



UNICAMP

SUELI DOS PRAZERES SANTOS

**“ERROS E DIFICULDADES DE ALUNOS  
EM ÁLGEBRA ELEMENTAR:  
UMA METANÁLISE QUALITATIVA DE  
DISSERTAÇÕES BRASILEIRAS DE MESTRADO”**

CAMPINAS  
2013



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

SUELI DOS PRAZERES SANTOS

**“ERROS E DIFICULDADES DE ALUNOS  
EM ÁLGEBRA ELEMENTAR:  
UMA METANÁLISE QUALITATIVA DE  
DISSERTAÇÕES BRASILEIRAS DE MESTRADO”**

**Orientador:** Prof. Dr. Dario Fiorentini

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, na área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA  
DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA SUELI DOS  
PRAZERES SANTOS E ORIENTADA PELA PROF.DR.DARIO  
FIORENTINI.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS  
2013

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Faculdade de Educação  
Rosemary Passos - CRB 8/5751

Santos, Sueli dos Prazeres, 1981-  
Sa59e Erros e dificuldades de alunos em álgebra elementar : uma metanálise qualitativa de dissertações brasileiras de mestrado. / Sueli dos Prazeres Santos. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Dario Fiorentini.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Educação Matemática. 2. Álgebra - Estudo e ensino. 3. Erros. 4. Dificuldade de aprendizagem. 5. Metanálise. I. Fiorentini, Dario, 1950-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Students' errors and difficulties in elementary algebra : a qualitative meta-analysis of master's degree brazilian theses.

**Palavras-chave em inglês:**

Mathematic Education

Algebra - Study and teaching

Errors

Learning disability

Meta-analysis

**Área de concentração:** Ensino de Ciências e Matemática

**Titulação:** Mestra em Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática

**Banca examinadora:**

Dario Fiorentini [Orientador]

Helena Noronha Cury

Dione Lucchesi de Carvalho

**Data de defesa:** 12-08-2013

**Programa de Pós-Graduação:** Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

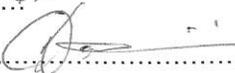
**ERROS E DIFICULDADES DE ALUNOS  
EM ÁLGEBRA ELEMENTAR:  
UMA METANÁLISE QUALITATIVA DE  
DISSERTAÇÕES BRASILEIRAS DE MESTRADO**

**Autor :** Sueli dos Prazeres Santos

**Orientador:** Prof. Dr. Dario Fiorentini

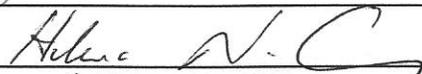
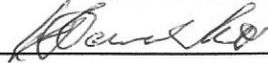
Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação  
defendida por **Sueli dos Prazeres Santos** e aprovada pela  
Comissão Julgadora

Data: 12/08/2013

Assinatura:  .....

Orientador

**COMISSÃO JULGADORA:**

  
\_\_\_\_\_  
  
\_\_\_\_\_  
  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Dedico este trabalho aos meus pais, que, durante toda a minha vida acadêmica, sempre fizeram o possível para que eu tivesse a oportunidade de desenvolver meus estudos.

## Agradecimentos

*Enfim, chegou o momento da conclusão de uma importante etapa da minha vida pessoal e profissional. Aproveito esta oportunidade para agradecer àqueles que tiveram uma participação muito importante na produção deste trabalho.*

*Agradeço...*

*Primeiramente a Deus por ter me dado saúde e sabedoria durante a realização do mestrado.*

*Aos meus pais que sempre me apoiaram e se esforçaram para que eu sempre evoluísse nos estudos.*

*Ao Instituto Federal da Bahia que me concedeu licença total por dois anos tornando possível a realização do curso.*

*Aos meus colegas e amigos de trabalho do IFBA, Dielson, Hingryd, Castro, Ana Paula, Igor, Rafael, dentre outros, que me incentivaram para que eu fizesse o mestrado e me ajudaram na obtenção da licença.*

*Aos meus amigos e amigas que deixei em Salvador durante minha estadia em Campinas e que senti muita falta deles.*

*Aos professores do PECIM que ministraram disciplinas e que foram importantes para o meu desenvolvimento acadêmico: prof. Jorge Megid, prof. Zezinha, prof. Maurício Compiani.*

*Aos meus colegas de mestrado e amigos do PECIM no qual tive a oportunidade de agregar conhecimento de diversas áreas devido ao curso ser Multiunidades.*

*Ao grupo de pesquisa Prapem, juntamente com o CEMPEM, nos quais tive a oportunidade de participar de discussões teóricas importantes para a minha formação.*

*Ao meu orientador professor Dario que desde o início me fez acreditar que eu era capaz de desenvolver esta pesquisa. Obrigada Dario por confiar na minha capacidade de desenvolver um bom trabalho e por estar sempre presente. Aprendi muito com você. Obrigada!*

*A professora Dione que foi uma quase orientadora para mim, pois esteve presente em todas as etapas de desenvolvimento do meu projeto e da minha escrita, com contribuições na apresentação do projeto, no seminário de pesquisa, na pré-qualificação, na qualificação e a defesa. Muito obrigada!!!*

*A professora Helena Cury por ter me dado a honra de participar da minha banca de qualificação e defesa, com contribuições muito importantes e enriquecedoras.*

*A Vanessa que esteve presente me dando apoio nos momentos angustiantes durante a escrita, ajudando no enriquecimento do meu trabalho, e que também esteve presente nos momentos de descontração transmitindo muita alegria.*

*As duas grandes companheiras que tive durante a minha estadia em Campinas: Carol e Marta. Com elas, a saudade da minha casa e da minha família foi amenizada, pois encontrei duas grandes amigas irmãs. Obrigada por tudo que vocês fizeram por mim!*

*Ao meu companheiro e noivo Gilson (o nego) que, apesar de ter sentido muito minha falta, sempre me deu apoio e nunca deixou que eu pensasse em desistir desse sonho.*

*Enfim, agradeço a todos que, de forma direta ou indiretamente, estiveram comigo nesse período de dois anos de aquisição de muito conhecimento, seja teórico, seja conhecimento de vida.*

*Admitidamente, todos nos esforçamos por evitar erros; e deveríamos ficar tristes ao cometer um engano. Todavia, evitar erros é um ideal pobre; se não ousarmos atacar problemas tão difíceis que o erro seja quase inevitável, então não haverá crescimento do conhecimento. De fato, é com as nossas teorias mais ousadas, inclusive as que são errôneas, que mais aprendemos. Ninguém está isento de cometer enganos: a grande coisa é aprender com eles.*

*(Karl Popper)*

## RESUMO

Este estudo tem como hipótese de trabalho que os erros e dificuldades evidenciados pelos alunos na aprendizagem da matemática estão diretamente relacionados com os modos de conceber e realizar o ensino da álgebra em sala de aula. O objetivo principal deste trabalho é identificar e analisar, em investigações que têm como foco de estudo erros no ensino e aprendizagem da álgebra elementar, as relações que se estabelecem entre as concepções de ensino de álgebra, os tipos de erros cometidos pelos alunos e os modos de os pesquisadores lidarem com eles. Para alcançar tal objetivo, foi realizada uma metanálise qualitativa de nove dissertações brasileiras de mestrado que investigaram erros e dificuldades dos alunos em álgebra elementar. Esse *corpus* de análise foi constituído de acordo com critérios definidos previamente. A metanálise desse *corpus* foi desenvolvida com base nas seguintes perspectivas de investigação: identificação dos tipos de erros em álgebra presentes nas pesquisas; os modos de conceber a educação algébrica em cada pesquisa, tendo por base Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); e as concepções e os modos de lidar com erros evidenciados nesses estudos. Foram identificadas quatro concepções distintas de erro nessas pesquisas: o erro que deve ser corrigido e identificado; o erro considerado como um obstáculo; o erro como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem; e o erro considerado como indicador para avaliar/reavaliar a prática pedagógica. Em relação aos erros identificados, foi possível discutir sobre alguns erros que tiveram um caráter mais procedimental, considerados como erros de sintaxe, e outros erros mais relacionados com a interpretação de significados e de conceitos, considerados como erros de natureza semântica. Percebeu-se, ao final da metanálise, que as pesquisas que apresentaram mais erros de procedimentos, alinhavam-se às concepções de educação algébrica fundamentalista estrutural, fundamentalista analógica e linguístico-pragmática. Entretanto as pesquisas alinhadas à concepção exploratória e de desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos, e que enfatizavam a produção e negociação de significados e a compreensão dos conceitos algébricos, evidenciaram erros de natureza semântica, mesmo na exploração de situações de natureza sintática. Em síntese, os resultados obtidos reforçaram nossa hipótese inicial de que os tipos de erros cometidos ou destacados em álgebra estão diretamente relacionados à concepção que professores e pesquisadores têm do ensino da álgebra.

**Palavras-chave:** Educação Matemática, Álgebra e ensino, Erros e dificuldades, Metanálise

## ABSTRACT

The hypothesis of this research is that the errors and difficulties of students during mathematical learning are related directly to ways of thinking and teaching algebra in classes. Its main goal is to identify and analyze, in study that have as focus the study errors in the teaching and learning of elementary algebra, relations established among the algebra teaching conceptions, the kinds of errors made by students and the researchers' ways of managing them. To get the goal, it was realized a qualitative meta-analysis of nine master's degree Brazilian theses that studied students' errors and difficulties in elementary algebra. The corpus of analysis was established according to criteria defined previously. The meta-analysis was developed based on the following investigation perspectives: identifying of errors kinds in algebra from researches; the ways of thinking the algebra teaching in each research, based on Fiorentini, Miorim and Miguel (1993); and the conceptions and the ways of managing the errors evidenced in the studies. It was identified four concepts of errors: error that must be identified and corrected; error regarded as an obstacle; error as a part of teaching and learning process; and error regarded as an indicator to evaluate and reevaluate the pedagogical practice. Concerning the identified errors, it was possible to discuss about some errors with procedural feature, regarded as syntax errors, and others related to interpretation of meaning and concepts, regarded as errors with semantic feature. It was perceived that, at the end of meta-analysis, the researches that presented more procedural errors are aligned with structural fundamentalism, analogical fundamentalism and linguistic pragmatic conceptions of algebra teaching. However, the researches aligned with the exploratory conceptions, with algebraic thinking and language developing, that emphasized the production and negotiation of meaning and understanding of algebraic concepts, evidenced errors of semantic feature, even in the investigation of situations with syntax feature. In summary, the obtained results reinforced the initial hypothesis that errors made or showed in algebra are directly related to the conception that teachers and researchers have about algebra teaching.

**Keywords:** Mathematic Education, Algebra and teaching, Errors and difficulties, Meta-analysis

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 1 .....	9
<b>CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA E ACADEMICA DA PROBLEMÁTICA DESTA PESQUISA .....</b>	<b>9</b>
1.1 PESQUISAS QUE ESTUDARAM ERROS E DIFICULDADES DOS ALUNOS EM ÁLGEBRA .....	13
<b>CAPÍTULO 2 – REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>24</b>
2.1 – ALGUMAS CONCEPÇÕES DE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA. ....	25
2.2 - ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ERRO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM .....	30
<b>CAPÍTULO 3 – PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA.....</b>	<b>39</b>
3.1 – SOBRE O CONCEITO DE METANÁLISE E A CONSTITUIÇÃO DO <i>CORPUS</i> DE ANÁLISE. ....	39
<b>Identificação.....</b>	<b>49</b>
3.2 - SOBRE O PROCESSO DE METANÁLISE.....	50
<b>CAPÍTULO 4 – UMA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO METANALÍTICA DO <i>CORPUS</i> DE ANÁLISE .....</b>	<b>55</b>
<b>CAPÍTULO 5 – RELAÇÕES E COMPREENSÕES METANALÍTICAS ENTRE AS DISSERTAÇÕES: tipos de erros e as concepções de educação algébrica .....</b>	<b>97</b>
5.1 - TECENDO COMPREENSÕES METANALÍTICAS SOBRE OS TIPOS DE ERROS. ....	97
5.1.1 - Erros Provocados por Falta de Atenção.....	98
5.1.2 - Erros Provocados Pela Dificuldade em Aceitar a Ausência de Fechamento. ....	104
5.1.3 - Erros Envolvendo Potência.....	106
5.1. 4 - Erros de Interpretação.....	108
5.2 AS CONCEPÇÕES DE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA IDENTIFICADAS NAS DISSERTAÇÕES.....	111

5.3. - CONSIDERAÇÕES METANALÍTICAS SOBRE A POSTURA DOS PROFESSORES E PESQUISADORES DIANTE DOS ERROS DOS ALUNOS. ....	118
5.3.1 - O Erro é Parte Integrante do Processo Ensino e Aprendizagem .....	127
5. 3. 2 – O Erro é um Obstáculo .....	129
5.3.3 – O Erro é um Indicativo para Avaliar/reavaliar a Prática Pedagógica .....	129
5.3.4 – O Erro deve ser Identificado e Corrigido. ....	131
<b>ALGUMAS CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>133</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>145</b>

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Taxonomia dos erros por Borasi .....	36
Quadro 2: Informações gerais da pesquisa de Notari (2002) .....	42
Quadro 3: - Informações gerais da pesquisa de Pepece Junior (2011) .....	43
Quadro 4: Informações gerais da pesquisa de Fontalva (2006) .....	43
Quadro 5: Informações gerais da pesquisa de Gil (2008) .....	44
Quadro 6: Informações gerais da pesquisa de Freitas (2002).....	45
Quadro 7: Informações gerais da pesquisa de Scarlassari (2007) .....	45
Quadro 8: Informações gerais da pesquisa de Pinto (1997).....	46
Quadro 9: Informações gerais da pesquisa de Vidal (2008) .....	46
Quadro 10: Informações gerais da pesquisa de Burigato (2008).....	47
Quadro 11: Temas da Álgebra desenvolvidos nas pesquisas .....	48
Quadro 12: Ficha para coleta de informações de dissertações que investigam erros e dificuldades dos alunos no processo de ensino e aprendizagem da álgebra elementar .....	49
Quadro 13: Categorias de dificuldades .....	86
Quadro 14: Concepção de educação algébrica das pesquisas de Vidal (2008), Pinto (1997) e Gil (2008) .....	112
Quadro 15: Concepções de educação algébricas dos pesquisadores e professores nas pesquisas de Vidal (2008), Pinto (1997) e Gil (2008).....	114
Quadro 16: Concepções de educação algébrica identificadas nas pesquisas de Pepece Junior (2011) e Fontalva (2006) e Burigato (2007) .....	114
Quadro 17: Quadro geral das concepções de educação algébrica identificadas nas dissertações analisadas.....	117
Quadro 18: Posicionamento dos autores e professores sobre os erros no processo de ensino e aprendizagem, nas pesquisas de Vidal (2008), Pinto (1997) e Gil (2008).....	119

Quadro 19: Posicionamento dos autores Pepce Junior (2011), Fontalva (2006) e Burigato (2007) sobre erros .....	122
Quadro 20: Posicionamento dos autores Notari (2006), Freitas (2002) e Scarlassari (2007) sobre erros.....	125
Quadro 21: Síntese dos resultados.....	139

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Atividade de perímetro (Booth, 1995, p.25) .....	14
Figura 2: Síntese das concepções didático-pedagógicas do papel do erro.....	126

## APÊNDICE

Fichamentos das dissertações do <i>corpus</i> da metanálise.....	153
--	-----

## INTRODUÇÃO

Início este trabalho narrando um pouco de minha trajetória pessoal e profissional até chegar ao desenvolvimento dessa pesquisa.

Quando eu tinha por volta dos treze anos de idade, já mostrava “indícios” de que seria professora. Comecei a “dar banca” (reforço escolar) por volta dessa idade na minha própria residência. Os meus “alunos” eram vizinhos que faziam o Ensino Fundamental I. Costumava ensinar a tarefa que vinha da escola, mas adorava passar exercícios e depois corrigi-los. As séries variavam e eu tinha em média de 4 a 5 alunos. Minha mãe também “dava banca” quando eu ainda era criança e considero que esse fato despertou a vontade de fazer o mesmo. Ela não era professora, mas essa atividade ajudava nas despesas da casa. O tempo foi passando e eu continuei a ministrar aulas de reforço escolar para alunos do Ensino Fundamental II também. Eu ajudava em todas as matérias, mas a Matemática era a minha preferida.

Meus irmãos fizeram curso técnico, mas eu sabia que não era essa formação que eu queria para mim. Então, continuei na escola pública que eu estudava no Ensino Médio, com o objetivo de passar no vestibular. No colégio, eu também tinha o costume de ensinar meus colegas. Porém, dessa vez, eu ensinava mais Matemática, pois era a área que eu mais dominava e passei a ter a certeza de que iria fazer vestibular para ser professora de Matemática. Um fator que também contribuiu para essa decisão foi que tive excelentes professores de Matemática que se destacaram por mostrarem compromisso com a profissão que exerciam. Durante toda a minha trajetória do Ensino Fundamental ao Ensino Médio, de todos os professores de Matemática que eu tive, guardo boas recordações. Acredito que esse foi um ponto fundamental para a escolha da minha profissão.

Comecei o curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal da Bahia em 2001, depois de ter sido reprovada no vestibular do ano anterior. Na universidade, também encontrei bons professores que continuavam me inspirando. Porém, também tive experiências com professores que eu não queria seguir a prática que eles realizavam.

No 5º semestre da Universidade tive a minha primeira experiência como professora. Participei da seleção de um programa de pré-vestibular do Estado da Bahia, Universidade Para Todos, e fui selecionada para ensinar três turmas. Os alunos que participaram do programa estavam cursando o terceiro ano do Ensino Médio em escolas pública, ou já o tinha concluído. Fiquei muito nervosa quando entrei na sala de aula e me deparei com uma turma cheia de alunos, por volta de 50, todos sentados, esperando eu começar. Lembro-me que pensei: “eles estão esperando o máximo de mim, então farei o possível para ser uma boa professora e contribuir para que eles consigam a aprovação no vestibular”. Eu sabia como era defasado o ensino público por ter estudado todo o Ensino Fundamental e Médio na rede pública estadual.

Ao terminar o curso de Licenciatura, tive a oportunidade de participar da seleção para professor substituto da UFBA. Para mim era um sonho ensinar na universidade que estudei. Resolvi participar da seleção para a disciplina de Cálculo I e fui aprovada. Foi outro momento da minha vida profissional muito marcante e inesquecível. Eu tinha apenas 23 anos e três turmas de Cálculo I para ensinar. Senti-me desafiada a estudar a teoria, resolver as listas de exercícios, elaborar provas, mas tudo em um sistema tradicional que valorizava a quantidade de exercícios. Como uma forma de padronização, todas as turmas de Cálculo trabalhavam com a mesma lista de exercícios e eu, na época, não via nenhum problema nisso. Eu seguia as regras adaptando-me ao que já estava sendo feito. Hoje percebo que essa padronização pode tirar a autonomia e criatividade do professor de elaborar as suas próprias listas, pois elas eram feitas por alguns professores do departamento de Matemática, que repassavam para todo o corpo docente da disciplina Cálculo I.

No ano 2005, resolvi fazer um curso de pós-graduação *lato-sensu* em Educação Matemática na Universidade Católica do Salvador - UCSAL. Senti a necessidade de continuar os estudos e ouvi muitos elogios sobre esse curso. Também estava à procura de novas ferramentas que auxiliassem nas minhas aulas, pois comecei a me sentir um pouco incomodada com a forma de ministrar as aulas de Cálculo I utilizando apenas as listas de exercícios e sem desenvolver atividades contextualizadas que estimulassem os alunos a realizarem as tarefas. O curso foi em Educação Matemática, sendo o primeiro contato que tive com as diversas tendências da área: Modelagem Matemática, Resolução de Problemas, História da Matemática, Filosofia da

Matemática, Investigação Matemática, dentre outras. As leituras feitas no curso possibilitaram um olhar mais amplo e reflexivo sobre minha prática pedagógica. Percebi que podia utilizar outras formas de ensinar Matemática, as quais poderiam despertar uma maior motivação nos alunos. Porém, minhas aulas de Cálculo continuavam “tradicional”, trabalhando apenas com listas de exercícios, correções no quadro-negro e avaliações escritas.

O período do contrato de professor substituto estava acabando e não poderia ser mais renovado. Eu gostava muito de lecionar na universidade. Embora minhas aulas fossem tradicionais com giz e quadro-negro, eu sentia que os alunos gostavam da maneira que eu ensinava e elogiavam a paciência que eu tinha em ensinar. Iniciado o último semestre na UFBA, prestei concurso para o Centro Federal de Educação Tecnológica da Bahia – CEFET-BA, atual Instituto Federal da Bahia – IFBA, e ingressei em setembro de 2006, quando encerrou o meu contrato temporário como professora substituta da UFBA.

Comecei a trabalhar no Campus de Santo Amaro, a 70 km de Salvador, onde eu tive a certeza de ter feito a escolha certa de ser professora de Matemática, pois tive o prazer de ter alunos que valorizavam o trabalho do professor. E, além disso, ministrar aulas era sempre prazeroso para mim. Alguns alunos apresentavam bastante dificuldade cognitiva em acompanhar os conteúdos ministrados, mas eles tinham muita força de vontade em aprender, e sempre me procuravam para tirar dúvidas em um horário extraclasse denominado horário de atendimento. Em minhas aulas eu já começava a apresentar mudanças, graças às contribuições do curso de especialização que eu estava concluindo. Deixei um pouco as aulas tradicionais para trabalhar também com atividades de matemática lúdica, com trabalhos em grupos, com problemas contextualizados etc. Por questão de localização, pedi transferência para um campus mais próximo de Salvador.

Ao final de 2008 ingressei no campus de Camaçari, região metropolitana de Salvador, onde estou lotada atualmente. Nos dois *campi* eu convivi com professores que já tinham Mestrado e Doutorado e senti a necessidade e importância de fazer um curso de pós-graduação *Stricto-Sensu*. Meus colegas de trabalho me incentivaram bastante em fazer um mestrado. Em 2009, fiz uma disciplina como aluna especial no Curso de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e

História das Ciências na UFBA. A disciplina foi *Ensino e Filosofia da Ciência*. Esse curso foi muito importante para eu começar a desenvolver a postura de pesquisadora, com leituras mais teóricas e a convivência com profissionais de outras áreas, pois o curso é multiunidades. Passei a me interessar por um tema que me incomodava em minhas aulas: erros recorrentes de alunos. Tive, neste curso, um primeiro contato com a definição de obstáculos epistemológicos de Gaston Bachelard. Para ele, os erros são necessários para o progresso da ciência e, podem ser resultados de um conhecimento anteriormente adquirido, mas que naquele contexto, pode não ser mais válido (Bachelard, 1996). Outra leitura que despertou o interesse em investigar erros foi o livro de Helena Cury (2008) – *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos?* Esse livro me fez perceber que por trás dos erros cometidos pelos alunos, é possível encontrar elementos que o professor pode investigar com a intencionalidade de melhorar o ensino e a aprendizagem. Passei a perceber que a simples correção dos erros, não era suficiente para que eles deixassem de cometê-los. Porém, não preparei um projeto para ingressar no programa devido à falta de orientador disponível para minha área, pois eram poucas as opções para orientação na área de Ensino da Matemática, com mais disponibilidades nas áreas da Física, Química e Biologia.

Comecei a ler e a comprar livros da área da Educação Matemática com o intuito de encontrar algo diferente para fazer nas aulas de Matemática. Gostava de desenvolver uma “boa aula”. Sentia-me realizada quando os alunos ficavam motivados em aprender. Porém, alguns erros que eram cometidos nas avaliações pareciam se repetir continuamente. Passei a discutir com os alunos os erros cometidos, mas, nas avaliações seguintes, lá estavam eles novamente. Pensei: - “Isso precisa ser investigado!”- Não sabia qual programa de pós-graduação eu iria submeter meu projeto de pesquisa, mas já sabia qual tema eu queria investigar.

Em 2011, comecei a procurar na internet programas de pós-graduação na área de Educação Matemática. Encontrei o Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática da Unicamp – PECIM, e resolvi escrever um projeto e participar do processo seletivo para ingressar no segundo semestre desse ano. O programa era novo e o ingresso no segundo semestre de 2011 seria a primeira turma do curso.

Escrevi um projeto que tinha como objetivo avaliar como os docentes percebem os erros cometidos pelos alunos e como os erros podiam ser tratados como instrumento didático para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. Procurei na literatura disponível alguns autores como Cury, Borasi, Pinto, Pais, Bachelard e Brousseau que tratam de erros e/ou obstáculos na aprendizagem.

Helena Cury (1995), em um artigo publicado na Revista Zetetiké faz uma retrospectiva histórica e apresenta novas perspectivas da análise de erros em Educação Matemática. Nesse trabalho, o erro é tratado em três vieses:

1) No campo da psicologia, a teoria Behaviorista ou Comportamentalista – Ao acreditar na necessidade de eliminar o erro, desenvolve mecanismos para reduzir e até mesmo extinguir o erro. A atividade de estímulo-resposta-reforço permite que o aluno repita todos os resultados que foram positivos, recebendo “recompensas” e sendo “punido” cada vez que apresenta resultados negativos e/ou inadequados. Ou seja, o objetivo do professor nessa perspectiva é desenvolver artifícios que possibilitem eliminar o erro de qualquer forma. É muito comum no ensino tradicional a aplicação de listas imensas de exercícios para o aluno responder com o objetivo de “treinar” a resolução das questões.

2) Processamento da informação - Com a ajuda de programas computacionais, é registrada passo a passo a resolução dos alunos com o objetivo de verificar em qual etapa acontecem os erros e categorizá-los. Atualmente, existem pesquisas que trabalham com esse tipo de software que permite identificar erros dos alunos. Um dos trabalhos do *corpus* de análise desta pesquisa faz uso dessa abordagem para a análise de erros dos alunos.

3) Construtivista - De acordo com Borasi (1988), o erro é considerado um elemento fundamental no desenvolvimento da aprendizagem. A função do erro nessa perspectiva não é considerada diagnóstica e reparadora. O erro tem um papel importante de identificar elementos que possam vir a contribuir para a melhora no ensino.

O meu projeto inicial pretendia realizar um estudo de caso em uma turma do 1º ano do Ensino Médio, com aplicação de exercícios de equações do 1º grau, verificando como o professor

corrigia esses erros, categorizando-os e fazendo uma observação de como os erros eram trabalhados na entrega da atividade. Finalizada a escrita do projeto, fiz a inscrição. Meu propósito era verificar se o meu projeto estava bom, pois eu não imaginava que conseguiria ser aprovada nas outras etapas, por ser o curso em uma universidade na qual eu não conhecia ninguém, sem nenhuma referência e nem opção de orientador. Estava errada! Fui aprovada nas etapas e escolhida para ser orientada pelo professor Dario Fiorentini, integrante do grupo de pesquisa Prática Pedagógica em Matemática – PRAPEM. Começava, então, uma nova e desafiante etapa da minha vida profissional.

## PECIM

Após duas semanas de ingresso no programa, fiz a apresentação do projeto no Grupo de Pesquisa Prapem (Prática Pedagógica em Matemática), que é coordenado pelo meu orientador, professor Dario Fiorentini, e pela professora Dione Lucchesi de Carvalho. Nessa apresentação, alguns aspectos do projeto foram modificados. Decidimos (faço uso aqui da primeira pessoa do plural para enfatizar que a mudança foi ocorrida pelos debates e conversas realizadas por mim e pelo meu orientador) ampliar o campo de investigação dos erros para a Álgebra Elementar e não apenas na equação do 1º grau. A metodologia de pesquisa também foi alterada. A ideia inicial de fazer um estudo de caso foi excluída por entendermos que muitos trabalhos já foram realizados e publicados em torno dos erros e dificuldades dos alunos e utilizando essa metodologia. De fato, ao fazer a primeira busca de dissertações de mestrado ou teses de doutorado, junto ao Banco de Teses da Capes, foram encontrados 79 trabalhos nessa temática.

Esse número de estudos despertou nossa curiosidade e o desejo de conhecê-los, saber quais foram seus principais resultados e conclusões. Diante desse contexto, surge então a ideia de fazermos uma metanálise desses estudos. Apesar de ainda serem poucos os trabalhos de metanálise na área de Educação Matemática e também na área de Educação em geral, eu tinha a meu favor o fato de o Grupo Prapem ser um dos pioneiros, no Brasil, nessa modalidade de pesquisa.

Uma primeira delimitação do estudo foi priorizar os trabalhos que investigaram os erros e dificuldades dos alunos em situações de práticas de ensinar e aprender a álgebra elementar.

Tínhamos, de partida, a hipótese de trabalho de que os erros e dificuldades evidenciados pelos alunos na aprendizagem da álgebra estão diretamente relacionados com os modos de conceber e realizar o ensino da álgebra em sala de aula. Queríamos saber se os erros cometidos pelos alunos e a forma de lidar com eles tinham relação com as concepções e práticas de ensinar e aprender álgebra dos professores e pesquisadores.

Assim, definimos como objetivo principal da pesquisa **identificar e analisar, em dissertações de mestrado que têm como foco de estudo erros no ensino e aprendizagem da álgebra elementar, as relações que se estabelecem entre as concepções de ensino de álgebra, os tipos de erros cometidos pelos alunos e os modos de os professores e pesquisadores lidarem com eles.** Para delimitar melhor o foco da metanálise, elaborei as seguintes questões como orientadoras da presente pesquisa:

- Que tipos de erros e/ou dificuldades dos alunos em álgebra elementar podem ser identificados nas dissertações?
- Que concepções de educação algébrica estão implícitas ou explícitas nas pesquisas?
- Quais os modos de os pesquisadores e/ou professores colaboradores dessas pesquisas lidarem com os erros no ensino e aprendizagem da álgebra elementar?
- Que relações podem ser estabelecidas entre as concepções de ensino de álgebra, os tipos de erros cometidos pelos alunos e os modos de os pesquisadores lidarem com eles?

No **capítulo 1**, apresento e situo a problemática da pesquisa considerando três contextos: da evolução histórica da álgebra enquanto campo de conhecimento; de seu ensino no contexto brasileiro; e, de pesquisas que têm como foco de estudo os erros e dificuldades no processo de ensino e aprendizagem da álgebra.

No **capítulo 2**, apresento o referencial teórico que servirá de suporte para responder às questões de pesquisa e para desenvolver a metanálise, tendo por base as diferentes concepções de educação algébrica por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), e as diversas concepções que o erro pode assumir no processo de ensino e aprendizagem.

No **capítulo 3**, é apresentado o conceito de metanálise qualitativa, assim como o percurso metodológico utilizado para a seleção e análise das nove dissertações que compõem o *corpus* da metanálise.

No **capítulo 4**, apresento um “resumo” das dissertações do *corpus* da metanálise com o objetivo de apresentar ao leitor os temas das pesquisas, referencial, metodologia e resultados e conclusões.

No **capítulo 5**, algumas considerações metanalíticas são realizadas buscando tecer relações entre as concepções de educação algébrica identificadas nas pesquisas, os tipos de erros cometidos pelos alunos e a forma de lidar com eles.

Nas considerações finais, teço alguns comentários com relação à conclusão da pesquisa, bem como apresento uma síntese dos resultados obtidos pela metanálise.

## **CAPÍTULO 1 – CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA E ACADÊMICA DA PROBLEMÁTICA DESTA PESQUISA**

O objetivo deste capítulo é apresentar e situar a problemática da pesquisa relativa aos erros e dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra elementar, considerando três contextos: a evolução histórica da Álgebra enquanto campo de conhecimento; o ensino da álgebra no Brasil; e o contexto acadêmico relativo às pesquisas que têm como foco de estudos os erros e as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem da álgebra.

Com relação ao desenvolvimento da Álgebra, pode-se distingui-la em duas fases: Álgebra Antiga ou Elementar (1700 a.C. – 1700 d. C.) que detém o estudo de métodos para resolver equações; e Álgebra Moderna ou Abstrata que estuda as estruturas matemáticas como grupos, anéis, corpos etc. O ensino da álgebra tradicional pode ser frequentemente notado nos estudos da Álgebra Elementar quando se percebe uma estreita ligação com as operações algébricas, enfatizando os procedimentos e regras operatórias de resolução.

Para esta pesquisa, o enfoque dado foram os erros e dificuldades dos alunos no ensino da Álgebra Elementar, que pode ser caracterizada por três fases que se distinguem pela evolução da linguagem algébrica: retórica, sincopada e simbólica.

De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), a fase retórica ou verbal é marcada pela não utilização de símbolos ou de expressões com códigos próprios, fazendo uso da linguagem corrente e da geometria para descrever esquemas operatórios e equações. Essa parte da história vai desde os babilônios até os gregos pré-diofantinos. Na Grécia, no período de 540 a.C a 300 a.C., a álgebra era desenvolvida com base na Geometria, principalmente pelos pitagóricos que tinham muita dificuldade em trabalhar com números irracionais. Por exemplo, a raiz quadrada de dois era considerada a diagonal de um quadrado de lado um. (BAUMBART, 1992, apud FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

A fase sincopada surgiu com Diofanto de Alexandria que introduziu um símbolo que tentava traduzir o pensamento algébrico – a letra “sigma”, como meio de representar a incógnita

de uma equação. De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), um exemplo de linguagem algébrica na fase sincopada é a expressão “cubus p.6 rebus aequalis 20” desenvolvida por Cardano, que na linguagem simbólica atual pode ser representada por  $x^3 + 6x = 20$ .

A última fase da Álgebra Elementar marcada pela evolução da linguagem algébrica corresponde à utilização somente de símbolos para representar as ideias algébricas, sendo François Viète o precursor dessa fase com a introdução das vogais e dos sinais + e -. Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Descartes passou a utilizar também as letras do alfabeto para a representação de entidades algébricas das ideias algébricas tais como número genérico, incógnita e variável. Ainda, de acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), que fizeram diversas “leituras” do desenvolvimento da história da Álgebra, Viète foi fundamental para o desenvolvimento de uma álgebra simbólica:

Segundo Klein, existe uma distinção fundamental entre as concepções de símbolo antes e após Viète. Até Viète, o símbolo é utilizado apenas para representar quantidades desconhecidas em uma equação, isto é, para representar genericamente uma quantidade determinada, ainda que provisoriamente desconhecida. A novidade introduzida por Viète foi não apenas representar simbolicamente, de maneira distinta, quantidades conhecidas (coeficientes de equações) e desconhecidas (incógnitas das equações), mas, sobretudo, atribuir papéis diferenciados aos símbolos representativos dessas quantidades. (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993, p. 80-81)

Em se tratando do ensino da álgebra no Brasil, os autores acima fizeram um histórico do seu desenvolvimento tendo como ponto de referência o movimento da Matemática Moderna em um artigo publicado por Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) intitulado “Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo?”

Após a Reforma de Francisco Campos, em 1931, as quatro áreas – Aritmética, Álgebra, Trigonometria e Geometria, foram organizadas em um conjunto único denominado Matemática, conforme afirmam Miguel, Fiorentini e Miorim (1992):

Devido à natureza da Reforma Francisco Campos, que tenta imprimir organicidade ao ensino secundário, estabelecendo definitivamente o currículo seriado, vão gradativamente desaparecendo os materiais didáticos referentes às áreas estanques da Matemática [...] (p.42)

Porém, o ensino da álgebra não sofreria alterações significativas, pois o currículo permaneceu o mesmo e a forma de ensinar continuou baseada em técnicas de resolução de forma mecanizada e cheia de regras operatórias, sendo a álgebra considerada uma ferramenta mais potente que a Aritmética (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992). Essa realidade se aproxima da minha vivência em sala de aula como professora de Matemática, pois percebo nos dias atuais, um ensino de Álgebra que prioriza apenas o cálculo algébrico e as técnicas de resolução de equações.

No movimento da Matemática Moderna, houve uma preocupação em colocar mais ênfase em conceitos e definições da linguagem algébrica e nas justificações do transformismo algébrico, tendo por base as propriedades das estruturas algébricas. Na prática, entretanto, não chegou a ser implementado efetivamente, pois o ensino nas escolas, com raríssimas exceções, continuou baseado em técnicas operatórias, sem se preocupar com os conceitos e significado da linguagem e do pensamento algébricos:

... o próprio ensino da Álgebra não apenas perde aquelas características que a Matemática moderna lhe havia atribuído como também parece retomar – sem, é claro, aquelas regras e aqueles excessos injustificáveis do algebrismo – o papel que ele desempenhava no currículo tradicional, qual seja o de um estudo introdutório – descontextualizado e estático – necessário à resolução de problemas ou equações. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p.51)

Com o objetivo de normatizar o ensino no Brasil, em 1998, foram criadas orientações normativas, os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), que trazem orientações para o ensino

da álgebra, recomendando que ela seja introduzida no terceiro ciclo que corresponde aos sextos e sétimos anos do Ensino Fundamental. Nas primeiras séries do Ensino Fundamental, entretanto, os alunos devem saber resolver problemas que têm valores desconhecidos, mas sem mencionar os conceitos de incógnitas. A recomendação dos PCNs é que, a partir do terceiro ciclo, os alunos comecem a ter contato com noções algébricas e com a construção de generalizações a partir de sequências numéricas. Portanto, a recomendação é que essas noções de álgebra não se estendam às operações de expressões e/ou equações. O que se espera do conhecimento algébrico nessa etapa de ensino é que “os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas”. (BRASIL, 1998, p. 68). Nessa fase, os alunos podem proceder de maneiras diversas para resolver um problema, por exemplo, sem dar ênfase às técnicas operatórias padronizadas.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, o estudo da aritmética “dá passagem” para a introdução de um estudo mais formal da álgebra, com a utilização de conceitos próprios do campo algébrico. A partir de noções já apreendidas no ciclo anterior, é possível introduzir os conceitos de função e variável, resolução de problemas por meio de equações, representações de situações na forma algébrica, conhecimento das regras de resolução de diversos tipos de equações. É nessa fase do ensino que a álgebra se apresenta de forma bastante procedimental e sintática. Embora a orientação dos PCNs seja utilizar atividades que trabalhem com situações-problema, no ensino atual de álgebra ainda predominam as regras operatórias e os procedimentos de resolução.

Sabendo que algumas dissertações de mestrado, que constituem o material de metanálise, investigaram erros de aprendizagem da álgebra no Ensino Médio, considerei pertinente levantar as orientações que os PCNs trazem em relação à álgebra no Ensino Médio. A principal recomendação que encontrei é que o ensino da álgebra não seja desenvolvido de modo isolado. Nossa leitura sobre os PCNs sugere que o currículo brasileiro trabalhe com as noções iniciais da álgebra, passando pelas regras operatórias no final do Ensino Fundamental, e procurando estabelecer relação da álgebra com outras áreas de conhecimento:

O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra [...]. Esses conteúdos são diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real. (BRASIL, 1998, p.44)

Porém, na prática escolar, os alunos continuam a apresentar muitas dificuldades na aprendizagem da álgebra e esse problema despertou meu interesse em pesquisar como os erros e dificuldades dos alunos são identificados e tratados pelas pesquisas brasileiras. Na próxima seção trago algumas pesquisas, sobretudo internacionais, que tiveram como objeto de estudo os erros e dificuldades dos alunos em álgebra.

## **1.1 PESQUISAS QUE ESTUDARAM ERROS E DIFICULDADES DOS ALUNOS EM ÁLGEBRA**

É possível identificar na literatura brasileira e internacional diversas pesquisas que objetivaram o estudo dos erros e dificuldades no ensino da álgebra. Esta seção buscou trazer resultados de alguns autores estrangeiros que se dedicaram em pesquisar os erros dos alunos em álgebra, como Booth (1995), Kieran (1995), Usiskin (1995). Hall (2002), Ruano, Socas e Palarea (2008), Ponte (2006); e a pesquisa da autora brasileira Borba (2011)

A pesquisa realizada pela australiana Lesley R. Booth no Reino Unido, de 1980 a 1983, pertencente ao projeto “Strategies and Errors in Secondary Mathematics” (SESM), relatada em 1984 e reeditada em 1995, revela um estudo dos tipos de erros e dificuldades que as crianças têm no início da aprendizagem da álgebra. Para a pesquisadora, “uma das maneiras de tentar descobrir o que torna a Álgebra difícil é identificar os tipos de erros que os alunos comumente cometem nessa matéria e investigar as razões desses erros.” (BOOTH, 1995, p.23).

A pesquisa foi realizada com alunos com idades variando entre treze e dezesseis anos, que cursavam da oitava à décima série da escola básica e estudavam álgebra. Assuntos como frações algébricas, equações e sistemas haviam sido estudados pelos mais velhos, enquanto os mais novos trabalhavam com simplificação de expressões algébricas, fatoração simples e resolução de equações lineares simples. Em entrevistas realizadas com os alunos que cometeram erros, percebeu-se que os erros eram semelhantes, independente da série cursada. Alguns erros, descritos a seguir, retirados de Booth (1995), foram classificados pela autora devido às suas diferentes possibilidades de origem.

Um primeiro erro apresentado refere-se aos erros cometidos pelos alunos em relação à *natureza das respostas*. Na atividade apresentada a seguir, a pesquisadora realizou uma entrevista com uma aluna para saber como ela responderia a questão.

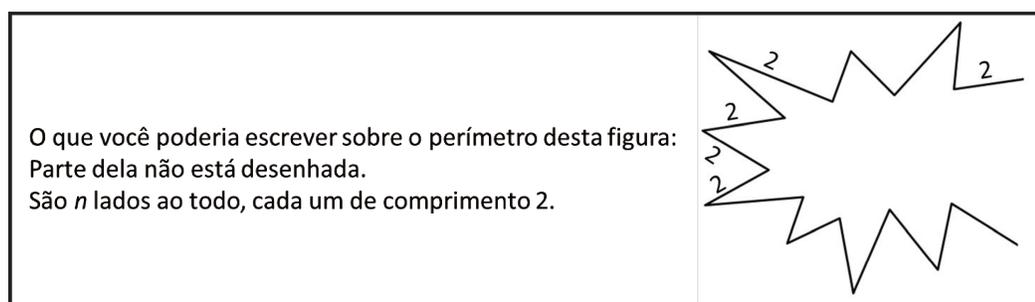


Figura 1: Atividade de perímetro (Booth, 1995, p.25)

Entrevista realizada com a aluna Michelle de 14 anos de idade.

E: Você é capaz de escrever alguma coisa quanto ao perímetro?

Michelle: Não, porque  $n$  provavelmente indica um número e este é  $n$  eu não posso dizer quantos são os lados, e, como tenho de somar os lados, todos iguais a 2, preciso saber quantos são. A não ser que  $n$  represente... como os  $n$  no alfabeto, algum lugar entre os números...

E: Como assim?

M: Bem, digamos que  $n$  é 14.

E: Como você chegou a esse número?

M: Como eu disse antes, para considerar  $n$  como um número, achei 14. Está no 14...(BOOTH, 1984, apud BOOTH, 1995, p. 25)

Para aquela estudante, a resposta precisa ser apresentada em forma de números, causando erros que, segundo Booth (1995), são provocados devido à generalização que os alunos fazem da aritmética, cujo foco é achar uma resposta direta e sem generalizações.

Um segundo tipo de erro classificado pela autora é em relação às *notações e convenções em álgebra*. Muitos alunos fazem confusão quando se troca a variável  $x$  por outra letra. A falta de significado do que representa a variável provoca uma ausência de compreensão das diversas notações que a álgebra pode assumir. Outra confusão provocada pelos alunos na compreensão dos símbolos algébricos é em relação aos sinais  $=$  e  $+$ . Em geral, a igualdade representa escrever uma resposta, fazendo com que os alunos sintam a necessidade de apresentar uma resposta numérica. A adição também é compreendida de forma a se obter um resultado, devido ao sinal  $+$  representar a junção de duas partes em uma única. Essa dificuldade na significação dos símbolos é decorrente do entendimento da Álgebra como aritmética generalizada. O aluno entende que as letras são apenas números escondidos e sendo assim, para operá-las, basta seguir os passos da aritmética. Segundo Booth (1995):

A ideia de que o símbolo de adição possa indicar tanto o resultado de uma adição como a ação, ou de que o sinal de igualdade possa ser visto como indicador de uma relação de equivalência em vez de um símbolo para “escreva a resposta”, pode não ser percebida de imediato pelo aluno, embora essas duas noções sejam necessárias para a compreensão algébrica. (BOOTH, 1995, p.27).

Ainda em relação aos erros provocados pela má compreensão das notações e convenções na álgebra, há outra fonte de erro detectada pela autora que diz respeito à falta de uma notação mais precisa em álgebra. Booth (1995) faz referência ao significado que os alunos atribuem às

operações, por exemplo,  $12 \div 3$  ou  $3 \div 12$ , nas quais consideram que dão o mesmo resultado. A autora conjectura que a aplicação indevida da propriedade comutativa na divisão seja decorrente, também, da aplicação inadequada das regras da aritmética, sem se preocupar em diferenciar os resultados, caso os termos sejam trocados. Com o objetivo de contribuir para o aluno perceber que, na divisão, a propriedade comutativa não é válida, a autora sugere que haja um cuidado maior no ensino, evitando generalizações que considerem a divisão como sendo sempre dividir o número maior pelo número menor, mesmo que seja nas séries iniciais. Essa proposta pretende fazer com que as compreensões inadequadas na aritmética não se perpetuem na Álgebra.

Outra ideia trazida pela autora, que pode justificar as dificuldades e erros cometidos pelos alunos, é apresentada no diálogo realizado com o estudante Peter de 15 anos de idade, no qual se percebe uma falta de entendimento conceitual das letras e variáveis envolvidas na Álgebra.

E: o que significa y em uma questão como essa (somar 3 a 5y)? [...]

Peter: É uma letra, mas representa alguma coisa. Significa 8 grupos de y.

E: E o que é y?

[...]

P: Poderia ser um iate (em inglês yacht) [...], poderia ser iogurte (em inglês youghurt), ou uma batata-doce (yam) [...] Acho que tem que começar por y porque tem uma letra y. Assim o y tem de ser a inicial da palavra. (BOOTH, 1984, apud BOOTH, 1995, p. 25)

Essa dificuldade está relacionada à origem que as letras têm na linguagem corrente ou na aritmética. Em muitos casos pode representar o nome, como, por exemplo, 3 metros pode ser escrito como 3m. Na álgebra, essa confusão pode resultar em uma “falta de referencial numérico”. (Booth, 1995). Esse tipo de erro foi classificado pela pesquisadora como uma dificuldade relacionada com as *letras e variáveis*.

O problema da *relação da álgebra com a aritmética* também é destacado por Booth (1995) que afirma que a álgebra não é isolada da aritmética, mas se assemelha a ela, assumindo o

*status* de “aritmética generalizada”. E essa relação costuma ser também mais uma fonte dos erros e dificuldades dos alunos. Booth (1995) defende que é preciso ter um bom ensino das regras que regem a aritmética, pois para ela “... as dificuldades que o aluno tem em álgebra não são tanto de álgebra propriamente dita, mas de problemas em aritmética que não foram resolvidos.” (BOOTH, 1995, p. 33).

Outros erros cometidos pelos alunos se referem aos métodos informais utilizados. Para Booth (1995) é importante que os professores deem valor aos métodos informais que foram apresentados pelos alunos, mas mostrem que, em determinados casos, a informalidade não consegue resolver e por isso é preciso uma formalização. “Devem-se procurar meios de ajudar os alunos a desenvolver uma compreensão do próprio procedimento formal.” (p.35)

Como conclusão da sua pesquisa, Booth (1995) faz a seguinte recomendação:

Essa lista de possíveis causas das dificuldades das crianças no aprendizado de álgebra não é, de modo algum, exaustiva. No entanto, poderá servir para lançar alguma luz sobre os tipos de dificuldades que as crianças provavelmente experimentarão quando começarem a estudar álgebra. Como o valor dessas observações deve provir do uso que delas se possa fazer para tomar decisões referentes ao ensino e aprendizagem de álgebra, devemos indagar o que o professor pode fazer para ajudar as crianças a evitar ou corrigir esses problemas. (BOOTH, 1995, p. 35)

No artigo intitulado “*Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra*”, de Carolyn Kieran (1995), a autora relata uma experiência realizada com seis alunos com treze anos de idade, durante três meses. A pergunta da pesquisa era “Como os alunos veem as equações e a resolução de equações na fase inicial da aprendizagem de Álgebra?”. Os alunos participaram de dez sessões de ensino e aprendizagem, com o objetivo de ampliar o entendimento das noções de incógnita, equação e sinal de igualdade.

Nessa experiência foram identificados, através de entrevistas, dois tipos de grupos: o grupo da abordagem aritmética, que enfoca as operações dadas e o grupo da abordagem algébrica cujo foco são as operações inversas.

Para o grupo da abordagem algébrica, a letra em uma equação só tem significado quando encontrado o seu valor através das operações inversas às operações dadas. Para o grupo da abordagem aritmética, as letras representam números desconhecidos, fazendo parte de uma relação numérica da equação. A autora constata que, quando é apresentada a situação  $a + 3$ , por exemplo, o grupo da álgebra não vê nenhum significado na letra, pois não há operações inversas a serem realizadas; enquanto o grupo da aritmética interpreta como sendo um número qualquer.

Outra prática usual de ensino à introdução dos elementos algébricos e até mesmo sem essa intenção é o uso de “caixinhas” ou “quadrinhos” no lugar das letras. A autora assume uma posição crítica em relação a essa prática pedagógica, pois considera que isso pode levar a uma perda de significado das letras. Para Kieran (1995),

a experiência elementar com porta-lugares deveria incluir uma abordagem conceitual das equações, [...] em que a ênfase não se coloque em dar significado à letra pela transposição da equação dada, mas em dar significado à letra como número dentro da sequência de operações de uma equação. (KIERAN, 1995, p.109).

De acordo com o posicionamento da autora, é possível estabelecer uma relação próxima entre as dificuldades apresentadas pelos alunos com a postura do professor, seja para entender o porquê dos erros cometidos pelos alunos, seja para influenciar e/ou interferir na sua prática. A identificação de alunos que “tendem” a desenvolver uma abordagem aritmética sobre a algébrica, ou vice-versa, permite que as dificuldades sejam explicitadas de forma mais clara nos procedimentos de resolução de equação. Algumas falas de professores como “passa pro outro lado e muda de sinal” pode ser interpretada de forma incorreta por aqueles que não entendem o significado da utilização das operações inversas para resolução da equação.

Corroborando com a importância de atribuir os significados dos símbolos em álgebra, Usiskin (1995) traz alguns modos de conceber e utilizar as variáveis.

Revelando ser uma dificuldade dos alunos o significado da letra na álgebra, muitos alunos acham que as letras representam apenas números “escondidos”, não percebendo a dimensão que o significado das letras pode assumir, provocando erros e gerando dificuldades. “Em suma, as variáveis comportam muitas definições, conotações e símbolos. Tentar enquadrar a ideia de variável numa única concepção implica uma supersimplificação que, por sua vez, distorce os objetos da álgebra.” (USISKIN, 1995, p.12).

As concepções de Álgebra, trazidas por Usiskin (1995), também revelam origens das dificuldades e erros cometidos pelos alunos, com alguns resultados que se aproximam daqueles publicados pela pesquisadora Booth (1995). Dentre essas concepções temos:

- *A Álgebra como aritmética generalizada: traduzir e generalizar.* É comum a generalização das variáveis em uma expressão algébrica. Em algumas áreas como Modelagem Matemática, o processo de generalização é preciso para a simplificação dos cálculos e dessa forma a regra é “traduzir e generalizar”. No entanto, alguns alunos apresentam dificuldades na representação da linguagem algébrica, como por exemplo, “O que é mais fácil, ‘o produto de qualquer número por zero é zero’ ou ‘Para todo  $n$ ,  $n \cdot 0 = 0$ ’ ?” (Usiskin, 1995, p. 14)

- *A Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas.* Problemas do tipo “Adicionado 3 ao quádruplo de um certo número, a soma é 40. Achar o número” (USISKIN, 1995, p. 14), são traduzidos para a linguagem simbólica  $5x + 3 = 40$ , o que caracteriza apenas uma generalização. Nessa nova concepção, segundo Usiskin (1995), o aluno precisa ir além da generalização e considerar a variável como uma incógnita, recebendo a instrução de simplificar e resolver. Nessa concepção, a álgebra é considerada como um conjunto de procedimentos para “achar” o valor da incógnita ou da constante, a depender da situação proposta. Nessa fase, os alunos costumam cometer erros por utilizarem procedimentos aritméticos inadequados às resoluções de problemas algébricos.

- *Álgebra como estudo de relações entre grandezas*. O uso de fórmulas e funções, nas quais as letras são variáveis. Normalmente essa concepção é adotada no Ensino Médio quando é inserido o ensino de funções e nesse momento há uma diferença entre a álgebra estática (considerando a letra como um número desconhecido) e da álgebra que tem movimento (as letras são variáveis e podem assumir diversos valores, parâmetros ou argumentos). É apresentado também, nessa concepção, as noções de variáveis dependentes e independentes.

Outra pesquisa com a mesma temática foi realizada em 2002, pelo pesquisador Richard Hall que fez um estudo com o objetivo de tentar determinar, por meio de entrevistas, porque certos erros são feitos durante o processo de simplificação de uma expressão algébrica.

O autor entregou para 180 alunos com idades entre 9 e 11 anos, a tarefa de simplificar a expressão  $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 2x - 8}$ . Dentre os 180 alunos: 70 realizaram alguns passos corretos mas não conseguiram acertar a resposta final; 41 encontraram a resposta correta; 44 simplificaram o termo  $x^2$  no numerador com o termo  $x^2$  do denominador; 20 fatoraram corretamente mas não terminaram a simplificação obtendo como resposta  $\frac{(x+5)(x-2)}{(x+4)(x-2)}$ ; e 5 chegaram ao resultado  $\frac{(x+5)}{(x+4)}$  e após esse passo cancelaram o  $x$  obtendo  $\frac{5}{4}$ . Esses últimos alunos foram escolhidos para serem entrevistados e passaram a ser o foco principal do experimento.

O pesquisador queria investigar porque estes alunos não aplicaram a regra do cancelamento logo no início com o termo  $x^2$ , deixando pra aplicar essa regra apenas na etapa final. Na entrevista foram devolvidas aos alunos as resoluções com os passos desenvolvidos por eles.

Na primeira entrevista realizada, Hall (2002) percebeu que o aluno não cancelou  $x^2$  por entender que quando aparece essa expressão é preciso fatorar e, além disso, se cancelasse ficaria com a expressão  $\frac{3x-10}{2x-8}$ , que ele não saberia o que fazer. A partir da resposta do aluno percebe-

se que este não tem claro o conceito de cancelamento e, como afirmou o autor, quando o aluno tem uma resposta simples do tipo  $\frac{5}{4}$ , ele se sente confiante e acredita ter obtido uma resposta satisfatória. Mais uma vez, aparece a preocupação com a resposta numérica, confirmando alguns resultados já obtidos em outras pesquisas.

Na segunda entrevista realizada, além de perceber as mesmas dificuldades do aluno anterior, o pesquisador observa que o aluno confunde expressão com equação. É bastante comum alunos transformarem uma expressão em uma equação, igualando a zero as expressões para tentar achar o valor da variável  $x$ .

O terceiro aluno entrevistado revela uma confusão de significado para a variável, sendo considerada a letra como um número específico a ser substituído ao final.

A quarta entrevista revelou um aspecto interessante no que se refere à aceitabilidade das respostas finais pelos alunos. Questionado por que não cancelou os termos  $x^2$  e  $x$  logo no início, a aluna respondeu que dessa forma ficaria com a resposta  $\frac{-7}{-6}$  e que não gosta de respostas com números negativos. Essa entrevista mostrou uma confusão que os alunos fazem em obter respostas, revelando, mais uma vez, uma forte influência das regras da aritmética.

A última entrevista mostrou uma realidade entre muitos alunos que é a não simplicidade da matemática. Ao responder a pergunta do pesquisador sobre o porquê de não ter cancelado o termo  $x^2$  logo no início, a aluna respondeu que dessa forma ficaria simples demais e o problema ficaria muito curto; o que para ela, revelava que não estava correto.

O autor concluiu a pesquisa salientando que, apesar das respostas apresentadas nas entrevistas serem as mesmas, foi possível revelar vários raciocínios de como os alunos procederam e conceberam o significado do  $x^2$ , sendo possível observar a falta de conhecimento semântico do significado da variável  $x$  no contexto algébrico. (Hall, 2002).

Percebo, a partir desses estudos, o quanto é importante, nas pesquisas sobre os erros e dificuldades dos alunos, a investigação dos possíveis fatores que levaram os alunos a cometerem

os erros. Na pesquisa de Hall (2002), através das entrevistas, o pesquisador conseguiu identificar diversas concepções errôneas que os alunos tinham por trás das respostas finais apresentadas.

Ruano, Socas e Palarea (2008) fizeram uma pesquisa com a aplicação de questionários com o objetivo de analisar e classificar os erros cometidos por um grupo de alunos da escola secundária nos processos de substituição formal, generalização e modelação em Álgebra. Como conclusão, perceberam que alguns erros recorrentes são independentes do tipo de atividade aplicada, sendo necessário corrigi-los de forma que o aluno não cometa mais esse tipo de erro. Alguns erros foram identificados, como: erros que os alunos cometem devido “à necessidade de fechamento”<sup>1</sup>; particularização das expressões; uso incorreto de parênteses e erros na multiplicação e potência; e erros derivados das dificuldades de compreensão da aritmética. O autor considera o erro como um entrave para o desenvolvimento da Álgebra e que o “professor deve provocar um conflito na mente do aluno a partir da incoerência dos seus próprios erros e buscar estratégias para que participe efetivamente na resolução desse conflito, substituindo os conceitos falsos por uma compreensão conceitual adequada.” (RUANO; SOCAS; PALAREA, 2008, tradução nossa, p. 73).

Em relação à forma de ensinar álgebra de modo que se possa minimizar esses erros e dificuldades dos alunos, os autores Blanton e Kaput (2003, apud Sousa, 2007) defendem que é preciso uma reestruturação na maneira de ensinar que tem sido privilegiada pelos professores.

...os professores devem buscar formas de desenvolver a atividade algébrica, criando uma cultura em sala de aula, que valorizem situações em que os alunos realizem atividades de modelagem, utilizando diferentes formas de pensamento algébrico, fazendo conjecturas, discutindo, testando suas ideias e praticando atividades computacionais. Devem-se incluir as diferentes formas do pensamento algébrico durante as atividades. (BLANTON; KAPUT, 2003 apud SOUSA, 2007, p. 81).

---

<sup>1</sup> Essa expressão foi citada por Lins e Gimenez (1997), se referindo a uma expressão elaborada por Kevin Collins, para representar o momento em que os alunos não consideram, por exemplo,  $8+g$  como resposta. Segundo Lins e Gimenez (1997) a expressão  $8 + g$  não é “fechada”, no sentido de não representar um resultado final, permitindo ao aluno a busca por um número que represente um resultado “fechado”.

Segundo o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000, apud Ponte 2006), o pensamento algébrico compreende o estudo das estruturas, a simbolização, a modelação e o estudo da variação. Assim, “o pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objectos mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstracto.” (PONTE, 2006, p. 7)

Este autor traz aspectos importantes para a abordagem da Álgebra no ensino. Para ele, algumas decisões são importantes para a construção do currículo como: desenvolvimentos dos conceitos de expressões algébricas, equações, funções e estruturas algébricas.

No Brasil, Borba (2011) no artigo intitulado “Dificuldades de aprendizagem em álgebra elementar: problema de ensino ou aprendizagem?”, procura analisar, através da fala de professores, aspectos geradores de dificuldades que os alunos apresentam na iniciação à Álgebra. Nesta pesquisa, também é dada a ênfase na relação entre Aritmética e Álgebra, e as dificuldades que são estabelecidas nessa passagem, pois os alunos são desafiados a “abandonar o raciocínio puramente aritmético e começar a pensar algebricamente.” (BORBA, 2011, p. 2). Outro ponto destacado pela autora é a mecanização do ensino da Álgebra, sendo rotulada como “matemática com letras” ou “algoritmo abstrato”. A “falta de significação” das letras, para os alunos, no ensino da Álgebra, provoca uma série de dificuldades em termos da compreensão e manipulação dos conceitos algébricos.

Outros pesquisadores, como Pinto (1997), Fontalva (2002), Freitas (2002), Notari (2002), Burigato (2007), Scarlassari (2007), Gil (2008), Vidal (2008) e Pepece Junior (2011), também investigaram erros e dificuldades dos alunos em Álgebra. Esses trabalhos fazem parte do *corpus* da metanálise que será desenvolvida mais adiante e, por isso, não foram revisadas neste capítulo.

## **CAPÍTULO 2 – REFERENCIAL TEÓRICO**

Com o objetivo de obter instrumentos para responder às questões propostas para a presente metapesquisa, apresento, neste capítulo, o referencial que pode ajudar a identificar as concepções de educação algébrica, tendo por base, principalmente, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e a identificar e descrever algumas concepções sobre o papel e o lugar do erro no processo de ensino e aprendizagem. Espero que essas considerações teóricas e bibliográficas possam ajudar a identificar as múltiplas concepções sobre erros e dificuldades que podem emergir durante o processo de metanálise.

### **2.1 – ALGUMAS CONCEPÇÕES DE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA.**

A hipótese de trabalho adotada nesta pesquisa é que os erros e dificuldades dos alunos estão estreitamente relacionados aos modos de conceber e realizar o ensino da álgebra em sala de aula. Esses modos, embora possam, às vezes, serem explícitos ou conscientes, por parte do professor, são geralmente implícitos ou inconscientes. Assim, a identificação da concepção de educação algébrica do pesquisador/professor, vai permitir responder a uma das questões deste trabalho: “Que concepção de educação algébrica que está implícita ou explícita nas pesquisas?” Esta seção do capítulo apresentará, a partir do referencial adotado de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Lins e Gimenez (1997), diferentes concepções de educação algébrica que podem ajudar a compreender a ocorrência de erros e dificuldades dos alunos nas práticas escolares de ensinar e aprender em álgebra.

É comum observar o ensino da álgebra baseado em regras e procedimentos para a resolução de equações, operações com polinômios, simplificações, fatoração etc, com mais ênfase aos símbolos do que aos significados. Com base nessa proposta de ensino na qual a atividade algébrica se resume a “cálculo com letras”, Lins e Gimenez (1997) denominam essa concepção de “letrista”. Para eles, se o professor acredita que o importante no ensino da álgebra é a exatidão de técnicas de resolução das operações com letras, o ensino terá como foco apenas

procedimentos com a prática de exercícios, sendo essa metodologia reforçada pela maior parte dos livros didáticos que seguem o modelo teoria – exemplo – exercícios. Para os autores, há uma grande deficiência no ensino da álgebra nessa concepção porque “essa prática não se baseia em investigação ou reflexão de qualquer natureza ou profundidade, apenas em uma tradição, tradição essa que estudos e projetos de todos os tipos, e por todo o mundo – inclusive no Brasil – já mostraram ser ineficaz e mesmo pernicioso à aprendizagem.” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 106).

É possível perceber que há o predomínio das técnicas de resolução de equações e todos os demais procedimentos algébricos, enfatizando o ensino da álgebra a resolução de exercícios fechados nos quais o objetivo é a reprodução de algoritmos. Poucos professores se arriscam em elaborar atividades que exijam uma melhor compreensão dos conceitos algébricos e de seus significados.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) identificaram, nesse modelo de ensino, uma concepção algébrica linguístico-pragmática que vincula o papel pedagógico da álgebra ao de um instrumento de resolução de exercícios e problemas fechados, prevalecendo a importância da assimilação das técnicas de manipulação dos símbolos como compreensão necessária para ser capaz de resolver problemas de aplicação das técnicas algébricas. Esse tipo de prática relacionada com esta concepção algébrica pode provocar no aluno determinados tipos de erros de origem procedimental, chamados de erros de sintaxe, relacionando a concepção de educação algébrica linguístico-pragmática, com o surgimento de erros ligados às técnicas operatórias e procedimentais. Em uma prática que se baseia em algoritmos, o aluno fica mais propício a cometer erros que estão relacionados com o operatório.

Um erro bastante recorrente nas aulas de álgebra é o desenvolvimento do produto notável  $(a + b)^2$ . O aluno, que está focado aos procedimentos e às regras operatórias adquiridas, tende a assumir atitudes chamadas de “imediatistas”, de forma que a operação que lhe chama mais atenção é o termo elevado ao quadrado. Dessa forma, sem saber o conceito do que significa a soma de dois termos elevada ao quadrado, o aluno segue o procedimento de elevar cada termo ao quadrado e assim resolver a questão, obtendo como resposta  $a^2 + b^2$ .

Outra concepção presente no ensino da álgebra e identificada por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) é a concepção fundamentalista-estrutural que se baseia na introdução das propriedades estruturais das operações. Nessa concepção, o ensino da álgebra não é reduzido apenas à aplicação das regras e procedimentos, mas baseia-se na justificação lógica de cada passagem do transformismo algébrico. Na resolução do exemplo acima, o desenvolvimento do produto notável é justificado por  $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$ , fazendo-se uso das propriedades para a justificação. Nesse tipo de concepção de ensino, entende-se que o aluno ao estudar essas etapas de forma lógica, ele estaria mais capacitado para “aplicar as estruturas em diferentes contextos em que estiverem subjacentes.” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p.84)

A concepção de educação algébrica fundamentalista-analógica corresponde à junção das duas concepções anteriores: a concepção linguístico-pragmática e a concepção fundamentalista-estrutural, unindo o uso das técnicas e algoritmos com outras formas de justificação das operações, buscando principalmente os recursos analógicos geométricos. De acordo com os autores, “essa concepção acredita que uma ‘álgebra geométrica’, por tornar visível certas identidades algébricas, seria didaticamente superior a qualquer forma de abordagem estritamente lógico-simbólica.” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 84).

Como exemplo, o produto notável  $(a+b)^2$  pode ser justificado geometricamente pela área de um quadrado de lado  $a+b$ . Os autores também citam modelos concretos que possam auxiliar na justificação do transformismo algébrico, como o uso da balança, muito comum no ensino de equações.

A concepção de ensino que utiliza modelos analógicos para o ensino da álgebra é denominada por Lins e Gimenez (1997) de “abordagem facilitadora”. Com o objetivo de melhorar a compreensão dos termos algébricos, alguns professores fazem uso de materiais manipulativos. Porém, os autores trazem como exemplo o resultado de uma pesquisa feita por Kart e Sinkinson que investigaram o que acontecia com o aprendizado das crianças quando eram usados materiais concretos para o ensino:

Para surpresa das pesquisadoras, as crianças - embora achando o material concreto “útil” – não viam relação entre o que haviam feito no “concreto” e o que haviam feito no “formal”. A conclusão de Hart e Sinkinson foi a de que faltava um material intermediário, que “preenchesse o vazio” entre um coisa e outra... (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 107)

A interpretação dada pelos autores com relação ao resultado da pesquisa sobre a falta de relação que as crianças tiveram com o “concreto” e o “formal”, é que talvez a ligação entre o trabalho denominado pelas pesquisadoras de “concreto” não se aproxime do objetivo em realizar o trabalho “formal”. Essas duas posições, das pesquisadoras e dos autores, com relação ao uso de materiais manipulativos para o ensino da álgebra, pode justificar porque muitos professores fazem uso de balanças para mostrar o funcionamento do equilíbrio de uma equação e posteriormente a explicação (justificação) dos procedimentos para resolvê-la. Porém, não conseguem avanços significativos na superação das dificuldades dos alunos, quando acontece o aumento da complexidade das equações sendo preciso retirar a figura da balança.

Outra concepção identificada por esses autores é com relação às atividades de Modelagem Matemática e propostas de ensino baseadas na investigação. Para eles, esse tipo de atividade também tenta aproximar o “concreto” do “formal”, porém, se diferencia da situação anterior, pois o concreto, neste caso, se aproxima mais da realidade, com investigações de situações reais. De acordo com Lins e Gimenez (1997), a partir dessa concepção de educação algébrica, é possível permitir ao aluno uma aprendizagem mais motivadora, pois “o foco é na motivação que a modelagem oferece e na possibilidade de os alunos se tornarem capazes de ‘aplicar’ o que aprendem” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 109).

Essa visão de educação algébrica permite que o aluno produza conhecimento através de atividades que diferem daquelas que privilegiam as técnicas operatórias e exercícios, tornando a álgebra uma ferramenta no auxílio de questões concretas que, em muitos casos, se referem a problemas ligados diretamente ao contexto do aluno.

Com uma proposta de desenvolver tarefas exploratório-investigativas, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) propuseram uma concepção algébrica que relacionasse o ensino da álgebra com o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos. Essa nova concepção de ensino da

álgebra proposta por esses autores, busca relacionar o ensino da álgebra com o pensamento e linguagem algébrica em uma relação dialética, e não de subordinação. Os autores propõem um ensino baseado em tarefas exploratórias e investigativas, que busquem uma aproximação entre linguagem e pensamento algébrico, pois, para eles, as concepções de ensino antes apresentadas, não estimulam o desenvolvimento do pensamento algébrico, priorizando apenas a linguagem algébrica através dos procedimentos e regras operatórias de resolução de equações, por exemplo. Essa redução faz com que o aluno não desenvolva um pensamento algébrico e considere a álgebra como uma área da Matemática muito bem definida com regras, algoritmos e procedimentos próprios. Com o desenvolvimento do pensamento algébrico, é possível que o aluno desenvolva algumas atividades como perceber regularidades e fazer generalizações, tentar explicitar estruturas de situações-problemas ou perceber relações entre variáveis (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

Em resumo, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), identificaram três tipos de concepções de educação algébrica:

- linguístico-pragmática: baseada nas técnicas operatórias do transformismo algébrico;
- fundamentalista-estrutural: tem o enfoque na justificativa das operações presentes no transformismo algébrico;
- fundamentalista-analógica: associa as técnicas e as justificativas do transformismo algébrico através de uma álgebra geométrica.

Uma quarta concepção de ensino é proposta pelos autores. Chamarei essa concepção de “exploratória” que privilegia o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos, mediante produção e negociação de significados. Essa concepção de ensino da álgebra se baseia em atividades exploratórias e investigativas que estimulam o pensamento algébrico do aluno, mudando o foco que antes era nas técnicas de resolução. Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), trazem alguns exemplos de atividades que caracterizam esse tipo de concepção. Dentre eles, tem-se a atividade:

*Coloque mais dois elementos na série da figura abaixo e diga como saber quantos triângulos existiriam em um elemento qualquer da série. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 86)*



É possível perceber que, nesse tipo de exercício, há a preocupação em estimular no aluno uma álgebra que não se resume a técnicas operatórias. Nessa atividade, é necessário investigar como está sendo construída a relação entre os desenhos e a quantidade de triângulos a partir da observação e das regularidades apresentadas. Neste caso, muitos alunos podem apresentar dificuldades por não visualizarem diretamente nenhuma equação ou números. Esse tipo de concepção, proposta pelos autores, visa o estímulo a atividades que permitam uma reflexão e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Assim, esta seção do capítulo descreveu algumas concepções de ensino da álgebra que servirão de referencial para a metanálise a ser realizada.

## **2.2 - ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ERRO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM**

Nesta seção apresento alguns posicionamentos sobre os erros, com o objetivo de relacionar, no capítulo das análises, diferentes posições dos pesquisadores e professores diante dos erros e dificuldades dos alunos.

Inicialmente apresento a concepção de erro relacionada com o conceito de obstáculo desenvolvida por Bachelard e Brousseau e o erro na visão construtivista. Em seguida, a partir das considerações de Cury (2008) e Rico (1998), faço um breve histórico do desenvolvimento das pesquisas sobre erros no mundo.

O estudo dos erros é um tema bastante estudado por filósofos e pensadores que buscam conhecer e compreender o homem. Para eles, através desse estudo, é possível adquirir e consolidar o conhecimento científico. Dentre os filósofos que buscam entender os avanços da ciência, levando-se em consideração a importância das teorias errôneas para a busca de novas teorias válidas, está o filósofo francês Gaston Bachelard.

A noção de obstáculo epistemológico foi inicialmente definida por Bachelard em sua obra “A Formação do Espírito Científico” (título original *La Formation de l’esprit scientifique: contribution à une psychanalyse de La connaissance*), publicada em 1938 e introduzida na área da didática matemática por Guy Brousseau em 1983. Para Bachelard, o erro é decorrente de um conhecimento anterior adquirido, que não é mais válido em um novo contexto, o que ele caracteriza com um obstáculo. Para o filósofo, sem os erros não há o progresso da ciência, e é através deles que é possível avançar no desenvolvimento de novas teorias. No campo das ciências, Bachelard afirma que o desenvolvimento histórico das teorias é composto de erros que foram cometidos e superados, pois “ao retomar um passado cheio de erros, encontra-se a verdade num autêntico arrependimento intelectual.” (BACHELARD, 1996, p. 11).

A noção de obstáculo epistemológico tem sido bastante utilizada para o estudo, sistematização, análise e explicação dos erros que se apresentam no pensamento científico. Segundo Bachelard (1996):

... é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos.(p.11)

Na matemática, Bachelard afirma que, apesar desta ciência surgir como uma teoria verdadeira e acabada, o seu processo de construção se deu com muitos erros e refutações que estão escondidas na história. De acordo com Pais (2011), “os avanços, retrocessos, dúvidas e erros cometidos na etapa em que as conjecturas são feitas pelo matemático, praticamente,

desaparecem no resultado final apresentado pelo texto científico.” (p. 41). Apesar de mencionar a matemática, Bachelard não desenvolveu seus estudos voltados para o ensino e aprendizagem, cabendo ao matemático e filósofo Guy Brousseau o estudo do erro como sinônimo de obstáculo na área da Didática da Matemática.

Na Didática da Matemática, Brousseau desenvolveu os conceitos de obstáculo, considerando que estes se manifestam a partir dos erros. Para ele, os obstáculos podem ser de origem didática, de origem epistemológica ou de origem ontológica. De acordo com Brousseau (1983) apud Almouloud (2007), “o erro é a expressão, ou a manifestação explícita, de um conjunto de concepções espontâneas, ou reconstruídas que, integradas em uma rede coerente de representações cognitivas, tornam-se obstáculo à aquisição e ao domínio de novos conceitos” (p.132), Assim, os erros são cometidos devido a conhecimentos adquiridos anteriormente que não são mais válidos em um novo contexto, dificultando o processo de aprendizagem de um conhecimento novo, o que caracteriza um obstáculo.

A noção de obstáculo é compreendida por um conhecimento e não uma dificuldade. Um conhecimento que produz respostas adequadas a um certo contexto mas produz respostas falsas fora dele, tornando o conhecimento anterior resistente ao novo. Assim, para Brousseau o erro não deve ser apenas eliminado e sim, observado pelo aluno (inclui também o professor) com a finalidade de perceber novos contextos e novas aplicações a partir do conhecimento que o aluno já possui, e também desenvolver caminhos que tornem possível a superação dos erros. Para Brousseau (1983, apud Cury, 2008):

O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se acredita nas teorias behavioristas de aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptado. Os erros desse tipo não são instáveis e imprevisíveis, eles são constituídos em obstáculos. (p. 33)

Corroborando com o pensamento do filósofo Brousseau, Pinto (2000) também considera que “Se um obstáculo epistemológico pode conduzir ao erro, não devemos, pois descartá-lo,

tratando-o como um ‘falta de conhecimento’. Ao contrário, devemos tratá-lo como um conhecimento falso ou incompleto, que deve ser reconhecido e superado.” (p.54)

De acordo com Brousseau (1976), os obstáculos de origem didática se relacionam diretamente à prática do professor em sala de aula, pois são aqueles que parecem depender apenas de uma escolha ou projeto de sistema de ensino. Além dos obstáculos didáticos, o filósofo fez mais duas classificações: os obstáculos de origem ontogênica e os de origem epistemológica. Os obstáculos de origem ontogênica são aqueles que ocorrem devido a limitações do sujeito, desenvolvendo conhecimento adequado apenas às suas possibilidades. Os obstáculos de origem epistemológica são considerados aqueles ligados diretamente ao papel constitutivo do conhecimento.

Um exemplo de obstáculo didático citado por Pais (2011) é no caso da aprendizagem da divisão de um número inteiro positivo por um número racional menor do que um. Ao realizar essa operação, o resultado é um número maior do que o dividendo. Para o aluno a aquisição desse conhecimento novo pode encontrar um obstáculo devido ao conhecimento anteriormente adquirido, no qual o resultado da divisão era sempre menor do que o dividendo.

Ainda na filosofia, é possível destacar as ideias de Popper que considera o estudo dos erros importante para o desenvolvimento de teorias científicas. Para o filósofo, não existe uma fonte última de conhecimento, pois todo conhecimento é humano e, portanto, está sujeito a erros que são importantes para a constituição do conhecimento humano. Assim, na sala de aula, é possível conceber o erro do aluno como necessário para o desenvolvimento da sua aprendizagem, incentivando a crítica, por parte do aluno, dos seus erros de forma que ele possa entendê-los e compreendê-los.

Na visão construtivista, apesar de haver diversas correntes ligadas a essa teoria, Rico (1998) lista algumas verdades que são consideradas por todos os construtivistas e que ajudam a compreender qual o papel do erro nessa perspectiva. Dentre as afirmações citadas por ele tem-se:

- Todo conhecimento é construído;

- As estruturas cognitivas estão presentes no processo de construção, e estão em um desenvolvimento contínuo; e

- O construtivismo metodológico é resultante do reconhecimento do construtivismo como uma posição cognitiva.

Assim, devido ao construtivismo ser baseado em processos de construção de conhecimento e, considerando a matemática como uma ciência que é composta pela aquisição dos conhecimentos, neste processo, a presença dos erros é inevitável e faz parte do processo de construção do conhecimento, devendo ser diagnosticado, detectado, corrigido e superado. (RICO, 1998).

Após a breve explanação de algumas concepções de erro relacionadas a obstáculos e a importância de superação destes para a construção do conhecimento, com base em Cury (2008) e Rico (1998), apresento (de forma sucinta) um panorama dos estudos sobre erros.

Na Alemanha, alguns pesquisadores fizeram estudos sobre o erro no período das guerras mundiais com grande influência, na época, da pedagogia empírica. As correntes predominantes eram a psicanálise, a teoria de Gestalt e a psicologia do pensamento. Weiner foi considerado como o fundador dos estudos dos erros, estabelecendo cinco categorias de erros: erros familiares, erros persistentes, erros por similaridade, erros mistos e erros devidos a situações emocionais (RICO, 1998, p.77). Outro pesquisador que também definiu tipos de erros, mas no campo da aritmética, foi Seseman destacando erros mecânicos, associativos e funcionais. Com relação às possíveis origens do erro, Rico (1998) apresentou as ideias de Rose que classificou as causas do erro na educação matemática, dentre elas: erros provocados pela falta de conhecimento das regras, confusão de conceitos e da própria capacidade de reconhecer o que é preciso para resolver um problema matemático.

A partir da década de 60, Rico (1998) apresenta outros estudos que tiveram destaque na Alemanha como o de Schlaak em 1968, Gluck em 1971 e Pippig em 1977. Os tipos de erros detectados nessa época, como erros de operação, aproximação aditiva ou multiplicativa, resultados parciais, erros de transcrição, erros na interpretação de problemas aritméticos, podem

ser encontrados em um estudo mais recente publicado em 2012 por Haghverdi, Semnani e Seifi, nos quais os autores discutiram sobre a relação entre os tipos de erros cometidos pelos alunos e o conhecimento necessário para a resolução de problemas. Ao trabalhar com problemas aritméticos, algébricos e geométricos, os autores identificaram erros como sendo decorrentes da escrita (nos quais os alunos copiam incorretamente um número do problema), erros de cálculos que são resolvidos parcialmente, erros decorrentes do uso da operação inadequada, dentre outros. (HAGHVERDI; SEMNANI; SEIFI, 2012, p. 654).

Na União Soviética, houve estudos que determinaram novos conhecimentos com relação à análise de erros dos estudantes. As contribuições das pesquisas na União Soviética, segundo Rico (1998), foram o estudo das possíveis origens dos erros. Dentre as possíveis causas do surgimento dos erros destacadas acima, é possível observar outras duas possíveis origens do erro: a insuficiência da memória em curto prazo e a compreensão insuficiente do problema. De acordo com Cury (2008), o psicólogo russo Krutetskii critica a mera abordagem estatística da avaliação das habilidades, com a ausência de interesse em estudar o processo em si. Dessa forma, realizou estudos entre 1955 e 1966, utilizando uma metodologia com observações das atividades, registros do pensamento do aluno, discussões com estudantes, entrevistas com pais, professores e amigos, dentre outros, que oportunizaram uma forma de análise de erros na qual fosse possível verificar como pensavam os alunos ao solucionar as tarefas. As análises dos “protocolos de resolução” também foram utilizadas em pesquisas realizadas por Allen Newell e Herbert Simon, em 1972, que utilizaram a técnica do pensar alto para que pudessem investigar como se dava todo o processo de pensamento do aluno para chegar a uma resolução.

Nos Estados Unidos, Thorndike em 1917 realizou um dos primeiros trabalhos mais completos sobre a determinação dos erros. De acordo com Cury (2008), esse pesquisador acreditava que a lei do exercício era necessária para a superação do erro, pois quanto mais se repetissem as atividades, mais o estudante tinha a oportunidade de fixá-la.

A partir da década de 70, novas correntes de investigação sobre os erros foram surgindo, dentre elas, o estudo sobre as estruturas básicas dos processos de ensino e aprendizagem, com Ginsburg em 1977 e Erlwanger em 1975, que defendiam que os erros surgem pela adoção de

estratégias e regras inadequadas que são decorrentes de um conhecimento anteriormente adquirido, como compreendido por Bachelard na teoria sobre obstáculos.

Para Cury (2008), uma das grandes referências no enfoque dos erros nas últimas décadas do século XX, são os estudos de Rafaella Borasi. Para ela, é importante que haja ambientes de aprendizagem nos quais o erro seja aproveitado como um potencial para o desenvolvimento do aluno. Um dos seus principais trabalhos se refere à “taxonomia de uso dos erros como trampolins para a pesquisa”, que apresenta diferentes objetivos de aprendizagem com relação à realização de uma tarefa matemática específica. Esses objetivos podem ser de remediação, descoberta ou pesquisa.

Dentre os objetivos listados por Borasi (1996 apud Cury, 2008), destaco os objetivos do estudo dos erros relacionados com a realização de uma tarefa matemática específica.

**Quadro 1: Taxonomia dos erros por Borasi**

<b>Objetivo da aprendizagem</b>	<b>Realização de uma tarefa específica</b>
Remediação	Análise de erros detectados, para compreender o que houve de errado e corrigir, de forma a realizar a tarefa com sucesso.
Descoberta	Uso construtivo de erros no processo de resolução de um novo problema ou tarefa; monitoramento do trabalho de alguém para identificar potenciais enganos.
Pesquisa	Erros e resultados intrigantes motivam questões que geram novas direções e servem para desenvolver novas tarefas matemáticas.

É possível perceber pelos estudos de Borasi (1996 apud Cury, 2008), diferentes perspectivas de análise de erros que podem ser facilmente relacionadas com a prática do professor em sala de aula. Em determinados momentos, o professor pode ter uma postura de fazer apenas a “remediação” dos erros, de forma que sejam identificados, corrigidos e eliminados. Por outro lado, é possível que o professor lide com os erros de forma a utilizá-los em uma discussão, por exemplo, de resolução de problemas, utilizando-os para que o aluno tenha uma melhor compreensão sobre as causas dos seus erros de forma a tentar superá-los.

Algumas linhas de investigação dos erros também foram apresentadas por Rico (1998). São elas:

- estudos relativos à análise dos erros, que busca determinar os elementos que os explicam, com a taxonomia e classificação dos erros. Buscam estabelecer causas estruturais para os erros devidos à própria natureza do conhecimento matemático.
- estudos dedicados ao tratamento didático do erro, procurando prever os erros, detectá-los e propor meios para a sua correção. O autor também inclui nessa linha, os trabalhos que consideram os erros como plataformas para incentivar o estudo e investigação dos conteúdos matemáticos.
- estudos voltados à formação de professores, com o objetivo de observar, analisar, interpretar e tratar os erros dos alunos.
- estudos voltados para uma natureza mais dicotômica entre o certo e o errado. Normalmente, fazem uso de procedimentos estatísticos.

Essas linhas de investigação trazidas por Rico (1998) servirão como ferramenta para a identificação dos modos como os professores e/ou pesquisadores lidam com os erros e dificuldades dos alunos, que será realizada no capítulo 5.

## CAPÍTULO 3 – PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

### 3.1 – SOBRE O CONCEITO DE METANÁLISE E A CONSTITUIÇÃO DO *CORPUS* DE ANÁLISE.

Para alcançar o objetivo principal desta pesquisa – que consiste em identificar e analisar, em investigações que tiveram como foco de estudo erros no ensino e aprendizagem da álgebra elementar, as relações que se estabelecem entre as concepções de ensino de álgebra, os tipos de erros cometidos pelos alunos e os modos de os pesquisadores lidarem com eles – optamos por realizar uma metanálise qualitativa de dissertações e teses brasileiras de mestrado e doutorados.

A metanálise, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006) “é uma revisão sistemática de outras pesquisas, visando realizar uma avaliação crítica das mesmas e/ou produzir novos resultados ou sínteses a partir do confronto desses estudos, transcendendo aqueles anteriormente obtidos.” (p. 71). Entretanto, para realizar uma metanálise, foi preciso primeiro, constituir o *corpus* de análise. Nos primeiros momentos de busca do *corpus* para a produção da metanálise, foram escolhidos diversos trabalhos que tratavam do ensino da álgebra. Uma possibilidade apontada foi trabalhar com duas categorias iniciais para a seleção dos documentos: na primeira categoria estariam as pesquisas que tiveram como objeto de estudo analisar e/ou compreender erros e dificuldades dos alunos em álgebra; na segunda categoria estariam trabalhos que não tiveram essa preocupação de forma clara e direta, mas que se poderiam investigar os erros presentes ou trazidos pelas pesquisas. A partir das leituras dos resumos dos trabalhos dessa última categoria, percebi que alguns trabalhos não explicitavam erros e dessa forma não seria possível analisar como os autores lidavam com os erros e dificuldades dos alunos, podendo a análise ficar prejudicada. Dessa forma, escolhi por trabalhar exclusivamente com pesquisas que tratavam diretamente com erros e dificuldades dos alunos em álgebra, excluindo assim, a criação dessas categorias que foram estabelecidas *a priori*.

Para compor o *corpus* da metanálise, realizei uma consulta ao Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes. Utilizei como palavras-chave “Ensino, Dificuldade e Álgebra”, encontrando 76 (setenta e seis) pesquisas relacionadas.

Nesse momento, foi preciso definir o que exatamente eu queria pesquisar sobre os erros e dificuldades dos alunos e saber se todas as pesquisas encontradas contemplavam o que eu objetivava. Para fazer um recorte, tomei por base os resumos dos setenta e seis trabalhos, e construí um quadro a partir das leituras de seus resumos. A partir desse quadro, consegui perceber algumas semelhanças entre os trabalhos, permitindo uma primeira categorização dos mesmos:

- dezesseis eram propostas que tiveram como foco principal observar a prática do professor ou a apresentação de uma proposta de recursos didáticos;

- nove tratavam de álgebra no Ensino Superior;

- dez tiveram a geometria como foco de estudo;

- dezoito tratavam de diversos temas relacionados à álgebra, como função, números relativos, computação, números racionais, jogos, dentre outros, mas sem destacar os erros e dificuldades de aprendizagem;

- doze pesquisas, embora tratassem genericamente da álgebra, não estabeleciam relações com as dificuldades e erros dos alunos;

- uma pesquisa trabalhava com alunos com necessidades especiais;

- dez tratavam de erros e dificuldades dos alunos em Álgebra Elementar.

Retomando o objetivo e as perguntas da minha pesquisa, excluí os trabalhos que tiveram foco de estudo o professor e os materiais didáticos, bem como aquelas pesquisas que tratavam da álgebra no Ensino Superior ou que tratavam de assuntos relacionados à álgebra, mas que, no meu entendimento, davam mais atenção a temas específicos como, por exemplo, o estudo de números racionais. Excluí, também, a pesquisa com alunos especiais por compreender que existem outras

variáveis que deveriam ser levadas em consideração no tratamento dessa pesquisa e que fugiria de meu foco de análise. Restaram, assim, dez trabalhos que eu poderia considerar para o *corpus* da metanálise. A partir dessas pesquisas, fiz a busca online dos textos completos destes trabalhos, encontrando apenas sete, o que me fez criar um novo critério de seleção: a disponibilidade dos trabalhos online.

Como forma de complementar a busca de pesquisas que trataram de erros e dificuldades de alunos em Álgebra Elementar em situações de sala de aula ou situações de estudo, definida por Pais (2011) como uma situação na qual o elemento professor pode não fazer parte do processo, consulte também as listas de teses e dissertações publicadas pela revista Zetetiké encontrando mais dois trabalhos que atendiam aos critérios por mim estabelecidos, totalizando, ao final desse processo, nove dissertações brasileiras, as quais passaram a compor o *corpus* definitivo da metanálise.

Seguem as referências do *corpus*, juntamente com quadros que contém as informações gerais de cada uma das nove dissertações de mestrado selecionadas para a metanálise.

-*Corpus* da metanálise:

BURIGATO, Sonia M. M. S. **Estudo de dificuldades na aprendizagem da fatoração nos ambientes:** papel e lápis e software aplusix. 2007. 154 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Ciências Humanas e Sociais, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, 2007

FONTALVA, Gerson M. **Um estudo sobre inequações:** entre alunos do ensino médio. 2006. 132 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2006

FREITAS, Marcos A. **Equações do 1º grau:** métodos de resolução e análise de erros no Ensino Médio. 144 f. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2002.

GIL, Katia H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra.** 2008. 118 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2008.

NOTARI, Alexandre M. **Simplificação de frações aritméticas e algébricas**: um diagnóstico comparativo dos procedimentos. 2002. 119 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) –Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2002.

PEPECE JUNIOR, Antonio R. **Análise da produção escrita de estudantes da EJA em atividades algébricas**. 2011. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2011.

PINTO, Renata A. **Erros e dificuldades no ensino da álgebra**: o tratamento dado por professoras de 7ª série em aula. 1997. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação, área de concentração Educação Matemática). - Faculdade de Educação, CEMPEM, Unicamp, Campinas, SP, 1997.

SCARLASSARI, Nathalia T. **Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental**. 2007. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, SP, 2007

VIDAL, Sara Jane R. B. **Exploração didática do erro no ensino de equação do 1º grau**. 2008. 133 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, 2008.

**Quadro 2: Informações gerais da pesquisa de Notari (2002)**

<b>AUTOR</b>	ALEXANDRE MARQUES NOTARI
<b>TÍTULO</b>	Simplificação de frações aritméticas e algébricas: um diagnóstico comparativo dos procedimentos
<b>PALAVRAS-CHAVE</b>	Frações Aritméticas e Algébricas; Equivalência de Frações; Procedimentos de Simplificação; Erros
<b>INSTITUIÇÃO</b>	Pontifícia Universidade Católica – PUC – SP
<b>ORIENTADOR</b>	Anna Franchi
<b>ANO</b>	2002

<b>PROGRAMA</b>	Mestrado em Educação Matemática
<b>OBJETIVO</b>	Obter um diagnóstico sistemático dos principais erros e dificuldades manifestados por alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio na simplificação de frações aritméticas e algébricas.

**Quadro 3: - Informações gerais da pesquisa de Pepece Junior (2011)**

<b>AUTOR</b>	<b>ANTONIO RAFAEL PEPECE JUNIOR</b>
<b>TÍTULO</b>	Análise da produção escrita de estudantes da EJA em atividades algébricas
<b>PALAVRAS-CHAVE</b>	Educação Matemática; EJA; Educação de Jovens e Adultos; Engenharia Didática; Pensamento Algébrico; Erro
<b>INSTITUIÇÃO</b>	Universidade Estadual de Londrina – UEL, PR
<b>ORIENTADOR</b>	Angela Marta Pereira Savioli
<b>ANO</b>	2011
<b>PROGRAMA</b>	Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.
<b>OBJETIVO</b>	Investigar indícios de pensamento algébrico e possíveis erros na produção escrita de estudantes da EJA em atividades algébricas envolvendo equações de primeiro grau.

**Quadro 4: Informações gerais da pesquisa de Fontalva (2006)**

<b>AUTOR</b>	<b>GERSON MARTINS FONTALVA</b>
<b>TÍTULO</b>	Um estudo sobre inequações: entre alunos do ensino médio

<b>PALAVRAS-CHAVE</b>	Inequações; Desigualdades; Álgebra; Ensino Médio
<b>INSTITUIÇÃO</b>	Pontifícia Universidade Católica – PUC – SP
<b>ORIENTADOR</b>	Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão
<b>ANO</b>	2006
<b>PROGRAMA</b>	Mestrado em Educação Matemática
<b>OBJETIVO</b>	Investigar quais são as dificuldades apresentadas para a resolução de inequações

**Quadro 5: Informações gerais da pesquisa de Gil (2008)**

<b>AUTOR</b>	<b>KATIA HENN GIL</b>
<b>TÍTULO</b>	Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra
<b>PALAVRAS-CHAVE</b>	Linguagem Algébrica; Álgebra; Ensino e Aprendizagem.
<b>INSTITUIÇÃO</b>	Universidade Católica do Rio Grande do Sul
<b>ORIENTADOR</b>	Ruth Portanova
<b>ANO</b>	2008
<b>PROGRAMA</b>	Mestrado em Educação em Ciências e Matemática
<b>OBJETIVO</b>	Compreender as dificuldades encontradas pelos alunos de 7 <sup>a</sup> série no entendimento dos conceitos e procedimentos que envolvem o estudo de álgebra e propor alternativas de solução.

**Quadro 6: Informações gerais da pesquisa de Freitas (2002)**

<b>AUTOR</b>	<b>MARCOS AGOSTINHO DE FREITAS</b>
<b>TÍTULO</b>	Equações do 1º grau: métodos de resolução e análise de erros no ensino médio.
<b>PALAVRAS-CHAVE</b>	Não fornecido
<b>INSTITUIÇÃO</b>	Pontifícia Universidade Católica – PUC – SP
<b>ORIENTADOR</b>	Anna Franchi
<b>ANO</b>	2002
<b>PROGRAMA</b>	Mestrado em Educação Matemática
<b>OBJETIVO</b>	Estudar aspectos relativos à compreensão dos procedimentos nas resoluções das equações de 1º grau..

**Quadro 7: Informações gerais da pesquisa de Scarlassari (2007)**

<b>AUTOR</b>	<b>NATHALIA TORNISIELLO SCARLASSARI</b>
<b>TÍTULO</b>	Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental.
<b>PALAVRAS-CHAVE</b>	Ensino da Álgebra; Nexos Conceituais; Dificuldades; História da Álgebra; Ensino Tradicional.
<b>INSTITUIÇÃO</b>	Unicamp
<b>ORIENTADOR</b>	Anna Regina Lanner de Moura
<b>ANO</b>	2007
<b>PROGRAMA</b>	Mestrado em Educação

<b>OBJETIVO</b>	Comparar entre as dificuldades apresentadas pelos alunos sujeitos a uma situação A de ensino, com as dificuldades apresentadas pelos alunos sujeitos a uma situação B de ensino, desenvolvida nesta pesquisa.
-----------------	---

**Quadro 8: Informações gerais da pesquisa de Pinto (1997)**

<b>AUTOR</b>	<b>RENATA ANASTÁCIO PINTO</b>
<b>TÍTULO</b>	Erros e dificuldades no ensino da álgebra: o tratamento dado por professoras de 7 <sup>a</sup> série em aula.
<b>PALAVRAS-CHAVE</b>	Não fornecido
<b>INSTITUIÇÃO</b>	Unicamp
<b>ORIENTADOR</b>	Dario Fiorentini
<b>ANO</b>	1997
<b>PROGRAMA</b>	Mestrado em Educação
<b>OBJETIVO</b>	Investigar e analisar o modo como os professores tratam/enfrentam, em aula, as situações de erro ou dificuldade, suas e dos alunos, que surgem no processo de ensino/aprendizagem da álgebra elementar.

**Quadro 9: Informações gerais da pesquisa de Vidal (2008)**

<b>AUTOR</b>	<b>SARA JANE ROCHA BRITO VIDAL</b>
<b>TÍTULO</b>	Exploração didática de erro no ensino de equação do 1 <sup>o</sup> grau
<b>PALAVRAS-CHAVE</b>	Erros; Matemática; Equações; Estratégias

<b>INSTITUIÇÃO</b>	Universidade Federal do Ceará – UFCE
<b>ORIENTADOR</b>	Maria Gilvanise de Oliveira Pontes
<b>ANO</b>	2008
<b>PROGRAMA</b>	Mestrado em Educação
<b>OBJETIVO</b>	Investigar estratégias dos professores, diante de erros ou dificuldades dos alunos, no estudo de equações do 1º grau.

**Quadro 10: Informações gerais da pesquisa de Burigato (2008)**

<b>AUTOR</b>	<b>SONIA MARIA MONTEIRO DA SILVA BURIGATO</b>
<b>TÍTULO</b>	Estudo de dificuldades na aprendizagem da fatoração nos ambientes: papel e lápis e software aplusix.
<b>PALAVRAS-CHAVE</b>	Álgebra; Teoremas em Ação; Educação; Campo Conceitual
<b>INSTITUIÇÃO</b>	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
<b>ORIENTADOR</b>	Marilena Bittar
<b>ANO</b>	2007
<b>PROGRAMA</b>	Mestrado em Educação
<b>OBJETIVO</b>	Estudar as dificuldades dos alunos em fatorar expressões algébricas.

Convém ressaltar que, três trabalhos selecionados (FREITAS, 2002; NOTARI, 2002; BURIGATO, 2007) não foram pesquisas desenvolvidas em turmas específicas de sala de aula. Nessas pesquisas, as atividades propostas para análise foram feitas com grupos de alunos voluntários, que não faziam parte de uma situação de aula, pois os professores não tiveram

nenhuma participação na pesquisa. Porém, eles foram incluídos no *corpus* da metanálise por possuírem claramente, em seus objetivos, a intenção de investigar os erros e dificuldades dos alunos.

Após uma breve leitura dos textos completos desses trabalhos, estes foram classificados de acordo com o conteúdo algébrico das pesquisas. Como foi descrito anteriormente, as pesquisas selecionadas trataram da problemática das dificuldades e erros dos alunos em álgebra, porém temos pesquisas que investigaram as dificuldades dos estudantes em frações algébricas, outras em equações, outra em inequações. Assim, houve uma primeira classificação que permite ao leitor ter uma visão mais ampla do que as pesquisas estavam investigando.

**Quadro 11: Temas da Álgebra desenvolvidos nas pesquisas**

<b>TEMAS DA ÁLGEBRA</b>	<b>PESQUISAS RELACIONADAS</b>
Equação do 1º grau	Pepece Junnior (2011); Freitas (2002), Vidal (2008)
Expressões algébricas	Burigato (2007)
Frações aritméticas e algébricas	Notari (2002)
Inequações	Fontalva (2006)
Sem delimitação de um tema específico do currículo escolar*	Pinto (1997), Scarlassari (2007), Gil (2008)

\* Não apresentam uma preocupação em analisar erro em um conhecimento específico da álgebra. A pesquisa ocorreu em situações diversas em sala de aula.

Segundo a orientação de Fiorentini e Lorenzato (2006), esses nove trabalhos passaram a ser detalhadamente fichados e analisados, conforme os itens que constam em uma ficha que foi preparada inicialmente por mim, com a ajuda do meu orientador. Essa ficha, que apresento a seguir, contém a problemática/problema da pesquisa, objetivo, referencial teórico, metodologia e resultados/conclusões.

**Quadro 12: Ficha para coleta de informações de dissertações que investigam erros e dificuldades dos alunos no processo de ensino e aprendizagem da álgebra elementar**

<p><b>Identificação</b> (título, autor(es) e instituição) e <b>Nível</b> (mestrado, doutorado, outros)</p>	<p><b>Problemática/Problema</b></p>	<p><b>Objetivos</b></p>	<p><b>Tratamento teórico do problema ou da questão investigativa</b> (principais conceitos-chaves tratados teoricamente e autores nos quais se apoia)</p>
<p><b>Metodologia de pesquisa</b> (como a questão foi respondida, incluindo sujeitos, instrumentos e metodologia de coleta de dados)</p>	<p><b>Metodologia de análise dos dados</b>  (como foi feita a análise ou interpretação das informações coletadas na pesquisa de campo; eixos ou categorias de análise)</p>	<p><b>Resultados</b> (respostas obtidas para a questão investigativa ou objetivo da pesquisa)</p>	

### 3.2 - SOBRE O PROCESSO DE METANÁLISE

Com o intuito de estabelecer relações entre os documentos analisados (dissertações de mestrados), percebendo semelhanças e diferenças entre os erros e dificuldades dos alunos encontrados nas pesquisas, assim como verificar a forma com que os pesquisadores lidam com os erros, procurei responder às questões da pesquisa:

- Que tipos de erros e/ou dificuldades dos alunos em álgebra elementar podem ser identificados nas dissertações?
- Que concepções de educação algébrica estão implícitas ou explícitas nas pesquisas?
- Quais os modos de os pesquisadores e/ou professores colaboradores dessas pesquisas lidarem com os erros no ensino e aprendizagem da álgebra elementar?
- Que relações podem ser estabelecidas entre as concepções de ensino de álgebra, os tipos de erros cometidos pelos alunos e os modos de os pesquisadores lidarem com eles?

A quarta pergunta desta pesquisa, permitirá obter um elemento importante da metanálise que é a obtenção de novos resultados a partir do confronto dos resultados das dissertações metanalisadas. Assumindo como hipótese de trabalho que os erros e dificuldades dos alunos estão estreitamente relacionados aos modos de conceber e realizar o ensino da álgebra em sala de aula, através das questões colocadas acima, verificarei como se dá essa relação a partir da identificação dos erros, do modo que os pesquisadores/professores lidam com os erros e o modo como estes concebem o ensino da álgebra.

Na literatura brasileira, ainda são poucos os manuais que tratam da metanálise como metodologia de pesquisa, sobretudo na área da educação. Entretanto, no campo da Educação Matemática é possível encontrar alguns estudos que utilizam essa metodologia. Como exemplo, cito as pesquisas de Silva (2011) que foi uma dissertação que teve como objetivo verificar qual a abordagem teórica e quais as diferenças na forma de entendimento do termo “resolução de problemas”, em um conjunto de nove dissertações e uma tese no período de 1992 a 2009.

Também houve a pesquisa de Martins (2008) que objetivou verificar como as equações algébricas no Ensino Fundamental são tratadas em um conjunto de nove dissertações brasileiras entre os anos de 1998 e 2004. A pesquisa de Viana Filho (2012) teve como objetivo investigar possíveis contribuições da modelagem matemática para o ensino de função na Educação Básica, através da metanálise de sete dissertações de mestrado no Brasil.

Alguns outros trabalhos tiveram como objetivo a análise de produções já existentes. O artigo publicado por Passos et al (2006), na revista *Quadrante*, fez uma metanálise de estudos brasileiros buscando investigar a formação e o desenvolvimento profissional do professor que ensina Matemática, tendo como *corpus* da metanálise um conjunto de onze pesquisas, dentre teses e dissertações, concluídas no período de 1998 a 2003. Outro artigo que fez uso da metanálise (ou metassíntese) para analisar o processo de aprendizagem profissional do professor em comunidades investigativas foi publicado em 2012 por Fiorentini e Coelho, intitulado *Aprendizagem profissional de professores em comunidades investigativas*, tendo como material de análise as dissertações de mestrado produzidas por duas professoras.

Listados alguns trabalhos que fizeram uso da metanálise, discorrerei sobre o processo de categorização que foi importante para a organização e análise das dissertações.

No processo de categorização, foi preciso realizar diversas leituras mais profundas do *corpus* da pesquisa, pois de acordo com Bardin (2004):

... classificar elementos em categorias impõe a investigação do que cada um deles tem em comum com outros. O que vai permitir o seu agrupamento é a parte comum existente entre eles. É possível, contudo, que outros critérios insistam noutros aspectos de analogia, talvez modificando consideravelmente a repartição anterior. (BARDIN, 2004, p. 112).

A categorização não é um processo simples, exigindo do autor, diversas idas e vindas, organização e reorganização das categorias iniciais estabelecidas, com o propósito de encontrar a melhor maneira, mais clara, fiel e homogênea de categorizar. De acordo com Laville e Dione

(2008), “pouco a pouco essa se estabiliza, suas rubricas desenham-se mais nitidamente, os enunciados ambíguos, de início deixado à parte, conseguem encontrar seu lugar, assumindo as categorias sua forma definitiva”. (p. 219).

Moraes (2003) distingue dois tipos básicos de categorias, tendo em vista o momento em que elas são construídas no processo de pesquisa:

- Categorias *a priori*: para o autor, a determinação dessas categorias é feita antes da análise do *corpus* da pesquisa. As categorias são deduzidas a partir da teoria existente antes do processo de análise. Para essa construção, é usado o método dedutivo.

- Categorias emergentes (*a posteriori*): o método indutivo é utilizado para a construção de categorias após uma leitura atenta e sensível dos textos ou documentos. “Por um processo de comparação e contrastação constantes entre as unidades de análise, o pesquisador vai organizando conjuntos de elementos semelhantes.” (MORAES, 2003, p. 197).

Para a presente pesquisa, optei pelas categorias emergentes, por entender que é difícil prever as categorias antes da leitura das pesquisas. Além disso, cada autor pode ter trabalhado com referenciais e concepções diferentes, os quais não são possíveis prevê-los ou defini-los previamente. Algumas perguntas, entretanto, foram definidas inicialmente, e procurei as respostas nas pesquisas, organizando-as em quadros que pudessem ajudar a construir categorias a partir de pressupostos e concepções dos pesquisadores.

Para uma boa categorização, alguns elementos são importantes e para muitos autores (Laville; Dione; Bardin; Moraes) algumas propriedades são comuns a todas elas como, por exemplo: pertinência das categorias, no sentido de que cada categoria permita um agrupamento fidedigno dos documentos que representam adequadamente as informações; homogeneidade, de modo que o objetivo dessa propriedade é manter em uma categoria elementos que sigam os mesmos princípios que determinaram a criação desta. E um importante e divergente elemento que tem como objetivo definir uma boa categorização é com relação à propriedade de exclusão mútua. Bardin (2004) e Laville e Dione (2008) defendem o uso de categorias mutuamente exclusivas na qual um documento, ou uma análise, não pode ser enquadrada em mais de uma

categoria ao mesmo tempo. Não segui essa última propriedade por concordar com Moraes (2003) que faz uma justificativa para a não utilização do princípio da exclusão mútua:

Uma mesma unidade pode ser lida de diferentes perspectivas, resultando em múltiplos sentidos, dependendo do foco ou da perspectiva em que seja examinada. Por essa razão, aceitamos que uma mesma unidade possa ser classificada em mais de uma categoria, ainda que com sentidos diferentes. (MORAES, 2003, p. 199).

Nos próximos capítulos, desenvolvo a metanálise da presente pesquisa, tendo como *corpus* de análise as nove dissertações de mestrado brevemente descritas neste capítulo. No início, apresento um “resumo” das dissertações, objetivando situar o leitor sobre o tema, referencial, metodologia e resultados ou conclusões das pesquisas. Além disso, busco identificar, através das atividades desenvolvidas pelos pesquisadores, a concepção de educação algébrica subjacente a cada pesquisa. Posteriormente, a análise passa a ser feita a partir de dois eixos: tipologia dos erros e o tratamento dado aos erros. No eixo da tipologia de erros, procuro identificar os erros identificados nas pesquisas, considerando erros de natureza mais procedimental ou sintática, e erros de natureza mais conceitual ou semântica. No eixo do tratamento dos erros, busquei identificar as concepções, ou modo de ver os erros e dificuldades dos alunos, pelos autores e professores colaboradores das dissertações analisadas, tomando como referência autores citados no capítulo 2 na seção de tratamento do erro. Nesses dois eixos de análise, algumas sínteses foram produzidas de modo a organizar os dados para poder responder à pergunta: que relações existem entre os erros identificados, as concepções de educação algébrica e a forma de lidar com os erros?

## **CAPÍTULO 4 – UMA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO METANALÍTICA DO *CORPUS DE ANÁLISE***

Nesta seção, com o objetivo de apresentar ao leitor as dissertações escolhidas para a metanálise, começo uma síntese de cada trabalho, destacando o referencial utilizado, a metodologia e a análise dos dados feita pelos pesquisadores, assim como os principais erros que foram identificados nas pesquisas. Com base nas diferentes concepções de educação algébrica apresentadas no capítulo 2, procurei relacioná-las com as concepções que estavam de forma implícitas ou explícitas nos trabalhos selecionados, com o objetivo de responder a segunda pergunta de minha pesquisa: Que concepção de educação algébrica está implícita ou explícita em cada pesquisa?

Nessa parte inicial, essa análise foi feita em cada trabalho separadamente, por ordem alfabética dos autores, para no próximo capítulo, fazer o cruzamento dos resultados das pesquisas.

### **ALEXANDRE MARQUES NOTARI**

A pesquisa de Notari (2002) teve como objetivo obter um diagnóstico sistemático dos principais erros e dificuldades manifestados por alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio na simplificação de frações aritméticas e algébricas. A pesquisa de campo foi desenvolvida em duas turmas, uma do nono ano do Ensino Fundamental e outra do primeiro ano do Ensino Médio, em duas escolas públicas distintas do Estado de São Paulo. Para atingir o objetivo, o autor realizou primeiramente a aplicação de um questionário diagnóstico para 65 (sessenta e cinco) alunos, com oito questões divididas em dois grupos: o primeiro grupo envolvia simplificação de frações aritméticas e o segundo grupo continha questões de simplificação de frações algébricas, conforme explica Notari (2002):

No instrumento diagnóstico sobre Aritmética, nossa principal preocupação foi, como se indicou no Capítulo III, a de obtermos informações não apenas sobre o acerto ou o erro da resposta dada pelo aluno, mas também sobre os procedimentos utilizados na simplificação das frações aritméticas. [...]. No instrumento diagnóstico sobre as expressões algébricas, nos preocupamos com a identificação e agrupamento dos erros em categorias, uma vez que as questões exigiam apenas a tarefa de simplificação. (p.41)

Segundo Notari (2002), a análise dos resultados foi realizada através da categorização dos procedimentos e dos erros cometidos pelos alunos, definindo análises de natureza qualitativa e quantitativa. Com relação à análise quantitativa dos dados, o autor criou tabelas em que constavam os procedimentos utilizados para a resolução das atividades relacionadas à simplificação de frações aritméticas, registrando o número de procedimentos corretos, inadequados e sem resposta, de cada categoria considerada por ele. Nessa parte quantitativa da análise, os erros não aparecem. As informações são gerais contendo apenas a quantidade de respostas corretas e incorretas, ou respostas em branco. Finalizada a análise dos dados na forma quantitativa, nos exercícios referentes à simplificação das frações aritméticas, o autor começou a análise dos exercícios que envolviam simplificação de frações algébricas.

Um episódio relatado por Notari (2002) foi um erro cometido pelos alunos na simplificação da expressão  $\frac{7xy}{8x}$ . O autor comenta que dois alunos simplificaram corretamente, mas depois igualaram a expressão a zero para determinar um possível valor para y, reproduzindo um erro bastante comum nas pesquisas que tratam das dificuldades dos alunos em álgebra.

A necessidade que os alunos têm de apresentar uma resposta numérica única faz com que eles procurem o valor da incógnita através da igualdade. De acordo com Lins e Gimenez (1997), os alunos têm muita dificuldade na “não-aceitação da falta de fechamento”, noção elaborada pelo psicólogo e pesquisador Kevin Collins, e que foi discutida no capítulo 2.

Com relação à análise quantitativa realizada por Notari (2002), o autor identificou e agrupou os seguintes erros cometidos pelos alunos nas atividades referentes à simplificação das frações algébricas:

- transformação da resposta simplificada em equação. Para o autor, ao obter o resultado  $\frac{7xy}{8x}$ , o aluno fez a simplificação correta  $\frac{7y}{8}$ , porém, igualou essa expressão a zero com o objetivo de “achar” o valor de y.

- transposição da variável do denominador para o numerador. A questão pedia para simplificar a expressão  $\frac{12x}{4yz}$ . O aluno resolveu corretamente  $\frac{3x}{yz}$ , mas escreveu como resposta final  $3xyz$ .

- cálculo do produto ou potência entre coeficiente e expoente da variável. O aluno fez a seguinte simplificação:  $\frac{4x^3}{2x^2} = \frac{64x}{4x} = 16$ ;

- simplificação parcial. O aluno apresentou como resposta final a fração  $\frac{12x}{4yz}$ , sem simplificar os coeficientes.

Nas demais questões, alguns erros foram novamente identificados pelo autor e outros surgiram a depender das questões. Faço o registro dos novos erros identificados:

- adição de número com termo algébrico. Ex:  $\frac{4x + 11xy}{x} = 4 + 11y = 15y$

- adição de coeficientes de termos não semelhantes. Ex:  $\frac{4x + 11xy}{x} = \frac{15x^2y}{x} = 15xy$ .

- simplificação de apenas um dos termos. Ex:  $\frac{4x + 11xy}{x} = 4 + 11xy$ ;

- fatoração de expressões pela evidência do fator comum. Ex:  $\frac{4x \cdot 11xy}{x} = \frac{x(4 \cdot 11y)}{x}$ ;

- simplificação do quociente como se fosse soma. Ex:  $\frac{4x \cdot 11xy}{x} = \frac{4x}{x} \cdot \frac{11xy}{x}$ .

As análises dos erros acima, identificados por Notari (2002), foi realizada de forma quantitativa, com o autor fazendo um comparativo da porcentagem dos erros cometidos pelos alunos da 8ª série (nono ano) com os alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Na análise qualitativa, o autor fez uso de entrevistas com os alunos, fazendo perguntas que visavam descobrir o porquê do erro e das dificuldades que eles tiveram para resolver as atividades. Essa fase foi realizada com apenas 12 alunos (dentre os 65 que responderam ao teste) que foram selecionados a partir de dois critérios. O primeiro critério foi selecionar alunos que cometeram diversos tipos de erros nas simplificações das frações; e o segundo critério foi selecionar alunos que tiveram um bom desempenho, acertando quase todas as questões propostas. Na entrevista, Notari (2002) fez com que o aluno que não conseguiu acertar a questão, tentasse novamente resolvê-la de outras maneiras, mas sem indicar a resposta correta para ele.

Em uma das entrevistas realizadas, o autor percebeu que a aluna tinha o conhecimento de como resolver a questão, que consistia em simplificar a fração  $\frac{7 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 5 \cdot 4}$ , pois a partir das suas indagações, a aluna conseguiu resolver de forma correta. Assim, a análise de erros por parte do pesquisador permitiu que a aluna verificasse a sua resolução, entendendo o seu erro e superando-o.

Notari (2002) citou Booth para fazer referência à relação que a aritmética tem com a prática escolar, observada nas respostas dos alunos, de não considerar propriedades formais que possam vir ajudar na manipulação das expressões aritméticas, que conseqüentemente, possibilitariam uma melhora na compreensão das expressões algébricas auxiliando nas dificuldades que os alunos têm em aritmética e que se perpetua para a álgebra. Para Notari (2002), “A álgebra não se reduz a “generalização” da Aritmética, porque as regras formais de reescritas operam sobre as expressões algébricas e literais e, embora encontrem um fundamento no domínio aritmético, se inserem em um domínio conceitual próprio.” (p.10).

Como citado também no capítulo 2, Booth (1995) acredita que algumas dificuldades que os alunos apresentam na Álgebra são na verdade dificuldades decorrentes do campo da aritmética. Notari (2002) comenta:

Nas respostas dos alunos, existem indicações claras de que a prática escolar reforça uma determinada relação com a Aritmética, centrada em procedimentos computacionais, não se considerando a possibilidade de uma manipulação de expressões aritméticas pela aplicação das propriedades formais das operações implícitas nas transformações realizadas. (NOTARI, 2002, p.70).

Apesar da pesquisa não envolver elementos que caracterizam uma situação didática definida por Pais (2011), que consiste em estabelecer relações pedagógicas entre professor, aluno e saber, o autor conseguiu perceber, pelos resultados dos exercícios e pelas entrevistas, que o ensino prioriza mais os procedimentos do que os conceitos, concluindo que existe uma uniformidade dos procedimentos, nas simplificações aritméticas, e uma grande variedade de erros e dificuldades presentes no estudo das frações algébricas. Como proposta para melhorar o ensino da Álgebra, Notari (2002) sugeriu:

... um ensino de Álgebra escolar que não se centralize nos aspectos sintáticos nem nos semânticos, mas que contextualize os conceitos e procedimentos matemáticos priorizando, conjuntamente, esses dois aspectos. Essa conjunção deve acontecer em múltiplas vias, tais como: a resolução de problemas, generalização de padrões geométricos/figurativos, onde o aluno possa perceber e descrever regularidades, utilizando-se de diferentes linguagens, produzindo expressões aritméticas generalizáveis. (p.85-86).

O autor também criticou o ensino com base na memorização de procedimentos, pois, para ele, dessa forma há um maior número de erros por parte dos alunos.

Além dessa proposta para o ensino da álgebra, Notari (2002) foi mais específico em dar algumas contribuições para a simplificação das frações aritméticas e algébricas, dentre elas, Notari (2002) sugere que seja dada ênfase ao número na forma fatorada, com o objetivo de evidenciar melhor as propriedades da multiplicação. Apesar de, nas suas conclusões, o autor revelar um discurso que se aproxima de uma concepção de educação algébrica exploratória, a

pesquisa de Notari foi baseada em atividades que foram independentes de objetos concretos, figuras ou problemas, com foco nos procedimentos e regras que os alunos utilizaram no processo de simplificação, se aproximando de uma concepção fundamentalista-estrutural, conforme definem Fiorentini, Miorim e Miguel (1993).

#### ANTONIO RAFAEL PEPECE JUNIOR

A pesquisa de Pecece Junior (2011) teve por objetivo investigar indícios de pensamento algébrico e possíveis erros na produção escrita de estudantes da EJA em atividades algébricas envolvendo equações de primeiro grau. A pesquisa de campo foi realizada inicialmente com onze alunos do nono ano da modalidade da Educação de Jovens e Adultos – EJA, de uma escola pública da cidade de São Paulo. Para a realização da pesquisa houve a aplicação de um pré-teste com duas questões, nas quais não houve a interferência do professor e nem a ajuda dos colegas para resolver. O referencial metodológico seguido pelo autor foi baseado na Engenharia Didática proposta por Artigue e Almouloud. De acordo com Almouloud (2007), a Engenharia Didática é uma modalidade de pesquisa com base em “realizações didáticas” nas quais é possível construir, realizar, observar e analisar as sessões de ensino. Também houve uma etapa de análise de livros didáticos, que não será explorada por mim por não fazer parte dos objetivos de minha pesquisa. O conteúdo escolhido para o teste diagnóstico foi situações-problema que envolvessem equações do primeiro grau.

No início da aplicação do teste diagnóstico, para a montagem da sequência didática, o autor chamou a atenção para o fato dos alunos pedirem um exemplo para poder resolver as questões justificando que a professora deles sempre fazia dessa forma, deixando assim, os alunos acostumados com modelos de resolução. Pecece Junior (2011) fez referência a Paulo Freire ao relacionar esse tipo de postura dos alunos, em seguir padrões, com a Educação Bancária na qual o estudante é visto como um mero receptor de conhecimentos.

Na análise do teste, o autor identificou alguns erros cometidos pelos alunos na interpretação dos problemas algébricos, classificando-os em erros de interpretação de enunciado e erros por falta de conhecimento. Pepece Junior (2011) analisou a resolução de alguns alunos e percebeu que eles tiveram dificuldades em trabalhar com valores desconhecidos. Observou também, entre os alunos, a conotação negativa que o erro tinha sobre eles, pois muitos tiveram o receio de apresentar soluções incorretas.

Uma forma que o autor utilizou para conhecer melhor os sujeitos de sua pesquisa foi fornecer para eles um questionário com questões pessoais que se referiam à vida escolar deles, os motivos que o levaram a abandonar os estudos, e a retornarem para a escola (lembrando que a pesquisa foi realizada com alunos da modalidade EJA).

Antes da aplicação da Engenharia Didática, Pepece Junior (2011) fez um pré-teste com a finalidade de ajudar na elaboração das atividades. Esse pré-teste continha situações-problema abordando equações do primeiro grau, retiradas dos livros didáticos fornecidos pelo governo para estudantes da EJA e foi aplicado com os alunos do nono ano. Depois da análise do pré-teste, o autor seguiu a pesquisa de campo com várias atividades, tendo agora uma amostra de sete alunos que ele nomeou de A1 a A7. Para cada atividade, Pepece Junior (2011), utilizou a Engenharia Didática proposta por Artigue com análises *a priori*, que buscam validar hipóteses ou questões levantadas na análise prévia; análises *a posteriori*, que consistem nos resultados da análise da atividade, e a validação que é o “confronto” das análises *a priori* com as análises *a posteriori*.

Para Pepece Junior (2011), o desenvolvimento do pensamento algébrico consiste na utilização de termos desconhecidos, apresentação de cálculos numéricos expressando uma estratégia de resolução, no equacionamento de situações-problema e na apresentação de alguma resolução. Essa concepção de desenvolvimento do pensamento algébrico diferencia, em parte, com a concepção exploratória de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), pois a primeira ainda parece enfatizar os aspectos procedimentais e sintáticos do pensamento algébrico, enquanto que estes autores tentam contemplar a inter-relação entre as dimensões sintáticas e semânticas ou entre os aspectos procedimentais e os aspectos conceituais:

Perceberemos a existência de elementos que consideramos caracterizadores do pensamento algébrico, tais como: percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p.87)

Abaixo seguem algumas atividades elaboradas por Pepece Junior (2011) para a aplicação da sequência didática:

*Atividade 1: O dobro da minha idade é igual a 50. Qual é a minha idade?*

*Atividade 2: Recebi um aumento de R\$ 30,00 e passei a ganhar R\$ 210,00. Qual era o meu salário?*

*Atividade 3: O triplo de um número mais duas unidades é igual a onze. Que número é esse?*

*Atividade 4: A idade de Pedro é a metade da de Carlos. A soma das idades é 30 anos.*

*Atividade 5: Represente cada uma das situações abaixo e encontre a solução, justificando sua resposta:*

*1. Um número aumentado em três unidades é igual a sete. Que número é esse?*

*2. Um número menos cinco é igual a doze. Qual é esse número?*

*3. Aumentando cinco anos na idade de Antonio, obtemos 23. Qual a idade de Antonio?*

*4. O quociente de certo número por 2 resulta 25. Qual é esse número?*

*Atividade 6:*

<i>A plateia falou</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>15</i>	<i>50</i>	<i>1,5</i>	<i>25</i>
<i>O mágico respondeu</i>	<i>7</i>	<i>9</i>	<i>31</i>	<i>101</i>	<i>4</i>	<i>51</i>

*Atividade 7:*

*1. Lembrando a brincadeira do mágico da aula anterior, represente a regra usada pelo mágico (onde  $y$  é o número que o mágico respondeu e  $x$  o número que a plateia falou...)*

a)

<i>A plateia falou</i>	<i>2</i>	<i>4</i>	<i>20</i>	<i>7</i>	<i>2,5</i>	<i>0</i>
<i>O mágico respondeu</i>	<i>5</i>	<i>7</i>	<i>23</i>	<i>10</i>	<i>5,5</i>	<i>3</i>

b)

<i>A plateia falou</i>	7	14	2	9	215	10
<i>O mágico respondeu</i>	8	15	3	10	216	11

2. As tabelas abaixo representam a brincadeira de adivinhação. Complete as tabelas e indica em quais delas o resultado é igual ao número pensado. Represente algebricamente cada uma dos itens, justificando sua resposta.

<i>1ª</i>	<i>2ª</i>	<i>3ª</i>	<i>4ª</i>	<i>5ª</i>
<i>Pense em um número</i>	<i>Multiplique por 4</i>	<i>Subtraia 2 unidades</i>	<i>Divida o total por 2</i>	<i>Adicione 1</i>

<i>1ª</i>	<i>2ª</i>	<i>3ª</i>	<i>4ª</i>	<i>5ª</i>
<i>Pense em um número</i>	<i>Subtraia 3</i>	<i>Divida por 5</i>	<i>Subtraia -5</i>	<i>Multiplique por 5</i>

<i>1ª</i>	<i>2ª</i>	<i>3ª</i>	<i>4ª</i>	<i>5ª</i>
<i>Pense em um número</i>	<i>Adicione 3</i>	<i>Subtraia 3</i>	<i>Multiplique por 2</i>	<i>Divida por 2</i>

É possível observar que, nas cinco primeiras atividades propostas por Pecece Junior (2011), o objetivo é verificar se o aluno é capaz de representar simbolicamente uma expressão algébrica em uma linguagem retórica, considerando que o pensamento algébrico retórico já faz parte do conhecimento do aluno, exigindo apenas, nessas atividades, a representação simbólica desse pensamento. Portanto, no desenvolvimento da análise da atividade 7, Pecece Junior (2011) percebeu que os alunos ficaram inquietos por não terem um modelo, uma forma de como resolver a atividade. A metodologia de análise também foi modificada, pois não foram feitas apenas as

análises das respostas dos alunos. Nessa atividade, os estudantes tiveram uma maior participação com os colegas e passaram a interagir com eles, simulando problemas similares ao da atividade 7. Dessa forma, coube ao aluno, participar e tentar de forma exploratória, encontrar uma maneira de resolver o problema. De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), alguns elementos caracterizam o desenvolvimento do pensamento algébrico, como: “percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização.” (p.87). Esses elementos podem ser encontrados na resolução dos problemas 6 e 7. Porém, apesar da abordagem diferente dessas atividades, Pepece Junior (2011) não identificou outros tipos de erros. Pelo contrário, houve um aparente entendimento do enunciado da questão, mas no momento da resolução, os erros percebidos pelo pesquisador foram recorrentes como: falta de atenção, erro na apresentação das respostas, erros nas operações, dentre outros. A falta de solução para a atividade também foi considerada pelo autor como erro.

Algumas classificações de erros foram feitas pelo autor. Por exemplo, para responder à questão “*o dobro da minha idade é igual a 50. Qual a minha idade?*” O aluno A7 respondeu:  $5x = 50 \Rightarrow 5x \pm = 00$ . Pepece Junior (2011) classificou esse erro como sendo um erro por falta de conhecimento prévio, ou até mesmo decorrente da falta de conhecimento dos termos, pois ele percebeu uma total falta de compreensão por parte do aluno sobre o que a questão estava pedindo.

O autor destacou a discussão feita com os alunos após a resolução das atividades, revelando ser um momento importante para uma melhor compreensão e entendimento da atividade. Para ele:

Avançamos ao detectar indícios de pensamento na resolução dos estudantes, pois com o andamento das atividades os mesmos estão se sentindo mais à vontade para apresentar soluções, discutir situações e aquele receio inicial de apresentar soluções incorretas está sendo deixado de lado. (PEPECE JUNIOR, 2011, pg. 76)

Os momentos de interação realizados pelo pesquisador e alunos revela que as discussões em sala de aula são momentos importantes para a produção de considerações que surgem a partir das discussões em grupo. Neste caso, foi possível perceber, no relato do autor, a abertura de espaço para a interação entre o pensamento e a linguagem algébricos dos alunos de forma que estes ficaram mais à vontade para apresentarem suas resoluções sem medo de cometerem erros.

Tendo por base Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), classifico as questões elaboradas por Pepece Junior (2011) como integrantes de uma concepção de educação algébrica situada entre a linguístico-pragmática e a fundamentalista-analógica, aproximando-se da concepção exploratória, sobretudo pelas situações-problema 7.

Para melhor sintetizar os resultados obtidos por Pepece Junior (2011), faço análises gerais de cada um dos sete alunos envolvidos na pesquisa, tendo por base as resoluções das sete atividades realizadas.

Alunos:

A1 - conseguiu apresentar indícios de pensamento algébrico, transitando da linguagem retórica à simbólica e tendo resolvido todas as questões corretamente.

A2 - na maior parte das questões não mostrou solução e nem resolução, revelando ter dificuldade no entendimento do enunciado das questões, não conseguindo mobilizar e desenvolver o pensamento algébrico esperado.

A3 - Sempre apresentou soluções coerentes e corretas, revelando ter indícios de pensamento algébrico.

A4 - Conseguiu mostrar bastante interesse em entender as questões, resolvendo-as em alguns casos, evidenciando indícios de pensamento algébrico.

A5 - No início revelou algumas dificuldades de interpretação tanto da linguagem retórica como da simbólica, mas com o decorrer das análises e discussões, conseguiu apresentar indícios de pensamento algébrico articulado à linguagem algébrica.

A6 - Conseguiu de forma clara e elaborada resolver todas as questões.

A7 - Demonstrou não ter conhecimento das questões básicas matemáticas, apresentando grande dificuldade na interpretação das questões.

Nas conclusões da pesquisa, o autor se refere aos estudantes A2 e A7 como os alunos que mais tiveram dificuldades durante as atividades propostas. Para ele, o estudante A2 pode não ter sentido vontade de resolver as questões, o que é justificado pelo grande número de questões deixadas em branco, e o estudante A7 foi considerado por ele como um analfabeto funcional, por ter apresentado grande dificuldade nas resoluções das questões e até nas respostas do questionário com questões pessoais que foi entregue para ser respondido.

Destaco a importância de discutir com os alunos as resoluções das atividades, pois dessa forma a aprendizagem pode se tornar mais significativa, e o erro não é apenas apontado, procurando fazer com o que aluno perceba novas formas de resolução da atividade, e conseqüentemente ocorra uma melhora na aprendizagem. Na pesquisa de Pepece Junior (2011), em algumas atividades, percebi que os alunos tiveram alguma melhora no entendimento das questões, isto é, evidenciaram uma maior significação tanto para a linguagem retórica como para sua representação simbólica. Porém, de forma geral, esse resultado não foi muito expressivo.

O próprio autor, ao final da análise da atividade 4, percebeu que alguns erros cometidos se repetiram desde o início das atividades, mesmo àqueles que tinham sido discutidos com a turma. E esses erros e dificuldades se mantiveram no decorrer da análise das próximas questões, revelando que as discussões feitas, anteriormente, não tiveram o resultado esperado por ele após a retomada das atividades.

Um elemento considerado pelo autor que pode ter dificultado os resultados das atividades, refere-se ao comprometimento dos alunos com a atividade. Por ser uma atividade apenas diagnóstica, os alunos pareciam não ter apresentado interesse em fazê-las.

Pepece Junior (2011) conclui seu trabalho destacando, a partir da análise das atividades, os seguintes erros:

- erro por falta de conhecimento prévio dos conteúdos ou dos termos utilizados;
- erro por falta de noção das quatro operações;
- erro cometido por falta de atenção nas resoluções;
- erro na apresentação do resultado;
- erro por não apresentar solução para o problema; (para o autor, a falta de resposta foi considerada como um erro).
- erro na interpretação do enunciado.

Observa-se que o quadro de seis conclusões (excluindo a 1ª e a última), destacam aspectos procedimentais ou sintáticos dos erros. Em relação à primeira conclusão, o autor não deixa claro o que poderia ser, no contexto da álgebra elementar, um conhecimento prévio de conteúdo. Além disso, o que o autor quis dizer com “falta de conhecimento prévio dos termos utilizados?” Ele esperava que os alunos tivessem um pensamento algébrico retórico, ao indicar o estudo da álgebra? A quem caberia esse desenvolvimento do pensamento algébrico prévio? Observe que se o aluno tivesse esse pensamento algébrico (retórico), ele poderia solucionar todas as questões sem precisar utilizar a representação simbólica (isto é, sem equacionar simbolicamente uma expressão algébrica). Nesse contexto, o que significa erro de “interpretação do enunciado”? Como o aluno poderia interpretar corretamente um enunciado se ele não tem ainda um pensamento algébrico retórico?

GERSON FONTALVA

A pesquisa teve por objetivo investigar quais são as dificuldades apresentadas pelos alunos para a resolução de inequações. A pesquisa de campo foi desenvolvida inicialmente com

30 alunos voluntários do terceiro ano do Ensino Médio, de uma escola técnica estadual em São Bernardo do Campo, SP. Foram realizados dois encontros, nos quais foram entregues inequações para serem resolvidas pelos alunos, sem a interferência do professor. Juntamente com a resolução, os alunos receberam uma folha na qual justificaram a sua solução. De acordo com Fontalva (2006), a técnica na qual os alunos escrevem o que pensam, descrevendo cada passagem da resolução, é chamada de *thinking aloud* (pensando alto). O autor pretendeu, com essa técnica, analisar como os alunos justificavam as suas respostas.

O autor fez a análise dos erros partindo das análises *a priori* desenvolvidas com base no Plano de Trabalho do Docente, no qual constam os conteúdos a serem desenvolvidos no primeiro ano do ensino médio e traça o perfil do egresso desse curso; no livro didático adotado e na entrevista realizada com o professor que ministrou inequações aos alunos nos anos anteriores. Seguem as inequações que foram entregues aos alunos para os estudos da pesquisa<sup>2</sup>:

$$\begin{array}{llll} 1) 4(x-2) \leq 0 & 2) -4x+8 \geq 0 & 3) (x-2)(2x+4) \leq 0 & 4) (x-2)(2x+4) \leq 2 \\ 5) \frac{5}{(x-2)} > 0 & 6) \frac{5}{(x-2)} > 5 & 7) (x-1)(x^2-4) > 0 & \end{array}$$

A análise das respostas iniciou-se a partir de um quadro informativo construído por Fontalva (2006), com a quantidade de respostas corretas, incorretas e em branco para cada inequação. O autor percebeu que as equações de números 1 e 2 foram as que tiveram menos erros e que as equações 3 e 7 foram as que os alunos apresentaram mais dificuldades. Na comparação da quantidade de erros entre a inequação 5 e a inequação 6 (4 e 17 respostas incorretas, respectivamente), o autor atribui esse fato à inclusão de um número diferente de zero após o sinal da desigualdade.

---

<sup>2</sup> As quatro primeiras questões foram resolvidas por 30 alunos; as três últimas por 25 alunos.

Um exemplo de erro cometido por um dos alunos foi:  $\frac{5}{x-2} > 0 \Rightarrow 5 > 0(x-2) \Rightarrow 5 > 0$ .

Esse tipo de erro foi comentado pelo autor como erro do tipo “multiplicar ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos”. Para Fontalva (2006), o aluno não se preocupou com o sinal que o termo  $x-2$  poderia ter e pelo fato do denominador não ser nulo. No protocolo entregue, o aluno revela que “foi passado o denominador  $x-2$  para o outro lado, multiplicando-se por zero”.

Essa justificativa do aluno pode revelar que ele não sabe o significado de uma fração algébrica aplicando regras operatórias, como neste caso, o uso das operações inversas. Além disso, é possível perceber que o erro cometido pelo aluno, pode ser interpretado por um erro de natureza sintática, na qual o aluno aplica os procedimentos inadequados para a resolução da inequação, passando o termo algébrico que está no denominador, para o numerador, e também pode ser um erro de natureza semântica por dar indícios de que o aluno não reconhece o significado de uma fração algébrica e o que significa o termo  $x-2$ , pois não há uma preocupação do aluno com a exclusão do número 2 na resposta da questão.

Os estudantes cometem muitos erros, ao tentar aplicar, às inequações, propriedades válidas para equações. O alto número de soluções incorretas (68%) revela que grande parte dos alunos não têm a compreensão do significado de uma inequação. O autor, quando se refere à inequação  $\frac{5}{x-2} > 5$ , e percebe um número elevado de respostas incorretas se comparado com a inequação  $\frac{5}{(x-2)} > 0$ , considera o algarismo 5 após a desigualdade, um fator complicador que ele chama de variável didática. Seria mesmo um fator complicador para o aluno? A presença de um número diferente de zero após a desigualdade não revelaria uma compreensão inadequada do procedimento?

Os erros foram identificados pelo pesquisador que utilizou o referencial teórico de Tsamir, Almog e Tirosh. Abaixo, seguem alguns erros e/ou dificuldades apontados por Fontalva (2002):

- Uso inadequado da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Ex:

$$4(x-2) \leq 0 \Rightarrow 4x-2 \leq 0 \Rightarrow 4x \leq 2 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}.$$

- Dificuldades com valores excluídos. Ex:  $\frac{5}{x-2} > 5$ . Não excluir o número 2 da resposta final.

-Dedução incorreta de sinais de fatores a partir do sinal do produto/quociente. Ex: na resolução da inequação  $(x-1)(x^2-4) > 0$ , o aluno só considerou duas possibilidades,  $(x-1) > 0$  e  $(x^2-4) > 0$ , sem levar em consideração outros resultados que também faria o produto ser positivo.

- Multiplicar ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos. Ex:

$$\frac{5}{x-2} > 0 \Rightarrow 5 \cdot (x-2) > 0 \Rightarrow 5 > 0$$

- Conexões sem sentido com raízes quadradas. Ex:  $2x^2 - 8 \leq 0 \Rightarrow 2x^2 \leq 8 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow x \leq \pm 2$ .

Nesse último tipo de erro, destaco um protocolo feito por um aluno para mostrar como o aluno desenvolve o pensamento para poder resolver a inequação de número 3, listada anteriormente. O aluno desenvolve corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, chegando à seguinte inequação:  $2x^2 - 8 \leq 0$ . Depois obtém  $x^2 \leq 4$ . Nessa passagem, o aluno justifica: “Para que obtenha o resultado de x, devo colocar a raiz nos dois lados da inequação. Obtenho o resultado da raiz quadrada de 4, tendo como resultado da inequação que x deverá ser menor ou igual a 2 e menor ou igual a -2.” (p.64) Resposta,  $x \leq \pm 2$ .

A denominação utilizada pelo autor de “conexões sem sentido com raízes quadradas”, revela que o aluno comete um erro já discutido anteriormente neste trabalho, tanto no relato das pesquisas já realizadas, quanto na análise do *corpus* da metanálise, que é a aplicação de regras e procedimentos em contextos que não são válidos. Nesse caso, percebe-se que o aluno faz uso de uma frase que certamente ouviu bastante no ensino de equação do 1º grau: “tudo que faz de um lado é preciso fazer também do outro”. Assim, ao justificar, “devo colocar a raiz nos dois lados”,

o aluno consegue lembrar-se do procedimental, mas não percebe que ao final, a sua resposta  $x \leq \pm 2$ , não é adequada. Há nesse caso, um obstáculo de origem didática, pois o aluno transfere os conhecimentos adquiridos em um contexto para um outro contexto no qual ele já não é mais válido. Porém, a expressão utilizada pelo autor “sem sentido” parece não levar em consideração o sentido que essa resolução tem para o aluno. Para o pesquisador, e também para o professor, ao corrigir uma atividade que apresenta erros desse tipo, o professor pode considerar esse erro como sendo sem sentido para ele. Porém não se pode negar que, para o aluno, a resolução que ele apresentou faz algum sentido, ao menos para ele.

Se o aluno fosse convidado a explorar semanticamente, buscando outros sentidos para a expressão sintática  $2x^2 - 8 \leq 0$  ou sua equivalente  $x^2 \leq 4$ , ele poderia perguntar-se: “que número elevado ao quadrado é menor ou igual a 4? Poderia também explorar isso geometricamente “quais devem ser os valores do lado de um quadrado para que sua área seja menor ou igual a 4? Ou, ainda geometricamente, poderia representar no plano cartesiano a desigualdade  $x^2 \leq 4$  e analisar para quais valores do eixo “x” correspondem a valores do eixo “y” menores ou iguais a 4.

Essa análise nos mostra que os erros dos alunos, neste caso, são decorrentes de uma prática pedagógica que enfatiza as regras operatórias em detrimento de uma prática que privilegia a significação das expressões algébricas.

O autor da pesquisa identificou que a dificuldade maior dos alunos estava nas equações do 2º grau, pois os protocolos das inequações de 2º grau apresentaram alto índice de respostas incorretas, bem maior do que os protocolos das respostas das inequações do 1º grau. Fontalva (2006) concluiu também que a grande quantidade de erros pode ser devido ao grau maior de dificuldade no estudo das inequações, revelando que o ensino das equações do 2º grau pode não ter sido dado de forma integrada com as inequações do 1º e 2º graus.

Na interpretação dos resultados, o autor utiliza a Teoria da Interação entre os domínios de Douady. Ele percebe que alguns alunos fizeram interação entre os domínios algébricos e das representações gráficas, mas continuaram cometendo diversos erros, revelando uma falta de

compreensão dos conceitos que envolvem esses domínios. No quadro teórico utilizado para fazer a análise, Fontalva (2006), adotou os seguintes domínios:

- emprego do domínio algébrico apenas;
- emprego do domínio das representações gráficas somente;
- emprego do domínio numérico somente;
- interação entre os domínios algébricos e das representações gráficas;
- interação entre os domínios algébrico e numérico;
- interação entre os domínios das representações gráficas e o numérico;
- interação entre os domínios algébrico, das representações gráficas e o numérico.

O autor identificou que a opção dos alunos em utilizar apenas o domínio algébrico, provocou um grande número de soluções incorretas (17 erros em 24 soluções). Na interpretação das justificativas apresentadas pelos alunos, Fontalva (2006) classificou-as de acordo com as técnicas baseadas em Assude, utilizando duas técnicas principais: a técnica algébrica (TA) e a técnica algébrica com tabela de sinais (TAS). Pela sua análise, a utilização da técnica adotada variou de acordo com o tipo de inequação proposta. O autor identificou as técnicas através dos procedimentos e das justificativas escritas pelos alunos.

Ao resolver a inequação  $-4x+8 \geq 0$ , o aluno fez a seguinte justificativa: “Isolado o x obtive o resultado e assim podendo estudá-lo para obter a resposta que se encaixa ao problema”. Ao escrever a palavra estudar, é possível perceber que o aluno tem uma postura de interpretar a solução do problema, diferentemente de quando o aluno se preocupa apenas com a técnica algébrica, que é bastante procedimental e que tem o foco apenas em achar a solução sem se preocupar se o resultado obtido é coerente com a pergunta apresentada. Porém, percebe-se na maioria das respostas dos alunos e nos protocolos escritos por eles, que, na verdade, o que prevalece é o predomínio das regras operatórias, revelando ser quase que um “manual” de procedimentos a serem decorados e aplicados para encontrar a solução das inequações.

Fontalva (2006) concluiu a sua pesquisa constatando a predominância do uso das técnicas. O autor, na sua conclusão, destacou a fraca tendência à explicação de conceitos e propriedades matemáticas, percebendo que o foco dos alunos está nos procedimentos. O autor deixou claro que a instituição escolhida para a pesquisa, prioriza o ensino com ênfase em técnicas de resolução. Dessa forma, a sequência didática elaborada por ele se enquadra na concepção de educação algébrica linguístico-pragmática (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

É linguístico-pragmática porque enfatiza o transformismo algébrico e o uso de técnicas operatórias. A lista de exercícios de inequação pode ser considerada indutora dessa ênfase nos procedimentos para se obter a solução para  $x$  e, portanto, tende a provocar no aluno determinados tipos de erros de origem procedimental, isto é, erros de sintaxe. Vale ressaltar que a classificação por mim definida da sequência utilizada por Fontalva (2006), pode não refletir o pensamento do autor sobre o ensino da álgebra, pois, na sua pesquisa, não foi possível identificar nenhum indício de uma concepção própria sobre a educação algébrica. Porém, no professor entrevistado, para a elaboração do instrumento para coleta de dados, é possível identificar um ensino que foi também baseado em técnicas operatórias devido à importância que é dada por ele aos procedimentos que os alunos utilizam para resolver as equações.

KATIA HENN GIL

A pesquisa de Gil (2008) teve como objetivo compreender as dificuldades encontradas pelos alunos de 7ª série no entendimento dos conceitos e procedimentos que envolvem o estudo de álgebra e propor alternativas de solução. Foi realizada com 32 alunos de uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada na cidade de Porto Alegre. A autora fez uso de observações em sala de aula, aplicações de testes e entrevistas com alunos e professores.

A análise é feita a partir de episódios que possibilitam extrair maiores informações sobre como se dá o tratamento dos erros e dificuldades dos alunos pela professora regente da turma. Na pesquisa de Gil (2008), é possível perceber que a professora colaboradora teve uma postura de não punir o erro durante as aulas que foram observadas pela pesquisadora. Ela permitiu que os

alunos refletissem sobre as questões, revissem as suas respostas, e verificassem seus resultados. Em nenhum momento foi percebida uma pressão por parte da professora para que o aluno respondesse corretamente as atividades. Ao contrário, a professora forneceu oportunidades para discussão e posterior correção dos erros dos alunos. A própria autora da dissertação percebeu isso durante suas observações de sala de aula:

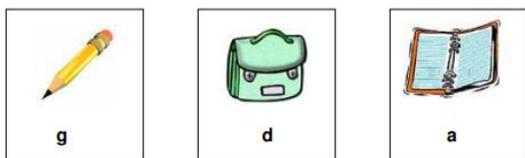
*Ela propicia que ele pare e pense sobre a situação (GIL, 2008, p.64).*

*Penso que a professora traz para os alunos atividades que propiciam a reflexão e o desenvolvimento do pensamento algébrico. Muitas foram as atividades com situação-problema nas quais os alunos foram questionados, tornando o ambiente desafiador e investigativo, e sempre proporcionando um diálogo no qual o aluno expôs o que pensa. (GIL, 2008, p.67).*

Após a análise dos episódios ocorridos em sala de aula, a autora fez a análise de um teste aplicado a turma que continha questões que abordaram principalmente o uso da linguagem algébrica.

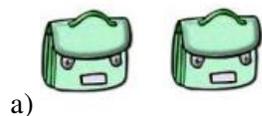
Questão retirada da atividade da pesquisa de Gil (2008, p. 69 e 71)

Bloco I – Observe as figuras abaixo e o símbolo que representa cada uma delas e faça o que se pede:



1) Represente simbolicamente cada uma das situações abaixo.

2) Escreva essas representações na forma reduzida, se possível





c)

## Bloco II

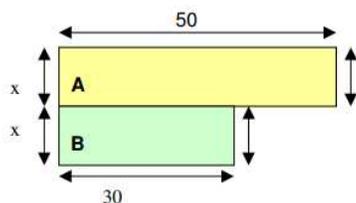
1) Represente simbolicamente cada uma das sentenças abaixo:

- a) Simoni comprou duas calças e duas camisetas.
- b) Fábio comprou três calças e duas camisetas
- c) A compra de Fábio mais a compra de Simoni.

Gil (2008) relacionou uma dificuldade com relação à redução de expressão algébrica com uma possível dificuldade em aceitar a “ausência de fechamento” nas expressões da atividade acima. Essa dificuldade já foi apontada também na pesquisa de Notari (2002). Gil (2008) menciona o item c dessa questão na qual os alunos tiveram maior índice de erro por causa da associação da aritmética com a álgebra devido os alunos buscarem respostas simplificadas, numéricas e diretas. Outra dificuldade identificada por Gil (2008) se refere às questões que apresentam imagens. Para ela, as questões do bloco I e do bloco II tinham o mesmo objetivo, porém a visualização dos objetos na primeira parte da atividade facilitou que o aluno escrevesse a expressão correspondente.

Outra dificuldade identificada por Gil (2008) foi com relação à dificuldade de interpretação dos enunciados devido ao grande número de questões que não foram resolvidas. Por exemplo, na questão abaixo, 50% dos 32 alunos que participaram da atividade, acertaram os itens a e b, enquanto que no item c, apenas 15,63% responderam corretamente.

Questão 3: Um terreno no qual estão indicadas as medidas dos seus lados tem a forma da figura abaixo:



Como você pode observar o terreno está dividido em dois lotes retangulares A e B. Qual a expressão algébrica que representa:

- a) a área do lote A?                      b) a área do lote B?                      c) a área total do terreno.

Com relação às respostas incorretas nos itens a e b, 31,25 % dos alunos deixaram em branco, 25% calcularam o perímetro ao invés da área, 18,75% representaram a variável  $x$  ao quadrado e 25% somaram os lados que são identificados na figura. Gil (2008) identificou três possíveis causas dos erros cometidos pelos alunos nessa questão: confusão entre os conceitos de área e perímetro; falta de atenção ao ler o enunciado e confusão com a linguagem algébrica.

Ao serem trabalhados, em sala de aula, situações-problema que envolveram conceitos de área e perímetro, a professora não percebeu que muitos alunos não compreenderam estes conceitos, pois foi grande o número de alunos que se confundiram e calcularam o perímetro ao invés de calcular a área dos terrenos. Apesar de ter uma postura de deixar o aluno pensar para chegar à resposta, com a participação ativa do aluno, a professora pode não ter conseguido envolvê-los na atividade, pois, houve um grande número de alunos provocando tumulto na sala de aula, o que pode ter contribuído para que ela não percebesse que os conceitos de área e perímetro ainda não estavam bem compreendidos por eles.

A opinião do professor foi destaque na pesquisa de Gil (2008), pois além de fazer as observações em sala de aula, a pesquisadora fez entrevista com mais quatro professoras que lecionavam no oitavo ano. Em uma das entrevistas realizadas, a professora relacionou a dificuldade dos alunos em álgebra com a dificuldade em entender geometria. Ela justificou que a utilização da álgebra na Geometria facilitaria a compreensão dos conceitos. Cardia (2007) desenvolveu uma pesquisa que procurou investigar como podemos utilizar a geometria como instrumento para o ensino e aprendizagem das expressões algébricas. Para ela, “uma proposta de

ensino-aprendizagem do conceito de expressões algébricas baseada em conceitos geométricos, e centrada no conceito de área enquanto grandeza, pode auxiliar o professor a criar condições favoráveis à aprendizagem pelos alunos do objeto matemático visado”, (CARDIA, 2007, p. 174-175).

Em outra entrevista realizada por Gil (2008) a professora comentou sobre a falta de maturidade dos alunos em aprender álgebra. Em um estudo realizado por Kuchemann, na Inglaterra, e publicado em 1981, o desenvolvimento intelectual da criança (de acordo com Piaget) depende do processo de maturação e a partir dessa ideia houve a sugestão de que o ensino da álgebra fosse introduzido a partir dos 14-15 anos de idade. Em consequência disso, na Inglaterra, ainda hoje se sente os efeitos da consequência dos alunos que saíram do equivalente ao Ensino Fundamental, sem nenhuma educação algébrica (LINS; GIMENEZ, 1997).

Outro ponto de vista sobre a dificuldade em ensinar e aprender álgebra foi revelado no depoimento de uma professora, no qual foi possível perceber que ela transferiu a responsabilidade da aprendizagem para o aluno. Para ela, o aluno não aprende por causa da falta de atenção e interesse. Porém, ao ser questionada pela pesquisadora sobre o uso de um ensino contextualizado, a professora revelou não trabalhar dessa forma. De acordo com Gil (2008), essa professora prioriza a mecanização do ensino da álgebra, com a aplicação de uma grande quantidade de exercícios que não promovem nenhuma reflexão sobre o tema e que, para a professora entrevistada, é dessa forma que o aluno consegue obter êxito na aprendizagem.

Uma terceira professora entrevistada também fez queixa da falta de interesse dos alunos, mas teve um postura diferente da anterior, pois para ela, cabe ao professor desenvolver a motivação no aluno. Na última entrevista, Gil (2008) destacou a importância que a professora deu à questão da linguagem no ensino da álgebra. Para ela “... a utilização de uma linguagem clara e objetiva facilita o recolhimento de conceitos já que faz com que conceitos não tenham interpretações distorcidas ou até mesmo dúbias.” (GIL, 2008, p. 89).

É possível observar diferentes concepções de ensino de álgebra nas quatro professoras entrevistadas, porém me deterei apenas a concepção de ensino da terceira professora que foi a docente colaboradora na pesquisa.

A concepção de educação algébrica fundamentalista-analógica está presente na fala da professora quando esta afirma ser importante o estudo da álgebra com a geometria. Como já foi descrito anteriormente, essa concepção defende que o uso da geometria no ensino da Álgebra facilita algumas identidades algébricas. Com relação à autora Gil, há em seu discurso indícios de uma concepção de educação algébrica baseada na concepção proposta por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) que se baseia em um ensino exploratório-investigativo e analítico de modo que os alunos possam produzir e negociar significados e mobilizar/desenvolver o pensamento algébrico. Através desses trechos escritos pela autora, é possível constatar essa concepção de educação algébrica:

*Entendo que, para que realmente se construam conceitos e se aproprie de forma efetiva dos procedimentos algébricos, é fundamental que se consiga produzir significados para o seu estudo. (GIL, 2008, p.40)*

*Dessa forma penso que o seu ensino deva ser gradual e com uma diversidade de situações-problema, objetivando que o aluno consiga apropriar-se dos seus significados, e dessa forma, possa aplicá-los nas mais diversas situações (GIL, 2008, p.46).*

Apesar de identificar, no depoimento da professora colaboradora na pesquisa de Gil (2008), a concepção de ensino de álgebra como sendo fundamentalista-analógica, a forma da condução da aula se aproxima da concepção de educação algébrica proposta por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), caracterizada por uma concepção exploratória com a aplicação de atividades que buscavam o desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme afirma Gil (2008):

Penso que a professora traz para os alunos atividades que propiciem a reflexão e o desenvolvimento do pensamento algébrico. Muitas foram as atividades com situações-problema nas quais os alunos foram investigados, tornando o ambiente desafiador e investigativo, e sempre proporcionando um diálogo no qual o aluno expôs o que pensa. (p.67).

A autora também fez entrevistas com dez alunos da turma selecionada para observação. Esses alunos foram escolhidos com base em questões de testagem que foram realizadas,

permitindo que a pesquisadora pudesse entrevistar alunos que tiveram um bom, médio e fraco aproveitamentos das questões propostas. A entrevista teve como objetivo maior, tentar estabelecer uma relação entre o gosto e a compreensão pela álgebra. Como resultado, a pesquisadora constatou que o fato dos alunos não gostarem de álgebra está relacionado ao fato deles não entenderem.

Gil (2008) concluiu sua pesquisa falando da importância que esta teve para a sua própria prática pedagógica, para reflexão dela como professora. Também constatou que grande parte das dificuldades dos alunos se dá devido à falta de pré-requisitos para a aprendizagem da Álgebra e cita que alguns procedimentos aritméticos tomados pelos alunos costumam ser inadequados no campo algébrico. Outra dificuldade percebida foi a passagem da linguagem usual para a linguagem algébrica.

Um elemento importante que trago na conclusão dessa pesquisa se refere às dificuldades dos alunos existentes durante as aulas e no teste aplicado. Apesar de a professora assumir a postura descrita anteriormente e trabalhar em sala de aula com tarefas, questionando as respostas e motivando os alunos a participarem das discussões, muitos erros foram repetidos no teste aplicado pela professora. Essa situação permite uma reflexão acerca de diversos pontos sobre os quais teço aqui meus comentários. Primeiramente, a questão da repetição dos erros nos testes pode ser consequência de uma aprendizagem que se deu de forma “temporária” durante as explicações da professora. O aluno e o professor acreditam que a aprendizagem foi significativa e que os “acertos” ocorridos durante a verificação, por exemplo, das atividades em sala de aula, proporcionaram um entendimento no assunto. Portanto, o que pode estar ocorrendo é uma “sensação” de aprendizagem que permite com que o aluno observe e corrija os seus erros naquele momento dedicado a essa finalidade, e portanto, ao introduzir uma atividade fora daquele contexto, no qual a figura da professora não está presente de forma atuante, o aluno se descobre “sozinho”, não conseguindo obter o mesmo desempenho obtido durante a correção dos exercícios em sala de aula.

Outro fator a ser discutido é a aplicação de um teste de forma que esse tipo de avaliação se diferencia das atividades que estavam sendo feitas pelos alunos com a professora. Nesse

momento da aprendizagem, o aluno está sozinho, sem o acompanhamento do professor e dos colegas de classe. Nesse contexto, o aluno que conseguiu demonstrar o entendimento e compreensão de alguns conceitos no período de observação em sala de aula, com as correções e discussões de toda a classe, pode ter um rendimento diferente quando o método de avaliar se diferencia, ou se distancia da atividade primeiramente proposta e trabalhada em sala de aula.

## MARCOS AGOSTINHO DE FREITAS

A pesquisa realizada por Freitas (2002) foi desenvolvida com 104 alunos, de três turmas do primeiro ano do Ensino Médio, de uma escola particular localizada na Zona Oeste de São Paulo e teve como objetivo estudar aspectos relativos à compreensão dos procedimentos nas resoluções das equações dos 1º grau.

Foi fornecido pelo pesquisador, que era professor desta instituição, um questionário aos estudantes com vinte e quatro equações do 1º grau, divididas em dois grupos: o primeiro com oito equações aritméticas, e o segundo grupo com dezesseis equações algébricas. Também foram feitas entrevistas com oito alunos que participaram da resolução das questões acima referidas, apresentando os diversos tipos de erros detectados, sendo selecionado também, dentre os oito, um aluno que acertou todas as questões. Essa entrevista teve como objetivo entender melhor as dificuldades dos alunos.

Para Freitas (2002), o estudo do erro é importante por revelar dificuldades no processo de ensino e aprendizagem. “Neste trabalho consideramos os erros como sintomas, como sinais da presença ou existência de dificuldades.” (FREITAS, 2002, p. 60). O autor utilizou como base teórica Matz, que considera dois principais tipos de erros: os erros relacionados aos aspectos conceituais e os erros relacionados às técnicas de resolução das equações.

Um dos erros analisado por Freitas (2002) se refere a um erro de natureza conceitual. Foi pedido a um aluno que escrevesse uma equação do 1º grau, e a resposta obtida foi  $1x + 3$ . Para o autor, essa dificuldade em definir uma equação está relacionada a uma dificuldade em atribuir significado à equação o que, para ele, pode estar associado à falta de base semântica. Outro erro comentado foi quando a aluna escreveu uma equação do 2º grau no lugar de uma do 1º grau. Nas outras pesquisas descritas até esse momento, não foi possível identificar esse tipo de erro, pelo fato delas não abordarem o conceito ou as características de uma equação do 1º grau. Porém, nas pesquisas apresentadas no capítulo 1, a dificuldade em confundir expressão com equação foi detectada pela pesquisa de Hall (2002). De acordo com Freitas (2002), esse tipo de dificuldade, pode ser caracterizado, além da dificuldade conceitual em definir uma equação, com uma “dificuldade relacionada à transferência da linguagem natural para a linguagem algébrica” (FREITAS, 2002, p. 62). A presença de erros decorrentes de dificuldade na linguagem algébrica também foi apontada nas pesquisas de Pepece Junior (2011) e Gil (2008).

Outra dificuldade percebida nas pesquisas anteriores e também detectada por Freitas (2002) é com relação ao sinal de igualdade e o seu significado. Uma grande quantidade de erros do tipo  $0 = 1$ ,  $0 = -1$ ,  $6 = 0$ , revelaram, para o autor, um “não entendimento do significado de igualdade”<sup>3</sup>.

Outro erro classificado por Freitas (2002) como um erro de sintaxe foi detectado na passagem:  $3 + 2x = 0 \rightarrow 3 + 2 = -x$ . Para o autor, o aluno ao transformar  $2x$  em  $2 + x$ , cometeu um erro de origem sintática<sup>4</sup>. Diferentemente da análise de Freitas (2002), Pepece Junior (2011), classificou esse tipo de erro na sua pesquisa como um erro decorrente da “falta de atenção” (PEPECE JUNIOR, 2011, p. 113). Outra dificuldade encontrada na análise das questões do instrumento investigativo foi referente à transposição de termos. De acordo com o autor, “... a porcentagem total de erros, da ordem de 53% [...], pode indicar que os alunos simplesmente

---

<sup>3</sup> Em minha interpretação, algum entendimento sempre há para a igualdade. O que se pode afirmar, neste caso, é que esse entendimento da igualdade não é algébrico, isto é, não expressa uma relação de equivalência.

<sup>4</sup> Em minha interpretação, ele pode não ter necessariamente transformado o  $2x$  em  $2 + x$ . Ele pode ter utilizado simplesmente uma regra procedimental muito comum no ensino da álgebra que é “isolar o  $x$ .”

executam o procedimento de transposição, sem nenhum critério.” (FREITAS, 2002, p. 51). Eu diria que, na verdade, os alunos utilizam critérios inadequados para a resolução, como se percebe no trecho da entrevista abaixo:

*E: Escreva uma equação que seja do 1º grau.*

*Be:  $2x + 3 = 0$*

*E: Como a gente resolve essa equação?*

*Be:  $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3 - 2 \Rightarrow x = 1$ .*

...

*Be: Eu isolei o x e passei o 2 para o outro lado.*

*E: Mas como são feitas essas passagens?*

*Be: Passei o dois e mudei o sinal.*

Muitos professores, ao ensinar procedimentos de resolução de equações, costumam “citar” regras, nas quais o aluno absorve qual é o procedimento, mas não tem noção do que a regra explicita. Frases bastante corriqueiras do tipo “muda de lado, muda de sinal”, “passa pra lá com sinal trocado”, “isola o x”, geralmente não possuem significado semântico para o aluno. O procedimental é levado em consideração, sendo que a aplicação das regras parece ser válida para qualquer contexto, basta seguir passo a passo o que está se falando. Para Freitas (2002), no caso mencionado acima, a aluna conhece o procedimento, mas não tem o conhecimento de “operações que expressem relações equivalentes” (FREITAS, 2002, p. 69).

Na primeira parte da pesquisa, após a correção das equações, com base nas dificuldades identificadas, Freitas (2002) criou seis categorias de erros:

- alteração do sinal do coeficiente, na divisão do termo independente:  $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{-a}$ .

- transformação de  $ax = b$  em  $x = b - a$ .

- trocar a posição do coeficiente de x pela do termo independente na divisão:  $ax = b \Rightarrow x = \frac{a}{b}$ .
- efetuar a transposição de termos independentes sem alterar o sinal:  $ax + b = c \Rightarrow ax = b + c$ .
- efetuar a transposição dos termos em x sem alterar o sinal:  $ax = bx + c \Rightarrow ax + bx = c$ .
- o zero como complicador em equações em que é solução, e nas equações sem solução:  $ax = 0$  ou  $0 \cdot x = b$ , ( $b \neq 0$ ).

Na análise quantitativa, o autor procurou investigar se a maior parte dos erros nas equações do tipo  $ax + b = cx$  ou  $ax + b = cx + d$  ocorriam nos termos independentes ou nos termos em x. Freitas (2002) percebeu que os alunos não têm uma dificuldade maior nos termos independentes ou em x, mas que apresentaram uma porcentagem alta, com aproximadamente 53% de erros, que foi justificada pelo autor como um uso indiscriminado dos procedimentos de resolução das equações.

Nas equações do tipo  $ax = b$ , o erro mais identificado pelo autor foi a mudança do sinal do coeficiente de x na divisão:  $x = \frac{b}{-a}$ . Nessa análise, Freitas (2002) obteve um total de 68% de erros dos alunos nas resoluções de equações desse tipo. A análise quantitativa possibilitou que Freitas (2002) direcionasse as perguntas da entrevista para a análise qualitativa dos dados.

Como conclusão da pesquisa, Freitas (2002) fez uma síntese de cinco pontos observados que foram importantes para reflexões sobre o ensino de equações do primeiro grau.

Primeiramente, o autor destacou as dificuldades apontadas *a respeito das equações aritméticas em relação às algébricas*, destacando que a maior dificuldade dos alunos está na “instauração de uma rotina vinculada a uma falta de compreensão do conceito do que seja uma equação, e de como encontrar sua solução.” (FREITAS, 2002, p. 113). O segundo ponto importante destacado pelo autor se refere ao *método de resolução* que para ele, é necessário que o ensino seja acompanhado de compreensão com a discussão de aspectos sintático-semânticos dos procedimentos. No terceiro ponto, Freitas (2002) faz referência à *utilização de frases ou*

*expressões verbais redutoras*, com uma forte presença da linguagem coloquial nos procedimentos de resolução das equações com frases do tipo: “muda de lado, muda de sinal”, ou “passa o x pro outro lado”, ou “isola o x”. *A igualdade e a validação* foram o quarto e quinto aspectos considerados relevantes para discussão do ensino de álgebra.

O autor sugere também a necessidade de estudos que visem melhorar o “estabelecimento de inter-relações, conjunções e disjunções entre os domínios conceituais e procedimentos aritméticos e algébricos.” (FREITAS, 2002, p. 119).

É possível observar que há uma preocupação do autor com um ensino de álgebra que está mais próximo de uma concepção linguístico-pragmática, na qual as técnicas algébricas são predominantes. Para Freitas (2002), esse tipo de ensino acaba provocando nos alunos erros que são mais de caráter sintático, devido à grande preocupação que os alunos têm em aplicar as regras procedimentais. Porém, na pesquisa realizada pelo autor, não foi possível identificar uma concepção algébrica diferente da linguístico-pragmática, visto que os exercícios aplicados na pesquisa (vinte e quatro equações distribuídas em equações aritméticas e equações algébricas), não permitiram uma exploração mais conceitual das atividades, caracterizando “... um transformismo algébrico totalmente independente de objetos concretos, de figuras ou ilustrações e de problemas...” (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993, p. 84)

## NATHALIA SCARLASSARI

A pesquisa de Scarlassari (2007) teve como objetivo comparar entre as dificuldades apresentadas pelos alunos sujeitos a uma situação A de ensino, com as dificuldades apresentadas pelos alunos sujeitos a uma situação B de ensino, desenvolvida nesta pesquisa.

A pesquisa de campo foi realizada em duas situações distintas de ensino, A e B. Na situação A, a pesquisadora foi responsável por tirar as dúvidas dos alunos, em um horário definido fora da sala de aula, chamado de plantão, que tinha como finalidade tirar dúvidas que os

alunos apresentavam durante a aula com o professor regente da turma. Na situação B, a pesquisadora foi a própria professora da turma. Na situação A, a escola era da rede privada de Piracicaba, e a pesquisadora, assistia às aulas em duas turmas do atual 7º ano, fazendo registros das aulas e dos “plantões” de dúvidas realizados por ela. Na situação B, Scarlassari (2007) era a professora da turma do 7º ano, de uma escola estadual em Campinas, na qual fez registros de algumas aulas. Para poder fazer comparação entre as duas situações, a pesquisadora procurou manter, na situação B, as mesmas atividades que foram desenvolvidas na primeira situação. Para esta primeira aproximação metanalítica com a pesquisa de Scarlassari (2007), selecionei alguns episódios que me pareceram pertinentes para essa seção.

Em um episódio relatado pela pesquisadora na situação A, o professor não ofereceu ao aluno o tempo necessário para que ele próprio pudesse descobrir a solução do problema: “Quantas mesas quadradas eu preciso para acomodar 30 pessoas?”. Para Scarlassari (2007), “O problema da aprendizagem, nesse caso, provavelmente está na maneira como a aula é conduzida, pois o professor vai, diretamente, do problema para a resolução de equações com base em regras prontas, sem mostrar a lógica e a operacionalidade integradas aos contextos da realidade do aluno.” (SCARLASSARI, 2007, p. 5)

Scarlassari (2007) questionou a forma como o professor escolheu para introduzir o ensino de Álgebra, tendo afirmado que ele não possibilitou discussões de caráter semântico e não permitiu ao aluno tirar as suas próprias conclusões. A exploração das regras operatórias para resolver equações foi uma das suas prioridades, o que não ajudou quando as equações passaram a surgir de modo diferente das que foram apresentadas.

É importante destacar a postura do professor da situação A, pois percebo que para ele, introduzir o ensino de álgebra com uma situação-problema parece ser uma forma menos tradicional, porém não houve qualquer mudança na forma de ensinar. A introdução do problema não proporcionou uma compreensão mais significativa do conceito de equação, tendo o foco do ensino apenas nas técnicas operatórias.

Em outra parte da pesquisa, a autora fala sobre a dificuldade em modificar o planejamento da aula na escola particular. “As defasagens e dificuldades na aprendizagem eram levadas para os

plantões de dúvida para evitar que o professor não conseguisse cumprir o conteúdo estabelecido para aquela série.” (SCARLASARI, 2007, p.67). Entendo, a partir desse trecho, que as dificuldades dos alunos não eram consideradas como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem nessa escola, pois as dificuldades eram tidas como elementos prejudiciais à sequência do ensino.

Na situação B, a professora, que era a própria pesquisadora, teve uma postura de desenvolver atividades com os alunos que permitissem a eles “discutirem sobre suas certezas e incertezas”. (SCARLASSARI, 2007, p.70), não condenando respostas incorretas. Essa forma de ensinar permitia que o aluno errasse sem ser condenado pelo seu erro. O momento de discussão entre os alunos revelou um momento importante na superação das dificuldades e obstáculos existentes na aprendizagem.

Algumas dificuldades apresentadas pelos estudantes foram agrupadas pela autora e classificadas em categorias. Essas categorias foram:

**Quadro 13: Categorias de dificuldades**

CATEGORIAS	EXEMPLOS
Tradução Literal – na maior parte dos casos, há dificuldade em traduzir a linguagem usual para a linguagem simbólica	Pergunta (P): A metade de um número. Resposta (R): $2 \div x$
Variável – dificuldade em trabalhar com o desconhecido.	P: O antecessor de um número R: 55
Operacionalidade	P: multiplicação de um número par por cinco R: $n \times 2 + 5$
Unidade – dificuldade com o conceito de unidade	P: Um número diminuído de quatro unidades. (R): $J - 4$

Linguagem	P: Ana Lúcia andou, hoje, cinco quilômetros a mais do que anda todos os dias.  R: cinco quilômetros, 2 Km
Campo de Variação – dificuldades em assumir os limites do desconhecido.	P: os dedos de um animal.  R: 3 cm

É importante lembrar que na classificação da autora, as categorias não são excludentes, podendo um erro ter tido várias categorizações, como por exemplo, 4 subtraído do quádruplo de um número. (Resposta de um aluno: “ $4 - \text{número} \times 4$ ”). Essa resposta foi classificada em três categorias: tradução literal, operacionalidade e linguagem.

A análise da pesquisa foi feita em duas etapas: a primeira com base na definição das categorias acima, comparando as dificuldades dos alunos da situação A, com os alunos da situação B. Na segunda parte, foi feita a análise das dificuldades de alguns alunos da situação B que foram selecionados em grupos de forma aleatória.

Na primeira parte da pesquisa, a autora fez uma tabela mostrando a porcentagem dos alunos nas duas situações de ensino a partir das categorias da tabela acima. Percebi que na categoria Unidade, não houve erros na situação B, e na categoria Operacionalidade, a porcentagem de erros se manteve a mesma. Porém, houve uma redução significativa de dificuldades e erros cometidos pelos alunos da situação B em comparação com a situação A, nas categorias de Tradução Literal e Variável.

Scarlassari (2007) concluiu sua pesquisa observando que na situação B de ensino, na qual foi trabalhada uma abordagem alternativa, através de situações problemas e investigações, permitiu o desenvolvimento “de concepções e verdades que trouxeram para a sala de aula as relações dos alunos com suas realidades”. Outro fator destacado pela autora se refere à motivação e participação dos alunos. Para Scarlassari (2007), é importante que os alunos percebam que são

capazes de aprender álgebra, e um dos caminhos para obter essa motivação é provocar neles o envolvimento e participação nas atividades.

Nessa pesquisa, duas situações foram discutidas e analisadas: uma situação A que, apesar de não ter o foco no professor, revelou um sistema de ensino mais tradicional ligado a uma concepção fundamentalista-analógica, pois, de acordo com Scarlassari (2007), “Os problemas trabalhados eram fragmentos da realidade vivida, não davam ideia de movimento e nem das necessidades dos alunos”. (p.4). Sem mencionar que esses momentos do ensino de álgebra, ligados à resolução de problemas, não era correspondidos com as listas de exercícios que eram trabalhadas sem contextualização, configurando uma concepção próxima de linguístico-pragmática. Diferentemente da situação A, a situação B de ensino revelou um ensino baseado na concepção proposta por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), com situações-problemas exploratórias, que favoreciam o desenvolvimento do pensamento algébrico, utilizando diferentes linguagens em diversos contextos. Nas palavras da própria autora: “Convenci-me de que uma lista de exercícios repetitivos e desvinculados de contextos mais amplos do que as definições e propriedades matemáticas não possibilitava uma aprendizagem significativa”. (SCARLASSARI, 2007, p. 9). A autora revela ainda uma preocupação com o ensino que é centrado em regras e procedimentos, fazendo generalizações inadequadas, que não permitem ao aluno conhecer os reais conceitos que fazem parte da álgebra.

#### RENATA ANASTACIO PINTO

A pesquisa de Pinto (1997) teve por objetivo investigar e analisar o modo como os professores tratam/enfrentam, em aula, as situações de erro ou dificuldade, suas e dos alunos, que surgem no processo de ensino/aprendizagem da álgebra elementar. A pesquisa de campo foi desenvolvida com base em observações em sala de aula de duas professoras atuantes no 8º ano de duas escolas em Campinas, SP. A primeira foi professora Marina, atuante em uma escola pública de Campinas, na qual foram feitas cinco semanas de observação com registros apenas em diário

de campo. A segunda professora, Luiza, era professora de uma escola particular da mesma cidade e junto a qual foram feitos registros em vídeo e em diário de campo da pesquisadora. Com base nesses registros, a pesquisadora construiu episódios para análise. A participação das professoras na pesquisa de Pinto (1997) foi de fundamental importância, pois além de identificar os erros cometidos pelos alunos, a pesquisadora analisou também os erros cometidos pelas professoras, e o modo como elas tratavam/enfrentavam os erros dos alunos.

Um primeiro erro de origem sintática considerado pela autora se refere às operações com potências:  $x^5 \cdot x^6 = x^{30}$ . Esse tipo de erro também foi detectado pela pesquisa de Notari (2002) e costuma ser um erro frequente no cálculo que envolve produto de potências. Para Pinto (1997), esse tipo de erro, revela um erro de caráter sintático, procedimental, porém, “pode indicar uma dificuldade de ordem semântica do aluno: dificuldade em compreender o significado do produto  $x^5 \cdot x^6$ ” (PINTO, 1997, p. 52).

No segundo episódio, outro erro bastante comum observado em sala de aula é o desenvolvimento do produto notável  $(x+4)^2$  que muitas vezes é desenvolvido pelo aluno como  $x^2 + 4^2$ . Neste caso a professora deu um caráter sintático-semântico para a explicação deste erro, pedindo que o aluno conferisse com valores numéricos a veracidade da igualdade desenvolvida por ele.

Há duas seções na pesquisa de Pinto (1997) que se referem aos erros da professora e do material didático utilizado. Porém, por não fazer parte dos objetivos da minha pesquisa, esses erros não foram aqui analisados. A autora, em diversos momentos da pesquisa, se referiu aos aspectos semânticos da Álgebra, buscando a negociação e produção de significados, considerando esta como uma categoria básica. Por esse motivo, a concepção de ensino de álgebra de Pinto (1997) se aproxima da concepção exploratória e de desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos proposta por Fiorentini, Miorim, Miguel (1993). A preocupação em estudar os significados dos conceitos algébricos revela uma valorização do desenvolvimento do pensamento algébrico em relação às regras operatórias. Com relação às concepções de educação algébrica das professoras participantes da pesquisa, a professora Marina se aproxima de uma

concepção de educação algébrica que se situa entre a linguístico-pragmática e a fundamentalista-estrutural, por acreditar que a álgebra se resume no cálculo literal, o que precisa ser justificado sintática e semanticamente, e pelo estudo dos símbolos e da linguagem algébrica. A professora Luiza, por sua vez, revela se preocupar mais com os significados da linguagem algébrica, utilizando como apoio a geometria, o que me permite aproximá-la de uma concepção fundamentalista-analógica e, por vezes, de uma concepção exploratória.

No tratamento de um episódio observado na classe da professora Marina em um colégio público, a pesquisadora percebeu uma confusão de significados (polissemia) no que se refere à palavra quadrado e à expressão “quadrado da coisa”. A dificuldade em compreender o sentido da atividade é referida pela autora como obstáculo, se referindo ao filósofo Bachelard e a Brosseau, que desenvolveram o conceito de obstáculo na área da educação matemática. Nesse episódio específico, “o quadrado da coisa” representado pela figura de um quadrado, provocou nos alunos um obstáculo de origem didática ao confundir o quadrado como incógnita (quadrado que representa um número desconhecido, frequentemente utilizado nos anos iniciais de escolarização) com o expoente “2” (frequentemente utilizado no contexto do Ensino Fundamental II). Pinto (1997) percebeu que a professora não conseguiu de forma satisfatória superar o obstáculo didático proporcionado por ela, o que acabou provocando muitas dificuldades nos alunos.

A autora concluiu sua pesquisa afirmando que os erros cometidos pelos alunos são decorrentes de uma prática que privilegia mais o operacional (sintático) que o conceitual ou semântico. Grande importância é atribuída às regras operacionais, principalmente no ensino da álgebra, o que provoca diversos erros sintáticos sem a compreensão do verdadeiro significado. Pinto (1997) defendeu que o espaço da sala de aula fosse de produção de tentativa de significação, deixando claro a sua posição de perceber o erro como algo que faz parte desse processo. Ela também refletiu sobre as condições do professor atuar, pois no caso da professora Marina, ela pode não ter conseguido conduzir de maneira mais satisfatória a aula por ter que cuidar de duas turmas ao mesmo tempo, o que é uma realidade muito comum nas escolas públicas brasileiras.

SARA JANE VIDAL

A pesquisa de Vidal (2008) pretendeu investigar quais são as estratégias dos professores diante dos erros dos alunos no ensino de equações do 1º grau. A autora fez uma revisão histórica das principais pesquisas que estudaram análise de erros em diferentes perspectivas, desde a behaviorista até a construtivista, passando pela análise de erros no campo computacional. Nas perspectivas atuais da análise de erro, Vidal (2008) relacionou o erro como constituído de obstáculos e fez referência a Bachelard (1996) e a Brousseau (1983), considerando que o erro não é falta de conhecimento e sim, um conhecimento inadequado para novas situações. Bachelard define o obstáculo epistemológico como também necessário para o progresso da ciência. Na área da Educação Matemática, Brousseau traz a definição de obstáculos didáticos e considera a análise de erros importante no desenvolvimento da aprendizagem. Autores como Pais (2011) fazem estudos sobre os erros na perspectiva dos obstáculos. Brousseau definiu a Teoria das Situações Didáticas como uma situação construída intencionalmente com a finalidade de alunos adquirirem novos conhecimentos. A análise de erros seria dessa forma importante para a descoberta do novo conhecimento revelando intervenções inadequadas de conhecimentos anteriores.

A importância da teoria de Brousseau no estudo do erro encontra-se, primeiro, na oportunidade que oferece ao professor de ampliar sua visão sobre o processo de aprendizagem; segundo, em erros que apareceram na situação didática, concebidas como hipóteses provisórias e etapas necessárias à construção do conhecimento do aluno. (VIDAL, 2008, s.p.)

A pesquisa foi realizada em uma escola particular em Fortaleza, com uma turma do 8º ano (antiga 7ª série). Na maioria das escolas tradicionais, o erro é tido como elemento negativo e, portanto, deve ser eliminado. Dessa forma, a autora escolheu uma escola construtivista na qual houvesse mais opções de estratégias dos professores para serem discutidas e analisadas. A autora

mostrou preocupação em escolher também um professor que fosse formado em licenciatura em Matemática por achar importante o seu conhecimento de didática e psicologia da educação.

Houve uma entrevista feita pela pesquisadora com o professor escolhido, com o objetivo de saber sobre a sua prática pedagógica principalmente diante dos erros e dificuldades dos alunos. O professor se mostrou preocupado em analisar o erro e descreveu o tratamento que ele dava ao erro na sala de aula com a adoção da seguinte sequência didática:

- em situações de correções de exercícios em sala de aula, os alunos são convidados a irem à lousa, em um sistema de rodízio, para escreverem as soluções e todas elas são discutidas, tanto as corretas quanto as que contêm erros;
- nos exercícios em grupos, é pedido que se discuta com todos os integrantes as atividades, compartilhando as compreensões e estratégias dos componentes, inclusive os erros apresentados.
- nos exercícios individuais, que são considerados como avaliação, após a correção pelo professor, é pedido ao aluno que também analise e corrija seus erros, sempre respondendo à questão: por que errei? Na correção em sala de aula, são discutidos os erros que apresentaram maior índice de ocorrência.

O professor participante da pesquisa desenvolveu uma série de atividades para introduzir a álgebra com a ajuda da balança (esse modelo foi citado por Lins e Gimenez, 1997). O uso desse instrumento foi constante durante as aulas e utilizado como ferramenta para a compreensão das resoluções das equações. Após diversas aulas modificando o tipo e o nível das equações, o professor introduziu problemas algébricos para serem resolvidos. Os tipos de problemas consistiam em transformar a linguagem corrente usual para a linguagem simbólica. A concepção de ensino de álgebra deste professor revela ser uma concepção fundamentalista-analógica, pois procura utilizar recursos analógicos (como a balança) para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem.

Na pesquisa de Freitas (2002), houve muitas intervenções por parte do autor para frases prontas do tipo “muda de lado, muda de sinal”, que também foram comentadas por Vidal (2008), porém, em outro sentido. O professor participante da pesquisa de Vidal (2008) costumava

resolver com seus alunos as equações mediante utilização do processo das operações inversas, em ambos os lados da igualdade, como aparece no seguinte exemplo:  $2 \cdot x - 5 = 12 \Rightarrow 2 \cdot x - 5 + 5 = 12 + 5 \Rightarrow 2 \cdot x = 17 \Rightarrow 2 \cdot x \div 2 = 17 \div 2 \Rightarrow x = 8,5$  (VIDAL, 2008). Porém, os alunos que tinham professores particulares para complementar seus estudos, aprenderam com eles a utilizar as típicas frases que acabam por confundi-los. Muitos deles até acham bem mais práticas as regras operatórias, e assim, não querem aprender outras maneiras de resolver.

Outros erros foram apontados na pesquisa, porém a forma como Vidal (2008) os descreveu, cabe na próxima seção relacionada ao tratamento com erros.

Não consegui encontrar, no discurso de Vidal (2008), qual seria a sua concepção de ensino de Álgebra. Em sua pesquisa, destaca-se seu posicionamento com relação aos erros, que será tratado no próximo capítulo.

A autora concluiu seu trabalho enfatizando como é importante e fundamental o papel do professor na análise de erro, quando ele busca estratégias que possibilitem ao aluno não ter medo de errar e verificar, por si próprio, os erros que cometeu através de processos metacognitivos. Para ela, o estudo do erro é muito importante para a construção do conhecimento.

## SONIA MARIA BURIGATO

A pesquisa de Burigato (2007) teve por objetivo estudar as dificuldades dos alunos em fatorar expressões algébricas e foi realizada em uma escola estadual de Mato Grosso do Sul com uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental contendo 38 alunos, dos quais 25 participaram de todas as atividades propostas, sendo esse número escolhido para a amostra da análise dos dados. A autora fez uma análise prévia dos resultados, destacando possíveis dificuldades e erros que os alunos pudessem cometer ao resolver as atividades de fatoração, denominando-os de Teoremas de Ação Falsos. O referencial teórico utilizado foi o dos campos conceituais de Vergnaud que, de

acordo com a autora, permite analisar como se dá a formação e o funcionamento do conhecimento nos indivíduos através de um conjunto de situações<sup>5</sup>. Na pesquisa de Burigato (2007), o conjunto de tarefas, ou situações, se relaciona com tarefas envolvendo diversos casos de fatoração. Por exemplo, fatorar colocando o fator comum em evidência, fatorar trinômios de quadrados perfeitos e reconhecer a diferença entre quadrados. Segundo Vergnaud (1993 apud Burigato, 2007), o pesquisador deve analisar uma grande variedade de comportamentos e esquemas para compreender em que consiste, do ponto de vista cognitivo, este ou aquele conceito. Os Teoremas em Ação foram definidos com base nas análises feitas no teste diagnóstico realizado em duas turmas do 9º ano de uma escola municipal em Campo Grande, MS e através das leituras de autores que pesquisaram sobre erros e dificuldades dos alunos em Álgebra, como Booth, Lins, Gimenez e Usiskin.

As tarefas foram realizadas pelos alunos de maneira isolada. Não foi possível tirar dúvida nem com o professor e nem com os colegas, pois a autora teve o objetivo de analisar as dificuldades e erros cometidos por cada um. A sequência didática foi desenvolvida em dois ambientes: sala de aula com lápis e papel e o laboratório de informática com a utilização do software Aplusix. Com o uso de um recurso do software chamado “videocassete”, a pesquisadora pôde verificar passo a passo a resolução do aluno, possibilitando identificar os possíveis erros cometidos pelos alunos antes de chegar à resposta final.

Burigato (2007) identificou uma grande dificuldade dos alunos em transformar a expressão em produto para poder fazer a fatoração, constatando que a maioria dos estudantes reduziu a expressão a um só termo.

O programa Aplusix indica, através da revisão dos cálculos, que há um erro na resposta. Apesar disso, a utilização dessa ferramenta não revelou um melhor entendimento no processo de fatoração, pois a pesquisadora percebeu que muitos alunos sabiam que o resultado estava errado, mas, mesmo assim, desistiam de refazer a questão e preferiam continuar com a resposta inadequada.

---

<sup>5</sup> O conceito de situação abordado por Vergnaud tem o sentido de tarefa.

Para análise dos dados, a autora produziu tabelas com os “Teoremas em Ação Corretos e Falsos” utilizados pelos alunos em pelo menos uma resposta das questões de fatoração entregues aos alunos. Na sua análise, alguns alunos foram destacados pela regularidade das respostas. Por exemplo, o aluno nomeado P8, que sempre procurava transformar em produto uma expressão algébrica, não conseguiu identificar o fator comum em todas as atividades.

As maneiras inadequadas de fatoração, chamadas de Teoremas em Ação falsos que, em algumas situações são decorrentes de uma aplicação de um conceito ou teorema que era válido em um contexto anteriormente trabalhado e que não é mais válido nesse contexto, revelam o “novo” como um obstáculo. Muitas vezes o aluno identifica semelhanças com outros procedimentos e acaba cometendo erros por acreditar que o procedimento, antes conhecido, é também utilizado em novas situações.

Seguem alguns erros que foram mais cometidos pelos alunos na pesquisa de Burigato (2007) e que foram considerados Teoremas em Ação Falsos:

- Erros de redução de termos. Ex:  $8x + 8y = 16xy$ ;
- Não transformação da expressão em produto para fatorar. Ex:  $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 8x = 8$ ;
- Não identifica o fator comum. Ex:  $2x - 14 = 2(x - 14)$ ;
- Erros ao extrair raízes quadradas de termos que não são quadrados perfeitos;

Os teoremas em ação (T.A.) foram definidos a partir das respostas dos alunos, sendo que alguns T.A. falsos foram utilizados apenas por um aluno. Exemplo: na fatoração da expressão  $9 - 21x$ , na qual o aluno A2 resolveu como  $3(-7 - x)$ , foi chamado de T.A. falso. A autora justifica o uso desse teorema, porque ela queria observar se este voltaria a ser utilizado nas outras atividades.

Houve um número muito grande de alunos que não transformaram a expressão a ser fatorada em produto. Esse fato pode ser justificado pela dificuldade do aluno em aceitar a

“ausência de fechamento”. Muitos igualaram a expressão a zero e tentaram achar o valor da incógnita. Essa dificuldade em aceitar o resultado sem uma resposta numérica também foi apontada nos outros trabalhos da minha pesquisa.

A pesquisa de Burigato foi estruturada com a presença de várias tabelas que contém os teoremas em ação corretos e os teoremas em ação falsos, e a quantidade de vezes que esses teoremas foram utilizados pelos alunos. É importante destacar que a autora percebe que, mesmo corrigindo as questões anteriores e tendo informado que fatorar requer transformar uma expressão em um produto, os alunos continuaram não fazendo dessa forma, reduzindo a expressão a termos não semelhantes.

As tarefas aplicadas e privilegiadas na pesquisa são ainda alinhadas à concepção linguístico-pragmática, pois centra atenção dos procedimentos do cálculo algébrico (no caso a fatoração), com ênfase em um “transformismo algébrico totalmente independente de objetos concretos, de figuras ou ilustrações e de problemas...” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 84). Essa concepção também pode ser tida como a concepção da própria autora, sobretudo quando afirma que “... é necessário que eles (os alunos) consigam operar com as variáveis seguindo as regras próprias da estrutura que se está trabalhando, e que quando preciso saibam voltar aos referenciais, em geral números reais.” (BURIGATO, 2007, p.9)

Na conclusão, a autora retoma algumas dificuldades identificadas na pesquisa como: identificar o fator comum máximo para colocá-lo em evidência; fazer a divisão de todos os termos da expressão pelo fator comum; dificuldade na multiplicação dos monômios; extração de raiz quadrada de termos que não são quadrados perfeitos. Como proposta, Burigato (2007) sugere que mudanças ocorram no ensino da fatoração. Dentre elas, teve destaque: a identificação pelos alunos dos fatores comuns e dos trinômios quadrados perfeitos; e apresentar todos os casos de fatoração para os alunos no oitavo ano do Ensino Fundamental.

## **CAPÍTULO 5 – RELAÇÕES E COMPREENSÕES METANALÍTICAS ENTRE AS DISSERTAÇÕES: tipos de erros e as concepções de educação algébrica**

Neste capítulo busco fazer uma aproximação das pesquisas, buscando obter relações entre os tipos de erros cometidos pelos alunos, as concepções de educação algébrica dos pesquisadores e professores colaboradores das pesquisas e a forma de lidar com os erros.

### **5.1 - TECENDO COMPREENSÕES METANALÍTICAS SOBRE OS TIPOS DE ERROS.**

Como um dos objetivos da metanálise consiste em confrontar resultados das pesquisas tentando extrair desses estudos “informações adicionais que permitem produzir novos resultados” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 71), nessa seção farei um entrelaçamento das nove dissertações brasileiras escolhidas que compõem o *corpus* da metanálise, buscando relacionar os tipos de erros cometidos com as concepções de ensino de álgebra explícitas ou implícitas nas pesquisas, objetivando responder a duas questões da pesquisa propostas nos objetivos: **Que tipos de erros e/ou dificuldades dos alunos em álgebra elementar podem ser identificados nas dissertações?** e **Que concepções de educação algébrica estão implícitas ou explícitas nas pesquisas?**

Alguns erros foram apresentados e discutidos no capítulo anterior, porém, a retomada de alguns deles neste capítulo, permite uma discussão mais direta com o tipo de erro cometido, analisando a forma como os erros ou dificuldades dos alunos foram lidados pelos pesquisadores e/ou professores.

Para apresentar os erros presentes nas pesquisas, escolhi quatro tipos de erros encontrados para uma análise de como os autores identificaram e trataram esses erros. A escolha foi feita considerando erros que foram encontrados em mais de uma pesquisa presente no *corpus* da

metanálise. São eles: erros provocados por falta de atenção, erros decorrentes da dificuldade da aceitação da ausência de fechamento, erro de potência e erros de interpretação.

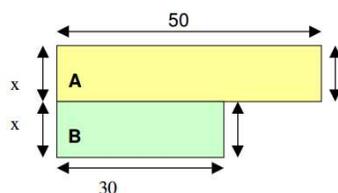
Outros erros e dificuldades foram identificados nas pesquisas, dentre eles, estão: erros na apresentação dos resultados, erros decorrentes da dificuldade de operar com raízes quadradas, erros no uso da propriedade distributiva da multiplicação, erros com equações na forma fracionada, erros envolvendo sinais de números inteiros, erros de conceitos geométricos, aplicação inadequada das regras da adição na multiplicação, multiplicar ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos, dificuldade em identificar o fator comum para fatoração, dificuldade com valores excluídos e dificuldade na definição de equação.

#### 5.1.1 - Erros Provocados por Falta de Atenção

Foram encontrados no *corpus* da metanálise, quatro pesquisadores que denominaram o erro provocado por falta de atenção. Permito comentar que concordo com a expressão “erro por falta de atenção”, pois em muitos casos é difícil rotular que o erro cometido tenha sido por falta de atenção. Nesses casos, o erro pode ter sido cometido devido a atividade ter sido pouco significativa para o aluno. Entretanto, continuarei fazendo uso dessa expressão, mantendo a terminologia utilizada pelos autores.

Na pesquisa de Gil (2008), ao fazer a análise do teste aplicado à turma investigada, a autora percebeu que, na questão 3 do bloco II, os alunos podem ter errado o item c por falta de atenção na leitura do enunciado. Segue a questão:

Um terreno no qual estão indicadas as medidas dos seus lados tem a forma da figura abaixo:



*Como você pode observar, o terreno está dividido em dois lotes retangulares A e B.*

*Qual a expressão algébrica que representa:*

*a) a área do lote A?                      b) a área do lote B?                      c) a área total do terreno*

Dos 16 alunos que não acertaram o item c desta questão, 25% ao invés de representar a área, representaram o perímetro, o que, segundo Gil (2008), demonstra uma confusão sobre os conceitos de área e perímetro, pois os alunos podem não ter lido com atenção o enunciado da questão, conforme afirma: “... o fato de não terem esclarecido conceitos como área e perímetro, e muitas vezes a falta de atenção na leitura de alguns enunciados podem ter contribuído para as dificuldades observadas.” (GIL, 2008, p. 79)

Durante a observação das aulas na turma investigada pela pesquisadora, foi possível perceber que a professora participante da pesquisa pode ter causado um obstáculo didático, identificado pela autora Gil (2008, p.59), ao explicar duas formas distintas de calcular a área total de um terreno, relacionando com soma e produto. O aluno pode ter confundido o cálculo da área total do terreno através da soma, com o cálculo do perímetro, os quais estão acostumados a relacionar perímetro com soma dos lados. Na análise feita por Gil, com relação ao erro indicado na questão representada acima na qual 25% dos alunos calcularam o perímetro ao invés do cálculo da área total do terreno, a autora não relacionou que os alunos que responderam a questão dessa forma podem ter tido dificuldade com a exposição do assunto no momento da aula, e terem confundido o conceito de área com o conceito de perímetro. Sendo assim, o erro denominado pela autora como falta de atenção na leitura do enunciado, não seria uma dificuldade conceitual estabelecida em sala de aula?

Outras dificuldades dos alunos, em relação a esta questão, foram destacadas por Gil (2008). Dentre elas tem as questões que foram deixadas em branco (questões sem resposta foram consideradas pela autora como uma dificuldade); a representação da variável  $x$  ao quadrado; e a soma das partes identificadas na figura. É possível observar que, nesta atividade, os erros e

dificuldades apontados estão mais relacionados aos conceitos e significados, o que pode caracterizar uma relação mais próxima com erros de origem semântica, por estarem mais relacionados a dificuldades de interpretação dos enunciados e de conceitos, como os conceitos de área e perímetro. Não houve, na análise desta questão, comentários sobre erros de procedimentos, podendo assim revelar que, ou os alunos cometeram apenas os erros indicados anteriormente, ou os erros de procedimentos não foram considerados relevantes, pela autora, para a sua análise.

Entretanto, a falta de atenção, que na questão anterior pode ter revelado uma falta de entendimento sobre os conceitos de área e perímetro, é considerada, nas entrevistas realizadas com as professoras do 8º ano, decorrente de um desinteresse por parte dos alunos para a aprendizagem. Em uma das entrevistas é possível observar essa relação da “falta de atenção” com o desinteresse:

Atenção é o principal para mim e interesse. Porque aquele que tem atenção demonstra interesse e participa, flui normalmente. Agora aqueles que deixam, fazem um ou outro exercício e deixa pra lá não fixa aquilo, eles são muito avoados, eles não param para fazer as coisas. Mas para mim a maior dificuldade é o interesse e a atenção. (GIL, 2008, p.85)

Será que a falta de interesse do aluno em aprender um determinado assunto, gerando uma falta de atenção na sala de aula, não revela um ensino no qual o aluno não se sentiu motivado a aprender? A falta de atenção nas aulas e nas resoluções dos exercícios revela um aluno desinteressado ou um aluno desmotivado? Os erros decorrentes (ou classificados) da falta de atenção podem revelar um problema relacionado com a prática de ensino adotada pelo professor?

Outra pesquisa que classifica os erros dos alunos como sendo um erro decorrente da falta de atenção é a pesquisa de Pecepe Junior (2011). Porém, é fácil observar uma diferença de atribuição aos erros de falta de atenção desta pesquisa com a pesquisa da autora Gil (2008). Observem esse erro destacado pelo autor na seguinte questão:

*O dobro da minha idade é igual a 50. Qual é a minha idade?* (PEPECE JUNIOR, 2011, p. 62)

*Resolução do estudante A5:*

$$\begin{array}{l} 2x = 50 \\ x = \frac{50}{2} \\ x = 5 \end{array}$$

Para Pecece Junior (2011),

O estudante A5 montou uma equação de forma correta, porém [...] no momento da divisão de 50 por dois chegou de alguma forma ao resultado cinco. Essa operação incorreta do estudante nos faz refletir que o mesmo poderia ter cometido que chamaríamos de falta de noção das quatro operações ou mesmo cometido um erro por falta de atenção na resolução... (p.65)

Neste caso, como não houve observação de aulas na pesquisa de campo, torna-se difícil fazer uma análise mais profunda sobre a possível origem do erro (como foi feita na pesquisa de Gil). Apesar de o autor afirmar que o estudante pode ter cometido um erro por falta de atenção, são poucos os elementos que poderiam endossar essa suposição. No momento da divisão de 50 por 2, o aluno pode ter lido algum número errado, ou como afirmou Pecece Junior (2011), não ter noção das operações e ter errado o cálculo.

A falta de atenção na passagem da divisão de 50 por 2 ou o erro nas operações envolvidas, revelam dificuldades de origem sintática, nas quais o foco está nos procedimentos de resolução desta equação. Como a resolução se referia a um problema que consistia em descobrir uma determinada idade, se houvesse uma exploração mais semântica em sala de aula sobre essa questão, o próprio aluno poderia verificar a autenticidade da sua resposta e perceber que havia algo errado na sua resolução? Se a atividade tivesse um foco mais no entendimento do problema, com o desenvolvimento do pensamento algébrico e não apenas à transformação da linguagem

corrente para a linguagem algébrica, será que esse tipo de erro poderia ser superado através da interpretação do resultado?

Outro significado apresentado pelo autor que revela, para ele, um erro decorrente da falta de atenção, foram as respostas apresentadas de forma incorreta e/ou sem nenhuma resolução. Para Pepece Junior (2011), esse tipo de resposta pode “demonstrar falta de atenção na resolução ou mesmo falta de noção nas quatro operações” (p.67).

A resolução a seguir é de um aluno que respondeu a seguinte questão presente na pesquisa de Pepece Junior:

*Um número menos 5 é igual a 12. Qual é esse número. (p.84)*

$x - 5 = 12$
$x = 12 + 5$
$x = 7$

Para o autor, este erro foi considerado como falta de atenção na resolução pois o aluno apresentou a operação correta, porém deu o resultado de forma incorreta. (Pepece Junior, 2011).

Essa atividade também teve como objetivo representar e resolver algebricamente um problema que apresentava a linguagem usual comum, ou seja, fazer a passagem da linguagem retórica para a linguagem simbólica algébrica. O erro foi classificado por Pepece Junior (2011) como um erro provocado por falta de atenção, porém o aluno pode ter revelado uma incompreensão do problema, pois é possível observar que, ao invés de realizar a operação soma, o aluno fez a subtração. Será que, pelo fato de conter no enunciado do problema a palavra “menos” o aluno resolveu fazer a operação da subtração, sem compreender o que a questão propunha?

Como comentado anteriormente, são poucos os elementos que podem definir porque o aluno cometeu determinado erro, mas é possível inferir, nos dois casos apresentados na pesquisa de Pepece Junior (2011), uma ênfase mais direcionada aos erros cometidos por falta de atenção,

em atividades que priorizaram o procedimental. Apesar dos problemas serem uma atividade que pudesse promover o desenvolvimento do pensamento algébrico, através de questionamentos e suposições, com interpretações dos problemas, o foco da resolução estava apenas nos procedimentos, haja vista que não houve investigações mais semânticas das respostas apresentadas.

Pepece Junior (2011) considera esse tipo de erro como sendo um erro provocado por um descuido e não por falta de conhecimento: “Erro por falta de atenção na resolução: aqui podemos considerar que o estudante tem conhecimento do que está sendo trabalhado, porém durante o desenvolvimento da solução cometeu falhas por falta de atenção ou descuido.” (p. 113).

A terceira pesquisa que classifica esse tipo de erro é a pesquisa de Vidal (2008) na qual foi possível identificar o erro provocado pela falta de atenção através do próprio aluno. Nessa pesquisa, foram realizadas auto-avaliações propostas pelo professor, nas quais os alunos precisavam justificar os seus erros. Eis uma justificativa apresentada: “ errei porque não prestei muita atenção”. (p. 90).

É comum os alunos se queixarem de erros por falta de atenção. Neste caso, o professor colaborador da pesquisa de Vidal (2008), fez a entrevista com este aluno para entender em qual momento o erro foi causado por “falta de atenção”, e este não sabia responder. Com essa resposta do aluno, ratifico a afirmação de que, a justificativa de erro por falta de atenção, esconde outros tipos de erros que estão implícitos, sejam de caráter mais semântico, sejam de caráter mais procedimental (sintático). Vai depender do tipo de abordagem privilegiada durante as atividades em sala de aula.

Por último, na fala da pesquisadora Burigato (2007), ela considera que erros cometidos uma única vez podem ser decorrentes de falta de atenção. “Muitos alunos utilizaram teoremas em ação falsos uma única vez em algumas questões e algumas dessas resoluções foram até apagadas, no caso dos alunos do Aplusix, consideramos que alguns desses casos podem ter sido por falta de atenção...” (p. 85). Esse comentário pode revelar também uma postura da autora em considerar que erros cometidos mais de uma vez, não podem ser considerados como erros de falta de atenção, não sendo possível identificar qual seria esse o tipo de erro para a autora.

### 5.1.2 - Erros Provocados Pela Dificuldade em Aceitar a Ausência de Fechamento.

Essa nomenclatura “ausência de fechamento” foi utilizada pelos pesquisadores Notari (2002) e Gil (2008) para justificar alguns erros cometidos pelos alunos no que se refere à dificuldade que os alunos têm em aceitar resultados que não apresentam respostas que sejam, por exemplo, expressões algébricas.

Na pesquisa de Notari (2002) é possível perceber que alguns erros são decorrentes da dificuldade em aceitar uma resposta que não seja única, fechada. Por exemplo, o primeiro erro categorizado pelo autor, na análise das respostas dos exercícios de simplificação de expressões algébricas, é a transformação da expressão algébrica da resposta em uma equação. Como exemplo, tem-se a resposta do aluno para a simplificação da expressão  $\frac{4x+11xy}{x}$ .

$$\frac{4x+11xy}{x} = 4+11y$$

$$4+11y = 0$$

$$11y = 4$$

$$y = \frac{4}{11}$$

É possível perceber que o aluno fez a simplificação de forma correta, porém teve a necessidade de apresentar um resultado “fechado”, uma resposta única que se apresentasse de forma mais “bonita”. As questões que objetivam a simplificação de frações algébricas podem motivar os alunos a cometerem diversos erros desse tipo, pois as questões que se propõem à simplificação de expressões levam o aluno a tentar “esgotar” todos os passos de uma simplificação, mesmo com alguns procedimentos inadequados. Quero dizer, há uma preocupação excessiva em realizar todos os passos que irão levá-lo a uma resposta simplificada pois, para eles, respostas do tipo  $4 + 11y$ , não são simplificadas. Assim, grande parte dos erros cometidos nesse tipo de questão são erros de procedimentos, ou seja, erros de origem sintática. Em uma entrevista

com um aluno que resolveu de forma similar essa questão, ele afirmou que respostas do tipo  $4 + 11y$  não são comuns e por isso há a necessidade de achar o valor de  $y$ .

Esse tipo de dificuldade gera uma reflexão a cerca do enfoque que é dado nas atividades de simplificação de expressões. Muitos alunos consideram esse tipo de atividade, como sendo apenas exercícios que possibilitam uma série de etapas e procedimentos de resolução, de forma que se alcance o objetivo que, para eles, é “parar até acabar”. Esse pensamento evidencia o caráter sintático da álgebra, pois não há uma reflexão do que seja a expressão  $4 + 11y$ , de forma que o aluno não a considere como uma expressão que está simplificada. O erro cometido pode ser decorrente de um ensino que prioriza os procedimentos, deixando de lado a discussão sobre a forma e o conceito dessas expressões. O autor também faz essa observação em sua pesquisa.

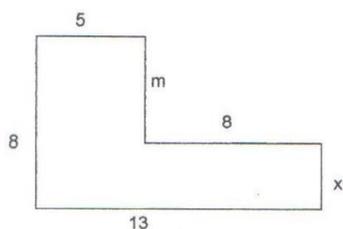
Os erros cometidos pelos alunos estão diretamente relacionados ao ensino de Álgebra que prioriza sua dimensão sintática. Suas manipulações algébricas incidem somente na utilização das regras sem nenhuma preocupação sobre as condições que lhe permitem aplicá-las. (NOTARI, 2002, p. 75)

Notari (2002) percebeu que muitos alunos utilizavam regras que não eram adequadas ao novo contexto, pois foi possível observar nas entrevistas realizadas que os alunos tinham decorados os procedimentos a serem resolvidos, porém não tinham nenhuma preocupação com as propriedades matemáticas que permitissem a aplicação delas.

Um erro similar é apresentado na pesquisa de Gil (2008). Na questão que pedia para escrever de forma reduzida à linguagem algébrica, os alunos sentiram dificuldade e isso foi atribuído, pela autora, à mesma dificuldade detectada por Notari (2002) que se refere à dificuldade com uma expressão algébrica, “já que nem sempre esta representação terá um fechamento.” (p.71)

Na atividade de simplificação do exercício apresentado na página 72, que solicitava a redução da expressão que representava a compra de Fábio mais a compra de Simoni, houve o maior índice de erro identificado pela pesquisadora. A justificativa da autora para o alto índice de erros está na dificuldade do aluno em entender a “ausência de fechamento”, devido aos conhecimentos anteriormente adquiridos na Aritmética, na qual a resposta é apresentada de forma numérica. Para ela, a dificuldade do aluno se dá devido à Álgebra apresentar resultados de forma geral e simplificada.

Outro exemplo de erro classificado desse tipo é a resposta de um aluno para a seguinte atividade que propunha calcular o perímetro da figura.



A resposta do aluno foi  $5 + 8 + 13 + 8 + M + X = 13 + 21 + M + X = 34 MX$ . A autora também relacionou essa dificuldade do aluno com a dificuldade na ausência de fechamento, pois, ao resolver a operação, que contém elementos algébricos e a operação de adição, a resposta foi reduzida incorretamente a um único termo.

Nessa questão, conceitos geométricos são envolvidos e é possível perceber que o aluno conseguiu aplicar corretamente o conceito de perímetro, tendo encontrado uma expressão que correspondia à soma dos lados da figura. Porém, para ele, a igualdade tem um sentido de apresentar um resultado e não de equivalência algébrica. De acordo com Haghverdi, Semnani e Seifi (2012), esse tipo de erro pode ser considerado como “erros de cálculo em álgebra na resolução de problemas algébricos”.

### 5.1.3 - Erros Envolvendo Potência

Ao rotular os erros do tipo “erros com potência”, parece haver uma aproximação dos erros que são cometidos decorrentes de cálculos inadequados das regras e procedimentos envolvidos na potenciação, o que demonstra uma predominância dos aspectos sintáticos sobre os semânticos nesse tipo de dificuldade. Nas pesquisas de Pinto (1997), Burigato (2007) e Notari (2002), erros de potência foram identificados e analisados com enfoques distintos.

Na pesquisa de Pinto, esse tipo de erro surge na resolução da atividade  $2x^5 \cdot (x^6 - y)$ , na qual o aluno escreveu  $2x^{30} - 2x^5y$ . A autora considerou esse tipo de erro como um erro de origem sintática por enfatizar regras operatórias, mas também foi considerada, pela autora, como sendo um erro também de origem semântica revelando que o aluno possa não ter compreendido o significado do produto  $x^5 \cdot x^6$ . Para a autora, a professora Marina, explorou de forma sintática o erro, pois levou em consideração na explicação e correção da atividade do aluno, apenas a regra: “se há a multiplicação de potências, então soma os expoentes”.

Neste caso, apesar de a professora não discutir semanticamente o erro apresentado pelo aluno, a pesquisadora Pinto (1997) revelou estar atenta a essa questão, com a preocupação em fazer com que o aluno entenda o significado de um produto de potências de mesma base, tirando o foco apenas da aplicação das regras de potenciação. Geralmente, essa regra é apresentada e o aluno decora sem se preocupar com o significado da soma dos expoentes em potências que estão sendo multiplicadas. Nesse tipo de resolução, os alunos são “influenciados” pela operação que lhe é mostrada (nesse caso, a multiplicação das potências) e acaba por multiplicar também os expoentes.

Na pesquisa de Burigato (2007), esse tipo de erro também é cometido e identificado pela autora. Um erro em comum presente nas pesquisas de Burigato (2007) e de Pinto (1997), é o desenvolvimento incorreto dos produtos notáveis, como  $(x-2)^2 + x^2 - 4 = x^2 - 2^2 + x^2 - 4$ . Burigato (2007) considerou que esse é um tipo de erro que compromete a aprendizagem de fatoração, pois, para ela, “se um aluno não consegue desenvolver um produto corretamente, ele provavelmente também não conseguirá fatorar.” (p.57). Em sua análise, é possível perceber que a autora considera esse tipo de erro como de caráter sintático pois defende a necessidade da

introdução de mais atividades de desenvolvimento de produtos notáveis, a fim de melhorar o desempenho da fatoração. Há, dessa forma, um predomínio, nesse tipo de questão, das regras e procedimentos operatórios, o que provoca erros de natureza sintática. Para o aluno, o visual da operação  $(x-2)^2$ , o leva a realizar a operação de elevar ao quadrado ambos os valores sem ao menos ter o entendimento do que essa expressão significa.

Esse erro também foi identificado na pesquisa de Pinto (1997) e é importante observar que a posição da professora foi alertar para que os alunos não cometessem esse tipo de erro. Ao enunciar a atividade, a professora critica quem possa ter desenvolvido o produto notável dessa forma. Penso que, o aluno que teve essa dificuldade, ao ouvir o comentário dessa professora, não se sente motivado a discutir o significado algébrico do quadrado da soma tendo, como única alternativa, decorar a regra. A professora seguiu a correção da atividade tentando, segundo Pinto (1997), dar um enfoque mais semântico, atribuindo significado à expressão com a utilização da aritmética.

Em Notari (2002), erros envolvendo potências foram um dos erros identificados na resolução das frações algébricas. O erro do tipo  $\frac{4x^3}{2x^2} = \frac{64x}{4x} = 16$ , foi chamado de “Cálculo do produto ou potência entre coeficiente e expoente da variável”. Houve, na pesquisa de Notari (2002), uma análise qualitativa de alguns erros dos alunos, porém esse erro não foi explorado nessa análise. Posso considerar como sendo mais um exemplo no qual o aluno está mais preocupado em realizar que, neste caso, o cálculo da potência dos coeficientes, elevando-os aos expoentes das variáveis.

#### 5.1. 4 - Erros de Interpretação

Esse tipo de erro abrange erros de interpretação em diferentes abordagens, podendo ser erros de interpretação do enunciado, erros de interpretação da própria resposta encontrada, erros de interpretação de procedimentos etc.

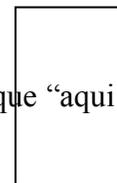
Na pesquisa de Freitas (2002), o erro identificado pelo autor, como sendo um erro de interpretação, se refere a erro de interpretação no processo de transposição dos termos. Para o autor, quando o aluno comete erro do tipo se  $ax=b$ , então  $x= b/-a$ , o aluno demonstra interpretar de forma errada o procedimento de transposição dos termos, considerando a regra que, ao mudar um termo de “lado” da equação para o outro, o mesmo inverte o sinal, ao invés de compreender que, no procedimento da transposição, o que inverte é a operação. Essa justificativa do autor é

reforçada ao fazer a entrevista com uma aluna que escreveu  $x = \frac{8}{4}$ , justificando que “aqui está multiplicando e passa dividindo e está menos passa mais.” (p.98).

$$-4x = 8$$

$$x = \frac{8}{4}$$

$$x = 2$$



Uma possível razão para a ocorrência desse tipo de erro, pode ser a forma como o professor faz uso em sala de aula das explicações do método da transposição. Na pesquisa de Freitas (2002) não é possível identificar essa relação por não se fazer presente a figura do professor, mas é possível observar, na entrevista com os alunos, respostas semelhantes que caracterizam um aprendizado comum entre os estudantes, no que se refere à regra: muda de lado, muda de sinal. Porém, é possível observar que a abordagem que o autor dá aos erros de interpretação se refere a interpretações errôneas de procedimentos de resolução de equações, caracterizando assim, uma abordagem mais sintática do que semântica.

Outra pesquisa que classifica o erro como sendo um erro de interpretação foi a de Pepece Junior (2011). O autor diferencia da abordagem apresentada acima ao se referir a erros de interpretação no enunciado das atividades, se distanciando um pouco dos erros de caráter procedimental e levando em consideração erros dos alunos na interpretação das questões. Em alguns casos, Pepece Junior (2011) menciona erros de interpretação na resposta dada pelo aluno, pois o aluno conseguiu interpretar de forma correta o enunciado do problema, fez os cálculos corretamente, mas no momento de apresentar a resposta, não obteve êxito. É importante destacar

um exemplo de erro, considerado pelo autor, de “interpretação do resultado obtido em relação à interpretação do enunciado do problema” (PEPECE JUNIOR, 2011, p. 78). Segue a atividade:

*A idade de Pedro é a metade da de Carlos. A soma das idades é 30 anos. Qual a idade de Carlos?*

*Resolução do estudante:*

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{x}{2} &= 30 \\ \frac{2x}{2} + \frac{x}{2} &= \frac{60}{2} \\ 3x &= 60 \\ x &= \frac{60}{3} \\ x &= 20 \quad \text{Carlos tem 20 anos} \\ x &= 10 \quad \text{Pedro tem 10 anos} \end{aligned}$$

O autor considerou que o aluno teve um erro de interpretação da resposta, pois, durante os seus cálculos considerou que a variável  $x$  era a idade de Carlos, e ao final obteve a variável  $x$  também como a idade de Pedro. Porém, a resolução desse estudante revela que além dos procedimentos utilizados corretamente, o aluno conseguiu interpretar o que o problema solicitava, obtendo, através da escrita da resposta, o resultado satisfatório.

Escolhi este exemplo para contrastar com os erros do tipo “falta de atenção” classificados por este mesmo autor, e que foi por mim exposto anteriormente, nos quais os alunos erraram por considerarem apenas os procedimentos, sem retornar ao enunciado das questões para verificarem suas respostas. Na atividade acima, retirada da pesquisa de Pecece Junior (2011), é possível perceber uma interpretação, por parte do aluno, do enunciado da questão, mesmo que o aluno tenha “confundido” as variáveis, sendo este um indício da predominância dos aspectos semânticos sobre os sintáticos.

Na pesquisa de Gil (2008), as respostas em branco foram consideradas como erros de interpretação das quais o aluno não conseguiu interpretar o que a questão estava pedindo e por

esse motivo, não resolveu. Nas entrevistas realizadas com as professoras, uma delas falou sobre a dificuldade que os alunos têm em interpretar e entender a álgebra. Para ela, os alunos nessa série, não têm maturidade para entender um conteúdo abstrato como a álgebra. Na maioria das professoras entrevistadas, a dificuldade em interpretar os problemas em álgebra foi considerada um fator que dificulta o ensino e aprendizagem. Para Gil, há uma dificuldade de interpretação dos alunos principalmente para resolver situações-problema, e na tradução da linguagem corrente para a linguagem algébrica. Segundo a autora, “grande parte da dificuldade de interpretação está relacionada com o fato do aluno ter uma deficiência na linguagem escrita. Talvez falte propiciarmos um espaço para que nossos alunos expliquem as suas formas de raciocínio” (p.107).

A partir da fala da autora, é possível perceber que há uma preocupação em discutir, durante o ensino da álgebra, aspectos que privilegiem o pensamento do aluno, procurando entender o desenvolvimento do seu pensamento, com a finalidade de ajudar nas dificuldades existentes. Também percebe-se que as dificuldades de interpretação estão mais presentes nos exercícios que trabalham com situações-problema, dando um caráter mais investigativo e exploratório à Álgebra.

## **5.2 AS CONCEPÇÕES DE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA IDENTIFICADAS NAS DISSERTAÇÕES.**

Os quadros, a seguir, se referem à identificação das concepções de educação algébrica dos professores participantes das pesquisas e dos autores, através de alguns posicionamentos e/ou análises que foram desenvolvidas sobre esse *corpus* e que serviram de elementos para a identificação, buscando responder à segunda questão da minha pesquisa. Um estudo realizado por Cury et al (2002) procurou conhecer as concepções de Álgebra e de Educação Algébrica dos estudantes de licenciatura em Matemática e concluiu:

ser um elemento importante para as novas reformulações curriculares, pois permite discussões sobre as finalidades do estudo dessa disciplina e sobre as interrelações existentes entre os conteúdos estudados no curso superior e aqueles apresentados nos níveis fundamental e médio. (CURY et al, 2002, p. 12)

Nesta pesquisa, as concepções de educação algébrica dos pesquisadores e professores colaboradores das pesquisas serão identificadas, como maneira de relacioná-las com os tipos de erros cometidos pelos alunos e a forma de tratá-los.

**Quadro 14: Concepção de educação algébrica das pesquisas de Vidal (2008), Pinto (1997) e Gil (2008)**

<b>Autores</b>	<b>Concepção de educação algébrica dos professores que participaram como sujeitos das pesquisas.</b>
GIL	Exploratória
PINTO	Fundamentalista-estrutural Fundamentalista-analógica e exploratória.
VIDAL	Fundamentalista-analógica

Como exposto anteriormente, essas pesquisas tiveram a participação do professor, portanto, as concepções de educação algébrica listadas no quadro acima se referem apenas à concepção de educação algébrica do docente atuante na pesquisa. Em Gil (2008), quatro professores foram entrevistados, porém como apenas uma professora foi observada, busquei identificar a sua concepção de educação algébrica a partir da entrevista e da forma como ela conduziu as atividades em sala de aula, identificando-a como uma professora que valoriza atividades que promovem uma reflexão e desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme afirma Gil (2008), “[...] a professora traz para os alunos atividades que propiciem a reflexão e o desenvolvimento do pensamento algébrico.” (p.67). Por esses motivos que foi atribuído a essa professora uma concepção de educação algébrica exploratória e voltada ao desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos.

Na pesquisa de Pinto (1997), duas professoras foram atuantes, diferenciando a concepção de educação algébrica de cada uma: a professora Marina, foi explicitamente identificada por uma concepção fundamentalista-estrutural: “Se por um lado a professora demonstra preocupação com a construção de sentidos e significados, de outro manifesta que a concepção “fundamentalista-estrutural” de educação algébrica ainda está muito presente em seu modelo de ensino.” (PINTO, 1997, p.92); e a professora Luiza que, com o uso de vários instrumentos pedagógicos, inclusive os geométricos, permitiu identificá-la com uma concepção fundamentalista-analógica, tendo apresentado também uma aproximação com a concepção exploratória e de desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos.

Com relação ao professor participante na pesquisa de Vidal (2008), este professor segue uma concepção fundamentalista-analógica. Para Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), “... a ‘justificação’ de certas passagens do transformismo algébrico através da utilização de leis de equilíbrio físico, recorrendo, para isso, a materiais “concretos” como balanças...” (p.85), é um recurso que muitos utilizam nessa concepção de ensino da Álgebra. De fato, foi possível perceber que o professor, durante a explicação sobre equações, utilizou em diversos momentos a figura da balança para auxiliar na explicação do assunto e nos procedimentos de resolução de equações.

Com relação à concepção de educação algébrica dos autores, a partir de alguns posicionamentos dos mesmos, pude identificar as concepções de educação algébrica de Gil e Pinto.

Em Gil (2008), a seguinte fala da autora reforça a concepção renovada ou exploratória na qual se dá mais importância a um ensino que se aproprie dos significados da Álgebra e não apenas em procedimentos: “Entendo que, para que realmente se construam conceitos e se aproprie de forma efetiva dos procedimentos algébricos, é fundamental que se consiga produzir significados para o seu estudo” (p.40). O mesmo pode ser aplicado a autora Pinto (1997) que afirma ter ampliada sua visão “pedagógica, epistemológica, psicológica e sociocultural relativa ao ensino da matemática e, em particular, do ensino da álgebra.” (p.100), revelando que, para ela, o ensino não deve ser baseado apenas em procedimentos.

Na pesquisa de Vidal (2008), a autora não explicitou características ou indícios que revelasse sua concepção de o ensino de Álgebra.

**Quadro 15: Concepções de educação algébricas dos pesquisadores e professores nas pesquisas de Vidal (2008), Pinto (1997) e Gil (2008)**

<b>Autores</b>	<b>Concepção de educação algébrica identificada nas observações da pesquisa</b>	<b>Concepção de educação algébrica dos autores</b>
GIL	Exploratória	Exploratória
PINTO	Fundamentalista-analógica e fundamentalista-estrutural, embora haja indícios da linguístico-pragmática na professora Marina e exploratória na professora Luiza.	Exploratória
VIDAL	Fundamentalista-analógica	Não identificada

O próximo conjunto de dissertações a serem relacionadas corresponde àquelas que listaram os erros mais frequentes observados. Fazem parte desse grupo as pesquisas de Pepece Junior (2011), Fontalva (2006) e Burigato (2007).

Nessas pesquisas, não houve a participação direta do professor na análise dos dados. Por esse motivo, achei pertinente considerar a concepção de educação algébrica identificada nas pesquisas, como sendo a educação algébrica dos pesquisadores, considerando que, as atividades elaboradas e a forma como foram analisadas, revela o perfil do pesquisador. Assim, segue o quadro com as concepções identificadas:

**Quadro 16: Concepções de educação algébrica identificadas nas pesquisas de Pepece Junior (2011) e Fontalva (2006) e Burigato (2007)**

<b>Autores</b>	<b>Concepções de educação algébrica identificadas mediante análise das pesquisas</b>
Pepece Junior(2011)	Fundamentalista-analógica

Fontalva (2006)	Linguístico-pragmática
Burigato (2007)	Linguística-pragmática

Na pesquisa realizada por Pepece Junior (2011) não houve a enumeração dos erros, mas o autor, a partir da análise das atividades feitas, elaborou uma lista sobre as possíveis causas dos erros cometidos. Enquanto na pesquisa de Fontalva (2006) teve a identificação e listagem dos erros detectados.

Em Pepece Junior (2011), a maioria das questões utilizadas para a análise dos dados se enquadram em um ensino de Álgebra voltado para uma concepção fundamentalista analógica, por trabalhar com problemas relacionados à Álgebra mas com uma ênfase maior na linguagem. Apenas duas questões, 6 e 7 (descrita na página 62) exigiam dos alunos um pensamento algébrico mais elaborado, o que permitiu aproximá-lo de uma concepção exploratória. Porém, mesmo com atividades que tiveram como objetivo estimular o pensamento algébrico com questões que envolvessem os alunos de forma investigativa, prevaleceram as questões que tiveram como proposta a resolução dos problemas através da transformação da linguagem natural para a linguagem simbólica da álgebra. O modo como os alunos se comportaram também se diferenciou nas atividades 6 e 7, assumindo uma postura mais investigativa e motivadora. Porém, como já foi dito anteriormente, os erros não foram diferentes, apesar das concepções das atividades terem sido diversas. Os erros se repetiram: falta de atenção, erros nas operações, erro nas apresentações das respostas.

Fontalva (2006) desenvolveu sua pesquisa baseada em atividades que se aproximaram de uma concepção linguístico-pragmática de educação algébrica, pois as tarefas (exercícios) enfatizavam o transformismo algébrico e o uso de técnicas operatórias. Isso pode ser verificado através da lista de exercícios de inequações fornecida, que enfatizava os procedimentos para se obter a solução induzindo o aluno a cometer determinados tipos de erros de origem procedimental, isso é, erros de sintaxe, conforme foi discutido anteriormente.

Nas duas pesquisas acima, não houve a participação atuante dos professores durante as atividades. Na pesquisa de Fontalva (2006) houve apenas uma entrevista com o professor que tinha ensinado o tema de inequações para os alunos no primeiro ano do Ensino Médio.

A pesquisa de Burigato (2007) se diferencia das acima descritas no que se refere à listagem dos erros mais frequentes. Enquanto que Pepece Junior (2011) e Notari (2006) fizeram uma generalização dos erros e enumeraram, Burigato (2007) fez em sua pesquisa tabelas gerais que continham todos os tipos de erros cometidos pelos alunos, agrupando-os em colunas que continham os chamados “Teoremas de ação falsos”, que correspondiam aos erros apresentados nos exercícios de fatoração. Na seção anterior, listei alguns erros mais frequentes, porém durante a pesquisa de Burigato (2007) foi possível notar muitos erros de origem procedimental, fornecendo elementos que me permitem caracterizar a pesquisa baseada em uma concepção linguístico-pragmática.

Acho importante destacar que, no caso da pesquisadora Burigato (2007), todas as atividades e análises dos dados foram tiveram por base uma concepção de ensino linguístico-pragmática. Em um trecho da fala da autora, é possível relacionar uma preocupação com as regras estruturais da Álgebra: “... é necessário que eles (os alunos) consigam operar com as variáveis seguindo as regras próprias da estrutura que se está trabalhando, e que quando preciso saibam voltar aos referenciais, em geral números reais.” (p.9)”, o que me permitiria aproximá-la de uma concepção fundamentalista-estrutural de ensino da álgebra. Porém, considerei essa fala como um elemento insuficiente para identificar sua concepção de ensino de álgebra. Prevaleceu, assim, a forma como foi conduzida a sua pesquisa, tendo a autora evidenciado uma concepção de educação algébrica linguístico-pragmática.

Por fim, há as pesquisas que construíram e utilizaram categorias para identificar e analisar os erros e/ou dificuldades dos alunos. Foram elas: Scarlassari (2007). Freitas (2002) e Notari (2002).

Freitas (2002) e Notari (2002) construíram seis categorias que agrupavam os erros mais frequentes. A primeira pesquisa foi baseada em uma concepção linguístico-pragmática, e a segunda em uma concepção de educação algébrica fundamentalista-estrutural.

É possível perceber que Freitas (2002) se opõe a um ensino de Álgebra ligado a uma concepção tecnicista: “... o professor deve levar em consideração que um ensino calcado em técnicas, sem uma reflexão do seu significado, pode levar os seus alunos a cometer determinados erros...” (p. 8), porém as atividades entregues para os estudantes revelam uma concepção de ensino baseada em procedimentos. Com relação à pesquisa de Notari (2002), o autor considera o ensino da álgebra decorrente de regularidades das leis, mas que não se reduz à generalização da Aritmética, o que justifica uma aproximação a uma concepção fundamentalista-estrutural.

Na pesquisa de Scarlassari (2007), também foram construídas seis categorias, porém essas categorias não são dos erros mais frequentes e sim, categorias de dificuldades. Os erros mais presentes foram agrupados e classificados de acordo com as dificuldades que os alunos apresentavam. Como a pesquisa foi realizada em duas situações distintas, duas diferentes concepções de educação algébrica foram identificadas na pesquisa: situação A - linguístico-pragmática; e a situação B, exploratória. Como a professora participante da pesquisa, na situação B, foi a própria autora, sua concepção de educação algébrica também se aproxima de uma concepção exploratória e que estimula o desenvolvimento do pensamento algébrico. “... a álgebra tem sido estudada como se fosse apenas a aritmética generalizada, centrada em regras, algo que possui um caráter instrumental, útil apenas para resolver equações e problemas, o que deixa a desejar em relação aos conceitos e nexos que essa disciplina nos permite trabalhar.” (SCARLASSARI, 2007, p.27).

**Quadro 17: Quadro geral das concepções de educação algébrica identificadas nas dissertações analisadas**

<b>AUTORES</b>	<b>CATEGORIAS</b>	<b>CONCEPÇÕES DE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA DOS PROFESSORES ATUANTES NAS PESQUISAS</b>	<b>CONCEPÇÃO DE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA DOS AUTORES</b>
Gil	Sem definição	Exploratória	Exploratória
Pinto	Sem definição	Fundamentalista analógica e estrutural, com indícios de linguístico-pragmática e exploratória	Exploratória

Vidal	Sem definição	Fundamentalista analógica	Não foi identificada
Pepece Junior	Enumeração dos erros	-----	Fundamentalista analógica
Fontalva	Enumeração dos erros	-----	Linguístico-pragmática
Burigato	Enumeração dos erros	-----	Linguístico-pragmática
Notari	Categorias dos erros	-----	Fundamentalista estrutural
Freitas	Categorias dos erros	-----	Linguístico-pragmática
Scarlassari	Categorias das dificuldades	Fundamentalista-analógica Exploratória	Exploratória

Cabe destacar, em relação ao quadro acima, que as pesquisas que tiveram a participação efetiva do professor - como as de Scarlassari (2007), Pinto (1997), Vidal (2008) e Gil (2008), a concepção de educação algébrica de cada pesquisa, foi determinada pelas concepções dos professores participantes. Nas demais, o que prevaleceu para a identificação, foram os testes e atividades que foram aplicadas para análise dos dados.

### **5.3. - CONSIDERAÇÕES METANALÍTICAS SOBRE A POSTURA DOS PROFESSORES E PESQUISADORES DIANTE DOS ERROS DOS ALUNOS.**

Após terem sido apontados os erros e dificuldades dos alunos em Álgebra detectados nas dissertações metanalisadas, e identificadas as concepções de educação algébrica, explícitas ou implícitas nas pesquisas, busco, nesta seção, obter respostas para a terceira questão da pesquisa **Quais os modos de os pesquisadores e/ou professores colaboradores dessas pesquisas lidarem com os erros no ensino e na aprendizagem da álgebra elementar?** Para isso, foi necessário identificar qual a concepção que os autores e/ou professores tinham do erro, por acreditar que, a forma de lidar com os erros e dificuldades dos alunos está relacionada com a

concepção de erro que estes possuem e sobre o papel do erro no processo de ensino e aprendizagem. Assim, foram feitos quadros com trechos das dissertações analisadas que auxiliaram na identificação de uma concepção e/ou postura dos professores e/ou pesquisadores frente aos erros, buscando relacioná-los com base no referencial teórico apresentado no capítulo 2.

Como foram identificados três conjuntos de dissertações com características comuns, no que se refere à apresentação dos erros, continuarei seguindo essa forma de organização para identificar o modo de os pesquisadores e professores lidam com os erros.

**Quadro 18: Posicionamento dos autores e professores sobre os erros no processo de ensino e aprendizagem, nas pesquisas de Vidal (2008), Pinto (1997) e Gil (2008).**

Autores	Posicionamento dos autores sobre erros	Posicionamento do professor atuante na pesquisa com relação aos erros e dificuldades dos alunos
Vidal (2008)	<p>“Na abordagem construtivista, o erro é considerado importante mediador da aprendizagem. Assim, os erros devem ser compreendidos e, posteriormente trabalhados de forma pedagógica.”(s.p.<sup>6</sup>)</p> <p>“Fascinada com essa visão do erro, logo em seguida deparei-me com outra angústia: como fazer com que o erro produzido pelo aluno seja utilizado de forma a contribuir na sua aprendizagem? Como fazê-lo perceber seu erro e ajudá-lo a confrontar com as suas hipóteses?”</p> <p>“... há a necessidade de pesquisar sobre o erro, especificamente, na forma de tratá-lo, partindo da premissa de que o erro, concebido como uma dimensão construtivista, configura-se como oportunidade didática para o professor.”</p> <p>A escolha da escola e do professor alinhados a uma perspectiva construtivista, permite que, na</p>	<p>“Para mim, [<i>o professor</i>] em qualquer momento da vida e em qualquer aprendizagem o erro faz parte do processo, e, por isso, não pode ser negado, deixado de lado ou ignorado.”</p> <p>“... o professor pode compreender o porquê seu aluno errou (pode ser um erro conceitual, até) e reelaborar seu planejamento..”</p> <p>“Dentre essa soluções, se tiver alguma errada, ela é, para nós, turma, tão importante quanto as corretas.”</p> <p>Na pesquisa de Vidal (2008), o professor tem posicionamentos bem definidos com relação ao que pensa sobre o erro, considerando-o como um elemento importante no processo de ensino e aprendizagem e também para reavaliação da prática de ensino do professor.</p>

<sup>6</sup> No exemplar disponível na internet, não aparece a numeração das páginas.

	<p>pesquisa de Vidal, que objetiva responder <b>Como o professor trata os erros ou dificuldades dos alunos no estudo de Equação do 1º grau</b>, a autora obtenha elementos que caracterizam a visão do erro considerado como parte integrante e inerente ao processo de aprender, sendo considerado um elemento importante para a avaliação da prática pedagógica do professor.</p>	
Gil (2008)	<p>Na conclusão do trabalho de Gil, é possível perceber que a autora considera o erro como obstáculo para o sucesso na aprendizagem.</p> <p>Referindo-se às dificuldades que os alunos trazem da aritmética para a Álgebra, a autora afirma:</p> <p>“Em minha percepção, quando estas dificuldades aparecem, tornando-se barreiras para o sucesso no estudo de outros tópicos matemáticos, é hora de rever essas dificuldades.” (GIL, 2008, p.106)</p> <p>“Com minha experiência em sala de aula, noto que essas dificuldades persistem ano após ano, podendo ser um fator que implicará o fracasso e abandono escolar. Aqueles que continuam trazendo consigo muitas lacunas na aprendizagem matemática.” (p. 34)</p>	<p>Em todo o momento da discussão a professora oferece aos alunos espaço para eles explicarem como chegou às respostas, estando correta ou não.</p> <p>“A professora tem o hábito, como pode se observar, de questionar as respostas, dando tempo para que o aluno pense e se posicione quanto ao resultado obtido, muitas vezes explicando para a turma qual foi a sua linha de raciocínio.” (p.67).</p> <p>A autora se apoia em Moysés (2006), para justificar a importância da correção e dos questionamentos feitos pela professora:</p> <p>“Ao pedir que o aluno explique, o professor pode detectar se está havendo, no plano intrapsicológico, uma reestruturação das relações que ocorrem no âmbito interpsicológico” (MOYSÉS, 2006 apud Gil, 2008, p. 67)</p> <p>Para Gil, a postura de correção da professora favorece a aprendizagem, pois é dada a oportunidade dos alunos discutirem, apresentarem suas respostas, e chegarem a uma conclusão percebendo os erros e dificuldades encontrados.</p>
Pinto (1997)	<p>Para a pesquisadora, o estudo do erro vai além do que um estudo diagnóstico e reparador. É necessário observar “o modo como os alunos encaram a Matemática; qual é o papel do professor perante os erros e dificuldades dos seus alunos; qual o ensino que está sendo proporcionado a diferentes classes sociais; que significados são produzidos e negociados por alunos e professores nos processos de erro em aula; quais os valores, não só com relação à matemática, que professores e alunos carregam consigo para a aula; como professores e alunos caminham durante a</p>	<p>Nessa pesquisa, houve a participação de duas professoras, com posturas diferentes em relação ao tratamento dado aos erros dos alunos.</p> <p>- A professora Marina defende que o professor precisa ter conhecimento das dificuldades dos alunos, porém na pesquisa, apenas um episódio foi analisado, não sendo possível perceber atitude que revelasse uma preocupação com as dificuldades dos alunos. Ao contrário, nota-se que a professora segue o seu planejamento independente se os alunos entenderam ou não a atividade. O silêncio da turma, faz com que ela</p>

	<p>aprendizagem da álgebra...” (p.13)</p> <p>“O erro, portanto, será visto como fruto de quem está tentando inovar!” (p.51)</p> <p>Pinto apresenta uma concepção de erro considerado como “trampolim para a aprendizagem”.</p>	<p>assuma uma postura corretiva e expositiva.</p> <p>“Neste momento, a professora volta para a classe e pergunta se eles resolveram o problema. Não pede para ver as estratégias de resolução dos alunos. Vai direto ao quadro-negro e pergunta o que significa o quadrado de um número. Como nenhum aluno se manifesta, ela retoma o conceito de potenciação como uma linguagem que simplifica a linguagem da multiplicação de fatores iguais...” (p.88)</p> <p>- A professora Luiza considera importante valorizar as diferentes resoluções que os alunos apresentam, sendo possível perceber essa postura em sala de aula.</p> <p>“Um aspecto importante a ser aqui analisado é a forma dialógica, que incorpora elementos semânticos, de como a professora explora sintaticamente o erro, pois na interação dialógica há uma negociação de significados.” (p. 54)</p> <p>Em alguns episódios analisados, a professora não permite que os erros cometidos por alguns alunos sejam motivo de críticas por parte dos demais.</p> <p><i>É, ... a gente é gozado, é gozado! A gente pede para os alunos fazerem, eles não vêm. Aí, o aluno que vem, se por acaso ele erra, o outro fica eeee...(p.53)</i></p> <p>Também em outros momentos, a professora dá o tempo necessário para que o aluno perceba onde está o erro cometido, utilizando-se da estratégia da metacognição.</p> <p>“A professora Luiza parece saber e reconhecer que a metacognição é um momento importante no processo de aprendizagem, sobretudo, no enfrentamento do erro. A pergunta que Luiza faz aos seus alunos, no turno 3, (“Mas já descobriu o erro ou não?”), evidencia isto.” (p.62)</p>
--	--	---

Como o objetivo da pesquisa de Vidal (2008) era investigar as estratégias dos professores diante dos erros e dificuldades dos alunos, foi possível identificar de forma mais clara a posição do professor participante. Uma das estratégias utilizadas pelo professor foi promover a metacognição, oportunizando a reflexão/análise do aluno sobre seus próprios erros). De acordo com Vidal (2008), “A estratégia metacognitiva fez com que o aluno analisasse o aprendizado e

refletisse sobre ele, tornando-se capaz de perceber o que conhecia e o que precisava aprender”. O uso de um questionário contendo perguntas – tais como: o que errei? Por que errei? O que estou fazendo para não cometer os mesmos erros? foi considerado pela autora como um recurso de auto-avaliação muito importante no processo de análise de erros, fazendo com que os alunos percebessem que o erro faz parte do processo de aprendizagem.

Na pesquisa de Pinto (1997) também foi possível obter mais detalhes sobre a forma de os professores lidaram com os erros dos alunos. Como este foi um dos objetivos da pesquisa, a autora fez a análise de episódios das duas professoras identificando erros cometidos e analisando como estes foram tratados pelas professoras Luiza e Marina.

Em Gil (2008), atitudes da professora como o estímulo a questionamentos durante a correção dos exercícios, ajudaram a identificar como a professora lidou com os erros e dificuldades dos alunos. No que diz respeito à autora, houve poucos posicionamentos em relação aos erros, mas foi possível identificar, nos trechos selecionados, uma postura mais próxima do erro relacionado com uma dificuldade que deve ser superada.

Assim, das três pesquisas acima, revelam duas concepções distintas dos autores diante dos erros e dificuldades dos alunos: o erro como parte integrante da aprendizagem e o erro como um obstáculo a ser explorado, problematizado e superado com a medição do professor.

No segundo conjunto de pesquisas analisadas, o quadro abaixo apresenta as concepções dos pesquisadores Pepece Junior, Fontalva e Burigato.

**Quadro 19: Posicionamento dos autores Pepece Junior (2011), Fontalva (2006) e Burigato (2007) sobre erros**

Autores	Posicionamento dos autores sobre erros
Pepece Junior (2011)	“Da mesma forma que o erro não pode ser considerado como única maneira de apontar que o estudante não conseguiu se apropriar de um determinado conhecimento, devemos considerar que o fato do acerto também não garante que tudo foi aprendido sobre tal conteúdo. Precisamos acreditar que todo tipo de erro deve ser utilizado, de forma correta, para ajudar no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes...” (p.37)
Fontalva	Não há de forma explícita um posicionamento do autor sobre os erros. O que

(2006)	pude observar é que, para ele, o erro precisa ser identificado para que haja uma possível melhora no processo de ensino, em particular, das inequações. Na análise de dados da pesquisa, os erros foram listados e discutidos buscando compreender o porquê da sua ocorrência, através de protocolos que registraram por escrito cada passagem das resoluções que os alunos fizeram. Dessa forma, é possível que, para Fontalva, os erros precisam ser identificados e corrigidos com o objetivo de eliminá-los para que ocorra uma melhora no ensino de inequações.
Burigato (2007)	<p>“O estudo dos erros cometidos pelos alunos na fatoração de maneira isolada nos parece inadequado, o que nos fez refletir sobre como analisar dificuldades.” (p.18)</p> <p>“A identificação dos erros permite selecionar situações que possam ajudar na progressiva superação de tais dificuldades, e o professor tem um papel fundamental nesse processo.” (p.24)</p> <p>“Na construção do campo conceitual da fatoração a divisão e a multiplicação de termos são fundamentais, e como vimos, muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos estão em utilizar esses conhecimentos de maneira inadequada (...) Entendemos que dificuldades na utilização desses conhecimentos podem gerar uma impossibilidade do aluno em conseguir desenvolver o conceito de fatoração adequadamente.” (p.96)</p>

Nesse bloco de pesquisas, como não houve a participação do professor atuante, não foi possível obter elementos que destacassem a posição do professor frente aos erros. Apenas na pesquisa de Fontalva (2006), houve uma entrevista com o docente que ministrou o tema inequações para os alunos nos anos anteriores. Porém essa entrevista foi baseada em perguntas sobre os possíveis procedimentos que os alunos utilizariam para resolverem as inequações propostas no teste, subsidiando a escolha das inequações propostas no instrumento diagnóstico. Em um momento da entrevista, foi possível perceber que, para o professor, as dificuldades dos alunos são fatores que interferem na aprendizagem: “... alguns alunos apresentam deficiências na formação matemática no Ensino Fundamental e com isso mostram dificuldades no aprendizado, o que interfere nos seus desempenhos.” (p. 45)

No desenvolvimento da sequência didática realizada por Pecepe Junior (2011), o pesquisador ofereceu aos estudantes dois momentos. O primeiro para eles resolverem as atividades sem qualquer interferência externa, sendo que, após a realização desta etapa, as atividades eram recolhidas iniciando discussões sobre as questões. No segundo momento, após as

discussões, as atividades eram novamente propostas para os estudantes poderem modificar as respostas consideradas no primeiro momento ou manter a resolução inicial.

Essa forma de conduzir a sequência, nos leva a inserir o pesquisador em uma concepção de erro que o considera como parte integrante da aprendizagem, pois permite que o próprio aluno observe as suas resoluções, e tenha a oportunidade de perceber seus erros e modificar as resoluções. Dessa forma, também é possível perceber que não há uma preocupação excessiva com os erros tendo, no momento de discussão que se inicia após as atividades, a oportunidade de o aluno compreender o problema. Os erros não são considerados obstáculos para a aprendizagem. O autor sabe que eles podem existir, posso até dizer que ele permite que eles cometam os erros (devido a não possibilidade de discussão no primeiro momento), deixando os alunos livres a acertarem ou errarem.

Com relação à Fontalva (2006), é possível perceber na análise dos dados, que o autor apresenta, de forma quantitativa, os erros cometidos pelos alunos e também apresenta a justificativa das resoluções com o uso de alguns “protocolos” escritos por eles. Esses protocolos tiveram como objetivo entender qual foi o pensamento do aluno ao resolver as questões, para melhor compreender os erros cometidos por eles.

Caso o autor tivesse utilizado os protocolos de maneira que pudesse provocar no aluno a reflexão dos seus erros, como ocorreu na pesquisa de Pecece Junior (2011), a concepção de erro de Fontalva (2006) poderia estar relacionada como parte integrante do processo de ensino aprendizagem. Portanto, como os erros não foram explorados dessa forma e, por outro lado, considerando a maneira de conduzir a atividade, isso sugere que, para esse pesquisador (Fontalva) o erro deve ser identificado e corrigido.

A sequência didática proposta por Burigato (2007) permite que os alunos possam validar as suas respostas, seja através do software utilizado, o Aplusix, ou pela resolução no lápis e papel, através do professor. Dessa forma, a autora possibilitou que o aluno pudesse verificar o seu erro e corrigi-lo.

Assim, uma nova concepção de erro surgiu nesses autores que é o erro que precisa ser identificado e corrigido.

O próximo quadro contém com as concepções frente aos erros e dificuldades dos alunos dos autores Freitas (2002), Notari (2002) e Scarlassari (2007).

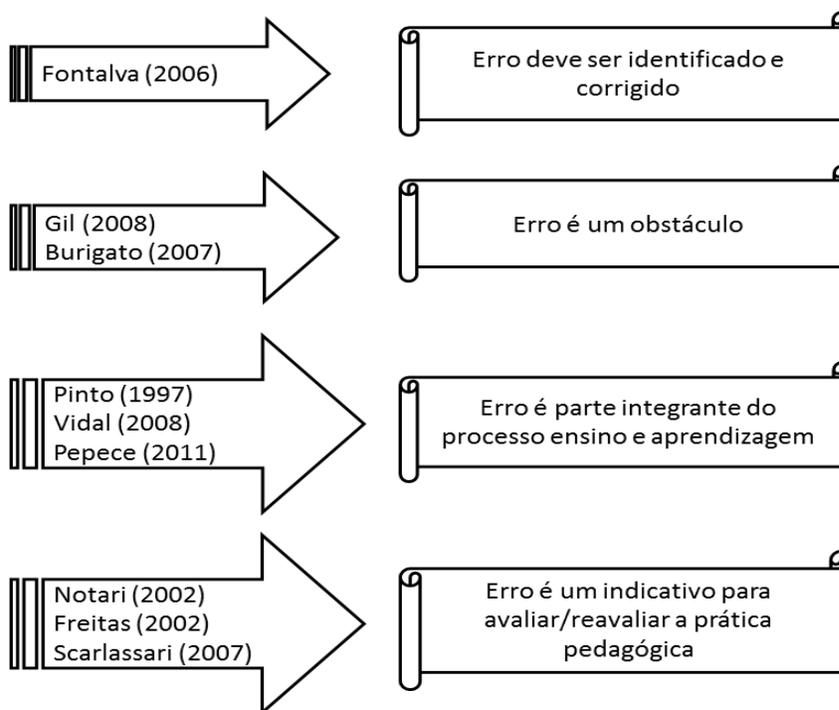
**Quadro 20: Posicionamento dos autores Notari (2006), Freitas (2002) e Scarlassari (2007) sobre erros**

Autores	Posicionamento dos autores sobre erros
Notari (2002)	<p>“Portanto, os subsídios para as propostas alternativas de ensino, sobre as frações podem ser obtidos pela identificação, qualificação e compreensão dos erros cometidos pelos nossos alunos e suas justificativas nos procedimentos de simplificação dessas frações.” (p.16)</p> <p>Notari se apoia em pesquisas que relacionam os erros em Álgebra aos hábitos escolares: “Privilegiamos as pesquisas de Booth (1988), Mason (1996), Kaput (1996) e os estudos apresentados por Lemoyne, Conne e Brun (1993), que consideram a hipótese de que os erros dos alunos em Álgebra estão diretamente relacionados aos hábitos escolares desenvolvidos ao longo dos estudos primários.” (p. 10)</p> <p>O autor assume uma postura de investigar os erros cometidos para poder melhorar o processo de ensino e aprendizagem na simplificação das frações e propõe uma nova alternativa de ensino a partir da postura investigativa dos erros cometidos pelos alunos.</p> <p>“No instrumento diagnóstico sobre Aritmética, nossa principal preocupação foi,..., a de obter informações não apenas sobre o acerto ou o erro da resposta dada pelo aluno, mas também sobre os procedimentos utilizados na simplificação das frações aritméticas.” (p.41)</p>
Freitas (2002)	<p>“... o professor deve levar em consideração que um ensino calcado em técnicas, sem uma reflexão de seu significado, pode levar os alunos a cometerem determinados erros, que estão vinculados a esta concepção de ensino.” (p.8)</p> <p>“A compreensão dos erros dos alunos e as justificativas que apresentam de seus procedimentos na resolução de equações, podem trazer subsídios para pensar alternativas de ensino sobre as equações.” (p.9)</p> <p>“Se o professor compreender por que o aluno erra, poderá planejar um ensino eficaz. Não se trata apenas de sancionar o erro, mas de sim adotar outros tipos de intervenção, capazes de atingir todo o grupo de alunos, tendo em vista o progresso do aluno e, conseqüentemente, a superação do erro.” (p.9).</p> <p>Freitas revela uma postura de compreender os erros para uma melhora no processo de ensino e aprendizagem.</p>
Scarlassari (2007)	<p>“É importante entender as raízes aritméticas do erro para que o professor trabalhe com atividades que permitam uma compreensão, por parte dos alunos, da operacionalidade</p>

	<p>que será necessária para a aprendizagem em álgebra elementar.” (p.40)</p> <p>“Acreditamos que se o professor vir a conhecer as possíveis dificuldades que os alunos podem apresentar ao estudar determinado conceito, ele atentar-se-á no momento de preparar a aula, ademais, proponha atividades com a finalidade de isentar os alunos de determinados tipos de dificuldades.” (p.41)</p>
--	--

Os três pesquisadores citados acima, possuem em comum a ideia de compreender os erros. Nos seus discursos, aparece de forma clara o posicionamento de não apenas identificar e corrigir os erros, mas uma postura que vai além do diagnóstico e da correção. A atitude de compreender, investigar e entender os erros dos alunos contribui para que o professor obtenha um diagnóstico das dificuldades e necessidades dos alunos. Esse diagnóstico fornece ao professor subsídios para rever suas práticas e planejamento de ensino. Sendo uma concepção de erro ligada diretamente à prática pedagógica do professor é observada nessas pesquisas.

Em síntese, pude detectar quatro concepções do papel didático-pedagógico do erro nas dissertações analisadas.



**Figura 2: Síntese das concepções didático-pedagógicas do papel do erro**

Vale ressaltar que, as concepções encontradas acima sobre o papel do erro, não são excludentes a cada pesquisa. É possível obter a concepção de erro como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem e a concepção de erro como indicativo da prática pedagógica, em uma mesma pesquisa, como por exemplo, na pesquisa de Vidal (2008), sendo possível “caminhar” por essas duas concepções.

Descreverei um pouco sobre as quatro concepções de erros encontradas nas pesquisas como forma de explorar o modo como os pesquisadores e/ou professores lidam com os erros e dificuldades dos alunos.

### 5.3.1 - O Erro é Parte Integrante do Processo Ensino e Aprendizagem

Essa concepção tem uma forte influência nas ideias construtivistas e sociointeracionistas, com destaque no construtivismo de Piaget. De acordo Macedo (1994):

O construtivismo de Piaget (1967) encaminha-nos para uma posição em que o erro, como oposição ao acerto, deve ser revisto ou interpretado de outro modo. [...]. Todos nós erramos algumas vezes, ou seja, pensamos ou agimos de um modo que um dia terá, talvez, que ser revisto. No processo de desenvolvimento, o que interessa é uma revisão constante de nossas teorias, ideias, pensamentos ou ações, porque erro e acerto são sempre relativos a um problema. (p. 64)

Como esclarecido anteriormente, as concepções apresentadas não são excludentes e possuem “interseções”. Na pesquisa de Vidal (2008), a postura tanto da pesquisadora quanto do professor colaborador na pesquisa, revela uma forte concepção relacionada ao erro na perspectiva

construtivista, porém, não exclui o papel pedagógico do erro e a importância deste para uma reflexão da didática do professor, conforme afirma Pinto (2000):

Uma decorrência do princípio construtivista é o fato de o erro apresentar-se como uma oportunidade didática para o professor organizar melhor seu ensino a fim de criar situações apropriadas para o aluno superar seus erros e apropriar-se dos conhecimentos necessários à sua cidadania. (p.11)

Em Pinto (1997) é possível perceber nas duas professoras participantes das pesquisas, Luiza e Marina, diferentes posturas frente aos erros. Classificada em uma concepção que considera o erro como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, o erro deixa de ser considerado como um elemento punitivo, tornando-se um elemento integrador e importante na aprendizagem. No caso da professora Luiza, foi possível observar que, para ela, o erro não pode ser sinônimo de gozação por parte dos alunos e muito menos de recriminação. A sua atitude (descrita no quadro 18) revela que a professora Luiza não considera o erro como um sintoma de culpa, medo ou castigo. Para Luckesi (2011), o erro não pode ser sinônimo de fracasso, e sim considerado um insucesso. Segundo o autor, “Quando se chega a uma solução bem-sucedida, pode-se dizer que se aprendeu positivamente uma solução; quando se chega a um resultado não satisfatório, pode-se dizer – também positivamente – que ainda não se aprendeu o modo de satisfazer determinada necessidade.” (LUCKESI, 2011, p.196). Assim, a ideia de erro determinando um fracasso, culpa, castigo e medo, são dissociados nessa concepção.

Em síntese, para os que concebem o erro como parte integrante da aprendizagem, estes sugerem que o mesmo não seja visto e tratado como algo ser reprimido ou punido, mas, como algo a ser explorado, problematizado e superado sob a mediação do professor .

### 5. 3. 2 – O Erro é um Obstáculo

A concepção de erro destacada nesse item, como concepção de erro que revela um obstáculo, embora traga a palavra “obstáculo”, ela se difere dos erros como obstáculos definidos por Brousseau na didática francesa. A concepção de erro como obstáculo, percebida nas dissertações analisadas, em particular nas dissertações de Gil (2008) e Burigato (2007), reflete uma concepção de erro que está relacionada como um entrave para o desenvolvimento do aluno, dificultando um avanço na aprendizagem.

Na pesquisa de Gil (2008), com relação ao ensino de álgebra, foi possível perceber que a autora considera que as dificuldades e erros cometidos pelos alunos, no que se refere à aritmética, são considerados como entraves para a aprendizagem da álgebra. Assim como, em Burigato (2007), os procedimentos inadequados de fatoração, não permitem que os alunos consigam desenvolver de forma adequada os conceitos de fatoração.

A redução de termos não semelhantes, muitas vezes é decorrente da dificuldade em entender novos conceitos e significado do sinal da soma que, no ensino da aritmética, é ensinado de maneira que o objetivo é unir as parcelas. Essas dificuldades podem ser interpretadas como uma não superação do “novo” com relação às ideias anteriores, o que se aproxima da concepção de erro relacionada com a concepção de obstáculo epistemológico de Bachelard, na qual um conhecimento inadequado se torna um obstáculo à aquisição de novos conceitos. Porém, não há nas nove dissertações analisadas, o referencial de erro como obstáculo de acordo com essa visão.

Assim, o erro nessa concepção, é considerado como uma dificuldade para avançar no processo de ensino e aprendizagem e não como uma falha, pois ao superar os erros e dificuldades apresentados os alunos tem a possibilidade de progredirem e avançarem no conhecimento.

### 5.3.3 – O Erro é um Indicativo para Avaliar/reavaliar a Prática Pedagógica

O estudo do erro revela fatores que interferem na prática do professor. Por muitas vezes, os erros e dificuldades dos alunos apontam para uma (re)avaliação da prática pedagógica do professor, assumindo uma concepção pedagógica do erro, conforme afirma Pinto (2000):

[...] o erro, quando submetido a uma reflexão, poderá desencadear um questionamento de todo o processo de ensino e transformar-se numa estratégia didática inovadora, pela possibilidade que oferece ao professor de ampliar seus saberes e, com isso, melhorar seu ensino. (p.24).

Conforme a hipótese desta pesquisa, a prática de ensino do professor interfere de forma direta nos tipos de erros que são cometidos pelos alunos. Dessa forma, é possível perceber que, nessa classificação das concepções didático-pedagógicas do papel do erro, esse item está diretamente correlacionado com a hipótese adotada.

A relação do erro com a prática de ensino deve ser percebida pelo professor, de modo que seja possível uma reflexão da sua própria prática com o objetivo de perceber que o erro cometido pelo aluno não deve ser de responsabilidade exclusiva deste. O papel do professor, neste caso, vai além da correção do erro e tentativa de superá-lo através de recursos já utilizados. O papel pedagógico do erro inclui uma avaliação da própria prática que busca propostas de mudanças na forma de conduzir o processo de ensino e aprendizagem, assim como a maneira de conceber os erros cometidos pelos alunos.

Outro autor que concorda com o erro como forma de condução da prática pedagógica é Lorenzato (2010). Para ele, "... o erro é um indicador de (re)direcionamento pedagógico porque ele oferece oportunidade de crescimento, ao aluno, bem como de evolução, ao professor." (p.49-50).

Dessa forma, entende-se que é importante a forma como o professor lida com os erros. Nas pesquisas de Pinto (1997), Vidal (2008) e Gil (2008), foi possível observar algumas estratégias utilizadas pelos professores colaboradores destas pesquisas no tratamento dos erros e

dificuldades dos alunos, como por exemplo, o processo de metacognição, no qual, o professor promove atividades que permitem com que o próprio aluno perceba os erros e dificuldades encontrados no processo de ensino e aprendizagem. Nas pesquisas de Notari (2002), Freitas (2002) e Scarlassari (2007), a posição destes autores com relação ao papel pedagógico do erro, foi mostrada no quadro 20 (p. 122), revelando que é necessário que o professor compreenda os erros cometidos pelos alunos, de forma que essa compreensão permita possíveis mudanças na elaboração do seu planejamento pedagógica e da condução das atividades em sala de aula, visando uma melhora na aprendizagem dos alunos, em particular, na aprendizagem de álgebra.

#### 5.3.4 – O Erro deve ser Identificado e Corrigido.

A quarta concepção de erro identificada nas pesquisas metanalisadas se refere a uma concepção que vê o erro como um elemento que precisa ser identificado e eliminado para que seja possível alcançar o sucesso na aprendizagem. A pesquisa de Fontalva (2006) foi identificada nessa concepção, devido as estratégias adotadas com relação à forma de lidar com o erro. Nesta pesquisa, os erros foram identificados e analisados o porquê da sua ocorrência (através dos “protocolos” dos alunos), com o objetivo de melhorar o ensino das inequações. Na pesquisa de Burigato (2007) também procurou-se identificar os erros e dificuldades que surgiram, porém, nas palavras da autora, a sua concepção de erro vai além da simples identificação e correção, tomando um caráter de obstáculo.

Em termos práticos, poderia “unir” de dois a dois essas quatro concepções identificadas. Entendo que, ao conceber o erro como importante no processo de ensino e aprendizagem, e considerando que o professor é elemento fundamental nesse processo, é difícil não associar a essa concepção, a postura de considerar o erro como um elemento que pode (re)definir ou orientar o rumo e as ações da prática pedagógica. Assim, o erro assume um caráter mais pedagógico e a forma de tratá-lo passa a se relacionar diretamente com a sala de aula e o professor. Conforme alguns pesquisadores afirmaram, os erros podem redefinir ou reorientar algumas práticas pedagógicas. Por outro lado, ao conceber o erro como um obstáculo ou um fator que impede a

aprendizagem e que deve ser identificado e corrigido, o erro deixa de ser um elemento que é necessário para redefinir o processo de ensino, tornado-se um fator que impede o desenvolvimento e a aprendizagem, se aproximando, dessa forma, a uma concepção mais próxima com elementos que envolvem os conteúdos, alunos e professor, caracterizado uma situação mais didática, de acordo com a didática francesa. Assim, o professor passa assumir a postura de detectar e corrigir os erros dos alunos de forma que eles superem as dificuldades para prosseguirem na aprendizagem.

Por essas razões e considerando os resultados dessa metanálise, as concepções de erros que emergem dessas pesquisas, no contexto das práticas de ensinar e aprender álgebra na escola básica, adquirem contornos de concepções didático-pedagógicas do papel do erro no contexto do ensino e da aprendizagem. E essas concepções didático-pedagógicas, no contexto do ensino e aprendizagem da álgebra, são diversas e estão diretamente relacionadas com as concepções e práticas de educação algébricas.

## ALGUMAS CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Da mesma forma que iniciei este trabalho relatando um pouco de minha trajetória pessoal e profissional até o início do desenvolvimento do projeto desta dissertação, finalizo minha dissertação trazendo alguns comentários sobre angústias, mudanças, dificuldades e aprendizados que aconteceram ao longo do processo de investigação e escrita desta dissertação.

O processo de pesquisa envolve idas e vindas, começos e recomeços. Assim foi durante o desenrolar da metanálise realizada. Como narrei na introdução, o projeto inicial da pesquisa foi modificado para o uso de uma metodologia que foi para mim bastante desafiadora. A definição do *corpus* da metanálise foi uma das etapas que teve algumas alterações e mesmo após o exame de qualificação, foi possível perceber que algumas pesquisas poderiam estar presentes no *corpus* da metanálise, mas que eu não tive mais tempo hábil para poder incluí-las no *corpus*. Aproveito para pedir desculpas ao leitor, caso haja algum trabalho que esteja inserido nesse contexto não tenha sido contemplado nessa metanálise, sugerindo então que novos trabalhos de metanálise possam abranger as pesquisas restantes.

Durante os resultados encontrados na análise, o objetivo principal, definido no início da pesquisa, começou a ser questionado por mim, à medida que eu tentava alcançar os objetivos específicos propostos. Inicialmente, o objetivo principal era investigar como os pesquisadores lidam com os erros, porém percebi que poderia ir além do alcance desse objetivo e resolvi deixá-lo como um objetivo específico, e propor como objetivo principal da metanálise investigar e analisar a relação entre os tipos de erro, as concepções de educação algébrica e os modos de os pesquisadores lidarem com os erros. Essa relação entre os três elementos investigados e discutidos no capítulo anterior, deixei para ser apresentada neste capítulo, por compreender que o objetivo da metanálise, que se propõe a desenvolver uma revisão sistemática de pesquisas já realizadas com o intuito de obter novos resultados e novas compreensões sobre o objeto de estudo, deixa como contribuição para a área acadêmica um elemento que é importante para a (re)avaliação do ensino da álgebra elementar e em relação ao modo como os professores lidam com os erros e dificuldades dos alunos.

Para as considerações finais da presente pesquisa, retomo as quatro questões propostas no início deste trabalho e a partir delas, irei expor resultados, conclusões e reflexões obtidas a partir das análises feitas do conjunto de dissertações que compuseram esta metanálise e tecendo relações entre os itens avaliados.

Com o objetivo de investigar e analisar as relações existentes entre as concepções de educação algébrica, os tipos de erros e os modos como os pesquisadores lidam com eles, foi necessário identificar quais são os erros mais cometidos pelos alunos, e quais as dificuldades que eles têm quando se trata do ensino da Álgebra Elementar. Assim, ao responder à pergunta - **Que tipos de erros e/ou dificuldades dos alunos em álgebra elementar podem ser identificados nas dissertações?** - foi possível identificar quais são os erros mais frequentes em Álgebra na prática escolar. Alguns desses erros se assemelharam aos erros das pesquisas realizadas anteriormente e discutidas no capítulo 1. Muitos dos autores como Booth, Usiskin, Kieran, estão presentes na maioria dos referenciais das dissertações analisadas. Assim, alguns erros foram encontrados em comum nas dissertações. Dentre os erros, foi possível observar erros que são diretamente ligados à Álgebra, como erros decorrentes da não aceitação da ausência de fechamento, erros relacionados a procedimentos incorretos para resolver equação e inequação, e outros erros mais gerais como erros de interpretação, erros decorrentes da falta de atenção.

Na análise do *corpus* da metanálise, foi possível determinar duas características que diferenciam os erros quanto a sua natureza: os erros de procedimentos, ou erros com caráter operacional e de origem sintática; e os erros de origem semântica, que estão mais relacionados com os erros conceituais ou de significação e interpretação. Porém, ressalto que essa classificação dos erros não é excludente, pois como já explicado anteriormente, alguns erros de sintaxe podem revelar dificuldades de ordem semântica e vice-versa. Além disso, no ensino da Álgebra, os procedimentos também são importantes e necessários para a aprendizagem e entendimento dos conceitos e significados envolvidos. A distinção feita refere-se quando o enfoque na identificação e análise dos erros, dando maior ênfase à sintaxe ou à semântica. Daí o fato de haver pesquisas nas quais houve o predomínio de erros de sintaxe ou de semântica.

Com relação aos erros de sintaxe, as pesquisas de Burigato (2008), Notari (2002), Fontalva (2006), Freitas (2002), Vidal (2008) e Pepece Junior (2011) listaram erros mais desse tipo. Nas pesquisas de Gil (2008) e Scarlassari (2007) os erros procedimentais não foram destacados e sim erros envolvendo conceitos, dificuldades com a linguagem, dentre outros. Nas pesquisas de Pinto (1997), por trabalhar com a análise de duas professoras com concepções distintas de educação algébrica, foi possível observar a presença de erros de origem sintática e em outros momentos a ocorrência de erros de origem semântica.

Um exemplo que mostra um erro que pode ser discutido sob o enfoque sintático e o semântico é nos ensino das propriedades envolvendo potências.

Uma maneira de a prática escolar explorar o ensino das operações com potências, envolvendo as propriedades operatórias, seria explorar e desenvolver a compreensão no aluno, de que, por exemplo, a potência  $a^n$  é o produto de  $a$ ,  $n$  vezes, de modo que ele possa perceber que  $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$ , porque há  $m+n$  produtos de  $a$ . Porém, nas escolas, tem sido prática comum os professores e alunos não se preocuparem com a conceituação ou prova/justificação dos procedimentos e regras utilizados comumente no ensino e aprendizagem da álgebra. Com esse tipo de prática, os alunos tendem a desenvolver uma atitude pragmática em relação à aprendizagem da álgebra, exigindo que o professor dê a regra pronta e que facilite as resoluções com o mínimo de esforço cognitivo. Dessa forma, o aluno não se interessa em compreender e o professor também acha mais prático apresentar a regra pronta. O erro então de origem semântico, se “mascara” em um tipo de erro de sintaxe.

Um tipo de dificuldade que foi comentado nas pesquisas de Notari (2002), Gil (2008), Freitas (2002), por exemplo, foi com relação ao uso de procedimentos utilizados na aritmética e que se tornam inadequados na Álgebra. Esse tipo de dificuldade foi apontada também pelos autores Booth e Usiskin, apresentados no capítulo 1, que afirmam que muitas dificuldades em Álgebra são reflexos de dificuldades presentes também na aritmética. Diante dessas dificuldades acredito ser importante a seguinte reflexão. Será que o ensino da aritmética, ao priorizar os algoritmos e procedimentos de cálculo ao invés do significado das operações e da igualdade entre expressões, constitui um campo de obstáculo didático para o estudo e aprendizagem da Álgebra?

O ensino da aritmética nas escolas, não explora, por exemplo, a igualdade como equivalência entre as expressões numéricas, o que poderia ajudar os alunos a desenvolver, já anos iniciais de escolarização, o pensamento algébrico, proporcionando, assim, condições para o aluno se apropriar da álgebra simbólica quando esta fosse introduzida, no 6º ou 7º ano escolar. Assim, dificuldades evidenciadas na aprendizagem da Álgebra podem revelar um problema existente no ensino da aritmética, que não prepara o aluno para a introdução do pensamento e da linguagem algébricos.

Com relação aos erros decorrentes da aplicação de procedimentos inadequados, destaco os erros nas resoluções das equações de 2º grau apresentadas por Freitas (2002), com um ensino baseado em modelos de reprodução de procedimentos. Como nas resoluções das equações de 1º grau, o aluno leva e desenvolve alguns procedimentos que acredita serem também adequados para a resolução de equações do 2º grau. Esse ensino, baseado em modelos que enfatizam a sintaxe em detrimento da semântica, provoca obstáculos de origem didática, pois o aluno tem uma resistência ao novo devido aos conhecimentos adquiridos anteriormente e de forma mecânica.

Foi possível observar nas entrevistas realizadas pela pesquisadora Gil (2008), que alguns professores reforçam esses tipos de modelos acreditando serem eficientes para o ensino da Álgebra, como por exemplo, a professora que afirmou que uma grande quantidade de exercícios é necessária para aprender Álgebra. Neste caso, a professora acredita ser eficiente um ensino baseado na repetição dos exercícios. Pode parecer eficiente sob um determinado olhar. Sob uma visão imediatista ou pragmática, é possível que o aluno consiga realizar todas as atividades que se assemelham aos exercícios que foram apresentados e treinados, reduzindo os chamados erros de procedimentos, pois, dessa forma, o aluno passa a ser reprodutor “aparentemente eficaz” de determinadas questões que enfocam o mesmo tipo de resolução. Portanto, ao trabalhar, por exemplo, com situações-problema, nas quais as maneiras de resolvê-las são diferenciadas, sendo necessário desenvolver um raciocínio e um esquema de resolução diferente para cada um, esse procedimento com listas de exercícios não é mais adequado.

Retomando a segunda pergunta dos objetivos específicos - **Que concepções de educação algébrica estão presentes nas pesquisas?** - foi possível identificar todas as concepções abordadas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) nas nove dissertações analisadas. A resposta a essa pergunta, visa ratificar a hipótese de trabalho de que os tipos de erros cometidos se relacionam diretamente ao modo de conceber e realizar o ensino da álgebra em sala de aula.

A segunda pergunta da pesquisa buscou revelar que tipo de educação algébrica estava presente nas pesquisas, com base no referencial das concepções apresentadas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993). Como a hipótese de trabalho assumida foi que os tipos de erros cometidos pelos alunos em Álgebra estão diretamente correlacionados à prática de ensino do professor, e acreditando que a prática de ensino está relacionada com a concepção que o professor tem do ensino da Álgebra, foram identificadas a partir da análise do *corpus* metanalítico as concepções de educação algébrica que estavam implícitas ou explícitas. Nas dissertações que não apresentaram diretamente situações de ensino envolvendo professor, aluno e sala de aula, como as dissertações de Freitas (2002), Notari (2002), Pepece Junior (2011), Fontalva (2002) e Burigato (2008) as concepções de educação algébrica que foram identificadas foram aquelas manifestas pelos próprios autores das pesquisas, pois assumi que os tipos de testes, exercícios e análises presentes nas pesquisas, trazem ou expressam a concepção própria do autor. Sendo assim, através da forma como foram apresentados os erros e a maneira como foram analisados pelos autores, foi possível identificar as concepções de educação algébrica dessas pesquisas. entretanto, em relação aos casos dos autores Burigato (2007) e Freitas (2002) e Notari (2002), estes apresentaram concepções que foram identificadas nas pesquisas, mas que se diferenciavam das concepções identificadas por mim nos capítulos 4 e 5, devido a alguns posicionamentos discursivos que esses autores apresentaram ao longo de suas dissertações. Por exemplo, em Burigato (2007) as atividades presentes para as análises tiveram características de uma concepção de ensino linguístico-pragmática, porém, a autora, revelou ser importante, para ela, o uso das estruturas e regras próprias da álgebra para o aprendizado, revelando uma concepção voltada para a concepção fundamentalista-estrutural. Nas demais dissertações como Vidal (2008), Pinto (2007), Gil (2008) e Scarlassari (2007), foi possível identificar tanto as concepções dos professores que participaram da pesquisa, como as concepções das autoras, com

exceção da pesquisa de Vidal (2008) na qual não foi possível uma identificação própria da autora, assumindo assim a concepção de educação algébrica do professor colaborador da pesquisa.

Em síntese, é possível verificar que, em grande parte das dissertações analisadas, houve o predomínio de uma concepção algébrica mais próxima da concepção linguístico-pragmática, seguida da concepção fundamentalista analógica. Em um número menor, as concepções exploratórias e de desenvolvimento do pensamento algébrico, e a concepção fundamentalista estrutural.

Com relação à terceira questão da pesquisa - **Quais os modos de os pesquisadores e/ou professores colaboradores das pesquisas lidarem com os erros?** - foi possível identificar quatro concepções, que foram apresentadas em uma figura na seção 4.3. As concepções identificadas com os referentes autores das pesquisas foram:

- o erro deve ser identificado e corrigido: Fontalva (2006)
- erro como obstáculo: Gil (2008) e Burigato (2007)
- erro como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem: Pinto (1997), Vidal (2008) e Pepece (2011)
- erro como indicativo para avaliar/reavaliar a prática pedagógica: Notari (2002), Freitas (2002) e Scarlassari (2007).

A quarta e última questão – Que relações podem ser estabelecidas entre as concepções de ensino de álgebra, os tipos de erros cometidos pelos alunos e os modos de os pesquisadores lidarem com eles? - deixei para ser respondida neste capítulo das considerações finais, por ser a contribuição desta metanálise para o ensino da Álgebra elementar no Brasil, provocando reflexões a partir da prática pedagógica do professor, do ensino de Álgebra, e dos erros que os alunos cometem durante o processo de ensino e aprendizagem.

Durante o desenvolvimento da metanálise, com a leitura minuciosa do *corpus* do trabalho, foi possível obter as respostas das três primeiras perguntas pré-estabelecidas e que foram retomadas aqui na conclusão. Porém, a resposta à quarta questão da pesquisa, foi realizada a

partir das reflexões dos resultados obtidos na metanálise, com o objetivo de deixar, ao leitor, uma contribuição sobre relação que se estabelece entre a concepção de ensino de álgebra dos pesquisadores e professores participantes das pesquisas, os erros cometidos pelos alunos e a forma de lidar com eles.

Ao longo do texto, foram criados quadros que me possibilitaram um detalhamento mais claro e preciso das informações. Seguindo essa forma de condução, apresento aqui um quadro geral que contém uma síntese dos principais resultados obtidos com o objetivo de observar a relação obtida entre os itens destacados acima. Apesar de a construção do quadro se apresentar de forma “fechada” no que se refere ao enquadramento dos autores nas concepções identificadas, mantenho a posição de que essas concepções podem uma a uma se completarem e caminharem juntas, sem uma definição rígida e limitada entre elas. Porém, como forma de apresentar metodologicamente as informações mais claras, resolvi por desenhar o quadro síntese no qual é possível encontrar, por autor, os tipos de erros encontrados, a concepção de educação algébrica identificada e a forma de conceber os erros.

**Quadro 21: Síntese dos resultados**

<b>Autor</b>	<b>Tipos de erros</b>	<b>Concepção de educação algébrica</b>	<b>Concepção didático-pedagógicas do papel do erro</b>
Notari (2002)	Transformação da resposta simplificada em equação; cálculo do produto ou potência entre coeficiente e expoente da variável; simplificação parcial; adição de número com termo algébrico; adição de coeficientes de termos não semelhantes; simplificação do coeficiente como se fosse soma.	Fundamentalista estrutural	O erro como indicativo para (re)avaliar a prática pedagógica.
Pepece Junior (2011)	Erros cometidos por falta de conhecimento prévio dos conteúdos; erros cometidos por falta de noção das quatro operações; erros por falta de atenção nas resoluções; por não apresentar solução para o problema;	Concepção fundamentalista analógica.	Erro como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem.

	erros de interpretação.		
Fontalva (2006)	Uso inadequado da propriedade distributiva da multiplicação; dificuldades com valores excluídos; dedução incorreta de sinais; multiplicar ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos.	Concepção linguístico-pragmática.	Erro deve ser identificado e corrigido.
Gil (2008)	Dificuldade de entender a ausência de fechamento; dificuldade de interpretação dos enunciados; dificuldade de entender conceitos de perímetro e área; falta de atenção na leitura dos enunciados; dificuldade na representação da linguagem algébrica.	Concepção exploratória e de desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos.	Erro é um obstáculo a ser superado.
Freitas (2002)	alteração do sinal do coeficiente na divisão dos termos independentes; troca da posição do coeficiente de x pelo termo independente; transpor termos independentes sem alterar o sinal;	Concepção linguístico-pragmática	O erro como indicativo para (re)avaliar a prática pedagógica.
Scarlassari (2007)	dificuldade na tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica, dificuldade em trabalhar com variáveis, com conceitos de unidade e com os campos de variação.	Concepção exploratória e de desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos, com indícios de fundamentalista analógica.	O erro como indicativo para (re)avaliar a prática pedagógica.
Pinto (1997)	Os erros que os alunos cometem são consequência da prática didático-pedagógica privilegiada pelos professores, destacando-se os erros de natureza sintática (ou procedimental) e os de natureza semântica (ou conceitual), embora considere essa relação dialética.	Concepção exploratória e de desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos, com indícios de linguístico pragmática e fundamentalista analógica.	Erro é parte integrante do processo ensino e aprendizagem.
Vidal (2008)	Erros identificados na transformação da linguagem algébrica para a linguagem simbólica, no uso da propriedade distributiva na resolução de equações, erros na resolução de equações com frações algébricas, erros no transformismo algébrico.	Fundamentalista analógica	O erro é parte integrante do processo ensino e aprendizagem.

Burigato (2007)	Não transformação da expressão em produto para fatorar; a não identificação do termo em comum; erros cometidos na extração de raízes quadradas; redução de termos não semelhantes.	Concepção linguístico-pragmática.	Erro é um obstáculo a ser superado.
-----------------	--	-----------------------------------	-------------------------------------

É possível perceber que há uma estreita relação entre os diferentes tipos de erros e a concepção de educação algébrica identificada nas pesquisas.

Nas pesquisas que tiveram como predominância as concepções de ensino de álgebra com enfoque procedimental, como as concepções linguístico-pragmática e fundamentalista analógica, os erros assumem um caráter também mais procedimental, conforme o quadro anterior. Em geral, são erros de resolução, de uso inadequado de procedimentos, de alteração de sinais, dentre outros. Em contraste com a concepção de educação algébrica que foca nos procedimentos, nas pesquisas que foram identificadas com uma prática de ensino de álgebra que promove o desenvolvimento do pensamento e linguagem algébricos, foi possível identificar não apenas uma redução dos erros procedimentais, mas a ocorrência de erros e dificuldades relacionados a conceitos algébricos e geométricos e de dificuldades com a linguagem algébrica, sobretudo em atividades em que predominava a interpretação de significados em álgebra.

Não é possível um ensino de álgebra que não utilize os procedimentos algébricos de resolução, pois eles são necessários. Entretanto, é possível perceber que os erros sintáticos que os alunos cometem são, geralmente, decorrentes da concepção e prática de ensino de álgebra privilegiada em sala de aula. Para que os alunos utilizem de forma adequada os procedimentos e regras que são ensinados pelo professor, é necessário que a compreensão de conceitos, pensamento e significados algébricos, sejam desenvolvida em sala de aula de forma que seja possível a superação e eliminação de erros desse tipo. Uma sugestão de prática de ensino que permita uma exploração semântica da álgebra é o trabalho com situações investigativas que permitam ao aluno a “descoberta” de procedimentos, de regras, de conceitos. Esse tipo de prática permite que o ensino da álgebra não tenha como foco apenas os procedimentos algébricos, que volto a repetir, são necessários e fundamentais para a aprendizagem da álgebra, mas permita ao aluno a exploração e o entendimento dos próprios procedimentos, passando a ter um sentido mais

significativo as regras e procedimentos de resolução. A partir dessa nova exploração, é possível perceber novas dificuldades e erros que podem permitir, a partir da prática do professor em sala de aula e da forma de condução do erro, novas perguntas, novos questionamentos, que promovam um desenvolvimento do pensamento exploratório da álgebra. Isso foi percebido nas dissertações das autoras Gil (2008), Pinto (1997) e Scarlassari (2008), que apresentaram atividades investigativas no ensino de álgebra.

Com relação às concepções de erro identificada nos autores, percebo que os autores lidam com os erros de acordo com as suas próprias concepções, independentemente do tipo de erro e/ou dificuldades apresentadas pelos alunos. Por exemplo, na pesquisa de Fontalva (2006), na qual a maior parte dos erros se revelaram de origem sintática pela pesquisa predominar uma concepção de álgebra mais próxima da linguístico-pragmática, o autor considera o erro como um elemento que precisa ser identificado e eliminado. Em Freitas (2002), que também foi identificada essa mesma concepção em sua pesquisa, o autor considera que o erro é um indicador do tipo de prática pedagógica, pois o professor, ao entender o erro do aluno, habilita-se a rever e transformar a sua própria prática. Na pesquisa de Gil (2008), na qual a professora e pesquisadora foram classificadas em uma concepção de ensino que privilegia o desenvolvimento do pensamento e linguagem algébricos, a concepção da pesquisadora com relação ao erro é de encarar o erro como sendo um obstáculo a ser superado.

Portanto, a análise dos erros foi definida pelo tipo de erro cometido pelos alunos. Quando o erro foi de natureza sintática, a análise feita pelos autores e/ou professores teve o foco apenas nos procedimentos, na identificação dos erros e até na tentativa de entender o porquê do erro cometido, de acordo com as concepções didático-pedagógicas identificadas. Em síntese, a redução de erros de natureza sintática parece estar relacionada a uma exploração algébrica mais semântica ou conceitual, por parte dos professores.

Nesse sentido, é importante que o professor sempre reveja e analise sua prática de ensino, em especial, de ensino de álgebra. Pode ser possível que, ao explicar demasiadamente as regras e procedimentos de resolução, por exemplo, de equações do primeiro grau, os alunos “dominem” o assunto e não cometam mais erros. Mas será que outros tipos de erros poderão ser evitados, por

exemplo, ao apresentar uma situação-problema na qual a resolução da equação é o último passo a ser resolvido da questão? Um olhar para a prática do professor e sua concepção de ensino de álgebra, pode revelar quais os tipos de erros e dificuldades que os alunos terão no processo de ensino e aprendizagem de álgebra.

Esse trabalho permite contribuir para uma reflexão do professor em sala de aula, desde o seu planejamento à forma de avaliar os alunos. Foi comprovada que existe uma relação estreita da prática pedagógica e dos erros cometidos pelos alunos, não bastando apenas detectar essa relação. As discussões em torno de como isso afeta o desenvolvimento do aprendizado do aluno e até mesmo a forma de se comportar perante a resolução de exercícios e/ou problemas trabalhados em sala de aula permitirá que diminua a angústia do professor ao se deparar com tantos erros dos alunos e tantas dificuldades, principalmente no que tange à álgebra.

A realidade da vida docente, em muitos casos, não permite que seja possível o acompanhamento de todos os alunos nas atividades, de modo a perceber de perto as dificuldades que cada um apresenta. Mas é preciso que, mesmo em pequenos momentos, o professor passe a perceber que algumas dificuldades apresentadas em sala de aula devam ser exploradas de forma mais crítica e reflexiva. Não cabe uma simples correção com a indicação da resposta correta, pois alguns erros, como discutidos no decorrer desta pesquisa, podem ser decorrentes de diversas razões e, tentar compreender a razão desses erros é fundamental para que ocorra a aprendizagem.

Outra contribuição importante deste trabalho são os fichamentos, presentes no apêndice, que foram importantes para a seleção das dissertações, e que são deixados como uma contribuição para possíveis trabalhos de estado da arte. Nas fichas é possível identificar a problemática, objetivos, referencial, a metodologia e resultados ou conclusões das dissertações analisadas de forma que seja possível apresentar, a futuras pesquisas, uma ideia de como montar uma ficha de coletas de dados contribuindo para próximas pesquisas.

Enfim, concluo este trabalho com a certeza de poder contribuir para uma discussão mais ampla sobre o ensino da álgebra, pois os erros e dificuldades dos alunos são apenas alguns elementos que permeiam as diversas relações presentes no processo de ensino e aprendizagem.

## REFERÊNCIAS

ALMOULOU, A. S. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuições para a psicanálise do conhecimento. Tradução Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 3ª edição, 2004.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: **As ideias da álgebra**. COXFORD, A; SHULTE, A. Traduzido por Hygino h. Domingues. São Paulo, 1995.

BORBA, V. M. de L. Dificuldades de aprendizagem em álgebra elementar: problema de ensino ou de aprendizagem? In: **X Congresso Nacional de Psicologia Escolar e Educacional**, Maringá, 2011.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasília: MEC, SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, 1976.

BURIGATO, Sonia M. M. S. **Estudo de dificuldades na aprendizagem da fatoração nos ambientes:** papel e lápis e software aplusix. 2007. 154 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Ciências Humanas e Sociais, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, 2007

CARDIA, L.S. F. **Integrando a geometria com a álgebra na construção de expressões algébricas.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC – SP, 2007.

CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.** Coleção Tendência em Educação Matemática, Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

\_\_\_\_\_. Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em Educação Matemática. In: **Revista Zetetiké**, Campinas, vol. 3, n. 4, pp. 39-50, 1995.

CURY, H. N; LANNES, W; BROLEZZI, A. C; VIANNA, C. R. Álgebra e educação algébrica: concepções de alunos e professores de Matemática. In: **Educação Matemática em Revista**, v.4 n. 4, p. 9-15, 2002.

FIorentini, D; Lorenzato, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FIorentini, D; Miorim, M. A; Miguel, A. Contribuição para um Repensar...a Educação Algébrica Elementar. In: **Revista Pro-posições**, v.4 n.1, março, 1993.

FIorentini, D; Coelho, M. A. Aprendizagem profissional de professores em comunidades investigativas. In: *Leitura: Teoria & Prática (Suplemento)*, Campinas, n. 58, 2012.

FONTALVA, Gerson M. **Um estudo sobre inequações:** entre alunos do ensino médio. 2006. 132 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2006

FREITAS, Marcos A. **Equações do 1º grau:** métodos de resolução e análise de erros no Ensino Médio. 144 f. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2002.

HAGHVERDI, M. SEMNANI, A. S. SEIFI, M. The Relationship between Different Kinds of Students' Errors and the Knowledge Required to Solve Mathematics Word Problems. In: **Bolema**, Rio Claro, SP, vol. 26, n. 42, 2012.

HALL, R. D. G. An Analysis of thought processes during simplification of an algebraic expression. In: **Philosophy of Mathematics Education Journal**, v.15, 2002.

GIL, Katia H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra.** 2008. 118 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2008.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: **As ideias da álgebra.** COXFORD, A; SHULTE, A. Traduzido por Hygino h. Domingues. São Paulo, 1995.

LAVILLE, C., DIONNE, L. **A construção do saber: manual de metodologia de pesquisa em ciências humanas.** Tradução: Heloísa Monteiro e Francisco Settinari – Porto Alegre, Artmed, Belo Horizonte, Ed: UFMG, reimpressão 2008.

LINS, R. C; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papyrus, 1997.

LUCKESI, C. C. Prática Escolar: do Erro Como Fonte de Castigo ao Erro Como Fonte de Virtude. IN: **Avaliação da aprendizagem escola: estudos e proposições**. 22 ed., São Paulo: Cortez, 2011.

MACEDO, L de. Para uma visão construtivista do erro no contexto escolar. In: **Ensaio Construtivistas**, São Paulo: Casa do Psicólogo, PP 63-79, 1994.

MARTINS, Adriano de Moraes. **Uma metanálise qualitativa das dissertações sobre equações algébricas no ensino fundamental**. 2008, 142f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2008.

MIGUEL, A. FIORENTINI, D. MIORIM, A. Algébra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? IN: **Pro-Posições**. Vol. 3, n. 1, 1992.

MORAES, Roque. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. In: **Revista Ciência e Educação**, v. 9 n. 2, p. 191 – 211, 2003.

NOTARI, Alexandre M. **Simplificação de frações aritméticas e algébricas**: um diagnóstico comparativo dos procedimentos. 2002. 119 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) –Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2002.

PAIS, L. C. Didática da Matemática: uma análise da influência francesa. Coleção Tendências em Educação Matemática. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PASSOS, C. L. B *et al.* Desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática: uma meta-análise de estudos brasileiros. In: **Quadrante: Revista teórica e de investigação**. Lisboa: APM, v. 15, n. 12, p. 193 – 219, 2006.

PEPECE JUNIOR, Antonio R. **Análise da produção escrita de estudantes da EJA em atividades algébricas**. 2011. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2011.

PINTO, N. B. O erro como estratégia didática: estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas, SP: Papyrus, 2000.

PINTO, Renata A. **Erros e dificuldades no ensino da álgebra**: o tratamento dado por professoras de 7<sup>a</sup> série em aula. 1997. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação, área de concentração Educação Matemática). - Faculdade de Educação, CEMPEM, Unicamp, Campinas, SP, 1997.

PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. In: **Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. (orgs.), p. 5 – 27, Lisboa, 2006.

RICO, L. Errores y dificultades em el Aprendizaje de las Matemáticas. In: **Educación Matemática: Errores y dificultades de los estudiantes, Resolución de problemas, Evaluación, Historia**. KILPATRICK, J.; GOMEZ, P.; RICO, L. Universidad de los Andes, Bogotá, 1998, pp 69-103.

RUANO, R. M, SOCAS, M. M, PALAREA, M. M. **Analisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria em lós procesos de sustitución formal, generalización y modelización em álgebra**. PNA (2), 61 – 74, 2008.

SCARLASSARI, Nathalia T. **Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental**. 2007. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, SP, 2007

SILVA, Alciony R. H. **A concepção do professor de Matemática e dos alunos frente ao erro no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais**. Dissertação. Faculdade de Educação da PUC, Curitiba, 2005.

SOUSA, Adilson S. **Metacognição e ensino da álgebra: análise do que pensam e dizem professores de matemática da educação básica**. Dissertação, Faculdade de Educação da USP, SP, 2007.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: **As ideias da álgebra**. COXFORD, A; SHULTE, A. Traduzido por Hygino h. Domingues. São Paulo, 1995

VIANA FILHO, João P. Ensino e Aprendizagem de Função: uma metanálise de dissertações brasileiras sobre modelagem matemática produzidas entre 1987 e 2010. 2012. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2012

VIDAL, Sara Jane R. B. **Exploração didática do erro no ensino de equação do 1º grau.** 2008. 133 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, 2008.



## APÊNDICE

**Fichamento das dissertações do *corpus* da metanálise.**

**ICHA PARA COLETA DE INFORMAÇÕES DE DISSERTAÇÕES QUE INVESTIGAM ERROS E DIFICULDADES DOS ALUNOS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA ELEMENTAR**

Identificação	Problemática/Problema	Objetivos
<p><b>SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES ARITMÉTICAS E ALGÉBRICAS: UM DIAGNÓSTICO COMPARATIVO DOS PROCEDIMENTOS.</b></p> <p>Autor: Alexandre Marques Notari  Nível: Mestrado  Instituição: PUC-SP  Orientador: Anna Franchi  Ano: 2002  Palavras-chave: frações aritméticas e algébricas; equivalência de frações; procedimentos de simplificação; erros</p>	<p>A álgebra é considerada por diversos autores como uma Aritmética Generalizada. Porém, essa generalização é dada em diversos momentos e foi precoce e acaba por utilizar regras da aritmética que não são aplicáveis à álgebra. A aritmética é considerada como fonte da mesma. Assim, pretende-se verificar como as características específicas dos sistemas conceituais aritméticos e algébricos se manifestam na simplificação de frações.</p>	<p>Obter um diagnóstico sistemático dos principais erros e dificuldades manifestados por alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio na simplificação de frações aritméticas e algébricas.</p>

Tratamento teórico do problema ou da questão	Metodologia de pesquisa (como a questão foi respondida, incluindo sujeitos, instrumentos e metodologia de coleta de dados)	Metodologia de análise dos dados (como foi feita a análise ou interpretação das informações coletadas na pesquisa de campo; eixos ou categorias de análise)	Resultados e/ou conclusão (respostas obtidas para a questão investigativa ou objetivo da pesquisa)
<p>Booth; Mason; Kaput; Kieran; Lemoyne, Conne e Brun. Utiliza de autores que enfocam a álgebra como generalização das leis que regem a aritmética.</p>	<p>Foram realizadas pesquisas em uma turma de 8ª série e outra do 1º ano do Ensino Médio de duas escolas públicas na região oeste de SP, com aplicação de provas e entrevistas. O instrumento diagnóstico com 65 alunos tinha 8 questões divididas em dois grupos: frações aritméticas e frações algébricas. Após a aplicação desse instrumento, foram selecionados 12 alunos para a continuidade da pesquisa com a entrevista e análise de dados.</p>	<p>Primeiramente foi realizada uma análise quantitativa dos dados, em tabelas, com o número de procedimentos e/ou erros cometidos. Depois foi feita uma análise qualitativa com a utilização das entrevistas.</p>	<p>Encontraram um grande número de erros nas atividades de simplificação das frações algébricas, os quais revelam a incompreensão das regras formais que regulamentam as transformações necessárias nessa simplificação. Os resultados também demonstraram uniformidade de procedimentos nas simplificações das frações aritméticas, no que se refere aos processos procedimentais. Também foi identificada uma ausência de interação entre os domínios conceituais aritméticos e algébricos.</p>

**FICHA PARA COLETA DE INFORMAÇÕES DE DISSERTAÇÕES QUE INVESTIGAM ERROS E DIFICULDADES DOS ALUNOS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA ELEMENTAR**

<b>Identificação</b> (título, autor(es) e instituição) e <b>Nível</b> (mestrado, doutorado, outros)	<b>Problemática/Problema</b>	<b>Objetivos</b>
<b>Análise da produção escrita de estudantes da EJA em atividades algébricas.</b> Autor: Antonio Rafael Pecepe Junior. Nível: Mestrado Instituição: Universidade Estadual de Londrina Orientador: Angela Marta Pereira Savioli Ano: 2011 Palavras-chave: Educação Matemática; EJA; Educação de Jovens e Adultos; Engenharia Didática; Pensamento Algébrico; Erro	Por um lado, na EJA, há muitas dificuldades apresentadas pelos estudantes no trato com conteúdos algébricos, principalmente quando se refere a interpretação dos enunciados sem uma reflexão do problema proposto. Por outro lado, poucas são as pesquisas em Educação Matemática que trabalham com essa modalidade.	Investigar indícios de pensamento algébrico e possíveis erros na produção escrita de estudantes da EJA em atividades algébricas envolvendo equações de primeiro grau.

<b>Tratamento teórico do problema ou da questão investigativa</b> (principais conceitos chaves tratados teoricamente e autores nos quais se apoia)	<b>Metodologia de pesquisa</b> (como a questão foi respondida, incluindo sujeitos, instrumentos e metodologia de coleta de dados)	<b>Metodologia de análise dos dados</b> (como foi feita a análise ou interpretação das informações coletadas na pesquisa de campo; eixos ou categorias de análise)	<b>Resultados</b> (respostas obtidas para a questão investigativa ou objetivo da pesquisa)
Engenharia Didática Artigue e Almouloud; Lins e Gimenez; Cury;	Para montar a estrutura da engenharia didática proposta por Artigue Almouloud,, foram analisados livros destinados ao público EJA e aplicado um pré-teste com dois problemas para serem realizados individualmente. Após a análise do pré-teste, foi desenvolvida a sequência didática com sete atividades a 11 estudantes do nono ano da modalidade EJA de uma escola pública do interior do estado de Sp.	Foram feitas análises a priori e a posteriori e validação de cada uma das sete atividades aplicadas. Entre os erros encontrados, foram classificados: falta de conhecimento prévio dos conteúdos, falta de noção das quatro operações, falta de atenção na resolução, erro na apresentação do resultado, erro na interpretação do enunciado	Nos resultados da sua pesquisa, o autor conseguiu identificar entre os alunos participantes os que estavam preparados para a certificação do curso do EJA e aqueles que apresentaram grandes dificuldades.. Indícios de pensamento algébrico também foram identificados na pesquisa. O autor chama a atenção para um olhar diferente tanto dos governantes como dos pesquisadores para o ensino EJA.

**FICHA PARA COLETA DE INFORMAÇÕES DE DISSERTAÇÕES QUE INVESTIGAM ERROS E DIFICULDADES DOS ALUNOS  
NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA ELEMENTAR**

<b>Identificação</b> (título, autor(es) e instituição) e <b>Nível</b> (mestrado, doutorado, outros)	<b>Problemática/Problema</b>	<b>Objetivos</b>	
<p>Um estudo sobre inequações: entre alunos do ensino médio.</p> <p>Autor: Gerson Martins Fontalva</p> <p>Instituição: PUC-SP</p> <p>Nível: Mestrado</p> <p>Ano: 2006</p> <p>Orientador: Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão</p> <p>Palavras-chave: Inequações; desigualdades; álgebra; ensino médio.</p>	<p>Por um lado as inequações é um tema que desenvolve um papel importante na matemática por estarem presentes nos ramos da álgebra, trigonometria, funções, dentre outros. Por outro lado, muito pouco se tem estudado nas pesquisas brasileiras sobre esse tema.</p> <p>Quais recursos os estudantes utilizam para resolver inequações?</p> <p>Quais as justificativas para as etapas de resolução?</p> <p>Quais tipos de erros que mais se apresentam?</p>	<p>-Investigar quais são as dificuldades apresentadas para a resolução de inequações;</p> <p>-Diagnosticar conceitos, propriedades e procedimentos utilizados nas resoluções de algumas inequações.</p>	
<b>Tratamento teórico do problema ou da questão investigativa</b>	<b>Metodologia de pesquisa</b> (como a questão foi respondida, incluindo sujeitos, instrumentos e metodologia de coleta de dados)	<b>Metodologia de análise dos dados</b> (como foi feita a análise ou interpretação das informações coletadas na pesquisa de campo; eixos ou categorias de análise)	<b>Resultados</b> (respostas obtidas para a questão investigativa ou objetivo da pesquisa)
<p>Tsamir, Almoud e Assude</p> <p>Interação de domínios de Douady.</p>	<p>Foi realizado um estudo de caso com os estudantes do ensino médio de uma escola técnica estadual na região do ABC em São Bernardo do Campo, na Grande São Paulo. Foram feitos dois encontros com um grupo voluntário de 30 alunos do Ensino Médio. Foram fornecidos aos alunos um papel com as inequações para eles resolverem e em um outro papel sulfite em branco para que eles explicassem o desenvolvimento passo a passo da resolução. Técnica chamada de thinking aloud (pensando alto).</p>	<p>Para a análise dos dados foi utilizado o quadro teórico de Douady e a definição de categorias de Assude.</p>	<p>A partir das justificativas fornecidas pelos alunos verificou-se a predominância de técnicas de resolução das inequações, com poucas explicações de conceitos e propriedades, o que revela que o ensino é mais focado nas técnicas o que provoca alguns erros verificados.</p>

**FICHA PARA COLETA DE INFORMAÇÕES DE DISSERTAÇÕES QUE INVESTIGAM ERROS E DIFICULDADES DOS ALUNOS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA ELEMENTAR**

<b>Identificação</b> (título, autor(es) e instituição) e <b>Nível</b> (mestrado, doutorado, outros)	<b>Problemática</b>	<b>Objetivos</b>
<p><b>Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra</b>                      Autora: Katia Henn Gil                      Instituição: Universidade Católica do Rio Grande do Sul                      Tipo: Mestrado em Educação em Ciências e Matemática                      Orientador: Ruth Portanova                      Ano: 2008                      Palavras-chave: Linguagem Algébrica; Álgebra; Ensino e Aprendizagem</p>	<p>Por um lado, muitos alunos consideram a álgebra como um terror da matemática. Por outro lado, a maneira como os professores trabalham com esses conceitos algébricos pode estar dificultando ainda mais a aprendizagem.                      Por que os alunos apresentam tantas dificuldades na aprendizagem da Álgebra?</p>	<p>Compreender as dificuldades encontradas pelos alunos de 7ª série no entendimento dos conceitos e procedimentos que envolvem o estudo de álgebra e propor alternativas de solução.</p>

<b>Tratamento teórico do problema ou da questão investigativa</b> (principais conceitos chaves tratados teoricamente e autores nos quais se apoia)	<b>Metodologia de pesquisa</b> (como a questão foi respondida, incluindo sujeitos, instrumentos e metodologia de coleta de dados)	<b>Metodologia de análise dos dados</b> (como foi feita a análise ou interpretação das informações coletadas na pesquisa de campo; eixos ou categorias de análise)	<b>Resultados</b> (respostas obtidas para a questão investigativa ou objetivo da pesquisa)
<p>Diversos autores na área de Ensino da Álgebra; Vygotsky.</p>	<p>A pesquisa foi realizada com 32 alunos de uma escola da 7ª série (atual 8 ano) da rede privada da cidade do Porto Alegre, com observações, aplicações de testes com os alunos e entrevistas com alunos e professores</p>	<p>A análise de dados foi realizada, a partir de três blocos de atividades que foram propostos com diferentes graus de dificuldades. Foram feitas análises qualitativas dos erros e dificuldades apresentadas nas questões. Também foram analisadas as entrevistas com os alunos e 4 professores que também atuam na 7ª série desta escola.</p>	<p>Dentre as dificuldades percebidas na pesquisa, destacam-se: a dificuldade na interpretação e tradução da linguagem corente para a linguagem algébrica; dificuldade na passagem da aritmética para a álgebra devido à falta de pré-requisitos; percebeu-se também dificuldades na linguagem escrita dos alunos. Nas entrevistas com os professores, notou-se que o tema Geometria foi o mais citado quando o trabalho era feito em um contexto.</p>

**FICHA PARA COLETA DE INFORMAÇÕES DE DISSERTAÇÕES CUJOS AUTORES TRATAM DE ERROS E DIFICULDADES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA NO ENSINO MÉDIO E FUNDAMENTAL**

<b>Identificação</b> (título, autor(es) e instituição) e <b>Nível</b> (mestrado, doutorado, outros)	<b>Problemática</b>	<b>Objetivos</b>
<p><b>Equações do 1º grau: métodos de resolução e análise de erros no ensino médio</b>  <b>Autor:</b> Marcos Agostinho de Freitas  <b>Instituição:</b> PUC – SP  <b>Tipo:</b> dissertação, 137 f.  <b>Orientador:</b> Anna Franchi  <b>Ano:</b> 2002</p>	<p>Por um lado, grande parte dos alunos do 1º ano do Ensino Médio resolvem equações do 1º grau através do método da transposição. Por outro quando aplicados mecanicamente, sem a compreensão e o sentido da resolução, podem levar os alunos a cometerem erros.          Como os alunos do Ensino Médio se comportam frente ao processo de resolução de uma equação?</p>	<p>Estudar aspectos relativos à compreensão dos procedimentos nas resoluções das equações de 1º grau.</p>

<b>Tratamento teórico do problema ou da questão investigativa</b> (principais conceitos chaves tratados teoricamente e autores nos quais se apoia)	<b>Metodologia de pesquisa</b> (como a questão foi respondida, incluindo sujeitos, instrumentos e metodologia de coleta de dados)	<b>Metodologia de análise dos dados</b> (como foi feita a análise ou interpretação das informações coletadas na pesquisa de campo; eixos ou categorias de análise)	<b>Resultados</b> (respostas obtidas para a questão investigativa ou objetivo da pesquisa)
<p>Booth, Kieran, Pinto, Matz, Filloy e Rojano, Lemoyne, Conne e Brun.</p>	<p>Primeiramente, com instrumento provisório foram aplicadas 15 equações diferentes do 1º grau a 80 alunos do 2º ano do Ensino Médio. Depois, foi aplicado um questionário com 24 equações para o 1º ano do Ensino Médio de uma escola particular na Zona Oeste de SP. Também utilizou entrevistas semi-estruturadas.</p>	<p>Foi realizada uma análise quantitativa dos resultados a partir de categorias de erros criadas pelo autor. Em seguida foi feita uma análise conceitual de alguns erros cometidos.</p>	<p>Como resultado dessa pesquisa, verificou-se uma forte influência da mecanização de técnicas para a resolução das equações.          Conclusão: É preciso que o ensino da álgebra se concentre na relação entre os aspectos algébricos e os aritméticos pois os alunos tem muita dificuldade na passagem de um para o outro, sobretudo nos métodos de resolução.</p>

**FICHA PARA COLETA DE INFORMAÇÕES DE DISSERTAÇÕES QUE INVESTIGAM ERROS E DIFICULDADES DOS ALUNOS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA ELEMENTAR**

<b>Identificação</b> (título, autor(es) e instituição) e Nível (mestrado, doutorado, outros)	<b>Problemática</b>	<b>Objetivos</b>
<p><b>Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental.</b></p> <p><b>Autor:</b> Nathalia Tornisiello Scarlassari</p> <p><b>Instituição:</b> Unicamp</p> <p><b>Tipo:</b> dissertação.</p> <p><b>Orientador:</b> Anna Regina Lanner de Moura</p> <p><b>Ano:</b> 2007</p> <p>Palavras-chave: Ensino da Álgebra; Nexos conceituais; Dificuldades; História da Álgebra; Ensino Tradicional.</p>	<p>A álgebra é um tema da matemática bastante complexo e muito importante, no qual há muito o conceito de linguagem e significação dos termos. Por outro lado, esse assunto é ensinado para os alunos através de repetição de exercícios com o objetivo de decorar procedimentos.</p> <p>Que tipo de dificuldades alunos da 6ª série do Ensino Fundamental apresentam em uma situação B de ensino de álgebra, comparativamente a alunos da mesma série que passara por uma situação A de ensino de álgebra?</p>	<p>Comparar entre as dificuldades apresentadas pelos alunos sujeitos a uma situação A de ensino, com as dificuldades apresentadas pelos alunos sujeitos a uma situação B de ensino, desenvolvida nesta pesquisa.</p>

<b>Tratamento teórico do problema ou da questão investigativa</b> (principais conceitos chaves tratados teoricamente e autores nos quais se apóia)	<b>Metodologia de pesquisa</b> (como a questão foi respondida, incluindo sujeitos, instrumentos e metodologia de coleta de dados)	<b>Metodologia de análise dos dados</b> (como foi feita a análise ou interpretação das informações coletadas na pesquisa de campo; eixos ou categorias de análise)	<b>Resultados</b> (respostas obtidas para a questão investigativa ou objetivo da pesquisa)
<p>Desenvolvimento conceitual; desenvolvimento histórico da linguagem algébrica</p> <p>Lima, Smith, Boyer, Eves.</p> <p>Nexos conceituais: Sousa</p>	<p>Estudo comparativo entre dois grupos: grupo A – duas classes da 6ª série de uma escola particular em Piracicaba com uma abordagem tradicional; grupo B – duas classes da 6ª série em uma escola estadual de Campinas nas quais foi feita uma pesquisa ação, em um contexto de desenvolvimento de conceitos da álgebra elementar. Como instrumento de dados teve o diário do pesquisador, questionários e listas de exercícios.</p>	<p>Para análise dos dados foram feitas categorias para as duas situações de aprendizagem de ensino. Com relação à situação A de aprendizagem, algumas categorias já estavam estabelecidas, mas isso não impediu a criação de novas categorias. As categorias foram analisadas levando em consideração as características da linguagem algébrica e da operacionalidade.</p>	<p>Esta comparação indica que os alunos da situação B encontraram menos dificuldades para realizar as atividades e que a frequência dos erros, nessa situação, foi menor. A Situação B de ensino proporcionou uma aprendizagem mais significativa das ideias algébricas correspondentes aos exercícios solicitados do que a Situação A, de abordagem tradicional.</p> <p>Conclusão: É preciso quebrar o estigma de que ensinar e aprender matemática é uma tarefa árdua e privilégio de poucos. Os alunos se envolvem quando se sentem capazes e valorizados ao desenvolver atividades que desenvolvam criação, discussão e elaboração.</p>

**FICHA PARA COLETA DE INFORMAÇÕES DE DISSERTAÇÕES QUE INVESTIGAM ERROS E DIFICULDADES DOS ALUNOS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA ELEMENTAR**

<b>Identificação</b> (título, autor(es) e instituição) e <b>Nível</b> (mestrado, doutorado, outros)	<b>Problemática</b>	<b>Objetivos</b>
<p><b>Erros e dificuldades no ensino da álgebra: o tratamento dado por professoras de 7ª série em aula</b>            Autor: Renata Anastácio Pinto            Instituição: Unicamp            Tipo: dissertação, 110 f.            Orientador: Dario Fiorentini            Ano: 1997</p>	<p>Por um lado, existem muitos estudos que explicitam ou descrevem as dificuldades e os erros que os alunos apresentam no processo de aprendizagem da álgebra. Por outro lado, praticamente não existem estudos sobre o ponto de vista do professor e o seu papel fundamental no enfrentamento ou exploração didática desses erros e dificuldades em situação de aula.            Como o professor trata/enfrenta os erros e as dificuldades que surgem em situações de aula envolvendo atividades algébricas?</p>	<p>Investigar e analisar o modo como os professores tratam/enfrentam, em aula, as situações de erro ou dificuldade, suas e dos alunos, que surgem no processo de ensino/aprendizagem da álgebra elementar.</p>

<b>Tratamento teórico do problema ou da questão investigativa</b> (principais conceitos chaves tratados teoricamente e autores nos quais se apoia)	<b>Metodologia de pesquisa</b> (como a questão foi respondida, incluindo sujeitos, instrumentos e metodologia de coleta de dados)	<b>Metodologia de análise dos dados</b> (como foi feita a análise ou interpretação das informações coletadas na pesquisa de campo; eixos ou categorias de análise)	<b>Resultados</b> (respostas obtidas para a questão investigativa ou objetivo da pesquisa)
<p>Diversos</p>	<p>Abordagem qualitativa fazendo observações etnográficas através de observação das aulas de duas professoras da 7ª série em escolas municipais de Campinas. Foram utilizadas entrevistas semi-estruturadas, diário de campo e transcrições das gravações</p>	<p>Para a análise do material, foram definidas categorias a posteriori construídas/modificadas a partir das reflexões sobre o material empírico. Categorias descritivas: fatos e projetos que marcaram o desenvolvimento profissional do professor; ideias e concepções e modelos de ensino de álgebra; prática pedagógica profissional. Categorias analíticas: processos sintáticos semânticos; metacognitivos e de significação associados ao conceito de negociação de significados.</p>	<p>Resultados: Três fontes de origem dos erros nas aulas: dos alunos, professoras e material didático. Os erros cometidos pelos alunos são consequência da valorização dos procedimentos, em detrimento ao estudo da interpretação dos significados (semântica).            Conclusões: O erro não pode ser considerado como algo ruim ou negativo, mas como consequência de uma tentativa de compreensão e que por isso precisa ser explorado pedagogicamente pelo professor.</p>

**FICHA PARA COLETA DE INFORMAÇÕES DE DISSERTAÇÕES QUE INVESTIGAM ERROS E DIFICULDADES DOS ALUNOS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA ELEMENTAR**

<b>Identificação</b> (título, autor(es) e instituição) e <b>Nível</b> (mestrado, doutorado, outros)	<b>Problemática</b>	<b>Objetivos</b>
<p><b>Exploração didática de erro no ensino de equação do 1º grau</b>            Autor: Sara Jane Rocha Brito Vidal            Instituição: Universidade Federal do Ceará            Tipo: dissertação            Orientador: Maria Gilvanise de Oliveira Pontes            Ano: 2008            Palavras-chave: Erros; Matemática; Equações; Estratégias</p>	<p>Por um lado, novas concepções pedagógicas mostram que o erro cometido pelo aluno faz parte do processo construtivo do conhecimento. Por outro lado, pesquisas mostram que o erro ainda tem conotação negativa pois os professores não sabem como tratá-lo.            Como o professor trata os erros ou dificuldades dos alunos no estudo de Equação do 1º grau?</p>	<p>Investigar estratégias dos professores, diante de erros ou dificuldades dos alunos, no estudo de equação do 1º grau</p>

<b>Tratamento teórico do problema ou da questão investigativa</b> (principais conceitos chaves tratados teoricamente e autores nos quais se apoia)	<b>Metodologia de pesquisa</b> (como a questão foi respondida, incluindo sujeitos, instrumentos e metodologia de coleta de dados)	<b>Metodologia de análise dos dados</b> (como foi feita a análise ou interpretação das informações coletadas na pesquisa de campo; eixos ou categorias de análise)	<b>Resultados</b> (respostas obtidas para a questão investigativa ou objetivo da pesquisa)
<p>Diversos autores sobre o estudo dos erros: Cury, Borasi, Pinto, Bachelard, Brousseau etc.</p>	<p>Estudo de caso com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental II em uma escola particular construtivista de Fortaleza, durante 66 dias. Utilizou como instrumentos entrevistas semi-estruturadas; material escrito dos alunos; observações registradas no diário de campo.</p>	<p>Foram estabelecidas algumas categorias de estratégias do professor diante de erros dos alunos no estudo de equação. As estratégias foram divididas em três tipos: situações desafiadoras, intervenções do professor e avaliações escritas.</p>	<p>Constata-se que a reflexão do erro é ferramenta importante para a construção do conhecimento, fazendo das dificuldades fontes de descobertas e que o cotidiano pedagógico assume um papel preponderante na constituição do desenvolvimento da aprendizagem do aluno e do ensino do professor.</p>

**FICHA PARA COLETA DE INFORMAÇÕES DE DISSERTAÇÕES QUE INVESTIGAM ERROS E DIFICULDADES DOS ALUNOS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA ELEMENTAR**

<b>Identificação</b> (título, autor(es) e instituição) e Nível (mestrado, doutorado, outros)	<b>Problemática</b>	<b>Objetivos</b>	<b>Tratamento teórico do problema ou da questão investigativa</b> (principais conceitos chave tratados teoricamente e autores nos quais se apoia)
<p><b>Estudo de dificuldades na aprendizagem da fatoração nos ambientes: papel e lápis e software aplusix.</b></p> <p>Autor: Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato</p> <p>Orientador: Marilena Bittar</p> <p>Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul</p> <p>Tipo: Dissertação</p> <p>Ano: 2007</p> <p>Palavras-chave: Álgebra; Teoremas em Ação; Educação; Campo Conceitual</p>	<p>Por um lado, a álgebra é um dos conteúdos mais discutidos pelos professores. Em especial, a manipulação algébrica é bastante explorada no ensino da álgebra e conseqüentemente, a fatoração está presente em todos os níveis de ensino fundamental, médio e superior. Por outro lado, considerando importante o processo da fatoração para a manipulação algébrica, esta apresenta bastante dificuldade por parte dos alunos com erros e dificuldades que se apresentam no ensino fundamental e persistem no ensino médio e superior.</p>	<p>Objetivo principal: Estudar dificuldades dos alunos em fatorar expressões algébricas.</p> <p>Objetivos específicos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-identificar teoremas em ação utilizados pelos alunos ao fatorar expressões algébricas.</li> <li>-investigar a estabilidade dos teoremas em ação construídos pelos alunos.</li> </ul>	<p>Teoria dos Campos Conceituais - Vergnaud</p>

<b>Metodologia de pesquisa</b> (como a questão foi respondida, incluindo sujeitos, instrumentos e metodologia de coleta de dados)	<b>Metodologia de análise dos dados</b> (como foi feita a análise ou interpretação das informações coletadas na pesquisa de campo; eixos ou categorias de análise)	<b>Resultados</b> (respostas obtidas para a questão investigativa ou objetivo da pesquisa)
<p>Foi feita uma análise a priori baseada na teoria de Henry, por meio da análise de livros didáticos e pesquisas existentes sobre a concepção de erros e dificuldades no ensino e aprendizagem da álgebra.</p> <p>Foi elaborado e aplicado um teste diagnóstico com duas turmas de 8ª série. A aplicação da pesquisa não foi realizada nessa mesma escola por motivos operacionais.</p> <p>Foi realizada uma sequência didática com 25 alunos da 8ª série, composta por 10 atividades que enfocavam fatoração, com a turma dividida em dois grupos: um utilizando o software Aplusix e outro grupo com lápis e papel.</p>	<p>Foram analisadas as resoluções dos alunos do teste diagnóstico através do software aplusix, identificando os principais erros cometidos e fazendo uma tabela com os teoremas em ação corretos e o falsos.</p> <p>Para a análise da sequência didática, foram colocadas em tabelas as resoluções de cada atividade buscando identificar os teoremas em ação falsos que foram identificados no teste diagnóstico, bem como outros possíveis que foram identificados. Também foi feita uma análise quantitativa dos erros mais frequentes e dos teoremas em ação falsos, mostrando assim a persistência da utilização desses teoremas pelos alunos.</p>	<p>Como resultado da pesquisa, percebe-se que muitos alunos não entendem o conceito da fatoração, fazendo uso em diversos momentos de teoremas de ação falsos. Também observou-se que o ambiente computacional provocou maior motivação nos alunos com relação àqueles que trabalharam com lápis e papel.</p> <p>Como conclusão do trabalho, a autora sugere algumas mudanças nas atividades de fatoração, como:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-trabalhar com situações em que o aluno tente identificar fatores comuns;</li> <li>-repensar a necessidade de se apresentar todos os casos de fatoração na 7ª série.</li> <li>-propor atividades em que os alunos identifique trinômios quadrados perfeitos; dentre outras.</li> </ul>