APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES: UMA ANÁLISE COMPARATIVA DE DOIS PROCESSOS DIFERENTES DE ENSINO NA 5ª SÉRIE DO 1º GRAU.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida por Raquel Gomes de Oliveira e aprovada pela Comissão julgadora.
Data: 30 de Agosto de 1996
Márcia Regina F. de Brito

RAQUEL GOMES DE OLIVEIRA

CAMPINAS

1996

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA FACULDADE DE EDUCAÇÃO/UNICAMP

OL4a

Oliveira, Raquel Gomes de
Aprendizagem de frações: uma análise comparativa de dois processos diferentes de ensino na 5ª série do 1º grau / Raquel Gomes de Oliveira. -- Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: Márcia Regina Ferreira de Brito.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Ensino-Aprendizagem. 2. Frações. 3. Ensino-Métodos. 4. Educação matemática. 5. Psicologia educacional. I. Brito, Márcia Regina Ferreira de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do Título de MESTRE em EDUCAÇÃO na Área de Concentração: Educação Matemática, à Comissão Julgadora da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação da Profª Drª Márcia Regina Ferreira de Brito.

Comissão julgadora

Márcia Regina F. de Brito

Para todas as crianças,

porque são crianças.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que, de algum modo, colaboraram na elaboração deste trabalho. Especialmente, à minha orientadora Profª Drª Márcia Regina Ferreira de Brito por sua dedicação, à Profª Drª Leny Rodrigues Martins Teixeira que, mesmo à distância, esteve comigo o tempo todo neste trabalho, ao Prof Mário Hissamitsu Tarumoto, porque pude contar com seu profissionalismo na acessoria estatística dos dados, aos Professores e Colegas de curso, com os quais muito aprendi, à CAPES pelo incentivo à pesquisa e à Empresa de Transportes Andorinha, pelo apoio prestado ao estudante.

RESUMO

Este trabalho teve por objetivo analisar a aprendizagem de frações na 5ª série do 1º grau comparando dois métodos diferentes de ensino. Para isto, 58 crianças que cursavam a 5ª série do 1º grau de uma escola pública, no ano letivo de 1995, foram submetidas a uma prova sobre frações antes e depois de trabalharem com frações na 5ª série. Dentre os modelos de pesquisa propostos por Campbell e Stanley (1979) foi escolhido o delineamento 10 (pré e pós-teste com não aleatorização dos grupos). Uma das classes passou a ser o grupo experimental trabalhando sob o método de ensino que tinha como base princípios construtivistas e procurou considerar algumas dificuldades do conceito de fração e alguns dos elementos que, conforme Piaget, Inhelder e Szeminska (1948), necessitam ser articulados para que haja a construção operatória do conceito. A outra classe trabalhou sob a forma convencional.

Os resultados e suas análises mostraram que as crianças que foram submetidas ao método diferenciado tiveram um melhor desempenho na prova sobre frações em relação às crianças que trabalharam sob o método convencional.

ABSTRACT

The objective of this work was to analyse the learning of fraction on fifth grade comparing two different methods of teaching. So, fifty-eigth children that studied in this grade in a public school, during 1995 did a test about fractions before and after studying them. Among the examples found in Campbell and Stanley (1979) it was chosen the delineation 10 (before and after test with not aleatory groups). Twenty-one students became the experimental group working with this teaching method that was based in constructive principles and It looked for some difficulties about fraction ideas and some elements in, Piaget, Inhelder and Szeminska (1948), that need be articulated to have the operative process of the idea. The other group of students worked with the conventional form.

The results and its analyses showed that children submited to a different method had a better performance on test about fractions versus children that worked in the conventional form.

CAPÍTULO I

Introdução e Justificativa do Estudo

Em uma perspectiva psicogenética piagetiana, a preocupação com respeito ao ato de conhecer é de natureza epistemológica. Piaget e seus colaboradores, durante vários anos, empenharam-se na explicação da formação de conceitos ligados à lógica, à física e à matemática em uma visão construtivista. Piaget, ao descrever a gênese de tais noções, também explicitou o mecanismo de formação do conhecimento do ponto de vista do sujeito que constrói este conhecimento.

Embora não trabalhasse com situações de sala de aula e não tenha proposto nenhum método de ensino, é visível que os resultados de suas investigações acabaram por sustentar algumas práticas pedagógicas, porque o aprender está ligado à construção do conhecimento. São também visíveis o abuso e, em decorrência deste, as interpretações errôneas de sua teoria.

Considerando as explicações piagetianas sobre a construção do conceito de frações, este trabalho experimental focaliza como tópico de pesquisa a aprendizagem de frações em um contexto escolar e tem como problema de pesquisa saber se existem diferenças significativas no desempenho dos alunos quando os elementos propostos por Piaget (1948), para que se tenha a construção operatória deste conceito, são articulados em um método de ensino.

De acordo com a proposta da grade curricular vigente, os primeiros contatos da criança com o conceito de fração, na escola, acontecem na terceira série. Até à quarta série, as 4 operações com frações são ensinadas, abrangendo desde a parte conceitual até às técnicas do M.M.C. (Mínimo Múltiplo Comun), juntando-se também a classificação, nomenclaturas, notações e formas de leitura das frações. Ja na quinta série é feita uma revisão desses conteúdos, acrescentando a potenciação com especial ênfase nos procedimentos de cálculo com frações.

O conjunto Q (introdução das frações negativas e ampliação do significado das frações) é apresentado na sexta série juntamente com uma nova bateria de cálculos. Quando os alunos chegam à sétima série é esperado que já dominem o conceito de frações. Assim, a ênfase maior recai nos cálculos e na habilidade de manejar símbolos, em detrimento da conceitualização das frações.

A escola continua preocupada em transmitir o conhecimento científico sem dar-se conta que perpetua tal conhecimento unicamente para pequena parte da população escolar. O fato de a escola estar centrada principalmente na aquisição de conhecimentos e hábitos sociais e não nos processos necessários para sua compreensão, determina, segundo Moreno (1987), que o adquirido na escola forme uma superestrutura artificial que se desfaz com o tempo. A grande preocupação com a "resposta certa" e não com o processo de aprender, de onde derivam erros que devem ser aceitos e trabalhados, leva a uma aprendizagem artificial que pode ser exemplificada pelo tipo de compreensão, revelada nos resultados de algumas pesquisas sobre frações que se encontram neste trabalho.

Neste sentido, a preocupação central do presente trabalho está relacionada às questões de conceituação, ordem e equivalência das frações (porque é certo que fundamentam as técnicas posteriores sobre operações), procurando considerar o momento ideal (porque também é certo, que este acontece perante a atividades organizadas que tenham espaço para o mesmo) para o estabelecimento da linguagem simbólica.

A metodologia emprega atividades baseadas nos "Jogos com Frações", utilizados por Maranhão e Imenes (1985/1986), cujo objetivo é levar os alunos a tomar contato com um conceito escolar de forma estruturada, descontraída e diferenciada.

A escolha deste tema se justifica pelo fato de o tema "frações" manifestar-se freqüentemente, como "um tópico até fácil de ser introduzido, mas de difícil extensão para os alunos no que se refere às aplicações".

Tanto no cotidiano, com os colegas de trabalho da mesma escola, bem como em cursos de aperfeiçoamento, onde temos a oportunidade de trocar experiência com outros professores de outras escolas da Rede, as questões ligadas à aprendizagem de frações estão constantemente em pauta.

A prática em sala de aula revela ao professor que mesmo os alunos, que estão trabalhando com frações já a um considerável tempo, cometem "erros" acabando por evidenciar que sua aprendizagem sobre frações, no que se refere à articulação entre os elementos que formam este conceito, foi incompleta. O exemplo mais comum é quando o aluno,trabalhando em um contexto de parte-todo não relaciona a fração a todo algum.

De outro modo, a opção por trabalhar com a questão da aprendizagem de frações usando um método de ensino, que trata de articular os elementos formadores do conceito, foi sendo definida no contexto profissional. Trabalhando como docente de 1º e 2º Graus da rede pública onde existe a necessidade de trabalhar a cada ano com diferentes séries permitiu a constatação de que as dificuldades dos alunos, quanto às frações, não são exclusivas de uma série ou outra. A evidência deste fato, várias vezes experienciado, leva a supor que tais dificuldades possam ter suas origens na forma pela qual o conceito foi ensinado. Investigar esta questão pareceu uma forma de encontrar explicações mais tangíveis, sobre os problemas evidenciados pelos alunos, quando operam questões com frações em diferentes situações de ensino.

Outra justificativa para o presente trabalho foi a necessidade de realizar, enquanto professor-pesquisador, uma pesquisa que possibilitasse fundamentar e organizar, de forma objetiva e sistematizada, os dados da realidade, em uma tentativa de superar o conhecimento do senso comum. É sabido que o conhecimento não é absoluto e portanto, não existem receitas, mas como assinala Weatherall (1970), se este conhecimento é realmente científico *"...é o de que melhor se dispõe para propósitos práticos"*. Além disso, através da investigação científica revela-se a perspectiva de um aprimoramento não só profissional como também humano.

ATIVIDADES BASEADAS NOS "JOGOS COM FRAÇÕES" COMO MÉTODO SISTEMATIZADO DE ENSINO .

A escolha de atividades baseadas nos "Jogos com Frações" utilizados por Maranhão e Imenes (1985/1986) foi feita tendo em vista que são atividades baseadas em princípios construtivistas sendo voltadas para a compreensão operatória dos conceitos. Tais princípios construtivistas podem ser explicitados da seguinte forma:

1º) Toda aprendizagem deve ser um processo ativo, porque o conhecimento pressupõe uma estruturação : *"No domínio do ensino o principal objetivo desta teoria do desenvolvimento intelectual, é o de permitir à criança construir sua própria aprendizagem. Não se pode desenvolver a inteligência de uma criança pelo único fato de se falar com ela. Não se pode fazer uma boa pedagogia sem colocar a criança em situação em que ela possa experimentar por si própria, no sentido mais amplo do termo, quer dizer, onde ela possa experimentar as coisas e ver o que se passa, manipular os símbolos, colocar questões e procurar suas próprias respostas, relacionando o que ela encontra aqui com o que encontra lá, comparando suas descobertas às de outras crianças"*. Piaget (1964) (apud Kamii, 1976).

2º) A estruturação do conhecimento pressupõe não só uma cooperação da criança com adultos, mas também de crianças cooperando com outras crianças. É na interação com outras crianças que surgem as oportunidades do confronto de opiniões que consequentemente levam à uma conscientização de opiniões diferentes, pertencentes a outras crianças. O fato dessa interação acontecer com crianças de mesma idade, ajuda muitas delas a ultrapassar a fase do egocentrismo.

3º) A estruturação do conhecimento tem como preferência ou prioridade ações intelectuais suportadas bem mais na experiência imediata que na linguagem. Não desconsiderando a importância da linguagem nesta estruturação, Piaget (1978) afirma que a criança é muito mais capaz de fazer e compreender ou, ter consciência daquilo que fez, na ação, que expressar verbalmente e de forma também consciente os princípios que promoveram tal ação. Assim, toda pedagogia de base construtivista deve considerar a importância da linguagem no desenvolvimento da inteligência. Entretanto, o desenvolvimento da linguagem não deve ser colocado como principal objetivo a ser alcançado, pois isso levaria, necessariamente, a uma perda de processos realmente operatórios.

Clements e Battista (1990), colocam de forma bastante resumida alguns princípios construtivistas que vão de encontro às idéias veiculadas nas teorias e práticas vigentes as quais muitas vezes vêem o ensino como uma mera transmissão e resume a aprendizagem a uma absorção ou assimilação de idéias, conceitos, estruturas... previamente estabelecidos. Esses autores ressaltam que:

- O conhecimento é ativamente criado ou inventado pelas crianças e não pode ser recebido passivamente do meio em que esta se encontra. Deste modo, por mais que se queira ou se tente, o conceito de número, por exemplo, não pode ser transmitido, mas sim construído pela criança através das relações com os objetos e da coordenação de suas ações;

- O conhecimento matemático é criado através das ações mentais e físicas. A reflexão pressupõe a integração do novo conhecimento em estruturas anteriores;

- As idéias e verdades matemáticas são estabelecidas através da cooperação entre os membros de uma mesma cultura. Assim, um ambiente construtivista é visto como uma cultura na qual os estudantes estão inseridos e envolvidos não só em descobertas e invenções, mas em uma relação social que envolve explicação, negociação, divisão e avaliação;

Um segundo aspecto que foi considerado na escolha dessas atividades, deve-se ao fato de que estas procuram trabalhar as dificuldades ou obstáculos mais comuns à aprendizagem de frações. As dificuldades mais comuns são a ausência de domínio da relação parte-todo e parte-parte (equivalência); a incapacidade de trabalhar com divisões em partes iguais; a não incorporação de frações como operadores; inexistência de simultaneidade entre o trabalho no contexto discreto e no contexto contínuo; ausência de associação entre representação concreta e linguagem matemática.

Um terceiro aspecto considerado foi que estas atividades procuram levar em conta alguns dos elementos que de acordo com Piaget, Inhelder e Szeminska (1948) devem ser articulados para que possa existir um domínio operatório do conceito de frações.

Os vários problemas sobre aprendizagem de fração apontados pelos pesquisadores da área têm levado à concepção de um método para o ensino de fração, cuja fundamentação seja apoiada em princípios construtivistas, com o objetivo de levar à uma aprendizagem significativa ou voltada para a compreensão operatória. Neste sentido, as atividades de ensino de fração deveriam ser baseadas em alguns elementos, tais como:

1- Colocação de problemas concretos e que sejam significativos para as crianças: Parece razoável partir desta sugestão em uma situação de ensino, porque o problema ou a situação colocada precisa ser assimilado pela criança para que esta possa iniciar sua interação com o mesmo. Caso contrário, corre-se o risco de que tais atividades não sejam bem aproveitadas porque nem mesmo foram motivadoras para as crianças;

2- Participação da criança no desenvolvimento do conceito: Em toda atividade de caráter ativo ou operatório, a participação da criança na construção de seu conhecimento é de fundamental importância, porque só mesmo tendo esta participação, a criança poderá reinventar , verbalizar, refletir sobre as próprias ações, tomar consciência destas ações e reorganizá-las. Dito de outro modo, significa que é possível e desejável levar a criança a tomar contato com o conhecimento que possui e com aquele que está sendo construído.

3- Possibilidade de descoberta de fatos e processos através do uso de material diferenciado e de situações criadas: Esta possibilidade vai ao encontro de idéias que defendem o uso de material concreto ou manipulativo na sala de aula. Apesar de Piaget (1978) ter deixado claro que a estruturação lógico-matemática e não o próprio material concreto é a base de toda conceituação, o modo pelo qual esse material é utilizado pode proporcionar a construção ou reconstrução de referenciais mentais que ajudam a criança a trabalhar com os conceitos de modo mais significativo para elas. Em um dado momento do desenvolvimento intelectual a interação com o material, juntamente com a coordenação desta interação, acaba por gerar idéias que simples definições e apresentações não proporcionam.

4- Sequência para o desenvolvimento do conceito: Em algumas de suas pesquisas, Piaget (1960) já havia apontado que, particularmente no caso das frações, existe uma ordem na construção das mesmas. O esquema de comparação e encaixe das partes em relação ao todo, que garante as primeiras noções de fração, é operatório, primeiramente em situações de dicotomias ou divisões em metades. Posteriormente, este esquema é generalizado para situações de quartos e oitavos (porque na verdade são dicotomias sucessivas). Por último, é transferido para situações envolvendo terços, quintos, sextos... A divisão em terços é considerada como de maior dificuldade que a divisão em meios, pelo fato de a divisão por três partes necessitar que se antecipe e conserve na mente as relações da parte com o todo e da parte com outras partes, até que duas divisões separadas tenham sido feitas. Por outro lado, a divisão por dois requer somente a comparação de duas partes.

5- Trabalho em grupo: Como já foi visto nas justificativas do uso das atividades baseadas nos "Jogos com Frações", os princípios pedagógicos referenciados no construtivismo piagetiano apontam para a importância das interações entre crianças: *"Pequenos grupos fornecem um fórum no qual os estudantes questionam, discutem idéias, cometem erros, aprendem a ouvir idéias que não as suas, oferecem críticas construtivas e resumem suas descobertas escrevendo sobre as mesmas"* (NCTM,1989, p.79) (apud Davidson, 1990).

6- Possibilidade de erros e correções dos mesmos: Em uma metodologia baseada em princípios ativos ou operatórios, os erros não têm mais um caráter de quantificação de conhecimento, mas sim o de revelador de procedimentos que são corretos em um determinado contexto e não em outro. Os erros acabam, nesta concepção, sendo os delineadores de um caminho onde se elabora o pensar sobre os mesmos, para ajudar nas atividades posteriores. Portanto, a ênfase nos erros e a punição dos mesmos, seja com notas ou com outra forma qualquer, não cabem em uma metodologia de ensino desse tipo.

7- Respeito ao tempo necessário para a introdução do conceito na forma simbólica: É certo, que em uma dada cultura é necessário que haja consenso entre os membros da mesma, quanto à utilização e os significados de certos símbolos. Assim, as crianças em idade escolar necessitam aprender a representar as frações. No entanto, o abandono precoce de materiais e situações que estão servindo de recurso às crianças (porque é certo que estão trabalhando bem próximas aos significados das frações, assim como à idéia de ordem e equivalência entre as mesmas) com a finalidade de ensinar a terminologia matemática, parece acarretar muito mais atrasos que progressos. Isso ocorre porque a criança ,ao mesmo tempo em que constrói a conceituação de fração,precisa adquirir o significado dos símbolos que até o momento, no caso das frações, representavam os números naturais.

8- Explicitação do pensamento da ação: Quando a criança verbaliza as operações mentais ou explica verbalmente seus procedimentos consegue dar pistas ao professor sobre suas representações. Quando o professor conhece melhor estas representações, poderá influir diretamente sobre as mesmas, sendo estas corretas ou não, dentro do contexto em que se está trabalhando. A verbalização, do mesmo modo que os erros, acaba por delinear os procedimentos necessários para a efetivação do processo de ensino-aprendizagem.

Uma outra questão que merece ser considerada no presente trabalho, refere-se à justificativa das atividades com meios, terços, quartos, quintos, sextos, oitavos, décimos e doze-avos. Além das considerações traçadas anteriormente existe uma outra justificativa que se apóia no uso e na utilidade das frações.

Porto (1963) explica que no passado era comum expor crianças a um árduo trabalho com frações de denominadores acima de 100, *"o que as obrigava a longas operações que redundavam sempre em fontes de erro"*. Esta autora levanta importantes questões na busca que justificaria o tempo e o esforço gastos pelas crianças.

Wilson e Dalrymple (1937) fizeram um relatório sobre estudos anteriores que já buscavam destacar as frações mais usadas e aquelas consideradas "inúteis". Assim, as mudanças ocorridas na escola elementar poderiam ser explicadas pelo fato de que as complexidades da vida moderna resultam em variadas solicitações de conhecimentos diferentes dos ensinados na escola elementar. Portanto, o tempo gasto em coisas inúteis não se justificaria. Além dessa, a aceitação da concepção segundo a qual a experiência dá sentido e permanência ao aprendido, leva a uma melhor seleção do conhecimento adquirido pela criança e por último, o fato de que a doutrina da disciplina mental é uma doutrina falsa e em qualquer caso, uma melhor atitude e integração acontecem quando a criança vê valor naquilo que faz.

Em 1933, Breslich (apud Porto, 1963) tratando da utilidade das frações, mostrou que 99% das frações usadas na vida tinham denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 e 16. Ainda de acordo com esse estudo , 90% das frações usadas tinham denominadores menores que 10. Porto (1963) afirma que, as pesquisas mostram as frações como parte da unidade de medida considerada e estas *"são realmente as frações mais comuns na vida diária"*. Além disso, esse autor considera que as pesquisas citadas por Brelisch foram feitas nos EUA, onde o sistema de medidas não é o decimal, por isso as frações ordinárias são comumente usadas. Já no Brasil, onde o sistema de medidas é o decimal, as frações ordinárias são substituídas pelas decimais. Isso torna o uso das frações a/b, b≠0 mais restrito ainda, particularmente no que se refere ao uso social dessas frações.

OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo geral deste trabalho foi verificar a existência de diferenças significativas no desempenho de alunos de 5ª série, em relação ao conceito de fração, quando esses alunos, divididos em dois grupos, são submetidos a dois processos de ensino: "convencional" e "sistematizado", termos esses explicitados na descrição dos procedimentos deste trabalho.

Especificamente, os objetivos foram:

1) Descrever e analisar os desempenhos dos alunos quanto ao conceito de fração voltado para os subconstrutos de relação parte-todo e operador tanto em grandezas contínuas como discretas;

2) Descrever e analisar a associação entre representação geométrica e linguagem matemática;

3) Descrever e analisar a questão da equivalência e da ordem entre frações.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA
A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS E O ENSINO DE FRAÇÕES

A ORIGEM DOS NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Antes de definir um numero fracionário como elemento pertencente ao conjunto dos Números racionais e também os diversos significados que uma fração pode assumir quando são considerados contextos nos quais está se tomando esta fração, é interessante um pouco de história a respeito dos números fracionários.

A necessidade de um novo instrumento numérico (Números Fracionários) foi a promotora da ampliação do campo numérico conhecido (Números Naturais) por volta de 3.000 anos a.C. no Egito. Caraça (1951) situa esta necessidade de criação de um novo campo numérico e este acaba tendo como base as relações entre medição, propriedade privada e o Estado. Além disso, esse autor afirma que é um grande erro não atribuir muita importância ao número que se obtém como resultado da medição, pois se um homem possui um pedaço de terra existem, no mínimo, três circunstâncias que o acompanham e estão relacionadas: 1) nas relações econômicas existentes entre o proprietário e a terra é necessário saber a área desta para ser possível cálcular a quantidade de sementes e tempo para arar a terra, por exemplo; 2) nas relações entre o indivíduo e o Estado, o imposto depende da área da terra, e; 3) nas relações comerciais de indivíduos para indivíduos, onde todo contrato de venda ou compra exige uma determinação da área da terra a ser negociada.

Caraça ainda cita a história dos egípcios contada por Heródoto (século V a. C.) no livro II (Euterpe) das suas Histórias que se refere à origem da geometria:

"*Disseram-me que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores no local e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra. Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que depois ela passou aos gregos*". Caraça (1951)

Isto mostra que as relações entre Estado e indivíduo, no que se refere à propriedade, impuseram a necessidade da expressão numérica da medição e isso foi elaborado. Convém lembrar que há aproximadamente 4.000 anos, foi a época em que viveu Sesóstris.

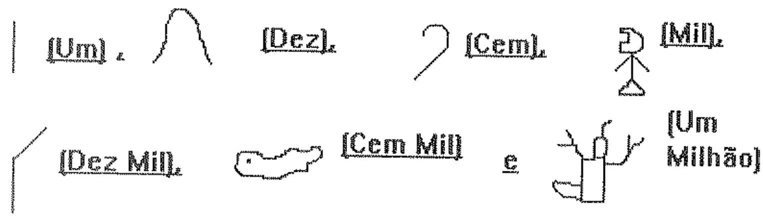
Mesmo encontrando problemas para dividir em partes iguais, algo necessário na expressão de um segmento por outro, a vantagem acarretada por tal expressão levou o Homem a superar a impossibilidade da divisão tendo, antes de tudo, que resolver o problema da incomensurabilidade de alguns segmentos. De outra forma, trabalhar com o fato de que nem toda medida do segmento pode ser expressa como um número inteiro de vezes uma unidade ou como um outra medida de um segmento qualquer. Portanto, a superação desta impossibilidade estava diretamente relacionada à criação de um novo campo numérico que satisfizesse as necessidades da ação de medir.

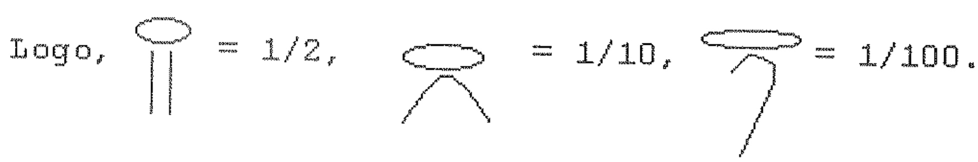
Lima (1983), também situa o número fracionário como o resultado da necessidade da expressão numérica da medição de terras de antigas civilizações. As terras de propriedade do Estado eram arrendadas proporcionalmente à força de trabalho de cada família. Devido à variação do tamanho das áreas, o Estado viu-se obrigado a criar sistemas de fiscalização onde ficasse seguro o cumprimento de seus interesses em relação à produção e também ao fato de este (o Estado) não ser lesado. Para atender a essas exigências padrões de medida ou unidades foram criados. Logo, surgiu o problema da unidade "não caber" um número inteiro de vezes no que se queria medir, sobrando uma parte inferior ao que se considerou como unidade. Os medidores ou estiradores de cordas, reconhecendo que os números naturais (instrumento numérico conhecido) eram insuficientes, partiram a procura de algo que se aproximasse do real. Foi a partir daí que a unidade foi subdividida em um certo número de partes iguais chamadas frações da unidade que levaram à criação de um novo instrumento numérico que são os números fracionários.

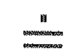
Pode-se dizer que a maneira de representar frações por uma barra que separa, tanto oblíqua como horizontalmente, dois números ou duas letras, não é tão antiga como a descoberta e o uso dos números fracionários, pois representar frações na forma a/b, $b \neq 0$ data do século XVI.

De acordo com Boyer (1974), os homens da Idade da Pedra ainda não utilizavam as frações. Na Idade de Bronze, parece ter surgido a necessidade tanto do conceito como das representações ou notações para as frações, mas com os egípcios, no contexto histórico da região do crescente fértil, que as frações têm seus primeiros usos e representações. É interessante observar que os egípcios só consideravam as frações unitárias, isto é, aquelas com numerador igual a um.

Na numeração hieroglífica egípcia as unidades até dez eram representadas por uma haste vertical. Desta forma, toda fração unitária era representada sempre por uma figura oval sobre as hastes ou sobre os outros símbolos usados como numerais. Por exemplo:





No papiro Ahmes (1650 A.C.) uma outra notação aparece para 1/8 que é 

e 1/20 como  .

Apesar destas frações (1/8 e 1/20) serem manipuladas livremente no tempo de Ahmes, as mesmas, de um modo geral, eram um enígma para os egípcios. Contudo, à fração 2/3 era atribuído um papel especial nos processos aritméticos, de forma que, para calcular um terço de um número, primeiro buscava-se os dois terços deste número, para depois calcular a metade do resultado encontrado.

Por exemplo: o cálculo de 1/3 de 4 era feito do seguinte modo:

Primeiro: 2/3 de 4= 8/3

Segundo : 1/2 de 8/3= 4/3

Portanto, um terço de quatro são quatro terços.

Como os egípcios conheciam que 2/3 de uma fração 1/p, p≠0 era o resultado da soma entre outras duas frações unitárias 1/2p e 1/6p p≠0, usavam de acordo com o seu sistema de numeração a seguinte relação: $2/3.1/p = 1/2p + 1/6p$, $p \neq 0$.

Boyer (1974) ainda mostra que tirando a familiaridade com a fração 2/3, para os egípcios a fração racional m/n, n≠0 não era tão elementar assim, já que uma fração irredutível como 3/5 era pensada pelos escribas egípcios como sendo o resultado da soma entre 1/3, 1/5 e 1/15. No papiro de Rhind há uma tabela onde 2/n, n ≠0 é a soma de frações unitárias para os valores ímpares de 5 a 101.

A história bíblica também faz alusão ao uso de frações. Em Gênesis 41,28:37, quando José interpreta os sonhos do faraó egípcio e prevê sete anos de fome para o Egito, pede que a cada ano de fartura 1/5 da terra seja tomado, e isto significa que 1/5 dos mantimentos deveriam ser armazenados. A idéia de metade aparece no Êxodo quando se faz referência à construção de um tabernáculo. "O comprimento de uma tábua era de dez côvados e a largura de um côvado e meio" (Êxodo 36,20:21). O côvado (do latim, cúbitos) era uma medida antiga de comprimento que correspondia a 3 palmos ou 66 centímetros.

A relação entre forma musical e matemática observada por STRAVINSKI (1882,1971) e compartilhada também por outros compositores dá um exemplo bastante concreto com o uso das frações. Oliveira e Silva (1968), afirmam que apesar dos Pitagóricos não terem descoberto que a vibração de uma corda em tensão é capaz de produzir diversos sons, (pois esta descoberta é anterior a eles), deve-se aos mesmos a primeira teoria sobre o relacionamento entre Matemática e Música sendo que este relacionamento é dado por meio de frações. Pitágoras descobriu que um tom inicial pode ser aumentado ou abaixado, diminuindo-se ou aumentando-se respectivamente o comprimento da corda vibrante. Por exemplo, ao tomar uma corda de violão de 60 cm de comprimento distendida ao máximo e deslocar esta corda de sua posição inicial, sua vibração provocará um determinado tom. Se somente metade da corda vibrar (30 cm) a frequência (número de vibrações) será maior e, portanto o tom será ouvido uma oitava harmônica acima do primeiro. Assim, para os Pitagóricos a fração 1/2 indicava uma oitava acima do tom inicial.

O relacionamento entre novos e antigos tons, por meio das frações, conduziu os Pitagóricos a confirmarem a teoria de que tudo no universo estaria relacionado aos números naturais. Somente com a tentativa de aplicar o Teorema de Pitágoras a um triângulo retângulo isósceles de lado igual a um, é que a Escola Pitagórica enfrentou uma grande crise, quando constatou que nem tudo no universo poderia ser representado por números naturais porque, neste caso, a hipotenusa do triângulo resultaria da raiz quadrada de 2. Um número até então desconhecido, pois tratava-se de um número irracional. De outra forma, um número para o qual a representação a/b, com a e b inteiros e b diferente de zero, é impossível.

A MEDIDA COMO UM PROBLEMA

A ação de medir que perdura 4.000 anos até os dias atuais pode ser considerada como a causadora de algumas dificuldades, mas também é a responsável por algumas extensões, pelo menos, no que diz respeito aos campos numéricos.

Pode-se afirmar que a todo instante alguém está medindo algo. Surge, desta forma, a pergunta: qual é o significado da ação de medir?

Sob várias definições, há um critério comum que vê a ação de medir como uma comparação. Assim, medir é comparar duas grandezas de mesma espécie, sendo uma delas tomada como unidade (comprimento com comprimento, área com área e volume com volume, por exemplo). Há casos também de relação entre grandezas diferentes: $t=e/v$ (tempo é igual ao espaço percorrido dividido pela velocidade, para velocidade constante). Desta forma, medir é comparar uma grandeza com outra, tomada como unidade.

Na ação de medir fica evidenciado o papel da unidade ou do objeto que se toma como referencial. Aqui cabe a coerência na escolha desta unidade. Não tem sentido, por exemplo, medir a distância entre duas cidades em centímetros ou medir as dimensões de uma casa em quilômetros. Por mais coerente que possa ser a escolha da unidade, nem sempre esta unidade cabe um número inteiro de vezes dentro do que se quer medir. Neste caso, as grandezas são ditas incomensuráveis.

Por exemplo, quando se compara um objeto com outro, que é tomado como unidade. Seja a unidade tomada um triângulo equilátero que coube um número inteiro de vezes (6 vezes) no todo (um hexágono) a ser medido, ou seja, não deixou resíduos. Portanto, o hexágono pode ser expresso por 6 triângulos equiláteros.

Supondo que se queira agora expressar a medida do segmento MN em função da medida do segmento AB, isto é, a medida do segmento AB é a unidade considerada.(AB=u), tem-se:

A|——|B

M|——|——|——|–|N

Como se vê , a medida do segmento MN não pode ser expresso em função da unidade u que está representada pela medida do segmento AB, pois existe um pedaço menor que a unidade u . Este pedaço é considerado um resíduo. Frente a esta dificuldade, Caraça (1951) coloca duas saídas, sendo a primeira delas, esquecer a idéia de expressar a medida do segmento MN em função da unidade AB e a segunda, seria reconhecer a insuficiência dos números naturais quando se expressa a medida de um segmento em função da medida de outro.

Para Caraça (1951), a negação da suficiência dos Números Naturais é a dificuldade que se aloja na expressão de um segmento por outro. A negação da negação é a desencadeadora da criação de novos campos numéricos.

Ao ser questionado sobre a criação de novos campos numéricos, no sentido desta criação ficar submetida à vontade de seu criador ou se esta criação é passível de uma norma, o matemático alemão Hermann Hankel respondeu enunciando o "Princípio da Extensão" que diz que os novos números criados devem ser suficientes no sentido de resolver, de forma exata, a dificuldade que exigiu sua construção e também devem ser coerentes com os já existentes, contendo-os como um caso particular.

A segunda regra deixa claro que no caso dos Números racionais, quando acontece da unidade caber um número inteiro de vezes, ou exatamente no que se quer medir, acaba-se reduzindo os Números racionais em Números Inteiros.(Oliveira & Silva, 1968)

Voltando ao problema de expressar a medida do segmento MN em função da medida do segmento AB, é claro que das duas saídas colocadas por Caraça (1951), a segunda foi a escolhida. Neste caso, a unidade u (que tem o mesmo comprimento que AB) é subdividida em partes que caibam exatamente na medida do segmento MN.

A|—•—•—|B = u'

M|—•—•—•—•—•—•—•—•—•—|N

Chamando-se de u' as partes iguais da unidade u, tem-se que MN = 10 u'.

MN = 10 u'e AB = 3 u'.

Quando se relaciona MN com AB, tem-se:

MN/AB = 10 × u'/ (3 × u') = 10/3.

Deste modo, diz-se que MN = 10/3 AB = (9/3 + 1/3) AB = (3 + 1/3) AB.

A medida do segmento AB cabe 3 vezes inteiras mais uma parte das três partes iguais em que o mesmo foi dividido na medida do segmento MN. O número 10/3 ou 3 + 1/3 é elemento pertencente ao novo conjunto numérico que supera as limitações do conjunto numérico anterior. Contudo, seria ingenuidade acreditar que as frações foram consideradas números desprovidos ou desligados da ação de medir em um curto período de tempo.

Davydov e Tsvetkovich (1991) afirmam que mesmo na forma a/b ou p/q usada pelos antigos Gregos, a fração não era ainda chamada de número. No final do século XVI, uma exposição de frações comuns foi feita por Simon Stevin, acompanhada pela publicação de um trabalho seu sobre frações decimais. Nesta exposição, as frações estavam tradicionalmente ligadas com as necessidades da medição. Porém, no princípio do século

XII, as frações foram, nos manuais de Aritmética, consideradas números com sobras (tal divisão também era comum entre os Egípcios). Durante os séculos XVI, XVII e XVIII, as regras para o trabalho com frações na forma a/b ou p/q estavam ainda sendo elaboradas. Courant e Robbim (apud Davydov e Tsvetkovich, 1991) escreveram que *"...o último e mais importante passo foi tomado após muitos séculos de esforços individuais acumulados: o símbolo m/n estava livre de sua associação concreta com a medida de quantidades mensuráveis e passou a ser considerado um número abstrato, uma entidade independente tendo "status" igual ao Número Natural".*

Para Davydov e Tsvetkovich (1991), esta transição que acabou por considerar as frações como entidades independentes da ação de medir ou de repartir foi acompanhada de certos problemas cognitivos que quando conectados com o desenvolvimento interno da Matemática enquanto disciplina teórica eram resolvidos. Como exemplo, os autores citam que as operações de subtração e divisão nem sempre puderam ser resolvidas dentro dos limites dos números naturais. O desenvolvimento da própria Matemática é que permitiu a remoção de tais limitações. Os números fracionários (do mesmo modo que os números inteiros em relação à subtração) permitiram que os obstáculos relacionados à divisão fossem superados sem que se fossem "violadas" as leis ou propriedades básicas da Aritmética, tais como: a propriedade associativa, a propriedade comutativa e a propriedade distributiva. Conforme estes autores, a expansão do domínio numérico (neste caso, a construção do sistema de números racionais) "...é uma manifestação do método básico de formar novos conceitos na álgebra moderna". Tal método de formação de novos conceitos em álgebra, considerado como um processo típico de generalização em Matemática, foi trabalhado no século XIX ("o princípio da constância das leis formais"). Ele era aplicado de forma abstrata na teoria dos pares. Tal teoria é usada para a introdução dos números fracionários. Logo, quando uma operação é impossível de ser realizada dentro dos limites de um dado campo ou conjunto numérico, um novo símbolo é então introduzido na forma de um par ordenado do tipo (a,b). Se as operações aritméticas sobre os novos símbolos obedecem as leis existentes para com os números anteriores, tem-se que os novos símbolos são considerados como números. Esta teoria (Teoria dos Pares) tal como o Princípio de Extensão, considerados genuinamente científicos, tornam possível logicamente a construção de novos números totalmente desvinculados da realidade concreta. No caso dos Números Fracionários, sem nenhuma relação com a medida de quantidades.

DIVERSOS SIGNIFICADOS SOB A MESMA REPRESENTAÇÃO a/b, b≠0

A tradição de interpretar uma fração como *"uma ou mais partes iguais da unidade"* está, de acordo com Porto 1963, diretamente ligada ao significado real que a palavra fração possui. Fração tem derivação latina (Frangere) e significa quebrar. Deste modo, para a autora o significado atribuído ao conceito de frações está "intimamente ligado a sua história". No princípio, uma fração significava simplesmente uma parte quebrada de algum inteiro. Logo, não havia preocupação com o tamanho das partes em que um inteiro era dividido, mas sim quanto ao número de partes de tal divisão. Porto (1963) traça um paralelo com o desenvolvimento histórico do conceito e as fases de aprendizagem pelas quais passam as crianças quando aprendem esses conceitos, mostrando que *"é interessante observar que também a criança inicialmente emprega a palavra metade designando apenas o pedaço de alguma coisa, sem incluir a idéia de igualdade entre as partes"*. Daí a explicação querer "a metade maior" ou as reclamações quanto às "metades pequenas". Porém, a atual representação de um número na forma a/b, b≠0 possui vários significados que dependem dos contextos nos quais são trabalhados. Esta variedade de significados não impede que os conceitos estejam relacionados entre si.

Existem várias interpretações para a forma a/b, b≠0. (Porto 1963, Castelnuovo 1970, Kieren 1975, D"Augustine 1976, Aguiar 1983, Lovell 1986 e Císcar & Garcia s.d). De acordo com Císcar & García (s.d) as diferentes interpretações para as frações podem ser divididas da seguinte forma: a) A relação parte-todo e a medida (que inclui representação em contextos contínuos e discretos, decimais e a reta numérica); b) as frações como quociente (incluindo divisão indicada, como elemento de um corpo quociente); c) a fração como razão (probabilidade e porcentagem) e d) a fração como operador.

A relação parte-todo e a medida

Tanto em um contexto discreto (formado por objetos individualizados no sentido de já estarem separados) como em um todo contínuo a relação parte-todo é efetuada toda vez que se divide o todo em b partes congruentes (com mesma medida) e toma-se a destas partes. *"A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o número total de partes (que pode estar formado por vários todos"*. Císcar & Garcia (s.d)

Representação em contextos contínuos e discretos

As representações nos contextos contínuos frequentemente são feitas através de figuras geométricas que necessitam ser divididas em b partes iguais ou equivalentes e que têm a partes pintadas ou hachuradas. Já nos contextos discretos, as partes já se mostram divididas porque são individualizadas. As partes tomadas, em geral são hachuradas ou circuladas.

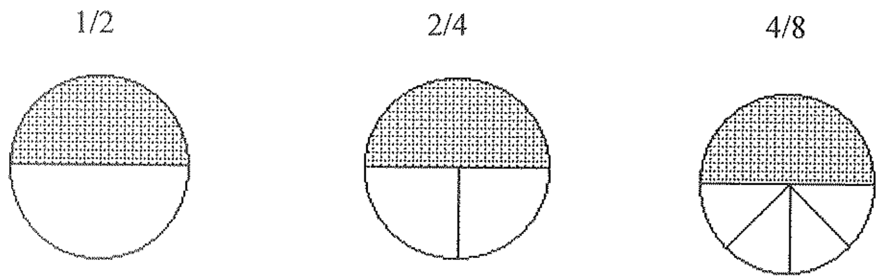


Figura 1- Representação de frações em um contexto contínuo

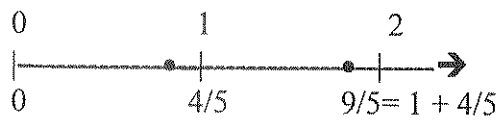
Decimais

As frações decimais dentro de um sistema de numeração decimal são apresentadas como um caso particular da relação parte-todo. Particular porque as b partes iguais em que o todo deve ser dividido são sustituídas sempre por 10 partes iguais.

Suas representações, tanto no contexto discreto como no contínuo, continuam sendo as mesmas usadas para as frações a/b com b≠0.

a) As frações em uma semi-reta numérica

Nesta situação a fração a/b, b≠0 acaba sendo um ponto sobre a reta numérica que foi dividida em b partes iguais das quais a partes foram tomadas. Esta situação é outro caso particular da relação parte-todo.



b) As frações como quociente

A divisão indicada (ação de repartir)

Interpretar uma fração como a divisão entre dois números naturais ($a/b = a:b$, $b \neq 0$) aparece em uma situação de repartir.Três bolos repartidos entre quatro pessoas terão a seguinte representação:

1/4 1/4 1/4

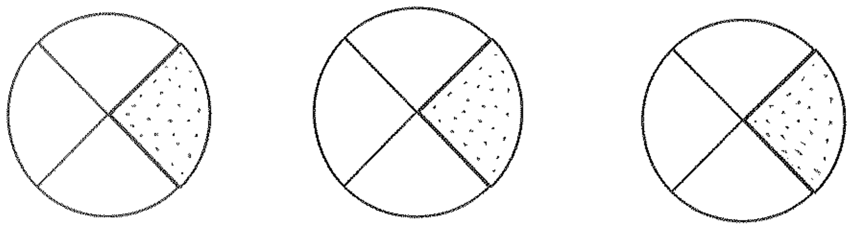


Figura2- Representação da adição de partes iguais extraídas de todos diferentes. (Porto,1963)

Neste caso, a fração 3/4 indica a adição ou agrupamento de partes iguais vindas de todos diferentes.

As frações como elementos de estrutura algébrica (corpo quociente)

Em uma estrutura algébrica, as frações são vistas como pertencentes ao conjunto dos números racionais. Deste modo, são elementos da forma a/b com a e b $\in$ N (para Q^+ e $b \neq 0$) e que representam a solução da equação $b.x = a$.

c) A fração como razão (correspondência entre duas grandezas)

Nas situações anteriores, as frações poderiam ser vistas como uma comparação entre parte e todo. Porém, ao ser interpretada como razão, uma fração passa a indicar comparações entre duas situações, quer tratem de grandezas iguais ou diferentes.

Por exemplo, pode-se ter a razão entre as alturas, os pesos ou as idades de duas pessoas. Do mesmo modo, o conceito de velocidade é apresentado como a razão entre espaço (que pode ser dado em metros, seus múltiplos ou submúltiplos) e tempo (que pode ser dado em segundos, seus múltiplos ou submúltiplos). Logo, $v = e/t$ o que não significa que o espaço represente partes iguais em que o tempo foi dividido. Aqui, a velocidade é vista como função do tempo. Este caso é para velocidade constante,pois $e = v.t$

Probabilidade

A situação na qual ocorre a comparação entre casos favoráveis e casos possíveis em um determinado contexto, também é representada na forma a/b, $b \neq 0$, considerando que as propriedades utilizadas em contextos probabilísticos são as mesmas estabelecidas para os números racionais.

Porcentagem

O conceito de porcentagem também é uma forma particular da relação parte-todo, pois aqui as b partes iguais são substituídas por 100 partes iguais. Para Císcar & Garcia (s.d), as porcentagens têm aparecido como operador no sentido de que a/100 de x ou a% é "efetuar" a fração a/100 sobre x , sendo x uma quantidade contínua ou discreta. De outra forma, é dividir x em 100 partes iguais e tomar a dessas partes.

d) A fração como operador

Dienes (1975) afirma que existem duas maneiras definidoras do conceito de fração. Uma fração pode representar um "estado de coisas" ou "uma ordem". Assim, 2/3 podem significar uma ordem no sentido de tomar 2/3 de algo em questão. Este mesmo autor questiona o significado de tomar-se 2/3 de algo e chega à conclusão de que faz-se necessário executar duas operações sucessivas.

A primeira dessas operações seria uma divisão, em conjuntos equivalentes, aplicada ao Estado Inicial ou Estado Unidade. A segunda operação seria a multiplicação que define, na verdade, o número de conjuntos equivalentes a serem tomados. Portanto, Dienes (1975) concebe uma fração como sendo uma sucessão de divisões e multiplicações aplicada a um Estado Unidade.

ESTADO	OPERAÇÃO	ESTADO	OPERAÇÃO	ESTADO
36	X 2	72	÷3	24

Figura 3- Representação de uma sucessão de divisões e multiplicações aplicada a um Estado Unidade. Dienes,1975)

Como foi visto, uma fração representada simbolicamente por a/b, b≠0 pode ter vários significados que dependem do contexto trabalhado: relação parte-todo, relação parte-parte (razão), quociente, medida ou operador.

De acordo com Císcar e Garcia (s.d.), o entendimento de cada um destes significados, em seus respectivos contextos, está amarrado a estruturas cognitivas diversas entendidas como "*esquemas de pensamento subjacentes a ações necessárias para desenvolver tarefas que implicam a idéia de número racional em qualquer de suas interpretações*".

Mesmo estando amarrados a diferentes estruturas cognitivas, em uma perspectiva de ensino não é possível separar por completo uma interpretação da outra, pois algumas delas têm o que se pode chamar de vínculo natural. Neste caso, ao se tratar de uma determinada interpretação outra pode estar implicitamente presente. É o que acontece quando da aplicação da relação parte-todo em uma grandeza discreta, pois a relação parte-todo acaba se identificando com um operador.

Behr (1983), citado por Císcar e Garcia, esquematiza os vínculos entre as várias interpretações para as situações de ensino do seguinte modo:

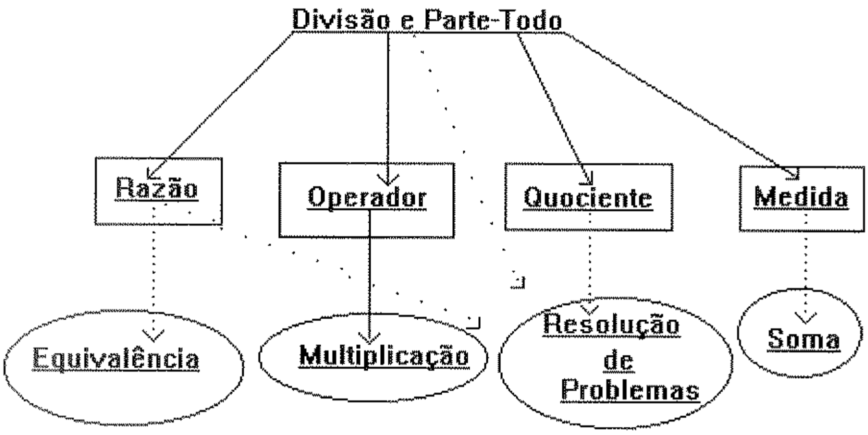


Figura 4- Esquema dos vínculos entre as várias interpretações das frações para as situações de ensino. (Behr, 1983)

Na figura 4, as linhas contínuas representam as relações que se estabelecem e as tracejadas as relações que se prevêem. Considerando-se o esquema acima, à relação parte-todo é dado o papel de promotora do desenvolvimento de outras interpretações, porque conforme Císcar e García (s.d.) esta relação é *"uma das mais intuitivas para a criança"*.

Em seus trabalhos sobre a construção do espaço, Piaget (1993), refere-se à intuição e apesar de não discuti-la, coloca a existência de vários significados para o "termo intuição" e também a variedade de distinções sobre a mesma que tem como objetivo preencher "o fosso artificial aberto entre intuição e lógica". Assim, pode ser dito que a intuição, para Piaget, não é entendida como aprendizagem imediata ou como uma leitura unicamente perceptiva do que é dado externamente ao sujeito. Chiarottino (1972), afirma que a intuição é uma predisposição para considerações de qualidades perceptivas globais dos objetos e não de relações entre os mesmos. Por exemplo: a consideração de uma única dimensão quando duas estão variando ao mesmo tempo. Pelo fato de que as classificações, as correspondências e as seriações só se mantêm empiricamente e não logicamente, o período intuitivo, assim caracterizado, é também chamado de pré-lógico por não dar indícios de pensamentos estáveis e reversíveis, próprios do período operacional.

Considerando as frações e levando em conta esta explicação para a intuição, a compreensão da relação parte-todo é uma das mais intuitivas. Císcar e Garcia (s.d.) afirmam que, para a criança, isto significa que, antes mesmo de tomar contato com o ensino de frações na escola elas já construiram a noção de dividir e de tomar partes quando fracionam algum objeto. Por estarem ainda no período pré operacional ou intuitivo, a relação parte-todo ainda não é quantitativa, mas qualitativa. Isto significa que as crianças se prendem às qualidades das partes como forma, posição, número de pedaços, cortes feitos e não na congruência (mesma quantidade) das mesmas. Muitas vezes, tal congruência é reconhecida quando se sobrepõe empiricamente as partes. Outra grande dificuldade relacionada às frações em uma visão intuitiva é que, devido à irreversibilidade do pensamento pré operacional, o todo não se conserva para a criança porque foi dividido. O todo, algumas vezes fica maior e outras vezes menor que antes de ser dividido. Portanto, a fração, enquanto relação parte-todo, acaba não sendo considerada, mas isto não significa que as crianças não disponham de noções sobre a mesma.

O fato de, historicamente, ter sido atribuído às frações um significado vinculado ao contexto da medida ou da relação parte-todo, não implica em uma redução do conceito, quando este é interpretado a partir da relação parte-todo, Assim, para Císcar e García (s.d.)as seqüências de ensino que partem da relação parte-todo podem fazer com que esta noção primitiva (dividir e tomar partes) possa ser adaptada a outras interpretações com a intenção de que a construção do conceito de número racional não se dê em forma única.

TIPOS DE FRAÇÕES

Tradicionalmente as frações são classificadas em próprias, impróprias, mistas, aparentes ou equivalentes.

As frações próprias são aquelas que se identificam exatamente com a representação a/b, $b \neq 0$, quando o número de partes tomadas é menor que o número de partes iguais em que o todo foi dividido. 1/2, 2/3, 3/4, ..., n/n+1, $n \in N^*$, por exemplo. Tais frações representam pedaços de inteiros, logo são realmente frações.

Apesar de também serem representadas na forma a/b, $b \neq 0$ as frações impróprias são aquelas nas quais o número a de partes tomadas é maior que o número b de partes iguais em que o todo foi dividido. 3/2, 4/3, 5/4,...,n/n−1, $n \in N^*-\{1\}$, também como exemplo. Como estas frações não representam somente partes, são impropriamente chamadas de frações.

As frações mistas são representadas por um número natural mais uma fração do todo. De outro modo, representam a decomposição de uma fração imprópria em uma fração aparente que acaba sendo o número de inteiros mais a parte fracionária restante. Exemplo: 10/3 = 9/3 + 1/3 = 3 + 1/3.

Pelo próprio nome, as frações aparentes na verdade têm características de frações, mas não satisfazem o atributo criterial da representação a/b, b≠0. No caso dessas frações, o numerador a é sempre múltiplo do denominador b ou também se diz que b cabe um número inteiro de vezes em a ou que a divisão entre a e b é exata. 2/1=2, 4/2=2,6/3=2,...,2n/n=2,3n/n=3, $n \in N^*$.

Quando as frações 1/2, 2/4, 6/8, nas representações abaixo, são comparadas, pode ser verificado que existe equivalência entre as porções tomadas. Portanto, as frações 1/2, 2/4, e 6/8 descrevem a mesma relação parte-todo sendo, por essa razão, chamadas frações equivalentes. Todas as vezes que duas ou mais frações representarem a mesma porção ou parte, tomada do inteiro, elas serão chamadas equivalentes.

Dadas duas frações a/b e c/d com b e d≠0, tem-se que estas são equivalentes se, e somente se, $a \times d = c \times b$ com $a,c \in N$ e $b,d \in N^*$.

CAPÍTULO III- A APRENDIZAGEM E O ENSINO DE FRAÇÕES

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO: ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES DE PIAGET

Na explicação piagetiana sobre a origem do conhecimento, dois tipos de conhecimento são considerados: o conhecimento físico e o conhecimento lógico-matemático. O conhecimento físico é construído por abstração simples (também chamada de empírica). A abstração simples é a abstração de propriedades que são observadas nos objetos, porque são inerentes ao objeto ou, de forma geral, na realidade exterior. Assim, a cor, a textura, o peso... estão no objeto e as crianças obtêm tais informações, agindo sobre o mesmo e observando como este reage a essas ações. Já o conhecimento lógico-matemático, construído por abstração reflexionante, refere-se às ações, coordenações e operações que são criadas pelo sujeito na interação com os objetos. Esta abstração é dita reflexionante por duas razões. A primeira delas é no sentido de uma projeção para um plano superior os elementos que são extraídos de um nível inferior. Logo, trata-se de um reflexionamento. A segunda razão, refere-se a um sentido de reorganização dos elementos em um novo plano. Portanto, uma reflexão.

Apesar da diferenciação entre esses dois tipos de abstração *"...as duas existem em todos os níveis de desenvolvimento, dos patamares sensórios-motores, e mesmo orgânicos, até as formas mais elevadas do pensamento científico. No plano biológico, as influências do meio correspondem às abstrações empíricas e as "reconstruções convergentes com superações" (por exemplo, nas relações de homologia entre órgãos que passam de um grupo zoológico inferior a um grupo superior) às abstrações reflexionantes. Nos patamares sensórios-motores, a abstração empírica tira sua informação dos objetos e das características materiais ou observáveis das ações, ao passo que a abstração reflexionante a obtém das coordenações dos esquemas".* Piaget (1995)

Por abstração, Piaget faz alusão ao mecanismo de estruturação do conhecimento pela criança e não à sua capacidade de utilizar imagens e palavras. Esta estruturação é dada à medida que um conceito passa a ter uma disposição e uma ordem em relação a outros conceitos, isto é, o conceito é organizado em uma totalidade estruturada e não é visto de forma isolada.

A explicação da aquisição do conhecimento lógico-matemático por Piaget é centrada na coordenação das ações que o sujeito realiza com os objetos do mundo físico (juntar, separar, ordenar, etc...) e também na disposição organizada mentalmente que põe em relação tais ações.

Apesar de Piaget ter afirmado não existir o conhecimento físico sem um quadro de referência lógico-matemático , para ele, este conhecimento (lógico-matemático) também não rejeita a experiência física. Contudo, não se pode dizer que um conhecimento seja derivado do outro. Para Piaget (1975), operar matematicamente é acomodar um esquema assimilativo ao real, sendo que este esquema de assimilação é a própria operação matemática acomodada ao real e não extraída do mesmo.

Na teoria psicogenética piagetiana, o conhecimento lógico-matemático é derivado da relação entre sujeito e meio e o progresso ou a passagem de um nível ao outro tem sua origem em desequilíbrios traduzidos por conflitos, oposições e desajustes. O aproveitamento destes desequilíbrios está diretamente ligado ao grau de desenvolvimento do sujeito, ou seja, aos seus quadros assimilativos e às acomodações correspondentes à sua superação. O progresso nesta teoria reside em superar conflitos (desajustes) pela organização de um novo nível de entendimento através de elementos extraídos de um nível anterior. Portanto, este progresso usa mecanismos básicos que são a abstração e a generalização, Piaget (citado por Teixeira,1992).

Através dos mecanismos de abstração e generalização, o conhecimento lógico-matemático é explicado originalmente pelos elementos do esquematismo prático existentes no nível sensório-motor. No estágio das representações o pensamento retira do estágio anterior relações funcionais de encaixe e de ordem e projeta para um estágio superior ao mesmo tempo que reflete e organiza uma nova construção. Esta nova construção que acaba sendo as noções de encaixe e de ordem desencadeiam o conceito de número que passa também a ser básico em outras construções futuras (Piaget,1975).

O número fracionário, para Piaget (1975), apresenta o problema das relações entre a ação operatória e a representação perceptual. Este problema acaba por desencadear a discussão sobre a origem dos números fracionários, isto é, se os mesmos derivam a partir da ação (por abstração reflexionante) ou a partir do objeto (por abstração empírica). O fato do número fracionário ter surgido da necessidade de expressar numericamente a medição de terras (precisamente a comparação de um segmento por outro) propiciou a alguns autores acreditar que a origem do número fracionário seja mais espacial que aritmética e mais perceptual que operatória. Assim, o número fracionário teria sua origem na experiência física do fracionamento de objetos contínuos.

Para Piaget (1975), a conceituação de fração depende de uma relação recíproca entre a subdivisão de um objeto e sua recomposição. As operações exigidas na subdivisão de classes ou de coleções descontínuas ou discretas (compostas por objetos individualizados) são chamadas de operações lógicas porque não dependem da proximidade espacial ou temporal. Assim, não requerem, portanto, qualquer modificação dos objetos aos quais se aplicam. As operações chamadas de infralógicas são aquelas que se referem a objetos cujas partes não estão nitidamente separadas, isto é, aos objetos contínuos. O fato de serem chamadas infralógicas não implica na inferioridade dessas operações em relação às operações lógico-aritméticas, mas sim que elas são formadoras da noção de objeto como tal, em oposição aos conjuntos de objetos.

Mesmo diferindo, as operações lógicas e infralógicas surgem paralelamente no desenvolvimento cognitivo e são semelhantes em sua estruturação,ou seja, estudar a gênese do conceito de fração mostra que não há evidências que o mesmo seja construído no campo infralógico dos objetos contínuos antes que seja construído no contexto de conjuntos descontínuos de caráter lógico-aritmético. As dificuldades para compreender as operações com frações, tanto em um tipo de operação como no outro, devem-se à ausência de esquemas de encaixes e de comparações entre as partes divididas.

No processo de desenvolvimento do conceito de fração, a criança quantifica intensivamente as partes em relação ao todo, compreendendo que o todo é igual à soma de suas partes. Esta compreensão é atingida devido às operações infralógicas inversas de decomposição das partes e também de adição das mesmas no todo. Desta comparação, entre o todo e as partes, surge a verificação de que uma parte é o resultado da diferença entre o todo e a(s) outras parte(s). Construída a noção de parte, através do relacionamento entre as mesmas, a necessidade de igualá-las é reconhecida.

A construção do conceito de fração depende, deste modo, de duas relações fundamentais: a relação da parte com o inteiro (relação lógica e intensiva) onde se reconhece que a parte está contida no todo que tem que ser exaustivamente dividido e a relação parte-parte onde os tamanhos de todas as partes de um único inteiro são comparados ao daquela primeira parte.

Segundo Piaget, Inhelder e Szeminska (1948), a noção de fração quer seja relativa à quantidade contínua (área, comprimento,volume,etc..) quanto à quantidade descontínua ou discreta (bolinhas,grãos,botões,etc...) constrói-se no nível das operações concretas. Além disso, indicam que a construção do conceito de fração só é possível quando ocorrer uma articulação entre os seguintes elementos: existência de uma totalidade divisível; existência de um número determinado de partes; esgotamento da divisão do todo; relação entre o número de partes e o número de cortes; igualização das partes; compreensão de que cada fração pode também ser um todo sujeito a novas divisões; atendimento ao princípio da invariância.

Este último elemento, princípio da invariância, diz respeito ao fato de a quantidade (contínua ou discreta) dos objetos não variar em função da variação de suas formas, posições, arranjos... É preciso que a criança tenha a capacidade de compreender que essas modificações resultam de transformações mentalmente reversíveis. Somente tendo esta capacidade é que a criança entenderá que uma parte é o resultado da diferença entre o todo e a(s) outra(s) parte(s) e também que a soma de todas as partes é igual a este todo.

E quando se coloca o fato de a unidade numérica ser indivisível e a unidade métrica ser infinitamente divisível para favorecer a origem espacial das frações, de outra forma, para mostrar que se originam na medição, Piaget (1975) faz um paralelo convincente entre a formação do número e a medição.

Ao agir sobre um objeto, pela partição e sobreposição de uma parte (a unidade) sobre as outras, a criança conseguirá perceber o todo como um múltiplo da unidade tomada. Para Piaget, isto também acontece na construção do conceito de número, quando a criança trabalha simultaneamente com o encaixe de classes e a seriação das relações não simétricas. Logo, não é certo, pois não há evidências de que o conceito de fração seja dado primeiro em um contexto contínuo, de caráter infralógico, antes que seja dado em um contexto discreto de caráter lógico-aritmético.

Na presença do esquema de encaixe e de comparação entre as próprias partes, tanto no contexto discreto como no contínuo a criança conseguirá obter meios, terços e quartos desejados. Já na ausência deste esquema, um quarto ou a metade da metade provocará dificuldades, tanto no contexto contínuo como no discreto. Conforme assinala Piaget, esta dificuldade não está no contexto trabalhado, mas sim na ausência de um esquema de comparação e de encaixe entre as partes e o todo. Assim, o processo de construção do conceito de frações métricas ou numéricas está vinculado aos problemas das relações entre a ação operatória e a representação perceptual, isto é, entre a abstração reflexionante (a partir da ação) e a abstração empírica (a partir do objeto), colocando a primazia na primeira como elemento ativo ou operatório responsável pela generalização necessária para a construção da idéia de número fracionário.

Lima (1983), fazendo um relacionamento entre os precedentes que norteiam a conservação de quantidade e a evolução do conceito de fração considerando as contribuições de Piaget, acredita que quando é utilizado o critério histórico, no que diz respeito ao ensino de frações, o professor arrisca-se a trabalhar com crianças ainda não conservativas em relação à quantidade contínua. Entende-se por conservação de quantidade contínua e ou mesmo discreta o fato de tal quantidade não variar enquanto sua forma, sua posição ou outro componente são modificados. É preciso que a criança tenha a capacidade de compreender que essas modificações resultam de transformações mentalmente reversíveis, de outro modo, a capacidade de entender o ir e voltar como aspectos de uma mesma ação. Somente com esta capacidade a criança poderá entender que uma parte é o resultado da diferença entre o todo e a(s) outra(s) parte(s) e também que a soma de todas as partes, extraídas de um todo, é igual a este todo. Construir psicologicamente o conceito de fração significa compreender os elementos envolvidos neste mesmo conceito, de acordo com esse enfoque.

Quando se coloca a questão de como ensinar este conceito, pode-se avaliar, de acordo com a concepção genética de Piaget, que esta construção é bastante complexa para a criança. Esta mesma complexidade tem sido discutida por vários autores (Castelnuovo 1951; Dienes 1971; D"Augustine 1976; Lowell 1986; entre outros) que estudam a aprendizagem de conceitos matemáticos. Demonstrando sobretudo que aprender um conceito demanda um longo processo que envolve trabalhá-lo de forma muito variada ao longo do tempo.

Os estudos de Piaget oferecem suporte para a compreensão dos mecanismos gerais da construção dos conceitos, considerando os processos internos do sujeito que aprende. Assim, a construção ou a reconstrução de um conceito pressupõe um ajuste ao real através da reorganização de mecanismos existentes em um nível anterior, sendo que este promoverá o entendimento em um grau mais elevado em relação ao que já existe no sujeito. Tais mecanismos dizem respeito à abstração reflexionante e à generalização construtiva.

ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES DE VERGNAUD

Mais especificamente, Vergnaud além desses mecanismos gerais procura explanar os mecanismos da construção de conceitos propriamente matemáticos em um contexto de aprendizagem escolar. Para isso, pesquisa os procedimentos e estratégias que as crianças usam na tentativa de solucionar problemas a fim de clarear os processos cognitivos envolvidos. Sendo esses processos tanto de natureza lógica como simbólica. Deste modo, não só mais objetos, propriedades, relações e processos são estudados, mas também os diferentes significados atribuídos a um conceito e suas diferentes representações para o sujeito que aprende.

Vergnaud (1990), baseado em uma concepção interativa da formação de um conceito, coloca que não só nos aspectos práticos, como também nos teóricos, o conhecimento emerge de problemas a serem resolvidos e de situações a serem dominadas.

Portanto, as situações de ensino devem levar os alunos a descobrir relações e questões além das que estão acostumados. Concepções, modelos e teorias dos alunos são formados por situações as quais são submetidos. Pode haver grandes lacunas entre as concepções das crianças e os conceitos matemáticos. Tratando-se de frações, por exemplo, as mesmas podem referir-se a um conjunto de situações, tão limitado aos alunos, que eles não poderão compreender por quais razões elas são ferramentas tão poderosas. Logo, é essencial que os professores estejam conscientes de que não podem resolver o problema do ensino usando meras definições por melhores que essas sejam.

As concepções dos alunos só mudam se estes forem colocados em situações conflitivas para as quais não consigam encontrar soluções adequadas. Dentro de uma abordagem desenvolvimentista, concepções e habilidades desenvolvem-se no decorrer da vida do sujeito. Isto se dá não apenas para características gerais do pensamento, tais como foram estudadas por Piaget e outros psicogeneticistas, mas também para conteúdos específicos do conhecimento. Para Vergnaud, os conceitos de fração e razão têm suas raízes em atividades que são significativas para crianças de oito anos de idade para valores simples como 1/2 ou 1/4. Todavia, o conceito de número racional é uma grande e duradoura fonte de dificuldades para jovens de quinze ou dezesseis anos de idade e para muitos adultos. Ainda dentro desta abordagem, subestimar como vem sendo feito a lentidão do desenvolvimento de algum conceito é algo a ser pensado, pois diferentes problemas geralmente necessitam do domínio de diferentes propriedades do mesmo conceito.

Dentro da concepção interativa, Vergnaud (1990) considera um conceito como um agrupamento (S,I,@) onde S é o conjunto de relações que tornam o conceito significativo, I é o conjunto de invariantes operatórios que são subjacentes ao procedimento dos sujeitos frente a uma situação e @ é o conjunto de representações simbólicas usadas para representar o conceito, suas propriedades e situações as quais se refere. Os invariantes operatórios são os meios psicológicos ou operações do pensamento que permitem ao sujeito trabalhar com as situações e, por fim, os significantes que são o conjunto de símbolos usados para representar os invariantes, as situações e os procedimentos de tratamento. Portanto, neste ponto de vista, um conceito remete necessariamente a muitas situações, a muitos invariantes e também a muitas representações possíveis. Ainda nesta concepção, a formação de um conceito pressupõe aceitar que não há oposição entre aspectos práticos e teóricos do conhecimento.

Para Vergnaud, a representação é fundamental para a análise da formação de um conceito e de sua utilização. Por representação, entende-se a estreita ligação entre significante e significado. Logo, entre aquilo que sustenta a linguagem natural (falas, símbolos, desenhos, fórmulas, diagramas, gráficos...) e aquilo que compõem o próprio significado (invariantes de diferentes níveis, inferências, regras de ação e predições).

Vergnaud estabelece uma ligação direta entre o sistema de representação e a ação sobre o meio ou o real, pois a representação só pode ser funcional à medida que regula a ação, sendo que é por parte desta mesma ação e também por suas expectativas que o sujeito parte para novas ações. Como a representação tem sua função adaptativa ao real, não se pode afirmar que apenas simbolizações sociais (significantes) são as responsáveis por esta adaptação. Os símbolos têm seus papéis no que diz respeito a acordos entre sujeitos quanto a um conceito, mas não são necessariamente intermediários obrigatórios entre significantes e significados. Para Vergnaud, toda relação entre o real e o plano do significante é mediada pelo significado. Pode-se dizer assim que um símbolo só é funcional à medida que existe para o sujeito.

Para Vergnaud (1983), *"...o conceito de número racional é definido em Matemática, como uma classe de equivalência de pares ordenados de números inteiros"*. Isto é uma construção tardia na história da Matemática. Especificamente sobre os conceitos de fração, razão e número racional, Vergnaud em um trabalho realizado em 1994, aponta que o entendimento pelas crianças de frações e razões como números que podem ser adicionados, subtraídos, multiplicados e divididos deve ser precedido pelo entendimento de frações e razões como operações, relações ou quantidades. A divisão de um bolo ou de um conjunto de figurinhas é envolvida em seu começo por uma operação (partir de uma quantidade inicial e chegar a um conjunto de quantidades finais que acabam sendo as partes). Assim, partir um inteiro em partes é uma primeira experiência com frações e essa ação envolve uma proporção direta entre as partes e a quantidade ou a grandeza a ser dividida. Uma importante diferença entre grandezas discretas e contínuas é que dificilmente a medida destas últimas é conhecida (por exemplo, a área, o volume, o peso...), enquanto que no caso discreto tal medida pode ser contada. Consequentemente, no caso contínuo, o valor da unidade é necessariamente expresso como uma quantidade fracionária (meio, um quarto, um quinto...). No caso discreto, esta mesma quantidade pode também ser expressa como um número de elementos (1/4 ou 3 balas para um todo de 12 balas). Para Vergnaud (1983), quando se toma um conjunto discreto como 1 (um) inteiro, a criança que tem intenção de partí-lo em 4 partes, por exemplo, tem que reconhecer que é necessário dividir a unidade 1 por 4. Este autor afirma que este é um problema para a escola elementar, pois os números inteiros podem ser diretamente associados a quantidades através de um procedimento de contagem, as frações (mesmo as mais elementares, tais como: 1/n) não podem ser diretamente associadas a quantidades porque estas expressam relações entre duas quantidades. É interessante observar que este problema difere tanto para quantidades contínuas como discretas e para valores numéricos diferentes. Logo, as dificuldades no trabalho com frações 1/2 ou 1/4 não são as mesmas que aquelas com frações de valores diferentes destes, por exemplo a fração 1/3.

Um outro problema conceitual principal para os estudantes é que as frações podem ser quantidades, operadores escalares ou funções e que estes diferentes conceitos podem ser integrados, por síntese, em um único conceito matemático que é o conceito de número racional.

As quantidades fracionárias e as grandezas escalares só podem ser concebidas, através de operadores escalares, ou seja, um encadeamento entre divisões e multiplicações. O operador escalar, por ser o quociente entre duas quantidades de mesma dimensão, expresso na mesma unidade, não possui nem dimensão e nem unidade.

Em relação à formação do conceito de número racional, este autor coloca a necessidade de síntese entre frações como um número (quantidade) e frações como operações, mas deixa claro que tal síntese é, por si mesma, difícil e esta dificuldade é aumentada por dificuldades próprias do conceito, tais como a equivalência de frações e também os diferentes significados das frações e das razões.

São somente três os significados das frações e das razões citados por Vergnaud:

• frações (parte-todo). Duas quantidades de mesma natureza estão relacionadas onde se tem um caráter de classificação, isto é, uma quantidade está incluída na outra.

• razões (parte-parte). Duas quantidades de mesma natureza estão relacionadas sem que uma esteja incluída na outra.

• relações. Duas quantidades de naturezas diferentes que são relacionadas. (velocidade/tempo, espaço/velocidade, colher de açúcar/litro).

Tanto as frações (parte-todo) como as razões (parte-parte) são escalares, ou seja, números puros e podem ser expressas por expressões como "n vezes mais" e "n vezes menos". Já as relações entre quantidades de naturezas diferentes (operadores funcionais) necessitam de análise dimensional e são freqüentemente expressas como quocientes: "95 quilômetros por hora" e "3 colheres para um litro".

Apesar de também trazerem dificuldades conceituais aos estudantes, os operadores funcionais fornecem o modo mais natural de introduzir o conceito de uma classe infinita de pares ordenados. Por exemplo, na tabela abaixo, partindo-se do fato de que 12 Quilos de trigo produzem 10 Quilos de farinha, pode-se construir uma tabela de correspondência entre 12 Quilos de trigo e 10 Quilos de farinha, 18 e 15, 24 e 20 até 6n e

5n. Deste modo, todos os pares ordenados da forma (6n, 5n) pertencem a uma classe infinita. A tabela mostra que a função pode ser expressa por um operador X 10/12, X 15/18 até X 5/6 que é o elemento mais simples da classe dos pares ordenados.

Quilos de trigo	Quilos de farinha
12	10
18	15
24	20
30	25
6n	5n
6	5

Para Vergnaud estas diferenciações tornam o ensino e a aprendizagem de frações, razões e relações não independentes das estruturas multiplicativas e somente quando os diferentes significados são sintetizados no conceito de número racional, perdendo seus aspectos dimensionais e também a distinção entre elemento e relação, torna-se possível pensar (através de construções) em frações e razões como números puros. Contudo, de acordo com esse autor *"... os professores não deveriam esperar que esta construção seja rápida e fácil para os estudantes. Os estudantes não podem trabalhar sobre objetos sem sentido para eles e não deveria ser surpresa quando tentam tornar significativos os números puros por interpretá-los como quantidades ou operadores"*. (Vergnaud, 1983).

As estruturas multiplicativas são definidas como um conjunto de problemas que necessitam das operações de multiplicação e divisão. Mesmo não sendo independentes das estruturas aditivas, as estruturas multiplicativas são um campo específico que inclui problemas de proporção *simples "mesmo os problemas de multiplicação e divisão são problemas de proporção"* e composta que *"infelizmente não são analisadas como tal":* área, volume, grandezas de tipos iguais e diferentes, Vergnaud (1982).

Como afirmado anteriormente, nas teorias interacionistas, um conceito está ligado a muitas situações e uma única situação está ligada a vários conceitos ao mesmo tempo. Neste sentido, Vergnaud propõe o estudo de um conceito através do chamado campo conceitual. Por exemplo, a mecânica que engloba relações entre massa, variação de espaço, variação de velocidade e de tempo, aceleração e força, é um campo conceitual. Uma maneira de mostrar a extensão desse campo é trabalhar com situações significativas que demonstrem a variedade de propriedades e teoremas cujos elementos que formam o campo conceitual contêm.

Um outro exemplo de campo conceitual, agora na Matemática, é o tópico sobre determinantes. Todo determinante pode representar, por exemplo, as coordenadas dos vértices de um triângulo, os pontos de uma reta ou os pontos de um plano. Logo, devido a propriedades e teoremas pertencentes a este tópico, através do cálculo do determinante, chega-se à área de um triângulo (área = 1/2 |D|, onde |D| é o determinante da matriz composta pelos vértices do triângulo), à equação de planos e retas e também, por exemplo, à determinação ou não das soluções dos sistemas lineares que englobam diversos teoremas, propriedades e situações significativas.

O tratamento ou a análise que Vergnaud faz da formação de um conceito é de caráter operatório porque este mesmo conceito é o resultado da estruturação do real e da ação do sujeito sobre o real, (Teixeira, 1992). Dando ênfase ao papel da representação em uma teoria operatória da aprendizagem, Vergnaud faz algumas colocações que podem nortear métodos de ensino: 1) o desenvolvimento de um conceito é lento e todo currículo, baseado na construção de conceitos científicos, deve prever estudos de um mesmo conteúdo com aperfeiçoamentos progressivos; 2) a coleta e a classificação de situações-problemas que tornem um conceito matemático funcional e significativo deve ser tão ampla ao ponto de chegar à exaustão; 3) as idéias dos alunos só podem mudar frente a situações problematizadoras,e, portanto o ensino não parte de definições por melhores que estas sejam; 4) as generalizações de propriedades relevantes de situações simples das variáveis só devem acontecer depois que estas se tornarem óbvias em tais situações; 5) o ensino de algorítmos não devem ser independente dos problemas ou também ligado a uma classe restrita de problemas e 6) os professores devem ter conhecimento do papel da experiência na formação dos conceitos, e deveriam buscar conhecer os conceitos prévios dos alunos e também os erros e prováveis dificuldades na resolução de problemas novos buscando, desta forma, dominar o conjunto de situações que propiciem a acomodação das idéias e dos procedimentos a novas relações e também descobrir os processos através dos quais conceitos prévios podem tornar-se mais desenvolvidos.

ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES DE OUTROS AUTORES

D"Augustine (1976) afirma que a idéia de fração é um conceito sofisticado, pois necessita de maturidade e base matemática bem maiores que aquelas necessárias aos números Naturais, pois enquanto o número Natural é a propriedade de um determinado conjunto, o número Fracionário é associado à: partilha de um conjunto determinado, razão das propriedades numéricas de dois conjuntos determinados, um número associado à partilha de um conjunto contínuo e um número que representa o quociente de dois números naturais, sendo o divisor diferente de zero.

Aguiar (1983), relacionando o número Fracionárioàs associações acima, explica a mudança dos significados dos termos de uma fração. Assim se a fração está representando um número associado à partilha da área de um objeto, seu numerador indicará o número de partes iguais ou de unidades fracionárias que foram medidas ou retiradas do todo, enquanto seu denominador representará o número de partes iguais em que o objeto foi repartido. Quando está associada a uma razão, tanto numerador quanto denominador indicam números, ou seja, propriedades de dois conjuntos ou subconjuntos que foram colocados em correspondência.

Lovell (1986) diz que se pode estimar de diversas maneiras o símbolo 3/4, por exemplo. Em primeiro lugar, pode ser considerado um indicador das relações entre o todo e as partes. Em segundo lugar, há a consideração como um submúltiplo, isto é, quando se mede em polegadas, fala-se uma polegada e três quartos de polegadas. Em terceiro lugar, o mais usado, considera-se o símbolo como um par de números Inteiros ordenados de forma determinada, pois a ordem neste caso é necessária.

Devido a estes vários significados, que Ohlsson (1989) explica a dificuldade em relação às frações. Tal dificuldade está associada à natureza semântica das mesmas. Para ela, uma fração é "*uma função do significado de seu numerador e de seu denominador*". Assim, `a medida que numerador e denominador assumem diferentes significados, as frações são associadas ou aplicadas a diferentes situações tanto em teorias matemáticas como em situações do mundo real. Isto se dá porque devido ao fato de o numerador e o denominador serem inteiros eles tanto podem ser quantidades (número de balas) como parâmetros (número de vezes em que uma operação é repetida). Quando o numerador é uma quantidade e o denominador é um parâmetro, tem-se uma partição. Já no caso em que tanto numerador como denominador são parâmetros, tem-se um operador.

Quanto aos critérios históricos (ensinar com base na medição) ou psicológicos (ensinar com base na conservação de quantidade discreta) relacionados ao ensino de fração, Lima (1983) acredita que o critério psicológico para o ensino é o mais apropriado, pois respeita as possibilidades cognitivas da criança. Sugere também que o professor ao iniciar os estudos sobre frações com as crianças não conservativas em área, cabe ao mesmo: aguardar que estas atinjam a conservação ou optar por trabalhar com quantidades discretas, já que por familiaridade com coleções, a criança atinge a conservação em quantidade discreta bem antes que em contínua e mais, pode ainda usar artifícios como contagem e correspondência e também contar com o fato do número de elementos a ser dividido ser sempre múltiplo do número de elementos das subcoleções, buscando desta forma não cair no caso contínuo.

D" Augustine (1976), afirma que na séries iniciais o estudo deve partir de objetos contínuos e ressalta que deve ser dada *"ênfase ao desenvolvimento intuitivo de números fracionários e a criança trabalhará com conceitos como regiões de polígonos, segmentos de retas, linhas e conjuntos (descontínuos) determinados. Também será dada ênfase ao desenvolvimento de um conjunto intuitivo de nomes equivalentes para o mesmo número fracionário através do trabalho com regiões congruentes".* Já nas séries mais adiantadas, deve haver uma extensão do conceito de número fracionário e de frações equivalentes a um desenvolvimento das operações de adição, de multiplicação e de suas respectivas inversas.

Para Dienes (1971), o ensino de frações parte sempre do conceito de medida, sendo uma fração considerada tanto um estado como um operador. Pelo fato de acreditar que uma fração nada mais é que uma sucessão de multiplicações e divisões, indica que a partir de cadeias de adições e subtrações, de multiplicações e divisões com números inteiros, é possível chegar ao número fracionário. Partindo de conjuntos discretos, apresenta uma seqüência de ensino diferenciada da apresentada por D"Augustine, pois indica que após o estudo de equivalência, estuda-se multiplicação e divisão de frações, depois as relações de desigualdade e finalmente as operações de adição e subtração.

Tratando do ensino de frações alguns autores examinam as causas das dificuldades encontradas para o ensino-aprendizagem do conceito de frações. Autores como D"Augustine (1976), Castelnuovo (1970), Dienes (1971) e outros têm apontado que o fracasso no ensino deve-se a uma inadequação de metodologia. Mais especificamente, Castelnuovo (1970) levanta as questões da relação entre o concreto e o formal, mostrando que a criança se atém ao mecanismo, perdendo o significado dos símbolos e do porquê das operações, não conseguindo integrar produtivamente significado e símbolo. Já Dienes (1971) aponta que as crianças têm uma experiência no campo das frações extremamente limitada. Vê-se, no geral, que uma criança frequentemente encontra exemplos de metade, de um quarto , de um terço, mas não encontra com essa mesma freqüência outras frações.

Quanto ao início do estudo de frações, a criança está na idade onde sua experiência pessoal e concreta prevalece em relação à experiência alheia, no que diz respeito à aprendizagem. Como as variações que levam à familiarização das propriedades de frações não se encontram em seu ambiente natural, cabe ao ambiente escolar apresentar tais variações.

Ao entrar na escola a criança traz consigo idéias vagas e mal concebidas sobre frações (D"Augustine,1976). Para uma criança em idade pré-escolar, por exemplo, tirar a metade de uma bala pode significar nada mais que não tirar a bala inteira. As primeiras experiências não partem da divisão congruente dos conjuntos. A esperada divisão congruente é o resultado das articulações entre a comparação visual e a superposição de partes.

Ainda sobre o papel da escola, Dienes (1971), destaca a necessidade da apresentação de experiências nas quais a idéia de fração e de relações entre frações sejam construídas pelas crianças. Para ele, no cumprimento de tal papel não se dispensa o uso de materiais didáticos. Algo que deve ser incorporado pela criança, é o fato de ser aleatória a escolha da quantidade que se tomou como unidade. Daí a importância da mesma saber que existem diferentes espécies de objetos e de medidas para medí-los. É fundamental que se discuta esse ponto antes da abordagem do estudo de frações e de suas propriedades.

Outro fundamento para o ensino de frações apresentado por D"Augustine (1976), Aguiar (1983), Lovell (1986), refere-se à necessidade de reconhecer que o conceito de frações possui várias interpretações que estão intimamente ligadas a cada contexto trabalhado.

Ciscar & García (s.d) tratam o conceito de fração como um megaconceito, no sentido deste possuir várias interpretações que têm como sintetizador o número racional. Isto vai diretamente ao encontro da noção de campo conceitual utilizadas por Vergnaud (1982) para quem um conceito está ligado a várias situações e também a vários outros conceitos.

No geral, para estes autores, uma fração representada simbolicamente por $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, pode significar: uma relação parte-todo; uma relação parte-parte; um quociente; uma medida; um operador.

Para Ciscar & García (s.d), a variedade de estruturas cognitivas subjacentes a cada interpretação condiciona o processo de aprendizagem global das frações a um longo prazo, pois a "distância" que existe entre as primeiras noções de meios, quartos e terços com a habilidade de manejar a divisão e a inclusão de classes até o trabalho com razão e proporção que subentendem a habilidade de comparar e "manejar dois conjuntos de dados ao mesmo tempo" (operações de 2ª potência) é realmente considerável.

O trabalho com frações em diferentes contextos tem apontado dificuldades que podem ser devidas `a centração na interpretação de uma fração como parte-todo. Hart (apud Ciscar & García) realizou um estudo onde verificou que o entendimento de uma fração a/b, $b \neq 0$, como uma divisão entre dois números Naturais só foi possível à terça parte de jovens com idade entre doze e treze anos que foram seus sujeitos. Para Kieren (1980) (apud Ciscar & García) mesmo que uma fração a/b, $b \neq 0$ tenha igual resultado na relação parte-todo ou no contexto de uma divisão (dois terços de uma torta ou dois pastéis divididos entre três pessoas), para as crianças que estão aprendendo a trabalhar com frações a diferença é muito grande, pois interpretar uma fração como o quociente entre dois números é estabelecer uma relação entre a fração e o resultado da divisão efetuada, por exemplo, $\frac{1}{2}$ e 0.5 e também considerar a fração como um número racional.

Apesar destas dificuldades Streefland (1984) (apud Ciscar & García) coloca o desenvolvimento de uma seqüência de ensino baseada na fração como quociente e afirma que os obstáculos ou dificuldades quanto ao ensino de frações na escola, estão centrados na tendência de se usar um tratamento formal e algorítmico precoce das idéias sobre as frações. Para este autor, o entendimento de uma situação de "repartir" (3 pastéis entre 4 pessoas) "*aparece a partir de um processo de diferenciar, dividir, abreviar, representar, simbolizar...*" e está muito além da representação de diagramas com partes igualmente divididas e algumas delas tomadas.

Streefland (1984) (apud Ciscar & García) defende alguns princípios de ensino, muitos deles similares aos propostos por Vergnaud. São eles: a construção de conceitos baseada na atividade da criança: estimação, desenvolvimento de certo sentido de ordem e tamanho das partes; a valorização do trabalho das crianças (métodos e procedimentos) mesmo que difiram das aproximações formais; ênfase na verbalização do conhecimento adquirido, na capacidade de formular regras e na compreensão do poder das generalizações; utilização do conhecimento informal das crianças como idéias de metades, quartos, terços... e processos básicos de dividir e repartir como base de uma seqüência de ensino; desenvolvimento de situações de comparar e ordenar que propiciem a construção de procedimentos de solução a partir de processos de dividir, ordenar, medir, compor...; utilização de materiais ou modelos de apoio (retas numéricas, tábuas de razões...) e situações problemáticas cotidianas que possam conectar situações problemáticas em diferentes contextos e o trabalho numérico.

Complementando as idéias acima, Suydam (1979) (apud Ciscar & García), após analisar projetos de investigação sobre o ensino das idéias relacionadas ao número racional, aponta que é conveniente a consideração de objetivos a curto e longo prazo em relação a cada interpretação das frações; selecionar as interpretações apropriadas para desenvolver estes objetivos levando sempre em conta as estruturas cognitivas necessárias; proporcionar atividades de ensino que busquem desenvolver tais estruturas.

Referindo-se ao ensino de frações, Bezuk e Cramer (1989) enfatizam que a aprendizagem de frações é uma das tarefas mais difíceis para crianças e jovens e , por isto, "*não deveria haver surpresa quanto a esta dificuldade já que além da existência dos diversos conceitos envolvidos no conceito de fração, os alunos têm que conciliar as novas regras estabelecidas para as frações com os seus bem estabelecidos conhecimentos para números Inteiros*". Esta interferência do conhecimento de números inteiros aparece bem na questão de ordenação de frações como também na questão da representação matemática das mesmas.

Devido às complexidades das frações, para estas autoras não só um maior tempo dos currículos deveria ser destinado ao desenvolvimento do conceito de frações, mas que este desenvolvimento deveria ser voltado muito mais para um entendimento quantitativo das frações que para o desenvolvimento algorítmico das mesmas com vistas a suas operações. Para pensar quantitativamente sobre frações, os estudantes deveriam conhecer algo sobre o tamanho relativo das frações e saber ordenar frações com numeradores ou denominadores iguais. Contudo, tal aquisição de um entendimento quantitativo de frações é baseado nas experiências dos estudantes com modelos concretos e na instrução que dá muito mais ênfase ao significado das frações que a procedimentos com as mesmas.

De acordo com Bezuk e Cramer (1989), as frações apesar de começarem a ser ensinadas na 2ª série só possuem um trabalho principal na 4ª série. Nas 4ª, 5ª e 6ª séries, tem-se o ensino de alguns tópicos como equivalência, ordem, adição e subtração, mas acima de tudo uma repetição da direção e seqüência de ensino destes tópicos que resulta em uma não compreensão de tópicos primordiais às operações como a questão da equivalência.

Nesta linha de pensamento, as autoras sugerem que as operações com frações deveriam só ser trabalhadas na 6ª série ficando para as séries 4ª e 5ª o desenvolvimento do entendimento conceitual das frações bem como da questão da ordem e equivalência das mesmas.

Algumas recomendações quanto ao ensino de frações são deixadas por estas autoras: 1) o uso de manipulativos (materiais concretos) é de fundamental importância para o entendimento das idéias fracionárias por parte dos estudantes porque os manipulativos ajudam na construção de referências mentais que capacitam os estudantes a desempenhar significativamente as tarefas com frações; 2) o desenvolvimento de conceitos e relações entre frações é essencial com vistas às operações sobre as mesmas. Antes da 6ª série, a maior parte do tempo instrucional deveria ser gasto com estes tópicos. 3) as operações com frações deveriam ser adiadas até que os conceitos e as idéias sobre equivalência e ordem das frações estivessem solidamente estabelecidos; 4) os tamanhos dos denominadores usados nos exercícios de computação de frações não deveriam ultrapassar doze.

Por fim, as autoras concluem dizendo que buscam encorajar professores para desempenharem uma instrução que dê ênfase ao envolvimento dos estudantes, ao uso de materiais concretos e ao desenvolvimento conceitual de frações antes do trabalho com símbolos e operações

Da literatura revista sobre o ensino de frações, pode-se depreender que esse conceito é bastante complexo e possui diferentes interpretações que às vezes se relacionam e que têm por objetivo sustentar o conceito de número racional. Além do mais é necessário considerar que as noções matemáticas não se desenvolvem em uma única etapa e no mesmo nível de operatividade. Portanto, a criança pode desenvolver a idéia de fração ligada à relação parte-todo em um dado momento da aprendizagem e posteriormente, com a ampliação da idéia de fração (ligada a outras situações), esta noção primitiva (dividir e tomar partes) sofrerá adaptações e ampliar-se-á.

CAPÍTULO IV
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Não era objetivo do presente trabalho fazer uma completa revisão das pesquisas sobre a aprendizagem de frações, mas apenas verificar, através de alguns resultados de trabalhos, como diferentes autores analisam as dificuldades encontradas pelas crianças no trabalho com frações.. Assim, à medida que estas dificuldades são clareadas, tornam-se uma útil ferramenta na elaboração de novos princípios de ensino para frações com suas diversas interpretações. Foram coletadas referências no sistema ERIC, e a consulta resultou em cento e treze artigos cujos resumos eram relacionados a este trabalho. Entretanto, vários deles não estavam disponíveis. Os artigos conseguidos encontram-se na bibliografia deste trabalho

Payne (1976), revendo as pesquisas sobre frações, mostra que no período compreendido entre 1968 e 1973 as pesquisas no Estado de Michigan (EUA) tinham como objeto de estudo o trabalho com frações quanto aos algorítmos e também quanto ao uso de diversos materiais manipulativos ou concretos. A partir de 1973, uma nova ênfase foi dada às pesquisas, isto é, passou-se a examinar o que as crianças aprendiam quando ensinadas por uma seqüência de passos cuidadosamente desenvolvida, sendo que os pesquisadores foram influenciados pelo trabalho de Bloom sobre a aprendizagem de habilidades e de Greeno com sua pesquisa sobre resolução de problemas usando modelos de processamento de informações. Os procedimentos e as seqüências dos tratamentos podem ser encontrados em Payne (1975).

As dificuldades encontradas pelo grupo de pesquisadores identificam-se com as relacionadas no final deste capítulo, sendo que as dificuldades no trabalho com a reta numérica, com frações maiores que 1 e com unidades discretas foram sempre destacadas. Outras dificuldades das crianças também encontradas pelos pesquisadores foram a passagem dos objetos concretos para os diagramas e a verbalização de idéias aparentemente entendidas.

Muangnapoe (1975) (apud Payne, 1976), ao trabalhar com uma seqüência para iniciar o conceito de fração, fez uso de objetos concretos como folhas, tiras de papel e diagramas buscando em cada aula relacionar tais objetos com seus nomes até chegar ao relacionamento com seus símbolos matemáticos. Ele comparou resultados obtidos entre 4 classes regulares de 3ª e 4ª séries com aqueles de sua própria instrução (15 crianças separadas em grupos de 3). Apesar do desempenho das crianças ensinadas por Muangnapoe ter sido substancialmente melhor, algumas dificuldades persistiram: dificuldade para identificar a unidade de diagramas quando mais de um diagrama era mostrado; dificuldade para dividir círculos em partes iguais (uso de cortes paralelos); dificuldade para comparar frações usando símbolos matemáticos; dificuldade para com frações maiores que 1; dificuldade para identificar frações na reta numérica.

Tomou-se quase todo o ano letivo para que a seqüência de Muangnapoe fosse desenvolvida (esta pode ser encontrada em Payne, 1974) para que um "raro" bom desempenho fosse apresentado pelas crianças neste estudo.

Williams (1975) (apud Payne, 1976), depois de fazer algumas modificações também usou a seqüência de ensino de Muangnapoe. A própria pesquisadora trabalhou com duas classes de 2ª e 4ª séries e dez crianças de baixo desempenho que estavam na 6ª série. Em sua pesquisa, as resistências e as dificuldades das crianças foram descritas. Na 4ª série, devido à freqüência irregular das crianças, a autora acredita que a instrução não foi um sucesso. Tanto para a 2ª como para a 4ª séries as dificuldades encontradas também são idênticas àquelas encontradas por Muangnapoe. Na 4ª série, uma melhora de desempenho foi notada na identificação e na nomeação de partes da unidade. Contudo, as relações entre as frações que diziam respeito a meios, quartos e oitavos foram melhor trabalhadas que aquelas que diziam respeito a terços, sextos e nonos. Os 10 estudantes da 6ª série, com os quais Williams trabalhou, eram caracterizados por baixo desempenho em Matemática. De acordo com a própria pesquisadora, so resultados obtidos quanto a um aumento de desempenho foram apenas moderados. A pesquisa sugere que perante a uma série de tarefas simples que são relacionadas, algumas crianças são capazes de utilizar experiências passadas e através das mesmas obter novas concepções sobre conceitos previamente mal entendidos. Ainda sobre estas crianças, Williams notou que as crianças apresentavam dificuldades para verbalizar idéias que aparentemente eram entendidas, existia uma diferença na forma como o professor e a criança percebiam (representavam mentalmente) a mesma figura; as crianças tinham medo do fracasso; havia necessidade de reforço e os símbolos dificultavam a ordenação dos números fracionários

Galloway (1975), em um estudo transversal, examinou os resultados do ensino de frações utilizando a seqüência de Muangnapoe e Williams. Classes regulares trabalharam todas ao mesmo tempo e gastou-se 10 dias para trabalhar o conteúdo de frações. Muito trabalho foi feito pelos professores primários com material concreto. Não foram trabalhados números mistos e frações maiores que 1. De 1ª a 5ª séries usou-se a seqüência de Muagnapoe e de 3ª a 5ª séries além da seqüência usou-se também os números decimais. Conforme Payne (1976), os resultados podem ser sintetizados da seguinte forma: a unidade, as partes iguais e as frações menores que 1 foram corretamente identificadas por alunos de todas as idades. Estes conceitos foram aprendidos facilmente em todos os níveis, bem como o uso oral de nomes fracionários, modelos concretos e diagramas que identificam frações; a reta numérica apareceu como dificuldade em todos os níveis; grande parte dos estudantes de oito anos de idade podem dominar tanto o conceito inicial como os símbolos para as frações em 2 semanas; na comparação do desempenho em todos os níveis, há uma escala de desempenho que aumenta à medida que se aumentam as séries.

Tendo como principal variável de estudo o tempo de apresentação da regra de comparação de frações, Choate (1975) (apud Payne, 1976) trabalhou com duas classes (4ª e 5ª séries) com diferentes seqüências de ensino sintetizadas como: 1- (RA) (Algorítmo da Regra)- Regra apresentada sem nenhum desenvolvimento conceitual; 2- (MA) (Algorítmo Significativo)- Em cada passo da regra havia a demonstração simultânea com diagramas; 3- (CLA) (Algorítmo Conceitual Tardio)- Diagramas foram extensivamente usados na comparação entre frações. O estabelecimento da regra foi feito apenas no último dia do trabalho; 4- (CNA) (Algorítmo não Conceitual)- O procedimento usado foi o mesmo que no item 3, excetuando-se o estabelecimento da regra. Depois do trabalho inicial sobre frações, seis lições sobre comparações foram ensinadas e um pós-teste foi aplicado no 7º dia. Dez dias depois, foi aplicado um teste de retenção. Nos 4 tratamentos, os desempenhos foram comparados. O tratamento MA produziu baixos resultados. Já alguns "subscores" favoreceram o CNA, o CLA e o RA, mas nenhum o MA. Contudo, uma superioridade foi notada em relação ao RA no trabalho com proporção na forma numérica. Nos dizeres de Payne (1976), o trabalho de Choate deixa claro que uma regra desenvolvida paralelamente com diagramas visuais "é no mínimo um modo efetivo de ensinar um algorítmo". Mesmo contradizendo com a "prática dominante", para Payne "faz sentique possa existir dificuldade no ensino de duas coisas aparentemente diferentes ao mesmo tempo". O bom desempenho vindo do tratamento RA deve ser visto com um certo cuidado, pois algumas crianças estavam bem preparadas quanto aos conhecimentos iniciais de frações e também já tinham feito a seqüência de Muangnapoe. Além disso, alguns diagramas foram ensinados no primeiro dia da instrução. *"Ainda a performance de dar às crianças apenas a regra é um pedaço de um mistério e parece contradizer com o que a maioria dos Educadores Matemáticos esperam"* Payne, 1976.

Post (1981), em relação à 2ª Avaliação Nacional do Progresso Educacional (NAEP) nos E.U.A., afirma que foram aplicados testes sobre frações com figuras geométricas (contexto contínuo), conjunto de elementos (contexto discreto) e reta numérica em jovens com idades entre 9 e 13 anos. Os resultados mostram que no contexto contínuo o conceito de fração está começando a se estabelecer aos 9 anos sendo que é bem desenvolvido aos 13 anos. Quanto ao contexto discreto os resultados diferem superficialmente. Sobre a reta numérica os resultados mostram que os jovens de 13 anos não parecem ter uma firme compreensão do conceito de frações quando trabalham com a mesma. Tais jovens, contudo, mostraram possuir entendimento para os termos: frações impróprias, denominador e número misto. Apesar da maioria dos jovens de 13 anos trabalharem bem com frações equivalentes e relacionarem números mistos a frações impróprias, estas habilidades, geralmente usadas nas operações de adição e multiplicação, foram ignoradas.

Devido aos resultados mostrados por Carpenter et al em 1988 sobre a Avaliação Nacional do Progresso Educacional, Witherspoon (1993) fez entrevistas com crianças que tinham acabado a 5ª série e que possuiam dificuldades para representar por meio de ilustrações frações em situações simples, como 1/3 de uma torta e 1/4 de um grupo de oito bolinhas de gude. O objetivo das entrevistas era montar um videotape que mostrasse o pensamento dos estudantes sobre as frações. Tal vídeo deveria ser apresentado a professores iniciantes. Sete estudantes que haviam terminado a 5ª série foram entrevistados. Cada entrevista foi baseada em três interpretações de uma fração: parte de uma figura contínua, parte de um grupo de objetos e razão. De acordo com Witherspoon (1993), o problema envolvendo a representação de uma fração em uma figura contínua pareceu difícil aos estudantes. Do total de 7 alunos, 4 conseguiram uma representação apropriada sendo que os outros três alunos não consideraram o critério de igualdade entre as partes para a representação de uma fração. No que se refere à quantidade discreta, os resultados mostraram que os alunos aplicaram seus conhecimentos para quantidade contínua na quantidade discreta. Alguns alunos mostraram não ter uma idéia de parte do grupo de bolinhas, mas de cada bolinha, o que os levou ao erro. Um único aluno teve êxito no problema onde a fração 1/2 era uma razão entre meninos e meninas de uma classe apesar de 1/2 ser uma idéia "*supostamente mais simples*" que 1/3 e 1/4.

Ao fazer uso de uma hierarquia hipotetizada de subconceitos selecionados do conceito de fração, Novillis (1976) tinha por objetivo saber se esta hierarquia era mesmo uma seqüência dita considerável de conceitos dependentes. A amostra era composta por 279 estudantes distribuídos de 4ª a 6ª séries. A principal conclusão dos resultados é que alguns subconceitos foram pré-requisitos para outros. Como exemplo, a associação de frações na interpretação parte-todo, tanto no contexto contínuo como no discreto, é um pré-requisito para associar uma fração com um ponto sobre uma reta numérica.

Driscoll (1984), ao relatar os resultados de algumas pesquisas sobre frações, afirma que muito dos atrasos no entendimento de números racionais são devidos aos limites do desenvolvimento cognitivo e que os resultados de tais pesquisas dão ênfase à aprendizagem e ao ensino de frações como duas tarefas muito difíceis. Por exemplo, no caso de razão e proporção, as crianças costumam usar estratégias aditivas até que possam trabalhar com duas variáveis na mente ao mesmo tempo. Assim, 5/3 é pensada como equivalente a 11/9 (soma-se 6 a cada termo da razão).

Carpenter e colaboradores (apud Driscoll, 1984) no relato dos resultados do 2° (NAEP) concluiram que a maioria dos jovens de 13 anos percebem diferentes interpretações das frações como sendo tópicos separados e não tópicos relacionados. Para Driscoll, a evidência mostra que aprendizes usam diferentes habilidades cognitivas no trabalho com as várias interpretações de uma fração. Greeno (1976) (apud Driscoll, 1984) sugeriu que ao comparar duas frações por regiões ou diagramas, os estudantes usam habilidades de processamento espacial onde não usam na comparação entre duas frações procedimentos algorítmicos. Kieren (1975) (apud Driscoll, 1984) apontou que um estudante deve ser capaz de observar a realidade em termos de coordenadas para entender a equivalência entre pares ordenados como [(1,2), (2,4), (3,6),...], isto é, para entender a noção de frações equivalentes.

O fato de diferentes interpretações para números racionais requererem diferentes habilidades cognitivas, para Driscoll, explica o porquê das crianças não verem com naturalidade as relações entre as interpretações e também porque algumas interpretações são mesmo entendidas mais cedo que outras.

Galloway (1975) e Payne (1975a) (citados por Driscoll, 1984) encontraram que a maioria das crianças acima de oito anos de idade para cima podem dominar conceitos iniciais de frações, tais como nomear partes fracionárias elementares, mas o estudo de Coburn (1974) (citado por Driscoll, 1984) indicou que um domínio de frações equivalentes não deveria ser esperado antes dos graus elementares mais elevados ou posteriores. James (1980) (citado por Driscoll, 1984) apontou que o progresso do trabalho concreto com números racionais até a habilidade de falar sobre eles não é fácil para a grande parte das crianças.

Gunderson e Gunderson (apud Bezuk, 1988) encontraram que crianças de 2ª série são capazes de formular o conceito de fração. Concluiram também que o ensino de frações poderia ser adiantado na 2ª série desde que o ensino fosse feito tanto oralmente como através do uso de materiais concretos ou manipulativos. Do mesmo modo Galloway (apud Bezuk, 1988) mostrou que crianças de seis anos de idade até aos quinze anos foram capazes de dominar conceitos fracionários básicos.

Conforme Bezuk (1988), os resultados da Terceira Avaliação Nacional do Progresso Educacional (NAEP) mostraram uma aparente falta de entendimento das frações por jovens de nove, treze e dezessete anos. *"A performance na computação com frações foi baixa e os estudantes parecem ter feito suas computações com baixo entendimento"* (Lindquist e colaboradores; apud Bezuk, 1988).

Para Hunting (1983), Kieren, Nelson e Smith (1985) (apud Pothier e Sawada, 1990), pesquisas recentes mostram que os estudantes têm dificuldades na resolução de problemas com frações usando modelos físicos ou diagramas tanto no contexto discreto como no contínuo. Estas pesquisas também mostram que os estudantes não estão familiarizados com modelos fracionários o que sugere que estes estudantes não têm experiência suficiente com um trabalho não simbólico com as frações.

Pothier e Sawada (1990) ao pesquisarem a partição, tanto em figuras geométricas como em grupos de objetos, como uma aproximação para o conceito de fração apontam que livros textos ou didáticos atuais limitam o uso de modelos físicos para um trabalho introdutório com as frações. Estes livros incluem numerosos diagramas de figuras previamente repartidas as quais os estudantes usam para identificar várias frações ou para representá-las colorindo um número determinado de partes. Para estes autores, as pesquisas mostram que os estudantes completam tais exercícios sem prestar atenção nas propriedades geométricas da figura (inteiro) ou das partes e freqüentemente dão nome de frações para partes não iguais de um inteiro. Assim, os exercícios dos livros didáticos não fornecem experiências com modelos fracionários. Quando diagramas são usados, geralmente estão previamente repartidos. Conseqüentemente, os estudantes têm dificuldades em representar frações de forma não simbólica. Desta forma, uma parte das dificuldades quanto às frações para Pothier e Sawada (1990) reside no uso extensivo de modelos previamente repartidos no trabalho com frações.

Strang (1990), citado por Steffe e Olive (1991), aponta que mesmo na escola dita compreensiva as crianças aprendem matemática com um pensamento mecânico, infestado de regras e truques e assim, para este autor, também acontece o mesmo com o conceito de fração. Este apontar de Strang (1990) tem como base resultados de testes *feitos* em aproximadamente três mil estudantes com idades entre nove e doze anos residentes na Finlândia. Mas, de acordo com Steffe e Olive, tais resultados não são restritos a este país. Kerslake (apud Steffe e Olive 1991) encontrou que os estudantes britânicos de treze a quatorze anos recorreram a uma memória mecânica de técnicas previamente aprendidas quando trabalhavam com frações. O problema básico, segundo Kerslake é que *"com exceção de certos exemplos simples como 1/2 e 1/4, as frações não formam uma parte* *normal do meio ambiente infantil e as operações sobre elas são definidas de forma abstrata".*

Estudantes com idades similares nos E.U.A. também contam com regras e truques quanto às frações e uma memória mecânica quanto a estas regras e truques (Hunting (1980), Kieren (1988), Nick Pa (1984) e Payne (1976); apud Steffe e Olive, 1991).

Kieren e Nelson (1978), em um estudo exploratório sobre a interpretação dos Números racionais como operadores, trabalharam com crianças de 4ª a 8ª séries com idades entre 8 e 11 anos, somando-se ao todo 45 sujeitos. A intenção do estudo era saber quais os mecanismos que crianças e adolescentes usavam para manejar situações onde aparecem números racionais como operadores e se existiam estágios de desenvolvimento quanto à esta interpretação de número racional. Os resultados do estudo mostram que se pode hipotetizar três níveis de desenvolvimento quanto ao conceito de operador. No 1° nível há uma conceptualização fracionária por parte das crianças que é dominado pelo operador 1/2 ou metade. No 2° nível, chamado de transicional ou intermediário, os sujeitos conseguem manejar operadores unitários (1/2,1/3) e compostos (1/2 x 1/3, 1/2 x 3/4). É somente no nível 3 que se tem a habilidade de manejar composições com todas as formas de operador. Quanto aos mecanismos usados pelos sujeitos, o estudo verificou que os sujeitos usavam mecanismos construtivos como o de partição para controlar as situações de fração como operador. Os resultados também mostram que mudanças significativas quanto à qualidade e o nível de desempenho apareceram entre idades de 11 e 12 anos, precisamente 12 e 13 anos.

Harrison et al (1989), no trabalho com frações e razões, procurou verificar quais os níveis de desenvolvimento cognitivo para frações e razões demonstrados pelos jovens de 12 anos e também se estratégias de ensino em um processo orientado que foram adaptadas de acordo com o nível cognitivo dos estudantes podem melhorar de forma significativa o desempenho e atitudes quanto a frações e razões. Para isto, 435 jovens de 12 anos que cursavam a 7ª série de 12 escolas de Calgary foram selecionados e divididos em dois grupos: experimental e de controle. O grupo experimental era caracterizado por: utilização de materiais concretos, investigação por parte das crianças, experimentação sistemática, formulação de questões, redação e aplicação em situações práticas dos resultados encontrados. Já o grupo de controle era caracterizado por nenhuma demonstração por parte dos professores, nenhuma investigação por parte dos alunos, uso do livro didático de 7ª série e do guia de professores de uma série Canadense publicada em 1970. Os resultados sobre os níveis de desenvolvimento cognitivo dos estudantes quanto às frações indicaram que 56% estavam no nível concreto, 38% no nível intermediário e apenas 6% no nível formal. Para razões e proporções as porcentagens são respectivamente 50%, 43% e 7%. Sobre os métodos de ensino, os resultados mostraram que: os dois métodos diferiram marcadamente na quantidade de exposição por parte do professor e no uso de objetos concretos por parte dos alunos; no método experimental houve alta freqüência de investigações por parte dos alunos para com problemas que envolviam frações e razões; os estudantes da classe experimental mostraram maior encorajamento para inventar sobre suas próprias soluções para os problemas, para noticiar padrões numéricos, para trabalhar aos pares e aos grupos e para relatar o que encontravam enquanto investigavam problemas; não houve diferenças significativas entre os grupos de tratamento no que se refere ao teste que tratava de computação de frações, *"o que mostra que os ganhos obtidos com a facilidade de resolver problemas não foram às custas de habilidades computacionais"* (habilidades para fazer contas); diferenças significativas entre os dois tratamentos foram notadas em relação ao prazer quanto às frações e razões, bem como uma baixa ansiedade em relação a estes tópicos. Os autores concluiram que o método experimental baseado em um processo orientado resultou em uma melhora significativa de desempenho e de atitude quanto a frações e razões. Do mesmo modo, o desenvolvimento de estratégias matemáticas gerais foi aumentado e a facilidade computacional mantida.

Após a leitura e a discussão de textos sobre o conceito de fração, Tinoco e Lopes (1994) elaboraram uma proposta de ensino cujo objetivo principal era proporcionar situações de ensino nas quais fossem orientados os processos de raciocínio dos alunos quanto à aquisição das idéias básicas sobre fração com compreensão. Tal proposta teve como aspectos mais importantes: a construção pelo aluno do conceito de fração como um número; a exploração do conceito de fração em conjuntos discretos e a noção de frações equivalentes como representações da mesma quantidade. Durante 3 anos a proposta foi utilizada em sala de aula. Para avaliar seus efeitos, 101 alunos da 5ª série de escolas municipais do Rio de Janeiro e 30 alunos do 1° ano do Curso de Formação de Professores Primários (CFP) de escolas estaduais do Rio de Janeiro foram submetidos a pré e pós teste aplicados por seus respectivos professores em suas turmas. O teste abrangia questões sobre conceituação, equivalência, ordenação, adição e subtração de frações. Os resultados dos testes, feitos por análise quantitativa, mostraram que mesmo os alunos do CFP chegam ao 2° grau sem dominar os elementos básicos do conceito de fração: conceituação e equivalência; houve uma significativa diminuição das respostas em branco, *"o que denota o maior encorajamento dos alunos para o confronto com os problemas"*; quanto à conceituação e equivalência, os índices do pré-teste que estavam abaixo de 70% aumentaram em média 30% no pós-teste.

As pesquisas sobre o uso de materiais concretos não só no ensino de frações mostram que os mesmos são úteis também além da escola elementar, isto é, dos graus primários.

Sowell (1989), em uma breve introdução de seu estudo, coloca que os materiais concretos ou manipulativos têm uma longa história. Já no século XIX, Pestalozzi defendia seu uso e na década de 30 os mesmos foram incluídos nas atividades curriculares. Nos anos 60 e 70 muitos pesquisadores compararam situações de instrução matemática que faziam uso do material concreto com as que não faziam. De acordo com Sowell, os resultados ora apontavam os melhores desempenhos para o grupo que estava usando o material concreto e ora para o grupo que não o usava. Com o objetivo de determinar a efetividade de instruções matemáticas que fazem uso do material concreto, Sowell (1989) analisou 60 estudos cujas amostras possuiam crianças do jardim de infância a adolescentes e tratavam de diversos tópicos da matemática. Os resultados encontrados por Sowell (1989) mostraram que o desempenho matemático é aumentado com o uso a longo prazo de materiais instrucionais concretos. As atitudes também são melhoradas quando da instrução com materiais concretos e com professores conscientes de seu uso. Já a comparação entre instrução com diagramas e figuras não diferiu de forma efetiva da instrução simbólica.

Harrison, Brindley e Bye (1980) (apud Driscoll, 1984) estudaram o desempenho de alunos de sétimas séries em Calgary High School usando um processo de aproximação para investigar frações, isto é, eles trabalharam com materiais concretos, recordaram o que havia acontecido nos experimentos, formularam questões, escreveram de acordo com os resultados dos experimentos e aplicaram seus resultados a situações práticas. Após três meses foi verificado que esses alunos não apenas melhoraram o desempenho em relação ao grupo controle como apresentavam maior satisfação em relação ao estudo de frações que os alunos do grupo controle.

Howard (apud Porto, 1963) querendo verificar o valor do ensino de frações ordinárias para adicionar fração com material exploratório e sem ele, fez um estudo com 15 classes de quintas e sextas séries. Depois de um período de dezesseis semanas de instrução, as crianças dos três grupos A,B eC foram testadas. Os alunos do grupo C foram os únicos a usar materiais manipulativos (exploratórios) seguidos de resolução escrita de exercícios após a compreensão do processo de adição de frações. Os resultados mostraram que não houve diferenças estatisticamente significativas entre os grupos. Depois do período de férias, as crianças do grupo C mostraram diferenças de desempenho estatisticamente significativas em relação aos grupos A e B.

Neureiter e Troisi (apud Porto, 1963) também estudaram o uso de materiais suplementares no ensino de frações com alunos de 5ª e 6ª séries. Um dos grupos usou o material manipulativo sendo que o outro não. Os resultados mostraram que o material exploratório é eficiente em um programa que dá ênfase à aprendizagem pela compreensão, pois no trabalho com frações na forma abstrata não houve diferença entre os dois grupos, mas no trabalho com frações que buscava a solução de problemas em situações concretas e também a compreensão das várias relações e princípios envolvidos entre as frações a diferença entre os dois grupos foi nítida e marcante.

Com o objetivo de analisar a concepção dos alunos quanto ao conceito de fração, pesquisadores do PROEM (Programa de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática), sob a orientação de Beatriz D'Ambrósio, aplicaram em 1989 um teste com questões que tratavam de situações apresentadas em livros didáticos- convencionais- e situações novas e também uma entrevista com 6 questões sobre problemas com frações. Foram usadas "três escolas particulares de nível médio da cidade de São Paulo". Os sujeitos da pesquisa foram 48 meninos e 28 meninas com idades entre 9 e 12 anos, que cursavam 4ª e 5ª séries. Na análise dos resultados, cada questão foi analisada e discutida individualmente. De forma geral, a discussão dos resultados mostra que as dificuldades com a divisão acabam sendo estendidas para o conceito de fração. Isto fica claro pela confusão que as crianças fizeram com os significados de numerador e denominador em cada problema que resolviam (ora o denominador era o número total de partes ora era o número de elementos); o mecanismo de contagem de elementos (muito usado em quantidades discretas) deixa claro que as crianças não relacionam as partes entre si por suas áreas; existe uma facilidade de trabalho com o numerador 1 (de acordo com os autores algumas tribos chegaram *"ao máximo as frações 1/2, 1/4 e 1/3"* e os egípcios foram os que mais usaram as frações unitárias; *"Uma mesma figura pode representar duas frações distintas e não equivalentes*", ou seja, é feita a comparação de partes pintadas para as não pintadas sem a preocupação com a divisão em partes iguais; ao denominador e numerador são dados outros significados que dependem da questão trabalhada; quando as partes não estão divididas igualmente (mesmo sendo congruentes), estas não são consideradas frações.

Ao concluir o trabalho os pesquisadores do PROEM colocam que tanto currículo quanto metodologia empregados tornam o ensino deficiente e "que cada vez mais a formação do professor é inadequada à "educação". Colocam também que as dificuldades encontradas pelos alunos de 4ª e 5ª séries não são privilégios dos mesmos, pois tais dificuldades também foram encontradas por alunos de 7ª série e pelos alunos do curso de Pedagogia. Os autores também chamam atenção para o significado dos erros que devem ser encarados como indicadores das concepções e construções dos próprios alunos. Este mesmo trabalho conclui que os alunos buscam respostas e interpretações para o "sucesso" na vida escolar, ou seja, o que existe é a preocupação com a boa resposta.

Em um levantamento das dificuldades no processo de construção do conceito de fração em alunos de 5ª série de escola pública, Oliveira (1992) conclui que a aprendizagem do conceito de fração não havia sido alcançadacom aqueles sujeitos, visto que do ponto de vista operatório, os principais aspectos, tais como relação parte-todo e parte-parte não foram dominados.

Aguiar (1983) tendo como objetivo analisar a natureza dos processos envolvidos na construção do conceito de frações idênticas, equivalentes e de frações de frações na medição ou avaliação de áreas de figuras geométricas e também o relacionamento entre a evolução destes conceitos e o conceito de proporcionalidade afirma que há uma evolução sincrônica entre as conceituações de frações até que se completam na fase de operações concretas; que as relações parte-parte e parte-todo também entram no conceito de proporcionalidade e que *"a maioria dos sujeitos que tinham possibilidade cognitiva de entender as operações com frações não conseguiu resolver cálculos com essas operações"*.

De forma bastante sintética, alguns problemas encontrados nas pesquisas quanto às frações podem ser resumidos em dificuldades para localizar frações na reta numérica; dificuldades no trabalho com números mistos e frações equivalentes nas operações com frações; dificuldades em entender o conceito de uma fração mesmo possuindo habilidades computacionais, isto é, o que existe é um conhecimento instrumental das frações, mas não o conhecimento das relações subjacentes às mesmas; dificuldades para ver as várias interpretações do conceito como tópicos relacionados; uso predominante de estratégias e propriedades dos números naturais quanto à ordem das frações e também à razão e proporção; interferência de habilidades pertencentes ao contexto contínuo no contexto discreto; dificuldades em representar frações de forma não simbólica, isto é, em modelos físicos ou diagramas devido ao uso excessivo de figuras pré divididas; busca de um raciocínio mecânico (regras e truques) no trabalho com frações.

Os problemas que as pesquisas sobre aprendizagem de fração apontam têm levado a pensar que um método para o ensino de fração devesse se pautar nos princípios de caráter construtivista que visam uma aprendizagem significativa ou voltado para a compreensão operatória. Neste sentido, o ensino de fração poderia estar apoiado em alguns elementos, tais como colocação de problemas concretos significativos; participação da criança no desenvolvimento do conceito; possibilidade de descoberta de fatos e processos através do material diferenciado e de situações criadas; seqüência para o desenvolvimento do conceito; trabalho em grupo; possibilidade de erros e correções dos mesmos; respeito ao tempo que se deve ter antes da introdução do conceito na forma simbólica; verbalização que se está pensando.

Deste modo, o ensino de frações não pode desconhecer os invariantes operatórios já indicados por Piaget, Inhelder e Szeminska (1948) e também observados como dificuldades básicas para a aprendizagem de frações como apontam os trabalhos do PROEM (1989) e a pesquisa exploratória de Oliveira (1992).

Não perdendo de vista estas considerações, este trabalho supõe que uma metodologia que considere os elementos componentes do conceito de fração, quando sistematicamente executada com os alunos de 5ª série, resultará em um melhor desempenho dos alunos quanto ao domínio destes elementos.

CAPÍTULO V
PROCEDIMENTOS, SUJEITOS E MATERIAIS

ESTUDO PILOTO

O estudo piloto teve como objetivo verificar se o tipo de questões formuladas forneceriam informações substanciais sobre estas questões e também encontrar uma disposição adequada das mesmas a fim de evitar a influência de uma resolução sobre a outra. Além deste objetivo, o estudo piloto visou treinar o pesquisador na aplicação do teste.

Sujeitos: Este estudo teve como sujeitos 20 alunos de uma 5ª série de uma escola estadual com idades entre 11 e 14 anos.

Material: Para o teste, usou-se uma prova escrita que englobava questões com frações como operador (questões 3, 5, 9 e 11), comparação entre frações (questões 6, 8, 10 e 13), associação entre representação geométrica e linguagem matemática (questões 4, 14 e 15), comparação entre representação geométrica convencional e não convencional (questão 12) e conceitos verbais (questões 1, 2, 16 e 17).

Procedimento: Inicialmente foi feita uma apresentação do pesquisador e do trabalho deixando claro que o mesmo não era uma prova, não resultava em nota e também não estava vinculado à escola, tentando-se desta forma deixar os alunos à vontade. A partir disto, por sorteio, três crianças eram conduzidas para uma sala onde cada uma delas recebia uma cópia da prova sobre frações (anexo I). As questões eram lidas pelas crianças, voltando a serem explicadas quando não havia entendimento. A explicação era de forma a não induzir ao acerto. As questões não tinham tempo para serem terminadas, já que um tempo médio seria encontrado para o estudo final.

RESULTADOS OBTIDOS NO ESTUDO PILOTO

FRAÇÕES COMO OPERADOR (QUESTÕES 3, 5, 9 E 11)

As questões que tratavam de fração como operador eram estabelecidas sobre contexto discreto (questões 3, 5 e 9) e contexto contínuo (questão 11).

O relacionamento das questões duas a duas e todas ao mesmo tempo teve por objetivo verificar se havia domínio do conceito de operador independentemente do contexto trabalhado e também do fato do numerador nas questões 5, 9 e 11 ser diferente do número 1.

No relacionamento das questões 3 e 5, de nove alunos (45%) que haviam acertado a questão 3 e de 3 alunos (15%) que haviam acertado a questão 5, apenas 3 alunos

(15%) acertaram as duas questões simultaneamente. Mesmo estando trabalhando em um mesmo contexto, esta diferença de acertos da 1ª questão em relação à 2ª pode ser explicada pelo fato de na questão 5 o numerador ser diferente de 1, o que pressupõe que a quantidade deva ser tomada mais de uma vez.

Com as questões 3 e 9 dos 12 alunos (60%) que acertaram a questão 9, 5 alunos (15%) conseguiram acertar as duas questões ao mesmo tempo. Nota-se que mesmo tendo o numerador da fração diferente de 1, a questão 9 obteve um maior número de acertos. Isto, talvez possa ser explicado pelo fato de na questão 9 haver a representação da fração por um conjunto de bolinhas, onde um determinado número delas estava destacado.

Já nas questões 3 e 11 (contexto discreto versus contexto contínuo e numerador igual a 1 e diferente de 1 respectivamente) dos 9 alunos (45%) que acertaram a questão 11, 4 deles (20%) acertaram também a questão 3. O número de acertos da questão 11 pode ser atribuído ao fato de mesmo tendo uma fração cujo numerador era diferente de 1, a questão lidar com uma fração equivalente à fração metade, isto é, uma fração muito trabalhada pelas crianças.

No relacionamento das questões 5 e 9 (contextos discretos e numeradores diferentes de 1) dos 12 alunos (60%) que acertaram a questão 9 e dos 3 alunos (15%) que acertaram a questão 5, apenas 2 alunos (10%) acertaram simultaneamente as questões. Como os contextos e os numeradores são iguais, pode-se dizer que o que pode ter causado a diferença de acertos entre uma questão e outra é o fato de a representação concreta estar presente na questão 9.

Questões 5 e 11 (contexto discreto versus contínuo e numeradores diferentes de 1). Nenhum aluno acertou simultaneamente as duas questões.

Interessante notar que dos 9 alunos (45%) que acertaram a questão 11, 8 alunos no trabalho com a questão 5 somaram numerador e denominador e tiraram o resultado da soma do total de bolinhas. Isto talvez possa mostrar que pelo fato de a fração 2/4 poder ser identificada com metade, talvez não houve por parte dos alunos que acertaram a questão 11 um trabalho como operador, mas sim apenas a divisão por 2.

Dos 12 alunos (60%) que acertaram a questão 9, somente 4 alunos (20%) acertaram a questão 11. Vê-se deste modo a influência da presença da representação concreta na questão 9.

As questões de frações como operadores quando relacionadas todas simultaneamente mostram que nenhum aluno acertou todas elas. Isto faz pensar o quanto é realmente difícil manter o conceito de operador frente a mudanças de contextos (discreto e contínuo) e de numeradores (iguais e diferentes de 1).

COMPARAÇÃO ENTRE FRAÇÕES (QUESTÕES 6, 8, 10 E 13)

As questões sobre comparação entre frações abrangiam as possibilidades do trabalho com numeradores iguais e denominadores diferentes (frações desiguais) na questão 6, numeradores e denominadores diferentes (frações equivalentes) nas questões 8 e 10 e numeradores diferentes e denominadores iguais (frações desiguais) na questão 13.

O objetivo ao relacionar as questões 6 e 13 era verificar se os acertos ocorridos na questão 13 não eram devidos somente a uma aplicação da ordem dos números Naturais para com as frações, pois se este era o processo empregado pelos alunos eles certamente errariam a questão 6.

Este objetivo foi mesmo alcançado, pois dos 12 alunos (60%) que acertaram a questão 13, apenas 2 alunos (10%) acertaram também a questão 6. Isto pode mostrar que realmente eles aplicaram a ordem dos números Naturais para comparar números fracionários, obtendo um resultado correto para a questão 13, onde os denominadores eram iguais. Ainda na questão 6, 9 alunos (45%) concordaram que 1/10 é maior que 1/8.

O fato dos alunos terem aplicado a regra da ordem dos números Naturais aos fracionários também pode ser percebido nas questões 8 e 10, pois quando relacionadas com a questão 13 onde 12 alunos (60%) marcaram a alternativa correta somente 3 alunos (15%) acertaram também as questões 8 e 10 sendo que na questão 8, 8 alunos (40 %) acharam que 4/8 é menor que 5/10 e na questão 10, 11 alunos (55 %) concordaram que as frações estavam em ordem crescente.

Nenhum aluno acertou ao mesmo tempo as questões 8 e 10. Mesmo aqueles que acertaram a questão 8 (6 alunos, 30%) tiveram dificuldades para comparar quatro frações ao mesmo tempo.

Ao relacionar todas as questões sobre comparação de frações simultaneamente, nenhum aluno conseguiu acertar todas elas. Novamente, como no caso dos operadores, não houve a manutenção de um único critério para comparar frações, o que pode mostrar a ausência da relação parte-todo e apenas uma leitura ora figurativa dos números ora como se fossem um natural em cima do outro sem ter nenhuma relação com o inteiro.

CONEXÃO ENTRE REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA E LINGUAGEM MATEMÁTICA (QUESTÕES 4,14 E 15)

A questão 4 que possuía uma figura retangular dividida em partes iguais e com um número determinado destas partes tomadas teve um grande número de acertos: 17 alunos (85%).

O número alto de acertos pode ser esperado já que a presença da figura era um facilitador ao processo de contagem que também leva ao acerto neste tipo de questão. Outro fato que também não pode ser ignorado é a presença de uma figura familiar às crianças contendo divisões explícitas, de outra forma, nenhuma divisão necessitaria ser inferida pelas crianças.

A questão 14 que também tratava da associação entre representação geométrica e linguagem matemática obteve somente 3 acertos. Dos 17 alunos (85%) que acertaram a questão 4, apenas 2 alunos (10%) acertaram a questão 14. Um dificultador da questão 14 pode ter sido o fato de a mesma não possuir todas as divisões de forma explícita. Assim, para obter a resposta correta, o aluno teria que perceber que nem todas as partes eram iguais. Logo, teria que inferir uma divisão implícita.

O ítem 1/3 foi propositadamente excluído das alternativas com o objetivo de que a questão fosse melhor elaborada já que a necessidade de dividir em partes iguais para representar uma fração não foi observada como critério nas questões 12 e 15. Mesmo assim, na questão 14, 4 alunos (20%) acharam que 1 fosse a alternativa correta, ou seja, uma parte tomada; 8 alunos (40%) acharam que fosse ½ ou uma parte tomada para duas não tomadas e 5 alunos (25%) marcaram 2/1 ou duas partes não tomadas para uma parte tomada.

Para a questão 15, que pedia a representação de frações em figuras geométricas, o que se pode observar é que houve, de forma geral, respeito quanto aos significados do numerador e de denominador em relação às partes divididas e tomadas não tendo porém, o critério de igualdade entre elas. Contudo, pode também ser observado que para as figuras convencionais como retângulos, círculos e quadrados houve uma maior aproximação da igualdade nas divisões. Tal aproximação só não aconteceu com o triângulo.

Doze alunos (60%) conseguiram fazer divisões iguais para a fração 2/4 em um círculo, o que se deu por dicotomias sucessivas. Já para a fração 3/5 em um círculo, nenhum aluno conseguiu dividir igualmente. Isto pode mostrar dificuldades tanto conceituais quanto de representação para este tipo de questão. Dois alunos (10%) não conseguiram representar 2/4 no círculo corretamente.

Dois alunos (10%) representaram as frações de forma bastante interessante. Nas figuras os alunos sempre representavam as partes tomadas e as não tomadas como se estas partes (as tomadas) não fizessem parte do número total de partes do inteiro.

Três alunos (15%) não interpretaram numerador e denominador. Pintaram apenas uma determinada parte de cada figura.

Um único aluno (5%) conseguiu interpretar apenas o denominador (o número de partes iguais em que o inteiro deve ser dividido) não obedecendo nenhum critério para o numerador, pois a representação mudava a cada figura.

COMPARAÇÃO ENTRE REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA CONVENCIONAL E NÃO CONVENCIONAL (QUESTÃO 12)

Esta questão mostra o quanto é forte a identificação com figuras e divisões conhecidas mais que a aplicação do conceito de relação parte-todo. Os resultados mostraram que dez alunos (50%) marcaram a figura que tem um triângulo hachurado como na figura comparada, não se importando com a desigualdade de área entre eles. Quatro alunos (20%) marcaram o retângulo que tinha mais da metade de sua área hachurada e seis alunos (30%) marcaram a alternativa correta onde o retângulo estava dividido de forma explícita, mas bastante diferente das formas convencionais. Logo, era preciso ter uma noção de quantidade tomada e não ficar preso somente à semelhança geométrica das figuras que compunham os retângulos.

CONCEITOS VERBAIS (QUESTÕES 1, 2, 16 E 17)

As questões 1 e 2 que tratavam da verbalização do conceito de fração na relação parte-todo foram relacionadas com o objetivo de verificar se o entendimento de uma fração a nível verbal se mantinha em relação aos termos da fração (numerador e denominador) no mesmo nível.

Cinco alunos (25%) acertaram a questão 2 e 10 alunos (50%) acertaram a questão 1. Destes 10 alunos (50%) que acertaram a questão 1 apenas 4 alunos (20%) acertaram também a questão 2, o que mostra que o entendimento verbal de uma fração, nesta prova, não foi estendido para seus termos (numerador e denominador). Este fato também pode ser observado em questões que tratavam das representações e comparações de frações.

Para deixar um pouco mais claro o entendimento verbal dos termos da fração, as questões 2 e 4 também foram relacionadas porque a questão 4 obteve um grande número de acertos quanto à interpretação do numerador e do denominador. Dos 17 alunos (85%) que acertaram a questão 4, somente 4 alunos (20%) acertaram também a questão 2. Como já foi dito, a questão 4 contava com a representação geométrica da figura, ou seja, a figura estava dividida em partes iguais com um determinado número destas partes tomado. Assim, isto pode ter facilitado a interpretação de numerador e denominador mesmo que não houvesse o entendimento verbal dos mesmos.

Os resultados das questões 16 e 17 puderam ser descritos do seguinte modo:

Tabela 1: Frequências e percentuais de respostas para a questão 16 do estudo piloto

QUESTÃO 16	f	%
respostas em branco	7	35%
escreveu não sei	3	15%
respostas não pertinentes*	5	25%
identificação com a relação de igualdade	5	25%
total	20	100%

* Por exemplo: "...significa quando você multiplica".

Tabela 2: Frequências e percentuais de respostas para a questão 17 do estudo piloto

QUESTÃO 17	f	%
respostas em branco	5	25%
escreveu não sei	4	20%
respostas não pertinentes*	5	25%
identificação com a relação que se faz entre os objetos para se obter diferenças ou semelhanças**	6	30%
total	20	100%

**Por exemplo: ..."comparar quer dizer; por exemplo, se dois quadrados são desenhados igualmente centímetro por centímetro quer dizer que são iguais".

* Por exemplo: "... comparar significa que pode ser dividido".

As questões 16 e 17 foram colocadas no estudo piloto com o objetivo de verificar o domínio de conceitos que os alunos trabalhariam na prova.

O baixo número de alunos que conseguiram uma aproximação a respostas pertinentes (5 e 6 alunos respectivamente) mostra o quanto é difícil redigir alguns conceitos, pois muitos que deixaram em branco, que não souberam responder ou deram respostas não pertinentes às questões 16 e 17 tiveram êxito em outras questões que subentendiam tais conceitos.

As questões 7 e 8 que tratavam da equivalência de frações foram relacionadas com o objetivo de verificar se o domínio do conceito de equivalência (questão 8) era mantido para o cálculo de uma fração equivalente à fração dada (questão 7). Tanto a questão 7 como a 8 tiveram 30% de acertos (6 alunos). Todavia, para o acerto simultâneo apenas 10% (2 alunos) tiveram êxito. Devido à variação das respostas dos alunos nas duas questões, pode-se inferir que estes alunos não conseguem escrever sobre o conceito de frações.

De modo geral, o estudo piloto pode mostrar que algumas questões estavam sendo compreendidas e forneceram uma boa informação. Contudo, outras questões foram de difícil entendimento por parte da maioria dos alunos que só conseguiram resolvê-las após uma explicação detalhada e não só pela leitura das mesmas. Na questão 2, a palavra respectivamente não foi entendida. Assim, para o estudo final a questão será separada em duas. Uma delas tratando do numerador e a outra do denominador. Como explicado no estudo piloto, o fato de a fração 2/4 ser identificada com a metade pode ter levado os alunos que acertaram a questão ao dividirem o inteiro por 2, sem terem feito necessariamente um trabalho com o conceito de operador. Por isso, a fração 2/4, no estudo final, será trocada por 5/8. Já na questão 12, o não entendimento foi o da palavra equivalente que será substituída no estudo final pela palavra igual. E na questão 15, a palavra represente será substituída por pinte.

No estudo piloto, uma única influência de uma questão sobre a outra foi observada. Muitos alunos ao representarem a fração 2/3 em um quadrado (conforme pedido na questão 15) usaram as mesmas divisões que estavam no quadrado da questão 14. Portanto, na questão 15, a fração 2/3 será mudada. O tempo médio para a resolução do estudo piloto foi de 25 minutos e foi o tempo adotado para o pré e o pós-teste do estudo final.

ESTUDO FINAL

SUJEITOS: Os sujeitos deste estudo foram 58 alunos (27 meninos e 31 meninas) com idades entre 10 e 17 anos, todos estudantes da 5ª série do 1º grau de uma escola estadual pública da cidade de Presidente Prudente-SP. Os sujeitos estudavam em horários escolares diferentes, uma turma era do período da manhã (grupo controle) e outra turma era do período da tarde (grupo experimental). A turma da manhã tinha 37 alunos e a da tarde 21 alunos. Desses 21 alunos, dois não fizeram o pós-teste, por motivos particulares.

MATERIAL Neste estudo, o material empregado no desenvolvimento do tópico frações com as crianças do grupo experimental tem como referência o mesmo descrito por Maranhão e Imenes (1985,1986) (anexo II). Por problemas gráficos, alguns discos sofreram modificações em suas cores. Para cada grupo de 4 alunos, o material consistia em um conjunto de 20 discos de cartolina, dois dos quais brancos e os demais coloridos com diferentes cores entre um par e outro. Os discos coloridos são divididos e recortados em partes iguais apresentando meios, quartos quintos e décimos (frações de maior freqüência) e terços, sextos e doze-avos (usadas nas unidades de medida de tempo: ano, semestre, mês). Neste conjunto tem-se também um dado com 4 faces com o número 1 e 2 faces com o número 0.

PROCEDIMENTO: Além do material, os alunos foram submetidos a uma prova (anexo III) elaborada com a finalidade de verificar o desempenho dos mesmos e testada no estudo piloto. A impossibilidade de encontrar um professor trabalhando com a 5ª série que aceitasse desenvolver a metodologia proposta, como descrita no roteiro de atividades (anexo II), fez com que a própria pesquisadora trabalhasse com as crianças do grupo experimental, o que não era a intenção inicial. O fato de as crianças estarem habituadas a professores substitutos tornou a "troca" de professores natural para elas.

De acordo com os objetivos do trabalho, aproximadamente 40 dias antes de trabalharem com frações na 5ª série, as duas turmas (controle e experimental) foram submetidas a uma prova sobre frações (pré-teste, anexo III). Na prova, existiam questões sobre denominação do conceito, equivalência entre frações, ordenação de frações e frações como operadores. Foram exatamente 12 aulas, respeitando o horário escolar, com duração de 50 minutos cada uma, o total de tempo trabalhado pela pesquisadora com as crianças. Nas aulas o roteiro de atividades foi seguido. A classe controle trabalhou o tópico frações de acordo com a metodologia empregada por sua professora: definição do conceito, desenhos na lousa, exercícios no caderno. As informações sobre a classe controle foram obtidas, através da própria professora da classe. Não foram feitas observações na classe controle. Nenhuma das duas classes (experimental e controle) utilizou livro didático no ano letivo de 1995. Por fim, uma segunda prova (pós-teste, anexo III) foi aplicada às duas turmas (aproximadamente 50 dias após as crianças terem trabalhado frações na 5ª série).

MÉTODO

O modelo utilizado neste estudo foi o desenho de medidas repetidas com um fator, conforme o modelo proposto por Campbell e Stanley (1979) e que pode ser representado como:

O X O

....

O   O

Este modelo considera a não aleatorização inicial dos grupos como a principal característica de um delineamento quase-experimental proposto por Campbell e Stanley (1979). Neste tipo de delineamento o grupo controle não é equivalente ao grupo experimental (delineamento 10).

Os dados obtidos foram analisados utilizando o "software" SAS versão 6.04, tendo sido usada a análise de variância (ANOVA) com medidas repetidas.

Neste trabalho de delineamento quase-experimental, tem-se como variável independente o tratamento ou método sistematizado, baseado em atividades referenciadas nos "Jogos com Frações" utilizados por Maranhão e Imenes (1985/1986) e como variável dependente o desempenho dos sujeitos quanto ao conceito de fração com relação ao domínio da relação parte-todo; do construto de operador; da equivalência entre frações; da associação entre representação concreta e linguagem matemática e da denominação do conceito de fração.

A análise de variância foi utilizada para a comparação das notas dos alunos à média da classe a qual pertenciam (variação dentro do grupo) e para comparar a média das notas de uma classe com com a média das notas da outra classe (variação entre grupos). O teste de exatidão de Fisher foi utilizado com o objetivo de evitar-se o erro alfa, isto é, o erro de rejeitar-se o fato de que não houve diferença significativa entre as notas dos alunos entre pré e pós-teste, quando, na verdade, este fato deveria ser aceito. O nível de confiança para este estudo foi de $p< 0.05$ ou $p< 5\%$. Portanto, o risco de cometer-se um erro alfa foi de 5%.

CAPÍTULO VI
ANÁLISE ESTATÍSTICA DOS DADOS E RESULTADOS

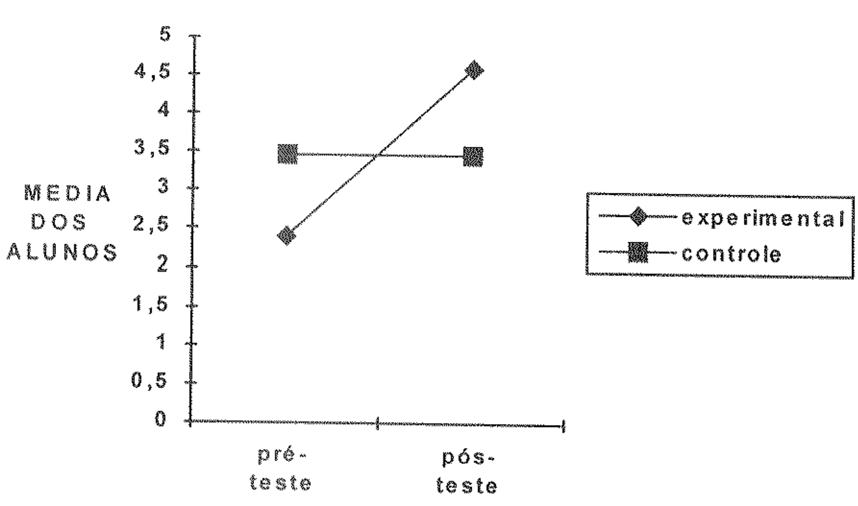
Com a finalidade de avaliar o desempenho dos alunos e poder comparar a eficácia dos dois métodos referentes ao tópico de frações, estes realizaram uma prova, cuja análise global considerando a nota dos alunos em cada uma dessas provas é mostrada abaixo. Para cada questão foram atribuídas as notas 10/18 (questão correta) e 0 (questão errada). Como a questão 16 era composta por 6 ítens, para cada ítem correto a nota atribuída era de 10/108. Caso o aluno acertasse todos os ítens da mesma, a questão também teria, como as outras questões, a nota 10/18. Todos os alunos tiveram uma nota na prova. Esta nota foi a soma de todas as notas dadas às questões corretas. Devido à atribuição de valores dada às questões, a nota do aluno variava entre 0 e 10. A média de cada classe foi calculada somando-se todas as notas dos alunos e dividindo-se o resultado total pelo número de alunos da respectiva classe. A avaliação em termos de distribuição foi feita por grupos (experimental e controle) e período (pré e pós-teste). Com exceção do grupo controle no pós-teste, que deu aproximadamente normal, com p-value= 0.041 (pelo teste de Shapiro-Wilks), todos os demais seguem uma distribuição normal.

Tab 1: Média das notas dos alunos (pré e pós-teste) em cada um dos grupos:

GRUPO	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
EXPERIMENTAL	**2.391**	**4.600**
CONTROLE	**3.459**	**3.465**

Os dados podem ser ilustrados através do gráfico abaixo.

Gráfico 1: Perfis das médias dos alunos dos grupos controle e experimental:



Para a análise destes dados, inicialmente foi realizada uma Análise de Variância (ANOVA) em cada um dos pré e pós-testes. A partir da ANOVA, foram obtidos os seguintes resultados:

Tabela 2: ANOVA para as notas da primeira prova (pré-teste) entre os grupos controle e experimental.

Fonte de Variação	Grau de Liberdade	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor de F	Valor de P
Grupo	1	15.2865	15.2865	12.70	0.0008
Erro	56	67.4036	1.2036		
Total	57	82.6901			

Tabela 3: ANOVA para as notas da segunda prova (pós-teste) entre os grupos controle e experimental.

Fonte de Variação	Grau de Liberdade	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor de F	Valor de P
Grupo	1	17.2624	17.2624	5.96	0.0178
Erro	56	162.1208	2.8950		
Total	57	179.3833			

Os resultados acima mostram a existência de diferenças significativas (p-value= 0.0008 e p-value= 0.0178) entre os dois grupos. Assim, a hipótese de igualdade entre os grupos em relação às médias dos alunos nas duas testagens pode ser rejeitada.

Um outro aspecto que pode ser ainda verificado é o efeito da passagem do tempo para cada um dos grupos, utilizando-se a Análise de Variância (ANOVA) para medidas repetidas. Os testes realizados para a verificação do efeito da passagem do tempo forneceram os resultados abaixo:

Tabela 4: Estatísticas para testar a hipótese da não existência do efeito do tempo.

Estatística	Valor	F	G. L. Num	Gr Den	P-value
Wilks'Lambda	0.6637	28.3737	1	56	0.0001
Pillai's Trace	0.3363	28.3737	1	56	0.0001
Hotelling-Lawley Trace	0.5067	28.3737	1	56	0.0001
Poy's Greatest Root	0.5067	28.3737	1	56	0.0001

Os testes estatísticos utilizados nesta análise, entre as várias existentes, são obtidos através dos princípios da União e Intersecção de Poy e razão de verossimilhança de Wilks. Estas estatísticas são obtidas através das raízes características da operação entre matrizes de somas de quadrados e produtos cruzados devido à hipotése nula e à matriz de somas de quadrados e produtos cruzados devido ao erro. Outras duas estatísticas muito utilizadas são as de Lawley-Hotelling e de Pillai. Todas as estatísticas fornecem testes semelhantes onde o objetivo principal em cada uma delas é verificar a homogeneidade dos perfis de respostas, considerando-se uma estrutura multivariada de dados para medidas repetidas. Os resultados obtidos permitem que não existem efeitos da passagem do tempo, ou seja, as notas no pré-teste apresentam características diferentes das obtidas no pós-teste.

Em seguida, foi aplicado o teste estatístico com a finalidade de verificar a existência de diferenças entre grupos. Os resultados são mostrados a seguir:

Tabela 5: Análise da interação entre grupo e pré e pós-teste.

Estatística	Valor	F	G. L. Num	Gr Den	P-value
Wilks'Lambda	0.6660	28.059	1	56	0.0001
Pillai's Trace	0.3340	28.059	1	56	0.0001
Hotelling-Lawley Trace	0.5015	28.059	1	56	0.0001
Poy's Greatest Root	0.5015	28.059	1	56	0.0001

Os resultados obtidos permitem rejeitar a hipótese da não existência do efeito de interação grupo x pré e pós-teste. Portanto, pode-se afirmar que o grupo experimental obteve um resultado melhor ($p < 0.05$) no tempo de realização da tarefa quando comparado ao grupo controle. Assim, os resultados indicam que o método de ensino (experimental), que considera alguns dos elementos que de acordo com Piaget (1948) devem ser articulados quando se constrói operatoriamente o conceito de fração, parece proporcionar às crianças submetidas ao mesmo um desempenho melhor com frações que o método de ensino que não articula tais elementos.

RESULTADOS DAS RESPOSTAS QUESTIONÁRIO E DO DESEMPENHO NA PROVA DE FRAÇÕES.

Os resultados da avaliação de desempenho por gênero foram os seguintes para cada um dos grupos:

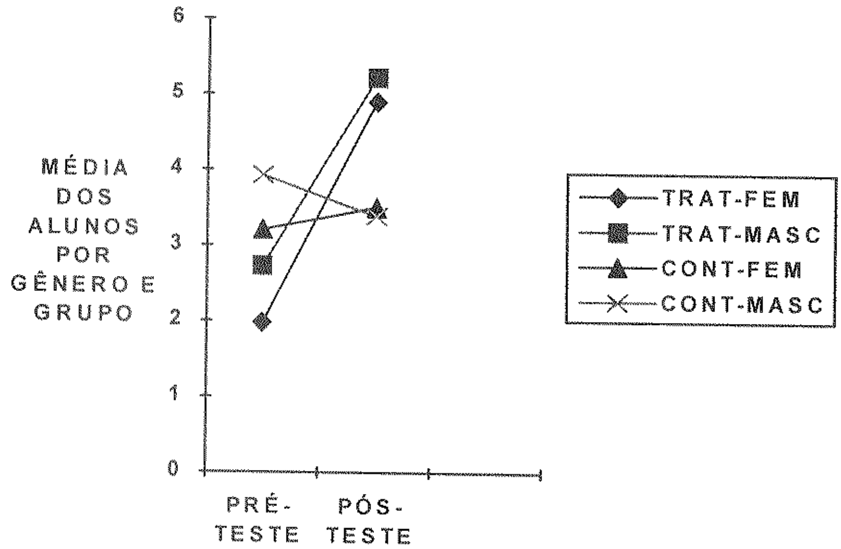
TABELA 6: MÉDIAS DOS ALUNOS POR GÊNERO E GRUPO NOS DOIS PRÉ E PÓS-TESTES (PRÉ E PÓS-TESTE).

GRUPO	GÊNERO	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
CONTROLE	FEMININO	3.2089 (0.9493)	3.5041 (1.2129)
	MASCULINO	3.9209 (1.5679)	3.3921 (1.5911)
EXPERIMENTAL	FEMININO	1.9792 (0.6054)	4.8958 (1.7700)
	MASCULINO	2.7335 (0.8697)	5.2209 (1.6905)

Observação: Os valores entre parênteses representam o desvio padrão.

Estes dados podem ser ilustrados através do gráfico abaixo:

GRÁFICO 2: MÉDIAS DOS ALUNOS POR GÊNERO E GRUPO NOS DOIS PRÉ E PÓS-TESTES (PRÉ E PÓS-TESTE).



Com a finalidade de comparar estes resultados, foi aplicada a Análise de Variância (ANOVA). Os resultados podem ser vistos na seguinte tabela:

TABELA 7: ANOVA PARA AS MÉDIAS DOS ALUNOS POR GÊNERO E GRUPO NOS DOIS PRÉ E PÓS-TESTES (PRÉ E PÓS-TESTE).

Grupo	Fonte de Variação	Grau de Liberdade	Soma de Quadrados	F-Value	P-Value
Controle	gênero	1	1.5182	0.93	0.3385
	pré e pós-teste	1	0.2303	0.14	0.7086
	gênero x pré e pós-teste	1	2.8626	1.75	0.1901
	erro	70	114.4427		
	total	73	118.8241		
Experimental	gênero	1	2.6988	1.51	0.2272
	pré e pós-teste	1	67.6295	37.90	0.0001
	gênero-pré e pós-teste	1	0.4268	0.24	0.6279
	erro	34	60.6683		
	total	37	131.4236		

Portanto, pela tabela acima, pode-se observar que as notas dos alunos do gênero masculino e feminino podem ser consideradas iguais, tanto no grupo controle como no grupo experimental. Observa-se que ainda existe efeito de pré e pós-teste somente no grupo experimental.

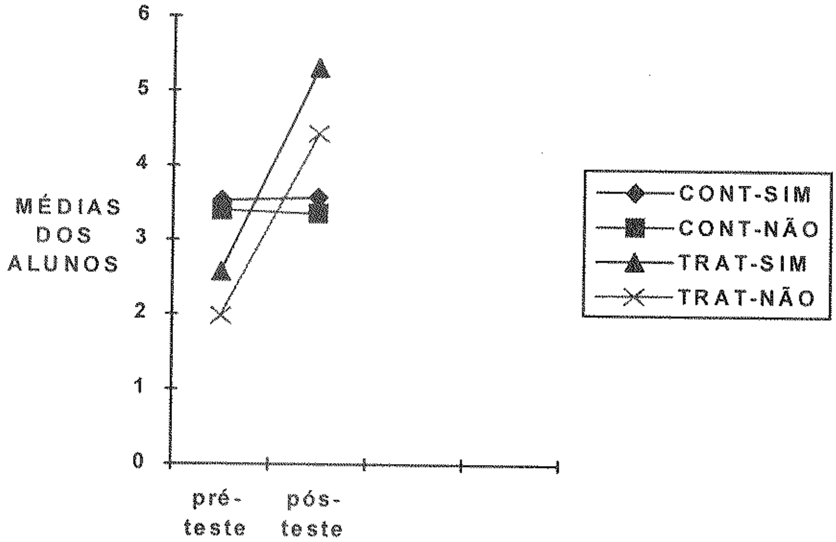
TABELA 8: MÉDIAS DAS NOTAS ENTRE GRUPOS POR DIVERSIDADE DE ESCOLA NO PRÉ E PÓS-TESTE.

GRUPO	TIPO DE RESPOSTA	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
CONTROLE	SIM	3.5294 (0.9654)	3.5661 (1.4339)
	NÃO	3.3993 (1.4406)	3.3485 (1.2794)
EXPERIMENTAL	SIM	2.5694 (0.8153)	5.3175 (1.8363)
	NÃO	1.9861 (0.8471)	4.4305 (1.0369

Observação: os valores entre parênteses representam o desvio padrão.

Os dados acima podem ser representados no seguinte gráfico:

GRÁFICO 3: MÉDIAS DAS NOTAS ENTRE GRUPOS POR DIVERSIDADE DE ESCOLA NO PRÉ E PÓS-TESTE.



Para a comparação estatística dos resultados, foi feita uma ANOVA que é mostrada na tabela 9.

TABELA 9: ANOVA DAS MÉDIAS DOS ALUNOS POR DIVERSIDADE DE ESCOLA NO PRÉ E PÓS-TESTE.

Grupo	Fonte de Variação	Grau de Liberdade	Soma de Quadrados	F-Value	P-Value
Controle	freqüência	1	0.4640	0.27	0.6020
	pré e pós-teste	1	0.0011	0.00	0.9791
	freqüência x pré e pós-teste	1	0.0152	0.01	0.9246
	erro	70	118.3441		
	total	73	118.8240		
Experimental	freqüência	1	3.9818	2.27	0.1411
	pré e pós-teste	1	49.6661	28.31	0.0001
	frequência-pré e pós-teste	1	0.1697	0.10	0.7576
	erro	34	59.6423		
	total	37	131.4236		

Como pode ser observado, não existem diferenças significativas entre as notas dos alunos que freqüentaram sempre a mesma escola ou freqüentaram outras escolas diferentes. Os resultados referentes ao pré e pós-teste mostram diferenças significativas para o grupo experimental.

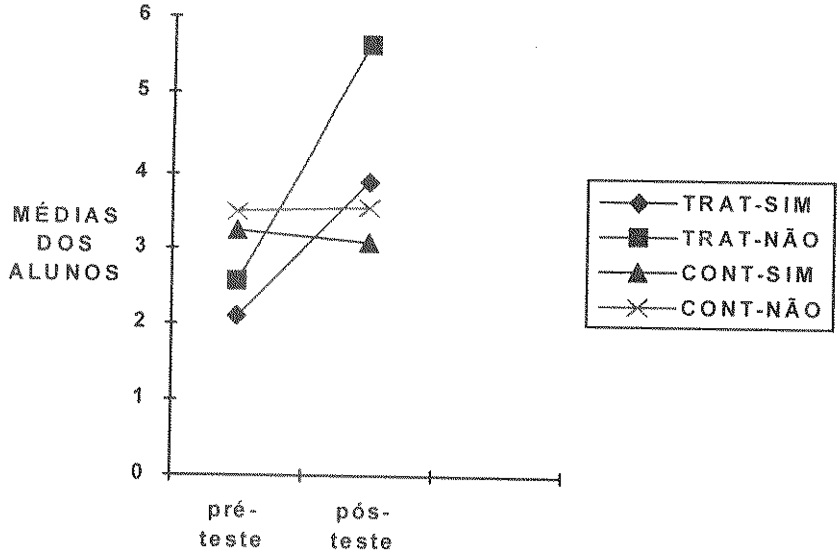
TABELA 10: MÉDIAS DOS ALUNOS POR REPETÊNCIA EM OUTRAS SÉRIES E GRUPO NO PRÉ E PÓS-TESTE.

GRUPO	TIPO DE RESPOSTA	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
CONTROLE	SIM	3.2440 (0.7935)	3.0853 (0.9176)
	NÃO	3.5092 (1.3173)	3.5532 (1.4145)
EXPERIMENTAL	SIM	2.0949 (0.0948)	3.9004 (1.6424)
	NÃO	2.5641 (0.8046)	5.6303 (1.4507)

Observação: os valores entre parênteses representam o desvio padrão.

Os dados acima podem ser representados no seguinte gráfico:

GRÁFICO 4: MÉDIAS DOS ALUNOS DE ACORDO COM REPROVAÇÃO NO PRÉ E PÓS-TESTE.



Para a comparação estatística dos resultados, foi feita uma ANOVA que é mostrada na tabela 11.

TABELA 11: ANOVA PARA AS MÉDIAS DOS ALUNOS POR REPETÊNCIA EM OUTRAS SÉRIES E GRUPO NOS DOIS PRÉ E PÓS-TESTES (PRÉ E PÓS-TESTE).

Grupo	Fonte de Variação	Grau de Liberdade	Soma de Quadrados	F-Value	P-Value
Controle	repetência	1	1.2553	0.91	0.3431
	pré e pós-teste	1	0.0373	0.02	0.8817
	repetência x pré e pós-teste	1	0.1166	0.07	0.7926
	erro	70	117.1815		
	total	73	118.8240		
Experimental	repetência	1	9.9263	6.67	0.0143
	pré e pós-teste	1	48.7179	32.73	0.0001
	repetência-pré e pós-teste	1	3.2622	2.19	0.1480
	erro	34	50.6052		
	total	37	131.4236		

Pelo que se vê na tabela 11, as notas dos alunos que repetiram e não repetiram outras séries anteriormente podem ser consideradas iguais tanto para o grupo controle quanto para o grupo experimental. O efeito de pré e pós-teste é observado somente no grupo experimental.

TABELA 12: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE MAIS GOSTAM DE MATEMÁTICA NO PRÉ E PÓS-TESTE.

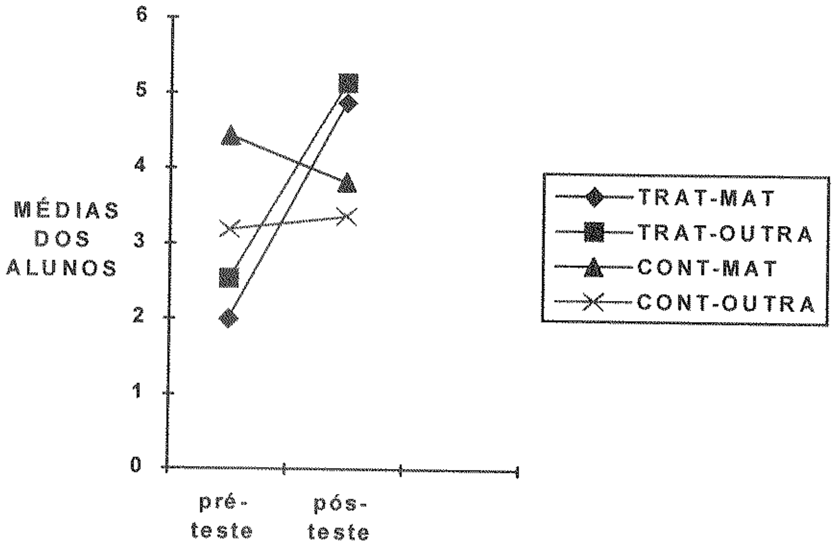
GRUPO	TIPO DE RESPOSTA	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
CONTROLE	MATEMÁTICA	4.4270 (0.7641)	3.8194 (0.8241)
	OUTRA	3.1920 (1.2078)	3.3668 (1.4427)
EXPERIMENTAL	MATEMÁTICA	1.9965 (0.5983)	2.5277 (0.8783)
	OUTRA	4.8784 (0.9323)	5.1388 (1.8556)

Observação I: os valores entre parênteses representam o desvio padrão.

Observação II: a categoria "outra" engloba todas as disciplinas do 1º grau (Português, História, Geografia, Desenho Geométrico, Inglês...).

Os dados acima podem ser representados no seguinte gráfico:

GRÁFICO 5: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE MAIS GOSTAM DE MATEMÁTICA NO PRÉ E PÓS-TESTE.



Para a comparação estatística dos resultados, foi feita uma ANOVA que é mostrada na tabela 13.

TABELA 13: ANOVA DAS MÉDIAS DOS ALUNOS QUE MAIS GOSTAM DE MATEMÁTICA NO PRÉ E PÓS-TESTE.

Grupo	Fonte de Variação	Grau de Liberdade	Soma de Quadrados	F-Value	P-Value
Controle	disciplina que mais gostam	1	8.9290	5.79	0.0188
	pré e pós-teste	1	0.5873	0.38	0.5392
	disciplina que mais gostam x pré e pós-teste	1	1.9194	1.24	0.2685
	erro	70	107.9750		
	total	73	118.8240		
Experimental	disciplina que mais gostam	1	0.9895	0.54	0.4688
	pré e pós-teste	1	47.6426	25.84	0.0001
	disciplina que mais gostam x pré e pós-teste	1	0.1158	0.06	0.8036
	erro	34	62.6885		
	total	37	131.4236		

Pelo que se vê na tabela 13, as notas dos alunos cuja disciplina que mais gostam é a matemática e dos alunos que preferem outras disciplinas podem ser consideradas iguais tanto para o grupo controle quanto para o grupo experimental. A diferença entre pré-teste e pós-teste é observada somente no grupo experimental.

TABELA 14: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE MENOS GOSTAM DE MATEMÁTICA NO PRÉ E PÓS-TESTE.

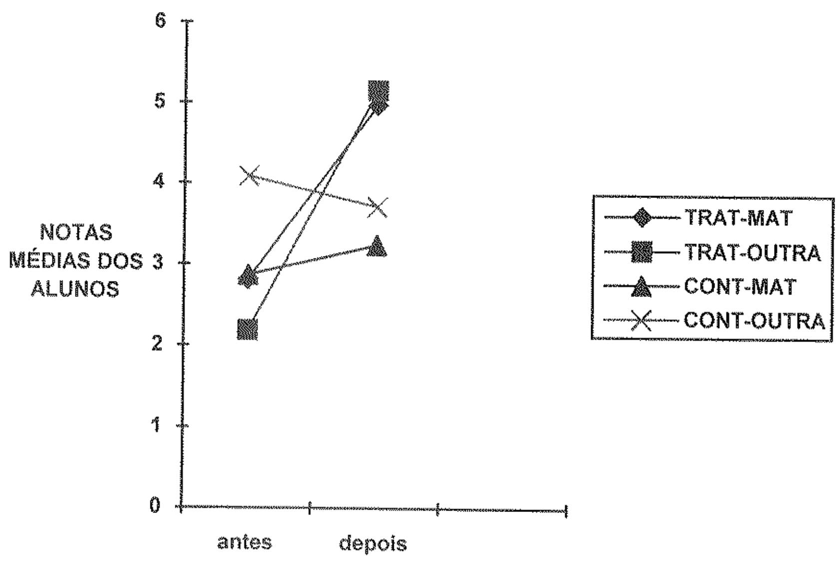
GRUPO	TIPO DE RESPOSTA	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
CONTROLE	MATEMÁTICA	2.8691 (0.8359)	3.2346 (1.3858)
	OUTRA	4.0817 (1.2909)	3.7075 (1.2760)
EXPERIMENTAL	MATEMÁTICA	2.8174 (1.0772)	4.9702 (1.9921)
	OUTRA	2.1817 (0.6042)	5.1504 (1.5687)

Observação I: os valores entre parênteses representam o desvio padrão.

Observação II: a categoria "outra" engloba todas as disciplinas do 1º grau (Português, História, Geografia, Desenho Geométrico, Inglês...).

Os dados acima podem ser representados no seguinte gráfico:

GRÁFICO 6: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE MENOS GOSTAM DE MATEMÁTICA NO PRÉ E PÓS-TESTE.



Para a comparação estatística dos resultados, foi feita uma ANOVA que é mostrada na tabela 15.

TABELA 15: ANOVA DAS MÉDIAS DOS ALUNOS QUE MENOS GOSTAM DE MATEMÁTICA NO PRÉ E PÓS-TESTE.

Grupo	Fonte de Variação	Grau de Liberdade	Soma de Quadrados	F-Value	P-Value
Controle	disciplina que menos gostam	1	13.1304	8.91	0.0039
	pré e pós-teste	1	0.0003	0.00	0.9877
	disciplina que menos gostam x pré e pós-teste	1	2.5289	1.72	0.1945
	erro	70	103.1641		
	total	73	118.8240		
Experimental	disciplina que menos gostam	1	0.4586	0.25	0.6188
	pré e pós-teste	1	57.9822	31.87	0.0001
	disciplina que menos gostam x pré e pós-teste	1	1.4717	0.81	0.3748
	erro	34	61.8634		
	total	37	131.4236		

Pelo que se vê na tabela 15, as notas dos alunos cuja disciplina que menos gostam é a matemática e dos alunos que não gostam de outras disciplinas podem ser consideradas iguais tanto para o grupo controle quanto para o grupo experimental. Diferenças entre pré-teste e pós-teste são observados no grupo experimental.

TABELA 16: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE MAIS GOSTARAM DE ESTUDAR FRAÇÕES NO PRÉ E PÓS-TESTE.

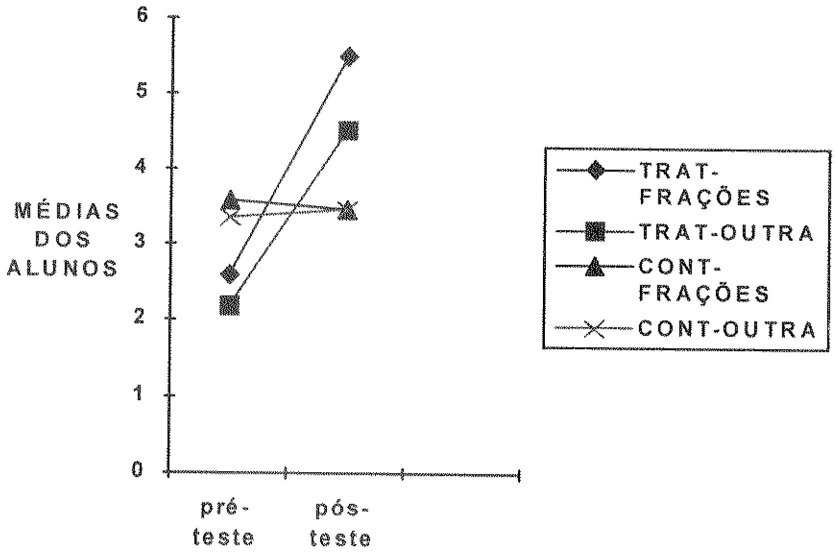
GRUPO	TIPO DE RESPOSTA	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
CONTROLE	FRAÇÕES	3.5850 (1.1011)	3.4678 (1.3855)
	OUTRA	3.3630 (1.3391)	3.4623 (1.3327)
EXPERIMENTAL	FRAÇÕES	2.5888 (0.8601)	5.4924 (1.6974)
	OUTRA	2.1788 (0.8098)	4.5225 (1.5971)

Observação I: os valores entre parênteses representam o desvio padrão.

Observação II: a categoria "outra" engloba tópicos como: operações, M.M.C (mínimo múltiplo comum), M.D.C. (máximo divisor comum), operações (adição, subtração...), problemas, potenciação...

Os dados acima podem ser representados no seguinte gráfico:

GRÁFICO 7: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE MAIS GOSTARAM DE ESTUDAR FRAÇÕES NO PRÉ E PÓS-TESTE.



Para a comparação estatística dos resultados, foi feita uma ANOVA que é mostrada na tabela 17.

TABELA 17: ANOVA DAS MÉDIAS DOS ALUNOS QUE MAIS GOSTARAM DE ESTUDAR FRAÇÕES NO PRÉ E PÓS-TESTE.

Grupo	Fonte de Variação	Grau de Liberdade	Soma de Quadrados	F-Value	P-Value
Controle	tópico que mais gostaram de estudar	1	0.2351	0.14	0.7104
	pré e pós-teste	1	0.0014	0.00	0.9766
	tópico que mais gostaram de estudar x pré e pós-teste	1	0.2126	0.13	0.7240
	erro	70	118.3757		
	total	73	118.8240		
Experimental	tópico que mais gostaram de estudar	1	4.4064	2.55	0.1193
	pré e pós-teste	1	63.7752	36.96	0.0001
	tópico que mais gostaram de estudar x pré e pós-teste	1	0.7269	0.42	0.3748
	erro	34	58.6604		
	total	37	131.4236		

A tabela 17 mostra as notas dos alunos que tiveram algum tópico como preferido não foram diferentes dos que não tiveram tal preferência tanto para o grupo controle quanto para o grupo experimental. O efeito de pré e pós-teste é observado somente no grupo experimental.

TABELA 18: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE PRECISAM ESTUDAR MAIS MATEMÁTICA NO PRÉ E PÓS-TESTE.

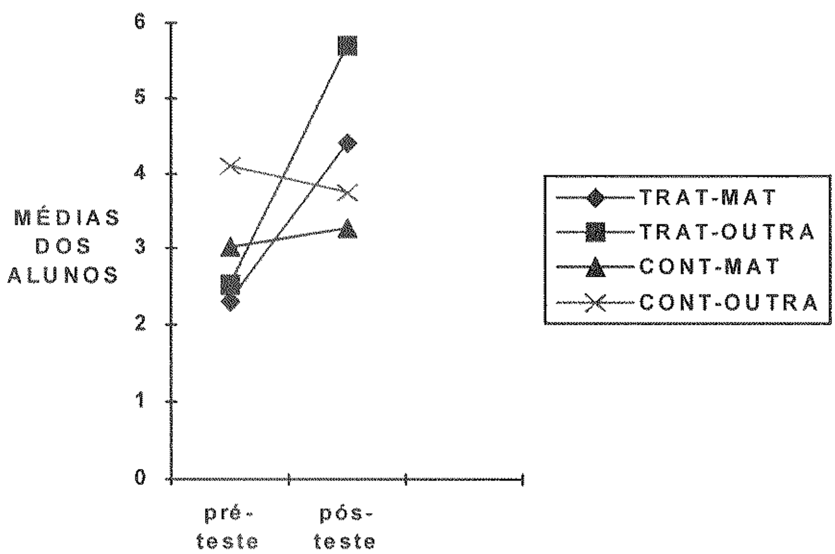
GRUPO	TIPO DE RESPOSTA	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
CONTROLE	MATEMÁTICA	3.0145 (0.9970)	3.2670 (1.3899)
	OUTRA	4.1111 (1.2789)	3.7546 (1.2429)
EXPERIMENTAL	MATEMÁTICA	2.3070 (1.1451)	4.4058 (1.9785)
	OUTRA	2.5138 (0.4797)	5.6944 (1.1471)

Observação I: os valores entre parênteses representam o desvio padrão.

Observação II: a categoria "outra" engloba todas as disciplinas do 1º grau (Português, História, Geografia, Desenho Geométrico, Inglês...).

Os dados acima podem ser representados no seguinte gráfico:

GRÁFICO 8: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE PRECISAM ESTUDAR MAIS MATEMÁTICA NO PRÉ E PÓS-TESTE.



Para a comparação estatística dos resultados, foi feita uma ANOVA que é mostrada na tabela 19.

TABELA 19: ANOVA DAS MÉDIAS DOS ALUNOS QUE PRECISAM ESTUDAR MAIS MATEMÁTICA NO PRÉ E PÓS-TESTE.

Grupo	Fonte de Variação	Grau de Liberdade	Soma de Quadrados	F-Value	P-Value
Controle	estudo de alguma disciplina	1	11.1951	7.39	0.0083
	pré e pós-teste	1	0.0481	0.03	0.8589
	estudo de alguma disciplina x pré e pós-teste	1	1.6539	1.09	0.2995
	erro	70	105.9780		
	total	73	118.8240		
Experimental	estudo de alguma disciplina	1	5.2961	3.23	0.0811
	pré e pós-teste	1	66.0108	40.27	0.0001
	estudo de alguma disciplina x pré e pós-teste	1	2.7716	1.69	0.2022
	erro	34	55.7261		
	total	37	131.4236		

Pelo que se vê na tabela 19, as notas dos alunos que acreditam que precisam estudar mais alguma outra disciplina podem ser consideradas iguais a dos alunos que não acreditam em ter que estudar mais alguma outra disciplina tanto para o grupo controle quanto para o grupo experimental. O efeito de pré e pós-teste é observado somente no grupo experimental.

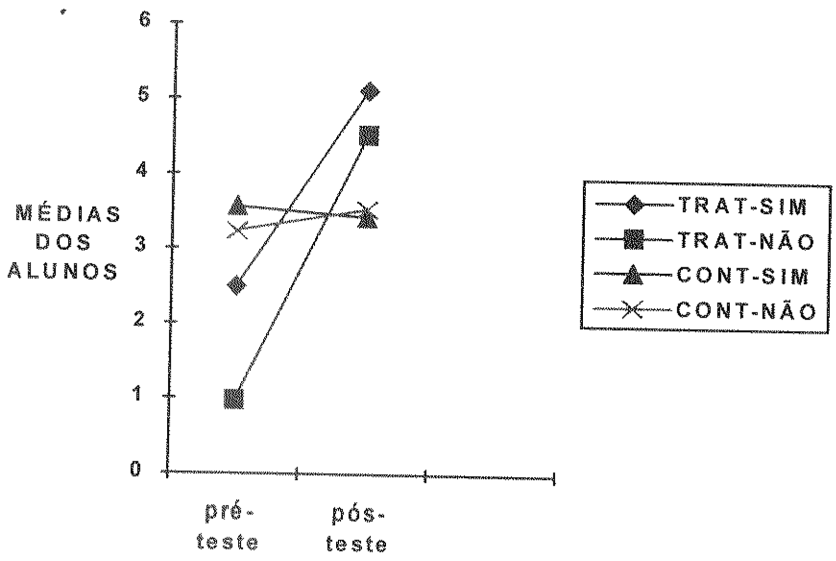
TABELA 20: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE GOSTAM OU NÃO DE ESTUDAR FRAÇÕES NO PRÉ E PÓS-TESTE.

GRUPO	TIPO DE RESPOSTA	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
CONTROLE	SIM	3.5638 (1.3538)	3.4305 (1.2770)
	NÃO	3.2407 (0.9374)	3.5358 (1.5103)
EXPERIMENTAL	SIM	2.4961 (0.7883)	5.1157 (1.7266)
	NÃO	0.9722	4.5138

Observação: os valores entre parênteses representam o desvio padrão.

Os dados acima podem ser representados no seguinte gráfico:

GRÁFICO 8: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE GOSTAM OU NÃO DE ESTUDAR FRAÇÕES NO PRÉ E PÓS-TESTE.



Para a comparação estatística dos resultados, foi feita uma ANOVA que é mostrada na tabela 21.

TABELA 21: ANOVA DAS MÉDIAS DOS ALUNOS QUE GOSTAM OU NÃO DE ESTUDAR FRAÇÕES NO PRÉ E PÓS-TESTE.

Grupo	Fonte de Variação	Grau de Liberdade	Soma de Quadrados	F-Value	P-Value
Controle	gosta de frações	1	0.1923	0.11	0.7364
	pré e pós-teste	1	0.1061	0.06	0.8025
	gosta de frações x pré e pós-teste	1	0.7442	0.44	0.5084
	erro	70	117.8868		
	total	73	118.8240		
Experimental	gosta de frações	1	2.1405	1.19	0.2834
	pré e pós-teste	1	17.9816	9.98	0.0033
	gosta de frações x pré e pós-teste	1	0.4027	0.22	0.6394
	erro	34	61.2509		
	total	37	131.4236		

A tabela 21 mostra que as notas dos alunos que gostam de estudar frações não foram diferentes dos que não gostam tanto para o grupo controle quanto para o grupo experimental. O efeito de pré e pós-teste é observado somente no grupo experimental.

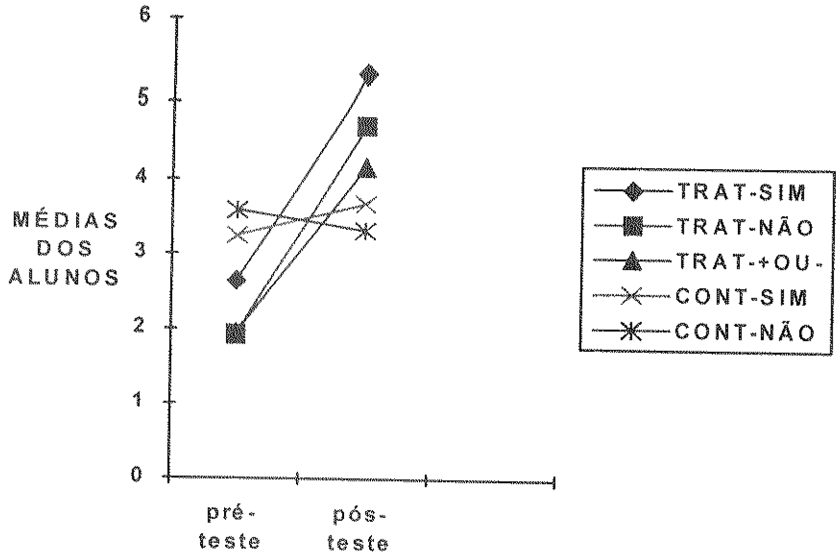
TABELA 22: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE ACREDITAM OU NÃO TER APRENDIDO TUDO SOBRE FRAÇÕES NOS PRÉ E PÓS-TESTE.

GRUPO	TIPO DE RESPOSTA	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
CONTROLE	SIM	3.2546 (1.1491)	3.6759 (1.5012)
	NÃO	3.5984 (1.2902)	3.3202 (1.2275)
EXPERIMENTAL	SIM	2.6388 (0.7820)	5.3044 (1.6238)
	NÃO	1.9305 (0.9191)	4.6944 (2.0709)
	MAIS OU MENOS	1.9499	4.1666

Observação: os valores entre parênteses representam o desvio padrão.

Os dados acima podem ser representados no seguinte gráfico:

GRÁFICO 9: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE ACREDITAM OU NÃO TER APRENDIDO TUDO SOBRE FRAÇÕES NOS PRÉ E PÓS-TESTE.



Para a comparação estatística dos resultados, foi feita uma ANOVA que é mostrada na tabela 23.

TABELA 23: ANOVA DAS MÉDIAS DOS ALUNOS QUE ACREDITAM OU NÃO TER APRENDIDO TUDO SOBRE FRAÇÕES NOS PRÉ E PÓS-TESTE.

Grupo	Fonte de Variação	Grau de Liberdade	Soma de Quadrados	F-Value	P-Value
Controle	aprendizagem de frações	1	0.0005	0.00	0.9852
	pré e pós-teste	1	0.0918	0.06	0.8151
	aprendizagem de frações x pré e pós-teste	1	2.1793	1.31	0.2567
	erro	70	116.6435		
	total	73	118.8240		
Experimental	aprendizagem de frações	1	4.1563	1.12	0.3396
	pré e pós-teste	1	22.9256	12.33	0.0014
	aprendizagem de frações x pré e pós-teste	1	0.1223	0.03	0.9677
	erro	32	71.9083		
	total	37	59.5152		

A tabela 23 mostra que as notas dos alunos que acreditaram ter aprendido tudo sobre as frações não são diferentes das notas dos alunos que responderam não à questão. O efeito de pré e pós-teste é somente observado no grupo experimental.

TABELA 24: MÉDIAS DOS ALUNOS POR ENTENDIMENTO DAS FRAÇÕES NO PRÉ E PÓS-TESTE.

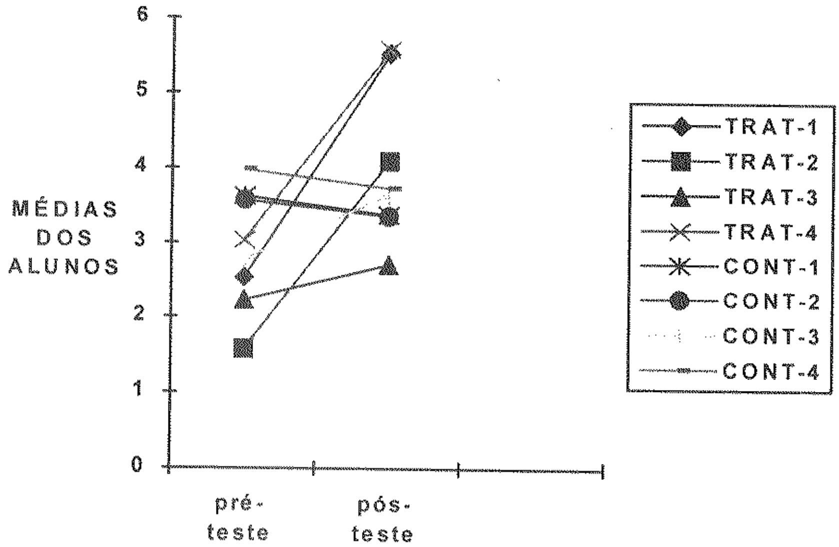
GRUPO	TIPO DE RESPOSTA	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
CONTROLE	1*	3.6250 (1.5437)	3.3750 (1.4582)
	2*	3.5694 (1.0632)	3.3564 (1.1923)
	3*	2.7864 (0.7221)	3.6458 (1.7343)
	4*	3.9756 (1.5407)	3.7326 (1.0673)
EXPERIMENTAL	1*	2.5277 (0.6702)	5.5208 (1.7121)
	2*	1.5625 (0.6146)	4.0972 (0.9869)
	3*	2.2222	2.7083
	4*	3.0381 (0.9940)	5.5729 (1.7626)

1*: Não entendeu algum tópico (Equivalência, comparação ou problemas);
2*: Não entendeu nada;
3*: Não respondeu;
4*: Não sabe.

Observação: os valores entre parênteses representam o desvio padrão.

Os dados acima podem ser representados no seguinte gráfico:

GRÁFICO 10: MÉDIAS DOS ALUNOS POR ENTENDIMENTO DAS FRAÇÕES NO PRÉ E PÓS-TESTE.



Para a comparação estatística dos resultados, foi feita uma ANOVA que é mostrada na tabela 25.

TABELA 25: ANOVA DAS MÉDIAS DOS ALUNOS POR ENTENDIMENTO DAS FRAÇÕES NO PRÉ E PÓS-TESTE.

Grupo	Fonte de Variação	Grau de Liberdade	Soma de Quadrados	F-Value	P-Value
Controle	entendimento de frações	3	2.2263	0.43	0.7294
	pré e pós-teste	1	0.0217	0.01	0.9106
	entendimento de frações x pré e pós-teste	3	3.7243	0.73	0.5401
	erro	66	112.8728		
	total	73	118.8240		
Experimental	entendimento de frações	3	14.0482	3.00	0.0459
	pré e pós-teste	1	22.8371	14.65	0.0006
	entendimento de frações x pré e pós-teste	1	2.9796	0.64	0.5970
	erro	30	71.9083		
	total	37	59.5152		

A tabela 25 mostra que as notas dos alunos que não entenderam algum ou mais tópicos sobre as frações não diferiram das notas dos alunos que afirmam ter entendido tudo sobre as mesmas, e isso ocorre tanto no grupo controle como no experimental. O efeito de pré e pós-teste também só foi observado para o grupo experimental.

TABELA 26: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE GOSTARIAM OU NÃO DE SABER ALGO MAIS SOBRE FRAÇÕES E GRUPO NOS DOIS PRÉ E PÓS-TESTES (PRÉ E PÓS-TESTE).

GRUPO	TIPO DE RESPOSTA	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
CONTROLE	1*	2.8205 (0.8431)	2.8899 (0.8904)
	2*	3.8049 (1.2819)	3.7760 (1.4474)
EXPERIMENTAL	1*	2.7893 (1.1261)	4.9537 (2.2050)
	2*	2.2435 (0.6584)	5.1442 (1.4879)

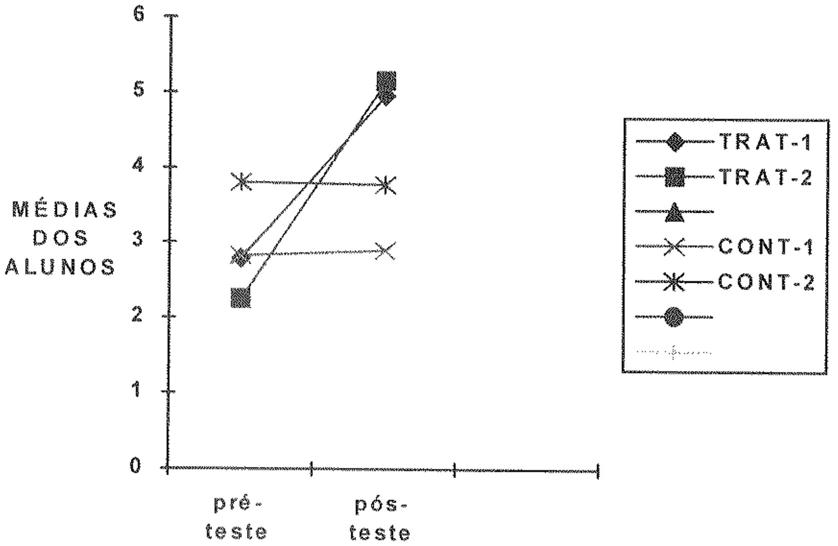
1*: Não respondeu, não sabe ou não quer saber mais nada;

2*: Quer saber mais algum tópico sobre frações, tal como: equivalência, comparações, problemas...

Observação: os valores entre parênteses representam o desvio padrão.

Os dados acima podem ser representados no seguinte gráfico:

GRÁFICO 11: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE GOSTARIAM OU NÃO DE SABER ALGO MAIS SOBRE FRAÇÕES E GRUPO NOS DOIS PRÉ E PÓS-TESTES (PRÉ E PÓS-TESTE).



Para a comparação estatística dos resultados, foi feita uma ANOVA que é mostrada na tabela 27.

TABELA 27: ANOVA DAS MÉDIAS DOS ALUNOS QUE GOSTARIAM OU NÃO DE SABER ALGO MAIS SOBRE FRAÇÕES NO PRÉ E PÓS-TESTE.

Grupo	Fonte de Variação	Grau de Liberdade	Soma de Quadrados	F-Value	P-Value
Controle	quer saber algo mais sobre as frações	1	14.7523	9.93	0.0024
	pré e pós-teste	1	0.0069	0.00	0.9458
	quer saber algo mais sobre as frações x pré e pós-teste	1	0.0408	0.03	0.8689
	erro	70	104.0303		
	total	73	118.8240		
Experimental	quer saber algo mais sobre as frações	1	0.2590	0.14	0.7095
	pré e pós-teste	1	52.6585	28.68	0.0001
	quer saber algo mais sobre as frações x pré e pós-teste	1	1.1127	0.61	0.4416
	erro	34	62.4221		
	total	37	131.4236		

A tabela 27 mostra que no grupo controle houve uma diferença entre as notas dos alunos que queriam ou não saber algo mais sobre as frações. Contudo, o efeito de pré e pós-teste somente foi observado para o grupo experimental.

TABELA 28: MÉDIAS DOS ALUNOS POR USO DAS FRAÇÕES E GRUPO NO PRÉ E PÓS-TESTE.

GRUPO	TIPO DE RESPOSTA	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
CONTROLE	1*	3.4625 (1.2476)	3.4857 (1.3494)
	2*	3.3333	2.7083
EXPERIMENTAL	1*	2.4851 (0.8571)	5.2380 (1.8024)
	2*	2.2222 (0.8603)	4.6527 (1.3722)

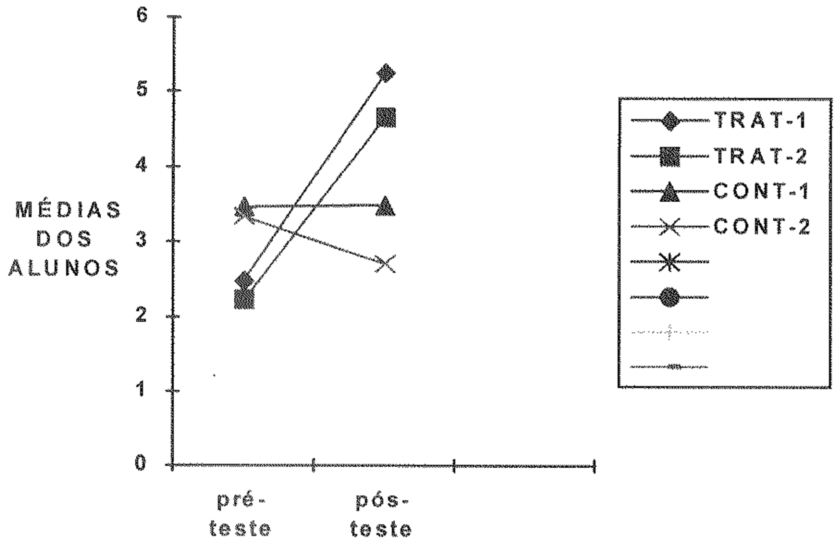
1*: Faz referências a partições de objetos em partes iguais, a utilizações na vida diária ou ao uso em situações escolares.

2*: Não sabe ou não respondeu.

Observação: os valores entre parênteses representam o desvio padrão.

Os dados acima podem ser representados no seguinte gráfico:

GRÁFICO 12: MÉDIAS DOS ALUNOS POR USO DAS FRAÇÕES NO PRÉ E PÓS-TESTE.



Para a comparação estatística dos resultados, foi feita uma ANOVA que é mostrada na tabela 28.

TABELA 29: ANOVA DAS MÉDIAS DOS ALUNOS POR USO DAS FRAÇÕES E GRUPO NO PRÉ E PÓS-TESTE.

Grupo	Fonte de Variação	Grau de Liberdade	Soma de Quadrados	F-Value	P-Value
Controle	uso de frações	1	0.3998	0.24	0.8281
	pré e pós-teste	1	0.1762	0.10	0.7476
	uso de frações x pré e pós-teste	1	0.2043	0.12	0.7290
	erro	70	118.2192		
	total	73	118.8240		
Experimental	uso de frações	1	1.3253	0.72	0.4009
	pré e pós-teste	1	49.4952	27.02	0.0001
	uso de frações x pré e pós-teste	1	0.1914	0.10	0.7484
	erro	34	62.2771		
	total	37	131.4236		

A tabela 29 mostra que as notas dos alunos que fazem uso das frações somente em situações escolares e as notas dos alunos que fazem uso das frações em outras situações não diferiram tanto para o grupo controle quanto para o experimental. O efeito de pré e pós-teste somente foi observado no grupo experimental.

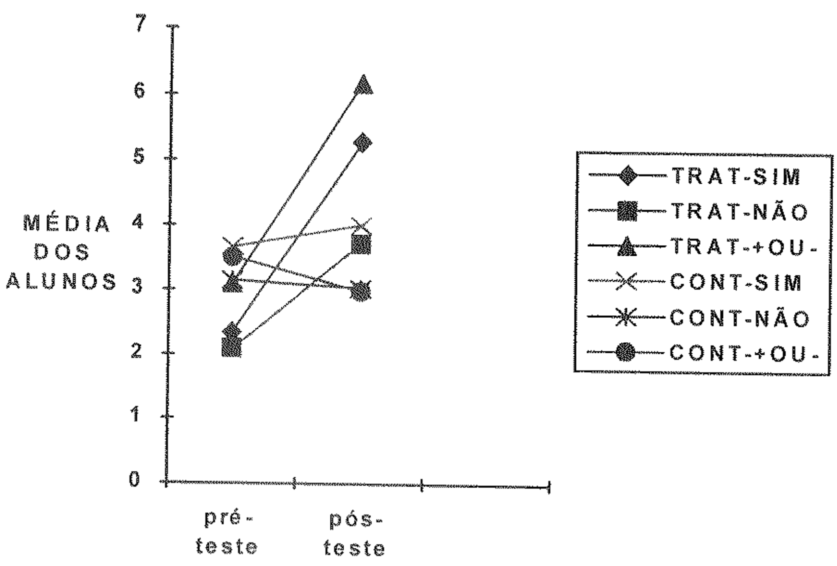
TABELA 30: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE GOSTAM OU NÃO DE RESOLVER PROBLEMAS COM FRAÇÕES NO PRÉ E PÓS-TESTE.

GRUPO	TIPO DE RESPOSTA	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
CONTROLE	SIM	3.6601 (1.2907)	4.0032 (1.5680)
	NÃO	3.1423 (1.0742)	3.0266 (0.8117)
	MAIS OU MENOS	3.5069 (1.3754)	2.9774 (1.1082)
EXPERIMENTAL	SIM	2.3556 (0.7170)	5.2662 (1.5931)
	NÃO	2.0833 (0.7774)	3.7152 (1.3327)
	MAIS OU MENOS	3.1018 (1.3035)	6.1805 (1.7718)

Observação: os valores entre parênteses representam o desvio padrão.

Os dados acima podem ser representados no seguinte gráfico:

GRÁFICO 13: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE GOSTAM OU NÃO DE RESOLVER PROBLEMAS COM FRAÇÕES NO PRÉ E PÓS-TESTE.



Para a comparação estatística dos resultados, foi feita uma ANOVA que é mostrada na tabela 31.

TABELA 31: MÉDIAS DOS ALUNOS QUE GOSTAM OU NÃO DE RESOLVER PROBLEMAS COM FRAÇÕES NO PRÉ E PÓS-TESTE.

Grupo	Fonte de Variação	Grau de Liberdade	Soma de Quadrados	F-Value	P-Value
Controle	resolução de problemas com frações	2	8.8404	2.79	0.0685
	pré e pós-teste	1	0.1708	0.11	0.7437
	resolução de problemas com frações x pré e pós-teste	2	2.2021	0.69	0.5027
	erro	68	107.7809		
	total	73	118.8240		
Experimental	resolução de problemas com frações	2	10.6435	3.38	0.0466
	pré e pós-teste	1	43.5657	27.66	0.0001
	resolução de problemas com frações x pré e pós-teste	2	2.7537	0.87	0.4269
	erro	32	50.3966		
	total	37	131.4236		

A tabela 31 mostra que as notas dos alunos que não gostam de resolver problemas com frações não diferiram das notas dos alunos que gostam de resolver problemas com as mesmas tanto no grupo controle como no experimental. O efeito de pré e pós-teste também só foi observado para o grupo experimental.

CAPÍTULO VII

RESULTADOS E ANÁLISE COMPARATIVA DAS QUESTÕES

OPERADOR (questões: 4,6 e 12)

No estudo final, assim como no estudo piloto, as questões que tratavam das frações como operadores eram estabelecidas sobre os contextos discreto (questões 4 e 6) e contínuo (questão 12).

As tabelas 4A e 4B mostram que o Teste de Exatidão de Fisher só aponta um nível de significância menor que 5% para o grupo experimental. O mesmo acontece para a questão 6. Logo, a hipótese da não diferença entre um método de ensino (convencional) e outro (diferenciado) é rejeitada. Por este teste, pode-se concluir que o tratamento foi realmente efetivo para estas duas questões. Quanto à questão 12, o grupo controle é que passa a ter uma diferença de acertos significativa para a questão.

Os resultados acima talvez possam ser explicados pelo fato de que as atividades propostas para o grupo experimental priorizavam o trabalho com operador no contexto discreto. Este exercício mostrava claramente a necessidade de dividir o total de grãos de feijão em grupos com o mesmo número de elementos e de trabalhar com um determinado número de grupos. O fato de na questão 4 o numerador ser igual a 1 e, por isso, ser considerado um facilitador para o acerto (mesmo quando a criança esquece de considerar as partes o resultado é o mesmo) não vai contra a idéia acima. Pode ser observado que na questão 6, o numerador era igual a 3 e esta também obteve um índice significativo. Contudo, os resultados parecem indicar que o entendimento das crianças não foi o mesmo para o contexto contínuo. Pode ser verificado que sete alunos (36.84%) dividiram o todo (80 litros) pelo denominador para calcular a quantidade pedida, 4 alunos (21.05%) tiveram um procedimento aditivo com a fração: somaram numerador e denominador e tiraram o resultado da soma do todo e 1 aluno (5.26%) multiplicou numerador e denominador e dividiu o todo pelo resultado desta multiplicação. A tabela 12A mostra que as respostas dos alunos foram bastante variadas.

A idéia que o conteúdo da questão 12 é geralmente introduzido e trabalhado com regra ("divide pelo debaixo e multiplica pelo de cima", muito usada convencionalmente), pode ser aceita para explicar a razão das atividades com as crianças não serem significativas para a mesma. Como foi visto, diferentes contextos de um mesmo conceito requerem diferentes representações do mesmo e, desta forma, diferentes esquemas cognitivos, que por sinal implicam em diferentes procedimentos. O que parece bastante claro em relação aos alunos do grupo experimental é que, mesmo tendo um domínio pelo menos instrumental de uma fração enquanto um operador, não apresentam abstração na noção de aplicação de um operador. Os resultados das questões 4 e 6 parecem indicar que as crianças ficaram presas aos conteúdos anteriormente aprendidos.

<u>EQUIVALÊNCIA</u> (questões: 8,11 e 13)

As questões que tratavam de frações equivalentes eram as questões 8, 11 e 13.

Os resultados mostrados nas tabelas referentes às questões 8 e 13, de acordo com o Teste de Exatidão de Fisher, mostram que tanto para o grupo controle quanto para o grupo experimental não houve diferenças significativas entre as médias das notas dos alunos. Os resultados obtidos para a questão 11 mostram diferença significativa somente para o grupo experimental.

A questão 11, apesar de não ter nenhuma representação concreta das frações que deveriam ser comparadas para que se chegasse à equivalência das mesmas e, por isto estar somente no nível simbólico, parece evocar, em nível de pensamento, comparações feitas com outras frações, em princípio com os discos e posteriormente com símbolos matemáticos, chegando a perceber que uma mesma fração pode ser escrita de várias maneiras (com numeradores e denominadores diferentes).

A questão 8 possui um grau de dificuldade grande porque não oferece possibilidade de comparação entre duas ou mais frações, mas sim a possibilidade do aluno construir através de uma única fração uma outra equivalente à mesma. Este trabalho geralmente é feito somente em nível simbólico com a regra de multiplicar-se numerador e denominador pelo mesmo número. As atividades com o grupo experimental em momento algum (somente quando algum aluno lembrava) insistia no uso de regras. Fica claro que apesar de alguns alunos terem ido bem na questão 11 (que também tratava de equivalência) e por isto sabiam que frações com numeradores e denominadores diferentes podem significar uma mesma quantidade (para eles), muitos não conseguiram partir de uma única fração e chegar a sua fração equivalente. Isto parece deixar claro que uma única fração dada não conseguiu evocar em nível de pensamento a comparação com outras frações para que se chegasse à fração equivalente.

Embora a questão 13, tenha sido elaborada com a finalidade de possibilitar, através da comparação entre representações concretas de frações, que o aluno chegue à equivalência de duas delas, o Teste de Exatidão de Fisher mostra que tanto no grupo controle quanto no grupo tratamento não houve diferenças significativas entre as médias das notas dos alunos tomadas antes e depois de cada método de ensino. No entanto, para o grupo experimental a freqüência de acertos foi de 78.95% contra 37.84% para o grupo controle. Assim, no grupo experimental de 19 alunos, 15 alunos mostraram ter noção de comparação através de quantidades tomadas e não ficaram presos à semelhança geométrica das figuras que compunham os retângulos. O fato dos alunos do grupo experimental compararem figuras divididas de diferentes modos e terem chegado à equivalência de duas, mostra a importância da atividade chamada de "Jogo Livre" onde os mesmos tiveram a oportunidade de comporem e decomporem várias figuras com as peças dos discos e desta forma puderam construir mentalmente a noção de mobilidade para as peças.

<u>ASSOCIAÇÃO ENTRE REPRESENTAÇÃO CONCRETA E LINGUAGEM MATEMÁTICA</u> (questões: 5,10,15 e 16)

A questão 5 que tratava da associação entre representação concreta e linguagem matemática, muito utilizada até mesmo para a introdução do conceito de fração, não mostrou diferenças significativas entre o grupo controle e o grupo experimental. Porém, para o grupo experimental, a freqüência de acertos foi maior no pós-teste (78.95%) contra (57.14%) do pré-teste, o que não ocorreu para o grupo controle que teve a freqüência de acertos diminuída: (91.89%) no pré-teste contra (81.08%) no pós-teste.

O fato de a representação gráfica da fração ser considerado um facilitador do acerto para muitos, pelo fato de permitir a contagem, não tira a importância das atividades realizadas com as crianças do grupo experimental. Nessa questão, da mesma forma que para todos os ítens da questão 16, as crianças mostraram que possuem os conceitos de dividir e tomar partes e não fazer uso da contagem para chegar à representação matemática. Se assim fosse, teriam marcado o ítem 3 onde os 5 quadradinhos que estavam pintados no desenho poderiam ser associados ao numeral 5 (nenhum aluno marcou tal ítem) ou teriam também marcado o ítem 1 com maior frequencia (4 alunos, 21.05% o fizeram) onde a fração era 5/10. Para estes alunos a representação seria 5 partes tomadas para 10 não tomadas.

Já a questão 10 que também tinha o mesmo propósito que a questão 5, revelou pelo Teste de Exatidão de Fisher um índice significativo para o grupo experimental. Pode ser verificado que 9 alunos (42.86%) acertaram a questão no pré-teste e 16 alunos (84.21%) acertaram no pós-teste. O grupo controle não apresentou resultados significativos já que tanto no pré-teste como no pós-teste os alunos tiveram uma alta freqüência de acertos 28 (75.68%) e 30 (81.08%) respectivamente.

Também nessa questão, os alunos do grupo experimental puderam deixar evidente a construção de referênciais mentais que lhes possibilitaram proceder considerando o caráter relativo das frações, caso contrário teriam ainda tratado as bolinhas pintadas como quantidades absolutas e marcado o ítem 1. Nenhum aluno procedeu desta maneira no pós-teste.

A questão 15, assim como a questão 8, possuía também um certo grau de dificuldade porque trata-se de um exercício não muito trabalhado regularmente e também porque as atividades baseadas nos "Jogos com Frações" já ofereciam as partes dos discos devidamente divididas, evitando assim que as crianças pudessem não só compor e decompor os discos e sim dividi-los, o que certamente resultaria em outras reelaborações mentais feitas por elas no momento das divisões. A figura da questão não possuía todas as partes divididas explicitamente. Este fato levaria a uma divisão implícita da figura para que se chegasse à alternativa correta. Daí a necessidade das elaborações e reelaborações mentais ditas acima. Tanto para o grupo controle quanto para o grupo experimental a questão teve um número bem baixo de acertos (13.51%) e (26.32%), respectivamente.

As tabelas da questão 16 do grupo experimental mostram que para todas as alternativas o nível de significância medido pelo Teste de Exatidão de Fisher é significativo. De outra forma, para estas alternativas houve diferenças entre as medidas tomadas antes e depois do tratamento. Tem-se que a média das freqüências de acerto de todas as alternativas é de 60.52%. Nestas alternativas, o acerto era considerado quando o aluno fazia uma correta interpretação de numerador e denominador levando em conta a necessidade de que as partes fossem iguais.

Para o grupo controle, as tabelas da questão 16B3 e 16B4 possuem índices significativos. Essas tabelas referem-se aos ítens c e d da questão. Tem-se que a média de freqüência de acerto de todas as alternativas é de 29.37%. A consideração de acertos era a mesma descrita para o grupo experimental.

A alta freqüência de acertos dos alunos do grupo experimental pode ser atribuída ao fato de os mesmos já estarem aptos a fazer associações entre símbolos matemáticos (fracionários) e figuras geométricas, tendo em vista que as frações são introduzidas a partir da 3ª série. Entretanto os resultados dos sujeitos do grupo controle contrariam essa idéia. Fosse isso verdadeiro, tais resultados seriam praticamente os mesmos. Portanto, este tipo de raciocínio leva a crer que as atividades desenvolvidas com as crianças do grupo experimental realmente foram úteis, pois mesmo não partindo de desenhos para "conceituar" frações, tais atividades levam em conta a necessidade de representá-las por símbolos matemáticos. Contudo, a representação simbólica teve seu momento para cada fração, mesmo sabenque os alunos já tinham visto tais representações nos anos anteriores. Logo, a dinâmica subjacente às atividades pressupunha que ao serem levados a compor e decompor os discos, a comparar as peças (equivalentes ou não), a calcular as frações de determinadas coleções, a tentar tirar dúvidas de outros colegas, esses alunos estariam estruturando mesmo seus conhecimentos anteriores sobre as frações (porque é certo que estes já existiam). Deste modo, essas crianças puderam representar de forma mais consistente o símbolo matemático em uma figura geométrica considerando de forma correta o significado de numerador e denominador.

<u>COMPARAÇÃO ENTRE FRAÇÕES</u> (questões: 7,9 e 14)

As tabelas (7A, 7b, 9A, 9B, 14A e 14B) que tratam da comparação entre frações mostram que a única questão que não obteve índice significativo no grupo experimental foi a 14. Nenhuma questão obteve índice significativo para o grupo controle.

As respostas à questão 7 mostram claramente a interferência da ordenação dos números Naturais nos números Fracionários. No grupo experimental, esta interferência que prevalecia no pré-teste, não foi mantida no pós-teste, já que a freqüência de 9 alunos (42.86%) que no pré-teste acreditavam que 1/10 é maior que 1/8 passou a ser de 1 aluno (5.26%) no pós-teste. A interpretação correta da questão (1/10 é menor que 1/8) teve freqüências de 1 aluno (4.76%) no pré-teste e de 10 alunos (52.63%) no pós-teste. No grupo controle, a freqüência de 23 alunos (62.16%) no pré-teste para o ítem 1 da questão passou a ser de 25 alunos (67.57%). Isto mostra que,para estes alunos, a interferência da ordenação dos Números Naturais nos Números Fracionários ainda continua.

As tabelas referentes à questão 9 permitem visualizar esses mesmos resultados.

A questão 14, apresentou tanto no pré-teste como no pós-teste uma alta freqüência de acertos por parte dos dois grupo. No entanto, quando comparados os resultados das questões 7 e 9 pode ser verificado que para o grupo experimental a freqüência de acertos, talvez possa ser atribuída ao fato de uma ordenação, agora baseada no tamanho relativo das frações e não mais na ordenação dos Números Naturais porque se assim fosse os resultados do pré-teste, da mesma forma que para o grupo controle, teriam sido repetidos.

Os tipos de comparação proporcionados pelas questões 7, 9 e 14 mostram claramente quando se tem mesmo a idéia de uma fração (enquanto uma quantidade relativa) ou quando ainda se pensa em fração com os mesmos conhecimentos para os Números Naturais. Isto novamente faz pensar na importância do trabalho desenvolvido com as crianças, pois certamente esta interferência da ordenação dos Naturais pode ser confrontada e, desta forma reelaborada com as atividades de comparação propostas em classe.

DENOMINAÇÃO VERBAL (questões: 1,2,3,17 e 18)

Das 5 questões que tratam da denominação verbal do conceito, 2 (questões 3 e 17) tiveram diferenças significativas para o grupo experimental entre pré e pós-teste. Para o grupo controle nenhuma questão obteve diferenças significativas entre uma medida e outra.

Tanto para o grupo experimental quanto para o grupo controle, a questão 1 que definia uma fração teve freqüências acima de 52.63% sendo, portanto a alternativa correta a mais assinalada nas duas medidas. Daí o porquê de nenhuma diferença estatísticamente significativa entre pré-teste e pós-teste.

As questões 2 e 3 que definiam numerador e denominador acabaram mostrando como os alunos se atêm à forma de se expressar de seus professores. No grupo controle, para as duas questões, a maior freqüência foi para os ítens que definiam numerador como "o número de cima" e o denominador como "o número debaixo", expressões muito usadas por alguns professores.

Mesmo não tendo uma diferença significativa para as duas medidas na questão 3, os alunos do grupo experimental não procederam como os do grupo controle. Já, os resultados da questão 2 vêm suportar os procedimentos dos alunos na questão 16. Isto é, eles realmente não tem só um conhecimento instrumental para o denominador, mas sim verbal também.

As questões 17 e 18 não foram significativas para o grupo controle. A questão 17 teve índice significativo para o grupo experimental.

A questão 17 mostrou que muitos alunos do grupo experimental passaram conseguir verbalizar, isto é representar em um outro nível, o "equivalente" através de comparações que se faz entre os objetos onde se obtém suas igualdades ou diferenças. As respostas deixaram claro o quanto marcaram as comparações e sobreposições feitas com as peças dos discos, o que possivelmente os levou conseguir escrever sobre tais comparações. No entanto, na questão 18 que pedia a definição de "comparar" 2 alunos (10.53%) procederam corretamente. A grande maioria, 10 alunos (52.63%), errou a questão, mas fica observado o fato de não tê-la deixado em branco e sim tentado respondê-la.

Este tipo de questão traz à tona as discussões sobre as várias formas de representações de um conceito e suas dificuldades. O fato de não terem conseguido verbalizar ou escrever sobre uma ação não implica que não saibam executá-la (os resultados das demais questões mostram bem isto). Ao contrário, faz pensar sobre a necessidade de respeito quanto aos níveis de desenvolvimento da capacidade de representar de cada aluno, o que não significa uma apologia ao não fazer e deixar que o tempo faça. Este respeito é antes de tudo fundamentado por muito saber, que, por sinal é fundamentado por muitas pesquisas.

QUADRO RESUMO DAS QUESTÕES QUE NÃO TIVERAM DIFERENÇAS SIGNIFICATIVAS ENTRE PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE

QUESTÕES	TRATAMENTO	CONTROLE
OPERADOR	**12**	4, 6 e **12**
EQUIVALÊNCIA	**8** e **13**	8, 11 e **13**
ASSOC. ENTRE REPRES, CONCRETA E LING. MAT.	5 e **15**	5, **10**, **15** e 16 (ítens a, b e c)
COMPARAÇÃO ENTRE FRAÇÕES	**14**	7, 9 e **14**
DENOMINAÇÃO VERBAL	1, 2 e **18**	**1**, 2, 3 17 e **18**

Observação: As questões em negrito são questões que tiveram freqüências igual ou superior à 1ª medida (pré-teste).

O quadro acima mostra quais questões não obtiveram diferenças estatísticamente significativas ($p < 0.05$) entre pré e pós-teste.

Para o grupo experimental, nove questões não obtiveram diferenças estatisticamente significativas contra dezoito questões do grupo controle. No entanto, uma questão do grupo experimental (questão 1) teve sua freqüência de acertos diminuída no pós-teste contra onze questões do grupo controle.

CAPÍTULO VIII
CONCLUSÕES E IMPLICAÇÕES DO ESTUDO

Os resultados da análise estatística mostraram que existem diferenças significativas ($p < 0.05$) entre um método de ensino (diferenciado) e outro (convencional). A nota média dos alunos do grupo experimental (método diferenciado) após estudarem o tópico sobre frações foi maior que a dos alunos do grupo controle (método convencional) que não foi submetido a nenhum tratamento. Porém, no grupo experimental algumas dificuldades continuaram presentes, para algumas crianças, no domínio do conceito:

- dificuldade de ampliar o domínio da fração como operador passando do contexto discreto para o contexto contínuo;

- dificuldade para construir uma fração equivalente à outra anteriormente dada;

- dificuldade para reconhecer qual fração representa a parte pintada de uma figura que não tem todas as partes divididas explicitamente;

- dificuldade de verbalização a respeito do significado do conceito e de estabelecer comparação entre diferentes exemplos do conceito, embora tenham trabalhado com comparações.

A análise dessas dificuldades que permaneceram mesmo quando essas crianças mostraram progresso em outras questões, encontra suporte na literatura pertinente ao conceito de frações e suas dificuldades.

As dificuldades em ampliar o domínio de uma fração como operador do contexto discreto para o contexto contínuo podem ser explicadas por autores como Vergnaud (1983 e 1990) quando trata das diferenças de procedimentos em diferentes contextos. Vergnaud (1983) aponta que uma das dificuldades na aprendizagem do conceito de fração ocorre porque o procedimento de contagem (muito utilizado com os Números Inteiros) deve ser substituído pelo entendimento da fração como uma relação entre duas quantidades. Tal problema difere tanto entre os contextos discretos e contínuos como para diferentes valores fracionários. Este tipo de explicação sugere que o fato de entender uma fração como relação entre duas quantidades ou como uma própria quantidade em um dado contexto, não implica necessariamente que este mesmo entedimento seja generalizado para outros contextos. Dienes (1971), também refere-se à necessidade das crianças terem experiências, através das quais possam entender que a quantidade que se toma como unidade é aleatória. Isto faz pensar que o material utilizado, juntamente com as atividades sobre os mesmos, pudessem ser reformulados atendendo sugestões desses autores.

Também, poder-se-ia aproveitar este tipo de dificuldade, transformando-a em "geradora" de novas idéias.

Um aspecto verificado foi a dificuldade de se construir uma fração equivalente a partir de outra fração (questão 8) e isso também pode ser explicado em termos de representações. Hasemann (1986),em entrevistas clínicas com crianças de 7ª série, mostra que é possível ter-se diferentes desempenhos em questões que tratam de um mesmo conceito. Estas diferenças são causadas por diferentes representações internas que diferem ao mesmo tempo nas noções e conceitos objetivos (citados em livros, por exemplo), diferindo também de uma pessoa para outra. Esta explicação faz pensar quais tipos de representações que uma fração, representada somente pelo símbolo matemático e totalmente isolada de qualquer contexto, podem ter para a criança. Por exemplo, quando se pede para alguém pensar na fração 1/4, pode-se ter que a pessoa pense em uma parte de algo que foi dividido igualmente em 4 partes iguais ou na comparação de 1 para 4 ou em 25%. Não existe obstáculo para que, na ausência de contextos, todos os procedimentos utilizados para os Números Naturais sejam, automaticamente, utilizados para as frações. Percebe-se, pela tabela 8A, que apesar da freqüência ter aumentado para o grupo experimental, muitos alunos usaram procedimentos aditivos (somaram um mesmo número ao numerador e ao denominador) ao invés de usarem procedimentos multiplicativos. Isto mostra a importância do tempo disponível e necessário para o trabalho com questões desta natureza. Até que ponto este tipo de questão traz algum benefício para os alunos em uma 5ª série?

Uma outra explicação possível para este tipo de dificuldade é que construir uma fração, a partir de outra anteriormente dada, requer um nível elevado de abstração. De outro modo, requer a consideração das frações, do mesmo modo que os números naturais, como classe de equivalência. Assim, considerar uma fração como a classe de todas as classes.

A importância do contexto da sala de aula aparece novamente quando se tenta explicar o porquê da dificuldade notada quando são desenvolvidos trabalhos com figuras que não estão previamente divididas (questão 15). O resultado obtido permite inferir que em situações, de certa forma desconhecidas (a figura sugeria uma divisão implícita), os alunos buscam representar, de alguma maneira, tais situações. Eles ignoram o que desconhecem e fazem uso de procedimentos que estariam corretos para outras situações. É como se a dificuldade instalada permitisse uma regressão. De outra forma, a necessidade de divisão em partes iguais, entendida e reconhecida em outras situações, simplesmente foi deixada de lado para esta situação. A hipótese de que atividades, que proponham às crianças dividirem elas mesmas o material e o trabalho com outras atividades, onde exista um trabalho pelas crianças com divisões implícitas, possam promover referenciais mentais ou representações que sirvam tanto de apoio como fonte de procedimento para este tipo de questão é digna de verficação. Vergnaud (1985), coloca que é pelas ações, juntamente com suas próprias expectativas, que as crianças elaboram e corrigem suas representações que, na verdade, acabam promovendo outras ações.

Por fim, a dificuldade de escrever ou definir o que entendiam por comparar mostra um outro nível de representação de um conceito (comparar) e encontra suporte nas colocações de Piaget. Esse autor aponta que a capacidade de uma criança fazer e compreender na ação é sempre maior que a capacidade da mesma criança para conseguir verbalizar e ter consciência dos princípios subjacentes a suas ações. Payne (1976), em sua revisão de pesquisas sobre frações, apontou a verbalização de conceitos fracionários como uma dificuldade persistente independentemente do modo pelo qual o conceito de fração foi trabalhado.

As dificuldades na aprendizagem de frações, encontradas neste estudo e discutidas neste capítulo, não são diferentes daquelas encontradas em outros estudos, por outros pesquisadores. A presença dessas dificuldades não tira o mérito das atividades baseadas nos "Jogos com Frações" como método ativo ou estruturado de ensino. Ao contrário, abrem caminho para novas pesquisas e interpretações.

Na situação de investigação em sala de aula, muitas variáveis além do experimento poderiam ser discutidas no que diz respeito à variação de média do grupo experimental. Contudo, a escolha de um delineamento de pesquisa que consiguiu garantir a não interferência das principais variáveis que pudessem comprometer os resultados encontrados e discutidos neste trabalho faz crer que o aumento de desempenho por parte das crianças do grupo experimental seja mesmo devido aos tipos de representações mentais de frações que os alunos do grupo experimental puderam construir a partir das atividades propostas no trabalho com as frações. Nesse trabalho, buscou-se utilizar uma metodologia que considerasse os seguintes aspectos:

- alguns dos elementos que de acordo com Piaget, Inhelder e Szeminska (1948), devem ser articulados para que possa existir um domínio operatório do conceito;

- privilegiar como referência alguns princípios construtivistas;

- o trabalho com as dificuldades mais comuns (conforme encontradas nas pesquisas) na aprendizagem de frações.

A utilização de dois professores com experiências, crenças, formações, atitudes diferentes em relação à Matemática e , exclusivamente às frações, poderia ser confundida

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Márcia Aparecida Borges e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 16 de agosto de 1996

Assinatura:

ERRATA

PÁGINA	PARÁGRAFO	LINHA	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
10	3º	4ª	século XVI	século XIII
13	7º	1ª	não pode ser expresso	não pode ser expressa
62		5ª	permitem que	permitem rejeitar que
63	título	1ª	respostas questionário	respostas do questionário
89		9ª	4, 6 e **12**	4 e 6
89	1º	1ª	freqüências igual ou superior	freqüências iguais ou superiores
89	4º	2ª	dezoito	dezessete
92	3º	3ª	consiguiu	conseguiu
94	3º	4ª	respostas questionário	respostas do questionário
104	3º	1ª	à área da figura	à área pintada da figura
113	3º	1ª	à pintada	à área pintada

ANEXO III- ESTUDO FINAL (PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE)

Nome..n°...série...idade....

Marque somente uma alternativa para cada questão abaixo:

1) Assinale a alternativa que <u>melhor define</u> uma fração:

( ) Uma quantidade tomada de um objeto que foi dividido ou separado em partes.
( ) Um número sobre o outro.
( ) Uma quantidade tomada de um objeto que foi dividido ou separado em partes iguais.
( ) Um pedaço com qualquer tamanho que foi retirado do objeto.

2) Assinale a alternativa que <u>melhor define</u> numerador:

( ) O número de partes iguais em que o inteiro foi dividido.
( ) O número de cima.
( ) O número de partes tomadas de um inteiro que foi dividido em partes iguais.
( ) O número de divisões feitas em um inteiro.

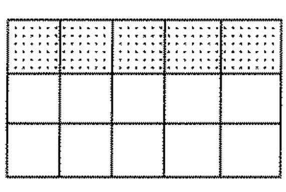
3) Assinale a alternativa que <u>melhor define</u> denominador:

( ) O número de partes iguais em que o inteiro foi dividido.
( ) O número debaixo.
( ) O número de partes tomadas do inteiro que foi dividido.
( ) O número de inteiros.

4) Arthur perdeu $\frac{1}{3}$ de 15 bolinhas de gude. Pode-se dizer que Arthur perdeu:
( ) 12 bolinhas.
( ) 3 bolinhas.
( ) 5 bolinhas.
( ) 14 bolinhas.

5) A parte pintada na figura abaixo representa a fração:

( ) $\frac{5}{10}$
( ) $\frac{5}{15}$
( ) 5
( ) $\frac{10}{5}$



6) João comeu $\frac{3}{7}$ de 21 jaboticabas. Assim, João comeu:
( ) 11 jaboticabas.
( ) 9 jaboticabas.
( ) 3 jaboticabas.
( ) 4 jaboticabas.

7) Nas frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$, tem-se que:

( ) $\frac{1}{10}$ é maior que $\frac{1}{8}$

( ) $\frac{1}{10}$ é menor que $\frac{1}{8}$

( ) $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{8}$ são equivalentes

( ) $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{8}$ não podem ser comparados

8) A fração $\frac{2}{5}$ é equivalente a:

( ) $\frac{8}{20}$

( ) $\frac{4}{9}$

( ) $\frac{3}{6}$

( ) não existe fração equivalente a $\frac{2}{5}$

9) Nas frações $\frac{4}{8}$ e $\frac{5}{10}$, tem-se:

( ) $\frac{4}{8}$ é menor que $\frac{5}{10}$

( ) $\frac{4}{8}$ é maior que $\frac{5}{10}$

( ) $\frac{4}{8}$ e $\frac{5}{10}$ são equivalentes

( ) $\frac{4}{8}$ e $\frac{5}{10}$ não podem ser comparados

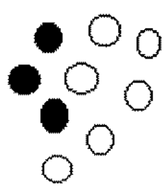
10) No conjunto abaixo, as bolinhas pintadas representam a fração:

( ) 3

( ) $\frac{3}{6}$

( ) $\frac{6}{3}$

( ) $\frac{3}{9}$



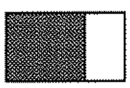
11) As frações $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$ e $\frac{4}{16}$ representam:

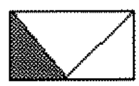
( ) Quantidades diferentes que foram tiradas do mesmo inteiro.
( ) Quantidades que estão em ordem crescente.
( ) Quantidades que não podem ser comparadas.
( ) Quantidades equivalentes.

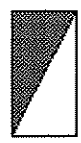
12) Em um tanque de gasolina de um carro cabem 80 litros de combustível. Alguém gasta $\frac{5}{8}$ de combustível que estava no tanque. Esta pessoa gastou:

( ) 50 litros.
( ) 67 litros.
( ) 10 litros.
( ) 2 litros.

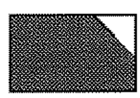
13) Das figuras abaixo marque aquela que tem área pintada equivalente à área pintada da figura ao lado:

[ ] 

[ ] 



[ ] 

[ ] 

14) Nas frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{7}{5}$, tem-se que:

( ) $\frac{2}{5}$ é menor que $\frac{7}{5}$.
( ) $\frac{2}{5}$ e $\frac{7}{5}$ são equivalentes.
( ) $\frac{2}{5}$ e $\frac{7}{5}$ não podem ser comparados.
( ) $\frac{2}{5}$ é maior que $\frac{7}{5}$.

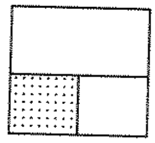
15) A parte pintada na figura abaixo representa a fração:

( ) 1

( ) $\frac{1}{4}$

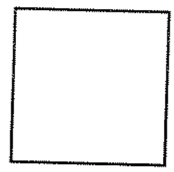
( ) $\frac{1}{2}$

( ) $\frac{2}{1}$



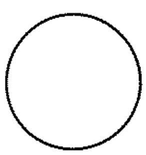
16) Para cada figura represente a fração que está abaixo dela:

$\frac{1}{3}$



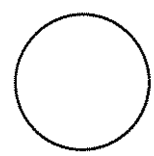
$\frac{2}{5}$

$\frac{2}{8}$



$\frac{2}{4}$

$\frac{6}{5}$



$\frac{3}{5}$

17) O que significa "<u>equivalente</u>"?

18) O que significa "<u>comparar</u>"?

com o efeito do experimento. Contudo, a utilização de um único professor trabalhando com duas metodologias diferentes também levantaria hipóteses sobre a validade ou não do experimento, porque é certo que esse professor também teria suas crenças, sua formação, sua atitute quanto à Matemática e às frações. Acontece que a forma pela qual as atividades foram desenvolvidas com o grupo experimental pressupõe toda uma concepção de aprendizagem e de sujeito aprendiz baseada na interação sujeito e objeto de conhecimento, juntamente com as possíveis representações mentais que o sujeito pode construir a partir dessa interação. Portanto, não desconsiderando a formação, as crenças e as atitudes dos professores quanto à Matemática e às frações, o que foi realmente considerado neste estudo é a forma ou o modo pelo qual os sujeitos do grupo experimental vivenciaram o tópico frações em sala de aula.

Sem querer fazer comparações pontuais entre uma metodologia de ensino e outra, o que necessita ser destacado é que nos dois modos (convencional e diferenciado) existem diferentes concepções de aprendizagem e diferentes visões de sujeito aprendiz.

Ensinar por definições, por apresentações de figuras e seus respectivos nomes, por atividades baseadas em resolver exercícios e problemas conforme o modelo previamente resolvido pelo professor tem como pressuposto um raciocínio do aprendiz sustentado por associações de idéias e um total negligenciar da parte que cabe ao aprendiz para atingir os objetivos propostos. É como se a técnica de ensinar, precisamente sua eficácia, bastasse e desse conta do processo subjetivo pelo qual o aprendiz deve passar para estruturar o real em que vive. Aqui, a atividade interna do sujeito juntamente com suas estruturas cognitivas e suas representações da realidade são ignoradas.

Ao contrário, ensinar por atividades que permitam ao sujeito interagir com o objeto de conhecimento, confrontar expectativas e idéias anteriores com as que está construindo a partir dessas atividades, verbalizar sobre o que pensa, entrar em contato com idéias dos colegas e poder perceber a existência de diferentes pontos de vista que não são iguais aos seus, construir suas representações mentais da realidade e poder chegar a conceituações e simbolizações tem como pressuposto a idéia de que toda aprendizagem é um processo, onde é inestimável a participação do indivíduo que aprende enquanto estruturador de seu conhecimento. Na verdade, a participação do indivíduo já pressupõe a existência de estruturas primeiras que darão suporte à aprendizagem enquanto adaptação ativa. Portanto, aprender conjetura mecanismos de assimilação e acomodação que visam superar desequilíbrios e, deste modo, alcançar um novo estágio de desenvolvimento. Na aprendizagem, não basta ver, não basta ouvir. Deve haver coordenação de ações executadas sobre os objetos ou sobre as próprias idéias.

O questionário (anexo V) aplicado no pós-teste tinha como objetivo esclarecer, através da análise estatística dos dados, se o fato de as crianças difererirem quanto ao tipo de classificações que o questionário supunha em cada questão (sexo, repetência, gosto pela Matemática, gosto pelas frações...) pudesse ser o responsável pelo aumento de desempenho pelo grupo experimental.

Estatísticamente foi demonstrado que, para este estudo, o fato de as crianças serem do sexo masculino ou feminino, terem ou não repetido a 5ª série, gostarem ou não de Matemática, gostarem ou não de frações... não foi relevante para o desempenho das mesmas frente à prova sobre frações, visto que as Análises de Variância feitas para cada questão tanto para o grupo controle como para o grupo experimental mostram diferenças significativas das médias das notas dos alunos entre pré e pós-teste unicamente para o grupo experimental.

Assim, considerando as colocações acima, tem-se que o modo pelo qual as crianças do grupo experimental trabalharam com as frações foi mesmo o responsável pelo melhor desempenho das mesmas em relação às crianças do grupo controle. Os resultados das respostas questionário (anexo V) aplicado no pós-teste e do desempenho na prova (anexo III) de frações corroboram tal afirmação.

CONSIDERAÇÕES QUANTO AO USO DO MATERIAL EM SALA DE AULA.

Durante a utilização do material Jogos com Frações na sala de aula, algumas observações sobre o mesmo e sobre o comportamento das crianças ao trabalherem com este material puderam ser percebidas e registradas. O fato de querer deixar a sala de aula o mais parecida o possível com sua situação usual, fez com que o aplicador do trabalho durante duas semanas (12 aulas) tomasse notas de forma bastante natural para as crianças. Estas notas acabaram por ser caracterizadas como algumas observações e não como uma completa descrição que se passou durante aquele período.

- Nas primeiras aulas, mesmo com o material a sua frente, as crianças se referiam às peças como "essa daqui" e "essa aqui" sem fazer alusão à cor das peças e muito menos à fração que representavam. Esta mudança de comportamento foi aparecendo gradativamente sendo que primeiro as peças passaram a ser chamadas por suas cores e só posteriormente pelas frações que representavam.

- Após a introdução da representação simbólica e de sua denominação, muitas crianças se referiam ao numerador e ao denominador como "o de cima" e "o debaixo". O entendimento conceitual do numerador e do denominador foi um ponto de dificuldade para algumas crianças que mesmo tendo a idéia de dividir e tomar partes quando no trabalho com os discos e com os feijões ainda faziam muita confusão quando trabalhavam com a representação matemática. Com estas crianças o trabalho foi realizado fora do roteiro pré-estabelecido, fazendo com que retomassem a algumas situações anteriores.

- Na equivalência de frações, quando foram comparados 1/2, 2/4 e 4/8 alguns alunos tentaram encontrar uma regularidade nos próprios símbolos: "um é metade de dois, dois é metade de quatro e quatro é metade de oito. Por isso são iguais". Essa situação desencadeou muitos conflitos, já que as crianças pareciam entendender o "porquê" da trocar de 2 peças azuis (2/10) por 1 amarela (1/5). Entretanto, a comparação das frações 2/10 e 1/5, não parecia ser prontamente compreendida.

- No estudo dos operadores, quando se solicitava à criança que efetuasse o cálculo de 3/5 de 15 grãos de feijão nos discos, essa tarefa era corretamente executada. Mas, quando se passava para os algorítmos, a tarefa tornava-se difícil para algumas crianças. Ainda no trabalho com operadores, o que mais instigou as crianças foi o cálculo de 8/5 de 40 ser igual a 64. Queriam saber como era possível "tirar uma fração de 40 e sê 64". Com base nesse exercício, desenvolveu-se a discussão sobre as frações cujos numeradores são maiores que 1. É interessante notar que o uso dos discos no cálculo de uma fração por um dado número é útil para desenvolver a idéia de que a quantidade recebida por cada subgrupo seria a mesma. Contudo, a regra de "dividir pelo debaixo e multiplicar pelo de cima" colocada por algumas crianças prevaleceu em todos os exercícios. Parece que a construção de um material específico para o trabalho com frações como operadores no contexto discreto, juntamente com a análise do trabalho realizado com esse material, poderá responder de forma mais concisa às questões referentes a frações nesse contexto.

- Nesse trabalho, duas outras observações merecem destaque: por mais que se tente colocar na forma de roteiro ou de alguma outra organização atividades que vão ser trabalhadas em um ambiente de sala de aula, alguns imprevistos sempre acontecem como o caso das crianças colocarem os dados na boca, fazerem aviões (dobrando) com as peças e fazerem também "guerra" com os grão de feijão. Outra observação bastante interessante é que algumas crianças se "libertam" do material logo nas primeiras atividades e mostram entender corretamente os conceitos, fazendo uso de regras e de raciocínios não contraditórios.

O objetivo deste trabalho foi analisar a aprendizagem de frações em crianças de 5ª série, comparando-se dois diferentes métodos de ensino. Este objetivo foi alcançado e os resultados mostraram que as crianças do grupo experimental, que foram submetidas ao método de ensino diferenciado, tiveram um melhor desempenho na prova sobre frações que as crianças que trabalharam sob o método de ensino convencional.

A importância deste trabalho para a aprendizagem de frações concentra-se no fato do mesmo ter sido realizado com dados e observações extraídos durante o horário normal de aula. De outra forma, procurou-se estar o mais próximo possível de situações que retratássem as condições usuais de uma sala de aula. Contudo, como apontado na discussão dos resultados, algumas dificuldades na construção e no uso das frações ainda permaneceram.

A permanência dessas dificuldades, de forma alguma, desmerece as atividades baseadas nos "Jogos com Frações", utilizados por Maranhão e Imenes (1985/1986), como método estruturado ou ativo de ensino. Ao contrário, incita para investigações futuras e vem ao encontro das discussões sobre o conceito de frações enquanto um conceito utilizado em vários contextos, requerendo vários procedimentos e consequentemente, várias representações mentais sobre o mesmo.

Neste estudo, essas atividades pareceram ser as principais responsáveis por um aumento de frequência de acertos por parte das crianças do grupo experimental para as questões que tratam da denominação de frações (questões 2 e 3), da associação entre representação concreta e linguagem matemática (questões 5, 10, 15 e 16), da equivalência de frações (questões 8, 11 e 13), da comparação entre frações (questões 7, 9 e 14) e das frações como operadores (questões 4, 6 e 12). O fato de que para o grupo experimental, uma única questão (questão 1) teve sua frequência de acertos diminuída no pós-teste faz pensar na necessidade de olhar com a devida atenção para as propostas de trabalho em sala de aula que tem como pressupostos de aprendizagem os mesmos considerados neste estudo.

A construção e a testagem de novos materiais que possam contribuir para a reelaboração e a construção de representações mentais do conceito de fração são pistas para educadores que, apesar de tudo, trabalham diretamente, nas mais diversas situações, em sala de aula e acreditam na concepção de aprendizagem e de conhecimento como construídos pelo sujeito aprendiz.

Como considerado acima, a importância deste trabalho, juntamente com as implicações do mesmo para a aprendizagem de frações, acaba por ser estabelecida na própria metodologia do estudo, isto é, no modo pelo qual o mesmo foi delineado, não desconsiderando, em momento algum, as situações usuais da sala de aula. É certo que cuidados devem ser tomados quanto às generalizações, mas seus resultados são dignos de novas verificações.

Como justificado no início deste estudo, a necessidade de coletar e organizar dados usuais de forma sistematizada, na tentativa de superar preconceitos ou conhecimentos do senso comum, acaba por se impor, principalmente para aqueles que buscam crescimentos não só profissionais como também humanos. Novamente, no dizer de Weatherall (1970), "*...se este conhecimento é realmente científico é o de que melhor se dispõe para propósitos práticos*".

BIBLIOGRAFIA

Adler, I. (1968). **Matemática e Desenvolvimento Mental**. São Paulo, Editora Cultrix.

Aguiar, M.C.A.(1983) A Formação dos Conceitos de Fração e de Proporcionalidade a Partir da Teoria Piagetiana. In: **Psicologia Ciência e Profissão**. Ano 3, N°2, p. 85-92.

Andrade, D.F. e Singer, J.M. (1986). **Análise de Dados Longitudinais.** Anais do VII Simpósio de Probabilidade e Estatística. Campinas, São Paulo.

Augustine, C.H.D.(1976). **Métodos Modernos para o Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico.

Bezuk, N. e Cramer, K.(1989). Teaching about fractions: What, When, and How? In: **New Directions For Elementary School Mathematics**. VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, p. 156-167.

Bezuk, N.(1988). Fractions in the Early Childhood Mathematics Curriculum. In: **Arithmetic Teacher** 35, p. 56-60.

Boyer, C.B.(1974). **História da Matemática**. São Paulo. Editora da USP.

Campbell, D.T.(1979). **Delineamentos Experimentais e Quase-Experimentais de Pesquisa**. São Paulo: EPU. Editora da USP.

Caraça, B.J.(1951). **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora.

Castelnuovo, E. (1951). L'Insegnamento delle Frazioni. In: **Gazeta de Matemática**, 50, p. 49-56.

________.(1970). **Didáctica de la Matemática Moderna**. México, Editorial F. Trillas S/A.

Ciscar, S.L. e García, V.S.(s.d.). **Fracciones la Relacion Parte-todo**. Sevilla: Editorial Sintesis.

Davidson, N. (1990). Small-Group Cooperative Learning in Mathematics. In: **Teaching & Learning Mathematics in the 1990s.** VA: Nacional Council of Teachers of Mathematics. pp. 52-58

Davydov V.V. e Tsvetkovich Z.H. The Object Sources of the Concept of Fractions. In: **Soviet Studies in Mathematics Education,** V. 6, Psychological Abilities of Primary School Children in Learning Mathematics, NCTM (1969,1991).

Dienes, Z.P. (1971). **Frações**. São Paulo, Herder.

Driscoll, M.(1984). What Research Says. In: **Arithmetic Teacher**, V.31, N°6, p. 34-35.

Grossniekle, F. e Brueckner, L. (1965). **O Ensino de Artimética pela Compreensão**. Editora Fundo de Cultura, São Paulo.

Hasemann, K. (1986). Analysis of Fraction Errors by a Model of Cognitive Science. In: **European Journal of Psychology of Education.** V. I, Nº 2, p. 57-66.

Harrison, B; Brindley, S. e Bye, M.P. (1989). Allowing for Student Cognitive Levels in the Teaching of Fractions and Ratios. In: **Journal for Research in Mathematics Education**. V. 20, N° 3, p. 288-300.

Hogbem, L. (1970). **Maravilhas da Matemática**. Porto Alegre, Globo.

Ifrah, G. (1987). **Las Cifras: História de Una Gran Invención**. Madrid, Alianza Editorial.

Kieren, T.E. e Nelson, D. (1978). The Operator construct of Rational Numbers in Childhood and Adolescence- An Exploratory Study. In: **The Alberta Journal of Educational Research**. V. 24, N° 1, p. 22-30.

Lima, J.M.F. (1983). Iniciação ao Conceito de Fração e o Desenvolvimento da Conservação de Quantidade. In: **Aprender Pensando**, Editado por Carraher, T.N. Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco, Recife.

Lowell, L. (1986). **Desarrollo de los Conceptos Básicos Matemáticos y Científicos en los Niños**. Madrid: Ediciones Morata S.A.

Mack, N. (1990). Learning Fractions with Understanding Building on Informal Knowledge. In: **Journal for Research in Mathematics Education**. V. 21, N° 1, p. 17-32.

Maranhão, M.C.S. e Imenes, L.M. (1985/1986). Jogos com Frações I, II e III. In: **Revista de Ensino de Ciências**, N° 14, N° 15 e N° 16.

Monteiro, L.H. (1974). **Elementos de Álgebra**. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. Rio de Janeiro.

Moreno, M. (1987). **La Pedagogia Operatória**. Barcelona, Editora Laia.

Morrison, D.F. (1976). **Multivariate Statistical Methods.** Second Edition. McGraw-Hill. New York

Novillis, C.F. (1976). An Analysis of the Fraction Concept into a Hierarchy of Selected Subconcepts and the Testing of the Hierarchical Dependencies. In: **Journal for Research in Mathematics Education**. V.7, N° 03, p. 131-145.

Ohlsson, S. (1989). Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts. In: J.Heibert and M.Behr (Eds.), **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, p. 53-92.

Oliveira, A.M. & Silva, A. (1968). **Curso Ilustrado de Matemática Moderna.** Tomo I. Lisa- Livros Irradiantes S/A. São Paulo.

Oliveira, R.G. (1992). **Compreensão do Conceito de Fração: Levantamento das Dificuldades no Processo de Construção do Conceito de Fração em Alunos de Escola Pública.** Anais do III Congresso de Iniciação Científica da UNESP. Jaboticabal, São Paulo.

Payne, J. (1976). Review of Research on Fractions. In: **Number and Measurement.** (Ed.). Lesh, R. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, p. 145-187.

Piaget, J.; Inhelder, B. e Szeminska, A. (1948). La Partition des Surfaces et la Notion de Fraction. In: **La Géómétrie Spontanée de l'Enfant**. Paris: Press Universitaires de France.

Piaget, J. (1975). **Introduction a la Epistemologia Genética**. 1. El Pensamiento Matemático. Buenos Aires. Data da 1ª edição: 1950.

Piaget, J. (1995). **Abstração Reflexionante. Relações Lógico-Aritméticas e Ordem das Relações Espaciais.** Artes Médicas. Porto Alegre. Data da 1ª edição: 1977.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1993). **A Representação do Espaço na Criança.** Artes Médicas. Porto Alegre.

Porto, R.A. (1963). **Frações na Escola Elementar**. PABAEE, Belo Horizonte.

Post, T.R. (1981). Fractions: Results and Implications from Nacional Assessment. In: **Arithmetic Teacher**, 28 ,p. 26-31.

Pothier, Y. e Sawada, D. (1990). Partitioning: An Approach to Fractions. In: **Arithmetic Teacher**, 38, p. 12-16.

PROEM. (1989). **Uma Análise da Construção do Conceito de Fração**. Coordenadora: Campos, T.N. e Orientadora: D'Ambrósio, B.

Simis, A. (1977). **Introdução à Álgebra**. IMPA. Rio de Janeiro.

Sowell, E.J. (1989). Effects of Manipulatives Materials in Mathematics Instruction. In: **Journal for Research in Mathematics Education**, V. 20, N° 5, pp. 498-505.

Steffe, L.P. e Olive, J. (1991). The Problem of Fractions in the Elementary School. In: **Arithmetic Teacher**, 38, p. 22-24.

Streefland, L. (1984). Some Observational Results Concerning the Mental Constituition of the Concept of Fraction. In: **Educational Studies in Mathematics**. 9, pp. 51-73.

Teixeira, L.R.M. (1992). **Aprendizagem Escolar de Números Inteiros**. Análise do Processo na Perspectiva Construtivista Piagetiana. Instituto de Psicologia-USP, São Paulo. Tese de Doutorado.

Tinoco, L.A.A. e Lopes, M.L. (1994). Frações. Dos Resultados de Pesquisas à Prática em Sala de Aula. In: **A Educação Matemática em Revista-SBEM**. N° 2, 1° sem.94, p. 13-18.

Vergnaud, G. (1985). Conceitos e Esquemas numa Teoria Operatória da Representação. In: **Psychologie Française.** Nº 30-3/4, p. 245-252. Tradução de Anna Franchi e Dione Luchesi de Carvalho.

__________ (1989). Multiplicative Structures. In: J.Heibert and M.Behr (Eds.), **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, p. 141-160.

________. (1990). Psicologia cognitiva e do Desenvolvimento e Pesquisas em Educação Matemática: Algumas Questões Teóricas e Metodológicas. In: **Caderno do CEM**. Ano 2, N°2, p. 19-39.

_______.(1992). **Psicologia cognitiva e do Desenvolvimento e Pesquisas em Educação Matemática**: Algumas Questões Teóricas e Metodológicas. Conferência para o Grupo de Estudos em Educação Matemática, Kingston Queevs University (Trad. de J.V. Weiss e F.H. Mandel).

Weatherall, M.(1970). **Método Científico.** EDUSP, São Paulo.

Wilson, G.M. e Dalrymple, C.O. (1937). Useful Fractions. In: **Journal of Educational Research**, V. 30, N°5, p. 341-347.

Witherspoon, M. L. (1993). Fractions: In Search of Meaning. In: **Arithmetic Teacher** ,p. 482-485.

ANEXO I- PROVA SOBRE FRAÇÕES UTILIZADA NO ESTUDO PILOTO

Nome..............................n°....série............idade.....

Marque somente uma alternativa para cada questão abaixo:

1) Assinale a alternativa que <u>melhor define</u> uma fração:

( ) Uma quantidade tomada de um objeto que foi dividido ou separado em partes.
( ) Um número sobre o outro.
( ) Uma quantidade tomada de um objeto que foi dividido ou separado em partes iguais.
( ) Um pedaço com qualquer tamanho que foi retirado do objeto.

2) Assinale a alternativa que <u>melhor define</u> numerador e denominador respectivamente:

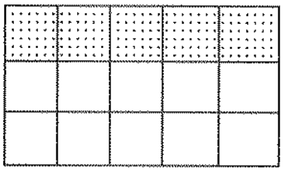
( ) O número de partes iguais em que o inteiro foi dividido e o número de partes que foram tomadas.
( ) O número de cima e o número debaixo.
( ) O número de partes tomadas e o número de partes iguais em que o inteiro foi dividido.
( ) O número de inteiros e o número de partes tomadas.

3) Arthur perdeu $\frac{1}{3}$ de 15 bolinhas de gude. Pode-se dizer que Arthur perdeu:

( ) 12 bolinhas.
( ) 3 bolinhas.
( ) 5 bolinhas.
( ) 14 bolinhas.

4) A parte pintada na figura abaixo representa a fração:

( ) $\frac{5}{10}$
( ) $\frac{5}{15}$
( ) 5
( ) $\frac{10}{5}$



5) João comeu $\frac{3}{7}$ de 21 jaboticabas. Assim, João comeu:

( ) 11 jaboticabas.
( ) 9 jaboticabas.
( ) 3 jaboticabas.
( ) 4 jaboticabas.

6) Nas frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$, tem-se que:

( ) $\frac{1}{10}$ é maior que $\frac{1}{8}$

( ) $\frac{1}{10}$ é menor que $\frac{1}{8}$

( ) $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{8}$ são equivalentes

( ) $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{8}$ não podem ser comparados

7) A fração $\frac{2}{5}$ é equivalente a:

( ) $\frac{8}{20}$

( ) $\frac{4}{9}$

( ) $\frac{3}{6}$

( ) não existe fração equivalente a $\frac{2}{5}$

8) Nas frações $\frac{4}{8}$ e $\frac{5}{10}$, tem-se:

( ) $\frac{4}{8}$ é menor que $\frac{5}{10}$

( ) $\frac{4}{8}$ é maior que $\frac{5}{10}$

( ) $\frac{4}{8}$ e $\frac{5}{10}$ são equivalentes

( ) $\frac{4}{8}$ e $\frac{5}{10}$ não podem ser comparados

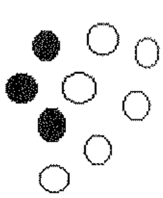
9) No conjunto abaixo, as bolinhas pintadas representam a fração:

( ) 3

( ) $\frac{3}{6}$

( ) $\frac{6}{3}$

( ) $\frac{3}{9}$



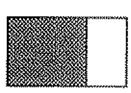
10) As frações $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}$ e $\frac{4}{16}$ representam:

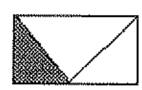
( ) Quantidades diferentes que foram tiradas do mesmo inteiro.
( ) Quantidades que estão em ordem crescente.
( ) Quantidades que não podem ser comparadas.
( ) Quantidades equivalentes.

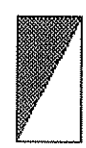
11) Em um tanque de gasolina de um carro cabem 80 litros de combustível. Alguém gasta $\frac{2}{4}$ de combustível que estava no tanque. Esta pessoa gastou:

( ) 40 litros.
( ) 10 litros.
( ) 20 litros.
( ) 72 litros.

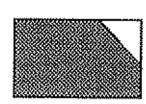
12) Das figuras abaixo marque aquela que tem área pintada equivalente à área da figura ao lado:

( ) 

( ) 



( ) 

( ) 

13) Nas frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{7}{5}$, tem-se que:

( ) $\frac{2}{5}$ é menor que $\frac{7}{5}$.
( ) $\frac{2}{5}$ e $\frac{7}{5}$ são equivalentes.
( ) $\frac{2}{5}$ e $\frac{7}{5}$ não podem ser comparados.
( ) $\frac{2}{5}$ é maior que $\frac{7}{5}$.

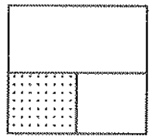
14) A parte pintada na figura abaixo representa a fração:

( ) 1

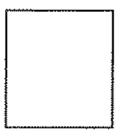
( ) $\frac{1}{4}$

( ) $\frac{1}{2}$

( ) $\frac{2}{1}$

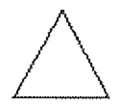


15) Para cada figura represente a fração que está abaixo dela:

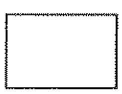


$\frac{2}{3}$

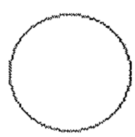
$\frac{2}{8}$



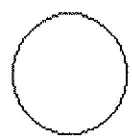
$\frac{1}{3}$



$\frac{6}{5}$



$\frac{3}{5}$



$\frac{2}{4}$

16) O que significa "<u>equivalente</u>"?
17) O que significa "<u>comparar</u>"?

ANEXO II- ROTEIRO DAS AULAS

JOGO 1: JOGO LIVRE (RELAÇÃO ENTRE AS PARTES DE UM TODO).

Após pedir que as crianças formem grupos com 4 alunos no máximo, o professor distribui para cada grupo 2 discos brancos (inteiros), 2 verdes (metades) e 2 laranjas (quartos) sugerinque as crianças brinquem com este material disposto.

JOGO 2: FORMAÇÃO DO INTEIRO (RELAÇÃO PARTE-TODO).

Depois de um certo tempo, o professor pede para as crianças formarem círculos com as peças. Primeiro de uma única cor e depois de várias cores (mistura das peças).

JOGO 3: RECOBRIMENTOS (COMPARAÇÃO ENTRE AS PARTES, EQUIVALÊNCIA DAS MESMAS E INTRODUÇÃO DA LINGUAGEM MATEMÁTICA.)

O professor explica o que significa recobrir uma figura com outra. Assim, explica que não é permitido deixar "espaço sobrando" na parte de cima e nem é permitido deixar "espaço aparecendo" na parte debaixo,isto é, não pode passar das beiradas dos discos. Neste jogo, deve ser feita a sobreposição das peças verdes em relação às laranjas e das peças laranjas em relação às verdes.

Depois de algum tempo, as seguintes perguntas devem ser colocadas na lousa:

- As peças verdes são todas do mesmo tamanho? E as peças laranjas?
- Quantas peças verdes são necessárias para cobrir o círculo branco? E quantas peças laranjas são necessárias para cobrir o mesmo círculo?
- Quantas peças laranjas precisamos para ter uma peça verde?
- Quantas peças laranjas são necessárias para cobrir duas peças verdes juntas?

INTRODUÇÃO DOS NOMES DAS PEÇAS E DE SUAS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS.

Ao nomear a peça verde (1/2) de meio ou metade, o professor deve reconstituir o trabalho feito pelos alunos nos jogos 1,2 e 3. Assim, deverá formar na frente dos alunos o inteiro com duas peças verdes e depois retirar desse inteiro uma peça e relacioná-la com o símbolo 1/2, ou seja, de duas peças iguais em que o inteiro foi dividido, retirou-se uma peça que é chamada de metade ou meio.

A partir disto, o professor pode partir para a definição de denominador e de numerador. "*O número de cima é o numerador porque numera quantas partes pegamos e o numero debaixo é o denominador porque denomina em quantas partes iguais o inteiro foi dividido*". (Fazer o mesmo com 1/4)

OBSERVAÇÃO:

O professor deverá mostrar que quando duas peças podem substituir uma outra (2 laranjas = 1 verde) ou dois quartos são iguais à metade, estas partes comparadas são chamadas de **FRAÇÕES EQUIVALENTES**.

JOGO 4: <u>JOGO DO DADO</u> (PRINCÍPIO DA INVARIÂNCIA DE UM TODO).

O objetivo deste jogo é cobrir totalmente o círculo branco com as peças laranjas ou verdes que podem ser misturadas.

Cada par joga o dado e retira do centro da mesa o número de partes laranjas que aparece na face de cima do dado colocando tais partes sobre o círculo branco. Duas peças laranjas podem ser trocadas por uma verde e o par que trocou joga novamente.

O vencedor é aquele que primeiro cobrir o círculo.

JOGO 5: <u>JOGO DOS FEIJÕES</u> (TRABALHO SIMULTÂNEO NO CONTEXTO CONTÍNUO E NO DISCRETO E O USO DA FRAÇÃO COMO OPERADOR).

O professor pede que cada par forme um círculo com as peças verdes e distribua 10 feijões sobre as partes dando a cada parte o número de feijões "que ela tem por direito". O professor pergunta novamente se as partes verdes são todas iguais. Em cima das respostas dos alunos pergunta se os feijões foram distribuídos igualmente e o porquê disto. Pergunta também quantos feijões ficaram em cima de cada parte. (Fazer o mesmo com outras quantidades de feijões)

Depois de respondidas as perguntas o professor vai à lousa e coloca: $\frac{1}{2}$ de 10 = ?

No caso de dúvidas o professor pede que os alunos refaçam a divisão com os feijões usando as duas peças verdes.

Depois de garantida a compreensão da divisão envolvida no conceito de uma fração, pode-se trabalhar apenas com os feijões, sem as partes dos discos, formulanquestões do tipo: calculem $\frac{1}{2}$ de 50 feijões.

ATIVIDADES :

I- CONTORNOS (CADERNO OU FOLHA AVULSA)

a) Desenhe 40 bolinhas, separando-as igualmente em 2 contornos.

b) Completar: $\frac{1}{2}$ de 40 feijões são....feijões. (Fazer o mesmo com 100 feijões e 4 contornos.

II)-DESENHOS

Pedir que as crianças desenhem figuras geométricas e que representem nestas figuras as frações: 1/2, 2/2, 1/4, 2/4, 3/4 e 4/4.

INTRODUÇÃO DOS OITAVOS

O professor pede que as crianças voltem a formar os grupos com no máximo 4 alunos e distribui a cada grupo 2 discos brancos (inteiros), 2 verdes (metades), 2 laranjas (quartos) e 2 roxos (oitavos).

Repetição dos jogos 1 (Formação do Inteiro) e 2 (Relação Parte-Todo).

Depois disto, o professor dará nome à peça roxa (um oitavo) e relacionará a peça ao símbolo 1/8. Na dúvida das crianças, voltará às peças que formam o inteiro e tomará uma delas.

O jogo 4 será trabalhado apenas com as peças laranjas (quartos) e roxas (oitavos). O professor pergunta se uma peça laranja (1/4) pode ser trocada por 2 peças roxas (2/8). Com a resposta, pede que os alunos sobreponham peças roxas e laranjas para verificar a resposta.

Terminado o jogo 4, o professor pedirá que os alunos comparem uma peça verde (1/2) com 2 peças laranjas (2/4) e com 4 peças roxas (4/8) levando os alunos a perceber que frações com nomes diferentes podem representar a mesma parte tomada. Reconhecida a igualdade, o professor coloca na lousa a representação da mesma, isto é: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$

No jogo 5, somente as peças roxas (1/8) serão trabalhadas. O professor repete o procedimento da primeira vez que o jogo 5 foi executado mudando o número de grãos para 24. Depois de um tempo, colocará na lousa três retângulos iguais (um embaixo do outro) e pedirá que calculem:

1/2, 2/4 e 4/8 .

O professor dá nome a estas frações de equivalentes e explica que qualquer fração possui várias frações equivalentes e que estas formam uma classe ou um grupo chamado de Classe de Equivalência da Fração.

INTRODUÇÃO DE QUINTOS E DÉCIMOS

REPETIÇÃO DOS JOGOS 1 E 2 COMO NA 1ª AULA COM OS QUINTOS E DÉCIMOS.

JOGO 3: O professor pede que as crianças coloquem as peças amarelas sobre o disco branco fazendo as seguintes perguntas:

_ "Quantas peças amarelas são necessárias para formar o inteiro? Elas são todas iguais?"

Segurando unicamente uma peça amarela, o professor pergunta o nome desta peça ao ser relacionada com o inteiro. Na dúvida, volta as partes em cima do disco branco dizendo:

_"Se eu necessito de 5 partes para formar o inteiro então quando pego uma delas tenho uma de cinco. Logo, (escreve na lousa 1/5) um quinto. Depois de escrever o símbolo matemático na lousa, o professor deve conferir o entendimento do numerador e do denominador.

Passa-se então para as peças azuis (1/10). Dá-se nome às peças azuis (1/10) verificando oralmente se houve entendimento do porquê de ser um décimo.

_"Quantas peças azuis são necessárias para se ter uma amarela? Por quê?"

_"Quantas peças azuis são necessárias para se ter duas amarelas?"

Os feijões são distribuídos para cada grupo. O professor pede que distribuam para as peças amarelas 20 grãos dando a cada peça o que "ela tem direito". Depois de um tempo, pergunta:

_"Quantos grãos cada peça recebeu?"

Na dúvida volta às peças. Depois escreve na lousa 1/5 de 20 = 4. Pede também que os alunos calculem 2/5 de 40 grãos com as peças.

É interessante o professor levar os alunos a perceber que ao calcular 2/5 de 40 feijões, os feijões serão divididos em 5 partes iguais (olhar no disco) e destas partes iguais apenas 2 serão tomadas.

O professor pede agora que calculem 1/10 de 20 grãos com a ajuda das peças, 2/10 de 30 grãos e, por fim, 1/10 de 11 grãos. Neste último caso, os alunos entrarão em conflito ao perceber que sobrou um grão. O professor então pergunta se ao calcular uma fração pode sobrar alguma coisa ou resto. Depois da resposta dos alunos, o professor dirá então que em certos casos como crianças, adultos, laranjas, pedrinhas, feijões, etc... nem sempre se pode ter a fração, isto é, toda vez que sobrar algo ou resto.

O professor desenhará na lousa barras, círculos, quadrados, triângulos (sempre duas figuras para cada exemplo) e pedirá que os alunos representem as frações abaixo em cada figura:

2/5, 4/10, 1/5, 2/10

Após isso, volta à questão da equivalência de frações e da classe de equivalência das mesmas.

O professor novamente põe na lousa figuras geométricas e pede que as crianças calculem: 2/2, 3/3, 4/4 e 5/5.

_"O que acontece quando o numerador for igual ao denominador?"

_"E se o numerador for maior que o denominador?"

Coloca na lousa a fração 5/4 e explora a idéia de fração imprópria não se preocupando tanto com a sua classificação, mas sim com o que ela representa.

INTRODUÇÃO DE TERÇOS, SEXTOS E DOZE-AVOS

REPETIÇÃO DOS JOGOS 1 E 2 COM ESTAS PEÇAS.

O professor pede como ficaria em símbolo cada inteiro. Após as crianças responderem oralmente, vai à lousa e escreve: 3/3, 6/6 e 12/12.

Coloca na lousa as perguntas abaixo:

_"As peças de mesma cor são todas iguais?" Por quê?"

_"Qual peça das três diferentes é a maior?" Por quê?"

_"Qual peça das três diferentes é a menor?" Por quê?"

No caso de dúvidas pede que as crianças sobreponham as peças.

Distribui feijões a cada par e pede que distribuam ao disco vermelho (terços) 12 grãos, ao disco marrom (sextos) 18 grãos e ao disco rosa (doze-avos) 24 grãos.

_"Quantos grãos cada peça vermelha recebeu? Então 1/3 de 12 é ...(depois da resposta dos alunos vai à lousa e escreve 1/3 de 12 = 4).

Repete a pergunta para os discos marrom e o rosa.

_"Agora calculem: 2/3 de 9, 1/12 de 12, 3/6 de 24.

Na dúvida pede que usem os discos.

O JOGO 5 da primeira aula será feito com os 3 discos. Antes, porém o professor deve pergunta:

_"Quantas peças rosas eu preciso para ter 1`vermelha? E para ter 1 marrom?"O professor diz que ganha o jogo quem cobrir primeiro o inteiro branco e que as peças podem ser trocadas desde que "valham a mesma coisa" e que quem fizer troca joga de novo.

ANEXO III- ESTUDO FINAL (PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE)

Nome..n°...série...idade

Marque somente uma alternativa para cada questão abaixo:

1) Assinale a alternativa que <u>melhor define</u> uma fração:

( ) Uma quantidade tomada de um objeto que foi dividido ou separado em partes.
( ) Um número sobre o outro.
( ) Uma quantidade tomada de um objeto que foi dividido ou separado em partes iguais.
( ) Um pedaço com qualquer tamanho que foi retirado do objeto.

2) Assinale a alternativa que <u>melhor define</u> numerador e denominador respectivamente:

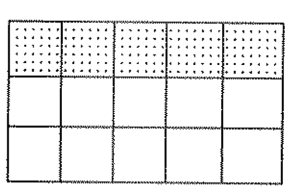
( ) O número de partes iguais em que o inteiro foi dividido e o número de partes que foram tomadas.
( ) O número de cima e o número debaixo.
( ) O número de partes tomadas e o número de partes iguais em que o inteiro foi dividido.
( ) O número de inteiros e o número de partes tomadas.

3) Arthur perdeu $\frac{1}{3}$ de 15 bolinhas de gude. Pode-se dizer que Arthur perdeu:

( ) 12 bolinhas.
( ) 3 bolinhas.
( ) 5 bolinhas.
( ) 14 bolinhas.

4) A parte pintada na figura abaixo representa a fração:

( ) $\frac{5}{10}$
( ) $\frac{5}{15}$
( ) 5
( ) $\frac{10}{5}$



5) João comeu $\frac{3}{7}$ de 21 jaboticabas. Assim, João comeu:

( ) 11 jaboticabas.
( ) 9 jaboticabas.
( ) 3 jaboticabas.
( ) 4 jaboticabas.

6) Nas frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$, tem-se que:

( ) $\frac{1}{10}$ é maior que $\frac{1}{8}$

( ) $\frac{1}{10}$ é menor que $\frac{1}{8}$

( ) $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{8}$ são equivalentes

( ) $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{8}$ não podem ser comparados

7) A fração $\frac{2}{5}$ é equivalente a:

( ) $\frac{8}{20}$

( ) $\frac{4}{9}$

( ) $\frac{3}{6}$

( ) não existe fração equivalente a $\frac{2}{5}$

8) Nas frações $\frac{4}{8}$ e $\frac{5}{10}$, tem-se:

( ) $\frac{4}{8}$ é menor que $\frac{5}{10}$

( ) $\frac{4}{8}$ é maior que $\frac{5}{10}$

( ) $\frac{4}{8}$ e $\frac{5}{10}$ são equivalentes

( ) $\frac{4}{8}$ e $\frac{5}{10}$ não podem ser comparados

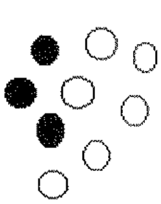
9) No conjunto abaixo, as bolinhas pintadas representam a fração:

( ) 3

( ) $\frac{3}{6}$

( ) $\frac{6}{3}$

( ) $\frac{3}{9}$



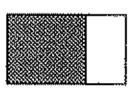
10) As frações $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$ e $\frac{4}{16}$ representam:

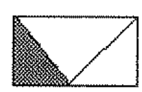
( ) Quantidades diferentes que foram tiradas do mesmo inteiro.
( ) Quantidades que estão em ordem crescente.
( ) Quantidades que não podem ser comparadas.
( ) Quantidades equivalentes.

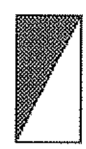
11) Em um tanque de gasolina de um carro cabem 80 litros de combustível. Alguém gasta $\frac{2}{4}$ de combustível que estava no tanque. Esta pessoa gastou:

( ) 40 litros.
( ) 10 litros.
( ) 20 litros.
( ) 72 litros.

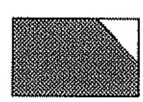
12) Das figuras abaixo marque aquela que tem área pintada equivalente à pintada da figura ao lado:

( ) 

( ) 



( ) 

( ) 

13) Nas frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{7}{5}$, tem-se que:

( ) $\frac{2}{5}$ é menor que $\frac{7}{5}$.
( ) $\frac{2}{5}$ e $\frac{7}{5}$ são equivalentes.
( ) $\frac{2}{5}$ e $\frac{7}{5}$ não podem ser comparados.
( ) $\frac{2}{5}$ é maior que $\frac{7}{5}$.

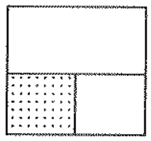
14) A parte pintada na figura abaixo representa a fração:

( ) 1

( ) $\frac{1}{4}$

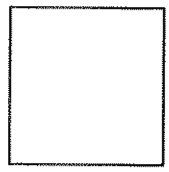
( ) $\frac{1}{2}$

( ) $\frac{2}{1}$

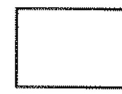


15) Para cada figura represente a fração que está abaixo dela:

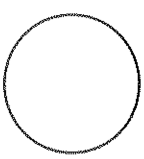
$\frac{1}{3}$



$\frac{2}{3}$

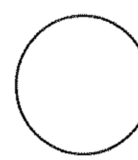


$\frac{2}{8}$



$\frac{2}{4}$

$\frac{6}{5}$



$\frac{3}{5}$

16) O que significa "equivalente"?

17) O que significa "comparar"?

ANEXO IV- TABELAS DOS RESULTADOS OBTIDOS NO ESTUDO FINAL

TABELA 1A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 1.

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
1	4	4	8
	10.00	10.00	20.00
	50.00	50.00	
	19.05	21.05	
2	2	2	4
	5.00	5.0 0	10.00
	50.00	50.00	
	9.52	10.53	
3	11	10	21
	27.50	25.00	52.50
	52.38	47.62	
	52.38	52.63	
4	4	3	7
	10.00	7.50	17.50
	57.14	42.86	
	19.05	15.79	
Total	21	19	40
	52.50	47.50	100.00

Frequency Missing = 2

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q1 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	0.091	0.993
Likelihood Ratio Chi-Square	3	0.091	0.993
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.069	0.793
Fisher's Exact Test (2-Tail)			1.000
Phi Coefficient			0.048
Contingency Coefficient			0.048
Cramer's V			0.048

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 75% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 2A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 2.

Q2 PERIODO

Frequency | Percent | Row Pct | Col Pct

Q2	antes	depoi	Total
1	6 15.00 66.67 28.57	3 7.50 33.33 15.79	9 22.50
2	5 12.50 62.50 23.81	3 7.50 37.50 15.79	8 20.00
3	2 5.00 16.67 9.52	10 25.00 83.33 52.63	12 30.00
4	8 20.00 72.73 38.10	3 7.50 27.27 15.79	11 27.50
Total	21 52.50	19 47.50	40 100.00

Frequency Missing = 2

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q2 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	9.029	0.029
Likelihood Ratio Chi-Square	3	9.605	0.022
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.100	0.752
Fisher's Exact Test (2-Tail)			2.81E-02
Phi Coefficient			0.475
Contingency Coefficient			0.429
Cramer's V			0.475

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 50% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 3A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 3.

```
Q3       PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   |  Total
---------+--------+--------+
1        |    5   |    5   |    10
         |  12.50 |  12.50 |  25.00
         |  50.00 |  50.00 |
         |  23.81 |  26.32 |
---------+--------+--------+
2        |    9   |    3   |    12
         |  22.50 |   7.50 |  30.00
         |  75.00 |  25.00 |
         |  42.86 |  15.79 |
---------+--------+--------+
3        |    4   |    4   |     8
         |  10.00 |  10.00 |  20.00
         |  50.00 |  50.00 |
         |  19.05 |  21.05 |
---------+--------+--------+
4        |    3   |     7  |    10
         |   7.50 |  17.50 |  25.00
         |  30.00 |  70.00 |
         |  14.29 |  36.84 |
---------+--------+--------+
Total        21       19       40
           52.50    47.50   100.00

Frequency Missing = 2
```

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q3 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	4.511	0.211
Likelihood Ratio Chi-Square	3	4.685	0.196
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	1.552	0.213
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.222
Phi Coefficient			0.336
Contingency Coefficient			0.318
Cramer's V			0.336

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 50% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 4A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 4.

Q4 PERIODO

Q4	Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
0	Frequency	0	1	1
	Percent	0.00	2.50	2.50
	Row Pct	0.00	100.00	
	Col Pct	0.00	5.26	
1	Frequency	8	3	11
	Percent	20.00	7.50	27.50
	Row Pct	72.73	27.27	
	Col Pct	38.10	15.79	
2	Frequency	4	1	5
	Percent	10.00	2.50	12.50
	Row Pct	80.00	20.00	
	Col Pct	19.05	5.26	
3	Frequency	5	14	19
	Percent	12.50	35.00	47.50
	Row Pct	26.32	73.68	
	Col Pct	23.81	73.68	
4	Frequency	4	0	4
	Percent	10.00	0.00	10.00
	Row Pct	100.00	0.00	
	Col Pct	19.05	0.00	
Total		21	19	40
		52.50	47.50	100.00

Frequency Missing = 2

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q4 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	4	13.269	0.010
Likelihood Ratio Chi-Square	4	15.556	0.004
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.479	0.489
Fisher's Exact Test (2-Tail)			4.13E-03
Phi Coefficient			0.576
Contingency Coefficient			0.499
Cramer's V			0.576

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 60% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 5A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 5.

Q5 PERIODO

Q5	Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
1	Frequency	4	4	8
	Percent	10.00	10.00	20.00
	Row Pct	50.00	50.00	
	Col Pct	19.05	21.05	
2	Frequency	12	15	27
	Percent	30.00	37.50	67.50
	Row Pct	44.44	55.56	
	Col Pct	57.14	78.95	
3	Frequency	0	4	
	Percent	10.00	0.00	10.00
	Row Pct	100.00	0.00	
	Col Pct	19.05	0.00	
?	Frequency	1	0	1
	Percent	2.50	0.00	2.50
	Row Pct	100.00	0.00	
	Col Pct	4.76	0.00	
Total		21	19	40
		52.50	47.50	100.00

Frequency Missing = 2

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q5 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	5.246	0.155
Likelihood Ratio Chi-Square	3	7.165	0.067
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	2.287	0.130
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.149
Phi Coefficient			0.362
Contingency Coefficient			0.341
Cramer's V			0.362

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 75% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 6A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 6.

```
Q6      PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   | Total
---------+--------+--------+
1        |   10   |     1  |   11
         | 25.00  |  2.50  | 27.50
         | 90.91  |  9.09  |
         | 47.62  |  5.26  |
---------+--------+--------+
2        |    5   |   13   |   18
         | 12.50  | 32.50  | 45.00
         | 27.78  | 72.22  |
         | 23.81  | 68.42  |
---------+--------+--------+
3        |    2   |    5   |    7
         |  5.00  | 12.50  | 17.50
         | 28.57  | 71.43  |
         |  9.52  | 26.32  |
---------+--------+--------+
4        |    4   |    0   |    4
         | 10.00  |  0.00  | 10.00
         |100. 00 |  0.00  |
         |  19.05 |  0.00  |
---------+--------+--------+
Total        21       19       40
          52.50    47.50   100.00

Frequency Missing = 2

     STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q6 BY PERIODO
         CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic                     DF    Value     Prob
------------------------------------------------------
Chi-Square                     3   16.145    0.001
Likelihood Ratio Chi-Square    3   19.004    0.000
Mantel-Haenszel Chi-Square     1    0.513    0.474
Fisher's Exact Test (2-Tail)                 4.69E-04
Phi Coefficient                              0.635
Contingency Coefficient                      0.536
Cramer's V                                   0.635

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING:  50% of the cells have expected counts less
        than 5. Chi-Square may not be a valid test.
```

TABELA 7A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 7.

Q7 PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
1	9	1	10
	22.50	2.50	25.00
	90.00	10.00	
	42.86	5.26	
2	1	10	11
	2.50	25.00	27.50
	9.09	90.91	
	4.76	52.63	
3	7	7	14
	17.50	17.50	35.00
	50.00	50.00	
	33.33	36.84	
4	4	1	5
	10.00	2.50	12.50
	80.00	20.00	
	19.05	5.26	
Total	21	19	40
	52.50	47.50	100.00

Frequency Missing = 2

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q7 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	15.502	0.001
Likelihood Ratio Chi-Square	3	17.736	0.000
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.182	0.669
Fisher's Exact Test (2-Tail)			7.69E-04
Phi Coefficient			0.623
Contingency Coefficient			0.528
Cramer's V			0.623

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 38% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 8A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 8.

```
Q8       PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   |  Total
---------+--------+--------+
1        |   2    |   5    |   7
         |  5.00  | 12.50  | 17.50
         | 28.57  | 71.43  |
         |  9.52  | 26.32  |
---------+--------+--------+
2        |   4    |   4    |   8
         | 10.00  | 10.00  | 20.00
         | 50.00  | 50.00  |
         | 19.05  | 21.05  |
---------+--------+--------+
3        |   5    |   3    |   8
         | 12.50  |  7.50  | 20.00
         | 62.50  | 37.50  |
         | 23.81  | 15.79  |
---------+--------+--------+
4        |  10    |   7    |  17
         | 25.00  | 17.50  | 42.50
         | 58.82  | 41.18  |
         | 47.62  | 36.84  |
---------+--------+--------+
Total       21       19       40
          52.50    47.50   100.00

Frequency Missing = 2
```

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q8 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	2.221	0.528
Likelihood Ratio Chi-Square	3	2.266	0.519
Mantel-Haenszel Chi-Squar	1	1.597	0.206
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.590
Phi Coefficient			0.236
Contingency Coefficient			0.229
Cramer's V			0.236

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 75% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 9A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 9.

Q9 PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
1	12	3	15
	30.00	7.50	37.50
	80.00	20.00	
	57.14	15.79	
2	3	4	7
	7.50	10.00	17.50
	42.86	57.14	
	14.29	21.05	
3	4	10	14
	10.00	25.00	35.00
	28.57	71.43	
	19.05	52.63	
4	2	2	4
	5.00	5.00	10.00
	50.00	50.00	
	9.52	10.53	
Total	21	19	40
	52.50	47.50	100.00

Frequency Missing = 2

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q9 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	8.034	0.045
Likelihood Ratio Chi-Square	3	8.482	0.037
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	5.261	0.022
Fisher's Exact Test (2-Tail)			3.49E-02
Phi Coefficient			0.448
Contingency Coefficient			0.409
Cramer's V			0.448

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 50% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 10A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 10.

Q10 PERIODO

Frequency | Percent | Row Pct | Col Pct

Q10		antes	depoi	Total
1	Frequency	5	0	5
	Percent	12.50	0.00	12.50
	Row Pct	100.00	0.00	
	Col Pct	23.81	0.00	
2	Frequency	6	0	6
	Percent	15.00	0.00	15.00
	Row Pct	100.00	0.00	
	Col Pct	28.57	0.00	
3	Frequency	1	3	4
	Percent	2.50	7.50	10.00
	Row Pct	25.00	75.00	
	Col Pct	4.76	15.79	
4	Frequency	9	16	25
	Percent	22.50	40.00	62.50
	Row Pct	36.00	64.00	
	Col Pct	42.86	84.21	
Total		21	19	40
		52.50	47.50	100.00

Frequency Missing = 2

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q10 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	13.895	0.003
Likelihood Ratio Chi-Square	3	18.182	0.000
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	10.975	0.001
Fisher's Exact Test (2-Tail)			5.55E-04
Phi Coefficient			0.589
Contingency Coefficient			0.508
Cramer's V			0.589

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 75% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 11A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 11.

Q11 PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
1	3	1	4
	7.50	2.5 0	10.00
	75.00	25.00	
	14.29	5.26	
2	11	5	16
	27.50	12.50	40.00
	68.75	31.25	
	52.38	26.32	
3	4	3	7
	10.00	7.50	17.50
	57.14	42.86	
	19.05	15.79	
4	3	10	13
	7.50	25.00	32.50
	23.08	76.92	
	14.29	52.63	
Total	21	19	40
	52.50	47.50	100.00

Frequency Missing = 2

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q11 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	7.080	0.069
Likelihood Ratio Chi-Square	3	7.372	0.061
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	6.301	0.012
Fisher's Exact Test (2-Tail)			6.49E-02
Phi Coefficient			0.421
Contingency Coefficient			0.388
Cramer's V			0.421

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 50% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 12A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 12.

Q12 PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
1	6	7	13
	15.00	17.50	32.50
	46.15	53.85	
	28.57	36.84	
2	7	4	11
	17.50	10.00	27.50
	63.64	36.36	
	33.33	21.05	
3	4	7	11
	10.00	17.50	27.50
	36.36	63.64	
	19.05	36.84	
4	4	1	5
	10.00	2.50	12.50
	80.00	20.00	
	19.05	5.26	
Total	21	19	40
	52.50	47.50	100.00

Frequency Missing = 2

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q12 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	3.422	0.331
Likelihood Ratio Chi-Square	3	3.562	0.313
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.299	0.585
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.344
Phi Coefficient			0.292
Contingency Coefficient			0.281
Cramer's V			0.292

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 25% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 13A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 13.

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
0	1 2.50 100.00 4.76	0 0.00 0.00 0.00	1 2.50
1	1 2.50 50.00 4.76	1 2.50 50.00 5.26	2 5.00
2	15 37.50 50.00 71.43	15 37.50 50.00 78.95	30 75.00
3	2 5.00 66.67 9.52	1 2.50 33.33 5.26	3 7.50
4	2 5.00 66.67 9.52	1 2.50 33.33 5.26	3 7.50
?	0 0.00 0.00 0.00	1 2.50 100.00 5.26	1 2.50
Total	21 52.50	19 47.50	40 100.00

Frequency Missing = 2

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q13 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	5	2.573	0.765
Likelihood Ratio Chi-Square	5	3.352	0.646
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.198	0.656
Fisher's Exact Test (2-Tail)			1.000
Phi Coefficient			0.254
Contingency Coefficient			0.246
Cramer's V			0.254

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 83% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 14A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 14.

Q14 PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
1	7 17.50 46.67 33.33	8 20.00 53.33 42.11	15 37.50
2	8 20.00 72.73 38.10	3 7.50 27.27 15.79	11 27.50
3	3 7.50 42.86 14.29	4 10.00 57.14 21.05	7 17.50
4	3 7.50 42.86 14.29	4 10.00 57.14 21.05	7 17.50
Total	21 52.50	19 47.50	40 100.00

Frequency Missing = 2

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q14 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	2.531	0.470
Likelihood Ratio Chi-Square	3	2.612	0.455
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.105	0.746
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.502
Phi Coefficient			0.252
Contingency Coefficient			0.244
Cramer's V			0.252

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 50% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 15A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 15.

```
Q15     PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   | Total
---------+--------+--------+
1        |    2   |    3   |    5
         |  5.00  |  7.50  | 12.50
         | 40.00  | 60.00  |
         |  9.52  | 15.79  |
---------+--------+--------+
2        |    5   |    5   |   10
         | 12.50  | 12.50  | 25.00
         | 50.00  | 50.00  |
         | 23.81  | 26.32  |
---------+--------+--------+
3        |    9   |    6   |   15
         | 22.50  | 15.00  | 37.50
         | 60.00  | 40.00  |
         | 42.86  | 31.58  |
---------+--------+--------+
4        |    5   |    5   |   10
         | 12.50  | 12.50  | 25.00
         | 50.00  | 50.00  |
         | 23.81  | 26.32  |
---------+--------+--------+
Total         21       19       40
           52.50    47.50   100.00

Frequency Missing = 2
```

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q15 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	0.702	0.873
Likelihood Ratio Chi-Square	3	0.705	0.872
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.163	0.686
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.865
Phi Coefficient			0.132
Contingency Coefficient			0.131
Cramer's V			0.132

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 50% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 16A1: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 16.

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
0	3	0	3
	7.50	0.00	7.50
	100.00	0.00	
	14.29	0.00	
1	1	13	14
	2.50	32.50	35.00
	7.14	92.86	
	4.76	68.42	
1*	1	2	3
	2.50	5.00	7.50
	33.33	66.67	
	4.76	10.53	
2	11	1	12
	27.50	2.50	30.00
	91.67	8.33	
	52.38	5.26	
2*	5	3	8
	12.50	7.50	20.00
	62.50	37.50	
	23.81	15.79	
Total	21	19	40
	52.50	47.50	100.00

Frequency Missing = 2

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q16A BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	4	22.408	0.000
Likelihood Ratio Chi-Square	4	26.859	0.000
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	5.490	0.019
Fisher's Exact Test (2-Tail)			1.77E-05
Phi Coefficient			0.748
Contingency Coefficient			0.599
Cramer's V			0.748

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 60% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

Para todos os ítens da questão 16 foram adotados os seguintes valores:

1* O aluno divide igualmente, mas não toma o número correto de partes.
2* O aluno toma o número correto de partes, mas não divide igualmente.
? : O aluno marcou mais de uma alternativa.

Para as questões 16, 17 e 18, tem-se: 0 (não respondeu), 1 (resposta correta), 2 (resposta incorreta), 3 (escreveu "não sei").

TABELA 16A2: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 16.

```
Q16B     PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   | Total
---------+--------+--------+
0        |   3    |   0    |   3
         |  7.50  |  0.00  |  7.50
         | 100.00 |  0.00  |
         |  14.29 |  0.00  |
---------+--------+--------+
1        |   3    |  11    |  14
         |  7.50  | 27.50  | 35.00
         |  21.43 | 78.57  |
         |  14.29 | 57.89  |
---------+--------+--------+
2        |   9    |   3    |  12
         | 22.50  |  7.50  | 30.00
         | 75.00  | 25.00  |
         | 42.86  | 15.79  |
---------+--------+--------+
2*       |   5    |   5    |  10
         | 12.50  | 12.50  | 25.00
         | 50.00  | 50.00  |
         | 23.81  | 26.32  |
---------+--------+--------+
3        |   1    |   0    |   1
         |  2.50  |  0.00  |  2.50
         | 100.00 |  0.00  |
         |  4.76  |  0.00  |
---------+--------+--------+
Total        21       19       40
           52.50    47.50   100.00

Frequency Missing = 2
```

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q16B BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	4	11.500	0.021
Likelihood Ratio Chi-Square	4	13.445	0.009
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.493	0.483
Fisher's Exact Test (2-Tail)			1.24E-02
Phi Coefficient			0.536
Contingency Coefficient			0.473
Cramer's V			0.536

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 50% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 16A3: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 16.

```
Q16C     PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   |  Total
---------+--------+--------+
0        |    3   |    0   |    3
         |  7.50  |  0.00  |  7.50
         | 100.00 |  0.00  |
         | 14.29  |  0.00  |
---------+--------+--------+
1        |   10   |   12   |   22
         | 25.00  | 30.00  | 55.00
         | 45.45  | 54.55  |
         | 47.62  | 63.16  |
---------+--------+--------+
2        |    7   |    1   |    8
         | 17.50  |  2.50  | 20.00
         | 87.50  | 12.50  |
         | 33.33  |  5.26  |
---------+--------+--------+
2*       |    1   |    6   |    7
         |  2.50  | 15.00  | 17.50
         | 14.29  | 85.71  |
         |  4.76  | 31.58  |
---------+--------+--------+
Total        21       19       40
           52.50    47.50   100.00

Frequency Missing = 2
```

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q16C BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	11.181	0.011
Likelihood Ratio Chi-Square	3	13.265	0.004
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	2.061	0.151
Fisher's Exact Test (2-Tail)			9.08E-03
Phi Coefficient			0.529
Contingency Coefficient			0.467
Cramer's V			0.529

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 75% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 16A4: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 16.

```
Q16D     PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   |  Total
---------+--------+--------+
0        |    4   |    0   |    4
         |  10.00 |   0.00 |  10.00
         | 100.00 |   0.00 |
         |  19.05 |   0.00 |
---------+--------+--------+
1        |   11   |   13   |   24
         |  27.50 |  32.50 |  60.00
         |  45.83 |  54.17 |
         |  52.38 |  68.42 |
---------+--------+--------+
1*       |    1   |    0   |    1
         |   2.50 |   0.00 |   2.50
         | 100.00 |   0.00 |
         |   4.76 |   0.00 |
---------+--------+--------+
2        |    4   |    1   |    5
         |  10.00 |   2.50 |  12.50
         |  80.00 |  20.00 |
         |  19.05 |   5.26 |
---------+--------+--------+
2*       |    1   |    5   |    6
         |   2.50 |  12.50 |  15.00
         |  16.67 |  83.33 |
         |   4.76 |  26.32 |
---------+--------+--------+
Total         21       19       40
            52.50    47.50   100.00

Frequency Missing = 2


   STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q16D BY PERIODO
        CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic                     DF     Value      Prob
------------------------------------------------------
Chi-Square                     4     9.557     0.049
Likelihood Ratio Chi-Square    4    11.837     0.019
Mantel-Haenszel Chi-Square     1     1.620     0.203
Fisher's Exact Test (2-Tail)                  3.48E-02
Phi Coefficient                                0.489
Contingency Coefficient                        0.439
Cramer's V                                     0.489

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING:  80% of the cells have expected counts less
         than 5. Chi-Square may not be a valid test.
```

TABELA 16A5: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 16.

```
Q16E     PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   | Total
---------+--------+--------+
0        |    4   |    0   |    4
         |  10.00 |   0.00 |  10.00
         | 100.00 |   0.00 |
         |  19.05 |   0.00 |
---------+--------+--------+
1        |    0   |   11   |   11
         |   0.00 |  27.50 |  27.50
         |   0.00 | 100.00 |
         |   0.00 |  57.89 |
---------+--------+--------+
2        |   15   |    6   |   21
         |  37.50 |  15.00 |  52.50
         |  71.43 |  28.57 |
         |  71.43 |  31.58 |
---------+--------+--------+
2*       |    1   |    2   |    3
         |   2.50 |   5.00 |   7.50
         |  33.33 |  66.67 |
         |   4.76 |  10.53 |
---------+--------+--------+
3        |    1   |    0   |    1
         |   2.50 |   0.00 |   2.50
         | 100.00 |   0.00 |
         |   4.76 |   0.00 |
---------+--------+--------+
Total        21       19       40
           52.50    47.50   100.00

Frequency Missing = 2

      STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q16E BY PERIODO
          CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic                      DF     Value      Prob
------------------------------------------------------
Chi-Square                      4    20.141     0.000
Likelihood Ratio Chi-Square     4    26.405     0.000
Mantel-Haenszel Chi-Square      1     0.742     0.389
Fisher's Exact Test (2-Tail)                   1.83E-05
Phi Coefficient                                 0.710
Contingency Coefficient                         0.579
Cramer's V                                      0.710

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING:  60% of the cells have expected counts less
          than 5. Chi-Square may not be a valid test.
```

TABELA 16A6: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 16.

Q16F PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
0	3	1	4
	7.50	2.50	10.00
	75.00	25.00	
	14.29	5.26	
1	1	9	10
	2.50	22.50	25.00
	10.00	90.00	
	4.76	47.37	
2	8	3	11
	20.00	7.50	27.50
	72.73	27.27	
	38.10	15.79	
2*	8	6	14
	20.00	15.00	35.00
	57.14	42.86	
	38.10	31.58	
3	1	0	1
	2.50	0.00	2.50
	100.00	0.00	
	4.76	0.00	
Total	21	19	40
	52.50	47.50	100.00

Frequency Missing = 2

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q16F BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	4	10.886	0.028
Likelihood Ratio Chi-Square	4	12.339	0.015
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	1.461	0.227
Fisher's Exact Test (2-Tail)			1.49E-02
Phi Coefficient			0.522
Contingency Coefficient			0.463
Cramer's V			0.522

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 50% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 17A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 17.

Q17 PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
0	6	3	9
	15.00	7.50	22.50
	66.67	33.33	
	28.57	15.79	
1	2	12	14
	5.00	30.00	35.00
	14.29	85.71	
	9.52	63.16	
2	3	4	7
	7.50	10.00	17.50
	42.86	57.14	
	14.29	21.05	
3	10	0	10
	25.0 0	0.00	25.00
	100.00	0.00	
	47.62	0.00	
Total	21	19	40
	52.50	47.50	100.00

Frequency Missing = 2

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q17 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	18.231	0.000
Likelihood Ratio Chi-Square	3	22.851	0.000
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	4.653	0.031
Fisher's Exact Test (2-Tail)			9.76E-05
Phi Coefficient			0.675
Contingency Coefficient			0.560
Cramer's V			0.675

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 63% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 18A: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 18.

```
Q18       PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   |  Total
---------+--------+--------+
0        |    5   |    3   |     8
         | 12.50  |  7.50  |  20.00
         | 62.50  | 37.50  |
         | 23.81  | 15.79  |
---------+--------+--------+
1        |    0   |    2   |     2
         |  0.00  |  5.00  |   5.00
         |  0.00  | 100.00 |
         |  0.00  | 10.53  |
---------+--------+--------+
2        |    6   |   10   |    16
         | 15.00  | 25.00  |  40.00
         | 37.50  | 62.50  |
         | 28.57  | 52.63  |
---------+--------+--------+
3        |   10   |    4   |    14
         | 25.00  | 10.00  |  35.00
         | 71.43  | 28.57  |
         | 47.62  | 21.05  |
---------+--------+--------+
Total        21       19       40
          52.50    47.50   100.00

Frequency Missing = 2
```

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q18 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=trat

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	5.986	0.112
Likelihood Ratio Chi-Square	3	6.845	0.077
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.362	0.547
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.128
Phi Coefficient			0.387
Contingency Coefficient			0.361
Cramer's V			0.387

Effective Sample Size = 40
Frequency Missing = 2
WARNING: 50% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 1B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 1.

```
Q1       PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   |  Total
---------+--------+--------+
1        |    4   |    6   |    10
         |  5.41  |  8.11  |  13.51
         | 40.00  | 60.00  |
         | 10.81  | 16.22  |
---------+--------+--------+
2        |   10   |    8   |    18
         | 13.51  | 10.81  |  24.32
         | 55.56  | 44.44  |
         | 27.03  | 21.62  |
---------+--------+--------+
3        |   21   |   21   |    42
         | 28.38  | 28.38  |  56.76
         | 50.00  | 50.00  |
         | 56.76  | 56.76  |
---------+--------+--------+
4        |    2   |    2   |     4
         |  2.70  |  2.70  |   5.41
         | 50.00  | 50.00  |
         |  5.41  |  5.41  |
---------+--------+--------+
Total         37       37       74
           50.00    50.00   100.00
```

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q1 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi- Square	3	0.622	0.891
Likelihood Ratio Chi-Square	3	0.625	0.891
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.085	0.771
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.902
Phi Coefficient			0.092
Contingency Coefficient			0.091
Cramer's V			0.092

Sample Size = 74
WARNING: 25% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 2B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 2.

```
Q2       PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   | Total
---------+--------+--------+
1        |    0   |    4   |    4
         |  0.00  |  5.41  |  5.41
         |  0.00  | 100.00 |
         |  0.00  | 10.81  |
---------+--------+--------+
2        |   18   |   20   |   38
         | 24.32  | 27.03  | 51.35
         | 47.37  | 52.63  |
         | 48.65  | 54.05  |
---------+--------+--------+
3        |   15   |   10   |   25
         | 20.27  | 13.51  | 33.78
         | 60.00  | 40.00  |
         | 40.54  | 27.03  |
---------+--------+--------+
4        |    4   |    3   |    7
         |  5.4 1 |  4.05  |  9.46
         | 57.14  | 42.86  |
         | 10.81  |  8.11  |
---------+--------+--------+
Total        37       37       74
          50.00    50.00   100.00
```

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q2 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	5.248	0.155
Likelihood Ratio Chi-Square	3	6.801	0.079
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	2.951	0.086
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.176
Phi Coefficient			0.266
Contingency Coefficient			0.257
Cramer's V			0.266

Sample Size = 74
WARNING: 50% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 3B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 3.

Q3 PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
0	1	0	1
	1.35	0.00	1.35
	100.00	0.00	
	2.70	0.00	
1	7	6	13
	9.46	8.11	17.57
	53.85	46.15	
	18.92	16.22	
2	18	17	35
	24.32	22.97	47.30
	51.43	48.57	
	48.65	45.95	
3	4	5	9
	5.41	6.76	12.16
	44.44	55.56	
	10.81	13.51	
4	7	9	16
	9.46	12.16	21.62
	43.75	56.25	
	18.92	24.32	
Total	37	37	74
	50.00	50.00	100.00

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q3 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	4	1.467	0.833
Likelihood Ratio Chi-Square	4	1.854	0.763
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.781	0.377
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.944
Phi Coefficient			0.141
Contingency Coefficient			0.139
Cramer's V			0.141

Sample Size = 74
WARNING: 40% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 4B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 4.

Q4 PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
1	12	10	22
	16.22	13.51	29.73
	54.55	45.45	
	32.43	27.03	
2	7	10	17
	9.46	13.51	22.97
	41.18	58.82	
	18.92	27.03	
3	16	15	31
	21.62	20.27	41.89
	51.61	48.39	
	43.24	40.54	
4	2	2	4
	2.70	2.70	5.41
	50.00	50.00	
	5.41	5.41	
Total	37	37	74
	50.00	50.00	100.00

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q4 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	0.743	0.863
Likelihood Ratio Chi-Square	3	0.747	0.862
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.015	0.902
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.903
Phi Coefficient			0.100
Contingency Coefficient			0.100
Cramer's V			0.100

Sample Size = 74
WARNING: 25% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 5B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 5.

Q5 PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
1	3	3	6
	4.05	4.05	8.11
	50.00	50.00	
	8.11	8.1	
2	34	30	64
	45.95	40.54	86.49
	53.13	46.88	
	91.89	81.08	
3	0	3	3
	0.00	4.05	4.05
	0.00	100.00	
	0.00	8.11	
4	0	1	1
	0.00	1.35	1.35
	0.00	100.00	
	0.00	2.70	
Total	37	37	74
	50.00	50.00	100.00

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q5 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	4.250	0.236
Likelihood Ratio Chi-Square	3	5.795	0.122
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	1.899	0.168
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.350
Phi Coefficient			0.240
Contingency Coefficient			0.233
Cramer's V			0.240

Sample Size = 74
WARNING: 75% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 6B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 6.

```
Q6        PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   | Total
---------+--------+--------+
1        |    16  |    18  |    34
         | 21.62  | 24.32  | 45.95
         | 47.06  | 52.94  |
         | 43.24  | 48.65  |
---------+--------+--------+
2        |     9  |    10  |    19
         | 12.16  | 13.51  | 25.68
         | 47.37  | 52.63  |
         | 24.32  | 27.03  |
---------+--------+--------+
3        |    12  |     9  |    21
         | 16.22  | 12.16  | 28.38
         | 57.14  | 42.86  |
         | 32.43  | 24.32  |
---------+--------+--------+
Total         37       37       74
           50.00    50.00   100.00
```

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q6 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	2	0.599	0.741
Likelihood Ratio Chi-Square	2	0.600	0.741
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.468	0.494
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.831
Phi Coefficient			0.090
Contingency Coefficient			0.090
Cramer's V			0.090

Sample Size = 74

TABELA 7B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 7.

```
Q7      PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   | Total
---------+--------+--------+
1        |   23   |   25   |   48
         | 31.08  | 33.78  | 64.86
         | 47.92  | 52.08  |
         | 62.16  | 67.57  |
---------+--------+--------+
2        |    2   |    1   |    3
         |  2.70  |  1.35  |  4.05
         | 66.67  | 33.33  |
         |  5.41  |  2.70  |
---------+--------+--------+
3        |    5   |    7   |   12
         |  6.76  |  9.46  | 16.22
         | 41.67  | 58.33  |
         | 13.51  | 18.92  |
---------+--------+--------+
4        |    7   |    4   |   11
         |  9.4 6 |  5.41  | 14.86
         | 63.64  | 36.36  |
         | 18.92  | 10.81  |
---------+--------+--------+
Total         37       37      74
           50.00    50.00  100.00
```

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q7 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	1.568	0.667
Likelihood Ratio Chi-Square	3	1.587	0.662
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.350	0.554
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.664
Phi Coefficient			0.146
Contingency Coefficient			0.144
Cramer's V			0.146

Sample Size = 74
WARNING: 25% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 8B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 8.

```
Q8      PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   | Total
---------+--------+--------+
1        |    8   |    8   |   16
         | 10.81  | 10.81  | 21.62
         | 50.00  | 50.00  |
         | 21.62  | 21.62  |
---------+--------+--------+
2        |    6   |    7   |   13
         |  8.11  |  9.46  | 17.57
         | 46.15  | 53.85  |
         | 16.22  | 18.92  |
---------+--------+--------+
3        |    4   |    3   |    7
         |  5.41  |  4.05  |  9.46
         | 57.14  | 42.86  |
         | 10.81  |  8.11  |
---------+--------+--------+
4        |   19   |   19   |   38
         | 25.68  | 25.68  | 51.35
         | 50.00  | 50.00  |
         | 51.35  | 51.35  |
---------+--------+--------+
Total        37       37       74
          50.00    50.00   100.00
```

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q8 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	0.220	0.974
Likelihood Ratio Chi-Square	3	0.220	0.974
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.009	0.926
Fisher's Exact Test (2-Tail)			1.000
Phi Coefficient			0.054
Contingency Coefficient			0.054
Cramer's			0.054

Sample Size = 74
WARNING: 25% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 9B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 9.

```
Q9        PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   |  Total
---------+--------+--------+
1        |   18   |   22   |   40
         | 24.32  | 29.73  | 54.05
         | 45.00  | 55.00  |
         | 48.65  | 59.46  |
---------+--------+--------+
2        |    2   |    5   |    7
         |  2.70  |  6.76  |  9.46
         | 28.57  | 71.43  |
         |  5.41  | 13.51  |
---------+--------+--------+
3        |    6   |    4   |   10
         |  8.11  |  5.41  | 13.51
         | 60.00  | 40.00  |
         | 16.22  | 10.81  |
---------+--------+--------+
4        |   11   |    6   |   17
         | 14.86  |  8.11  | 22.97
         | 64.71  | 35.29  |
         | 29.73  | 16.22  |
---------+--------+--------+
Total         37       37      74
           50.00    50.00  100.00
```

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q9 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	3.556	0.314
Likelihood Ratio Chi-Square	3	3.624	0.305
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	2.144	0.143
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.339
Phi Coefficient			0.219
Contingency Coefficient			0.214
Cramer's V			0.219

Sample Size = 74
WARNING: 25% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 10B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 10.

Q10 PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
1	2	1	3
	2.70	1.35	4.05
	66.67	33.33	
	5.41	2.70	
2	6	5	11
	8.11	6.76	14.86
	54.55	45.45	
	16.22	13.51	
3	1	1	2
	1.35	1.35	2.70
	50.00	50.00	
	2.70	2.70	
4	28	30	58
	37.84	40.54	78.38
	48.28	51.72	
	75.68	81.08	
Total	37	37	74
	50.00	50.00	100.00

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q10 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	0.493	0.920
Likelihood Ratio Chi-Square	3	0.500	0.919
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.423	0.515
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.905
Phi Coefficient			0.082
Contingency Coefficient			0.081
Cramer's V			0.082

Sample Size = 74
WARNING: 50% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 11B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 11.

Q11 PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
1	1	3	4
	1.35	4.05	5.41
	25.00	75.00	
	2.70	8.11	
2	18	20	38
	24.32	27.03	51.35
	47.37	52.63	
	48.65	54.05	
3	8	6	14
	10.81	8.11	18.92
	57.14	42.86	
	21.62	16.22	
4	10	8	18
	13.51	10.81	24.32
	55.56	44.44	
	27.03	21.62	
Total	37	37	74
	50.00	50.00	100.00

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q11 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	1.613	0.656
Likelihood Ratio Chi-Square	3	1.661	0.646
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	1.028	0.311
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.736
Phi Coefficient			0.148
Contingency Coefficient			0.146
Cramer's V			0.148

Sample Size = 74
WARNING: 25% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 12B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 12.

Q12 PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
0	0	1	1
	0.00	1.35	1.35
	0.00	100.00	
	0.00	2.70	
1	8	14	22
	10.81	18.92	29.73
	36.36	63.64	
	21.62	37.84	
2	13	5	18
	17.57	6.76	24.32
	72.22	27.78	
	35.14	13.51	
3	15	17	32
	20.27	22.97	43.24
	46.88	53.13	
	40.54	45.95	
4	1	0	1
	1.35	0.00	1.35
	100.00	0.00	
	2.70	0.00	
Total	37	37	74
	50.00	50.00	100.00

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q12 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	4	7.317	0.120
Likelihood Ratio Chi-Square	4	8.238	0.083
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	1.041	0.308
Fisher's Exact Test (2-Tail)			7.34E-02
Phi Coefficient			0.314
Contingency Coefficient			0.300
Cramer's V			0.314

Sample Size = 74
WARNING: 40% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 13B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 13.

Q13 PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
1	8	4	12
	10.81	5.41	16.22
	66.67	33.33	
	21.62	10.81	
2	11	14	25
	14.86	18.92	33.78
	44.00	56.00	
	29.73	37.84	
3	4	3	7
	5.41	4.05	9.46
	57.14	42.86	
	10.81	8.11	
4	14	13	27
	18.92	17.57	36.49
	51.85	48.15	
	37.84	35.14	
?	0	3	3
	0.00	4.05	4.05
	0.00	100.00	
	0.00	8.11	
Total	37	37	74
	50.00	50.00	100.00

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q13 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	4	4.873	0.301
Likelihood Ratio Chi-Square	4	6.059	0.195
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.909	0.340
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.356
Phi Coefficient			0.257
Contingency Coefficient			0.249
Cramer's V			0.257

Sample Size = 74
WARNING: 40% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 14B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 14.

Q14 PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
0	1	1	2
	1.35	1.35	2.70
	50.00	50.00	
	2.70	2.70	
1	13	21	34
	17.57	28.38	45.95
	38.24	61.76	
	35.14	56.76	
2	14	7	21
	18.92	9.46	28.38
	66.67	33.33	
	37.84	18.92	
3	8	7	15
	10.81	9.46	20.27
	53.33	46.67	
	21.62	18.92	
4	1	1	2
	1.35	1.35	2.70
	50.00	50.00	
	2.70	2.70	
Total	37	37	74
	50.00	50.00	100.00

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q14 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	4	4.282	0.369
Likelihood Ratio Chi-Square	4	4.345	0.361
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	1.329	0.249
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.296
Phi Coefficient			0.234
Cramer's V			0.241

Sample Size = 74
WARNING: 40% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 15B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 15.

Q15 PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
1	3	5	8
	4.05	6. 76	10.81
	37.50	62.50	
	8.11	13.51	
2	1	5	6
	1.35	6.76	8.11
	16.67	83.33	
	2.70	13.51	
3	26	19	45
	35.14	25.68	60.81
	57.78	42.22	
	70.27	51.35	
4	7	8	15
	9.46	10.81	20.27
	46.67	53.33	
	18.92	21.62	
Total	37	37	74
	50.00	50.00	100.00

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q15 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	4.322	0.229
Likelihood Ratio Chi-Square	3	4.576	0.206
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.924	0.337
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.251
Phi Coefficient			0.242
Contingency Coefficient			0.235
Cramer's			0.242

Sample Size = 74
WARNING: 50% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 16B1: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 16.

Q16A PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
1	3 4.05 50.00 8.11	3 4.05 50.00 8.11	6 8.11
2	11 14.86 61.11 29.73	7 9.46 38.89 18.92	18 24.32
2*	23 31.08 46.00 62.16	27 36.49 54.00 72.97	50 67.57
Total	37 50.00	37 50.00	74 100.00

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q16A BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	2	1.209	0.546
Likelihood Ratio Chi-Square	2	1.217	0.544
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.529	0.467
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.530
Phi Coefficient			0.128
Contingency Coefficient			0.127
Cramer's V			0.128

Sample Size = 74
WARNING: 33% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 16B2: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 16.

```
Q16B     PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   | Total
---------+--------+--------+
1        |   13   |    9   |   22
         | 17.57  | 12.16  | 29.73
         | 59.09  | 40.91  |
         | 35.14  | 24.32  |
---------+--------+--------+
2        |    9   |    6   |   15
         | 12.16  |  8.11  | 20.27
         | 60.00  | 40.00  |
         | 24.32  | 16.22  |
---------+--------+--------+
2*       |   15   |   22   |   37
         | 20.27  | 29.73  | 50.00
         | 40.54  | 59.46  |
         | 40.54  | 59.46  |
---------+--------+--------+
Total         37       37      74
           50.00    50.00  100.00
```

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q16B BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	2	2.652	0.266
Likelihood Ratio Chi-Square	2	2.668	0.263
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	2.133	0.144
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.258
Phi Coefficient			0.189
Contingency Coefficient			0.189
Cramer's V			0.189

Sample Size = 74

TABELA 16B3: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 16.

Q16C PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
0	2	0	2
	2.70	0.00	2.70
	100.00	0.00	
	5.41	0.00	
1	27	23	50
	36.49	31.08	67.57
	54.00	46.00	
	72.97	62.16	
2	7	3	10
	9.46	4.05	13.51
	70.00	30.00	
	18.92	8.11	
2*	1	10	11
	1.35	13.51	14.86
	9.09	90.91	
	2.70	27.03	
3	0	1	1
	0.00	1.35	1.35
	0.00	100.00	
	0.00	2.70	
Total	37	37	74
	50.00	50.00	100.00

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q16C BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	4	12.284	0.015
Likelihood Ratio Chi-Square	4	14.672	0.005
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	7.082	0.008
Fisher's Exact Test (2-Tail)			5.68E-03
Phi Coefficient			0.407
Contingency Coefficient			0.377
Cramer's V			0.407

Sample Size = 74
WARNING: 40% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 16B4: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 16.

Q16D PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
1	31	18	49
	41.89	24.32	66.22
	63.27	36.73	
	83.78	48.65	
2	3	1	4
	4.05	1.35	5.41
	75.00	25.00	
	8.11	2.70	
2*	3	18	21
	4.05	24.32	28.38
	14.29	85.71	
	8.11	48.65	
Total	37	37	74
	50.00	50.00	100.00

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q16D BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	2	15.163	0.001
Likelihood Ratio Chi-Square	2	16.424	0.000
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	13.019	0.000
Fisher's Exact Test (2-Tail)			2.21E-04
Phi Coefficient			0.453
Contingency Coefficient			0.412
Cramer's V			0.453

Sample Size = 74
WARNING: 33% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 16B5: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 16.

Q16E PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
0	0	3	3
	0.00	4.05	4.05
	0.00	100.00	
	0.00	8.11	
2	37	32	69
	50.00	43.24	93.24
	53.62	46.38	
	100.00	86.49	
3	0	2	2
	0.00	2.70	2.70
	0.00	100.00	
	0.00	5.41	
Total	37	37	74
	50.00	50.00	100.00

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q16E BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	2	5.362	0.068
Likelihood Ratio Chi-Square	2	7.294	0.026
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.198	0.656
Fisher's Exact Test (2-Tail)			5.41E-02
Phi Coefficient			0.269
Contingency Coefficient			0.260
Cramer's V			0.269

Sample Size = 74
WARNING: 67% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 16B6: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 16.

Q16F PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
0	0 0.00 0.00 0.00	1 1.35 100.00 2.70	1 1.35
1	3 4.05 60.00 8.11	2 2.70 40.00 5.41	5 6.76
2	11 14.86 61.11 29.73	7 9.46 38.89 18.92	18 24.32
2*	23 31.08 46.00 62.16	27 36.49 54.00 72.97	50 67.57
Total	37 50.00	37 50.00	74 100.00

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q16F BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	2.409	0.492
Likelihood Ratio Chi-Square	3	2.804	0.423
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.261	0.609
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.578
Phi Coefficient			0.180
Contingency Coefficient			0.178
Cramer's V			0.180

Sample Size = 74
WARNING: 50% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 17B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 17.

Q17 PERIODO

Frequency / Percent / Row Pct / Col Pct	antes	depoi	Total
0	5	3	8
	6.76	4.05	10.81
	62.50	37.50	
	13.51	8.11	
1	13	10	23
	17.57	13.51	31.08
	56.52	43.48	
	35.14	27.03	
2	11	13	24
	14.86	17.57	32.43
	45.83	54.17	
	29.73	35.14	
3	8	11	19
	10.81	14.86	25.68
	42.11	57.89	
	21.62	29.73	
Total	37	37	74
	50.00	50.00	100.00

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q17 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	1.532	0.675
Likelihood Ratio Chi-Square	3	1.540	0.673
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	1.438	0.230
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.708
Phi Coefficient			0.144
Contingency Coefficient			0.142
Cramer's V			0.144

Sample Size = 74
WARNING: 25% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

TABELA 18B: FREQUÊNCIAS E PERCENTUAIS DO GRUPO CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE PARA A QUESTÃO 18.

```
Q18      PERIODO

Frequency|
Percent  |
Row Pct  |
Col Pct  |antes   |depoi   |  Total
---------+--------+--------+
0        |    4   |    3   |    7
         |  5.41  |  4.05  |  9.46
         | 57.14  | 42.86  |
         | 10.81  |  8.11  |
---------+--------+--------+
1        |    8   |    8   |   16
         | 10.81  | 10.81  | 21.62
         | 50.00  | 50.00  |
         | 21.62  | 21.62  |
---------+--------+--------+
2        |   16   |   14   |   30
         | 21.62  | 18.92  | 40.54
         | 53.33  | 46.67  |
         | 43.24  | 37.84  |
---------+--------+--------+
3        |    9   |   12   |   21
         | 12.16  | 16.22  | 28.38
         | 42.86  | 57.14  |
         | 24.32  | 32.43  |
---------+--------+--------+
Total         37       37       74
           50.00    50.00   100.00
```

STATISTICS FOR TABLE 1 OF Q18 BY PERIODO
CONTROLLING FOR GRUPO=cont

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	0.705	0.872
Likelihood Ratio Chi-Square	3	0.707	0.872
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.386	0.534
Fisher's Exact Test (2-Tail)			0.873
Phi Coefficient			0.098
Contingency Coefficient			0.097
Cramer's V			0.098

Sample Size = 74
WARNING: 25% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

ANEXO V- QUESTIONÁRIO SOBRE DADOS DOS ALUNOS

1-Nome

2-Idade

3- Sexo: Feminino ( ) Masculino ( )

4-Você frequentou outras escolas anteriormente? Sim ( ) Não ( )
Se você respondeu sim, em qual série você estava?

5-Você já repetiu alguma série? Sim ( ) Não ( )
Se você respondeu sim, quantas vezes você repetiu?
Em qual série você estava?

6- Qual disciplina você mais gosta?

7- Qual disciplina você menos gosta?

8-O que você mais gostou de estudar em Matemática?

9-Qual a matéria que você precisa estudar mais?

10-Você gosta de estudar frações? Sim ( ) Não ( ) Por quê?

11-Você acha que aprendeu tudo sobre frações? Sim ( ) Não ( ) Por quê?

12-O você não entendeu de frações?

13-O que mais você gostaria de saber sobre frações?

14-Onde e quando você usa frações?

15-Você gosta de resolver problemas com frações?

ANEXO VI- GRÁFICOS DA DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA DAS NOTAS EM RELAÇÃO À CURVA NORMAL.

GRÁFICO 1: DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA DAS NOTAS DO GRUPO EXPERIMENTAL EM RELAÇÃO À CURVA NORMAL NO PRÉ-TESTE.

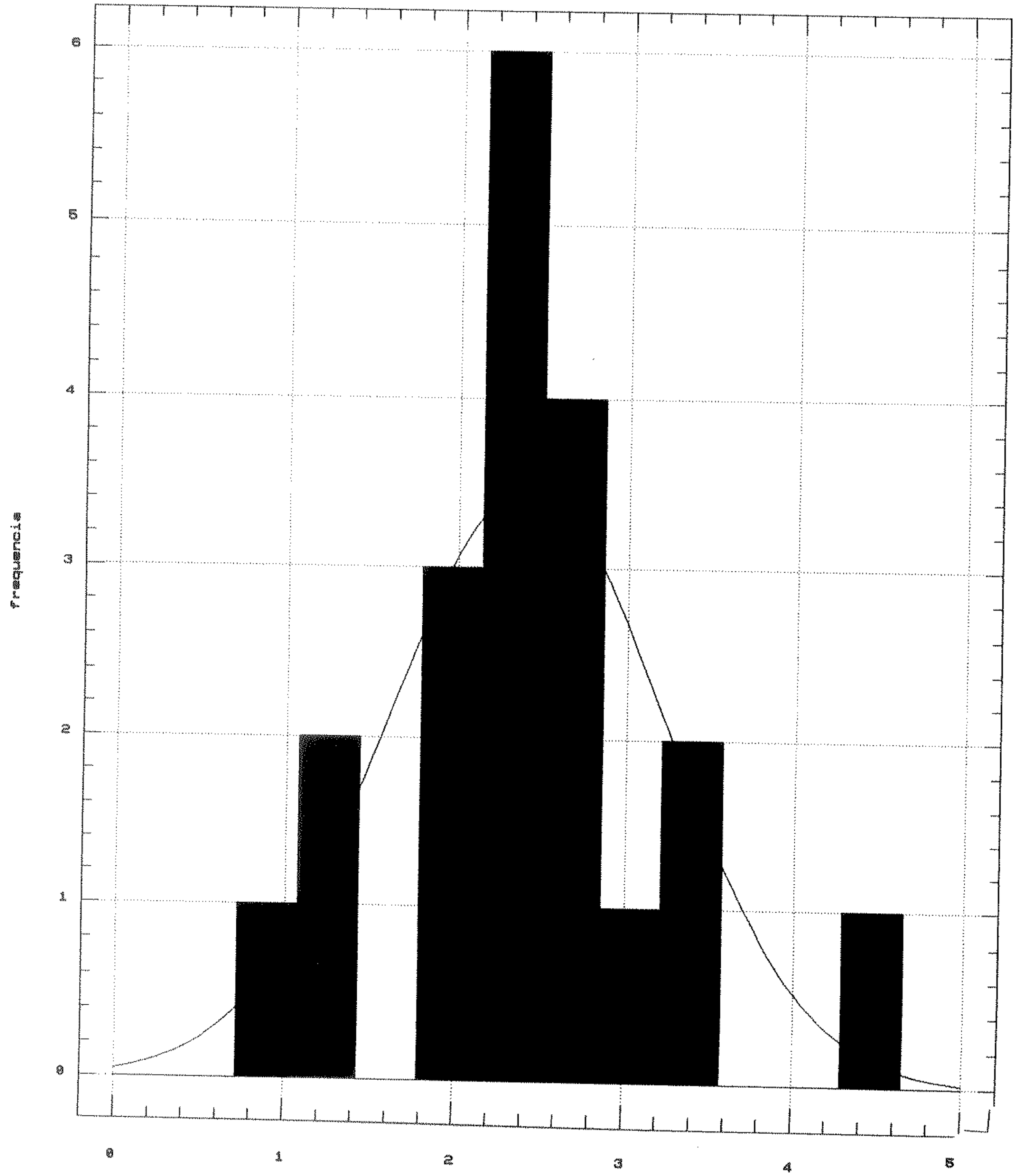


GRÁFICO 2: DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA DAS NOTAS DO GRUPO CONTROLE EM RELAÇÃO À CURVA NORMAL NO PRÉ-TESTE.

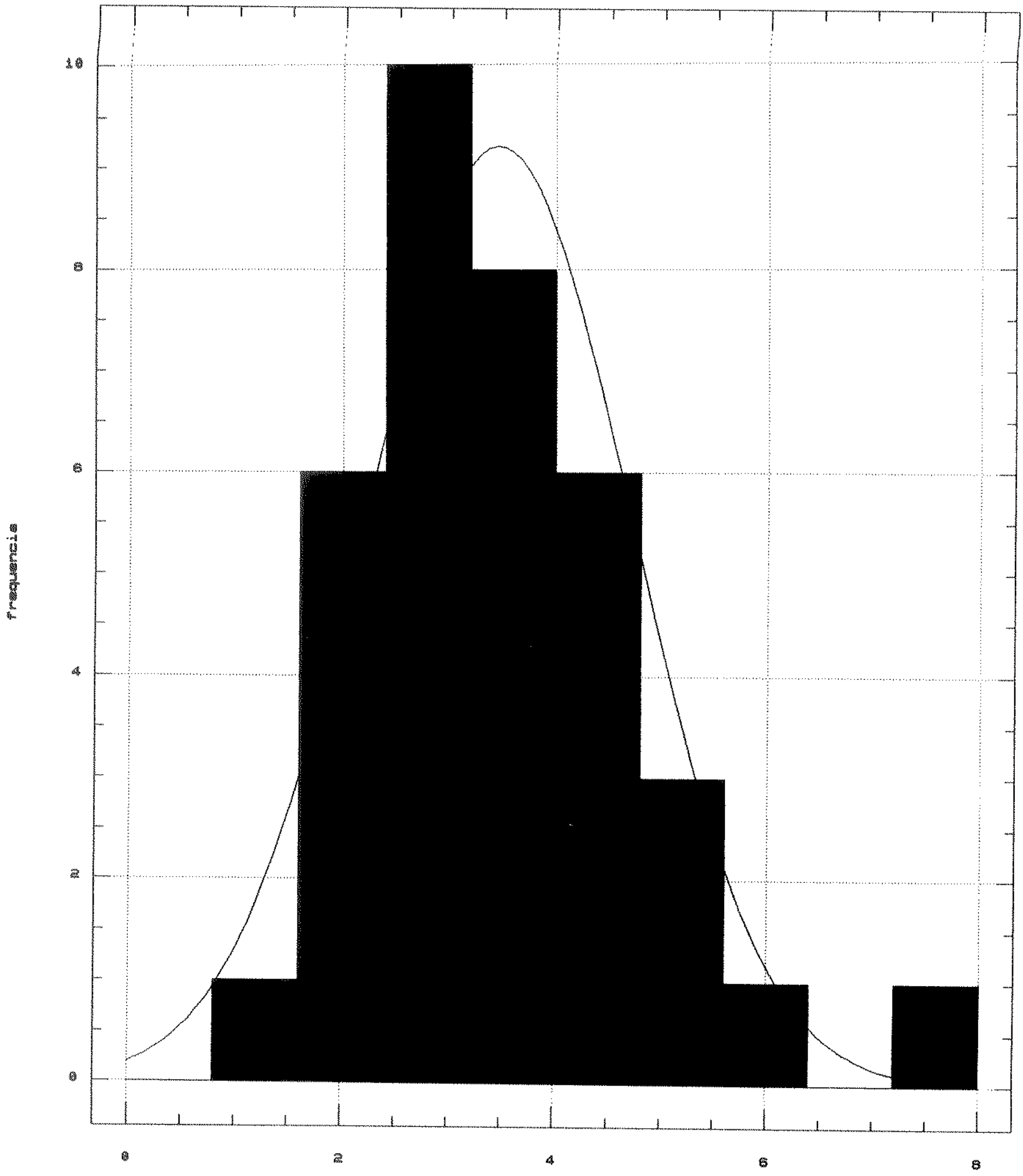


GRÁFICO 3: DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA DAS NOTAS DO GRUPO EXPERIMENTAL EM RELAÇÃO À CURVA NORMAL NO PÓS-TESTE.

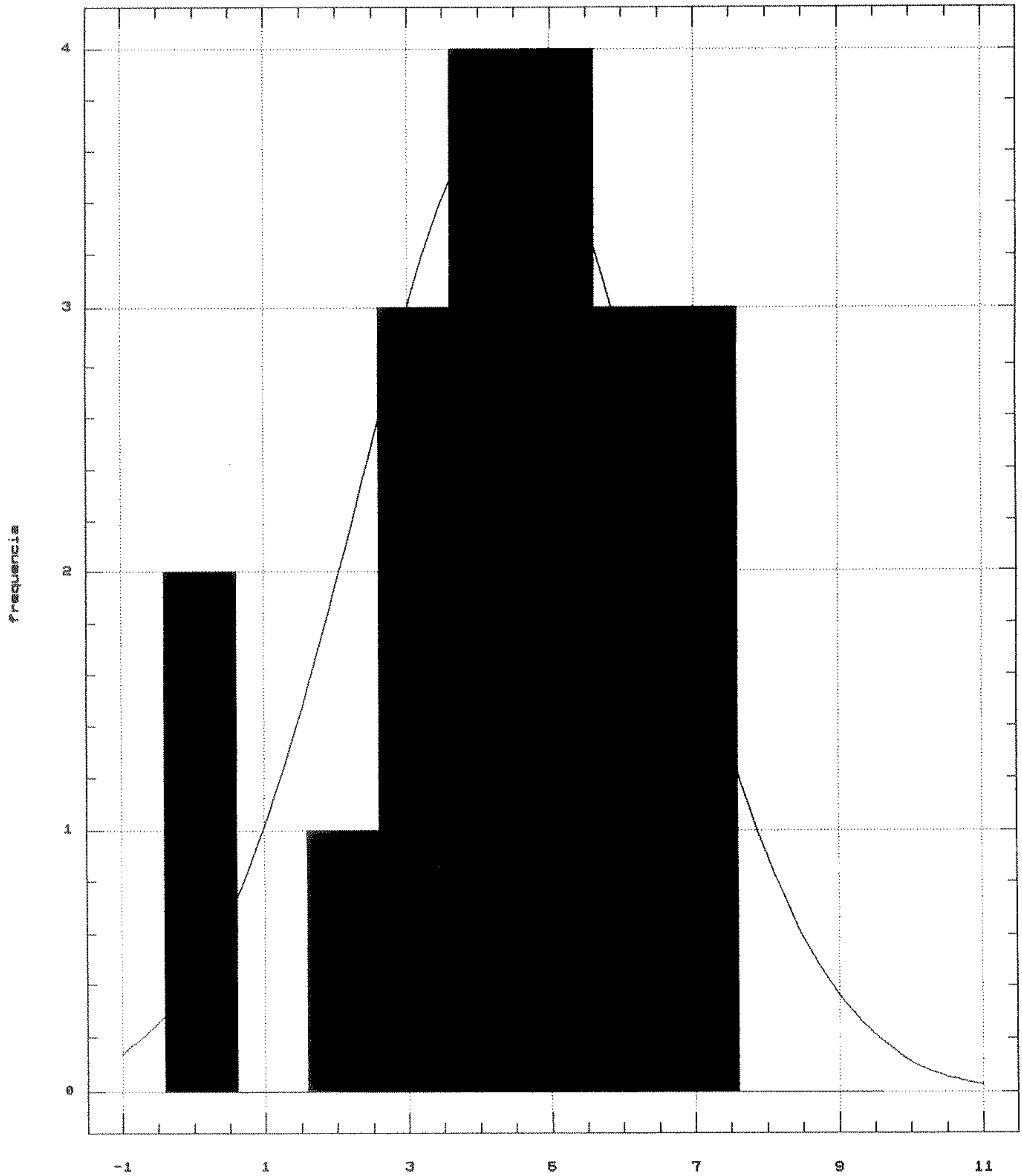


GRÁFICO 4: DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA DAS NOTAS DO GRUPO CONTROLE EM RELAÇÃO À CURVA NORMAL NO PÓS-TESTE.