

MARISTELA GONÇALVES GOMES

**SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA:
procedimentos utilizados por sujeitos com graus
de escolaridade diferentes.**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

1998

MARISTELA GONÇALVES GOMES

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Maristela Gonçalves Gomes e aprovada pela Comissão Julgadora:

Data: _____

Assinatura: _____

**SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA:
procedimentos utilizados por sujeitos com graus
de escolaridade diferentes.**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

1998

Dissertação apresentada, como exigência parcial para obtenção do Título de MESTRE em EDUCAÇÃO na Área de Concentração: *Psicologia Educacional*, à Comissão Julgadora da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas,

sob a orientação da Prof^a Dr^a Lucila
Diehl Tolaine Fini

Comissão Julgadora:

*À Josefina, minha avó, que apesar de
não freqüentar a escola, demonstrou,
ao longo da vida, sua admirável
sabedoria.*

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram direta ou indiretamente para que este trabalho viesse à tona. Sendo assim, quero expressar meus agradecimentos à todos que dele participaram, em especial:

- À Professora Dra. Lucila D. T. Fini pela orientação geral dada a este trabalho, pela retomada em torno de alguns pontos que se mostravam conflitivos e, sobretudo, pelo respeito à minha produção.

- Ao Professor Dr. Adriano R. Ruiz, matemático e sobretudo educador, por ter acreditado em mim e iniciado minha vida acadêmica; pelo constante entusiasmo, dedicação e segurança que sempre me transmitiu; por seu excelente trabalho de acessoria no desenvolvimento desta pesquisa, pela disponibilidade e interesse em discutir as questões teóricas que mais me preocupavam e pelas idéias esclarecedoras que muito contribuíram para a elaboração deste trabalho.

- À Professora Dra. Dione L. de Carvalho, pela leitura minuciosa e crítica do trabalho, pela disponibilidade em discuti-lo e, principalmente, pelas sugestões que só fizeram enriquecê-lo.

- À Professora Dra. Marcia R. F. Brito, pela oportunidade de discutirmos o trabalho e pelas sugestões apresentadas durante o cumprimento dos créditos.

- À Lydio e Maria, meus pais que apesar das dificuldades, “estudar os filhos” sempre foi prioridade. Pelo apoio e estímulo demonstrados, pela presença marcante mesmo que distantes fisicamente, principalmente nos momentos mais difíceis.

- Aos meus irmãos, em especial Marcos e Margarete, por facilitarem a minha permanência em Campinas e, mais que isso, por participarem ativamente do processo de construção desta dissertação.

- À família Munin, pelo, apoio carinho e aconchego familiar com que me receberam, mesmo sem me conhecerem.

- Ao Egberto, pela grande contribuição na tradução de textos, pelo incansável e constante companheirismo e apoio e, principalmente, pelo exemplo que me passa de luta, seriedade, compromisso e competência profissional.

- Aos amigos de curso, sobretudo Patrícia, pela rica convivência e, principalmente, por ter se tornado tão grande amiga.

- Aos sujeitos desta pesquisa, um agradecimento mais que especial, pois sem eles este trabalho jamais se concretizaria.

- Às grandes e queridas amigas Neusa, Jucemara e Sônia, pelo grande carinho e companheirismo e, mais que isso, pelo aconchego com que me receberam em suas casas.

- Ao amigo Pe. José Elias pelo apoio e estímulo nos momentos de incerteza e pela disponibilidade em colaborar com a execução deste trabalho.

Aos funcionários da Faculdade de Educação, pela alegria, disposição e pelo excelente atendimento sempre prestados.

- À CAPES pelo apoio financeiro, primordial para a execução desta dissertação.

SUMÁRIO

RESUMO	x
ABSTRACT.....	xi
INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO 1.....	4
DO ENSINO DE MATEMÁTICA À EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: um importante desafio.	4
1.1 Ensino e educação: conceitos divergentes	5
1.2 Críticas ao ensino de matemática.	177
1.3 - Educação Matemática: uma nova perspectiva.....	321
CAPÍTULO 2.....	455
A MATEMÁTICA NO CONTEXTO EXTRA-ESCOLAR: uma experiência com educação de adultos	455
A matemática no contexto extra-escolar: uma experiência com educação de adultos.....	466
CAPÍTULO 3.....	688
A PESQUISA	688
3.1 O problema	6969
3.2 Os sujeitos	6969
3.3 Procedimentos.....	722

CAPÍTULO 4	766
RESULTADOS E ANÁLISE DE DADOS.....	766
4.1 Apresentação dos dados coletados	77
4.2 Análise e discussão da solução de problemas	116
4.2.1 Questionário.....	130
4.3 Resultados obtidos	1397
CAPÍTULO 5.....	142
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	142
Considerações finais	143
BIBLIOGRAFIA	152

RESUMO

Neste trabalho, foram investigadas diferentes estratégias de solução de problemas, que exigem conhecimento de matemática elementar, utilizadas por pessoas com distintos níveis de escolaridade.

Os sujeitos foram submetidos a uma prova que envolvia conceitos matemáticos elementares, sendo esta aplicada individualmente.

Os resultados obtidos indicaram que o grau de escolaridade não se apresenta como um preditor seguro em relação à competência para a solução de problemas que envolvam alguns conceitos da matemática elementar. Assim, a relação escolaridade/êxito nas soluções coletadas, apresentou-se de forma bastante tênue. Em decorrência disso, apontamos a necessidade de maior atenção com as pesquisas na área de Educação Matemática e considerações sobre a perspectiva construtivista no ensino de matemática.

ABSTRACT

In this work, different strategies of solving problems employed by persons with different levels of education and which require knowledge of elementary mathematics are investigated. The results indicated that education is not a reliable index for competence of solving problems that require conceptions of elementary mathematics. Thus the relation between education and success in collected solutions showed not to be consistent. Therefore, we point out the necessity of prying closer attention to investigations in Matematical Education.

INTRODUÇÃO

A origem desta investigação está em nosso trabalho com alfabetização de adultos e, em particular, na discussão de questões matemáticas dentro do Programa de Alfabetização de Adultos da Universidade Estadual de Maringá. A partir desse trabalho o confronto de duas constatações passou a nos incomodar:

Por um lado, existem pessoas que nunca freqüentaram a escola e mostram uma sensível competência operatória para a resolução de problemas matemáticos do cotidiano. Como exemplos podemos mencionar os alunos do Programa de Educação de Adultos da Universidade Estadual de Maringá.

Por outro lado, muitas pessoas, independente do grau de escolaridade, enquadram-se naquilo que John Allen Paulos (1994) denomina *analfabetismo matemático*. Isto é, sentem-se pouco competentes para resolver problemas matemáticos que se distanciam um pouco do “padrão do livro didático”. Isto ficou-nos muito claro, quando entrevistamos alguns professores de matemática da rede estadual paranaense.

Essas duas constatações permitiram, por exemplo, entender que o número de anos de escolaridade não se constitui num preditor seguro acerca da competência matemática de uma pessoa.

A prática tem mostrado que há uma tendência entre os estudantes em apresentarem dificuldades em relação a matemática, considerada por muitos como uma disciplina pouco interessante.

Nesse sentido, buscamos resposta para a seguinte questão: Um grau maior de escolaridade suprime estas dificuldades? Alunos com maior grau de escolaridade apresentam maior número de respostas corretas na resolução de problemas matemáticos que os que têm menor grau de escolaridade?

Para responder tal questão, dividimos este trabalho em 5 capítulos:

1º - Do ensino de matemática à educação matemática: um importante desafio. Este capítulo, subdividido em quatro pontos fundamentais, visou conceituar os termos ensino - sinônimo de instrução - e educação - concebida como um processo permanente de construção, onde a aprendizagem recebe a maior ênfase. Discutimos, também, a matemática numa concepção mais tradicional de ensino, buscando relatar como ela é concebida dentro deste paradigma, ou seja, encarada com rigor e exatidão, onde aprendizagem se caracteriza pelo domínio de uma linguagem especial que implica em regras e técnicas, em detrimento do raciocínio lógico. Discutimos ainda, a Educação Matemática como uma área de conhecimento que se apresenta como alternativa para uma nova maneira de se conceber a matemática, como sendo algo muito maior do que o simples domínio de técnicas, priorizando o raciocínio lógico.

No segundo capítulo, intitulado **A matemática no contexto extra escolar: uma experiência com Educação de Adultos**, buscamos discutir a matemática fora da escola, utilizada no dia-a-dia por pessoas que freqüentaram a escola por pouco tempo, mas que se apresenta como um conhecimento que, apesar de não ser aceito como tal, se mostra eficaz em muitas situações.

Com o terceiro capítulo, denominado **A pesquisa**, relatamos a investigação que fizemos com diferentes pessoas que exercem funções também variadas, como professores de matemática, alunos de cursos superiores de Matemática e Pedagogia, alunos do Magistério, alunos de um Programa Educacional para Adultos, adolescentes em fase de escolarização (oitava série e terceiro colegial) e adultos com escolaridade limitada, ou seja, sujeitos que freqüentaram a escola apenas na infância.

Como quarto capítulo, apresentamos os **Resultados e Análise dos dados**, visando demonstrar os dados coletados bem como a discussão destes dados.

Finalmente, como quinto capítulo, apresentamos as **Considerações Finais** e, também, algumas sugestões que, a nosso ver, poderia contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem de matemática nas escolas.

CAPÍTULO 1

DO ENSINO DE MATEMÁTICA À EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA: um importante desafio.

“A Pedagogia, a arte de ensinar, sob seus vários nomes, foi adotada pelo mundo acadêmico como uma área respeitável e importante. A arte de aprender é um órfão acadêmico.” (Papert)

1.1 Ensino e educação: conceitos divergentes

Discutir a Educação Matemática, em um universo em que as maiores preocupações educacionais estão voltadas mais para o ensino do que para a aprendizagem, não é tarefa fácil. Vários autores propõem diferentes caminhos e, no entanto, a escola permanece quase estática. Propostas de inovação e mudança do trabalho em educação, no geral, giraram em torno da metodologia de ensino. As concepções de aprendizagem que orientam o trabalho dos professores continuaram, de maneira geral, as mesmas. Alguns professores ainda consideram como aprendizagem a transmissão oral de conhecimentos, ou seja, sendo o acúmulo de conhecimentos adquiridos ao longo da vida. Esta concepção estaria, segundo Papert (1994), vinculada ao que este autor denomina instrucionismo.

Falando dessa característica da escola, Papert (1994, p.124) afirma:

A palavra instrucionismo visa significar algo muito diferente de pedagogia, ou arte de ensinar. Ela deve ser lida num nível mais ideológico ou programático como expressando a crença de que a via para uma melhor aprendizagem deve ser o aperfeiçoamento da instrução (se a Escola é menos que perfeita, então sabemos o que fazer: ensinar melhor).

Quando falamos de “ensino de matemática” estamos pensando numa forma de educação que emprega todos os seus esforços

na transmissão de algoritmos, definições, regras. Isto é, tomando a palavra ensino como aparece no *Dicionário Brasileiro Globo (1993)*, significando “instrução; doutrina; disciplina; adestramento; castigo; ato de ensinar”.

Baldino (1991) distingue educação de ensino criticando, da mesma forma, o ensino que corresponde a transmissão, adestramento. Segundo ele, o ensino lembra didática, instrução, apresentação, abre o campo da técnica.

O trabalho docente está, freqüentemente, bastante impregnado desta concepção, tão impregnado que atinge, na escola, todas as áreas de conhecimento, em especial a matemática. Como destacado em inúmeros trabalhos na bibliografia especializada, o ensino de matemática é caracterizado pela ênfase na linguagem, na exposição oral do professor que, na maior parte do tempo, apresenta determinado assunto na lousa. A matemática fica, nesse caso, restringida ao domínio de uma linguagem especial, o que implica em fórmulas, regras e técnicas.

Piaget (1974, p.147), referindo-se à ênfase na linguagem, afirma que:

É bem possível que a linguagem seja uma condição necessária para a aquisição das estruturas lógicas, pelo menos ao nível das estruturas preposicionais. Mas isto por si não significa condição suficiente da formação lógica, e muito menos no que diz respeito às estruturas lógico-matemáticas mais elementares. Se insisto basicamente nas insuficiências da linguagem,

é porque todo mundo está ciente de sua contribuição positiva. Acho que reconheço suficientemente a importância desta contribuição. Por outro lado, esquecemo-nos, com excessiva facilidade, do papel das ações e da inteligência operacional.

Ruiz (1994, p.160) argumenta que a ênfase na linguagem no ensino de matemática leva a escola a adotar procedimentos em que: “...a aprendizagem é vista como um processo de fazer associações (...) como a lenta acumulação de conhecimentos (...) o professor assume o papel de ‘despensa de conhecimentos’.”

Macedo (1994) lembra que para Piaget, na discussão sobre as relações entre pensamento e linguagem, é importante destacar o papel da ação. Critica pessoas que podem pensar que estratégias de solução de problemas de matemática embutidas na linguagem são transmitidas pela mesma via: a linguagem. Estas pessoas desconsiderariam a origem da matemática na ação, produto de regularidades que pessoas abstraem de suas ações físicas ou ações observadas entre objetos.

Como analisa Freire (1987) a escola, fundamentada no paradigma mais tradicional de educação, tende a valorizar relações hierárquicas que acabam por produzir ditadores, por um lado, e indivíduos anulados, carentes de criatividade, por outro, um modelo pedagógico chamado por Paulo Freire de “Educação Domesticadora” ou “Educação Bancária”. Para Freire, esta educação funciona como uma espécie de anestesia, inibindo o poder criador.

Criticando a concepção de educação vigente na maioria das escolas, Freire (1987, p.57) ressalta que o professor é o sujeito da narração - seu papel é este: “narrar, sempre narrar” . E esta narração conduz à memorização mecânica e mais que isso, transforma os educandos em “vasilhas”, recipientes a serem “enchidos”. E o bom professor é o que melhor consegue encher essas vasilhas com seus “depósitos”; e os melhores alunos são os que docilmente permitem se “encherem”.

Nessa perspectiva, a educação se resumiria em um professor fazer depósitos em seus alunos, e estes serem seus depositários:

Em lugar de comunicar-se, o educador faz ‘comunicados’ e depósitos que os educandos, meras incidências, recebem pacientemente, memorizam e repetem. Eis a concepção ‘bancária’ da educação, em que a única margem de ação que se oferece aos educandos é a de receberem depósitos, guardá-los e arquivá-los. (Freire, 1987, p.58)

Na visão bancária de educação, o saber é doação dos que se julgam sabedores aos que julgam nada saber, negando assim, o conhecimento como um processo de busca.

Freire (1987, p.58) argumenta que o saber só existe “na invenção, na reinvenção, na busca inquieta, impaciente, permanente, que os homens fazem no mundo, com o mundo e com os outros.”

Nesse sentido, critica a existência da contradição

educador-educando, pois, para ele, todos somos, simultaneamente, educadores e educandos. Por isso, a relação deveria ser a de troca. E numa concepção bancária de educação, a relação existente é a de dominação do professor sobre os alunos, ou seja, o professor, nessa concepção, é o sujeito do processo e o aluno, mero objeto. (Freire, 1987, p.59)

Estabelecendo analogia entre a concepção bancária e a concepção “digestiva” ou “alimentícia” do saber de Sartre, Freire (1987, p.63) argumenta: “Este (o saber) é como se fosse o ‘alimento’ que o educador vai introduzindo no educando numa espécie de tratamento de engorda ...”

Do ponto de vista da concepção bancária, o papel do professor não pode ser outro a não ser o de “disciplinar a entrada do mundo nos educandos ... imitar o mundo ... ordenar o que já se faz espontaneamente, ... encher os educandos de conteúdos ... fazer depósitos de “comunicados” - falso saber - que ele considera verdadeiro saber.” (Freire, 1987, p.63)

Ainda para Freire (1991, p.30), enquanto a educação tradicional procura acomodar, adaptar os alunos ao mundo dado, a educação moderna, progressista, procura inquietar seus alunos, desafiando-os para que percebam “que o mundo dado é um mundo dando-se e que, por isso mesmo, pode ser mudado, transformado, reinventado.”

Nesse quadro e conforme Freire (1991), essa tendência

mais tradicional de trabalho inviabiliza a participação e, conseqüentemente, dificulta a compreensão, a aprendizagem do aluno. Reforça-se, assim, a idéia defendida por John Locke, em que o professor caracteriza-se como dono da verdade e o aluno é visto como uma *tábula rasa*, uma espécie de papel em branco, no qual inicialmente nada se encontra escrito.” (Pensadores, 1978, p.10). Ou seja, um mero receptor de informações, já que: “...pode-se levar, facilmente, a alma das crianças numa ou noutra direção, como a própria água.” (Pensadores, 1978, p.08)

Para Skinner (1970, p.20), “ensinar é transmitir conhecimento.” Por isso, a educação está intimamente ligada à transmissão cultural:

A força de uma cultura é proporcional à sua capacidade de transmitir-se. Deve dividir aos seus novos membros um acúmulo de habilidades, conhecimentos e práticas éticas e sociais. Proposta que corresponde, precisamente, à educação. É de todo impossível que o estudante descubra por si mesmo qualquer parte essencial da sabedoria de sua cultura, e nenhuma filosofia da educação sustenta que deve procurá-la. (Skinner, 1970, p.121)

Skinner (1970, p.149) vai mais longe, ao afirmar que é perigoso:

(...) eliminar do ensino fatos e princípios importantes com o fim de dar ao estudante oportunidade de descobri-los por si mesmo. Somente o professor que não está consciente da influência que exerce sobre

seus alunos, poderá crer que esses descobrem na realidade, por si mesmos, as matemáticas e que (como escreveu um desses professores) os estudantes em suas discussões em grupo, sejam capazes de re-inventar (...) todas as relações e todos os dados e procedimentos que compreende um programa inteiro de Matemática.

É importante lembrar, como destaca Piaget (1964, p.133), que a transmissão social é fundamental, mas insuficiente. Isto porque

(...)a criança pode receber valiosas informações via linguagem ou via educação dirigida pelo adulto somente se está num estágio em que pode compreender a informação. Isto é, para receber a informação; ela necessita ter uma estrutura que a capacite para assimilar a informação. Eis a razão pela qual você não pode ensinar alta matemática para uma criança de quatro anos de idade. Não existem ainda estruturas que a capacitem para a compreensão.

Piaget (1978) distingue entre conhecimento físico, convencional e lógico-matemático. Lembra que pela experiência física o sujeito pode abstrair propriedades físicas dos objetos, bem como propriedades das ações propriamente ditas.

De acordo com Kamii (1995), o conhecimento físico é o conhecimento dos objetos do mundo exterior, é o conhecimento empírico que tem sua fonte, ainda que parcialmente no objetos. Já o conhecimento lógico-matemático, segundo a autora, só pode ser construído pelo sujeito, não pode ser transmitido oralmente, ainda que com a ajuda de educadores e outras pessoas.

Não se pode esquecer, no entanto, um terceiro tipo de conhecimento, o social, convencional, de natureza preponderantemente arbitrária. O acesso a esse conhecimento depende da transmissão de informações. Um objeto pode ter diferentes nomes sem que haja relações de natureza lógica entre esse objeto e sua denominação, por exemplo. Esse tipo de conhecimento, como a denominação de soma ou o sinal convencional dependem de uma pessoa passá-lo para outra. Kamii (1995) lembra ainda, que um sujeito necessita de uma estrutura cognitiva para ter acesso a qualquer dos três tipos de conhecimentos.

Piaget (1996) criticando uma concepção de educação que enfatiza a transmissão de informações, argumenta que a vida escolar tradicional não prepara suficientemente para a liberdade intelectual; pelo contrário, é freqüentemente dominada por uma espécie de monarquia absoluta, que se confunde, às vezes, com uma monarquia de direito divino.

Afirma Piaget (1996) que esta liberdade surge da cooperação, não é anomia ou anarquia, é autonomia, ou seja, submissão do indivíduo a uma disciplina que ele próprio escolhe e elabora. Por isso, a educação da liberdade supõe uma educação da inteligência e mais especialmente da razão.

O mesmo autor citado, afirma que o fato de na educação tradicional as crianças estarem submetidas à autoridade dos pais ou dos professores (que lhes impõem normas e tarefas), conduz à moral da obediência, à heteronomia, que, se encarada com seriedade, “conduziria

ao mais rigoroso conformismo social.”

David Carraher (1994) concorda com Piaget (1964) em relação à insuficiência da transmissão social e argumenta que a educação precisa começar onde a criança se encontra, considerando-se suas formas próprias de pensar, seu desenvolvimento cognitivo e experiências pessoais. O educador moderno deve tratar os erros da criança como hipóteses, tendo prazer em discuti-los. Ele seleciona problemas que estimulam o raciocínio ao invés de sobrecarregar a memória.

(...) “Ao invés de ser transmissor de idéias e informações, o educador se torna, dentro desse novo modelo proposto, agente do desenvolvimento dos alunos.” (David Carraher, 1994, pag. 29)

David Carraher (1994) critica os livros didáticos por serem, em grande parte, informativos e expositivos, com exercícios que não incentivam o aluno a pensar, a raciocinar, pelo contrário são exercícios do tipo **papagaio** - “agora você resolve este problema para ver se você aprendeu como foi que eu resolvi antes.”- (p.14). Este mesmo autor afirma que um bom exemplo desse tipo de exercício são os de matemática, pois o aluno deve aplicar precisamente as fórmulas prontas que acabou de “aprender”.

Ainda para David Carraher (1994, p.12), o modelo tradicional de educação já existia na Idade Média. Comprova esta afirmação descrevendo uma atividade preparada por um educador

européu, por volta de 800 d.C., para ensinar o filho do imperador Carlos Magno. Ressalta que a educação já se desenvolveu muito desde aquela época, mas a concepção de educação que tem orientado o trabalho do professor ainda apresenta características semelhantes às do modelo tradicional identificado ainda hoje nas escolas. São elas, segundo o autor:

1. papel dominante do professor;
2. a ênfase em respostas certas;
3. a noção de que o conhecimento consiste do acúmulo de informações isoladas;
4. a utilização de problemas que não incentivam o raciocínio, o pensamento.

Piaget (1978a), de maneira semelhante, critica o modelo educacional vigente ao salientar que:

embora seja moderno o conteúdo ensinado, a maneira de o apresentar permanece às vezes arcaica do ponto de vista psicológico, enquanto fundamentada na simples transmissão de conhecimentos, mesmo que se tente adotar (e bastante precocemente, do ponto de vista da maneira de raciocinar dos alunos) uma forma axiomática. (p.16)

Cabe ressaltar que nem Piaget (1978a) nem Carraher (1988) desconsideram o importante papel do professor na sala de aula. Pelo contrário, acreditam que cabe ao professor a responsabilidade de

organizar situações nas quais o aluno passe do estágio de menor conhecimento para o estágio de maior conhecimento.

Criticando a escola e sobretudo a matemática escolar, Santaló (1996) demonstra que o modo de encarar a matemática como uma ciência exata, determinista, deve ser substituído pelo pensar estatístico, probabilista. Seu ensino deve estimular a criatividade e mostrar que a matemática está sempre procurando sofrer modificações, adaptações. Não deve apenas resolver, mas também propor problemas. Para o autor:

Por meio de uma ação alternada propor/resolver é que a matemática avança, desenvolve-se e cresce. (Santaló, 1996 p. 20)

E isso só é possível se a preocupação estiver voltada para a educação, pois, numa visão tradicional, esta proposta seria inadequada.

A própria Secretaria de Educação Fundamental (MEC) em *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática* (1997 p.38), também critica a matemática escolar:

(...) tem-se buscado, sem sucesso, uma aprendizagem em Matemática pelo caminho da reprodução de procedimentos e da acumulação de informações; nem mesmo a exploração de materiais didáticos tem contribuído para a aprendizagem mais eficaz, por ser realizada em contextos pouco significativos e de forma

muitas vezes artificial.

Kamii (1986) afirma que as concepções da Educação Matemática tradicional, partem do pressuposto de que a matemática é uma matéria que deve ser interiorizada pelas crianças; que abstração é sinônimo de simbolização e, que a interiorização do conhecimento é melhor empreendida através de exercícios individuais e informações vindas do professor.

Segundo Kamii (1986), a escola, de maneira geral, prioriza o conhecimento físico (conhecimento do objeto que existe na realidade externa, exemplo: cor, peso, etc.) e o conhecimento social (convenções estabelecidas que são transmitidas via linguagem), mas ignora o conhecimento lógico-matemático (que se caracteriza por relações que cada indivíduo constrói).

Apesar de ser fundamental, a transmissão não é tudo que a criança precisa para adquirir o conhecimento físico e o social, pois, são conhecimentos que requerem uma estrutura lógico-matemática para sua assimilação. Afirma Kamii (1986, p.36):

Assim como a criança precisa de uma estrutura lógico-matemática para reconhecer um peixe vermelho como tal (conhecimento físico), ela precisa dessa mesma estrutura lógico-matemática para reconhecer um 'palavrão' como tal (conhecimento social). Para reconhecer um palavrão, a criança precisa fazer uma dicotomia entre um palavrão e as palavras que são aceitas socialmente. A mesma estrutura lógico-matemática é usada pela criança para construir tanto

o conhecimento físico como o social.

Disso decorre a importância e a necessidade de se valorizar o conhecimento lógico-matemático: por ser fundamental na construção do conhecimento como um todo.

1.2 Críticas ao ensino de matemática.

Um grande número de estudos e pesquisas têm apontado críticas ao ensino de matemática tais como a inadequação do trabalho em relação ao desenvolvimento cognitivo dos alunos, o caráter muitas vezes mecânico e destituído de significado do trabalho escolar, em especial em relação aos alunos menos favorecidos socio-economicamente. A análise mostra que, em sala de aula, ao prever as tarefas solicitadas aos alunos os professores podem desconsiderar o raciocínio dos alunos. Mostra, também, críticas a uma atuação docente que se limita a exercícios explicados no quadro negro pelo professor e listas de exercícios para fixação copiados de livros didáticos.

Revisão realizada por Taxa, (1996) apresenta críticas de pesquisadores como Sastre & Moreno, (1987), Rangel, (1992) e Kamii, (1985, 1994,1995), que apontam dificuldades das crianças em relação ao tipo de trabalho que, muitas vezes a escola tenta desenvolver. Sastre e Moreno (1980), na Espanha, e Kamii (1985/1986), nos Estados Unidos, mostram que, quando a escola não leva em conta o desenvolvimento cognitivo e o raciocínio das crianças é possível que a

aprendizagem escolar da matemática, nos primeiros anos, se limite a reprodução de grafismos sem sentido.

Sastre & Moreno (1980), mostraram que as crianças podem ficar limitadas à memorização sem significado já que a aritmética pode não ser compreendida realmente pelas crianças, quando se imagina que esse conhecimento possa ser simplesmente transmitido oralmente por meio de exposições, pelo professor.

Sastre (1980) critica o que denomina *aprendizagem da alienação* em relação ao ensino da matemática, analisando as relações entre adição numérica fora da escola e as somas realizadas na escola. A autora verificou que dentre as crianças que a escola considerava já terem aprendido a soma, 55% delas não eram capazes de fazer qualquer aproximação entre um experimento de unir objetos e a operação da adição que efetuavam nos cadernos escolares.

Kamii (1992/1994, 1995) tem analisado a tendência constatada na escola de tentar transmitir a aritmética como uma técnica e uma prática mecanicista. A autora mostra que somar, subtrair, multiplicar e dividir dependem de um raciocínio lógico-matemático que não se desenvolve através da prática que a escola mais tradicional tende a enfatizar, como a explicação e exposição de um conteúdo pelo professor, a atenção do aluno na demonstração na lousa e a memorização e utilização de sinais, símbolos e regras ensinadas pelo professor.

Pesquisas do Grupo de Recife, da Universidade Federal de

Pernambuco; Carraher, Carraher e Schliemann (1982); Carraher, (1986), (1988), analisaram o raciocínio matemático de crianças e jovens de baixa renda do Recife, em contextos formais e informais de educação. Estes trabalhos e inúmeros outros desenvolvidos pelo grupo de Recife, mostraram que há crianças que apresentam rendimento insatisfatório na escola e que, em situações informais de resolução de problemas, trabalhando como vendedores ambulantes, por exemplo, apresentam elaboradas operações mentais lógico-matemáticas.

O grupo de Recife tem enfatizado que não é, necessariamente em decorrência de alguma deficiência cognitiva que as crianças, por vezes, não aprendem matemática na escola, e que serão necessários outros trabalhos que ajudem a esclarecer a situação, apresentando críticas ao trabalho desenvolvido nas escolas.

Grande número de educadores não discordam, em geral, que a finalidade da educação seja a de promover o crescimento do ser humano. Como já bem lembrava Coll (1987) as dúvidas surgem quando se pretende definir o que seja crescimento e que ação pedagógica seria mais adequada. Orientações dos planos governamentais, do Ministério de Educação e Cultura (MEC) e da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, têm apontado o construtivismo como fundamento para a ação docente.

Estudiosos têm discutido concepções que enfatizam o processo interno do ser humano, o desenvolvimento como meta da educação, enquanto outros defendem a idéia de processo de

aprendizagem externo à pessoa; como a interiorização de um conjunto de conceitos, explicações, habilidades. Segundo Coll (1987), não se pode desconsiderar as relações entre desenvolvimento e aprendizagem. No caso, as repercussões das experiências educativas formais sobre o aluno são fortemente relacionadas ao nível de desenvolvimento e a atividade do aluno, como mostrou Piaget. Cada um dos níveis apresenta formas específicas de organização que correspondem a possibilidades de raciocínio e aprendizagem.

Busquets e outros (1997), por exemplo, chamam a atenção para mudanças que atualmente estão ocorrendo no mundo da ciência e afirmam que o trabalho em educação não pode ficar alheio a novas idéias, reconsiderando-se a ênfase na transmissão de conhecimentos e em informações.

Apesar das diferentes reformas educacionais, a relação ensino/aprendizagem na maioria das escolas permanece a mesma, ou seja, a aprendizagem caracteriza-se pela ênfase no acúmulo de conhecimentos que o aluno apresenta após ter sido instruído pelo professor.

Para David Carraher (1994, p.12), isto é inviável, pois:

Do mesmo modo em que o café é passivamente consumido pelo freguês da lanchonete, o conhecimento é consumido pelo aluno; isto é, ele recebe o conhecimento já pronto e organizado e seu único trabalho consiste em engolir.

Com a matemática, esta concepção apresenta-se ainda com maior vigor e, por isso, é encarada como a disciplina mais difícil, a que mais exige e a que mais reprova, o que justifica a fobia encontrada na maioria das pessoas:

Eu nunca fui boa em matemática. A matemática me dá temor... eu fazia um esforço e era aprovada...no ensino superior foi pior ainda, eu tinha que decorar tudo e saía de um exame e esquecia de tudo. fazia o possível para ser aprovada, ainda que fosse com nota dez... Raciocinar, nunca. Ainda tenho problemas. Aprendi sozinha a fazer contas mentalmente, por exemplo aprendi as medidas: um terço, um quarto de xícara..., pela necessidade de entender as dietas. (Lerner1995, p.3)

Segundo Papert (1986), essa fobia aparece após o ingresso na escola e aumenta à medida que os sujeitos avançam sua escolaridade. Para ele:

As crianças iniciam suas vidas como aprendizes ávidos e competentes. Aprendem a ter problemas com a aprendizagem em geral e com a matemática em particular. (p.34)

O ensino da matemática concebido dentro do paradigma mais tradicional de educação, provoca a criação de *Analfabetos Matemáticos*, ou seja, sujeitos incapazes de pensar matematicamente, carentes de raciocínio lógico. (Paulos, 1994a).

De acordo com Paulos (1994a), isto ocorre, na maioria da

vezes, como consequência do ensino deficiente, já que a escola preocupa-se mais em ensinar o algoritmo e quase nunca se preocupa com a compreensão, com o raciocínio indutivo ou com o estudo de fenômenos matemáticos. Vários exemplos são por ele citados para comprovar esta idéia. Um exemplo muito interessante diz que:

Um homem que viaja muito estava preocupado com a possibilidade de haver uma bomba a bordo do seu avião. Calculou a probabilidade disso, verificou que era baixa, mas não suficientemente baixa para ele, de modo que agora sempre viaja com uma bomba em sua mala de mão. Raciocina que a probabilidade de haver duas bombas a bordo seria infinitesimal. (Paulos, 1994a p.25)

Se considerarmos apenas do ponto de vista matemático (entendido como uma ciência puramente exata), a resposta está correta, o cálculo está certo. Porém, o matemático desse exemplo esqueceu-se de que assim ele não altera a probabilidade da existência de uma nova bomba. Sua solução falha no sentido lógico. Pois, se outros tripulantes fizessem o mesmo cálculo e tivessem a mesma atitude de carregar uma bomba em sua bagagem, outras bombas estariam a bordo. Sendo assim, o autor assinala seu analfabetismo matemático.

Neste exemplo, identificamos, além do analfabetismo matemático, a formação de hábitos que a escola desenvolve com tanta competência. Ou seja, o emprego das fórmulas por ela ensinadas e que são utilizadas por seus alunos em qualquer circunstância, sem serem questionadas ou analisadas de acordo com a situação em que está sendo empregada. Opõe-se à idéia do *pensamento operatório* defendido

por Piaget.

Ruiz, (1994, p.165) ao privilegiar o pensamento operatório numa perspectiva piagetiana, afirma:

O campo de aplicação de uma operação é muito mais extenso e não está ligado a uma expressão simbólica (verbal, algébrica ou numérica) fixa, constando de operações parciais coordenadas de maneira contínua umas com as outras, formam sistemas de conjunto coerentes e móveis.

Para Piaget, os hábitos são estereotipados e de funcionamento rígido porque são irreversíveis, por outro lado a mobilidade da operação traduz seu caráter de reversibilidade. O pensamento operatório, pelo contrário, pode construir hipóteses, em seguida afastá-las para voltar ao ponto de partida, percorrer em ‘caminhos de duas mãos’, mantendo a coerência das idéias empregadas. (...) a composição das operações é associativa, isto é, o pensamento fica livre para fazer ‘rodeios’, permitindo a solução de um mesmo problema por vias diferentes.”

Como evidencia Lorenzato (1993) ao relatar a posição do NCSM (The National Council of Supervisors of Mathematics), o ensino de matemática está fortemente preso a pequenos objetivos, ou seja, está preocupado apenas com a formação de hábitos, em desenvolver habilidades específicas como, por exemplo, ensinar a resolução de exercícios de adição e, enquanto se faz isto, nenhuma outra noção pode ser trabalhada.¹ O aluno deve resolver exaustivamente “n” problemas de adição, para decorar, memorizar muito bem a técnica, a definição. O que freqüentemente se pede é a resolução de exercícios mecânicos e

CANIATO, Rodolfo. *Ato de Fé ou Conquista do Conhecimento? Um episódio na vida de Joãozinho da Maré*. Universidade Federal Fluminense (Mimeografado)

quase nunca a resolução de situações problema. (Carraher, 1994).

D'Ambrósio (1996, p.67) parece concordar com Lorenzato (1993) ao argumentar que os objetivos dessa “educação” são muito pobres e, por isso:

talvez saiam capacitados como mão-de-obra para execução de trabalhos de rotina. Mas como será sua participação ampla numa sociedade moderna e democrática? Como fica o componente crítico que deveria ser dominante num modelo educacional conduzindo à cidadania plena? Como pensar o indivíduo na plenitude de seu ser e ao mesmo tempo integrado na sociedade?

Segundo esse autor (1996) o ensino predominante na maioria das escolas não merece ser chamado de educação, já que o que existe é apenas um treinamento para executarem tarefas específicas. Compara o aluno com um automóvel em construção, que deverá sair pronto no final da montagem e cada série corresponde a uma “parte” a ser montada: o motor, roda, etc.; e cabe ao montador, treinado para fazer tudo no tempo certo, seguindo métodos preestabelecidos, montá-los.

O *Currículo Básico para a Escola Pública do Estado do Paraná* (1990, p.74) na medida em que critica esta postura por um lado, e propõe a mudança de paradigma, de concepção de ensino de matemática, sugere, por outro lado, um programa a ser utilizado pelo professor com uma seqüência fixa de conteúdos escolares. Um bom exemplo é a proposta para se trabalharem as operações na terceira série, que estão assim descritas:

Adição, subtração, multiplicação e divisão.

Construção de algoritmos.

Cálculo de metades e de dobro, terça parte e triplo, etc

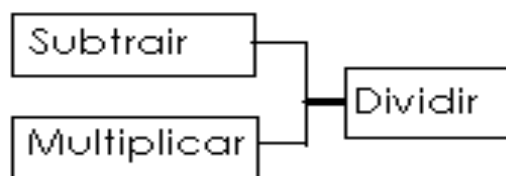
A multiplicação e a noção de área.

Adição e Subtração de frações homogêneas.

Adição e Subtração de números decimais.

Visto dessa forma, a impressão que se tem é de que o aluno não pode aprender um conceito sem antes ter o domínio do seu pré-requisito, o que também é criticado no próprio currículo. Argumentando que a maioria dos professores possuem uma visão formalista do ensino de matemática, a proposta curricular paranaense fundamenta sua crítica de que os currículos estão impregnados por essa visão. Para provar essa colocação, o documento menciona o seguinte exemplo:

“Se A vem logicamente antes de B, então A é pré-requisito para B. (...) Para dividir é necessário saber multiplicar e subtrair, então a seqüência de pré-requisitos seria:



Entretanto, veja que para realizar uma divisão, basta saber subtrair:

4315: 895 =?

4315

-895

$$\begin{array}{r}
 3420 \\
 -895 \\
 \hline
 2525 (...)
 \end{array}$$

O resultado é 4 e sobra 735.”
 (Currículo Básico para a Escola Pública do Paraná,
 1990 p.74)

Para Papert (1994), que critica o que denomina de instrucionismo, o que a escola ensina não é necessariamente o que utilizamos quando temos que resolver um problema real, no que também concordamos, pois é quase impossível encontrarmos alguém que, quando está num mercado e tem que somar o preço de dois produtos sem ter em mãos lápis e papel, tendo portanto que resolver mentalmente, faz, por exemplo, $11,00 + 19,00$ como a escola nos ensinou, ou melhor assim: “ $1 + 9 = 10$ vai 1; $1 + 1 = 2 + 1$ que foi = 3 dá 30,00” É muito mais provável que encontremos pessoas que façam a adição assim: Junto 1,00 dos 11,00 aos 19,00 dá 20,00 e sobra 10, junto novamente esses 10 aos 20 e dá 30,00.

Polya (1975) nos alerta para este modelo educacional, ao argumentar que se o professor tiver como objetivo maior exercitar seu aluno em operações rotineiras, estará aniquilando seu interesse e dificultando seu desenvolvimento intelectual, mas, se sua preocupação estiver voltada para a curiosidade, o desafio, a descoberta, apresentando ao aluno problemas compatíveis com seus conhecimentos, colaborando com indagações estimulantes, poderá incutir-lhe o gosto pelo raciocínio independente.

Kamii (1986), em relação ao ensino tradicional, afirma que este ensina uma série de coisas que fazemos sem compreender. Para ela, “entender matemática se confunde com aprender processos adequados automaticamente”. (p.292)

A instrução, nesse sentido, tem como maior preocupação tornar a matemática acessível a um maior número de pessoas e garantir a manipulação de fórmulas

Através dessas afirmações, pode-se constatar como o ensino, nesta perspectiva, é algo negativo na formação dos sujeitos. Porém, continua sendo difundido e defendido por muitos professores.

Para alguns autores (como David Carraher (1994); Baldino (1991); Ruiz (1994); entre outros), um dos grandes fatores que contribuem para que a ênfase na transmissão de conhecimento continue sendo difundida diz respeito à concepção que se tem da matemática.

Segundo Caraça (1978), a matemática é considerada, na maioria das vezes, como uma ciência desligada da realidade; uma ciência que vive num gabinete fechado, onde nada pode alcançá-la, “nem mesmo os clamores do homem”.

D’Ambrósio (1986), parece concordar com esta afirmação, pois, referindo-se à matemática ensinada na escola, coloca que:

Creio ser absolutamente insustentável a argumentação

de que a Matemática deve ser construída como um edifício lógico em que se superpõem conceitos, em que se superpõem resultados, e que a sofisticação atingida depende realmente de quão alto se vai nessa superposição de tijolos para construir o edifício. (p.14)

Criticando a “mania” de copiarmos o que os países desenvolvidos fazem, esse autor afirma que pouco poderá ser transferido para nossa realidade e, por isso, devemos atacar a estrutura do ensino como um todo, principalmente do ensino de matemática.

Ainda para D’Ambrósio (1986 p.31):

(...) do ponto de vista da motivação contextualizada, a Matemática que se ensina hoje nas escolas é morta. Poderia ser tratada como um fato histórico.

A Secretaria de Educação Fundamental do Ministério de Educação e Cultura (MEC) em *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática* (1997 p.39) ressalta que um conhecimento só é pleno se puder ser utilizado em situações diferentes daquelas que lhe deram origem. Diz o documento:

Para que sejam transferíveis a novas situações e generalizados, os conhecimentos devem ser descontextualizados, para serem contextualizados novamente em outras situações. Mesmo no ensino fundamental espera-se que o conhecimento aprendido não fique indissoluvelmente vinculado a um contexto concreto e único mas que possa ser generalizado, transferido a outros contextos. (p.39)

E devido a isso, a escola não pode nivelar todos os alunos como se estes fossem iguais e, portanto, compreendessem da mesma forma. Pois, desta maneira, justificaria o mesmo tipo de ensino para todos, continuaria se difundindo a formação de hábitos e o domínio de técnicas, esquecendo-se, portanto, que ensinar os alunos a resolver problemas através de regras, não garante a aprendizagem, visto que nem sempre é necessário entender o problema para resolvê-lo, mas sim, apenas empregar fórmulas.

Papert (1994), em relação à aprendizagem, afirma que o uso da regra não garante a resolução do problema, mas pensar sobre o problema promove a aprendizagem.

Concebendo a educação numa visão mais tradicional, a justificativa para a importância do ensino de matemática, segundo depoimentos de professores descritos por Lerner (1995 p.4) seria:

preparar a criança para raciocinar com rapidez e porque se deve saber utilizá-la na vida diária; é uma disciplina instrumental – como a leitura – que ajuda a compreender as demais matérias; é uma ciência ‘muito completa’, porque é exata.

Um outro depoimento referente a matemática também descrito por Lerner (1995 p.5) e que nos deixa preocupados é este:

Eu sei que tem utilidade, porém eu tento evitar utilizá-la e utilizo só para o indispensável ... quando se vai

pagar algo ou quando se recebe algum dinheiro ... a Matemática de sala de aula fica fora do cotidiano, é só símbolo.

O que se pode esperar de um professor de matemática que faz um depoimento como este? Podemos dizer que este é um sujeito com dificuldades em matemática e dificilmente conseguirá que seus alunos apreciem a matemática. E, como nos diz Polya (1975) no prefácio de seu livro:

... a Matemática tem a duvidosa honra de ser a matéria mais apreciada do curso ... Os futuros professores passam pelas escolas elementares a aprender a detestar a Matemática ... Depois, voltam à escola elementar para ensinar uma nova geração a detestá-la.

Considerando as críticas em relação ao ensino de matemática entendido como transmissão direta de conhecimentos, cabe-nos destacar a importância de um trabalho que leve em conta considerações de inúmeros estudiosos que se integram no movimento da Educação Matemática.

Apesar dessas preocupações dominarem a maioria das escolas, já existem algumas preocupações que vão além do que Papert (1994) chama de instrucionismo, são as que dizem respeito à Educação Matemática.

D'Ambrósio (1996 p.30) parece fazer um apelo para essa concepção ao afirmar que:

A sociedade moderna não será operacional com um instrumental intelectual obsoleto. Necessitamos da matemática de hoje.

Este apelo fica mais evidente quando o autor nos diz:

Já é tempo de os cursos de licenciatura perceberem que é possível organizar um currículo baseado em coisas modernas. Não se pode fazer todo aluno vibrar com a beleza da demonstração do Teorema de Pitágoras e outros fatos matemáticos importantes. (p.59)

Sabemos que as mudanças na escola só ocorrerão se houver uma mudança de paradigma e concepção de educação e, sobretudo, de matemática. Por isso, faz-se necessário que a Educação Matemática não seja interpretada como sinônimo de ensino de matemática, mas como uma área de conhecimentos, em que educador e educando se apresentam numa relação de cumplicidade, de parceria, de troca; entendida como uma forma de pensamento, como uma “ferramenta” cognitiva, como instrumento para a leitura do mundo e que, muitas vezes, depende de outras áreas de conhecimento; que o processo de aquisição de conhecimentos não implicasse numa relação de dominação, mas numa busca constante de novos desafios, com base na pesquisa, na reconstrução e, principalmente, na compreensão. Enfim, que a matemática não fosse vista como uma ciência puramente abstrata, exata, mas como uma área de conhecimento voltada para grandes objetivos.

1.3 - Educação Matemática: uma nova perspectiva

A Educação Matemática é uma ciência embrionária no Brasil, ainda que de estudos e pesquisas sólidas em outros países, em especial em países europeus como a Alemanha. Constitui uma área de conhecimentos de caráter interdisciplinar e na fronteira entre a matemática, a psicologia, a antropologia, a sociologia, a inteligência artificial, entre outras. Pesquisadores e estudiosos da Educação Matemática e da Psicologia da Educação Matemática, tem aberto muitas frentes de discussão acerca do conhecimento e ensino da matemática e reunido trabalhos e contribuições de porte e relevância. Assim, temos muitos estudiosos colocando interrogações em um universo antes povoado de certezas.

Bonilla (1989) e Araújo (1988), entre outros autores, concebem a Educação Matemática como uma área interdisciplinar compreendida, por um lado, pela Matemática e, por outro, pelos diversos aspectos teóricos de outras áreas da educação: Filosofia, Sociologia, etc., com o intuito de socializar o saber.

Por seu caráter interdisciplinar, Higginson (apud Bonilla, 1989, p.35) destaca que a Educação Matemática pode ser representada por um tetraedro que ele batizou de “MASP”, onde o M corresponde à matemática; o A à filosofia; S à sociologia e o P à psicologia. Nesse sentido, a resposta para a pergunta “que” cabe à matemática; “por que”

à filosofia; “quem” e “onde” à sociologia e “quando” e “como” à psicologia.

Pontes (1996) apresenta a Educação Matemática como uma área de múltiplas faces que envolve tanto o aspecto didático-metodológico, como o epistemológico, o psicológico, o histórico-filosófico, o sociológico e o axiológico.

De acordo com essas definições, verificamos que existe uma determinada concordância com o caráter interdisciplinar da Educação Matemática, um dos pontos de maior relevância entre seus estudiosos, visto que cada área contribui de uma forma especial, o que torna indispensável a interdisciplinaridade.

A Educação Matemática entendida como uma área interdisciplinar, consegue captar a profundidade das relações conscientes entre pessoas e entre pessoas e os objetos. Porém, essa prática precisa ser espontânea, no dia-a-dia, por vontade e nunca por imposição. Como afirma Fazenda (1979, p.17-18): “O que caracteriza a atitude interdisciplinar é a ousadia da busca, da pesquisa: é a transformação da insegurança num exercício do pensar, num construir.”

Para D’Ambrósio (1996, p.7) a matemática deve ser entendida como uma estratégia desenvolvida pela humanidade “para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural.”

Concordamos com D'Ambrósio (1986) que afirma ser necessário que a escola mude

completamente a ênfase do conteúdo e da quantidade de conhecimentos que a criança adquira, para uma ênfase na metodologia que desenvolva atitude, de matematizar situações reais, que desenvolva capacidade que desenvolva capacidade de criar teorias adequadas para as situações diversas e na metodologia que permita o recolhimento de informações onde ela esteja, metodologia que permita identificar o tipo de informação adequada para uma certa situação e condições para que sejam encontrados, em qualquer nível, os conteúdos e métodos adequados. (p.14)

Isto porque:

O que se ensina de conteúdo em nossa escola é de pouca importância no nosso contexto sócio-econômico-cultural. Não se pode ter certeza se o tipo de Matemática que se ensina às nossas crianças e que será utilizado no seu ambiente de trabalho venha a ser relevante no seu contexto sociocultural nos próximos anos. Este poderá ser absolutamente diferente daquele que se pretende de uma criança em países desenvolvidos. (D'Ambrósio. 1986, p.15)

O Conselho Nacional de Supervisores de Matemática (NCSM - The National Council of Supervisors of Mathematics) analisando as características básicas que o aluno de Matemática deverá apresentar no próximo século, destaca a necessidade de se preparar para a mobilidade. Nesse sentido apresenta um conjunto de habilidades que, a escola deverá enfatizar, no que também concordamos. São elas:

resolução de problemas, comunicação de idéias matemáticas, raciocínio matemático, aplicação da matemática a situações da vida quotidiana, atenção para com a 'razoabilidade' dos resultados, estimação, habilidades apropriadas do cálculo, raciocínio algébrico, medidas, geometria, estatística e probabilidade. (Lorenzato, 1993 p.42)

Se estas habilidades fossem encaradas com seriedade, a Educação Matemática estaria centrada em grandes objetivos e, conseqüentemente, proporcionaria aos alunos:

(...) revelar uma perfeita compreensão dos conceitos e princípios matemáticos, raciocinar claramente e comunicar efetivamente idéias matemáticas, reconhecer aplicações matemáticas no mundo ao seu redor e abordar problemas de matemática com segurança. (Lorenzato, 1993, p.41)

Um ponto importante, seria enfatizar a história da matemática, pois os alunos poderiam verificar que esta nem sempre existiu, mas foi uma construção humana que levou séculos para chegar onde está. E dessa forma poderiam verificar a necessidade de se construir um conhecimento, e não apenas reproduzi-lo. E assim, teriam a possibilidade de organizar-se, escolher a melhor resposta, testar-se, agir; com a certeza de quem usa uma ferramenta, conscientes de que estão diante de algo que os desafia.

Outro ponto que merece ser considerado é que os alunos possuem experiências diferenciadas e não é conveniente a escola tentar nivelar os alunos em função de objetivos pré-determinados, priorizando

uns em detrimento de outros, porque dessa forma consegue-se atingir apenas uma minoria.

Como lembram Arguelo e Sebastiani (1992, p.6), ao defenderem a contribuição da Etnomatemática:

...não se pode destruir o senso localizado da criança, as noções abrangentes com que etnicamente a criança interage no meio ambiente. Muitas vezes vemos que isso é feito para que em seguida, se inicie a construção lógico-formal da aprendizagem.

Kamii (1986) afirma que os alunos deveriam ser incentivados a pensar com suas próprias cabeças, livres para (re)inventarem a matemática a seu modo, desenvolvendo assim, a autonomia, a auto-confiança e a compreensão. Considera-se que isto também é válido para adultos.

Criticando as concepções tradicionais relacionadas ao ensino de matemática, Kamii (1986), propõe uma forma de superá-lo: eliminar a instrução tradicional da aritmética da 1ª série e substituí-la por dois tipos de atividades: situações diárias de sala de aula; e jogos em grupo. Considera-se que isto também é válido para a Educação de Adultos, porque embora tenham experiências de vida e conhecimentos diferenciados devido ao trabalho, por exemplo, na sala de aula demonstram passar por um processo que possui muitos pontos de convergência com aquele que a criança passa, como já nos demonstrou Emilia Ferreiro (1983) em relação à construção da escrita.

Freire (1987) afirma que uma autêntica educação não ocorre numa relação de dominação, mas na interação entre professor/aluno e aluno/aluno mediatizados pelo mundo. Mundo este que impressiona, desafia, originando visões e pontos de vista diferentes e impregnados de anseios, dúvidas e esperança.

Para Piaget (1978a), o tipo de ensino oferecido aos alunos é que conduz à crença de que são ruins em matemática. Mas para ele não existem maus alunos, mas sim aqueles que não se adaptaram ao tipo de ensino ao qual foi submetido. Por isso, para estes alunos, outros meios deveriam ser utilizados:

... as supostas aptidões diferenciadas dos 'bons alunos' em Matemática ou Física, etc., em igual nível de inteligência, consistem principalmente na sua capacidade de adaptação ao tipo de ensino que lhes é fornecido; os 'maus alunos' nessas matérias, que entretanto são bem sucedidos em outras, estão na realidade perfeitamente aptos a dominar os assuntos que parecem não compreender, contanto que estes lhes cheguem através de outros caminhos: são as 'lições' oferecidas que lhes escapam à compreensão, e não a matéria. (Piaget, 1978a, p.14)

Desta forma, justifica-se a necessidade de uma nova orientação que viabilize uma prática pedagógica mais significativa e que privilegie o pensamento operatório pois, como nos lembra Resnick (1987), a escola não é apenas uma instituição cuja função é nos preparar para o trabalho, mas também um lugar para promover o trabalho intelectual - que envolve raciocínio e reflexão na vida pessoal,

política e social.

Para Piaget (1978a), uma das condições básicas para que a aprendizagem ocorra de fato, consiste em permitir que o aluno construa seu conhecimento. Porém, isso não implica na anulação do papel do professor. Ao contrário, ele é indispensável na medida em que deve ser o animador e, portanto, criar as situações capazes de propor problemas úteis e, em seguida, organizar contra-exemplos que levem à reflexão. O papel do professor não é de conferencista, mas de pesquisador, e, como tal deve buscar apoio em outras áreas de conhecimento, pois: “é preciso que o mestre animador não se limite ao conhecimento de sua ciência, mas esteja bem informado a respeito das peculiaridades do desenvolvimento psicológico da inteligência da criança ou do adolescente...” (Piaget, 1978a, p.15).

A relação entre professor e aluno, neste sentido, deve ser a de troca, ou seja, a de permuta de idéias, reciprocidade de comunicação.

Dentro dessa concepção, o ensino caracteriza-se pelo ensino de relações, pelo desenvolvimento da inteligência; e este ensino deve basear-se na proposição de problemas; e a aprendizagem se dá no exercício operacional da inteligência que só se realiza quando o sujeito elabora seu conhecimento.

Porém, para que isso ocorra o sujeito deve estar livre para reinventar a seu modo, de acordo com suas experiências e, principalmente a seu tempo, já que é impossível construir algum

conhecimento em tempo limitado.

Ruiz (1992) e D'Ambrósio (1986), entre outros, são defensores da idéia de que em Educação Matemática, é preciso que se respeitem os sujeitos como são, ou seja, respeite-se sua cultura, seus conhecimentos, sua vida prática fora da escola, enfim, respeite-os como sujeitos do seu próprio conhecimento. Desse modo, o ensino seria mais significativo; eles se sentiriam valorizados e estimulados. A escola passaria a contribuir com a vida fora da escola, ou seja, fazer parte do seu dia-a-dia, já que muitos a concebem como sendo estanques. Porém, respeitá-lo ainda não é suficiente, mas é preciso conhecê-lo como um todo. seus mecanismos intelectuais e pessoais além de saber utilizá-los da melhor maneira possível.

O *Currículo Básico para a Escola Pública do Paraná* (1990, p.66) demonstra uma certa preocupação com a Educação Matemática na medida em que afirma que:

A construção de um conceito matemático deve ser iniciada através de situações 'reais' que possibilitem ao aluno tomar consciência de que já tem algum conhecimento sobre o assunto; a partir desse saber é que a escola promoverá a difusão do conhecimento matemático já organizado.

Quando iniciamos uma prática pedagógica que respeita o conhecimento que os alunos trazem de fora da escola (conhecimento prático), oferecemos a oportunidade de avançarem no sentido de acomodarem novas informações, além de facilitarmos a resolução e

compreensão dos problemas matemáticos, já que estamos lidando com suas experiências.

Nesse sentido, o educador deve partir de onde o sujeito se encontra, criar situações que possibilitem a troca, a reciprocidade intelectual e a cooperação tanto moral como racional. Os erros do aluno devem ser tratados com cuidado especial para que não haja inibição por parte do sujeito. Na proposta piagetiana, o erro desempenha papel fundamental, pois, ao contrário do paradigma tradicional, demonstra em que nível está o sujeito, quais suas hipóteses e estratégias e abre um campo para novas descobertas, um novo desafio é colocado. O professor deve ser o mediador entre o novo conhecimento e este sujeito, propondo situações problema que estimulem o raciocínio.

Assim, o mais importante é acompanhar como o aluno pensa e tentar chamar sua atenção para novos aspectos do problema proposto. Os erros, tanto das crianças como dos adultos, são preciosos. Enquanto um professor tradicional tem antipatia pelos erros, como se estes fossem defeitos irreparáveis e, portanto, deveriam ser abolidos; o professor moderno “se deleita nas idéias ‘estranhas’ das crianças” (David Carraher, 1994, p.23). O conhecimento é visto como representação mental, como construção.

Charlot (1979), em sua obra *A mistificação Pedagógica* faz algumas considerações que merecem ser destacadas, por ser de grande validade. Diz ele:

- Os alunos possuem habilidades diferenciadas;

- Não é conveniente a escola tentar nivelar os alunos em função de algumas habilidades pré-determinadas, já que este nivelamento impedirá que outras habilidades aflorem;

- A escola, ao tentar homogeneizar as diferenças naturais existentes entre os alunos, através da priorização e desenvolvimento de algumas habilidades em detrimento de outras, acaba gerando o sucesso social apenas de uns poucos que já possuem, potencialmente, essas habilidades.

A literatura é rica em afirmar que uma verdadeira mudança só ocorrerá se os professores estiverem bem preparados. Não seria válido, a Secretaria de Educação fazer um discurso bem elaborado, como já vimos, e não dar suporte aos professores para que as propostas saiam do papel e se efetivem na sala de aula.

D'Ambrósio (1986,p.32-33) afirma:

(...) o grande desafio é desenvolver um programa dinâmico, apresentando a ciência de hoje relacionada a problemas de hoje e ao interesse dos alunos.

Sendo assim, o autor citado acima sugere ao professor que prepare uma justificativa para cada item do programa, desde que esta não seja internalista, ou seja, do tipo “progressões são importantes para entender logaritmos”, mas sim, contextualizadas do mundo de hoje e do futuro. (p.32)

Discutindo o papel do professor, do mesmo modo como o

NCSM (The National Council of Supervisors of Mathematics) descreve as habilidades que os alunos deverão apresentar no próximo século, Beatriz D'Ambrósio (1993) descreve as características necessárias ao professor de matemática. São elas:

1. Visão do que vem a ser a matemática;
2. Visão do que constitui a atividade matemática;
3. Visão do que constitui a aprendizagem da matemática
4. Visão do que constitui um ambiente propício à aprendizagem.

Ubiratan D'Ambrósio (1996 p. 90), comentando estas habilidades ressalta que:

(...) a função do professor é de associado dos alunos na consecução de tarefa e, conseqüentemente, na busca de novos conhecimentos. Alunos e professores devem crescer social e intelectualmente no processo.

Dessa maneira, justifica-se a necessidade de mudança na escola, a começar pela formação do professor, que não tem subsídios para uma boa aula, já que ele mesmo, na maioria dos casos, não compreende o que está fazendo.

Guzman (1985) critica a formação do professor, chamando-a de inadequada e, por isso, afirma que, deste, enquanto docente, não se pode esperar muito:

Como pretender que ensine pelo menos ‘alguns detalhes da história da Matemática’ quem nunca, em seus cinco anos de licenciatura, recebeu a menor informação sobre o desenvolvimento histórico da Matemática? Como poderá desenvolver nos outros ‘a criatividade e os hábitos de pesquisa’ quem, através de sua passagem pela universidade, não teve oportunidade de fazer trabalho criativo algum, imerso na tarefa de repetição da informação que recebia em sala de aula? Para capacitar os professores em exercício, para realizar as tarefas recomendadas, seria necessário oferecer-lhes os meios adequados de reciclagem. Para formar adequadamente os futuros professores, será necessário mudar bastante o ensino na universidade. (p.17)

Guzman (1985) vai mais longe ao afirmar que apenas mudando os meios ou aperfeiçoando a formação dos professores, não garantiria o sucesso da Educação Matemática. É preciso, segundo ele, conhecer os alunos como um todo, seus mecanismos intelectuais e pessoais; além dos próprios professores se conhecerem, no que outros autores também concordam, como já mencionamos anteriormente.

Os cursos de formação do professor de matemática (licenciatura) reproduz a formação de hábitos, a manipulação de fórmulas, ou seja, inicialmente trabalham o que chamam de matemática pura, para em seguida tratar do ensino, da formação pedagógica. Nota-se que as universidades, de maneira geral, não conseguem trabalhar de forma globalizada, abrangente e, por isso, não estão sendo capazes de preparar os indivíduos como um todo, e conseqüentemente, de formar bons profissionais.

Inúmeros trabalhos, tais como o de Guzman (1985) e

Piaget (1978a), analisam o problema da formação do professor, que não é objeto desta dissertação, mas que apresenta-se, atualmente, como um dos maiores problemas, já que estes professores, mal preparados, vão reproduzir o que aprenderam. Como bem nos disse Polya (1975), vão a escola e aprendem a detestar a matemática; depois retornam para ensinar uma nova geração a detestá-la.

Para Piaget (1978a), a formação do professor manifesta-se como primordial para qualquer reforma pedagógica. E enquanto esta não for resolvida de maneira satisfatória, será inútil, segundo ele, organizar programas bem elaborados e construir boas teorias a respeito do que deva ser realizado. Para ele, a formação intelectual e moral do corpo docente é um problema difícil de ser resolvido,

pois quanto melhores os métodos preconizados para o ensino, mais penoso se torna o ofício do professor, que pressupõe não só o nível de uma elite do ponto de vista dos conhecimentos do aluno e das matérias, como também uma verdadeira vocação para o exercício da profissão. (Piaget, 1978a, p.26)

Segundo Piaget (1978a, p.26) a única solução racional possível é “uma formação universitária completa para os mestres de todos os níveis (pois, quanto mais jovens são os alunos, maiores dificuldades assume o ensino, se levado a sério) ...”

CAPÍTULO 2

A MATEMÁTICA NO CONTEXTO EXTRA-ESCOLAR: uma experiência com educação de adultos

“Fui alfabetizado no chão do quintal da minha casa, à sombra das mangueiras, com palavras do meu mundo e não do mundo maior dos meus pais. O chão foi meu quadro-negro; gravetos, o meu giz.” (Paulo Freire)

A matemática no contexto extra-escolar: uma experiência com educação de adultos

A concepção de que a educação é um processo permanente para a vida toda, é um dos caminhos contemporâneos, que permite, principalmente ao adulto, a quem cada vez mais se exige a formação escolar, reconstruir ou reformular os conceitos necessários para a aplicação no seu dia-a-dia.

Nesse sentido, vemos o crescimento acelerado dos programas de Educação para Adultos como meio de superar as limitações decorrentes da pouca escolaridade e, conseqüentemente, do sentimento de incompetência que muitos demonstram carregar. Isto porque em tempos modernos, as exigências que a sociedade nos coloca diariamente, as mudanças aceleradas e o papel exercido pelas novas tecnologias, suscitam novas respostas.

Depoimentos de alunos em sala de aula muitas vezes expressam o sentimento de incompetência, nos próprios programas de Educação para Adultos, na medida em que os sujeitos, em busca de meios mais eficazes para solução de seus problemas, se defrontam com um ambiente inteiramente desconhecido e opressor, onde não têm espaço para colocar o que pensam. No depoimento descrito por Silva (1990), embora se refira à escola de uma forma geral e não à educação

de adultos especificamente, percebe-se as dificuldades dos alunos:

Quando entramos para a escola, levamos conosco toda essa bagagem de experiências vividas, esperando encontrar oportunidades que nos permitam ampliar nossa visão do mundo e estabelecer relações entre os vários níveis de conhecimento para que possamos atuar ativamente no meio em que vivemos. Mas, nessa escola, o que nos é apresentado são muito mais informações sobre determinados conteúdos específicos - Língua Portuguesa, Ciências, História, Geografia, Inglês e Matemática - do que oportunidades para nos tornarmos mais críticos, criativos e independentes. Nem mesmo podemos verificar uma integração entre esses conteúdos existentes. O aluno somente recebe passivamente informações fragmentadas, e cabe a ele, se algum dia tiver oportunidade, organizar todas essas informações, relacioná-las e aproveitá-las em sua vida. (Silva, 1990, p.17)

Como bem nos diz Freire (1993), num ambiente assim, não pode haver conhecimento pois não são chamados a conhecer, mas a memorizar informações ditadas por um professor.

Criticando essa concepção de educação como um processo alienante, Freire (1993) propõe a *Educação Problematizadora*, de caráter reflexivo, que implica num constante ato de desvelamento da realidade, que busca inserir o sujeito na realidade de forma autenticamente crítica.

Essa concepção tem como ponto de partida a historicidade dos sujeitos. Por isso, estes são considerados inacabados, inseridos numa realidade que, sendo histórica também, é igualmente inacabada. Deste modo, a comunicação, a interação entre os sujeitos e

entre estes e o professor, é essencial, já que ambos se caracterizam como aprendizes:

...o pensar do educador somente ganha autenticidade na autenticidade do pensar dos educandos, mediatizados ambos pela realidade, portanto, na intercomunicação. (Freire, 1993 p.64)

Assim sendo, Pinto (1982) alegando que a educação diz respeito à existência humana em todos os sentidos e, por isso é um processo contínuo, afirma que o educando deve ser considerado como um ser pensante, portador e produtor de idéias, dotado de alta capacidade intelectual que se revela durante os diálogos, mas que diante do formal, do culto, sente-se inferiorizado e, como consequência, se retrai, se cala, no que outros autores como Mori (1992) e Black (1990), por exemplo, também concordam.

Em relação ao educando adulto, Black (1990) afirma que este geralmente apresenta grande timidez, mas muitas vezes tenta disfarçá-la; sua auto-confiança é muito baixa devido aos freqüentes fracassos ao longo da vida; ele teme se expor, receia cair no ridículo e é muito sensível às críticas. Porém, quando sente-se estimulado e desafiado raramente desiste de seus objetivos.

Por isso, Pinto (1982) ressalta a necessidade de se despertar a consciência crítica de sua realidade, do mundo em que vive, de sua participação na sociedade pela função que desempenha (trabalho), de seus direitos e deveres.

Outro fator importante destacado por Pinto (1982) e também considerado pelos autores acima mencionados, diz respeito ao ensino. Afirmar que este deve ter início na realidade do sujeito, no seu mundo de trabalho, nas suas relações sociais, crenças, valores, etc. Tem-se que partir do que faça sentido ao aluno. O método não pode ser imposto, tal como nos disse Freire anteriormente, mas criado na interação educador - educando. O conteúdo deve ser proposto pelo professor de acordo com as etapas de autoconsciência do educando, e justificado como o saber corrente nos mais variados ramos da ciência; pela possibilidade do domínio da natureza e da melhoria de vida do homem.

Para Freire (1993), numa educação problematizadora, não há ensino (instrução), há aprendizagem, que se dá em reciprocidade de consciências; não há professor, mas coordenador, cuja função é dar as informações solicitadas pelos sujeitos e proporcionar a discussão, o trabalho em grupo, com o mínimo de intervenção possível.

Desta maneira, os alunos perceberão que o conhecimento não se restringe ao que está nos livros, mas sim, em tudo que se obtém a partir de suas experiências de vida, permitindo organizar a realidade, compreender o mundo, assumir responsabilidades sociais e políticas de forma consciente e participativa.

Idéias de Vergnaud e Riccó (1986) não são muito diferentes, quando afirmam que:

Os conceitos se elaboram na criança e no adolescente no curso de uma experiência, da qual, a escolar é somente uma parte e numerosas noções físicas biológicas e matemáticas são efetivamente o resultado de um processo complexo na qual intervêm a experiência cotidiana e as aprendizagens específicas. (p.68)

A literatura especializada é rica em afirmar que a escola, em geral, despreza este conhecimento advindo da prática, da vida extra-escolar, argumentando ser cultura popular. Porém, esta inteligência prática é discutida por vários autores, dentre eles Paulo Freire (1991), que a concebe como *saber de experiência feito*. Assim, diz que a sabedoria do professor progressista consiste em fazer compreender que a ruptura que o saber formal, institucionalizado, científico, estabelece em relação ao saber prático, não significa que este seja desprezível, mas ao contrário, “é a partir dele que se alcança o mais exato” (p. 30).

Para Brandão (1984), este conhecimento, apesar de não erudito, está imerso em diferentes níveis, desde os conhecimentos específicos, técnicos (agricultura, pecuária, etc.), até a codificação de diferentes regiões simbólicas da vida comunitária. Segundo este autor, a educação popular ocorre na interação dos sujeitos, pois, nesse momento, a troca de conhecimentos de formas de saber e valores, de símbolos e significados é muito intensa em todos os aspectos da vida (religião, saúde, vida familiar, arte, trabalho, etc).

Brandão (1984, p.168) afirma:

*... mais do que formas culturais de ‘tecnologia rústica’, de ‘filosofia primitiva’, de ‘ideologia dominada’, ou de ciência espontânea, o que existe no interior dos processos de intercâmbio de conhecimento das comunidades camponesas, por exemplo, são estruturas próprias e reprodução do saber popular; são grupos de sujeitos reconhecidos e legitimados internamente como diferentes tipos de especialistas; produtores e transmissores dos significados e dos saberes que constituem e constróem a **cultura popular**; as diferentes **culturas de classe** das classes populares.*

Ainda para Brandão (1984), é no interior da vida cotidiana das classes populares que existe e atua uma educação de classe: “um modo articulado de reprodução de diferentes formas do saber popular. Um trabalho pedagógico popular que, embora não sendo formal e consagrado (como o é a educação erudita oficial), não deixa de ser estruturado e produtivo. (p.168)” Este saber, Brandão (1984) define como *saber espontâneo*, não por ser ingênuo, mas por não ser formalizado nem social nem institucionalmente como saber, como ciência.

Alguns exemplos que comprovam esta afirmação, encontramos no Programa de Educação de Adultos da Universidade Estadual de Maringá (U.E.M.) na cidade de Maringá-Pr, em nossa experiência enquanto professores estagiários.

Os exemplos abaixo demonstram que, quando são solicitados a responder alguma questão, os alunos mostram uma *inteligência prática* extremamente articulada e com uma excelente coerência interna. Porém, ao serem questionados em relação à

matemática, julgam-se nada saber: “Eu sei fazer umas continhas de cabeça, mas saí muito cedo da escola, então falta o culto”. (D. 48 anos, encanador, aluno do Programa).

Vários exemplos poderiam ser citados, mas selecionamos alguns que nos exigiram uma atenção maior, como este, devido a estratégia utilizada para fazer multiplicação.

O aluno registrou, inicialmente:

$$19 \times 35$$

$$1 - 35$$

$$2 - 70^*$$

$$4 - 140^*$$

$$10 - 350^*$$

$$\text{Somou, então, } 350 + 140 + 70 = 560$$

$$560 + 70 = 630$$

$$630 + 35 = 665$$

Ao final concluiu que a resposta seria 665.

Verificamos que a estratégia utilizada foi: 350 corresponde à 10 vezes o número 35; 140 corresponde a 4 vezes o número 35; 70 corresponde a 2 vezes o trinta e cinco. Somando tudo isso tem-se $10 + 4 + 2 = 16$ vezes o número 35. Somou este resultado a 70, que corresponde a 35 duas vezes e este último resultado, somou a 35, tendo como resultado final, a soma de 35 dezenove vezes, ou seja, o resultado da multiplicação pedida: 19×35 .

Estratégia semelhante encontramos no livro intitulado *Os Números: a história de uma grande invenção*², no qual o autor descreve como um funcionário de um agricultor da região de Mênfis, no ano 2000 a.C., calcula a quantidade de trigo colhido para amido. Cabe lembrar que os egípcios sabiam apenas multiplicar ou dividir diretamente por 2, por isso faziam duplicações sucessivas, isto é, uma série de multiplicações por dois. Vejamos o exemplo descrito pelo autor:

128 por 12

1	12
2	24
4	48
8	96
16	192
32	384
64	768
128	1536

Como podemos verificar, o aluno do programa utilizou o mesmo raciocínio que este sujeito. Em momento algum foi mostrado para este aluno como os egípcios faziam seus cálculos. Esta foi uma estratégia reinventada por ele, de acordo com seus pensamentos, com os conhecimentos que possuía.

Um outro exemplo, que gerou muita discussão,

encontramos durante a pesquisa exploratória, quando apresentamos para um dos alunos (pedreiro, freqüentador do PEART - Programa de Educação para Assalariados Rurais Temporários - na cidade de Sarandi-Pr, que contou com a ajuda de sua esposa, também freqüentadora do programa e sua auxiliar no trabalho) o seguinte problema, relacionado ao conceito de razão e proporção:

“Maria, ao fazer limonada, utiliza 3 limões para 5 copos de água. Beatriz utiliza 5 limões para 7 copos de água. Quem faz a limonada mais forte?”

Tiveram muitas dificuldades para solucionar tal problema, e chegaram, afinal, à conclusão de que as duas faziam limonadas iguais, já que Beatriz colocou dois limões e dois copos de água a mais que Maria. Ou seja, aumentou “proporcionalmente”.

Em seguida, apresentamos ao mesmo casal este outro problema:

“João ao fazer massa de concreto utiliza 3 latas de cimento para 5 latas de areia. Paulo utiliza 5 latas de cimento para 7 latas de areia. Quem faz a massa mais resistente?”

A resposta não tardou a chegar: “Paulo faz a massa mais resistente.” e sua justificativa foi que apesar de aumentar “proporcionalmente”, duas latas de areia é muito pouco para duas de cimento, já que o cimento é forte. Por isso a massa de Paulo ficaria mais

² IFRAH, Georges. “Os Números: a história de uma grande invenção. Globo: São Paulo, 1992

resistente.

Este mesmo problema foi apresentado por Gomes (1993) numa pesquisa relacionada ao ensino de frações, para os alunos do Programa de Educação de Adultos da U.E.M. e a maioria das respostas foi que as massas ficariam semelhantes, pois Paulo aumentou 1 lata de areia, mas também acrescentou uma de cimento. Após um tempo de discussão, os pedreiros do grupo disseram aos demais que Paulo faria a massa mais forte. E comprovaram da seguinte maneira:

“João faz 2 por 7; se ele dobrar a quantidade fará 4 por 14 e se triplicar fará 6* por 21;

Paulo faz 3 por 8, se dobrar fará 6* por 16.

Quando João utiliza 6 latas de cimento ele precisa de 21 de areia e Paulo, para a mesma quantidade de cimento usa apenas 16 latas de areia. Como tem menos areia, a massa é mais forte, porque o cimento é forte.”

Estas soluções nos remeteram aos trabalhos de autores como Polya (1975), um dos precursores nos estudos sobre resolução de problemas.

Em seus trabalhos, este autor denuncia a prática escolar na medida em que a solução de problemas envolve quatro passos fundamentais e que a escola, em sua maioria, desconsidera ou substitui pelo ato mecanicista de aplicação de técnicas. Os passos que Polya (1975) se refere são:

Compreender o problema: Isto implica em levantar os dados do problema, bem como verificar se as informações oferecidas são suficientes para a resolução. Neste momento o aluno deverá familiarizar-se com o problema.

Estabelecer um plano de resolução: Tendo levantado todos os dados, é preciso estabelecer todas as relações possíveis entre eles e a incógnita. É necessário considerar o problema sob vários pontos e identificar algo que lhe seja familiar, ou melhor, que tenha relação com os conhecimentos adquiridos previamente. É preciso, ainda, considerar todas as noções e informações a fim de se alcançar a melhor maneira de solucionar o problema. Feito isso, traçar o caminho a seguir.

Executar o plano estabelecido: Ao percorrer o caminho traçado, fará todas as operações (algébricas ou aritméticas) que foram previamente reconhecidas como necessárias. Ao executá-las, deverá avaliar cada passo dado, verificando se é correto ou não.

Examinar a solução obtida: Consiste em avaliar a solução, verificando se o resultado é coerente, se é possível alcançá-lo de outras maneiras, se este modo de resolução é aplicável a outras situações, etc. Esta “leitura retrospectiva”, contribuirá para que o aluno adquira uma série de conhecimentos organizados, utilizáveis a qualquer momento, uma vez que foi desenvolvida a capacidade de resolução de problemas.

Grande parte dos autores que sucederam Polya (1975)

demonstram concordância com suas afirmações, como por exemplo Mendonça (1993), que critica o trabalho pedagógico dos professores, já que estes apresentam aos alunos problemas prontos e não oferecem espaço para o questionamento. Por isso, ressalta a importância da problematização na construção do conhecimento matemático.

Parra (1996), de maneira semelhante, critica a ênfase em palavra-chave e, por isso, ressalta a necessidade de os professores priorizarem o raciocínio e evitarem as tentativas de solução ao acaso. Assim, estaria possibilitando ao aluno desenvolver uma forma peculiar de raciocínio, além da auto-confiança em relação à solução de problemas.

Para a autora, quando um aluno se depara com um problema, deve construir uma representação das relações entre os dados do problema e afirma que boa parte dos alunos demonstram grande competência não apenas em fazer estas ligações, como também em antecipar e controlar os resultados que vão atingindo.

Como critica Maza (1995), a ênfase em palavras-chave para orientar a solução de problemas é uma prática comum entre os professores. Quando se ensina o aluno a descobrir como solucionar problemas identificando palavras que indicam se um deles poderia ser solucionado por multiplicação, divisão e assim por diante, os alunos podem colocar menos esforço pessoal na compreensão do enunciado e no raciocínio matemático propriamente dito.

Segundo Parra (1996), a experiência docente comprova

que aqueles que não são capazes de estabelecer relações, tentam alcançar o resultado por ensaio e erro ou através da palavra-chave que indique o que deverá fazer. Salienta que o cálculo mental consiste numa grande possibilidade para favorecer o raciocínio, já que este facilita a construção de relações matemáticas, na medida em que permite a análise de dados, a reflexão sobre os procedimentos e sobre a conclusão. Por isso deveria ser utilizado como um caminho para a construção e compreensão dos algoritmos.

Greer (1990) critica os enunciados dos problemas escolares ao afirmar que estes são estereotipados e, na maioria das vezes, irreais, quase sempre de uma única operação, além de sua apresentação ocorrer de maneira isolada. Argumenta que os alunos são treinados para utilizarem procedimentos sem sentido, como, por exemplo, usar palavras-chave que conduzem, com maior facilidade, à resposta correta na maioria dos casos.

Ekenstam e Greger (1983) salientam que a habilidade para a solução de problemas está usualmente associada a características como a criatividade, poder de invenção e combinação, imaginação, poder de iniciativa, etc., e que estas características estão adormecidas no ensino padronizado pelo sistema escolar. Criticam a solução de problemas, principalmente na matemática elementar, já que, segundo eles, esta consiste na solução de problemas rotineiros – exercícios mecânicos – como sendo essenciais para uma boa formação.

Para mostrar o que se entende por solução de problemas

na escola citam um problema considerado muito difícil por crianças na faixa etária entre 12 e 13 anos e que poucos chegaram à solução correta. Eis o problema:

“Uma torneira, devido a um vazamento, derrama 1,5 litros de água por dia.

Na conta constam as seguintes informações:

Preço: 3 kr por m³

Despesa permanente: 160kr

Verificar o gasto com a água derramada durante um ano.” (Ekenstam e Greger, 1983 p. 369)

Segundo os autores citados acima, os alunos teriam, antes de tudo, que compreender o ‘texto’. Por um lado compreender, por exemplo, que “160 kr” é uma informação desnecessária para a solução do problema. Por outro, compreender que algumas informações não estavam claras no texto, como por exemplo o número de dias no ano e o fato de que $1\text{m}^3 = 1000$ litros. Desta forma, não foi necessária nenhuma idéia original para a solução do problema. A criança deveria escolher a regra aritmética correta e fazer o cálculo corretamente, além de estar ciente de algumas convenções e fatos. Os autores concluem, portanto, que a solução de problemas parece ser entendida como “um sistema muito complicado de combinação de habilidades primárias.” (Ekenstam e Greger, 1983 p.370).

Kamii (1995), em sua pesquisa em relação ao desempenho do aluno na solução de problemas de multiplicação,

envolveu crianças que tinham aprendido o algoritmo escolar e outras que não haviam sido submetidas ao ensino do algoritmo. Neste estudo, concluiu que as crianças que não aprenderam o algoritmo – portanto, as que não se subordinaram ao ensino escolar – demonstraram um maior desempenho na solução dos problemas do que aqueles que aprenderam o algoritmo.

Inúmeras pesquisas em Educação Matemática e em Psicologia Educacional têm mostrado que há uma multiplicidade de fatores que podem influenciar a resolução de problemas. Vários pesquisadores como Krutetskii (1976) por exemplo, que tem estudado diversas facetas da solução de problemas, analisam a questão sob diferentes prismas.

Apoiando-se nos trabalho de Krutetskii (1976), Brito, Fini e Garcia (1994) estudaram as relações entre o raciocínio matemático na resolução de problemas e o raciocínio verbal, analisando problemas de natureza algébrica e de natureza aritmética. Os resultados mostraram que o sucesso na solução de problemas é afetado pelo processo de compreensão verbal (que está relacionado à compreensão do enunciado do problema apresentado na forma escrita) e também pela compreensão matemática (que se refere à compreensão da natureza matemática do problema, propriamente dita). Estudando a aprendizagem da matemática, Krutetskii (1976) investigou características psicológicas referentes à capacidade para a solução de problemas tais como a memória, percepção, imaginação, raciocínio.

Baroody, (1994) considera que o trabalho com cálculo mental na solução de problemas pode favorecer o raciocínio, a autonomia e a segurança pessoal do sujeito. O autor menciona a vantagem do professor incentivar o aluno a descrever e explicar os procedimentos que utiliza para solucionar um problema.

No exemplo abaixo, encontrado no Programa de Educação para Adultos da U.E.M., podemos verificar que quando são solicitados a descreverem seus procedimentos, além de os alunos estarem desenvolvendo o raciocínio, estão proporcionando aos professores extrair informações preciosas para a elaboração de propostas mais eficientes. O exemplo que segue, foi dado por Alfredo em 1991 na época com 58 anos. Alfredo era aluno do programa e nunca havia freqüentado a escola anteriormente.

“Você foi ao mercado e comprou 3 litros de leite que custava 90 cruzeiros cada; um pote de manteiga de 500g por 350 cruzeiros e 150 cruzeiros de pãezinhos. Quanto gastou?

Alf. - Bom, gastei 270 de leite.

Prof^a - Como você calculou o valor do leite?

Alf. - 90 e 90 e 180 e 90 e 270 cruzeiros. Junto os 270 cruzeiros do leite com os 350 da manteiga e fica 620 cruzeiros.

Prof^a - Como você chegou a esse resultado?

Alf - Juntei 200 cruzeiros com 300 da manteiga deu 500 cruzeiros. Depois coloquei os 50 cruzeiros dos 70 do leite e juntei os 50

que restou dos 300 cruzeiros da manteiga, que é o restante do leite; 50 cruzeiros mais 50 cruzeiros da manteiga, dá 100. Juntei com os 500; dá 600 cruzeiros. Juntando os 20 cruzeiros que sobrou dos 70 do leite, fica 620.

Prof^a - Qual o valor total de sua compra?

Alf - Paguei 620 no leite e na manteiga e 150 cruzeiros de pãezinhos. Então coloco 100 cruzeiros de pães e junto com 600 cruzeiros, ficando 700 cruzeiros. Depois junto 20 cruzeiros do total do leite e da manteiga que restou dos 50 cruzeiros dos pãezinhos, então gastei 720 cruzeiros.”

Verificamos que Alfredo decompõe os valores da seguinte maneira:

$$(270 + 350) = 200 + 300 = 500; (70 + 50) = 50 + 50 = 100 \text{ (sobra } 20^*)$$

$$\text{Junta } 500 + 100 = 600$$

$$600 + 20^* = 620$$

$$(620 + 150) = 600 + 100 = 700; (20 + 50) = 70$$

$$\text{Junta } 70 + 700 = 770$$

Quando foi solicitado a registrar, assim o fez:

“ <u>90</u>	<u>270</u>
<u>180</u>	<u>350</u>
<u>90</u>	<u>60020</u>
<u>270</u>	<u>70020</u> ”

Se o professor em questão não tivesse solicitado a descrição, não saberia que Alfredo resolveu o problema corretamente e, mais que isso, desconheceria o fato de Alfredo solucionar através de decomposições e associações sucessivas, ou seja, uma modo mais complicado de se chegar a resposta, porém, tão eficiente quanto o outro. Outro detalhe importante que o professor pode extrair dessa solução, diz respeito a representação. Alfredo registra o número 720, por exemplo, de acordo com sua estratégia, da maneira que ele compreende (70020) mas que não se enquadra nos padrões convencionais e, portanto, novos desafios são apresentados ao professor.

Outro exemplo, que demonstra quão capazes são os sujeitos que nunca freqüentaram a escola de desenvolver estratégias de acordo com a solicitação do meio, e que também foi encontrado no Programa de Educação para Adultos da U.E.M. refere-se a um problema em que o sujeito deveria **dividir** 246 por 2. E ele resolveu da seguinte maneira:

$246 \times 5 = 1230$ cortou o zero de 1230, e deu a resposta: 123

Outro exemplo interessante e que envolve o conceito de proporção, encontramos, também, no Programa de Educação de Adultos durante uma conversa. Uma das alunas estava construindo sua casa e o pedreiro lhe disse que a quantidade de telhas que havia comprado (1500 telhas) não era suficiente, de modo que deveria aumentar a quantidade em 13%. Para calcular quantas telhas a mais

deveria comprar, ela resolveu da seguinte maneira:

$$13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13= 130$$

$$13+13+13+13+13=65$$

$$130+65=195$$

Podemos notar que a estratégia utilizada foi que 1500 telhas corresponde a 15 grupos de 100 telhas. 13% de 100 telhas corresponde a 13 telhas, portanto deveria acrescentar 13 telhas para cada um dos 15 grupos. Somou, então, as treze telhas quinze vezes e obteve o resultado.

Um fator comum na maioria das respostas, pelo menos aparentemente, é que estas pareciam óbvias aos alunos, como se fosse uma questão de lógica.

Piaget (1978) em seu livro *Para onde vai a Educação?*, diz que a escola por ficar muito presa às soluções quantitativas acaba ignorando as soluções qualitativas ou lógicas. Porém, fora da escola, muitos sujeitos resolvem problemas sem utilizar necessariamente regras e fórmulas oferecidas por professores, mas pela lógica, decorrente de suas experiências, como o casal, por exemplo, ao resolver o problema da massa de concreto.

Santaló (1996) salienta que existem certos conhecimentos de lógica que devem ser usados com frequência durante a aula, para que sejam assimilados como parte natural da linguagem e do pensar cotidiano muito mais do que como um conhecimento adquirido através

de uma aprendizagem específica. Para o autor, “é mais importante ir aprendendo as leis do raciocínio de maneira natural, como algo inerente à linguagem, da mesma maneira que se aprende a falar sem conhecer a etimologia da palavra.” (p.18)

Portanto, esta lógica, como parte da matemática, deve ser não apenas aceita, mas também estimulada pela escola.

Em todos os exemplos citados, podemos verificar a riqueza das estratégias e o enorme aproveitamento que se pode tirar para a ampliação dos conhecimentos destes sujeitos, ou seja, utilizá-los como o meio para se chegar ao conhecimento erudito, justificando a necessidade de todos utilizarem uma mesma linguagem, tornando possível a comunicação matemática.

É importante ressaltar que identificamos, tanto nestes exercícios, como também na coleta de dados, as habilidades descritas por Lorenzato (1993) e que já foram mencionadas anteriormente. Dentre elas, podemos citar a compreensão dos conceitos que envolvem os problemas, raciocínio, facilidade em comunicar as idéias, razoabilidade de respostas, estimação, noções de medidas, etc..

Portanto, podemos afirmar que estes sujeitos estarão perfeitamente aptos para atuar no próximo século, desde que consigamos, enquanto educadores, contribuir para que alcancem o domínio da linguagem escolar, erudita; o que não é difícil, considerando que já compreendem e dominam o conceito de muitos conteúdos. Desta forma, justifica-se a necessidade do uso destas estratégias em sala de

aula para, a partir delas, alcançar a linguagem formal. É preciso estabelecer ligações entre os saberes prático e o escolar, e estas devem ser significativas para o educando. Propiciar o diálogo, a troca de experiências, também é muito importante para o crescimento do grupo, já que cada um traz uma experiência de vida diferente e desempenham papéis diferentes:

... se as características socioculturais dos adultos analfabetos são semelhantes, no que se refere ao domínio do sistema da escrita, eles já não formam um grupo tão homogêneo; esses adultos estão imersos de diversas formas no mundo letrado e, portanto, seus conhecimentos sobre as regras de funcionamento e sobre o próprio sistema de escrita são de níveis diferentes. (Carvalho. 1995 p.2)

Além disso, eles precisam saber que o que eles fazem é correto, mas insuficiente para atuar numa sociedade tecnológica que se desenvolve num processo muito acelerado. Por isso, é preciso avançarem e compreenderem que existem meios mais rápidos de chegar à resposta e que foram convencidos para que todos pudessem compreender da mesma maneira.

Como já foi dito, o aluno precisa ser considerado como um ser pensante, criador e produtor de idéias. Como podemos considerar uma *página em branco* alguém que, apesar da escolaridade limitada, consegue resolver os problemas que lhe são colocados diariamente?

Somos chamados a matematizar durante toda a vida,

principalmente o adulto assalariado, que muitas vezes é obrigado, por exemplo, a fazer estimativa do salário para saber se este será suficiente para as despesas previstas.

Carvalho (1995, p.2) afirma:

Se para exercer suas atividades do cotidiano no âmbito profissional ou pessoal, essas pessoas recebem diferentes níveis de solicitação para utilizar o sistema simbólico da escrita, são também compelidos a matematizar, ou seja, estabelecem relações quantitativas e exploram as formas espaciais no mundo físico em diversos níveis de complexidade, generalidade e sistematização.

CAPÍTULO 3

A PESQUISA

“... a meta é ensinar de forma a produzir a maior aprendizagem a partir do mínimo de ensino.” (Papert)

3.1 O problema

Tendo em vista a existência de sujeitos que nunca freqüentaram a escola ou que a freqüentaram por um tempo limitado, mas que demonstram uma requintada competência matemática;

Tendo em vista, também, muitos sujeitos que, independente do grau de escolaridade, apresentam grandes dificuldades para solucionarem problemas do cotidiano, procuramos identificar as estratégias para a solução de problemas utilizadas por sujeitos com escolaridade distinta, buscando resposta para a seguinte pergunta: Como pessoas de níveis diferentes de escolarização resolvem problemas que exigem conhecimento de matemática elementar?

3.2 Os sujeitos

Foram sujeitos desta pesquisa alguns professores da rede estadual de ensino, professores de ensino superior, futuros professores - alunos de graduação em Matemática e Pedagogia, alunos do curso de Magistério -, alunos de 8ª série e 3º colegial do Município de Maringá-Pr, bem como sujeitos de escolaridade limitada do município de Piacatu-SP. Ambos municípios tem como principal atividade econômica

a agricultura.

Os sujeitos desta pesquisa, foram divididos em quatro grupos distintos, de acordo com sua escolaridade. Ou seja:

Grupo I – Professores

Grupo II – Futuros professores

Grupo III – alunos de matemática

Grupo IV - adultos de escolaridade limitada

Para constituir o grupo I, procuramos professores que trabalham com a disciplina matemática tanto no primeiro como no segundo grau, em escolas públicas e particulares, além de professores universitários que trabalham com a formação de professores.

De maneira semelhante, para a formação do grupo II, buscamos alunos de cursos de graduação em Pedagogia e Matemática (licenciatura) e alunos do curso de Magistério, estando todos no último ano do curso.

Para o grupo III, buscamos alunos de matemática do primeiro e segundo graus, tanto de escola pública como de escola particular, bem como adultos em fase de escolarização, freqüentadores de curso supletivo.

O grupo IV foi composto por adultos maiores de 20 anos que freqüentaram a escola apenas durante a infância, mas que completaram a 4ª série, e que desempenham diferentes funções.

Para cada grupo, foram selecionados 6 sujeitos:

Grupo I – Professores

2 professores de escola pública (sendo um de 8ª série e um de 3º colegial);

2 professores de escola particular (um de 8ª série e um de 3º colegial);

2 professores universitários (um do curso de graduação em Matemática – professora da disciplina *Geometria Analítica e Álgebra Linear* - e um do curso de graduação em Pedagogia - professora da disciplina *Metodologia e Prática do Ensino* e de *Metodologia do Ensino de Matemática* no curso de Magistério);

Grupo II – Futuros professores (sujeitos em fase final de curso)

2 alunos do curso de magistério;

2 alunos do curso de graduação em Pedagogia;

2 alunos do curso de graduação em Matemática (licenciatura).

Grupo III – Alunos de matemática

2 alunos de 8ª série (sendo um de escola pública e um de escola particular);

2 alunos de 3º colegial (um de escola pública e um de escola particular);

2 alunos de curso supletivo (um de 1ª a 4ª série e um de 2º grau).

Grupo IV – Adultos de escolaridade limitada

2 donas de casa;

2 comerciantes;

2 agricultores.

3.3 Procedimentos

Todos os sujeitos foram submetidos a um questionário, a uma prova de matemática e a uma entrevista sobre a escola e a matemática de uma forma geral. A prova era composta de 6 problemas que envolveram conceitos diferentes. Foi aplicada individualmente e aos sujeitos foi solicitado que resolvessem da maneira que julgassem melhor, mas que deveriam justificar suas respostas.

Os problemas foram:

1 - João comprou uma bicicleta por R\$ 120,00 e a vendeu por R\$ 130,00; voltou a comprá-la por R\$140,00 e tornou a

vendê-la, agora por R\$ 150,00. Qual foi o lucro (ou prejuízo) ao fim de todas essas transações?

2 - Maria, ao fazer limonada, utiliza 3 limões para 5 copos d'água. Beatriz usa 5 limões para 7 copos d'água. Qual delas faz limonada mais forte?

3 - Tenho um armário cujas medidas são: 1m, 2m e 3m. Quero guardar nele caixas contendo vídeo cassetes, cujas medidas são: 45cm, 30cm e 25cm. Quantos vídeo cassetes poderei guardar no armário?

4 - No supermercado havia queijos na forma de cubos: os menores eram cubos de 5cm de lado; e os maiores eram cubos de 10cm de lado. Vi apenas o preço dos menores, que custavam R\$ 2,00. Que preço seria razoável para os maiores?

5 - Costumo fazer bolo para 6 pessoas, usando uma forma com 40cm de comprimento e 24cm de largura; deixando o bolo por 20 minutos no forno aquecido a 120 graus. A receita que uso é: 4 ovos, 8 colheres de açúcar 8 colheres de farinha de trigo, 6 colheres de água e 1 colher de fermento. Porém, hoje quero fazer bolo para apenas 3 pessoas:

- como deverá ficar minha receita?
- quais as medidas da forma que deverei usar?
- com que temperatura assarei o forno?
- quanto tempo deverei deixar o bolo no forno?

6 - Tenho 3 copos iguais. Um totalmente vazio, outro contém água até a metade e o outro tem a terça parte cheia. Despejando no primeiro o contido nos dois últimos, transbordará? Por quê?

Além da prova, foi-lhes aplicado um questionário, contendo as seguintes questões:

O que você pensa da escola?

Você gosta de matemática? Por quê?

A matemática é importante? Por quê?

Como você se considera em relação à matemática?

Você sempre foi bom aluno em matemática?

A prova foi aplicada individualmente pela pesquisadora ou por seu colaborador. Foi gravada, para que nenhum dado fosse perdido. Foi aplicada em duas escolas públicas, duas escolas particulares, em um curso de educação para adultos, em uma instituição de ensino superior e, ainda, com sujeitos de escolaridade limitada.

Aos sujeitos foram entregues os problemas por escrito e solicitado que registrassem as soluções. Para isso foi-lhes oferecido papel e lápis. A leitura dos problemas foi feita quando solicitada.

Cabe salientar que a análise realizou-se tendo em vista o quadro teórico apresentado no início deste trabalho. Foram consideradas as respostas apresentadas, as justificativas respectivas e

as explicações e registros feitos.

Na análise dos dados todos os nomes dos sujeitos foram substituídos por nomes fictícios (embora o sexo tenha sido mantido) para preservar a identidade dos mesmos, evitando-se, no texto, a identificação de cada um.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E ANÁLISE DE DADOS

“Compreender é inventar, ou reconstruir através da reinvenção, e será preciso curvar-se ante tais necessidades se o que se pretende para o futuro, é moldar indivíduos capazes de produzir e criar, e não apenas de repetir.” (Jean Piaget)

4.1 Apresentação dos dados coletados

Neste momento, demonstraremos os dados obtidos sem a preocupação com sua análise; esta acontecerá posteriormente, em espaço próprio. Para tanto, respeitaremos a divisão dos sujeitos em 4 grupos distintos. Ou seja, apresentaremos os resultados obtidos de acordo com os grupos aos quais pertencem, iniciando pelo grupo I – o grupo dos professores – para depois mostrarmos as soluções do grupo II – dos futuros professores - e assim sucessivamente.

Grupo I - Professores de Matemática

Sujeitos:

Valdelice (10 anos de magistério, professora de 8^a série de escola pública);

Claudio (17 anos de magistério, professor de 8^a série de escola particular);

Odair (14 anos de magistério, professor de 3^a série do 2^o grau de escola pública);

Paulo (12 anos de magistério, professor de 3^o série do 2^o grau de escola particular);

Ana (22 anos de magistério, professora do curso de graduação em Matemática);

Meire (28 anos de magistério, professora do curso de graduação em Pedagogia e do curso de Magistério).

Problema nº 01 (bicicleta)

Dos seis professores entrevistados, três deles (Paulo, Claudio e Valdelice) responderam que João não teve lucro nem prejuízo. E justificaram da mesma maneira que Paulo, cujo registro aparece abaixo:

1) $\begin{matrix} \text{COMP} & \text{VEND} \\ 120 & \rightarrow 130 \end{matrix} \rightarrow \text{LUCRO } 10,00\$$

TEM 130 COMPROU 140,00 DEVE (-10)\$ E VENDEU POR 150\$ LUCROU 10\$
PORÉM DEVEIA 10\$ LOGO NÃO TEVE NEM LUCRO NEM PREJ.

Já para Odair, João teve um lucro de 20,00 e comprova, como demonstra seu registro abaixo, da seguinte maneira:

$\begin{matrix} 120 \rightarrow 130 \\ 10 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 140 \rightarrow 150 \\ 10 \end{matrix} = (20)$

Ana, apesar de não fazer registros, justificando que não

tinha porque registrar, nos disse: “João teve um lucro de 30,00, se considerarmos os lucros desde o início das transações”.

Para Meire, o lucro de João foi de 10,00, por isso registra as seguintes informações :

$$\begin{array}{rcl}
 \textcircled{1} \quad 120 - 130 & = & +10 \text{ reais} \\
 140 - 150 & = & -10 \text{ reais}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 130 \\
 - 120 \\
 \hline
 010
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 130 \\
 + 10 \\
 \hline
 140
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 150 \\
 - 140 \\
 \hline
 010
 \end{array}$$

Problema nº 02 (limonada)

Cinco entre os seis professores entrevistados responderam que Beatriz faz limonada mais forte. Porém, suas respostas foram distintas, já que utilizaram estratégias diferentes. Uma delas foi a de Cláudio, como pode ser verificado em seu registro demonstrado abaixo:

$$\begin{array}{l}
 \textcircled{2} \quad \text{SUPONDO CADA COPO COM 200 ML DE ÁGUA} \\
 \text{SUPONDO CADA LIMÃO COM 50 ML DE SUCO (PURO)} \\
 \\
 \text{MARIA} \quad \left\{ \begin{array}{l} 5 \times 200 = 1000 \text{ ML} \\ 3 \times 50 = 150 \text{ ML} \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} 1.150 \text{ — } 100\% \\ 150 \text{ — } x \\ x = 13\% \end{array} \\
 \text{MISTURA} = 1.150 \text{ ML} \\
 \\
 \text{BEATRIZ} \quad \left\{ \begin{array}{l} 7 \times 200 = 1.400 \text{ ML} \\ 5 \times 50 = 250 \text{ ML} \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} 1.650 \text{ — } 100\% \\ 250 \text{ — } y \\ y = 15\% \end{array} \\
 \text{MISTURA} = 1.650 \\
 \\
 \text{R: A LIMONADA MAIS FORTE É A DE BEATRIZ.}
 \end{array}$$

Esta outra estratégia foi utilizada por três outros professores, mas o uso que fizeram desta é que foi diferenciado. Paulo e Odair disseram que Beatriz fazia mais forte já, que a concentração de limão era de 0,7. Mas Valdelice disse que a de Maria era mais forte, por dar 0,6. Eis o registro de Paulo:

$$\begin{array}{ccc}
 2) \frac{3}{5} & \frac{5}{7} & \frac{3}{5} = 0,6 \\
 0,6 & 0,714 & \frac{5}{7} = 0,7
 \end{array}$$

Como tem mais limão no primeiro
tem a que o 2º é mais forte

Para Ana, a limonada de Beatriz é a mais forte porque, para fazer limonada com a mesma concentração de limão, ela deveria colocar 8 copos de água. Como ela colocou sete, tem menos água e, conseqüentemente, mais limão, o que a deixa mais forte. E justifica, registrando a seguinte informação:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{3}{5} & \frac{5}{7} \\
 3 & 5 \\
 5 & 7
 \end{array}$$

$3x = 25$
 $x = 8,1 \dots$

$x > 7$ Beatriz

Já para Meire, as limonadas são iguais, na medida em

que aumenta 2 limões e dois copos d'água, ou seja, aumenta "proporcionalmente".

Problema nº 03 (vídeos)

Entre os professores houve uma divisão nas respostas. Dois deles (Cláudio e Paulo) se apoiaram na geometria para responderem, outros três (Ana, Valdelice e Odair) apenas aplicaram a fórmula para o cálculo de volume, ou seja:

$$V_1 = \text{volume do armário } (100\text{cm} \times 200\text{cm} \times 300\text{cm} = 6.000.000)$$

$$V_2 = \text{volume da caixa de vídeo } (45\text{cm} \times 30\text{cm} \times 25\text{cm} = 33.750)$$

$$V_1 \div V_2 = 6.000.000 \div 33.750 = 177,77$$

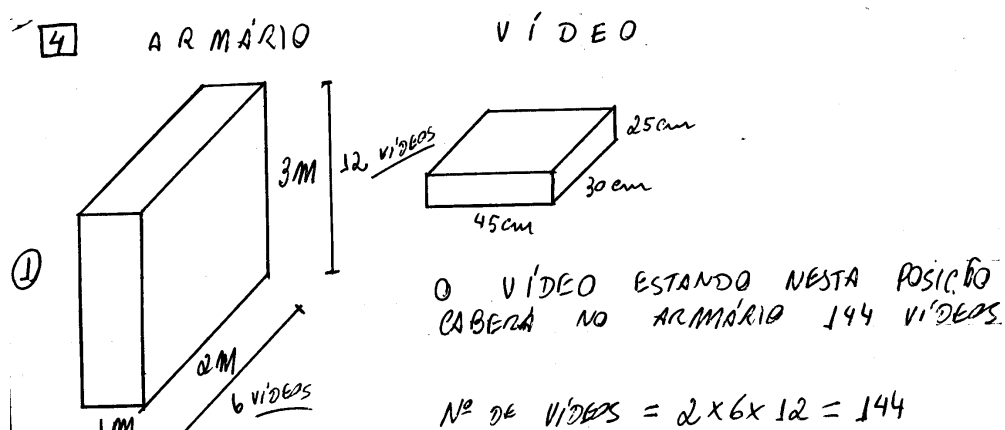
Portanto, para Ana, Valdelice e Odair, caberiam aproximadamente 177 vídeos, como mostra o registro de Odair, e que foi semelhante ao de Ana e Valdelice:

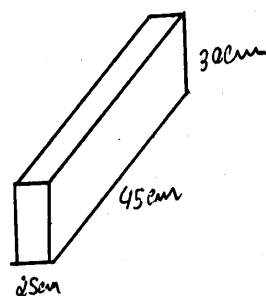
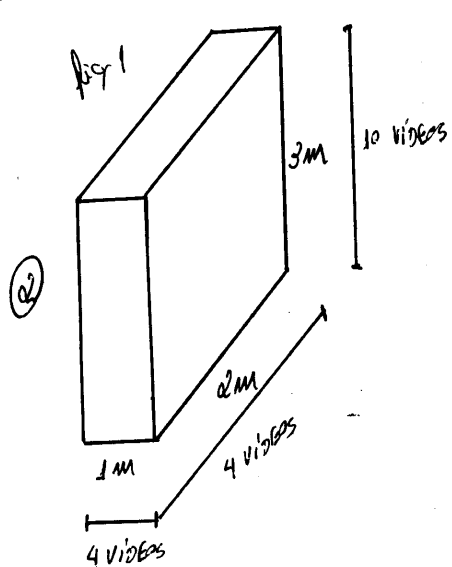
The image shows handwritten student work. On the left, a rectangular prism is drawn with dimensions 3, 2, and 100. To its right, the volume calculation is written: $100 \times 200 \times 300 = 6.000.000 \text{ m}^3$. Below this, a division is shown: $6.000.000 \div 33.750 = 177,77$. To the right of this, another division is shown: $45 \times 30 \times 25 = 33.750$. At the bottom, a circled answer is written: $(177,77)$.

Segundo Meire, caberiam no armário 6 vídeos. Por isso seu registro foi este:

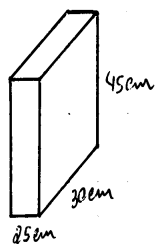
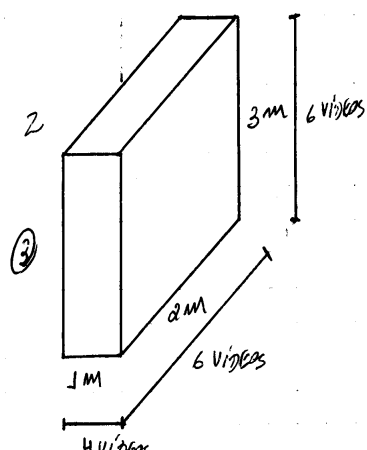
1 m — 45 cm	45
2 m — 30 cm	+ 30
3 m — 25 cm	<u>25</u>
	100 : 6 = <u>6</u> vídeos caberem

Dos professores que se apoiaram na geometria, Cláudio demonstrou todas as maneiras possíveis de se guardar os vídeos. Paulo, apesar de ter solucionado de maneira similar, utilizou apenas uma das formas demonstrada por Cláudio, ou melhor, Paulo utilizou em sua solução, a 2ª estratégia apontada por Cláudio. Por isso, ao observarmos todas as possibilidades demonstradas por Cláudio, teremos a oportunidade de verificar, também, a solução de Paulo. Eis as alternativas registradas por Cláudio:

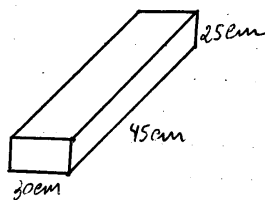
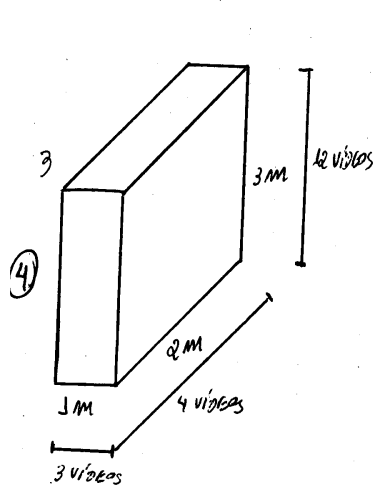




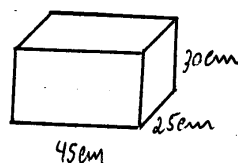
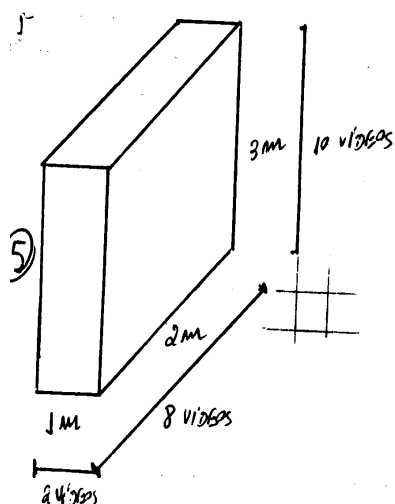
$$N^{\circ} \text{ DE VÍDEOS} = 4 \times 4 \times 10 = 160$$



$$N^{\circ} \text{ DE VÍDEOS} = 4 \times 6 \times 6 = 144$$



$$N^{\circ} \text{ DE VÍDEOS} = 3 \times 4 \times 12 = 144$$



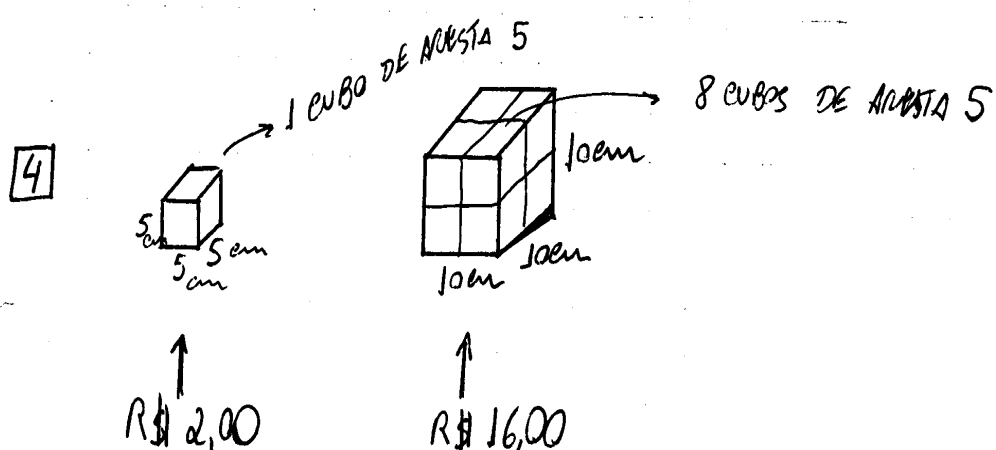
$$\text{Nº DE VÍDEOS} = 2 \times 8 \times 10 = 160$$

R: A MELHOR FORMA DE ACOMODAR OS VÍDEO CASSETES É A PROPOSTA NO ESQUEMA Nº ② OU NO ESQUEMA Nº ⑤, OU SEJA 160 APARELHOS.

Vale lembrar que os professores que se apoiaram na geometria são professores de escolas particulares e os que apenas aplicaram a fórmula para o cálculo do volume são professores de escolas públicas. Acreditamos que isto tenha ocorrido pelo fato de, em escolas particulares, os pais participarem mais da vida de seus filhos, o que implica numa maior exigência e, conseqüentemente, numa maior dedicação e empenho por parte do professor.

Problema nº 04 (queijos)

Mais uma vez tivemos a divisão de respostas. Os professores de escolas particulares (Cláudio e Paulo) novamente se apoiaram na geometria e, por isso, suas respostas foram:

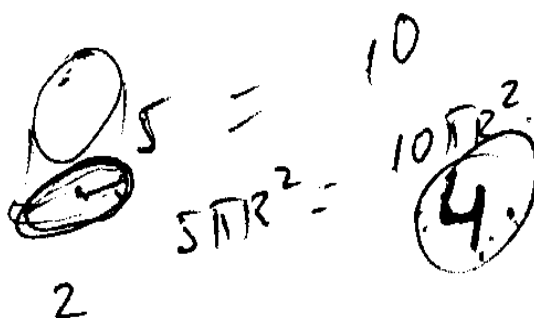


R: O PREÇO PARA O QUEIJO MAIOR DEVE SER
R\$ 16,00

Já entre os professores de escolas públicas, as respostas foram distintas. Um deles (Valdelice), que respondeu apenas oralmente, disse:

“Eu sei que não é o dobro. Isto é pela lógica. Mais ou menos uns três reais.”

Já um outro professor (Odair), até tentou um “desenho”, mas fracassou na medida em que confundiu cubo com cilindro, como podemos verificar em seu registro apresentado abaixo:



Quanto aos universitários, ambos utilizaram regra de três, porém de maneira distinta.

Para Meire, o preço razoável para o queijo maior seria de R\$4,00. Por isso sua resposta, como demonstrada em seu registro, foi:

$$\textcircled{4} \quad \begin{array}{l} 5 \text{ cm} \text{ --- } 2,00 \\ 10 \text{ cm} \text{ --- } x \end{array} = 4 \text{ reais} \quad 10 \times 2,00 = \frac{20,00}{5} = 4$$

Ana – outra professora universitária – apresentou o seguinte registro:

$$\textcircled{4} \quad \begin{array}{l} V = 5^3 \text{ --- } 2 \\ V = 10^3 \text{ --- } x \end{array} \quad x = \frac{2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = 2^4 = 16$$

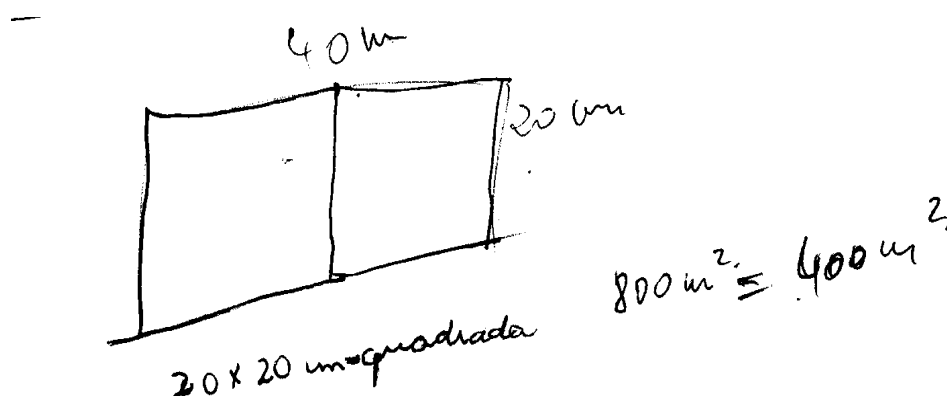
Problema nº 05 (bolo)

Todos os professores submetidos à prova concordam que a receita deve ser dividida por 2, que o tempo e a temperatura do forno devem ser constantes. Mas quanto à forma, já não existe tal concordância. Para Odair, a forma deveria ser quadrada - 20cm X 20cm. Para Ana, a forma deveria ser reduzida proporcionalmente, ou

seja, sua área deveria ser reduzida à metade. Já para os demais professores (Cláudio, Paulo, Valdelice e Meire), a forma deveria ser reduzida a “metade” e, por isso sua medida deveria ser 20cm X 12cm.

Eis as soluções:

Odair apresentou o seguinte registro:



Ana, de maneira distinta, apresenta a seguinte resposta:

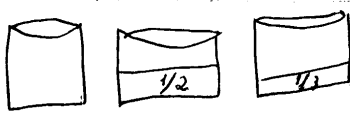
$$\frac{A}{2} = \frac{40 \cdot 24^{12}}{2} = 480$$

Quanto aos demais professores, seus registros foram semelhante ao de Meire, que aparece abaixo:

20 cm de compr. 12 largura.

Problema nº 06 (copos)

Todos os professores concordam que o copo não transborda, porém as justificativas variam. Três deles (Cláudio, Meire, e Odair) apoiando-se na representação, respondem de maneira semelhante à de Paulo, como nos mostra seu registro:

6)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6} < \frac{6}{6}$ O copo não transborda

Ana não se apoiou na representação, mas empregou a fórmula, a mesma fórmula utilizada pelos anteriores.

Já a professora Valdelice utilizou 3 xícaras para responder. Colocou água em duas delas e bebeu o suficiente para que a 1ª xícara ficasse com água pela metade; e a 2ª ficasse com 1/3. Desta forma, justificou que não derramaria. Mas o que nos chamou a atenção foi o uso que ela fez destas xícaras, devido ao formato delas (boca maior e fundo menor). Desta forma, para colocar a água nas xícaras, ele considerou apenas a altura. Por isso o volume de água contido na xícara não corresponde à metade do volume que a xícara comporta,

ou seja, a quantidade que ela considerou como meia xícara, é inferior a $1/2$.

Grupo II - Futuros professores (alunos do último ano de curso)

Sujeitos:

Lucas (33 anos, aluno do curso de Pedagogia);

Alessandra (25 anos, aluna do curso de Pedagogia);

Marcia (21 anos, aluna do curso de Matemática);

Donizete (29 anos, aluno do curso de Matemática);

Laura (17 anos, aluna do curso de Magistério);

Julia (17 anos, aluna do curso de Magistério)

Problema nº 1 (bicicleta)

Entre os futuros professores, 4 deles (alunos do curso de Magistério e Pedagogia) afirmaram que João teve um lucro de R\$10,00 e justificaram da mesma forma que Laura, cujo registro foi este:

$$\begin{array}{lcl}
 1) & \begin{array}{l} 120 \text{ C} \\ 130 \text{ V} \\ 140 \text{ VC} \\ 150 \text{ VV} \end{array} & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} L = 10,00 \\ P = 10,00 \\ L = 10,00 \end{array} > \underline{\underline{0}}
 \end{array}$$

Lucro de 10 reais.

Já entre os alunos do curso de Matemática, os registros e respostas foram diferentes. Um deles (Marcia) acompanhou a solução da maioria dos professores. Ou seja, João lucrou R\$10,00 na primeira compra, mas perdeu R\$10,00 entre uma transação e outra. Por isso, afirma que João não teve lucro nem prejuízo, como podemos verificar em seu registro:

Resolução dos problemas

$$\begin{array}{l}
 \textcircled{1} C_1: R\$ 120,00 \Rightarrow \text{João ganhou R\$ 10,00} \\
 V_1: R\$ 130,00
 \end{array}$$

$C_2: R\$ 140,00$
 $V_2: R\$ 150,00$

$\Rightarrow$ gastou os R\$ 10,00 que havia ganhado e mais R\$ 10,00 do bolso; portanto, quando vendeu pela 2ª vez, recuperou os R\$ 10,00 que havia tirado do bolso, ou seja, não obteve lucro algum e nem prejuízo.

Já o outro aluno do curso de graduação em Matemática (Donizete), afirmou que João teve um lucro total de R\$20,00 pois obteve um lucro de R\$10,00 na primeira venda e um lucro de R\$10,00 na segunda venda. Somando o lucro acumulado das duas vendas, João teve, no final das transações, um lucro de R\$20,00 e justifica da maneira que mostra em seu registro. Ou seja:

$ \begin{array}{r} 1^{\circ} \\ \textcircled{1} \text{ comprou } 120 \\ \text{Vendeu } 130 \\ \hline 130 \\ -120 \\ \hline 010 \\ \text{Lucro } 10 \end{array} $	}	$ \begin{array}{r} 2^{\circ} \\ \text{comprou } 140 \\ \text{Vendeu } 150 \\ \hline 150 \\ -140 \\ \hline 010 \\ \text{Lucro } 10 \end{array} $
--	---	---

$$\text{Lucro Total: } 10 + 10 = 20 \text{ reais}$$

Problema nº 02 (limonada)

Os alunos dos cursos de Magistério e Pedagogia novamente dão respostas semelhantes ao afirmarem que as limonadas são iguais, na medida em que a quantidade de limão e de água aumenta “proporcionalmente”. Por isso, registram da mesma maneira que Laura, ou seja:

$$\begin{array}{l}
 2) \quad 3 - 5 \\
 \quad \quad 5 - 7 \\
 \quad \quad \quad \epsilon \text{ igual}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \neq 2 \text{ copos} \\
 \neq 2 \text{ limões}
 \end{array}$$

Já os alunos do curso de Matemática responderam que a limonada de Beatriz é a mais forte e registram, como demonstra Marcia:

② M: 3 limões + 5 copos d'água
 B: 5 limões + 7 copos d'água

$$\frac{3}{5} < \frac{5}{7}$$

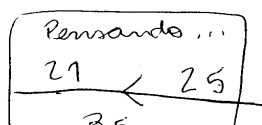
$\therefore$ Beatriz faz limonada mais forte



$$\frac{30}{5} = 6$$



$$\frac{50}{7} = 7 \frac{1}{7}$$



Problema nº 3 (vídeos)

As respostas para este problema tiveram soluções variadas.

Dentre as alunas do Magistério, Laura afirmou que

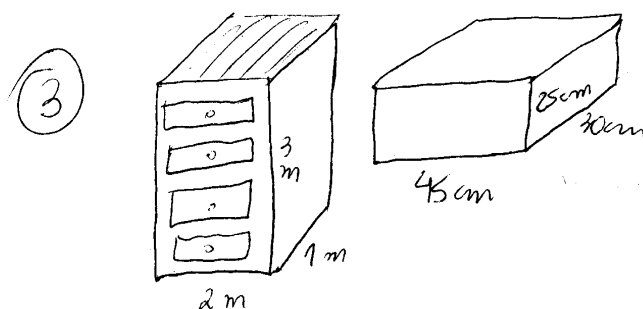
caberiam apenas 6 vídeos e não respondeu como chegou a esta solução. Já para Júlia, caberiam 18 vídeos. Para justificar sua resposta, utilizou a mesma estratégia usada por Lucas - aluno da Pedagogia, que não considerou o volume. Por isso, observando o registro de Lucas demonstrado abaixo, estaremos cientes da solução utilizada por Júlia. Eis a solução apresentada por Lucas:

3.º armário $1m + 2m + 3m = 6m \rightarrow$ cada metro tem 100cm,
logo 600cm

caixas $45 + 30 + 25 = 100cm \rightarrow$ Total das caixas 100cm

Cada caixa (100cm) eu guardo 3 vídeos, logo em 600cm
eu guardo 18 vídeos

Já para Alessandra - outra aluna de Pedagogia - de maneira distinta dos demais futuros professores, caberiam no armário, 144 vídeos. Para tanto, registra as informações demonstradas abaixo:



Capacidade do armário: $V = A_b \cdot h$, onde
 $A_b = 2 \cdot 1 = 2 \text{ m}^2$

$$\Rightarrow V = 2 \cdot 3 \Rightarrow V = 6 \text{ m}^3$$

Volume da caixa: $V = A_b \cdot h$ onde

$$A_b = 45 \cdot 30 \Rightarrow A_b = 1350 \text{ cm}^2$$

$$0,45 \quad 0,3 \quad A_b = 0,135 \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow V = 1350 \cdot 25 = 33750 \text{ cm}^3 = 0,03375 \text{ m}^3$$

$$0,135 \quad 0,25 = 0,03375 \text{ m}^3$$

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
			0,03	033	750	

$$33750 \text{ cm}^3 = 0,03375 \text{ m}^3$$

- 1º fiz os cálculos nas unidades dadas no exercício, isto é, em m e em cm.
- transformei cm^3 em m^3 e ^{depois} fiz as contas (a lápis) transformando cm em m antes para confirmar a resposta pois fazia tempo que não transformava unidades.

Terminando, $\frac{6 \text{ m}^3}{0,03375 \text{ m}^3} = 177,77$

$\therefore$ poderei guardar 177 videocassetes.
 (é portanto)

$$\begin{array}{r} 60000 \\ - 3335 \\ \hline 26250 \\ - 23625 \\ \hline 2625 \\ - 23625 \\ \hline 26250 \\ - 23625 \\ \hline 26250 \end{array}$$

$$\frac{60000}{0,03375} = 177,77$$

Problema nº 04 (queijos)

Entre os alunos de Magistério e Pedagogia a resposta foi semelhante, ou seja, todos responderam da mesma forma que Laura, que fez a seguinte consideração: “Se o cubo de 5cm custa dois reais o de 10cm, sendo o dobro, custará quatro reais.” Vejamos seu registro:

$$\begin{array}{l}
 4) \text{ MENORES} - 5 \text{ cm } R\$ 2,00 \\
 \text{MAIORES} - 10 \text{ cm} \\
 R\$ 4,00 \text{ É o dobro}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2,00 \\
 \times 2 \\
 \hline
 4,00
 \end{array}$$

Já entre os alunos de graduação em Matemática, as respostas foram distintas: Um deles (Donizete) para apresentar sua solução, utilizou a regra de três como uma forma de dar suporte ao seu raciocínio. Já o outro sujeito (Marcia), também aluna do curso de graduação em Matemática, para solucionar o problema utilizou o desenho como ferramenta para apoiar seu raciocínio. Suas estratégias podem ser verificadas em seus registros, mostrados abaixo.

Eis a solução de Donizete:

(4)

Queijos menores : 5cm lado.

Queijos maiores : 10cm lado

p/ 5cm lado, o volume é $(5\text{cm})^3 = 125\text{cm}^3$
 p/ 10cm lado, o volume é $(10\text{cm})^3 = 1.000\text{cm}^3$

$$\begin{array}{r} 125 \text{ — } 2 \\ 1000 \text{ — } x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 \ x = 2000 \\ x = \frac{2000}{125} \end{array}$$

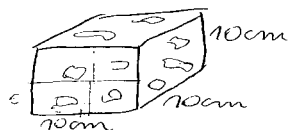
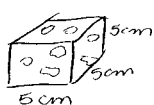
$$x = 16$$

Um valor razoável p/ os queijos menores
 seria R\$16,00

$$\begin{array}{r} 2000 \\ 125 \overline{) 2000} \\ \underline{0750} \\ 750 \\ \underline{0} \end{array} \quad \begin{array}{r} 125 \\ 16 \end{array}$$

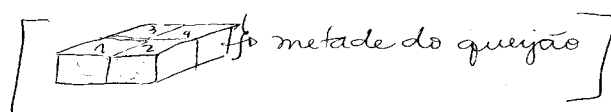
Marcia, que fez uso do desenho para apoiar seu raciocínio, registrou da seguinte forma:

(4)



$$R\$ 2,00 = \frac{1}{8} x \quad \text{onde } x \text{ é o preço razoável p/ o queijo.}$$

Seis o queijo = 8 vezes o queijinho



$$2 = \frac{1}{8} x \Rightarrow x = 16$$

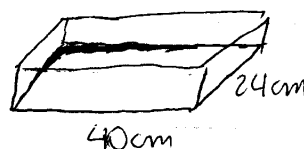
∴ O queijo deveria custar R\$ 16,00

Problema nº 5 (bolo)

Todos os alunos do curso de Pedagogia e do curso de Magistério resolveram de uma maneira muito simples: dividiram tudo por 2. Portanto, de acordo com suas respostas, a receita deveria ser reduzida à metade; a forma também deveria ter suas medidas reduzidas de maneira a ficar com 20cm de comprimento e 12cm de largura, a temperatura diminuiria para 60° e o tempo para 10 minutos.

Já os alunos do curso de graduação em Matemática, apesar de concordarem com os demais sujeitos quanto à receita, não concordam quanto aos outros itens. Por isso, quanto à forma, calcularam sua área e constataram que sua medida era de 960 cm² e, por isso, ao reduzi-la, esta deveria ficar com a 480cm², ou seja, deveria ser de 20cm X 24cm. Quanto a temperatura, mantiveram constante; mas o tempo foi, para Donizete, os mesmos 20 minutos e para Marcia, considerando sua experiência, 15 minutos. Eis o registro de Marcia:

⑤ 40cm / → 6 pessoas
24cm / 20 min, 120° C



① 2 ovos
4 colh. de açúcar
4 " de farinha trigo
3 " de água
1/2 " (sopa) de fermento em pó

(b) Medidas da forma?

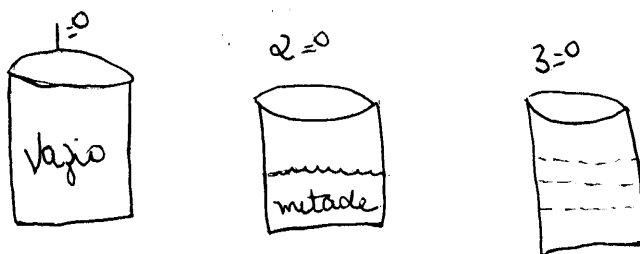
A forma original tem uma área de 960 cm^2 . Para fazer meia receita, basta dividir ao meio uma das dimensões, 12, 20 cm por 24 cm onde a área

(c) 120°C | será 480 cm^2 .

(d) Pela experiência que tenho, mais ou menos, 15 minutos.

Problema nº 06 (copos)

As alunas do Magistério afirmam que o copo não irá transbordar, porque a água contida nos dois copos é insuficiente para encher o terceiro. Justificam utilizando a fórmula ensinada pela escola e uma delas chega a desenhar os copos. Já entre os futuros pedagogos, a resposta se distingue. Lucas diz que vai transbordar e justifica da seguinte maneira:

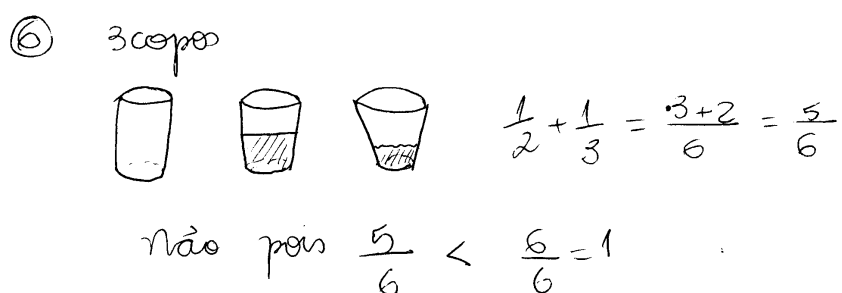


sim, porque a terça parte + meia ultrapassa a quantidade que a 1.º copo comporta.

Alessandra afirma que não vai nem encher porque $1/2 +$

$1/3 = 3/6 + 2/6 = 5/6$ e completa: “falta $1/6$ para encher.”

De maneira semelhante, os alunos de Matemática também utilizam desta estratégia, mas Marcia, além da aplicação da fórmula, desenha os copos:



Grupo III - alunos de Matemática

Sujeitos:

Daniela (14 anos, aluna de 8ª série de escola pública);

Vitória (13 anos, aluna de 8ª série de escola particular);

Wilson (17 anos, aluno da 3ª colegial de escola particular);

Marisa (17 anos, aluna da 3ª colegial de escola particular);

Marlene (32 anos, aluna de 1ª a 4ª série de curso supletivo).

Jonas (58 anos, aluno de 5ª a 8ª série de curso supletivo);

Problema nº 01 (bicicleta)

Entre os 6 alunos, 5 afirmaram que João teve um lucro de R\$20,00. Apenas um deles (Daniela) afirma que ele teve prejuízo de R\$20,00. Apesar de ter utilizado a mesma estratégia dos demais, a leitura que fez deste resultado, ou melhor, a sua interpretação é que a levou a esta afirmação. Vejamos o registro de Daniela:

$$\begin{array}{r}
 130 \\
 -120 \\
 \hline
 010
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 150 \\
 -140 \\
 \hline
 010
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 10 \\
 +10 \\
 \hline
 20
 \end{array}$$

∴ O prejuízo foi de 20 reais.

Problema nº 02 (limonada)

As respostas se dividiram em três grupos: o 1º grupo (Jonas, Marisa e Daniela) diz que as limonadas ficam iguais porque água e limão aumentaram na “mesma proporção”; o segundo (Wilson e Vitória) diz que Beatriz faz mais forte porque $3 \div 5 = 0,6$ e $5 \div 7 = 0,71$.

Portanto, a limonada de Beatriz é mais forte por ter mais limão. Já a terceira resposta (a de Marlene) foi de que Maria fazia mais forte porque Beatriz colocou muita água (desta não houve registro).

Marisa e Daniela registraram de maneira semelhante à de Jonas. Por isso, vejamos o seu registro:

$$2) \quad \begin{array}{l} 3 = 5 = \\ 5 = 7 = \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \times 5 = \\ 5 \times 7 = \end{array} \quad \text{Limão e água na mesma proporção}$$

Wilson e Vitória solucionaram de maneira semelhante e, por isso, os registros também são semelhantes. Eis o registro de Wilson:

$$\begin{array}{ll} 2) \text{ Maria} \rightarrow \frac{3 \text{ limões}}{5 \text{ copos}} \Rightarrow 0,6 \text{ limões/copo} & \text{R.: A limonada de Beatriz} \\ \text{Beatriz} \rightarrow \frac{5 \text{ limões}}{7 \text{ copos}} \Rightarrow 0,71 \text{ limões/copo} & \text{é mais forte que a de} \\ & \text{Maria.} \end{array}$$

Problema nº 03 (vídeos)

Novamente as respostas foram variadas. Dois sujeitos (Wilson e Vitória) utilizaram a fórmula para calcular volume ensinada pela escola e, por isso, seus registros foram semelhantes. Eis o registro de Vitória:

3. volume do armário volume das caixas $\frac{6000000}{33750}$
 $V = 100 \text{ cm} \cdot 200 \text{ cm} \cdot 300 \text{ cm}$ $V = 45 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm}$ 33 750
 $V = 6000000 \text{ cm}^3$ $V = 33750$
 R - Cabem 177 caixas de vídeo cabendo dentro do armário.

Daniela e Marisa somaram as medidas do armário e em seguida somaram as medidas da caixa do vídeo, mostrando não compreenderem o conceito de volume e, conseqüentemente, seus cálculos. Transformaram as unidades e dividiram o resultado da primeira adição com o resultado da segunda, como demonstra a solução de Daniela:

3- $\begin{array}{r} 45 \\ + 2 \\ \hline 6 \text{ em} \end{array}$ $\begin{array}{r} 45 \\ 30 \\ + 25 \\ \hline 100 \text{ em} \end{array}$ $\begin{array}{r} 100 \\ \times 6 \\ \hline 600 \end{array}$ $600 \div 100 = 6$
 R = Calcular para guardar 6 vídeos cabendo.

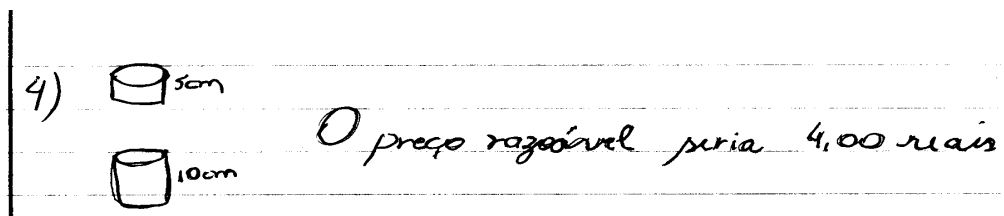
Jonas, tentou utilizar os procedimentos que aprendeu na escola, mas ainda se mostra confuso. Após calcular o volume do armário e da caixa, ele fez a divisão como pede a técnica, porém, não transformou as unidades. Conseqüentemente, não chegou ao resultado esperado, como demonstra sua solução:

$$3) \quad \left. \begin{array}{l} 1 \times 2 = 2 \times 3 = 6 \text{ mt} \\ 45 \times 30 = 1350 \times 25 = 337.50 \end{array} \right\} 17 \text{ QUIDEAS}$$

Já Marlene não solucionou este problema.

Problema nº 04 (queijos)

Mais uma vez, as respostas não foram homogêneas. Marisa e Daniela revelaram não compreender suficientemente o conceito de volume, na medida em que consideraram que o queijo maior tinha o dobro do tamanho do menor e, por isso, o preço também deveria ser o dobro. Marisa até desenha os queijos em forma de “cubos”, como nos mostra seu registro:



Outros dois (Wilson e Vitória), fizeram uso da fórmula, tal como mostra o registro de Vitória:

4.



$$V = 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$V = 125 \text{ cm}^3$$

Preço = 2 reais



$$V = 10 \cdot 10 \cdot 10$$

$$V = 1000 \text{ cm}^3$$

Preço = $1000 : 125 = 8$
 $8 \cdot 2 = 16 \text{ reais}$

R - O preço razoável para os cubos maiores é de 16 reais.

Marlene novamente não resolveu o problema. Mas Jonas até tentou uma solução:

$$4) \begin{array}{l} 5\text{cm} \times 200 = 10,00 \\ 10\text{cm} = x = 10,00 \end{array} \text{ Seria o preço pagar pelos maiores}$$

Problema nº 05 (bolo)

Três dos seis sujeitos (Marisa, Marlene e Daniela) resolveram de forma bastante simplista, ou seja, dividiram tudo por 2. Por isso, segundo estes sujeitos, a receita, a forma, a temperatura e o tempo deveriam ser reduzidos à metade. Por isso, a forma deveria ter 20cm x 12cm; a temperatura ser de 60° e o tempo deveria ser de 10 minutos, como podemos verificar no registro de Marisa e que foi semelhante aos registros de Marlene e de Daniela:

5) - Usará a metade da receita = 2 ovos, 4 colh. de açúcar, 4 colh. de farinha, 3 colh. de água, 1/2 de fermento.
 - 20 cm de comprimento por 12 de largura.
 - assará o bolo na temperatura de 60°.
 - apenas 10min.

Outros dois sujeitos (Wilson e Vitória) reduziram a receita

e mantiveram a temperatura do forno em 120°. Mas, quanto ao tempo, Wilson afirmou que este deveria ser mantido enquanto que para Vitória este deveria ser reduzido à metade, ou seja, deveria ser de 10 minutos. Quanto a forma, tanto Wilson como Vitoria enfatizaram que esta deveria ser reduzida proporcionalmente, considerando seu volume, como podemos verificar no registro de Wilson, apresentado abaixo, e que foi semelhante ao registro de Vitória:

⑤ - A receita deverá ser dividida pela metade:

2 ovos
 4 colheres de açúcar
 4 " de farinha de trigo
 3 colheres de água
 1/2 colher de sopa de fermento em pó.

- As medidas da forma tem de ser reduzidas de modo que seu volume seja a metade.

Ex.: 40cm de comprimento x 12cm de largura
 20cm de comprimento x 24cm de largura

- Na mesma temperatura: 120° Centígrados

- O mesmo tempo: 20 minutos

Um outro sujeito (Jonas) apenas registrou no papel a seguinte informação: "Reduz a fórmula pela metade e conservando a temperatura em 120° e o tempo de 20 minutos para assar."

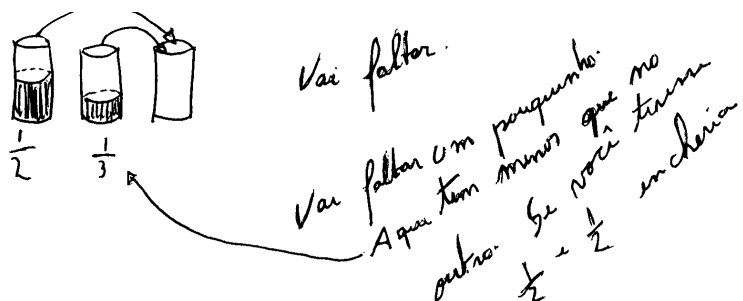
Problema nº 06 (copos)

Dos seis sujeitos entrevistados três deles (Jonas, Wilson e Vitória), se utilizam da técnica ensinada pela escola, ou seja, fizeram uso do mínimo múltiplo comum para chegarem ao resultado. Por isso, a resolução apresentada por eles pode ser verificada no registro de Jonas, que se assemelha aos registros de Wilson e Vitória. Eis o registro de Jonas:

Não transbordará porque falta $\frac{1}{6}$

$$\begin{array}{r} 2,3 \overline{) 2} \\ 1,3 \overline{) 3} \\ \hline 1 \overline{) 6} \end{array} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6} \therefore$$

Marlene e Marisa se utilizam da representação, na medida em que desenham os copos para apoiarem o raciocínio como demonstrado por Marlene em seu registro:



Apenas Daniela argumentou que iria transbordar e

registra a seguinte resposta: “Sim. Por que um copo tem mais da metade do outro.”

Grupo IV - Sujeitos de escolaridade limitada

Sujeitos:

Rosana. (58 anos, dona de casa, 4^a série completada na infância);

Lúcia (59 anos, dona de casa, 4^a série completada na infância);

Lauro (59 anos, trabalhador rural, 4^a série completada na infância);

Fábio (65 anos, caminhoneiro 4^a série completada na infância);

Valter (32 anos, comerciante, 4^a série completada na infância);

Gustavo (48 anos, comerciante, 4^a série completada na infância).

Problema nº 01 (bicicleta)

Dentre todos os sujeitos, 5 deles (Gustavo, Valter, Fábio,

Lauro e Lúcia) afirmam que João teve R\$ 20,00 e justificam registrando da mesma maneira que Fábio, ou seja:

$$\begin{array}{r}
 10 \\
 \hline
 130,00 \\
 120,00 \\
 \hline
 010,00
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 150,00 \\
 140,00 \\
 \hline
 010,00
 \end{array}
 \quad
 \text{Luciano } (20,00)$$

Somente a solução de Rosana se distanciou da resposta correta, já que, para ela, João teve um lucro de R\$ 30,00 ao final de todas as transações e justifica:

$$\begin{array}{r}
 130,00 \text{ o preço que vendeu} \\
 120,00 \text{ o } \dots \text{ comprou} \\
 \hline
 010,00 \text{ ganhou } 10,00
 \end{array}$$

comprou por 140,00 perdeu os 10,00 que tinha ganho

$$\begin{array}{r}
 \text{Vendeu por } 150,00 \\
 120,00 \\
 \hline
 030,00 \text{ teve um lucro de } 30,00 \text{ reais}
 \end{array}$$

Problema nº 02 (limonada)

Todos os sujeitos concordam que Beatriz faz limonada mais forte, mas as justificativas são diferentes. Quatro sujeitos (Lúcia, Fábio, Gustavo e Lauro) justificam que Beatriz faz mais forte porque utilizou mais limões. Valter também concorda que Beatriz coloca mais limão. Porém comprova usando regra de três, assim:

$$2) \quad 3 - 5$$

$$\quad \quad \quad \times - 7 = 4,2$$

a limonada de Beatriz.

E completa dizendo: “Para Beatriz fazer a limonada igual a de Maria, ela tinha que usar 4,2 limão. Como ela usou 5, a limonada fica mais forte.”

Rosana justifica a presença de mais limões na limonada de Beatriz da seguinte forma:

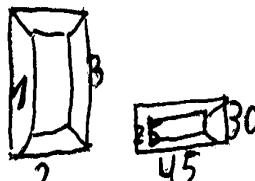
dividimos os limões em 4 partes

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 3 \\ \hline 12 \overline{) 5} \\ 20 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \times 5 \\ \hline 20 \overline{) 7} \\ 60 \\ 4 \end{array}$$

Beatriz faz limonada mais forte

E acrescenta dizendo: “4 partes vezes 3 limões é igual a 12 partes. Dividindo estas 12 partes em 5 copos dá 2,4 parte por cada copo na limonada da Maria. A limonada de Beatriz é mais forte porque dá 2,8 parte de limão por copo.”

Para Valter e Rosana, caberiam no armário, 144 vídeos. Tanto Rosana como Valter, desenharam o vídeo e o armário e calcularam quantas vezes caberiam as medidas do vídeo dentro das medidas do armário, como pode ser verificado no registro apresentado por Rosana e que se assemelha ao registro de Valter. Vejamos o registro de Rosana:



em 2 metros cabe 4 de 45 centim
 em 1 metro cabe 3 de 30 cm
 em 3 metro cabe 12 de 25 cm

$$\begin{array}{r}
 4 \\
 \times 3 \\
 \hline
 12
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 12 \\
 \times 3 \\
 \hline
 36 \\
 24 \\
 \hline
 144
 \end{array}$$

cabe 144 vídeos no armário

De acordo com as respostas obtidas, tanto para Gustavo como para Lúcia, caberiam no armário apenas 6 vídeos. Para justificarem suas respostas utilizaram a mesma estratégia, ou seja, multiplicaram as medidas do armário e do vídeo e dividiram uma pela

outra. Por isso, podemos verificar suas soluções no registro de Lúcia:

$$\begin{array}{r}
 1^m \\
 \times 2 \\
 \hline
 2 \\
 \times 3 \\
 \hline
 6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 45^m \\
 + 30 \\
 25 \\
 \hline
 100 \\
 \times 6 \\
 \hline
 6.00
 \end{array}$$

guardarei 6 vidua

Fábio resolve da mesma maneira que a maioria dos professores, ou seja:

$$\begin{array}{r}
 3.00 \\
 \times 2.00 \\
 \hline
 6.0000 \\
 \times 1.00 \\
 \hline
 6.0000,00
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 60.000 \\
 \times 45 \\
 \hline
 300000 \\
 240000 \\
 \hline
 2700000
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 60.000 \\
 \times 30 \\
 \hline
 1800000 \\
 1800000 \\
 \hline
 3600000
 \end{array}$$

Já Lauro, apesar de não fazer registros, resolve assim:

“armário - 6.000cm

vídeo - 1.350cm” (multiplicou 45 por 30 usando o cálculo mental)

“6000 dividido por 1350 é igual a 4,44” (utilizou uma calculadora)

E contesta afirmando: “Espera aí! Num armário desse tamanho tem que caber mais vídeo. Alguma coisa tá errada.”

Problema nº 04 (queijos)

Lauro começa dizendo: “Tem que cubicar.”

E continua: “5cm de lado vezes 3 lados é igual a 125cm³. 10cm de lado dá 1000cm³.” (Logo pega a calculadora e faz $2 \div 125 = 0,016$) Em seguida diz: “Se o de 125cm³ é dois reais o de 1000 é dezesseis”. E acrescenta: “Não precisa fazer muita conta.”

Valter e Fábio resolvem de maneira semelhante. Para eles, o queijo maior deverá custar R\$16,00, já que o dobro no tamanho de um cubo implica em dobrar seu volume. Por isso, seus registros podem ser verificado na solução de Fábio, que se assemelhou à de Valter:

Handwritten calculations showing the relationship between the volume of a cube (side length 5 cm) and a larger cube (side length 10 cm). The calculations are as follows:

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 5 \\ \hline 125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 10 \\ \hline 100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000 \\ \div 125 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 2 \\ \hline 16 \end{array}$$

The final result, 16, is circled and labeled "16,00 reais".

Para três dos sujeitos (Lúcia, Rosana e Gustavo) o preço razoável seria quatro reais. As justificativas por eles apresentadas demonstraram semelhanças na maneira de pensar o problema, já que

para todos eles o preço deveria ser o dobro, já que o tamanho é o dobro. Por isso seus registros foram também semelhantes. Vejamos o registro de Rosana:

2,00 menor
 2 vezes mais
 4,00 Os maiores seriam de 4,00 cada

Problema nº 05 (bolo)

Gustavo resolveu de uma forma bastante simples: dividiu tudo por dois, alegando que para fazer o bolo para a metade do número de pessoas, basta reduzir tudo à metade. Assim, apresenta o seguinte registro:

5 R. A Receita 2 Ovos 4 colheres de açúcar 4 colheres fermento trigo 3 colheres de água
 1/2 colher fermento em pó

A medida da forma 1 de 20 de comprimento por 12 cm de largura
 Assar a Bala Temperatura 60 graus 10 minutos

Os demais sujeitos, apesar de concordarem entre si

quanto ao item “receita” e o item temperatura (já que todos afirmam que a receita deve ser reduzida à metade e a temperatura deve permanecer a mesma), suas respostas quanto aos demais itens já não são tão homogêneas.

Quanto à forma:

Para Lúcia, a forma deveria ter 12cm de largura por 20cm de comprimento.

Rosana concorda com Lúcia quanto à medida da forma, mas afirma que o bolo pode ser feito na mesma assadeira; a diferença básica é que este ficaria mais fino.

Valter e Fábio concordam que a forma deve ter a metade do tamanho da primeira. Porém, justificam de maneira diferente. Valter, em seu registro afirma que a forma deveria ter a medida de 20cm X 24cm; enquanto Fábio registra a medida de 480cm².

Segundo Lauro, que apesar de nos responder, não fez registros: “a forma tem 960cm² metade dela é 480cm² . Então a forma deve ter 24 X 20 ou 12 X 40 para o bolo ficar com a mesma altura. Se puder ficar mais baixo, pode usar a mesma assadeira.”

Quanto ao tempo:

Tanto para Lúcia como para Fábio, o tempo deve ser reduzido, mas não especificam por quanto tempo exatamente o bolo deveria permanecer no forno.

Dois sujeitos (Valter e Rosana) concordam que o tempo

deva ser o mesmo. Mas Rosana ressalta que esta permanece a mesma se a forma a ser usada corresponder à metade do tamanho da forma original, para que o bolo a ser feito fique com a mesma altura do anterior.

Lauro responde, dizendo-nos:

“Se usar a assadeira menor, o bolo vai ficar do mesmo tamanho em proporção, então o tempo para assar é o mesmo. Mas se usar a mesma assadeira que se usa para fazer para 6 pessoas, então tem que deixar menos tempo porque o bolo fica mais fino e assa mais rápido.”

Problema nº 06 (copos)

Para Gustavo, o copo vai transbordar, porque, segundo ele, “enxeu”.

Para Rosana, Lúcia e Fábio o copo não transborda porque tem $\frac{3}{4}$ de água. Para encher o copo, seria preciso $\frac{4}{4}$ e para transbordar, a quantidade de água deveria ser superior a $\frac{4}{4}$.

Lauro, que não fez registros, afirma com muita convicção: “Não vai transbordar porque vai faltar água. $\frac{1}{2}$ mais $\frac{1}{3}$ não enche porque $\frac{1}{3}$ é menor que $\frac{1}{2}$. Para encher precisa ser $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.”

Para Valter, o copo não irá transbordar porque:

6) NÃO transbordará,

considerando 1 copo de 200 ml.

$$\frac{1}{2} = 100 \text{ ml.}$$

$$\frac{1}{3} = 66,6 \text{ ml.}$$

$$166 \text{ ml.}$$

E completa: “Para encher tinha que ter 200 ml, como tem 166,6 o copo não vai nem encher.”

4.2 Análise e discussão da solução de problemas

Problema nº 01

João comprou uma bicicleta por 120 reais e a vendeu por 130 reais; voltou a comprar a mesma bicicleta por 140 reais e voltou a vendê-la, agora, por 150 reais. Qual foi o lucro (ou prejuízo) ao fim de todas essas transações?

Obtiveram êxito na solução deste problema os sujeitos que coordenaram adequadamente as duas variáveis: dinheiro despendido / dinheiro recebido. São sujeitos que não vincularam uma compra à outra, mas a interpretaram como dois momentos distintos. Portanto, tiveram bom desempenho os sujeitos que chegaram à solução do tipo:

Comprou por 120,00 e vendeu por 130,00 ganhou 10,00

Comprou por 140,00 e vendeu por 150,00 ganhou mais 10,00

Lucro total: 20 reais

Esta solução recebeu maior destaque nos grupos III e IV, ou seja, no grupo dos alunos de matemática e no grupo dos sujeitos de escolaridade limitada. Tanto no grupo III como no grupo IV, dos 6 sujeitos entrevistados, 5 responderam desta forma. Apenas um sujeito do grupo III, apesar de resolver desta maneira, afirma que os vinte reais se caracterizam como prejuízo.

De maneira distinta, a coordenação inadequada entre dinheiro despendido/ dinheiro recebido, produziu uma vinculação que estabelece uma seqüência que envolve lucro/prejuízo/lucro, expressa desta forma:

“Comprou por 120,00 e vendeu por 130,00 - ganhou 10,00. Mas ao comprá-la novamente por 140,00 perdeu os 10,00 que tinha ganho e desembolsou mais 10,00. Ao vender por 150,00 ganhou 10,00 de novo.”

Este tipo de resposta apareceu com maior freqüência no grupo II - dos futuros professores - já que dos 6 sujeitos entrevistados, 4 resolveram desta forma.

Outro procedimento de resolução encontrado, prevaleceu

no grupo I - dos professores, e foi demonstrado por 4 dos 6 professores entrevistados e foi deste tipo:

“Comprou por 120,00 e vendeu por 130,00 - ganhou 10,00. Mas ao comprar por 140,00 perdeu os 10,00 que havia ganhado e teve que colocar mais 10,00. Suponhamos que ele tenha pedido emprestado esses 10,00 que acrescentou. Ao vender por 150,00, ele usa os 10,00 que ganhou para pagar o empréstimo. Portanto, não teve lucro, nem prejuízo.”

Nestes exemplos, verificamos que a relação escolaridade/êxito na coordenação das variáveis dinheiro despendido/dinheiro recebido, mostrou-se quase que inexistente, na medida em que apenas 1 professor e 1 futuro professor resolveram de maneira adequada, ou seja, chegaram à resposta de que João teve R\$20,00 de lucro.

Vale lembrar que nenhum sujeito questionou o fato de a bicicleta apesar de estar mais velha, aumentar o preço. Ou seja, o caráter lógico não foi considerado neste problema por nenhuma das pessoas entrevistadas.

Problema nº 02

Maria, ao fazer limonada, usa 3 limões para 5 copos d'água. Beatriz usa 5 limões para 7 copos d'água. Qual delas faz limonada mais forte?

As soluções apresentadas para este problema evidenciam que existem duas maneiras distintas de conceber a proporcionalidade: a primeira como sendo uma relação de diferença constante. Aliás, estudos piagetianos mostram que, no percurso da construção do conceito de proporcionalidade, as crianças passam por essas estratégias. Como exemplo, podemos citar esta:

$$5 - 3 = 2$$

$$7 - 5 = 2 \text{ (são iguais)}$$

A segunda concebe a proporcionalidade como uma relação de razão constante. Como, por exemplo:

$$3 \div 5 = 0,6$$

$$5 \div 7 = 0,7$$

Como os diferentes grupos se saíram nesta solução?

No grupo I - dos professores - prevaleceu esta segunda maneira de conceber a proporcionalidade, ou seja, como uma relação de razão constante. Cinco professores utilizaram esta estratégia. Porém, uma professora apesar de usá-la, respondeu que Maria faz limonada mais forte, enquanto os demais afirmaram que Beatriz é quem faz mais forte.

Dentre os sujeitos do grupo II – dos futuros professores – dois deles solucionaram desta mesma forma.

Já no grupo III - alunos de matemática - as respostas se

distinguem: três sujeitos concebem a proporcionalidade como uma relação de diferença constante, já que ressaltam que as limonadas são iguais; outros dois a concebem como a maioria dos professores, ou seja, como uma relação de razão constante. Apenas um deles acredita que Maria faz mais forte porque Beatriz colocou muita água.

Entre os integrantes do grupo IV - sujeitos de escolaridade limitada - a primeira maneira de conceber a proporcionalidade (como uma relação de razão constante), foi determinante nas soluções. Todos os sujeitos afirmam que Beatriz faz a limonada mais forte porque a proporção de limão que ela utiliza é maior.

No livro intitulado *Da Lógica da Criança à Lógica do Adolescente*, Piaget e Inhelder (1972) alertam que o ensino escolar pouco contribui para a formação do conceito de proporcionalidade o que, em parte, justifica os resultados obtidos, já que a maioria dos sujeitos que freqüentam a escola apresentou uma performance inferior aos sujeitos que não a freqüentam.

Problema nº 03

Tenho um armário cujas medidas são: 1m, 2m e 3m. Quero guardar nele caixas contendo vídeo cassetes. As medidas dessas caixas são: 45cm, 30cm e 25cm. Quantos vídeo cassetes poderei guardar no armário?

Para a análise das soluções tanto deste problema como do problema posterior, recorreremos aos estudos de Vergnaud e Ricco (1986) sobre o conceito de volume desenvolvido com crianças de 11 a 15 anos. Em suas pesquisas, os autores destacaram que o conceito de volume é bastante difícil e de acesso tardio, por isso, encontraram 5 procedimentos diferentes para a solução de problemas que envolviam o conceito de volume. São eles:

- A solução correta, ou seja, a multiplicação das 3 dimensões (largura x altura x comprimento)

- A solução do tipo “perímetro”, onde os cálculos se baseiam na soma das arestas. Por exemplo:

2 comprimentos + 2 larguras + 2 alturas

2 comprimentos + 2 larguras + 1 altura

4 comprimentos + 4 larguras + 4 alturas

- Solução do tipo “superfície”: o cálculo se dá efetuando as áreas e a soma das áreas. Exemplo: 2 (largura x altura) + 2 (comprimento x altura).

- Solução do tipo “mista”: perímetro da base x altura.

- Outros procedimentos: nesta categoria os autores agruparam as soluções dadas pelos alunos de modo que as respostas fossem do tipo:

- apenas uma dimensão, por exemplo a altura;

- um volume “x” com a justificativa de “*tenho algo semelhante em minha casa*”.
- repetição, sem cálculo algum, das medidas das dimensões elementares: (“tanto de altura”, “tanto de comprimento”, “tanto de largura”).

De maneira semelhante, em nosso trabalho encontramos sujeitos que, para resolverem este problema, também se utilizaram de alguns procedimentos citados por Vergnaud e Ricco (1986). Alguns sujeitos se utilizaram do procedimento tipo “perímetro”, ou seja, somaram as arestas do armário e, em seguida, as arestas do vídeo, transformaram as unidades e dividiram o resultado do primeiro pelo resultado do segundo, obtendo uma resposta que foi expressa deste modo:

$$1\text{m} + 2\text{m} + 3\text{m} = 6\text{ m} = 600\text{cm}$$

$$45\text{cm} + 30\text{cm} + 25\text{cm} = 100\text{cm}$$

$$600 \div 100 = 6$$

Caberão 6 vídeos

Quem recorreu a esta solução?”

Um sujeito do grupo I, dois sujeitos do grupo II, dois sujeitos do grupo III e dois sujeitos do grupo IV. Portanto, em todos os grupos apareceu este tipo de solução. Trata-se de uma solução que identifica elementos numéricos na qual o sujeito parte para o cálculo aparentemente sem avaliar o significado do enunciado.

Para solucionar este problema, encontramos, também, sujeitos que se preocupam com a razoabilidade ou o significado da resposta, considerando o vídeo como uma unidade indivisível. A pergunta que enfrentam é: Quantos vídeos cabem? Na busca dessa resposta os sujeitos passam por perguntas do tipo: quantas vezes a altura do vídeo cabe na altura do armário? Como exemplo podemos citar as respostas de Lauro, que não se satisfaz com sua resposta de que caberiam aproximadamente 4 vídeos e logo se defende: “Espera aí! Num armário deste tamanho tem que caber mais vídeo. Alguma coisa está errada.”

Uma outra resposta interessante, foi o de Rosana ao apresentar uma solução assim:

“Em 2m cabem 4 vezes 45cm; em 1m cabem 3 vezes 30cm; em 3m cabem 12 vezes 25cm. $3 \times 4 = 12 \times 12 = 144$. Cabem 144 vídeos.”

Este tipo de resposta apareceu nos grupos I, II e IV. Do grupo I, 2 professores resolveram assim; no grupo II, uma futura professora também resolveu deste modo e no grupo IV, dois sujeitos também registraram desta forma.

Encontramos, ainda, sujeitos que perdem o “senso de localização” e passam a buscar resposta para a questão: em $6m^3$ quantas vezes cabe $45 \times 30 \times 25cm^3$? Abandonam, assim, o vídeo como sendo portador de forma e medidas definidas. Esta solução mostra isso:

V_1 = volume do armário V_2 = volume da caixa de vídeo

$$V_1 = 100 \times 200 \times 300 = 6.000.000\text{cm}$$

$$V_2 = 45 \times 30 \times 25 = 33.750\text{cm}$$

$$V_1 \div V_2 = 177,77$$

Caberão 177 vídeos

Se tivéssemos falando de um outro objeto, esta solução estaria correta, pois, como nos mostra Vergnaud e Ricco (1986), esta solução consistiu em multiplicar as três dimensões. Porém, não podemos “quebrar” um vídeo para guardá-lo num armário.

Que sujeitos recorrem a esta solução?

Três professores, dois futuros professores, dois alunos de matemática e um sujeito de escolaridade limitada. Portanto, em todos os grupos encontramos este tipo de solução, apesar de sua frequência ser maior entre os sujeitos que freqüentam a escola, o que é compreensível, já que a ênfase neste tipo de solução é predominante na maioria das escolas.

Problema nº 04

No supermercado havia queijos na forma de cubos: os menores eram cubos de 5cm de lado e os maiores eram cubos de 10cm de lado. Vi apenas o preço dos menores, que custavam 2 reais. Que preço seria razoável para os maiores?

Um número significativo de sujeitos concebe a relação entre volume e as medidas lineares como diretamente proporcionais e, por isso, resolvem utilizando um procedimento destacado por Vergnaud e Ricco (1986), que se baseia apenas em uma dimensão. Solução como esta mostra isso:

$$5\text{cm} - 2,00$$

$$10\text{cm} - x$$

$$x = 20 \div 5 = 4,00$$

Ou esta:

“Se o de 5cm custa 2 reais o de 10 custa 4 reais. É o dobro.”

Este tipo de solução foi utilizado por sujeitos de todos os grupos. No grupo I, apenas um professor resolveu desta maneira. No grupo II, quatro futuros professores apresentaram a mesma solução. No grupo III, dois alunos responderam assim. E, no grupo IV, três sujeitos utilizaram esta estratégia.

Porém, houve dois sujeitos no grupo I, dois no grupo II, dois sujeitos no grupo III e dois no grupo IV que resolveram corretamente e por isso, seu registro foi assim ou de maneira semelhante:

$$5 \times 5 \times 5 = 125\text{cm}$$

$$10 \times 10 \times 10 = 1000\text{cm}$$

$$1000 \div 125 = 8 \times 2 = 16 \text{ reais}$$

Além dessas respostas, duas formas de resolução nos chamaram a atenção: A primeira foi a de um professor, por ter confundido cubo com cilindro e, mais que isso, ter utilizado uma fórmula impossível para a resolução: $5\pi r^2 = 10 \pi r^2$. Como ele chegou, através desta fórmula, ao resultado de R\$ 4,00, não foi possível saber. A outra maneira, também de uma professora, não foi registrada, mas ela disse que sabia que o preço não era o dobro, pois este problema deveria ser resolvido pela lógica e quanto maior o produto a tendência é do preço baixar. Por isso arriscou: *“Mais ou menos uns três reais.”*

Esta resposta demonstra deficiências no raciocínio lógico, possivelmente próximo do que Paulos (1994) denominou de Analfabetismo Matemático e que foi discutido anteriormente.

Problema nº 05

Costumo fazer bolo para 6 pessoas, usando uma forma com 40cm de comprimento e 24cm de largura; deixando o bolo por 20 minutos no forno aquecido a 120 graus. A receita que uso é: 4 ovos, 8 colheres de açúcar 8 colheres de farinha de trigo, 6 colheres de água e 1 colher de fermento. Porém, hoje quero fazer bolo para apenas 3 pessoas:

- *como deverá ficar minha receita?*
- *quais as medidas da forma que deverei usar?*
- *com que temperatura assarei o forno?*
- *quanto tempo deverei deixar o bolo no forno?*

Neste problema, nossas atenções se voltaram para três perguntas do tipo: como fica

a forma?

a temperatura?

o tempo?

Alguns sujeitos seguiram esta regra: “basta dividir tudo por dois.” Esse dividir “tudo por 2” envolve dividir largura por 2 e comprimento por 2. Este é um exemplo típico:

“A forma deve ter 12cm x 24cm”

Nesse problema percebe-se uma acentuada dificuldade com o conceito de área.

Alguns sujeitos deram a essas interrogações um caráter mais qualitativo ou lógico como, por exemplo, Lauro:

Quanto à forma: “a forma tem 960cm^2 metade dela é 480cm^2 . Então a forma deve ter 24 X 20 ou 12 X 40 para o bolo ficar com a mesma altura. Se puder ficar mais baixo, pode usar a mesma assadeira.”

Quanto à temperatura: “Tem que ser a mesma.”

Quanto ao tempo: “Se usar a assadeira menor, o bolo vai ficar do mesmo tamanho em proporção, então o tempo para assar é o mesmo. Mas se usar a mesma assadeira que usa para fazer pra 6 pessoas, então tem que deixar menos tempo porque o bolo fica mais

fino e assa mais rápido.”

Qual a relação entre estratégia e grupo a que pertence o sujeito?

A maioria das respostas em que prevaleceu o “dividir tudo por 2” vieram de sujeitos escolarizados, já que:

- quanto à forma: - 4 professores, 4 futuros professores, 4 alunos e 3 sujeitos de escolaridade limitada dividiram tudo por 2, apesar de um deles destacar que o bolo pode ser feito na mesma forma, com a diferença de ficar mais fino.

- quanto à temperatura: - 4 futuros professores, 3 alunos e 1 sujeito de escolaridade limitada dividiram por 2.

- quanto ao tempo: - quatro futuros professores e 3 alunos dividiram por 2; apenas uma futura professora não dividiu por dois, mas considerou sua “experiência” e, por isso, registrou 15 minutos. Entre os sujeitos de escolaridade limitada, 3 deles reduziram o tempo, mas apenas um afirma que este deve ser reduzido à metade. Os outros dois não determinaram o tempo certo, só afirmaram que o bolo, sendo menor, vai assar mais rápido e, por isso, deve ficar menos tempo no forno. Um quarto sujeito afirma que o tempo deve ser o mesmo se a forma corresponder à metade exata da forma original, para que o bolo fique da mesma altura e leve o mesmo tempo de forno.

Já uma resolução mais qualitativa, ou seja, a que demonstrou o caráter lógico, foi apresentada por sujeitos de

escolaridade limitada, como vimos na solução de Lauro, por exemplo, ao argumentar que o bolo poderia ser feito na mesma forma, embora ficasse mais fino, o que não implicaria em mudanças significativas no bolo, a não ser no tempo para assar, que deveria diminuir, pois bolo mais fino assa mais rápido.

Problema nº 6

Tenho 3 copos iguais. Um totalmente vazio, outro contém água até a metade e o outro tem a terça parte cheia. Despejando no primeiro o contido nos dois últimos, transbordará? Por que?

Para esta questão, duas soluções muito constantes foram:

- uma de caráter quantitativo, expressa desta maneira:

$$1/2 + 1/3 = 5/6$$

$$5/6 < 1 - \text{não transbordará}$$

- uma de caráter lógico, descrita assim:

$1/2 + 1/3$ não enche porque $1/3$ é menor que $1/2$. Para encher precisa $1/2 + 1/2$.

Que sujeitos utilizaram a solução quantitativa?

Novamente os escolarizados.

Habituaados a utilizarem fórmulas ou técnicas, os sujeitos escolarizados apoiando-se no m.m.c., apresentam suas respostas numa

perspectiva quantitativa. Por isso, dos 6 professores pertencentes ao grupo I, 5 resolvem desta maneira; no grupo II, também 5 futuros professores resolvem desta forma; no grupo III, 3 alunos respondem assim.

Que sujeitos utilizaram a solução qualitativa?

Os que possuem escolaridade limitada, já que a maioria do grupo (5 sujeitos) busca outros caminhos para a solução, como a de Valter, por exemplo, onde ele responde considerando um copo de 200 ml e afirma que $1/2$ copo representa 100 ml e $1/3$ do copo implica em 66,6 ml e, por isso o copo não transbordaria pois ficaria com 166,6 ml e para encher seria necessário os 200 ml que o copo comporta. Ou a resposta de Lauro que diz que $1/2 + 1/3$ não enche porque $1/3$ é menor $1/2$. E para encher seria preciso $1/2 + 1/2$. Ou ainda a solução apresentada por outros 3 sujeitos que afirmam que o copo não transbordará porque o terceiro copo vai ficar com $3/4$ de água. Para transbordar seria necessário mais de $4/4$, já que esta quantidade seria suficiente apenas para encher o copo.

4.2.1 Questionário

Em relação ao questionário, apresentaremos as respostas de acordo com os grupos, tal como fizemos com a prova. Isso implica dizer que mostraremos primeiramente as respostas do grupo I – dos

professores, para em seguida apresentarmos as respostas do grupo II – dos futuros professores e assim sucessivamente.

Grupo I – professores

O que você pensa da escola?

A maioria dos professores respondem analisando apenas sob um único ponto de vista, seja em relação aos alunos (afirmando que estes não demonstram interesse e que não respeitam mais o professor), seja em relação ao governo (que “joga” o que deve ser feito e não oferece suporte para os professores), ou em relação ao ensino (afirmando que este está muito fraco). Porém jamais demonstram serem, de certa forma, responsáveis pela situação em que se encontram. Não discutem as dificuldades relacionadas a fatores intra-classe, principalmente os que estariam relacionados à atuação docente.

Você gosta de Matemática? Por quê?

De maneira geral, as respostas foram positivas com justificativas do tipo “se não gostasse, não seria professor de Matemática”, ou ainda, porque é uma matéria exata - “ou é ou não é – não se tem meio termo.”

A matemática é importante? Por quê?

A maioria justifica a importância da matemática

atribuindo à disciplina a condição de contribuir muito para o desenvolvimento do raciocínio. E, para alguns, dentre as respostas obtidas, ela não apenas desenvolve o raciocínio como exercita a atenção e a memória.

Como você se considera em relação à matemática?

A maioria das respostas foram de que não se consideram “gênios” mas também não são ruins, caso contrário, jamais seriam professores.

Você sempre foi bom a aluno em matemática?

A maioria dos professores diz que sim e, desta forma, também justificam a escolha profissional. Apesar de alguns dizerem que escolheram ser “matemáticos” por sempre terem gostado da disciplina, embora não tivessem sido alunos exemplares nos anos escolares.

Grupo II – futuros professores

O que você pensa da escola?

De maneira geral, os futuros professores, ao contrário do que deveriam, demonstram estar desesperançosos. Para eles a escola, sobretudo a pública, vai de mal a pior. Criticam os alunos pelo desinteresse e desrespeito ao professor; criticam o governo, cujas

promessas são ilusórias e, ainda, criticam os professores, por se acomodarem com a situação e não se interessarem para que o ensino efetivamente aconteça como deveria. Um dos sujeitos, (Lucas) chega a afirmar que a escola deveria “ensinar tudo a todos”, mas da maneira em que ela se encontra, isto é impossível. Para Laura, a escola se apresenta como uma instituição que visa complementar a educação familiar, ou seja, a escola deve transmitir os conhecimentos que serão utilizados na vida profissional e esclarecer os alunos das situações social, política e econômica do país.

Você gosta de Matemática? Por quê?

Alunos do Magistério e Pedagogia expressam uma avaliação positiva, afirmando gostarem de matemática. Porém, contraditoriamente, justificam a escolha do curso pelo fato deste “ter pouca matemática”. Apesar disso, as alunas do Magistério expressam o gosto pela disciplina *Metodologia do Ensino de Matemática*, por ser esta “muito interessante.” Este último dado mostra as possibilidades de contribuição de um programa de formação de professores dinâmico, coerente e eficiente.

A Matemática é importante? Por quê?

Apesar do pouco interesse demonstrado pela disciplina, todos concordam com sua grande importância. E justificam apontando a enorme presença da Matemática no dia-a-dia e, também, por

desenvolver o raciocínio lógico.

Como você se considera em relação à matemática?

Todos afirmam não serem bons em matemática, mas que o interesse é grande, principalmente no final do curso, em que os estágios são freqüentes e a necessidade de entender é maior para poder ensinar melhor.

Você sempre foi bom aluno de Matemática?

Enfaticamente as respostas foram negativas. Todos afirmam que não foram bons alunos e justificam apontando dificuldades de compreensão e, para decorar as fórmulas exigidas pelo professor.

Grupo III – alunos de matemática

O que você pensa da escola?

Alguns alunos respondem ser ela um meio de “experimentar o mundo, apesar de os alunos não valorizarem”. Outros afirmam que ir à escola é bom, pelas amizades, mas que não aprendem quase nada. Rotulam a maioria dos professores como chatos e autoritários.

Você gosta de Matemática? Por quê?

Alguns afirmam que gostavam de matemática enquanto faziam só “continhas” de adição e subtração, já que estas eram fáceis. Agora já não gostam tanto quanto antes, por não entenderem e não saberem porque “algumas coisas que não servem pra nada”, devam ser aprendidas. Outros afirmam gostarem, mas a julgam muito difícil e, por isso, exige muito exercício.

A matemática é importante? Por quê?

Todos alunos afirmam ser a matemática importante por sua presença no cotidiano das pessoas, em tudo o que fazem. Por isso justificam a necessidade de se dedicarem e aprenderem mais.

Como você se considera em relação à Matemática?

Uns dizem que são bons em matemática, já que sempre tiveram boas notas. Outros dizem que não porque a Matemática escolar se resume em fórmulas, e eles, tendo dificuldades para decorá-las e entendê-las, não conseguem que as notas sempre sejam satisfatórias.

Você sempre foi bom aluno de Matemática?

Uns dizem que sim, que sempre foram bons alunos; e completam dizendo que só foram bons porque estudavam todos os dias, fazendo exercícios do livro ou os que o professor passava. Outros dizem

que não porque sempre tiveram dificuldades para entender.

Grupo IV – sujeitos de escolaridade limitada

O que você pensa da escola?

De maneira distinta dos demais grupos, estes sujeitos valorizam muito a escola por esta se apresentar como um lugar para se aprender cada vez mais, aperfeiçoando os conhecimentos que as pessoas demonstram ter. Justificam a necessidade de um diploma para a aquisição de um bom emprego. Mas assinalam que o ensino atual é “muito fraco” em relação à época em que eles freqüentaram a escola. Lúcia, além de concordar com estas respostas, salienta que o mais difícil hoje na escola é conter os alunos que são muito indisciplinados. Afirma que o professor perdeu a autoridade que tinha e para aumentar o caos, aparece o Estatuto da Criança e do Adolescente, que contribui ainda mais para que a situação permaneça inalterada.

Você gosta de Matemática? Por quê?

Apesar de a maioria demonstrar gosto, afirmam não serem muito bons em matemática. Consideram que esta matéria é feita para intelectuais, não para todos. Porém demonstram certa contradição

em suas palavras ao afirmarem que se houver interesse todos podem alcançá-la, mas que existem pessoas que nasceram com o dom para a matemática. Ressaltam ainda, que as crianças de hoje não sabem fazer contas “de cabeça”, não entendem porcentagem, enfim, não dominam a matemática que eles dominam e refazem suas críticas à escola e, mais especificamente, ao ensino. Rosana afirma gostar muito de matemática por ela ter ensinado-a a raciocinar, que é fundamental em tudo que se faz. Lúcia e Valter, de maneira distinta, afirmam “detestarem”, já que sempre foram péssimos, apesar de nunca reprovarem.

A Matemática é importante? Por quê?

Rosana afirma ser a matemática a peça fundamental da escola. Pois ao aprender matemática, você aprende a raciocinar, e tudo que se faz deve ser bem pensado, para se fazer com certeza de que está se fazendo o melhor. Os demais justificam, como nos grupos anteriores: pela presença “em tudo que se faz”.

Como você se considera em relação à Matemática?

Como já foi demonstrado, Lucia e Valter sempre se consideram péssimos em matemática. Já Rosana, sempre se considerou muito boa, mas hoje, devido ao fato de a escola ter mudado muito, considera que talvez não fosse tão bem nesta matéria como foi em seus tempos de escola. Os demais afirmam serem “mais ou menos”, porque

apesar de não estarem num banco escolar, ninguém os engana.

Você sempre foi bom aluno de Matemática?

Lúcia e Valter afirmam que não. Rosana afirma que sim. Já os demais dizem ter sido alunos regulares, que, apesar de não tirar notas excelentes, nunca reprovaram. Mas assinalam as dificuldades em entender o que o professor explicava.

4.3 Resultados obtidos

A performance demonstrada pelos 24 entrevistados na resolução de problemas, pode ser verificada na tabela abaixo que indica o índice de acertos de cada grupo:

Tabela nº 01 – Índice de acertos na resolução de problemas

PROBLEMAS	GRUPOS			
	I	II	III	IV
1º	16,7%	16,7%	83,3%	83,3%
2º	83,3%	33,3%	33,3%	100%
3º	33,3%	16,7%	0%	33,3%

PROBLEMAS	GRUPOS			
	I	II	III	IV
4°	50%	33,3%	33,3%	50%
5°	a) 100% b) 33,3% c) 100% d) 100%	a) 100% b) 33,3% c) 33,3% d) 16,7%	a) 100% b) 33,3% c) 50% d) 33,3%	a) 100% b) 50% c) 83,3% d) 50%
6°	83,3%	83,3%	83,3%	83,3%

Podemos observar nesta tabela, que no 1º problema destacaram-se os grupos III e IV, ou seja, o grupo de alunos de matemática e dos sujeitos de escolaridade limitada, apresentando, um índice de 83,3% de acertos em comparação com os grupos I e II - dos professores e dos futuros professores, que apresentaram o baixo índice de 16,7% de acerto.

Já no problema nº 02, o grupo IV - sujeitos de escolaridade limitada - destacou-se dos demais, ao apresentar 100% de acerto, enquanto o grupo I - dos professores - obteve 83,3% e os grupos II e III - futuros professores e alunos de matemática respectivamente - tiveram os mesmos 33,3% de acerto.

No terceiro problema, os grupos I e IV, ou seja, o grupo dos professores e sujeitos de escolaridade limitada, demonstraram o mesmo êxito, na medida em que os dois grupos apresentaram um

índice de acertos de 33,3% enquanto os futuros professores – grupo II - ficaram na margem dos 16,7% e os alunos de matemática - grupo III apresentaram um índice 0% de acerto.

No problema de nº 4, novamente tivemos o equilíbrio entre os grupos I e IV, na medida em que ambos tiveram 50% de êxito em suas respostas. Já os grupos II e III que apresentaram êxito semelhante entre si, obtiveram 33,3% de acerto.

No quinto problema destacou-se o grupo I – dos professores, que obteve um êxito de 100% em três, dos quatros itens que compunham o problema, mantendo assim, uma média de 83,3% de acertos. O segundo grupo a apresentar a melhor performance, foi o grupo IV – sujeitos de escolaridade limitada - que manteve uma média de 70,8% de acertos enquanto os grupos II – futuros professores e III – alunos de matemática - apresentaram, respectivamente, uma média de 45,8% e 54,2%.

Já no problema de nº 6, todos os grupos apresentaram o mesmo desempenho, ou seja, todos tiveram um índice de acertos de 83,3%.

Se compararmos a performance dos dois grupos que apresentaram o melhor desempenho, (grupos I – dos professores e IV - sujeitos de escolaridade limitada), e que também se mostram como os dois extremos em termos de escolaridade, teremos o seguinte resultado:

No problema de nº 1, o grupo IV teve um desempenho

superior ao grupo I, marcando uma diferença de 66,6% de acertos entre eles.

No problema de nº 2, esta diferença permanece, ou seja, o grupo IV continua apresentando um índice superior ao grupo I, porém, em menor escala: 16,7%.

No problema de nº 3 esta diferença cai ainda mais, ao apresentarem o mesmo desempenho, ou seja, ambos tiveram 33,3% de acerto.

No problema de nº 4, novamente temos um equilíbrio no desempenho, agora de 50% para cada um dos dois grupos.

No problema de nº 5 o grupo I – dos professores, pela primeira vez, atinge um maior resultado marcando uma diferença de 12,5% de acertos a mais em relação ao grupo IV.

Já no problema de nº 6, os dois grupos voltam a apresentarem o mesmo êxito, ou seja, um índice de 83,3% tanto para o grupo I como para o grupo IV.

Portanto, ao analisar comparativamente o desempenho dos grupos, verificamos que, no geral, o grupo IV – dos sujeitos de escolaridade limitada - apresentou um desempenho superior aos demais grupos, ou seja, o índice de acertos destes sujeitos foi maior que o índice de acerto dos professores, dos futuros professores e dos alunos de matemática.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

“O principal objetivo da educação é criar homens capazes de fazer coisas novas, não simplesmente de repetir o que outras gerações fizeram, homens criativos, inventivos, descobridores.” (Jean Piaget)

Considerações finais.

O motivo que nos levou a investigar as estratégias de resolução de problemas de sujeitos de diferentes níveis de escolarização foi a experiência com a Educação de Adultos, onde nos deparamos, por um lado, com sujeitos competentes para resolver problemas cotidianos que envolviam matemática, mas que se consideravam incapazes, “burros”, julgavam nada saber. Por outro lado, descobrimos a existência de muitas pessoas que independente do grau de escolaridade, demonstram um certo temor pela matemática.

Sabemos que a escola, como analisamos nos capítulos 1 e 2, pelo menos em sua maioria, ainda segue uma tradição milenar: a prática instrucionista, como define Papert (1994). Esta acaba por produzir sujeitos fóbicos em relação à matemática e, mais do que isso, carentes de criatividade e de raciocínio lógico já que a aprendizagem é sinônimo de acúmulo de informações. Daí a necessidade de mudança na prática escolar, apontada por vários autores.

Atualmente, vários caminhos são apresentados por diferentes pesquisadores. A Educação Matemática – uma área de conhecimento riquíssima – tem sido alvo de produtivos esforços. Porém, poucos são os professores que se utilizam destes caminhos, que arriscam a experimentá-los. Temem, por exemplo, “não dar conta do programa”.

Os professores, cuja formação seguiu uma concepção

instrucionista, tendem a ignorar, por exemplo, a razoabilidade de respostas, o caráter qualitativo ou lógico de uma solução. Estes professores tendem, apenas a repassar o que e como “aprenderam”. Por isso, seria interessante, futuramente, o desenvolvimento de uma pesquisa que investigasse se isto realmente ocorre.

Procurando encontrar elementos para pensar essa questão, procuramos resposta para esta pergunta: Como pessoas de níveis diferentes de escolarização resolvem problemas que exigem conhecimento de matemática elementar?

Os resultados que encontramos nos mostraram que a diferença na resolução dos problemas por parte de sujeitos, de níveis de escolaridade distintos, não é grande. Em muitos momentos, os sujeitos de escolaridade limitada mostraram-se mais competentes que os professores de matemática, inclusive que os professores universitários. Não que necessariamente estes sejam incapazes, mas porque a escola acaba impondo um modelo pobre em flexibilidade. Possivelmente, por esta razão, muitos dos sujeitos escolarizados raciocinam quase sempre baseados em técnicas e regras que nem sempre são aplicáveis, ou melhor, que nem sempre conduzem a uma solução razoável, de caráter qualitativo. O fato de conceberem a matemática como uma ciência exata é, muitas vezes, confundido com a idéia de “caminho único”. Com isso, abandona-se a previsão de resultado, o questionamento da razoabilidade de respostas, entre outras habilidades necessárias, conforme Lorenzato (1993).

Assim sendo, percebemos que o nível de escolaridade de um sujeito não implica diretamente em competência matemática. Por isso, afirmamos que a relação entre o nível de escolarização de uma pessoa e seu conhecimento de matemática básica apresenta-se de maneira muito tênue, como demonstrou nossa coleta de dados. Entendemos que essa constatação deixa um ensinamento importante: não temos nenhuma razão para mantermos nosso apego à forma rotineira de trabalhar matemática escolar.

Assim, acreditamos que uma mudança, por parte da escola, na maneira de conceber a aprendizagem, seria essencial para que pudéssemos mudar esta relação.

Existem caminhos alternativos para serem conhecidos e explorados. Por exemplo, acreditamos que, se a escola tivesse como finalidade o desenvolvimento da autonomia, como nos propõem os estudos piagetianos e, conseqüentemente, se fundamentasse no construtivismo como uma possível alternativa, outra maneira de conceber a aprendizagem estaria sendo difundida, ou seja, esta seria concebida, como o próprio termo indica, como construção. Isso implica dizer que o verdadeiro conhecimento - aquele que é utilizável - é fruto de uma elaboração pessoal, resultante de um processo interno de pensamento no qual o sujeito coordena diferentes noções entre si, atribuindo-lhes um significado, organizando-os e relacionando-os com os anteriores. E este processo é, segundo Busquets (1997, p.39) “inalienável e intransferível: ninguém pode realizá-lo por outra pessoa.”

A teoria piagetiana fornece um consistente quadro interpretativo dos fatos pedagógicos, defendendo a tese da construção do conhecimento.

Coll, (1991) afirma ser o construtivismo um marco psicológico coerente e articulado para a análise dos processos educativos, para a relação entre ensino-aprendizagem. Lembra

“... da importância da atividade mental construtiva do aluno na realização das aprendizagens escolares, um princípio que leva a conceber a aprendizagem escolar como um processo de construção do conhecimento ... e o ensino como uma ajuda a este processo de construção ...”. (Col, 1991, p. 6).

Piaget (1978) mostrou que o conhecimento não está nos objetos e nem no sujeito, mas nas interações - inicialmente indissociáveis - entre o sujeito e esses objetos. Piaget e seguidores mostraram que a gênese de todo conhecimento está na ação do sujeito cognoscente. Segundo este autor o sujeito é essencialmente ativo no processo de acesso ao saber. Está continuamente respondendo a desafios do meio através de mecanismos de assimilação e de acomodação. Mostrou que o ser humano está continuamente envolvido na construção de conhecimentos. Para ele o conhecimento implica sempre em assimilação ativa do sujeito e implica em auto-regulação e interpretação. Como mostra Piaget (1978), o sujeito chega ao conhecimento por um processo de equilibração no qual intervêm mecanismos de regulação que aprimoram estruturas cognitivas,

mecanismos de compensação, tomada de consciência e abstração reflexiva.

Piaget (1978) afirma que a matemática consiste em ações exercidas sobre as coisas, e as próprias operações são sempre ações, porém coordenadas entre si e imaginadas, ao invés de aprendidas pela memorização da linguagem específica.

Concebendo a aprendizagem numa perspectiva construtivista de ensino, é muito importante se ter claro o papel da experiência, que é ponto de apoio para as abstrações e para a construção de conhecimentos pelo sujeito.

O importante é que o professor esteja atento ao modo de pensar do aluno, identificando os procedimentos, hipóteses e apresentando questões que solicitem o raciocínio.

A aprendizagem, encarada nessa perspectiva, além de favorecer novos conhecimentos, mobiliza o funcionamento intelectual, facilitando o acesso a novas aprendizagens, já que o sujeito, além do conhecimento em si, desenvolve estratégias que lhe proporcionarão a compreensão de diferentes situações, a busca de caminhos para a resolução de outros problemas, graças à capacidade de generalização.

No entanto, existem outros tipos de aprendizagem, mas que não oferecem estes processos com a mesma intensidade.

Busquets (1997) cita um exemplo que vale a pena ser descrito. Diz ela que podemos, através da leitura de um livro, conhecer

um país, seu número de habitantes, costumes, cultura, fauna, flora, etc. Porém, teríamos que ler repetidas vezes para guardar estas informações, ao passo que, se viajarmos para esse país e conversarmos com seus habitantes, percorrendo cidades, povoados, parques, etc., fotografando seus animais, observando seus mercados, lendo jornais, etc., certamente teríamos um conhecimento muito superior àquele que o livro nos fornece. Isto porque o livro consiste num ponto de chegada e a viagem num caminho a ser percorrido. E num caminho, cometemos erros, nos perdemos para depois novamente encontrarmos a direção certa. Para Busquets (1997, p.40):

Nisto reside uma das mais importantes aprendizagens: saber encontrar o caminho que nos leva aonde queremos ir e reencontrar a direção correta quando nos perdemos - e isto não pode ser aprendido sem percorrer algum caminho.

Desta forma, na aprendizagem, como em toda viagem, faz-se necessário saber qual o ponto de partida e o local que se pretende ir. O processo são os passos do caminho, cada obstáculo conduz a uma mudança na qual o tempo desempenha papel fundamental. Por isso é que não se pode desejar que um aluno aprenda qualquer conteúdo em pouco tempo - mesmo porque isso conduz ao sentimento de incapacidade:

Uma das falsas ilusões do ensino (...) é que os estudantes podem passar de um estado de ignorância para um estado de conhecimento, sobre um tema

concreto, no curto intervalo de tempo de uma sessão de aula. Esta crença, que simplifica a existência de processos inerentes a toda aprendizagem, é uma fonte de mal estar e frustração (...) fundamentalmente porque não coincide com a realidade. A negação da realidade leva facilmente ao fracasso e provoca um sentimento pessimista de impossibilidade. (Busquets, 1997, p.41)

Se considerarmos a aprendizagem como um processo, concluiremos que os passos dados para percorrer o caminho fazem parte do funcionamento intelectual do ser humano e estão presentes em todo ser humano - tanto nas crianças como nos adultos. Até mesmo os insights são resultantes de um processo, porém de elaboração inconsciente.

Na aprendizagem escolar, os passos a serem dados constituem elementos importantíssimos, mas que dependem do ponto de partida, ou seja, dependendo o nível de conhecimento que o sujeito se encontra, a aprendizagem assumirá diferentes formas. Daí resulta a importância de se conhecer cada aluno, seus mecanismos intelectuais, seu nível de conhecimento.

É certo que em uma sala de aula não se encontram apenas sujeitos absolutamente ignorantes, pelo contrário, todos carregam consigo uma bagagem anterior, adquirida fora da escola, elaborada por eles mesmos, na relação com o meio em que vivem (físico, social), como demonstraram os sujeitos desta pesquisa. Apesar de muitas vezes estes conhecimentos advindos da prática serem considerados falsos, eles formam sistemas de pensamento que têm uma

coerência interna e que por isso dificilmente se modificam, mas que podem perfeitamente coexistir com outras mais evoluídas. Ou, às vezes, abandonam-se as velhas idéias para que outras novas possam ser construídas, o que é mais difícil, considerando que este conhecimento anterior muitas vezes se apresenta como verdade absoluta. Daí a necessidade de não subestimar a capacidade do aluno nem de desconsiderar seus próprios modos de pensar. Desta forma justifica-se a importância de o professor considerar e valorizar o conhecimento deste aluno.

Vale lembrar que neste trabalho não se pretendeu considerar o nível de desenvolvimento cognitivo dos sujeitos, avaliar os sujeitos com base em provas piagetianas. Considera-se, no entanto que a perspectiva do construtivismo é a que melhor esclarece processos de acesso ao conhecimento nas primeiras fases da vida assim como no caso de adultos.

Enfim, a discussão dos resultados deste trabalho, deve fornecer elementos que contribuam para a superação do instrucionismo matemático - adotado pela maioria das escolas e que tem reproduzido o analfabetismo - e, também, para alcançar uma Educação Matemática que além de respeitar a inteligência prática dos alunos utiliza-se desta como um meio para chegar ao conhecimento institucionalizado. Uma Educação Matemática que priorize o raciocínio em detrimento da aplicação de técnicas como única forma de se fazer matemática.

Em síntese, ao longo deste trabalho:

- falamos da força e da presença de uma tradição instrucionista na matemática escolar;
- apontamos a Educação Matemática como uma área do conhecimento que tem uma significativa produção;
- mostramos que o tempo de escolaridade não se constitui em um bom preditor da competência para resolução de problemas que envolvem matemática básica.

Por isso, se nosso propósito for trabalhar a matemática com adultos em processo de alfabetização, o distanciamento do espírito instrucionista é um passo necessário. Afinal, não há razões que possam sustentar um apego a processos escolares que não oferecem ganhos cognitivos aos alunos.

BIBLIOGRAFIA

- ARAÚJO, Antônio P. *Temas & Debates*. Blumenau-SC: SBEM, v.1, nº 1, 1988,p.2-3.
- ARGUELO, Carlos; SEBASTIANI, Eduardo. *Alfabetização e ciências*. Campinas: UNICAMP, 199 (mimeografado).
- BALDINO, Roberto Ribeiro. Ensino de matemática ou educação matemática? In: *Temas e Debates*. SBEM: Ano IV, nº 3, p.52, 1991.
- BAROODY, A. J. *El pensamiento matemático de los niños; um marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial e educación especial*. Madrid: Visor, 1994.
- BLACK, Emilia. *Educação de adultos*. Dissertação de Mestrado. F.E. UNICAMP, Campinas: 1990. (Não publicada)
- BONILLA, ELISA R. *La Educación matematica: una reflexion sobre su natureza y sobre su metodologia*. v.1, n.2, 1989.
- BRANDÃO, Carlos R. *Saber e ensinar. três estudos da educação popular*. Campinas: Papirus, 1984.
- BRASIL: SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. *Parâmetros curriculares: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRITO, M. R. F.; FINI, L. D. T.; GARCIA, V.J.N. Relações entre o raciocínio verbal e o raciocínio matemático. In: *Pró-posições*, vol 5, nº 1 (13), março, Campinas: FE/Unicamp, 1994.
- BUSQUETS, M. D. et al. *Temas transversais em educação: bases para uma formação integral*. São Paulo: Ática, 1997.

CARAÇA, Bento Jesus. *Conceitos fundamentais da matemáticas*. Lisboa, 1978.

CARRAHER, David. "Educação tradicional e educação moderna." In: CARRAHER, Terezinha (org.) *Aprender pensando. contribuições da psicologia cognitiva para a educação*. Rio de Janeiro: Vozes, 1994.

CARRAHER, TEREZINHA N. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez, 1988.

CARVALHO, Dione L. de. *A interação entre o conhecimento matemático da prática e o escolar*. Tese de doutorado. F.E. Unicamp, Campinas: 1995. (Não publicada)

CHARLOT, Bernard. *A mistificação pedagógica*. Rio de Janeiro: Zahar, 1979.

COBB, Paul. Experiential cognitive and anthropological perspectives in Mathematics. In: *For the Learning of Mathematics*, 9 (2), Canadá, 1989.

COLL, C. *Psicologia e Currículo: uma aproximação psicopedagógica à elaboração do currículo escolar*. São Paulo: Ática, 1987.

COLL, C. *Constructivismo y intervención Educativa: ¿Como enseñar lo que se há de construir?* In: *Congresso internacional de Psicologia y Educación – Intervención Educativa*. Madrid: novembro, 1991.

D'AMBROSIO, Beatriz. *Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio*. In: *Pro-Posições*, v. 4, n.1 (10), março, Campinas: FE/Unicamp, 1993.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Educação matemática, da teoria a prática*. Campinas: Papirus, 1996.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação matemática*. Campinas: Summus, 1986.

EKENSTAM, ADOLF and GREGER, Karl. *Some aspects of children's ability to solve mathematical problems*. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 369-84, 1983.

FAZENDA, Ivani C. A. *Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro*. São Paulo: Loyola, 1979

FERNANDES, Francisco. *Dicionário Brasileiro Globo*. São Paulo: Globo, 1993.

FERREIRO, Emília. Los adultos no alfabetizados y sus conceptualizaciones de sistema de escritura. *Cuadernos de Investigaciones Educativas*. México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, 10, 1-244, abril, 1983.

FREIRE, Paulo. *A educação como prática da liberdade*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1993.

FREIRE, Paulo. *Educação na cidade*. São Paulo: Cortez, 1991.

_____ *Pedagogia do oprimido*. São Paulo: Paz e Terra, 1987

GARDNER, Howard. *A nova ciência da mente*. São Paulo: Edusp, 1995.

GIUBILEU, Sonia. *Trabalhando com adultos, formando professores*. Tese de doutorado. F.E. Unicamp, Campinas: 1993. (Não publicada)

GOMES, Maristela G. *O ensino de frações em um programa de educação para adultos*. *Alfabetizando*, Ano II, n.6, agosto/setembro, D.T.P., Universidade Estadual de Maringá, 1994.

GREER, B. Conceptual obstacles to the development of the concepts of multiplication and division. In: *Learning and Instruction European Research in an International Context*, v. 22, 1990.

GUZMAN, Miguel de. Cuestiones fundamentales sobre la enseñanza de la matemática. In: *Actas*. Almería, Septiembre, 1985.

HOYLES, C. ; NOSS, R. Synthesizing conceptions and their formalization through the construction of Logo-based school mathematics curriculum. *International Journal Mathematical Education, Science Technologie*, 18 (4), 581-595, 1987.

IFRAH, Georges. *Os números: a história de uma grande invenção*. São

Paulo: Globo, 1992.

INHELDER, Barbel ; PIAGET, Jean. *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires: Paidós, 1972.

KAMII, Constance ; DECLARK, Georgia. *Reinventado a aritmética: implicações na teoria de Piaget*. Campinas: Papirus, 1986.

KAMII, C. ; LIVINGSTON, S. J. *Desvendando a aritmética*. Papirus: Papirus, 1995.

KAMII, C. *A criança e o número: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos*. Campinas: Papirus, 1995.

KRUTETSKII, V. A. *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Translated from the Russian by Teller. University of Chicago Press, 1976.

LERNER, Delia. *A matemática na escola: aqui e agora*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

LERNER, D.; SADOVSKY, P.. *O sistema de numeração: um problema didático*. In: PARRA, C.;SAIZ, I.. *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas

LORENZATO, Sérgio. A. *Século XXI: qual matemática é recomendável?* In: Zetetiké, Ano I, n.1. F.E. Campinas: UNICAMP, 1993.

MACEDO, L. de. *Ensaio construtivistas*. São Paulo: Casa do psicólogo, 1994.

MAZA, C. *Aritmética y representación: de la comprensión del texto al uso de materiales*. Barcelona: Ediciones paidós ibérica, 1995.

MENDONÇA, M. C. D. *Problematização; um caminho a ser percorrido em Educação Matemática*. Tese de doutorado. F.E. Unicamp, Campinas: 1993. (não publicada)

MORI, Nerli N. R. A teoria psicogenética e a prática pedagógica. In:

MORI, Nerli N.R. *Alfabetizando adultos*. Universidade Estadual de Maringá D.T.P. Maringá-Pr, 1992.

PAPERT, Seymour. *A máquina das crianças*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

_____. *Logo: computadores e educação*. São Paulo: Brasiliense, 1986.

PARRA, C. *Cálculo mental na escola primaria*. In: PARRA, C. ; SAIZ, I. Didática da matemática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PAULOS, John A. *Analfabetismo em matemática e suas conseqüências*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1994.

PAULOS, John A. *mas alla de los números*. Barcelona: Tusquets Editores, 1993.

PAULOS, John A. *Un matemático*. Barcelona: Tusquets Editores, 1994.

PENSADORES, OS (Coleção). *Descartes*. São Paulo: Abril Cultural, 1979.

PENSADORES, OS (Coleção). *Locke*. São Paulo: Abril Cultural, 1978.

PIAGET, Jean. *A educação da liberdade*. In: Anais do XIII Encontro Nacional de Professores do Proepre, 1996.

_____. *A abstração reflexionante*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

_____. *Epistemologia de la física*. Buenos Aires: Ediciones Paidós, 1979.

_____. *Introducción a la epistemologia genética: el pensamiento matemático*. Buenos Aires: Paidós, 1978.

_____. *Para onde vai a educação?* Rio de Janeiro: José Olympio editora, 1978a.

_____. *A equilibração das estruturas cognitivas*. Rio de Janeiro: Zahar

Editores, 1976.

_____. “Linguagem e operações intelectuais”. In: FURTH, H. G. *Piaget e o conhecimento*. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1974.

_____. *Biologia e conhecimento*. Petrópolis: Vozes, 1973.

_____. *Psicologia da inteligência*. Rio de Janeiro: Fundo de Cultura, 1972.

_____. “Developmente and Learning”. In: RIPPLE, R. E. and ROCKCASTLE, V. N. (eds), *Piaget Rediscovered*, School of Education, Cornell University, New York, 1964.

PINTO, Álvaro Vieira. *Sete lições sobre educação de adultos*. São Paulo: Cortez, 1982.

POLYA, G. *Como plantear y resolver problemas*. Trad. Juliám Zugazagoitia. Mexico: Editorial Trilhas, 1975.

PONTES, Maria Gilvanise de Oliveira. *Medidas e proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho*. Dissertação de mestrado. F.E. Unicamp, Campinas: 1996. (Não publicada)

RANGEL, A. C. S. *Educação Matemática e a construção do número pela criança: uma experiência em diferentes contextos sócio-econômicos*. Porto Alegre: Artes médicas, 1992.

RESNICK, L. B. *Learning in school and out*. Educational Researcher, 13-20 december, 1987.

RUIZ, Adriano R. ; BELLINI, Luzia Marta. *Educação Construtivismo e Ética*. Porto Ferreira: Gráfica Editora São Paulo, 1996.

RUIZ, Adriano R. “La Escuela y El Lenguaje Logo: el dilema del doble paradigma.” In: *Praxis*. Revista do Departamento de Filosofia, Facultad de Filosofía y Letras, Universidade Nacional. n.51. Heredia, Costa Rica, julio de 1996.

RUIZ, Adriano R. “A busca de uma pedagogia construtivista: algumas

considerações.” In: *Revista Unimar*. U.E.M. Maringá, n.16 (suplemento 2), 1994.

RUIZ, Adriano R. “A matemática em um programa de alfabetização para adultos.” In: MORI, Nerli N. R. (org.) *Alfabetizando adultos*. Universidade Estadual de Maringá. D.T.P., Maringá - Pr, 1992.

RUIZ, Adriano R. *O ensino do conceito de proporcionalidade*. Dissertação de Mestrado. F.E. USP, São Paulo:1986. (Não publicada)

SANTALÓ, Luis “A matemática para não matemáticos.” In: PARRA, Cecília, SAIZ, Irma. (org). *Didática da matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

SASTRE, G. *Descubrimiento y construcción de conocimientos; una experiencia de pedagogia operatória*. Barcelona: Gedisa, 1987 (série investigaciones en Psicología y Educación)

SASTRE, G.; MORENO, M. *Aprendizaje y desarrollo intelectual*. Barcelona: Gedisa, 1987.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. *Currículo Básico para a Escola Pública do Paraná*. Curitiba, 1990.

SILVA, Miriam G. P. da. *Resolução de problemas: uma perspectiva de trabalho em sala de aula*. Dissertação. de mestrado, Unesp, Campus de Rio Claro, 1990.

SKINNER, B. F. *O mito da liberdade*. Rio de Janeiro: Bloch Editores, 1973

SKINNER, B. F. *Tecnologia de la enseñanza*, Barcelona: Editorial Labor, 1970.

TAXA, F. O. S. *Estudo sobre a resolução de problemas verbais aritméticos nas séries iniciais*. Dissertação de Mestrado. F.E. Unicamp, Campinas: 1996.

VERGNAUD, G. ; RICCÓ, G. “Didactica y adquisicion de conceptos matemáticos”. In: *Revista del Instituto de Investigaciones Educativas*. Argentina - 55, 67-92, 1986.