UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

AS ESTRATÉGIAS NO JOGO QUARTO E SUAS RELAÇÕES COM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Autor: Maria José de Castro Silva
Orientador: Rosely Palermo Brenelli

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida por Maria José de Castro Silva e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 30/10/2008

Assinatura: Rosely Brenelli ....

Profª Drª Rosely Palermo Brenelli

COMISSÃO JULGADORA:

Elizabeth A. Araujo
____
[illegible]
____
[illegible]
____
[illegible]
____
Rosely Brenelli
____

2008

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca
da Faculdade de Educação/UNICAMP

Silva, Maria José de Castro.
Si38e As Estratégias no jogo Quarto e suas relações com a resolução de problemas matemáticos. / Maria José de Castro Silva. -- Campinas, SP: [s.n.], 2008.

Orientador : Rosely Palermo Brenelli.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Construtivismo (Educação). 2. Solução de problemas. 3. Jogos – regras. 4. Intervenção. I. Brenelli, Rosely Palermo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

08-186/BFE

Título em inglês : The strategies in the game Quarto and its relations with mathematics problem solving.
Keywords : Construtivism (Education) ; Problem solving ; Game rule ; Intervention
Área de concentração : Psicologia Educacional
Titulação : Doutora em Educação
Banca examinadora : Profª. Drª. Rosely Palermo Brenelli (Orientador)
Prof. Dr. Dirceu da Silva
Profª. Drª. Elizabeth Adorno Araújo
Profª. Drª. Evely Boruchovitch
Profª. Drª. Lia Leme Zaia
Data da defesa: 30/10/2008
Programa de Pós-Graduação : Educação
e-mail : mjose-cs@uol.com.br

Dedicatória

Para meu marido, Fructuoso Antonio, e nossos filhos Christiano, Fernanda e Marcelo.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por me permitir realizar este trabalho.

Agradeço também a todas as pessoas que direta ou indiretamente colaboraram para que este trabalho pudesse ser realizado. E, em especial, agradeço:

À minha querida professora e orientadora, Profª Drª Rosely Palermo Brenelli, pelo empenho dedicação e, principalmente, pela sua altíssima competência na orientação deste trabalho, assim como pelo carinho, amizade e confiança demonstrados desde quando nos conhecemos.

Ao meu marido, Fructuoso Antonio, pelas palavras de carinho e de estímulo, além da leitura e sugestões na elaboração deste trabalho.

À minha filha Fernanda, por sua preciosa colaboração na elaboração do relato das análises estatísticas.

Ao meu filho Marcelo por sua valiosa presença e por suas palavras de apoio e carinho em todos o momentos da realização deste trabalho.

Ao meu filho Christiano por suas palavras de carinho e incentivo durante a realização deste trabalho.

À Profª Drª Celi Aparecida Espasandin Lopes, pelas sugestões feitas na qualificação desta pesquisa e pela disposição em fazer, mesmo à distância, a leitura crítica deste trabalho.

Ao Prof Dr Dirceu da Silva, pela leitura cuidadosa e pela importante contribuição feita na qualificação desta pesquisa, assim como, pela disposição em me auxiliar na análise estatística dos dados obtidos no presente estudo. Agradeço, também, à disponibilidade em mais uma vez fazer a leitura crítica deste trabalho.

À Profª Drª Lia Leme Zaia, pelas expressivas sugestões feitas na qualificação desta pesquisa e pela disposição em fazer, mais uma vez, a leitura crítica deste trabalho.

À Profª Drª Evely Boruchovitch, por toda a confiança em mim depositada e por aceitar fazer a leitura crítica deste trabalho.

À Profª Drª Elizabeth Adorno Araújo, por seu carinho e amizade e por aceitar fazer a leitura crítica deste trabalho.

Às professoras Dra. Orly Zucatto Mantovani de Assis, Dra Selma de Cássia Martinelli e Dra Regina Célia Grando, por aceitarem fazer a leitura crítica da presente pesquisa.

À Profª Fabianna por sua preciosa colaboração nas filmagens realizadas durante a coleta de dados do presente trabalho.

Aos alunos que fizeram parte desta pesquisa, pelo carinho e pela participação nos trabalhos.

A todos os funcionários e à direção das instituições escolares que me acolheram para que esta pesquisa pudesse ser realizada.

Aos funcionários da Secretaria da Pós-Graduação, em especial à Rita e à Nadir, pela competência, carinho e atenção a mim dedicados durante esse período.

Aos colegas da pós-graduação, em particular à Renata, Wilson e Karen pela amizade demonstrada e pelas valiosas sugestões para este trabalho.

RESUMO

A presente pesquisa, fundamentada no construtivismo de Jean Piaget, investigou se a promoção de sessões de intervenção com a utilização do jogo de regras “Quarto” poderia ser favorável às atividades de resolução de problemas de conteúdo matemático. Para isso, contou com a participação de vinte e um alunos do Ensino Médio, sete de cada uma das três séries, pertencentes a duas escolas da rede particular da cidade de Campinas-SP. Foram realizados, com cada participante, encontros individuais destinados à resolução de uma Prova de Conhecimentos Matemáticos, à promoção de Sessões de Intervenção com o Jogo “Quarto”, à Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos e à aplicação da Prova das Permutações. A Prova de Conhecimentos Matemáticos foi composta por cinco problemas retirados do Exame Nacional do Ensino Médio. O jogo “Quarto”, desconhecido de todos os participantes, foi apresentado a eles por meio de seu tabuleiro e peças. O meio computacional foi o escolhido, para que, utilizadas as mesmas regras já aprendidas, a pesquisadora, como observadora neutra, pudesse solicitar, durante as sessões de intervenção, a análise das situações de jogo e como estas poderiam ser transpostas para a resolução de problemas matemáticos. A Prova das Permutações, segundo os critérios definidos por Longeot (1974), permitiu que fosse avaliado o nível de raciocínio de cada participante. Esse nível de raciocínio mostrou-se coerente com as condutas apresentadas por eles nas demais provas. Assim, o participante que demonstrou possuir na, Prova das Permutações, um nível de pensamento operatório formal, ainda que em construção, conseguiu melhores resultados na realização das demais provas. Esses resultados foram confirmados estatisticamente por meio do teste de Spearman (r_s), que mostrou haver uma forte correlação entre os postos obtidos pelos participantes na Prova das Permutações e os resultados encontrados em cada uma das demais provas. Foram obtidos os valores r_s = 0.7826, na comparação com a Prova de Conhecimentos Matemáticos, r_s = 0,7505 na comparação com as Sessões de Intervenção com o Jogo “Quarto” e r_s = 0,7505 na comparação com a Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, sendo, em todos os casos, $p<0{,}0001$. Além disso, observou-se que as médias obtidas pelos participantes na reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos foram significativamente maiores que aquelas obtidas na primeira aplicação, resultado confirmado pelo teste T de Student, ($t=-3{,}9366$), com a probabilidade bilateral de 0,0008. Esses resultados e a análise qualitativa realizada possibilitaram mostrar que a promoção das sessões de intervenção com o jogo “Quarto” foi eficaz no estabelecimento das relações propostas, uma vez que permitiu aos participantes a utilização de uma mesma forma de raciocínio a diferentes conteúdos, o que favoreceu a resolução dos problemas apresentados.

Palavras-chave: 1. Construtivismo. 2. Resolução de Problemas. 3. Jogo de Regras. 4. Sessões de Intervenção.

ABSTRACT

This research, designed according to Jean Piaget constructivism, searched if the use of intervention sessions using the rule game “Quarto” could be useful to the solving problems activities of mathematics content. Therefore, twenty one high school students took part, seven from each grade from two private schools in Campinas. Each participant underwent individual meetings, to face a Mathematics Knowledge Test, intervention sessions of the game “Quarto”, The Mathematics Knowledge Test again, and the Permutation Test. The Mathematics Knowledge Test was designed with five problems from ENEM (High School Standard National Test). The game of “Quarto”, unknown to all participants, was presented to them through its game board and parts. The computer media was chosen, for using the same rules learned, the researcher as a neutral observer, would request, during the intervention sessions, the analysis of the game situation and how these would be used in the Mathematics solving problems. The Permutation Test, according to established criteria by Longeot (1974), allowed the evaluation of the reasoning level of each participant. This reasoning level showed to be coherent to the results presented by them in the other tests. As a result, the participant who showed to have, in the Permutation Test, a level of formal reasoning thinking still in process, was able to score better in the following Tests, having the opposite occurred, that is, the participant that wasn’t able to have a good score in the Permutation Test, didn’t have a good score in the other tests either. These data were statistically confirmed through the Spearman Test (r_s) that showed to have a strong correlation among the scores found by the students in the Permutation Test and the results in each of the other tests. The scores were $r_s = 0.7826$, in comparing with the Mathematics Knowledge Test, being in every situation, $p < 0,0001$. Besides, the average scored by the participants, when being submitted to the Mathematics Knowledge Test again, were significantly higher than in the first trial, confirmed through the test T of Student, ($t = -3,9366$), being the bilateral probability 0,0008. These results and the qualitative analysis enable to show that the game of “Quarto” sessions were efficient to establish the assumptions, once it allowed the participants to use the same reasoning to different contents, which improved the solving of the presented problems.

Key words. 1. Constructivism. 2. Problem solving. 3. Game Rule. 4. Intervention sessions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Atualmente, muito se tem discutido a respeito da qualidade do ensino e vários são os caminhos pesquisados sobre como superar as dificuldades encontradas por crianças e adolescentes de todas as camadas sociais. Tais estudantes, quer oriundos de família com pouco ou nenhum acesso à escolaridade formal, quer provenientes de uma classe social mais elevada, podem não apresentar o sucesso esperado por seus pais e professores. Para tais alunos, ao atingir a adolescência, as deficiências que foram se acumulando ao longo dos anos tornam-se ainda mais evidentes pelas características dessa fase e, também, por se tratar de um período que antecede à entrada no mercado de trabalho para uns e na universidade para outros.

Em qualquer uma dessas situações, um trabalho que tenha por objetivo auxiliá-los a resolver situações-problema pode ser oportuno, uma vez que a sociedade contemporânea impõe grandes desafios que exigem soluções criativas e originais. Nesse tipo de trabalho, o jogo pode desempenhar um papel importante, pois, de acordo com Macedo, Petty e Passos (2005), um dos aspectos que caracterizam a dimensão lúdica é o desafio de considerar algo segundo vários pontos de vista, o que pressupõe um olhar atento, aberto e disponível para a resolução das mais diversas situações apresentadas. Esse estímulo à criação de estratégias também é imprescindível para a resolução de problemas acadêmicos, particularmente, quando se tratam de problemas de conteúdo matemático. Nestes, as relações que podem ser estabelecidas entre as suas soluções e o jogo ganham especial relevo, uma vez que, para o desenvolvimento de estratégias eficientes para ganhar o jogo e para solucionar problemas, muitas vezes é necessário raciocinar por hipóteses, tipo de pensamento característico do adolescente que se encaminha para o período de pensamento operatório-formal.

A principal característica do pensamento operatório-formal, conforme Piaget e Inhelder (1976), está relacionada ao papel que o possível desempenha na compreensão da realidade que, na comparação com o período concreto, constitui uma nova e mais estável forma de equilíbrio. Na resolução de um problema matemático, no estágio operatório-formal, o raciocínio por hipóteses e a necessidade de demonstração sucedem à simples verificação, visto que o pensamento em tal estágio utiliza o possível e o necessário de forma conjunta, ao invés de limitar-se a uma dedução a partir unicamente de uma situação real. Tal fato ocorre porque o pensamento formal permite ao sujeito relacionar as variáveis implícitas no problema, combinando-as sistematicamente para, só então, concluir qual dessas relações se mantém verdadeira. Nesse sentido, a prática de um jogo de regras, quando se solicita a análise dos meios que levaram o jogador a atingir, ou não, o objetivo do jogo, pode ser favorável ao desenvolvimento de formas de pensamento mais evoluídas através de tomadas de consciência por abstrações reflexivas e refletidas.

Assim, para a realização da presente pesquisa, o problema proposto visava verificar se atividades desenvolvidas em sessões de intervenção com o jogo "Quarto" poderiam contribuir para a resolução de problemas matemáticos. Esse jogo foi escolhido pela possibilidade de, segundo as regras estabelecidas, associar a forma de pensamento de seu jogador com as estratégias utilizadas por ele na escolha e movimentação das peças. O jogador, na tentativa de vencer a partida, deveria se mostrar capaz de conceber, por meio de uma experimentação hipotética, de forma sistemática e simultânea, as possíveis combinações entre as peças e as casas do tabuleiro que o compõem. Esta atitude também poderia ser esperada quando da resolução de problemas de conteúdo matemático.

A resolução desses problemas, quando considerada como uma atividade desafiadora, permite a análise das variáveis contidas em seu enunciado, promovendo conflitos cognitivos que possibilitam a reconstrução ou a aquisição de novos conhecimentos matemáticos. Podem, ainda, estimular a confiança, a perseverança e a flexibilidade de pensamento de quem se propõe a resolvê-los. Tratada dessa maneira, a resolução de problemas se relaciona com o jogar operatoriamente o "Quarto", por solicitar uma forma semelhante de atuação. Dessa forma, pode exigir, ainda, o mesmo tipo de raciocínio, uma vez que os processos cognitivos envolvidos em ambos necessitam do raciocínio hipotético-dedutivo, que se conecta com as operações que caracterizam o pensamento operatório-formal. Para que o estudante obtenha sucesso na resolução de problemas, assim como no jogo “Quarto”, é imprescindível a aprendizagem, porém, enquanto para os problemas de conteúdo matemático, esta aprendizagem significa ter conhecimentos específicos de conceitos relacionados à aritmética, à álgebra e à geometria, envolvendo anos de escolaridade, para se jogar o “Quarto” não há pré-requisitos do ponto de vista da forma, uma vez que há o jogar operatório em diferentes níveis.

O jogo “Quarto”, segundo Macedo, Petty e Passos (2000), foi criado em 1985 por Blaise Müller e venceu diversos concursos de jogos. Ele é composto por um tabuleiro quadriculado em uma malha 4 X 4 e dezesseis peças que diferem entre si por seus atributos: cor, tamanho, forma e com ou sem furo. Participam dois jogadores que têm como objetivo fazer um alinhamento horizontal, vertical ou diagonal de quatro peças que tenham um atributo em comum. Há variações na forma como ele é jogado e, para este trabalho, foram adotadas as seguintes regras: o primeiro jogador escolhe uma das dezesseis peças e a coloca no tabuleiro em uma “casa”, a seu critério. A seguir, seleciona outra peça e a entrega para o segundo jogador que a coloca, de acordo com sua própria estratégia, em uma das posições restantes. Este escolhe uma das peças restantes e a entrega para que o primeiro jogador a coloque em jogo. O jogo prossegue até que ocorra um alinhamento que tenha um atributo em comum, cabendo a vitória a quem entregou a peça e não de quem a colocou, e o alinhamento seja anunciado por meio da palavra “Quarto”.

Nesse estudo, as regras foram ensinadas aos participantes através do tabuleiro e das peças mas, durante as sessões de intervenção, o jogo foi disputado por meio computacional, contido no programa “ZILLIONS DEVELOPMENT, *Zillions of games* 2.0.1p. USA, 2003”, com as mesmas regras já enunciadas. Escolheu-se o meio computacional para a realização das sessões de intervenção a fim de que a pesquisadora, na qualidade de observadora neutra, pudesse solicitar, durante as partidas, a análise sobre as situações de jogo e como estas poderiam ser transpostas para a resolução de problemas matemáticos.

Os relatos de trabalhos com jogos são muito freqüentes nos primeiros anos escolares, como comprovam, entre outros tantos, alguns dos trabalhos de Kamii e colaboradores (1986, 1998, 1999), Brenelli (1986, 1993, 1996), Silva e Brenelli (2004/2005, 2006), Macedo, Petty e Passos (2000, 2005), Silva (2003) e os estudos do próprio Piaget (1978, 1978b, 1986, 1994, 1996). Mas, à medida que o estudante progride nas séries escolares, esse tipo de trabalho é oferecido cada vez mais esporadicamente até extinguir-se quase completamente no Ensino

Médio. Por essa razão, a presente pesquisa procurou resgatar para esses estudantes o valor e o gosto pelo jogo, uma vez que:

> Praticar jogos – e, principalmente, refletir sobre suas implicações – pode ajudar a recuperar o "espírito de aprender" que está escondido nos conteúdos escolares. Sabemos que os jogos não são semelhantes às tarefas escolares, sobretudo se analisarmos os seus conteúdos, mas veremos que há muitos pontos em comum se considerarmos sua forma (MACEDO, PETTY e PASSOS, 2005, p. 106).

Nesse contexto, esta pesquisa procurou contemplar, nas sessões de intervenção com o jogo "Quarto", a utilização de uma mesma forma de raciocínio para os diferentes conteúdos propostos nos problemas de conhecimentos matemáticos. Isso foi possível porque os problemas selecionados foram retirados do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) para os anos 2004 e 2005, cujos eixos cognitivos levam em consideração uma matriz de competências e habilidades que busca verificar a compreensão dos conhecimentos solicitados, assim como indicar se, ao responder corretamente, o aluno faz uso da observação e da análise. O exame, em seu formato original, solicita que o aluno resolva o problema e escolha, dentre cinco alternativas, qual a que ele considera correta. Neste trabalho, além da solicitação para que explicitassem a resolução, solicitou-se que respondessem a questões que visavam verificar como o problema foi compreendido pelo aluno. Dada a natureza abstrata e formal do conhecimento matemático, considerou-se importante saber qual a explicação dada pelo participante para a solução que adotou.

A experiência desta pesquisadora, como docente de Matemática, mostrou que nas situações em que se privilegia o formalismo e a sistematização antes da compreensão, o conhecimento que se produz é descontextualizado e responsável por fracassos e pelo desinteresse do aluno em aprender. Ao contrário, em situações com jogos, os recursos cognitivos mobilizados podem ser transferidos para outros contextos e, conseqüentemente, contribuir para a construção de atributos favoráveis à aprendizagem. Segundo Dolle (2008), aprender significa reconstruir conhecimentos com possibilidades de dar explicações, o que se torna possível quando alguém acompanha com o aluno o procedimento de recriação desses conhecimentos. Nesse sentido, constata-se a importância da escola e do professor para que o adolescente não se frustre em relação às expectativas relacionadas aos seus planos futuros.

Dessa forma, os estudos que nortearam este trabalho fundamentaram-se em princípios da Educação Matemática sobre a resolução de problemas, que pode ser considerada como uma das atividades que mais contribuem para o processo de construção dos conceitos matemáticos. A partir de um contexto histórico para, em seguida, localizar a resolução de problemas em situações educacionais, os estudos de diferentes pesquisadores, dentre eles, Caraça (1998), Polya (1978, 1997), Kilpatrick (1985), Perales (2000), Corbalán (1998) e Santaló (1985) (*apud.* Corbalán 1998) referendam a importância do trabalho com a resolução de problemas ao enfatizarem que "ensinar Matemática deve ser equivalente a ensinar a resolver problemas", opinião que é compartilhada por esta pesquisadora. Ainda nesse capítulo foram focalizados os trabalhos que outros pesquisadores realizaram, especialmente os destinados aos participantes adolescentes, ainda que em vertentes diferentes daquela escolhida neste trabalho Por todos os estudos apresentados consolidou-se a visão de que:

> Um problema não é simplesmente uma tarefa matemática, mas uma ferramenta para pensar matematicamente, um meio para criar um ambiente de aprendizagem que forme sujeitos autônomos, críticos e propositivos, capazes de se perguntar pelos fatos, pelas interpretações e explicações, de ter seu próprio critério estando, ao mesmo tempo, abertos aos de outras pessoas. (VILA e CALLEJO, 2006, p. 10)

Tais processos de pensamento, tratados no segundo capítulo, se interpretados à luz da teoria de Piaget, devem contemplar a construção operatória do pensamento, especialmente, nos níveis concreto e formal, uma vez que, para resolver problemas que não sejam apenas os de ordem prática ou intuitiva, far-se-á necessária a presença de operações racionais que somente serão possíveis a partir do período operatório-concreto. Na estrutura de pensamento operatório-formal, os sujeitos não se restringem a raciocinar diretamente com o apoio dos objetos concretos ou suas manipulações, mas podem, de modo operatório, realizar deduções a partir de hipóteses enunciadas verbalmente. Desse modo, conforme Piaget (1977), o desenvolvimento e a formação do conhecimento podem ser explicados por meio de um processo central de equilibração, em que o sujeito percorre um caminho para uma estrutura melhor, isto é, de certos estados de equilíbrio para outros, qualitativamente diferentes, passando por muitos desequilíbrios e reequilibrações.

Os processos sucessivos de equilibração pressupõem, em cada fase, a construção de novas e melhores formas de equilíbrio que poderão ocorrer, somente, na medida em que o sujeito interaja com seu meio. Nesse processo, quando uma ação ou uma idéia se torna possível, permite que, a partir dela, outras idéias também o sejam, de tal forma que as primeiras estejam subordinadas às segundas, e assim por diante até que formem uma estrutura operatória . Para compreender a natureza desse processo, há a necessidade de se estudar a construção dos possíveis, principalmente no nível operatório-formal. Para finalizar os estudos que permitem a análise das estruturas e dos processos cognitivos subjacentes à resolução de problemas, sob o ponto de vista construtivista, tornou-se necessário, ainda, verificar quais os meios utilizados pelo sujeito para transformar um esquema de ação em conceito, desencadeado por um processo de tomada de consciência. Nesse capítulo também foram abordados os trabalhos sobre jogos, especialmente os que solicitam uma análise que promova a consciência dos meios que levaram o jogador a atingir os objetivos do jogo, assim como aqueles que possibilitam o desenvolvimento de formas de pensamento mais evoluídas. Assim foram delimitados os estudos que serviram de base teórica para o presente trabalho.

A seguir, no terceiro capítulo, procedeu-se ao delineamento metodológico no qual se interpôs o objetivo central da pesquisa, que foi o de investigar se a promoção de sessões de intervenção com a utilização do jogo de regras "Quarto" poderia favorecer as atividades de resolução de problemas de conteúdo matemático. Para o desenvolvimento dos trabalhos, escolheu-se o método clínico, que, de acordo com Delval (2002), é um procedimento que busca investigar como os sujeitos pensam, agem e sentem, procurando, ainda, descobrir o que está por trás da aparência de sua conduta. Dessa forma, as questões propostas para que os participantes respondessem sobre como resolveram os problemas tiveram a intenção de analisar as explicações dadas pelo aluno e também de separar o entendimento de conceitos dos procedimentos de cálculo utilizados. Já, as questões propostas durante as sessões de intervenção com o jogo "Quarto" tiveram por objetivo a análise das estratégias utilizadas pelos jogadores, considerando-se que esta poderia ser também empregada na resolução de problemas matemáticos, o que poder-se-ia configurar como aplicação de uma mesma forma a diferentes conteúdos.

Os dados coletados na prova de conhecimento matemático foram, portanto, obtidos por meio do contato direto com a pesquisadora e analisados de forma predominantemente descritiva. Nas partidas de "Quarto", disputadas de forma computacional com o auxílio do *software Zillions of Games*, priorizou-se as descrições e as justificativas para as estratégias empregadas pelos participantes, o que também evidenciou uma maior preocupação com o processo do que com o produto, configurando-se como uma estratégia de exploração crítica para o tratamento e a interpretação dos dados.

No capítulo quatro, os dados colhidos na Prova de Conhecimentos Matemáticos, nas Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto" na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos e na Prova das Permutações foram, primeiramente, tratados quantitativamente. Realizou-se um tratamento estatístico dos dados para comparar as médias entre a aplicação de prova de conhecimentos matemáticos e a sua reaplicação através do teste T de Student. A comprovação estatística de possíveis correspondências entre os postos obtidos na Prova das Permutações e os das demais provas foi realizada por meio do teste de correlação de Spearman (r_s). Tais provas tiveram a finalidade de enriquecer a análise dos resultados uma vez que os dados foram tratados de forma predominantemente qualitativa. O capítulo cinco resume a discussão dos resultados e as considerações finais.

Dessa forma, todos os estudos, a seguir propostos, concorrem para que o objetivo central que norteou o presente trabalho, que foi o de investigar se a promoção de sessões de intervenção com a utilização do jogo de regras "Quarto" pode favorecer as atividades de resolução de problemas de conteúdo matemático, seja atingido.

CAPÍTULO 1

SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas, considerada como uma das atividades que contribui para o processo de construção dos conceitos matemáticos, pode ser interpretada como uma das melhores formas para se aprender Matemática. Porém, para que isso se verifique será necessário que o problema apresentado se revele como uma situação desafiadora que possibilite a análise das variáveis contidas em seu enunciado, que promova conflitos cognitivos a serem solucionados com a reconstrução ou a aquisição de novos conhecimentos matemáticos e, ainda, que estimule a confiança, a perseverança e a flexibilidade de pensamento de quem se propõe a resolvê-lo. Assim compreendida, a resolução de problemas configura-se como um importante meio para a aprendizagem da Matemática, podendo-se, até, afirmar que aprender Matemática é o mesmo que aprender a resolver problemas, proposta defendida também por matemáticos como Polya (1978) e Caraça (1998) dentre outros.

Vistos dessa forma, os problemas não podem ser encarados como situações artificiais, como muitas vezes notamos em livros escolares, mas sim como situações similares àquelas vividas no dia-a-dia, situações estas que façam sentido e, ainda, que haja motivação para que sejam resolvidas. Nesse sentido, a forma como os problemas podem ser tratados encontram similaridade com as palavras de Caraça (1998), ao observar que duas atitudes podem ser adotadas em face à construção da Ciência: assistir à sua apresentação como vem exposta em livros de ensino, em um todo harmonioso e sem contradições, ou acompanhá-la em seu desenvolvimento, da forma que foi elaborada, carregada de dúvidas e hesitações que, só após um longo trabalho de reflexão e apuramento, são eliminadas, para que logo surjam novas dúvidas e hesitações. Sobre a Matemática, ao tratar de seus problemas próprios afirma o autor:

> A Matemática é geralmente considerada como uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete, num gabinete fechado, onde não entrem os ruídos do mundo exterior, nem o sol, nem os clamores dos homens. Isto, só em parte é verdadeiro.
> Sem dúvida, a Matemática possui *problemas próprios*, que não têm ligação imediata com outros problemas da vida social. Mas não há dúvida também que seus fundamentos mergulham *tanto como os de qualquer outro ramo da Ciência*, na vida real; uns e outros entroncam na mesma *madre* (CARAÇA, 1998; Prefacio do autor à primeira edição, 1941).

Desse modo, a resolução de problemas de conteúdo matemático, problemas acadêmicos ou até mesmo aqueles vividos no dia-a-dia aparecem com destaque em obras que remontam muitos períodos históricos e guardam a importância de colaborar com a construção do conhecimento acumulado.

1.1 Os problemas em um contexto histórico

Os problemas e suas soluções sempre estiveram presentes em todo processo de construção do conhecimento. Tal processo, segundo D'Ambrósio (2004), alimentado pelo fazer e pelo saber, permitiu ao homem sobreviver e transcender por meio de maneiras e técnicas que possibilitaram a ele conviver com a realidade natural e sóciocultural na qual está inserido. Em todas as culturas, e em todos os tempos, o conhecimento, que está subordinado a um contexto natural, social e cultural, é gerado pela necessidade de uma resposta a situações e problemas distintos. Assim, indivíduos e povos têm, ao longo do tempo, criado e desenvolvido instrumentos teóricos de reflexão e de observação e, associadas a esses, técnicas e habilidades para explicar, conhecer e aprender como sobreviver e transcender em ambientes naturais, sociais e nos mais distintos ambientes sócioculturais.

O conhecimento matemático também se desenvolveu a partir de problemas que surgiram ao longo do tempo como, por exemplo, há mais ou menos cinco mil anos, a necessidade da divisão de terras na civilização egípcia, que tinha como base de sustentação a agricultura nas margens do Nilo, que se fertilizavam periodicamente. Como extensão dessa necessidade, desenvolveram-se também a aritmética e a geometria, esta pela criação de fórmulas para o cálculo aproximado de áreas e volumes. Os papiros encontrados no antigo Egito serviram de comprovação para essas descobertas. Um dos mais famosos está no Museu Britânico e é o papiro Ahmes (também chamado papiro Rhind) que, segundo Eves (2002), contém um texto matemático na forma de manual prático, contendo oitenta e cinco problemas, copiados por volta do ano de 1650 a.C., em escrita hierática pelo escriba Ahmes, de um trabalho ainda mais antigo. Nele, conforme Eves, há uma descrição dos métodos utilizados para a multiplicação e para a divisão, o uso que faziam das frações unitárias, a regra da falsa posição, que consiste em determinar um número desconhecido por meio da atribuição de um valor aleatório, a solução para o problema da determinação da área do círculo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos.

Entre os gregos e os romanos, de acordo com Rosa Neto (2003), o uso do ferro na fabricação de ferramentas aumentou a produtividade, gerando excedentes, o que incentivou o comércio que, por sua vez, impulsionou as viagens e, conseqüentemente, o intercâmbio dos povos, provocando um aumento quantitativo de conhecimentos. Surgiram a moeda e o alfabeto. Também foi nessa época que se iniciou o trabalho de sistematização dos conhecimentos, que deixavam de se relacionar com o cotidiano, para se relacionarem uns com os outros por dedução. O conhecimento matemático foi impulsionado pela utilização de um sistema que por suas características, ser posicional, decimal e possuir seus símbolos, permitiu a utilização de algoritmos para a resolução de novos problemas. Esse sistema de numeração foi desenvolvido pelos hindus e, provavelmente, levado à Europa por comerciantes árabes, razão pela qual é chamado indo-arábico.

Ainda que todas essas conquistas tenham sido muito expressivas, foi a partir do século XVIII, que ocorreu um prodigioso aumento do conhecimento, como se pode confirmar por Eves (2002, p. 518):

> A Revolução Industrial que deu início à sociedade moderna começou no século XVIII na Inglaterra. Durante o século XIX espalhou-se pelo continente europeu

> e pela América. Conforme proliferaram as grandes manufaturas e se esparramavam as cidades, a estrutura da sociedade mudava radicalmente. Entre essas mudanças, o progresso tecnológico rápido desencadeou a era de investigações científicas sem precedentes, especialmente na mecânica e na química. Embora de início a maioria das invenções fosse feita por artesãos e funileiros, as necessidades da indústria no século XX exigiram a participação de matemáticos e cientistas com grau universitário.

Com o progresso, muitos problemas foram resolvidos e muitos outros propostos, uma vez que nessa época conviveram matemáticos de grande expressão que dedicaram suas vidas à resolução de problemas que, de tão importantes, tornaram-se clássicos e, ainda, deram origem a outros que, embora possam não se relacionar a situações práticas, têm, sem dúvida, sua raiz na *vida real*, como já se referiu Caraça (1998).

1.2 Os problemas e o ensino

As investigações sistemáticas sobre o ensino da resolução de problemas, conforme mostram os estudos realizados por Fiorentini (1994) tiveram início nos anos sessenta sob a influência de Polya. Antes disso, apenas uma experiência significativa é creditada a Dewey, que trabalhou com crianças, entre os anos de 1896 e 1904, resolvendo problemas mediante projetos que reproduziam situações sócioeconômicas de interesse da comunidade. Essa orientação pedagógica centrada em projetos, para Dewey, poderia contribuir para a ampliação do espírito crítico das crianças, capacitando-as a colaborar para o desenvolvimento de uma sociedade democrática.

Entretanto, segundo Fiorentini (*ibid.)*, até o final dos anos cinqüenta, os estudos sobre a resolução de problemas preconizavam o exercício ostensivo de uma grande quantidade deles sem, contudo, enfatizar a compreensão necessária para a sua solução. Nos Estados Unidos da América, uma reação a esse tipo de ensino teve início com a publicação da *Agenda for Action* elaborada pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (1980). Nesse documento, a primeira sugestão era a de se organizar o currículo de Matemática em torno da resolução de problemas. Essa recomendação se concretizava com as seguintes ações: desenvolver e ampliar a definição e a linguagem da resolução de problemas, de forma a incluir uma ampla gama de estratégias, processos e modos de apresentação que contivessem o pleno potencial de aplicações matemáticas; a criação, pelos professores de Matemática, de ambientes em sala de aula para que a resolução de problemas pudesse florescer; o desenvolvimento de materiais curriculares apropriados para ensinar a resolver problemas em todos os níveis e, finalmente, que os pesquisadores deveriam dar prioridade às investigações sobre a natureza da resolução de problemas e sobre as vias efetivas para se conseguir "resolvedores" de problemas.

Para o trabalho com a Matemática do século XXI, as recomendações do NCTM, citadas por Contreras e Carrillo (2000), enumeram componentes considerados essenciais, que são: comunicação de idéias matemáticas; raciocínio matemático; aplicação da Matemática em situações cotidianas; comprovação de resultados e estimativas; destrezas apropriadas de cálculo; pensamento algébrico e estatístico; probabilidade e, o principal de todos eles, a resolução de problemas que se relaciona claramente com todos os demais. Nesse sentido, comprova-se que aprender a resolver problemas é o principal motivo para estudar Matemática. E ainda, que algumas das estratégias para a resolução de problemas devem envolver a proposta de questões, a análise de situações, a tradução de resultados e a utilização de diagramas e, também, que se devem propor problemas que contenham mais de uma solução.

No Brasil, segundo Fiorentini (1994), os estudos relativos ao ensino da resolução de problemas tiveram início, de forma mais efetiva, a partir da segunda metade da década de oitenta. Os primeiros trabalhos de pesquisa sobre o tema em questão tiveram como eixos os seguintes estudos: as estratégias ou programas especiais de ensino de resolução de problemas, as perspectivas didático-metodológicas da resolução de problemas e a investigação de estratégias e habilidades cognitivas apresentadas por pessoas escolarizadas, ou não, em diferentes contextos sociais, quando solicitadas a resolver problemas.

Com o estabelecimento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998), a resolução de problemas adquiriu a importância de ser eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem da Matemática e os princípios para a sua aplicação podem se resumir em: ser o ponto de partida das atividades e não a sua definição; não ser considerado uma aplicação mecânica de uma fórmula ou processo; ser trabalhado de modo a exigir transferências e generalizações e, por fim, proporcionar um contexto em que se podem aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. Dessa forma, para que sejam seguidas essas recomendações, será importante que a resolução de problemas não seja entendida como a de repetição de algoritmos, mas sim, que solicite a formulação de questões, por meio de situações que se revelem motivadoras, propiciando a análise e a troca de experiências entre os alunos, fatores importantes para a construção do conhecimento matemático.

Todavia, para Onuchic (1999), os professores de Matemática nem sempre estão aptos para operacionalizar as recomendações e orientações dos PCN (BRASIL 1998) e, por não se envolverem com as mudanças, conservam as crenças que trazem sobre a Matemática e sobre seu ensino e aprendizagem, mostrando, por vezes, uma prática docente orientada por um caráter elitista, pela formalização precoce dos conceitos e pela excessiva mecanização dos procedimentos. Assim, realizar ou aprofundar os estudos sobre o tema seria um meio para dar início a uma mudança que poderia trazer grandes modificações à prática docente.

Para Echeverría (1998) há diferentes concepções sobre o que significa resolver problemas, pois, para alguns estudantes, essa tarefa pode corresponder ao objetivo de tirarem boas notas, já que, não se sentem capazes de compreender Matemática e devem, apenas, seguir as regras ensinadas em aula pelo professor, aplicando-as mecanicamente sem entendê-las. Para professores a idéia de solucionar problemas pode refletir, segundo a autora, (p. 47) “atividades tão diversas como as incluídas na realização de exercícios mais ou menos repetitivos, nos procedimentos próprios ao pensar matematicamente, ou as empregadas em tomadas de decisão, em diferentes contextos”.

Ainda, conforme a autora (*ibid.*), solucionar um problema significa concentrar-se em uma tarefa que revele alguma dificuldade e que obrigue a pessoa que o está resolvendo a um questionamento sobre qual seria o caminho a ser seguido para alcançar a meta, porém, tradicionalmente a utilização da palavra “problema”, em salas de aula, pode significar resolver qualquer atividade que necessite ser realizada, o que torna necessária a distinção entre exercício e problema. Os exercícios servem para consolidar e automatizar técnicas, habilidades e procedimentos que serão, posteriormente, utilizados para solucionar problemas. São dois os tipos de exercícios que podem ser propostos: no primeiro tipo são solicitados diretamente os procedimentos de resolução de algoritmos como tarefas de repetição contínua, associadas ao cálculo mental, tabuadas, resolução de uma série de equações; e o segundo tipo compreende os enunciados verbais que pretendem não somente automatizar uma série de técnicas, mas também que sejam aprendidos alguns procedimentos nos quais se inserem as técnicas.

O ensino e a aprendizagem da resolução de problemas, diz Echeverría (1998), é um processo complexo que deve ser realizado seguindo passos determinados, mas que não bastam por si só, pois, depende de fatores como as dificuldades lingüísticas ou semânticas, ou porque o aluno não possui um conhecimento esquemático que possibilite a sua resolução. Porém, ao serem propostos exercícios de caráter sintático, como sinônimos de problemas, a autora pondera:

> No entanto, também é verdade que na maioria das ocasiões o ensino de Matemática tem se baseado mais na solução de exercícios de caráter sintático do que de verdadeiros problemas matemáticos. Nesse sentido, a solução de problemas matemáticos constitui, ao mesmo tempo, um método de aprendizagem e um objetivo do mesmo. É um *método de aprendizagem* na medida em que grande parte do conteúdo da Matemática escolar trata da aprendizagem de habilidades, técnicas, algoritmos ou procedimentos heurísticos que podem ser usados em diversos contextos (cotidiano, científico, etc.). Para alcançar uma aprendizagem significativa desse tipo de técnicas é necessário aprender a usá-las no contexto de diversos problemas. É um objetivo da aprendizagem na medida em que não é possível aprender a solucionar problemas independentemente da aprendizagem de conceitos e conhecimentos de Matemática e que, ao mesmo, como vimos, a solução de problemas exige o acionamento e a coordenação de muitos procedimentos complexos. (ECHEVERRÍA, 1998, p. 63).

Segundo Boavida (1992), *apud* Lopes 2000, a resolução de problemas pode estar associada a diversas perspectivas, como a de estar incluída no currículo escolar para justificar o próprio ensino da Matemática, como motivação para a aprendizagem de determinados conteúdos, como recreação para que os alunos se divirtam com a Matemática já aprendida, como veículo para a aprendizagem de novos conceitos e conteúdos, ou ainda, como prática necessária para fixar conceitos e conteúdos já aprendidos.

Dessa forma, para que a resolução de problemas não seja interpretada como um simples exercício de fixação dos algoritmos das operações aritméticas ou algébricas, nem como um desafio além das possibilidades do estudante para o qual o problema esteja sendo proposto, o professor deverá, segundo Polya (1978), ter dois objetivos: orientar seus alunos auxiliando-os a resolver os problemas que lhes são apresentados e, desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio.

Para Polya (*ibid.*), a resolução de um problema deve envolver quatro fases: a primeira está orientada para a compreensão do problema e, para isso, as perguntas adequadas referem-se à identificação de suas incógnitas, e à verificação da possibilidade de esquematizar ou desenhar o problema. Na segunda fase, deve-se estabelecer um plano de ação que irá permitir a solução do problema, procurando, assim, estabelecer conexões entre as variáveis do problema e o objetivo que se pretende atingir. Nessa etapa, a linguagem corrente deve dar lugar à linguagem formal utilizada na Matemática e, também, deve-se buscar analogias em problemas já solucionados e possivelmente mais simples, mas que sejam semelhantes ao problema proposto, como uma forma auxiliar de resolução. A terceira fase é a da execução do plano elaborado, efetuando (se necessário) cálculos, analisando os procedimentos adotados, complementando esquemas e entrevendo alternativas de resolução para o mesmo problema. A quarta e última etapa é a da verificação do resultado obtido. A análise da solução obtida deve ser realizada para detectar ou corrigir possíveis erros e examinar se o procedimento utilizado pode ser empregado em problemas análogos. No entender de Polya (1997), resolver problemas é da própria natureza humana, uma vez que, na maior parte do tempo, nosso pensamento consciente está focalizado em problemas cujas soluções não são imediatamente alcançáveis.

Também investigando a importância da resolução de problemas no âmbito das ciências, as considerações de Perales (2000) se iniciam com a pergunta: *Que se entende por resolução de problemas?* Para responder a essa pergunta, o autor pondera, inicialmente, que, independentemente do papel atribuído à resolução de problemas, a eleição de um problema para o início de uma atividade de ensino-aprendizagem resulta, sem dúvida, em uma peça chave. Para ele, tal como ocorre no dia-a-dia, o surgimento de um problema desencadeia, em geral, mecanismos cognitivos, afetivos e práticos, tanto individuais como coletivos, com a intenção de neutralizar o nível de incerteza, que é gerado pelo problema. Tomando-se por base o que diz o autor, pode-se ponderar que um jogo poderia ser o eleito para o início, ou para a fixação de um conceito, tendo em vista que, segundo Macedo Petty e Passos (2000), jogar favorece e enriquece o processo de aprendizagem, na medida em que o sujeito é levado a refletir, fazer previsões e inter-relacionar objetos e eventos, e ainda, aprender a questionar e corrigir suas ações, analisar e comparar pontos de vista.

Além disso, para Perales (2000), os problemas cotidianos podem se constituir em fonte de inspiração para investigação e, dessa maneira, aproximar a atividade acadêmica à vida real, em que os tipos de problemas e de soluções podem ser sistematizados de acordo com critérios previamente estabelecidos. Assim, pode-se inferir que dentre outros, o objetivo para o trabalho com a resolução de problemas poderá ser o de aplicar a teoria elaborada em classe, com a finalidade de que os alunos comprovem a sua utilidade. Ao julgar que, no planejamento docente, os problemas se constituem em uma fonte inesgotável de inspiração para a investigação, o autor supõe que as propostas advindas desses problemas possam produzir os mesmos efeitos positivos, quando utilizados em situações de aprendizagem. Porém, para que essa premissa seja verdadeira, far-se-á necessário que haja a convergência de três dimensões básicas: o aluno precisa dispor de informações teóricas, como conceitos, leis ou princípios; necessita de procedimentos como, por exemplo, cálculo aritmético, calculo algébrico, controle de variáveis, emissão de hipótese ou interpretação de gráficos e, finalmente, necessita de uma atitude favorável em relação à realização da tarefa e da própria disciplina em questão.

A aproximação da atividade acadêmica à vida real, segundo Perales (2000), como fonte de contínuas situações problemáticas e, por conseguinte, como elo de integração entre os contextos sociais, culturais e profissionais pode, também, ser creditada ao trabalho com a resolução de problemas, que responderia, por sua vez, aos pressupostos teóricos de maior peso na configuração atual da didática das ciências, constituindo-se como uma atividade idônea para o diagnóstico ou desenvolvimento conceitual, por tornar precisos os contrastes entre os conhecimentos prévios e os elaborados pela ciência. Dessa forma, os tipos de problemas e de solução podem ser sistematizados conforme os seguintes critérios: campo de conhecimento implicado, tarefa requerida para a sua solução e procedimento seguido em sua resolução. No que diz respeito às estratégias postas em jogo para a resolução de um problema, pode-se encontrar: problemas de aplicação direta, problemas algorítmicos, problemas heurísticos e problemas criativos. Em relação ao número de soluções, os problemas podem ser fechados, se comportarem apenas uma única solução, ou problemas abertos, quando forem válidas várias soluções. As variáveis que podem influir na tarefa de resolver problemas são: a natureza do enunciado, o contexto da resolução e o próprio sujeito que irá resolver o problema.

Procurando dar resposta à pergunta: *Que se pretende conseguir dos alunos com a resolução de problemas?* Perales, na mesma obra, reflete que, dentre outros, os objetivos devem ser: trabalhar a teoria em classe, com a finalidade de que os alunos comprovem a sua aplicabilidade; identificar os erros e dificuldades que mais afetam os alunos na compreensão do conhecimento científico; aprender a resolver distintos tipos de problemas; adquirir o domínio de formas de raciocínio implícitas na resolução de problemas; aproximar o caráter teórico e prático da aprendizagem em ciências e aproximar situações problemáticas cotidianas ao contexto escolar, introduzindo um aprendizado significativo para transformar o currículo tradicional.

Ao refletir que a resolução de problemas constitui-se no núcleo fundamental do estudo da Matemática, Corbalán (1998, p. 57) menciona outros autores que defendem esse mesmo princípio:

> Como assinala Santaló (1985), grande matemático espanhol e, além do mais, muito interessado em sua didática, "*ensinar matemáticas deve ser equivalente a ensinar a resolver problemas*". Estudar matemática não deve ser outra coisa senão pensar em solução de problemas. Em uma conferência pronunciada em 1968, George Polya disse: "*Está bem justificado que todos os textos de matemática, começando pelo Papiro Rhind, do século XVIII antes de nossa era, continham problemas. Os problemas podem ser considerados como a parte mais essencial da educação matemática*".

Outras citações, de acordo com Corbalán (1998), poderiam ser acrescentadas a essa, mas todas na mesma direção, reconhecendo que a resolução de problemas conduz a hábitos de pensamentos adequados ao enfrentamento de situações que podem resultar em motivações, hábitos e idéias para o desenvolvimento de ferramentas apropriadas para o aprendizado da Matemática. Nesse contexto, pode-se considerar que o trabalho com jogos de regras seja um recurso interessante para se propor problemas, e a busca de soluções, estimulada pelo modo atrativo de como ele foi apresentado. As estratégias utilizadas para chegar ao objetivo do jogo poderão emergir de situações práticas e não da repetição de modelos de procedimentos impostos pelos outros, e ainda, podem propiciar o planejamento de ações e a revisão constante das atitudes dos jogadores, por favorecer a correção dos erros, permitindo a reorganização do raciocínio do jogador.

Não há melhores ou piores problemas, diz Corbalán (*ibid.*), mas descreve quais são, para ele, as mais importantes categorias: não são questões com armadilhas nem adivinhações; podem, ou não, ter aplicações, porém devem suscitar o interesse em si mesmos; devem representar um desafio às qualidades desejáveis a um matemático; uma vez resolvidos, deve-se desejar propô-los a outras pessoas; devem parecer, à primeira vista, como algo possível de ser resolvido, isto é, não devem causar bloqueio na capacidade de reação e, finalmente, devem proporcionar, ao resolvê-los, um tipo de prazer difícil de explicar, mas agradável de experimentar. Considera, ainda, que a única maneira para se aprender a resolver problemas é resolvendo-os, assim, será muito bom para o professor conhecer técnicas, estratégias ou procedimentos que tenham como seu principal componente a ação do aprendiz e, nesse caso, tornam-se relevantes os aspectos relacionados aos contextos em que os problemas são oferecidos, verificando se são descritos em situações familiares ou desconhecidas e se a sua apresentação desperta o interesse em solucioná-los.

Matos (1994), considerando ainda a importância da ação, pondera que, para a aplicação da Matemática a uma situação problemática, será necessária a utilização de modelos matemáticos. Para o autor, uma situação problemática acontece quando ocorre algo em desacordo com as intenções de uma determinada ação, com as concepções sobre uma situação, ou ambas. A partir de uma situação problemática, passa-se a um problema através da formulação de questões sobre essa situação e os processos cognitivos presentes, ao se lidar com ela, devem envolver a construção de um modelo matemático, o que significa construir uma representação matemática através de objetos, relações ou estruturas matemáticas, pressupondo que uma ação seja necessária para se atingir o objetivo proposto.

Para Kilpatrick (1985), os componentes para a resolução de problemas são três: uma boa bagagem organizada sobre os conhecimentos acerca do conteúdo do problema; uma boa bagagem de procedimentos para representar e transformar o problema e um sistema de controle para guiar a seleção de conhecimentos e procedimentos. Em outras palavras, um bom "resolvedor" de problemas possui um conhecimento profundo da matéria, domina estratégias heurísticas e é capaz de aplicar ao processo de resolução os seus conhecimentos e estratégias.

Em outra vertente de estudos, o psicólogo russo Krutetskii (1976), analisou a resolução de problemas associada ao desenvolvimento de habilidades matemáticas que, para ele não são consideradas pré-determinadas, mas sim formadas e desenvolvidas através de instruções práticas e domínio de uma atividade. Habilidades na solução de problemas, segundo o autor (p.60), "são sempre o resultado de desenvolvimento. São formadas e desenvolvidas em vida, durante atividade, ensino e treino". Assim, para ele, embora alguns estudantes possuam essas habilidades mais desenvolvidas, todos, de forma geral, podem desenvolver essa capacidade de maneira a realizar uma tarefa rapidamente, e bem.

As habilidades, para ele, são características psicológicas específicas e complexas. Por meio de diversas combinações, formam-se diferentes habilidades matemáticas, cujo perfil geral se relaciona, durante a resolução de um problema, a três estágios básicos de atividade mental, que são: a obtenção da informação matemática, o processamento matemático da informação e a retenção da informação matemática. Caracteriza-se a memória matemática, propriedade do terceiro estágio, em estudantes habilidosos, como uma retenção "generalizada e operante", e também, de uma rápida elaboração para a representação de problemas e relações, no domínio dos símbolos numéricos e verbais. É seletiva porque, apesar de não reter todas as informações disponíveis, promove o refinamento dos dados concretos para deles retirar o que lhes é geral em sua estrutura.

Como meio para obter um quadro detalhado dos componentes da habilidade matemática que se evidenciavam durante os procedimentos utilizados pelos estudantes para resolver problemas, Krutetskii (1976) propôs problemas divididos em dois tipos, os criativos e os que eram baseados na aplicação de fórmulas ou demonstração de teoremas, todos eles apresentados em diferentes níveis de dificuldades. Visando descrever os processos de resolução, o autor repartiu os vários tipos de problemas, para as diferentes séries, em problemas algébricos, problemas geométricos e outros, todos divididos em quatro categorias. As categorias propostas são: obtenção das informações que se referem ao enunciado do problema, podendo conter informações incompletas ou supérfluas; o processamento de informações que se referem à possibilidade de generalizações, flexibilidade de pensamento, e raciocínio reversível; a retenção de informações que envolvem situações relacionadas à memória matemática e a tipologia que se refere a problemas com formulações verbais, visuais, ou relacionados a conceitos de espaço.

Assim, ao observar o procedimento de resolução de problemas com diferentes graus de dificuldades aplicados para estudantes de diferentes níveis de desenvolvimento, o autor procurou compreender as diferenças entre os alunos "mais habilidosos" e os “menos habilidosos” em Matemática. Para ele, os “mais habilidosos” resolviam os problemas propostos com maior destreza nas operações matemáticas e, freqüentemente, apresentavam soluções originais a problemas inéditos e os "menos habilidosos" eram os que demonstravam dificuldades na transferência e generalização dos conceitos solicitados em problemas que exigiam novas formas de raciocínio, embora conseguissem resolver problemas padronizados.

Por todos os estudos referentes à resolução de problemas, pode-se sintetizar a importância desse tema para a aprendizagem da Matemática com a expressão “ensinar matemáticas deve ser equivalente a ensinar a resolver problemas”, utilizada por Santaló (1985), citado por Corbalán (1998). Esse, portanto, foi o critério utilizado para a seleção dos estudos apresentados, isto é, o de considerar, em todas as vertentes da Educação Matemática, a importância da resolução de problemas como uma atividade relevante para a construção de conceitos matemáticos, como as novas pesquisas focalizadas a seguir.

1.3 As pesquisas realizadas sobre a Resolução de Problemas

Muitos dos trabalhos encontrados sobre o tema Resolução de Problemas analisam os procedimentos adotados pelos participantes focalizando a memória matemática, o desempenho na resolução de problemas, o papel das crenças, as metodologias para o trinômio ensino, aprendizagem e avaliação, a prática pedagógica em sala de aula, os recursos didáticos e tecnológicos, para diferentes níveis de escolaridade, todos descritos em uma vertente sóciocognitivista que, embora não seja a escolhida para o desenvolvimento da presente pesquisa, devem ser apreciados pela sua própria importância, além de refletirem os pensamentos de uma expressiva parcela dos estudiosos da Educação Matemática.

Como a presente pesquisa se reporta a estudantes do Ensino Médio, foram escolhidos, preferencialmente, os estudos resultantes de trabalhos destinados a participantes desse segmento de ensino ou de ensino superior, como será, a seguir, relatado.

O componente de reversibilidade de pensamento na estrutura das habilidades matemáticas foi o foco dos estudos de Spalletta (1998) que, fundamentado nos trabalhos desenvolvidos por Krutetskii (1976), analisou as relações entre o desempenho de noventa e um estudantes que cursavam a disciplina de Cálculo I do curso de Engenharia da Unicamp e o desempenho desses estudantes em problemas que avaliavam a reversibilidade como componente da estrutura da habilidade matemática. Para os participantes da pesquisa, foram aplicados um questionário contendo vinte questões e quarenta e oito problemas matemáticos sobre o componente da reversibilidade matemática. A análise estatística dos dados mostrou uma significativa relação entre os estudantes que apresentavam bom desempenho na disciplina Calculo I e os que obtiveram bom desempenho na resolução dos problemas solicitados, evidenciando a reversibilidade como um dos componentes da habilidade matemática.

Querendo ressaltar a importância e as dificuldades com o trabalho de resolução de problemas, Pirola (2000), realizou uma pesquisa tendo como participantes 124 estudantes do curso de Habilitação Específica para o Magistério e 90 alunos do curso de Licenciatura em Matemática. O objetivo do pesquisador foi o de investigar como esses alunos resolviam problemas geométricos e, para isso, utilizou um questionário informativo contendo questões a respeito da vida escolar dos participantes e uma prova contendo dez problemas com informações completas, incompletas e supérfluas, elaborados a partir dos critérios de Krutetskii (1976). A análise dos dados mostrou uma diferença significativa entre os dois cursos, entretanto a média para cada um deles mostrou-se muito baixa pois, numa escala de zero a dez, a média para os alunos do curso de habilitação para o magistério foi 0,68, enquanto a média para os alunos do curso de licenciatura foi 2,0. Os dados também mostraram que, para ambos os cursos, os estudantes tiveram mais dificuldades para resolver problemas em que apareciam informações incompletas ou supérfluas. O pesquisador sugere, posto que o desempenho dos futuros professores foi sofrível, o oferecimento de programas de educação continuada, visando, não somente, os aspectos metodológicos relacionados ao ensino, como também a aprendizagem de conceitos relacionados à solução de problemas geométricos, ou matemáticos, em geral.

A pesquisa sobre a troca de experiências entre professores de Matemática em relação à preocupação com a resolução de problemas, partindo da dimensão técnica para a dimensão problematizadora, levou Coelho (2005) a analisar como eram os diálogos entre os professores durante as reuniões pedagógicas, quando esse era o tema das discussões. A problematização se constitui em aprofundamento de reflexões em busca de novos sentidos e se refere ao estabelecimento de relações e conexões entre fatos e idéias. Pelas conclusões da pesquisa, os seus participantes consideraram que o tema, resolução de problemas, em uma dimensão problematizadora, poderia ser o gerador de novas relações entre a matemática escolar e seu ensino, sobre as relações de ensino e sobre a vida além da escola.

O estudo das concepções e das práticas dos professores de Matemática, segundo Delgado (1994), é de grande importância por considerar a forma como os alunos aprendem, com a certeza de que os conhecimentos não são adquiridos quando são absorvidos passivamente ou copiando as afirmações dos outros, mas sim quando os alunos constroem suas próprias idéias, integrando-as aos seus saberes. Então, a Matemática aprendida na escola vai depender essencialmente das concepções do próprio professor a respeito de como criar ambientes de aprendizagem que favoreçam a construção e a modificação do conhecimento, proporcionando aos alunos experiências apropriadas, ricas e diversificadas, no sentido de promover a confiança e o entusiasmo pela atividade matemática, contribuindo de forma decisiva para que os alunos resolvam os problemas que lhes são apresentados. A partir dessas premissas, a pesquisadora realizou uma investigação na qual procurou, em seu decurso, responder as seguintes questões: como os professores entendem o papel da resolução de problemas na educação matemática; como encaram o ensino da resolução de problemas matemáticos e de que forma as suas concepções se relacionam com sua prática pedagógica.

Utilizou-se a metodologia qualitativa para a realização desse estudo e o modelo de investigação foi o de estudo de caso, tendo como objetivo a descrição e compreensão em profundidade das concepções, dos conhecimentos e das ações de três professoras acerca do tema resolução de problemas, levando em consideração os aspectos cognitivos e afetivos inseridos em seu próprio ambiente escolar. Os dados foram coletados por meio de entrevistas e da observação das atividades da professora dentro e fora da sala de aula. A primeira entrevista procurou explorar a visão das professoras com relação ao seu desempenho profissional; a segunda foi baseada em fatos ou acontecimentos concretos relacionados com a experiência de cada uma e a terceira procurou compreender o conhecimento e a visão que cada uma tinha sobre a resolução de problemas e sobre o seu ensino. As professoras também permitiram que suas aulas fossem observadas ao longo de duas semanas e para as diferentes turmas em que trabalhavam.

Os resultados dessa pesquisa mostraram que, para todas as três professoras, ainda que de formas diferentes, a resolução de problemas estava sempre ligada à introdução de um novo assunto ou à aplicação de conceitos; mas, por outro lado, a atividade de resolução de problemas não era priorizada por não se perceber a alteração do tempo para outros assuntos do currículo no sentido de dar mais atenção a essa atividade. Dessa maneira, verificou-se a existência de alguns conflitos entre as concepções e as suas práticas em sala de aula. Embora de formas diferentes, todas as professoras participantes do estudo demonstraram hábitos de reflexão e perfeita consciência dos conflitos entre suas concepções e as suas práticas.

Também para Mendonça (1993), a resolução de problemas poderá ter na problematização de situações uma excelente proposta para ressaltar o binômio pensar e agir. Esse foi, portanto, o caminho seguido pela pesquisadora para subsidiar uma proposta em Educação Matemática, buscando conferir significado a uma experiência de vida e, ao mesmo tempo, desenvolver o conhecimento matemático. A problematização, conforme os dados da pesquisa, baseia-se em perguntas geradoras que buscam conduzir o aluno a modelos matemáticos. A principal finalidade da pesquisa foi a de reconhecer que perguntar é fundamental para alcançar a aprendizagem e que as perguntas assentadas em princípios como os da problematização, podem reorientar a aprendizagem, tanto em atividades de sala de aula quanto na investigação dos processos de ensino-aprendizagem.

Propor a resolução de problemas, segundo a pesquisa de Huanca (2006), pode ser um bom caminho para que estudantes do ensino médio aprendam conceitos trigonométricos, uma vez que esse procedimento está centrado no trabalho ativo do aluno. De acordo com o pesquisador, a partir de problemas geradores, novos conceitos e conteúdos matemáticos podem ser construídos sob a orientação e supervisão do professor. Nesse procedimento, somente ao final do processo de construção são formalizadas as idéias construídas, com a utilização da notação e terminologia corretas. Os conteúdos trabalhados por meio dos referidos problemas referem-se aos conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico, as funções trigonométricas e a resolução de triângulos quaisquer. O pesquisador constatou um aumento na motivação, tanto por parte da professora em ensinar, quanto dos alunos em aprender e, além disso, observou que os alunos tiveram mais facilidade em relacionar os atuais conceitos com alguns tópicos já trabalhados anteriormente.

O estudo de Maciel (2003) trata da avaliação numa abordagem sóciocognitivista, sugerindo instrumentos de avaliação como possibilidades de aprendizagem da Matemática, estimulando o uso da metacognição e dando ênfase à avaliação formativa por meio da resolução de problemas e da comunicação matemática, num ambiente de cooperação. O trabalho foi desenvolvido por meio de uma pesquisa de campo, visando estabelecer a correlação entre tais instrumentos de avaliação e a prática avaliativa de uma escola que não oferecia as condições ideais para uma avaliação formativa. A pesquisa, na modalidade de estudo de caso, foi realizada por meio da observação direta do tipo de avaliação praticada em sala de aula, instrumentos de avaliação e de documentos da própria escola, além de entrevistas semi-estruturadas e questionários abertos que foram respondidos por professor e aluno, sendo um professor por série e uma classe por professor. A conclusão da pesquisa sugere que, quando a escola não oferece condições ideais para uma avaliação formativa, presta-se mais ao jogo institucional e social que é imposto pelo sistema de ensino e pouco contribui para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

As relações entre a memória, os conhecimentos declarativos e de procedimentos e o desempenho na solução de problemas matemáticos foram analisadas por Alves (2005), que pesquisou 177 alunos, pertencentes ao primeiro e último ano do segundo ciclo do ensino fundamental e por alunos da última série do ensino médio de duas escolas, uma de ensino privado e, outra, pública. Esses alunos foram solicitados a responder um questionário informativo, uma prova de matemática para avaliar o domínio dos conhecimentos declarativos, o procedimento e o desempenho na solução de problemas matemáticos, e outra prova para avaliar a memória matemática. Conforme os resultados obtidos na pesquisa, a memória matemática está intimamente relacionada ao desempenho na solução de problemas e, ainda, que a capacidade de perceber os elementos de forma analítica e sintética favorecem a representação do problema influenciando o desempenho na solução.

Embora Lima (2001), tenha realizado sua pesquisa com alunos do ensino fundamental, a importância em mencioná-la está no objetivo da pesquisadora em investigar as relações existentes entre a flexibilidade de pensamento e a criatividade, apresentadas durante os procedimentos de solução de problemas. Participaram da pesquisa 307 estudantes de sexta, sétima e oitava séries de uma escola pública municipal da região de Campinas – SP, respondendo a um questionário para a sua caracterização e a um teste matemático. A partir dos resultados do teste matemático foi selecionado, para cada série, o aluno que apresentou o melhor desempenho. Esses três alunos foram submetidos ao teste de Rorschach e a uma bateria de testes aritméticos, algébricos e geométricos com a finalidade de investigar a flexibilidade de pensamento como componente da habilidade matemática. A conclusão, confirmada pelos dados encontrados na análise dos protocolos dos participantes denominados como mais capazes da sexta, sétima e oitava séries, mostra que apenas foi capaz de solucionar os problemas propostos, o aluno da oitava série, embora o teste de Rorschach, aplicado a esses alunos, evidenciasse como característica de personalidade a criatividade nesses três participantes, o que evidencia como características da criatividade o componente da habilidade matemática e a flexibilidade de pensamento.

A análise de uma experiência que associa o computador à resolução de problemas fechados, levou Allevato (2005), a pesquisar de que forma os alunos do 2º semestre do curso de Administração de Empresas relacionavam o que faziam em sala de aula, quando utilizavam lápis e papel, com o que faziam no laboratório de informática utilizando o computador para a resolução de problemas fechados sobre funções. A pesquisa, de cunho qualitativo, teve a coleta dos dados realizada por meio da observação participante em sala de aula, por questionários, entrevistas e análise documental. Por meio do estudo de funções, que estava sendo desenvolvido através de problemas fechados aplicados à área de Negócios, a proposta didática da pesquisa era a de levar o aluno a trabalhar com esses problemas, utilizando um *software* gráfico, o *Winplot*. Dessa forma, a pesquisadora procurou estabelecer um paralelo entre os procedimentos e conhecimentos que os alunos utilizavam nas duas modalidades de resolução de problemas: com e sem o computador. Após a investigação, concluiu que a mediação do *software* trouxe novas possibilidades no tocante aos processos de resolução dos problemas, que lacunas de conhecimentos puderam ser evidenciadas e preenchidas, tendo o *software* sido o veículo para essa construção e permitiu ainda, que os alunos experimentassem novas formas de considerar conteúdos antigos. Por todas essas considerações, a pesquisadora manifestou a possibilidade de que novas abordagens de ensino dêem maior atenção à relação entre a aprendizagem de problemas por meio do uso do computador.

Todas as pesquisas apresentadas refletem os trabalhos acadêmicos que focalizam prioritariamente a Resolução de Problemas. Esse tema, porém, ainda poderia ser explorado por meio de outros eixos temáticos que, em sua essência, são subsidiados pela proposta de problemas para que possam ser desenvolvidos. Esse contexto pode ser comprovado pelo estudo de outros trabalhos acadêmicos realizados em instituições que se dediquem à pesquisa da Educação Matemática, como a que Melo (2006) realizou ao descrever o estado da arte da investigação em Educação Matemática na UNICAMP, com um mapeamento geral da produção de 188 trabalhos, no período de 1976 a 2003, divididos em dez eixos temáticos: História/ Filosofia/ Epistemologia; Etnomatemática; Crenças/ Concepções/ Percepções/ Ideário/ Representações; Didática/ Metodologia de Ensino; Materiais/ Recursos didáticos e tecnológicos; Currículo relativo ao ensino da matemática; Prática e Pedagogia da Matemática; Psicologia da/na Educação Matemática; Formação de professores que ensinam Matemática e Outros estudos.

Das obras que tratam da resolução de problemas, podemos citar Dante (1991), que tem como um de seus principais objetivos fazer com que o aluno pense de forma eficiente, mas lembra que, para isso, é necessário que os problemas apresentados sejam desafiadores, de forma que o aluno se sinta motivado para solucioná-los. Considerando a importância do trabalho com a resolução de problemas, o autor estabelece como metas o desenvolvimento da habilidade de elaborar um raciocínio lógico e o uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis; além disso, enfatiza a necessidade de ensinar o aluno a enfrentar novas situações quando o autor (p. 12) adverte que: “as rápidas mudanças sociais e o aprimoramento cada vez maior e mais rápido da tecnologia impedem que se faça uma previsão exata de quais habilidades, conceitos e algoritmos matemáticos seriam úteis hoje para preparar o aluno para sua vida futura”.

De acordo com Vila e Callejo (2006) para que a resolução de problemas não seja simplesmente uma tarefa matemática, mas uma ferramenta para pensar matematicamente, é necessário que na sala de aula seja criada uma atmosfera em que o aluno acredite em suas próprias capacidades, que sinta prazer com os desafios propostos nos quais são avaliados os processos e os progressos e não apenas os resultados e, mais, que tenha confiança no estabelecimento de seus próprios critérios para examinar um ou mais pontos de vista. Porém, muitas vezes o estudante experimenta dificuldades e bloqueios e assim, propõem uma análise sobre as crenças dos alunos sobre como pensar matematicamente ao resolver um problema, questionando as suas crenças, como podem ser diagnosticadas e avaliadas e como podem ser modificadas, uma vez que:

> O processo de resolver problemas tem um componente de subjetividade, pois, cada pessoa se aproxima de uma situação-problema a partir de determinadas atitudes, crenças e sentimentos, sendo influenciada pelo contexto concreto em que se apresenta (escolar, vida cotidiana, trabalho, etc.). (VILA e CALLEJO, 2006, p. 11)

As crenças adequadas, segundo Vila e Callejo (*ibid*) consistem em considerar a resolução de problemas um ato criativo, seguir uma atitude aberta consolidada pela dedicação e busca de estratégias variadas, procurar uma revisão constante do processo seguido e, principalmente, determinada pelo esforço e perseverança. Dessa forma, a resolução de problemas poderá ser um meio para formar, (p.10), “sujeitos autônomos, críticos e propositivos, capazes de se perguntar pelos fatos, pelas interpretações e explicações, de ter seu próprio critério estando, ao mesmo tempo, abertos aos de outras pessoas”.

Assim, foram abordados os aspectos históricos, os estudos teóricos de eminentes educadores e matemáticos e pesquisas e obras sobre a resolução de problemas. Na seqüência, serão focalizados os processos de pensamento subjacentes à resolução de problemas interpretados à luz da teoria de Piaget.

CAPÍTULO 2

ESTRUTURAS E PROCESSOS COGNITIVOS SUBJACENTES À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTEÚDO MATEMÁTICO

A fim de focalizar a resolução de problemas à luz da teoria construtivista, serão necessários o estudo da construção operatória do pensamento, especialmente nos níveis concreto e formal, o estudo dos processos de equilibração, o exame da construção de possíveis e o necessário e os processos de tomada de consciência.

2.1 A Construção Operatória do Pensamento

Para resolver problemas que não sejam apenas os de ordem prática ou intuitiva, será necessária a presença de operações racionais que somente serão possíveis a partir do período operatório concreto. Assim, inicialmente far-se-á necessário compreender o que falta à inteligência sensório-motora e pré-operacional para que se transforme em pensamento conceitual. Os esquemas de inteligência sensório-motora, de acordo com Piaget (1972), ainda não são conceitos por serem de ordem prática e material; consistem unicamente em coordenar entre si percepções sucessivas e movimentos reais, ligados por curtas previsões e reconstituições, sem chegarem a uma representação de conjunto. Além disso, um ato de inteligência sensório-motora só tende à satisfação prática, ao êxito da ação e não ao conhecimento propriamente dito. Portanto, será (p.158) "exclusivamente do ponto de vista funcional que se pode achar na inteligência sensório-motora o equivalente prático das classes, das relações, dos raciocínios e mesmo dos grupos de deslocamento sob a forma empírica dos próprios deslocamentos". Desse modo, de acordo com o autor, as condições da passagem do plano sensório-motor ao plano reflexivo dependem, essencialmente, de três fatores assim apresentados:

> Em primeiro lugar, um aumento das velocidades que permite fundir, num conjunto simultâneo, os conhecimentos ligados às fases sucessivas da ação. Em segundo lugar, uma tomada de consciência, não mais simplesmente dos resultados desejados da ação, mas de suas próprias demarches, permitindo, assim, multiplicar a pesquisa do êxito pela constatação. Em terceiro lugar, uma multiplicação das distâncias, permite prolongar as ações relativas às próprias realidades por ações simbólicas incidindo nas representações, e ultrapassando, assim, os limites do espaço e do tempo próximos. (PIAGET, 1972, p. 160).

O pensamento no plano representativo não poderia, pois, ser considerado como uma continuação do período sensório motor, visto tratar-se, da reconstrução do todo em um novo plano, graças ao aparecimento da função simbólica ou semiótica necessária para a evolução das condutas subseqüentes, que envolvem a possibilidade de representação.

Por meio da representação, a criança torna-se capaz de reconstituir suas ações passadas em forma de narrativas e de antecipar suas ações futuras através, também, da representação verbal. As condutas que definem essa função, segundo Piaget e Inhelder (1982), aparecem mais ou menos simultaneamente e estão enumeradas a seguir, obedecendo a uma ordem de complexidade crescente: a imitação diferida, que é aquela que ocorre na ausência do modelo; o jogo simbólico, que, dotado de um simbolismo próprio da criança, permite a ela reviver um acontecimento ao invés de se contentar com uma evocação mental; também aparecem com a função simbólica o desenho, a imagem mental e a linguagem. Esta irá permitir à criança contar suas ações, reconstituindo acontecimentos passados por meio de suas lembranças, de antecipar ações ainda não executadas e até, não executá-las substituindo-as pela palavra.

São três as conseqüências essenciais desse período para o desenvolvimento mental, segundo Piaget (2001, p. 24):

> Uma possível troca entre os indivíduos, ou seja, o início da socialização da ação; uma interiorização da palavra, isto é, a aparição do pensamento propriamente dito, que tem como base a linguagem interior e o sistema de signos, e, finalmente, uma interiorização da ação como tal, que, puramente perceptiva e motora que era até então, pode daí em diante se reconstituir no plano intuitivo das imagens e das "experiências mentais".

Contudo, o pensamento próprio desse período, analisado por Piaget (*ibid.*) sob o ponto de vista experimental, após considerar um grande número de fatos, mostrou que a criança permanece pré-lógica e suplementa a lógica pelo mecanismo da intuição. Para explicar o que representa a intuição, um dos exemplos que o autor oferece é a situação em que, apresentadas duas coleções de fichas, uma azul e outra vermelha, formando-se uma fileira com seis ou oito fichas azuis, com a solicitação para que a criança faça o mesmo com as fichas vermelhas, ela concluirá, ao colocar uma ficha vermelha em frente de cada ficha azul, que as duas fileiras são iguais. Mas, ao espaçar as fichas de uma das fileiras, a criança, mesmo sabendo que nada foi tirado ou colocado, conclui pela não equivalência entre as fileiras, dizendo haver mais fichas naquela que ficou mais longa. Resumindo, há equivalência enquanto há correspondência visual ou ótica, que não se conserva por uma operação racional, mas sim por intuição, que é submetida ao primado da percepção.

A característica das intuições é a irreversibilidade e, portanto, o que falta a elas para se transformarem em um sistema lógico é adquirirem a reversibilidade, e, conseqüentemente:

> Todo o desenvolvimento da inteligência consiste, assim em uma coordenação progressiva das ações: primeiramente materiais e pouco coordenadas, estas se interiorizam, ao se coordenarem; e esta coordenação se traduz por uma reversibilidade crescente, até o estado de equilíbrio reconhecível a esta reversibilidade das operações lógicas e matemáticas, das quais cada uma comporta a possibilidade de uma operação inversa. (PIAGET, 1967, p. 11).

Assim, o aparecimento das operações concretas de natureza lógico-matemática e espaço-temporal são de grande importância para explicar o mecanismo próprio do desenvolvimento do pensamento, pois, para Piaget e Inhelder (1976, p. 187) "o sistema de regulações, até então sem estabilidade, chega a uma primeira forma de equilíbrio estável", admitindo a composição reversível do pensamento. Por meio do pensamento operatório concreto, é permitido ao sujeito classificar ou seriar objetos, bem como incluí-los em uma classe ou série. Outra característica dessa fase é a reversibilidade, que se manifesta separadamente como inversão, para as estruturas de classe, e como reciprocidade para as de relação. No entanto, o pensamento operatório concreto, essencialmente apoiado no real, chega apenas a um conjunto restrito de transformações virtuais, reduzindo, portanto, a noção de possível a uma pequena extensão. Isto quer dizer que o pensamento concreto apresenta a particularidade limitadora de não ser generalizável a todos os conteúdos, procedendo domínio por domínio com uma distância temporal que, às vezes, chega a vários anos entre a estruturação de um conteúdo e a do seguinte.

Um pensamento, assim estruturado, tem como modelo, segundo Piaget e Inhelder (1976), os agrupamentos operatórios concretos de classe e relação, que permitem certa forma de equilíbrio das operações e a existência de um isomorfismo entre as estruturas e os agrupamentos lógico-matemáticos. De acordo com o autor, o agrupamento constitui-se de grupos imperfeitos em que a associatividade é incompleta, sendo efetuada, apenas, para elementos contíguos, ou seja, os agrupamentos lógico-matemáticos ou espaço-temporais ainda não se constituíram em uma lógica formal com aplicações possíveis a todos os conteúdos. Ultrapassar essa forma de pensamento requer a transposição das operações de primeiro grau, que incidem em raciocínios sobre a própria realidade, para as operações de segundo grau, que consistem em refletir em implicações e incompatibilidades estabelecidas entre proposições. Esse é o pensamento formal que se amplia durante toda a adolescência.

O pensamento formal, para Piaget e Inhelder (*ibid.*), se diferencia pela lógica das proposições em lugar da lógica das classes e relações, possibilitando a inversão de sentido entre o real e o possível. Tal fato significa que a última fase da construção das operações lógicas se caracteriza pelo fato de os sujeitos não se restringirem a raciocinar diretamente com o apoio dos objetos concretos ou suas manipulações, mas deduzirem, de modo operatório, a partir de hipóteses enunciadas verbalmente. Para caracterizar o pensamento formal destacam-se três propriedades, sendo que a mais aparente delas, de acordo com os autores (p. 189) é “referir-se a elementos verbais e não mais diretamente aos objetos”; a segunda propriedade é verificada quando, os objetos são substituídos por enunciados verbais superpondo-se, assim, uma nova lógica, a das proposições.

Essa nova lógica se manifesta tanto sob a forma de situações experimentais como por problemas puramente verbais, conforme é explicado pelo autor, a seguir:

> Nesse caso, em vez de o raciocínio se voltar para os dados inteiramente formulados, o sujeito é levado a propor seus problemas e a criar seus métodos pessoais. Percebemos, portanto, que o papel do pensamento formal não se reduz, de forma alguma, a traduzir em palavras ou em proposições o que poderia ter sido executado concretamente sem o seu recurso; ao contrário, é durante as manifestações experimentais que se afirma, no início do nível de pensamento formal, uma série de possibilidades operatórias novas, formadas por disjunções, implicações, exclusões, etc., que intervêm desde a organização da experiência e desde a leitura dos dados de fato, e se superpõe, nesse terreno, até aos simples agrupamentos de classes e de relações. (PIAGET; INHELDER, 1976, p.190).

A terceira característica exprime o caráter geral do pensamento formal que é a constituição das operações de segunda potência. As operações do período operatório-concreto são as operações de primeira potência, uma vez que se referem diretamente aos objetos. Porém, para as operações de segunda potência, torna-se possível o estabelecimento de relações entre relações, como ocorre na lógica das proposições, porque ultrapassam o conjunto das transformações que se referem diretamente ao real (operações de primeira potência) subordinando-as a um sistema de combinações hipotético-dedutivas, ou simplesmente possíveis.

Sobre a forma de equilíbrio característica do pensamento formal, dizem Piaget e Inhelder (1976, p.191):

> Portanto, é a inversão de sentido entre o real e o possível que constitui o caráter funcional mais fundamental do pensamento formal, independentemente das conseqüências estruturais que esta inversão comporta. Portanto, é desta diferença essencial entre o concreto e o formal que devemos partir para dar conta da forma de equilíbrio característica deste último nível do desenvolvimento do pensamento.

Visto sob a ótica do domínio mental, o equilíbrio corresponde, no campo do real, às operações efetivamente realizadas pelo sujeito, e no espaço virtual, as transformações, conforme os autores (p. 199), "correspondem às operações possíveis, que o sujeito poderia efetuar e que talvez explicitamente realize em seguida, mas que ainda não realizou no momento considerado".

Na solução de um problema, segundo Piaget e Inhelder (*ibid.*), pode-se dizer que o equilíbrio não foi atingido enquanto ainda houver a necessidade de efetuar as operações explícitas que compõem a sua resolução. Em vista disso, pode-se considerar dois aspectos distintos: ou o sujeito possui todos os requisitos indispensáveis à solução do problema, ou não os possui. Neste caso, não se pode falar de equilíbrio, indicando que ainda há muito trabalho a ser feito até a solução da questão proposta. No primeiro caso, o desequilíbrio pode ser momentâneo, decorrente de um problema novo, cuja solução ainda não se tornou visível para o sujeito. Porém, se possuir os métodos e as operações indispensáveis à sua resolução, isto é, se ele for capaz de solucioná-lo, e o faz, o equilíbrio é atingido de maneira permanente, e se caracteriza pela compensação do conjunto das transformações virtuais.

Logo, ao ser apresentado um problema, por meio de seus dados,

> O sujeito poderia submetê-los a um número indefinido de transformações operatórias, além daquelas que escolhe para responder ao problema proposto, mas que tais transformações são relativas a uma estrutura (estrutura do conjunto das operações de que o sujeito dispõe), e que essa estrutura é reversível: portanto, há equilíbrio porque, a cada transformação que o sujeito poderia executar, (em função da estrutura operatória considerada), corresponde uma transformação possível e inversa, que também poderia ser realizada [...]
>
> e, ainda
>
> [...] a reversibilidade operatória e o equilíbrio do sistema são uma única e mesma coisa e é porque as operações possíveis são móveis e reversíveis (isto é, podem ser compostas de todas as maneiras, mas com uma liberdade completa de volta) que o possível atua de maneira contínua nas escolhas das operações novas que devem ser realizadas. (PIAGET; INHELDER, 1976, p. 200).

Por permitir a resolução de problemas por meio de transformações virtuais que podem, ou não, ser realizadas, a estrutura de pensamento do período operatório formal, conforme Piaget e Inhelder (1976), apresenta três características: primeiramente, são mais gerais e constituem esquemas operatórios de um mesmo conceito suscetível de variadas aplicações; em segundo lugar, do ponto de vista de sua formação psicológica, são dedutíveis a partir das estruturas operatórias do próprio sujeito, e não das propriedades dos próprios objetos; e, por fim, quase todas apresentam semelhança com as estruturas de reticulado (conjunto das partes), que simula a realização de todas as combinações possíveis e de grupo, cujas propriedades operatórias permitem a associação completa e, várias delas, com o grupo INRC[1], ou das duas reversibilidades, das inversões e das reciprocidades. No nível concreto, o sujeito raciocina corretamente quer sobre I e N, quer sobre R. Porém, apenas com o raciocínio formal, na medida

[1] N a inversão; R, a reciprocidade; I, a transformação nula, ou idêntica, e C, a correlativa, que é a inversa da recíproca.

em que a correlativa (C) se constitui pela negação da recíproca (NR), ele pode coordenar corretamente as quatro transformações.

As operações combinatórias apresentam-se sob duas formas complementares: combinar objetos ou combinar juízos, constituindo-se como uma generalização das operações adquiridas no estágio das operações concretas. De acordo com Piaget e Inhelder (*ibid.*), o reticulado composto pelo conjunto das partes, resultante da combinação de um conjunto de quatro elementos $p.q,\ p.\overline{q}, \overline{p}.q\ e\ \overline{p}.\overline{q}$ [2], considerados 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, todos os quatro e nenhum, compõem um sistema de combinações $2^{2^2} = 2^4$, que totalizam, portanto, dezesseis combinações binárias.

As proporções representam, por sua vez, a transição entre os esquemas derivados do reticulado e os que participam da estrutura de grupo, e, principalmente, do grupo INRC. A coordenação desses esquemas operatórios pode ser necessária para que o sujeito resolva problemas de natureza matemática, que contém, entre outras, as noções de proporção ou de probabilidade combinatória que, aparentemente, sob a mesma forma, apresentam as mais diversas situações que não têm qualquer relação de conteúdo entre si.

Atingir esse nível de pensamento, explica Piaget (2001), pressupõe a necessidade de uma continuidade que depende da consolidação de estruturas precedentes e sempre da ação constante do sujeito sobre o objeto. A ação, em todos os níveis, supõe uma necessidade, e esta sempre é a manifestação de um desequilíbrio. Nesse sentido, a ação humana consiste em um movimento contínuo e perpétuo de reajustamento ou de equilibração, no qual cada nova conduta vai funcionar não só para restabelecer o equilíbrio, como também para procurar um equilíbrio mais estável que o anterior à perturbação, ou seja, a um fato novo que necessita ser incorporado aos esquemas do sujeito. Dessa forma, segundo Piaget (1977), o desenvolvimento e a formação do conhecimento podem ser explicados por meio de um processo central de equilibração, em que o sujeito percorre um caminho para uma estrutura melhor, isto é, de certos estados de equilíbrio para outros, qualitativamente diferentes, passando por muitos desequilíbrios e reequilibrações.

2.2 Os Processos de Equilibração dos Sistemas Cognitivos

Para Piaget (1977), a explicação para o desenvolvimento e até para a formação dos conhecimentos está nas diversas formas de equilíbrios, nas razões dos desequilíbrios e,

[2] $\overline{p}\ e\ \overline{q}$ representam, respectivamente, não *p* e não *q*.

principalmente, nas causas das equilibrações e reequilibrações; sendo que as mais importantes para o desenvolvimento consistem na formação de um novo equilíbrio, em geral melhor que o anterior, razão pela qual o autor utiliza a expressão “equilibrações majorantes”.

A causa dos desequilíbrios, explica o autor, está na falta de simetria entre as afirmações e as negações, que é provocada pelo primado das primeiras sobre as segundas, que são construídas posteriormente pelo sujeito, e cuja elaboração se realiza de forma cada vez mais trabalhosa, segundo as complexidades do sistema. Dessa maneira, para se compreender as razões do insucesso e, sobretudo, para transformá-lo em êxito, é necessário distinguir as propriedades positivas “a” e a sua ausência “não a”, com a justificativa desta negação.

Para Piaget (1977, p. 14), “tal como sucede com os organismos, os sistemas cognitivos são, de fato, simultaneamente abertos num sentido (o das trocas com o meio) e fechados noutro sentido, na medida em que são ciclos”. Assim, ao completar o ciclo, a estrutura se fecha e o sujeito entra momentaneamente em equilíbrio, para desequilibrar-se novamente quando a estrutura formada não der conta das novas modificações impostas pelo meio, quer sejam elas reais ou virtuais. Deste modo, o equilíbrio depende das ações conservadoras que os elementos, ou os subsistemas, exercem uns sobre os outros e, portanto, de uma solidariedade entre a diferenciação, através da construção da reversibilidade pela negação, e a integração. Em outras palavras, depende da simetria entre as afirmações e as negações.

A constituição de qualquer equilíbrio cognitivo está relacionada a dois processos fundamentais, conforme explica Piaget (1977, pp. 16-17):

> O primeiro é a assimilação, ou incorporação de um elemento exterior (objeto, acontecimento, etc.) num esquema sensório-motor ou conceitual do sujeito [....] e o segundo processo central a invocar é a acomodação, quer dizer, a necessidade em que a assimilação se encontra de considerar as particularidades próprias dos elementos a assimilar.

Torna-se possível ao sujeito, através desses processos, interagir com o meio, o que significa, de seu ponto de vista, assimilar um objeto às suas estruturas, isto é, possuir um esquema por meio do qual um elemento exterior pode ser incorporado. De acordo com a teoria de Piaget, explica Macedo (2002, p.148), “um esquema é uma coordenação de ação, um “saber fazer”, por meio do qual o sujeito assimila os objetos às suas estruturas”. Pode-se explicar uma estrutura como um conjunto de esquemas com uma relação entre eles, com as seguintes características: totalidade, transformação e auto-regulação; assim, é uma totalidade porque as relações estabelecidas entre seus elementos nunca resultam em um elemento estranho ao conjunto, sofrem transformações porque esses elementos se relacionam dinamicamente, e, ainda, uma estrutura nunca pode ser regulada por outra, o que implica em auto-regulação.

Ao elaborar a teoria da equilibração, Piaget (1977) destaca a necessidade da formulação de dois postulados. No primeiro postulado, diz-se que qualquer esquema de assimilação tende a incorporar a si próprio os elementos que lhe são externos, mas que são compatíveis com sua natureza. Isto quer dizer que, embora seja necessária a ação do sujeito, esta por si só não implica na construção de novidades. Esta característica confere estabilidade na relação entre os elementos que, ao se conservarem ou se inter-relacionarem, irão resultar em um elemento pertencente ao conjunto. No segundo postulado, qualquer esquema de assimilação é obrigado a se acomodar aos elementos que assimila, isto é, modifica-se em função de suas particularidades, sem perder a continuidade. Tal postulado afirma a necessidade de um equilíbrio entre a assimilação e a acomodação, desde que a acomodação se faça e se mantenha compatível com o ciclo. Assim, os elementos estarão sempre combinando entre si.

A equilibração poderá ocorrer de três formas: a primeira forma de equilibração assegura as interações entre sujeito e objeto. Já existe um começo de conservação mútua, porque o objeto é necessário para que se dê a ação e, reciprocamente, o esquema de assimilação confere significado ao objeto, transformando-o por meio dessa ação. A segunda forma de equilibração assegura as interações entre os subsistemas. Como os sistemas têm velocidades diferentes, é necessário que estejam bem diferenciados para que se constituam em novas totalidades. Esse tipo é diferente do primeiro porque,

> [...] se a acomodação dos esquemas à realidade exterior estiver exposta à intervenção de numerosos obstáculos inesperados, devidos à resistência dos objetos, a assimilação recíproca de dois subsistemas válidos e a sua acomodação recíproca acabam por se fazer, mais cedo ou mais tarde, e levam então a uma conservação mútua (PIAGET, 1977, p. 20).

A terceira forma de equilibração assegura a integração entre parte e todo. Essa forma, segundo Piaget (1977, p. 20), “não se confunde com a segunda porque acrescenta uma hierarquia às simples relações entre colaterais”. Por exemplo, a síntese de dois sistemas de coordenadas numa totalidade (referencial exterior a um móvel, como um trem, e o referencial interior, no caso de um passageiro do trem em movimento) compreende leis de composição, além das leis dos subsistemas.

As três formas de equilibração descritas têm em comum os aspectos: o fato de serem todas relativas ao equilíbrio entre assimilação e acomodação, e de incidirem diretamente nos caracteres positivos pertencentes aos esquemas, subsistemas ou totalidades consideradas. Será preciso, porém, determinar a correspondência entre as afirmações e as negações, sendo os caracteres negativos necessários para a delimitação dos positivos. Então, é na falta de simetria entre as afirmações e negações que será encontrada a causa dos desequilíbrios. Tal fato ocorre, porque os sistemas e os subsistemas de observáveis e de coordenações desenvolvem-se em diferentes velocidades. Então, o papel dos desequilíbrios será o de se constituir no motor da investigação, sem o que o conhecimento permaneceria estático. A possibilidade de os desequilíbrios serem ultrapassados, na procura de uma nova forma de equilíbrio, cuja forma é sempre melhor qualitativamente que a anterior, leva o sujeito a novas regulações e ao conseqüente progresso de seus conhecimentos.

As regulações se constituem em uma reação a uma perturbação, consistindo esta em uma modificação real, se relacionada a uma forma sensório-motora ou perceptiva, ou virtual, no caso das estruturas operatórias. Quanto à variedade, as perturbações, podem pertencer a duas grandes classes: a primeira compreende as perturbações que se opõem às acomodações pela resistência do objeto, obstáculos às assimilações recíprocas de esquemas ou subsistemas. Manifesta-se como a causa de um insucesso ou erro na medida em que o sujeito dele se apercebe e faz uma correção (*feedback negativo)*. A segunda classe de perturbações, como fontes de desequilíbrios, é constituída por lacunas que deixam as necessidades insatisfeitas e se traduzem pela alimentação insuficiente de um esquema (*feedback positivo*). Constitui-se numa lacuna, a ausência de um objeto, ou de condições para se realizar uma determinada ação, ou de um conhecimento indispensável para resolver um problema. Funciona como um reforço de um sistema de assimilação já ativado.

Uma regulação pode ser automática, de natureza sensório-motora, não sendo necessária a tomada de consciência, ou pode ser uma regulação ativa, que exige a tomada de consciência.

Ainda podem existir regulações de ordem superior, que são as compensações de natureza operatória. A esse respeito, Piaget (1977, p. 35) explica:

> Embora seja difícil traçar a fronteira entre as duas categorias, a sua distinção é importante porque as regulações automáticas não acarretam só por si uma tomada de consciência, ao passo, que as regulações ativas a provocam e estão, portanto, na origem de uma representação ou conceptualização das ações materiais, o que levará a subordinar as suas regulações a uma orientação de instância superior, o que é um começo de regulação de segundo grau.

De modo geral, assinala Piaget (*ibid.*), as regulações conduzem a compensações. As regulações por *feedback negativo* conduzem, geralmente, a duas classes de compensação: as compensações por inversão, que consistem em anular a perturbação, e as compensações por reciprocidade, que consistem em diferenciar o esquema para acomodá-lo ao elemento inicialmente perturbador. As primeiras implicam em negações completas, enquanto as segundas implicam em negações parciais, mas, agora, interiores ao novo sistema assim estruturado. As regulações por *feedback positivo* representam o valor que o sujeito atribui ao objeto, tendo em vista o que ele considera indispensável à satisfação da necessidade ao qual o objeto corresponde. O que há de comum a estas formas de regulação é que ambas se orientam na direção inversa ou recíproca da perturbação (obstáculo ou lacuna), o que equivale a anulá-la (inversão) ou neutralizá-la como perturbação (reciprocidade), sem deixar de poder tirar dela informações úteis, além do desenvolvimento das negações originadas, fase por fase, pelo binômio perturbação-compensação.

A equilibração cognitiva nunca tem um ponto de parada, porque uma estrutura concluída pode sempre dar origem a exigências de diferenciações em novas subestruturas ou a integração em estruturas mais amplas, isto é, como já mencionado (p. 34), a estrutura se fecha ao completar um ciclo e o sujeito entra momentaneamente em equilíbrio, para desequilibrar-se novamente quando a estrutura formada não der conta das novas perturbações. É por isso que convém falar de equilibrações majorantes, que se traduzem de duas maneiras, conforme as melhorias resultam apenas do êxito das regulações compensadoras, e, portanto, do equilíbrio momentâneo atingido, ou das novidades que resultam, por abstrações reflexivas, do próprio mecanismo destas regulações. Na primeira categoria, à medida que os elementos perturbadores são assimilados ao esquema que, até então, não podia acomodar a eles, aumenta a extensão do esquema, isto é, o número de elementos aos quais pode ser aplicada, enquanto nas equilibrações da segunda categoria segundo Piaget (1977, p. 47), "o êxito das regulações compensadoras leva a diferenciações em compreensão e não apenas em extensão".

É importante salientar, aponta Piaget (*ibid.*), que todo esquema de assimilação compreende uma certa capacidade de acomodações, devendo estar dentro de limites que não são os da ruptura do ciclo de que este esquema é formado. Isto quer dizer que nenhuma relação irá resultar em um elemento estranho ao conjunto. Tratando-se de equilibração majorante, o enriquecimento mais importante é a construção gradual das negações de diversas ordens, uma vez que a sua carência inicial, em função da primazia das afirmações, se constitui na razão dos desequilíbrios. A equilibração, nas suas formas fundamentais de compensações, é dirigida pela própria estrutura das regulações. Em primeiro lugar, qualquer regulação, pelo seu próprio exercício, progride nos dois sentidos da retroação e antecipação (correções e reforços). Assim, cada novo patamar dá origem a novas equilibrações por regulação. E, estas regulações, de um grau um pouco superior, prolongam naturalmente aquelas do nível de partida, por meio da abstração reflexiva.

A equilibração decorre concretamente das interações entre o sujeito e o objeto, havendo primeiramente, uma equilibração dos observáveis sobre a própria ação e sobre o objeto, retirando destes as características que lhes pertencem no seu conteúdo (abstração empírica) e o que lhe introduziram como formas de ações coordenadas do sujeito (abstração reflexiva). Para Piaget (1977, p. 61), "há, em seguida, o equilíbrio das coordenações inferenciais construídas pelo sujeito sobre suas próprias ações e o das coordenações atribuídas aos objetos, durante tentativas de explicação causal".

Um observável é o que a experiência permite notar por uma leitura imediata dos fatos; já uma coordenação compreende inferências necessárias e ultrapassa a fronteira dos observáveis. Esta distinção só é clara em níveis em que o sujeito é capaz de fazer observações objetivas e inferências logicamente válidas, o que torna insuficiente querer definir o observável apenas pelos caracteres perceptivos. Por conseguinte, define-se um observável por meio daquilo que o sujeito crê notar e não pelo que pode ser notado, o que significa que uma observação nunca é independente dos instrumentos de registro (assimilação) de que o sujeito dispõe. Os instrumentos não são apenas perceptivos, mas podem ser esquemas pré-operatórios ou operatórios aplicados à percepção existente e capaz de transformá-la, deformando-a ou suplementando-a.

> Por conseguinte, se num estado N, se parte dos observáveis para descrever coordenações que se estabelecem neste nível N, tem de ter-se sempre em conta que esses observáveis não constituem fatos primeiros, mas dependem em geral eles próprios das observações e coordenações do nível N–1, e assim sucessivamente (PIAGET, 1977, p.63).

Com relação às coordenações, estas são caracterizadas, segundo Piaget (1977, p. 64), “pelas inferências implícitas ou explícitas que o sujeito considera ou utiliza, como se lhe fossem impostas, com todos os intermediários entre essa evidência subjetiva e a necessidade lógica”, não sendo apenas generalizações indutivas, isto é, a passagem em extensão de algumas observações para todas, no que se refere aos observáveis, mas a construção de relações novas que ultrapassam o alcance do observável.

Há situações em que os observáveis são mal observados: a primeira delas ocorre quando uma observação errônea resulta de uma coordenação em que é ela própria a enganosa, mas é bem delimitada, numa segunda suposição, pode haver uma observação falsa por coordenações lacunares ou excessivamente globais e, ainda, há um terceiro caso em que as coordenações incidem em propriedades momentâneas dos objetos e que foram introduzidas pelo sujeito.

A seguir, serão estudados os tipos de interação propostos por Piaget (1977), para que sejam compreendidos, do ponto de vista funcional, como se relacionam os observáveis sobre as ações do sujeito. Nas interações do tipo I, deve-se distinguir duas variedades em função das diferenças entre as ações do sujeito: podem ser consideradas, segundo o autor (p. 67), como as do tipo IA “em que os observáveis em jogo intervêm no interior de uma ação causal” e as interações do tipo IB aquelas em que os observáveis se referem a uma ação lógico-matemática.

As interações do tipo IA partem de uma situação causal, em que o movimento do sujeito se limita a impelir um objeto. Deve-se considerar, também, que esse impulso pode ser mais ou menos forte e que a regulação desta força é indissociável da força do movimento. As interações do tipo IB se ligam aos observáveis nas ações de formas lógico-matemáticas. Serão distinguidos quatro observáveis, que exprimem a atividade ou operação do sujeito; a aplicação da operação, a forma imposta pelo sujeito aos objetos (encadeamento de relações ou classificações entre outros); a resistência real ou nula que apresentam os objetos em relação à forma imposta pelo sujeito (submissão ou resistência dos objetos à ação, entre outras, em ordená-los ou classificá-los) e a modificação dos objetos enriquecidos pelas propriedades que lhes foram atribuídas.

As diferenças entre os tipos IA e IB correspondem à natureza da ação do sujeito que, na primeira situação, realiza um esforço que se traduz em movimento para o objeto, enquanto, na segunda situação, a forma que o sujeito aplica aos objetos não é perdida para ele, e se traduz como um enriquecimento de seu conhecimento. Também a resistência dos objetos que no tipo IA é uma força, orientada no sentido contrário da ação, no tipo IB refere-se apenas à aceitação, ou não, por parte dos objetos (relações entre forma e conteúdo).

Nas interações do tipo II serão tratadas aquelas nas quais intervêm simultaneamente os observáveis do tipo I (A e B) e as coordenações inferenciais. Reunir-se-ão os observáveis relativos à ação do sujeito e os observáveis relativos aos objetos. Esses dois processos, com suas regulações e equilibrações locais, dizem respeito, um, aos observáveis, e outro, às coordenações, não tendo, portanto, a simetria relativa das funções da interação do tipo I. Como um observável depende, em geral, das coordenações anteriores nos êxitos ou insuficiências, cada grau é dado em função do grau precedente, o que torna possível preencher as lacunas do modelo inicial.

As interações entre objetos, ao contrário das interações até então examinadas, quer nos modelos que podem ter significado causal, em que as próprias ações desempenham o papel das causas, quer nos modelos nos quais as atividades do sujeito constituem a fonte das estruturações operatórias, constituem-se em situações nas quais os objetos atuam uns sobre os outros, e em que o sujeito só intervém materialmente por meio de experiências, cujo único fim é dissociar os fatores, ou fazê-los variar, sem manipulação da parte do observador.

Nos processos de equilibração majorantes e na evolução das regulações, segundo Piaget (1977), as compensações apresentam profundas alterações funcionais, que irão repercutir na interiorização das negações e na sua construção pelo sujeito. Essas compensações são indissociáveis de construções propriamente ditas e, reciprocamente, qualquer construção nova não é só orientada no sentido de compensações ou complementos, mas também, é dirigida pelas suas exigências. A reversibilidade é preparada por um sistema de compensação em diferentes níveis. As compensações podem distinguir três espécies de comportamentos diferentes, Alfa, Beta e Gama, com formas variadas quanto às relações entre as modificações e as fases compensações.

As compensações do tipo Alfa revelam uma pequena perturbação próxima do ponto de equilíbrio. A compensação será obtida por uma simples modificação introduzida pelo sujeito em sentido inverso ao da perturbação em questão. Se a perturbação é mais forte ou é implicitamente considerada mais forte pelo sujeito, será por ele anulada, pondo-a à parte ou afastando-a simplesmente. São compensadas parcialmente e o equilíbrio que daí resulta se mantém muito instável.

As compensações do tipo Beta consistirão em integrar no sistema o elemento perturbador surgido do exterior, não anulando a perturbação, e não rejeitando o elemento novo, mas sim modificando o sistema por "deslocamento do equilíbrio" até tornar assimilável o fato inesperado. O que era perturbador passa a ser variação no interior de uma estrutura reorganizada, em virtude de relações novas que unem o elemento incorporado aos que já estavam organizados, e estas novidades da estrutura assegurarão a compensação. Entretanto, em algumas situações, as modificações podem sofrer compensações ainda parciais, porém, efetivamente superiores às do tipo Alfa. Tratam-se das compensações essencialmente conceituais, e após o deslocamento de equilíbrio produzido pela integração da perturbação, o remanejamento que se segue na conceituação modifica mais ou menos profundamente o sistema inicial.

No caso das compensações do tipo Gama, o sujeito antecipa as variáveis possíveis, as quais perdem, na medida em que são previstas e dedutíveis, o seu caráter de perturbações e inserem-se nas transformações virtuais do sistema. Nesta fase, o sujeito antecipa as variações possíveis sendo, pois, uma fase superior comparada às demais. A compensação Gama pressupõe a tomada de consciência. No caso desse tipo de compensação, em virtude da própria composição da estrutura, há a antecipação de todas as transformações possíveis e a sua simetria equivale a uma compensação completa que corresponde à dos "trabalhos virtuais", sendo que o fecho da estrutura elimina qualquer possibilidade de contradições vindas do exterior como também as provenientes do interior.

Portanto, pode-se observar que há um progresso sistemático do primeiro para o terceiro desses comportamentos e essa sucessão faz compreender o processo de equilibração dos sistemas cognitivos, como resume Piaget (1977, p. 92):

> É próprio da equilibração dos sistemas cognitivos, ao contrário de quaisquer sistemas físicos, serem formados por esquemas cuja extensão e compreensão podem ter enriquecimentos notáveis por um duplo processo contínuo de assimilação e acomodação, o que torna as noções de perturbação e reação compensadora completamente relativas aos níveis dos sistemas considerados, e, portanto, instrumentos de assimilação possível: aquilo que era perturbação no nível mais baixo passa a ser variação interna do sistema nos níveis mais elevados, e o que era reação compensadora por tentativas de anulação acaba por desempenhar o papel de transformação simétrica da variação em jogo.

Os processos sucessivos de equilibração pressupõem, em cada fase, a construção de novas e melhores formas de equilíbrio que poderão ocorrer, somente, na medida em que o sujeito interaja com seu meio e, para que isso ocorra, uma ação ou uma idéia em um nível de desenvolvimento ao tornar-se possível, permite que, a partir desta, outras também o sejam, de tal forma que as primeiras possam estar subordinadas às segundas e assim por diante até que formem uma estrutura operatória . Para compreender a natureza desse processo há a necessidade de que seja estudada a construção dos possíveis, compreendendo-a principalmente no nível formal.

2.3 A Construção dos Possíveis e a Tomada de Consciência

Para Piaget (1985), o possível não é algo observável, e sim o produto de uma construção do sujeito em interação com as propriedades do objeto que, inseridas em interpretações devidas às atividades do sujeito, determinam uma numerosa e rica abertura de possíveis. Ainda o autor, para justificar a natureza construtivista, e não inatista dos possíveis, argumenta que, sob o aspecto psicológico os pontos de vista do observador e do sujeito são diferenciados, porque, se, para o primeiro ele é muito amplo, para o segundo observa-se um grande enriquecimento, fato mostrado pelo desenvolvimento qualitativo e, ao mesmo tempo, muito complexo e regular, apresentado pelas crianças de quatro ou cinco anos e as de onze ou doze anos, o que vem a demonstrar o fundamento da hipótese de uma formação progressiva dos possíveis. Segundo o autor, (p. 8), “quanto aos argumentos lógicos, eles se baseiam no fato de que um *conjunto de possíveis* não tem sentido, a não ser no caso de possíveis dedutíveis, isto é, subordinados a uma lei necessária”. Assim, o possível cognitivo é essencialmente invenção e criação.

Para melhor compreensão das hipóteses enunciadas pelo autor, torna-se necessário distinguir três espécies de esquemas: os presentativos, os de procedimentos e os operatórios. Os primeiros dizem respeito à conservação, em caso de composição, das características comuns dos objetos; são determinados pelas aquisições anteriores e podem destacar-se de seu contexto inicial. Os de procedimentos consistem em meios orientados para um fim e, em caso de sucessão ou de encadeamento de meios, aqueles que serviram no início não são necessariamente conservados. Nesse caso, os procedimentos estão ligados estreitamente ao seu contexto, tornando as transferências de um contexto a outro, mais difíceis e distintas das generalizações dos esquemas presentativos. Os esquemas operatórios constituem a síntese dos dois precedentes, pois a operação é um procedimento enquanto ato temporal e momentâneo, mas é um esquema presentativo de ordem superior por sua estrutura intemporal das leis de composição entre as operações.

> Assim, todo indivíduo encontra-se na posse de dois grandes sistemas cognitivos, aliás, complementares: o sistema presentativo fechado, de esquemas e estruturas estáveis, que serve essencialmente para "compreender" o real, e o sistema de procedimento, em mobilidade contínua, que serve para "ter êxito", para satisfazer, portanto, através de invenções ou transferências de processos. (PIAGET 1985, p. 9).

Para a compreensão da gênese dos possíveis, é necessário destacar as limitações de que o sujeito deve se libertar. Estas se prendem a uma indiferenciação inicial entre o real, o possível e o necessário. Tal fato ocorre porque o sujeito, não sendo capaz ainda de perceber possibilidades de construções variadas, evidencia as limitações que impedem a expansão de sua criatividade, uma vez que concebe os objetos unicamente como eles se apresentam, sem considerar as mudanças possíveis. À medida que ocorre a diferenciação entre o real, o possível e o necessário, o sujeito aumenta suas possibilidades de compreensão.

A evolução dos possíveis, segundo Piaget (1985), se dá em duas categorias distintas: a funcional e a estrutural. Do ponto de vista funcional, distinguem-se o possível hipotético, que mistura ensaios válidos e erros; o possível atualizável, assim nomeado, em função de resultados obtidos ou dos esquemas presentativos; o possível dedutível, em função de variações intrínsecas e o possível exigível que permite ao sujeito acreditar na realização de novas construções. Do ponto de vista estrutural, distinguem-se, também quatro etapas: na primeira, o possível analógico ocorre em um estágio elementar por pequenas mudanças seqüenciadas; o co-possível concreto, no qual diversos possíveis a serem atualizados são simultaneamente antecipados; o co-possível abstrato, no qual as atualizações são exemplos entre muitos outros a serem concebidos e, finalmente, o co-possível "qualquer", que supõe atualizações ilimitadas.

São notáveis, de acordo com o autor (*ibid.*), as relações estabelecidas entre a evolução tão regular e geral, observada na formação dos possíveis, e a sucessão dos níveis operatórios, como é por ele assinalado:

> [...] ao estágio pré-operatório I correspondem os possíveis por sucessão analógica; no nível IIA, do início das operações concretas, se constituem os co-possíveis concretos; no seguinte IIB (patamar de equilíbrio das operações concretas) situam-se os co-possíveis que chamamos abreviadamente abstratos, mas simplesmente no sentido de que são generalizados a muito mais casos do que os únicos atualizados; finalmente, no patamar III das operações hipotético-dedutivas aparecem os co-possíveis quaisquer em número ilimitado. (PIAGET, 1985, p. 130)

A formação das operações concretas, de acordo com Piaget (1985), é condicionada a um desenvolvimento mais amplo que só se completa mediante abstrações reflexivas e regulações mais desenvolvidas nos mecanismos das novas aberturas, até se tornarem, na fase das operações formais, em um co-possível qualquer e ilimitado, que se configura como totalmente dedutível e apoiado em mecanismos recursivos que ultrapassam de longe todo controle empírico. No entanto, explicam Piaget e Inhelder (1976, p. 192):

> O domínio do possível, atingido pelo pensamento formal, na realidade não é de forma alguma o do arbitrário, ou da imaginação livre de qualquer regra e de toda objetividade. Ao contrário, o advento do possível deve ser considerado sob a dupla perspectiva física e lógica como a condição não menos indispensável para a obtenção de uma forma geral de equilíbrio e como a condição não menos indispensável para a constituição de conexões necessárias, utilizadas pelo pensamento.

Isso quer dizer que, no período operatório formal, em uma determinada situação, o sujeito, ao subordinar o real ao possível, ele o faz, não apenas pela identificação dos elementos dados, mas sim, procurando juntar essas relações visivelmente reais no conjunto das concebidas por ele como possíveis, ou seja, ao reconhecer as relações naturais retiradas diretamente de um problema, o que o sujeito faz é escolher aquelas consideradas por ele como verdadeiras, para delas retirar todas as ligações possíveis e, aí sim, de forma dedutiva. E ainda, em problemas que requerem as noções de proporções e de raciocínios combinatórios, o sujeito poderá ser capaz de raciocinar formalmente por meio de implicações, “como se o sistema das operações possíveis constituísse um reticulado no interior do qual um conteúdo de pensamento, uma vez aceito, se difundisse imediatamente em todas as direções ao mesmo tempo", citam Piaget e Inhelder (1976, p. 199).

Assim, para Piaget (1985), toda a construção cognitiva, dos esquemas às estruturas, é constantemente motivada pela dupla necessidade de uma ampliação do meio e de um crescimento das capacidades do organismo sobre esse limite. Nesse contexto, cada possível ocasiona o duplo efeito de conduzir a uma nova atualização e de abrir novas lacunas a preencher, numa continuação indefinida desse processo de reequilibração que pode se referir a perturbações tanto no campo real como no plano virtual. As operações, portanto, exigem uma síntese do possível e do necessário, representando o primeiro a liberdade de procedimento e o outro a auto-regulagem e o fechamento de suas composições.

A evolução do necessário parece seguir paralela à do possível, conforme Piaget (1986) e, nessa evolução, podem ser apontados, como mostra o autor, três períodos que relacionam o real, o possível e o necessário. No primeiro período, o que pode ser observado é uma indiferenciação, na qual o real se caracteriza por múltiplas pseudo-necessidades, enquanto o possível se reduz aos prolongamentos diretos do real atual; no segundo período, o das operações concretas, ocorre a diferenciação entre o real, o possível e o necessário, referindo-se o real às formas concretas, o possível se desdobrando em famílias de co-possíveis e o necessário ultrapassando as coordenações locais. O terceiro nível, (p. 9) "seria o da integração das três modalidades em um sistema total de modo que o real aparece ao sujeito como um conjunto de atualizações entre os possíveis. Mas o real é, por outro lado, subordinado aos sistemas de ligações necessárias".

Para a conclusão dos estudos que permitem a análise das estruturas e dos processos cognitivos subjacentes à resolução de problemas sob o ponto de vista construtivista, será necessário, ainda, verificar quais os meios utilizados pelo sujeito para transformar um esquema de ação em conceito, desencadeado por um processo de tomada de consciência. De acordo com Piaget (1978) a elaboração de um conceito caminha da periferia, que se refere aos objetivos e resultados, para a região central da ação, a partir do reconhecimento dos meios empregados, dos motivos de sua escolha e pelas sucessivas tomadas de consciência na qual têm lugar contradições, deformações e inferências, até que o esquema se torne consciente e se estabeleça o conceito.

A evolução da ação e como se estabelecem as relações com a conceituação, que caracteriza a tomada de consciência, podem ser explicadas por uma seqüência de transformações do próprio centro considerando-se, segundo Piaget (1978, p 207), duas possibilidades: [...] "por meio de construções e coordenações sucessivas e em sentido único, obedecendo simplesmente a leis de diferenciações e de integrações, sem que ainda haja referência a regiões centrais ou periféricas" ou porque as "construções e coordenações se sucederiam segundo uma ordem ao mesmo tempo progressiva e regressiva ou retrospectiva".

O progresso da tomada de consciência depende tanto do objeto como da ação e, nesse plano, primeiramente, decorre de esquemas isolados de assimilação que não vão além de acomodações momentâneas, plano esse das ações materiais sem nenhuma conceituação. A seguir, as construções operatórias determinam coordenações que resultam em assimilações recíprocas dos esquemas utilizados e se encaminham para formas cada vez mais gerais e independentes de seu conteúdo. Porém a conceituação está longe de referir a uma simples leitura e, assim, para seu estabelecimento, é necessário que haja uma reconstrução da ação pela introdução de características novas sob a forma de ligações lógicas, extraídas de fontes anteriores por abstrações refletidas e criadoras de novas ligações. Assim é o pensamento das operações formais cujo mecanismo formador consiste em operações de segunda potência que são realizadas pela abstração das operações alcançadas no nível anterior, mas compostas e enriquecidas por combinações que ainda não poderiam ser feitas.

Considerando-se as possibilidades de conceituação, Piaget (1978) explica que, respeitada a hierarquia constitutiva dos níveis evolutivos I, II e III, ocorrem progressivamente coordenações por assimilação recíproca dos esquemas, chamadas por ele de "transversais", como ocorrem também as assimilações "longitudinais" que agem a partir do nível II, retirando elementos das ações dos níveis precedentes para reorganizá-las, ajustando-as com novos planos de conjunto e novas idéias provocando novas regulações, de tal forma que, para explicar a tomada de consciência no nível operatório formal, o autor diz:

> No nível da conceituação, o movimento de interiorização é marcado primeiramente por um processo geral de tomada de consciência da ação própria, portanto de interiorização das ações materiais por meio de representações semiotizadas (linguagem, imagens mentais etc.). Mas, desde o início, e na medida em que ocorrem os progressos da própria ação, essa tomada de consciência se polariza em função de dois tipos possíveis de abstrações: a abstração empírica fornece então, uma conceituação de certa forma descritiva dos dados de observação constatados nas características materiais da ação, ao passo que a abstração refletidora extrai das coordenações da ação o necessário para construir as coordenações inferenciais que, no nível do conceito, permitem ligar e interpretar esses dados de observação (PIAGET, 1978, p. 210).

Por todos os estudos precedentes, pode-se inferir que os processos mentais envolvidos na resolução de problemas podem ser beneficiados pela utilização de jogos de regras, uma vez que o jogo oferece a oportunidade para a elaboração de estratégias, possibilitando o estabelecimento de relações que podem promover o desenvolvimento cognitivo e com ele favorecer o aprendizado. O desenvolvimento refere-se a um processo construtivo e a aprendizagem corresponde a compreender ou captar algo que é novo e, ambas, expressam um novo conhecimento espacial e temporalmente determinados e como explicam Macedo, Petty & Passos (2005, p. 10), é: "Espacial porque se trata de juntar uma coisa a outra. Temporal porque essa ligação modifica ou acrescenta algo ao que era, ou não era, antes dessa preensão". Ao apresentar a obra de Piaget, As Formas Elementares da Dialética, Macedo (1996), revela que os jogos adquirem a sua maior expressão quando se tornam "veículos para o processo de desenvolvimento, e de solicitarem, por sua estrutura e conteúdo, uma qualidade de interação de natureza construtiva, ou seja, que supõe formas de interdependência relacional ou dialética".

Em seus estudos, Piaget (1994) e colaboradores utilizaram jogos como contexto de investigação, valendo-se um de seus primeiros trabalhos dos populares jogos como a Amarelinha, Bolinhas de Gude e Pique, na tentativa de compreender como crianças com diversas idades lidavam com as regras, especialmente a prática e a consciência das regras morais, tendo como finalidade estabelecer parâmetros para o desenvolvimento do juízo moral. Posteriormente, por meio de registros detalhados com base na observação de seus próprios filhos, Piaget (1990) propõe uma classificação baseada em critérios evolutivos, observando que as construções mais desenvolvidas integram e ampliam as precedentes e, ainda, que as crianças passam invariavelmente pelos estágios denominados por ele de Jogos de Exercícios, Jogos Simbólicos e Jogos de Regras.

Na categoria dos Jogos de Regras, Piaget (1978) investigou o processo de tomada de consciência das ações e as relações existentes entre a conceituação e a ação por meio do jogo Torre de Hanói. Esse jogo é composto por três pinos fixados verticalmente em uma tábua, sendo colocados em um deles discos com diâmetros distintos e perfurados em seu centro. Como regra, o jogador deve transportar um disco, de cada vez, de um pino para outro, sem colocar um disco maior sobre um menor e nem sobre a mesa. Podem ser utilizados dois, três, quatro, cinco ou mais discos para realizar a experiência. Nesse experimento, ao transportar os discos de um pino para outro, com um mínimo de deslocamentos, a criança demonstra ser capaz de compreender suas ações, estabelecendo planos, testando hipóteses, permitindo inferir que o processo de tomada de consciência caracteriza-se pela relação entre o fazer e o compreender, transformando um esquema em conceito.

A formação dos possíveis foi analisada por Piaget (1986) por meio do jogo de regras "Senha" (*Master Mind*), por ser um jogo em que está implícita a capacidade de dedução. As condições necessárias de sucesso provêm de informações que se modificam de etapa em etapa, condicionadas às anteriores e condicionando as seguintes. O foco dessa pesquisa é objetivar uma forma essencialmente negativa de necessidade, de tal forma que, se em "n" possibilidades, "n-1" devem ser excluídas, então a enésima é o necessário, e assim, apresentar um exemplo de conexão entre o possível e o necessário. Este estudo possibilitou estruturar três níveis no desenvolvimento das necessidades e dos possíveis, correspondentes aos níveis pré-operatórios, operatório concreto e hipotético-dedutivo. O nível I corresponde ao das "pré-necessidades" locais e incompletas, das pseudo-necessidades e aos possíveis analógicos; o nível II é o das co-possibilidades limitadas e dos co-possíveis concretos e limitados e o nível III corresponde às co-necessidades ilimitadas e aos co-possíveis quaisquer.

A construção dialética foi estudada por Piaget e colaboradores (1996) por meio dos jogos Determinação de Alguns Animais ou Objetos, semelhante ao jogo comercializado como Cara a Cara, e o jogo Xadrez Simplificado para Crianças foi utilizado para a análise de um Sistema de Deslocamentos Espaço-temporais. O jogo conhecido como Reversi foi emprestado para a análise de Uma Ordem Direta ao seu Inverso e, por meio de um Sistema Multitransformacional de Pivotamentos, mostra a importância dialética dos processos de inversão, num jogo semelhante à conhecida Batalha Naval. Por meio desses jogos foi estudada pelo autor e seus colaboradores a construção dialética nos quais destacam as características comuns em toda dialetização que, resumidas em uma única, fornece a sua significação geral: a dialética constitui o aspecto inferencial de toda a equilibração.

Nesse contexto, um trabalho que se proponha analisar os procedimentos adotados pelo jogador poderá favorecer a compreensão de como ele formula suas hipóteses e que conexões estabelece para atingir o objetivo do jogo, ações esperadas, também, quando lhe é proposto um problema para que ele o resolva. Segundo Macedo, Petty e Passos (2000), jogar favorece e enriquece o processo de aprendizagem, uma vez que o sujeito é levado a refletir, fazer previsões e inter-relacionar objetos e eventos, e ainda, aprender a questionar e corrigir suas ações, analisar e comparar pontos de vista, ações também esperadas quando lhe é proposto um problema, como apontam as pesquisas apresentadas a seguir.

2.4 As pesquisas sobre o jogo e sua relação com a resolução de problemas

As considerações dos autores sobre a resolução de problemas podem, também, servir para a prática de um jogo de regras que, através de sua análise, promova a consciência dos meios que levou o jogador a atingir os objetivos do jogo, assim como possibilitar o desenvolvimento de formas de pensamento mais evoluídas, por permitir a revisão de seus próprios conceitos ao lidar com contradições, proceder à leitura de observáveis e coordenações, construir possíveis e o necessário, favorecer a tomadas de consciência por abstrações reflexivas e refletidas.

Para Oliveira (2004), os jogos de regras podem ser vistos como situações privilegiadas para a resolução de problemas em todas as fases de desenvolvimento. A autora explica que as habilidades e competências cognitivas, desenvolvidas por meio de um jogo de regras, passam a fazer parte da estrutura mental do sujeito, podendo ser generalizadas para outras situações quaisquer, não apenas em contextos específicos, mas também em similares, como as utilizadas para a resolução de problemas. Localizando o problema como um ato criativo, o jogo situa-se como uma das melhores situações de aprendizagem, pois ensinam a pensar de forma criativa num ambiente lúdico.

De acordo com Macedo, Petty e Passos (2000), trabalhar em um contexto de situações-problema por meio de um jogo de regras implica criar situações com as seguintes características: a elaboração de questões a partir de momentos significativos do próprio jogo; a apresentação de um obstáculo que represente alguma situação de impasse ou decisão sobre qual a melhor ação a ser realizada; favorecer o domínio cada vez maior da estrutura do jogo e promover, como principal objetivo, a análise e o questionamento sobre a ação de jogar. Buscando-se uma relação entre resolver problemas e jogar os jogos de regras, pode-se entender que os conhecimentos acerca do conteúdo do problema são, no jogo, o conhecimento de suas regras. A boa bagagem de procedimentos para a resolução de problemas tem correspondência no jogo, à prática das regras e o sistema de controle para guiar a seleção de conhecimentos, poderia ser interpretado como o desenvolvimento de estratégias eficientes para se ganhar o jogo.

Essa estreita relação entre o jogo e a resolução de problemas é apreciada por Corbalán (1998), quando mostra a aproximação das fases de resolução de um problema que são descritas por Polya e a análise para a obtenção do objetivo em um jogo de regras. As quatro fases resumidamente descritas por Polya e o seu paralelo para a aplicação em um jogo são: "Compreender o problema", cujo equivalente seria entender os componentes do jogo: peças, tipos de movimentos, forma de atuar, maneira de jogar, como chegar ao objetivo do jogo, isto é, a fase de familiarização com o jogo; "Traçar um plano para resolvê-lo", o paralelo relacionado com o jogo seria o de interiorizar os movimentos, buscando estratégias para atingir o objetivo do jogo, podendo relacionar o jogo em questão com outros similares; "Executar o plano traçado" seria o equivalente a colocar em prática as estratégias selecionadas e, por fim, a última etapa seria o de "Comprovar os resultados" que, em um jogo, seria o processo de refletir sobre o processo seguido.

Corbalán (2000) também propõe quatro etapas para o estudo de um jogo. Para ele, em primeiro lugar, deve-se entender antes de fazer; após, deve-se tramar uma estratégia; em seguida, observar se a estratégia escolhida leva a atingir o objetivo do jogo e, finalmente, jogar. Na mesma obra, o autor menciona que, para a resolução de problemas é de fundamental importância a formulação de hipóteses e sua comprovação posterior, e esse processo se torna muito fácil de ser feito por meio do jogo, pois o prêmio que se consegue pelas melhores hipóteses é o de vencer a partida, o que é uma excelente motivação, principalmente para os adolescentes.

Para Retschitzki (1990), a relação entre o jogo e a resolução de problemas é freqüentemente abordada por autores da corrente cognitivista por entenderem que os jogos de regras apresentam a vantagem de serem sistematizados de forma natural, além de facilmente escolhidos por serem encontrados em grande número. Segundo esse autor, a escolha de uma melhor jogada pode ser semelhante à uma resolução de uma situação-problema, o que implica em ser o protótipo de uma ação inteligente. Isso acontece, explica o autor, porque no trabalho com os jogos, as novidades podem ser trabalhadas de forma relativamente simples, e as suas regras podem ser adaptadas aos objetivos procurados pelo experimentador.

O jogo, como instrumento de aprendizagem, foi também tratado por Alves, E. (2006), como uma alternativa metodológica que tem sido bastante explorada nas primeiras séries de ensino fundamental e na educação infantil, porém, ressaltando que poucas são as pesquisas que enfatizam o uso de jogos no ensino de 5ª a 8ª séries do ensino fundamental e no ensino médio. A autora focaliza que o trabalho com jogos pode ser uma alternativa para uma aprendizagem significativa da Matemática que se traduz em sala de aula por maior interesse, motivação, criatividade, autonomia, alegria e prazer. Não existem, porém, receitas pré-estabelecidas nem fórmulas mágicas para o êxito dessa proposta.

Outras pesquisas, que mesmo não tratando explicitamente de conteúdos matemáticos, visavam contribuir para o desenvolvimento dos processos cognitivos, como o trabalho de Torres (2001) que pesquisou como jogos em contexto de oficina poderiam ser um meio para desencadear os processos cognitivos responsáveis pela construção do conhecimento. As referidas oficinas eram destinadas a adolescentes de 5ª e 6ª séries do Ensino fundamental, todos eles com queixas de aprendizagem. Os resultados da pesquisa foram favoráveis, pela efetiva contribuição ao desenvolvimento e aprendizagem, na perspectiva de um trabalho pedagógico diferenciado e de abordagem construtivista.

Outro jogo, o "Cara a Cara", foi pesquisado por Magalhães (1999), que analisou as estratégias e os procedimentos de crianças de 7 a 13 anos quanto à apreensão das regras, à questão do erro e à formulação das respostas dadas pelos participantes. Os estudos, confirmados por gráficos e extratos de protocolos ilustrando os aspectos analisados, comprovaram especialmente a relação entre os seguintes aspectos: interdependência entre processos de aprendizagem e desenvolvimento, construção da significação (incompatibilidade e negação) e conexões entre predicado, conceito, juízo e inferência.

Já as pesquisas de Brenelli (1993), Petty (1995), Pauletto (2001), Bariccatti (2003), Silva (2003), Guimarães (2004), Silva e Brenelli (2004/2005, 2006) e Bariccatti e Brenelli (2006) buscaram estabelecer relações entre o jogo e a construção de conceitos matemáticos, com participantes que variavam entre sete e treze anos, cada uma delas para sua respectiva faixa de idades, e pertencentes ao ensino fundamental, obtendo, em todas elas, conclusões favoráveis ao relatarem que os jogos podem ser considerados como importantes meios para a construção de conceitos matemáticos.

A investigação dos processos desencadeados na construção e o resgate de conceitos e habilidades matemáticas foram o foco da pesquisa desenvolvida por Grando (2000) em um trabalho pedagógico baseado em jogos e resoluções de problemas, evidenciando o processo de construção de procedimentos e conceitos em seus participantes, a partir de intervenções pedagógicas realizadas em aulas de Matemática por meio de jogos de regras.

Para o desenvolvimento da pesquisa, Grando escolheu aleatoriamente oito alunos da sexta série do Ensino fundamental, distribuídos, por sorteio, em dois grupos de quatro alunos, que jogaram, dupla contra dupla. Os outros alunos restantes na sala de aula também estavam envolvidos com as mesmas atividades de jogo; entretanto, a atuação deles não foi considerada na pesquisa. Os participantes foram avaliados, antes da intervenção, por meio de provas piagetianas clássicas de avaliação cognitiva, relativas ao estágio operatório concreto e operatório formal. As provas foram selecionadas segundo alguns aspectos que a pesquisadora considerou relevantes para a solução das atividades de jogo que seriam propostas, objetivando um reconhecimento inicial das possibilidades cognitivas dos sujeitos.

O processo de intervenção foi realizado através do jogo Contig 60, que permitiu observar, analisar e avaliar os procedimentos de cálculo mental das quatro operações básicas, expressões numéricas e propriedades aritméticas, construídos a partir da resolução dos problemas desencadeados em situações relativas às próprias jogadas, na resolução dos problemas escritos, na análise das possibilidades de jogadas e tomadas de decisões, na argumentação necessária para o acordo entre os parceiros, sobre a jogada a ser realizada, na formulação aos questionamentos realizados pela pesquisadora e na elaboração das estratégias para vencer. Para confirmar, pela sistematização dos registros, a compreensão dos conceitos trabalhados pelo Contig 60, a pesquisadora realizou também uma intervenção com o jogo Nim. Esse jogo refere-se aos conceitos de divisibilidade e múltiplos dos números, além de exercitar o cálculo mental. Os dados foram coletados por meio de filmagem, gravação em fita cassete, registros dos jogos e das situações-problema realizadas pelos participantes e pelo registro em protocolos das observações durante as sessões.

A análise dos dados comprovou que o processo desencadeado na construção de procedimentos, pelos participantes, em situações de jogo, favoreceu o processo de formação ou de resgate de conceitos e habilidades matemáticas. Assim sendo, os resultados mostraram o quanto o jogo pode ser um instrumento útil e eficaz para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, em ambiente de sala de aula, propiciando uma aprendizagem significativa para o aluno, como também conferindo ao ensino da Matemática momentos de alegria, descontração, e envolvimento, pela atividade lúdica que o jogo representa.

Com o propósito de investigar como se processa o pensamento matemático na resolução de problemas quando relacionados aos jogos computacionais, Marco (2004) pesquisou alunos de 6ª série do ensino fundamental, por meio de atividades organizadas em episódios e diálogos baseados na análise de duas categorias: situação-dilemática mais análise e síntese. A pesquisadora realizou uma intervenção com análise interpretativa das manifestações dos alunos durante o processo de jogar e criar um jogo computacional. As análises realizadas evidenciaram que, quando são propostas situações de criação de jogos que os alunos sentem necessidade de resolvê-las, esses manifestam momentos de hesitação e dúvidas que foram caracterizados por situação-dilemática, mantendo-se nesta situação ou superando-a ao desenvolver procedimentos de análise e síntese das variáveis envolvidas nos problemas criados para o jogo. Das análises processadas, foi possível retirar elementos para discussões sobre o processo de interação entre sala de aula e tecnologia e para repensar a concepção de resolução de problemas no contexto educacional.

Em um trabalho conjunto, Grando e Marco (2006) confirmam, no campo da Educação Matemática, o valor da resolução de problemas e a possibilidade de sua relação com a prática de jogos, destacando o papel de mediador do professor, para que seja rompida a concepção de "jogo pelo jogo". Na visão das autoras, a resolução de problemas é vista como uma situação na qual o próprio problema é o desencadeador do processo de aprendizagem por estar associado à elaboração de conhecimentos que tem por objetivo resolver o problema enfrentado, por meio da utilização de conceitos matemáticos. Nesse contexto, a relação com o jogo ocorre quando o aluno é "forçado" a elaborar estratégias para resolver o problema, ou seja, ganhar o jogo.

Deixando de seguir sempre a mesma receita para resolver um problema, o aluno é compelido a criar novos processos pessoais para resolver problemas, o que, seguramente, irá possibilitar a aquisição de novos conhecimentos. Como definem as autoras o que mobiliza o aluno para essa busca é o inesperado, que é o elemento essencial no movimento do progresso.

> No jogo, o estabelecimento do inesperado se dá no momento em que o aluno, ao jogar e divertir-se, depara-se com uma situação, um problema apresentado ou ocorrido na partida e sente a necessidade de elaborar uma estratégia para poder continuar suas jogadas. O inesperado traz para o aluno um misto de sensações de ansiedade, medo, angústia, incerteza, hesitação, alegria, ou seja, a situação dilemática em que se sente desafiado a resolver o problema para, assim, vencer o jogo (GRANDO e MARCO, 2006, p. 101).

Ainda no que diz respeito à prática do jogo como contexto de aprendizagem de conceitos matemáticos, eles podem ser apresentados por meio de tabuleiros ou como jogos computacionais mas, em qualquer uma das situações, apontam as autoras (*ibid.*) que devem ser priorizadas as situações dilemáticas que garantam que o jogo não esteja sendo realizado apenas pelo jogo.

Com referência ao uso do computador, Retschitzki e Gurtner (1996), afirmam que em toda a história da informática, as aplicações com finalidades educativas têm sido uma preocupação constante para a aprendizagem das crianças. Pode ser por meio de programas que visam consolidar os conhecimentos ou em aplicações que podem consistir na realização de operações elementares, testar a memória em tabelas de multiplicação, ou, ainda, em uma utilização mais eficaz de programas especiais com suas linguagens próprias com características técnicas, porém concebidas pedagogicamente.

Para Retschitzki e Gurtner (1996), o computador, dependendo das atividades propostas para as crianças, dispõe de muitas indicações para o seu desenvolvimento intelectual, dentre elas o aumento da criatividade e da capacidade de rapidez nas ações. Segundo o autor, em um panorama de autores mais visionários, haverá consideráveis mudanças no domínio da aprendizagem, por exemplo, Papert (1994), citado por Retschitzki e Gurtner (1996), vê no uso do computador uma revolução na maneira de aprender, apresentando um projeto no qual todas as crianças poderiam aprender a álgebra, a geometria, dentre outros conteúdos de maneira mais fácil que a forma clássica seguida nas escolas.

Os três tipos de utilização do computador apresentados por Retschitzki e Gurtner (*ibid.*), como meio de aprendizagem são: os jogos de repetição ou de consolidação, os jogos de aprendizagem propriamente ditos, ou didáticos e os de aprendizagem pela descoberta. Dentre os de descoberta estão aqueles que estimulam a curiosidade e mostram uma paciência infinita diante dos erros apresentados pelo jogador, o que favorece a aprendizagem e, ainda, permite explorar e descobrir as regras e simular situações, o que de certa forma significa estar diante da resolução de um problema.

Portanto, por todas essas considerações, pode-se inferir que a semelhança entre a resolução de um problema e a ação de jogar constitui-se em mover o sujeito de uma situação de equilíbrio para uma de desequilíbrio, e ele, na busca de um novo equilíbrio, será estimulado a indagar sobre o tema em questão, formular hipóteses, analisar e revisar o caminho seguido, para então conseguir solucionar o conflito. Na presente pesquisa, a resolução de problemas se associa ao jogo, quando os participantes são solicitados a conhecer as regras do jogo, estabelecer estratégias para atingir o seu objetivo e, ainda, antecipar quais serão as estratégias do outro jogador com a intenção de neutralizá-las, da mesma forma que, para solucionar um problema proposto, devem selecionar os conceitos apropriados, estabelecer estratégias e aplicá-las de modo a refletir sobre seu conteúdo com a intenção de corrigi-los ou completá-los. O jogo escolhido para o desenvolvimento deste trabalho foi o "Quarto", cujas relações com a resolução de problemas, caso existam condições de conhecimento escolar do aluno, serão delineadas nos capítulos seguintes.

CAPÍTULO 3

DELINEAMENTO DE PESQUISA

A relevância da Psicopedagogia e dos profissionais que utilizam seus fundamentos está em acompanhar o desenvolvimento de estudantes, prevenindo ou suprindo os problemas de aprendizagem que possam surgir nas diversas fases de sua escolaridade. Pode-se considerar de grande importância para a obtenção do sucesso escolar o suprimento das dificuldades de aprendizagem por meio da orientação de estudos e pelo atendimento de crianças comprometidas por circunstâncias diversas. Porém, as pesquisas que focalizam o desenvolvimento do raciocínio, como um processo de pensamento necessário ao ato de aprender reveste-se de grande valor, por configurar-se como uma atividade orientadora do ensino. Assim, por sua ação dinâmica e pela interação estabelecida entre o aluno e o objeto de estudo, foi a vertente escolhida para o desenvolvimento do presente estudo.

3.1 Problema e Justificativa

A resolução de problemas, quando considerada como uma atividade que pode contribuir para a formação de conceitos matemáticos, deve focalizar quais são os processos empregados pelo sujeito para resolvê-lo, o que significa observar quais estratégias ele utiliza, quais relações estabelece e como estrutura seu pensamento, com o objetivo de solucionar o problema proposto. Os jogos de regras podem ser um meio solicitador desse processo, por se configurar como uma situação desafiadora, que permite a adoção de estratégias através da reflexão e da antecipação das ações do próprio jogador e as de seu adversário, criando, assim, novos procedimentos, com a finalidade de vencer as situações-problema desencadeadas pelo contexto lúdico. De fato, como já mencionados (pp. 47-48), os estudos destinados à análise dos jogos de regras como os realizados por Piaget e seus colaboradores permitiram-lhes analisar o respeito às regras morais por meio dos jogos "Bolinhas de Gude", "Amarelinha" e "Pique" (1994), a tomada de consciência das ações e das relações, pela "Torre de Hanói" (1978), a formação dos possíveis em que está implícita a capacidade de dedução, no jogo "Senha" (1986) e a construção dialética em jogos como o "Xadrez Simplificado" (1996). Outros pesquisadores ao estudarem, por meio de jogos de regras, os processos de pensamento e a construção de estruturas necessárias ao ato de aprender e produzir conhecimentos, puderam também observar os efeitos positivos dos trabalhos que realizaram.

Criar situações que promovam o desenvolvimento cognitivo, por meio de ações que evoluam para um nível operatório-formal, ou em direção à estabilidade de operações próprias desse período, poderá ser um desafio que tem no jogo de regras "Quarto" um poderoso aliado, já que esse jogo provoca atividades e experiências com processos cognitivos que se constituem pela articulação entre ações materiais e mentais que permitem ao sujeito elaborar diferentes representações em outros planos, como por exemplo, o escolar. Isso pode ocorrer quando se considera que, para jogar operatoriamente o jogo de regras "Quarto", será necessário ao jogador organizar-se no espaço explorando todas as direções, agir de forma intencional, coordenando ataque e defesa, e reconhecer os diferentes atributos de todas as peças. A realização de sessões de intervenção por meio desse jogo pode ser um recurso importante para o desenvolvimento de estratégias que permitam ao estudante a transposição das situações vivenciadas para outros contextos, como a resolução de problemas. Então, a questão que a presente pesquisa se propõe estudar pode ser assim formulada: **As atividades propostas em sessões de intervenção com o jogo "Quarto" podem contribuir para a resolução de problemas matemáticos?**

A análise dos meios que o sujeito utiliza ao jogar, bem como as estratégias empregadas para a resolução de situações-problema desencadeadas por essa atividade, podem, ao mesmo tempo, dar pistas de como ele pensa, como também criar condições para que seu pensamento evolua para novos e melhores procedimentos, que lhe permitem adquirir a consciência do fazer, alcançando a compreensão, que descubra os erros e os meios de superá-los e, finalmente, que possa agir com a liberdade que o pensamento operatório formal confere às pessoas que o possuem. O saber escolar, durante o período que caracteriza a adolescência, pode ser também considerado como um meio solicitador para que o sujeito alcance níveis de raciocínio cada vez mais evoluídos, e a resolução de problemas matemáticos, que necessitam para a sua solução o raciocínio hipotético-dedutivo, por suas características, poderá permitir esse desenvolvimento. Isso porque os processos cognitivos envolvidos durante a sua resolução estão intimamente relacionados com as operações que visam à evolução de um nível operatório-concreto para um nível superior, o operatório-formal, contribuindo para a organização das operações nesse nível, como também em situações que envolvem o arremate desta estrutura.

Nesse sentido, o jogo "Quarto", por meio de suas regras, quer seja ele experienciado por dois ou mais jogadores na forma tradicional com seu tabuleiro, peças e parceiros reais, ou de forma virtual, através do *software* contido em "*Zillions of Game"*, em que o adversário é o próprio computador, pode permitir a observação dos movimentos do jogador e, assim, possibilitar a análise de quais são as estratégias utilizadas para as jogadas e quais as justificativas para a peça e a "casa" escolhidas e, ainda, se estas escolhas se configuram como um instrumento revelador do tipo de raciocínio utilizado. Dessa forma, se os jogadores utilizarem estratégias mais eficientes, estarão mostrando um desenvolvimento intelectual que compreende a reversibilidade completa, coordenada em suas duas formas, a negação e a reciprocidade, na composição do ataque e da defesa, permitindo o reconhecimento por antecipação das diferentes combinações dos atributos. Isso, considerando que para jogar operatoriamente, assim como para resolver, com êxito, problemas de conteúdo matemático, o adolescente deve organizar-se, agir de forma intencional, reconhecer e coordenar diferentes variáveis, combinando-as sistematicamente, comprovar e justificar resultados.

Por todos esses aspectos, o método para o desenvolvimento da presente pesquisa deve levar em consideração as relações estabelecidas por cada participante, relacionando-o a si próprio nas diversas etapas do estudo, conforme delineado, a seguir.

3.2 O método

Buscou-se, na perspectiva construtivista, analisar se um jogo de regras, como é o caso do "Quarto", pode favorecer as atividades de resolução de problemas de conteúdo matemático. Os estudos das aquisições cognitivas, durante as fases de aplicação e reaplicação de problemas de conteúdo matemático, foram norteados por questões que visavam comparar a atuação de cada participante consigo mesmo, com o objetivo de conhecer o tipo de raciocínio utilizado por ele para resolver cada um dos problemas propostos. As questões propostas para se avaliar o tipo de estratégia que o aluno utilizou durante as partidas de "Quarto" foram inspiradas no modelo do método clínico, ou de exploração crítica, conforme explicam Inhelder, Bovet e Sinclair (1977), uma vez que busca identificar o interesse nas aquisições cognitivas postuladas por meio de inobserváveis, sob a forma de estruturas subjacentes inerentes à sua gênese.

Em função dos problemas que o método clínico-crítico se propõe analisar, as referidas autoras assinalam dois traços importantes desse método, visando distinguí-lo dos processos experimentais usuais, conforme esclarecem:

> Primeiramente, na medida em que o método é destinado a decifrar um domínio novo, seus processos se deixam orientar pelas condutas originais imprevistas e muitas vezes imprevisíveis do pensamento infantil. Não é senão quando pensamos estar em possessão de um leque, o mais completo possível, de reações originais em face de um problema particular, é que o método de interrogação pode tomar um caráter mais sistemático.
> Em segundo lugar, um outro elemento fundamental de nosso método de exploração crítica consiste em que o experimentador faz sem cessar hipóteses sobre as diversas significações cognitivas das condutas observadas e as verifica ao vivo. Com efeito, e contrariamente aos métodos planificados com questões estandardizadas, pareceu-nos mais sensato e mais apropriado à nossa problemática, analisar de uma só vez processos de pensamento, de preferência a fazer interpretações posteriores e imaginar, em muitas etapas, experiências de controle. Esta análise pode ser feita, também, e mesmo conjuntamente, por meio de variações de situações experimentais como por diálogos entre a criança e o experimentador, acentuando os aspectos críticos e reveladores do problema colocado. (INHELDER, BOVET E SINCLAIR, 1977, p. 30).

Na presente pesquisa, os dados foram coletados através do contato direto com a pesquisadora e analisados de forma predominantemente descritiva, valorizando-se na aplicação e reaplicação da prova de problemas de conteúdo matemático, também o questionário proposto após a resolução dos problemas que teve como objetivo avaliar o tipo de raciocínio utilizado pelo aluno, e não apenas o seu desempenho. Na análise das partidas de “Quarto” disputadas, priorizou-se as descrições e as justificativas para as estratégias empregadas pelos participantes. E adotou-se a opção pela utilização do jogo “Quarto” por meio do *software Zillions of Games* durante as sessões de intervenção para que a pesquisadora pudesse agir como observadora neutra e, em determinados momentos, durante as partidas, pudesse solicitar ao jogador a análise de suas ações e a previsão de seus movimentos futuros. Por tudo isso, fica evidenciada a maior preocupação com o processo do que com o produto, e também, ao significado que cada aluno confere à sua participação, por meio de um questionamento aberto com cada um deles, o que é uma estratégia de exploração crítica para o tratamento e a interpretação dos dados. O tratamento estatístico recebido pelos dados teve a finalidade de enriquecer a sua análise e não de estabelecer uma regra, ou um princípio, que refletisse a uniformidade de uma situação. Dessa forma, os objetivos da presente pesquisa são assim enunciados:

3.3 OBJETIVO GERAL

Investigar se a promoção de sessões de intervenção com a utilização do jogo de regras "Quarto" pode favorecer as atividades de resolução de problemas de conteúdo matemático.

3.3.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Analisar a resolução dos problemas de conteúdo matemático propostos, estabelecendo os tipos de conduta de cada participante, por meio da solução adotada e pelas respostas às questões propostas, visando esclarecer o raciocínio utilizado por eles para cada um dos problemas.

Observar se as questões propostas durante as sessões de intervenção ocorridas nas partidas de "Quarto", ao serem relacionadas com a atividade de resolução de problemas, puderam contribuir para aprimorar as soluções e suas respectivas justificativas na reaplicação da prova de problemas de conteúdo matemático.

Analisar a relação entre a conduta adotada pelo participante na resolução de problemas, em sua atuação nas partidas do jogo "Quarto", e o tipo de pensamento por ele apresentado, tendo como parâmetro o resultado da prova das permutações.

3.4 Participantes

A amostra, de natureza justificada, foi composta por vinte e um alunos, sete de cada uma das três séries do Ensino Médio, de ambos os gêneros, com idades entre 14:11 e 17:07 anos, que aceitaram o convite para participar da pesquisa. Para o desenvolvimento da pesquisa foram escolhidas duas escolas particulares do município de Campinas, SP. Os alunos participantes da pesquisa encontram-se relacionados, a seguir, no Quadro 01:

Série	Participante	Idade
1ª	BEA	14:11
	BRU	15:02
	FRA	15:10
	MAT	15:09
	NAT	15:05
	PAU	15:05
	RAI	15:04
2ª	ADR	16:05
	FER	16:01
	GAB	16:09
	LUC	15:11
	MAR	16:03
	PED	16:09
	RAF	16;10
3ª	BRU	17:00
	DAP	16:11
	GUS	17:05
	NAT	17:06
	PRI	17:05
	REN	17:07
	ROS	17:01

Quadro 01 – Apresentação dos participantes

3.5 Instrumentos

Os instrumentos utilizados foram: a Prova de Conhecimentos Matemáticos, as Sessões de Intervenção por meio de partidas com o jogo “Quarto", apresentando-se este na forma de tabuleiro e peças e na forma computacional encontrada no *software Zillions of Games*, e a Prova das Permutações. Em todas as etapas da pesquisa, os instrumentos foram apresentados individualmente aos participantes.

3.5.1 Prova de conhecimentos matemáticos

A Prova de Conhecimentos Matemáticos foi impressa em papel sulfite e composta por problemas extraídos do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) dos anos de 2004 e 2005 e questões que visavam esclarecer o tipo de raciocínio empregado para cada problema. Além disso, cada participante recebeu um lápis e borracha para o respectivo registro de sua resolução. Utilizou-se esse instrumento no início dos trabalhos e no seu final, após os encontros em que foram disputadas as partidas de “Quarto”.

3.5.2 Jogo “Quarto”

O jogo e suas regras, que eram desconhecidos de todos os participantes, foram apresentados por meio de seu tabuleiro e de suas 16 peças, combinando os seguintes atributos: cor, tamanho, forma, com e sem furo. Após a aprendizagem das regras, o jogo foi disputado na forma computacional, com as mesmas regras já aprendidas, através do “*software*” “*Zillions of Games*”, que contém o jogo “Quarto”.

3.5.3 Prova das Permutações

A prova foi aplicada utilizando-se 32 fichas de E.V.A. de quatro cores: vermelhas, amarelas, verdes e azuis e uma ficha branca. Registrou-se a atuação de cada aluno por meio de um protocolo de aplicação da prova impresso em papel sulfite, conforme Anexo A, e por imagens fotográficas.

3.6 Procedimentos de coleta dos dados

A presente pesquisa foi submetida e registrada sob o número 676/2006 no Comitê de Ética da Faculdade de Ciências Médicas da Unicamp, tendo recebido parecer favorável para o seu desenvolvimento, por atender a todos os dispositivos das Resoluções 196/96 e complementares.

O critério para a escolha das unidades escolares onde ocorreu a pesquisa foi o de serem escolas que cumprem as propostas contidas nos objetivos gerais da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9394/96) (BRASIL, 1996) que estabelecem, como finalidades centrais para o Ensino Médio, dentre outras, o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade dos estudos, a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico. Em se tratando da Matemática, no planejamento dessas unidades de ensino e de acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) os objetivos traçados levam em conta que o processo de aprendizagem deve valorizar o raciocínio matemático no aspecto que se refere à formulação de questões, a existência de suas soluções, o estabelecimento de hipóteses e a generalização de situações, de forma a abstrair as regularidades, fundamentando-as por meio de argumentações lógicas. Assim, entendem que a aprendizagem deve acontecer de forma contextualizada para que possa instrumentalizar e estruturar o pensamento do aluno, capacitando-o a compreender e interpretar situações, possibilitando a argumentação, a análise e a generalização, além de outras ações necessárias à sua formação.

Consta, ainda, no planejamento das referidas unidades, que os alunos devem, no decorrer do Ensino Médio, atingir as competências que dizem respeito ao domínio básico da linguagem, compreendido como o uso da norma culta da língua, e de seus diferentes códigos, inclusive a linguagem matemática. Devem ser capazes de resolver problemas por meio da seleção, organização e interpretação dos dados relacionados às informações coletadas em seu enunciado, com vistas ao seu enfrentamento de uma forma crítica e autônoma, com argumentações consistentes, devendo alcançar a compreensão em todas as suas manifestações. Então, as referidas escolas, por meio de suas equipes pedagógicas, receberam a proposta da presente pesquisa como uma forma de aprofundamento do trabalho com resolução de problemas, visando à ampliação da participação do aluno nesse processo.

Dessa forma, com a anuência e a colaboração da direção e da equipe pedagógica de cada uma das instituições, fez-se um convite aos alunos, em todas as classes, fornecendo as características da pesquisa e descrevendo-a em todas as suas fases. Na oportunidade, entregou-se a cada aluno uma carta endereçada aos pais, explicando os objetivos da pesquisa, conforme o Apêndice A. Aos alunos interessados em participar da mesma, e cujos pais autorizaram a participação, foi encaminhado, em duas vias, o "Termo de Consentimento Livre e Esclarecido" (ver Apêndice B) para assinatura, ficando uma via em poder do aluno e seu responsável e a outra com a pesquisadora. Nesse termo, além das informações necessárias ao desenvolvimento da pesquisa, estavam explicitados os direitos de cada participante, ou seu responsável, de, a qualquer momento, desistir de sua participação, sem que isso lhe causasse qualquer tipo de constrangimento.

As fases para o desenvolvimento desse trabalho constaram de encontros individuais marcados com cada participante para a resolução da Prova de Conhecimentos Matemáticos, para o trabalho com o jogo "Quarto" e para a Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, aplicando-se, também, nesse último encontro a Prova das Permutações. A quantidade de encontros foi determinada por um estudo piloto de que participaram três alunos, um de cada série, chegando-se ao número de cinco, com duração aproximada de sessenta minutos cada um. Foram programados individualmente e assim distribuídos: o primeiro encontro foi destinado à aplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos. A aprendizagem do jogo e as Sessões de Intervenção ocuparam do segundo ao quarto encontro; e o último foi destinado à reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos e à aplicação da Prova das Permutações.

3.6.1 Prova de Conhecimentos Matemáticos

A prova de Conhecimentos Matemáticos teve por objetivo verificar como o participante resolveu as questões propostas, explicitando o raciocínio utilizado para chegar à solução de cada problema. As questões, retiradas do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) para os anos de 2004 e 2005, foram respondidas por escrito e individualmente. A escolha de questões provenientes do Enem foi motivada pela estrutura geral da prova, que é concebida a partir de uma matriz de competências essenciais ao desenvolvimento e preparo dos alunos, abordando os conteúdos disciplinares de uma maneira integrada e complementar, com ênfase construtivista e focalizando o período operatório-formal, como ratifica o documento elaborado por seus organizadores, a seguir transcrito:

> As competências gerais que são avaliadas no Enem estão estruturadas com base nas competências descritas nas operações formais da teoria de Piaget, tais como: a capacidade de considerar todas as possibilidades para resolver um problema; a capacidade de formular hipóteses; de combinar todas as possibilidades e separar variáveis para testar influência de diferentes fatores; o uso do raciocínio hipotético-dedutivo, da interpretação, análise, comparação e argumentação, e a generalização dessas operações a diversos conteúdos. (BRASIL, 2002a, p.16).

Além disso, reforça Macedo (2002a), na formulação das questões do Enem são mantidos, de forma explícita ou implícita, os esquemas de ação ou as operações, como observar, construir, analisar, elaborar e argumentar, necessários à sua resolução, o que possibilitou, por todas essas considerações, a inferência de que tipo de raciocínio foi utilizado pelo aluno para solucionar cada um dos cinco problemas propostos, considerando-se a sua própria resolução e as questões interpostas para cada um deles. Essa posição foi referendada por três professores de Matemática que analisaram a prova e a consideraram instrumento compatível com os objetivos propostos para a presente pesquisa.

Os problemas selecionados para a composição da Prova de Conhecimentos Matemáticos abordam as propriedades de figuras geométricas, as noções de proporção, o raciocínio combinatório, as relações entre áreas e a orientação espacial. Além disso, para uma resolução sistematizada, o participante necessitou de conhecimentos aritmético e algébrico compatíveis com seu nível escolar. O protocolo com os problemas e as perguntas que os participantes foram solicitados a responder encontram-se sistematizados no Apêndice C e organizados, a seguir, oportunidade em que, também, são apontados os conteúdos e conceitos necessários à resolução de cada problema.

Problema 1. Quatro estações distribuidoras de energia A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo eqüidistante das estações A e B e da estrada (reta) que liga as estações C e D. A nova estação deve ser localizada:

(   ) no centro do quadrado.

(   ) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 15 km dessa estrada.

(   ) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada.

(   ) no vértice de um triângulo eqüilátero de base AB, oposto a essa base.

(   ) no ponto médio da estrada que liga as estações A e B.

Conteúdos e conceitos necessários para a resolução do problema 1: A resolução desse problema implica no conhecimento das propriedades da mediatriz, da figura geométrica (quadrado) e no de eqüidistância. Solicita, também, o isolamento das variáveis necessárias (figura geométrica e eqüidistância) coordenando-as para a obtenção da solução, que é o ponto situado na mediatriz de C e D eqüidistante dos pontos A e B. Para uma resolução sistematizada, é satisfatório o conhecimento de outras relações como, por exemplo, o teorema de Pitágoras e de resolução algébrica de sistemas de equações do primeiro grau.

Questões propostas após a resolução do problema:

a) Para entender o problema você fez a leitura dele:

(   ) uma vez   (   ) duas vezes   (   ) três vezes ou mais   (   ) não entendi

b) Para encaminhar a solução, inicialmente, você fez uso de:

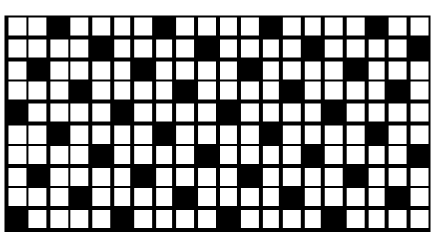
(   ) um desenho   (   ) propriedades   (   ) Pitágoras   (   ) outro (explique)

c) Selecione os conceitos matemáticos que precisou utilizar para a solução da questão:

(   ) quadrado   (   ) eqüidistância   (   ) triângulos   (   ) outros (quais)

d) Explique, com suas palavras, como fez para resolver o problema:

Problema 2. Um pátio de grandes dimensões vai ser revestido por pastilhas quadradas brancas e pretas, segundo o padrão representado abaixo, que vai ser repetido em toda a extensão do pátio. As pastilhas de cor branca custam R$ 8,00 por metro quadrado e as de cor preta, R$ 10,00. O custo por metro quadrado do revestimento será:



(   ) R$ 8,20.   (   ) R$ 8,40.   (   ) R$ 8,60.   (   ) R$ 8,80.   (   ) R$ 9,00.

Conteúdos e conceitos necessários para a resolução do problema 2: Nesse caso, verifica-se a percepção da regularidade do padrão contido no desenho (pastilhas brancas e pretas do piso) e a utilização da proporcionalidade (a cada cinco pastilhas, quatro são brancas e uma é preta) para resolvê-lo. É conveniente, pois, que o participante tenha o conhecimento do cálculo proporcional, porcentagem ou operações com frações e área.

Questões propostas após a resolução do problema:

a) Para entender o problema você fez a leitura dele:

( ) uma vez ( ) duas vezes ( ) três vezes ou mais ( ) não entendi

b) Para encaminhar a solução, inicialmente, você fez uso de:

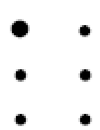
( ) do desenho mostrado ( ) do padrão do desenho ( ) outro (explique)

c) Selecione os conceitos matemáticos que precisou utilizar para a solução da questão:

( ) proporção ( ) frações ( ) área ( ) outros (quais)

d) Explique, com suas palavras, como fez para resolver o problema:

Problema 3. A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por:



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é

( ) 12. ( ) 31. ( ) 36. ( ) 63. ( ) 720.

Conteúdos e conceitos necessários para a resolução do problema 3: A análise combinatória é a questão central do problema, observando-se a realização de todas as combinações possíveis e se estas são feitas de forma sistemática ou aleatória. Nesse problema, verifica-se também, a utilização correta dos conceitos, sem que haja a preocupação com a adoção de fórmulas desconectadas de sua compreensão e de seu sentido.

Questões propostas após a resolução do problema:

a) Para entender o problema você fez a leitura dele:

( ) uma vez ( ) duas vezes ( ) três vezes ou mais ( ) não entendi

b) Para encaminhar a solução, inicialmente, você fez uso da:

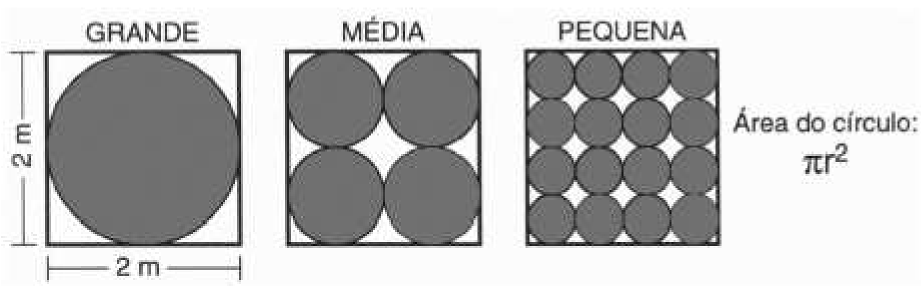
( ) contagem pela figura ( ) combinação ( ) outro (explique)

c) Selecione os conceitos matemáticos que precisou utilizar para a solução da questão:

( ) combinatória ( ) fórmula ( ) multiplicação ( ) outros (quais)

d) Explique, com suas palavras, como fez para resolver o problema:

Problema 4. Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura abaixo. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas. As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material.



A partir dessas informações, pode-se concluir que:

( ) a entidade I recebe mais material do que a entidade II.

( ) a entidade I recebe metade de material do que a entidade III.

( ) a entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III.

( ) as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.

( ) as três entidades recebem iguais quantidades de material.

Conteúdos e conceitos necessários para a resolução do problema 4: Para alcançar a solução desse problema, deve-se obter a relação entre as áreas remanescentes e a área total, por meio do cálculo de cada uma delas. É necessário, portanto, que seja feita a aplicação da fórmula da área do círculo e do quadrado, estabelecendo-se a relação entre elas, para cada uma das figuras, e não apenas pela percepção visual que, se estiver centrada no aspecto das figuras, pode induzir ao erro.

Questões propostas após a resolução do problema:

a) Para entender o problema você fez a leitura dele:

( ) uma vez ( ) duas vezes ( ) três vezes ou mais ( ) não entendi

b) Para encaminhar a solução, inicialmente, você fez uso de:

( ) do desenho ( ) conceito de área ( ) outro (explique)

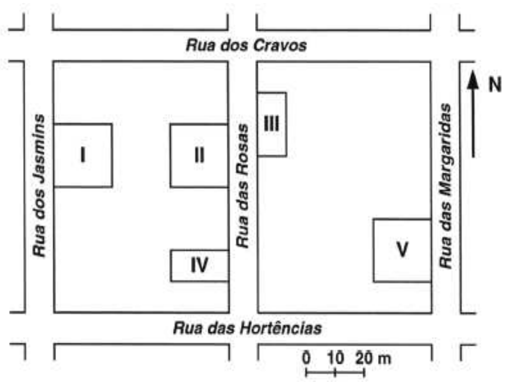
c) Selecione os conceitos matemáticos que precisou utilizar para a solução da questão:

( ) quadrado ( ) círculo ( ) área ( ) outros (quais)

d) Explique, com suas palavras, como fez para resolver o problema:

Problema 5. Um leitor encontra o seguinte anúncio entre os classificados de um jornal:

Interessado no terreno, o leitor vai ao endereço indicado e, lá chegando, observa um painel com a planta a seguir, onde estavam destacados os terrenos ainda não vendidos, numerados de I a V:



Considerando as informações do jornal, é possível afirmar que o terreno anunciado é o:

( ) I. ( ) II. ( ) III. ( ) IV. ( ) V

Conteúdos e conceitos necessários para a resolução do problema 5: Nesse problema, observam-se as relações entre a direção, através dos pontos cardeais (a seta apontando para o norte, e o sol nascendo a leste, portanto à direita) e a localização do terreno, além da área do terreno por meio de uma escala gráfica. A combinação de todas as possibilidades e a separação de variáveis são necessárias para testar a influência dos diferentes fatores que possam se sobrepor ao aspecto figurativo e, com isso, evitar centrar-se em um dos atributos do desenho.

Questões propostas após a resolução do problema:

a) Para entender o problema você fez a leitura dele:
(   ) uma vez   (   ) duas vezes   (   ) três vezes ou mais   (   ) não entendi
b) Para encaminhar a solução, inicialmente, você fez uso de:
(   ) do desenho   (   ) pontos cardeais   (   )escala   (   ) outro (explique)
c) Selecione os conceitos matemáticos que precisou utilizar para a solução da questão:
(   ) retângulo   (   ) escala   (   ) área   (   ) outros (quais)
d) Explique, com suas palavras, como fez para resolver o problema:

Após a etapa de resolução da Prova de Conhecimentos Matemáticos, apresentou-se aos participantes o jogo "Quarto", em cujas partidas, após a aprendizagem do jogo, foram propostas questões com o objetivo de apresentar orientações para o encaminhamento de procedimentos e atitudes matemáticas que pudessem ser utilizadas em outros contextos, como por exemplo, a resolução de problemas.

3.6.2 Jogo "Quarto"

As atividades com o jogo "Quarto" foram organizadas da seguinte forma:
- aprendizagem do jogo;
- prática do jogo;
- análise das estratégias utilizadas pelos jogadores por meio da observação direta da pesquisadora e questões propostas aos participantes, considerando as partidas disputadas por meio computacional;
- sessões de intervenção, utilizando-se o jogo como meio de análise, tendo-se em vista a possibilidade de transferência para outros conteúdos da forma empregada para atingir o objetivo do jogo.

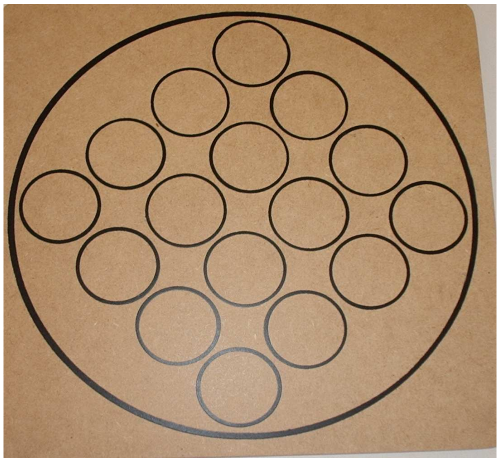


Figura 01 – Tabuleiro do jogo "Quarto"

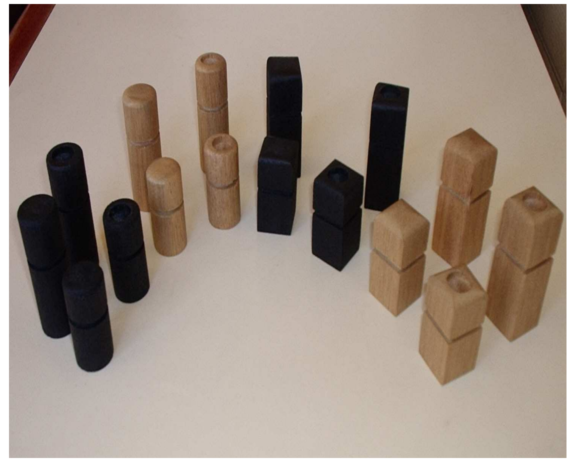


Figura 02 – Peças do jogo "Quarto"

O jogo foi apresentado aos participantes através de seu tabuleiro como mostra a figura 1 e das 16 peças (figura 2) que o compõem. As peças diferem por seus atributos que são: cor, tamanho, forma, com e sem furo. Nessa etapa, cada participante jogou com a pesquisadora para aprender as regras do jogo na modalidade escolhida e, a seguir, descritas:

3.6.2.1 Regras para o jogo "Quarto"

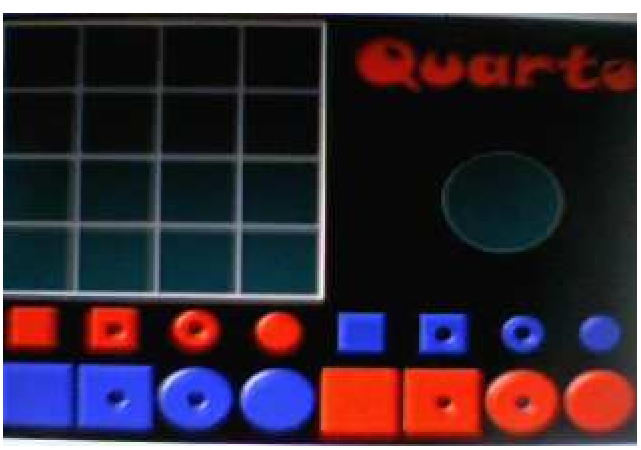
O primeiro jogador escolhe uma das dezesseis peças e a coloca no tabuleiro. Após, entrega ao adversário outra peça, à sua escolha, para que a coloque em uma das casas; o segundo jogador coloca a peça em uma das casas e escolhe outra peça dentre as restantes e também a entrega para que o primeiro jogador a coloque em uma das casas, ainda não ocupadas. O jogo prosseguirá até que um dos jogadores entregue uma peça ao outro, e este a coloque em uma casa, formando um alinhamento, que significa colocar na horizontal, vertical ou na diagonal quatro peças que tenham um atributo em comum.

O vencedor será o jogador que entregou a peça e não o que a colocou para formar o alinhamento. Para ser declarado vencedor, ele falará a palavra "Quarto", demonstrando, assim, que percebeu o alinhamento realizado. Caso o jogador não o perceba, o jogo continuará até que seja feito um novo alinhamento, ficando excluída essa possibilidade quando é utilizado o meio computacional para a realização do jogo. Não haverá vencedor se todas as peças forem colocadas e nenhum alinhamento tiver sido feito.

3.6.2.2 As sessões de Intervenção com o Jogo “Quarto”

As regras desse jogo podem conter variações, como a apresentada por Macedo, Petty e Passos (2000), que considera o vencedor quem conseguir construir, colocando a peça entregue pelo adversário, um alinhamento de quatro peças com um atributo em comum e falar a palavra “Quarto”. A diferença que marca as duas propostas está na constituição da negação que, na modalidade escolhida para o desenvolvimento da presente pesquisa, deve ser sempre lembrada, uma vez que cada jogador estará sempre jogando pelo seu adversário e, portanto, evitando colocar a peça que promova um alinhamento com um atributo em comum, pois estará, assim, dando a ele a vitória do jogo.

Após a aprendizagem das regras, para a prática do jogo, o participante teve como adversário o computador, através do “*software Zillions of Games*”, que contém o jogo “Quarto”, como se pode ver na figura 3, utilizando-se as mesmas regras já apresentadas. Na forma virtual, adotou-se, para a descrição das jogadas, a identificação numérica das “casas” na horizontal e a literal para as “casas” na vertical, como mostra o detalhe da figura. Escolheu-se o meio computacional para as sessões de intervenção com o jogo para que a pesquisadora, na qualidade de observadora neutra, pudesse, em determinados momentos das partidas, solicitar do participante a análise de suas jogadas e a antecipação das próximas jogadas dele próprio e do computador, seu adversário, tendo em vista que uma análise detalhada das peças e das casas disponíveis pode ser decisiva para vencer a partida.



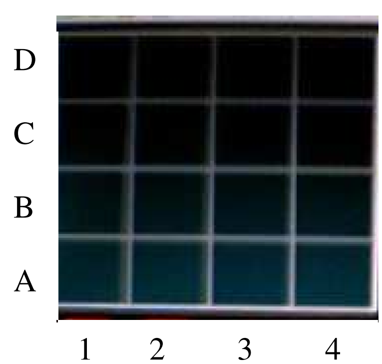


Figura 03 – Tabuleiro e peças do jogo “Quarto”– através do *software Zillions of Games*

Nesse sentido, observar se o participante utilizou estratégias para colocar suas peças em jogo e, se as utilizou, como foi feita a coordenação do ataque com a defesa, se foi capaz de antecipar em que situação poderia acontecer um alinhamento, se levou em consideração todos os atributos em jogo e, ainda, se teve a percepção de todas as casas do tabuleiro, em conjunto e de cada uma isoladamente, pode dar ensejo ao conhecimento das operações intelectuais presentes nas jogadas. Da mesma forma, as questões interpostas durante o jogo, sobre a conduta adotada pelos participantes tiveram a intenção de permitir a explicitação das inferências realizadas e para verificar se houve consciência dos meios que os levaram a atingir, ou não, o objetivo do jogo. Os questionamentos foram apropriados para que, nas sessões de intervenção realizadas durante as partidas do jogo "Quarto", os participantes fossem alertados sobre a possibilidade de transferência para outros contextos, como, por exemplo, a resolução de problemas.

Esses aspectos e respectivas questões foram elaborados para o presente trabalho, conforme segue:

1. Utilização de estratégia para colocar uma peça em jogo:

Em primeiro lugar, observou-se se o jogador utilizou ou não estratégias para jogar.

Caso se tenha verificado a presença de uma estratégia, foram observados dois aspectos: se o jogador analisou qual a melhor peça para ser entregue ao adversário e se, ao colocar a peça que lhe foi entregue, colocou-a visando impedir que o outro jogador fizesse o alinhamento.

Questões pertinentes à utilização de estratégia:

a) o que você levou em conta para escolher essa peça?

b) por que escolheu essa casa para colocá-la?

c) você percebeu qual foi a estratégia de seu adversário?

d) você acredita que, quanto mais detalhada for sua análise, maior a sua chance de vencer seu adversário?

e) esse procedimento de análise pode ser utilizado em outras situações, por exemplo, para resolver problemas de conteúdo matemático?

2. Capacidade para antecipar uma situação em que se dará um alinhamento:

Nesse aspecto, observou-se se o jogador faz uma antecipação simples, isto é, se apenas consegue antever a próxima jogada ou se faz antecipações para jogadas futuras.

Questões propostas:

a) você pensou em algum alinhamento quando colocou essa peça?

b) quais os possíveis alinhamentos que poderão ser feitos após você ter colocado essa peça?

c) você analisou os atributos da peça escolhida com a linha, a coluna e a diagonal da casa em que ela foi colocada?

d) você percebeu qual foi o possível alinhamento pretendido pelo seu adversário?

e) como toda essa análise pode ser útil para a resolução de outros problemas?

3. Capacidade para distinguir cada atributo isoladamente e, ao mesmo tempo, analisar todos os atributos em conjunto:

Observou-se se o participante reconhece cada atributo isoladamente e também em conjunto, ao colocá-los em jogo para a promoção de um alinhamento ou para evitar que o adversário o faça.

Questões propostas:

a) o que você observa para colocar uma peça em jogo?

b) essa peça colocada por seu adversário poderia resultar em um alinhamento?

c) você acha importante observar o jogo de seu adversário para fazer um alinhamento?

d) como você pode evitar que seu adversário faça um alinhamento?

e) em um problema de conteúdo matemático, como você escolhe os conceitos de que dispõe para resolvê-lo?

4. Desenvolvimento de estratégias pessoais, a partir da tomada de consciência dos procedimentos utilizados em partidas anteriores:

O desenvolvimento de estratégias pessoais é um importante recurso para a articulação e transferência de conceitos, procurou-se observar se foi possível, ao participante, desenvolver novas estratégias, baseando-se em seus próprios erros, cometidos em partidas anteriores, assim como aprender novas estratégias com seu adversário, com a intenção de construir instrumentos mais eficientes para atingir o objetivo do jogo. Na seqüência as perguntas que, ao final das partidas, foram feitas a cada um dos participantes.

a) você acredita que está jogando melhor agora em relação às primeiras partidas disputadas?

b) o que foi mais instrutivo para você no decorrer das partidas?

c) você é capaz de identificar quais foram as boas jogadas e quais as ruins? Explique sua resposta.
d) você foi capaz de perceber os erros que cometeu durante as partidas?
e) os erros cometidos foram úteis para seu aprendizado?
f) como utilizar o que você aprendeu com as estratégias para jogar na resolução de problemas escolares?

A observação direta e a interposição das questões durante os três encontros destinados às sessões de intervenção com o jogo "Quarto" tiveram a intenção de subsidiar a análise realizada pelo participante, assim como possibilitar a ele a revisão de seus procedimentos de leitura e interpretação dos problemas de conhecimentos matemáticos, cuja proposta de reaplicação seguiu-se a essa fase da pesquisa.

3.6.3 Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos

Solicitou-se aos participantes que resolvessem novamente a Prova de Conhecimentos Matemáticos com o objetivo de verificar se houve mudança na forma como foram resolvidos anteriormente, isto é, se realizaram a transferência entre o que vivenciaram durante as partidas e o que seria necessário para atender a proposta do problema. É conveniente ressaltar que, se não houver compreensão, um mesmo problema pode ser reapresentado e, mesmo assim, continuar sendo resolvido de forma incorreta, tendo em vista que um problema não é um exercício que o aluno aplica de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Assim, pode-se dizer que só há problema se o aluno interpretar o enunciado da questão, estruturando o que está sendo solicitado, de forma que faça sentido em um campo articulado de conceitos.

Na mesma oportunidade em que refizeram a prova de conhecimentos matemáticos, solicitou-se ao participante que fizesse a Prova das Permutações, conforme detalhado, a seguir.

3.6.4 Prova das Permutações

Cada participante foi convidado a realizar a permutação de 2, 3, 4 e 5 elementos sem esquecer de nenhuma permutação possível e, após, generalizar o que fizeram para "n" elementos. O objetivo da realização dessa prova foi o de verificar se o participante compreende que permutar é dispor de forma específica um conjunto de objetos ou elementos, de tal forma que não haja repetições, e assim, se possa sempre prever o número total de permutações em um conjunto com um número qualquer de elementos.

A pesquisa das operações que envolvem a permutação foi realizada por Piaget e Inhelder e descrita na obra "A gênese da idéia de acaso na criança" (La gênese de l'idée de hasard chez l'enfant), publicado em 1951, conforme relata Macedo (1983). O protocolo (Anexo A) utilizado para a aplicação da prova foi descrito por Longeot (1974) para a aplicação da EDPL (Échelle de Developpement de la Pensée Logique), organizando situações que tinham por objetivo verificar como o sujeito realiza as permutações de 2, 3 e 4 elementos e, ainda, como generalizar essas permutações para 5, 6, 7 ou "n" elementos, sem a necessidade de recorrer à fórmula matemática (n!)[3] para isso.

A prova consistiu na realização de três questões, divididas, cada uma delas, em três etapas: predição, execução e verificação. A preparação para a realização da prova consiste em o experimentador explicar o que significa permutar dois elementos de todas as maneiras possíveis, utilizando, para tanto, duas fichas que representam dois alunos, um loiro (ficha amarela) e um ruivo (ficha vermelha) sentados em um banco, com a proposta: - "indique todas as maneiras que essas duas crianças possam ficar sentadas uma ao lado da outra". O experimentador deve corrigir todas as formas incorretas que o participante apresentar, e somente com a certeza do entendimento do significado do que é permutar é que as verificações se iniciam.

Primeira Questão

- <u>Predição</u>: O experimentador pede ao sujeito para predizer de quantas maneiras podem se sentar três alunos representados pelas fichas amarela, vermelha e verde e explicar como obteve o número indicado.
- <u>Execução</u>: Para qualquer resposta predita pelo participante, o experimentador lhe pede para realizar com as fichas todas as permutações possíveis. Os arranjos são mantidos e o participante utiliza quantas fichas necessitar. Caso não consiga realizar as seis permutações, o experimentador pode lembrá-lo que ainda há outras possibilidades. Além disso, se as permutações não tiverem

[3] $n! = n.(n - 1).(n - 2).(n - 3)......3.2.1$

sido feitas de forma sistemática, o experimentador pode chamar a atenção para a melhor maneira de representá-las.

Segunda Questão

- Predição: O experimentador diz ao participante: - "Agora são quatro alunos representados pelas cores amarelo, vermelho, azul e verde. De quantas maneiras diferentes podem sentar-se?" "Como você descobriu esse número?"
- Execução: Como na verificação da primeira questão, o experimentador pede ao participante que utilize as fichas disponíveis para realizar as combinações. Da mesma forma, pode sugerir a existência de outras possibilidades, caso não as tenha esgotado, e mostrar como as permutações podem ser realizadas de forma sistemática.

Apenas ao participante que efetuou as 24 combinações, mesmo sem fazê-lo de forma sistemática, será apresentada a terceira questão. Aos que não conseguiram chegar ao número correto, mesmo com o auxílio do experimentador, a prova é dada por encerrada.

Terceira Questão

- Predição: O experimentador coloca sobre a mesa cinco fichas: a amarela, a vermelha, a verde, a azul e a branca e fala: - "De quantos modos pode-se permutá-las?". Para qualquer resposta, pede-se para explicar como obteve o número indicado, buscando obter do participante qual foi o raciocínio que empregou. Se ele não for capaz de expressar o raciocínio aplicado, a prova é encerrada. Caso contrário, pede-se o prognóstico para seis ou sete cores, com a intenção de que a regra seja generalizada.

Solicitou-se a realização dessa prova, tendo-se em vista o embasamento das possíveis conclusões sobre o tipo de pensamento adotado pelo participante ao realizar a prova de conhecimentos matemáticos e as observações decorrentes da prática como jogo "Quarto", uma vez que permutar significa mudar a ordem de uma dada coleção e determinar todas as permutações é descobrir quantas vezes cada objeto poderá ocupar a primeira fileira, a segunda e assim por diante. Então, para que o participante seja capaz de conceber todas essas possibilidades, é necessário que ele reúna em um só sistema de pensamento vários sistemas de diferentes movimentos, o que, segundo Macedo (1983, p. 45), significa que "[...] uma permutação implica em uma ordenação de ordenações, isto é, de uma operação de segunda potência (porque aplicada a uma outra operação), o que supõe um pensamento formal ou hipotético-dedutivo".

Os dados recolhidos nos cinco encontros com cada participante foram analisados segundo os critérios expostos, conforme segue.

3.7 Procedimentos de análises dos dados

Os dados recolhidos na resolução da Prova de Conhecimentos Matemáticos, nas partidas do Jogo "Quarto", na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos e na Prova das Permutações foram analisados de acordo com os objetivos da pesquisa, que procurou investigar se a promoção de sessões de intervenção com a utilização do jogo de regras "Quarto" pode favorecer as atividades de resolução de problemas de conteúdo matemático.

Para estabelecer essas relações, considerou-se como o participante resolveu os problemas que compunham a Prova de Conhecimentos Matemáticos, observando-se o encaminhamento de seu raciocínio, por meio da própria resolução e das questões propostas, nas condutas adotadas por ele no decorrer das Sessões de Intervenção, promovidas pelas partidas do jogo "Quarto", na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, observando-se as modificações que possam ter ocorrido em seu processo de resolução, tendo em vista o que vivenciaram nas sessões de intervenção já mencionadas, e na Prova das Permutações, cujo objetivo era o de observar se o participante possuía o conceito de permutação.

A Prova das Permutações foi estudada por Piaget & Inhelder (1951) (*apud*. Macedo 1983) e, com base nesses estudos, Longeot (1974) criou um protocolo, apresentado no anexo B, para avaliação de seus resultados. Assim, a presente pesquisa procurou similaridade nesse modelo para a composição de instrumentos que pudessem avaliar os resultados encontrados na aplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos e nas questões abordadas nas Sessões de Intervenção com o jogo "Quarto". Dessa forma, as respostas dos participantes foram classificadas e a elas foram atribuídos valores que indicavam as condutas adotadas por eles, variando de acordo com um escore de mesma amplitude que aquele utilizado na Prova das Permutações, como será detalhado, a seguir.

3.7.1 Prova de Conhecimentos Matemáticos

A prova envolveu conhecimentos de análise combinatória, cálculo de proporções e geometria, além da aritmética e da álgebra necessárias para a formalização das respostas. Para a análise das soluções apresentadas pelos participantes, foram considerados o raciocínio, a propriedade dos conceitos selecionados e a sistematização das soluções, conforme Apêndice D. Para cada problema, adotou-se uma pontuação, que variou de zero a seis pontos, de acordo com a resolução apresentada, e as respostas que justificavam o raciocínio elaborado pelo participante. Dessa maneira, ao encaminhamento de forma totalmente incorreta não se creditou nenhum ponto e à resolução correta e detalhada de forma sistemática foram adicionados seis pontos. Para as situações intermediárias, os pontos foram consignados de forma que cada procedimento adotado pelo participante tivesse um determinado valor, como sintetizam os quadros 02 a 06, a seguir e, também, organizados no Apêndice E:

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Pontuação</th><th colspan="2">Procedimentos de resolução</th></tr>
<tr><td rowspan="6">1</td><td>0,0</td><td colspan="2">O participante não resolve o problema, ou a sua resolução se apresenta totalmente incorreta.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Pontuações intermediárias</td><td>1,0</td><td>Representa graficamente o que é pedido no enunciado do problema.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Encontra a solução do problema, realizando tentativas a partir das alternativas apresentadas.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Justifica como resolver o problema de forma adequada, por meio das questões propostas, mesmo sem detalhar a solução algébrica do problema.</td></tr>
<tr><td>3,0</td><td>Resolve o problema de forma adequada, não chegando à sua solução por pequenos erros de cálculo.</td></tr>
<tr><td>6,0</td><td colspan="2">Encontra a solução do problema de forma sistematizada, justificando seu raciocínio de forma correta e completa.</td></tr>
</table>

Quadro 02: Procedimentos de resolução do problema 1 da Prova de Conhecimentos Matemáticos e sua pontuação.

No quadro 02, os pontos consignados às pontuações intermediárias do problema 1 privilegiam a representação, a criatividade e o raciocínio, podendo ser creditados de forma isolada ou, quando admitirem, somados, mas sem atingirem a totalidade dos pontos. Por exemplo, se um aluno fizer a representação gráfica e justificar, de forma adequada, por meio das questões propostas, sem resolver o problema efetivamente, terá totalizado dois pontos.

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Pontuação</th><th colspan="2">Procedimentos de resolução</th></tr>
<tr><td rowspan="6">2</td><td>0,0</td><td colspan="2">O participante não resolve o problema, ou a sua resolução se apresenta totalmente incorreta.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Pontuações intermediárias</td><td>1,0</td><td>Os registros apresentados apontam para a percepção da regularidade do esquema apresentado no problema</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Encaminha a solução do problema, sem justificar adequadamente como o fez.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Justifica como resolver o problema de forma adequada, por meio das questões propostas, mesmo sem efetivar toda a sua resolução.</td></tr>
<tr><td>3,0</td><td>Resolve o problema de forma adequada, não chegando à sua solução por pequenos erros de cálculo.</td></tr>
<tr><td>6,0</td><td colspan="2">Encontra a solução do problema de forma sistematizada, justificando seu raciocínio de forma correta e completa.</td></tr>
</table>

Quadro 03: Procedimentos de resolução do problema 2 da Prova de Conhecimentos Matemáticos e sua pontuação.

No problema 2, apenas demonstrar que percebeu a existência da regularidade presente no esquema apresentado em seu enunciado é importante, e portanto, essa descoberta já vale ao participante um ponto. Como no problema anterior, os pontos podem ser apontados isoladamente ou pela composição parcial dos itens, conforme a resolução apresentada pelo aluno.

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Pontuação</th><th colspan="2">Procedimentos de resolução</th></tr>
<tr><td rowspan="5">3</td><td>0,0</td><td colspan="2">O participante não resolve o problema, ou a sua resolução se apresenta totalmente incorreta.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Pontuações intermediárias</td><td>1,0</td><td>Utiliza um raciocínio multiplicativo para a solução do problema, mesmo obtendo uma resposta incorreta.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Não faz as combinações de forma sistemática, ou utiliza outro princípio e por essa razão não encontra as 63 possibilidades.</td></tr>
<tr><td>2,0</td><td>Justifica como resolver o problema de forma adequada, por meio das questões propostas, contudo, não finalizando a sua resolução.</td></tr>
<tr><td>6,0</td><td colspan="2">Encontra a solução do problema de forma sistematizada, justificando seu raciocínio de forma correta e completa.</td></tr>
</table>

Quadro 04: Procedimentos de resolução do problema 2 da Prova de Conhecimentos Matemáticos e sua pontuação.

O problema 3 não supõe uma resolução com pequenos erros de cálculo e, por isso, as pontuações intermediárias não contemplam essa possibilidade. Entretanto, por exemplo, o participante pode obter um ponto se a sua resolução contiver indícios de que utilizou um raciocínio multiplicativo para obter a resposta, podendo acrescentar, a esse ponto, outro por realizar as combinações, mesmo que não sejam de forma sistemática. O encaminhamento da solução e as justificativas para a forma de resolução escolhida conferem ao aluno, dois pontos.

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Pontuação</th><th colspan="2">Procedimentos de resolução</th></tr>
<tr><td rowspan="5">4</td><td>0,0</td><td colspan="2">O participante não resolve o problema, ou a sua resolução se apresenta totalmente incorreta.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Pontuações intermediárias</td><td>1,0</td><td>Compreende a necessidade de comparar a área remanescente das figuras por meio do cálculo das áreas das figuras representadas, sem apoiar-se no aspecto das figuras.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Justifica como resolver o problema de forma adequada, por meio das questões propostas, mesmo sem finalizar sua resolução.</td></tr>
<tr><td>3,0</td><td>Encaminha o problema de forma adequada, porém, comete erros de cálculo em sua resolução.</td></tr>
<tr><td>6,0</td><td colspan="2">Encontra a solução do problema de forma sistematizada, justificando seu raciocínio de forma correta e completa.</td></tr>
</table>

Quadro 05: Procedimentos de resolução do problema 4 da Prova de Conhecimentos Matemáticos e sua pontuação.

No problema 4, devem ser realizadas as operações para determinar as áreas remanescentes das figuras, sem levar em consideração o aspecto visual que poderia levar o participante a errar a resposta. Por essa razão, credita-se um ponto ao aluno que compreendeu essa necessidade. Receberá um ponto o participante que justificar corretamente, por meio das questões propostas, mesmo sem finalizar a resolução do problema, ou ainda, poderá obter dois pontos por realizar as duas possibilidades apontadas. Os erros de cálculo podem ser minimizados quando todo o encaminhamento do problema estiver correto, e, para esse caso, são computados três pontos. Para as situações de erro ou acerto total são creditados, respectivamente, zero ou seis pontos.

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Pontuação</th><th colspan="2">Procedimentos de resolução</th></tr>
<tr><td rowspan="6">5</td><td>0,0</td><td colspan="2">O participante não resolve o problema, ou a sua resolução se apresenta totalmente incorreta.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Pontuações intermediárias</td><td>1,0</td><td>Consegue analisar separadamente as variáveis apresentadas no problema. (orientação espacial e escala)</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Justifica como resolver o problema de forma adequada, por meio das questões propostas, sem resolvê-lo efetivamente.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Encaminha o problema de forma adequada, não chegando à sua solução por não observar corretamente a escala para a determinação da área.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Encaminha o problema de forma adequada, não chegando à sua solução por erro de orientação espacial.</td></tr>
<tr><td>6,0</td><td colspan="2">Encontra a solução do problema de forma sistematizada, justificando seu raciocínio de forma correta e completa.</td></tr>
</table>

Quadro 06: Procedimentos de resolução do problema 5 da Prova de Conhecimentos Matemáticos e sua pontuação.

Nesse problema, o participante pode, mesmo separando adequadamente as duas variáveis que compunham o seu enunciado, errar o problema por se enganar no tratamento de alguma delas, o que está contemplado nas pontuações intermediárias. Como nos problemas anteriores, o participante pode obter pontos isoladamente em cada situação apontada, ou pela somatória parcial das situações previstas, e que puderam ser observadas na resolução apresentada por ele.

A pontuação de cada um dos problemas, conforme já mencionado, variou de zero a seis pontos, podendo, portanto, cada participante obter, no máximo, trinta pontos. Para efeito de análise, esse total foi dividido por cinco, gerando três diferentes tipos de condutas, classificadas segundo o escore obtido, este considerado com aproximação de décimos. Dessa forma, se o resultado da divisão ficou compreendido entre zero e dois, o aluno foi incluído na conduta tipo I; entre dois pontos e um décimo até quatro, na conduta tipo II e, para valores entre quatro pontos e um décimo até seis, a conduta considerada foi a do tipo III. Na análise da resolução dos problemas, o que se buscou foi identificar o tipo de raciocínio empregado pelo participante, levando-se em conta que, para a solução dos problemas solicitados, seria necessária a formulação de hipóteses, a separação, a análise e a comparação de variáveis, assim como constatar que uma mesma forma pode ser aplicada a diferentes conteúdos.

Conduta Tipo I: Apresenta escore de zero a dois pontos É o caso do participante que, ao esboçar uma solução para algum dos problemas, pode não conseguir levá-la até o final por dificuldades de compreensão, desatenção ou desconhecimento do conceito matemático a ser aplicado. Nesse caso, o raciocínio empregado pelo aluno apresenta indícios de que ele necessita apoiar-se no real, ou que não estabelece as relações necessárias para o desenvolvimento da solução, ou ainda, que não detém conceitos matemáticos suficientes para a resolução dos problemas, e, por essas razões, não alcança a generalidade necessária para a aplicação de diferentes conceitos aos diversos conteúdos propostos nos problemas. Assim, considerando-se o nível de escolaridade do aluno (Ensino Médio), pode-se supor que seu pensamento se encontra ainda preso a um conjunto restrito de transformações virtuais, que impedem a realização com êxito dos problemas apresentados, podendo levá-lo a não atingir a consciência dos meios empregados para a sua resolução.

Conduta Tipo II: O participante apresenta escores que podem variar de dois pontos e um décimo a quatro pontos. A forma de resolução desse participante encaminha-se para uma sistematização, porém, por vezes, não considera caminhos que poderiam levá-lo à resolução correta da questão. O raciocínio utilizado nas questões resolvidas de forma correta, identificado a partir da própria resolução ou das justificativas apresentadas, mostra que o aluno estabelece relações que lhe permitem ser capaz de raciocinar, segundo as hipóteses por ele levantadas, mas sem atingir ainda a regularidade necessária para admitir a coordenação de todas as variáveis postas em jogo.

Conduta Tipo III: O participante faz escore total de quatro pontos e um décimo a seis pontos. Seu raciocínio orienta-se pela sistematização dos conceitos e organização dos procedimentos necessários à solução das questões, caracteriza-se pela mobilidade operatória, pela formulação de hipóteses e pela generalização de conceitos.

Na etapa seguinte, foram analisados os dados recolhidos pelas questões propostas nas partidas de "Quarto" disputadas entre o participante e o computador, tendo a pesquisadora adotado uma posição de neutralidade em algumas das partidas. Já, em outras, promoveu Sessões de Intervenção, por meio de perguntas que visavam à reorganização dos procedimentos no jogo, com a finalidade de ganhar a partida, e verificar a possibilidade de adoção desses critérios para aplicação em outros contextos, como por exemplo, a resolução de problemas.

3.7.2 Partidas de Quarto

O "Quarto", como é um jogo de regras, pode ser considerado um procedimento que desencadeia no participante uma atividade que lhe permite alcançar gradativamente a generalidade dos conceitos implicados, através de uma atuação a mais consciente e intencional possível, possibilitando a análise, a reflexão e a comparação de pontos de vista, além de estimular a autoconfiança e a perseverança. Por essas considerações, as sessões de intervenção propostas através desse jogo tiveram por objetivo solicitar do participante a análise, por meio de questões que requereram dele a explicação para a escolha de suas jogadas, e também a verificação de estar ele apto para antecipar as possibilidades de alinhamento, quer sejam os seus ou os do outro jogador. A intenção das referidas sessões de intervenção foi a de tornar possível ao participante adotar, frente a um problema, a mesma atitude de análise, revisão dos planos, diversificação de estratégias e perseverança, atitudes que no jogo se tornam mais fáceis de serem adotadas.

De acordo com as estratégias utilizadas, pela capacidade de antecipar futuros alinhamentos, pela possibilidade de reconhecer os atributos e pelo desenvolvimento de estratégias pessoais, cada participante pode aferir até vinte e quatro pontos que, divididos por quatro, deram origem a três tipos de escores. As situações que subsidiaram esse estudo foram elaboradas para o presente trabalho, como já mencionado, e se encontram descritas, a seguir.

Utilização de estratégia para colocar uma peça em jogo:

O jogo se inicia quando o primeiro jogador coloca uma peça no tabuleiro e completa a jogada, entregando outra peça para o segundo jogador. A partir desse instante, e na colocação das peças subseqüentes, torna-se possível notar se o jogador dispõe, ou não, de uma estratégia, observando-se quais peças ele escolhe para colocar em jogo, se escolhe a casa em que vai colocar a peça que lhe é entregue pelo adversário, se escolhe os atributos e se antevê a possibilidade de um alinhamento. As questões propostas para auxiliar essa investigação são:

a) Por que você escolheu essa peça para colocar em jogo?

b) Você percebeu qual foi a estratégia utilizada por seu adversário?

c) Analisando a jogada que seu adversário fez, o que você acha que ele espera que você faça?

d) Que peças você não pode utilizar na próxima jogada?

e) As estratégias que você utilizou com a intenção de vencer o jogo podem ser aplicadas em outras situações? Quais?

Por meio da observação direta e das respostas às questões acima a estratégia utilizada pelo jogador foi pontuada de zero a seis pontos, conforme segue no Quadro 07:

<table>
<tr><td rowspan="6">Utilização de estratégia para colocar uma peça em jogo</td><td>Pontuação</td><td colspan="2">Procedimentos adotados</td></tr>
<tr><td>0,0</td><td colspan="2">Não utiliza nenhuma estratégia para colocar as peças em jogo</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Pontuação intermediária</td><td>1,0</td><td>Utiliza uma estratégia simples, prevendo apenas o ataque, ou apenas a defesa.</td></tr>
<tr><td>2,0</td><td>Utiliza uma estratégia que combina o ataque com a defesa, porém, não prevendo todas as possibilidades por estar centrado em um determinado atributo.</td></tr>
<tr><td>2,0</td><td>Realiza jogadas que combinam o ataque com a defesa, mas oscila na aplicação dessa estratégia em algumas partidas.</td></tr>
<tr><td>6,0</td><td colspan="2">Utiliza uma estratégia que combina o ataque com a defesa realizando a antecipação dos movimentos possíveis para si mesmo e para o adversário.</td></tr>
</table>

Quadro 07: Procedimentos nas Sessões de Intervenção em relação às estratégias adotadas e sua pontuação.

No caso de o jogador não utilizar nenhuma estratégia para colocar as peças ou para entregá-las ao adversário para que as coloque em jogo, não lhe é creditado nenhum ponto. Essa situação pode ocorrer pela falta de coordenação do espaço ou dos atributos das peças, ou ainda, pela ausência de planejamento ou observação. Nesse caso, o jogador também não é capaz de dar explicações sobre os procedimentos utilizados para efetuar suas jogadas.

Na pontuação intermediária, se o participante utilizar estratégias centradas na coordenação do espaço, ou nos atributos das peças sem coordenar esses dois aspectos, obterá um ponto. Nesse tipo de conduta, o participante analisa, a seu ver, qual é a melhor peça para ser entregue ao adversário ou procura colocar em jogo a peça que evite a formação de um alinhamento que resulte na vitória do adversário. Faz isso, porém, sem coordenar essas duas ações. Se coordenar o ataque com a defesa, mesmo sem prever todas as possibilidades, por estar centrado em algum ponto do tabuleiro ou em algum dos atributos, soma dois pontos. Se, nas partidas disputadas, o jogador analisar as peças procurando coordenar o ataque com a defesa demonstrando ter uma visão conjunta do tabuleiro, mas oscilando em alguns momentos a aplicação dessa estratégia, o participante obterá dois pontos. Obtém seis pontos o jogador que, em cada jogada, analisar qual a melhor peça para ser entregue ao adversário e, ao colocar a peça que lhe é entregue, coloca-a visando impedir que o outro jogador faça o alinhamento, além de antecipar futuras jogadas, numa visão conjunta com todo o tabuleiro. Nesse caso, o participante coordena de forma eficiente os aspectos referentes ao espaço e aos atributos das peças utilizando estratégias eficientes, além de ser capaz de explicá-las de forma coerente.

Capacidade para antecipar uma situação em que se dará um alinhamento:

No decorrer do jogo, sucedem-se as situações de quase alinhamento, isto é, três peças com o mesmo atributo em uma linha, coluna ou diagonal. Nesse momento do jogo é que se torna possível perceber se o jogador faz antecipações, ou seja, se for a sua vez de colocar a peça que o adversário lhe entregou, ele o faz, evitando o alinhamento com as demais, ou, se for ele a entregar a peça ao adversário, escolherá aquela necessária ao alinhamento, o que lhe dará a vitória. As seguintes questões auxiliam a constatar se o jogador antecipa uma situação de alinhamento;

a) Você pensou em algum alinhamento ao colocar essa peça? Qual?

b) Onde poderá ocorrer o “Quarto”? Com qual atributo?

c) Que possibilidades de jogo você tem para colocar a peça dada pelo seu adversário, sem que ele faça o “Quarto”?

d) Nesta linha (ou coluna, ou diagonal) ainda é possível fazer o “Quarto”?

e) Como toda essa análise pode ser útil para a resolução de outros problemas?

De acordo com a observação e as respostas proceder-se-á, para cada participante, à pontuação segundo os critérios, como mostra o Quadro 08:

<table>
<tr><td rowspan="6">Capacidade para antecipar uma situação em que se dará um alinhamento</td><th>Pontuação</th><th colspan="2">Procedimentos adotados</th></tr>
<tr><td>0,0</td><td colspan="2">Não consegue antecipar nenhuma situação em que se dará um alinhamento.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Pontuação intermediária</td><td>1,0</td><td>Percebe o alinhamento do adversário na eminência de sua formação.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Realiza uma antecipação simples de um possível alinhamento próprio, ou do adversário.</td></tr>
<tr><td>3,0</td><td>O participante oscila na capacidade de antecipar os possíveis alinhamentos, mas, quando o faz, consegue antecipá-lo de forma completa.</td></tr>
<tr><td>6,0</td><td colspan="2">Nesse caso a antecipação é completa, e o participante consegue planejar, antecipando suas jogadas e as de seu adversário, com a finalidade de vencer a partida.</td></tr>
</table>

Quadro 08: Procedimentos nas Sessões de Intervenção em relação à capacidade de antecipação e sua pontuação.

Não pontua o participante que não conseguir antecipar nenhum alinhamento. Para as pontuações intermediarias, faz um ponto o participante que perceber o alinhamento na eminência de sua formação, quer seja o seu, ou o de seu adversário. Também recebe um ponto o participante que faz uma antecipação simples, isto é, de uma só jogada. Caso a antecipação seja completa, ao participante serão creditados seis pontos e, em caso de oscilar nesse procedimento, ele obtém três pontos.

Capacidade para distinguir cada atributo isoladamente e, ao mesmo tempo, analisar todos os atributos em conjunto:

São muitos os atributos em jogo: cor, tamanho, forma e com ou sem furo e, além disso, as suas combinações em linhas, colunas ou diagonais. A análise dos atributos, isoladamente e em conjunto, pode ser uma tarefa complexa, e as questões abaixo visam verificar como o participante apreende tudo isso.

a) Em uma linha (coluna ou diagonal) com duas peças, perguntar: quais são as peças que permitirão, naquele alinhamento, fazer o “Quarto”?

b) Quais os atributos que permitirão a você fazer um “Quarto” na próxima jogada? Em que “casas” essas peças devem ser colocadas?

c) Observando a peça que seu adversário lhe entregou, para não perder o jogo, em qual “casa” você não poderá colocá-la? Com qual atributo ele fará o “Quarto”?

d) Em um problema escolar, como você escolhe os conceitos de que dispõe para resolvê-lo?

A análise dessas situações permite verificar como o participante distingue os atributos, atribuindo as seguintes pontuações constantes do Quadro 09:

<table>
<tr><td rowspan="6">Capacidade na distinção dos atributos das peças</td><th>Pontuação</th><th colspan="2">Procedimentos adotados</th></tr>
<tr><td>0,0</td><td colspan="2">Não reconhece consecutivamente as diferenças e semelhanças entre os atributos.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Pontuação intermediária</td><td>1,0</td><td>Reconhece os atributos, mas necessita de revisão constante para a aplicação em suas jogadas.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Explica adequadamente as características de cada peça, mas ao jogar, mostra-se desatento para escolher uma peça ou para colocá-la em jogo.</td></tr>
<tr><td>3,0</td><td>O participante distingue os atributos coordenando semelhanças e diferenças em algumas partidas disputadas.</td></tr>
<tr><td>6,0</td><td colspan="2">O participante distingue os atributos coordenando semelhanças e diferenças em todas as partidas disputadas, demonstrando atenção e clareza quanto à sua importância.</td></tr>
</table>

Quadro 09: Procedimentos nas Sessões de Intervenção em relação ao reconhecimento dos atributos e sua pontuação.

Não pontua o participante que não for capaz de reconhecer consecutivamente as diferenças e semelhanças entre os atributos, perdendo possibilidades de fazer um alinhamento ao entregar uma peça ao adversário, ou mesmo, colocando uma peça que dê a vitória para o outro jogador. As pontuações intermediárias são conferidas aos jogadores que necessitam de revisões constantes dos atributos e aos que, embora os reconheçam, mostram-se desatentos durante o jogo. Aos participantes que coordenam as semelhanças e diferenças dos atributos em diversas partidas são creditados três pontos.

Desenvolvimento de estratégias pessoais, a partir da tomada de consciência dos procedimentos utilizados em partidas anteriores:

Com a sucessão de partidas, pode-se observar se houve evolução no modo de jogar do participante, verificando se ele desenvolve novas estratégias, a partir de seus próprios erros, e se observa as estratégias do adversário para aprender com elas; se se torna capaz de fazer antecipações sobre onde e quando será possível fazer o "Quarto" e se passa a distinguir com maior clareza os atributos em jogo. As questões seguintes têm o propósito de dar subsidio à verificação do desenvolvimento de estratégias pessoais, a partir da prática do jogo:

a) você acredita que está jogando melhor agora em relação às primeiras partidas disputadas?

b) o que foi mais instrutivo para você no decorrer das partidas?

c) você é capaz de identificar quais jogadas foram boas e quais foram ruins? Explique sua resposta.

d) você foi capaz de perceber os erros que cometeu durante as partidas?

e) os erros cometidos foram úteis para seu aprendizado?

f) como utilizar o que você aprendeu com as estratégias para jogar na resolução de problemas escolares?

Assim, nas várias partidas que o participante disputou, a partir da observação direta e das questões referentes à estratégia, à antecipação e a distinção dos atributos ele pôde obter as pontuações constantes no Quadro 10.

<table>
<tr><th rowspan="6">Capacidade de desenvolvimento de estratégias pessoais</th><th>Pontuação</th><th colspan="2">Procedimentos adotados</th></tr>
<tr><td>0,0</td><td colspan="2">Mesmo não obtendo sucesso nas partidas não altera suas estratégias de jogo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Pontuação intermediária</td><td>1,0</td><td>Faz pequenas alterações em suas estratégias no que diz respeito à organização de sua defesa.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Faz pequenas alterações em suas estratégias no que diz respeito à organização de seu plano de ataque.</td></tr>
<tr><td>2,0</td><td>Demonstra algumas modificações em suas estratégias, por utilizar experiências anteriores.</td></tr>
<tr><td>6,0</td><td colspan="2">Faz uso de suas experiências e as de seu adversário para modificar suas táticas de jogo, tornando-as mais eficientes para a obtenção da vitória.</td></tr>
</table>

Quadro 10: Procedimentos nas Sessões de Intervenção em relação desenvolvimento de estratégias pessoais e sua pontuação.

O participante que, ao final das partidas, demonstrar não ter alterado suas estratégias de jogo, que ainda não percebe prováveis alinhamentos, ou ainda confunde os atributos, demonstra não ter acumulado nenhuma experiência em partidas anteriores e a ele não é atribuída nenhuma pontuação. Nas pontuações intermediárias, como justificado no Quadro 10, confere-se um ponto aos participantes que modificarem suas estratégias apenas de forma local, no que diz respeito à defesa ou ao ataque, sem coordená-los, e dois pontos aos que conseguirem mostrar que fizeram algumas modificações em suas estratégias, demonstrando utilizar poucas experiências anteriores, suas ou as do adversário. No entanto, o participante que fizer uso de suas próprias experiências e as de seu adversário, principalmente quando este for o computador, com a finalidade de modificar suas táticas de jogo para torná-las mais eficientes obtém seis pontos.

Dessa forma, nas sessões de intervenção promovidas durante as partidas de "Quarto", foram analisados os aspectos referentes às estratégias desenvolvidas pelo jogador, a sua capacidade de antecipar um provável alinhamento, o conhecimento e distinção dos atributos das peças e o desenvolvimento de estratégias pessoais de jogo, conferindo-se, a cada um desses itens, pontuações com variação entre zero e seis pontos que, somados totalizam vinte e quatro pontos. Para efeito de análise, esse total foi dividido por quatro, dando origem a três tipos de condutas classificadas conforme o escore obtido, este considerado com aproximação de décimos. Assim, cada participante, de acordo com o escore obtido por ele, teve a sua conduta classificada segundo os critérios apresentados, a seguir. E pelos indícios observados, seu raciocínio foi caracterizado conforme os pressupostos construtivistas.

Conduta Tipo A: Enquadra-se nesse tipo de conduta o participante que fez um escore de zero a dois pontos. Caracteriza-se por uma fraca atuação e é a conduta de quem não avançou nas estratégias empregadas, não aprendeu com a experiência de partidas anteriores e, conseqüentemente, não dominou as características de cada atributo, não permitindo antecipações e um planejamento de jogo. Nesse caso, o participante mostra um tipo de pensamento que se restringe a um pequeno conjunto de transformações virtuais e tende a se apoiar em situações concretas, não manifestando, portanto, um raciocínio voltado à experimentação, à argumentação, à antecipação e à abstração.

Conduta Tipo B: É o caso do participante que obteve escore entre dois pontos e um décimo e quatro pontos. Esse tipo de conduta mediana é marcado por oscilações nos procedimentos adotados nas jogadas, o que gera uma pontuação intermediária dos itens analisados, isto é, mesmo não zerando em nenhum dos aspectos ponderados, não obtém pontuação máxima na maioria das situações analisadas. O raciocínio de um aluno com tais características apresenta vestígios de que ele está se tornando capaz de isolar variáveis de acordo com a situação apresentada, assim como de referir-se a elementos verbais e não apenas diretamente aos objetos, o que se considera uma evolução na conduta apresentada no item anterior.

Conduta Tipo C: O escore para esse tipo de conduta situa-se entre quatro pontos e um décimo e seis pontos. Nessa conduta, estão os participantes que demonstraram melhor desempenho quanto à escolha de estratégias, que se mostraram capazes de tomar consciência dos erros cometidos em partidas anteriores e, com eles, aprender para, assim, tornar possível novas vitórias e, em cada partida, justificar sua participação de forma lógica e organizada. Nesse caso, o participante é capaz de analisar todas as possibilidades existentes e coloca-as à prova para verificar quais delas são possíveis, sem de fato realizá-las na ação, isto é, realiza operações virtuais, fazendo a inversão entre o real e o possível.

Após as sessões de intervenção promovidas pelas partidas com o jogo "Quarto" solicitou-se aos participantes que refizessem a Prova de Conhecimentos Matemáticos cuja análise seguiu os mesmos critérios apresentados para a aplicação da referida prova e, assim, resumidamente descritos.

3.7. 3 Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos

A prova de conhecimentos matemáticos, bem como as questões propostas, foram reaplicadas com o objetivo de verificar se houve alteração na forma como o participante encaminhou a resolução dos problemas, tendo em vista o trabalho realizado pelas sessões de intervenção por meio do jogo "Quarto". A reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos teve a intenção de permitir ao participante a revisão contínua de seus procedimentos, possibilitando a transformação do conhecimento obtido por meio da experiência com o jogo em saber escolar, uma vez que o conhecimento só pode ser considerado pleno se for mobilizado em situações diferentes daquelas que serviram para lhes dar origem.

Portanto, considerando que os critérios para análise da resolução dos problemas durante a sua reaplicação foram os mesmos que os empregados em sua primeira aplicação, o Quadro 02 (p. 83), os Quadros 03 e 04 (p. 84), e 05 e 06 (p.85) se constituíram nas possíveis formas de resolução que deram origem às condutas sintetizadas pelo escore obtido pelo aluno, lembrando, que cada problema poderia somar até seis pontos, totalizando para os cinco problemas, trinta pontos que, ao serem divididos por cinco, deram origem a três tipos de conduta. Desse modo, a Conduta Tipo I, foi atribuída ao participante com escore entre zero e dois pontos, a Conduta Tipo II foi conferida àqueles cujo escore variou entre dois pontos e um décimo e quatro e a Conduta Tipo III foi reservada àqueles que obtiveram escores entre quatro pontos e um décimo e seis pontos. No Tipo I, a conduta do participante indicou um procedimento marcado por não conseguir êxito na resolução da maioria dos problemas por dificuldades de compreensão, desatenção ou desconhecimento do conceito matemático a ser aplicado. O Tipo II foi caracterizado pela oscilação na sistematização das soluções, excluindo, algumas vezes, possibilidades que poderiam levar o aluno à solução correta da questão. Os participantes que se enquadraram no tipo III apresentaram um raciocínio distinguido pela sistematização dos conhecimentos e clareza nas soluções.

No mesmo encontro em que foi reaplicada a Prova de Conhecimentos Matemáticos, solicitou-se ao aluno que realizasse a Prova das Permutações, cujo objetivo e procedimento de análise são descritos na seqüência.

3.7.4 Prova das Permutações

Os estudos realizados por Piaget e Inhelder (1951) (*apud* Macedo, 1983) identificaram três estágios, correspondendo ao período pré-operatório, operatório-concreto e operatório-formal. Cada um dos três estágios, segundo os autores, comporta duas subdivisões. O estágio I é caracterizado pela ausência da possibilidade de realizar com êxito a tarefa de permutar, e nele se encontram as crianças de aproximadamente sete ou oito anos de idade. No estágio IA, as permutações realizadas por elas apresentam repetições e não esgotam todas as possibilidades, além de não serem capazes de generalizar suas descobertas acidentais. Já as crianças classificadas no estágio IB distinguem-se das do estágio anterior por serem capazes de compreender o que foi solicitado, e, por tentativas, conseguir realizar as seis permutações para três elementos, mas não conseguem esgotar as possibilidades para um conjunto de quatro elementos. No estágio II, segundo os autores, as descobertas são empíricas e parciais, isto é, ainda não generalizadas e nela se encontram as crianças entre sete ou oito anos e onze ou doze anos. A característica do estágio IIA é a descoberta da regra para permutar três elementos, mas sem conseguirem generalizar essa conquista para quatro elementos. Já as crianças que alcançam o nível IIB são aquelas que conseguem aplicar para quatro elementos o que já haviam descoberto para três e, ainda, progressivamente, adquirem a consciência de que é possível começar quatro vezes com a primeira ficha. No estágio III, os sujeitos demonstram já terem descoberto o sistema, o que quer dizer que, após terem efetuado as permutações de 2, 3 e 4 elementos, são capazes de predizer o número de permutações de n elementos. No estágio IIIA, o sujeito inicia utilizando sistemas errôneos e só com o auxílio do experimentador, que recorre a perguntas sugestivas, consegue ter sucesso na predição solicitada. no Todavia, ao atingir o estágio IIIB, o sujeito adota um sistema correto para generalizar as permutações para n elementos e o justifica matematicamente por um raciocínio de recorrência.

O protocolo idealizado por Longeot (1974), conforme Anexo B, foi adotado para aferir o escore de cada participante da presente pesquisa, conforme mostra o quadro 11, mostrado na página seguinte, reiterando as conclusões de que, na Prova de Permutações, o participante pode obter um escore entre zero e seis pontos, sendo que se auferir, dois pontos, ele terá atingido um nível de operatório-concreto, com quatro pontos estará em um nível operatório-formal A e, para os que atingirem seis, o nível considerado será o operatório-formal B.

Nesse contexto, a aplicação para os participantes (N = 21) da Prova de Conhecimentos Matemáticos, a realização das Sessões de Intervenção com o jogo “Quarto”, a reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos e a aplicação da Prova das Permutações representaram as etapas que subsidiaram as respostas, mostradas no próximo capítulo, para a questão norteadora da presente pesquisa, que investiga se a promoção de sessões de intervenção com o jogo de regras “Quarto” pode favorecer as atividades de resolução de problemas de conteúdo matemático.

<table>
<tr><th>Questões</th><th>Pontuação</th><th colspan="2">Justificativas</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1ª Questão - Permutação de três elementos: Predição e execução</td><td>0,0</td><td colspan="2">Prediz apenas 3 permutações e não consegue dispor as 6 formas diferentes com, apenas, duas sugestões do aplicador.</td></tr>
<tr><td>2,0</td><td colspan="2">Prediz o número correto de permutações (N = 6) e consegue com até duas sugestões antes de finalizar o quinto arranjo realizar todas as seis combinações</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2ª Questão- Permutação de quatro elementos: Predição e execução</td><td>0,0</td><td colspan="2">Prediz como 8 o número total das permutações, justificando erroneamente suas conclusões utilizando um raciocínio aditivo (ex: se o número de permutações de três é seis basta acrescentar dois, para saber o de quatro) também não pontuará se utilizar a “fórmula do dobro”, isto é, dizer que há doze permutações, uma vez que para três elementos havia 6 então para 4 elementos há o dobro (2x6 = 12)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2,0</td><td>1,0</td><td>Essa pontuação é obtida quando o participante utiliza um raciocínio multiplicativo para justificar sua predição, podendo ser esta correta ou não.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Obtém essa pontuação quando realiza todas as permutações (N = 24) por si mesmo, ou auxiliado uma única vez pelo aplicador.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3ª Questão: Cinco, seis ou sete elementos: Predição</td><td>0,0</td><td colspan="2">Fracasso na predição correta do número total de permutações para 5, 6 ou 7 elementos, justificando sua resposta por meio de um raciocínio ilegítimo.</td></tr>
<tr><td>2,0</td><td colspan="2">Predição correta do número total de permutações, podendo justificar o resultado seguinte pelo anterior (ex: se para 4 elementos são 24 permutações, então se forem 5 elementos serão 120 permutações porque 5 x 24 =120) ou chegar à formula N!</td></tr>
</table>

Quadro 11 –Prova das Permutações sua pontuação e justificativas

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DOS DADOS

A análise dos dados foi realizada comparando-se a atuação de cada participante consigo mesmo, nas diversas fases da pesquisa. Dessa forma, procurou-se minimizar a diferença de conhecimentos escolares das diferentes séries e priorizar o desenvolvimento que pode ter ocorrido no processo de resolução dos problemas de conteúdo matemático, pela possibilidade de terem sido favorecidos pelas sessões de intervenção realizadas durante as partidas do jogo “Quarto”.

A Prova das Permutações, aplicada a todos os participantes, foi de grande importância para que, ao ser conhecido o nível de desenvolvimento operatório de cada um deles, fosse possível avaliar o grau de compreensão de que dispunham para resolver os problemas e participar das partidas de “Quarto” que disputaram. Considerando-se essas premissas, optou-se por analisar a produção de cada participante, na série em que estava inserido, a partir da Prova das Permutações e assim, sucessivamente, nas demais provas, com a intenção de observar se as atividades realizadas nas sessões de intervenção com o jogo “Quarto” puderam contribuir para o sucesso na resolução dos problemas matemáticos propostos.

Os dados sintetizados no quadro 12, a seguir, resumem a atuação dos participantes, sendo que em todas as provas identificadas como PCM**,** a Prova de Conhecimentos Matemáticos, SIJQ**,** as Sessões de Intervenção com o Jogo “Quarto”, RPCM, a Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos e PP, a Prova das Permutações, os escores variaram igualmente no intervalo de zero a seis pontos.

Série	**Partic.**	**Idade**	**PCM**	**SIJQ**	**RPCM**	**PP**
1ª série	BEA	14;11	2,5	2,5	3,0	4,0
	BRU	15;02	1,4	1,2	1,6	2,0
	FRA	15;10	2,0	4,5	4,2	6,0
	MAT	15;09	2,2	3,5	3,2	4,0
	NAT	15;05	3,6	3,5	3,6	4,0
	PAU	15;05	5,2	5,2	5,2	6,0
	RAI	15;04	2,0	1,7	2,4	3,0
2º série	ADR	16;05	2,0	4,5	4,2	4,0
	FER	16;01	5,2	5,2	5,2	6,0
	GAB	16;09	2,2	4,5	3,2	4,0
	LUC	15;11	3,8	4,5	6,0	6,0
	MAR	16;03	6,0	5,2	6,0	6,0
	PED	16;09	5,0	5,2	6,0	6,0
	RAF	16;10	3,4	4,5	4,2	4,0
3ª série	BRU	17;00	4,0	4,5	5,0	6,0
	DAP	16;09	3,8	4,5	4,2	6,0
	GUS	17;04	5,2	4,5	4,6	6,0
	NAT	17;06	1,6	2,0	3,4	3,0
	PRI	17;05	5,0	3,5	5,0	6,0
	REN	17;07	3,6	2,0	3,8	3,0
	ROS	17;01	4,0	3,5	4,4	6,0

QUADRO 12 – Participantes e seus escores em todas as provas realizadas

Observando-se tais dados, torna-se possível realizar uma análise quantitativa dos resultados obtidos conforme segue.

4.1 Análise quantitativa dos dados

Analisando-se os resultados referentes à aplicação e à reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, observou-se que a média dos escores obtidos pelos alunos na reaplicação (RPCM) da referida prova foi superior à média de sua primeira aplicação (PCM). Pôde-se comprovar tal fato estatisticamente por meio de um teste de hipótese, comparando as médias dessas duas distribuições. Para a definição da metodologia mais adequada a ser aplicada, realizou-se o teste de Shapiro-Wilk para verificar a normalidade das duas distribuições em questão. Como o valor p obtido no teste de Shapiro-Wilk foi 0,1679 para a Prova de Conhecimentos Matemáticos e 0,6467 para a Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, concluiu-se, com um nível de significância de 5% ($\alpha = 0{,}05$), que as distribuições podem ser consideradas normais. Constatada a normalidade e, por se tratar de uma população com $N < 30$, o método mais apropriado para realizar o teste de hipótese definido a seguir é o teste T de Student. Todas os testes foram aplicados por meio do *software BioEstat 3.0*.

H_0: Não há diferença entre as médias para a Prova de Conhecimentos Matemáticos e a Reaplicação da Prova Conhecimentos Matemáticos ($\mu_{PCM} = \mu_{RPCM}$)

H_1: As médias para Prova de Conhecimentos Matemáticos são menores que as médias da Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos ($\mu_{PCM} < \mu_{RPCM}$)

Então, de acordo com os dados obtidos na Tabela 1, que expressam os resultados da aplicação do teste T de Student, pôde-se concluir que o valor de $t = -3{,}9366$ é altamente significativo, com a probabilidade de 0,0008 (bilateral), o que leva a rejeitar H_0, isto é, $\mu_{PCM} < \mu_{RPCM}$.

Tabela 01: Estatística comparativa entre PCM e RPCM

	PCM	RPCM
Indivíduos	21	21
Média	3.5095	4.2095
Desvio Padrão	1.4014	1.1789
Erro Padrão	0.3058	0.2573
Desvio Padrão da Diferença	0.8149	---
Erro Padrão da Diferença	0.1778	---
Média das diferenças	-0.7	---
(t)=	-3.9366	---
Graus de Liberdade	20	---
(p) unilateral =	0.0004	---
(p) bilateral =	0.0008	---
IC (95%)	-1.0709 a -0.3291	---
IC (99%)	-1.2059 a -0.1941	

A essa análise, pode-se adicionar o Gráfico 01, que ilustra a distribuição da diferença entre as médias para a aplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos (3.5095) e da Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos (4.2095).

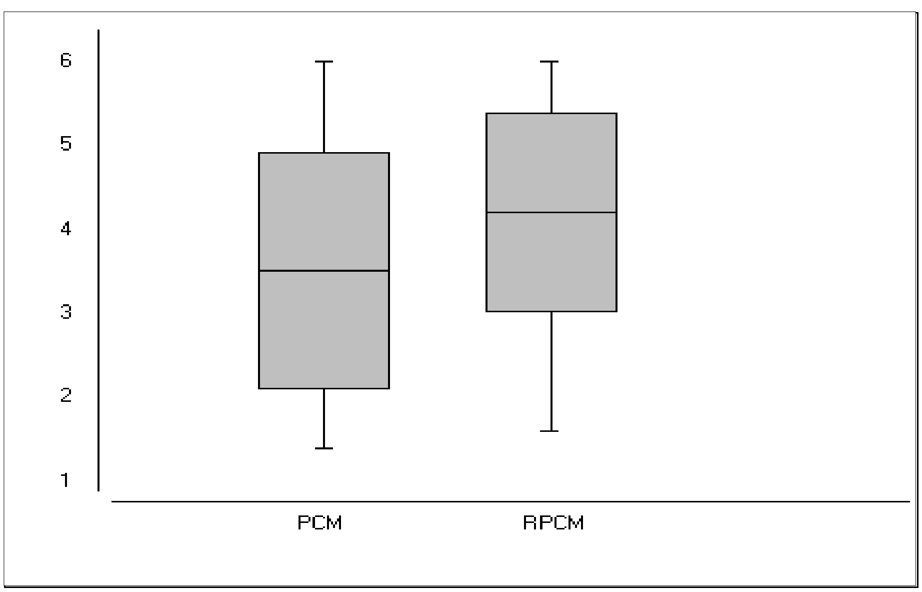


Gráfico 01: Box-Plot das distribuições e médias das Prova de Conhecimentos Matemáticos e da Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos

Observou-se, também, que, consideradas todas as provas que cada aluno realizou, os escores obtidos por ele, quando comparados com aquele que alcançou na Prova das Permutações, não apresentaram diferenças significantes, ou seja, o participante que demonstrou possuir um nível de pensamento operatório-formal, ainda que em construção, conseguiu melhores resultados na realização das demais provas. Ocorreu também o contrário, isto é, o participante que não atingiu uma boa pontuação na realização da Prova das Permutações, do mesmo modo não se saiu bem nas demais, confirmando a premissa de que para resolver os problemas propostos e jogar operatoriamente o "Quarto", seria necessário estabelecer relações entre situações possíveis e necessárias fundamentadas em um raciocínio hipotético-dedutivo, o que é uma característica do pensamento operatório-formal, relações estas, esperadas para alunos pertencentes ao Ensino Médio.

A comprovação estatística dessas afirmações pôde ser verificada por meio da existência de correlação entre os postos obtidos pelos participantes na Prova das Permutações e os encontrados em cada uma das demais provas realizadas. Assim, o teste de correlação de Spearman (r_s) foi aplicado para os pares de provas: Prova de Conhecimentos Matemáticos e Prova das Permutações (PCM x PP), Sessões de Intervenção com o Jogo Quarto e Prova das Permutações (SIJQ x PP) e a Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos e a Prova das Permutações (RPCM x PP), permitindo observar a existência da correlação esperada, conforme mostram, respectivamente, as tabelas 02, 03 e 04.

Tabela 02 – Correlações entre a Prova de Conhecimentos Matemáticos e a Prova das Permutações para todos os participantes

PCM x PP	Resultados
Coeficiente de Spearman (rs)=	0.7826
t =	5.4791
(p)=	< 0.0001
Número de pares =	21

Tabela 03 – Correlações entre as Sessões de Intervenção com o Jogo Quarto e a Prova das Permutações para todos os participantes

SIJQ x PP	Resultados
Coeficiente de Spearman (rs)=	0.7505
t =	4.9496
(p)=	< 0.0001
Número de pares =	21

Tabela 04 – Correlações entre a Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos e a Prova das Permutações para todos os participantes

RPCM x PP	Resultados
Coeficiente de Spearman (rs)=	0.8477
t =	6.9647
(p)=	< 0.0001
Número de pares =	21

Observou-se, então, uma forte correlação positiva entre a Prova das Permutações e as demais provas, segundo os resultados expressos nas tabelas 02, 03 e 04, nas quais tem-se: para PCM x PP, r_s = 0.7826, sendo p< 0,0001; para SIJQ x PP, r_s = 0,7505, sendo p< 0,0001 e para RPCM x PP, r_s = 0,8477, sendo p< 0,0001. Tais resultados confirmam que os participantes que obtiveram os melhores escores na Prova das Permutações (PP) foram aqueles que também se saíram melhor nas demais provas, como será focalizado na análise qualitativa, a seguir.

4.2 Análise qualitativa dos dados

Para o aprofundamento dos resultados da pesquisa, apresentar-se-á o detalhamento da produção de alguns alunos, cujos exemplos foram representativos dos estágios operatório-concreto, operatório-formal em construção ou em sua forma arrematada, obedecendo ao critério anteriormente anunciado, que é o de focalizar o aluno em sua série e pelos resultados que obteve em todas as provas que realizou.

4.2.1 Análise dos Alunos da Primeira Série do Ensino Médio

Os estudos começam com os alunos da primeira série do Ensino Médio, cujo quadro, a seguir, situa os participantes com seus escores, sendo PCM a Prova de Conhecimentos Matemáticos, SIJQ as Sessões de Intervenção com o Jogo “Quarto”, RPCM a Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos e PP a Prova das Permutações:

Série	Partic.	Idade	PCM	SIJQ	RPCM	PP
1ª série	BEA	14;11	2,5	2,5	3,0	4,0
	BRU	15;02	1,4	1,2	1,6	2,0
	FRA	15;10	2,0	4,5	4,2	6,0
	MAT	15;09	2,2	3,5	3,2	4,0
	NAT	15;05	3,6	3,5	3,6	4,0
	PAU	15;05	5,2	5,2	5,2	6,0
	RAI	15;04	2,0	1,7	2,4	3,0

Quadro 13 – Participantes da primeira série do Ensino Médio

Dos participantes da primeira série, BRU (15;02) e RAI (15;04) foram os que obtiveram o menor escore na Prova das Permutações. A produção de BRU foi a escolhida para ser detalhada em todas as provas que realizou. Na Prova das Permutações conseguiu predizer e realizar com êxito as permutações para três elementos; porém, ao antecipar o número de permutações para quatro cores, recorreu à "fórmula do dobro", respondendo: - *12 vezes, como tem uma a mais, vai ficar 2x6.* Ao ser solicitado que fizesse como havia pensado, percebeu que haveria um número maior de permutações e apenas conseguiu esgotar todas as possibilidades após recorrer, mais de uma vez, às sugestões de novas combinações que lhe indicava a pesquisadora. Para cinco cores, empregou, igualmente, um raciocínio incorreto, porém desta vez utilizando um raciocínio aditivo, ao dizer: -*Quando acrescenta mais uma cor faço mais uma fileira, então serão 30 = 24 + 6*. Com essa resposta, a prova foi dada por encerrada e atribuídos dois pontos a esse participante, o que, de acordo com a análise de Longeot (1974), confere-lhe apenas um nível de raciocínio operatório-concreto.

Para Piaget e Inhelder (1976), um pensamento com essa estrutura apresenta, como modelo, os agrupamentos operatórios concretos de classe e relação constituídos por grupos imperfeitos, nos quais a associatividade é incompleta, uma vez que é efetuada apenas para elementos contíguos que impedem a transposição das operações de primeiro grau para as operações de segundo grau. As operações de primeiro grau incidem em raciocínios sobre a própria realidade e as operações de segundo grau necessitam refletir em implicações e incompatibilidades estabelecidas entre proposições. A incapacidade de raciocinar apenas por meio de elementos verbais foi mostrada por BRU na primeira aplicação da Prova de

Conhecimentos Matemáticos (resoluções, conforme Apêndice D), quando encaminhou a solução apenas por meio de um desenho, desconsiderando os conceitos relativos às propriedades do quadrado, de triângulos, de eqüidistância, assim como ao teorema de Pitágoras e às relações algébricas necessárias à solução do primeiro problema[4].

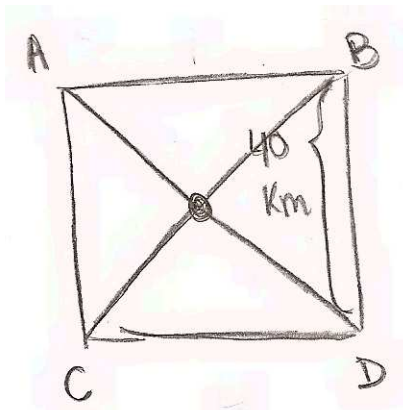


Figura 04: Esquema gráfico de BRU para o 1º problema da Prova de Conhecimentos Matemáticos

BRU assinalou que fez a leitura do problema duas vezes e encaminhou a solução, fazendo uso, unicamente, de um desenho, sem apontar a utilização de qualquer conceito matemático sugerido nas questões propostas, com a seguinte explicação: *conforme o desenho, pois se tem que ser eqüidistante de A e B, C e D, o ponto deve ser no meio.*

Pelo desenho (fig. 04) e pela ausência de informações sobre quais conceitos utilizou, pode-se inferir que BRU centrou-se naquela que lhe parecia mais familiar, que é o conceito de "central", anulando as informações sobre distância de ponto à reta, mediatriz, quadrado e eqüidistância, por serem, possivelmente para ele, abstratas.

Na segunda questão[5], BRU, apesar de explicar corretamente como deveria encaminhar a solução do problema (resolução, conforme Apêndice D), troca a porcentagem e os preços, conforme mostra a figura 05, demonstrando uma desatenção que pode ser explicada, segundo as

---

[4] Problema 1: Quatro estações distribuidoras de energia A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo eqüidistante das estações A e B e da estrada (reta) que liga as estações C e D. A nova estação deve ser localizada:

[5] Problema 2: Um pátio de grandes dimensões vai ser revestido por pastilhas quadradas brancas e pretas, segundo o padrão representado abaixo, que vai ser repetido em toda a extensão do pátio. As pastilhas de cor branca custam R$ 8,00 por metro quadrado e as de cor preta, R$ 10,00. O custo por metro quadrado do revestimento será:

idéias de Kilpatrick (1985), pela falta de componentes para ser um bom "resolvedor" de problemas, ou seja, possuir um conhecimento profundo da matéria, dominar estratégias heurísticas e ser capaz de aplicar ao processo de resolução os seus conhecimentos e estratégias.

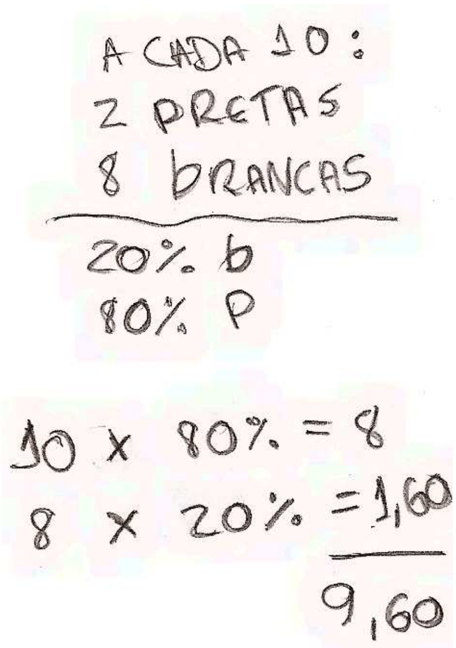


Figura 05 – Resolução de BRU na Prova de Conhecimentos Matemáticos para o 2º problema

O erro cometido por BRU foi o de ter utilizado o preço das pastilhas pretas para a quantidade de pastilhas brancas e analogamente o preço das brancas para a quantidade de pretas.

Resolução correta:

A cada 10 pastilhas tem-se:
2 pretas → 20% pretas
8 brancas → 80% brancas
Preço das pastilhas brancas: R$ 8,00
Preço das pastilhas pretas: R$ 10,00
Assim, o correto seria:
0,8 x 8,00 = 6,40
0,2 x 10,00 = 2,00
Preço = 6,40 + 2,00 = 8,40

Nesse problema foram conferidas as seguintes pontuações intermediárias: um ponto por apresentar os registros que apontam para a percepção da regularidade (a cada 10 pastilhas, 2 são pretas e 8 são brancas), um ponto por justificar como resolver o problema de forma adequada (fig. 06) e mais três pontos por resolver o problema, mesmo cometendo os erros já mencionados.

Respondendo às questões, após resolver esse problema, BRU indica que fez sua leitura duas vezes, utilizou o padrão do desenho e o conceito de proporção, justificando corretamente a solução, o que comprova o equívoco ao aplicar o preço das pastilhas pretas para a quantidade de brancas e o preço das pastilhas brancas para a quantidade de pretas.

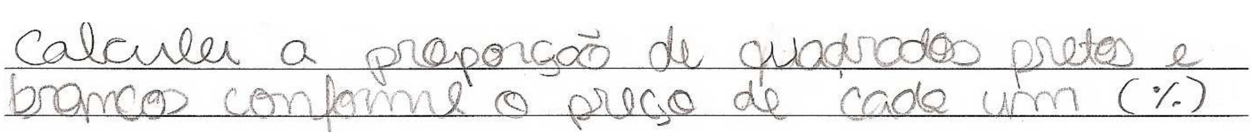


Figura 06 - Justificativa de BRU para a resolução do 2º problema

Na resolução do terceiro problema[6], BRU, apesar de ter assinalado que leu o problema três vezes, não indicou como encaminharia a solução, nem selecionou algum conceito que pudesse ser utilizado na resolução do mesmo. Também não apresentou nenhum cálculo e tampouco uma justificativa, não recebendo, pois, nenhum ponto. A ausência de compreensão demonstrada por ele pode ser explicada pelo tipo de raciocínio exigido para a resolução desse problema que, por solicitar uma análise combinatória, reveste-se de uma natureza unicamente hipotético-dedutiva. No quarto problema[7], não esboça nenhuma solução e nenhuma explicação, mas indica que leu duas vezes o seu enunciado, apontando que o encaminhamento do problema deve ser por meio do desenho, mas sem explicitar quais conceitos matemáticos poderiam ser utilizados, mostrando que não estabeleceu a relação entre as áreas do quadrado e dos círculos, conceitos matemáticos presentes no enunciado. Nesse problema também não obteve nenhum ponto. No quinto problema[8], são creditados dois pontos quando responde: *me direcionaria para o ponto do nascer do sol (manhã), tendo a casa de frente para ele, e também o uso de escala, para saber qual terreno poderia ter 200m^2. Não consegui lembrar o lado que o sol nasce*. Essa resposta indica a separação adequada das variáveis apresentadas no problema, sem que o participante consiga solucioná-lo efetivamente.

Assim, na aplicação da referida prova, BRU somou, apenas, sete pontos, conferindo-lhe um escore de 1,4 ponto. Na sua reaplicação, manteve o mesmo padrão de respostas para todas as questões, menos para a segunda, que, desta vez, resolveu de forma inteiramente correta, isto é, desta vez relacionou corretamente a quantidade e o preço de peças brancas assim como para as peças pretas, o que elevou em apenas um ponto a somatória das questões e o escore para 1,6 ponto.

[6] Problema 3: A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais.

[7] Problema 4: Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura abaixo. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas. As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material.

[8] Problema 5: Um leitor encontra o seguinte anúncio entre os classificados de um jornal. Interessado no terreno, o leitor vai ao endereço indicado e, lá chegando, observa um painel com a planta a seguir, onde estavam destacados os terrenos ainda não vendidos, numerados de I a V:

O procedimento considerado para esse tipo de atuação é a conduta Tipo I, uma vez que o aluno apresentou indícios de que não estabeleceu de forma adequada as relações necessárias ao desenvolvimento das soluções, tendo como causa provável a dificuldade de raciocinar por hipóteses, como ficou demonstrado na aplicação da Prova das Permutações. A necessidade de fundamentar-se no concreto pode ter prejudicado a compreensão dos conceitos matemáticos necessários e, conseqüentemente, a sua generalização, que permitiria a aplicação aos diversos conteúdos propostos nos problemas. Também se pode supor que, para esse aluno, as situações apresentadas não se configuraram como problemas matemáticos, pois, segundo Matos (1994), far-se-ia necessária, para isso, a utilização de modelos matemáticos. A construção de um modelo matemático supõe a formulação de questões e a representação através de objetos, relações ou estruturas matemáticas sobre a situação apresentada, necessitando do empreendimento de uma ação para que o objetivo proposto seja atingido. Nesse sentido, Piaget (1978) esclarece que a evolução da ação e o estabelecimento de suas relações com a conceituação se caracterizam pela tomada de consciência que se concentra em função de dois tipos prováveis de abstrações:

> Mas, desde o início, e na medida em que ocorrem os progressos da própria ação, essa tomada de consciência se polariza em função de dois tipos possíveis de abstrações: a abstração empírica fornece então, uma conceituação de certa forma descritiva dos dados de observação constatados nas características materiais da ação, ao passo que a abstração refletidora extrai das coordenações da ação o necessário para construir as coordenações inferenciais que, no nível do conceito, permitem ligar e interpretar esses dados de observação (PIAGET, 1978, p. 210).

Por todas essas considerações, pode-se supor que o raciocínio desse participante orientou-se pela observação direta dos dados fornecidos pelos enunciados dos problemas, sem deles extrair as coordenações necessárias, impedindo-o de realizar as inferências ao nível de uma abstração refletida.

A atuação de BRU nas Sessões de Intervenção com o Jogo “Quarto” iniciou-se após a compreensão das regras do jogo, que ocorreu por meio das partidas disputadas com a pesquisadora, utilizando o tabuleiro e as peças do jogo. A seguir, foi introduzido o jogo “Quarto”, com as mesmas regras já aprendidas, utilizando-se o *software Zillions of Games*. Dessa forma, as questões norteadoras das sessões de intervenção (conforme apêndice F), levaram em consideração a estratégia utilizada, a possibilidade de antecipação para futuras jogadas, o aprendizado com os próprios erros e a aplicação da mesma análise para outros contextos, como a resolução de problemas de conteúdo matemático. As respostas selecionadas para tais questões, no decorrer de determinados momentos das diversas partidas disputadas, revelaram quais procedimentos foram utilizados, como reproduzido, a seguir:

> P: O que você levou em conta para escolher essa peça?
> BRU: - *Para ver se o computador coloca naquela casa* (aponta para a casa que completa um alinhamento).
> P: - Por que escolheu essa casa para colocar a peça que lhe foi dada pelo seu adversário?
> BRU: - *Porque aqui não completa as quatro peças.*
> P: Você percebeu qual foi a estratégia de seu adversário?
> BRU: - *Ainda não, mas sei que tenho que tomar cuidado para colocar a peça que ele me dá.*
> P: Você pode ganhar essa partida?
> BRU: *Ainda não dá para saber* (obs: apenas três casas estavam livres).
> P: - Você acredita que, quanto mais detalhada for sua análise, maior a sua chance de vencer seu adversário?
> BRU: - *Acho que sim, mas é difícil pensar em tudo*.
> P: - Esse procedimento de análise pode ser utilizado em outras situações, por exemplo, para resolver problemas escolares?
> BRU: - *Acho sim, só que é preciso saber o que usar para resolver o problema, como no caso de onde nasce o sol*. (BRU se referia ao quinto problema que em seu enunciado se referia a um terreno que era banhado pelo sol da manhã).
> P: O que foi mais instrutivo para você no decorrer das partidas?
> BRU: - *Acho que ter mais atenção antes de fazer alguma coisa.*
> P: - Como utilizar o que você aprendeu com as estratégias para jogar na resolução de problemas escolares?
> BRU: - *Prestando mais atenção no que tenho que fazer.*

Pelas respostas de BRU, pôde-se perceber que utilizava uma estratégia que tentava combinar jogadas que previam o ataque e a defesa, isto é, ao selecionar uma peça para ser movimentada por seu adversário, escolhia aquela que dava ensejo a um possível alinhamento e, ao colocar uma peça no tabuleiro, procurava evitar colocá-la em uma casa que completava um alinhamento para o adversário. Contudo, muitas vezes, centrava-se em algum atributo, descuidando-se de outro e, assim, cedia a vitória ao computador. Pôde-se perceber também que BRU teve alguma dificuldade em antecipar futuras jogadas, talvez pela necessidade de ater-se a situações concretas ou por necessitar de revisões constantes para distinguir os atributos. As respostas dadas por BRU permitiam inferir que seu raciocínio lógico manifestava uma tendência de excluir situações que não lhe pareciam concretas, isto é, orientavam-se por possíveis atualizáveis, que significam segundo Piaget (1985, p.91), serem aqueles de um nível em que "o sujeito prevê numerosas variações, mas se limita às que vai atualizar".

No congelamento de uma partida, como apresentado na figura 07, notou-se que o participante, ao analisar suas chances de vitória, não foi capaz de antecipar que em qualquer uma das duas “casas” que colocasse a peça em jogo, estaria cedendo a vitória ao adversário. Ao explicar qual, nesse momento do jogo, seria a melhor jogada, BRU disse: - *Se coloco a peça ali na casa do meio* (referindo-se à casa 3C) *perco o jogo, porque todas são redondas, mas na outra casa* (1D) *eu posso pôr.* Isso demonstra que o jogador centrou sua atenção na coluna, descuidando-se da diagonal que era composta apenas por peças circulares.

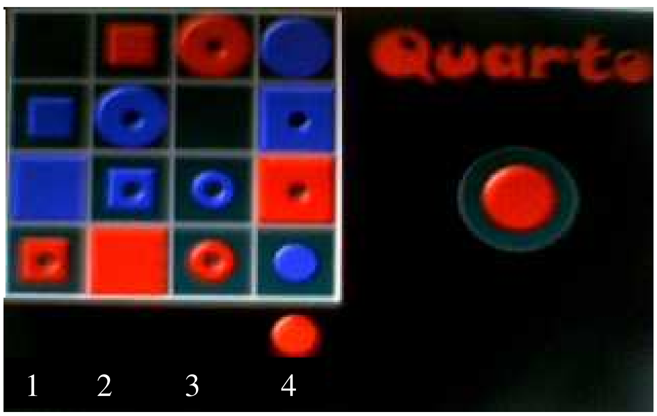


Figura 07: Configuração das peças durante uma partida de “Quarto” disputada por BRU

Apesar de não ter obtido a vitória em diversas das partidas que disputou, aprendeu com os próprios erros, mas sem a sistematização que permitiria a modificação do próprio jogo. Porém, suas respostas demonstram concordância de que uma análise criteriosa auxiliaria na obtenção do objetivo do jogo e, ainda, que esse mesmo tipo de análise poderia ser útil na resolução de problemas matemáticos.

Assim, a atuação desse participante alcançou um escore de apenas 1,2 ponto, configurando-se como uma Conduta Tipo A, confirmando que seu pensamento se restringiu a um pequeno conjunto de transformações virtuais que tende a se apoiar em situações concretas, não manifestando, portanto, um raciocínio voltado à experimentação, à argumentação, à antecipação e à abstração, esta última considerada em um patamar que torna possível a constituição de sistemas lógico-matemáticos. Constata-se, dessa forma, que a conduta apresentada situou-se em um nível elementar e para que evolua para outros, novos e melhores, necessita que sejam construídas novas e melhores formas de equilíbrio que poderão ocorrer, segundo Piaget (1977), com a interação do sujeito com o meio em um processo contínuo de assimilação e acomodação. Isso pode ser favorecido, explicam Macedo, Petty e Passos (2000), por meio de um jogo de regras, por implicar na criação de situações caracterizadas pela elaboração de questões, a partir de momentos significativos do próprio jogo, como foi realizado nas Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto". Essas afirmações parecem se confirmar, uma vez que na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, notou-se um pequeno progresso em relação à primeira aplicação, elevando o escore de BRU de 1,4 para 1,6.

No entanto, é importante notar que tal deslocamento se deu apenas na situação em que, na primeira aplicação, houve falha na atenção e não na compreensão, como ocorreu no segundo problema discutido na página 103, já que os problemas não compreendidos continuaram a provocar os mesmos tipos de erros. Dessa maneira, pode-se inferir que a realização das sessões de intervenção com o jogo "Quarto" não atuaram em BRU diretamente sobre a construção dos conceitos, e sim sobre os critérios de análise, de atenção e da escolha de melhores procedimentos para a resolução dos problemas solicitados. Isso porque, como enfatiza Oliveira (2004), os jogos de regras podem ser vistos como situações privilegiadas para a resolução de problemas em todas as fases de desenvolvimento. E as habilidades e competências cognitivas, desenvolvidas por meio de um jogo de regras, passam a fazer parte da estrutura mental do sujeito, podendo ser generalizadas para outras situações quaisquer, não apenas em contextos específicos, mas também em similares, como as utilizadas para a resolução de problemas.

As atuações de BEA (14,11), NAT (15;05) assim como a de MAT (15;09) apresentaram, em comum, o escore de quatro pontos na Prova das Permutações e o mesmo tipo de conduta, tanto na Prova de Conhecimentos Matemáticos como nas Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto", respectivamente, classificadas como Conduta Tipo II e Conduta Tipo B. O escore de quatro pontos atingido por eles na Prova das Permutações situa-os em um nível de pensamento operatório-formal A, o que, segundo o protocolo de avaliação de Longeot (1974), significa que foram capazes de predizer e realizar as permutações para quatro elementos, não sendo, todavia, capazes de estender as suas descobertas para "n" elementos quaisquer. Essa forma de operar o conhecimento representa, no entanto, uma evolução em relação ao pensamento concreto, pois pode-se inferir que, de acordo com Piaget (1985), estão se tornando capazes de referir-se a elementos verbais buscando fundamentar-se na dupla consideração de combinações possíveis e de ligações necessárias, estas, integrando em um único sistema as duas formas de reversibilidade.

Na aplicação e reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, notou-se que a conduta desses participantes, situada em um nível intermediário, o tipo II, caracterizou-se por oscilações na pontuação dos itens avaliados, mostrando que, por vezes, obtinham sucesso nos raciocínios empreendidos para resolver o problema proposto e, em outras situações, não consideravam os caminhos que poderiam levá-los à resolução correta da questão. Raciocinavam de acordo com as hipóteses por eles levantadas, sem atingir, porém, a regularidade necessária para admitir a coordenação de todas as variáveis inseridas no contexto dos problemas. Nesse tipo de raciocínio, esclarece Piaget (1977), as novas relações estabelecidas passam a ser uma variação no interior de uma estrutura já organizada, permitindo a modificação do sistema, que passa a não rejeitar o elemento novo, para incorporá-lo às estruturas já existentes. Entretanto, em algumas situações, as modificações sofrem compensações que modificam apenas parcialmente o sistema inicial.

Nas Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto", esses alunos utilizaram-se de estratégias que combinavam o ataque com a defesa, além de antecipar os possíveis alinhamentos, distinguindo os atributos, coordenando-os por semelhanças e diferenças, porém oscilando quanto ao seu emprego em algumas partidas ou jogadas, o que, conseqüentemente, resultou em uma pontuação intermediária em todos esses quesitos. No entanto, todos eles fizeram uso, no decorrer das partidas, de suas experiências e as de seu adversário para modificar suas táticas de jogo, tornando-as mais eficientes para a obtenção da vitória. Esses procedimentos, caracterizados como os do Tipo B, se configuram por oscilações dos diferentes processos adotados nas jogadas, conduzindo a uma pontuação intermediária dos itens analisados. Mas permitiu inferir que o raciocínio desses participantes apresentou sinais de que eles estavam se tornando capazes de isolar variáveis de acordo com a situação apresentada, assim como de referir-se a elementos verbais e não apenas diretamente aos objetos. No contexto apresentado, segundo os princípios construtivistas de Piaget (1985), esses participantes mostraram que começam a diferenciar o real do possível, uma vez que estão se tornando capazes de empreender construções variadas, o que amplia as suas possibilidades de compreensão.

O reflexo dessa conquista pôde ser observado a partir da comparação entre a aplicação e a reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, que mostra progresso na forma como MAT e BEA resolveram os problemas. Escolheu-se a atuação de MAT para ser detalhada em todas as provas das quais participou. Na Prova de Conhecimentos Matemáticos, MAT, na resolução do segundo problema[9], reproduzida na figura 08, embora tenha indicado que leu o problema quatro vezes ou mais, obteve um êxito parcial ao resolvê-lo, mesmo tendo apontado corretamente que encaminharia a resolução por meio do desenho e utilizaria os conceitos de proporção e área. Os registros de MAT , como se pode observar, não apresentam uma boa sistematização, além de empregar erroneamente os dados contidos nas informações do enunciado, pois utiliza, para realizar a “regra de três”, o preço das pastilhas brancas para a quantidade de pastilhas pretas e, analogamente, o preço das pastilhas pretas para a quantidade de brancas. Assim, obteve uma pontuação parcial de cinco pontos, uma vez que percebeu a regularidade entre as pastilhas brancas e pretas contidas no desenho, justificou como resolver o problema de forma adequada, por meio das questões propostas e resolveu-o, mesmo cometendo o erro já observado.

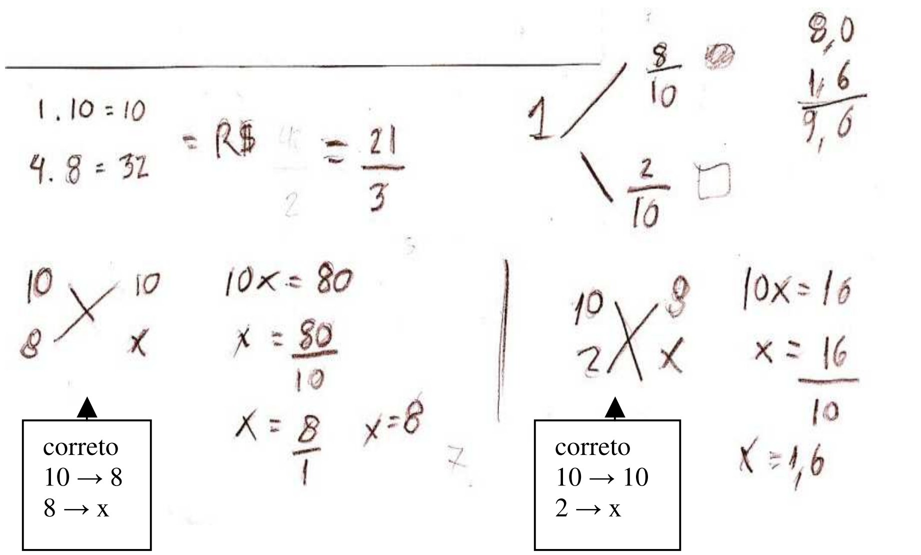


Figura 08 – Resolução de MAT para o 2º problema na Prova de Conhecimentos Matemáticos

Na Reaplicação da Prova de Conceitos Matemáticos, ao resolver o mesmo problema (fig. 09), MAT calculou a área total e seu preço, encontrando depois, por meio de uma divisão, o preço do metro quadrado. Foi igualmente eficiente ao perceber a regularidade, e, ainda, ao explicar que: - *contei as colunas e analisei as proporções entre os quadradinhos pretos e os brancos, depois apliquei os conceitos de área e proporção e relacionei com os dados.* Ainda,

[9] Problema 2: Um pátio de grandes dimensões vai ser revestido por pastilhas quadradas brancas e pretas, segundo o padrão representado abaixo, que vai ser repetido em toda a extensão do pátio. As pastilhas de cor branca custam R$ 8,00 por metro quadrado e as de cor preta, R$ 10,00. O custo por metro quadrado do revestimento será:

como se pode notar a organização gráfica da resolução proposta por ele, apresenta-se sistematizada e bem explicada.

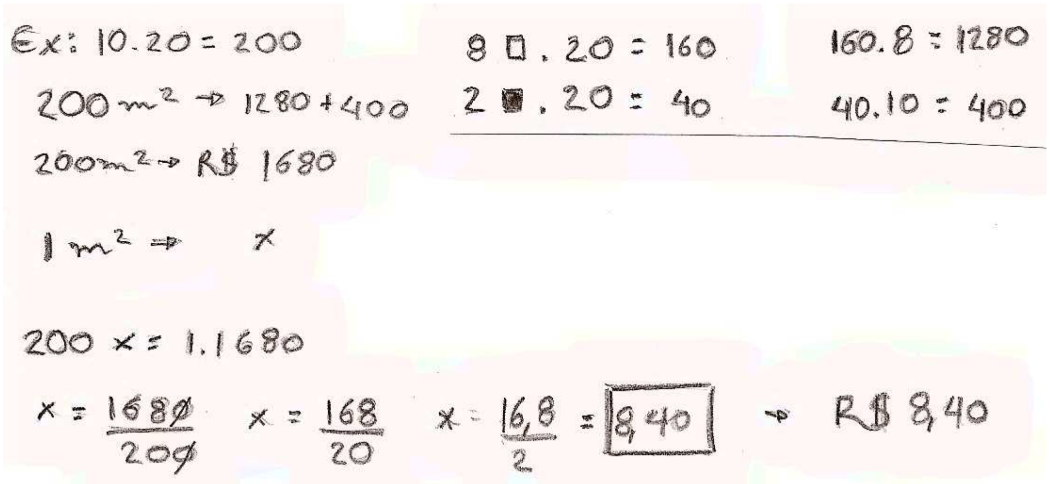


Figura 09 – Resolução de MAT para o 2º problema na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos

O encaminhamento da solução e as explicações de MAT mostram as hipóteses que ele levantou e sua melhor sistematização pode ser justificada pelas explicações dadas durante a realização das Sessões de Intervenção com o Jogo “Quarto”, quando pondera sobre algumas das questões propostas durante as partidas, como segue transcrito:

> P: - Você acredita que quanto mais detalhada for sua análise, maior a sua chance de vencer seu adversário?
> MAT: - *Sim, porque a análise das possibilidades facilita ganhar*.
> P: - Esse procedimento de análise pode ser utilizado em outras situações, por exemplo, para resolver problemas escolares?
> MAT: - *Essa forma de analisar o jogo ajuda a analisar o que é proposto no problema e faz você pensar melhor.*
> P: O que foi mais instrutivo para você no decorrer das partidas?
> MAT: - *Ter mais atenção e analisar melhor as situações, tanto no jogo, para conseguir ganhar, como nos problemas para conseguir resolver.*
> P: - Como utilizar o que você aprendeu com as estratégias para jogar na resolução de problemas escolares?
> MAT: - *Tendo mais concentração nos dados do problema*.
> P: - Os erros cometidos foram úteis para seu aprendizado?
> MAT: - *Foram. Quando você comete um erro numa partida, fica atento para não cometê-lo mais, posso pensar assim também para resolver problemas.*

À medida que MAT se tornava mais atento e realizava análises mais criteriosas, aumentavam as suas possibilidades de vencer as partidas que disputava, como aconteceu em uma das partidas que venceu, e ainda antecipou como se daria essa vitória. A partida, reproduzida na figura 10, em que o aluno, observando a configuração apresentada, explicou:

> MAT: *Não posso colocar essa peça na casa livre da quarta coluna* ("casa" 4D, referindo-se ao círculo, vermelho, pequeno e sem furo, peça colocada em jogo pelo computador) *porque ficariam todas vermelhas, mas, se eu colocar essa peça na casa vazia da coluna 3* (3C), *e escolher o quadrado, pequeno, vermelho e sem furo para colocar em jogo, em qualquer uma das casa restantes que o computador escolher para colocá-la, eu ganho, porque completo o "Quarto" por meio da cor* (vermelho) *na linha* (C) *ou coluna* (4)*, ou pelo tamanho* (pequeno) *na diagonal.*

1 2 3 4

D
C
B
A

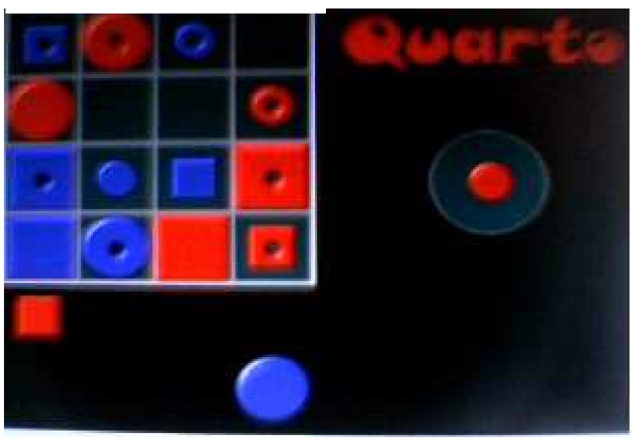


Figura 10 – Configuração das peças em uma partida de "Quarto" disputada por MAT

Na atuação de MAT, pode-se identificar o que menciona Corbalán (2000) ao comparar a resolução de um problema com o atingir o objetivo em um jogo, quando menciona ser, em ambos, de fundamental importância, a formulação de hipóteses e sua comprovação posterior, tornando-se esse processo muito fácil de ser feito por meio do jogo, pois, o prêmio que se consegue pelas melhores hipóteses é o de vencer a partida, o que é uma excelente motivação, principalmente para os adolescentes. Sendo assim, o jogo, por facilitar a avaliação de uma hipótese, que se confirma, ou não, de acordo com o resultado obtido ao final de uma partida, pode ser considerado um meio favorável para que os desequilíbrios, provocados pelas situações vivenciadas durante as partidas, sejam ultrapassados, promovendo novas formas de equilíbrio, que serão qualitativamente melhores que as anteriores. Também MAT, ao dizer que o erro o tornará mais atento, evitando que seja cometido novamente, enfatiza o caráter construtivo do erro no jogo como forma de regulação, evidenciando a importância de considerar a avaliação espontânea que o contexto lúdico propõe ao sujeito, o que pode ser transferido para situações de aprendizagem. Assim, caso haja a transposição para outros contextos como, por exemplo, a resolução de problemas de conteúdos matemáticos, permite inferir que novos meios de análise produzam novos conhecimentos o que, de acordo com Piaget (1977, p. 55), pode ser explicado quando [...] “num sistema operatório dado será sempre possível aplicar operações novas, extraídas de outros sistemas, e, sobretudo, extraídas das precedentes no interior do mesmo sistema, mas elevadas a uma potência maior”.

Também BEA (14,11) e NAT (15;05) vivenciaram situações semelhantes, uma vez que o pensamento desses alunos orientava-se pela previsão de situações possíveis que iam além de considerar apenas os dados reais presentes e concretos, fazendo supor a construção de um tipo de raciocínio que se encaminhava para o pensamento hipotético-dedutivo, isto é, de serem capazes de operar por hipóteses, sem, contudo, generalizarem de forma completa suas conclusões.

Já a atuação de PAU (15;05) foi marcada por escores mais elevados que conseguiu em todas as provas que realizou. Quanto à Prova das Permutações, foi eficiente ao predizer de quantas formas diferentes podem ser dispostos três e quatro elementos, realizando, de forma sistemática, como mostrado na figura 11, em que, começando pela cor azul, desloca-a progressivamente da primeira até a quarta coluna, esgotando, assim, as 24 possibilidades de permutar quatro elementos.

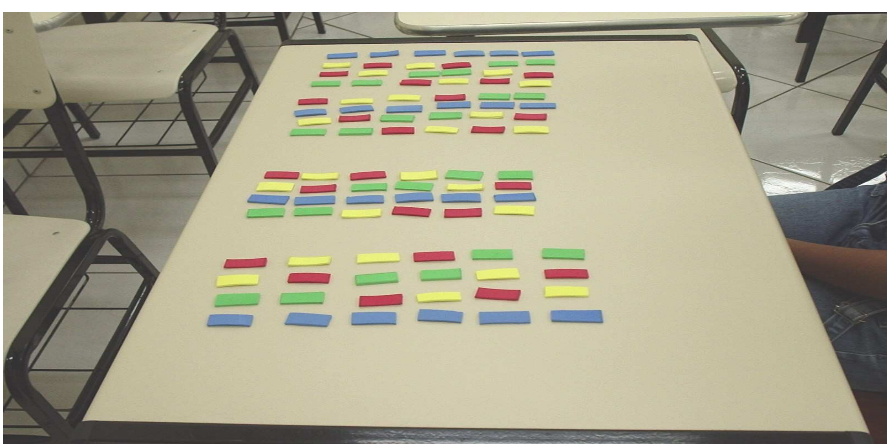


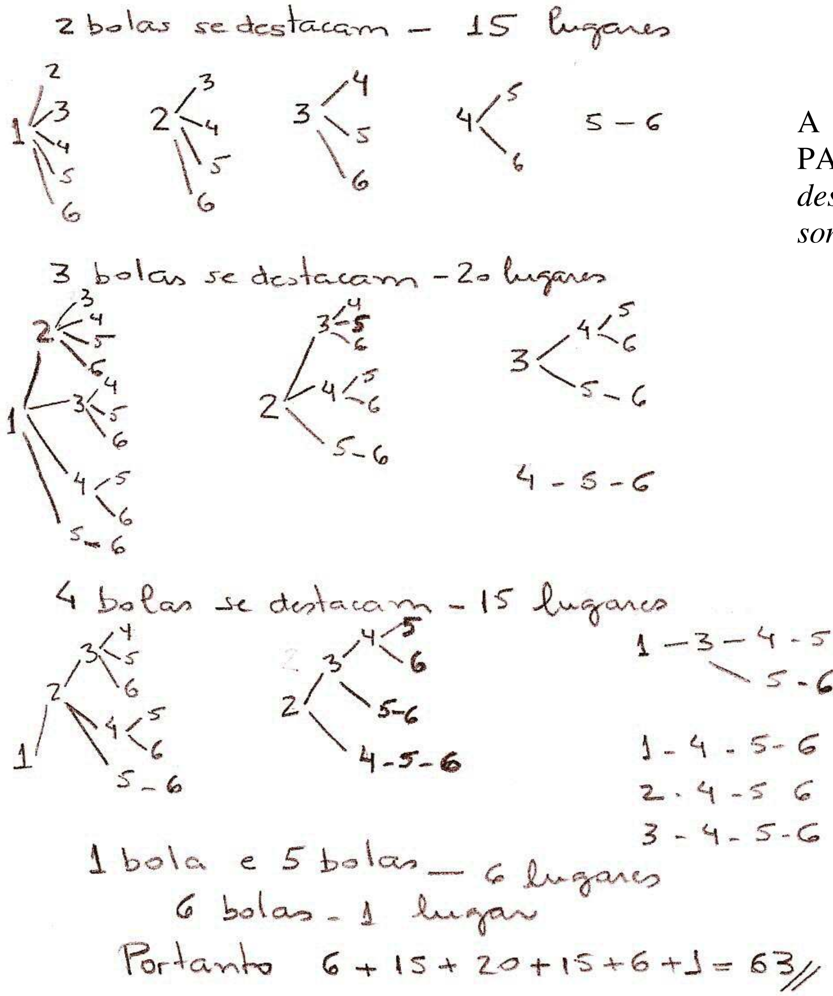
Figura 11 - Configuração realizada por PAU para permutações de quatro elementos

Para cinco elementos, responde que serão 120 possibilidades e, para seis, deve ser 720, explicando que, ao acrescentar mais uma cor, deve-se, de acordo com PAU, *tomar o número encontrado e multiplicá-lo pelo número de cores que queremos saber*. Observou-se que PAU, aluno da primeira série, não demonstrou dúvidas ao responder as questões presentes no protocolo da Prova das Permutações, revelando a construção de uma estrutura operatório-formal em direção ao seu arremate, uma vez que, demonstrou possuir os métodos e operações indispensáveis à formalização das questões solicitadas, sendo capaz de solucioná-las por meio de um conjunto de transformações virtuais.

O interesse em resolver problemas acadêmicos pode estar relacionado à importância dada para resolver problemas cotidianos, fato que, segundo Perales (2000), se constitui em fonte de inspiração para a investigação, por aproximar a atividade acadêmica à vida real, tornando possível a sistematização do trabalho empreendido, com o objetivo de aplicar a teoria elaborada em classe, de forma a comprovar a sua utilidade. Além disso, ressalta o autor, há a necessidade da convergência de três dimensões básicas: o aluno precisa dispor de informações teóricas, como conceitos, leis ou princípios; necessita de procedimentos como, por exemplo, cálculo aritmético, controle de variáveis, emissão de hipótese ou interpretação de gráficos e, finalmente, necessita de uma atitude favorável em relação à realização da tarefa e da própria disciplina em questão.

A Prova de Conhecimentos Matemáticos (ver Apêndice C) realizada por PAU evidenciou que esse participante possui as dimensões citadas por Perales (2000), pois apresentou resoluções corretas, apenas não obtendo pontuação completa no primeiro problema, porque testou cada uma das alternativas apresentadas para encontrar a solução, isto é, respondeu que a nova estação se localizaria na perpendicular à estrada que liga C e D, passando pelo seu ponto médio a 25 km dessa estrada, após verificar que a referida estação não se encontrava no centro do quadrado ou na perpendicular à estrada que liga C e D passando pelo seu ponto médio a 15 km dessa estrada.

Na resolução do terceiro problema, que solicitava o número de caracteres possíveis para um conjunto de seis pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destacava em relação aos demais, PAU utilizou uma “árvore de possibilidades” para resolvê-lo, obtendo êxito na solução, como mostra a figura 12.



A explicação dada por PAU foi simples: *desenhei as chaves e somei as combinações.*

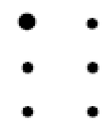


Figura 12 - Resolução de PAU para o 3º problema

Em sua resolução, os números “1”, “2”, “3”, “4”, “5” e “6” representam as posições dos pontos (“bolas”) destacados. Para exemplificar, na primeira chave, em que dois pontos se destacam, o ponto na posição “1” associa-se a cada um dos outros, ou seja: (“1” e “2”), (“1” e “3”), (“1” e “4”), (“1” e “5”) e (“1” e “6”), totalizando cinco (5) combinações; o ponto na posição “2” associa-se aos pontos de posições “3”, “4”, “5” e “6”, isto é, (“2” e “3”), (“2” e “4”), (“2” e “5”) e (“2” e “6”), o que totaliza mais quatro (4) combinações; o ponto na posição “3” tem três (3) combinações: (“3” e “4”), (“3” e “5”) e (“3” e “6”); o ponto na posição “4” tem duas combinações: (“4” e “5”) e (“4” e “6”), e, finalmente, o ponto na posição “5” apresenta uma única combinação: (“5” e “6”). Portanto, quando dois pontos se destacam, somam-se quinze (15) combinações.

Quando três pontos se destacam, começando com o ponto na posição “1”, têm-se dez (10) possibilidades, quais sejam: (“1”, “2” e “3”), (“1”, “2” e “4”), (“1”, “2” e “5”), (“1”, “2” e “6”), (“1”, “3” e “4”), (“1”, “3” e “5”), (“1”, “3” e “6”), (“1”, “4” e “5”), (“1”, “4” e “6”) e (“1”, “5” e “6”); para o ponto “2” são mais seis (6) possibilidades representadas pelas posições (“2”, “3” e “4”), (“2”, “3” e “5”), (“2”, “3” e “6”), (“2”, “4” e “5”), (“2”, “4” e “6”) e (“2”, “5” e “6”); tendo o ponto “3” como primeiro ponto a se destacar, são mais três (3) possibilidades: (“3”, “4” e “5”), (“3”, “4” e “6”) e (“3”, “5” e “6”) e, ainda, uma (1) combinação, que é: (“4”, “5” e “6”), somando vinte (20) combinações. Seguindo o mesmo critério, observado o esquema gráfico da figura 11, para (4) pontos se destacando, formam-se quinze (15) combinações. Para (5) cinco pontos, assim como para (1) um ponto se destacando, constata-se que são seis (6) possibilidades e, para quando seis pontos se destacarem, obter-se-á apenas uma (1) possibilidade.

Essa resolução mostra que PAU foi capaz de considerar os dados expressos no problema, encaminhando uma resolução que prevê todas as situações possíveis entre todos os elementos em questão, combinando-os sistematicamente, exibindo, desse modo, um raciocínio combinatório característico do pensamento operatório-formal, o que lhe possibilita considerar cada uma das variáveis, como também todas as suas combinações.

Dessa forma, com um escore de 5,2 pontos, a conduta desse participante foi caracterizada como a do Tipo III, apresentando um raciocínio orientado pela sistematização dos conceitos e procedimentos utilizados para a solução das questões. Caracteriza-se pela mobilidade operatória, em que as hipóteses formuladas se encontram embasadas em conceitos que, por serem generalizáveis, puderam ser aplicados em diferentes contextos.

Ao jogar o “Quarto”, pôde-se observar que as estratégias empregadas por PAU (15;05) combinavam o ataque com a defesa em uma análise que visava impedir o alinhamento com a peça colocada em jogo pelo adversário, ao mesmo tempo em que escolhia uma peça que poderia formar, para si, um alinhamento, antecipando, de forma completa, uma visão conjunta do tabuleiro e das peças. Os atributos das peças, em diversas das partidas disputadas, foram reconhecidos através de suas semelhanças e diferenças. Utilizou, também, as próprias experiências para modificar as estratégias de jogo, tornando-as mais eficientes, no intuito de vencer as partidas. As respostas para algumas das questões formuladas puderam auxiliar nessa análise:

P: - Você percebeu qual foi a estratégia de seu adversário?
PAU: - *Percebi. Ele abre frentes de jogo, colocando as peças que eu escolho para ele em fileiras que tenham algum atributo comum, enquanto na fileira ainda há até duas peças, depois ele vai fechando com peças que não formam o Quarto. Quando ele me dá uma peça, ele escolhe aquela que eu tenha um menor número de casas livres para colocá-la, quer dizer, que faça o "Quarto" para ele em um maior número de lugares.*
P: - Você acredita que, quanto mais detalhada for sua análise, maior a chance de vencer seu adversário?
PAU: - *Sim, é claro. Se eu analisar tudo posso encontrar caminhos que meu adversário pode não ter pensado. Não no caso do computador, mas, mesmo com ele, ajuda a encontrar um jeito de vencer.* (obs: venceu muitas das partidas que disputou)
P: - Esse procedimento de análise pode ser utilizado em outras situações, por exemplo, para resolver problemas escolares?
PAU: - *Sim. Ajuda você a pensar melhor em tudo. Num teste, as eliminações fazem as escolhas.*
P: - Em um problema escolar, como você escolhe os conceitos de que dispõe para resolvê-lo?
PAU: - *Observando o que o problema pede e o que se encaixa para resolvê-lo.*
P: - Como utilizar o que você aprendeu com as estratégias para jogar na resolução de problemas escolares?
PAU: - *Prevendo o que poderia acontecer, estabelecendo relações entre as variáveis, por exemplo, na análise de gráficos, em Química também, observando o estado das substâncias, e assim por diante.*

Como exemplo da atuação desse participante, a figura 13 mostra que a colocação das peças obedecia a um critério que combinava ataque e defesa, e ainda, com a intenção de antecipar as possíveis jogadas do computador. Em uma análise criteriosa, o aluno, faltando ainda, quatro peças para serem colocadas, já se sentia em condições de predizer quais seriam as melhores jogadas, para, dessa forma, vencer a partida, com as seguintes explicações:

PAU: *Não posso colocar a peça que ele me deu nas duas casas das extremidades* (1D e 4A) *porque na coluna só tem peças grandes e na linha, são todas azuis e também "sem furo". Então vou colocar na segunda coluna que tem apenas peças quadradas pequenas. Dou para ele o quadrado, pequeno, vermelho e ele só vai poder jogar naquela casa da primeira coluna* (1D). *Aí qualquer uma das peças que ele me der eu coloco ali no meio* (3C) *e dou a ele a que restou, que, por ser "sem furo", eu ganho a partida.*

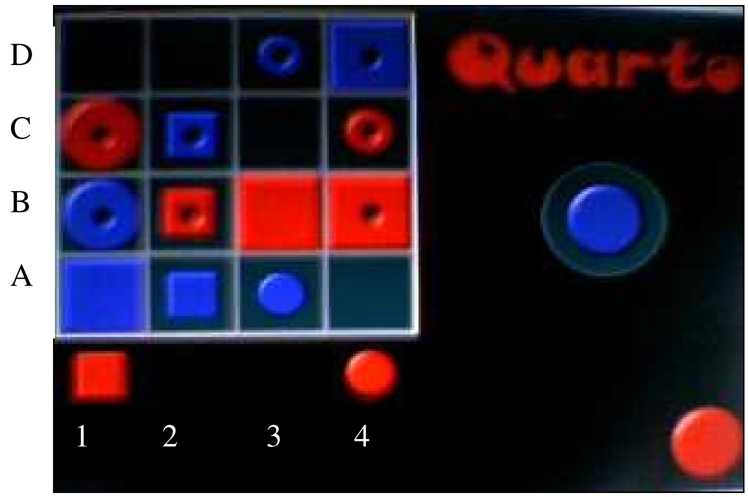
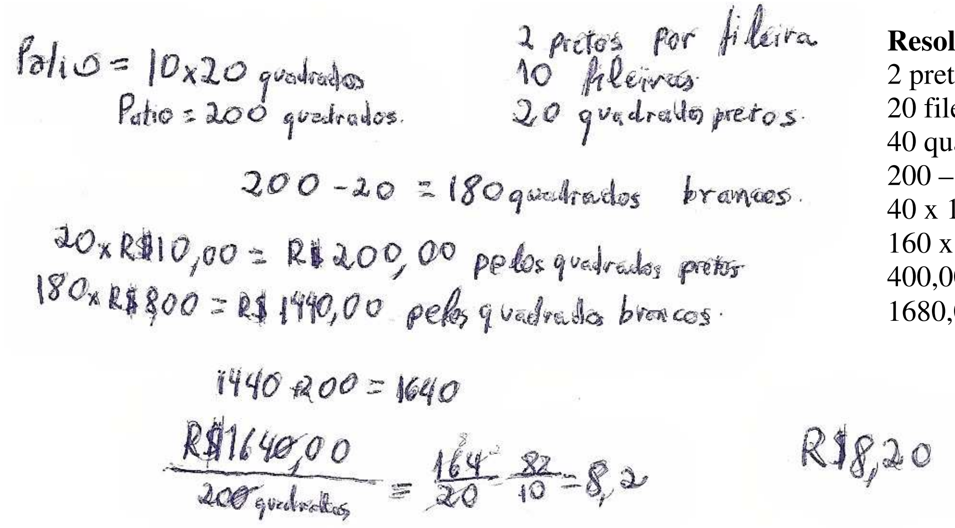


Figura 13: Configuração do tabuleiro em partida disputada por PAU

Por tudo isso, com um escore de 5,2 pontos nas Sessões de Intervenção com o jogo "Quarto" e, portanto, com uma conduta classificada como a do Tipo C, PAU mostrou capacidade em realizar operações virtuais promovidas pela inversão entre o real e o possível, e uma atitude favorável em relação à resolução de problemas matemáticos, ou os de outros conteúdos, demonstrando possuir conceitos e procedimentos caracterizados, segundo Piaget (1995), por uma conceituação progressiva que lhe permitia a tematização própria de quem, em um patamar operatório-formal, distingue forma e conteúdo, o que lhe valeu para o empreendimento bem sucedido das provas que realizou.

Todavia, dentre os alunos da primeira série, a atuação que mais chamou a atenção pela diferença de pontos marcados entre a aplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos e a sua reaplicação, foi a de FRA (15;10). Na primeira aplicação da prova (vide Apêndice C), não fez o primeiro problema, deixando, também, de assinalar quantas vezes fez a leitura de seu enunciado, explicando, apenas, que *"não consegui fazer"*. Quanto ao segundo, resolvido conforme mostra a figura 14, obteve uma pontuação parcial (4,0 pontos). Justificou como resolver o problema de forma adequada, por meio das questões propostas, respondendo que leu o problema duas vezes e encaminhou a solução, fazendo uso do padrão do desenho. Selecionou os conceitos de proporção e área, com a explicação: *utilizei da proporção de quadrados brancos para negros, e da quantidade total de quadrados para descobrir quanto custou tudo e depois dividi o preço pela quantidade*. Não chegou, porém, à solução correta por ter considerado o número de quadrados pretos contados por colunas e utilizado a quantidade de linhas para totalizar o número desses quadrados, mudando, portanto, o referencial para totalizar o número de quadrados pretos.

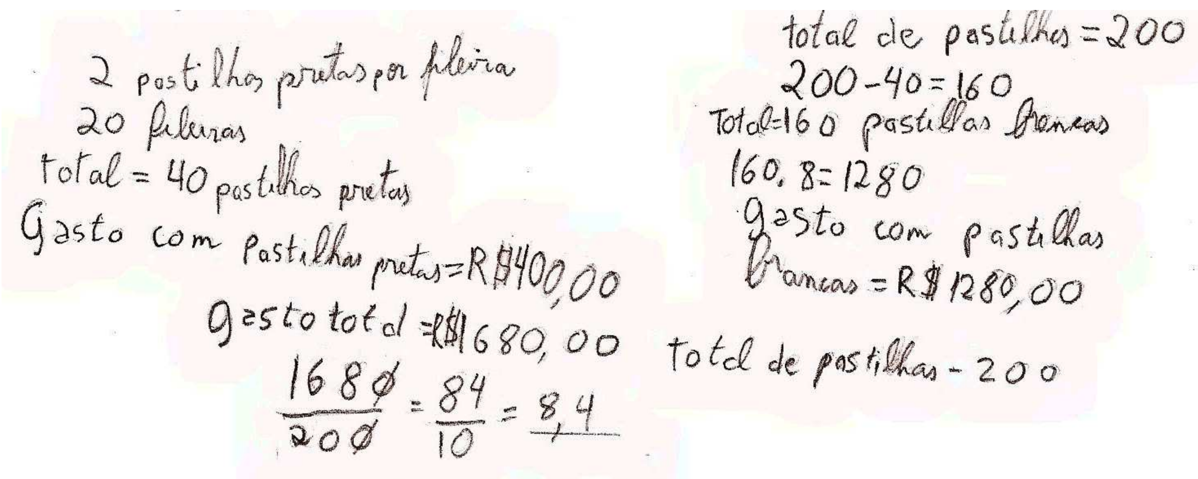


Resolução correta:
2 pretos por fileira
20 fileiras
40 quadrados pretos
200 – 40 = 160 q. brancos
40 x 10 = R$ 400,00
160 x 8 = R$ 1280,00
400,00 + 1280,00 = 1680,00
1680,00: 200 = R$ 8,40

Figura 14 - Resolução de FRA para o 2º problema na Prova de Conhecimentos Matemáticos

No problema três, obteve dois pontos, porque justificou como resolvê-lo de forma adequada, por meio das questões propostas, respondendo que leu três vezes o problema e assinalou que encaminharia a resolução, utilizando a contagem pela figura, utilizando a "*árvore de possibilidades*" e explicando que: *vou achar contando pelo desenho as possibilidades a serem formadas com 1, 2 e 3 pontos destacados*. Contudo, não foi eficaz ao fazê-lo. No quarto problema, leu apenas uma vez e assinalou que encaminharia a sua resolução por meio da área dos círculos comparada à área remanescente em cada quadrado, justificando, assim, corretamente, o procedimento que pretendia utilizar. Porém, uma vez mais, não concluiu de forma acertada os cálculos por ele desenvolvidos, obtendo, assim, 4,0 pontos. No quinto problema, também não obteve pontuação integral, embora tenha conseguido analisar separadamente as variáveis, escala e orientação espacial, conforme suas respostas às questões propostas, e também pela explicação dada: - *fiz por eliminatória, notei que os terrenos I, II e V não tinham a área descrita e o III não seguia a localização cardeal indicada*. Mas, ao dar a resposta, assinalou a alternativa que indicava o terreno II.

Por todos os dados coletados, tanto nas resoluções como nas questões destinadas à análise da compreensão do aluno em como pensou para solucionar os problemas propostos, pôde-se inferir que FRA foi desatento ao apresentar suas soluções, uma vez que quatro dos cinco problemas, foram explicados adequadamente, mas os procedimentos de resolução apresentaram erros que se concentraram em cálculos mal organizados e em respostas conflitantes com o raciocínio desenvolvido. Na reaplicação da prova, pôde-se supor que o aluno redobrou a sua atenção por sentir-se desafiado a pensar matematicamente e também mais motivado pelo sucesso obtido na intervenção realizada nas sessões de jogo “Quarto”, que serão discutidas adiante e que antecederam a Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos. Para Vila e Callejo (2006), o estudante pode experimentar bloqueios e dificuldades que podem ser vencidos se forem questionadas e diagnosticadas as crenças que eles têm sobre o processo de resolução de um problema. Tal processo, dizem ainda os autores, tem um componente de subjetividade, uma vez que, ao se aproximar de uma situação-problema, cada pessoa traz determinadas atitudes, crenças e sentimentos, que são influenciados por seus contextos pessoais e escolares. A figura 15 mostra o problema 2, que na reaplicação da prova foi realizado corretamente.



2 postilhas pretas por fileira
20 fileiras
total = 40 pastilhas pretas
Gasto com Pastilhas pretas = R$ 400,00
gasto total = R$ 1680,00
$\frac{1680}{200} = \frac{84}{10} = 8,4$

total de pastilhas = 200
200 - 40 = 160
Total = 160 pastilhas brancas
160 . 8 = 1280
gasto com pastilhas brancas = R$ 1280,00
total de pastilhas - 200

Figura 15 - Resolução de FRA para o 2º problema na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos

Além desse problema, também o primeiro e o quinto tiveram resoluções adequadas com explicações detalhadas dos métodos utilizados. Assim, FRA que na aplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos obteve apenas um escore de 2,0 pontos, classificando-se em uma conduta do Tipo I, na reaplicação da referida prova, obtém um escore de 4,2 pontos, que o coloca em um nível de procedimento classificado como uma conduta do Tipo III. No entanto, o que se pôde perceber entre a primeira e a segunda realização da prova é que houve maior atenção e concentração na resolução dos problemas, fato mencionado por ele e confirmado pelas explicações que deu frente às questões propostas durante as partidas do jogo “Quarto” que disputou.

Na realização das Sessões de Intervenção com o Jogo “Quarto”, as análises de FRA se mostraram criteriosas e completas. Por exemplo, quando faz observações, ao ser questionado sobre a escolha de estratégias para colocar uma peça em jogo, diz: *formar o maior número de possibilidades para depois ir fechando e procurando manter a maior quantidade de atributos comuns.* Quanto à estratégia do adversário, ele comenta que é *sempre entregar a peça que tem maior número de casas possíveis que formam um alinhamento*, e confirma que é grande a relação entre a analise do jogo e a possibilidade de vitória.

A estratégia escolhida por FRA pôde ser observada na figura 16, que mostra em uma mesma linha ou coluna, a reunião de atributos comuns, ao que ele chamou de “formar o maior número de possibilidades”. A análise da melhor peça a ser entregue deu-lhe a vitória em um grande número de partidas, como nessa, em que, ao colocar em jogo o círculo grande e com furo, para que o computador o movimentasse, venceu, uma vez que, em qualquer posição que ela fosse colocada, havia um atributo em comum: o tamanho grande para a linha D e para a coluna 3, ou o furo para a linha C, e isso, ainda restando três “casas” vazias.

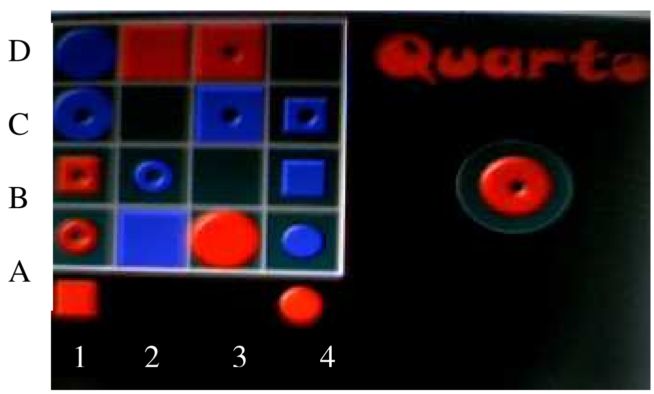


Figura 16 – Configuração do tabuleiro em partida disputada por FRA

Com relação a utilizar esse procedimento de análise para outras situações como, por exemplo, resolver problemas, comenta que:

> FRA: *Depende do problema. O tipo de raciocínio pode não ser o mesmo, porque no jogo estou vendo a situação e no problema tenho que reconhecer os conceitos, mas me ajuda a pensar em todos os caminhos que disponho para resolver o problema e utilizar o mais conveniente para a situação em que está ocorrendo.*

Disse ainda que participar das Sessões de Intervenção com o Jogo “Quarto” o deixou “*mais ligado*” para reunir os conceitos de que dispunha e resolver as situações propostas.

Pelo conjunto dos pontos obtidos nas Sessões de Intervenção com o Jogo “Quarto”, os procedimentos de FRA foram classificados como uma conduta do Tipo C, que é aquela em que o participante demonstra saber escolher as melhores estratégias, conseguindo tomar consciência dos erros cometidos em partidas anteriores para, com eles, aprender e, assim, possibilitar novas vitórias que podem ser explicadas de forma lógica e organizada. Por essas razões, pode-se inferir que o participante mostrou-se capaz de analisar todas as possibilidades existentes, verificando quais delas eram possíveis, sem de fato realizá-las na ação, o que se configura como uma forma de raciocínio hipotético-dedutivo, confirmado por sua atuação na Prova das Permutações.

Nesta prova, FRA não teve nenhuma dificuldade em predizer e realizar as permutações para três e para quatro elementos, formulando explicações, como a que se encontra transcrita, quando se solicitou que fizesse a predição para quatro cores: - *24. a azul vai interagir de quatro maneiras com as outras três que vão interagir de seis maneiras entre si* Utilizou o mesmo raciocínio para dar a resposta de quantas permutações poderiam ser feitas para um número maior de cores, dizendo: - *sempre vou utilizar a quantidade de cores para interagir com a quantidade de permutações que posso fazer com as n-1 cores que tinha anteriormente*, o que o coloca num nível operatório-formal B, segundo as considerações de Longeot (1974).

Assim, a análise global da atuação de FRA mostra que seu raciocínio esteve sempre orientado para considerar situações hipotético-dedutivas que prevalecem em um pensamento com estrutura operatório-formal e os insucessos apontados, quando da primeira aplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, ocorreram, talvez, por falta de concentração, atenção, interesse ou, ainda, de uma análise mais criteriosa na leitura dos problemas, e não pela inexistência dessa estrutura de pensamento. Reafirma-se, desse modo que as referidas sessões de intervenção tiveram, apenas, a intenção de oferecer situações que estimulassem a análise dos problemas apresentados, considerando-se que a possibilidade de generalização, característica do pensamento formal, viesse a permitir que as mesmas formas utilizadas para a análise do jogo fossem aplicadas em outro conteúdo representado pelos contextos oferecidos pelos problemas sugeridos.

Nesse sentido, Macedo Petty e Passos (2000) afirmam que, ao se trabalhar em um contexto de situações-problema, por meio de um jogo de regras, o oferecimento de um obstáculo que represente alguma situação de impasse ou decisão sobre qual a melhor ação a ser realizada pode favorecer o domínio cada vez maior da estrutura do próprio jogo e, com isso, promover uma análise sobre a própria ação de jogar, que pode também ser empregada, por sua semelhança, ao contexto de resolução de problemas. Reiterando tais considerações, Oliveira (2004) afirma serem os jogos de regras situações privilegiadas para o desenvolvimento de habilidades e competências cognitivas que, ao se tornarem parte da estrutura mental do sujeito, podem ser transferidas de contextos específicos para outros similares, como os utilizados para a resolução de problemas, quando estes são considerados como um ato criativo.

No conjunto, os participantes da primeira série do Ensino Médio manifestaram sua satisfação em participar da pesquisa, ao deixarem depoimentos que mencionavam o quanto as análises solicitadas durante o jogo puderam ser úteis para que resolvessem, com mais facilidade, os problemas apresentados e, ainda, que fariam, eles mesmos, uso de análises semelhantes em outros contextos para que não se esquecessem de como poderiam valer-se de situações prazerosas que os beneficiassem na resolução de problemas, não só os de conteúdo matemático como também os relacionados aos de outras disciplinas.

4.2.2 Análise dos Alunos da Segunda Série do Ensino Médio

A participação dos alunos da segunda série foi, dentre as três séries, a que apresentou maior regularidade nos resultados, lembrando ser PCM, a Prova de Conhecimentos Matemáticos, SIJQ, as Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto", RPCM, a Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos e, PP, a Prova das Permutações.

Série	Partic.	Idade	PCM	SIJQ	RPCM	PP
2º série	ADR	16;05	2,0	4,5	4,2	4,0
	FER	16;01	5,2	5,2	5,2	6,0
	GAB	16;09	2,2	4,5	3,2	4,0
	LUC	15;11	3,8	4,5	6,0	6,0
	MAR	16;03	6,0	5,2	6,0	6,0
	PED	16;09	5,0	5,2	6,0	6,0
	RAF	16;10	3,4	4,5	4,2	4,0

QUADRO 14 – Participantes da segunda série do Ensino Médio

Dos alunos (N = 7) investigados, três, ADR (16;05), GAB (16;09) e RAF (16;10) obtiveram na, Prova das Permutações, um escore de 4,0 (quatro) pontos, enquanto os demais FER (16;01), LUC (15;11), MAR (16;03) e PED (16;09) conquistaram a totalidade dos pontos, ou seja, 6,0 (seis) pontos. O raciocínio apresentado pelos alunos que atingiram seis pontos mostrou a utilização de um sistema apropriado para generalizar as permutações para "n" elementos quaisquer, com justificativas matematicamente corretas através de um raciocínio de recorrência, o que os coloca, segundo os critérios de Longeot (1974), num nível operatório-formal B, diferentemente daqueles que totalizaram quatro pontos, que, embora tenham obtido sucesso para antecipar o número de permutações para quatro elementos, falharam na predição para cinco ou mais cores e, por isso, encontram-se em um nível operatório-formal A.

Possuir um nível de raciocínio caracterizado como operatório-formal, ainda que em construção, significa, segundo Piaget e Inhelder (1976), ter a possibilidade de referir-se não apenas diretamente a objetos, mas a elementos verbais que podem se manifestar na forma de proposições que se referem a situações experimentais ou problemas puramente verbais, e ainda, terem a possibilidade de ultrapassar o conjunto das transformações que se referem diretamente ao real, subordinando-as a um sistema de combinações hipotético-dedutivas.

Um nível de raciocínio operatório-formal ainda em construção (nível IIIA) foi o apresentado por GAB (16;09) que, após predizer que seriam 24 permutações para quatro cores, disse que, se acrescentássemos mais uma cor, totalizariam 80 permutações, justificando erroneamente que esse número deveria vir de uma progressão geométrica. Na aplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos (vide Apêndice C), encontrou o resultado do primeiro problema, após fazer um esquema gráfico do que era solicitado em seu enunciado, por meio de tentativas, embora, ao responder as questões formuladas em relação a esse problema, GAB assinalou que fez a leitura dele quatro vezes ou mais, que encaminharia a solução fazendo uso de um desenho e de Pitágoras, utilizando os conceitos de quadrado, eqüidistância e triângulos, e explicou que: *primeiro tentei resolver sem sucesso, depois fui verificando os dados de cada alternativa até achar a certa*. Quanto ao segundo problema, na Prova de Conhecimentos Matemáticos, a resolução apresentada mostrou-se incorreta, além de desorganizada graficamente, mas acertou na justificativa (fig 17) e também ao responder adequadamente que encaminharia a resolução, utilizando o padrão do desenho, associado ao conceito de proporção.

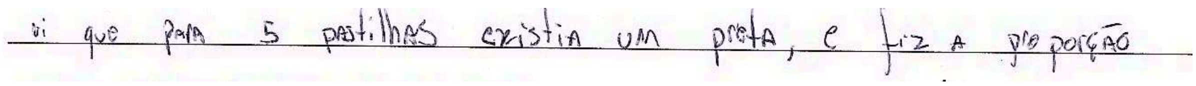


Fig 17 – Justificativa dada por GAB para o 2º problema.

No terceiro problema, entendeu que deveria fazer combinações como assinalou nas questões destinadas à compreensão do raciocínio empreendido pelo participante. Não mencionou, porém, nenhuma explicação de como o faria, e, efetivamente, não as realizou de forma sistemática. No quarto problema, anunciou que leu quatro vezes ou mais seu enunciado, mas não apontou quais conceitos utilizaria para encaminhar a solução. Acertou o quinto problema, explicando corretamente:

> GAB: *primeiro localizei o leste, sobraram 3 terrenos, 2 eram quadrados, e o outro retângulo, e de acordo com a escala, e com a área, o terreno mais adequado era o IV.*

Resumindo: o aluno recebeu 11 pontos na Prova de Conhecimentos Matemáticos, sendo dois pontos para o primeiro problema por ter representado graficamente o que era solicitado e, também, por encontrar a solução correta por meio de tentativas, a partir das alternativas apresentadas; dois pontos para o segundo problema, quando explicou corretamente e mostrou que percebe a regularidade contida no padrão do desenho, um ponto para o terceiro problema quando percebeu a necessidade de fazer combinações, porém sem as efetuar de forma sistemática; nenhum ponto no quarto problema e, finalmente, acertou o quinto problema.

Na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, que ocorreu após as Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto", manteve o mesmo tipo de resolução para o primeiro problema, mas, para o segundo problema apresentou uma resolução correta e organizada graficamente, como se pode ver na figura 18.

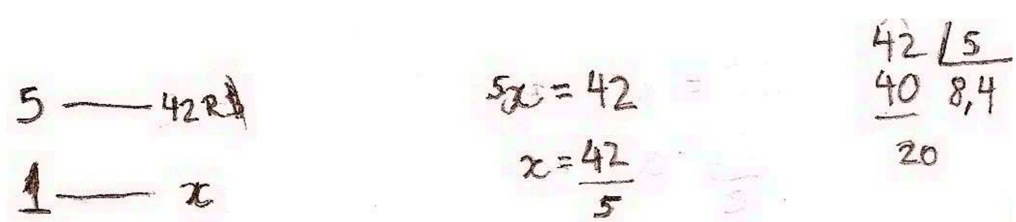


Fig 18 - Resolução de GAB para o 2º problema na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos

A resolução de GAB considera que a área de cada pastilha seja igual a 1 metro quadrado. Considerando que em cada 5 ladrilhos, 4 são brancos e 1 é preto, o preço total dos 5 m^2 será R$ 42,00 (1 x 10,00 + 4 x 8,00). □□■□□

Ao estabelecer a proporção:

5 → 42
1 → x   resultando o preço do metro quadrado do revestimento → R$ 8,40

Para o problema três recebe a mesma pontuação que a recebida na primeira aplicação; para o quarto problema, não obtém pontuação máxima, mas explica corretamente como pensou para encaminhar a sua solução, após assinalar que fez a leitura de seu enunciado uma única vez, e acertou o quinto problema, porém com maior precisão nas explicações de como analisou separadamente as variáveis nele contidas, relatando: *primeiro vi aqueles terrenos que estavam voltados para o leste, e através da escala, achei o resultado, o terreno IV.* Assim, na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, GAB fez 16 pontos, apresentando, além da melhor organização de todo o conjunto da prova, as seguintes modificações: o acerto total do segundo problema e a explicação correta para o quarto problema, quando escreveu: *vi o quanto que cada tampa ou conjunto de tampas ia ocupar e retirei da área total.*

Com o escore de 2,0 pontos na Prova de Conhecimentos Matemáticos e 3,2 pontos na reaplicação da mesma, GAB evoluiu de um nível mais elementar para um nível intermediário de conduta, o Tipo II, mostrando um progresso nos procedimentos e no raciocínio apresentados por ele. Nos problemas em que o aluno obteve sucesso, pode-se inferir que subordinou o real ao possível por ter escolhido as relações consideradas verdadeiras, para delas retirar todas as ligações possíveis e de forma dedutiva. Considerando, segundo Piaget (1985), que a construção cognitiva, dos esquemas às estruturas é constantemente motivada pela dupla necessidade de uma ampliação do meio e de um crescimento das "capacidades do organismo", pode-se entender que a organização das sessões de intervenção com o jogo "Quarto" atuaram no sentido de conduzir o participante a novas atualizações, que permitiram a continuação do processo de reequilibração que se referem tanto a perturbações no campo real como no campo virtual.

De fato, também um tipo de conduta mais evoluído foi observado durante as partidas de "Quarto", quando foram realizadas as sessões de intervenção. O escore obtido por 4,5 pontos foi indicativo de que, durante as partidas disputadas, as estratégias utilizadas procuravam combinar o ataque com a defesa, coordenando as semelhanças e diferenças dos atributos em diversas partidas, além de fazer uso de suas próprias experiências e as de seu adversário (o computador) para modificar as táticas de jogo. Todos esses fatos foram avaliados pela observação durante a realização das sessões de intervenção e pelas respostas dadas durante o congelamento de algumas jogadas em diferentes partidas disputadas, como a que é apresentada na figura 19, e que seguem transcritas.

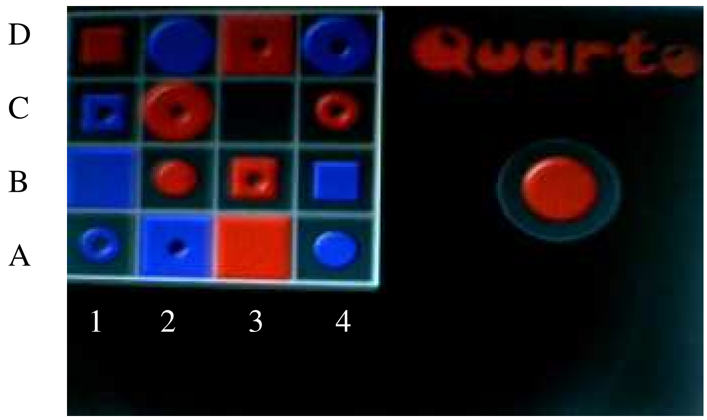


Figura 19 – Jogo disputado por GAB

P: O que você levou em conta para escolher essa peça?
GAB: *A possibilidade de que o computador a coloque em uma casa que me favoreça para fazer um alinhamento.*
P: Por que escolheu essa casa para colocar a peça que lhe foi dada pelo seu adversário?
GAB: *Para abrir possibilidades de fazer um alinhamento, ou para não colocá-la na casa que completa o "quarto" porque assim perco a partida.*
P: Você percebeu qual foi a estratégia de seu adversário?
GAB: *Percebi que ele vê os atributos iguais e procura, quando tem apenas duas peças, colocá-las em um mesmo alinhamento, mas quando tem três, ele abre outra "fila" para não perder o jogo.*
P: Você vai ganhar a partida?
GAB: *Já ganhei, ele terá que colocar a peça, na casa que falta e serão todas vermelhas na coluna ou circulares na diagonal.*
P: Você acredita que quanto mais detalhada for sua análise, maior a sua chance de vencer seu adversário?
GAB: - *Lógico! Porque se tem uma resolução, e se eu sei que tem um jeito para ganhar, é só prestar atenção.*
P: Esse procedimento de análise pode ser utilizado em outras situações, por exemplo, para resolver problemas escolares?
GAB: *Na escola sim, esse tipo de análise pode ser utilizado tanto em problemas como no jogo. Também depende do que eu tenha aprendido nas aulas. No vestibular, o que complica é o tempo.*
P: O que foi mais instrutivo para você no decorrer das partidas?

> GAB: *Adquirir maior atenção e rapidez de raciocínio.*
> P: Como utilizar o que você aprendeu com as estratégias para jogar na resolução de problemas escolares?
> GAB: *O mais legal que eu aprendi é fazer a análise, parar para pensar e não ir por tentativas.*

Ao mencionar: “para abrir possibilidades de fazer um alinhamento”, GAB, confirma a presença de possíveis dedutíveis, que são revelados pela natureza antecipatória de seu argumento e mostra, também, pelo conjunto de todas as suas respostas, que se valeu das situações sugeridas durante as partidas para generalizá-las a outras situações, em particular, para a resolução dos problemas propostos. Entretanto, pode-se avaliar que nas situações nas quais não havia a compreensão do conceito matemático envolvido, não houve alteração na forma de resolvê-lo, reiterando-se a necessidade de embasamento conceitual para que se possa observar os efeitos das sessões de intervenção com o jogo “Quarto”.

Entretanto, o jogo, pelo estímulo positivo que representa, pode permitir ao estudante buscar os conhecimentos necessários à realização da tarefa, uma vez que, de acordo com Piaget (1977), a lacuna passa a ser uma perturbação que irá manter o esquema assimilador ativado. Também e esse respeito, Alves, E (2006) enfatiza ser o trabalho com jogos uma alternativa para a aprendizagem significativa da Matemática que se dá pela relação direta com a resolução do problema, e se traduz em aula, por maior motivação, interesse, criatividade, autonomia e prazer. Contudo, não é uma fórmula mágica para o êxito dessa proposta.

A melhor atuação de todo o grupo partiu de MAR (16;03) que, na Prova das Permutações, obteve escore máximo com prognósticos e ações que demonstraram conhecimento e fundamentação lógico-matemática. Também chamou a atenção o fato de, tanto na aplicação como na reaplicação da prova de conhecimentos matemáticos, ter solucionado todos os problemas corretamente, e com explicações matemáticas sistematizadas e formais.

Destaca-se a resolução e a justificativa do problema três, mostradas nas figuras 20 e 21, considerando-se que esse foi o que apresentou, para a quase totalidade dos participantes, o maior grau de dificuldade. Como explica MAR, para cada um dos seis pontos, há duas possibilidades, a de estarem destacados, ou não, computando-se, portanto, 2^6 possibilidades, menos uma que é aquela em que nenhum dos pontos se destaca.

$2^6 - 1 =$

$64 - 1 = 63$

Fig 20 - Resolução de MAR para o 3º problema

COMO HAVIAM 6 "PONTOS" E 2 POSSIBILIDADES PARA CADA "PONTO", HAVIAM 2^6 POSSIBILIDADES -1, A DE TODOS SEREM IGUAIS

PS: NÃO PODERIAM SER 3 POSSIBILIDADES, POIS NÃO TEM OPÇÕES

Fig 21- Justificativa de MAR para a resolução do 3º problema

MAR demonstrou em todos os demais problemas a mesma compreensão e o mesmo domínio de conteúdo; porém, na primeira sessão de intervenção com o jogo "Quarto", ele não demonstrou o mesmo domínio, fato que o levou a descuidar-se e, como conseqüência, perder muitas partidas. Quando lhe era oferecido um suporte para a análise das jogadas, o aluno pedia que o deixasse resolver sozinho e, assim, muitas vezes, cedeu a vitória ao adversário. No entanto, a partir do segundo encontro, a situação mudou, e então passou a ganhar todas as partidas que disputou, demonstrando satisfação e organizando, desde a primeira jogada, uma estratégia vitoriosa para o jogo. Ao ser questionado sobre o que havia mudado e como passou a estabelecer estratégias eficientes para ganhar o jogo, respondeu:

> MAR: *Percebi que não estava entendendo como o computador jogava, aí tentei achar esse jogo na "Internet" para treinar, mas não consegui. Daí, simulei as partidas em papel e coloquei as situações que me lembrava para testar as estratégias que o computador usava. Quando consegui entender, esse foi o resultado, agora sou capaz de vencê-lo.*

Outras respostas dadas por MAR durante as sessões de intervenção mostraram, também, o quanto ele foi capaz de abstrair regularidades, criar modelos e argumentar logicamente.

> P: O que você levou em conta para escolher essa peça?
> MAR: *A intenção de ter dois ou mais alinhamentos com a possibilidade de formar o "Quarto".*
> P: Por que escolheu essa casa para colocar a peça que lhe foi dada pelo seu adversário?

MAR: *Procuro manter a mesma quantidade de possibilidades abertas para fazer o "Quarto". Mas quando são muitas as possibilidades eu escolho a "casa" que fecha a chance de fazer um alinhamento.*
P: Você percebeu qual foi a estratégia de seu adversário?
MAR: *Percebi e estou usando a mesma que ele.*
P: Você acredita que quanto mais detalhada for sua análise, maior a sua chance de vencer seu adversário?
MAR: - *Obvio*.
P: Como toda essa análise pode ser útil para a resolução de outros problemas?
MAR: *Porque eu tenho que analisar quais são os recursos disponíveis dentre a gama de conhecimentos que tenho, observar e decidir pelo melhor.*
P: Em um problema escolar, como você escolhe os conceitos de que dispõe para resolvê-lo?
MAR: *Penso primeiro nos conceitos adquiridos mais recentemente e depois recorro aos mais antigos.*
P: Os erros cometidos foram úteis para seu aprendizado?
MAR: *Errando você vê novos pontos de vista.*
P: Como utilizar o que você aprendeu com as estratégias para jogar na resolução de problemas escolares?
MAR: *Já estou acostumado a jogar outros jogos de estratégia. Sempre achei que a resolução de problemas e os jogos de estratégia se relacionam logicamente. O que é desenvolvido para uma coisa poderá ser útil para a outra.*

Essa atitude demonstrada pelo aluno vem ao encontro das idéias de Perales (2000), que avalia ser um problema a peça-chave para o início de uma atividade de ensino-aprendizagem. O autor diz que, para neutralizar o nível de incerteza gerado pela situação-problema, são desencadeados mecanismos cognitivos, afetivos e práticos, e isso, provavelmente foi o que ocorreu com MAR que, aparentemente, criou um modelo matemático para entender como o computador estabelecia suas estratégias para que, uma vez desvendadas, pudessem ser por ele utilizadas. Também se pode considerar que utilizou as mesmas fases descritas por Polya (1978), relacionando-as com a obtenção do objetivo do jogo, conforme citou Corbalán (2000), ao apreciar a comparação entre "compreender o problema" e entender os componentes do jogo, entre "traçar um plano para resolver o problema" e interiorizar os movimentos buscando estratégias para atingir o objetivo do jogo, entre "executar o plano traçado" e colocar em prática as estratégias selecionadas, e, entre "comprovar os resultados" e refletir sobre o processo seguido.

Todavia, todo esse trabalho desenvolvido por MAR foi possível porque o desequilíbrio provocado pelos problemas propostos, segundo Piaget (1977), se constituiu em um elemento motivador que, na possibilidade de sua ultrapassagem, se transformou no motor de suas investigações para a procura de um novo equilíbrio, cuja forma é sempre qualitativamente melhor que a anterior, levando o aluno a novas regulações e, conseqüentemente, ao progresso de seus conhecimentos. De fato, para Piaget e Inhelder (1976), caso o sujeito possua todos os requisitos indispensáveis para a solução de um problema, o reequilíbrio somente será atingido quando o problema for solucionado. Isto é, na suposição de ele possuir os métodos e operações indispensáveis à sua realização, pode-se dizer que, ao concretizá-la, o equilíbrio atinge maior estabilidade em virtude da compensação que é possibilitada pelo conjunto das transformações virtuais, o que, no caso, significou para MAR utilizar justificativas formais para resolver os problemas propostos e vencer as partidas disputadas com o computador.

Os desempenhos de FER (16;01) e PED (16;09), igualmente consistentes, reforçaram o ponto de vista de que os alunos da segunda série do Ensino Médio, que aceitaram participar da pesquisa, atuaram demonstrando um tipo de pensamento que, de acordo com Piaget e Inhelder (1976), evoluíam para as operações de segundo grau, possibilitando-lhes a inversão de sentido entre o real e o possível, e permitindo que não se limitassem a raciocinar diretamente com o apoio dos objetos concretos ou suas manipulações, mas sim, de modo operatório, a partir das hipóteses enunciadas verbalmente.

Em geral, esses participantes expressaram, durante os encontros individuais destinados às Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto", como foi importante para eles a oportunidade de desenvolverem estratégias para o jogo e depois utilizá-las na resolução de problemas. E mais: em seus depoimentos, após a Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, indicaram que as análises realizadas foram úteis quando resolveram novamente os problemas, o que, segundo GAB, *ajudou muito a notar detalhes na leitura da proposta para compreender melhor os problemas, inclusive evitando o erro.*

4.2.3 Análise dos alunos da terceira série do Ensino Médio

Dentre os participantes da terceira série (N = 7), conforme aponta Quadro 15, todos, exceto NAT (17;06) e REN (17;07) atingiram 6,0 (seis) pontos na Prova das Permutações. Essa pontuação indica, de acordo com Longeot (1974), que BRU (17;00), DAP (16;09), GUS (17;04), PRI (17;05) e ROS (17;01) atingiram um patamar de pensamento operatório-formal B por terem sido capazes de generalizar as permutações para n elementos quaisquer e justificar matematicamente esse raciocínio, lembrando que PCM, é a Prova de Conhecimentos

Matemáticos, , SIJQ, as Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto", RPCM, a Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos e PP, a Prova das Permutações.

Série	Partic	Idade	PCM	SIJQ	RPCM	PP
3ª série	BRU	17;00	4,0	4,5	5,0	6,0
	DAP	16;09	3,8	4,5	4,2	6,0
	GUS	17;04	5,2	4,5	4,6	6,0
	NAT	17;06	1,6	2,0	3,4	3,0
	PRI	17;05	5,0	3,5	5,0	6,0
	REN	17;07	3,6	2,0	3,8	3,0
	ROS	17;01	4,0	3,5	4,4	6,0

QUADRO 15 – Participantes da terceira série do Ensino Médio

NAT (16;06) e REN (16;07), participantes que atingiram 3,0 (três) pontos na aplicação da Provas das Permutações, ao predizerem o resultado para quatro cores responderam: *- 12. Fiz 4 x 3.* Quando se solicitou que realizassem as permutações, necessitaram da intervenção da pesquisadora mais de uma vez para completarem as 24 combinações. Não obtiveram êxito ao antecipar o número de permutações para cinco cores e, portanto, a prova foi dada como encerrada e creditado a ambos o escore já mencionado. Com esse resultado, pode-se inferir que o pensamento desses dois participantes ainda se encontra preso a formas de raciocínio que incidem sobre a realidade, impedindo-os de realizarem com sucesso operações de segundo grau, que consistem em refletir sobre implicações e incompatibilidades estabelecidas entre proposições.

O caso de NAT (16,06) torna-se interessante para ser acompanhado mais proximamente pela diferença entre os escores apresentados na aplicação e reaplicação da prova de conhecimentos matemáticos. Na aplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos (ver Apêndice C), os pontos recebidos foram provenientes do acerto do segundo problema (6,0 pontos) e da pontuação intermediária do quinto problema (2,0 pontos), que, embora pelas justificativas dadas tenha reconhecido a necessidade de separar as variáveis, não utilizou o conceito de escala e, por isso, não obteve sucesso ao resolver o problema. Para o primeiro problema NAT assinalou que leu seu enunciado duas vezes, que encaminharia a solução fazendo uso de um desenho e utilizaria os conceitos de quadrado e eqüidistância. Contudo, sua representação gráfica, como mostra a figura 22, foi insuficiente para que o problema fosse entendido e solucionado corretamente.

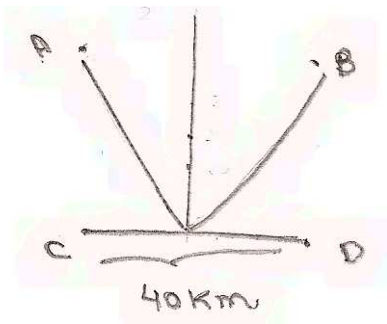


Fig 22: Esquema gráfico de NAT para o primeiro problema na Prova de Conhecimentos Matemáticos

No segundo problema, cujo acerto foi total, NAT indicou que leu seu enunciado duas vezes e fez uso do padrão do desenho, selecionando o conceito de proporção para a sua resolução e explicou como pensou para resolvê-lo: *Tentei de várias maneiras contar os quadradinhos, enfim resolvi contar quantos quadradinhos tinham em cada linha, tirei os que eram pretos, multipliquei pretos e brancos pela quantidade de linhas e utilizei a regra de três.* Apesar de sua explicação não ser detalhada é coerente com a resolução como mostra a figura 23.

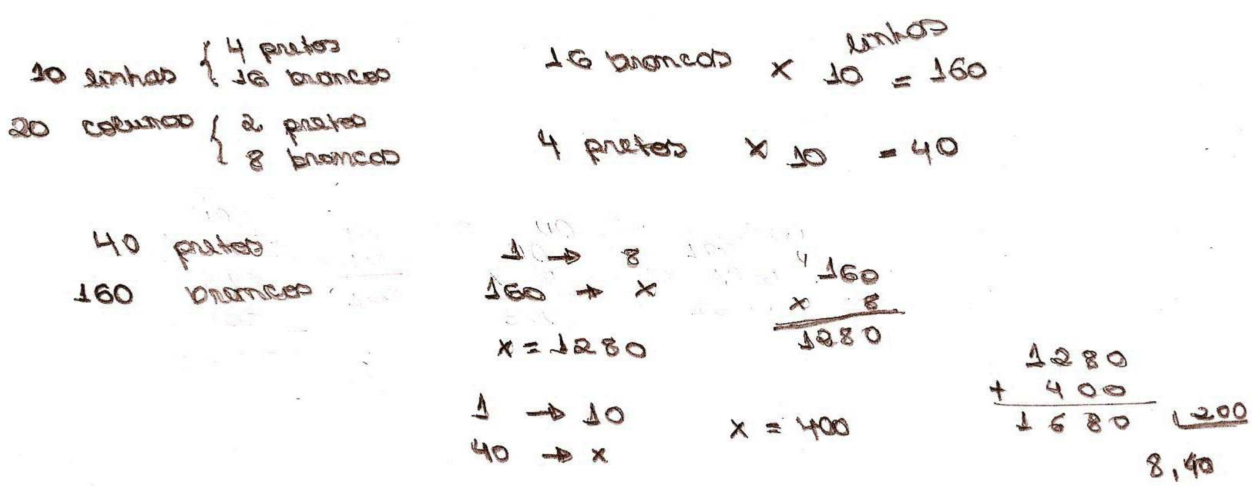


Figura 23: Resolução de NAT para o segundo problema na Prova de Conhecimentos Matemáticos

Não resolve o terceiro problema, e também não responde as questões destinadas à compreensão do raciocínio que seria utilizado para o encaminhamento de sua solução. No quarto problema, que também não é resolvido por NAT, há apenas a indicação de que utilizaria o desenho para encontrar a sua solução. No quinto problema, anuncia que leu seu enunciado apenas uma vez, que utilizou o desenho e os pontos cardeais, e tem a necessidade de calcular a área para encontrar a resposta, que erra por não empregar a escala contida na figura.

Na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, obteve um ponto no primeiro problema, ao conseguir representar graficamente o que era solicitado em seu enunciado. Continuou acertando o segundo problema, fazendo a leitura de seu enunciado quatro vezes ou mais e justificando, desta vez, de forma mais concisa: *1º descobri a proporção de brancos para pretos; 2º calculei o preço do metro*, porém, mantendo os mesmos procedimentos de resolução. Obteve um ponto no terceiro problema por ter anunciado que, após ter lido a sua proposta três vezes, faria a contagem pela figura, utilizando a combinatória, sem realizá-la efetivamente. No quarto problema, assinalou que leu seu enunciado três vezes e encaminhou a solução por meio do desenho e do conceito de área, explicando corretamente que: *1º descobri a área do círculo grande, médio e pequeno; 2º multipliquei a do médio por 4 e a do pequeno por 16* . Fazendo isso, resolveu o quarto problema, mas não chegou à resposta certa por erros de cálculo e, finalmente, acertou o quinto problema, justificando-o de forma correta e utilizando acertadamente o conceito de escala, como se vê na figura 24.

1º Analisei os pontos cardeais (notando o Norte no desenho)
2º Aos que restaram apliquei a escala
(Pontos cardeal e escala foram percebidos apenas na 2ª leitura)

Fig 24 - Explicação dada por NAT para o 5º problema

Dessa forma, foram creditados 17 (dezessete) pontos na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, o que lhe conferiu um escore de 3,4 pontos, apontando um progresso que representa, para esse participante, a mudança de uma conduta do Tipo I para uma conduta Tipo II. A conduta Tipo I pode representar que o raciocínio de NAT não alcançou a generalidade necessária para relacionar os diferentes conceitos aos conteúdos propostos nos problemas, pelo que se pôde observar, porque ainda necessitava se apoiar no real ou por não ter construído os conhecimentos matemáticos suficientes para solucionar os problemas. A passagem para uma conduta Tipo II, analisada por meio das questões resolvidas ou encaminhadas de forma correta na reaplicação da prova, mostra que as inferências realizadas por NAT evoluíram quando ocorreu a tomada de consciência em situações como a apontada por ele, ao situar: *ponto cardeal e escala foram percebidos apenas na 2ª leitura.*

A consciência das dificuldades em resolver os problemas manifestava-se em NAT por meio de uma insegurança expressa por manifestações do tipo: *errei, não é?* ou *... acho que não vou conseguir...* Contudo, isso não impedia o aluno de participar e continuar tentando acertar. Nesse sentido, explica Piaget (1977), a manifestação desse desequilíbrio, que se configura como uma perturbação, e a possibilidade de ultrapassá-lo na procura de uma nova forma de equilíbrio qualitativamente melhor que a anterior, impulsiona o sujeito a novas regulações e ao conseqüente progresso de seus conhecimentos. As regulações se constituem em uma reação a uma perturbação, podendo esta pertencer a duas grandes classes. A primeira delas se manifesta quando o sujeito se apercebe de um insucesso ou um erro, e a segunda, quando há uma lacuna no conhecimento ou falta de condições para realizar determinada ação. No caso em questão, não foi realizada nenhuma ação no sentido de suprir a falta de algum conteúdo matemático específico, mas as Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto" tiveram por objetivo auxiliar esse participante a rever e a refletir sobre suas jogadas durante as partidas realizadas, auxiliando-o a identificar as situações em que uma análise pouco criteriosa ou insuficiente o impediu de atingir o objetivo do jogo, como no caso da partida mostrada na figura 25.

A reflexão que se seguiu após NAT não ter tornado observável o seu fracasso no jogo, quando colocou o quadrado grande, azul e com furo na casa 4A, foi muito proveitosa para que ele pudesse entender que as suas estratégias não permitiram que vencesse a partida e, também que observasse que em qualquer uma das "casas" pela qual optasse por colocar a peça que o computador pôs em jogo, não teria como ganhar a partida, pois sempre haveria, nas diagonais, um atributo comum para cada uma das casas livres. Para auxiliar NAT a perceber quais estratégias evitariam que perdesse a partida para o computador, questionou-se se uma análise mais criteriosa durante toda a partida evitaria a derrota, e ainda, se prever com antecipação quais seriam as melhores peças para serem colocadas em jogo e em quais "casas" colocá-las, poderia ser decisivo para alcançar a vitória e também se a identificação dos atributos com suas semelhanças e diferenças seriam importantes para a conquista da vitória.

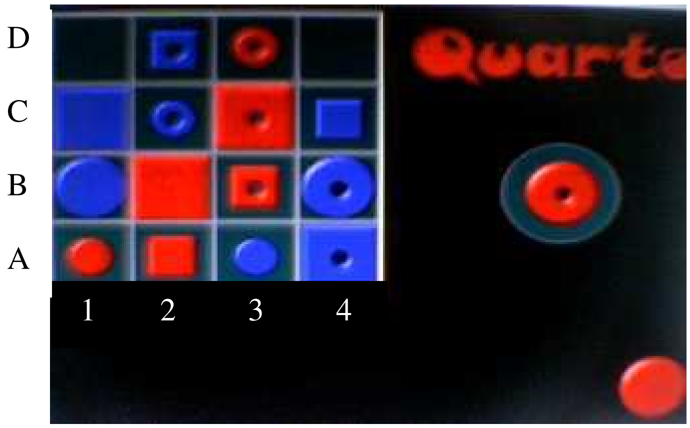


Figura 25 – Final de jogo para NAT

De fato, a possibilidade de tornar o erro observável ao ler ou ao interpretar o enunciado dos problemas pode ter sido favorecido, no caso de NAT, pelas análises que realizou durante as Sessões de Intervenção com o Jogo “Quarto”, quando, ao jogar, solicitava-se que respondesse questões que, além de serem significativas ao próprio contexto do jogo, também poderiam ser aplicadas em outras situações como a resolução de problemas, como mostrado, a seguir:

> P: Por que você escolheu essa peça para colocar em jogo?
> NAT: *Queria que o computador fizesse o alinhamento* (referia-se a uma linha que possuía três peças com o atributo cor em comum)
> P: Você percebeu qual foi a estratégia utilizada por seu adversário?
> NAT: *Ele joga tentando fazer com que eu faça um alinhamento para ele.*
> P: Como você pode evitar que seu adversário faça um alinhamento?
> NAT*: Fechando uma fileira com uma peça que não tenha nenhum atributo comum com as que já estão nela.* (NAT, nessa resposta, mostra que não estava articulando a defesa com o ataque, uma vez que unicamente pensava em se defender).
> P: Você acredita que, quanto mais detalhada for a sua análise, maior a sua chance de vencer seu adversário?
> NAT: *Sim. Mas nem sempre eu consigo fazer.*
> P: Esse procedimento de análise pode ser utilizado em outras situações, por exemplo, para resolver problemas escolares?
> NAT: *Sim, já estou começando a fazer algumas análises em problemas que resolvo em classe.*
> P: Você acredita que está jogando melhor agora em relação às primeiras partidas disputadas?
> NAT: *Sim, já estou conseguindo fazer algumas análises.*
> P: O que foi mais instrutivo para você no decorrer das partidas?
> NAT: *Aprender a analisar as jogadas antes de fazê-las.*
> P: Você foi capaz de perceber os erros que cometeu durante as partidas?
> NAT: *Só depois de cometê-los.*
> P: Como utilizar o que você aprendeu com as estratégias para jogar na resolução de problemas escolares?

NAT: *Tentando fazer o mesmo tipo de análise que estou aprendendo a fazer no jogo.*

As respostas de NAT mostraram que, embora houvesse um progresso na elaboração de suas análises, estas ainda continham situações que evidenciavam as dificuldades que também apresentou ao resolver os problemas. Para a superação das dificuldades encontradas para resolver problemas de conteúdo matemático, além de um aprofundamento conceitual da própria disciplina, a problematização de situações, principalmente as contidas em jogos de regras, como foi o caso do "Quarto", poderia auxiliá-lo a coordenar suas ações, como considerou Mendonça (1993), que, em sua pesquisa, anunciou que a resolução de problemas pode ter, na problematização de situações, uma excelente proposta para destacar o binômio pensar e agir. Nesse estudo, a busca para conferir significado a uma experiência de vida e, ao mesmo tempo, desenvolver o conhecimento matemático, foi realizado através da problematização encaminhada por meio de perguntas geradoras com o objetivo de viabilizar ao aluno à construção de modelos matemáticos. Dessa maneira, foi possível observar, em ambas as situações, a importância de reconhecer que, para alcançar a aprendizagem, as perguntas centradas em princípios como os da problematização podem reorientar a aprendizagem, tanto em atividades de sala de aula quanto na investigação do processo ensino-aprendizagem.

Algumas das dificuldades que NAT apresentou puderam ser superadas pela confiança que adquiriu em seus critérios de análise permitindo refletir sobre seus próprios pensamentos e estratégias e pelo prazer que mencionou sentir ao participar desse trabalho, o que reforça a idéia apresentada por Vila e Callejo (2006, p. 11) de que:

> [...] o processo de resolver problemas tem um componente de subjetividade, pois, cada pessoa se aproxima de uma situação-problema a partir de determinadas atitudes, crenças e sentimentos, sendo influenciada pelo contexto concreto em que se apresenta (escolar, vida cotidiana, trabalho, etc).

Os demais participantes desse grupo, ou seja, BRU (17;00), DAP (16;09), GUS (17;04), PRI (17;05) e ROS (17;01), ao realizarem a Prova das Permutações, obtiveram sucesso em todas as questões mostrando que possuem um tipo de pensamento que lhes permite, de acordo com Piaget e Inhelder, (1976, p. 190) [...] uma série de possibilidades operatórias novas, formadas por disjunções, implicações, exclusões, etc., que intervêm desde a organização da experiência e desde a leitura dos dados de fato, e se superpõe, nesse terreno, até aos simples agrupamentos de classes e de relações.

No entanto, os resultados obtidos por eles na aplicação e reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos (ver Apêndice C) não foi muito diferente dos de outros participantes das outras séries, mas, mesmo com pequenas diferenças, os escores obtidos na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos foram maiores do que os da aplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, exceto por GUS (17;04), que acertou o problema seis na aplicação da prova, indicando como resultado correto o terreno IV, e deu a solução errada, quando a prova foi reaplicada, apesar de tê-la justificado corretamente. O participante apontou como solução a alternativa para o terreno V, mas justificou dizendo que: *A partir do anúncio do jornal fui eliminando as casas que não se encaixavam nas especificações, através da seguinte ordem: área (x_1); frente voltada para o sol (x_2); fácil acesso (x_3).*

Na aplicação da Prova de Conhecimentos Matemática, GUS teve pontuação máxima em todos os problemas, menos no primeiro que ele assinalou ter lido uma única vez, indicando que encaminharia a solução por meio de um desenho e por meio dos conceitos de quadrado, eqüidistância e triângulos. Obteve, assim, dois pontos porque, após ter feito a representação gráfica do que pedia o enunciado, se valeu das alternativas apresentadas para encontrar a resposta. Para o segundo problema, GUS indicou que fez a leitura do seu enunciado quatro vezes ou mais, utilizando o padrão do desenho associado aos conceitos de proporção e frações. A resolução apresentou-se correta e com boa organização gráfica e coerente com a explicação que anunciava a *utilização das proporções apresentadas no desenho relacionadas ao custo de cada tipo de pastilha*, como mostra a figura 26.

$$\begin{cases} B: 8 \\ P = 10 \end{cases} \qquad \text{Padrão} = \frac{5}{5} \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{1}{5} = P \\ \frac{4}{5} = B \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \frac{10}{5} = 2 \\ \frac{32}{5} = 6,4 \end{array}$$

$$2 + 6,4 = 8,4$$

Figura 26: Resolução de GUS para o segundo problema na Prova de Conhecimentos Matemáticos.

Para o terceiro problema, a leitura do enunciado foi realizada, segundo o que informou GUS, uma única vez e o encaminhamento da solução foi realizado por meio do raciocínio combinatório. A resolução mostrada na figura 27 foi explicada de forma simples e conceitualmente correta quando escreveu: *"os seis riscos representavam o número de caracteres do Braile e o 2 representou os dois tipos de furo. O menos um é para que pelo menos um ponto seja furado em obediência à regra.*

Figura 27: Resolução de GUS para o terceiro problema na Prova de Conhecimentos Matemáticos

O quarto problema foi lido também uma única vez e a explicação, *calculei a área da chapa e depois de cada círculo e subtraí o segundo do primeiro, depois comparei com o resultado das sobras de cada chapa* deu a idéia exata das operações realizadas. O quinto problema também foi lido uma única vez e explicado corretamente, utilizando os conceitos de escala e área com a explicação: *o sol nasce no leste, vou eliminar os que não obedecem a esse critério e vou usar a escala para conhecer a área de cada um*. Dessa forma, totalizou 26,0 pontos e, portanto, 5,2 de escore.

Na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos GUS manteve o mesmo padrão de resolução e explicações para os problemas propostos, menos para o problema cinco, obtendo, assim 23,0 pontos e um escore de 4,6. Esse tipo de erro que parece estar centrado em uma resolução apressada e pouco refletida, também foi notado durante a realização das Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto", quando, mesmo ao analisar as jogadas em uma estratégia que combinava o ataque com a defesa, oscilava entre a escolha aleatória e a previsão de futuros alinhamentos. Soube, porém como fazer uso de seus próprios erros de maneira reflexiva para aprender mais sobre o jogo e como jogá-lo. Algumas das questões propostas durante as Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto" puderam esclarecer que, no caso de GUS, os erros não foram decorrentes de sua forma de raciocínio, uma vez que suas idéias se coordenavam ao demonstrar, de acordo com Piaget (1995), uma conceituação caracterizada por um pensamento reflexivo, permitindo-lhe a tomada de consciência de suas ações.

> P: O que você levou em conta para escolher essa peça?
> GUS: *Porque eu estou sempre pensando em uma estratégia futura.*
> P: Por que escolheu essa casa para colocá-la? (em um determinado momento de uma partida)
> GUS: *Para abrir mais possibilidades de alinhamentos.*
> P: Você acredita que, quanto mais detalhada for a sua análise, maior a sua chance de vencer seu adversário?
> GUS: *Eu sei que é assim, mas, às vezes eu me precipito e não presto atenção no que estou fazendo, daí, eu erro.*
> P: Você acha importante observar o jogo de seu adversário para fazer um alinhamento?
> GUS: *Só observando o jogo dele que eu posso decidir qual estratégia vou utilizar.*
> P: Em um problema escolar, como você escolhe os conceitos de que dispõe para resolvê-lo?
> GUS: *Eu, primeiro preciso me deter na leitura do problema, coisa que as vezes eu não faço com calma, depois, eu separo os dados que o próprio enunciado me dá, aí é só pensar quais conceitos servem para resolver o problema.*
> P: Você foi capaz de perceber os erros que cometeu durante as partidas?
> GUS: *Sim, uma pena que só depois de fazê-los, mas assim mesmo serviram para eu ficar mais atento.*
> P: Como utilizar o que você aprendeu com as estratégias para jogar na resolução de problemas escolares?
> GUS: *Aprendi que tenho que não agir sem pensar, porque se eu me mantiver atento é mais difícil de errar.*

Em algumas partidas demonstrava um bom controle das variáveis em jogo, como mostra a seqüência das figuras 28 a 31, em que, ao escolher a casa “2D” para colocar o círculo, azul, grande e sem furo, antecipa, narrando, no decorrer das jogadas, qual será sua estratégia. Essa forma de mostrar que detinha o controle das variáveis está de acordo com o que é presumido para alguém que possua um tipo de pensamento operatório-formal demonstrado por esse participante na Prova das Permutações, como já foi mencionado.

> GUS: *Coloco o círculo ali, dou para ele o quadrado, grande, azul e com furo, há duas casas que ele não pode colocar, senão perde o jogo. Ele escolheu colocar na casa “3D” e me deu o quadrado, vermelho, grande e com furo, agora tenho que prestar muita atenção, senão perco o jogo. Vou fechar a primeira coluna e dou para ele a peça que ele tem o menor número de “casas” para colocar. É a única pequena que restou, e ele não pode colocá-la na “casa” em que todas são pequenas, mas nas outras duas ele pode, daí qualquer uma das peças que ele me der eu tenho onde colocar e dar a ele a última que será um círculo grande que fecha o “quarto” na diagonal, pois são circulares e, na primeira linha (D), porque todas são grandes, e eu ganho o jogo.*

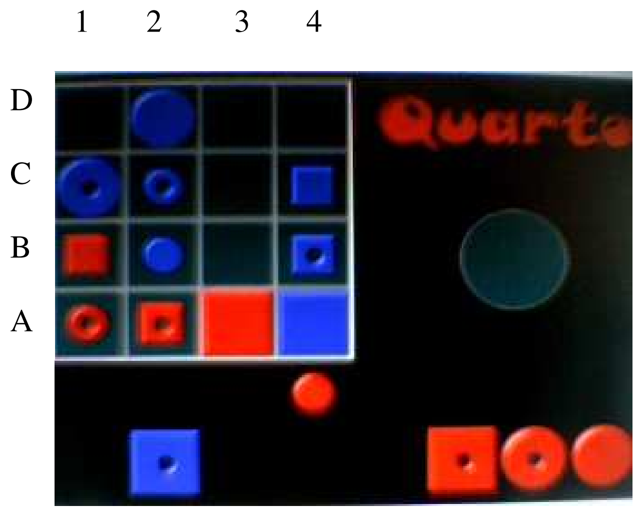


Figura 28 – Configuração das peças em partida disputada por GUS

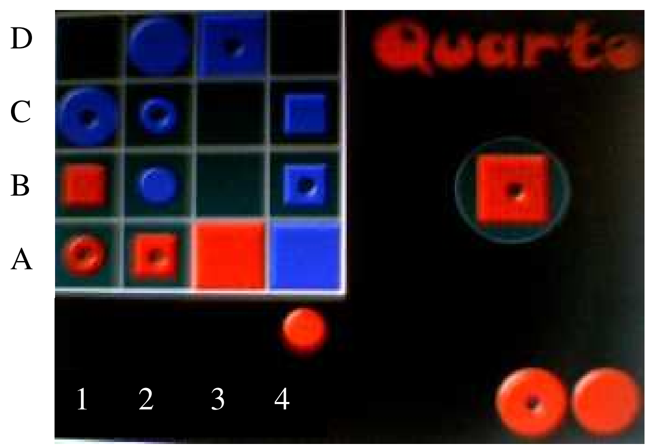


Figura 29 – Movimento feito por GUS na mesma partida

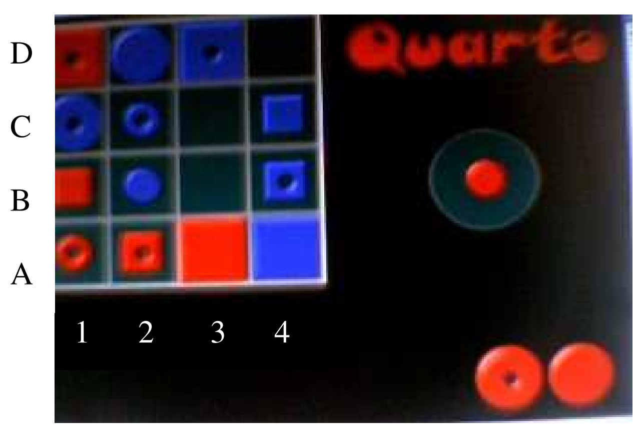


Figura 30 – Estratégia de jogo apresentada por GUS

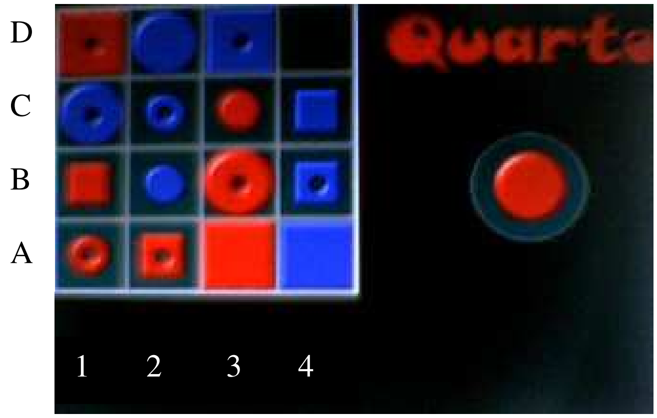


Figura 31 – Final de partida vencida por GUS

No entanto, notou-se que a participação de GUS e dos demais alunos da terceira série, embora fossem os de maior nível de escolaridade, não apresentou diferenças expressivas em relação aos participantes das outras séries. Nesse sentido, pode-se questionar se esses alunos, por estarem em uma fase próxima à de vestibulares, estariam carregando um componente emocional que lhes afetava a atenção, ou a concentração. Dessa forma, a possibilidades de proporcionar a eles experiências que promovam a atenção e a concentração, além da confiança e o entusiasmo pela atividade matemática, como é o caso dos trabalhos com os jogos de regras, poderá ser uma excelente contribuição para que eles se envolvam com os problemas que lhes são apresentados.

Na presente pesquisa, observou-se que as sessões de intervenção com o jogo “Quarto”, realizadas com os participantes, estudantes do Ensino Médio, permitiram-lhes uma melhor compreensão dos problemas matemáticos, uma vez que, ao serem reaplicados, as soluções apresentadas foram qualitativamente melhores, demonstrando melhor sistematização e análise das propostas. Desse modo, este trabalho que procurou investigar se as atividades propostas em sessões de intervenção com o jogo “Quarto” puderam contribuir para a resolução de problemas matemáticos, teve a intenção de somar esforços aos tantos já existentes, no sentido de oferecer atividades que vão além das convencionais para que os conhecimentos construídos pelo aluno sejam duradouros e significativos, proporcionando-lhes assimilação e acomodação novas, de forma a desencadear a reelaboração de esquemas cognitivos, permitindo-lhes uma melhor compreensão das situações propostas.

CAPÍTULO 5

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao jogar, de acordo com Macedo, Petty e Passos (2005), uma criança fornece muitas informações e comunica, por meio da ação, sua forma de pensar, desde que o observador reconheça nas ações ou nos procedimentos os indícios do que quer avaliar. Também para o adolescente, um contexto que envolva um jogo de regras pode ser adequado para que se conheça, pelas estratégias que utiliza ao jogar, como ele pensa e, por meio dessa observação, possibilitar uma ação pedagógica que tenha como finalidade desenvolver processos de análise e generalização de conceitos, fatores importantes para a construção do conhecimento matemático, especialmente para a resolução de problemas. Assim, a presente pesquisa investigou se, para adolescentes, alunos do Ensino Médio, a promoção de sessões de intervenção com a utilização do jogo de regras “Quarto” poderia ser favorável às atividades de resolução de problemas de conteúdo matemático.

A intenção de focalizar adolescentes pertencentes ao Ensino Médio relaciona-se com a expectativa de resolução para os problemas solicitados e com o tipo de estratégia utilizada durante as partidas do jogo “Quarto”, uma vez que, segundo Piaget e Inhelder (1976), a adolescência caracteriza-se por uma mudança qualitativa na maneira de operar o conhecimento, na qual predomina o pensamento operatório-formal. Enquanto no pensamento operatório-concreto, a criança, para solucionar um problema, se utiliza apenas das operações concretas de classes, relações e de números, e a estrutura utilizada não ultrapassa a dos agrupamentos que, mesmo utilizando as duas formas complementares de reversibilidade, não chega a fundi-las em um sistema único e total, o pensamento operatório-formal fundamenta-se, desde o início, na dupla consideração de combinações possíveis e de ligações necessárias, que se prolongam numa verdadeira construção hipotético-dedutiva.

Para os autores (*ibid.*), o pensamento operatório-formal possui três características essenciais: em primeiro lugar, a realidade é concebida como um subconjunto do possível, isto é, além de considerar os dados reais presentes e concretos, possibilita a previsão de todas as situações possíveis entre todos os elementos em questão, combinando-os sistematicamente. Portanto, o raciocínio combinatório permite não apenas relacionar cada causa isoladamente ao seu efeito, como também considerar todas as suas combinações. Em segundo, possui um caráter hipotético-dedutivo e isso acontece porque, nessa fase, o sujeito se torna capaz de conceber um conjunto de explicações para um determinado problema e submetê-lo a uma comprovação, que não se reduz a uma única hipótese, mas a várias, consideradas simultânea e sucessivamente, e ainda de forma sistemática. Em terceiro, o pensamento operatório-formal possui um caráter proposicional, isto é, não se limita às correspondências termo a termo, mas difere destas na medida em que resulta de um cálculo dos possíveis e não apenas de verificações reais. A linguagem ultrapassa o nível puramente representacional para ganhar um estatuto proposicional, pois seu caráter argumentativo permite a construção de inferências, juízos e conceitos, sem se apoiar no concreto, mas apenas em construções mentais.

Assim, em partidas do jogo “Quarto”, cujas regras se encontram descritas na página 75, se as condutas adotadas por um participante, considerando-se as estratégias escolhidas por ele, estiverem relacionadas às características do pensamento formal, pode-se supor, por um lado, que esse jogador, ao escolher uma peça entre as disponíveis para entregá-la ao seu adversário, estaria se preocupando em produzir um alinhamento com um atributo em comum e, por outro, ao ocupar uma casa livre com a peça entregue pelo seu oponente, estaria observando se a peça, ao ser colocada, promoveria um alinhamento, dando a vitória ao seu adversário, uma vez que o alinhamento de peças com um atributo em comum dá a vitória a quem entrega a peça e não a quem a coloca no tabuleiro.

Na verdade, tal fato pôde ser observado nas condutas dos participantes que mostraram, na Prova das Permutações, possuir um nível de pensamento operatório-formal, o que significou, segundo os critérios de Longeot (1974), terem atingido um escore de seis pontos, ou mesmo para aqueles que, com um escore de quatro pontos, já evidenciavam possuir um nível de pensamento também operatório-formal, ainda que em construção. Por exemplo, PAU (15;05), participante da primeira série do Ensino Médio, que atingiu na referida prova um escore de seis pontos, quando se referiu às estratégias utilizadas pelo computador, conforme suas palavras a seguir transcritas, evidenciava o estabelecimento de uma observação conjunta das peças e do tabuleiro, elaborando-as em uma análise sistemática de suas possíveis combinações, que levava em consideração, além dos dados reais, presentes e concretos, a previsão de todas as situações possíveis para delas retirar o necessário, por meio de um raciocínio de caráter hipotético-dedutivo, o que somente é possível quando prevalece um pensamento com estrutura operatório-formal.

> PAU: *Ele abre frentes de jogo, colocando as peças que eu escolho para ele em fileiras que tenham algum atributo comum, enquanto na fileira ainda há até duas peças, depois ele vai fechando com peças que não formam o "Quarto". Quando ele me dá uma peça, escolhe aquela que eu tenha um menor número de casas livres para colocá-la, quer dizer, que faça o "Quarto" para ele em um maior número de lugares.*

Com essa explicação, PAU mostrou como foi capaz de estabelecer a síntese por dedução entre os possíveis e o necessário, ao mostrar a relação entre a movimentação das peças e o tabuleiro, antecipando a estratégia utilizada, quer seja por ele mesmo, quer seja pelo computador. Também MAR (16;03), aluno da segunda série, que igualmente atingiu o escore de seis pontos na Prova das Permutações, mostrou conceber a realidade como um subconjunto do possível quando, ao ser questionado sobre a escolha da "casa" para colocar a peça que lhe foi dada pelo computador, respondeu: *Procuro manter a mesma quantidade de possibilidades abertas para* *fazer o "Quarto". Mas, se são muitas as possibilidades eu escolho a "casa" que fecha a chance de fazer um alinhamento.* Mesmo com um escore de quatro pontos, GAB (16;09), aluno da segunda série, mostrou compreender qual era a estratégia do adversário ao comentar: *Percebi que ele vê os atributos iguais e procura, quando tem apenas duas peças, colocá-las em um mesmo alinhamento, mas quando tem três, ele abre outra "fila" para não perder o jogo*, e, dessa forma, mostrou possuir um raciocínio combinatório que lhe permitia não apenas relacionar cada causa isoladamente ao seu efeito, como também considerar todas as suas combinações, o que também foi verdadeiro para GUS (17;04), aluno da terceira série, que ponderou ser necessário estar sempre pensando em estabelecer uma estratégia para *abrir mais possibilidades de alinhamentos*.

No decorrer das partidas do jogo "Quarto" que os participantes disputaram, observou-se que as condições de sucesso provinham da capacidade de conceber, por meio de uma experimentação hipotética, de forma sistemática e simultânea, as possíveis combinações entre as peças e as casas disponíveis. A peça, ao ser escolhida, deveria ser, dentre as possíveis, a necessária para que, além de não produzir o alinhamento para o adversário, ainda criasse condições para que o participante oferecesse uma peça que, colocada em uma casa restante, pudesse lhe dar a vitória. MAT (15;09), aluno da primeira série, que obteve escore de quatro pontos na Prova das Permutações, em uma das partidas disputadas, ao vencer o jogo, mostrou já ser capaz de realizar uma análise que estabelecia a relação entre as peças possíveis e a necessária para chegar à vitória. Isso ocorreu quando escolheu a "casa" em que deveria colocar a peça oferecida pelo computador e selecionou qual das peças restantes seria a necessária para lhe dar a vitória, como segue transcrito no seu depoimento e a figura 32, que é a reprodução da figura 10.

> MAT*: Não posso colocar essa peça na casa livre da quarta coluna* ("casa" 4D, referindo-se ao círculo, vermelho, pequeno e sem furo, peça colocada em jogo pelo computador) *porque ficariam todas vermelhas, mas, se eu colocar essa peça na casa vazia da coluna 3* (3C), *e escolher o quadrado, pequeno, vermelho e sem furo para colocar em jogo, em qualquer uma das casas restantes que o computador escolher para colocá-la, eu ganho, porque completo o "Quarto" por meio da cor* (vermelho) *na linha* (C) *ou coluna* (4)*, ou pelo tamanho* (pequeno) *na diagonal.*

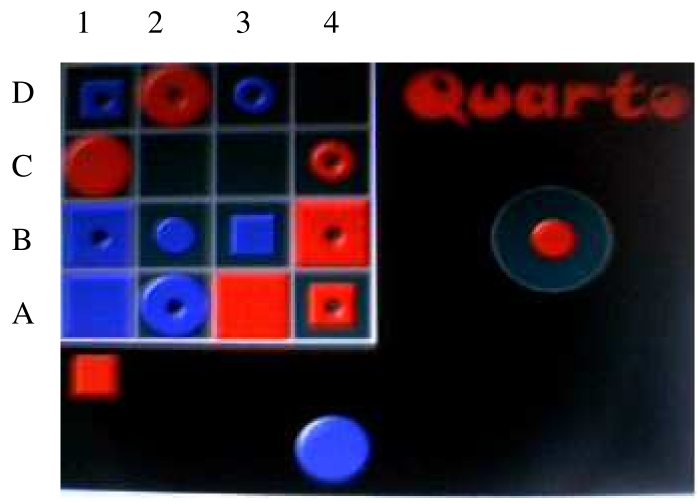


Figura 32: Reprodução da figura 10

MAT também considerou cada um dos atributos das peças (cor, tamanho, forma e com ou sem furo) como variáveis que deveriam ser combinadas de forma organizada e sistemática para sua colocação no tabuleiro, utilizando, assim, uma das formas de raciocínio que define o período das operações formais, que é o raciocínio combinatório. Esse mesmo tipo de raciocínio foi utilizado por GUS (17;04), aluno da terceira série, quando demonstrou, no decorrer de partidas que disputou, ser capaz de fazer ou evitar um alinhamento, examinando as peças livres para combiná-las de forma sistemática, porém hipotética, às "casas" que ainda não haviam sido ocupadas. Os procedimentos utilizados por GUS fazem supor a existência de uma composição virtual entre os possíveis com o necessário, em um processo contínuo de observação centrado nas peças e no tabuleiro do jogo.

O desenvolvimento de novas estratégias, a partir da tomada de consciência dos erros cometidos pelo próprio participante e pelos procedimentos adotados por seu adversário, segundo as declarações de MAR, pôde ocorrer porque é [...] *errando que você vê novos pontos de vista,* ou, como prefere se referir MAT, ao relacionar os erros cometidos durante as partidas com a resolução de problemas: *Quando você comete um erro numa partida, fica atento para não cometê-lo mais, posso pensar assim também para resolver problemas*. No caso de o participante desenvolver novas e melhores estratégias, a partir dos seus próprios erros ou das estratégias utilizadas pelo adversário, permite inferir que ele esteja construindo instrumentos mais eficientes para vencer o jogo e, por conseguinte, se tornando capaz de efetuar generalizações, que se relacionam à formação de possibilidades nas quais o real, segundo Piaget (1986), aparece ao jogador como um conjunto de atualizações entre as possíveis e subordinadas aos sistemas de ligações necessárias, como requer um pensamento de estrutura operatório-formal.

Durante as três sessões destinadas à intervenção com o Jogo "Quarto", foi possível observar que mesmo os melhores jogadores nem sempre conseguiram alcançar o escore máximo em todos os aspectos propostos neste estudo (sistematizados no Apêndice F) uma vez que, em sua continuidade, a prática do jogo é que possibilitaria tal sucesso. Contudo, foi possível perceber que os melhores jogadores foram aqueles que também obtiveram os mais altos escores nas outras provas de que participaram. E, da mesma forma, aqueles que demonstraram possuir, de acordo com os critérios de Longeot (1974), um nível de pensamento menos evoluído, também foram os que, no jogo, nem sempre conseguiram obter sucesso no estabelecimento de estratégias eficientes para que atingissem o objetivo do jogo, assim como apresentaram também maior dificuldade na resolução dos problemas propostos.

A resolução dos problemas de conteúdo matemático propostos na presente pesquisa solicitou uma atuação semelhante à utilizada para jogar de forma operatória o jogo "Quarto", pois que os processos cognitivos envolvidos para a sua solução também necessitavam do raciocínio hipotético-dedutivo e, portanto, relacionavam-se intimamente com as operações características do pensamento operatório-formal. Todavia, ressalta-se que essa relação só pôde ser estabelecida quando se encontravam presentes os conhecimentos relativos aos conceitos matemáticos envolvidos nos problemas, isso porque, tanto para jogar o "Quarto" como para resolver problemas matemáticos, a aprendizagem é imprescindível mas, enquanto para o primeiro não há pré-requisitos do ponto de vista da forma, pois há o jogar operatório em diferentes níveis, para o segundo os conhecimentos necessários são decorrentes de anos de escolaridade. Então, problemas que envolvem os conceitos de figuras geométricas e suas relações, como eqüidistância, direção ou área, problemas que contenham a noção de regularidade e problemas de análise combinatória podem ser resolvidos, solicitando formas análogas àquelas utilizadas para o estabelecimento de uma estratégia eficiente para atingir o objetivo do jogo "Quarto", ou seja, constituem-se em uma mesma forma aplicada a distintos conteúdos.

Nesse contexto, com a intenção de reforçar a discussão, acrescenta-se o exemplo de LUC (15;11), aluno da segunda série do Ensino Médio, que teve o seu desempenho na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos favorecido, visto ter demonstrado, durante as Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto", um tipo de raciocínio que possibilitava a utilização de estratégias que combinavam o ataque e a defesa, antecipando os próprios movimentos e os de seu adversário, já que a realidade, para ele, era considerada como um subconjunto do possível, que não se apoiava no concreto, mas sim em construções mentais. Assim, ao ser questionado sobre como escolhia as peças para colocá-las em jogo, respondeu:

> LUC: *Observo em quais linhas e quais colunas ainda há possibilidade de alinhamento, assim se for para eu colocar a peça, eu ponho aquela que não completa o alinhamento para o computador, se for para eu dar a peça para ele movimentar, eu dou a que tem maior quantidade de "casas" para completar algum alinhamento para mim.*

Ainda quando questionado sobre como tais análises poderiam ser úteis para a resolução de outros problemas, disse: *ajuda na descoberta de informações importantes que estão contidas no próprio enunciado do problema*. Essas respostas e a conduta adotada por ele durante as referidas sessões de intervenção contribuíram para que se pudesse inferir que a realização de uma análise mais criteriosa dos dados contidos no próprio enunciado do problema, além de já dispor dos conhecimentos conceituais necessários à sua resolução, permitiu a LUC, na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, acertar todos os problemas. Por exemplo, o primeiro problema[10], que LUC não acertou na primeira aplicação da prova, foi corretamente realizado em sua reaplicação, conforme mostra a figura 33.

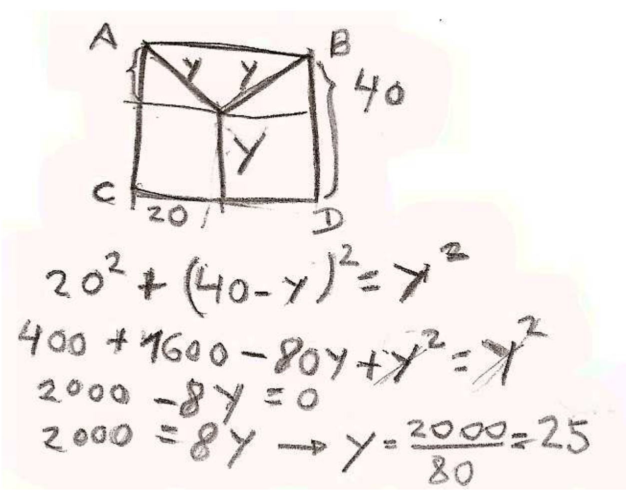
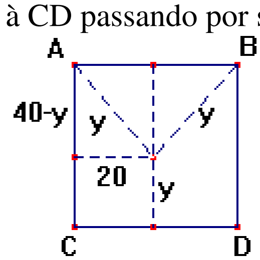


Figura 33: Resolução de LUC para o primeiro problema na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos

y = valor da distância entre os pontos A e B e a mediatriz de CD (reta perpendicular à CD passando por seu ponto médio)



Aplicando o teorema de Pitágoras, vem:
$20^2 + (40-y)^2 = y^2$

---

[10]Problema 1: Quatro estações distribuidoras de energia A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo eqüidistante das estações A e B e da estrada (reta) que liga as estações C e D. A nova estação deve ser localizada

O esquema gráfico elaborado por LUC sugere que a sua resolução se baseou nas propriedades do quadrado, no significado de mediatriz, no teorema de Pitágoras e nas habilidades algébricas necessárias à solução da equação, que, por já serem de seu conhecimento, puderam ser relacionadas para que ele acertasse o problema. Pode-se dizer então, que:

> Cada nova reflexão supõe a formação de um patamar superior de "reflexionamento", onde o que permanecia no patamar inferior, como instrumento a serviço do pensamento em seu processo, torna-se um objeto de pensamento e é, portanto, tematizado, em lugar de permanecer no estado instrumental ou de operação (PIAGET, 1995, p. 275).

Ou seja, um problema que necessite do conhecimento de propriedades e de postulados da geometria euclidiana, sistematizados por meio da álgebra necessária à resolução de uma equação, como o problema em questão, pôde ser resolvido por tornar conscientes as mesmas habilidades requisitadas no jogo, uma vez que ambos implicam no isolamento de variáveis e em processos de dedução lógica.

Os participantes, cujas condutas durante as partidas de jogo "Quarto" foram analisadas no capítulo anterior, necessitaram tornar conscientes as estratégias utilizadas por eles próprios e pelo adversário para aprimorar suas estratégias, com o objetivo de vencer as partidas que disputaram. Reforçando essa constatação, apresenta-se o caso de ROS (17;01), participante da terceira série, que assim argumentou, quando lhe foi perguntado se havia percebido qual era a estratégia de seu adversário:

> ROS: *ele sempre me dá alguma peça que tenha algo em comum com as que estão no tabuleiro, e eu tenho que prestar muita atenção nas fileiras e, principalmente, nas diagonais para não colocar a peça que ele deu em alguma casa que complete o "Quarto" para o computador. Também tenho que ter atenção para entregar uma peça para ele movimentar, fazendo como ele faz comigo, escolhendo aquela que pode completar, para mim, um alinhamento em um maior número de casas possíveis.*

ROS, ao perceber a regularidade contida nas estratégias utilizadas pelo computador para utilizá-las como suas, pôde empregar a mesma forma que utilizou para resolver o segundo problema[11] proposto na Prova de Conhecimentos Matemáticos, cujo conteúdo envolvia a tomada de consciência de uma regularidade, como mostra a figura 34.

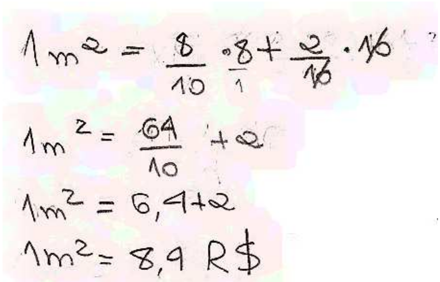
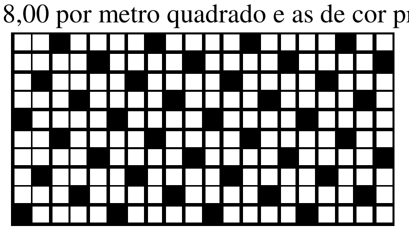


Figura 34: Resolução de ROS para o segundo problema

Nesse problema, a regularidade entre as pastilhas pretas e brancas contidas no padrão do desenho apresentado, foi percebida pelos participantes, visto que todos, na reaplicação da prova, foram capazes de sistematizar, por meio de diferentes procedimentos, a proporcionalidade entre os elementos em questão, resolvendo corretamente o problema. Desse modo, a partir dos dados colhidos nas Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto", pôde-se inferir que a tomada de consciência das atuações eficientes para o estabelecimento de uma estratégia permitiu, conforme Piaget (1978), a coordenação das ações dirigidas à conceituação, em que as operações se tornaram conscientes a esses participantes para outros conteúdos como, por exemplo, a resolução do problema em questão.

As operações formais relacionam-se ao pensamento combinatório e, dessa forma, o modo de jogar de quem sistematicamente combinou as peças e as casas restantes em uma partida de "Quarto", para decidir qual seria a melhor jogada, associou-se a um tipo de conduta que foi marcada pela análise de todas as possibilidades de jogo, em uma verificação contínua de quais delas se configuravam possíveis, sem de fato realizá-las na ação, isto é, realizavam operações virtuais que promoviam a inversão entre o real e o possível. O raciocínio combinatório foi

[11] Problema 2: Um pátio de grandes dimensões vai ser revestido por pastilhas quadradas brancas e pretas, segundo o padrão representado abaixo, que vai ser repetido em toda a extensão do pátio. As pastilhas de cor branca custam R$ 8,00 por metro quadrado e as de cor preta, R$ 10,00. O custo por metro quadrado do revestimento será:



solicitado no terceiro problema[12] proposto na Prova de Conhecimentos Matemáticos, já que tratava diretamente de um conceito cujas operações necessárias à sua resolução demandavam mais do que algoritmos de cálculo em espaços probabilísticos, requerendo dos participantes um tipo de conduta que se caracterizava pela mobilidade operatória, pela formulação de hipóteses e pela generalização de conceitos.

De fato, constatou-se, pelos dados colhidos, que apenas os participantes que demonstraram possuir um nível de pensamento com estrutura operatório-formal, comprovado pelo escore atingido na Prova das Permutações, foram, efetivamente, os que revelaram uma atuação mais consistente nas Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto" e, portanto, na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, capazes de resolver corretamente o terceiro problema, o que pode ser explicado segundo Piaget (1978, p. 210) por extraírem [...] "das coordenações da ação o necessário para construir as coordenações inferenciais que, no nível do conceito, permitem ligar e interpretar esses dados de observação".

Convém lembrar ainda que, para manter a regularidade de um bom desempenho em partidas de "Quarto", o participante necessitou descentrar-se para analisar todos os atributos das peças, assim como se manter atento aos componentes verticais e horizontais do tabuleiro sem deixar de considerar as duas diagonais e, em as todas situações, ponderar qual deveria ser a melhor jogada em uma configuração que se transformava a cada novo movimento. A resolução de problemas se relaciona a esses aspectos pela necessidade de se contemplar o seu enunciado com uma análise criteriosa para que não apenas os aspectos perceptivos visíveis sejam considerados, como o que ocorreu, além das situações já analisadas, com BEA (14;11), participante da primeira série do Ensino Médio, que, no quarto problema[13] , respondeu: *na figura I vai sobrar mais, porque há um círculo só dentro do quadrado*, sem ao menos realizar um único cálculo que comprovasse sua conclusão. Nas Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto", ao responder como escolhia uma peça para colocá-la em jogo, BEA respondeu: *no começo não*

---

[12] Problema 3: A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é:

[13] Problema 4: Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura abaixo. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas. As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material.

tenho estratégia nenhuma, vou dando ao computador qualquer uma das peças, somente quando chega no final que eu começo a pensar. A estratégia de não proceder a uma análise criteriosa desde o começo da partida fez com que BEA cedesse a vitória ao computador em muitas das partidas que disputou, e, na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, apresentar apenas um pequeno deslocamento positivo em relação á primeira aplicação.

Com essas considerações, pretendeu-se mostrar que o jogo "Quarto" foi escolhido pela possibilidade de se estabelecer semelhanças entre o tipo de pensamento para que esse jogo fosse disputado operatoriamente e para que os problemas solicitados fossem resolvidos por meio de um raciocínio matematicamente correto. Essa apreciação mostrou-se coerente com os resultados obtidos na análise dos dados em que os alunos que obtiveram maior pontuação na Prova das Permutações, segundo o protocolo idealizado por Longeot (1974), atingindo, portanto, o nível operatório-formal B, foram aqueles que apresentaram os melhores escores nas demais provas.

Considerando-se que a amostra contou com alunos das três séries do Ensino Médio, poder-se-ia pressupor que aqueles de maior grau de escolaridade seriam os que obtivessem os maiores escores. Notou-se, porém, que não houve diferença expressiva entre o que foi apresentado pelos alunos da terceira série e os alunos das demais séries. Efetivamente, quando são comparadas as provas de PAU (15;05), participante da primeira série, e de NAT (17;06), da terceira série, observa-se que o primeiro apresentou um tipo de pensamento muito mais evoluído que o segundo e, ainda, que a participação que deteve os melhores escores foi a de MAR (16;03), aluno da segunda série. Por essas constatações, pode-se supor que o pensamento de NAT (17;06), assim como o dos outros participantes que obtiveram pontuações menos expressivas, poderiam estar orientados por crenças que sugerem ser a resolução de um problema um procedimento que visa seguir as regras ensinadas pelo professor, aplicando-as mecanicamente e sem entendê-las, o que, de acordo com Echeverría (1998), seria o de um conhecimento descontextualizado.

Portanto, para que a resolução de problemas seja considerada como um conhecimento operatório, ela deve estar fundamentada em processos de abstração reflexiva que são necessários para a generalização de novas composições. Para Piaget (1995), a abstração reflexiva é o mecanismo responsável para explicar a passagem de um nível para outro, sempre por meio de equilibrações progressivas, pois tal abstração se apóia sobre as formas, ou sobre os esquemas, ou coordenações de ações, operações e estruturas, retirando delas certas características, para utilizá-las em novas adaptações ou novos problemas.

De fato, em todas as séries, os participantes que obtiveram os melhores escores foram aqueles que mostraram possuir um raciocínio que lhes permitia criar modelos matemáticos e deles abstrair o que era necessário para a resolução do problema proposto, fosse ele um problema de conteúdo matemático, propriamente dito, ou uma situação-problema criada em uma partida do jogo "Quarto" que estava sendo disputada. Segundo Matos (1994), para resolver um problema, é necessário o estabelecimento de conexões que transformem uma situação problemática em um problema, por meio da formulação de questões que favoreçam a construção de um modelo matemático, o que significa construir uma representação matemática através de objetos, relações ou estruturas matemáticas, pressupondo que uma ação seja necessária para se atingir o objetivo proposto. O relato de MAR[14] faz supor que ele tenha construído um modelo matemático ao reproduzir o jogo em papel para tentar entender a estratégia de jogo utilizada pelo computador, e foi ele o participante que obteve o melhor escore na aplicação e na reaplicação da prova de conhecimentos matemáticos.

Também, o mesmo participante, ao ser questionado sobre suas preferências com relação à Matemática, assim expressou-se: *tenho muita facilidade e gosto de resolver problemas, além disso, gosto de jogar, até acho que isso fez com que eu aprendesse mais ainda*. Essas declarações coincidem com o que cita Corbalán (1998, 2000), que reconhece ser a resolução de problemas um condutor de hábitos de pensamento adequados ao enfrentamento de situações que resultam em motivações e hábitos para o desenvolvimento de ferramentas apropriadas para o aprendizado da Matemática, e ainda, que a formulação de hipóteses e sua comprovação posterior, necessárias à resolução de um problema, tornam-se mais fáceis de serem feitas por meio do jogo, pois o prêmio que se consegue pelas melhores hipóteses é o de vencer a partida, o que é uma excelente motivação, principalmente para os adolescentes.

No entanto, para que a prática de jogos seja utilizada em contextos de aprendizagem de conhecimentos matemáticos, é necessário que sejam acompanhadas de questionamentos que tornem possível ao aluno refletir sobre os procedimentos por ele adotados e permitam a revisão de seus erros, de forma que seu raciocínio evolua para novos e melhores patamares. Essa também é a opinião de Grando e Marco (2006), que apontam a prioridade da apresentação de situações

[14] MAR (16;03): "*Percebi que não estava entendendo como o computador jogava, aí tentei achar esse jogo na "Internet" para treinar, mas não consegui. Daí, simulei as partidas em papel e coloquei as situações que me lembrava para testar as estratégias que o computador usava. Quando consegui entender, esse foi o resultado, agora sou capaz de vencê-lo*".

dilemáticas, assim chamadas pelas autoras, em qualquer uma das formas escolhidas para se trabalhar com um jogo, seja por meio de seu tabuleiro ou pela forma computacional. O uso do computador em jogos tem despertado grande interesse por suas aplicações e pela mobilidade com que pode ser utilizado. Para Retschitzki e Gurtner(1996), o computador, quando utilizado como meio de aprendizagem, pode conter jogos de repetição ou de consolidação, jogos de aprendizagem propriamente ditos, ou didáticos, e os de aprendizagem pela descoberta. Aqueles que focalizam a aprendizagem pela descoberta estimulam a curiosidade e permitem que os erros apresentados pelo jogador se transformem em pontos favoráveis, permitindo, ainda, explorar e descobrir as regras e simular situações, o que, de certa forma, significa estar diante da resolução de um problema.

Para ROS (17;01), participante da terceira série, as partidas de jogo "Quarto" disputadas por meio computacional, foram eficientes por permitirem que realizasse uma análise criteriosa dos meios que o levaram a se decidir por uma determinada jogada em detrimento de outra, o que significou, em seu entender, na resolução de um problema, a adoção de um raciocínio, escolhido dentre todos os possíveis, aquele que o levaria à solução do problema. Esse participante comentou, também, que essa forma de jogar o auxiliou, de maneira geral, na ampliação do raciocínio lógico, e na diminuição do tempo para a análise de um problema, o que pode significar um excelente auxílio para quem se aproxima dos exames vestibulares. De fato, confirmam Retschitzki e Gurtner (1996), o uso do computador aplicado com a finalidade educativa dispõe de muitas indicações para o seu desenvolvimento intelectual, dentre elas o aumento da criatividade e da capacidade de rapidez nas ações. Os autores ressaltam, ainda, que, através da tela do computador, as situações complexas que se apresentam de forma virtual podem representar parâmetros de uma situação real, como o que ocorre com os jogos de descoberta ou de simulação, cujas ações para vencê-lo sejam transferidas para outros contextos como, por exemplo, na resolução de problemas, quer sejam os da vida acadêmica quer os da vida real.

Dessa maneira, as análises propostas no presente trabalho e simuladas por meio do jogo "Quarto" tiveram a intenção de permitir ao participante a revisão de suas próprias estratégias de jogo, comparando-as com as de seu adversário, no caso o computador, com o objetivo de possibilitar a transferência para as situações-problema que lhe foram apresentadas. Contudo, para que isso seja possível, será imprescindível que os conceitos matemáticos necessários para a resolução dos problemas pertençam ao domínio de conhecimento escolar do aluno. Essa construção e, por conseguinte, os processos de desenvolvimento do conhecimento, segundo Macedo (1996, pp 8, 9), devem levar em conta o caráter relacional, dialético e construtivo dos conteúdos escolares.

> Dialético, relacional e construtivo lembram-nos, respectivamente, os aspectos – indissociável, complementar e irredutível – dos processos de desenvolvimento do conhecimento. Na escola, para não dizer na vida, essa tríade é, hoje, fundamental. Os conteúdos escolares – com seus conceitos, princípios e procedimentos próprios – necessitam ser ensinados levando-se em conta – *indissociavelmente* – as noções e operações da criança, no nível em que ela pode formulá-las. [...] Hoje, igualmente, aceita-se, como regra geral, a *complementaridade* da relação aluno-professor, ou da interação sujeito-objeto. [...] Temos aprendido também o caráter *irredutível* dessas relações. Matemática e matemático, física e físico correspondem a coisas diferentes: um se refere ao objeto de conhecimento; outro, àquele que conhece, cada qual com suas próprias coordenações. (MACEDO, 1996. Apresentação do livro "As Formas Elementares da Dialética", PIAGET, 1996)

Assim, na presente pesquisa, buscou-se, na realização das Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto", o aspecto indissociável quando se propôs a mesma forma de análise utilizada no jogo para diferentes conteúdos, como, por exemplo, na resolução de problemas, a complementaridade, na interação entre o aluno e as questões propostas durante as sessões de intervenção realizadas por meio do jogo na forma computacional e o caráter irredutível que aparece na distinção entre não haver necessidade de pré-requisitos para se jogar o "Quarto" e a obrigatoriedade do conhecimento dos conceitos matemáticos para que os problemas propostos fossem resolvidos. Entretanto, apesar da limitação que traz, a falta de conhecimentos específicos de conceitos matemáticos, referentes aos conhecimentos de álgebra, geometria e até de operações aritméticas básicas, o jogo "Quarto" se constituiu em um instrumento facilitador para a construção de novas inter-relações ocasionadas pelas análises realizadas pelo aluno ao tentar encontrar estratégias eficientes para vencer o jogo.

Também, o aspecto indissociável, considerado como um trabalho a ser proposto no nível em que o aluno seja capaz de formular relações, pode estar associado ao oferecimento do jogo "Quarto" contendo situações que variem quanto ao grau de complexidade e, ainda, que possam ser trabalhadas ao longo de toda a escolaridade desse aluno. Nesse contexto, reitera-se que a ação dos jogos sobre a aprendizagem e, conseqüentemente, sobre o desenvolvimento do educando, apenas será efetiva quando estes, de forma complementar e irredutível, forem propostos de maneira contínua e sistemática e, ainda, com a intenção de proporcionar novos e eficientes meios para a construção e fixação de conceitos matemáticos.

Por todo o exposto, pode-se inferir que os objetivos deste trabalho foram alcançados, uma vez que a análise da resolução dos problemas de conteúdo matemático propostos permitiu a observação do raciocínio desenvolvido pelo participante, o que possibilitou o estabelecimento do tipo de conduta adotado por ele. As questões propostas durante as sessões de intervenção ocorridas nas partidas de "Quarto", ao serem relacionadas com a atividade de resolução de problemas, puderam contribuir para aprimorar as soluções e suas respectivas justificativas na reaplicação da prova de problemas de conteúdo matemático. Constatou-se, ainda, uma significativa relação entre a conduta adotada pelo participante na resolução de problemas, em sua atuação nas partidas do jogo "Quarto", e o tipo de pensamento por ele apresentado, tendo como parâmetro o resultado da Prova das Permutações.

Tais relações, ao serem tratadas quantitativamente, puderam ser confirmadas, pois, a média obtida na Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos (RPCM) foi significativamente maior que aquela obtida pelos participantes na Prova de Conhecimentos Matemáticos (PCM). O tratamento estatístico para a população pesquisada ($N < 30$) foi realizado por meio do teste T de Student, ($t = - 3,9366$, com a probabilidade bilateral de 0,0008) uma vez que as duas distribuições foram testadas e consideradas normais pelo teste de Shapiro-Wilk (PCM = 0,1679 e RPCM = 0,6467 com um nível de significância de é 5%, $\alpha = 0,05$). Ainda se pôde comprovar estatisticamente uma forte correlação, analisada pelo teste de Spearman (r_s) entre os postos obtidos pelos participantes na Prova das Permutações e os encontrados em cada uma das demais provas realizadas. Foram obtidos os valores $r_s = 0.7826$, na comparação com a Prova de Conhecimentos Matemáticos, $r_s = 0,7505$ na comparação com as Sessões de Intervenção com o Jogo "Quarto" e $r_s = 0,7505$ na comparação com a Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos, sendo, em todos os casos, $p < 0,0001$. Ratifica-se, assim, que o participante que demonstrou possuir, na Prova das Permutações, um nível de pensamento operatório-formal, ainda que em construção, conseguiu melhores resultados na realização das demais provas, ocorrendo também o contrário, isto é, o participante que não atingiu uma boa pontuação na realização da Prova das Permutações, do mesmo modo não se saiu bem nas demais.

Por conseguinte, de acordo com os dados colhidos e analisados, conclui-se que a promoção de sessões de intervenção com o jogo "Quarto" mostrou-se favorável às atividades de resolução de problemas de conteúdo matemático e que, para resolvê-los e jogar operatoriamente o "Quarto", tornou-se necessário estabelecer relações entre situações possíveis e necessárias fundamentadas em um raciocínio hipotético-dedutivo, o que é uma característica do pensamento operatório-formal, relações estas esperadas para alunos pertencentes ao Ensino Médio.

Considerações Finais

Acreditamos que a compreensão de conceitos matemáticos e a possibilidade de utilizá-los em situações diferentes daquelas que lhes deram origem devem ser construídas ao longo de toda a trajetória escolar do educando. Para que isso possa acontecer, deve-se oferecer, desde as primeiras noções, situações-problema que a criança se interesse em resolvê-las e que suas soluções estejam ao seu alcance. Assim, por meio da investigação, da observação e da pesquisa, o estudante poderá ter a oportunidade de estabelecer relações e, com isso, tornar-se capaz de empreender novas conquistas e progredir em seus conhecimentos. Nesse sentido, um trabalho baseado em métodos ativos de aprendizagem, como são os jogos de regras, ao ser oferecido com a intenção de promovê-la, pode ser um instrumento facilitador da construção significativa de conceitos, e ainda, contribuir de modo expressivo para o desenvolvimento das estruturas cognitivas.

Porém, para que os benefícios do trabalho com os jogos de regras possam ser sentidos de forma mais intensa, é necessário que ele seja proposto em contextos pedagógicos e, além disso, que sejam oferecidos de forma contínua, e não apenas em momentos estanques. Isso não quer dizer que o jogo possa substituir as demais tarefas escolares, mas sim, que ele faça parte delas. O trabalho com jogos, como meio para o estabelecimento de novas e melhores formas de raciocínio, costuma ser muito valorizado para crianças no início de sua escolaridade; porém, passa a ter a sua utilização reduzida em séries posteriores, até que, no Ensino Médio, praticamente desaparece. A falta de familiaridade com o desenvolvimento desse tipo de trabalho pôde ser observada na dificuldade encontrada para a composição da amostra desta pesquisa (N = 21), já que o convite foi feito a mais de uma centena de estudantes.

Uma das causas apontadas por professores de Matemática do Ensino Médio para a ausência de trabalhos com jogos de regras em suas aulas é a extensa quantidade de tópicos que devem ser abordados ao longo do ano letivo e a profundidade com que devem ser tratados. Mas eles se esquecem que a compreensão de conceitos básicos se faz com o estabelecimento de relações, e estas podem ser favorecidas por meio de atividades fundamentadas em jogos de regras. Outra possível causa alegada por aqueles que não adotam a prática com jogos de regras é o fato de que esse tipo de trabalho pode não se referir diretamente a procedimentos operatórios, além de ocupar um número maior de aulas, quando comparado com o desenvolvimento do mesmo conteúdo pelos métodos tradicionais de ensino.

Nesse sentido, é importante lembrar que em qualquer fase do desenvolvimento do educando, se os conceitos matemáticos são tratados de forma abstrata e descontextualizada, ou, quando há uma preocupação excessiva com a sua formalização, torna-se, para o aluno, uma dificuldade intransponível, o que é confirmado por Echeverría (1998), ao afirmar que há estudantes que não são capazes de entender Matemática e apenas seguem as regras ensinadas em aula pelo professor, aplicando-as mecanicamente sem entendê-las, fato que os impede de estabelecer as relações matemáticas que permitiriam, posteriormente, a elaboração de um raciocínio dedutivo. Uma das possibilidades para reverter esse quadro é a utilização de jogos de regras que, acompanhados de situações-problema relacionadas diretamente às situações vivenciadas no próprio jogo, podem, durante as aulas de Matemática, auxiliar os alunos a se sentirem motivados e, com isso, permitir a sua participação ativa, o que irá favorecer o entusiasmo e a confiança para a atividade matemática.

Os resultados da presente pesquisa, desenvolvida com alunos do Ensino Médio, para os quais propusemos problemas de conhecimento matemático e realizamos intervenções por meio do jogo de regras “Quarto”, confirmam que, para os que dela participaram, houve progresso na maneira como solucionaram os problemas quando estes foram reaplicados. Isso ocorreu porque as questões propostas durante as sessões de intervenção permitiram a aplicação de um mesmo raciocínio a diferentes conteúdos, o que implicou na possibilidade de mobilização do pensamento em busca da generalização, ampliando a compreensão dos conceitos implicados, além de ativar os processos de observação e investigação.

Os trabalhos com jogos de regras podem ser considerados, portanto, como uma das estratégias para que as aulas de Matemática se tornem mais instigantes e laboriosas. Como consideramos que aprender Matemática é o mesmo que aprender a resolver problemas, um trabalho que contemple tal proposta pode ser oferecido durante a própria aula, por meio da escolha de um jogo que reúna condições de, ao ser aplicado, permita a participação de todos e, ainda, que ofereça meios para que o professor avalie o progresso de seus alunos. Porém, caso o trabalho a ser realizado privilegie o atendimento individual, como foi o da presente pesquisa, o horário para a sua aplicação deverá ser combinado com cada participante, fora do período de suas aulas, e transcorrer por um tempo suficiente para que se possam sentir os resultados da recuperação, da manutenção, ou ainda, do aprofundamento das noções que se deseja desenvolver. Por conseguinte, para o desenvolvimento de trabalhos como este, deve-se ter o envolvimento do professor, da família, da direção da escola e, naturalmente, do próprio aluno.

No desenrolar desta pesquisa, buscou-se, na análise das jogadas, a reflexão e a tomada de consciência das estratégias empregadas para que fossem aplicadas em outras situações como, por exemplo, na resolução de problemas. Desse modo, constatamos que a observação foi fundamental para todo o processo realizado, tanto do ponto de vista do pesquisador, que procurava responder às questões investigadas, como o do próprio participante que, também através dela, pôde adquirir a consciência de seus erros, tornando-os observáveis e, com isso, pôde também rever seus conceitos, antecipar situações em que poderia vencer o jogo, ou entender os motivos de sua derrota e reorganizar seus conhecimentos para que, ao ser novamente solicitado, resolvesse de forma correta o problema proposto, e assim, confirmar que:

> Observar é muito mais do que somente "dar uma olhada rápida". Significa deter-se, buscar relações, perceber semelhanças e diferenças, querer conhecer melhor. A observação é um processo constante e dela depende o diagnóstico e a continuação do trabalho. Quando a observação tem qualidade, ela pode colaborar para uma atuação mais eficaz. (MACEDO, PETTY e PASSOS, 2000, p. 97)

Os participantes do trabalho em questão foram unânimes em relatar que gostaram das situações que lhes foram propostas durante as sessões de intervenção com o jogo "Quarto' e que iriam, também com outros jogos, continuar a fazer análises de forma análoga às que foram encaminhadas neste projeto, para que não se esquecessem, e para que continuassem a se beneficiar delas na resolução de problemas matemáticos. E mais, que estenderiam essa conduta para problemas de outras disciplinas, como se pode observar no relato de ADR (16;05), transcrito a seguir:

> ADR: (Sic) *Achei o projeto algo de grande aproveitamento, não só em conceitos matemáticos, mas também no cotidiano, por ensinar ao aluno a ampliar o próprio campo de raciocínio lógico, não o deixando prender-se somente a uma expectativa ou a uma possibilidade de acontecimentos, tirando assim a vontade do ser de usar algumas falácias, assim como o falso dilema e o apelo à ignorância, formando assim um cidadão melhor e mais participante.*

Concluindo, buscamos com este trabalho realizar ações que poderão vir a ser reaplicadas, no sentido de resgatar a importância de se utilizarem jogos de regras para a resolução de problemas de conteúdo matemático. E, a partir deste, esperamos que outras pesquisas sejam desenvolvidas de modo a contribuir para a promoção da aprendizagem, com o foco dirigido ao principal objetivo, que é o da construção do conhecimento e, em especial do conhecimento matemático.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados: Análise de uma experiência.** 2005. 370 p. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciência Exatas. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

ALVES, E. M. S. **A ludicidade e o ensino da Matemática.** 3ª edição. Campinas: Papirus, 2006. 112 p.

ALVES, E. V. **Um Estudo Exploratório das Relações entre Memória, Desempenho e os Procedimentos Utilizados na Solução de Problemas Matemáticos.** 2005. 180 p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2005.

ALVES, I. P. **Níveis de Construção Dialética Espaço-Temporal no Jogo de Xadrez e Desenvolvimento de Possíveis em Escolares**. 2006. 142 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2006.

ARAUJO, E. A. **Influências das Habilidades e das Atitudes em Relação à Matemática e a Escolha Profissional.** 1999. 232 p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1999.

BARICCATTI, K. H. G. **A Construção Dialética das Operações de Adição e Subtração no Jogo de Regras Fan Tan.** 2003. 184 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação Universidade Estadual de Campinas, 2003.

BARICCATTI, K. H. G.; BRENELLI, R. P. As Interdependências entre as Operações Aritméticas e o Rendimento Escolar em Matemática. In **Zetetiké. Volume 14, número 26**. 2006: Unicamp. p. 71-87.

BOAVIDA, A. M. Resolução de Problemas: Que Rumos para a Educação Matemática. *In*: **Educação Matemática – Seminário de Educação Matemática**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. 1993, p: 105 – 114.

BRASIL. Ministério da Educação. **Lei de Diretrizes e da Educação Nacional. Lei 9394/96.** 1996. Disponível em http://www.portal.mec.gov.br Acesso em 24 jan. 2007.

BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BRASIL. Ministério a Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio**. **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília, DF: 2002. 141 p. Secretaria de Educação Básica, Disponível em: http://www.mec.gov.br Acesso em 25 jan. 2007.

BRASIL. Ministério a Educação. **Relatório Pedagógico - Enem.** Brasília, DF: Secretaria de Educação Básica, 2002a. 40 p. Disponível em: http://www.enem.inep.gov.br/ Acesso em 05 dez. 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio,** 2004. 22 p. Disponível em: http://www.enem.inep.gov.br/ Acesso em 22 fev. 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio,** 2005. 23 p. Disponível em: http://www.enem.inep.gov.br/ Acesso em 22 fev. 2006.

BRASIL. Ministério a Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** Volume 2. Brasília, DF: Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. Disponível em: http://www.mec.gov.br Acesso em 24 jan. 2007.

BRENELLI, R. P. **Observáveis e Coordenações em um Jogo de Regras: influência do nível operatório e interação social.** 1986. 236 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1986.

BRENELLI, R. P. **Intervenção pedagógica, via jogos Quilles e Cilada, para favorecer a construção de estruturas operatórias e noções aritméticas em crianças com dificuldades de aprendizagem.** 1993. 344 p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1993.

BRENELLI, R. P. **O jogo como espaço para pensar – A construção de Noções Lógicas e Aritméticas.** Campinas: Papirus, 1996. 208 p.

CARAÇA, B. J. - **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 2ª Edição. Lisboa: Gradiva Publicações Ltda., 1998. 295 p.

COELHO, M.A. V. M. P. A. **Resolução de Problemas: Da Dimensão Técnica à Dimensão Problematizadora.** 2005. 160 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

CONTRERAS L.C.; CARRILLO J. El amplio campo de la resolución de problemas. *In* **Resolución de problemas em los albores del siglo XXI: uma visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos,** CONTRERAS L.C.; CARRILLO J. (Org). Hergué Editora Andaluza. Huelva, Espanha, 2000. p. 13 -38.

CORBALÁN, F. **Juegos Matemáticos para Secundaria Y Bachillerato.** Madrid**:** Editorial Síntesis, 1998. 271 p.

CORBALÁN, F El juego y la resolución de problemas. *In* **Resolución de problemas em los albores del siglo XXI: uma visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos**. CONTRERAS L.C.; CARRILLO J.(Org), Huelva: Hergué Editora Andaluza. 2000. p. 40 - 56.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática Da Teoria à Prática**. 11ª edição. Campinas: Papirus, 2004. 120 p.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** São Paulo: Ática, 1991. 176 p.

DELGADO, M. J. Os professores de Matemática e a resolução de problemas. Três estudos de Casos. *In* **Resolução de problemas: Processos Cognitivos e Concepções de Professores e Desenvolvimento Curricular.** FERNANDES D.; BORRALHO A.; AMARO, G. (Org.) Lisboa: Instituto de inovação Educacional, 1994. p. 57-86.

DELVAL, J. **Introdução à Prática do Método Clínico descobrindo o pensamento das crianças.** Porto Alegre: Artmed, 2002. 267 p.

DOLLE, J. M. **E se a pedagogia pudesse tornar-se científica?** Schème - Revista eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas. Marília, SP. Volume I, nº 1 – jan/jun, 2008. Disponível em <http://www.marilia.unesp.br/scheme> acesso em 08 de ag. 2008

ECHEVERRÍA, M. P. P**.** A solução de problemas em matemática. *In*: POZO, J. I. (Org.) et all. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.** Tradução Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 43-102

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 3ª edição. Campinas: Editora da Unicamp, 2002. 844 p.

FIORENTINI, D. **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação.** 1994. 414 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, SP. 1994.

GRANDO, R. C. **O Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula.** 2000. 224 p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2000.

GRANDO, R. C.; MARCO, F. F. O Movimento da Resolução de Problemas em Situações com Jogo na Produção do Conhecimento Matemático. *In* MENDES, J. R.; GRANDO, R. C. (Org.). **Múltiplos Olhares: Matemática e produção de conhecimento.** 2006. p. 95-118.

GUIMARÃES, K. P. **Processos cognitivos envolvidos na construção de estruturas multiplicativas**. 2004. 197 p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2004.

HUANCA, R. R. H. **A Resolução de Problemas no Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e Além da Sala de Aula.** 2006. 247 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciência Exatas. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

INHELDER, B.; BOVET, M.; SINCLAIR, H. **Aprendizagem e Estruturas do Conhecimento.** Tradução de Maria Aparecida Rodrigues Cintra e Maria Yolanda Rodrigues Cintra. São Paulo: Saraiva, 1977. 282 p.

KAMII, C. **A criança e o número.** Tradução de Regina A. de Assis. 26ª edição. Campinas: Papirus, 1999. 124 p.

KAMII, C.; DECLARK, G. **Reinventando a Aritmética – Implicações da Teoria de Piaget.** Tradução: Elenisa Curt; Marina Célia Moraes Dias e Maria do Carmo Domith Mendonça. Campinas: Papirus, 1986. 308 p.

KAMII, C.; LIVINGSTON, S. J. **Desvendando a Aritmética.** Tradução de Marta Rabioglio, Camilo F. Ghorayeb e Marina Célia C. Morais. 4ª edição. Campinas: Papirus, 1998. 299 p.

KILPATRICK, J. A Retrospective Account of Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solvin. *In* SILVER, E. A.: **Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Múltiple Research Perspective**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1985. p. 1-15.

KRUTETSKII, V.A. **The Psychology of mathematical abilities in school children**; Translated from the Russian by Joan Teller; Edited by Jeremy Kilpatrick and Izaak Wirszup.Chicago: University of Chicago, 1976. 417 p.

LEVIN, J. **Estatística Aplicada a Ciências Humanas.** Tradução e adaptação Sérgio Francisco Costa. 2ª edição. São Paulo: Harbra Ltda, 1987. 392 p.

LIMA, V. S. **Solução de problemas: Habilidades Matemáticas, Flexibilidade de Pensamento e Criatividade.** 2001. 215p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2001.

LONGEOT, F. **L'Échelle de Developpement de la Pensée Logique. Manuel D'instructions**. Institut National d'Orientation Professionnel – France. Institut des Sciences de L'Education de Genève – Suisse. 1974. 44 p.

LOPES, J. A. **Livro Didático de Matemática: Concepção, Seleção e Possibilidades frente a Descritores de Análise e Tendências em Educação Matemática.** 2000. 264 p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2000.

MACEDO, L. **Nível Operatório de Escolares (11 a 15 anos) conforme a EDPL de Longeot: Estudo intercultural, transversal e longitudinal**. 1983. 195 p. Tese (Livre Docência em Psicologia) – Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo, 1983.

MACEDO, L. Apresentação**.** *In*: PIAGET, J. **As Formas Elementares da Dialética**. São Paulo: Casa do Psicólogo. 1996. p. 7-10.

MACEDO, L. **Ensaios Construtivistas.** 5ª edição. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002. 172 p.

MACEDO, L. Esquemas de Ação ou Operações Valorizadas na Matriz ou Prova do Enem. *In* **Eixos Cognitivos do Enem,** Brasília: 2002a. 108 p. BRASIL, INEP, Ministério da Educação. (Documento sem Revisão)

MACEDO, L.; PETTY, A.L.S.; PASSOS, N. C. **Aprender com jogos e situações-problema.** Porto Alegre: Artmed, 2000. 116 p.

MACEDO, L., PETTY, A.L.S. & PASSOS, N.C. **Os Jogos e o Lúdico na Aprendizagem Escolar.** Porto Alegre: Artmed, 2005. 110 p.

MACIEL, D. M. **A Avaliação no Processo Ensino-Aprendizagem de Matemática, no Ensino Médio: Uma Abordagem Formativa Sócio-Cognitivista.** 2003. 165 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2003.

MAGALHÃES, L. A. M. **O jogo cara a cara em crianças de 7 a 13 anos: uma análise construtivista.** 1999. 96 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo, 1999.

MARCO, F. F. **Estudo dos Processos de Resolução de Problema Mediante a Construção de Jogos Computacionais de Matemática no Ensino Fundamental.** 2004. 140 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2004.

MATOS, J. P. Processos Cognitivos Envolvidos na Resolução de Problemas de Aplicação da Matemática, *In* **Resolução de Problemas: Processos Cognitivos Concepções de Professores e Desenvolvimento Curricular**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1994. p 65-91.

MELO, M. V. **Três Décadas de Pesquisa em Educação Matemática na Unicamp: um estudo histórico a partir de teses e dissertações.** 2006. 288 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2006.

MENDONÇA, M.C.D. **Problematização: Um caminho a ser percorrido em Educação Matemática**. 1993. 306 p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1993.

NCTM - **National Council of Teachers of Mathematics** *In* Agenda for Action. Virginia:1980.

OLIVEIRA, V. B. **Jogos de regras e a resolução de problemas.** Petrópolis: Vozes, 2004. 92 p.

ONUCHIC, L. R O ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. *In* BICUDO, M. A. V. (Org.) - **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo: Fundação Editora da Unesp, 1999. p. 199-218.

PAPERT, S. **L'enfant et la machine à connaître. Repenser l'ecole à l'ère de l'ordinateur**, Paris: Dunod, 1994, *apud* RETSCHITZKI, J et GURTNER, J.L.,1996..

PAULETTO, C. R. P. **Jogos de regras como meio de intervenção na construção do conhecimento aritmético em adição e subtração**. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. 2001.

PERALES, F. J. **Resolución de problemas.** Madrid: Editorial Síntesis, 2000. 221 p.

PERRENOUD P. **A Prática Reflexiva no Ofício de Professor: Profissionalização e Razão Pedagógica.** Porto Alegre: Artmed, 2002. 232 p.

PETTY, A. L. S. **Ensaio sobre o valor pedagógico dos jogos de regras: uma perspectiva construtivista.** 1995. 133 p. Dissertação (Mestrado em Educação)- Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo, 1995.

PIAGET, J. **O Raciocínio na criança**. Tradução de Valerie Rumjanek Chaves. Rio de Janeiro: Record, 1967. 241 p.

PIAGET, J. **Psicologia da Inteligência.** Tradução de Egléa de Alencar. 2ª edição. Rio de Janeiro: Fundo de Cultura S. A, 1972. 229 p.

PIAGET, J. **O Desenvolvimento do Pensamento. Equilibração das Estruturas Cognitivas**. Traduzido do francês por Álvaro de Figueiredo. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1977. 228 p.

PIAGET, J. **A Tomada de Consciência.** Tradução de Edson Braga de Souza. São Paulo: Melhoramentos, Editora da Universidade de São Paulo. São Paulo, 1978. 211 p.

PIAGET, J. **Fazer e Compreender.** Tradução de Christina Larroudé de Paula Leite. São Paulo: Melhoramentos, Editora da Universidade de São Paulo. São Paulo, 1978a. 186 p.

PIAGET, J **A formação do símbolo na criança**. Tradução de Álvaro Cabral e Christiano Monteiro Oiticica. 3ª edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1978b. 370 p.

PIAGET, J. **O Possível e o necessário – a evolução dos possíveis na criança** - volume 1. Tradução de Bernardina Machado de Albuquerque. Porto Alegre: Artmed, 1985. 137 p.

PIAGET, J. **O Possível e o necessário – a evolução dos necessários na criança** - volume 2. Tradução de Bernardina Machado de Albuquerque. Porto Alegre: Artmed, 1986. 128 p.

PIAGET, J. **O Juízo Moral na Criança**. Tradução de Elzon Lenardon. 2ª edição. São Paulo: Summus, 1994. 302 p.

PIAGET, J. **Abstração Reflexionante.** Tradução de Fernando Becker e Petronilha Beatriz Gonçalves da Silva. Porto Alegre: Artmed, 1995. 292 p.

PIAGET, J. **As formas elementares da dialética.** Tradução: Fernanda Mendes Luiz. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1996. 228 p.

PIAGET, J. **Seis Estudos de Psicologia.** Tradução de Maria Alice Magalhães D'Amorim e Paulo Sérgio Lima Silva. 24ª edição. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2001

PIAGET, J.; INHELDER, B. **La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant**. Paris, Presses Universitaires de France, 1951. (A gênese da idéia de acaso na criança, Rio de Janeiro: Record, sd), (cf. referência em MACEDO, L. tese de livre docência).

PIAGET, J e INHELDER, B **Da Lógica da Criança à Lógica do Adolescente**. Tradução de Dante Moreira Leite. São Paulo: Livraria Pioneira, 1976. 260 p.

PIAGET, J e INHELDER, B. **A Psicologia da Criança**. Tradução de Octávio Mendes Cajado. 7ª edição. São Paulo: Difel Difusão Editorial S. A, 1982. 137 p.

PIROLA, N. A. **Solução de Problemas Geométricos: Dificuldades e Perspectivas.** 2000. 218 p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

POLYA G. **A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciências, 1978. 179 p.

POLYA, G Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. *In*: KRULIK, S. & REYS, R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p.1-3

RETSCHITZKI, J. **Strategies dês jouers d'awele**. Paris: Editions L'Harmattan. 1990. 236 p.

RETSCHITZKI, J et GURTNER, J.L. **L'enfant et l'ordinateur**. Bélgica: Mardaga editeur. 1996. 208 p.

ROSA NETO, E. **Didática da Matemática**. 11ª edição, 4ª impressão. São Paulo: Ática. 2003. 224 p.

SANTALÓ, L.A. **La Enseñanza de las ciencias en la escuela media**, 1985, *apud* CORBALÁN, 1998.

SILVA, D. Material em formato eletrônico disponibilizado pelo autor como subsidio ao conteúdo de disciplina cursada: **Métodos Quantitativos e Estatísticos para tratamento de dados em Ciências Humanas.** Programa de pós Graduação **-** FE – Universidade Estadual de Campinas, 2005.

SILVA, M. J. C. **A Dialética Construtiva da Adição e da Subtração nas Estratégias do Jogo Gamão.** 2003. 177 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2003.

SILVA, M. J.C.; BRENELLI, R.P. O Jogo Gamão e suas Relações com as Operações Adição e Subtração**.** *In* **Revista de Educação Matemática**. 2004/2005: Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SP. p. 7-14

SILVA, M.J.C.; BRENELLI, R.P. A Construção Dialética da Adição e da Subtração no Jogo Gamão. *In* JOLY, M. C. R. A.; VECTORE, C. (Org.). **Questões de Pesquisa e Práticas em Psicologia Escolar.** São Paulo: Casa do Psicólogo. 2006. p. 146-169.

SPALLETTA, A. G. **Desenvolvimento das habilidades matemáticas: um estudo sobre as relações entre o desempenho e a reversibilidade de pensamento na solução de problemas**. 1998. 101 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

TORRES, M. Z. **Processos de Desenvolvimento e Aprendizagem de Adolescentes em Oficinas de Jogos.** 2001. 273 p. Tese (Doutorado em Educação)- Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo, 2001.

VILA, A. e CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas**. Porto Alegre: Artmed, 2006. 212 p.

Campinas, ... de .... de 2007

Senhores Pais ou Responsáveis

Seu (Sua) filho(a) foi convidado nesta data a participar de uma pesquisa que terá por objetivo verificar em que medida a análise das estratégias para atingir o objetivo de um jogo de regras denominado "Quarto" poderá permitir que o raciocínio do aluno evolua para novos e melhores procedimentos na solução de problemas de conteúdo matemático. A pesquisa será desenvolvida individualmente, na própria escola e em horário previamente combinado com cada participante. Os encontros deverão ser em número de 4 ou 5, com duração de, aproximadamente, uma hora cada. A participação de seu(sua) filho(a) não lhes trará nenhum ônus, e sim possibilitará a oportunidade de contribuir para o seu próprio desenvolvimento e da Educação de um modo geral.

Essa pesquisa faz parte de um projeto de doutorado vinculado ao programa de pós-graduação da Faculdade de Educação da Unicamp e está sob a minha responsabilidade.

Agradeço antecipadamente a atenção e coloco-me à disposição dos senhores para outros esclarecimentos que se fizerem necessários.

Atenciosamente.

____

Maria José de Castro Silva – RG. 4.838.788

Aluno:____ classe:_______

(   ) concordo   (   ) não concordo

com a participação de meu(minha) filho(a) na pesquisa a que se refere o presente convite.

____

Nome:

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título da Pesquisa: "As estratégias no jogo Quarto e suas relações com a solução de problemas matemáticos"

Seu(Sua) filho(a) está sendo convidado(a) a participar dessa pesquisa, que tem como finalidade investigar as relações entre as estratégias desenvolvidas no jogo "Quarto" e a resolução de problemas de conteúdo matemático, sob a responsabilidade de Maria José de Castro Silva, professora e aluna de doutorado do Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação da Profª Drª Rosely Palermo Brenelli.

Assinando esse Termo de Consentimento V.S. estará ciente que serão realizados de quatro a cinco encontros com seu(sua) filho(a), nos quais lhe será solicitado que resolva uma prova de conhecimentos matemáticos e que jogue o "Quarto", que é um jogo de regras, para a análise das estratégias utilizadas por ele(ela) para atingir o objetivo do jogo.

A pesquisa será realizada na própria escola, em horário previamente combinado entre seu(sua) filho(a) e a pesquisadora, e as sessões serão gravadas em fita cassete ou vídeo para posterior análise.

Os dados pessoais serão mantidos em sigilo e os resultados da pesquisa serão utilizados apenas para alcançar os objetivos do trabalho, incluindo sua apresentação em encontros científicos e publicação em revistas especializadas.

Os procedimentos em questão não envolvem riscos conhecidos e não fere a integridade moral dos sujeitos. A participação nesse estudo não acarretará nenhum prejuízo ou benefício terapêutico.

Havendo interesse ou necessidade, a participação de seu(sua) filho(a) poderá ser interrompida antes, durante ou ao término do procedimento, sem que com isso ele(ela) sofra quaisquer tipo de ônus.

Com este termo, V.S. está ciente de todas as informações necessárias para poder decidir sobre a participação de seu(sua) filho(a) na referida pesquisa.

Para apresentar recursos ou reclamações em relação à pesquisa V.S. poderá entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Campinas pelo telefone (19) 3521-8936 e/ou com a responsável pelo estudo, Profª Drª Rosely Palermo Brenelli, pelo telefone (19) 3521-5555 na Faculdade de Educação da Unicamp.

Este termo é lavrado em duas vias, sendo que uma permanecerá em seu poder e a outra com a pesquisadora responsável.

____

Nome da mãe ou responsável

____

Nome do aluno(a)

____

Local e data

____

Assinatura da mãe ou responsável

____

Pesquisadora responsável

Nome: __________________________________ série: ______ idade: _______ Data __/__/ 07

PROVA DE CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS

Mostre todos os procedimentos que utilizou para resolver cada uma das questões.

1. Quatro estações distribuidoras de energia A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo eqüidistante das estações A e B e da estrada (reta) que liga as estações C e D. A nova estação deve ser localizada:

( ) no centro do quadrado.

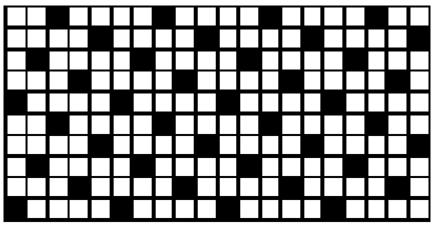
( ) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 15 km dessa estrada.

( ) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada.

( ) no vértice de um triângulo eqüilátero de base AB, oposto a essa base.

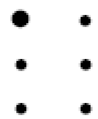
( ) no ponto médio da estrada que liga as estações A e B.

2. Um pátio de grandes dimensões vai ser revestido por pastilhas quadradas brancas e pretas, segundo o padrão representado abaixo, que vai ser repetido em toda a extensão do pátio. As pastilhas de cor branca custam R$ 8,00 por metro quadrado e as de cor preta, R$ 10,00. O custo por metro quadrado do revestimento será:



(   ) R$ 8,20.   (   ) R$ 8,40.   (   ) R$ 8,60.   (   ) R$ 8,80.   (   ) R$ 9,00.

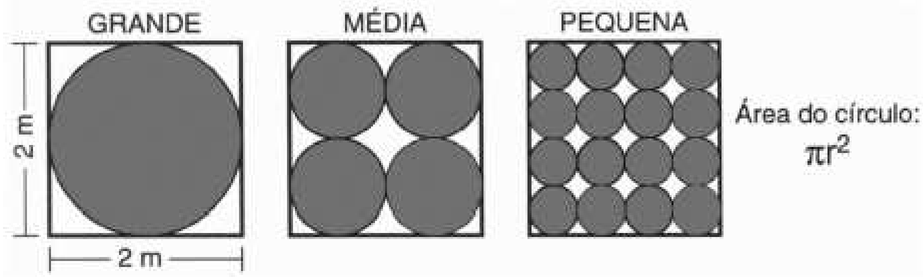
3. A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por:



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é:

( ) 12. ( ) 31. ( ) 36. ( ) 63. ( ) 720.

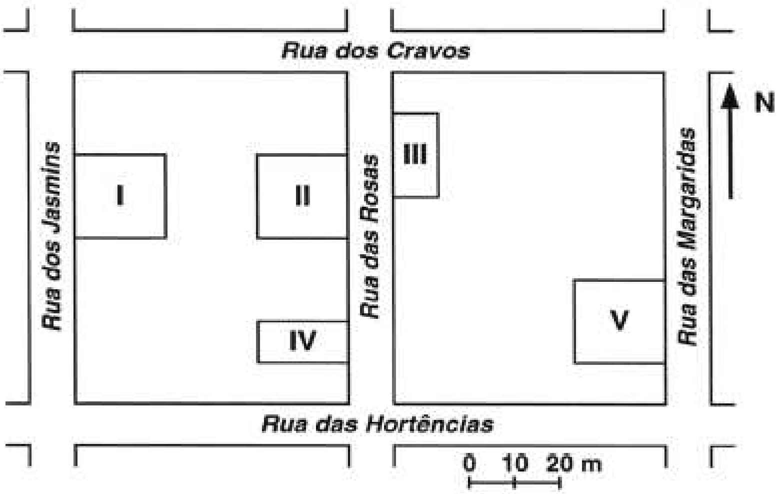
4. Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas. As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que:



( ) a entidade I recebe mais material do que a entidade II.
( ) a entidade I recebe metade de material do que a entidade III.
( ) a entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III.
( ) as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.
( ) as três entidades recebem iguais quantidades de material.

5. Um leitor encontra o seguinte anúncio entre os classificados de um jornal:
Interessado no terreno, o leitor vai ao endereço indicado e, lá chegando, observa um painel com a planta a seguir, onde estavam destacados os terrenos ainda não vendidos, numerados de I a V:


VILA DAS FLORES
Vende-se terreno plano medindo 200 m ^{2}. Frente voltada para o sol no periodo da manhã.
Fácil acesso.
(443)0677-0032



Considerando as informações do jornal, é possível afirmar que o terreno anunciado é o:
(   ) I.   (   ) II.   (   ) III.   (   ) IV.   (   ) V

Responda as perguntas abaixo que se referem a cada um dos problemas já resolvidos:

Problema 1.

a) Para resolver o problema você fez a leitura dele:
( ) uma vez ( ) duas vezes ( ) três vezes ( ) quatro vezes ou mais

b) Para encaminhar a solução, inicialmente, você fez uso de:
( ) um desenho ( ) propriedades ( ) Pitágoras ( ) outro (explique)

____

c) Selecione os conceitos matemáticos que precisou utilizar para a solução da questão:
( ) quadrado ( ) eqüidistância ( ) triângulos ( ) outros (quais)

____

d) Explique, com suas palavras, como fez para resolver o problema:

____

____

Problema 2:

a) Para resolver o problema você fez a leitura dele:
( ) uma vez ( ) duas vezes ( ) três vezes ( ) quatro vezes ou mais
b) Para encaminhar a solução, inicialmente, você fez uso de:
( ) do desenho mostrado ( ) do padrão do desenho ( ) outro (explique)

____

c) Selecione os conceitos matemáticos que precisou utilizar para a solução da questão:
( ) proporção ( ) frações ( ) área ( ) outros (quais)

____

d) Explique, com suas palavras, como fez para resolver o problema:

____

____

Problema 3:

a) Para resolver o problema você fez a leitura dele:
( ) uma vez ( ) duas vezes ( ) três vezes ( ) quatro vezes ou mais

b) Para encaminhar a solução, inicialmente, você fez uso da:
(   ) contagem pela figura   (   ) combinação   (   ) outro (explique)

___

c) Selecione os conceitos matemáticos que precisou utilizar para a solução da questão:
(   ) combinatória   (   ) fórmula   (   ) multiplicação   (   ) outros (quais)

___

d) Explique, com suas palavras, como fez para resolver o problema:

___

___

Problema 4:

a) Para resolver o problema você fez a leitura dele:
(   ) uma vez   (   ) duas vezes   (   ) três vezes   (   ) quatro vezes ou mais
b) Para encaminhar a solução, inicialmente, você fez uso de:
(   ) do desenho   (   ) conceito de área   (   ) outro (explique)

___

c) Selecione os conceitos matemáticos que precisou utilizar para a solução da questão:

(   ) quadrado   (   ) círculo   (   ) área   (   ) outros (quais)

___

d) Explique, com suas palavras, como fez para resolver o problema:

___

___

Problema 5:

a) Para resolver o problema você fez a leitura dele:
(   ) uma vez   (   ) duas vezes   (   ) três vezes   (   ) quatro vezes ou mais

b) Para encaminhar a solução, inicialmente, você fez uso de:
(   ) do desenho   (   ) pontos cardeais   (   )escala   (   ) outro (explique)

___

c) Selecione os conceitos matemáticos que precisou utilizar para a solução da questão:
(   ) retângulo   (   ) escala   (   ) área   (   ) outros (quais)

____

d) Explique, com suas palavras, como fez para resolver o problema:

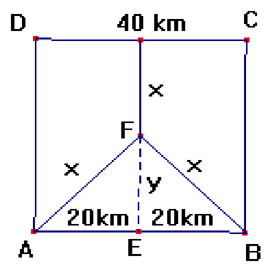
____

____

Resolução da Prova de Conhecimentos Matemáticos

Problema 1. Quatro estações distribuidoras de energia A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo eqüidistante das estações A e B e da estrada (reta) que liga as estações C e D. A nova estação deve ser localizada:

Resolução:



A estação central, de acordo com o problema, será construída no ponto F, situado na mediatriz de CD e a uma distância "x" dos pontos A e B e do lado CD. Como a figura ABCD é um quadrado, os triângulos AEF e BEF são congruentes e retângulos em E. A distância EF será chamada de "y". Aplicando o teorema de Pitágoras, teremos:

$x^2 = 20^2 + y^2$

Como x + y = 40, então y = 40 – x, substituindo na equação acima, vem:

$x^2 = 400 + (40 - x)^2$

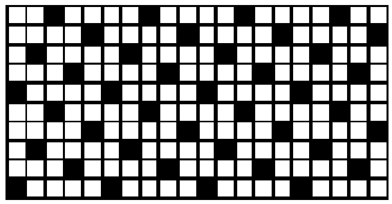
Resolvendo a equação:

$x^2 = 400 + 1600 - 80x + x^2$

Teremos: 80x = 2000 e, portanto, x = 25

Resposta: A estação deve ser localizada na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada.

Problema 2: Um pátio de grandes dimensões vai ser revestido por pastilhas quadradas brancas e pretas, segundo o padrão representado abaixo, que vai ser repetido em toda a extensão do pátio. As pastilhas de cor branca custam R$ 8,00 por metro quadrado e as de cor preta, R$ 10,00. O custo por metro quadrado do revestimento será:



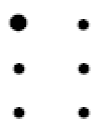
Resolução:

Considerando a regularidade entre as pastilhas brancas e pretas, observamos que a cada cinco pastilhas, quatro são brancas e uma é preta, dessa forma podemos escrever a expressão:

$$\frac{1}{5}.10{,}00 + \frac{4}{5}.8{,}00 = 2{,}00 + 6{,}40 = 8{,}40\,.$$

Resposta: O custo por metro quadrado do revestimento será R$ 8,40

Problema 3: A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por:



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é:

Resolução:

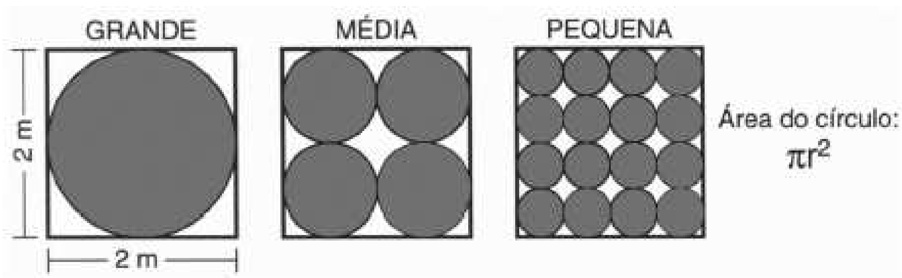
Se cada um dos pontos se destacar, teremos 6 possibilidades; com dois pontos se destacando, teremos 15 possibilidades; se forem destacados três pontos, serão 20 possibilidades; para quatro pontos, serão 15 ; para cinco pontos, serão em número de 6 pontos e uma única possibilidade se todos os seis se destacarem. Somando-se todas as possíveis combinações teremos um total de 63 caracteres no sistema Braile.

Nessa questão a resolução poderá ser feita a partir das combinações possíveis através da fórmula $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ no qual n representa cada um dos seis caracteres e p os caracteres que se destacam.

O participante também poderá fazer as combinações de forma sistemática, mas sem recorrer à fórmula, calculando $2^6 - 1 = 63$

Resposta: O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é 63.

Problema 4: Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas. As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que:



Resolução:

A solução do problema é obtida pela diferença entre a área do quadrado e a área do círculo, considerando-se em cada caso as tampas grande, médias ou pequenas.

Área do quadrado: $2^2 = 4\ m^2$.

Área da tampa grande: $\pi.\ 1^2 = 1.\pi$.

Diferença: $4 - \pi$

Área das tampas médias: $4.\ \pi\ (0,5)^2 = 4.\ 0,25\ .\ \pi = 1.\ \pi$

Diferença: $4 - \pi$

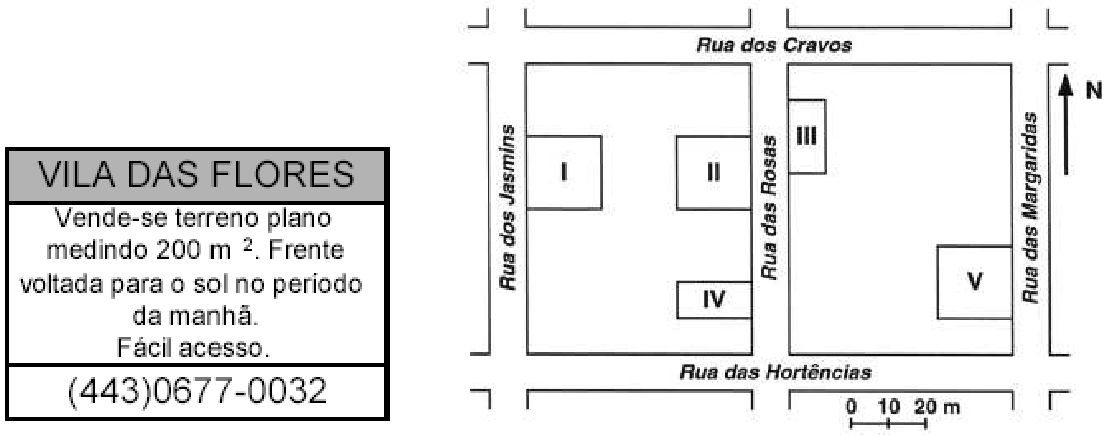
Área das tampas pequenas: $16.\ \pi\ .(0,25)^2 = 16\ .\ 0,0625\ .\ \pi = 1.\ \pi$

Diferença: $4 - \pi$

Resposta: Todas as entidades receberão a mesma quantidade de material.

Problema 5: Um leitor encontra o seguinte anúncio entre os classificados de um jornal:

Interessado no terreno, o leitor vai ao endereço indicado e, lá chegando, observa um painel com a planta a seguir, onde estavam destacados os terrenos ainda não vendidos, numerados de I a V: Considerando as informações do jornal, é possível afirmar que o terreno anunciado é



Resolução:

É necessário que o participante considere a seta apontando para o norte, concluindo que o leitor, ao olhar para o norte terá a sua direita o leste (onde nasce o sol), portanto deverá excluir os terrenos I, e III, ficando com os terrenos de números II, IV e V. Nesse caso deverá observar a área do terreno (200m^2) que poderá ser obtida através do produto 20 m por 10 m. A escala que aparece na planta indica que o terreno anunciado é o de número IV.

Avaliação da Prova de Conhecimentos Matemáticos

Problema	Pontuação		Procedimentos de resolução
1	0,0		O participante não resolve o problema, ou a sua resolução se apresenta totalmente incorreta.
	Pontuações intermediárias	1,0	Representa graficamente o que é pedido no enunciado do problema.
		1,0	Encontra a solução do problema, realizando tentativas a partir das alternativas apresentadas.
		1,0	Justifica como resolver o problema de forma adequada, por meio das questões propostas, mesmo sem detalhar a solução algébrica do problema.
		3,0	Resolve o problema de forma adequada, não chegando à sua solução por pequenos erros de cálculo.
	6,0		Encontra a solução do problema de forma sistematizada, justificando seu raciocínio de forma correta e completa.

Problema	Pontuação		Procedimentos de resolução
2	0,0		O participante não resolve o problema, ou a sua resolução se apresenta totalmente incorreta.
	Pontuações intermediárias	1,0	Os registros apresentados apontam para a percepção da regularidade do esquema apresentado no problema
		1,0	Encaminha a solução do problema, sem justificar adequadamente como o fez.
		1,0	Justifica como resolver o problema de forma adequada, por meio das questões propostas, mesmo sem efetivar toda a sua resolução.
		3,0	Resolve o problema de forma adequada, não chegando à sua solução por pequenos erros de cálculo.
	6,0		Encontra a solução do problema de forma sistematizada, justificando seu raciocínio de forma correta e completa.

Problema	Pontuação		Procedimentos de resolução
3	0,0		O participante não resolve o problema, ou a sua resolução se apresenta totalmente incorreta.
	Pontuações intermediárias	1,0	Utiliza um raciocínio multiplicativo para a solução do problema, mesmo obtendo uma resposta incorreta.
		1,0	Não faz as combinações de forma sistemática, ou utiliza outro princípio e por essa razão não encontra as 63 possibilidades.
		2,0	Justifica como resolver o problema de forma adequada, por meio das questões propostas, contudo, não finalizando a sua resolução.
	6,0		Encontra a solução do problema de forma sistematizada, justificando seu raciocínio de forma correta e completa.

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Pontuação</th><th colspan="2">Procedimentos de resolução</th></tr>
<tr><td rowspan="5">4</td><td>0,0</td><td colspan="2">O participante não resolve o problema, ou a sua resolução se apresenta totalmente incorreta.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Pontuações intermediárias</td><td>1,0</td><td>Compreende a necessidade de comparar a área remanescente das figuras por meio do cálculo das áreas das figuras representadas, sem apoiar-se no aspecto das figuras.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Justifica como resolver o problema de forma adequada, por meio das questões propostas, mesmo sem finalizar sua resolução.</td></tr>
<tr><td>3,0</td><td>Encaminha o problema de forma adequada, porém, comete erros de cálculo em sua resolução.</td></tr>
<tr><td>6,0</td><td colspan="2">Encontra a solução do problema de forma sistematizada, justificando seu raciocínio de forma correta e completa.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Pontuação</th><th colspan="2">Procedimentos de resolução</th></tr>
<tr><td rowspan="6">5</td><td>0,0</td><td colspan="2">O participante não resolve o problema, ou a sua resolução se apresenta totalmente incorreta.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Pontuações intermediárias</td><td>1,0</td><td>Consegue analisar separadamente as variáveis apresentadas no problema. (orientação espacial e escala)</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Justifica como resolver o problema de forma adequada, por meio das questões propostas, sem resolvê-lo efetivamente.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Encaminha o problema de forma adequada, não chegando à sua solução por não observar corretamente a escala para a determinação da área.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Encaminha o problema de forma adequada, não chegando à sua solução por erro de orientação espacial.</td></tr>
<tr><td>6,0</td><td colspan="2">Encontra a solução do problema de forma sistematizada, justificando seu raciocínio de forma correta e completa.</td></tr>
</table>

Procedimentos nas Sessões de Intervenção com o jogo "Quarto"
Questões e Quadro Geral

1. Utilização de estratégia para colocar uma peça em jogo:

Questões propostas para auxiliar essa investigação:

a) Por que você escolheu essa peça para colocar em jogo?

b) Você percebeu qual foi a estratégia utilizada por seu adversário?

c) Analisando a jogada que seu adversário fez, o que você acha que ele espera que você faça?

d) Que peças você não pode utilizar na próxima jogada?

e) As estratégias que você utilizou com a intenção de vencer o jogo podem ser aplicadas em outras situações? Quais?

<table>
<tr><td rowspan="7">Utilização de estratégia para colocar uma peça em jogo</td><th>Pontuação</th><th colspan="2">Procedimentos adotados</th></tr>
<tr><td>0,0</td><td colspan="2">Não utiliza nenhuma estratégia para colocar as peças em jogo</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Pontuação intermediária</td><td>1,0</td><td>Utiliza uma estratégia simples, prevendo apenas o ataque, ou apenas a defesa.</td></tr>
<tr><td>2,0</td><td>Utiliza uma estratégia que combina o ataque com a defesa, porém, não prevendo todas as possibilidades por estar centrado em um determinado atributo.</td></tr>
<tr><td>2,0</td><td>Realiza jogadas que combinam o ataque com a defesa, mas oscila na aplicação dessa estratégia em algumas partidas.</td></tr>
<tr><td>6,0</td><td colspan="2">Utiliza uma estratégia que combina o ataque com a defesa realizando a antecipação dos movimentos possíveis para si mesmo e para o adversário.</td></tr>
</table>

2. Capacidade para antecipar uma situação em que se dará um alinhamento:

Questões propostas para auxiliar essa investigação:

a) Você pensou em algum alinhamento ao colocar essa peça? Qual?

b) Onde poderá ocorrer o "Quarto"? Com qual atributo?

c) Que possibilidades de jogo você tem para colocar a peça dada pelo seu adversário, sem que ele faça o "Quarto"?

d) Nesta linha (ou coluna, ou diagonal) ainda é possível fazer o "Quarto"?

e) Como toda essa análise pode ser útil para a resolução de outros problemas?

<table>
<tr><td rowspan="6">Capacidade para antecipar uma situação em que se dará um alinhamento</td><th>Pontuação</th><th colspan="2">Procedimentos adotados</th></tr>
<tr><td>0,0</td><td colspan="2">Não consegue antecipar nenhuma situação em que se dará um alinhamento.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Pontuação intermediária</td><td>1,0</td><td>Percebe o alinhamento do adversário na eminência de sua formação.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Realiza uma antecipação simples de um possível alinhamento próprio, ou do adversário.</td></tr>
<tr><td>3,0</td><td>O participante oscila na capacidade de antecipar os possíveis alinhamentos, mas, quando o faz, consegue antecipá-lo de forma completa.</td></tr>
<tr><td>6,0</td><td colspan="2">Nesse caso a antecipação é completa, e o participante consegue planejar, antecipando suas jogadas e as de seu adversário, com a finalidade de vencer a partida.</td></tr>
</table>

3. Capacidade para distinguir cada atributo isoladamente e, ao mesmo tempo, analisar todos os atributos em conjunto:

Questões propostas para auxiliar essa investigação:

a) Em uma linha (coluna ou diagonal) com duas peças, perguntar: quais são as peças que permitirão, naquele alinhamento, fazer o “Quarto”?

b) Quais os atributos que permitirão a você fazer um “Quarto” na próxima jogada? Em que “casas” essas peças devem ser colocadas?

c) Observando a peça que seu adversário lhe entregou, para não perder o jogo, em qual “casa” você não poderá colocá-la? Com qual atributo ele fará o “Quarto”?

d) Em um problema escolar, como você escolhe os conceitos de que dispõe para resolvê-lo?

<table>
<tr><td rowspan="6">Capacidade na distinção dos atributos das peças</td><th>Pontuação</th><th colspan="2">Procedimentos adotados</th></tr>
<tr><td>0,0</td><td colspan="2">Não reconhece consecutivamente as diferenças e semelhanças entre os atributos.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Pontuação intermediária</td><td>1,0</td><td>Reconhece os atributos, mas necessita de revisão constante para a aplicação em suas jogadas.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Explica adequadamente as características de cada peça, mas ao jogar, mostra-se desatento para escolher uma peça ou para colocá-la em jogo.</td></tr>
<tr><td>3,0</td><td>O participante distingue os atributos coordenando semelhanças e diferenças em algumas partidas disputadas.</td></tr>
<tr><td>6,0</td><td colspan="2">O participante distingue os atributos coordenando semelhanças e diferenças em todas as partidas disputadas, demonstrando atenção e clareza quanto à sua importância.</td></tr>
</table>

4. Desenvolvimento de estratégias pessoais, a partir da tomada de consciência dos procedimentos utilizados em partidas anteriores:

Questões propostas para auxiliar essa investigação:

a) você acredita que está jogando melhor agora em relação às primeiras partidas disputadas?

b) o que foi mais instrutivo para você no decorrer das partidas?

c) você é capaz de identificar quais jogadas foram boas e quais foram ruins? Explique sua resposta.

d) você foi capaz de perceber os erros que cometeu durante as partidas?

e) os erros cometidos foram úteis para seu aprendizado?

f) como utilizar o que você aprendeu com as estratégias para jogar na resolução de problemas escolares?

<table>
<tr><td rowspan="6">Capacidade de desenvolvimento de estratégias pessoais</td><td>Pontuação</td><td colspan="2">Procedimentos adotados</td></tr>
<tr><td>0,0</td><td colspan="2">Mesmo não obtendo sucesso nas partidas não altera suas estratégias de jogo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Pontuação intermediária</td><td>1,0</td><td>Faz pequenas alterações em suas estratégias no que diz respeito à organização de sua defesa.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Faz pequenas alterações em suas estratégias no que diz respeito à organização de seu plano de ataque.</td></tr>
<tr><td>2,0</td><td>Demonstra algumas modificações em suas estratégias, por utilizar experiências anteriores.</td></tr>
<tr><td>6,0</td><td colspan="2">Faz uso de suas experiências e as de seu adversário para modificar suas táticas de jogo, tornando-as mais eficientes para a obtenção da vitória.</td></tr>
</table>

Nome: ____ Série: ______ Data: ___/___/07

PROTOCOLO - PROVA DAS PERMUTAÇÕES

PREPARAÇÃO:
Manipulações: Pegar uma ficha amarela (A) e outra vermelha (Vm), colocando-as em linha diante do participante.
Instruções: *Imagine que são dois alunos sentados, um ao lado do outro. Esta é uma maneira de colocá-los. Pode-se colocá-los de outra maneira, continuando um ao lado do outro?*

FASES DE VERIFICAÇÃO:
1. Com três cores:
a) Prognóstico
Tomar uma ficha amarela (A), uma vermelha (Vm) e uma verde (Vd), colocando-as em linha e nessa ordem.
Instruções: *Agora nós acrescentamos o verde; isso quer dizer que são três alunos sentados em linha. Essa é uma maneira de sentá-los. Você pode dizer de quantas maneiras diferentes de sentá-los existe ao todo? Você pode explicar como pensou?*
Resposta:

____

____

b) Execução:
A seguir, pedir ao participante que faça os alinhamentos que pensou.

____

____

Caso o prognóstico tenha sido incorreto e ele pare de fazer alinhamentos após o terceiro, argumentar com o participante que é possível fazer novos alinhamentos começando por outra cor, e que é diferente dos até então apresentados. Pode ser feita uma segunda sugestão e, se o aluno parar novamente antes da ultima permutação, dar a prova por encerrada.
Caso o aluno não tenha feito as permutações de forma sistemática, fazê-las, observando ser essa a melhor forma para se conseguir fazer todos os alinhamentos possíveis.

OBS: O sucesso é atingido sem sugestões, ou até com duas sugestões, sendo que a 2ª sugestão deve ser feita antes da 5ª permutação.

2. Com quatro cores:
a) Prognóstico:
Pegar quatro fichas de cores diferentes e colocá-las na seguinte ordem: A, Vm, Vd, Az.

Dizer: *Agora nós temos quatro cores ou quatro alunos. Esta é uma maneira de colocá-los. Você pode adivinhar quais são todas as maneiras diferentes que nós podemos colocá-los? Explique como pensou.*

____

____

Observar se a explicação é aditiva ou multiplicativa
b) Execução: *faça então como você pensou.*

____

____

____

Se o participante pensa ter terminado antes de construir as 24 permutações, mostrar uma linha na qual as duas primeiras cores não sejam idênticas às duas cores utilizadas nas outras linhas.

Obs:

1. Caso o participante tenha chegado às 24 permutações sem utilizar um critério definido, colocá-las em ordem para que ele as veja como um todo.

2. Se o participante não acrescentar nenhuma maneira, ou não terminar as 24 permutações, parar a prova.

3. Com cinco cores ou mais:

Pegar cinco fichas (A, Vm, Vd, Az + uma branca) e colocar sobre a mesa nesta ordem.
Dizer: - *Agora com essas cinco cores, quantas maneiras diferentes podemos fazer? É necessário descobrir uma forma para achá-las, se você não achar não faz mal, é difícil mesmo.*
Caso o participante dê alguma resposta pedir a ele que a explique. Tente precisar a resposta por meio de uma operação aritmética.

____

____

Se o participante não der nenhuma resposta, encerrar a prova. Se ele der uma resposta próxima da correta, perguntar a ele se forem seis, depois sete cores, enfim se ele sabe como generalizar essa descoberta.

____

____

____

Protocolo - Avaliação da Prova das Permutações

Aluno: ____série: _____________

<table>
<tr><th>Questões</th><th colspan="2">Pontuação</th><th>Justificativas</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1ª Questão - Permutação de três elementos: Predição e execução</td><td>0,0</td><td></td><td>Prediz apenas 3 permutações e não consegue dispor as 6 formas diferentes com, apenas, duas sugestões do aplicador.</td></tr>
<tr><td>2,0</td><td></td><td>Prediz o número correto de permutações (N = 6) e consegue com até duas sugestões antes de finalizar o quinto arranjo realizar todas as seis combinações</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2ª Questão- Permutação de quatro elementos: Predição e execução</td><td>0,0</td><td></td><td>Prediz como 8 o número total das permutações, justificando erroneamente suas conclusões utilizando um raciocínio aditivo (ex: se o número de permutações de três é seis basta acrescentar dois, para saber o de quatro) também não pontuará se utilizar a “fórmula do dobro”, isto é, dizer que há doze permutações, uma vez que para três elementos havia 6 então para 4 elementos há o dobro (2x6 = 12)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2,0</td><td>1,0</td><td>Essa pontuação é obtida quando o participante utiliza um raciocínio multiplicativo para justificar sua predição, podendo ser esta correta ou não.</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>Obtém essa pontuação quando realiza todas as permutações (N = 24) por si mesmo, ou auxiliado uma única vez pelo aplicador.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3ª Questão: Cinco, seis ou sete elementos: Predição</td><td>0,0</td><td></td><td>Fracasso na predição correta do número total de permutações para 5, 6 ou 7 elementos, justificando sua resposta por meio de um raciocínio ilegítimo.</td></tr>
<tr><td>2,0</td><td></td><td>Predição correta do número total de permutações, podendo justificar o resultado seguinte pelo anterior (ex: se para 4 elementos são 24 permutações, então se forem 5 elementos serão 120 permutações porque 5 x 24 =120) ou chegar à formula N!</td></tr>
</table>