UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estratégias de utilização de registros de representação semiótica na resolução de problemas matemáticos

Autora: Lenir Morgado da Silva
Orientadora: Professora Drª Elisabeth Barolli

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Lenir Morgado da Silva e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 27/08/2007

Assinatura: ....

Orientadora

COMISSÃO JULGADORA:

Jorge Megid Neto

2007

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca
da Faculdade de Educação/UNICAMP

Silva, Lenir Morgado da.
Si38e Estratégias de utilização de registros de representação semiótica na resolução de problemas / Lenir Morgado da Silva. -- Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientador : Elisabeth Barolli.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Matemática. 2. Educação. 3. Linguagem. I. Barolli, Elisabeth. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

08-129/BFE

Título em inglês : Strategies using semiotic representations registers in problem solving
Keywords: Mathematics ; Education ; Language
Área de concentração: Ensino e Praticas Culturais
Titulação: Mestre em Educação
Banca examinadora: Profª. Drª. Elisabeth Barolli (Orientadora)
Prof. Dr. Jorge Megid Neto
Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
Data da defesa: 27/08/2007
Programa de pós-graduação : Educação
e-mail : lenmorg@gmail.com

AGRADECIMENTOS

A Deus, acima de tudo.

À minha família, pelo incentivo, apoio, contribuição e pela compreensão em muitas de minhas ausências. Não existem palavras suficientemente belas para agradecê-la.

À Unicamp, pela preciosa oportunidade.

À minha orientadora, uma pessoa muito especial, professora doutora Elisabeth Barolli, que aceitou entrar no vespeiro. Serei eternamente grata por ter aceitado a orientação deste trabalho. Muito obrigada pelas valiosas contribuições, fornecidas de forma competente e instigante.

À professora doutora Anna Regina Lanner de Moura, que parece um anjo que caiu do céu. Obrigada pela leitura cuidadosa da primeira versão do trabalho e pelas valiosas sugestões.

Ao querido professor doutor Jorge Megid Neto, pela leitura muito, muito cuidadosa do material. Só quem contou com sua presença numa banca sabe do que estou falando. Agradeço também pela atenção de sempre, em todos os momentos e pela pessoa maravilhosa que é.

Ao querido professor doutor Saddo Ag Almouloud, que gentilmente aceitou fazer parte da banca e que forneceu sugestões e fez questionamentos muito, muito importantes. Eu não poderia ter feito uma escolha melhor. Muito obrigada.

Aos professores do grupo de Formação de Professores de Ciências, que me deram a chance de participar dele, e aos colegas do grupo, especialmente Marilac, Paulo Marcelo, Bruno, Perciliana e Taís, que me escutaram nos momentos mais difíceis e me ajudaram. Nessas horas contamos com os amigos.

Aos colegas do grupo de Educação Matemática: Micheline, pela amizade, pela torcida e pelo apoio nas horas difíceis; Marisol, pelas conversas e conselhos; e Francisco, pela contribuição com a ABNT.

Aos colegas do grupo de Psicologia da Educação Matemática: Tânia, Adriana e Roseline. Obrigada pela amizade e pelo apoio constante.

Aos professores do IME-USP, que me proporcionaram um curso muito bom e mostraram também o lado belo da Matemática, contribuindo com a minha formação profissional, em especial aos professores Manoel Oriosvaldo de Moura, Nilson José Machado, Maria Ignez V. de Souza Diniz, Roseli Fernandes, Seiji Hariki, Sérgio Alves e Ciro Patarra.

À diretora da Escola EE São Paulo, por gentilmente ter permitido que a escola fizesse parte desta pesquisa e por ter me recebido muito bem. Foi muito bom ter conhecido uma diretora que se preocupa tanto com a aprendizagem dos seus alunos e que lhes deseja sucesso na escola, na profissão e na vida. Fiquei muito feliz. Com certeza tive a sorte de ter procurado esta escola. Muito, muito obrigada.

Aos dedicados, interessados e respeitosos alunos do terceiro ano do Ensino Médio da EE São Paulo, por terem resolvido as questões desta pesquisa, com muita dedicação e interesse.

Ao meu querido tio Tom. Obrigada pela frase: 'o que vale é o que fica'.

Ao Silas, que foi a pessoa certa, na hora certa, no lugar certo. Obrigada pela amizade, a qual valorizo muito, e pela ajuda na coleta dos dados.

À querida Luiza, pela linda amizade e por estar sempre à disposição para ajudar e compartilhar conhecimentos.

À Luzia Suely, com muito carinho, por ter compreendido minhas ausências nas reuniões e por ter me escutado em muitos momentos.

Aos funcionários da secretaria da pós, em especial à Nadir, à Gi e à Cleo, pela ajuda em todos os sentidos.

Aos colegas da editora Moderna: Juliane, Mara, Fábio, Ricardo Seballos, Zé Luiz e Elaine Leike, Alexandre e Lídia. Obrigada pelo carinho, pelo incentivo, e por me ajudarem com minha primeira publicação.

A Jefferson Cevada, da editora Saraiva, pela amizade e por compartilhar idéias sobre educação matemática.

Aos queridos educadores e gestores de Bebedouro, pela simpatia, pela dedicação e pela preocupação com o ensino da Matemática e pelo incentivo que, mesmo sem saber, me proporcionaram. Muito obrigada por tudo.

A tantos outros que não mencionei, mas que torceram por mim.

Então escrever é o modo de quem tem a palavra como isca: a palavra pescando o que não é palavra. Quando essa não-palavra morde a isca, alguma coisa se escreveu. Uma vez que se pescou a entrelinha, podia-se com alívio jogar a palavra fora. Mas aí cessa a analogia: a não palavra, ao morder a isca, incorporou-a.

Clarice Lispector

RESUMO

Fundamentada em referenciais da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (1993), esta pesquisa pretende analisar o uso que estudantes do nível médio de ensino fazem de registros de representação semiótica para resolver problemas matemáticos. De acordo com esse autor, o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio desses registros de representação, pois esses objetos não são perceptíveis fisicamente e é esse acesso que determina o que uma atividade de conhecimento tem de específico. Os resultados da análise de 58 respostas de alunos do terceiro ano do ensino médio a quatro problemas de matemática permitiu perceber que os sujeitos não costumam fazer uso de diferentes registros de representações semióticas para resolver problemas. O registro em linguagem natural apareceu abrindo ou concluindo a resolução, na tentativa de explicá-la ou justificá-la, constituindo-se em uma conversão. Há sujeitos que utilizaram o menor número possível de registros diferentes em uma questão, realizando menos conversões e tiveram bom desempenho. Sujeitos que utilizaram vários registros de representação realizando várias conversões tiveram, em sua grande maioria, bom desempenho nas questões. Em sua maioria, sujeitos que não representaram adequadamente os objetos envolvidos na questão, não obtiveram sucesso. Problemas que solicitaram o uso de alguma linguagem específica diminuíram as possibilidades de escolha dos registros, influindo no desempenho de alguns estudantes, que não fizeram uso adequado da linguagem requerida.

De forma geral, as linguagens aritmética e natural foram as mais utilizadas. A pesquisa aponta para a importância de explorar no ensino os objetos matemáticos por meio de diferentes registros de representação bem como de realizar diferentes conversões para um mesmo objeto.

Palavras-chave: Resolução de problemas; Registros de representação Semiótica; Educação Matemática; Linguagem.

ABSTRACT

Based on references of Semiotic Representations Registers Theory by Raymond Duval (1993), this research intends to analise the usage that high school students do use Semiotic Representation registers in order to solve math problems. According to the Author, the access to math objects is made through these representation registers, because such objects aren't physically noticeable and this very access determines what is specific about a knowledge activity. The analysis of the results of 58 answers of the students on third degree on High School to four math problems, allowed us to realize that the students aren't acquainted to use several different semiotic representation registers to solve a question.

The usage of natural language registers was used in the beginning or ending the resolution, in order to attempt to explain it or justifies it, becoming an conversion.

There are students that used as less as possible a number of different registers in a question, doing a few conversions and achieved a good performance.

Students who used several representation registers and did many conversions had in majority, good performance in the question.

On the other hand, students that didn't represent properly the objects involved in the question weren't successful.

Problems that required the usage of any specific language diminished the possibilities of choosing the registers, and that influenced the performance of some students who didn't use properly the required language.

In generally, the most used languages were the arithmetic language and the natural language.

Research points to the importance, while teaching, of exploring the math objects by different representation registers as well as doing different conversions to the same object.

KEY WORDS: Solve math problems; Semiotic representation register; Math education; Language.

LISTAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO I – Problemática

> Há dois modos de bloquear o caminho do conhecimento: presumir a impossibilidade de se conhecer a verdade ou assumir que a verdade já é conhecida. (Charles Sanders Peirce)

Avaliações internas e externas à escola, como o SARESP (sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e a Prova Brasil, têm mostrado que, de modo geral, os estudantes da educação básica apresentam baixo desempenho em Matemática. Minha experiência e meus estudos mostraram que esse resultado pode ser devido a diversos fatores, dentre eles a dificuldade que os estudantes têm de resolver problemas e de fazer uso de um sistema de símbolos e regras próprias.

Apresentamos a seguir três exemplos de produções de estudantes do Ensino Fundamental e Superior e respectivos esclarecimentos. Essas produções ilustram a situação anteriormente comentada.

Primeira produção

- Contexto de produção do texto: o professor pediu aos estudantes das séries iniciais do Ensino Fundamental que elaborassem um problema envolvendo a subtração.
- Transcrição sem correção: Elaborar um problema envolvendo subtração – Michael fez 035 bolos e o Elias e o Elielson juntos fizeram 12 juntos. Quantos bolos têm ao todos Eles nessa subtração

$$\begin{array}{r} 35 \\ -\underline{12} \\ 23 \end{array}$$

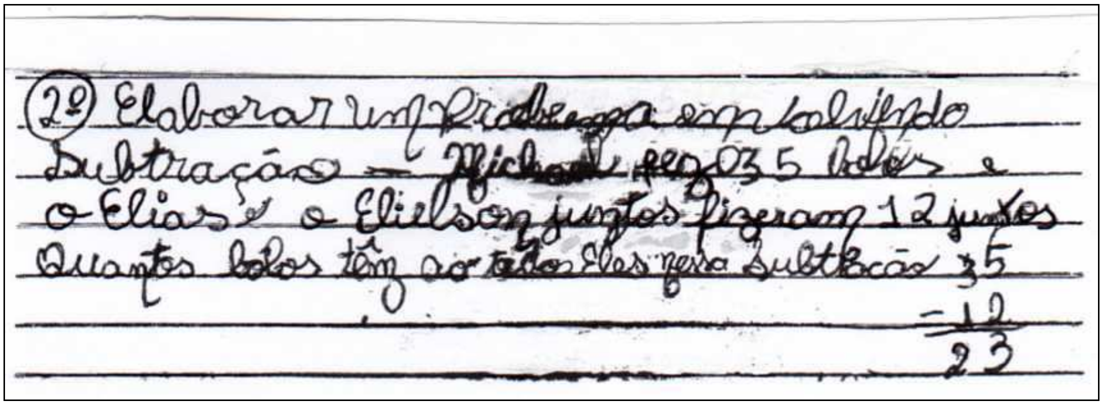


Figura 01: Elaboração de um enunciado de problema

O aluno cria um problema que requer a adição (nesse caso a idéia de juntar), mas tenta, por meio da pergunta, transformá-lo em um problema de subtração. Ele o resolve como se fosse um problema de subtração.

Segunda produção

- Contexto de produção do texto: um professor de Matemática propôs aos estudantes de 6ª série que resolvessem problemas de quebra-cabeça[1]. Depois, o professor solicitou aos alunos que escrevessem em uma folha o que acharam dos problemas.
- Transcrição sem correção: Um saco.

Para de dar esses problemas que não tem nada a ver com a gente nós queremos problemas de + e _ .

[1] Problemas de Quebra-cabeça são aqueles que não apresentam um caminho explícito de resolução, podem admitir solução ou não, geralmente não possuem dados numéricos e possuem contextos lúdicos.

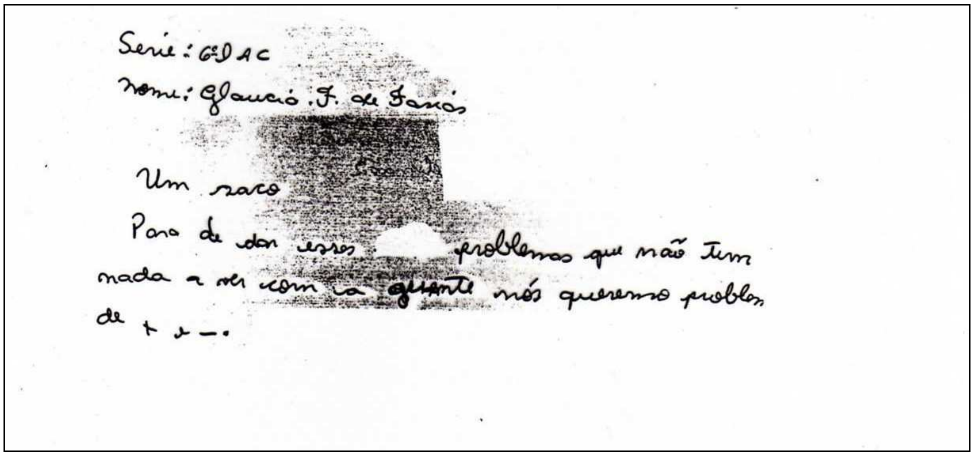

Serie: 6ª A C
Um saco
Para de dar esses problemas que não tem nada a ver com a gente nós queremos problem de + e –.

Figura 02: Opinião de aluno sobre problemas de quebra-cabeça

Terceira produção

- Contexto da produção do texto: o professor do curso superior de Pedagogia pediu aos alunos, professores em formação, que resolvessem o problema e registrassem a resolução. É importante observar que o aluno não explicita uma análise das várias possibilidades. Essa análise ajuda na busca da solução e também é importante para verificar se o problema tem solução única ou se admite mais de uma solução. O aluno considera atributos irrelevantes para chegar à solução (gravata que está em evidência).
- Transcrição sem correção: Primeiro observei qual gravata estava + e evidência (Sérgio usa gravata).

Com isso restou apenas um careca (Luís)

Sobrou 2 bigodes e 1 xadrez → (Alexandre)

Com isso sobrou apenas 1 com bigode (Cláudio)

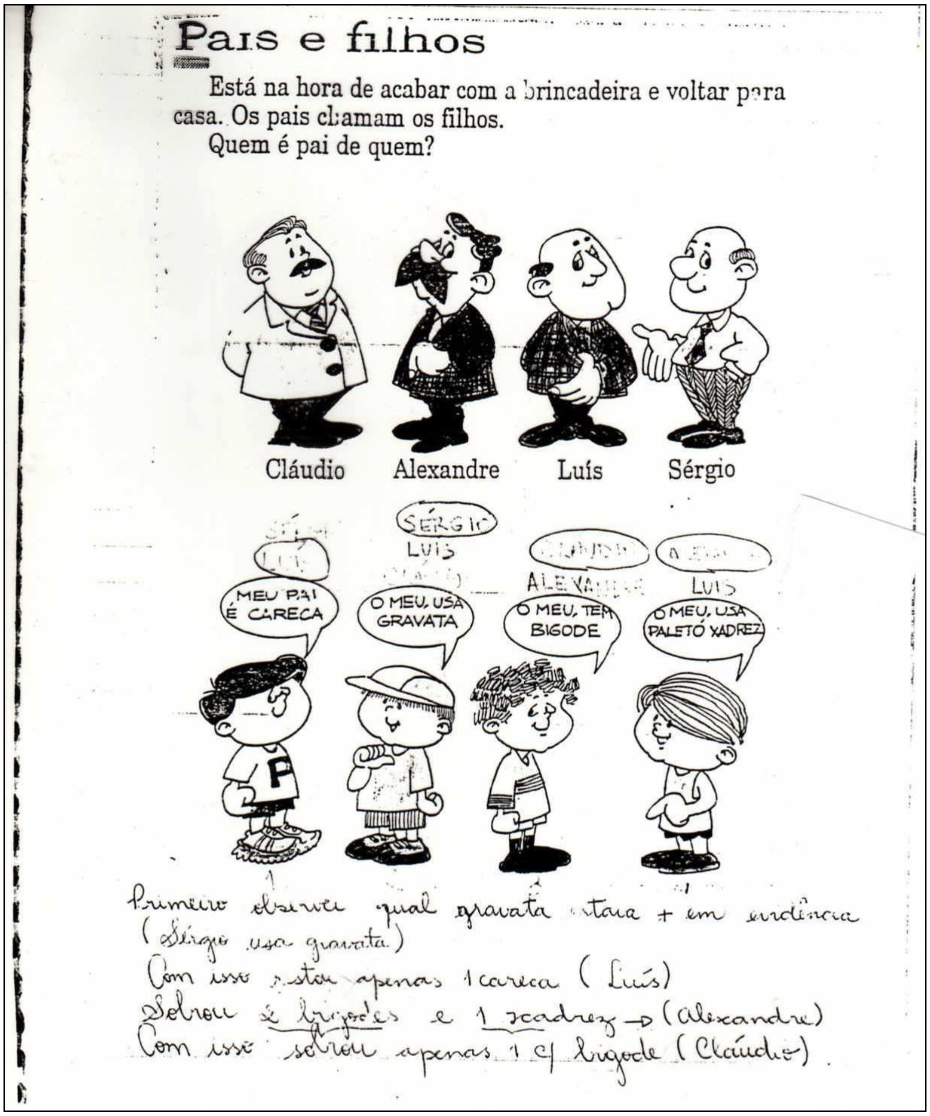


Figura 03: Resolução de um problema de quebra-cabeça

As produções mostram que alunos e professores em formação ainda têm dificuldades com a resolução de problemas, seja no Ensino Fundamental ou Superior. Mas esses são apenas alguns casos de muitos que de certa forma também apontam fragilidades no ensino da Matemática. Um professor que não sabe resolver problemas não vai ensinar o aluno a resolver problemas. O professor gosta de se sentir seguro quanto o conteúdo para ensiná-lo.

O mais interessante é perceber que às vezes há questões nas provas, especificamente as destinadas ao Ensino Fundamental, que podem ser resolvidas por meio de análise das alternativas, isto é, às vezes não é necessário saber resolver uma operação, e às vezes nem saber que operação será aplicada. Basta analisar as alternativas (que nesse caso são razoavelmente discrepantes umas das outras), utilizar o bom senso e assinalar a alternativa correta. O exemplo seguinte dá uma idéia da análise de que estamos falando.

1.(SARESP 2005- 4ª série) Beto saiu de sua casa na cidade de São Paulo para ver os rodeios em Barretos. Depois de percorrer 374,8 quilômetros, ele parou num posto de gasolina e soube que ainda faltavam 63 quilômetros para chegar a seu destino. A distância percorrida de sua casa a Barretos é igual a:

(A) 1 004,8 km

(B) 437,8 km

(C) 381,1 km

(D) 311,8 km

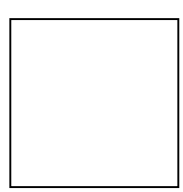
Nesse caso, o aluno precisa encontrar um número próximo da soma de 374,8 com 63. Para facilitar, os números aparecem alinhados nas alternativas, evidenciando as diferenças de ordem de grandeza. O aluno poderia descartar imediatamente a primeira alternativa, porque o número é muito alto. Com um pouco de atenção e bom senso descartaria a última alternativa porque o valor dado é menor que a primeira parcela da soma (364,8). Se utilizasse a estimativa também descartaria a segunda alternativa, porque é um pouco maior que a soma de 374,8 com 63.

Sobrou a terceira alternativa, resposta da questão. Halloun & Hestenes (1987) apontam que estudantes podem resolver alguns problemas sem compreender os conceitos envolvidos, o que foi exemplificado anteriormente.

Como nos meus trabalhos de formação de professores as avaliações externas eram discutidas principalmente porque os professores gostariam que seus alunos tivessem bom desempenho, então esse aspecto das avaliações era discutido. Se considerássemos as dificuldades com a leitura do enunciado, a não compreensão ou o não domínio dos conceitos matemáticos envolvidos na situação e o desconhecimento de procedimentos de resolução, então o desempenho na resolução de problemas era muito ruim.

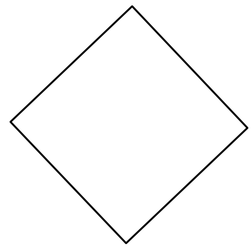
Mas a leitura dos enunciados sempre foi um problema. Muitas vezes um problema está escrito somente com a língua natural; outras vezes apresenta outra linguagem como a linguagem numérica, por exemplo. Mesmo que o problema esteja escrito somente com a língua natural, muitos estudantes têm dificuldade com a sua leitura, se assumirmos que ler é atribuir sentido e não simplesmente decodificar. A linguagem, para Saussure[2] (2002, p. 24) seria "*um sistema de signos que exprimem idéias, e é comparável, por isso, à escrita, ao alfabeto dos surdos-mudos, aos ritos simbólicos, às formas de polidez, aos sinais militares, etc..., etc. ela é apenas o principal desses sistemas".* É comum um aluno procurar algarismos no enunciado e utilizar todos eles em uma ou mais operações (o aluno não tem sido treinado para verificar se há dados a mais ou se faltam dados). Outra situação não muito rara diz respeito aos enunciados escritos totalmente em linguagem natural (os números não são representados por meio de algarismos, exemplo: quatro e não 4). Algumas crianças resolvem um problema quando o número está representado por meio de seu algarismo, mas não o resolvem se o número está escrito por extenso, alegando que o problema não tem números. Problema maior encontramos quando é necessário traduzir o enunciado em linguagem natural para a linguagem algébrica, por exemplo. Se o aluno não se apropriou da linguagem Matemática encontrará muitas dificuldades nesse caso. Encontrar muitos casos parecidos com esse começou a me chamar a atenção.

A leitura de um texto não verbal (por exemplo) também influi na resolução do problema. O trabalho inadequado com os conceitos, em função de seus atributos relevantes e irrelevantes, bem como dos exemplos e não exemplos (o que não é exemplo do conceito), também contribui para sua incompreensão (KLAUSMEIER e GOODWIN, 1977). Isso faz com que os estudantes na fase inicial da escolarização, por exemplo, somente reconheçam como quadrado aquele que está na posição usualmente utilizada pelo professor ou pelo livro didático:



[2] Ferdinand de Saussure (1857-1913), suíço, é fundador da lingüística moderna.

Se o quadrado for colocado em outra posição, após um giro de 45º, por exemplo, ele não será reconhecido como um quadrado.



Esse é um exemplo em que a posição da figura é um atributo irrelevante do conceito e uma mudança no registro pode ser um obstáculo para o reconhecimento do objeto e conseqüentemente para a leitura.

Na minha prática de sala de aula percebi também que os estudantes têm muita dificuldade de falar sobre a matemática. Seja sobre o que entenderam de um enunciado simples, de uma afirmação, ou sobre como resolveram um problema. É sabido que a língua tem um papel de extrema importância na aprendizagem de conceitos. Wood (1996) afirma que os sujeitos não conseguem se expressar sobre a matemática quando lhes faltam vocabulário adequado. Quando os sujeitos estão frente a um conceito matemático desconhecido, procuram significá-lo por meio de seu relacionamento com outros signos da linguagem natural já elaborados (ROSSI, 1993).

Minha experiência de sala de aula, associada aos meus demais trabalhos me chamou a atenção para a importância do uso social da língua e, mais particularmente, para a matemática, como um sistema de símbolos e regras próprias. A escola teria um papel fundamental ao atender as demandas sociais, cada vez mais crescentes e diversificadas, de leitura e produção de texto (FONSECA, 2004). Isso me fez voltar a atenção para a importância das diferentes linguagens nas áreas do conhecimento e passei a me preocupar ainda mais com a leitura e a produção de textos em matemática, incluindo os textos orais.

Mas sabemos que a leitura ou a produção de texto não estão associadas somente ao desempenho na resolução de problemas. Elas são um elemento essencial para a aprendizagem da Matemática, a qual é constituída por diferentes linguagens (como a aritmética, a algébrica, a gráfica, a geométrica). Então para aprender

Matemática é preciso se apropriar dessas linguagens. Essa apropriação e conseqüentemente o uso dos diferentes registros não tornam a tarefa muito simples.

Vamos juntar a isso o fato de que os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou observáveis com ajuda de instrumento. Desta forma os objetos matemáticos somente são acessados por meio de registros de representação (DUVAL, 1993). Muitos estudantes têm dificuldades em associar a representação 1 ½ (número misto) a um e meio, diferentemente de quando a representação é 1,5, por exemplo. Isto poderia justificar muitos dos fracassos dos estudantes, pois não reconhecem um objeto matemático por meio de sua representação e, sendo assim, não acessam esse objeto.

A Matemática tem muitos tipos de representação, uma vez que é por meio dela que seus objetos são acessados (DUVAL 1993). Compreender o uso que os estudantes fazem dessas representações, particularmente dos seus registros, nos parece essencial e importante para uma reflexão sobre a prática pedagógica de professores de Matemática.

Por isso acreditamos que estudar os registros de representação com base no referencial teórico de Duval (1993), mais comentado adiante, trará elementos que auxiliem nessa reflexão.

Resolvemos desenvolver uma pesquisa acerca dos diferentes registros (ou seja, registros em diferentes linguagens) e o uso que o sujeito faz deles durante a resolução de problemas. Decidimos analisar os registros relacionados a conceitos (de capacidade, de ângulo e de medida de superfície).

Considerando a importância da utilização dos registros de representação para a matemática e sua relação com a aprendizagem, **a presente pesquisa pretende investigar como os estudantes se utilizam de registros de representação semiótica durante a resolução de problemas matemáticos.**

Geralmente os enunciados dos problemas estão escritos somente com a língua natural, às vezes com a língua natural e outro registro, como o registro em linguagem gráfica, geométrica, etc. Geralmente o aluno precisa traduzir um enunciado utilizando outra linguagem. Há muita relação entre mudança de registro e resolução de problemas. A capacidade de transformar o enunciado verbal em expressões matemáticas é uma característica da solução de problemas (DÍAZ; POBLETE, 1995).

Algumas questões que nortearam a pesquisa foram:

1. Os sujeitos utilizam mais de um registro de representação semiótica, durante a resolução de problemas?
2. É possível perceber se o uso e a articulação de registros estão relacionados ao sucesso na resolução de problemas?
3. O uso (ou não) de determinados registros de representação influi na resolução de problemas?

CAPÍTULO II – A Educação Matemática e as contribuições de Raymond Duval

O ponto de vista cria o objeto
Saussure

II.1 Os problemas e sua resolução

Para realizar uma pesquisa com foco na resolução de problemas é preciso considerar alguns aspectos, como o primordial deles e mais imediato: certificar-se de que a tarefa analisada seja de fato um problema.

Para Mayer (1977), um problema é uma situação, verbal ou não-verbal, apresentada em um estado determinado, em que se deseja ir para outro estado e não há um caminho direto e óbvio a se percorrer. Para Stenberg (2000) a situação apresentada não consiste em um problema quando recuperamos rapidamente uma resposta na memória.

Para Klausmeier (1977), a solução de problemas é um processo cognitivo no qual o sujeito recorre a conceitos e princípios já aprendidos para elaborar uma estratégia adequada com a finalidade de encontrar a solução.

Quando a situação não exige que o aluno reflita e tome decisões sobre os procedimentos e as estratégias então ela pode ser definida como um exercício[3]. É o caso, por exemplo, daquelas listas infindáveis de atividades que os alunos resolvem para aplicar uma fórmula ou regra visando fixar certo conteúdo.

Um problema exige reflexão sobre estratégias[4]: parte-se da situação dada e é preciso chegar a outro estado final, sem que não seja possível alcançá-lo somente com aplicação de um procedimento, regra ou estratégia mecanizada.

[3] Exemplo de exercício: circule os monômios: $2x^2$, $9x + 2y$, $3xy$, $y – x$.
[4] A situação seguinte é um exemplo de problema porque deixa evidente que o sujeito que irá resolvê-lo precisa buscar uma estratégia não evidente:
Uma empresa quer economizar papel e acondicionar a maior quantidade possível do produto que vai exportar. Para isto, dispõe de um retângulo de papelão, de dimensão 20 cm x 30 cm. Ela deseja construir uma embalagem na forma de um prisma reto de base quadrada. Determine as dimensões do prisma considerando o gasto mínimo de papel e o maior volume possível.

Shoenfeld (1988, tradução nossa) afirma que *“enfrentar problemas permite colocar à prova a funcionalidade dos conhecimentos matemáticos dos aprendizes, suas estratégias cognitivas-metacognitivas e suas crenças derivadas de suas experiências”.*

Conforme coloca Pozo et al. (1998), para que uma situação seja considerada um problema, a pessoa que está resolvendo a situação precisa encontrar alguma dificuldade que a obrigue a questionar-se sobre qual seria o caminho que precisaria seguir para alcançar a meta.

Polya (1981) coloca a Resolução de problemas como uma habilitação prática, como um esporte. Afirma que adquirimos uma habilitação por meio da imitação e da prática. Para ele, aprendemos a resolver problemas, resolvendo. É preciso observar outras pessoas resolvendo problemas para adquirirmos estratégias. Para o autor, o erro faz com que o sujeito procure outras saídas, o que contribui para melhorar a capacidade de imaginar soluções. Mas infelizmente a exploração de diferentes resoluções, um trabalho de reflexão sobre os erros e a exploração de diferentes contextos não faz parte de todos os trabalhos escolares com a resolução de problemas, o que contribui para as dificuldades que os estudantes enfrentam nesse processo.

Selecionamos, para a pesquisa, situações que acreditamos que consistam em problemas para o estudante, por serem situações que não foram resolvidas antecipadamente por eles e por requererem a elaboração de uma estratégia para chegar à solução. A resolução de problemas novos exige improvisação e busca de novos caminhos, levando muitas vezes o sujeito a buscar um recurso já utilizado e que foi bem sucedido.

Os problemas fazem parte de uma metodologia considerada hoje talvez a mais importante para a Educação Matemática, chamada de metodologia de Resolução de Problemas. Essa metodologia foi assumindo diferentes concepções ao longo do tempo. Já foi vista como uma meta, um processo ou uma habilidade básica. Como meta, a resolução de problemas seria o alvo do ensino da Matemática. Assim, o ensino deveria fornecer aos alunos todas as informações e conceitos para que depois pudessem resolver problemas. Como processo, a resolução de problemas assume outra postura por volta dos anos 70 até os anos 80 em que a ênfase é colocada nos procedimentos usados pelos alunos para resolver problemas, ou seja, o objetivo maior do ensino era ensinar a resolver problemas. Como habilidade básica, ela é considerada, como o nome sugere, uma habilidade ou competência essencial para a inserção do indivíduo no mundo do trabalho e do conhecimento. Nessa perspectiva, aprende-se a resolver problemas para aprender matemática. Nos anos 90 ela passou a ser vista como uma metodologia para o ensino da Matemática.

Desse modo, estratégias diversas para o ensino eram utilizadas, como apresentar um problema desencadeador, problematizar, explorar diferentes tipos de problemas e estratégias, elaborar problemas, modelar etc. Um problema passa a ser visto como fonte de novos problemas e busca pela resolução gera novos conhecimentos. Assim, como metodologia, busca permear todo o ensino, não se constituindo em um bloco estanque como uma lista de problemas.

Como para a presente pesquisa interessou a análise dos registros, então não foi objeto da pesquisa identificar problemas com a leitura do enunciado, um dos fatores que influi no desempenho dos sujeitos. Para Stenberg (2000), a forma como um problema é representado consiste num fator que muito influi na facilidade de sua resolução. As informações manipuladas pelo sujeito por meio de codificação, recodificação, decodificação, comparação, combinação, armazenamento na memória, recuperação da informação etc podem ser de dois tipos: de natureza mais “declarativa” e mais “procedimental” (FLAVELL & MILLER, 1999). As declarativas dizem respeito aos conhecimentos sobre os sentidos de palavras, fatos e similares; as procedimentais consistem em conhecimentos sobre como fazer diversas coisas. Alves (2003), por exemplo, pesquisou estudantes de sexta série do Ensino Fundamental e verificou que o fracasso na resolução de problemas pode estar relacionado com o domínio precário de conhecimentos declarativos (relacionados ao conceito - o que é; diferentemente dos conhecimentos procedurais, relacionados a procedimentos – como fazer) implicando em maior dificuldade para selecionar o procedimento adequado.

Kantowski (1997, p. 271) afirma que para se ter sucesso na resolução de problemas é necessário considerar dois fatores: conhecer algo da matemática pertinente/relacionado e saber o que fazer com o conhecido. O aluno precisa ter não somente habilidades em cálculos, mas também habilidades matemáticas como estratégias, procedimentos etc e, quanto mais experiência tiver em resolver problemas, mais habilidoso se tornará.

Como vimos, são vários os fatores que influem no desempenho dos sujeitos durante a resolução de problemas. Pozo et al. (1998, p. 53) apresentou alguns fatores que influem no desempenho do estudante durante a resolução de problemas:

- Diferenças no significado de uma palavra ou expressão na linguagem cotidiana e na linguagem matemática
- Diferentes significados que assume uma mesma palavra ou expressão (ex: 'mais')
- Ordem em que os dados são apresentados e como são apresentados (ex: por extenso, por meio de algarismo, aparecem na ordem inversa em que serão utilizados)
- Presença de dados irrelevantes para a solução do problema
- Caráter hipotético dos problemas matemáticos (os dados e as situações geralmente são fictícias, não reais). Nesse caso, podemos considerar como exemplos os próprios problemas 1 e 2 que aplicamos do teste. Os contextos são da semi-realidade. No primeiro a situação considera como equivalente duas idéias bem distintas: a de volume e a de capacidade. No segundo problema há a possibilidade de se transportar uma caixa que não está totalmente cheia, e uma empresa dificilmente faz isso.
- Diferença entre o senso comum (teorias pessoais) e as teorias matemáticas.

Conforme Suydam (1997), bons resolvedores de problemas têm, dentre várias habilidades, grande auto-estima e confiança, baixo grau de ansiedade e bom relacionamento com os seus pares.

Fatores afetivos também influem no desempenho do sujeito na resolução de problemas. Sastre & Moreno (2002, p.21) afirmam que "*La psicologia, por ejemplo, há estudiado, durante muchas décadas los procesos cognitivos y los afectivos por separado, cuando em la realidad constituyen fenómenos íntimamente entrelazados*".

Estes pesquisadores nos apontam para o fato de que estudantes em situação de estresse, nervosos, muito preocupados ou com outros problemas afetivos não apresentam o desempenho que teriam, se estivessem em condições normais.

II.2 – A Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a atividade Matemática

Como vimos, a compreensão do problema requer conhecimentos semânticos e lingüísticos. O termo que Duval (1993) utiliza, isto é, registros de representação semiótica, faz referência à Semiótica, conhecida como a ciência de todas as linguagens, verbais e não-verbais. O enunciado de um problema, bem como sua resolução podem conter uma diversidade de registros, em linguagem verbal ou não-verbal. A noção de registro aparece em análises de tarefas que os estudantes têm de enfrentar e, segundo Poblete, Guzmãn e Méndez (1996), surge de uma perspectiva semiótica: um registro é constituído por signos, traços, símbolos, ícones, e esses signos se associam de maneira interna e externa. Segundo os autores (1996, p. 92),

> Os registros são então meios de expressão de representação e estão caracterizados precisamente pelas possibilidades ligadas a seu sistema semiótico. Um registro tem a possibilidade, graças a seus signos próprios e à maneira segundo a qual eles se organizam, de promover uma representação de um objeto, idéia ou de um conceito não necessariamente matemático.
> (tradução nossa)

Realizar um trabalho que promova a compreensão e utilização das diferentes linguagens, verbais ou não-verbais, não é um desejo atual. Saussure fundou a lingüística moderna e os princípios básicos da sua teoria lingüística influenciaram o estudo da semiótica. Saussure deu o nome de Semiologia a uma teoria geral de todos os sistemas de signos, que recebeu uma definição mais geral, pelos estudiosos que prosseguiram seus estudos (como Hjelmslev[5], por exemplo). Para ele, a lingüística seria uma parte dessa ciência geral e, portanto, todas as leis da Semiologia seriam aplicáveis à Lingüística. Saussure não fundou uma semiótica, mas deu a ela o nome de Semiologia. Ele é considerado o pai da Lingüística Moderna. A criação da semiologia seria fundamental porque a Lingüística tem uma preocupação excessiva com a língua escrita, em detrimento da língua viva, praticada a todo momento (NETTO, 2003). Dessa

[5] Louis Hjelmslev, (1899-1965). Dinamarquês que formulou a teoria da Glossemática, em 1935, juntamente com Uldall, vide Prolegômenos a uma teoria da linguagem, publicado em 1943, em dinamarquês, e mais tarde, em 1971, a versão francesa Prolégomènes à une theorie du langage. Paris, Minuit.

forma, a lingüística deveria ser aplicada às mais diferentes áreas da atividade humana, e não ficar restrita ao estudo das línguas naturais.

Conforme Santaella & Nöth (1999, p. 9), a Semiótica, como uma reflexão sobre a linguagem verbal e outros processos sígnicos surgiu bastante cedo, mas como Ciência surgiu com Charles Sanders Peirce (1839-1914), filósofo e lógico-matemático Norte Americano), no século XIX, e, no início do século XX, com a obra Curso de Lingüística Geral, do suíço Ferdinand de Saussure. Em psicologia cognitiva, mais recentemente, há grande interesse nos problemas que requerem a passagem de uma imagem (texto não-verbal) a uma frase (texto verbal), e reciprocamente. Peirce elaborou a Semiótica ao longo de 14 anos de trabalho, e concebeu a Semiótica como um estudo da linguagem enquanto lógica. Mas foi a Semiótica e não a Semiologia que mais ganhou adeptos. A semiótica (do grego, semeion: signo) é definida por alguns estudiosos como a ciência dos signos e dos processos significativos na natureza e na cultura (NÖTH, 2003), mas os estudiosos dão definições diferentes para a Semiótica. Ela serve para estabelecer as ligações entre um código e outro, entre uma linguagem e outra, serve para ler o mundo não-verbal e para ensinar a ler o mundo verbal em ligação com o mundo não-verbal (ou icônico) (PIGNATARI, 2004, p20)

Para Santaella (1983, 13),

> Semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido.

A Semiologia faz referência aos signos humanos, culturais e notadamente os textuais, enquanto a Semiótica, com visão mais ampla, considera também os signos animais e da natureza. Para a Semiótica de Peirce, as cognições, as idéias e inclusive o homem são entidades semióticas, ou seja, o mundo está permeado de signos, ou composto exclusivamente por signos. Mas o objeto de estudo da Semiótica não é o signo, mas sim a sua ação, definida por Peirce como semiose.

Vivemos em um mundo de signos, eles compõem os enunciados e as resoluções de um problema. Para Bakhtin (2004), ao nos tornarmos conscientes de uma operação, a recriamos na imaginação, de forma que possa ser expressa, transferida do plano da ação para o plano da linguagem, que pode ser escrita, falada, simbólica etc.

A questão da significação foi objeto de destaque nos estudos de Vygotsky. A característica do signo como um instrumento de mediação e constituição da atividade mental, pode ser considerada como o aspecto original de sua contribuição para as pesquisas sobre o desenvolvimento humano. Vygotsky (2002) afirma que a atividade de utilização de signos pela criança não é ensinada pelos adultos, nem inventada. Para o autor, a linguagem permite ao sujeito elaborar e aplicar estratégias de resolução de um problema, substituindo a manipulação direta por um processo psicológico complexo, que se constitui de motivações e intenções que estimulam o desenvolvimento deste processo.

Santaella (2003, p.52) coloca:

> Em síntese: compreender, interpretar é traduzir um pensamento em outro pensamento num movimento ininterrupto, pois só podemos pensar um pensamento em outro pensamento. [...] Sua ação (do signo) pode ser bilateral: de um lado, representa o que está fora dele, seu objeto, e de outro lado, dirige-se para alguém em cuja mente se processará sua remessa para um outro signo ou pensamento onde
>
> seu sentido se traduz. E esse sentido, para ser interpretado, tem de ser traduzido em outro signo, e assim *ad infinitum*.

A teoria dos signos já era estudada desde Platão (427-347). Um signo, para Peirce, é aquilo que representa alguma coisa para alguém. Contudo, o Interpretante não precisa realmente existir, isto é, o signo não precisa representar alguma coisa para alguém, conforme a definição simplificadora adotada por algumas pessoas (SANTAELLA, 2000). O fato de não se conhecer o significado de um signo não quer dizer que ele não existe. Já Duval (1999), interpreta a definição de Peirce e alerta para sua fragilidade, a saber, que não leva em conta os sistemas que produzem a representação, e portanto um enunciado somente será um enunciado para quem conhece a língua na qual ele é formulado.

O primeiro signo criado na mente da ‘pessoa’, a partir do primeiro signo, será um signo mais desenvolvido. Este segundo signo criado na mente do receptor é chamado de interpretante (que não é o intérprete), e o que foi representado é chamado de objeto. Estas três entidades (interpretante, objeto e signo) foram a relação triádica de signo.

Há muitos modos de definir um signo, e mesmo Peirce, em seus oito volumes dos Collected papers, de 1951 a 1958, apresenta, pelo menos trinta formulações

distintas para a definição de signo (SANTAELLA, 2000). Para Peirce, um signo é algo que está no lugar de outra coisa. Todo pensamento, para Peirce, é um signo.
Potiebniá (1874, apud SCHNAIDERMAN) acrescenta:

> *Para o signo de uma palavra dada, é indispensável o significado precedente, mas o signo não é idêntico a este significado; senão, a palavra dada, além de seu significado atual, conteria todos os significados anteriores.*

O signo é determinado pelo objeto (PALO, 1998). Assim, os objetos matemáticos, por exemplo, requerem um tipo específico de signos para sua representação. Duval (1993) alerta para o fato de que o conteúdo depende primeiramente do objeto, uma vez que não se pode confundir o conteúdo explícito (que inclui os aspectos formais ligados às unidades significantes) da representação com o objeto representado. O conteúdo da representação e sua forma depende do tipo de sistema semiótico utilizado.

Como um enunciado de problema é um texto, bem como sua resolução, é importante considerar a afirmação de Valente e Brosso (1999, p. 184): *" Um texto é um processo de signos em geral (não somente conjunto verbal), que tendem a eludir seus referentes, tornando-se referentes de si mesmos e criando um campo referencial próprio.*

Os problemas matemáticos são escritos, mesmo que não exclusivamente, em linguagem verbal. Para Hjelmslev (apud SANTAELLA, 1999), a linguagem verbal é privilegiada, porque ela é um sistema semiótico para o qual todos os outros podem ser traduzidos. Assim, ele seria privilegiado com relação a outros sistemas semióticos, como a pintura e a música, e o sistema sígnico da matemática. É possível falar de uma resolução de problema utilizando somente a linguagem verbal, ou de uma pintura, mas não podemos fazer o caminho contrário, por exemplo, representar por meio de uma pintura o conteúdo exato de um texto verbal.

Um registro de representação, para Duval (1999), consiste num sistema semiótico (sistema de signos) que tem as funções fundamentais em nível do funcionamento consciente.

As representações, para Duval, se classificam em mentais (são internas e conscientes e geralmente são representações semióticas interiorizadas), computacionais (são internas e não conscientes) e semióticas (não são internas nem externas). Estas últimas são por ele definidas (ibid.) como "*produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que tem especificidade própria de significância e de funcionamento*".

Como vimos, uma representação semiótica não pode jamais constituir o próprio objeto. É, como afirma Peirce, uma representação que está no lugar de alguma coisa. Assim, x, x+2, o desenho de um triângulo, um gráfico e uma demonstração geométrica são exemplos de registros de representação semiótica.

Nem todos os sistemas semióticos, para Duval, são registros de representação. Um sistema semiótico, para funcionar como um registro de representação, deve atender às funções de comunicação, de objetivação (tomada de consciência) e de tratamento intencional. Os registros de representação semiótica têm importância fundamental nas atividades cognitivas por atenderem, principalmente, essas funções. As duas funções, de objetivação e de tratamento, são muito importantes do ponto de vista cognitivo.

Damm (1999) aponta para a importância de considerar diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático (conceitos, propriedades, estruturas, relações) uma vez que em Matemática a comunicação se estabelece com base em representações.

Duval (1993) argumenta que ao se estudar a atividade cognitiva em matemática é preciso considerar, por um lado, a importância das representações semióticas, e por outro, sua forte presença na matemática. Para justificar o primeiro, são considerados dois fatos. Um diz respeito à dependência do sistema de representação requerida pelo tratamento matemático, e o outro à natureza dos objetos matemáticos, que são reais, porém não perceptíveis fisicamente, e somente são acessíveis por meio dos registros de representação semiótica. Esta é a razão da importância desses registros, para o ensino e para a aprendizagem da Matemática. Quanto ao segundo, observamos que todos os registros feitos pelos estudantes são registros de representação semiótica que procuram acessar os objetos. A matemática tem uma variedade de registros de representação. As demais áreas, diferentemente da Matemática, permitem o acesso a seus objetos sem necessariamente passar por representações, isto é, sem ter acesso aos modos de representá-los.

Para Duval (1993), um estudo da aprendizagem da matemática deve considerar o que a Matemática tem de específico, sua originalidade, o que notadamente a difere das outras áreas do conhecimento. Portanto, esse estudo, para Duval, deve considerar dois fatores:

1- A importância das representações semióticas para a Matemática. Isto se deve a duas razões. A *primeira* diz respeito à dependência de um sistema de representação para a realização de uma tarefa no âmbito da matemática, como por exemplo, efetuar um cálculo e, principalmente, para a compreensão de conceitos e procedimentos, dependendo desse sistema de representação. As representações na língua materna são um exemplo: basta considerarmos os diferentes sistemas de numeração, como o romano. Neste sistema, não é possível fazer as operações como fazemos com os decimais, por meio dos algoritmos. A *segunda* diz respeito à característica dos objetos matemáticos, que são reais, embora não perceptíveis fisicamente e portanto não são diretamente perceptíveis ou observáveis com ajuda de instrumento. Desta forma os objetos matemáticos somente são acessados por meio de registros de representação.
2- A grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática. A Matemática se utiliza de símbolos e é possível representar um objeto utilizando vários sistemas de registros de representação como o da figura (figural, que é uma linguagem não verbal), o da aritmética, o da álgebra, o da linguagem natural (que geralmente articula outros elementos específicos de outras linguagens) e o da linguagem gráfica.

Duval (1993) aponta para a impossibilidade de se determinar a natureza de uma atividade de conhecimento, sem considerar os objetos sobre os quais ela incide e os meios pelos quais se pode acessar esses objetos: *"São os meios de acesso possíveis aos objetos que determinam o que uma atividade de conhecimento pode ter de específico".*

Como já vimos, Duval alerta para o fato de não se confundir o objeto com sua representação (exemplo: um número e seu algarismo, uma figura e seu desenho, uma função e o respectivo gráfico etc.) e alerta para a existência do paradoxo de como não fazer essa confusão, uma vez que os objetos somente são acessíveis por meio desses registros. Duval (2003) classifica os registros de representação semiótica em 4 tipos distintos, conforme mostra a tabela:

Quadro 01: Tipos de Registros de Representação Semiótica

	Representação discursiva	**Representação não-discursiva**
Registros multifuncionais ou plurifuncionais (não são algoritmizáveis)	Língua natural	Figuras geométricas (linguagem figural)
Registros monofuncionais (possuem algoritmos próprios em sua estrutura)	Sistemas de escritas numéricas, algébricas, simbólicas etc	Gráficos (linguagem gráfica)

Os registros discursivos utilizam a língua. Eles permitem descrever, explicar, calcular, raciocinar, interferir, enquanto os não discursivos mostram formas ou configurações de formas, eles permitem visualizar, ou seja, a partir destes últimos é possível somente ter uma apreensão sinóptica.

Os registros plurifuncionais são utilizados em todas as áreas do conhecimento, são comuns a uma cultura e são espontâneos. Os monofuncionais são formais, especializados, aprendidos em Matemática. Eles são mais específicos da Matemática, e os plurifuncionais podem ser aprendidos fora da escola, ou antes da Matemática. O ensino da Matemática privilegia, geralmente, o registro monofuncional, ao se solicitar cálculos e gráficos.

Duval aponta para a importância da coordenação de diferentes tipos de registros de representação, condição essa que permite diferenciar os objetos matemáticos de suas representações, uma vez que não se pode confundir um objeto com sua representação, conforme vimos. Para ele, é a articulação dos registros que constitui uma condição de compreensão em Matemática. Mais precisamente, a compreensão conceitual em Matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica. Isto é, embora a coordenação entre registros seja fundamental para a compreensão, ela não é suficiente (DUVAL, 1994). Desta forma, fazer uso de diferentes registros de representação nas condições acima não garante a compreensão, mas é preciso fazer uso desses registros para chegar a ela. Para que haja aprendizagem é necessário que se tenha duas ou mais representações do mesmo objeto matemático, preferencialmente em sistemas semióticos diferentes (semiósis – a apreensão ou a produção de uma representação semiótica). Contudo, a conceituação (noésis – a apreensão conceitual de um objeto) somente será efetivada se houver a mobilização e a identificação de diferentes representações semióticas para um mesmo objeto. Duval (1996) conclui que para estudar o funcionamento cognitivo durante uma atividade matemática é preciso considerar simultaneamente dois registros de representação e não cada um separadamente.

Duval utiliza a expressão registro de representação semiótica para caracterizar um registro semiótico que apresenta algumas características: permite a formação de uma representação identificável e, ainda, a possibilidade de transformação de um elemento em outro, isto é, a transformação de uma representação de um registro neste mesmo tipo de registro (tratamento) ou em outro tipo de registro (conversão).

Uma transformação é um processo no qual o sujeito acessa um mesmo objeto matemático por meio de diferentes registros de representação semiótica. Há dois tipos de transformação: o Tratamento e a Conversão. O tratamento é uma transformação que permanece no mesmo sistema de representação (fica no campo do mesmo tipo de registro, ou seja, é uma transformação estritamente interna a um registro). Nem todo tratamento pode ser efetuado em qualquer registro e cada registro favorece um tipo de tratamento.

Já a conversão é uma transformação de registro de representação semiótica que se processa na transição entre dois sistemas de representação, fazendo referência ao mesmo objeto. Uma conversão não conserva a explicação das mesmas propriedades do objeto. Assim, a representação do objeto no registro de chegada, por meio de uma conversão, não terá o mesmo conteúdo que a representação no registro de partida.

Desse modo, a resolução de uma equação, como o exemplo a seguir, apresenta transformações de tratamento pois se mantém no mesmo sistema de escrita.

$$5x - (4 - 3x) = 8$$
$$5x - 4 + 3x - 8 = 0$$
$$8x - 12 = 0$$
$$8x = 12$$
$$x = 12/8$$
$$x = 6/4$$

Nesse caso o mesmo o objeto matemático (equação) foi representado de diferentes formas, mas por meio de tratamento, já que o sistema de representação foi mantido. Assim, a transformação de 12/8 em 6/4, por exemplo, consiste num tratamento, pois o mesmo objeto foi representado de dois modos diferentes, mas por meio de um número racional expresso na forma fracionária. Os tratamentos não são, geralmente, objetos de aprendizagem. Duval (1992) aponta para o fato de que a conversão requer que o sujeito tenha percebido o sentido e a referência dos símbolos ou dos signos. Assim, para a escrita do número, é preciso distinguir a significação operatória ligada ao significante (que não é a mesma para, por exemplo, 0,25 e ¼), e as adições com os mesmos números representados na forma decimal e na forma fracionária (ex: 0,25 + 0,25 = 0,5; ¼ + ¼ = ½ têm u ma significação operatória diferente, embora representem o mesmo número).

Já a transformação de um gráfico para a expressão analítica correspondente à função ou a representação de ¼ em 0,25, são exemplos de transformações em que se efetuou uma conversão, pois foram utilizados diferentes sistemas de representação para representar um mesmo objeto matemático. No primeiro caso, utilizaram-se os registros gráfico e algébrico; e, no segundo, o fracionário e o decimal. A conversão é uma operação cognitivamente mais complexa e elevada, que se efetua com profundidade, e não superficialmente como as codificações ou alguns tratamentos. A conversão apresenta duas características, que não são apresentadas pelos tratamentos: ela é orientada, é preciso definir o registro de partida e o de chegada; e pode ser congruente ou não, dependendo do seu sentido (DUVAL, 1992)

O tratamento corresponde a procedimentos de justificação e a conversão a procedimentos de objetivação, ao desvelar mecanismos subjacentes à compreensão. Passar de um registro a outro implica sobretudo na explicitação de propriedades ou de diferentes aspectos do objeto. Por exemplo, o gráfico de uma função nos dá a idéia de crescimento, decrescimento, zeros ou raízes, máximo e mínimo, posição no plano cartesiano etc, enquanto sua expressão analítica nos fornece os coeficientes e as variáveis.

No ensino, de forma geral, não é dada a importância devida às conversões, e os tratamentos são escolhidos segundo a forma que mais convém, ou seja, uma forma que se acredita ser mais facilmente compreendida pelos estudantes.

As conversões consistem em importantes mudanças de registro de representação para a formação conceitual (aquisição de conceitos), uma vez que explicitam conhecimentos a respeito do objeto.

No caso das transformações de conversão, Duval destaca a relevância do sentido da transformação, pois considera que a dificuldade não é a mesma nos dois sentidos. Por exemplo, é mais difícil, para um estudante, passar de um gráfico à expressão analítica correspondente, do que o contrário. No ensino, geralmente se enfatiza um sentido da transformação, como se o outro fosse automaticamente realizado, por decorrência.

Uma conversão é irredutível a um tratamento, quaisquer que sejam os registros envolvidos. Uma conversão exige uma compreensão global e qualitativa, uma articulação entre variáveis cognitivas próprias de cada um dos registros envolvidos. É por meio dessas variáveis que se tem acesso às unidades de significado pertinentes e que devem ser consideradas, em cada um dos dois registros porque, como vimos, passar de um registro a outro significa também se apropriar de propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto.

Na conversão há dois fenômenos: o da não-congruência e o da congruência. Quando a representação terminal (no registro de chegada) transparece de certa forma na representação de saída (enunciado) e a conversão se assemelha a uma situação de simples codificação, então há congruência (há correspondência semântica das unidades de significado entre os dois registros). Se a representação terminal não transparece absolutamente no registro de partida, ou seja, há certo bloqueamento ou confusão para a passagem de um registro a outro, então há o fenômeno da não-congruência.

As pesquisas de Duval apontam que os insucessos na Matemática aumentam sempre que uma mudança de registro de representação é requerida pela situação estudada.

A resolução de problemas requer do estudante uma tradução. Sabemos que é preciso traduzir o enunciado, um texto geralmente apresentado em linguagem natural, para um texto matemático (expressões algébricas, esquemas gráficos etc.). Sabendo-se que um problema geralmente envolve mais de um conceito e que os alunos precisam realizar transformações por meio do uso de registros de representação, nos parece essencial perguntar como os alunos fazem uso desses registros durante uma atividade de resolução de problema e que relação há entre esse uso e seus desempenhos na resolução de problemas.

Os problemas podem envolver muitos registros. Na resolução de problemas um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, mas deve existir sempre a possibilidade de mudança de registro. A tradução de um enunciado em linguagem natural para uma representação em outro registro envolve operações complexas para designar os objetos matemáticos (DUVAL 1995, 1998). Enunciados, geralmente apresentados em linguagem natural, podem, ainda, consistir numa dificuldade para a resolução. Nos problemas aditivos[6], por exemplo, palavras como "mais" (da expressão "quanto tem a mais") contribuem para que os sujeitos somem os dados numéricos fornecidos.

Trabalhar com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica significa realizar uma abordagem cognitiva, considerando que as representações semióticas são externas e conscientes do sujeito, e ainda exercem o papel de comunicação das representações mentais e são fundamentais na construção do conhecimento matemático pelo sujeito. Segundo Damm (1999), a teoria de Duval é uma maneira

[6] Problemas aditivos, assim como os multiplicativos, foram amplamente estudados por Gerard Vergnaud. Os problemas aditivos são aqueles que envolvem adição e subtração; e os multiplicativos envolvem a multiplicação e divisão.

didática e metodológica que o professor ou o pesquisador devem utilizar se o objetivo do trabalho é a aquisição de conhecimento.

II.3 As pesquisas e a teoria de R. Duval

Muitas pesquisas têm sido desenvolvidas em torno da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. Grande parte delas são pesquisas de intervenção, em que é aplicado um pré-teste nos estudantes, seguida de um trabalho específico no ensino que enfoca determinado assunto ou conceito e os registros de representação semiótica envolvidos. Ao final deste trabalho aplica-se o teste e verifica-se a evolução dos estudantes. Poucas pesquisas têm colocado foco especificamente na resolução de problemas. As conclusões são unânimes: o trabalho com atenção especial aos diferentes registros de representação semiótica têm implicações positivas na aprendizagem. Comentamos a seguir algumas dessas pesquisas.

Mariano (2004), por exemplo, investigou os fatores restritivos para um bom desempenho dos alunos concluintes do Ensino Médio, nas questões de geometria do ENEM. Também analisou livros didáticos de Ensino Médio editados a partir de 2000 para investigar o tratamento dado à geometria e contribuir com sua discussão e reflexão sobre a prática do professor e as propostas de formação. Mariano utilizou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval, para analisar os registros que eram feitos pelos estudantes nas questões propostas. Alguns grupos resolveram a questão sem intervenção do pesquisador ou do auxiliar de pesquisa no que diz respeito à interpretação do problema; outros tiveram intervenção para compreender o enunciado, uma vez que a leitura do problema também estava sendo investigada. Durante a aplicação do teste, os discursos foram gravados em áudio e o pesquisador verificou queixas com relação ao tamanho do problema (enunciado longo), ou com relação à leitura (estava difícil entender o problema,o que era pedido).

No grupo que houve a intervenção do pesquisador quanto à interpretação do enunciado, o desempenho foi altamente positivo; o contrário aconteceu com o grupo que não teve a intervenção do pesquisador. Os principais resultados indicam que as dificuldades de leitura dos enunciados (interpretação) foram o fator determinante para o insucesso dos alunos. Os alunos também tiveram dificuldades no uso de representações, sejam elas verbais, ou não verbais. A pesquisa de Mariano nos alerta para a questão da leitura dos enunciados. O problema 2 da nossa pesquisa consiste numa questão do ENEM e os resultados colocados adiante retratam as mesmas dificuldades com relação à leitura e ao registro apontadas por Mariano. Nesse sentido os sujeitos seriam mais bem sucedidos se houvesse orientações durante a leitura do enunciado e também provavelmente se não precisassem registrar pelo menos algumas etapas da resolução, como sugere a pesquisa de Rosa e Nunes (2004). Elas sugeriram que resolver problemas oralmente, por meio de representações implícitas de números inteiros seria mais fácil do que usar representações escritas ou usar materiais concretos nas quais explicitamente esses números seriam representados. As autoras convencionaram que uma representação (oral, escrita ou que se utiliza de material concreto) é explícita quando nelas se expressam, de alguma forma externa, as diferenças e características próprias dos objetos tratados. Ex: se alguém registra (-3) + 4, está explicitando a diferença entre números positivos e negativos, caso contrário a representação será implícita. Assim, uma pessoa poderia falar “sete com três é quatro”. Neste caso, o sujeito que fala faz as distinções internamente, mas não as explicita. A pesquisa mostrou que, quando as crianças resolviam os problemas utilizando representações implícitas (estas mais presentes nas representações orais), eram bem sucedidas, de forma geral. Quando utilizavam representações explícitas não eram tão bem sucedidas, pois não conseguiram mostrar o conhecimento implícito que tinham dos números inteiros e das operações envolvendo estes números.

Várias são as pesquisas que investigam a maneira pela qual estudantes do ensino fundamental compreendem e utilizam a representação fracionária de números racionais. Woerle (1999), por exemplo, investigou os resultados de uma seqüência didática para o ensino dos números racionais que enfocava a conversão de registros de representação, em especial o número racional expresso na forma fracionária e o expresso na forma decimal. Após a aplicação da seqüência didática, com foco nos registros de representação para o objeto, os alunos tornaram-se mais ativos para resolver problemas, conseguiram relacionar melhor os dados e manifestaram menos dificuldades ao efetuar as operações com esses números.

Lopes (2003) verificou a importância da utilização de diferentes registros de representação no processo de conceitualização da função afim, favorecendo a coordenação entre as variáveis visuais pertinentes, no registro gráfico, e os correspondentes valores categoriais no registro algébrico.

Quanto às variáveis visuais pertinentes, Duval (1999) afirma que a grande dificuldade do trabalho com as representações é discriminar as variáveis visuais pertinentes daquelas que não são. O trabalho com gráficos é um exemplo interessante para mostrar essas variáveis visuais:

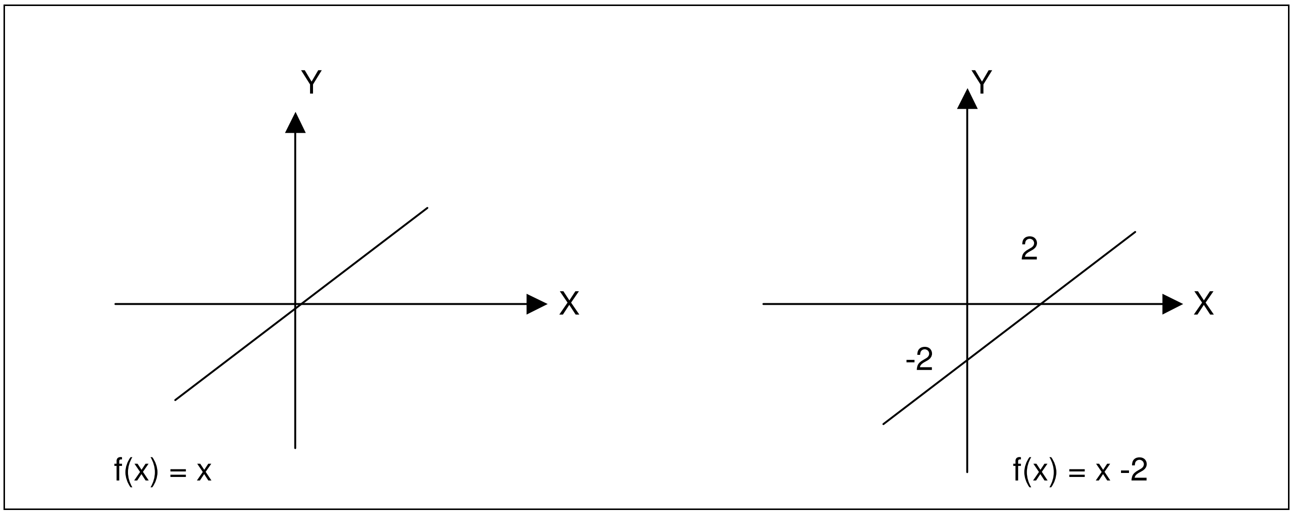


Figura 04: Inclinação da reta e variável visual pertinente

O ponto onde a reta corta os eixos é uma variável visual pertinente (ou unidade cognitiva pertinente), porque além de indicar os zeros da função, auxilia na construção e na compreensão do gráfico. O segundo gráfico foi deslocado em duas unidades no eixo Y, com relação ao primeiro, então é possível, a partir de vários exemplos, concluir a construção de $f(x) = x - 2$ a partir da construção de $f(x) = x$, e isto vale para outras funções.

Lopes aplicou 12 atividades e estudou os procedimentos utilizados pelos sujeitos do oitavo ano de Ensino Fundamental. Os alunos resolviam as atividades em grupo e por último individualmente. As atividades focalizaram a conversão entre as representações algébricas e gráficas nos dois sentidos, embora mediada por outras representações. Essas atividades eram acompanhadas de discussão. Lopes concluiu uma modificação da qualidade de produção, conforme cita Duval (1995, p.6).

Os Vetores no plano e no espaço também foram pesquisados segundo a Teoria de Duval, por Castro (2001). A pesquisa foi feita a partir da realização, observação e análise de uma seqüência didática, visando a articulação de registros. Dessa forma, pretendia investigar se uma seqüência didática com tal característica propiciaria evolução do funcionamento representacional dos sujeitos no que concerne ao conceito de vetor no plano e no espaço. Os sujeitos envolvidos na pesquisa, do ensino superior, ou já tinham realizado a disciplina Geometria Analítica e Vetores, ou estavam cursando. Os registros estudados foram o simbólico, o figural e o natural. Castro concluiu que os alunos apresentavam dificuldades nas atividades envolvendo conversão de registros, e puderam evoluir e melhorar o desempenho após a realização da seqüência didática que foi aplicada. A maior dificuldade dos alunos estava na conversão de registros, principalmente se um dos registros envolvidos era o gráfico. A dificuldade também foi maior quando o registro gráfico exigido era o registro de chegada, e não o de partida. Os estudantes apresentaram evolução quanto à compreensão do conceito e à resolução de questões envolvendo vetores logo no início da aplicação da seqüência didática.

Os problemas de otimização envolvendo inequações também foram pesquisados segundo a teoria de Duval. Traldi Junior (2002) considerou como sujeitos da pesquisa alunos do Ensino Médio e buscou respostas para a seguinte questão: será que os alunos que estão concluindo o Ensino Médio resolvem alguns dos problemas de otimização, envolvendo sistema de inequações? A intenção de Traldi Júnior era investigar os efeitos de uma intervenção a partir da inserção de atividades que focalizavam o tratamento, a conversão e a coordenação entre registros de representação em linguagem algébrica, gráfica e natural. Pretendia-se saber se essas atividades proporcionariam condições favoráveis para a compreensão do objeto em estudo. Traldi Júnior, além de elaborar uma seqüência didática como contexto de sua investigação, também fez uma análise de livros didáticos, particularmente, para ver como aquele tema era tratado com relação às transformações. Verificou, neste caso, que os livros não propõem atividades de conversão de registros em língua natural para o registro de representação em linguagem gráfica e da gráfica para a representação algébrica.

Um teste diagnóstico também foi aplicado e constatou-se que os alunos apresentavam dificuldades em fazer:

- Conversão de registro em linguagem natural para sentença matemática;
- Conversão de sentenças matemáticas para sua representação gráfica;
- Leitura e interpretação de gráficos;
- Representação gráfica de inequações;
- Resolução de sistemas de equações.

Após a aplicação da seqüência didática, concluiu-se que os alunos avançaram em seus conhecimentos com relação a sistema de inequações do primeiro grau, o objeto analisado. Os alunos melhoraram seu desempenho na identificação, no tratamento e na coordenação dos registros de representação do sistema de inequações; na aplicação do sistema de inequações na resolução de problemas e no uso de estratégias de resolução envolvendo gráficos.

Também foi realizada uma pesquisa envolvendo 86 estudantes universitários de um Curso de Computação, para investigar o ensino e a aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear por meio de um ambiente de geometria dinâmica. Karrer (2006) utilizou a teoria de Duval, e elaborou e aplicou uma seqüência didática com foco nos registros e conversões sobre o objeto matemático "transformações lineares planas", que consistia em duas fases: a primeira, de diagnóstico; e a segunda, de aperfeiçoamento. As atividades foram realizadas em duplas. A pesquisadora concluiu que os sujeitos pouco utilizavam os registros de representação, especificamente na conversão do registro gráfico para o numérico tabular, o que, segundo ela, já era esperado. Contudo, os sujeitos tiveram evoluções significativas, e verificaram-se as seguintes mudanças:

- domínio das representações algébrica, gráfica e tabular, e também de suas relações;
- a compreensão das condições de determinação de uma transformação linear plana;
- a resolução de situações que requisitaram conversões, tendo o registro gráfico (tanto congruentes como não-congruentes) como o de partida;

- a compreensão das imagens gráficas por meio de transformações lineares;
- as atitudes de independência e autonomia na avaliação das próprias produções;
- estabelecimento de relações entre uma situação particular e conhecimentos teóricos sobre transformação linear.

Concluiu, portanto, que o experimento, composto de atividades que requeriam a exploração da diversidade de registros e de conversões, contribuiu para a evolução dos estudantes com relação à compreensão do objeto “transformação linear” e ao domínio e transição de seus diferentes registros de representação.

Conforme pudemos observar nessas pesquisas, se houver enfoque nos registros de representação semiótica e na conversão desses registros durante o ensino, para representar o objeto, então os estudantes terão melhor desempenho com relação às atividades que envolvem o objeto matemático estudado.

A nossa pesquisa difere das comentadas anteriormente e de várias outras no sentido de que não há pré-teste, aplicação de seqüência didática ou qualquer outra intervenção na prática pedagógica do professor. Na nossa pesquisa o foco é a resolução de problemas e procura-se investigar o percurso que os sujeitos fazem com os registros e a escolha que fazem, em duas situações: quando determinados registros são explicitamente requeridos pelo problema e quando o estudante tem liberdade de escolha. Pesquisas como as aqui comentadas nos fornecem informações que são evidentemente consideradas, como o fato de não haver, no ensino, a preocupação e a prática com o trabalho focado nas diferentes representações de um mesmo objeto matemático e nas conversões, bem como com a relação direta entre desempenho e domínio de diferentes registros de representação. Também mostram que os livros didáticos não propõem um trabalho adequado com os diferentes registros para um mesmo objeto e nem com as conversões. Elas mostram que se todo esse trabalho fosse feito poderíamos esperar resultados mais satisfatórios no rendimento escolar. Na nossa pesquisa, este fato é confirmado quando os estudantes fazem uso dos registros em linguagem algébrica e figural. A maior parte das pesquisas não foca especificamente a resolução de problemas e essa é uma diferença entre elas e a nossa pesquisa.

Nesse sentido, para a realização desta pesquisa, foi preparado um teste composto por 4 problemas a fim de investigar as resoluções dos estudantes no que diz respeito ao uso dos registros de representação, às conversões e ao desempenho.

CAPÍTULO III - Procedimentos de pesquisa

III.1 Levantamento dos dados

Inicialmente foi aplicado um estudo exploratório em duas escolas da Rede Pública Estadual de Ensino do Estado de São Paulo, situadas na zona oeste da capital. Esse teste serviu como base para a preparação do teste final, que manteve apenas uma das questões do teste exploratório e seria aplicado em outra escola.

Uma das duas escolas onde o teste foi aplicado é exclusiva de Ensino Médio, e costuma ocupar o primeiro lugar da lista das escolas públicas que mais colocam alunos nas universidades públicas. Alguns de seus professores têm pós-graduação na área em que atuam. Segundo relato dos professores, os alunos são questionadores, costumam se envolver com as tarefas propostas e resolvem problemas considerados difíceis do ponto de vista dos professores. Esta escola se situa em um bairro privilegiado, o que pode influenciar nesse quadro.

A outra escola, também exclusiva de Ensino Médio, é também compromissada com o desenvolvimento de seus trabalhos e projetos e os coordenadores pedagógicos se preocupam em articular esses trabalhos.

Foram escolhidas duas salas da Escola A, uma de segundo e outra de terceiro ano; e uma sala da escola B, do segundo ano do ensino Médio. Foi aleatória a designação dos sujeitos, no que diz respeito à faixa etária e gênero. Para o teste matemático que foi aplicado, foram selecionadas quatro questões do ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio – de 2003. O objetivo, ao selecionar questões deste exame, era dar mais legitimidade ao teste e motivar os estudantes, considerando a seriedade com que o Enem é preparado, a importância que vêm ganhando perante professores e estudantes, notadamente os das escolas públicas, e ainda o caráter das questões, que são bem elaboradas e geralmente têm interessantes contextos. O ENEM foi instituído pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais – INEP, em 1998, e desde então é aplicado anualmente. Procura avaliar o desempenho de alunos concluintes e egressos do Ensino Médio com relação ao desenvolvimento de competências fundamentais ao exercício pleno da cidadania. Tem como objetivos específicos (BRASIL, 2003, P.2)

- oferecer uma referência para que cada cidadão possa proceder a sua auto-avaliação com vistas às suas escolhas futuras, tanto em relação ao mercado de trabalho quanto em relação à continuidade de estudos;
- estruturar uma avaliação da educação básica que sirva como modalidade alternativa ou complementar aos processos de seleção nos diferentes setores do mundo do trabalho;
- estruturar uma avaliação da educação básica que sirva como modalidade alternativa ou complementar aos exames de acesso aos cursos profissionalizantes pós-médios e ao ensino superior.

Esse documento pressupõe, ainda,

> [...] que a competência de ler, compreender, interpretar e produzir textos, no sentido amplo do termo, não se desenvolve unicamente na aprendizagem da Língua Portuguesa, mas em todas as áreas e disciplinas que estruturam as atividades pedagógicas na escola. O aluno deve, portanto, demonstrar, concomitantemente, possuir instrumental de comunicação e expressão adequado tanto para a compreensão de um problema matemático quanto para a descrição de um processo físico, químico ou biológico e, mesmo, para a percepção das transformações de espaço/tempo da história, da geografia e da literatura. (ibid. p.5)

Para selecionar as questões, escolhemos um assunto previsto no programa do nível de escolaridade dos sujeitos. A intenção era evitar que o desconhecimento dos conceitos envolvidos na questão gerasse impossibilidade de resolução, por parte dos sujeitos, o que poderia gerar inconsistências na análise dos dados.

A aplicação das questões por nós selecionadas, contudo, revelou a dificuldade dos estudantes em resolver os problemas propostos. No teste exploratório, somente foi possível analisar 1 dos 4 problemas, pois os estudantes não apresentaram solução para os demais.

Nessa perspectiva, foi elaborado um segundo teste (anexo 1), composto por duas questões do ENEM (sendo uma delas aquela que obteve maior número de respostas no teste exploratório) e por duas questões elaboradas por nós. Foi escolhida outra escola para aplicação do teste, para evitar que o fato de os estudantes já terem resolvido o problema que se repetia influísse no resultado. E ainda, considerando o exposto, este problema poderia não se enquadrar mais nessa categoria, ou seja, poderia apresentar caráter de problema rotineiro ou de exercício, principalmente se o professor já tivesse comentado sua resolução em sala. As duas questões do ENEM sofreram pequenas alterações, como a exclusão das alternativas e consequentemente a reformulação da pergunta.

O novo instrumento foi aplicado para alunos de 1 à 3ª série do Ensino Médio, e eles tiveram muitas dificuldades na resolução das questões, que foram reformuladas posteriormente. Mas é importante ressaltar que em ambas as aplicações os professores foram orientados para não realizarem a leitura dos enunciados e nem tampouco explicarem o que era solicitado em cada questão.

Foi escolhida uma quarta e última escola, e o novo teste foi aplicado em 5 turmas do 3º ano do Ensino Médio, do período matutino, considerando uma amostra de 58 sujeitos.

A escola estadual onde o teste foi aplicado - EE de São Paulo - é uma escola central, localizada no Parque Dom Pedro. É jurisdicionada à Diretoria de Ensino Centro e atende os segmentos de 5ª a 8ª e de Ensino Médio. Coincidentemente, assim como a primeira, ela também têm apresentado bons resultados em avaliações externas. Conseguiu a 4ª posição no ENEM -2006, de todas as escolas públicas do Estado. Esta escola não pode contar com o envolvimento da comunidade uma vez que seus alunos não moram na região. Eles vêem de outros bairros e nela estudam em virtude da localização de seus trabalhos. Também é importante citar que muitos de seus alunos também cursam o SENAI, localizado na região. Muitos freqüentam cursos como eletrônica e mecânica e há alguns que fazem mais de um curso. São alunos esforçados, também trabalhadores e que acordam cedo para chegar na escola no horário da primeira aula: às 07: 00 h, uma vez que não moram perto dela.

A diretora da escola foi muito atenciosa e solícita permitindo que o teste fosse aplicado na escola. Ela e a vice-diretora nos receberam muito bem, conversaram com os professores e nos liberaram as 5 turmas do Ensino Médio, do período diurno. Os professores também foram muito atenciosos. Os alunos, conforme perfil apresentado anteriormente, fizeram o teste com dedicação, esforço e interesse. O desempenho dos alunos foi muito bom, principalmente se compararmos com as outras escolas.

A aplicação do teste foi realizada em um único dia, durante 5 aulas, com nossa presença. Pela experiência dos testes e dos resultados anteriores, decidimos que seria importante ler os enunciados dos problemas e explicar aos estudantes o que era solicitado, bem como fornecer o significado de palavras e expressões desconhecidas para alguns, como aresta do cubo, área de superfície e diâmetro da esfera. Esta decisão foi tomada porque a avaliação do desempenho dos estudantes não era nosso foco, mas sim analisar suas respostas em termos de registros de representação. Questões em branco não seriam úteis para a pesquisa e os estudantes foram orientados para tentar resolver a questão não apresentando somente a resposta final. Eventuais dúvidas surgidas poderiam, dependendo do caso, ser sanadas.

III.2 Análise dos problemas

Para analisar os problemas, optamos por considerar os itens:

a) análise do enunciado – traz uma análise do texto, como um registro de partida, que tem aspectos sintáticos e semânticos;

b) análise do problema – traz uma análise matemática do problema, considerando os referenciais utilizados na pesquisa (classificação etc.);

c) objetivos da questão – descreve a intenção que tivemos com o problema, considerada nessa pesquisa;

d) conhecimentos requeridos – indica os conhecimentos necessários para se resolver a questão;

e) registros de representação presentes no enunciado e prováveis registros presentes na resolução – indica os tipos de registro de representação semiótica presentes no enunciado (registro de partida) e os possíveis registros que podem ser utilizados na resolução (registro de chegada);

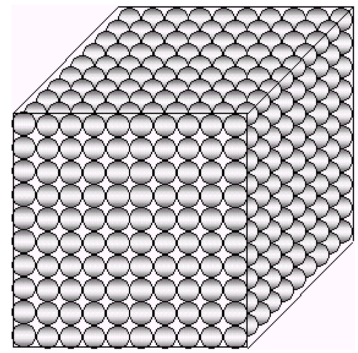
f) considerações didáticas – traz apontamentos sobre o que geralmente é trabalhado na escola, relacionado à questão e ao que ela requer do estudante; equívocos que podem ser cometidos , possíveis dificuldades dos sujeitos, caminhos que levariam à solução, etc.

g) possibilidades de resolução – apresenta algumas resoluções possíveis para o problema.

Trazemos a seguir uma breve discussão a partir de cada um desses aspectos.

Problema 1

1 – (ENEM 1999, reformulado[7]) Uma pessoa encheu uma caixa cúbica de 10 cm de aresta com bolinhas de gude de 1 cm de diâmetro. Ela arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais. Quantas bolinhas colocou na caixa?



a) Análise do enunciado

O enunciado não é longo e apresenta dados numéricos com mesma unidade de medida (cm). Apresenta as palavras 'aresta', 'diâmetro' e 'superpostas', que podem ser desconhecidas para algum estudante. Mas conforme já comentamos, foi explicado o significado de cada uma durante a leitura do problema.

b) Análise do problema

O problema deixa livre o caminho de resolução e seu contexto é o da semi-realidade. Julgamos importante fazer a classificação do problema de acordo com o caráter investigativo e com o contexto, e para isso recorremos a Skovsmose (2000), que diferencia exercícios de problemas e os classifica de acordo com o contexto. Ele organizou as tarefas com base em duas categorias: contexto[8] e investigação[9]. Essas situações são categorizadas em 6 tipos, a partir da combinação do contexto que apresentam (sem contexto ou com o contexto da própria Ciência), contexto da

[7] A questão original era composta por dois itens e consideramos aqui somente o primeiro, e, portanto, com alteração da introdução da questão. O anexo 2 traz a questão original.
[8] Contexto se refere à característica da situação na qual se desenvolve o problema. A situação pode ser real (do cotidiano), imaginária (fictícia, elaborada a partir de uma situação do cotidiano), pode ser do âmbito da própria matemática (contexto da matemática pura).
[9] Skovsmose sugere 2 categorias para a investigação: uma que tem característica de exercício, ou seja, o sujeito não precisa elaborar estratégias de resolução, e outra que tem característica de problema, ou seja, requer a elaboração de estratégia.

semi-realidade e contexto da realidade; e do caráter investigativo (com investigação ou sem investigação). O quadro abaixo ilustra as 6 categorias.

Quadro 02: Ambientes de Aprendizagem em Matemática

	Sem investigação (exercícios)	Com investigação (problemas)
Sem contexto	(1)	(2)
Contexto da semi-realidade	(3)	(4)
Contexto da realidade	(5)	(6)

As situações (1), (3) e (5) consistem em exercícios e as demais (2), (4) e (6) consistem em problemas.

c) Objetivos da questão

Com esta questão pretendemos verificar se o estudante:

- aplica algum procedimento de contagem (um a um, pelo princípio fundamental da contagem, por fórmula de volume etc) e identificar esse procedimento.
- percebe o preenchimento do cubo e não apenas de suas faces.
- compreende a idéia de medida de capacidade e a utiliza na resolução de problemas.

d) Conhecimentos requeridos

O problema requer conhecimentos de multiplicação de números inteiros, idéia de capacidade, visualização do cubo e reconhecimento de suas faces, técnicas de contagem e comparação de medidas, além da compreensão do conceito de diâmetro de uma esfera.

e) Registros de representação presentes no enunciado e prováveis registros na resolução

O enunciado está apresentado em linguagem natural e numérica combinadas e em linguagem figural.

Na resolução (registro de chegada) podem aparecer os registros em linguagem aritmética (contagem das bolinhas de gude por meio de operações básicas da Matemática), algébrica (regra de três ou uso da expressão que fornece o volume de um cubo, por exemplo), natural (quando o sujeito apenas descreve como fez, sem fazer uso de outras linguagens) e suas combinações (quando utilizam vários registros para se referir ao mesmo objeto). A linguagem figural não é muito esperada na resolução principalmente porque ela já aparece no enunciado (registro de partida). Em algumas resoluções os alunos utilizaram o desenho do registro de partida como apoio para a resolução do problema, completando-o com outros dados.

O mais esperado é o registro em linguagem aritmética seguido ou não do registro em linguagem algébrica.

f) Considerações didáticas

Este é um problema aparentemente simples, que poderia ser resolvido sem uso de proporção ou de expressão que fornece o volume de um cubo. Contudo, a falta de compreensão do conceito (do objeto cubo, por exemplo, ou da capacidade de um cubo) pode influir negativamente no desempenho dos sujeitos. Como os eixos Grandezas e Medidas (que engloba capacidade e volume) e Espaço e Forma (que engloba o estudo das figuras geométricas, como o cubo) não recebem, geralmente, destaque no ensino, era esperado que dificuldades a isso relacionadas fossem apresentadas (os resultados mostraram que alguns sujeitos não souberam determinar o número de faces do cubo e nem mostraram conhecimento sobre sua capacidade).

Para que o sujeito fosse bem sucedido na resolução desta questão, teria que saber o que é um cubo ou então compreender o conceito a partir do registro em linguagem figural, considerando o desenho uma figura bidimensional mas o objeto cubo uma figura tridimensional. O desenho não mostra todas as arestas do cubo, dificultando, para alguns sujeitos, seu reconhecimento (alguns sujeitos consideraram, como veremos adiante, apenas as 3 faces visíveis do cubo).

Também era preciso compreender que o cubo precisava ser preenchido com as bolinhas, ou seja, era preciso considerar uma caixa com todas as faces quadradas que ficaria cheia de bolinhas de gude. Contudo, como vimos, é comum desconsiderar fatos da realidade ao problematizar uma situação, embora isso não seja desejável. Nesse caso, por exemplo, volume e capacidade são utilizados com o mesmo sentido, durante a resolução da questão. É preciso, para tanto, desconsiderar a espessura das partes que compõem a caixa, o que é sugerido pelo desenho. Se fôssemos criteriosos e não tivéssemos esse desenho, deveríamos supor que não cabem 10 bolinhas alinhadas na caixa (equivalentes ao comprimento da aresta) porque a própria aresta já mede 10 cm. Essa confusão é acarretada por relacionar uma caixa (que tem paredes sólidas e não desprezíveis) a um objeto matemático (cubo) que, nesse caso, tem faces de espessura zero (as faces de um poliedro são polígonos, figuras bidimensionais).

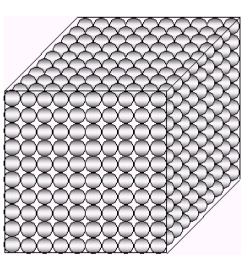
g) Possibilidades de resolução

Algumas possibilidades de resolução são:

- Resolução por meio da aplicação da idéia de volume.

  Cada aresta mede 10cm (dado), o equivalente à soma do diâmetro de 10 bolinhas.

Como o cubo é um caso particular de prisma (as faces são polígonos regulares, têm todas as faces idênticas e os ângulos poliédricos também), então aplicando a relação que dá o volume de um cubo teremos:



$V = A_{base} \times \text{altura}$

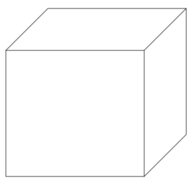
$V = 10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$

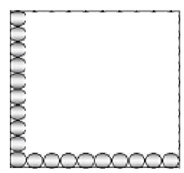
$V = 1000\text{ cm}^3$

Ou seja, foram colocadas 1000 bolinhas no cubo.

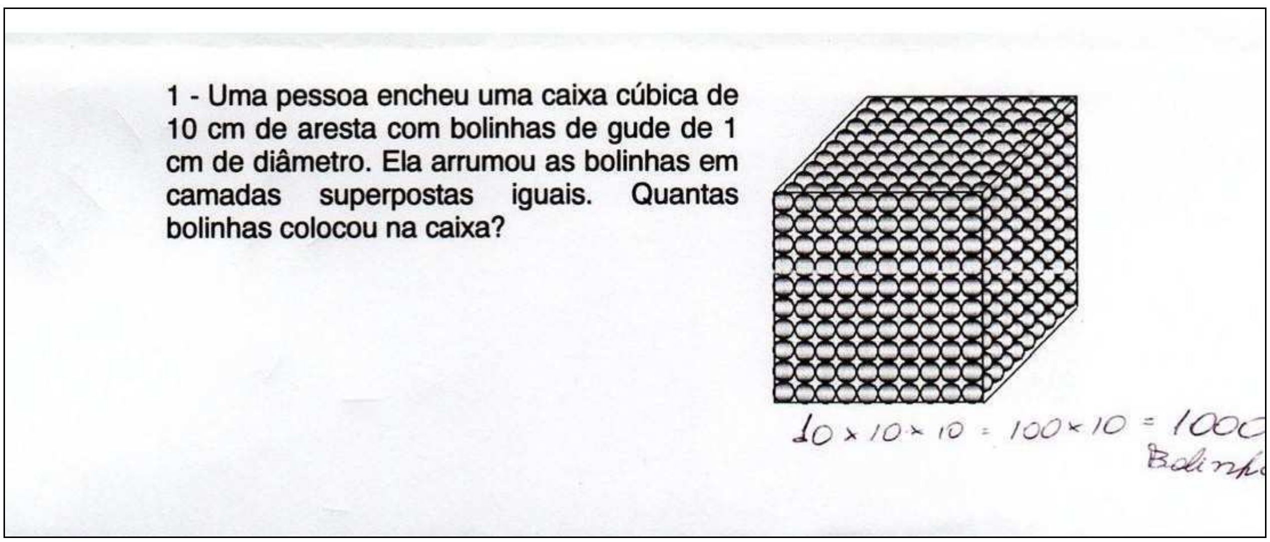
- Resolução pelo cálculo de bolinhas por camadas.

Cada face do cubo tem 10 x 10 bolinhas, ou seja, 100 bolinhas. Considerando que o cubo tem 10 camadas de 100 bolinhas cada, então ele tem 10 x 100 bolinhas, ou seja, 1000 bolinhas.





Os exemplos seguintes ilustram a resolução por parte de estudantes que partem da idéia de volume, melhor explicitada no segundo caso:



1 - Uma pessoa encheu uma caixa cúbica de 10 cm de aresta com bolinhas de gude de 1 cm de diâmetro. Ela arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais. Quantas bolinhas colocou na caixa?

10 x 10 x 10 = 100 x 10 = 1000
Bolinha

Figura 05: Resposta curta, a partir da idéia de volume.

Esta resolução pode ser resultado da aplicação da idéia de volume de um cubo, dada a medida de sua aresta – 10 cm. Nesse caso, como as bolinhas têm 1 cm de diâmetro e portanto é possível encaixar 10 delas até completar a medida da aresta do cubo como mostra o desenho fornecido no enunciado, então 10 x 10 x 10 dá o número de bolinhas que cabem na caixa.

Temos registro em linguagem numérica e aritmética. A palavra “bolinhas” (registro em linguagem natural) não fez referência à idéia de capacidade, por isso o registro em linguagem natural não foi considerado.

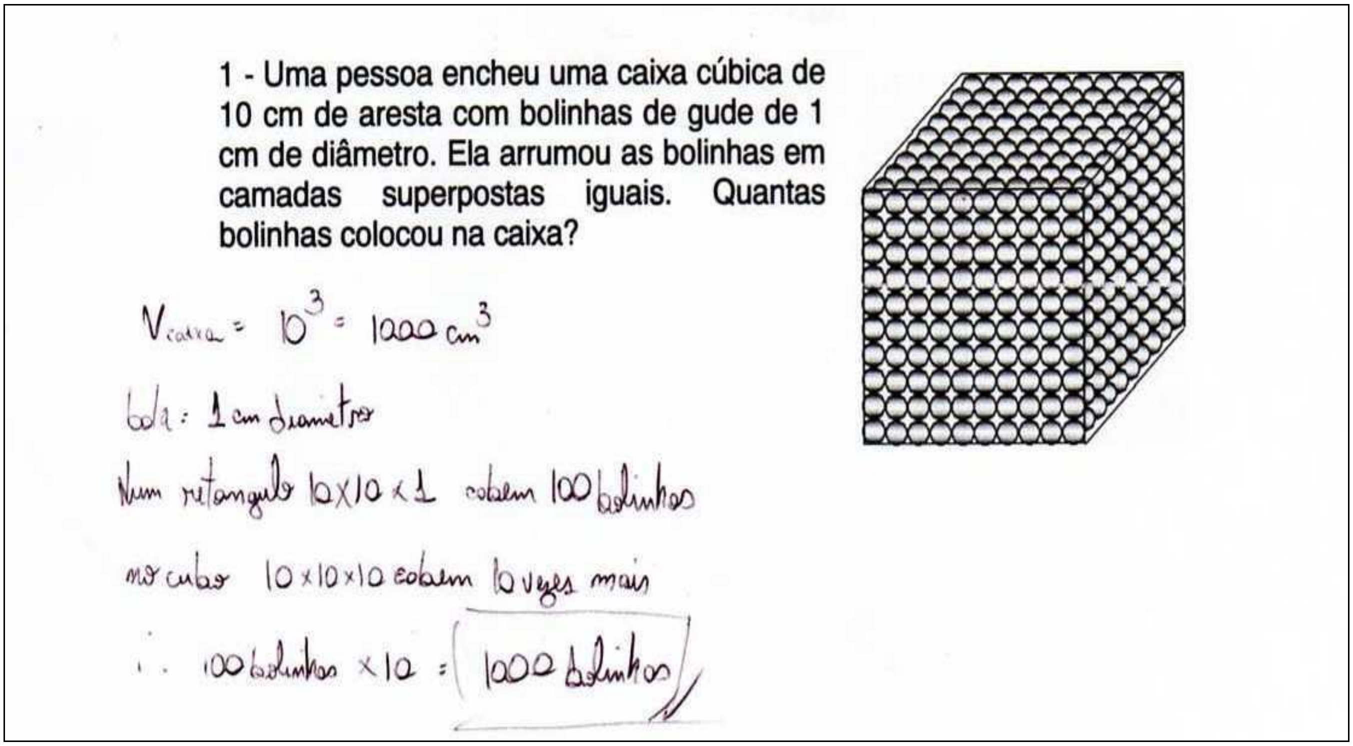


Figura 06: Linguagem natural na resolução

Observa-se que o sujeito determinou o número de bolinhas em uma camada, que ele chamou de retângulo de dimensões 10 x 10 x 1. O raciocínio de que são 10 desses “retângulos” está correto, contudo, a frase “10 vezes mais” significa 11 vezes, e não 10 como supôs o estudante. Nesse caso o sujeito fez uso, inicialmente, da regra do volume, e confirma a resolução resolvendo por outro modo.

Esta resolução traz o registro em linguagem natural acompanhado do registro em linguagem numérica. O sujeito tenta explicar, pela linguagem natural, os procedimentos da sua resolução. Usa simultaneamente a linguagem natural e a aritmética.

Problema 2

2. (ENEM 2003 - reformulado[10]) Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm x 40 cm x 60 cm. Qual é a quantidade mínima necessária de caixas para esse envio?

a) Análise do enunciado

O enunciado não é extenso, e não possui palavras que levam o estudante a cometer equívocos, nem é, pelo menos em princípio, de difícil compreensão. Traz um único termo específico da matemática: bloco retangular. As dimensões das caixas são apresentadas e, portanto, espera-se que o aluno as relacione com as medidas do comprimento, da altura e da profundidade.

Os números são inteiros e fáceis de serem manipulados: 20, 30, 40 e 60.

b) Análise do problema

O problema explora o contexto da semi-realidade e é de investigação. Requer mais de uma etapa ou operação para a resolução. Não apresenta as informações na ordem em que serão utilizadas. Envolve geometria e medida, não traz a linguagem figural no registro de partida e pode ser resolvido sem a presença desta linguagem no registro de chegada.

c) Objetivos da questão

Com essa questão pretendemos verificar se o aluno compreende a idéia de medida de capacidade e se conhece o bloco retangular. O problema requer que o estudante descubra quantas caixas, na forma de bloco retangular, são necessárias para armazenar 100 pacotes, também na forma de bloco retangular.

d) Conhecimentos requeridos

Para ter bom desempenho na questão, é preciso ter compreensão da idéia de medida de capacidade, conhecer um bloco retangular e efetuar o cálculo para responder a questão.

---

[10] O enunciado original trazia as alternativas, que, neste caso, foram suprimidas para evitar o direcionamento das resoluções e respostas sem cálculos (somente a alternativa assinalada). O anexo 3

e) Registros de representação presentes no enunciado e prováveis registros na resolução

O enunciado (registro de partida) está escrito em linguagem natural com algarismos indo-arábicos. As dimensões da caixa estão representadas em notação matemática: 20 x 20 x 30 cm e 40 x 40 x 60 cm.O enunciado não traz registro em linguagem figural.

O registro da resolução dada pelo sujeito, também chamado de registro de chegada, pode se apresentar por meio de diversas linguagens: a linguagem natural, a linguagem figural, a linguagem aritmética e a algébrica, combinadas ou não. Nesse sentido, o sujeito pode resolver o problema fazendo os desenhos dos pacotes ou da caixa (linguagem figural), pode utilizar apenas o cálculo aritmético (linguagem aritmética), pode fazer o desenho e o cálculo aritmético etc. Mas é importante ressaltar que não são considerados, para esta pesquisa, todos os registros que o sujeito faz em uma resolução, eles são considerados quando se referem ao mesmo objeto.

Como afirma Duval (1999), a geometria mobiliza minimamente a linguagem natural, o que mostra o quanto as representações semióticas estão intrinsecamente ligadas a uma atividade matemática dirigida a objetos. Geralmente, não é tranqüila a passagem de um registro plurifuncional discursivo (enunciado em linguagem verbal) para o registro plurifuncional não discursivo (linguagem figural). Geralmente a escolha de um registro no começo da resolução de um problema implica uma conversão implícita. Para Duval, o registro figural ou geométrico é interpretado, percebido, não é lido como a linguagem natural. Assim, é preciso observar dois aspectos nessa representação: a apreensão perceptiva das formas, que é imediata e automática, e a apreensão discursiva dos elementos matemáticos da figura.

f) Considerações didáticas

Esse é um problema que, como o anterior, também aborda a idéia de capacidade e, dadas as dificuldades comumente apresentadas pelos sujeitos em geometria e em medidas, é esperado que a falta de conhecimentos declarativos (conceituais), mais que

traz o problema original.

a de conhecimentos procedurais (de procedimentos) influa negativamente na resolução. A ordem das operações não aparece no enunciado (que cálculo se faz primeiro) e é preciso saber quantos pacotes cabem na caixa para depois descobrir quantas caixas serão necessárias. Sendo assim, se o sujeito não determina o número de pacotes que cabem na caixa então não terá êxito na resolução. Este problema pode ser resolvido por vários modos e requer conhecimentos matemáticos básicos.

É um problema interessante por ser de aplicação embora, conforme já comentamos, problemas deste tipo procuram idealizar uma situação e geralmente se distanciam da realidade. Neste caso os produtos de uma empresa são vendidos em lotes e em caixas totalmente preenchidas, o que pressupõe que enviar uma caixa com poucos pacotes ou produtos, menos do que a caixa comporta, está fora de questão.

g) Possibilidades de resolução

Na etapa de tradução do problema, é solicitado do sujeito:

Compreender a situação e o que se pede; compreender que se trata de ocupação do espaço; verificar quantas caixas menores cabem numa maior, dadas suas dimensões. É preciso relacionar estes dados com algum conhecimento matemático que se possa utilizar.

Na etapa de resolução do problema, o sujeito precisa perceber que cabem 8 pacotes numa caixa e calcular quantas caixas serão necessárias considerando que há 100 pacotes disponíveis. Uma divisão de 100 por 8 resolve o problema. Como o resultado é 12,5 e não é inteiro, então a quantidade de caixas necessárias para o envio será 13.

Possíveis resoluções

Algumas possibilidades de resolução são:

A – resolução a partir da comparação dos volumes

Calculamos o volume da caixa menor:

$V_c = 20\ cm \times 20\ cm \times 30\ cm = 12.000\ cm^3$

Calculamos o volume da caixa maior:

$V_C = 40\ cm \times 40\ cm \times 60\ cm = 96.000\ cm^3$

Descobrimos quantas caixas menores cabem na maior, por meio da divisão:

$$\frac{V_C}{V_c} = \frac{96000}{12000} = 8$$

Desta forma, concluímos que cabem 8 pacotes menores na caixa maior.

É preciso lembrar que são 100 pacotes no total, e não apenas 8, assim, podemos efetuar a divisão para chegar à resposta:

100: 8 = 12,5

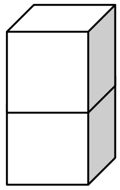
Ou seja, será preciso de 12 caixas e meia, mas como esta resposta não pode ser aceita devido à impossibilidade e incoerência de considerar meia caixa, então a resposta correta será 13 caixas.

Mas o estudante precisa estar atento à forma das caixas: é possível que a caixa maior tenha o mesmo volume (12.000 cm^3), mas com dimensões diferentes de forma tal que não cabem as 8 caixas (imaginemos, por exemplo, um bloco retangular mais baixo e com maior profundidade). O sujeito faria a divisão verificando quantas vezes o volume do pacote caberia na caixa e teoricamente chegaria a 8, fisicamente, contudo, 8 pacotes não caberiam na caixa.

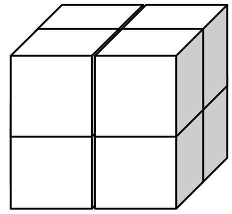
Nesse caso, uma visão da situação real evita possíveis erros. Como grande parte dos alunos utilizou o registro na linguagem figural, então foi percebido que verificaram as medidas. Mas alguns estudantes resolveram o problema sem o uso da linguagem figural, efetuando o cálculo anteriormente citado.

Essa resolução não exige conversão do registro na linguagem natural para o registro na linguagem figural. O estudante pode utilizar somente o registro na linguagem aritmética ou algébrica, acompanhado ou não do registro na linguagem natural.

A resolução seguinte consiste numa tentativa de utilização dessa idéia, mas ainda bem distante. O sujeito soma as 3 dimensões de dois pacotes, duas a duas, e chega nas dimensões da caixa. Contudo, o sujeito concluiu, equivocadamente, que cabem dois pacotes na caixa, sendo que as dimensões 40 x 40 x 60 cm permitem acondicionar 8 e não 2 pacotes. Talvez por se pensar em dobrar as dimensões, concluiu-se em acondicionar dois pacotes. Um registro em linguagem figural poderia ter evitado esta conclusão:



2 pacotes
Nesse caso dobra-se somente uma dimensão
Dimensões: 40 x 20 x 30



8 pacotes
Aqui todas as dimensões dobram
Dimensões: 40 x 40 x 60 cm

É importante ressaltar também que, equivalente a dizer que se dobrarmos as dimensões de um retângulo então sua área não irá dobrar (mas sim quadruplicar), temos que se dobrarmos as dimensões de um paralelepípedo seu volume também não irá dobrar (nesse caso irá octuplicar).

A resolução seguinte ilustra este caso.

2. (ENEM 2003) Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm x 40 cm x 60 cm. Qual é a quantidade mínima necessária de caixas para esse envio?

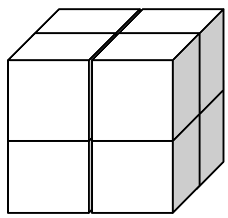
pacotes: 20 cm x 20cm x 30cm
+ 20 cm x 20cm x 30cm
40cm x 40cm x 60cm

Cada caixa cabe 2 pacotes
logo é preciso 50 caixas

Figura 07: Uso da proporção e ausência de registro em linguagem figural

B – Resolução a partir da comparação dos desenhos das duas caixas, para percepção da capacidade.

Utilizando o registro figural, é possível perceber que cabem 8 pacotes na caixa: efetua-se a divisão de 100 por 8, obtendo 12,5 e considera-se, conforme comentado anteriormente, 13 caixas.



Nessa resolução o registro na linguagem figural mostra a idéia de medida de capacidade e a partir das dimensões da caixa e dos pacotes é possível conferir se os pacotes cabem na caixa.

Além do registro em linguagem figural seria necessário o registro em linguagem aritmética, que corresponde ao cálculo que determina o número necessário de caixas. Contudo, alguns alunos resolveram o problema utilizando a linguagem algébrica, efetuando uma regra de três e resolvendo a equação do primeiro grau obtida.

C – Resolução a partir da estratégia de tentativa e erro

Após concluir que cabem 8 caixas menores na maior, é possível multiplicar 8 por um número qualquer, obtido por uma estimativa, por exemplo:

8 x 10 = 80

8 x 12 = 96

8 x 13 = 104

O primeiro fator se refere ao número de caixas menores que cabem na maior; e o segundo se refere ao número estimado de caixas de que se precisa (que será a resposta do problema). O produto indica o número de caixas menores que são acondicionadas.

Essa resolução requer a conversão do registro em linguagem natural para o registro em linguagem aritmética.

Outros modos de resolução

Estudantes resolveram a questão, independentemente de acerto ou de erro, de diversas maneiras. Essas maneiras englobam os mesmos registros: em linguagem figural, natural, aritmética, algébrica, etc. A resolução seguinte ilustra a aplicação da idéia de proporcionalidade. Nesse caso, não é possível afirmar que o acesso ao bloco e à caixa foi feito de forma incorreta, porque pode ser que o sujeito tenha feito apenas a vista superior dos objetos. Contudo, concluiu que em uma caixa cabem 4 pacotes:

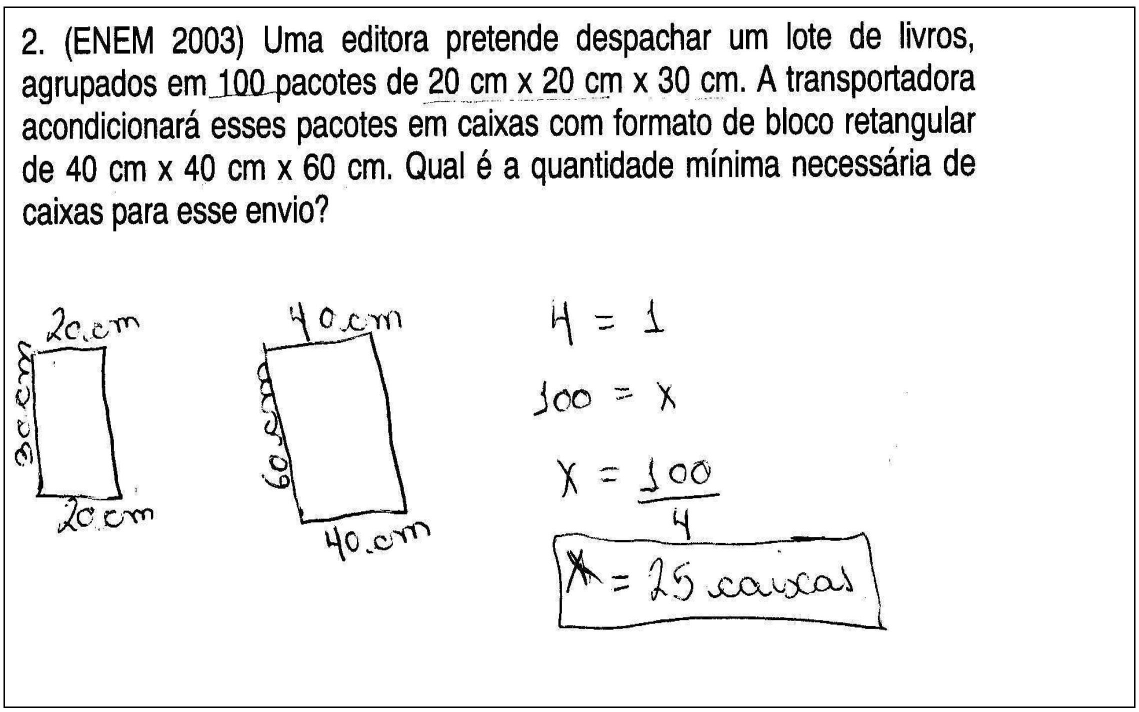

2. (ENEM 2003) Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm x 40 cm x 60 cm. Qual é a quantidade mínima necessária de caixas para esse envio?

Figura 08: Resolução incomum para o problema

Problema 3

Desenhe um triângulo que tenha um ângulo maior que 90º. Até que ponto esse ângulo pode ser aumentado de forma a se assegurar a existência do triângulo? Faça um desenho para ilustrar essa situação.

a) Análise do enunciado

O enunciado é razoavelmente simples e não apresenta palavras desconhecidas. Não há problemas com o seu tamanho, com ordem de operações a serem realizadas ou com dificuldades de interpretação.

b) Análise do problema

É um problema que estimula o uso de registros de representação para sua resolução. Dá a possibilidade de diferentes modos de apresentação da solução. Se enquadra no ambiente 2 de investigação (tem caráter investigativo e traz o contexto da Matemática).

c) Objetivos da questão

Pretendemos investigar se o estudante reconhece e constrói um triângulo retângulo e um triângulo obtusângulo, bem como se o estudante compreende a lei de existência de um triângulo.

d) Conhecimentos requeridos

O problema requer conhecimentos sobre triângulo e sua lei de existência, bem como habilidades de desenho das situações abordadas e de justificar propriedades geométricas.

e) Registros de representação presentes no enunciado e prováveis registros na resolução

O enunciado é escrito em linguagem natural e numérica, e requer explicitamente o uso de registro em linguagem figural no registro de chegada (resolução).

f) Considerações didáticas

Esse não é o tipo de problema comum de ser explorado no ensino e, além disso, aborda o eixo medidas, nesse caso, de ângulo. O sujeito precisa, conforme requerido no problema, conhecer e desenhar um triângulo obtusângulo e dar movimento ao desenho para ver o que acontece quando se aumenta esse ângulo. Não é preciso utilizar régua ou transferidor, o desenho à mão livre mostra o resultado. Não é estritamente necessário desenhar o triângulo para se chegar à solução, mas o desenho é solicitado no problema. A idéia que está por trás dessa resolução é a de existência de um triângulo: um lado deve ser menor que a soma da medida dos outros dois. Espera-se também que o sujeito perceba que se aumentar o ângulo até atingir 180º não existirá mais o triângulo.

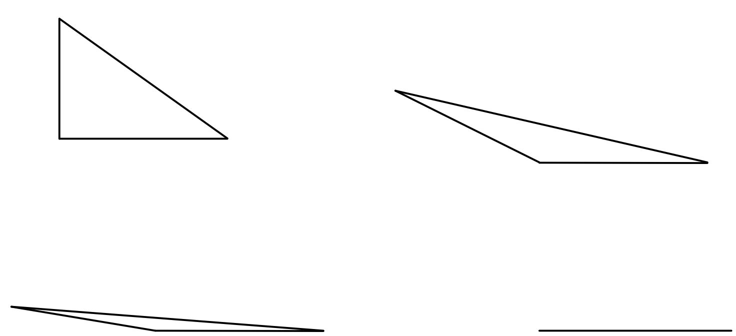
No novo teste, para ter o acesso a diversas situações que envolvem registros, foi apresentado, na primeira questão, um desenho (registro em linguagem figural) e o mesmo não aconteceu com a segunda questão, o que significa que era optativo desenhar ou não. No caso da terceira questão optou-se por solicitar obrigatoriamente o desenho da situação (registro em linguagem figural). Assim, situações diversas poderiam ser analisadas porque, conforme vimos anteriormente, os sentidos das conversões não são da mesma natureza e geralmente apresentam dificuldades diferentes.

g) Possibilidades de resolução

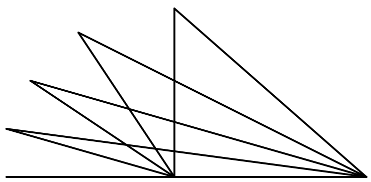
Como era requerido neste problema, o estudante precisava ilustrar a situação, partindo do desenho de um triângulo eqüilátero. Também era solicitado que o aluno desse a resposta (provavelmente em linguagem natural) à pergunta feita. Assim, o problema prevê mais variações para a resposta final que para a ilustração.

Duas possibilidades de ilustração são:

a) Ilustração de algumas etapas separadamente



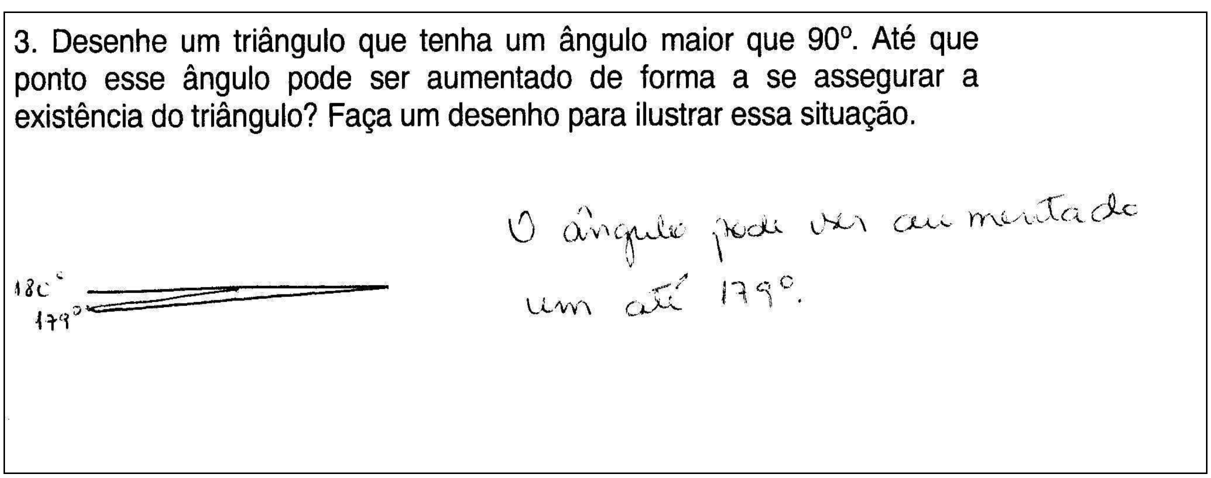
b) ilustração de várias etapas em um único desenho



Com relação às respostas, seguem algumas possibilidades que foram aceitas nesta pesquisa:

- o ângulo não atinge 180º,
- o ângulo está entre 90º e 180º,
- o ângulo tem no máximo 179º,
- o ângulo só pode chegar a 179º,
- o ângulo máximo é de 179º 59'59''
- o ângulo não pode ser 180º nem ser maior que ele.

Para exemplificar, segue a resolução de um estudante, que apresentou uma única ilustração (não desenhou o triângulo se deformando a partir da variação do ângulo) e a resposta dada foi de 179º.

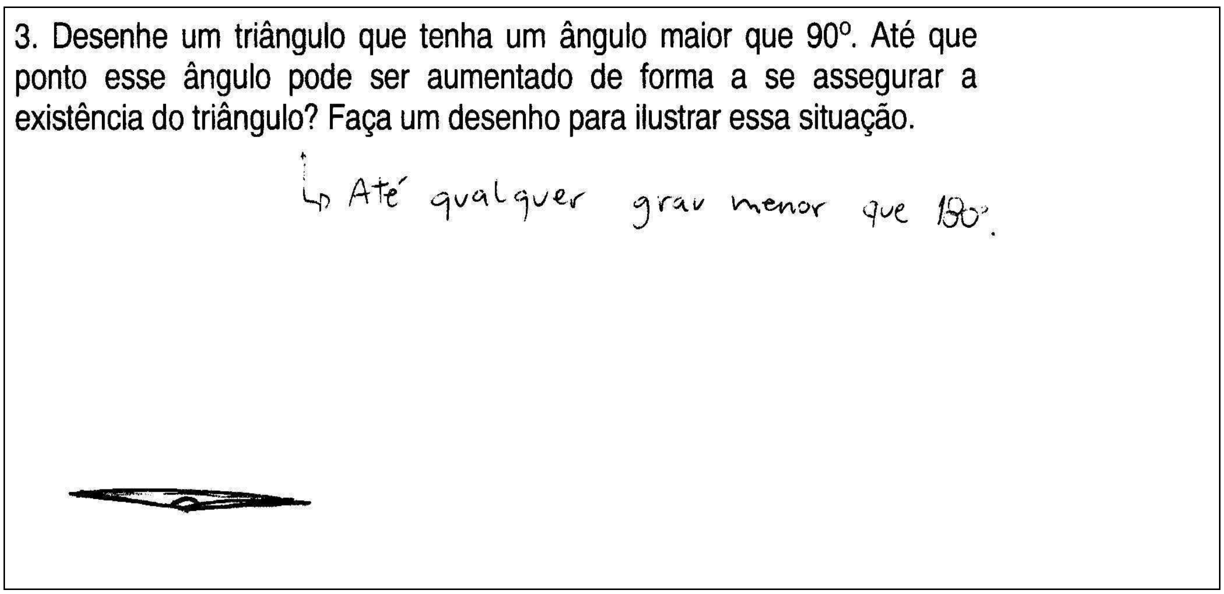

3. Desenhe um triângulo que tenha um ângulo maior que 90º. Até que ponto esse ângulo pode ser aumentado de forma a se assegurar a existência do triângulo? Faça um desenho para ilustrar essa situação.

180°
179°

O ângulo pode ser aumentado um até 179°.

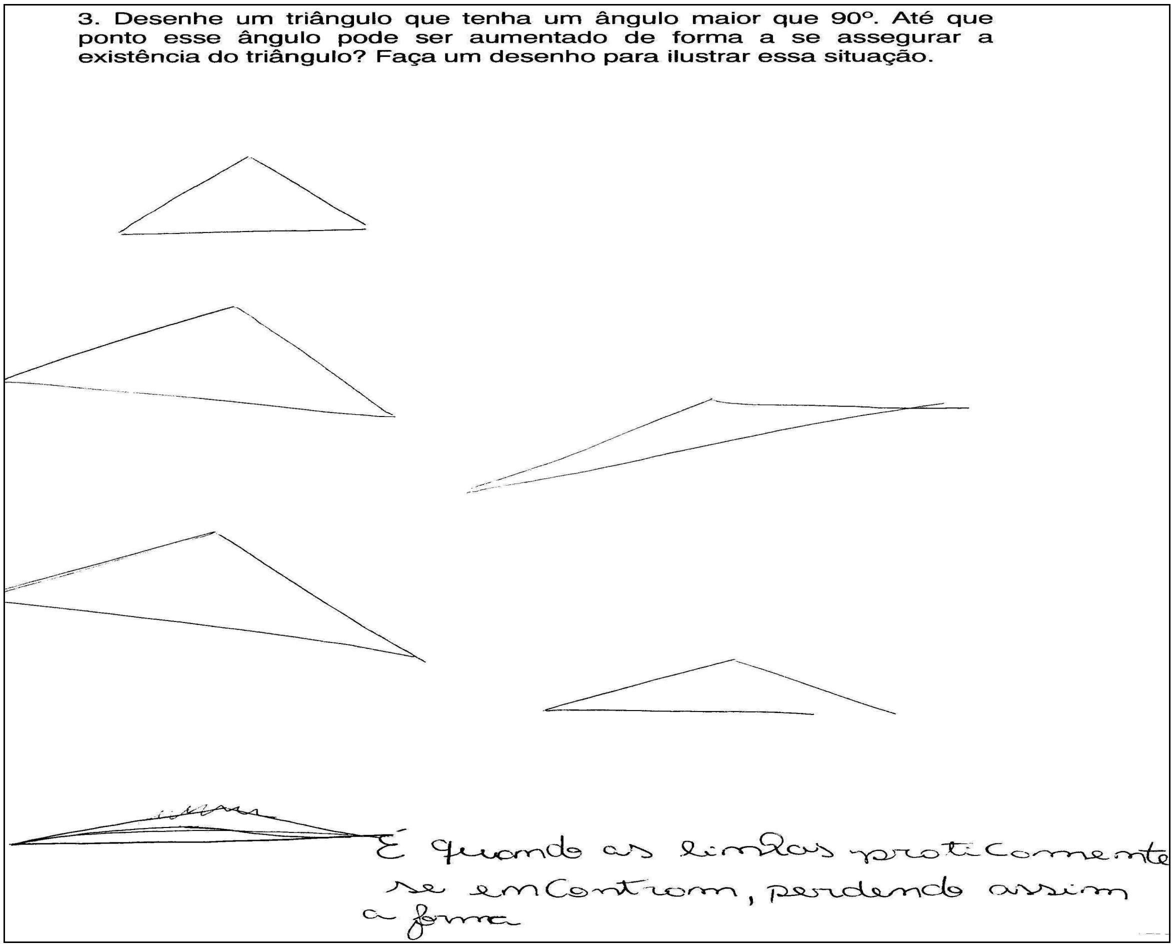
Figura 09: Resolução curta com registro em linguagem figural e em natural.

Outras respostas e justificativas apareceram nas respostas dos estudantes, conforme se observa nos 4 exemplos seguintes. O primeiro (fig. 10) apresenta uma resposta em função do ângulo, enquanto o segundo (fig. 11) não. O primeiro não representa o triângulo de acordo com a variação do ângulo (representa apenas um) enquanto o segundo traz vários triângulos, mas não parece haver uma ordem seqüencial nos desenhos. O terceiro exemplo (fig. 12) é muito parecido com o segundo e o quarto exemplo (fig. 13) se aproxima mais das condições de existência de um triângulo:


3. Desenhe um triângulo que tenha um ângulo maior que 90º. Até que ponto esse ângulo pode ser aumentado de forma a se assegurar a existência do triângulo? Faça um desenho para ilustrar essa situação.

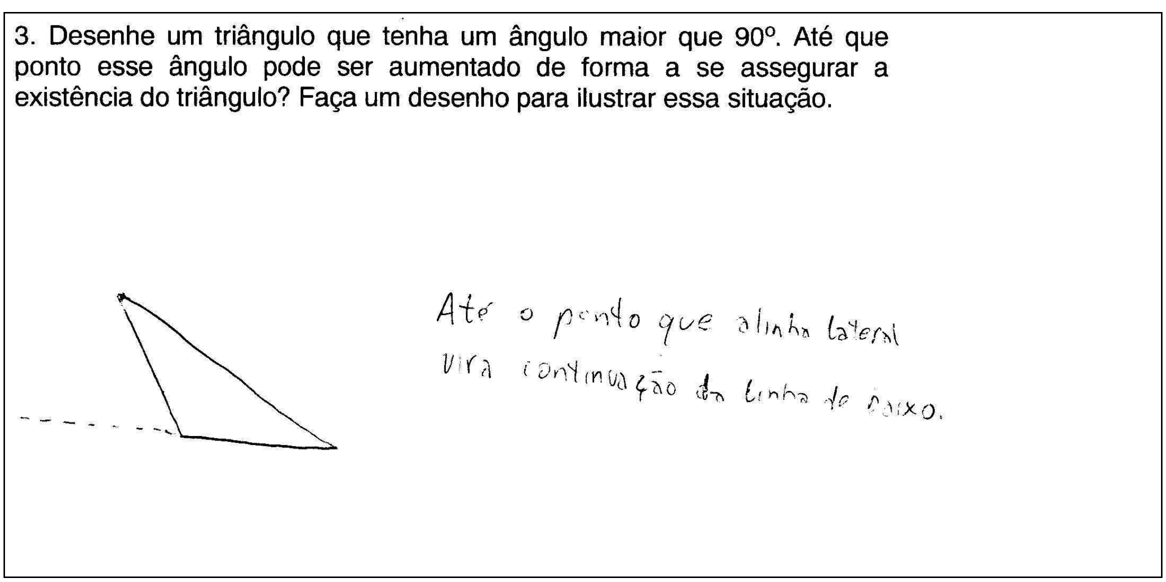
Até qualquer grau menor que 180°.

Figura 10: Resolução curta


3. Desenhe um triângulo que tenha um ângulo maior que 90º. Até que ponto esse ângulo pode ser aumentado de forma a se assegurar a existência do triângulo? Faça um desenho para ilustrar essa situação.

É quando as linhas praticamente se encontram, perdendo assim a forma

Figura 11: Resposta informal


3. Desenhe um triângulo que tenha um ângulo maior que 90º. Até que ponto esse ângulo pode ser aumentado de forma a se assegurar a existência do triângulo? Faça um desenho para ilustrar essa situação.

Até o ponto que a linha lateral vira continuação da linha de baixo.

Figura 12: Ausência de representação conforme solicitado e resposta informal

O estudante seguinte, assim como o anterior, não representou o triângulo retângulo conforme solicitado, mas apresentou uma resolução razoável. Realizou conversão em registro de linguagem figural e natural:

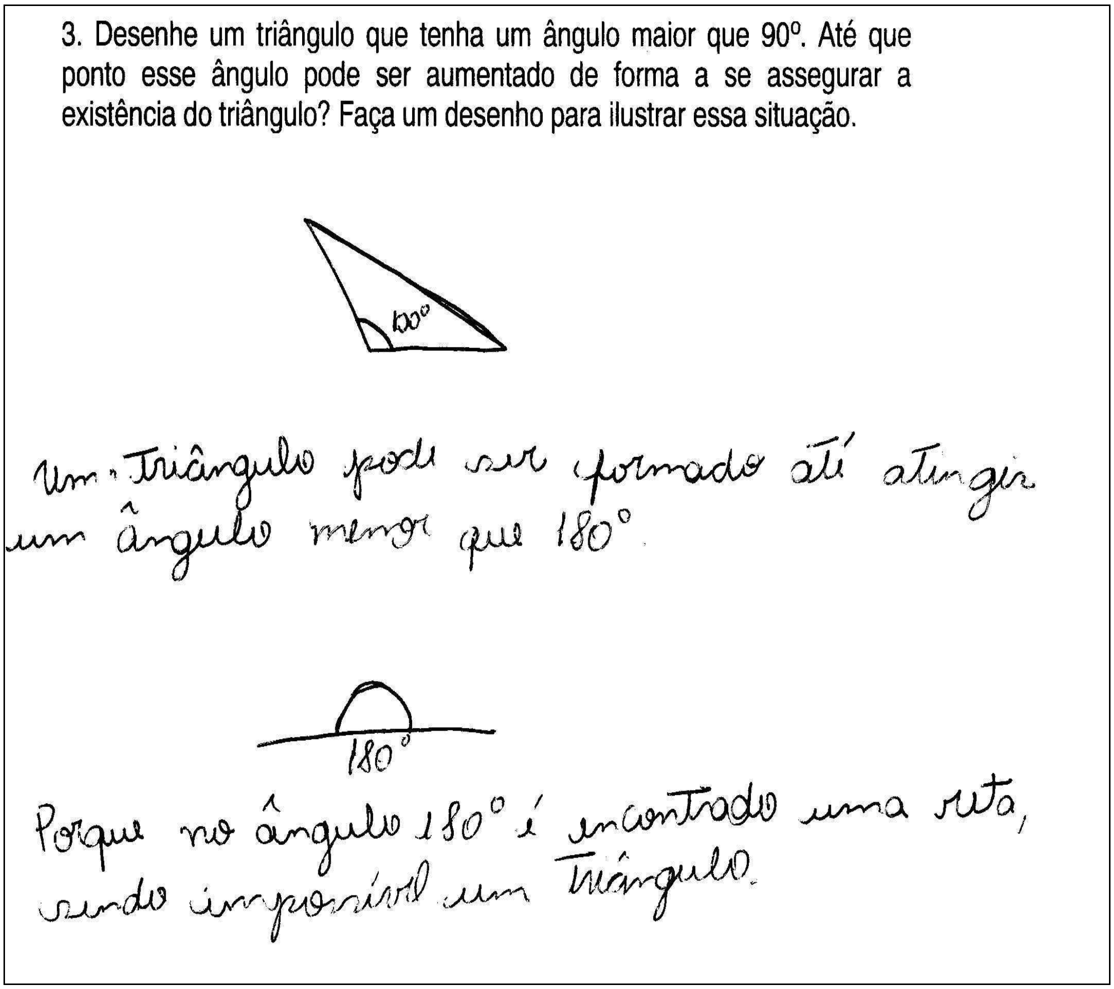
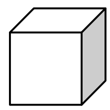


Figura 13: Ausência de representação conforme solicitado

Estes exemplos não mostram relação direta entre a presença de registro em linguagem figural e o acerto na questão, mas mostram que para respostas menos formais há problemas com relação ao conhecimento declarativo.

Problema 4

Considere um cubo de aresta x. Determine a área de sua superfície (área de todas as faces). Justifique o resultado.



a) Análise do enunciado

O enunciado da questão é curto, de simples compreensão e não apresenta palavras desconhecidas para os estudantes, com exceção de ‘aresta’.

b) Análise do problema

O problema pode ser resolvido rapidamente se o estudante tiver habilidades mínimas de cálculo algébrico (cálculo de produto de monômios) e conhecimentos sobre o cubo. É um problema do ambiente 2 (exige certa investigação e traz o contexto da Matemática). Tem resposta única.

c) Objetivos da questão

Pretendemos, com esse problema, verificar se o estudante sabe calcular e justificar a área de superfície de um sólido geométrico simples, o cubo, e também verificar se tem habilidades de cálculo algébrico.

d) Conhecimentos requeridos

O problema exige conhecimento sobre área de superfície de um sólido geométrico (nesse caso o cubo) ou cálculo de área de quadrado e sua utilização para cálculo da área da superfície do cubo. Também verifica a compreensão do conceito de aresta.

e) Registros de representação presentes no enunciado e prováveis registros na resolução

O enunciado é apresentado em linguagem verbal (nesse caso a natural) e não-verbal (nesse caso a figural). Para a resolução, espera-se que o estudante apresente registro em linguagem algébrica, ou sua composição com o registro figural.

f) Considerações didáticas

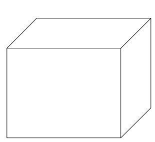
Esse é um problema que envolve geometria e medidas. Não requer do estudante o conhecimento da expressão matemática que dá a área da superfície cúbica: $6x^2$ (para um cubo de aresta x). Exige o conhecimento da expressão que dá a área de um quadrado ou retângulo. É de se supor que os sujeitos compreendam o sentido de 'área da superfície do cubo', mas como não é isto que está sendo avaliado, já foi explicitamente traduzido no enunciado. O que se pretende é avaliar o uso da linguagem algébrica, mas evidentemente, se o sujeito desconhece o cubo provavelmente terá insucesso na questão (veremos adiante que alguns sujeitos consideraram menos que 6 faces para o cubo errando, conseqüentemente, a resolução do problema).

g) Possibilidades de resolução

Não há uma variedade de resoluções para esse problema uma vez que ele sugere a resolução, que é curta, em linguagem algébrica. Como justificativa também é possível apresentar uma das 11 planificações do cubo mostrando as suas 6 faces. É possível ressaltar também que cada face do cubo é um quadrado, justificando o resultado de sua área. Dessa forma, temos:

A área de cada face do cubo é x.x, ou seja, x^2 (a face é um quadrado).

Como o cubo tem 6 faces então a área da sua superfície será $6x^2$.



Segue a resolução de um estudante, que recorreu à planificação mais simples do cubo para justificar a resolução. Consideramos, para esse caso, o uso da linguagem figural e natural. Está explícito o domínio do conceito de planificação, de quadrado e de área de quadrado. Os conhecimentos conceituais, como já vimos, contribuem com a resolução do problema. O sujeito também apresenta domínio da linguagem algébrica e utiliza os diferentes registros (usa diferentes linguagens) conforme a necessidade de uso.

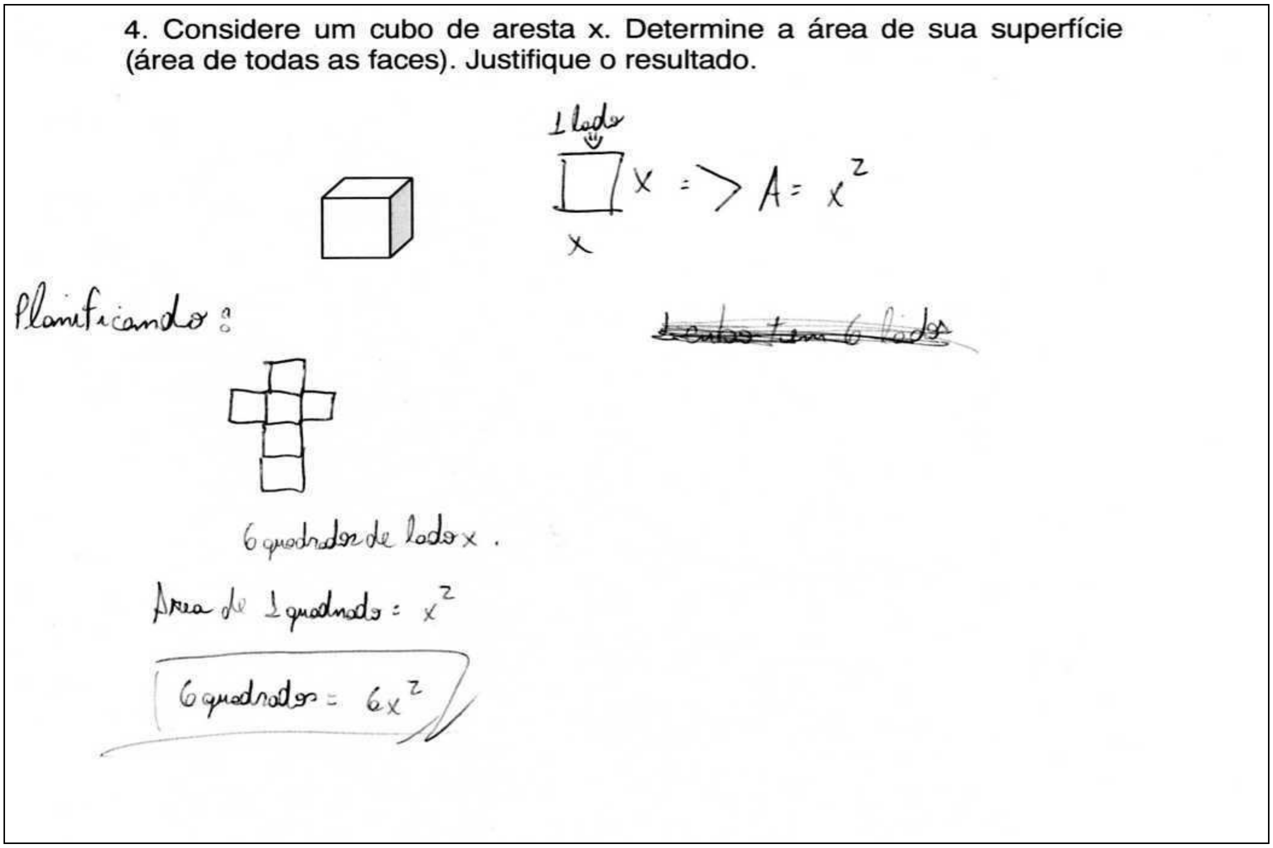


Figura 14: Planificação do cubo na resolução

Capítulo IV – Resultados e análise dos dados

IV. 1 Análise dos dados

Conforme mencionado, foram considerados os testes de 58 sujeitos, e as respostas para cada questão foram analisadas com enfoque nos diferentes registros de representação semiótica utilizados, bem como nas conversões de representações realizadas. Cabe destacar que consideramos como conversão uma representação do objeto, feita pelo estudante, em uma linguagem diferente daquela presente no enunciado, independente do fato de esse registro ter sido representado corretamente ou não, bem como do sucesso ou insucesso na questão.

Para cada um dos problemas, as respostas dos estudantes foram analisadas com base nas conversões realizadas. Ao fazer isso, pudemos identificar não só os erros e acertos, como também o número de conversões para um mesmo objeto e a ordem em que elas foram feitas. Nesse processo foram elaboradas categorias para classificar as respostas na perspectiva de levantar, tanto para os que acertaram como para os que erraram, o percurso de resolução em termos dos registros de representação e as tendências de uso desses registros. Para todos os problemas as respostas foram categorizadas com base no fato de identificarmos ou não conversões. Consideramos conveniente também definir, para as respostas certas, uma categoria que expressa um conjunto de respostas nas quais não há compatibilidade entre as conversões feitas e o resultado obtido.

Ao procedermos à análise das respostas observamos que o problema 2, diferentemente dos problemas 1, 3 e 4, apresentava, do ponto de vista da resolução, uma característica que nos pareceu importante de ser explicitada na categorização. Notamos que, em muitas das respostas desse problema, os estudantes representavam o bloco de forma a não respeitar a tridimensionalidade do objeto e conseqüentemente erravam a questão. Em outras respostas, os estudantes, mesmo respeitando a tridimensionalidade, não representaram a idéia de capacidade, isto é, não visualizaram corretamente o número de pacotes que cabiam na caixa. Em contrapartida, estudantes que registraram adequadamente o bloco retangular bem como a idéia de capacidade tiveram sucesso na questão. Isso nos levou a propor uma categorização das respostas para o problema 2 que respeitasse as conversões para duas situações distintas: a idéia de medida de capacidade e o bloco retangular. Esquematizamos a seguir a classificação que utilizamos para analisar as respostas com relação às conversões realizadas.

Classificação em função do desempenho e das conversões, para os problemas 1, 3 e 4:

- **Respostas certas**

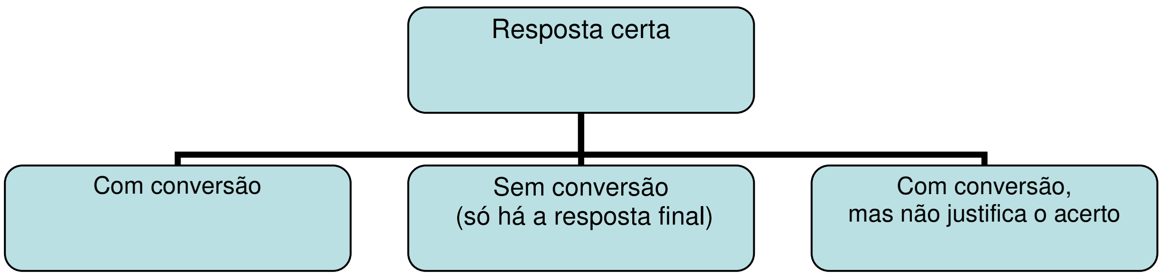


Fig. 15: Classificação dos acertos para os problemas 1, 3 e 4.

- **Respostas erradas**

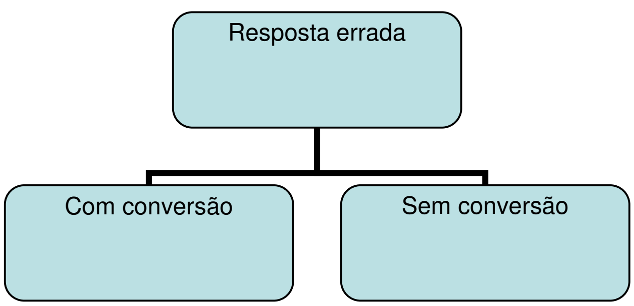


Fig. 16: Classificação dos erros para os problemas 1, 3 e 4.

Classificação em função do desempenho e das conversões, para o problema 2:

- **Respostas certas**

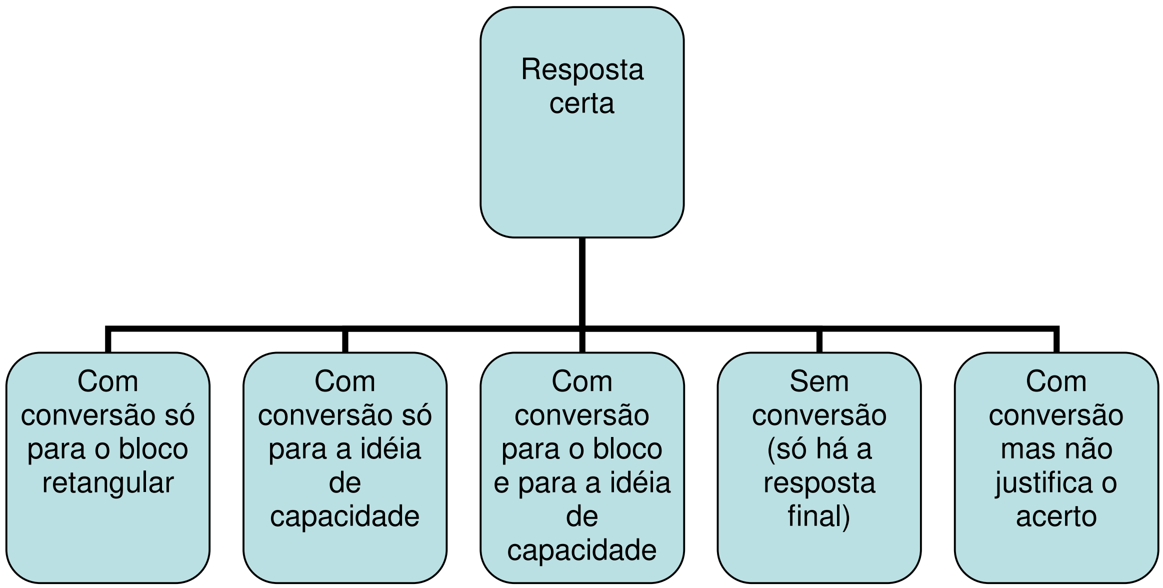


Fig. 17: Classificação dos acertos para o problema 2

- **Respostas erradas**

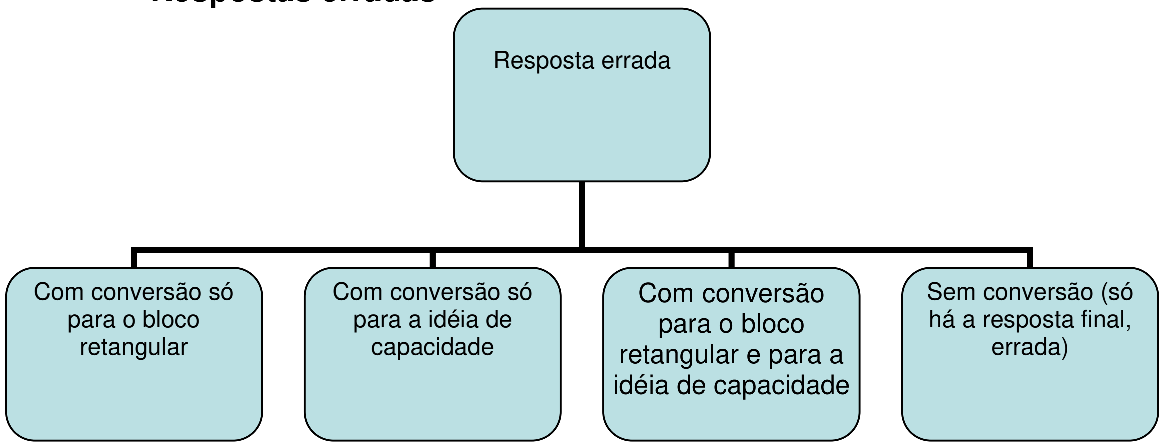


Fig. 18: Classificação dos erros para o problema 2

Categorização das respostas com relação à realização de conversões

A seguir são listados, em ordem de maior ocorrência, os caminhos preferenciais dos estudantes com relação ao uso dos registros de representação para realização de conversões. O número que aparece entre parênteses indica o total de sujeitos que percorreram esse caminho. Por exemplo, para o problema 1, tivemos 10 opções distintas de caminhos. Vinte e seis sujeitos utilizaram apenas a linguagem aritmética, 10 utilizaram a linguagem natural e a numérica combinadas, 5 utilizaram a linguagem aritmética seguida da linguagem natural; 4 a linguagem natural seguida da linguagem aritmética, assim por diante.

a) Problema 1 (55 respostas e 42 acertos)

- somente a linguagem aritmética (26)
- somente a linguagem natural e numérica combinadas (10)
- linguagem aritmética → linguagem natural (5)
- linguagem natural → linguagem aritmética (4)
- linguagem aritmética e algébrica combinadas (3)
- somente a linguagem figural (2)
- linguagem figural → linguagem aritmética (2)
- linguagem aritmética e algébrica combinadas → linguagem natural (1)
- linguagem natural → linguagem aritmética → linguagem natural (1)
- somente a linguagem algébrica (1)

b) Problema 2 (51 respostas e 4 acertos)

- somente a linguagem natural (12)
- somente a linguagem aritmética (8)
- linguagem figural → linguagem aritmética (5)
- linguagem aritmética → linguagem natural (5)
- linguagem figural → linguagem natural (4)
- somente a linguagem algébrica (3)

- linguagem algébrica → linguagem natural (3)
- somente a linguagem figural (2)
- linguagem figural → linguagem algébrica (2)
- linguagem natural e aritmética combinadas (2)
- linguagem figural → linguagem natural → linguagem algébrica (1)
- linguagem aritmética → linguagem natural → linguagem aritmética (1)
- linguagem aritmética → linguagem figural → linguagem natural (1)
- linguagem natural → linguagem aritmética (1)
- linguagem natural → linguagem figural (1)

c) Problema 3 (57 respostas e 29 acertos)

- somente a linguagem figural (26)
- linguagem figural → linguagem natural (23)
- linguagem natural → linguagem figural (4)
- linguagem figural → linguagem numérica (1)
- linguagem figural → linguagem natural → linguagem figural (1)
- linguagem figural → linguagem natural → linguagem figural → linguagem natural → linguagem figural (1)

d) Problema 4 (43 respostas e 14 acertos)

- somente a linguagem algébrica (16)
- linguagem algébrica → linguagem natural (10)
- somente a linguagem natural (7)
- linguagem natural → linguagem algébrica (3)
- linguagem natural e algébrica combinadas (2)
- somente a linguagem aritmética (2)
- linguagem natural e numérica combinadas (1)
- somente a linguagem figural (1)
- linguagem figural → linguagem algébrica → linguagem natural (1)

Análise das respostas dos problemas

Os dados serão apresentados, para cada problema, conforme os critérios:

a) quantidade de acertos e erros
b) número de caminhos de resolução quanto às conversões e caminhos de maior sucesso (que tem mais acertos que erros)
c) uso das linguagens esperadas ou requeridas pelo problema
d) uso da linguagem natural
e) uso da linguagem figural
f) conclusões parciais

- **Problema 1**

Obtivemos os seguintes dados:

a) quantidade de acertos e erros

Das 55 respostas, tivemos 83,4% de erros e 16,6% de acertos.

b) número de caminhos de resolução quanto às conversões e caminhos de maior sucesso (que tem mais acertos que erros)

No total foram 10 caminhos diferentes de resolução, no que diz respeito às conversões. Vários desses caminhos foram bem sucedidos: 80% deles contra 20%. São eles:

Registro em linguagem figural; registro em linguagem aritmética; registro em linguagem aritmética seguido da natural; registro em linguagem natural seguido da aritmética e posteriormente pela natural; registro em linguagem aritmética combinada com algébrica; registro em linguagem aritmética combinada com algébrica seguido da natural e por fim registro em linguagem algébrica.

c) uso das linguagens esperadas ou requeridas pelo problema

Era esperado que os sujeitos utilizassem com maior freqüência a linguagem aritmética, realizando conversões.

O gráfico mostra que a maior parte dos sujeitos (42) fez uso da linguagem aritmética:

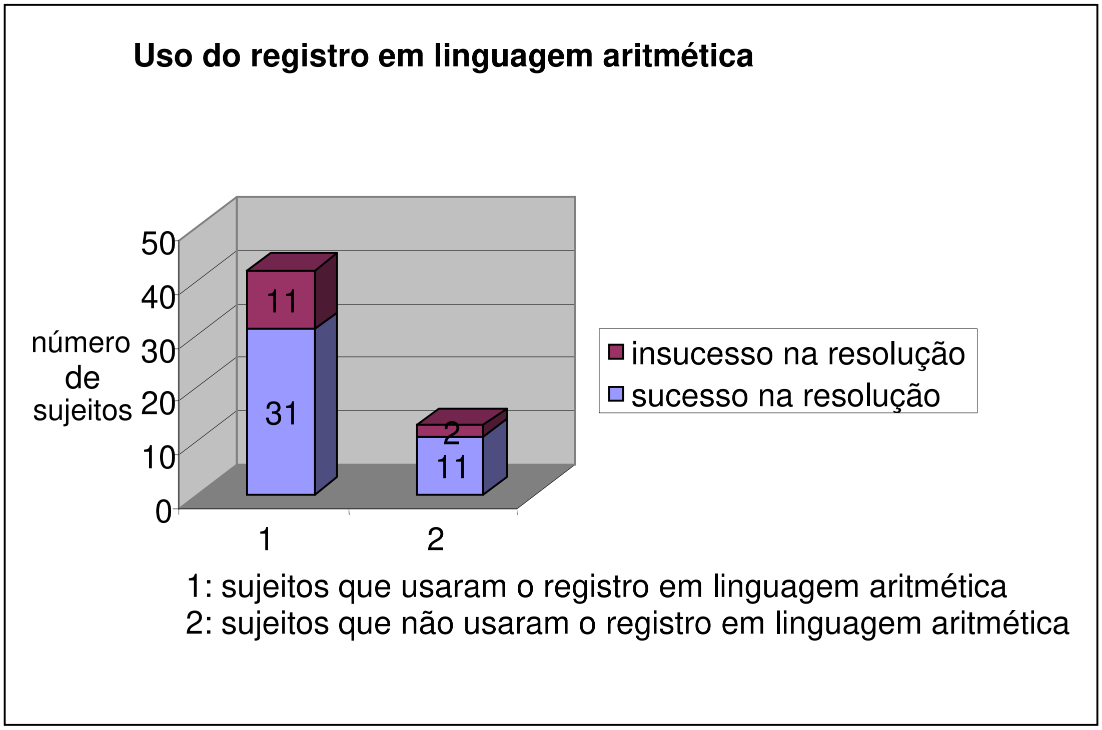


Fig. 19: Uso do registro em linguagem aritmética e mais sucesso na questão

d) uso da linguagem natural

A maior parte dos sujeitos não utilizou a linguagem natural (34) enquanto 21 utilizaram. Destes, 16 tiveram sucesso na resolução da questão contra 5. Dos que não usaram, 26 tiveram sucesso e 8 tiveram insucesso na questão.

O gráfico abaixo fornece informações sobre como os sujeitos utilizaram a linguagem natural:

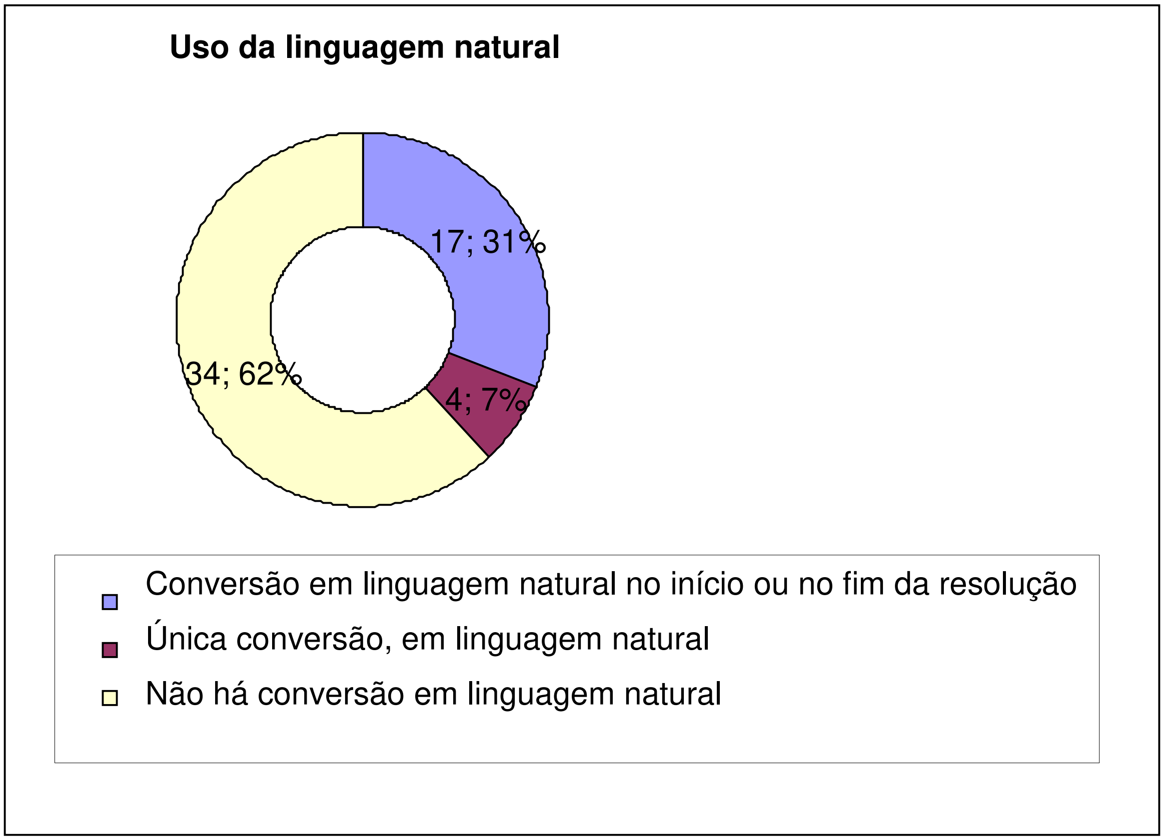


Fig. 20: Diferentes usos do registro em linguagem natural

e) uso da linguagem figural

A minoria utilizou a linguagem figural: apenas 4 de 55. Destes 4, obtivemos 3 acertos e 1 erro.

f) conclusões parciais

- Houve sucesso na maior parte dos caminhos (em 8 de 10).
- A maior parte dos sujeitos não usou o registro em linguagem natural, mas a maior parte dos que usaram apresentou sucesso na questão.
- Poucos usaram o registro em linguagem figural (talvez porque o enunciado já trouxesse o desenho), mas houve mais acertos que erros entre os que usaram esse registro.
- Houve grande número de caminhos de resolução, no que diz respeito aos registros utilizados (mais especificamente as conversões).

- A maior parte dos sujeitos usou o registro esperado (nesse caso o registro em linguagem aritmética). Os que utilizaram esse registro foram mais bem sucedidos nas questões que os que não usaram. Os sujeitos que não utilizaram a linguagem natural não tiveram melhor desempenho que os que usaram.
- A maior parte dos sujeitos que usaram a Linguagem natural apresentou essa linguagem no início ou no final da resposta, realizando conversões.
- A maioria dos sujeitos errou esta questão.

O exemplo seguinte ilustra a resolução de um estudante que se baseou nas faces do cubo e não na sua região interna para fazer os cálculos. A falta de conhecimento conceitual prejudicou o êxito na questão. O sujeito considerou apenas as faces do cubo e as bolinhas que os revestem. Não houve uso de vocabulário adequado (ex: lado ao invés de face) e foram usados os registros em linguagem natural e aritmética combinados.

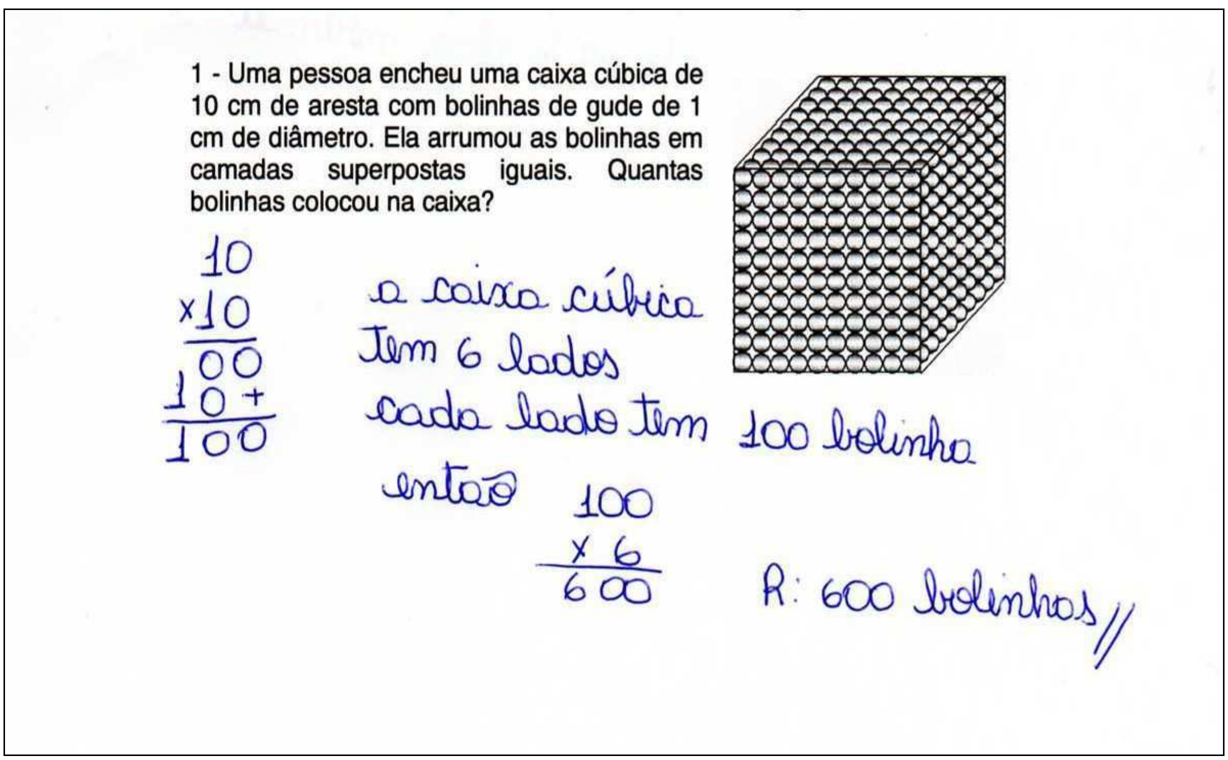


Figura 21: Falta de conhecimento declarativo

O próximo exemplo ilustra uma resposta que recorre à ilustração do registro de partida, em que o sujeito complementou o desenho para fazer parte da sua resolução. Consideramos o registro em linguagem natural combinado com o registro em linguagem aritmética.

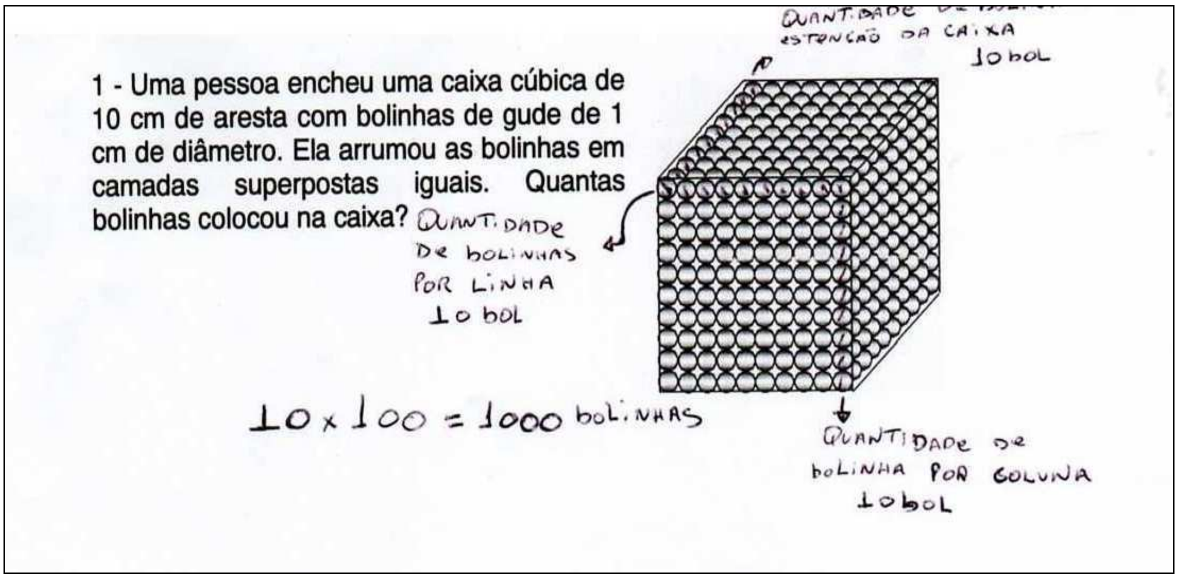


Figura 22: Complementação da figura do enunciado

Na resolução seguinte há o predomínio da linguagem natural. Nota-se que o registro em linguagem natural abre e fecha a resolução, conforme comentamos anteriormente e não seria preciso apresentar os cálculos uma vez que eles aparecem no texto em linguagem natural. Sendo assim, consideramos acerto com conversão.

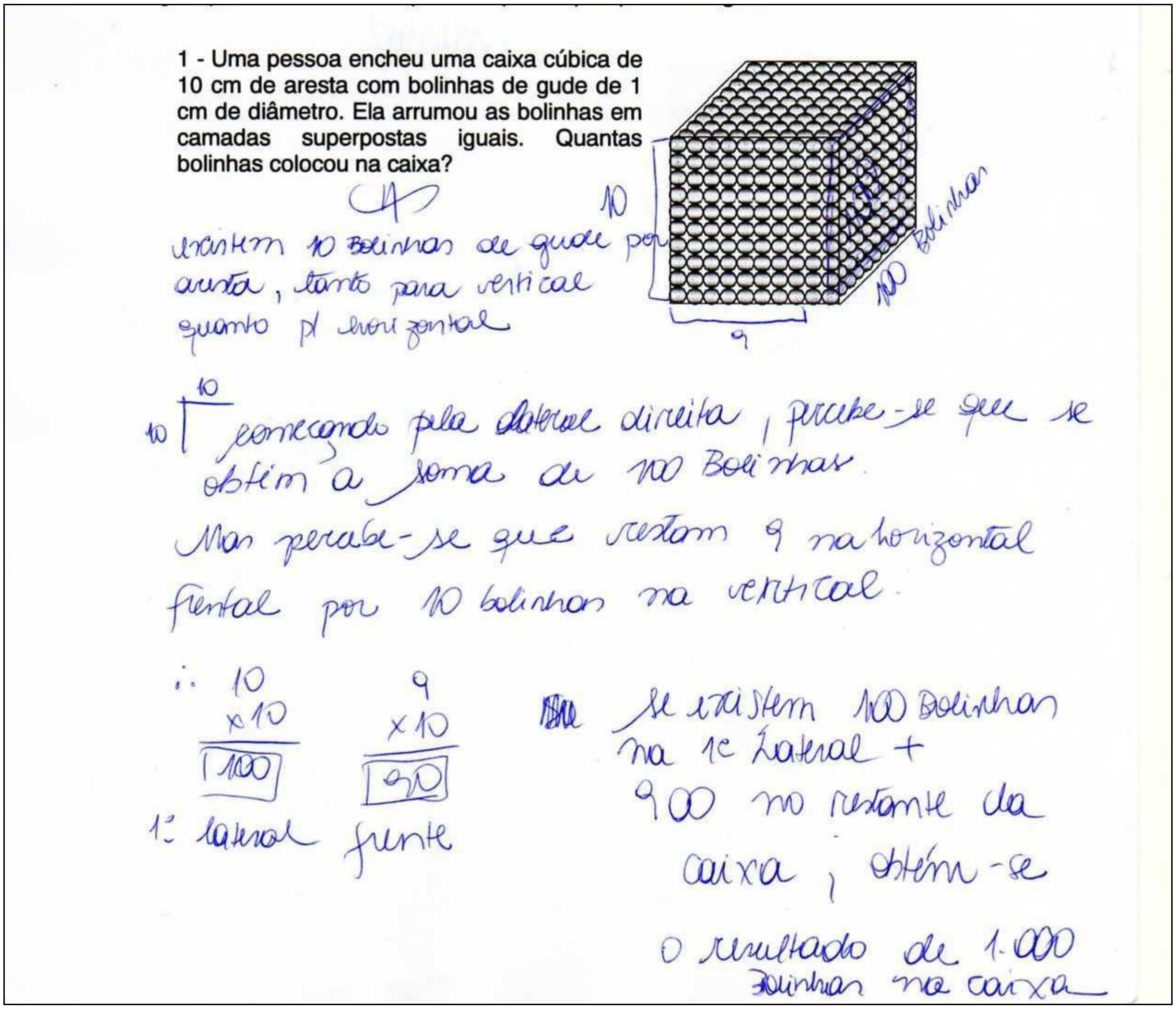


Figura 23: Linguagem natural prevalecendo na resolução

Como em vários casos, a resolução seguinte apresenta somente a resposta final, embora tenha sido solicitado que os sujeitos apresentassem a resolução (todo o procedimento e a resposta final) e não apenas a resposta final. Não é possível afirmar que houve conversão de registros.

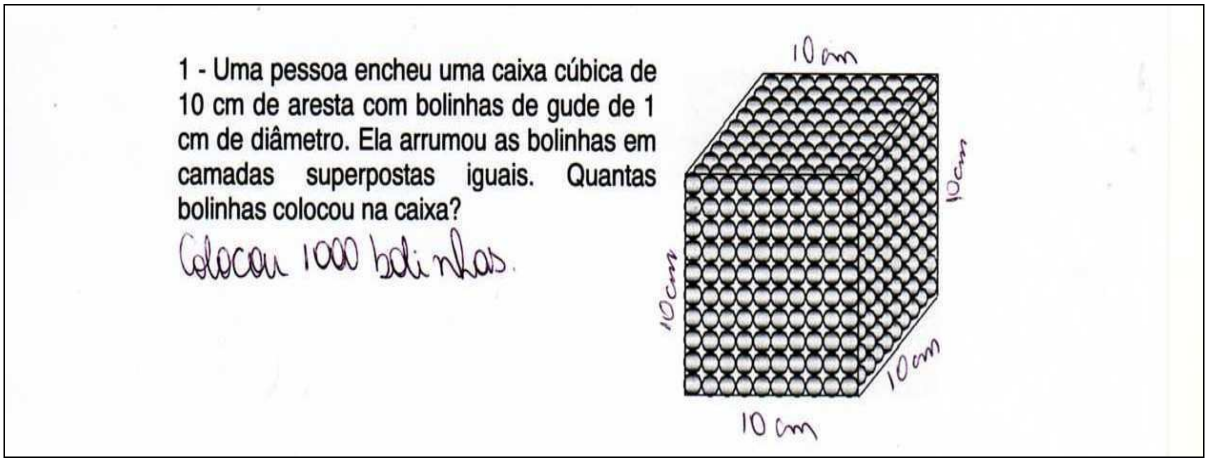


Figura 24: Ausência do processo, somente a resposta final

- **Problema 2**

Embora os problemas 1 e 2 focalizam, do ponto de vista conceitual, a mesma idéia, ou seja, de capacidade, a diversidade de caminhos apresentada no problema 2 é maior do que a apresentada no problema 1.

a) quantidade de acertos e erros

Houve 51 respostas para essa questão e a maior parte dos sujeitos teve insucesso na resolução: 92,2%.

b) número de caminhos de resolução quanto às conversões e caminhos de maior sucesso (que tem mais acertos que erros)

As resoluções mostraram uma variedade grande de caminhos de resolução: 15. Destes, a maior parte (93,3%) foram caminhos de insucesso.

c) uso das linguagens esperadas ou requeridas pelo problema

Para este problema era esperado que os sujeitos recorressem à linguagem figural e a maior parte dos sujeitos não a utilizou:

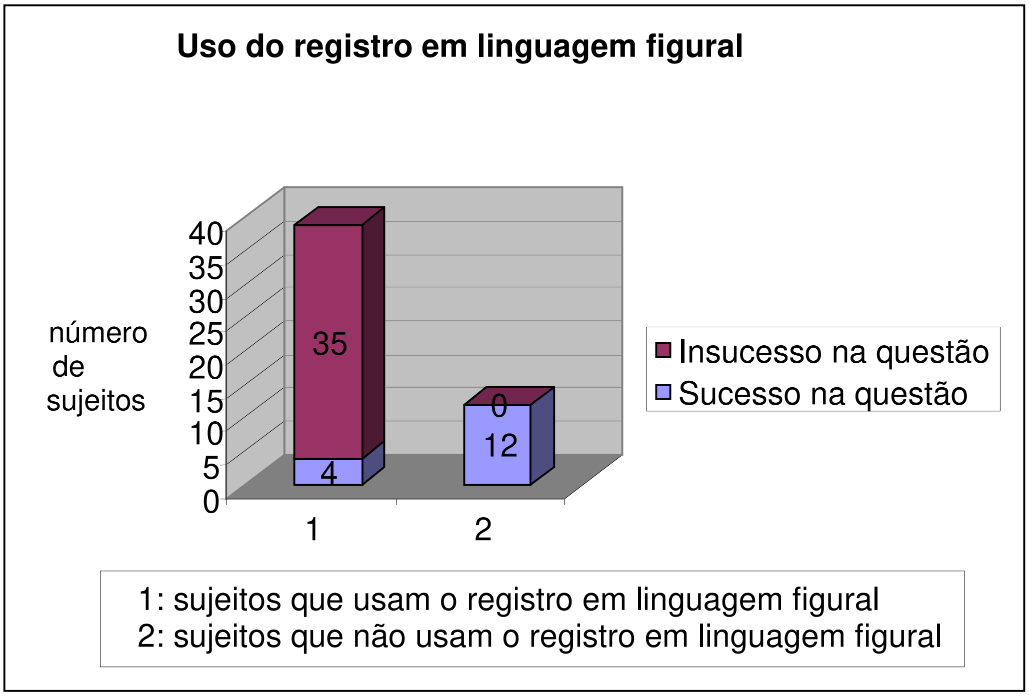


Fig. 25: Uso do registro em linguagem figural é condição de sucesso na questão

d) uso da linguagem natural

A maior parte dos sujeitos usa a linguagem natural (31) enquanto 20 não usam. Há um equilíbrio entre os que usam a linguagem natural para abrir ou fechar uma resolução e os que a usam exclusivamente ou combinada com outra:

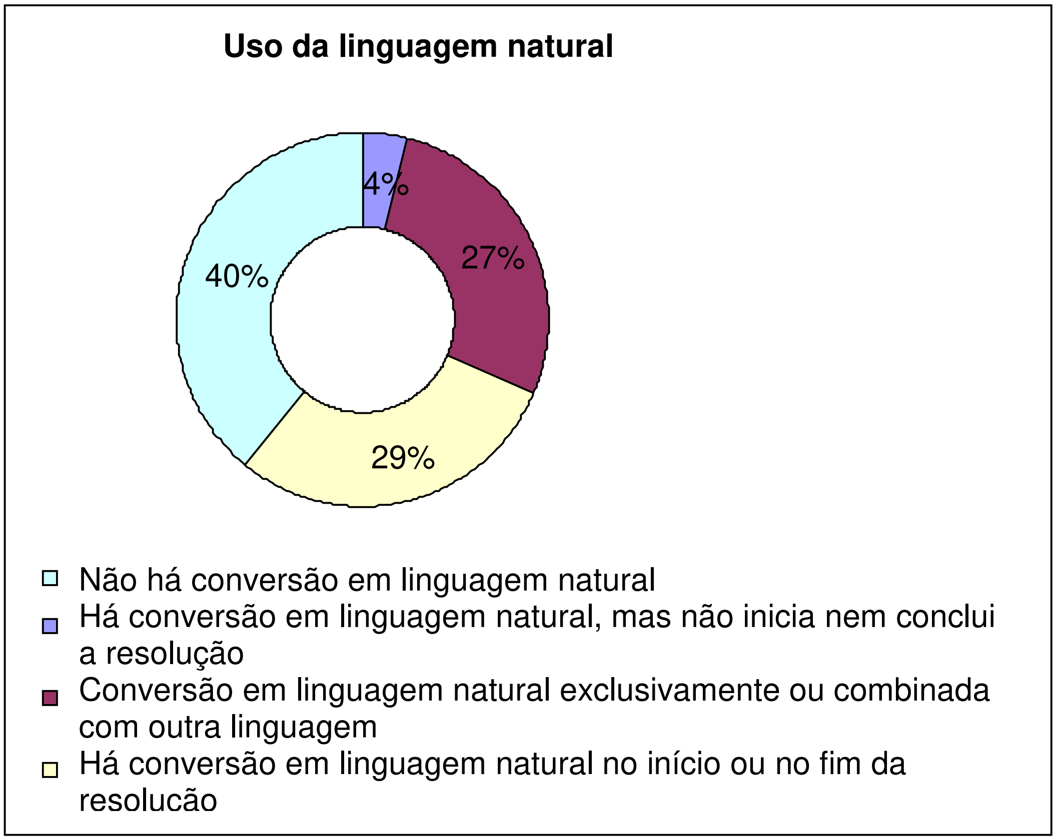


Fig. 26: Diferentes usos do registro em linguagem natural

e) uso da linguagem figural

Comentado no item c.

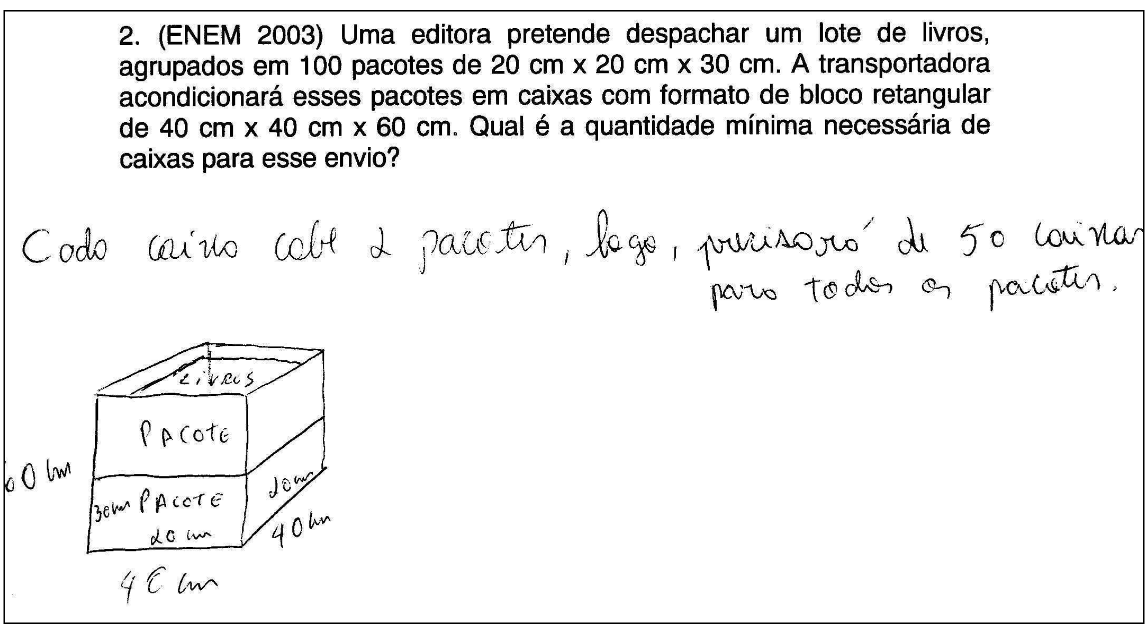
f) conclusões parciais

- Houve insucesso na maior parte dos caminhos (14 de 15).
- A maior parte dos sujeitos não utilizou o registro esperado (nesse caso o figural) e os que não usaram esse registro tiveram menos sucesso.
- A maior parte dos sujeitos usou a linguagem natural, mas a proporção de acertos é maior entre os que não usaram esse registro.
- Houve um número muito grande de caminhos no que diz respeito ao uso de registros e conversões.

- A maior parte dos sujeitos que usaram a linguagem natural recorreu a ela para abrir ou fechar a resposta, realizando conversões.
- A maior parte dos sujeitos errou a questão.

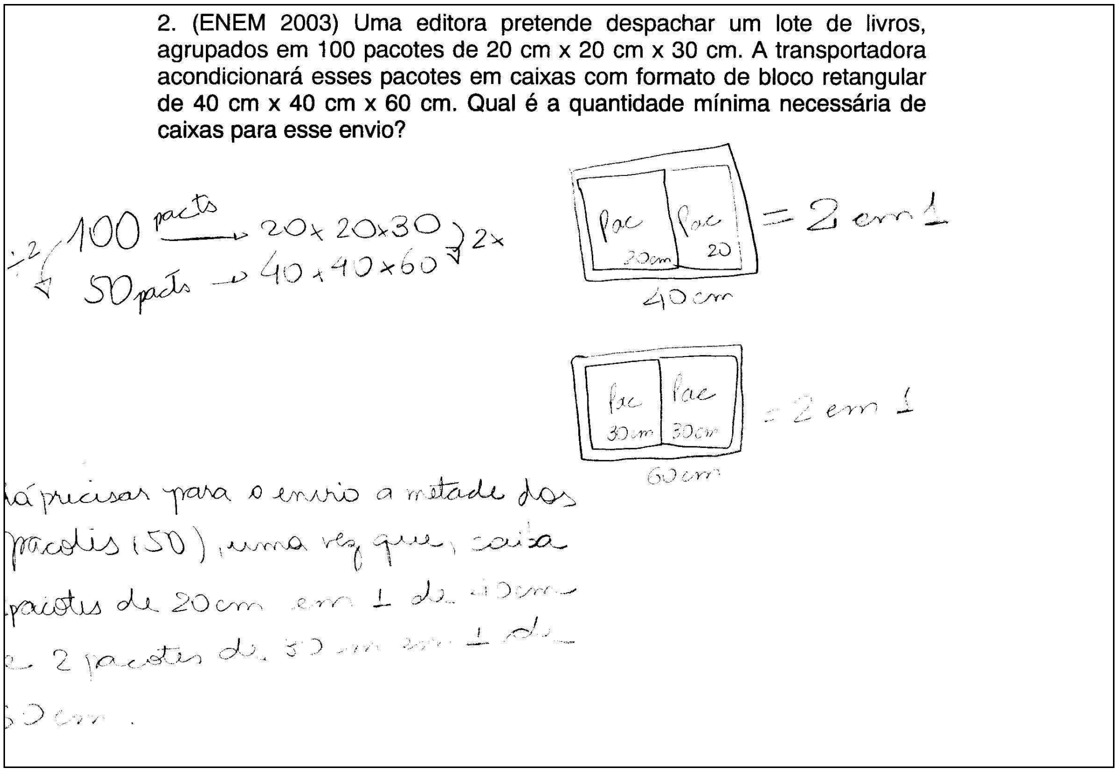
Cabe destacar que dentre as 4 questões propostas, essa questão foi a que apresentou maior número de erros. Os 5 exemplos seguintes ilustram, dentre tantos outros, conversões para a idéia do bloco retangular ou para a idéia de capacidade, embora com utilização inadequada dos desenhos (linguagem figural). Esse fato acarretou o insucesso na resolução.

Este primeiro exemplo (fig. 27) mostra uma conversão em linguagem figural que, como podemos observar, dá aos pacotes a dimensão 40 cm x 40 cm x 30 cm, e desse modo somente 2 pacotes cabem na caixa. A idéia de perceber que as dimensões dobraram provavelmente fizeram os sujeitos pensarem que se as dimensões dobraram então a capacidade também dobrou. O mesmo acontece com o exemplo seguinte (fig. 28). Consideramos que ambas as resoluções apresentam conversão em linguagem natural (para a idéia de capacidade) e figural (tanto para o bloco retangular quanto para a idéia de capacidade):


2. (ENEM 2003) Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm x 40 cm x 60 cm. Qual é a quantidade mínima necessária de caixas para esse envio?

Cada caixa cabe 2 pacotes, logo, precisará de 50 caixas para todos os pacotes.

Figura 27: Representação inadequada do objeto e insucesso na questão



2. (ENEM 2003) Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm x 40 cm x 60 cm. Qual é a quantidade mínima necessária de caixas para esse envio?

÷2 100 pactes → 20x20x30) 2x
50 pacts → 40x40x60

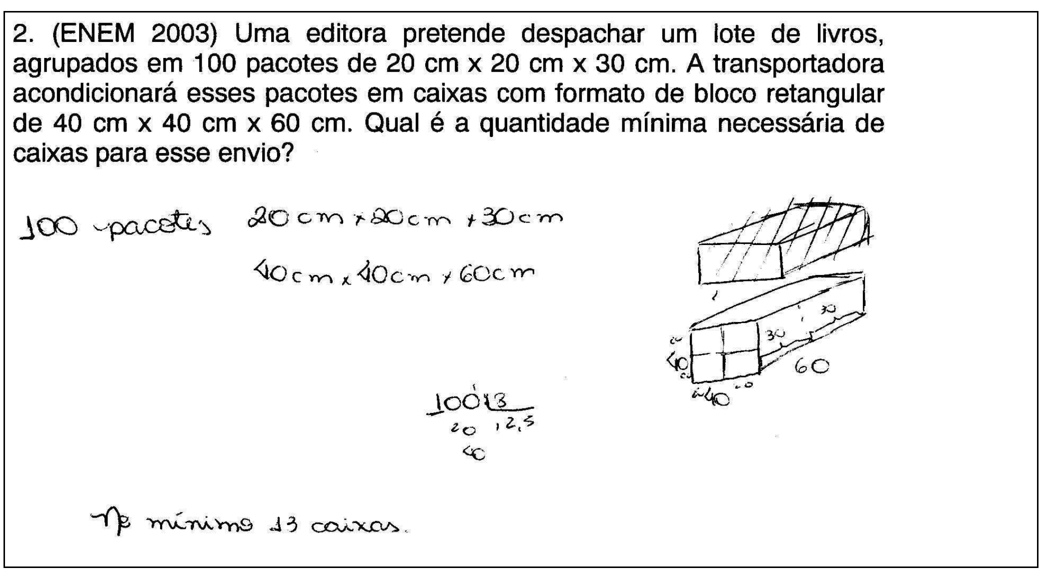
Pac | Pac
20cm | 20
40cm
= 2 em 1

Pac | Pac
30cm | 30cm
60cm
= 2 em 1

...á precisar para o envio a metade dos pacotes (50), uma vez que, caixa ... pacotes de 20cm em 1 de 40cm e 2 pacotes de 30cm em 1 de 60cm.

Figura 28: Representação inadequada do objeto e insucesso na questão

No exemplo seguinte a conversão da idéia de capacidade em linguagem figural aponta para o fato de que cabem 4 pacotes na caixa, o que estaria mais próximo do esperado. O registro incompleto pode ter levado o sujeito a supor que cabiam 3 e não 8 pacotes na caixa, embora o desenho dê a idéia de 4 pacotes:



2. (ENEM 2003) Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm x 40 cm x 60 cm. Qual é a quantidade mínima necessária de caixas para esse envio?

100 pacotes 20cm x 20cm x 30cm
40cm x 40cm x 60cm

30 30 60 40 40

100 | 8
20 12,5
40

Nº mínimo 13 caixas.

Figura 29: Representação inadequada do objeto e insucesso na questão

A seguir é apresentado um caso semelhante aos anteriores, no que diz respeito à representação do bloco retangular e da idéia de medida: a representação do bloco não corresponde ao esperado, e não há uma comparação entre o pacote e a caixa. O sujeito afirma que cabem dois pacotes na caixa. A suposição pode ter partido da relação entre as medidas: as da caixa são o dobro das medidas do pacote, o que leva os sujeitos mais desatentos ou apressados a concluir que cabem somente 2 pacotes na caixa:

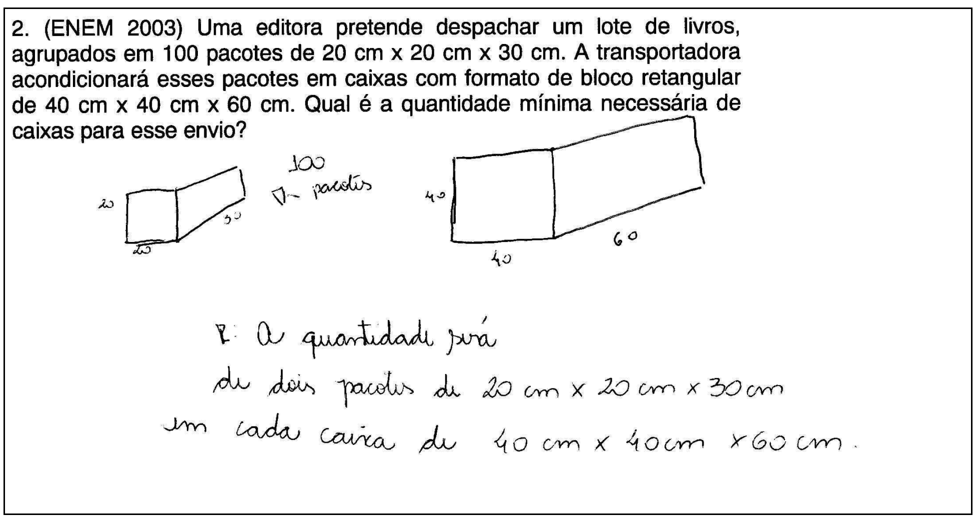


Figura 30: Representação inadequada do objeto e insucesso na questão

Por fim, apresentamos uma das 5 únicas resoluções corretas para este problema. Notamos que a representação da idéia de capacidade está coerente com o esperado: o desenho mostra que cabem 8 pacotes na caixa.

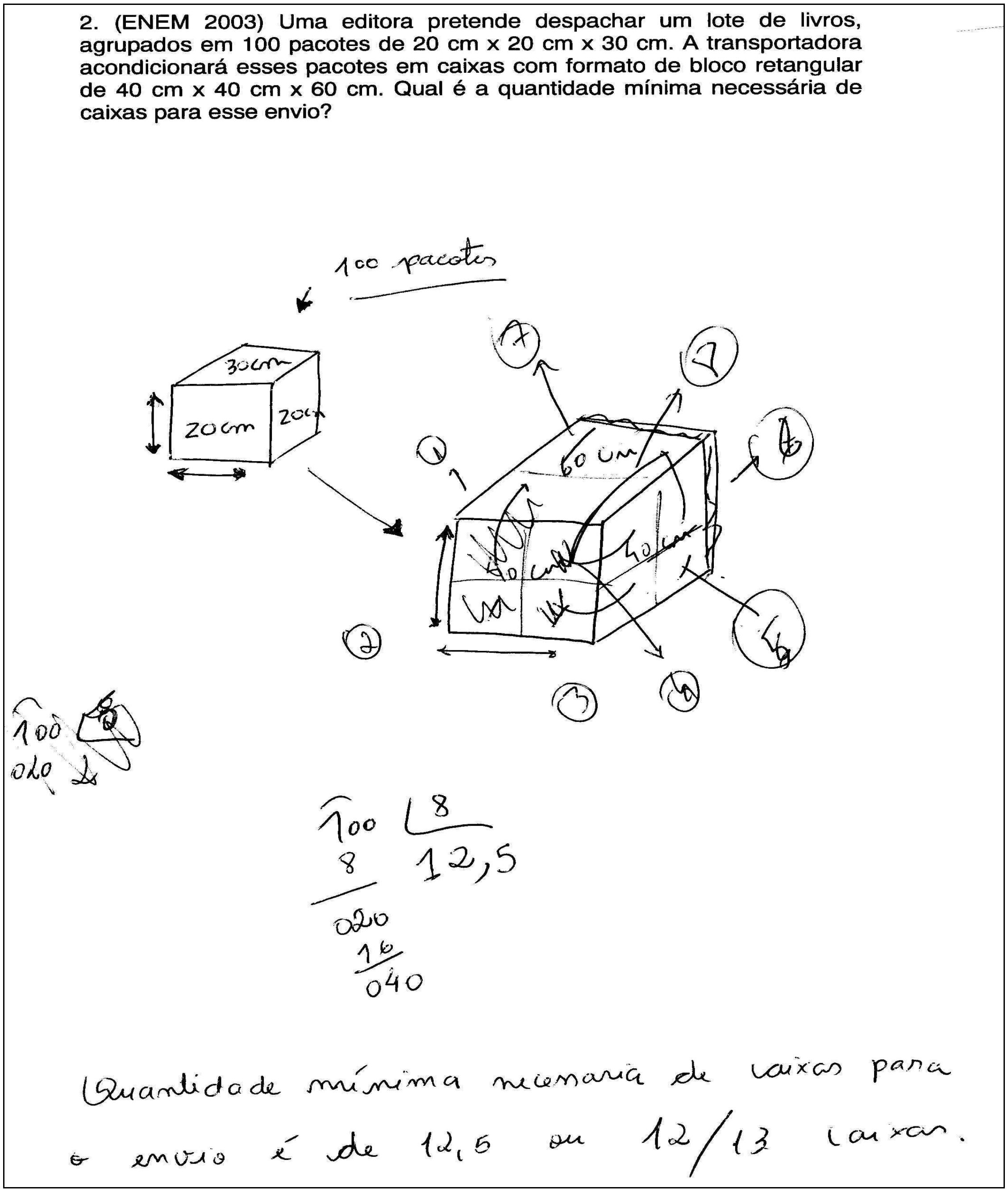


Figura 31: Resolução correta e diversidade de registros

- **Problema 3**

  a) quantidade de acertos e erros

Houve 57 respostas para esta questão e houve um equilíbrio quanto ao desempenho: 49,2% das respostas foram satisfatórias e 50,8% insatisfatórias.

b) número de caminhos de resolução quanto às conversões e caminhos de maior sucesso (que tem mais acertos que erros)

Houve pouca diversidade de caminhos de resolução, se comparado a outros problemas da pesquisa: 6. Destes, a maior parte teve mais sucesso: 4, a saber: registro em linguagem figural seguido do registro em linguagem natural; linguagem figural seguida da natural e posteriormente da figural; figural - natural - figural – natural/figural e por fim linguagem figural seguida da numérica.

c) uso das linguagens esperadas ou requeridas pelo problema

Esse problema, diferentemente dos demais, exige necessariamente uma conversão utilizando uma linguagem específica: a figural. Desta forma, todos os sujeitos a utilizaram:

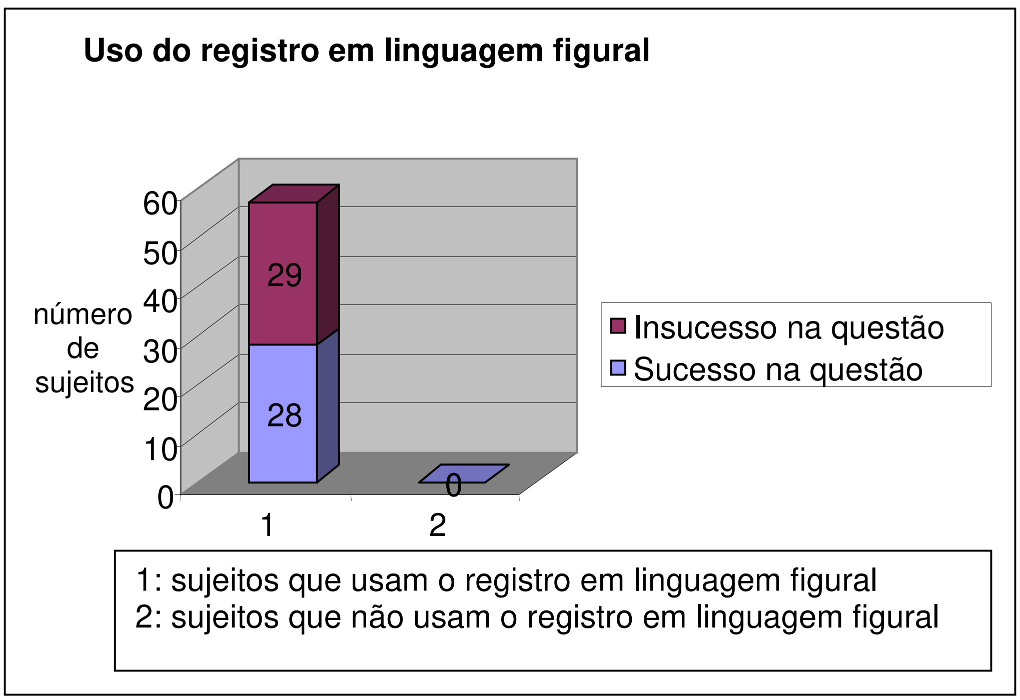


Fig. 32: Proporção de acertos e uso do registro em linguagem figural

d) uso da linguagem natural

Houve um equilíbrio com relação ao uso ou não, desta linguagem: 29 sujeitos a utilizaram e 28 não. Dos que utilizaram, foi grande o número de sujeitos que teve sucesso na questão: 19 contra 10, que tiveram insucesso. Interessantemente, dos que não a utilizaram, a maior parte dos sujeitos errou a questão: 19 contra 9 acertos. Dos que a utilizaram, a maior parte abriu ou fechou a resposta com ela, conforme mostra o gráfico:

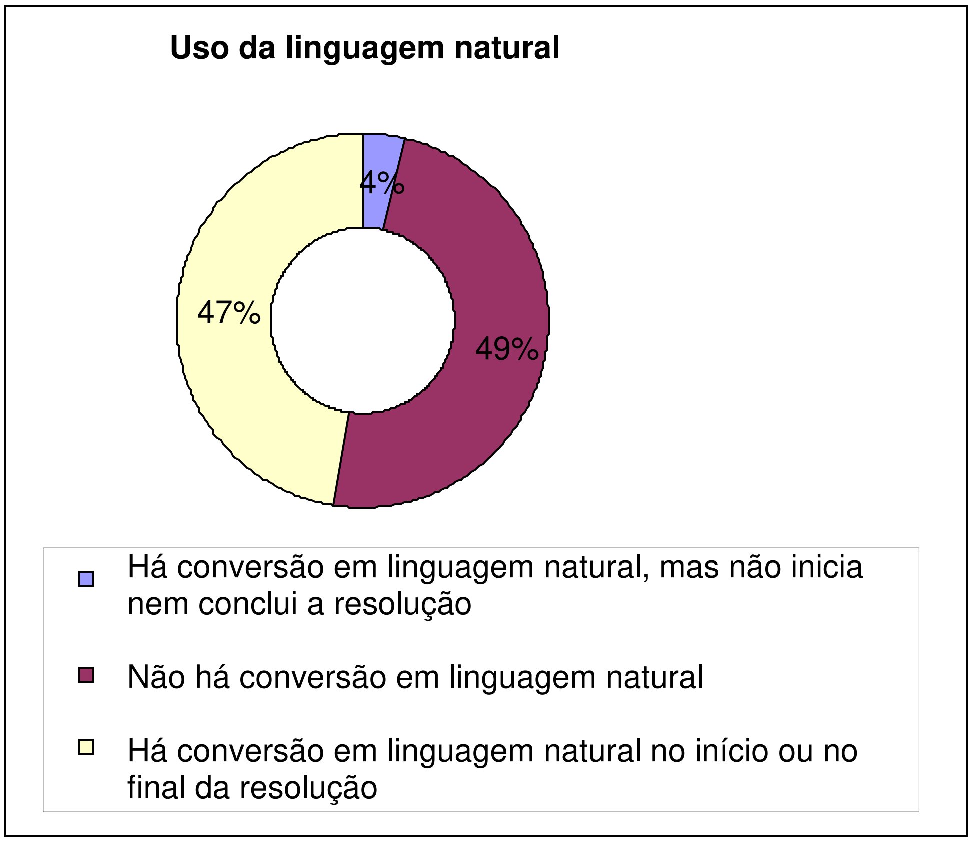


Fig. 33: Diferentes usos do registro em linguagem natural

e) uso da linguagem figural

Comentado no item c.

f) conclusões parciais

- Houve sucesso na maior parte dos caminhos de resolução (em 4 de 6).

- 100% dos sujeitos utilizou o registro solicitado (em linguagem figural) e há um equilíbrio entre o desempenho dos sujeitos.
- Houve equilíbrio entre o número de sujeitos que utilizou ou não a linguagem natural mas houve mais sucesso entre os sujeitos que a utilizaram.
- Grande parte dos sujeitos que utilizou o registro em linguagem natural abriu ou fechou a resolução com ela (27 contra 2).
- Houve equilíbrio quanto ao desempenho dos sujeitos: 29 erraram a questão e 28 acertaram.

A resolução seguinte apresenta o registro em linguagem natural, embora, como em alguns casos, para expressar a resposta e não para traduzir a situação (idéia da existência/inexistência do triângulo):

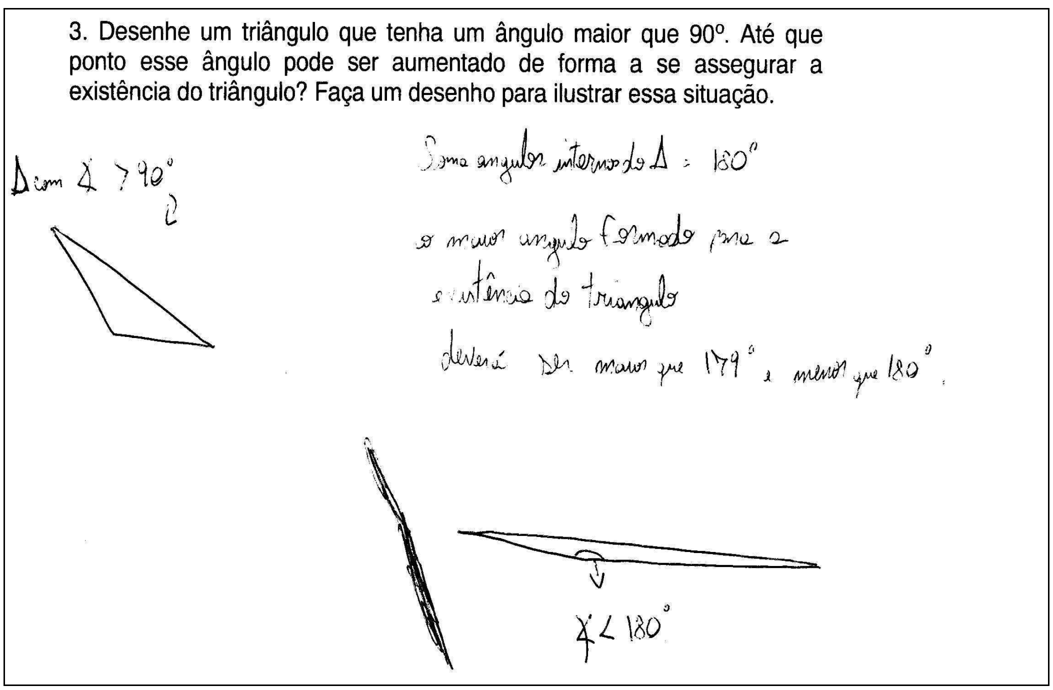


Figura 34: Uso da linguagem natural somente para a reposta final

A resolução seguinte não apresenta uso da linguagem natural, embora se perceba clareza quanto à conclusão do estudante, de que não existe triângulo quando o ângulo formado atinge 180º. Consideramos que houve conversão de registros, passou-se do registro em linguagem natural (enunciado) para o registro em linguagem figural:

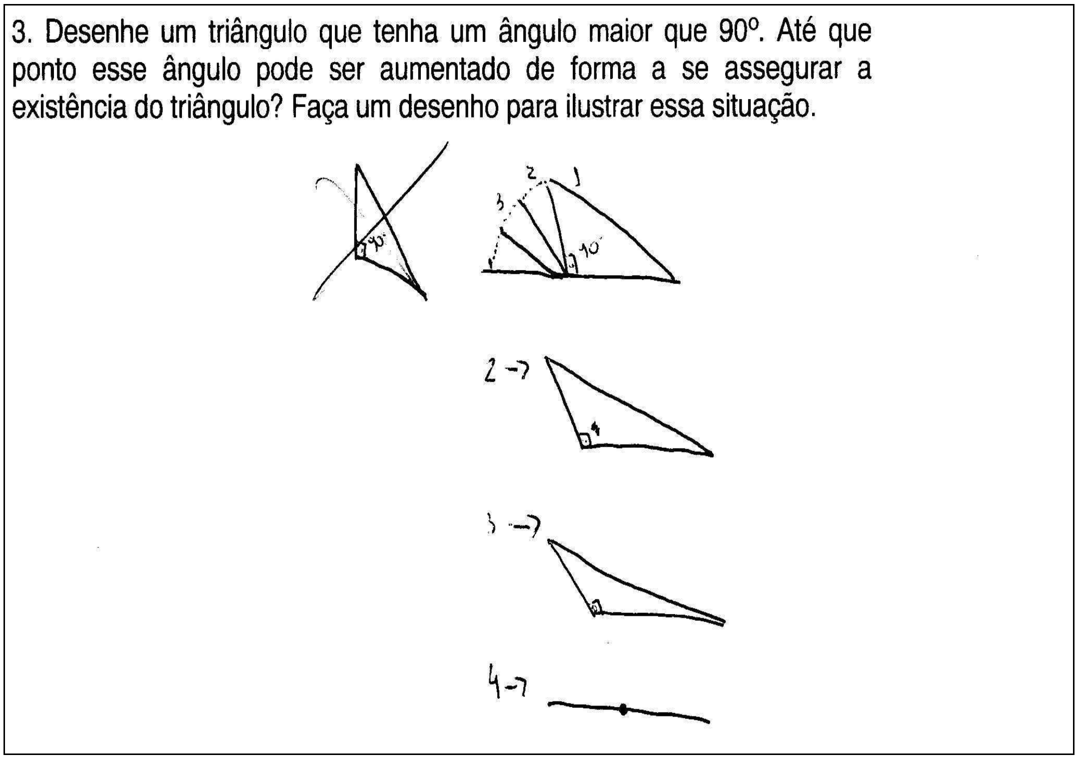

3. Desenhe um triângulo que tenha um ângulo maior que 90º. Até que ponto esse ângulo pode ser aumentado de forma a se assegurar a existência do triângulo? Faça um desenho para ilustrar essa situação.

Figura 35: Resolução somente com linguagem figural

- **Problema 4**

a) quantidade de acertos e erros

Das 43 respostas para a questão tivemos 67,4% de erros contra 32,6% de acertos.

b) número de caminhos de resolução quanto às conversões e caminhos de maior sucesso (que tem mais acertos que erros)

Houve 9 caminhos de resolução diferentes, o que diz respeito às conversões, e destes 6 tiveram menos sucesso. Os caminhos que foram mais bem sucedidos são o registro em linguagem natural seguido da algébrica, o registro com linguagem natural e algébrica combinadas e por último a seqüência linguagem figural – algébrica - natural.

c) uso das linguagens esperadas ou requeridas pelo problema

Essa questão exigia, mas não explicitamente, o uso da linguagem algébrica. A maior parte dos sujeitos a utilizou (32 contra 11). Dos que utilizaram a linguagem algébrica a maior parte não teve sucesso na questão, embora a diferença seja pequena (19 contra 13 – 59,3% de insucesso). Dos que não a utilizaram, a diferença foi mais significativa: 10 erros para 1 acerto (90,9% de insucesso):

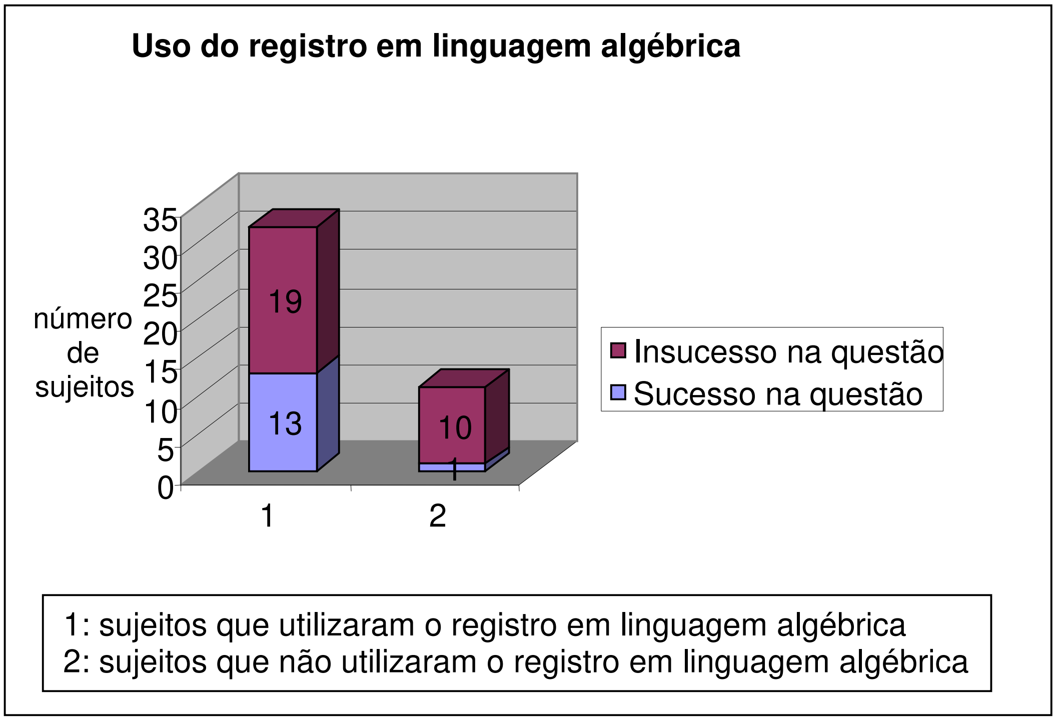


Fig. 36: Proporção de sucesso e uso do registro esperado

d) uso da linguagem natural

A diferença quanto ao uso da linguagem natural não foi significativa: 55,7% utilizaram a linguagem natural, contra 44,3% que não a utilizaram. Dentre os que não a utilizaram a proporção de acertos foi bem menor que aqueles que a utilizaram: 21% de acertos contra 41,6% de erros entre os que utilizaram a linguagem. O gráfico mostra como o uso da linguagem natural foi feito:

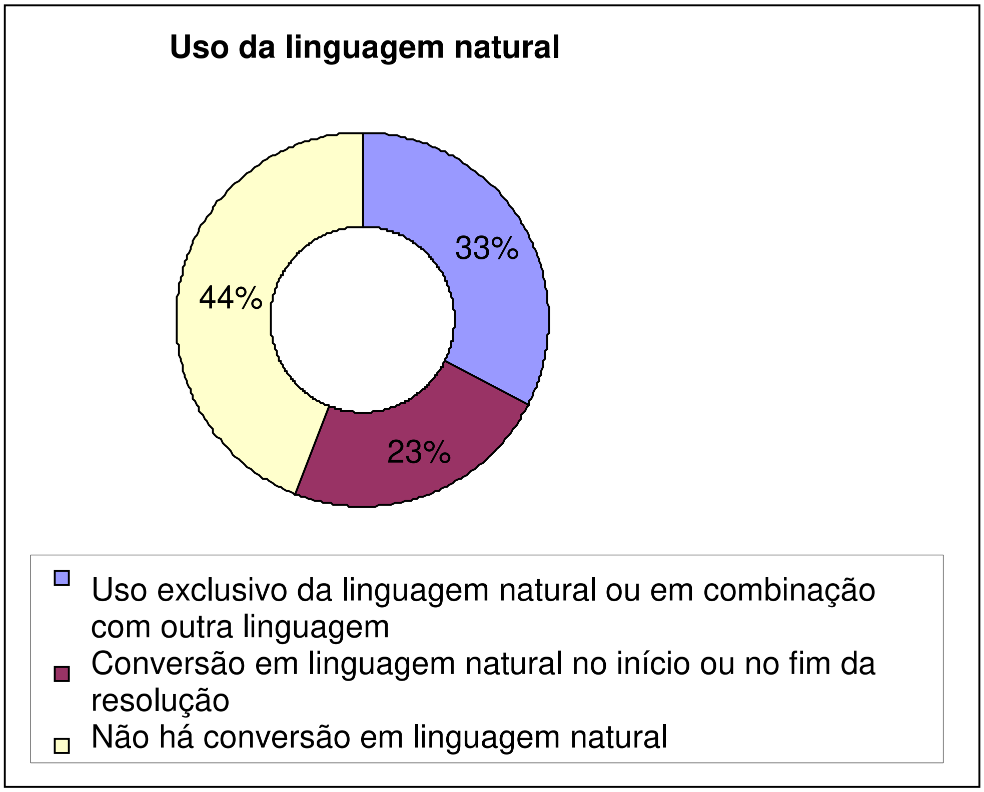


Fig. 37: Maior ausência de conversão em linguagem natural

e) uso da linguagem figural

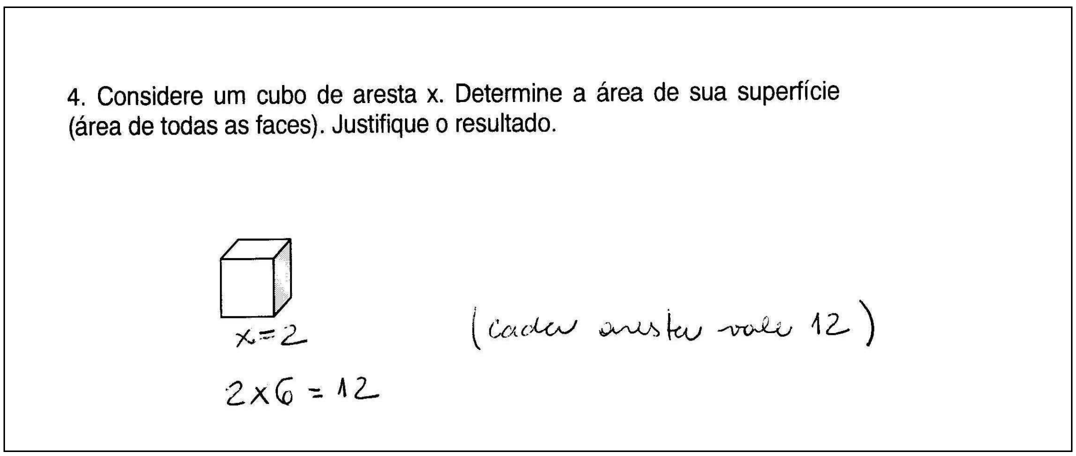
Talvez pelo fato de haver um registro em linguagem figural no enunciado (registro de partida), pouquíssimos sujeitos não utilizaram essa linguagem: 2 contra 41. Destes sujeitos, tivemos 1 acerto e 1 erro.

f) conclusões parciais

- Houve insucesso na maior parte dos caminhos: 6 de 9.
- A maior parte dos sujeitos utiliza o registro esperado (em linguagem algébrica) e dentre esses há mais erros que acertos na resolução, contrariamente ao que acontece com as respostas que não continham esse registro: há mais erros nessas respostas.
- A maior parte dos sujeitos utilizou a linguagem natural e entre eles há mais erros que acertos.
- Houve um número razoável de caminhos de resolução: 9.

- Grande parte dos sujeitos utilizou a linguagem esperada (algébrica) e dentre esses há mais acertos que entre os que não a utilizaram.
- A maior parte dos sujeitos utilizou a linguagem natural para abrir ou fechar a resposta: 14 contra 10.
- A maior parte dos sujeitos não teve sucesso na questão.

O exemplo seguinte nos mostra a dificuldade que os estudantes geralmente têm de realizar cálculos algébricos simples. Nesse caso, foi atribuído um valor numérico para a aresta, na tentativa de obter um número como resposta para o volume do cubo:


4. Considere um cubo de aresta x. Determine a área de sua superfície (área de todas as faces). Justifique o resultado.

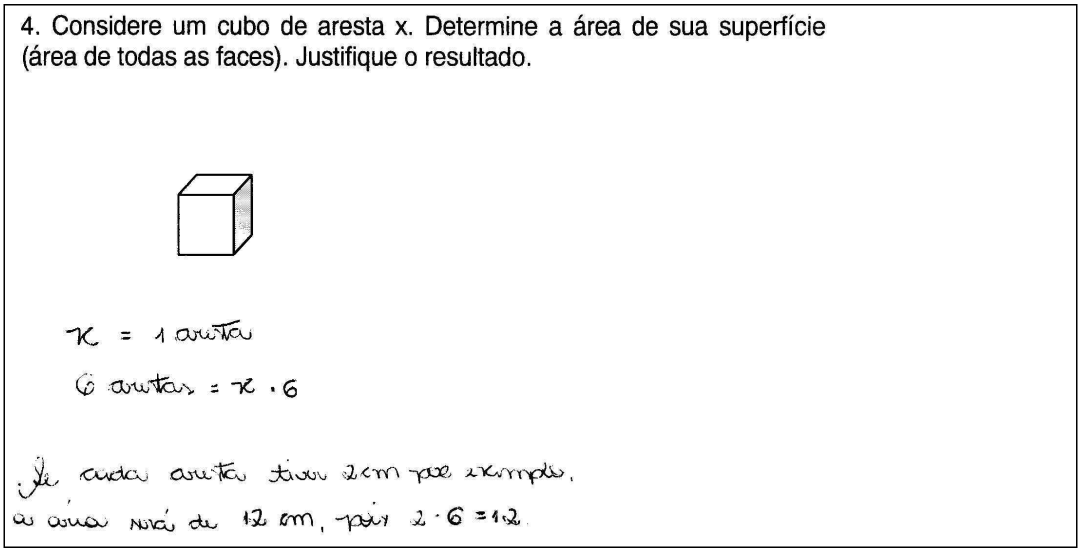
$x = 2$

$2 \times 6 = 12$

(cada aresta vale 12)

Figura 38: Uso da aritmética e não da álgebra

Nesse exemplo (fig. 39) podemos notar que há uso correto do registro em linguagem algébrica, mas não foi obtida a área da superfície do cubo, nem tampouco a área de uma face. Não é possível concluir que o insucesso na questão esteja relacionado com o uso da linguagem algébrica, mas provavelmente à falta de conhecimento declarativo (de idéias e conceitos):



4. Considere um cubo de aresta x. Determine a área de sua superfície (área de todas as faces). Justifique o resultado.

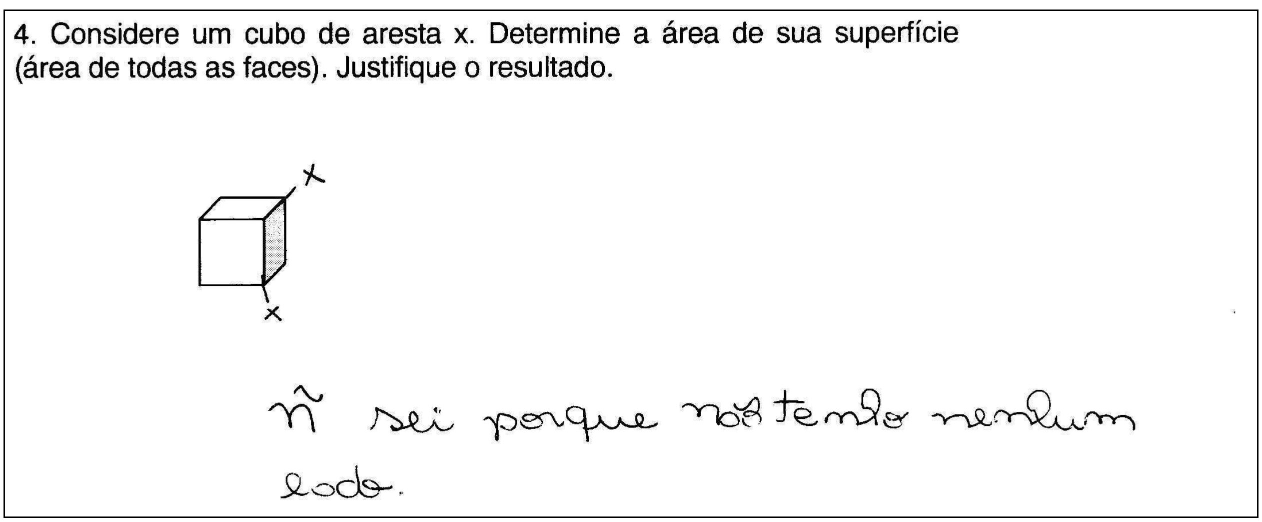
x = 1 aresta

6 arestas = x · 6

Se cada aresta tiver 2cm por exemplo, a area será de 12 cm, pois 2 · 6 = 12.

Figura 39: Uso da aritmética para conclusão da resolução

Na resolução seguinte não é possível concluir se o sujeito não compreende a idéia de área de superfície, se não realiza cálculos utilizando a linguagem algébrica ou se espera dados numéricos para a aresta. De qualquer forma, não houve conversão:



4. Considere um cubo de aresta x. Determine a área de sua superfície (área de todas as faces). Justifique o resultado.

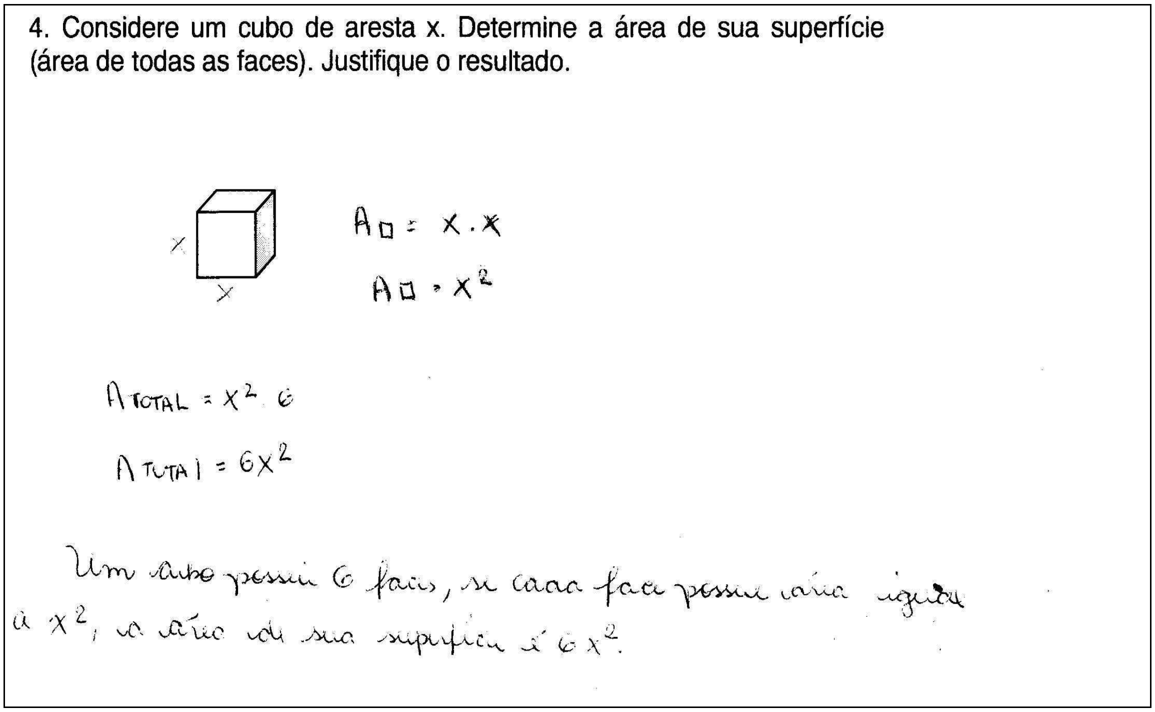
x

x

ñ sei porque não tenho nenhum lado.

Figura 40: Dificuldades com a linguagem algébrica

O próximo exemplo mostra o que percebemos em muitas respostas, conforme já comentado – o uso dos registros em linguagem natural para explicar a resolução indicando assim uma conversão. Nesse caso, consideramos que houve duas conversões - utilizando o registro em linguagem algébrica e em linguagem natural:


4. Considere um cubo de aresta x. Determine a área de sua superfície (área de todas as faces). Justifique o resultado.

$A_{\square} = x \cdot x$

$A_{\square} = x^2$

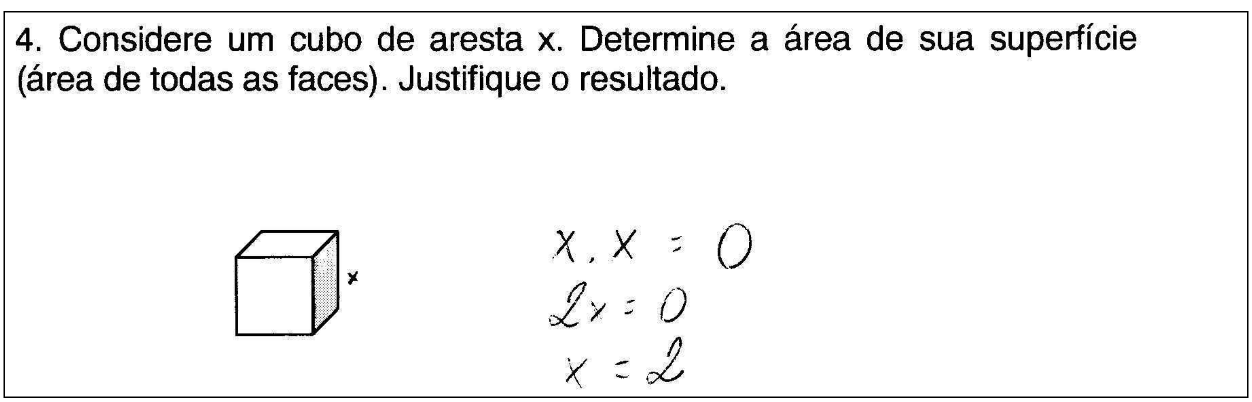
$A_{TOTAL} = x^2 \cdot 6$

$A_{TOTAL} = 6x^2$

Um cubo possui 6 faces, se cada face possui área igual à x^2, a área da sua superfície é $6x^2$.

Figura 41: Linguagem natural para traduzir o que foi feito

Dos 4 problemas propostos, este foi o que nos apresentou mais resoluções sem sentido, provavelmente devido a 3 fatores: o uso da linguagem algébrica, a idéia de medida de superfície e o conceito de cubo. O exemplo seguinte ilustra um desses casos:


4. Considere um cubo de aresta x. Determine a área de sua superfície (área de todas as faces). Justifique o resultado.

$x \cdot x = 0$

$2x = 0$

$x = 2$

Figura 42: Álgebra sem sentido

- **Resultados gerais**

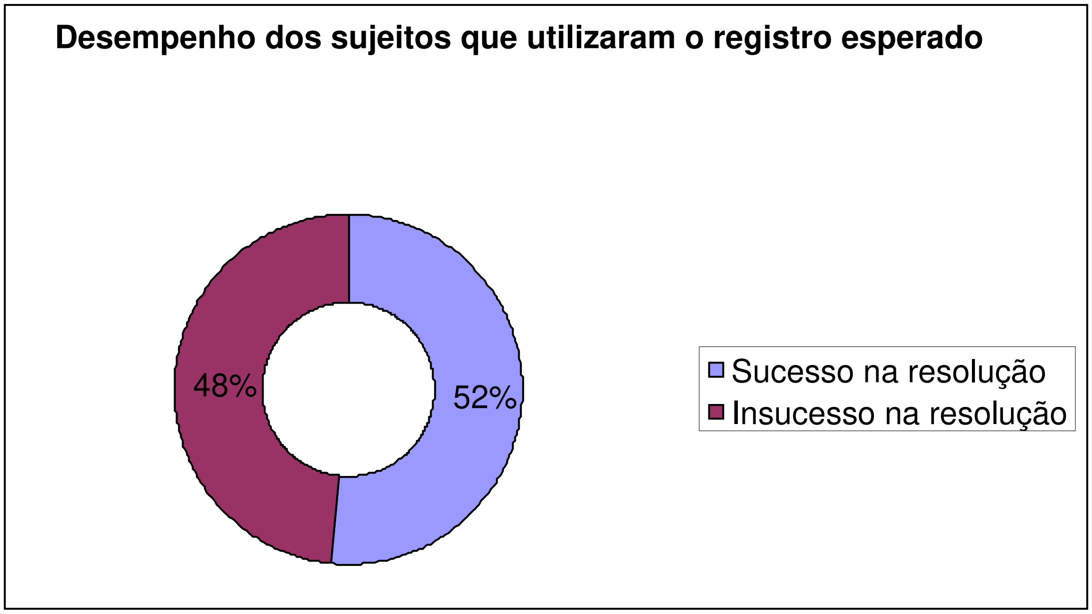


Figura 43: Utilização do principal registro envolvido na questão

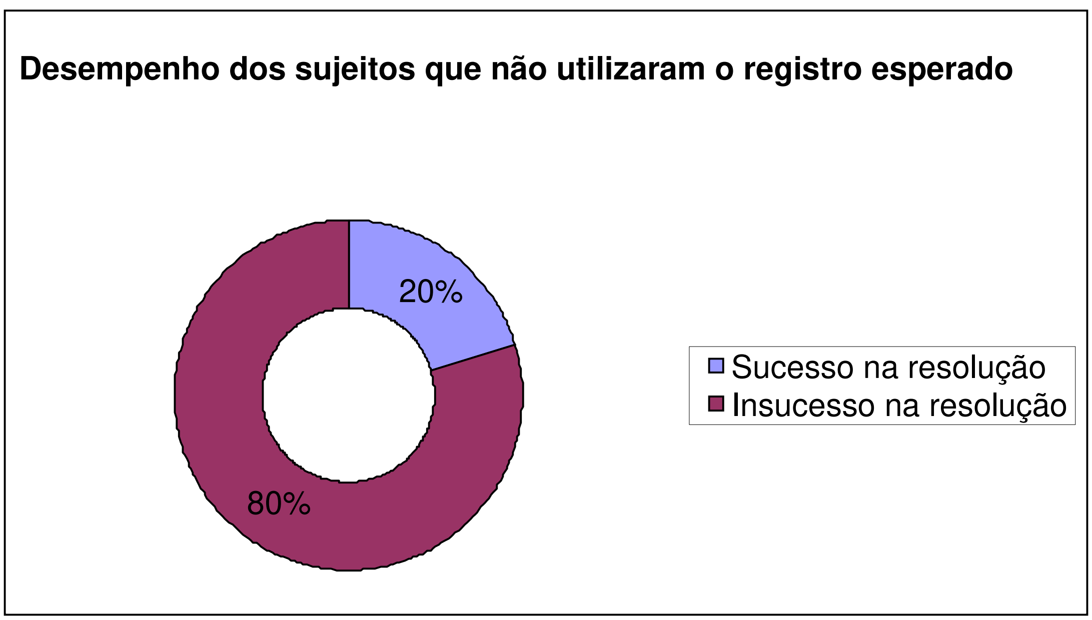


Figura 44: Utilização de outro registro que não o envolvido na questão

Os sujeitos fazem diferentes usos de registros em linguagem natural: a usam exclusivamente na resolução (26,6% dos sujeitos que fazem uso dessa linguagem a usam no início ou no final da resolução); sintetizando ou explicando a resolução e desta forma realizando conversões (69,4%); ou ainda a usam em outros momentos da resolução, como pequena parte dela (3,8%).

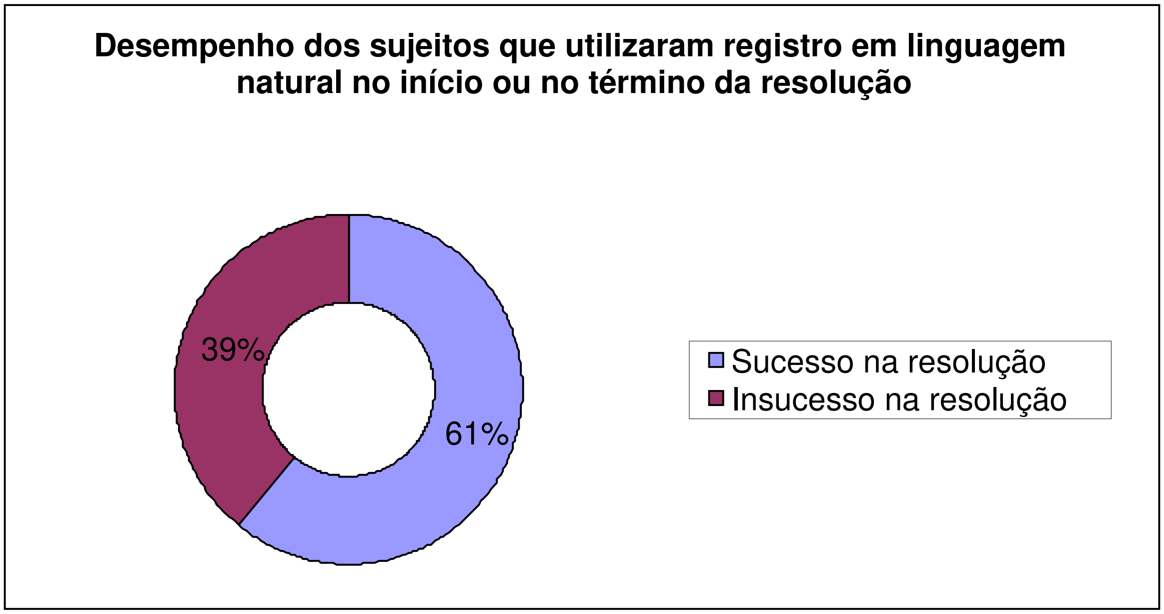


Figura 45: Uso do registro em linguagem natural no início ou no final da resolução

A linguagem figural pareceu ter um papel fundamental nas questões de geometria e medidas e poucos alunos a utilizaram de forma adequada (como mostrado na análise das questões 2 e 3) e há aqueles que nem a utilizaram (se consideramos as conversões), exceto quando o problema a requer, de forma explícita. Mas os sujeitos que a utilizaram foram mais bem sucedidos. Para análise dos dados desconsideramos o problema 2, por ter 92,2% de insucesso.

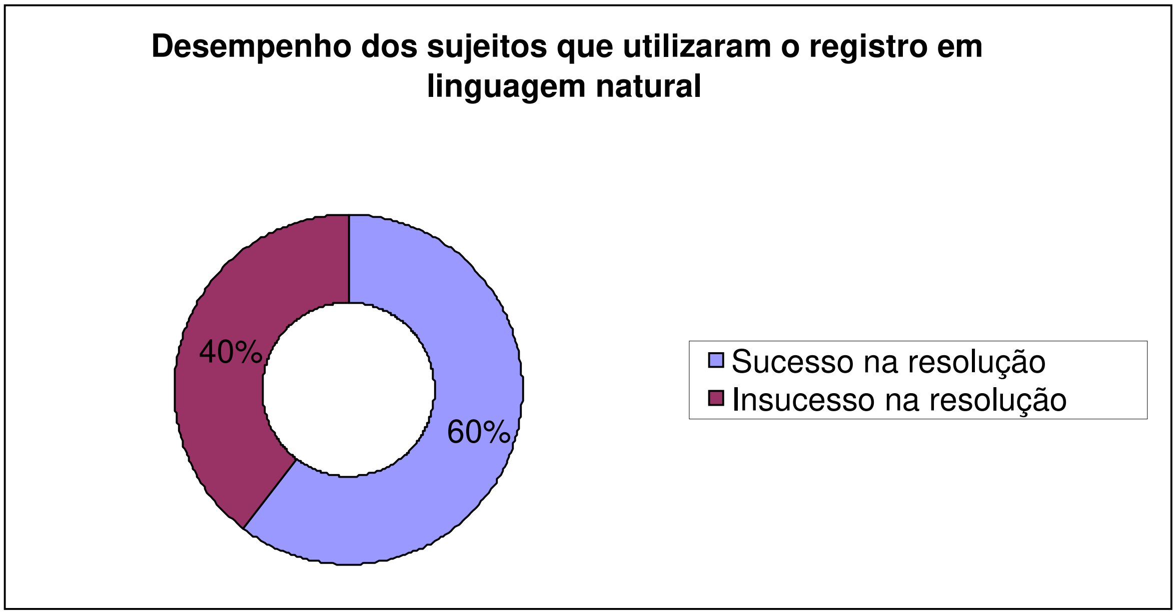


Figura 46: Sucesso e uso do registro em linguagem natural

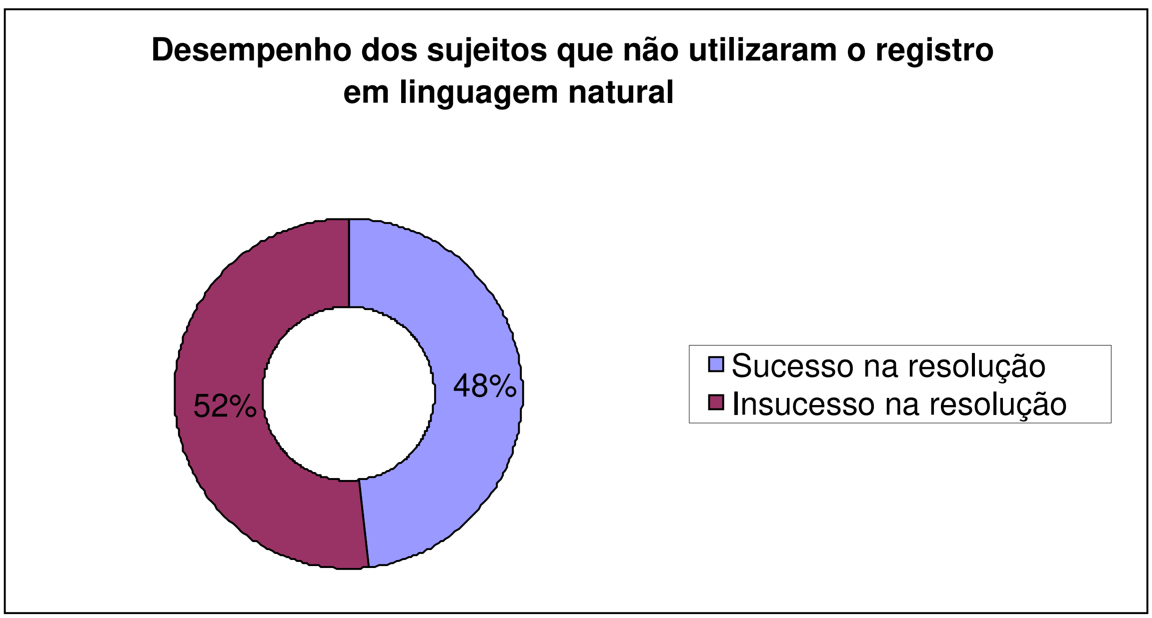


Figura 47: Insucesso e ausência do registro em linguagem natural

Não se verificou relação direta entre o número de conversões efetuadas e o desempenho na resolução de problemas principalmente se considerarmos o aumento no número de conversões: é possível que alunos que utilizaram poucos registros de representação e conseqüentemente realizaram poucas conversões se enquadravam em casos distintos:

a) não dominavam outros registros de representação
b) puderam escolher dentre tantos registros apenas um, devido ao tempo de que dispunham para resolver o problema, devido à busca por uma resolução curta, sucinta ou devido à escolha de um registro que julgavam ser o mais adequado para a situação
c) não tiveram possibilidades de escolha nos casos de problemas que requeriam determinado registro

Também não se verificou relação direta entre desempenho e variedade de caminhos percorridos. O fato de um problema requerer especificamente um registro não implica no sucesso ou insucesso, por parte do sujeito. Percebemos que quando o problema requer determinado registro (e necessariamente uma conversão), o estudante tem, evidentemente, menos possibilidades de escolha de registros. Nesse caso, o fato de ele não dominar registros diversos (e realizar conversões) acarreta insucesso na questão. Isso indica a necessidade de o aluno conhecer e fazer uso de diferentes registros de representação. Quando o problema não requer explicitamente um determinado registro, e ainda, permite uma variedade de caminhos a serem seguidos para chegar à solução, os estudantes recorrem a registros diversos, diversificando o uso de acordo com critérios estabelecidos por ele (o que é mais conveniente, o que é mais rápido etc).

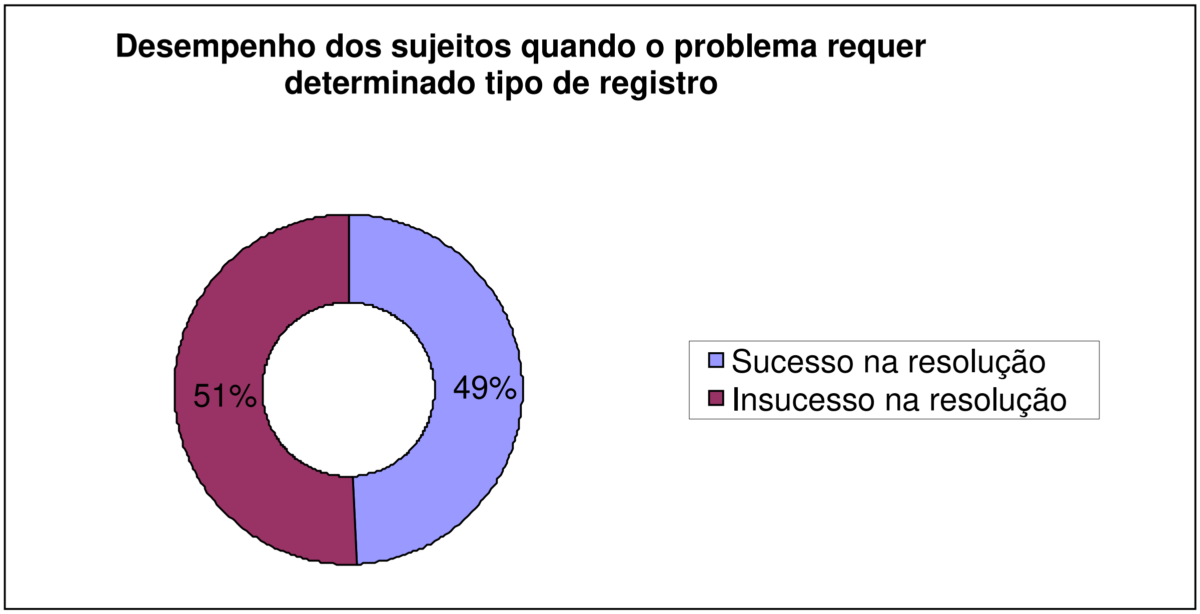


Figura 48: Insucesso quando determinado registro é requerido

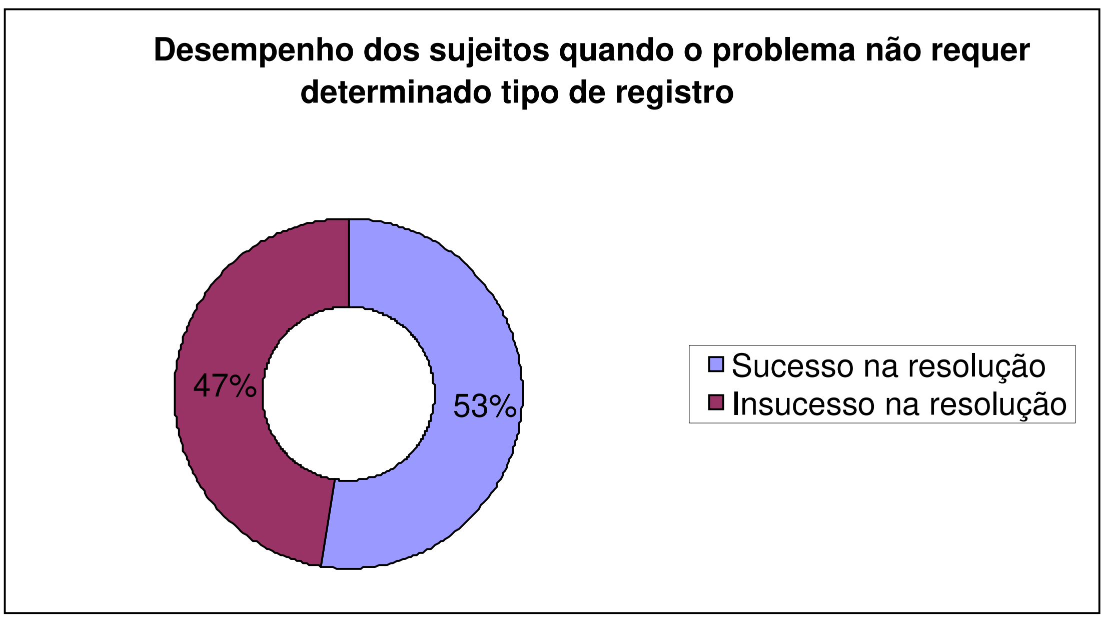


Figura 49: Sucesso quando não se requer determinado registro

Se compararmos o desempenho com o número de conversões realizadas, veremos que o desempenho é melhor entre os que realizam duas conversões. Comparando o desempenho dos sujeitos que realizaram apenas uma conversão e os que realizaram duas conversões vemos que a proporção de acertos é maior entre os que realizaram duas conversões, conforme mostram os gráficos:

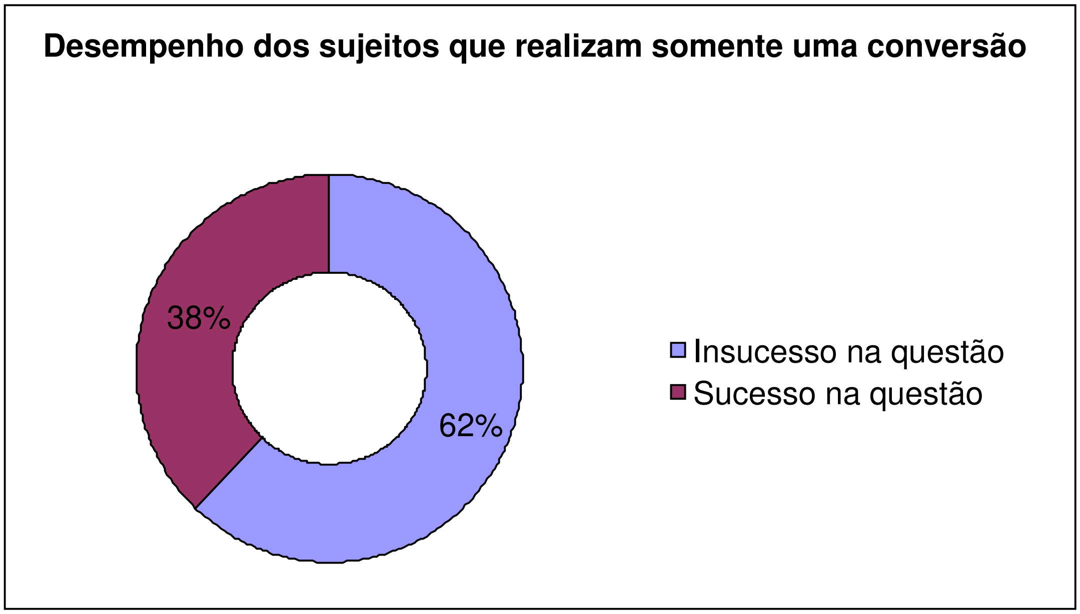


Figura 50: Insucesso quando se faz somente uma conversão

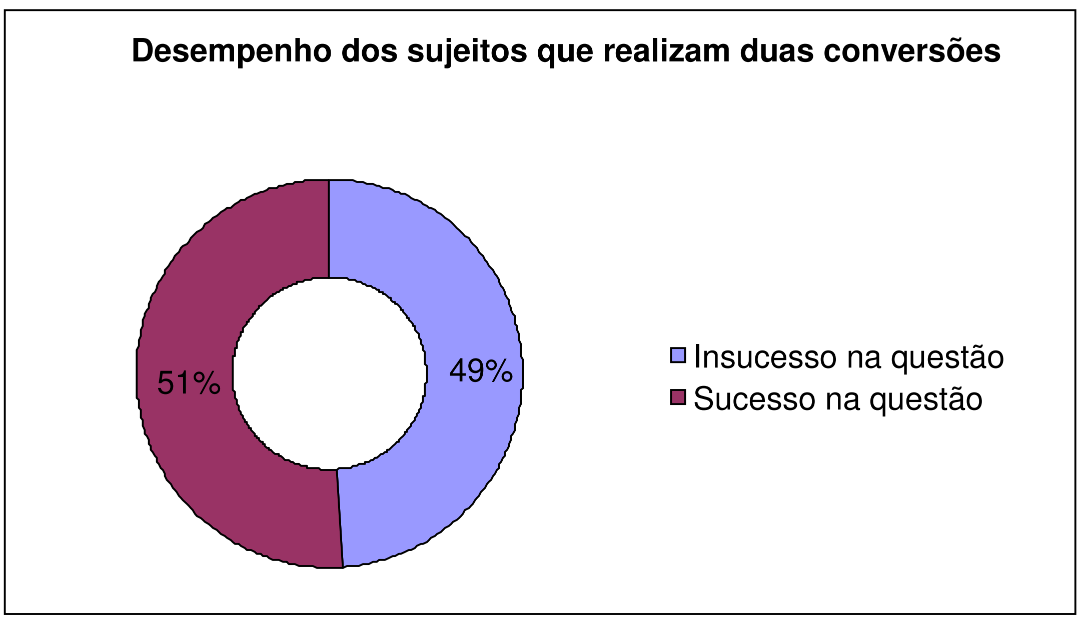


Figura 51: Sucesso quando há a realização de duas conversões

IV. 2 Conclusão

Com base na análise dos registros dos estudantes foi possível verificar que são poucos os sujeitos que recorrem a uma variedade de registros de representação e conseqüentemente realizam mais conversões: em 114 respostas tivemos apenas uma conversão, em 78 tivemos duas e em apenas 7 tivemos 3 conversões.

Poucos estudantes deixam de explicitar a conversão, ou seja, a minoria colocou a resposta do problema de forma direta. Contudo, vale ressaltar que tal fato não implica na não-realização de conversão, uma vez que ela pode ser mental. Contudo, é importante lembrar que estamos considerando apenas os registros.

Quando o problema requer algum registro específico, há pouca variação de caminhos percorridos no que diz respeito às conversões de registro realizadas.

Há uma grande dificuldade, por parte dos sujeitos, de uso da linguagem algébrica. Como não há possibilidades de substituí-la pela aritmética (os exemplos nos mostraram isso) então os estudantes têm grande possibilidade de insucesso na questão. Poucos alunos resolveram o problema que envolve a linguagem algébrica (problema 4), mas este não apresenta tanto insucesso se comparado aos demais.

Há bastante insucesso quando o problema envolve geometria não-plana e medidas (problema 2). Percebemos que, com relação ao problema 2, a não representação de um objeto ou então a sua conversão a partir do uso inadequado de registros influiu negativamente no desempenho da questão. Da mesma forma, os estudantes que realizaram conversão para a idéia de capacidade fazendo uso correto dos registros (representação correta) perceberam que cabem 8 pacotes no bloco maior. Quando os estudantes seguiram esse caminho, efetuaram, concluindo a resolução, a divisão de 100 por 8 (conversão em linguagem aritmética). Nenhum sujeito que representou o bloco fazendo uso inadequado dos registros acertou a questão. Como para a representação do bloco retangular e conseqüentemente para a conversão dos registros em linguagem natural para o registro em linguagem figural o estudante enfrentou o fenômeno da não-congruência e, embora a figura geométrica fosse razoavelmente simples (considerando as figuras não-planas), muitos sujeitos não representaram o bloco de forma adequada. O mesmo ocorre para a representação da idéia de capacidade neste mesmo problema, ou seja, para a conversão desse objeto, a partir do registro em linguagem natural para o registro em linguagem algébrica ou aritmética. Nesse caso a conversão também enfrenta o fenômeno da não-congruência.

O problema que exige linguagem aritmética, embora sendo de geometria e medidas (assunto que geralmente traz dificuldades aos estudantes), apresentou maior número de caminhos com sucesso.

Com exceção de um problema, os demais não exigiram um registro específico. Mas há uma tendência de utilização de registros mais esperados de acordo com o problema, exceto quando a linguagem é a figural e nesse caso, há mais sucesso na questão quando os sujeitos fazem uso dessa linguagem.

Com relação ao uso do registro em linguagem natural, percebemos que há mais sucesso na questão quando se faz conversão utilizando este registro e principalmente quando esta conversão é feita no início ou na conclusão da resolução.

Quanto ao número de conversões efetuadas não se percebeu uma relação direta entre esse número e o desempenho na questão, pois sujeitos que fizeram apenas uma conversão ou três conversões tiveram mais insucesso e os que realizaram duas conversões tiveram mais sucesso na questão. Conforme vimos, Duval coloca que sujeitos que reconhecem o objeto por meio de uma única representação confundem o objeto com a sua representação.

Quando um problema requer determinado tipo de registro há mais insucesso na questão, enquanto que há mais sucesso quando ele não requer um registro específico.

Considerando que os sujeitos apresentaram diferentes caminhos de resolução para os problemas sugerimos que as maiores dificuldades não estão na falta de conhecimento procedural, mas sim na falta de conhecimento declarativo.

Os resultados confirmam a necessidade de realização de um trabalho específico sobre os registros, em sala de aula, como representar um mesmo objeto por meio de diferentes registros, realizar conversões quando se é exigido um tipo específico de registro, estudar e comparar possibilidades de caminhos no que diz respeito aos registros utilizados e apresentar diferentes resoluções para um mesmo problema (isso conseqüentemente obriga o estudante a utilizar diferentes registros). Nesse sentido é importante apresentar problemas aos estudantes que requerem, explicitamente, determinado tipo de registro e solicitar diferentes modos de resolver os problemas. A tradução do enunciado para a linguagem matemática, que consiste numa conversão, é uma tarefa que deve fazer parte das atividades escolares.

Não se investigou o motivo pelo qual os sujeitos preferem um registro a outro, quando podem escolher, e nem tampouco a relação entre essa escolha e o desempenho. Essa pode ser uma questão a ser investigada em outra pesquisa.

Referências Bibliográficas

ALVES, E. V. **O papel dos conceitos e procedimentos na solução de problemas**. In Cadernos. Centro Universitário S. Camilo, São Paulo, v. 9, n. 1. p. 67-70, 2003.

BAKHTIN, M. M. **Marxismo e Filosofia da Linguagem**. São Paulo: Hucitec, 2004.

BRASIL. INEP. Documento Básico do ENEM, 2003.

CASTRO, S. C. **Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2001.

CATTO, G. G. **Registros de representação e o número racional: uma abordagem em livros didáticos.** Dissertação de mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: 2000.

DANTE, L. R. Didática da Resolução de problemas. São Paulo: Ática, 1998.

DAMM, R. **Registros de representação**. In: MACHADO, D.A.S. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo, EDUC, p.135-153, 1999.

DÍAZ, M. V. & POBLETE, A. (1995). **Resolucion de problemas, Evaluacion Y Enseñanza del ccalculo**. Zetetiké, 4, p.51-60.

DUVAL, R. **Registres de representation Sémiotique et Fonctionnement Cognitif de la Pensée.** Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 5. IREM de Strabourg, 1993.

__________________.**Análise cognitiva do funcionamento do pensamento e da atividade matemática**. PUC. São Paulo, 1999. (Curso sobre as aprendizagens intelectuais ministrado na PUC/SP).

__________________. **Sémiosis et Noésis**. Conférence APMEP, IREM, 1992.

__________________. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**. In MACHADO S. D. A. Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

__________________. **Semiósis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Peter Lang S.A., 1995. (Collection Exploration)

FLAVELL, J. H; MILLER, P. H. & MILLER, S. A. **Desenvolvimento cognitivo**. Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul Ltda: 1999.

FONSECA, M. C. F. R. (org). **Letramento no Brasil: habilidades matemáticas: reflexões a partir do INAF 2002**. São Paulo: Global: Ação Educativa Assessoria, Pesquisa e Informação: Instituto Paulo Montenegro, 2004.

HALLOOOUN, I. A. & HESTENES, D. **Common sense concepts about motion**. American Journal of PHUSICS, 53 (1056), 1987.

KANTOWSKI, M. G. **Algumas considerações sobre o ensino para a resolução de problemas.** In KRULIK, S. & REYS, R. (orgs). A resolução de problemas na Matemática escolar. Tradução Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 270-282.

KARRER, M. **Articulação entre álgebra linear e geometria – um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica.** Tese de doutorado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

KLAUSMEIER, H. J. & GOODWIN, W. **Manual de psicologia educacional**. Aprendizagens e capacidades humanas. Tradução Maria Célia Teixeira Azevedo de Abreu. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1977.

LOPES, W. S. A **importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino**. Dissertação de mestrado. Pontifícia Universidade Católica, 2003.

MARIANO, V. **Estudo de fatores restritivos para um bom desempenho dos alunos concluintes do Ensino Médio nos exames do ENEM, em Geometria**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2004.

MAYER, R. E. **Thinking and problem solving: an introduction to human cognition and learning**. New York: Scotth, Foresman and Company,1977.

NETTO, José Teixeira Coelho. **Semiótica, informação e comunicação**. São Paulo: Perspectiva, 2003. (Coleção Debates).

NÖTH, W. **A semiótica no século XX**. São Paulo: Annablume, 1996.

______________. **Panorama da semiótica: de Platão a Peirce**. São Paulo: Annablume, 2003.

PALO, M. J. **Arte da criação: dos manuscritos de Charles S. Peirce aos escritos de H. Matisse**. São Paulo: EDUC, 1998.

PIGNATARI, D. **Semiótica e Literatura**. Cotia, SP: Ateliê Editorial, 2004.

POBLETE, A. L.; GUZMÁN, I. R.; MÉNDEZ, C. O. **Variedades didácticas matemáticas: su influencia em los logros de aprendizaje**. Proyecto FONDECYT, n. 1940780, 1994.

____________. **Variedades didáticas matemáticas**. In Zetetiké, vol 4 n 5, jan/jul 1996. Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática da Faculdade de Educação/UNICAMP.

___________. Mathematical Discovery. New York: John Wiley & Sons, 1981.

POZO, J. I. et al. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Tradução Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ROSSI, T. M. de F. (). **A formação do conceito matemático**. Dissertação de mestrado. Faculdade de Educação – UNICAMP, 1993

SANTAELLA, L. **A teoria geral dos signos: como as linguagens significam as coisas**. São Paulo: Pioneira, 2000.

______________. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 1983. (Coleção Primeiros passos)

SANTAELLA, L. & NÖTH, W. **Semiótica**. São Paulo: Experimento, 1999.

SASTRE, G.; MORENO, M. **Resolución de conflictos y aprendizaje emocional**. Barcelona: Gedisa, 2002.

SAUSSURE, F de. **Escritos de Lingüística Geral**. Simon Bouquet e Rudolf Engler (orgs). Tradução Carlos Augusto Leuba Salum e Ana Lúcia Franco. São Paulo: Cultrix, 2002.

SCHOENFELD, A. **Problem solving in context(s**). In: SILVER, E., CHARLES, R. (Ed). The teaching and assessing mathematical problem solving. 1988. p. 82-92.

SCHNAIDERMAN, B. **Semiótica Russa**. Tradução Aurora Fornoni Bernadini; Boris Schnaiderman e Lucy Seki. São Paulo: Perspectiva, 1979.

SCOVSMOSE, O. **Cenários para investigação**. In Bolema, ano 13, n. 14, p. 66-91, SP: UNESP: 2000.

STERNBERG, R. J. **Psicologia cognitiva**. Tradução Maria Regina Borges Osório. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

SUYDAM, M. N. **Desemaranhando pistas a partir da pesquisa sobre resolução de problemas**. In KRULIK, S. & REYS, R. (orgs). A resolução de problemas na

Matemática escolar. Tradução Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 49-73.

TRALDI JUNIOR, A. **Sistema de inequações do primeiro grau: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representações**. Dissertação de mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2002.

VALENTE, N. & BROSSO, R. **Elementos de semiótica: comunicação verbal e alfabeto visual**. São Paulo: Panorama, 1999.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 2002.

WOERLE, N. H. **Números racionais no ensino fundamental: múltiplas representações.** Dissertação de mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: 1999.

WOOD, D. **Como as crianças pensam e aprendem**. Tradução Marcelo Brandão Cipolla. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

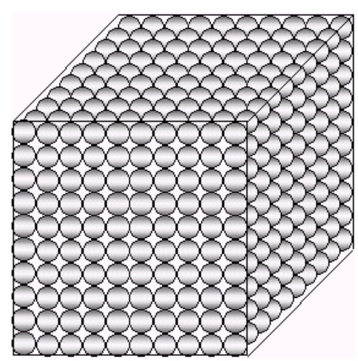
Anexo 1 - Novo teste

Idade ______________________________ Sexo ( ) feminino masculino( )
Escola: ____

Caro aluno,

Estes problemas fazem parte de uma pesquisa de mestrado que está sendo realizada na Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas. Se você quiser colaborar, por favor, resolva os problemas deixando todos seus cálculos registrados. As respostas que não estiverem detalhadas infelizmente não poderão contribuir com a pesquisa, ou seja, não vale chutar a resposta. Para cada problema existe um espaço em branco para você registrar a resolução. Não tem importância se você não conseguir resolver o problema integralmente, pois você **não** estará sendo avaliado pelas suas respostas. Mas procure deixar anotado e em seqüência **TODOS** os passos de sua resolução, pois isso é muito importante para a pesquisa. Obrigada.

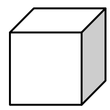
1 - Uma pessoa encheu uma caixa cúbica de 10 cm de aresta com bolinhas de gude de 1 cm de diâmetro. Ela arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais. Quantas bolinhas colocou na caixa?



2. (ENEM 2003) Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm x 40 cm x 60 cm. Qual é a quantidade mínima necessária de caixas para esse envio?

3. Desenhe um triângulo que tenha um ângulo maior que 90º. Até que ponto esse ângulo pode ser aumentado de forma a se assegurar a existência do triângulo? Faça um desenho para ilustrar essa situação.

4. Considere um cubo de aresta x. Determine a área de sua superfície (área de todas as faces). Justifique o resultado.

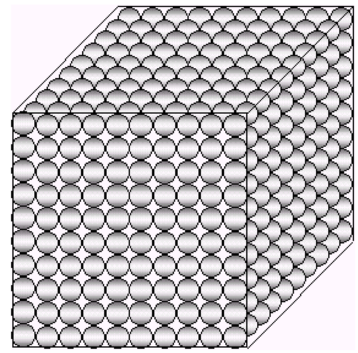


Anexo 2 – Questão do Enem

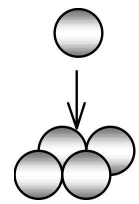
Observe nas questões 1 e 2 o que foi feito para colocar bolinhas de gude de 1 cm de diâmetro numa caixa cúbica com 10 cm de aresta.

01 Uma pessoa arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais, tendo assim empregado:

(A) 100 bolinhas.
(B) 300 bolinhas.
(C)1000 bolinhas.
(D)2000 bolinhas.
(E)10000 bolinhas.



02 Uma segunda pessoa procurou encontrar outra maneira de arrumar as bolas na caixa achando que seria uma boa idéia organizá-las em camadas alternadas, onde cada bolinha de uma camada se apoiaria em 4 bolinhas da camada inferior, como mostra a figura. Deste modo, ela conseguiu fazer 12 camadas. Portanto, ela conseguiu colocar na caixa:



(A)729 bolinhas.
(B)984 bolinhas.
(C)1000 bolinhas.
(D)1086 bolinhas.
(E)1200 bolinhas.

Anexo 3 – Questão do Enem

Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm x 40 cm x 60 cm. A quantidade mínima necessária de caixas para esse envio é:

(A) 9
(B) 11
(C) 13
(D) 15
(E) 17