173-3188, 2008.

SLOWIK, V.; VILLMANN, B.; BRETSCHNEIDER, N.; VILLMANN, T. **Computational aspects of inverse analyses for determining softening curves of concrete**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 195, pp. 7223-7236, 2006.

SOUSA, J. L. A. O.; GETTU, R. **Determining the tensile stress-crack opening curve of concrete by inverse analysis**. Journal of Engineering Mechanics, v. 132, pp. 141-148, 2006.

SOUSA, J. L. A. O. **A Levenberg-Marquardt algorithm for fitting σ-w curves from three-point bend tests for plain and fiber reinforced concretes**. IBRACON Structures and Materials Journal, v. 4, n. 4, 2011.

STEPHEN, S. J.; GETTU, R.; RAPHAEL, B. **Effect of loading rate on the fracture behavior of fiber reinforced concrete**. 9^{th} International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures, FraMCoS-9, 2016.

STEPHEN, S. J.; GETTU, R. **Rate-dependence of the tensile behavior of fibre reinforced concrete in the quasi-static regime.** Materials and Structures, n. 52, v. 107, 2019.

SUCHARDA, O.; PAJAK, M.; PONIKIEWSKI, T.; KONECNY, P. **Identification of mechanical and fracture properties of self-compacting concrete beams with different types of steel fibres using inverse analysis**. Construction and Building Materials, v. 138, pp. 263-275, 2017.

TANDON, S.; FABER, T.; BAŽANT, Z. P.; LI, Y. N. **Cohesive crack modeling of influence of sudden changes in loading rate on concrete fracture.** Engineering Fracture Mechanics, v. 52, n. 6, pp. 987-997, 1995.

The Qt Company. **Qt Creator 4.9.0**. Based on Qt 5.12.2 (MSVC 2017, 32 bit), built on April 11 2019. Disponível em: https://www.qt.io.

VEGT, I.; BREUGEL, K. V.; WEERHEIJM, J. **Failure mechanisms of concrete under impact loading**. Fracture Mechanics of Concrete Strutures, Eds. Carpinteri A, Gambarova P, Ferro G, Plizzari G, Taylor & Francis Group, pp. 579-587, 2007.

WALSH, P. F. **Fracture of plain concrete**. Indian Concrete Journal, v. 46, n. 11, 1972.

WALSH, P. F. **Crack initiation in plain concrete**. Magazine of Concrete Research, v. 28, pp. 37-41, 1976.

WITTMAN, F. H.; ROELFSTRA, P. E.; MIHASHI, H.; HUANG, Y.; ZHANG, X.; NOMURA, N. **Influence of age of loading, water-cement ratio and rate of loading on fracture energy of concrete**. Materials and Structures, v. 20, pp. 103-110, 1987.

ZHANG, X. X.; YU, R. C.; RUIZ, G.; CAMARA, M. A. **Effect of loading rate on crack velocities in HSC**. International Journal of Impact Engineering, v. 37, pp. 359-370, 2010.

ZHANG, X. X.; Abd ELAZIM, A. M.; RUIZ, G.; YU, R.C. **Fracture behaviour of steel fiber-reinforced concrete at a wide range of loading rates**. International Journal of Impact Engineering, v. 71, pp. 89-96, 2014.

ZHANG, X. X.; RUIZ, G.; Abd ELAZIM, A. M. **Loading rate effect on crack velocities in steel fiber-reinforced concrete**. International Journal of Impact Engineering, v. 76, pp. 60-66, 2015.

ZHAO, Z.; KWON, S. H.; SHAH, S. P. **Effect of specimen size on fracture energy and softening curve of concrete: Part I. Experiments and fracture energy**. Cement and Concrete Research, v. 38, pp. 1049-1060, 2008.

ZHOU, F. P. **Time-dependent crack growth and fracture in concrete**. Doctoral Dissertation, Lund University, Division of Building Materials, 1992.

APÊNDICE A: MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

i. Considerações Iniciais

Este apêndice apresenta um estudo resumido sobre o Método dos Elementos Finitos com base em Bittencourt (2010).

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um procedimento aproximado de resolução de *problemas de valor de contorno*. O *problema de valor de contorno* é um sistema de equações diferenciais que possui um conjunto de restrições, chamadas *condições de contorno*. O método trabalha com a divisão do domínio de integração, contínuo, em um conjunto de regiões chamados *elementos finitos*. Essa divisão do domínio dá-se o nome de *malha de elementos finitos* (Figura A-1).

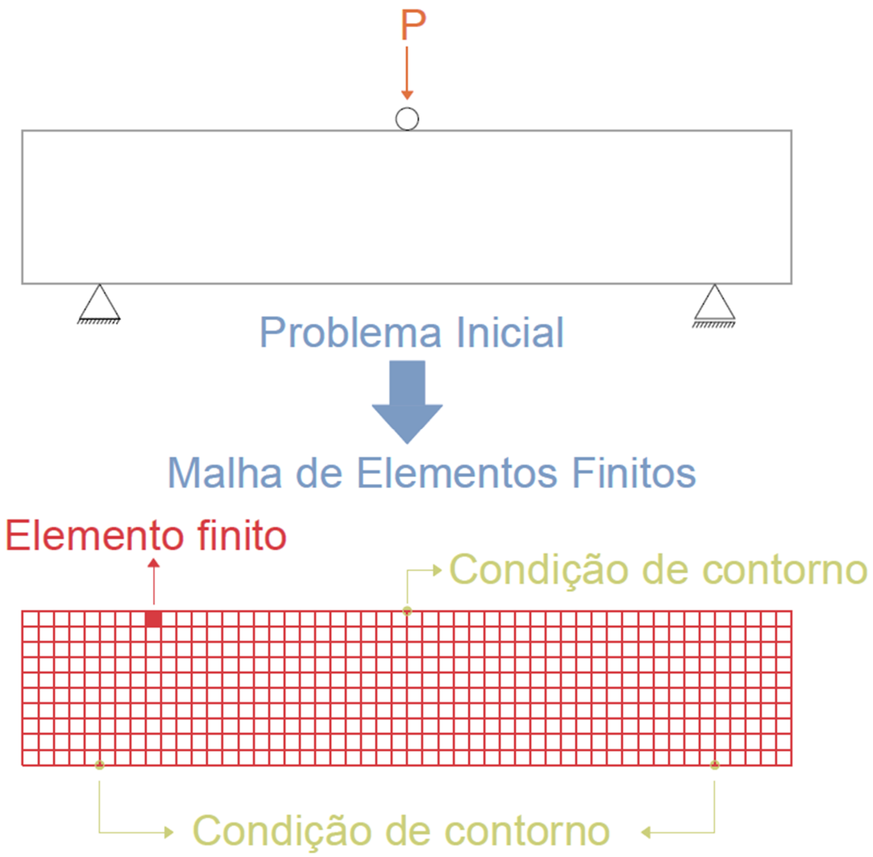


Figura A-1: Exemplo da malha de elementos finitos. Fonte: Autor.

No MEF são definidas funções aproximadoras, chamadas *funções de forma*, para cada elemento finito. Considerando um sistema contínuo cuja solução seja o campo de deslocamentos, a relação entre os deslocamentos do sistema contínuo ($\vec{u}$) e discreto ($\vec{U}$) é escrita como:

$$\vec{u} = [N]\,\vec{U} \tag{42}$$

sendo $[N]$ a matriz das *funções de forma* que realizam o mapeamento entre o modelo discreto e contínuo.

As deformações do modelo discreto ($\vec{\varepsilon}$) são obtidas por:

$$\vec{\varepsilon} = [B]\,\vec{U} \tag{43}$$

sendo $[B]$ a matriz das derivadas parciais das *funções de forma* ou matriz de deformação. As tensões do modelo discreto ($\vec{\sigma}$) são determinadas por:

$$\vec{\sigma} = [D][B]\,\vec{U} \tag{44}$$

sendo $[D]$ é a matriz de elasticidade.

ii. Equação de Movimento

A segunda lei de Newton estabelece que:

$$\vec{F} = m\,\vec{\ddot{u}} \tag{45}$$

na qual $\vec{F}$ é o conjunto de forças atuantes no corpo, m é a massa do corpo e $\vec{\ddot{u}}$ é a segunda derivada dos deslocamentos, equivalente a aceleração. Reescrevendo a Eq. (45) conforme o *Princípio de d'Alembert*, temos:

$$\vec{F} - m\,\vec{\ddot{u}} = 0 \tag{46}$$

Considerando-se elementos infinitesimais de volume (dV) e de superfície (dS), podem ser escritas as seguintes relações:

$$dm = \rho\, dV \tag{47}$$

$$\vec{F} = \vec{\chi}\, dV + \vec{\Phi}\, dS + \vec{\eta}\,\vec{\dot{u}}\, dV \tag{48}$$

sendo ρ a densidade do material, $\vec{\chi}$ as forças de corpo, $\vec{\Phi}$ as forças de superfície, $\vec{\eta}$ é a viscosidade do corpo que geram forças de dissipação e $\vec{\dot{u}}$ é o vetor de velocidades. Assim, reescreve-se a Eq. (48):

$$\vec{\chi}\, dV + \vec{\Phi}\, dS + \vec{\eta}\,\vec{\dot{u}}\, dV - \rho\,\vec{\ddot{u}}\, dV = 0 \tag{49}$$

Ao submeter esse corpo à um deslocamento virtual $\overrightarrow{\delta u}$ e integrando no volume e na superfície

$$\int_V \vec{\chi}^T\, \overrightarrow{\delta u}\, dV + \int_S \vec{\Phi}^T\, \overrightarrow{\delta u}\, dS + \int_V \vec{\eta}^T\, \overrightarrow{\dot{u}}\, \overrightarrow{\delta u}\, dV - \int_V \rho\, \vec{\ddot{u}}^T\, \overrightarrow{\delta u}\, dV = \int_V \vec{\sigma}^T\, \overrightarrow{\delta \varepsilon}\, dV \quad (50)$$

em que $\overrightarrow{\delta\varepsilon}$ é a deformação virtual e o índice T corresponde ao vetor ou matriz transposta. Discretizando o sistema, com base na Eq. (42), tem-se

$$\overrightarrow{\delta u} = [N]\, \overrightarrow{\delta U} \quad (51)$$

$$\vec{\dot{u}} = [N]\, \vec{\dot{U}} \quad (52)$$

$$\vec{\ddot{u}} = [N]\, \vec{\ddot{U}} \quad (53)$$

e da Eq. (43)

$$\overrightarrow{\delta\varepsilon} = [B]\, \overrightarrow{\delta U} \quad (54)$$

Substituindo (51), (52), (54) e (54) em (50), obtém-se:

$$\begin{aligned} \vec{P}^T\, \overrightarrow{\delta U} + \int_V \vec{\chi}^T\, [N]\, \overrightarrow{\delta U}\, dV & \\ + \int_S \vec{\Phi}^T\, [N]\, \overrightarrow{\delta U}\, dS & \\ + \int_V \eta\, \vec{\dot{U}}^T [N]^T\, [N]\, \overrightarrow{\delta U} dV & \\ - \int_V \rho\, \vec{\ddot{U}}^T\, [N]^T\, [N]\, \overrightarrow{\delta U}\, dV & \\ = \int_V \vec{U}^T\, [B]^T\, [D]\, [B]\, \overrightarrow{\delta U}\, dV & \end{aligned} \quad (55)$$

sendo $\vec{P}$ as cargas concentradas aplicadas nos pontos discretos do corpo correspondentes aos deslocamentos $\overrightarrow{\delta U}$. Simplificando $\overrightarrow{\delta U}$ em ambos os lados e rearranjando a Eq. (55):

$$\left(\int_V \rho\,[N]^T\,[N]\;dV\right)\ddot{\vec{U}} + \left(\int_V \eta\,[N]^T\,[N]\;dV\right)\dot{\vec{U}} + \left(\int_V [B]^T\,[D]\,[B]\,dV\right)\vec{U} = \vec{P} + \int_V \vec{\chi}^T\,[N]\,dV + \int_S \vec{\Phi}^T\,[N]\,dS \tag{56}$$

Compactando, obtém-se

$$[M]\,\ddot{\vec{U}} + [C]\,\dot{\vec{U}} + [K]\,\vec{U} = \vec{P} + \overrightarrow{F_\chi} + \overrightarrow{F_\Phi} \tag{57}$$

sendo

- $[M]$ a matriz de massa do corpo.
- $[C]$ a matriz de amortecimento do corpo.
- $[K]$ a matriz de rigidez do corpo.
- $\overrightarrow{F_\chi}$ o vetor de forças devido a $\vec{\chi}$.
- $\overrightarrow{F_\Phi}$ o vetor de forças devido a $\vec{\Phi}$.

iii. Funções de Forma para Elementos Quadrados

Esta seção apresenta funções de formas para elementos finitos quadrados baseadas na família *serendipity*.

Um elemento quadrado de ordem linear tem a suas funções de forma resumidas pela Eq. (58), com $i = 1{,}2{,}3 \text{ ou } 4$, $-1 \leq \xi \leq 1$ e $-1 \leq \eta \leq 1$, conforme a Figura A-2.

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\,(1+\xi_i.\xi).(1+\eta_i.\eta) \tag{58}$$

A Eq. (59) e a Figura A-3 apresentam as funções de forma para um elemento quadrado quadrático.

$$\begin{cases} N_i(\xi,\eta) = \dfrac{1}{4}\,\xi_i.\xi.\eta_i.\eta.(1-\xi).(1-\eta) & i = 1{,}2{,}3{,}4 \\ N_i(\xi,\eta) = \dfrac{1}{2}(1-\xi^2).(1+\eta_i.\eta) & i = 5{,}7 \\ N_i(\xi,\eta) = \dfrac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi_i.\xi) & i = 6{,}8 \end{cases} \tag{59}$$

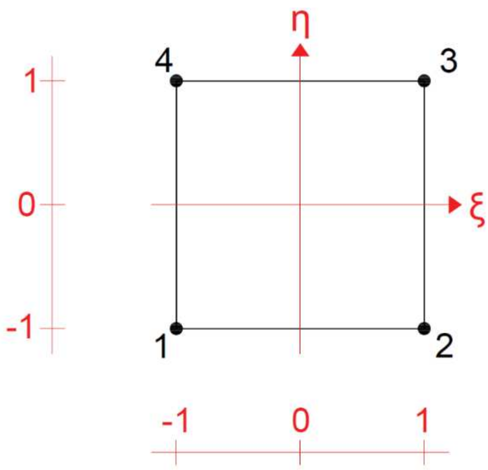


Figura A-2: Elemento quadrado linear. Fonte: Autor.

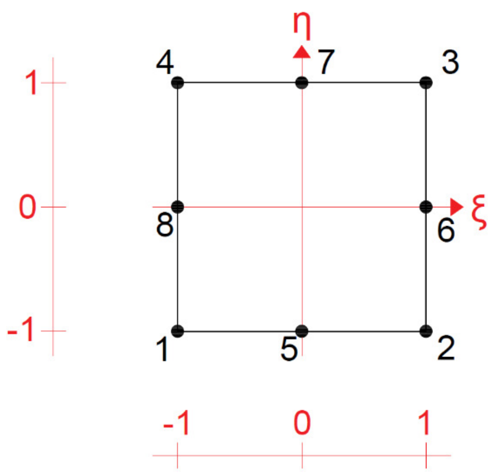


Figura A-3: Elemento quadrado quadrático. Fonte: Autor.

As Eqs. (60) e (61), a Figura A-4 e a Figura A-5 apresentam as funções de forma cúbica e quártica, respectivamente.

$$\begin{cases} N_i(\xi,\eta) = \dfrac{1}{256}\,(9.\xi^2-1).(1-\xi).(9.\eta^2-1).(1-\eta) \\ i = 1,2,3,4 \\ N_i(\xi,\eta) = \dfrac{9}{32}(1-\xi^2).(1+3.\xi_i.\xi).(1+\eta_i.\eta) \\ i = 5,6,9,10 \\ N_i(\xi,\eta) = \dfrac{9}{32}(1+\xi_i.\xi).(1+3.\eta_i.\eta).(1-\eta^2) \\ i = 7,8,11,12 \end{cases} \tag{60}$$

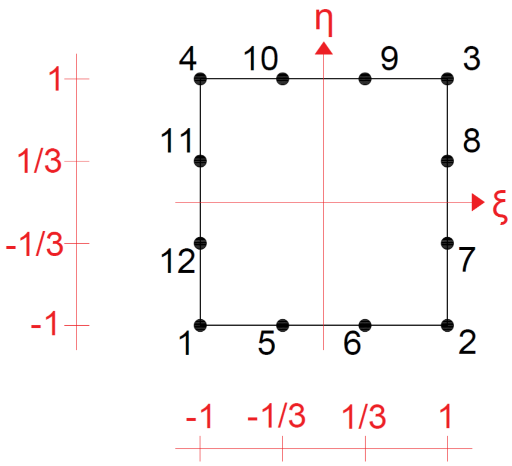


Figura A-4: Elemento quadrado cúbico. Fonte: Autor.

$$\begin{cases} N_i(\xi,\eta) = \dfrac{1}{36}\,\xi_i.\xi.\eta_i.\eta.(4.\xi^2-1).(1+\xi_i.\xi). \\ \quad (4.\eta^2-1).(1+\eta_i.\eta) \qquad i = 1,2,3,4 \\ N_i(\xi,\eta) = \dfrac{2}{3}(\xi_i.\xi).(\xi^2-1).(1+2.\xi_i.\xi).(1+\eta_i.\eta) \\ \quad i = 5,7,11,13 \\ N_i(\xi,\eta) = \dfrac{2}{3}(\eta_i.\eta).(1-\eta^2).(1+\xi_i.\xi).(1+2.\eta_i.\eta) \\ \quad i = 8,10,14,16 \\ N_i(\xi,\eta) = (1-\xi^2).(1-\eta^2) \qquad i = 17 \end{cases} \tag{61}$$

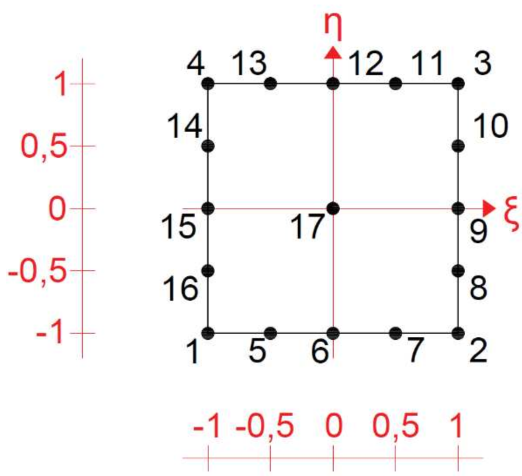


Figura A-5: Elemento quadrado quártico. Fonte: Autor.

Todas as funções de forma apresentadas têm como base um sistema local de coordenadas $\xi \times \eta$. Podemos relacionar o sistema local com o sistema global de coordenadas $x \times y$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta).X_i \\ y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta).Y_i \end{cases} \tag{62}$$

sendo n o número de nós do elemento, X_i e Y_i as coordenadas globais dos nós do elemento.

A derivada da função de forma em relação ao sistema global é expressa pela Eq. (63). O termo $[\,J(\xi,\eta)\,]$ corresponde à matriz Jacobiana, definida pela Eq. (64).

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial y} \end{pmatrix} = [\,J(\xi,\eta)\,]^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{63}$$

$$[\,J(\xi,\eta)\,] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} X_i & \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} X_i & \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} Y_i \end{bmatrix} \tag{64}$$

iv. Integração Numérica

O valor da integral sobre o elemento finito pode ser obtido numericamente pela quadratura de Gauss-Legendre:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\xi d\eta = \sum_{j=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n_2} W_{jk}.f\left(\xi_j,\eta_k\right) \tag{65}$$

sendo n_1 e n_2 o número de pontos de integração nos eixos ξ e η, W_{jk} é o peso do ponto de integração e f é uma função a ser integrada no domínio. Os pontos de integração e os respectivos pesos até a ordem quártica são apresentados na Tabela A-1.

Tabela A-1: Pontos de integração e pesos de Gauss-Legendre. Fonte: Autor.

$n_1 \times n_2$	ξ_j	η_k	W_{jk}
1 x 1	0	0	4
2 x 2	-0,57735	-0,57735	1
	0,57735	-0,57735	1
	0,57735	0,57735	1
	-0,57735	0,57735	1
3 x 3	-0,77459	-0,77459	25/81
	0	-0,77459	40/81
	0,77459	-0,77459	25/81
	-0,77459	0	40/81
	0	0	64/81
	0,77459	0	40/81
	-0,77459	0,77459	25/81
	0	0,77459	40/81
	0,77459	0,77459	25/81
4 x 4	-0,86113	-0,86113	0,121
	-0,86113	-0,33998	0,22685
	-0,86113	0,33998	0,22685
	-0,86113	0,86113	0,121
	-0,33998	-0,86113	0,22685
	-0,33998	-0,33998	0,42529
	-0,33998	0,33998	0,42529
	-0,33998	0,86113	0,22685
	0,33998	-0,86113	0,22685
	0,33998	-0,33998	0,42529
	0,33998	0,33998	0,42529
	0,33998	0,86113	0,22685
	0,86113	-0,86113	0,121
	0,86113	-0,33998	0,22685
	0,86113	0,33998	0,22685
	0,86113	0,86113	0,121

$n_1 \times n_2$	ξ_j	η_k	W_{jk}
5 x 5	-0,90618	-0,90618	0,05613
	-0,90618	-0,53847	0,1134
	-0,90618	0	0,13479
	-0,90618	0,53847	0,1134
	-0,90618	0,90618	0,05613
	-0,53847	-0,90618	0,1134
	-0,53847	-0,53847	0,22909
	-0,53847	0	0,27229
	-0,53847	0,53847	0,22909
	-0,53847	0,90618	0,1134
	0	-0,90618	0,13479
	0	-0,53847	0,27229
	0	0	0,32363
	0	0,53847	0,27229
	0	0,90618	0,13479
	0,53847	-0,90618	0,1134
	0,53847	-0,53847	0,22909
	0,53847	0	0,27229
	0,53847	0,53847	0,22909
	0,53847	0,90618	0,1134
	0,90618	-0,90618	0,05613
	0,90618	-0,53847	0,1134
	0,90618	0	0,13479
	0,90618	0,53847	0,1134
	0,90618	0,90618	0,05613

v. Estado Plano de Tensão

Considere uma viga em estado plano de tensão (Figura A-6). Essa viga possui espessura constante (e), com cargas distribuídas ao longo da espessura. Assume-se que as componentes de σ_{zz}, σ_{xz} e τ_{yz} são nulas, ficando a viga submetida as componentes σ_{xx}, σ_{yy} e τ_{xy}.

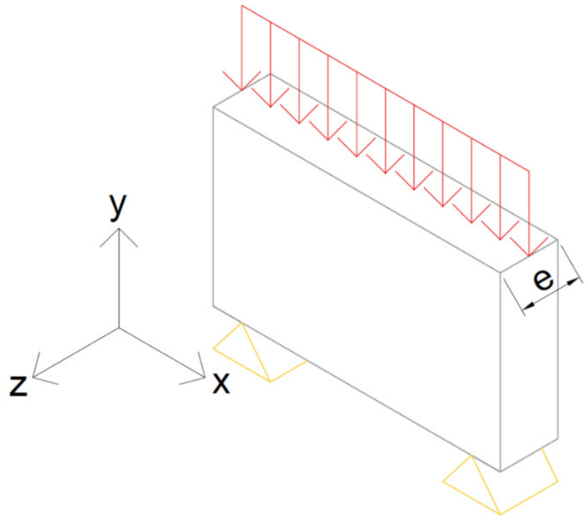


Figura A-6: Estado plano de tensão. Fonte: Autor.

No estado plano, a matriz de rigidez do elemento é calculada por:

$$[K_e] = e.\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n_2} W_{jk}.\left[B(\xi_j,\eta_k)\right]^T [D]\left[B(\xi_j,\eta_k)\right]\det\left[J(\xi_j,\eta_k)\right] \tag{66}$$

sendo $\det[J(\xi_j,\eta_k)]$ o determinante da matriz Jacobiana. No estado plano, a deformação por nó é expressa por:

$$[B_i(\xi_j,\eta_k)] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i(\xi_j,\eta_k)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_i(\xi_j,\eta_k)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i(\xi_j,\eta_k)}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i(\xi_j,\eta_k)}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{67}$$

Por exemplo, se o elemento for composto por quatro nós, a matriz de deformação é:

$$[B(\xi_j,\eta_k)] = [B_1(\xi_j,\eta_k) \quad B_2(\xi_j,\eta_k) \quad B_3(\xi_j,\eta_k) \quad B_4(\xi_j,\eta_k)] \tag{68}$$

A matriz de elasticidade é:

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{69}$$

sendo E e μ, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material, respectivamente.

A matriz de massa do elemento fica:

$$[M_e] = e.\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n_2} W_{jk}.\rho.\left[N(\xi_j,\eta_k)\right]^T\left[N(\xi_j,\eta_k)\right]\det\left[J(\xi_j,\eta_k)\right] \tag{70}$$

No estado plano, cada nó da matriz de funções de forma tem o seguinte formato:

$$\left[N_i(\xi_j,\eta_k)\right] = \begin{bmatrix} N_i(\xi_j,\eta_k) & 0 \\ 0 & N_i(\xi_j,\eta_k) \end{bmatrix} \tag{71}$$

Para um elemento composto por quatro nós temos:

$$\left[N(\xi_j,\eta_k)\right] = \left[N_1(\xi_j,\eta_k) \quad N_2(\xi_j,\eta_k) \quad N_3(\xi_j,\eta_k) \quad N_4(\xi_j,\eta_k)\right] \tag{72}$$

APÊNDICE B: O MÉTODO DE NEWMARK (1959)

O método de Newmark (1959) é uma das metodologias para integração no tempo. Ele estabelece a seguinte relação entre o deslocamento (u), velocidade $(\dot{u})$ e aceleração $(\ddot{u})$ de acordo com o avanço no tempo (Δt):

$$\begin{cases} \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + (1-\gamma)\Delta t\, \ddot{u}_i + \gamma\, \Delta t\, \ddot{u}_{i+1} \\ u_{i+1} = u_i + \Delta t\, \dot{u}_i + \frac{1}{2}\Delta t^2(1-2\,\beta)\ddot{u}_i + \frac{1}{2}\Delta t^2(2\,\beta)\ddot{u}_{i+1} \end{cases} \tag{73}$$

sendo β e γ constantes a serem adotadas de acordo com a tendência de aceleração desejável. Os valores de $\gamma = 0{,}5$ e $\beta = 0{,}25$ resultam na aceleração média. O subíndice i corresponde ao instante atual de tempo e o subíndice $i+1$ ao futuro, de tal modo, que são construídas as seguintes relações:

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + \Delta u_i \rightarrow \Delta u_i = u_{i+1} - u_i \\ \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i \rightarrow \Delta \dot{u}_i = \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i \\ \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i \rightarrow \Delta \ddot{u}_i = \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i \end{cases} \tag{74}$$

Adotando-se $\gamma = 0{,}5$ e $\beta = 0{,}25$ e usando as relações de (74), reescreve-se a Eq. (73):

$$\begin{cases} \Delta \dot{u}_i = \left(\frac{2}{\Delta t_i}\right)\Delta u_i - 2\dot{u}_i \\ \Delta \ddot{u}_i = \left(\frac{4}{\Delta t_i^2}\right)(\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t_i) - 2\ddot{u}_i \end{cases} \tag{75}$$

este formato é útil pois é escrito em função dos parâmetros iniciais e da variação do deslocamento (Δu_i).

APÊNDICE C: O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

O método de Newton-Raphson (Isaac Newton, 1646-1727, e Joseph Raphson, 1648-1715) é um dos procedimentos mais conhecidos para resolução de problemas não-lineares. O método faz uso da primeira derivada para estipular o avanço do procedimento. Define-se $\vec{F}(\vec{x})$ o vetor de funções dependentes do vetor de parâmetro $\vec{x}$, ambos de tamanho n. Define-se $[J(\vec{x})]$ a matriz Jacobiana de $\vec{F}(\vec{x})$:

$$[J(\vec{x})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n(\vec{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{76}$$

O método de Newton-Raphson segue as seguintes etapas:

1. Estabelecer um conjunto de parâmetros iniciais para $\vec{x}$, um número máximo de iterações (i_{max}), uma tolerância para convergência ($tol = 10^{-6}$, por exemplo) e um contador de iterações inicializado com $i = 1$.
2. Calcular $\vec{F}(\vec{x})$ e $[J(\vec{x})]$.
3. Calcular a norma de $\vec{F}(\vec{x})$: $\left|\vec{F}(\vec{x})\right| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(F(\vec{x})\right)^2}$.
4. Se $\left|\vec{F}(\vec{x})\right| < tol$, a solução é $\vec{x}$, interromper o procedimento.
5. Resolver o sistema $[J(\vec{x})]\ \Delta\vec{x} = -\vec{F}(\vec{x})$.
6. Calcular $\vec{x} = \vec{x} + \Delta\vec{x}$. Incrementar o contador: $i = i + 1$.
7. Se $i > i_{max}$, interromper o processo, o método não convergiu no número estipulado de iterações.
8. Retornar para **2**.

APÊNDICE D: MODELAGEM E RESOLUÇÃO DO ENSAIO DE FLEXÃO EM TRÊS PONTOS

Como descrito na Seção 4.3, ao serem consideradas baixas taxas de carregamento, o equacionamento do problema é expresso por:

$$\left[K\left(\vec{\dot{U}}_m\right)\right]\overrightarrow{\Delta U_i} = \overrightarrow{\Delta F_i} \tag{77}$$

sendo $\vec{\dot{U}}_m$ corresponde a velocidade média no intervalo de integração:

$$\vec{\dot{U}}_m = \frac{\vec{\dot{U}}_{i+1}+\vec{\dot{U}}_i}{2} \tag{78}$$

A Eq. (77) é um sistema não-linear e necessita de um método numérico para convergência. Para iniciar o procedimento, vamos dividir o sistema de equações em dois grupos, aquele cujo as soluções são conhecidas, devido as condições de contorno (sub índice c), e aqueles que são dependentes (sub índice d). Faz parte do grupo c o deslocamento contendo a restrição do apoio móvel, o deslocamento vertical imposto δ, e os deslocamentos contendo os elementos de interface. Desse modo, reescreve-se a Eq. (77):

$$\begin{bmatrix} K_{dd}\left(\vec{\dot{U}}_m\right) & K_{dc}\left(\vec{\dot{U}}_m\right) \\ K_{cd}\left(\vec{\dot{U}}_m\right) & K_{cc}\left(\vec{\dot{U}}_m\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\Delta U}_{i_d} \\ \overrightarrow{\Delta U}_{i_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\Delta F}_{i_d} \\ \overrightarrow{\Delta F}_{i_c} \end{bmatrix} \tag{79}$$

$$\left[K_{dd}\left(\vec{\dot{U}}_m\right)\right]\overrightarrow{\Delta U}_{i_d} + \left[K_{dc}\left(\vec{\dot{U}}_m\right)\right]\overrightarrow{\Delta U}_{i_c} = \overrightarrow{\Delta F}_{i_d} \tag{80}$$

$$\left[K_{cd}\left(\vec{\dot{U}}_m\right)\right]\overrightarrow{\Delta U}_{i_d} + \left[K_{cc}\left(\vec{\dot{U}}_m\right)\right]\overrightarrow{\Delta U}_{i_c} = \overrightarrow{\Delta F}_{i_c} \tag{81}$$

Da Eq. (80) podemos escrever $\overrightarrow{\Delta U}_{i_d}$ em função de $\overrightarrow{\Delta U}_{i_c}$:

$$\overrightarrow{\Delta U}_{i_d} = \left[K_{dd}\left(\vec{\dot{U}}_m\right)\right]^{-1}\left\{\overrightarrow{\Delta F}_{i_d} - \left[K_{dc}\left(\vec{\dot{U}}_m\right)\right]\overrightarrow{\Delta U}_{i_c}\right\} \tag{82}$$

A partir da Eq. (82), define-se um critério de convergência para $\overrightarrow{\Delta U}_{i_d}$ (essa rotina, para menções futuras, é chamada de **Bloco A**):

1. Assumir um valor inicial para $\vec{\dot{U}}_{i+1}$ e $\overrightarrow{\Delta U}_{i_d}$ (por exemplo, $\vec{\dot{U}}_{i+1}$=$\vec{\dot{U}}_i$ e $\overrightarrow{\Delta U}_{i_d} = \vec{0}$), um contador de ciclos ($c = 0$) e um limite de ciclos (por exemplo, $lim = 100$).
2. Calcular $\vec{\dot{U}}_m = \frac{\vec{\dot{U}}_{i+1}+\vec{\dot{U}}_i}{2}$.
3. Calcular $\left[K\left(\vec{\dot{U}}_m\right)\right]$ e obter $\left[K_{dc}\left(\vec{\dot{U}}_m\right)\right]$ e $\left[K_{dd}\left(\vec{\dot{U}}_m\right)\right]$.
4. Obter $\overrightarrow{\Delta U}_{i_d}^{\,*}$=$\left[K_{dd}\left(\vec{\dot{U}}_m\right)\right]^{-1}\left\{\overrightarrow{\Delta F}_{i_d} - \left[K_{dc}\left(\vec{\dot{U}}_m\right)\right]\overrightarrow{\Delta U}_{i_c}\right\}$
5. Calcular $r = \left|\overrightarrow{\Delta U}_{i_d}^{\,*} - \overrightarrow{\Delta U}_{i_d}\right|$, sendo $|\vec{x}|$ a norma do vetor $\vec{x}$.
6. Se $r \leq tol$ (sendo tol um valor de tolerância pequeno, por exemplo, 10^{-6}), $\overrightarrow{\Delta U}_{i_d}^{\,*}$ é a solução do problema $\left(\overrightarrow{\Delta U}_{i_d} = \overrightarrow{\Delta U}_{i_d}^{\,*}\right)$ e encerrar o processo.
7. Adicionar 1 no contador de ciclos ($c = c + 1$). Se $c > lim$, interromper o método, não foi possível convergir.
8. Se $r > tol$, faça $\overrightarrow{\Delta U}_{i_d} = \overrightarrow{\Delta U}_{i_d}^{\,*}$ e calcular $\vec{\dot{U}}_{i+1} = \left(\frac{2}{\Delta t_i}\right)\overrightarrow{\Delta U}_i - \vec{\dot{U}}_i$. Retornar ao passo **2**.

Quando a tensão nodal que contém um elemento de interface visco-coesiva ultrapassa f_t, esse nó deixa de ter a restrição de deslocamento nulo na horizontal e passa a ser orientado pela relação visco-coesiva. Define-se $\overrightarrow{\Delta U}_{i_v}$ o vetor de deslocamentos referentes a esses nós e que também estão contidos em $\overrightarrow{\Delta U}_{i_c}$.

Uma vez que só metade do problema é representado, a abertura nodal da fratura corresponde ao dobro do deslocamento nodal: $\vec{w}_{i+1} = 2\,\vec{U}_{i+1_v}$. $\vec{U}_{i+1_v}$ é calculado com base na Eq. (74) (Apêndice B): $\vec{U}_{i+1_v} = \vec{U}_{i_v} + \overrightarrow{\Delta U}_{i_v}$. A taxa de abertura de fratura é calculada de forma similar: $\vec{\dot{w}}_{i+1} = 2\,\vec{\dot{U}}_{i+1_v}$.

Utiliza-se o método de Newton-Raphson (Apêndice C) para a obtenção de $\vec{U}_{i+1_v}$. O sistema que precisa ser resolvido é $\vec{\sigma}_{i+1_v}(\vec{U}_{i+1}, \vec{\dot{U}}_m) = \vec{V}(\vec{w}_{i+1}, \vec{\dot{w}}_m)$, em que $\vec{\sigma}_{i+1_v}$ é o vetor de tensões normais nodais referentes aos nós rompidos pela fratura fictícia e calculados a partir dos elementos finitos com os valores de $\vec{U}_{i+1}$ e $\vec{\dot{U}}_m$. $\vec{V}(\vec{w}_{i+1}, \vec{\dot{w}}_m)$ é o vetor de tensões calculados pelo modelo visco-coesivo proposto.

Reescreve-se $\vec{V}(\vec{w}_{i+1}, \vec{w}_m)$ em função de $\vec{U}_{i+1}$ e $\vec{\dot{U}}_m$, da seguinte forma: $\vec{V}\left(2\,\vec{U}_{i+1_v}, 2\,\vec{\dot{U}}_{m_v}\right)$. Pelas Eqs. (74), (75) e (78) é possível calcular $\vec{\dot{U}}_m$ em função de $\vec{U}_{i+1}$, podendo-se omitir $\vec{\dot{U}}_m$ como parâmetro. Das Eqs. (74) e (82) pode-se reduzir $\vec{U}_{i+1}$ para $\vec{U}_{i+1_v}$. O sistema que se deseja a solução é:

$$\overrightarrow{F_N}(\vec{U}_{i+1_v}) = \vec{\sigma}_{i+1_v}(\vec{U}_{i+1_v}) - \vec{V}(2\,\vec{U}_{i+1_v}) = \vec{0} \qquad (83)$$

A rotina para obter $\vec{U}_{i+1_v}$ é (chamada de **Bloco B** para referências futuras):

1. Assumir um valor inicial para $\vec{U}_{i+1_v}$, um contador de ciclos ($c = 0$) e um limite de ciclos (por exemplo, $lim = 100$).
2. Seguir a rotina do **Bloco A**, com os valores atualizados de $\vec{U}_{i+1_v}$, para obter $\overrightarrow{\Delta U}_{i_d}$ e, consequentemente, $\vec{U}_{i+1_d}$.
3. Faça $r = \left|\overrightarrow{F_N}(\vec{U}_{i+1_v})\right|$, sendo $|\vec{x}|$ a norma do vetor $\vec{x}$.
4. Se $r \leq tol$ (sendo tol um valor de tolerância pequeno, por exemplo, 10^{-6}), $\vec{U}_{i+1_v}$ é a solução do problema e encerra-se o processo.
5. Adicionar 1 no contador de ciclos ($c = c + 1$). Se $c > lim$, interrompa o método, não foi possível convergir.
6. Se $r > tol$, calcular a matriz Jacobiana ($[J]$) de $\overrightarrow{F_N}(\vec{U}_{i+1_v})$. Atualizar o valor de $\vec{U}_{i+1_v}$ com o passo de Newton, fazendo $\vec{U}_{i+1_v} = \vec{U}_{i+1_v} - [J]^{-1}\,\overrightarrow{F_N}(\vec{U}_{i+1_v})$. Retornar ao passo **2.**

Com as metodologias do **Bloco A** e **Bloco B** definidas, pode-se estabelecer as rotinas para a obtenção das curvas $P - \delta$ e $P - CMOD$ numéricas. Em ensaios em que a taxa do atuador ($\dot{\delta}$) é controlada, segue-se o seguinte processo:

1. Estabelecer uma variação pequena da movimentação do atuador, por exemplo, $\Delta\delta = 5\ \mu m$, e um valor mínimo de δ ou $CMOD$ que as curvas devam ser calculadas. Armazenar os valores iniciais de $\delta = 0$, $CMOD = 0$ e $P = 0$ para as curvas e iniciar o ciclo de cálculos para $\delta = \Delta\delta$.
2. Calcular $\Delta t = \Delta\delta/\dot{\delta}$.

3. Se nenhum elemento de interface iniciou o processo de fratura, executar o **Bloco A**, caso contrário, executar o **Bloco B**.
4. Com os valores obtidos de $\vec{U}_{i+1}$, verificar se algum elemento de interface intacto atingiu ou superou a tensão f_t. Em caso afirmativo, retornar a **3**.
5. Pelo modelo de elementos finitos, calcular $CMOD$ e P para os valores de $\vec{U}_{i+1}$ obtidos e atualize as curvas $P - \delta$ e $P - CMOD$.
6. Verificar se o valor de δ ou $CMOD$ superou o valor mínimo. Em caso afirmativo, interromper o método: as curvas $P - \delta$ e $P - CMOD$ foram calculadas.
7. Atualizar os valores de $\vec{U}_i$, $\dot{\vec{U}}_i$ e $\ddot{\vec{U}}_i$ com os valores de $\vec{U}_{i+1}$, $\dot{\vec{U}}_{i+1}$ e $\ddot{\vec{U}}_{i+1}$. Aumentar o valor de δ em mais $\Delta\delta$ e retorne ao passo **3**.

Em ensaios em que a taxa do $CMOD$ (v_{CMOD}) é controlada, segue-se o seguinte processo de cálculo:

1. Estabelecer uma variação pequena da movimentação do atuador, por exemplo, $\Delta\delta = 5\ \mu m$, e um valor mínimo de δ ou $CMOD$ que as curvas devem ser calculadas. Armazenar os valores iniciais de $\delta = 0$, $CMOD = 0$ e $P = 0$.
2. Para $\delta = \Delta\delta$, calcular o $CMOD$ desconsiderando os efeitos de taxa de carregamento. Calcular $\Delta t = 2\, U_{CMOD}/v_{CMOD}$, sendo U_{CMOD} o deslocamento no nó que se mede o $CMOD$.
3. Determinar δ pelo o método de Newton-Rahpson (Apêndice C) para que $|2\,\dot{U}_{CMOD} - v_{CMOD}| < tol$, sendo tol uma tolerância. No processo iterativo de δ, resolver o **Bloco A** ou **Bloco B**, de acordo com o estado do modelo (íntegro ou fraturado).
4. Com os valores obtidos de $\vec{U}_{i+1}$, verificar se algum elemento de interface intacto atingiu ou superou a tensão f_t. Em caso afirmativo, retornar à **3**.
5. Pelo modelo de elementos finitos, calcular $CMOD$ e P para os valores de $\vec{U}_{i+1}$ obtidos e alimentar as curvas $P - \delta$ e $P - CMOD$.

6. Verificar se o valor de δ ou $CMOD$ superou o valor mínimo. Em caso afirmativo, interromper o método: as curvas $P - \delta$ e $P - CMOD$ foram calculadas.
7. Atualizar os valores de $\vec{U}_i$, $\dot{\vec{U}}_i$ e $\ddot{\vec{U}}_i$ com os valores de $\vec{U}_{i+1}$, $\dot{\vec{U}}_{i+1}$ e $\ddot{\vec{U}}_{i+1}$. Aumentar o valor de δ em mais $\Delta\delta$ e retornar ao passo **3**.

APÊNDICE E: O MÉTODO DE LEVENBERG-MARQUARDT

O método de Levenberg-Marquardt (Marquardt, 1963, Levenberg, 1944) é um procedimento que visa identificar o conjunto de parâmetros $\vec{p}$ que minimizem a função de erro ξ_{sqr}. O procedimento de análise inversa descrito a seguir foi baseado no trabalho de Sousa (2011), com algumas modificações para mais de um ensaio.

Define-se a seguinte função de erro para o conjunto de ensaios em diferentes taxas de carregamento:

$$\xi_{sqr}(\vec{p}) = \sum_{j=1}^{n_t} \sum_{i=1}^{n_{e\,j}} \int_{h_i}^{\mathrm{h}_f} \left[P_{exp_{i,j}}(h) - P_{num_j}(h, \vec{p}) \right]^2 dh \tag{84}$$

sendo

- n_t o número de taxas de carregamento.
- $n_{e\,j}$ o número de ensaios experimentais na taxa de carregamento j.
- h o deslocamento medido (podendo ser δ ou $CMOD$, de acordo com o ensaio realizado).
- h_i e h_f correspondem ao intervalo de início e fim, respectivamente, no qual as curvas devem ser comparadas.
- $P_{exp_{i,j}}$ a função que representa a resposta P (força do atuador) do ensaio i na taxa de carregamento j para um dado h.
- P_{num_j} a função que representa a resposta P numérica na taxa de carregamento j para um dado h.
- $\vec{p}$ o conjunto de parâmetros a serem ajustados (os parâmetros da curva coesiva, por exemplo).

O método de Levenberg-Marquardt faz uso do Gradiente (primeira derivada) e da Hessiana (segunda derivada) da função ξ_{sqr} como informação para estimar um sentido para o mínimo. A primeira derivada de ξ_{sqr} para um dado parâmetro p_k é expressa por:

$$\frac{\partial \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_k} = -2 \sum_{j=1}^{n_t} \sum_{\mathrm{i}=1}^{n_{e\,j}} \int_{h_i}^{h_f} \frac{\partial P_{num_j}(h, \vec{p})}{\partial p_k} \left[P_{exp_{i,j}}(h) - P_{num_j}(h, \vec{p}) \right] d \tag{85}$$

A segunda derivada, para um dado parâmetro p_l é expressa por:

$$\frac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_k \partial p_l} = 2\sum_{j=1}^{n_t}\sum_{i=1}^{n_{e_j}}\int_{h_i}^{h_f} \frac{\partial P_{num_j}(\nu,\vec{p})}{\partial p_k}\frac{\partial P_{num_j}(\nu,\vec{p})}{\partial p_l} - \frac{\partial^2 P_{num}(\nu,\vec{p})}{\partial p_k \partial p_l}\left[P_{exp_{i,j}}(h) - P_{num_j}(h,\vec{p})\right] dh \tag{86}$$

O segundo termo da integral de (86) é omitido na aplicação do método por ser muito menor em relação ao valor do primeiro termo e, também, por ser responsável por instabilidades quando próximo do mínimo. Dessa forma, a formulação da segunda derivada é reduzida para:

$$\frac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_k \partial p_l} = 2\sum_{j=1}^{n_t}\sum_{i=1}^{n_{e_j}}\int_{h_i}^{h_f} \frac{\partial P_{num_j}(\nu,\vec{p})}{\partial p_k}\frac{\partial P_{num_j}(\nu,\vec{p})}{\partial p_l} dh \tag{87}$$

Como P_{num_j} não é expresso por uma formulação analítica, as derivadas são aproximadas por diferenças finitas:

$$\frac{\partial P_{num_j}(\nu,\vec{p})}{\partial p_k} \cong \frac{P_{num_j}\left(\nu,\vec{p} + \overrightarrow{\delta p_k}\right) - P_{num_j}(\nu,\vec{p})}{\delta p_k} \tag{88}$$

sendo δp_k uma pequena variação no parâmetro p_k.

O vetor Gradiente $(\vec{G})$ e a matriz Hessiana $([H])$ são representados pelas Eqs. (89) e (90), respectivamente.

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_n} \end{pmatrix} \tag{89}$$

$$[H] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_1 \partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_1 \partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_n \partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_n \partial p_n} \end{pmatrix} \tag{90}$$

O diferencial do método de Levenberg-Marquardt para outros métodos, baseados no Gradiente e Hessiana, encontra-se na adição de um fator $(1 + \lambda)$ na diagonal principal da Hessiana ($[H_\lambda]$, Eq. (91)). A cada iteração do procedimento, λ é reavaliado. Se o valor de ξ_{sqr} for menor de um passo para o outro, o valor de λ é reduzido. Se o valor de ξ_{sqr} for maior de um passo para o outro, o valor de λ é aumentado. Quanto menor for o valor de λ, mais o método se aproxima do passo do método de Newton.

$$[H_\lambda] = \begin{pmatrix} (1+\lambda)\dfrac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_1 \partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_1 \partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_n \partial p_1} & \cdots & (1+\lambda)\dfrac{\partial^2 \xi_{sqr}(\vec{p})}{\partial p_n \partial p_n} \end{pmatrix} \tag{91}$$

A evolução do passo do método de Levenberg-Marquardt é expressa pelo vetor $\overrightarrow{\Delta p}$, e é obtido pela solução do sistema (92). A nova estimativa do ponto de mínimo ($\vec{p}_{new}$) é obtida por (93).

$$[H_\lambda]\,.\,\overrightarrow{\Delta p} = -\vec{G} \tag{92}$$

$$\vec{p}_{new} = \vec{p} + \overrightarrow{\Delta p} \tag{93}$$

O método de Levenberg-Marquardt segue as seguintes etapas:

1. Estabelecer um conjunto de parâmetros $\vec{p}$ iniciais, um número máximo de iterações (c_{max}) e uma tolerância para $\overrightarrow{\Delta p}$ ($tol_{\overrightarrow{\Delta p}}$). Iniciar o contador em $c = 1$ e escolher um valor pequeno para iniciar λ, por exemplo, $\lambda = 0{,}001$.
2. Calcular $\xi_{sqr}(\vec{p})$.
3. Calcular $\vec{G}$ e $[H_\lambda]$ e obter $\overrightarrow{\Delta p}$ pela resolução de (92).
4. Se $\left|\overrightarrow{\Delta p}\right| \leq tol_{\overrightarrow{\Delta p}}$, sendo $\left|\overrightarrow{\Delta p}\right|$ a norma de $\overrightarrow{\Delta p}$, interromper o procedimento e retornar $\vec{p}$ como o ponto de mínimo.
5. Calcular $\vec{p}_{new} = \vec{p} + \overrightarrow{\Delta p}$ e $\xi_{sqr}(\vec{p}_{new})$.
6. Se $\xi_{sqr}(\vec{p}_{new}) \geq \xi_{sqr}(\vec{p})$, multiplicar λ por 10. Caso contrário, dividir λ por 10 e faça $\vec{p} = \vec{p}_{new}$.
7. Faça $c = c + 1$. Se $c > c_{max}$, interromper o procedimento, o método não convergiu no número de iterações estipuladas.
8. Retornar à etapa **2.**

No procedimento acima, optou-se por modificar λ durante as iterações por fatores de 10. Não é obrigatório o uso de fatores 10, podendo-se utilizar outros valores.

APÊNDICE F: O PROGRAMA FITFG

A janela inicial do programa é apresentada na Figura F- 1. Para iniciar, o usuário deve clicar na guia “Menu” e então selecionar para criar um arquivo novo ou abrir um arquivo de dados. Ao selecionar em criar um arquivo novo, é exibida a janela apresentada na Figura F- 2, onde o usuário deve escolher entre uma análise inversa “Estática” ou “Viscosa”.

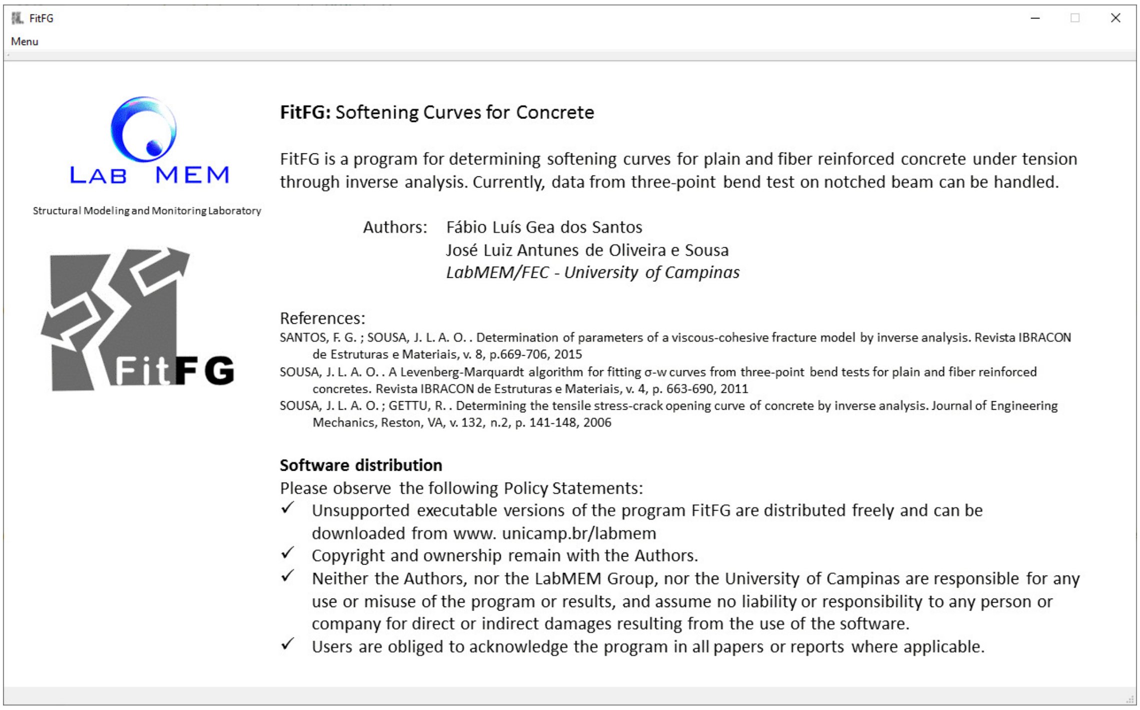


Figura F- 1: Janela inicial do programa FitFG. Fonte: Autor.

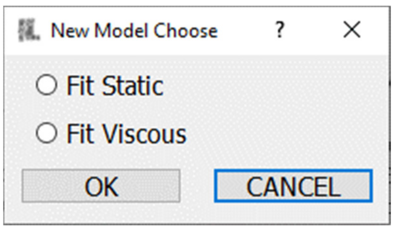


Figura F- 2: Janela de seleção de procedimento. Fonte: Autor.

i. Análise Inversa: Procedimento “Estático”

Esse procedimento começa com a solicitação do conjunto de dados experimentais (Figura F- 3). O usuário deve informar o tipo de ensaio (flexão em três pontos), o formato dos dados experimentais ($P - \delta$ ou $P - CMOD$) e carregar um arquivo de texto contendo as curvas experimentais. O arquivo texto é separado por colunas alternando entre os valores de força e deslocamento. Um exemplo de arquivo texto com três ensaios experimentais é apresentado na Figura F- 4. A interface de dados experimentais preenchida é exibida na Figura F- 5.

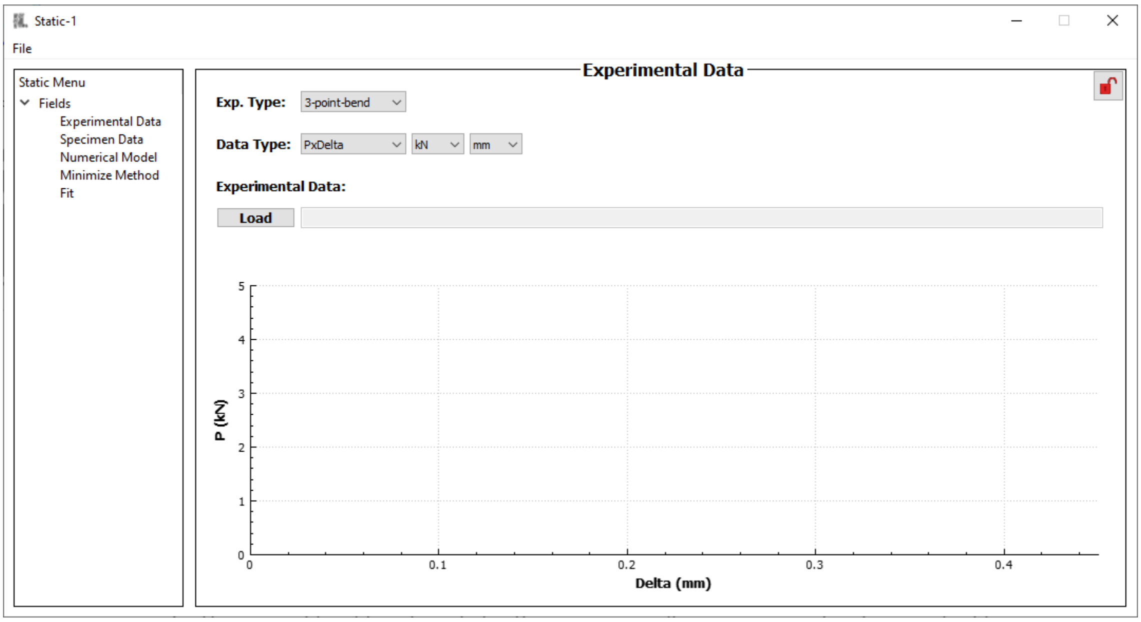
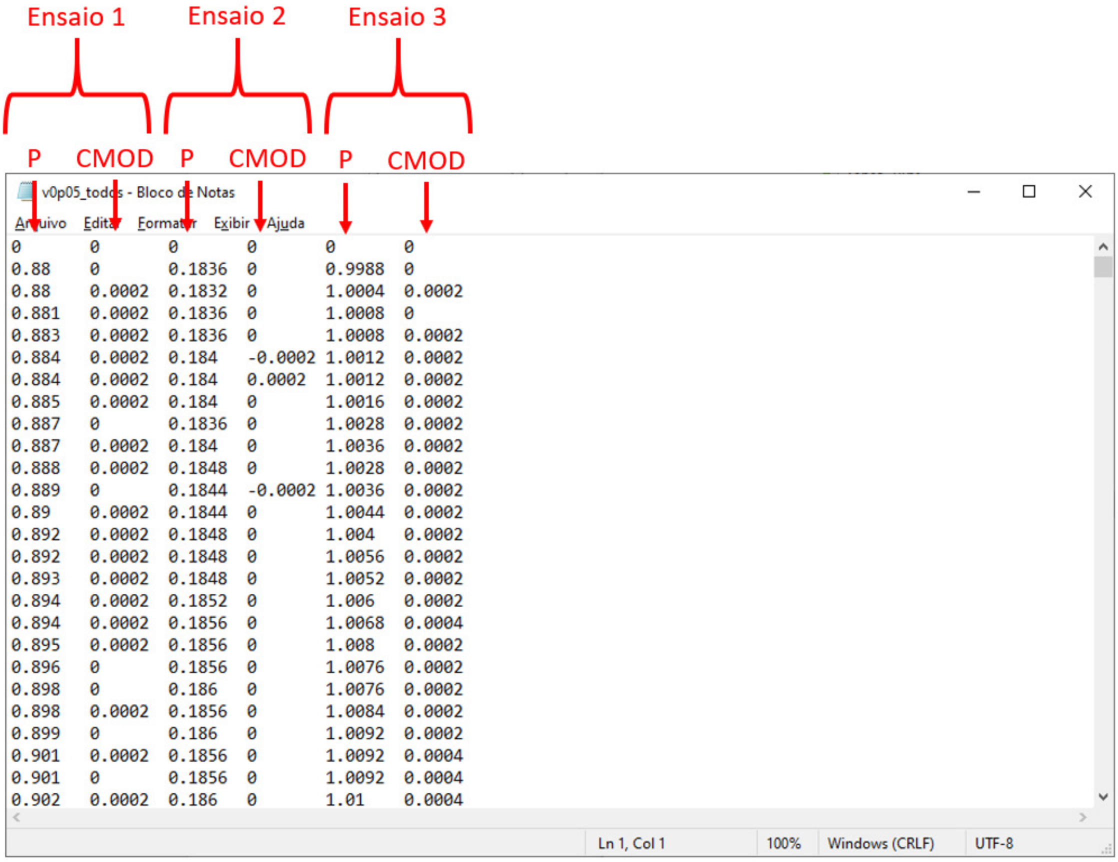


Figura F- 3: Janela inicial do procedimento estático. Fonte: Autor.

O próximo passo é clicar no campo "*Specimen Data*" da guia lateral. A próxima guia refere-se a informações geométricas do ensaio e do Módulo de Elasticidade. Não se é necessário saber o valor que melhor representa o Módulo de Elasticidade pois este pode ser selecionado como parâmetro da análise inversa. Um exemplo da interface preenchida é apresentado na Figura F- 6.

Segue-se para o campo "*Numerical Model*". Aqui o usuário seleciona um modelo numérico para simular o ensaio e um modelo para a curva coesiva. O usuário deve fornecer um conjunto de valores iniciais da curva coesiva e pode verificar o resultado do modelo numérico com esses parâmetros. Uma ilustração desta interface é exibida na Figura F- 7.



0	0	0	0	0	0
0.88	0	0.1836	0	0.9988	0
0.88	0.0002	0.1832	0	1.0004	0.0002
0.881	0.0002	0.1836	0	1.0008	0
0.883	0.0002	0.1836	0	1.0008	0.0002
0.884	0.0002	0.184	-0.0002	1.0012	0.0002
0.884	0.0002	0.184	0.0002	1.0012	0.0002
0.885	0.0002	0.184	0	1.0016	0.0002
0.887	0	0.1836	0	1.0028	0.0002
0.887	0.0002	0.184	0	1.0036	0.0002
0.888	0.0002	0.1848	0	1.0028	0.0002
0.889	0	0.1844	-0.0002	1.0036	0.0002
0.89	0.0002	0.1844	0	1.0044	0.0002
0.892	0.0002	0.1848	0	1.004	0.0002
0.892	0.0002	0.1848	0	1.0056	0.0002
0.893	0.0002	0.1848	0	1.0052	0.0002
0.894	0.0002	0.1852	0	1.006	0.0002
0.894	0.0002	0.1856	0	1.0068	0.0004
0.895	0.0002	0.1856	0	1.008	0.0002
0.896	0	0.1856	0	1.0076	0.0002
0.898	0	0.186	0	1.0076	0.0002
0.898	0.0002	0.1856	0	1.0084	0.0002
0.899	0	0.186	0	1.0092	0.0002
0.901	0.0002	0.1856	0	1.0092	0.0004
0.901	0	0.1856	0	1.0092	0.0004
0.902	0.0002	0.186	0	1.01	0.0004

Figura F- 4: Exemplo de arquivo de texto com as curvas experimentais. Fonte: Autor.

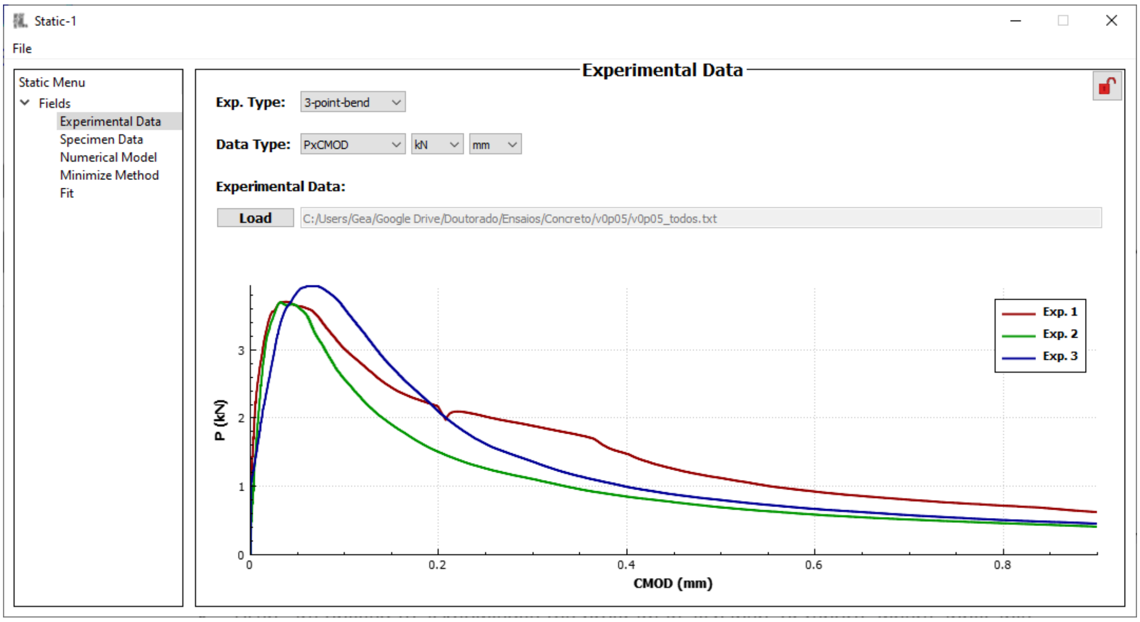


Figura F- 5: Interface de dados experimentais preenchida. Fonte: Autor.

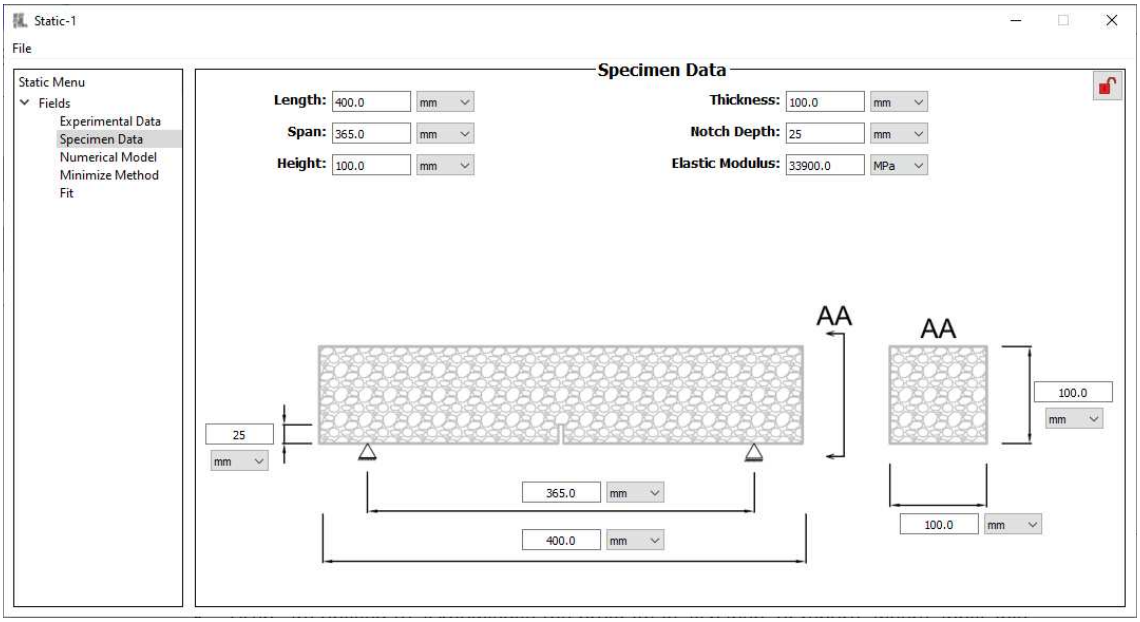


Figura F- 6: Interface de dados do corpo-de-prova. Fonte: Autor.

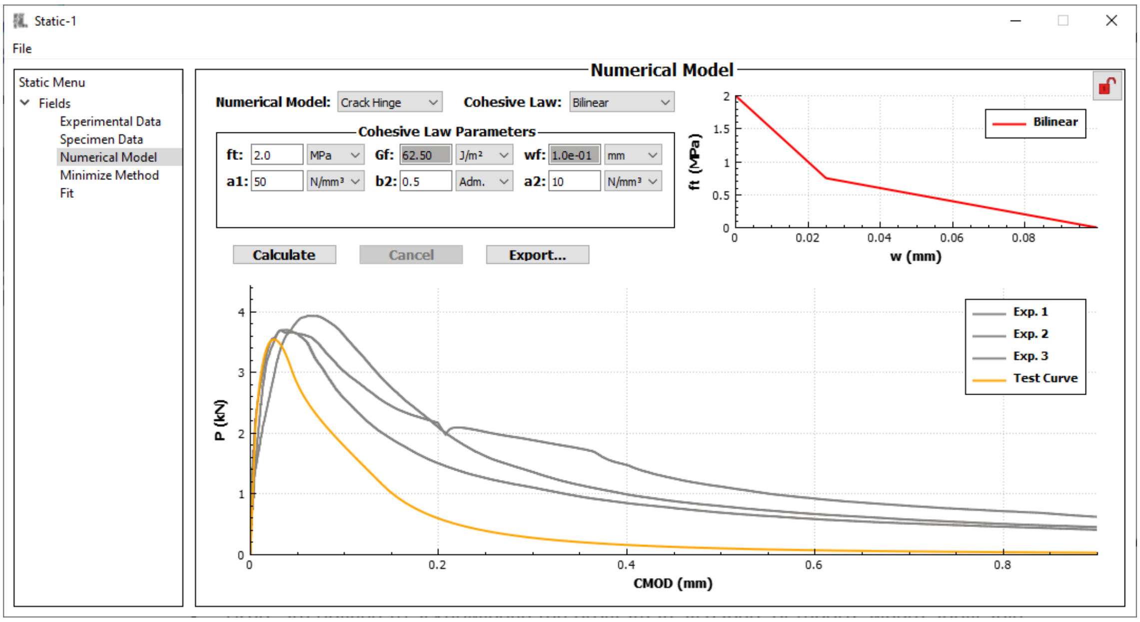


Figura F- 7: Exemplo da interface de dados do modelo numérico preenchida. Fonte: Autor.

O campo "*Minimize Method*" refere-se ao conjunto de parâmetros do procedimento de análise inversa. O usuário deve escolher o método e os critérios de análise, como tolerância de convergência, número máximo de iterações e intervalo de análise. O usuário também pode definir quais parâmetros devem ser ajustados. O campo "*Threads*" define quantos processos em paralelo podem ser utilizados durante a execução do procedimento. Um exemplo é apresentado na Figura F- 8.

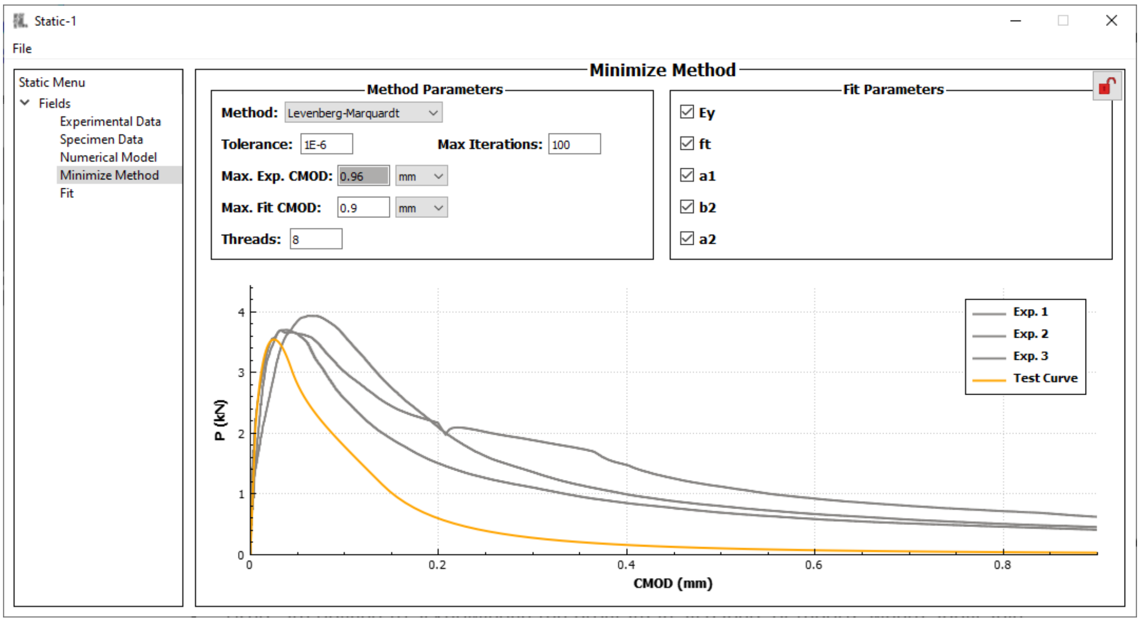


Figura F- 8: Exemplo da interface de dados da análise inversa. Fonte: Autor.

Para iniciar o procedimento de análise inversa, o usuário deve clicar no campo "*Fit*" da guia lateral, e na interface apresentada, clicar no botão "*Fit*". O usuário pode acompanhar a evolução dos parâmetros através da tabela e verificar a evolução da curva pelo gráfico. O resultado, após uma execução do procedimento, é apresentado na Figura F- 9. O usuário pode substituir os valores finais obtidos nos parâmetros iniciais clicando no botão "*Substitute*", e realizar outras análises se considerar necessário. Após uma análise inversa, a interface fica em estado não editável para que os campos não sejam modificados. Para modificar os campos, deve-se clicar no cadeado no canto superior direito.

ii. Análise Inversa: Procedimento "Viscoso"

O procedimento "viscoso" tem uma interface similar ao "estático". O processo inicia-se com o preenchimento dos dados experimentais. O usuário deve informar o tipo de ensaio (flexão em três pontos), o formato dos dados experimentais ($P-\delta$ ou $P-CMOD$), o tipo de controle de taxa de carregamento (δ ou $CMOD$), adicionar a quantidade de grupos de taxa de carregamento, carregando as respectivas curvas experimentais (arquivo texto) e informando a taxa de carregamento de cada grupo. Um exemplo desta interface preenchida é exibido na Figura F- 10.

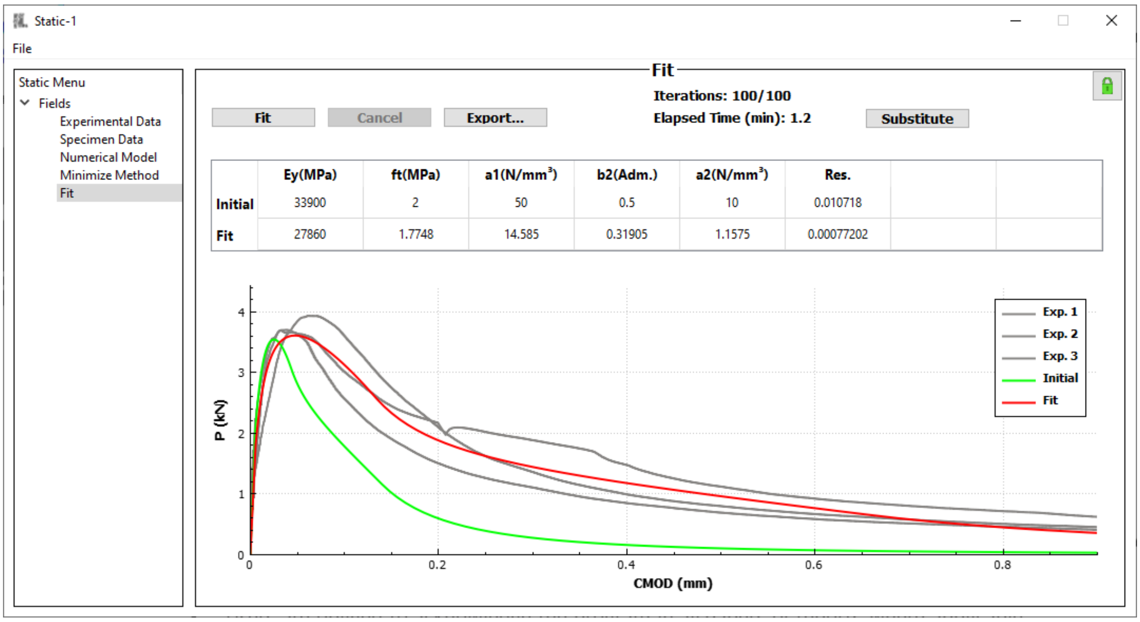


Figura F- 9: Resultado após a execução da análise inversa. Fonte: Autor.

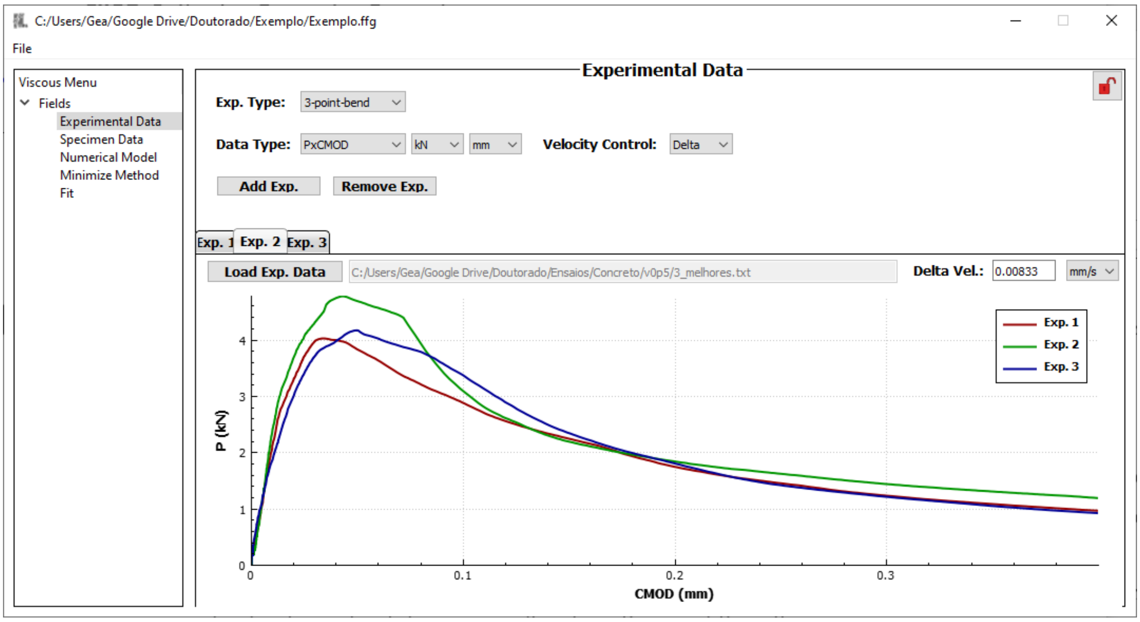


Figura F- 10: Interface de dados experimentais preenchida. Fonte: Autor.

O próximo passo é clicar no campo "*Specimen Data*" da guia lateral. A próxima guia refere-se a informações geométricas do ensaio, do módulo de elasticidade e do modelo visco-elástico. Os parâmetros do modelo visco-elástico podem ser ajustados por análise inversa, inclusive o próprio módulo de elasticidade. A interface preenchida é apresentada na Figura F- 11.

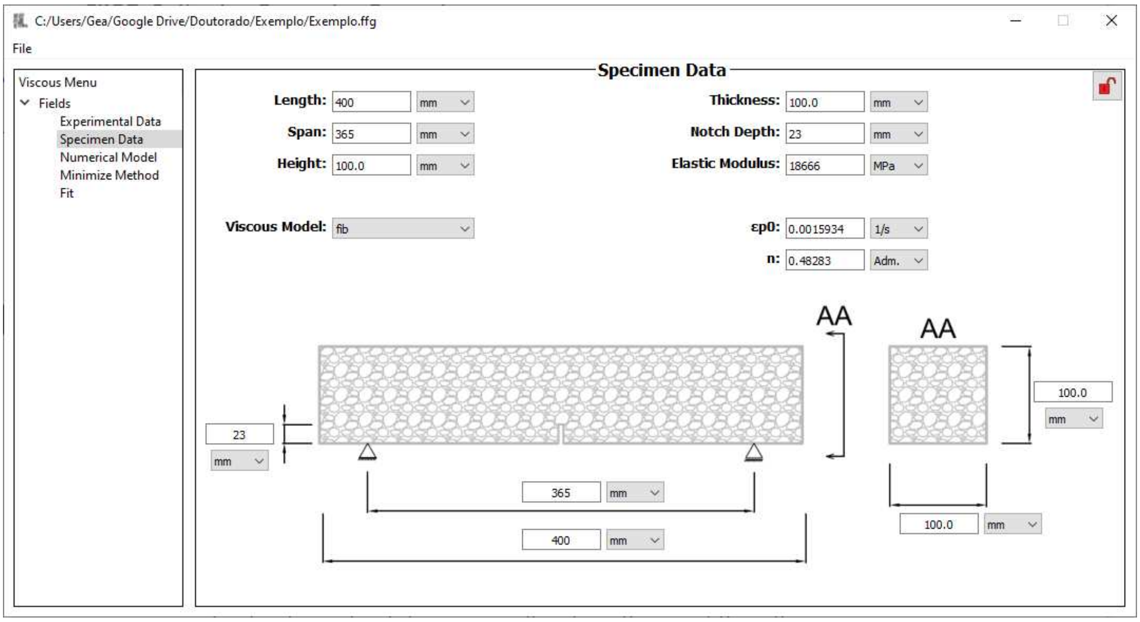


Figura F- 11: Interface de dados do corpo-de-prova. Fonte: Autor.

Segue-se para o campo "*Numerical Model*". Aqui o usuário seleciona um modelo numérico para simular o ensaio, um modelo para a curva coesiva e para o efeito visco-coesivo. O usuário deve fornecer um conjunto de valores iniciais e pode verificar o resultado do modelo numérico com esses parâmetros. Um exemplo é apresentado na Figura F- 12.

O campo "*Minimize Method*" corresponde às informações referentes ao procedimento de análise inversa. O usuário deve escolher o método e os critérios de análise, como tolerância de convergência, número máximo de iterações e intervalo de análise. O usuário também pode definir quais parâmetros devem ser ajustados. O campo "*Threads*" define quantos processos em paralelo podem ser utilizados durante a execução do procedimento. Esta interface preenchida é exibida na Figura F- 13.

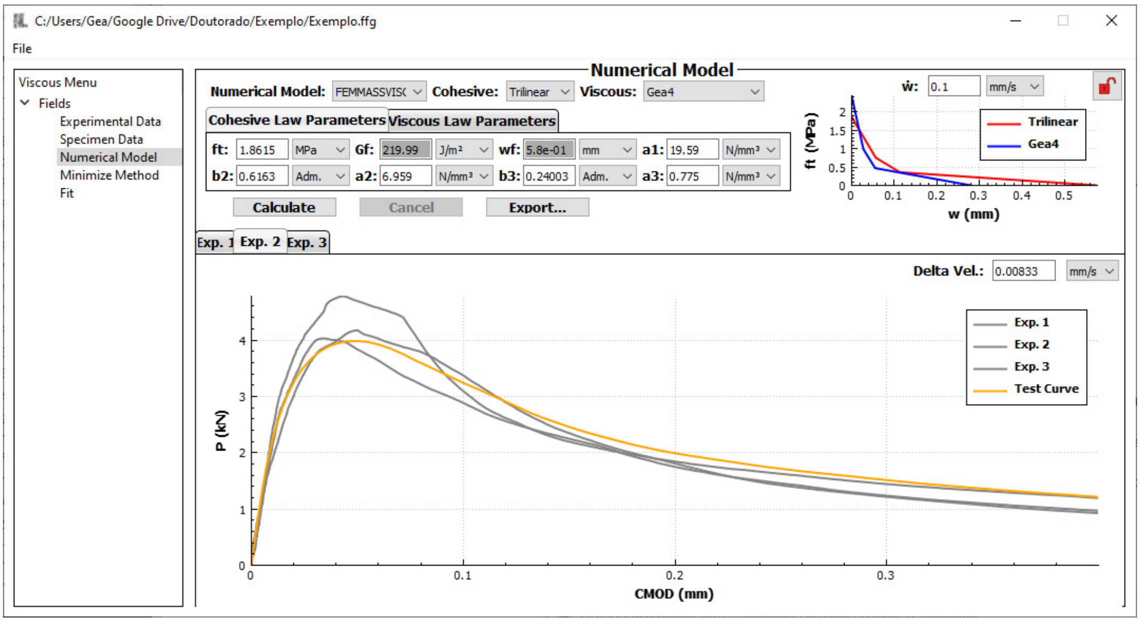


Figura F- 12: Exemplo da interface de dados do modelo numérico preenchida. Fonte: Autor.

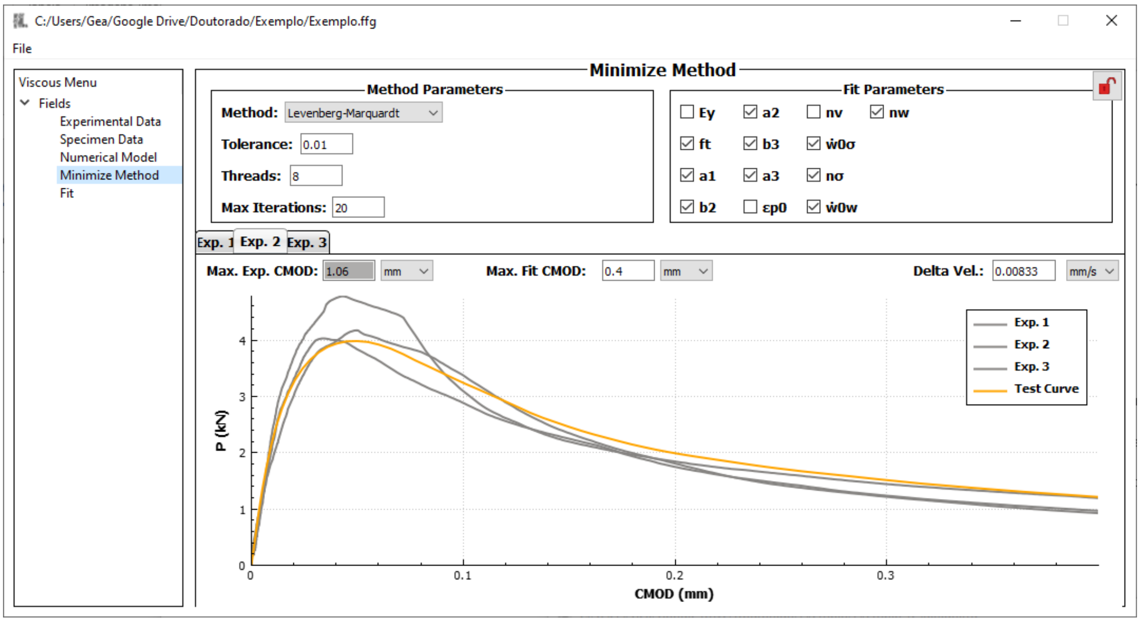


Figura F- 13: Exemplo da interface de dados da análise inversa. Fonte: Autor.

Para iniciar o procedimento de análise inversa, o usuário deve clicar no campo "*Fit*" da guia lateral, e na interface, clicar no botão "*Fit*". O usuário pode acompanhar a evolução dos parâmetros através da tabela e verificar a evolução da curva pelo gráfico. O resultado, após uma execução do procedimento, é apresentado na Figura F- 14. O usuário pode substituir os valores finais obtidos nos parâmetros iniciais clicando no botão "*Substitute*", e realizar outras análises se considerar necessário. Após uma análise inversa, a interface fica em estado não editável para que os campos não sejam modificados. Para modificar os campos, deve-se clicar no cadeado no canto superior direito.

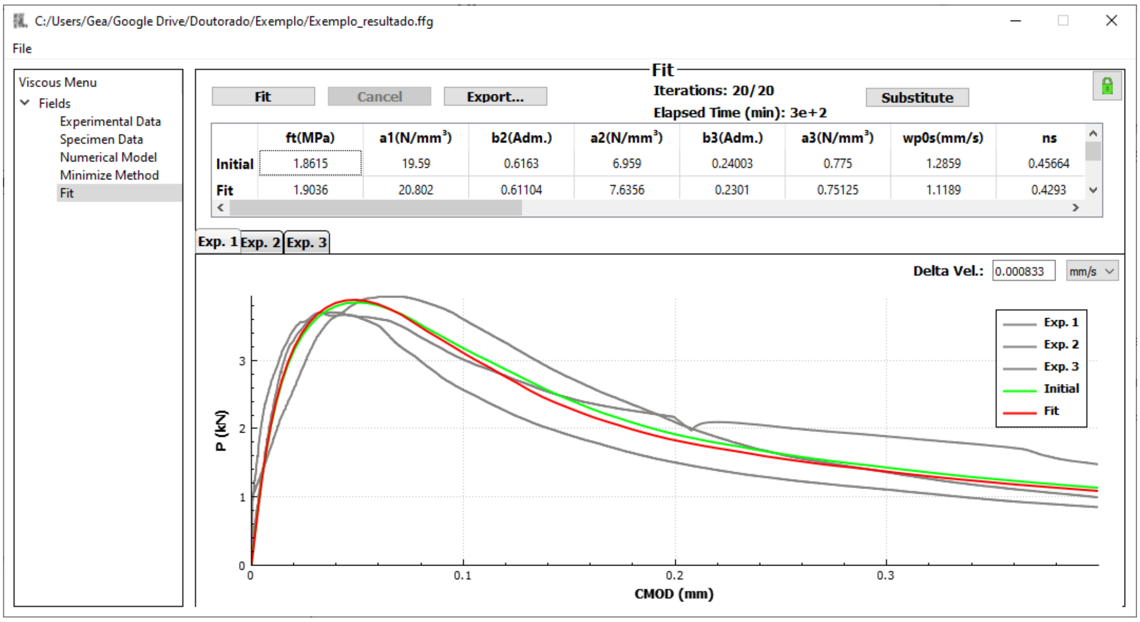


Figura F- 14: Resultado após a execução da análise inversa. Fonte: Autor.