

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**  
**DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO CIVIL**

**UM ESTUDO SOBRE A VARIAÇÃO NUMÉRICA DO  
COEFICIENTE DE POISSON NA MADEIRA,  
CONSIDERANDO A ANISOTROPIA DO MATERIAL**

**Autor: Eng. JOSÉ EDUARDO FURLANI**

**Orientador: Prof. Dr. NILSON TADEU MASCIA**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Civil como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de mestre em estruturas.

**Campinas**  
**1995**

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA	T/UNICAMP
	F978E
V. Ex.	
IMP. BC	24972
PROJ.	433/95
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	30/06/95
N.º CPD	

CM-00071547-4

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

F978e

Furlani, José Eduardo

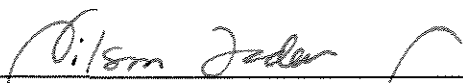
Um estudo sobre a variação numérica do coeficiente de Poisson na madeira, considerando a anisotropia do material / José Eduardo Furlani -  
- Campinas, SP : [s.n.], 1995 .

Orientador: Nilson Tadeu Mascia  
Dissertação (mestrado) - Universidade  
Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia  
Civil.

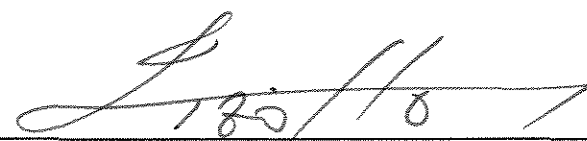
1. Anisotropia. 2. Elasticidade. 3. Madeira.  
I. Mascia, Nilson Tadeu II. Universidade Estadual  
de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil. III.  
Título.

## FOLHA DE APROVAÇÃO

Dissertação defendida e aprovada, em 24 de Março de 1995, pela banca examinadora constituída pelos professores:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Nilson Tadeu Mascia (FEC-UNICAMP) - Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Francisco Antonio Rocco Lahr (EESC-USP)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Isaias Vizotto (FEC-UNICAMP)

À minha esposa

Regina

Aos meus pais

Antonio e  
Thereza

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. NILSON TADEU MASCIA pela orientação neste trabalho, pelo estímulo e pela amizade demonstrada.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Pesquisa e Tecnologia) pela concessão da bolsa de estudos.

À Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP pela acolhida e infraestrutura oferecida.

Aos professores e técnicos do Laboratório do DCC (Departamento de Construção Civil) da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP pelo auxílio na realização dos ensaios.

Aos professores, técnicos e funcionários da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP pelas sugestões e auxílios dados.

Aos professores, técnicos e funcionários do LaMEM (Laboratório de Madeira e Estruturas de Madeira) da Escola de Engenharia de São Carlos - USP, pela receptividade, preparação dos corpos de prova e ensaios realizados.

Aos amigos, que direta ou indiretamente contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho, em especial ao Luis A. B. Leoni.

À minha esposa Regina pelo auxílio, incentivo e principalmente pela paciência na realização desta dissertação.

# SUMÁRIO

## LISTA DE SÍMBOLOS

## RESUMO

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2. RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO</b>	<b>3</b>
2.1. INTRODUÇÃO	3
2.2. ESTADO DE TENSÃO EM UM PONTO	4
2.3. ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO	9
2.4. ELASTICIDADE	12
2.5. ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	14
2.6. RELAÇÕES TENSÃO DEFORMAÇÃO OU LEIS CONSTITUTIVAS <b>DOS MATERIAIS ELASTICAMENTE ANISOTRÓPICOS</b>	<b>18</b>
2.7. SOBRE O NÚMERO DE CONSTANTES INDEPENDENTES NO TENSOR $S_{ij}$	27
2.8. SIMETRIA ELÁSTICA NOS MATERIAIS	28
2.8.1. TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS	32
2.9. CLASSIFICAÇÃO DOS MATERIAIS SEGUNDO O NÚMERO DE PLANOS <b>DE SIMETRIA ELÁSTICA</b>	<b>36</b>
2.9.1. MATERIAL COM SIMETRIA ELÁSTICA EM UM PLANO	36
2.9.2. MATERIAL COM SIMETRIA ELÁSTICA EM TRÊS PLANOS	39
2.9.3. MATERIAL TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICO	42
2.9.4. MATERIAL ISOTRÓPICO	44

<b>2.10.COMENTÁRIO A RESPEITO DOS VALORES ADMISSÍVEIS</b>	
<b>DO COEFICIENTE DE POISSON PARA OS MATERIAIS EM GERAL</b>	<b>46</b>
<b>2.11. INVARIANTES DE COEFICIENTES <math>S_{ij}</math></b>	<b>47</b>
<b>3. A ORTOTROPIA APLICADA À MADEIRA</b>	<b>49</b>
<b>3.1. INTRODUÇÃO</b>	<b>49</b>
<b>3.2. CONSTITUIÇÃO MACROSCÓPICA DA MADEIRA</b>	<b>50</b>
<b>3.3. CONSTITUIÇÃO MICROSCÓPICA DA MADEIRA</b>	<b>51</b>
<b>3.4. A HOMOGENEIDADE DA MADEIRA</b>	<b>56</b>
<b>3.5. A MADEIRA E OS TENSORES <math>S_{ij}</math> e <math>S'_{ij}</math></b>	<b>57</b>
<b>3.6. O EFEITO DA INCLINAÇÃO DAS FIBRAS</b>	<b>61</b>
<b>3.7. ALGUNS VALORES DE CONSTANTES DE ELASTICIDADE OBTIDOS</b>	
<b>POR PESQUISADORES</b>	<b>64</b>
<b>4. A DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DE ELASTICIDADE</b>	
<b>ATRAVÉS DE ENSAIOS DE LABORATÓRIO</b>	<b>67</b>
<b>4.1. INTRODUÇÃO</b>	<b>67</b>
<b>4.2. O ENSAIO DE COMPRESSÃO AXIAL</b>	<b>68</b>
<b>4.3. DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES ELÁSTICAS ATRAVÉS DE ENSAIOS</b>	
<b>DE COMPRESSÃO AXIAL</b>	<b>69</b>
<b>4.3.1. A DETERMINAÇÃO DOS MÓDULOS DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL</b>	
<b><math>E_{ij}</math> E DOS COEFICIENTES DE POISSON <math>\nu_{ij}</math></b>	<b>69</b>
<b>4.3.2. MÓDULOS DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL</b>	<b>71</b>
<b>4.3.2.1. Análise Via Roseta De Deformação</b>	<b>71</b>
<b>4.3.2.2. Análise Via Transformação Tensorial De <math>S_{ij}</math></b>	<b>74</b>

<b>5. EXPERIMENTAÇÃO E RESULTADOS</b>	<b>77</b>
5.1. INTRODUÇÃO	77
<b>5.2. OBTENÇÃO DE ALGUMAS CONSTANTES ELÁSTICAS E VERIFICAÇÃO DA SIMETRIA DO TENSOR COMPLIANCE <math>S_{ij}</math></b>	<b>77</b>
5.2.1. EQUIPAMENTOS E INSTRUMENTAÇÃO	78
5.2.2. CORPOS DE PROVA EMPREGADOS	80
5.2.3. O POSICIONAMENTO DOS EXTENSÔMETROS	81
5.2.4. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	83
5.2.5. COMENTÁRIOS DOS RESULTADOS OBTIDOS	83
<b>5.3. OS VALORES DO COEFICIENTE DE POISSON EM FUNÇÃO DA VARIAÇÃO DO ÂNGULO DAS FIBRAS</b>	<b>85</b>
5.3.1. EQUIPAMENTOS E INSTRUMENTAÇÃO	85
5.3.2. CORPOS DE PROVA EMPREGADOS	86
5.3.3. O POSICIONAMENTO DOS EXTENSÔMETROS	90
5.3.4. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	91
5.3.4.1. os elementos $\frac{1}{S'_{11}}$	92
5.3.4.2. os elementos $\frac{1}{S'_{12}}$	92
5.3.4.3. os coeficientes de Poisson $\nu'_{ij}$	93
5.3.4.4. os gráficos obtidos	94
5.3.5. COMENTÁRIOS A RESPEITO DOS RESULTADOS OBTIDOS	103
<b>5.4. ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES E DE DEFORMAÇÕES EM UM DOS CORPOS DE PROVA ENSAIADOS</b>	<b>104</b>
<b>6. CONCLUSÕES FINAIS</b>	<b>111</b>
<b>ANEXO</b>	<b>113</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>132</b>
<b>BIBLIOGRAFIA CONSULTADA</b>	<b>136</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>144</b>



## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	área da seção
$C_{ijkl}$ , $C_{ij}$	tensor constitutivo (de constantes de elasticidade)
$E_i$	módulo de elasticidade
$e_j$	base ortogonal
$F_i$	força de massa
$F_{ij}$	função resposta
$G_{ij}$	módulo de elasticidade transversal
$I_i$	invariantes do tensor compliance
$l_{ij}$	cossenos diretores
$P_i$	força
$S_{ijkl}$ , $S_{ij}$	tensor constitutivo (compliance)
$\overset{n}{T}_i$	vetor tensão
$U_o$	energia de deformação
$U_{co}$	energia complementar de deformação

$u_i$	deslocamento
$x_i$	sistema de coordenadas
$W$	trabalho externo
$\alpha_i$	constante
$\delta_i^n$	vetor deslocamento
$\delta_{ij}$	delta de Kronecher
$\epsilon_{ii}$	tensor de deformações, deformação
$\theta$	ângulo das fibras
$\lambda, \mu$	constante de Lamé
$\nu_{ij}$	coeficiente de Poisson
$\xi_i$	deslocamento
$\sigma_n$	tensão normal
$\sigma_{ij}$	tensor de tensões, tensão
$\tau_{ij}$	tensão tangencial
$\phi$	ângulo dos anéis, função de tensão
$\phi_i$	função resposta

$\phi_{ij}$	distorção
$\psi$	constante
$\vec{\Omega}_i$	vetor rotação
L	longitudinal
R	radial
T	tangencial

## RESUMO

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre a variação numérica do coeficiente de Poisson, na madeira. O coeficiente de Poisson está associado a termos  $S_{ijkl}$  do tensor constitutivo da madeira, considerando-se a teoria anisotrópica retolinear, onde a relação tensão-deformação é expressa por  $\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}$ . Os elementos do tensor  $S_{ijkl}$  podem variar segundo direções arbitrárias, as quais, na madeira, estão inter-relacionadas com as direções das fibras. Neste sentido, para a determinação dos coeficientes de Poisson em posições quaisquer, foram utilizados pequenos corpos de prova e realizados ensaios de compressão axial. Os resultados obtidos em laboratório evidenciaram a adequação do modelo ortotrópico à madeira, nos planos LR (longitudinal-radial) e uma certa tendência para a anisotropia curvilínea no plano LT (longitudinal-tangencial).

## 1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de novos materiais, especialmente os materiais compostos, que vem acontecendo em décadas recentes, está inter-relacionado com o avanço da teoria da elasticidade aplicada aos materiais considerados anisotrópicos. Estes materiais são caracterizados pela variação de suas propriedades de elasticidade em relação a direções arbitradas, por exemplo, aos eixos cartesianos associados à estrutura.

A variação dos valores dos módulos de elasticidade, quer sejam longitudinal  $E_i$  ou transversal  $G_{ij}$ , ou dos coeficientes de Poisson  $\nu_{ij}$  é consequência de um modo geral, da composição estrutural do material a nível microscópico e macroscópico.

O estudo das propriedades de elasticidade destes materiais deve ser norteado pelo conhecimento da relação entre tensões e deformações, ou seja, a função resposta do material, representada pelo tensor constitutivo,  $C_{ijkl}$ . Neste tensor, formado por 81 (oitenta e um) elementos, estão presentes todas as constantes de elasticidade que caracterizam o comportamento elástico do material, quaisquer que sejam as sollicitações e as direções consideradas.

Por outro lado, com a utilização dos conceitos de conservação de energia (Teorema de Maxwell)<sup>A</sup> e de simetria dos tensores de tensão e de deformação, o número de elementos se reduz a 18 (dezoito) independentes. Em uma segunda etapa, com o uso da simetria elástica, onde se aplica as transformações tensoriais em busca de eixos principais de elasticidade, nos quais as propriedades de elasticidade são invariantes (materiais com simetria rotacional), chega-se ao material ortotrópico, com

---

<sup>A</sup> *Detalhes: Love<sup>(1)</sup>*

suas 9 (nove) constantes de elasticidade. Estas particularidades estão dentro do campo da anisotropia retolinear, cujo sistema de coordenadas, a que se faz referência é o cartesiano. Entretanto, se se considerar quaisquer outras direções, recai-se em uma situação bastante complexa, pois não se pode fazer uso das simplificações advindas da simetria elástica e o tensor  $C_{ijkl}$  volta a ser constituído por 18 (dezoito) elementos.

Neste contexto, surge a madeira como um material elástico ortotrópico, com três direções principais de elasticidade: longitudinal (L), radial (R) e tangencial (T), ortogonais entre si, utilizada há muito tempo em estruturas, mas pouco analisada segundo os conceitos de anisotropia.

Neste sentido, a investigação da variação numérica dos coeficientes de Poisson<sup>A</sup> e suas relações, que são representadas por alguns coeficientes do tensor constitutivo  $C_{ijkl}$ , em função, por exemplo, da variação das direções ou ângulos das fibras da madeira, é pertinente ao estudo e ao conhecimento das propriedades direcionais e, por conseguinte, das constantes de elasticidade da madeira. Para a determinação destes coeficientes de Poisson foram empregados corpos de prova prismáticos de pequenas dimensões em ensaios de compressão simples, pelos mesmos serem os mais adequados para esta pesquisa.

É conveniente, neste momento, ressaltar que tanto a NBR7190<sup>(2)</sup>, Cálculo e Execução de Estruturas de Madeira, como a NBR6230<sup>(3)</sup>, Ensaios Físicos e Mecânicos de Madeiras, encontram-se em revisão, podendo este trabalho, em alguns aspectos, contribuir para as mesmas.

---

<sup>A</sup> Em homenagem ao pesquisador francês S.D.Poisson  
(Timoshenko<sup>(4)</sup>)

## 2. RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO

### 2.1. INTRODUÇÃO

De maneira geral, a solução de um problema em mecânica dos sólidos envolve, além do equacionamento clássico do equilíbrio de forças e da compatibilidade de deslocamentos, equações que modelam o comportamento intrínseco do material que forma o sólido em questão, as quais são denominadas equações constitutivas.

Com efeito, as ações atuantes no sólido geram reações, quer sejam tensões, deslocamentos ou deformações. As equações constitutivas têm a função de promover a inter-relação entre estes estados de tensão e de deformação. No esquema da figura 01, pode-se observar este relacionamento.

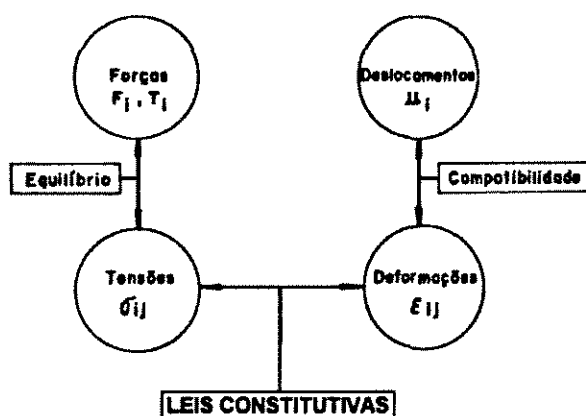


FIGURA 01 - Inter-relações das variáveis na mecânica dos sólidos  
Fonte: Chen & Saleeb<sup>(5)</sup>

Antes de se estudar, efetivamente, as relações constitutivas é interessante abordar o estudo de tensões e de deformações, utilizando, neste texto, a notação indicial.

## 2.2. ESTADO DE TENSÃO EM UM PONTO

De acordo com Chen & Saleeb<sup>(5)</sup>, define-se tensão como a intensidade de forças atuando entre partículas de um corpo em uma superfície interna imaginária, devido a uma ação externa.

Considerando um ponto  $P_0$ , um vetor normal unitário  $n$ , neste ponto, e uma força resultante  $F_n$ , em uma área  $\Delta A$ , pode-se escrever o vetor tensão associado ao ponto  $P_0$  com o plano normal a  $n$  através da seguinte expressão:

$$\overset{n}{T} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{P_n}{\Delta A}, \quad (01)$$

cujos elementos estão mostrados na figura 02.



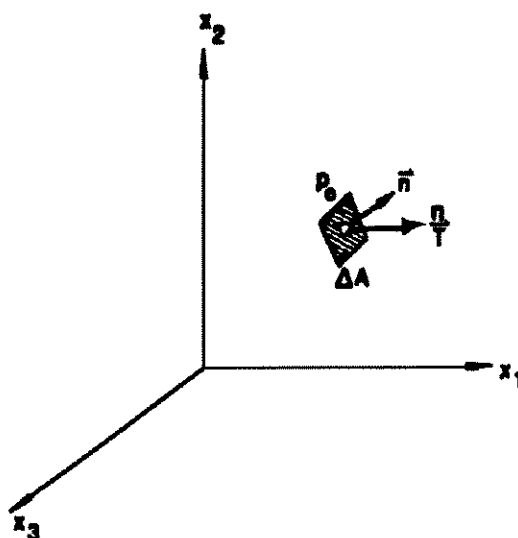


FIGURA 02 - Vetor tensão  $\vec{T}$  em um ponto  $P_0$  associado a um plano  $n$ .  
 Fonte: Chen e Saleeb<sup>(5)</sup>

Por outro lado, pode-se prever um número infinito de planos passando pelo ponto  $P_0$ , o que implica em um número infinito de vetores  $\vec{T}$ . Mas com a utilização de apenas 3 (três) vetores  $\vec{T}$  ( $\vec{T}^1, \vec{T}^2, \vec{T}^3$ ), associados a planos ortogonais entre si ( $x_1, x_2, x_3$ ), é possível caracterizar quaisquer vetores  $\vec{T}$ .

Deste modo, são conhecidos quaisquer estados de tensão associados ao ponto  $P_0$ .

Para a comprovação desta condição pode-se utilizar a figura 03, onde os vetores  $\vec{T}^1, \vec{T}^2, \vec{T}^3$  e  $\vec{T}^n$  atuam nas faces OBC, OAC, OAB, ABC, respectivamente, de um elemento OABC.

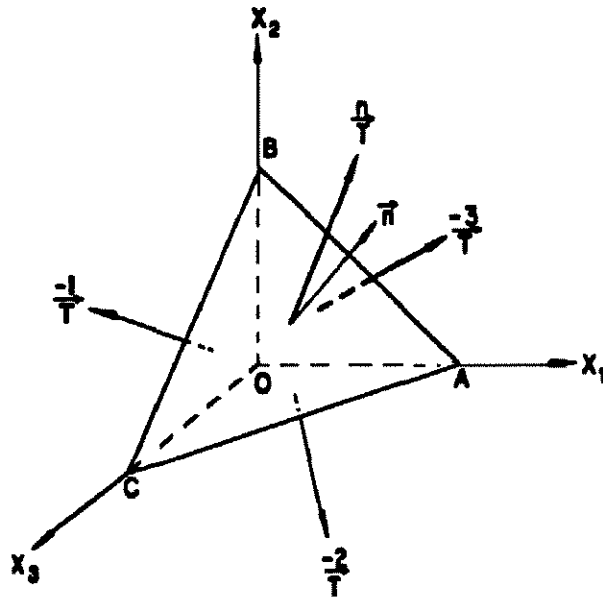


FIGURA 03 - O vetor tensão  $\vec{nT}$  e os respectivos vetores  $\vec{T}^i$  nos planos coordenados.  
Fonte: Chen e Saleeb<sup>(5)</sup>

Ao se aplicar os cossenos diretores, os quais são caracterizados por:

$$n_i = \cos(e_i, n), \quad (02)$$

onde  $n$  é o vetor unitário normal ao plano ABC e  $e_i$  são os vetores unitários na direção dos eixos coordenados. Define-se a área  $A_i$  de cada face perpendicular ao eixo coordenado  $x_i$ , por:

$$A_i = A \cos(e_i, n) = An_i. \quad (03)$$

Do equilíbrio do elemento OABC, o uso da equação 03 e do volume do corpo conclui-se que:

$$\vec{nT} = T_1 n_1 + T_2 n_2 + T_3 n_3. \quad (04)$$

O tensor  $\overset{n}{T}$ , não sendo necessariamente perpendicular ao plano  $n$ , na prática pode ser decomposto em 2 (duas) componentes, uma normal ao plano  $n$ , chamada tensão normal, e outra perpendicular ao plano  $n$ , chamada tensão tangencial ou de cisalhamento.

Os vetores tensão associados aos 3 (três) planos coordenados também podem ser decompostos em componentes nos 3 (três) eixos coordenados. Por exemplo, o vetor tensão  $\overset{1}{T}$  associado ao plano perpendicular ao eixo  $x_1$  tem 3 (três) componentes de tensão: normal  $\sigma_{11}$  e tangenciais  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{13}$ , na direção dos eixos coordenados  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , respectivamente, como pode ser observado na figura 04.

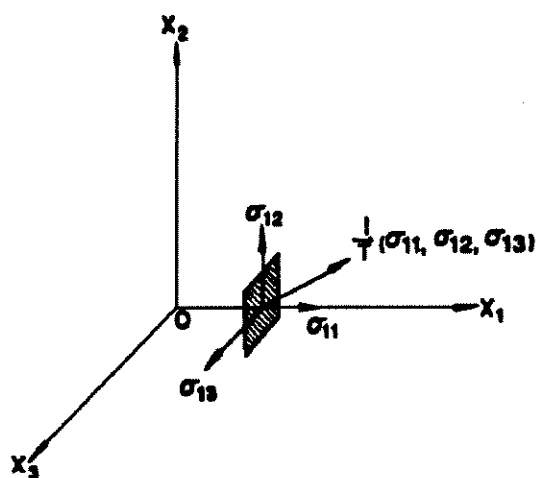


FIGURA 04 - Componentes de um vetor tensão associado ao plano normal ao eixo  $x_1$ .

Fonte: Chen e Saleeb<sup>(5)</sup>

Assim:

$$\overset{1}{T} = \sigma_{11}e_1 + \sigma_{12}e_2 + \sigma_{13}e_3 \quad (05)$$

ou

$$\overset{1}{T} = \sigma_{1j}e_j . \quad (06)$$

De semelhante análise em relação às outras componentes do vetor tensão, tem-se de uma forma geral:

$$\vec{T} = \sigma_{ij} e_j, \quad (07)$$

onde  $\sigma_{ij}$  representa a  $j$ enésima componente do vetor  $\vec{T}$  atuando em um elemento de área cuja normal está na direção positiva do eixo  $x_i$ .

O conjunto dos 9 (nove) termos  $\sigma_{ij}$  que define  $\vec{T}^1$ ,  $\vec{T}^2$  e  $\vec{T}^3$  é chamado tensor de tensão e é dado por:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \vec{T}^1 \\ \vec{T}^2 \\ \vec{T}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (08)$$

onde  $\sigma_{ij} \text{ } \forall i=j \rightarrow$  tensão normal e

$\sigma_{ij} \text{ } \forall i \neq j \rightarrow$  tensão tangencial

As componentes do tensor de tensões estão mostradas, nas direções positivas referidas ao sistema de eixos coordenados, na figura 05.

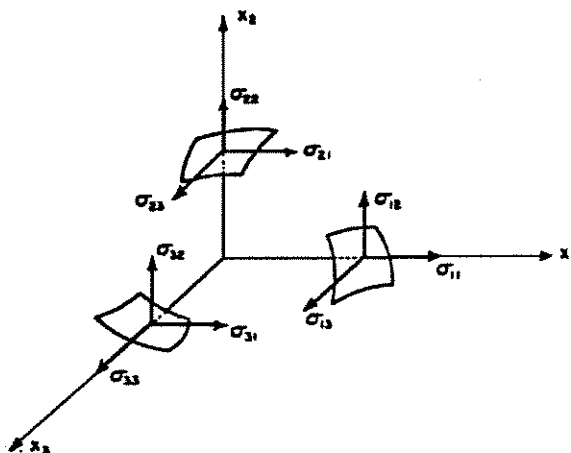


FIGURA 05 - Componentes de tensão  $\sigma_{ij}$

Fonte: Chen e Saleeb<sup>(5)</sup>

### 2.3. ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

O estado de deformação em um ponto é definido, de acordo com Chen e Saleeb<sup>(5)</sup>, como a totalidade de mudanças de comprimento das fibras de um material, as quais passam através de um ponto, e também como a totalidade de mudanças no ângulo entre pares de fibras que saem radialmente desse ponto.

Se for adotado um sistema de eixos coordenados  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , as componentes de deformação podem ser decompostas nestes 3 (três) eixos e associadas a um deslocamento relativo  $\delta$ . Assim, pode-se escrever que o deslocamento relativo será :

$$\delta_i' = \varepsilon_{ij}' n_j \quad (09)$$

onde  $\varepsilon_{ij}'$  são componentes do vetor deslocamento relativo na direção dos três eixos coordenados e  $n_j$  são os cossenos diretores.

Deste modo, com 9 (nove) elementos de  $\varepsilon_{ij}'$ , define-se os 3 (três) deslocamentos relativos  $\delta^1$ ,  $\delta^2$  e  $\delta^3$  que constituem um tensor. Este tensor é chamado de tensor dos deslocamentos relativos e define completamente o vetor deslocamento relativo da fibra  $n$  mostrada na figura 06.

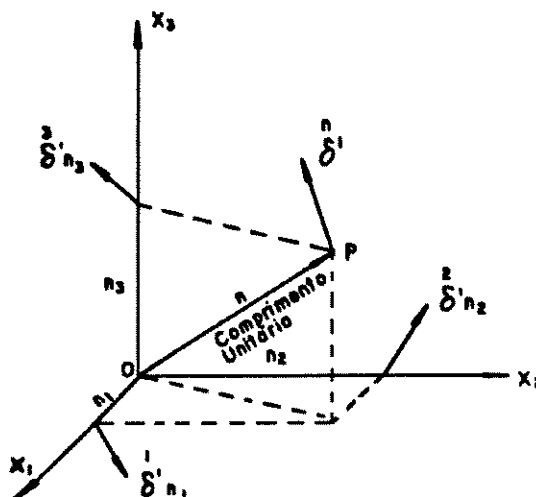


FIGURA 06.-Vetor deslocamento relativo em um espaço tridimensional  
Fonte: Chen e Saleeb<sup>(5)</sup>

Usando notação matricial, este tensor pode ser escrito como:

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{21} & \varepsilon'_{22} & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & \varepsilon'_{33} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Em geral o tensor  $\varepsilon'_{ij}$  é não simétrico. Por outro lado, todo tensor de 2ª ordem pode ser decomposto na soma de uma parte simétrica e de uma anti-simétrica. Assim sendo, a parte simétrica representará a deformação pura enquanto que a parte anti-simétrica representará a rotação de corpo rígido do sólido.

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}(\varepsilon'_{ij} + \varepsilon'_{ji}) + \frac{1}{2}(\varepsilon'_{ij} - \varepsilon'_{ji}) \quad (11)$$

ou

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} + w_{ij} \quad (12)$$

onde  $\varepsilon_{ij}$  = tensor de deformações e

$w_{ij}$  = tensor rotacional

O deslocamento relativo correspondente à deformação pura é chamado vetor de deformações e é denotado por  $\overset{n}{\delta}$ . Assim:

$$\overset{n}{\delta} = \varepsilon_{ij} n_j = \varepsilon_{ji} n_j . \quad (13)$$

O deslocamento relativo correspondente à rotação do sólido é chamado vetor rotacional e é denotado por  $\overset{n}{\Omega}$ . Assim:

$$\overset{n}{\Omega} = w_{ji} n_j = -w_{ij} n_j \quad (14)$$

Esta separação do deslocamento do sólido pode ser compreendida através da figura 07, onde é mostrado um sólido em sua forma não deformada (pontos  $A, B, C, O$ ) e deformada (pontos  $A', B', C', O$ ) em um plano.

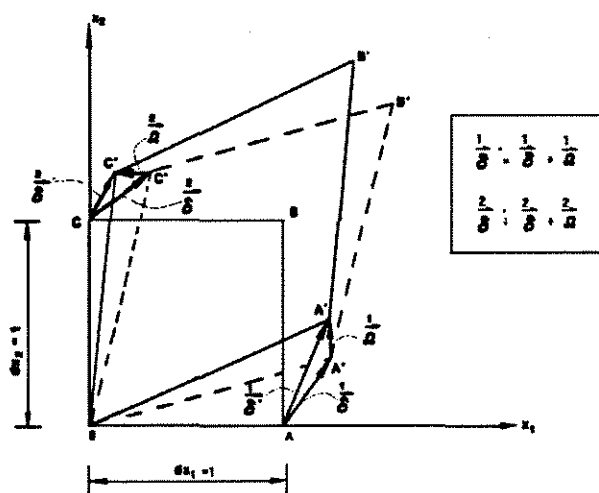


FIGURA 07 - Vetores rotacional e deformação pura em espaço bidimensional

Fonte: Chen e Saleeb<sup>(5)</sup>

O tensor  $\varepsilon_{ij}$ , que é o de interesse na análise de deformações, pode ser escrito em uma forma matricial como segue:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (15)$$

onde  $\varepsilon_{ij}$   $c/i = j$  são deformações normais e

$\varepsilon_{ij}$   $c/i \neq j$  são deformações tangenciais.

Deste modo tem-se:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad c/i \neq j. \quad (16)$$

Com a base teórica apresentada até aqui, é possível o estudo das inter-relações entre tensão e deformação ou, especificamente, a lei constitutiva que rege o comportamento dos materiais.

## 2.4. ELASTICIDADE

Todo sólido quando submetido a ações externas apresenta, como resposta a nível interno, tensões e deformações. Se essas ações cessarem e se o sólido voltar as suas condições iniciais, ou seja, tamanho e forma idênticos àqueles antes das ações atuarem sobre ele, não guardando deformações residuais, o sólido é chamado elástico. A esta propriedade é dado o nome de elasticidade.

A função resposta do material pode ser linear ou não linear como é mostrada pelos gráficos tensão-deformação na figura 08:



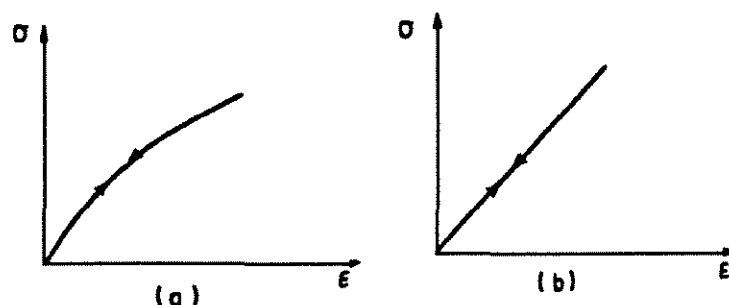


FIGURA 08 - Gráficos função resposta do material.

(a) resposta não linear (b) resposta linear

Fonte: Desai<sup>(6)</sup>

O modelo elástico descreve o comportamento de materiais usados, em geral, em engenharia. Assim, as relações constitutivas elásticas estão baseadas neste modelo.

Pode-se concluir, então, que as tensões e as deformações nestes sólidos são totalmente reversíveis. Além disto, baseando-se em hipóteses que as ações são independentes de tempo e estes sólidos estão sob condições adiabáticas e isotérmicas, (Love<sup>(1)</sup>), é possível defini-los matematicamente como:

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\epsilon_{kl}) , \quad (17)$$

onde  $F_{ij}$  é uma função resposta do material.

Baseando-se na propriedade dos materiais elásticos em que as tensões e as deformações são totalmente reversíveis, pode-se, agora, definir uma função potencial de deformação, conhecida como energia de deformação.

## 2.5. ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Como já descrito, em um sólido elástico, as tensões são função somente das deformações, ou seja:

$$\sigma_i = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}) . \quad (18)$$

Considerando este sólido elástico sob ação de forças, conforme mostra a figura 09, e impondo ao mesmo deslocamentos virtuais infinitesimais  $\delta U_i$ , compatíveis com as condições de equilíbrio, é possível, através do princípio dos trabalhos virtuais (P.T.V.) inter-relacionar uma série de equilíbrios  $F_i$ ,  $T_i$ ,  $\sigma U_i$  com uma série de compatibilidade virtual  $\delta U_i$ ,  $\delta \varepsilon_{ij}$ .

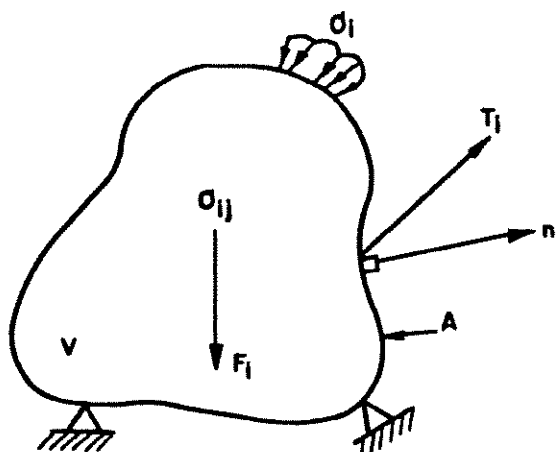


FIGURA 09 - Sólido elástico em equilíbrio.  
Fonte: Desai<sup>(6)</sup>

Assim,

$$\int_A T_i \delta U_i dA + \int_V F_i \delta U_i dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV , \quad (19)$$

onde o conjunto de termos, à esquerda na equação 19, exprime o trabalho externo  $\delta W$ , e o conjunto de termos, à direita, o trabalho interno  $\delta U$ . Então:

$$\delta W = \delta U \quad (20)$$

e

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (21)$$

Mas, simplificando:

$$\delta U = \int_V \delta U_0 dV, \quad (22)$$

deste modo tem-se:

$$\delta U_0 = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}. \quad (23)$$

Como  $U_0$  é função somente das componentes de deformação:

$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij}, \quad (24)$$

substituindo-se  $\delta U_0$  pela equação 23, tem-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (25)$$

Conclui-se, então, que nos materiais elásticos as tensões  $\sigma_{ij}$  são expressões definidas através da derivada parcial da energia de deformação pela derivada parcial das deformações correspondentes.

A equação 25 é conhecida como Modelo Elástico de Green ou lei constitutiva hiperelástica.

Em contrapartida, pode-se relacionar  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $U_0$  por variações de  $\delta\sigma_{ij}$ ,  $\delta F_i$ ,  $\delta T_i$ . Assim a equação do P.T.V. torna-se:

$$\int_A \delta T_i U_i dA + \int_V \delta F_i U_i dV = \int_V \delta\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (26)$$

ou:

$$\delta U = \delta W \quad (27)$$

Assim:

$$\int_V \delta U_{co} dV = \int_V \delta\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (28)$$

então:

$$\delta U_{co} = \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} \quad (29)$$

Sendo  $U_{co}$  função das componentes de tensão  $\sigma_{ij}$  e conhecida como energia complementar de deformação tem-se:

$$\delta U_{co} = \frac{\partial U_{co}}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} \quad (30)$$

Substituindo a equação 29 na equação 30, tem-se:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U_{co}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (31)$$

Pode-se observar que a equação 31 é a forma inversa da lei constitutiva hiperelástica. A figura 10 mostra as quantidades  $U_{co}$  e  $U_0$ .

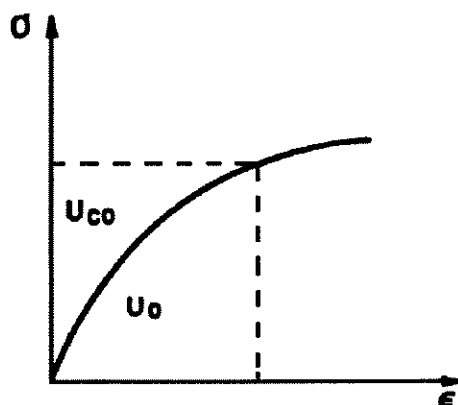


FIGURA 10 - Energia de deformação e energia complementar de deformação no gráfico tensão - deformação .

Fonte: Mascia<sup>(7)</sup>

Por outro lado, é possível observar que em um modelo linear, a energia de deformação  $U_0$  é igual à energia complementar de deformação  $U_{co}$ .

Reportando-se à equação 17, é oportuno salientar que a relação tensão-deformação foi estabelecida por Hooke em 1678, através de uma lei que se tornou a base histórica da teoria da elasticidade (Love<sup>(1)</sup>). Esta lei é expressa analiticamente por:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad , \quad (32)$$

onde  $E$  = módulo de Young<sup>A</sup> ou módulo de elasticidade longitudinal.

---

<sup>A</sup> Em homenagem ao pesquisador inglês Thomas Young (Timoshenko<sup>(4)</sup>)

A expressão anterior, escrita na forma tensorial, trata-se da conhecida Lei de Hooke<sup>A</sup> Generalizada.

Deste modo:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad , \quad (33)$$

onde  $C_{ijkl}$  é um tensor de constantes de elasticidade do material. Os índices  $i, j, k, l$  podem variar de 1 a 3.

## 2.6. RELAÇÕES TENSÃO DEFORMAÇÃO OU LEIS CONSTITUTIVAS DOS MATERIAIS ELASTICAMENTE ANISOTRÓPICOS

Neste momento torna-se possível descrever as relações tensão—deformação, ou Lei de Hooke Generalizada, através das propriedades da energia de deformação.

Sendo assim, com o uso de uma série polinomial:

$$U_0 = C_0 \delta_{ij} + \alpha_{ij} \varepsilon_{ij} + \beta_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad , \quad (34)$$

onde  $C_0, \alpha_{ij}, \beta_{ijkl}$  são constantes. Aplicando-se a expressão 25, relativa à do modelo elástico de Green, e considerando que a energia de deformação tenha um valor estacionário em relação ao tensor de deformação, tem-se:

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ij} + (\beta_{ijkl} + \beta_{klij}) \varepsilon_{kl} \quad . \quad (35)$$

---

<sup>A</sup> Em homenagem ao pesquisador inglês Robert Hooke  
(Timoshenko<sup>(4)</sup>)

Da expressão anterior, designando  $(\beta_{ijkl} + \beta_{klij})$  de  $C_{ijkl}$  e, além disto, supondo que as tensões estão associadas e atuando em todo sólido, ou seja,  $\alpha_{ij} = 0$ , tem-se:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (36)$$

Desta expressão, sendo  $C_{ijkl}$  uma matriz não singular, pode-se escrever:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (37)$$

Caracterizando-se que  $[C] = [S]^{-1}$ , ou como denotam Ostrosablin<sup>(8)</sup> e Cowin<sup>(9)</sup>:

$$C_{ijkl} S_{klrs} = \delta_{ijrs} = \frac{1}{2} (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) \quad (38)$$

e também

$$S_{ijkl} C_{klrs} = \delta_{ijrs} \quad (39)$$

onde:  $\delta_{ij}$  é o delta de Kroneker, e  $\delta_{ijkl}$  é um tensor unitário.

Com os índices  $i, j, k, l$ , variando de 1 a 3, pode-se discretizar um dos termos da expressão 36. Por exemplo  $\sigma_{13}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = & C_{1311} \varepsilon_{11} + C_{1312} \varepsilon_{12} + C_{1313} \varepsilon_{13} + C_{1321} \varepsilon_{21} + \\ & + C_{1322} \varepsilon_{22} + C_{1323} \varepsilon_{23} + C_{1331} \varepsilon_{31} + C_{1332} \varepsilon_{32} + C_{1333} \varepsilon_{33} \end{aligned} \quad (40)$$

Observa-se que na determinação de uma tensão tangencial aparecem tanto deformações tangenciais como normais, mostrando uma característica inerente aos materiais anisotrópicos.

Como os tensores  $C_{ijkl}$  e  $S_{ijkl}$  são tensores de 4ª ordem, é de se prever que sejam constituídos de 81 (oitenta e um) elementos (coeficientes

elásticos). Mas este número de elementos pode ser reduzido pela seguinte análise:

Derivando a equação 36, tem-se:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \quad (41)$$

e alterando a ordem de derivação na equação 41:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \quad (42)$$

Pode-se concluir, portanto, que:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (43)$$

demonstrando-se, assim, a existência da simetria nos pares de índices  $(i, j)(k, l)$  do tensor  $C_{ijkl}$ . Semelhante análise pode ser feita para os termos  $S_{ijkl}$ :

$$S_{ijkl} = S_{klij} \quad (44)$$

Além disto, deve-se atentar ao fato dos tensores  $C_{ijkl}$  e  $S_{ijkl}$  relacionarem os tensores de tensão e de deformação que são simétricos. Assim tem-se:

- Em primeiro lugar, a simetria de tensores de deformação  $\varepsilon_{ij}$ ,

ou

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (45)$$



desta maneira obtém-se:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{lk} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} , \quad (46)$$

resultando em:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} . \quad (47)$$

Ou seja, dos 81 (oitenta e um) elementos em  $C_{ijkl}$  sobraram 54 (cinquenta e quatro) diferentes (independentes).

- Em segundo lugar, devido a simetria dos tensores de tensão  $\sigma_{ij}$  , ou:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} , \quad (48)$$

desta maneira obtém-se:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \sigma_{ji} = C_{jilk} \varepsilon_{kl} \quad (49)$$

resultando em:

$$C_{ijkl} = C_{jilk} \quad (50)$$

Ou seja, dos 54 (cinquenta e quatro) elementos em  $C_{ijkl}$  passa-se a ter 36 (trinta e seis) elementos diferentes.

- Em terceiro lugar, como foi mencionado, o tensor  $C_{ijkl}$  é simétrico em relação aos pares de índices,  $(i, j)$  e  $(k, l)$ .

Então, em lugar dos 36 (trinta e seis) elementos existem apenas 21 (vinte e um) elementos diferentes no tensor  $C_{ijkl}$  , e também no tensor  $S_{ijkl}$  .

Escrevendo agora a equação 46 em uma forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2331} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3123} & C_{3131} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \quad (51)$$

Ou em uma forma expandida:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{1111} \varepsilon_{11} + C_{1122} \varepsilon_{22} + C_{1133} \varepsilon_{33} + 2C_{1112} \varepsilon_{12} + 2C_{1123} \varepsilon_{23} + 2C_{1131} \varepsilon_{31} \\ \sigma_{22} &= C_{2211} \varepsilon_{11} + C_{2222} \varepsilon_{22} + C_{2233} \varepsilon_{33} + 2C_{2212} \varepsilon_{12} + 2C_{2223} \varepsilon_{23} + 2C_{2231} \varepsilon_{31} \\ \sigma_{33} &= C_{3311} \varepsilon_{11} + C_{3322} \varepsilon_{22} + C_{3333} \varepsilon_{33} + 2C_{3312} \varepsilon_{12} + 2C_{3323} \varepsilon_{23} + 2C_{3331} \varepsilon_{31} \\ \sigma_{12} &= C_{1211} \varepsilon_{11} + C_{1222} \varepsilon_{22} + C_{1233} \varepsilon_{33} + 2C_{1212} \varepsilon_{12} + 2C_{1223} \varepsilon_{23} + 2C_{1231} \varepsilon_{31} \\ \sigma_{23} &= C_{2311} \varepsilon_{11} + C_{2322} \varepsilon_{22} + C_{2333} \varepsilon_{33} + 2C_{2312} \varepsilon_{12} + 2C_{2323} \varepsilon_{23} + 2C_{2331} \varepsilon_{31} \\ \sigma_{31} &= C_{3111} \varepsilon_{11} + C_{3122} \varepsilon_{22} + C_{3133} \varepsilon_{33} + 2C_{3112} \varepsilon_{12} + 2C_{3123} \varepsilon_{23} + 2C_{3131} \varepsilon_{31} \end{aligned} \quad (52)$$

De modo análogo:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1112} & 2S_{1123} & 2S_{1131} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2212} & 2S_{2223} & 2S_{2231} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 2S_{3312} & 2S_{3323} & 2S_{3331} \\ 2S_{1211} & 2S_{1222} & 2S_{1233} & 4S_{1212} & 4S_{1223} & 4S_{1231} \\ 2S_{2311} & 2S_{2322} & 2S_{2333} & 4S_{2312} & 4S_{2323} & 4S_{2331} \\ 2S_{3111} & 2S_{3122} & 2S_{3133} & 4S_{3112} & 4S_{3123} & 4S_{3131} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \quad (53)$$

e também:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= S_{1111} \sigma_{11} + S_{1122} \sigma_{22} + S_{1133} \sigma_{33} + 2S_{1112} \sigma_{12} + 2S_{1123} \sigma_{23} + 2S_{1131} \sigma_{31} \\ \varepsilon_{22} &= S_{2211} \sigma_{11} + S_{2222} \sigma_{22} + S_{2233} \sigma_{33} + 2S_{2212} \sigma_{12} + 2S_{2223} \sigma_{23} + 2S_{2231} \sigma_{31} \\ \varepsilon_{33} &= S_{3311} \sigma_{11} + S_{3322} \sigma_{22} + S_{3333} \sigma_{33} + 2S_{3312} \sigma_{12} + 2S_{3323} \sigma_{23} + 2S_{3331} \sigma_{31} \\ 2\varepsilon_{12} &= 2S_{1211} \sigma_{11} + 2S_{1222} \sigma_{22} + 2S_{1233} \sigma_{33} + 4S_{1212} \sigma_{12} + 4S_{1223} \sigma_{23} + 4S_{1231} \sigma_{31} \\ 2\varepsilon_{23} &= 2S_{2311} \sigma_{11} + 2S_{2322} \sigma_{22} + 2S_{2333} \sigma_{33} + 4S_{2312} \sigma_{12} + 4S_{2323} \sigma_{23} + 4S_{2331} \sigma_{31} \\ 2\varepsilon_{31} &= 2S_{3111} \sigma_{11} + 2S_{3122} \sigma_{22} + 2S_{3133} \sigma_{33} + 4S_{3112} \sigma_{12} + 4S_{3123} \sigma_{23} + 4S_{3131} \sigma_{31} \end{aligned} \quad (54)$$

Com o objetivo de simplificar as operações com os elementos dos tensores aqui mencionados, pode-se utilizar uma notação indicial reduzida, apresentada por Lekhnitskii<sup>(10)</sup>, onde a simetria dos tensores  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{kl}$  e  $C_{ijkl}$  permite a redução dos seus índices, os quais podem ser contraídos da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \rightarrow \text{para quaisquer índices}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_m \rightarrow \text{se } m = 1, 2, 3$$

$$2\varepsilon_{ij} = \varepsilon_m \rightarrow \text{se } m = 4, 5, 6$$

$$C_{ijkl} = C_{mn} \rightarrow \text{para quaisquer índices}$$

$$S_{ijkl} = S_{mn} \rightarrow \text{se } m, n = 1, 2, 3$$

$$2S_{ijkl} = S_{mn} \rightarrow \text{se } m, n = 4, 5, 6$$

$$4S_{ijkl} = S_{mn} \rightarrow \text{se } m, n = 4, 5, 6.$$

A partir do que demonstrou-se, observa-se que os índices variam de 1 a 6.

Assim:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}, \sigma_4 = \sigma_{12}, \sigma_5 = \sigma_{23}, \sigma_6 = \sigma_{31} \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{12}, \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{23}, \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{31} \\ C_{11} &= C_{1111}, C_{12} = C_{1112}, C_{13} = C_{1133}, C_{14} = C_{1112}, C_{15} = C_{1123}, C_{16} = C_{1131} \end{aligned} \quad (55)$$

Com esta convenção, pode-se escrever as equações 51 e 53 como:

$$\sigma_m = C_{mn} \varepsilon_n \quad (56)$$

e assim:

$$\varepsilon_m = S_{mn} \sigma_n, \quad (57)$$

resultando, matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (58)$$

e também:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (59)$$

Observa-se que, mesmo após a contração dos índices dos coeficientes do tensor  $C_{ijkl}$ , permanece a igualdade entre os coeficientes homólogos, ou seja:

$$C_{ijkl} = C_{mn} \quad (60)$$

Isto pode ser demonstrado através de exemplos citados por Fusco<sup>(11)</sup>, como a seguir, onde primeiramente determina-se a tensão  $\sigma_{11} = \sigma_1$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_1 = & C_{1111} \varepsilon_{11} + C_{1112} \varepsilon_{12} + C_{1113} \varepsilon_{13} + C_{1121} \varepsilon_{21} + C_{1122} \varepsilon_{22} \\ & + C_{1123} \varepsilon_{23} + C_{1131} \varepsilon_{31} + C_{1132} \varepsilon_{32} + C_{1133} \varepsilon_{33} \end{aligned} \quad (61)$$

Devido a simetrias existentes, pode ser escrito:

$$\sigma_{11} = C_{1111} \varepsilon_{11} + C_{1122} \varepsilon_{22} + C_{1133} \varepsilon_{33} + 2C_{1112} \varepsilon_{12} + 2C_{1123} \varepsilon_{23} + 2C_{1131} \varepsilon_{31} \quad (62)$$

e com a contração dos índices:

$$\sigma_1 = C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 + C_{13} \varepsilon_{13} + C_{14} \varepsilon_4 + C_{15} \varepsilon_5 + C_{16} \varepsilon_6 \quad (63)$$

resultando em:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{31} \\ C_{11} &= C_{1111}, \quad C_{12} = C_{1112}, \quad C_{13} = C_{1133}, \quad C_{14} = C_{1112}, \quad C_{15} = C_{1123}, \quad C_{16} = C_{1131} \end{aligned} \quad (64)$$

Do mesmo modo, determina-se a tensão tangencial  $\sigma_{12} = \sigma_4$ :

$$\sigma_{12} = C_{12kl} \varepsilon_{kl} \quad (65)$$

ou seja:

$$\sigma_{12} = C_{1112} \varepsilon_{11} + C_{1222} \varepsilon_{22} + C_{1233} \varepsilon_{33} + 2C_{1212} \varepsilon_{12} + 2C_{1223} \varepsilon_{23} + 2C_{1231} \varepsilon_{31} \quad (66)$$

e:

$$\sigma_4 = C_{41} \varepsilon_1 + C_{42} \varepsilon_2 + C_{43} \varepsilon_3 + C_{44} \varepsilon_4 + C_{45} \varepsilon_5 + C_{46} \varepsilon_6 \quad (67)$$

resultando em:

$$\begin{aligned} C_{14} &= C_{41} = C_{1112} ; \quad C_{24} = C_{42} = C_{1222} ; \quad C_{34} = C_{43} = C_{1233} ; \\ C_{44} &= C_{1212} ; \quad C_{45} = C_{1223} ; \quad C_{46} = C_{1231} \end{aligned} \quad (68)$$

Por outro lado, para os coeficientes do tensor compliance  $S_{ijkl}$ , a igualdade dos coeficientes homólogos não se mantém.

Assim, semelhantemente pode-se chegar a:

$$\varepsilon_{11} = S_{1111} \sigma_{11} + S_{1122} \sigma_{22} + S_{1133} \sigma_{33} + 2S_{1112} \sigma_{12} + 2S_{1123} \sigma_{23} + 2S_{1131} \sigma_{31} \quad (69)$$

e a:

$$\varepsilon_1 = S_{11} \sigma_1 + S_{12} \sigma_2 + S_{13} \sigma_3 + S_{14} \sigma_4 + S_{15} \sigma_5 + S_{16} \sigma_6, \quad (70)$$

logo:

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{1111} ; S_{12} = S_{1122} ; S_{13} = S_{1133} \\ S_{14} &= 2S_{1112} ; S_{15} = 2S_{1123} ; S_{16} = 2S_{1131} \end{aligned} \quad (71)$$

Agora, considerando as expressões para  $\varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_4}{2}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= S_{1211} \sigma_{11} + S_{1222} \sigma_{22} + S_{1233} \sigma_{33} + 2S_{1212} \sigma_{12} + \\ &+ 2S_{1223} \sigma_{2311} + 2S_{1231} \sigma_{31} = \frac{\varepsilon_4}{2} \end{aligned} \quad (72)$$

e também:

$$\varepsilon_4 = S_{41} \sigma_1 + S_{42} \sigma_2 + S_{43} \sigma_3 + S_{44} \sigma_4 + S_{45} \sigma_5 + S_{46} \sigma_6, \quad (73)$$

resultando:

$$\begin{aligned} S_{14} &= S_{41} = 2S_{1112} ; S_{24} = S_{42} = 2S_{1222} ; S_{34} = S_{43} = 2S_{1233} \\ S_{44} &= 4S_{1212} ; S_{45} = 4S_{1223} ; S_{46} = 4S_{1231} \end{aligned} \quad (74)$$

Ting<sup>(12)</sup> apresenta o seguinte resumo para a relação dos elementos  $C_{ij}$  e  $S_{ij}$ :

$$\begin{aligned} C_{ij} &\rightarrow S_{ij} \text{ se } i, j \leq 3, \\ C_{ij} &\rightarrow \frac{1}{2} S_{ij} \text{ se } i \text{ ou } j > 3, \\ C_{ij} &\rightarrow \frac{1}{4} S_{ij} \text{ se } i, j < 3. \end{aligned}$$

Através da análise apresentada até aqui, foi obtida uma redução significativa de elementos diferentes entre si dos tensores  $C_{ij}$  e  $S_{ij}$ . Assim sendo, torna-se oportuno uma análise a respeito do número de constantes independentes nestes tensores.

Nos próximos itens será utilizado somente o tensor compliance  $S_{ij}$  com sua notação reduzida. Evidentemente os resultados obtidos poderão ser extrapolados para o tensor de constantes de elasticidade  $C_{ij}$ .

## 2.7. SOBRE O NÚMERO DE CONSTANTES INDEPENDENTES NO TENSOR $S_{ij}$

Lekhnitskii<sup>(10)</sup> cita que o número de termos independentes no tensor compliance  $S_{ij}$ , para materiais elásticos anisotrópicos, não é 21 (vinte e um) mas sim 18 (dezoito).

Esta afirmação pode ser comprovada através das seguintes considerações (Mascia<sup>(7)</sup>):

Se o tensor  $\varepsilon_{ij}$  for diagonalizado, ou seja, referido às novas direções principais, por meio de uma conveniente mudança de base, ele passa a ter 3 (três) elementos nulos, ou seja:

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 . \quad (75)$$

Nestas condições a equação 59 torna-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (76)$$

Embora o tensor de deformações  $\varepsilon_{ij}$  tenha sido diagonalizado, nada obriga que o tensor  $\sigma_{ij}$  também o seja, pois as direções principais de ambos não são necessariamente coincidentes.

Discretizando as 3 (três) últimas relações do sistema, obtêm-se expressões iguais a zero, sendo que os termos  $S_{ij}$  não podem ser todos nulos.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 + S_{12}\sigma_2 + S_{13}\sigma_3 + S_{14}\sigma_4 + S_{15}\sigma_5 + S_{16}\sigma_6 \\
 \varepsilon_2 &= S_{21}\sigma_1 + S_{22}\sigma_2 + S_{23}\sigma_3 + S_{24}\sigma_4 + S_{25}\sigma_5 + S_{26}\sigma_6 \\
 \varepsilon_3 &= S_{31}\sigma_1 + S_{32}\sigma_2 + S_{33}\sigma_3 + S_{34}\sigma_4 + S_{35}\sigma_5 + S_{36}\sigma_6 \\
 0 &= S_{41}\sigma_1 + S_{42}\sigma_2 + S_{43}\sigma_3 + S_{44}\sigma_4 + S_{45}\sigma_5 + S_{46}\sigma_6 \\
 0 &= S_{51}\sigma_1 + S_{52}\sigma_2 + S_{53}\sigma_3 + S_{54}\sigma_4 + S_{55}\sigma_5 + S_{56}\sigma_6 \\
 0 &= S_{61}\sigma_1 + S_{62}\sigma_2 + S_{63}\sigma_3 + S_{64}\sigma_4 + S_{65}\sigma_5 + S_{66}\sigma_6
 \end{aligned} \tag{77}$$

Desta forma, as 3 (três) últimas relações estabelecem condições de dependência dos elementos que a elas pertencem.

Semelhante raciocínio pode ser feito para as relações com o tensor de constantes de elasticidade  $C_{ij}$ .

Conclui-se então que, dos 21 (vinte e um) termos de  $S_{ij}$  ou  $C_{ij}$ , somente 18 (dezoito) são independentes entre si.

## 2.8. SIMETRIA ELÁSTICA NOS MATERIAIS

De acordo com Lekhnitskii<sup>(10)</sup>, todos os materiais, de um modo geral, podem ser divididos em homogêneos e não-homogêneos e também em isotrópicos e anisotrópicos.



De fato, em um material homogêneo as suas propriedades físicas são invariantes, ou seja, não variam em todos os pontos referentes a um sistema de coordenadas  $x_i$ . Em contrapartida, em um material não homogêneo estas propriedades não se mantêm constantes para diferentes pontos de  $x_i$ .

Agora, em um material isotrópico as suas propriedades de elasticidade são invariantes a quaisquer direções estabelecidas que passam por um ponto. Por outro lado, um material totalmente anisotrópico exibe diferentes propriedades de elasticidade para diferentes direções estabelecidas através de um ponto.

Além disto, se a estrutura de um sólido apresenta algum tipo de simetria, as suas propriedades de elasticidade também a exibem.

Nestes termos, Neumann apud Love<sup>(1)</sup> estabeleceu o seguinte princípio:

"A simetria elástica de um material tem a mesma espécie de simetria que a sua forma cristalográfica possui".

Assim, se um sólido anisotrópico apresentar algum tipo de simetria, as suas propriedades de elasticidade também a exibirão, (Lekhnitskii<sup>(10)</sup>). Neste contexto, podem ocorrer diversas simplificações nos tensores  $S_{ij}$  e  $C_{ij}$ .

O tratamento destas possíveis simplificações pode ser dado por diferentes artifícios, como o usado por Love<sup>(1)</sup> que se baseia na não variação da energia de deformação através da mudança de sistemas simétricos de coordenadas ( $x_i$  e  $x'_i$ ). Lekhnitskii<sup>(10)</sup>, por outro lado, promove tais simplificações analiticamente, desenvolvendo as leis constitutivas em relação aos dois sistemas de coordenadas e compara as expressões obtidas, identificando assim, as simetrias existentes. Neste trabalho, utiliza-se este último tratamento para as simplificações possíveis nos tensores  $C_{ij}$  e  $S_{ij}$ .

Como exemplo, é admitido um sólido sob a ação de forças externas e, conseqüentemente, com deformações  $\varepsilon_{ij}$ . Além disto, o sólido está vinculado a um sistema de coordenadas cartesianas  $x_i(x_1, x_2 \text{ e } x_3)$ , podendo considerar, também, um sistema simétrico a este ou a  $x'_i = -x_i$ .

Como as deformações são tensores de 2ª ordem, estes estão sujeitos à seguinte lei de transformação:

$$\varepsilon'_{ij} = l_{im} l_{jn} \varepsilon_{mn} \quad , \quad (78)$$

onde  $\varepsilon'_{ij}$  é a componente no novo sistema de coordenadas,

$\varepsilon_{mn}$  é a componente no antigo sistema de coordenadas e

$l_{ij}$  são os cossenos diretores

De acordo com a figura 11, os cossenos diretores serão:

$$l_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

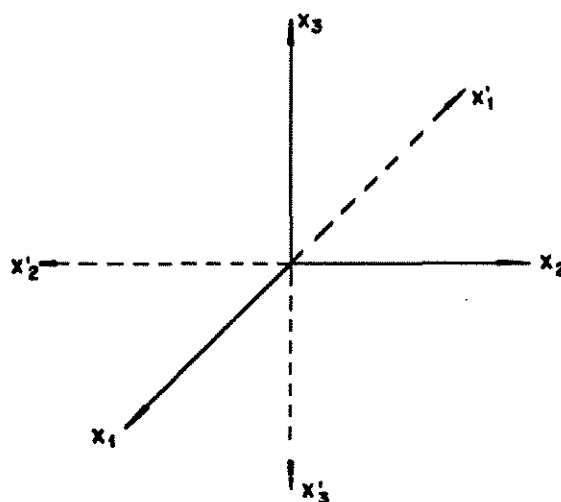


Figura 11 - Sistema de eixos ortogonais e seu simétrico  
Fonte : Mascia<sup>(7)</sup>

Aplicando, agora, a lei de transformação (equação 78) com  $i = 1$  e  $j = 1$ ,  $\varepsilon'_{11}$  torna-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{11} = & l_{11}l_{11}\varepsilon_{11} + l_{11}l_{12}\varepsilon_{12} + l_{11}l_{13}\varepsilon_{13} + l_{12}l_{11}\varepsilon_{21} + l_{12}l_{12}\varepsilon_{22} + \\ & l_{12}l_{13}\varepsilon_{23} + l_{13}l_{11}\varepsilon_{31} + l_{13}l_{12}\varepsilon_{32} + l_{13}l_{13}\varepsilon_{33} \end{aligned} \quad (80)$$

e com algumas simplificações:

$$\varepsilon'_{11} = l_{11}^2\varepsilon_{11} + l_{12}^2\varepsilon_{22} + l_{13}^2\varepsilon_{33} + l_{11}l_{12}2\varepsilon_{12} + l_{12}l_{13}2\varepsilon_{23} + l_{13}l_{11}2\varepsilon_{31} \quad (81)$$

Substituindo os valores dos cossenos diretores  $l_{ij}$ , encontra-se:

$$\varepsilon'_{11} = \varepsilon_{11} \quad (82)$$

e em uma forma generalizada:

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad (83)$$

Com o uso desta teoria é possível fazer simplificações nos tensores  $S_{ij}$  e  $C_{ij}$ , desde que, se estabeleçam direções determinadas por  $x_i$ , nas quais as propriedades de elasticidade são invariantes. Estas direções são chamadas direções principais de elasticidade. Como consequência, deixa-se de enfocar um material totalmente anisotrópico, pelo fato deste não possuir tais direções.

Além dos princípios até aqui apresentados, tornam-se necessárias algumas considerações a respeito das transformações de coordenadas a fim de que se possa realizar as simplificações mencionadas.

### 2.8.1. TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

É fato que os tensores constitutivos  $C_{ijkl}$  e  $S_{ijkl}$  são tensores de 4ª ordem, estando assim sujeitos à seguinte lei de transformação de coordenadas, (Voigt, apud Cowin<sup>(9)</sup>):

$$S'_{ijkl} = l_{im} l_{jn} l_{ko} l_{ep} S_{mnop} \quad (84)$$

onde  $S'_{ijkl}$  são os coeficientes do tensor compliance no novo sistema de coordenadas,

$S_{ijkl}$  são os coeficientes do tensor compliance no antigo sistema de coordenadas e

$l_{ij}$  os cossenos diretores

Os cossenos diretores  $l_{ij}$  em uma rotação de eixos coordenados, em um sentido anti-horário, em torno do eixo  $x_3$ , tornam-se:

$$l_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (85)$$

conforme é mostrado na figura 12:

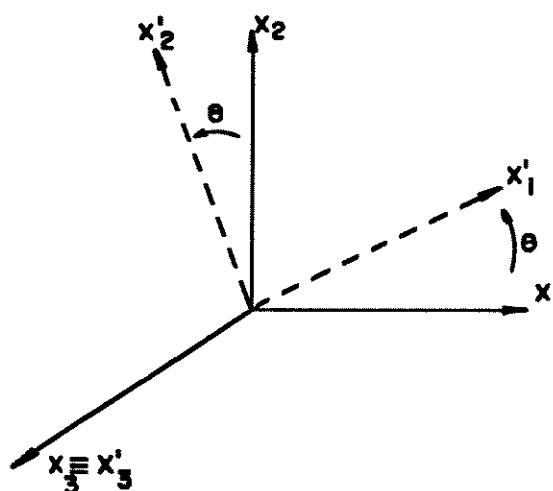


FIGURA 12 - Rotação dos eixos  $x_1$  e  $x_2$  de um sistema de eixos ortogonais  
Fonte: Mascia<sup>(7)</sup>

Deste modo, pode-se apresentar, por exemplo, o coeficiente  $S'_{11}$  :

$$\begin{aligned}
 S'_{1111} = & S_{1111}I_{11}^4 + S_{2222}I_{12}^4 + S_{3333}I_{13}^4 + (2S_{2233} + S_{1212})I_{12}^2I_{13}^2 + \\
 & + (2S_{1133} + S_{2323})I_{11}^2I_{12}^2 + (2S_{1122} + S_{3131})I_{11}^2I_{12}^2 + \\
 & + 2I_{12}I_{13}[(S_{1112} + S_{2331})I_{11}^2 + S_{2211}I_{12}^2 + S_{3311}I_{13}^2] + \\
 & + 2I_{13}I_{11}[S_{1123}I_{11}^2 + (S_{2223} + S_{1231})I_{12}^2 + S_{3333}I_{13}^2] + \\
 & + 2I_{11}I_{12}[S_{1131}I_{11}^2 + S_{2231}I_{12}^2 + (S_{3311} + S_{1223})I_{13}^2]
 \end{aligned} \tag{86}$$

Como alternativa, pode-se utilizar os coeficientes com os índices reduzidos ( $S_{ij}$  e  $C_{ij}$ ), para os quais Lekhnitskii<sup>(10)</sup> apresenta os termos escritos por  $q_{ij}$ , para se efetuar a transformação do tensor constitutivo.

Assim, a lei de transformação torna-se:

$$S'_{ij} = q_{im}q_{jn}S_{mn} \tag{87}$$

onde os termos  $q_{ij}$  estão apresentados na tabela 01, sendo que o primeiro subscrito indica a linha e, o segundo a coluna na tabela.

Tabela 01 - Relação dos termos  $q_{ij}$  e os cossenos diretores  $l_{ij}$  para transformação de coordenadas com subscrito reduzido  
Fonte: Lekhnitskij<sup>(10)</sup>

	1	2	3	4	5	6
1	$l_{11}^2$	$l_{12}^2$	$l_{13}^2$	$l_{11}l_{12}$	$l_{12}l_{13}$	$l_{31}l_{11}$
2	$l_{21}^2$	$l_{22}^2$	$l_{23}^2$	$l_{22}l_{21}$	$l_{23}l_{22}$	$l_{23}l_{21}$
3	$l_{31}^2$	$l_{32}^2$	$l_{33}^2$	$l_{32}l_{31}$	$l_{33}l_{32}$	$l_{33}l_{31}$
4	$2l_{21}l_{11}$	$2l_{12}l_{22}$	$2l_{13}l_{23}$	$l_{11}l_{22} + l_{12}l_{21}$	$l_{13}l_{22} + l_{12}l_{23}$	$l_{13}l_{21} + l_{11}l_{23}$
5	$2l_{31}l_{21}$	$2l_{32}l_{22}$	$2l_{33}l_{23}$	$l_{31}l_{22} + l_{32}l_{21}$	$l_{33}l_{22} + l_{32}l_{23}$	$l_{33}l_{21} + l_{31}l_{23}$
6	$2l_{31}l_{11}$	$2l_{32}l_{12}$	$2l_{33}l_{13}$	$l_{31}l_{12} + l_{32}l_{11}$	$l_{33}l_{12} + l_{32}l_{13}$	$l_{33}l_{11} + l_{31}l_{13}$

Com o exposto é possível apresentar os novos termos do tensor constitutivo  $S'_{ij}$ , após transformação de coordenadas.

Observa-se que as parcelas que contribuem para cada termo de  $S'_{ij}$  estão relacionadas às funções trigonométricas do ângulo de rotação  $\theta$  :

$$S'_{11} = S_{11} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + 2(S_{16} \cos^2 \theta + S_{26} \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta$$

$$S'_{12} = (S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} + (S_{16} - S_{26})(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta$$

$$S'_{22} = S_{11} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \cos^4 \theta - 2(S_{16} \sin^2 \theta + S_{26} \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta$$

$$S'_{13} = (S_{11} + S_{22} - S_{12} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} + (S_{16} - S_{26})(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
S'_{66} &= 4(S_{11} + S_{22} - S_{12} - S_{66})\text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66} - \\
&\quad + 4(S_{16} - S_{26})(\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) \text{sen} \theta \cos \theta \\
S'_{26} &= [2S_{22} \cos^2 \theta - 2S_{11} \text{sen}^2 \theta - (2S_{12} + S_{66})(\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta)] \\
&\quad \text{sen} \theta \cos \theta + S_{16} \text{sen}^2 \theta (3 \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) + S_{26} \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 3 \text{sen}^2 \theta) \\
S'_{44} &= S_{44} \cos^2 \theta - 2S_{45} \text{sen} \theta \cos \theta + S_{55} \text{sen}^2 \theta \\
S'_{45} &= (S_{44} - S_{55}) \text{sen} \theta \cos \theta + S_{45} (\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta) \\
S'_{55} &= S_{44} \text{sen}^2 \theta + 2S_{45} \text{sen} \theta \cos \theta + S_{55} \cos^2 \theta \\
S'_{14} &= S_{14} \cos^3 \theta + (S_{46} - S_{15}) \text{sen} \theta \cos^2 \theta + \\
&\quad + (S_{24} - S_{56}) \text{sen}^2 \theta \cos \theta - S_{25} \text{sen}^3 \theta \\
S'_{24} &= S_{24} \cos^3 \theta - (S_{46} + S_{25}) \text{sen} \theta \cos^2 \theta + \\
&\quad + (S_{14} - S_{56}) \text{sen}^2 \theta \cos \theta - S_{15} \text{sen}^3 \theta \\
S'_{46} &= S_{46} \cos^3 \theta + (-S_{14} + S_{24} - S_{56}) \text{sen} \theta \cos^2 \theta + \\
&\quad + (2S_{15} - 2S_{25} - S_{46}) \text{sen}^2 \theta \cos \theta + S_{56} \text{sen}^3 \theta \\
S'_{15} &= S_{15} \cos^3 \theta + (S_{14} + S_{56}) \text{sen} \theta \cos^2 \theta + \\
&\quad + (S_{25} + S_{46}) \text{sen}^2 \theta \cos \theta + S_{24} \text{sen}^3 \theta \\
S'_{25} &= S_{25} \cos^3 \theta + (S_{24} - S_{56}) \text{sen} \theta \cos^2 \theta + \\
&\quad + (S_{15} - S_{46}) \text{sen}^2 \theta \cos \theta + S_{14} \text{sen}^3 \theta \\
S'_{56} &= S_{56} \cos^3 \theta + (-S_{15} + 2S_{25} + S_{46}) \text{sen} \theta \cos^2 \theta + \\
&\quad + (-2S_{14} - 2S_{24} - S_{56}) \text{sen}^2 \theta \cos \theta - S_{46} \text{sen}^3 \theta \\
S'_{13} &= S_{13} \cos^2 \theta + S_{36} \text{sen} \theta \cos \theta + S_{23} \text{sen}^2 \theta \\
S'_{36} &= 2(S_{23} - S_{13}) \text{sen} \theta \cos \theta + S_{36} (\text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta) \\
S'_{23} &= S_{13} \text{sen}^2 \theta - S_{36} \text{sen} \theta \cos \theta + S_{23} \cos^2 \theta \\
S'_{33} &= S_{33}
\end{aligned} \tag{88}$$

$$S'_{34} = S_{34} \cos \theta - S_{35} \operatorname{sen} \theta$$

$$S'_{35} = S_{34} \operatorname{sen} \theta + S_{35} \cos \theta$$

A partir das considerações apresentadas, pode-se, agora, definir os materiais quanto ao número de planos de simetria.

## 2.9. CLASSIFICAÇÃO DOS MATERIAIS SEGUNDO O NÚMERO DE PLANOS DE SIMETRIA ELÁSTICA

Voigt, apud Cowin<sup>(9)</sup>, sintetizou os estudos desenvolvidos por Voigt, Love e Gurtin, os quais apresentaram 9 (nove) quantidades distintas de coeficientes do tensor  $C_{ijkl}$  para 32 classes de cristais, enquanto que para os não cristais, ele mencionou a existência de somente 3 (três) tipos tradicionais conhecidos como isotrópico, monotrópico e ortotrópico.

A seguir, será desenvolvido um estudo mais aprofundado da simetria elástica para os 3 (três) tradicionais tipos de não cristais.

A nomenclatura aqui utilizada pode sofrer alterações em função dos diversos autores que abordaram este assunto.

### 2.9.1. MATERIAL COM SIMETRIA ELÁSTICA EM UM PLANO

Admitindo um sólido referido a um sistema de coordenadas  $x_i$ , conforme mostra a figura 13:



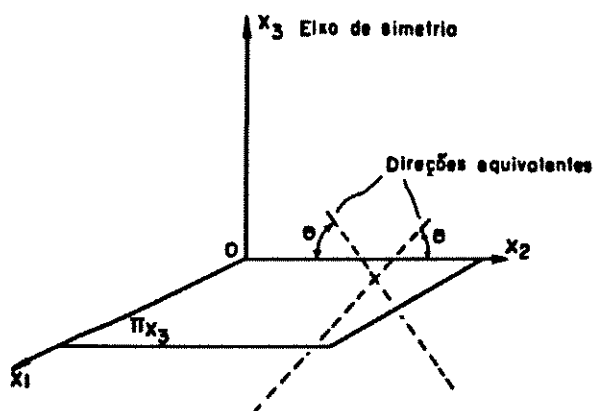


FIGURA 13 - Simetria elástica em um plano  
Fonte: Mascia<sup>(7)</sup>

O plano  $x_1 - x_2$  é de simetria elástica, ou seja, duas direções quaisquer passando por um ponto neste plano são equivalentes no que concerne às propriedades de elasticidade. Além disto, a direção normal a este plano é chamada de direção principal de elasticidade.

Promovendo rotações de  $180^\circ$  em torno do eixo  $x_3$ , conforme esquema da figura 14

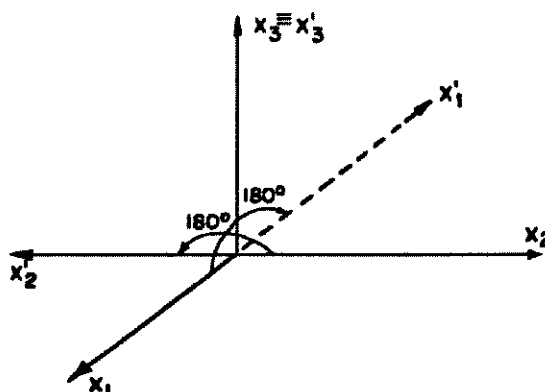


FIGURA 14 - Rotação de  $180^\circ$  em torno do eixo  $x_3$   
Fonte: Mascia<sup>(7)</sup>

têm-se os seguintes cossenos diretores:

$$l_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (89)$$

Com o uso da transformação tensorial de  $S_{11}$  tem-se:

$$S'_{11} = q_{1m}q_{1n}S_{mn} \quad (90)$$

resultando:

$$S'_{11} = l_{11}^4 S_{11} \quad (91)$$

devido às demais parcelas que contribuem para  $S'_{11}$  serem nulas.

Assim:

$$S'_{11} = S_{11} \quad (92)$$

De semelhante análise para os outros termos do tensor, conclui-se que:

$$S_{15} = S_{16} = S_{25} = S_{26} = S_{35} = S_{36} = S_{45} = S_{46} = 0 . \quad (93)$$

Então, o tensor  $S_{ij}$  terá a seguinte configuração:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & 0 & 0 \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & S_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (94)$$

Com isto o tensor  $S_{ij}$  passa a ter 13(treze) elementos diferentes, sendo que apenas 11(onze) são independentes, devido à dependência linear entre os termos  $S_{55}$ ,  $S_{56}$  e  $S_{66}$ . A confirmação disto é feita pelo mesmo artifício usado em 2.7.

### 2.9.2. MATERIAL COM SIMETRIA ELÁSTICA EM TRÊS PLANOS

Novamente admitindo um sólido referido a um sistema de eixos coordenados  $x_i$  e agora procedendo a uma rotação de  $180^\circ$  em torno do eixo  $x_1$  (um dos eixos de simetria) conforme figura 15.

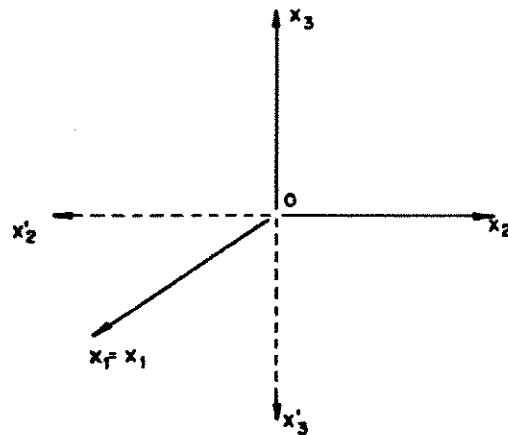


FIGURA15 - Rotação de 180° em torno do eixo  $x_1$   
Fonte: Mascia<sup>(7)</sup>

tem-se, analogamente ao item anterior:

$$S_{14} = S_{24} = S_{34} = S_{56} = 0 \quad (95)$$

Efetuada semelhante rotação nos eixos  $x_2$  e  $x_3$ , um de cada vez, tem-se:

$$S_{16} = S_{26} = S_{36} = S_{54} = 0 \quad (96)$$

$$S_{15} = S_{25} = S_{35} = S_{56} = 0 ,$$

sendo que  $S_{ij}$  fica com a seguinte forma:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (97)$$

Neste momento pode-se expressar os coeficientes do tensor compliance, em termos dos coeficientes elásticos usuais de engenharia (constantes técnicas, Cauwelaert<sup>(13)</sup>), ou seja, através do módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young  $E_i$ , do coeficiente de Poisson  $\nu_{ij}$  e do módulo de elasticidade transversal ou de rigidez  $G_{ij}$ .

Assim  $S_{ij}$  torna-se:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix} \quad (98)$$

onde devido à simetria existente pode-se escrever:

$$-\frac{\nu_{21}}{E_2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \quad (99)$$

ou genericamente:

$$-\frac{\nu_{ij}}{E_i} = -\frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (100)$$

Como observou-se anteriormente, é mais simples trabalhar com os coeficientes do tensor compliance  $S_{ij}$ , ao invés dos coeficientes do tensor de constantes de elasticidade  $C_{ij}$ . A título de ilustração, pode-se comparar os coeficientes a seguir :

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad (101)$$

e

$$C_{11} = \frac{E_1(1 - \nu_{32}\nu_{23})}{1 - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32}} \quad (102)$$

### 2.9.3. MATERIAL TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICO

Considerando-se um sólido referido a um sistema de coordenadas, conforme a figura 16, onde o plano  $x_1 - x_2$  é dito de isotropia, ou seja, todas as direções contidas neste plano são elasticamente equivalentes, o eixo  $x_3$  é o eixo de simetria elástica.

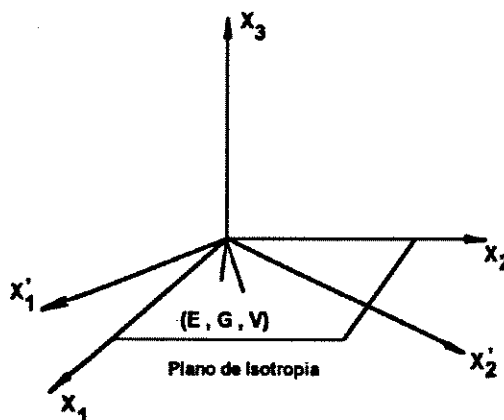


FIGURA 16 - Plano de isotropia - material transversalmente isotrópico  
Fonte: Mascia<sup>(7)</sup>

Baseando-se nas operações dos itens anteriores, de simetria elástica, tem-se:

$$S_{11} = S_{22} ; S_{13} = S_{23} ; S_{55} = S_{66} ; 2(S_{11} - S_{12}) = S_{44} \quad (103)$$

Assim, com a utilização da notação usual de engenharia, ou notação técnica, em uma forma matricial, o tensor  $S_{ij}$  torna-se:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu'}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu'}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu'}{E} & -\frac{\nu'}{E} & \frac{1}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} \end{bmatrix} \quad (104)$$

onde  $E, E'$  = módulo de elasticidade no plano de isotropia e na direção normal a ele,

$\nu, \nu'$  = coeficiente de Poisson no plano de isotropia e na direção normal a ele e

$G, G'$  = módulo de elasticidade transversal no plano de isotropia e, também,

$$2(S_{11} - S_{12}) = S_{44} \quad (105)$$

ou

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (106)$$

Portanto, apenas 5 (cinco) coeficientes de  $S_{ij}$  são independentes.

É importante salientar que a expressão do módulo de elasticidade transversal  $G$  indica a isotropia no plano.

### 2.9.4. MATERIAL ISOTRÓPICO

Um material isotrópico é aquele em que todos os planos que passam por um ponto são isotrópicos (planos de simetria), ou seja, todas as direções são elasticamente equivalentes e principais.

Assim:

$$E' = E, G' = G \text{ e } \nu' = \nu, \quad (107)$$

tornando-se o tensor  $S_{ij}$ , em uma forma matricial, com o uso dos coeficientes de engenharia:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (108)$$

Portanto, o tensor  $S_{ij}$  passa a ter apenas 2 (dois) coeficientes independentes, ou seja, o módulo de elasticidade longitudinal  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$ , sendo que o módulo de elasticidade transversal  $G$  é definido como:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (109)$$



Alguns autores utilizam as constantes de Lamé  $\lambda$  e  $\mu$  para caracterizar um material isotrópico e seus coeficientes do tensor constitutivo, como por exemplo Cowin<sup>(9)</sup> que apresenta o tensor  $C_{ijkl}$  como:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (110)$$

onde:

$$\lambda = C_{iiii} = C_{ijij} \quad (111)$$

$$\mu = \frac{1}{2} (C_{iiii} - C_{ijij}) = \frac{1}{2} (C_{ii} - C_{ij}) \quad (112)$$

$\delta_{ij}$  = delta de Kronecker

Ainda a respeito dos materiais isotrópicos, mais particularmente ao coeficiente de Poisson, Ostrosablin<sup>(8)</sup>, através de cálculos algébricos define o intervalo para estes materiais como:

$$0 < \nu < \frac{1}{2}; \quad -1 < \nu < 0, \quad (113)$$

onde a primeira inequação representa o intervalo para um material isotrópico mais usual, enquanto a segunda inequação representa o intervalo para um material dito menos usual, como por exemplo uma barra cujo material sob tração apresenta alongamento em direções arbitrárias.

Com relação ao valor negativo da inequação, pode-se citar Bekhterev apud Ostrosablin<sup>(8)</sup>, que obteve coeficientes de Poisson negativos para materiais isotrópicos em ensaios de laboratório.

## 2.10. COMENTÁRIO A RESPEITO DOS VALORES ADMISSÍVEIS DO COEFICIENTE DE POISSON PARA OS MATERIAIS EM GERAL

De acordo com Abramchuk e Buldakov<sup>(14)</sup>, podem-se determinar intervalos admissíveis para os  $\nu_{ij}$  através de submatrizes oriundas do tensor constitutivo.

Neste sentido, tem-se a seguinte submatriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\nu_{12} \\ -\nu_{21} & 1 \end{bmatrix} > 0 \quad (C_2^6 = 15 \text{ inequações}) \quad (114)$$

Através de combinações lineares nesta submatriz, é possível descrever regiões de interesse introduzido um sistema dimensional cartesiano com 15 eixos sendo que os intervalos admissíveis estarão representados por paralelepípedos com lados iguais a  $2\sqrt{E_1/E_2}$ ,  $2\sqrt{E_3/E_2}$ ,  $2\sqrt{E_1/E_3}$ .

Além disto, os autores (Abramchuck e Buldakov<sup>(14)</sup>) apresentam o seguinte intervalo de variação:

$$-\sqrt{E_2/E_1} - \sqrt{E_3/E_2} - \sqrt{E_1/E_2} < \nu_{12} + \nu_{23} + \nu_{31} < \frac{1}{2} \left( \frac{E_1}{E_2} + \frac{E_2}{E_3} + \frac{E_3}{E_1} \right) \quad (115)$$

que consideram de uma abrangência mais efetiva que a inequação proposta por Rabinovich, descrita por:

$$\nu_{12} + \nu_{23} + \nu_{31} < \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{E_1}{E_3} \right) \quad (116)$$

com a condição de  $E_1 > E_2 > E_3$ .

Observa-se que, ao se dispor dos valores de  $\nu_{ij}$  e  $E_i$ , pode-se verificar a anisotropia do material.

## 2.11. INVARIANTES DE COEFICIENTES $S_{ij}$

Através da transformação de coordenadas, pode-se identificar algumas combinações dos coeficientes do tensor  $S_{ij}$  que se mantêm constantes quando o sistema de coordenadas é rodado.

Neste sentido, Lekhnitskii<sup>(10)</sup> determinou 4 (quatro) invariantes para os materiais ortotrópicos, os quais são mostrados a seguir:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= S'_{11} + S'_{22} + 2S'_{12} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{2\nu_{12}}{E_1}, \\
 I_2 &= S'_{66} - 4S'_{12} = \frac{1}{G_{12}} + \frac{4\nu_{12}}{E_1}, \\
 I_3 &= S'_{44} + S'_{55} = \frac{1}{G_{13}} + \frac{1}{G_{23}}, \\
 I_4 &= S'_{13} + S'_{23} = -\left(\frac{\nu_{13}}{E_1} + \frac{\nu_{23}}{E_2}\right) = -\frac{\nu_{31} + \nu_{32}}{E_3}.
 \end{aligned} \tag{117}$$

Além de Lekhnitskii<sup>(10)</sup> pode-se citar Ting<sup>(12)</sup>, que também, desenvolveu estudos para identificar alguns invariantes para os materiais anisotrópicos em geral, sendo que alguns deles são relativos aos materiais ortotrópicos, como mostrados a seguir.

$$I_5 = \frac{1}{4} S_{66} - S_{12} ,$$

$$I_6 = S_{13}^2 + S_{23}^2 + S_{36}^2 \tag{118}$$

$$I_7 = S_{11}^2 + S_{22}^2 + 2S_{12}^2 + S_{16}^2 + S_{26}^2 + \frac{1}{4} S_{66}^2$$

Observa-se que alguns deles são invariantes de 2ª ordem.

### **3. A ORTOTROPIA APLICADA À MADEIRA**

#### **3.1. INTRODUÇÃO**

Historicamente a madeira tem sido um material estrutural de grande uso e estuda por diversos pesquisadores a respeito de suas características tanto físicas como mecânicas.

As madeiras utilizadas comercialmente são classificadas em dois grupos: as coníferas ou "softwoods" e as dicotiledôneas ou "hardwoods". A distinção entre os dois grupos tem que ser feita através de suas características anatômicas, pois pode-se encontrar madeiras do grupo das "softwood" mais duras que as da "hardwood".

Devido a sua origem natural, as propriedades físicas da madeira frequentemente exibem uma grande variabilidade resultante em parte das condições de crescimento e de fatores ambientais como o clima, o solo, a água, quantidade e tipo de nutrientes disponíveis, etc. Além disto, deve-se levar em conta o aspecto hereditário, o qual pode resultar em diferenças nas propriedades físicas em madeiras da mesma espécie.

As suas características são estabelecidas pela complexidade da estrutura interna, resultando em um modelo anisotrópico. Desta forma, pode-se afirmar que existem diferentes níveis de anisotropia nesta estrutura. Mas, em função de suas particularidades, foram feitos estudos que adequaram a madeira ao modelo ortotrópico, através do conhecimento desta estrutura microscópica.

É possível prever as dificuldades para a utilização deste tipo de material, bem como para o seu estudo. No passado eram utilizadas poucas variedades de espécies. Atualmente a escassez de algumas espécies tem obrigado o emprego de madeiras até então não utilizadas, ou toras de pequenos diâmetros, como as de reflorestamento, implicando em um melhor estudo deste material.

Nos próximos itens serão abordados alguns aspectos desta constituição interna, baseados em Bodig & Jayne<sup>(15)</sup>, para que se possa entender melhor este estudo.

### **3.2. CONSTITUIÇÃO MACROSCÓPICA DA MADEIRA**

Em um corte transversal de um tronco de uma árvore, podem ser identificadas as camadas que compõem a estrutura macroscópica da madeira. Estas camadas são formadas durante o crescimento da árvore. São formadas, neste crescimento, camadas sucessivas, sobrepostas e concêntricas, chamadas anéis de crescimento. Na figura 17 está esquematizado um corte transversal de um tronco:

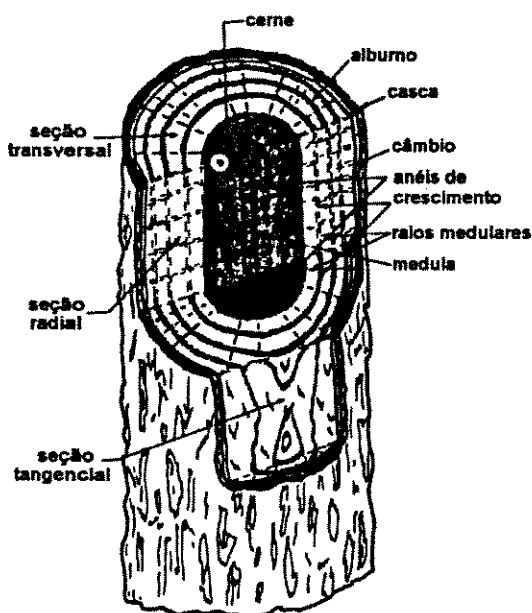


FIGURA 17 - As camadas constituintes da madeira  
Fonte: Bodig & Jayne<sup>(15)</sup>

Os anéis de crescimento formam um conjunto chamado lenho. Recobrendo o lenho existe a casca da árvore. Entre o lenho e a casca tem-se o câmbio, que é responsável pelo crescimento celular da árvore.

O lenho pode ser dividido em duas partes: a primeira, denominada albarno, constituída de camadas mais novas e mais externas enquanto que a segunda, denominada cerne, é formada por camadas mais antigas, mais internas. A seguir, é apresentada a constituição microscópica da madeira.

### 3.3. CONSTITUIÇÃO MICROSCÓPICA DA MADEIRA

A madeira é constituída internamente por células de forma alongada com a presença de vazios. As células apresentam formas e tamanhos variados de acordo com a classificação da árvore. Deste modo, identifica-se os elementos básicos mencionados a seguir.

As coníferas são formadas por traqueídeos (que atingem até 90% da sua constituição, os quais são células alongadas,) e por raios medulares que se dispõem radialmente em forma de fitas. Já as dicotiledôneas são compostas de vasos (que podem compor até 50% da sua constituição), de fibras e raios medulares.

Sob esta ótica, conclui-se que o arranjo de células nas coníferas é mais homogêneo do que nas dicotiledôneas. Isto é possível ser observado através das figuras 18 e 19.

Baseando-se nisto, pode-se antever que os estudos das propriedades físicas ou mecânicas da madeira estão relacionadas com o arranjo e com a composição das paredes celulares que formam os elementos básicos da mesma, como os traqueídeos e os raios medulares<sup>A</sup>.

---

<sup>A</sup>Para detalhes: Morey<sup>(16)</sup>



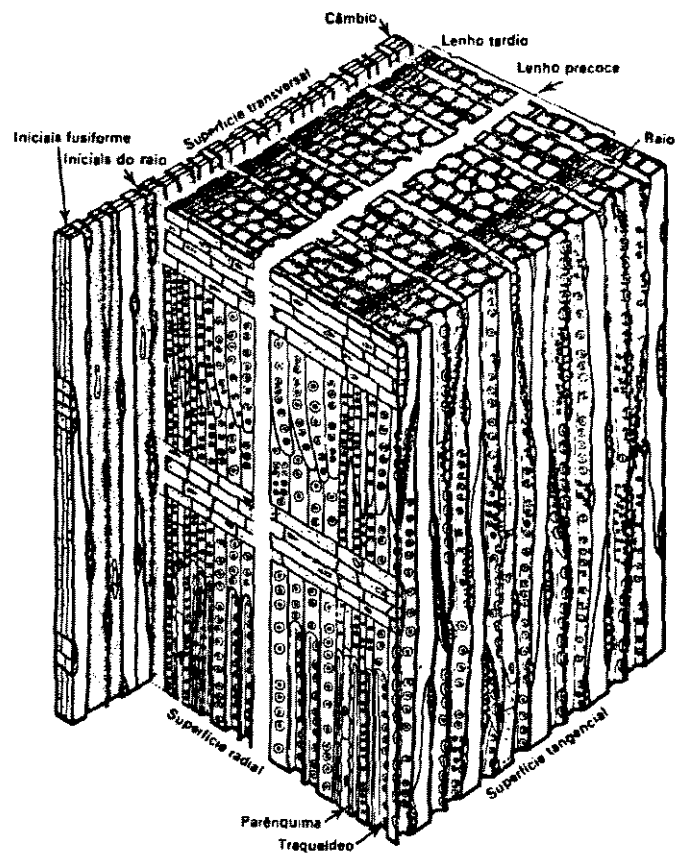


FIGURA 18 - Os elementos microscópicos das coníferas.  
 Fonte: Esau<sup>(17)</sup>

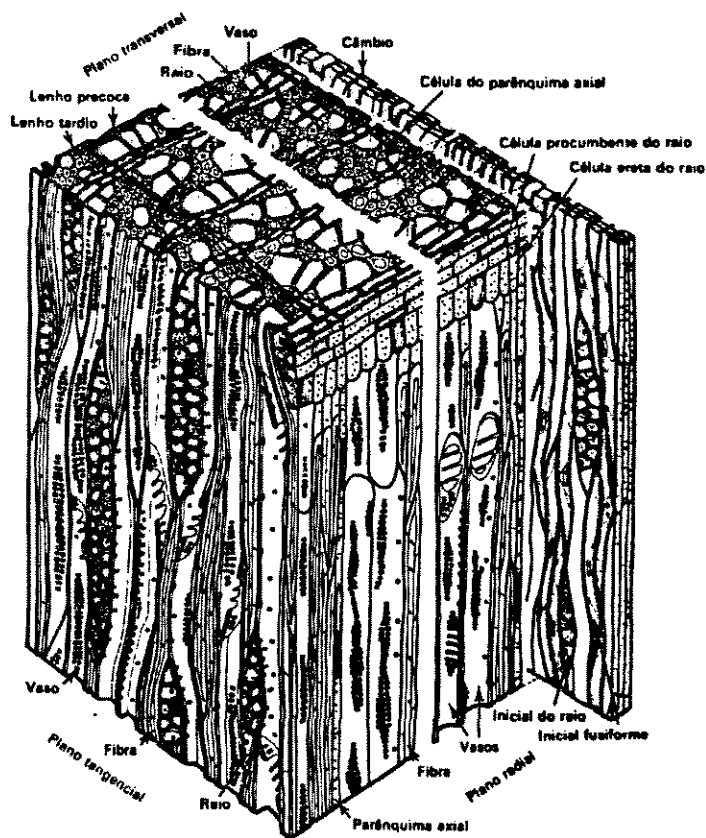


FIGURA 19 - Os elementos microscópicos das dicotiledôneas:  
Fonte: Esau (17)

A estrutura celular é formada por microfibrilas, ou fileiras paralelas de moléculas de celulose, que formam as lamelas (arranjos de várias centenas de microfibrilas, as chamadas camadas  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ .) sendo que o arranjo das moléculas de celulose na parede celular, em ordem crescente de complexidade, vai das microfibrilas até a parede celular de dimensões macroscópicas.

Deste modo, as características físicas da madeira estão relacionadas ao arranjo destas microfibrilas nas paredes celulares.

Por outro lado, a orientação da celulose nas fibras dos traqueídeos, a qual pode ser externada a um nível macroscópico pela disposição das camadas de crescimento da madeira, caracteriza a ortotropia da madeira.

Neste estudo é usado o modelo ortotrópico, a nível macroscópico, associado a eixos ortogonais, o que implica em uma aproximação, pelo fato dos anéis de crescimento da madeira apresentarem uma orientação curvilínea. Além disto, é considerada a madeira um material homogêneo, outra aproximação que pode ser utilizada.

A título de ilustração, é apresentada a figura 20, onde observa-se a variação de direção do arranjo das microfibrilas na camada  $S_2$ .



FIGURA 20 - A camada  $S_2$  e sua ortotropia  
Fonte: Bodig & Jayne<sup>(15)</sup>

### 3.4. A HOMOGENEIDADE DA MADEIRA

A validade do uso da suposição da homogeneidade da madeira foi estudada por alguns pesquisadores. Mascia<sup>(7)</sup>, por exemplo, cita Perkins que desenvolveu estudo neste sentido, partindo da análise das características estruturais em níveis macroscópicos até os microscópicos.

Além disto, Mascia<sup>(18)</sup> realizou experimentos em corpos de prova prismáticos levados à compressão axial, e seus resultados comparados aos obtidos através da análise pelo método de elementos finitos, (através do programa SAP90<sup>(19)</sup>), estão mostrados em um gráfico de deformação em função da distância do topo do corpo de prova ao centro do mesmo (figura 21) e comparados por resultados obtidos por Al-Dabbagh, Goodman & Bodig<sup>(20)</sup>.

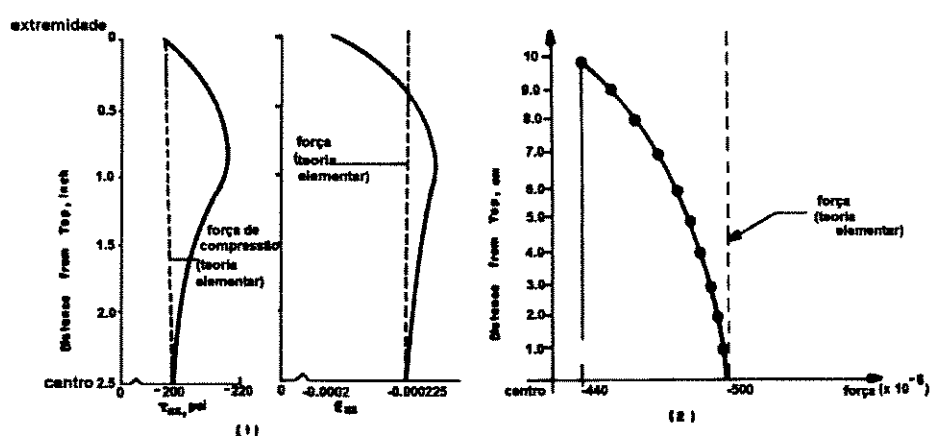


FIGURA 21 - Resultados de deformação: (1) Al-Dabbagh, Goodman & Bodig<sup>(20)</sup> e (2) Mascia<sup>(18)</sup>  
Fonte: Mascia<sup>(18)</sup>

Pode-se observar que os resultados indicam a homogeneidade no campo das deformações na região central dos corpos de prova submetidos a ensaios na compressão axial, comprovando assim a validade de se utilizar esta suposição na determinação das constantes de elasticidade da madeira.

### 3.5. A MADEIRA E OS TENSORES $S_{ij}$ e $S'_{ij}$

O estudo das propriedades de elasticidade da madeira pode ser balizado no modelo linear elástico e ortotrópico, como já mencionado anteriormente.

Baseando-se nisto, torna-se necessário adotar um sistema de eixos ortogonais coincidentes com as direções principais de elasticidade do material. Assim, pode-se admitir a coincidência dos eixos ortogonais de referência  $x_i$  ( $x_1, x_2, x_3$ ) com os eixos de simetria elástica, longitudinal (L), radial (R) e tangencial (T).

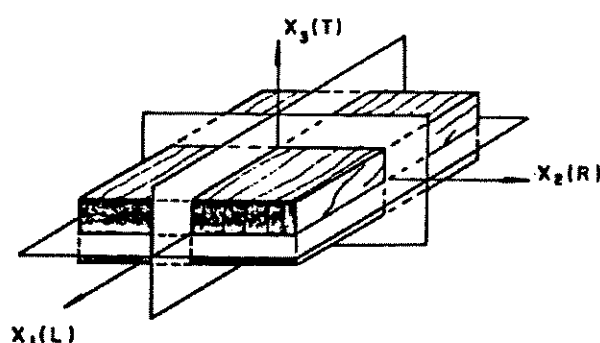


FIGURA 22 - Eixos ortotrópicos e planos de ortotropia na madeira  
Fonte: Bodig & Jayne<sup>(15)</sup>

Feito isto, e substituindo-se os subscritos nos termos da equação 98 têm-se agora especificamente para a madeira:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{1}{E_L} ; S_{21} = -\frac{\nu_{RL}}{E_R} = -\frac{\nu_{LR}}{E_L} ; S_{31} = -\frac{\nu_{TL}}{E_T} = -\frac{\nu_{LT}}{E_L} ; \\
S_{22} &= \frac{1}{E_R} ; S_{32} = -\frac{\nu_{RT}}{E_R} = -\frac{\nu_{TR}}{E_T} ; S_{33} = \frac{1}{E_T} ; \\
S_{44} &= \frac{1}{G_{LR}} ; S_{55} = \frac{1}{G_{RT}} ; S_{66} = \frac{1}{G_{TL}}
\end{aligned} \tag{119}$$

ou em uma forma matricial:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{RL}}{E_R} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LR}}{E_L} & \frac{1}{E_R} & -\frac{\nu_{TR}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_{RT}}{E_R} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LR}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{RT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TL}} \end{bmatrix} \tag{120}$$

Mas, nem sempre, os eixos ortogonais coincidem com os eixos principais em uma peça de madeira. Na prática ocorrem situações em que as direções das ações estão inclinadas em relação ao plano de simetria da peça, (March<sup>(21)</sup>).

Em vista disto, pode ocorrer uma rotação de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $x_3$ .

Posto isto, os termos  $S'_{54}$ ,  $S'_{61}$ ,  $S'_{62}$ ,  $S'_{63}$  tornam-se não nulos. O tensor  $S'_{ij}$  será, em uma forma matricial

$$S'_{ij} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ S'_{21} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ S'_{31} & S'_{32} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{54} & S'_{55} & 0 \\ S'_{61} & S'_{62} & S'_{63} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix}, \quad (121)$$

sendo que os termos de  $S'_{ij}$  com o uso das constantes de elasticidade tornam-se:

$$\begin{aligned} S'_{11} &= \frac{\cos^4 \theta}{E_L} + \left( \frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{TL}}{E_T} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{E_T} = \frac{1}{E'_1}; \\ S'_{22} &= \frac{\sin^4 \theta}{E_L} + \left( \frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{TL}}{E_T} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\cos^4 \theta}{E_T} = \frac{1}{E'_2}; \\ S'_{21} &= \left( \frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \frac{\nu_{TL}}{E_T} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{G_{LT}} = -\frac{\nu'_{21}}{E'_2}; \\ S'_{66} &= 4 \left( \frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - 2 \frac{\nu_{TL}}{E_T} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{LT}} (\sin^2 \theta \cos^2 \theta) = \frac{1}{G'_{12}}; \\ S'_{61} &= -2 \left( \frac{\cos^2 \theta}{E_L} - \frac{\sin^2 \theta}{E_T} \right) \sin \theta \cos \theta + \left( \frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{TL}}{E_T} \right) \sin \theta \cos \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ S'_{62} &= -2 \left( \frac{\sin^2 \theta}{E_L} - \frac{\cos^2 \theta}{E_T} \right) \sin \theta \cos \theta - \left( \frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{TL}}{E_T} \right) \sin \theta \cos \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ S'_{33} &= S_{33} = \frac{1}{E_3}; \\ S'_{44} &= \frac{\cos^2 \theta}{G_{LT}} + \frac{\sin^2 \theta}{G_{LR}} = \frac{1}{G'_{23}}; \\ S'_{55} &= \frac{\sin^2 \theta}{G_{LT}} + \frac{\cos^2 \theta}{G_{LR}} = \frac{1}{G'_{13}}; \\ S'_{54} &= \left( \frac{1}{G_{LT}} - \frac{1}{G_{LR}} \right) \sin \theta \cos \theta; \end{aligned} \quad (122)$$

$$S'_{32} = \frac{V_{RT}}{E_R} \cos^2 \theta - \frac{V_{RL}}{E_R} \sin^2 \theta = -\frac{V_{32}}{E_3} ;$$

$$S'_{31} = -\frac{V_{RT}}{E_R} \sin^2 \theta - \frac{V_{RL}}{E_R} \cos^2 \theta = -\frac{V_{31}}{E_3} ;$$

$$S'_{63} = 2 \left( \frac{V_{RL}}{E_R} - \frac{V_{RT}}{E_R} \right) \sin \theta \cos \theta .$$

Observa-se que o tensor  $S'_{ij}$  passou a ter 13 (treze) elementos diferentes de zero.

O fato de existirem determinados coeficientes não nulos, como  $S'_{61}$ , significa que as tensões tangenciais no plano  $x'_1 - x'_2$  produzem deformações normais nas direções de  $x'_1$ . Estas condições são obtidas da análise do tensor constitutivo e das relações tensão-deformação, de acordo com Hearmon<sup>(22)</sup>, March<sup>(21)</sup> e outros.

Admitindo-se, agora, que não ocorre coincidência nas direções de nenhum dos eixos principais com os ortogonais, como mostrado na figura 23, segundo exemplo dado por Goodman & Bodig<sup>(23)</sup>, os cossenos diretores serão:

$$l_{ij} = \left\{ \begin{array}{ccc} \cos \phi & -\sin \phi \sin \theta & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi \end{array} \right\} \quad (123)$$



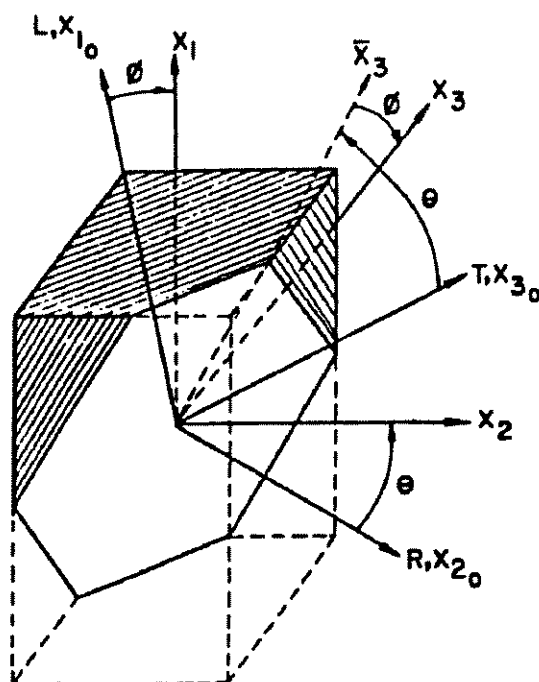


FIGURA 23 - Rotação dos eixos  $x'_i$  em um bloco de madeira  
 Fonte: Goodman & Bodig<sup>(23)</sup>

Em função disto, o tensor  $S'_{ij}$  pode passar a ter todos os seus 36 (tinta e seis) elementos não nulos, porém dependentes, haja visto que  $S'_{ij}$  foi obtido de um modelo ortotrópico com 9 (nove) elementos independentes.

Hearmon<sup>(22)</sup> também estudou o efeito da não coincidência das direções principais com as direções de referência (ou ortogonais), como é mostrado no item seguinte.

### 3.6. O EFEITO DA INCLINAÇÃO DAS FIBRAS

O efeito da inclinação das fibras na madeira tem sido objeto de estudos por vários pesquisadores desde a década de 20.

Dos estudos desenvolvidos até o momento, os resultados mais comuns de serem encontrados são os da variação do módulo elasticidade longitudinal  $E_l$ , como os obtidos por Jenkin apud Hearmon<sup>(22)</sup>, ou Kollmam apud Kollmam e Cotê<sup>(24)</sup>, em 1934.

Alguns coeficientes do tensor  $S'_{ij}$  também foram levantados em função da variação da inclinação das fibras, como os obtidos por Horig apud Hearmon<sup>(22)</sup>, em 1934.

Apresenta-se a seguir alguns gráficos obtidos pelos pesquisadores mencionados neste item:

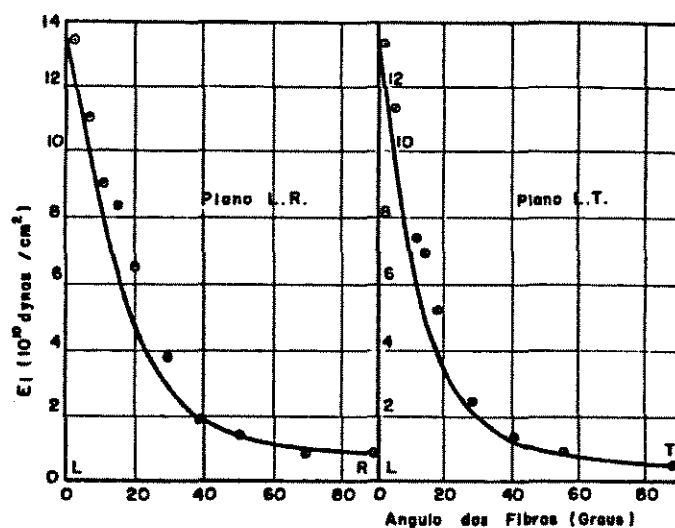


FIGURA 24 -Gráficos de  $S'_{ij}$  para as espécies Spruce, Mahogany, Ash e Walnut, teóricos e pontos experimentais  
Fonte: Hearmon<sup>(22)</sup>

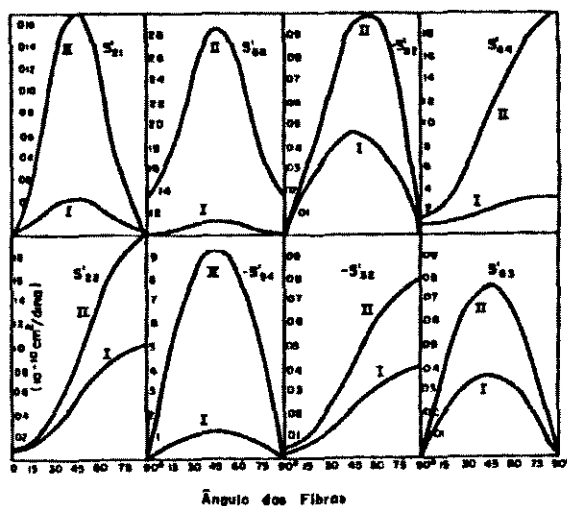


FIGURA 25 - Variação de  $E_i$  em função da variação do ângulo das fibras  
 Fonte: Hearmon<sup>(22)</sup>

Cabe observar que Horig, embora apresente os valores de  $S'_{21}$ ;  $S'_{61}$ ;  $S'_{62}$ ;  $S'_{63}$  e  $S'_{64}$  não os calculou, mas sim fez uma análise teórica exploratória do assunto. (Mascia<sup>(7)</sup>)

Pelos gráficos apresentados, os valores de  $S'_{21}$  chegam a ser negativos, apontando para a possibilidade da existência de valores negativos para coeficientes de Poisson.

A variação do módulo de elasticidade transversal  $G_{ij}$  em função da inclinação das fibras também foi estudada, mas no presente estudo não será abordada.

Para o desenvolvimento do estudo dos efeitos da inclinação das fibras, os pesquisadores utilizaram ensaios de laboratório, sendo oportuno uma análise a respeito dos métodos, apresentada no próximo capítulo.

### **3.7. ALGUNS VALORES DE CONSTANTES DE ELASTICIDADE OBTIDOS POR PESQUISADORES**

Do levantamento bibliográfico sobre o tema em estudo, foi possível obter razoável quantidade de dados que podem ser utilizados como parâmetro para verificação dos resultados existentes e aqueles obtidos nesta pesquisa.

Hearmon<sup>(22)</sup> sintetizou em uma tabela vários valores de constantes de elasticidade obtidas por diferentes pesquisadores. A seguir apresenta-se parte da mesma.

TABELA 2 - Valores das constantes de elasticidade da madeira obtidos por alguns pesquisadores ( $E_i$  e  $G_{ij}$  em dinas/cm<sup>2</sup>)

Fonte Hearmon<sup>(22)</sup>

ESPÉCIE	$E_L$	$E_R$	$E_T$	$\nu_{RT}$	$\nu_{RL}$	$\nu_{TR}$	$\nu_{TL}$	$\nu_{LR}$	$\nu_{LT}$	$G_{LT}$	$G_{LR}$	$G_{RT}$
Ash	15.8	1.51	0.80	0.71	0.051	0.36	0.030	0.46	0.51	0.89	1.34	0.27
Balsa	2.44	0.11	0.03	0.66	0.018	0.24	0.009	0.23	0.49	0.08	0.12	0.014
Beech	13.7	2.24	1.14	0.75	0.073	0.36	0.044	0.45	0.51	1.06	1.61	0.46
Khaya	10.2	1.13	0.51	0.60	0.033	0.26	0.032	0.30	0.64	0.60	0.90	0.21
Maple	10.0	1.52	0.87	0.82	0.093	0.40	0.038	0.46	0.50	1.10	1.22	0.29
Mahogany	12.4	0.97	0.48	0.084	0.024	0.41	0.022	0.31	0.55	0.47	0.61	0.15
Oak	5.3	2.14	0.97	0.064	0.13	0.30	0.086	0.33	0.50	0.76	1.29	0.39
Quipo	1.05	0.23	0.04	0.46	0.047	0.13	0.031	0.21	0.67	0.05	0.11	0.039
Sweetgum	11.7	1.35	0.59	0.68	0.044	0.31	0.023	0.33	0.40	0.79	1.16	0.27
Walnut	11.2	1.19	0.63	0.72	0.052	0.37	0.036	0.49	0.63	0.70	0.96	0.23
Douglas Fir	15.7	1.06	0.78	0.39	0.020	0.37	0.022	0.29	0.45	0.88	0.88	0.088
Fir	12.7	0.93	0.48	0.60	0.03	0.35	0.02	0.45	0.50	0.75	0.93	0.14
Spruce	9.9	0.73	0.41	0.57	0.031	0.29	0.013	0.44	0.56	0.61	0.50	0.022
Scots Pine	16.3	1.10	0.57	0.68	0.038	0.31	0.015	0.42	0.51	0.68	1.16	0.066
Birch	16.3	1.11	0.62	0.78	0.034	0.38	0.018	0.49	0.43	0.91	1.18	0.19
Sitka Spruce	11.6	0.90	0.50	0.43	0.029	0.25	0.020	0.37	0.47	0.72	0.75	0.039

Mascia<sup>(7)</sup> obteve resultados para algumas espécies brasileiras, conforme tabela 3:

TABELA 3 - Constantes de elasticidade da madeira  
Fonte: Mascia<sup>(7)</sup>

ESPÉCIE	$\nu_{LT}$	$\nu_{LR}$	$\nu_{RT}$	$\nu_{TL}$	$\nu_{RL}$	$\nu_{TR}$
IPÊ	0,4790	0,4345	0,6136	0,0270	0,0371	0,3532
ANGICO	0,4549	0,5089	0,8068	0,0239	0,0484	0,4975
PINUS	0,3346	0,3701	0,6393	0,0477	0,0858	0,4509
ESPÉCIE	$E_L$	$E_T$	$E_R$	$G_{LT}$	$G_{LR}$	$G_{RT}$
IPÊ	18043,9	960,5	1748,1	831,2	620,2	356,3
ANGICO	8558,5	462,1	759,0	727,1	512,4	248,6
PINUS	5471,0	737,6	1049,4	307,0	512,6	116,3

Pode-se constatar alguns fatos ao observar as tabelas apresentadas:

- A relação entre os módulos de elasticidade:

$$E_L > E_R \cong E_T$$

$$G_{LT} \cong G_{LR} > G_{RT}$$

$$\nu_{RT} > \nu_{LT} \cong \nu_{LR} \gg \nu_{RL} \cong \nu_{TL}$$

No próximo item serão abordados os métodos de ensaio para a determinação das constantes de elasticidade da madeira.

## 4. A DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DE ELASTICIDADE ATRAVÉS DE ENSAIOS DE LABORATÓRIO

### 4.1. INTRODUÇÃO

Segundo Hearmon<sup>(22)</sup>, os primeiros experimentos que atentaram para o fato da ortotropia na madeira com as 9 (nove) constantes de elasticidade foram realizados em 1920 por Jenkin e Carrington. Os métodos de ensaios utilizados por estes pesquisadores foram os de flexão estática e tração—compressão simples.

Anteriormente a esta época, outros pesquisadores já haviam feito experimentos em peças de madeira, com a finalidade de determinar os efeitos carga-deslocamento, como Galileu em 1638 e Hooke em 1678 (Hearmon<sup>(22)</sup>).

Evidentemente até o presente momento outros pesquisadores estudaram as constantes de elasticidade da madeira, apresentando várias formulações para sua determinação com o uso de diferentes métodos de ensaio.

Neste contexto, pode-se destacar o artigo de Lee<sup>(25)</sup> onde apresenta alguns destes métodos, dividindo-os em dinâmicos (vibração longitudinal, vibração na flecha e vibração na torção) e estáticos (tração, compressão, flexão e torção). Além deste pode-se citar Ashkenazi, Gershberg & Kapustin<sup>(26)</sup> que utilizam o método de propagação de ondas ultrasônicas e também Sinclair & Farshard<sup>(27)</sup>, que compararam 3 (três) diferentes métodos de ensaio.

Mascia<sup>(7)</sup> também utilizou diferentes métodos estáticos (compressão axial, e flexão) de ensaio em seus estudos, comparando os resultados e concluindo que, entre os métodos analisados, o de maior simplicidade é o de compressão axial.

## **4.2. O ENSAIO DE COMPRESSÃO AXIAL**

Como todo ensaio, o ensaio de compressão axial deve ser cuidadosamente elaborado para que os resultados advindos desse tipo de experimento sejam realmente confiáveis.

Cuidados especiais devem ser tomados na confecção dos corpos de prova, os quais necessitam ter suas faces comprovadamente paralelas e ângulos retos ao eixo de aplicação da carga.

A prensa utilizada no ensaio deve possuir um prato com suporte esférico para que se obtenha carregamento uniforme, principalmente nas extremidades do corpo de prova.

Goodman e Bodig, em 1969, e Prata, em 1990, apud Mascia<sup>(7)</sup>, alertaram para possíveis problemas relativos ao desenvolvimento de flexo-compressão em corpos de prova submetidos à compressão axial, devido a uma ineficiente centragem da carga de compressão. A figura 26 mostra esta situação.



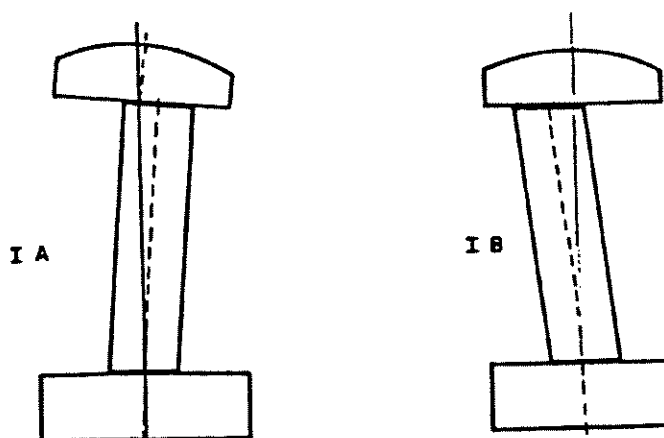


FIGURA 26 - Duas situações de corpo de prova não alinhado  
Fonte: Goodman & Bodig<sup>(23)</sup>

No que se refere à distribuição de tensões na peça ensaiada, deve ser dada atenção especial, neste sentido, às perturbações que usualmente aparecem nas regiões de contato entre os pratos da prensa e do corpo de prova.

### 4.3. DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES ELÁSTICAS ATRAVÉS DE ENSAIOS DE COMPRESSÃO AXIAL

#### 4.3.1. A DETERMINAÇÃO DOS MÓDULOS DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL $E_i$ E DOS COEFICIENTES DE POISSON $\nu_{ij}$

Com o uso de ensaios de compressão simples pode-se, adequadamente, determinar as constantes de elasticidade da madeira.

Considerando, então, um corpo de prova posicionado nos eixos geométricos ortogonais  $x_1, x_2, x_3$  coincidentes com os eixos de simetria elástica, ou direções principais, L (longitudinal), R (radial), T (tangencial), respectivamente, sob a ação de uma força axial  $\sigma_{11}$ , conforme figura 27.

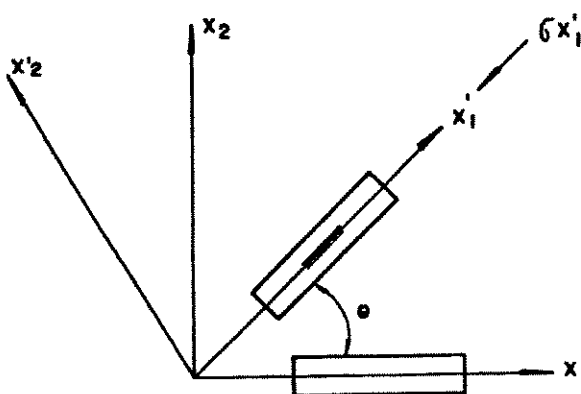


FIGURA 27 - Tensão  $\sigma_{11}$  axial ao eixo principal L aplicada a um sólido  
Fonte: Mascia<sup>(7)</sup>

é possível obter as deformações e os elementos do tensor  $S_{ij}$  através das seguintes relações:

$$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1, \quad \varepsilon_2 = S_{21}\sigma_1, \quad \varepsilon_3 = S_{31}\sigma_1 \quad (124)$$

sendo:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad S_{31} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \quad (125)$$

onde

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \nu_{13} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}, \quad E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \quad (126)$$

Com as devidas substituições e simplificações:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, S_{21} = \frac{-\varepsilon_2}{E_1} = -\frac{\varepsilon_2}{\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \varepsilon_1} = -\frac{\varepsilon_2}{\sigma_1}, S_{31} = \frac{-\varepsilon_3}{E_1} = -\frac{\varepsilon_3}{\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \varepsilon_1} = -\frac{\varepsilon_3}{\sigma_1} \quad (127)$$

Agora, com a utilização da notação relacionada aos eixos de simetria da madeira tem-se:

$$\nu_{LR} = -\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_L}, \nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L}, E_L = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \quad (128)$$

e também:

$$S_{11} = \frac{1}{E_L}, S_{21} = -\frac{\nu_{LR}}{E_L} = -\frac{\varepsilon_R}{\sigma_1}, S_{31} = -\frac{\nu_{LT}}{E_L} = -\frac{\varepsilon_T}{\sigma_1} \quad (129)$$

### 4.3.2. MÓDULOS DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL

Diferentemente do módulo de elasticidade longitudinal  $E_i$  e do coeficiente de Poisson  $\nu_{ij}$ , a determinação do módulo de elasticidade transversal  $G_{ij}$ , através de ensaios de laboratório, necessita de uma formulação e análise um pouco mais complexa. Para a sua determinação pode-se utilizar a análise via roseta de deformação ou uma análise via transformação tensorial do tensor compliance  $S_{ij}$ .

#### 4.3.2.1. ANÁLISE VIA ROSETA DE DEFORMAÇÃO

Das relações tensão-deformação, nas direções principais, têm-se as seguintes expressões envolvendo o módulo de elasticidade transversal  $G_{ij}$ :

$$\varepsilon_4 = S_{44} \sigma_4, \varepsilon_5 = S_{55} \sigma_5, \varepsilon_6 = S_{66} \sigma_6 \quad (130)$$

onde :

$$S_{ii} = \frac{1}{G_{ij}} \quad (131)$$

Observe-se que em um sistema onde a compressão axial coincide com uma das direções principais, não é possível determinar o módulo de elasticidade transversal  $G_{ij}$  através das equações 122, pelas mesmas envolverem tensões e deformações (distorções) tangenciais. Para que a determinação seja possível deve-se equacionar a relação tensão-deformação em um plano, com as direções principais não coincidentes com a direção da ação (força) de compressão.

Assim, com o uso das relações:

$$\varepsilon_4 = S_{44} \sigma_4 \quad (132)$$

ou

$$S_{44} = \frac{\varepsilon_4}{\sigma_4} \quad (133)$$

em um plano  $x_1 - x_2$ , têm-se:

$$\varepsilon'_4 = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \varepsilon_4 (\cos^2 \theta - \theta \operatorname{sen}^2 \theta) \quad (134)$$

e:

$$\sigma'_4 = (\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \sigma_4 (\cos^2 \theta - \theta \operatorname{sen}^2 \theta) \quad (135)$$

Através de substituições adequadas entre as equações 133, 134 e 135 obtém-se:

$$S_{44} = \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \varepsilon_4 (\cos^2 \theta - \theta \operatorname{sen}^2 \theta)}{(\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \sigma_4 (\cos^2 \theta - \theta \operatorname{sen}^2 \theta)} \quad (136)$$

Como, apenas, a compressão axial  $\sigma_1 \neq 0$ , tem-se que :

$$\sigma_4 = \sigma_2 = \varepsilon_4 = 0 \quad (137)$$

Assim:

$$G'_4 = \frac{\sigma_1}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} = \frac{1}{S_{44}} \quad (138)$$

Observe-se que a equação 138 não é função do ângulo  $\theta$  a qual dá a entender que o módulo de elasticidade transversal  $G'_4$  independe da variação do ângulo das fibras. Esta análise é incorreta, pois, se assim fosse, estar-se-ia determinando o módulo elasticidade transversal  $G'_{ij}$  para diferentes planos  $x_i - x_j$ . Assim, deve-se ater ao fato da madeira não ser um material isotrópico, sendo necessária a preparação dos corpos de prova com as direções principais não coincidentes com a direção da carga aplicada.

Desta maneira relacionando as equações 134, 135, 136 e 138, é possível estabelecer a seguinte expressão:

$$G'_4 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)\text{sen}2\theta + 2\sigma_4 \text{cos}2\theta}{4(\varepsilon'_2 - \varepsilon_2 \text{cos}^2\theta - \varepsilon_2 \text{sen}^2\theta) \cot g2\theta + 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\text{sen}2\theta} \quad (139)$$

Vale registrar que esta expressão é aplicada para os demais planos principais  $(x_2 - x_3)$  e  $(x_3 - x_1)$ , desde que feitas as adequações convenientes.

Devido ao fato de quando ocorrer coincidência entre os eixos de referência e os eixos de simetria elástica (eixos principais) em que se estabelece um módulo de elasticidade transversal  $G_{ij}$  para um plano principal de elasticidade e, devido à equação 139 para um ângulo de  $45^\circ$  semelhante à equação 138, pode-se determinar o módulo de elasticidade transversal  $G_{ij}$  por esta última (equação 138), desde que neste corpo de prova as fibras estejam inclinadas a  $45^\circ$ .

Para maior clareza observe a figura 28 onde mostra-se um corpo de prova cujas fibras estão inclinadas a  $45^\circ$  em um plano  $(x_1 - x_2)$ .

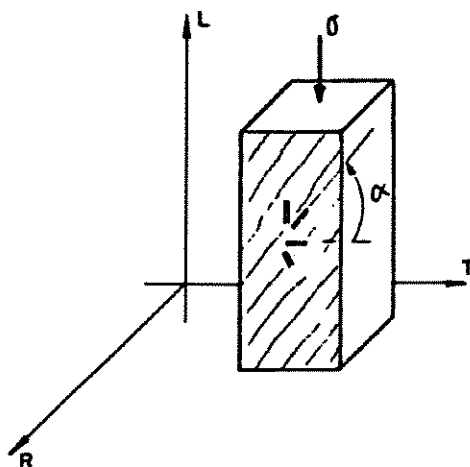


FIGURA 28 - Posição usual de ensaio de um corpo de prova com as fibras inclinadas  $45^\circ$ .  
Fonte: Mascia<sup>(7)</sup>

Com a colocação de medidores de deformação nas direções dos eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e na direção das fibras (inclinação de  $\theta$ ) determina-se  $G_{ij}$  pela equação 133. Pode-se utilizar, ainda, um quarto medidor como mostra-se na figura 28 com a finalidade de se verificar a invariância das deformações em eixos ortogonais.

#### 4.3.2.2. ANÁLISE VIA TRANSFORMAÇÃO TENSORIAL DE $S_{ij}$

Reportando-se às equações 88, onde foram discretizados os coeficientes do tensor compliance  $S_{ij}$ , observa-se que as mesmas são funções trigonométricas. Assim, ao se focar o coeficiente  $S'_{11}$ , tem-se:

$$S'_{11} = \frac{\cos^4 \theta}{E_L} + \left( \frac{1}{G_{LR}} - \frac{2\nu_{RL}}{E_R} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{E_R}, \quad (140)$$

sendo que uma das constantes presentes é o módulo de elasticidade transversal  $G_{LR}$ . Deste modo, se os outros termos da equação 140 são conhecidos, o módulo  $G_{LR}$  pode ser obtido. Os outros módulos  $G_{ij}$  são determinados da transformação de adequados coeficientes do tensor compliance  $S_{ij}$  em planos desejados.

Com este objetivo, é necessário um ensaio de compressão axial em corpo de prova de madeira onde as fibras estejam inclinadas em relação aos eixos geométricos.

Assim, de um ensaio em um corpo de prova posicionado, conforme a figura 29:

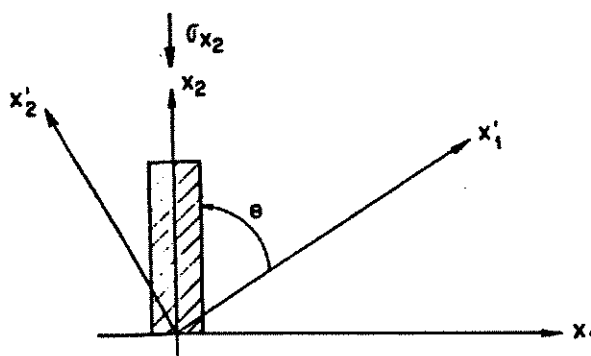


FIGURA 29 - Corpo de prova na posição de ensaio  
Fonte: Mascia(7)

determina-se  $G_{ij}$ , através das seguintes expressões:

$$S'_{11} = \frac{1}{E'_{x_1}} = \frac{\epsilon'_{x_1}}{\sigma'_{x_1}} \quad (141)$$

e

$$\frac{1}{G'_{x_1x_2}} = \frac{1}{E'_{x_1} (\text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta)} - \frac{\cos^4 \theta}{E_{x_1} (\text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta)} - \frac{\text{sen}^4 \theta}{(\text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta)} + \frac{2 \nu_{x_1x_2}}{E_{x_2}} \quad (142)$$

Com base na teoria até aqui desenvolvida, fica relativamente simples desenvolver os ensaios para a determinação das constantes de elasticidade em questão.



## 5. EXPERIMENTAÇÃO E RESULTADOS

### 5.1. INTRODUÇÃO

Com o propósito de se investigar algumas constantes de elasticidade da madeira, as relações entre estas e a variação numérica dos valores do coeficiente de Poisson em função da variação do ângulo das fibras, foram programados ensaios de compressão axial em peças prismáticas de madeira.

A opção, na presente pesquisa, pelo ensaio de compressão axial deve-se ao fato de que, dentre a gama dos ensaios existentes e adequados, ser o de maior praticidade, tanto na execução como na confecção dos corpos de prova. Além disto, ser um ensaio puro, onde se tem a relação direta entre a leitura da carga e a medição de deformação.

### 5.2. OBTENÇÃO DE ALGUMAS CONSTANTES ELÁSTICAS E VERIFICAÇÃO DA SIMETRIA DO TENSOR COMPLIANCE

$S_{ij}$

Os cuidados e as dificuldades em relação à preparação dos corpos de prova (CPs), bem como à realização dos ensaios, levaram à adoção de ensaios de caráter preliminar. Nestes ensaios foram obtidas algumas constantes de elasticidade, as quais propiciaram uma apreciação de parte dos coeficientes do tensor compliance  $S_{ij}$ .

### 5.2.1. EQUIPAMENTOS E INSTRUMENTAÇÃO

Nos ensaios de compressão simples desta fase preliminar, utilizou-se uma máquina universal de ensaio HECKERT com capacidade de 200N e possuidora de uma prato rotulado . A figura 30 ilustra um corpo de prova no momento do ensaio.

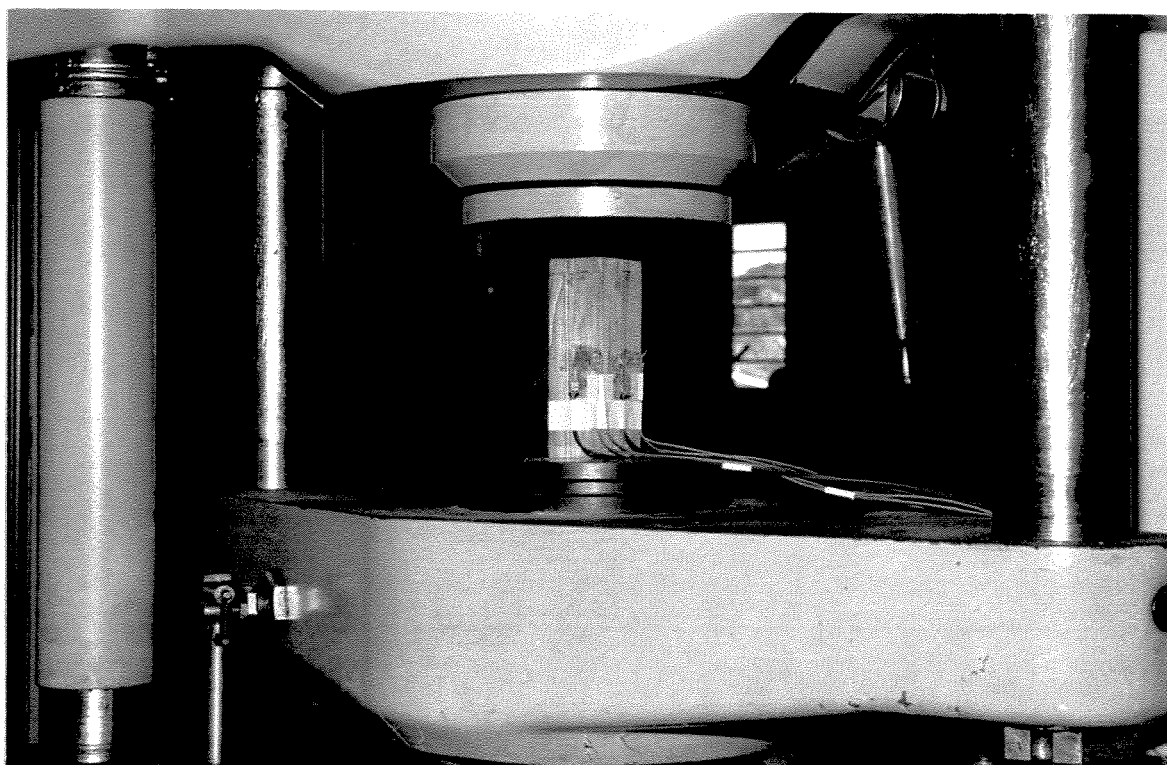
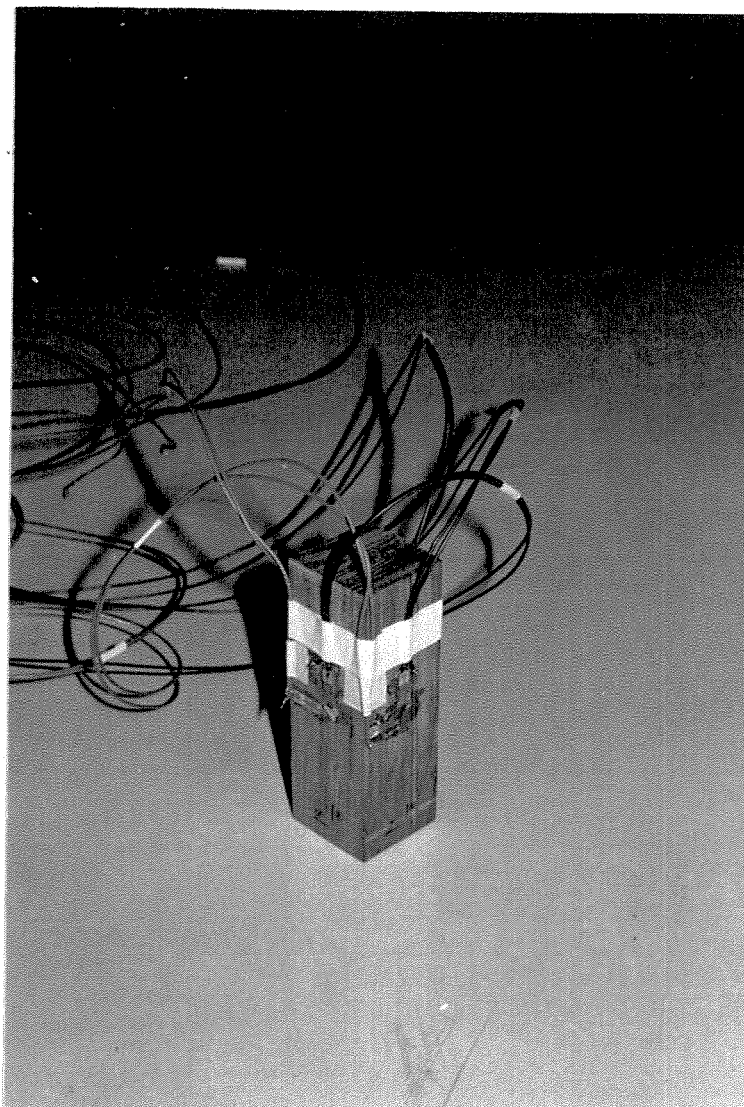


FIGURA 30 - Foto de um corpo de prova no momento do ensaio

Para a medição das deformações foram utilizados extensômetros elétricos de resistência (strain gages) da marca SHINKOH, tipo S-108 com 10mm de comprimento, fator  $K=2,00$ , resistência elétrica  $120\Omega$ .

Para as leituras foram utilizados ponte e comutador da marca HUGGENBERGER ZURICH, modelo JT72925. A figura 31 ilustra um corpo de prova instrumentado.



**FIGURA 31 - Foto de um corpo de prova instrumentado**

### 5.2.2. CORPOS DE PROVA EMPREGADOS

Nesta fase de ensaios foram utilizados 3 (três) corpos de prova de madeira da espécie Angico Vermelho (*Parapiptadenia rígida*) com dimensões nominais 4cm x 4cm x 12cm, com a maior dimensão nas direções principais como pode ser visto na figura 32. Os CPs foram obtidos de uma peça de madeira com aproximadamente 20cm x 20cm x 35cm, que havia sido serrada de um tronco com diâmetro aproximado de 70cm e comprimento de 120cm.

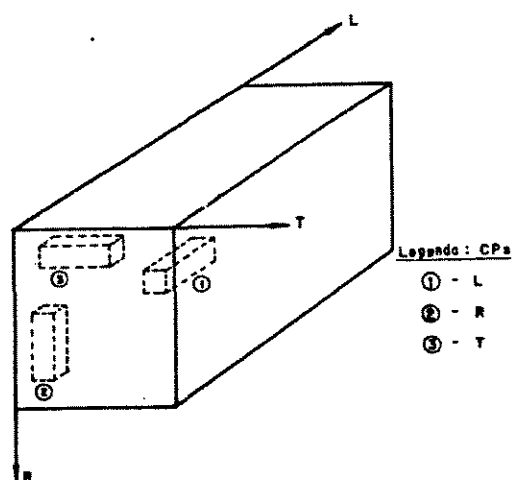


FIGURA 32 - Corpos de prova retirados nas direções principais  
Fonte: Mascia<sup>(7)</sup>

A preparação foi feita com uso de serra de fita, serra circular e desempenadeira.

Para se obter uma perfeita aderência na colagem dos extensômetros, as faces dos corpos de prova foram lixadas e polidas. Além disto, o teor de umidade estava em torno de 12%.

As deformações foram obtidas através de extensômetros elétricos de resistência (strain gages) posicionados em faces (planos) de interesse, perfazendo um total de 5 (cinco) extensômetros em cada corpo de prova.

### 5.2.3. O POSICIONAMENTO DOS EXTENSÔMETROS

Na figura 33, mostra-se um corpo de prova com os extensômetros posicionados, além da direção da carga de compressão.

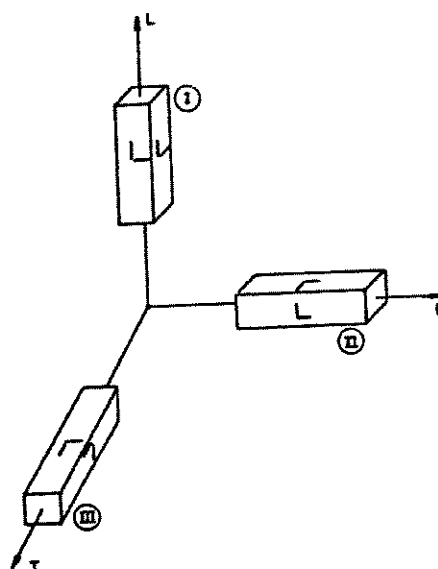


FIGURA 33 - Posição dos corpos de prova e dos extensômetros  
Fonte: Mascia<sup>(7)</sup>

Observa-se que o módulo de elasticidade longitudinal pode ser obtido através dos deslocamentos advindos dos extensômetros na direção axial à carga (extensômetros ativos). Em conjunto com as leituras dos extensômetros perpendiculares à carga (extensômetros passivos) é possível determinar os coeficientes de Poisson relativos aos planos.

Assim, das equações 119, têm-se:

$$v_{LR} = -\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_L}, \quad (143)$$

e

$$v_{LT} = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L}, \quad (144)$$

também

$$E_L = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_L} \quad (145)$$

Dos resultados obtidos pode-se determinar ainda:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_L}, \\ S_{21} &= -\frac{v_{LR}}{E_L} = -\frac{\varepsilon_R}{\sigma_1}, \\ S_{31} &= -\frac{v_{LT}}{E_L} = -\frac{\varepsilon_T}{\sigma_1} \end{aligned} \quad (146)$$

De posse destes resultados e dos obtidos nos ensaios nos outros dois corpos de prova têm-se os seguintes coeficientes do tensor compliance:

$$S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{13}, S_{21}, S_{31}, S_{23} \text{ e } S_{32} \quad (147)$$

Além disto, verifica-se a simetria do tensor constitutivo.

### 5.2.4. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Na tabela 4 estão apresentados os valores das 9 (nove) constantes de elasticidade obtidas. Na tabela 5 estão apresentados os valores dos coeficientes do tensor compliance.

TABELA 4 - Valores das constantes de elasticidade da madeira de espécie Angico Vermelho  
Valores de  $E_i$  em MPa

$E_L$	$E_T$	$E_R$	$\nu_{LT}$	$\nu_{LR}$	$\nu_{RT}$	$\nu_{TL}$	$\nu_{RL}$	$\nu_{TR}$
10287,4	840,0	1735,6	0,5019	0,3854	0,7042	0,0404	0,0444	0,4000

TABELA 5 - Verificação da simetria do tensor  $S_{ij}$

PLANO LR		PLANO RT		PLANO TL	
$\frac{\nu_{LR}}{E_L}$	$\frac{\nu_{RL}}{E_R}$	$\frac{\nu_{RT}}{E_R}$	$\frac{\nu_{TR}}{E_T}$	$\frac{\nu_{TL}}{E_T}$	$\frac{\nu_{LT}}{E_L}$
2,943	2,558	0,320	0,476	3,968	4,879

### 5.2.5. COMENTÁRIOS DOS RESULTADOS OBTIDOS

Pelas dificuldades apresentadas nesta fase experimental, são possíveis alguns comentários a respeito dos resultados obtidos:

-Pelos valores obtidos durante os ensaios, ficou maii uma vez evidenciada a característica anisotrópica da madeira.

-Os valores do tensor constitutivo permitem verificar a simetria, se considerado o fato de se estar trabalhando com um pequeno número de corpos de prova. Sendo assim, o modelo ortotrópico é adequado à madeira.

-Mascia<sup>(7)</sup> havia obtido os valores destas constantes de elasticidade para a espécie Angico Vermelho (tabela 3) e, em comparação aos apresentados nesta pesquisa observou-se uma boa convergência dos resultados.

-Em uma investigação a respeito do intervalo de aceitação dos valores do coeficiente de Poisson, como salientado no item 2.10, tem-se:

$$\nu_{12} = \nu_{LR} = 0,3854 ; \nu_{23} = \nu_{RT} = 0,7042 ; \nu_{31} = \nu_{TL} = 0,0404 ;$$

$$E_1 = E_L = 10287,4 \text{ MPa}; E_2 = E_R = 1735,6 \text{ MPa}; E_3 = E_T = 840,0 \text{ MPa}$$

Assim, obtendo-se:

$$-4,1578 < \nu_{12} + \nu_{23} + \nu_{31} < 6,4498$$

onde  $\nu_{12} + \nu_{23} + \nu_{31} = 1,1300$

Para efeito de comparação, utilizando-se os valores fornecidos por Hearmon<sup>(19)</sup> para as espécies Ash e Oak, mostrados na tabela 2, obtêm-se respectivamente os seguintes intervalos:

$$-4,1970 < \nu_{12} + \nu_{23} + \nu_{31} < 6,1486$$

onde  $\nu_{12} + \nu_{23} + \nu_{31} = 1,200$  e

$$-2,8824 < \nu_{12} + \nu_{23} + \nu_{31} < 2,4329$$

onde  $\nu_{12} + \nu_{23} + \nu_{31} = 0,480$ ,



verificando-se, tanto nos valores obtidos neste trabalho como nos valores mencionados por Hearmon<sup>(22)</sup>, a validade das equações apresentadas por Abramchuk & Buldakov<sup>(14)</sup>.

-Ficou evidenciada a existência da possibilidade de desvios nas leituras devido à curvatura aos anéis de crescimento e pelo fato de estarmos trabalhando com coordenadas ortogonais, em relação ao plano RT (Radial-Tangencial).

-Outra comprovação possível foi com relação à dificuldade da retirada dos corpos de prova em posições corretas. Uma inclinação de apenas 5° das fibras proporciona uma grande variação dos valores dos módulos, Mascia<sup>(7)</sup>.

### **5.3. OS VALORES DO COEFICIENTE DE POISSON EM FUNÇÃO DA VARIAÇÃO DO ÂNGULO DAS FIBRAS**

Com a teoria apresentada anteriormente, especificamente no que tange à transformação de coordenadas, pode-se agora desenvolver uma pesquisa referente à variação dos valores do coeficiente de Poisson em função da variação da direção do ângulo das fibras.

Neste item serão apresentados os resultados obtidos, bem como uma análise dos coeficientes  $S'_{11}$  e  $S'_{12}$  pertencentes ao tensor compliance após uma transformação de coordenadas.

#### **5.3.1. EQUIPAMENTOS E INSTRUMENTAÇÃO**

Nesta fase de ensaios de compressão axial utilizou-se máquina universal AMSLER com capacidade de carga de 250N, possuidora de uma

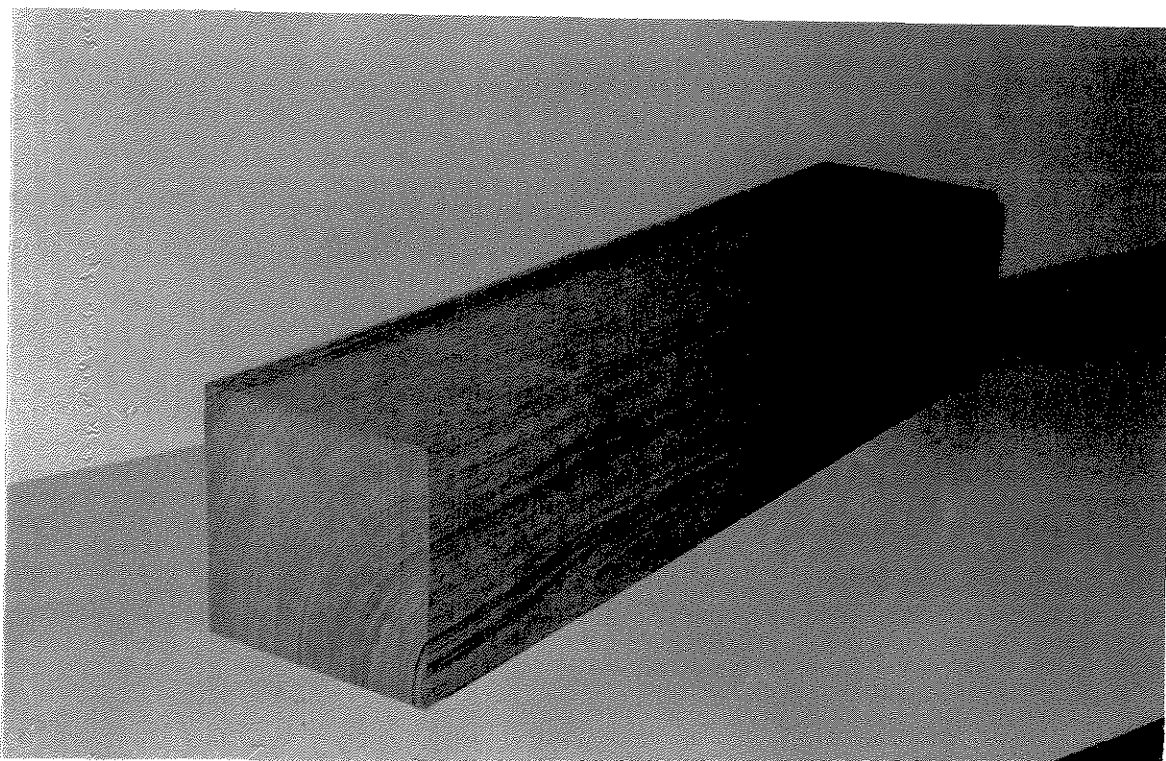
bandeja rotulada. A ilustração é a mesma do item anterior (figura 30), sendo que a máquina tem pequenas diferenças com relação à anterior.

Para a medição das deformações foram utilizados extensômetros elétricos de resistência (strain gages) da marca SHINKOCH, tipo S116 com 20mm de comprimento, fator  $K=2,02$ , e resistência elétrica de  $120\Omega$ .

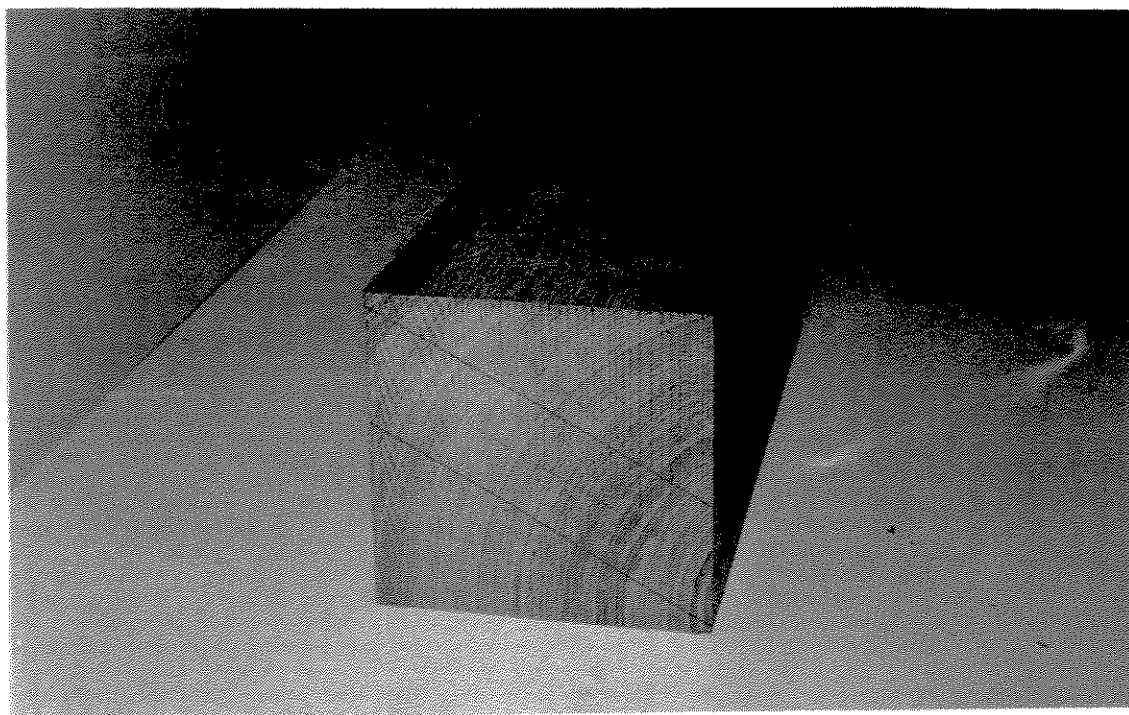
Além disto, foram utilizados ponte e comutador da marca KYOWA, modelos SM60D e SS24R, respectivamente.

### **5.3.2. CORPOS DE PROVA EMPREGADOS**

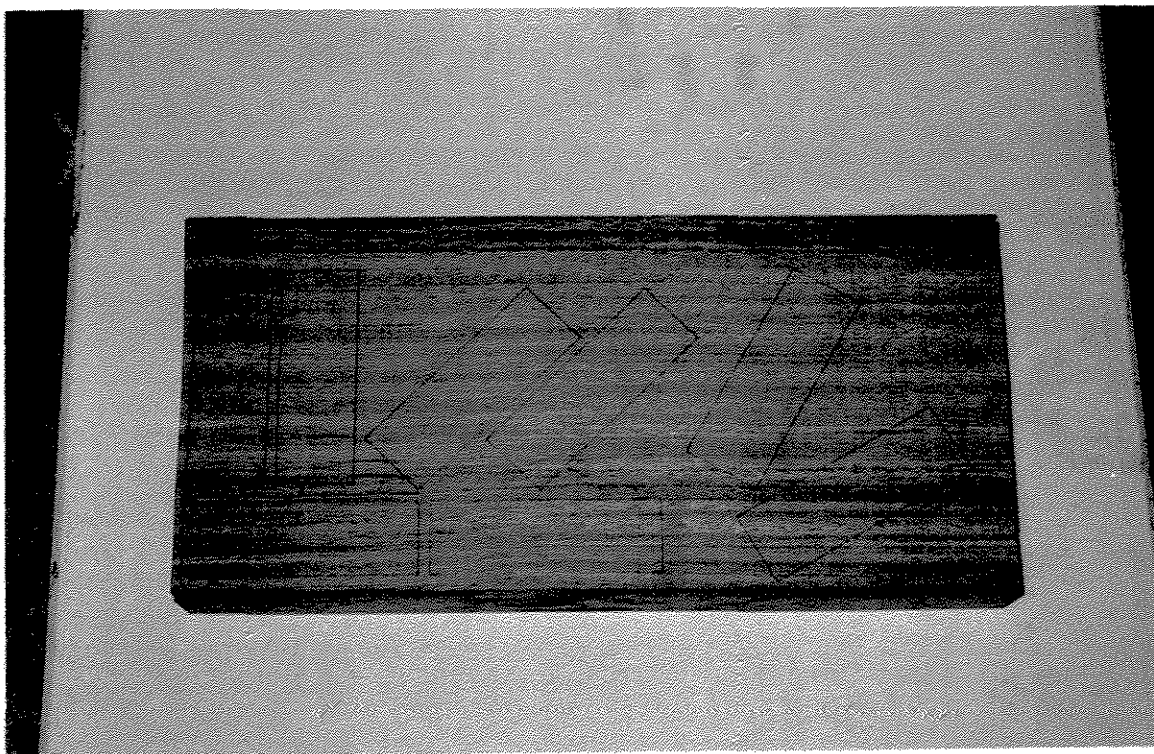
Para cumprir a determinação dos coeficientes agora necessários, foram utilizados 21 (vinte e um) corpos de prova com dimensões nominais 4cm x 4cm x 12cm todos da espécie Jatobá (*Hymenaea stilbocarpa*), sendo que 14 (catorze) foram retirados de uma peça com dimensões aproximadas de 15cm x 15cm x 120cm, conforme ilustra as figura 34. Desta peça foram cortadas duas partes pertencentes aos planos LR (longitudinal x radial) e LT (longitudinal x tangencial), sendo que de cada plano foram retirados 7 (sete) corpos de prova em inclinações de  $15^\circ$ , de um intervalo de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  (figuras 35 e 36).



**FIGURA 34** - Foto da peça de madeira espécie Jatobá com dimensões 15cm x 15cm x 120cm, de onde foram retirados dois planos, LR e LT



**FIGURA 35 - Foto da posição de corte de um dos planos (LR) retirados da peça de madeira da espécie Jatobá**



**FIGURA 36** - Foto mostrando a posição dos corpos de prova em um dos planos (madeira da espécie Jatobá)

Outros 7 (sete) corpos de prova restantes foram obtidos, mas desta vez, de uma peça de 6cm x 16cm x 120cm no plano LR (longitudinal x radial).

Para a preparação dos corpos de prova foi utilizado o mesmo procedimento mencionado no item 5.2.2.

### 5.3.3. O POSICIONAMENTO DOS EXTENSÔMETROS

Nestes ensaios foram utilizados apenas dois extensômetros em cada corpo de prova posicionados na face de interesse, conforme mostrado na figura 37.

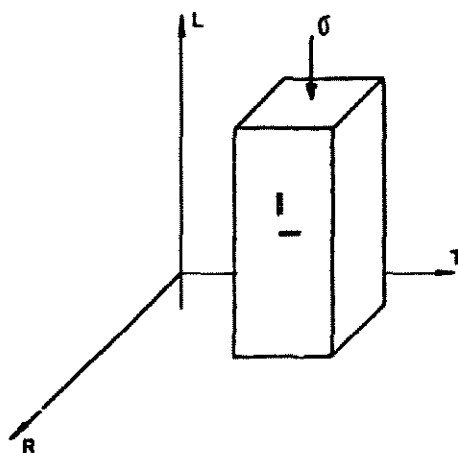


FIGURA 37 - Posição dos extensômetros nos corpos de prova para determinação dos coeficientes de Poisson nas faces de interesse

Das leituras obtidas podem-se determinar os seguintes termos:

$$\begin{aligned} \nu'_{12} &= -\frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon'_1} , \\ E'_1 &= \frac{\sigma'_1}{\varepsilon'_1} , \\ S'_{11} &= \frac{\varepsilon'_1}{\sigma'_1} , \\ S'_{12} &= \frac{\varepsilon'_2}{\sigma'_1} \end{aligned} \tag{148}$$

e do corpo de prova a 45° :

$$G'_{12} = \frac{\sigma'_1}{2(\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2)} \tag{149}$$

Os resultados são comparados com os valores teóricos obtidos através das equações 88:

#### 5.3.4. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

A seguir estão apresentados os resultados obtidos para os coeficientes  $\frac{1}{S'_{11}}$  ,  $\frac{1}{S'_{12}}$  e para os coeficientes de Poisson  $\nu'_{ij}$  de acordo com o plano analisado, em forma de tabelas. Logo a seguir têm-se os resultados em gráficos, através dos quais se fará uma comparação com os dados teóricos para os dois valores possíveis de  $S'_{ij}$  , ou seja  $\frac{\nu'_{ij}}{E'_i}$  e  $\frac{\nu'_{ji}}{E'_j}$  .

### 5.3.4.1. OS ELEMENTOS $\frac{1}{S'_{11}}$

Tabela 6 - Valores de  $\frac{1}{S'_{11}} = E'$  em função das variações do ângulo das fibras em dois planos principais (LR e LT)

ÂNGULO → PLANO ↓	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
<b>LR*</b>	18359	12422	4318	2078	2659	2704	2900
<b>LT*</b>	20992	16105	4521	837	1083	1610	1339
<b>LR</b>	11604	6775	6281	2073	1477	2077	1960

\* Planos pertencentes à mesma peça de madeira

### 5.3.4.2. OS ELEMENTOS $\frac{1}{S'_{12}}$

Tabela 7- Valores de  $\frac{1}{S'_{12}}$  em função das variações do ângulo das fibras em dois planos principais (LR e LT)

ÂNGULO → PLANO ↓	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
<b>LR*</b>	-42834	-26618	-10923	-8314	-13295	-31120	-62361
<b>LT*</b>	-26989	-21473	-14065	-8482	-15704	-21216	-21419
<b>LR</b>	-33751	-15245	-11084	-12436	-15508	-19334	-35308

\* Planos pertencentes à mesma peça de madeira



### 5.3.4.3. OS COEFICIENTES DE POISSON $\nu_{ij}$

Tabela 8 - Valores de  $\nu_{ij}$  em função das variações do ângulo das fibras em dois planos principais (LR e LT)

<i>ÂNGULO</i> → <i>PLANO</i> ↓	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
<b>LR*</b>	-0.4286	-0.4667	-0.3953	-0.2500	-0.2000	-0.0869	-0.0465
<b>LT*</b>	-0.7778	-0.7500	-0.3214	-0.0967	-0.0690	-0.0759	-0.0625
<b>LR</b>	-0.3438	-0.4444	-0.5667	-0.1667	-0.0952	-0.1074	-0.0555

\* Planos pertencentes a mesma peça de madeira

## 5.3.4.4. os gráficos obtidos

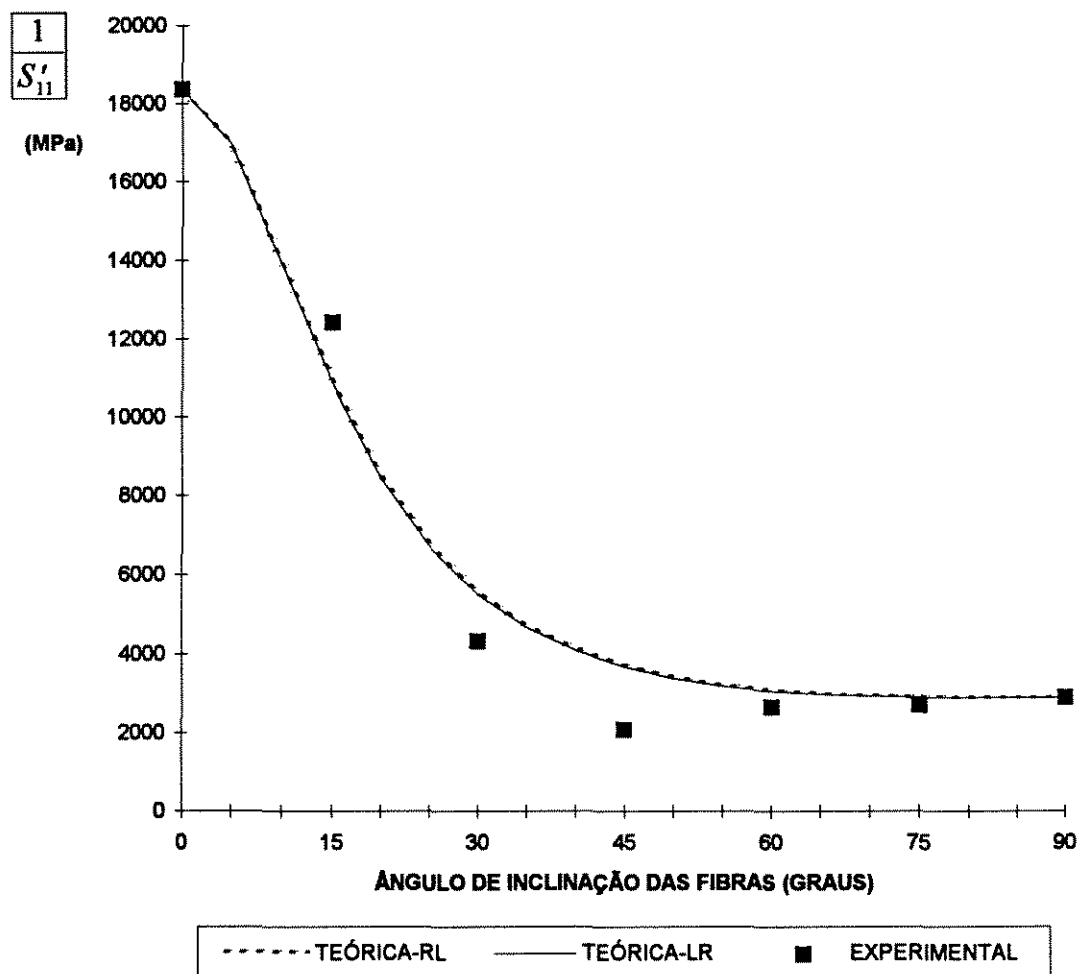


FIGURA 38 - Gráfico dos valores teóricos e experimentais de  $\frac{1}{S'_{11}}$  no plano LR\*

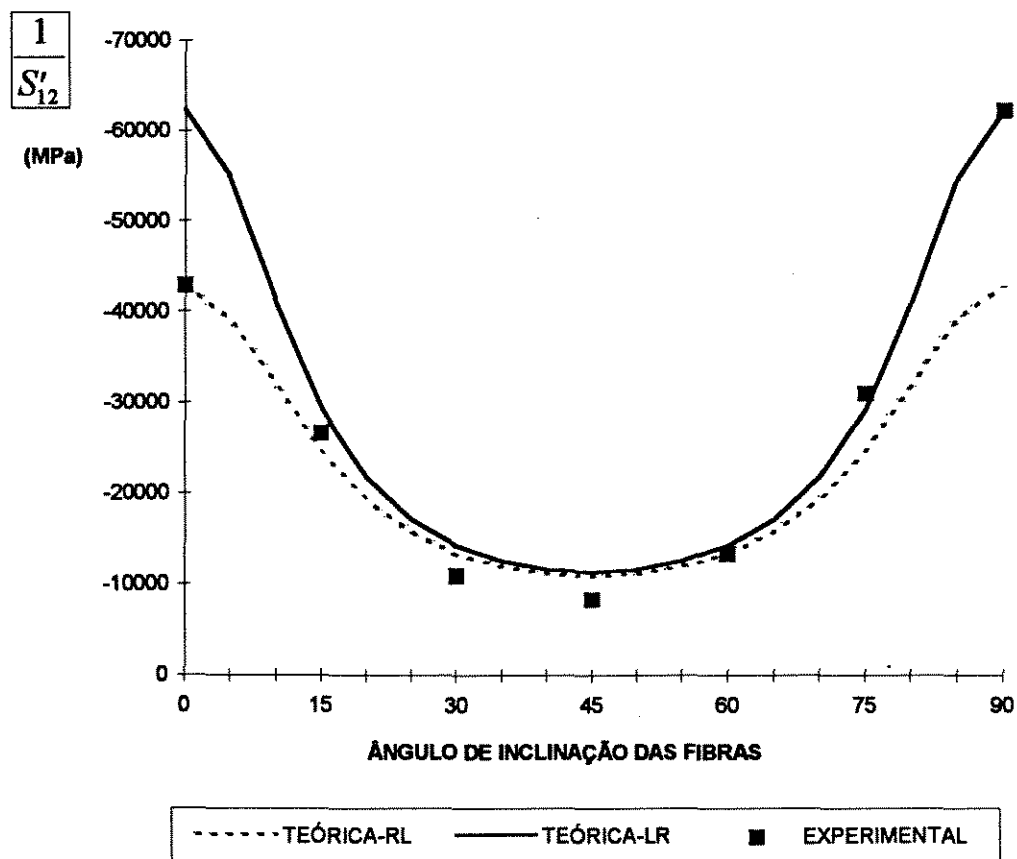


FIGURA 39 - Gráfico dos valores teóricos e experimentais de  $\frac{1}{S'_{12}}$  no plano LR\*

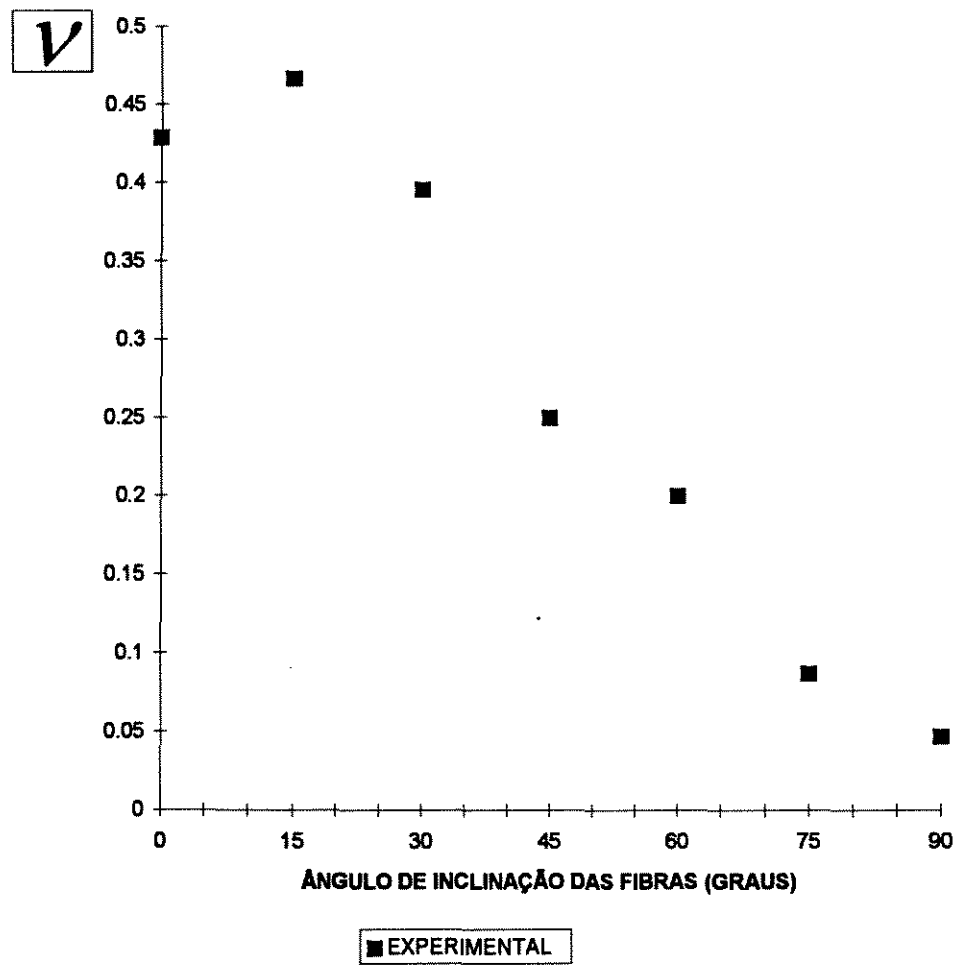


FIGURA 40 - Gráfico dos valores experimentais de  $\nu$  no plano LR\*

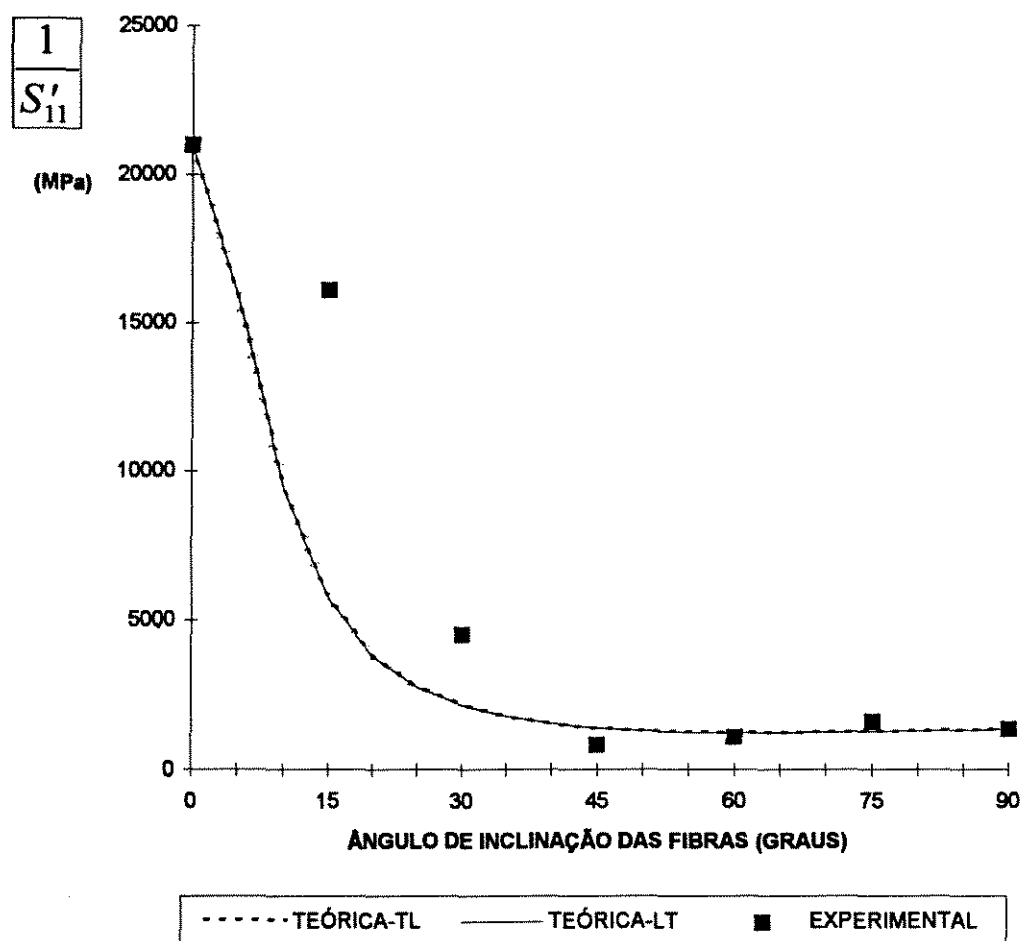


FIGURA 41 - Gráfico dos valores teóricos e experimentais de  $\frac{1}{S'_{11}}$  no plano LT\*

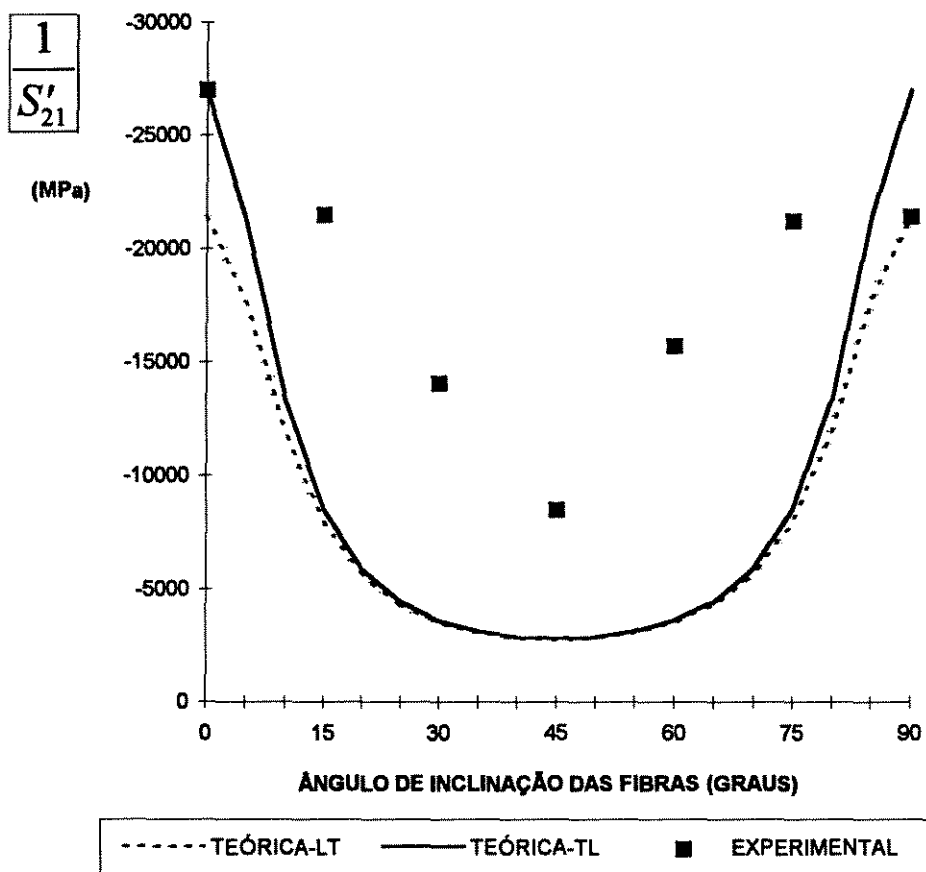


FIGURA 42 - Gráfico dos valores teóricos e experimentais de  $\frac{1}{S'_{12}}$  no plano LT\*

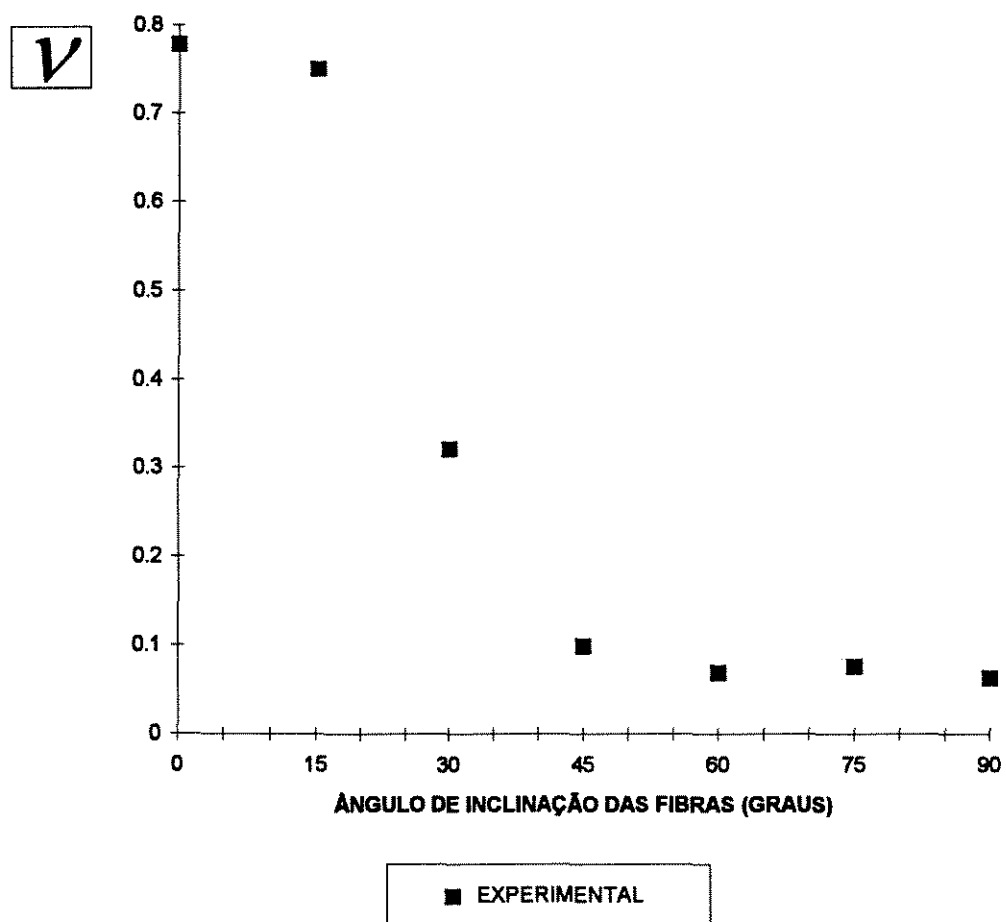


FIGURA 43 - Gráfico dos valores experimentais de  $\nu$  no plano LT\*

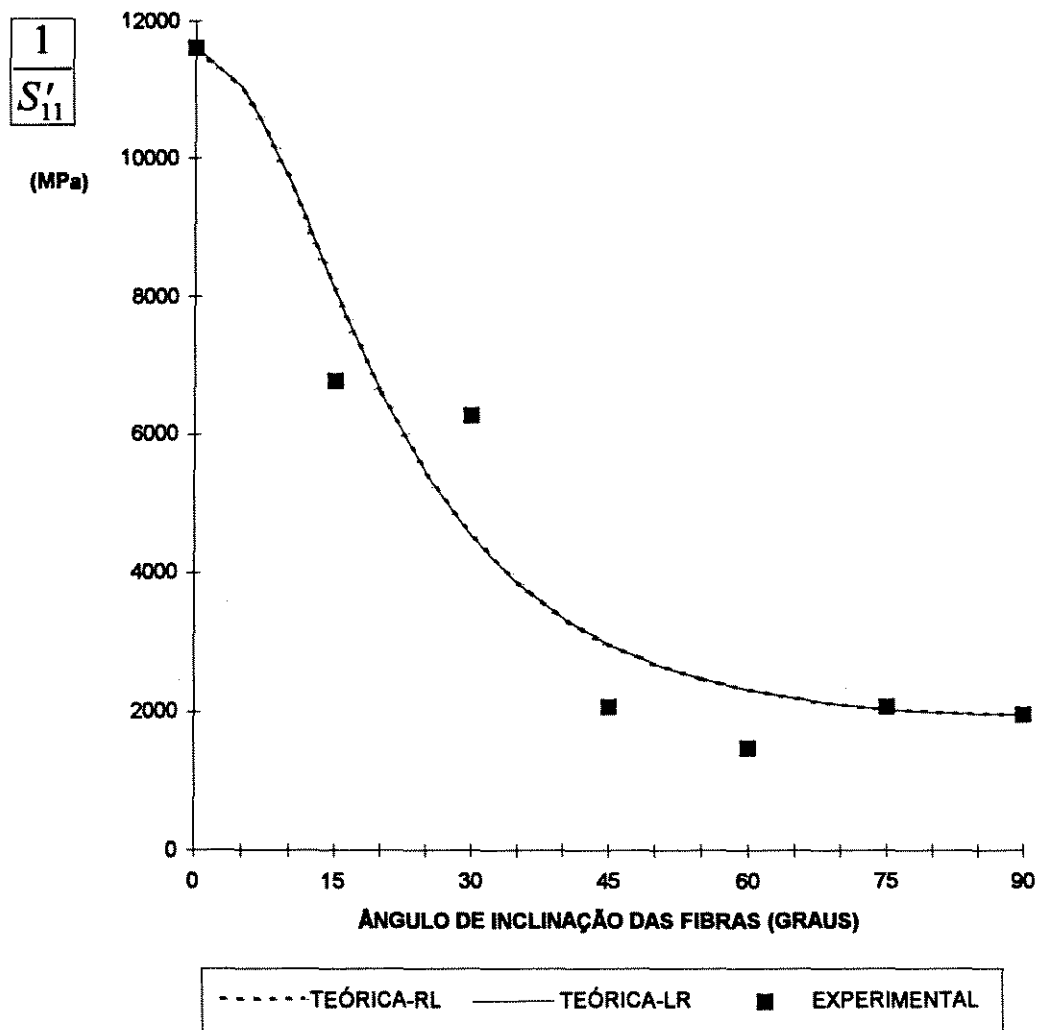


FIGURA 44 - Gráfico dos valores teóricos e experimentais de  $\frac{1}{S'_{11}}$   
 no plano LR



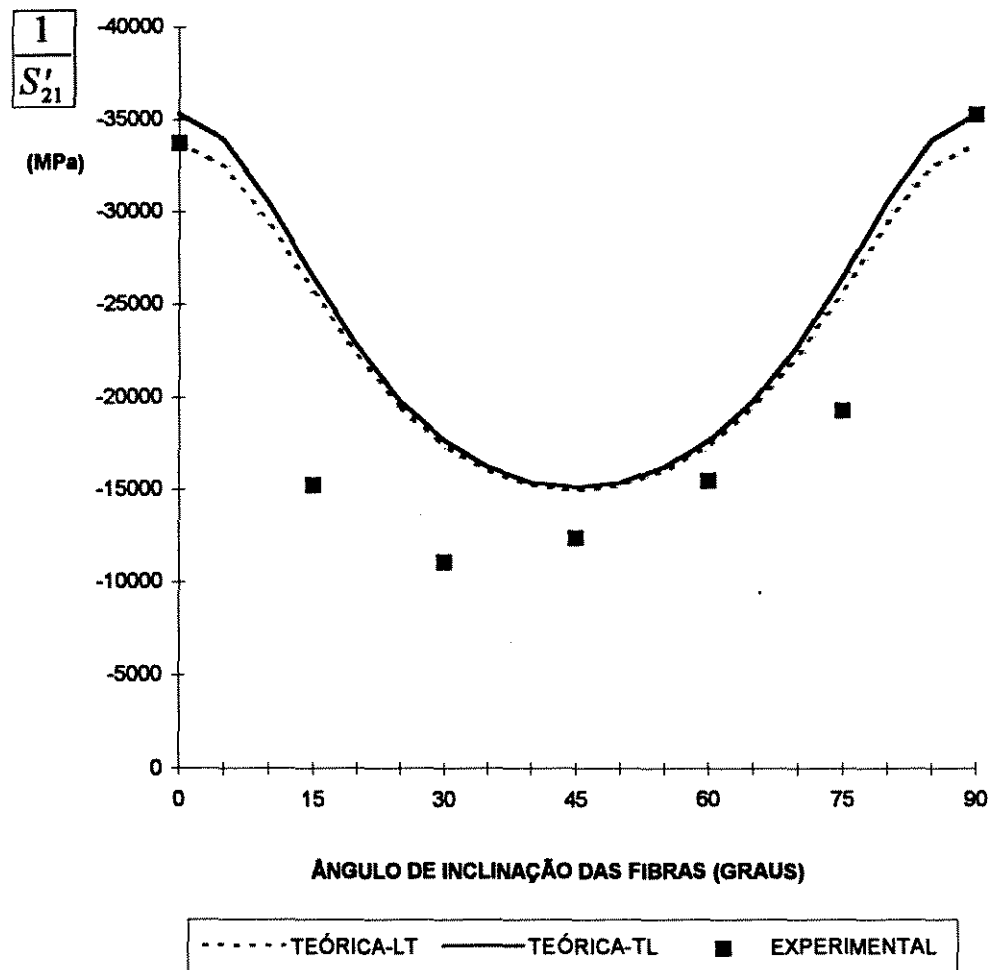
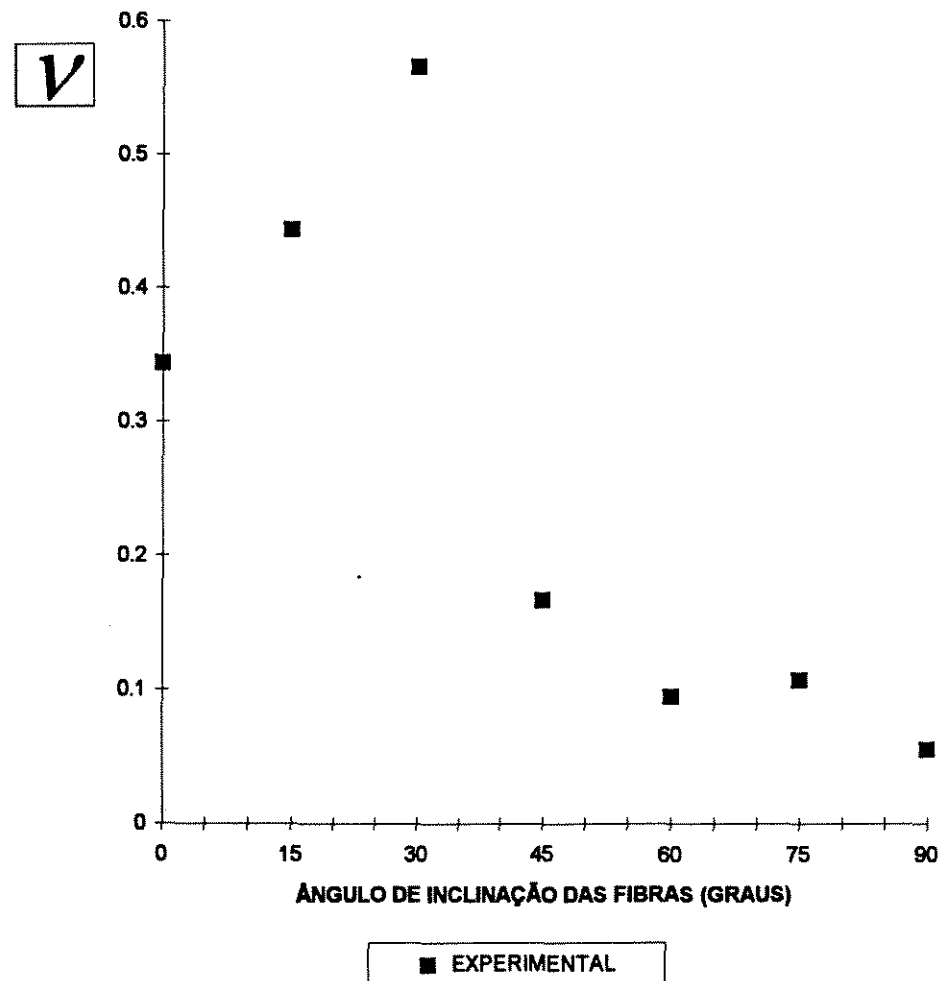


FIGURA 45 - Gráfico dos valores teóricos e experimentais de  $\frac{1}{S'_{12}}$  no plano LR

FIGURA 46 - Gráfico dos valores experimentais de  $\nu$  no plano LR

### 5.3.5. COMENTÁRIOS A RESPEITO DOS RESULTADOS OBTIDOS

Dos resultados obtidos pode-se observar uma curva de tendência que os valores do coeficiente de Poisson  $\nu_{ij}$  se ajustam em função da variação do ângulo das fibras.

Esta tendência é comprovada pela aproximação dos pontos dos valores obtidos experimentalmente e pelas curvas teóricas dos coeficientes  $\frac{1}{S'_{11}}$  e  $\frac{1}{S'_{12}}$ . Aproximação esta que é maior nos coeficientes  $\frac{1}{S'_{11}}$ .

Observa-se, também, a diminuição dos valores de  $\nu_{ij}$  a medida em que se afasta do eixo longitudinal (L) e se aproxima dos eixos radial (R) ou tangencial (T).

Evidencia-se, por outro lado, um maior desvio dos resultados obtidos no plano LT, desvio este proveniente da aplicação da teoria anisotrópica retolinear com 3 (três) eixos ortogonais entre si utilizada neste estudo. Isto abre espaço para a necessidade do estudo da teoria da anisotropia curvilínea.

Por fim, ressalta-se o fato de estar trabalhando com uma amostra constituída de um número possível de corpos de prova.

#### 5.4. ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES E DE DEFORMAÇÕES EM UM DOS CORPOS DE PROVA ENSAIADOS

Com o objetivo de se comprovar a precisão dos resultados obtidos nos experimentos realizados neste trabalho, pode-se analisar a distribuição de tensões e de deformações em um dos corpos de prova através do programa SAP90<sup>(19)</sup> (Structural Analysis Programs).

Neste programa foi utilizado a opção "solid", onde se considera no corpo de prova uma referência tridimensional e no tensor  $S_{ijk}$  a ortotropia do material.

Em anexo se encontram o arquivo de dados e a listagem com os deslocamentos nodais.

Nas próximas figuras estão mostradas a discretização empregada, a distribuição de tensão normal e, também, a tangencial.

A distribuição de tensões no corpo de prova analisado pode ser observada nas figuras 48, 49 e 50 .

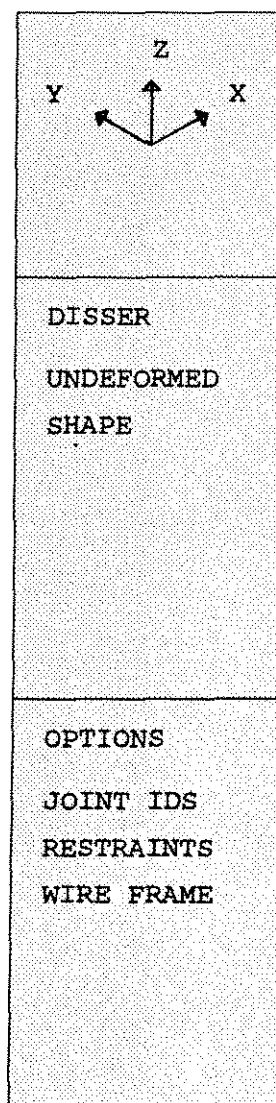
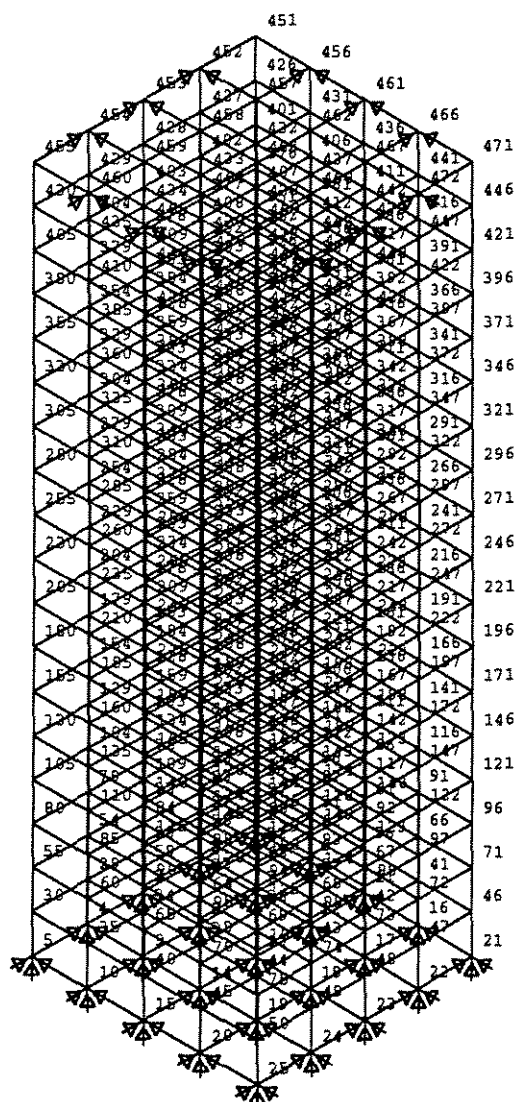


FIGURA 47 - Numeração dos pontos dos elementos do corpo de prova e as restrições impostas na análise pelo SAP90(19)

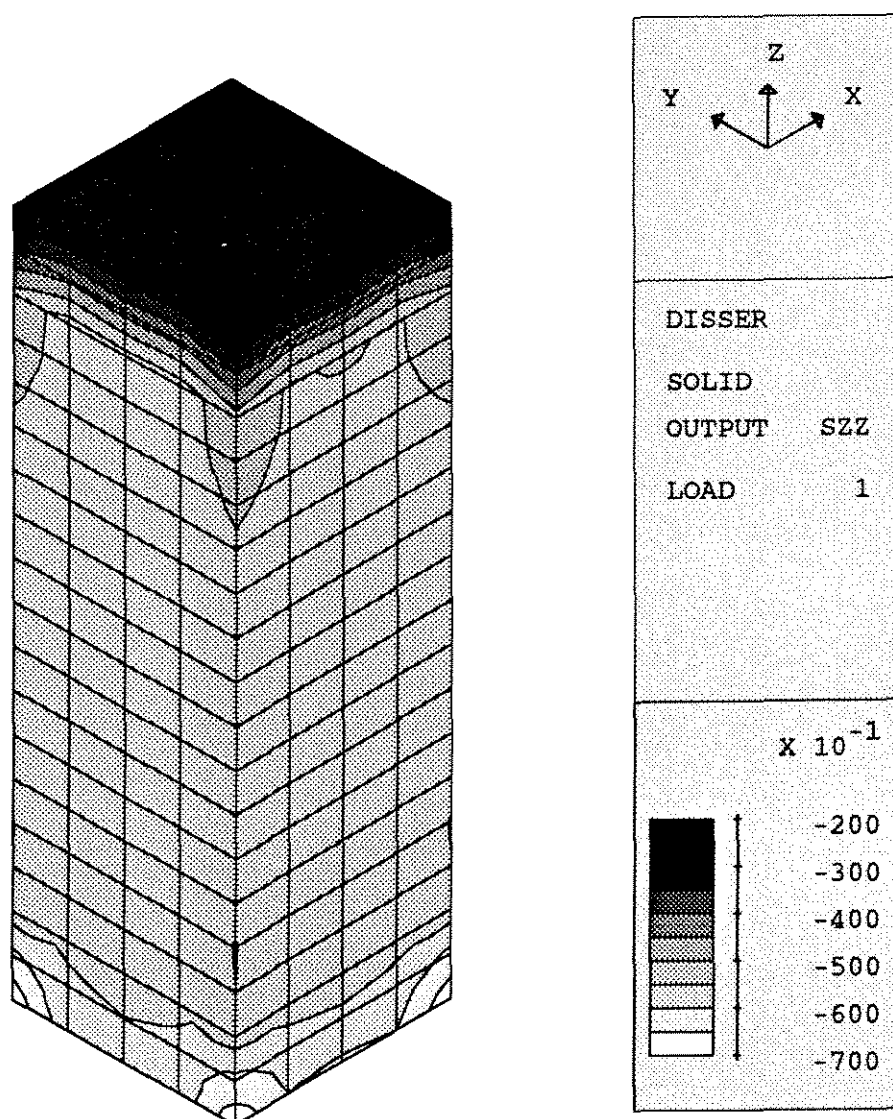


FIGURA 48 - Distribuição da tensão normal  $\sigma_{zz}$  no corpo de prova,  
(análise feita pelo SAP90<sup>(19)</sup>)  
Valores em daN/cm<sup>2</sup>

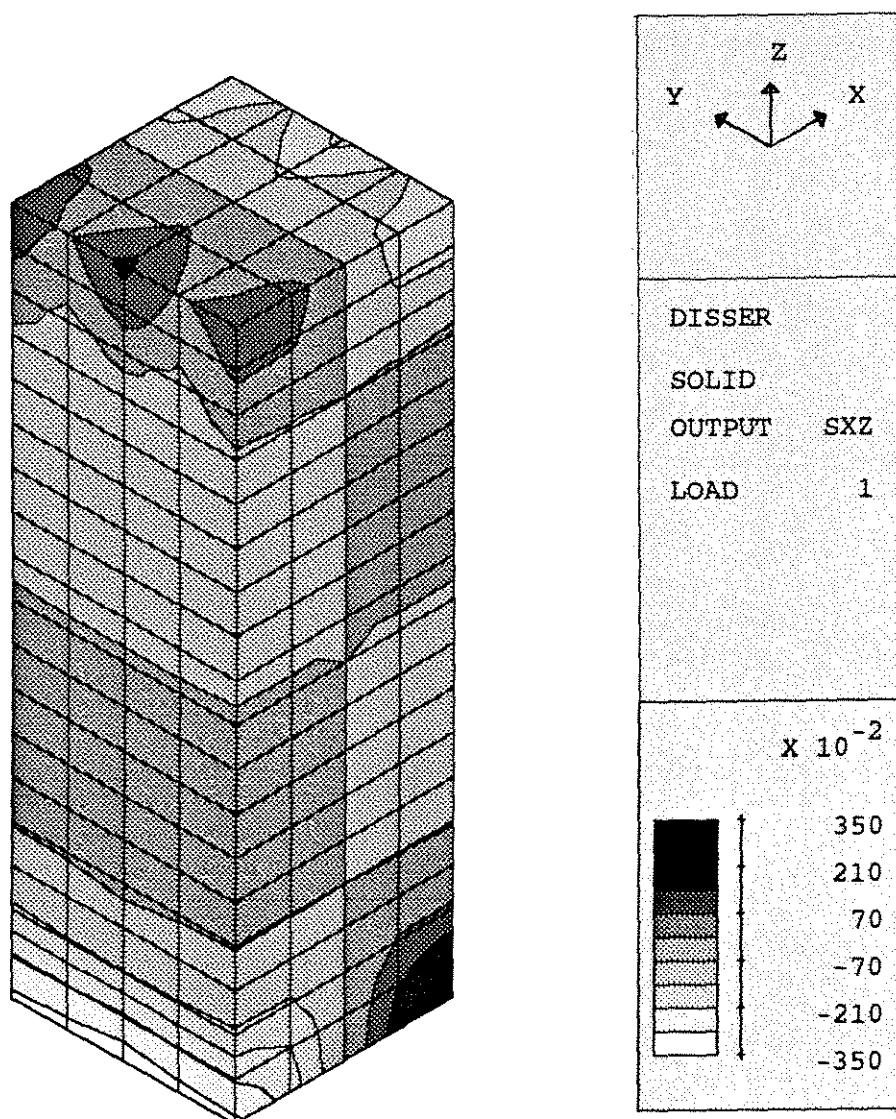


FIGURA 49 - Distribuição da tensão tangencial  $\sigma_x$  no corpo de prova, (análise feita pelo SAP90<sup>(19)</sup>)  
Valores em daN/cm<sup>2</sup>

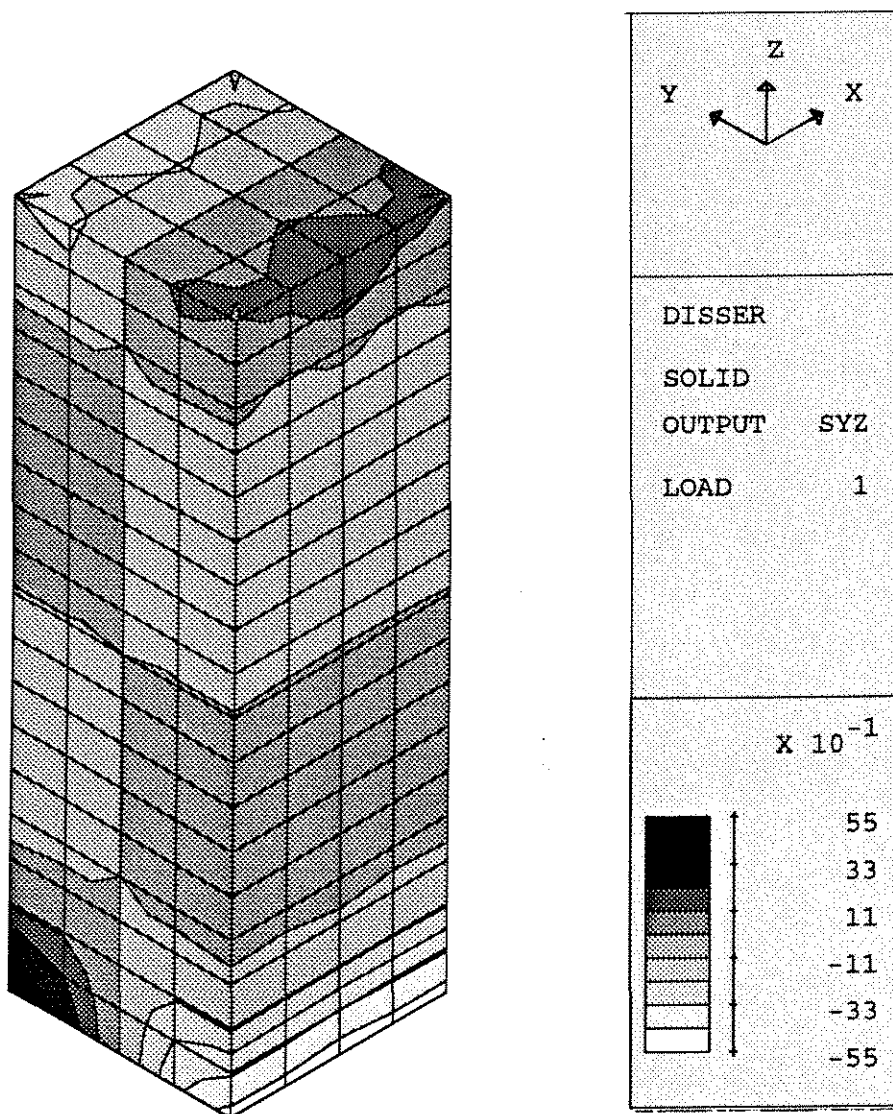


FIGURA 50 - Distribuição da tensão tangencial  $\sigma_y$  no corpo de prova, (análise feita pelo SAP90<sup>(19))</sup>  
Valores em daN/cm<sup>2</sup>



Ao observar as figuras pode-se fazer algumas considerações:

- Na região central o fluxo de tensão normal é homogêneo, enquanto que nas extremidades sofre perturbações devido ao contato entre o corpo de prova e a placa, evidenciando o princípio de Saint-Venant.

- As tensões tangenciais são compatíveis com as distorções, que não são desprezíveis devido aos valores apresentados pela relação  $\frac{E_i}{G_y}$  serem altos. Evidentemente na região dos apoios há uma maior perturbação por causa do atrito existente.

- Em relação às deformações foram obtidos os seguintes valores na região de colagem dos extensômetros nos corpos de prova:

(a) Deformação na direção paralela a direção do carregamento:

$$\varepsilon_{SAP\ 90} = 5,2914 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{EXPER.} = 5,1000 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\varepsilon_{EXPER.}}{\varepsilon_{SAP\ 90}} = 96,38\%$$

(b) Deformação na direção perpendicular a direção do carregamento:

$$\varepsilon_{SAP\ 90} = 2,1121 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{EXPER.} = 2,4000 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\varepsilon_{SAP\ 90}}{\varepsilon_{EXPER.}} = 88,00\%$$

Como pode ser observado, pelos valores obtidos via programa SAP90<sup>(19)</sup>, conclui-se que as leituras do ensaio de laboratório apresentam uma boa aproximação.

## 6. CONCLUSÕES FINAIS

Pelas conclusões já destacadas nos comentários dos resultados obtidos nos itens 5.2.5 e 5.3.5, torna-se conveniente fazer uma síntese final:

- Dos resultados obtidos nos ensaios verificou-se a adequação do modelo ortotrópico à madeira, embora os valores obtidos apresentassem um certo desvio no plano RT (radial-tangencial), desvio este associado ao fato de se estar trabalhando com um modelo anisotrópico retolinear.

- Mesmo com um número pequeno de corpos de prova foi possível verificar a simetria no tensor compliance  $S_{ijkl}$ , evidenciada nos gráficos  $S'_{ijkl} \times$  ângulo das fibras.

- Foi possível verificar a curva de tendência dos valores do coeficiente de Poisson nos diferentes ângulos das fibras, sendo que os mesmos tem uma diminuição quando se afastam do eixo longitudinal em direção ao tangencial ou radial.

- A comparação dos resultados de laboratório com os advindos do SAP90 evidenciam uma boa aderência entre os mesmos.

- Ficou caracterizado o cuidado que se deve ter na confecção dos corpos de prova para os ensaios de laboratório.

- É oportuno salientar que a madeira da espécie Jatobá apresenta uma variabilidade do arranjo das suas fibras.

- Espera-se que estas conclusões possam, de um modo geral, contribuir para a revisão das normas NBR6230 (Ensaio Físicos e Mecânicos da Madeira) e a NBR7190 (Cálculo e Execução de Estruturas de

Madeira) que estão em curso neste momento. Além disto, abrir novos horizontes na investigação teórica-experimental da anisotropia, aplicada à madeira.

Por fim, pode-se sugerir alguns outros tópicos passíveis de futuras investigações:

- A determinação dos coeficientes do tensor compliance com o uso do modelo anisotrópico curvilíneo.

Esta proposta se baseia no fato do modelo anisotrópico linear não se mostrar plenamente satisfatório quando se analisa uma superfície ligeiramente curva, com a formada pelos anéis de crescimento, especialmente na direção tangencial

- Um estudo sobre a variação numérica do coeficiente de Poisson em direções quaisquer, com um número maior de corpos de prova para uma completa análise estatística dos resultados atingidos.

## **ANEXO**

**Neste anexo são apresentados os resultados de deformação citados no item 5.4**

## SAP90

EXEMPLO1 (ENSAIO POISSON) - SAP90

SYSTEM

L=1

JOINTS

1	X=4.28	Y=4.35	Z=0	
5	X=0	Y=4.35	Z=0	
451	X=4.28	Y=4.35	Z=13.6	
455	X=0	Y=4.35	Z=13.6	Q=1,5,451,455,1,25
6	X=4.28	Y=3*4.35/4	Z=0	
10	X=0	Y=3*4.35/4	Z=0	
456	X=4.28	Y=3*4.35/4	Z=13.6	
460	X=0	Y=3*4.35/4	Z=13.6	Q=6,10,456,460,1,25
11	X=4.28	Y=4.35/2	Z=0	
15	X=0	Y=4.35/2	Z=0	
461	X=4.28	Y=4.35/2	Z=13.6	
465	X=0	Y=4.35/2	Z=13.6	Q=11,15,461,465,1,25
16	X=4.28	Y=4.35/4	Z=0	
20	X=0	Y=4.35/4	Z=0	
466	X=4.28	Y=4.35/4	Z=13.6	
470	X=0	Y=4.35/4	Z=13.6	Q=16,20,466,470,1,25
21	X=4.28	Y=0	Z=0	
25	X=0	Y=0	Z=0	
471	X=4.28	Y=0	Z=13.6	
475	X=0	Y=0	Z=13.6	Q=21,25,471,475,1,25

:

RESTRAINTS

1 475 1	R=0,0,0,1,1,1
1 25 1	R=1,1,1,0,0,0
452 454 1	R=1,1,0,0,0,0
472 474 1	R=1,1,0,0,0,0
456 466 5	R=1,1,0,0,0,0
460 470 5	R=1,1,0,0,0,0

:

## POTENCIAL

451 475 1 P=1000/4.35/4.28

:

## SOLID

NM=1 P=1 NTM=1

1 NUMT=1

E=8400,17356,102874 U=0.6136,0.3854,0.5019 G=18410,22250,21500

1 JQ=1,2,26,27,6,7,31,32 M=1 G=4,4,18 I=0

:

UNICAMP

PROGRAM:SAP90/FILE:disser.SOL

EXEMPLO1 (ENSAIO POISSON) - SAP90

## JOINT DISPLACEMENTS

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
2	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
3	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
4	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
5	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
6	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
7	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
8	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
9	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
10	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
11	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
12	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
13	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
14	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
15	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
16	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
17	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
18	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
19	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
20	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
21	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
22	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
23	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
24	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
25	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
26	.2089E-03	.3209E-03	-.4773E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
27	.3569E-04	.3235E-03	-.4173E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00



UNICAMP

PROGRAM:SAP90/FILE:disser.SOL

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
28	.0000E+00	.3348E-03	-.4207E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
29	-.3569E-04	.3235E-03	-.4173E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
30	-.2089E-03	.3209E-03	-.4773E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
31	.2223E-03	.7734E-04	-.3910E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
32	.2897E-04	.7497E-04	-.3293E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
33	.0000E+00	.7898E-04	-.3325E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
34	-.2897E-04	.7497E-04	-.3293E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
35	-.2223E-03	.7734E-04	-.3910E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
36	.2375E-03	.0000E+00	-.3959E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
37	.2739E-04	.0000E+00	-.3340E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
38	.0000E+00	.0000E+00	-.3386E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
39	-.2739E-04	.0000E+00	-.3340E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
40	-.2375E-03	.0000E+00	-.3959E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
41	.2223E-03	-.7734E-04	-.3910E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
42	.2897E-04	-.7497E-04	-.3293E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
43	.0000E+00	-.7898E-04	-.3325E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
44	-.2897E-04	-.7497E-04	-.3293E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
45	-.2223E-03	-.7734E-04	-.3910E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
46	.2089E-03	-.3209E-03	-.4773E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
47	.3569E-04	-.3235E-03	-.4173E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
48	.0000E+00	-.3348E-03	-.4207E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
49	-.3569E-04	-.3235E-03	-.4173E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
50	-.2089E-03	-.3209E-03	-.4773E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
51	.2955E-03	.4357E-03	-.8720E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
52	.1133E-03	.4462E-03	-.8083E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
53	.0000E+00	.4595E-03	-.7949E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
54	-.1133E-03	.4462E-03	-.8083E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
55	-.2955E-03	.4357E-03	-.8720E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
56	.3100E-03	.1901E-03	-.7852E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
57	.1044E-03	.1871E-03	-.7213E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
58	.0000E+00	.1925E-03	-.7072E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
59	-.1044E-03	.1871E-03	-.7213E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00

UNICAMP

PROGRAM:SAP90/FILE:disser.SOL

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
60	-.3100E-03	.1901E-03	-.7852E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
61	.3246E-03	.0000E+00	-.7667E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
62	.1042E-03	.0000E+00	-.7038E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
63	.0000E+00	.0000E+00	-.6892E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
64	-.1042E-03	.0000E+00	-.7038E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
65	-.3246E-03	.0000E+00	-.7667E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
66	.3100E-03	-.1901E-03	-.7852E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
67	.1044E-03	-.1871E-03	-.7213E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
68	.0000E+00	-.1925E-03	-.7072E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
69	-.1044E-03	-.1871E-03	-.7213E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
70	-.3100E-03	-.1901E-03	-.7852E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
71	.2955E-03	-.4357E-03	-.8720E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
72	.1133E-03	-.4462E-03	-.8083E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
73	.0000E+00	-.4595E-03	-.7949E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
74	-.1133E-03	-.4462E-03	-.8083E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
75	-.2955E-03	-.4357E-03	-.8720E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
76	.000356	.000511	-.001240	.000000	.000000	.000000
77	.000166	.000522	-.001186	.000000	.000000	.000000
78	.000000	.000532	-.001168	.000000	.000000	.000000
79	-.000166	.000522	-.001186	.000000	.000000	.000000
80	-.000356	.000511	-.001240	.000000	.000000	.000000
81	.000364	.000250	-.001173	.000000	.000000	.000000
82	.000158	.000249	-.001120	.000000	.000000	.000000
83	.000000	.000254	-.001101	.000000	.000000	.000000
84	-.000158	.000249	-.001120	.000000	.000000	.000000
85	-.000364	.000250	-.001173	.000000	.000000	.000000
86	.000372	.000000	-.001150	.000000	.000000	.000000
87	.000159	.000000	-.001098	.000000	.000000	.000000
88	.000000	.000000	-.001078	.000000	.000000	.000000
89	-.000159	.000000	-.001098	.000000	.000000	.000000
90	-.000372	.000000	-.001150	.000000	.000000	.000000
91	.000364	-.000250	-.001173	.000000	.000000	.000000

UNICAMP

PROGRAM:SAP90/FILE:disser.SOL

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
92	.000158	-.000249	-.001120	.000000	.000000	.000000
93	.000000	-.000254	-.001101	.000000	.000000	.000000
94	-.000158	-.000249	-.001120	.000000	.000000	.000000
95	-.000364	-.000250	-.001173	.000000	.000000	.000000
96	.000356	-.000511	-.001240	.000000	.000000	.000000
97	.000166	-.000522	-.001186	.000000	.000000	.000000
98	.000000	-.000532	-.001168	.000000	.000000	.000000
99	-.000166	-.000522	-.001186	.000000	.000000	.000000
100	-.000356	-.000511	-.001240	.000000	.000000	.000000
10	.000396	.000551	-.001604	.000000	.000000	.000000
102	.000197	.000560	-.001563	.000000	.000000	.000000
103	.000000	.000567	-.001546	.000000	.000000	.000000
104	-.000197	.000560	-.001563	.000000	.000000	.000000
105	-.000396	.000551	-.001604	.000000	.000000	.000000
106	.000398	.000279	-.001559	.000000	.000000	.000000
107	.000191	.000280	-.001520	.000000	.000000	.000000
108	.000000	.000283	-.001503	.000000	.000000	.000000
109	-.000191	.000280	-.001520	.000000	.000000	.000000
110	-.000398	.000279	-.001559	.000000	.000000	.000000
111	.000401	.000000	-.001539	.000000	.000000	.000000
112	.000191	.000000	-.001501	.000000	.000000	.000000
113	.000000	.000000	-.001482	.000000	.000000	.000000
114	-.000191	.000000	-.001501	.000000	.000000	.000000
115	-.000401	.000000	-.001539	.000000	.000000	.000000
116	.000398	-.000279	-.001559	.000000	.000000	.000000
117	.000191	-.000280	-.001520	.000000	.000000	.000000
118	.000000	-.000283	-.001503	.000000	.000000	.000000
119	-.000191	-.000280	-.001520	.000000	.000000	.000000
120	-.000398	-.000279	-.001559	.000000	.000000	.000000
121	.000396	-.000551	-.001604	.000000	.000000	.000000
122	.000197	-.000560	-.001563	.000000	.000000	.000000
123	.000000	-.000567	-.001546	.000000	.000000	.000000

UNICAMP

PROGRAM:SAP90/FILE:disser.SOL

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
124	-.000197	-.000560	-.001563	.000000	.000000	.000000
125	-.000396	-.000551	-.001604	.000000	.000000	.000000
126	.000420	.000569	-.001972	.000000	.000000	.000000
127	.000214	.000576	-.001945	.000000	.000000	.000000
128	.000000	.000581	-.001931	.000000	.000000	.000000
129	-.000214	.000576	-.001945	.000000	.000000	.000000
130	-.000420	.000569	-.001972	.000000	.000000	.000000
131	.000418	.000291	-.001946	.000000	.000000	.000000
132	.000209	.000292	-.001919	.000000	.000000	.000000
133	.000000	.000295	-.001906	.000000	.000000	.000000
134	-.000209	.000292	-.001919	.000000	.000000	.000000
135	-.000418	.000291	-.001946	.000000	.000000	.000000
136	.000419	.000000	-.001931	.000000	.000000	.000000
137	.000209	.000000	-.001905	.000000	.000000	.000000
138	.000000	.000000	-.001891	.000000	.000000	.000000
139	-.000209	.000000	-.001905	.000000	.000000	.000000
140	-.000419	.000000	-.001931	.000000	.000000	.000000
141	.000418	-.000291	-.001946	.000000	.000000	.000000
142	.000209	-.000292	-.001919	.000000	.000000	.000000
143	.000000	-.000295	-.001906	.000000	.000000	.000000
144	-.000209	-.000292	-.001919	.000000	.000000	.000000
145	-.000418	-.000291	-.001946	.000000	.000000	.000000
146	.000420	-.000569	-.001972	.000000	.000000	.000000
147	.000214	-.000576	-.001945	.000000	.000000	.000000
148	.000000	-.000581	-.001931	.000000	.000000	.000000
149	-.000214	-.000576	-.001945	.000000	.000000	.000000
150	-.000420	-.000569	-.001972	.000000	.000000	.000000

UNICAMP

PROGRAM:SAP90/FILE:disser.SOL

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
151	.000433	.000575	-.002348	.000000	.000000	.000000
152	.000221	.000581	-.002330	.000000	.000000	.000000
153	.000000	.000583	-.002321	.000000	.000000	.000000
154	-.000221	.000581	-.002330	.000000	.000000	.000000
155	-.000433	.000575	-.002348	.000000	.000000	.000000
156	.000430	.000293	-.002334	.000000	.000000	.000000
157	.000218	.000295	-.002317	.000000	.000000	.000000
158	.000000	.000297	-.002308	.000000	.000000	.000000
159	-.000218	.000295	-.002317	.000000	.000000	.000000
160	-.000430	.000293	-.002334	.000000	.000000	.000000
161	.000429	.000000	-.002324	.000000	.000000	.000000
162	.000218	.000000	-.002308	.000000	.000000	.000000
163	.000000	.000000	-.002298	.000000	.000000	.000000
164	-.000218	.000000	-.002308	.000000	.000000	.000000
165	-.000429	.000000	-.002324	.000000	.000000	.000000
166	.000430	-.000293	-.002334	.000000	.000000	.000000
167	.000218	-.000295	-.002317	.000000	.000000	.000000
168	.000000	-.000297	-.002308	.000000	.000000	.000000
169	-.000218	-.000295	-.002317	.000000	.000000	.000000
170	-.000430	-.000293	-.002334	.000000	.000000	.000000
171	.000433	-.000575	-.002348	.000000	.000000	.000000
172	.000221	-.000581	-.002330	.000000	.000000	.000000
173	.000000	-.000583	-.002321	.000000	.000000	.000000
174	-.000221	-.000581	-.002330	.000000	.000000	.000000
175	-.000433	-.000575	-.002348	.000000	.000000	.000000
176	.000439	.000576	-.002730	.000000	.000000	.000000
177	.000225	.000580	-.002720	.000000	.000000	.000000
178	.000000	.000582	-.002714	.000000	.000000	.000000
179	-.000225	.000580	-.002720	.000000	.000000	.000000
180	-.000439	.000576	-.002730	.000000	.000000	.000000
181	.000436	.000293	-.002724	.000000	.000000	.000000
182	.000222	.000295	-.002714	.000000	.000000	.000000

UNICAMP

PROGRAM:SAP90/FILE:disser.SOL

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
183	.000000	.000295	-.002708	.000000	.000000	.000000
184	-.000222	.000295	-.002714	.000000	.000000	.000000
185	-.000436	.000293	-.002724	.000000	.000000	.000000
186	.000435	.000000	-.002718	.000000	.000000	.000000
187	.000222	.000000	-.002708	.000000	.000000	.000000
188	.000000	.000000	-.002702	.000000	.000000	.000000
189	-.000222	.000000	-.002708	.000000	.000000	.000000
190	-.000435	.000000	-.002718	.000000	.000000	.000000
191	.000436	-.000293	-.002724	.000000	.000000	.000000
192	.000222	-.000295	-.002714	.000000	.000000	.000000
193	.000000	-.000295	-.002708	.000000	.000000	.000000
194	-.000222	-.000295	-.002714	.000000	.000000	.000000
195	-.000436	-.000293	-.002724	.000000	.000000	.000000
196	.000439	-.000576	-.002730	.000000	.000000	.000000
197	.000225	-.000580	-.002720	.000000	.000000	.000000
198	.000000	-.000582	-.002714	.000000	.000000	.000000
199	-.000225	-.000580	-.002720	.000000	.000000	.000000
200	-.000439	-.000576	-.002730	.000000	.000000	.000000
201	.000442	.000576	-.003118	.000000	.000000	.000000
202	.000226	.000579	-.003112	.000000	.000000	.000000
203	.000000	.000579	-.003109	.000000	.000000	.000000
204	-.000226	.000579	-.003112	.000000	.000000	.000000
205	-.000442	.000576	-.003118	.000000	.000000	.000000
206	.000439	.000291	-.003115	.000000	.000000	.000000
207	.000224	.000293	-.003109	.000000	.000000	.000000
208	.000000	.000294	-.003106	.000000	.000000	.000000
209	-.000224	.000293	-.003109	.000000	.000000	.000000
210	-.000439	.000291	-.003115	.000000	.000000	.000000
211	.000438	.000000	-.003112	.000000	.000000	.000000
212	.000223	.000000	-.003107	.000000	.000000	.000000
213	.000000	.000000	-.003103	.000000	.000000	.000000
214	-.000223	.000000	-.003107	.000000	.000000	.000000

UNICAMP

PROGRAM:SAP90/FILE:disser.SOL

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
215	-.000438	.000000	-.003112	.000000	.000000	.000000
216	.000439	-.000291	-.003115	.000000	.000000	.000000
217	.000224	-.000293	-.003109	.000000	.000000	.000000
218	.000000	-.000294	-.003106	.000000	.000000	.000000
219	-.000224	-.000293	-.003109	.000000	.000000	.000000
220	-.000439	-.000291	-.003115	.000000	.000000	.000000
221	.000442	-.000576	-.003118	.000000	.000000	.000000
222	.000226	-.000579	-.003112	.000000	.000000	.000000
223	.000000	-.000579	-.003109	.000000	.000000	.000000
224	-.000226	-.000579	-.003112	.000000	.000000	.000000
225	-.000442	-.000576	-.003118	.000000	.000000	.000000
226	.000444	.000575	-.003508	.000000	.000000	.000000
227	.000226	.000578	-.003506	.000000	.000000	.000000
228	.000000	.000578	-.003504	.000000	.000000	.000000
229	-.000226	.000578	-.003506	.000000	.000000	.000000
230	-.000444	.000575	-.003508	.000000	.000000	.000000
231	.000441	.000291	-.003507	.000000	.000000	.000000
232	.000225	.000292	-.003505	.000000	.000000	.000000
233	.000000	.000293	-.003503	.000000	.000000	.000000
234	-.000225	.000292	-.003505	.000000	.000000	.000000
235	-.000441	.000291	-.003507	.000000	.000000	.000000
236	.000439	.000000	-.003506	.000000	.000000	.000000
237	.000224	.000000	-.003504	.000000	.000000	.000000
238	.000000	.000000	-.003503	.000000	.000000	.000000
239	-.000224	.000000	-.003504	.000000	.000000	.000000
240	-.000439	.000000	-.003506	.000000	.000000	.000000
241	.000441	-.000291	-.003507	.000000	.000000	.000000
242	.000225	-.000292	-.003505	.000000	.000000	.000000
243	.000000	-.000293	-.003503	.000000	.000000	.000000
244	-.000225	-.000292	-.003505	.000000	.000000	.000000
245	-.000441	-.000291	-.003507	.000000	.000000	.000000
246	.000444	-.000575	-.003508	.000000	.000000	.000000

UNICAMP

PROGRAM:SAP90/FILE:disser.SOL

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
247	.000226	-.000578	-.003506	.000000	.000000	.000000
248	.000000	-.000578	-.003504	.000000	.000000	.000000
249	-.000226	-.000578	-.003506	.000000	.000000	.000000
250	-.000444	-.000575	-.003508	.000000	.000000	.000000
251	.000445	.000576	-.003899	.000000	.000000	.000000
252	.000227	.000579	-.003899	.000000	.000000	.000000
253	.000000	.000579	-.003900	.000000	.000000	.000000
254	-.000227	.000579	-.003899	.000000	.000000	.000000
255	-.000445	.000576	-.003899	.000000	.000000	.000000
256	.000442	.000291	-.003899	.000000	.000000	.000000
257	.000226	.000293	-.003900	.000000	.000000	.000000
258	.000000	.000293	-.003901	.000000	.000000	.000000
259	-.000226	.000293	-.003900	.000000	.000000	.000000
260	-.000442	.000291	-.003899	.000000	.000000	.000000
261	.000440	.000000	-.003901	.000000	.000000	.000000
262	.000225	.000000	-.003901	.000000	.000000	.000000
263	.000000	.000000	-.003902	.000000	.000000	.000000
264	-.000225	.000000	-.003901	.000000	.000000	.000000
265	-.000440	.000000	-.003901	.000000	.000000	.000000
266	.000442	-.000291	-.003899	.000000	.000000	.000000
267	.000226	-.000293	-.003900	.000000	.000000	.000000
268	.000000	-.000293	-.003901	.000000	.000000	.000000
269	-.000226	-.000293	-.003900	.000000	.000000	.000000
270	-.000442	-.000291	-.003899	.000000	.000000	.000000
271	.000445	-.000576	-.003899	.000000	.000000	.000000
272	.000227	-.000579	-.003899	.000000	.000000	.000000
273	.000000	-.000579	-.003900	.000000	.000000	.000000
274	-.000227	-.000579	-.003899	.000000	.000000	.000000
275	-.000445	-.000576	-.003899	.000000	.000000	.000000
276	.000445	.000578	-.004288	.000000	.000000	.000000
277	.000228	.000581	-.004292	.000000	.000000	.000000
278	.000000	.000581	-.004295	.000000	.000000	.000000



UNICAMP

PROGRAM:SAP90/FILE:disser.SOL

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
279	-.000228	.000581	-.004292	.000000	.000000	.000000
280	-.000445	.000578	-.004288	.000000	.000000	.000000
281	.000442	.000294	-.004291	.000000	.000000	.000000
282	.000227	.000295	-.004295	.000000	.000000	.000000
283	.000000	.000296	-.004298	.000000	.000000	.000000
284	-.000227	.000295	-.004295	.000000	.000000	.000000
285	-.000442	.000294	-.004291	.000000	.000000	.000000
286	.000441	.000000	-.004296	.000000	.000000	.000000
287	.000226	.000000	-.004299	.000000	.000000	.000000
288	.000000	.000000	-.004303	.000000	.000000	.000000
289	-.000226	.000000	-.004299	.000000	.000000	.000000
290	-.000441	.000000	-.004296	.000000	.000000	.000000
291	.000442	-.000294	-.004291	.000000	.000000	.000000
292	.000227	-.000295	-.004295	.000000	.000000	.000000
293	.000000	-.000296	-.004298	.000000	.000000	.000000
294	-.000227	-.000295	-.004295	.000000	.000000	.000000
295	-.000442	-.000294	-.004291	.000000	.000000	.000000
296	.000445	-.000578	-.004288	.000000	.000000	.000000
297	.000228	-.000581	-.004292	.000000	.000000	.000000
298	.000000	-.000581	-.004295	.000000	.000000	.000000
299	-.000228	-.000581	-.004292	.000000	.000000	.000000
300	-.000445	-.000578	-.004288	.000000	.000000	.000000
301	.000443	.000580	-.004673	.000000	.000000	.000000
302	.000229	.000584	-.004682	.000000	.000000	.000000
303	.000000	.000585	-.004689	.000000	.000000	.000000
304	-.000229	.000584	-.004682	.000000	.000000	.000000
305	-.000443	.000580	-.004673	.000000	.000000	.000000
306	.000441	.000297	-.004682	.000000	.000000	.000000
307	.000227	.000298	-.004691	.000000	.000000	.000000
308	.000000	.000299	-.004698	.000000	.000000	.000000
309	-.000227	.000298	-.004691	.000000	.000000	.000000
310	-.000441	.000297	-.004682	.000000	.000000	.000000

UNICAMP

PROGRAM:SAP90/FILE:disser.SOL

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
311	.000440	.000000	-.004691	.000000	.000000	.000000
312	.000227	.000000	-.004700	.000000	.000000	.000000
313	.000000	.000000	-.004706	.000000	.000000	.000000
314	-.000227	.000000	-.004700	.000000	.000000	.000000
315	-.000440	.000000	-.004691	.000000	.000000	.000000
316	.000441	-.000297	-.004682	.000000	.000000	.000000
317	.000227	-.000298	-.004691	.000000	.000000	.000000
318	.000000	-.000299	-.004698	.000000	.000000	.000000
319	-.000227	-.000298	-.004691	.000000	.000000	.000000
320	-.000441	-.000297	-.004682	.000000	.000000	.000000
321	.000443	-.000580	-.004673	.000000	.000000	.000000
322	.000229	-.000584	-.004682	.000000	.000000	.000000
323	.000000	-.000585	-.004689	.000000	.000000	.000000
324	-.000229	-.000584	-.004682	.000000	.000000	.000000
325	-.000443	-.000580	-.004673	.000000	.000000	.000000
326	.000438	.000580	-.005051	.000000	.000000	.000000
327	.000227	.000584	-.005069	.000000	.000000	.000000
328	.000000	.000587	-.005080	.000000	.000000	.000000
329	-.000227	.000584	-.005069	.000000	.000000	.000000
330	.000438	.000580	-.005051	.000000	.000000	.000000
331	.000437	.000299	.005072	.000000	.000000	.000000
332	.000225	.000300	.005089	.000000	.000000	.000000
333	.000000	.000301	.005100	.000000	.000000	.000000
334	-.000225	.000300	-.005089	.000000	.000000	.000000
335	-.000437	.000299	-.005072	.000000	.000000	.000000
336	.000437	.000000	-.005086	.000000	.000000	.000000
337	.000225	.000000	-.005103	.000000	.000000	.000000
338	.000000	.000000	-.005114	.000000	.000000	.000000
339	-.000225	.000000	-.005103	.000000	.000000	.000000
340	-.000437	.000000	-.005086	.000000	.000000	.000000
341	.000437	-.000299	-.005072	.000000	.000000	.000000
342	.000225	-.000300	-.005089	.000000	.000000	.000000

UNICAMP

PROGRAM:SAP90/FILE:disser.SOL

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
343	.000000	-.000301	-.005100	.000000	.000000	.000000
344	-.000225	-.000300	-.005089	.000000	.000000	.000000
345	-.000437	-.000299	-.005072	.000000	.000000	.000000
346	.000438	-.000580	-.005051	.000000	.000000	.000000
347	.000227	-.000584	-.005069	.000000	.000000	.000000
348	.000000	-.000587	-.005080	.000000	.000000	.000000
349	-.000227	-.000584	-.005069	.000000	.000000	.000000
350	-.000438	-.000580	-.005051	.000000	.000000	.000000
351	.000426	.000571	-.005419	.000000	.000000	.000000
352	.000220	.000577	-.005450	.000000	.000000	.000000
353	.000000	.000582	-.005466	.000000	.000000	.000000
354	-.000220	.000577	-.005450	.000000	.000000	.000000
355	-.000426	.000571	-.005419	.000000	.000000	.000000
356	.000428	.000296	-.005458	.000000	.000000	.000000
357	.000217	.000295	-.005489	.000000	.000000	.000000
358	.000000	.000298	-.005505	.000000	.000000	.000000
359	-.000217	.000295	-.005489	.000000	.000000	.000000
360	-.000428	.000296	-.005458	.000000	.000000	.000000
361	.000430	.000000	-.005480	.000000	.000000	.000000
362	.000217	.000000	-.005510	.000000	.000000	.000000
363	.000000	.000000	-.005527	.000000	.000000	.000000
364	-.000217	.000000	-.005510	.000000	.000000	.000000
365	-.000430	.000000	-.005480	.000000	.000000	.000000
366	.000428	-.000296	-.005458	.000000	.000000	.000000
367	.000217	-.000295	-.005489	.000000	.000000	.000000
368	.000000	-.000298	-.005505	.000000	.000000	.000000
369	-.000217	-.000295	-.005489	.000000	.000000	.000000
370	-.000428	-.000296	-.005458	.000000	.000000	.000000
371	.000426	-.000571	-.005419	.000000	.000000	.000000
372	.000220	-.000577	-.005450	.000000	.000000	.000000
373	.000000	-.000582	-.005466	.000000	.000000	.000000
374	-.000220	-.000577	-.005450	.000000	.000000	.000000

UNICAMP

PROGRAM:SAP90/FILE:disser.SOL

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
375	-.000426	-.000571	-.005419	.000000	.000000	.000000
376	.000402	.000545	-.005775	.000000	.000000	.000000
377	.000201	.000554	-.005824	.000000	.000000	.000000
378	.000000	.000560	-.005844	.000000	.000000	.000000
379	-.000201	.000554	-.005824	.000000	.000000	.000000
380	-.000402	.000545	-.005775	.000000	.000000	.000000
381	.000409	.000280	-.005842	.000000	.000000	.000000
382	.000197	.000277	.005892	.000000	.000000	.000000
383	.000000	.000280	-.005913	.000000	.000000	.000000
384	-.000197	.000277	-.005892	.000000	.000000	.000000
385	-.000409	.000280	-.005842	.000000	.000000	.000000
386	.000416	.000000	-.005872	.000000	.000000	.000000
387	.000198	.000000	-.005921	.000000	.000000	.000000
388	.000000	.000000	-.005942	.000000	.000000	.000000
389	-.000198	.000000	-.005921	.000000	.000000	.000000
390	-.000416	.000000	-.005872	.000000	.000000	.000000
391	.000409	-.000280	-.005842	.000000	.000000	.000000
392	.000197	-.000277	-.005892	.000000	.000000	.000000
393	.000000	-.000280	-.005913	.000000	.000000	.000000
394	-.000197	-.000277	-.005892	.000000	.000000	.000000
395	-.000409	-.000280	-.005842	.000000	.000000	.000000
396	.000402	-.000545	-.005775	.000000	.000000	.000000
397	.000201	-.000554	-.005824	.000000	.000000	.000000
398	.000000	-.000560	-.005844	.000000	.000000	.000000
399	-.000201	-.000554	-.005824	.000000	.000000	.000000
400	-.000402	-.000545	-.005775	.000000	.000000	.000000
401	.000359	.000490	-.006120	.000000	.000000	.000000
402	.000160	.000501	-.006191	.000000	.000000	.000000
403	.000000	.000506	-.006211	.000000	.000000	.000000
404	-.000160	.000501	-.006191	.000000	.000000	.000000
405	-.000359	.000490	-.006120	.000000	.000000	.000000

UNICAMP

PROGRAM:SAP90/FILE:disser.SOL

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
406	.000372	.000236	-.006222	.000000	.000000	.000000
407	.000160	.000231	-.006302	.000000	.000000	.000000
408	.000000	.000230	-.006319	.000000	.000000	.000000
409	-.000160	.000231	-.006302	.000000	.000000	.000000
410	-.000372	.000236	-.006222	.000000	.000000	.000000
411	.000382	.000000	-.006255	.000000	.000000	.000000
412	.000158	.000000	-.006330	.000000	.000000	.000000
413	.000000	.000000	-.006346	.000000	.000000	.000000
414	-.000158	.000000	-.006330	.000000	.000000	.000000
415	-.000382	.000000	-.006255	.000000	.000000	.000000
416	.000372	-.000236	-.006222	.000000	.000000	.000000
417	.000160	-.000231	-.006302	.000000	.000000	.000000
418	.000000	-.000230	-.006319	.000000	.000000	.000000
419	-.000160	-.000231	-.006302	.000000	.000000	.000000
420	-.000372	-.000236	-.006222	.000000	.000000	.000000
421	.000359	-.000490	-.006120	.000000	.000000	.000000
422	.000160	-.000501	-.006191	.000000	.000000	.000000
423	.000000	-.000506	-.006211	.000000	.000000	.000000
424	-.000160	-.000501	-.006191	.000000	.000000	.000000
425	-.000359	-.000490	-.006120	.000000	.000000	.000000
426	.000267	.000364	-.006470	.000000	.000000	.000000
427	.000099	.000366	-.006549	.000000	.000000	.000000
428	.000000	.000364	-.006568	.000000	.000000	.000000
429	-.000099	.000366	-.006549	.000000	.000000	.000000
430	-.000267	.000364	-.006470	.000000	.000000	.000000
431	.000271	.000158	-.006592	.000000	.000000	.000000
432	.000123	.000162	-.006718	.000000	.000000	.000000
433	.000000	.000139	-.006719	.000000	.000000	.000000
434	-.000123	.000162	-.006718	.000000	.000000	.000000
435	-.000271	.000158	-.006592	.000000	.000000	.000000
436	.000271	.000000	-.006629	.000000	.000000	.000000
437	.000107	.000000	-.006727	.000000	.000000	.000000

UNICAMP

PROGRAM:SAP90/FILE:disser.SOL

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
438	.000000	.000000	-.006721	.000000	.000000	.000000
439	-.000107	.000000	-.006727	.000000	.000000	.000000
440	-.000271	.000000	-.006629	.000000	.000000	.000000
441	.000271	-.000158	-.006592	.000000	.000000	.000000
442	.000123	-.000162	-.006718	.000000	.000000	.000000
443	.000000	-.000139	-.006719	.000000	.000000	.000000
444	-.000123	-.000162	-.006718	.000000	.000000	.000000
445	-.000271	-.000158	-.006592	.000000	.000000	.000000
446	.000267	-.000364	-.006470	.000000	.000000	.000000
447	.000099	-.000366	-.006549	.000000	.000000	.000000
448	.000000	-.000364	-.006568	.000000	.000000	.000000
449	-.000099	-.000366	-.006549	.000000	.000000	.000000
450	-.000267	-.000364	-.006470	.000000	.000000	.000000
451	.000204	.000284	-.006664	.000000	.000000	.000000
452	.000000	.000000	-.006719	.000000	.000000	.000000
453	.000000	.000000	-.006736	.000000	.000000	.000000
454	.000000	.000000	-.006719	.000000	.000000	.000000
455	-.000204	.000284	-.006664	.000000	.000000	.000000
456	.000000	.000000	-.006775	.000000	.000000	.000000
457	.000155	.000165	-.006928	.000000	.000000	.000000
458	.000000	.000116	-.006921	.000000	.000000	.000000
459	-.000155	.000165	-.006928	.000000	.000000	.000000
460	.000000	.000000	-.006775	.000000	.000000	.000000
461	.000000	.000000	-.006807	.000000	.000000	.000000
462	.000115	.000000	-.006929	.000000	.000000	.000000
463	.000000	.000000	-.006913	.000000	.000000	.000000
464	-.000115	.000000	-.006929	.000000	.000000	.000000
465	.000000	.000000	-.006807	.000000	.000000	.000000
466	.000000	.000000	-.006775	.000000	.000000	.000000
467	.000155	-.000165	-.006928	.000000	.000000	.000000
468	.000000	-.000116	-.006921	.000000	.000000	.000000
469	-.000155	-.000165	-.006928	.000000	.000000	.000000

UNICAMP

PROGRAM:SAP90/FILE:disser.SOL

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
470	.000000	.000000	-.006775	.000000	.000000	.000000
471	.000204	-.000284	-.006664	.000000	.000000	.000000
472	.000000	.000000	-.006719	.000000	.000000	.000000
473	.000000	.000000	-.006736	.000000	.000000	.000000
474	.000000	.000000	-.006719	.000000	.000000	.000000
475	-.000204	-.000284	-.006664	.000000	.000000	.000000

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (14) ABRAMCHUK, S. S. ; BULDAKOV, V.P. Allowable of the Poisson coefficients os anisotropic materials. *Mechanics of Composite Materials*, V.15, n. 2, p.174-178, Sept 1979.
- (20) AL-DABBAGH, A., GOODMAN, J.R., BODIG, J. Finite element for wood mechanics. *Journal of the Structural Division*, V.98, n.ST3, p.569-586, Mar 1972.
- (26) ASHKENAZI, E.K. ; GERSHBERG, M.V. ; KAPUSTIN, M. G. Impulse method of determining moduli of elasticity and the shear moduli of wood. *Industrial Laboratory (USSR)*, V.42, n.8, p.1291-1295, Aug 1976.
- (3) ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Ensaio físicos e mecânicos de madeiras (NBR 6230/80)*. Rio de Janeiro, 16 p., 1980.
- (2) ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Cálculo e execução de estruturas de madeira (NBR 7190/82)*. Rio de Janeiro, 22 p., 1982.
- (11) BODIG, J. ; GOODMAN, J.R. A new apparatus for compression testing of wood. *Wood and Fiber*, V.1, n.2, p.146-153, 1969.
- (15) BODIG, J. ; JAYNE, B. A. *Mechanics of wood and wood composites*, New York, Van Nostrand Reinhold, 712p, 1982.



- (13) CAUWELAERT, F. V. Deformation of anisotropic body. *Journal of the Engineering Mechanics Division of the ASCE*, V.103, n.5, p.823-835, Oct 1977.
- (5) CHEN, W.F., SALLES, A. *Constitutive equations for engineering materials*. New York, John Wiley e Sons, 1982. V.1 : Elasticity and Modeling ... p. 1-181 .
- (9) COWIN, S. C. Identification of materials symmetry for anisotropic elastic materials. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, V.40, n.4, p.451-476, Nov 1987.
- (6) DESAI, C. S.; SIRIWARDANE, H. J. *Constitutive laws for engineering materials with emphasis on geologic materials*. New Jersey, Prentice-Hall, p.1-168, 1984.
- (17) ESAU, K. *Anatomy of seed plants*. John Wiley and Sons, Inc., EUA, 1960.
- (11) FUSCO, A. B. Caracterização da deformabilidade na elasticidade linear (conceitos básicos para a definição das propriedades elásticas da madeira) artigo sem identificação de publicação.
- (23) GOODMAN, J. R.; BODIG, J. Orthotropic elastic properties of wood. *Journal of the Structural Division ASCE*, V.96, n. ST11, p.2301-2319, Nov 1970.
- (22) HEARMON, R. F. S. The effect of grain direction on the Young's moduli and rigidity moduli of beech and sitka spruce. *Forest Products Research Laboratory*, n.28, p.674-680, May 1941.
- (24) KOLLMANN, F.; CÔTÉ Jr, W. A. *Mechanics and rheology of wood*. *Principles of wood science and technology*, Berlim, Springer-Verlag, 1968.

- (25) LEE, I. D. G. Measuring the elasticity of timber. *Civil Engineering and Public Works Review*, V.54, n.635, p.607-615, May 1959.
- (10) LEKHNITSKII, S.G. *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Moscou, Mir, p.10-98, 1981.
- (1) LOVE, A. E. *A treatise on the theory of elasticity*. New York, Dover Publications, p. 1-182. 1944.
- (7) MASCIA, N.T. Considerações à respeito da anisotropia na madeira. São Carlos, *Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos/USP*, 295p., 1991.
- (18) MASCIA, N.T. A study of the homogeneity in the mechanics of wood deformation. *Proceedings of the fourth pan-american congress of applied mechanics-PACAM IV*. Buenos Aires, 3-6 jan 1995, V3, p. 337-344.
- (21) MARCH, H. W. Stress-strain relations in wood and plywood considered. *Library U.S. Forest Products Laboratory Madison, Winconsin 53705*, Mimed. NR1503, 24p., 1944.
- (16) MOREY, P. R. *O crescimento das árvores*. São Paulo, Edusp. 72p., Temas de biologia 19p., 1980.
- (8) OSTROSABLIN, N. I. On the structure of the elastic tensor and the classification of anisotropic materials. *Journal Applied Mechanics Technology Phisycs*, V.27, n.4, p.600-607, Jul-Aug 1986.
- (19) SAP90 - Structural Analysis Program, Versão 5.04, 1988.
- (27) SINCLAIR, A. N. , FARSHAD, M. Comparision of the methods for determinnig elastic constants of wood. *Journal Testing Evaluation*, V.15, n.2, p.77-86, Mar 1987.

- (4) TIMOSHENKO, S.P. *History of strength of materials*. McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 451p., 1953.
- (12) TING, T. C. T. Invariants of anisotropic elastic constants. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, V.40, n. PT3, p.431-448, Aug 1987.

#### 14. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- ABRAMCHUK, S. S. ; BULDAKOV, V.P. Allowable of the Poisson coefficients of the anisotropic materials. *Mechanics of Composite Materials*, V.15, n. 2, p.174-178, Sept 1979.
- AHMADI, G. ; VAFAI, A. Generalised linear theory of wood. *Fibre Science Techninology*, V.10, n.4, p.255-261, 1977.
- AL-DABBAGH, A., GOODMAN, J.R., BODIG, J. Finite element for wood mechanics. *Journal of the Structural Division*, V.98, n.ST3, p.569-586, Mar 1972.
- ANTIPOVA, I.A. ; MOROSOV, A.S. ; SHAIKO-SHAIKOVSKII, A. G. Determination of the elastic properties of orthotropic materials during stretching. *Industrial Laboratory (URSS)*, V.41, n.5, p.755-757, May 1975.
- ASHKENAZI, E.K. ; GERSHBERG, M.V. ; KAPUSTIN, M. G. Impulse method of determining moduli of elasticity and the shear moduli of wood. *Industrial Laboratory (USSR)*, V.42, n.8, p.1291-1295, Aug 1976.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Ensaio físicos e mecânicos de madeiras (NBR 6230/80)*. Rio de Janeiro, 16 p., 1980.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Cálculo e execução de estruturas de madeira (NBR 7190/82)*. Rio de Janeiro, 22 p., 1982.

BODIG, J. ; GOODMAN, J.R. A new apparatus for compression testing of wood. *Wood and Fiber*, V.1, n.2, p.146-153, 1969.

BODIG, J. ; JAYNE, B. A. *Mechanics of wood and wood composites*, New York, Van Nostrand Reinhold, 712p, 1982

CAVIGLIA, G. ; MORRO, A. Conservation laws in anisotropic elastostatics. *International Journal Engineering Science*, V.26, n.4, p.393-400, 1988.

CHEN, W.F., SALLES, A. *Constitutive equations for engineering materials*. New York, John Wiley e Sons, 1982. V.1 : Elasticity and Modeling ... p. 1-181 .

CAUWELAERT, F. V. Deformation of anisotropic body. *Journal of the Engineering Mechanics Division of the ASCE*, V.103, n.5, p.823-835, Oct 1977.

CHENG, S. Test method for evaluation of shear modulus and modulus of elasticity of laminated anisotropic composite materials. *Journal Testing Evaluation*, V.13, n.5, p.387-389, Sept 1985.

CHOI, J.; HORGAN, C. O. Saint-Venant's principle and end effects in anisotropic elasticity. *Journal of Applied Mechanics Transactions of the ASME*, V.44, Ser.E, n.3, p.424-430, Sept 1977.

COWIN, S. C. On the strength anisotropy of bone and wood. *Journal of Applied Mechanics Transactions of the ASME*, V.46, n.4, p.832-838, Dec 1979.

COWIN, S. C. Identification of materials symmetry for anisotropic elastic materials. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, V.40, n.4, p.451-476, Nov 1987.

COWIN, S. C. Properties of the anisotropic elasticity tensor. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, V.42, n.2, p.249-266, May 1989.

CHRISTENSEN, R. M. Sufficient symmetry conditions for isotropic of the elastic moduli tensor. *Journal of Applied Mechanics Transactions of the ASME*, V.54, n.4, p.772-777, Dec 1987.

DABBAGH, A. A. ; GOODMAN, J. R. ; BODIG, J. Finite element method for wood mechanics. *Journal of the Structural Division ASCE*, ST 3, p.569-586, Mar 1972.

DESAI, C. S.; SIRIWARDANE, H. J. *Constitutive laws for engeeniring materials with emphasis on geologic materials*. New Jersey, Prentice-Hall, p.1-168, 1984.

EBRAHIMI, G. ; SLIKER, A. Measurement of shear modulus in wood by a tension test. *Wood Science*, V.13, n.3, p.171-176. Jan 1981.

ESAU, K. *Anatomy of seed plants*. John Wiley and Sons, Inc., EUA, 1960.

FISCHER, S. ; ROMAN, I. ; HAREL, H. ; MAROM, G. ; WAGNER, H. D. Simultaneous determination of shear and Young's moduli in composites. *Journal Testing Evaluation*, V.9, n.5, p.303-307, Sep 1981.

FUSCO, A. B. Caracterização da deformabilidade na elasticidade linear (conceitos básicos para a definição das propriedades elásticas da madeira) artigo sem identificação de publicação.

GOODMAN, J. R. ; BODIG, J. Orthotropic elastic properties of wood. *Journal of the Structural Division ASCE*, V.96, n. ST11, p.2301-2319, Nov 1970.

GOODMAN, J. R. Governing equations for timber shell structures. *Forest Products Journal*, V.16, n.10, p.49-55, Oct 1966.

HASHIN, Z. Plane anisotropic beams. *Journal of Applied Mechanics Transactions of the ASME*, p.257-262, Jun 1967.

HEARMON, R. F. S. The effect of grain direction on the Young's moduli and rigidity moduli of beech and sitka spruce. *Forest Products Research Laboratory*, n.28, p.674-680, May 1941.

HEARMON, R. F. S. The elastic constants of plywood. *Aircraft Engineering*, p.336-340, Dec 1942.

HEARMON, R. F. S. The elastic constants of anisotropic materials. *Reviews of Modern Physics*, V.18, n.3, p.409-440, Jul 1946.

HEARMON, R. F. S. ; BARKAS, W. W. The elasticity of wood and plywood. *Forest Products Research*, Special Report n.7, 87p., 1948.

JAYNE, B. A. ; HUNT, M. O. Plane stress and plane strain in orthotropic and anisotropic media. *Wood and Fiber*, V.1, n.2, p.236-247, 1969.

JAYNE, B. A. ; SUDDARTH, S. K. Matrix-tensor mathematics in orthotropic elasticity. *American Soc. Testing Mats.*, STP 405, p.39-58, 1966.

JONES, M.R. *Mechanics of Composite Materials*. McGraw-Hill LTD, Tokio, 355 p., 1975.

KEENAN, F. J. Shear strength of wood beams. *Forest Products Journal*, V.24, n.9, p.63-70, Sep 1974.

KEENAN, F. J. *The shear strength of glued-laminated timber beams*. Tese PhD., ítem 44, 1973.

KOLLMANN, F.; CÔTÉ Jr, W. A. Mechanics and rheology of wood. *Principles of wood science and technology*, Berlim, Springer-Verlag, 1968.

- LEE, I. D. G. Measuring the elasticity of timber. *Civil Engineering and Public Works Review*, V.54, n.635, p.607-615, May 1959.
- LEKHNITSKII, S.G. *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Moscou, Mir, p.10-98, 1981.
- LIU, J. Y. ; FLOESTER, L. H. Shear strength in principal plane of wood. *Journal of the Engineering Mechanics*, V.110, n.6, p.930-936, Jun 1984.
- LOVE, A. E. *A treatise on the theory of elasticity*. New York, Dover Publications, p. 1-182. 1944.
- MARCH, H. W. Stress-strain relations in wood and plywood considered. *Library U.S. Forest Products Laboratory Madison, Winconsin 53705, Mimed. NR1503, 24p., 1944.*
- MARGOLIN, G. G. Anisotropy of the strength of composite materials. *Soviet Applied Mechanics*, V.17, n.5, p.444-448, May 1981.
- MASCIA, N.T. Considerações à respeito da anisotropia na madeira. São Carlos, *Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos/USP, 295p., 1991.*
- MASCIA, N.T. A study of the homogeneity in the mechanics of wood deformation. *Proceedings of the fourth pan-american congress of applied mechanics-PACAM IV*. Buenos Aires, 3-6 jan 1995, V3, p. 337-344.
- MOREY, P. R. *O crescimento das árvores*. São Paulo, Edusp. 72p., Temas de biologia 19p., 1980.
- NARAYANASWAMI, R. ; ADELAMN, H. M. Evaluation of the tensor polynomial and Hoffman strength theories for composite materials. *Journal Composite Materials*, V.11, p.366-377, Oct 1977.



NOACK, D. ; ROTH, W. On the theory of elasticity of the material wood. *Wood Science Technology*, V.16, p.97-110, 1976.

OLVER, P. J. Canonical elastic moduli. *Journal of Elasticity*, V.19, n.3, p.189-212, 1988.

OSTROSABLIN, N. I. On the structure of the elastic tensor and the classification of anisotropic materials. *Journal Applied Mechanics Technology Phisycs*, V.27, n.4, p.600-607, Jul-Aug 1986.

PERKINS, R. W. Concerning the mechanics of wood deformation. *Forest Products Journal*, V.17, n.3, p.55-66, Mar 1967.

ROESLER, S. K. Anisotropic shear modulus due to stress anisotropy. *Journal of the Geotechnical Engineering Division ASCE*, V.105, n.GT7, p.871-880, Jul 1979.

RYCHLEWSKI, J. On Hooke's law. *Journal Applied Mathematics Mechanics*, V.48, n.3, p.303-314, 1984.

SADEGH, A. M. ; COWIN, S. C. Proportional anisotropic elastic invariants, *Journal Applied Mechanics*, V.58, n.1, p.50-57, Mar 1991.

SAP90 - Structural Analysis Program, Versão 5.04, 1988.

SCHNIEWIND, A. P. Transverse anisotropy of wood: a function of gross anatomic structure. *Forest Products Journal*, V.9, n.10, p.350-359, Oct 1959.

SEREGIN, G. A. ; TROITSKII, V. A. On the best position of elastic symmetry planes in an orthotropic body. *Journal Applied Mathematics Mechanics*, V.45, n.1, p.139-142, 1981.

SINCLAIR, A. N. , FARSHAD, M. Comparision of the methods for determinnig elastic constants of wood. *Journal Testing Evaluation*, V.15, n.2, p.77-86, Mar 1987.

SLIKER, A. Measuring Poisson's ratios in wood. *Experimental Mechanics*, p.239-242, May 1972.

SLIKER, A. Orthotropic strains in compression parallel to grain tests. *Forest Products Journal*, V.35, n.11/12, p.19-26, Nov/Dec 1985.

TEODOSIU, C. ; NICOLAE, V. On the generalized plane strain of an anisotropic elastic body. *Revue Roumaine des Sciences Techniques, Serie de Mechanique Appliquee*, V.25, n.6, p.879-892, Nov/Dec 1980.

TING, T. C. T. Invariants of anisotropic elastic constants. *Quaterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, V.40, n. PT3, p.431-448, Aug 1987.

TING, T. C. T. Effects of change of reference coordinates on the stress analyses of anisotropic elastic materials. *International Journal Solids Structures*, V.18, n.2, p.139-152, 1982.

TIMOSHENKO, S.P. *HISTORY OF STRENGTH OF MATERIALS*. McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 451p., 1953.

TSAI, S. W. ; WU, E. M. A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal Composites Materials*, V.5, p.58-80, Jan 1971.

WHITNEY, J. M. Refined theory for laminated anisotropic, cylindrical shells. *Journal of Applied Mechanics Transactions of the ASME*, V.41, n.2, p.471-476, Jun 1974

ZOLOCHEVSKII, A. A. Determining equations and some problems of the variable-modulus theory of elasticity of anisotropic materials. *Journal Applied Mechanics Technology Phisycs*, V.26, n.4, p.572-578, Jul/Aug 1985.

## ABSTRACT

The present work constitutes a study of a numerical variation of the Poisson's ratio, in the wood. The Poisson's ratio is associated to  $S_{ijkl}$  terms of the wood compliance tensor, considering the rectilinear anisotropic theory, where the relationship between stress-strain is expressed by  $\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}$ . The terms of the tensor  $S_{ijkl}$  can vary with arbitrary directions, that in the wood are associated with the direction of the fibers. In this way, for the determination of the Poisson's ratios, in any arbitrary direction, small specimens and axial compression tests were used. The obtained results show the adequacy of wood to the orthotropic model, in the LR plane (longitudinal-radial axes) and a tendency for the curvilinear anisotropy in the LT plane (longitudinal-tangential).