



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo**

**RAFAEL ANDRÉS SANABRIA DÍAZ**

**ANÁLISE NUMÉRICA DA RESISTÊNCIA À  
PUNÇÃO DE LAJES LISAS PROTENDIDAS COM  
CABOS NÃO ADERENTES**

**CAMPINAS**  
**2018**

**RAFAEL ANDRÉS SANABRIA DÍAZ**

**ANÁLISE NUMÉRICA DA RESISTÊNCIA À  
PUNÇÃO DE LAJES LISAS PROTENDIDAS COM  
CABOS NÃO ADERENTES**

Dissertação de Mestrado apresentada a Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil na área de Estruturas e Geotécnica

**Orientador: Prof. Dr. Leandro Mouta Trautwein**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL  
DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO RAFAEL  
ANDRÉS SANABRIA DÍAZ E ORIENTADO PELO PROF.  
DR. LEANDRO MOUTA TRAUTWEIN

ASSINATURA DO ORIENTADOR



---

**CAMPINAS**

**2018**

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** CAPES, 01-P-01879-2016

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-6907-7159>

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

Sa54a Sanabria Díaz, Rafael Andrés, 1992-  
Análise numérica da resistência à punção de lajes lisas protendidas com cabos não aderentes / Rafael Andrés Sanabria Díaz. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Leandro Mouta Trautwein.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Concreto protendido. 2. Lajes de concreto. 3. Resistência ao cisalhamento. 4. Análise numérica. I. Trautwein, Leandro Mouta, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Numerical analysis of punching shear resistance of unbonded post tensioned flat plates

**Palavras-chave em inglês:**

Prestressed concrete

Concrete slabs

Shear strength

Numerical analysis

**Área de concentração:** Estruturas e Geotécnica

**Titulação:** Mestre em Engenharia Civil

**Banca examinadora:**

Leandro Mouta Trautwein [Orientador]

Luiz Carlos de Almeida

Luís Antônio Guimarães Bitencourt Júnior

**Data de defesa:** 29-06-2018

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Civil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E**  
**URBANISMO**

**ANÁLISE NUMÉRICA DA RESISTÊNCIA À PUNÇÃO DE**  
**LAJES LISAS PROTENDIDAS COM CABOS NÃO ADERENTES**

**RAFAEL ANDRÉS SANABRIA DÍAZ**

**Dissertação de Mestrado aprovada**  
**pela Banca Examinadora, constituída por:**

**Prof. Dr. Leandro Mouta Trautwein**  
**Presidente e Orientador/Universidade Estadual de Campinas**

**Prof. Dr. Luiz Carlos de Almeida**  
**Universidade Estadual de Campinas**

**Prof. Dr. Luís Antônio Guimarães Bitencourt Júnior**  
**Escola Politécnica Universidade de São Paulo**

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas do membros encontra-se no  
processo de vida acadêmica do aluno

**Campinas, 29 de Junho de 2018**

## Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Leandro Mouta Trautwein pela sua orientação, amizade e por me confiar este trabalho.

Aos professores Dr. Luiz Carlos de Almeida e Dr. Luís Antônio Guimarães Bitencourt Júnior, que participaram nas bancas de Qualificação e Defesa deste trabalho. A suas sugestões, contribuições e ideias foram de grande ajuda na realização da pesquisa.

A todos os professores do Departamento de Estruturas da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da UNICAMP, cujos ensinamentos me ajudaram de alguma ou outra forma no desenvolvimento deste trabalho e contribuíram também para meu aprendizado pessoal.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo auxílio financeiro durante a realização desta pesquisa. Agradeço também ao curso de especialização de Projetos de Estruturas de Concreto Armado da EXTECAMP pela bolsa de monitoria concedida.

Ao LABMEM (Laboratório de Modelagem Estrutural e Monitoração) pela disponibilização das ferramentas e programas computacionais que viabilizaram este trabalho.

A todos os amigos que fiz nos laboratórios LABMEM e LABMEC do Departamento de Estruturas, pela motivação, discussão de ideias e ajuda recebida durante a realização deste trabalho.

Em especial, gostaria de agradecer à Alana por toda a ajuda prestada na revisão deste texto e por resolver sempre minhas dúvidas de português. Agradeço também por todo seu amor, carinho e apoio sem os quais eu não teria conseguido finalizar a dissertação.

Por fim, agradeço aos meus pais, Carlos e Inmaculada, por tudo o amor e incentivo que sempre tem me dispensado. Minha eterna gratidão a eles.

## Resumo

As lajes protendidas têm sido utilizadas na construção de pavimentos nas últimas décadas em vários países, incluindo o Brasil. Em comparação com as lajes de concreto armado, permitem a adoção de vãos maiores e elementos mais esbeltos, assim como também de um melhor controle da fissuração e dos deslocamentos em condições de serviço. Apesar dessas vantagens, a resistência à punção nas ligações laje-pilar continua sendo um aspecto de especial cuidado no seu dimensionamento. É por isso que nos últimos anos foram feitos diversos estudos experimentais para analisar a influência da protensão na resistência última à punção. Paralelo a esses estudos, o desenvolvimento de ferramentas computacionais tem permitido também entender o fenômeno da punção por meio de simulações numéricas. A finalidade deste trabalho é investigar os efeitos da protensão na resistência à punção de lajes protendidas sem armadura transversal através de simulações numéricas.

Para alcançar esse objetivo, ensaios experimentais foram simulados através de análises tridimensionais não lineares usando o programa computacional DIANA. Nas modelagens foram incorporados o comportamento não linear do concreto fissurado e o escoamento do aço das armaduras passivas e ativas. Compararam-se os modos de ruptura e as curvas de carga *versus* deslocamento entre os resultados numéricos obtidos e os experimentais a fim de validar os modelos constitutivos adotados para o concreto e o aço. A partir da calibração dos modelos, realizou-se um estudo paramétrico que incluiu a simulação de 48 modelos protendidos de ligação laje-pilar, variando a distribuição, traçado do cabo e a resistência à compressão do concreto. Os resultados obtidos foram confrontados com as recomendações do ACI 318-14, Eurocode 2 (2004), *fib* Model Code 2010, NBR 6118:2014 e a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento proposta por Muttoni (2008). Analisando os resultados, conclui-se que as análises numéricas conseguiram representar corretamente a ruptura por punção junto com os efeitos causados pela protensão. As conclusões apresentadas neste trabalho servirão de suporte para futuros estudos experimentais e numéricos, além de contribuir no entendimento do fenômeno da punção em lajes lisas.

**Palavras-chave:** punção; concreto protendido; lajes lisas; análise numérica.

## Abstract

Prestressed slabs have been used as structural floor systems in the last decades in several countries, including Brazil. In comparison with the reinforced concrete slabs, it allows the adoption of larger spans and slender elements, as well as better control of cracking and deflection at serviceability limit state. Despite these advantages, punching shear resistance in the slab-column connections is still the governing criteria for structural design. For that reason, in the last years experimental studies have been conducted to analyze the influence of prestressing on the punching strength. Parallel to these studies, the development of computational tools has also allowed understanding the punching phenomenon through numerical simulations. The purpose of this work is to investigate the punching resistance of prestressed flat slabs without shear reinforcement through numerical simulations.

To achieve this objective, experimental tests were modeled using a three-dimensional non-linear analysis on the software package DIANA. In the models were included the nonlinear behavior of the cracked concrete and the steel yielding of the mild and prestressed reinforcement. In order to endorse the constitutive models adopted for concrete and steel, it was compared numerical and experimental results such as failure modes and load versus deflection curves. Based on the model calibration, a parametric study was executed, including 48 post-tensioned models of slab-column connections, changing the layout and profile of the cables, and the concrete compressive strength. The results obtained were contrasted with the ACI 318-14, Eurocode 2 (2004), *fib* Model Code 2010 and NBR 6118:2014 recommendations and the Critical Shear Crack Theory (CSCT) proposed by Muttoni (2008). Analyzing the results, it is concluded that the numerical analysis reproduced the punching shear failure with the post-tensioned effects. The conclusions presented in this investigation might be useful for future experimental and numerical studies, as well for the understanding of the punching shear phenomenon in flat plates.

**Keywords:** punching; prestressed concrete; flat slabs; numerical analysis.

## Lista de Ilustrações

Figura 2.1	a) Concentração de carregamento em lajes lisas b) Ruptura por punção em ligação laje-pilar. Adaptado de Muttoni e Ruiz (2008). . . . .	27
Figura 2.2	a) Influência da resistência de compressão do concreto na capacidade última à punção. Adaptado de Sacramento et al. (2012) b) Influência da taxa de armadura longitudinal na capacidade última à punção. Adaptado de Kinnunen e Nylander (1960). . . . .	28
Figura 2.3	Representação esquemática da fissuração de uma laje submetida a carga concentrada a) fissuras radiais, causadas pela flexão b) fissuras tangenciais, causadas pelo cisalhamento. Adaptado de Staller (2000). . . . .	29
Figura 2.4	Evolução da fissuração para diferentes níveis de carregamento em uma das lajes ensaiadas por Afonso (2010). . . . .	30
Figura 2.5	Representação esquemática da curva carga <i>versus</i> deslocamento de uma laje com ruptura por punção. Adaptado de Eder et al. (2010). . . . .	30
Figura 2.6	Curvas de carga <i>versus</i> deformação do concreto na direção radial da laje PG-3 ensaiada por Guandalini (2006). . . . .	31
Figura 2.7	Modificação da biela a compressão devido à redistribuição das tensões no momento da ruptura à punção. Adaptado de Guandalini (2006). . . . .	31
Figura 2.8	Efeitos da protensão na ligação laje-pilar: forças no plano ( $N_p$ ), excentricidade do cabo ( $e$ ) e a componente vertical ( $V_p$ ). Adaptado de Clément et al. (2014). . . . .	32
Figura 2.9	Esquema de ensaio de lajes para estudar punção. . . . .	33
Figura 2.10	Mecanismo da descompressão em laje protendida. Adaptado de Carvalho (2005). . . . .	34
Figura 2.11	Distribuição de cabos utilizadas nos ensaios de Hassanzadeh e Sundquist (2000). . . . .	35

Figura 2.12	Ensaaios realizados por Ramos (2003). . . . .	36
Figura 2.13	Ensaaios realizados por Melges (2001). . . . .	37
Figura 2.14	Curvatura em planta de cabos em duas das lajes ensaiadas por Barbán (2008). . . . .	39
Figura 2.15	Esquemas de aplicação de carga das séries ensaiadas por Clément (2012). . . . .	40
Figura 2.16	Método da superfície de controle. . . . .	41
Figura 2.17	Perímetro de controle do ACI 318-14. . . . .	42
Figura 2.18	Perímetro de controle do EC2 (2004). . . . .	43
Figura 2.19	Cálculo da componente vertical dos cabos de protensão segundo NBR-6118 (2014). . . . .	47
Figura 2.20	Perímetro de controle segundo <i>fib</i> Model Code 2010. . . . .	47
Figura 2.21	Representação das curvas obtidas pelo método do MC2010. . . . .	49
Figura 3.1	Modelo de fissuração no concreto a) discreta b) discreta com enriquecimento de nós d) distribuída, Adaptado de Cervera e Chiumenti (2006). . . . .	52
Figura 3.2	Definição do sistema de eixos globais $(x,y)$ e locais $(n,s)$ no elemento fissurado. . . . .	53
Figura 3.3	Modelos de fissuração distribuída. . . . .	54
Figura 3.4	Modelo de fissuras fixas. Adaptado de Červenka et al. (2012). . . . .	56
Figura 3.5	Modelo de fissuras rotacionais. Adaptado de Červenka et al. (2012). . . . .	57
Figura 3.6	Modelo de fissuras múltiplas. Adaptado de (DIANA TNO, 2012). . . . .	58
Figura 3.7	Relação de amolecimento proposta por Hordijk (1991), DIANA TNO (2012). . . . .	58
Figura 3.8	Valores de energia de fratura segundo distintas leis empíricas. . . . .	60
Figura 3.9	Fator de retenção ao cisalhamento segundo diferentes formulações. . . . .	62
Figura 3.10	Curva proposta por Thorenfeldt et al. (1987). . . . .	64
Figura 3.11	Curva parabólica proposta por Feenstra (1993). . . . .	65
Figura 3.12	Influência do confinamento lateral na curva tensão-deformação à compressão do concreto. . . . .	67

Figura 3.13 Fator de redução devido à fissuração lateral proposto por Vecchio e Collins (1993). . . . .	67
Figura 3.14 Modelo do aço para armaduras a) modelo elástico-plástico com endurecimento linear b) modelo elastico-plástico perfeito. . . . .	68
Figura 3.15 Modelos de representação da armadura em elemento bidimensional a) discreta, b) distribuída e c) incorporada. . . . .	69
Figura 3.16 Modelo de aderência ( <i>bond-slip</i> ) proposto por Dörr (1980). . . . .	72
Figura 3.17 Newton-Raphson regular. . . . .	74
Figura 3.18 Newton-Raphson Modificado. . . . .	74
Figura 3.19 Secante (Quasi-Newton). . . . .	75
Figura 3.20 Curva de carga <i>versus</i> deslocamento. Adaptado de Kim (2014). . . . .	75
Figura 3.21 Método de <i>line-search</i> . Adaptado de Rust (2016). . . . .	77
Figura 3.22 Comparação do panorama de fissuração numérico <i>versus</i> experimental obtido por Ožbolt et al. (2000). . . . .	78
Figura 3.23 Panorama de fissuração ao longo da espessura da laje representado através das deformações totais principais, comparação experimental e numérica. Shu et al. (2017). . . . .	80
Figura 3.24 Modelagem de vigas protendidas realizada por Vecchio et al. (2006). . . . .	81
Figura 3.25 Metodologia para a simulação de viga protendido utilizado o elemento <i>springa</i> do programa <i>Abaqus</i> . Adaptado de Huang et al. (2010). . . . .	82
Figura 3.26 Simulação de ligação laje pilar protendida com cabo não aderente. Huang et al. (2010). . . . .	82
Figura 4.1 Propriedades geométricas da viga S1 a) comprimento do vão b) traçado do cabo c) seção transversal e armadura longitudinal. . . . .	85
Figura 4.2 Malha de elementos finitos utilizada para a viga S1 de Gauvreau (1992) a) Discretização, tipos de elementos e condições de contorno b) Discretização das armaduras passiva e ativa. . . . .	87
Figura 4.3 Aplicação de carregamentos e conexões de nó mestre-escravo utilizados nas duas etapas para a viga S1. . . . .	89

Figura 4.4	Resultados obtidos após a primeira etapa de carregamento no modelo da viga S1. . . . .	90
Figura 4.5	Comparação dos resultados numérico e experimental, curva a) carga <i>versus</i> deslocamento (medido no meio do vão) b) Força no cabo <i>versus</i> deslocamento. . . . .	91
Figura 4.6	Evolução do panorama de fissuração obtido numericamente. . . . .	91
Figura 4.7	Panorama de fissuração da viga S1 na ruptura, Gauvreau (1992). . . . .	92
Figura 4.8	Contorno de tensões principais $\sigma_3$ (MPa). . . . .	92
Figura 4.9	Propriedades geométricas e detalhamento da viga B8. . . . .	93
Figura 4.10	Propriedades geométricas e detalhamento da viga B8. . . . .	94
Figura 4.11	Comparação entre as curvas de carga <i>versus</i> deslocamento obtidas numérica e experimentalmente. . . . .	94
Figura 4.12	Panorama de fissuração obtida na análise numérica. . . . .	95
Figura 4.13	Panorama de fissuração obtida no ensaio experimental, Hussien et al. (2012). . . . .	95
Figura 4.14	Contorno de tensões principais $\sigma_3$ no último passo de carga convergido. . . . .	95
Figura 4.15	Esquema da primeira série ensaiada por Ramos (2003). . . . .	96
Figura 4.16	Malha de elementos finitos típica e condições de contorno utilizada nos modelos da laje AR2. . . . .	97
Figura 4.17	Nomenclatura usada na Tabela 4.8 . . . . .	98
Figura 4.18	Comparação das dimensões e distribuição dos elementos utilizados nas malhas a) D e E b) G e H. No caso das malhas D e G eram utilizadas quatro camadas de elementos ao longo da espessura da laje, e para as malhas E e H eram utilizadas 5 camadas de elementos. . . . .	98
Figura 4.19	Alternativas relacionadas com os parâmetros do concreto utilizadas na laje AR2. As alternativas ressaltadas correspondem às usadas no modelo inicial. . . . .	99
Figura 4.20	Esquema do estudo realizado na laje AR2. . . . .	100
Figura 4.21	Comportamento das curvas de carga <i>versus</i> deslocamento obtido no estudo das malhas. . . . .	102
Figura 4.22	Comportamento das curvas de carga <i>versus</i> deslocamento e carga <i>versus</i> deformação obtido no estudo dos parâmetros do concreto. . . . .	104

Figura 4.23 Comportamento das curvas de carga <i>versus</i> deslocamento e número de iterações requeridas por passo de carga para cada um dos métodos de solução. . . . .	105
Figura 4.24 Comportamento das curvas de carga <i>versus</i> deslocamento e número de iterações requeridas por passo de carga para diferentes valores de tolerância da norma de energia. . . . .	105
Figura 4.25 Comparação dos deslocamentos obtidos no transdutores 1 e 2, modelo experimental e numérico. . . . .	106
Figura 4.26 Comportamento das curvas de carga <i>versus</i> deformação nas barras de aço, modelo experimental e numérico. . . . .	107
Figura 4.27 Panorama de fissuração da face superior, submetida à tração, da laje AR2, Ramos (2003). . . . .	108
Figura 4.28 Formação do cone de ruptura na espessura da laje AR2, Ramos (2003). . . . .	108
Figura 4.29 Evolução do panorama de fissuração na superfície superior e na espessura no modelo da laje AR2. . . . .	109
Figura 4.30 Esquema utilizado para o ensaio da laje M1, Melges (2001). . . . .	110
Figura 4.31 Malha de elementos e condições de contorno da laje M1. . . . .	111
Figura 4.32 Comparação dos resultados numérico e experimental da laje M1, curva a) carga <i>versus</i> deslocamento no centro da laje b) Carga <i>versus</i> deformação no ponto de monitoramento E4. . . . .	112
Figura 4.33 Evolução do panorama de fissuração na superfície superior e na espessura no modelo da laje M1. . . . .	113
Figura 4.34 Esquema de ensaio da laje AR10, Ramos (2003). . . . .	114
Figura 4.35 Dimensões (em mm) e aplicação do carregamento na laje AR10, Ramos (2003). . . . .	115
Figura 4.36 Traçado do cabo da laje AR10. . . . .	115
Figura 4.37 Malha de elementos finitos e condições de contorno utilizadas no modelo da laje AR10. . . . .	117
Figura 4.38 Comparação dos deslocamentos obtidos no transdutores 8 e 9, modelo experimental e numérico. . . . .	118
Figura 4.39 Comportamento das curvas de carga <i>versus</i> deformação nas barras de aço, modelo experimental e numérico. . . . .	118

Figura 4.39	Comportamento das curvas de carga <i>versus</i> deformação nas barras de aço, modelo experimental e numérico (continuação).	119
Figura 4.40	Evolução do panorama de fissuração na superfície superior e na espessura no modelo da laje AR10.	120
Figura 4.41	Traçado dos cabos utilizados na laje M4 (dimensões em centímetros), Melges (2001).	122
Figura 4.42	Malha de elementos finitos e condições de contorno da laje M4.	123
Figura 4.43	Comparação da curva de carga <i>versus</i> deslocamento e carga <i>versus</i> deformação do aço nos pontos de monitoramento E2 e E6.	124
Figura 4.44	Evolução do panorama de fissuração na superfície superior e na espessura no modelo da laje M4.	126
Figura 5.1	Idealização da região de momentos negativos para uma laje lisa e dimensões da laje modelada.	128
Figura 5.2	Configurações da distribuição em planta dos cabos e tensões de compressão aplicadas nas séries B, C e D.	129
Figura 5.3	Localização dos pontos de monitoramento no concreto, na armadura passiva e ativa.	130
Figura 5.4	Detalhamento das armaduras longitudinais da laje proposta.	132
Figura 5.5	Detalhamento das armaduras de fretagem utilizada na configuração 5 e corte da laje.	132
Figura 5.6	Distribuição dos cabos em planta e tensões de compressão aplicadas, em um quarto de laje, para cada uma das configurações modeladas.	133
Figura 5.7	Traçado dos cabos de protensão para cada uma das séries.	134
Figura 5.8	Localização dos pontos de monitoramento no concreto, na armadura passiva e ativa.	135
Figura 5.9	Localização dos pontos de medição de deslocamento na superfície superior da laje.	136
Figura 5.10	Carregamento e condições de contorno aplicadas em cada uma das etapas da análise numérica.	137

Figura 5.11 Curva carga <i>versus</i> deslocamento e valores de carga última obtidos na série A. . . . .	138
Figura 5.12 Curva de carga <i>versus</i> deformação do concreto e valores máximos de deformação na face comprimida. . . . .	139
Figura 5.13 Curva de carga <i>versus</i> tensão do aço da armadura passiva superior e valores máximos. . . . .	140
Figura 5.14 Curvas cargas <i>versus</i> deslocamento da configuração 1 e 3, para concreto de 35 MPa em cada uma das séries e comparação com a laje de referência. . . .	141
Figura 5.15 Curvas de carga <i>versus</i> deformação do concreto do modelo <b>B-5-50</b> . . . .	142
Figura 5.16 Curvas de carga <i>versus</i> tensão do aço na armadura passiva para a configuração 2 da série C, para as três resistências do concreto estudadas. . . . .	143
Figura 5.17 Curvas de carga <i>versus</i> forças nos cabos de protensão dos modelos a) <b>D-2-50</b> e b) <b>D-5-50</b> nas duas direções. . . . .	144
Figura 5.18 Comparação de cargas últimas para cada configuração. . . . .	146
Figura 5.19 Comparação das deformações máximas obtidas no concreto para cada configuração na direção <i>y</i> . . . . .	147
Figura 5.20 Comparação das deformações máximas obtidas no concreto para cada configuração na direção <i>x</i> . . . . .	148
Figura 5.21 Comparação das tensões máximas obtidas na armadura para cada configuração na direção <i>y</i> . . . . .	149
Figura 5.22 Comparação das tensões máximas obtidas na armadura para cada configuração na direção <i>x</i> . . . . .	150
Figura 5.23 Comparação das forças máximas obtidas nos cabos de protensão para cada configuração na direção <i>y</i> . . . . .	151
Figura 5.24 Comparação das forças máximas obtidas nos cabos de protensão para cada configuração na direção <i>x</i> . . . . .	152
Figura 5.25 Esquema de fissuração de laje com ruptura por punção. . . . .	152
Figura 5.26 Evolução do panorama de fissuração na superfície superior e na espessura da laje <b>A-35</b> . . . . .	155
Figura 5.27 Evolução do panorama de fissuração na superfície superior e na espessura da laje <b>B-2-25</b> . . . . .	156

Figura 5.28 Evolução do panorama de fissuração na superfície superior e na espessura da laje <b>C-4-25</b> . . . . .	157
Figura 5.29 Evolução do panorama de fissuração na superfície superior e na espessura da laje <b>D-5-50</b> . . . . .	158
Figura 5.30 Comparação entre os resultados numéricos e as normas, série A. . . . .	162
Figura 5.31 Representação esquemática dos gráficos utilizados para comparar os resultados numéricos com as normas . . . . .	164
Figura 5.32 Tendência dos resultados e comparação com a previsão do ACI-318-14, EC 2 (2004) e a NBR-6118:2014 e <i>fib</i> Model Code 2010, série B. . . . .	166
Figura 5.33 Comparação entre os resultados numéricos e as normas, série B. . . . .	167
Figura 5.34 Tendência dos resultados e comparação com a previsão do ACI-318(2014), EC 2(2004) e a NBR-6118:2014 e <i>fib</i> Model Code 2010, série C. . . . .	169
Figura 5.35 Comparação entre os resultados numéricos e as normas, série C. . . . .	170
Figura 5.36 Tendência dos resultados e comparação com a previsão do ACI-318(2014), EC 2 (2004) e a NBR-6118:2014 e <i>fib</i> Model Code 2010, série D. . . . .	172
Figura 5.37 Comparação entre os resultados numéricos e as normas, série D. . . . .	173
Figura 5.38 Representação esquemática da fissura crítica na espessura da laje. (CLÉMENT et al., 2014). . . . .	174
Figura 5.39 Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento ( <i>Critical Shear Crack Theory</i> , CSCT): (a) cálculo da resistência à punção (b) comparação do critério de ruptura com ensaios experimentais (CLÉMENT et al., 2014). . . . .	175
Figura 5.40 Cálculo da rotação da laje no modelo numérico. . . . .	176
Figura 5.41 Cálculo da rotação da laje no modelo numérico. . . . .	176
Figura 5.42 Comparação entre os resultados numéricos e a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (CSCT). . . . .	177
Figura 5.43 Comparação das curvas de carga <i>versus</i> rotação obtidas numericamente e as curvas de ruptura previstas pela Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (CSCT). . . . .	178
Figura B.1 Resultados Série B, configuração 1. . . . .	193
Figura B.2 Resultados Série B, configuração 2. . . . .	194

Figura B.3	Resultados Série B, configuração 3. . . . .	195
Figura B.4	Resultados Série B, configuração 4. . . . .	196
Figura B.5	Resultados Série B, configuração 5. . . . .	197
Figura B.6	Resultados Série C, configuração 1. . . . .	198
Figura B.7	Resultados Série C, configuração 2. . . . .	199
Figura B.8	Resultados Série C, configuração 3. . . . .	200
Figura B.9	Resultados Série C, configuração 4. . . . .	201
Figura B.10	Resultados Série C, configuração 5. . . . .	202
Figura B.11	Resultados Série D, configuração 1. . . . .	203
Figura B.12	Resultados Série D, configuração 2. . . . .	204
Figura B.13	Resultados Série D, configuração 3. . . . .	205
Figura B.14	Resultados Série D, configuração 4. . . . .	206
Figura B.15	Resultados Série D, configuração 5. . . . .	207

## Lista de Tabelas

3.1	Valores $G_{f0}$ em função do tamanho máximo do agregado. . . . .	59
4.1	Resumo dos ensaios experimentais modelados . . . . .	84
4.2	Propriedades mecânicas dos materiais utilizados na viga S1, Gauvreau (1992). . .	86
4.3	Propriedades do concreto utilizada na modelagem da viga S1. . . . .	88
4.4	Propriedades mecânicas dos materiais utilizados na viga B8, Hussien et al. (2012). . . . . .	93
4.5	Propriedades mecânicas dos materiais utilizados na laje AR2, Ramos(2003). . .	96
4.6	Propriedades do aço da armadura . . . . .	96
4.7	Propriedades do concreto . . . . .	96
4.8	Configurações de malhas testadas na laje AR2. . . . .	98
4.9	Alternativas relacionadas com os métodos iterativos utilizadas na laje AR2. . . .	99
4.10	Propriedades do concreto assumidas inicialmente para o modelo da laje AR2. . .	101
4.11	Comparação do resultado obtido para cada uma das malhas testadas. . . . .	103
4.12	Propriedades mecânica dos materiais utilizados na laje M1. . . . .	110
4.13	Altura útil da armadura passiva ( $d_s$ ), desvio vertical do cabo ( $e$ ) e altura útil meia dos cabos ( $d_p$ ) para cada uma das direções norte-sul e leste-este. . . . .	116
4.14	Propriedades mecânicas dos materiais da laje AR10 . . . . .	116
4.15	Propriedades mecânicas dos materiais da laje M4 . . . . .	121
4.16	Força nas cordoalhas dispostas na direção $y$ , Melges (2001). . . . .	122
4.17	Força nas cordoalhas dispostas na direção $x$ , Melges (2001). . . . .	122
4.18	Comparação da força do cabo no momento na ruptura na direção $y$ e $x$ . . . . .	125

5.1	Propriedades do concreto utilizadas nas análises numéricas. . . . .	131
5.2	Tensão de compressão aplicada em cada uma das configurações das lajes protendidas. . . . .	134
5.3	Resultados de carga última obtidos nas série B, C, D e comparação com os resultados da série A. . . . .	145
5.4	Comparação entre os resultados numéricos e as normas, série A. . . . .	162
5.5	Comparação entre os resultados numéricos e as normas, série B. . . . .	163
5.6	Comparação entre os resultados numéricos e as normas, série C. . . . .	168
5.7	Comparação entre os resultados numéricos e as normas, série D. . . . .	171
5.8	Resumo dos parâmetros estadísticos obtidos nos 48 modelos na comparação com as previsões das normas. . . . .	173

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>22</b>
1.1	Objetivos . . . . .	23
1.1.1	Objetivos Específicos . . . . .	23
1.2	Estrutura da dissertação . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Revisão bibliográfica</b>	<b>26</b>
2.1	Considerações gerais . . . . .	26
2.2	Punção em lajes lisas . . . . .	26
2.2.1	Fatores que influenciam a resistência à punção . . . . .	27
2.2.2	Mecanismo de ruptura à punção . . . . .	28
2.3	Pesquisas experimentais . . . . .	32
2.4	Recomendações das normas para o cálculo da resistência última à punção . . . . .	40
2.4.1	ACI 318-14 (American Concrete Institute) . . . . .	41
2.4.2	EN 1992-1-1, Eurocode 2 (2004) . . . . .	43
2.4.3	NBR-6118:2014 . . . . .	45
2.4.4	<i>fib</i> Model Code 2010 . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Modelagem numérica não linear do comportamento do concreto armado e protendido</b>	<b>51</b>
3.1	Considerações gerais . . . . .	51
3.2	Modelo constitutivo do concreto . . . . .	53
3.2.1	Modelo de fissuração distribuída ( <i>Smearred crack Model</i> ) . . . . .	53
3.2.2	Modelo de Decomposição das Deformações (Decomposed Strain Model) . . . . .	57
3.2.3	Comportamento do concreto à tração . . . . .	58
3.2.4	Comportamento do concreto ao cisalhamento . . . . .	61
3.2.5	Comportamento do concreto à compressão . . . . .	63
3.3	Modelo constitutivo do aço . . . . .	68

3.3.1	Representação das armaduras . . . . .	68
3.3.2	Modelagem da aderência entre o aço e o concreto . . . . .	70
3.4	Técnicas de solução e critérios de convergência numérica . . . . .	72
3.4.1	Métodos iterativos para análise não linear . . . . .	73
3.4.2	Controle de força <i>versus</i> deslocamento . . . . .	75
3.4.3	Critérios de convergência . . . . .	76
3.4.4	Método <i>line-search</i> . . . . .	76
3.5	Pesquisas numéricas . . . . .	77
3.5.1	Pesquisas relacionadas à punção em lajes de concreto armado . . . . .	77
3.5.2	Pesquisas relacionadas à modelagem de estruturas protendidas . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Simulação numérica de ensaios experimentais</b>	<b>83</b>
4.1	Considerações gerais . . . . .	83
4.2	Vigas de concreto protendido com ruptura por flexão . . . . .	84
4.2.1	Viga S1 (Gauvreau, 1992) . . . . .	84
4.2.2	Viga B8 (Hussien et al., 2012) . . . . .	92
4.3	Lajes de concreto armado com ruptura por punção . . . . .	95
4.3.1	Laje AR2 (Ramos, 2003) . . . . .	95
4.3.2	Laje M1 (Melges, 2001) . . . . .	110
4.4	Lajes de concreto protendido com ruptura por punção . . . . .	114
4.4.1	Laje AR10 (Ramos, 2003) . . . . .	114
4.4.2	Laje M4 (Melges, 2001) . . . . .	121
<b>5</b>	<b>Análise paramétrica</b>	<b>127</b>
5.1	Considerações gerais . . . . .	127
5.2	Geometria dos modelos . . . . .	127
5.3	Descrição da análise paramétrica proposta . . . . .	128
5.4	Discretização dos modelos . . . . .	129
5.5	Modelagem dos materiais e disposição das armaduras . . . . .	130
5.5.1	Concreto . . . . .	130
5.5.2	Armadura passiva . . . . .	131
5.5.3	Armadura ativa . . . . .	132
5.6	Pontos de monitoramento . . . . .	135
5.7	Aplicação de carregamentos e condições de apoio . . . . .	136

5.8	Apresentação e análise de resultados . . . . .	138
5.8.1	Resultados obtidos nas lajes sem protensão . . . . .	138
5.8.2	Resultados obtidos nas lajes com protensão . . . . .	141
5.8.3	Influência da protensão na resistência à punção . . . . .	144
5.8.4	Panorama de fissuração . . . . .	152
5.9	Comparação com as normas . . . . .	159
5.9.1	Considerações gerais . . . . .	159
5.9.2	Comparação dos resultados de carga de ruptura em cada série . . . . .	161
5.9.3	Análise geral da comparação com as normas . . . . .	173
5.10	Comparação dos resultados com CSCT . . . . .	174
<b>6</b>	<b>Conclusões e recomendações para trabalhos futuros</b>	<b>179</b>
6.1	Considerações finais . . . . .	179
6.2	Conclusões . . . . .	180
6.3	Recomendações para trabalhos futuros . . . . .	181
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>182</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>187</b>
<b>A</b>	<b>Banco de dados de ensaios de lajes protendidas com cabos não aderentes</b>	<b>188</b>
<b>B</b>	<b>Gráficos da análise paramétrica das séries com protensão (B,C,D)</b>	<b>192</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O sistema estrutural denominado lajes lisas é constituído por lajes de concreto armado ou protendido que são apoiadas diretamente sobre pilares. Embora pareça simples, esse sistema apresenta um comportamento estrutural complexo, especialmente nas ligações laje-pilar, onde pode acontecer ruptura à punção devido às altas tensões de cisalhamento.

As lajes lisas têm-se beneficiado pelo uso do concreto protendido devido ao controle da fissuração e das deformações, que são obtidos com esta técnica. Além disso, os efeitos das forças de protensão introduzidas também permitem uma redução da espessura da laje o que leva a uma estrutura mais leve, em comparação com uma estrutura de concreto armado.

A influência da protensão na resistência à punção tem sido objeto de estudo de numerosos trabalhos experimentais. As pesquisas sugerem que o uso de cabos protendidos ocasiona efeitos favoráveis, principalmente devido à compressão no plano da laje, à componente vertical dos cabos inclinados e os momentos fletores gerados pela protensão (MELGES, 2001; RAMOS, 2003; CLÉMENT et al., 2014). Porém não existe um consenso geral de um modelo físico adequado que permita levar em consideração essa contribuição. Isso é demonstrado através das diferentes abordagens apresentadas nas principais normas e recomendações, sendo a maioria delas baseadas em equações empíricas.

Nas últimas décadas, paralelamente às pesquisas experimentais, foram desenvolvidas também análises numéricas utilizando elementos finitos. Segundo Afonso (2010), em particular para o estudo da punção, esse tipo de análise é de grande utilidade, dado que a realização de ensaios experimentais em lajes tem muitas vezes um custo elevado e dificuldade de execução.

Nas análises numéricas é considerada a não linearidade física dos materiais, possibilitando estudar a propagação das fissuras no concreto e o escoamento das barras de aço. Diferentemente dos ensaios experimentais, onde só alguns pontos podem ser instrumentados, as análises numéricas permitem explorar o comportamento da estrutura em sua totalidade. Isso tem sido de grande importância para compreender os diferentes parâmetros que influenciam a

punção, de uma forma rápida e econômica.

Embora existam diversas pesquisas relacionadas com a modelagem da punção em lajes lisas, o número de trabalhos que se referem à simulações de lajes protendidas submetidas a esse tipo de ruptura são escassos. Isso se deve à dificuldade de representar corretamente os efeitos dos cabos de protensão no modelo numérico, assim como também às limitações de alguns programas comerciais. Tendo em consideração o exposto, torna-se necessária fazer um revisão das distintas alternativas para a modelagem numérica de cabos não aderentes, que permita estudar a ruptura por punção em lajes lisas.

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral desta pesquisa é estudar o comportamento de lajes lisas protendidas com cabos não aderentes por meio de análises numéricas não lineares. Procura-se analisar os efeitos provocados pela protensão na resistência última à punção.

### 1.1.1 Objetivos Específicos

- Realizar modelos numéricos de ligações laje-pilar no programa DIANA v.9.4.4, utilizando como referência ensaios experimentais disponíveis na literatura para a calibração dos modelos e parâmetros dos materiais.
- Realizar um estudo paramétrico para analisar a influência das variáveis relacionadas com a protensão que intervêm na resistência à punção.
- Comparar os resultados numéricos obtidos com as recomendações da NBR-6118 (2014), ACI 318-14 (2014), Eurocode 2 (2004) e *fib* Model Code (2010) e a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento proposta por Muttoni (2008).

## 1.2 Estrutura da dissertação

A dissertação esta dividida em seis capítulos, incluindo a introdução e as conclusões finais. A seguir é apresentada uma descrição de cada uns dos capítulos.

- **Capítulo 1 Introdução**
- **Capítulo 2 Revisão bibliográfica:** são apresentados os conceitos gerais sobre punção em lajes lisas e dos fatores que influenciam esse tipo de ruptura. É realizada uma revisão

de pesquisas experimentais de lajes com protensão aderente e não aderente submetidas a carregamentos concentrados. São apresentadas também as recomendações das principais normas, nacionais e internacionais, relacionadas ao cálculo da resistência à punção em lajes lisas com protensão.

- **Capítulo 3 Modelagem numérica não linear do comportamento do concreto armado e protendido:** neste capítulo descrevem-se os modelos constitutivos usados para representar numericamente o comportamento do concreto à tração, ao cisalhamento e à compressão. Similarmente é apresentado os modelos constitutivos do aço e das técnicas de representação das armaduras ativas e passivas. É realizada também uma descrição sobre a modelagem da aderência entre o aço e o concreto, usada na simulação do comportamento não aderente dos cabos de protensão. Neste capítulo são ainda apresentadas as técnicas de solução e critérios de convergência numérica oferecidos no programa DIANA (versão 9.4.4). Por fim, é realizada uma revisão das pesquisas relacionadas com a modelagem numérica de lajes de concreto armado com ruptura por punção e vigas com protensão.
- **Capítulo 4 Simulação numérica de ensaios experimentais:** este capítulo descreve a modelagem de estruturas de concreto armado e protendido no programa DIANA tendo como base os modelos constitutivos apresentados no capítulo 3. Foram escolhidos seis ensaios experimentais encontrados na literatura: duas vigas protendidas, duas lajes de concreto armado e finalmente duas lajes de concreto protendido. A partir dos resultados dos modelos numéricos foram comparadas as curvas de carga *versus* deslocamento, e as deformações e tensões nas armaduras e no concreto.
- **Capítulo 5 Análise paramétrica:** neste capítulo apresenta-se uma descrição da análise paramétrica proposta, a qual teve como objetivo estudar influência da protensão na resistência à punção através de simulações numéricas. As variáveis analisadas foram a resistência à compressão do concreto, o traçado dos cabos e a distribuição deles em planta. São apresentados e discutidos o resultados obtidos das análises numéricas e é realizada uma comparação com as previsões das normas e a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento proposta por Muttoni (2008).
- **Capítulo 6 Conclusões e recomendações para trabalhos futuros:** finalmente são apresentadas as considerações e conclusões finais do trabalho. São também realizadas algumas recomendações para a realização de trabalhos futuros.

São ainda apresentados dois anexos. No Anexo A corresponde o banco de dados dos ensaios experimentais de lajes protendidas não aderentes descritos no Capítulo 2. No Anexo B

mostra todos os gráficos obtidos da análise paramétrica descrito no Capítulo 5. Os gráficos correspondem as curvas de cargas *versus* deslocamento, deformação do concreto, tensões nas armaduras passivas e forças nos cabos de protensão.

## Capítulo 2

### Revisão bibliográfica

#### 2.1 Considerações gerais

Durante as últimas décadas diversos trabalhos experimentais, analíticos e numéricos têm-se desenvolvido para estudar a ruptura por punção em lajes lisas. Neste capítulo são apresentados a definição geral da punção e os parâmetros que influenciam esse fenômeno. Apresenta-se também uma revisão de ensaios experimentais de lajes com protensão aderente e não aderente, com o objetivo de mostrar o estado atual de conhecimento do problema. No final deste capítulo são expostas as recomendações das principais normas relacionadas ao cálculo da resistência à punção em lajes lisas com protensão.

#### 2.2 Punção em lajes lisas

A punção é definida como um tipo de ruína que ocorre pela concentração de forças em áreas reduzidas causando elevadas tensões de cisalhamento. No caso das lajes lisas, esse fenômeno pode acontecer na ligação laje-pilar, como é ilustrado na Figura 2.1. A ruptura é caracterizada pela formação de uma superfície cônica que leva ao colapso da laje antes que seja atingida a carga de resistência à flexão. Existem dois pontos importantes a ser considerados nesse tipo de falha:

- É um mecanismo de ruptura frágil, que acontece praticamente sem prévio aviso. A estrutura não mostra muitos sinais de advertências antes que aconteça a falha.
- A estrutura pode ruir por colapso progressivo. Embora se trate de um mecanismo de ruptura local, a perda de um ponto de apoio aumenta os esforços transmitidos aos apoios vizinhos (RAMOS, 2003). O colapso total de um pavimento pode levar também ao colapso de pavimentos inferiores quando estes não são capazes de resistir à carga de impacto do pavimento superior.

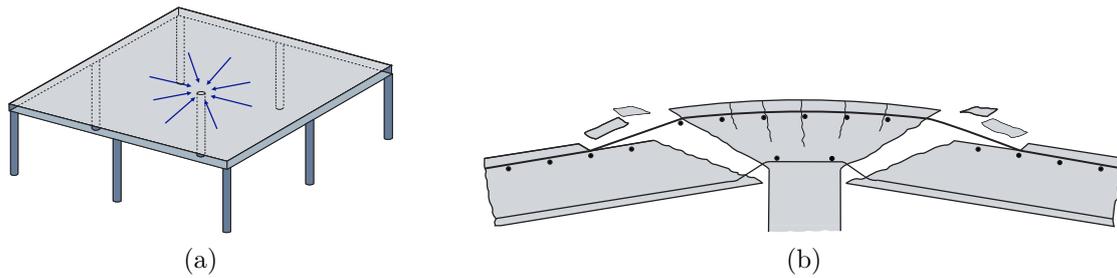


Figura 2.1: a) Concentração de carregamento em lajes lisas b) Ruptura por punção em ligação laje-pilar. Adaptado de Muttoni e Ruiz (2008).

### 2.2.1 Fatores que influenciam a resistência à punção

A punção é um fenômeno complexo devido ao estado triaxial de tensões em que está submetido o concreto, pela concentração de esforços. Nas últimas décadas diversas pesquisas experimentais têm sido realizadas para determinar a importância de alguns parâmetros na resistência a este tipo de ruptura. De modo geral, pode-se dizer que a resistência à punção de uma laje, protendida ou não, depende essencialmente dos seguintes fatores:

- Geometria: área do pilar, espessura da laje e o efeito de escala (*size effect*)
- Localização do pilar (interno, canto, extremidade)
- Aberturas na laje próximas ao pilar
- Resistência à tração do concreto (correlacionada com a resistência à compressão)
- Taxa da armadura à flexão e altura efetiva
- Armadura de cisalhamento para combater à punção

Os fatores geométricos têm influência principalmente na distribuição das tensões na ligação laje-pilar. Uma das soluções mais simples para evitar a ruptura por punção é o aumento da espessura total da laje e das dimensões dos pilares. Outra alternativa, mais eficiente, é o aumento da espessura da laje nas regiões próximas aos pilares através do uso de capitéis. Por outro lado, o efeito de escala (*size effect*) é outro fator geométrico que está relacionado com a dependência das propriedades características do material em relação às dimensões da peça, e que se manifesta no concreto por um aparente aumento da sua resistência à tração quando diminuem as dimensões dos elementos. No caso da punção, esse efeito provoca uma redução específica da capacidade resistente com o aumento da espessura da laje (AFONSO, 2010). Tal parâmetro torna-se de grande importância, já que na maioria dos ensaios experimentais para estudar a punção as lajes têm dimensões reduzidas, devido às diversas dificuldades de se ensaiar modelos em escala real.

A ruptura por cisalhamento de um elemento sem armadura transversal depende diretamente da resistência à tração do concreto e esta encontra-se correlacionada também com a resistência à compressão. Diversos ensaios mostram uma clara influência destes parâmetros na capacidade última à punção. Sacramento et al. (2012) compilaram vários dados experimentais os quais sugerem que a resistência ao puncionamento é proporcional à raiz cúbica da resistência à compressão (Figura 2.2a).

Da mesma forma a porcentagem de armadura longitudinal também modifica o comportamento na ruptura por punção. Os ensaios desenvolvidos por Kinnunen e Nylander (1960) analisaram o comportamento de lajes de concreto armado com diversas taxas de armadura (ver Figura 2.2b). Observou-se que um acréscimo da taxa da armadura permite um aumento da capacidade resistente, mas também reduz a rotação da laje ( $\psi$ ) o que significa um comportamento menos dúctil.

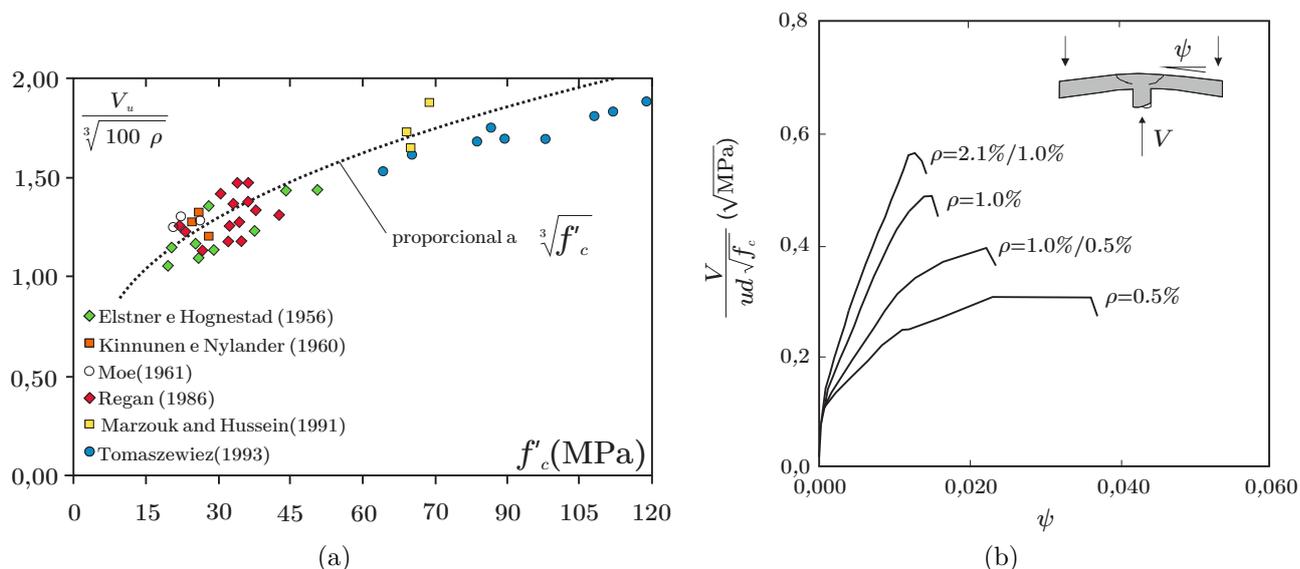


Figura 2.2: a) Influência da resistência de compressão do concreto na capacidade última à punção. Adaptado de Sacramento et al. (2012) b) Influência da taxa de armadura longitudinal na capacidade última à punção. Adaptado de Kinnunen e Nylander (1960).

### 2.2.2 Mecanismo de ruptura à punção

O mecanismo de ruptura à punção em lajes lisas pode ser dividido em quatro fases. Segundo Ramos (2003), essas fases têm sido observadas na maioria dos ensaios documentados, embora a transição entre a fase de resposta à flexão e a fase de resistência ao cisalhamento em alguns casos não seja clara. Na Figura 2.3 são representadas de forma esquemática as fissuras

devido à flexão e o cisalhamento em uma laje. A seguir, apresenta-se uma descrição geral de cada uma das etapas:

- **Fase elástica-linear:** deformação elástica da laje sem a presença de fissuras no concreto.
- **Fase de resistência à flexão:** caracteriza-se pelo aparecimento de fissuras radiais, representadas na Figura 2.3a, localizadas na face superior. Com o aumento da carga surgem também fissuras tangenciais (conhecidas também de circunferenciais) contornando o perímetro do pilar.
- **Fase de resistência ao cisalhamento:** nesta fase surgem mais fissuras tangenciais, que se propagam a longo da espessura da laje como fissuras inclinadas ao redor do pilar (Figura 2.3b). De acordo com Regan e Braestrup (1985) essas fissuras aparecem com um carregamento aproximado entre 50% e 70% da carga última. Quando a abertura dessas fissuras atinge certo limite, se forma o denominado cone de punção, criando uma superfície de ruptura com um ângulo de aproximadamente  $30^\circ$  em relação ao plano da laje. Geralmente a ruptura se produz de forma abrupta.
- **Fase de pós-ruptura:** a laje é dividida em duas partes delimitadas pelas fissuras de cisalhamento e é apenas unida pela armadura longitudinal

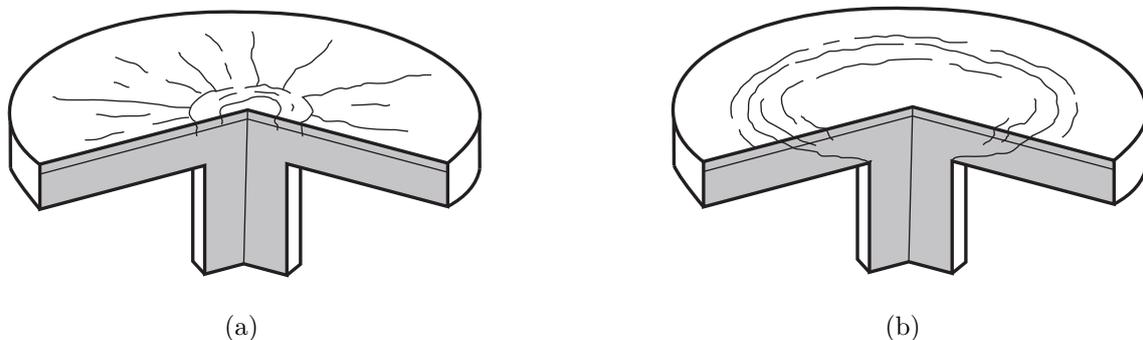


Figura 2.3: Representação esquemática da fissuração de uma laje submetida a carga concentrada a) fissuras radiais, causadas pela flexão b) fissuras tangenciais, causadas pelo cisalhamento. Adaptado de Staller (2000).

A evolução do panorama de fissuração das etapas mencionadas pode ser observado no esquema de uma das lajes de concreto armado ensaiadas por Afonso (2010) na Figura 2.4. A laje tinha dimensões de  $2500 \times 2500 \text{ mm}^2$  e uma espessura de 180 mm, a carga foi aplicada através de uma placa metálica circular de 150 mm de diâmetro.

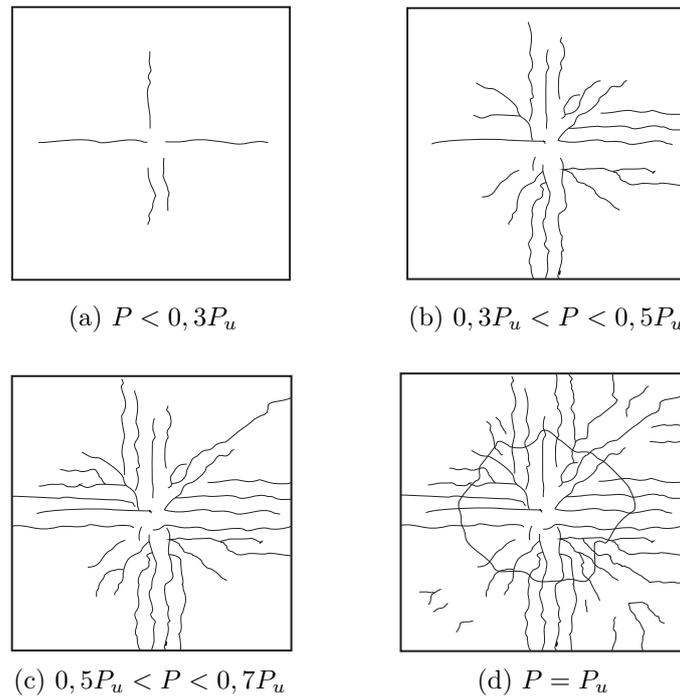


Figura 2.4: Evolução da fissuração para diferentes níveis de carregamento em uma das lajes ensaiadas por Afonso (2010).

Segundo Eder et al. (2010), as etapas do mecanismo de ruptura também podem ser observadas na curva de carga *versus* deslocamento obtida dos ensaios experimentais a punção. Uma representação idealizada dessa curva é ilustrada na Figura 2.5. O primeiro trecho corresponde à resposta elástica da laje, antes da fissuração. O segundo trecho está relacionado com a fase de resistência à flexão da laje, onde aparecem as primeiras fissuras radiais e tangenciais ao redor do pilar. Na próxima etapa, as fissuras continuam sua propagação na superfície e espessura da laje, a curva apresenta um comportamento quase linear, mas com uma inclinação menor do que os dois primeiros trechos. Na última etapa, a carga máxima é atingida e acontece a ruptura por punção.

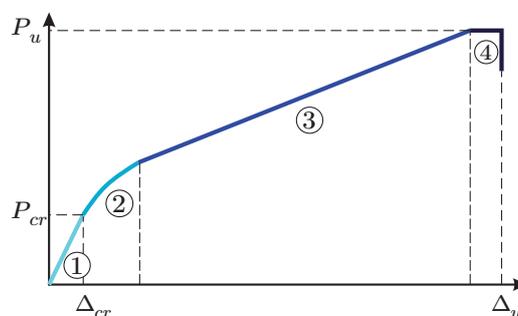


Figura 2.5: Representação esquemática da curva carga *versus* deslocamento de uma laje com ruptura por punção. Adaptado de Eder et al. (2010).

Em relação às deformações radiais de compressão no concreto, acontece um fenômeno importante: à medida que se aumenta a carga aplicada, surgem deformações de compressão na direção radial na proximidade do pilar. Porém, depois de atingir certo nível de carregamento, segundo Guandalini (2006) entre 80% - 90% da carga última, a deformação de compressão começa a diminuir (ver leituras dos extensômetros S3 e S4 na Figura 2.6). Em alguns casos, o concreto pode inclusive apresentar deformações de tração nessa área antes da ruptura por punção acontecer.

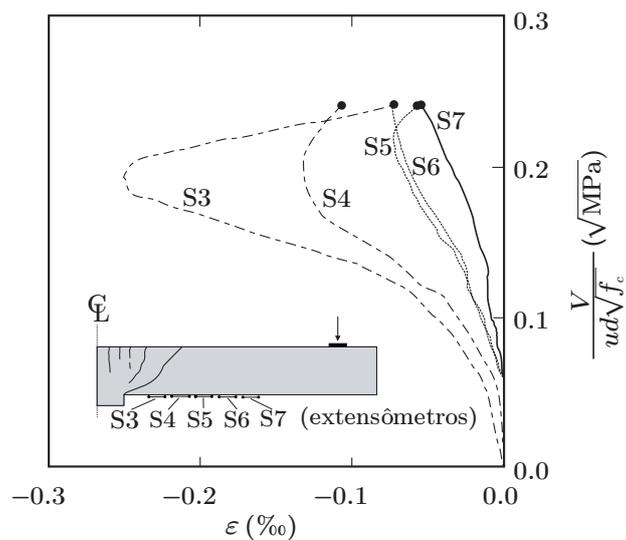


Figura 2.6: Curvas de carga *versus* deformação do concreto na direção radial da laje PG-3 ensaiada por Guandalini (2006).

De acordo com Muttoni (2008), esse fenômeno ocorre como resultado da redistribuição de tensões, necessária para manter o equilíbrio da laje durante o avanço da denominada fissura crítica de cisalhamento, que forma o cone de punção. A Figura 2.7 representa a modificação da biela comprimida que acontece na laje no momento da ruptura.

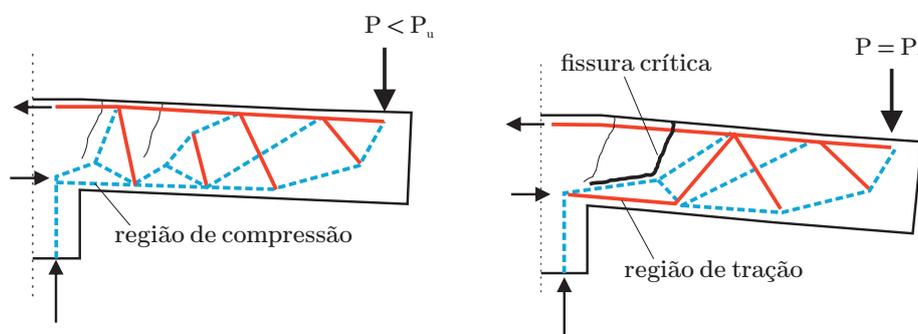


Figura 2.7: Modificação da biela a compressão devido à redistribuição das tensões no momento da ruptura à punção. Adaptado de Guandalini (2006).

## 2.3 Pesquisas experimentais

Ensaio experimentais de lajes protendidas têm mostrado a influência da protensão na resistência à punção. Nesta seção são analisados os efeitos da protensão no comportamento das lajes e é apresentada, de forma resumida, uma revisão das pesquisas experimentais desenvolvidas no Brasil e em outros países relacionadas com este assunto. No Apêndice A, são mostrados as dimensões das lajes, parâmetros e os resultados de carga última dos ensaios de lajes protendidas, com cabos não aderentes apresentadas nesta seção.

De forma geral, as pesquisas têm mostrado um efeito favorável da protensão na resistência à punção. A Figura 2.8 mostra as forças internas causadas pela protensão na laje, as quais produzem um aumento na resistência à punção. A força de compressão no plano gera um aumento na capacidade ao cisalhamento da laje devido a uma maior contribuição do concreto. A tensão de compressão também favorece o atrito entre as superfícies separadas pela fissuração, aumentando assim a transmissão de esforços cortantes através do engrenamento dos agregados. O traçado curvo do cabo cria momentos fletores que se opõem aos carregamentos externos. Conforme ilustrado na Figura 2.8, a componente vertical das forças nos cabos que cruzam a superfície de ruptura reduzem o esforço solicitante resistido pelo concreto. Os efeitos mencionados retardam a fissuração, produzindo uma reposta mais rígida da laje.

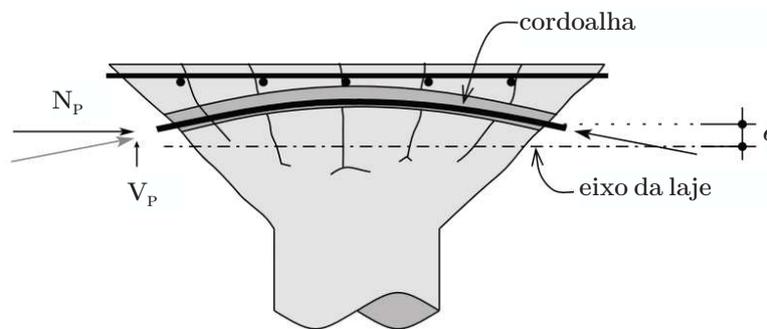


Figura 2.8: Efeitos da protensão na ligação laje-pilar: forças no plano ( $N_p$ ), excentricidade do cabo ( $e$ ) e a componente vertical ( $V_p$ ). Adaptado de Clément et al. (2014).

As pesquisas experimentais relacionadas com o estudo da punção têm se desenvolvido principalmente através de modelos isolados de ligações laje-pilar que simulam a área de momentos negativos, como se mostra na Figura 2.9. A região da ligação laje-pilar é limitada pelas linhas de inflexão da curvatura onde os momentos fletores são nulos. Teoricamente, para uma laje com carregamento uniforme, essas linhas situam-se sobre uma circunferência ao redor do pilar, com um raio aproximadamente igual a  $0,22 \cdot l$ , onde  $l$  é o vão dos painéis quadrados adja-

centes ao pilar. Sob essa hipótese são dimensionados os modelos de ligação laje-pilar utilizados nos ensaios à punção.

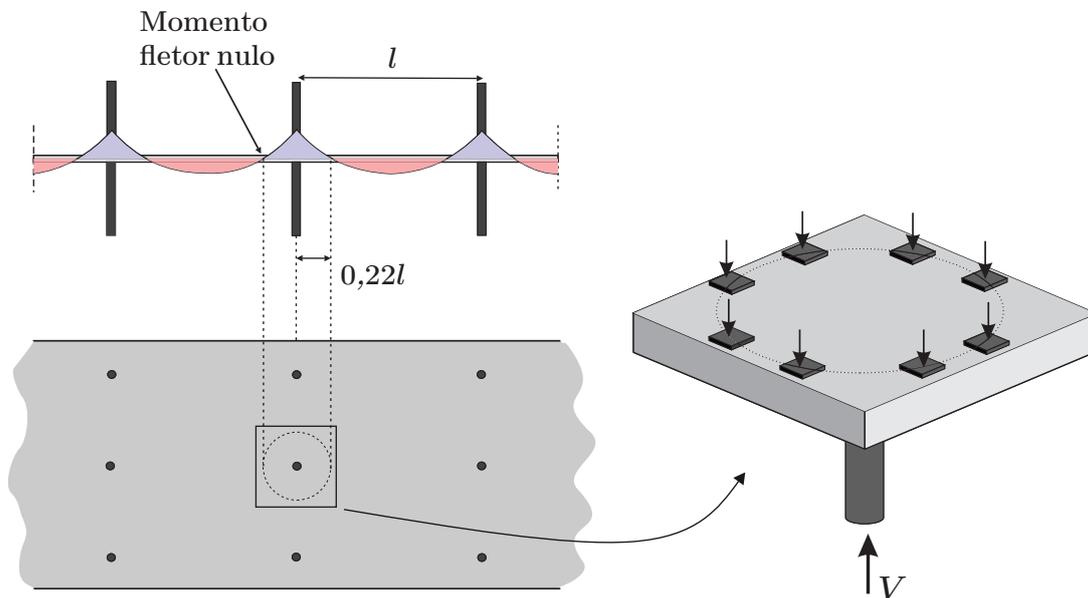


Figura 2.9: Esquema de ensaio de lajes para estudar punção.

As primeiras pesquisas relacionadas com punção em lajes protendidas foram desenvolvidas nas décadas dos 60 e 70. Os primeiros resultados experimentais já mostravam o aumento na resistência à punção devido à aplicação de protensão nas lajes. Dentre esses trabalhos, destacam-se os ensaios realizados por Grow e Vanderbilt (1967), Smith et al. (1974) e Nylander et al. (1977) e Pralong et al. (1979).

Posteriormente, na década de 80, Shehata (1982) e Regan (1983) realizaram várias séries de ensaios em lajes com protensão aderente e não aderente. Entre as variáveis estudadas encontrava-se a distribuição das armaduras passivas e dos cabos em planta, assim como também a força de protensão aplicada nos modelos. Nos estudos foram ensaiadas lajes quadradas e retangulares que pretendiam representar a região próxima ao pilar de uma laje de ponte. Conforme era esperado, as lajes com cabos distribuídos perto do pilar tiveram maior resistência à punção em comparação com aquelas onde os cabos estavam distribuídos uniformemente na largura total do modelo. Os resultados dos ensaios, além de confirmar o efeito positivo da protensão na punção, serviram como base para o modelo analítico proposto por Shehata em 1982, para o cálculo de carga última de lajes protendidas. Esse método baseava-se no princípio de que a resistência à punção de uma laje protendida podia ser calculada como a de uma laje de concreto armado com taxa de armadura equivalente, desde que as forças de tração nas armaduras de flexão e a altura da linha neutra fossem iguais em ambas lajes.

Diferentemente de Shehata, Regan desenvolveu em 1985 um método alternativo para o cálculo da resistência de lajes protendidas. Este método era baseado no fenômeno de descompressão que acontece na laje quando as tensões da protensão na seção transversal são anuladas pelas tensões geradas pelo carregamento externo (ver Figura 2.10).

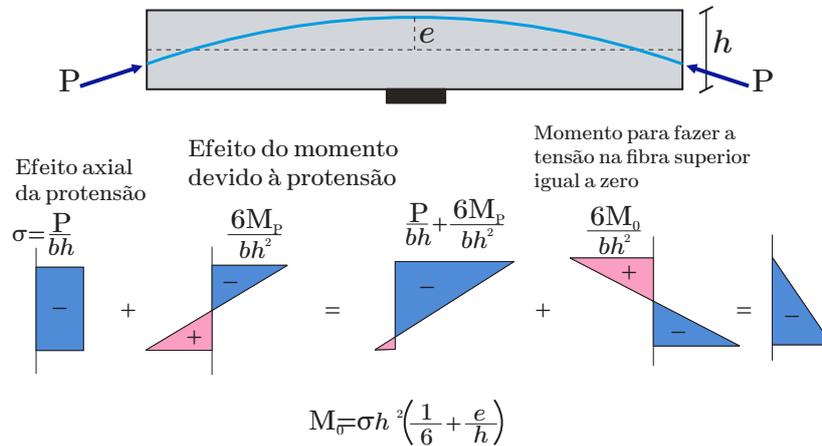


Figura 2.10: Mecanismo da descompressão em laje protendida. Adaptado de Carvalho (2005).

O método proposto tem como princípio de que a resistência à punção de uma laje protendida pode ser calculada como a soma da resistência dessa mesma laje, sem a protensão, mais a carga necessária para gerar um estado de descompressão (REGAN, 1985):

$$V_{up} = V_{ur} + V_0 \tag{2.3.1}$$

onde:

$V_{up}$  é a força resistente à punção da laje protendida,

$V_{ur}$  é a força resistente à punção da laje com a mesma geometria, mas sem armadura de protensão,

$V_0$  é a carga necessária para gerar um estado de descompressão na laje, calculado em função do momento de descompressão por unidade de comprimento da laje ( $m_0$ ) como:

$$V_0 = 2\pi m_0 \text{ (lajes circulares)}$$

$$V_0 = \frac{4b}{l} m_0 \text{ (lajes retangulares),}$$

sendo  $b$  a largura onde estão distribuídos os cabos e  $l$  a largura total da laje.

O efeito da distribuição dos cabos também foi estudado por Hassanzadeh e Sundquist (2000). No seu programa experimental foram ensaiadas sete lajes protendidas com cabos não aderentes,

utilizando duas configurações, conforme mostrado na Figura 2.11. Adicionalmente, foi ensaiada uma laje de concreto armado (usada como referência) e outra reforçada com fibras de aço para estudar a possibilidade de substituição da armadura passiva por este tipo de reforço. De acordo com os resultados, as lajes com cabos mais afastados do pilar (configuração b) tiveram um decréscimo na carga última em relação à aquelas da configuração a, porém com uma capacidade de resistência maior do que a laje de referência. Os autores recomendaram a realização de mais ensaios para estudar a contribuição dos cabos localizados fora da região de ruptura por punção. Em relação ao reforço com fibras, Hassanzadeh e Sundquist (2000) concluíram que as armaduras longitudinais não podem ser substituídas completamente por esse tipo de reforço devido à baixa resistência à punção obtida nos ensaios.

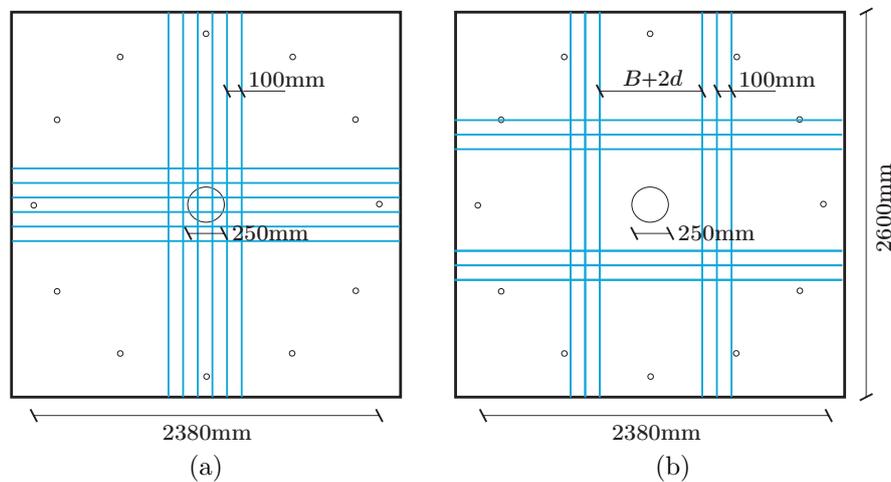


Figura 2.11: Distribuição de cabos utilizadas nos ensaios de Hassanzadeh e Sundquist (2000).

As duas séries de ensaios do programa experimental desenvolvido por Ramos (2003) tinham como objetivo estudar, separadamente, os efeitos causados pela protensão. Na primeira estudou-se o efeito da compressão no plano da laje, em uma e duas direções. A força nos modelos era aplicada através de cabos de protensão externa, ancorados em perfis metálicos que transmitiam a compressão para as bordas da laje (Figura 2.12a). Nessa série foram ensaiadas seis lajes, incluindo uma laje de referência sem protensão. Ramos (2003) concluiu que a existência de compressão no plano da laje levou a menores deslocamentos verticais dos modelos e a um decréscimo dos valores de deformação da armadura longitudinal superior.

Na segunda série avaliou-se o efeito da força de desvio provocada pela inclinação dos cabos. Para eliminar a força de compressão, foram utilizados cabos com traçado semi-parabólico ancorados em pórticos, conforme o ilustrado na Figura 2.12b. Os ensaios foram divididos em duas subséries, na primeira os cabos passavam sobre o pilar variando a força de protensão de

cada modelo. Na segunda foi variada a distância dos cabos ao pilar, mantendo constante a forças nos modelos.



(a) Esquema do ensaio da série 1



(b) Pórtico de ancoragem utilizado na série 2

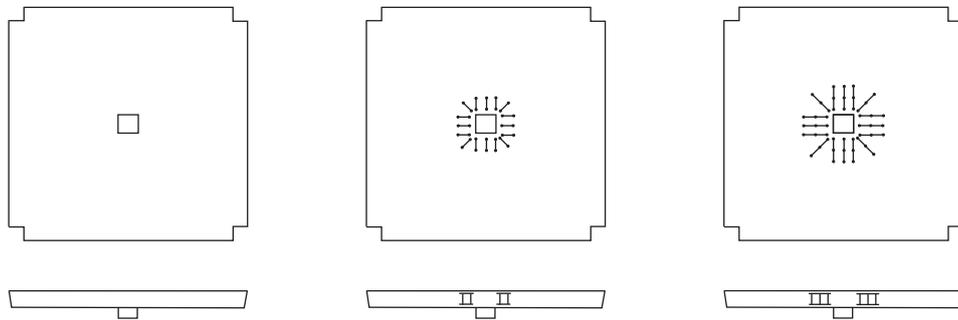
Figura 2.12: Ensaio realizados por Ramos (2003).

Ramos (2003) observou que o aumento da força de desvio sobre o pilar levou ao incremento do valor da carga de ruptura. Por outro lado, o afastamento em planta dos cabos, conduziu a uma menor eficiência destes, implicando um decréscimo da carga resistida pela laje. Finalmente, o autor concluiu que a contribuição para da compressão no plano da laje à resistência à punção foi pequena em comparação à contribuição gerada pela força de desvio, apesar de que dos dois efeitos terem retardado a fissuração do concreto.

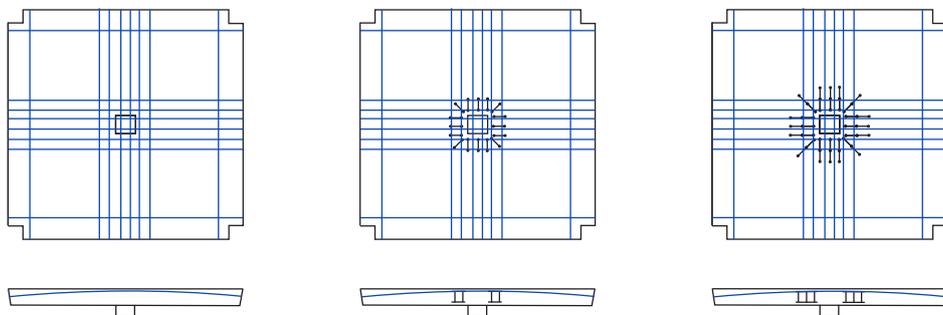
No Brasil, durante os últimos anos, várias pesquisas de lajes de concreto armado e protendido têm sido realizadas para estudar o efeito da punção. Dentre estes trabalhos são de interesse para esta dissertação os desenvolvidos por Melges (2001), Corrêa (2001), Silva (2005), Carvalho (2005) e Barbán (2008).

No programa experimental realizado por Melges (2001), foram ensaiadas seis lajes, das quais três eram de concreto armado e as outras três de concreto protendido com cabos não

aderentes. Dentre os modelos, quatro tinham duas armadura de cisalhamento como pode ser visto na Figura 2.13.



(a) Modelos de concreto armado: M1, M2, M3



(b) Modelos de concreto protendido: M4, M5, M6

Figura 2.13: Ensaio realizados por Melges (2001).

Nos resultados, Melges (2001) observou que as lajes com protensão tiveram um comportamento mais rígido e atingiram cargas maiores em comparação com as lajes de concreto armado. A presença de armadura de cisalhamento permitiu maior resistência à punção, junto com um comportamento mais dúctil, tanto nas lajes de concreto armado, como nas protendidas.

Por outro lado, os ensaios realizados por Corrêa (2001) buscaram estudar os efeitos da compressão e da componente vertical. No programa experimental foram ensaiadas seis lajes (uma de concreto armado, utilizada como referência, e as outras de concreto protendido). Para estudar o efeito da força de compressão no plano, adotou-se um traçado reto nos cabos, em duas das lajes protendidas. Nas três restantes foi utilizado um traçado parabólico para estudar o efeito da componente vertical dos cabos na resistência à punção. Corrêa (2001) observou que o efeito da componente vertical gerou um aumento na resistência à punção de 25%. Nos modelos que somente tinham forças horizontais (traçado reto do cabo), essa porcentagem correspondeu a 10%. Essa conclusão é semelhante aos resultados dos ensaios realizados por Ramos (2003).

No programa experimental realizado por Silva (2005), foram ensaiadas 15 lajes no total, todas protendidas com cabos não aderentes. As principais variáveis analisadas foram o tamanho do pilar e a distribuição dos cabos em planta. A partir dos resultados obtidos, o autor desenvolveu duas variantes para o método da descompressão, proposto inicialmente por Regan (1985). Segundo Silva (2005), a resistência à punção em lajes protendidas pode ser calculada pela seguinte equação:

$$V_{Rk} = V_{Rk,c} + \frac{V}{m}(m_{po} + m_{pe}) \quad (2.3.2)$$

onde:

$V_{Rk}$  é a força resistente à punção da laje protendida,

$V_{Rk,c}$  é a força resistente à punção da laje com a mesma geometria, mas sem armadura de protensão,

$m_{po}$  é o momento de descompressão, calculado como:

$$m_{po} = \frac{\sigma_c h^2}{6}$$

sendo  $\sigma_c$ , a tensão média de compressão da laje calculada na largura da laje,

$m_{pe}$  é o momento médio na largura considerada da laje, causado pela excentricidade e a componente vertical dos cabos,

$\frac{V}{m}$  é a relação entre a força vertical aplicada na laje e momento médio da laje, causado pelos carregamentos externos.

Alternativamente, o autor propôs também uma variante, mais simplificada, para o cálculo de  $m_{po}$ ,  $m_{pe}$  e  $\frac{V}{m}$ , avaliando os momentos na largura  $c + 4d$  da laje (sendo  $c$  a largura do apoio e  $d$  a altura útil). Os métodos propostos tiveram uma boa previsão da carga obtida nos ensaios de Silva (2005) e de outros autores já mencionados nesta revisão (Shehata (1982), Hassanzadeh e Sundquist (2000), Melges (2001) e Corrêa (2001)). Em relação ao tamanho do pilar, o autor observou que as lajes com pilares de maior dimensão apresentaram um comportamento mais dúctil e uma inclinação da superfície de ruptura (ângulo do cone de punção) menor.

Os ensaios de Carvalho (2005) tinham como objetivo o estudo de lajes protendidas com cabos não aderentes e armadura de cisalhamento tipo *studs*. No total foram ensaiadas 18 lajes, todas com o mesmo tipo de protensão e apenas duas sem armadura de cisalhamento, para serem utilizadas como lajes de referência. As principais variáveis estavam relacionadas com a configuração das armaduras de cisalhamento (área, número de camadas e distribuição). A partir

dos resultados dos testes e das análises realizadas, foram propostos métodos de cálculo para lajes baseados nas equações recomendadas pelas principais normas. No comportamento dos modelos foi verificado que o uso da protensão retardou o aparecimento de fissuras. A armadura de cisalhamento aumentou a resistência à punção de 16% a 60% em relação às lajes de referência, sendo a configuração dos *studs* de forma radial aquela que apresentou um maior acréscimo de carga.

A pesquisa desenvolvida por Barbán (2008) estudou a influência dos cabos com traçado curvo em planta (ver Figura 2.14) na resistência à punção. No total foram ensaiadas seis lajes, das quais uma era de concreto de armado, que foi usada como referência. Nos resultados obtidos observou-se que a laje mencionada teve uma resistência menor por punção, apesar de ter uma taxa de armadura passiva 6,5 vezes maior do que a taxa de armadura usada nas lajes protendidas. Os resultados mostraram também que a inclinação dos cabos em planta teve pouca influência nas cargas últimas registradas. Baseado na comparação dos resultados experimentais com as normas, Barbán (2008) concluiu que no cálculo da componente vertical somente deve ser considerada a força de desvio dos cabos de protensão que estão contidos em um ângulo de  $45^\circ$  da face do pilar.

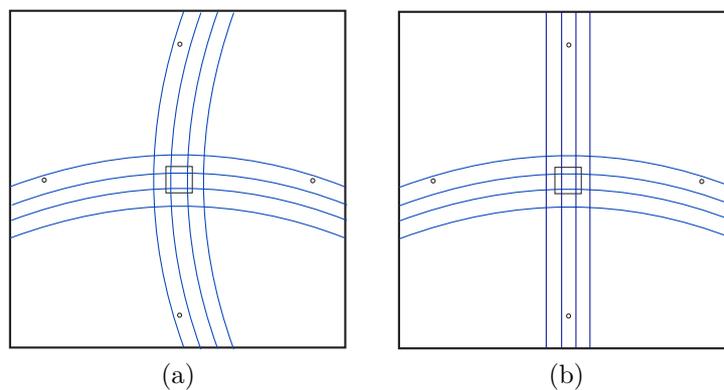


Figura 2.14: Curvatura em planta de cabos em duas das lajes ensaiadas por Barbán (2008).

Finalmente nesta revisão, destaca-se o trabalho realizado por Clément (2012), o qual teve como objetivo principal adaptar a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (CSCT), proposta por Muttoni (2008), para lajes com protensão. No programa foram ensaiadas 15 lajes, divididas em três séries, mostradas na Figura 2.15. Na primeira série era estudada de forma isolada o efeito dos momentos externos na resistência à punção. Os momentos eram aplicados na laje através de um pórtico especial que introduzia forças ao longo das diagonais das lajes. Na segunda série estudava-se o efeito da compressão através do carregamento das lajes com forças externas horizontais. Na última série foram ensaiados modelos protendidos com cabos aderentes. Segundo Clément (2012), na primeira série observou-se uma redução dos deslocamento da laje

e um acréscimo da resistência à punção. Na segunda série, o autor afirma que a força de compressão também retrasou o aparecimento de fissuras, porém, ao contrário dos resultados obtidos na primeira série, os deslocamentos dos modelos foram similares aos obtidos nas lajes de referência. Na série com protensão aderida, verificou-se uma maior rigidez e um aumento da carga última proporcional ao nível de protensão da laje.

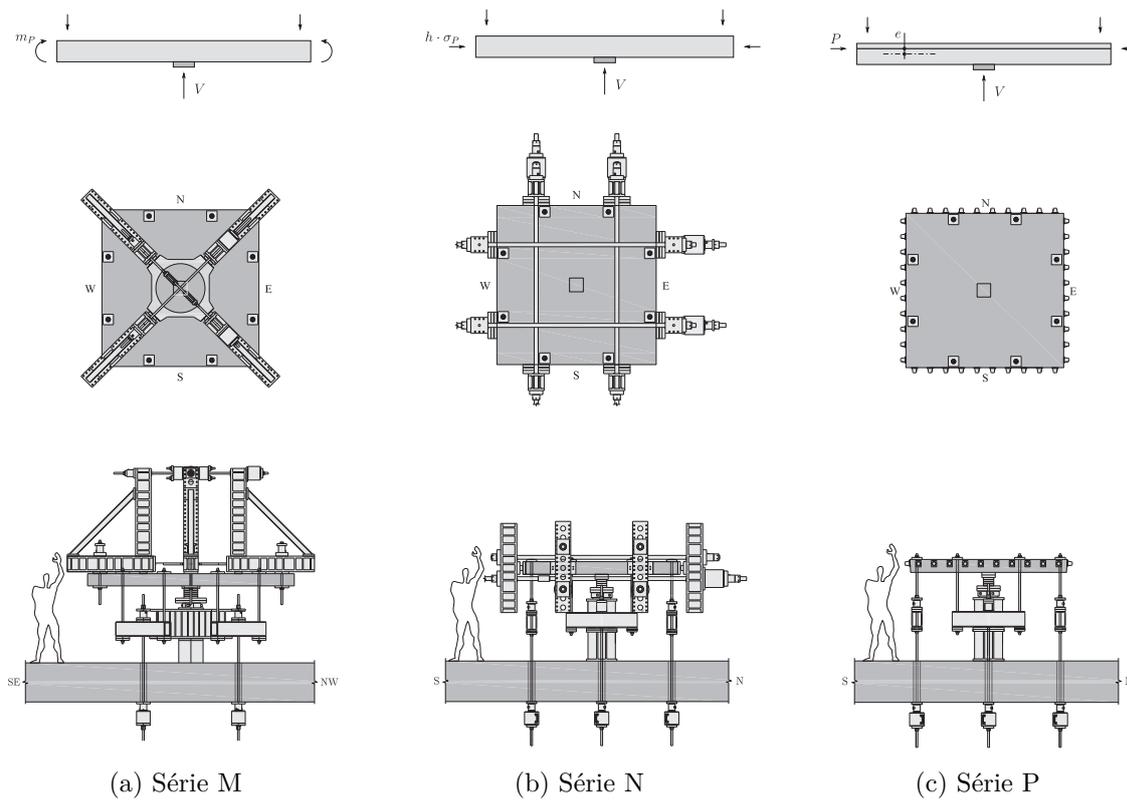


Figura 2.15: Esquemas de aplicação de carga das séries ensaiadas por Clément (2012).

## 2.4 Recomendações das normas para o cálculo da resistência última à punção

Nas principais normas o cálculo da resistência à punção em lajes lisas está baseado no método da superfície de controle. Esse método consiste em calcular uma tensão uniforme de cisalhamento atuante em uma superfície perpendicular ao plano médio da laje, localizada a uma determinada distância da face do pilar ou da área carregada (ver Figura 2.16). A área dessa superfície é dada pela multiplicação do perímetro pela altura efetiva da laje. Esta tensão atuante, geralmente é calculada em função da posição do pilar, da força concentrada e da presença ou não de momentos fletores, e é limitada a uma tensão resistente geralmente calculada

em função da resistência do concreto, da taxa de armadura à flexão e da presença ou não da armadura de punção. Dessa forma, as normas que consideram um perímetro de controle mais próximo do pilar ou área carregada, admitem uma tensão nominal de cisalhamento mais elevada do que aqueles que usam um perímetro de referência mais afastado (RAMOS, 2003). Segundo Melges (2001), embora esse método de cálculo tenha pouca correlação com a realidade do fenômeno físico, sendo puramente empírico, o método é bastante simples e, quando bem calibrado, conduz a consistentes e razoáveis previsões.

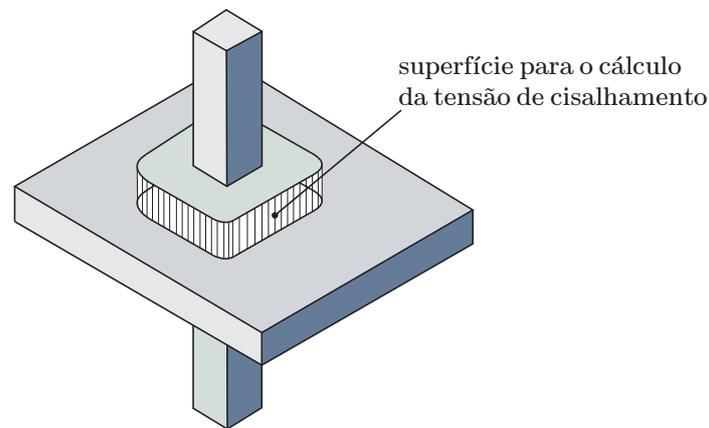


Figura 2.16: Método da superfície de controle.

Nos seguintes itens, são apresentadas os critérios e recomendações do ACI 318-14, Eurocode 2 (2004), NBR 6118-2014 e do *fib* Model Code 2010 mencionados para o cálculo da carga última à punção de lajes com cargas centradas e sem armadura de cisalhamento. Serão comparadas também as abordagens de cada norma para considerar o efeito da protensão.

#### 2.4.1 ACI 318-14 (American Concrete Institute)

Na norma americana o dimensionamento de elementos submetidos ao cisalhamento está baseada na seguinte equação:

$$\phi V_n \geq V_u \quad (2.4.1)$$

onde  $V_u$  é a força de cisalhamento atuante na seção considerada e  $V_n$  é a força resistente nominal ao cisalhamento resistida pelo concreto e pela armadura transversal ( $V_n = V_c + V_s$ ). O coeficiente  $\phi$  corresponde a um valor de redução da resistência nominal, que vale 0,75 para peças solicitadas por cisalhamento.

Para o caso de lajes lisas, a capacidade resistente ao puncionamento deve ser verificada em uma superfície de controle afastada a uma distância  $d/2$  a partir da face do pilar ou da área carregada, como é apresentada na seguinte figura:

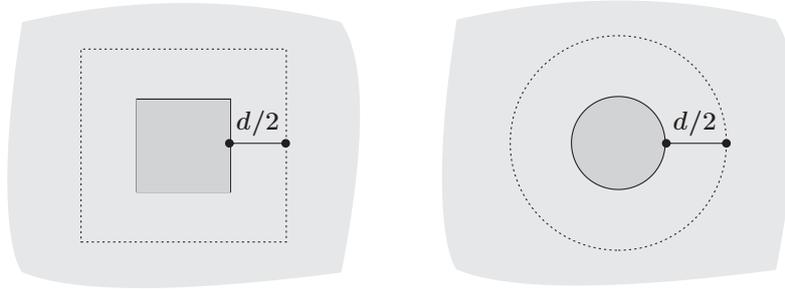


Figura 2.17: Perímetro de controle do ACI 318-14.

No caso de lajes lisas sem armadura de cisalhamento a tensão resistente à punção é dada pelo menor valor entre as seguintes equações:

$$v_c = 0,33\lambda\sqrt{f'_c} \quad (2.4.2)$$

$$v_c = 0,17\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)\lambda\sqrt{f'_c} \quad (2.4.3)$$

$$v_c = 0,083\left(2 + \frac{\alpha_s d}{b_0}\right)\lambda\sqrt{f'_c} \quad (2.4.4)$$

onde:

$f'_c$  é a resistência à compressão do concreto em MPa,

$\lambda$  é um fator de modificação do concreto. Para concretos de peso normal é igual a 1,

$\beta$  é a razão entre o comprimento do maior sobre o menor lado do pilar,

$\alpha_s$  é uma constante que depende da posição do pilar. Equivale a 40 para pilares internos, 30 para pilares de borda e 20 para pilares de canto,

$b_0$  é o perímetro de controle afastado a uma distância  $d/2$ .

No caso de lajes protendidas, no ACI 318-14 o valor do  $v_c$  é calculado como o menor das seguintes expressões:

$$v_c = 0,29\lambda\sqrt{f'_c} + 0,3f_{pc} + \frac{V_p}{b_o d} \quad (2.4.5)$$

$$v_c = 0,083 \left( 1,5 + \frac{\alpha_s d}{b_o} \lambda \sqrt{f'_c} \right) + 0,3 f_{pc} + \frac{V_p}{b_o d} \quad (2.4.6)$$

onde:

$f_{pc}$  é o valor médio da tensão de compressão nas duas direções, que não pode exceder 3,5 MPa, nem menor que 0,9 MPa,

$V_p$  é a componente vertical da força de protensão efetiva dentro do perímetro de controle  $d/2$ ,

O valor de  $\sqrt{f'_c}$  nas expressões anteriores não pode ser maior do que 5,8 MPa.

### 2.4.2 EN 1992-1-1, Eurocode 2 (2004)

A formulação apresentada no código europeu para o cálculo da punção está baseada no CEB-FIP Model Code 90. O método e as equações utilizadas foram desenvolvidas através de ensaios experimentais. A tensão de cisalhamento,  $v_{Ed}$ , provocada por uma força concentrada atuante,  $V_{Ed}$ , é definida como:

$$v_{Ed} = \beta \frac{V_{Ed}}{u_i d} \quad (2.4.7)$$

onde:

$d$  é a altura útil média da laje,

$\beta$  é um coeficiente para considerar a excentricidade da carga e a localização do pilar (interno, de borda ou de canto). No caso de pilares internos pode ser adotado 1,15.

$u_i$  é o perímetro de controle da seção a ser avaliada. Segundo o EC2 (2004) a resistência à punção deve ser verificada no perímetro de controle  $u_0$ , localizado na face do pilar, e no perímetro de controle  $u_1$ , definido a uma distância  $2d$  da área carregada, com cantos arredondados conforme é mostrado na Figura 2.18.

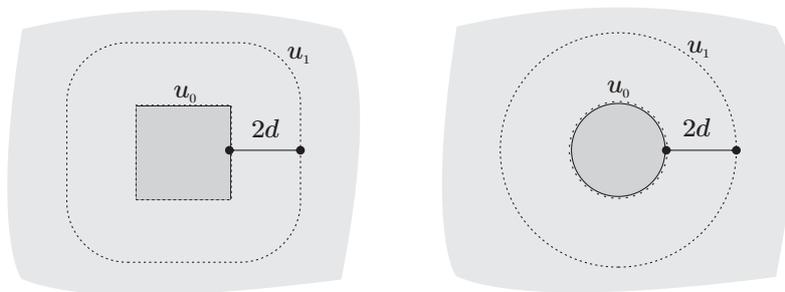


Figura 2.18: Perímetro de controle do EC2 (2004).

No caso do perímetro de controle  $u_0$  a tensão resistente à punção é limitada a um valor máximo de:

$$v_{Ed} = \beta \frac{V_{Ed}}{u_0 d} \leq v_{Rd,max} \quad (2.4.8)$$

$$v_{Rd,max} = 0,5 \cdot v \cdot f_{cd}$$

Sendo  $v = 0,6 \left[ 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right]$  ( $f_{ck}$ , resistência à compressão do concreto em MPa).

Para o perímetro  $u_1$ , afastado a  $2d$ , deve ser verificado que:

$$v_{Ed} \leq v_{Rd,c} \quad (2.4.9)$$

onde a tensão resistente à punção em lajes sem armadura de cisalhamento,  $v_{Rd,c}$ , é calculada de acordo à equação 2.4.10:

$$v_{Rd,c} = C_{Rd,c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} + k_1 \sigma_{cp} \geq (v_{min} + k_1 \sigma_{cp}) \quad (2.4.10)$$

sendo:

$f_{ck}$  é a resistência à compressão do concreto em MPa ( $f_{ck} < 90$  MPa),

$\rho_l$  é a taxa de armadura longitudinal calculada como:  $\rho_l = \sqrt{\rho_{ly} \cdot \rho_{lz}} \leq 0,02$ . Onde  $\rho_{ly}$  e  $\rho_{lz}$  são as taxas de armadura longitudinal nas direções ortogonais, considerando só as barras dentro de uma distancia  $3d$  da face do pilar,

$k$  é um fator relacionado com o efeito escala (*size effect*) calculado pela expressão:

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0 \text{ com } d \text{ em mm,}$$

$\sigma_{cp}$  é a tensão média na seção de controle (positiva se for de compressão) em MPa,

Os valores de  $C_{Rd,c}$ ,  $v_{min}$  e  $k_1$  variam em cada país, sendo os valores recomendados:  $k_1 = 0,1$ , e no caso de  $C_{Rd,c}$  e  $v_{min}$  podem ser calculados de acordo com as seguintes expressões:

$$C_{Rd,c} = \frac{0,18}{\gamma_c} \quad (\text{com } \gamma_c = 1,5)$$

$$v_{min} = 0,035 k^{3/2} f_{ck}^{1/2}$$

Segundo EC2 (2004), a componente vertical,  $V_{pd}$ , resultante dos cabos protendidos inclinados pode ser levada em consideração como ação favorável. Porém nas recomendações da

norma não é claro o afastamento máximo que pode ter um cabo para considerar sua componente vertical no cálculo da carga resistida à punção. O item 6.4.3 da norma especifica que somente pode ser incluída a força dos cabos que passam a uma distância inferior a  $2d$  do pilar. No entanto, no item 9.4.3, o valor é limitado a uma distância de  $0,5d$  do pilar.

### 2.4.3 NBR-6118:2014

O modelo de cálculo para o dimensionamento de lajes à punção proposto pela norma brasileira está baseado nas expressões empíricas do CEB-FIP Model Code 90, portanto é similar ao apresentado no EC2 (2004). No caso de lajes sem armadura de cisalhamento, a resistência à punção é verificada em duas superfícies críticas. Na primeira superfície, denominada contorno  $C$ , é verificada a tensão de compressão diagonal do concreto. Na segunda superfície (contorno  $C'$ ) afastada a  $2d$  do pilar, é verificada a capacidade da ligação à punção, associada à resistência à tração diagonal.

A tensão de cisalhamento de cálculo,  $\tau_{Sd}$ , no caso de carregamentos simétricos, é expressa como:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{ud} \quad (2.4.11)$$

onde:

$F_{Sd}$  é força concentrada de cálculo,

$u$  é o perímetro do contorno crítico considerado,

$d$  é altura útil média da laje.

Para a primeira superfície crítica (contorno  $C$ ) a verificação da tensão resistente de compressão diagonal é realizada através da seguinte expressão:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd2} = 0,27\alpha_v f_{cd} \quad (2.4.12)$$

onde:

$$\alpha_v = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \quad (f_{ck} \text{ resistência à compressão do concreto em MPa})$$

Na segunda superfície crítica (contorno  $C'$ ) a verificação é efetuada como a seguir:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd1} = 0,13 \left(1 + \sqrt{20/d}\right) (100\rho f_{ck})^{1/3} + 0,10\sigma_{cp} \quad (2.4.13)$$

onde:

$f_{ck}$  resistência à compressão do concreto em MPa,

$d$  é altura útil média da laje em centímetros,

$\rho$  é a taxa de armadura longitudinal calculada como:  $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y}$ . Onde  $\rho_x$  e  $\rho_y$ , são as taxas de armadura longitudinal nas direções ortogonais, considerando só as barras dentro de uma distancia  $3d$  da face do pilar,

$\sigma_{cp}$  é a tensão média na seção de controle (positiva se for de compressão) em MPa,

Comparando as equações 2.4.13 e 2.4.10 do EC2 (2004). Observa-se que a NBR-6118:2014 não considera a limitação do coeficiente do efeito escala ( $k \leq 2,0$ ), nem um valor de tensão de cisalhamento mínima ( $v_{min}$ ). Porém a norma brasileira estabelece uma espessura mínima de 160 mm para lajes lisas.

No caso de lajes protendidas, na norma NBR-6118:2014 a verificação da tensão solicitante efetiva é feita de acordo a seguinte equação:

$$\tau_{Sd,ef} = \tau_{Sd} - \tau_{Pd} \quad (2.4.14)$$

sendo:

$$\tau_{P,d} = \frac{\sum P_{k,inf,i} \sin(\alpha_i)}{ud} \quad (2.4.15)$$

onde:

$\tau_{P,d}$  é a tensão devida ao efeito dos cabos de protensão inclinados que atravessam o contorno considerado e que passam a menos de  $d/2$  da face do pilar,

$P_{k,inf,i}$  é a inclinação do cabo  $i$  em relação ao plano da laje no contorno considerado, ver Figura 2.19,

$u$  é o perímetro crítico considerado, em que se calculam  $\tau_{Sd,ef}$  e  $\tau_{Sd}$ .

#### 2.4.4 *fib* Model Code 2010

As recomendações do *fib* Model Code 2010 (MC2010) baseiam-se no modelo físico da Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (*Critical Shear Crack Theory*) proposta por Muttoni (2008). O MC2010 indica que o perímetro de controle localiza-se a uma distância  $d/2$  a partir da região de suporte ou área carregada (Figura 2.20).

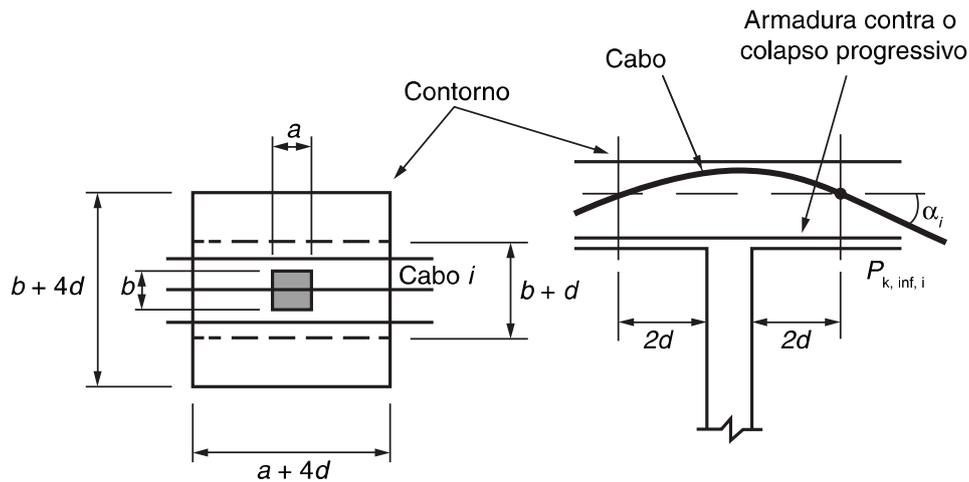


Figura 2.19: Cálculo da componente vertical dos cabos de protensão segundo NBR-6118 (2014).

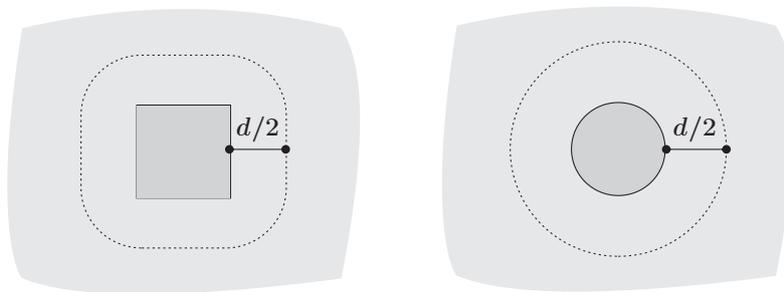


Figura 2.20: Perímetro de controle segundo fib Model Code 2010.

O valor da força de resistência à punção, sem armadura de cisalhamento, é calculado pela expressão:

$$V_{Rd,c} = k_{\psi} \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_0 \cdot d_v \quad (2.4.16)$$

onde:

$d_v$  é a altura efetiva da laje,

$f_{ck}$  é a resistência à compressão do concreto em MPa,

$\gamma_c$  é o coeficiente de segurança com valor de 1,5,

$k_{\psi}$  é um parâmetro relacionado com a rotação da laje, calculada através da expressão:

$$k_{\psi} = \frac{1}{1,5 + 0,9 \cdot \psi \cdot d \cdot k_{dg}} \leq 0,6 \quad (2.4.17)$$

em que:

$k_{dg}$  é um parâmetro relacionado com o tamanho do agregado, calculado como:  $k_{dg} = \frac{48}{16 + d_g}$ , sendo  $d_g$  o tamanho máximo do agregado,

$d$  é altura útil média em ambas direções,

$\psi$  corresponde à rotação da laje. O MC2010 apresenta quatro níveis de aproximação (*Level of Approximation*, LoA) para calcular este parâmetro. Quanto maior o nível, melhor é a precisão, porém o cálculo se torna mais complexo pelo número de variáveis envolvidas.

**LoA I:**

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{ys}}{E_s} \quad (2.4.18)$$

**LoA II:**

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{ys}}{E_s} \cdot \left( \frac{m_{sd}}{m_{Rd}} \right)^{3/2} \quad (2.4.19)$$

**LoA III:**

$$\psi = 1,2 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{ys}}{E_s} \cdot \left( \frac{m_{sd}}{m_{Rd}} \right)^{3/2} \quad (2.4.20)$$

com  $m_{sd}$  calculado através de uma análise linear da laje

**LoA IV:**

$\psi$  é calculado através de uma análise não linear da laje

Os termos das equações anteriores são explicados a seguir:

$r_s$  é a distância a partir do eixo do pilar até ao raio onde o momento fletor da laje é zero,

$f_{yd}$  é o valor de cálculo da tensão de escoamento do aço,

$E_s$  é o módulo de elasticidade do aço,

$m_{Rd}$  corresponde ao momento médio resistente fletor por unidade de comprimento na largura da banda  $b_s = 1,5\sqrt{r_{s,x} \cdot r_{s,y}}$ , que pode ser calculado através da expressão:

$$m_{Rd} = \rho \cdot f_{ys} \cdot d^2 \cdot \left( 1 - \frac{\rho \cdot f_{ys}}{2f_c} \right) \quad (2.4.21)$$

Para pilares internos o valor de  $m_{sd}$ , no nível de aproximação II, pode ser definido como  $\frac{V_E}{8}$ .

Dessa forma, utilizando a equação 2.4.16 correspondente a  $V_{R,c}$  e qualquer das expressões de rotação ( $\psi$ ), segundo o LoA adotado, é possível traçar duas curvas, como pode ser visto na Figura 2.21. O ponto de interseção (ponto C) determina a carga última resistente pela laje e pode ser calculado graficamente ou através de um processo iterativo. Para uma situação de dimensionamento, onde já é conhecida a força de cálculo a ser resistida ( $V_d$ ), é recomendável encontrar a rotação  $\psi_d$  correspondente a essa força (utilizando uma das equações dos LoAs) e com esse valor determinar a resistência à punção utilizando a equação 2.4.16 (ponto B). Se a resistência obtida for maior do que  $V_d$ , o dimensionamento é considerado adequado.

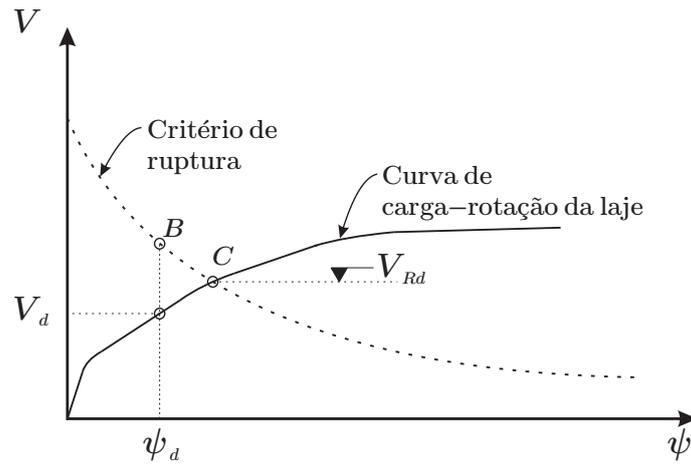


Figura 2.21: Representação das curvas obtidas pelo método do MC2010.

Nas lajes protendidas, a expressão 2.4.19 é modificada através da introdução do termo  $m_p$ , que corresponde ao momento de descompressão:

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{ys}}{E_s} \cdot \left( \frac{m_{sd} - m_p}{m_{Rd} - m_p} \right)^{3/2} \quad (2.4.22)$$

o momento de descompressão é determinado pela seguinte equação:

$$m_p = n \cdot \left( \frac{h^2}{12 \left( d - \frac{h}{2} \right)} + e \right) \approx n \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{d}{3} + e \right) \quad (2.4.23)$$

onde:

$n$  é a força normal por unidade de comprimento,

$h$  é a espessura da laje,

$d$  é a altura útil,

$e$  é a excentricidade da força normal desde o centro de gravidade da seção.

A equação do momento médio resistente fletor por unidade de comprimento da laje também é modificada para considerar o efeito da compressão gerada pela protensão.

$$m_{Rd} = \rho \cdot d \cdot f_y \left( d - \frac{h}{2} \right) + f_{cp} \cdot \chi_{pl} \left( \frac{h}{2} - \frac{\chi_{pl}}{2} \right) \quad (2.4.24)$$

sendo:

$f_{cp}$  é a resistência plástica do concreto, calculada como  $f_{cp} = \left( \frac{30[\text{MPa}]}{f_c} \right)^{\frac{1}{3}} \leq f_c$ ,

$\chi_{pl}$  é altura da região comprimida do concreto na seção, assumindo uma distribuição de tensões plástica constante:

$$\chi_{pl} = \frac{(\rho \cdot d \cdot f_y - \sigma_p \cdot h)}{f_{cp}} \quad (2.4.25)$$

sendo  $\sigma_p$  a compressão média gerada pela protensão na laje.

Os parâmetros restantes são calculados da mesma forma que no caso de lajes sem protensão e a carga máxima é calculada através do mesmo procedimento descrito na Figura 2.21. O MC2010 permite também considerar o efeito favorável da componente vertical dos cabos que passam dentro de uma distância  $d/2$  da face do pilar ou área carregada. Dessa forma, a componente pode ser subtraída da força cortante  $V_E$  que atua na laje, conforme se mostra a seguir:

$$V_E - V_p \leq V_{Rd,c} = k_{\psi} \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} u \cdot d_v \quad (2.4.26)$$

## Capítulo 3

# Modelagem numérica não linear do comportamento do concreto armado e protendido

### 3.1 Considerações gerais

A análise numérica baseada no método dos elementos finitos (MEF) tem se convertido em uma ferramenta importante para a resolução de problemas da mecânica dos meios contínuos, incluindo o comportamento de estruturas de concreto armado e protendido. Para conseguir uma correta simulação das propriedades de um material via MEF é necessário ter uma idealização matemática do seu comportamento que permita estabelecer equações que relacionem as tensões e as deformações. Essa abordagem matemática é conhecida como modelo constitutivo.

Durante as últimas décadas foram desenvolvidas distintas abordagens para modelar numericamente o comportamento do concreto simples, armado e protendido; sendo um dos grandes desafios a simulação do comportamento não linear causado pela fissuração. As simulações do concreto fissurado foram iniciadas nos anos 60, durante as primeiras aplicações do método dos elementos finitos, em estruturas de concreto armado. Nos seus respectivos trabalhos, Ngo e Scordelis (1967) e Rashid (1968) introduziram os conceitos de fissura discreta (*discrete crack*) e distribuída (*smearred crack*). Ambas as abordagens, tinham como objetivo encontrar a melhor forma de representar as fissuras e a propagação das mesmas dentro de uma malha de elementos. Atualmente, a representação da fissuração do concreto, na análise via MEF, continua sendo baseada nos conceitos de fissura discreta e distribuída.

No modelo de fissuração discreta, a fissura é representada como uma descontinuidade geométrica na malha de elementos. Embora possa representar o fenômeno da fratura do concreto de uma forma mais real, essa formulação não coincide com o conceito básico do método dos elementos finitos, onde os materiais são considerados como um meio contínuo. Na abordagem original proposta por Ngo e Scordelis (1967), a fissura era formada quando a força em um nó excedia a resistência a tração do concreto. Desta forma, o nó era separado em dois nós e a fissura

era propagada entre os elementos. A abordagem original tinha várias desvantagens, entre elas a grande dependência da discretização da malha para representar a propagação da fissura e a atualização da malha em cada incremento de carga, o que gerava um alto custo computacional. Essas desvantagens foram solucionadas com formulações mais refinadas. Atualmente, destaca-se as propostas por Moës et al. (1999), conhecida como Método dos Elementos Finitos Estendidos (X-FEM, *Extended Finite Element Method*) e a formulação de Descontinuidade Forte (*Strong Discontinuity Approach*) desenvolvida por Oliver et al. (1999). As abordagens mencionadas permitem a modelagem de fissuras de forma discreta sem a necessidade de atualização da malha através do enriquecimento da aproximação dos nós e elementos para o campo de deslocamentos da região fissurada (CERVERA; CHIUMENTI, 2006). Mais recentemente Manzoli et al. (2016) desenvolveram uma metodologia denominada *Técnica de Fragmentação de Malha* como uma forma de representação de fissuras de forma discreta. A técnica está baseada na introdução de elementos especiais de interface na malha original os quais permitem representar as descontinuidades através de modelos contínuos (relações tensão  $\times$  deformação). Nas Figuras 3.1a e 3.1b são ilustradas algumas formulações do modelo fissuração discreta.

Por outro lado, no modelo de fissuração distribuída, o material fissurado é considerado como um meio contínuo. Em vez de representar uma fissura como uma descontinuidade geométrica, as fissuras são distribuídas uniformemente nos elementos (Ver Figura 3.1c). O efeito da fissuração é considerado através das relações de tensão-deformação, onde é considerada a perda da rigidez devido ao amolecimento (*softening*) do material. A versão original proposta por Rashid (1968), foi refinada por Bažant e Oh (1983) com a introdução do conceito largura de banda (*crack bandwidth*), que permite correlacionar o amolecimento do material com o tamanho do elemento, evitando assim a dependência da discretização da malha no processo de fissuração. Apesar de ser uma abordagem simplificada, em comparação ao modelo de fissura discreta, o modelo de fissuração distribuída permite uma boa aproximação do comportamento geral de uma estrutura (HARTL, 2002).

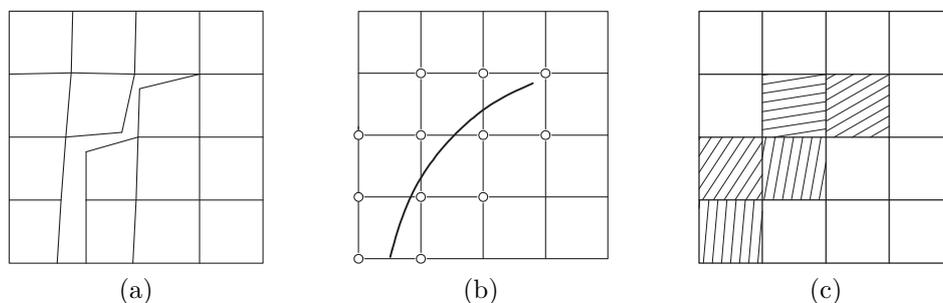


Figura 3.1: Modelo de fissuração no concreto a) discreta b) discreta com enriquecimento de nós d) distribuída, Adaptado de Cervera e Chiumenti (2006).

Segundo Hartl (2002), os modelos de fissuração discreta são mais adequados para a análise de problemas com fissuras dominantes e de propagação previsível, como por exemplo, a simulação de ensaios de energia de fratura. Devido a seu alto custo computacional, torna-se ainda difícil sua implementação na análise tridimensional. Por outro lado, Borst et al. (2004), recomenda o uso dos modelos de fissura distribuída para simular panoramas de fissuração mais difusos, como os observados em estruturas de concreto armado.

## 3.2 Modelo constitutivo do concreto

### 3.2.1 Modelo de fissuração distribuída (*Smeared crack Model*)

O princípio básico dos modelos de fissuração distribuída consiste na avaliação das relações constitutivas do material em eixos locais, os quais são determinados pelo ângulo  $\theta$  em que é formada a fissura, como poder ser visto na Figura 3.2.

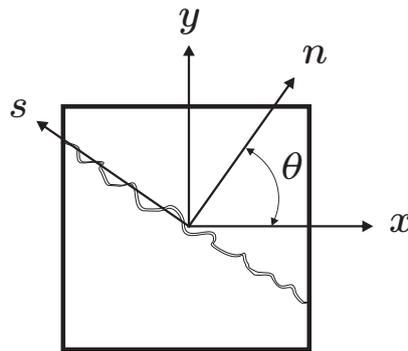


Figura 3.2: Definição do sistema de eixos globais  $(x, y)$  e locais  $(n, s)$  no elemento fissurado.

Antes da fissuração, o concreto é representado como um material linear, elástico e isotrópico. Em um sistema de coordenadas bidimensional, as relações entre as tensões ( $\sigma$ ) e as deformações normais ( $\varepsilon$ ) e tangenciais ( $\gamma$ ) podem ser representadas como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{ns} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{ns} \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

Os subíndices  $n$  e  $s$  estão relacionados aos eixos locais na direção perpendicular e tangencial à fissura, respectivamente.  $E$  corresponde ao módulo de elasticidade e  $\nu$  ao coeficiente de Poisson. Quando as tensões principais excedem o valor da resistência à tração, inicia-se o

processo de fissuração. Nessa fase as relações isotrópicas do material são substituídas pelas relações ortotrópicas expressadas através da matriz de rigidez secante  $D_{ns}^s$  (ROTS; BLAAUWEN-DRAAD, 1989), definida como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{ns} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu E}{1 - \nu^2 \mu} & \frac{\nu \mu E}{1 - \nu^2 \mu} & 0 \\ \frac{\nu \mu E}{1 - \nu^2 \mu} & \frac{\mu E}{1 - \nu^2 \mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta E}{2 + 2\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{ns} \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

onde os parâmetros  $\mu$  e  $\beta$  estão relacionados com os modos de fratura I e II, respectivamente.

Entre os modelos de fissura distribuída, duas representações tensão-deformação têm sido desenvolvidas: o Modelo de Deformações Totais (*Total Strain*) e o Modelo de Decomposição de deformações (*Decomposed Strain*). Cada modelo tem também suas próprias abordagens conforme pode ser visto no esquema mostrado na Figura 3.3.

**Modelos de fissuração distribuída  
(Smearred Crack Models)**

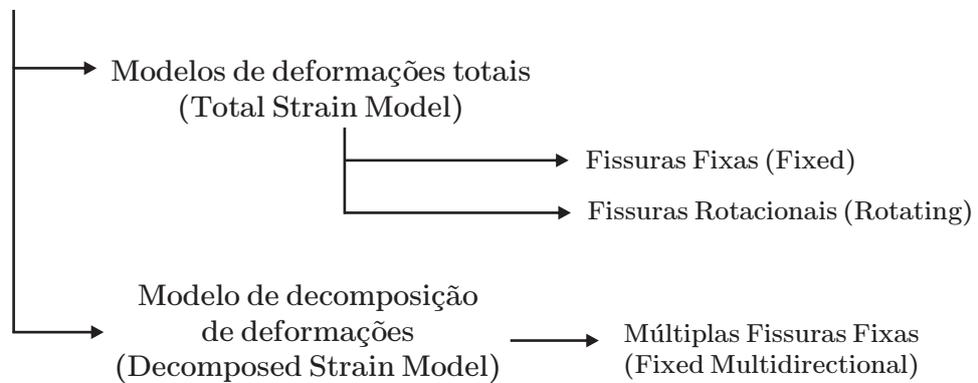


Figura 3.3: Modelos de fissuração distribuída.

**3.2.1.1 Modelo de Deformações Totais (*Total Strain Model*)**

O modelo de Deformações Totais está baseado na Teoria do Campo de Compressão Modificada (*Modified Compression Field Theory*), originalmente proposta por Vecchio e Collins (1986) e modificada por Selby e Vecchio (1997) para a análise tridimensional do concreto. O vetor das deformações, no sistema global de coordenadas  $(x, y)$ , é atualizado pelo incremento das defor-

mações  $\Delta\varepsilon_{xy}$  de acordo com a expressão:

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon_{xy} = {}^t\varepsilon_{xy} + {}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{xy} \quad (3.2.3)$$

esse vetor pode ser transformado ao sistema de eixo locais  $(n, s)$  nas direções dos planos de fissuração, recorrendo à matriz de transformação  $\mathbf{T}(\theta)$ :

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ns} = \mathbf{T}(\theta) {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{xy} \quad (3.2.4)$$

o vetor de tensões, no sistema de coordenadas locais  $(n, s)$ , é calculado utilizando a matriz de rigidez secante:

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{ns} = \mathbf{D}_{ns}^s {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ns} \quad (3.2.5)$$

e o aumento do vetor de tensões, no sistema de coordenadas globais, é dado pela equação:

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{xy} = \mathbf{T}(\theta)^{-1} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ns} \quad (3.2.6)$$

Nas expressões anteriores  $\mathbf{T}(\theta)$  representa a matriz de transformação para um determinado ângulo  $\theta$ . Essa matriz é estabelecida no início do processo de fissuração e dependendo da sua mudança foram desenvolvidos os conceitos de fissura fixa e rotacional. No modelo de fissura fixa (*fixed crack*) a matriz  $\mathbf{T}$  é calculada uma única vez e mantida constante ao longo de todo o carregamento, enquanto no modelo de fissuras rotacional (*rotated crack*) é atualizada em cada incremento de carga. A matriz de rigidez secante para o caso tridimensional,  $\mathbf{D}_{nst}^s$ , implementada no modelo de Deformações Totais permite representar o concreto como um material ortotrópico. A matriz  $\mathbf{D}_{nst}^s$  mantém a simetria da matriz global de rigidez, o que é recomendável para uma análise numérica. O módulo secante é calculado a partir dos tensores de tensão e deformação, como se mostra na equação 3.2.7 e 3.2.8. A matriz de rigidez secante é apresentada na expressão 3.2.9.

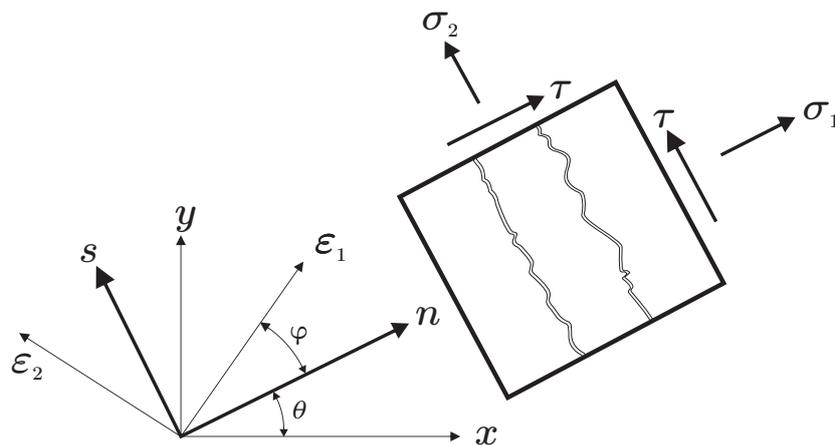
$$E_{ci} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \quad (3.2.7)$$

$$G_{cij} = \frac{E_{ci}E_{cj}}{E_{ci} + E_{cj}} \quad (3.2.8)$$

$$\mathbf{D}_{nst}^s = \begin{bmatrix} E_{c1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{c2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{c3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{c12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{c23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{c13} \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

### 3.2.1.2 Comparação entre os modelos de Deformações Totais de fissura fixa e rotacional

No modelo de fissuração fixa, a formação das fissuras ocorre quando as tensões principais excedem a resistência à tração do material. O ângulo da fissura ( $\theta$ ) permanece inalterado nos subsequentes passos de carga, mesmo que as direções das tensões principal mudem. Como consequência, aparecem tensões de cisalhamento ao longo do plano de fissura para manter o equilíbrio, como é ilustrado na Figura 3.4. O surgimento das tensões de cisalhamento e a perda de rigidez no concreto fissurado é levado em consideração através do fator de retenção ao cisalhamento ( $\beta$ ), que pode ser interpretado como uma forma de modelar o engrenamento dos agregados.



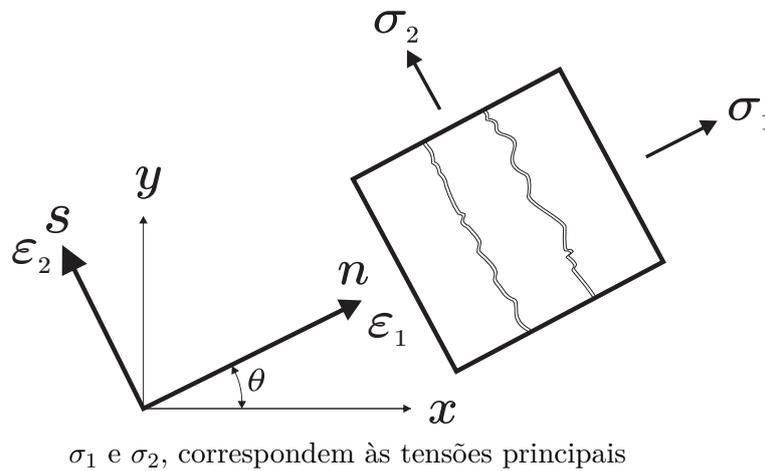
$\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  correspondem às deformações principais, as quais em um caso geral não coincidem com os planos de fissura normal ( $n$ ) e tangencial ( $s$ ). As tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  denotam, respectivamente, as tensões normais e paralelas aos planos de fissuras.

Figura 3.4: Modelo de fissuras fixas. Adaptado de Červenka et al. (2012).

Do mesmo modo que no modelo de fissuras fixas, no modelo de fissura rotacionais a fase

de fissuração é iniciada quando as tensões principais superam o limite de resistência à tração. Porém, as direções dos planos de fissuração são constantemente atualizadas para seguir a rotação das direções de deformação principal durante o processo de carregamento. Conseqüentemente não existem tensões de cisalhamento no plano da fissura (ver Figura 3.5), portanto não é necessária a definição do fator de retenção ao cisalhamento ( $\beta = 1$ ). Embora esta abordagem pareça fisicamente incorreta (já que na realidade as fissuras não rotacionam) o modelo tem sido utilizado com sucesso para simular estruturas de concreto armado (CLAUS, 2009). Para manter a coaxialidade entre os eixos das deformações e das tensões principais, o módulo de cisalhamento é calculado de acordo com a expressão de Crisfield e Wills (1989):

$$G = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \quad (3.2.10)$$



$\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , correspondem às tensões principais

Figura 3.5: Modelo de fissuras rotacionais. Adaptado de Červenka et al. (2012).

### 3.2.2 Modelo de Decomposição das Deformações (Decomposed Strain Model)

Diferentemente das abordagens explicadas nas seções anteriores, o modelo de decomposição das deformações está baseado no princípio de que a deformação total pode ser dividida em duas parcelas:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{cr} \quad (3.2.11)$$

onde  $\varepsilon^e$  corresponde às deformações elásticas e  $\varepsilon^{cr}$  às deformações de fissura.

A formulação do Modelo de Fissuras Fixas Múltiplas (*Fixed Multidirectional Crack Model*) está baseada no modelo de Deformações Totais de Fissuras Fixas, porém permite abrir várias fissuras em um mesmo ponto de integração de forma simultânea (Figura 3.6).

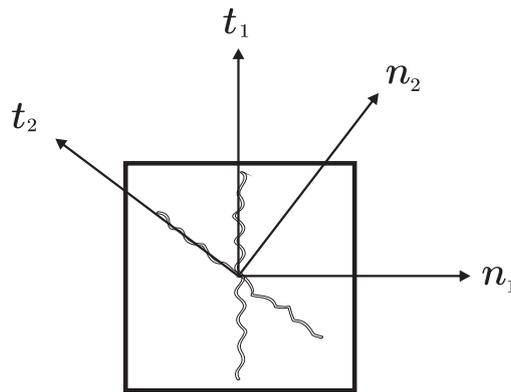


Figura 3.6: Modelo de fissuras múltiplas. Adaptado de (DIANA TNO, 2012).

Após a abertura de uma fissura, outras fissuras podem surgir no mesmo ponto de integração, se a tensão de tração for superada novamente pela tensão principal, ou se o ângulo entre a fissura existente e a direção das tensões principais exceder um determinado valor. Usualmente, esse ângulo é definido com o valor de  $60^\circ$  (ROTS; BLAAUWENDRAAD, 1989).

### 3.2.3 Comportamento do concreto à tração

A modelagem à tração do concreto não fissurado pode ser realizada estabelecendo uma relação linear-elástica. Após a fissuração, uma lei constitutiva baseada na energia de fratura que relacione a tensão de tração normal ( $f_t$ ) com a deformação normal à fissura ( $\varepsilon_{nn}$ ) pode ser utilizada para descrever o amolecimento do concreto. A energia de fratura ( $G_f$ ) é definida como a quantidade de energia necessária para propagar uma fissura de superfície unitária. Esse parâmetro pode ser interpretado graficamente como a área sob o diagrama de um ensaio uniaxial de tração à ruptura, excluindo a parcela elástica (Figura 3.7).

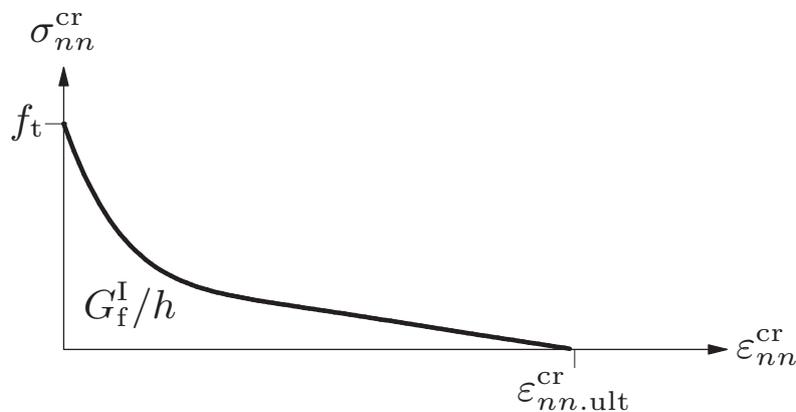


Figura 3.7: Relação de amolecimento proposta por Hordijk (1991), DIANA TNO (2012).

A relação de amolecimento proposta por Hordijk (1991) é utilizada neste trabalho para representar o comportamento não-linear do concreto à tração:

$$\frac{\sigma(\varepsilon_{nn})}{f_t} = \begin{cases} \left(1 + \left(c_1 \frac{\varepsilon_{nn}}{\varepsilon_{nn,ult}}\right)^3\right) \exp\left(-c_2 \frac{\varepsilon_{nn}}{\varepsilon_{nn,ult}}\right) \dots & \text{se } 0 \leq \varepsilon_{nn} \leq \varepsilon_{nn,ult} \\ -\frac{\varepsilon_{nn}}{\varepsilon_{nn,ult}}(1 + c_1^3) \exp(-c_2) & \\ 0 & \text{se } \varepsilon_{nn,ult} < \varepsilon_{nn} < \infty \end{cases} \quad (3.2.12)$$

Os valores das constantes são  $c_1 = 3$  e  $c_2 = 6,93$ . O parâmetro  $\varepsilon_{nn,ult}$  corresponde à largura de fissura na qual as tensões desaparecem, definido como:

$$\varepsilon_{nn,ult} = 5,136 \cdot \frac{G_f}{hf_t} \quad (3.2.13)$$

Nos modelos de fissura distribuída, o valor da largura de banda ( $h$ ) define o comprimento no qual a largura de fissura (*crack width*),  $w$ , é distribuída em cada ponto de integração do elemento. Desta forma, é garantido que o processo de fissuração seja independente do tamanho do elemento finito. O valor da largura de banda depende do tipo de elemento, do seu tamanho e dos pontos de integração. Neste trabalho, no caso de elementos sólidos é adotado o valor de  $\sqrt[3]{V}$ , sendo  $V$  o volume do elemento; e para elementos bidimensionais  $\sqrt{2A}$ , sendo  $A$  a área do elemento. A energia de fratura pode ser determinada experimentalmente ou através de relações empíricas. No CEB-FIB Model Code 1990 o parâmetro  $G_f$  é calculado através da Equação 3.2.14, que depende da resistência média à compressão e da parcela  $G_{f0}$  que é função da dimensão máxima do agregado  $d_{max}$  (Tabela 3.1):

$$G_f = G_{f0} \left(\frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right)^{0,7} \quad [\text{N mm/mm}^2] \quad (3.2.14)$$

com  $f_{cm0}$  igual a 10 MPa.

Tabela 3.1: Valores  $G_{f0}$  em função do tamanho máximo do agregado.

$d_{max}$ (mm)	$G_{f0}$ (N mm/mm <sup>2</sup> )
8	0,025
16	0,030
32	0,058

Em contrapartida, no *fib* Model Code 2010 é apresentada a seguinte equação para o cálculo da energia de fratura, apenas em função da resistência média à compressão:

$$G_f = 73 f_{cm}^{0,18} \quad \text{com } f_{cm} \text{ em MPa} \quad [\text{N m/m}^2] \quad (3.2.15)$$

Além das expressões do Model Code 1990 e 2010, na literatura podem ser encontradas outras equações para calcular a energia de fratura:

Vos (1983):

$$G_f = 0,025 f_t^{ef} \quad \text{com } f_t^{ef} = 0,24 f_{cu}^{\frac{2}{3}} \quad [\text{N mm/mm}^2] \quad (3.2.16)$$

onde  $f_t^{ef}$  é denominada como resistência à tração efetiva e  $f_{cu}$  é a resistência à compressão do corpo-de-prova cúbico em MPa.

Remmel (1994):

$$G_f = 0,065 \ln \left( 1 + \frac{f_{cm}}{10} \right) \quad \text{com } f_{cm} \text{ em MPa} \quad [\text{N mm/mm}^2] \quad (3.2.17)$$

A Figura 3.8 mostra o valor de energia de fratura calculada através das equações apresentadas, para resistências médias à compressão no intervalo de 20 à 90 MPa.

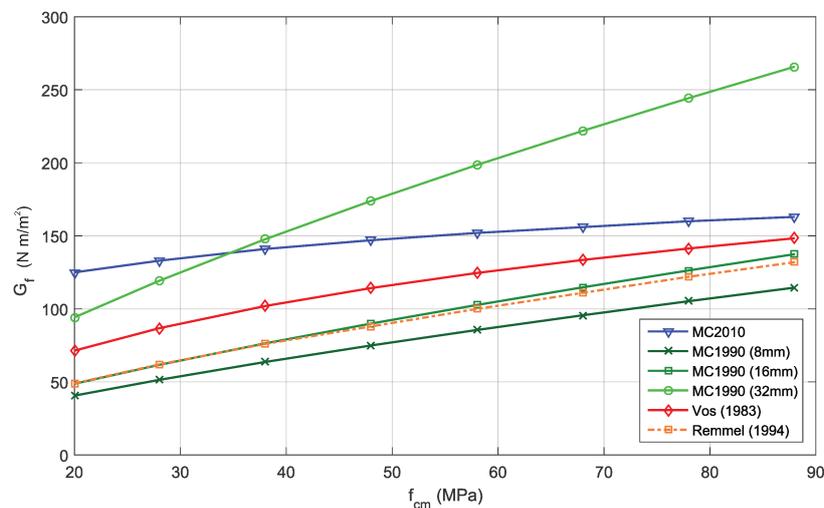


Figura 3.8: Valores de energia de fratura segundo distintas leis empíricas.

Observa-se que para um mesmo valor de resistência média à compressão pode-se obter diferentes valores dependendo da expressão escolhida. Excluindo a curva do CEB-FIP Model Code 1990 para um tamanho máximo do agregado de 32 mm, a curva do *fib* Model Code 2010 apresenta os valores mais altos. Entretanto, a expressão de Remmel (1994) ajusta-se aos valores calculados pelo CEB-FIP Model Code 1990 para um tamanho máximo do agregado de 16 mm.

Tendo como base os ensaios experimentais que foram modelados neste trabalho, adotou-se os valores do *fib* Model Code 2010 para modelar o comportamento do concreto à tração.

### 3.2.4 Comportamento do concreto ao cisalhamento

Após a fissuração, a rigidez ao cisalhamento do concreto é reduzida, porém uma parte considerável do esforço cortante pode ser transferido através das superfícies rugosas das fissuras. De acordo com Figueiras (1983), ensaios experimentais mostram que o principal parâmetro na transferência das tensões de cisalhamento é a abertura da fissura, já que esta condiciona os outros mecanismos de transferência como a dimensão dos agregados, a quantidade de armadura e o diâmetro das mesmas. Nos modelos de fissuração distribuída, a redução do módulo de cisalhamento,  $G$ , depende do tipo de formulação adotada. No caso do modelo de fissura rotacional, esse parâmetro é calculado de acordo com a equação 3.2.10. Entretanto, nos modelos de fissuras fixas a redução da rigidez cortante é calculada através do fator de retenção ao cisalhamento,  $\beta$ , pela expressão:

$$G^{cr} = \beta G \quad (3.2.18)$$

onde  $G^{cr}$  corresponde ao módulo de cisalhamento no estado fissurado.

O valor de  $\beta$  varia entre 0 e 1, e pode ser adotado como constante ou variável. Na formulação do fator de retenção constante é assumido que após a fissuração a relação entre as tensões e as deformações de cisalhamento é linear, sendo adotado usualmente um valor de  $\beta = 0,2$  (PRUIJSSERS, 1988). Nos casos onde o modo de fratura I seja dominante, essa simplificação pode ser válida. Porém, para problemas em que a fissuração por cisalhamento é determinante, é melhor adotar uma formulação de  $\beta$  variável que permita representar adequadamente a dependência observada entre a rigidez ao cisalhamento e a deformação correspondente à abertura de fissura (PRUIJSSERS, 1988; ROTS; BLAAUWENDRAAD, 1989). A seguir, são apresentadas algumas leis de retenção variável ao cisalhamento encontradas na literatura:

A lei de redução da rigidez de cisalhamento proposta por Kolmar (1986) considera a presença de armaduras normais ao plano da fissura:

$$\beta = -c_3 \cdot \frac{\ln\left(\frac{1000 \cdot \varepsilon_{nn}^{cr}}{c_1}\right)}{c_2} \quad (3.2.19)$$

Na expressão, as constantes  $c_1$  e  $c_2$  são calculadas em função da taxa de armadura  $\rho$  como se

mostra a seguir. A constante  $c_3$  corresponde a um fator de escala definido pelo usuário:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \rho \leq 0,02 \\
 c_1 &= 7 + 333(\rho - 0,005) \\
 c_2 &= 10 - 167(\rho - 0,005) \\
 c_3 &= 1
 \end{aligned}
 \tag{3.2.20}$$

Baseado em ensaios experimentais, Rots (1988) apresenta a seguinte expressão não-linear para o fator retenção ao cisalhamento:

$$\beta = \frac{1}{1 + 4447\varepsilon_{nn}^{cr}}
 \tag{3.2.21}$$

O fator de retenção variável  $\beta$  proposto por Puijssers (1988) depende da deformação normal da abertura de fissura, mas também da distorção da mesma,  $\gamma_{nt}^{cr}$  através da relação  $\xi = \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\gamma_{nt}^{cr}}$

$$\beta = \frac{1}{1 + P\varepsilon_{nn}^{cr}}
 \tag{3.2.22}$$

Com  $P$  definido como:

$$P = \frac{2500}{d_{max}^{0,14} \cdot \left[ 0,76 - 0,16 \cdot \xi \left( 1 - \exp\left(\frac{6}{\xi}\right) \right) \right]}
 \tag{3.2.23}$$

O Gráfico 3.9 mostra as formulações do fator de retenção ao cisalhamento já expostas. Observa-se que a expressão proposta por Puijssers (1988) com  $\xi = 3$  se ajusta à curva de Rots (1988):

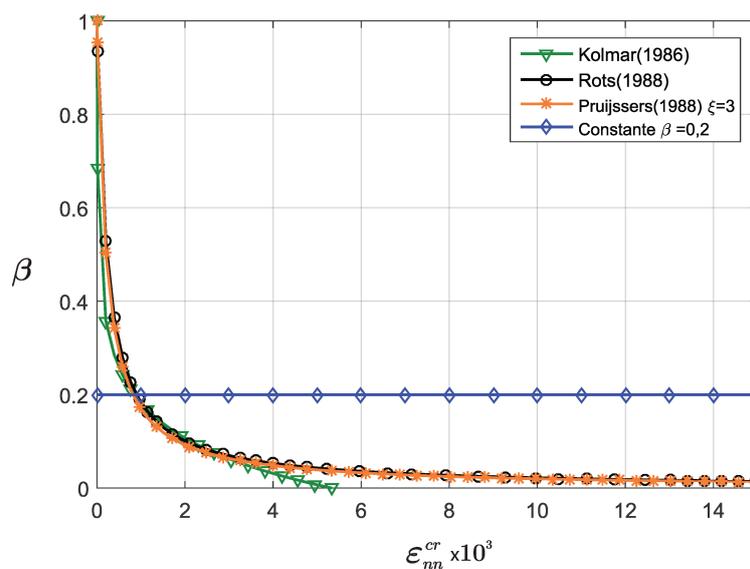


Figura 3.9: Fator de retenção ao cisalhamento segundo diferentes formulações.

Alternativamente, na versão 9.4.4 do programa DIANA, utilizado no desenvolvimento desta pesquisa, é apresentada a formulação do fator de retenção ao cisalhamento baseado no dano (*damage based shear retention*). Essa formulação está fundamentada no cálculo do módulo de cisalhamento fissurado através do valor do coeficiente de Poisson reduzido pela fissuração. Essa abordagem é uma tentativa de representar o fenômeno que acontece no concreto fissurado, onde as deformações aplicadas em uma direção deixam de ter efeito nas outras direções perpendiculares. Desta forma, o módulo de cisalhamento é calculado em função dos valores de rigidez e coeficiente de Poisson reduzidos:

$$G = \frac{E'}{2(1 + \nu')} \quad (3.2.24)$$

### 3.2.5 Comportamento do concreto à compressão

O comportamento do concreto à compressão pode ser modelado através de uma relação constitutiva não linear entre as tensões e deformações. Nesta seção são descritas as curvas propostas por Thorenfeldt et al. (1987) e a curva parabólica proposta por Feenstra (1993). Ambas as curvas conseguem representar o amolecimento do concreto após atingir à resistência a compressão.

#### 3.2.5.1 Curva proposta por Thorenfeldt et al. (1987)

As tensões de compressão no modelo proposto por Thorenfeldt et al. (1987) são calculadas de acordo com a expressão:

$$\sigma(\varepsilon) = f_c \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \left[ \frac{n}{n - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^{nk}\right)} \right] \quad (3.2.25)$$

onde:

$f_c$  é a resistência à compressão do concreto,

$\varepsilon_c$  é a deformação na qual a tensão de compressão é igual a resistência à compressão,

as constantes são definidas como:

$$n = 0,80 \frac{f_c}{17} \quad \varepsilon_c = \frac{n}{n-1} \frac{f_c}{E} \quad k = \begin{cases} 1 & \text{se } \varepsilon_c < \varepsilon \leq 0 \\ 0,067 + \frac{f_c}{62} & \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_c \end{cases}$$

A Figura 3.10 representa graficamente as tensões de compressão segundo o modelo de Thorenfeldt et al. (1987).

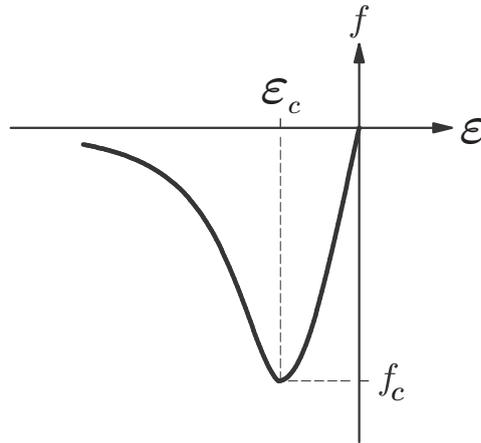


Figura 3.10: Curva proposta por Thorenfeldt et al. (1987).

Segundo Hendriks et al. (2016), devido a curva de Thorenfeldt et al. (1987) estar apenas em função da resistência à compressão e do módulo de elasticidade, o comportamento no amolecimento tem uma dependência da malha de elementos finitos adotada. Esse problema é solucionado no modelo parabólico a partir da introdução da largura de banda ( $h$ ) na sua formulação.

### 3.2.5.2 Curva parabólica proposta por Feenstra (1993)

A curva proposta por Feenstra (1993), mostrada na Figura 3.11, divide o comportamento do concreto à compressão a partir de três valores de deformação:  $\varepsilon_{c/3}$  é a deformação onde é atingida um terço da resistência à compressão,  $\varepsilon_c$  é deformação na qual a tensão de compressão é igual a resistência de compressão e  $\varepsilon_u$  é a deformação última na qual o concreto amolece completamente.

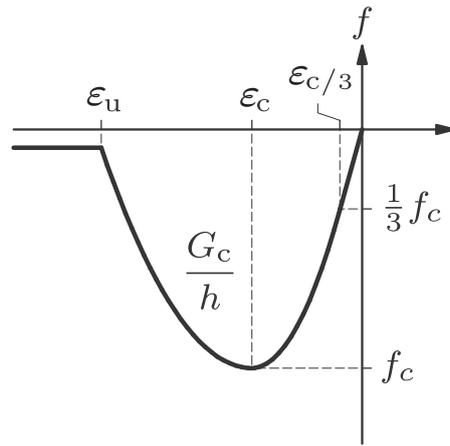


Figura 3.11: Curva parabólica proposta por Feenstra (1993).

Dependendo de cada trecho da curva as tensões à compressão são calculadas como:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} -\frac{1}{3} \frac{f_c \varepsilon}{\varepsilon_{c/3}} & \text{se } \varepsilon_{c/3} < \varepsilon \leq 0 \\ -\frac{f_c}{3} \left[ 1 + 4 \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_{c/3}}{\varepsilon_c - \varepsilon_{c/3}} \right) - 2 \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_{c/3}}{\varepsilon_c - \varepsilon_{c/3}} \right)^2 \right] & \text{se } \varepsilon_c < \varepsilon \leq \varepsilon_{c/3} \\ -f_c \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{\varepsilon_u - \varepsilon_c} \right)^2 \right] & \text{se } \varepsilon_c < \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ 0 & \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad (3.2.26)$$

as deformações que dividem a curva são definidas como:

$$\varepsilon_{c/3} = -\frac{1}{3} \frac{f_c}{E} \quad \varepsilon_c = -\frac{5}{3} \frac{f_c}{E} \quad \varepsilon_u = \varepsilon_c - \frac{3}{2} \frac{G_c}{h f_c}$$

Observa-se que o amolecimento do concreto depende da energia de fratura à compressão  $G_c$  e da largura de banda do elemento  $h$ . O parâmetro  $G_c$  representa a área sob a curva após atingir a resistência à compressão. O parâmetro  $G_c$  poder ser estimado como 250 vezes a energia de fratura à tração (NAKAMURA; HIGAI, 2001).

### 3.2.5.3 Influência do confinamento lateral e da fissuração na resistência à compressão

Com base nas características das superfícies de ruptura do concreto observadas experimentalmente, diversos critérios de ruptura têm sido propostos. A maioria desses critérios foram

classificados por Hsieh et al. (1982), conforme o número de constantes do material que aparecem na suas formulações. A seguir são apresentados alguns exemplos:

- (i) 1 parâmetro: Tresca e von Mises
- (ii) 2 parâmetros: Mohr-Coulumb e Drucker-Prager
- (iii) 3 parâmetros: Bresler-Pister
- (iv) 4 parâmetros: Ottosen e Hsieh-Ting-Chen
- (v) 5 parâmetros: William-Warnke

Os critérios de ruptura de 4 e 5 parâmetros são considerados os modelos mais refinados e apresentam ótimas aproximações com os dados experimentais disponíveis. O critério de ruptura de Hsieh-Ting-Chen, usado no modelo constitutivo proposto por Selby e Vecchio (1997), permite determinar o acréscimo da resistência à compressão do concreto devido ao confinamento lateral que acontece quando as deformações perpendiculares à direção do carregamento são restringidas. Esse efeito é importante na modelagem tridimensional de estruturas de concreto e é considerado no modelo proposto por Selby e Vecchio (1997) através da abordagem de pré-deformação (*pre-strain*), na qual os efeitos da expansão lateral são considerados como um caso externo de carregamento na estrutura.

O critério Hsieh-Ting-Chen pode ser considerado como uma combinação linear dos critérios de von Mises, Drucker-Prager e Rankine (HSIEH et al., 1982). A superfície de ruptura é definida como:

$$F(I_1, J_2, \sigma_{c,max}) = A \cdot \frac{J_2}{f_c^2} + B \cdot \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + C \cdot \frac{\sigma_{c,max}}{f_c} + D \cdot \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0 \quad (3.2.27)$$

onde  $I_1$  corresponde ao primeiro invariante do tensor de tensões,  $J_2$  é o segundo invariante do tensor de tensões desviatórias,  $\sigma_{c,max}$  é a tensão principal máxima de compressão e  $f_c$  é a resistência à compressão uniaxial. As constantes foram calibradas a partir de ensaios experimentais:  $A=2,0108$ ,  $B=0,9714$ ,  $C=9,1412$  e  $D=0,2312$  (HSIEH et al., 1982).

Dessa forma é levado em consideração o aumento gradual da resistência à compressão devido ao confinamento. Em um estado triaxial hidrostático de tensão, a superfície de ruptura não pode ser atingida, estabelecendo-se uma relação linear entre as deformações e tensões (Figura 3.12).

As curvas apresentadas na seção 3.2.5, para representar o comportamento à compressão do concreto, propostas por Thorenfeldt et al. (1987) e Feenstra (1993), podem ser modificadas para levar em consideração os efeitos de confinamento lateral descritos por Selby e Vecchio (1997).

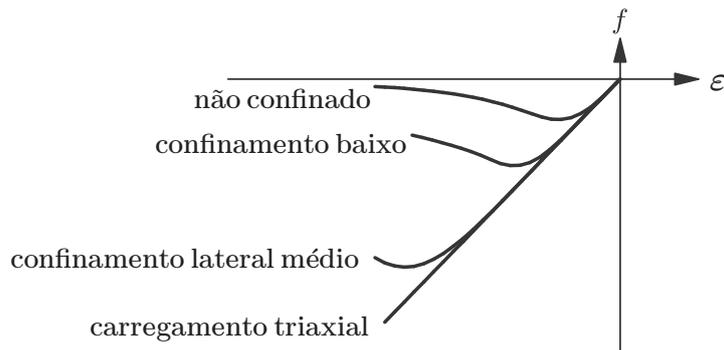


Figura 3.12: Influência do confinamento lateral na curva tensão-deformação à compressão do concreto.

Dessa forma é possível modelar o aumento resistência e o ganho de ductilidade no concreto em função do aumento da componente isotrópica do tensor das tensões.

Por outro lado, no modelo constitutivo do concreto também é importante considerar a redução da resistência à compressão devido à fissuração na direção lateral. Esse fenômeno é considerado através do modelo proposto por Vecchio e Collins (1993) formulado no marco da Teoria do Campo Modificado de Compressão, na qual é introduzido o parâmetro de amolecimento na compressão  $\beta_{\sigma_{cr}}$ , definido como:

$$\beta_{\sigma_{cr}} = \frac{1}{0,85 - 0,27 \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_c}} \leq 1,0$$

onde  $\varepsilon_c$  corresponde ao valor de deformação no qual é atingido a resistência máxima à compressão e  $\varepsilon_1$  é a deformação principal à tração. A Figura 3.13 representa graficamente o fator de redução à compressão.

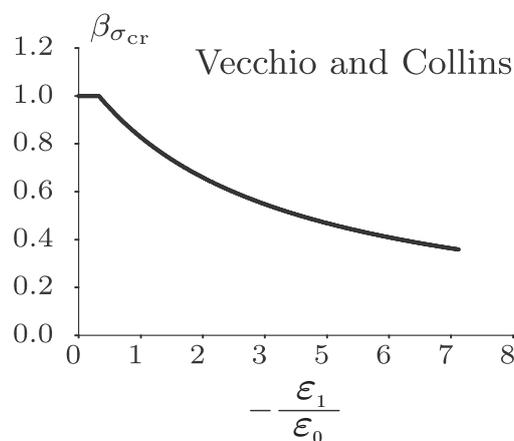


Figura 3.13: Fator de redução devido à fissuração lateral proposto por Vecchio e Collins (1993).

### 3.3 Modelo constitutivo do aço

O modelo constitutivo adotado para as armaduras foi o modelo de von Mises. A superfície de ruptura (funcional) é definida como:

$$F(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2} - k(\varepsilon_{eq}^p) = 0 \quad (3.3.1)$$

$J_2$  é o segundo invariante do tensor de tensões desviatórias. O parâmetro  $k(\varepsilon_{eq}^p)$  é a tensão de cisalhamento máxima,  $\sigma_y$  a tensão de escoamento e  $\varepsilon_{eq}^p$  é a deformação plástica equivalente. O comportamento tensão-deformação descrito por este modelo é na sua forma geral elasto-plástico com endurecimento linear (Figura 3.14a). A partir desse modelo pode-se adotar um comportamento elástico-plástico perfeito (Figura 3.14b). Para o caso de tensão uniaxial, utilizado na modelagem das barras da armadura, a tensão equivalente é definida como:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - 0)^2]} \quad (3.3.2)$$

portanto a tensão equivalente é igual à tensão máxima principal,  $\sigma_{eq} = \sigma_1$

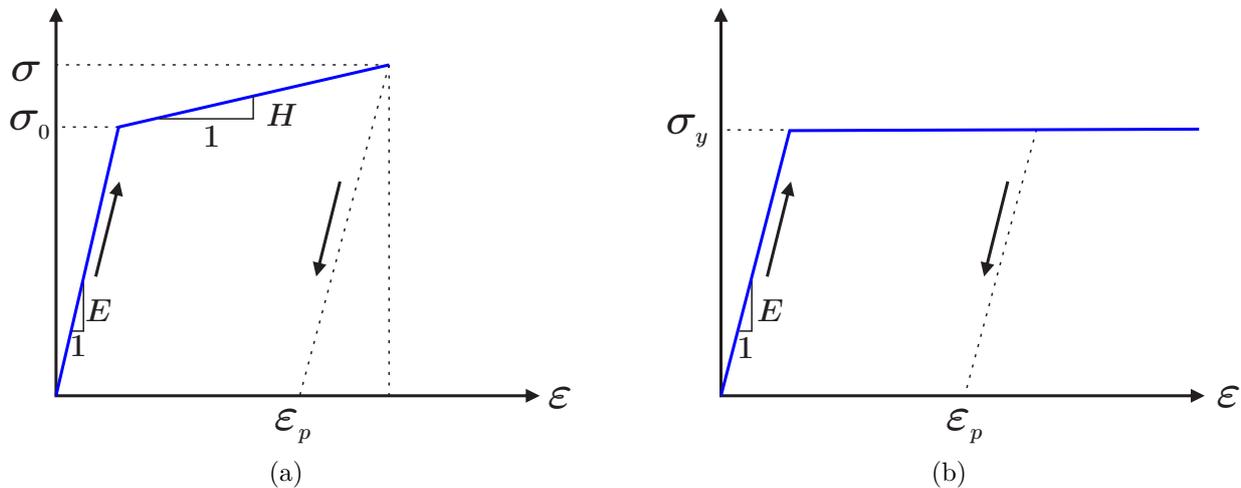


Figura 3.14: Modelo do aço para armaduras a) modelo elástico-plástico com endurecimento linear b) modelo elástico-plástico perfeito.

#### 3.3.1 Representação das armaduras

As armaduras representam uma descontinuidade da distribuição de rigidez dentro do concreto armado. A rigidez total do elemento é definida pela somatória das rigidezes do concreto ( $\mathbf{D}_c$ ) e da armadura distribuída ( $\mathbf{D}_{si}$ ):

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_c + \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_{si} \quad (3.3.3)$$

Na análise numérica, baseada no método dos elementos finitos, existem basicamente três formas para a representação das armaduras: discreta, distribuída e incorporada, ilustradas na Figura 3.15.

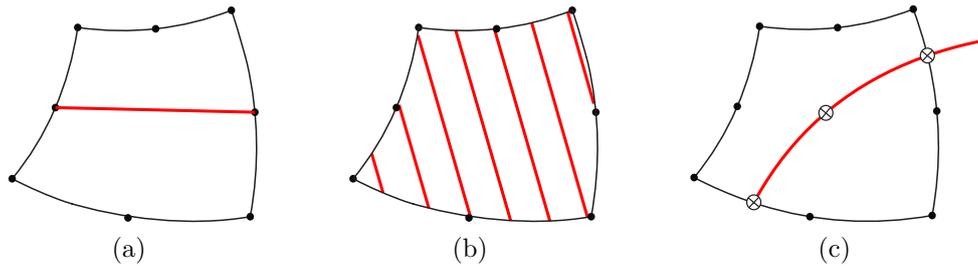


Figura 3.15: Modelos de representação da armadura em elemento bidimensional a) discreta, b) distribuída e c) incorporada.

**(i) Discreta** (*discrete reinforcement*): nesta técnica as armaduras são modeladas através de elementos individuais, onde os nós das armaduras estão conectados aos nós do elemento que representa o concreto. A principal desvantagem deste método é a dependência da malha para posicionar os elementos da armadura.

**(ii) Distribuída** (*smearred reinforcement*): as barras são distribuídas como uma taxa constante de armadura que pode ser atribuída em uma determinada direção do elemento. Desta forma, as barras são representadas como uma camada de espessura mecânica equivalente. Esta abordagem é recomendada para a modelagem de estribos em vigas e outros tipos de armaduras com espaçamentos constantes.

**(iii) Incorporada** (*embedded reinforcement*): nesta abordagem, as armaduras são representadas através de elementos isolados, mas diferentemente do modelo discreto, as barras podem ser dispostas dentro da malha dos elementos de concreto de forma arbitrária. Este procedimento simplifica substancialmente a geração das malhas de elementos finitos, na medida em que os nós dos dois tipos de elementos não necessitam ser coincidentes.

Na implementação deste método, uma rotina de pré-processamento tem que ser executada para determinar a interseção dos elementos das armadura com o contorno dos elementos do concreto, para garantir uma continuidade adequada. As deformações nas armaduras são calculadas através do campo de deslocamentos do elemento de concreto, o que implica numa aderência perfeita entre o aço e o concreto. Alternativamente, pode ser utilizada essa técnica

junto com um modelo de aderência (*bond-slip*) para representar o deslocamento relativo entre as armaduras e o concreto.

Recentemente, Bitencourt Jr et al. (2018) implementaram uma técnica para a representação de armaduras discretas em estruturas de concreto armado, a qual pode ser classificada como uma variação da abordagem de armadura incorporada. Nessa técnica é usado o elemento finito de acoplamento desenvolvido por Bitencourt Jr et al. (2015) para simular o comportamento de barras no concreto armado. Diferentemente da formulação original da técnica de armadura incorporada, o uso dos elementos de acoplamento não aumenta os graus de liberdade no problema global e não precisa de algoritmos para detetar o comprimento de cada elemento de barra nos elementos de concreto.

Para a representação das armaduras utilizou-se neste trabalho a técnica de elementos incorporados com a formulação original, conforme é apresentada no programa DIANA. As barras foram modeladas por meio de elementos finitos lineares incorporadas em elementos bidimensionais e tridimensionais. Nas modelagens assumiu-se que as barras resistiam apenas às tensões axiais em sua direção longitudinal.

### 3.3.2 Modelagem da aderência entre o aço e o concreto

Os modelos de aderência (*bond-slip*) permitem simular o escorregamento relativo entre as barras de aço e o concreto. Em geral, a hipótese de aderência perfeita é válida para a simulação das armaduras, no entanto existem várias aplicações em que é necessária considerar a perda de aderência entre as barras e o concreto. Neste trabalho, os modelos de *bond-slip* são utilizados para modelar a transferência de esforços entre o cabo de protensão não aderido e o concreto.

Os modelos de *bond-slip* são baseados em formulações que relacionam as tensões de cisalhamento e o valor do deslocamento relativo entre o concreto e o aço. Numericamente, o comportamento mecânico do escorregamento pode ser simulado através de elementos de interface de espessura zero. As leis constitutivas da aderência estão baseadas na teoria das deformações totais, onde as forças por unidade de área da interface (em inglês *tractions*<sup>1</sup>) estão em função do deslocamento relativo. Os elementos de interface correlacionam as forças atuantes com o deslocamento relativo entre dois elementos. Para duas dimensões, o vetor de forças por unidade de área  $\mathbf{t}$ , definido nas direções normal e tangencial ( $n, t$ ), pode ser expressado como:

---

<sup>1</sup>O termo *traction* refere-se ao vetor de forças por unidade de área que atua em uma superfície. Não deve ser confundido com o tensor de tensões. Por simplicidade, será usada a palavra *tensão* para referir-se ao termo *traction*.

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_n \\ t_t \end{bmatrix} \quad (3.3.4)$$

da mesma forma, o vetor de deslocamento relativo é definido como:

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u_n \\ \Delta u_t \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

No programa utilizado nesta pesquisa, a relação entre as tensões normais da interface e o deslocamento relativo é assumido como linear elástico. Entretanto a relação entre as tensões tangenciais e o deslocamento relativo na interface é assumido como uma função não linear  $f_t$ , isto é:

$$t_n = k_n \Delta u_n \quad (3.3.6)$$

$$t_t = f_t(\Delta u_t) \quad (3.3.7)$$

Para representar o comportamento do cabo de protensão no concreto foi utilizado um valor alto de rigidez normal ( $k_n = 1000 \text{ N/m}^3$ ). Por outro lado, na literatura, diversos modelos permitem descrever a relação entre as tensões tangenciais ( $t_t$ ) e o deslocamento tangencial relativo  $\Delta u_t$ . No desenvolvimento deste trabalho usou-se o modelo de aderência proposto Dörr (1980).

### 3.3.2.1 Modelo de aderência de Dörr (1980)

Para estabelecer a relação entre as tensões de cisalhamento e o deslocamento tangencial relativo nos cabos de protensão, é utilizado o modelo de função cúbica proposto por Dörr (1980) (Figura 3.16), predefinido no programa DIANA. O modelo descreve uma relação não linear entre as tensões de cisalhamento ( $t_t$ ) e os deslocamentos relativos entre os elementos ( $\Delta u_t$ ) definido através da seguinte expressão:

$$t_t = \begin{cases} c \left[ 5 \left( \frac{\Delta u_t}{\Delta u_t^0} \right) - 4,5 \left( \frac{\Delta u_t}{\Delta u_t^0} \right)^2 + 1,4 \left( \frac{\Delta u_t}{\Delta u_t^0} \right)^3 \right] & \text{se } 0 \leq \Delta u_t \leq \Delta u_t^0 \\ 1,9c & \text{se } \Delta u_t \geq \Delta u_t^0 \end{cases} \quad (3.3.8)$$

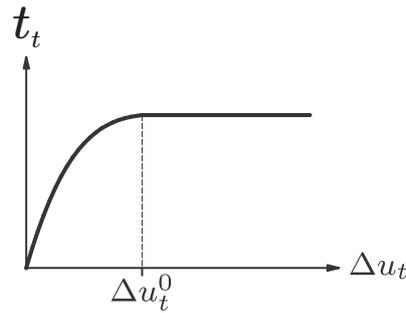


Figura 3.16: Modelo de aderência (*bond-slip*) proposto por Dörr (1980).

onde  $c$  representa uma constante e  $\Delta u_t^0$  corresponde ao valor de deslocamento relativo no qual é atingido o valor máximo de tensão de cisalhamento. Para a modelagem da aderência entre o concreto armado e as armaduras passivas são recomendados os valores de  $c = f_t$  (resistência à tração) e  $\Delta u_t^0 = 0,06$  mm (DIANA TNO, 2012). Já no caso de cabos de protensão não aderidos, são recomendados os valores de  $c = 2 \times 10^{-5}$  MPa e  $\Delta u_t^0 = 100$  mm (DIANA TNO, 2012). Neste trabalho foram utilizados esses valores nos modelos com protensão.

### 3.4 Técnicas de solução e critérios de convergência numérica

Nesta seção é revisado o procedimento incremental iterativo para análises de estruturas não lineares. A formulação da análise não linear pelo método dos elementos finitos baseia-se no seguinte sistema de equações:

$$[\mathbf{K}]\{U\} = \{\mathbf{F}_{ext}\} - \{\mathbf{F}_{int}\} \quad (3.4.1)$$

onde:

$[\mathbf{K}]$  é a matriz global de rigidez

$\{U\}$  é o vetor de deslocamentos incremental

$\{\mathbf{F}_{ext}\}$  é o vetor de forças externas

$\{\mathbf{F}_{int}\}$  é o vetor de forças internas

Para análises não lineares, a matriz  $[\mathbf{K}]$  e o vetor  $\{\mathbf{F}_{int}\}$  dependem dos deslocamentos da estrutura. O equilíbrio pode ser atingido através da aplicação de pequenos incrementos de força ou deslocamento. A partir do vetor de deslocamentos globais conhecido do incremento  $n$ , o deslocamento incremental é calculado na seguinte forma:

$$[\mathbf{K}]\{\Delta \mathbf{u}\} = \{\Delta \mathbf{F}_{ext}\} + \{\mathbf{F}_{ext,n}\} - \{\mathbf{F}_{int}\} \quad (3.4.2)$$

onde o vetor total da carga externa é decomposto em uma contribuição  $\{\mathbf{F}_{ext,n}\}$ , que já está presente no começo do passo de carga considerado e uma carga incremental  $\{\mathbf{F}_{ext}\}$ .

Num procedimento de solução iterativo incremental, uma primeira estimativa para deslocamentos incrementais é feita através da seguinte expressão:

$$\{\Delta \mathbf{u}_1\} = [\mathbf{K}]^{-1}(\{\Delta \mathbf{F}_{ext}\} + \{\mathbf{F}_{ext,n}\} - \{\mathbf{F}_{int,0}\}) \quad (3.4.3)$$

onde:

$\{\Delta \mathbf{u}_1\}$  é a estimativa da primeira iteração para o vetor de deslocamentos incrementais.

$\{\mathbf{F}_{int,0}\}$  é o vetor de forças internas calculado usando as tensões no começo de passo de carga ou no final do passo de carga prévio.

A partir do vetor  $\{\Delta \mathbf{u}_1\}$ , uma primeira estimativa para a deformação incremental ( $\{\Delta \varepsilon_1\}$ ) pode ser calculada, e as tensões incrementais ( $\Delta \sigma_1$ ) podem ser avaliadas através de leis constitutivas. Em uma formulação do método dos elementos finitos, as forças internas depois da primeira interação são dadas por:

$$\{\mathbf{F}_{int,1}\} = \int_V [\mathbf{B}]^T (\{\sigma_0\} + \{\Delta \sigma_1\}) dV \quad (3.4.4)$$

onde:

$[\mathbf{B}]$  é a matriz que relaciona o campo de deformações específicas do elemento com deslocamentos nodais do elemento.

$\{\Delta \sigma_0\}$  é a tensão na configuração de convergência prévia.

Em geral, as forças equilibradas  $\{\mathbf{F}_{int,1}\}$  não estão em equilíbrio com as cargas externas  $\{\Delta \mathbf{F}_{ext}\} + \{\mathbf{F}_{ext,n}\}$ , sendo necessário um processo iterativo para atingir o equilíbrio.

### 3.4.1 Métodos iterativos para análise não linear

O método iterativo de Newton-Raphson caracteriza-se pelo cálculo da matriz de rigidez em cada iteração, como pode ser visto na Figura 3.17, através da mudança de inclinação de cada uma das retas para atingir convergência. A desvantagem deste método é o custo computacional para avaliar a matriz de rigidez a cada iteração, sendo algumas vezes desnecessário.

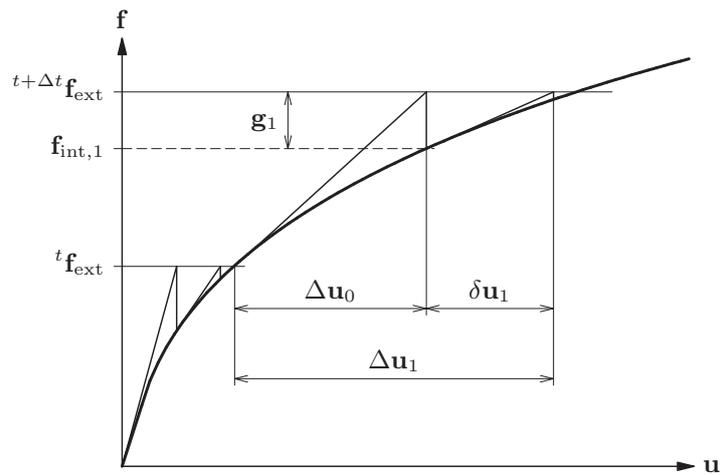


Figura 3.17: Newton-Raphson regular.

Diferentemente do método original, no método de Newton Raphson Modificado, a matriz de rigidez é calculada apenas uma vez no começo do passo de carga. A Figura 3.18 representa o método iterativo de Newton-Raphson Modificado. Fazendo uma comparação com a Figura 3.17, observa-se que a convergência é mais lenta do que no método original. Porém, cada iteração tem um custo computacional menor, já que só é necessário calcular a matriz de rigidez no começo do passo de carga.

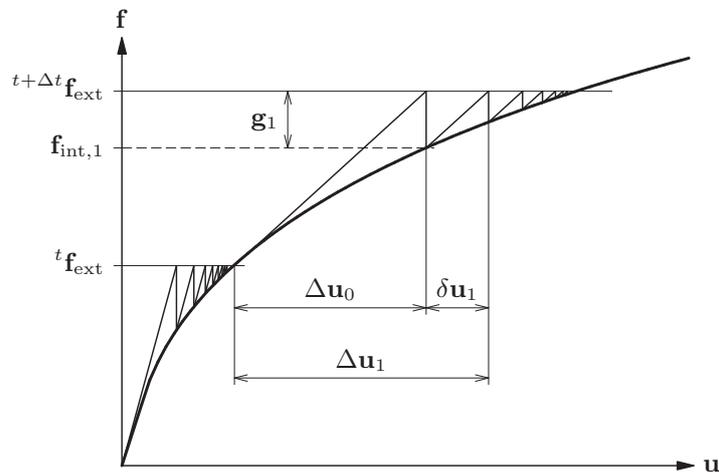


Figura 3.18: Newton-Raphson Modificado.

No método Secante, a matriz de rigidez tangente é calculada utilizando a direção secante entre duas soluções consecutivas prévias, permitindo assim uma atualização da matriz de rigidez em cada iteração, com menor custo computacional do que o método Newton-Raphson original. A Figura 3.19 representa graficamente a convergência desse método.

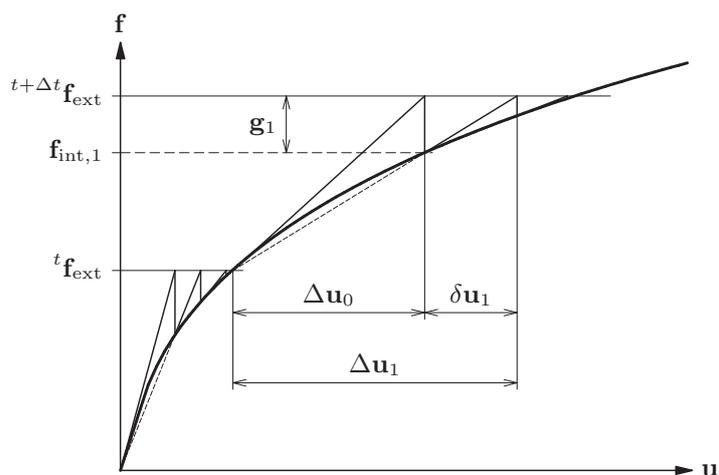


Figura 3.19: Secante (Quasi-Newton).

### 3.4.2 Controle de força *versus* deslocamento

Nas análises incrementais não lineares, a carga externa ( $\mathbf{F}_{ext}$ ) pode ser aplicada a partir de incrementos de força ou deslocamento. Matematicamente, ambos os procedimentos são equivalentes, mas na prática o controle pelo deslocamento pode ser mais estável do que o controle por força. Para ilustrar essa ideia, Kim (2014) apresenta como exemplo a curva de carga *versus* deslocamento da Figura 3.20. Nessa curva, a carga atinge seu valor máximo no ponto  $C$ . Se o controle de força for utilizado, não é fácil atingir o ponto  $D$  porque a estrutura alcança o equilíbrio no ponto  $B$  com a força  $F_B$ . Porém, no procedimento de controle de deslocamento seria possível atingir o ponto  $D$  através de um aumento gradual de incrementos e encontrando a força de reação.

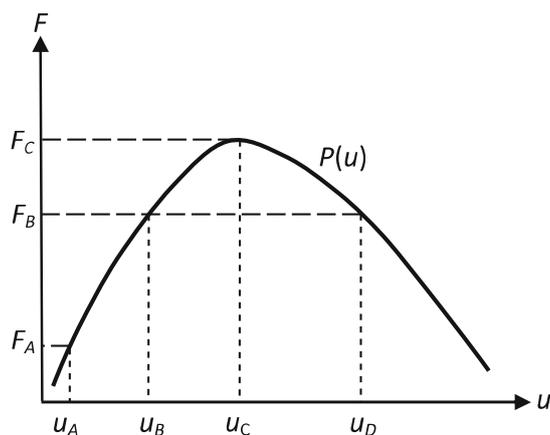


Figura 3.20: Curva de carga *versus* deslocamento. Adaptado de Kim (2014).

### 3.4.3 Critérios de convergência

Os critérios de convergência determinam quando o procedimento iterativo atinge o equilíbrio e conseqüentemente o fim do processo de iteração. O procedimento iterativo pode ser finalizado no caso em que seja alcançado o número máximo de iterações ou obviamente, no caso de divergência. De acordo com Claus (2009), o valor da tolerância da convergência deve ser selecionado de forma cuidadosa, já que valores muito grandes podem diminuir a precisão da solução e levar a resultados pouco confiáveis. Por outro lado, valores de normas muito restritos podem aumentar enormemente o tempo de processamento. Os critérios e os valores das normas escolhidos dependem do tipo de análise e da experiência do usuário.

Nas modelagens realizadas neste trabalho foram utilizados os seguintes critérios:

(i) Critério de força: define a convergência em função do vetor de cargas desequilibradas,  $\mathbf{g}$ . Para definir a convergência, o valor de tolerância,  $\xi$ , é calculado a partir da relação da norma Euclidiana do vetor de forças desequilibradas da iteração  $i$  é seu valor inicial  $\mathbf{g}_0$ .

$$\frac{\sqrt{\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_i}}{\sqrt{\mathbf{g}_0^T \mathbf{g}_0}} \leq \xi \quad (3.4.5)$$

(ii) Critério de deslocamento: baseia-se no mesmo princípio da norma de força.

$$\frac{\sqrt{\delta \mathbf{u}_i^T \delta \mathbf{u}_i}}{\sqrt{\Delta \mathbf{u}_0^T \Delta \mathbf{u}_0}} \leq \xi \quad (3.4.6)$$

(iii) Critério de energia: está em função das forças internas e dos incrementos de deslocamento.

$$\left\| \frac{\delta \mathbf{u}_i^T (\mathbf{F}_{int,i+1} + \mathbf{F}_{int,i})}{\Delta \mathbf{u}_0^T (\mathbf{F}_{int,1} + \mathbf{F}_{int,0})} \right\| \leq \xi \quad (3.4.7)$$

Os valores recomendados no manual no programa DIANA, para as normas de força, deslocamento e energia são  $10^{-2}$ ,  $10^{-2}$  e  $10^{-4}$ , respectivamente.

### 3.4.4 Método *line-search*

O algoritmo de otimização *line-search* permite encontrar mais rápido a convergência em cada passo de carga ajustando o valor da predição inicial. O método está baseado no Princípio de Energia Mínima Potencial e pode ser representado graficamente por meio de um campo de linhas equipotenciais, como se mostra na Figura 3.21. Sendo o equilíbrio (solução final) o ponto

de valor de mínima energia potencial, o método *line-search* consegue encontrar um bom valor de predição inicial por meio do produto escalar dos vetores de incremento de deslocamento ( $\Delta\mathbf{u}$ ) e de forças desequilibradas ( $\mathbf{g}$ ), como se mostra na seguinte expressão:

$$f(c) = \Delta\mathbf{u}^T \mathbf{g}(\mathbf{u}_i + c\Delta\mathbf{u}) = 0 \quad (3.4.8)$$

onde o parâmetro  $c$  corresponde ao valor pelo qual deve ser multiplicado o vetor de incremento de deslocamento na direção perpendicular ao ponto de equilíbrio.

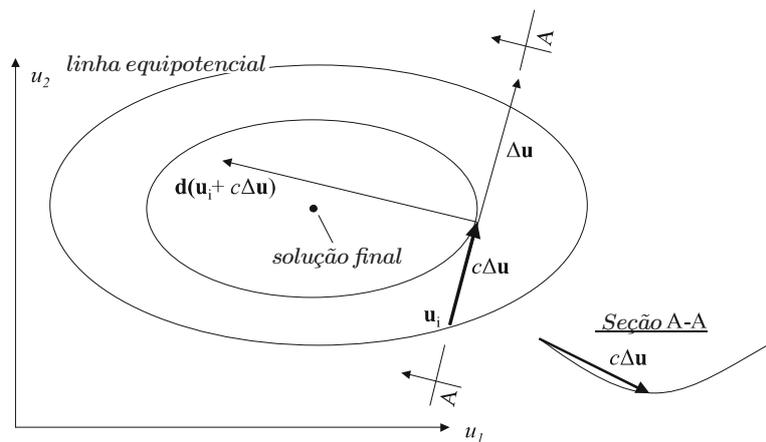


Figura 3.21: Método de *line-search*. Adaptado de Rust (2016).

### 3.5 Pesquisas numéricas

Neste item são apresentados alguns trabalhos sobre simulações numéricas utilizando elementos finitos, aplicadas ao estudo da punção e da modelagem de estruturas protendidas. Como será visto, o número de pesquisas sobre punção de lajes protendidas através de análise numérica é bastante reduzido. A maioria das pesquisas encontradas na literatura limitam o problema da punção à lajes com armadura passiva e com armadura de cisalhamento.

#### 3.5.1 Pesquisas relacionadas à punção em lajes de concreto armado

As primeiras pesquisas sobre punção através de análise numérica foram baseadas no uso de elementos bidimensionais axissimétricos. A grande vantagem desse tipo de análise era a utilização de um menor número de elementos em comparação a uma análise tridimensional, o que representava menor custo computacional. Dentre esses tipos de modelagens destaca-se o trabalho realizado por Menétrey (1994). Nessa pesquisa, o autor referido desenvolveu

um modelo constitutivo para o concreto (Menétrey-William), o qual foi implementado em um programa de elementos finitos. Apesar dos bons resultados obtidos, Menétrey (1994) concluiu que as simulações não conseguiam representar o fenômeno da punção suficientemente bem nos casos que não possuíam simetria axial, como por exemplo no uso de armaduras longitudinais ortogonais. Devido a isso e à evolução das ferramentas computacionais, nas últimas décadas as pesquisas têm sido desenvolvidas utilizando elementos tridimensionais.

No trabalho desenvolvido por Ožbolt et al. (2000), foi utilizado o programa *MASA* desenvolvido pela Universidade de Stuttgart. O programa era baseado na formulação de Microplanos de Bažant e Prat (1988) e no modelo de fissuração distribuída. Nas modelagens, utilizou-se elementos sólidos de 8 nós, com um refinamento da malha na zona junto ao pilar. Devido às condições de simetria, apenas um quarto da laje foi simulado. As armaduras longitudinais foram introduzidas como elementos tipo barra, com comportamento elasto-plástico. Baseados na comparação dos resultados experimentais e numéricos, Ožbolt et al. (2000) concluíram que os modelos constitutivos adotados puderam prever de forma adequada o comportamento de uma laje lisa submetida à punção. O modelo conseguiu capturar a formação do cone de punção obtido no ensaio experimental (ver Figura 3.22).

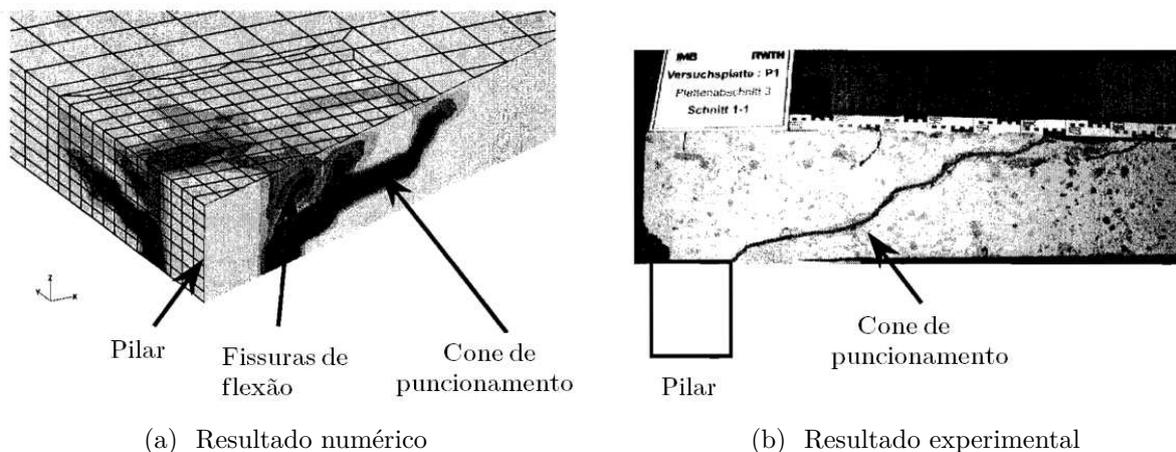


Figura 3.22: Comparação do panorama de fissuração numérico *versus* experimental obtido por Ožbolt et al. (2000).

Utilizando uma metodologia similar, Staller (2001) realizou a modelagem de lajes de concreto de alta resistência utilizando o programa *MARC* (versão K7.3.2). Na representação do concreto foi adotado um modelo de fissura distribuída fixa e um fator de cisalhamento variável em função da deformação de fissura. A carga de ruptura na análise numérica foi 15% superior a que se obteve no ensaio. A partir da calibração dos modelos, os pesquisadores mencionados realizaram estudos paramétricos para estudar a influência de alguns parâmetros na resistência

à punção. Foi concluído por Ožbolt et al. (2000) e Staller (2001) que a diminuição da altura útil da laje levou a um decréscimo da capacidade nominal ao cisalhamento. Também observou-se uma grande influência da energia de fratura do concreto, sendo o aumento desta proporcional à carga resistida pela laje.

Mais recentemente, destacam-se as análises numéricas desenvolvidas por Afonso (2010). As modelagens foram realizadas no programa DIANA (versão 9.3) utilizando os modelos de fissuração distribuída fixa e multi-fixa. As lajes simuladas correspondem às lajes ensaiadas experimentalmente pelo mesmo autor. Como as lajes eram submetidas a um carregamento excêntrico, não foi utilizado o recurso de simetria na elaboração da malha de elementos finitos. Diferentemente dos dois trabalhos citados anteriormente, na discretização das lajes foram utilizados elementos hexaédricos de 20 nós. Afonso (2010) concluiu que a reprodução do fenômeno da punção é fortemente influenciada pelo valor do fator de retenção ao cisalhamento. Ambos os modelos de fissuração conseguiram reproduzir adequadamente as repostas estruturais em termos de deformação, capacidade de carga, fissuração no concreto e deformações na armadura transversal.

Os trabalhos de Inácio (2010) e Mamede et al. (2012), foram realizados no programa ATENA (versão 5). Nas modelagens, foram analisadas lajes sem armadura de cisalhamento utilizando elementos hexaédricos de oito nós. Inicialmente, Inácio (2010) analisou a influência dos modelos de fissuração fixa e rotacional, verificando nas análises realizadas que o modelo fixo atingiu valores superiores em comparação com o modelo rotacional, porém em ambos casos com boas aproximações dos ensaios experimentais. Em relação à modelagem da aderência entre o concreto e o aço, o autor concluiu que assumir uma aderência perfeita é válido, sendo desnecessária a utilização de um modelo de *bond-slip* no caso da armadura passiva. Finalmente, o autor conclui também que o aumento da energia de fratura levou os modelos a cargas e deslocamentos maiores. Entre as lajes simuladas numericamente, encontrava-se a laje AR2 ensaiada por Ramos (2003).

No trabalho desenvolvido por Mamede et al. (2012) realizou-se um estudo paramétrico para avaliar a influência da taxa de armadura, resistência do concreto, espessura da laje e dimensão do pilar. De forma geral, o estudo permitiu concluir que houve um crescimento das cargas de ruptura à medida que se aumentaram os valores das variáveis mencionadas. No caso da taxa de armadura longitudinal, foi encontrado que a carga à punção era proporcional à raiz cúbica desta ( $\sqrt[3]{\rho}$ ). Em relação à resistência do concreto, as previsões numéricas de carga última resultaram em um valor proporcional a  $f_c^{0,41}$ .

Em outro trabalho (MAMEDE et al., 2014), esses autores utilizaram a mesma metodo-

logia para a simulação de lajes submetidas à força axial, onde a compressão no plano da laje era representada como um carregamento externo. Depois da validação dos modelos por meio da comparação com ensaios experimentais, foi realizado um estudo paramétrico mudando as propriedades geométricas da laje, a resistência do concreto e a forças axiais aplicada ao modelo. Mamede et al. (2014) concluíram que a aplicação da compressão levou a uma diminuição da rotação da laje, e a um aumento da sua rigidez e da sua capacidade de carga.

Para finalizar a revisão sobre a modelagem de lajes de concreto sem protensão, são destacados os trabalhos realizados pelos autores Shu et al. (2015), Shu et al. (2016), Shu et al. (2017). As pesquisas mencionadas fazem parte da tese de doutorado desenvolvida por Shu (2017), na qual o autor propõe uma metodologia para avaliação de lajes de concreto armado. Nas análises numéricas, Shu (2017) utilizou o programa DIANA (versão 9.4.4) para a realização de diversos estudos paramétricos. Os modelos constitutivos adotados foram avaliados através da modelagem de ensaios encontrados na literatura. Algumas das análises realizadas são apresentadas na Figura 3.23.

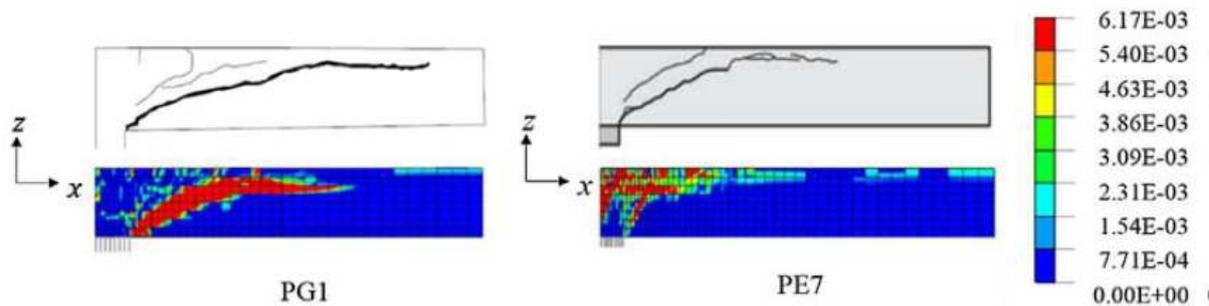


Figura 3.23: Panorama de fissuração ao longo da espessura da laje representado através das deformações totais principais, comparação experimental e numérica. Shu et al. (2017).

O autor concluiu que a energia de fratura tem uma grande influência nos modelos de fissuras de Deformações Totais. No caso da abordagem de fissura fixa, os resultados são influenciados também pelo fator retenção ao cisalhamento, por isso que autor recomenda o uso do modelo rotacional. Além disso, Shu (2017) conclui que pode ser assumida uma aderência perfeita entre a armadura passiva e o concreto. Finalmente, o autor recomenda incluir o efeito do confinamento lateral na resistência à compressão do concreto.

### 3.5.2 Pesquisas relacionadas à modelagem de estruturas protendidas

Antes de apresentar as pesquisas relacionadas com a modelagem de lajes protendidas, é realizada primeiro uma revisão sobre a modelagem de cabos de protensão. Vecchio et al. (2006)

desenvolveu um modelo constitutivo de aderência para representar o atrito entre os cabos não aderentes e o concreto. O modelo foi incorporado em um algoritmo para análise não linear baseada em elementos finitos para estudar numericamente o cisalhamento em vigas protendidas. Nas simulações, os cabos eram modelados através de elementos tipo barra (Figura 3.24a).

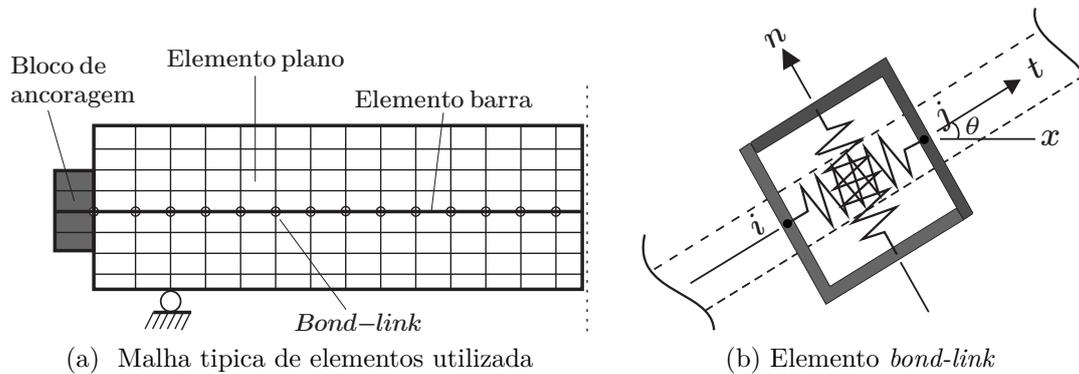


Figura 3.24: Modelagem de vigas protendidas realizada por Vecchio et al. (2006).

Os nós dos cabos eram conectados ao concreto através de elementos *bond-link* equivalentes ao comportamento de duas molas ortogonais (Figura 3.24b). A rigidez na direção tangencial ao cabo, representava a aderência e as tensões de cisalhamento entre o cabo e o concreto. Na outra direção utilizou-se um valor de rigidez alto, com o objetivo de restringir os deslocamentos na direção normal entre o cabo e o concreto. Para modelar as forças de compressão da protensão nas ancoragens, era utilizado um gradiente de temperatura. O modelo proposto foi calibrado através da modelagem de algumas vigas do programa experimental de Gauvreau (1992) e Kordina et al. (1986), obtendo bons resultados. Vecchio et al. (2006) concluíam que a modelagem das perdas por atrito e o ganho de força nos cabos (devido ao incremento da carga externa) tiveram grande influência no comportamento das vigas simuladas.

Ellobody e Bailey (2008) estudaram o comportamento de lajes em uma direção com protensão não aderente através de ensaios experimentais e simulações numéricas. As modelagens foram realizadas no programa *Abaqus*. Para a modelagem da aderência entre o cabo e o concreto, os autores utilizaram elementos de interface disponíveis no programa mencionado. Os resultados numéricos foram calibrados com os experimentais e posteriormente conduziu-se uma análise paramétrica mudando as propriedades geométricas da laje, a resistência do concreto e a força aplicada nos cabos.

Huang et al. (2010) e Kang et al. (2015) também utilizaram o programa *Abaqus* para a modelagem de estruturas com protensão, aderente e não aderente, submetidas a carregamento estático e dinâmico. Os autores desenvolveram duas abordagens para a simulação do

cabo inserido no concreto. Na primeira, eram utilizados elementos de contato, disponíveis no *Abaqus*, utilizando um procedimento similar ao proposto por Ellobody e Bailey (2008). Este método permitia a modelagem da protensão aderente e não aderente, porém tinha alto custo computacional. Na segunda abordagem, exibida na Figura 3.25, era utilizado um método mais simplificado. A interação entre o cabo e o concreto era modelada através de elementos de mola, denominados como *springa* no programa *Abaqus*. O elemento mencionado representava o comportamento de uma mola axial entre dois nós, permitindo a rotação entre eles. Os elementos de mola eram conectados a um cabo virtual de baixa rigidez que transmitia as cargas da protensão ao concreto. Nas ancoragens eram utilizadas conexões de nó mestre-escravo para simular a transmissão da força axial da protensão. Essa segunda abordagem somente podia ser aplicada para a simulação de protensão com cabos não aderentes.

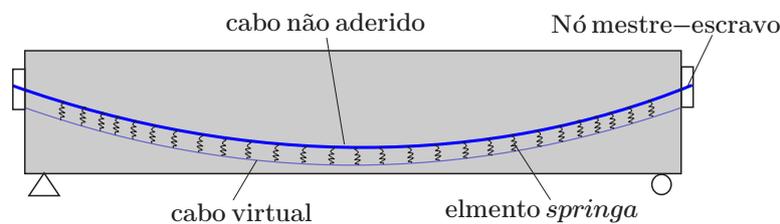


Figura 3.25: Metodologia para a simulação de viga protendida utilizado o elemento *springa* do programa *Abaqus*. Adaptado de Huang et al. (2010).

As metodologias propostas por Huang et al. (2010) e Kang et al. (2015) foram implementadas na simulação de vários ensaios experimentais, incluindo ligações de laje-pilar, como a ilustrada na Figura 3.26. Em geral, um bom ajuste foi encontrado entre os resultados experimentais e numéricos.

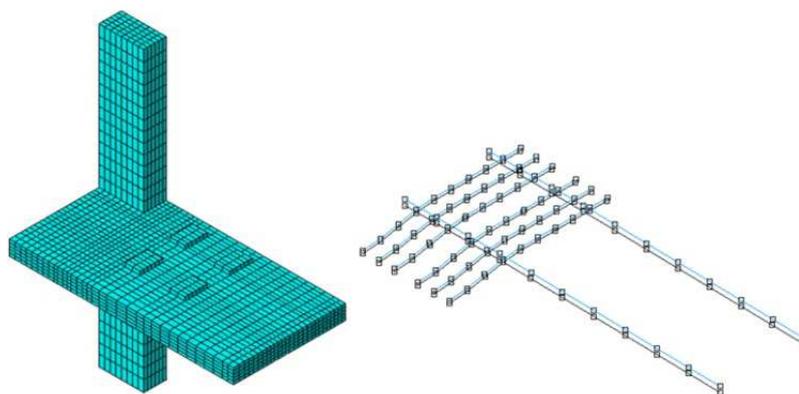


Figura 3.26: Simulação de ligação laje pilar protendida com cabo não aderente. Huang et al. (2010).

## Capítulo 4

### Simulação numérica de ensaios experimentais

#### 4.1 Considerações gerais

Neste capítulo são apresentadas algumas aplicações de análises numéricas não lineares em estruturas de concreto armado e protendido, com o objetivo de calibrar os modelos constitutivos apresentados no Capítulo 3. As modelagens realizadas foram desenvolvidas no programa de elementos finitos DIANA (DISplacement ANALyzer) versão 9.4.4, comercializado pela TNO Building and Construction Research da Holanda.

A Tabela 4.1 apresenta os ensaios experimentais, encontrados na literatura, simulados nessa pesquisa que permitiram avaliar o comportamento numérico dos modelos constitutivos adotados. Os ensaios foram escolhidos pela informação detalhada apresentada nas propriedades físicas dos materiais utilizados e nos resultados obtidos, permitindo assim fazer uma melhor comparação das cargas, deslocamentos, tensões e deformações. Em alguns casos os ensaios já tinham sido simulados por outros autores obtendo bons resultados.

A primeira série de modelagens (i) teve como objetivo apresentar a metodologia utilizada para simular numericamente a protensão com cabos não aderidos. Na segunda série (ii) foram realizadas as modelagens das lajes de concreto armado que tiveram ruptura por punção. Nessa série realizou-se também uma análise dos parâmetros relacionados com a malha, os materiais e os métodos iterativos oferecidos no programa para a resolução das equações de equilíbrio não lineares. Tendo como base o procedimento adotado nas séries (i) e (ii), foram modeladas as lajes protendidas com ruptura por punção da série (iii).

Tabela 4.1: Resumo dos ensaios experimentais modelados

	<b>Ensaio experimental</b>	<b>Observações</b>
(i)	S1 Gauvreau (1992)	Vigas de concreto protendido com ruptura por flexão
	B8 Hussien et al. (2012)	
(ii)	AR2 Ramos (2003)	Lajes de concreto armado com ruptura por punção
	M1 Melges (2001)	
(iii)	AR10 Ramos (2003)	Lajes de concreto protendido com ruptura por punção
	M4 Melges (2001)	

O procedimento utilizado nas modelagens foi dividido em três partes: (a) a criação da malha para representar a geometria da estrutura, o que inclui a seleção do elemento finito e a dimensão dos elementos adequado, (b) adoção dos modelos constitutivos dos materiais e (c) a escolha dos parâmetros de convergência e solução dos sistemas de equações. Nas seguintes seções serão apresentadas cada uma dessas etapas nos modelos realizados.

## 4.2 Vigas de concreto protendido com ruptura por flexão

### 4.2.1 Viga S1 (Gauvreau, 1992)

A primeira viga a ser apresentada corresponde à S1, testada por Gauvreau (1992), mostrada na Figura 4.1. A viga tinha seção I e um vão livre entre apoios de 10 metros. O esquema de ensaio consistiu na aplicação de uma única carga estática no meio do vão da viga através de um atuador hidráulico com controle de deslocamento. De acordo com as observações do ensaio, a viga teve ruptura por flexão apresentando várias fissuras na região central da viga junto com o esmagamento da aba superior no ponto de aplicação da carga. Como foi mencionado no Capítulo 3, a modelagem numérica da viga S1 já foi realizada por Vecchio et al. (2006), obtendo bons resultados.

Para realizar a protensão da viga foi utilizado um único cabo, não aderente, de 14 fios de 7 mm de diâmetro, o qual foi tensionado por uma única extremidade com uma força de 605 kN. O traçado adotado para o cabo foi parabólico como poder ser visto na Figura 4.1b. A

armadura longitudinal utilizada na viga é mostrada na Figura 4.1c e as propriedades mecânicas dos aços usados nas armaduras e do concreto são mostradas na Tabela 4.2.

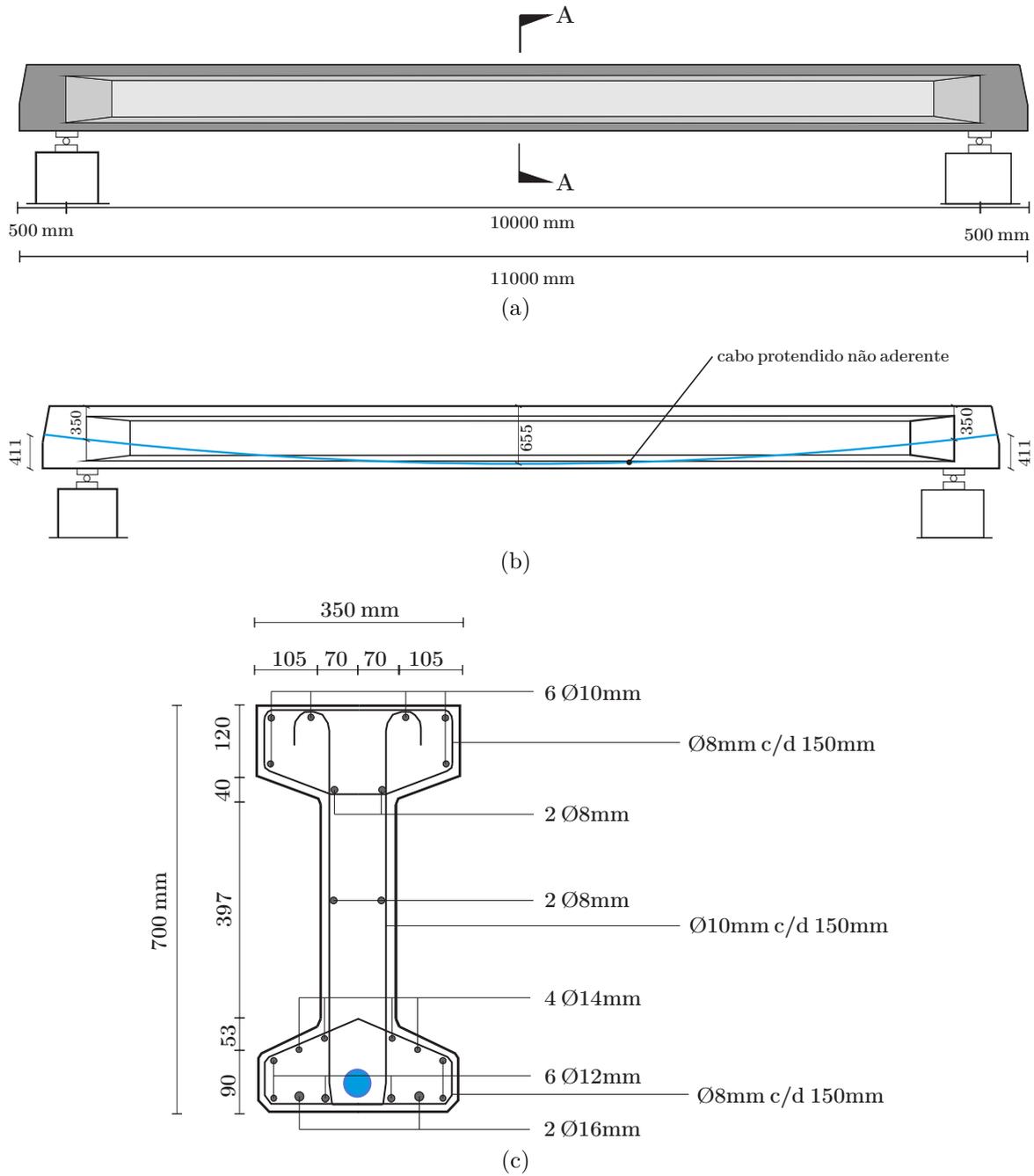


Figura 4.1: Propriedades geométricas da viga S1 a) comprimento do vão b) traçado do cabo c) seção transversal e armadura longitudinal.

Tabela 4.2: Propriedades mecânicas dos materiais utilizados na viga S1, Gauvreau (1992).

Propriedades do aço da armadura passiva:					Propriedades do aço de protensão:				
Diâmetro (mm)	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$E_s$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)	$f_{st}$ (MPa)	Número de fios	$A_p$ (mm <sup>2</sup> )	$E_p$ (MPa)	$f_{py}$ (MPa)	$f_{pt}$ (MPa)
6	28,3	201000	628	657	14	539	206000	1557	1723
8	50,3	202000	533	702					
10	78,5	199200	567	701					
12	113	204000	529	642					
14	154	194000	498	617					

Propriedades do concreto:		
$f_{cu}$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)
75,3	60,4	6,2

**Notação:**  
 $A_s$  : área das barras  
 $E_s$  : módulo de elasticidade do aço  
 $f_{sy}$  : tensão de escoamento do aço  
 $f_{st}$  : tensão de ruptura do aço  
 $A_p$  : área do cabo de protensão  
 $E_p$  : módulo de elasticidade do aço de protensão  
 $f_{py}$  : tensão de escoamento do aço de protensão  
 $f_{pt}$  : tensão de ruptura do aço de protensão  
 $f_{cu}$  : resistência à compressão corpo de prova cúbico  
 $f_c$  : resistência à compressão corpo de prova cilíndrico  
 $f_{ct}$  : resistência à tração do concreto

#### 4.2.1.1 Modelagem numérica

A simulação foi realizada assumindo um estado plano de tensões no comportamento da viga, usando elementos quadriláteros de 8 nós (denominados no programa DIANA como CQ16M). A malha de elementos finitos utilizada é apresentada na Figura 4.2. Na modelagem foram incluídas as placas dos apoios, a placa de aplicação de carga e duas placas para simular as ancoragens do cabo em cada extremidade da viga. Na discretização da malha foi levado em consideração a mudança de espessura da seção transversal das abas e da alma da viga. Com o objetivo de representar melhor o comportamento experimental, foram criados elementos de interfaces (CL12I) entre o concreto e as placas de apoio e aplicação de carga, considerando uma tensão de tração nula. A discretização das armaduras passivas e ativas foi realizada utilizando elementos tipo barra, incorporadas na malha de elementos (*embedded reinforcement*). Porém no caso da armadura ativa foi utilizada o modelo de aderência (*bond-slip*) de Dörr (1980) para modelar o atrito entre o cabo e o concreto.

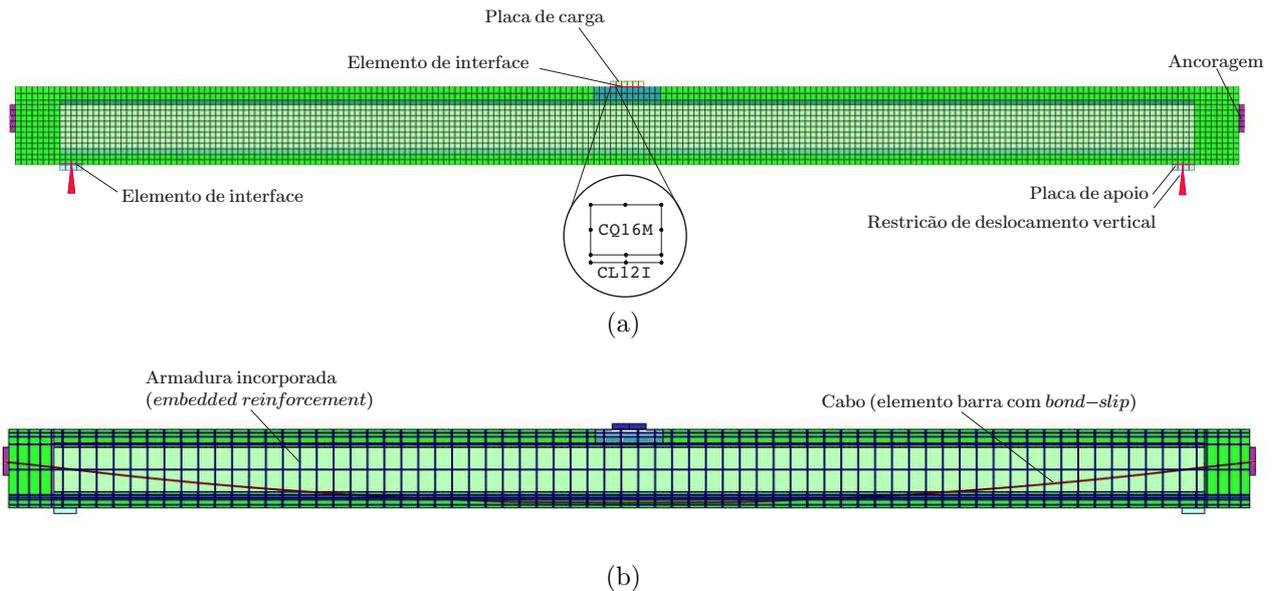


Figura 4.2: Malha de elementos finitos utilizada para a viga S1 de Gauvreau (1992) a) Discretização, tipos de elementos e condições de contorno b) Discretização das armaduras passiva e ativa.

No programa DIANA, os elementos da armadura com formulação *bond-slip* são conectados através de elementos de interface ao elemento de concreto. Nas modelagens realizadas neste trabalho, unicamente as tensões normais a longo dos cabos de protensão foram consideradas. Para este caso foram criados elementos de interface tipo barra (*truss*) com três pontos de integração de Gauss, denominados no programa como CL9TR, a longo do comprimento do cabo. É importante mencionar que os elementos de interface eram gerados automaticamente no pré-processamento do programa.

Como já foi mencionado no Capítulo 3, as propriedades mecânicas da interface foram definidas através do deslocamento relativo e das tensões tangenciais (de cisalhamento) ao longo do elemento. As tensões calculadas são multiplicadas pelo perímetro e integradas sobre o comprimento do elemento. As forças nos nós da interface (as quais são usadas no equilíbrio total do modelo) são calculadas a partir da força distribuída ao longo do elemento. Na modelagem da protensão as propriedades do modelo de *bond-slip* são definidas para calcular as perdas pelo atrito entre o cabo e o concreto. Na direção normal um valor alto de rigidez é assumido, restringindo assim o deslocamento do cabo nessa direção.

O modelo constitutivo do concreto adotado está baseado na revisão apresentada no Capítulo 3. A partir das recomendações encontradas em Rots et al. (2010), Červenka et al. (2012), Hendriks et al. (2016) e Shu et al. (2016) foram estabelecidas as propriedades apresentadas na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Propriedades do concreto utilizada na modelagem da viga S1.

Parâmetro	Valor adotado	Observações
Modulo de elasticidade ( $E_c$ )	41937,3 MPa	Calculado de acordo com equação Červenka et al. (2012) <sup>1</sup>
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,2	
Modelo de Fissuração	Modelo de Deformações Totais de fissura Fixas	
Curva de amolecimento à tração ( $f_t$ )	Hordrijk (1991)	
Resistência à tração	6,2 MPa	Determinado experimentalmente
Energia de fratura à tração ( $G_f$ )	152 N/m	Calculado de acordo com CEB-FIP MC2010
Resistência à compressão (corpo de prova cilíndrico) ( $f_c$ )	60,4 MPa	Determinado experimentalmente
Curva de compressão	Modelo Parabólico Feenstra (1993)	Recomendado por Hendriks et al. (2016)
Energia de fratura à compressão ( $G_c$ )	39000 N/m	$G_c = 250G_f$
Comportamento ao cisalhamento	Retenção ao cisalhamento variável	
Redução da resistência à compressão devido à fissuração lateral	Modelo de Vecchio e Collins (1993)	
Aumento da resistência à compressão devido ao confinamento	Modelo de Selby e Vecchio (1997)	
Redução do coeficiente de Poisson após fissuração	Incluído	

$$(1) E_c = \left( 6000 - 15,5 \frac{f_c}{0,85} \right) \sqrt{\frac{f_c}{0,85}} \quad \text{com } f_c \text{ em MPa}$$

Nos elementos próximos à placa de aplicação de carga adotou-se para o concreto um comportamento elasto-plástico perfeito, com o objetivo de simular o confinamento gerado pelos estribos na aba superior. Dessa forma a viga teve um ganho de ductilidade e foi evitada a ruptura por esmagamento nos primeiros passos de carga. Por fim, o comportamento do aço das armaduras passivas e ativas foi modelado com o critério de ruptura de von Mises com endurecimento, calculado através das curvas experimentais dos corpos de prova ensaiados.

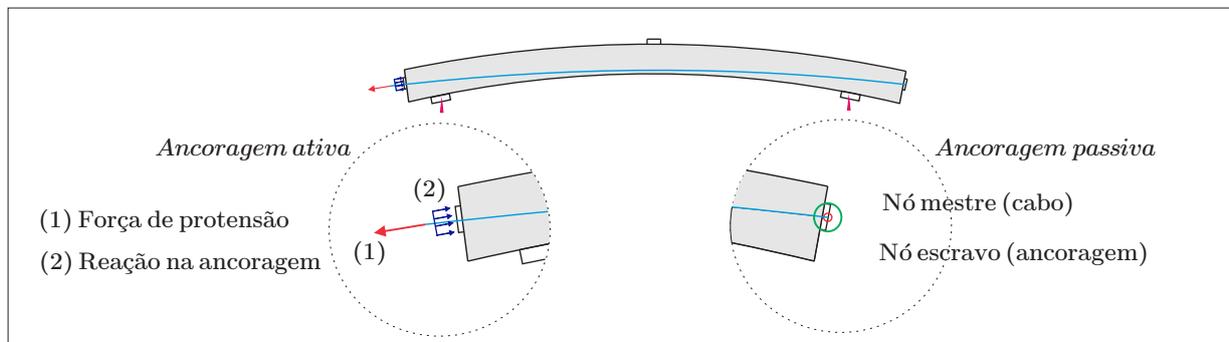
Seguindo a recomendação de Vecchio et al. (2006) a análise numérica foi dividida em duas etapas. Na primeira era aplicada o caso de carga da protensão e na segunda era aplicado a carga incremental do ensaio. Numericamente, as duas etapas foram simuladas no modelo como se explica a seguir:

**Etapa (i):** era aplicada a força efetiva de protensão na extremidade do cabo e da reação de compressão na ancoragem ativa, representada através de uma carga distribuída calculada.

Entretanto, na ancoragem passiva era criada uma conexão de nó mestre-escravo entre o nó da extremidade do cabo e o nó mais próximo à ancoragem que igualava as traslações nos dois nós, conforme é ilustrado na Figura 4.3a.

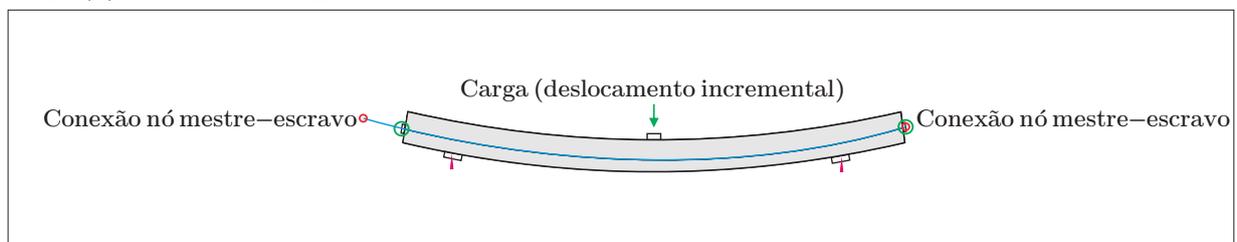
**Etapa (ii):** Na ancoragem ativa eram removidas as cargas da protensão e criava-se conexões de nó mestre-escravo entre o nó da extremidade do cabo e o nó mais próximo à ancoragem. Ao mesmo tempo aplicava-se o carregamento externo incremental na placa de carga (ver Figura 4.3b). Desta forma a modelagem considerava o aumento de força nos cabos de protensão devido às deformações provocadas pela carga do ensaio. No caso do modelo da viga S1, foi utilizada uma aplicação de carga por controle de deslocamento com um passo de 2 mm.

Etapa (i): Aplicação da protensão



(a)

Etapa (ii): Aplicação da carga de ensaio



(b)

Figura 4.3: Aplicação de carregamentos e conexões de nó mestre-escravo utilizados nas duas etapas para a viga S1.

Em relação à técnica de solução e os parâmetros de convergência, utilizou-se o processo iterativo Quasi-Newton (Secante) com formulação BFGS junto com a técnica *line-search*. Foram utilizadas as normas de deslocamento e energia com os valores de  $10^{-2}$  e  $10^{-4}$ , respectivamente e um número máximo de 400 iterações. A análise numérica era finalizada uma vez que atingido o número máximo de iterações, nesse ponto eram verificadas as tensões máximas alcançadas pelos materiais e o panorama de fissuração no último passo de carga convergido para identificar o tipo de ruptura.

#### 4.2.1.2 Resultados obtidos da análise numérica

Na Figura 4.4 são mostrados os resultados obtidos após a aplicação da protensão na viga S1. O deslocamento relativo entre o concreto e o cabo de protensão, mostrado na Figura 4.4a, é consequência do modelo de *bond-slip* utilizado na modelagem. Como esperado, a viga apresentou uma contraflecha devido ao efeito da protensão aplicada durante a primeira etapa.

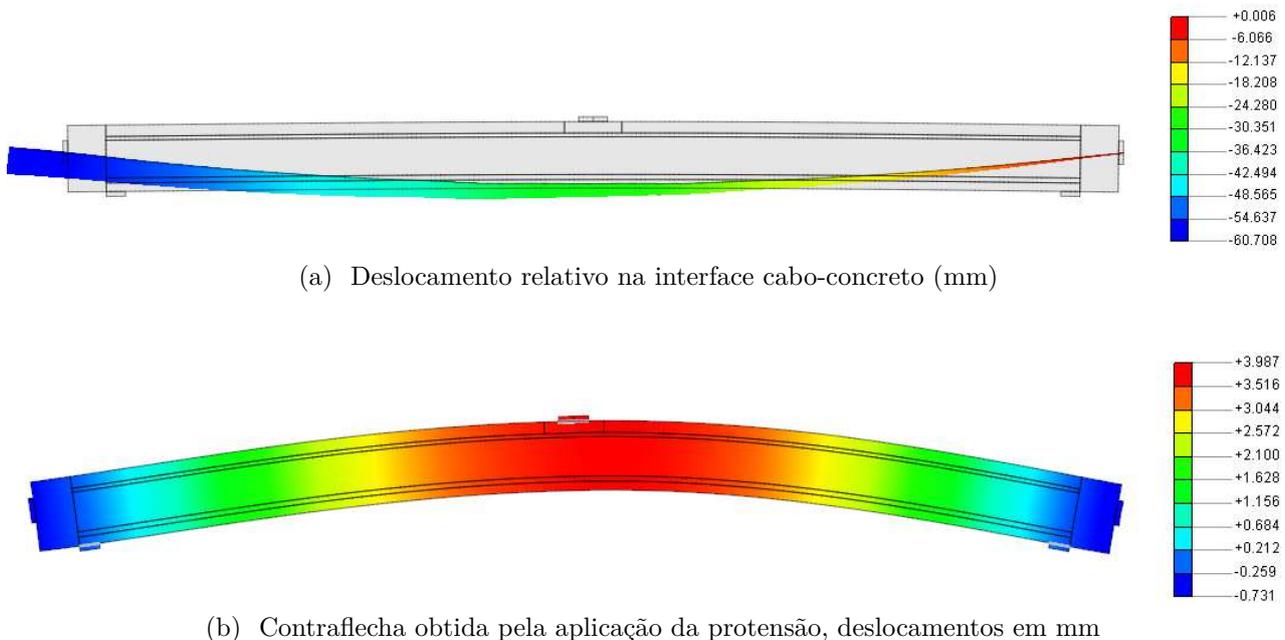


Figura 4.4: Resultados obtidos após a primeira etapa de carregamento no modelo da viga S1.

O gráfico da curva de carga *versus* deslocamento (medido no meio do vão) é mostrado na Figura 4.5a. Observou-se que a resposta numérica teve um bom ajuste com o resultado experimental. A carga máxima obtida no ensaio foi de 422 kN, enquanto no modelo foi de 462,24 kN. Por outro lado, a Figura 4.5b mostra o aumento da força do cabo em função do deslocamento da viga.

Ao comparar os resultados do ensaio e os obtidos numericamente notou-se uma boa correlação. De acordo com Vecchio et al. (2006) o aumento da força do cabo devido à aplicação do carregamento externo é um dos efeitos mais importantes a ser levado em consideração na modelagem de vigas protendidas. O autor referido afirma que assumir uma força constante no cabo durante toda a aplicação do carregamento externo resulta em uma subestimação da capacidade de carga e em alguns casos pode mudar o modo de ruptura da estrutura analisada. Além disso, como o ganho de força é influenciada pelo atrito entre o cabo e o concreto, a boa correlação entre os resultados torna-se uma forma de validação da metodologia desenvolvida para representar o comportamento não aderente do cabo na análise numérica.

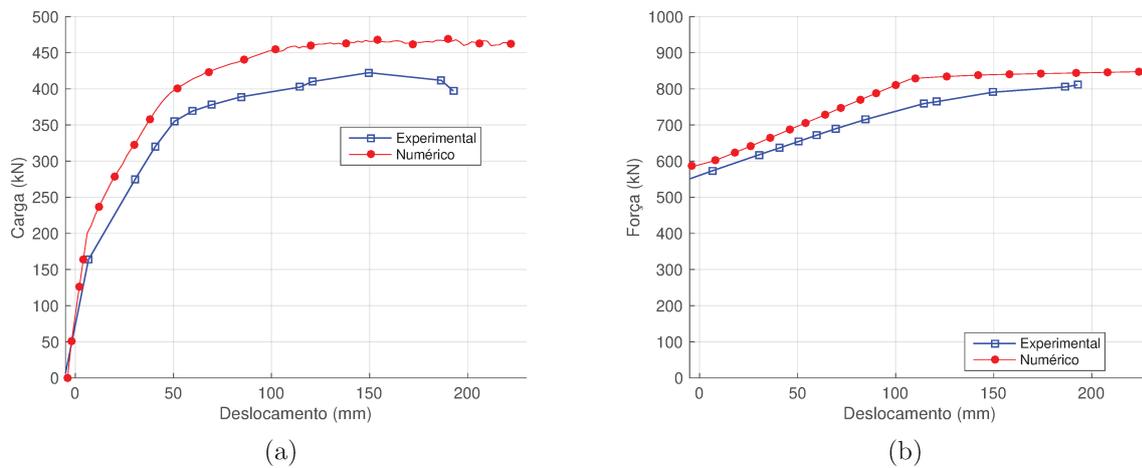


Figura 4.5: Comparação dos resultados numérico e experimental, curva a) carga *versus* deslocamento (medido no meio do vão) b) Força no cabo *versus* deslocamento.

A seguir é apresentada na Figura 4.6 a evolução do panorama de fissuração obtido na viga para distintos níveis de carga ( $P$ ) e deslocamento no meio do vão ( $\delta$ ). Numericamente, as fissuras no concreto são representadas a partir da deformação volumétrica,  $\varepsilon_{vol}$ , definida como a somatória das deformações principais ( $\varepsilon_{vol} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ ). Fazendo a comparação das fissuras obtidas numericamente com o experimental (Figura 4.7) concluiu-se que o modelo consegue representar corretamente a ruptura por flexão obtida na viga. No último passo convergido, observa-se o esmagamento ao redor da placa de carga. De acordo com Gauvreau (1992) fissuras horizontais foram observadas nessa região da aba superior, junto com o esmagamento do concreto e flambagem das barras.

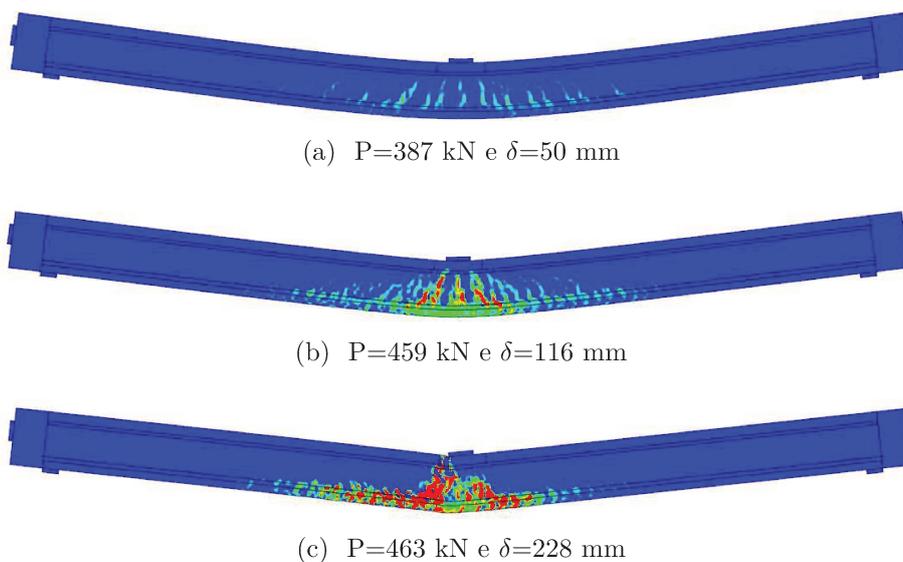


Figura 4.6: Evolução do panorama de fissuração obtido numericamente.

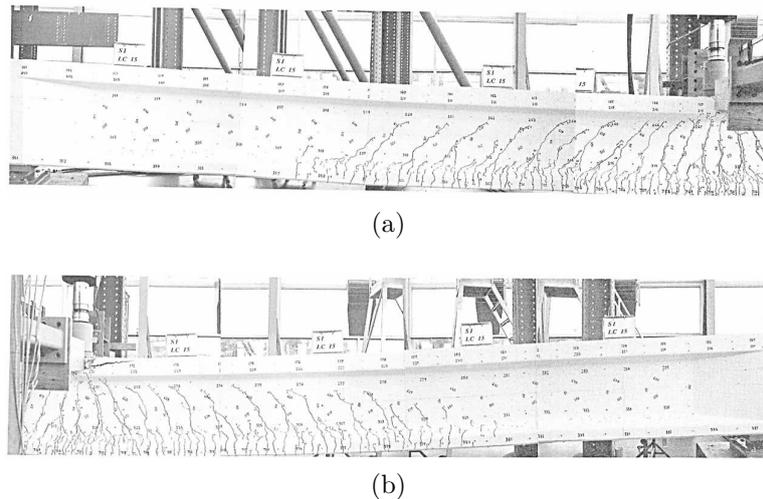


Figura 4.7: Panorama de fissuração da viga S1 na ruptura, Gauvreau (1992).

Por fim, são apresentadas as tensões principais  $\sigma_3$  na Figura 4.8, no último passo de carga convergido. É observado a formação das bielas de compressão inclinadas no ponto de aplicação de carga e a concentração de tensões nos elementos mais próximos à placa de carga, região na qual o concreto atingiu valores acima de 70 MPa.

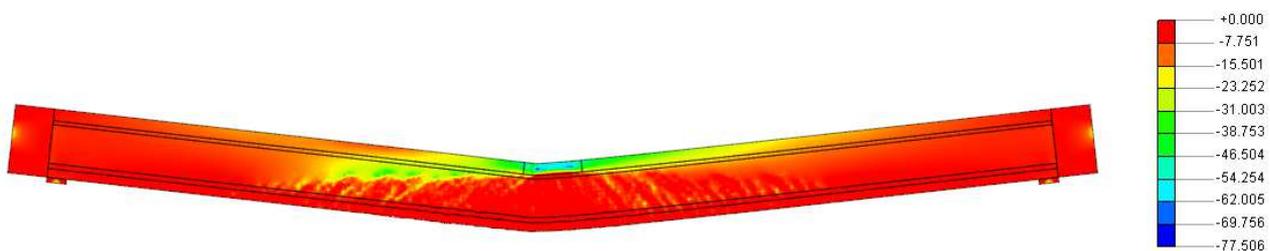


Figura 4.8: Contorno de tensões principais  $\sigma_3$  (MPa).

#### 4.2.2 Viga B8 (Hussien et al., 2012)

No estudo realizado por Hussien et al. (2012), nove vigas de concreto de alta resistência armado e protendido foram ensaiadas experimentalmente. As vigas tinham uma seção retangular de  $160 \times 340 \text{ mm}^2$  e um comprimento longitudinal de 4400 mm, como por ser visto na Figura 4.9. No esquema do ensaio as vigas eram submetidas a duas cargas concentradas localizadas a um metro de cada apoio por meio de um atuador hidráulico.

Nesta pesquisa foi realizada a modelagem da viga denominada B8, na qual era aplicada a protensão utilizando um único cabo não aderido de 12 mm de diâmetro e área de  $99 \text{ mm}^2$ . O

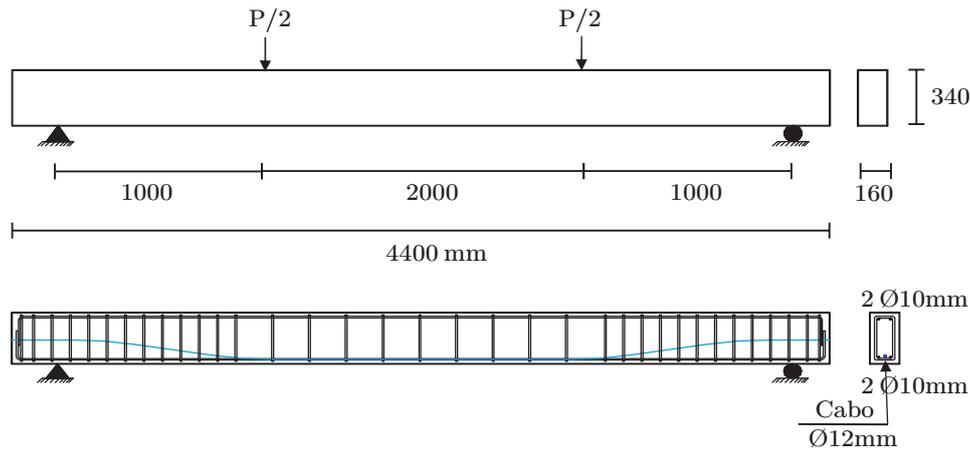


Figura 4.9: Propriedades geométricas e detalhamento da viga B8.

traçado do cabo, era similar ao diagrama de momento fletor das cargas aplicadas no esquema de ensaio (ver Figura 4.9). Durante a protensão foi aplicada uma força efetiva de 104 kN nas duas extremidades do cabo. As propriedades mecânicas das armaduras passiva e ativa são mostradas na Tabela 4.4. Como o módulo de elasticidade não foi calculado para nenhum dos tipos de aços, assumiu-se um valor de 210 GPa. Em relação ao concreto, apenas o valor de resistência à compressão do corpo de prova cilíndrico, estimado em 72 MPa.

De acordo com as observações do ensaio, a viga B8 teve um carga máxima de 148 kN e uma ruptura por flexão, caracterizada pelo escoamento das armaduras passivas, esmagamento do concreto e ruptura do cabo de protensão.

Tabela 4.4: Propriedades mecânicas dos materiais utilizados na viga B8, Hussien et al. (2012).

Propriedades do aço da armadura passiva:					Propriedades do aço de protensão:				
Diâmetro (mm)	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$E_s$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)	$f_{st}$ (MPa)	Número de fios	$A_p$ (mm <sup>2</sup> )	$E_p$ (MPa)	$f_{py}$ (MPa)	$f_{pt}$ (MPa)
10	78,54	-	470	610	7	539	-	1674	1860

#### 4.2.2.1 Modelagem numérica

Diferentemente da viga S1, No modelo da B8 apenas foi simulada metade da viga, como pode ser observado na Figura 4.10. Para garantir o comportamento adequado do modelo, restringiu-se o deslocamento horizontal dos nós localizados no eixo de simetria, incluindo o nó do cabo. A discretização do modelo foi realizada utilizando o mesmo tipo de elemento (CQ16M).

No modelo foram incluídas as placas de apoio, de aplicação de carga e as ancoragens do cabo. A aplicação da protensão seguiu o mesmo procedimento explicado na seção anterior.

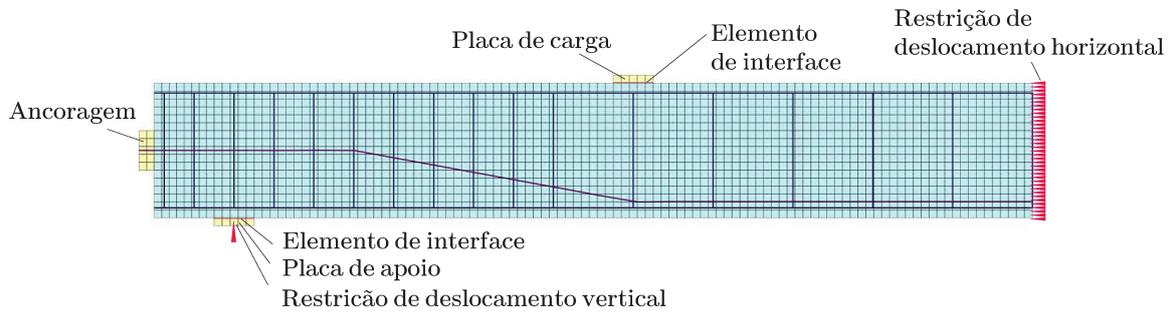


Figura 4.10: Propriedades geométricas e detalhamento da viga B8.

Foram levadas em consideração as mesmas recomendações estabelecidas na modelagem da viga S1 para escolher os parâmetros do modelo constitutivo do concreto. Manteve-se o mesmo método iterativo, quasi-Newton (Secante)-BFGS, para obter a resposta numérica do modelo.

#### 4.2.2.2 Comparação de resultados

As curvas de cargas *versus* deslocamento (medido no meio do vão) se encontram representadas na Figura 4.11. A curva obtida numericamente apresenta um deslocamento último maior, porém pode-se afirmar que o modelo numérico consegue representar bem o comportamento da viga ensaiada. O valor do carregamento último obtido no modelo foi de 152,94 kN.

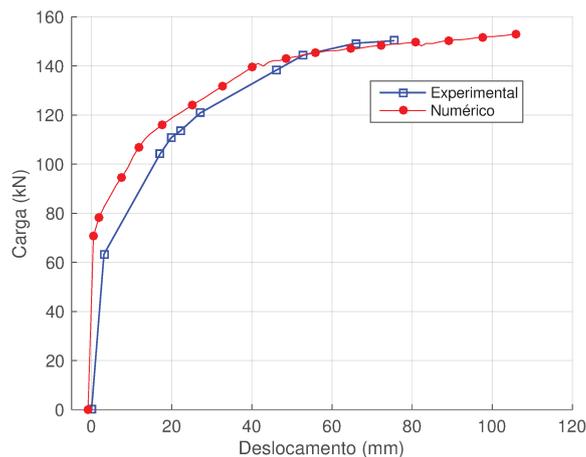


Figura 4.11: Comparação entre as curvas de carga *versus* deslocamento obtidas numérica e experimentalmente.

Nas Figuras 4.12 e 4.13 são apresentados os panoramas de fissuração obtidos numericamente e experimentalmente. É possível observar uma similaridade na distribuição e orientação das

fissuras.

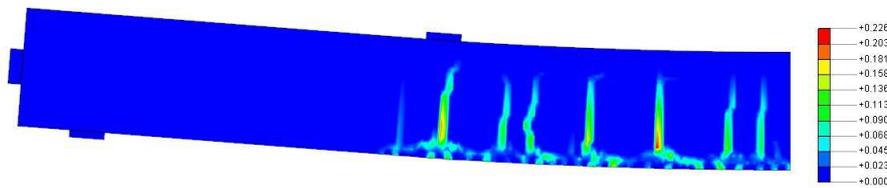


Figura 4.12: Panorama de fissuração obtida na análise numérica.

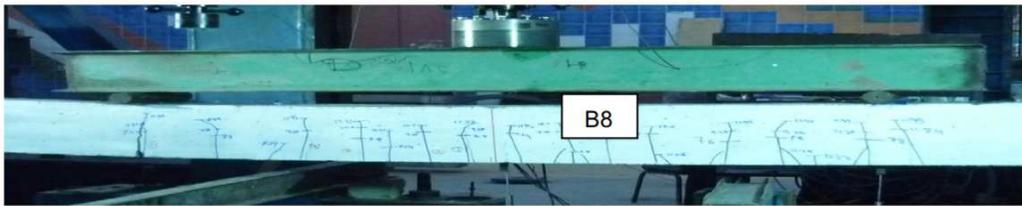


Figura 4.13: Panorama de fissuração obtida no ensaio experimental, Hussien et al. (2012).

Para finalizar, são analisadas as tensões principais  $\sigma_3$  para identificar os máximos valores de tensão à compressão na viga. Na Figura 4.14, obtida no último passo de carga convergido, observa-se que as tensões atingem um valor de 78,69 MPa no banzo superior da viga, o que concorda com os esmagamento observado no ensaio experimental.

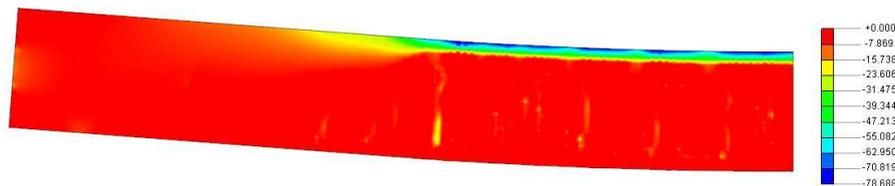


Figura 4.14: Contorno de tensões principais  $\sigma_3$  no último passo de carga convergido.

## 4.3 Lajes de concreto armado com ruptura por punção

### 4.3.1 Laje AR2 (Ramos, 2003)

No programa experimental proposto por Ramos (2003), foram ensaiadas 15 lajes, todas com dimensões de  $2300 \times 2300 \text{ mm}^2$  e uma espessura de 100 mm. Os ensaios tinham como objetivo estudar os efeitos da compressão no plano e da componente vertical da força de desvio. A laje denominada AR2, de concreto armado, foi utilizada como laje de referência.

A carga vertical era aplicada em oito pontos através de um conjunto de vigas de aço suspensas, tracionadas por meio de dois atuadores hidráulicos utilizando tirantes de alta resistência. A laje estava apoiada em um pilar central, simulado por uma placa de aço com dimensão transversal de  $200 \times 200 \text{ mm}^2$ , que se apoiava em um bloco de reação, como pode ser visto na Figura 4.15. A armadura superior era constituída por barras de 10 mm espaçadas a cada 60 mm em cada uma das direções com uma altura útil média de 80 mm. A armadura inferior tinha barras 6 mm espaçadas aproximadamente a cada 200 mm em cada direção. A laje teve uma ruptura por punção com uma carga de 258 kN.

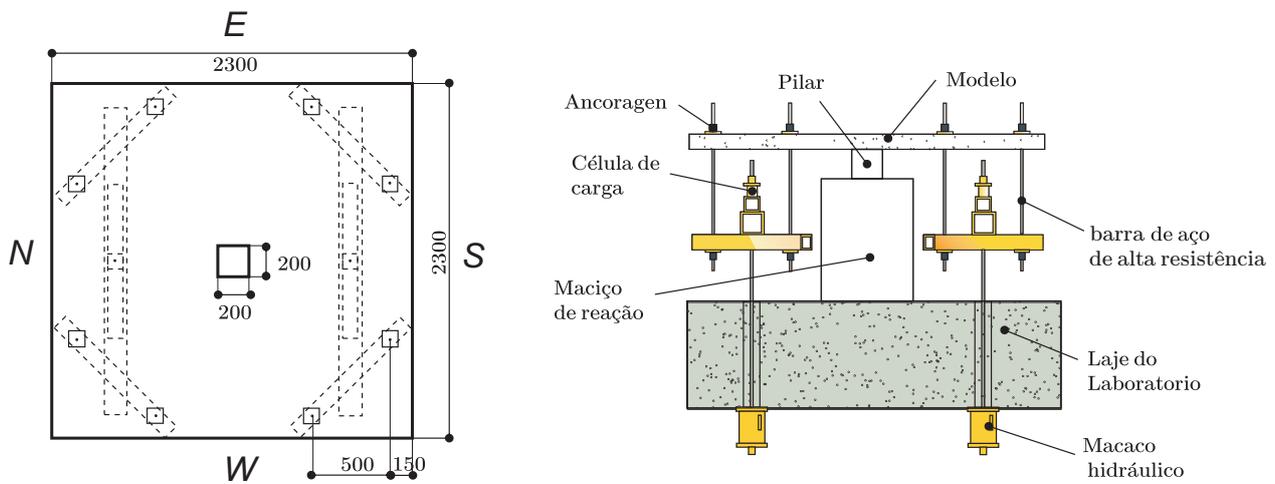


Figura 4.15: Esquema da primeira série ensaiada por Ramos (2003).

Tabela 4.5: Propriedades mecânicas dos materiais utilizados na laje AR2, Ramos(2003).

Tabela 4.6: Propriedades do aço da armadura

Diâmetro (mm)	$A_s$ $\text{mm}^2$	$f_{sy}$ (MPa)	$f_{st}$ (MPa)
6	28,27	639	732
10	78,54	523	613

Tabela 4.7: Propriedades do concreto

$f_{cu}$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)	$E_c$ (MPa)
48,1	39,1	3,0	28000

#### 4.3.1.1 Modelagem numérica e análise de sensibilidade

Diferentemente da modelagem numérica das vigas apresentadas na seção anterior, a discretização das lajes foi realizada através de elementos finitos tridimensionais. Seguindo as

recomendações encontradas na revisão bibliográfica, só um quarto de laje foi modelado, restringido os deslocamentos horizontais dos nós localizados sobre os eixos de simetria, como é ilustrado na Figura 4.16. Na malha foi incluída também a placa de aço que simulava o pilar e as placas de carga do ensaio experimental, porém no modelo numérico o esquema de aplicação de carga foi invertido: o deslocamento incremental foi imposto sobre o pilar e nas outras placas foi impedido o deslocamento vertical, conforme pode ser visto na Figura 4.16b.

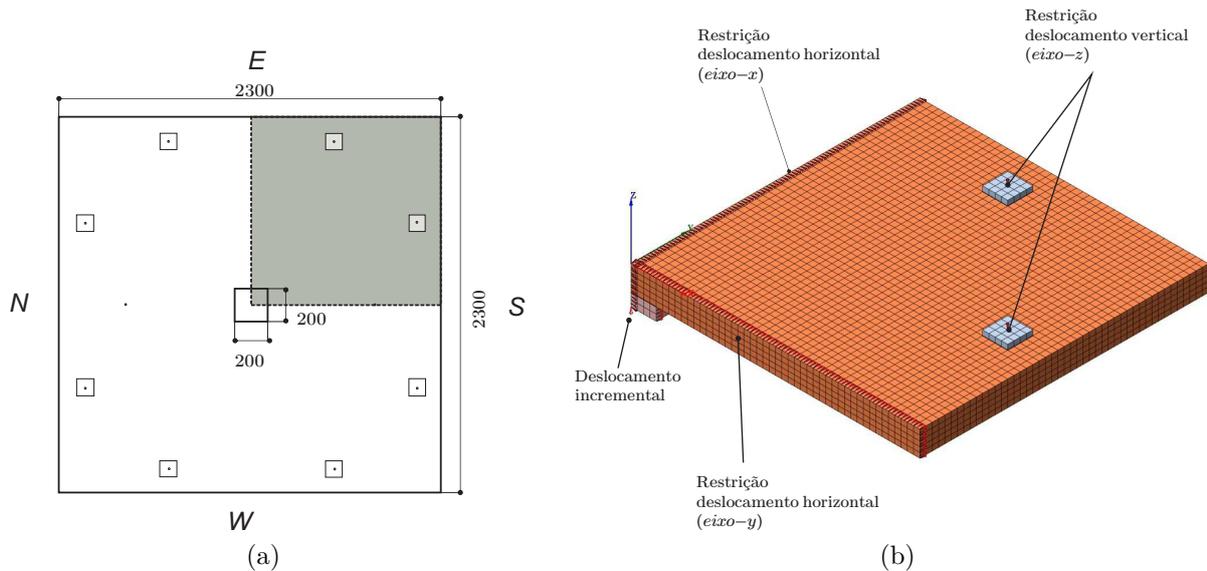


Figura 4.16: Malha de elementos finitos típica e condições de contorno utilizada nos modelos da laje AR2.

Com o objetivo de identificar os fatores que tinham uma maior influência na modelagem numérica, foram conduzidas diversas análises de sensibilidade divididas nas seguintes etapas:

1. *Estudo relacionado com a malha de elementos finitos*: teve como objetivo específico determinar o tipo de elemento e a discretização mais adequada a ser utilizada na modelagem. As diversas configurações das malhas de elementos finitos que foram comparadas são apresentadas na Tabela 4.8.

O estudo foi subdividido em três partes:

- (a) Comparação dos elementos tridimensionais hexaédricos de 8 e 20 nós (Figuras 4.17b e 4.17c).
- (b) Estudo da relação entre a densidade da malha e a precisão da solução numérica (malhas B à F).
- (c) Redução do número de elementos, usando uma malha menos refinada fora do perímetro crítico de punção (Figura 4.18).

Tabela 4.8: Configurações de malhas testadas na laje AR2.

Modelo	Número de nós	Número de elementos	Número de camadas de elementos na espessura da laje	Dimensões do elemento ( $a \times b \times c$ )	Tipo de elemento
A	11789	8576	4	$25 \times 25 \times 25$	HX24L
B	8631	1082	2	$50 \times 50 \times 50$	CHX60
C	10853	1611	3	$50 \times 50 \times 33,3$	CHX60
D	45365	8576	4	$25 \times 25 \times 25$	CHX60
E	54230	14020	5	$25 \times 25 \times 20$	CHX60
F	133017	28818	6	$16,7 \times 16,7 \times 16,7$	CHX60
G	19746	3428	4	Variável	CHX60
H	23287	4269	5	Variável	CHX60

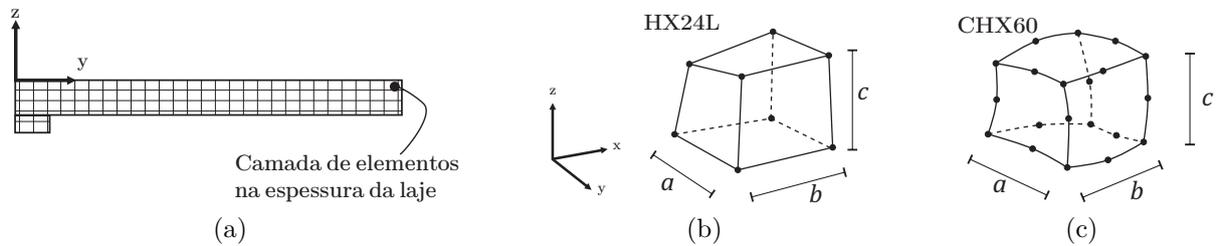


Figura 4.17: Nomenclatura usada na Tabela 4.8

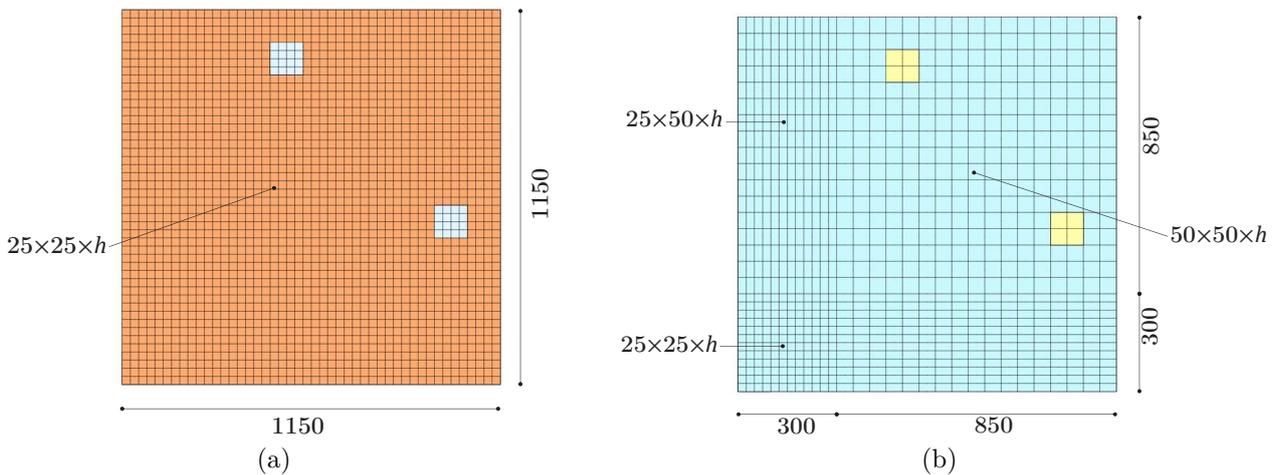


Figura 4.18: Comparação das dimensões e distribuição dos elementos utilizados nas malhas a) D e E b) G e H. No caso das malhas D e G eram utilizadas quatro camadas de elementos ao longo da espessura da laje, e para as malhas E e H eram utilizadas 5 camadas de elementos.

2. *Estudo relacionado com os parâmetros do concreto:* teve como objetivo selecionar os parâmetros, disponibilizados no programa DIANA, que melhor representassem o compor-

tamento do concreto. O esquema mostrado na Figura 4.19 apresenta as alternativas que foram testadas nesse estudo:

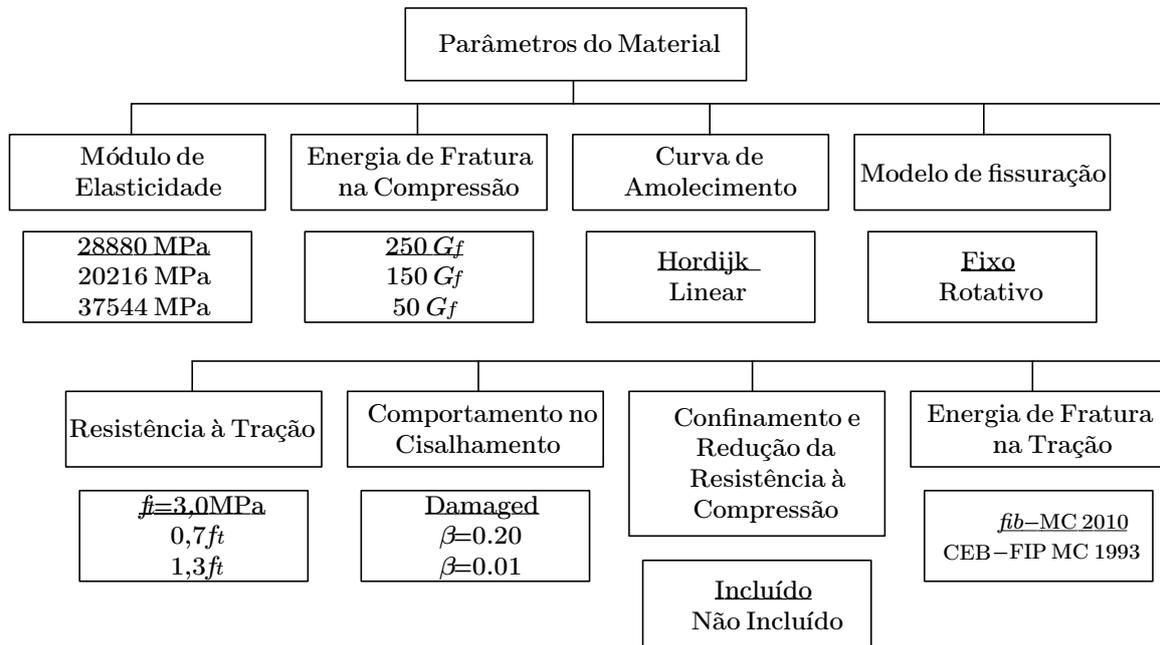


Figura 4.19: Alternativas relacionadas com os parâmetros do concreto utilizadas na laje AR2. As alternativas ressaltadas correspondem às usadas no modelo inicial.

3. *Estudo relacionado com os parâmetros de convergência e técnicas de solução:* foi analisada a influência dos métodos iterativos e a tolerância dos critérios de convergência na resposta numérica do modelo. Nesse estudo foram comparados os modelos apresentados na Tabela 4.9.

Tabela 4.9: Alternativas relacionadas com os métodos iterativos utilizadas na laje AR2.

Método de convergência	Critério de tolerância utilizado		
	Força	Deslocamento	Energia
Newton-Raphson	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$
Newton-Raphson Modificado	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$
Secante (Quasi-Newton)	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$
Secante (Quasi-Newton)	-	-	$10^{-4}$
Secante (Quasi-Newton)	-	-	$10^{-3}$
Secante (Quasi-Newton)	-	-	$10^{-2}$

Assim, no estudo proposto, o procedimento estabelecido pode ser resumido como é mostrado na Figura 4.20. Inicialmente adotou-se um modelo constitutivo para o concreto e o

aço baseado nas recomendações já expostas na modelagem das vigas protendidas (ver Tabela 4.10). Em relação aos parâmetros de convergência, foi utilizado o processo iterativo Quasi-Newton(Secante) com formulação BFGS junto com a técnica *line-search*. Foram utilizadas as normas de deslocamento, energia e força com os valores de  $10^{-2}$ ,  $10^{-4}$  e  $10^{-2}$ , respectivamente e um número máximo de 200 iterações. O deslocamento aplicado no pilar tinha um incremento de 0,2 mm. Do mesmo modo que foram analisadas as vigas protendidas, estabeleceu-se que a análise numérica era finalizada uma vez era atingido o número máximo de iterações. Tendo como base, esses parâmetros foi realizado o estudo de comparação das malhas. A avaliação de cada alternativa realizou-se através do comportamento observado na curva de carga *versus* deslocamento (no pilar), o análise das tensões do concreto e o panorama de fissuração da laje. A partir da escolha da malha, foram realizados os estudos subsequentes relacionados com os parâmetros do concreto e os métodos iterativos.

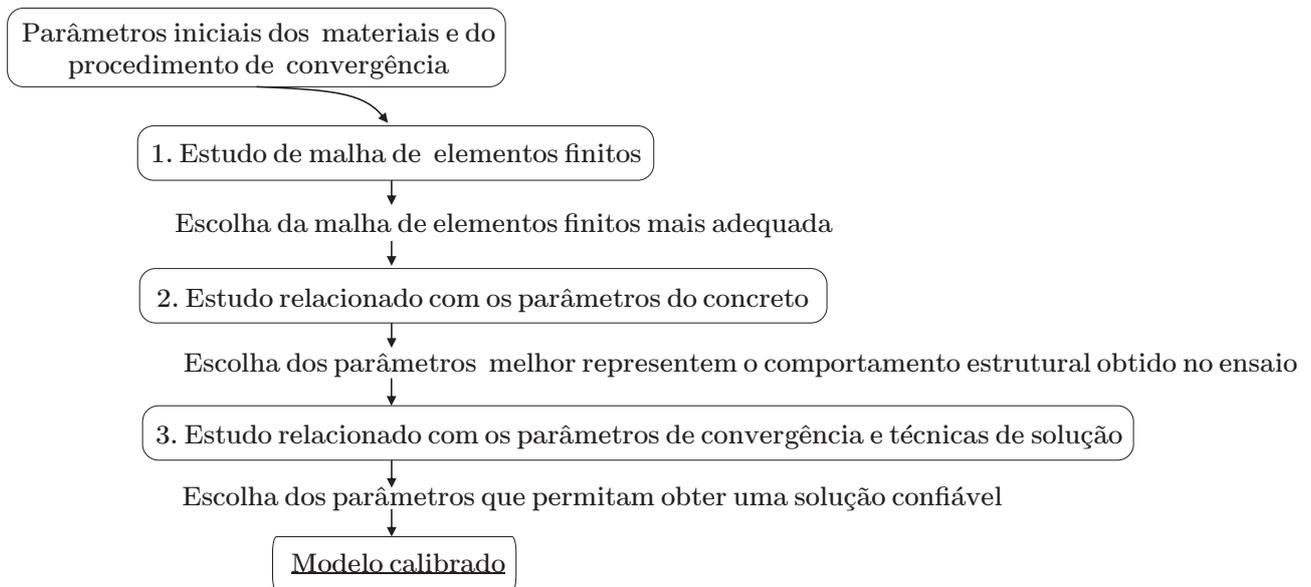


Figura 4.20: Esquema do estudo realizado na laje AR2.

Tabela 4.10: Propriedades do concreto assumidas inicialmente para o modelo da laje AR2.

Parâmetro	Valor adotado	Observações
Modulo de elasticidade ( $E_c$ )	28800MPa	Calculado de acordo com CEB-FIP MC(1990)
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,2	
Modelo de Fissuração	Modelo de Deformações Totais de fissura Fixas	
Curva de amolecimento à tração ( $f_t$ )	Hordrijk (1991)	
Resistência à tração	3,0 MPa	Determinado experimentalmente
Energia de fratura à tração ( $G_f$ )	141 N/m	Calculado de acordo com CEB-FIP MC2010
Resistência à compressão (corpo de prova cilíndrico) ( $f_c$ )	39,1 MPa	Determinado experimentalmente
Curva de compressão	Modelo Parabólico Feenstra (1993)	Recomendado por Hendriks et al. (2016)
Energia de fratura à compressão ( $G_c$ )	35310 N/m	$G_c = 250G_f$
Comportamento ao cisalhamento	Retenção ao cisalhamento variável	
Redução da resistência à compressão devido à fissuração lateral	Modelo de Vecchio e Collins (1993)	
Aumento da resistência à compressão devido ao confinamento	Modelo de Selby e Vecchio (1997)	
Redução do coeficiente de Poisson após fissuração	Incluído	

#### 4.3.1.2 Resultados da análise de sensibilidade

##### Resultados relacionados com a discretização da malha

A Figura 4.21 apresenta as curvas de carga *versus* deslocamento (medido no centro da laje) obtidas para cada uma das malhas analisadas. Em relação ao tipo de elemento, pode ser observado que a malha A, constituída por elementos hexaédricos de 8 nós, não conseguiu representar corretamente o comportamento da laje (Figura 4.21a). Por outro lado, na Figura 4.21b é representado as curvas das malhas B à F. Pode ser observada a convergência da resposta numérica na medida que se aumenta a discretização da malha. Percebe-se então que quanto maior o refinamento da malha, menor é o incremento de carga máxima atingida.

Nas Figuras 4.21c e 4.21d é mostrada a comparação das malhas D e G (quatro camadas de elementos ao longo da espessura) com as malhas E e H (cinco camadas de elementos ao longo da espessura), sendo as malhas G e H, aquelas com um menor número de elementos como foi

mostrado na Figura 4.18. Observa-se que as malhas G e H tiveram um comportamento similar ao das malhas D e E, o que demonstra que a distribuição otimizada de elementos permite reduzir o tempo de processamento (Tabela 4.11), sem prejudicar a precisão do resultado. Tendo como base os resultados apresentados, adotou-se a malha H para o estudo dos parâmetros do concreto e dos métodos de convergência.

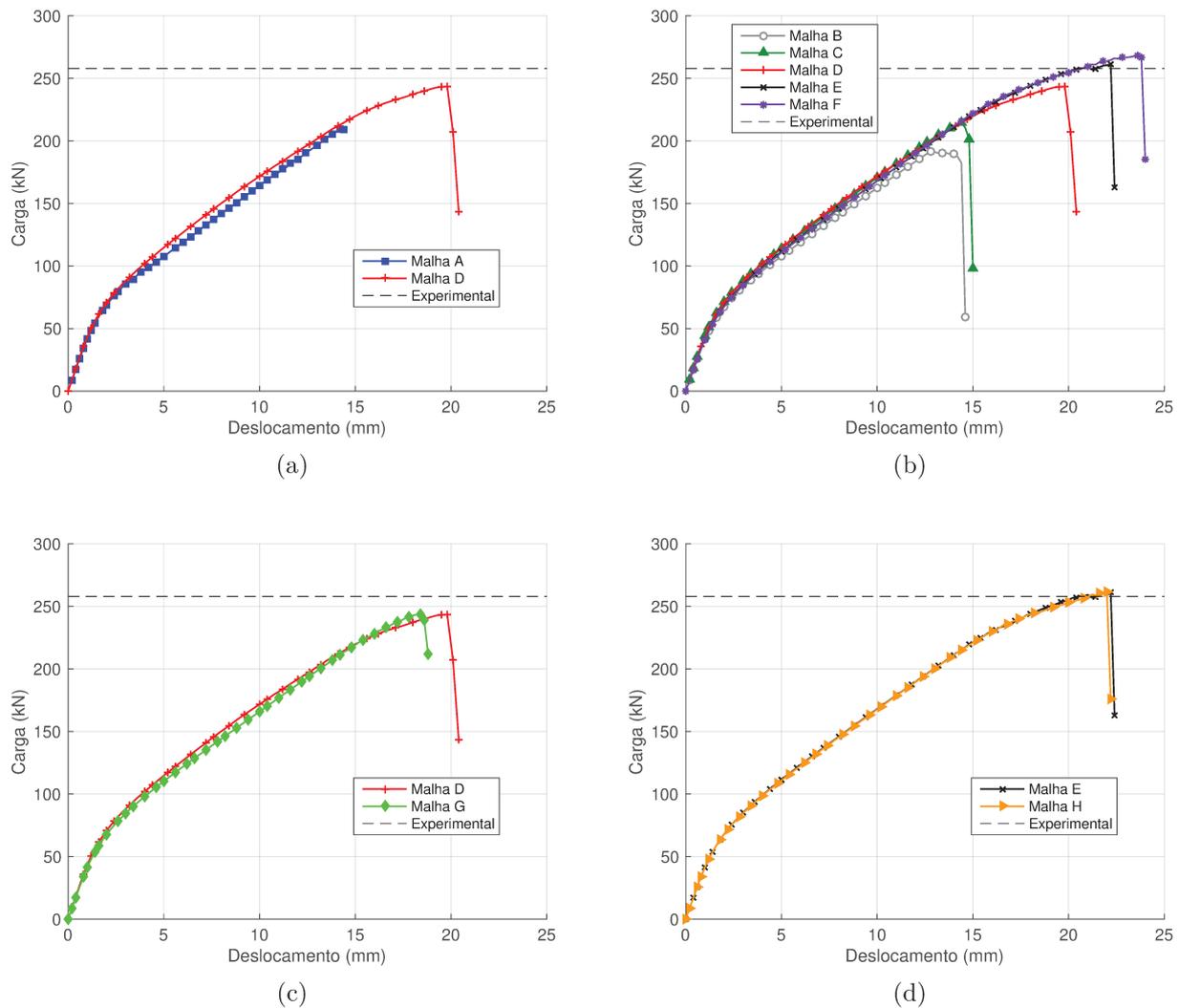


Figura 4.21: Comportamento das curvas de carga *versus* deslocamento obtido no estudo das malhas.

Tabela 4.11: Comparação do resultado obtido para cada uma das malhas testadas.

Modelo	Tempo de processamento	Carga máxima	Deslocamento na carga máxima
<b>A</b>	00:22:14	208,98	14,4
<b>B</b>	00:25:47	190,35	13,6
<b>C</b>	01:32:58	214,70	14,4
<b>D</b>	01:32:58	243,45	19,8
<b>E</b>	02:20:00	261,29	22,2
<b>F</b>	26:27:00	268,22	23,6
<b>G</b>	01:05:30	243,62	18,4
<b>H</b>	01:42:36	261,64	22,0

### Resultados relacionados com os parâmetros do concreto

Neste estudo, além de analisar as curvas de carga *versus* deslocamento, foram plotados também os gráficos de carga *versus* deformação do concreto na região comprimida próxima ao pilar. As Figuras 4.22a e 4.22b apresentam a comparação entre as curvas obtidas pelo modelo de fissura fixa e rotacional. Ambos os modelos têm um comportamento similar até atingir uma carga de 160 kN, ponto no qual o modelo de fissuras rotacionais não consegue mais convergência. Analisando a Figura 4.22b, observa-se que a curva de carga *versus* deformação do modelo de fissura fixa corresponde ao comportamento experimental esperado de uma laje com ruptura por punção.

As Figuras 4.22c e 4.22d exibem a comparação dos parâmetros relacionados ao o fator de retenção ao cisalhamento. De forma geral foi mostrado que assumir um valor constante de  $\beta=0,2$  (alto) pode mudar o modo de ruptura da laje, fazendo que aconteça uma ruptura por flexão. Por outro lado, um valor mais baixo ( $\beta=0,01$ ) permite ter uma melhor representação do comportamento obtido no ensaio, porém, apenas atingindo 80% da carga experimental. O fator de retenção variável, implementado na versão utilizada do programa DIANA como *damage based retention factor*, apresentou o melhor desempenho, não só pelo bom resultado mostrado nos gráficos 4.22c e 4.22d, como também pelo panorama de fissuração, como será apresentado na seguinte seção. Assim, a análise dos resultados mostrou que os parâmetros relacionados com o cisalhamento tiveram uma maior influência no comportamento da laje.

Foi encontrado que os parâmetros iniciais assumidos baseados nas recomendações encontradas na literatura, conseguiram representar bem o comportamento da laje, incluindo o modo de ruptura. Esses parâmetros foram mantidos como base para a realização das outras modelagens executadas neste trabalho.

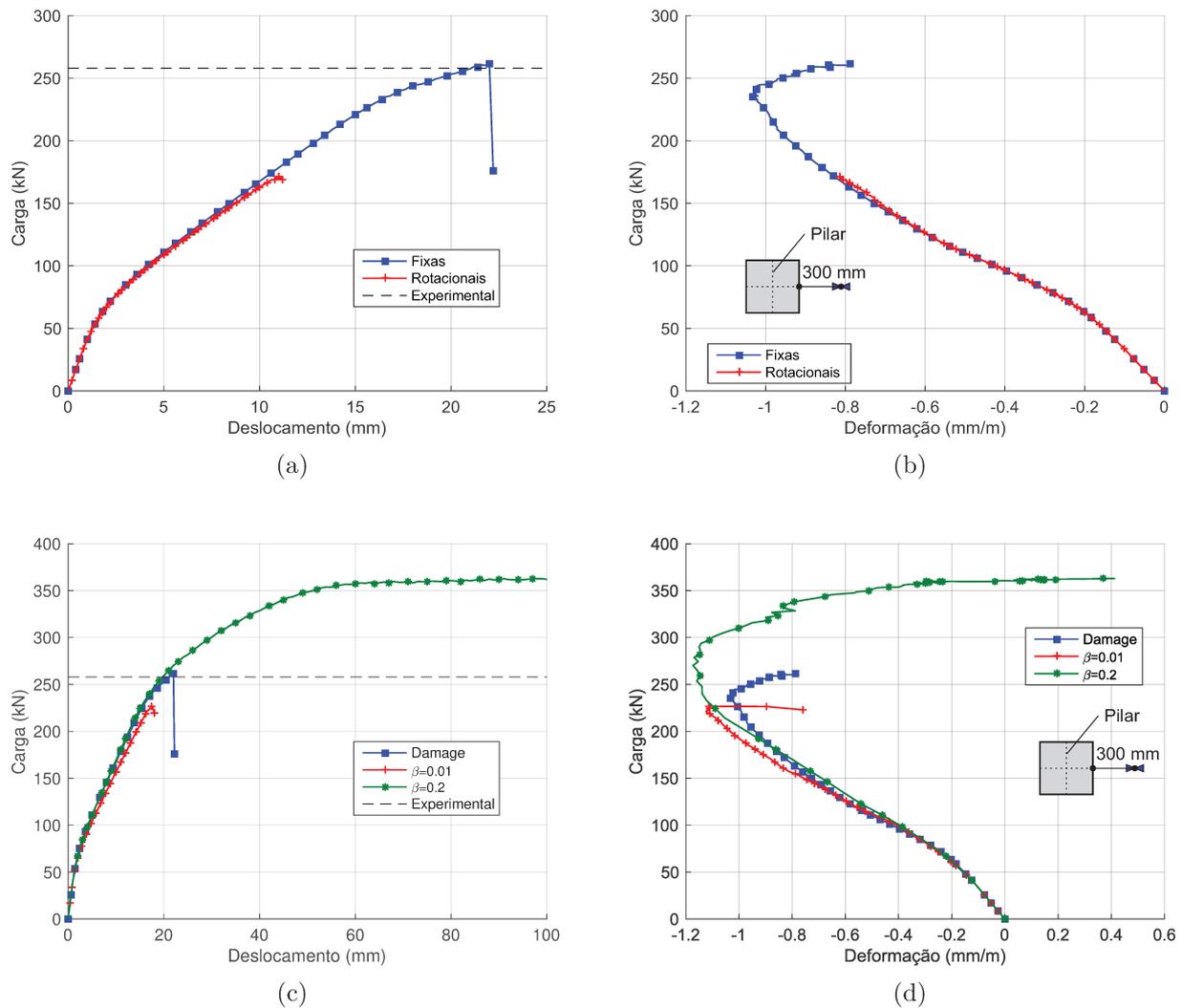


Figura 4.22: Comportamento das curvas de carga *versus* deslocamento e carga *versus* deformação obtido no estudo dos parâmetros do concreto.

### Resultados relacionados com os parâmetros de convergência

Por fim, foram obtidos os resultados relacionados com os parâmetros de convergência, onde para entender melhor o desempenho de cada método analisou-se também o número de iterações requeridas. Na Figura 4.23a pode-se observar que as curvas de carga *versus* deslocamento dos métodos foram bastante similares. A carga atingida pelo método Secante foi de 261,64 kN (mais próximo do valor experimental), enquanto nos métodos de Newton-Raphson e Newton-Raphson Modificado foram de, respectivamente, 244,82 kN e 234,39 kN. Como pode ser visto no Gráfico 4.23b, o número de iterações requeridas ao utilizar o método Secante foi maior. É importante mencionar que para os três métodos, a norma de energia controlou o número maior de iterações na maioria dos passos de carga.

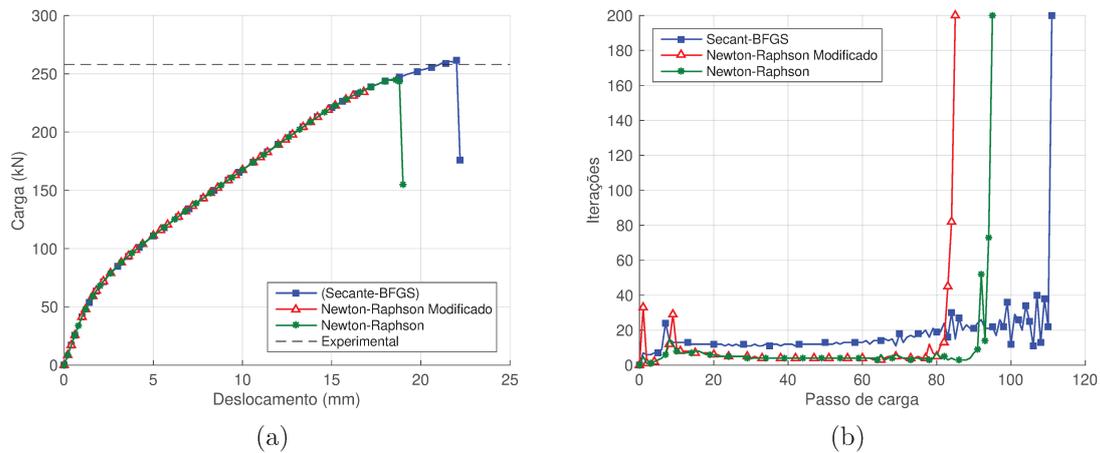


Figura 4.23: Comportamento das curvas de carga *versus* deslocamento e número de iterações requeridas por passo de carga para cada um dos métodos de solução.

Para entender melhor a influência do valor de tolerância adotado, são apresentadas as curvas de carga *versus* deslocamento, para os valores de  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  e  $10^{-4}$  utilizados para a norma de energia junto com o método Secante (ver Figura 4.24a). Pode-se observar que o valor da tolerância influenciou a resposta numérica. Para o valor de  $10^{-2}$  a curva apresentou comportamento flutuante, porém conseguiu atingir carga e deslocamento similares aos obtidos para o valor mais restrito de  $10^{-4}$ . Contrário ao esperado, o valor de tolerância de  $10^{-3}$  levou a um valor menor de carga ao do que as outras duas alternativas. Em relação ao número de iterações requeridas, é importante destacar que o modelo com tolerância de  $10^{-4}$  apresentou um número pouco maior do que  $10^{-3}$ , o que indica que não compensa aumentar a tolerância para diminuir o custo computacional (ver Figura 4.24b).

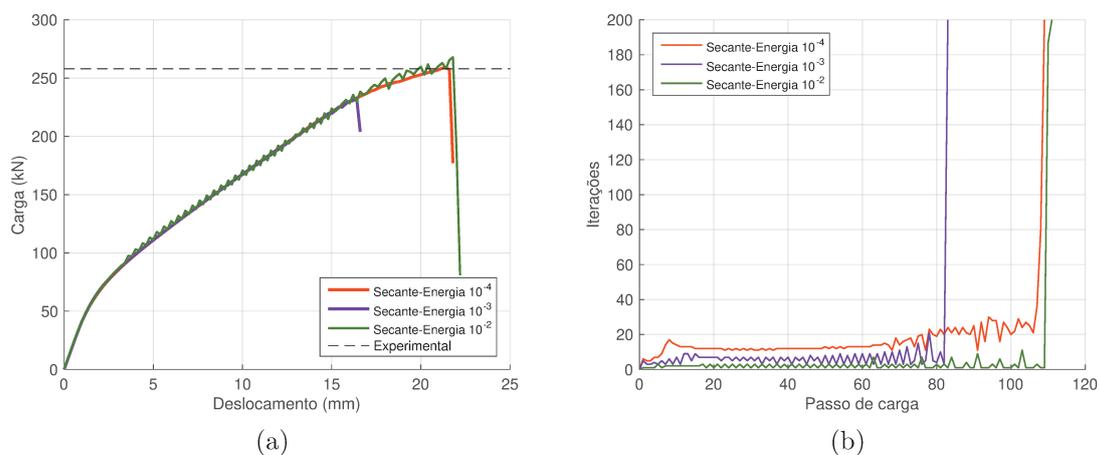


Figura 4.24: Comportamento das curvas de carga *versus* deslocamento e número de iterações requeridas por passo de carga para diferentes valores de tolerância da norma de energia.

Analisando as considerações expostas, estabeleceu-se o uso do método Secante, junto com os critérios de força, deslocamento e energia com os valores de tolerância recomendados pelo programa para garantir a convergência nas modelagens.

### 4.3.1.3 Comparação dos resultados com o ensaio experimental

Nesta seção são comparados os resultados do modelo calibrado com os resultados experimentais. A Figura 4.25 e apresenta a comparação dos deslocamentos obtidos para os transdutores 1 e 2. É importante lembrar que no esquema do ensaio experimental a carga era aplicada nas oito placas localizadas perto da borda e o pilar era o único apoio da laje, portanto para fazer a comparação com os deslocamentos obtidos numericamente, o sistema de referência foi mudado para coincidir com o esquema do ensaio. De forma geral, observa-se um bom ajuste entre as curvas experimentais e numéricas, principalmente no transdutor 2, localizado mais perto do pilar.

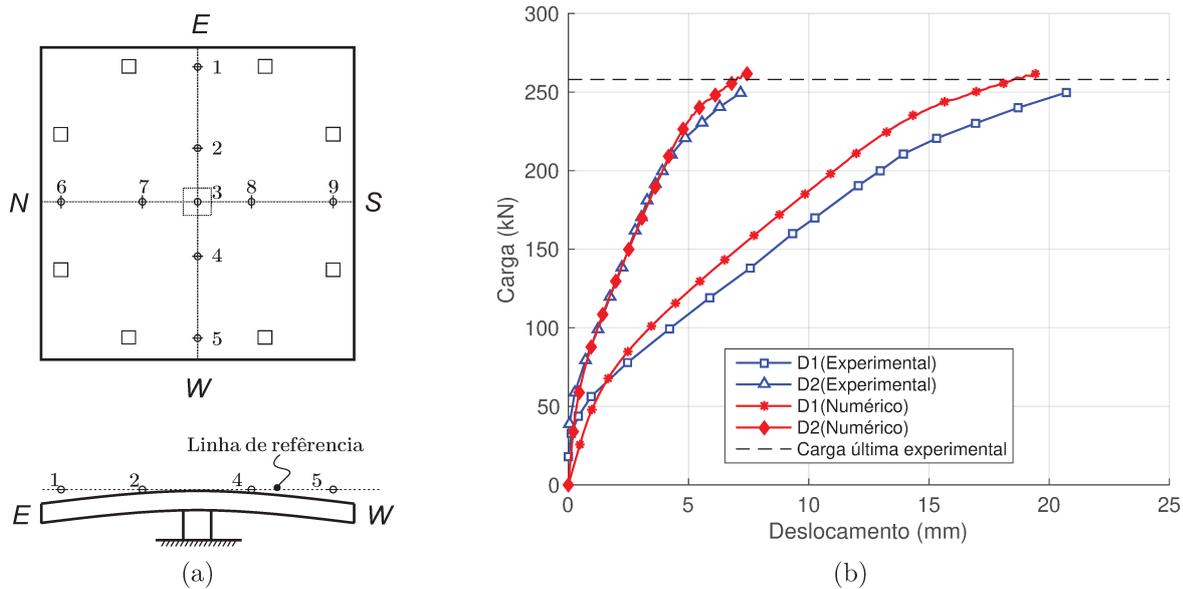


Figura 4.25: Comparação dos deslocamentos obtidos no transdutores 1 e 2, modelo experimental e numérico.

A seguir são comparadas as deformações em algumas barras da armadura superior, na direção leste-oeste. Como é visto na Figura 4.26, o modelo conseguiu capturar bem os resultados experimentais, inclusive o escoamento nos últimos passos de carga.

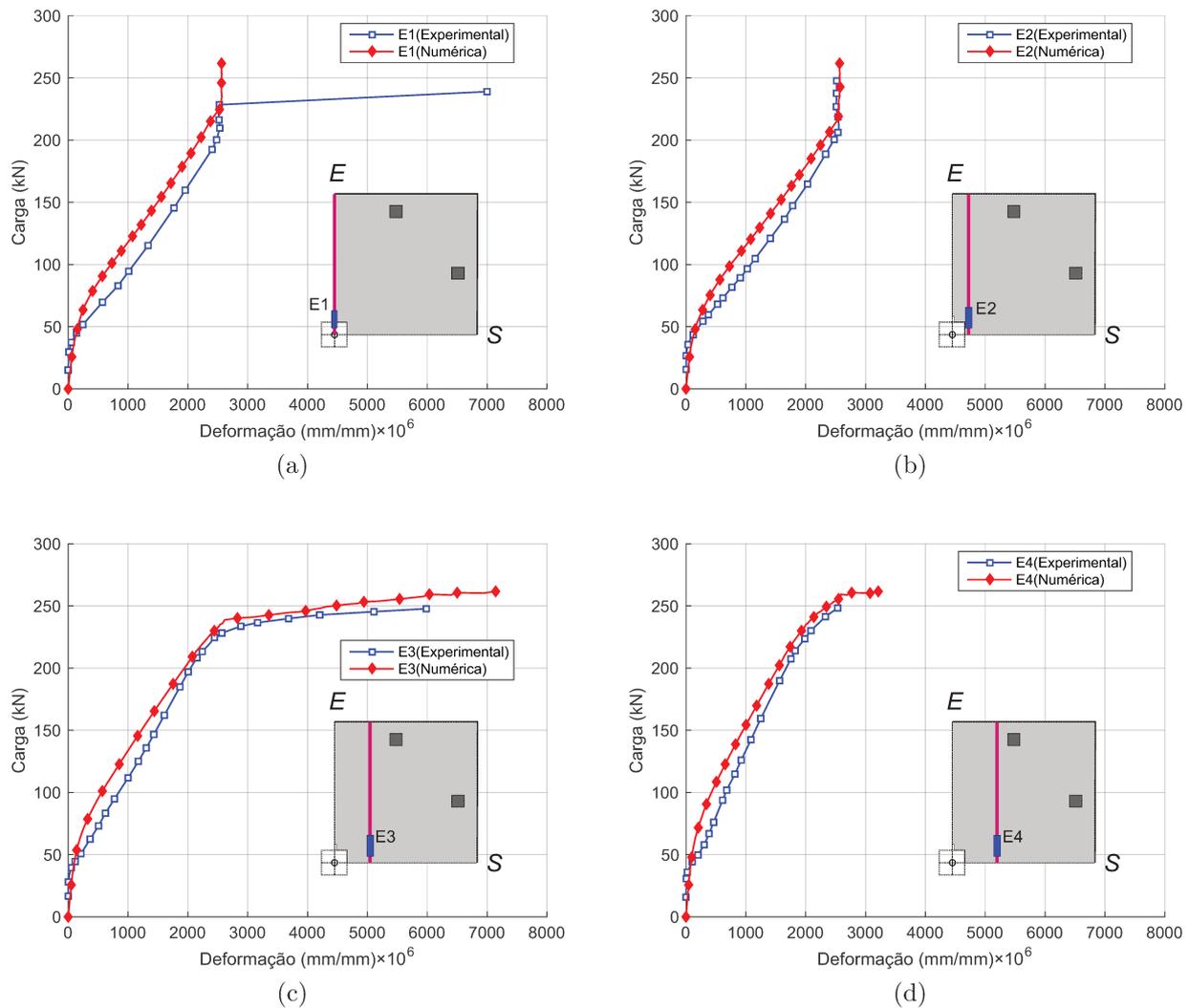


Figura 4.26: Comportamento das curvas de carga *versus* deformação nas barras de aço, modelo experimental e numérico.

Nas Figuras 4.27 e 4.28 são apresentadas os panoramas de fissuração, obtidos experimentalmente, na face superior e na espessura da laje AR2. A Figura 4.29 mostra a evolução da fissuração do concreto no modelo numérico, representada por meio do mapa de contornos da deformação total volumétrica. Foram escolhidos três níveis de carregamento ( $0,5P_u$ ,  $0,75P_u$  e  $P_u$ ) e o último passo de carga, no qual foi atingido o número máximo de iterações sem convergência. Nas Figuras 4.29a à 4.29c representam o panorama de fissuração da superfície da laje (espelhada nos eixos de simetria). Observa-se o aparecimento das fissuras radiais, paralelas às barras longitudinais de maior altura, e das fissuras tangenciais ao redor do pilar. Ao longo da espessura é verificada a formação do cone de ruptura à punção (Figuras 4.29e à 4.29g), similar ao obtido no ensaio experimental (Figura 4.28).

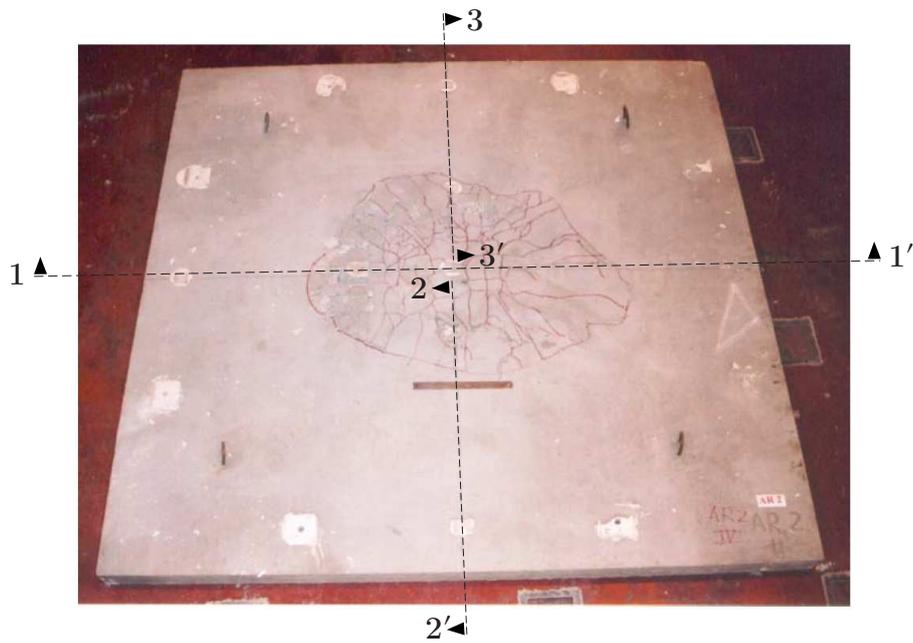
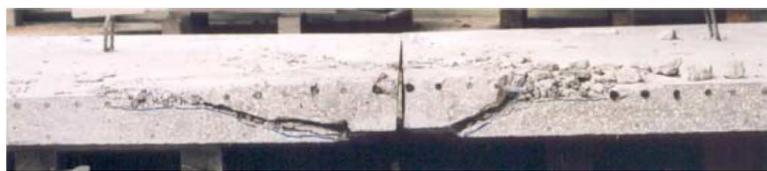


Figura 4.27: Panorama de fissuração da face superior, submetida à tração, da laje AR2, Ramos (2003).



(a) Corte 1-1'



(b) Corte 2-2'



(c) Corte 3-3'

Figura 4.28: Formação do cone de ruptura na espessura da laje AR2, Ramos (2003).

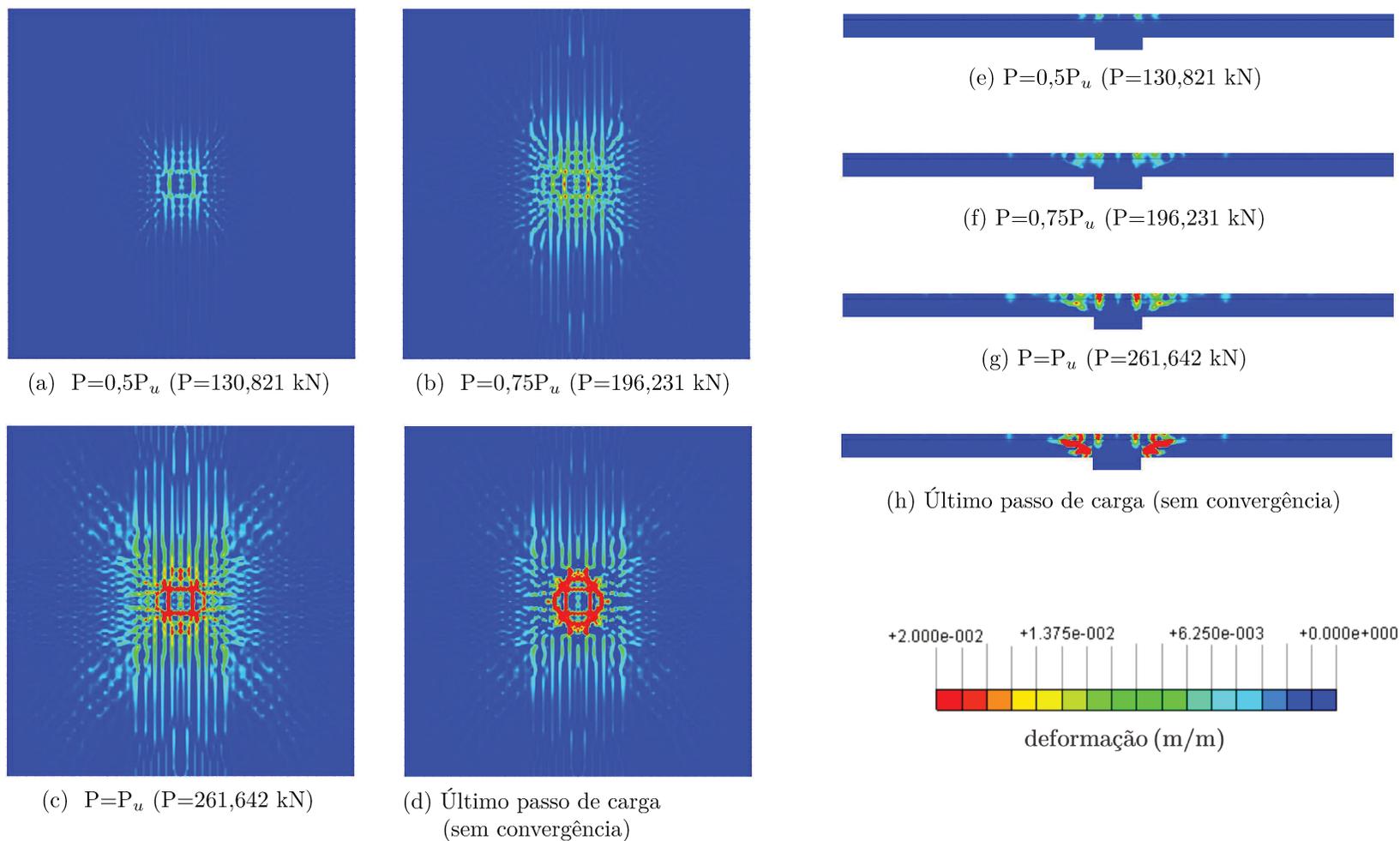


Figura 4.29: Evolução do panorama de fissuração na superfície superior e na espessura no modelo da laje AR2.

### 4.3.2 Laje M1 (Melges, 2001)

No programa experimental realizado por Melges (2001) foram ensaiadas 6 lajes, das quais três eram de concreto armado e as três restantes de concreto protendido com cabos não aderentes. Todas as lajes tinham dimensões de  $2500 \times 2500 \text{ mm}^2$  e uma espessura de 160 mm. Nesta seção será apresentada a modelagem da laje M1, de concreto armado e sem armadura de cisalhamento. As propriedades do concreto e da armadura dessa laje são apresentadas na Tabela 4.12. As barras de 16 mm foram utilizadas na armadura superior espaçadas a cada 100 mm e uma altura útil média de 12,9 mm. O mesmo espaçamento foi utilizado nas barras de 8 mm utilizadas na armadura inferior. A força concentrada foi aplicada através de uma chapa de aço quadrada de 180 mm de lado que simulava um pilar. No esquema do ensaio foram utilizados dois atuadores hidráulicos (cada um com uma capacidade aproximada de 500 kN) junto com um sistema de vigas metálicas e tirantes para apoiar a laje, como pode ser visto Figura 4.30. De acordo com as observações do ensaio a laje M1 teve uma ruptura por punção, com uma carga de 441,6 kN.

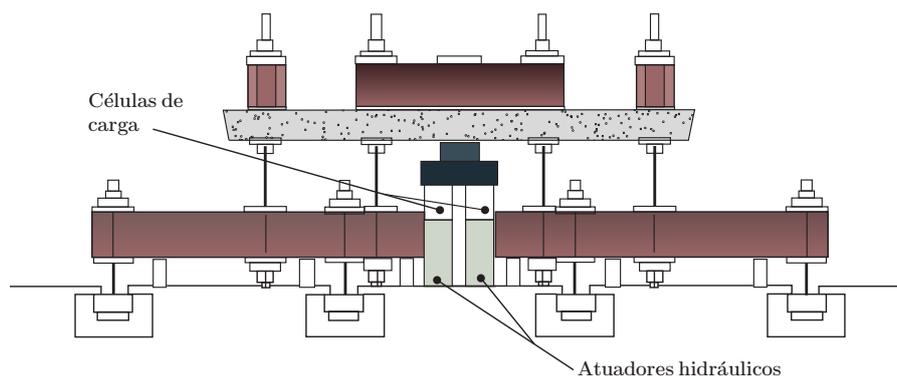


Figura 4.30: Esquema utilizado para o ensaio da laje M1, Melges (2001).

Tabela 4.12: Propriedades mecânica dos materiais utilizados na laje M1.

Propriedades do concreto

$f_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)	$E_c$ (MPa)
26,6	2,71	26125

Propriedades do aço da armadura

Diâmetro (mm)	$A_s$ $\text{mm}^2$	$f_y$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$E_s$ (MPa)
16	2	590,4	722,1	190209
8	0,496	597,9	711,1	214156

### 4.3.2.1 Modelagem numérica

A modelagem numérica foi realizada seguindo as recomendações apresentadas na seção anterior. Na Figura 4.31 é mostrada a malha de elementos finitos com as condições de contorno utilizadas. As barras de flexão foram modeladas através de elementos tipo armadura incorporada (*embedded reinforcements*) levando em conta a diferença de altura das barras nas duas direções ortogonais. Nessa laje estudada, as barras de maior altura, da armadura superior, localizavam-se na direção do eixo  $x$ .

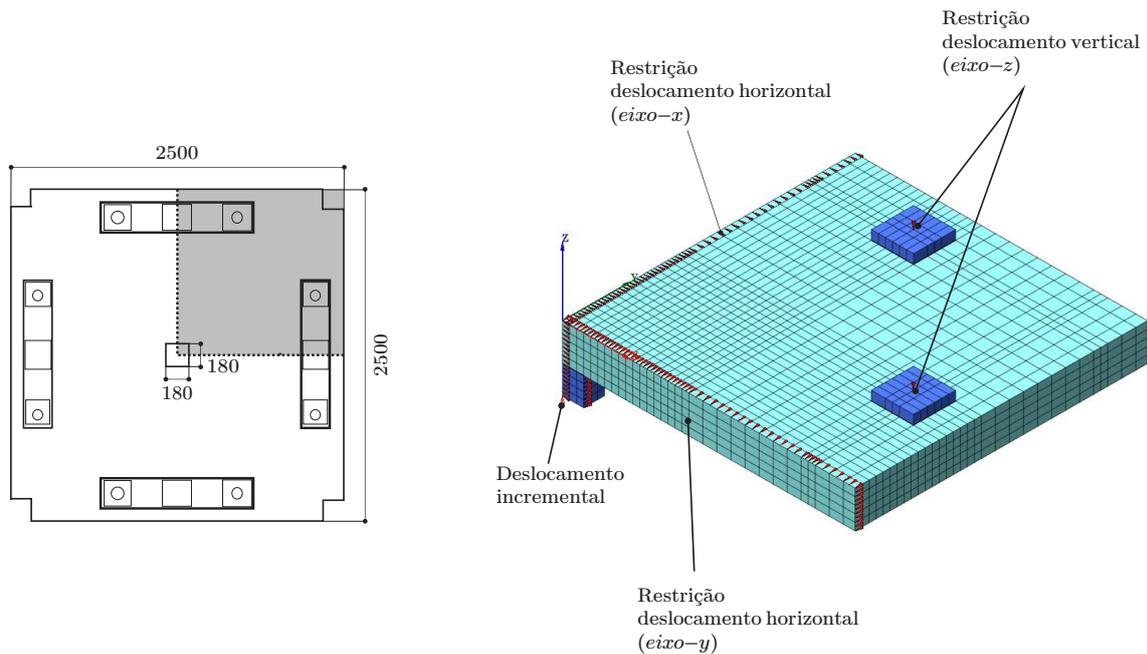


Figura 4.31: Malha de elementos e condições de contorno da laje M1.

### 4.3.2.2 Comparação de resultados

Similarmente à laje analisada na seção anterior, a comparação entre os resultados numéricos e experimentais é realizada a partir da curva carga *versus* deslocamento e da curva de carga *versus* deformação nas barras da armadura longitudinal. Na Figura 4.32a é comparado o deslocamento obtido no centro da laje (posição 14, centro da laje). Observa-se uma boa correlação entre as curvas numérica e experimental, sendo a carga última do modelo numérico de 431,98 kN. O bom resultado obtido da modelagem é confirmado também através da curva de carga *versus* deformação da Figura 4.32b no ponto de medição próximo ao pilar.

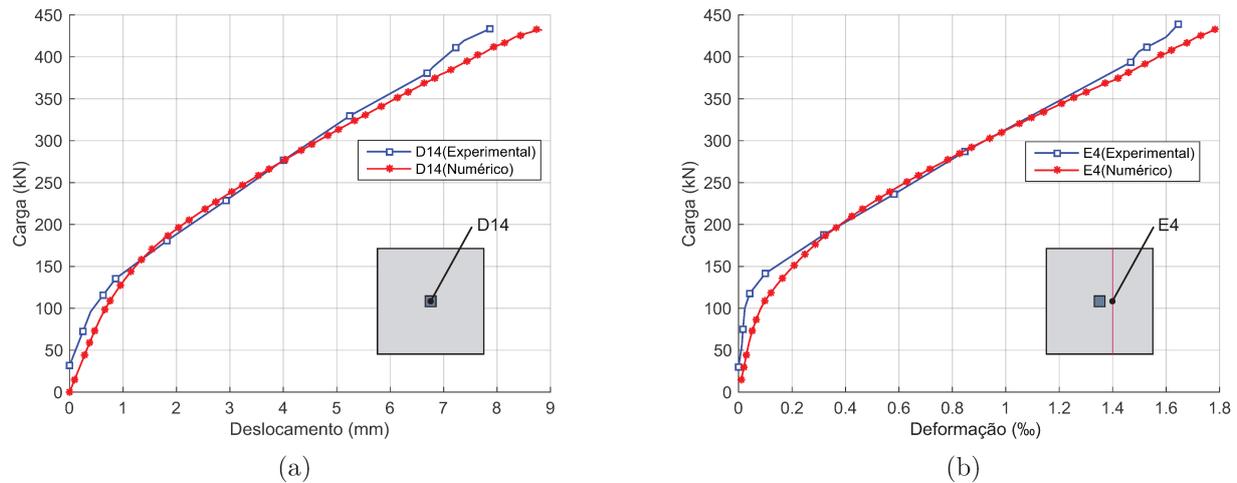


Figura 4.32: Comparação dos resultados numérico e experimental da laje M1, curva a) carga *versus* deslocamento no centro da laje b) Carga *versus* deformação no ponto de monitoramento E4.

O panorama de fissuração é mostrado na Figura 4.33, de forma similar à que foi apresentada na laje AR2. No caso da fissuração da superfície da laje (Figuras 4.33a, 4.33b e 4.33c), pode-se perceber novamente que a orientação das fissuras radiais é influenciada pela direção das barras da armadura superior de maior altura útil. Como é de se esperar essas fissuras surgem do centro do pilar e com o aumento da carga chegam até a borda da laje. O modelo consegue também capturar as fissuras tangenciais na superfície da laje. Nas Figuras 4.33e, 4.33f e 4.33g é observado a evolução das fissuras na espessura da laje. O panorama coincide com a fissuração esperada de uma ruptura à punção, sendo observado o surgimento inicialmente de fissuras retas (provocadas pela flexão) e fissuras inclinadas ao redor do pilar já na fase de resistência ao cisalhamento.

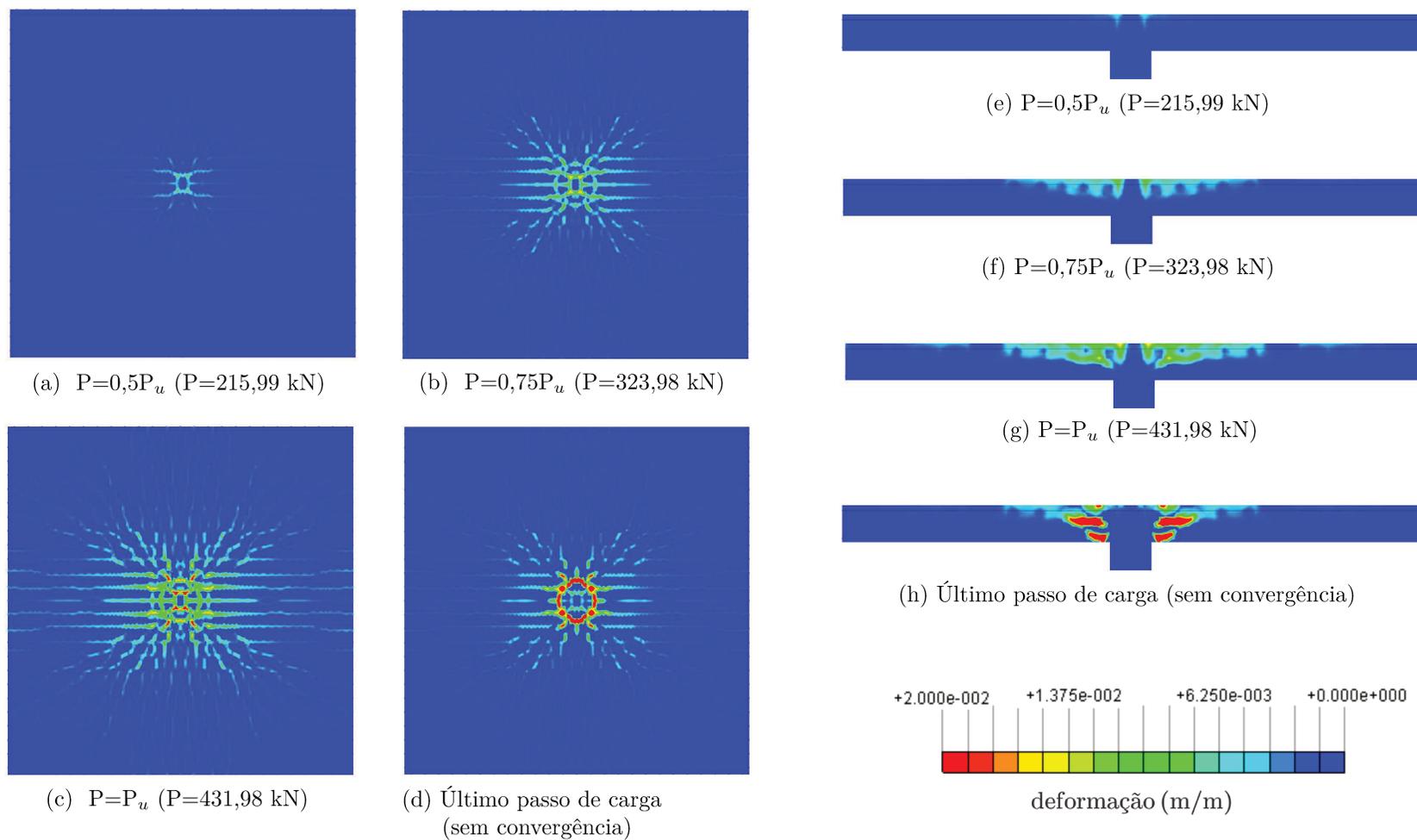


Figura 4.33: Evolução do panorama de fissuração na superfície superior e na espessura no modelo da laje M1.

## 4.4 Lajes de concreto protendido com ruptura por punção

Finalmente é apresentado nesta seção a modelagem de lajes protendidas com ruptura por punção. Em comparação com as lajes de concreto armado, a modelagem das lajes protendidas é mais complexa, não só pelo fato de ter que incluir a armadura de protensão no modelo, mas também pelo número de ensaios encontrados na literatura ser mais reduzido. Neste trabalho foram escolhidos duas lajes dos mesmos pesquisadores apresentados na seção anterior. O principal critério para a escolha desses ensaios foi a informação detalhada das etapas de carregamento da lajes e na aplicação da protensão.

### 4.4.1 Laje AR10 (Ramos, 2003)

A primeira laje protendida a ser modelada corresponde a laje AR10 da segunda série de ensaios experimentais realizada por Ramos (2003). Nessa série avaliou-se o efeito da força de desvio provocada pela inclinação dos cabos. O esquema do ensaio foi realizado de tal forma que se pudesse estudar esse efeito de forma isolada. Para eliminar a força de compressão da componente horizontal, os cabos eram ancorados em quatro pórticos de reação conforme ao esquema de ensaio ilustrado na Figura 4.34.

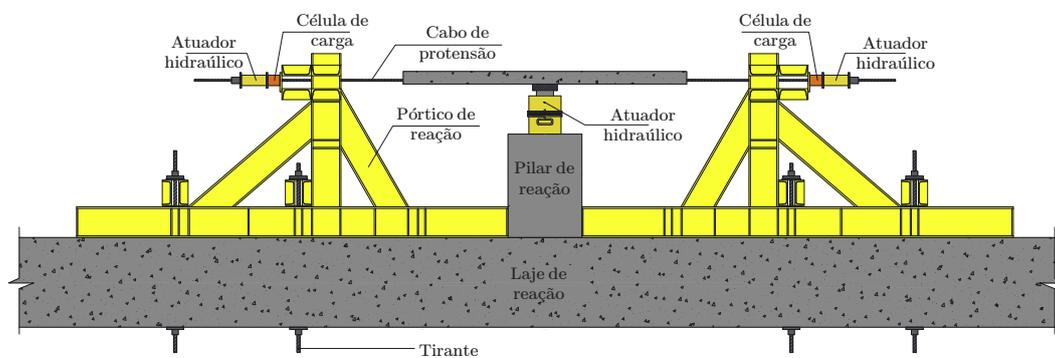


Figura 4.34: Esquema de ensaio da laje AR10, Ramos (2003).

Como poder ser visto na Figura 4.35 a laje AR10 tinha as mesmas dimensões da laje de referência AR2. O sistema de aplicação da carga foi invertido ao utilizado na primeira série, ou seja, o deslocamento vertical foi impedido nos oito pontos próximos a borda da laje e a carga foi aplicada no pilar central através de um atuador hidráulico. A armadura passiva corresponde à mesma utilizada na laje AR2.

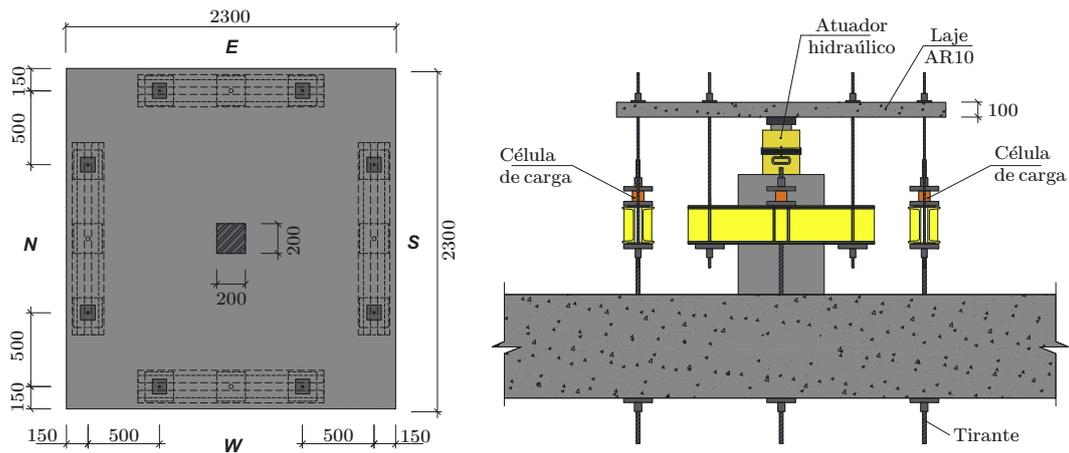


Figura 4.35: Dimensões (em mm) e aplicação do carregamento na laje AR10, Ramos (2003).

Na laje AR10 foram utilizados oito cabos não aderentes no total (quatro em cada direção). Os cabos eram de 12,7 mm de diâmetro e tinham um traçado semi-parabólico (ver Figura 4.36). A Tabela 4.13 apresenta as alturas úteis das armaduras e o desvio vertical médio dos cabos em cada direção. Por outro lado, as propriedades das armaduras, passiva e ativa, e do concreto são apresentadas na Tabela 4.14.

Para aplicação da força de protensão foram utilizados oito atuadores hidráulicos (um para cada cabo). Para garantir a mesma força nos cabos, os atuadores hidráulicos se encontravam ligados pelo mesmo circuito. Na execução do ensaio, antes de fazer a protensão dos cabos aplicou-se uma carga de aproximadamente 50 kN. Essa operação tinha como objetivo evitar a fissuração da face inferior da laje, provocada pela protensão. Em seguida, procedeu-se ao tensionamento de cada cabo até atingir um valor de aproximadamente 84 kN. Segundo Ramos (2003) a força dos cabos era mantida constante durante o ensaio por meio de uma unidade de pressão hidráulica, porém apresentaram-se algumas variações da ordem de 5 kN. A laje teve uma ruptura por punção atingindo uma carga de 371 kN.

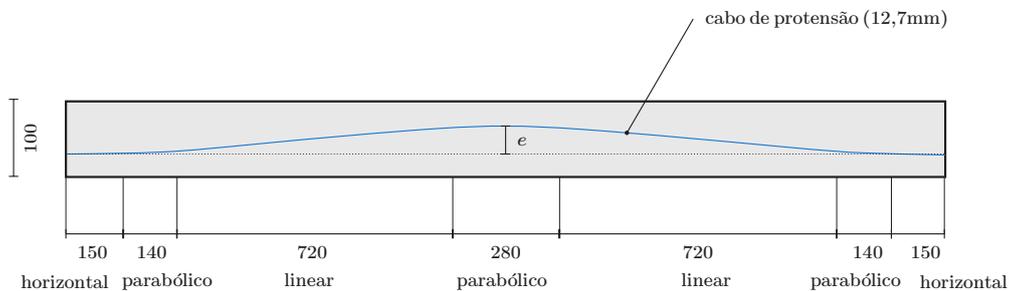


Figura 4.36: Traçado do cabo da laje AR10.

Tabela 4.13: Altura útil da armadura passiva ( $d_s$ ), desvio vertical do cabo ( $e$ ) e altura útil meia dos cabos ( $d_p$ ) para cada uma das direções norte-sul e leste-este.

Altura útil armadura passiva (mm)		Desvio vertical inicial do cabo (mm)		Altura útil dos cabos (mm)	
$d_{s,E-W}$	$d_{s,N-S}$	$e_{E-W}$	$e_{N-S}$	$d_{p,E-W}$	$d_{p,N-S}$
85,9	75,7	40,3	40,7	58,1	72,9

Tabela 4.14: Propriedades mecânicas dos materiais da laje AR10

Propriedades do concreto:				Propriedades do aço do cabo:			Propriedades do aço passivo:		
$f_{cu}$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)	$E_c$ (MPa)		Diâmetro (mm)	$f_{sy}$ (MPa)	$f_{su}$ (MPa)	Diâmetro (mm)	$f_{sy}$ (MPa)	$f_{su}$ (MPa)
51,8	41,4	3,1	29300	12,7 (0,5")	1855	1978	6	555	670
							10	481	633

#### 4.4.1.1 Modelagem numérica

A modelagem foi realizada levando em conta as considerações apresentadas nas seções anteriores. Para a discretização da laje foi utilizada a mesma malha da laje AR2 como pode ser observado na Figura 4.37. A única diferença foi que para este caso foi incluída a armadura de protensão. A discretização do cabo foi a mesma à utilizada nas vigas protendidas apresentadas na seção 4.2. Os cabos foram representados como elementos de armadura incorporada junto com o modelo de aderência (*bond-slip*) de Dörr (1980).

Para representar o procedimento do ensaio a análise numérica foi dividida em três etapas:

- (i) Aplicação do deslocamento incremental da laje até atingir uma reação nos apoios de 50 kN. Esta etapa tinha como objetivo representar a carga imposta na laje para evitar fissuração devido ao efeito da protensão.
- (ii) Realização da protensão, aplicando a força de tração nos cabos. As reações de compressão não foram incluídas no modelo devido o efeito da compressão ser nulo no ensaio.
- (iii) Após aplicar a protensão os cabos eram ancorados restringindo os deslocamentos no nó externo (ver detalhe na Figura 4.37), garantindo assim que o cabo não fizesse nenhum tipo de compressão na laje. Finalmente era realizada a aplicação do deslocamento incremental até o modelo atingir o número máximo de iterações permitidas.

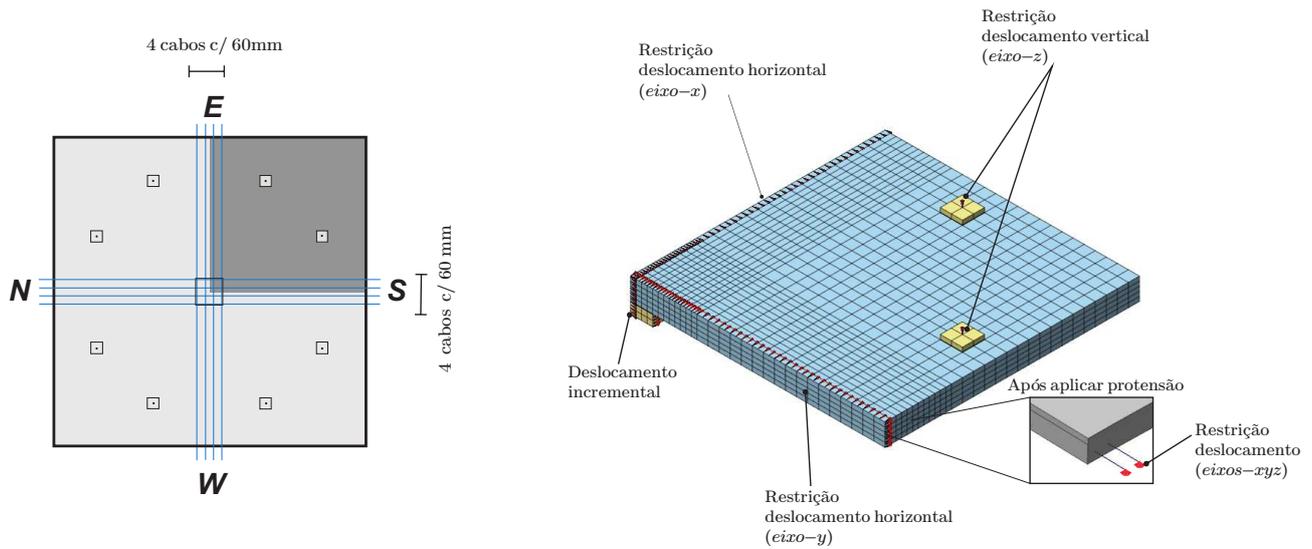


Figura 4.37: Malha de elementos finitos e condições de contorno utilizadas no modelo da laje AR10.

#### 4.4.1.2 Comparação de resultados

A Figura 4.38 apresenta a comparação das curvas de carga *versus* deslocamento nos pontos 8 e 9 em relação ao pilar central (ponto 3). Em geral, é observado uma boa correlação dos resultados experimentais e numéricos. Ao analisar as curvas obtidas no ensaio é observado que durante a protensão dos cabos apresentou-se um decréscimo do deslocamento vertical da laje. Esse fenômeno não é capturado porque na simulação foi assumida uma restrição completa do pilar no deslocamento vertical.

Além disso, é importante mencionar que no modelo numérico a protensão era aplicada simultaneamente em todos os cabos e o acréscimo de carga provocado pelo tensionamento foi adicionado à reação total da laje nessa mesma etapa de carregamento. Após aplicar a protensão a reação do modelo numérico passou de 49,29 kN a 101,39 kN, e é aproximadamente nesse nível de carga no qual as curvas experimentais e numéricas se encontravam novamente. A partir desse ponto as curvas apresentam um bom ajuste até atingir a carga máxima do modelo numérico (327,85 kN). O fato do modelo não ter alcançado a carga de 371 kN do ensaio pode ser justificado pela dificuldade de simular a variação das forças nos cabos durante o ensaio. Na modelagem numérica, por simplificação e pelas condições de apoio adotadas, os cabos tiveram um acréscimo de carga maior do que no ensaio experimental.

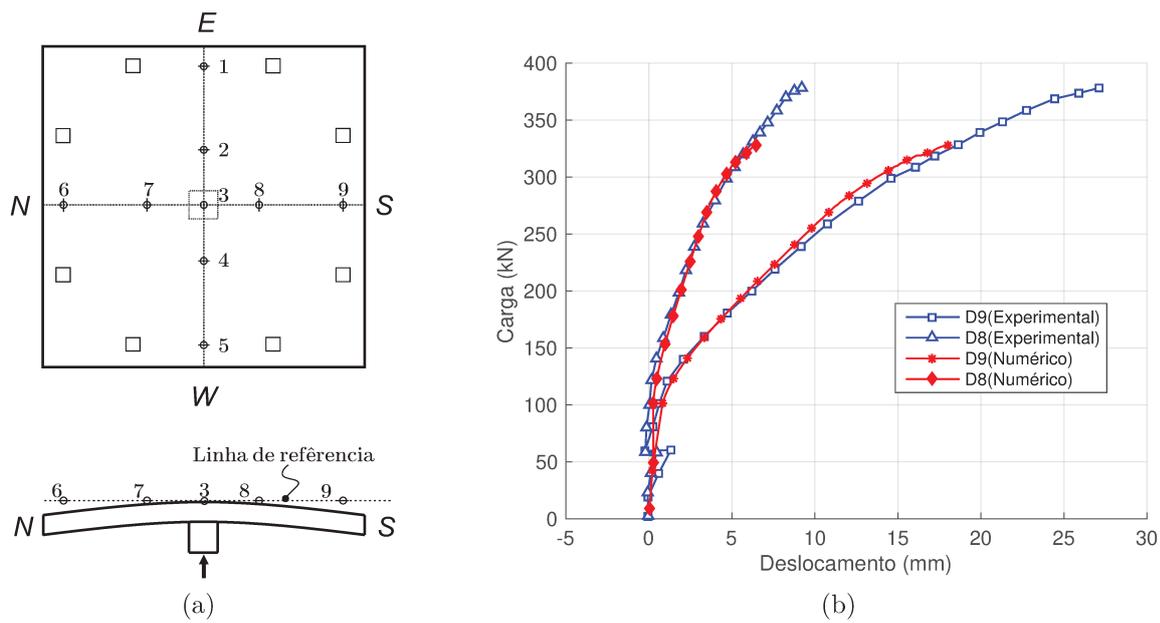


Figura 4.38: Comparação dos deslocamentos obtidos no transdutores 8 e 9, modelo experimental e numérico.

Na Figura 4.39 são comparadas as deformações em algumas barras da armadura superior. Em todos os gráficos é observado que após da aplicação da protensão a deformação obtida numericamente é menor do que a experimental para um mesmo nível de carregamento. Apesar disso as curvas conseguem representar bem o comportamento geral nas barras, principalmente nas posições 3 e 4.

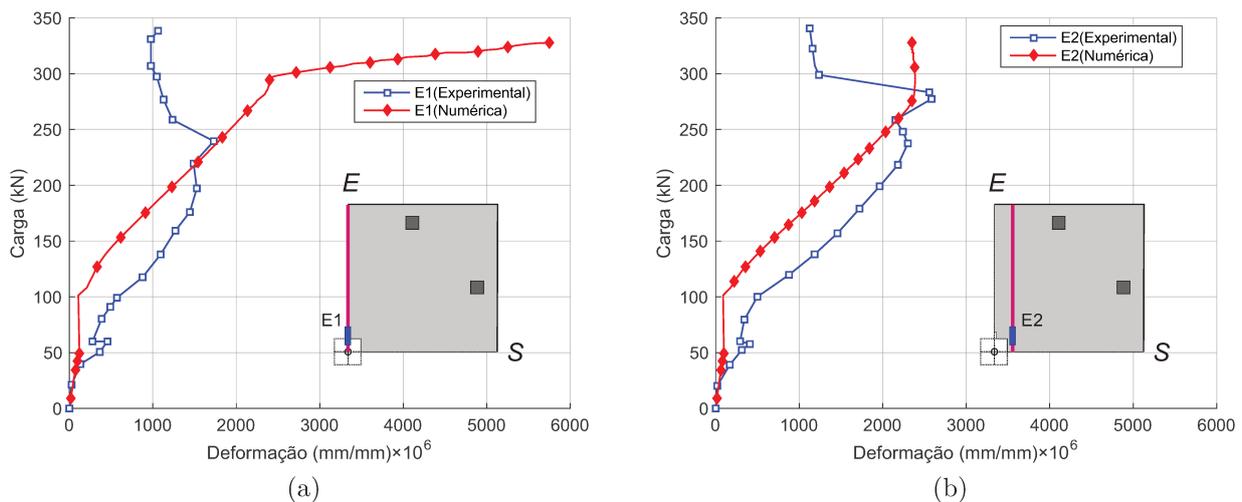


Figura 4.39: Comportamento das curvas de carga *versus* deformação nas barras de aço, modelo experimental e numérico.

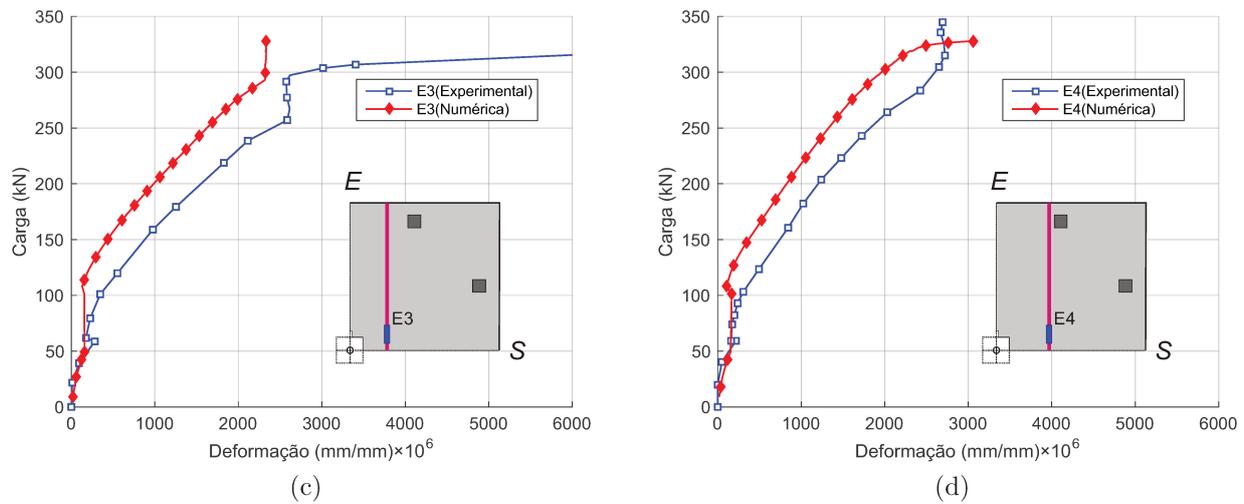


Figura 4.39: Comportamento das curvas de carga *versus* deformação nas barras de aço, modelo experimental e numérico (continuação).

Por fim, é apresentado a evolução do panorama de fissuração obtido na laje, representado através da deformação volumétrica no concreto. É interessante comparar a fissuração da laje AR10 com a obtida na laje de referência AR2, mostrada na Figura 4.29 (página 109). Para os primeiros níveis de carga é observado uma menor quantidade de fissuras o que demonstra o efeito da componente vertical gerada pelo tensionamento aplicado nos cabos. Como aconteceu na laje de referência, a orientação das primeiras fissuras coincide com a direção da armadura passiva de maior altura útil (sentido este-leste), como pode ser visto na 4.40a. Na espessura da laje é observada a formação de fissuras em torno do pilar. Além das fissuras inclinadas por causa da punção, e visto também uma grande região de fissuração no ponto de maior altura útil dos cabos.

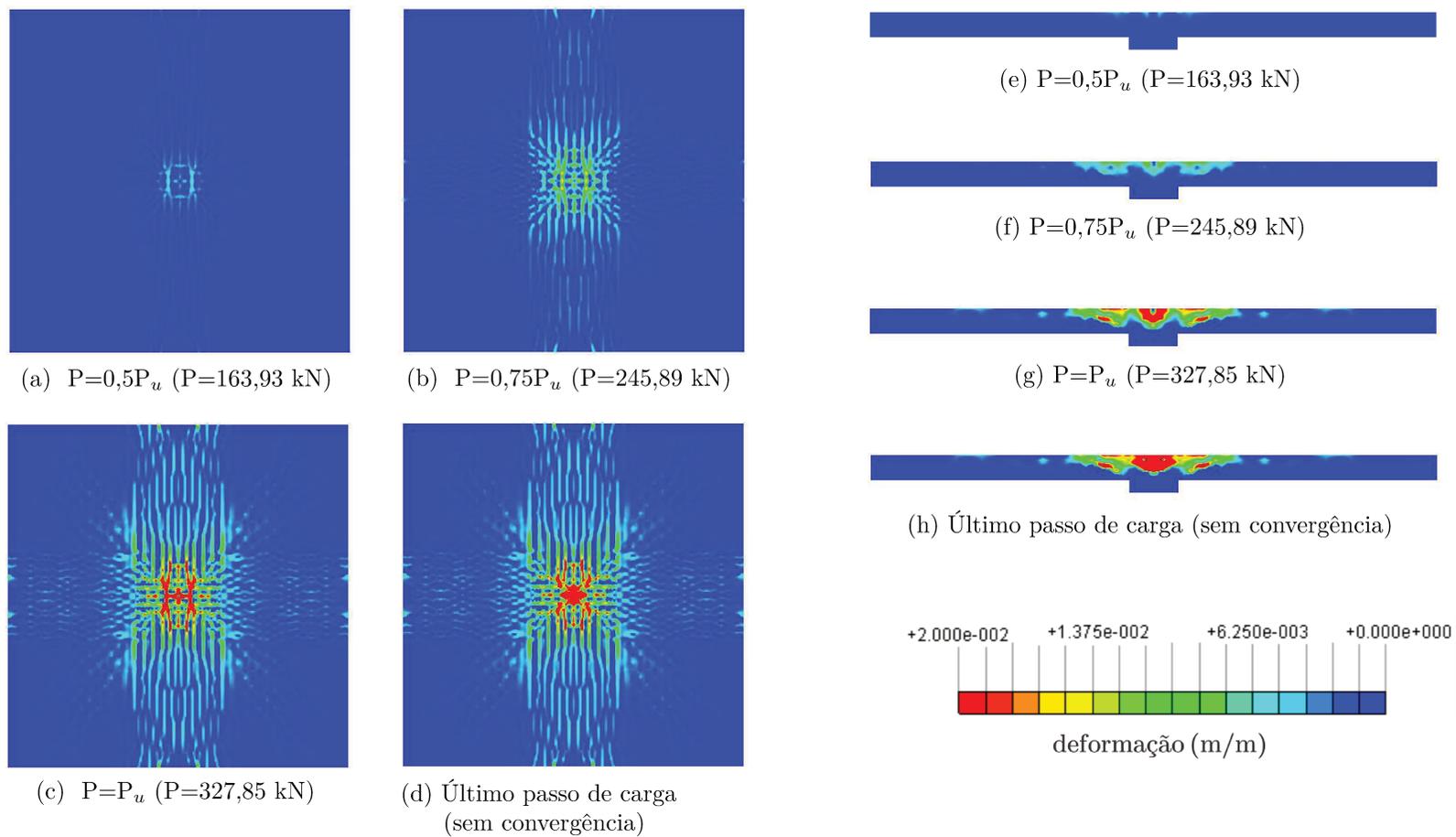


Figura 4.40: Evolução do panorama de fissuração na superfície superior e na espessura no modelo da laje AR10.

#### 4.4.2 Laje M4 (Melges, 2001)

Nessa seção é apresentada a modelagem da laje protendida M4 ensaiada por Melges (2001). A laje tinha as mesmas dimensões da laje de referência M1 e para aplicação do carregamento também foi utilizado o mesmo esquema de ensaio. Como armadura passiva superior foi adotada uma malha de barras de 12,5 mm a cada 100 mm e uma altura útil meia de 12,8 mm. A armadura passiva inferior corresponde à mesma utilizada na laje de referência (barras de 8 mm a cada 100 mm). Na armadura de protensão foram usadas 16 cabos não aderentes tipo CP-190 RB 7, como é ilustrado na Figura 4.41. As propriedades dos materiais utilizados na laje são apresentadas na Tabela 4.15.

Tabela 4.15: Propriedades mecânicas dos materiais da laje M4

Propriedades do concreto:			Propriedades do aço do cabo:				Propriedades do aço passivo:			
$f_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)	$E_c$ (MPa)	Diâmetro (mm)	$A_p$ (mm <sup>2</sup> )	Carga 1% (kN)	$E_p$ (MPa)	Diâmetro (mm)	$f_{sy}$ (MPa)	$f_{su}$ (MPa)	$E_c$ (MPa)
51,92	3,87	30,46	12,7	99,9	182	208000	12,5	651,4	792,3	201541
							8	601,8	711,9	206900

As cordoalhas tinham um traçado parabólico como pode ser visto na Figura 4.41. A equação da parábola era dada pela seguinte expressão:

$$h_x = \left( \frac{-4e_x}{L^2} \right) x^2 + \left( \frac{4e_x}{L^2} \right) x \quad (4.4.1)$$

$$h_y = \left( \frac{-4e_y}{L^2} \right) y^2 + \left( \frac{4e_y}{L^2} \right) y \quad (4.4.2)$$

onde:

$x$  e  $y$  é a posição na qual se deseja saber a excentricidade da cordoalha nos respectivos eixos

$h_x$  e  $h_y$  são as excentricidades da cordoalha na posição  $x$  e  $y$ , respectivamente

$L$  é o comprimento total da cordoalha

$e_x$  e  $e_y$  são as excentricidades máximas da cordoalha no meio do vão

O procedimento de carregamento foi dividido em diferentes etapas. Similar ao ensaio da laje AR10, antes de realizar a protensão na laje M4 foi aplicada uma carga de aproximadamente 80 kN com o objetivo de evitar que o efeito da compressão dos cabos fissurasse a face inferior da laje. Posteriormente os cabos eram tensionados com uma força padrão de 147 kN, porém eram tensionados novamente devido às perdas nas ancoragens. A força de cada um dos cabos nessas etapas é apresenta nas Tabelas 4.16 e 4.17. Devido ao traçado parabólico dos cabos, a



#### 4.4.2.1 Modelagem numérica

A malha de elementos finitos utilizada na análise é mostrada na Figura 4.42. Na discretização foram incluídas as placas de apoio, o pilar e as placas de ancoragens dos cabos.

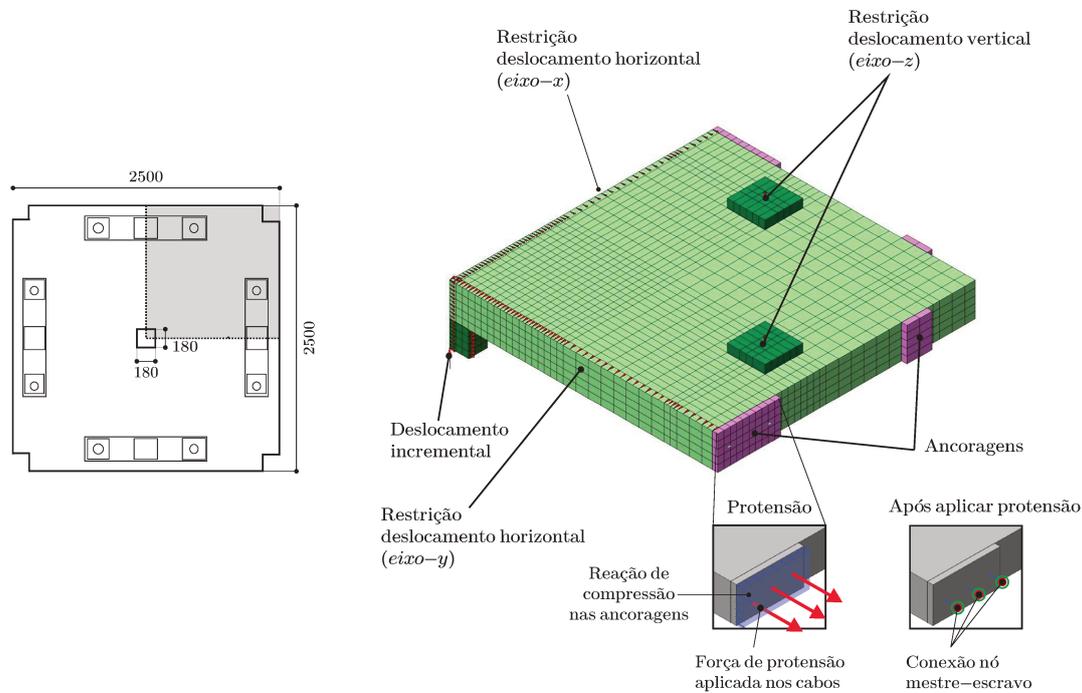


Figura 4.42: Malha de elementos finitos e condições de contorno da laje M4.

A análise numérica foi dividida em etapas com o objetivo de representar o procedimento do ensaio descrito na seção anterior. Inicialmente foi aplicado o deslocamento incremental no pilar, até a laje atingir uma reação de 80 kN. A partir desse ponto, era aplicada a força de protensão efetiva (força após re-protensão mostrada nas Tabelas 4.17 e 4.16) em cada um dos cabos junto com as reações de compressão nas ancoragens, as quais eram calculadas como a força efetiva dos cabos dividida pela área da ancoragem. Finalmente, as cargas devido ao efeito da protensão eram removidas e eram ativadas as conexões de nó mestre-escravo entre a extremidade do cabo e o nó mais próximo da placa de ancoragem.

#### 4.4.2.2 Comparação de resultados

Na Figura 4.43a é comparada a curva de carga *versus* deslocamento na posição P14 (centro da laje). Em ambas as curvas é observado o efeito da componente vertical criada pelos cabos quando as curvas atingem a carga de 80 kN. A curva experimental apresenta flutuações na etapa de aplicação da protensão. Este fenômeno é explicado pela re-protensão realizada nos cabos e a possível acomodação dos apoios durante o tensionamento dos mesmos. Já na

análise numérica, aplicou-se a protensão simultaneamente em todos os cabos e foi assumido uma restrição completa dos deslocamento verticais no pilar. O efeito da componente vertical dos cabos fez com que a de carga do modelo fosse de 80 kN a 166,55 kN. De forma geral observa-se que a resposta numérica segue a tendência da curva do ensaio chegando, a uma carga e deslocamentos finais próximos aos obtidos por Melges (2001).

São comparadas também as curvas de carga *versus* deformação para as posições E2 e E6 das barras da armadura a flexão superior. No ensaio, dois extensômetros na parte superior e inferior foram colados nas barras. Na Figura 4.43b é possível observar como a curva obtida numericamente representa bem o comportamento das barras. No caso da posição 6, pode ser visto que as leituras dos dois extensômetros apresentam uma maior do que na posição 2. Após aplicar a protensão a curva obtida numericamente parece representar a média entre das duas leituras. A partir de 600 kN a curva se ajusta melhor aos valores do extensômetro superior.

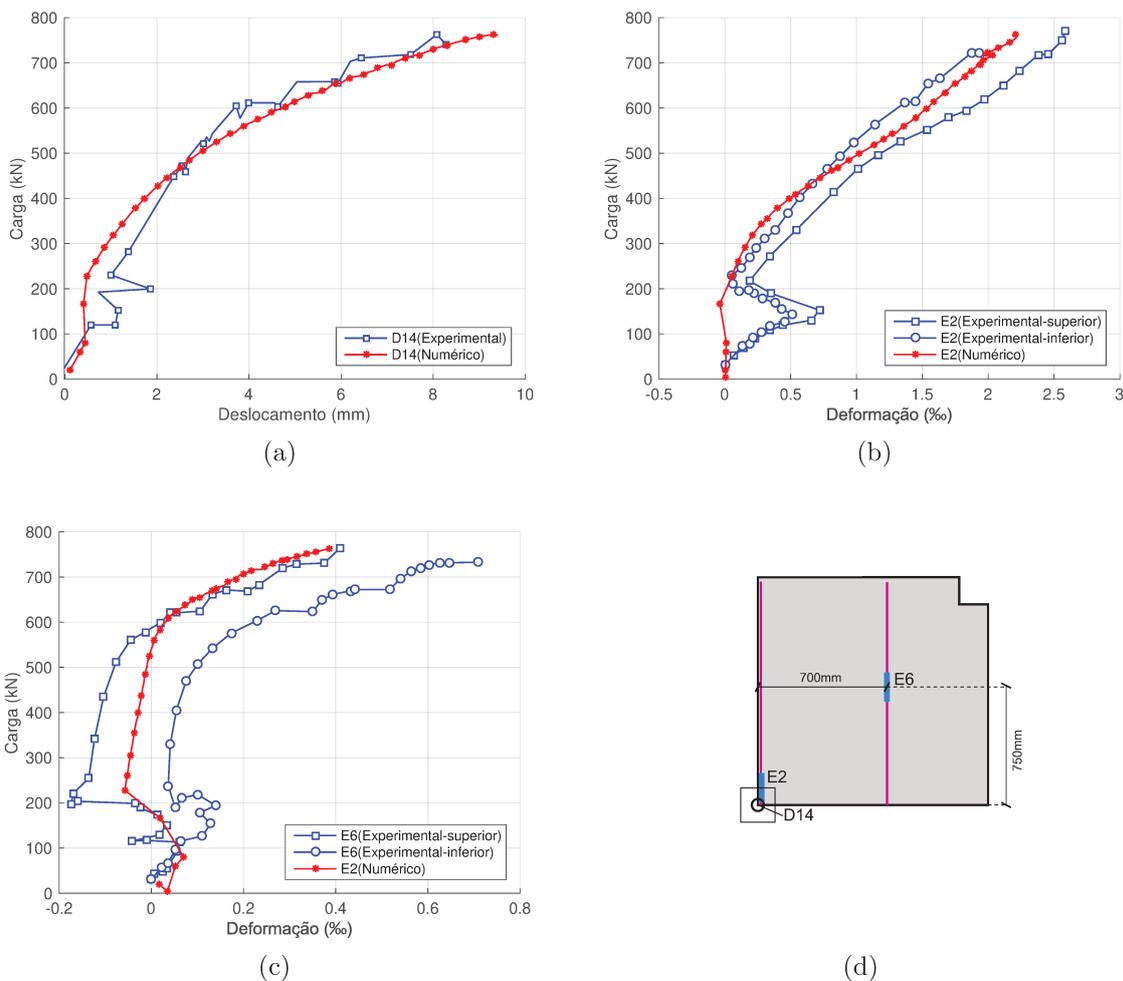


Figura 4.43: Comparação da curva de carga *versus* deslocamento e carga *versus* deformação do aço nos pontos de monitoramento E2 e E6.

Na Tabela 4.18 são comparadas a força em cada cabo no momento da ruptura da laje para cada uma das direções. A resposta numérica teve uma excelente predição do valor de força final, validando assim o modelo constitutivo usado para simular o comportamento dos cabos não aderentes.

Tabela 4.18: Comparação da força do cabo no momento na ruptura na direção  $y$  e  $x$ .

<b>Força no cabo na ruptura na direção <math>y</math> (kN)</b>				
Cabo	5	6	7	8
Numérico	136,39	138,54	134,85	136,47
Experimental	137,16	141,03	134,88	135,52
$F_{FEM}/F_{EXP}$	0,99	0,98	1,00	1,01

<b>Força no cabo na ruptura na direção <math>x</math> (kN)</b>				
Cabo	8	7	6	5
Numérico	136,47	136,53	141,29	137,98
Experimental	135,52	134,10	140,08	137,89
$F_{FEM}/F_{EXP}$	1,01	1,02	1,01	1,00

Igual como foi apresentado para as outras análises, na Figura 4.44 é mostrado o panorama de fissuração obtido no concreto, representado através da deformação volumétrica. Comparando o panorama de fissuração da laje de referência M1 (mostrado na Figura 4.33, na página 113) é evidenciado o efeito da protensão no controle da fissuração. Para um carregamento de 380 kN a fissuração da laje M4 é praticamente nula (Figuras 4.44a e 4.44e). Com a evolução da fissuração na superfície da laje é observado que orientação das fissuras radiais continua sendo igual à direção das barras de maior altura da armadura superior. Similar ao acontecido na laje AR10, apresentada na seção anterior, no momento da ruptura da laje são observadas, na espessura da laje, fissuras inclinadas em torno do pilar e também no ponto onde os cabos tem a maior excentricidade.

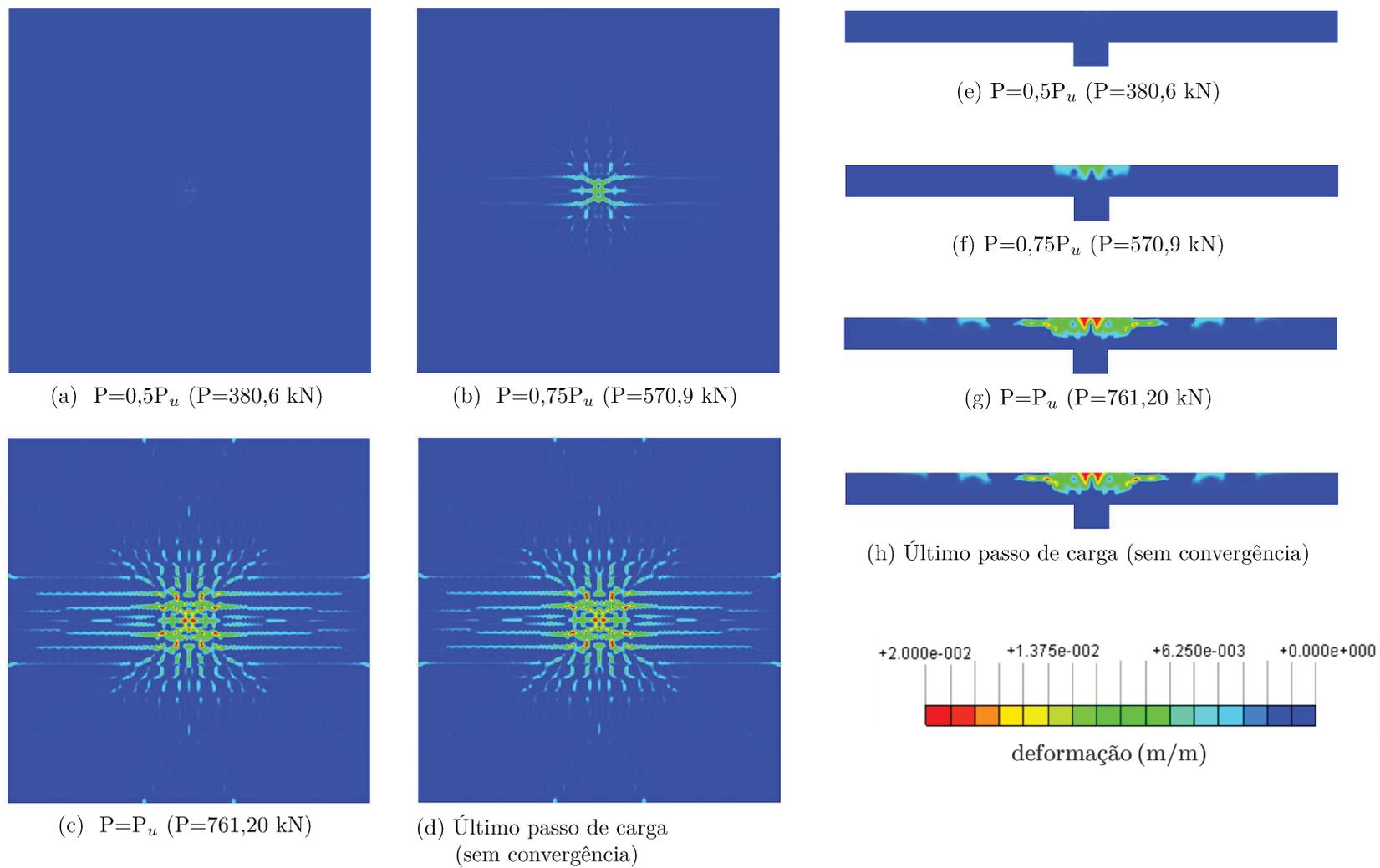


Figura 4.44: Evolução do panorama de fissuração na superfície superior e na espessura no modelo da laje M4.

## Capítulo 5

### Análise paramétrica

#### 5.1 Considerações gerais

Neste capítulo apresenta-se o estudo paramétrico realizado através de análises numéricas em modelos de lajes protendidas com cabos não aderentes. O objetivo deste estudo foi avaliar a influência da protensão na resistência à punção. As variáveis analisadas foram a resistência à compressão do concreto, o traçado dos cabos e a distribuição deles em planta. A geometria escolhida foi mantida constante em todos os modelos, como também a taxa de armadura longitudinal. Serão apresentados detalhadamente a geometria e discretização das lajes, assim como as propriedades dos modelos constitutivos utilizados nas modelagens.

#### 5.2 Geometria dos modelos

As dimensões dos modelos foram adotadas com o objetivo de representar a região de momentos negativos ao redor de um pilar interno, como pode ser visto na Figura 5.1. A escolha das dimensões e da taxa da armadura longitudinal foi baseada nas pesquisas experimentais apresentadas na revisão bibliográfica, com o intuito de garantir que a ruptura fosse por punção. Desse modo, todas as lajes foram simuladas através de painéis quadrados de  $3,0 \times 3,0 \text{ m}^2$ , o que corresponde a uma laje com vãos sucessivos de aproximadamente 7 metros ( $a \approx 0,22l$ , sendo  $a$  igual a 1,5 m de acordo com a Figura 5.1a). Para espessura ( $h$ ), foi adotado um valor de 200 mm, que equivale a uma relação de  $h = l/35$ . O pilar foi simulado usando uma placa de aço de seção quadrada de  $240 \times 240 \text{ mm}^2$ .

As Figura 5.1 mostram a geometria e dimensões das lajes modeladas numericamente no estudo paramétrico:

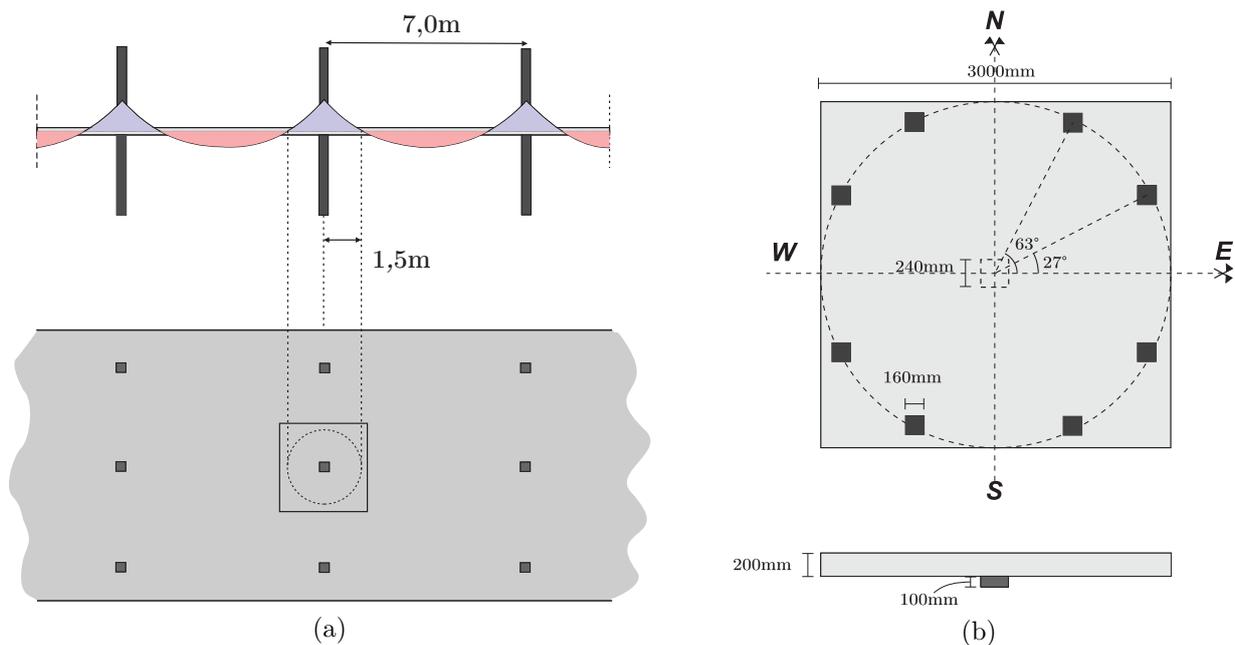


Figura 5.1: Idealização da região de momentos negativos para uma laje lisa e dimensões da laje modelada.

### 5.3 Descrição da análise paramétrica proposta

Foram realizados 48 modelos numéricos divididos em quatro séries:

- **Série A:** 3 lajes de referência sem protensão
- **Série B:** 15 lajes protendidas com cabos retos sem excentricidade
- **Série C:** 15 lajes protendidas com cabos retos com excentricidade
- **Série D:** 15 lajes protendidas com cabos com traçado parabólico

As três lajes da série A correspondem às resistências de compressão do concreto (25 MPa, 35 MPa e 50 MPa) analisadas no estudo paramétrico. Para as demais séries (B, C, D) foram usadas essas mesmas resistências à compressão em 5 configurações de distribuição dos cabos em planta diferentes (ver Figura 5.2), obtendo assim 15 lajes em cada série. Para identificar os modelos, foi definida a seguinte nomenclatura: *série-configuração- $f_{ck}$* . Desse modo, o modelo **C-3-25**, por exemplo, corresponde à laje da série C (cabos retos com excentricidade), com resistência do concreto de 25 MPa e com a configuração 3 (6 cabos a cada 200 mm nas duas direções como é ilustrado Figura 5.2c).

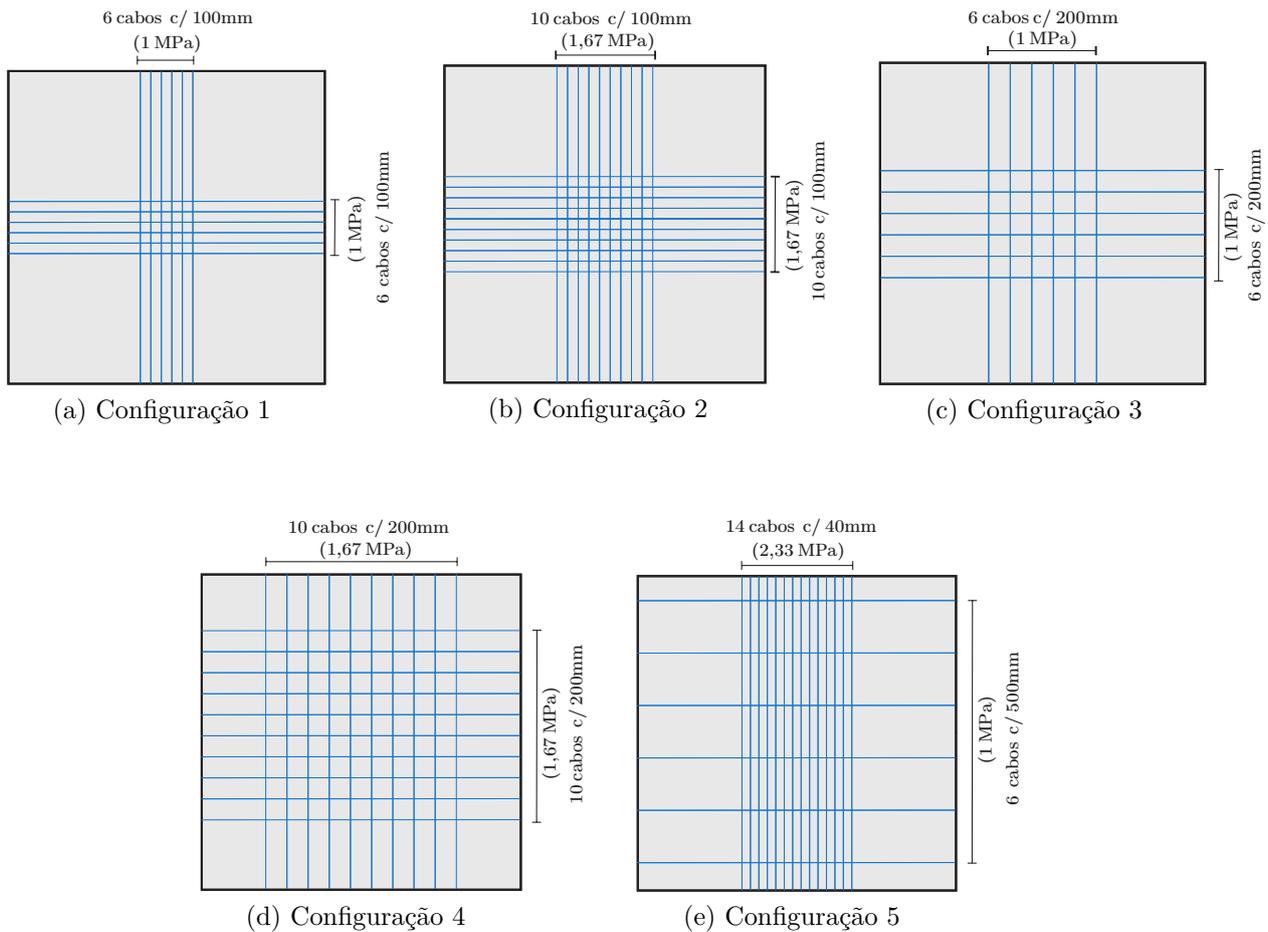


Figura 5.2: Configurações da distribuição em planta dos cabos e tensões de compressão aplicadas nas séries B, C e D.

### 5.4 Discretização dos modelos

Seguindo o mesmo procedimento utilizado nos modelos das lajes simuladas no Capítulo 4, a geometria da laje proposta foi discretizada usando elementos hexaédricos (bricks) isoparamétricos de 20 nós (denominados CHX60 no programa DIANA). Da mesma forma que nos modelos calibrados, somente um quarto da laje foi simulada, impedindo também os deslocamentos perpendiculares nos eixos de simetria. No modelo numérico também foram incluídas as placas para aplicação de carga e de apoio. Entre a laje e as placas foram utilizados elementos de interface, para representar a tração nula entre os dois materiais. Nas lajes protendidas foram discretizadas as placas de ancoragem dos cabos de protensão. A Figura 5.3 mostra um exemplo da malha de elementos finitos utilizada com as condições de contorno.

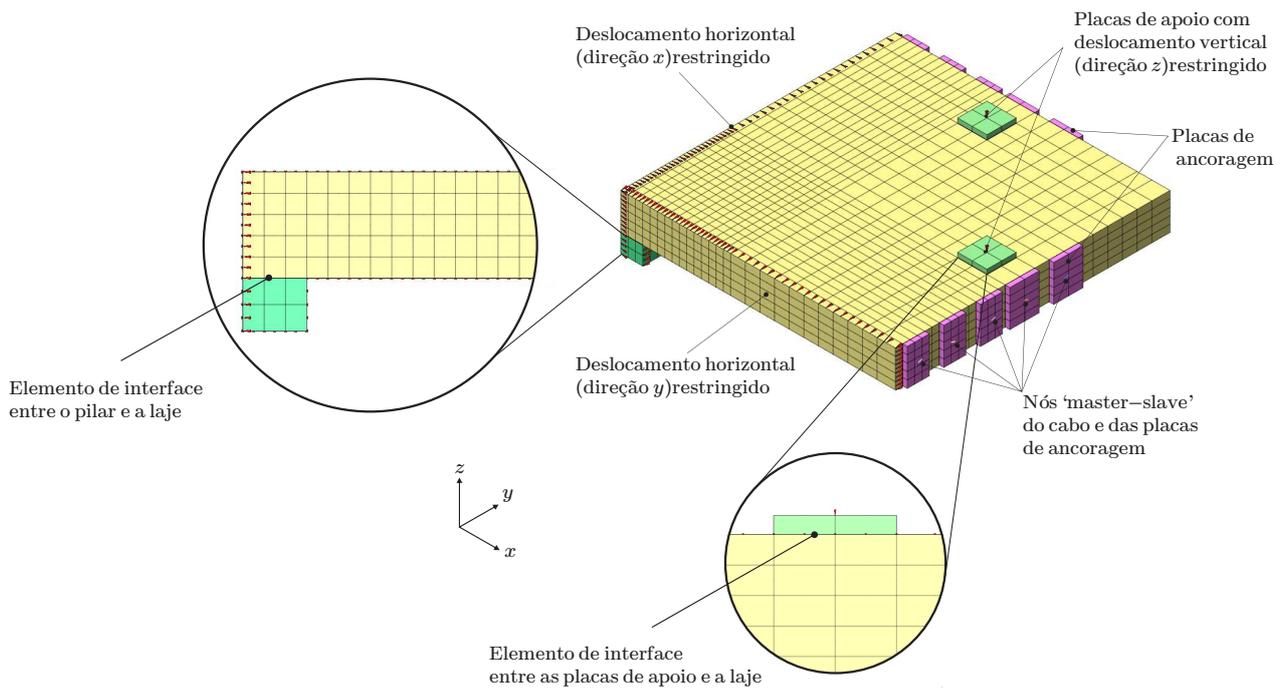


Figura 5.3: Localização dos pontos de monitoramento no concreto, na armadura passiva e ativa.

## 5.5 Modelagem dos materiais e disposição das armaduras

### 5.5.1 Concreto

Como já foi mencionado, a influência da resistência à compressão do concreto foi estudada utilizando três valores diferentes (25 MPa, 35 MPa e 50 MPa) em cada uma das séries propostas. O valor do módulo de elasticidade foi calculado por meio da seguinte expressão sugerida por Červenka et al. (2012) para a análise não linear do concreto em função da resistência à compressão do em corpos de prova cilíndricos ( $f_c$ ):

$$E_c = \left( 6000 - 15,5 \frac{f_c}{0,85} \right) \sqrt{\frac{f_c}{0,85}} \quad \text{com } f_c \text{ em MPa} \quad (5.5.1)$$

o valor da resistência à tração foi calculado utilizando a expressão recomendada pelo *fib* Model Code 2010:

$$f_t = 0,3 f_c^{2/3} \quad \text{com } f_c \leq 50 \text{ MPa} \quad (5.5.2)$$

Os demais parâmetros utilizados nas modelagens foram os mesmos explicados no Capítulo 4: usou-se o modelo de fissura distribuída utilizando a formulação de fissura Fixa, o amolecimento à tração do concreto foi levado em consideração utilizando o modelo de Hordijk (1991). O valor

de energia de fratura a tração estimou-se por meio da equação do *fib* Model Code 2010. No comportamento à compressão foi usado o modelo parabólico junto com o modelo de confinamento proposto por Selby e Vecchio (1997) e o modelo de redução de resistência devido à fissuração lateral de Vecchio e Collins (1993). Para representar o comportamento ao cisalhamento, foi usado um fator de retenção variável. A tabela 5.1 apresenta as características utilizadas nas análises numéricas realizadas para cada resistência do concreto.

Tabela 5.1: Propriedades do concreto utilizadas nas análises numéricas.

Resistência à compressão $f_c$ (MPa)	Resistência à tração $f_t$ (MPa)	Módulo de Elasticidade $E_c$ (MPa)	Energia de fratura à tração $G_f$ (N/mm)	Energia de fratura à compressão $G_c$ (N/mm)
25	2,56	30067	0,130	32,57
35	3,20	34405	0,138	34,61
50	4,07	39025	0,148	36,90

### 5.5.2 Armadura passiva

A taxa da armadura longitudinal foi mantida constante em todas as lajes modeladas. A representação das barras utilizadas está ilustrada na Figura 5.4. Na face superior da laje utilizou-se barras de diâmetro 16 mm a cada 100 mm com uma altura útil média de 169 mm, o que corresponde a uma taxa de aproximadamente 1% para a geometria adotada. Esse valor foi adotado levando em consideração os valores de taxa utilizados nas pesquisas experimentais apresentadas no banco de dados realizado na revisão bibliográfica. No caso da armadura inferior, foram usadas barras de 8 mm a cada 150 mm e cobrimento de 20 mm. Na configuração 5 foi necessária a disposição de uma armadura de fretagem na direção  $y$ , como é ilustrado na Figura 5.5, com objetivo de evitar a perda de convergência do modelo devido às altas tensões de compressão do concreto próximo às placas de ancoragem.

Na discretização da armadura foram utilizados elementos tipo barra usando a formulação de elementos incorporados (*embedded reinfomecent*), assumindo aderência perfeita entre as barras e o concreto. O comportamento do aço foi simulado usando um modelo elasto-plástico. As barras localizadas sobre os eixos de simetria foram modeladas com apenas a metade da área correspondente. Adotou-se tensão de escoamento  $f_y$  de 580 MPa e módulo de elasticidade 210 GPa para todas as barras, os quais são valores usuais para aços usados nos ensaios

experimentais consultados na revisão bibliográfica. Como será observado na apresentação dos resultados, nenhuma das barras atingiu o limite de escoamento.

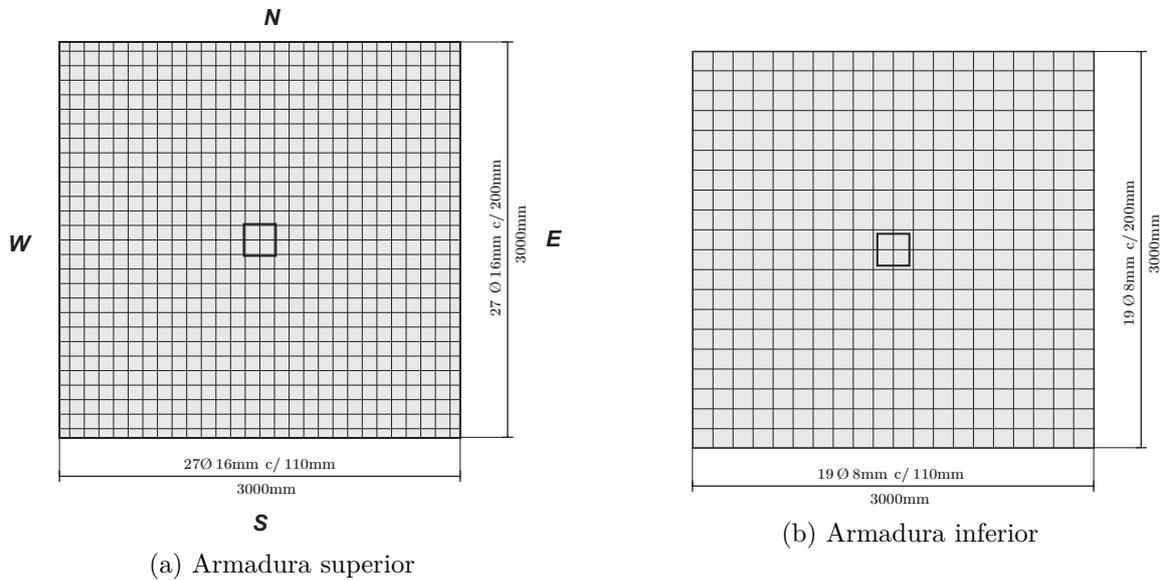


Figura 5.4: Detalhamento das armaduras longitudinais da laje proposta.

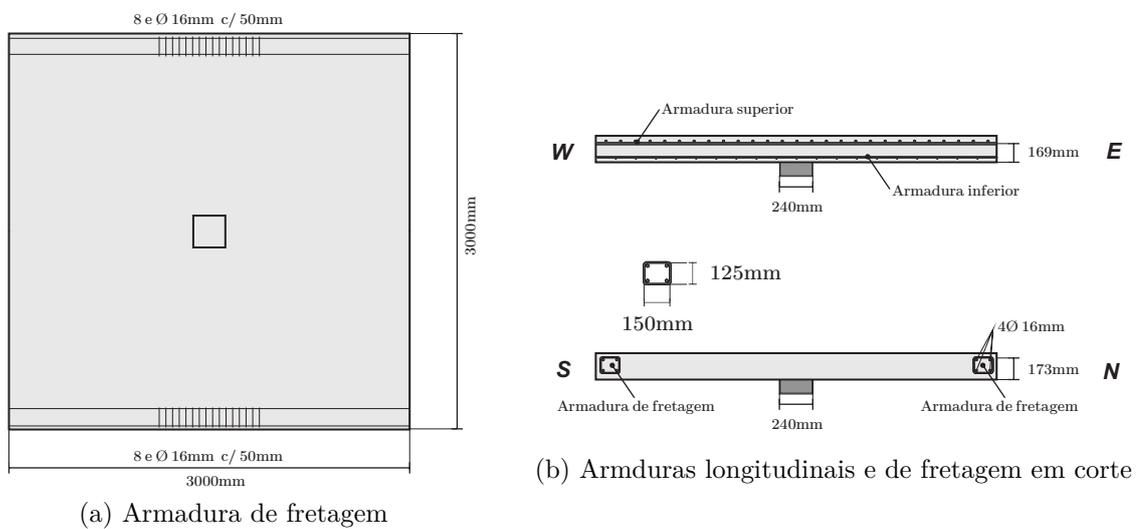


Figura 5.5: Detalhamento das armaduras de fretagem utilizada na configuração 5 e corte da laje.

### 5.5.3 Armadura ativa

Com o objetivo de estudar o efeito da distribuição em planta e traçado dos cabos foram propostas cinco configurações, que foram implementadas nas séries B, C e D. As configurações modeladas, levando em consideração as condições de simetria, são ilustradas na Figura 5.6.

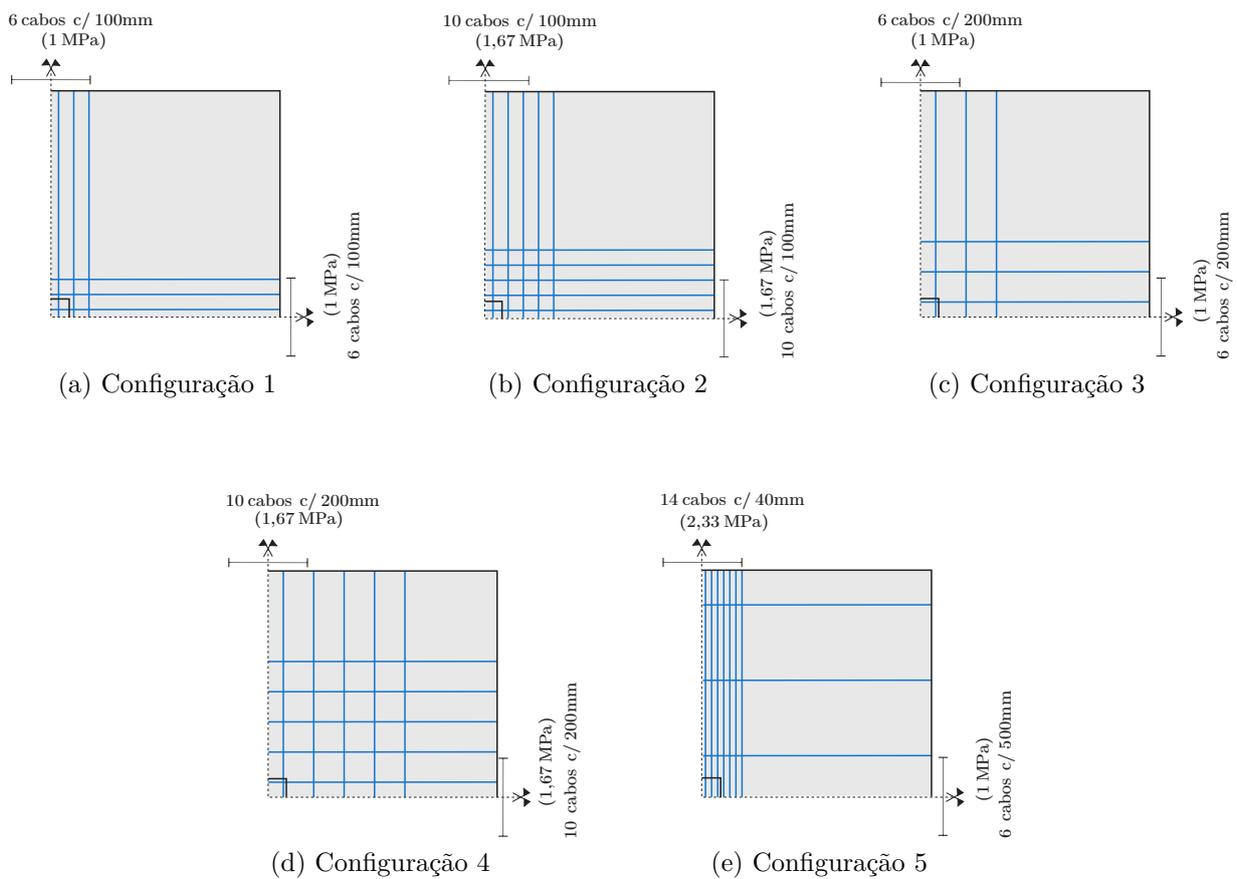


Figura 5.6: Distribuição dos cabos em planta e tensões de compressão aplicadas, em um quarto de laje, para cada uma das configurações modeladas.

Na primeira configuração (Figura 5.6a), seis cabos foram uniformemente distribuídos em cada uma das direções ortogonais da laje, gerando uma tensão média de compressão ( $\sigma_p$ ) de 1 MPa. Na segunda configuração (Figura 5.6b), foram acrescentados quatro cabos em cada uma das direções, gerando uma tensão média de compressão na laje de 1,67 MPa. Na terceira e na quarta configuração (Figuras 5.6c e 5.6d), o número de cabos foi igual ao adotado no primeiro e segundo caso, respectivamente, porém aumentou-se a distância de separação entre os cabos com o objetivo de estudar a influência da distribuição no comportamento da laje. Por fim na configuração 5 (Figura 5.6e), usou-se uma distribuição de cabos diferente em cada direção. Na direção  $y$  havia 14 cabos a cada 40 mm, enquanto na direção  $x$  havia 6 cabos a cada 500 mm. Dessa forma, a tensão de compressão para a quinta configuração foi de 2,33 MPa e 1,0 MPa, nas direções  $y$  e  $x$ , respectivamente, sendo a tensão média de 1,67 MPa. A tabela 5.2 apresenta o resumo das tensões aplicadas pelos cabos nas lajes para cada configuração.

Tabela 5.2: Tensão de compressão aplicada em cada uma das configurações das lajes protendidas.

Configuração	$\sigma_p$ direção $x$ (MPa)	$\sigma_p$ direção $y$ (MPa)	$\sigma_p$ média (MPa)
1	1	1	1
2	1,67	1,67	1,67
3	1	1	1
4	1,67	1,67	1,67
5	1	2,33	1,67

Como mencionado anteriormente, nas séries B e C os cabos tinham um traçado reto, com a diferença que na série C, os cabos tinham excentricidade de 35 mm em relação ao centroide da laje. Com o intuito de estudar o efeito da componente vertical criada pela protensão, na série D foi adotado um traçado parabólico nos cabos. O traçado geral dos cabos para cada uma das series é representado na Figura 5.7.

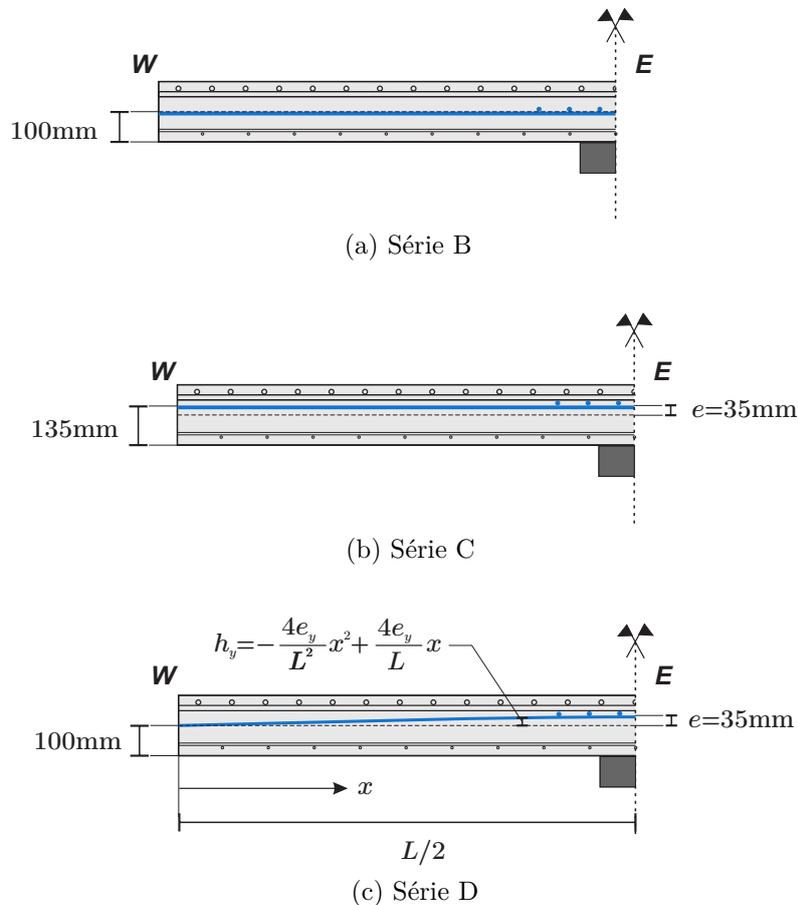


Figura 5.7: Traçado dos cabos de protensão para cada uma das séries.

Todos os cabos foram modelados com diâmetro de 12,85 mm e área nominal de 99 mm<sup>2</sup>. Adotou-se módulo de elasticidade de 210 GPa e tensão de escoamento de 1674 MPa. Esses valores estão baseados nas propriedades mecânicas de cordoalhas engraxadas utilizadas na construção civil. Em todos os cabos foi aplicada uma força efetiva de 100 kN. Para a discretização dos cabos foram utilizado elementos tipo barra com a formulação de armadura incorporada junto com o modelo de aderência (*bond-slip*) de Dörr (1980), para representar o comportamento do cabo não aderente com o concreto.

### 5.6 Pontos de monitoramento

Com o propósito de avaliar o efeito da protensão nas lajes estudadas, foram escolhidos vários pontos para medir os deslocamentos verticais da laje, a deformação do concreto à compressão, a tensão na armadura e a força dos cabos. A Figura 5.8 mostra os pontos de monitoramento escolhidos na face inferior da laje para medir a deformação à compressão do concreto e os pontos escolhidos para medir a tensão nas barras com maior altura útil. Nessa mesma figura, são mostrados também os pontos onde foi medida a tensão nos cabos de protensão para cada uma das configurações. A Figura 5.9 mostra os pontos de monitoramento do deslocamento na superfície da laje.

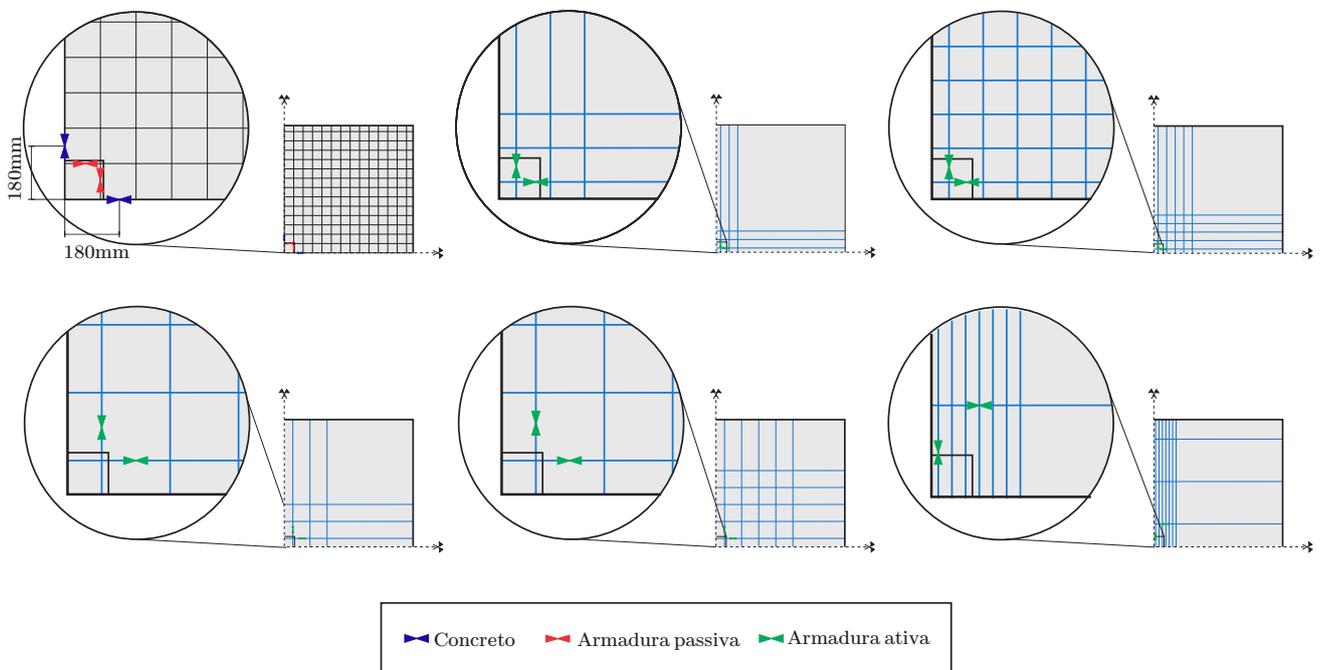


Figura 5.8: Localização dos pontos de monitoramento no concreto, na armadura passiva e ativa.

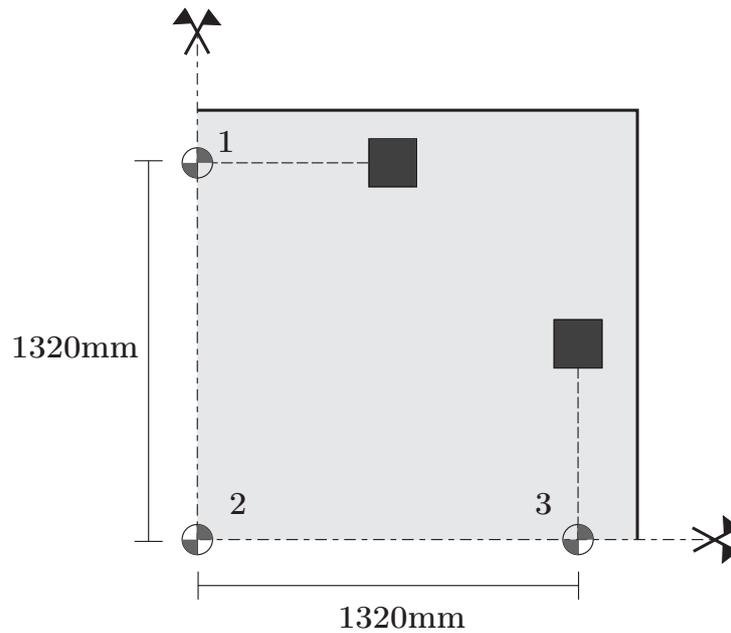


Figura 5.9: Localização dos pontos de medição de deslocamento na superfície superior da laje.

## 5.7 Aplicação de carregamentos e condições de apoio

Similar aos ensaios apresentados no Capítulo 4, a execução das modelagens numéricas foi dividida em várias etapas. Na primeira aplicou-se a protensão e o deslocamento do pilar era restringindo, como é observado na Figura 5.10a. Na segunda etapa foi aplicado o deslocamento incremental no centro da seção transversal da laje e eram ativadas a conexão de nós mestres e escravos entre as extremidades dos cabos e a placas de ancoragem. Nessa etapa eram ativadas também a restrições de deslocamento vertical das placas de apoio (Figura 5.10b).

Em relação aos parâmetros de convergência, foi utilizado o processo iterativo Quasi-Newton (Secante) com formulação BFGS junto com a técnica *line-search*. Foram utilizados os critérios de convergência em termos de deslocamento, energia e força com os valores de  $10^{-2}$ ,  $10^{-4}$  e  $10^{-2}$ , respectivamente, e um número máximo de 400 iterações. O deslocamento aplicado no pilar tinha um incremento de 0,2 mm. A “ruptura” da laje foi estabelecida no passo no qual o número máximo de iterações era atingido.

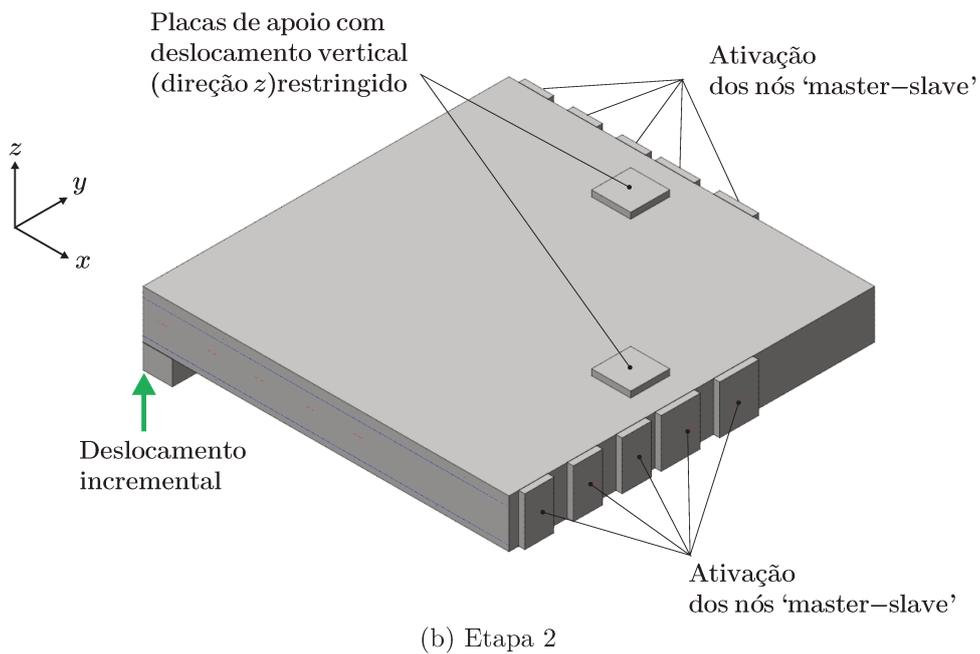
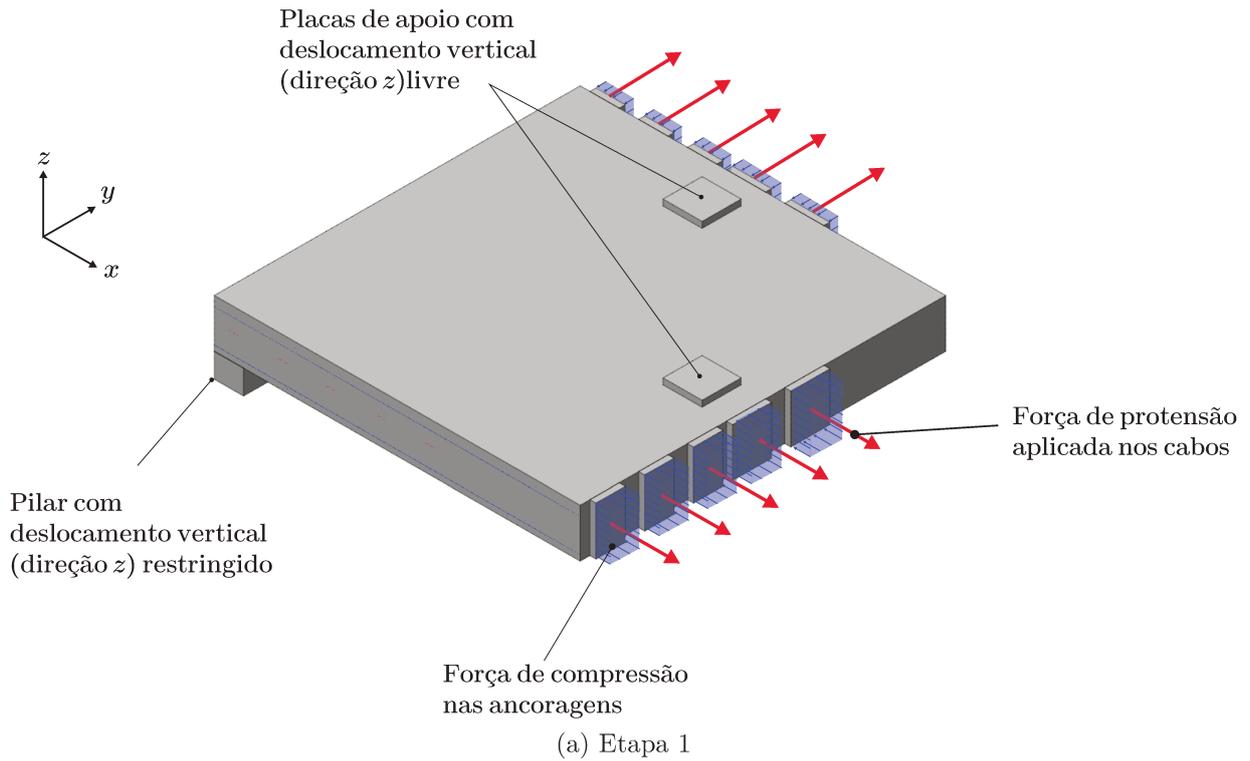


Figura 5.10: Carregamento e condições de contorno aplicadas em cada uma das etapas da análise numérica.

## 5.8 Apresentação e análise de resultados

Neste item são apresentados os resultados obtidos nos pontos de monitoramento. Em primeiro lugar serão mostrados os resultados das lajes de referência (sem protensão), fazendo uma análise das cargas últimas, deformações e tensões máximas no concreto e aço. Posteriormente, serão comparados os resultados de todas as séries com o objetivo de avaliar a influência da protensão na resistência à punção. Também são comparados os panoramas de fissuração obtidos numericamente com as observações encontradas nos ensaios experimentais consultados na revisão bibliográfica. Finalmente, será realizada uma comparação entre os valores obtidos nas análises numéricas com os previstos pelas normas ACI-318-14, EC 2(2004), NBR-6118:2014, *fib* Model Code 2010 e a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (CSCT).

### 5.8.1 Resultados obtidos nas lajes sem protensão

Com objetivo de analisar o efeito das variáveis estudadas nos modelos, foram traçadas as curvas de carga *versus* deslocamento, carga *versus* deformação no concreto e carga *versus* tensão no aço. Os resultados da série A permitem evidenciar a influência da resistência do concreto no comportamento das lajes simuladas numericamente. Nas curvas de carga *versus* deslocamento (Figura 5.11), esse comportamento é verificado através do aumento da carga atingida, como também por meio do acréscimo de rigidez na fase linear no início de cada curva.

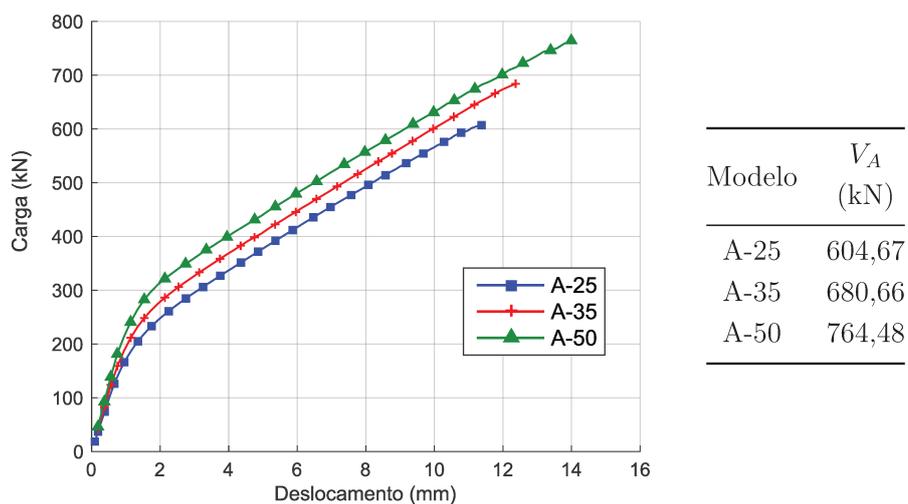
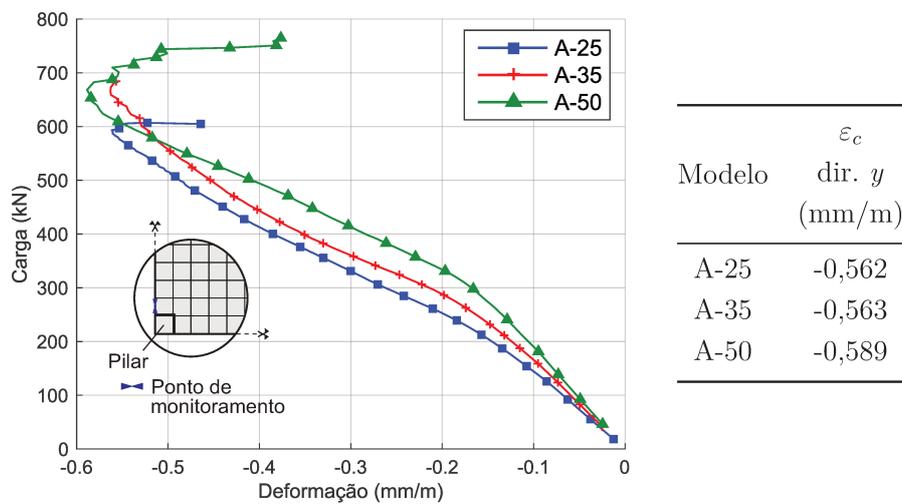


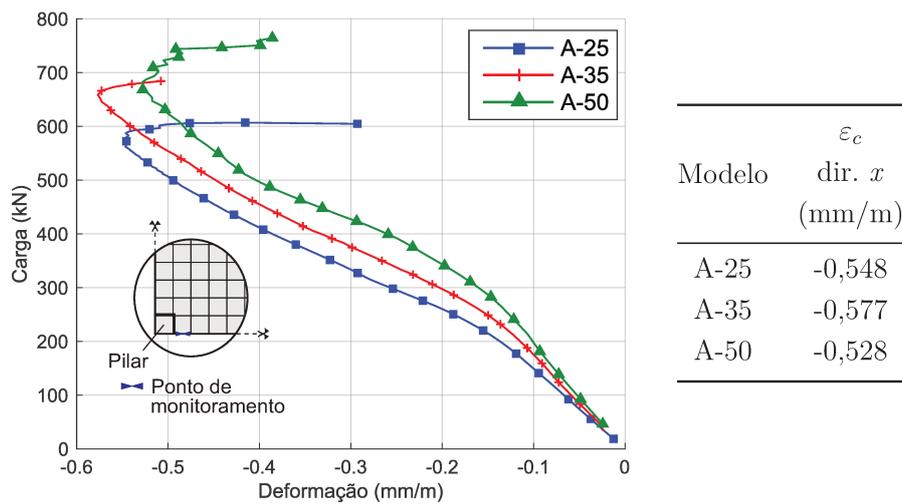
Figura 5.11: Curva carga *versus* deslocamento e valores de carga última obtidos na série A.

A Figura 5.12 apresenta os gráficos de carga *versus* deformação do concreto na face inferior próximo ao pilar nas direções  $y$  e  $x$ , junto com os respectivos valores máximos tabela-

dos. Observa-se que as deformações máximas do concreto obtidas nas análises numéricas são similares para as três resistências de concreto estudadas. O comportamento descrito nas curvas de carga *versus* deformação é similar ao observado em lajes ensaiadas experimentalmente com ruptura à punção. Nas duas direções, verifica-se que depois de atingir certo valor de carga, aproximadamente 90% da carga última, a deformação de compressão obtida no ponto de monitoramento perto do pilar diminui. Como foi explicado no item 2.2, esse fenômeno é justificado pela redistribuição das forças internas que é necessária para manter o equilíbrio da laje na direção radial.



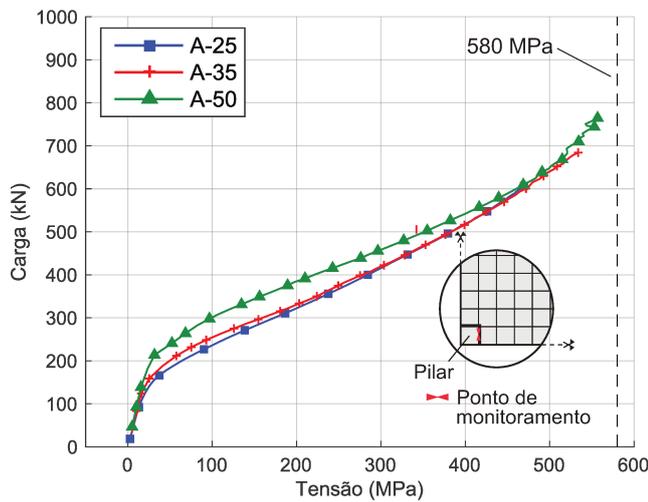
a) direção  $y$



b) direção  $x$

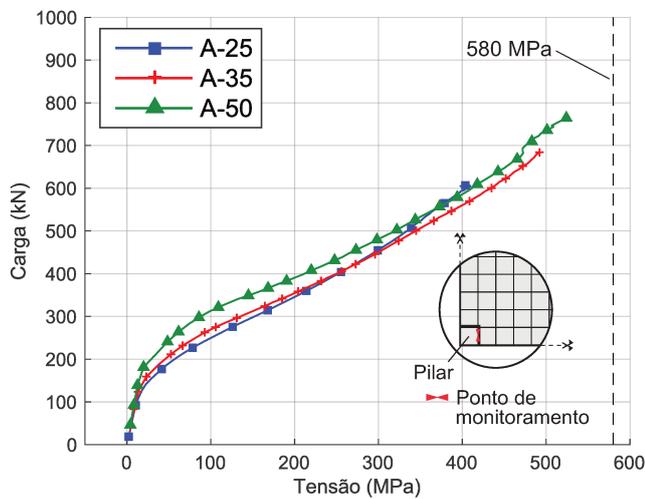
Figura 5.12: Curva de carga *versus* deformação do concreto e valores máximos de deformação na face comprimida.

Em relação às curvas de carga *versus* tensão do aço, é constatado um aumento das tensões máximas obtidas nas barras na medida que a resistência à compressão do concreto aumenta, porém em nenhuma das direções foi atingido o limite de escoamento do aço (580 MPa) como pode ser observado na Figura 5.13.



Modelo	$\sigma_s$
	dir. $y$ (MPa)
A-25	471,14
A-35	533,82
A-50	556,75

a) direção  $y$



Modelo	$\sigma_s$
	dir. $x$ (MPa)
A-25	409,50
A-35	492,11
A-50	524,09

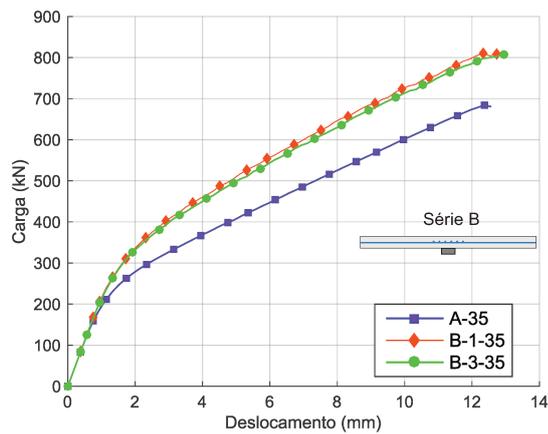
b) direção  $x$

Figura 5.13: Curva de carga *versus* tensão do aço da armadura passiva superior e valores máximos.

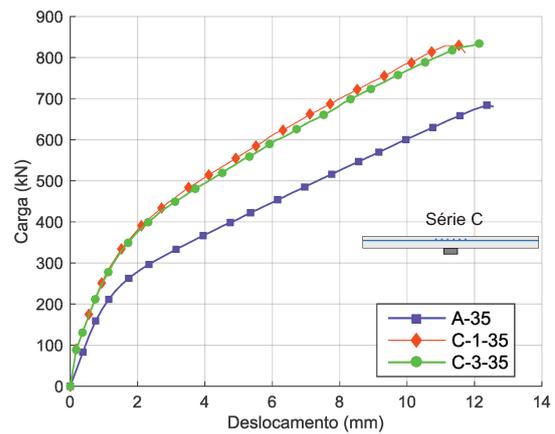
### 5.8.2 Resultados obtidos nas lajes com protensão

Seguindo o mesmo procedimento mostrado no item anterior, foram obtidas as curvas de carga *versus* deslocamento, carga *versus* deformação e carga *versus* tensão para as outras séries. Adicionalmente, realizou-se uma curva de carga *versus* força no cabo, com o objetivo de verificar o aumento da força de protensão devido à aplicação do carregamento externo. Todos os gráficos são mostrados no Apêndice B.

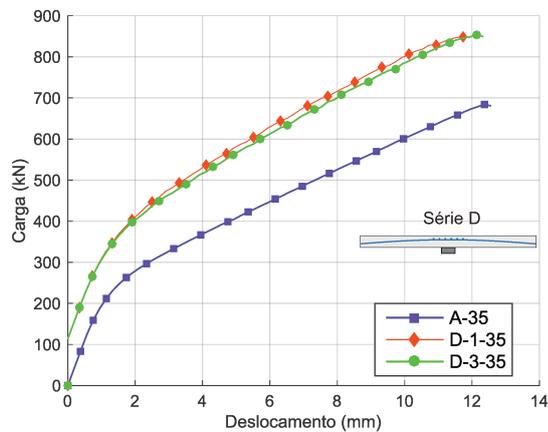
A seguir são mostrados alguns resultados obtidos que representam a influência da protensão no comportamento das lajes. Em primeiro lugar, destacam-se os resultados das lajes com tensões de compressão equivalentes, mas com distribuição em planta dos cabos diferente. Na Figura 5.14 são apresentadas as curvas de carga *versus* deslocamento das configurações 1 e 3, para concreto de 35 MPa em cada uma das séries.



(a) Série B



(b) Série C



(c) Série D



Figura 5.14: Curvas cargas *versus* deslocamento da configuração 1 e 3, para concreto de 35 MPa em cada uma das séries e comparação com a laje de referência.

Na Figura 5.14 verifica-se o aumento de carga obtido nas lajes protendidas em relação à laje de referência **A-35**. Pode ser visto também que o comportamento entre a configuração 1 e 3 é bastante similar, o que indicaria que o afastamento dos cabos adotado na configuração 3 teve pouca influência no comportamento da laje. Essa mesma observação foi encontrada entre os modelos das configurações 2, 4 e 5, onde foi aplicada uma tensão média de compressão de 1,67 MPa.

Em relação à deformação do concreto, em todos os modelos observou-se o mesmo comportamento descrito nas lajes de referência: o valor da deformação no ponto de monitoramento diminui depois de atingir aproximadamente 90% da carga última. Também é importante destacar que os valores (absolutos) de deformação máxima do concreto na direção  $y$  foram maiores que os obtidos na série A, o que confirma o efeito da protensão.

No caso da direção  $x$ , observou-se a mesma tendência obtida na direção  $y$ , com exceção da configuração 5, onde foram registradas deformações menores às obtidas na série A. Como exemplo, na Figura 5.15 mostram-se as curvas de carga *versus* deformação do concreto para as duas direções do modelo **B-5-50**. Na direção  $y$  é observado que o modelo atinge uma deformação de -1,206‰, enquanto que na direção  $x$ , foi de -0,326‰ (menor do que obtido na laje de referência). Na Figura 5.15b observa-se que no modelo **B-5-50** a deformação começa a diminuir quando é atingida uma carga de aproximadamente 800 kN, entretanto na outra direção (Figura 5.15a) não foi vista nenhum tipo de diminuição da deformação. Esse comportamento é justificado pela aplicação de tensões de compressão diferente em cada umas das direções ( $\sigma_p = 1$  MPa e 2,33 MPa, nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente).

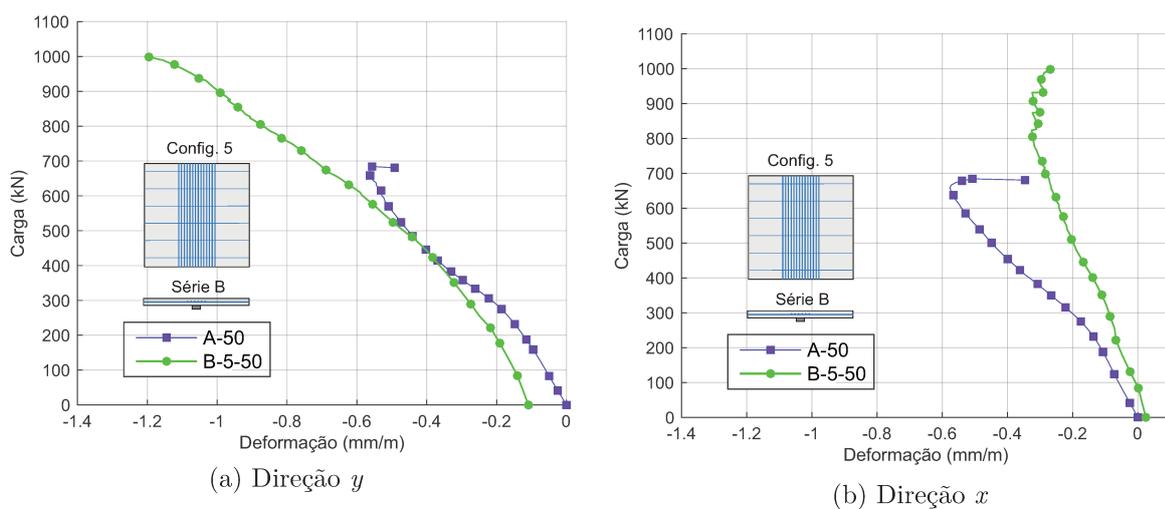


Figura 5.15: Curvas de carga *versus* deformação do concreto do modelo **B-5-50**.

Por outro lado, o efeito da protensão foi confirmado também nas tensões máximas atingidas nas armaduras passivas das lajes que tinham protensão. A Figura 5.16 apresenta as curvas de carga *versus* tensão do aço, nos pontos de monitoramento das barras da armadura superior, dos modelos **C-2-25**, **C-2-35** e **C-2-50**. Observa-se que as tensões máximas atingidas são menores às obtidas na série A. Da mesma forma que foi visto na série de referência, observa-se que na medida que aumenta a resistência do concreto, aumenta também a tensão máxima atingida na armadura.

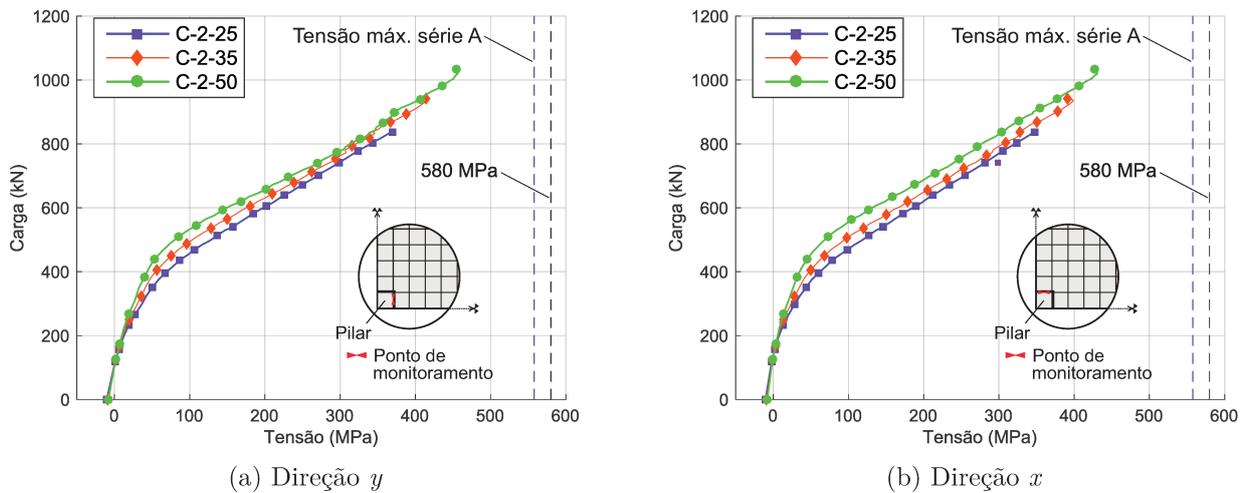


Figura 5.16: Curvas de carga *versus* tensão do aço na armadura passiva para a configuração 2 da série C, para as três resistências do concreto estudadas.

Para analisar a mudança das forças nos cabos de protensão são apresentadas, como exemplo, as curvas de carga *versus* força dos modelos **D-2-50** e **D-5-50** nas direções  $x$  e  $y$ . Na Figura 5.17a pode ser observado que a variação da força nos cabos nas duas direções foi similar para o modelo **D-2-50**. No modelo **D-5-50** (5.17b) o aumento de força dos cabos também foi similar, apesar do número e distribuição dos cabos serem diferentes em cada direção. Em ambos os gráficos é observado que a força inicial de 100 kN teve uma leve perda nos primeiros níveis de carregamento devido ao atrito, simulado através do modelo de aderência entre os cabos e o concreto. Nos seguintes passos, de carga observou-se um aumento da força nos cabos devido à aplicação do carregamento. No caso do modelo **D-2-50**, foi atingida uma força máxima de 109,95 kN na direção  $y$ , o que representaria um aumento da tensão de compressão de 1,67 MPa a 1,83 MPa na laje.

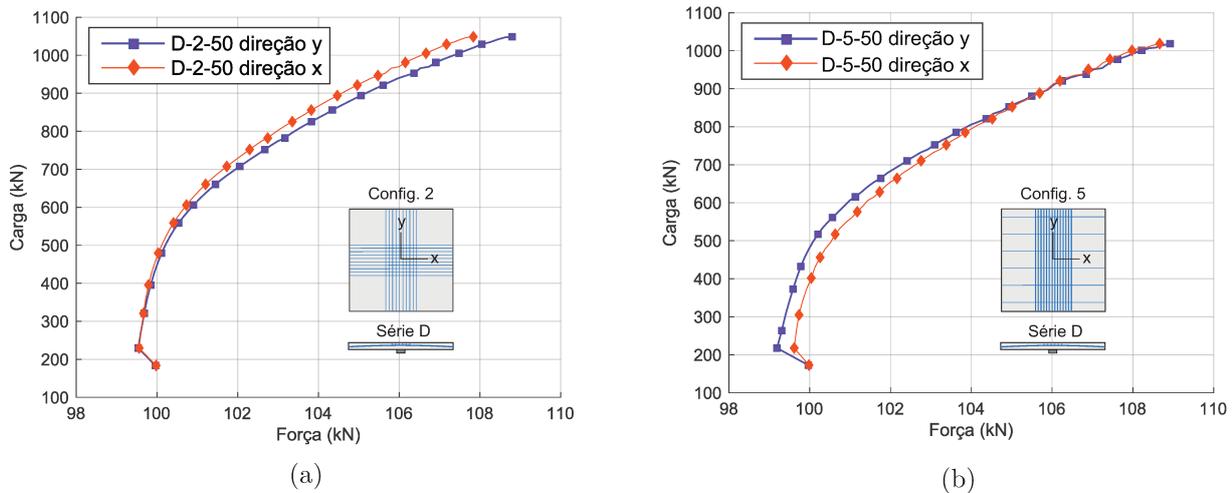


Figura 5.17: Curvas de carga *versus* forças nos cabos de protensão dos modelos a) **D-2-50** e b) **D-5-50** nas duas direções.

### 5.8.3 Influência da protensão na resistência à punção

Este item apresenta a comparação dos resultados obtidos em todas as séries, com o objetivo principal de verificar a influência da protensão na resistência à punção. No caso das lajes protendidas, é analisada também a influência que teve o traçado do cabo no comportamento numérico das lajes. Inicialmente serão apresentados os resultados de carga máxima de cada série, visando comprovar o aumento de carga em relação à série de referência. Posteriormente, serão analisados os valores máximos de deformação do concreto, tensão nas barras e força nos cabos de protensão para cada configuração, com o intuito de avaliar o efeito da protensão em cada um desses parâmetros.

Na Tabela 5.3 são apresentados os valores de carga última obtidos numericamente em cada uma das lajes. Os resultados foram agrupados segundo a série e a tensão de compressão média aplicada na laje. Além disso, foi calculada a relação entre o valor de carga da laje protendida e a laje de referência com a mesma resistência à compressão (colunas  $\frac{V_B}{V_A}$ ,  $\frac{V_C}{V_A}$  e  $\frac{V_D}{V_A}$ ). A partir dos resultados apresentados na tabela, é evidenciada a contribuição da protensão no aumento das cargas últimas. No caso da série B, para as configurações 1 e 3, esse aumento foi de aproximadamente 15% e 21%. Nas configurações 2, 4 e 5, o acréscimo foi entre 23% e 35%. É importante salientar que as configurações com tensões de compressão equivalentes tiveram um acréscimo similar. Na série C verificou-se uma maior contribuição na configuração 2, na qual para as três resistências de concreto estudadas, essa relação teve um acréscimo entre 35% e 38%. Finalmente, na série D, observou-se que o aumento causado pela protensão foi entre 24% e 40%. Da mesma forma que aconteceu com as séries B e C, as maiores percentagens de

aumento de carga foram obtidas na configuração 2.

Tabela 5.3: Resultados de carga última obtidos nas série B, C, D e comparação com os resultados da série A.

Modelo	Carga [kN]	$\frac{V_B}{V_A}$	Modelo	Carga [kN]	$\frac{V_C}{V_A}$	Modelo	Carga [kN]	$\frac{V_D}{V_A}$
<b>B-1-25</b>	694,13	1,15	<b>C-1-25</b>	740,93	1,23	<b>D-1-25</b>	760,85	1,26
<b>B-3-25</b>	707,72	1,17	<b>C-3-25</b>	736,36	1,22	<b>D-3-25</b>	751,22	1,24
<b>B-1-35</b>	810,42	1,19	<b>C-1-35</b>	811,37	1,19	<b>D-1-35</b>	848,62	1,25
<b>B-3-35</b>	807,39	1,19	<b>C-3-35</b>	834,16	1,23	<b>D-3-35</b>	849,12	1,25
<b>B-1-50</b>	923,62	1,21	<b>C-1-50</b>	895,09	1,17	<b>D-1-50</b>	938,71	1,23
<b>B-3-50</b>	889,59	1,16	<b>C-3-50</b>	888,88	1,16	<b>D-3-50</b>	907,88	1,19
<b>B-2-25</b>	775,47	1,28	<b>C-2-25</b>	836,85	1,38	<b>D-2-25</b>	848,53	1,40
<b>B-4-25</b>	741,59	1,23	<b>C-4-25</b>	788,60	1,30	<b>D-4-25</b>	798,64	1,32
<b>B-5-25</b>	757,60	1,25	<b>C-5-25</b>	820,06	1,36	<b>D-5-25</b>	820,06	1,36
<b>B-2-35</b>	884,37	1,30	<b>C-2-35</b>	941,75	1,38	<b>D-2-35</b>	952,08	1,40
<b>B-4-35</b>	862,34	1,27	<b>C-4-35</b>	909,34	1,34	<b>D-4-35</b>	906,23	1,33
<b>B-5-35</b>	851,76	1,25	<b>C-5-35</b>	924,07	1,36	<b>D-5-35</b>	924,07	1,36
<b>B-2-50</b>	967,34	1,39	<b>C-2-50</b>	1033,91	1,35	<b>D-2-50</b>	1048,61	1,37
<b>B-4-50</b>	946,08	1,34	<b>C-4-50</b>	1013,41	1,33	<b>D-4-50</b>	1010,08	1,32
<b>B-5-50</b>	998,244	1,35	<b>C-5-50</b>	1009,37	1,33	<b>D-5-50</b>	1018,69	1,33
Série B			Série C			Série D		

A seguir são comparados os valores de carga, deformação do concreto, tensão na armadura e força nos cabos em todas as lajes segundo o tipo de configuração e a resistência de concreto, para todas as séries. Tendo como base a Figura 5.18, verifica-se que a série D apresentou as maiores cargas para as configurações 1, 2 e 3. No caso das configurações 4 e 5, a carga última atingida entre a série C e D foi similar, como pode ser visto nas Figuras 5.18d e 5.18e. De forma geral a série B apresentou um menor acréscimo de carga em relação às cargas atingidas pela série A. Esse comportamento é justificado pelo traçado reto sem excentricidade dos cabos, que não gera momentos de descompressão nem forças verticais na laje.

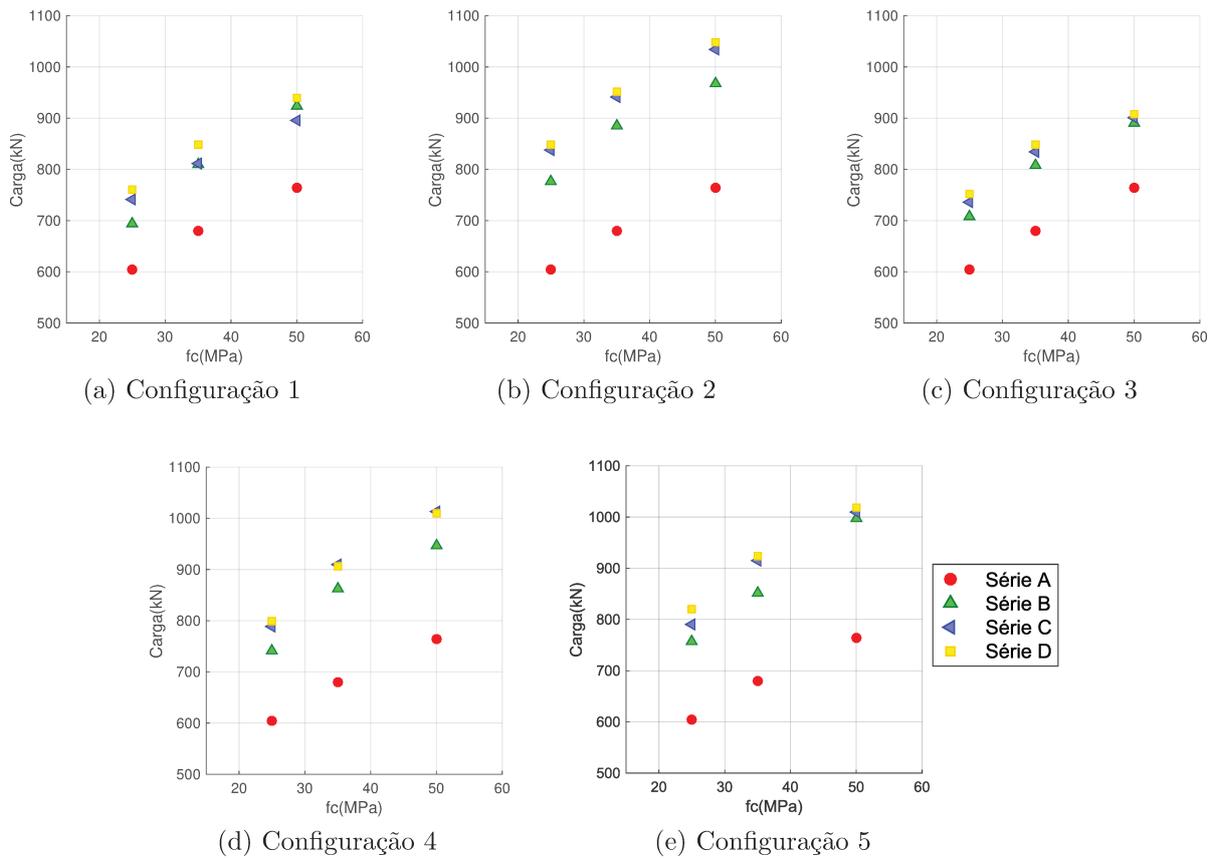


Figura 5.18: Comparação de cargas últimas para cada configuração.

Em relação à deformação do concreto, na direção  $y$ , verifica-se que na maioria dos gráficos as maiores deformações foram atingidas pela série B (ver Figura 5.19), particularmente nos modelos da configuração 5. É importante salientar também que não foi observado nenhum tipo de relação entre a resistência à compressão do concreto e o valor de deformação máxima atingida. Inclusive, para algumas configurações os valores de deformação foram próximos para as três resistências de concreto.

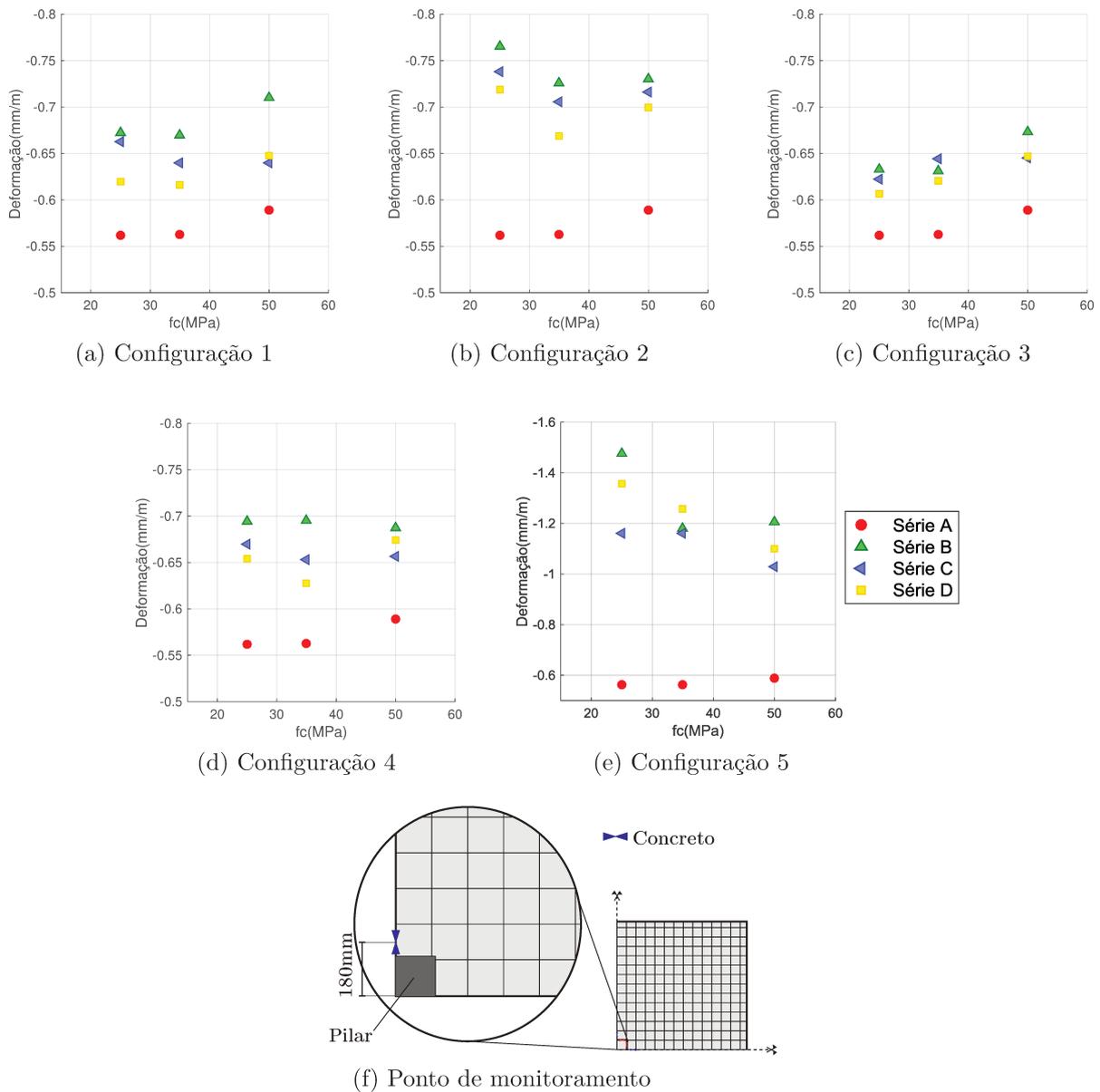


Figura 5.19: Comparação das deformações máximas obtidas no concreto para cada configuração na direção  $y$ .

Fazendo a mesma análise para as deformações do concreto na direção  $x$ , é verificado um comportamento similar ao descrito na direção  $y$  (ver gráficos na Figura 5.20), porém destaca-se o gráfico 5.20e, onde observou-se uma menor deformação na configuração 5 em relação aos valores obtidos na série de referência.

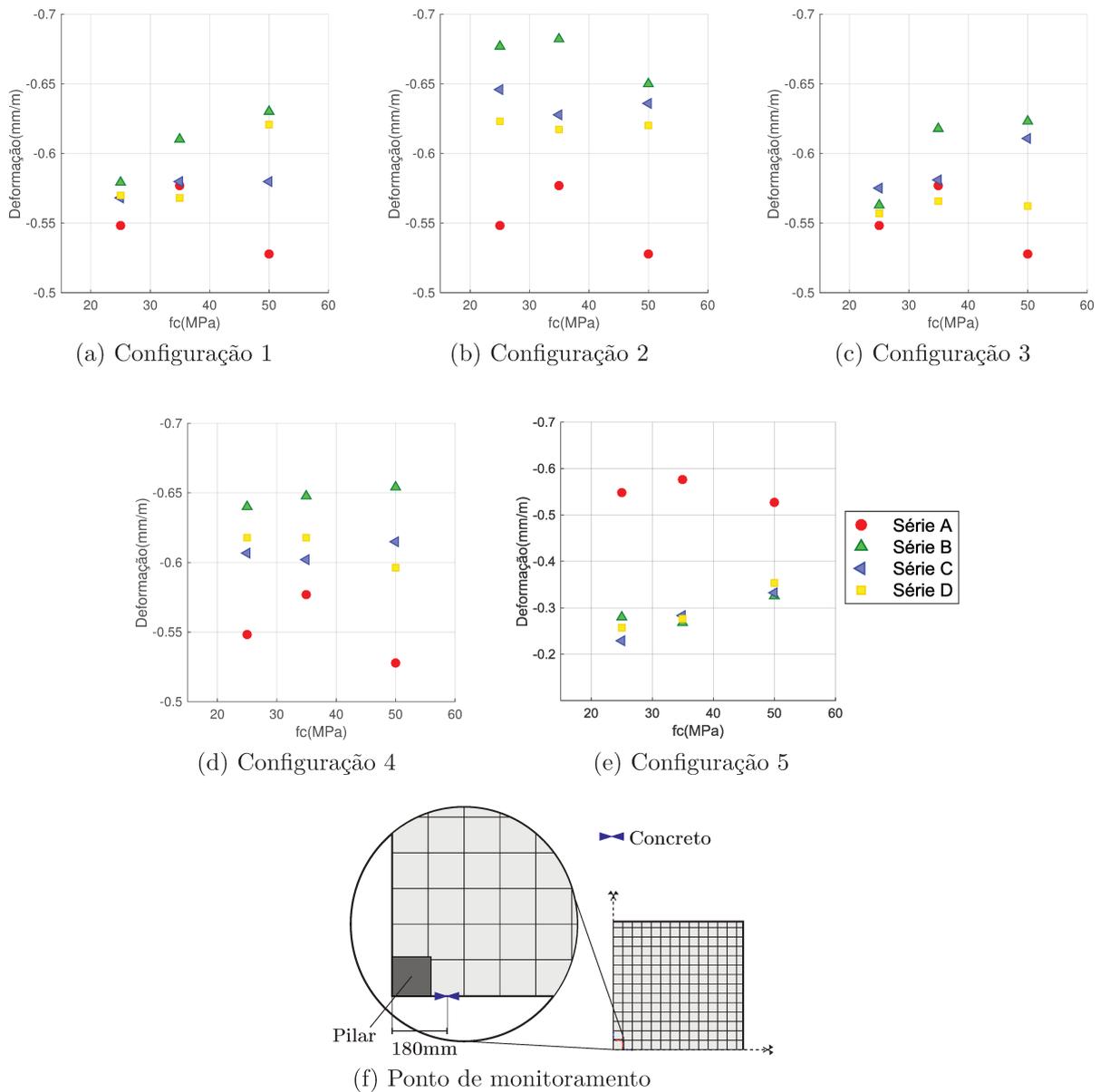


Figura 5.20: Comparação das deformações máximas obtidas no concreto para cada configuração na direção  $x$ .

As Figuras 5.21 e 5.22 apresentam os valores máximos de tensão nas barras da armadura passiva nas direções  $y$  e  $x$ , respectivamente. De forma geral, observa-se que a série C apresentou as menores tensões nas barras monitoradas, resultado justificado pelo traçado adotado com excentricidade constante. Verifica-se também uma relação entre a resistência do concreto e a máxima tensão atingida na armadura.

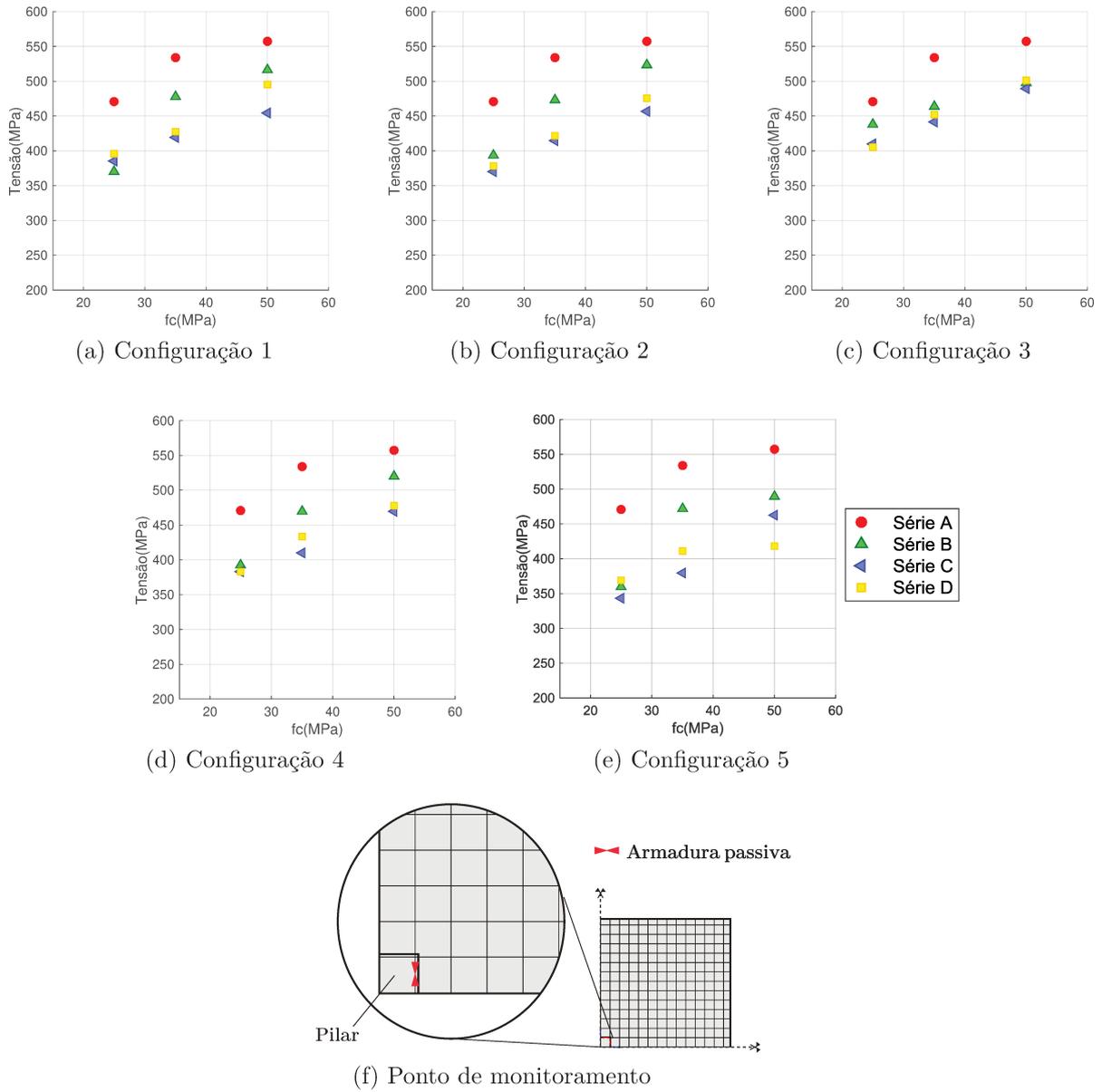


Figura 5.21: Comparação das tensões máximas obtidas na armadura para cada configuração na direção  $y$ .

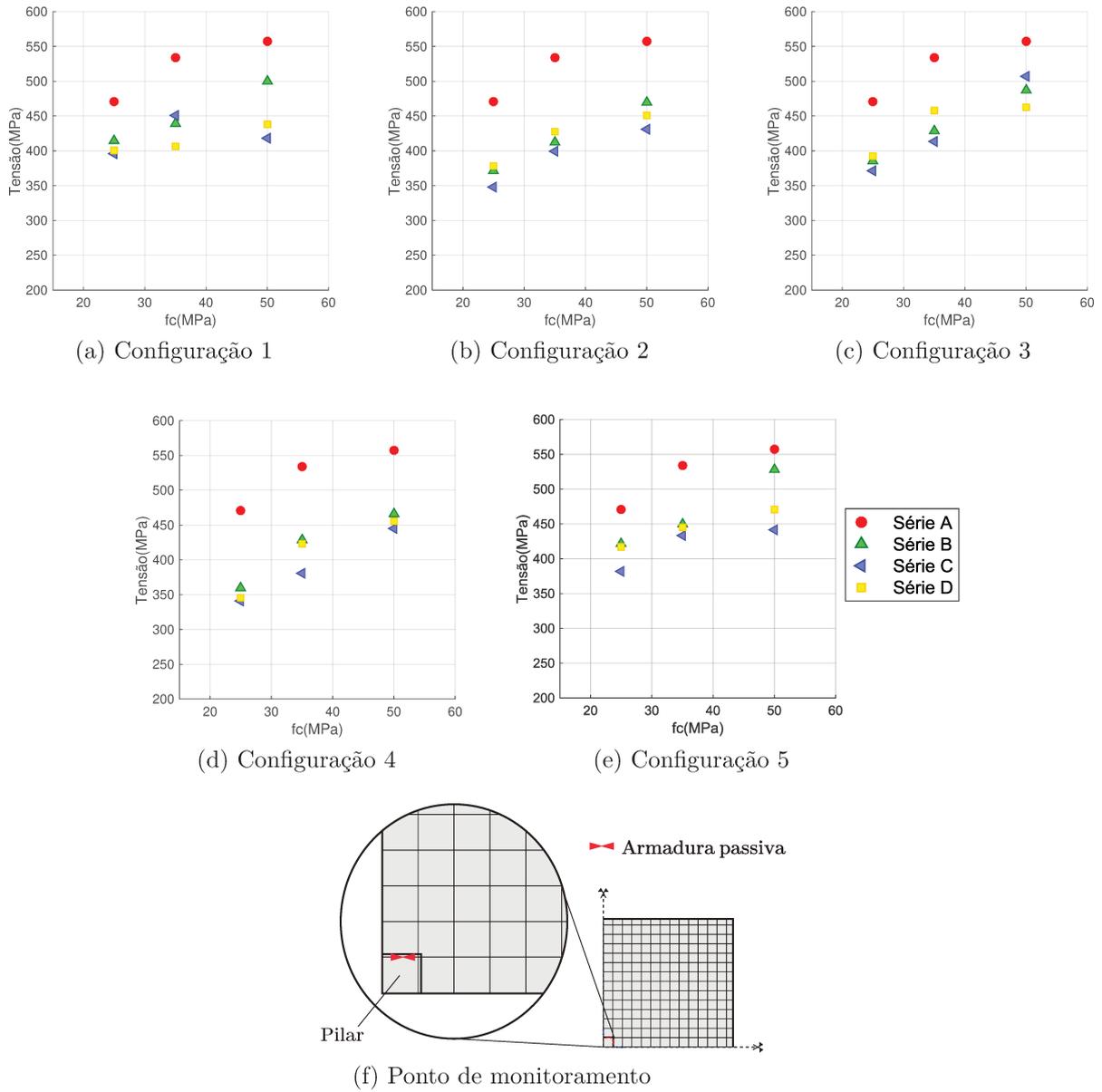


Figura 5.22: Comparação das tensões máximas obtidas na armadura para cada configuração na direção  $x$ .

Nas Figuras 5.23 e 5.24 são apresentados graficamente os valores máximos de força nos cabos para cada umas direções da laje. Em relação à direção  $y$ , é observado que a série D apresentou os maiores acréscimos de força, seguida pelas séries C e B. Verifica-se uma relação linear entre a resistência do concreto e a força máxima atingida pelos cabos. Essas mesmas observações foram encontradas também ao analisar as forças máximas na direção  $x$ .

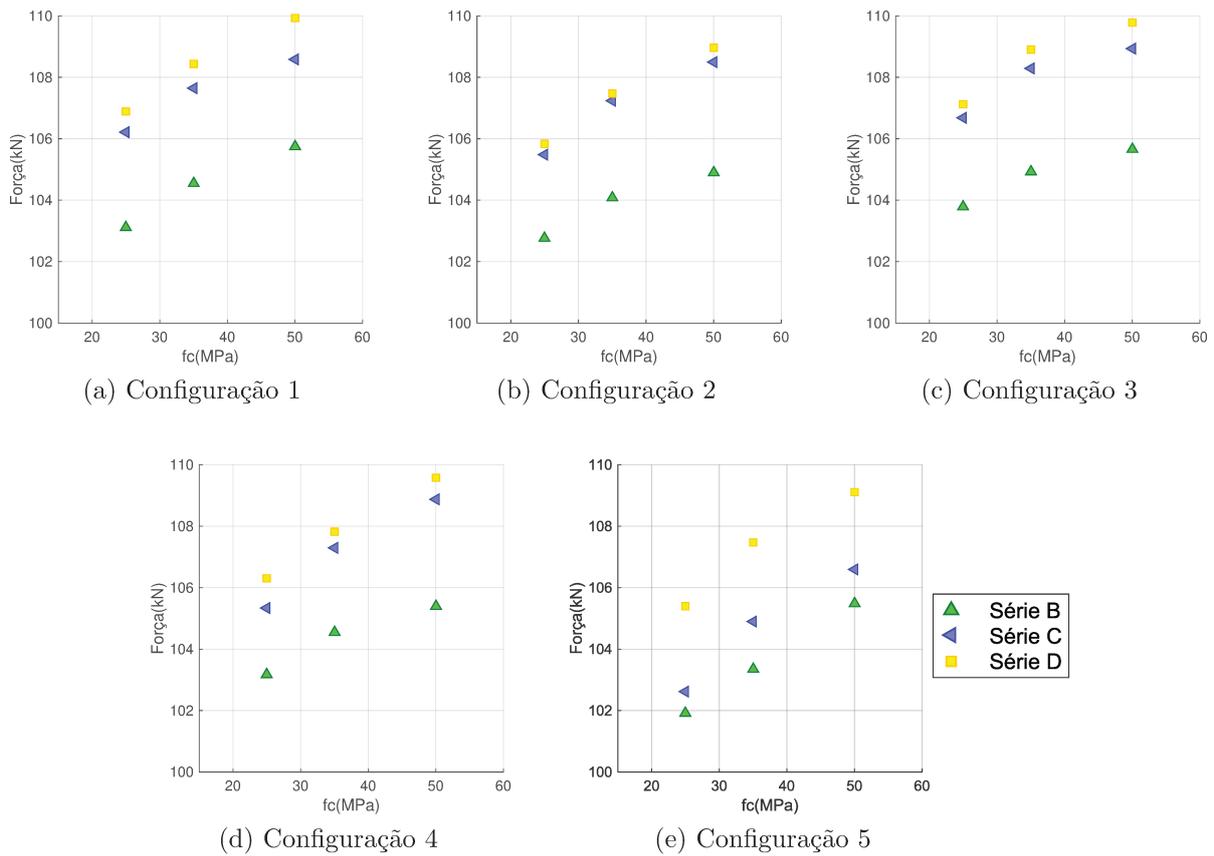


Figura 5.23: Comparação das forças máximas obtidas nos cabos de protensão para cada configuração na direção  $y$ .

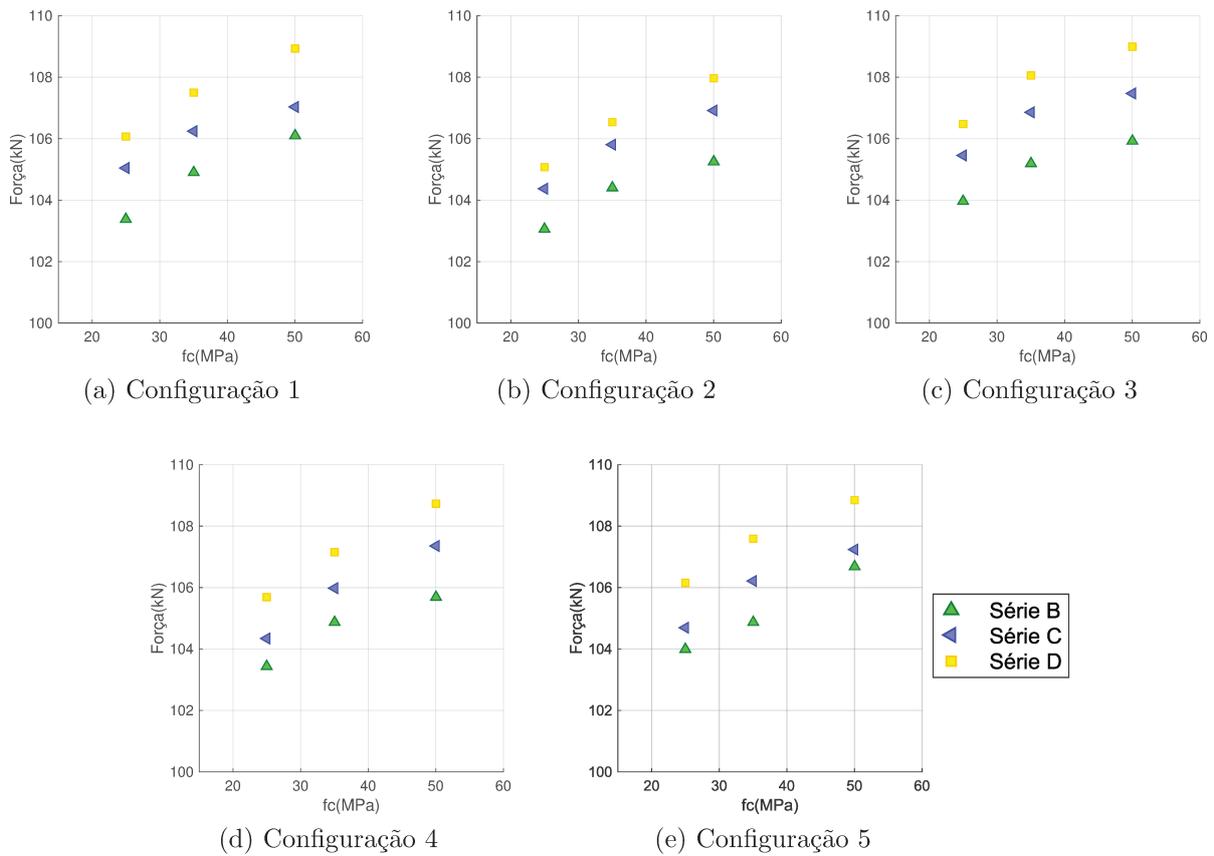


Figura 5.24: Comparação das forças máximas obtidas nos cabos de protensão para cada configuração na direção  $x$ .

### 5.8.4 Panorama de fissuração

Neste item são analisados os panoramas de fissuração para quatro das lajes simuladas na análise paramétrica. Na Figura 5.25 representa-se esquematicamente os tipos de fissuras observadas em uma laje com ruptura por punção.

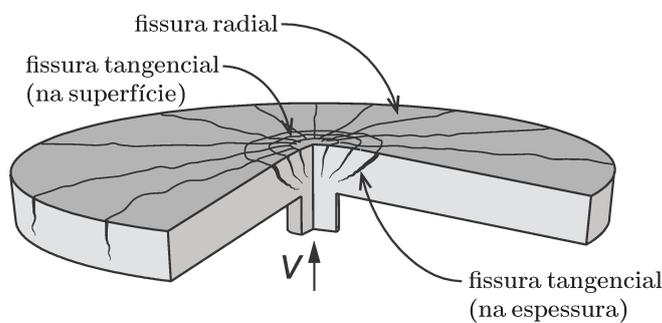


Figura 5.25: Esquema de fissuração de laje com ruptura por punção.

Foram selecionados os modelos **A-35**, **B-2-25**, **C-4-25** e **D-5-50** para fazer a análise da evolução das fissuras. A fissuração no concreto é representada numericamente através da deformação volumétrica,  $\varepsilon_{vol}$ , definida como a somatória das deformações totais principais ( $\varepsilon_{vol} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ ). Nos modelos selecionados, foi mostrado o panorama de fissuração na superfície e na espessura da laje, para três níveis de carregamento e no último passo, no qual não foi atingida a convergência, similar ao realizado nas lajes simuladas no Capítulo 4. Como pode ser visto nas Figuras 5.26 à 5.29, nos quatro modelos analisados, a evolução do panorama de fissuração se ajusta às observações dos ensaios experimentais consultados na revisão bibliográfica (RAMOS, 2003; CORRÊA, 2001; CARVALHO, 2005; CLÉMENT, 2012). A seguir são destacadas algumas dessas observações:

- Na superfície da laje, as primeiras fissuras que aparecem são radiais e geralmente paralelas às barras longitudinais de maior altura útil. Essas fissuras surgem devido às tensões tangenciais de tração impostas pela flexão.
- Com o acréscimo do carregamento as fissuras radiais se direcionam à extremidade da laje.
- Na fase da resistência ao cisalhamento, verifica-se o surgimento de fissuras tangenciais (também chamadas de circunferenciais) ao redor do pilar, a partir das quais se desenvolvem as superfícies de ruptura por cisalhamento do cone de punção.
- As fissuras que aparecem na altura da laje são inclinadas em direção ao pilar. Na ruptura, a laje é dividida em duas partes limitadas pela fissura inclinada de punção, formando um tronco cônico. É importante salientar que experimentalmente é mais difícil fazer o monitoramento dessas fissuras, já que surgem no interior laje. Portanto, só é possível conhecer a superfície de ruptura através do corte das lajes depois do ensaio.

No caso da laje **A-35** (Figura 5.26), pode ser observado o aparecimento das fissuras radiais na superfície da laje, paralelas às barras longitudinais de maior altura útil (Figura 5.26a), dispostas na direção **N-S**. Verifica-se também que no último passo apresentou-se uma mudança abrupta no panorama de fissuração, caracterizado pelo aumento da deformação volumétrica das fissuras tangenciais perto do pilar. Nas Figuras 5.26a à 5.26c observa-se a evolução das fissuras na espessura da laje. Percebe-se a formação e propagação das fissuras inclinadas até atingir o valor da carga máxima. Similar ao que aconteceu na superfície superior da laje, no último passo de carga (sem convergência) verifica-se também uma mudança abrupta no padrão de fissuração, destacando-se ainda mais as fissuras inclinadas relacionadas com a ruptura à punção.

Nos modelos protendidos é observada uma redução da fissuração para o primeiro nível de carregamento analisado (Figuras 5.27a, 5.28a e 5.29a) em comparação à laje de referência.

É importante destacar também que o panorama de fissuração entre a carga máxima e o último passo de carga (sem convergência) foi similar. Analisando as Figuras 5.27 a 5.29 percebe-se que a configuração dos cabos tem uma grande influência nas fissuras que surgem na laje. Nos modelos **B-2-25** e **C-4-25** as fissuras que aparecem na espessura da laje têm ângulo de inclinação menor ao obtido no modelo **A-35**. No modelo **D-5-50** a fissura apresenta um ângulo variável ao longo da espessura. Nesse mesmo modelo destaca-se também a maior formação e distribuição de fissuras na superfície da laje na direção **N-S**, onde foi aplicada a maior tensão de compressão.

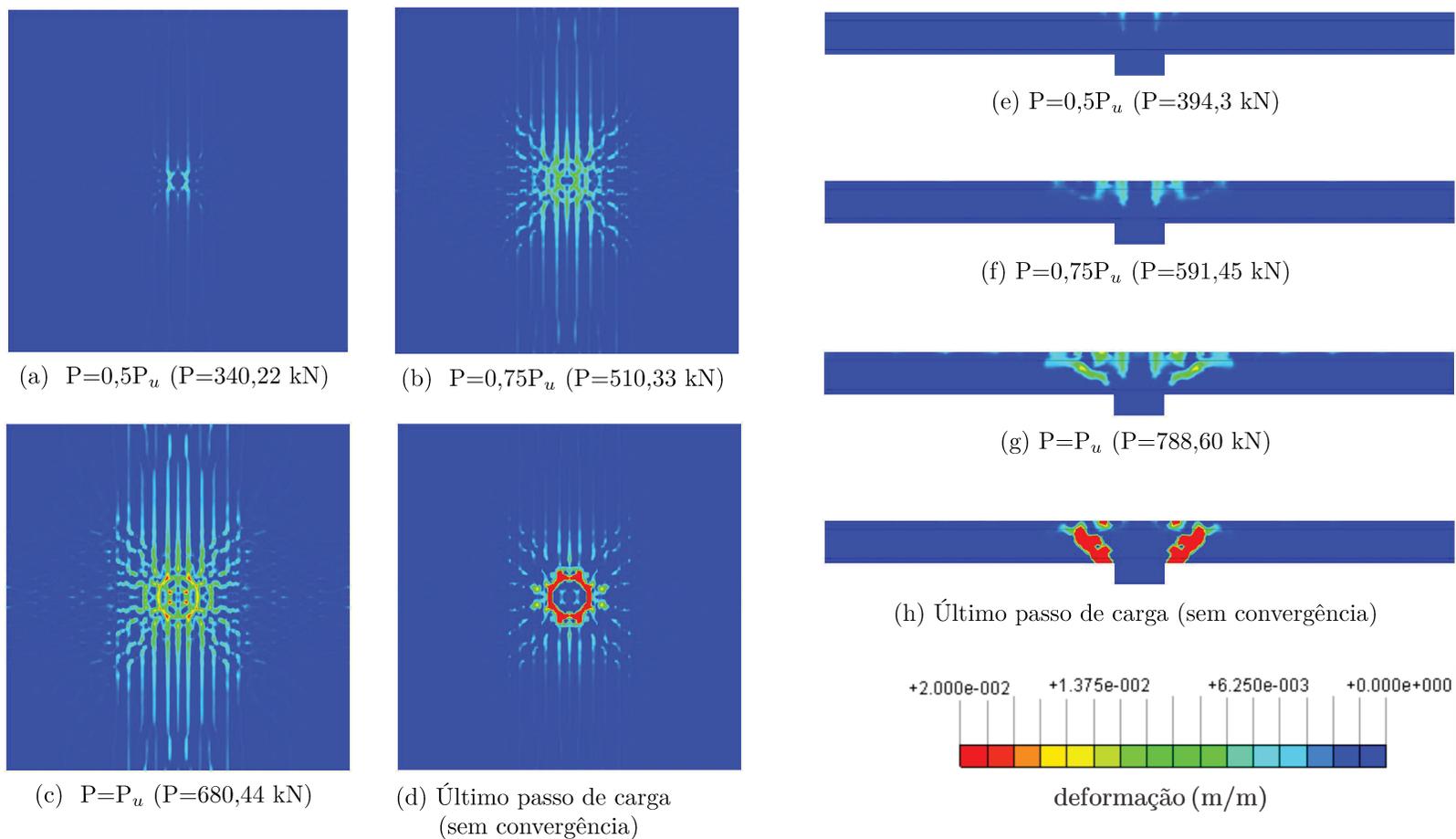


Figura 5.26: Evolução do panorama de fissuração na superfície superior e na espessura da laje **A-35**.

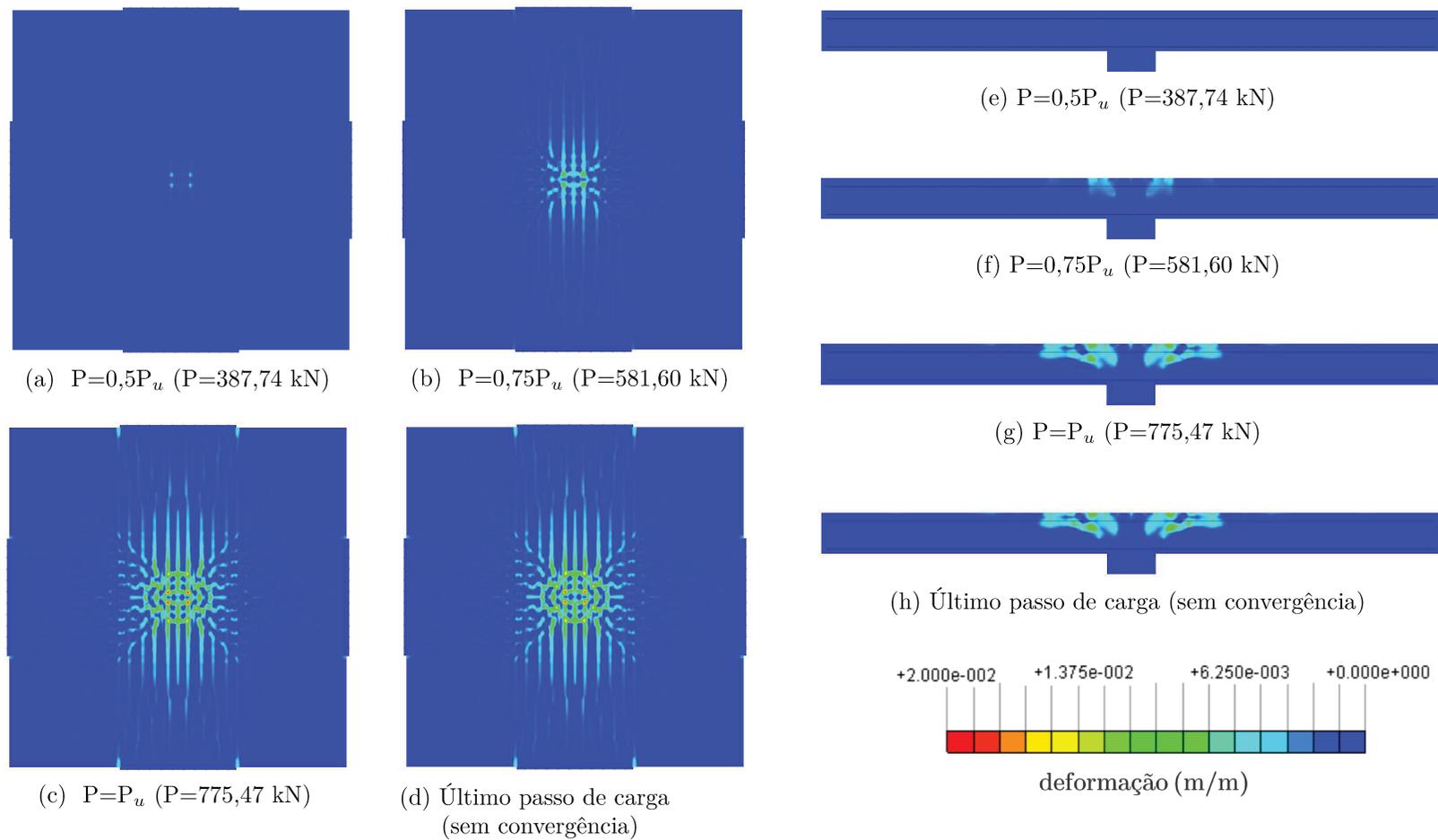


Figura 5.27: Evolução do panorama de fissuração na superfície superior e na espessura da laje **B-2-25**.

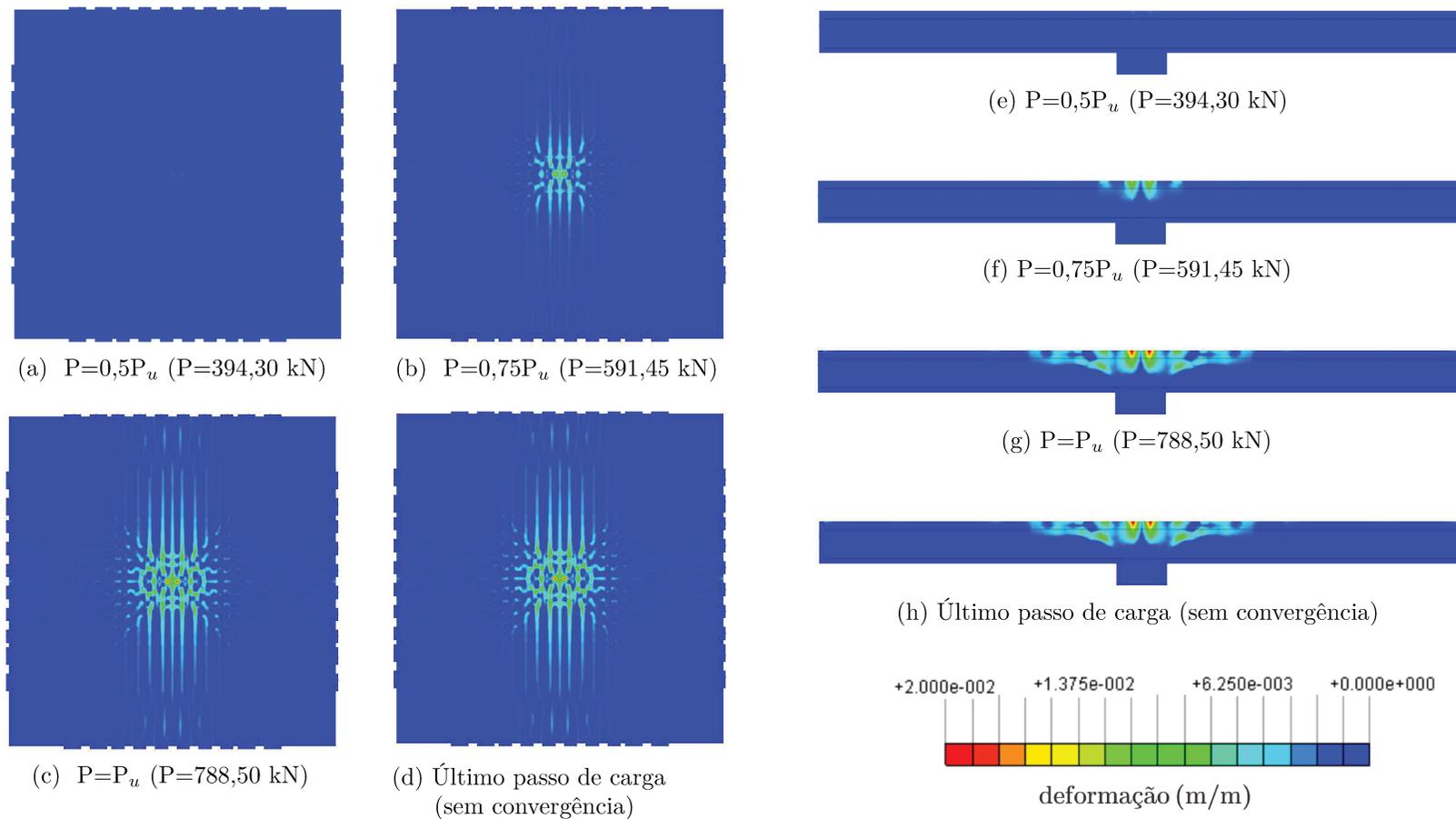


Figura 5.28: Evolução do panorama de fissuração na superfície superior e na espessura da laje C-4-25.

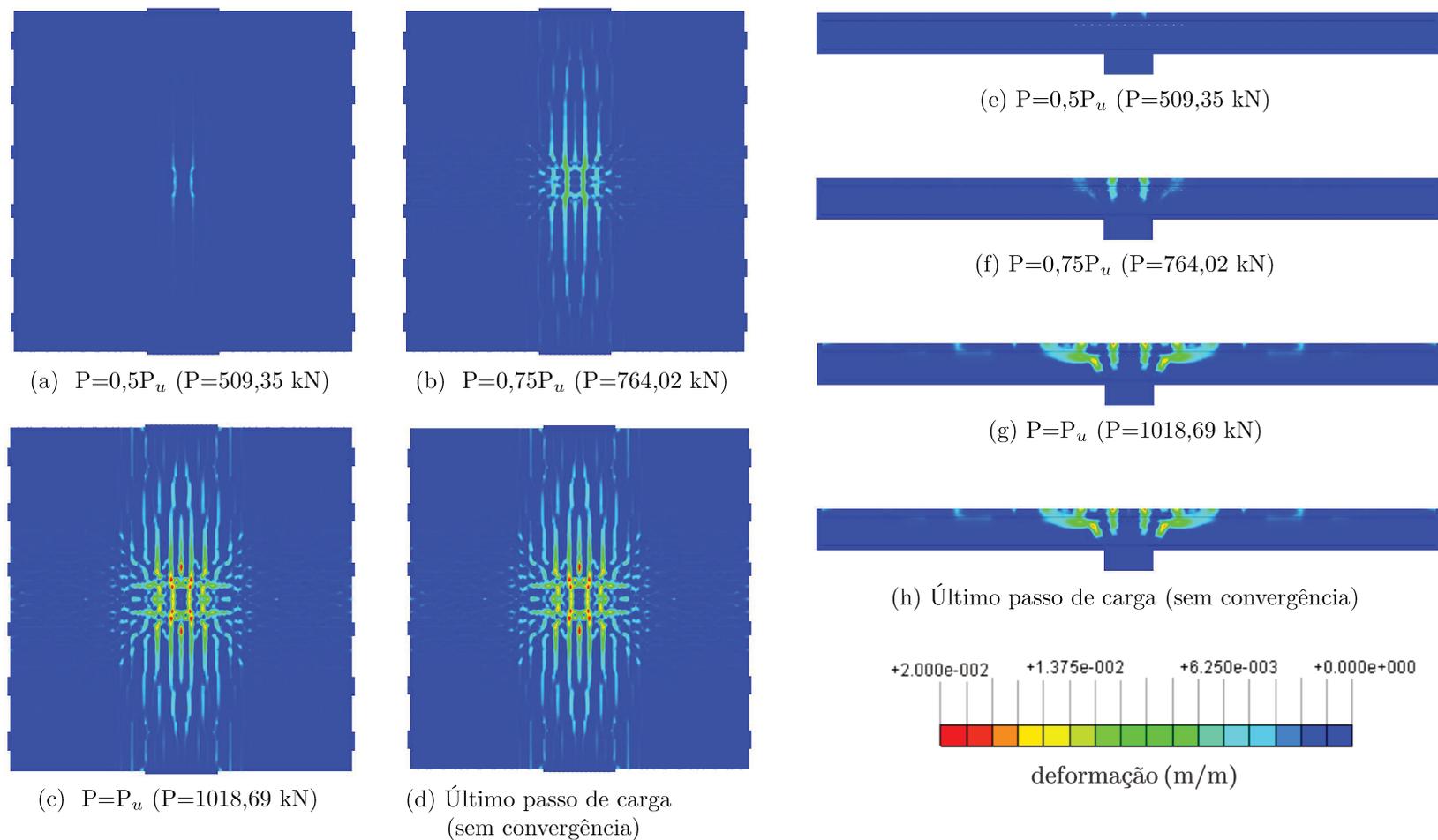


Figura 5.29: Evolução do panorama de fissuração na superfície superior e na espessura da laje D-5-50.

## 5.9 Comparação com as normas

Nesta seção será apresentada a comparação dos resultados numéricos com os valores de resistência à punção previstos pelo ACI-318-14, EC 2(2004), NBR-6118:2014 e *fib* MC 2010. É importante lembrar que os modelos constitutivos utilizados nas análises numéricas foram calibrados a partir de ensaios experimentais, portanto a comparação com as normas representa também uma validação dos resultados numéricos. A comparação é apresentada inicialmente para cada série de forma individual, com o objetivo de analisar claramente como são incluídos os efeitos da protensão nas equações das normas. Finalmente, será apresentada uma comparação geral de todos os modelos para fazer uma análise dos resultados obtidos. É importante salientar que o objetivo da comparação não é determinar qual norma é melhor, mas sim fazer uma comparação entre os métodos existentes para calcular a resistência à punção em lajes protendidas.

### 5.9.1 Considerações gerais

As expressões utilizadas para o cálculo da carga última foram as mesmas mostradas no item 5.31. De forma geral, as equações apresentam o cálculo da resistência à punção como:

$$V_E - V_{p,[EC,NBR,MC]} \leq V_{R,[EC,NBR,MC]}$$

$$V_E \leq V_{R,ACI}$$

onde:

$ACI$  subíndice para indicar ACI-318-14,

$EC$  subíndice para indicar EC 2(2004),

$NBR$  subíndice para indicar NBR-6118:2014,

$MC$  subíndice para indicar *fib* Model Code 2010,

$V_E$  corresponde à carga atuante,

$V_R$  é a carga força resistida, calculada de acordo a cada norma,

$V_p$  é a componente vertical dos cabos de protensão que contribuem na resistência à punção. No caso do ACI-318-14 o efeito da componente vertical é levado em conta diretamente na equação de resistência à punção.

A seguir são mostradas as equações de cada norma com uma nomenclatura uniforme com objetivo de facilitar a comparação entre os parâmetros.

ACI-318-14:

$$V_{R,ACI} = \begin{cases} [0,29\lambda\sqrt{f_c} + 0,3\sigma] b_{ACI}d + V_{p,ACI} \\ \left[ 0,083 \left( 1,5 + \frac{\alpha_s d}{b_{ACI}} \lambda \sqrt{f_c} \right) + 0,3\sigma \right] b_{ACI}d + V_{p,ACI} \end{cases} \quad (5.9.1)$$

EC 2(2004):

$$V_{R,EC} = [0,18k(100\rho f_c)^{1/3} + 0,1\sigma] b_{EC}d \quad (5.9.2)$$

NBR-6118(2014):

$$V_{R,NBR} = [0,18k(100\rho f_c)^{1/3} + 0,1\sigma] b_{NBR}d \quad (5.9.3)$$

Model Code (2010):

$$V_{R,MC} = k_\psi \sqrt{f_c} b_{MC}d \quad (5.9.4)$$

em que:

$f_c$  é a resistência média à compressão obtida a partir de um corpo de prova cilíndrico,

$d$  é a altura útil da laje,

$b$  é o perímetro de controle calculado para cada norma,

$k$  é o fator de escala, calculado como  $1 + \sqrt{\frac{200}{d}}$ , com  $d$  em [mm],

$\sigma$  é a tensão média à compressão provocada pela protensão,

$\rho$  é taxa da armadura longitudinal.

Em nenhuma das equações foram utilizados coeficientes de segurança, pois o objetivo era atingir a carga obtida no modelo numérico. Os resultados apresentados do EC 2(2004) e da NBR-6118(2014) foram praticamente iguais devido à formulação similar entre as duas normas e à altura útil adotada para a laje. A principal diferença entre as duas normas é que no caso do EC 2(2004), o fator do efeito escala deve ser igual ou menor a 2 ( $k \leq 2$ ). Para a altura útil adotada das lajes modeladas valor de  $k$  corresponde a 2,088, portanto para esse caso na Equação 5.9.2, o valor do fator coeficiente de escala deve ser substituído pelo valor de 2, enquanto que na

norma brasileira (Equação 5.9.3) teria que ser utilizado valor de 2,088. Devido essa diferença não representar uma variação grande na carga de ruptura, os resultados de ambas as normas foram agrupados numa categoria utilizando o valor de  $k$  sem nenhuma restrição.

Para o *fib* Model Code 2010, foi utilizado o nível de aproximação II que leva em consideração os efeitos das forças de compressão no plano da laje e a excentricidade dos cabos. Os valores do coeficiente  $k_\psi$  e da rotação  $\psi$  foram calculados através das Equações 5.9.5 e 5.9.4, respectivamente:

$$k_\psi = \frac{1}{1,5 + 0,9 \cdot \psi \cdot d \cdot k_{dg}} \leq 0,6 \quad (5.9.5)$$

onde:

$$k_{dg} \text{ é calculado como } \frac{32}{16 + d_g} [\text{mm}] \geq 0,75$$

O valor de  $d_g$ , dimensão máxima dos agregados, assumido foi de 16 mm.

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_y}{E_s} \cdot \left( \frac{m_{sd} - m_p}{m_{Rd} - m_p} \right)^{3/2} \quad (5.9.6)$$

onde os valores de  $m_{sd}$  e  $m_p$  são calculados a partir das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} m_{sd} &= \frac{V_R}{8} \\ m_p &= \left( \frac{h}{2} - \frac{d}{3} + e \right) \end{aligned} \quad (5.9.7)$$

O valor da rotação calculado pela equação 5.9.4 é reduzido pela deformação de referência sugerida por Clément et al. (2014). Essa deformação considera os efeitos das forças de compressão no comportamento da laje e é calculada em função da tensão média e do módulo de elasticidade do concreto, como mostra a seguinte equação:

$$\psi' = \psi + 45 \frac{\sigma}{E_c} \quad (5.9.8)$$

Aplicando o processo iterativo explicado no item 2.4.4 nas anteriores equações, encontrou-se o valor de resistência à punção para cada uma das lajes modeladas.

## 5.9.2 Comparação dos resultados de carga de ruptura em cada série

A comparação dos resultados das lajes de referência da serie A, obtidos numericamente  $V_{FEM}$  e através das normas, é mostrada na Tabela 5.4 e é representada graficamente na Figura 5.30.

Tabela 5.4: Comparação entre os resultados numéricos e as normas, série A.

Modelo	$V_{FEM}$	$V_{ACI}$	$V_{NBR, V_{EC}}$	$V_{MC,II}$	$\frac{V_{FEM}}{V_{ACI}}$	$\frac{V_{FEM}}{V_{NBR, V_{EC}}}$	$\frac{V_{FEM}}{V_{MC,II}}$
	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]			
<b>A-25</b>	604,67	456,20	563,01	487,04	1,33	1,07	1,24
<b>A-35</b>	680,66	539,78	629,84	542,81	1,26	1,08	1,25
<b>A-50</b>	764,48	645,16	709,35	605,83	1,18	1,08	1,26

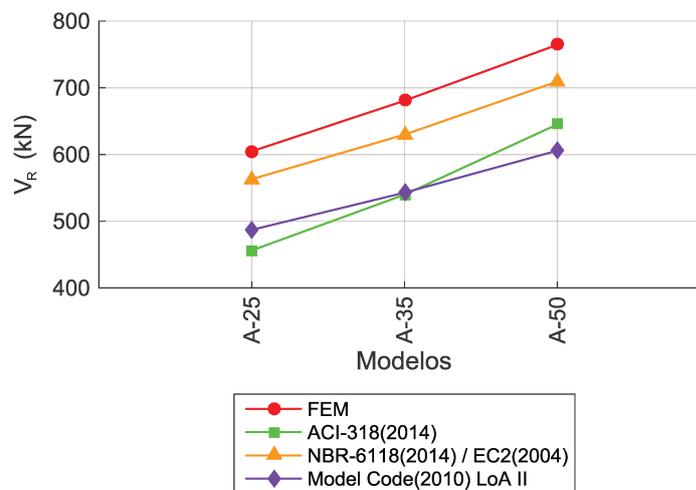


Figura 5.30: Comparação entre os resultados numéricos e as normas, série A.

A partir dos resultados, é observado que os valores previstos pelas equações do EC 2(2004) e da NBR-6118(2014) foram os mais próximos aos resultados obtidos numericamente nas três lajes modeladas. A relação entre os resultados numéricos e os previstos pelas normas mencionadas foi de aproximadamente 1,08, para as três resistências de concreto estudadas. Já no caso do ACI-318-2014 e do *fib* Model Code 2010 (LoA II), observou-se que os resultados numéricos foram em torno de 25% acima dos calculados através das equações.

No caso da série B, os resultados da norma europeia e brasileira continuaram tendo uma boa previsão, porém um pouco mais conservadora, com uma razão de 1,19 em relação ao resultado numérico (ver Tabela 5.5). Por outro lado, os valores de carga calculados pelo *fib* Model Code 2010 utilizando o nível de aproximação II, tiveram uma relação de 1,24. O ACI-318-2014 apresentou os resultados mais conservadores em comparação com as outras normas, com uma média de 1,41. Na Tabela 5.5 observa-se que os valores de carga de ruptura foram maiores em todos os modelos numéricos em relação aos valores previstos pelas normas. Esse resultado é justificado pelo aumento da força nos cabos de protensão à medida que é aplicado

o carregamento.

Tabela 5.5: Comparação entre os resultados numéricos e as normas, série B.

Modelo	$V_{FEM}$	$V_{ACI}$	$V_{NBR, V_{EC}}$	$V_{MC,II}$	$\frac{V_{FEM}}{V_{ACI}}$	$\frac{V_{FEM}}{V_{NBR, V_{EC}}}$	$\frac{V_{FEM}}{V_{MC,II}}$
	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]			
<b>B-1-25</b>	694,13	483,85	615,13	579,56	1,43	1,13	1,20
<b>B-2-25</b>	775,47	538,59	649,52	648,95	1,44	1,19	1,19
<b>B-3-25</b>	707,72	483,85	615,13	579,56	1,46	1,15	1,22
<b>B-4-25</b>	741,59	538,59	649,52	648,95	1,38	1,14	1,14
<b>B-5-25</b>	757,60	538,59	649,52	670,78	1,41	1,17	1,13
<b>B-1-35</b>	810,42	557,30	681,95	632,99	1,45	1,19	1,28
<b>B-2-35</b>	884,37	612,04	716,35	699,64	1,44	1,23	1,26
<b>B-3-35</b>	807,39	557,30	681,95	632,99	1,45	1,18	1,28
<b>B-4-35</b>	862,34	612,04	716,35	699,64	1,41	1,20	1,23
<b>B-5-35</b>	851,76	612,04	716,35	720,33	1,39	1,19	1,18
<b>B-1-50</b>	923,62	649,91	761,47	694,64	1,42	1,21	1,33
<b>B-2-50</b>	967,34	704,65	795,86	759,33	1,37	1,22	1,27
<b>B-3-50</b>	889,59	649,91	761,47	694,64	1,37	1,17	1,28
<b>B-4-50</b>	946,08	704,65	795,86	759,33	1,34	1,19	1,25
<b>B-5-50</b>	998,24	704,65	795,86	778,80	1,42	1,25	1,28
				<b>Média</b>	1,41	1,19	1,24

Com o intuito de facilitar a comparação dos resultados obtidos numericamente, foram realizados dois tipos de gráficos para cada norma, mostrados esquematicamente na Figura 5.31. Num primeiro gráfico (Figura 5.31a) foi plotada a tensão de cisalhamento ( $\tau_{FEM}$ ) obtida no modelo numérico, no perímetro de controle, em função das variáveis utilizadas em cada equação. A tensão de cisalhamento foi calculada através da seguinte expressão:

$$\tau_{FEM} = \frac{V_{FEM}}{bd}$$

sendo:

$V_{FEM}$ , carga última obtida no modelo numérico,

$b$ , perímetro de controle calculado para cada norma,  
 $d$ , altura útil da laje.

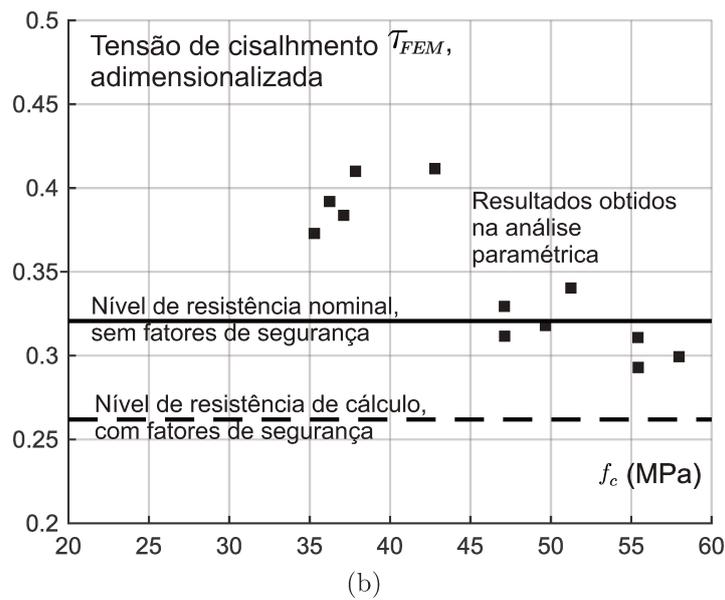
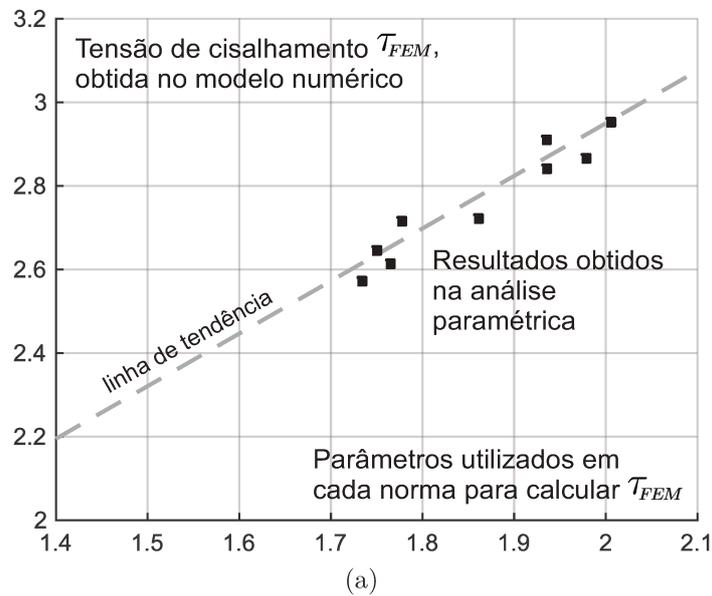


Figura 5.31: Representação esquemática dos gráficos utilizados para comparar os resultados numéricos com as normas

Para o ACI-318-14 observou-se que em todas as lajes analisadas a resistência à punção foi limitada pela seguinte expressão:

$$V_{ACI} = \left[ 0,29\lambda\sqrt{f_c} + 0,3\sigma \right] b_{ACI}d \quad (5.9.9)$$

portanto realizou-se o gráfico de  $(\tau_{FEM} - 0,3\sigma)$  versus  $0,29\sqrt{f_c}$ .

Similar ao ACI-318-14, no EC 2 (2004) e na NBR-6118:2014 o efeito da compressão é considerado através da subtração de uma fração da tensão de compressão à tensão de cisalhamento. Conseqüentemente para essas normas, foi traçada uma curva de  $(\tau_{FEM} - 0,1\sigma)$  versus  $0,18k(100\rho_c)^{\frac{1}{3}}$ . Já no caso do *fib* Model Code 2010, os efeitos da protensão são levados em consideração implicitamente no cálculo da rotação da laje ( $\psi$ ), como se mostra a seguir:

$$\tau_{FEM} = \frac{\sqrt{f_c}}{1,5 + 0,9 \cdot \psi_{FEM} \cdot d} \quad (5.9.10)$$

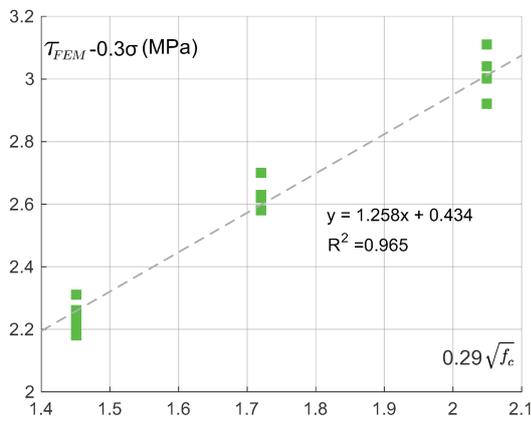
onde  $\psi_{FEM}$ , é a rotação da laje, calculada a partir dos deslocamentos obtidos nos modelos numéricos.

Portanto, na análise dessa norma foram plotados os resultados numéricos ajustados à equação 5.9.10.

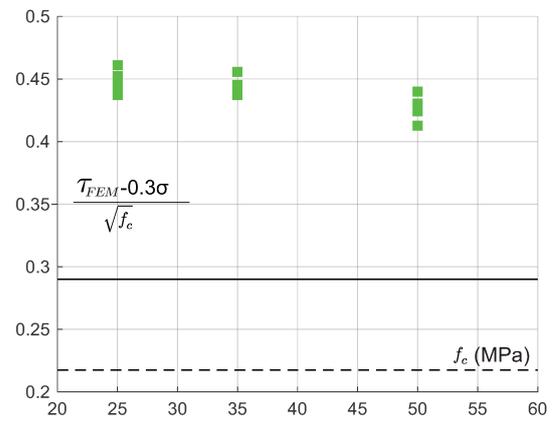
Num segundo tipo de gráfico, mostrado esquematicamente na Figura 5.31b, foi plotada a tensão de cisalhamento adimensional *versus* a resistência à compressão do concreto. O objetivo era comparar o nível de segurança de cada norma. Foram traçadas duas linhas horizontais para representar o nível de resistência nominal (sem fatores de segurança) e o nível de resistência de cálculo (com fatores de segurança). Por exemplo, no caso do ACI-318-14 os resultados foram governados pela equação 5.9.9, desta forma, a linha sólida representa o coeficiente de 0,29 e a linha tracejada o coeficiente de 0,22 (obtido a partir do fator de redução,  $\phi = 0,75$ ).

Nessa ordem de ideias, as Figuras 5.32a, 5.32c e 5.32e têm como objetivo mostrar a dispersão dos resultados obtidos numericamente na série B. Analisando os gráficos, é observado que no caso do ACI-318-14, EC 2(2004) e NBR-6118:2014 os resultados estão agrupados em três regiões, isto é devido à resistência à compressão ser a única variável que muda no eixo  $x$ . Por outro lado, utilizando a equação do Model Code(2010) os resultados se distribuem de modo mais uniforme ao longo da linha de tendência, como pode ser observado na Figura 5.32e.

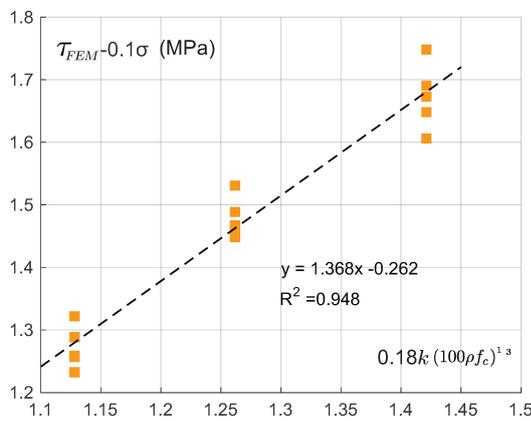
Em relação ao segundo tipo de gráfico, nas Figuras 5.32b, 5.32d e 5.32f pode ser observado que para todas as normas, os resultados estão acima do nível de resistência nominal, o que confirma o resultados mostrados na Tabela 5.5.



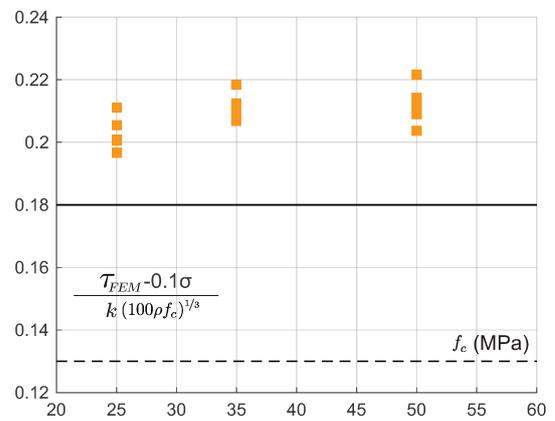
(a) ACI-318-14



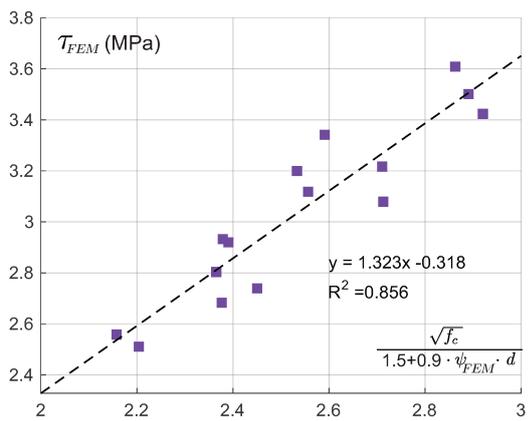
(b) ACI-318-14



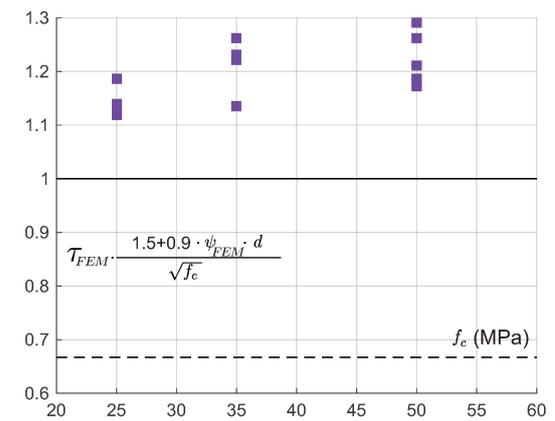
(c) EC 2(2004) e NBR-6118:2014



(d) EC 2(2004) e NBR-6118:2014



(e) fib Model Code 2010



(f) fib Model Code 2010

Figura 5.32: Tendência dos resultados e comparação com a previsão do ACI-318-14, EC 2 (2004) e a NBR-6118:2014 e fib Model Code 2010, série B.

Na Figura 5.33 é mostrada a comparação de carga última obtida para cada uma das lajes da série B. É interessante observar que apesar dos resultados serem mais conservadores utilizando a equação do ACI-318-14, o comportamento geral da curva se ajusta ao obtido através das análises numéricas.

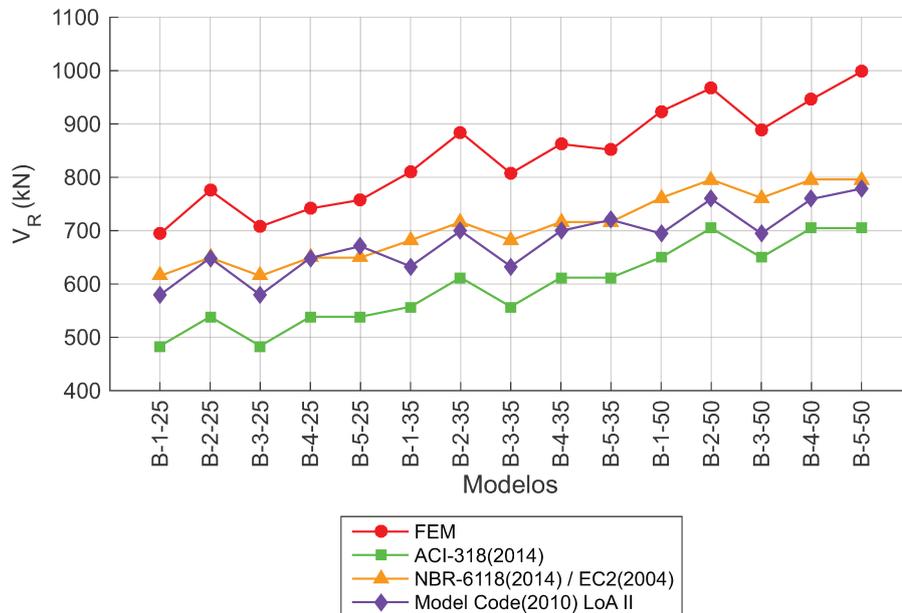


Figura 5.33: Comparação entre os resultados numéricos e as normas, série B.

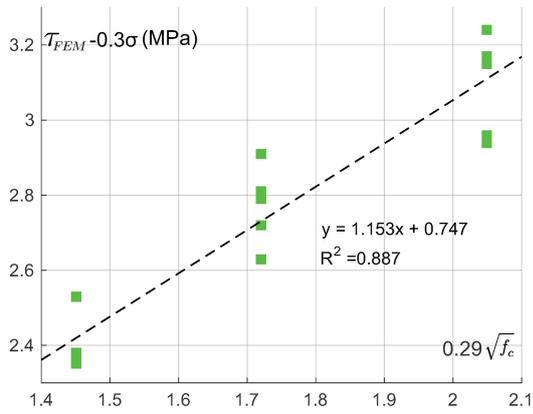
Seguindo o mesmo procedimento foram analisados os dados da série C e D. A Tabela 5.6 mostra os resultados de carga de ruptura para a série C e as Figuras 5.34 e 5.35 permitem visualizar a dispersão dos resultados e o nível de segurança de cada uma das normas, baseados nos resultados numéricos obtidos nessa série.

Na série C, o *fib* Model Code 2010 apresentou a menor média da relação entre os resultados numéricos e os calculados por essa norma, com um valor de 1,24. É importante lembrar que as equações dessa norma levam em consideração os momentos de descompressão causados pela excentricidade dos cabos de protensão. Em contrapartida, os resultados obtidos pelo EC 2(2004) e NBR-6118:2014 tiveram média de 1,22, bastante próxima ao Model Code (2010) apesar de não considerar a excentricidade dos cabos de protensão. O ACI-318-14 apresentou os resultados mais conservadores, com média de 1,47.

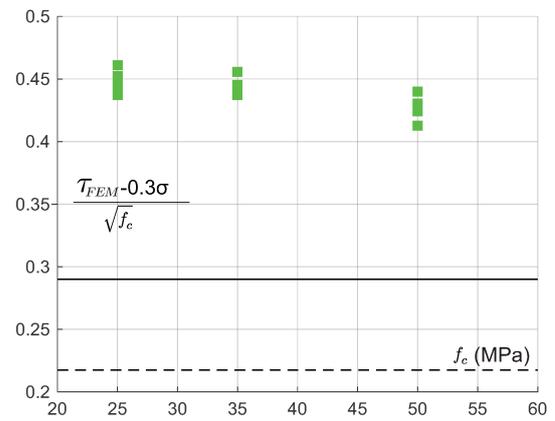
Tabela 5.6: Comparação entre os resultados numéricos e as normas, série C.

Modelo	$V_{FEM}$	$V_{ACI}$	$V_{NBR}, V_{EC}$	$V_{MC,II}$	$\frac{V_{FEM}}{V_{ACI}}$	$\frac{V_{FEM}}{V_{NBR}, V_{EC}}$	$\frac{V_{FEM}}{V_{MC,II}}$
	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]			
<b>C-1-25</b>	740,93	483,85	615,13	603,56	1,53	1,20	1,23
<b>C-2-25</b>	836,85	538,59	649,52	694,13	1,55	1,29	1,21
<b>C-3-25</b>	736,36	483,85	615,13	603,56	1,52	1,20	1,22
<b>C-4-25</b>	788,60	538,59	649,52	694,13	1,46	1,21	1,14
<b>C-5-25</b>	790,23	538,59	649,52	739,88	1,47	1,22	1,07
<b>C-1-35</b>	811,37	557,30	681,95	655,93	1,46	1,19	1,24
<b>C-2-35</b>	941,75	612,04	716,35	742,40	1,54	1,31	1,27
<b>C-3-35</b>	834,16	557,30	681,95	655,93	1,50	1,22	1,27
<b>C-4-35</b>	909,34	612,04	716,35	742,40	1,49	1,27	1,22
<b>C-5-35</b>	915,23	612,04	716,35	785,48	1,50	1,28	1,17
<b>C-1-50</b>	895,09	649,91	761,47	716,39	1,38	1,18	1,25
<b>C-2-50</b>	1033,91	704,65	795,86	799,51	1,47	1,30	1,29
<b>C-3-50</b>	900,12	649,91	761,47	716,39	1,38	1,18	1,26
<b>C-4-50</b>	1013,41	704,65	795,86	799,51	1,44	1,27	1,27
<b>C-5-50</b>	1009,37	704,65	795,86	839,78	1,43	1,27	1,20
<b>Média</b>					1,47	1,24	1,22

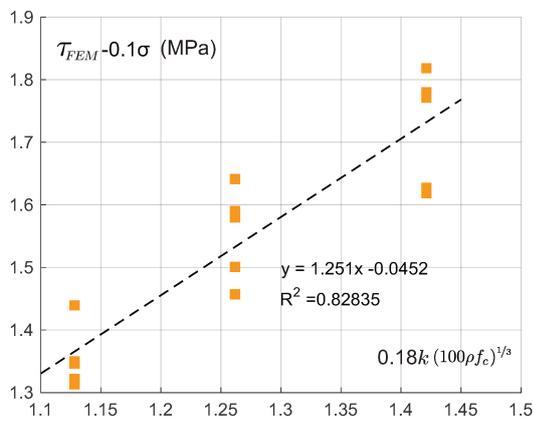
Em relação aos gráficos de dispersão e nível de segurança apresentados na Figura 5.34, verifica-se um comportamento similar ao observado na série B. Nas Figuras 5.34b, 5.34d e 5.34f é importante destacar que nenhum dos resultados esteve abaixo do nível de resistência nominal, o que indica um comportamento a favor da segurança dos resultados obtidos através das equações das normas.



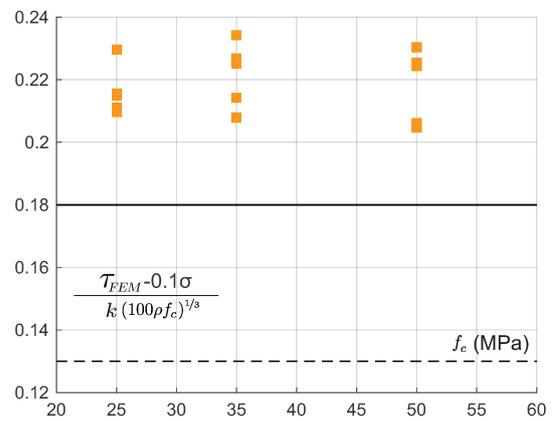
(a) ACI-318-14



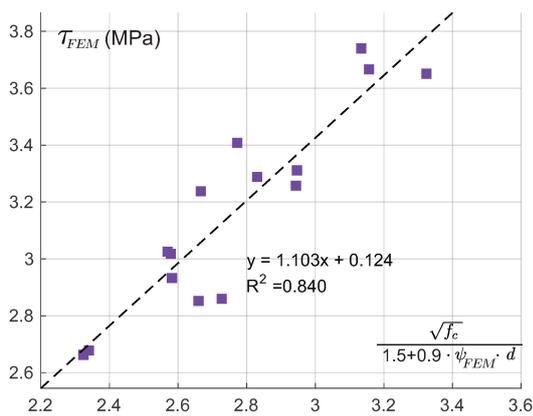
(b) ACI-318-14



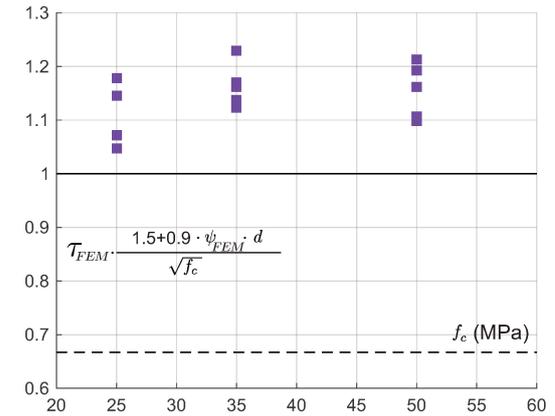
(c) EC 2 (2004) e a NBR-6118:2014



(d) EC 2 (2004) e a NBR-6118:2014



(e) *fib* Model Code 2010



(f) *fib* Model Code 2010

Figura 5.34: Tendência dos resultados e comparação com a previsão do ACI-318(2014), EC 2(2004) e a NBR-6118:2014 e *fib* Model Code 2010, série C.

Na Figura 5.35 apresenta-se o gráfico de carga de ruptura para cada uma das lajes da série C, obtido da análise numérica e através das equações de cada norma. No gráfico é evidenciado o nível de segurança de cada regulamento, sendo o ACI-318(2014) o mais conservador. É importante salientar o comportamento levemente diferente das curvas do EC 2(2004) e NBR-6118:2014 em relação ao *fib* Model Code 2010, apesar das médias obtidas serem parecidas (1,24 e 1,22, respectivamente).

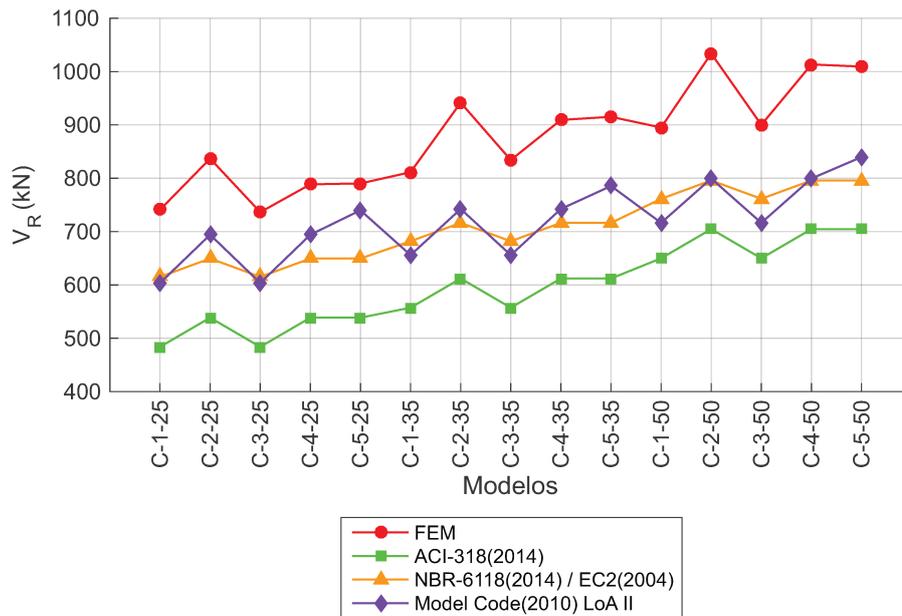


Figura 5.35: Comparação entre os resultados numéricos e as normas, série C.

Com o intuito de analisar a influência da componente vertical, foram analisados os resultados da série D. A Tabela 5.7 apresenta os valores de carga calculados para cada norma e os obtidos pela análise numérica, junto com os valores da componente vertical. Para o cálculo de todas as normas foram considerados somente os cabos dentro do perímetro afastado a  $d/2$  do pilar, para o cálculo da componente vertical. Observa-se na tabela que esses valores são pequenos (entre 0,3% e 0,78% da carga obtida no modelo numérico), isso acontece por causa da altura da laje adotada e da relativa baixa excentricidade estabelecida para fazer o traçado parabólico dos cabos de protensão.

Para realizar a comparação com os resultados numéricos, no caso das normas EC 2(2004), NBR-6118:2014) e o *fib* Model Code (2010), o valor da componente vertical foi subtraído do valor de carga última obtido do modelo numérico, como é indicado em cada uma dessas normas. Já no caso do ACI-318 (2014), a parcela da componente vertical é considerada dentro da equação de resistência à punção, portanto o valor da componente foi somado diretamente e

comparado com a carga total obtida no modelo.

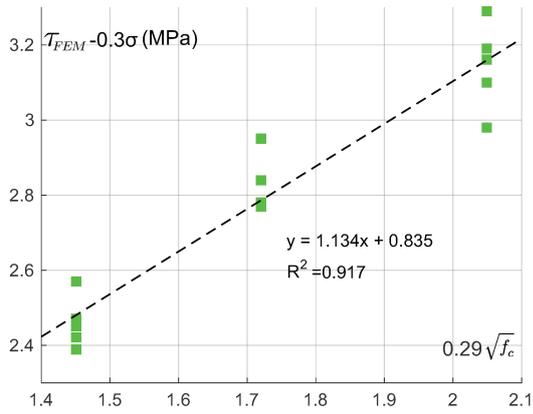
Nessa última série as previsões do EC 2(2004), NBR-6118:2014 e *fib* Model Code 2010 tiveram uma média de 1,26 (ver Tabela 5.7). Similar às séries anteriores, todos os resultados numéricos ficaram acima das previsões dos códigos normativos.

Tabela 5.7: Comparação entre os resultados numéricos e as normas, série D.

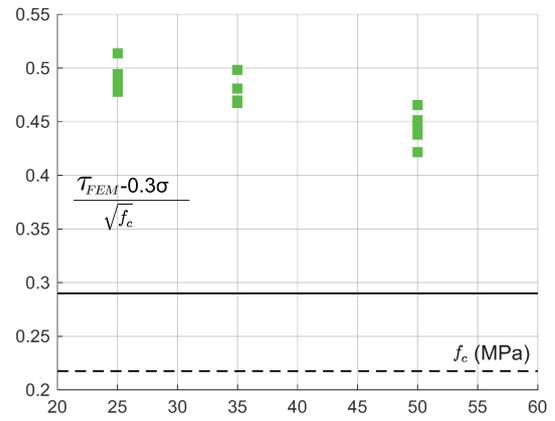
Modelo	$V_{FEM}$	$V_{p0,5d}$	$V_{ACI}$	$V_{NBR} - V_{EC}$	$V_{MC,II}$	$\frac{V_{FEM}}{V_{ACI}}$	$\frac{V_{FEM}^{*(1)}}{V_{NBR} - V_{EC}}$	$\frac{V_{FEM}^{*(1)}}{V_{MC,II}}$
	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]			
<b>D-1-25</b>	760,85	5,1	494,02	615,13	595,33	1,54	1,23	1,27
<b>D-2-25</b>	848,53	5,1	548,77	649,52	678,43	1,55	1,30	1,24
<b>D-3-25</b>	751,22	2,5	488,93	615,13	595,33	1,54	1,22	1,26
<b>D-4-25</b>	798,64	2,5	534,68	649,52	678,43	1,47	1,23	1,17
<b>D-5-25</b>	820,06	6,4	551,31	649,52	715,50	1,49	1,25	1,14
<b>D-1-35</b>	848,62	5,1	567,47	681,95	648,07	1,50	1,24	1,30
<b>D-2-35</b>	952,08	5,1	622,22	716,35	727,56	1,53	1,32	1,30
<b>D-3-35</b>	849,12	2,5	562,39	681,95	648,07	1,51	1,24	1,31
<b>D-4-35</b>	906,23	2,5	617,13	716,35	727,56	1,47	1,26	1,24
<b>D-5-35</b>	924,07	6,4	624,76	716,35	762,54	1,48	1,28	1,20
<b>D-1-50</b>	938,71	5,1	660,08	761,47	708,96	1,42	1,23	1,32
<b>D-2-50</b>	1048,61	5,1	714,83	795,86	785,60	1,47	1,31	1,33
<b>D-3-50</b>	907,88	2,5	654,99	761,47	708,96	1,39	1,19	1,28
<b>D-4-50</b>	1010,08	2,5	709,74	795,86	785,60	1,42	1,27	1,28
<b>D-5-50</b>	1018,69	6,4	717,37	795,86	818,36	1,42	1,27	1,24
<b>Média</b>						1,48	1,26	1,26

(1)  $V_{FEM}^* = V_{FEM} - V_{p0,5d}$

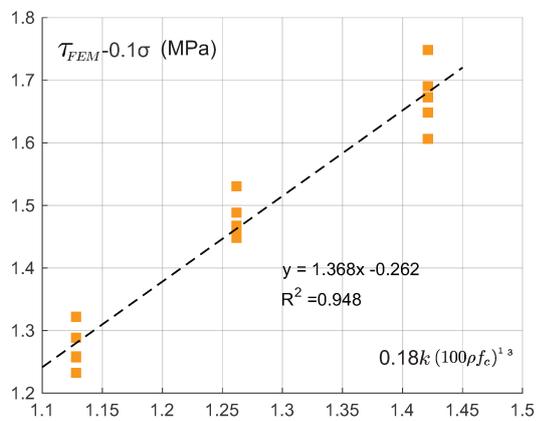
Seguindo o mesmo procedimento, foram realizados os gráficos de tendência e nível de segurança para cada uma das normas (Figura 5.36).



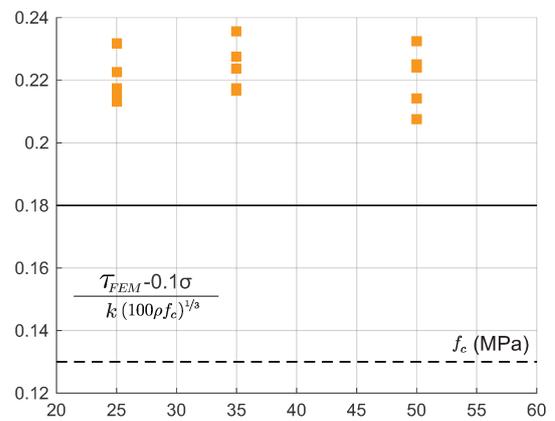
(a) ACI-318-14



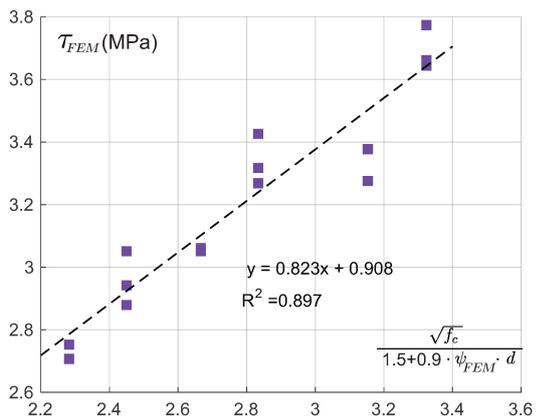
(b) ACI-318-14



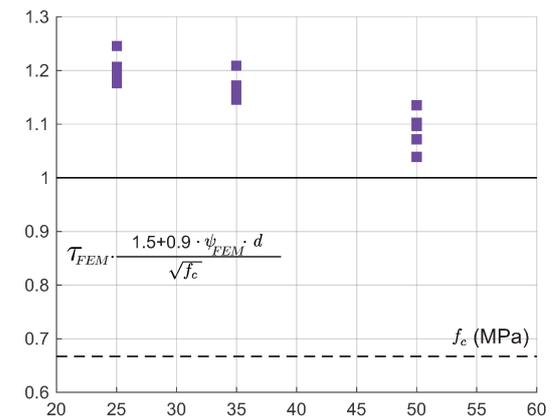
(c) EC 2 (2004) e a NBR-6118:2014



(d) EC 2 (2004) e a NBR-6118:2014



(e) Model Code (2010)



(f) Model Code (2010)

Figura 5.36: Tendência dos resultados e comparação com a previsão do ACI-318(2014), EC 2 (2004) e a NBR-6118:2014 e *fib* Model Code 2010, série D.

Analisando os gráficos apresentados na Figura 5.36 junto com o apresentado na Figura 5.37 é evidenciado novamente o valor de segurança das normas em relação aos resultados obtidos numericamente.

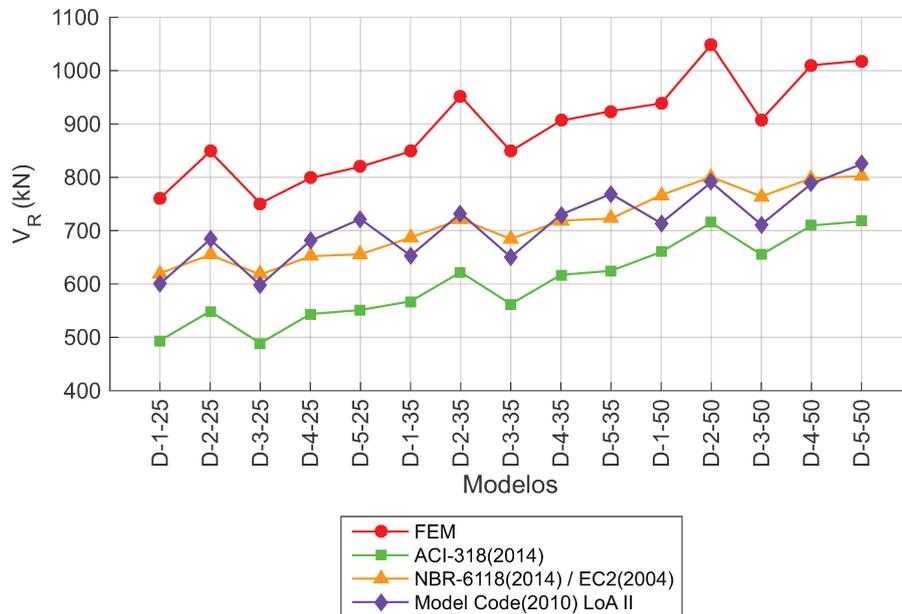


Figura 5.37: Comparação entre os resultados numéricos e as normas, série D.

### 5.9.3 Análise geral da comparação com as normas

Neste item apresenta-se uma síntese dos resultados obtidos no item anterior e se compara as previsões de cada uma das normas. Para fazer essa comparação, foi realizada uma análise estatística das relações de carga última obtidas nos modelos e das calculadas pelas equações das normas, para as 48 lajes da análise paramétrica. A Tabela 5.8 apresenta os parâmetros estatísticos calculados.

Tabela 5.8: Resumo dos parâmetros estadísticos obtidos nos 48 modelos na comparação com as previsões das normas.

	$\frac{V_{FEM}}{V_{ACI}}$	$\frac{V_{FEM}^{(1)}}{V_{NBR} - V_{EC}}$	$\frac{V_{FEM}^{(1)}}{V_{MC,II}}$
<b>Média</b>	1,426	1,201	1,230
<b>Desvio padrão</b>	0,072	0,058	0,058
<b>Coefficiente de variação (CV)</b>	0,051	0,049	0,049
<b>Percentil 5 %</b>	1,290	1,079	1,079

(1) Na série D,  $V_{FEM}^* = V_{FEM} - V_{p0,5d}$

O ACI-318-14, além de apresentar a média mais alta da relação  $\frac{V_{FEM}}{V_R}$ , também apresenta o maior desvio padrão, o que indica uma maior dispersão dos resultados obtidos através dessa norma. Observa-se também que os valores de média e desvio padrão obtidos para o EC 2(2004), NBR-6118:2014 e do *fib* Model Code 2010 foram similares. Ao analisar as médias deve-se ter especial cuidado, dado que uma média igual ou próxima a 1,0 poderia indicar valores contra a segurança. Além disso, as equações utilizadas nas normas geralmente são calibradas para que somente em 5% dos casos a carga obtida do ensaio experimental seja menor do que a prevista pelas equações da norma. Por essa razão, foi calculado o percentil 5% para os dados obtidos para cada norma, visando obter um valor maior do que 1,0. Analisando esse parâmetro na Tabela 5.8, é verificado que a previsão do ACI-318(2014) é segura, mas também mais conservadora, em comparação as outras normas. Dessa forma, pode-se afirmar que o EC 2(2004), a NBR-6118(2014), e o *fib* Model Code 2010 apresentam um melhor ajuste, sem comprometer o nível de segurança, para as lajes analisadas numericamente nesta pesquisa.

## 5.10 Comparação dos resultados com CSCT

Nesta seção apresenta-se a análise dos resultados obtidos numericamente usando os princípios da Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (*Critical Shear Crack Theory, CSCT*) desenvolvida por Muttoni (2008). De acordo com Clément et al. (2014), a CSCT fornece uma formulação consistente para a análise de lajes protendidas já que permite incluir todos os efeitos gerados pela protensão. É importante lembrar também que a abordagem apresentada nessa teoria serviu como base para o desenvolvimento das equações para o cálculo da punção do *fib* Model Code 2010.

A CSCT estabelece que a resistência à punção ( $V_R$ ) depende da abertura ( $w$ ) e da rugosidade de uma fissura crítica causada pelo cisalhamento que se desenvolve ao longo da biela de compressão perto do pilar, como é ilustrado na Figura 5.38.

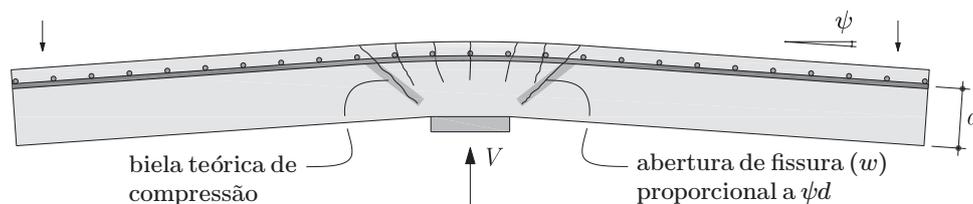


Figura 5.38: Representação esquemática da fissura crítica na espessura da laje. (CLÉMENT et al., 2014).

De acordo com Muttoni (2008), a abertura dessa fissura é proporcional ao produto da rotação da laje e à altura efetiva da laje ( $w \propto \psi \cdot d$ ), e a rugosidade da fissura está correlacionada com o tamanho máximo do agregado ( $d_g$ ). Deste modo, o autor referido propôs o seguinte critério de ruptura:

$$\frac{V_R}{b_0 \cdot d \sqrt{f_c}} = \frac{3/4}{1 + 15 \frac{\psi \cdot d}{d_g + d_{g0}}} \quad (5.10.1)$$

onde:

$\rho$  é a rotação da laje,

$f_c$  é a resistência à compressão do concreto do corpo de prova cilíndrico,

$d$  é a altura efetiva da laje,

$b_0$  é o perímetro de controle localizado  $d/2$  da área carregada,

$d_g$  é o tamanho máximo do agregado,

$d_{g0}$  é o tamanho de referência do agregado (16 mm).

A equação 5.10.1 é similar à equação usada pelo *fib* Model Code 2010 para determinar a resistência à punção. Desse modo, o cálculo da carga resistida pela laje é estabelecido pela interseção do critério de ruptura e da curva de carga-rotação, como pode ser observado na Figura 5.39a. A validação do critério de ruptura dessa teoria foi realizada através da comparação com 99 ensaios experimentais (Figura 5.39b).

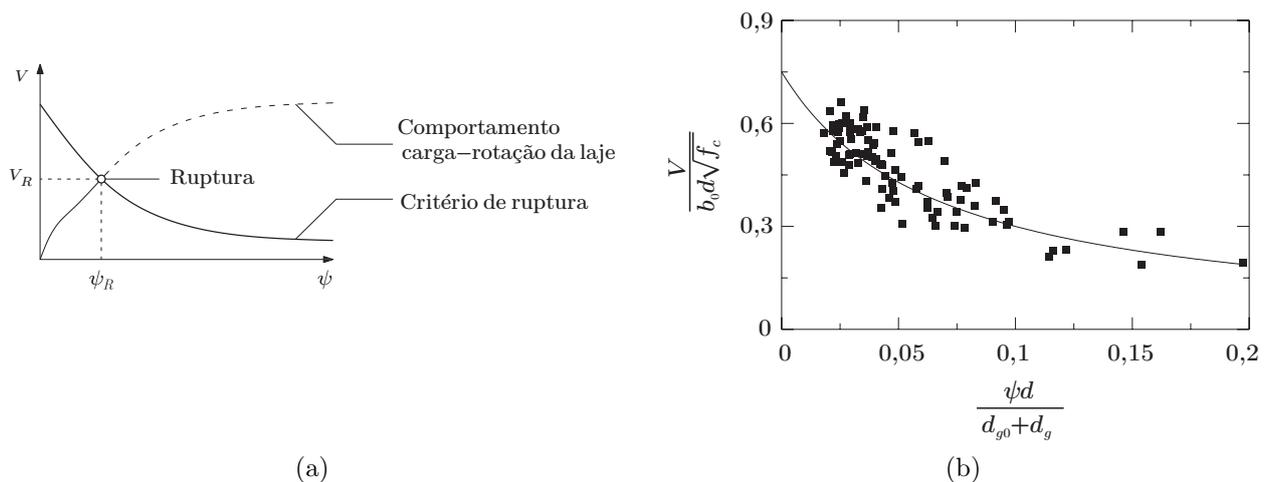


Figura 5.39: Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (*Critical Shear Crack Theory*, CSCT): (a) cálculo da resistência à punção (b) comparação do critério de ruptura com ensaios experimentais (CLÉMENT et al., 2014).

Para realizar a comparação nos modelos, foi assumido um tamanho máximo de agregado igual ao tamanho de referência ( $d_{g0} = 16$  mm). O cálculo da rotação obteve-se como se mostra na figura a seguir:

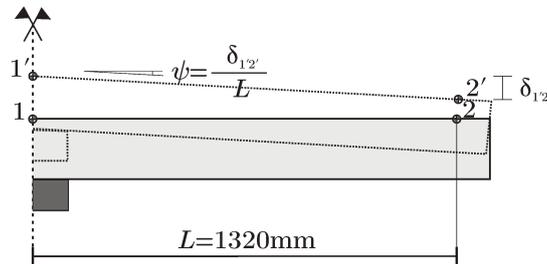


Figura 5.40: Cálculo da rotação da laje no modelo numérico.

Além disso, foi levada em consideração a redução da rotação através da deformação de referência proposta por Clément et al. (2014), segundo a equação já apresentada:

$$\psi' = \psi + 45 \frac{\sigma}{E_c} \tag{5.10.2}$$

Na Figura 5.41 a resistência à punção é representada em função da rotação e altura útil da laje, similar à comparação realizada na Figura 5.39b. Os pontos correspondem aos resultados obtidos de carga última calculada nos modelos numéricos, e a linha tracejada ao critério proposto por Muttoni (2008). Observa-se um bom ajuste entre os resultados numéricos e o critério de ruptura, sendo possível observar também que a maioria dos resultados encontra-se localizada entre os valores de 0,5 e 1 no eixo das abscissas. Isso é justificado pela geometria constante utilizada nos modelos e pela redução das rotações da laje causada pela protensão.

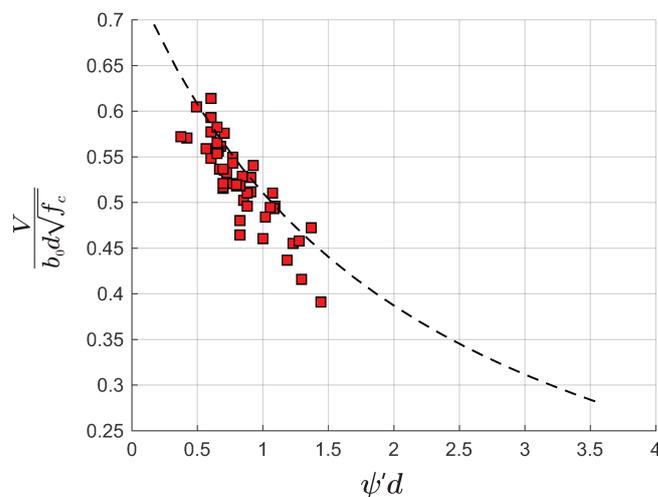
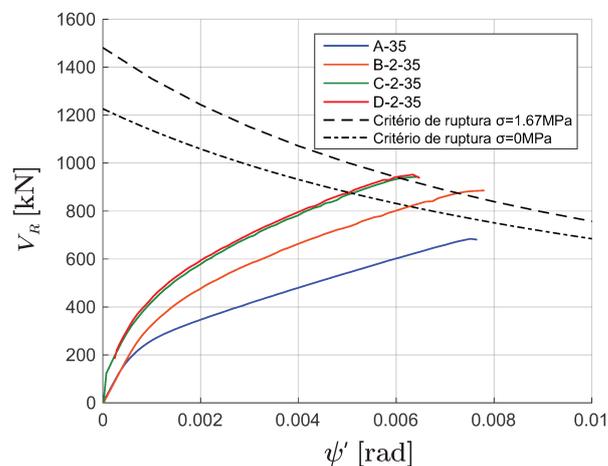
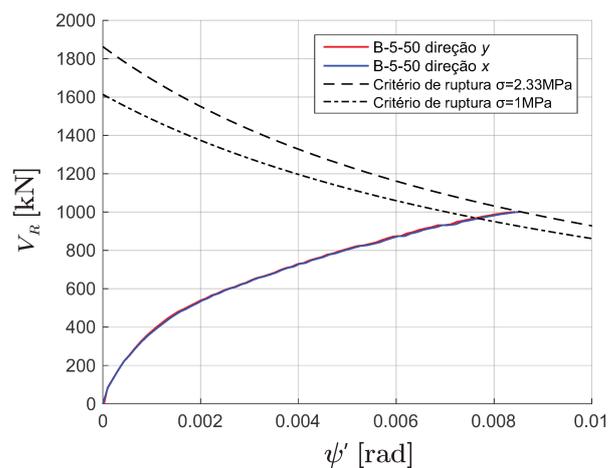


Figura 5.41: Cálculo da rotação da laje no modelo numérico.

Além do traçado do Gráfico 5.41, foram escolhidos alguns modelos para comparação do comportamento com o critério de ruptura (Figuras 5.42 e 5.43). No caso da Figura 5.42a, foram plotadas as curvas de carga versus rotação da configuração 2 e concreto de 35 MPa para as quatro séries junto com o critério de ruptura com  $\sigma = 0$  MPa e  $\sigma = 1,67$  MPa. O gráfico permite ver o ganho de resistência da laje com a inserção das tensões de compressão no plano e a excentricidade dos cabos. É observado também que os comportamentos para as séries C e D foi similar. Por outro lado, a Figura 5.42b são comparadas as rotações na direções  $x$  e  $y$  no modelo **B-5-50**. Esse modelo Foi escolhido devido à tensão de compressão na configuração 5 ser diferente em cada direção ortogonal da laje. No gráfico mencionado, observa-se que o comportamento é similar nas duas direções, e que a interseção das curvas de carga-rotação ocorre no critério de ruptura com maior tensão de compressão ( $\sigma = 2,33$  MPa).



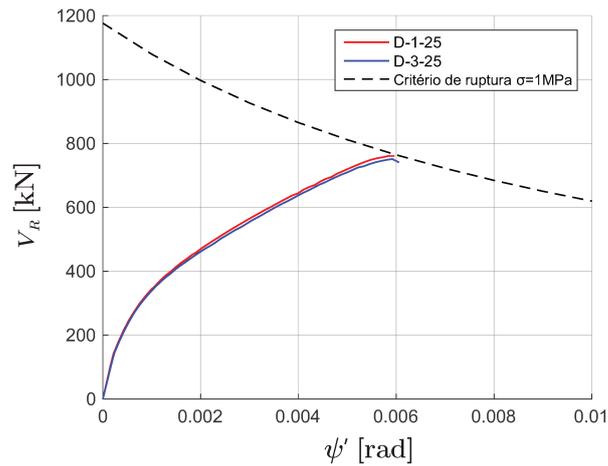
(a)



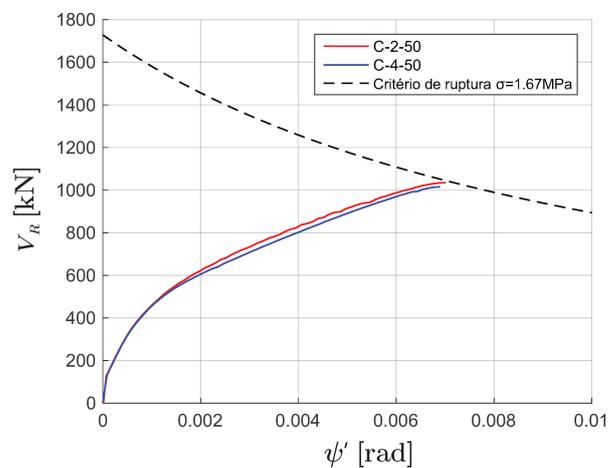
(b)

Figura 5.42: Comparação entre os resultados numéricos e a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (CSCT).

Nas Figuras 5.43a e 5.43b foram plotadas as curvas dos modelos **D-1-25**, **D-3-25**, **C-2-50** e **C-4-50**. Comparou-se o comportamento da carga-rotação das lajes com a mesma tensão de compressão aplicada, mas com cabos distribuídos de forma diferente em planta. Os gráficos mostram para ambos os casos que a curva de carga-rotação é similar, podendo-se afirmar que as distribuições em planta adotadas para essas configurações não tiveram uma influência significativa no comportamento da laje.



(a)



(b)

Figura 5.43: Comparação das curvas de carga *versus* rotação obtidas numericamente e as curvas de ruptura previstas pela Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (CSCT).

## Capítulo 6

### Conclusões e recomendações para trabalhos futuros

#### 6.1 Considerações finais

O objetivo deste trabalho foi estudar a punção em lajes lisas protendidas com cabos não aderentes através de análises numéricas não lineares, visando avaliar os efeitos da protensão que contribuem na resistência à punção. Para a realização das modelagens utilizou-se o programa comercial DIANA V.9.4.4, que se baseia no método dos elementos finitos e apresenta vários modelos constitutivos para representar a não linearidade física do comportamento do concreto à tração, compressão e ao cisalhamento, assim como também o comportamento plástico das armaduras.

Para avaliar os modelos constitutivos adotados, foram simuladas duas vigas protendidas ensaiadas por Gauvreau (1992) e Hussien et al. (2012) com ruptura por flexão e quatro lajes de concreto armado e protendido, com ruptura por punção, ensaiadas por Ramos (2003) e Melges (2001). Em geral, as análises numéricas conseguiram reproduzir bem o comportamento observado experimentalmente. No caso das estruturas com protensão, foi utilizado um modelo de aderência para simular o deslocamento relativo e o atrito entre os cabos não aderentes e o concreto. Na aplicação da protensão as modelagens foram divididas em várias etapas para representar corretamente as condições do ensaio experimental.

Baseada na calibração obtida a partir dos ensaios experimentais, procedeu-se à realização de uma análise paramétrica com o objetivo de determinar as variáveis que têm maior influência da protensão na resistência à punção. Foram simuladas no total 48 lajes, onde estudaram-se os seguintes parâmetros: distribuição em planta e número de cabos, traçado do cabo e resistência à compressão do concreto. Os resultados numéricos foram comparados com as recomendações da NBR-6118:2014, ACI 318-14, Eurocode 2 (2004), *fib* Model Code 2010 e com a Teoria de Fissura Crítica de Cisalhamento proposta por Muttoni (2008). A seguir são descritas as principais conclusões obtidas.

## 6.2 Conclusões

Comparando os resultados obtidos através das análises numéricas com os experimentais, conclui-se que as modelagens conseguiram representar corretamente o comportamento observado nos ensaios. Isso foi demonstrado através da comparação das curvas de carga *versus* deslocamento, do panorama de fissuração e das tensões nas armaduras longitudinais. A abordagem utilizada para a modelagem dos cabos de protensão utilizando o modelo de aderência de Dörr (1980) permitiu uma adequada simulação dos efeitos causados pela protensão nos modelos numéricos.

De forma geral, o modelo constitutivo adotado para o concreto permitiu obter resultados coerentes para as 48 lajes modeladas no estudo paramétrico, onde foram adotadas três resistências à compressão diferente (25 MPa, 35 MPa e 50 MPa). Os parâmetros relacionadas com o comportamento ao cisalhamento do concreto tiveram grande influência nos resultados das simulações. Particularmente, o fator de retenção ao cisalhamento variável utilizado no modelo de fissuras fixas foi importante na calibração nos modelos.

O estudo paramétrico permitiu avaliar os efeitos criados pela protensão na resistência à punção das lajes simuladas. Evidenciou-se um aumento na capacidade de carga, diminuição das tensões de tração nas armaduras longitudinais e aumento das deformações à compressão do concreto. Conforme o esperado, esses efeitos foram maiores nos modelos que tinham maior força de protensão. Em relação ao traçado do cabo, conclui-se que a excentricidade permitiu também um aumento da resistência à punção. Devido à altura da laje e à excentricidade adotada nas lajes que tinham traçado parabólico, o efeito da componente vertical na resistência à punção foi pequeno. É importante salientar também que as configurações com tensão de compressão média equivalente, apresentaram um comportamento similar entre si, o que indica que a distribuição em planta adotada nas análises teve uma influência pequena nos resultados.

Em relação à comparação dos resultados da análise paramétrica com as normas, foi observado que as cargas previstas pelos modelos numéricos foram maiores que as calculadas através das equações do ACI-318-14, EC 2(2004), NBR-6118:2014 e *fib* Model Code 2010 (utilizando o nível de aproximação II) para as 48 lajes analisadas. A relação entre as cargas obtidas nos modelos e as previstas pelo ACI-318-14 teve uma média de 1,426. Para o EC 2(2004) e a NBR-6118:2014 foi de 1,201 e no caso do *fib* Model Code (2010) de 1,23. Este resultado é justificado pelo nível de segurança intrínseco de cada uma das normas em relação à aplicação de protensão e pelo aumento da força nos cabos durante a aplicação do carregamento no modelo.

Comparando os métodos de cálculo de cada norma, conclui-se que a determinação da

carga de ruptura através das equações *fib* Model Code 2010 é mais complexa devido ao maior número de variáveis envolvidas, sendo a única formulação que considera o efeito dos momentos criados pelo traçado do cabo. Os resultados obtidos apresentaram um bom ajuste com o critério de ruptura da Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento proposta por Muttoni (2008). A abordagem apresentada nessa teoria permitiu uma melhor interpretação dos resultados obtidos no estudo paramétrico a partir das curvas de carga *versus* rotação da laje.

### 6.3 Recomendações para trabalhos futuros

Como sugestões para continuação da pesquisa, podem-se citar os seguintes itens:

- Propõe-se a utilização do modelo constitutivo adotado neste trabalho para simular mais ensaios experimentais de lajes e vigas, assim como também de outros tipos de estruturas de concreto armado e protendido, como por exemplo pilares, consolos, e cascas.
- A simulação de ligações isoladas entres pilares e lajes é adequada para a análise localizada da punção, porém não abrange os esforços de membrana existentes no modelo global (painéis de lajes). Com as facilidades oferecidas pelas ferramentas computacionais, seria interessante a modelagem de uma laje apoiada em vários pilares para estudar esse fenômeno.
- Em relação à protensão, na revisão bibliográfica e nas normas foi encontrada pouca informação em relação as diferenças entre os tipos de protensão (aderente ou não aderente). Recomenda-se fazer um estudo para comparar estas duas alternativas no comportamento das lajes lisas à punção. Sugere-se também um estudo experimental de lajes protendidas para confirmar os resultados numéricos alcançados nesta pesquisa.
- Realizar modelagens de lajes de concreto com armadura de cisalhamento, variando o número de camadas e espaçamento radial entre elementos.
- Analisar situações de punção para lajes com momentos aplicados (punção excêntrica).
- Propõe-se ainda a realização de mais análises paramétricas para estudar outras variáveis relacionadas com a resistência à punção, como por exemplo, a taxa de armadura longitudinal, a espessura da laje, o tamanho do pilar, etc.

## Referências Bibliográficas

ACI COMMITTEE 318. **Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (ACI 318-14)**. American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 2014.

AFONSO, C. L. M. **Lajes Fungiformes. Contribuições para a compressão de seu comportamento**. Tese (Doutorado) — Universidade do Porto, 2010.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118-Projeto de Estruturas de Concreto**. Rio de Janeiro, 2014.

BARBÁN, V. V. **Punção em lajes cogumelo de concreto protendido com cabos não-aderentes na ligação laje-pilar de borda**. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2008.

BAŽANT, Z. P.; OH, B. H. Crack band theory for fracture of concrete. **Materials and structures**, Springer, v. 16, n. 3, p. 155–177, 1983.

BAŽANT, Z. P.; PRAT, P. C. Microplane model for brittle-plastic material: I. theory. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 114, n. 10, p. 1672–1688, 1988.

BITENCOURT JR, L. A.; MANZOLI, O. L.; PRAZERES, P. G.; RODRIGUES, E. A.; BITTENCOURT, T. N. A coupling technique for non-matching finite element meshes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 290, p. 19–44, 2015.

BITENCOURT JR, L. A.; MANZOLI, O. L.; TRINDADE, Y. T.; RODRIGUES, E. A.; COSTA, D. Dias-da. Modeling reinforced concrete structures using coupling finite elements for discrete representation of reinforcements. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 149, p. 32–44, 2018.

BORST, R. d.; REMMERS, J. J.; NEEDLEMAN, A.; ABELLAN, M.-A. Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, Wiley Online Library, v. 28, n. 7-8, p. 583–607, 2004.

CARVALHO, A. **Punção em Lajes Cogumelo de Concreto Protendido com Cabos não Aderentes e Armadura de Cisalhamento**. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil. Universidade de Brasília, Brasília, 2005.

ČERVENKA, V.; JENDELE, L.; ČERVENKA, J. ATENA Program Documentation Part 1 Theory. **Atena**, p. 282, 2012.

CERVERA, M.; CHIUMENTI, M. Smearred crack approach: back to the original track. **International journal for numerical and analytical methods in geomechanics**, Wiley Online Library, v. 30, n. 12, p. 1173–1199, 2006.

CLAUS, T. **Non-Linear Finite Element Analysis of Shear Critical Reinforced Concrete Beams**. Tese (Doutorado) — Doctoral Thesis. Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 2009.

CLÉMENT, T. **Influence de la précontrainte sur la résistance au poinçonnement de dalles en béton armé**. Tese (Doutorado) — EPFL, 2012.

CLÉMENT, T.; , A. P. ; RUIZ, M. F.; MUTTONI, A. Influence of prestressing on the punching strength of post-tensioned slabs. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 72, p. 56–69, 2014.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIB Model Code 2010—Final draft**. Lausanne, 2012.

CORRÊA, G. **Puncionamento em lajes cogumelo protendidas com cabos nao aderentes**. Dissertação (Mestrado) — MSc dissertation, Department of Civil and Environmental Engineering, University of Brasília, Brasília, Brazil, 2001.

CRISFIELD, M. A.; WILLS, J. Analysis of r/c panels using different concrete models. **Journal of engineering mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 115, n. 3, p. 578–597, 1989.

DIANA TNO. Diana finite element analysis user's manual release 9.4. 4. **Delft, The Netherlands**, 2012.

DÖRR, K. **Ein Beitrag zur Berechnung von Stahlbetonscheiben unter besonderer Berücksichtigung des Verbundverhaltens**. Tese (Doutorado) — PhD thesis, University of Darmstadt, 1980.

EDER, M.; VOLLUM, R.; ELGHAZOULI, A.; ABDEL-FATTAH, T. Modelling and experimental assessment of punching shear in flat slabs with shearheads. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 32, n. 12, p. 3911–3924, 2010.

ELLOBODY, E.; BAILEY, C. G. Behaviour of unbonded post-tensioned one-way concrete slabs. **Advances in Structural Engineering**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 11, n. 1, p. 107–120, 2008.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EUROCODE 2: Design of Concrete Structures – Part 1: General Rules and Rules for Building**. Bruxelas, 2014.

FEENSTRA, P. H. **Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete**. Tese (Doutorado) — TU Delft, Delft University of Technology, 1993.

- FIGUEIRAS, J. d. A. **Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells**. Tese (Doutorado) — Department of Civil Engineering. Swansea, University College of Swansea., 1983.
- GAUVREAU, P. Load tests of concrete girders prestressed with unbonded tendons. **Report/Institute of Structural Engineering ETH Zürich**, Birkhäuser, v. 194, 1992.
- GROW, J.; VANDERBILT, M. Shear strength of prestressed lightweight aggregate concrete flat plates. **PRECAST/PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE. JOURNAL**, 1967.
- GUANDALINI, S. **Poinçonnement symétrique des dalles en béton armé**. Tese (Doutorado) — EPFL, 2006.
- HARTL, H. **Development of a continuum-mechanics-based tool for 3d finite element analysis of reinforced concrete structures and application to problems of soil-structure interaction**. Tese (Doutorado) — Graz University of Technology, Institute f. Structural Concrete -University of California in San Diego, Dept. of Struct. Eng., 2002.
- HASSANZADEH, G.; SUNDQUIST, H. Influence of post-tensioned reinforcement distribution on design of prestressed reinforcement in column supported flat slabs. **Trita-BKN. Bulletin**, Royal Institute of Technology, v. 57, p. 457–466, 2000.
- HENDRIKS, M.; BOER, A. de; BELLETTI, B. Guidelines for nonlinear finite element analysis of concrete structures. **Rijkswaterstaat Technisch Document (RTD), Rijkswaterstaat Centre for Infrastructure, RTD**, v. 1016, p. 2012, 2016.
- HORDIJK, D. **Local Approach to Fracture of Concrete**. Tese (Doutorado) — Doctoral Thesis. Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1991.
- HSIEH, S.; TING, E.; CHEN, W. A plastic-fracture model for concrete. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 18, n. 3, p. 181–197, 1982.
- HUANG, Y.; KANG, T. H.; RAMSEYER, C.; RHA, C. Background to multi-scale modelling of unbonded post-tensioned concrete structures. **International Journal of Theoretical and Applied Multiscale Mechanics**, Inderscience Publishers, v. 1, n. 3, p. 219–235, 2010.
- HUSSIEN, O.; ELAFANDY, T.; ABDELRAHMAN, A.; BAKY, S. A.; NASR, E. Behavior of bonded and unbonded prestressed normal and high strength concrete beams. **HBRC Journal**, Elsevier, v. 8, n. 3, p. 239–251, 2012.
- INÁCIO, R. A. **Análise numérica do punçoamento em lajes fungiformes**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Ciências e Tecnologia Nova de Lisboa, 2010.
- KANG, T. H.; HUANG, Y.; SHIN, M.; LEE, J. D.; CHO, A. S. Experimental and numerical assessment of bonded and unbonded post-tensioned concrete members. **ACI Structural Journal**, American Concrete Institute, v. 112, n. 6, p. 735, 2015.
- KIM, N.-H. **Introduction to nonlinear finite element analysis**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2014.

- KINNUNEN, S.; NYLANDER, H. Punching of concrete slabs without shear reinforcement, meddelande nr 38. **Institutionen for Byggnadsstatik, Kungliga Tekniska Hogs, Stockholm, Sweden, 1960.**
- KORDINA, K.; HEGGER, J.; TEUTSCH, M. Versuche zum schubtragverhalten von spannbetonbalken mit vorspannung ohne verbund. **Beton-und Stahlbetonbau**, Wiley Online Library, v. 81, n. 5, p. 126–131, 1986.
- MAMEDE, N.; FARIA, D.; RAMOS, A. Análise numérica do punçoamento em lajes fungiformes pré-esforçadas, 5<sup>as</sup> jornadas portuguesas de engenharia de estruturas, encontro nacional de betão estrutural 2014. In: **9<sup>o</sup> Congresso Nacional de Sismologia e Engenharia Sísmica, Lisboa**. [S.l.: s.n.], 2014.
- MAMEDE, N. F. S.; RAMOS, A. P.; FARIA, D. M. Experimental and parametric 3d nonlinear finite element analysis on punching of flat slabs with orthogonal reinforcement. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 48, p. 442–457, 2012.
- MANZOLI, O. L.; MAEDO, M. A.; JR, L. A. B.; RODRIGUES, E. A. On the use of finite elements with a high aspect ratio for modeling cracks in quasi-brittle materials. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier, v. 153, p. 151–170, 2016.
- MELGES, J. L. P. **Análise experimental da punção em lajes de concreto armado e protendido**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2001.
- MENÉTREY, P. **Numerical analysis of punching failure in reinforced concrete structures**. Tese (Doutorado) — University of Colorado, Boulder, 1994.
- MOËS, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 46, n. 1, p. 131–150, 1999.
- MUTTONI, A. Punching shear strength of reinforced concrete slabs without transverse reinforcement. **ACI structural Journal**, ACI Structural Journal, v. 105, n. EPFL-ARTICLE-116123, p. 440–450, 2008.
- MUTTONI, A.; RUIZ, M. F. Shear strength in one-and two-way slabs according to the critical shear crack theory. In: FIB SYMPOSIUM, AMSTERDAM 2008. **fib Symposium, Amsterdam 2008**. [S.l.], 2008.
- NAKAMURA, H.; HIGAI, T. Compressive fracture energy and fracture zone length of concrete. **Modeling of inelastic behavior of RC structures under seismic loads**, ASCE, p. 471–487, 2001.
- NGO, D.; SCORDELIS, A. Finite element analysis of reinforced concrete beams. In: **Journal Proceedings**. [S.l.: s.n.], 1967. v. 64, n. 3, p. 152–163.
- NYLANDER, H.; KINNUNEN, S.; INGVARSSON, H. **Punching of a prestressed and normally reinforced concrete bridge slab supported by a column**. [S.l.], 1977.

- OLIVER, J.; CERVERA, M.; MANZOLI, O. Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. **International journal of plasticity**, Elsevier, v. 15, n. 3, p. 319–351, 1999.
- PRALONG, J.; BRÄNDLI, W.; THÜRLIMANN, B. **Durchstanzversuche an stahlbeton- und spannbetonplatten**. [S.l.]: Birkhäuser, 1979. v. 7305.
- PRUIJSSERS, A. F. **Aggregate interlock and dowel action under monotonic and cyclic loading**. Tese (Doutorado) — TU Delft, Delft University of Technology, 1988.
- RAMOS, A. M. P. **Punçoamento em lajes fungiformes pré-esforçadas**. Tese (Doutorado) — Universidade Técnica de Lisboa–Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, 2003.
- RASHID, Y. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. **Nuclear engineering and design**, Elsevier, v. 7, n. 4, p. 334–344, 1968.
- REGAN, P. **Punching shear in prestressed concrete slab bridges**. [S.l.]: Polytechnic of Central London Engineering Structures Research Group, 1983.
- REGAN, P.; BRAESTRUP, M. Punching shear in reinforced concrete—a state of art report, comité euro-international du béton. **Bulletin d'information**, n. 1, p. 8, 1985.
- ROTS, J.; BELLETTI, B.; DAMONI, C.; HENDRIKS, M. Development of dutch guidelines for nonlinear finite element analyses of shear critical bridge and viaduct beams. **fib Bulletin 57: Shear and punching shear in RC and FRC elements**, p. 139–154, 2010.
- ROTS, J. G. **Computational modeling of concrete fracture**. Tese (Doutorado) — TU Delft, Delft University of Technology, 1988.
- ROTS, J. G.; BLAAUWENDRAAD, J. Crack models for concrete, discrete or smeared? fixed, multi-directional or rotating? Delft University of Technology, 1989.
- RUST, W. **Non-linear finite element analysis in structural mechanics**. [S.l.]: Springer, 2016.
- SACRAMENTO, P.; FERREIRA, M.; OLIVEIRA, D.; MELO, G. S. Punching strength of reinforced concrete flat slabs without shear reinforcement. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, SciELO Brasil, v. 5, n. 5, p. 659–691, 2012.
- SELBY, R.; VECCHIO, F. A constitutive model for analysis of reinforced concrete solids. **Canadian Journal of Civil Engineering**, NRC Research Press, v. 24, n. 3, p. 460–470, 1997.
- SHEHATA, I. **Punching of prestressed and non-prestressed reinforced concrete flat slabs**. Tese (Doutorado) — MPhil thesis, Polytechnic of Central London, 1982.
- SHU, J. **Structural Analysis Methods for the Assessment of Reinforced Concrete Slabs**. Tese (Doutorado) — Chalmers University of Technology, 2017.
- SHU, J.; BELLETTI, B.; MUTTONI, A.; SCOLARI, M.; PLOS, M. Internal force distribution in rc slabs subjected to punching shear. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 153, p. 766–781, 2017.

- SHU, J.; FALL, D.; PLOS, M.; ZANDI, K.; LUNDGREN, K. Development of modelling strategies for two-way rc slabs. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 101, p. 439–449, 2015.
- SHU, J.; PLOS, M.; ZANDI, K.; JOHANSSON, M.; NILENIUS, F. Prediction of punching behaviour of rc slabs using continuum non-linear fe analysis. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 125, p. 15–25, 2016.
- SILVA, R. **Punção em lajes cogumelo protendidas com cordoalhas não aderentes e pilares de diferentes dimensões**. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2005.
- SMITH, S. W.; BURNS, N. H.; RAO, A. P.; ZENON, A. Post-tensioned flat plate to column connection behavior. **PCI Journal**, v. 19, n. 3, p. 74, 1974.
- STALLER, D. Analytical studies and numerical analysis of punching shear failure in reinforced concrete slabs. trita-bkn. **Bulletin**, v. 57, p. 8, 2000.
- STALLER, M. Numerical analysis with the finite element program marc. **Punching of structural concrete slabs. International Federation for Structural Concrete, Lausanne, Switzerland. fib Bulletin**, v. 12, p. 103–109, 2001.
- THORENFELDT, E.; TOMASZEWICZ, A.; JENSEN, J. Mechanical properties of high-strength concrete and application in design. In: TAPIR TRONDHEIM NORWAY. **Proceedings of the symposium utilization of high strength concrete**. [S.l.], 1987. p. 149–159.
- VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. **ACI J.**, v. 83, n. 2, p. 219–231, 1986.
- VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. Compression response of cracked reinforced concrete. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 119, n. 12, p. 3590–3610, 1993.
- VECCHIO, F. J.; GAUVREAU, P.; LIU, K. Modeling of unbonded post-tensioned concrete beams critical in shear. **ACI structural journal**, American Concrete Institute, v. 103, n. 1, p. 57, 2006.

## Apêndice A

Banco de dados de ensaios de lajes protendidas com cabos não aderentes

Autor	Laje	Pilar	Protensão	h (mm)	$f_c$ (MPa)	$\phi$ ou c (mm)	$\rho_s$ (%)	$d_s$ (mm)	$\rho_p$ (%)	F (kN)	$d_p$ (mm)	$\sigma_p$ (MPa)	$V_{exp}$ (kN)
Pralong et al. (1979)	P5	Circular	Não	180	27.1	300	1,34	154	154	0	0	0	568
Pralong et al. (1979)	P7	Circular	2-dir	175	31.2	300	1,34	162	162	167	129	2.06	761
Pralong et al. (1979)	P8	Circular	2-dir	176	29.6	300	0,3	166	166	173	138	2.06	683

Autor	Laje	Pilar	Protensão	h (mm)	$f_c$ (MPa)	$\phi$ ou c (mm)	$\rho_s$ (%)	$d_s$ (mm)	$\rho_p$ (%)	F (kN)	$d_p$ (mm)	$\sigma_p$ (MPa)	$V_{exp}$ (kN)
Shehata (1982)	SP1	Cuadrada	2-dir	175	38.8	150	0.266	157	0.6	180	135	4.5	988
Shehata (1982)	SP2	Cuadrada	1-dir	175	49.3	150	1.4	143	0.66	180	125	4.5	624
Shehata (1982)	SP3	Cuadrada	Não	175	39.5	150	2.22	139	0	0	0	0	416
Shehata (1982)	SP4	Cuadrada	2-dir	175	44.3	150	0.266	157	0.86	180	135	5.5	884
Shehata (1982)	SP5	Cuadrada	2-dir	175	43.4	150	0.266	157	0.86	135	135	3.5	780
Shehata (1982)	SP6	Cuadrada	2-dir	175	45.1	150	0.266	157	0.49	180	135	4	728

Autor	Laje	Pilar	Protensão	h (mm)	$f_c$ (MPa)	$\phi$ ou c (mm)	$\rho_s$ (%)	$d_s$ (mm)	$\rho_p$ (%)	F (kN)	$d_p$ (mm)	$\sigma_p$ (MPa)	$V_{exp}$ (kN)
Hassanzadeh (1998)	A1	Circular	2-dir	180	33	250	0.18	150	0.31	217.6	151	2.79	668
Hassanzadeh (1998)	A2	Circular	2-dir	180	30.52	250	0.18	150	0.33	213.7	144	2.74	564
Hassanzadeh (1998)	B1	Circular	Não	220	43.52	250	0.29	190	0	0.0	0	0	439
Hassanzadeh (1998)	B2	Circular	2-dir	220	41.48	250	0.29	190	0.43	202.1	110	2.12	827
Hassanzadeh (1998)	B3	Circular	2-dir	220	41.06	250	0.29	190	0.25	210.7	191	2.21	1113
Hassanzadeh (1998)	B4	Circular	2-dir	220	43.01	250	0.29	190	0.25	189.7	189	1.99	952

Autor	Laje	Pilar	Protensão	h (mm)	$f_c$ (MPa)	$\phi$ ou c (mm)	$\rho_s$ (%)	$d_s$ (mm)	$\rho_p$ (%)	F (kN)	$d_p$ (mm)	$\sigma_p$ (MPa)	$V_{exp}$ (kN)
Melges (2001)	M1	Cuadrada	Não	160	26.6	180	1.58	127	0	0	0	0	441
Melges (2001)	M4	Cuadrada	2-dir	160	51.9	180	0.92	134	0.27	130.601	120	2.58	772

Autor	Laje	Pilar	Protensão	h (mm)	$f_c$ (MPa)	$\phi$ ou c (mm)	$\rho_s$ (%)	$d_s$ (mm)	$\rho_p$ (%)	F (kN)	$d_p$ (mm)	$\sigma_p$ (MPa)	$V_{exp}$ (kN)
Corrêa (2001)	LP1	Cuadrada	Não	120	50.7	150	1.17	105	0	0	0	0	327
Corrêa (2001)	LP2	Cuadrada	2-dir	120	52.4	150	1.17	105	0.37	100	60	2.19	355
Corrêa (2001)	LP3	Cuadrada	2-dir	120	52.4	150	1.17	105	0.62	100	60	4.28	415
Corrêa (2001)	LP4	Cuadrada	2-dir	120	50.7	150	1.17	105	0.12	100	90	0.8	390
Corrêa (2001)	LP5	Cuadrada	2-dir	120	50.7	150	1.17	105	0.25	100	90	1.33	475
Corrêa (2001)	LP6	Cuadrada	2-dir	120	52.4	150	1.17	105	0.37	100	90	1.76	437

Autor	Laje	Pilar	Protensão	h (mm)	$f_c$ (MPa)	$\phi$ ou c (mm)	$\rho_s$ (%)	$d_s$ (mm)	$\rho_p$ (%)	F (kN)	$d_p$ (mm)	$\sigma_p$ (MPa)	$V_{exp}$ (kN)
Ramos (2003)	AR3	Cuadrada	1-dir	100	37.5	200	1.63	80	0		0	0	258
Ramos (2003)	AR4	Cuadrada	1-dir	100	43.1	200	1.63	80	0	116.25	0	1	270
Ramos (2003)	AR5	Cuadrada	2-dir	100	35.7	200	1.63	80	0	176.25	0	1.55	252
Ramos (2003)	AR6	Cuadrada	2-dir	100	37	200	1.63	80	0	116.87	0	2	251
Ramos (2003)	AR7	Cuadrada	2-dir	100	43.9	200	1.63	80	0	113.75	0	1.95	250
Ramos (2003)	AR8	Cuadrada	2-dir	100	41.6	200	1.63	80	0	158.75	0	2.75	288
Ramos (2003)	AR9	Cuadrada	2-dir	100	37.1	200	1.62	80.6	0.451	85	65.2	0	380
Ramos (2003)	AR10	Cuadrada	2-dir	100	41.4	200	1.6	81.85	0	0	0	0	251
Ramos (2003)	AR11	Cuadrada	2-dir	100	38	200	1.62	80.8	0.448	85	65.5	0	371
Ramos (2003)	AR12	Cuadrada	2-dir	100	31.3	200	1.62	80.6	0.53	85	64.9	0	342
Ramos (2003)	AR13	Cuadrada	2-dir	100	32.5	200	1.7	77	0.478	85	61.5	0	280
Ramos (2003)	AR14	Cuadrada	2-dir	100	28.2	200	1.64	79.8	0.465	85	63.2	0	261
Ramos (2003)	AR15	Cuadrada	2-dir	100	31.7	200	1.65	79.5	0.485	85	60.6	0	208
Ramos (2003)	AR16	Cuadrada	2-dir	100	30.6	200	1.64	79.7	0.486	85	60.4	0	262

Autor	Laje	Pilar	Protensão	h (mm)	$f_c$ (MPa)	$\phi$ ou c (mm)	$\rho_s$ (%)	$d_s$ (mm)	$\rho_p$ (%)	F (kN)	$d_p$ (mm)	$\sigma_p$ (MPa)	$V_{exp}$ (kN)
Silva (2005)	A1	Cuadrada	2-dir	125	37.8	100	0.62	109	0.32	138	91	3.31	380
Silva (2005)	A2	Cuadrada	2-dir	127	37.8	100	0.47	113	0.2	136	97	2.14	315
Silva (2005)	A3	Cuadrada	2-dir	128	37.8	100	0.62	109	0.34	135	86	3.16	352
Silva (2005)	A4	Cuadrada	2-dir	129	37.8	100	0.51	104	0.23	128	86	1.98	321
Silva (2005)	B1	Cuadrada	2-dir	124	40.1	200	0.6	114	0.3	140	97	3.39	582
Silva (2005)	B2	Cuadrada	2-dir	124	40.1	200	0.48	110	0.21	138	94	2.23	488
Silva (2005)	B3	Cuadrada	2-dir	124	40.1	200	0.63	108	0.33	129	90	3.12	520
Silva (2005)	B4	Cuadrada	2-dir	124	40.1	200	0.5	106	0.22	134	89	2.16	459
Silva (2005)	C1	Cuadrada	2-dir	126	41.6	300	0.61	111	0.32	140	93	3.33	720
Silva (2005)	C2	Cuadrada	2-dir	122	41.6	300	0.5	105	0.22	138	89	2.26	557
Silva (2005)	C3	Cuadrada	2-dir	124	41.6	300	0.64	106	0.33	144	90	3.48	637
Silva (2005)	C4	Cuadrada	2-dir	123	41.6	300	0.52	102	0.23	142	85	2.31	497
Silva (2005)	D1	Cuadrada	2-dir	124	44.1	200	0.68	100	0.36	138	83	3.34	497
Silva (2005)	D2	Cuadrada	2-dir	123	44.1	200	0.5	106	0.22	137	90	2.23	385
Silva (2005)	D3	Cuadrada	2-dir	125	44.1	200	0.51	103	0.22	142	90	2.27	395
Silva (2005)	D4	Cuadrada	2-dir	125	44.1	200	0.48	111	0.21	139	95	2.22	531

Autor	Laje	Pilar	Protensão	h (mm)	$f_c$ (MPa)	$\phi$ ou c (mm)	$\rho_s$ (%)	$d_s$ (mm)	$\rho_p$ (%)	F (kN)	$d_p$ (mm)	$\sigma_p$ (MPa)	$V_{exp}$ (kN)
Barbán (2008)	L1	Cuadrada	Não	120	35.7	150	1.96	105	0	0	0	0	360
Barbán (2008)	L2	Cuadrada	2-dir	120	37.8	150	0.3	105	0.24	130	90	2.167	400

**Notação:**

$h$  espessura da laje,

$f_c$  resistência à compressão do concreto (corpo de prova cilíndrico),

$\phi$  diâmetro do pilar de seção circular,

$c$  lado do pilar de seção quadrada,

$\rho_s$  taxa de armadura passiva,

$d_s$  altura útil da armadura passiva,

$\rho_p$  taxa de armadura ativa,

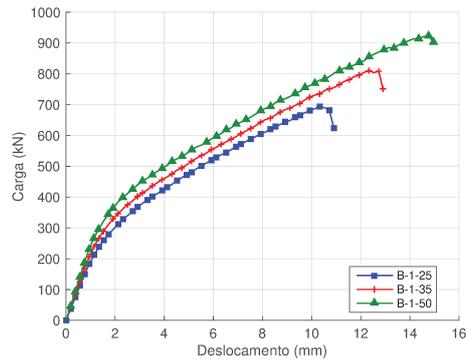
$F$  força média aplicada nos cabos de protensão,

$\sigma_p$  tensão de compressão aplicada na laje,

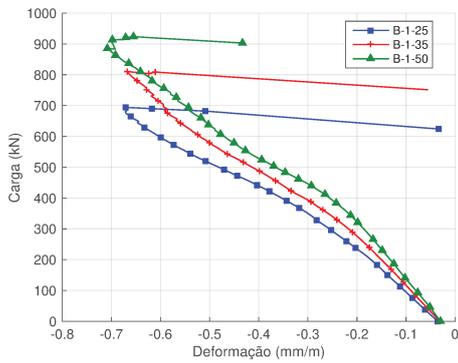
$V_{exp}$  valor de carga de ruptura experimental.

## Apêndice B

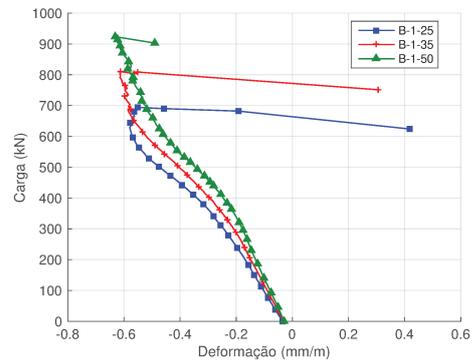
Gráficos da análise paramétrica das séries com protensão  
(B,C,D)



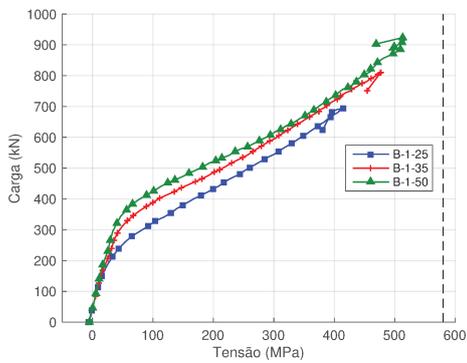
(a) Carga versus deslocamento



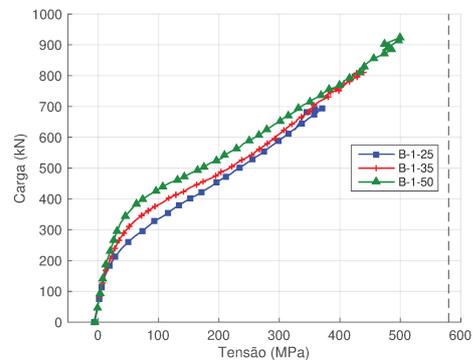
(b) Deformação do concreto dir.  $y$



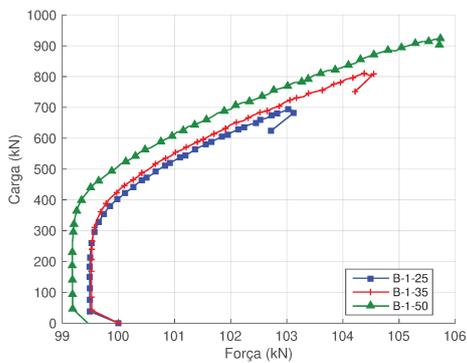
(c) Deformação do concreto dir.  $x$



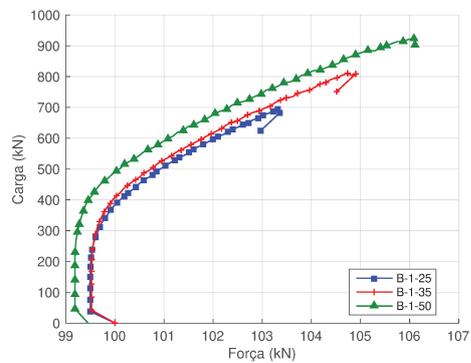
(d) Tensão na armadura dir.  $y$



(e) Tensão na armadura dir.  $x$

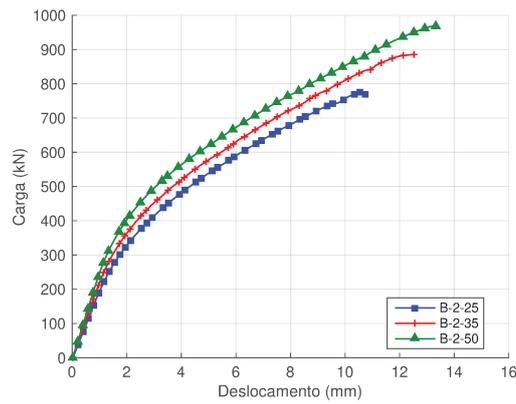


(f) Força no cabo dir.  $y$

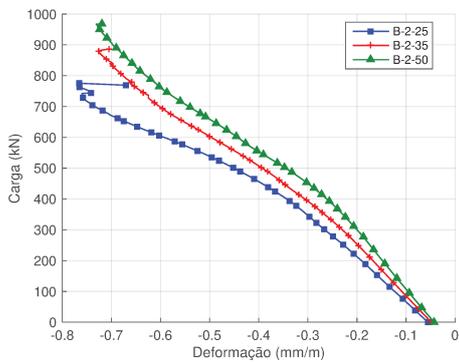


(g) Força no cabo dir.  $x$

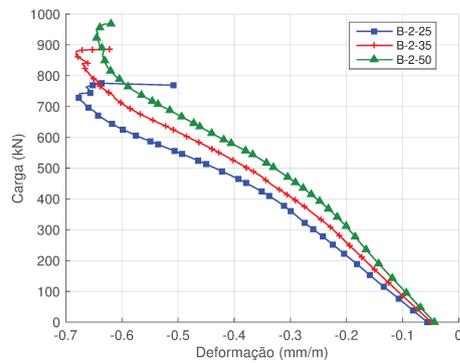
Figura B.1: Resultados Série B, configuração 1.



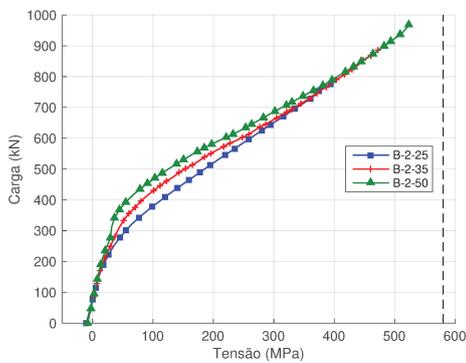
(a) Carga versus deslocamento



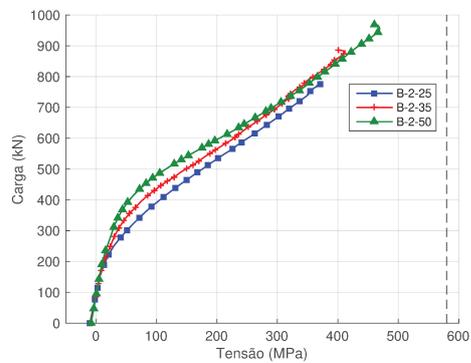
(b) Deformação do concreto dir.  $y$



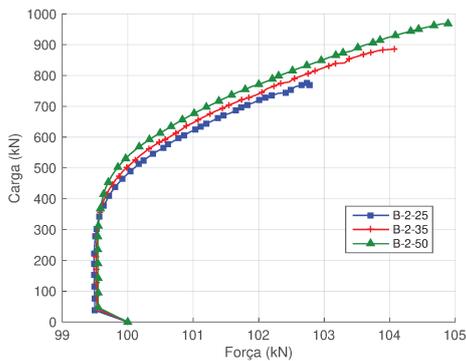
(c) Deformação do concreto dir.  $x$



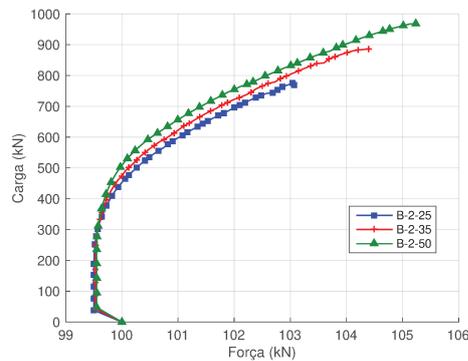
(d) Tensão na armadura dir.  $y$



(e) Tensão na armadura dir.  $x$

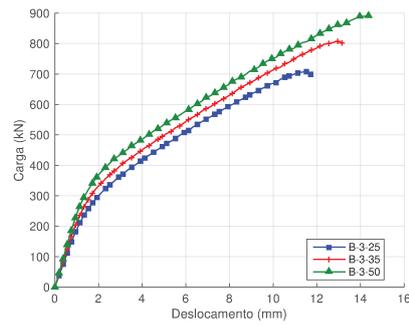


(f) Força no cabo dir.  $y$

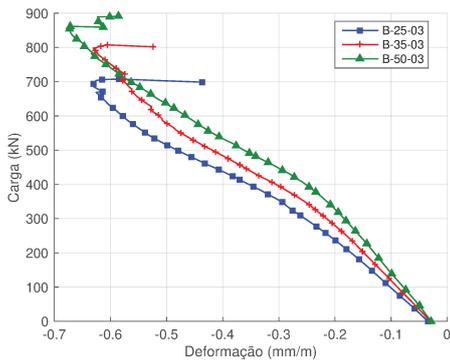


(g) Força no cabo dir.  $x$

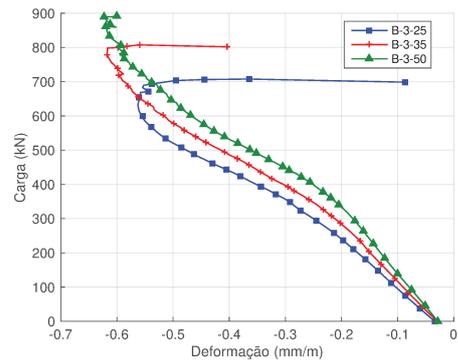
Figura B.2: Resultados Série B, configuração 2.



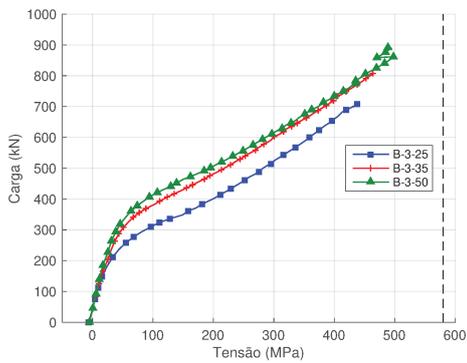
(a) Carga versus deslocamento



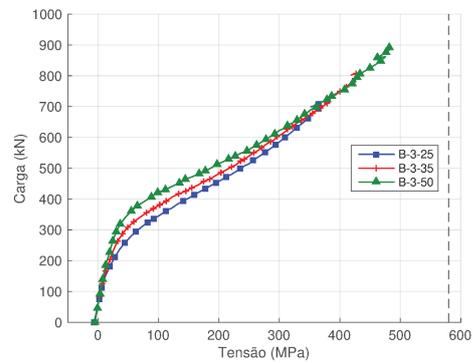
(b) Deformação do concreto dir.  $y$



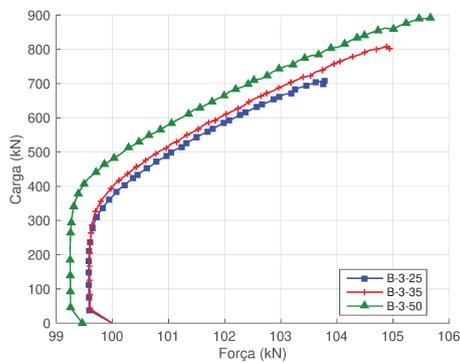
(c) Deformação do concreto dir.  $x$



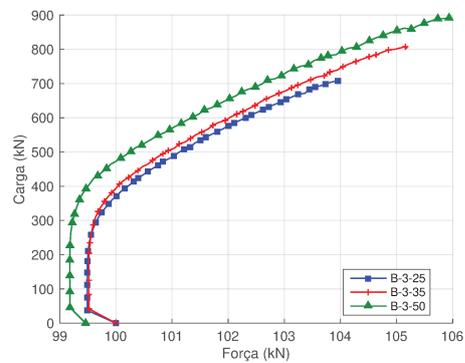
(d) Tensão na armadura dir.  $y$



(e) Tensão na armadura dir.  $x$

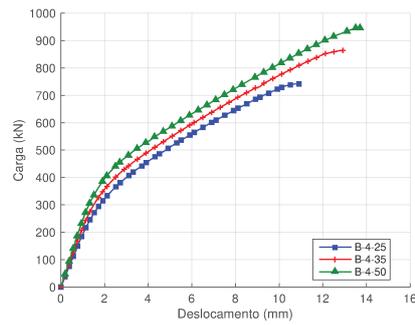


(f) Força no cabo dir.  $y$

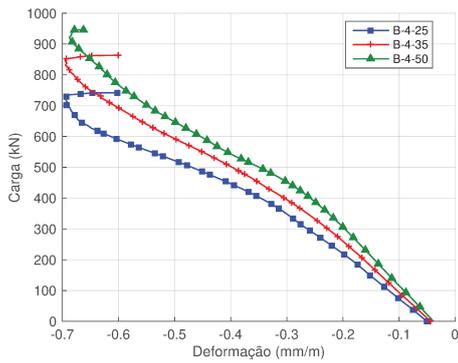


(g) Força no cabo dir.  $x$

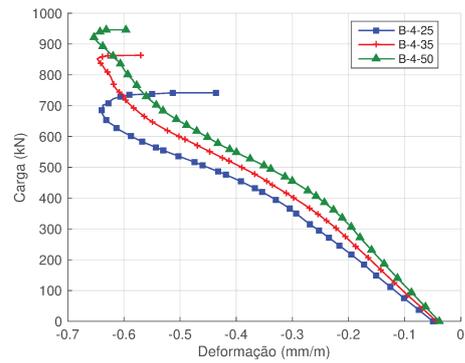
Figura B.3: Resultados Série B, configuração 3.



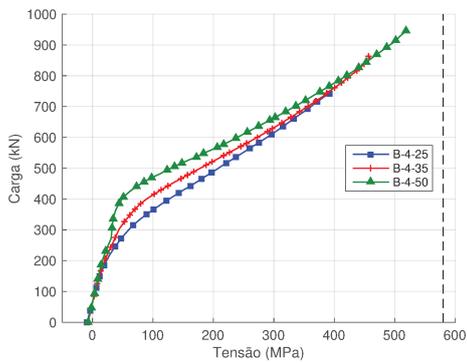
(a) Carga *versus* deslocamento



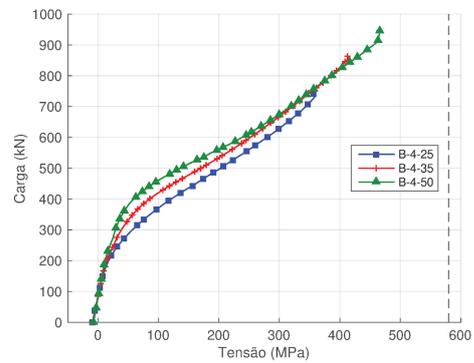
(b) Deformação do concreto dir.  $y$



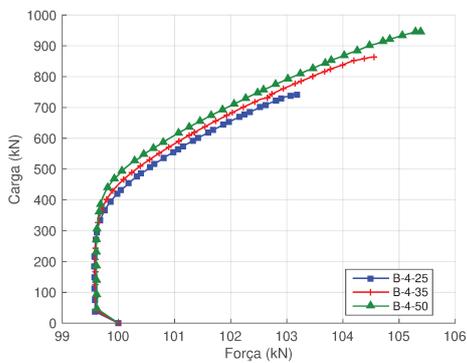
(c) Deformação do concreto dir.  $x$



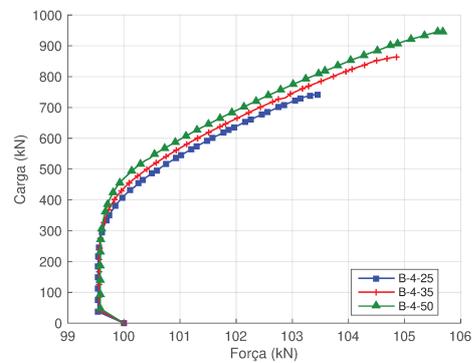
(d) Tensão na armadura dir.  $y$



(e) Tensão na armadura dir.  $x$

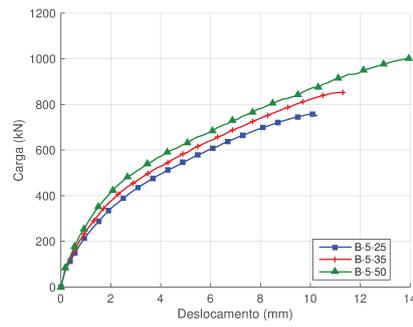


(f) Força no cabo dir.  $y$

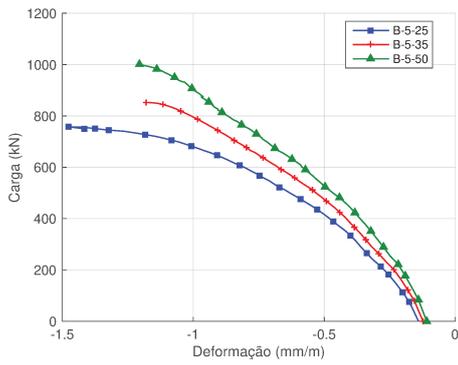


(g) Força no cabo dir.  $x$

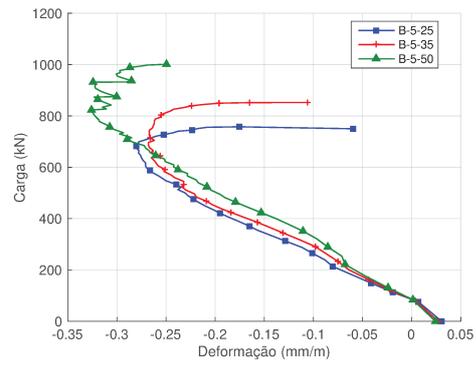
Figura B.4: Resultados Série B, configuração 4.



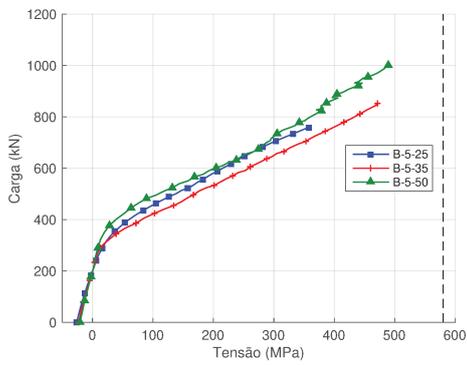
(a) Carga versus deslocamento



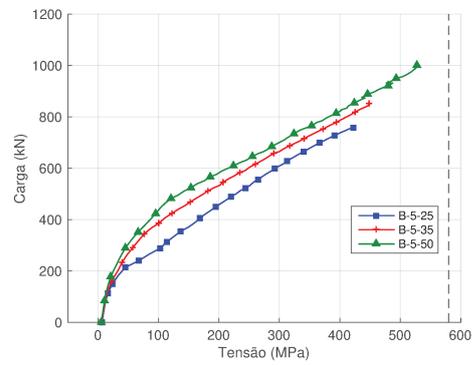
(b) Deformação do concreto dir.  $y$



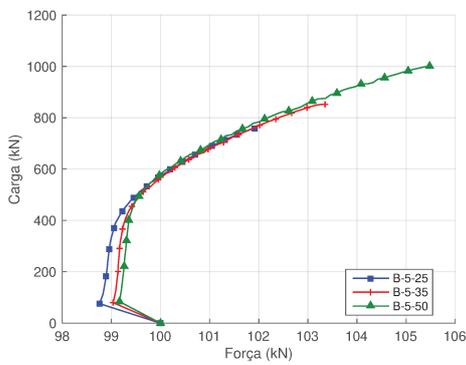
(c) Deformação do concreto dir.  $x$



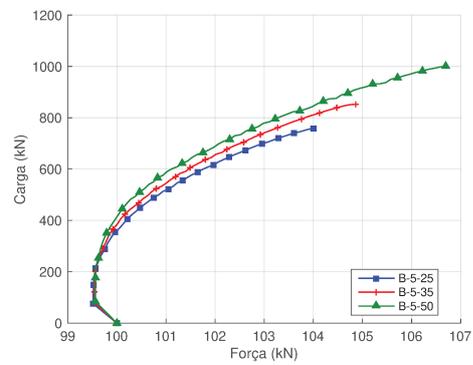
(d) Tensão na armadura dir.  $y$



(e) Tensão na armadura dir.  $x$

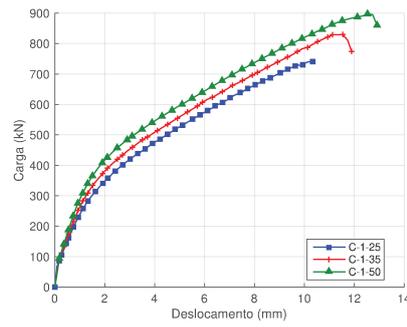


(f) Força no cabo dir.  $y$

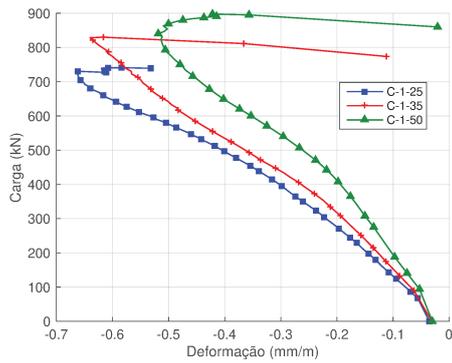


(g) Força no cabo dir.  $x$

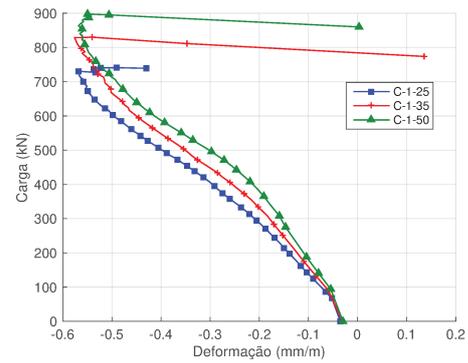
Figura B.5: Resultados Série B, configuração 5.



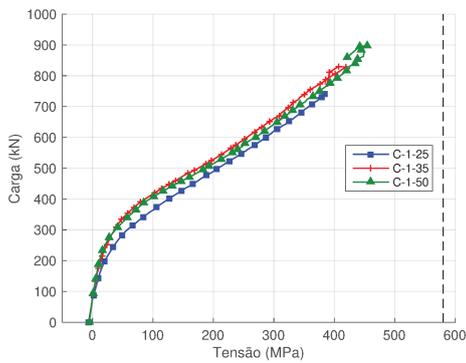
(a) Carga versus deslocamento



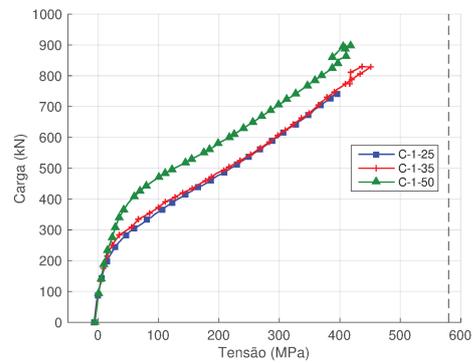
(b) Deformação do concreto dir.  $y$



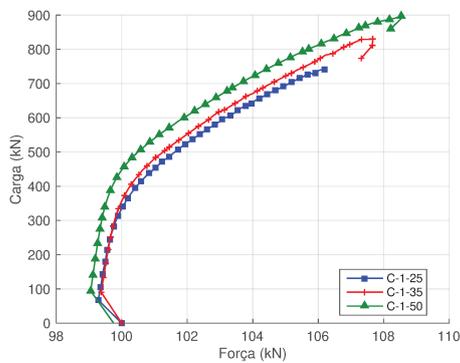
(c) Deformação do concreto dir.  $x$



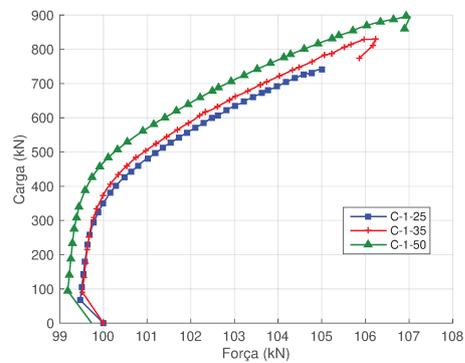
(d) Tensão na armadura dir.  $y$



(e) Tensão na armadura dir.  $x$

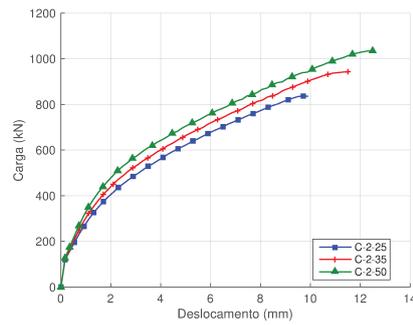


(f) Força no cabo dir.  $y$

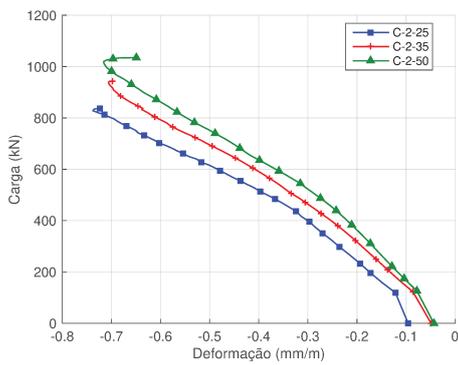


(g) Força no cabo dir.  $x$

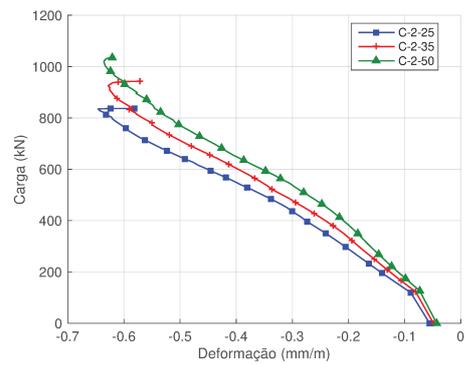
Figura B.6: Resultados Série C, configuração 1.



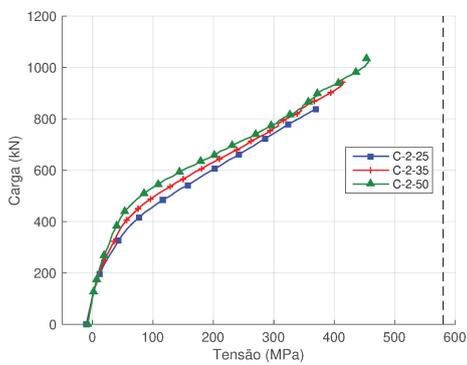
(a) Carga *versus* deslocamento



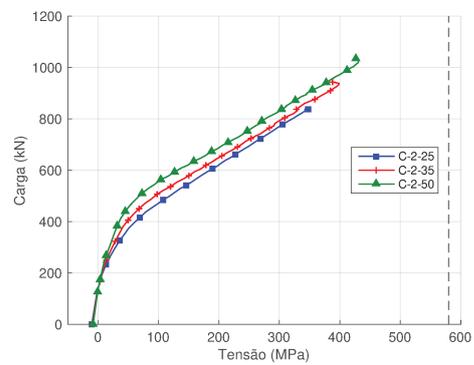
(b) Deformação do concreto dir.  $y$



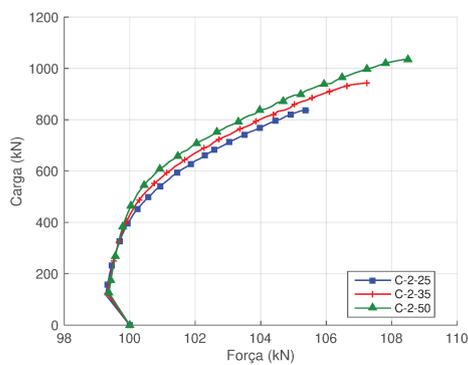
(c) Deformação do concreto dir.  $x$



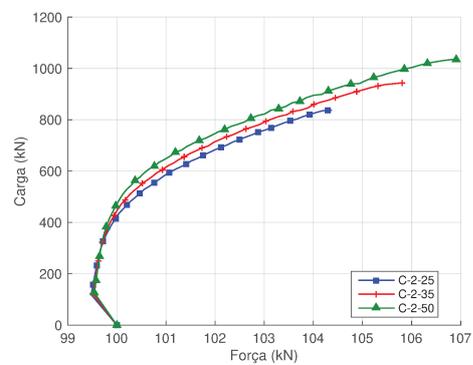
(d) Tensão na armadura dir.  $y$



(e) Tensão na armadura dir.  $x$

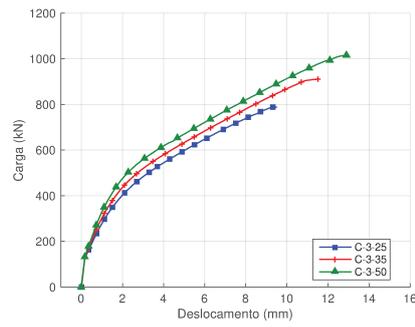


(f) Força no cabo dir.  $y$

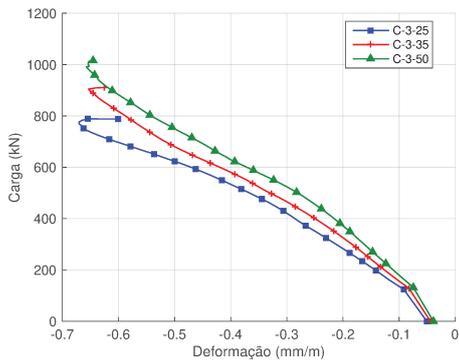


(g) Força no cabo dir.  $x$

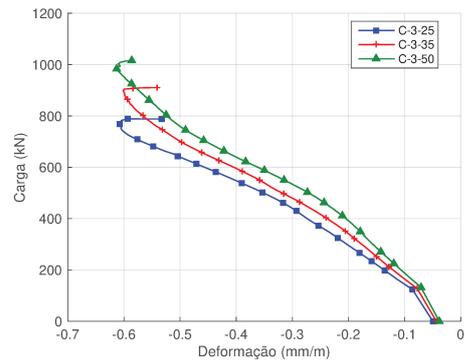
Figura B.7: Resultados Série C, configuração 2.



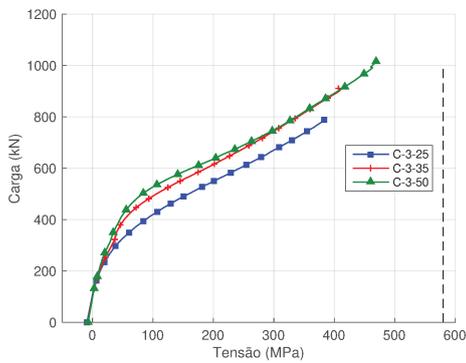
(a) Carga versus deslocamento



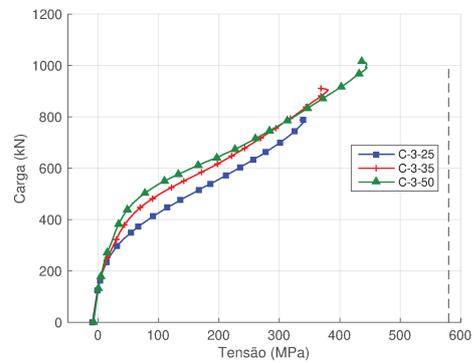
(b) Deformação do concreto dir.  $y$



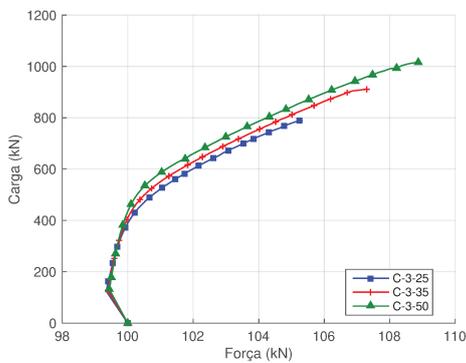
(c) Deformação do concreto dir.  $x$



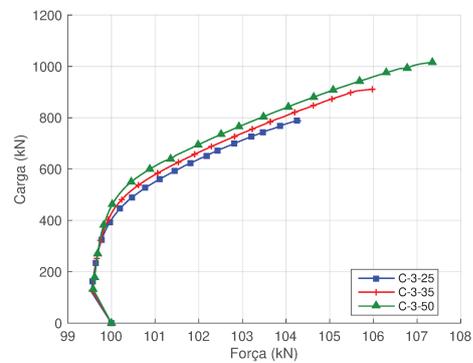
(d) Tensão na armadura dir.  $y$



(e) Tensão na armadura dir.  $x$

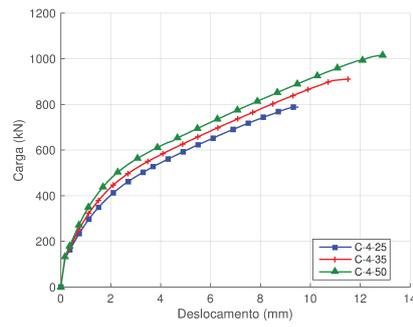


(f) Força no cabo dir.  $y$

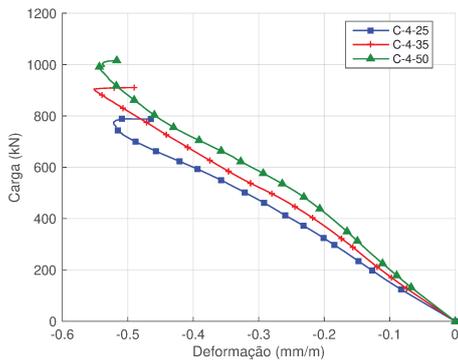


(g) Força no cabo dir.  $x$

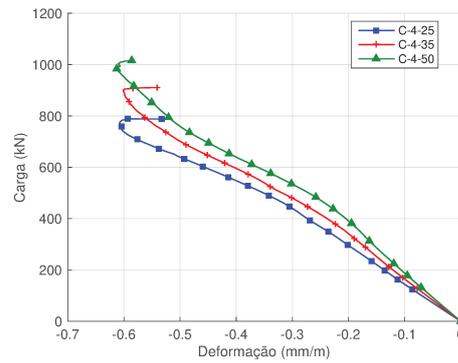
Figura B.8: Resultados Série C, configuração 3.



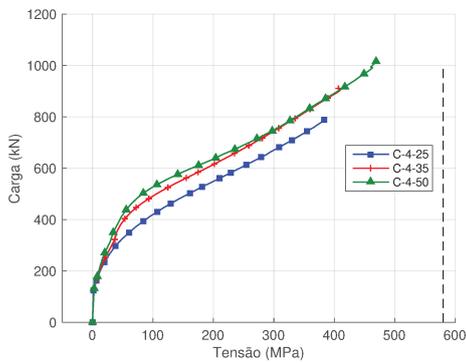
(a) Carga versus deslocamento



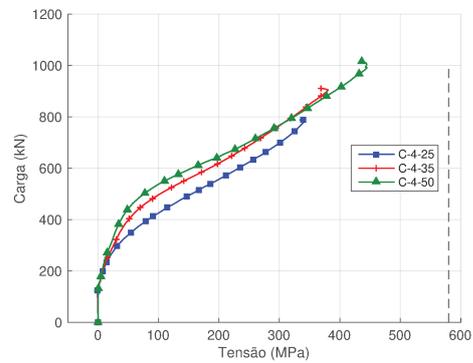
(b) Deformação do concreto dir.  $y$



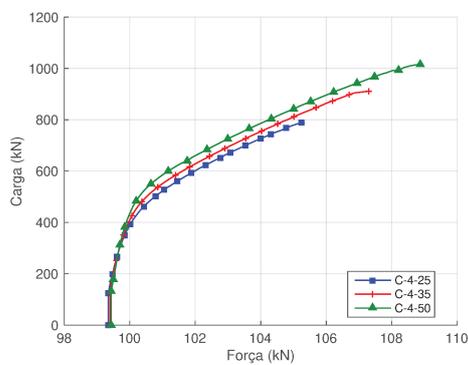
(c) Deformação do concreto dir.  $x$



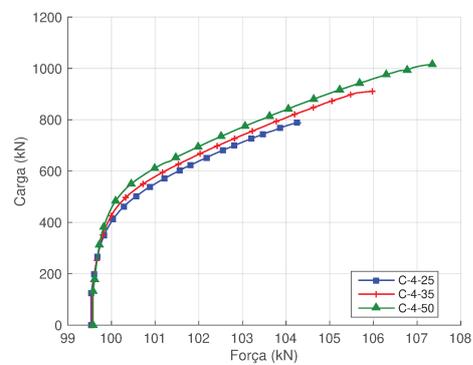
(d) Tensão na armadura dir.  $y$



(e) Tensão na armadura dir.  $x$

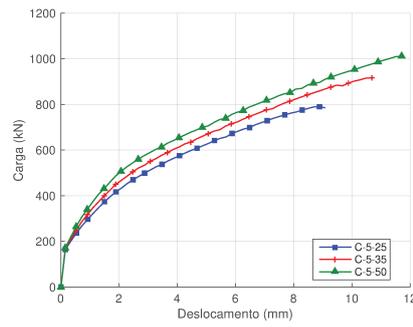


(f) Força no cabo dir.  $y$

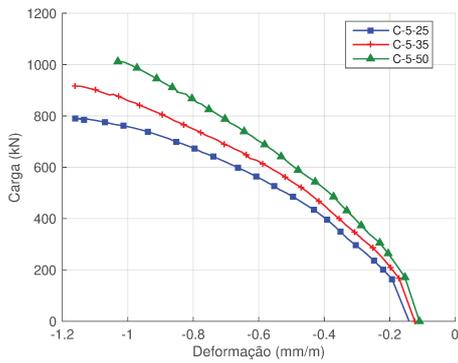


(g) Força no cabo dir.  $x$

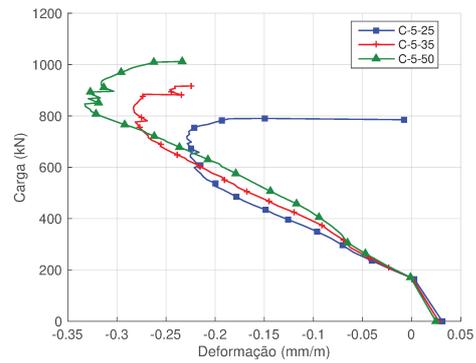
Figura B.9: Resultados Série C, configuração 4.



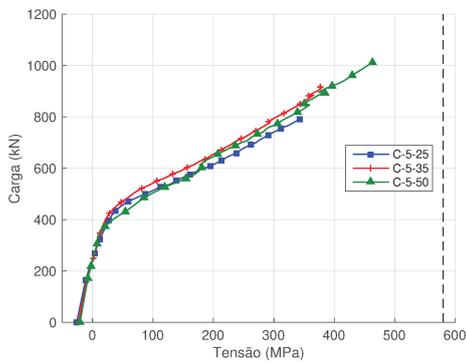
(a) Carga versus deslocamento



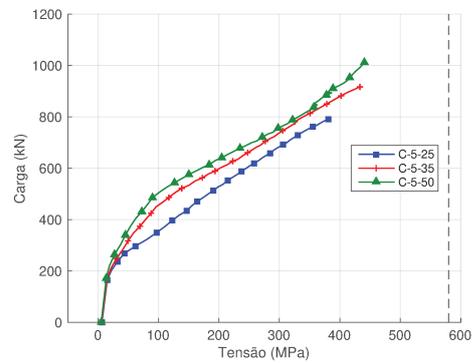
(b) Deformação do concreto dir.  $y$



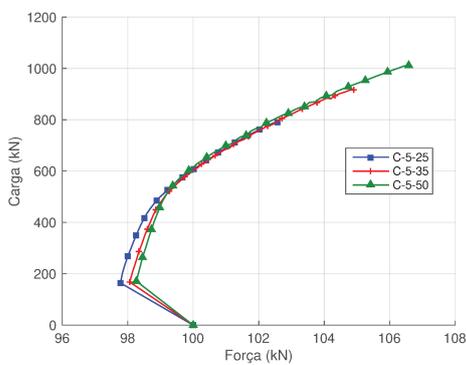
(c) Deformação do concreto dir.  $x$



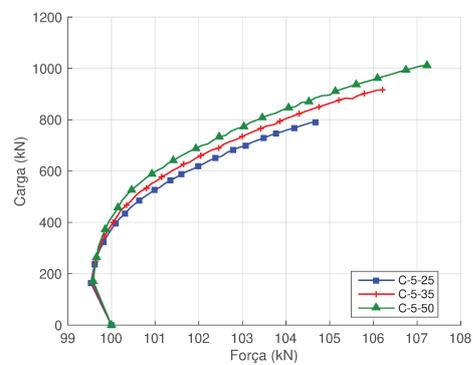
(d) Tensão na armadura dir.  $y$



(e) Tensão na armadura dir.  $x$

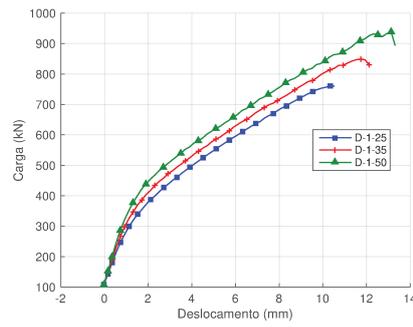


(f) Força no cabo dir.  $y$

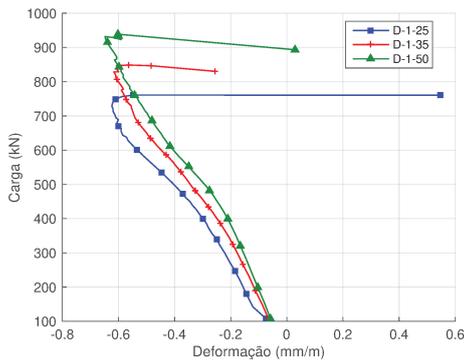


(g) Força no cabo dir.  $x$

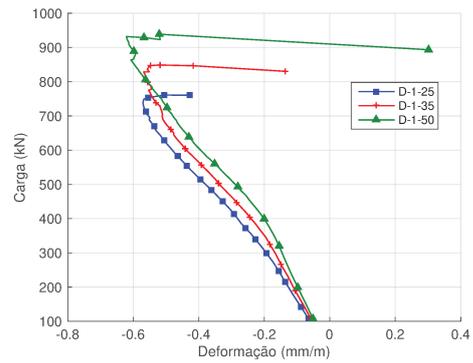
Figura B.10: Resultados Série C, configuração 5.



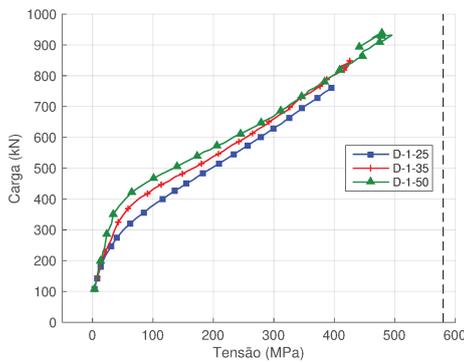
(a) Carga versus deslocamento



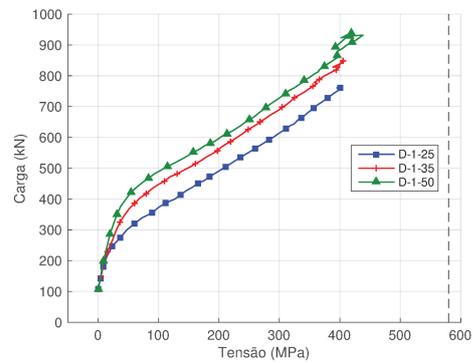
(b) Deformação do concreto dir.  $y$



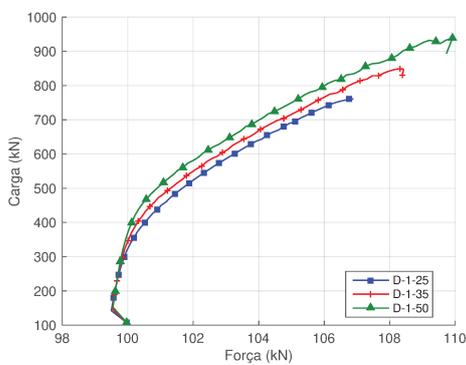
(c) Deformação do concreto dir.  $x$



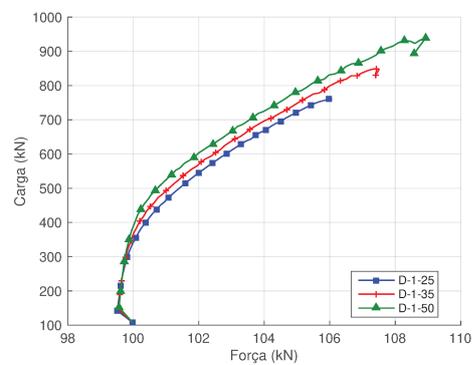
(d) Tensão na armadura dir.  $y$



(e) Tensão na armadura dir.  $x$

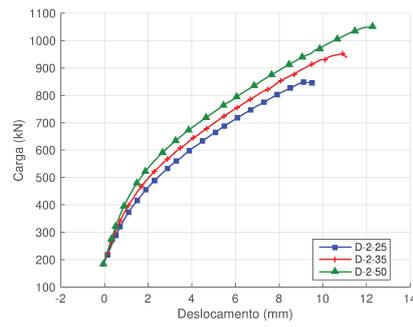


(f) Força no cabo dir.  $y$

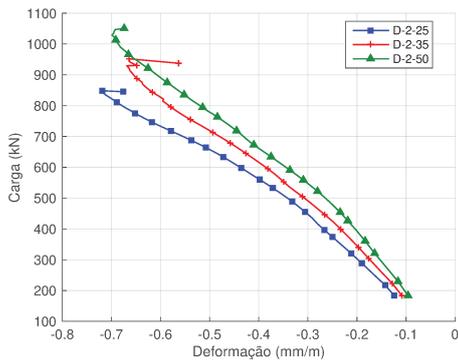


(g) Força no cabo dir.  $x$

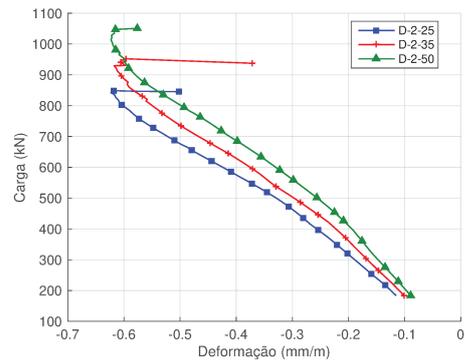
Figura B.11: Resultados Série D, configuração 1.



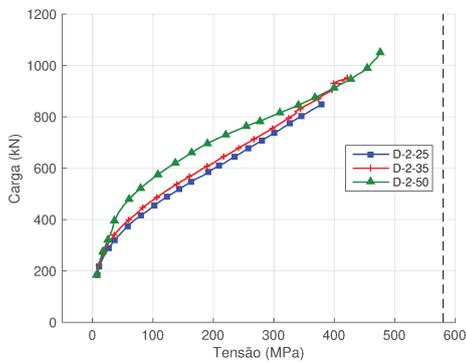
(a) Carga versus deslocamento



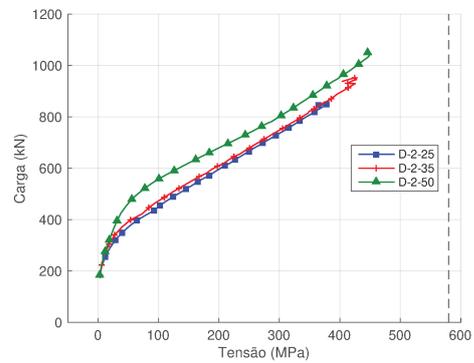
(b) Deformação do concreto dir.  $y$



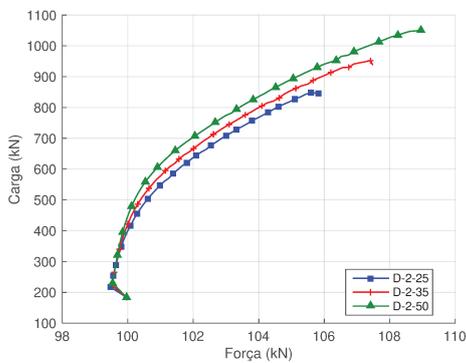
(c) Deformação do concreto dir.  $x$



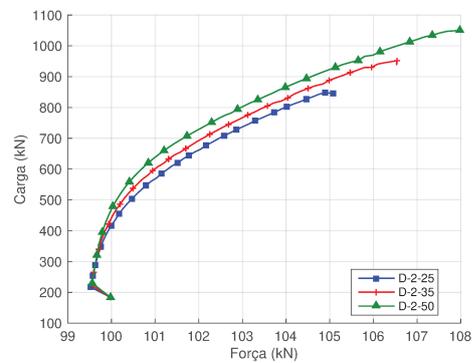
(d) Tensão na armadura dir.  $y$



(e) Tensão na armadura dir.  $x$

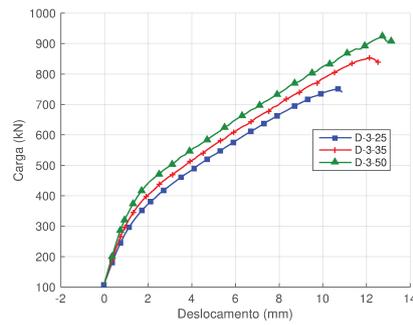


(f) Força no cabo dir.  $y$

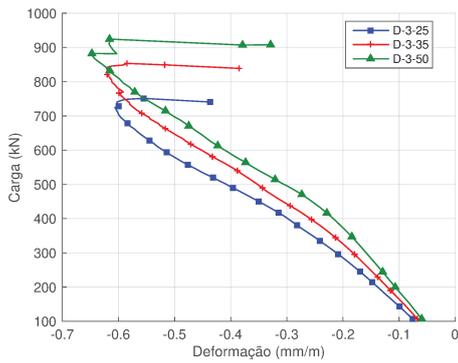


(g) Força no cabo dir.  $x$

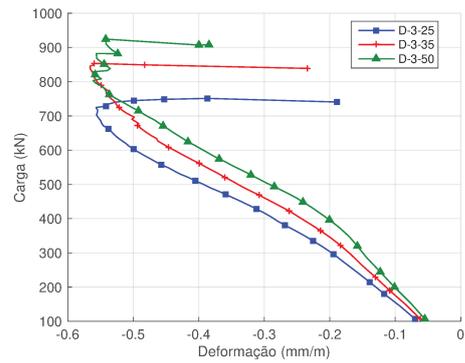
Figura B.12: Resultados Série D, configuração 2.



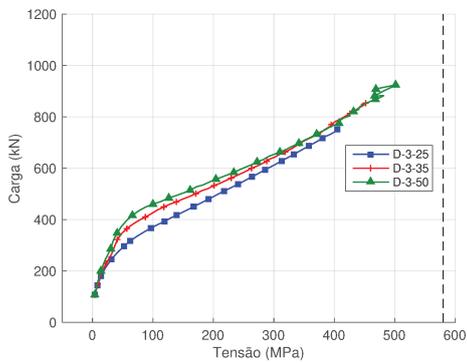
(a) Carga *versus* deslocamento



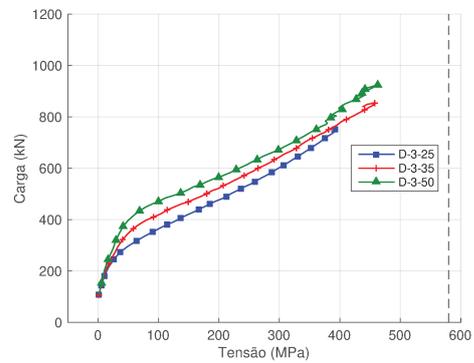
(b) Deformação do concreto dir.  $y$



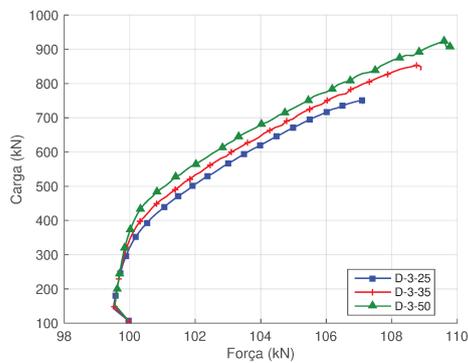
(c) Deformação do concreto dir.  $x$



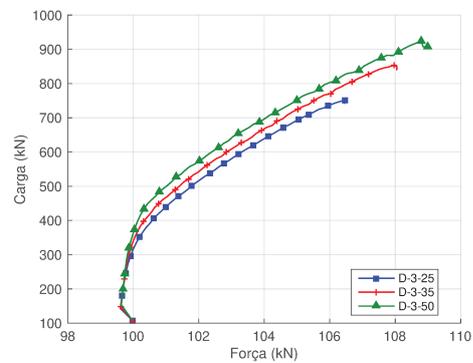
(d) Tensão na armadura dir.  $y$



(e) Tensão na armadura dir.  $x$

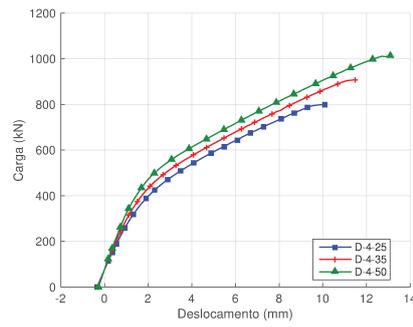


(f) Força no cabo dir.  $y$

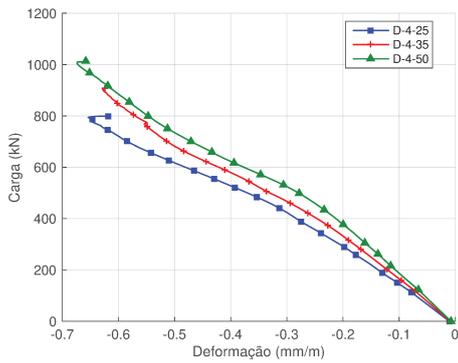


(g) Força no cabo dir.  $x$

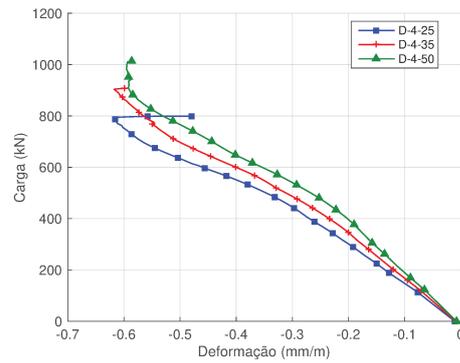
Figura B.13: Resultados Série D, configuração 3.



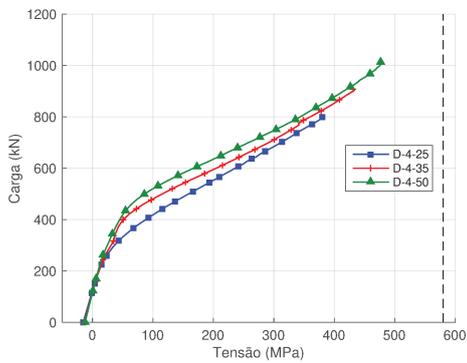
(a) Carga versus deslocamento



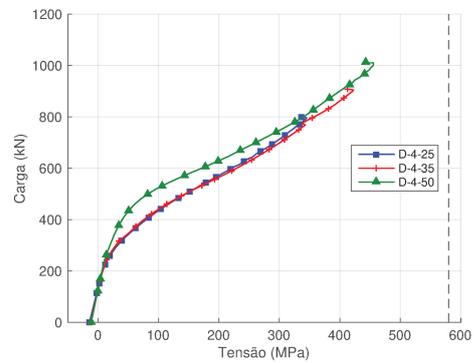
(b) Deformação do concreto dir.  $y$



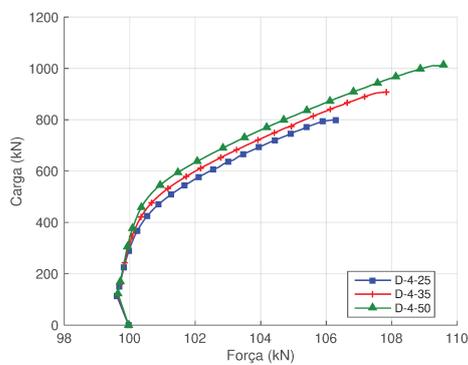
(c) Deformação do concreto dir.  $x$



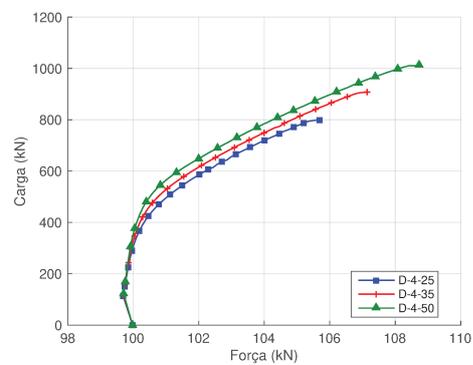
(d) Tensão na armadura dir.  $y$



(e) Tensão na armadura dir.  $x$

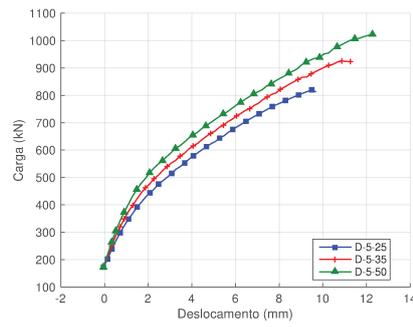


(f) Força no cabo dir.  $y$

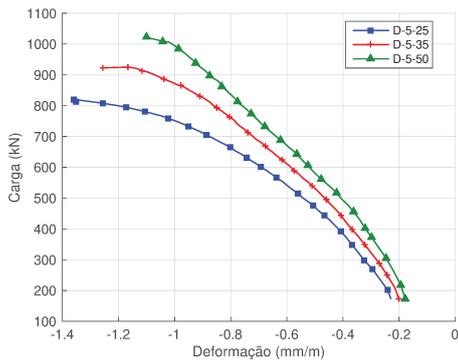


(g) Força no cabo dir.  $x$

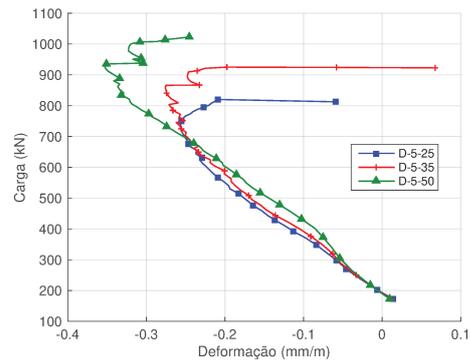
Figura B.14: Resultados Série D, configuração 4.



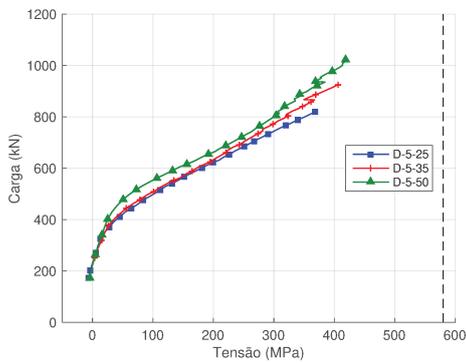
(a) Carga versus deslocamento



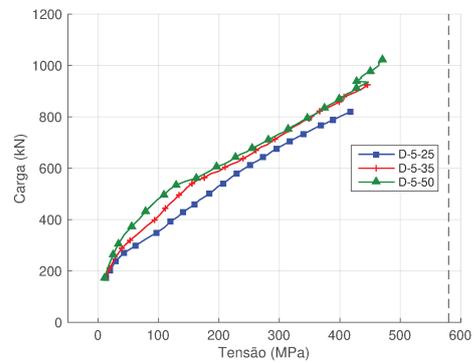
(b) Deformação do concreto dir.  $y$



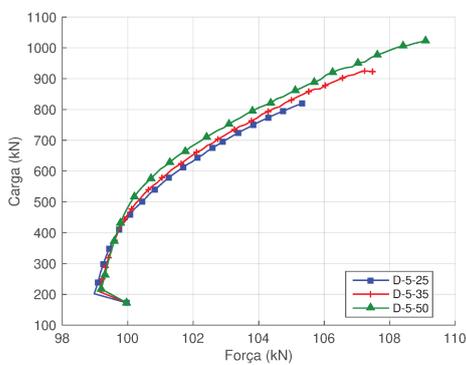
(c) Deformação do concreto dir.  $x$



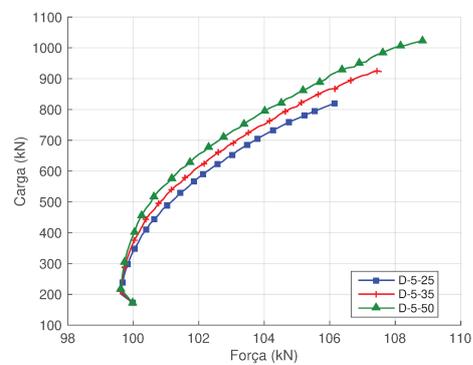
(d) Tensão na armadura dir.  $y$



(e) Tensão na armadura dir.  $x$



(f) Força no cabo dir.  $y$



(g) Força no cabo dir.  $x$

Figura B.15: Resultados Série D, configuração 5.