UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS - UNICAMP
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

Análise Dinâmica Linear de Pórticos Planos pelo Método dos Elementos Finitos

Mestrando: Anderson Carlos Gatti

Orientador: Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan

Campinas
2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS - UNICAMP
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

Análise Dinâmica Linear de Pórticos Planos pelo Método dos Elementos Finitos

Anderson Carlos Gatti

Dissertação apresentada à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração de Estruturas.

Campinas
2006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

G229a

Gatti, Anderson Carlos
Análise dinâmica linear de pórticos planos pelo método dos elementos finitos. / Anderson Carlos Gatti.-- Campinas, SP: [s.n.], 2006.

Orientador: Aloisio Ernesto Assan
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Dinâmica estrutural. 2. Método dos elementos finitos. 3. Análise modal. I. Assan, Aloisio Ernesto. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Titulo em Inglês: Linear dynamic analysis of plane frameworks with use of the finite element method
Palavras-chave em Inglês: Dynamics of plane structures, Finite element method, Newmark method, Modal superposition
Área de concentração: Estruturas
Titulação: Mestre em Engenharia Civil
Banca examinadora: Luiz Fernando Martha e Philippe Remy Bernard Devloo
Data da defesa: 29/06/2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO

ANÁLISE DINÂMICA DE PÓRTICOS PLANOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Anderson Carlos Gatti

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:

Aloisio E. Assan

Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan
Presidente e Orientador/UNICAMP-FEC

Prof. Dr. Luiz Fernando Martha
PUC-Rio

Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo
UNICAMP-FEC

Campinas, 29 de Junho de 2006

.

Aos meus pais José e Osmarina e aos meus irmãos Adriana e Alessandro dedico este trabalho.

.

”Quero fazer coisas tão árduas para mim quanto jamais foram para alguém; é apenas sob essa pressão que tenho uma consciência clara o bastante de possuir o que poucos homens têm ou alguma vez tiveram: a bem dizer, asas.”

Friedrich Nietzsche

Agradecimentos

A Deus, por me permitir estar em contato com aquilo que o homem tem de mais valioso: o conhecimento.

Ao Professor Dr. Aloisio Ernesto Assan por todo o conhecimento, incentivo e amizade transmitidos a mim, desde a graduação até o presente momento. E por todas as conversas inestimáveis ao longo deste período.

Aos meus pais e irmãos pelo crédito, incentivo e apoio em todos os momentos de minha vida.

Aos meus amigos.

Ao Departamento de Estrutura da Faculdade de Engenharia Civil da Unicamp.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

Minúsculas Romanas

c	Coeficiente de amortecimento
	Para carregamento: comprimento da carga móvel distribuída
c_{cr}	Coeficiente de amortecimento crítico
dV	Diferencial de volume
m	Massa para sistema com um grau de liberdade
n	Referente a um elemento n pertencente ao sistema
$n_i(x)$	Função de forma
q_i	Coordenadas generalizadas
s	Espaço percorrido pela carga móvel no elemento
t	Tempo
$u(x)$	Deslocamento axial de pontos do eixo da barra
u_P	Deslocamento na direção x de um ponto genérico P
u_R	Deslocamento na direção x de um ponto genérico R
$\dot{u}$	Velocidade da carga móvel
$v(x)$	Deslocamento transversal de pontos do eixo da barra
v_P	Deslocamento na direção y de um ponto genérico P
v_R	Deslocamento na direção y de um ponto genérico R
x	Abscissa
x_o	Abscissa de um ponto genérico do elemento
y	Ordenada
y_o	Ordenada de um ponto genérico da seção do elemento

Maiúsculas Romanas

A	Área da seção transversal
A_k	Constante de integração numérica
B_k	Constante de integração numérica
C_k	Constante de integração numérica
D_k	Constante de integração numérica
E	Módulo de Young
F	Intensidade de uma força sobre o elemento
I	Momento de inércia da seção transversal
L	Comprimento do elemento
$M(x,t)$	Momento fletor
$N(x,t)$	Esforço normal
N	Índice que representa o número de graus de liberdade do sistema
P_f	Período fundamental do sistema
P_k	Menor período natural do sistema
Q_i	Funções de forças generalizadas
T	Energia cinética total do sistema
U	Energia potencial total do sistema
Ui	Energia potencial interna

Ue	Energia potencial externa
$V(x,t)$	Esforço cortante
Wnc	Trabalho realizado por forças não conservativas

Minúsculas Gregas

α	Parâmetro de integração de Newmark
β	Parâmetro de integração de Newmark
δ	Variação durante o intervalo de tempo
ε_x	Deformação longitudinal
λ	Autovalor
θ	Rotação de uma seção genérica da barra
η	Coordenada adimensional
ξ_i	Fator de amortecimento
ρ	Densidade do material
σ_x	Tensão normal
τ	Tempo gasto para uma carga móvel atravessar um determinado trecho da estrutura
ω_i	Freqüência natural do *i-ésimo* modo de vibração
ω_D	Freqüência amortecida

Maiúsculas Gregas

Δt	Intervalo de tempo

Vetores

$\mathbf{f}^S$	Vetor de forças de superfície
$\mathbf{F}$	Vetor de forças concentradas
$\mathbf{P}$	Vetor de cargas dinâmicas totais
$\mathbf{P_C}$	Vetor de cargas dinâmicas gerado por forças concentradas
$\mathbf{P_S}$	Vetor de cargas dinâmicas gerado por forças de superfície
$\mathbf{q}$	Vetor das incógnitas nodais para deslocamentos
$\dot{\mathbf{q}}$	Vetor das incógnitas nodais para velocidades
$\ddot{\mathbf{q}}$	Vetor das incógnitas nodais para acelerações
$\mathbf{q_m}$	Vetor das amplitudes nodais máximas
$\mathbf{r}$	Vetor auxiliar para iteração do método das potências
$\mathbf{u}_P$	Vetor de deslocamentos do eixo das barras
$\dot{\mathbf{u}}_P$	Vetor de velocidades do eixo das barras
$\dot{\mathbf{u}}_P$	Vetor de acelerações do eixo das barras
$\mathbf{x}$	Vetor de deslocamentos modais
$\dot{\mathbf{x}}$	Vetor de velocidades modais
$\ddot{\mathbf{x}}$	Vetor de acelerações modais
$\mathbf{y}$	Vetor de deslocamentos relativos
$\dot{\mathbf{y}}$	Vetor de velocidades relativas
$\ddot{\mathbf{y}}$	Vetor de acelerações relativas
$\mathbf{w}$	Vetor da deflação de Wielandt

$\mathbf{z}$	Vetor auxiliar para iteração do método das potências
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor de deformações
$\boldsymbol{\sigma}$	Vetor de tensões
$\boldsymbol{\phi}$	Autovetor
$\boldsymbol{\psi}$	Autovetor

Matrizes

$\mathbf{A}$	Matriz para resolução do problema de autovalor-autovetor
$\mathbf{B}$	Matriz que relaciona operadores lineares com funções de forma
$\mathbf{C}$	Matriz de amortecimento
$\mathbf{D}$	Matriz de elasticidade
$\mathbf{G}$	Matriz que relaciona operadores de vínculos com funções de forma
$\mathbf{L}$	Matriz de operadores lineares
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{M}$	Matriz de massa
$\mathbf{N}$	Matriz das funções de forma
$\mathbf{V}$	Matriz de vínculos
$\boldsymbol{\omega}^2$	Matriz espectral
$\boldsymbol{\Phi}$	Matriz de autovetores

Resumo

GATTI, A. C. (2006). Análise dinâmica linear de pórticos planos pelo Método dos Elementos Finitos. Campinas. 104p. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.

Neste trabalho estuda-se o comportamento de pórticos planos submetidos a ações dinâmicas. Apresenta-se, inicialmente, a Equação de Movimento de Lagrange através das variações das energias cinética, potencial mais o trabalho das forças não conservativas. Em seguida, pelo emprego do Método dos Elementos Finitos são desenvolvidas as matrizes de rigidez, massa e amortecimento para o elemento de pórtico plano. O amortecimento introduzido é o de Rayleigh. Estudam-se dois métodos para a realização da análise dinâmica: o método de Newmark e o Método da Superposição Modal, também sendo realizado um estudo do problema de autovalor e autovetor pelo emprego do Método das Potências e o Método da Deflação de Wielandt. Os autovalores e autovetores fornecerão as freqüências naturais e os modos de vibração da estrutura. Finalmente, são mostrados exemplos numéricos para a análise do comportamento dos pórticos planos.

Palavras-chave: Análise Dinâmica, Método dos Elementos Finitos, Método de Newmark, Método da Superposição Modal.

Abstract

GATTI, A. C. (2006). Linear dynamic analysis of plane frameworks with use of the Finite Element Method. Campinas. 104p. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.

In this work, it is studied the behavior of plane frames submitted to dynamic loads. First of all Lagrange's Equations of Motion is presented by the kinetic and potential energy variation plus the work of the nonconservative forces. Next, the stiffness, mass and damping matrices for the plane frame element are developed with the use of the Finite Element Method. Damping is introduced from the Rayleigh damping. Both Newmark Method and Modal Superposition Method are studied to carry out the dynamic analysis. It is also carried out a study of the eigenvalue problem by Power Method and Wielandt Deflation Method. Eigenvalues and eigenvectors will provide the natural frequencies and normal modes of the structure, respectively. Finally, numerical examples are related to the analysis of the plane frameworks behavior.

Keywords: Dynamics of plane structures, Finite Element Method, Newmark Method, Modal Superposition.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Comentários Iniciais

A análise dinâmica dos corpos vem sendo empregada há muito tempo no âmbito de várias engenharias como: mecânica, naval, aeronáutica e aeroespacial, pois grande parte de suas criações está sujeita às vibrações na maior parte do tempo de sua utilização, como automóveis, navios, aviões, foguetes, etc.

Atualmente, com o advento de novas tecnologias e novos materiais, cada vez mais leves e resistentes empregados nas estruturas civis, a análise de vibrações é de fundamental importância sendo um campo muito extenso para pesquisa dentro da engenharia civil.

Construções civis destinadas a eventos esportivos ou musicais, como estádios de futebol ou discotecas, edifícios altos e de grandes vãos, pontes e passarelas para pedestres, chaminés, torres, instalações industriais que suportam máquinas vibratórias, enfim, todas essas construções devem ter atenção especial relacionados aos problemas de vibração.

Na maioria das vezes estas vibrações são indesejáveis nas estruturas, tanto do ponto de vista da segurança, pois existe um aumento de tensões, quanto ao desconforto que podem causar às pessoas.

Cabe ressaltar dois aspectos que levam à motivação para realização de um estudo dinâmico comparado ao seu equivalente estático. O primeiro deles seria que um problema dinâmico varia com o tempo, isto é, a solicitação da estrutura e sua resposta são diferentes em cada instante. Ao contrário da análise estática em que a solução é única, uma análise dinâmica torna-se então mais complexa e laboriosa. O segundo aspecto básico seria o fato de que nos problemas dinâmicos surgem forças de inércia, associadas às acelerações; forças de dissipação, geralmente associadas às velocidades, e finalmente as forças restauradoras, sendo que somente estas últimas são consideradas no problema estático.

Segundo Cook e outros [10] uma análise dinâmica é justificada se a freqüência excitadora aplicada na estrutura é aproximadamente um terço maior quando comparada com a primeira freqüência natural de vibração da estrutura (freqüência mais baixa). Quando contrário, os efeitos da inércia podem ser desprezados e o problema torna-se quase-estático, sendo suficiente a realização de uma análise estática para obtenção dos resultados.

1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo sobre o comportamento de pórticos planos submetidos às ações dinâmicas no regime elástico linear. Vários métodos são empregados neste tipo de análise, porém, aqui, serão desenvolvidos dois deles: Método da Superposição Modal e o Método de Newmark. Um estudo das freqüências naturais, modos de vibrações naturais e amortecimento estrutural também foi incluído.

Como resultado final, é apresentado um programa desenvolvido no ambiente *Delphi* e intitulado de *P.E.F. (Pórtico por Elementos Finitos).* Esse programa realiza tanto análise estática quanto análise dinâmica de pórticos planos e também é possível visualizar graficamente os resultados obtidos, como: deslocamentos, velocidades e acelerações dos nós; diagramas de esforços solicitantes: Normal, Cortante, Momento e os Modos de Vibração.

1.3 Revisão Bibliográfica

1.3.1 Métodos de Análise Dinâmica

Newmark [19] elaborou um procedimento geral para a solução de problemas em estruturas dinâmicas. O método pode ser aplicado às estruturas com qualquer configuração, em regime elástico ou plástico. Qualquer tipo de carregamento também pode ser simulado, tais como aqueles devidos a choques ou impactos, vibração, terremotos e explosões nucleares.

Archer [2] introduziu os conceitos relativos à consideração da distribuição de massa de uma estrutura, denominado matriz de massa consistente, iniciando-se então os primeiros estudos de problemas dinâmicos pelo método dos elementos finitos. O comportamento de sistemas mais complexos passou a ser analisado sob a ação das mais variadas excitações dinâmicas.

Wilson e Penzien [26] desenvolveram dois métodos para avaliação das matrizes de amortecimento ortogonal. O primeiro relaciona os fatores de amortecimento modal com os coeficientes da série de Caughey. O segundo é uma aproximação direta, a qual exprime a matriz de amortecimento como a soma de uma série de matrizes que produzem amortecimento em um modo particular.

Wilson [4] tornou o método geral de Newmark incondicionalmente estável pela introdução de um fator θ. A introdução desse fator foi motivada pela observação de que uma solução instável tende a oscilar sobre a solução verdadeira, amortecendo numericamente os modos de maiores ordens do sistema.

Gürgöze [13] calculou de maneira aproximada as freqüências fundamentais e os correspondentes modos de vibração de uma maneira simples, sem resolver a equação característica que governa o problema. Esta formulação permite introduzir vários pontos de massa e mola simultaneamente e um problema geral de autovalor e autovetor foi formulado.

Wu e Lin [27] fizeram uma análise de vibração livre de vigas uniformes em balanço com massas concentradas nos nós além daquela distribuída oriunda do material. Utilizaram um método que combina solução analítica e numérica.

Grossi, Albarracin e Zannier [14] obtiveram as freqüências naturais e modos de vibração para vigas com apoios intermediários e as extremidades submetidas à restrições elásticas tanto para translações quanto para rotações.

Naguleswaran [18] estudou as vibrações transversais de uma viga uniforme de Euler-Bernoulli sob efeito tração total, parcial e compressão total através de força axial distribuída. A solução geral foi expressa como a superposição de quatro funções de séries de potências independentes.

Dentre as diversas referências relacionadas ao assunto da análise dinâmica das estruturas estão as obras de Clough e Penzien [9], Paz [20] e Chopra [8].

Clough e Penzien [9] destacam as vantagens e desvantagens dos métodos diretos e o da superposição modal. O primeiro pode ser utilizado tanto na análise linear quanto na não linear e apresenta o incoveniente de ter a necessidade de definir explicitamente a matriz de amortecimento $\mathbf{C}$. O segundo necessita do cálculo de apenas algumas freqüências naturais e modos de vibração em função das coordenadas modais, mesmo o sistema possuindo muitos graus de liberdade, e destaca como desvantagem a possibilidade de ser aplicado apenas para regime linear, onde as equações podem ser desacopladas.

Chopra [8] mostra que o método de Newmark é incondicionalmente estável para aceleração média constante e se torna condicionalmente estável para o caso da variação linear da aceleração, em que a escolha do incremento de tempo Δt deve ser feito de maneira mais criteriosa.

1.3.2 Carregamentos Dinâmicos

Venâncio [23] determinou as linhas de influência dinâmica de vigas e barras através da passagem de uma carga unitária sobre determinados elementos e com uma certa velocidade constante. Utilizou a distribuição de massa concentrada nos nós das estruturas. O método de análise modal foi aplicado, resultando em n equações diferenciais, cujas soluções foram obtidas pela transformada de Laplace. O método da superposição modal foi empregado para a determinação da relação tempo-deflexão a qual corresponde às linhas de influência dinâmicas, obtidas na forma fechada.

Jung [15] fez a análise dinâmica de vigas e pórticos planos sob cargas móveis com velocidade constante. O método da superposição modal e o método dos elementos finitos foram utilizados para a obtenção dos resultados.

Bulent [6] realizou um estudo de vibração forçada em pórticos planos e tridimensionais utilizando o método matricial de massa contínua associado ao método da superposição modal. Comparou os resultados com as estruturas modeladas com massa concentrada e consistente.

Yoshimura, Hino e Ananthanarayana [28] realizaram um estudo de análise dinâmica de deflexões de vigas incluindo o efeito da não linearidade geométrica proveniente do carregamento de uma carga móvel. A viga foi modelada trabalhando no regime elástico e simplesmente apoiada, com apoios imóveis.

Filipich e Laura [12] fizeram um breve estudo das vibrações em pórticos planos com apoios elásticos.

Timoshenko, Young e Waver [22] deram a resposta, em forma fechada, para a deflexão de uma viga simplesmente apoiada sujeita a um carregamento móvel constante perpendicular ao eixo da viga,Figura (1.1), sendo expressa por:

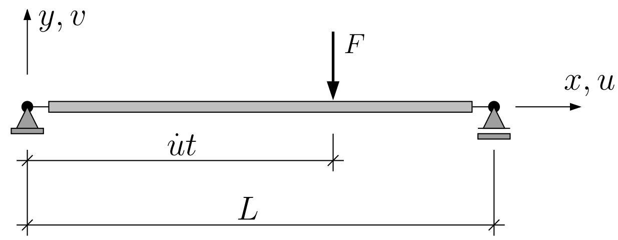

Figura 1.1: Carga Móvel

$$
\begin{aligned}
v(x,t) = & -\frac{2FL^3}{m\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{i^2(i^2\pi^2a^2-\dot{u}^2L^2)}\ sen\left(\frac{i\pi x}{L}\right)\ sen\left(\frac{i\pi\dot{u}t}{L}\right)\right] \\
& +\frac{2FL^4\dot{u}}{m\pi^3 a}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{i^3(i^2\pi^2a^2-\dot{u}^2L^2)}\ sen\left(\frac{i\pi x}{L}\right)\ sen\left(\frac{i^2\pi^2 at}{L^2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

sendo $a^2 = \dfrac{EI}{m}$.

A primeira série corresponde à solução da vibração forçada e a segunda à vibração livre da viga.

Paz [20] obteve a resposta, também em forma fechada, para a deflexão uma viga simplesmente apoiada sujeita a um carregamento estático e aplicado repentinamente, Figura (1.2).

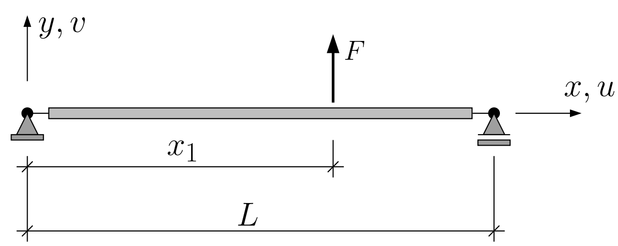

Figura 1.2: Carga Estática Aplicada Repentinamente

$$
v(x,t) = \frac{2FL^3}{m\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{i^2(i^2\pi^2a^2)}\ sen\left(\frac{i\pi x_1}{L}\right)\left(1-cos\left(\frac{i^2\pi^2 at}{L^2}\right)\right)sen\left(\frac{i\pi x}{L}\right)\right]
\tag{1.2}
$$

Abu-Hilal e Mohsen [1] obtiveram as respostas na forma fechada para vigas isotrópicas, trabalhando no regime elástico e sujeitas a carregamentos móveis em três níveis de movimento: acelerado, desacelerado e constante. As vinculações de apoio foram modeladas para vigas apoiada-apoiada, engastada-engastada, apoiada-engastada e engastada-apoiada. Os efeitos da velocidade e da freqüência da força móvel também foram estudados.

1.4 Conteúdo do Trabalho

Como resultado do trabalho desenvolvido, essa dissertação encontra-se organizada como se segue.

No Capítulo 2 é feita uma abordagem para o estudo da análise dinâmica das estruturas particularizado para o caso de pórticos planos como ou sem articulações sendo fundamentada na Equação de Movimento de Lagrange na análise. O Método dos Elementos Finitos é utilizado para a obtenção das matrizes de rigidez e massa dos elementos.

No Capítulo 3 é realizado um breve estudo sobre os métodos de análise dinâmica empregados nesse trabalho. São métodos bastantes consagrados e validados, principalmente no que diz respeito à análise dinâmica linear. O primeiro é a análise das freqüências naturais e modos de vibração naturais de um sistema utilizando o conceito da deflação de Wielandt, que basicamente consiste na eliminação dos maiores ou menores autovalores de uma matriz com autovalores reais e distintos. O segundo deles é o Método da Superposição Modal, e que se encontra intimamente relacionado com as freqüências naturais e modos de vibração do sistema. E finalmente o terceiro, conhecido como o Método de Newmark, que é um método de integração numérica no domínio do tempo. A simulação de amortecimento estrutural também é desenvolvida através do amortecimento de Rayleigh.

No Capítulo 4 são apresentados os tipos de solicitações a que as estruturas estudadas poderão estar submetidas. Uma família de funções que regem o comportamento das cargas estacionárias foi implementada, sendo apresentados onze tipos. As outras formas de solicitação desenvolvidas são: cargas móveis concentradas e distribuídas, além do efeito da vibração de base.

No Capítulo 5 são elaborados nove exemplos, separados em três blocos que variam de acordo com os tipos de cargas utilizadas. O primeiro bloco contém cinco exemplos para cargas móveis, o segundo contém dois para solicitação de base e o terceiro contendo dois para cargas concentradas estacionárias dinâmicas. Os resultados obtidos para os exemplos referentes às cargas móveis são comparados com trabalhos encontrados na literatura e os restantes são comparados com o software *SAP2000*. Comentários a respeito dos resultados obtidos são feitos no fim de cada bloco.

No Capítulo 6 são apresentadas as considerações finais e conclusões observadas a partir dos resultados obtidos. São mencionadas algumas sugestões para trabalhos futuros, que podem complementar este.

No Anexo A é mostrada a consideração dos efeitos de recalque e mola à que um pórtico pode ser submetido sob efeito dinâmico.

No Anexo B é apresentado um manual de utilização do programa *PEF*.

Capítulo 2

Estudo da Análise Dinâmica com o MEF

2.1 Equação de movimento de Lagrange

De acordo com Clough e Penzien [9] a equação de movimento para um sistema como N graus de liberdade pode ser derivado diretamente do princípio variacional da dinâmica, conhecida como Princípio de Hamilton.

Ele estabelece que a variação das energias cinética e potencial mais o trabalho feito por forças não conservativas consideradas em um intervalo de tempo de t_1 a t_2 deve ser nula, levando diretamente às equações de movimento de qualquer sistema. O modelo matemático é representado por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-U)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta Wnc\, dt = 0 \tag{2.1}$$

Tanto a energia cinética quanto a potencial, juntamente com o trabalho das forças não conservativas, podem ser expressos em termos de um conjunto de coordenadas generalizadas, geralmente representadas por $q_1, q_2, ..., q_N$.

Segundo Clough e Penzien [9] entende-se por deslocamentos generalizados, ou coordenadas generalizadas, de um sistema de N graus de liberdade, como qualquer conjunto de q_N coordenadas que determina completamente a posição de todos os pontos contidos no sistema.

Para a maioria dos sistemas estruturais a energia cinética pode ser expressa em função das coordenadas generalizadas e suas derivadas primeiras em relação ao tempo:

$$T = T(q_1, q_2, ..., q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_N) \tag{2.2}$$

Já a energia potencial pode ser escrita em função apenas das coordenadas generalizadas:

$$U = U(q_1, q_2, ..., q_N) \tag{2.3}$$

Finalmente, a parcela referente à variação do trabalho das forças não conservativas é dada pelo deslocamento virtual causado por variações das coordenadas generalizadas, podendo ser expresso como uma função linear do tipo:

$$\delta Wnc = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + ... + Q_N \delta q_N \tag{2.4}$$

onde os coeficientes Q_1, Q_2,..., Q_N são funções de forças generalizadas correspondendo as coordenadas q_1, q_2,..., q_N, respectivamente.

Substituindo as Equações (2.2), (2.3) e (2.4) na Equação (2.1) e manipulando-as, chega-se à seguinte equação:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i \right] \delta q_i \right\} dt = 0 \tag{2.5}$$

Sendo todas as variações δq_i $(i = 1, 2, ..., N)$ arbitrárias, a Equação (2.5) é satisfeita quando o termo entre colchetes vale zero, isto é:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \tag{2.6}$$

A Equação(2.6) é conhecida como equação de movimento de Lagrange.

2.2 Teoria de Barras de Euler-Bernoulli

No desenvolvimento do modelo para pórticos planos, são consideradas as hipóteses de Euler-Bernoulli para barras planas e referenciadas a um plano cartesiano xy, sendo elas:

- a seção transversal possui um plano longitudinal de simetria;
- o carregamento atua no plano longitudinal de simetria;
- as seções transversais perpendiculares ao eixo permanecem perpendiculares após a deformação (hipótese de Navier);
- não ocorre deformação no plano da seção transversal;
- pequenas deformações e pequenos deslocamentos;
- material homogêneo e isotrópico;
- a barra é prismática, inicialmente reta e livre de tensões residuais e imperfeições.

Dessa forma, o deslocamento vertical de qualquer ponto ao longo de uma seção transversal pode ser descrito em função dos deslocamentos do eixo da barra, conforme esquematizado na Figura (2.1).

O deslocamento de um ponto arbitrário R pode ser expresso em termos dos deslocamentos do ponto P, localizado no eixo baricêntrico da barra, sendo escritos como:

$$u_R = u_P - y_o \, sen\,\theta \tag{2.7}$$

$$v_R = v_P - y_o(1 - cos\,\theta) \tag{2.8}$$

Assumindo pequenos deslocamentos, pode-se admitir: $sen\,\theta \cong \theta$, $tg\,\theta \cong \theta$ e $cos\,\theta \cong 1$, assim as Equações (2.7) e (2.8) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$u_R \cong u_P - y_o\theta \cong u_o - y_o\frac{\partial v_P}{\partial x} \tag{2.9}$$

$$v_R \cong v_P \tag{2.10}$$

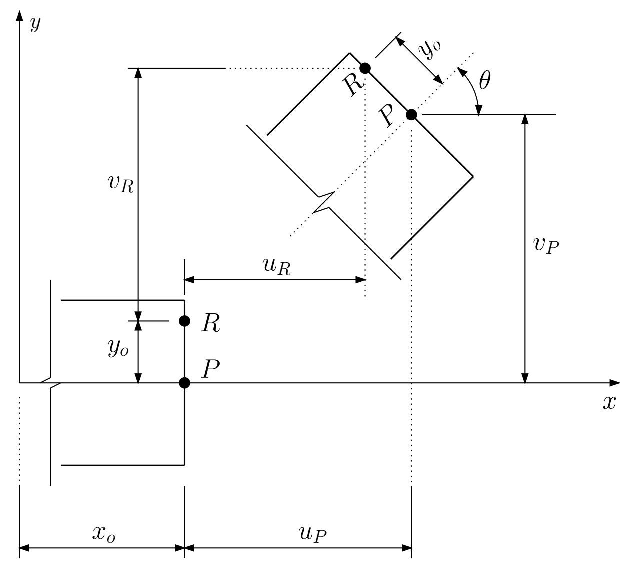

Figura 2.1: Campo de Deslocamentos

O vetor de deslocamentos **u** é definido como:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_R \\ v_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -y_o \dfrac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_P \\ v_P \end{Bmatrix} = \mathbf{V}\ \mathbf{u}_P \tag{2.11}$$

sendo **V** um operador de vínculo.

O vetor de velocidades é dado por:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{V}\ \dot{\mathbf{u}}_P \tag{2.12}$$

As deformações para barras, de acordo com as hipóteses assumidas, é representada apenas por aquela referente à deformação na direção longitudinal (ε_x), sendo dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}_P = \{\varepsilon_x\} \tag{2.13}$$

Onde **L** é um operador linear, dado por:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & -y_o \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

As tensões podem ser obtidas pela seguinte relação:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \{\sigma_x\} \tag{2.15}$$

onde, de acordo com as hipóteses assumidas, a matriz elástica **D** é dada por:

$$\mathbf{D} = E \tag{2.16}$$

Substituindo as Equações (2.13), (2.14) e (2.16) em (2.15), chega-se a:

$$\sigma_x = E\left(\frac{\partial u_P}{\partial x} - y_o \frac{\partial^2 v_P}{\partial x^2}\right) \tag{2.17}$$

2.3 Discretização dos Elementos de Pórtico pelo MEF

Um elemento de pórtico n é geralmente representado pelo seu eixo baricêntrico, podendo ser modelado para seis deslocamentos associados a cada elemento, sendo: quatro translações (q_1, q_2, q_4 e q_5) e duas rotações (q_3 e q_6), conforme Figura (2.2).

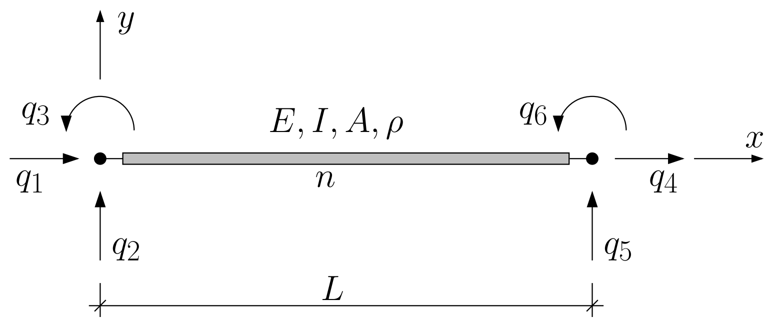

Figura 2.2: Elemento de Pórtico

Em problemas dinâmicos, desde que se tenha um número grande de incógnitas nodais q_i discretizando o sistema, pode-se escrever as seguintes equações em relação ao eixo baricêntrico do elemento, as quais fornecem uma boa aproximação em relação ao resultado real:

$$\mathbf{u}_{Pn} \cong \mathbf{N}_n \mathbf{q}_n \tag{2.18}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{Pn} \cong \mathbf{N}_n \dot{\mathbf{q}}_n \tag{2.19}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{Pn} \cong \mathbf{N}_n \ddot{\mathbf{q}}_n \tag{2.20}$$

onde $\mathbf{N}_n$ representa a matriz de funções de forma associada ao elemento discretizado.

Substituindo a Equação (2.18) em (2.13), obtém-se o vetor de deformações:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{L}_n \mathbf{N}_n \mathbf{q}_n = \mathbf{B}_n \mathbf{q}_n \tag{2.21}$$

O vetor de tensões é obtido pela substituição de (2.21) em (2.15):

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{D}_n \mathbf{B}_n \mathbf{q}_n \tag{2.22}$$

A partir desse ponto são definidas as parcelas de energia associada ao elemento em estudo para que possam ser inseridas na equação de movimento de Lagrange (2.6).

A energia potencial total U_n do elemento é formada por duas parcelas: uma é a energia potencial interna que é igual à energia de deformação Ui_n armazenada na estrutura carregada e a outra é a energia potencial externa Ue_n ou das cargas externas (desde que elas sejam conservativas), ficando:

$$U_n = Ui_n + Ue_n \tag{2.23}$$

A energia de deformação interna Ui_n, como mostrado por Assan [3] vale:

$$Ui_n = \frac{1}{2} \int_{V_n} \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \boldsymbol{\sigma}_n \, dV_n \tag{2.24}$$

Que, reescrita em termos das incógnitas nodais, fica:

$$Ui_n = \frac{1}{2}\int_{V_n} \mathbf{q}_n^T \mathbf{B}_n^T \mathbf{D}_n \mathbf{B}_n \mathbf{q}_n \; dV_n \tag{2.25}$$

A energia potencial externa é dada por:

$$Ue_n = -\int_{S_n} \mathbf{u}_{Pn}^T \mathbf{f}_n^S \; dS_n - \sum_i \mathbf{u}_{Pn}^T \mathbf{F}_n^i \tag{2.26}$$

O sinal negativo indica que cada esforço externo realiza trabalho negativo ao retornar da posição carregada para a inicial, sem carga.

Neste trabalho, as forças não conservativas são dadas somente por aquelas que introduzem amortecimento na estrutura; porém, se as forças externas aplicadas também fossem do tipo não conservativa elas seriam introduzidas nessa parcela.

Substituindo as Equações (2.25) e (2.26) na parcela da equação de Lagrange referente à energia potencial total, resulta:

$$\frac{\partial Ui_n}{\partial \mathbf{q}_n} = \left(\int_{V_n} \mathbf{B}_n^T \mathbf{D}_n \mathbf{B}_n \; dV_n\right)\mathbf{q}_n \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial Ue_n}{\partial \mathbf{q}_n} = -\int_{S_n} \mathbf{N}_n^T \mathbf{f}_n^S \; dS_n - \sum_i \mathbf{N}_n^T \mathbf{F}_n^i \tag{2.28}$$

A energia cinética é dada como:

$$T_n = \frac{1}{2}\int_{V_n} \dot{\mathbf{u}}_n^T \rho_n \dot{\mathbf{u}}_n \; dV_n \tag{2.29}$$

Substituindo a Equação (2.19) em (2.12), tem-se:

$$\dot{\mathbf{u}}_n = \mathbf{V}_n \mathbf{N}_n \dot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{G}_n \dot{\mathbf{q}}_n \tag{2.30}$$

Assim, reescrevendo a Equação (2.29) em função das incógnitas nodais, chega-se:

$$T_n = \frac{1}{2}\int_{V_n} \dot{\mathbf{q}}_n^T \mathbf{G}_n^T \rho_n \mathbf{G}_n \dot{\mathbf{q}}_n \; dV_n \tag{2.31}$$

Inserindo a Equação (2.31) na Equação de Lagrange, referente à parcela correspondente à energia cinética, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T_n}{\partial \dot{\mathbf{q}}_n}\right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_n} = \left(\int_{V_n} \mathbf{G}_n^T \rho_n \mathbf{G}_n \; dV_n\right)\ddot{\mathbf{q}}_n \tag{2.32}$$

A variação do trabalho realizado pelas forças de amortecimento, de acordo com a Equação (2.4), pode ser representada por:

$$\delta Wnc_n = \delta \mathbf{u}_n^T \left(-\int_{V_n} c_n \; \dot{\mathbf{u}}_n dV_n\right) \tag{2.33}$$

Comparando a Equação (2.4) com (2.33), obtém-se a parcela referente às forças generalizadas (Q_n), ficando:

$$Q_n = -\left(\int_{V_n} \mathbf{G}_n^T c_n \mathbf{G}_n \; dV_n\right)\dot{\mathbf{q}}_n \tag{2.34}$$

sendo $\delta\mathbf{u}_n^T = \delta\mathbf{q}_n^T\mathbf{G}_n^T$.

Substituindo as Equações (2.32), (2.27), (2.28) e (2.34) em (2.6), escreve-se:

$$\left(\int_{V_n}\mathbf{G}_n^T\rho_n\mathbf{G}_n\,dV_n\right)\ddot{\mathbf{q}}_n+\left(\int_{V_n}\mathbf{G}_n^T c_n\mathbf{G}_n\,dV_n\right)\dot{\mathbf{q}}_n+\left(\int_{V_n}\mathbf{B}_n^T\mathbf{D}_n\mathbf{B}_n\,dV_n\right)\mathbf{q}_n=\int_{S_n}\mathbf{N}_n^T\mathbf{f}_n^S\,dS_n+\sum_i\mathbf{N}_n^T\mathbf{F}_n^i \tag{2.35}$$

As matrizes de massa, amortecimento e rigidez do elemento são dadas pelos termos entre parênteses, respectivamente:

$$\mathbf{M}_n=\int_{V_n}\mathbf{G}_n^T\rho_n\mathbf{G}_n\;dV_n \tag{2.36}$$

$$\mathbf{C}_n=\int_{V_n}\mathbf{G}_n^T c_n\mathbf{G}_n\;dV_n \tag{2.37}$$

$$\mathbf{K}_n=\int_{V_n}\mathbf{B}_n^T\mathbf{D}_n\mathbf{B}_n\;dV_n \tag{2.38}$$

O vetor de carregamento total é dado por $\mathbf{P}_n=\mathbf{P}_{Sn}+\mathbf{P}_{Cn}$ que representa a soma das parcelas das forças de superfície e forças concentradas, respectivamente:

$$\mathbf{P}_{Sn}=\int_{S_n}\mathbf{N}_n^T\mathbf{f}_n^S\;dS_n \tag{2.39}$$

$$\mathbf{P}_{Cn}=\sum_n\mathbf{F}_n \tag{2.40}$$

A resposta referente a todo o sistema é dada pela soma da contribuição de cada um destes elementos discretizados. Torna-se necessário o emprego de uma matriz de transformação que escreve as coordenadas do sistema local do elemento para o sistema global, conforme esquematizado na Figura (2.3) e representada pela matriz $\mathbf{T}$.

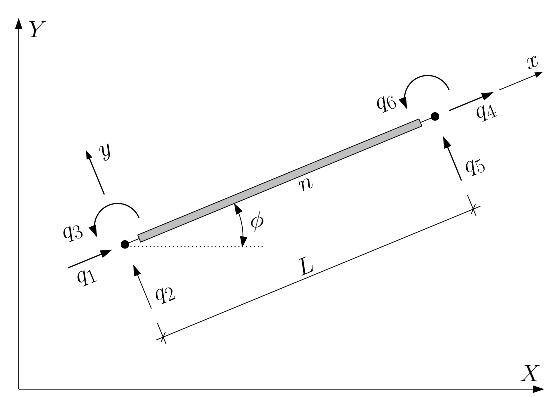

Figura 2.3: Transformação de Coordenadas

$$\mathbf{T}_n=\begin{bmatrix} cos\,\phi & sen\,\phi & 0 & 0 & 0 & 0\\ -sen\,\phi & cos\,\phi & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & cos\,\phi & sen\,\phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & -sen\,\phi & cos\,\phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

As matrizes globais, juntamente com os vetores de cargas são dados por:

$$\mathbf{M} = \sum_n \mathbf{T}_n^T \mathbf{M}_n \mathbf{T}_n \tag{2.41}$$

$$\mathbf{C} = \sum_n \mathbf{T}_n^T \mathbf{C}_n \mathbf{T}_n \tag{2.42}$$

$$\mathbf{K} = \sum_n \mathbf{T}_n^T \mathbf{K}_n \mathbf{T}_n \tag{2.43}$$

$$\mathbf{P} = \sum_n \left(\mathbf{T}_n^T \mathbf{P}_{Sn} + \mathbf{T}_n^T \mathbf{P}_{Cn} \right) \tag{2.44}$$

Finalmente a equação de equilíbrio global para o sistema é dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P} \tag{2.45}$$

2.4 Matrizes de Massa e Rigidez Elástica para Elementos de Pórtico

Nessa fase são desenvolvidas as matrizes de massa e rigidez para quatro tipos de elementos de pórticos, com diferentes tipos de vinculações associadas aos seus nós, sendo eles:

- Barra Engastada-Engastada;
- Barra Engastada-Articulada;
- Barra Articulada-Engastada;
- Barra Articulada-Articulada;

A escolha das funções de interpolação são feitas de forma que satisfaçam as condições de contorno essenciais e naturais, impostas para cada um dos casos supracitados.

Admitindo-se que a deformação longitudinal ε_x seja constante ao longo do elemento finito, os deslocamentos longitudinais podem ser representados por um polinômio de primeiro grau:

$$u(x) = a_1 + a_2 x \tag{2.46}$$

Como os deslocamentos transversais e as rotações não são independentes, escreve-se o deslocamento transversal de qualquer ponto do eixo longitudinal do elemento em função de quatro incógnitas nodais: q_2, q_3, q_5 e q_6, sendo dado por um polinômio do terceiro grau:

$$v(x) = a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + a_6 x^3 \tag{2.47}$$

Com isso têm-se um total de seis parâmetros nodais (dois longitudinais e quatro transversais).

É possível reunir as funções de forma, escritas em função das incógnitas nodais, de maneira a formarem a matriz $\mathbf{N}_n$, sendo dada por:

$$\mathbf{N}_n = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & n_3 & n_4 & 0 & n_5 & n_6 \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

onde os coeficientes $n_1,...,n_6$ contêm as funções de forma para cada grau de liberdade do elemento.

Com isso, utilizando a matriz $\mathbf{L}$ da Equação (2.14), determina-se também a matriz $\mathbf{B}_n$, ficando:

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{L}_n\mathbf{N}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial x} & \frac{\partial^2 n_2}{\partial x^2}\, y_o & \frac{\partial^2 n_3}{\partial x^2}\, y_o & \frac{\partial n_4}{\partial x} & \frac{\partial^2 n_5}{\partial x^2}\, y_o & \frac{\partial^2 n_6}{\partial x^2}\, y_o \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

E com a Equação (2.30), obtém-se a matriz $\mathbf{G}_n$:

$$\mathbf{G}_n = \mathbf{V}_n\mathbf{N}_n = \begin{bmatrix} n_1 & -\frac{\partial n_2}{\partial x}\, y_o & -\frac{\partial n_3}{\partial x}\, y_o & n_4 & -\frac{\partial n_5}{\partial x}\, y_o & -\frac{\partial n_6}{\partial x}\, y_o \\ 0 & n_2 & n_3 & 0 & n_5 & n_6 \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

2.4.1 Barra Engastada-Engastada

Esse modelo é o mesmo representado pela Figura (2.2).

Através das condições de contorno para os deslocamentos longitudinais consegue-se determinar os coeficientes da função (2.46):

$$\begin{cases} a_1 = q_1, & \text{para } u(0); \\ a_2 = \dfrac{q_2 - q_1}{L}, & \text{para } u(L). \end{cases}$$

Obtendo assim a função para os deslocamentos longitudinais:

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) q_1 + \frac{x}{L}\, q_2 \tag{2.51}$$

Ou escrevendo a função acima em coordenada adimensional $\eta = \frac{x}{L}$, fica:

$$u(\eta) = (1 - \eta)\, q_1 + \eta\, q_3 \tag{2.52}$$

Para as condições de contorno dos deslocamentos transversais têm-se:

$$\begin{cases} a_3 = q_2, & \text{para } v(0); \\ a_4 = q_3, & \text{para } v'(0). \\ q_5 = q_2 + q_3L + a_5L^2 + a_6L^3, & \text{para } v(L). \\ q_6 = q_3 + 2a_5L + 3a_6L^2, & \text{para } v'(L). \end{cases}$$

Os valores de a_5 e a_6 são obtidos resolvendo o sistema linear de duas equações e duas incógnitas dado pelas duas últimas expressões acima, resultando:

$$a_5 = \frac{3(q_5 - q_2)}{L^2} + \frac{q_6 + 2q_3}{L} \qquad e \qquad a_6 = \frac{2(q_2 - q_5)}{L^3} + \frac{q_3 + q_6}{L^2}$$

Dessa maneira, manipulando os resultados, obtemos a seguinte função para os deslocamentos transversais:

$$\begin{aligned} v(x) = &\left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] q_2 + \left[\left(\frac{x}{L}\right) - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right] L\, q_3 + \\ &\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] q_5 + \left[\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right] L\, q_6 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Ou escrevendo a função acima em coordenada adimensional:

$$v(\eta) = (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3) q_2 + (\eta - 2\eta^2 + \eta^3) L\, q_3 + (3\eta^2 - 2\eta^3) q_5 + (\eta^3 - \eta^2) L\, q_6 \tag{2.54}$$

Com isso obtém-se a $\mathbf{N}_n$, dada por:

$$\mathbf{N}_n = \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\eta^2+2\eta^3 & (\eta-2\eta^2+\eta^3)L & 0 & 3\eta^2-2\eta^3 & (-\eta^2+\eta^3)L \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

Utilizando (2.49), a matriz $\mathbf{B}_n$ passa a ser escrita como:

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{L}_n \mathbf{N}_n \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{(-6+12\eta)}{L^2} y_o & \frac{(-4+6\eta)}{L} y_o & \frac{1}{L} & \frac{(6-12\eta)}{L^2} y_o & \frac{(-2+6\eta)}{L} y_o \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

Em coordenadas adimensionais, as derivadas se relacionam conforme segue:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial u}{\partial \eta} \qquad e \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

De acordo com a Equação (2.38), resulta a seguinte matriz de rigidez para o elemento:

$$\mathbf{K}_n = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

sendo: $\int_A dA = A$, $\int_A y_o^2 dA = I$ e $\int_A y_o dA = 0$ (seção simétrica).

Pela igualdade (2.50) determina-se a matriz $\mathbf{G}_n$:

$$\mathbf{G}_n = \begin{bmatrix} 1-\eta & \frac{6(\eta-\eta^2)}{L} y_o & (-1+4\eta-3\eta^2)\, y_o & \eta & \frac{6(-\eta+\eta^2)}{L} y_o & (2\eta-3\eta^2)\, y_o \\ 0 & 1-3\eta^2+2\eta^3 & (\eta-2\eta^2+\eta^3)L & 0 & 3\eta^2-2\eta^3 & (-\eta^2+\eta^3)L \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

E a matriz de massa é obtida pela Equação (2.36):

$$\mathbf{M}_n = \frac{\rho A L}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} + \frac{\rho I}{30L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 36 & -3L \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

2.4.2 Barra Engastada-Articulada

De maneira análoga à barra bi-engastada, podemos determinar as respectivas matrizes de rigidez e massa desse elemento alterando as condições de contorno.

Esse modelo pode ser representado conforme a Figura (2.4).

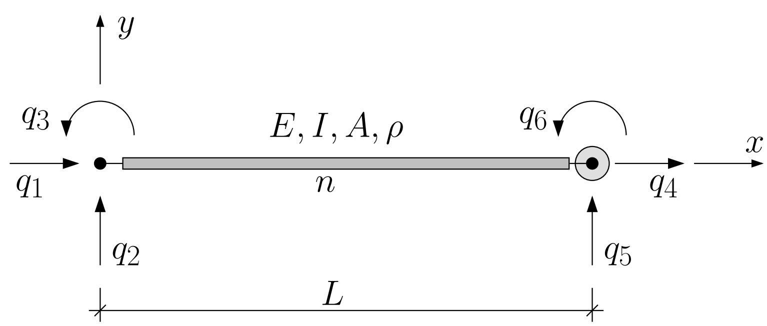

Figura 2.4: Barra Engastada-Articulada

Sabe-se que na presença de uma rótula, existirá apenas a transmissão de esforços normal e cortante, sendo nulo o momento fletor e conseqüentemente sua curvatura $\left(\frac{d^2v}{dx^2} = 0\right)$.

A função para os deslocamentos longitudinais não sofrerá alterações, permanecendo a mesma da igualdade (2.52).

Para as condições de contorno dos deslocamentos transversais têm-se:

$$\begin{cases} a_3 = q_2, & \text{para } v(0); \\ a_4 = q_3, & \text{para } v'(0). \\ a_5 = -3L\,a_6, & \text{para } v''(L). \end{cases}$$

Substituindo os valores dos coeficientes acima na Equação (2.47) obtêm-se os valores de a_5 e a_6 dados por:

$$a_5 = \frac{3(q_5 - q_2)}{2L^2} - \frac{3q_3}{2L} \qquad e \qquad a_6 = -\frac{(q_5 - q_2)}{2L^3} + \frac{q_3}{2L^2}$$

Dessa maneira, manipulando os resultados, obtemos a seguinte função para os deslocamentos transversais:

$$
\begin{aligned}
v(x) = &\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]q_2 + \left[\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]L\, q_3 + \\
&\left[\frac{3}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]q_5
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

Ou escrevendo a função acima em coordenada adimensional, fica:

$$
v(\eta) = \left(1 - \frac{3}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\eta^3\right)q_2 + \left(\eta - \frac{3}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\eta^3\right)L\, q_3 + \left(\frac{3}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta^3\right)q_5 \tag{2.61}
$$

A matriz $\mathbf{N}_n$ é dada por:

$$
\mathbf{N}_n = \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\eta^3 & \left(\eta - \frac{3}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\eta^3\right)L & 0 & \frac{3}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta^3 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.62}
$$

E a matriz $\mathbf{B}_n$ para esse tipo vale:

$$
\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{(-3+3\eta)}{L^2}y_o & \frac{(-3+3\eta)}{L}y_o & \frac{1}{L} & \frac{(3-3\eta)}{L^2}y_o & 0 \end{bmatrix} \tag{2.63}
$$

E a matriz $\mathbf{G}_n$ fica:

$$
\mathbf{G}_n = \begin{bmatrix} 1-\eta & \frac{3}{2}\frac{(2\eta-\eta^2)}{L}y_o & \left(-1+3\eta-\frac{3}{2}\eta^2\right)y_o & \eta & \frac{3}{2}\frac{(-2\eta+\eta^2)}{L}y_o & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\eta^3 & \left(\eta - \frac{3}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\eta^3\right)L & 0 & \frac{3}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta^3 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.64}
$$

Abaixo seguem apresentadas as matrizes de rigidez e massa, obtidas através das Equações (2.38) e (2.36), respectivamente:

$$
\mathbf{K}_n = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.65}
$$

$$
\mathbf{M}_n = \frac{\rho A L}{840}\begin{bmatrix} 280 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 408 & 72L & 0 & 117 & 0 \\ 0 & 72L & 16L^2 & 0 & 33L & 0 \\ 140 & 0 & 0 & 280 & 0 & 0 \\ 0 & 117 & 33L & 0 & 198 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho I}{30L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 6L & 0 & -36 & 0 \\ 0 & 6L & 6L^2 & 0 & -6L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -6L & 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.66}
$$

2.4.3 Barra Articulada-Engastada

As matrizes de rigidez e massa para esse tipo de elemento são idênticas às obtidas para a barra engastada-articulada, sendo necessário mudar apenas a incógnita nodal relacionada ao momento nulo na articulação. No elemento anterior esta foi representada pela incógnita q_6, sendo que para esse caso será dada pela incógnita q_3

Esse modelo segue representado pela Figura (2.5).

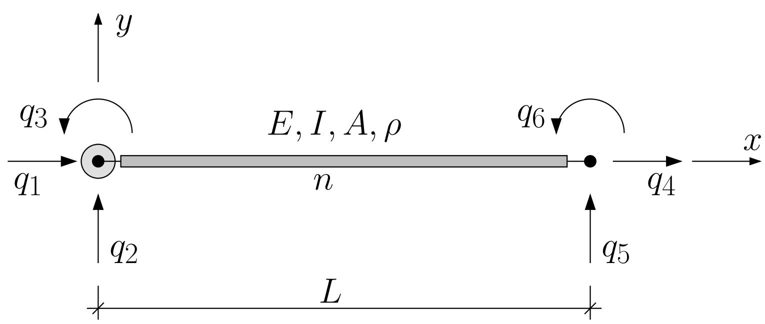

Figura 2.5: Barra Articulada-Engastada

Para as condições de contorno dos deslocamentos transversais têm-se:

$$
\begin{cases} a_3 = q_2, & \text{para } v(0); \\ a_5 = 0, & \text{para } v''(0). \\ a_4 = q_6 - 3L^3\ a_6, & \text{para } v'(L). \end{cases}
$$

Substituindo os valores dos coeficientes acima na Equação (2.47) obtêm-se os valores de a_4 e a_6 dados por:

$$
a_4 = \frac{3(q_5 - q_2)}{2L} - \frac{q_6}{2} \qquad e \qquad a_6 = \frac{(q_2 - q_5)}{2L^3} + \frac{q_6}{2L^2}
$$

Dessa maneira, manipulando os resultados, obtemos a seguinte função para os deslocamentos transversais:

$$
v(x) = \left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] q_2 + \left[\frac{3}{2}\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] q_5 + \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] L\, q_6 \tag{2.67}
$$

Ou escrevendo a função acima em coordenada adimensional, fica:

$$v(\eta) = \left(1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3\right) q_2 + \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3\right) q_5 \left(-\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3\right) L\, q_6 \tag{2.68}$$

A matriz $\mathbf{N}_n$ torna-se:

$$\mathbf{N}_n = \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3 & 0 & 0 & \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 & \left(-\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3\right) L \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

E a matriz $\mathbf{B}_n$ para esse tipo de elemento torna-se:

$$\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{3\eta}{L^2} y_o & 0 & \frac{1}{L} & \frac{-3\eta}{L^2} y_o & \frac{3\eta}{L} y_o \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

E a matriz $\mathbf{G}_n$ fica:

$$\mathbf{G}_n = \begin{bmatrix} 1-\eta & \frac{3}{2}\frac{(1-\eta^2)}{L} y_o & 0 & \eta & \frac{3}{2}\frac{(-1+\eta^2)}{L} y_o & \frac{1}{2}(1-3\eta^2)\, y_o \\ 0 & 1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3 & 0 & 0 & \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 & \left(-\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3\right) L \end{bmatrix} \tag{2.71}$$

Abaixo seguem apresentadas as matrizes de rigidez e massa, obtidas através das Equações (2.38) e (2.36), respectivamente:

$$\mathbf{K}_n = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

$$\mathbf{M}_n = \frac{\rho AL}{840} \begin{bmatrix} 280 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 198 & 0 & 0 & 117 & -33L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 140 & 0 & 0 & 280 & 0 & 0 \\ 0 & 117 & 0 & 0 & 408 & -72L \\ 0 & -33L & 0 & 0 & -72L & 16L^2 \end{bmatrix} + \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 & 0 & -36 & 6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 & 0 & 36 & -6L \\ 0 & 6L & 0 & 0 & -6L & 6L^2 \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

2.4.4 Barra Articulada-Articulada

O último tipo de elemento modelado será aquele dado por articulações nas duas extremidades, Figura (2.6).

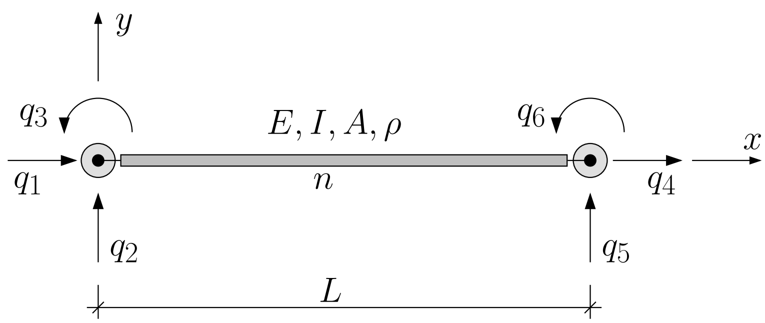

Figura 2.6: Barra Articulada-Articulada

De maneira semelhante aos tipos anteriores, é necessário fornecer as condições de contorno adequadas.

A função para os deslocamentos longitudinais não sofre alterações, permanecendo a mesma da igualdade (2.52).

Para as condições de contorno dos deslocamentos transversais têm-se:

$$\begin{cases} a_3 = q_2, & \text{para } v(0); \\ a_5 = 0, & \text{para } v''(0). \\ a_6 = 0, & \text{para } v''(L). \\ a_4 = \dfrac{(q_5 - q_2)}{L}, & \text{para } v(L). \end{cases}$$

Manipulando os resultados, obtém-se a seguinte função para os deslocamentos transversais:

$$v(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) q_2 + \frac{x}{L}\, q_5 \tag{2.74}$$

Ou escrevendo a função acima em coordenada adimensional, fica:

$$v(\eta) = (1 - \eta)\; q_2 + \eta\; q_5 \tag{2.75}$$

A matriz $\mathbf{N}_n$ torna-se:

$$\mathbf{N}_n = \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1-\eta & 0 & 0 & \eta & 0 \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

E a matriz $\mathbf{B}_n$ passa a ser representada por:

$$\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

Finalmente, a matriz $\mathbf{G}_n$ fica:

$$\mathbf{G}_n = \begin{bmatrix} 1-\eta & \frac{y_o}{L} & 0 & \eta & -\frac{y_o}{L} & 0 \\ 0 & 1-\eta & 0 & 0 & \eta & 0 \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

Abaixo seguem apresentadas as matrizes de rigidez e massa, obtidas através das Equações (2.38) e (2.36), respectivamente:

$$\mathbf{K}_n = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

$$\mathbf{M}_n = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho I}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.80}$$

Pode-se observar que esse tipo de modelo é equivalente ao modelo de treliça plana quando considerados apenas os efeitos axiais no elemento modelado.

O modo como foram obtidas todas as matrizes de massa, resulta nas chamadas matrizes de massa consistente, relativas aos deslocamentos nodais. Essa é uma forma mais refinada de se conseguir tais matrizes comparada com a distribuição de massa discreta, em que são consideradas massas concentradas nos nós do elemento e que não leva em consideração o efeito da rotação da seção transversal.

2.5 Efeito do Amortecimento

É observado que na resposta dinâmica da estrutura existe energia dissipada. Geralmente são as forças de amortecimento que estão relacionadas a esse processo.

Para Przemieniecki [21] diferentemente da massa e rigidez, o amortecimento não é necessariamente uma propriedade inerente ao sistema. As forças de amortecimento não dependem apenas do sistema oscilante mas também do meio circundante.

O mecanismo de amortecimento é geralmente descrito de três maneiras:

- amortecimento viscoso;
- amortecimento estrutural;

- amortecimento negativo.

O *amortecimento viscoso* ocorre quando o sistema estrutural está movendo-se dentro de um fluido e as forças de amortecimento são dependentes da velocidade.

O *amortecimento estrutural* é causado por atrito interno das moléculas dos elementos. As forças de amortecimento são função da deformação no sistema e a sua formulação matemática não é facilmente obtida.

O *amortecimento negativo* ocorre quando o sistema, ao invés de dissipar energia durante a vibração, passa a ter energia adicionada a ele.

O amortecimento viscoso é o método mais comum de se levar em conta a dissipação de energia em dinâmica das estruturas. A inclusão desse tipo de amortecimento não altera a linearidade da equação diferencial de movimento e por isso foi o escolhido para ser introduzido nesse trabalho.

Pode-se distinguir três casos diferentes de amortecimento viscoso, de acordo com o valor do coeficiente de amortecimento estrutural c e do coeficiente crítico c_{cr} [1]:

- amortecimento supercrítico ($c > c_{cr}$): o sistema é não-oscilatório;
- amortecimento crítico ($c = c_{cr}$): o sistema está na iminência para oscilar;
- amortecimento subcrítico ($c < c_{cr}$): o sistema oscila em torno da sua posição de equilíbrio.

Sistemas criticamente amortecidos são de interesse especial em aplicações de engenharia, desde que retornem à sua posição de equilíbrio no menor tempo possível, sem oscilação. Porém, os coeficientes de amortecimento c costumam ser bem menores do que o c_{cr}.

Na prática é mais fácil determinar ou estimar o fator de amortecimento modal associado a cada freqüência ao invés de se obter diretamente o coeficiente c. Alguns métodos, para sistemas com um grau de liberdade, são destacados, como o do *decremento logaritmico* ou o *método da meia potência*.

O fator de amortecimento (ξ) é definido como:

$$\xi_i = \frac{c_i}{c_{cr,i}} \tag{2.81}$$

onde o índice i representa que existe um fator de amortecimento associado a cada freqüência do sistema.

A abordagem do amortecimento para o Método da Superposição Modal e para o Método da Newmark é diferente, pois no primeiro há a necessidade de se resolver a equação diferencial de movimento desacoplada para cada grau de liberdade, e somente o fator de amortecimento é exigido; no segundo método é necessário obter diretamente a matriz de amortecimento **C**.

[1] O amortecimento crítico é o parâmetro que diz se o sistema é oscilatório ou não. Para sistemas com um grau de liberdade tem-se $c_{cr} = 2m\omega$

Geralmente, esta matriz é determinada pela combinação da matriz de massa e rigidez do sistema, mantendo a condição de ortogonalidade dos modos de vibração.

Uma dessas combinações é dada pelo *amortecimento de Caughey*:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \sum_{i=0}^{N-1} a_i (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^i \tag{2.82}$$

onde a_i são constantes a serem determinadas.

Quando $i = 0$ e $i = 1$ tem-se um caso especial, conhecida como *amortecimento de Rayleigh*, ficando:

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K} \tag{2.83}$$

A igualdade (2.83) pode ser escrita como:

$$\xi_i = \frac{a_0}{2\omega_i} + \frac{a_1\,\omega_i}{2} \tag{2.84}$$

A Figura (2.7) mostra a representação gráfica da Equação (2.84).

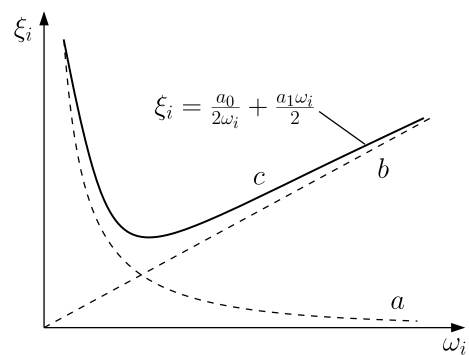

Figura 2.7: Amortecimento de Rayleigh

As constantes a_0 e a_1 são obtidas através de dois fatores de amortecimento correspondente a duas freqüências diferentes através do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} \xi_0 \\ \xi_1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\omega_0} & \omega_0 \\ \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \end{array} \right\}$$

sendo:

$$a_0 = \frac{2\omega_0\omega_1(\omega_0\xi_1 - \omega_1\xi_0)}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \qquad a_1 = \frac{2(\omega_0\xi_0 - \omega_1\xi_1)}{\omega_0^2 - \omega_1^2}$$

A curva tracejada a é aquela obtida caso o sistema tivesse um amortecimento proporcional à sua massa, e a linha tracejada b é aquela obtida para um amortecimento proporcional à sua rigidez. Na prática, para sistemas com vários graus de liberdade, observa-se que nenhuma das duas curvas é apropriada.

Levando em consideração a soma dessas duas propriedades obtém-se a curva c (linha cheia), que é o amortecimento de Rayleigh, Equação (2.84).

Segundo Paz [20] devem ser tomado valores para um amortecimento conservador, sendo que para estruturas em aço devem variar de 1% a 2% e para estruturas em concreto armado de 3% a 5% para a freqüência fundamental e assumir que fatores de amortecimento para os modos de ordem maiores sejam aumentados proporcionalmente a freqüência natural, conforme Figura 2.7.

Para Chopra [8] estruturas de madeira fixadas com parafusos ou pregos e trabalhando até a metade do seu limite de escoamento deve ser considerado um amortecimento de 5% a 7% e quando estas estiverem no limite do escoamento esses valores são ajustados para 10% a 15% para as aparafusadas e 15% a 20% para as fixadas com pregos.

Capítulo 3

Métodos de Análise Dinâmica

3.1 Freqüências Naturais e Modos de Vibração Livres

As *freqüências naturais* são propriedades inerentes ao sistema e dependem apenas das características físicas do material, da conformação geométrica e das vinculações.

Os *modos de vibração* descrevem as configurações assumidas pelo sistema em vibração livre sob determinadas freqüências naturais. Eles não possuem qualquer relação com a amplitude das oscilações e a cada modo está associado uma freqüência natural.

Para vibrações livres sem amortecimento, supõe-se que uma freqüência natural fará cada ponto da estrutura executar um movimento harmônico em relação a uma posição de equilíbrio estático. Todos os pontos passam pela posição de equilíbrio ao mesmo tempo e atingindo um máximo também em um mesmo instante (amplitude do movimento). Esse modelo é descrito pela Equação (3.1), que é uma equação diferencial de segunda ordem homogênea.

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{Kq} = 0 \tag{3.1}$$

Observa-se que o termo referente ao amortecimento estrutural, dado pela matriz **C** e as ações externas dadas pelo vetor de carga **P** são desprezados. A justificativa para isso consiste no fato de que:

- O vetor de força pode ser desconsiderado porque as freqüências e os modos naturais de vibração livre são uma característica exclusiva da estrutura, portanto independem do carregamento externo aplicado;

- A literatura sobre o assunto mostra que o amortecimento só introduz alterações significativas nas freqüências e modos naturais de vibração para valores bastante elevados, acima de 20%. Para problemas mais sofisticados, essas hipóteses inicialmente desprezadas, podem ser levadas em consideração, de acordo com o grau de precisão que o problema exige.

A solução da Equação (3.1) pode ser dada por uma função periódica da forma:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q_m} \; sen\, \omega_i \, t \tag{3.2}$$

Fazendo a substituição da função acima e de sua segunda derivada na Equação (3.1), chega-se:

$$[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}]\{\mathbf{q_m}\} = \{0\} \tag{3.3}$$

A formulação da Equação (3.3) é um importante problema matemático de autovalor e autovetor, que possibilita realizar a separação das equações diferenciais integrantes do sistema de movimento dinâmico, obtendo-se com esses autovetores os modos de vibração naturais, e com os autovalores associados as freqüências naturais de vibração.

Para a solução tem-se que o vetor $\mathbf{q_m}$ deve ser diferente de zero, o que resulta no determinante:

$$|\mathbf{K}-\omega_i^2\mathbf{M}| = 0 \tag{3.4}$$

3.1.1 O Problema de Autovalor e Autovetor

Um breve estudo sobre o problema de autovalor e autovetor, Burden e Faires [7], é feito nesse tópico com o intuito de resgatar algumas propriedades importantes de álgebra linear e que são necessárias para a elaboração do algoritmo da solução desse problema.

Definição 1. *Uma matriz* $\mathbf{A}$ *é definida positiva se* $\boldsymbol{\phi}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} > 0$ *para qualquer vetor* $\boldsymbol{\phi}$*, tal que* $\boldsymbol{\phi} \neq 0$*. Ainda, pode-se afirmar que se* $\mathbf{A}$ *obedece a definição acima ela também é não singular.*

Geralmente, a condição de matriz definida positiva é realizada para matrizes simétricas e a aplicação direta dessa definição pode tornar a verificação de tal propriedade um tanto complicada. Para contornar essa situação, existe um teorema que garante:

Teorema 1. *Uma matriz simétrica é definida positiva se e somente se todos os autovalores de* $\mathbf{A}$ *são positivos.*

A sua prova não apresenta maiores dificuldades.

Prova 1. *Supondo que* $\mathbf{A}$ *é definida positiva e que* λ *seja um autovalor de* $\mathbf{A}$ *com o autovetor* $\boldsymbol{\phi}$ *associado, pode-se escrever a seguinte equação, que é a definição de autovalor e autovetor, dado por:*

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} = \lambda\boldsymbol{\phi} \tag{3.5}$$

Pré-multiplicando a igualdade (3.5) por $\boldsymbol{\phi}^T$*, obtém-se a definição de matriz positiva, ficando:*

$$0 < \boldsymbol{\phi}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} = \lambda\boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{\phi} \tag{3.6}$$

sendo $\boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{\phi} > 0$ *com* $\boldsymbol{\phi} \neq 0$*, conclui-se que* $\lambda > 0$*. Portanto, todo autovalor de uma matriz definida positiva é positivo.*

Uma característica importante das matrizes simétricas é que os autovetores de $\mathbf{A}$ formam um conjunto ortonormal, isto é:

$$\boldsymbol{\phi}_i^T\boldsymbol{\phi}_j = 0 \qquad para \qquad i \neq j$$

$$\boldsymbol{\phi}_i^T\boldsymbol{\phi}_j = 1 \qquad para \qquad i = j$$

Outra propriedade de uma matriz ortonormal é que ela é uma matriz unitária real, com a seguinte propriedade:

$$\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^T = \mathbf{I}$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\Phi}^T = \boldsymbol{\Phi}^{-1}$$

sendo $\boldsymbol{\Phi}$ a matriz de autovetores associada à matriz $\mathbf{A}$.

3.1.2 O Método das Potências

Este é um método iterativo para encontrar o autovalor de maior magnitude, chamado de *autovalor dominante* e seu respectivo autovetor, Burden e Faires [7]. Com ele também é possível encontrar o autovalor de menor magnitude.

Assumindo inicialmente uma matriz $\mathbf{A}_{mxm}$ que tenha N autovetores independentes $\boldsymbol{\phi}^{(1)}, \boldsymbol{\phi}^{(2)}, ...\boldsymbol{\phi}^{(N)}$ com $\| \boldsymbol{\phi}^{(i)} \|_\infty = 1$ para $i = 1, 2, ..., N$; e associados a esses autovetores estejam os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$, com $| \lambda_1 | > | \lambda_2 | \geq | \lambda_3 | \geq ... \geq | \lambda_N |$.

Para dar início ao processo é tomado um vetor inicial $\mathbf{z}^{(0)}$, com $\| \mathbf{z}^{(0)} \|_\infty = 1$.

Como $\mathbf{z}^{(0)} \in \mathbb{R}^N$ e $\boldsymbol{\phi}^{(1)}, \boldsymbol{\phi}^{(2)}, ...\boldsymbol{\phi}^{(N)}$ formam uma base de $\mathbb{R}^N$, pode-se escrever:

$$\mathbf{z}^{(0)} = \alpha_1 \boldsymbol{\phi}^{(1)} + \alpha_2 \boldsymbol{\phi}^{(2)} + ... + \alpha_N \boldsymbol{\phi}^{(N)}$$

onde α_i são escalares.

Define-se o vetor $\mathbf{r}^{(1)}$ como:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{z}^{(0)} &= \alpha_1 \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}^{(1)} + \alpha_2 \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}^{(2)} + ... + \alpha_N \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}^{(N)} \\ &= \alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{\phi}^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2 \boldsymbol{\phi}^{(2)} + ... + \alpha_N \lambda_N \boldsymbol{\phi}^{(N)} \end{aligned}$$

Fazendo $\mathbf{z}^{(1)} = \dfrac{\mathbf{r}^{(1)}}{\mu_1}$, onde μ_1 é a coordenada de $\mathbf{r}^{(1)}$ tal que $\| \mathbf{z}^{(1)} \|_\infty = 1$.

Definidas essas variáveis, inicia-se o processo iterativo na seqüência que se segue:

$$\mathbf{z}^{(1)} = \frac{\mathbf{r}^{(1)}}{\mu_1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \lambda_i \boldsymbol{\phi}^{(i)}}{\mu_i}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{A}\mathbf{z}^{(1)} &= \frac{1}{\mu_i} (\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}^{(2)} + ... + \alpha_N \lambda_N \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}^{(N)}) \\ &= \frac{1}{\mu_i} (\alpha_1 \lambda_1^2 \boldsymbol{\phi}^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2^2 \boldsymbol{\phi}^{(2)} + ... + \alpha_N \lambda_N^2 \boldsymbol{\phi}^{(N)}) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \lambda_i^2 \boldsymbol{\phi}^{(i)}}{\mu_1 \; \mu_2} \end{aligned}$$

Generalizando o método, tem-se:

$$\mathbf{z}^{(k)} = \frac{\mathbf{r}^{(k)}}{\prod_{i=1}^{k} \mu_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \lambda_i^k \boldsymbol{\phi}^{(i)}}{\mu_1 \; \mu_2 \; ... \; \mu_k} = \lambda_1^k \left[\frac{\alpha_1 \boldsymbol{\phi}^{(1)} + \alpha_2 (\lambda_2/\lambda_1)^k \boldsymbol{\phi}^{(2)} + ... + \alpha_N (\lambda_N/\lambda_1)^k \boldsymbol{\phi}^{(N)}}{\mu_1 \; \mu_2 \; ... \; \mu_k} \right]$$

Como $| \lambda_1 | > | \lambda_2 | \geq | \lambda_3 | \geq ... \geq | \lambda_N |$, tem-se que $\left| \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$ para $i = 2, 3, ..., N$.

No limite, obtém-se:

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{z}^{(k)} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^k}{\mu_1 \; \mu_2 \; ... \; \mu_k} \; \boldsymbol{\phi}^{(1)}$$

Lembrando que $\| \mathbf{z}^{(k)} \|_\infty = 1$ e $\| \boldsymbol{\phi}^{(1)} \|_\infty = 1$, tem-se que $\dfrac{\alpha_1 \lambda_1^k}{\mu_1\ \mu_2\ \dots\ \mu_k} \simeq 1$, ou no limite:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_1 \lambda_1^k}{\mu_1\ \mu_2\ \dots\ \mu_k} = 1$$

Assim, quando $k \to \infty$, tem-se que $\mathbf{z}^{(k)} \to \boldsymbol{\phi}^{(1)}$.

E quando $k \to \infty$, têm-se que $\mu_1\ \mu_2\ \dots\ \mu_k \to \alpha_1 \lambda_1^k$ e $\mu_1\ \mu_2\ \dots\ \mu_k\ \mu_{k+1} \to \alpha_1 \lambda_1^{k+1}$, de onde conclui-se que $\mu_{k+1} \to \lambda_1$.

Duas observações a respeito do Método das Potências:

- A velocidade de convergência do método está associada ao quociente $\left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|$ para $i = 2, 3, \dots, N$. Quanto mais próximo da unidade ele estiver, mais lenta será a convergência.
- Apresenta a desvantagem de não identificar previamente se a matriz possui ou não um autovalor dominante, nem oferece uma alternativa para a escolha do vetor $\mathbf{z}^{(0)}$ que garanta realmente que no fim no processo ele represente o autovetor associado ao autovalor dominante da matriz.

3.1.3 O Método da Deflação de Wielandt

Deflação é um modo de remover o autovalor dominante de uma matriz $\mathbf{A}$ para que os demais possam ser calculados. Consiste em formar uma nova matriz, aqui chamada de $\mathbf{A}_p$, de tal modo que seus autovalores sejam os mesmos da matriz $\mathbf{A}$, exceto pelo autovalor dominante que é substituído pelo autovalor nulo, Burden e Faires [7].

Teorema 2. *Suponha que λ_1, λ_2, ..., λ_N são autovalores de $\mathbf{A}$ com os autovetores associados $\boldsymbol{\phi}^{(1)}$, $\boldsymbol{\phi}^{(2)}$, ..., $\boldsymbol{\phi}^{(N)}$, e que λ_1 tenha multiplicidade um. Se $\mathbf{w}$ é um vetor qualquer tal que $\mathbf{w}^T \boldsymbol{\phi}^{(1)} = 1$, então a matriz $\mathbf{A}_p = \mathbf{A} - \lambda_1 \boldsymbol{\phi}^{(1)} \mathbf{w}^T$ tem autovalores 0, λ_2, λ_3, ..., λ_N com autovetores associados $\boldsymbol{\phi}^{(1)}$, $\boldsymbol{\psi}^{(2)}$, $\boldsymbol{\psi}^{(3)}$, ..., $\boldsymbol{\psi}^{(N)}$.*

A deflação de Wielandt define o vetor $\mathbf{w}$ por:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\lambda_1 \phi_p^{(1)}} \begin{bmatrix} a_{p1} \\ a_{p2} \\ a_{p1} \\ \vdots \\ a_{pm} \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 \phi_p^{(1)}} \mathbf{a}_p \tag{3.7}$$

onde $\phi_p^{(1)}$ é um elemento não nulo do autovetor $\boldsymbol{\phi}^{(1)}$, e os valores a_{p1}, a_{p2}, ..., a_{pm} são elementos da p-ésima linha da matriz $\mathbf{A}$ e são denominados pelo vetor $\mathbf{a}_p$.

Uma maneira equivalente de se escrever a matriz $\mathbf{A}_p$ é dada por:

$$\mathbf{A}_p = \mathbf{A} - \boldsymbol{\phi}^{(1)} \mathbf{a}_p^T \tag{3.8}$$

onde $\boldsymbol{\phi}^{(1)}$ deve ser normalizado de tal modo que $\phi_p^{(1)} = 1$.

Observa-se que a p-ésima linha da matriz $\boldsymbol{\phi}^{(1)}\mathbf{a}_p^T$ é o próprio vetor $\mathbf{a}_p$, pois $\phi_p^{(1)} = 1$, levando a p-ésima linha de $\mathbf{A}_p$ ser nula.

Multiplicando a Equação (3.8) por $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$, obtém-se:

$$\mathbf{A}_p\boldsymbol{\phi}^{(i)} = \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}^{(i)} - \boldsymbol{\phi}^{(1)}\mathbf{a}_p^T\boldsymbol{\phi}^{(i)} = \lambda_i\boldsymbol{\phi}^{(i)} - \boldsymbol{\phi}^{(1)}\lambda_i\phi_p^{(i)} = \lambda_i(\boldsymbol{\phi}^{(i)} - \phi_p^{(i)}\boldsymbol{\phi}^{(1)}) \tag{3.9}$$

para $i = 1, 2, ..., N$.

Pela equação:

$$\mathbf{A}_p(\boldsymbol{\phi}^{(i)} - \phi_p^{(i)}\boldsymbol{\phi}^{(1)}) = \lambda_i(\boldsymbol{\phi}^{(i)} - \phi_p^{(i)}\boldsymbol{\phi}^{(1)})$$

para $i \neq 1$, tem-se que λ_i continua sendo um autovalor de $\mathbf{A}_p$, mas com o autovetor modificado $(\boldsymbol{\phi}^{(i)} - \phi_p^{(i)}\boldsymbol{\phi}^{(1)})$.

Considerando agora o problema de autovalor $\mathbf{A}_p\boldsymbol{\psi}^{(i)} = \lambda_i\boldsymbol{\psi}^{(i)}$, é possível observar que como a p-ésima linha de $\mathbf{A}_p$ é nula, implicará que a componente p do autovetor $\psi_p^{(i)} = 0$. Isso faz com que a p-ésima coluna de $\mathbf{A}_p$ seja irrelevante nos cálculos subseqüentes, podendo ser desprezada. Descartando a p-ésima linha e a p-ésima coluna de $\mathbf{A}_p$, obtém-se um problema de autovalor de dimensão (N-1) em relação ao sistema original. A matriz $\mathbf{A}_p$ terá os mesmos autovalores λ_i da matriz $\mathbf{A}$, exceto pelo autovalor λ_1 que foi removido.

O autovetor associado à $\mathbf{A}_p$ precisa ser reconstruído para a dimensão N, sendo relacionado pela equação:

$$\boldsymbol{\psi}^{(i)} = \boldsymbol{\phi}^{(i)} - \phi_p^{(i)}\boldsymbol{\phi}^{(1)} \tag{3.10}$$

Para determinar $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$ é necessário encontrar primeiro a componente $\phi_p^{(i)}$. Pré-multiplicando a Equação (3.10) por $\mathbf{A}$ escreve-se equação:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}^{(i)} = \lambda_i\boldsymbol{\phi}^{(i)} - \phi_p^{(i)}\lambda_1\boldsymbol{\phi}^{(1)}$$

A p-ésima linha da equação acima é dada por

$$\mathbf{a}_p\boldsymbol{\psi}^{(i)} = \lambda_i\phi_p^{(i)} - \phi_p^{(i)}\lambda_1$$

lembrando que $\phi_p^{(1)} = 1$.

A equação escalar acima fornece:

$$\phi_p^{(i)} = \frac{\mathbf{a}_p\boldsymbol{\psi}^{(i)}}{\lambda_i - \lambda_1}$$

e pela Equação (3.10), obtém-se, finalmente $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$, para $i = 2, 3, ..., N$.

$$\boldsymbol{\phi}^{(i)} = \boldsymbol{\psi}^{(i)} + \phi_p^{(i)}\boldsymbol{\phi}^{(1)} = \boldsymbol{\psi}^{(i)} + \left(\frac{\mathbf{a}_p\boldsymbol{\psi}^{(i)}}{\lambda_i - \lambda_1}\right)\boldsymbol{\phi}^{(1)} \tag{3.11}$$

O Método de Wielandt pode ser usado para aproximar todos os autovalores e autovetores de uma matriz, mas, como destacado por Burden e Faires [7], o método está suscetível a erros de arredondamento.

Para que o problema de autovalor dado pela igualdade (3.3) possa ser resolvido utilizando os métodos da Potência e o de Wielandt, a matriz **A** deve ser dada como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M} \tag{3.12}$$

Observações:

- Da maneira como escrita acima, e utilizando os métodos supracitados, os autovalores são obtidos em ordem crescente de magnitude;
- É necessário proceder a inversão de uma matriz (**K**) e posteriormente multiplicá-la por uma outra (**M**), fazendo com que a matriz **A** não seja esparsa, constituindo fatores desfavoráveis do método, tornando-o inviável para problemas de grandes dimensões.

3.2 O Método da Superposição Modal

A solução direta do sistema de equações diferenciais dada pela Equação (2.45) constitui-se em um problema de difícil tratamento. O objetivo da análise modal é transformar esse sistema de equações simultâneas em um número equivalente de equações diferenciais independentes e de fácil integração. Considera-se que a resposta desse sistema de equações seja uma combinação linear dos modos de vibração.

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x} \tag{3.13}$$

Esta representação é baseada no fato de que os modos de vibração são ortogonais, formando um conjunto linearmente independente, e, portanto, podem constituir uma base para a representação de qualquer vetor pertencente àquele espaço vetorial.

Para ilustrar o conceito empregado na análise feita na superposição modal, apresenta-se uma viga vertical fixada no solo, conforme esquematizado por Clough e Penzien [9]. A sua configuração final pode ser definida pela superposição adequada dos modos de vibração, como mostrado na Figura (3.1).

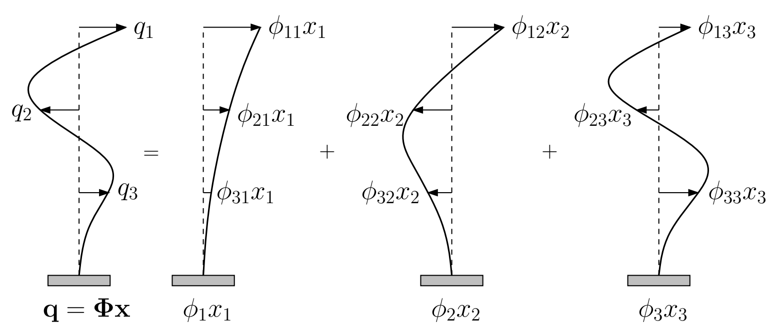

Figura 3.1: Modos de vibração

Para esse caso o vetor de deslocamento $\mathbf{q}$ é obtido pela soma das suas respectivas coordenadas modais, ficando:

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\phi}_1 x_1 + \boldsymbol{\phi}_2 x_2 + \boldsymbol{\phi}_3 x_3$$

As velocidades e acelerações dos nós também são escritas como a soma dessas coordenadas modais referentes as essas grandezas.

$$\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\Phi}\dot{\mathbf{x}} \qquad \ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{x}}$$

Substituindo os deslocamentos nodais, dados pela Equação (3.13), e suas derivadas nas equações de movimento dadas pela Equação (2.45), tem-se:

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{x} = \mathbf{P} \tag{3.14}$$

Pré-multiplicando ambos os membros da Equação (3.14) por $\boldsymbol{\Phi}^T$, resulta:

$$\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{P} \tag{3.15}$$

Utilizando-se da propriedade de ortogonalidade dos modos de vibração, para $i \neq j$, dadas por:

$$\boldsymbol{\phi}_j^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i = 0 \tag{3.16}$$

$$\boldsymbol{\phi}_j^T\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_i = 0 \tag{3.17}$$

obtém-se:

$$\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_i = \omega_i^2\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i \tag{3.18}$$

A parcela referente ao amortecimento da igualdade (3.15) será dada por:

$$\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{C}\boldsymbol{\phi}_i = 2\,\omega_i\,\xi_i\,\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i \tag{3.19}$$

Assim, é possível reescrever a Equação (3.15) como:

$$\ddot{x}_i\left(\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i\right) + 2\,\omega_i\,\xi_i\,\dot{x}_i\left(\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i\right) + \omega_i^2\,x_i\left(\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i\right) = \boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{P} \tag{3.20}$$

No que resulta:

$$\ddot{x}_i + 2\,\omega_i\,\xi_i\,\dot{x}_i + \omega_i^2\,x_i = p_i \tag{3.21}$$

sendo: $p_i = \dfrac{\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{P}}{\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i}$

As condições iniciais para que o processo seja iniciado são dadas por:

$$x_i(0) = \frac{\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{M}\,\mathbf{q}_0}{\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i} \qquad \dot{x}_i(0) = \frac{\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{q}}_0}{\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i} \qquad \ddot{x}_i(0) = p_i(0) - 2\,\omega_i\,\xi_i\,\dot{x}_i(0) - \omega_i^2\,x_i(0) \tag{3.22}$$

Desse modo o sistema de equações diferenciais lineares foi desacoplado, obtendo-se um conjunto de equações diferenciais lineares independentes.

É interessante proceder a normalização dos autovetores em relação à matriz de massa, obtendo-se as seguintes igualdades:

$$\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi} = \lceil\mathbf{I}\rfloor \qquad \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \lceil\boldsymbol{\omega}^2\rfloor$$

onde $\lceil\boldsymbol{\omega}^2\rfloor$ é uma matriz diagonal com freqüências naturais ao quadrado. Ela também é chamada de *matriz espectral*.

3.2.1 Integração Numérica

A resolução da equação diferencial (3.21) será feita de maneira numérica, segundo Paz [20]. Para isso serão utilizados segmentos lineares para a aproximação da função excitadora **p** associada a cada grau de liberdade do sistema, conforme a Figura (3.2).

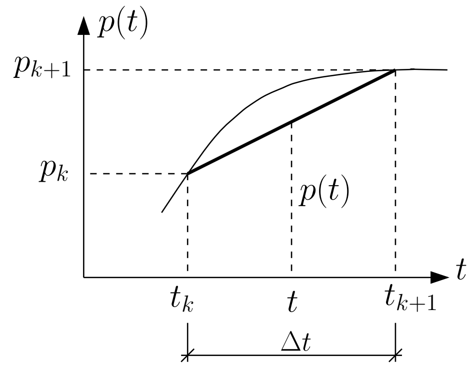

Figura 3.2: Aproximação Linear da Função Excitadora

O método fornecerá respostas exatas para funções lineares, sendo que para outros tipos deve ser escolhido um incremento de tempo Δt que assegure a precisão do método. Para cada Δt a resposta é calculada considerando as condições iniciais de deslocamento e velocidade no início do intervalo.

A solução de cada equação diferencial está associada ao grau de liberdade em que a função excitadora esteja atuando. Será omitido no desenvolvimento desse item o índice i, que representa o grau de liberdade em que se está efetuando a integração, para que a notação não seja sobrecarregada.

A função excitadora pode ser aproximada por:

$$p(t) = \left(1 - \frac{t - t_k}{\Delta t}\right) p_k + \left(\frac{t - t_k}{\Delta t}\right) p_{k+1} \qquad t_k \leq t \leq t_{k+1} \tag{3.23}$$

onde $t_k = k.\Delta t$ para intervalos iguais de $k = 1, 2, ..., N$.

A equação diferencial de movimento referente ao grau de liberdade associada a força é então expressa por:

$$\ddot{x} + 2\,\omega\,\xi\dot{x} + \omega^2 x = \left(1 - \frac{t - t_k}{\Delta t}\right) p_k + \left(\frac{t - t_k}{\Delta t}\right) p_{k+1} \qquad t_k \leq t \leq t_{k+1} \tag{3.24}$$

A solução da equação diferencial acima é dada pela soma da solução particular x_p e da solução homogênea x_h pelo princípio da superposição, isto é, $x = x_h + x_p$.

A solução particular para resposta forçada descrita por um polinômio de primeira ordem como a Equação (3.23) é dada por:

$$x_p = B_k + A_k(t - t_k) \tag{3.25}$$

Substituindo as derivadas da equação acima na Equação (3.21), fornece:

$$2\xi\omega A_k + \omega^2[B_k + A_k(t-t_k)] = \left(1 - \frac{t-t_k}{\Delta t}\right)p_k + \left(\frac{t-t_k}{\Delta t}\right)p_{k+1} \tag{3.26}$$

Rearranjando os termos, resulta:

$$2\xi\omega A_k + \omega^2 B_k + \omega^2 A_k(t-t_k) = \left(\frac{t-t_k}{\Delta t}\right)p_k + \left(\frac{t-t_k}{\Delta t}\right)p_{k+1} \tag{3.27}$$

Pela comparação dos termos semelhantes, obtém-se:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{p_{k+1}-p_k}{\omega^2\Delta t} \\ B_k &= \frac{p_k - 2\xi\omega A_k}{\omega^2} \end{aligned} \tag{3.28}$$

A solução da equação homogênea para o caso de amortecimento sub-crítico é expressa por:

$$x_h = e^{-\xi\omega(t-t_k)}[C_k\ cos\,\omega_D(t-t_k) + D_k\ sen\,\omega_D(t-t_k)] \tag{3.29}$$

onde $\omega_D = \omega\ \sqrt{1-\xi^2}$ e conhecida como freqüência amortecida.

Com isso tem-se que a solução geral para o deslocamento fica:

$$x = e^{-\xi\omega(t-t_k)}[C_k\ cos\,\omega_D(t-t_k) + D_k\ sen\,\omega_D(t-t_k)] + B_k + A_k(t-t_k) \tag{3.30}$$

E a velocidade é obtida através da derivada da Equação (3.30) como

$$\begin{aligned} \dot{x} = &-\xi\omega\ e^{-\xi\omega(t-t_k)}[C_k\ cos\,\omega_D(t-t_k) + D_k\ sen\,\omega_D(t-t_k)] + \\ &e^{-\xi\omega(t-t_k)}[-C_k\omega_D\ sen\,\omega_D(t-t_k) + D_k\omega_D\ cos\,\omega_D(t-t_k)] + A_k \end{aligned} \tag{3.31}$$

Assim, torna-se possível obter as constantes C_k e D_k através das condições de contorno iniciais para deslocamento e velocidade, isto é:

$$x(t=t_k) = x_k \qquad e \qquad \dot{x}(t=t_k) = \dot{x}_k$$

resultando em:

$$\begin{aligned} C_k &= x_k - B_k \\ D_k &= \frac{\dot{x}_k - A_k + \xi\,\omega\,C_k}{\omega_D} \end{aligned} \tag{3.32}$$

Finalmente chega-se à equação que fornece os deslocamentos e velocidades no tempo $t_k + \Delta t$ dadas respectivamente por:

$$x_{k+1} = e^{-\xi\omega\Delta t}[C_k\ cos\,\omega_D\Delta t + D_k\ sen\,\omega_D\Delta t] + B_k + A_k\Delta t \tag{3.33}$$

e

$$\dot{x}_{k+1} = e^{-\xi\omega\Delta t}[(\omega_D\,D_k - \xi\,\omega C_k)\ cos\,\omega_D\Delta t - (\omega_D\,C_k + \xi\,\omega\,D_k)\ sen\,\omega_D\Delta t] + A_k \tag{3.34}$$

A aceleração é obtida substituindo diretamente as Equações (3.33) e (3.34) na Equação (3.21), ficando:

$$\ddot{x}_{k+1} = p - 2\,\xi\,\omega\dot{x}_{k+1} - \omega^2 x_{k+1} \tag{3.35}$$

Para a maioria dos carregamentos aplicados em uma estrutura, a contribuição dos modos de vibração de ordens maiores não são tão significativos quando comparados com aqueles associados às baixas freqüências. Isso pode ser percebido no cálculo das constantes de integração A_k, B_k, C_k e D_k que são inversamente proporcionais à freqüência natural do sistema, sendo que as duas primeiras são inversas ao quadrado.

3.3 Métodos de Integração Direta

Esses métodos se utilizam de um procedimento numérico ”passo-a-passo”ao longo do tempo, sem ter a necessidade de fazer transformações nas equações do sistema como as realizadas na superposição modal. Escolhe-se um incremento de tempo Δt, geralmente o mesmo para todo o processo em que o sistema será submetido, inclui-se o efeito da inércia, amortecimento e rigidez, ocorrendo variações da aceleração, velocidade e deslocamento em cada Δt assumido. A maneira como são feitas essas variações é que determinará a precisão, estabilidade e custo da solução.

Para dar partida ao método é necessário fornecer os valores de $\mathbf{q}_0$ e $\dot{\mathbf{q}}_0$ que são as condições iniciais de deslocamento e velocidade do sistema, respectivamente. Após iniciado o processo em um tempo t_k, tenta-se estabelecer o equilíbrio dinâmico em um tempo subseqüente igual a $t_{k+1} = t_k + \Delta t$.

Existem várias técnicas utilizadas na modelagem desses métodos de acordo com o instante do passo em que o equilíbrio dinâmico é realizado sendo classificados como *métodos de integração explícito* ou *implícito*, Cook e outros [10].

Os *métodos explícitos* têm a forma:

$$\mathbf{q}_{k+1} = f(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k, \ddot{\mathbf{q}}_k, \mathbf{q}_{k-1}, ...)$$

permitindo que a resposta $\mathbf{q}_{k+1}$ seja fornecida completamente em função das respostas obtidas nos passos t_k e t_{k-1}. De maneira geral os métodos explícitos são *condicionalmente estáveis* [1] e entre eles encontra-se o método das diferenças centrais, também chamado de método de passo duplo, pois em cada passo são envolvidas as variáveis anteriores no tempo t_k e t_{k-1}.

Os *métodos implícitos* têm a forma:

$$\mathbf{q}_{k+1} = f(\ddot{\mathbf{q}}_{k+1}, \dot{\mathbf{q}}_{k+1}, \mathbf{q}_k, ...)$$

necessitando das derivadas de $\mathbf{q}_{k+1}$ para que a resposta $\mathbf{q}_{k+1}$ seja obtida. Os métodos implícitos podem ser *condicionalmente* ou *incondicionalmente estáveis* [2]. Vários métodos encontram-se dentro dessa classificação, sendo que um dos mais utilizados e que será estudado nesse trabalho é o Método de Newmark, também chamado de método de passo único, pois em cada passo são envolvidas as variáveis anteriores no tempo t_k.

Chopra [8] destaca três características importantes para um método numérico:

- *convergência*: diminuindo o incremento de tempo a solução numérica deve aproximar-se da solução exata;
- *estabilidade*: a solução numérica deve ser estável na presença de erros de arredondamento;
- *precisão*: o método deve fornecer resultados próximos o suficiente da solução exata.

[1] Um método é dito *condicionalmente estável* quando o passo de tempo Δt é menor que um certo limite de estabilidade.

[2] O método é chamado de *incondicionalmente estável* quando a solução do problema independe do tamanho do passo de tempo Δt.

E segundo Czeslaw [11], o melhor método de integração no tempo deve possuir as seguintes características:

- deve ser incondicionalmente estável;
- deve ter uma dissipação numérica controlada, também chamada de amortecimento numérico ou viscosidade artificial, ela provoca um decaimento da amplitude da resposta do sistema mesmo que ele não possua amortecimento físico;
- a dissipação numérica não deve afetar os modos de ordem menores, podendo interferir nos modos de ordem maiores;
- o esforço computacional deve ser o menor possível.

3.3.1 Método de Newmark

O método de integração direta de Newmark [19], apresentado por ele em 1959, refere-se a um processo implícito para solução da equação do movimento. Reescrevendo a Equação (2.45):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{k+1} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1} \tag{3.36}$$

O método está baseado na expansão em série de Taylor para deslocamento e velocidade, dada respectivamente por:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta t\dot{\mathbf{q}}_k + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{q}}_k + \frac{\Delta t^3}{6}\dddot{\mathbf{q}}_k + \ldots \tag{3.37}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{k+1} = \dot{\mathbf{q}}_k + \Delta t\ddot{\mathbf{q}}_k + \frac{\Delta t^2}{2}\dddot{\mathbf{q}}_k + \ldots \tag{3.38}$$

Newmark truncou essas duas séries no termo de terceira ordem, ficando:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta t\dot{\mathbf{q}}_k + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{q}}_k + \beta\Delta t^3\dddot{\mathbf{q}}_k \tag{3.39}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{k+1} = \dot{\mathbf{q}}_k + \Delta t\ddot{\mathbf{q}}_k + \alpha\Delta t^2\dddot{\mathbf{q}}_k \tag{3.40}$$

onde os coeficientes α e β definem a variação da aceleração em um passo de tempo.

Se a aceleração é assumida linear dentro do incremento de tempo Δt, tem-se:

$$\dddot{\mathbf{q}}_k = \frac{(\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} - \ddot{\mathbf{q}}_k)}{\Delta t} \tag{3.41}$$

Substituindo a Equação (3.41) nas Equações (3.39) e (3.40), resulta nas duas equações padrões do método dadas por:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta t\dot{\mathbf{q}}_k + \Delta t^2\left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{\mathbf{q}}_k + \beta\ddot{\mathbf{q}}_{k+1}\right] \tag{3.42}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{k+1} = \dot{\mathbf{q}}_k + \Delta t[(1-\alpha)\ddot{\mathbf{q}}_k + \alpha\ddot{\mathbf{q}}_{k+1}] \tag{3.43}$$

A seguir é mostrado como o método é empregado em notação matricial. A idéia é tentar transformar o problema dinâmico de tal maneira que as técnicas empregadas para a solução de um problema estático também sejam válidas.

Primeiramente, a aceleração $\ddot{\mathbf{q}}_{k+1}$ é isolada da Equação (3.42), ficando:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} = \frac{\mathbf{q}_{k+1} - \mathbf{q}_k - \Delta t \dot{\mathbf{q}}_k}{\Delta t^2 \beta} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{q}}_k \tag{3.44}$$

Substituindo a Equação (3.44) na Equação (3.43), obtém-se:

$$\dot{\mathbf{q}}_{k+1} = \dot{\mathbf{q}}_k + \Delta t\left[(1-\alpha)\ddot{\mathbf{q}}_k + \frac{\alpha}{\Delta t^2 \beta}(\mathbf{q}_{k+1} - \mathbf{q}_k - \Delta \dot{\mathbf{q}}_k t) - \left(\frac{\alpha}{2\beta} - \alpha\right)\right] \tag{3.45}$$

Com as Equações (3.44) e (3.45) na Equação (3.36), e efetuando algumas manipulações algébricas, chega-se a:

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{\Delta t^2 \beta}\mathbf{M} + \frac{\alpha}{\Delta t \beta}\mathbf{C} + \mathbf{K}\right]\mathbf{q}_{k+1} = &\mathbf{P}_{k+1} + \mathbf{M}\left[\frac{1}{\Delta t^2 \beta}\mathbf{q}_k + \frac{1}{\Delta t \beta}\dot{\mathbf{q}}_k + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{q}}_k\right] + \\ &\mathbf{C}\left[\frac{\alpha}{\Delta t \beta}\mathbf{q}_k + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)\dot{\mathbf{q}}_k + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 2\right)\ddot{\mathbf{q}}_k\right]\end{aligned} \tag{3.46}$$

Dessa maneira, chamando o termo do lado direito da igualdade (3.46) de $\hat{\mathbf{K}}$, e sendo dado por:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$$

e o termo esquerdo da mesma igualdade sendo chamado de $\hat{\mathbf{P}}_{k+1}$, e dado por:

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1} + \mathbf{M}(a_0\mathbf{q}_k + a_2\dot{\mathbf{q}}_k + a_3\ddot{\mathbf{q}}_k) + \mathbf{C}(a_1\mathbf{q}_k + a_4\dot{\mathbf{q}}_k + a_5\ddot{\mathbf{q}}_k)$$

Chega-se ao sistema linear equivalente:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{q}_{k+1} = \hat{\mathbf{P}}_{k+1} \tag{3.47}$$

cuja solução fornece os deslocamentos.

Tendo calculado o vetor de deslocamento $\mathbf{q}_{k+1}$, os vetores da aceleração e da velocidade, são dados respectivamente por:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} = a_0(\mathbf{q}_{k+1} - \mathbf{q}_k) - a_2\dot{\mathbf{q}}_k - a_3\ddot{\mathbf{q}}_k \tag{3.48}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{k+1} = \dot{\mathbf{q}}_k + a_6\ddot{\mathbf{q}}_k + a_7\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} \tag{3.49}$$

As constantes a_i para $i = 0, 1, \ldots, 7$ necessitam ser calculadas apenas uma vez para todo o processo e valem:

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t^2 \beta}; \qquad a_1 = \frac{\alpha}{\Delta t \beta}; \qquad a_2 = \frac{1}{\Delta t \beta}; \qquad a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1; \qquad a_4 = \frac{\alpha}{\beta} - 1;$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 2\right); \qquad a_6 = \Delta t(1-\alpha); \qquad a_7 = \Delta t \alpha$$

Dependendo do valor dos coeficientes α e β obtém-se dois tipos básicos de aceleração: com variação linear ou variação média constante.

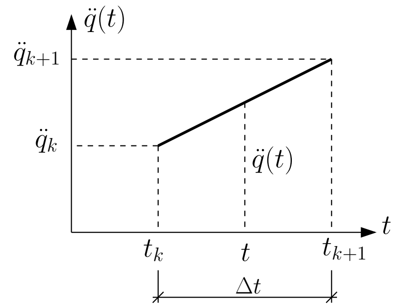

Figura 3.3: Aceleração Linear

3.3.2 Aceleração Linear

Assume-se para um passo de integração que a aceleração varie linearmente, conforme Figura (3.3)

Para esse caso, pode-se escrever a seguinte função para a variação da aceleração:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \ddot{\mathbf{q}}_k + \frac{\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} - \ddot{\mathbf{q}}_k}{\Delta t}\ t \tag{3.50}$$

Integrando duas vezes a função acima, obtêm-se as funções para velocidade e deslocamento, dadas respectivamente por:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{q}}_k + \ddot{\mathbf{q}}_k t + \frac{\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} - \ddot{\mathbf{q}}_k}{2\Delta t}\ t^2 \tag{3.51}$$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_k + \dot{\mathbf{q}}_k t + \frac{\ddot{\mathbf{q}}_k}{2} t^2 + \frac{\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} - \ddot{\mathbf{q}}_k}{6\Delta t}\ t^3 \tag{3.52}$$

Para o caso em que $t = \Delta t$ têm-se para as igualdades (3.51) e (3.52) respectivamente:

$$\dot{\mathbf{q}}_{k+1} = \dot{\mathbf{q}}_k + \Delta t \ddot{\mathbf{q}}_k + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} - \ddot{\mathbf{q}}_k) \tag{3.53}$$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_k + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{q}}_k + \frac{\Delta t^2}{6}(\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} - \ddot{\mathbf{q}}_k) \tag{3.54}$$

Pode-se reescrever as duas igualdades acima como:

$$\dot{\mathbf{q}}_{k+1} = \dot{\mathbf{q}}_k + \Delta t \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)\ddot{\mathbf{q}}_k + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} \right] \tag{3.55}$$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_k + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)\ddot{\mathbf{q}}_k + \frac{1}{6}\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} \right] \tag{3.56}$$

Por analogia com as Equações (3.42) e (3.43), resulta que:

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad e \qquad \beta = \frac{1}{6}$$

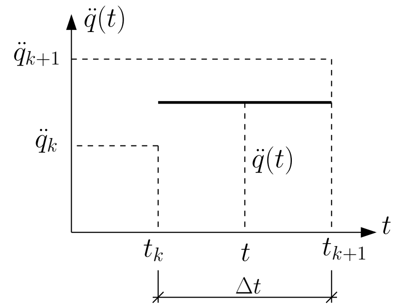

Figura 3.4: Aceleração Média Constante

3.3.3 Aceleração Média Constante

A variação da aceleração é representada pela Figura(3.4).

De maneira análoga ao realizado no item anterior, a função de variação da aceleração pode ser escrita como:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \frac{\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} + \ddot{\mathbf{q}}_k}{2} \tag{3.57}$$

Novamente integrando duas vezes a função acima, obtêm-se as funções para velocidade e deslocamento, dadas respectivamente por:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{q}}_k + \frac{\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} + \ddot{\mathbf{q}}_k}{2}\, t \tag{3.58}$$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_k + \dot{\mathbf{q}}_k t + \frac{\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} + \ddot{\mathbf{q}}_k}{4}\, t^2 \tag{3.59}$$

Para o caso em que $t = \Delta t$ têm-se para as igualdades (3.58) e (3.59), respectivamente:

$$\dot{\mathbf{q}}_{k+1} = \dot{\mathbf{q}}_k + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} + \ddot{\mathbf{q}}_k) \tag{3.60}$$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta t\dot{\mathbf{q}}_k + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{\mathbf{q}}_{k+1} + \ddot{\mathbf{q}}_k) \tag{3.61}$$

Pode-se reescrever as duas igualdades acima como:

$$\dot{\mathbf{q}}_{k+1} = \dot{\mathbf{q}}_k + \Delta t\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)\ddot{\mathbf{q}}_k + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{q}}_{k+1}\right] \tag{3.62}$$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta t\dot{\mathbf{q}}_k + \Delta t^2\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\ddot{\mathbf{q}}_k + \frac{1}{4}\ddot{\mathbf{q}}_{k+1}\right] \tag{3.63}$$

Por analogia com as Equações (3.42) e (3.43), resulta que:

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad e \qquad \beta = \frac{1}{4}$$

3.3.4 Estabilidade do Método de Newmark

Segundo Chopra [8], o método é estável se:

$$\frac{\Delta t}{P_k} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha - 2\beta}}$$

Então, para o caso de aceleração com variação linear, isto é, $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{6}$, obtém-se:

$$\frac{\Delta t}{P_k} \leq 0.551$$

Já para o caso de aceleração média constante com $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$, obtém-se:

$$\frac{\Delta t}{P_k} < \infty$$

Observa-se com esse resultado que quando a análise é realizada com a aceleração média constante, o método torna-se estável para qualquer Δt. No entanto a precisão será melhorada quanto menor for o Δt.

Capítulo 4

Simulação dos Carregamentos

4.1 Introdução

Diversos tipos de carregamentos podem atuar em uma estrutura, e a consideração de seu efeito sobre a mesma nem sempre torna-se uma tarefa fácil.

O cálculo clássico dos esforços é realizado supondo que as cargas são estáticas. Porém, uma estrutura não trabalha unicamente sob a ação destes tipos de cargas; há também os carregamentos dinâmicos (que variam ao longo do tempo) e interferem no seu comportamento. Dentro desse grupo pode-se destacar: cargas de vento, que estão presentes principalmente em edifícios muito altos, pontes esbeltas, torres, chaminés, etc; cargas móveis, atuantes em pontes, edifícios com ponte rolante, a vibração provocada por multidões em estádios, discotecas rítmica e finalmente as ações provocadas por terremotos que geram acelerações na base das estruturas.

Dessa maneira, com ferramentas de cálculo cada vez mais poderosas, torna-se necessário fazer análises mais detalhadas dessas ações dinâmicas e não apenas tentar simular um equivalente estático para elas.

O intuito neste capítulo é mostrar os tipos de cargas que serão simuladas nesse trabalho. De acordo com a Equação (2.45), que é a representação matricial da equação de equilíbrio dinâmico da estrutura tendo como incógnitas os graus de liberdade, observa-se que será necessário gerar um vetor de cargas **P** que corresponda às ações das cargas referentes a esses graus de liberdade. Abaixo seguem descritos os tipos de cargas estudadas.

4.2 Cargas Concentradas Estacionárias Dinâmicas

Estes tipos de cargas, cujas intensidades variam ao longo do tempo mas que não caminham sobre a estrutura, não apresentam maiores dificuldades de implementação, pois elas atuarão diretamente sobre os nós da estrutura, com seus valores sendo repassados integralmente ao vetor de cargas em cada instante, considerando seus sinais corretos juntamente com suas posições correspondentes aos graus de liberdade aos quais se relacionam.

4.3 Cargas Concentradas Móveis

Quando a carga não está atuando diretamente sobre os nós da estrutura, será feito uso do recurso das cargas nodais equivalentes.

Seja um elemento de pórtico n, sobre o qual se desloca uma carga perpendicular ao seu eixo longitudinal, de intensidade $F(t)$, com velocidade constante $\dot{u}$ e sendo p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 e p_6 as cargas nodais equivalentes em cada instante, Figura (4.1).

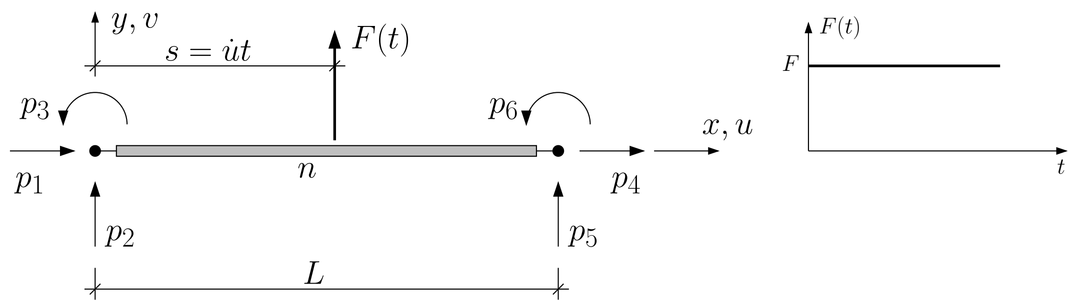

Figura 4.1: Carga concentrada móvel

O vetor de cargas pode então ser obtido através da Equação(2.39), que adaptada para uma carga concentrada localizada fora dos nós do elemento resulta:

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{N}_n^T \mathbf{f}_n \tag{4.1}$$

Nesse caso a matriz $\mathbf{N}_n$ fornece os fatores de ponderação para a distribuição da força $F(t)$ nos graus de liberdade do vetor $\mathbf{P}_n$. É interessante observar que a matriz $\mathbf{N}_n$ é estabelecida de acordo com o tipo de elemento analisado (com ou sem articulação), assim, como para as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, teremos vetores de cargas diferentes.

O vetor $\mathbf{f}_n$ torna-se:

$$\mathbf{f}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Como a carga móvel é perpendicular ao eixo do elemento, as cargas nodais p_1 e p_4 serão sempre nulas, isto é, não contribuem para geração de esforços nas parcelas axiais do elemento.

4.3.1 Barra Engastada-Engastada

A matriz das funções de forma $\mathbf{N}_n$ para esse tipo de elemento foi representada pela igualdade (2.55).

Aplicando a Equação (4.1) resulta o seguinte vetor de cargas equivalentes, sendo $x = s = \dot{u}t$:

$$\begin{bmatrix} p_1(x,t) \\ p_2(x,t) \\ p_3(x,t) \\ p_4(x,t) \\ p_5(x,t) \\ p_6(x,t) \end{bmatrix} = F(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{3s^2}{L^2} + \frac{2s^3}{L^3} \\ s - \frac{2s^2}{L} + \frac{s^3}{L^2} \\ 0 \\ \frac{3s^2}{L^2} - \frac{2s^3}{L^3} \\ \frac{s^3}{L^2} - \frac{s^2}{L} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

4.3.2 Barra Engastada-Articulada

Para esse caso, a matriz das funções de forma $\mathbf{N}_n$ foi dada pela igualdade (2.62).

De maneira análoga feita para o caso da barra engastada-engastada, aplica-se a Equação (4.1), obtendo o seguinte vetor de cargas equivalentes:

$$\begin{bmatrix} p_1(x,t) \\ p_2(x,t) \\ p_3(x,t) \\ p_4(x,t) \\ p_5(x,t) \\ p_6(x,t) \end{bmatrix} = F(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{3}{2}\frac{s^2}{L^2} + \frac{1}{2}\frac{s^3}{L^3} \\ s - \frac{3}{2}\frac{s^2}{L} + \frac{1}{2}\frac{s^2}{L} \\ 0 \\ \frac{3}{2}\frac{s^2}{L^2} - \frac{1}{2}\frac{s^3}{L^3} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

4.3.3 Barra Articulada-Engastada

Para esse caso, a matriz das funções de forma $\mathbf{N}_n$ foi dada pela igualdade (2.69).

O vetor de cargas equivalentes para esse elemento é idêntico ao caso anterior sendo necessário apenas trocar o grau de liberdade ao qual está associado a vinculação, resultando:

$$\begin{bmatrix} p_1(x,t) \\ p_2(x,t) \\ p_3(x,t) \\ p_4(x,t) \\ p_5(x,t) \\ p_6(x,t) \end{bmatrix} = F(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{3}{2}\frac{s^2}{L^2} + \frac{1}{2}\frac{s^3}{L^3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2}\frac{s^2}{L^2} - \frac{1}{2}\frac{s^3}{L^3} \\ s - \frac{3}{2}\frac{s^2}{L} + \frac{1}{2}\frac{s^3}{L^2} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

4.3.4 Barra Articulada-Articulada

Para esse caso, a matriz das funções de forma $\mathbf{N}_n$ foi dada pela igualdade (2.76). Novamente aplica-se a Equação (4.1), obtendo o seguinte vetor de cargas equivalentes:

$$\begin{bmatrix} p_1(x,t) \\ p_2(x,t) \\ p_3(x,t) \\ p_4(x,t) \\ p_5(x,t) \\ p_6(x,t) \end{bmatrix} = F(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1-\dfrac{s}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{s}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

4.4 Cargas Distribuídas Móveis

Nesse item será utilizado novamente o recurso de cargas nodais equivalentes, só que agora não mais para uma carga concentrada e sim para uma carga distribuída.

É tomado um elemento de pórtico n, sobre o qual se desloca uma carga distribuída linearmente e perpendicular ao eixo do elemento, de intensidade $w_{yi}(t)$ e $w_{yj}(t)$, com velocidade constante $\dot{u}$ e sendo f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 e f_6 as cargas nodais equivalentes em cada instante, Figura (4.2).

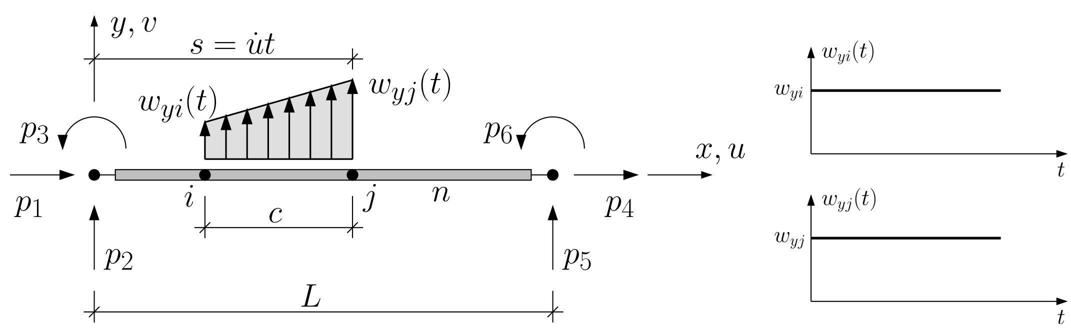

Figura 4.2: Carga distribuída móvel

O vetor de cargas pode então ser obtido através da Equação (2.39) que adaptada para para esse tipo de carregamento resulta:

$$\mathbf{P}_n = \int_{x_i}^{x_j} \mathbf{N}_n^T \mathbf{f}_n dx \tag{4.7}$$

onde: x_i e x_j são as abscissas dos pontos i e j e determinam os limites de integração para a Equação (4.7),sendo iguais a: $x_i = s - c$ e $x_j = s$.

O vetor $\mathbf{f}_n$ é dado por:

$$\mathbf{f}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ w_y(x,t) \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

De acordo com a Figura (4.2), o valor de $w_y(x)$ pode ser calculado como:

$$w_y(x,t) = \frac{(s-x)\ w_{yi}(t) + (c+x-s)\ w_{yj}(t)}{c} \tag{4.9}$$

Novamente, como a carga móvel é perpendicular ao eixo do elemento, as cargas nodais p_1 e p_4 serão sempre nulas, isto é, não contribuem para geração de esforços nas parcelas axiais do elemento.

4.4.1 Barra Engastada-Engastada

A matriz $\mathbf{N}_n$ é representada pela igualdade (2.55), e aplicando à Equação (4.8), resulta no vetor de cargas equivalentes dado por:

$$\begin{bmatrix} p_1(x,t) \\ p_2(x,t) \\ p_3(x,t) \\ p_4(x,t) \\ p_5(x,t) \\ p_6(x,t) \end{bmatrix} = \int_{s-c}^{s} \begin{bmatrix} 0 \\ w_y(x,t)\left(1 - \dfrac{3x^2}{L^2} + \dfrac{2x^3}{L^3}\right) \\ w_y(x,t)\left(x - \dfrac{2x^2}{L} + \dfrac{x^3}{L^2}\right) \\ 0 \\ w_y(x,t)\left(\dfrac{3x^2}{L^2} - \dfrac{2x^3}{L^3}\right) \\ w_y(x,t)\left(\dfrac{x^3}{L^2} - \dfrac{x^2}{L}\right) \end{bmatrix} dx \tag{4.10}$$

Efetuando as integrações necessárias, chega-se:

$$p_1(x,t) = 0$$

$$\begin{aligned} p_2(x,t) = & -\frac{1}{20L^3}\ (c((8c^3 + 15(L-2)c^2 - 40(L-s)sc - 10(L-s)^2(L+2s))w_{yi}(t) + \\ & (2c^3 + 5(L-2s)c^2 - 20(L-s)sc - 10(L-s)^2(L+2s))w_{yj}(t))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(x,t) = & -\frac{1}{60L^2}\ (c((12c^3 + 15(2L-3s)c^2 + 20(L^2 - 4sL + 3s^2)c - 30(L-s)^2s)w_{yi}(t) + \\ & (3c^3 + 5(2L-3s)c^2 + 10(L^2 - 4sL + 3s^2)c - 30(L-s)^2s)w_{yj}(t))) \end{aligned}$$

$$p_4(x,t) = 0$$

$$\begin{aligned} p_5(x,t) = & \frac{1}{20L^3}\ (c((8c^3 + 15(L-2s)c^2 - 40(L-s)sc + 10(3L-2s)s^2)w_{yi}(t) + \\ & (2c^3 + 5(L-2s)c^2 - 20(L-s)sc + 10(3L-2s)s^2)w_{yj}(t))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_6(x,t) = & -\frac{1}{60L^2}\ (c((12c^3 + 15(L-3s)c^2 + 20s(3s-2L)c + 30(L-s)s^2)w_{yi}(t) + \\ & (3c^3 + 5(L-3s)c^2 + 10s(3s-20L)c + 30(L-s)s^2)w_{yj}(t))) \end{aligned}$$

4.4.2 Barra Engastada-Articulada

A matriz $\mathbf{N}_n$ para esse elemento foi dada pela igualdade (2.62) e aplicada à Equação (4.8), resulta no vetor de cargas equivalentes dado por:

$$\begin{bmatrix} p_1(x,t) \\ p_2(x,t) \\ p_3(x,t) \\ p_4(x,t) \\ p_5(x,t) \\ p_6(x,t) \end{bmatrix} = \int_{s-c}^{s} \begin{bmatrix} 0 \\ w_y(x,t)\left(1 - \frac{3}{2}\frac{x^2}{L^2} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{L^3}\right) \\ w_y(x,t)\left(x - \frac{3}{2}\frac{x^2}{L} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{L^2}\right) \\ 0 \\ w_y(x,t)\left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{L^3}\right) \\ 0 \end{bmatrix} dx \tag{4.11}$$

Efetuando as integrações necessárias, chega-se:

$$p_1(x,t) = 0$$

$$\begin{aligned} p_2(x,t) = &-\frac{1}{40L^3}\,(c((4c^3 + 15(L-s)c^2 + 20(s-2L)sc - 10(2L^3 - 3Ls^2 + s^3))w_{yi}(t) + \\ &(c^3 + 5(L-s)c^2 + 10(s-2L)sc - 10(2L^3 - 3Ls^2 + s^3))w_{yj}(t))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(x,t) = &-\frac{1}{120L^2}\,(c((12c^3 + 45(L-s)c^2 + 20(2L^2 - 6sL + 3s^2)c - 30(2L^2 - 3sL + s^2)s)w_{yi}(t) + \\ &(3c^3 + 15(L-s)c^2 + 10(2L^2 - 6sL + 3s^2)c - 30(2L^2 - 3sL + s^2)s)w_{yj}(t))) \end{aligned}$$

$$p_4(x,t) = 0$$

$$\begin{aligned} p_5(x,t) = &\frac{1}{40L^3}\,(c((4c^3 + 15(L-s)c^2 + 20(s-2L)sc + 10(3L-s)s^2)w_{yi}(t) + \\ &(c^3 + 5(L-s)c^2 + 10(s-2L)sc + 10(3L-s)s^2)w_{yj}(t))) \end{aligned}$$

$$p_6(x,t) = 0$$

4.4.3 Barra Articulada-Engastada

A matriz $\mathbf{N}_n$ nesse caso foi fornecida pela igualdade (2.69), e sendo substituída na Equação (4.8), resulta no vetor de cargas equivalentes dado por:

$$\begin{bmatrix} p_1(x,t) \\ p_2(x,t) \\ p_3(x,t) \\ p_4(x,t) \\ p_5(x,t) \\ p_6(x,t) \end{bmatrix} = \int_{s-c}^{s} \begin{bmatrix} 0 \\ w_y(x,t)\left(-\frac{3}{2}\frac{x^2}{L^2}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{L^3}\right) \\ 0 \\ 0 \\ w_y(x,t)\left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{L^2}-\frac{1}{2}\frac{x^3}{L^3}\right) \\ w_y(x,t)\left(x-\frac{3}{2}\frac{x^2}{L}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{L^2}\right) \end{bmatrix} dx \qquad (4.12)$$

Que integrada resulta:

$$p_1(x,t) = 0$$

$$\begin{aligned} p_2(x,t) = &-\frac{1}{40L^3}\ (c((4c^3-15sc^2-20(L^2-s^2)c-10(L-s)^2(2L+s))w_{yi}(t)+ \\ &(c^3-5sc^2-10(L^2-s^2)c-10(L-s)^2(2L+y))w_{yj}(t))) \end{aligned}$$

$$p_3(x,t) = 0$$

$$p_4(x,t) = 0$$

$$\begin{aligned} p_5(x,t) = &\frac{1}{40L^3}\ (c((4c^3-15sc^2-20(L^2-s^2)c-10s^3+30L^2s)w_{yi}(t)+ \\ &(c^3-5sc^2-10(L^2-s^2)c-10s^3+30L^2s)w_{yj}(t))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_6(x,t) = &-\frac{1}{120L^2}\ (c((12c^3-45sc^2-20(L^2-3s^2)c+30(L^2-s^2)s)w_{yj}(t)+ \\ &(3c^3-15sc^2-10(L^2-3s^2)c+30(L^2-s^2)s)w_{yj}(t))) \end{aligned}$$

4.4.4 Barra Articulada-Articulada

Finalmente, para este último caso, a matriz $\mathbf{N}_n$ nesse foi obtida pela igualdade (2.76) que junto com a Equação (4.8), resulta no vetor de cargas equivalentes dado por:

$$\begin{bmatrix} p_1(x,t) \\ p_2(x,t) \\ p_3(x,t) \\ p_4(x,t) \\ p_5(x,t) \\ p_6(x,t) \end{bmatrix} = \int_{s-c}^{s} \begin{bmatrix} 0 \\ w_y(x,t)\left(1-\dfrac{x}{L}\right) \\ 0 \\ 0 \\ w_y(x,t)\left(\dfrac{x}{L}\right) \\ 0 \end{bmatrix} dx \tag{4.13}$$

Efetuando a integração, obtém-se:

$$p_1(x,t) = 0$$

$$p_2(x,t) = \frac{1}{6L}\,(c((2c+3L-3s)w_{yi}(x,t)+(c+3L-3s)w_{yj}(t)))$$

$$p_3(x,t) = 0$$

$$p_4(x,t) = 0$$

$$p_5(x,t) = -\frac{1}{6L}\,(c((2c-3s)w_{yi}(x,t)+(c-3s)w_{yj}(t)))$$

$$p_6(x,t) = 0$$

4.5 Vibração de Base

Um outro tipo de simulação de carregamento a ser tratado nesse trabalho consiste naquele produzido pela excitação do solo na base das estruturas. Esse tipo de problema é muito importante na análise dinâmica estrutural, pois com ele pode-se simular os efeitos de terremotos.

A excitação nesse caso será dada através de uma função que retrate a aceleração do solo, pois geralmente é esse dado que se registra durante um abalo sísmico.

Não é intenção desse trabalho realizar um estudo detalhado de como é feita a consideração dos dados registrados, que geralmente recaem em uma análise estatística, mas sim aplicar funções conhecidas e analisar os seus efeitos sobre a estrutura.

Seja o modelo estrutural representado pela Figura (4.3), com a respectiva excitação de base, representada pela aceleração $\ddot{q}$:

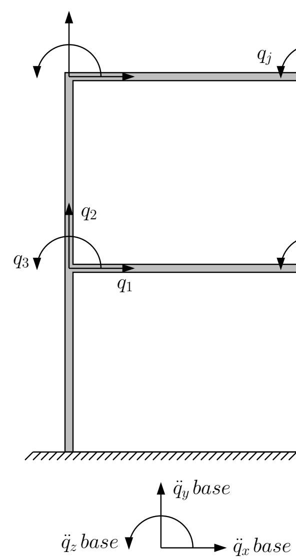

Figura 4.3: Vibração de base

A equação de movimento é obtida anulando a soma das forças atuantes no sistema.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_{base}) + \mathbf{K}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{base}) = \mathbf{0} \tag{4.14}$$

Nesse caso é interessante obter as expressões para deslocamentos, velocidades e acelerações relativas, sendo dadas por:

$$\mathbf{y} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_{base}$$
$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_{base}$$
$$\ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_{base}$$

Substituindo as expressões acima na Equação(4.14), chega-se:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{base} \tag{4.15}$$

Escrevendo a igualdade (4.15) em função das coordenadas modais, com $\mathbf{y} = \mathbf{\Phi x}$, $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{x}}$ e $\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{x}}$, resulta:

$$\ddot{x}_i + 2\,\omega_i\,\xi_i\,\dot{x}_i + \omega_i^2\,x_i = -\frac{\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{base}}{\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i} \tag{4.16}$$

Dessa maneira, as Equações (4.15) e (4.16) foram condicionadas para que o Método de Newmark e o da Superposição Modal possam ser empregados sem modificar muito o algoritmo inicial.

4.6 Obtenção dos Esforços Atuantes nos Elementos

Uma vez obtidos os deslocamentos nodais dos elementos, originados do equilíbrio dinâmico, é possível determinar os esforços: força normal, momento e força cortante através das seguintes relações já conhecidas da análise estática, e dadas respectivamente por:

$$N(x,t) = EA\,\frac{du(x,t)}{dx} \tag{4.17}$$

$$M(x,t) = EI \ \frac{d^2 v(x,t)}{dx^2} \tag{4.18}$$

$$V(x,t) = EI \ \frac{d^3 v(x,t)}{dx^3} \tag{4.19}$$

Estes esforços mantêm cada elemento discretizado em equilíbrio em cada instante de tempo t, ou quando o sistema é discretizado, o equilíbrio passa a ser obtido a cada passo de tempo Δt.

4.7 Família de Funções

Todos os tipos de carregamentos dinâmicos sugeridos nesse trabalho são regidos por funções pré-estabelecidas. Algumas delas, julgadas mais relevantes, são apresentadas na Figura (4.4).

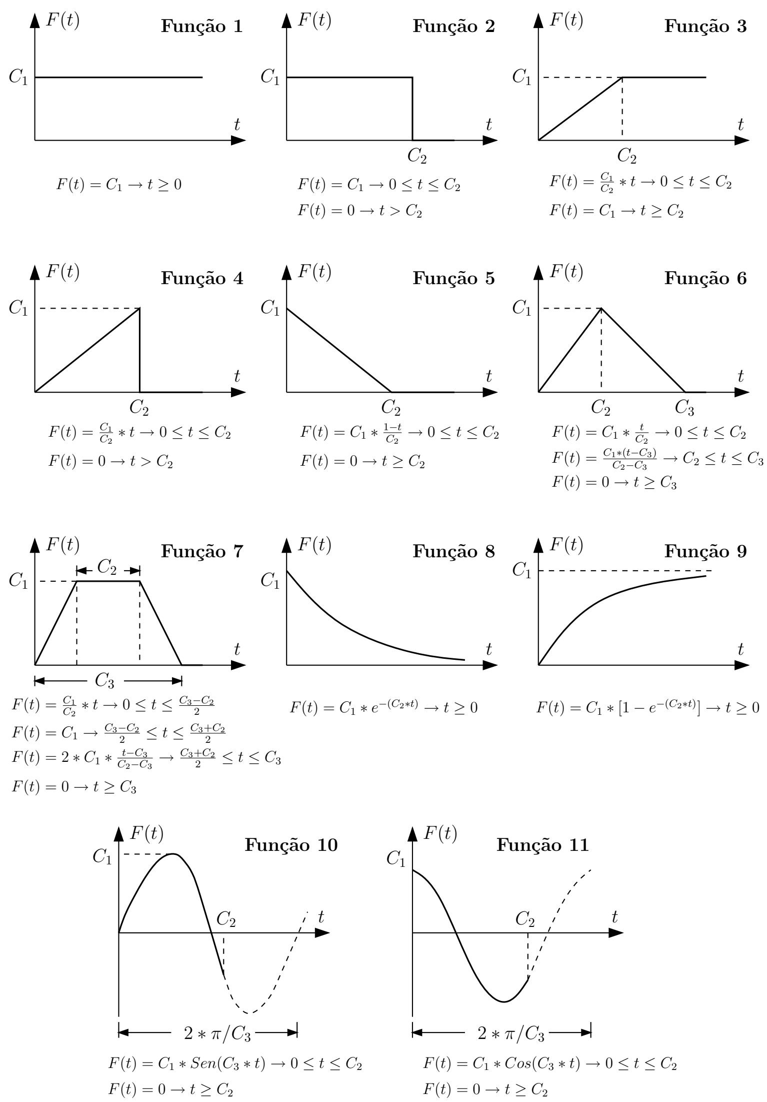

Figura 4.4: Família de funções

Capítulo 5

Exemplos de Aplicação

Cargas Móveis:

São propostos 5 exemplos referentes às cargas móveis (concentrada e distribuídas) para cargas que caminham com velocidade constante sobre a estrutura.

Para os casos analisados, as velocidades são fornecidas de maneira indireta através da atribuição de valores pela relação P_f/τ, sendo P_f o período fundamental do sistema e τ o tempo gasto para a carga móvel atravessar um determinado trecho da estrutura.

Os resultados são dados em função do coeficiente de impacto, que é definido como a relação entre o máximo deslocamento dinâmico pelo máximo deslocamento estático. A linha tracejada de cada gráfico representa a influência de um carregamento sobre um determinado nó, obtido pela análise estática.

Os exemplos são comparados com dois outros trabalhos: Jung [15] e Venâncio [23], sendo que no primeiro é realizada a análise para os dois tipos de cargas e no segundo apenas para cargas concentradas. Estes dois trabalhos utilizaram velocidades das cargas móveis extremamente elevadas quando comparadas com aquelas alcançadas pelos veículos terrestres. Para efeito de comparação estas velocidades foram mantidas neste trabalho.

Os dois tipos de cargas têm os mesmos valores para os exemplos referentes a elas, ressaltando que a força resultante da carga distribuída possui o mesmo valor da concentrada, Figura (5.1).

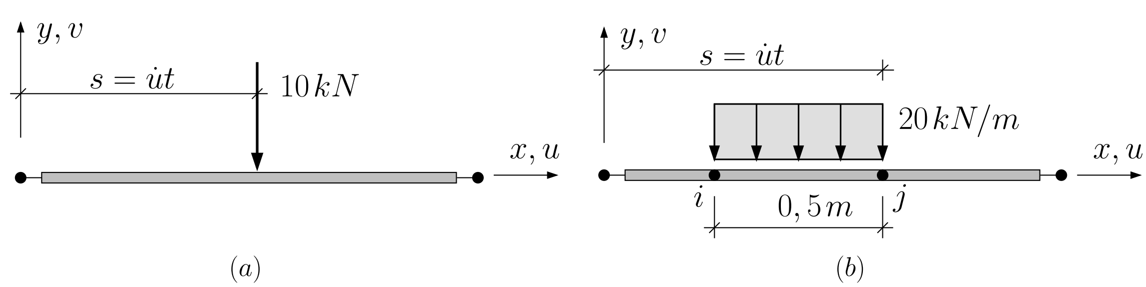

Figura 5.1: (a) Carga concentrada móvel. (b) Carga distribuída móvel

Vibração de Base:

Para esse tipo de solicitação foram desenvolvidos dois exemplos: para pórticos de dois e seis andares respectivamente. Os resultados obtidos são comparados com os fornecidos pelo software *SAP2000*, observando que ele fornece resultados para matriz de massa discreta enquanto neste trabalho as matrizes de massa são consistentes. Em ambos foram simuladas situações com e sem amortecimento e posteriormente comparadas.

Cargas Concentradas Estacionárias Dinâmicas:

Novamente elaboraram-se dois exemplos para este tipo de carregamento: o primeiro é de um pórtico de três andares sofrendo solicitação lateral e o segundo, um galpão industrial, também de três andares, com carregamentos verticais atuantes nas vigas. Novamente os resultados foram comparados com aqueles obtidos pelo *SAP2000*. Uma tabela que fornece os coeficientes de impacto é exibida nas considerações finais referentes a estes dois exemplos.

Exemplo 1:

Este exemplo constitui-se de uma viga bi-apoiada, Figura (5.2). A resposta exata é dada pela referência [22] apenas para a carga concentrada.

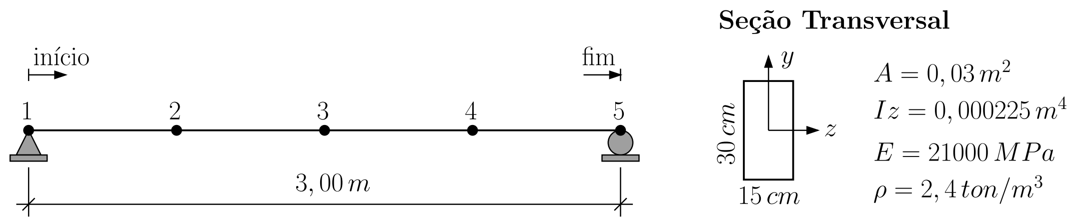

Figura 5.2: Viga bi-apoiada

Observações:

- τ é o tempo gasto pela carga para atravessar o vão de $3,00\,m$ e $P_f = 0,022452\,s$;
- O incremento de tempo para o cálculo dos deslocamentos foi $\Delta t = P_f/20$;
- A análise da Superposição Modal foi feita com 3 modos de vibração transversal;
- No método de Newmark foram utilizados os coeficientes $\alpha = 0,5$ e $\beta = 0,25$ (aceleração média constante).

Nó	Carga	Dy (m)
3	Concentrada	-0,001190
3	Distribuída	-0,001175

Tabela 5.1: Máximos deslocamentos estáticos

i	ω_i(CPS)
1	44,539579
2	176,665317
3	395,33483

Tabela 5.2: Freqüências Naturais

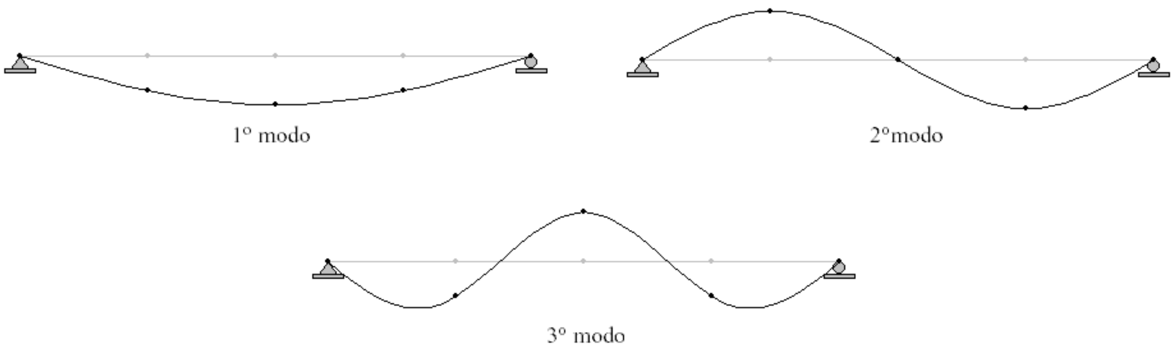

Figura 5.3: Modos de vibração

Coeficientes de Impacto						
Veloc. (m/s)	$\mathbf{P_f/\tau}$	**Exato**	**Venâncio** [23]	**Jung** [15]	**Sup. Modal**	**Newmark**
267,24	2,00	1,55	1,53	1,55	1,54	1,52
133,62	1,00	1,71	1,68	1,73	1,70	1,69
66,81	0,50	1,25	1,24	1,25	1,26	1,26
33,41	0,25	1,14	1,11	-	1,12	1,12

Tabela 5.3: Deslocamento vertical do nó 3 - Carga concentrada móvel

Coeficientes de Impacto				
Veloc. (m/s)	$\mathbf{P_f/\tau}$	**Jung** [15]	**Sup. Modal**	**Newmark**
267,24	2,00	1,09	1,54	1,52
133,62	1,00	1,50	1,68	1,68
66,81	0,50	1,24	1,21	1,22
33,41	0,25	-	1,05	1,05

Tabela 5.4: Deslocamento vertical do nó 3 - Carga distribuída móvel

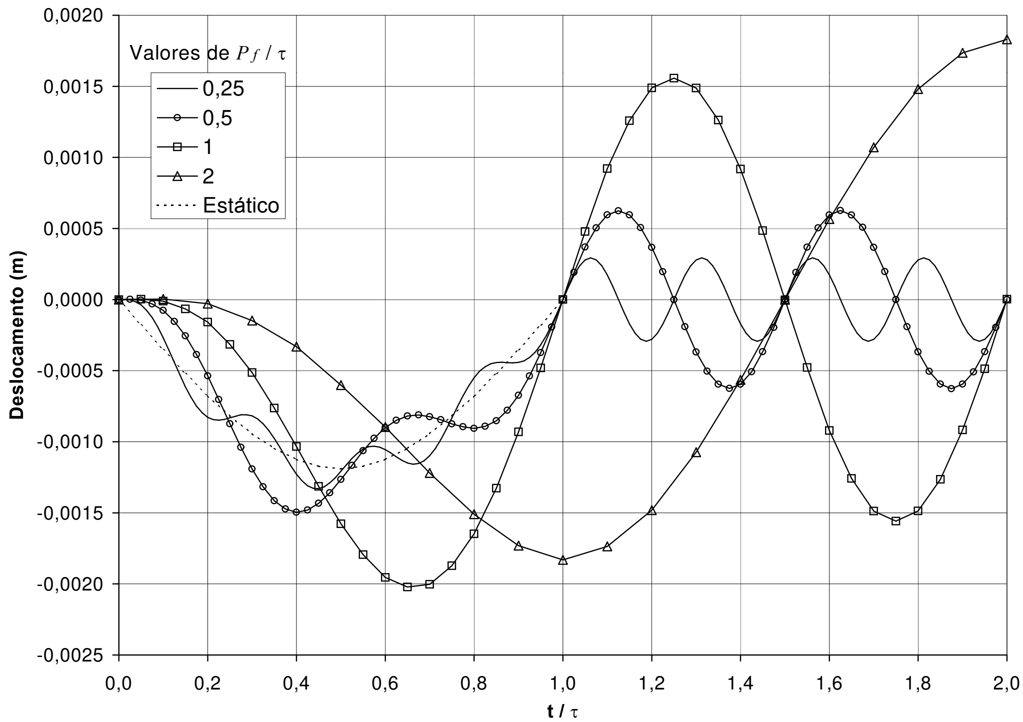

Figura 5.4: Deslocamento vertical do nó 3 - Carga concentrada - Sup. Modal

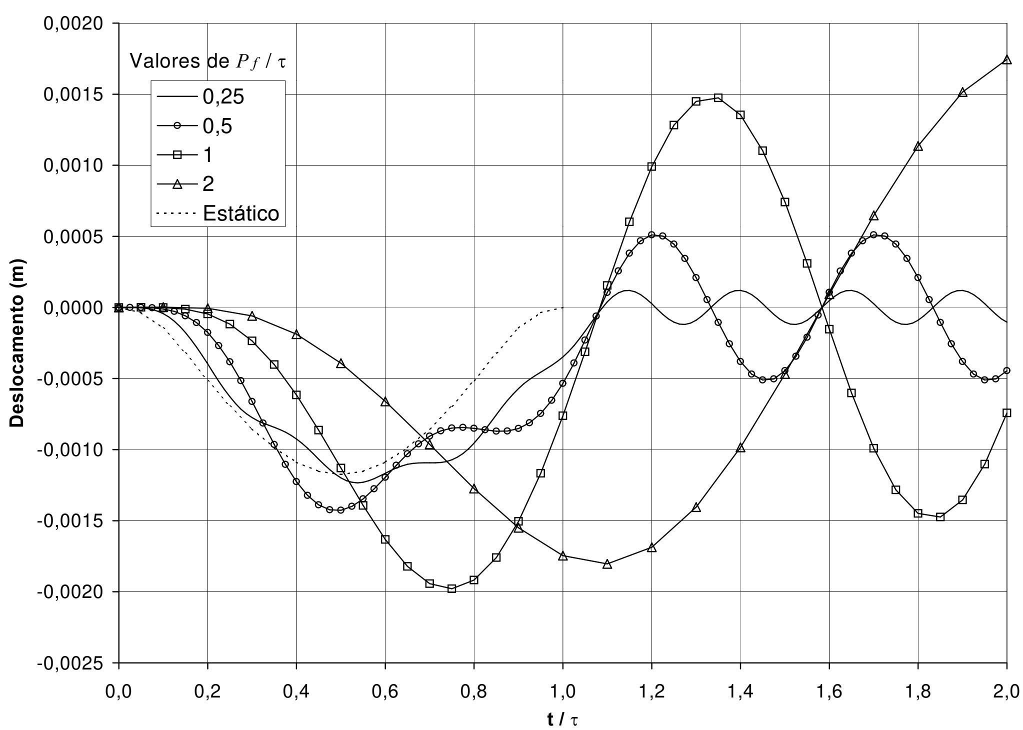

Figura 5.5: Deslocamento vertical do nó 3 - Carga distribuída - Sup. Modal

Exemplo 2:

Este exemplo constitui-se de uma viga contínua de 3 vãos iguais, Figura (5.6), e também simulada em duas situações: para cargas concentrada e distribuída móveis.

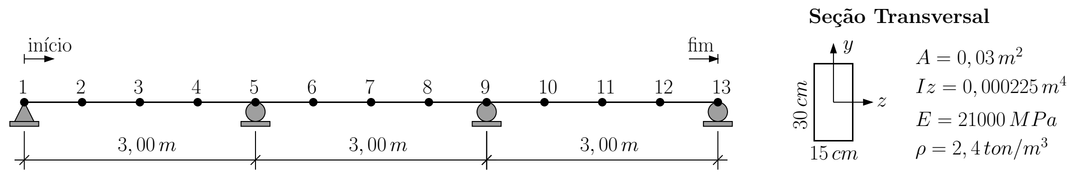

Figura 5.6: Viga contínua

Observações:

- τ é o tempo gasto pela carga para atravessar o vão central de $3,00\,m$ e $P_f = 0,022452\,s$;
- O incremento de tempo para o cálculo dos deslocamentos foi $\Delta t = P_f/20$;
- A análise da Superposição Modal foi feita com 9 modos de vibração transversal;
- No método de Newmark foram utilizados os coeficientes $\alpha = 0,5$ e $\beta = 0,25$ (aceleração média constante).

Nó	**Carga**	**Dy (m)**
7	Concentrada	-0,000655
7	Distribuída	-0,000644

Tabela 5.5: Máximos deslocamentos estáticos

i	ω_i**(CPS)**	**i**	ω_i**(CPS)**
1	44,539579	6	247,328279
2	57,068554	7	395,33483
3	83,316451	8	432,340304
4	176,665317	9	497,979727
5	201,460998		

Tabela 5.6: Freqüências Naturais

Na Figura (5.7) seguem representados os 6 primeiros modos de vibração transversal para a viga desse exemplo, associados às freqüências naturais da Tabela (5.6).

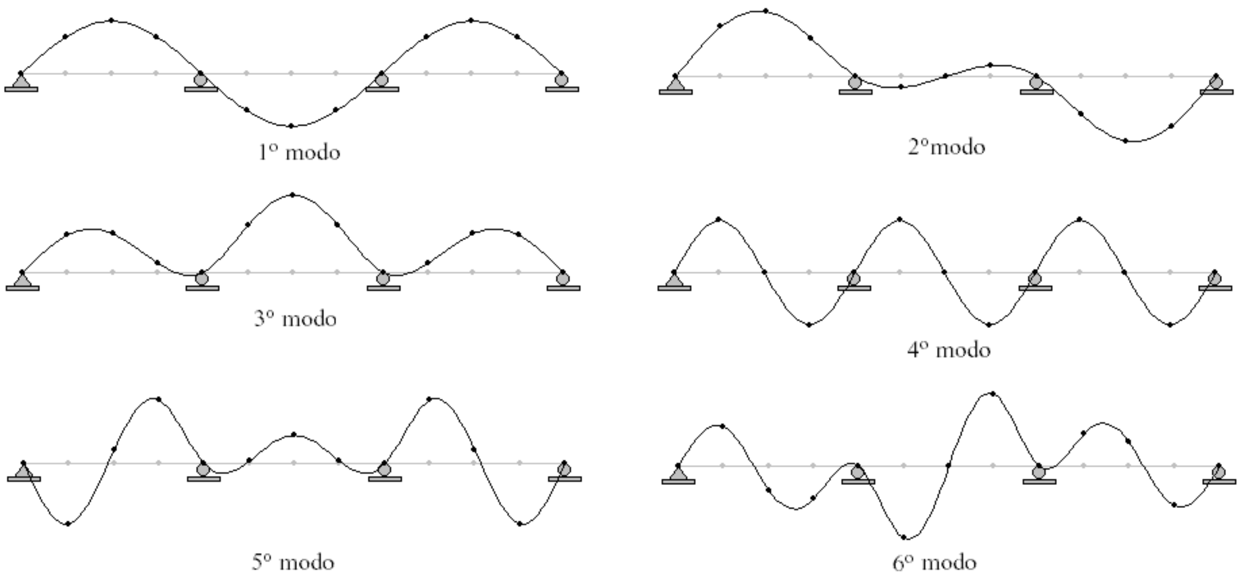

Figura 5.7: Modos de vibração

Coeficientes de Impacto					
Veloc. (m/s)	$\mathbf{P_f/\tau}$	**Venâncio** [23]	**Jung** [15]	**Sup. Modal**	**Newmark**
267,24	2,0	3,65	3,66	3,90	3,98
200,43	1,5	2,14	2,18	2,30	2,36
133,62	1,0	1,39	1,44	1,49	1,48
66,81	0,5	1,08	1,16	1,16	1,16

Tabela 5.7: Deslocamento vertical do nó 7 - Carga concentrada móvel

Coeficientes de Impacto				
Veloc. (m/s)	$\mathbf{P_f/\tau}$	**Jung** [15]	**Sup. Modal**	**Newmark**
267,24	2,0	2,86	3,93	3,78
200,43	1,5	2,04	2,29	2,35
133,62	1,0	1,38	1,47	1,47
66,81	0,5	1,32	1,13	1,12

Tabela 5.8: Deslocamento vertical do nó 7 - Carga distribuída móvel

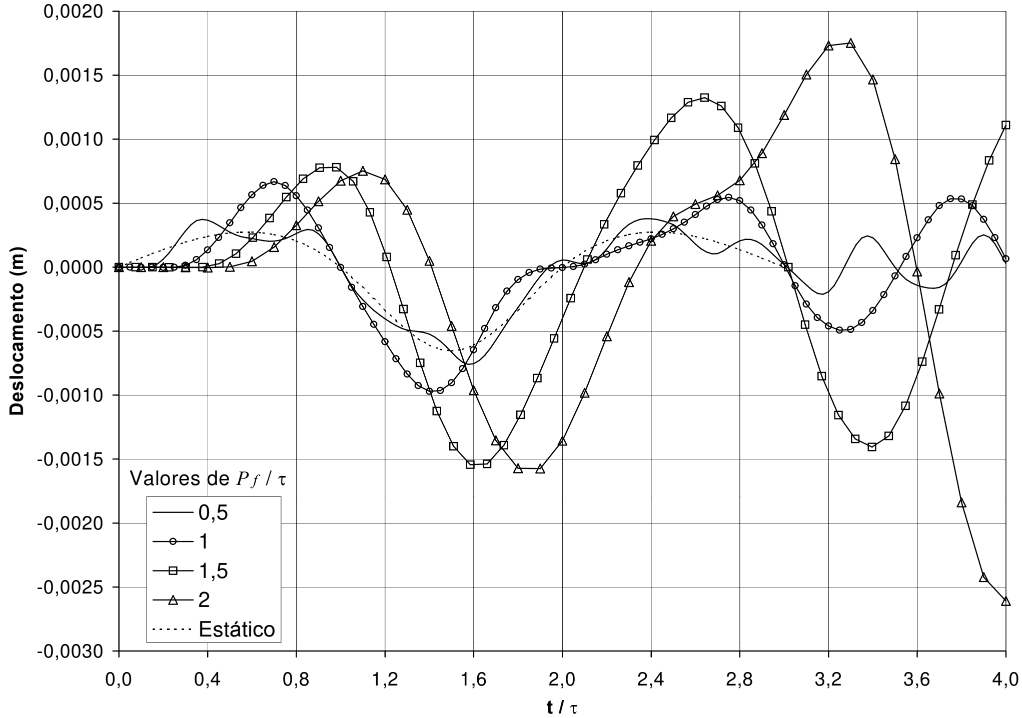

Figura 5.8: Deslocamento vertical do nó 7 - Carga concentrada - Newmark

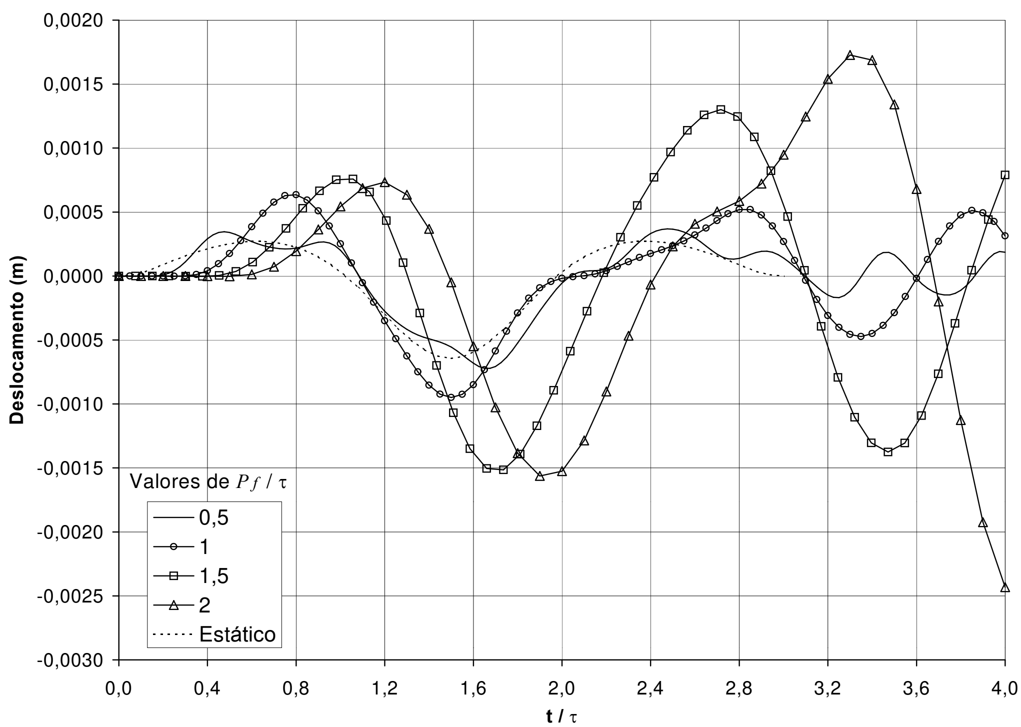

Figura 5.9: Deslocamento vertical do nó 7 - Carga distribuída - Newmark

Exemplo 3:

Este exemplo é composto por uma viga contínua que apresenta articulações em dois pontos distintos (nós 4 e 8). Ela encontra-se esquematizada na Figura (5.10).

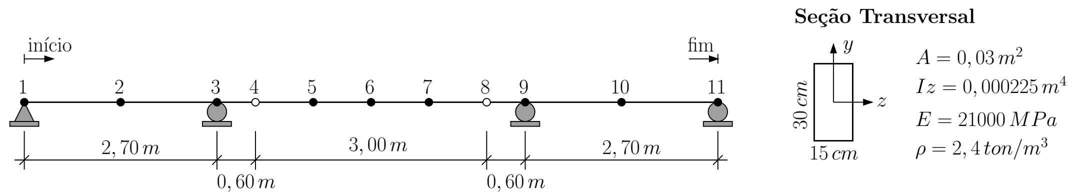

Figura 5.10: Viga contínua com articulações

Observações:

- τ é o tempo gasto pela carga para atravessar o vão entre rótulas de $3,00\,m$ e $P_f = 0,030659\,s$;
- O incremento de tempo para o cálculo dos deslocamentos foi $\Delta t = P_f/20$;
- A análise da Superposição Modal foi feita com 5 modos de vibração transversal;
- No método de Newmark foram utilizados os coeficientes $\alpha = 0,5$ e $\beta = 0,25$ (aceleração média constante).

Nó	**Carga**	**Dy (m)**
6	Concentrada	-0,001610
6	Distribuída	-0,001594

Tabela 5.9: Máximos deslocamentos estáticos

i	$\boldsymbol{\omega_i}$**(CPS)**
1	32,616386
2	47,714763
3	61,883169
4	111,469865
5	146,307092

Tabela 5.10: Freqüências Naturais

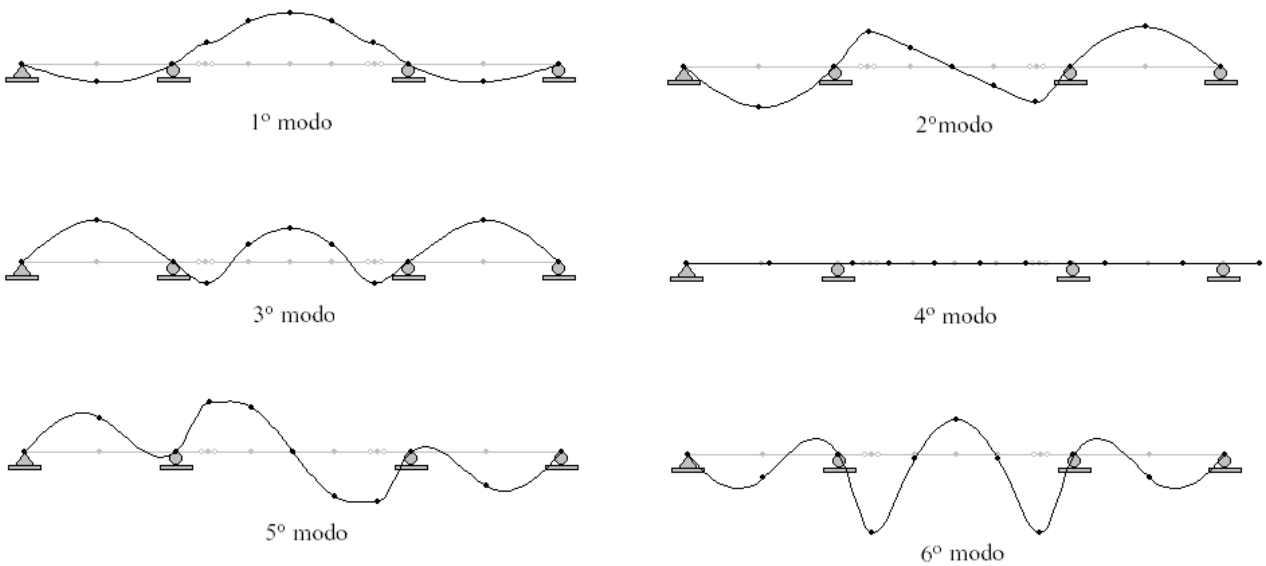

Figura 5.11: Viga contínua com articulações

Coeficientes de Impacto				
Veloc. (m/s)	$\mathbf{P_f/\tau}$	**Venâncio** [23]	**Sup. Modal**	**Newmark**
195,70	2,000	2,75	2,77	2,79
97,85	1,000	1,20	1,30	1,32
48,92	0,500	1,02	1,11	1,14
37,97	0,388	1,09	1,09	1,11

Tabela 5.11: Deslocamento vertical do nó 6 - Carga concentrada móvel

Coeficientes de Impacto			
Veloc. (m/s)	$\mathbf{P_f/\tau}$	**Sup. Modal**	**Newmark**
195,70	2,000	2,46	2,30
97,85	1,000	1,28	1,30
48,92	0,500	1,09	1,11
37,97	0,388	1,07	1,07

Tabela 5.12: Deslocamento vertical do nó 6 - Carga distribuída móvel

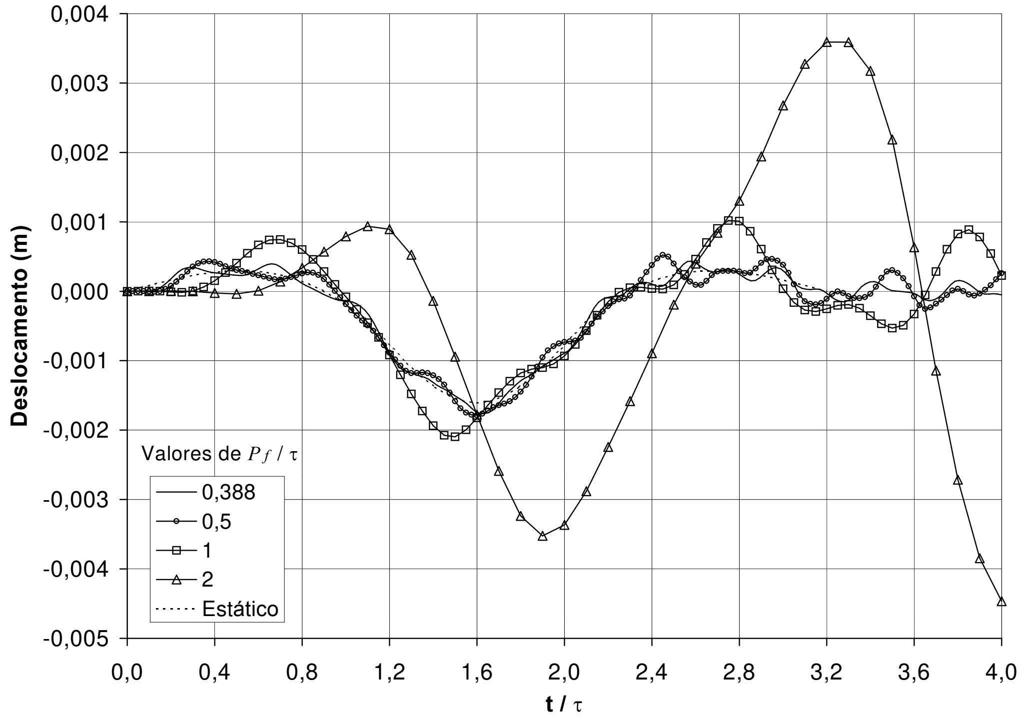

Figura 5.12: Deslocamento vertical do nó 6 - Carga concentrada - Sup. Modal

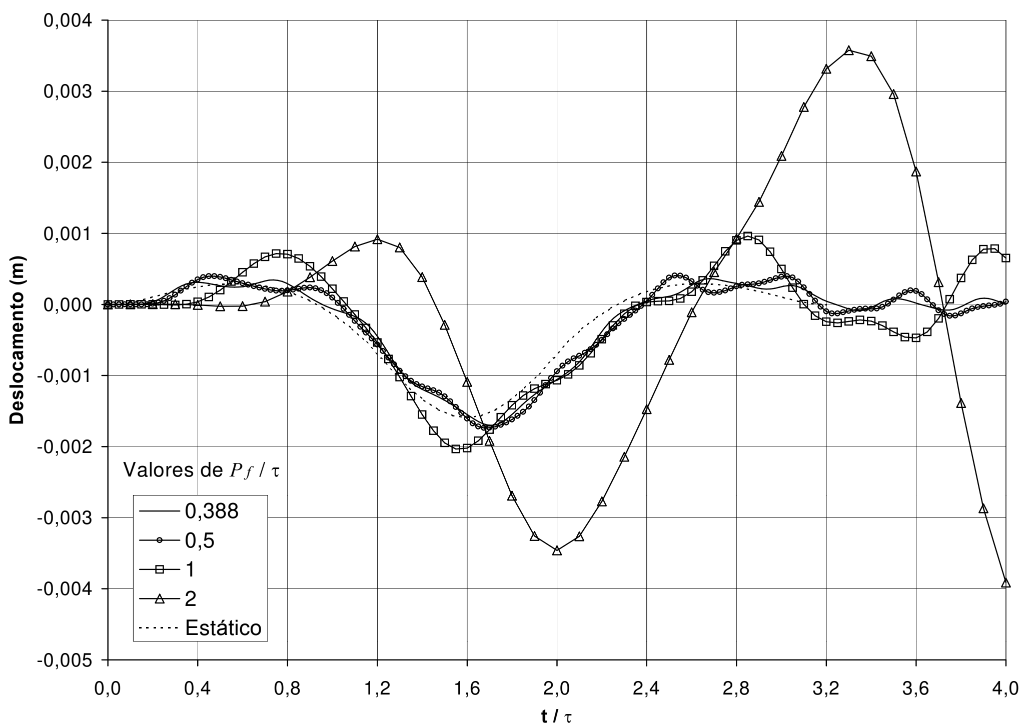

Figura 5.13: Deslocamento vertical do nó 6 - Carga distribuída - Sup. Modal

Exemplo 4:

O próximo exemplo é composto por um pórtico simples com apoios fixos, Figura (5.14). A área da seção transversal é muito grande para que as deformações axiais possam ser desprezadas, assim os deslocamentos serão provenientes apenas do efeito de flexão dos elementos.

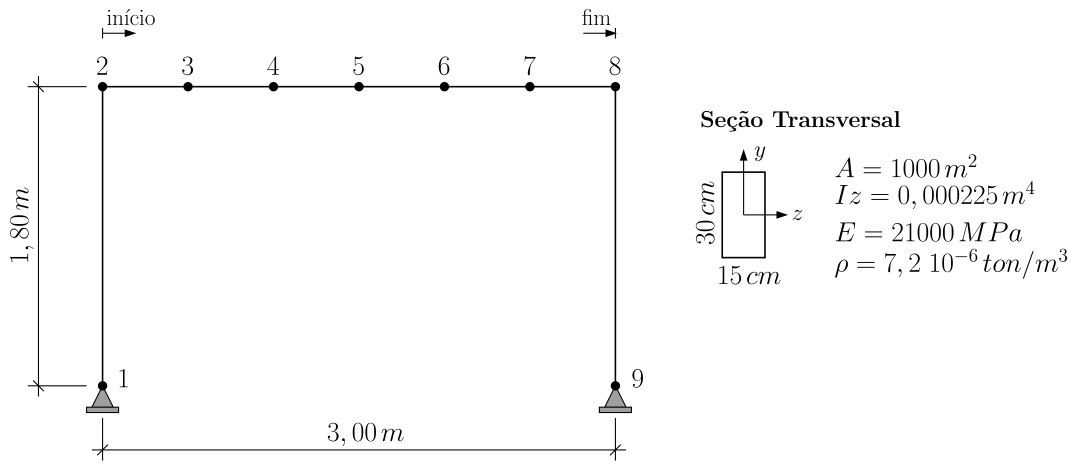

Figura 5.14: Pórtico simples

Observações:

- τ é o tempo gasto pela carga para atravessar o vão de $3,00\,m$;
- P_f é o primeiro período para os deslocamentos horizontais e o segundo para os deslocamentos verticais, valendo $0,069425\,s$ e $0,015122\,s$, respectivamente;
- O incremento de tempo para o cálculo dos deslocamentos foi $\Delta t = P_f/20$;
- A análise da Superposição Modal foi feita com 6 modos de vibração;
- No método de Newmark foram utilizados os coeficientes $\alpha = 0,5$ e $\beta = 0,25$ (aceleração média constante).

Nó	Carga	Dx (m)	Dy (m)
2	Concentrada	0,000274	-
2	Distribuída	0,000263	-
5	Concentrada	-	-0,000553
5	Distribuída	-	-0,000543

Tabela 5.13: Máximos deslocamentos estáticos

i	ω_i(**CPS**)
1	14,404056
2	66,128588
3	166,172675
4	197,326784
5	280,921401
6	463,599286

Tabela 5.14: Freqüências Naturais

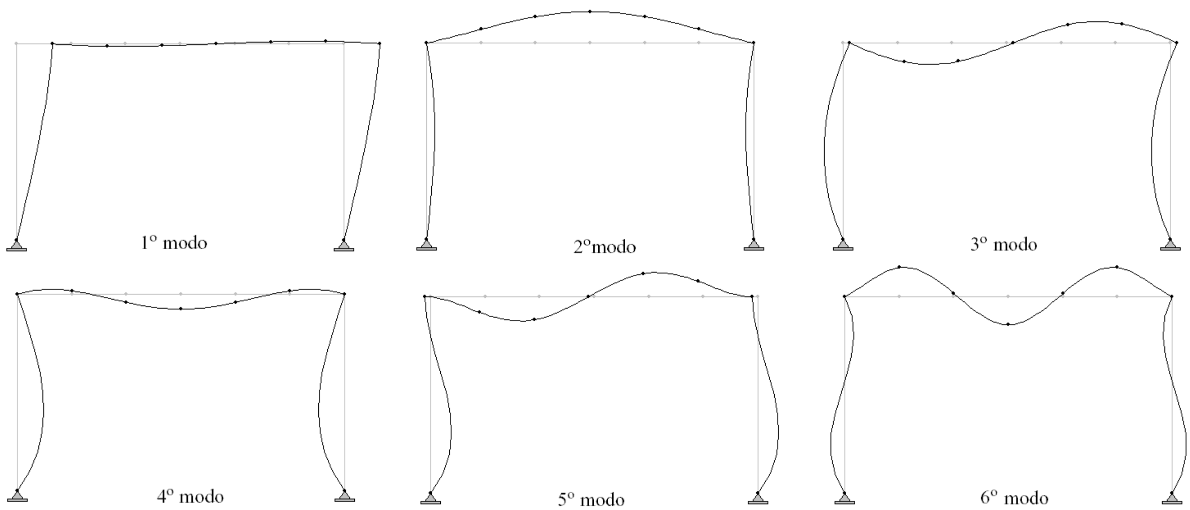

Figura 5.15: Modos de vibração

Coeficientes de Impacto					
Veloc. (m/s)	$\mathbf{P_f/\tau}$	**Venâncio** [23]	**Jung** [15]	**Sup. Modal**	**Newmark**
86,42	2,0	1,30	1,14	1,32	1,31
64,82	1,5	2,00	1,89	2,10	2,06
43,21	1,0	2,99	3,00	3,05	3,01
21,61	0,5	1,72	1,86	1,77	1,76

Tabela 5.15: Deslocamento horizontal do nó 2 - Carga concentrada móvel

Coeficientes de Impacto				
Veloc. (m/s)	$\mathbf{P_f/\tau}$	**Jung** [15]	**Sup. Modal**	**Newmark**
86,42	2,0	0,76	1,42	1,40
64,82	1,5	1,12	2,16	2,12
43,21	1,0	2,31	3,02	3,00
21,61	0,5	2,36	1,67	1,67

Tabela 5.16: Deslocamento horizontal do nó 2 - Carga distribuída móvel

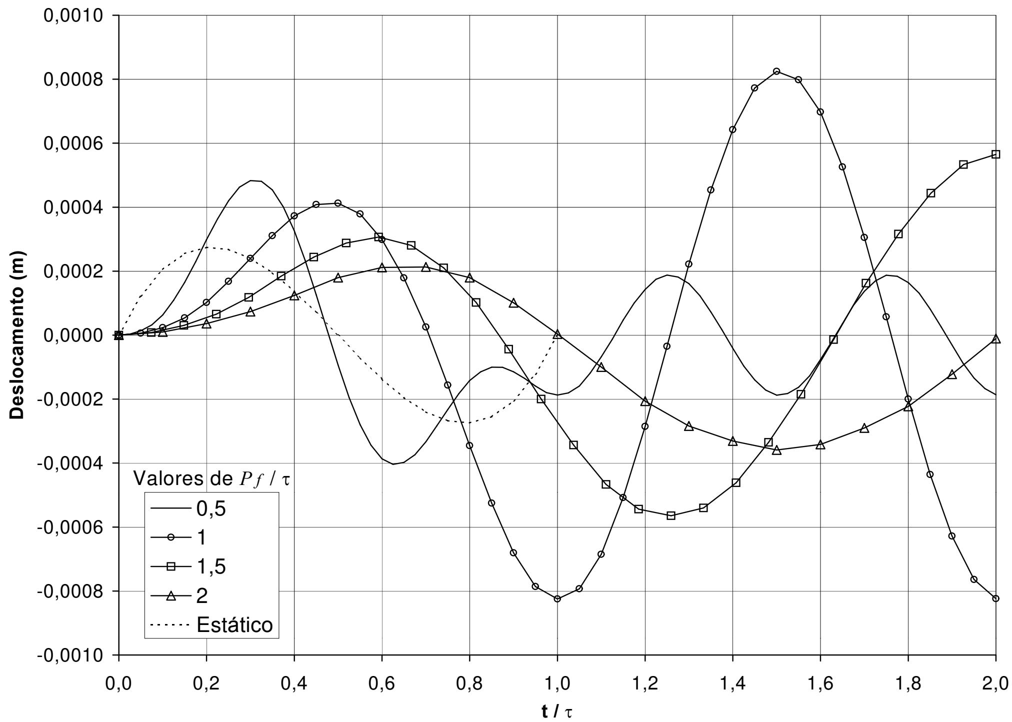

Figura 5.16: Deslocamento horizontal do nó 2 - Carga Concentrada - Newmark

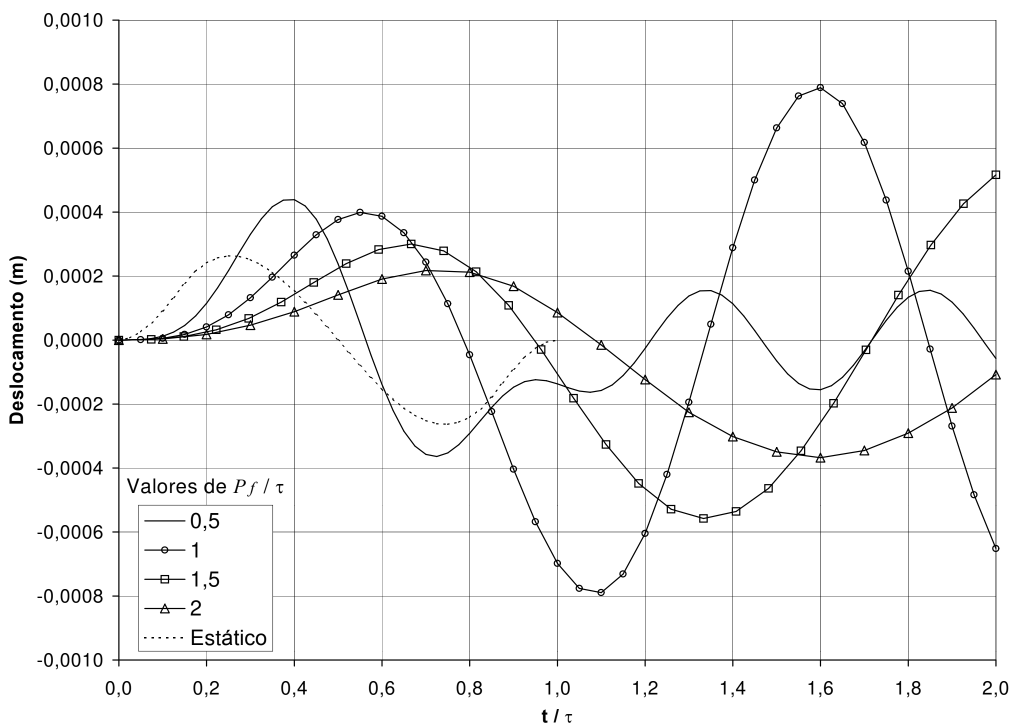

Figura 5.17: Deslocamento horizontal do nó 2 - Carga Distribuída - Newmark

As próximas duas tabelas dizem respeito aos deslocamentos verticais do nó 5 para os mesmos tipos de cargas utilizadas no item anterior.

Coeficientes de Impacto					
Veloc. (m/s)	$\mathbf{P_f/\tau}$	**Venâncio** [23]	**Jung** [15]	**Sup. Modal**	**Newmark**
396,77	2,0	1,44	1,51	1,38	1,39
297,58	1,5	-	1,74	1,57	1,56
198,39	1,0	1,61	1,71	1,64	1,63
99,19	0,5	1,17	1,22	1,22	1,23

Tabela 5.17: Deslocamento vertical do nó 5 - Carga concentrada móvel

Coeficientes de Impacto				
Veloc. (m/s)	$\mathbf{P_f/\tau}$	**Jung** [15]	**Sup. Modal**	**Newmark**
396,77	2,0	1,26	1,39	1,38
297,58	1,5	1,62	1,57	1,56
198,39	1,0	1,64	1,64	1,63
99,19	0,5	1,16	1,20	1,20

Tabela 5.18: Deslocamento vertical do nó 5 - Carga distribuída móvel

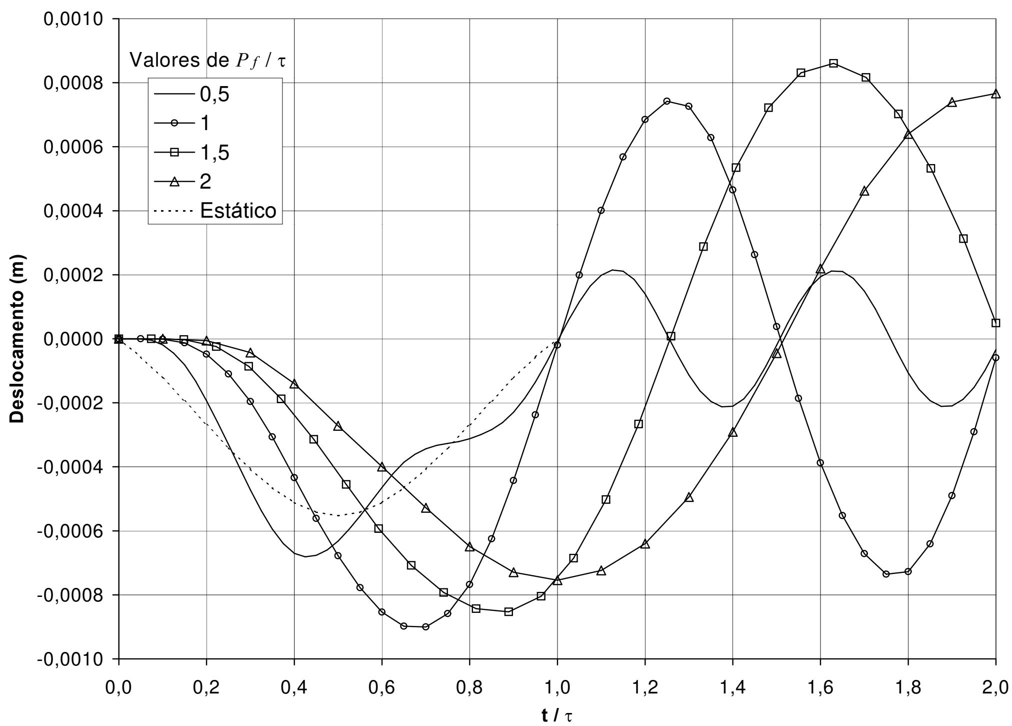

Figura 5.18: Deslocamento vertical do nó 5 - Carga concentrada - Newmark

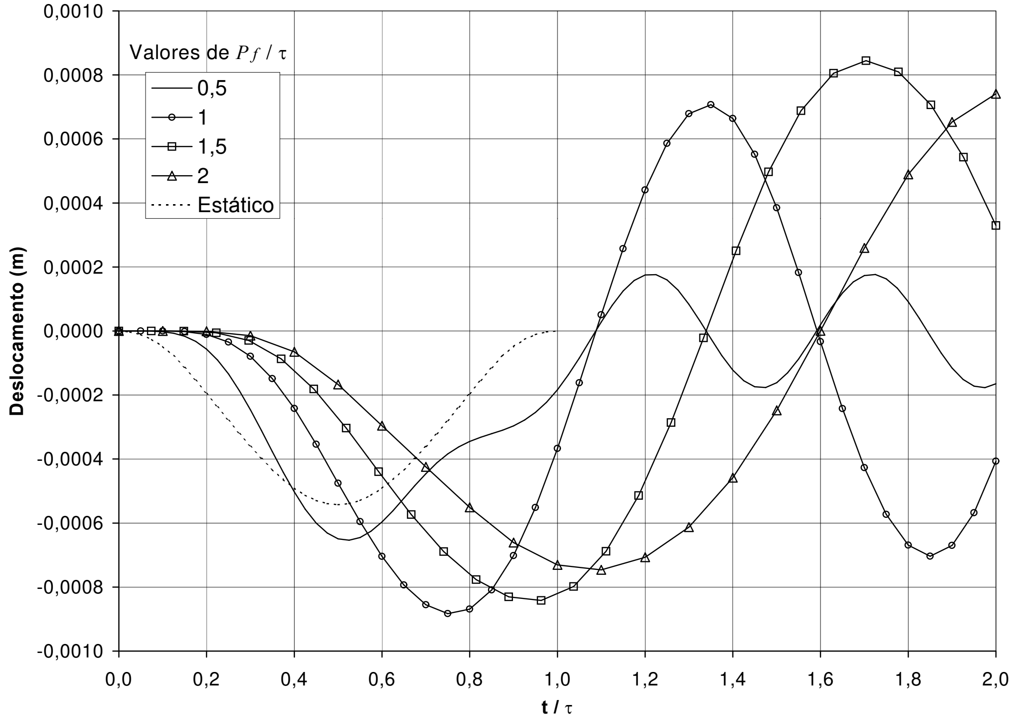

Figura 5.19: Deslocamento vertical do nó 5 - Carga distribuída - Newmark

.

Exemplo 5:

Este exemplo é representado por uma estrutura aporticada, Figura (5.20). A área da seção transversal também foi considerada muito grande para que as deformações axiais pudessem ser desprezadas.

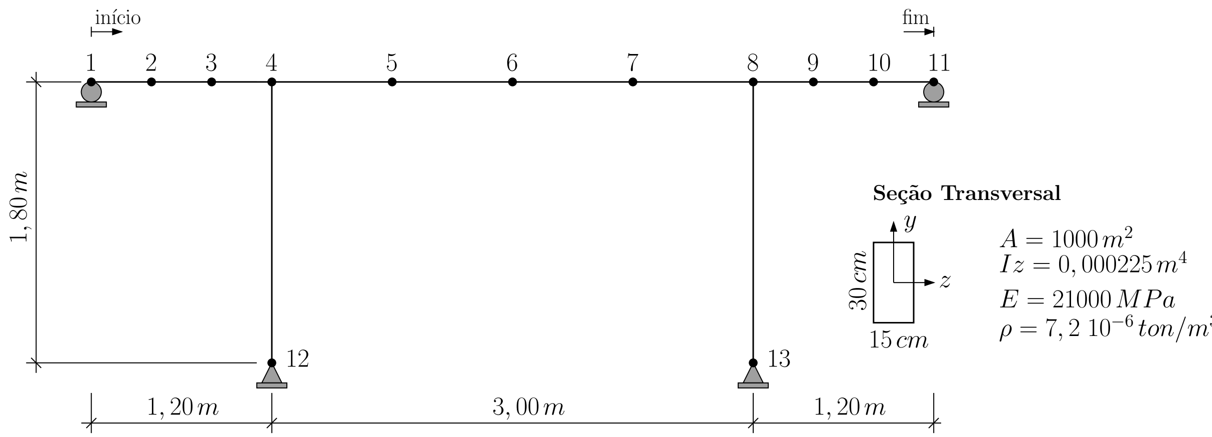

Figura 5.20: Estrutura aporticada

Observações:

- τ é o tempo gasto pela carga para atravessar o vão de $3,00\,m$;
- P_f é o primeiro período para os deslocamentos horizontais e o segundo para os deslocamentos verticais, valendo $0,074868\,s$ e $0,012617\,s$, respectivamente;
- O incremento de tempo para o cálculo dos deslocamentos foi $\Delta t = P_f/20$;
- A análise da Superposição Modal foi feita com 6 modos de vibração;
- No método de Newmark foram utilizados os coeficientes $\alpha = 0,5$ e $\beta = 0,25$ (aceleração média constante).

Nó	Carga	Dx (m)	Dy (m)
1	Concentrada	0,000121	-
1	Distribuída	0,000117	-
6	Concentrada	-	-0,000421
6	Distribuída	-	-0,000412

Tabela 5.19: Máximos deslocamentos estáticos

i	ω_i(CPS)
1	13,356902
2	79,258615
3	184,209776
4	206,19981
5	277,963147
6	375,337088

Tabela 5.20: Freqüências naturais

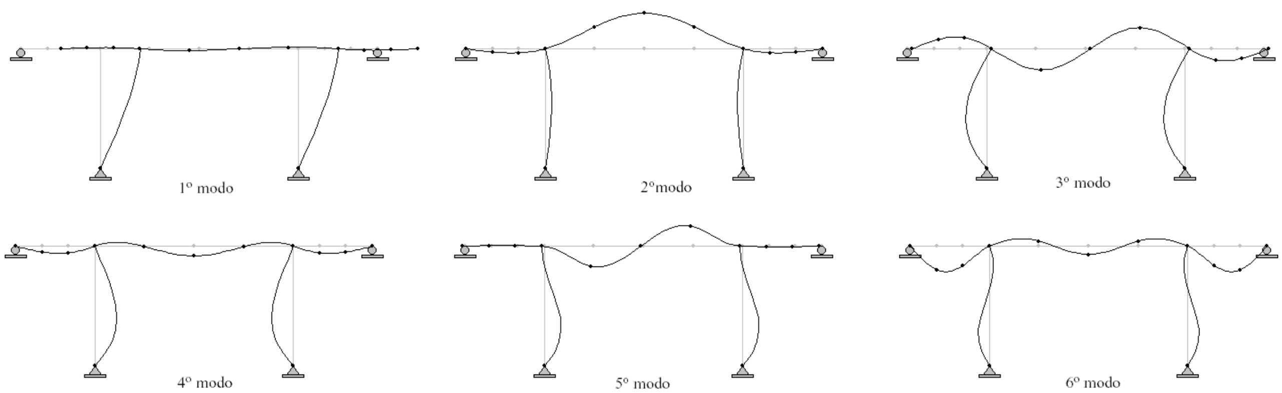

Figura 5.21: Modos de vibração

Coeficientes de Impacto				
Veloc. (m/s)	$\mathbf{P_f/\tau}$	**Venâncio** [23]	**Sup. Modal**	**Newmark**
80,14	2,0	0,56	0,66	0,63
60,11	1,5	1,30	1,70	1,64
40,07	1,0	4,50	5,05	4,95
20,04	0,5	2,16	3,09	3,07

Tabela 5.21: Deslocamento horizontal do nó 1 - Carga concentrada móvel

Coeficientes de Impacto			
Veloc. (m/s)	$\mathbf{P_f/\tau}$	**Sup. Modal**	**Newmark**
80,14	2,0	0,66	0,63
60,11	1,5	1,74	1,68
40,07	1,0	4,99	4,93
20,04	0,5	2,77	2,78

Tabela 5.22: Deslocamento horizontal do nó 1 - Carga distribuída móvel

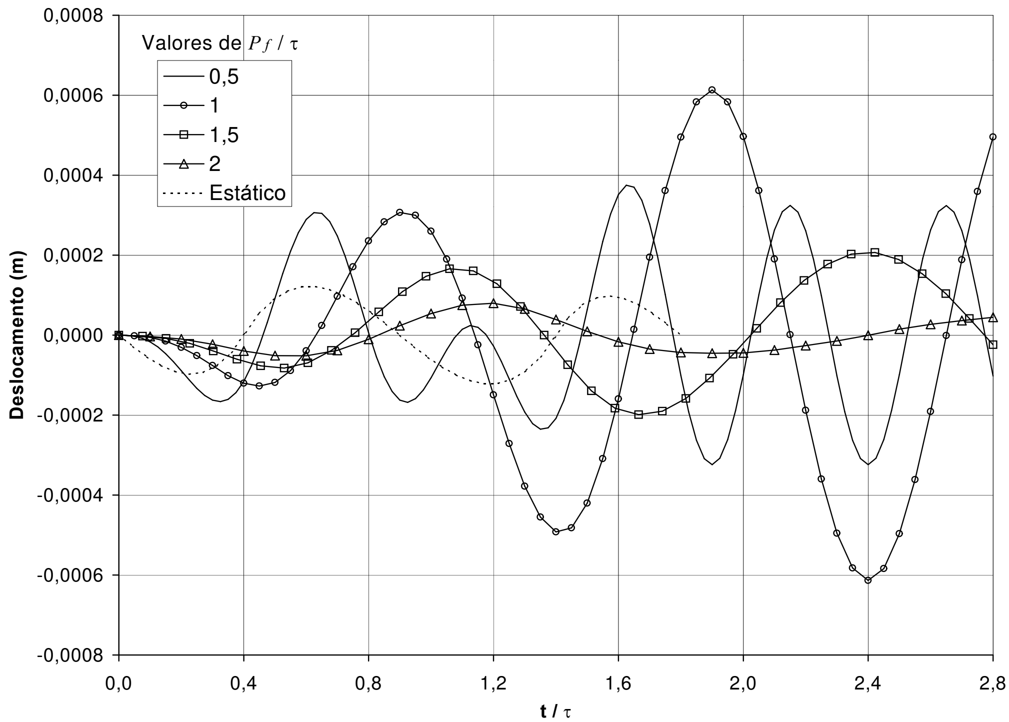

Figura 5.22: Deslocamento horizontal do nó 1 - Carga Concentrada - Sup. Modal

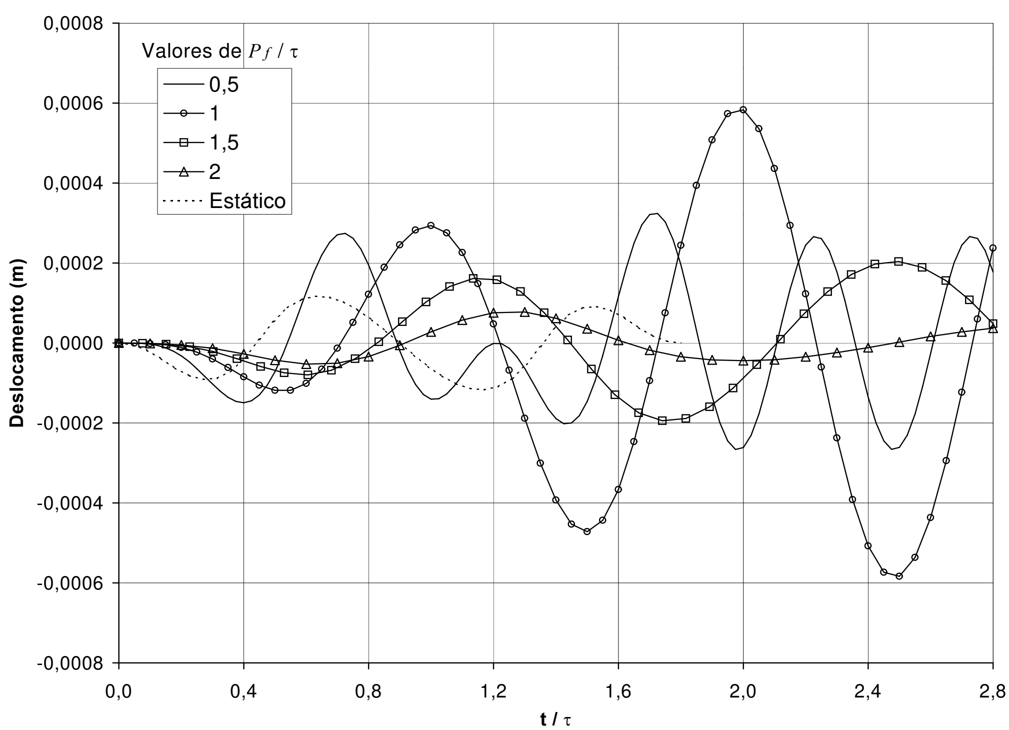

Figura 5.23: Deslocamento horizontal do nó 1 - Carga Distribuída - Sup. Modal

Coeficientes de Impacto				
Veloc. (m/s)	$\mathbf{P_f/\tau}$	**Venâncio** [23]	**Sup. Modal**	**Newmark**
475,55	2,0	1,48	1,50	1,52
356,66	1,5	-	1,81	1,82
237,78	1,0	1,62	1,75	1,73
118,89	0,5	0,93	1,04	1,06

Tabela 5.23: Deslocamento vertical do nó 6 - Carga concentrada móvel

Coeficientes de Impacto			
Veloc. (m/s)	$\mathbf{P_f/\tau}$	**Sup. Modal**	**Newmark**
475,55	2,0	1,52	1,53
356,66	1,5	1,78	1,79
237,78	1,0	1,75	1,73
118,89	0,5	1,05	1,07

Tabela 5.24: Deslocamento vertical do nó 6 - Carga distribuída móvel

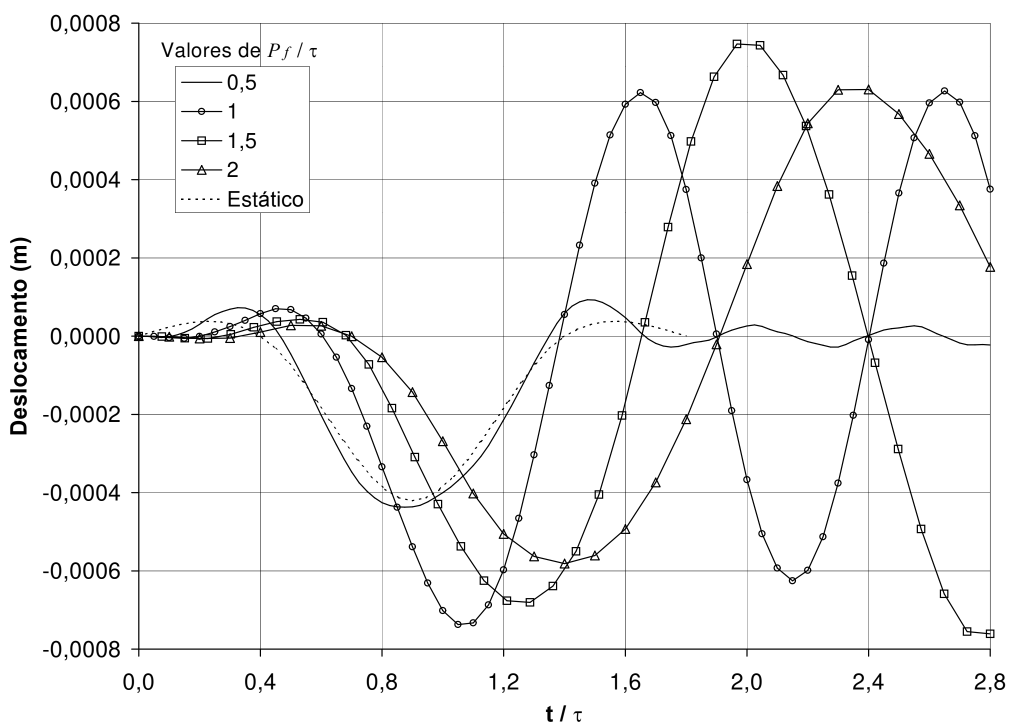

Figura 5.24: Deslocamento vertical do nó 6 - Carga concentrada - Sup. Modal

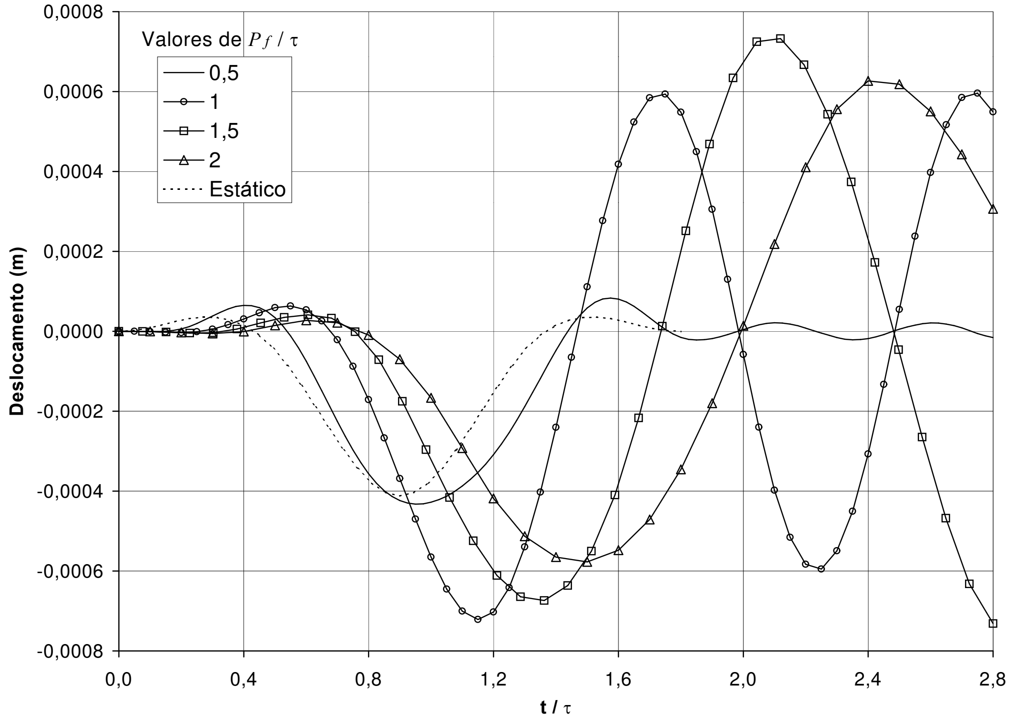

Figura 5.25: Deslocamento vertical do nó 6 - Carga distribuída - Sup. Modal

Considerações Finais (Exemplo 1 ao 5):

Depois de formulados os cinco exemplos, referentes às cargas móveis, chegou-se às seguintes conclusões:

- De modo geral, os máximos valores para os coeficientes de impacto, conforme conclusão também chegada por Jung [15] e Venâncio [23], estão no intervalo entre $1,0$ e $2,0$;

- As cargas concentradas e distribuídas móveis apresentaram valores de coeficientes de impacto muito próximos, diferindo apenas no instante de tempo em que atingem o máximo deslocamento dinâmico;

- Os máximos coeficientes de impacto para os deslocamentos horizontais ($P_f/\tau = 1,0$) são muito maiores quando comparados com os dos deslocamentos verticais (Exemplos 4 e 5);

- A escolha do número de modos de vibração para a obtenção dos resultados no Método da Superposição Modal se justifica pelo fato de que se adotados um número maior de modos, estes não alteram significativamente os resultados.

Exemplo 6:

O pórtico esquematizado na Figura (5.26) é solicitado através de uma aceleração horizontal em sua base de $0,5\,g$, sendo g a aceleração da gravidade, durante $0,2\,s$ e depois reduzida a zero de maneira abrupta. O tempo total da análise é de $0,4\,s$. Duas análises foram feitas: a primeira em relação a estrutura sem amortecimento e a segunda considerando um amortecimento de 10% para o primeiro modo de vibração e 15% para o segundo.

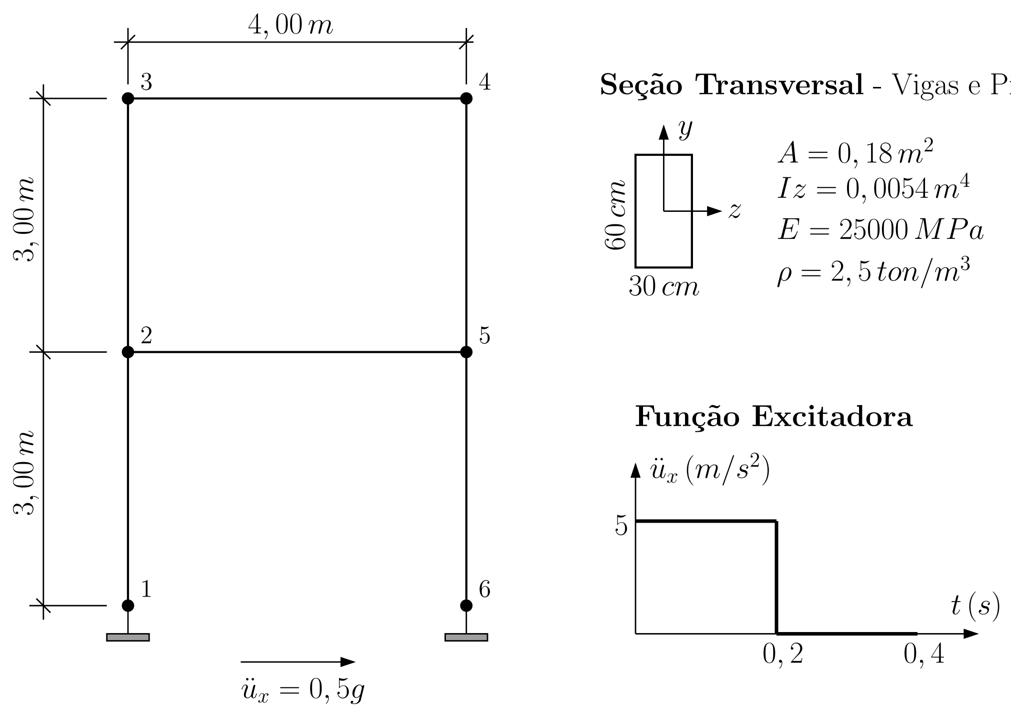

Figura 5.26: Pórtico de 2 pavimentos com aceleração horizontal em sua base

Observações:

- O incremento de tempo para o cálculo dos deslocamentos foi $\Delta t = 0,004\,s$;
- A análise da Superposição Modal foi feita com 2 modos de vibração;
- No método de Newmark foram utilizados os coeficientes $\alpha = 0,5$ e $\beta = 0,25$ (aceleração média constante).

i	ω_i(CPS)
1	12,511147
2	42,439529

Tabela 5.25: Freqüências Naturais

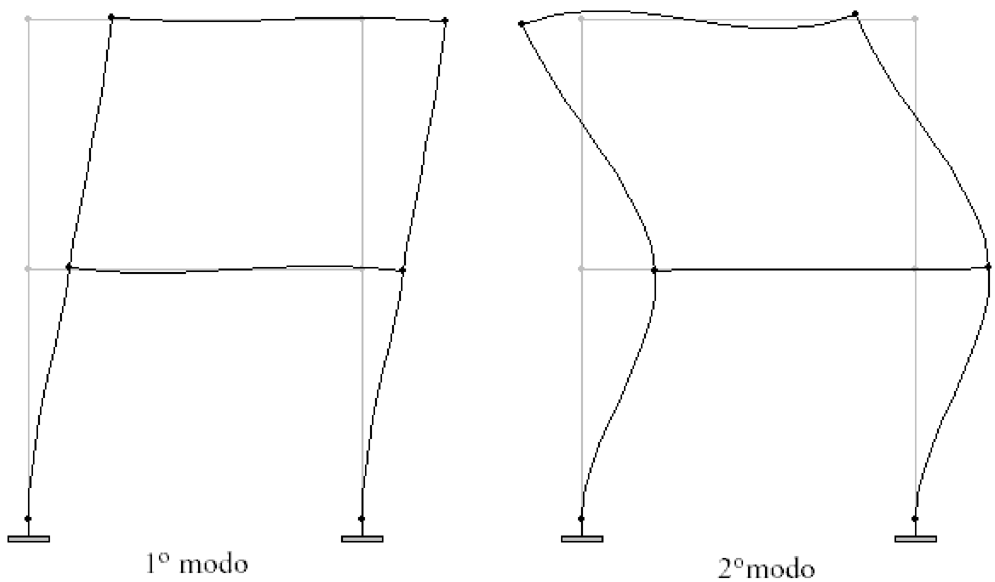

Figura 5.27: Modos de vibração

Deslocamentos horizontais mínimos e máximos (m)					
		SAP		**PEF**	
Nó	**Limite**	**Sup. Modal**	**Newmark**	**Sup. Modal**	**Newmark**
2 (sa)	Mínimo	-0,001106	-0,001097	-0,001103	-0,001101
2 (sa)	Máximo	0,001067	0,000996	0,001089	0,001031
3 (sa)	Mínimo	-0,002104	-0,002094	-0,002123	-0,002109
3 (sa)	Máximo	0,002086	0,002041	0,002141	0,002104
2 (ca)	Mínimo	-0,000940	-0,000938	-0,000935	-0,000942
2 (ca)	Máximo	0,000455	0,000455	0,000457	0,000461
3 (ca)	Mínimo	-0,001819	-0,001815	-0,001798	-0,001798
3 (ca)	Máximo	0,000921	0,000912	0,000913	0,000942
(sa): sem amortecimento.					
(ca): com amortecimento.					

Tabela 5.26: Pórtico de 2 pavimentos - deslocamentos horizontais

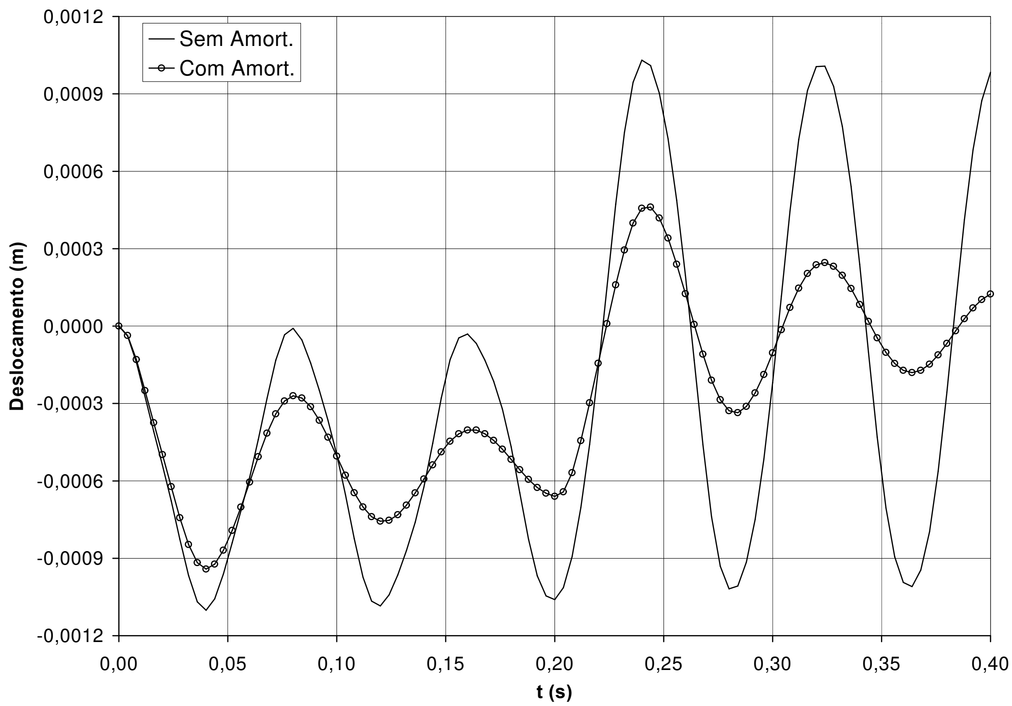

Figura 5.28: Deslocamento horizontal do nó 2 - Vibração de Base - Newmark

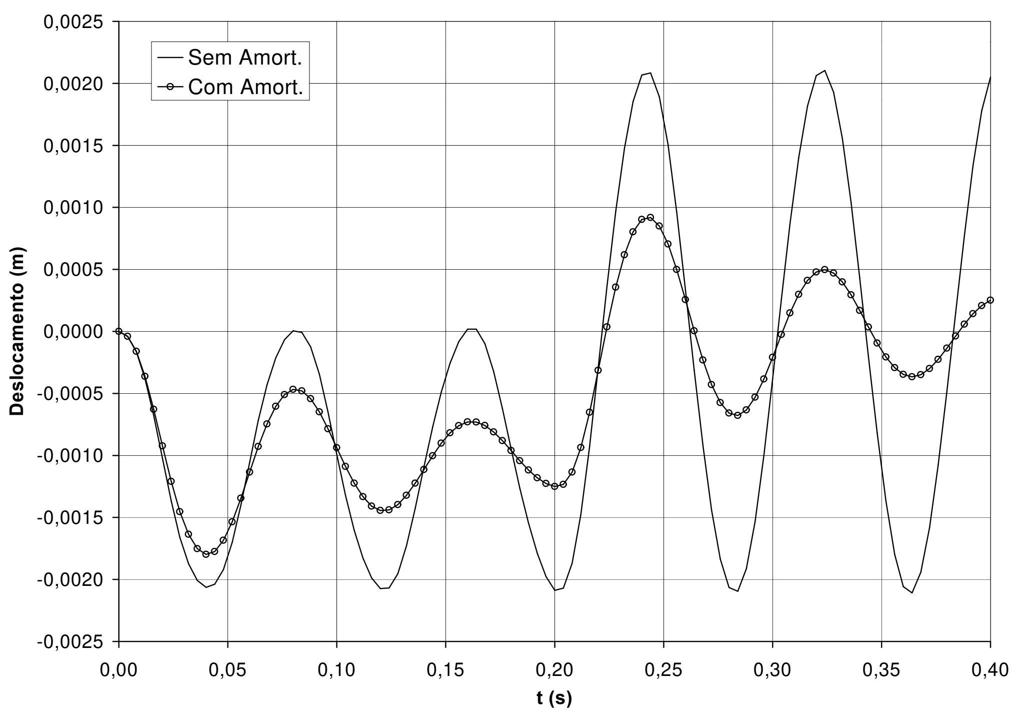

Figura 5.29: Deslocamento horizontal do nó 3 - Vibração de Base - Newmark

Exemplo 7:

O pórtico de 6 pavimentos representado na Figura (5.30) é solicitado através de uma aceleração horizontal em sua base descrita por uma função do tipo rampa, que vai de $0\,g$ a $0,5\,g$ em $0,2\,s$, depois permanece constante até $0,4\,s$ e a partir desse instante é decrescida linearmente para $0\,g$ no tempo de $0,6\,s$. O tempo total da análise é de $2,0\,s$. Duas análises foram feitas: a primeira em relação a estrutura sem amortecimento e a segunda considerando um amortecimento de 10% para o primeiro modo de vibração e 15% para o segundo.

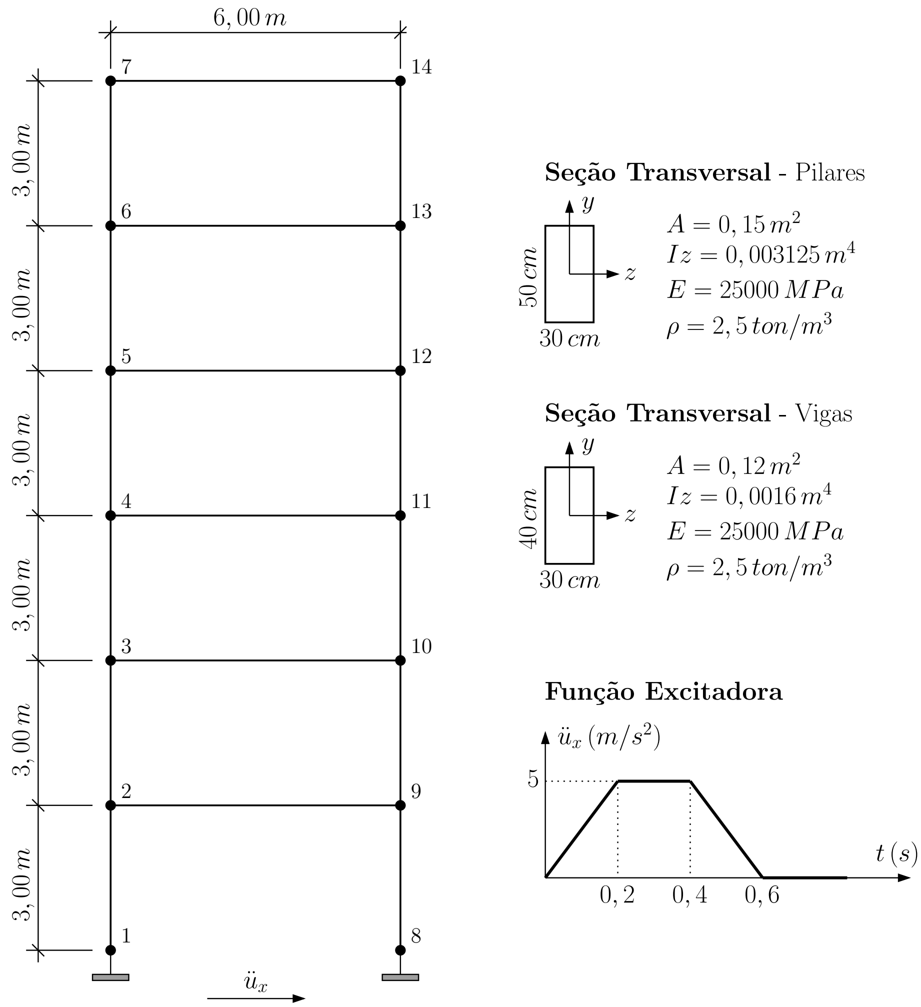

Figura 5.30: Pórtico de 6 pavimentos com aceleração horizontal em sua base

Observações:

- O incremento de tempo para o cálculo dos deslocamentos foi $\Delta t = 0,02\,s$;
- A análise da Superposição Modal foi feita com 3 modos de vibração;
- No método de Newmark foram utilizados os coeficientes $\alpha = 0,5$ e $\beta = 0,25$ (aceleração média constante).

i	ω_i(CPS)
1	2,050809
2	6,880961
3	13,569856

Tabela 5.27: Freqüências Naturais

Deslocamentos horizontais mínimos e máximos (m)					
		SAP		**PEF**	
Nó	**Limite**	**Sup. Modal**	**Newmark**	**Sup. Modal**	**Newmark**
7 (sa)	Mínimo	-0,068672	-0,068611	-0,068503	-0,068446
7 (sa)	Máximo	0,032301	0,032876	0,031821	0,032678
7 (ca)	Mínimo	-0,0603532	-0,060378	-0,060224	-0,060226
7 (ca)	Máximo	0,021783	0,022150	0,021638	0,022010
(sa): sem amortecimento.					
(ca): com amortecimento.					

Tabela 5.28: Pórtico de 6 pavimentos - deslocamentos horizontais

Deslocamentos verticais mínimos e máximos (m)					
		SAP		**PEF**	
Nó	**Limite**	**Sup. Modal**	**Newmark**	**Sup. Modal**	**Newmark**
7 (sa)	Mínimo	-0,000597	-0,000596	-0,000591	-0,000590
7 (sa)	Máximo	0,000296	0,000304	0,000289	0,000298
7 (ca)	Mínimo	-0,000520	-0,000519	-0,000515	-0,000514
7 (ca)	Máximo	0,000197	0,000199	0,000193	0,000196

Tabela 5.29: Pórtico de 6 pavimentos - deslocamentos verticais

Rotações mínimas e máximas (rad)					
		SAP		**PEF**	
Nó	**Limite**	**Sup. Modal**	**Newmark**	**Sup. Modal**	**Newmark**
7 (sa)	Mínimo	-0,000736	-0,000749	-0,000695	-0,000710
7 (sa)	Máximo	0,001355	0,001344	0,001301	0,001289
7 (ca)	Mínimo	-0,000465	-0,000468	-0,000444	-0,000448
7 (ca)	Máximo	0,001166	0,001146	0,001120	0,001101

Tabela 5.30: Pórtico de 6 pavimentos - rotações

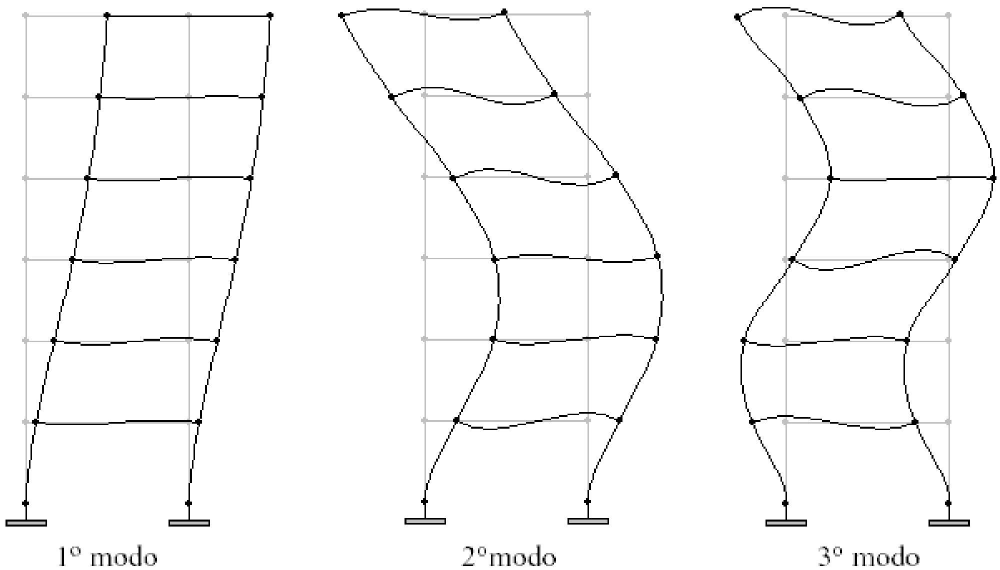

Figura 5.31: Modos de vibração

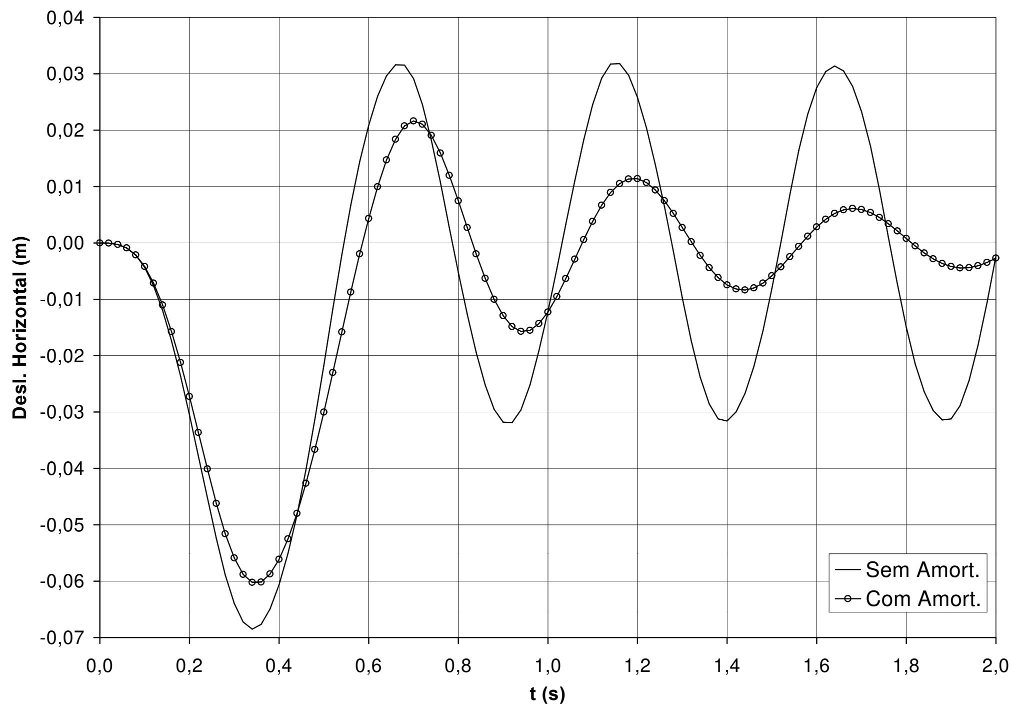

Figura 5.32: Deslocamento horizontal do nó 7 - Sup. Modal

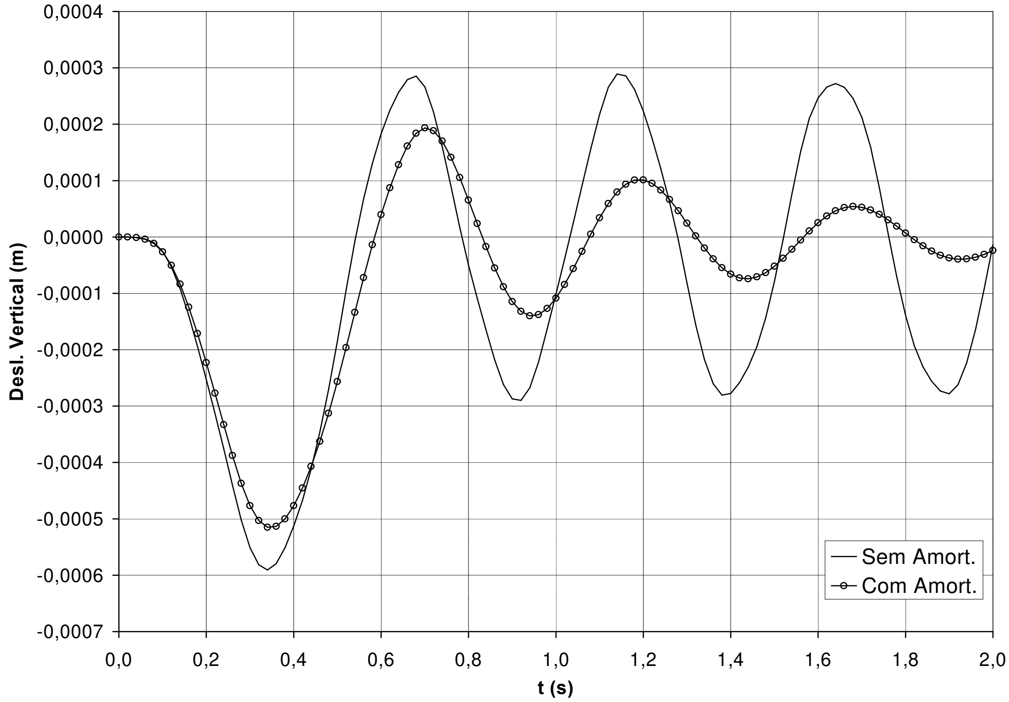

Figura 5.33: Deslocamento vertical do nó 7 - Sup. Modal

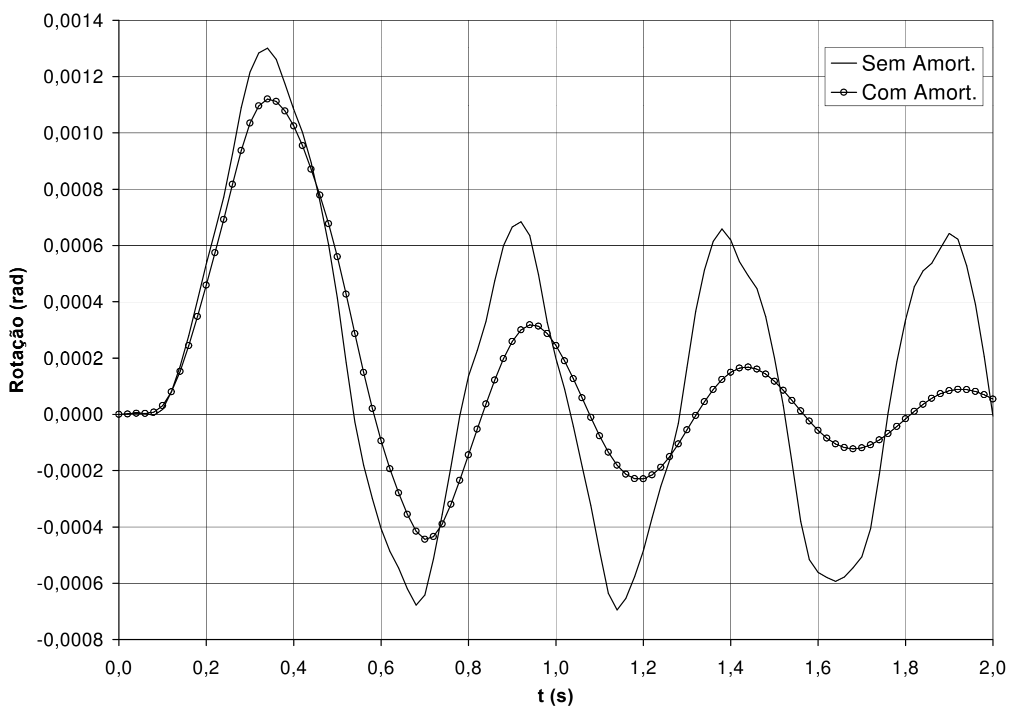

Figura 5.34: Rotação do nó 7 - Sup. Modal

Considerações Finais (Exemplos 6 e 7):

Primeiramente, vale ressaltar que os modos de vibração de maior relevância, para a vibração de base empregada, são aqueles na direção x. Para estes dois exemplos, foi escolhido um número mínimo de modos de maneira que se obtivesse resultados satisfatórios, isto é, um número maior não implicaria na alteração dos resultados.

Na Tabela (5.31) são mostradas as reduções percentuais nos deslocamentos provocados pelo amortecimento. Os resultados são referentes ao programa *PEF*.

		Nó	**Limite**	**Sup. Modal**	**Newmark**
Exemplo 6	Desl. Horiz.	2	Mínimo	15,24%	14,45%
	Desl. Horiz.	2	Máximo	58,04%	55,24%
	Desl. Horiz.	3	Mínimo	15,28%	14,76%
	Desl. Horiz.	3	Máximo	57,35%	56,37%
Exemplo 7	Desl. Horiz.	7	Mínimo	12,09%	12,01%
	Desl. Horiz.	7	Máximo	32,00%	32,65%
	Desl. Vert.	7	Mínimo	12,80%	12,92%
	Desl. Vert.	7	Máximo	33,16%	34,21%
	Rotação	7	Mínimo	36,13%	36,95%
	Rotação	7	Máximo	13,92%	14,55%

Tabela 5.31: Porcentagem amortecida dos deslocamentos e rotações

.

Exemplo 8:

A estrutura apresentada a seguir constitui-se de um pórtico de 3 andares submetido em sua face lateral esquerda por forças concentradas nos nós que variam ao longo do tempo, conforme esquematizado na Figura (5.35). Não foi considerado amortecimento. Os resultados são apresentados comparando os valores dinâmicos com os obtidos da análise estática.

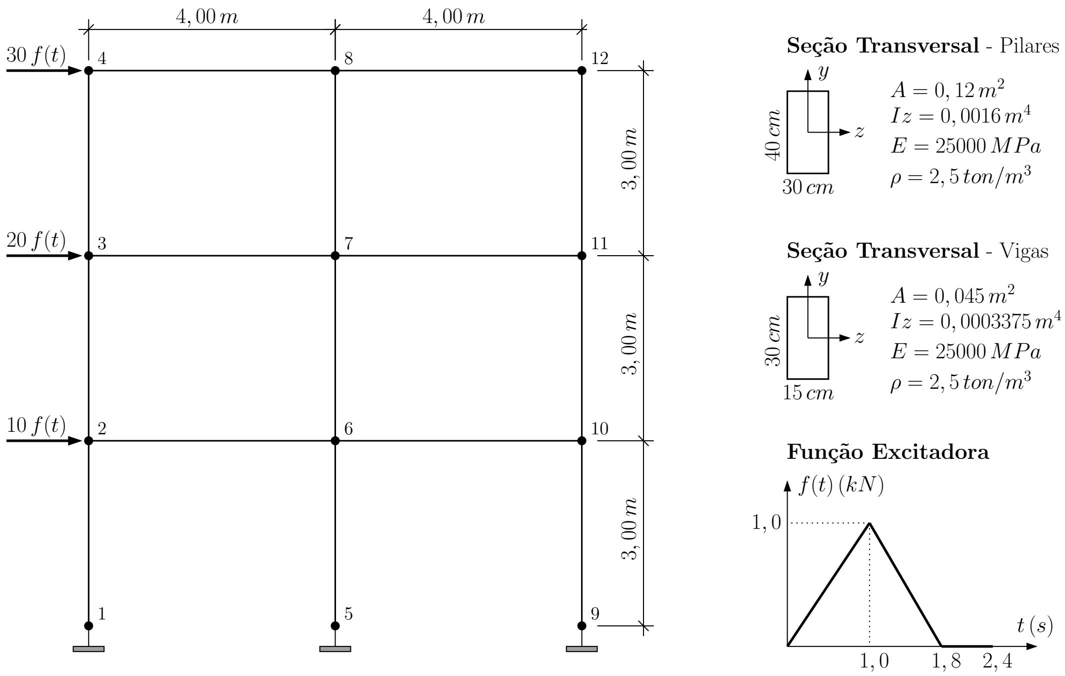

Figura 5.35: Pórtico de 3 pavimentos com carga lateral

Observações:

- O incremento de tempo para os cálculos foi $\Delta t = 0,02\,s$;
- A análise da Superposição Modal foi feita com 3 modos de vibração;
- No método de Newmark foram utilizados os coeficientes $\alpha = 0,5$ e $\beta = 0,25$ (aceleração média constante).

Nó	Dx (m)	Rx (N)	Ry (N)	Mz (N-m)
1	-	-18544,36	-31968,84	53601,12
4	0,0161284	-	-	-

Tabela 5.32: Máximos deslocamentos e esforços estáticos

i	ω_i(CPS)
1	4,285491
2	16,556292
3	36,259449

Tabela 5.33: Freqüências Naturais

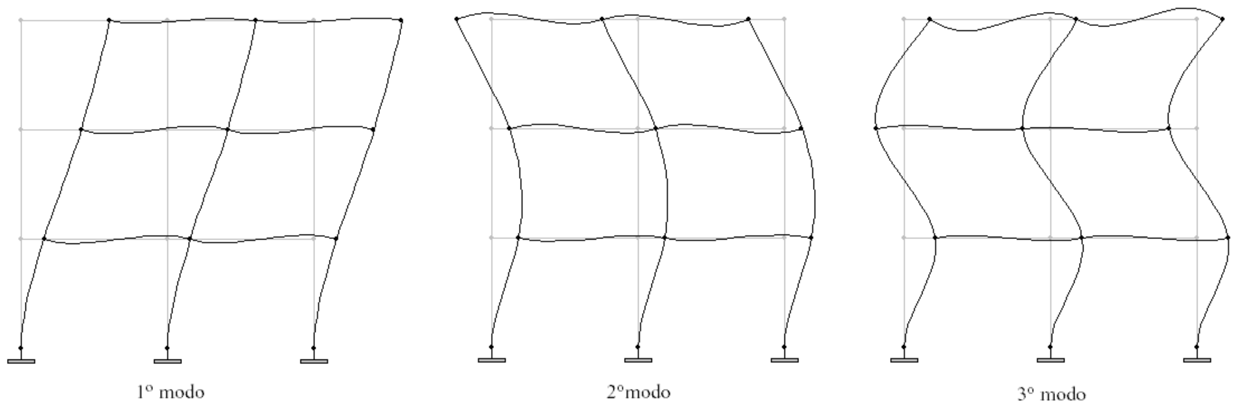

Figura 5.36: Modos de vibração

As tabelas a seguir referem-se aos resultados obtidos para o deslocamento horizontal do nó 4 e as reações de apoio do nó 1. A primeira diz respeito ao software *PEF* e a segunda com os valores obtidos pelo *SAP 2000*.

Deslocamentos e reações de apoio mínimas e máximas					
		Nó 4	**Nó 1**		
Análise	**Limite**	**Dx (m)**	**Rx (N)**	**Ry (N)**	**Mz (N-m)**
Sup. Modal	Mínimo	-0,002125	-18945,30	-32074,48	-7502,07
Sup. Modal	Máximo	0,016321	2641,65	4139,60	54612,95
Newmark	Mínimo	-0,001504	-18540,57	-31682,32	-5186,52
Newmark	Máximo	0,016006	1786,69	2928,21	53509,67

Tabela 5.34: Pórtico de 3 pavimentos com solicitação lateral - PEF

Deslocamentos e reações de apoio mínimas e máximas					
		Nó 4	**Nó 1**		
Análise	**Limite**	**Dx (m)**	**Rx (N)**	**Ry (N)**	**Mz (N-m)**
Sup. Modal	Mínimo	-0,001796	-18579,17	-32152,91	-6252,08
Sup. Modal	Máximo	0,016129	2196,61	3545,09	53722,71
Newmark	Mínimo	-0,001637	-18609,95	-31898,89	-5703,96
Newmark	Máximo	0,016101	1997,28	3239,91	53719,08

Tabela 5.35: Pórtico de 3 pavimentos com solicitação lateral - SAP 2000

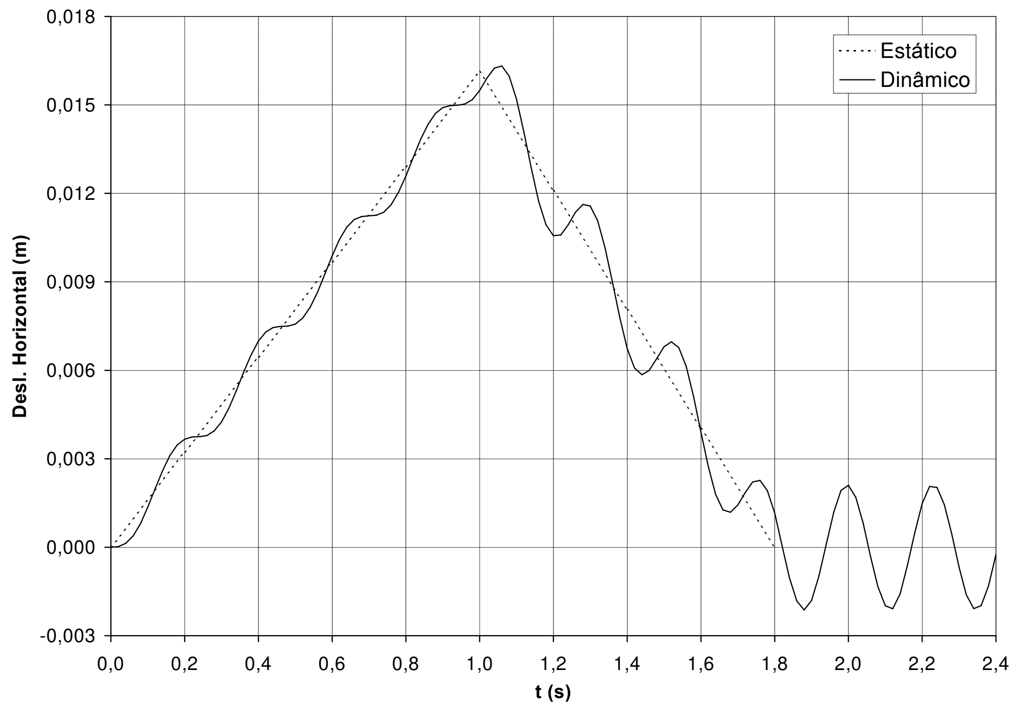

Figura 5.37: Deslocamento horizontal do nó 4 - Sup. Modal

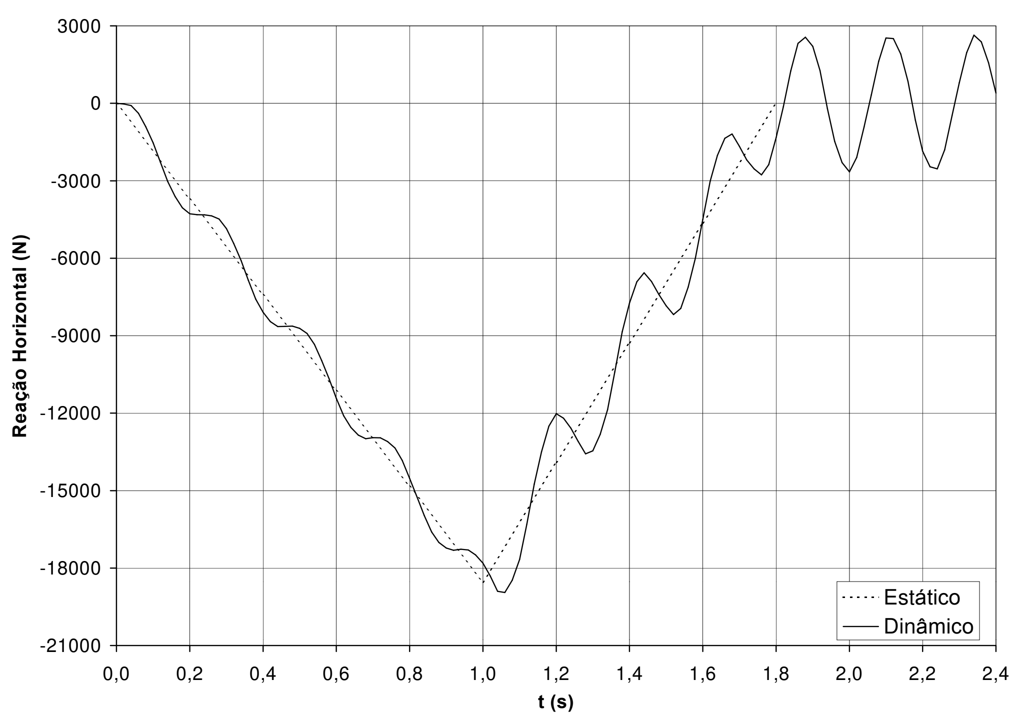

Figura 5.38: Reação horizontal do nó 1 - Sup. Modal

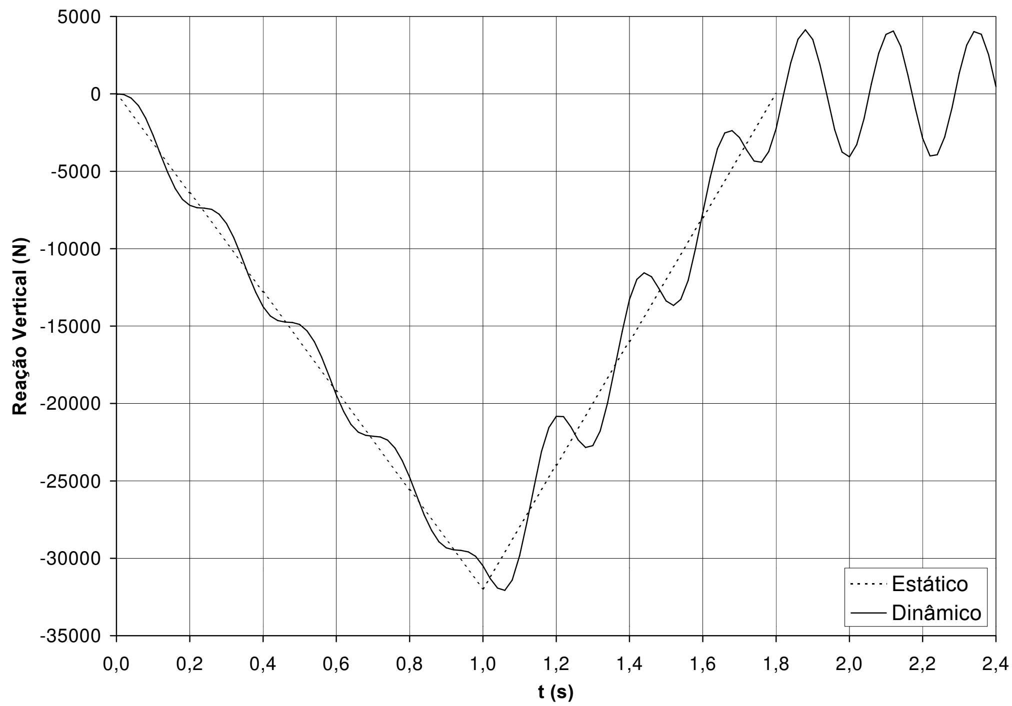

Figura 5.39: Reação vertical do nó 1 - Sup. Modal

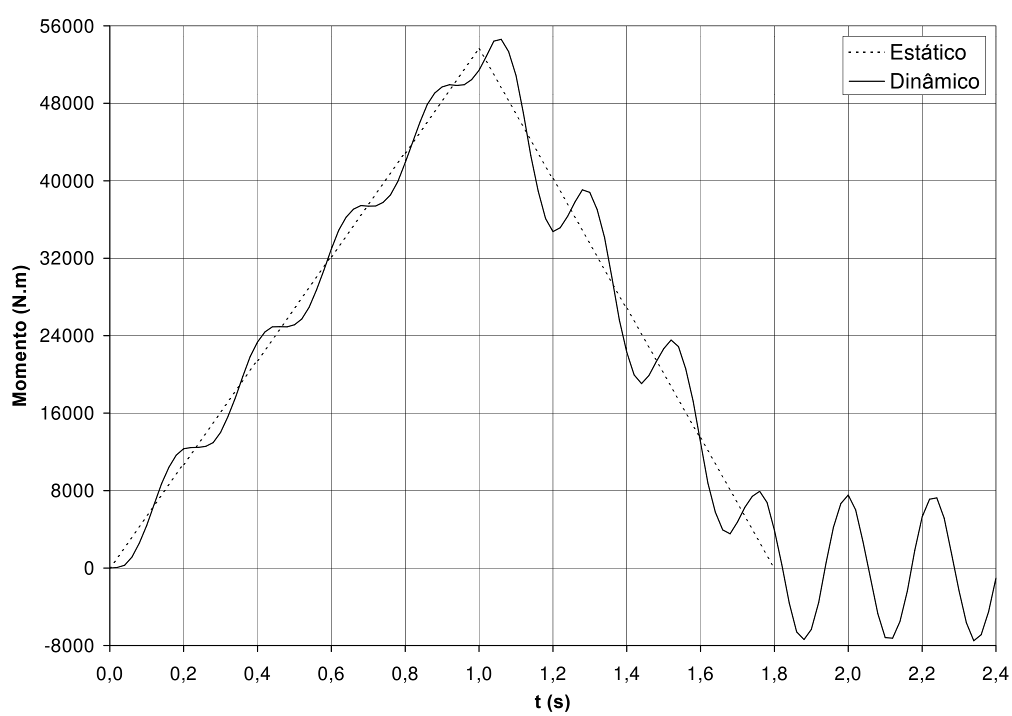

Figura 5.40: Momento do nó 1 - Sup. Modal

Exemplo 9:

A próxima estrutura simula um galpão industrial de 3 andares, onde em cada um dos 4 compartimentos superiores encontram-se máquinas apoiadas diretamente sobre as vigas. As ações representadas por essas máquinas são descritas por funções harmônicas (seno e cosseno) que levam em consideração seu peso juntamente com suas freqüências. Os pilares são compostos por perfis do tipo CVS 350x73 e as vigas VS 550x64. A Figura (5.41) mostra maiores detalhes do modelo criado.

Duas análises são feitas: a primeira em relação à estrutura sem amortecimento e a segunda considerando um amortecimento de $0,5\%$ para o primeiro modo de vibração e $1,0\%$ para o segundo. O tempo de duração da análise foi de $1,5\,s$.

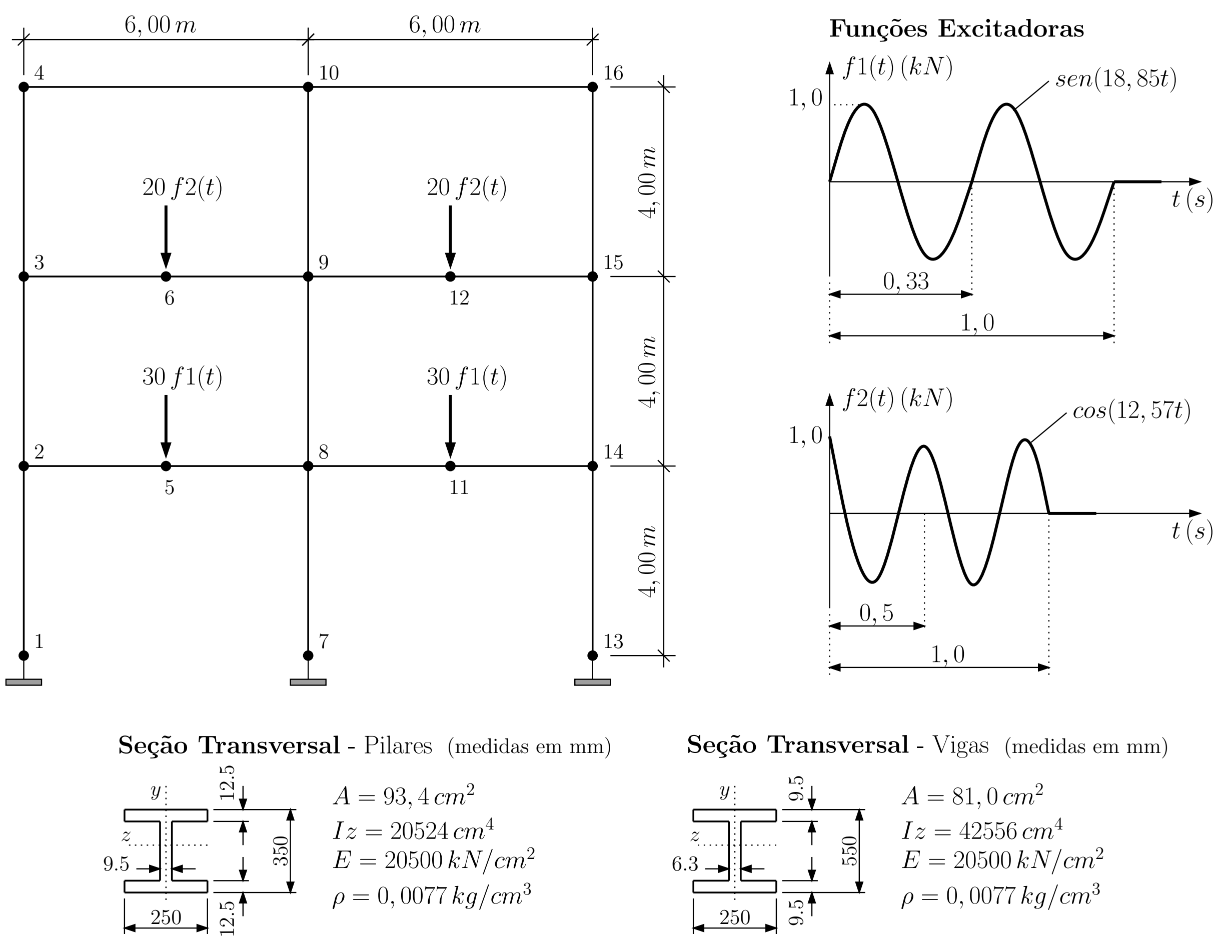

Figura 5.41: Pórtico de 3 pavimentos com cargas harmônicas

Observações:

- O incremento de tempo para os cálculos foi $\Delta t = 0,00625\,s$;
- A análise da Superposição Modal foi feita com 20 modos de vibração;
- No método de Newmark foram utilizados os coeficientes $\alpha = 0,5$ e $\beta = 0,25$ (aceleração média constante).

Nó	Dy (m)	Ry (N)
5	0,058153	-
6	0,044119	-
7	-	-54578,02

Tabela 5.36: Máximos deslocamentos e esforços estáticos

i	ω_i(CPS)	i	ω_i(CPS)	i	ω_i(CPS)	i	ω_i(CPS)
1	0,705196	6	6,934352	11	11,382675	16	18,584758
2	2,223183	7	7,294403	12	13,119824	17	20,369090
3	3,762647	8	8,385972	13	14,587711	18	20,534013
4	6,275393	9	9,106197	14	15,736826	19	22,363983
5	6,320648	10	9,406410	15	16,110915	20	23,405292

Tabela 5.37: Freqüências Naturais

As tabelas a seguir referem-se aos resultados obtidos para os deslocamentos verticais dos nós 5 e 6 e a reação vertical do nó 7.

Deslocamentos verticais mínimos e máximos					
		Dy (cm) - PEF		Dy (cm) - SAP	
Análise	**Limite**	**Sem Amort.**	**Com Amort.**	**Sem Amort.**	**Com Amort.**
Sup. Modal	Mínimo	-0,086739	-0,083898	-0,092291	-0,089223
Sup. Modal	Máximo	0,066693	0,060736	0,080065	0,070400
Newmark	Mínimo	-0,088470	-0,084790	-0,091108	-0,088234
Newmark	Máximo	0,070822	0,062486	0,077493	0,066715

Tabela 5.38: Deslocamento vertical do nó 5 - Newmark

Deslocamentos verticais mínimos e máximos					
		Dy (cm) - PEF		Dy (cm) - SAP	
Análise	**Limite**	**Sem Amort.**	**Com Amort.**	**Sem Amort.**	**Com Amort.**
Sup. Modal	Mínimo	-0,068171	-0,059378	-0,094013	-0,064549
Sup. Modal	Máximo	0,061960	0,051316	0,077713	0,054762
Newmark	Mínimo	-0,064844	-0,060217	-0,087989	-0,063236
Newmark	Máximo	0,058198	0,052468	0,077272	0,056316

Tabela 5.39: Deslocamento vertical do nó 6 - Newmark

Reação vertical de apoio mínima e máxima					
		Ry (N) - PEF		Ry (N) - SAP	
Análise	**Limite**	**Sem Amort.**	**Com Amort.**	**Sem Amort.**	**Com Amort.**
Sup. Modal	Mínimo	-89849,58	-67852,84	-82796,51	-65536,30
Sup. Modal	Máximo	99136,70	96947,10	110675,04	103350,21
Newmark	Mínimo	-76979,46	-63832,51	-83574,34	-70267,58
Newmark	Máximo	95948,67	91773,78	109377,08	102770,05

Tabela 5.40: Reação vertical do nó 7 - Newmark

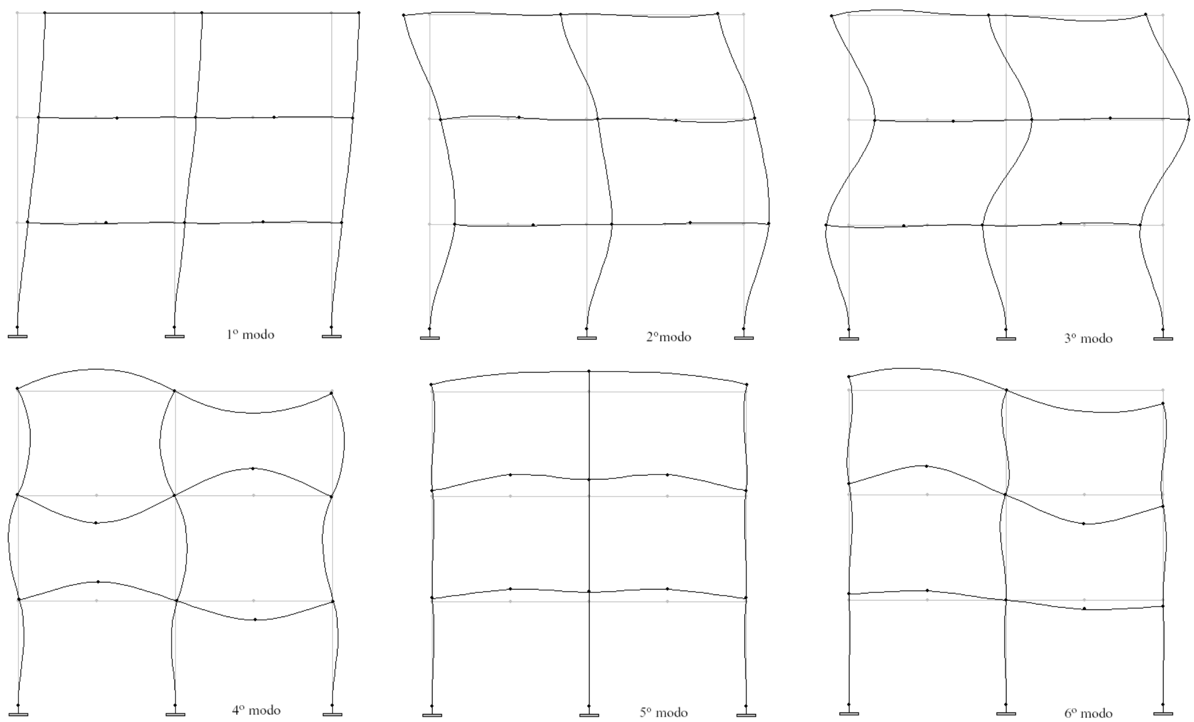

Figura 5.42: Modos de vibração

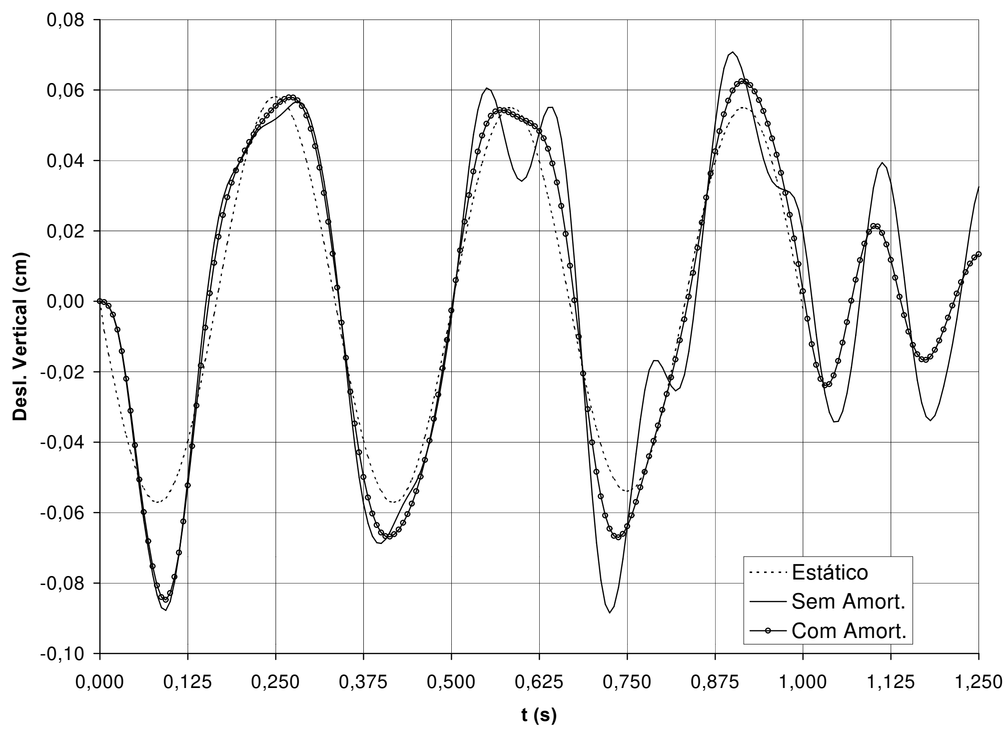

Figura 5.43: Deslocamento vertical do nó 5 - Newmark

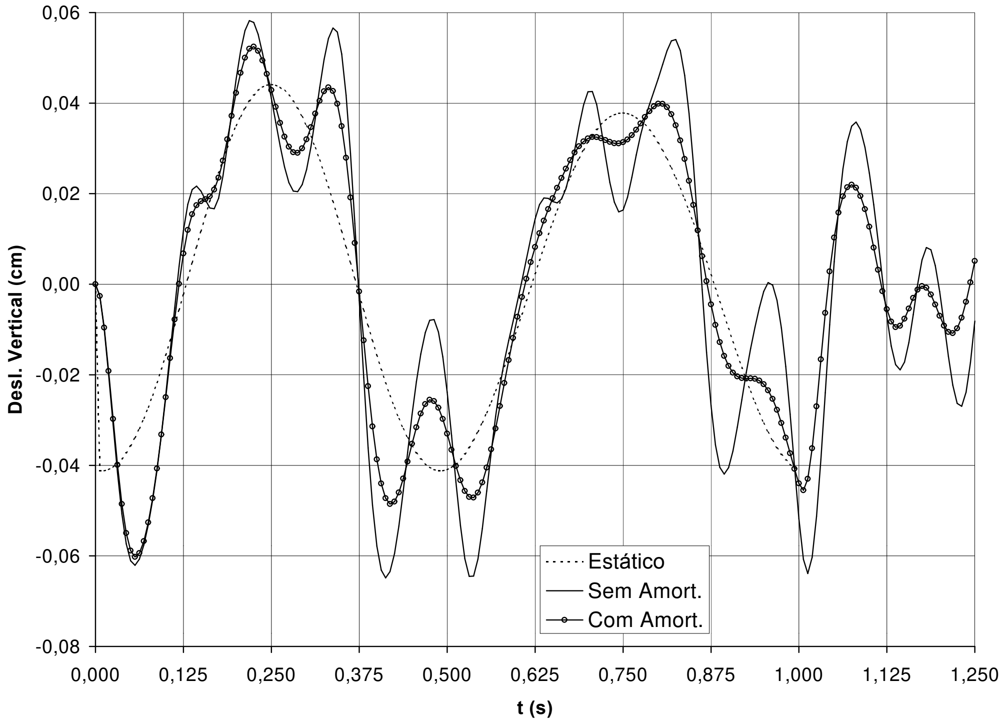

Figura 5.44: Deslocamento vertical do nó 6 - Newmark

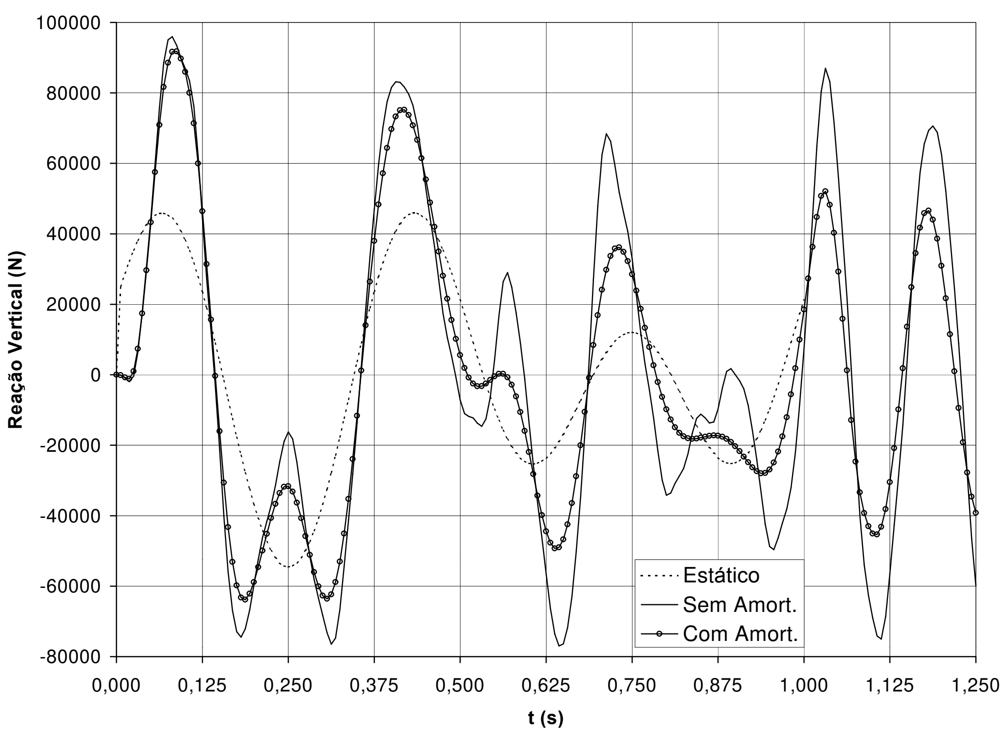

Figura 5.45: Reação vertical do nó 7 - Newmark

Considerações Finais (Exemplos 8 e 9):

Na Tabela (5.41) apresentam-se os coeficientes de impacto para as cargas dinâmicas concentradas do Exemplo 8. Eles foram obtidos da mesma maneira definida nos exemplos de carga móvel e para os resultados do programa *PEF*.

Coeficientes de Impacto			
	Nó	**Sup. Modal**	**Newmark**
Dx	4	1,022	1,000
Rx	1	1,003	0,991
Ry	1	1,019	0,998
Mz	1	1,012	0,992

Tabela 5.41: Coeficientes de impacto para deslocamentos e reações de apoio

Observa-se que os coeficientes de impacto estão muito próximos da unidade, donde conclui-se que uma análise estática poderia ter sido feita para este exemplo.

Dois motivos para isto ocorrer podem ser destacados: o primeiro é o fato da estrutura apresentar uma rigidez grande, e o segundo pelo fato das cargas não serem aplicadas de maneira instantânea (são aumentadas linearmente).

A Tabela (5.42) mostra os coeficientes de impacto obtidos para as variáveis escolhidas no Exemplo 9 através do programa *PEF*.

Coeficientes de Impacto			
	Nó	**Sup. Modal**	**Newmark**
Dy	5 (sa)	1,49	1,52
Dy	5 (ca)	1,44	1,46
Dy	6 (sa)	1,55	1,47
Dy	6 (ca)	1,35	1,36
Ry	7 (sa)	1,82	1,76
Ry	7 (ca)	1,78	1,68
(sa): sem amortecimento.			
(ca): com amortecimento.			

Tabela 5.42: Coeficientes de impacto para deslocamentos e reações de apoio

Com os coeficientes obtidos para a situação sem amortecimento, observa-se que os deslocamentos verticais dinâmicos dos nós 5 e 6 são cerca de 50% maiores que aqueles obtidos pela análise estática e a reação vertical do nó 7 é aproximadamente 80% maior.

.

Capítulo 6

Conclusões e Sugestões

Neste trabalho são apresentados os conceitos teóricos envolvidos na análise dinâmica linear elástica das estruturas planas, utilizando a equação de movimento de Lagrange associada com o Método dos Elementos Finitos.

Para este tipo de análise utilizou-se o Método da Superposição Modal e o Método de Newmark, sendo apresentadas algumas vantagens e desvantagens de ambos.

No Método da Superposição Modal incrementos de tempo maiores podem ser escolhidos e ainda assim obter bons resultados; porém, a desvantagem é que as freqüências e os modos de vibração devem estar disponíveis. Na maioria das estruturas apenas os primeiros modos de vibração são interessantes para o cálculo. Esse método é evitado na análise não-linear.

No Método de Newmark é necessário escolher incrementos de tempo de maneira mais criteriosa de modo que se tenha resultados satisfatórios; porém, as freqüências naturais e modos de vibração não precisam ser calculados sendo mais empregado na análise não-linear.

Em todos os exemplos exibidos foram utilizados coeficientes do Método de Newmark para aceleração média constante, que se justifica pela possibilidade de usar incrementos de tempos maiores e ainda assim manter a estabilidade dos resultados.

6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

O modelo estrutural utilizado neste trabalho foi o de pórtico plano constituído por elementos finitos de barra. Ele pode ser extrapolado para o caso tridimensional, ou ainda, ser estendido, por analogia do desenvolvimento numérico, para outros mais sofisticados como é o caso das cascas e placas.

Diversos modelos de análise dinâmica para integração direta no tempo, além do Método de Newmark que foi utilizado, também encontram-se disponíveis e que poderiam ser estudados.

A análise concentrou-se no regime elástico linear. Um passo seguinte seria realizá-la em regime não-linear, tanto no que diz respeito à não-linearidade geométrica quanto material.

As cargas móveis, como pôde ser observado, produzem grandes deslocamentos dinâmicos, porém, os exemplos se concentraram para velocidades constantes das cargas. Nada impede que se apliquem acelerações quando elas estão atravessando a estrutura em estudo ou até mesmo mudando de intensidade.

No programa desenvolvido, um melhoramento seria a introdução gráfica da estrutura (barra, nós, apoios, carregamentos, etc), facilitando o processo de criação.

Nos algoritmos implementados não se aproveitou o fato das matrizes de massa, rigidez e amortecimento serem esparsas. Eficientes formas de armazenamento e resolução de sistemas esparsos encontram-se disponíveis e poderiam ser adaptadas nesse trabalho. Justifica-se o não aproveitamento dessa característica pelo fato de não ser o objetivo a resolução de sistemas de grandes dimensões.

O problema de autovalor e autovetor utilizado para encontrar as freqüências naturais e modos de vibração do sistema foi resolvido utilizando dois métodos: o da Potência e o da Deflação de Wielandt. Diversos métodos numéricos para resolver esse problema, mais sofisticados e estáveis, são amplamente difundidos na literatura, tais como os de Jacobi, QR, Householder, Lanczos, etc.

Neste trabalho justifica-se a utilização dos dois primeiros pelo fato das matrizes de massa e rigidez serem bem comportadas e simétricas. Com as condições de contorno, que impedem o movimento de corpo rígido do sistema, e pelo fato das matrizes de massa e rigidez serem definidas positivas têm-se que os autovalores resultantes serão todos reais, positivos e diferentes de zero. Outro fato é que para a obtenção dos resultados de deslocamentos, velocidades e acelerações, para as estruturas propostas neste trabalho, não é necessário o cálculo de todos os autovalores e autovetores do sistema, sendo o método da deflação julgado como uma boa alternativa.

Referências Bibliográficas

[1] Abu-Hilal, M.; Mohsen, M. (2000). *Vibration of beams with general boundary conditions due to a moving harmonic load*. Journal of Sound and Vibration, v.232(4), p.703-717.

[2] Archer, J. S. (1963). *Consistent mass matrix for distributed mass systems*, Journal of the Structural Division, v.89, p.161-178.

[3] Assan, A. E. (1999). *Método dos elementos finitos. Primeiros passos*. Editora da UNICAMP, Campinas.

[4] Bathe, K. J.; Wilson, E. L. (1976). *Numerical methods in finite element procedure*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

[5] Bathe, K. J. (1982). *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

[6] Bulent, A. O. (1974). *Dynamics of framework by continuous mass method*. Computers and Structures, v.4, p.1061-1089.

[7] Burden, L. R., Faires, J.D.(2001). *Numerical analysis*. PWS Publishing Company, Boston.

[8] Chopra, A. K. (1995). *Dynamics of structrures*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

[9] Clough, R. W.; Penzien, J. (1982). *Dynamics of structures*. McGraw-Hill International Editions, New York.

[10] Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E. (1989). *Concepts and applications of finite element analysis*. McGraw-Hill International Editions, New York.

[11] Czeslaw, B. *Time integration methods - still questions*. Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland.

[12] Filipich, C. P.; Laura, P. A. A. (1987). *In-plane vibrations of portal frames with end supports elastically restrained against rotation and translation*. Journal of Sound and Vibration, v.117(3), p.467-473.

[13] Gürgöze, M. (1984). *A note on the vibrations of restrained beams and rods with point masses*. Journal of Sound and Vibration, v.96(4), p.461-468.

[14] Grossi, R. O.; Albarracín, C. M.; Zannier, L. (2004). *Some observations in the dynamics of beams with intermediate supports*. Journal of Sound and Vibration, v.271, p.475-480.

[15] Jung, M. P. (1973). *Dinâmica de estruturas reticuladas sob cargas móveis pelo método dos elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

[16] Lanczos, C. (1975). *The variational principles of mechanics*. Dover Publications, Inc., New York.

[17] El Nashie, M. S. (1990) *Stress, stability and chaos in structural engineering: an energy approach*. McGraw-Hill Book Company, London.

[18] Naguleswaran, S. (2004) *Transverse vibration of an uniform Euler-Bernoulli beam under linearly varying axial force*. Journal of Sound and Vibration, v.275, p.47-57.

[19] Newmark, N. M. (1959). *A method of computation for structural dynamics*, Journal of the Engineering Mechanics Division, v.85, p.67-94.

[20] Paz, M. (1991). *Structural dynamics - theory and computation*. Van Nostrand Reinhold, New York.

[21] Przemieniecki, J. S. (1968). *Theory of matrix structural analysis*. McGraw-Hill International Editions, New York.

[22] Timoshenko, S.; Young, D.H; Weaver, W. Jr. (1990). *Vibration problems in engineering*, John Willey & Sons, Inc.

[23] Venâncio Filho. F. (1966). *Dynamic influence lines of beams and frames*. Journal of the Structural Division, v.92, p.371-386.

[24] Warburton, G. B. (1964). *The dynamical behaviour of structures*. Pergamon Pres Ltda, Oxford.

[25] Wilkinson, J. H. (1988). *The algebraic eigenvalues problem*. Clarendon Press, Oxford.

[26] Wilson, E. L.; Penzien, J. (1972). *Evaluation of orthogonal damping matrices*. International Journal for numerical methods in engineering, v.4, p.5-10.

[27] Wu J.-S.; Lin T.-L. (1990). *Free vibration analysis of a uniform cantilever beam with point masses by an analytical-and-numerical-combined method*. Journal of Sound and Vibration, v.136(2), p.201-213.

[28] Yoshimura, T.; Hino, J.; Ananthanarayana, N. (1986). *Vibration analysis of a non-linear beam subjected to moving loads by using the Galerkin method*. Journal of Sound and Vibration, v.104(2), p.179-186.

Apêndice A

Considerações sobre o Efeito de Mola e Recalque

A.1 Efeito de Recalque na Análise Estática

A maneira como este efeito foi implementado é semelhante àquele utilizado na análise estática. A título de ilustração, toma-se uma viga bi-apoiada, com um recalque δ_d no apoio direito Figura (A.1).

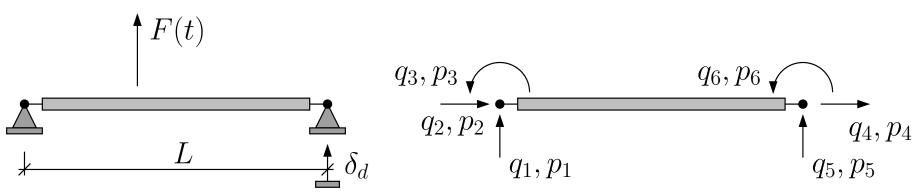

Figura A.1: Efeito de Recalque

De maneira geral, para a análise estática, a solução é obtida resolvendo o sistema linear dado por **Kq = P**, que também pode ser escrito como:

$$
\begin{bmatrix}
k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\
k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\
k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\
k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\
k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\
k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix}
\tag{A.1}
$$

Sabendo quanto a estrutura se desloca devido ao recalque δ_d, a equação acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & 0 & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & 0 & k_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & 0 & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - k_{15}\,\delta_d \\ p_2 - k_{25}\,\delta_d \\ p_3 - k_{35}\,\delta_d \\ p_4 - k_{45}\,\delta_d \\ \delta_d \\ p_6 - k_{65}\,\delta_d \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

Assim, seu efeito é contabilizado diretamente junto ao vetor de cargas produzido pelas forças externas.

A.2 Efeito de Recalque no Método de Newmark

A implementação do recalque neste método é efetuada também considerando seu efeito no próprio vetor de cargas dinâmicas **P**. É necessário resolver um sistema linear a cada incremento de tempo Δt dado pela Equação (3.47) e aqui reescrita:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{q}_{k+1} = \hat{\mathbf{P}}_{k+1} \tag{A.3}$$

Com isso, a cada passo em que o vetor de cargas $\hat{\mathbf{P}}_{k+1}$ é formado, torna-se necessário também computar o efeito de recalque, que nesse caso é constante ao longo do tempo, obtendo-se a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \hat{k}_{11} & \hat{k}_{12} & \hat{k}_{13} & \hat{k}_{14} & 0 & \hat{k}_{16} \\ \hat{k}_{21} & \hat{k}_{22} & \hat{k}_{23} & \hat{k}_{24} & 0 & \hat{k}_{26} \\ \hat{k}_{31} & \hat{k}_{32} & \hat{k}_{33} & \hat{k}_{34} & 0 & \hat{k}_{36} \\ \hat{k}_{41} & \hat{k}_{42} & \hat{k}_{43} & \hat{k}_{44} & 0 & \hat{k}_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hat{k}_{61} & \hat{k}_{62} & \hat{k}_{63} & \hat{k}_{64} & 0 & \hat{k}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \\ q_5(t) \\ q_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_1(t) - \hat{k}_{15}\,\delta_d \\ \hat{p}_2(t) - \hat{k}_{25}\,\delta_d \\ \hat{p}_3(t) - \hat{k}_{35}\,\delta_d \\ \hat{p}_4(t) - \hat{k}_{45}\,\delta_d \\ \delta_d \\ \hat{p}_6(t) - \hat{k}_{65}\,\delta_d \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

A.3 Efeito de Recalque no Método da Superposição Modal

Novamente, a única parcela que deverá ser atualizada em cada passo de tempo Δt é o vetor de cargas equivalente **P**.

Será necessário resolver uma equação diferencial semelhante à Equação (3.21), ficando:

$$\ddot{x}_i + 2\omega_i\xi_i\dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \frac{\boldsymbol{\phi}_i^T(\mathbf{P} - k_{ij}\,\delta_d)}{\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i} \tag{A.5}$$

onde: j é o grau de liberdade onde está atuando o recalque δ_d e $i = 1, \ldots, N$.

Resolvida a Equação (A.5) e utilizando o conceito de superposição dos modos de vibração, obtém-se os deslocamentos, velocidades e acelerações dos nós, dados por:

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Phi x} \qquad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{x}} \qquad \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{x}}$$

A.4 Efeito de Mola na Análise Dinâmica

Esse efeito é contabilizado diretamente na matriz de rigidez **K**, para ambos os métodos em estudo.

A título de ilustração toma-se novamente uma viga bi-apoiada, com efeito de mola em um de seus nós, Figura (A.2).

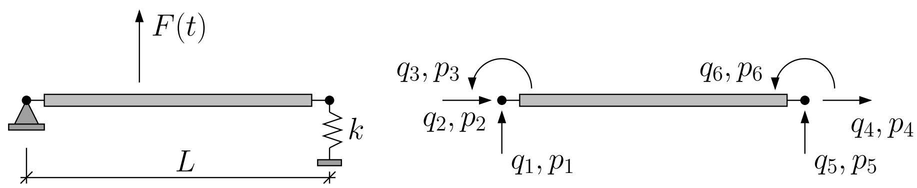

Figura A.2: Efeito de Mola

A matriz de rigidez global do sistema passa a ser dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55}+k & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

A rigidez k da mola é adicionada diretamente ao grau de liberdade a que corresponde na matriz de rigidez global. E assim a matriz **K** está pronta para ser usada tanto no Método de Newmark quanto no da Superposição Modal.

Apêndice B

Manual do Programa PEF

B.1 Introdução

O texto apresentado a seguir tem por objetivo relatar de maneira resumida as principais características de entrada de dados e interpretação de resultados do programa.

O *PEF* foi desenvolvido no *Delphi*, e permite que os resultados possam ser visualizados de maneira gráfica.

Ele realiza tanto a análise estática quanto dinâmica das estruturas no regime elástico linear. Nesta segunda é possível obter as freqüências naturais e modos de vibração; deslocamentos, velocidades e acelerações dos nós das estruturas tanto pelo método de Newmark quanto o da Superposição Modal.

B.2 Entrada de Dados

A tela inicial do programa, Figura (B.1), fornece os ítens que deverão ser preenchidos antes de se efetuarem os cálculos.

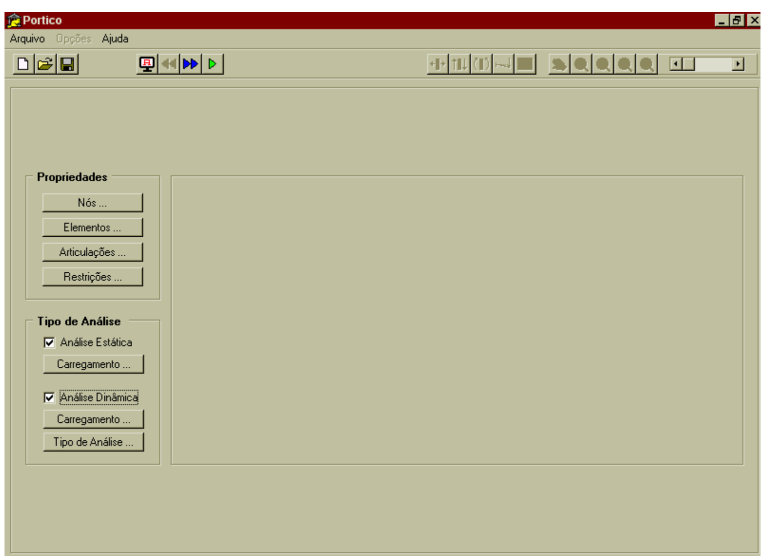

Figura B.1: Tela inicial

A entrada de dados é feita através de tabelas. Esta deve ser feita através de duas fases: a primeira diz respeito aos dados relacionados às características físicas e geométricas da estrutura, tipos de vinculação e se existe ou não articulações entre os nós; a segunda se refere ao tipo de análise que será realizada (estática ou dinâmica), onde são especificados as características dos carregamentos.

Abaixo seguem as tabelas referentes a esses dados:

B.2.1 Tabela de Nós

Relaciona os nós da estrutura com a sua respectiva coordenada **X** e **Y**, conforme Figura (B.2)

Figura B.2: Tabela dos nós

B.2.2 Tabela de Elementos

Essa tabela caracteriza as propriedades físicas e geométricas dos elementos que compõem o sistema como: o módulo de elasticidade (**E**), o momento de inércia e a área da seção transversal dada respectivamente pelas letras **I** e **A** e a massa específica do elemento (**Massa/Vol**), além de relacionar os nós que estão associados a ele. Essa tabela é mostrada na Figura (B.3).

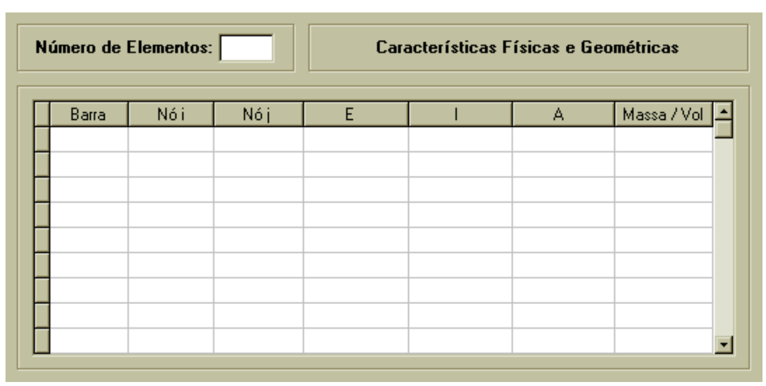

Figura B.3: Tabela dos elementos

B.2.3 Tabela de Articulações

Permite que as extremidades dos elementos tenham giro livre. Dependendo de onde essa articulação encontra-se (início, fim ou em ambos os lados do elemento). Quando existir articulação, essa deverá ser caracterizada pela letra *L* (livre) ou caso contrário, pela letra *R* (restringido). A Figura (B.5) exibe esta tabela.

Figura B.4: Tabela de articulações

B.2.4 Tabela de Restrições de Apoio

É a responsável por fornecer ao sistema as condições de contorno, Figura (B.5). Um determinado nó pode ter deslocamento nulo ou algum imposto (recalque) em qualquer direção. As colunas destinadas a essa função são: **Dx**, **Dy** e **Rz**. É possível também inserir o efeito de mola em qualquer uma das direções, sendo armazenadas nas colunas **Kx**, **Ky** e **Kz**. Para que o efeito de mola seja inserido as colunas referentes aos deslocamentos devem constar com a letra *L* naquela direção, caso contrário a mola não terá efeito sobre a estrutura.

Figura B.5: Tabela de restrições de apoio

Construída a geometria da estrutura e determinadas as características físicas dos elementos, o próximo passo é realizar o carregamento da mesma, seja para análise estática, dinâmica ou ambas.

B.2.5 Carregamentos Estáticos

Esse tipo de carregamento se dá através daqueles concentrados nos nós da estrutura ou distribuído ao longo do elemento. Os concentrados podem ser definidos na direção x (**Px**), direção y (**Py**) e rotação z (**Mz**)-momento; já os distribuídos podem ser dados na direção x (**wx**) e direção y (**wy**). Durante o cálculo é possível considerar ou não o efeito do peso próprio do sistema. A tabela que caracteriza esses carregamentos é exibida na Figura (B.6).

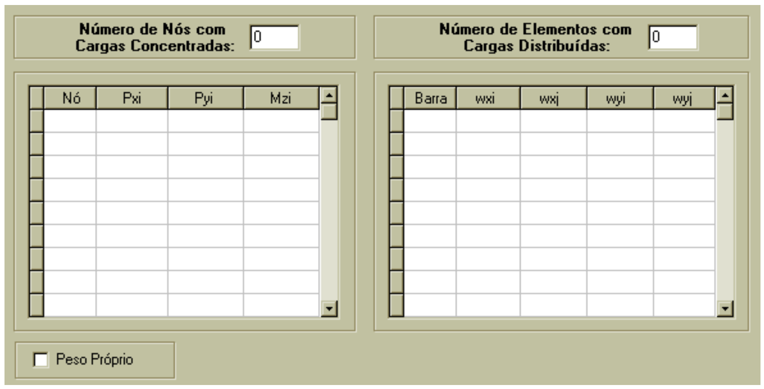

Figura B.6: Tabela de carregamento estático

B.2.6 Carregamentos Dinâmicos

Esses carregamentos estão na seção que trata da análise dinâmica das estruturas. Como já citado anteriormente, esse trabalho fixou-se em três tipos básicos de carregamentos dinâmicos: concentrados nos nós, móveis (concentrados e distribuídos) e vibração de base.

A tabela dos carregamentos concentrados nos nós, Figura (B.7), variam de acordo com as funções apresentadas na Figura (4.4). Eles também podem atuar na direção x, y ou z.

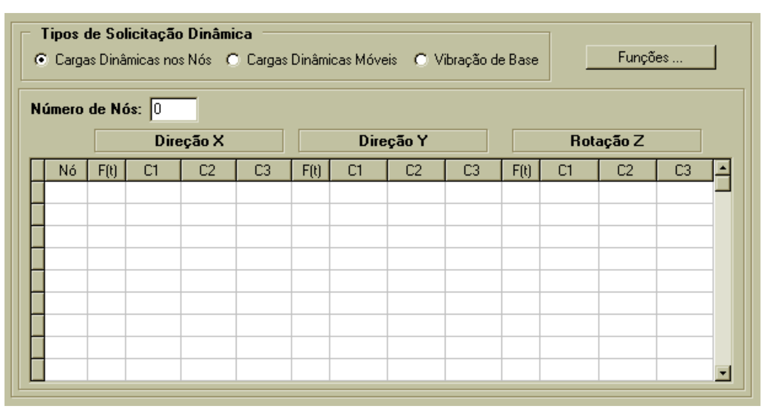

Figura B.7: Tabela de carregamento dinâmico nos nós

A tela que representa os carregamentos móveis são subdividas em duas: uma para o concentrado e outra para o distribuído, conforme as Figuras (B.8) e (B.9). Nelas encontram-se os valores para as intensidades das cargas, velocidade e comprimento (para o caso das móveis distribuídas). Destaca-se aqui que essas cargas foram modeladas somente para a atuação perpendicular ao eixo do elemento.

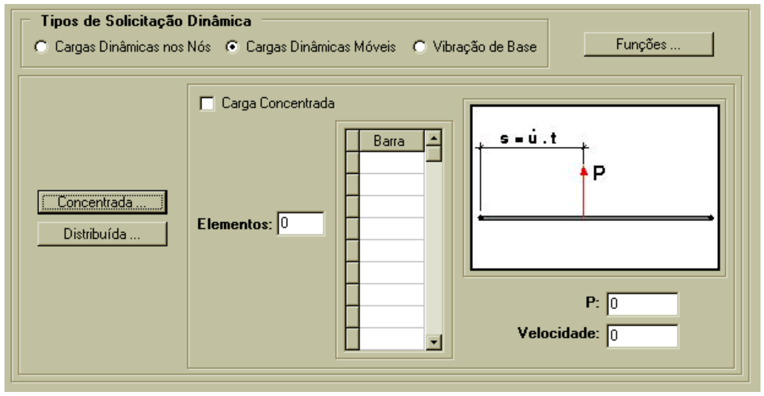

Figura B.8: Tabela de carregamento móvel concentrado

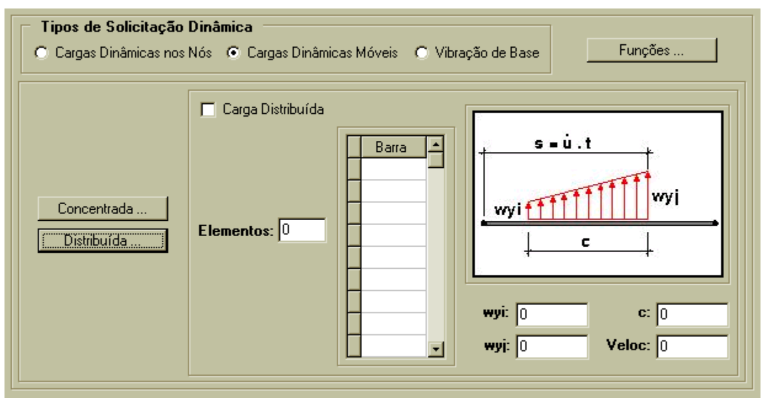

Figura B.9: Tabela de carregamento móvel distribuído

B.2.7 Vibração de Base

Finalmente, o último tipo de solicitação dinâmica é aquela representada por uma aceleração aplicada na base ou apoio da estrutura. Novamente, essa aceleração poderá atuar nas duas direções x e y, ou causando um efeito de rotação na direção z. A tabela da Figura (B.10) exibe as propriedades acima descritas.

B.2.8 Tipos de Análise Dinâmica

A seguir são descritos os ítens necessários para a caracterização completa da análise dinâmica. De acordo com a seqüência estabelecida no programa, têm-se:

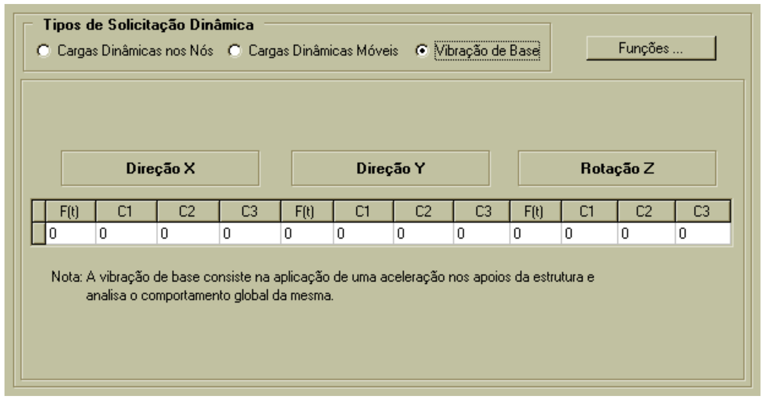

Figura B.10: Tabela de vibração de base

Freqüências naturais e modos de vibração: o usuário deve fornecer o número de freqüências desejadas, com o cuidado que ele não deve ser maior que o número de graus de liberdade da estrutura, excluindo as condições de contorno. Como o cálculo é baseado em um método interativo, deve-se especificar a tolerância de convergências, Figura (B.11).

Figura B.11: Freqüências naturais e modos de vibração

Fatores de amortecimento: o amortecimento estrutural é considerado através de dois fatores de amortecimento associados ao primeiro e segundo modo de vibração, Figura (B.12). Para isso é necessário que pelo menos duas freqüências naturais sejam calculadas para que no método de Newmark possa ser montada uma matriz de amortecimento explícita, que, como já descrita, será em função da matriz de massa e rigidez global.

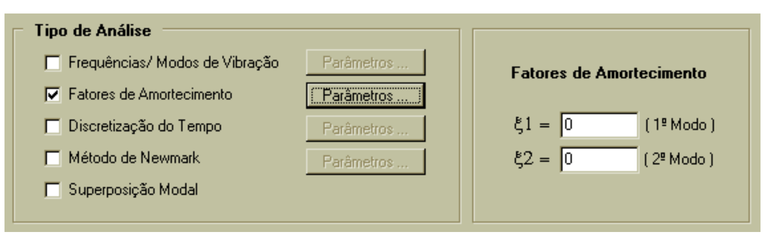

Figura B.12: Amortecimento estrutural

Discretização do tempo: o usuário deve fornecer o tempo total da análise e o número de intervalos em que este tempo será dividido. O valor de cada passo será exibido no último campo de preenchimento representado por Δt, conforme Figura (B.13).

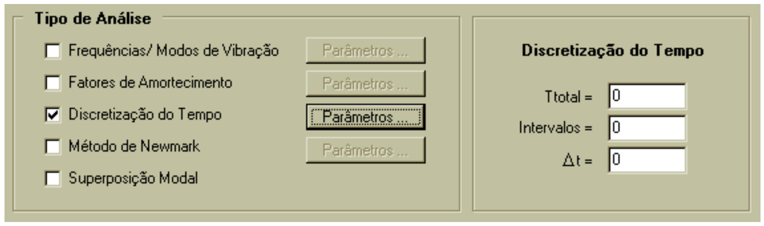

Figura B.13: Discretização do tempo

Método de Newmark: devem ser fornecidos dois coeficientes (α e β) que são inerentes ao método. Como padrão, o programa traz os coeficientes $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.25$ que correspondem a uma aceleração média constante. O local de exibição dessa tela é mostrada na Figura (B.14).

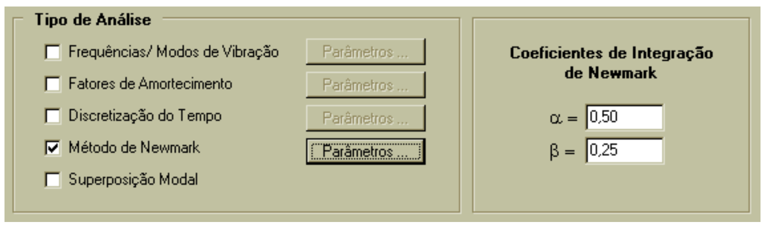

Figura B.14: Coeficientes do método de Newmark

Superposição Modal: essa opção, sempre que solicitada, deve ter o campo *Freqüências/Modos de Vibração* selecionado pois, para efetuar os cálculos nesse método, é necessário ter pelo menos uma freqüência natural disponível.

B.3 Apresentação dos resultados

Terminado o preenchimento dos dados suficientes para a realização da análise, o cálculo deve ser executado através do botão *Calcular* e a tela que fornece graficamente os resultados obtidos é acionada pelo botão *Resultados*, conforme Figura (B.15).

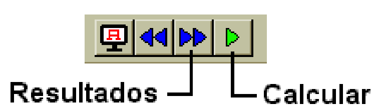

Figura B.15: Botões calcular e resultados

Na tela que fornece graficamente os resultados obtidos, Figura (B.16), constam as opções para a visualização gráfica destes.

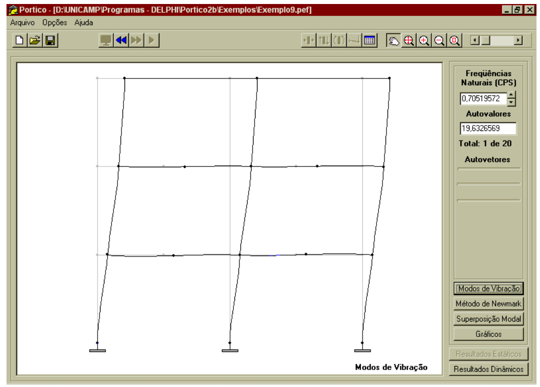

Figura B.16: Tela de apresentação dos resultados

Se foi realizada uma análise dinâmica para obtenção de resultados através dos métodos de Newmark ou Superposição Modal, então é possível visualizar a tela denominada *"Time History"* para deslocamentos, velocidades e acelerações dos nós, conforme Figura (B.17).

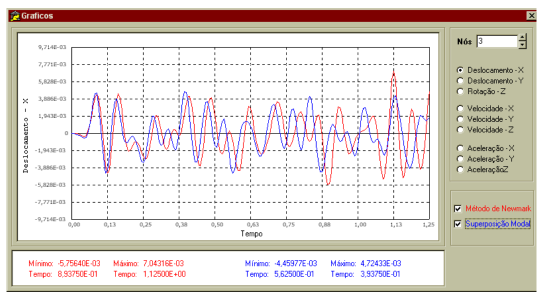

Figura B.17: Tela do *"Time History"*

Os resultados numéricos são fornecidos em uma tabela de saída de dados, Figura (B.18) e poderão ser exportados para o Excel como um arquivo com extensão *.csv*.

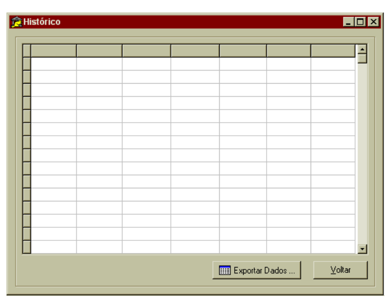

Figura B.18: Tabela de resultados