FERNANDA DE OLIVEIRA SOARES TAXA

ESTUDO SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS VERBAIS ARITMÉTICOS NAS SÉRIES INICIAIS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
CAMPINAS-SP
1996

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA FACULDADE DE EDUCAÇÃO/UNICAMP

Taxa, Fernanda de Oliveira Soares
T198e Estudo sobre a resolução de problemas verbais aritméticos nas séries iniciais / Fernanda de Oliveira Soares Taxa. -- Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: Lucila D. T. Fini.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Solução de problemas. 2. Aritmética. 3. Psicologia. 4. Educação matemática. I. Fini, Lucila Diehl Tolaine. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO na Área de Concentração: Psicologia da Educação à Comissão Julgadora da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação da **Profa. Dra. Lucila Diehl Tolaine Fini.**

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Fernanda de Oliveira Soares Taxa e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 28 de agosto de 1996

Assinatura:

Comissão Julgadora:

AGRADECIMENTOS

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, em especial à Profa. Dra. Lucila Diehl Tolaine Fini pelo incentivo e dedicação com que orientou esta pesquisa.

A todos os alunos que no decorrer de minha atuação como professora em sala de aula explicitavam inquietações nos trabalhos de Matemática, e apesar disso revelaram um saber especial.

Agradeço igualmente às crianças do PRODECAD pela participação neste trabalho. As investigações feitas junto a elas possibilitaram inúmeras descobertas e busca de novos caminhos em relação à Matemática nas séries iniciais.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

Páginas

ÍNDICE DE TABELAS

Páginas

ÍNDICE DE TABELAS (continuação) Páginas

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo estudar procedimentos na Resolução de Problemas Verbais Aritméticos, em crianças das séries iniciais do 1° Grau da Escola Pública.

Pela perspectiva construtivista, com base na Teoria de Piaget, procurou-se analisar questões pertinentes à construção de uma correta representação mental e à Resolução de Problemas Verbais de estrutura multiplicativa levando-se em consideração o papel das abstrações e a utilização de material concreto de apoio.

Constatou-se que, na solução de problemas, ainda que não seja por meio de uma estratégia mais elaborada como aquela exigida pela escola, é fundamental o papel das representações internas do sujeito nos processos cognitivos.

Os dados mostraram que as crianças constroem uma representação interna do problema, conseguem selecionar e utilizar estratégias, informais e diferenciadas (contagem, aditiva e multiplicativa), explicitando algumas vezes de maneira mais correta, outras vezes menos correta, os cálculos que realiza para a resolução de problemas aritméticos.

O uso de material concreto revelou-se como uma possibilidade de grande interesse para a intervenção do professor no auxílio aos alunos, tendo em vista a solução de problemas.

ABSTRACT

The aim of this work is to study the procedures of verbal-arithmetical problems resolution in elementary school students from public schools.

Regarding the construtivistic point of view, based on Piaget's theory, we tried to analyse relevant questions to the construction of a correct mental representation and also to the resolution of verbal problemas of multiplicative structure. We did so, always taking in account the hole of the abstractions and the hole of the utilization of concrete supporting materials.

It was observed that for problema resolution, even if it is not done by means of a more elaboreted strategy as the one demanded by the school, the hole of the internal representation of the subject has fundamental importance in the cognitivic processes.

The data can show that children construct a internal representation of the problem, that they can select and make use of informal and differentiazed strategies (adding and multiplying, countings), being able to explain the calculations they realized, sometimes in a better way, sometimes in a not so good way.

Making use of concrete material showed to be an interesting possibility of teacher intervention in helping students to solve problems.

INTRODUÇÃO

No presente, um dos grandes desafios das escolas de 1º Grau ainda é o trabalho com a Matemática. Em especial nas escolas públicas, crianças ingressantes, desde a 1ª série, tendem a apresentar dificuldades e rendimento escolar insatisfatório nas tarefas escolares dessa disciplina.

Trabalhando como professora na Rede Pública de Ensino, logo depois de completar o curso de Pedagogia e, portanto, iniciante e sem grande experiência, enfrentei turmas consideradas difíceis, as quais outros professores mais antigos da escola não queriam assumir. Muitas vezes encontrei nessas turmas alunos repetentes, que aparentemente não conseguiam aprender, apresentando dificuldades que eu não compreendia, bem como apresentavam problemas de ordem pessoal, familiar e outros, os quais não me sentia preparada para enfrentar.

Minha opção profissional, influenciada pelo curso de Pedagogia que eu cursara, era por um trabalho fundamentado na Psicologia Genética piagetiana, enfatizando o processo de construção de conhecimentos pelo aluno . No entanto, enfrentei inicialmente, inúmeras frustrações por não saber exatamente como fazer da teoria que eu assimilara uma prática pedagógica eficaz. Muitas vezes enfrentei dificuldades por não saber como transformar minhas concepções de educação em prática na sala de aula. Além de tudo, havia pressão da Direção da escola, bem como dos professores, contrários a qualquer alteração da rotina do trabalho docente.

Já na escola particular, as experiências mostraram-se logo de início um pouco diferentes, uma vez que o professor podia contar com maior apoio pedagógico. No entanto, ainda seria preciso enfrentar a ênfase na quantidade da matéria a ser ministrada pelos professores, e mesmo uma quantidade excessiva de trabalhos que se deviam solicitar aos alunos, nem sempre priorizando-se o mais importante: a compreensão por parte do aluno de que se propôs a estudar.

Como docente em cursos de formação para o Magistério, a situação não se mostra muito diferente. Os alunos desses cursos também encontram problemas semelhantes nas atividades de estágio supervisionado. Percebe-se que os futuros professores enfrentam, com preocupação e insegurança, a tarefa de considerar a orientação construtivista para o ensino de Matemática: trabalhando nas escolas, em atividades de estágio supervisionado, os alunos comentam que não sabem o que fazer para desenvolver um trabalho dessa natureza em sala de aula. Comentam que também é difícil encontrar professores que saibam o que fazer, nesse sentido, nas escolas de 1º e 2º graus.

O que se percebe é que, tanto a instituição escola, como os professores que nela atuam, apresentam dificuldades em adaptar-se às necessidades das crianças enquanto sujeitos que constroem seu próprio conhecimento, que interpretam e atribuem significados à realidade, de acordo com suas próprias condições de vida.

Garantir o bom desempenho dos alunos na escola, contribuir para que aproveitem as experiências escolares tem sido uma tarefa bastante complexa. No caso do ensino da Matemática percebe-se que ainda vigora a ênfase no ensino apoiado na verbalização: o professor tende a apresentar os conteúdos na lousa, explicando aos alunos que os registram nos cadernos. Depois das explicações, o professor pede aos alunos que resolvam problemas e exercícios, seguindo os livros didáticos. Pesquisadores como Sastre e Moreno (1980), Kamii (1992; 1995) criticam o trabalho mais rotineiro de professores que tentam ensinar Matemática como se fosse Conhecimento Social.

A crítica ao ensino da Matemática caracterizado como mecânico, com ênfase em símbolos e sinais aritméticos tem sido freqüente, porém nem sempre os professores conseguem modificar a situação. Mesmo quando os professores apresentam as melhores intenções em investir em inovações, tendo em vista a melhoria do ensino, percebe-se que encontram grandes dificuldades no trabalho em sala de aula por falta de orientação e apoio na escola.

Em muitas escolas, aquilo que se entende por ensino de "conceitos" os quais deveriam ser aprendidos pelas crianças, como é o caso de número, escrita e leitura, noções de primeiro, segundo, em cima, embaixo, dentre outros, muitas vezes implicam um ensino verbalista, aulas expositivas, palavreado desconexo, sem sentido, o que não contribui para a construção do conhecimento por parte da criança.

Na experiência escolar, pode-se perceber, com freqüência, professores solicitando que crianças resolvam tarefas e exercícios, muitas vezes, complicados demais, com ênfase nos exercícios de memorização; ao invés, exploram muito pouco ou quase nada a atividade do aluno e a sua reflexão.

No caso da primeira série, em Aritmética, os professores propõem que até o final do ano, o aluno aprenda, no caso do Sistema de Numeração Decimal - (SND), o registro numérico, a memorização de seqüência numérica e de somas até determinada quantidade (99 ou 100), assim como as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, muitas vezes sem atentar para a compreensão e construção do conhecimento matemático.

Quando se considera a situação de algumas escolas que anunciam estar desenvolvendo um trabalho pela perspectiva construtivista, em especial em relação à Educação Matemática, em muitos casos pode-se detectar concepções errôneas a respeito do construtivismo e do trabalho escolar. Em muitos casos, os professores se deixam orientar por uma leitura superficial sobre a teoria construtivista e afirmam adotar essa perspectiva epistemológica mais por uma espécie de adesão ao modismo do que por uma definição pessoal, apoiada na reflexão pessoal e no estudo cuidadoso.

Muitos professores, hoje, mostram-se convictos de que as crianças pequenas podem se beneficiar da utilização do chamado material concreto, como apoio para construir conhecimentos em Matemática, mas não compreendem, com clareza o que isto significa e não sabem como trabalhar em sala de aula com ele.

Pode-se observar que, em muitos casos, os educadores não têm uma concepção clara de educação, nem têm uma atuação mais consistente. Será que compreendem com clareza os processos de passagem de menor conhecimento para um mais elaborado, em especial em relação a crianças menores? Compreendem a natureza do conhecimento matemático?

Muitas crianças mostram desde cedo algum medo ou mesmo "aversão" à Matemática. Na prática pedagógica nas escolas pode-se constatar que, ao iniciarem a primeira série, muitas vezes são obrigadas a memorizar uma série de sinais, que para elas são, muitas vezes, incompreensíveis.

Com freqüência os alunos apresentam dificuldades na resolução de problemas aritméticos, como já registrado por bibliografia especializada. O jornal Folha de São Paulo, de 5 de maio de 1996 (Caderno Cotidiano, 3 f., nº 2), apresenta dados de uma avaliação de 124 mil alunos de 1º e 2º graus, realizada pelo Ministério da Educação, revelando um resultado desastroso, e, na Matemática o percentual médio de acertos não alcançou 50%. Segundo o jornalista, os resultados da pesquisa sobre o trabalho da escola e o rendimento dos alunos mostram que aproximadamente 70% dos alunos de escolas públicas e particulares e das séries iniciais não sabem resolver problemas de Matemática.

Constata-se na escola, entretanto, que muitos alunos conseguem criar algumas estratégias para dar conta das tarefas apresentadas pelos professores: algumas, de maneira mecânica, outras com auxílio do próprio professor. "É continha de mais ou de menos que é para fazer aqui?", pergunta o professor ao apresentar problemas aritméticos. Cabe perguntar se, nesse caso, há contribuição para uma aprendizagem efetiva de resolução de problemas e da operação de adição e subtração.

A situação torna-se difícil quando o aluno não consegue sequer entender a proposta feita pelo professor no intuito de facilitar a resolução de problemas. Acostumado a esperar a sugestão do professor, bem como a aprovação em relação aos resultados, o aluno poderá desenvolver a convicção de que apenas o professor é capaz de identificar a resposta correta, e que conhecimento é domínio do mestre apenas. Essa situação pode contribuir para fracassos desnecessários, para apatia ou indisciplina na sala de aula e, ainda, resultar em baixa auto-estima e diminuição da auto-confiança do aluno.

Estudando a situação da primeira série do primeiro grau, Kamii (1992) critica a tendência de os professores apontarem os erros dos alunos nas tarefas escolares sem a devida análise e discussão junto à criança sobre os procedimentos utilizados. Esse estilo de trabalho e de correção leva muitas vezes, em especial a criança de menor idade, a ficar convicta de que somente o professor pode chegar à verdade e saber se uma solução é a correta ou não. Castorina (1988) e Kamii (1995) lembram que o erro constitui um aspecto importante do processo de construção do conhecimento. No caso da Matemática, o erro pode indicar ao professor como o aluno está raciocinando, quais são suas hipóteses pessoais diante de um problema.

É comum, ao pesquisar uma escola pública que, ao se perguntar para uma criança que tenta solucionar problemas - ou realizam operações de adição, subtração ou multiplicação como conseguiu chegar a um determinado resultado, constatar-se condutas do seguinte tipo: o aluno pega imediatamente a borracha e tenta apagar sua resposta; mostra-se aborrecido, triste e se enerva diante dessa simples pergunta, considerando, sem mais indagações, que cometeu algum tipo de "erro". Percebe-se que o aluno não pára para refletir sobre a pergunta do professor, e nem se pergunta se a sua resposta está certa ou errada: automaticamente verbaliza frases tais como: "Ah! É mesmo! Tá errado!" ou "Eu errei."

A criança tende a ver a professora ou o adulto como a única fonte de saber. Dificilmente ela avalia por si mesma o próprio trabalho ou pensa duas vezes sobre as próprias respostas, revelando insegurança em relação a elas diante da professora.

A escola desde cedo vem favorecendo situações que contribuem para levar o aluno a desconfiar de seu próprio pensamento, tornando-se passivo diante da sua própria produção acadêmica e impossibilitado de justificar a tarefa que realiza.

Se a escola promove apenas situações em que se enfatiza a memorização, não contribui para tornar os alunos capazes de um trabalho autônomo e de refletir logicamente. As escolas parecem estar se distanciando da preocupação de fazer os alunos refletirem de maneira crítica e autônoma, e, desse modo não lhes possibilita um papel de transformadores futuros da sociedade.

Quando se considera o trabalho desenvolvido por algumas escolas, mesmo naquelas que se propõem como construtivistas em relação à Educação Matemática, muitos caminhos precisariam ser reavaliados e os princípios de ação pedagógica deveriam ser revisados.

Aspectos como a melhor formação do professor, a possível clareza na opção por uma teoria psicológica e a inadequação de conteúdos e métodos devem ser objeto de algumas reflexões, na perspectiva do Construtivismo.

É importante destacar que a ausência ou a má interpretação de teorias psicológicas capazes de apoiar o trabalho do professor no contexto escolar pode contribuir para o fracasso dos alunos, o que vem sendo um problema marcante na escola brasileira, especialmente no que se refere a crianças menos favorecidas, para as quais as experiências escolares podem ser, talvez, a única possibilidade de acesso ao saber sistematizado e socialmente valorizado.

Como assinala Rangel (1992), inúmeras são as evidências da precariedade da formação do professor das séries iniciais, bem como de seus conhecimentos sobre a Psicologia do Desenvolvimento, sobre desenvolvimento cognitivo e construção do conhecimento matemático.

Apesar do extenso trabalho de Piaget e seus seguidores, constata-se nas escolas que pouco ou quase nada é considerado sobre o desenvolvimento cognitivo das crianças que entram numa determinada série, mas que, ao contrário, priorizam-se os conteúdos exigidos curricularmente e prematuramente sistematizados.

Podem-se encontrar professores que admitem os pressupostos piagetianos a respeito do desenvolvimento cognitivo e da aquisição do conhecimento matemático, mas que apresentam dificuldades quando tentam organizar situações de sala de aula de acordo com tais pressupostos. Tornar tão claro quanto possível para o professor, tão detalhado quanto possível o processo de construção do pensamento operatório e da apropriação de signos operatórios por alunos de 1° Grau pode ser de grande valia para a melhoria do trabalho na escola.

Para isto, é preciso um trabalho de análise das possibilidades psicopedagógicas do trabalho escolar que possam favorecer a construção de conhecimentos e a resolução de problemas aritméticos, desde a atividade com objetos até a formalização dos conceitos por meio da linguagem dos signos operatórios.

Se procurarmos rever a idéia de que o professor é o responsável pela transmissão do conhecimento e passamos a observar o trabalho intelectual que as crianças realizam nas tarefas escolares, seus procedimentos, as soluções que inventam para resolver problemas, as experiências a que se propõem (seja no plano dos cálculos mentais ou nas representações gráficas), podemos perceber que as crianças mostram diferentes níveis ao construir conceitos matemáticos, que são capazes de transformar sua própria aprendizagem de forma significativa.

Um trabalho pedagógico em que se valorizasse a atividade própria dos alunos e as relações de cooperação, a discussão de procedimentos variados, talvez pudesse tornar o aluno capaz de refletir sobre suas estratégias de resolução, de identificar as conexões entre aquilo que já sabe em determinado momento e os exercícios escolares, e sentir-se incentivado e desafiado a provar ou demonstrar o próprio raciocínio.

Piaget e seguidores mostraram que o processo de construção do conhecimento é gradual, não se dá por saltos e implica sempre a atividade de construção do sujeito. Segundo Piaget, um objetivo fundamental para a Matemática seria o desenvolvimento das capacidades dedutivas do sujeito, porém observa-se que o que a escola enfatiza é a "disciplina" na sala de aula, a indução à linguagem matemática muito precocemente, a compreensão de símbolos e sinais que muitas vezes ainda não fazem parte da maneira de "fazer Matemática da criança", de suas formas de cáculo e de representação. Mesmo nas tarefas de resolução de problemas, pouca atenção é dada ao raciocínio da criança.

Por que os professores não aceitam os procedimentos informais da criança? Qual a relação entre a linguagem matemática e os desenhos, as somas sem sinais, o cálculo mental que os alunos apresentam como formas de resolver um desafio escolar?

Na sala de aula é muito comum não se aceitarem os caminhos percorridos pelo aluno para resolver situações que envolvem cálculos, quando esses não são idênticos aos da Matemática do livro didático. Desde cedo as crianças menores passam a entender que existe apenas "uma maneira certa" de solucionar a tarefa de Matemática e que é a do professor ou a do livro, a qual passa a ser aquela que tem real valor para os alunos, que, como num passe de mágica, admitem símbolos e sinais.

Como analisar pedagógica e psicologicamente os procedimentos dos alunos nas tarefas de resolução de problemas de Matemática, de difícil aceitação pela maioria dos professores?

Como analisar essa situação, tendo como preocupação central a solução de problemas aritméticos?

Para Kamii (1992, 1993, 1995), um trabalho consistente na escola implica o desenvolvimento da autonomia intelectual e moral das crianças, e como assinala, a autora, é preciso redefinir objetivos para a educação das séries iniciais.

Os professores vem incentivando muito pouco os alunos a darem suas próprias respostas, deixando de propor situações que poderiam fazer com que as crianças estabelecessem relações entre o que já conhecem com o novo a ser construído.

Compreender os processos e mecanismos de aprendizagem, as diferentes maneiras de solucionar problemas são algumas das preocupações deste estudo. É possível, tendo como marco de referência a Psicologia Genética, estudar e analisar qual é o papel da representação mental na resolução de problemas verbais aritméticos?

Com base na perspectiva psicológica a respeito do funcionamento mental, este trabalho tem por objetivos a análise de procedimento de resolução de problemas aritméticos, discutir algumas implicações da teoria piagetiana em relação ao ensino de Matemática, considerando estudos e pesquisas já realizados, bem como o rendimento insatisfatório de alunos das séries várias do 1° Grau da Escola Pública na solução de problemas.

Neste trabalho, pretende-se estudar, de maneira mais específica: a) os processos mentais que envolvem a Resolução de Problemas Aritméticos de Estrutura Multiplicativa; b) analisar as relações entre os procedimentos das crianças, a Representação Mental, e a utilização de material concreto de apoio; c) analisar as possibilidades de utilização de material de apoio para a resolução de problemas verbais aritméticos de estrutura multiplicativa; d) discutir o sentido da intervenção do professor diante da Resolução de Problemas Verbais Aritméticos de estrutura multiplicativa.

No Capítulo I, apresentamos a proposta de metodologia da pesquisa, assim como da análise dos resultados obtidos em um estudo exploratório inicial.

No Capítulo II, estaremos apresentando tendências construtivistas e discutindo estudos sobre a Educação Matemática.

Considera-se que a análise de diferentes trabalhos deve contribuir para o esclarecimento de como as crianças vêm construindo suas estruturas cognitivas em relação ao ensino da Matemática e os conteúdos na escola.

No Capítulo III focalizaremos os fundamentos da Teoria de Jean Piaget, seus trabalhos e de seguidores que constituem uma extensa e relevante contribuição para a compreensão dos processos de acesso do ser cognoscente ao conhecimento.

No Capítulo IV, faremos a análise e discussão dos dados.

Finalmente, apresentaremos as considerações finais, com vista ao ensino da Matemática na escola numa perspectiva construtivista.

CAPÍTULO I
METODOLOGIA DA PESQUISA

Este trabalho, inspirado em pesquisa de Morgado (1994), objetivou investigar como alunos de séries iniciais do 1º grau resolvem problemas verbais aritméticos de multiplicação. Outro objetivo, igualmente, foi o estudo das relações entre a representação mental e a solução de problemas, analisar questões pertinentes a uma correta construção da representação, assim como as possíveis estratégias utilizadas pela criança para a solução de problemas verbais aritméticos, envolvendo as operações de multiplicação, quando se utiliza o apoio de material concreto.

Também se procurou analisar as relações entre erros e acertos na solução de problemas e os resultados obtidos pelos alunos em provas piagetianas de avaliação do desenvolvimento cognitivo (provas de conservação e classificação).

Os problemas envolvendo a estrutura multiplicativa foram selecionados, considerando-se a classificação de Vergnaud (1991), para uma possível análise das relações entre o ensino elementar da uma possível análise das relações entre o ensino elementar da Matemática e os processos psicológicos. Na perspectiva do autor, há duas grandes categorias de relações multiplicativas: Isomorfismo de Medidas e Produto de Medidas. Com base nessas categorias procedeu-se, então, à análise dos problemas detectados.

1. Sujeitos

Nesta pesquisa foram avaliadas 60 crianças de 1ª a 4ª série do 1º Grau, da Rede Pública na cidade de Campinas-SP. A coleta de dados foi realizada no PRODECAD - Programa de Integração e Desenvolvimento da Criança e do Adolescente, unidade de atendimento de crianças, em Barão Geraldo, município de Campinas-SP.

O PRODECAD é uma instituição que recebe filhos de funcionários da UNICAMP, provenientes, em sua maioria, de famílias de funcionários de renda baixa. O PRODECAD é uma instituição e atende crianças numa espécie de escola de apoio: os alunos freqüentam a escola primária oficial (Escola Estadual de Primeiro Grau Sérgio Porto) em um dos períodos de aula (manhã ou tarde) e são encaminhados para o PRODECAD no outro período, em que não estão na escola. No período em que se encontram na escola referida (PRODECAD), as crianças realizam várias atividades, dentre elas, Educação Física, Artes, atividades com uso de computadores, oficinas diversas assim como atividades de orientação de estudos e reforço escolar.

Foram escolhidas 60 crianças como sujeitos da pesquisa, constituindo três grupos:

a) vinte crianças que não haviam aprendido a multiplicação na escola, em idades entre sete e 8,5 anos . Estes alunos constituíram os sujeitos do Grupo 1, e todos freqüentavam a 1ª série do 1° Grau;

b) vinte crianças que estavam aprendendo multiplicação, com idades entre oito e 9,5 anos. Estes alunos constituíram os sujeitos do Grupo 2, e todos freqüentavam a 2ª série do 1° Grau;

c) vinte crianças que, segundo os professores já haviam aprendido a multiplicação, com idades entre 10 e 12 anos. Estes alunos constituíram os sujeitos do Grupo 3, e todos freqüentavam a 3ª série do 1° Grau.

Para a escolha dos sujeitos levou-se em conta a série em que estavam matriculados e procurou-se analisar a possível influência da escola em relação a problemas verbais aritméticos, uma vez que o ensino primário tem como um de seus conteúdos centrais a solução de problemas.

Buscou-se entender como as crianças do Grupo 1 (alunos de 1ª série) solucionavam problemas verbais de estrutura multiplicativa, sem nenhum tipo de aprendizagem escolar, considerando que, no período da pesquisa as crianças poderiam estar construindo o conceito do número, que implica a inclusão hierárquica, a qual relaciona-se com a estrutura multiplicativa (Kamii, 1995).

No Grupo 2 procurou-se analisar a influência do processo de ensino-aprendizagem. Estudos e pesquisas que vêm sendo desenvolvidos na linha piagetiana assinalam que o conceito da operação da multiplicação se constrói gradualmente e em diferentes niveis de compreensão (desde a representação mental até o registro gráfico : desenhos, representações não-canônicas) do mais simples até o mais sofisticado - os sinais - e implica o processo de abstração, sendo que a construção do conceito de multiplicação é posterior ao início da escolaridade.

Uma investigação preliminar na escola PRODECAD mostrou que, no período da pesquisa, os professores das crianças do Grupo 2 estavam ensinando a operação da multiplicação por meio de tarefas que envolviam problemas verbais, assim como tabuada.

No Grupo 3 procurou-se verificar como as crianças nas idades entre dez e 11 anos solucionavam os problemas, se abandonavam ou não os procedimentos tradicionais valorizados pela escola e se recorriam a procedimentos diversos e espontâneos. Com esse grupo, esperava-se encontrar um avanço na qualidade de resolução dos problemas (estratégias e justificativa mais elaboradas, apoiadas na abstração reflexionante e tomada de consciência do sujeito), uma vez que essas crianças já haviam aprendido e exercitado de diferentes maneiras a operação da multiplicação durante aproximadamente dois anos.

2. Procedimentos e Materiais

2.1 - Procedimentos de coleta de dados

A pesquisadora, em primeiro lugar, identificou junto às professoras em que séries estariam ensinando multiplicação. Depois, obteve as listas de alunos de cada uma das classes (1ª, 2ª e 3ª séries), fornecidas pelas professoras da escola com base no que foram sorteadas as 60 crianças que seriam os sujeitos da pesquisa. Para o sorteio das crianças, o procedimento utilizado foi o seguinte:

As professoras indicaram para o sorteio grupos de crianças:

1. que nunca tinham aprendido multiplicação (lista das 1ªs. séries);

2. que estavam aprendendo multiplicação (lista das 2ªs. séries);

3. que já haviam aprendido a multiplicação (3ª séries).

Ficou combinado entre professores e pesquisadora que os alunos sorteados sairiam da sala de aula durante o tempo de aplicação de provas e problemas.

Provas operatórias

As crianças foram inicialmente submetidas a provas clássicas piagetianas de Conservação, Classificação e Seriação, de acordo com o método clínico piagetiano (Carraher, 1989; Macedo, 1994).

Com relação à Noção de Conservação, foram aplicadas as Provas de Conservação Numérica, Conservação do Líquido e Conservação do Comprimento, indicativos da tendência operatória. A Prova de Conservação Numérica foi realizada a partir de 10 fichas azuis e 10 fichas amarelas, as quais são enfileiradas paralelamente e passam por diversas transformações sem modificação da quantidade inicial das fichas.

A Prova de Conservação do Líquido foi realizada com a utilização de dois copos idênticos, no tamanho e formato (copos controle) e outros copos diferentes entre si: um copo de boca larga, um copo estreito e alto e quatro copos de tamanho inferior a todos os outros. A tarefa do pesquisador era fazer que uma quantidade inicial de água, colocada nos dois copos idênticos fosse transvasada por todos os outros copos, passando por várias transformações em nível de percepção visual.

A Prova de Conservação do Comprimento foi realizada com palitos de fósforos(retiradas as pontas que queimam): quatro palitos inteiros e outros sete palitos em partes menores, mas que ao serem colocados paralelamente (palitos inteiros e as partes) permitiam se constatar a igualdade do comprimento. Os palitos eram colocados em posições diferentes e a criança era indagada quanto à igualdade do comprimento.

A Prova de Quantificação da Inclusão de Classes foi realizada com a utilização de flores, dada a realidade das crianças investigadas, pois acreditou-se que esse material era o mais conhecido e explorado. Foram utilizadas cinco flores da espécie das rosas (de plástico e da cor rosa) e duas margaridas (de plástico e da cor branca).

A Prova de Seriação foi realizada com um conjunto de bastonetes de madeira, soltos e uma placa com bastonetes fixos, alinhados por tamanho (formando uma escada).

Nessa prova, as crianças deviam construir escadas com o material e justificar como o fizeram. A prova se constitui de vários momentos nos quais a criança lida com os bastonetes soltos e outros que intercala com os bastonetes fixados na placa.

As Provas de Conservação, Quantificação da Inclusão e Seriação foram realizadas em entrevista individual.

Problemas verbais aritiméticos

Para investigar a resolução dos problemas verbais aritméticos elaborou-se sete problemas do tipo escolar. Dos sete problemas apresentados, quatro eram especificamente de multiplicação e os três restantes de adição e subtração. Esse acréscimo de problemas de adição e subtração teve como objetivo neutralizar qualquer indução à estratégia de multiplicação nas crianças, conforme Morgado (1991). Procurou-se fazer que a criança não se desse conta de que "era para fazer continha de vezes".

Os problemas apresentados para as crianças foram os seguintes:

Problema 1
Parte 1

João tinha 2 moedas de R$ 1,00, deu para sua mãe e trocou por 4 moedas de R$ 0,50. Ele saiu ganhando ou não?

Parte 2

A mãe do João deu 4 moedas de R$ 1,00 para ele. Quantas moedas de R$ 0,50 ele poderá ganhar com as moedas de R$ 1,00 que ela lhe deu?

Problema 2

Em uma garagem estão 6 caminhões. Sairam 4 caminhões para o trabalho. Quantos caminhões ficaram na garagem?

Problema 3

Maria brinca todas as tardes e gosta de se vestir de maneiras diferentes. Maria tem 4 camisas e 3 bermudas. De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir?

Problema 4

Maria tinha 2 vasos azuis. Foi à feira e comprou 5 vasos vermelhos. Com quantos vasos Maria ficou?

Problema 5

Mamãe foi ao supermercado e comprou colheres. O vendedor colocou em 4 saquinhos. Ele colocou 4 colheres em cada saquinho.
Quantas colheres mamãe comprou ao todo?

Problema 6
Parte 1

João quer cobrir o chão do banheiro com ladrilhos. Ele deve colocar 4 ladrilhos na largura e 6 no comprimento. Quantos ladrilhos ele precisa para cobrir o chão todo?

Parte 2 (Enunciado verbalmente)

No outro dia, João foi cobrir outro chão do banheiro. Ele conseguiu cobrir dessa maneira (coloca-se 9 ladrilhos na base) usando esses ladrilhos. Quantos ladrilhos o João vai precisar para terminar de cobrir o chão do banheiro?

Problema 7

Pedro e Paulo foram jogar com mais 5 colegas. Quantos meninos eram ao todo?

A apresentação dos problemas não foi feita sempre na mesma seqüência, mas sim a partir de sorteio, com objetivo de tornar a seqüência o mais aleatória possível.

Para cada um dos problemas foi preparado um conjunto de objetos correspondendo ao enunciado, como se segue:

A) Problema 1:

- 10 moedas de R$ 1,00
- 10 moedas de R$ 0,50

B) Problema 2:

- 6 caminhões de plásticos (em miniatura)
- 1 garagem de madeira (em miniatura)

C) Problema 3:

- 1 boneca de plástico (aproximadamente 30 cm)
- 4 camisetas (rosa, branca, marrom e amarela)
- 3 bermudas (azul, vermelho e verde)

D) Problema 4:

- 2 vasos azuis em miniatura com flores de plástico
- 5 vasos vermelhos em miniatura com flores coloridas

E) Problema 5:

- 16 colheres azuis de plástico
- 4 saquinhos de plástico transparente

F) Problema 6:

- 1 suporte de madeira (compensado 29 cm x 19 cm) para servir de chão
- 30 ladrilhos pequenos (5 cm x 4,5 cm)

G) Problema 7:

- 7 figuras de meninos, recortados de revistas

Cada um dos problemas foi escrito numa tira de papel cartão, com letras grandes e letras de forma, para facilitar a leitura da criança. Antes da leitura os objetos correspondentes a cada problema eram deixados sobre a mesa.

O pesquisador entrevistou cada sujeito individualmente, investigando a solução de problemas, seguindo orientações iguais para todos os sujeitos:

a) a criança sorteava um problema por vez e lia o problema;

b) após a leitura da criança, o experimentador lia o problema;

c) o pesquisador pedia à criança que respondesse à pergunta central do problema, utilizando os objetos ou brinquedos que ficavam à disposição e que permitiam ilustrar cada situação. Caso a criança quisesse dar uma resposta inicial, o pesquisador registrava a resposta dada; caso ainda a criança não quisesse usar o material, o pesquisador solicitava uma segunda vez, mas considerava a resposta do sujeito;

d) durante o processo, o investigador apresentava perguntas para o sujeito, procurando esclarecer as respostas, sem apontar erros ou acertos.

2.2 - Estudo exploratório inicial

Antes de iniciar a pesquisa propriamente dita, foi realizado um estudo exploratório para avaliação da possibilidade de os alunos entenderem o enunciado de cada um dos problemas e constatar o efeito do material, para verificar como as crianças de uma Escola Estadual de 1º Grau de Campinas liam e resolviam os sete problemas aritméticos, utilizando material de apoio. O material utilizado e os procedimentos foram os mesmos descritos acima. No entanto, os sujeitos que fizeram parte do estudo exploratório inicial não foram incluídos nos 60 sujeitos deste estudo.

É interessante relacionar as condutas de resolução utilizando o material de apoio e os resultados de provas escolares no período do estudo exploratório. Esse estudo possibilitou verificar que havia uma distância significativa entre o nível de representação da criança, com apoio de material e o tipo de solução exigida em tarefas na sala de aula. Foi possível verificar, na pesquisa exploratória inicial, por meio de observação na sala de aula, que nas provas escolares as crianças não conseguiam nem ler e nem entender os problemas. No entanto, as mesmas crianças apresentavam para o pesquisador condutas de resolução com o apoio do material.

2.3 - Procedimentos de análise dos resultados do estudo exploratório

Os dados obtidos foram analisados com ênfase na pesquisa qualitativa, e com base em trabalhos de Piaget e seguidores, tendo como fundamento o referencial teórico da Psicologia Genética piagetiana. A análise dos dados coletados na escola, foram analisados também no quadro de referência dos outros capítulos apresentados.

Os resultados dos sujeitos, nas provas de solução de problemas, foram registrados em protocolos, detalhadamente e analisados em relação aos resultados obtidos pelos alunos nas provas operatórias, os quais foram computados segundo critérios clássicos de Piaget.

CAPÍTULO II
CONSTRUTIVISMO E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Encontrar um marco psicológico como referência é uma tarefa importante e necessária para todos que estão preocupados, de uma maneira ou de outra, com a educação de crianças e jovens, especialmente aqueles que se dedicam ao trabalho docente nas escolas de 1º e 2º graus.

A Psicologia, dentre outras contribuições importantes para o trabalho docente, poderá esclarecer o professor sobre os processos e mecanismos de acesso ao conhecimento e sobre o modo como as crianças se desenvolvem intelectualmente. É verdade, que essas contribuições não encerram o papel da Psicologia em relação à Educação e percebe-se um vasto campo de possibilidades, podendo-se citar, por exemplo, o grande número de estudos e pesquisas sobre a dimensão da afetividade, no processo educativo, ainda que esse não seja o foco deste trabalho.

Quando se trata da aprendizagem escolar, no entanto, em especial quando se trata da Matemática, como se poderia deixar de considerar os estudos e pesquisas piagetianos, que explicam a natureza do conhecimento lógico-matemático, contribuição essencial para fundamentar um trabalho consistente na escola, contribuindo para o desenvolvimento da inteligência dos alunos?

Piaget oferece aos educadores uma teoria psicológica e também uma teoria epistemológica em trabalhos de especial relevância. A Epistemologia e a Psicologia Genética piagetianas podem ser um ponto de partida para definição de objetivos educacionais, elaboração de propostas pedagógicas e de materiais didáticos, assim como pode esclarecer os professores em relação a muitos aspectos pertinentes ao processo de ensino-aprendizagem, que estariam fortemente ligados a conhecimentos psico-educativos.

Kohlberg & Mayer (1972), depois de analisarem as principais posições filosóficas que orientam o trabalho educativo, afirmam que a meta da educação deve ser o desenvolvimento dos alunos, em termos de uma progressão dentro de uma seqüência de estágios, conforme a teoria piagetiana. Esses estudiosos, dentre muitos outros, reconhecem a contribuição de Piaget para a definição das metas da educação.

Coll (1991), no entanto, lembra que há dificuldades consideráveis em relação à utilização da teoria de Piaget pelos professores para orientação da prática pedagógica. O autor nos chama a atenção para que se pesem as vantagens e os inúmeros riscos da opção pelos princípios construtivistas de referência psicológica para o ensino-aprendizagem. Assinala que um reducionismo psicológico em relação aos fundamentos construtivistas para explicar fenômenos educativos poderia obstruir as possibilidades de um trabalho significativo em relação aos processos de acesso ao conhecimento. O autor acredita que o construtivismo seja um marco psicológico coerente e articulado para a análise dos processos da educação, para a relação entre ensino-aprendizagem e esclarece-nos

> *"... da importância da atividade mental construtiva do aluno na realização das aprendizagens escolares, um princípio que leva a conceber a aprendizagem escolar como um processo de construção do conhecimento ... e o ensino como uma ajuda a este processo de construção..."* (Coll: 1991, p.6).

Becker (1993) lembra que o compromisso com uma ou outra concepção epistemológica, mesmo que alguma delas se deva a uma adesão inconsciente, influencia grandemente a prática do professor na sala de aula. Assinala que o construtivismo piagetiano propõe uma concepção epistemológica frontalmente oposta ao empirismo e ao apriorismo. O autor, entrevistou professores e observou a sala de aula, procurando investigar como se delineia a epistemologia dos professores. Identificou e analisou diferentes concepções epistemológicas que nem sempre estavam muito claras para os professores. Citando a crítica de Piaget, lembra que o empirismo tende a considerar a experiência como algo impresso diretamente no organismo, sem a necessidade de atividade do sujeito e que o conhecimento se dá por força dos sentidos. A concepção empirista foi identificada nos depoimentos de professores, que entendem ser pela vivência, pelo contato com algo de fora que se tem acesso a um maior conhecimento, além de outra, esta mais empirista, que enfatiza a necessidade de uma cadeia de estímulos.

Para o apriorismo, a possibilidade de conhecimento seria dada na bagagem hereditária, de forma inata ou submetida ao processo maturacional.

Uma primeira concepção identificada nas entrevistas com professores, na pesquisa citada acima, foi caracterizada como maturacionista, quando os professores expressavam sua crença na importância de graduar o conhecimento conforme a faixa etária, ou ainda, quando afirmavam que o menor conhecimento passa para outro nível na medida em que a criança vai crescendo. A interferência da família e do ambiente foram citados pelos professores.

O autor comenta que mesmo aqueles professores que apresentam concepções aprioristas sobre o acesso ao conhecimento não conseguiam superar totalmente uma visão empirista, atribuindo aos sentidos a fonte do conhecimento. Um outro tipo de resposta mostrou apenas a preocupação do professor com a questão didático-pedagógica sem considerar a questão da gênese do conhecimento. Os professores acreditam que os alunos passam de menor para maior conhecimento por intermédio das dúvidas e incertezas: o professor vai buscar e dar a resposta. Este tipo de concepção, segundo o autor, mostra acesso ao conhecimento como um simples produto de aprendizagem, de acúmulo quantitativo, desconsiderando a questão epistemológica.

Cita outra concepção a que chama de logicista: os professores mencionavam que é por meio das noções gerais, baseando-se em acontecimentos do dia-a-dia, que o aluno passa de um menor para um maior conhecimento, ou, ainda, que é entendendo as partes que se chega a compor o todo.

Ter clareza a respeito dos fundamentos psicológicos relacionados a concepções empiristas, inatista ou maturacionista do conhecimento é fundamental para todo educador, já que a atividade do professor pode, em certos casos, em lugar de promover, opor-se à construção de conhecimentos. Ainda que, em geral, os professores não tenham consciência de suas próprias concepções filosóficas e epistemológicas, elas orientam sua prática docente.

Trabalhos de Piaget, como lembra Becker (1993), demonstram que o acesso ao conhecimento não significa um contato direto entre as coisas e o espírito, conforme uma concepção empirista, mas implicam a resposta ativa do sujeito cognoscente.Acentuar que o conhecimento provém da ação sobre os objetos, como faz Piaget, não significa que os conhecimentos provenham dos objetos. Piaget se define como construtivista e mostra que o conhecimento provém da ação do sujeito na interação entre ele e o mundo que o rodeia.

Macedo (1994) apresenta algumas características do construtivismo piagetiano, contrapondo-o, por comparação, à tendência não construtivista, e destaca aspectos da prática pedagógica que considera relevantes para fundamentar o trabalho do professor. Inicialmente, destaca o valor atribuído às ações do sujeito pelo construtivismo, ao passo que o não-construtivismo valoriza a transmissão de conhecimentos por meio da linguagem. O autor destaca que a linguagem é, na verdade, um poderoso instrumento para o objetivo de compartilharmos conhecimentos. No entanto, o construtivismo não coloca a linguagem no lugar mais importante na produção de conhecimentos e sim a ação do ser cognoscente.

No construtivismo, quando se trata da aprendizagem da leitura, por exemplo, procura-se trabalhar com base em contextualizações do próprio universo da criança, buscando o sentido ou o valor funcional em sua cultura. O não-construtivismo parte da idéia de que o conhecimento é algo *a priori*. Na tendência não-construtivista, a criança só saberá ler e escrever quando chega ao final do ano, depois de repetir muitas vezes as tarefas de alfabetização.

Na perspectiva construtivista o conhecimento tem sentido enquanto uma teoria da ação (perspectiva lógico-matemática), e o não-construtivismo está baseado fundamentalmente na teoria da representação da realidade (Macedo, 1994).

Piaget (1975) mostrou que *"O conhecimento, então, na sua origem, não vem dos objetos e nem do sujeito, mas das interações - inicialmente indissociáveis - entre o sujeito e esses objetos"* (Piaget, 1975).

Segundo Piaget o sujeito é essencialmente ativo no processo de acesso ao saber. O sujeito está continuamente respondendo a desafios do meio pelo mecanismo de assimilação e de acomodação. Piaget mostrou que o ser humano está continuamente envolvido na construção de conhecimentos. Para Piaget o conhecimento implica sempre assimilação ativa do sujeito e auto-regulação e interpretação.

Sabendo-se que o conhecimento implica sempre uma construção gradual, e que tal construção está comprometida com as estruturas lógico-matemáticas do sujeito e que tem apoio nas ações, estes são aspectos fundamentais a serem considerados na escola, especificamente com relação à Educação Matemática. A transmissão é valorizada na perspectiva não construtivista na qual se supõe que se possa transmitir também o conhecimento lógico-matemático por meio de um trabalho de explicações e de apresentação para os alunos segundo o raciocínio do professor.

Nas crianças pequenas, como demonstrou Piaget e colaboradores, a ação sobre os objetos é imprescindível para a construção de noções básicas para a Ciência como a de conservação, o conceito de número, a aprendizagem das operações aritméticas, não podendo reduzir o ensino destas apenas ao plano da linguagem. Os adultos erram quando acreditam que as crianças aprenderam os números, por exemplo, apenas porque eles são capazes de repetir, oralmente, a numeração recitando os números.

> *"... a repugnância dos professores de matemática com respeito a toda a ação ou experiência material é muito compreensível: eles consideram que o apelo às propriedades físicas resultam em constatações empíricas que nada trazem ao desenvolvimento do espírito dedutivo e puramente racional que caracteriza a disciplina Matemática ..."*(Piaget: 1973, p.2).

Essa idéia dos professores, no entanto, é errada em especial em relação a crianças menores.O ensino da Matemática na escola deve priorizar a construção de conhecimento valendo-se da ação da criança, valorizando a experimentação ativa que precede a formalização dos conceitos e a linguagem dos sinais operatórios, como têm demonstrado pesquisas de Piaget e inúmeros outros pesquisadores que deram seguimento a seus trabalhos na perspectiva da Psicologia Genética, tais como Constance Kamii (1992/1995).

Considerando as conclusões de Piaget, não cabe insistir nas formas mais convencionais que tradicionalmente são adotadas no ensino da Matemática para as primeiras séries do 1° grau. O conhecimento lógico-matemático só pode ser construído por abstração reflexiva e não pode ser transmitido de fora para dentro do aluno, por meio de aulas expositivas, de explicações orais mesmo que o professor se esforce ao máximo para que os alunos pequenos entendam suas explicações.

A dificuldade de alunos e professores em relação ao ensino-aprendizagem de Matemática, ou, ainda, a tentativa de aproximar uma teoria psicológica da prática pedagógica evidenciaram-se como uma preocupação central em alguns autores. Muitos estudiosos já analisaram aspectos das relações entre a teoria de Piaget e a Educação Matemática.

Mantovani de Assis (1976), preocupada com dificuldades de crianças para assimilar conceitos matemáticos, estudou crianças de 1ª série de escolas do 1° Grau da cidade de Campinas-SP. A autora preocupava-se com a aprendizagem de alguns conceitos elementares que aparentemente eram assimilados pelos alunos mas que, depois das férias escolares, já na 2ª série, os alunos mostravam ter esquecido. Com base nas pesquisas de Inhelder, Sinclair e Bovet (1967), a respeito das possíveis influências da aprendizagem, Mantovani avaliou os sujeitos em relação ao desenvolvimento cognitivo e testou os efeitos de um processo de estimulação intelectual de crianças, objetivando avaliar a possibilidade de se acelerar o ritmo do desenvolvimento cognitivo. Verificou que 80,87% de crianças submetidas a um programa de solicitação do meio, por ela proposto, atingiram o estágio operatório concreto nas idades entre seis e sete anos, ao passo que em comparação, no Grupo Controle nenhuma das crianças atingiu esse estágio sendo que 4,25% passaram para o estágio de transição.

Baseando-se em suas pesquisas sobre o desenvolvimento cognitivo, Mantovani de Assis (1989) publicou uma proposta de trabalho para a pré-escola, voltada ao desenvolvimento intelectual, social e emocional das crianças. O processo de solicitação do meio ou processo de estimulação a ser desenvolvido na pré-escola, na proposta de Mantovani de Assis, caracteriza-se por fazer apelo à atividade espontânea da criança, objetivando a construção de operações concretas, de acordo com a teoria piagetiana.

Por volta de 1980, Sastre & Moreno investigaram crianças de 1º Grau de Barcelona e mostraram que as crianças são, comumente, submetidas a um processo escolar no qual devem aprender as noções elementares por meio da transmissão de um professor, sem que se considere se já apresenta um desenvolvimento intelectual adequado. Mostraram que, nesse caso, as crianças limitam-se à memorização sem significado. As autoras, analisando os resultados, assinalaram que a Aritmética pode não ser compreendida realmente pelas crianças, quando se imagina que esse conhecimento possa ser simplesmente transmitido pelo professor. Segundo as autoras, as crianças, nessa situação, podem não conseguir perceber as relações entre o que fazem na escola e os problemas e procedimentos da vida do dia-a-dia. As autoras alertam sobre as operações aritméticas as quais estão mais ligadas ao contexto de aprendizagem da sala de aula e se limitam à reprodução de grafismos de acordo com as solicitações da escola.

Sastre (1980) aponta o que denomina aprendizagem da alienação em relação ao ensino da Matemática, estudando crianças do 3° nível de Escola Básica (EGB) de Barcelona, analisando as relações entre adição numérica fora da escola e as somas realizadas na escola. A autora verificou que, dentre as crianças que a escola considerava já terem aprendido a soma, 55% delas não eram capazes de fazer qualquer aproximação entre um experimento de unir objetos e a operação da adição que efetuavam nos cadernos escolares. Indagando sobre a operação efetuada, a pesquisadora constatou respostas muitos pobres das crianças. Segundo a autora, para explicar a importância de se aprender a somar, as crianças utilizavam os mesmos termos dos adultos, tais como: "A aprendizagem das somas ajudarão a trabalhar, estudar e aprender". A autora mostra, estudando o trabalho com a soma que o trabalho escolar tende a levar apenas a uma série de grafismos que não se apresentam como operações e de nenhuma forma se apresentam relacionados com as ações que as crianças realizam cotidianamente.

Ao procurar relacionar a aprendizagem da Matemática na escola com o nível operatório necessário à aquisição de certas noções, Moro (1983) avaliou crianças entre seis e oito anos. Com base nos estudos de Piaget sobre a construção do número na criança, a autora constatou relações entre as noções de conservação de quantidades numéricas, de quantificação de inclusão e de seriação em relação às construções no campo da Matemática. A autora analisou também a insistência da escola na contagem verbal, no ensino do número, no 1° Grau, com maior ênfase na automatização do que na compreensão lógica das operações. A análise dos resultados mostrou um baixo percentual de crianças no nível operatório, ficando os sujeitos concentrados nos níveis intermediário e não-operatório. Com base nos resultados, a autora concluiu que as crianças não estavam preparadas para o início da aprendizagem de Matemática, embora as provas tivessem sido aplicadas no período de adaptação da 1ª série.

O nível de desenvolvimento de crianças de escola pública e particular de Fortaleza também foi estudado por Silva (1983), relacionando-o à reprovação e evasão escolar na 1ª série do 1º Grau, e ainda, em relação aos pré-requisitos que seriam as noções básicas das operações lógico-matemáticas. A análise dos resultados mostrou que pouco menos de 50% da amostra total, ou seja, um percentual baixo de crianças apresentavam o nível operatório. Da totalidade enquadrada no operatório concreto, observou que parcela considerável dos sujeitos investigados não possuía noções básicas para a construção do número.

Em 1985, Cória Sabini analisou as relações entre desenvolvimento cognitivo de crianças de São Paulo em tarefas sobre operações aditivas e multiplicativas, investigando 150 crianças de sete a 14 anos de 1º Grau, de uma escola particular de São José do Rio Preto-SP, de classe média e média alta. Avaliou as crianças em tarefas piagetianas de desenvolvimento cognitivo em relação ao trabalho escolar. O trabalho evidenciou a existência de uma seqüência evolutiva de acordo com a descrita por Piaget e Inhelder (1959).

Estudando dificuldades de crianças para fazer continhas no papel, Silva (1987) analisou a associação entre manipulação de símbolos escritos e manipulação das quantidades durante o ensino do algoritmo da adição e subtração, avaliando crianças de uma escola pública de Recife de sete a nove anos, da 2ª série. Estudou os resultados de um trabalho de intervenção com três grupos e três formas alternativas de ensinar os algoritmos da adição e subtração, a fim de verificar qual procedimento foi mais duradouro, trabalhando com um pré-teste e dois pós-testes. O Grupo Controle, trabalhou em sala de aula com treinamento do algoritmo; o Grupo 1 (de manipulação de símbolos escritos), trabalhou em nível de lápis e papel, com apoio do experimentador; o Grupo 2 (seqüencial), com a manipulação de quantidades em primeiro lugar e, em seguida, a manipulação de símbolos escritos; e, por último, o Grupo 3, paralelamente, manipulava as quantidades simultaneamente com o uso dos símbolos escritos. Os resultados do estudo indicaram que o Grupo Paralelo apresentou desempenho superior.

Silva (1987) chama atenção para que se explore a experiência física e lógico-matemática e sugere que é preciso provocar situações de ensino, com possibilidades para a criança vivenciar simultaneamente a manipulação das quantidades e os símbolos escritos. Lembra que ao professor cabe também ensinar as convenções de valor de lugar de maneira significativa, pois a criança, por si só, não chega a conclusões sobre as convenções utilizadas para efetuar continhas, e que se baseia no valor de lugar. Assinala ser importante a escola promover associações entre as maneiras de fazer continhas, dando ênfase tanto à manipulação quanto à escrita.

Ao estudar o nível das estruturas operatórias de crianças sócio-economicamente desfavorecidas, considerando o fato de estarem ou não na escola e exercendo ou não atividades remuneradas, Nunes (1988) selecionou trinta crianças de sete a 11 anos de um bairro de periferia no município de Feira de Santana-BA. Distribuiu as crianças em quatro subgrupos, os quais se compunham de escolares que tinham e que não tinham atividade remunerada, e de outros que não freqüentavam escolas e umas tinham e outras não tinham atividade remunerada. Com base na teoria de Piaget, o pesquisador avaliou o nível de desenvolvimento cognitivo das crianças e analisou os resultados em relação ao rendimento escolar. Na análise dos resultados dos grupos de dez e cinco crianças que freqüentavam escola apresentaram um desempenho melhor na avaliação da conservação e classificação em relação aos demais grupos, dos que não freqüentavam escola. Os resultados do estudo confirmam a hipótese de que o desenvolvimento não depende apenas de fatores hereditários, mas também da relação conjunta entre ação do sujeito e meio social, e a influência exercida pela escola, no desenvolvimento das noções de conservação e classificação, deve ser considerada.

Uma escola que opta por uma orientação construtivista para o ensino da Matemática deve se preocupar em criar situações-problema que possibilitem uma integração entre desenvolvimento das estruturas da inteligência e aquisição do conteúdo matemático. Chiarottino (1989) concorda com Mantovani de Assis(1989), assinalando ambas que, mesmo na pré-escola, deve-se ter como objetivo contribuir e criar possibilidades para que a criança construa suas estruturas mentais que são condição da aquisição do conhecimento matemático.

As possibilidades de intervenção psicopedagógica foram analisadas por Brenelli (1986 e 1993), investigando o trabalho com crianças de Campinas-SP que apresentavam dificuldade de aprendizagem, diante do rendimento insatisfatório na disciplina de Matemática. Brenelli (1993), utilizando jogos de regra (Quilles e

Cilada), verificou a possibilidade de desencadear o funcionamento de instrumentos psicológicos capazes de permitir a estruturação cognitiva das crianças e favorecer a construção ou reconstrução de certas noções lógicas e aritméticas num contexto lúdico.

Rangel (1992) realizou uma pesquisa em ação investigando os processos de construção do pensamento lógico e da apropriação de signos operatórios por crianças em sala de aula nas séries iniciais. Assinala que, para aprender Matemática, não basta treinamento, exercícios, transmissão de informações. A aprendizagem de regras, o treino de uso de sinais convencionais sem a devida compreensão, comenta a autora, tem sido um dos grandes erros do ensino da disciplina em questão.

Em outro estudo, Rangel (1992) analisa algumas hipóteses explicativas, bastante presentes na bibliografia especializada e na prática pedagógica, para a relação entre desenvolvimento cognitivo e aprendizagem matemática. De acordo com a teoria associacionista, os conteúdos deveriam ser ensinados, levando-se em conta uma seqüência de maneira que se passe de conexões mais simples para as mais complexas. Um exemplo, em conteúdo matemático na 1ª série, seria a aprendizagem do Sistema de Numeração Decimal, referente à contagem e ao registro: o professor deveria organizar a seqüência a ser aprendida do mais simples (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) até chegar aos números maiores (20,21,22,23,24,25,26...). Os associacionistas, segundo a autora, consideram que a aprendizagem decorre de um trabalho docente que considera a seqüência numérica e exercício de registro passo a passo, contribuindo para o desenvolvimento cognitivo do aluno. A ênfase dada é para a estrutura lógica da disciplina, desconsiderando-se a maneira como a lógica é construída pela criança.

No entanto, as dificuldades das crianças em contagem e registro, detectadas presentemente na escola, podem ser explicadas pelo fato de a natureza do registro gráfico a aprender estar ligada ao desenvolvimento psico-genético no domínio lógico-matemático, e, mais especificamente, ao processo de construção do número e compreensão da relação parte-todo, como mostraram Piaget & Szeminska (1975).

Em nossa sociedade, as crianças de cinco a sete anos são solicitadas a ler, escrever e manipular os números escritos, comportando diversos algarismos, e isto de maneira muito regular, desde a entrada na escola primária. Entretanto, algumas pesquisas mostram que, nessa faixa de idade, as crianças não apresentam progressos em relação à compreensão da estrutura multiplicativa com nosso sistema de números, nem mostram uma compreensão do valor posicional, noção implícita na numeração escrita.

Para um construtivista, o confronto de alguns desses estudos com a hipótese de que a aprendizagem matemática determina o desenvolvimento cognitivo nos mostra claramente como a aprendizagem do aluno não é algo linear e simplesmente seqüencial.

Rangel (1992) assinala outra tendência, a qual considera que o desenvolvimento das estruturas lógicas determina as condições para a aprendizagem. Com base nas condições reais de desenvolvimento do sujeito é que ele poderá ou não aprender Matemática. Nessa perspectiva, o sujeito assimilaria as noções matemáticas às estruturas cognitivas até então construídas.

Piaget assinala que esse tipo de aprendizagem é bastante restrita, de informações dos adultos para as crianças, valendo-se de explicações ou de demonstrações.

A autora afirma que as estruturas da Matemática correspondem às estruturas do pensamento lógico-matemático, considerando-se a construção progressiva das estruturas da inteligência pela atividade do sujeito e completa que:

> *"... Na abstração reflexiva, o sujeito aplica a forma (estrutura) já construída na busca de entendimento dos conteúdos (observáveis); por sua vez, estes provocam seguidamente resistências que impedem sua imediata compreensão (assimilação, exigindo do sujeito um esforço para superação de suas formas atuais por novos ajustamentos (acomodação) através de um processo de reorganização interna e diferenciação das estruturas presentes em sua inteligência"*(Rangel: 1992, p.54).

Christinat, Garin & Sinclair (1993) investigaram a contagem e o registro, assinalando que a história da numeração escrita está intimamente ligada à sua construção matemática e que os programas em aritmética escolar, que fortemente enfatizam técnicas com cálculos escritos (por exemplo, adição com algoritmo na 1ª série do 1° grau), são bastante distantes, não em relação aos fundamentos da Aritmética, mas quanto à sua complexidade e dificuldade. Para as autoras:

> *"... uma compreensão da simbolização escrita é essencial não somente para uma pessoa poder utilizar os algoritmos necessários ao cálculo, mas igualmente para a apreensão e a compreensão da matemática. Por outro lado, sobre um plano mais fundamental, mesmo a natureza da matemática, com registros escritos e em*

relação ao sistema de ensino, leva a criança a construir ao seu tempo seu sistema durante a notação que faz (quantificação, cálculo ...) "(Sinclair, Christinat & Garin, 1993: p.75).

Os trabalhos e pesquisas de Kamii (1992/1994, 1995) têm apontado tendência constatada na escola no sentido de tentar transmitir a Aritmética como uma técnica e uma prática mecanicista. A autora mostrou que somar, subtrair, multiplicar e dividir dependem de um raciocínio lógico-matemático que não se desenvolve pela prática que a escola mais tradicional enfatiza, como a explicação e exposição de um conteúdo pelo professor e a atenção do aluno para a demonstração feita na lousa, além da memorização e utilização de sinais, símbolos e regras ensinadas pelo professor.

Essa tendência no ensino da Matemática, descrita pela autora, também é constatada em escolas brasileiras, nas quais os professores ainda dão ênfase ao ensino expositivo e uso do quadro-negro e do giz, sem uma maior preocupação com o desenvolvimento do raciocínio. Kamii enfatiza que é necessária uma verdadeira transformação na escola: que é preciso levar em conta o funcionamento cognitivo, a maneira como as crianças constroem o conhecimento em lugar de tentar transmitir o conhecimento matemático como se tratasse de um conhecimento social.

Compreender que o desenvolvimento das estruturas lógicas está relacionado aos conteúdos da própria Matemática é de importância fundamental para a reflexão sobre a aprendizagem de sentido mais amplo e para a melhoria do ensino, ou seja, de aprimoramento do raciocínio lógico do aluno e da modificação das estruturas do sujeito.

Como trabalhar em sala de aula, nas primeiras séries do primeiro grau com a solução de problemas aritméticos, por exemplo?

Na escola, com freqüência, os professores expressam insegurança e dizem enfrentar dificuldades quando tentam conseguir que seus alunos solucionem problemas de Aritmética. Trabalhos de Piaget e seguidores podem fornecer elementos valiosos para se compreender como os alunos aprendem a solucionar problemas e também a entender os erros que podem cometer.

A Solução de Problemas Aritméticos na Escola Primária

A solução de problemas aritméticos verbais têm sido a preocupação de muitos pesquisadores envolvidos no estudo da Educação Matemática e com o valor e significado destes problemas na situação escolar. Além dos trabalhos na perspectiva piagetiana, outros pesquisadores, em especial norte-americanos, focalizaram a solução de problemas, em outras vertentes de pesquisa.

Granell (1981) estudou a construção da noção de multiplicação e divisão em crianças, segundo a perspectiva epistemológica de Piaget. O experimento consistia em simular uma tenda com diferentes tipos de objetos comestíveis apresentados com etiqueta e preços variados de dois, três, quatro e cinco pesetas e moedas de uma peseta. Duas situações diferentes em grau de complexidade: a primeira, sobre multiplicação e a segunda, sobre divisão, eram apresentadas para as crianças, com apoio do material. Na primeira situação apresentada, era solicitado que a criança constatasse o preço de cada objeto e depois era proposta a brincadeira de compra e venda. A autora aponta-nos quatro tipos de condutas apresentadas pelas crianças: no primeiro grupo, a primeira conduta mostrou que a relação que as crianças estabelecem é baseada na correspondência termo-a-termo; na segunda (conduta), as crianças aumentam o resultado final com relação à situação inicial, porém sem uma quantificação exata; na terceira conduta, as crianças chegam a um resultado correto baseando-se em procedimentos aditivos, porém sem antecipação nenhuma do número de ações que deveriam realizar; na última conduta, a criança é capaz de antecipar o número de conjunto de "x" pesetas de que irá precisar para a compra. A possibilidade de antecipação do número de conjunto é aquisição fundamental para a compreensão da multiplicação. Mas outro aspecto básico na multiplicação assinala a autora é a compensação que implica entender que é possível fazer diferentes composições com os conjuntos, a compensação exata que acontece entre as variáveis "n" (número de vezes ou de conjunto) e "x" (número de elementos de cada conjunto) (Granell, 1981).

O trabalho de Granell (1981) evidenciou que existe uma progressão nos processos mentais da criança ao construir dois dos aspectos fundamentais da multiplicação, dos quais um era o descobrimento do operador multiplicativo, o qual indica o número de vezes que se repete um conjunto, e o outro, as relações de compensação que se estabelecem entre as variáveis (multiplicando e multiplicador), que intervêm na operação. A autora mostra que, mesmo os alunos que já haviam aprendido a tabuada e as propriedades da multiplicação na escola, não utilizavam tais conhecimentos na solução de tarefas propostas na pesquisa. Por outro lado, mostravam-se capazes de criar procedimentos pessoais ricos e engenhosos (Granell, 1981).

O ensino formal de 1° Grau tem ajudado as crianças a resolver problemas verbais aritméticos com melhores resultados? Antes do ensino formal as crianças conseguem resolver problemas aritméticos?

O desempenho de crianças na solução de problemas aritméticos, em situação informal e na escola, foi estudado por Carraher e outros (1982). Carraher (1982) analisou a evasão e o fracasso escolar, procurando superar algumas concepções que ainda hoje fornecem explicações quanto ao fracasso escolar, investigando o desempenho de crianças na escola e fora dela. Discutiu e criticou: a concepção de "privação cultural, em que se atribui culpa à criança; a análise da desnutrição vista como causa do fracasso de crianças pobres apresentando resultados negativos na escola em decorrência de má alimentação; as análises do fracasso escolar na visão do próprio sistema considerando a escola como aparelho ideológico do Estado, que apenas reproduz a ideologia dominante; ou a atribuição da culpa do fracasso à classe social (classes baixas não dariam valor à educação). A autora mostra que é comum os membros de grupos menos favorecidos economicamente terem seu próprio negócio, como é o caso da banca na feira. Essas situações exigem resoluções de problemas de Matemática que envolvem a multiplicação, adição, subtração e até divisão, na maioria das vezes elaboradas sem a utilização de lápis e papel.

As pesquisas realizadas na Universidade Federal de Pernambuco, pelo Grupo de Recife mostraram que, nas situações de cálculo sem lápis e papel, os erros apareceram, mas com predomínio de acertos e que no teste informal (referentes a transações comerciais do dia-a-dia) a performance foi superior ao do teste formal. Os resultados mostraram que, para resolver problemas de dar troco, a criança não comete erro para calcular; mas ao fazer isso no papel, por exemplo, ela vale-se da regra de "abaixar o zero" para resolver uma multiplicação e então comete erro. Outra confusão é quanto ao "vai um": as crianças, na transação comercial, demonstraram conhecer de memória o valor da venda, mas ao fazê-lo no papel aumentam ou invertem a quantidade no decorrer da operação por conta da regra do "vai um". O estudo evidenciou que a distância entre o fazer na situação não formal e com lápis e papel é significativa. As crianças podem dar explicações do tipo: "meu modo de resolver contas é na cabeça" (Carraher, 1982).

Com freqüência os professores tendem a considerar que os problemas verbais aritméticos são aprendidos com mais dificuldade pelas crianças do que as operações. Por isso, os professores cometem o engano de esperar que as crianças dominem as operações antes de começarem a trabalhar os problemas aritiméticos.

As crianças resolvem problemas com compreensão e eficiência quando pensam logicamente e a lógica é construída de forma gradativa em um processo de desenvolvimento até chegar ao nível das operações concretas e posteriormente, das operações formais.

Problemas que apresentam termos como: "o que tem mais que", "o que é maior que", solicitam, por vezes, uma relação ou comparação entre o todo e a parte, que somente uma criança de nível operatório é capaz de entender corretamente, utilizando recursos lógicos, ao invés de recorrer a adivinhações.

Schliemann (1989) aponta dificuldades de crianças em relação a problemas que exigem subtração e implicam a consideração de uma inclusão, exigindo a consideração de um todo e uma parte determinados, ao mesmo tempo. A autora, utilizando provas clássicas piagetianas de classificação e inclusão de classes, analisa as relações entre o desenvolvimento cognitivo e resolução de problemas aritméticos. A autora lembra que cada problema tem uma estrutura lógica que a criança pode não entender dependendo do estágio de desenvolvimento em que se encontra.

Schielmann (1989) investigou em outro estudo as relações entre as operações concretas e a resolução de problemas aritméticos, analisando o trabalho com crianças de escolas públicas e particulares do Recife. Estudou a compreensão de expressões como "a mais" e "a menos" assinaladas nos problemas aritméticos. Os resultados mostraram que, ao raciocinar para responder a questão do "a mais", as crianças não recorrem à operação da adição e apresentam dificuldades de entender a relação parte-todo. Apresentando outros tipos de problemas às crianças, a autora verificou que as crianças repetem parte do enunciado, ao invés de operar com os dados do problema. A autora assinala a importância de se compreender o desenvolvimento cognitivo e o papel da representação mental na resolução de problemas para um trabalho mais consistente em relação à solução de problemas. A autora assinala também que o trabalho com a resolução de problemas aritméticos na escola deveria estar voltado muito mais para o desenvolvimento de estratégias de compreensão e não para exercícios de repetição com problemas de enunciados semelhantes.

Kamii (1988) comenta que os professores tendem a pensar em problemas como aplicação de um conhecimento sobre cálculos e que, no entanto, as crianças constroem aritmética pela aritmetização lógica baseando-se em situações de sua vida cotidiana. Trabalhar com problemas, no início, segundo Kamii, não significa que o professor deva utilizar problemas verbais apresentados pelos livros escolares, mas, sim, que deve ter sensibilidade para explorar as situações do dia-a-dia, em especial por meio de jogos.

Vergnaud (1990) estudou a solução de problemas e conceituação no aprendizado de Matemática e considera como problema teórico fundamental a identificação de conceito. Assim, o autor se pergunta: Como estudar a formação conceitual? Qual é seu papel na solução de problemas? Qual a função das palavras, definições, explicações ou representações simbólicas na formação conceitual e na solução de problemas? O pesquisador afirma que é comum, na literatura referente à solução de problemas, serem tais problemas vistos como uma nova combinação de ações e regras baseadas no conhecimento formal, deixando de lado questões quanto à formação conceitual presentes na resolução de problemas.

Vergnaud (1988), analisa as estreitas relações entre operações multiplicativas e outros conceitos do mesmo tipo, apoiando-se na idéia de *Campo Conceitual*. Vergnaud considera como *Campo Conceitual*, um conjunto de situações da vida cotidiana que remetem o sujeito a muitos *Conceitos* sobre um assunto em pauta, e por meio de Invariantes que faz com que o sujeito transforme determinada situação em um modelo e por fim, as *Representações Simbólicas* que possibilitam ao sujeito diferentes representações para entender as relações em questão.

A investigação de Vergnaud (1990) do conceito de volume é um bom exemplo da inter-conexão de conceitos e problemas, assim como a constatação de diferentes respostas e procedimentos dos alunos.

O autor aqui referido estuda o conceito de volume, realizando nove problemas para crianças entre 11 a 16 anos. Os cinco primeiros problemas poderiam ser resolvidos por representações de procedimentos e conceito unidimensional, ou seja, quando o volume é considerado por ele mesmo e não é posto em relação às grandezas espaciais: distância e área. Nesse caso, a criança, ao contar o número de copos numa jarra de suco, não precisaria nada mais do que uma relação entre o volume da jarra e do volume do copo para resolver o problema. Os problemas seguintes já requeriam um entendimento que envolvia idéias de proporção inversa e o próprio conceito tridimensional de volume, ou seja, o volume deve ser relacionado com distância e área.

Ao tratar de solução de problemas e conceituação, o autor indica que é preciso estarmos atentos, procurando analisar se o aluno identifica qual o problema que está trabalhando, qual o procedimento e qual é o apoio da representação conceitual.

Segundo o autor, é possível distinguir duas grandes categorias de relações multiplicativas (tanto as que comportam uma multiplicação, como uma divisão), sendo a primeira delas o *Isomorfismo de Medidas e a outra, o Produto de Medidas.*

Na escola, grande parte dos problemas enunciados são os problemas de uma relação quaternária, a qual é muito utilizada pelos professores para introduzir o conceito da operação da multiplicação.

Ao reexaminar a discussão assinalada por Vergnaud quanto a operação da multiplicação por meio de problemas verbais tratados na escola, a primeira categoria de relação multiplicativa são os problemas do tipo *Isomorfismo de Medidas* e o autor assinala que em Isomorfismo de Medidas há diferentes graus de dificuldades, assim como em problemas do tipo Produto de Medidas.

Segundo o autor, a primeira forma de relação multiplicativa em Isomorfismo de Medidas, e a mais fácil, é aquela que apresenta os dados do problema numa relação quaternária, isto é, aquela em que duas quantidades são medidas de um certo tipo, e as restantes, medidas de outra natureza.

O autor assinala que para a criança resolver um problema de Isomorfismo de Medidas mais simples, como o problema cinco (colheres e saquinhos) apresentado nesta pesquisa, a criança não teria grandes dificuldades envolvidas, já que as quatro quantidades postas em relação são medidas de correspondência de dois tipos de quantidades: a) número de saquinhos plásticos e b) número de colheres.

Na categoria de Vergnaud, o problema como o das colheres e saquinhos plásticos apresenta-se como mais simples porque trabalha com números inteiros, com magnitudes discretas, enquanto que o problema um (moedas) aplicado nessa pesquisa, apresenta um grau de dificuldade maior porque trabalha com números decimais.

Os esquemas abaixo, inspirados nos apresentados por Vergnaud (1991) mostram as relações entre as medidas apresentadas nos problemas 5 e 1, aplicados nesta pesquisa. Ambos fazem parte da categoria de Isomorfismo de Medidas, mas em graus de complexidade diferentes.

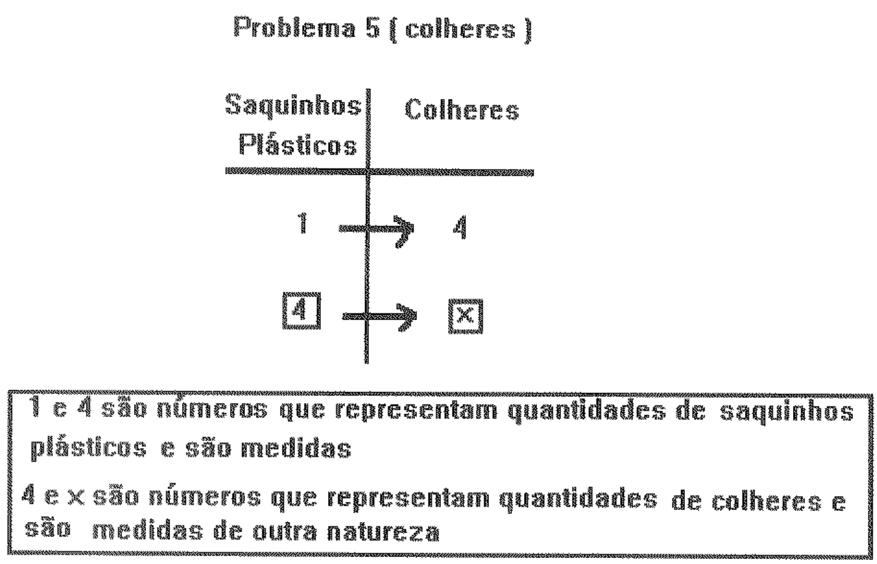


Figura 1 - Esquema do Problema 5

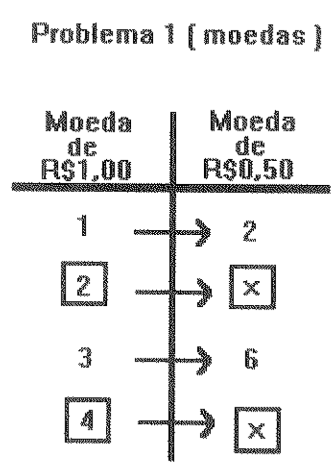


Figura 2 - Esquema do Problema 1

No ensino da multiplicação como somas sucessivas, o exemplo do problema cinco talvez seja para o professor a maneira mais clara de se "explicar" ou "ensinar" a operação da multiplicação. Em uma situação de aprendizagem na qual o professor utilize a lousa e exposição verbal para explicar o conteúdo, a escolha por problemas do tipo Isomorfismo de Medidas com números inteiros é facilitador, pois ele possibilita que a criança "resolva" por meio de adições sucessivas e utilizando os códigos convencionais: "4 saquinhos com 4 colheres são: 4 colheres mais 4 colheres mais 4 colheres mais 4 colheres".

Mesmo considerando essa estratégia metodológica de somas sucessivas (reiteradas), a criança apresenta dificuldades significativas na busca da incógnita do problema, ou seja, precisa construir uma representação interna dos dados para depois aplicar fórmulas matemáticas. Na maioria das vezes, registros como os de somas sucessivas (4 + 4 + 4 + 4 = 16) não tem significado nenhum para as crianças, e tampouco são equivalentes ao algorítmo da multiplicação (4 x 4 = 16), como ensinam os professores.

Os problemas do Tipo Produto de Medidas são estruturalmente diferentes do Isomorfismo de Medidas, e não obedece a solução por somas sucessivas, como por exemplo:

Três meninos e três meninas vão a um baile. Quantos pares diferentes podem formar?

Nesse caso, se tem três espaços de medidas: o de meninos, o de meninas e o de pares (M1, M2, M3), correspondendo a uma função bilinear. Os problemas do tipo Produto de Medidas são problemas que lembram o Produto Cartesiano, encontrados em alguns livros didáticos e podem ser representados segundo a tabela de dupla entrada.

Os problemas 3 (camisas e bermudas) e 6 (ladrilhos) desta pesquisa são problemas de Produto de Medidas e também apresentam graus de dificuldades diferentes. Na categoria de Vergnaud (1991), o problema 3 é mais simples em comparação ao problema 6 que implica noções de área e perímetro.

Os esquemas inspirados nos apresentados por Vergnaud (1991) mostram as relações entre as medidas apresentadas nos problemas 3 e 6 aplicados nesta pesquisa:

Problema 3 (camisas e bermudas)

(B)

		Az.	Vd.	Verm.
(A)	Am.	(Am.Az.)	(Am.Vd.)	(Am.Verm.)
	Br.	(Br.Az.)	(Br.Vd.)	(Br.Verm.)
	Mar.	(Mar.Az.)	(Mar.Vd.)	(Mar.Verm.)
	R.	(R.Az.)	(R.Vd.)	(R.Verm.)

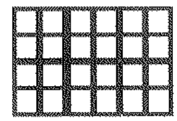
$\boxed{\times \text{ roupas combinadas} = 3 \text{ bermudas} \times 4 \text{ camisas}}$

Legenda :

A = Conjunto de camisas	B= Conjunto de bermudas
Am. - Amarela	Az. - Azul
Br. - Branca	Vd. - Verde
Mar.- Marrom	Verm. - Vermelha
R. - Rosa	

Figura 3 - Esquema do Problema 3

Problema 6 [ladrilhos]



x metros quadrados = 4 metros x 6 metros

$x = 4 \times 6$

Figura 4 - Esquema do Problema 6

Nesta perspectiva o Campo Conceitual das estruturas multiplicativas é, ao mesmo tempo, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações são: problemas de proporção simples, múltiplas, função linear, fração, além de outras situações que envolvem o conceito de multiplicação.

Morgado (1991) estudou crianças do 2º, 3º e 4º graus da escola primária de Lisboa e analisou a relação entre solução de problemas e representação mental, estratégia e resposta com a utilização de material concreto específico para resolver cada problema. A criança deveria responder, representar com o material e explicar verbalmente como chegava ao resultado. A metodologia empregada foi similar a investigação de De Corte e Verschaffel (1987) ao estudarem adição e subtração. Foram apresentados aos sujeitos problemas verbais, os quais posteriormente foram analisados segundo as condutas das crianças, de acordo com a classificação de problemas multiplicativos de Vergnaud.

O estudo de Morgado chama atenção para o papel da representação na construção da planificação da solução, e analisa a utilização de material concreto de apoio para auxiliar a criança na elaboração da representação. O material, nessa perspectiva, funcionaria como um apoio para a solução e para o professor, como ajuda para acompanhar o raciocínio da criança. A representação mental, nessa perspectiva, é entendida como a organização da criança e a compreensão da natureza semântica do problema; um quadro organizador de conhecimentos que são atualizados pela atribuição de significados.

Patto (1991) estuda a reprovação e evasão na escola pública descrevendo e analisando observações e entrevistas realizadas em contextos formais e informais numa escola de periferia de São Paulo. Em relação ao que chama o mundo da sala de aula, descreve situações constatadas, relacionadas ao ensino de leitura e escrita e Matemática. Descreve, por exemplo, dificuldades dos alunos e professores em exercícios tais como: 1 + 4 = 5

2 +___ = 4

3 +___ = 8

Estes exercícios não seriam compreendidos pelo aluno. A professora tenta ajudar e simplesmente diz para o aluno usar os dedos ou palitos. Pretendendo explicar a situação, pega alguns lápis e diz: "Você tem "y" lápis, para ter "x" lápis, quantos lápis você precisaria ainda?"(Patto, p. 235).

A professora ainda tenta a lousa, escreve o algorítmo, e se desespera quando o aluno não entende:

$$\left.\begin{array}{l}1+1=\\ 2+0=\\ 0+2=\end{array}\right\}2 \qquad\qquad \left.\begin{array}{l}1+2=\\ 2+\_\_=\\ 3+\_\_=\end{array}\right\}3$$

Na prova, os alunos, na sua maioria revelam muitas dificuldades e não fazem somas e subtrações, não compreendendo as instruções mimeografadas. Apesar das folhas de exercícios em relação ao início do programa, a professora insiste e no segundo semestre dá continuidade ao curso, sem considerar o que as crianças não aprenderam no primeiro semestre.

Analisando o tema da multiplicação e da divisão na escola primária, Maza (1991) destacou diferentes formas de representação, analisando as representações internas, de caráter eminentemente psicológico em relação à representação externa, conectada com formas de ensino. A representação interna, diz o autor, corresponde à representação mental por meio da qual diferentes elementos e suas relações se organizam na memória a longo prazo.

A ênfase em palavras-chave para orientar a solução de problemas nas primeiras séries do primeiro grau é uma tendência muito comum entre os professores. Eles tendem a ensinar os alunos a descobrirem como solucionar problemas, reconhecendo, no enunciado dos mesmos, as palavras que indicariam se um deles poderia ser solucionado por multiplicação, divisão e assim por diante. Como julga Maza (1995), pode-se, com facilidade, destacar enunciados de problemas nos quais as expressões verbais que se pretendem associadas a determinadas operações, na verdade podem se referir a diferentes operações, e, no entanto, nem sempre os professores se lembram disso.

Preocupados com os resultados que os alunos podem apresentar em provas e exames, os professores podem desconsiderar a compreensão e o raciocínio da criança. A criança pode dar respostas por escrito sem entender o que está fazendo, o que não significará uma base para o trabalho futuro e nem será de valia em diferentes situações.

Domite Mendonça (1993) analisa a problematização em Educação Matemática realizando extensa revisão na área e analisando o trabalho de alunos e professores na sala de aula. Assinala a crítica ao trabalho pedagógico por meio de Resolução de Problemas quando se parte de problemas prontos e não se supõe espaço para o questionamento de uma situação. A autora contrapõe modelagem e Resolução de Problemas, enfatizando o valor da problematização na construção do conhecimento matemático.

Parra (1994) enfatiza a necessidade de os professores estarem atentos para valorizar o raciocínio e o estabelecimento de relações, mesmo independentemente de cálculos, e evitar que o aluno tente soluções ao acaso. Na verdade pretende-se que os alunos possam vir a analisar os dados, estabelecer relações e chegar a conclusões, e também ser capazes de fundamentá-las, explicá-las e compreender como chegaram a determinada conclusão. Kamii (1995) também acentua a importância de o aluno desenvolver um modo próprio de raciocinar e confiança nas próprias possibilidades de resolver problemas. A autora destaca que a ênfase no ensino de algorítmos, como se estes pudessem ser transmitidos pelo professor como um conhecimento social, é um dos grandes enganos no trabalho com Aritmética na terceira série e pode prejudicar a autonomia do aluno.

Quando o aluno está diante de um problema, segundo Parra (1994), deve construir uma representação das relações entre os dados, bem como uma representação de como, trabalhando com eles, pode obter novas informações e resposta à pergunta formulada ou a ser formulada. É interessante que se analise, como Parra acentua, como os alunos se mostram capazes de estabelecer relações entre os dados de um problema, antecipar, controlar o sentido do que vão obtendo.

A experiência docente, na verdade, mostra que nem sempre os alunos o conseguem e também é possível constatar que há alunos que procuram encontrar a solução ao acaso, por ensaio e erro, ou tentam descobrir palavras-chave nos problemas que indiquem os cálculos a serem efetuados, sem procurar a solução por meio do raciocínio e estabelecimento de relações. Alguns alunos podem tentar, como lembra Parra (1994), aplicar um algorítmo depois do outro, sem conseguir fazer previsões, e o professor pode perceber quando eles não se mostram capazes de explicar e justificar as razões de usarem determinados algorítmos em lugar de outros.

Como se poderia ultrapassar o tipo de trabalho mais convencional no ensino da Matemática, que enfatiza técnicas, algorítmos e sinais convencionais em lugar de incentivar o raciocínio da criança?

O trabalho com cálculo mental na solução de problemas é apontado por Parra (1994), bem como Baroody (1994) como uma possibilidade de se favorecer o raciocínio, a autonomia e a segurança pessoal dos alunos. Parra assinala que, por cálculo mental, entende um conjunto de procedimentos aos quais recorre um sujeito, analisando os dados de algum problema por tratar, dados esses que são articulados sem que o sujeito venha a recorrer a um algorítmo específico, pré-estabelecido e que dependa de registro de alguma espécie. O autor afirma que atividades de cálculo mental favorecem a construção de relações matemáticas, na medida em que os alunos podem analisar os dados, tirar conclusões e refletir sobre suas conclusões e procedimentos. Acrescenta, porém que o cálculo mental deve ser uma via de acesso para a construção e compreensão dos algorítmos.

No cotidiano podemos usar com freqüência formas de cálculo mental com uma maior ou menor preocupação com o rigor das respostas. A análise dos procedimentos de cálculo mental é importante já que este estimula um pensamento mais qualitativo e flexível.

Em 1995, Kamii avalia o ensino construtivista no Alabama (EUA), projeto da autora para o ensino da Aritmética no primeiro grau. A pesquisadora mostra os efeitos nocivos da ênfase no ensino dos algorítmos pelo professor, o que forçaria o aluno a desistir de seu raciocínio numérico e prejudicam o desenvolvimento da autonomia e auto-confiança do aluno. Kamii avalia o desempenho na solução de problemas de multiplicação de crianças que haviam aprendido algorítmos na escola em relação a outras que não haviam aprendido. Conclui que as crianças que não haviam sido submetidas ao ensino de algorítmos apresentam melhor desempenho do que o das demais avaliadas na pesquisa. A autora cita contribuições de Inhelder e Piaget (1951) sobre o pensamento multiplicativo e analisa procedimentos utilizados por crianças na resolução de problemas de multiplicação. Destaca que as crianças tendem a usar a adição e multiplicação, no início, e que é difícil determinar uma linha clara de demarcação entre ambos os procedimentos. Destaca, também, que se deve levar em conta o fato de que é difícil para o adulto antecipar o raciocínio da criança e que, por isso, a preocupação em ouví-la deve ser grande.

Busquets (1995) realizou uma revisão da literatura sobre problemas verbais aritméticos, agrupando os estudos e pesquisas em quatro grupos principais segundo o que consideravam: a) os referentes empíricos no texto dos problemas; b) a formulação dos enunciados (aspectos lingüísticos, estrutura sintática, ordem em que os termos aparecem, e outros); c) a estrutura das relações que apresentam; d) as estratégias de resolução. A autora lembra que Polya (1954) foi o pioneiro a estudar a resolução de problemas, e que nas últimas décadas a atenção à temática da Educação Matemática ampliou-se significativamente.

São considerados problemas verbais aritméticos os relatos que apresentam situações do cotidiano ou do dia-a-dia das pessoas, ainda que de maneira sumariada, apresentando seqüências da vida nas quais manifestam propriedades quantitativas e que envolvem relações que podem ser analisadas matematicamente. Esses relatos, em especial os veiculados pelos livros didáticos, nem sempre têm se mostrado significativos para as crianças.

A partir de 1960, a bibliografia especializada apresenta um outro modelo, chamado de Processamento Humano de Informação ou Processamento de Dados, englobando trabalhos de psicólogos, lingüistas e matemáticos. O Processamento Humano de Informação foi considerado um marco de referência em resolução de problemas e valendo-se do campo computacional e de uma estrutura conceitual propõe aliar modelos de pensamento e modelos computacionais. O modelo de Processamento de Informações, em relação à resolução de problemas, assinala que: a) a aprendizagem é aquisição de conhecimento, rompendo com a concepção de aprendizagem como aquisição de novas condutas, como o desenvolvimento de estratégias e o aprendizado do algorítmo; b) conseqüentemente, os objetivos do ensino deveriam estar voltados mais para os aspectos cognitivos (criação de estruturas mentais) do que para os comportamentais (condução de técnicas das operações).

Carpenter & Moser (1983) investigaram a possibilidade de as crianças serem ensinadas a escrever e resolver sentenças de números correspondentes a uma representação concreta de solução de problemas e concordam com Bebout (1986) que assinala que:

> "... *Há uma evidência empírica que crianças podem ser ensinadas a representar as relações matemáticas num problema verbal, simbolicamente, com uma sentença de números que reflita a semântica da estrutura do problema de palavra*" (Bebout, 1986).

Em outro estudo, Greer e Mohan (1986) apresentaram, para os alunos, problemas com enunciados nos quais os números eram inicialmente cobertos com uma tira de papel. Os autores comentam que as crianças com fraca performance resolvem problemas de multiplicação e divisão apresentando insucessos. O erro das crianças ilustra a dificuldade em estender os conceitos matemáticos além dos intuitivos. Greer citando Nesher, diz o seguinte:

> "*os dados numéricos não dão nenhuma informação em relação ao tipo de operação a ser feita; por outro lado, toda a informação decisiva está embebida na formulação verbal do texto*" (Nesher: 1988, p.24).

Ao estudar como as crianças constroem a representação de um problema aritmético verbal por meio da leitura do texto, De Corte e Verschaffel (1986) observaram que as crianças com problemas de aprendizagem não liam o texto todo, ao invés disso, segundo os autores, elas tinham tendência a selecionar somente os números apresentados no texto. Foi observado, pelo movimento dos olhos, que essas crianças não olhavam para a questão central do problema, mas apenas para os números. Os pesquisadores, com base nos dados de pesquisa apontaram relações entre a estrutura semântica dos problemas e a resolução, no primeiro estudo e no segundo, aspectos não-semânticos, relativos à posição dos números dados no problema, e a ordem de apresentação.

Ao estudar crianças com problemas de aprendizagem na Matemática, Van Lieshout e W.M.Jaspers (1990) procuraram identificar as variáveis relevantes que levam a fraca performance das crianças. Valendo-se de sessões de treinamento, e utilizando cubos e barras, as crianças resolveriam problemas de adição e subtração. Para os autores, ensinar Matemática por meio de solução de problemas aritméticos verbais é importante por duas razões: a primeira, porque esses tipos de problemas com enunciados verbais revelam representações de problemas relativos a situações do mundo real. A criança ao tentar resolver um problema com o conhecimento adquirido na escola pode ser melhor preparada para resolver situações da vida real. Os autores nos chamam a atenção para o fato de que os tipos de problemas, para ter esse alcance, devem ser bem escolhidos e corretamente construídos. A segunda razão é porque o problema verbal aritmético tem relação com as representações simbólicas da Matemática. No que se refere à solução de problemas de palavras com crianças que apresentam dificuldades de aprendizagem, os autores concluem que o ensino direto de estratégias de solução poderão contribuir para o aumento da performance das crianças, mas assinalam que uma conclusão definitiva seria prematura.

Greer (1990) analisa um conjunto de pesquisas sobre multiplicação e divisão, realizadas com jovens adolescentes. O autor identifica diferentes tarefas utilizadas tais como: problemas apresentados para que alunos escolhessem a operação apropriada à resposta, sem precisar dar prosseguimento ao cálculo; solicitação aos alunos para que escrevessem o enunciado adequado de problemas para um determinado cálculo apresentado. O autor assinala que existem muitos tipos de modelos de situação de multiplicação e divisão, incluindo casos simétricos nos quais os números têm papéis essencialmente similares, outro tipo é exemplificado pelo autor, como as horas.

Os enunciados escolares, conforme denuncia o autor, são estereotipados e, na maioria das vezes, irreais, quase sempre de uma única operação e apresentados isoladamente. Os alunos, segundo o autor, são treinados a usar estratégias superficiais, como usar as "palavras-chave" que conduzem à produção fácil da resposta correta, na maioria das vezes. O autor comenta que os resultados obtidos permitiram conclusões valiosas para o trabalho com a multiplicação e divisão, mas que ainda é necessário um esforço especial e maior número de pesquisas a fim de que possam significar uma ajuda para professores na escola.

Por intermédio de um modelo computacional (SPS - Solucionador de Situação-Problema), Reusser (1990) estuda a hipótese de que as maiores dificuldades das crianças para resolver problemas verbais, acontecem pela falta de compreensão da estratégia tanto quanto da linguagem envolvida, como na situação da descrição verbal. Considera que para um problema ser bem compreendido é preciso uma habilidosa interação do conhecimento lingüístico, do conteúdo do problema que está sendo tratado, além do conhecimento matemático. O autor analisa o processo psicológico da resolução de problemas matemáticos de palavras como um processo estratégico de movimento do texto para a situação e desta para a equação.

Brito, Fini e Garcia (1994) estudaram as relações entre o raciocínio matemático na resolução de problemas e o raciocínio verbal, analisando problemas de natureza algébrica e de natureza aritmética. Identificaram um processo de compreensão verbal (compreensão do enunciado verbal apresentado em forma escrita) e a compreensão Matemática (compreensão da natureza Matemática do problema, propriamente dita).

O estudo da interação entre linguagem e processos matemáticos na resolução de problemas é uma discussão bastante atual, e a dificuldade das crianças para solucionar problemas tende a ser atribuída a problemas de linguagem ou ao desenvolvimento de uma competência específica matemática, ou seja, ao pensamento lógico-matemático, postulado por Piaget. Um dos aspectos ressaltados pelos estudos e pesquisas é a relação possível entre níveis de desenvolvimento cognitivo das crianças e o desempenho escolar em Matemática.

Uma análise sobre a relação entre linguagem e conhecimento lógico-matemático na resolução de problemas, segundo os estudos de Piaget e colaboradores, tem como ponto de partida os estágios de desenvolvimento, do nascimento até a vida adulta, mas, em especial, o funcionamento cognitivo. É preciso considerar que a construção de conhecimento do sujeito está relacionado com a hereditariedade, interação com o mundo por meio de ações desse sujeito, ações que o levam a estabelecer múltiplas relações.

A (AAAS) - American Association for the Advancement of Science analisando condições da educação nos Estados Unidos da América e, considerando as necessidades das gerações futuras, iniciou em 1985 um projeto que denominou Project 2061, prevendo a educação em Ciências e Matemática. Os documentos da AAAs sobre o ensino da Matemática assinalam que, na escola, freqüentemente os professores procuram apresentar aos alunos, oralmente, regras de cálculo e também regras para solução de problemas. Os autores acentuam que quando se espera que os alunos aprendam Matemática por meio de explanação, o que pode resultar é a memorização e até a utilização de regra em exercícios rotineiros, nem sempre compreendidos, mas resolvidos mecanicamente. Trabalhando dessa maneira com cálculo na escola, os professores podem até conseguir que os alunos tenham sucesso em testes padronizados, mas podem não conseguir que eles consigam resolver outros tipos de problemas que impliquem alguma diferença, ou que resolvam problemas com os quais venham a se defrontar na vida cotidiana.

Pesquisadores da Universidade Federal de Pernambuco, o chamado Grupo de Recife, por sua vez chama a atenção para a necessidade de se analisarem e entenderem as relações e os contrastes entre: a) os procedimentos não-ortodoxos utilizados por crianças fora da sala de aula para solucionar problemas aritméticos e b) os procedimentos valorizados por professores na sala de aula. Entender essas relações, na perspectiva do Grupo de Recife, auxiliaria muito os professores no ensino da Matemática.

O estudo da resolução de problemas em crianças na passagem do pré-operatório para o operatório concreto, apresenta-se como um aspecto importante a ser estudado no desenvolvimento do sujeito, considerando-se em especial, a preocupação aqui apresentada sobre o trabalho escolar nas séries iniciais.

Na maioria das escolas, no entanto, observa-se muitas vezes um distanciamento bastante significativo entre o trabalho docente e uma teoria psicológica com bases construtivistas que fundamente o ensino da Matemática. Por outro lado, muitos professores que procuram esse referencial teórico acabam muitas vezes por desconsiderar aspectos importantes da Teoria de Piaget sobre a construção do conhecimento, ou incorrem em enganos ao interpretar a teoria, como lembra Macedo (1994).

Inúmeros pesquisadores têm destacado caráter mecânico e destituído de significado com relação ao trabalho escolar nas primeiras séries do 1º grau, no ensino da Matemática. Em sala de aula, as tarefas solicitadas que se restringem a exercícios resolvidos no quadro negro, listas de exercícios para fixação copiados de livros didáticos, nem sempre de boa qualidade, são amplamente criticadas. Trabalhos divulgados na bibliografia especializada têm assinalado a importância de se compreenderem as relações entre desenvolvimento do pensamento lógico-matemático e a solicitação do meio, como, por exemplo, o trabalho do professor. (Entre os autores mais citados, destacam-se: Mantovani de Assis, 1976; Sastre, 1980, 1988; e Kamii 1994, 1995).

Pesquisadores que têm estudado o ensino da Matemática nos primeiros anos da escola, como Sastre & Moreno (1980); Rangel (1992); Constance Kamii (1985, 1994, 1995), têm mostrado as dificuldades das crianças em relação ao tipo de trabalho que a escola tenta desenvolver.

É importante que se leve em conta o desenvolvimento cognitivo das crianças e as características de raciocínio relacionadas aos diferentes estágios, como mostram as pesquisas piagetianas (Carraher,1989; Moro,1983; Silva, 1983).

Os trabalhos de Kamii (1995), de Morgado (1991) e de Maza (1991), fundamentado nos de Piaget e Inhelder, Piaget (1978) sobre a Tomada de Consciência e o Fazer e compreender (19784); e de Inhelder e Piaget (1979) apresentam uma vertente importante para a análise da solução de problemas e abrem perspectivas para pesquisas interessantes que podem contribuir grandemente para a prática docente.

CAPÍTULO III

FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PIAGET E O CONHECIMENTO LÓGICO MATEMÁTICO

Os trabalhos e pesquisas de Jean Piaget têm, sem dúvida, uma importância especial, quando se trata de pensar sobre a educação, os processos de aprendizagem escolar e a aquisição de conhecimentos, pela extensão e relevância de sua obra, bem como de seus seguidores, e a inegável contribuição para a compreensão das estruturas da inteligência e dos processos do desenvolvimento cognitivo do ser humano.

O trabalho de Piaget sobre a inteligência do ser humano tem exercido uma influência marcante sobre a educação no Brasil, em especial no que diz respeito ao ensino da Matemática e em relação a suas pesquisas sobre a construção do conceito de número. Resultados de pesquisas, na perspectiva da Psicologia Genética de Piaget e seguidores, na verdade, esclareceram a natureza do conhecimento lógico-matemático, distinguindo-o do conhecimento físico e do conhecimento social.

Piaget demonstrou que o ser humano não nasce com uma inteligência pré-formada. O desenvolvimento da inteligência é um processo construtivo do sujeito em suas interações com o meio. A inteligência desenvolve-se gradualmente como resultado de fatores internos e externos ao indivíduo, em relação à maturação, à experiência física, à experiência lógico-matemática; à interação social e, finalmente, à equilibração.

Piaget descreve a construção espontânea e gradual das estruturas da inteligência usando como ponto de referência a natureza biológica do ser humano. Segundo Piaget, o funcionamento da inteligência segue como extensão das características biológicas fundamentais do processo de adaptação. O organismo biológico interage com o meio, pelos processos de adaptação, assimilando elementos do meio e ao mesmo tempo se ajusta a ele, modificando-se, por meio do que Piaget denominou processo de acomodação. Os dois processos, assimilação e acomodação são destacados por Flavell (1965) como o elo crucial, estabelecido por Piaget entre a Biologia e a inteligência.

Como afirma Piaget :

> *" A vida é uma contínua criação de formas cada vez mais complexas e um progressivo balanceamento dessas formas com o ambiente . Dizer que inteligência é um caso particular de adaptação biológica é , portanto , supor que é essencialmente uma organização e que sua função é estruturar o universo assim como o organismo estrutura seu ambiente imediato"* (Piaget: 1975, p. 15).

Segundo Piaget, a inteligência é um dos elementos no processo da adaptação do ser humano ao meio, e também funciona por processos de assimilação e acomodação sucessivos na interação sujeito-meio. Os processos de assimilação-acomodação, característicos de todos os seres vivos, são um caso particular na construção do conhecimento na teoria piagetiana.

A adaptação é entendida como um processo de equilibração. A adaptação pressupõe processos de assimilação-acomodação e organização.

PIAGET (1952) comenta :

> *" ... A organização é inseparável da adaptação: são dois processos complementares de um único mecanismo; o primeiro é o aspecto interno do ciclo do qual a adaptação constitui o aspecto externo ... O " acordo do pensamento com as coisas " e o " acordo do pensamento consigo mesmo "expressam esta invariante funcional dupla de adaptação e organização. Estes dois aspectos do pensamento são indissolúveis : é se adaptando às coisas que o pensamento se organiza e é ao se organizar que ele se estrutura às coisas"* (Piaget: 1952, p. 7-8).

Segundo Piaget esta atividade funcional, um modo de funcionamento intelectual se apresenta em todas as fases de desenvolvimento humano, um funcionamento entendido em paralelo aos processos biológicos de adaptação. Esse funcionamento é comum a todos os seres humanos e acontece tanto na criança como no adulto. Na atividade intelectual o que se diferencia é a estrutura, porque ela é construída pelo sujeito a partir de propriedades organizacionais; sendo diferente em qualidade e grau; e em idades variadas. A estrutura difere da função e do conteúdo, pois muda conforme a idade. O conteúdo é um outro aspecto que deve ser considerado e se integra ao funcionamento e a estrutura.

As pesquisas de Piaget demonstraram que ao longo da vida o ser humano apresenta funções constantes e comuns, em todas as idades: a adaptação, assimilação e acomodação. O ser humano é continuamente desafiado pelo meio, procurando compreender, explicar, organizar. Ao mesmo tempo, Piaget identificou, ao longo das idades, estruturas variáveis de inteligência ou formas diferentes de equilíbrio, distribuídas em seis estágios ou períodos de desenvolvimento cognitivo (Piaget, 1993).

Os diferentes períodos e níveis de desenvolvimento cognitivo descritos por Piaget e colaboradores foram encontrados e identificados em criança de toda e qualquer parte do mundo ocidental.

Parte da obra piagetiana esteve direcionada para uma análise mais estrutural, ou seja, na qual concebe que o conhecimento se organiza em estruturas lógicas. A partir de experimentos, propondo tarefas específicas e mediante interrogatório clínico, Piaget procurava colocar em manifesto quais eram as estruturas do sujeito, em diferentes idades, assim como sua origem.

Os períodos do desenvolvimento cognitivo, na Teoria Piagetiana (Piaget,1973) implicam : a) Uma ordem de sucessão constante, mas não em idades rigidamente definidas,podendo-se encontrar variação das idades de um indivíduo para outro; b) Cada período é caracterizado por uma estrutura de conjunto em função da qual se explicam as principais reações particulares; c) As estruturas de conjunto são integrativas, ou seja, umas se constroem sobre as outras.

As estruturas construídas em uma idade se tornam integrantes daquelas das idades posteriores. Três grandes construções foram descritas por Piaget, em diferentes publicações. O autor descreve quatro estágios : o da inteligência sensório-motora (até os dois anos), o da pré-operatória (dos dois aos sete anos aproximadamente), o da inteligência operatória concreta (dos sete-oito aos onze-doze anos) e o da inteligência operatória formal (dos 12 até 14-15 anos). Segundo o autor, tais construções implicam integração sucessiva de estruturas que se dividem em períodos e subperíodos.

Em seus trabalhos que abrangem um extenso número de investigações sobre o processo de construção do conhecimento, Piaget analisa também aspectos do desenvolvimento social e afetivo do ser humano. Uma das contribuições mais importantes da obra piagetiana, no entanto, tem sido a que diz respeito ao pensamento matemático.

Baseando-se de um método experimental, elaborado pelo próprio autor, Piaget desenvolve um número considerável de pesquisas que procuram esclarecer o acesso ao conhecimento e mostram que conhecimento é o resultado da ação do sujeito e explicam o processo evolutivo da inteligência pelo qual este sujeito constrói estruturas cognitivas que lhe possibilitam compreender a realidade em que vive.

Piaget destaca que nem sempre os matemáticos aceitam com facilidade as idéias das relações entre a Matemática e a ação, preferindo enfatizar o caráter formal e abstrato do conhecimento matemático.

Segundo Piaget, o conhecimento é construído a partir da interação sujeito-objeto e nesse processo a assimilação de novos objetos ou situações depende das estruturas do sujeito. A interação do sujeito com o objeto depende das possibilidades desse sujeito em relação ao objeto, depende dos esquemas que ele possui. A assimilação é um mecanismo que possibilita ao sujeito incorporar o objeto às suas estruturas. Quando uma criança passa a pegar objetos, a andar, classificar, ou ainda, a realizar qualquer ação, podemos caracterizar como uma forma de assimilação, ou seja, os elementos são assimilados ao sistema. O processo que complementa a assimilação é o fato das estruturas se ajustarem às características do objeto, acarretando em modificação própria do sujeito, como forma de adaptação. É preciso que o organismo se acomode às características específicas do objeto a ser assimilado, assim como, na assimilação o conhecimento é modificado pelo sujeito cognoscente.

O processo de construção do conhecimento pelo o sujeito apóia-se fundamentalmente nos esquemas que ele possui. Os esquemas constituem os elementos básicos por meio dos quais o sujeito poderá atuar sobre a realidade, podendo representar uma situação concreta ou mesmo um conceito, enfrentando situações iguais ou parecidas a outras já vividas.

Para explicar a evolução mental, em cada um dos períodos, Piaget descreve quatro fatores : a maturação, o exercício, as interações e a equilibração. Descreve os três fatores gerais e apresenta um quarto fator, a equilibração, característico de sua teoria e que, segundo ele, realmente explica o desenvolvimento psicológico.

O primeiro fator apontado é o crescimento orgânico, especialmente a maturação dos sistemas nervoso e endócrino. Segundo o autor, as condutas do sujeito estão diretamente ligadas aos primórdios do funcionamento de seus aparelhos e do desenvolvimento neurológico e psico-motor mas, se a maturação é fator necessário não é suficiente em relação ao desenvolvimento cognitivo. Assinala que a maturação abre possibilidades novas para certas condutas e estas dependem ,para se realizarem, de um exercício funcional e de um mínimo de experiência permitidos pela própria maturação .

Um segundo fator que explica o desenvolvimento mental é a experiência do sujeito, que pode ser experiência física ou lógico-matemática. A experiência física implica a ação do sujeito sobre os objetos, com base na qual abstrai conhecimentos: a experiência lógico-matemática implica o estabelecimento de relações, agindo sobre os objetos e abstraindo conhecimentos das coordenações das ações e operações . A experiência e o exercício não atuam isoladamente, mas em articulação dos demais fatores do desenvolvimento.

As interações sociais apresentam-se como o terceiro fator explicativo para a evolução mental, também necessário e não suficiente como os outros dois, anteriormente citados. Piaget, (1993) assinala o caráter fundamental e necessário do fator interação social, dos processos socializadores, lembrando a cooperação e as transmissões sociais e que agir com os outros é fundamental para o desenvolvimento. Lembra que, mesmo no caso de transmissões escolares, a assimilação ativa da criança deve ser sempre considerada, o que supõe também, instrumentos operatórios adequados.

Por último, a equilibração é entendida por Piaget como o processo central para explicar o desenvolvimento e fator necessário para conciliar harmonicamente os demais, a maturação, as interações e o exercício. A equilibração, nesse quadro é entendida como um sistema de auto-regulações, seqüência de compensações ativas do sujeito aos desafios do meio ou perturbações exteriores.

Piaget (1976) afirma que é pela interação sujeito-objeto e pelo processo de equilibração majorante que o sujeito constrói o conhecimento. É a equlibração que permite ao sujeito construir suas estruturas cognitivas, as quais constituem sistemas pelos quais ele interpreta a realidade. O autor assinala que as transformações de um estado inicial por intermédio de várias formas de desequilíbrios e reequilíbrios resultam em um estado qualitativamente diferente.

O autor destaca o processo de equilibração majorante como o problema central do desenvolvimento porque é uma importante forma de reequilibração que conduz a uma melhor adaptação.

Os quatro fatores do desenvolvimento implicam uma harmonia para garantir a evolução cognitiva, porém vale ressaltar que é indispensável considerar os aspectos afetivos, pois eles constituem o energético das condutas e a afetividade desempenha papel indiscutível na atividade mental.

A Inteligência Operatória

Piaget mostra que, por volta dos sete anos, aproximadamente pode -se constatar, pelo desempenho das crianças, a instalação do que denominou estruturas das operações concretas. O período ou estágio das operações concretas estende-se dos sete-oito anos até aproximadamente os 11-12 anos, sucedendo o da chamada inteligência pré-operatória ou intuitiva.

O período das operações concretas é caracterizado, usualmente, pelo fato de o pensamento apoiar-se no concreto, nos objetos, em comparação com o pensamento operatório formal, caracterizado pela ultrapassagem do real em direção do possível.

A criança do estágio operatório concreto já superou uma série de problemas práticos, característicos da fase anterior, ou seja, uma série de dificuldades para realizar tarefas lógicas e matemáticas.

No nível das operações concretas, as crianças pequenas não chegam a raciocinar sobre puras hipóteses, expressas verbalmente, mas conseguem chegar a deduções coerentes por meio da ação sobre os objetos, sejam eles próximos ou não.

A função simbólica, o desenho, a imitação, as imagens mentais, o jogo simbólico e a linguagem já haviam tornado as crianças capazes de reconstruir as aquisições construídas por meio da inteligência prática, característica do período sensorio-motor. Por exemplo, no operatório concreto já supera o animismo e o artificialismo, uma compreensão da realidade um pouco limitada no sentido de confusões entre aspectos objetivos e subjetivos da realidade, como, por exemplo, atribuir vida aos objetos inanimados.

Desde muito cedo, as crianças utilizam-se do brinquedo, da imitação e da fala enquanto atividades representativas para conhecer e compreender o mundo que a cerca.

A compreensão da natureza da representação ou simbolização na criança também foram investigados por Piaget. O autor acredita que o processo de simbolização na criança é de grande importância para as aprendizagens escolares, pois o pensamento representativo possibilita formas variadas de representar o mundo, as quais os alunos estarão lidando durante toda sua vida escolar.

Para Piaget, a aquisição da representação na criança torna-se possível quando há diferenciação entre significantes e significados. O processo que envolve a diferenciação entre significante e significado é a função simbólica; a qual possibilita a criança evocar internamente um significante, permitindo-lhe simbolizar o mundo , os fenômenos e situações não presentes, as quais constituem os significados.

A função simbólica permite ao ser humano evocar objetos ausentes, imaginar, planejar e executar ações por meio de representações; e envolve uma espécie de comportamento de referência, de pistas perceptuais para as crianças.

Em crianças de 0 a 2 anos, pode- se verificar que a inteligência sensório-motora, que é predominantemente prática, é diferente da inteligência representativa que surge no período pré-operatório.

Na perspectiva piagetiana há características diferenciadas no desenvolvimento cognitivo de uma criança na idade pré-escolar inserida em um contexto de aprendizagem em comparação a uma criança do período operatório concreto.

A criança pré-operatória constrói representações de maneira justaposta, sincrética e egocêntrica. Nas palavras de Macedo (1994):

> *"A justaposição caracteriza-se pelo fato de que a criança liga as palavras, as imagens, as representações entre si de forma analógica, ou seja, com base em um "assim como" (semelhanças e diferenças) e não em um " se então" (implicação). As idéias ficam colocadas lado a lado, ou seja, por contiguidade, correspondendo a estados e não transformações. E não existe, ainda no plano da*

representação, nenhuma ligação temporal, causal, ou lógica" (Macedo, 1994, p. 25).

Piaget (1978) comenta :

> *"A imagem imitativa evocada, de outro lado, é uma fotografia revelado que serve como rascunho, esboço ou esquema antecipatório (no sentido cotidiano de plano de ação que este termo tem) que pode orientar a ação futura; as acomodações passadas são evocadas no presente, sob a forma de imagens internas que, por sua vez, são mediadores antecipatórios de ações ainda não realizadas"* (Piaget, 1978, p. 241).

Para Piaget, os símbolos são significantes que apresentam alguma semelhança física com o seu referencial, apresentam uma relação de parecido, abrangendo alguma coisa que é mais pessoal de criança para criança, ou seja, eles são construídos pelo sujeito: uma criança brinca com uma cadeira empurrando-a e emitindo sons como se fosse um carrinho.

O que ocorre com os signos (sinais), é que estes estão relacionados com significados partilhados socialmente, de caráter arbitrário e abrange algo que é coletivo, ou seja, estão diretamente relacionados a um acordo convencional, independe da construção do sujeito, como no caso da matemática que é por excelência uma linguagem de signos.

As dificuldades e o longo tempo que as crianças levam para aprender os símbolos matemáticos na escola, podem estar relacionados ao fato de que elas apoiam-se em símbolos privados (grafismos por meio de desenhos, registros próprios de resolução de problemas) antes de se adequarem às representações por meio dos signos matemáticos convencionais.

Uma das modificações decisivas no desenvolvimento mental da criança dá-se por volta dos sete anos e coincide com o início de sua escolaridade. Nessa fase é que se originam as operações mentais, entendidas como ações coordenadas, e, por isso, interiorizadas e reversíveis, integradas num "sistema de conjunto".

O período operatório concreto marca essa fase transitória entre a ação prática e a ação interiorizada e reversível, modificando várias condutas do sujeito. No estágio das operações concretas, as crenças animistas ou mesmo o artificialismo são ultrapassados por um pensamento lógico, assim como há, graças à operação mental, um domínio progressivo das noções de conservação, classificação e seriação.

A criança do período operatório ainda precisa do real como apoio, ou seja, o possível para a criança é aquilo que ela consegue provar na realidade. Dessa forma, o real é importante, pois apresenta-se para o sujeito dessa idade como a possível maneira de conhecer o mundo.

A evolução das noções de conservação, seriação e classificação permitem a elaboração de uma lógica elementar das classes e relações, assinaladas por Piaget e necessárias para a construção da noção de número, movimento, tempo e velocidade.

Em crianças de sete anos em diante, pode-se constatar a manifestação ou não das noções de conservação por meio da prova clássica da conservação de massa. Ela consiste em dar duas bolinhas de massa de modelar, a qual sofre algumas modificações (salsicha, panqueca e em pedacinhos) e, baseando-se nisso, encontramos diversas reações. As crianças antes dos sete anos tem a crença de que a mudança na massa provoca alteração na sua quantidade. Em crianças que apresentam operatoriedade, a característica principal seria que essas noções de conservação são resultados de operações, coordenadas entre si num sistema de conjunto. O que anteriormente se dava, com base num pensamento intuitivo, por meio da percepção, passa a ser reversível.

Para que uma criança possa agir sobre as quantidades e transformá-las mentalmente é necessário que a transformação mental esteja comprometida com : a) a compreensão da quantidade como algo que não se altera mesmo com a disposição diferente dos objetos (conservação de quantidades); b) a noção de que o todo dividido em partes é sempre maior que cada uma das partes (implícito na classificação / inclusão de classes); c) o estabelecimento das relações de tamanho, compreendendo o valor cardinal e ordinal dos números em uma série, assim como suas inter-relações (implícitas na seriação).

A reversibilidade passa a ser uma característica marcante da criança do período operatório concreto. A conservação (de quantidade, de volume) é admitida não mais com apoio apenas da percepção que se tem do estado inicial e sim pela possibilidade que a criança tem de representar e compreender, ou melhor, interiorizar a transformação ocorrida desde o ponto de partida . Neste caso, ela pode compreender que a transformação da massa de modelar em forma de "bolacha", "salsicha", ou mesmo ao retorná-la em forma de bolinha, não modifica a quantidade inicial. A reversibilidade torna a criança capaz de entender que não se tirou e nem acrescentou nada à massa.

O surgimento da reversibilidade faz com que a criança corrija a intuição perceptiva, admitida anteriormente. Em uma fase anterior, a criança pré-operatória resolve problemas desta natureza segundo as ilusões momentâneas, o que, em uma fase posterior, por volta dos sete anos, com o surgimento da reversibilidade, transforma os dados perceptivos em relações coerentes e objetivas.

A atividade da criança ganha, com a reversibilidade, maior mobilidade, podendo anular ações no pensamento, transformando um estado A em estado B, sem perder de vista o estado inicial, e considerar, ao mesmo tempo os dois e a transformação. Uma operação transforma um estado A em B, deixando pelo menos uma propriedade invariável, no decurso, e com possibilidade de retorno de B para A. A transformação pode ser anulada mentalmente.

Para a teoria do desenvolvimento de Piaget, a ação é matéria-prima para a aquisição do conhecimento: na interação com os objetos o sujeito se transforma e constrói conhecimentos.

Na perspectiva construtivista, na relação ensino-aprendizagem é muito importante ter-se claro o papel da experiência, que é ponto de apoio para as abstrações e responsável pela construção de conhecimento do sujeito.

Ao falar de experiência, Piaget distingue a experiência física e a experiência lógico-matemática. Na primeira, o agir sobre os objetos é fundamental para se descobrir as propriedades físicas dos mesmos, as propriedades observáveis das ações realizadas materialmente.

A experiência física não corresponde a cópia do real,pois, no caso de olhar duas bolas de cores diferentes, o sujeito abstrai propriedades, o que implica também estruturas mentais, estando diretamente ligado a formas lógicas. O conhecimento físico não depende das pressões dos objetos sobre o sujeito, implica assimilações, atividade e quadros lógicos desse sujeito, estando em jogo estruturas lógico-matemáticas e coordenação das ações e relações.

A qualidade "lisa" de uma pedra, a de peso, a aspereza são conhecimentos que se destacam dos objetos por abstração empírica, fundamental para se descobrir as propriedades físicas dos mesmos, as propriedades observáveis.

A experiência lógico-matemática refere-se a abstrações das coordenações que estão ligadas às ações do sujeito. O conhecimento lógico-matemático está ligado a relações que o sujeito estabelece mentalmente e abstrações com base nas coordenações das relações. A coordenação de relações tem base na experiência física, que fornece ao sujeito apenas uma fase prática, pois o que predomina é a ação construtora exercida pelo sujeito sobre os objetos exteriores ,abrindo possibilidades para que futuramente sejam deduções operatórias.O conhecimento é abstraído da ação e não dos objetos.

Kamii (1992) explica :

> *"... quando nos apresentam uma plaqueta vermelha e uma azul, e notamos a diferença, esta diferença é um exemplo de pensamento lógico-matemático. As plaquetas são realmente passíveis de observação, mas a diferença não está nem em uma plaqueta nem em outra. Se a pessoa não colocasse os objetos dentro dessa relação, para ela não existiria essa relação"* (Kamii: 1992; p. 14).

A diferença é uma relação criada mentalmente e que não está propriamente nos objetos "diferentes", mas é o sujeito que estabele relações entre as coisas e chega à diferença.

Piaget faz uma distinção quanto aos tipos de experiências do sujeito e completa :

> *"... as coordenações de ações e as experiências lógico-matemáticas provocam com sua interiorização a formação de uma variedade particular de abstração que corresponde precisamente à abstração lógica e matemática ..."* (Piaget, 1973, p. 3).

Tanto a experiência física como a lógico-matemática implicam o processo de abstração da criança, as abstrações poderão ser de um nível mais elaborado (abstração reflexiva) ou mais elementar (abstração empírica).

Um dos aspectos mais gerais do processo de equilibração relacionados desde a conceitualização até a tomada de consciência no desenvolvimento cognitivo do sujeito é o processo ou mecanismo funcional da abstração reflexiva.

Piaget lembra-nos que toda construção de conhecimento está diretamente ligada ao processo de abstrações do sujeito e que estas constituem um dos aspectos mais gerais do processo de equilibração, no qual o sujeito extrai algumas características do objeto e, no entanto, não é possível abstrair a totalidade do objeto, pois ao sujeito cabem outros enriquecimentos.

Na teoria piagetiana, o sentido de abstrair significa que o sujeito é capazde extrair algumas características de um determinado objeto.No entanto, ao retirar informações de algo, o sujeito nem sempre caracteriza a totalidade do objeto,o que nos confirma na teoria piagetiana que o conhecimento se dá progressivamente.

A evolução do pensamento matemático está diretamente ligada ao processo de abstração, mais especificamente à abstração reflexiva, pois, segundo Piaget, a construção no campo da lógica-matemática repousa sobre ações e operações e não sobre as propriedades do objeto real.

No caso da evolução do pensamento multiplicativo, por exemplo, as crianças apresentam uma progressão nos processos mentais ao construir aspectos fundamentais desta operação, os quais estão diretamente ligados ao mecanismo de abstração que são capazes de realizar.

Em uma situação-problema, de compra e venda de doces, por exemplo, pode-se observar que a criança apresenta resoluções diferenciadas e que estas estão inseridas no processo de abstração do sujeito. Tanto a abstração empírica necessita da reflexiva, como está última necessita de dados observáveis.

Uma forma mais elementar de abstrair os dados de uma determinada realidade ou objeto é por meio da abstração empírica, na qual o sujeito retira informações dos objetos segundo suas propriedades, seus caracteres materiais.

Ao realizar uma tarefa de compra e venda, por exemplo, na qual um pirulito vale três moedas, a criança poderá levar em conta um dos dados da situação; neste caso, poderá ser ou o número de objetos a serem comprados ou o preço do objeto e poderá resolver o problema da seguinte maneira, como mostra a Figura 5:

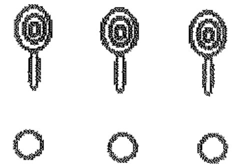


Figura 5 - Correspondência de doces e moedas
(1ª situação)

Neste caso, como mostra a figura 5, a criança paga os pirulitos usando tantas moedas quanto a quantidade de pirulitos, fazendo uma correspondência termo-a-termo.

A medida em que a criança passa a enriquecer o objeto e o modifica valendo-se de suas ações, pode-se dizer que houve uma progressão na maneira de abstrair os dados, como mostra a figura abaixo :

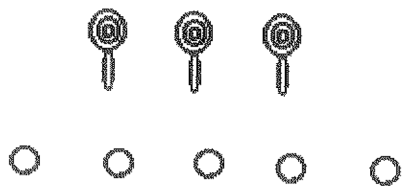


Figura 6 - Correspondência de doces e moedas
(2ª situação)

No caso da Figura 6, pode-se perceber a resolução da criança por meio de abstração pseudo-empírica. A criança realiza uma quantificação intuitiva, sabendo que há um aumento entre a situação inicial e estado final, mas não consegue fazer ainda uma quantificação exata.

Ao realizar abstrações mais elaboradas, pode-se dizer que a criança passa a realizar a tarefa com predomínio de abstração reflexionante, que é o resultado das coordenações das ações do sujeito, comprometidas ou não com o processo de tomada de consciência.

Ao realizar a tarefa corretamente, como mostra a figura abaixo, a criança consegue fazê-lo, utilizando adições sucessivas das moedas, fazendo grupinhos de moedas que a auxiliam na resolução. Neste nível, pode-se observar que a criança não realiza antecipação nenhuma do número de ações que deverá realizar.

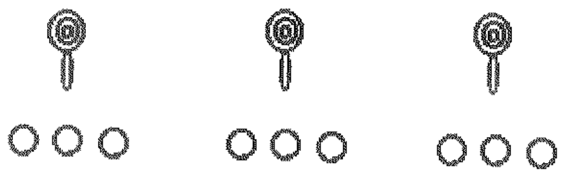


Figura 7 - Correspondência de doces e moedas
(3ª situação)

Por fim, num plano superior, o sujeito é capaz de realizar abstrações reflexivas, em que estas ações são reorganizadas e coordenadas, numa tarefa de reflexão por parte da criança, tornando-a consciente ao sujeito. A criança consegue a nível de antecipação resolver por meio de cálculo mental, assim como reconstituir as transformações e explicitá-las, como: "Vou gastar 9 moedas, porque se cada moeda vale 3, e se tem 3 moedas, é 3 x 3 = 9".

Cabe considerar, como mostra a prática nas escolas, que os professores até se preocupam com a melhoria da qualidade do trabalho docente, tentando auxiliar os alunos na tarefa de aprender Matemática. No entanto muitos deles sentem dificuldades na seleção e implementação de métodos e estratégias a um tempo eficientes e atraentes para a criança. Quando o professor promove o uso pouco adequado do material concreto, o fazer pelo fazer, está proporcionando uma atividade que poderá pouco ou quase nada em relação a algum progresso na Matemática.

A utilização de material concreto de manipulação, por sua vez, em relação à compreensão da Matemática tem sido enfatizado, ao longo dos anos, especialmente por autores como Piaget (1951) e Dienes y Golding(1966).

Até que ponto o material concreto, os objetos ou representações serão transparentes para o sujeito? Como as crianças solucionam problemas de aritmética tendo como auxílio o material concreto de apoio?

Quanto à utlilização de material concreto de apoio, as operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação, divisão) dificilmente serão construídas se o professor considerar apenas a manipulação de algum tipo de material em sala de aula. Uma situação que exemplifica tal pressuposto de apredizagem é o fato de colocar à disposição das crianças, balas, chocolates ou materiais estruturados para o aprendizado de somas ou subtrações: não é o mexer no material o caráter motivacional, ou porque é doce, a "criança gosta, logo irá aprender mais ..." que garantem a passagem para um melhor conhecimento.

Na maioria da vezes, constata-se que situações desse tipo são, também, seguidas da exigência quanto ao registro mais convencionalmente adotado, quanto à linguagem formal matemática, pelo registro e uso de números, sinais e operações. Pode-se perceber que, muitas vezes, os professores tentam trabalhar com situações diferentes, jogos e manipulação, mas não conseguem explorar adequadamente o material e as estratégias. Também não conseguem dar continuidade a algum jogo, explorando o conhecimento que se poderia extrair dele. Não entendem esses professores que, por vezes, as crianças não compreendem e não apresentam êxito porque seu sistema de representação ainda não comporta a abstração necessária.

A passagem do conhecimento inicial do aluno para a forma mais sistematizada,como é o caso da linguagem Matemática por meio de sinais é um dos grandes desafios do professor que espera uma aprendizagem duradoura e com compreensão.

Segundo Piaget, existe uma diferença entre a operação da adição e multiplicação. Diz ainda o autor que devemos ter cuidados na relação didático-pedagógica para que a estrutura multiplicativa não seja imposta prematuramente, sem que a criança construa efetivamente a estrutura multiplicativa.

Dienes y Golding (1966) assinalam que na adição a criança deve trabalhar com um único universo : o dos conjuntos, enquanto que na multiplicação, a criança deverá trabalhar ao mesmo tempo com dois universos diferentes, nos quais " ... *O multiplicador é uma propriedade dos conjuntos de conjuntos; o multiplicando é uma propriedade dos conjuntos, por isso os dois fatores não possuem o mesmo universo*" (p. 35).

Nesse sentido, o desafio colocado para a criança é o descobrimento geral da regra, a qual tem de basear-se no uso de estratégias eminentemente multiplicativas na resolução de problemas. A criança deverá compreender que 2 x 5 não é só igual a 2 + 2 + 2 + 2 + 2, mas entender também: 2 "cinco vezes". A criança deverá passar de um pensamento aditivo a um multiplicativo, como o próprio

Piaget assinala; e dessa maneira, 2 "cinco vezes" é equivalente a 5 "duas vezes".

No caso da multiplicação, Dienes y Golding assinalam que:

> "... *Os professores que ensinam que a multiplicação não é senão uma adição repetida, prestam mau serviço a seus alunos: na realidade, eles estão escondendo a dificuldade e transmitem uma contra-verdade... a estrutura lógica da aritmética permanece relativamente simples, enquanto se trata apenas de adição e de subtração, mas a introdução da multiplicação traz problemas completamente diferentes*" (Dienes y Golding, 1966p.35).

Alguns livros didáticos, assim como algumas propostas escolares estão fortemente apoiados na idéia de que a multiplicação é uma operação que deve ser pensada e aprendida pelo aluno como uma forma mais abreviada, eficiente ou econômica de adições sucessivas.

No entanto, o ensino da multiplicação como simples adição de parcelas iguais poderá mascarar a verdadeira estrutura conceitual construída pela criança.

Com base nos estudos de Piaget, Kamii (1995) estudando o pensamento hierárquico, por meio da construção do número, analisa as relações entre estrutura aditiva e multiplicativa no pensamento das crianças. A autora assinala que a criança consegue resolver a adição porque essa situação está inserida num mesmo nível de abstração, ou seja, no nível de abstração da adição, a criança cria unidades de um e o todo para resolver um cálculo como mostra o esquema abaixo enunciado pela autora :

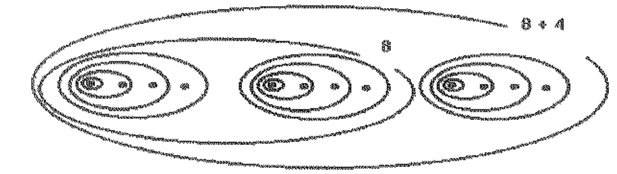


Figura 8 - Representação esquemática de relações de inclusão
(Operação da adição)
Kamii (1995, p.109)

Paralelamente, Kamii (1995) lembra que, enquanto estrutura operatória de pensamento, a multiplicação depende de níveis de abstração envolvidas e do número de relações de inclusão que a criança faz, considerando que estes processos aconteçam simultaneamente. A criança deve criar unidades de ordem superior, para calcular 4 + 4 + 4 = . Ela cria unidades de 1, unidades de 4 e o total. O sujeito deverá estabelecer duas relações que na adição não são necessárias, pois para ter o primeiro 4, a criança tem que pensar que tem o 1 em seguida somar o outro 1, o que dá 2; depois outro 1 e será o 3; e somar o outro 1 que dará 4. Com isso, a criança deverá compreender que em 4, ela tem 4 "uns". (1 + 1) = 2, (2 + 1) = 3, (3 + 1) = 4. A autora exemplifica a mesma situação considerando agora o pensamento multiplicativo :

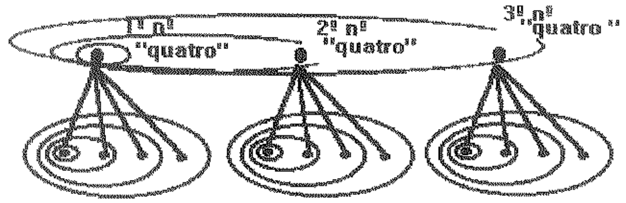


Figura 9 - Representação esquemática de relações de inclusão
(Operação da multiplicação)
Kamii(1995, p.109)

As crianças costumam fazer 3 x 4 = 7 porque pensam nesses números como unidades simples, ou seja, em um nível de abstração mais elementar. Por exemplo, dado um número: 3, a criança o considera como três unidades, por exemplo, 3 palitos : I I I; e vê o 4 também como se fossem 4 palitos: IIII. Nesse nível de abstração, as crianças não conseguem pensar 3 x 4 como uma unidade de ordem superior, ou seja , o primeiro 3 equivale a 4 palitos, o segundo 3 contém 4 palitos e o terceiro 3 contém 4 outros palitos.

A preocupação assinalada por Piaget e outros pesquisadores quanto à diferença da adição e multiplicação está relacionada com o papel das abstrações, envolvidas na construção do pensamento hierárquico.

A atuação pedagógica dos professores no trabalho com a multiplicação como soma repetidas apresenta-se como mais um dos recursos de exploração do cálculo, porém se considerarmos grandezas altas, a resolução por meio de adição torna-se ineficiente.

Pode-se verificar que na maioria das escolas o trabalho com operações tem início com a adição, em seguida as operações de subtração, multiplicação e divisão. Na visão de muitos professores, quando chega o momento da aprendizagem da multiplicação, é possível ensiná-las retomando o algorítmo da adição : "4 + 4 + 4 = 12" é o mesmo que 3 x 4 = 12, apenas com a mudança do sinal de "+" para o sinal de "x", explicam alguns professores para seus alunos.

É muito comum que alguns professores, ainda que com intenção de facilitar o entendimento da operação da multiplicação, utilizam-se do recurso de desenhos de arcos e quantidades nos arcos para que a criança entenda o algorítmo da multiplicação, como mostra a figura abaixo:

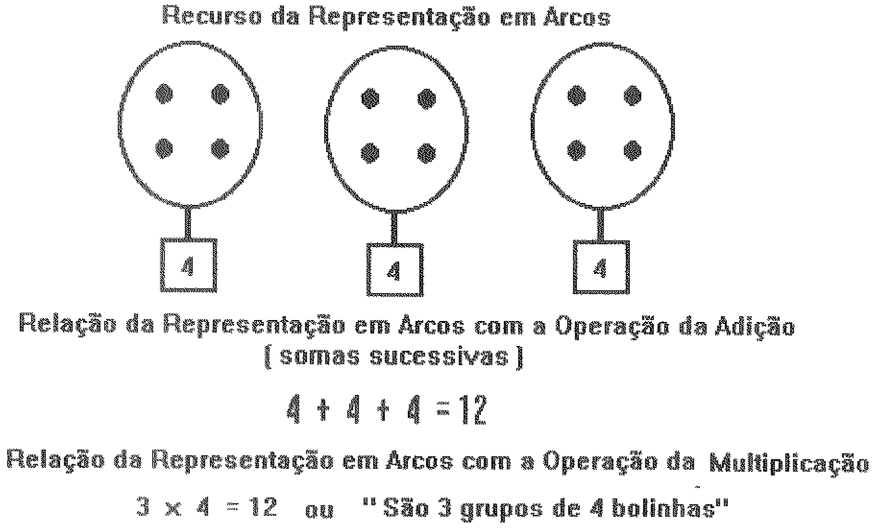


Figura 10 - Esquema de representação em arcos
(Operação da adição e da multiplicação)

Outro recurso de manipulação de material concreto utilizado pelos professores, com intenção de favorecer a aprendizagem da multiplicação como somas repetidas, é o trabalho de exploração com as Barras Cuisinaire.

Em estudo anterior, Kamii(1992) atenta para o fato de que o material Cuisinaire para o ensino do conceito de número é desnecessário e prejudicial para as crianças.

Da mesma forma, para o ensino da operação da multiplicação, esse tipo de material faz que as crianças componham a soma de parcelas iguais com barrinhas e depois transformem essa manipulação em escrita matemática, como mostra a figura 11:

Manipulação e comparação entre as Barras Cuisinaire

Relação com a escrita matemática :

2 + 2 + 2 = 6 (Adição)

ou

3 × 2 = 6 (Multiplicação)

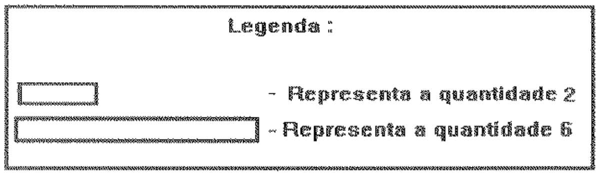


Figura 11 - Representação gráfica das Barras Cuisinaire

Ao colocar a criança em contato com o material Cuisinaire, o professor solicita às crianças que manipulem as barras correspondentes a 2 e 6, por exemplo, e pede que comparem que 3 barras de 2 é equivalente a 1 barra que vale 6. Depois da explicação do professor, escreve-se na lousa o algorítmo da adição para fazer corresponder às 3 barrinhas que valem 2 e, em seguida, escreve o algorítmo da multiplicação afirmando uma igualdade em ambos os registros.

A utilização desse material para a introdução do conteúdo da multiplicação ou fixação de aprendizagem nas crianças deve ser uma situação analisada com cuidado pelos professores, pois devemos ficar alerta para o fato de que o uso de material estruturado já induz algum tipo de resposta próxima ao correto. Além disso, não contribuem para o avanço do conhecimento lógico-matemático do sujeito, caracterizando um ensino com tendências empiristas.

Muitos professores acreditam que ao selecionarem um material como o Cuisinaire, ou mesmo o recurso de arcos , favorecerão mais rapidamente o "despertar" a "curiosidade" da criança quanto à multiplicação.

No entanto, pode-se observar que algumas crianças apresentam respostas certas, sem que isso favoreça a construção da conceituação da multiplicação. Algumas propostas escolares defendem a importância do material concreto porque entendem que as crianças precisam dele como apoio do pensamento. No entanto, inúmeras interpretações indevidas quanto à utilização do material concreto vem sendo constatadas, ainda que fundamentadas na perspectiva teórica de Piaget.

Se considerarmos o material concreto como instrumento mais poderoso, como explicar a dificuldade das crianças que, mesmo explorando tais materiais, não correspondem a relações e utilização de linguagem precisamente matemática?

Mesmo que se considere o uso de material de apoio, se este não for bem utilizado levando em conta outros fatores, como a diferença entre conhecimento físico e lógico-matemático, o fracasso poderá ser inevitável. É preciso que o professor considere a construção do sujeito, a diversidade de ações e relações que ele estabelece.

As situações escolares citadas acima como estratégia de ensino para auxiliar o entendimento da operação da multiplicação apresentam-se como um bom exemplo das confusões que os professores fazem em nome do ensino construtivista, da utilização do material concreto.

O fato de fazer com que as crianças peguem bolinhas, desenhem bolinhas, mexam com barrinhas e depois escrevam os números correspondentes a quantidade, ou quando são induzidos a reconstituir as manipulações feitas para um determinado algorítmo, como mostra as figuras 10 e 11 , não garante nenhum avanço qualitativo de raciocínio para a construção do pensamento multiplicativo.

A aprendizagem da operação da multiplicação por meio de arcos ou barras Cuisinaire pode contribuir apenas para uma aprendizagem mecânica. É preciso que os professores entendam que tal estratégia de ensino não se fundamenta na perspectiva construtivista, uma vez que esta valoriza a construção de conhecimentos pelo próprio sujeito e não por associações. A aprendizagem para se tornar efetiva deverá acontecer com compreensão e não mecanicamente.

Resolver problemas de Aritmética, o que constitui a parte mais importante da aritmética nas séries iniciais, envolve ações mentais que não são observáveis. Considerando-se que, diante de um problema aritmético a ser solucionado, a criança deve agir mentalmente, a utilização do material concreto de apoio pode permitir ao professor/experimentador seguir mais de perto o raciocínio dos alunos, acompanhando as tentativas de solução e as possíveis explicações para os procedimentos utilizados, podendo analisar o estabelecimento de relações, as significações e as antecipações no processo em questão.

A criança constrói a Aritmética por meio da abstração reflexiva. Uma pesquisa em que se focalize a solução de problemas aritméticos no 1º Grau, utilizando-se de material concreto, com objetos variados para manipulação, pode contribuir para auxiliar o professor a entender as possibilidades do uso do material em relação à representação mental e a ter uma compreensão mais clara sobre o raciocínio dos alunos e sobre os procedimentos utilizados por crianças incentivadas a pensar sobre problemas de multiplicação.

Para Vergnaud (1988, 1991) um desenho, um esquema ou algum tipo de grafismo poderá favorecer as crianças das séries iniciais a resolver um problema que só em nível das séries mais avançadas serão capazes de resolver por meio de fórmula matemática sem necessidade de outro apoio. A fórmula matemática, no caso das séries mais adiantadas é suficiente para a solução correta.

Considerando a grande ênfase que é dada para o ensino da multiplicação como soma repetidas, observa-se contrariamente que um trabalho com a estrutura combinatória tem sido esquecida na prática docente. A exploração da estrutura combinatória pelas crianças na sala de aula, poderia possibilitar o desenvolvimento do pensamento proporcional, tarefas de medidas, noção da conceitualização de área e volume, favorecendo a compreensão dos alunos quanto a conteúdos cada vez mais complexos, como é o caso de potenciações, radiciações a serem focalizados em séries mais adiantadas.

Considera-se importante que se investigue o trabalho com material concreto na solução de problemas no sentido de auxiliar o professor a compreender e perceber a riqueza e diversidade no desenvolvimento da conceitualização da multiplicação nas crianças e favorecer em sua sala de aula a variedade de estratégias de resolução, exploração de materiais de apoio escolhidas pelo próprio grupo de alunos, assim como atribuir valor para as várias representações das crianças.

Na perspectiva piagetiana, a prática docente dos professores deve estar comprometida primeiramente com um estudo aprofundado de como o sujeito constrói conhecimento; considerando o funcionamento cognitivo, a trajetória de construção das estruturas e o saber inicial do aluno em relação a todos os conteúdos organizados na escola.

CAPÍTULO IV
ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Os dados desta pesquisa foram coletados conforme já descrito no Capítulo I deste trabalho, em uma escola pública da cidade de Campinas, São Paulo. Os alunos, selecionados foram entrevistados individualmente, fora da sala de aula e os resultados das entrevistas, registrados com detalhes em protocolos, os quais foram analisados posteriormente.

Esses protocolos foram lidos cuidadosamente tantas vezes quantas se fizeram necessárias para se identificarem os elementos relacionados à compreensão dos procedimentos dos alunos e o significado dos mesmos em relação às preocupações que orientam esta pesquisa. Os resultados foram analisados, tendo como quadro de referência a Psicologia Genética piagetiana.

Os dados coletados mostraram a maneira como as crianças de 1ª, 2ª e 3ª séries do 1º Grau solucionam problemas verbais aritméticos de multiplicação.Optou-se por analisar primeiramente o Problema 5, correspondente à situação das colheres empacotadas em saquinhos, e em seguida o problema 1 que corresponde à situação das trocas de moedas de R$1,00 por moedas de R$0,50. Ambos os problemas foram analisados primeiramente porque são problemas do tipo Isomorfismo de Medidas, segundo a classificação de Vergnaud (1991).

O Problema 5 foi analisado, inicialmente, porque, segundo o autor, é o que apresenta um grau menor de dificuldade na categoria de Isomorfismo de Medida, em comparação com o Problema 1. Posteriormente, foi analisado o Problema 3, ou seja, o que corresponde à situação de combinar 4 camisas com 3 bermudas . Por último, foi analisado o problema 6, que corresponde à situação de calcular quantos ladrilhos seriam necessários para cobrir o chão de um banheiro. O Problema 3 apresenta um grau menor de complexidade em relação ao Problema 6, segundo a classificação de Vergnaud (1991). Ambos são problemas multiplicativos do tipo Produto de Medidas.

Cada problema foi lido uma vez pela criança e outra vez pelo pesquisador. Após a leitura do enunciado, o pesquisador solicitava que a criança utilizasse o material de apoio, na busca da solução, e que relatasse tudo o que ia acontecendo.

PROBLEMA 5 - COLHERES NOS SAQUINHOS

O Problema 5 trata do empacotamento de colheres em saquinhos de supermercado. Após a leitura do enunciado, o pesquisador solicitava que o sujeito mostrasse como solucionava o problema. A criança, inicialmente, manipulava colheres e saquinhos, dando o total de colheres empacotadas, e explicava como tinha chegado ao resultado.

Dos 60 sujeitos analisados, observou-se que no Grupo 1 (alunos de 1ª série) 7 crianças (35%) acertaram a resposta, no Grupo 2, (alunos de 2ª série), 9 crianças (45%) apresentaram a resolução correta; e no Grupo 3 (alunos de 3ª série), 13 crianças (65%) resolveram corretamente o problema, como mostra a Tabela 1. Todos esses sujeitos apresentaram uma representação correta ao manipular o material.

TABELA 1

PROBLEMA 5 (Colheres) - Percentual e Número de Resoluções Corretas e Tipos de Procedimentos

Procedimento / Grupos	Contagem	Aditivo	Multiplicativo	Sub-Total
Grupo 1	6 (30%)	1 (5%)	0 (0%)	7 (35%)
Grupo 2	4 (20%)	4 (20%)	1 (5%)	9 (45%)
Grupo 3	2 (10%)	3 (15%)	8 (40%)	13 (65%)

Na análise das respostas dos 60 sujeitos, 20 de cada grupo, pôde-se observar que as crianças apresentavam diferentes procedimentos no momento de resolução correta desse problema, de (contagem, aditivo, multiplicativo), como mostra a Tabela 1 acima .

Observou-se que o Grupo 1 concentrou o maior número de sujeitos que utilizaram procedimentos de contagem nos acertos do problema : de um total de 20 crianças, 6 delas (30%) resolveram e justificaram por meio de contagem. No Grupo 2, 4 crianças (20%) também resolveram por contagem, e no Grupo 3, apenas 2 crianças

(10%) recorreram à contagem para resolver esse problema, o que nos mostrou uma diferença em relação aos dois outros grupos analisados.

Constata-se que essas crianças conseguiam resolver corretamente o problema, ainda que, no caso do Grupo 1 o problema de multiplicação não tivesse sido ensinado na escola. No caso do Grupo 1, como no caso de crianças dos Grupos 2 e 3, constatou-se a utilização de procedimentos informais de resolução.

Ao se analisarem as respostas corretas por meio da estratégia de contagem verificou-se que, mesmo ao contar as colheres, (material de que dispunham as crianças dos três grupos) houve condutas diferenciadas. No caso de Tha (8;4) ela pega 4 colheres de cada vez e coloca em um saquinho e repete o mesmo procedimento até completar os 4 saquinhos. A menina demonstra estar contando as colheres em cada um dos saquinhos, mas o faz silenciosamente. Ao chegar no último saquinho e ao ser questionada quanto ao resultado final, Tha (8;4) diz: "... 16, porque contei ...". Repete o procedimento de contar e diz em voz alta : "1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,". Nessa fase, a criança ainda mostra que precisa tocar os objetos para calcular o resultado. Tha (8;4) demonstrou um tipo de contagem caracterizada como uma contagem um a um; e que ainda nesse momento ela mesma não justifica verbalmente, mas justifica na ação de colocar o dedo em cada uma das colheres ao contá-las, novamente, e em voz alta para o experimentador.

Observou-se que algumas crianças, ao invés de colocarem as colheres de 4 em 4, ainda pegam de uma em uma, para colocar nos saquinhos, o que mostra um procedimento ainda mais elementar em relação ao caso de Tha (8;4) citado acima. Outras crianças conseguem explicitar que contaram de colher em colher, ou mesmo afirmam que a contagem foi de um em um, sem precisar repetir a contagem, ou apontar o material.

Um dos procedimentos observados na estratégia de contagem foi a contagem com ritmo, que, embora seja mais elementar em relação a estratégia multiplicativa, já parece uma maneira mais aprimorada do sujeito, em comparação com a contagem um a um . A criança demonstra estar fazendo as primeiras aproximações de agrupamentos de quantidades para favorecer sua contagem, como mostra Gis (8;7):

E: Quantas colheres a mamãe levou ? Como Sabe ?

S: " Ai! Você fez eu perder a conta"! Gis contou novamente todas as colheres dentro do saquinho e respondeu : "16, que eu fui contando assim: no saquinho <u>1,2,3,4,</u> (fazia a pausa,com, ritmo, quase musicalizando) <u>5,6,7,8,</u> pegando no segundo saquinho. Nesse momento, voltou ao início, pegando todos os saquinhos e contando em voz alta: "<u>1,2,3,4,5</u>"; <u>6,7,8,9</u>"; <u>10,11,12,13</u>"; <u>14,15,16,17</u>".

E: Quantas colheres?

S: "Ai! Tia!". Falou alto, demosntrando impaciência com a experimentadora, como se a pergunta estivesse atrapalhando o seu trabalho (embora a pergunta só tivesse sido feita depois do término da contagem). Gis contou novamente e falou: "16, porque eu contei elas no saquinho, contei devagar separando as colheres dentro do saquinho".

Com as crianças do Grupo 1 (alunos de 1ª série) , observou-se que mesmo no caso de acerto do problema, recorrendo a uma estratégia de contagem, há oscilações em como fazer e especialmente na conceitualização da ação realizada, como nos mostra Ca (7;4) :

Após a leitura do problema, a criança foi solicitada a resolver e mostrar com o material tudo o que foi acontecendo na história lida .

S: "Não sei fazer!".

E: Você pode tentar?

S: "Posso".

E: Conte para mim a história que nós lemos .

S: "Uma mãe foi ao supermercado e comprou 4 colheres num saquinho e depois o vendedor colocou 4 colheres em cada saquinho".

E: Mostre para mim o que você está falando, você pode pegar nas colheres, viu ? Eu trouxe para te ajudar a resolver o problema, certo?

S: Ca começou a mexer no material, pegou 4 colheres e colocou em um saquinho, depois outras 4 colheres em outro saquinho, mais 4 colheres em outro saquinho e as 4 últimas colheres no último saquinho.

E: Quantas colheres a mamãe levou? Como você sabe?

S: " Deixa eu ver ...". Olhava para cima, ao lado e respondeu: " Não sei!".

E: Tem algum jeito de você saber quantas colheres ela levou ?

S: " Não!".

E: Diga-me, isso tudo que você fez (apontei para os 4 saquinhos que ela havia colocado as colheres dentro), você pode me explicar?

S: "É 4 colheres em cada saquinho".

E: Foi isso que ela levou para casa?

S: "Hum, hum".

E: Quantas colheres ela levou para casa?

S: Ca começou a mexer nos saquinhos, tentava contar as colheres dentro do saquinho, passou a colocar o dedo em cada colher, uma após a outra, que estavam dentro do saquinho. Contava silenciosamente. Ao terminar, respondeu : "16, porque eu contei aqui, eu contei assim: contando de 4: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16". Ca (7;4) ao ter que demonstrar o que havia feito, mostra de um em um apontando para as colheres, mas ao justificar diz que contou de quatro em quatro.

Ainda em relação ao procedimento de contagem, Ga (9;4) resolve corretamente o problema, mas demonstra, em relação a Gis

(8;7) citado anteriormente, um avanço no que se refere a conceituação que envolve o processo de resolução do problema . Ga (9;4) explica que contou pegando o primeiro saquinho, e que pegou 4 colheres, contou-as primeiramente e depois colocou dentro do saquinho. Ela continua sua explicação, dizendo que fez o mesmo para o segundo, terceiro e quarto saquinhos e ao chegar no último saquinho, já sabia que iria ter o resultado 16. Ao ser solicitada a falar como contou, Ga (9;4) diz:"... eu fiz: 1,2,3,4, daí eu fiz no segundo saquinho; eu contei 5,6,7,8 ... No terceiro (saquinho) a mesma coisa, 8 já tinha, daí 9,10,11,12 e daí no outro 13,14,15,16, daí acabou..." Mostra o procedimento de continuar a contar podendo pensar no 4 e , a partir dele, continuar o 5,6,7,8 e assim por diante. Usou inicialmente os objetos, mas mostra que já está empenhada na ação mental de adicionar e considera parte e todo com facilidade.

Quando se consideram acertos do problema, e explicitação de uma estratégia aditiva, observou-se que no Grupo 1, apenas 1 sujeito (5%) acertou e justificou aditivamente, no Grupo 2, foram 4 os sujeitos (20%) que apresentaram estratégia aditiva e no Grupo 3, 3 crianças (15%) justificaram por meio de adição.

No Grupo 2 (crianças de 2ª série), pôde-se observar uma clareza maior em explicar a estratégia aditiva a qual alguns sujeitos utilizaram para solucionar o problema. Indi (8;9) resolve antecipando e desde o início falando da necessidade de adicionar os grupos de colheres uns aos outros : "... Separa 4 deixa aqui, separa mais 4 (colheres) e deixa aqui (saquinho plástico) e mais 4 e deixa aqui e mais 4 ainda e deixa aqui". Ao explicar como havia chegado no resultado final, Indi (8;9) diz: "8, (mostrava os dois saquinhos plásticos) 12,16 (pegando os outros dois saquinhos) eu fui contando assim: 4 + 4 é 8; 8 + 4 é 12 e com mais 4 é quanto que dá 16".

No caso de crianças mais velhas, pôde -se observar que também recorrem a estratégia aditiva, porém apresentavam maior rapidez, considerando relações com outras operações durante a resolução (especialmente no que se refere à operação inversa, no caso desse problema,a divisão), como mostra Jaq (10;10) que, ao explicar o total de colheres, fala: " 4,8, 8 + 8, 16 colheres ... Eu ajuntei 4 + 4 ficou 8, e daí 4 + 4 = 8 e ao todo 16 colheres ... Esse problema é fácil, o que a professora passa é difícil , tem que fazer duas contas ... dividir 4 por 4, não sei direito divisão ... aqui eu é ... dividi 4 em cada saquinho". A criança já mostra perceber que se pode pensar em mais de uma estratégia para resolver um determinado problema, embora não explicite claramente a compreensão da operação de divisão.

No que se refere a procedimentos de multiplicação e justificativas que explicitam a solução, os sujeitos do Grupo 1 em sua totalidade não fazem nenhum tipo de aproximação, realizando seus cálculos por procedimentos de contagem .Os sujeitos dos Grupos 2 e 3 resolvem o problema colocando as 4 colheres em cada saquinho plástico, a maioria dos sujeitos já agrupam as colheres de 4 em 4 e as empacotam muito rapidamente. As explicações das crianças mostram algumas vezes a justificativa escolar usual, talvez a utilizada pelos professores quando ensinam a operação de multiplicação; mormente quando a situação do problema favorece a soma de parcelas iguais, o que Vergnaud (1991) chama atenção em relação a problemas de tipo Isomorfismo de Medidas. Na resposta de algumas crianças consegue-se identificar a antecipação do número de vezes.

Éri (9;4) responde que são 16 colheres após representar corretamente o problema manipulando as colheres e justifica: "4 x 4 = 16, porque quatro elementos em cada saquinho dá 16". No caso de Bru (9;8) observou-se outra explicação com relação à aprendizagem escolar : "4, 8 , 12, 16 ... É quase a tabuada do 4 ... Porque se põe 4, não! É a tabuada do 4 mesmo! 4 x 4 = 16". A criança ao ser questionada sobre sua justificativa a respeito da tabuada em relação àquele problema, diz : "Porque assim: se ele coloca 3 em cada saquinho ia ser: 12 e aí: 3,6,9,12 e podia ser 2,4,6,8". Uma outra situação em que a criança recorre à justificativa da tabuada é o caso de Die (9;5): "4 x 1 = 4 ; 4 x 2 = 8; 4 x 3 = 12; 4 x 4 =16 ... É igual a tabuada! Não tem 4 saquinhos? Então, cada saquinho tem 4 colheres, e daí perguntou quantas colheres ao todo e isso lembra a tabuada".

Os acertos por meio de estratégia multiplicativa demonstram um avanço siginificativo do Grupo 3, no qual 40% das crianças acertam e explicitam o procedimento de multiplicação; enquanto que no Grupo 2, apenas 5% dos sujeitos analisados recorrem à operação para solucionar o problema e conseguem justificar a solução. Esse resultado levou-nos à hipótese de que o ensino da operação da multiplicação na escola para as crianças do Grupo 2, a qual vinha sendo desenvolvida durante o período da pesquisa, pode não ter colaborado significativamente a que a criança resolvesse problemas de multiplicação.

Kamii (1995) comenta que alguns alunos de 3ª série não são capazes de engajar-se no pensamento multiplicativo e que é importante não impor a multiplicação prematuramente a essas crianças, sendo interessante permitir e incentivar procedimentos pessoais e informais.

A análise dos dados leva-nos a considerar se a escola, ao trabalhar com a multiplicação não estaria dando muita ênfase ao ensino de técnicas, em lugar de contribuir para a criança pensar por si mesma. Será que a escola estaria falhando em organizar situações que permitissem ao aluno lembrar-se dos resultados que apresenta e pensar sobre as próprias respostas?

Contribuir para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos é um objetivo que a maioria dos professores defende. Dificilmente se encontram professores de 1° Grau que não anunciem esse objetivo para seu trabalho com crianças.

TABELA 2
PROBLEMA 5 - PERCENTUAL e NÚMERO dE RESOLUÇÕES INCORRETAS e TIPOS dE PROCEDIMENTOS

Procedimento / Grupos	Contagem	Aditivo	Multiplicativo	Sem justificativa	Sub-Total
Grupo 1	12 (60%)	1 (5%)	0 (0%)	0 (0%)	13 (65%)
Grupo 2	8 (40%)	1 (5%)	0 (0%)	2 (10%)	11 (55%)
Grupo 3	6 (30%)	1 (5%)	0 (0%)	0 (0%)	7 (35%)

A análise das resoluções incorretas mostrou que de 60 sujeitos analisados no Grupo 1, 13 crianças (65%) erram o problema 5, no Grupo 2 , 11 crianças (55%) também resolvem incorretamente, sendo que 2 delas (10%) não apresentam nenhuma justificativa para o resultado obtido e no Grupo 3 há uma diminuição do número de erros nesse problema, sendo que apenas 7 sujeitos (35%) de um total de 20 crianças apresentam resolução incorreta.

No caso das resoluções incorretas, observou-se que algumas crianças parecem elaborar uma representação mental justificada segundo os dados numéricos do problema, mas sem nenhuma transformação. Não chegam a mostrar que compreendem que as colheres são colocadas nos saquinhos e que deve haver 4 delas em cada um. No problema 5, muitas crianças desde a resolução inicial (sem uso de material de apoio) consideravam que o problema tinha muitos números 4 e que isso poderia levar ao resultado 4 . Como mostra Gus (10;1) : " Só tem número 4 aqui ! Ela comprou 4 colheres, o vendedor colocou as 4 colheres no saquinho ... Pelo o que eu sei, ela comprou 4 colheres e ele colocou em 4 saquinhos. Eu tô entendendo assim! Nem sei se ela comprou de supermercado ou de vendedor! ".

Além dos erros na representação do problema, observou-se que as crianças mais novas apresentavam resoluções incorretas porque muitas delas erravam na contagem, não dominando a seqüência numérica depois do número 8 ou 9 .

Por outro lado, no momento de resolução incorreta, foram identificadas crianças que se aproximavam de uma representação mental mais elaborada, tentando uma transformação dos dados do problema, ainda que incorreta. Para resolver uma possível transformação numérica estabelecida pelo sujeito, como no caso de Dal (10;3) que diz : "8, porque 8 saquinhos mais 4 colheres ele pôs em cada saquinho! Ih! Agora para explicar isso viu!!!". A menina utiliza-se ainda dos dedos para fazer a contagem, recorrendo a outro tipo de representação, esticava 4 dedos da mão direita e 4 dedos da mão esquerda para explicar o total 8 que havia dito. Dentre os sujeitos que erraram, observou-se ainda que, ao representar os acontecimentos do problema, pegavam 4 colheres e as separavam 2 a 2 e colocavam cada par em um saquinho plástico, utilizando apenas parte do material de apoio.

Um outro caso de resolução incorreta desse problema foi a dupla possibilidade de resultados que Gus (10;1) estabeleceu durante todo o problema : a) Primeiramente resolve colocando uma colher em cada um dos 4 saquinhos plásticos e afirma que foi assim que tudo aconteceu no problema, porém ao ser questionado sobre o restante das colheres (as que sobraram em cima da mesa), Gus (10;1) hesita e responde: "Ah! Eu acho que ela comprou, acho que era as colheres que o homem tava vendendo e colocou 4 em cada saquinho, eu não sei ... Acho que eu já esqueci tudo! Eu acho que eu tô errado". Ao terminar de falar sua resposta muda de uma conduta anterior de resolução considerado apenas 4 unidades de colheres para a formação de grupos de 4 colheres e após alguns questionamentos do experimentador, responde: " Eu acho 4, mas pode ser 16, pode ser que eu tenha esquecido".

Pôde-se perceber que os sujeitos do Grupo 2, que estavam aprendendo a multiplicação por meio de exercícios, de problemas verbais, memorização da tabuada, e, particularmente, pela ênfase e valorização metodológica de somas repetidas, na sua maioria (55%) erraram o problema; isto nos levou a considerar que o ensino de soma de parcelas iguais pode não ter sido uma estratégia eficiente para se construir e compreender a operação da multiplicação mesmo que se considere, segundo a classificação de Vergnaud (1991), que o

Problema 5 é um tipo de problema de estrutura multiplicativa mais simples.

No entanto, mesmo que a escola proporcione o favorecimento de problemas desse tipo (Isomorfismo de Medida), é importante considerar que a criança não constrói o conhecimento de maneira linear; e sim por meio de construção gradual e de diferentes aproximações como defende Vergnaud (1991) a respeito da noção de *Campo Conceitual.*

O professor deve estar sempre atento para organizar situações que propiciem oportunidade das crianças pensarem por si mesmas na busca de respostas próprias e não somente aquelas encontradas nos livros didáticos.

PROBLEMA 1 - TROCA DAS MOEDAS

O Problema 1 trata de duas situações de enunciados diferentes, mas que solicitam da criança a mesma tarefa, ou seja, descobrir a quantidade de moedas necessárias para a troca de um número "x" de moedas de R$ 1,00 por um número "y" de moedas de R$ 0,50. Inicialmente, a criança mostra tudo o que foi acontecendo no problema com o material de apoio e, em seguida, responde ao experimentador qual é a quantidade de moedas necessárias, explicando como chegou a esse resultado.

Embora o enunciado diga respeito a uma situação que, à primeira vista, deveria ser significativa para a criança, envolvendo dinheiro, apenas um pequeno número de alunos (22 crianças), equivalente a 36%, responde corretamente. Trata-se de moedas com as quais imagina-se que as crianças de condição sócio-econômica menos favorecida lidem costumeiramente.

Dos 60 sujeitos analisados, observou-se que no Grupo 1 (alunos de 1ª série) apenas 1 criança (5%) apresentou resolução correta, no Grupo 2 (alunos de 2ª série) 5 crianças (25%) apresentaram resolução correta do problema, e no Grupo 3 (alunos de 3ª série) 16 crianças (80%) resolveram corretamente o problema, como mostra a Tabela 3 .

TABELA 3
PROBLEMA 1 (Moedas) - PARTE 1 - PERCENTUAL e NÚMERO dE RESOLUÇÕES CORRETAS e TIPOS dE PROCEDIMENTOS

Procedimento / Grupos	Contagem	Aditivo	Multiplicativo	Não Claro	Sub-Total
Grupo 1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (5%)	1 (5%)
Grupo 2	1 (5%)	3 (15%)	0 (0%)	1 (5%)	5 (25%)
Grupo 3	0 (0%)	5 (25%)	3 (15%)	8 (40%)	16 (80%)

A análise das resoluções corretas por meio de estratégia de contagem das moedas, na Parte 1 desse problema mostrou que apenas 1 sujeito (5%) do Grupo 2 resolveu e justificou contando as moedas de R$ 1,00. A menina Gis (8;7) diz: "... Porque, ó: 1,2,3 e 4 moedas". Apontava para as moedas de R$ 0,50 colocando em correspondência com as duas de R$ 1,00 .

Nenhum sujeito no Grupo 1 apresentou resolução correta por meio de estratégia aditiva, e no Grupo 2, apenas 3 crianças (15%)

recorreram a essa estratégia. No Grupo 3, 5 crianças (25%) resolveram corretamente por meio de adições .

Ao usar a estratégia aditiva, os sujeitos explicaram a soma que faziam entre as moedas de R$ 0,50 para chegar à resposta do problema, como Noe (8;7) que diz, destacando a questão do dinheiro: " ... 50 + 50 em número dá 100 ... e aqui ele ganhou em outro tipo". Ao explicar como havia calculado, Noe usava números inteiros para responder ao pesquisador, mas ainda afirmava que, no caso desse problema, um menino teria que fazer o cálculo em relação a centavos, explicando que lembrava ser soma de um "outro tipo"; em dinheiro, no caso. Ainda com base na estratégia aditiva Jes (9;9) conseguiu explicar um pouco a soma, citando o dinheiro, ou seja: "... Os dois saiam com a mesma quantia, porque 50 + 50 é 100 e no dinheiro a gente põe o 1, a vírgula e dois zeros e aí os dois saiu com a mesma quantia".

Foi possível identificar um outro tipo de resposta com utilização de estratégia aditiva, sendo que a criança explicava, como Indi (8;9): "... Porque R$ 1,00 + R$ 1,00 é R$ 2,00 e R$ 0,50 + R$ 0,50 é R$ 1,00."

Algumas crianças demonstram, durante a resolução do problema, uma maior elaboração na maneira de justificar, indicando uma aproximação da estratégia multiplicativa, mas não dando conta de todas as relações, como mostra Cib (10:01) que chega a afirmar que o menino tinha duas moedas de R$ 2,00 : " ... Nenhum dos dois, porque R$ 0,50 + R$ 0,50 dá R$ 1,00, tinha duas de R$0,50 + R$ 0,50 e duas de R$ 2,00". Ao afirmar que um número "x" de moedas de um determinado valor corresponde à mesma quantia de outra moeda, a criança mostrou uma progressão na estrutura multiplicativa, pois é possível perceber a tentativa de colocar os valores das moedas numa relação de equivalência. O que nos parece é que ainda lhes falta a compreensão da correspondência entre multiplicando e multiplicador, em que fique claro o número de vezes que uma moeda de R$ 1,00 deve ser somada. Se há 2 moedas de R$1,00, é possível resolver por meio da estratégia multiplicativa, ou seja: duas moedas de R$ 1,00 vezes duas moedas de R$ 0,50 que se repetem, resultando 4 moedas de R$ 0,50.

Um outro exemplo com relação a uma melhor elaboração foi a resolução de um sujeito que conseguiu estabelecer a equivalência entre uma moeda de R$ 1,00 para duas de R$ 0,50 por meio de estratégia aditiva, mas ao ter de aumentar a quantidade de moedas de R$ 1,00, acaba se perdendo no cálculo durante a resolução. Não consegue definir um plano claro e se ater a ele, o que Kamii (1995) analisa como a ausência de capacidade de coordenar um resultado menor com um final. O procedimento indica que a criança não consegue pensar em uma transformação retendo mentalmente, as anteriores. Porém com a utilização do material, a menina conseguiu chegar à resposta que lhe causou surpresa: "... Ele saiu perdendo, porque duas moedas de R$ 1,00 ... para trocar duas de R$ 1,00, eu preciso de duas moedas de R$ 0,50 que dá R$ 1,00; e mais duas moedas de R$ 0,50 é outro real, e ele trocou e ficou com as de R$ 0,50 e ... Ai! Ai! Ai! Aqui dá o mesmo tanto que ele tinha, ele não saiu ganhando e nem perdendo, eu já tinha falado , né?! Fiz uma confusão agora de pouquinho, mas já vi que ele não saiu ganhando e nem perdendo".

Os dados coletados mostraram que apenas 3 sujeitos (15%) do Grupo 3 apresentaram resoluções corretas por meio de estratégia multiplicativa. Essas crianças, mesmo resolvendo por meio de estratégia mais elaborada, ainda utilizam o material de apoio para as justificativas dadas. Como Eli (9:9), referindo-se sempre ao material, ao justificar a resposta: " ... Porque R$ 1,00 vale duas de R$ 0,50 e essa (pegava a moeda de R$1,00) vale essas duas (apontava para as duas moedas de R$0,50)". A menina calculava com o material e falava ao memso tempo, mas sempre mostrando a seguinte representação do problema ao experimentador :

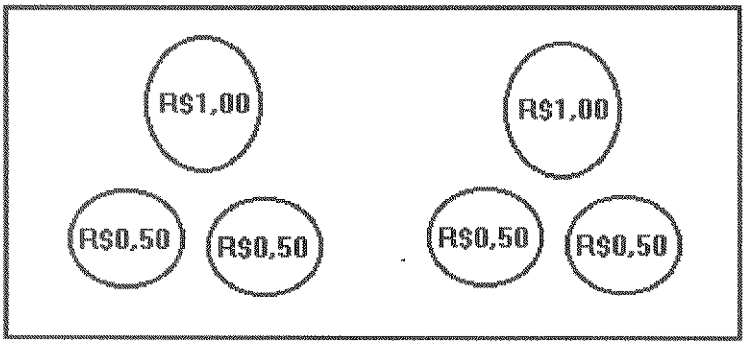


Figura 12 - Representação usual feita pelos sujeitos na correspondência entre moedas de R$1,00 com moedas de R$0,50

Identificaram-se também algumas justificativas dadas pelos sujeitos, as quais foram categorizadas na tabela 3 como procedimentos não claros. Isto porque, mostraram que, mesmo acertando o problema, ao serem solicitados a explicar como o resolveram, alguns sujeitos o fazem por meio de estratégias diversas, que não puderam ser identificadas como estratégias de contagem, aditiva ou multiplicativa.

Apenas 1 sujeito (5%) no Grupo 1 e 1 sujeito (5%) no Grupo 2 , acerta a parte 1 do problema, não deixando claras as estratégias de cálculo utilizadas para chegar à resposta. No Grupo 3, pudemos verificar que 8 crianças (40%) acertaram e não souberam apresentar com clareza as estratégias utilizadas.

TABELA 4
PROBLEMA 1 (Moedas) - PARTE 1 - PERCENTUAL e NÚMERO de RESOLUÇÕES INCORRETAS

Resoluções / Grupos	Incorretas	Total
Grupo 1	19 (95%)	20 (100%)
Grupo 2	15 (75%)	20 (100%)
Grupo 3	4 (20%)	20 (100%)

Os dados mostraram que no Problema 1 (Parte 1), 19 crianças (95%) do Grupo 1 erram o problema, 15 crianças (75%) do Grupo 2 apresentam resolução incorreta e 4 crianças (20%) do Grupo 3 apresentam erros no momento de resolução, como mostra a tabela acima .

Nesse problema, não foi possível categorizar as resoluções incorretas por meio de estratégia de contagem, aditiva ou multiplicativa porque se observou que a grande maioria dos sujeitos que erraram apresentaram uma noção intuitiva da utilização de dinheiro considerando números inteiros; tampouco demostraram noções com números decimais ou nem mesmo tentavam resolver o problema.

Além disso, por ser um problema mais complexo em nível de estrutura multiplicativa como assinala Vergnaud (1991), grande parte dos sujeitos apresentaram uma tendência à fabulação durante o problema. Outras crianças contavam o que gostavam de comprar, ou que não tinham tanto dinheiro assim (mediante as moedas que o experimentador trazia), relacionavam o menino do problema como se ele tivesse que ganhar muito dinheiro porque senão passava fome, como mostra Bru (7;3): " ... saiu ganhando, porque se ele saísse perdendo ia ficar morrendo de fome e de sede"; Kat (7;5): " ... daí ele foi ganhando 2,3,4,5,6,7,8,9 moedas de R$ 0,50, daí ele saiu ganhando ... porque a mãe dele pediu para ele comprar comida, daí ele foi ganhando dos pessoais e ele saiu ganhando". Outras crianças se detêm apenas na pergunta final: Saiu ganhando ou não? e respondem aleatoriamente que: "sim, porque sim" ou "não, porque não".

Os resultados obtidos na resolução incorreta e as justificativas das crianças menores, (Grupos 1 e 2) mostraram que, além da fabulação, a maioria dos sujeitos iniciam a resolução do problema com uma representação incorreta, não considerando os dados numéricos do problema. Ao lidar com o material, não se mostram capazes de identificar os dados relevantes para a solução do problema. Pegam aleatoriamente as moedas sem dar conta do valor expresso no enunciado.

As crianças que procuram estabelecer algum tipo de transformação com os dados numéricos no momento de resolução do problema, fazem-no com base no conhecimento social de que R$ 1,00 vale mais que R$ 0,50. Afirmam que o menino do problema não saiu ganhando porque, se ele tem duas moedas de R$1,00, ele tem R$ 2,00 e, então, a moeda de R$ 1,00 vale mais que 4 moedas de R$ 0,50, com isso o João troca e fica com menos, segundo o sujeito. Um caso de resolução incorreta, por meio de uma tentativa de transformação dos dados numéricos do problema, apoiado na idéia de que R$ 1,00 vale mais que R$ 0,50 é apresentado por Seb (7;3): "O menino saiu perdendo, porque 4 moedas de R$0,50 não conseguem ter o mesmo dinheiro de R$ 2,00 ... Ah! Porque as moedas de R$ 0,50 são um pouquinho". Pôde-se observar também em alguns sujeitos que respondiam que o menino saiu ganhando porque 50 é maior que 1, o que nos mostrou que a criança tem um entendimento e faz relações baseadas em números inteiros.

As crianças têm alguma noção do valor das moedas, mas mostram dificuldades em estabelecer as relações entre elas, necessárias para resolver o problema.

As resoluções incorretas mostraram-nos outros tipos de procedimentos por parte dos sujeitos, como as resoluções de algumas crianças que fazem a representação dos dados, colocando as moedas corretamente na mesa, fazendo corresponder 2 moedas de R$1 ,00 a 4 moedas de R$ 0,50. No momento de elaborar a resposta final e justificá-la ficam centrados na aparência do material de apoio; como mostra Nat (7;5) : "Saiu, porque aqui tem 4 de R$ 0,50 e aqui tem 2 de real; e aqui (aponta para as moedas de R$ 0,50), tem mais de R$ 0, 50 e aqui só tem duas (R$ 1,00)"; Kel (7;4): "Ganhou, porque se ele tinha R$ 1,00 e ganhou R$ 0,50, aí pelo menos ele tinha um pouco". Outro menino utiliza o mesmo raciocínio, mas explica diferente; Sam (7;2): "Saiu ganhando, porque sim, porque ele ficou com mais ... a dele (apontou para as moedas de R$ 0,50) tava mais que a mãe dele".

Nas resoluções incorretas, pôde-se observar que algumas crianças respondiam que com 4 moedas o menino saía ganhando por que era possível fazer mais compras com essa quantidade de moedas. Vejamos um exemplo na justificativa de Bea (9;8): "Saiu, porque ele trocou por R$ 0,50; e, se for alguma coisa de R$ 0,50 que ele for comprar, dá para comprar mais vezes". Com base no mesmo raciocínio, Rob (10;5) afirma : "Saiu ganhando, ele conseguiu 4 moedas de R$ 0, 50 para não gastar as de R$ 2,00 ... trocou pelas de R$ 0,50 para comprar e usar uma moeda cada dia ... ele ficou com mais moedas que a mãe".

TABELA 5
PROBLEMA 1 (Moedas) - PARTE 2 - PERCENTUAL e NÚMERO de RESOLUÇÕES CORRETAS e TIPOS de PROCEDIMENTOS

Procedimento / Grupos	Contagem	Aditivo	Multiplicativo	Não Claro	Sub-Total
Grupo 1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (5%)	1 (5%)
Grupo 2	0 (0%)	4 (20%)	1 (5%)	0 (0%)	5 (25%)
Grupo 3	4 (20%)	6 (30%)	5 (25%)	3 (15%)	18 (90%)

Na análise de dados da Parte 2 do Problema 1 (moedas), dos 60 sujeitos que apresentaram resolução correta, observou-se que no Grupo 1 (alunos de 1ª série), apenas 1 criança (5%) acerta o problema, no Grupo 2 (alunos de 2ª série) 5 crianças (25%) apresentaram resolução correta e no Grupo 3 (alunos de 3ª série)

18 crianças (90%) resolveram corretamente o problema, como mostra a Tabela 5 acima .

Os resultados obtidos na Parte 2 do Problema 1 mostraram que o Grupo 1 e Grupo 2 não apresentaram diferenças entre o número de acertos entre a primeira e segunda partes do problema, ou seja, na parte 1 e 2 do problema o Grupo 1, apenas 5% dos 20 sujeitos acertam o problema. O mesmo acontece com o Grupo 2, que tanto na parte 1 como na parte 2 do problema, apenas 25% dos 20 sujeitos apresentam resolução correta. Com relação ao Grupo 3, pudemos observar que o número de crianças que conseguem acertar o problema na parte 2 é 10% superior aos acertos da primeira parte, ou seja, na Parte 1, 16 crianças (80%) do Grupo 3 acertam, e na parte 2, 18 crianças (90%) resolvem corretamente.

Com relação aos dados obtidos quanto aos acertos do problema por meio de estratégia de contagem, nenhum dos sujeitos dos Grupos 1 e 2 resolveram e explicitaram suas respostas utilizando da contagem um a um ou dois a dois das moedas. No Grupo 3, foram encontrados 4 sujeitos (20%) que resolvem corretamente e utilizam-se da ação de apontar com os dedos para as moedas e contar em voz alta; como mostra Fel (10;5): "...1,2,3,4,5,6,7,8; porque eu contei: 1,2,3,4,5,6 e assim por diante ... Ele pode trocar por 8 de R$ 0, 50 porque eu contei antes"; ou ainda como explica Jaq (10:1): " ... 1,2,3,4,5,6,7 e 8 (foi pegando uma a uma das moedas de R$0,50); e também contei de dois em dois" (mostra esse tipo de contagem nas moedas e falando alto para o experimentador).

No Grupo 1 não foi encontrado nenhum sujeito que resolvesse corretamente e por meio de estratégia aditiva, no Grupo 2, 4 crianças

(20%) acertam utilizando a soma das moedas e no Grupo 3, 6 crianças (30%) resolvem aditivamente.

Os procedimentos de resolução e justificativas dadas por meio da estratégia aditiva na parte 2 do problema foram similares aos apresentados pelas crianças na Parte 1, como citado anteriormente; no entanto a mudança de um momento para o outro foi o número de moedas que aumentou de 4 moedas de R$ 0,50 para 8 moedas de R$ 0,50.

Para resolver o problema, as crianças utilizam as moedas colocando-as em correspondência termo-a-termo, ou seja, para cada moeda de R$ 1,00 o sujeito colocava à frente duas moedas de R$ 0,50, como Noe (8;7) que depois de fazer com as moedas corretamente, responde: " ... 8, porque aqui tem R$ 1,00 e R$ 0,50 + R$ 0,50 dá R$ 1,00; e aqui (apontava para a mesa com o restante das moedas) é o mesmo que acontece com essas". No entanto, um procedimento diferenciado na maneira de organizar as moedas foi o de An (8:8) que, inicialmente, fala que deveriam ser 6 moedas de R$ 0,50, mas ao utilizar o material, percebe que o número de moedas de R$ 0,50 é maior. A menina faz na mesa um círculo com as 8 moedas de R$ 0,50 pegando-as duas a duas, depois puxa as 4 moedas de R$ 1,00 e as coloca em cima de cada duas moedas de R$ 0,50 de maneira que parte da moeda de R$ 1,00 cubra parte de uma moeda de R$ 0,50 e a outra parte da mesma moeda de R$ 1,00 cubra a outra metade de outra moeda de R$ 0,50 que está no círculo, como mostra a figura 13:

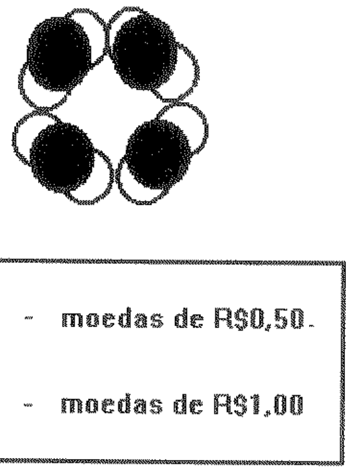


Figura 13 - Representação diferenciada apresentada por um sujeito na troca de moedas de R$1,00 por moedas de R$0,50

An (8;8) responde: " 8, porque eu coloquei em cima e R$ 0,50 + R$ 0,50 é R$ 1,00 e aí mais...". Outra explicação dada mediante a resolução correta das moedas, foi o de Mar (9;9): "Porque esses (R$ 0,50) juntos formam R$ 1,00 e mais dois desses (R$0,50) forma R$ 1,00 e assim: 4 + 4 = 8". A menina realizou a soma das moedas de R$ 0,50 agrupando-as de 4 em 4, e considerando ainda que cada 4 moedas de R$ 0,50 correspondia ao mesmo valor de R$ 2,00 representados por moedas de R$ 1,00.

Não foi encontrado nenhum sujeito do Grupo 1 com resoluções corretas por meio de estratégia multiplicativa, no Grupo 2, apenas 1 sujeito (5%) utilizou-se dessa estratégia para calcular as 8 moedas e no Grupo 3, foram encontrados 5 sujeitos (25%) que realizaram por meio da estratégia multiplicativa.

Mauri (8;10) é a única criança do Grupo 2 que acerta a Parte 2 do Problema 1 por meio de estratégia multiplicativa e ainda demonstra em sua explicação a noção de dobro; vejamos: " ... Ele trocou por 8 de R$ 0,50, porque o dobro de 4 é 8 ... em cada uma moeda de R$ 1,00 tem duas de R$ 0,50 e aqui são 4 moedas de R$ 1,00 e aí é 4 de 2, que dá 8".

Como na Parte 1, na Parte 2 também foram encontradas respostas que mostraram estratégias não muito claras e que impossibilitou mais uma vez a precisão de análise quanto às estratégias de contagem, aditiva e multiplicativa. No Grupo 1, apenas 1 sujeito (5%) e no Grupo 3, 3 sujeitos (15%) não deixam claro o procedimento utilizado ao tentar resolver o problema. Pudemos observar ainda que na Parte 1, o Grupo 3 apresentou um total de 8 sujeitos (40%) que não conseguiram explicar com clareza a resposta. No entanto, na Parte 2 o número de sujeitos do Grupo 3 que não respondem com clareza diminui para 3 crianças (15%), essa modificação poderia indicar um efeito da utilização do material de apoio e de solicitação do pesquisador, com possível aprendizagem.

TABELA 6
PROBLEMA 1 (Moedas) - PARTE 2 - PERCENTUAL e NÚMERO de RESOLUÇÕES INCORRETAS

Resoluções / Grupos	Incorretas	Total
Grupo 1	19 (95%)	20 (100%)
Grupo 2	15 (75%)	20 (100%)
Grupo 3	2 (10%)	20 (100%)

Os dados mostraram que no Problema 1 - Parte 2, 19 crianças (95%) do Grupo 1 erram o problema, 15 crianças (75%) do Grupo 2 apresentam resolução incorreta e 2 crianças (10%) do Grupo 3 apresentam erros no momento de resolução, como mostra a tabela 6 .

Como ocorreu na Parte 1, na Parte 2 também não foi possível categorizar as resoluções incorretas por meio de estratégias de contagem, aditiva ou multiplicativa. Observou-se que a maioria dos sujeitos que erram apresentam noção intuitiva e elementar da utilização de dinheiro, fazendo relações entre quantidades de números inteiros. Com isso, os sujeitos apresentaram muito mais as incorreções que cometem ao elaborarem suas respostas com problemas desse tipo de estrutura multiplicativa; ao invés de demonstrarem uma elaboração posterior que seria a de explicar o procedimento utilizado.

Os dados analisados mostraram que ainda na Parte 2 do problema as crianças têm uma tendência à fabulação como citado anteriormente. Além disso, muitas incorreções dos sujeitos ficam centradas na correspondência termo-a-termo das moedas, ou seja, para 4 moedas de R$ 1,00, a criança coloca 4 moedas de R$ 0,50. Algumas crianças fazem algum tipo de transformação na quantidade de moedas, mas não chega a ser a equivalência exata para solucionar o problema.

Kamii (1995) assinala que vencer esse tipo de problema de estrutura multiplicativa, implica a inclusão de classes. Para calcular a troca de 4 moedas de R$1,00 por moedas de R$0,50, a criança não deve pensar na troca de um por um. Quando faz isso, está pensando sobre unidades. Ao resolver esse problema, a criança deverá considerar que das 4 moedas de R$1,00, uma pode ser trocada por outras duas moedas de R$0,50; e estabelecer um maior número de relações para calcular as demais moedas enunciadas no problema.

A criança precisa considerar que nas 4 moedas de R$1,00 estão incluídas duas outras: as moedas de R$0,50, então tem que calcular e pensar nessas 2 moedas de R$0,50 que é multiplicada quatro vezes. Com base nesse raciocínio, a criança deverá pensar em unidades sobre unidades : 4 moedas de R$1,00 que contém 2 moedas de R$0,50 em cada uma delas, resultando em 8 moedas de R$0,50.

Mesmo que se considere a dificuldade desse problema, o professor pode solicitar de seus alunos a utilização de dinheiro em situações de sala de aula nas tarefas de matemática e investigar junto a eles os cálculos utilizados e as dificuldades que vão aparecendo.

PROBLEMA 3 - CAMISAS E BERMUDAS

O problema 3 trata da combinação de camisas (branca, rosa, amarela e marrom) e bermudas (azul, verde e vermelha). Inicialmente eram feitas duas leituras do enunciado do problema, (uma pelo pesquisador e outra pela criança). Depois da pergunta colocada o pesquisador solicitava que o sujeito respondesse e mostrasse por meio de material de apoio pertinente o que o problema propunha e desse a solução para a pergunta do problema. O sujeito inicialmente fazia as combinações na boneca, com as roupinhas (usando as peças de tecido).

A Tabela 7 mostra o número de combinações feitas pelas crianças na boneca utilizando as peças de roupas em cima de uma mesa.

TABELA 7
PROBLEMA 3 (CAMISAS e BERMUDAS) - PERCENTUAL e NÚMERO de COMBINAÇÕES FEITAS PELAS CRIANÇAS DURANTE a RESOLUÇÃO do PROBLEMA

Número de combinações / Grupos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Tota
Grupo 1	1 (5%)	1 (5%)	7 (35%)	2 (10%)	1 (5%)	3 (15%)	2 (10%)	1 (5%)	2 (10%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	20 (100%
Grupo 2	2 (10%)	0 (0%)	5 (25%)	2 (10%)	2 (10%)	2 (10%)	2 (10%)	2 (10%)	2 (10%)	0 (0%)	1 (5%)	0 (0%)	20 (100%
Grupo 3	0 (0%)	0 (0%)	5 (25%)	2 (10%)	0 (0%)	4 (20%)	1 (5%)	4 (20%)	1 (5%)	0 (0%)	2 (10%)	1 (5%)	20 (100%

Depois de fazer as combinações, a criança devia responder qual era o número total de combinações feitas, explicando verbalmente o número total para o pesquisador.

Os resultados obtidos na análise do Problema 3 revelaram que as crianças do Grupo 3 apresentaram uma representação mais elaborada do problema ao usar o material, indicando a possibilidade de se combinarem as bermudas e camisas de diferentes maneiras. No Grupo 1, apenas 1 criança (5%) faz uma única combinação, enquanto no Grupo 2, encontramos 2 crianças (10%) e no Grupo 3, nenhuma criança faz apenas 1 combinação. A Tabela 7 mostra-nos ainda, um número bem pequeno de sujeitos que resolveram o problema com apenas 2 combinações. No caso do Grupo 1, temos 1 único sujeito(5%) que apenas uma troca de roupa na boneca.. As estratégias de contagem das combinações mostram que os sujeitos não fazem combinações sistematicamente, não conseguem identificar todas as maneiras possíveis de combinar os elementos do problema. Resolvem mais por ensaio e erro.

Nos Grupos 1 e 2, 2 crianças (10% em cada um) fazem 7 combinações. No Grupo 3, encontramos apenas 1 sujeito (5%) que fazia 7 combinações. Os dados mostaram que apenas 1 criança (5%) do Grupo 1 consegue fazer 8 combinações, no Grupo 2, 2 crianças (10%) e no Grupo 3, foram encontradas 4 crianças (20%) que conseguem fazer 8 combinações.

Segundo os dados obtidos, depois do número de combinações feitas pelos sujeitos de cada grupo, pôde-se observar uma gradação no número de combinações entre os sujeitos dos 3 Grupos. No Grupo 1, dos 20 sujeitos analisados, 9 sujeitos (45%) fazem de uma até três combinações, sendo que 7 sujeitos desse mesmo grupo fazem 3 combinações e as outras 11 crianças deste grupo ficam distribuídas entre 4 a 9 combinações. No Grupo 2, foi observado que 7 crianças (35%) estão entre uma a três combinações feitas e as 13 crianças (65%) restantes enquadram-se entre 4 a 11 combinações. Pudemos verificar que no Grupo 2, dessas 13 crianças, há uma constante no número de sujeitos (2) para cada combinação que vai de 4 até 9; e apenas 1 sujeito faz 11 combinações.

No Grupo 3, dos 20 sujeitos analisados, 5 crianças (25%) fazem 3 combinações e as 15 restantes (75%) ficam distribuídas entre 4 a 12 combinações. Apenas 1 sujeito faz 12 combinações e 2 fazem 11 combinações.

Ainda com relação aos dados obtidos durante o momento de resolução gostaríamos de comentar que foi constatada uma tendência entre as crianças, de repetir as combinações já feitas durante a manipulação do material de apoio, sem um procedimento sistematizado de combinar as peças .

Procuraremos descrever agora, os procedimentos mais comuns encontrados durante o número de combinações feitas para a resolução desse problema.

As crianças que fazem uma única combinação dão explicações aleatórias e não demonstram nenhuma preocupação em solucionar o problema que se coloca, como Mar (7;5) que põe todas as peças de roupa na boneca de uma vez só, depois deixa apenas uma combinação e diz que todas já foram usadas. A menina diz que são 6 maneiras de colocar as roupas na boneca porque conta as 4 camisas e as 3 bermudas, mas ainda assim, faz a soma incorretamente.

Ao fazer 2 combinações, Ca (7;4) faz a primeira e segunda combinação utilizando as roupinhas rapidamente, mas não sabe dizer de quantas maneiras a boneca se vestiu. Ao ser questionada sobre as demais peças de roupa que não utilizou, afirma que com elas não se pode fazer mais nada.

O sujeito nesse caso nem se dá conta dos dados pertinentes do problema e não consegue aprender as relações que devem ser efetivados com os números do enunciado.

Ao ler o enunciado é esperado que o sujeito possa construir uma representação mental correta do problema. A representação mental no caso permitiria a organização da situação descrita, a identificação das relações e da incógnita. Está ligada à construção do plano de ação para a solução, implicando antecipações dos fins a alcançar, guiando a ação.

Com relação a 3 combinações, um procedimento comum encontrado entre os sujeitos dos três grupos foi a idéia de que a boneca poderia se vestir de 3 maneiras, uma vez que só havia 3 bermudas e com isso a quarta camisa não teria a quarta bermuda para fazer a próxima combinação. A grande maioria das crianças afirmavam que não era mais possível outra combinação porque a boneca não tinha mais roupa. Algumas crianças, utilizando as roupinhas e vestindo a boneca, ao fazerem 3 combinações, afirmam que a boneca se vestiu de 6 maneiras. Essa resposta foi possível de ser verificada uma vez que as crianças vestiam a boneca combinando na primeira maneira: a bermuda e camisa, mas afirmava que tinha duas combinações porque somava o número de peças. Com isso, as crianças contavam para o experimentador cada combinação feita, não contando o conjunto, mas a somatória de peça por peça .

Dessa forma, as crianças que fazem 3 combinações encontravam o número total de combinações a serem calculadas respondendo: "6", porque esse era o número de peças usadas, como no caso de Cris (7;7) que afirma que a boneca se vestiu de 2 maneiras, ainda que tivesse vestido apenas uma combinação na boneca responde: "... 2, porque tem a camisa e ... é mais o shorts".

As crianças do Grupo 1 e 2 mexiam muito nas peças de roupas até fazer uma das 3 combinações e não demonstravam nenhum procedimento mais sistematizado e controlado em relação a combinação, em nível de ir separando o que já havia feito. Elas iniciavam com qualquer peça (camisa ou bermuda), por exemplo: camisa branca com bermuda azul, passando para a camisa rosa com bermuda vermelha, depois a camisa amarela com bermuda verde.

Pôde-se observar que essas crianças estavam centradas na aparência da combinação, dados não relevantes do problema, ou seja, entre cores de camisas com cores de bermuda: camisa amarela com bermuda verde porque lembra do uniforme da seleção de futebol do Brasil, na camisa marrom com bermuda verde porque faz parecer com índio, camisa branca com bermuda azul porque parece uniforme de escola. Não consegue sistematizar o procedimento para esgotar as possibilidades.

As 3 combinações feitas pelas crianças do Grupo 3 mostrou alguns avanços com relação à maneira de selecionar as roupas e colocá-las na boneca. Algumas crianças colocavam 2 combinações na mesa e uma na boneca, separavam ao lado o que havia acabado de colocar na boneca, mas em seguida já misturavam com as demais. Nesse caso, as crianças passaram a mostrar um pequeno avanço em comparação aos dois outros Grupos (1 e 2), pois as crianças mais velhas já conseguem lembrar que colocaram a primeira, segunda e terceira combinações de roupas.

Nesse Grupo 3 também foi possível observar que as crianças passam a cogitar a idéia de que a boneca poderia fazer mais que 3 combinações, só que isso a levaria a repetir roupas. Embora verbalizassem essa possibilidade, não chegam a mexer e modificar o resultado dado.

Por fim, com relação a 3 combinações feitas pelas crianças dos 3 Grupos analisados, pôde-se observar que foi a única combinatória onde todos os sujeitos (com exceção de uma criança) não repetiram nenhuma combinação, pois estavam centrados na idéia de 3 camisas e 3 bermudas, o que nos parece um dos principais conflitos a ser superado para a busca de um sistema de combinatória.

Ao fazer 4 combinações, algumas das crianças mais novas passam a considerar que mesmo com uma camisa sobrando é possível fazer algo com ela.

Um sujeito do grupo 3 que faz 4 combinações mostra claramente a oscilação entre seu raciocínio espontâneo (somar 3 + 4 = 7) com o que vem aprendendo em sala de aula. Vejamos: Bru (9:8) procede desde o início da resolução do problema falando sobre o seguinte assunto: "... De duas, porque se ela tem 4 + 3, ajuntando as classes é 2 ... eu tô aprendendo, ajuntando vai dar 2 classes, porque se tem 2, vai dividir com camisa e bermuda ... Aí, a Maria, as calças, não! As bermudas (separou-as) e 4 camisetas (separou-as em outra parte da mesa) ...". O menino colocou a mão sobre as roupas separadas na mesa e falou: "... Mas, peraí! Ela põe uma vez ou pode ir trocando?". Bru (9;8) passou a fazer as combinações, afirmando que estava trocando as roupas entre si, mas após fazer a quarta combinação, afirma que a boneca havia se vestido de 7 maneiras porque: "... já foi o 3 + 4 = 7, é mesmo 7, eu vesti ela".

Mesmo fazendo um número pequeno de combinações, como é o caso de 5 combinações em relação a 12 que é o resultado correto, observou-se que as crianças fazem repetições com as roupas que acabaram de colocar na boneca.

As crianças não conseguem guardar um critério de combinação, esgotando as alternativas: para cada tipo de peça (bermuda ou camisa/ ou tipo de cor: branca, amarela, marrom, rosa, verde, vermelho, azul) .

As crianças do Grupo 1 que fazem 6 combinações, se perdem na contagem das mesmas e não chegam a dizer que fizeram 6 combinações na boneca. Passam a selecionar, ainda que sem sistematização, duas peças de roupas para combiná-las com as possibilidades corretas, como Nai (7;5) que pega a camisa rosa e faz com bermuda verde, pega camisa amarela e faz com bermuda azul, volta a pegar camisa rosa e dessa vez faz com bermuda azul e posteriormente pega camisa amarela novamente com bermuda verde.

As crianças do Grupo 3 apresentam uma rapidez um pouco maior nas trocas entre uma possibilidade e outra em relação as demais crianças e o número de combinações. No entanto, mesmo que ainda não demonstrem uma sistematização na escolha das peças, já procuram tirar cada combinação de peças da boneca e separar colocando em um canto da mesa, já são capazes de reconhecer que estão fazendo combinações repetidas, duas vezes com determinada cor de camisa, ou de bermuda.

As crianças mais novas (Grupos 1 e 2) que passam a fazer um número maior de combinações, passam também a repetir as combinações feitas: como no caso de 7 combinações e que aumenta o número de roupas repetidas durante a resolução. Pudemos observar que os sujeitos dos Grupos 1 e 2 ao mesmo tempo que passam a fazer mais combinações sem qualquer sinal de busca por um sistema combinatório, nos mostra um avanço das crianças do Grupo 2 em relação ao Grupo 1.

Ao fazer 8 combinações, as crianças passam a demonstrar um certo sistema, onde utilizam 3 bermudas primeiramente com 3 camisas diferentes, ou pegam 2 camisas e fazem com 2 bermudas de mesma cor, sendo que os intervalos das combinações entre bermudas ou camisas de mesma cor já não são tão espaçados. Acredita-se que, por fazerem um maior número de combinações, erram na contagem, algumas crianças respondem que fizeram 4 ou 5, outras dizem que foram 10 ou 11, pois vão considerando as repetições feitas sem dar conta que deveriam excluí-las.

Um exemplo foi a resolução de Gus (10;1) que faz até a oitava combinação e ao ser questionado se poderia vestir a boneca de outra maneira, responde :

S: "Vchi ! (colocava a mão na cabeça). "Ela pode colocar essa (cam. Rosa) para dormir ... Ela dorme ..." (colocou a boneca para dormir).

E: Quantas maneiras ela já se vestiu?

S: "10 ".

E: Me diga uma coisa, e as bermudas da Maria ? Ela não vai mais usar?

S: "Ai meu Deus do céu!!! Perdi, ela pode coloca esse (vermelho) ... ". A partir desse momento, pegou as camisetas e foi falando: "esse eu já fui, esse já fui , esse, esse". Pegou em todas as camisetas.
Em seguida fez a 9ª combinação.

E: Quantas maneiras ela se vestiu?

S: "11, não! Peraí! 12! Não! Foi 11 mesmo".

E :Ela pode se vestir de outra maneira?

Gus riu, pegava na boneca, olhava na bermuda vermelha e falou: "Ela pode ficar louca e colocar o short na cabeça, a blusa na cintura, ela pode coloca os 2 shorts no braço". Foi fazendo na boneca tudo o que estava falando.

E: Tem outro jeito de se vestir com essas 4 camisetas e 3 bermudas?

S: "Tem um monte! Eu não sei nenhum! Ela coloca a blusa na cabeça porque vem um homem, ela sente vergonha: "Ai que falta de ar! (imita com voz de menina como se a boneca estivesse falando)" Uau! Uau! Como eu sou radical!".

E: Tem mais alguma maneira?

S: "Ela pode... deixa vê, deixa vê , deixa vê ... Pelo o que eu conheço, não!".

E: Quantas maneiras ela se vestiu até agora?

S: "De um monte, pelo que eu sei 16". "Ela pode colocar um monte de coisa, nem sei de quanto ela pode se vestir".

E: Você acha que tem algum jeito?

S: "Se acho que tem algum jeito? Só se ela fosse colocando, colocando todas as roupas nela, até não dá mais, ía dá uma canseira!".

E: Como ela sabe que não dá mais?

S: "Até a hora que ela acha que acaba, só que ela vai esquecer de tudo e ela vai repetir, repetir...".

E: Tem algum jeito para ela não repetir?

S: "Só se ela escrever num papel"..

E: Você acha que ela tem algum outro jeito de se vestir com essas roupas?

S: "Colocar um pé em cada short (pegou a bermuda verde e a azul), a blusa na cabeça (branca e a rosa) e essa (camisa amarela) aqui no peito".

E: E de quantas maneiras ela se vestiu?

S: "Ah! Já nem sei! Um montão!".

E: Tem outra maneira?

S: "Pelo que eu sei, não".

As crianças mais velhas estabelecem mior número de relações frente aos dados do problema, mas nem sempre chegam a dar conta de uma resposta correta.

Outra criança, como mostra Pri (9;7) até a sexta combinação faz sem repetir nenhuma roupa, porém quando faz a sétima combinação (repetida) pára e responde para o experimentador: "... Eu errei ... Aquela hora (referiu-se a combinatória anterior) eu já vesti desse jeito". Ao fazer a combinação seguinte, a menina não desconsidera a anterior (repetida) e responde que já são 8 maneiras de vestir a boneca. Ao fazer a combinação seguinte diz que é a nona, no entanto é a sua oitava maneira de vestir a boneca. Pri anuncia que estará fazendo a última combinação. A menina só lida com a bermuda vermelha nas duas últimas combinações.

Embora perceba que possa trocar a boneca várias vezes, Pri chega a afirmar que tem mais possibilidades de troca, mas justifica como as crianças menores: "... Ela pode, mas não com essas, pode ser com outras, ela tem que comprar".

Um exemplo de uma criança mais velha, foi o de Fáb (9;7) que faz 8 combinações e repete 4 vezes a mesma combinação, e ainda faz 2 combinações usando 3 peças de roupas (camisa por cima de camisa); totalizando 12 trocas na boneca. O menino consegue recuperar o número total de trocas (12), mas diminui 1 troca no momento do cálculo mental, passando a considerar que faz 11 combinações na boneca. Quando o experimentador lhe pergunta se há mais alguma maneira da boneca se vestir, com as 4 camisas e 3 bermudas responde:

S: "7".

E: Você fez as 7 maneiras aqui?

S: "Oito, só se usar de novo a mesma bermuda".

E: Como você sabe disso?

S: "Se ela vestir uma bermuda e uma camisa (mostrou a camisa marrom com bermuda azul), a camisa rosa com vermelho, a amarela com verde, o shorts azul e camisa branca".

E: Até agora, quantas maneiras?

S: "Oito".

E: Como foi que você achou as 8 combinações mesmo?

S: "Porque eu coloquei, eu usei duas vezes a bermuda azul, aquela lá foi onze vezes? Então , eu repeti a roupa".

E: Quantas maneiras ela já se vestiu?

S: "Dezenove".

E: Como você achou?

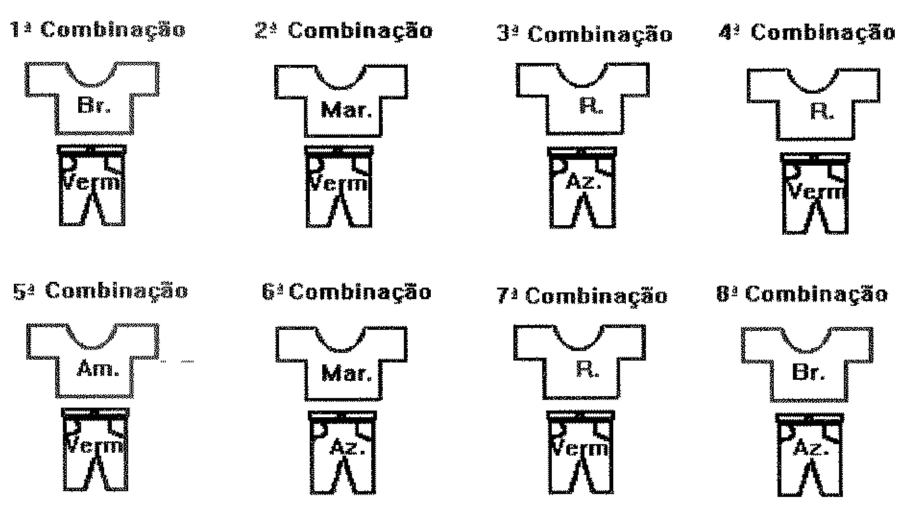
S: "Eu contei oito com essas e onze com aquelas lá".

E: Quantas maneiras ela já se vestiu?

S: "Dezenove".

A partir de 9 combinações foi possível verificar uma elaboração maior por parte dos sujeitos dessa pesquisa, ainda que não tenham chego ao sistema formal de combinatória.

A figura abaixo, mostra passo-a-passo o procedimento de uma criança, Ra (7;6):



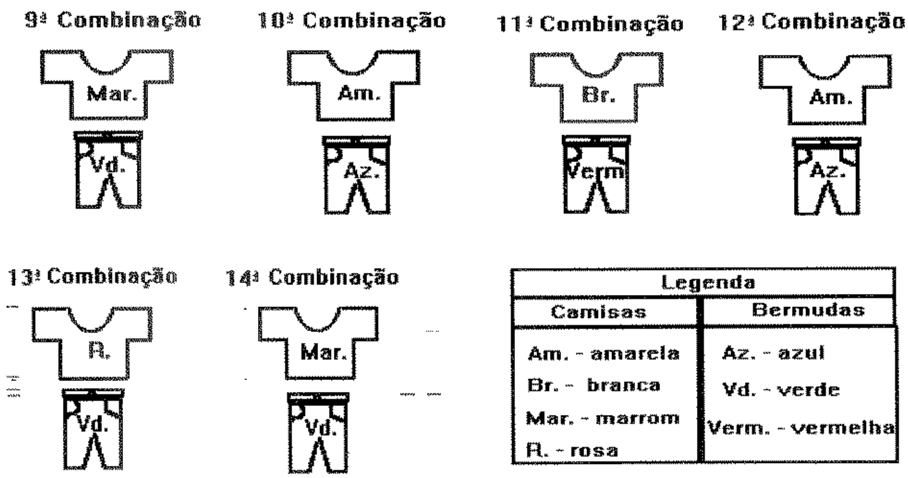


Figura 14 - Representação gráfica das combinações de camisas e bermudas
(1º exemplo)

Pôde-se observar que durante as combinações de Ra (7;6), a menina usa a bermuda vermelha duas vezes seguida formando as duas primeiras combinações e consegue responder que já vestiu a boneca de duas maneiras. Ao fazer a terceira combinação muda completamente as cores de bermudas e camisas. Ao fazer a quarta combinação continua com a cor (rosa) de camisa anterior e volta a pegar a bermuda vermelha. A menina consegue responder que até então havia feito 4 combinações na boneca. Quando faz a quinta combinação, só muda a camisa, permanecendo com a bermuda vermelha, mas já não consegue dizer que já são 5 combinações; e afirma: " ... Não lembro".

Ao prosseguir com as combinações, a menina faz a sexta maneira e muda completamente as cores que passou a repetir anteriormente. No entanto, ao ser perguntada novamente sobre a quantidade de combinações, fala que fez 6 combinações. A menina acerta o número de combinações, mas ao ter de justificar diz: "6 maneiras, sei sabendo".

Antes de fazer a sétima combinação, Ra (7:6) tira as peças que estavam na boneca, separa as camisas de um lado e bermudas de outro. Ela faz em cima da mesa duas combinações: camisa rosa com bermuda verde e camisa rosa com bermuda azul. Ao ser questionada se estas seriam as próximas combinações, a menina diz que não, que só estava experimentando e volta-se para a boneca e faz a sétima combinação. A própria criança diz que essa combinação é repetida e que vai fazer outra diferente. A menina faz a oitava combinação na boneca e a nona combinação em cima da mesa. Ao ser questionada sobre a quantidade de combinações feitas até aquele momento, fala corretamente: "9, sabendo"; porém observa-se que ela não consegue explicar como sabe que já se foram 9 combinações.

A menina faz a déciam combinação montando um conjunto que até então não havia feito, passa a fazer da 11ª à 14ª combinações repetidas. Foi interessante observar que na 11ª combinação responde: "11, mas já sei que é repetida!". No entanto, as combinações restantes também são repetidas, mas ela deixa de verbalizar; e ao ser questionada novamente sobre a repetição na última combinação que fez, responde: "... Ah! Não sei disso, não!".

No caso de Raf (8;5) pudemos observar uma evolução no cálculo mental, ainda que incorreto para responder de quantas maneiras havia vestido a boneca. O menino faz a primeira combinação e diz qua já se foram duas, porque uma bermuda mais uma camisa, são dois; ao fazer a segunda combinação, responde que são 4, porque " 2 + 2 = 4". Faz a terceira combinação e responde: " 6, porque 2 + 2 + 2 = 6". Ao chegar na quinta combianação, responde: "10, porque foi 2 x 2 x 2 x 2 x ... (a criança faz uma pausa e volta a falar) Tudo isso dá 10?". Ele tenta resolver por meio do cálculo da operação da multiplicação, mas ao mesmo tempo percebe seu erro no cálculo e volta para as adições sucessivas até que chega a fazer 11 combinações e diz que ela se vestiu de 22 maneiras, porque soma : 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 22.

As crianças que conseguem maior número de combinações (10 até 12) passam a quantificar com mais facilidade quantas foram as maneiras trocadas na boneca, mas isso não nos mostrou uma exatidão de cálculo em nenhum dos sujeitos. Na medida em que faziam mais combinações passavam a fazer algumas repetições e não relacionavam esses dois dados de natureza distinta no momento de cálculo do total de combinações feitas.

Um maior número de combinações ou o número exato de combinações possíveis do problema ainda não foi construída pelo sujeito em um sistema operatório de combinatória, onde poderia conseguir combinar: a camisa branca com todas as 3 bermudas, a camisa rosa com todas as 3 bermudas, a camisa amarela com as 3 bermudas e a camisa marrom com todas as 3 bermudas; ou ainda selecionar uma bermuda (azul, verde, vermelha) e combinar com cada uma das 4 camisas, fazendo isso com cada cor de bermuda, sistematicamente. Esse sistema operatório pode ser expresso pelo seguinte esquema:

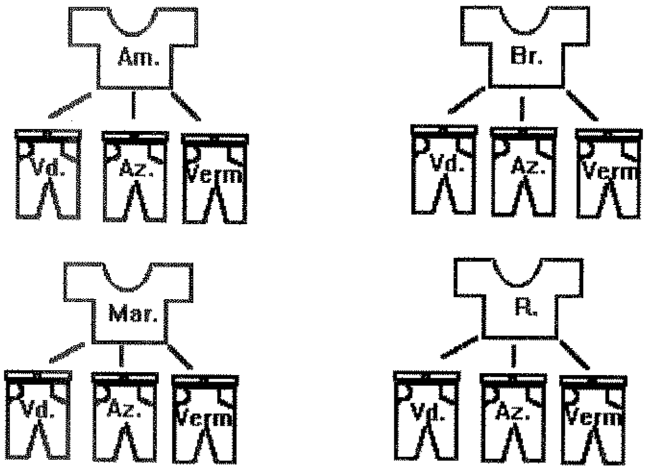
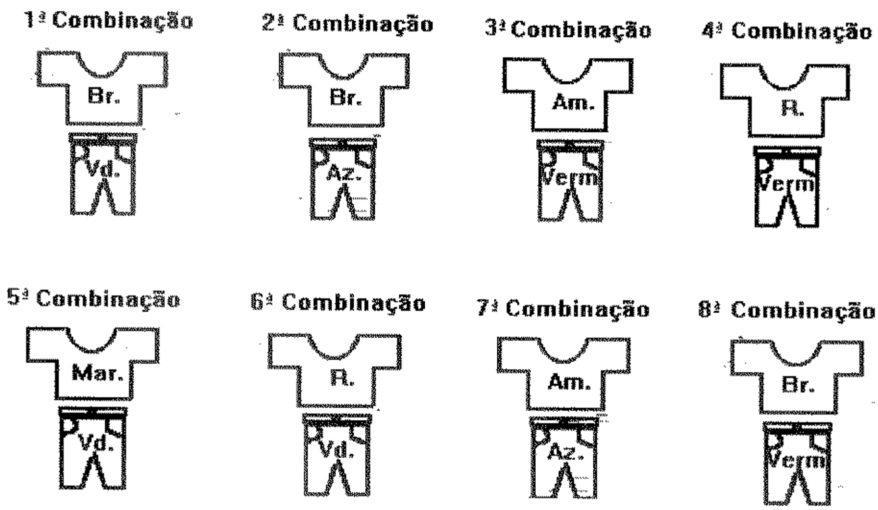


Figura 15 - Esquema das combinações entre 4 camisas e 3 bermudas

No entanto, observou-se que ainda sem uma conceitualização maior, os sujeitos que fazem 10, 11 ou 12 combinações, já demonstram mesmo que intuitivamente a busca de um sistema mais elaborado. Vejamos como Tha (9;7) demonstra, ainda que intuitivamente um intervalo de variação entre camisas e bermudas da mesma cor:



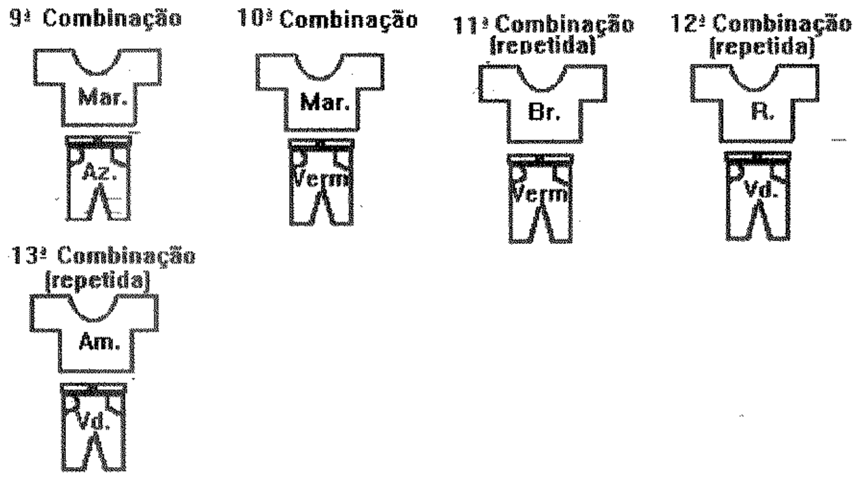


Figura 16 - Representação gráfica das combinações de camisas e bermudas

(2º exemplo)

Jes (9;12) que faz 12 combinações passa a mudar as cores, variando a partir da oitava combinação, sem manter nenhum sistema e se perde na contagem dizendo que fez 12 maneiras enquanto havia feito apenas 11. Continuou a fazer a 13ª, 14ª, 16ª, 17ª repetindo combinações anteriores, conseguindo apenas fazer a 15ª como novidade (camisa amarela com bermuda azul). Ao ser questionada sobre mais possibilidades, responde:

S: "Acho que não, eu acho que eu já usei tudo as roupas juntas".

E: Você acha que tem um jeito de saber isso?

S: "A gente vendo assim, pegando a blusa branca com todos os shorts, aí pega a blusa amarela com todos os shorts, a blusa rosa com todos os shorts e a blusa marrom com todos os shorts".

E: E quantas maneiras diferentes a Maria pode se vestir?
S: "Dezessete ... Ahhhh, eu acho que eu repeti algumas, mas eu não tenho certeza". "Eu acho que dá para ela se vestir 12".

E: Por que?

S: "Porque eu contei como eu expliquei, de 3 em 3 : 3,6,9,12".

E: Quantas maneiras?

S: "Acho que é só 12 mesmo".

As crianças demonstraram uma grande dificuldade para elaborar as possibilidades de combinações de roupas, porque estão centradas em dados de diferente natureza; e que não chegam a se aproximar da estrutura multiplicativa, a qual é necessária para a resolução correta do problema. Os dados mostraram que as incorreções por parte dos sujeitos estão centradas em dados elementares porque dizem que só é possível colocar de outras maneiras se as roupas forem lavadas e passadas, ou se colocarem uma saia ou vestido. As crianças que passam a admitir possibilidades não dão conta no momento de resolução e afirmam: "Acho que sim, porque eu não lembro direito as roupas que eu coloquei"; ou ainda: "... tem algum jeito a mais, mas não sei que jeito é".

No caso do Problema 3 desta pesquisa, um tipo de problema de estrutura multiplicativa, não era pedido nenhum tipo de registro. Era preciso que a criança recuperasse verbalmente: " Eu já fiz uma maneira de vestir a boneca, porque eu já coloquei essa camisa com essa bermuda ". A criança era solicitada a verbalizar a quantidade de combinações feitas até se chegar na total possibilidades esgotadas pelo próprio sujeito.

Os dados desta pesquisa indicaram que o trabalho com problemas multiplicativos do tipo Produto de Medidas exige da criança uma abstração de nível superior, um nível maior de conceituação da multiplicação, como assinalou Vergnaud (1991).

Os resultados obtidos mostraram que esse tipo de problema pode ser trabalhado com crianças menores, mas por meio de esquemas inventados por elas próprias: desenhos, utilização com material de apoio, onde apareça não só a exploração do cálculo mental, mas também o registro matemático construído pelas crianças menores. O professor poderá investir em problematizações desse tipo, onde as crianças pequenas sintam necessidade de algum tipo de registro: de se pôr no papel, como muitas delas afirmam: " Ah! Eu saberia se a boneca "não tava" repetindo roupa, porque se eu anotasse no papel..." ou "... se eu fizesse uma marcacom caneta para cada blusinha usada".

A criança demonstra necessidade do registro gráfico; e em sala de aula, isso pode ser inventado de várias maneiras pelas próprias crianças.

O professor precisa ouvir o seu aluno, e nesse caso, seria interessante que propusesse problematizações de diferentes naturezas e viabilizasse com seu grupo de alunos, a importância do registro gráfico, assim como do cáculo mental.

PROBLEMA 6 - LADRILHOS E CHÃO DO BANHEIRO

O Problema 6 trata da situação de cobrir determinado espaço do chão de um banheiro com ladrilhos. Em um primeiro momento a criança utilizava o material para cobrir o espaço que correspondia ao chão de um banheiro e definia a quantidade necessária de ladrilhos, ainda justificava para o experimentador como chegava ao resultado. No outro momento, o pesquisador apresentava o enunciado verbalmente (sem ler) para a criança, solicitando que calculasse a quantidade de ladrilhos que faltavam para cobrir o restante do chão. Nessa segunda situação, a criança não utilizava o material.

A apresentação da análise de dados desse problema foi feita em dois momentos. Em um primeiro momento tem-se a análise da Parte 1 do Problema, onde a criança deveria calcular a quantidade total de ladrilhos, utilizando o material de apoio. Em um segundo momento, a análise dos dados no que se refere a Parte 2 do Problema 6, ou seja, aquela que é enunciada verbalmente pelo experimentador, sem a leitura.

Na Parte 1 do Problema 6 (Ladrilhos), dos 60 sujeitos analisados quanto à resolução correta, observou-se que no Grupo 1 (alunos de 1ª série) 7 crianças (35%) acertaram, no Grupo 2 (alunos de 2ª série) 12 crianças (60%) apresentaram resolução correta do problema e no Grupo 3 (alunos de 3ª série) 18 crianças (90%) resolveram corretamente o problema, como mostra a Tabela 8 .

TABELA 8
PROBLEMA 6 - PARTE 1 (Ladrilhos) - PERCENTUAL e NÚMERO de RESOLUÇÕES CORRETAS e TIPOS de PROCEDIMENTOS

Procedimento / Grupos	Contagem	Aditivo	Multiplicativo	Sub-Total
Grupo 1	7 (35%)	0 (0%)	0 (0%)	7 (35%)
Grupo 2	10 (50%)	0 (0%)	2 (10%)	12 (60%)
Grupo 3	10 (50%)	5 (25%)	3 (15%)	18 (90%)

Também foram analisados os procedimentos utilizados pelos sujeitos no momento de resolução desse problema, identificando-se a estratégia de contagem, aditiva e multiplicativa.

No Grupo 1 (alunos de 1ª série), 7 crianças (35 %) resolveram por meio de contagem, no Grupo 2 (alunos de 2ª série), 10 crianças (50%) e no Grupo 3 (alunos de 3ª série), 10 crianças (50 %) acertaram justificando por meio de estratégia de contagem.

Observou-se que nos Grupos 1 e 2 nenhuma criança resolveu o problema por meio de estratégia aditiva, e no Grupo 3, 5 crianças (25%) recorrem à adição para resolver o problema.

Pôde-se observar com relação a estratégia multiplicativa que nenhuma criança do Grupo 1 chega a justificar por meio da multiplicação, no Grupo 2 (alunos de 2ª série), 2 crianças (10%) recorrem a multiplicação e no Grupo 3 (alunos de 3ª série) 3 crianças (15%) justificam por meio de estratégia multiplicativa.

No que se refere aos acertos por meio da estratégia de contagem, observou-se que as crianças preenchem a base que serviu de chão do banheiro de diferentes maneiras: algumas crianças começavam linha por linha dos ladrilhos, colocando de 6 em 6; outras colocavam simultaneamente o primeiro ladrilho da primeira linha como o primeiro ladrilho da segunda linha até que completassem as duas primeiras linhas de ladrilhos juntas. Foi observado ainda que as crianças preenchiam coluna por coluna, colocando os ladrilhos na base de 4 em 4. Apareceram outros procedimentos na maneira de preencher a base, alguns de forma bastante desordenada em relação ao citado acima (o que foi mais usualmente encontrado na maioria das crianças analisadas), essas crianças preenchiam toda a borda da base para posteriormente preencher o restante; outras viravam a base colocando-a de maneira que o comprimento passasse a ser 4 ladrilhos e a largura 6 ladrilhos; outras colocavam os ladrilhos nas extremidades da base e iam colocando os ladrilhos em qualquer lugar da base sem se darem conta de terminar uma linha inteira, ou uma coluna, antes de passar para outra, e assim por diante.

Observou-se que tanto no Grupo 1 como no Grupo 2, as crianças que acertaram o problema fazem uma contagem de um a um dos ladrilhos após o preenchimento da base; e não demonstram em sua maioria fazer nenhuma relação com o momento de preenchimento onde já seguiam um certo agrupamento de 4 em 4, ou de 6 em 6 , o que poderia facilitar no momento do cálculo.

Ao explicar como resolvera (procedimento de contagem), Leo disse (7;4): "Porque eu contei, contando os números, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24"; Die (7;4): "Eu fiquei fazendo assim ... (fez com o dedo batendo nos ladrilhos); Mat (7;2): "... eu contei aqui porque eu fui contando um por um ....". Sam (8;4): "24, porque eu contei aqui, contando um em um"; Ale (8;11) "...eu fui contando um de cada vez, eu punha um e eu contava". As crianças mais velhas, correspondentes ao Grupo 3, ao resolver por meio de contagem demonstram um avanço, como Wil (9:5): "Porque eu contei: 3,6,9,12,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24". A menina iniciou com contagem de três em três e ao aumentar a quantidade volta para a contagem um a um.

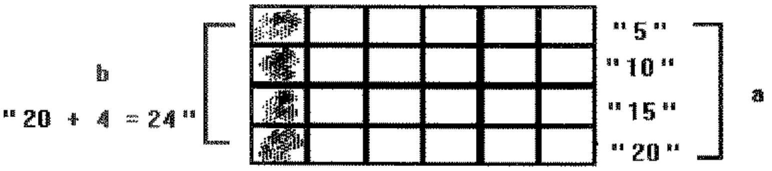
Outra explicação foi apresentada por Dal (10;3) que, ao contar os ladrilhos, lembrou da tabuada que aprende em sala de aula: "24, porque eu contei! Porque para saber tem que contar que nem na classe: a gente tem que conta assim: olhando e na cabeça, mas eu não consigo, eu fico assim (apontou com o dedo no ar), mesmo que não pode ... contei assim: 1,2,3,4,5,6 e 7,8,9,10,11,12 e peraí! Peraí!". Dal (10:3) começa a contar de dois em dois: "2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24... Porque será que ... é ... será que todas as tabuadas tem 24? Ai! Eu sou tão lerda na tabuada, eu não conto para ninguém, só pra quem eu confio, mesmo a professora "L" que é a melhor professora que eu conheci, eu não conto porque tenho medo que ela saiba". Ao ser questionada porque lembrou da tabuada nessa situação, diz: "Porque eu confundo tudo ...sempre aparece 24".

Essa situação poderia nos indicar que a aprendizagem com compreensão é pouco comum na relação ensino-aprendizagem vivenciada pelas crianças na escola. Outro aspecto que nos chama atenção durante a explicação dessa criança é o fato de que mesmo afirmando ter uma boa professora, a atitude da criança parece indicar que a professora não permite que seus alunos usem recursos próprios: pode indicar uma postura autoritária e repressora diante dos racicínios espontâneos de seus alunos. É interessante, considerando a perspectiva construtivista, que o professor tenha a "sensibilidade" de perceber os procedimentos mais usuais de seus alunos em face das tarefas exigidas na escola e que compreenda a importância dos mesmos no processo de solucionar problemas. Além disso, é importante ter clareza em relação aos instrumentos cognitivos de que as crianças dispõem para resolver os diversos problemas que surgem.

Os procedimentos, justificados por meio de estratégias aditivas, foram pouco utilizados pelas crianças menores (Grupo 1 e Grupo 2), sendo que o maior número de acertos foi de sujeitos do Grupo 3, como no caso de: Jaq (10;10): " Porque aqui (apontou para toda a primeira linha de ladrilhos) tem 6: 1,2,3,4,5,6 e embaixo também 1,2,3,4,5,6; então 6 + 6 = 12, mais 6 + 6 = 24, (apontou para as duas outras linhas de ladrilhos que completavam a base), juntando os dois: 12 +12 = 24".

Nat (9;4) apresenta uma estratégia aditiva, afirmando para o experimentador : soma um a um os ladrilhos: "1+1 daí dá 2, mais 1 é 3, mais 1 é 4, mais 1 é 5, mais 1 é 6, mais 1 é 7, mais 1 é 8, mais 1 é 9, mais 1 é 10 ,mais 1 é 11, mais 1 é 12, mais 1 é 13, mais 1 é 14, mais 1 é 15, mais 1 é 16, mais 1 é 17, mais 1 é 18, mais 1 é 19, mais 1 é 20, mais 1 é 21, mais 1 é 22, mais 1 é 23, mais 1 é 24; eu fiz uma conta de mais". Explicita, portanto, que não conta simplesmente, mas sim que soma os ladrilhos.

Um procedimento do tipo aditivo encontrado por um sujeito, foi o de Jes (9;9) que desmancha (decompõe) a quantidade de ladrilhos diferentemente para chegar ao resultado 24, como mostra a figura:



a) contagem de 5 em 5 ladrilhos feita pela criança
b) total de 20 ladrilhos adicionado aos 4 ladrilhos da 1ª coluna

Figura 17 - Representação dos ladrilhos na base

(procedimento de contagem por decomposição)

Na figura 17 : a) refere-se a contagem de 5 em 5 dos ladrilhos na base e b) refere-se aos 4 ladrilhos (pintados na figura) que Jes adiciona aos 20 ladrilhos contados anteriormente. Jes (9;9) justifica dizendo: "24, eu contei tinha 6 em cada fileira, mas eu contei só 5, daí deu 20 e os 4 que sobraram, então 20 + 4 = 24".

Decompor quantidades para calcular, é um procedimento comum para as crianças, como mostraram inúmeras pesquisas (Kamii, 1995) . A partir da resolução de Jes (9;9) e de sua explicação sobre o procedimento, foi possível observar que a menina procurou desconsiderar na base os ladrilhos que compunham a primeira coluna (4 ladrilhos) e lidou somente com 5 ladrilhos de cada uma das 4 linhas. Esse desmanche de 4 linhas por 6 colunas foi calculado de outra maneira, ou seja a criança considerou 5 linhas de 5 colunas; o que pareceu facilitar a contagem. Ainda que não tenha sido afirmada pela criança o cálculo por meio da multiplicação (5 x 5), o sujeito consegue resolver com êxito e recorre a um tipo de agrupamento que está diretamente relacionado ao apoio do próprio corpo: sendo a quantidade 5, a mesma quantidade de dedos de uma das mãos, as quais as crianças menores utilizam constantemente.

Fa (9;7) resolveu por meio de estratégia multiplicativa, e diz: "24, contei assim: eu fiz de "vezes", assim: 1,2,3,4 (apontou para os quatro na largura) e 1,2,3,4,5,6 (no comprimento); 4x6=24". Mar (9;9): "Tem 24, porque aqui tem 6 (apontou) grupinhos de 4" (apontou para os ladrilhos em coluna).

No caso de Rob (10;5) com uma representação inicial incorreta,diz: "6 + 4 = 10", e ao utilizar o material de apoio se deu conta de que o número total de ladrilhos seria maior do que pensara anteriormente : "... não deu para colocar nesse retângulo ... Acho que se "colocá" 6x4, daí dá para colocar tudo, daí dá 24". Ao refazer os ladrilhos na base como disse, conclui: "24, tem que contar de fileira em fileira ... 4 por 4, ou 6 por 6 que dá 24".

Esse tipo de explicação lembra determinados exercícios de livros didáticos que, propõem que o aluno efetue a operação da multiplicação por meio de recurso gráfico de figuras retangulares ou quadradas, com o desenho de quadradinhos em seu interior. Nesses exercícios solicita-se da criança o entendimento de que alguns quadradinhos pintados corresponda à uma sentença matemática de multiplicação. A criança deve preencher os quadradinhos de acordo com a sentença como mostra o exemplo na figura abaixo :

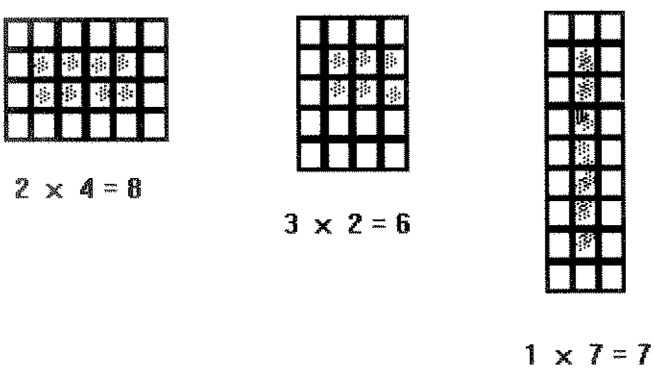


Figura 18 - Exercícios da operação da multiplicação em livros didáticos

Pode-se indagar se os acertos dos sujeitos não se explicariam em parte por eles estarem sendo solicitados a resolver exercícios do tipo citado, enfatizados na escola.

No Grupo 2 já foram encontrados dois sujeitos que resolveram corretamente e explicaram por meio de estratégia multiplicativa, justificativas que nos pareceram marcantemente influenciadas pelo processo de aprendizagem que estão realizando em sala de aula no período dessa pesquisa. Joy (8;7): " Peraí ! É 7 + 6, 4 x 6 é é ... 4 partes com 6 quadrados dá 24".

O outro sujeito pareceu apresentar um avanço conceitual em relação ao papel do multiplicando e multiplicador; como Mav (8;10): "24, porque aqui tinha 6 (passou a mão) e aqui tinha 4, aí é só "multiplicá" 6 x 4 = 24".

O aluno já identifica o número de vezes que as unidades deviam ser contadas.

TABELA 9
PROBLEMA 6 - PARTE 1 (Ladrilhos) - PERCENTUAL e Número de Resoluções Incorretas e Tipos de Procedimentos

Procedimento / Grupos	Contagem	Aditivo	Multiplicativo	Sem Justifica-tiva	Não Claro	Sub-Total
Grupo 1	8 (40%)	2 (10%)	0 (0%)	3 (15%)	0 (0%)	13(65%)
Grupo 2	3 (15%)	2 (10%)	0 (0%)	0 (0%)	3 (15%)	8 (40%)
Grupo 3	1 (5%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (5%)	0 (0%)	2 (10%)

Dos 60 sujeitos analisados, 13 crianças (65%) do Grupo 1 apresentaram resolução incorreta, no Grupo 2, 8 crianças (40%) erraram o problema e no Grupo 3, 2 crianças (10%) apresentaram resolução incorreta.

Os dados mostraram que no Grupo 1, 8 crianças (40%) resolvem incorretamente e utilizam-se da contagem como estratégia, no Grupo 2, 3 crianças (15%) e no Grupo 3, 1 criança (5%) erra ao utilizar a estratégia de contagem. Com relação às resoluções incorretas, 2 crianças (10%) de cada um dos Grupos 1 e 2 recorrem à adição e no Grupo 3, nenhum sujeito utiliza a estratégia aditiva .

Ainda quanto às resoluções incorretas, nenhum dos sujejtos dos 3 Grupos recorrem à estratégia multiplicativa. Os dados mostraram que no Grupo 1, 3 crianças (15%) não dão nenhuma justificativa no final da resolução incorreta e no Grupo 3, apenas 1 criança (5%) não justifica a resolução. No Grupo 2, apenas 3 crianças (15%) apresentam procedimento e justificativa na categoria "Não Claro".

As respostas incorretas, no caso de procedimento de contagem, no momento de resolução do problema foram por: a) contarem errado os ladrilhos na base mesmo quando colocavam os 24 ladrilhos, (passando o dedo em 2 ladrilhos e contando 1 ladrilho ou apontando com o dedo aleatoriamente pela base); b) porque as crianças completavam 24 peças, mas em certos casos não conseguiam compreender realmente as relações a serem estabelecidas, conforme o enunciado e respondiam que " ... 4 + 6 é 24 ...", voltando a uma representação mental incorreta do problema.

Kat (7;5) "De 20, porque ; qual é a razão? Porque banheiro tem muitas coisas para enfeitar". Mar (7;5) coloca 10 ladrilhos na base e responde: "10, senão 20 ... é 10 os quadrados para "colocá" no chão, porque eu já tinha uns "dêsse" e quase que meus irmãos "pegava" tudo".

Ju (7;6) coloca 4 ladrilhos e ao ser questionada a falar o que mais a história conta, diz: *"Conta que quer pôr 6 na largura, só que não sei onde é a largura".*

E: Você pode tentar colocar 6 ladrilhos aí?

S: "A largura é no meio?". Colocou 6 ladrilhos na segunda linha, totalizando 10 ladrilhos . Ju (7;6) afirma que não há mais nada para fazer no chão do banheiro e diz que ali há 14 ladrilhos .

Ed (8;8) que mesmo ao colocar 10 ladrilhos na base afirma que o resto do chão ficou coberto. Ind (8;9): coloca 10 e diz: "É porque eu tô achando, porque na hora que você tava falando eu prestei atenção porque 4+6 é 10, e se fosse de menos, aí ia piorar as coisas".

Ci (10;01) inicialmente sem utilizar o material diz que seria 10 a quantidade de ladrilhos, mas ao ter que demonstrar usando as peças e a base colocou as 24 cobrindo tudo e respondeu que João iria precisar de 14 ladrilhos. A menina é questionada a respeito da resposta, ou seja, o experimentador aponta para toda a base e pergunta se ali há 14 ladrilhos e como ela poderia provar sua resposta. Ci (10;01) argumenta: "Não! Juntando com os outros 10 ... dá 24". A criança deu a resposta 14, já descontando os 10 que havia falado anteriormente, utilizando um raciocínio de adição e de substração. Entendeu-se que ao apontar para a base com todos os ladrilhos e responder 14, já havia descontado 24 - 10 = 14.

Na segunda parte do Problema 6, em que o experimentador solicitava ao sujeito que calculasse o número de ladrilhos, o objetivo maior era estar identificando, na resolução do problema, indicativos de presença da estrutura multiplicativa. Na Parte 2, analisaram-se rapidamente os raciocínios e procedimentos de adição e subtração a que as crianças recorreram.

Dos 60 sujeitos avaliados, no Grupo 1 apenas 4 crianças (20%) efetuaram o cálculo corretamente, no Grupo 2, apenas 5 crianças (25%) e no Grupo 3, concentrou-se o maior número de acertos dos sujeitos analisados, sendo que 15 crianças (75%) resolvem corretamente como mostra a Tabela abaixo:

TABELA 10
PROBLEMA 6 - PARTE 2 - PERCENTUAL e NÚMERO de RESOLUÇÕES CORRETAS e TIPOS de PROCEDIMENTOS

Procedimento / Grupos	Contagem	Subtração	Adição	Multiplicativo	Sub-Total
Grupo 1	4 (20%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	4 (20%)
Grupo 2	2 (10%)	2 (10%)	0 (0%)	1 (5%)	5 (25%)
Grupo 3	7 (35%)	3 (15%)	5 (25%)	0 (0%)	15 (75%)

A análise de dados permite considerar se o procedimento em sala de aula no ensino da operação da multiplicação na 2ª série, poderia ter influenciado um único sujeito que recorre em sua explicação a uma estratégia multiplicativa: Noe (8;7): pega um dos ladrilhos que estava na base para passar pelos espaços vazios, mas desiste e volta a contar com o dedo sobre a base, após realizar o mesmo procedimento várias vezes responde: "15, porque eu contei assim (mostrou os 3 ladrilhos da coluna 1) ... 3 vezes e esses 5 (ladrilhos da linha a) ... 3 x 5 =15".

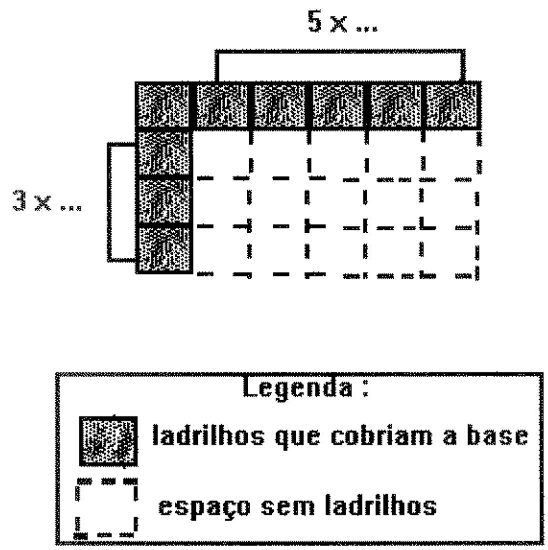


Figura 19 - Representação dos ladrilhos na base
(Procedimento por meio de cálculo da maultiplicação)

Utilizando a estratégia de contagem dos ladrilhos, ao dar respostas corretas, os sujeitos justificavam colocando o dedo como unidade de medida dos ladrilhos, que corresponderia à base, e, ao fazer isso, explicavam que precisariam de 15 ladrilhos para cobrir o restante do chão.Outras crianças ao invés de medirem utilizando os dedos como se fossem para contar, apenas apontam para a base como se em cada espaço apontado estivesse um ladrilho ao lado do outro e contam, acertando o resultado.

Ao justificarem por meio da estratégia de subtração, as crianças costumavam dizer que, se havia inicialmente 24 ladrilhos como contava a 1ª Parte do Problema 6, para calcular quanto faltava seria necessário pensar em 24 e tirar 9 ladrilhos, porque "... esta é a quantidade que está na base ...". No Grupo das crianças mais velhas foi possível acompanhar o cálculo mental da criança, como Jaq (10;10):

"... 24 tira 9 ... daí eu empresto pro 2, daí fica 1 , daí fica 14, daí para chegar no 14 ... Bom, aí 1 tira 0, falta 15". Ainda sobre as justificativas de subtração, Er (9;4) diz: "Precisava fazer uma continha ... Eu sei que cada fileira tem 6 (ladrilhos) e tem uma fileira que tá completa e 3 fileiras que só tem 1 ladrilho, então eu sei que tem 1 ladrilho e eu sei que tem 6 , então 6 - 1 = 5, daí eu contei 5,5,5,5 ... 5 (apontou para a 2ª linha); 10 (apontou para a 3ª linha); 15 (apontou para a 4ª linha) ... 15 ladrilhos ".

Na estratégia aditiva, utlizada pela maioria dos sujeitos para justificar o resultado, o sujeito afirmava que começava a contar a partir dos 9 ladrilhos que estavam na base e continuava a explicação dizendo que do 9 para chegar ao 24 são 15 quantidade de ladrilhos que estariam faltando. Foi observado também que algumas crianças ainda calculavam a inversa para verificar se estava correto, ou seja , se 15 (quantidade que falta) mais 9 (quantidade de ladrilhos que ali estavam) concluíam que daria 24 .

TABELA 11
PROBLEMA 6 - PARTE 2 - PERCENTUAL e NÚMERO de RESOLUÇÕES INCORRETAS e TIPOS de PROCEDIMENTOS

Procedimento / Grupos	Contagem	Subtração	Adição	Multiplicativo	Sem Justificativa	Não Claro	Sub-Total
Grupo 1	8 (40%)	0 (0%)	1 (5%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	16 (80%)
Grupo 2	8 (40%)	0 (0%)	1 (10%)	1 (5%)	0 (0%)	4 (20%)	15 (65%)
Grupo 3	4 (20%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (5%)	0 (0%)	5 (25%)

Os dados mostraram que dos 60 sujeitos analisados, 20 de cada um dos 3 Grupos, 16 crianças (80%) do Grupo 1 apresentaram resolução incorreta; e no Grupo 2, 15 crianças (75%) erram o problema na Parte 2 . No Grupo 3, apenas 5 crianças (25%) apresentaram resolução incorreta ao resolver a Parte 2 do Problema 6.

Na análise dos resultados obtidos em todos os problemas, observou-se que os sujeitos apresentaram um índice elevado de procedimentos de contagem. Como era de se esperar, o Grupo 1 concentrou o maior número de sujeitos que utilizaram procedimentos de contagem nos acertos dos problemas. Sujeitos dos Grupos 2 e 3 também resolveram os problemas por contagem, sendo que no Grupo 3, o número é menor do que no Grupo 2.

De uma forma ou de outra, por contagem ou soma reiterada, constata-se, que, se não todas, muitas dessas crianças conseguiam resolver corretamente os problemas, ainda que no caso do Grupo 1, o problema de multiplicação não tivesse sido trabalhado na escola. No caso do Grupo 1, como no caso dos Grupos 2 e 3, constatou-se a utilização de procedimentos informais de resolução.

Os enunciados dos problemas mostraram-se significativos para as crianças que se mostraram envolvidas na busca de solução, mesmo considerando-se, em sala de aula, que nem todas estavam habituadas a tal tipo de tarefa escolar.

Pode-se observar que dispor dos objetos de apoio ajuda a criança a resolver os problemas. Como lembra Kamii (1995), as equações podem ajudar o adulto a pensar logicamente, mas crianças pequenas da 1ª série, pensam melhor usando dedos, fichas e rascunhos. Lembra também a autora que, quando as crianças têm permisão para pensar, para usarem suas possibilidades pessoais, elas são capazes de encontrar soluções para problemas, mesmo para aqueles que poderiam ser considerados acima de sua capacidade.

A análise dos dados quanto aos acertos dos sujeitos mostrou-nos que no Grupo 2 o número de crianças que resolvem os problemas por meio de estratégia aditiva é aproximado ao resultado das crianças do Grupo 3 no qual os sujeitos também utilizam adição e multiplicação conjuntamente ou ainda só a multiplicação.

Cabe lembrar que procedimentos de adição sucessiva são mais fáceis, já que envolvem um nível apenas de abstração, em comparação com o multiplicativo, como lembra Piaget (1987).

Ao resolver um problema, como assinala Kamii (1995), as crianças pensam para obter a resposta (abstração reflexiva), mas nem sempre conseguem explicar como raciocinaram. Podem chegar a solucionar problemas, primeiramente, para só mais tarde pensar sobre o pensado, revendo a maneira pela qual chegaram a uma solução.

No caso das resoluções incorretas, observou-se que algumas crianças parecem centradas nos dados numéricos do problema, mas sem dar conta de nenhuma transformação implicita no enunciado. Mostram preocupação com os números sem procurar entender o enunciado e sem conseguir (por vezes sem tentar) identificar a incógnita.

Os problemas 5 e 1 são do tipo Isomorfismo de Medidas, conforme classificação de Vergnaud (1991).

Os dados mostraram que de um total de 60 sujeitos, foram encontradas 31 crianças (51,67%) que resolvem incorretamente o

Problema 5; e dos mesmos 60 sujeitos, 29 crianças (48,33%) apresentam resolução correta como mostra a Tabela 12 .

TABELA 12
PERCENTUAL e NÚMERO de RESOLUÇÕES INCORRETAS e CORRETAS QUANTO ao PROBLEMA 5 do TIPO ISOMORFISMO de MEDIDAS
PROBLEMA 5 (COLHERES)

Resoluções / Problema	Incorretas	Corretas	Total
Problema 5 (colheres)	31 (51,67%)	29 (48,33%)	60 (100%)

Foi possível observar que o número de sujeitos que acertam é superior, mas aproximado, ao número de sujeitos que erram o problema, ainda que o Problema 5 seja um tipo de problema multiplicativo da categoria de Isomorfismo de Medidas e,que, segundo a classificação de Vergnaud (1991), o mais fácil de ser resolvido dentre os dessa categoria em comparação com os de Produto de Medidas.

Quanto ao Problema 1 - Parte 1, os dados mostraram que de um total de 60 sujeitos, foram encontradas 38 crianças (63,33%) que resolvem incorretamente e 36 crianças (60%) apresentam resolução correta como mostra a Tabela 13.

TABELA 13

PERCENTUAL e NÚMERO DE RESOLUÇÕES INCORRETAS e CORRETAS QUANTO ao PROBLEMA 1 do TIPO ISOMORFISMO de MEDIDA

PROBLEMA 1 (MOEDAS)

Resoluções / Problemas	Incorretas		Corretas		Total	
	Parte 1	Parte 2	Parte 1	Parte 2	Parte 1	Parte 2
Problema 1 (moedas)	38 (63,33%)	36 (60%)	22 (36,67%)	24 (40%)	60 (100%)	60 (100%)

Na Parte 2, os dados mostraram que de um total de 60 sujeitos, foram encontradas 22 crianças (36,67%) que resolvem incorretamente e 24 crianças (40%) que apresentam resolução correta como mostra a Tabela 13 acima.

Os problemas 3 e 6 são do tipo de Produto de Medidas, conforme a classificação de Vergnaud (1991).

TABELA 14

PERCENTUAL e NÚMERO de RESOLUÇÕES INCORRETAS e CORRETAS QUANTO aos PROBLEMAS do TIPO PRODUTO de MEDIDAS

PROBLEMAS 3 (CAMISAS E BERMUDAS) e 6 (LADRILHOS)

Resoluções / Problemas	Incorretas	Corretas	Total
Problema 3 (camisas e bermudas)	59 (98,33%)	1 (5%)	60 (100%)
Problema 6 (ladrilhos)	23 (38,33%)	37 (61,67%)	60 (100%)

No Problema 3, os dados mostraram que de um total de 60 sujeitos, foram encontradas 59 crianças (98,33%) que resolvem incorretamente e apenas 1 criança (5%) que apresenta resolução correta.

Foi possível observar que o número de sujeitos que erram é quase que a totalidade de sujeitos analisados nessa pesquisa, embora o Problema 3 seja um tipo de problema multiplicativo da categoria de Produto de Medidas, e, segundo Vergnaud (1991), o mais fácil de ser resolvido.

Esse resultado é diferente do esperado, quando se considera a análise de Vergnaud (1991). Esse autor acentua a diferença entre problemas multiplicativos do tipo Isomorfismo de Medidas e Produto de Medidas. Assinala que problemas do tipo Produto de Medidas é mais difícil que o de Isomorfismo.

Na discussão entre Isomorfismo e Produto de Medidas conforme citado por Morgado (1993) em pesquisa realizada com alunos de escolas Britânicas e Portuguesas, a autora ressalta a afirmação citada por Vergnaud, segundo a qual os problemas de Isomorfismo são mais fáceis que os de Produto de Medidas.

Nessa pesquisa pôde-se constatar que os problemas 3 e 6 referentes ao Produto de Medidas apresentaram diferença de desempenho quanto a soluções corretas e incorretas.

Os dados mostraram que de um total de 60 sujeitos, foram encontradas 23 crianças (38,33%) que resolvem incorretamente o Problema 6, e 37 crianças (61,67%) que apresentam resolução correta. Embora seja um problema mais complexo na categoria de Produto de Medidas, o número de acertos do Problema 6 foi superior ao

Problema 3 que é uma situação mais fácil em relação a dos ladrilhos . O Problema 6 envolve noções de área e perímetro que são construídas mais tardiamente pelo sujeito.

Essa diferença do número de acertos dos sujeitos entre o Problema 3 e o Problema 6 levou-nos a considerar a possibilidade de que o Problema 6, como citado anteriormente, é um problema que poderia remeter a criança a exercícios que rotineiramente resolve na escola. A professora tenta explicar a multiplicação: "São tantos grupos de "x" elementos em cada grupo". Geralmente, as crianças utilizam cadernos quadriculados para exercitar pintando nas folhas a seguinte situação em linguagem matemática, como aparece nos livros didáticos: 2 x 3 = 6 . A criança deverá usar seu caderno quadriculado para fazer cercados de duas linhas com 3 quadradinhos pintados ou duas colunas de 3 quadradinhos pintados. Na experiência docente pode-se constatar que o professor usa o seguinte recurso, conforme ilustrado anteriormente na página 147 para explicar a operação da multiplicação.Essa situação escolar levou-nos a pensar que as crianças usam também desse recurso metodológico apresentado pelo professor para poder visualizar com maior clareza a soma de parcelas iguais.

Mesmo que se considere que a análise combinatória é algo a ser construído posteriormente pelas crianças, foi possível observar o efeito da aprendizagem escolar em relação à operação da multiplicação. Esperava-se, especialmente que o Grupo de crianças mais velhas deveria apresentar uma diferença em desempenho.

Na escola, as crianças são exercitadas em atividades de multiplicação, memorizam a tabuada, usam o algorítmo dessa operação. Até o final de uma 2ª série os professores objetivam que seus alunos compreendam o conceito da multiplicação, utilizando os sinais, memorizando a tabuada e resolvendo situações-problemas que envolvam essa operação. Por ser um problema do Tipo Produto de Medidas, o Problema 3, aplicado nesta pesquisa, mostrou que o grande número de erros pode ser explicado pela ênfase da escola em trabalhar com adições sucessivas. Com isso, os professores deixam de propiciar e solicitar um outro aspecto para a construção da operação da multiplicação, como o requerido pelo Produto de Medidas (Vergaud, 1988; Lucchesi, 1990).

AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO EM PROVAS OPERATÓRIAS

Os dados desta pesquisa quanto à tendência operatória foram coletados conforme descrito no Capítulo I. Os resultados obtidos mostraram o desempenho dos 60 sujeitos investigados com relação às provas piagetianas de avaliação do desenvolvimento cognitivo, conforme a Tabela 15 .

TABELA 15

PERCENTUAL e RESULTADO GERAL da AVALIAÇÃO das CRIANÇAS dos TRÊS GRUPOS QUANTO as PROVAS OPERATÓRIAS de CONSERVAÇÃO

Provas / Grupos	Conservação Numérica			Conservação de Líquido			Conservação do Comprimento		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Grupo 1	10 (50%)	4 (20%)	6 (30%)	11 (55%)	3 (15%)	6 (30%)	17 (85%)	3 (15%)	0 (0%)
Grupo 2	3 (15%)	1 (5%)	16 (80%)	4 (20%)	8 (40%)	8 (40%)	17 (85%)	0 (0%)	3 (15%)
Grupo 3	2 (10%)	2 (10%)	16 (80%)	1 (5%)	2 (10%)	17 (85%)	9 (45%)	4 (20%)	7 (35%)
Total	15 (25%)	7 (11,67%)	38 (63,33%)	16 (26,67%)	13 (21,67%)	31 (51,67%)	43 (71,67%)	7 (11,67%)	10 (16,67%)

Legenda : I - Não-Conservação
II - Intermediário
III - Conservação

Os dados mostraram que de um total de 60 sujeitos avaliados na Prova de Conservação Numérica, 15 crianças (25%) encontram-se no nível I, 7 sujeitos (11,67%) no nível II e 38 sujeitos (63,33%) no nível III.

Os dados indicam que no nível I há concentração dos sujeitos do Grupo 1 (crianças de 1ª série) e que tanto no grupo 2 como no Grupo 3 há uma equivalência no número de sujeitos no nível III.

Os dados mostraram 16 sujeitos (26,67%) no nível I em Conservação de Líquido, 13 sujeitos (21,67%) em um nível intermediário e 31 sujeitos (51,67%) no nível III. Como na Prova de

Conservação Numérica, a Prova de Conservação de Líquido indica que dos 16 sujeitos (que se encontram no nível I) a maioria pertence ao Grupo 1. Em contrapartida, entre o Grupo 2 e Grupo 3 que em Conservação Numérica equiparam-se, houve uma diferença na avaliação da Conservação de Líquido, pois há 17 sujeitos no nível III do Grupo 3 para 8 sujeitos no nível III do Grupo 2.

Os resultados obtidos na Prova de Conservação do Comprimento mostraram que 43 crianças (71,67%) encontram-se no nível I, 7 crianças (11,67%) no nível II e apenas 10 crianças (16,67%) encontram-se no nível III; o qual indica a conservação operatória do comprimento.

Na Prova de Conservação do Comprimento, pôde-se observar que a equivalência de sujeitos no nível I concentra-se entre o Grupo 1 e 2.

Paralelamente, os dados mostraram que, de um total dos 20 sujeitos do Grupo 3, apenas 7 sujeitos, o que equivale a 35% do total de crianças analisadas encontram-se no nível III, havendo uma distribuição dos demais sujeitos, o equivalente a 65% das crianças do Grupo 3 entre os níveis I e II, mostrando que aquisição dessa noção acontece por volta dos 10 e 11 anos.

TABELA 16
PERCENTUAL e RESULTADO GERAL da AVALIAÇÃO das CRIANÇAS dos TRÊS GRUPOS QUANTO a SERIAÇÃO e INCLUSÃO de CLASSES

Provas / Níveis Grupos	Seriação			Inclusão de Classes		
	I	II	III	I	II	III
Grupo 1	5 (25%)	8 (40%)	7 (35%)	16 (80%)	2 (10%)	2 (10%)
Grupo 2	1 (5%)	8 (40%)	11 (55%)	14 (70%)	3 (15%)	3 (15%)
Grupo 3	1 (5%)	6 (30%)	13 (65%)	10 (50%)	1 (5%)	9 (45%)
Total	7 (11,67%)	22 (36,67%)	31 (51,67%)	40 (66,67%)	6 (10%)	14 (23,33%)

Legenda : I- Ausente
II- Intermediário
III- Presente

Os dados mostraram que de um total de 60 crianças, na Prova de Seriação, 7 sujeitos (11,67%) encontram-se no nível I, 22 sujeitos (36,67%) encontram-se em um nível intermediário e 31 sujeitos (51,67%) no nível III. No Grupo 1 e Grupo 2 há uma equivalência entre o número de sujeitos no nível intermediário, porém no Grupo 2 há uma diferença no número de sujeitos (13 crianças) no nível III em relação ao número de sujeitos (7 crianças) do nível II no Grupo 1. Essa pequena diferença entre o Grupo 1 e 2 na Prova de Seriação pode estar relacionada com a influência da aprendizagem escolar no que se refere aos conteúdos de Sistema de Numeração, especificamente quanto à seqüência numérica.

No nível III, na prova de Seriação, há uma diferença pouco significativa em relação ao número de sujeitos de Grupo 2 e 3 .

Os resultados obtidos mostraram que em Inclusão de Classes, 40 sujeitos (66,67%) encontram-se no nível I, 6 sujeitos (10%) no nível II e 14 sujeitos (23,33%) no nível III. O número de sujeitos no nível I do Grupo 1 e 2 estão paraticamente equiparados; enquanto que do Grupo 2 para o Grupo 3 há uma diferença mínima no nível III. Mesmo no Grupo 3 (crianças mais velhas), há um percentual de 45% de um total de 20 sujeitos desse grupo quanto à aquisição operatória dessa noção.

Os resultados obtidos nas Provas de Conservação do Comprimento e Inclusão de Classes mostraram rendimento mais baixo dos sujeitos em relação as demais Provas Operatórias aplicadas nessa pesquisa.

Dos 20 sujeitos do Grupo 1 (alunos de 1ª série) analisados quanto à tendência operatória, apenas 3 crianças (15%) apresentam nível III em três das cinco provas aplicadas e as 17 crianças (85%) restantes oscilam entre nível I e II , com predominância no nível mais elementar. Os dados mostraram que das 3 crianças que se encontram no nível III , 2 delas acertam apenas um único problema e 1 criança não acerta nenhum dos 4 problemas de multiplicação.

Dos 20 sujeitos do Grupo 2 (alunos de 2ª série), analisados quanto à tendência operatória, 5 crianças (25%) apresentam nível III em pelo menos três das cinco provas aplicadas. Desses 5 sujeitos, foram encontardos 3 crianças que estão no nível III em quatro das cinco provas. As 15 crianças (75%) restantes do Grupo 2 permanecem no nível II em Conservação Numérica, Conservação de Líquido e Seriação. No entanto, esses mesmos 15 sujeitos (75%) encontram-se quase que em sua totalidade nos níveis I em Conservação do Comprimento e Inclusão de Classes. Os dados mostraram que das 5 crianças do Grupo 2 que se encontram no nível III e em casos distintos como citado acima, 4 delas acertam 3 problemas e apenas 1 criança acerta 2 problemas de multiplicação aplicados nesta pesquisa.

Finalmente, dos 20 sujeitos do Grupo 3 (alunos de 3ª série), analisados quanto à tendência operatória, 14 crianças (70%) apresentaram nível III em pelo menos três das cinco provas aplicadas. Desses 14 sujeitos, foram encontradas 6 crianças (30%) que estão no nível III em todas as Provas Operatórias aplicadas, 2 crianças (10%) estão no nível III em quatro das cinco provas e 6 crianças (30%) desse Grupo estão no nível III em três das cinco provas. Das 6 crianças (%) restantes do Grupo 3, há oscilações entre o nível I e II nas Provas de Conservação Numérica, Conservação de Líquido, Conservação do Comprimento, Seriação e Inclusão de Classes.

Os dados mostraram que das 14 crianças que se encontram no nível III conforme citado acima, apenas 1 criança (5%) resolve corretamente todos os problemas, 6 delas (30%) apresentam resolução correta em 2 dos 4 problemas trabalhados , outras 6 crianças (30%) acertam 3 problemas e 1 única criança (5%) apresenta um único problema corretamente.

A análise dos dados, mostrou, que os dados não foram conclusivos no que diz respeito a relação entre o rendimento insatisfatório dos alunos nas séries iniciais e a tendência operatória avaliadas pelas provas piagetianas.

Atualmente a escola vem trabalhando e enfatizando nesse caso, cada vez mais o conhecimento socialmente aceito de seus alunos no ensino de Matemática. Ao valorizar o conhecimento matemático formalizado, a escola desconsidera o raciocínio próprio da criança e exige níveis de abstração cada vez mais elaborados.

A escola deveria se preocupar e colaborar significativamente para o desenvolvimento cognitivo de seus alunos e favorecer a construção das noções de conservação, seriação e inclusão logo no início da escolaridade, como assinalaram estudos e pesquisas.

Os dados indicam que talvez a aprendizagem escolar dos alunos dessa pesquisa não esteja colaborando nem para desenvolver as estruturas cognitivas dos sujeitos e tampouco para a exploração de questões pertinentes aos procedimentos utilizados na resolução de problemas.

Em estudo semelhante, Morgado (1991) objetivou analisar o tipo de representação mental de crianças entre 2º, 3º e 4º graus da escola primária de Lisboa. Em decorrência, procurou analisar também a relação entre representação mental, estratégia dos alunos em cada problema aritmético. A autora constatou que no problema de Isomorfismo de Medidas similar ao Problema 5 desta pesquisa, dentre os 20 alunos de uma 2ª série, 14 crianças acertam o problema e 6 crianças resolvem incorretamente. Ainda com relação ao resultado de acertos e erros com os grupos de crianças mais novas, no problema de Isomorfismo de Medidas com garau maior de dificuldade, a autora constatou que 8 crianças conseguem resolver corretamente, 11 apresentam resolução incorreta e 1 sujeito não resolve o problema.O resultado dos alunos de 3ª série, por exemplo, com relação ao problema de análise combinatória, mostrou que 14 crianças resolvem corretamente, 1 criança faz incorretamente e 5 sujeitos não resolvem o problema. Com os alunos de 4ª série, 15 crianças acertam e 1 erra o problema. Outros alunos não apresentaram solução.

Em comparação com os sujeitos dessa pesquisa, houve uma diferença significativa nos resultados com relação a acertos, sendo que as crianças de Lisboa apresentaram maior número de acertos em comparação às crianças desta pesquisa, especialmente com relação ao problema das camisas e bermudas. Observou-se que em relação ao tipo de estratégia utilizada (contagem, aditiva, multiplicativa) os resultados são aproximados, embora nesta pesquisa, tenha sido constatado que o número de sujeitos que resolvem os problemas por meio de contagem é maior do que o verificado por Morgado. O resultado é equilibrado entre procedimentos de contagem e adição. Os dados mostraram em ambas as pesquisas, que as crianças das séries iniciais recorrem menos à estratégia multiplicativa para solucionar os problemas e também apresentavam dificuldades para explicitar a maneira pela qual chegaram à resposta.

Os estudos de Morgado (1994) levaram a autora a assinalar que "... A construção da representação mental é a pedra angular na resolução de problemas e não admira, pois, que as correntes atuais que se interessam pela psicologia da cognição a tenham elegido o alvo principal de suas investigações, quer estas correntes sejam construtivistas ou cognitivistas... os professores dão grande relevo aos algorítmos, enquanto estratégias específicas que podem conduzir diretamente à resolução de um problema, e tendem a desvalorizar, em termos pedagógicos, a construção da representação mental daquele assumindo, ingenuamente, que o aluno a organiza sem dificuldade" (Morgado:1994, p.20).

Ao eleger os procedimentos que o sujeito utilizará para resolver o problema, é preciso " ... supor a elaboração de modelos de representação cada vez mais complexos nos quais as novas relações se integram e se coordenam com as anteriores". (Lopez, 1994, p. 434)

Um trabalho em sala de aula, com apoio de material concreto, que permite ao professor acompanhar a atividade do aluno. As solicitações apropriadas podem dar ensejo à abstração, pode auxiliar a construção da representação correta na solução de problemas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A resolução de problemas verbais aritméticos é um dos elementos mais importantes no 1° Grau e na escola e ocupa grande parte do trabalho do professor nas aulas de Matemática. Observa-se que muitos desses problemas procuram retratar situações da vida real ou ainda situações hipotéticas nas quais a criança deve construir representações internas, selecionar operações aritméticas e aplicar noções já aprendidas na busca da incógnita.

O que se percebe é que muitas escolas, ao proporem problemas verbais tidos como "Problemas Reais", os professores dão ênfase aos apresentados nos livros didáticos que, muitas vezes, não retratam em seus enunciados nenhuma relação com a vida das crianças das séries iniciais.

Ao longo do tempo, o trabalho com problemas verbais aritméticos vem se constituindo em um trabalho de simples aplicação mecânica de determinados procedimentos matemáticos. O professor tenta ensinar ao aluno como resolver problemas aplicando algorítmos determinados.

Ainda no presente, a maioria dos problemas aritméticos utilizados em sala de aula apresentam nos seus enunciados palavras-chave, às quais espera-se que o aluno responda fazendo a devida correspondência. Como, por exemplo: "Ana tem 5 balas e **ganhou** mais 5 balas de sua tia. Quantas balas Ana tem?".

A resolução de problemas verbais aritméticos não deveria ocorrer como estratégia de ensino somente no final da aprendizagem de técnicas operatórias, como a da adição, subtração, multiplicação e divisão. As crianças, no entanto, são solicitadas a resolver problemas depois de passarem por um longo processo de exercícios de "armar continhas". Constata-se na escola que é dada uma grande ênfase à utilização, pela criança, de algorítmos aprendidos e valorizados pelo professor na solução de problemas verbais.

Na perspectiva da Psicologia Genética os estudos sobre resolução de problemas vem procurando abordar as relações entre o conhecimento conceitual e os procedimentos dos sujeitos. Os trabalhos apresentados (Kamii, 1995; D.Busquets, 1995; Lopez, 1994), assim como os dados obtidos nesta pesquisa mostraram que os problemas verbais aritméticos estão longe de ser mera aplicação de fómula matemática, porque supõe um processo de construção conceitual, " ... em que se produz a interseção de vários aspectos em relação à compreensão do conteúdo semântico do problema com a construção conceitual dos procedimentos que levam à sua resolução". (Lopez, 1994, 431).

Ao se deparar com um problema escolar, a criança deverá descobrir o que há em comum entre situações aparentemente diferentes, nas relações entre essas situações e ainda selecionar as operações matemáticas que resolvam a situação .

Resolver problemas implica raciocínio verbal e raciocínio matemático. Implica compreender o enunciado do ponto de vista da proposição verbal e dar conta das relações lógico-matemáticas, compreendendo o significado matemático do enunciado. Implica um processo conceitual, no qual vários aspectos entram em relação: a compreensão do conteúdo semântico do enunciado, a construção conceitual dos procedimentos que leva à solução correta, a compreensão das relações lógico-matemáticas.

Os resultados obtidos nesta pesquisa mostraram que existe uma evolução nas crianças em diferentes níveis de escolaridade ao resolver problemas, e isto está diretamente ligado à interação entre a estrutura conceitual do problema e a escolha de procedimentos que indicam maior abstração e flexibilidade do sujeito.

A eleição de procedimentos que o sujeito utiliza para resolver um problema aritmético supõe a elaboração de modelos de representação cada vez mais complexos nos quais as novas relações se integram e se coordenam com as anteriores.

Na busca da incógnita dos problemas, os dados mostraram que as crianças manifestam e enfrentam algumas dificuldades comuns para chegarem à resolução correta. Uma dessas dificuldades, e talvez a principal, com a qual a escola não vem se preocupando, refere-se à de estabelecer as relações entre o estado inicial de uma situação problema, a busca da incógnita que implica uma transformação; e, por último, o estado final da situação.

No caso desta pesquisa, quando a criança foi solitada a resolver o problema das colheres, por exemplo, no qual 4 colheres devem ser empacotadas em separado em cada um dos 4 saquinhos, manifesta-se claramente a dificuldade da criança em perceber as transformações possíveis. Em alguns casos, a criança dá conta apenas de uma situação estática, não conseguindo entender todas as relações e transformações. Por meio de cálculo mental ou manipulação de material de apoio, muitas crianças, nesta pesquisa, pegam 4 colheres e 4 saquinhos e resolvem o problema por meio de uma ação, manipulando uma única vez 4 colheres e 4 saquinhos. Ao explicar, outras crianças chegam a colocar as 4 colheres dentro dos 4 saquinhos, mas colocando uma colher em cada saquinho, o que nos mostra que mesmo em nível de cálculo mental e manipulação da situação empírica, as crianças têm dificuldades para tomar consciência e explicar o processo ocorrido mentalmente : 4 colheres em cada 4 saquinhos , ao passo que fazem 4 + 4 = 8 ou 1 + 1 + 1 + 1 = 4.

Foi observado também, em alguns casos, que as crianças apenas pegam 4 colheres, outras mostram no material de manipulação apenas o estado final, como por exemplo: 8 colheres, no caso de resposta incorreta. Isso indica que, mesmo diante do material, a criança encontra dificuldades para reconstruir todas as ações e construir as relações enunciadas no problema. Mesmo porque, como já era esperado, a criança consegue resolver problemas antes de conseguir enunciar o próprio raciocínio.

Pode-se observar que, quando o pesquisador solicita e discute com a criança o processo de resolução de um problema, auxilia tanto a elaboração de abstração matemática a partir de um contexto empírico como a tomada de consciência das abstrações elaboradas, conforme assinalado em Busquets (1995).

Os trabalhos desenvolvidos na Psicologia Genética vêm mostrando que as crianças fazem representações gráficas por meio de desenhos e que estes são recursos espontaneos utilizados pelos sujeitos. A criança os utiliza porque o desenho atua como elemento organizador das relações em jogo, facilitando o acesso ao significado das operações. No trabalho com solução de problemas, pode-se apresentar para as crianças material de apoio para manipulação e, utilizar a linguagem do próprio corpo (por meio de dramatizações) para representar situações-problemas, para organizar também as operações até chegar ao nível de uma escrita convencional.

Muitas escolas vêm enfatizando o ensino de resolução de problemas por meio de registro das operações aritméticas, sob forma do algorítmo. Ao resolver problemas, é importante que o professor leve em consideração os processos cognitivos da criança, os procedimentos usados para chegar ao resultado do problema e valorize o cálculo mental.

As estratégias de resolução encontradas nessa pesquisa mostram ser preciso que o professor tenha clareza da importância de provocar nos alunos a busca de soluções por meio de caminhos próprios, fazendo que eles possam inventar e manifestar diferentes representações de um mesmo problema.

Em uma situação de sala de aula, o professor poderá explorar, com proveito, os diferentes procedimentos que as crianças utilizam para resolver os problemas. No caso dos problemas de multiplicação analisados neste trabalho, percebe-se a vantagem de explicitar na discussão com os alunos os procedimentos utilizados, as soluções por meio de contagem, por adição ou multiplicação.

Os dados indicam que, se podem discutir procedimentos, e que as crianças apresentam progresso na compreensão dos mesmos.

Preocupados em manter a organização da sala de aula, os professores podem deixar de ouvir os alunos e exagerar, por vezes, no controle das manifestações dos alunos e de conversas eventuais entre os mesmos. Sem permitir uma situação de desordem e ruído que prejudiquem o trabalho em sala de aula, o professor pode incentivar os alunos a se expressarem, verbalizando o raciocínio e tentando explicar os procedimentos de solução e, além disso, que os alunos troquem idéias entre si.

Os dados obtidos do problema 6 (ladrilhos), por exemplo, mostraram que é importante dar espaço para as crianças fazerem estimativas mentalmente, como no caso da Parte 2 desse problema, quando as crianças deveriam calcular a quantidade que faltava para completar a base.

As crianças procuravam, de uma maneira ou de outra, dar uma resposta e observou-se que apareceram fabulações. No entanto, quando as crianças abandonam esse recurso para fazer cálculos estimados, procuram, mesmo que sem exatidão, dar respostas aproximadas, com base no raciocínio lógico-matemático. As crianças que respondem "Acho que 4 é demais ... "; " Acho que 17 é muito, porque com esses não dá 24 como naquela hora ..." demonstram que, mesmo sem certeza, já fazem cálculos aproximados, dando conta de que o enunciado remete a transformações: não é qualquer número que pode ser, a resposta, como, por exemplo, no caso, aquelas que respondem: "Pode ser 1 ou 1000, ou qualquer um"; ou ainda "10 eu já falei, agora falo 8, mas já falei, então falo um número que ainda não falei".

O professor que permite um trabalho com estimativa em suas aulas de Matemática pode estar favorecendo o raciocínio das crianças, em uma elaboração maior das relações matemáticas pertinentes a um problema. E mais, pode provocar a reflexão e discussão entre as crianças, ao desafiar cada um a provar sua resposta.

Compreender o significado do erro no processo de construção do conhecimento implica analisar com os alunos os diferentes procedimentos, apresentando as perguntas certas no momento certo, como assinala Kamii (1995), para que possam tomar consciência do próprio raciocínio. Incentivar os alunos a falar sobre seus procedimentos poderá possibilitar avanços na construção do conhecimento aritmético.

Um problema pode ser apresentado para os alunos no livro didático e por escrito. Pode também ser apresentado oralmente pelo adulto, pelo professor. Ao tentar compreender um problema, o aluno pode ter uma dificuldade a mais quando deve decifrar um texto escrito, o que eventualmente pode não saber fazer. O contato com os alunos da escola pública, neste trabalho, mostrou que muitos alunos não conseguem ler um texto e que, mesmo alguns deles da 3ª série apresentavam dificuldades com a leitura e a escrita.

Observou-se que quando o aluno não entende o enunciado e não consegue ler, realmente pode tentar resolver os problemas por adivinhação, que é o que muitos tentam fazer.

Os dados coletados mostraram que, mesmo os alunos que apresentavam dificuldades de leitura e escrita convencionais, conseguiam resolver problemas apresentados oralmente pelo pesquisador. Foi possível perceber que o trabalho com problemas apresentados oralmente e com apoio de material concreto de apoio possibilita que técnicas de cálculo sejam construídas.

A pesquisa mostrou que, mesmo nos casos em que não sabiam ler, os sujeitos faziam tentativas de ler e, mesmo sem a instrumentalização da escrita , puderam compreender o enunciado lido pelo pesquisador e tentavam a resolução do problema, apresentando níveis diferentes de sucesso.

Em todo problema aritmético cabe considerar a apresentação redacional do enunciado que evoca uma situação determinada, os elementos não matemáticos, um banheiro, renovação do chão, por exemplo. O enunciado também apresenta um dado de valor. O aluno deve extrair os dados do enunciado, organizá-los, identificar a incógnita, selecionar dados relevantes e irrelevantes para a solução e especialmente compreender as relações a serem estabelecidas.

O aluno soluciona problemas por meio de processos mentais que não se pode ver. A análise dos dados indicou a importância e relevância do professor procurar acompanhar os procedimentos de resolução dos alunos para entender melhor seu raciocínio e suas possíveis dificuldades.

A análise de dados mostrou que os procedimentos pessoais e informais auxiliam a criança a compreender como resolver problemas aritméticos.

Ao resolver os problemas de multiplicação, os dados mostraram que as crianças utilizam diferentes maneiras de resolver problemas de estrutura multiplicativa , ou seja, utilizam da contagem , adição ou multiplicação. O desempenho das crianças mostrou nas diferentes maneiras de resolução, o processo de construção para se chegar a compreender a correspondência multipla envolvida em uma situação problema .

Observamos, na escola, a tendência de se esperar construir esses conceitos por meio da apresentação dos formalismos matemáticos, de códigos convencionais, por exemplo : 3 x 5 = 15. Essa pode ser uma exigência de registros muito abstrata para as crianças que estão construindo os conceitos que envolvem o raciocínio aritmético. O aluno pode aprender a resolver problemas na escola solucionando inicialmente por meio de seus próprios procedimentos e por meio de algorítmos adequados, gradualmente.

Ao resolver problemas, constatou-se que algumas crianças ficam presas à técnica das operações aritméticas, mesmo sem entendê-las e quando são solicitadas a usar material diferenciado e cálculo mental procuram fazer no material como o fazem com as operações em sala de aula. Pôde-se observar essa tendência quando as crianças explicam como chegam ao resultado, como por exemplo, quando a criança explica que de 24 se tira 9 e que é preciso emprestar para o 2. Na verdade explica incorretamente, pois refere-se à unidade 4 que deverá emprestar 1 dezena das 2 dezenas que há nesse número. O aluno continua sua explicação dizendo que fica 14; querendo dizer que ao emprestar o que havia falado anteriormente, passa a ter 1 dezena e 4 unidades, embora não mencione a palavra dezena e unidade em nehum momento. Retoma a explicação dizendo que é para chegar no 14 (na verdade não explica que é a quantidade 9 para se chegar no 14), e não apresenta o resultado 5 para o experimentador. Ao apresentar verbalmente o cálculo que ainda está fazendo, percebe-se que a criança passa a trabalhar com o algarismo da dezena (segundo a técnica operatória ensinada na escola) e diz que ficava 1 e que desse 1 tirava-se zero. Terminou afirmando corretamente o resultado 15. Observou-se que o 1 a que ela se referia era a dezena que sobrou depois de "emprestar", inicialmente, a 4 unidades no início do cálculo mental.

Constatou-se que quando as crianças podem utilizar e manipular material concreto como apoio e perguntas pertinentes do professor, conseguem construir com maior facilidade procedimento de solução de problemas e chega a solucionar mesmo aqueles que, à primeira vista, seriam considerados difíceis.

Verificou-se que os sujeitos foram capazes de apresentar, na maioria dos casos, procedimentos próprios de solução, diferentes dos convencionais. Os dados indicam que a manipulação de objetos pode ser um elemento facilitador da construção de uma representação correta e da resolução do problema.

A utilização de material concreto e as solicitações para que explicassem como conseguiam resolver cada problema, mostrou-se um recurso eficiente para permitir acompanhar e esclarecer o raciocínio dos alunos.

Observa-se que quando a criança faz uma pergunta, indicando um pré-conceito na solução de uma tarefa, é preciso que o professor considere a pergunta feita, em lugar de preocupar-se apenas com a resposta rápida e o cálculo. Diante dessa situação, o professor poderá explicitar a idéia e as dúvidas para os demais do grupo. O professor tem a responsabilidade de propor atividades que possam auxiliar as crianças, em especial as das série iniciais, não apenas dar respostas rápidas, mas sim, no caso, fazer com que possam problematizar questões sobre os pré-conceitos levantados na sala de aula.

Observou-se que para resolver o problema dos ladrilhos, que trata de noções de área e perímetro, as crianças apresentaram a tendência de utilizar os dedos, como "uma unidade de medida para resolver a situação. Será que é preciso esperar uma 3ª série para resolver problemas desse tipo e por meio da escrita convencional? Ou o professor pode apresentar desde cedo situações relacionadas a essa noção?

Constatou-se que mesmo os alunos da 3ª série, que já haviam aprendido a multiplicação na escola, utilizavam procedimentos aditivos e de contagem para a solução dos problemas. Kamii (1995) lembra que nossos ancentrais não inventaram a multiplicação para números pequenos e que é cabível e adequado resolver problemas por procedimento aditivo, comenta a autora que, em caso de números pequenos, a imposição da multiplicação é uma arbitrariedade do professor.

No trabalho com problemas verbais aritméticos na escola se deveria considerar uma progressão na maneira de trabalhar com as crianças: inicialmente, propor-se problemas reais relacionados com a sala de aula,problemas que digam respeito, por exemplo, ao número de alunos, cadeiras e mesas, materiais escolares das crianças ou, ainda, problemas criados pelos próprios alunos. Seria interessante, por exemplo, trabalhar com acontecimentos ocorridos na escola ou em situações de vida extra-escolares. O professor poderá problematizar as situações enunciando-as verbalmente para seus alunos. Posteriormente, o professor pode propor a resolução de problemas com enunciados escritos a serem resolvidos, já com a utilização de fórmulas matemáticas.

Deve lembar de salientar para as crianças a busca da incógnita do problema: qual a pergunta importante em que se deve deter para resolver o problema, o que já se sabe da situação? O que não sabem? O que vamos ter que descobrir? Como faremos para descobrir? É possível calcular só de cabeça? Como vocês começariam a resolver? Há necessidade de representar a situação de alguma forma? Teremos de usar rascunhos? Vamos discutir o problema de dois em dois alunos e depois contar para todos como resolvemos?

Em um contexto de sala de aula, podem-se propor problemas do tipo: "Cada criança fez 3 flores para colocar em cada uma das barracas da festa junina. As crianças ajudaram a enfeitar a barraca do churrasco, da pipoca, do quentão, do cachorro quente e a do vinho. Quantas flores cada criança fez ? " .

Quando o professor permite que os alunos discutam, realizem primeiramente por estimativas, estimula que procurem explicar o que estão pensando, estará favorecendo o raciocínio das crianças. Alguns alunos poderão responder 3, porque estão centradas no seguinte dado: 3 flores; outras poderão responder "5", porque consideram apenas o numero de barracas (5 barracas). Até que se chegue à resolução correta desse problema de estrutura multiplicativa, particularmente com crianças das séries iniciais, o professor deverá percorrer um caminho de discussão explorando os dados e trabalhando com registros pessoais dos alunos, incentivando seus alunos quanto à manipulação e reflexão.

Permitir que os alunos tenham espaço para discutir e refletir sobre as possíveis falhas que cometem ao resolver problemas aritméticos poderia ser uma estratégia metodólogica bastante consistente no trabalho em sala de aula. Nessa situação, o professor poderia estar possibilitando uma aprendizagem com conflitos explicitados pelas próprias crianças talvez um pouco mais na linha de uma aprendizagem com compreensão do que se está fazendo na escola: ele permite ao aluno compreender porque se faz de uma maneira e não de outra, qual o melhor procedimento e qual é o entendido no momento para aquele determinado grupo de crianças.

Resolver com compreensão problemas de estrutura multiplicativa implica um processo lento de construção e não decorre automaticamente de explicações sobre a soma repetida, como podem esperar os professores.

À medida que as crianças procuram resolver problemas, podem construir o conhecimento lógico sobre a multiplicação. Essa construção também não é automática e necessariamente rápida, cabendo ressaltar o papel do professor. Não é preciso esperar que o aluno permaneça fixado somente em procedimentos pessoais e de somas repetidas. O professor deve analisar junto com seus alunos os procedimentos pessoais de cada um em relação às formas convencionais de solução.

O professor deve ser o responsável por organizar as situações adequadas, acompanhar o raciocínio e discussão dos alunos, colocar perguntas nas horas apropriadas e bem como, apresentar, no momento apropriado o conhecimento social e sistematizado sobre a Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AEBLI, H. ***Didática Psicológica; aplicação da psicologia de Jean Piaget.*** Trad. João T. D'Olim Marote. 2ª ed. São Paulo: Editora Nacional, 1973. 186p.

BAROODY, A.J. ***El pensamiento matemático de los niños;*** um marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial e educación especial. Madrid: Visor. 1994.

BEBOUT, H. ***Children's symbolic representation of addtion and subtraction verbal problems.*** In: paper presented at the Annual Meeting of the American Educational research Association. San Francisco, 1986.

BECKER, F. ***Ensino e Construção do Conhecimento;*** o processo de abstração reflexionante. Educação e Realidade, v.18,n. 1, p 43-52, jan/jun. 1993.

________. ***A epistemologia do professor;*** o cotidiano da escola. Rio de Janeiro: Editora Vozes, 1993. 344 p.

BRENELLI, R.P. ***Intervenção Pedagógica,*** via jogos Quiles e Cilada para favorecer a construção de estruturas operatórias e noções aritméticas em crianças com dificuldade de aprendizagem. Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, 1993. 385 p. (Tese, Doutorado em Psicologia Educacional).

________. ***Observáveis e Coordenações em um jogo de Regras;*** influência do nível operatório e interação social. Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, 1986. (Tese, Mestrado em Psicologia Educacional).

BRITO, M.R.F DE, FINI, L.D.T., GARCIA, V.J.N. *Relações entre o Raciocínio Verbal e o Raciocínio Matemático.* Pro-Posições, v.5, n. 1, p. 37-44, jan/mar. 1994.

BUSQUETS, M.D. ***Resolução e Formulação de Problemas.*** Trad. Lia L. Zaia. In: *Anais: XII Encontro Nacional dos Professores do PROEPRE, Construtivismo e Educação.* Campinas: Faculdade de Educação/UNICAMP, 1995. p.75-77.

________. ***Modelos Representacionais e Raciocínio Matemático: Resolver e Formular Problemas de Estrutura Aditiva.*** In: *XII Encontro Nacional de Professores do PROEPRE, Construtivismo e Educação.* Campinas: Faculdade de Educação/UNICAMP, 1995. p.123-124.

CARPENTER,T.P., & MOSER,J.M. ***Problem structure and first grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems***. Journal for Research in Mathematics Education, n.12, p. 17-39, 1981

CARRAHER, T.N. ***O método clínico; usando os exames de Piaget.*** São Paulo: Cortez Editora, 1989. 161 p.

________. et al. ***Na vida dez, na escola zero.*** Cadernos de Pesquisa. São Paulo: n. 42, p. 79-86, ago. 1982.

CARRETERO, M. ***Constructivismo y Educación.*** Zaragoza: Edelvives, 1993. 126 p.

CASTORINA, J.A. ***Psicologia Genética.*** Porto Alegre: Artes Médicas, 1988.

CHIAROTTINO, Z.R. In: MANTOVANI DE ASSIS, O. ***Uma Nova Metodologia de Educação Pré-Escolar.*** 2ª ed. São Paulo: Biblioteca Pioneira de Ciências Sociais, 1989. (Série Caderno de Educação).

CHRISTINAT, C.T., SINCLAIR, A., GARIN, A. ***L'interprétation des nombres écrits chez l'énfant de cinq à sept ans.*** Archives de Psychologie. Genève: Editions Médecine et Hygiéne, v. 61, n. 237, juin. 1993.

COLL, C. et al . ***Los contenidos en la Reforma;*** enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes. Madrid: Santillana, 1992. 202 p.

________. ***Constructivismo y Intervención Educativa: ¿ como enseñar lo que se ha de construir?*** . In: Congresso Internacional de Psicologia y Educación- Intervención Educativa. Madrid, noviembre, 1991.

CÓRIA-SABINI, M.A. ***A inter-relação entre algumas tarefas operatórias concretas;*** uma investigação do conceito piagetiano de estágio. Arquivos Brasileiros de Psicologia. Rio de Janeiro: v. 37, n. 3, p 142-162. 1985.

CORSO, H.V. ***A representação infantil e a educação pré-escolar.*** Educação e Realidade. Porto Alegre: v. 18, n. 1, p 61-70, jan/jun. 1993.

DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L. ***Eye movement data as access to solution processes of elementary addition and subtraction problems.*** In: *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association.* San Francisco, April, 1986.

________. ***The effect of semantic structure on first grader's strategies for solving addition and subtration word problems.*** In: *Journal for Research in Mathematics Education,* 18, p. 563-581, 1987.

DIENES, Z.P., GOLDING, E.W. ***Conjuntos, Números e Potências.*** Trad. Euclides J.Dotto. 3ª ed. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1977. 141 p.

DOMITE MENDONÇA, M.C. ***Problematização; um caminho a ser percorrido e Educação Matemática.*** Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, 1993. (Tese, não publicada, Doutorado em Psicologia Educacional).

FERNÁNDEZ, A. ***A inteligência aprisionada; abordagem psicopedagógica clínica da criança e sua família.*** Trad. Iara Rodrigues. 2ªed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1991. 261 p.

FLAVELL, H.J. ***A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget.*** Trad. Maria Helena S.Patto. 3ªed. São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1988, c. 1965. 479 p.

FRANÇA, J.L. et al. ***Manual para normalização de publicações técnico-científicas.*** 3ªed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 1996. 191 p.

GRANELL, C.G. ***Procesos Cognoscitivos en el aprendizaje de la multiplicación***. In: MORENO, M. ***La pedagogía operatoria, un enfoque constructivista de la educación.*** Barcelona: Laia, 1981.

GREER, B. ***Conceptual obstacles to the development of the concepts of multiplication and division.*** In: *Learning and Instruction; European research in an International context,* v. 2. 2, 1990.

________, & MOHAN, S. ***Tests for nonconservation of multiplication and division***. In: G.Lappan & R.Even (Eds), Proceding of the Sth Annual Meeting of the North American Chapter Group for the Psychoology of Mathematcs Education. Michigan : State University, p.60-65, 1986.

INHELDER, B., SINCLAIR, H., BOVET, M . ***Aprendizagem e Estruturas do Conhecimento.*** Trad. Maria Aparecida R.Cintra e Maria Yolanda R.Cintra. São Paulo: Editora Saraiva, 1977. 282 p.

KAMII, C. ***A Criança e o Número;*** Implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. Trad. Regina A.de Assis. 16ªed. Campinas-SP: Papirus, 1992, c. 1988. 124 p.

________, LIVINGSTON, S.J. ***Desvendando a aritmética;*** Implicações na teoria de Piaget. Trad. Marta Rabiogio e Camilo F. Ghorayeb. Campinas-SP: Papirus, 1995. 299 p.

________. ***Aritmética; Novas perspectivas;*** Implicações na teoria de Piaget. Trad. Marcelo C.T.Lellis, Marta R., Jorge J.de Oliveira. Campinas-SP: Papirus, 1993. 237 p.

________, DECLARCK, G. ***Reiventando a aritmética;*** Implicações da teoria de Piaget. Trad. Elenice Curt, Marina C.M.Dias, Maria do Carmo D. Mendonça. 5ªed. Campinas-SP: 1992. 308 p.

KESSELRING,T. *Os quatro níveis de conhecimento em Jean Piaget*. Educação e Realidade. Porto Alegre: v.15, n. 1, p 03-22, jan/jun. 1990.

KOHLBERG,L. & MAYER, R. *Development as the aim of education*. Harvard Education Review, 1972, n. 42, p. 449-496.

KRUTETSKII, V.A. *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Translated from the Russian by Teller. University of Chicago Press, 1976. 416 p.

LIBERMAN, M.P., WEY, R.L.M. *Fazendo e Compreendendo Matemática;* fichas de trabalho - 1ª série. 7ªed. São Paulo: Solução, 1993.

________. *Fazendo e Compreendendo Matemática;* fichas de trabalho - 3ª série. 8ªed. São Paulo: Solução, 1994.

LIESENBERG, M.T.M. *Conflito cognitivo, possíveis e operatoriedade.* Campinas: Faculdade d Educação da Unicamp, 1992. (Tese, Mestrado em Psicologia Educacional).

LOPEZ CARRETERO, A. *Ciências Lógicomatemáticas*. In: *Enciclopedia Practica de Pedagogía.* Barcelona: Edit. Planeta, v. 1, 1988.

________. *Evolución del Concepto de Fracción y Modelos Representacionales*. Barcelona: Universitat de Barcelona, 1994. (Tese, Doutorado em Psicologia Básica).

LUCCHESI DE CARVALHO, D. *Metodologia do Ensino da Matemática.* São Paulo: Cortez, 1990. 119 p. (Coleção Magistério 2° Grau - Série Formação do Professor).

________. *Multiplicação e Divisão;* aprendizagem de transformações multiplicativas da pré-escola a 6ª série do 1° Grau. São Paulo: Cadernos Brasileiros de Educação, 1986. (Coleção Ensinando Aprendendo).

MACEDO, L.de. *Ensaios Construtivistas.* São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994. 170 p.

________. *Os processos de equilibração majorante.* Ciência e Cultura: v. 31, n. 10, p 1125-1128. 1979.

MANTOVANI DE ASSIS, O. *A Solicitação do Meio e a Construção das Estruturas Lógicas elementares na criança*. Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, 1976. 169p. (Tese, Doutorado em Psicologia Educacional).

________. *Uma nova metodologia de Educação Pré-escolar*. 2ª ed. São Paulo: Biblioteca Pioneira de Ciências Sociais, 1989. (Série Caderno de Educação).

MAZA, C. *Aritmética y representación; de la comprensión del texto al uso de materiales.* 1ªed. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica, 1995. 205 p.

________. ***Multiplicar y dividir;*** a traves de la resolución de problemas. Madrid: Aprendizaje Visor, 1991. 136 p.

MORENO, M. ***La pedagogía operatoria;*** un enfoque constructivista de la educación. Barcelona: Editorial Laia, 1983. 365 p.

MORGADO, L.M.de A, et al. ***A comparison of the understanding of the multiplication among;*** english and portuguese children. In: Anais do 17h Psychological Mathematic Conference, 1993.

________. ***O papel da representação mental na resolução de problemas.*** In: III Simpósio Internacional de Epistemologia Genética. Águas de Lindóia, 1994.

MORO, M.L.F. ***Iniciação em matemática e construções operatório-concreta;*** alguns fatos e suposições. Cadernos de Pesquisa. São Paulo: n. 45, p 20-24, maio. 1983.

MOSER, J.M., CARPENTER, T.P. ***Using the microcomputer to teach problem solving slills; Program development and initial pilot study.*** In: *Working Paper.* Madison: Wisconsin Center for Education Research, n. 382, 1982.

NESHER,P. ***Multiplicative school word problems: Theoretical approachs and empirical findings.*** In: J.Hielbert & M.Behr (Eds).Number Concepts and operations in the middle grades. Hillsdale, NJ: Erbaum/Reston, National Council of teachers of Mathematics, p. 19-40, 1988.

NUNES, I.C. ***A estrutura operatória concreta e escolaridade;*** um estudo realizado com crianças pertencentes a ambientes sócio-economicamente desfavorecidos. Arquivos Brasileiros de Psicologia. Rio de Janeiro: v. 48, n. 1, p 100-108. 1988.

PARRA, C. ***Cálculo Mental en la escuela primaria.*** In: PARRA,C., SAIZ,L. Didática de Matemática. Paidós Editora, 1994.

PATTO, M.H.S. ***A produção do fracasso escolar.*** São Paulo: T.A.Queiroz Editora, 1991.

PIAGET, J. ***A equilibração das estruturas cognitivas; o problema central do desenvolvimento.*** Trad. Marion M. dos S.Penna. Edição original. Rio de Janeiro: Zahar Editora, 1976. 175 p.

________. ***Fazer e Compreender.*** Trad. Christina L.de P.Leite. São Paulo: Melhoramentos - Edusp, 1978.

________. ***A formação do símbolo na criança; imitação, jogo, sonho, imagem e representação.*** Trad. Álvaro Cabral, Christiano M.Oiticica. 3ªed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan, 1978. c.1964. 370p.

________, SZEMINSKA, A. ***A gênese do número na criança.*** Trad. Christiano M.Oiticica. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

________. ***La génése des structures logiques élémentaires; classification et sériation***. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, 1959.

________. ***Investigaciones sobre la Abstracción Reflexionante I.*** Trad. Alícia Entel. Buenos Aires: Editorial Crea SA, 1980. 117 p.

________. ***O Nascimento da Inteligência na criança.*** Trad. Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 1975.

________. ***Notas sobre o ensino de Matemática.*** Trad. Corinta M.G.Geraldi. In: II Congresso Internacional de Educação Matemática. Inglaterra:Cambridge Universidade Press, 1973.

________, INHELDER,B. ***A origem da idéia do acaso na criança.*** Trad. Ana Maria Coelho. Rio de Janeiro: Editora Record Cultural, 1951.

________. ***O Possível e o Necessário;*** evolução dos possíveis na criança. Trad. Bernardina M.de Albuquerque. Porto Alegre: Artes Médicas, 1985. 137 p.

________. ***Problemas de Psicologia Genética.*** Rio de Janeiro: Cia Forense de Artes Gráficas, 1973.

________, INHELDER,B. ***Procedimentos e Estruturas.*** Archives de Psychologie. n. 47, p. 161-176. 1979.

________, INHELDER, B. ***A psicologia da criança.*** Trad. Octávio M.Cajado. 12ªed. Rio de Janeiro: Editora Bertrand Brasil, 1993. 135 p.

________. ***Seis Estudos de Psicologia.*** Trad. Profª Maria Alice M.D'Amorim, Paulo S.L.Silva. 19ªed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1993. 146 p.

________. ***A teoria de Piaget.*** In: Carmichael, L. ***Psicologia da criança.*** Organizador da edição brasileira: Samuel P.Neto. São Paulo: EPU- Editora da USP, 1975.

________. ***A tomada de consciência.*** Trad. Edson B. de Souza. São Paulo: Melhoramentos- Edusp, 1978. 211 p.

POLYA, G. ***Mathematics and Plausible Reasoning***. Princeton University Press. In: Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid: Tecnos, 1966.

PUIG, L., CÉRDAN, F. ***Problemas Aritméticos Escolares.*** Madrid: Editorial Sintesis, 1988. 221 p.

RANGEL, A.C.S. ***Educação Matemática e a Construção do número pela criança;*** uma experiência em diferentes contextos sócio-econômicos. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992. 250 p.

REUSSER, K. ***From text to situation to equation, cognitive simulation of understanding and solving mathematical word problems.*** In: *Learning and Instruction; European Research in an International context*, v. 2. 2, 1990.

SASTRE, G., MORENO, M. ***Aprendizaje y desarrollo intelectual.*** Barcelona: Gedisa, 1987. 268 p. (Série Investigaciones en Psicologia y Educación).

_________. ***Descubrimiento y Construcción de Conocimientos; una experiência de pedagogía operatoria.*** Barcelona: Gedisa, 1980. 259 p. (Série Investigaciones en Psicologia y Educación).

SCHLIEMANN, A.D., et al. ***Da compreensão do Sistema Decimal à construção de Algorítmos.*** In: ALENCAR, E.M.S.SORIANO. ***Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino-aprendizagem.*** 2ªed. São Paulo: Cortez Editora, 1993. 217 p.

SCHLIEMANN, A.D. ***As operações Concretas e a Resolução de Problemas de Matemática.*** IN: CARRAHER,T.N. ***Aprender Pensando;*** contribuições da psicologia cognitiva para a educação. 4ªed. Rio de Janeiro: Editora Vozes, 1989. 127 p.

SEVERINO, A.J. ***Metodologia do trabalho científico;*** diretrizes para o trabalho didático-científico na universidade. 4ªed. São Paulo: Cortez & Moraes, 1979. 159 p.

SILVA, F.S. ***Operações lógico-matemáticas de crianças na 1ª série do 1º Grau.*** Cadernos de Pesquisa. São Paulo: n. 44, p 63-74, 1983.

SILVA, Z.M.M.H. ***Por que é difícil para a criança aprender fazer continhas no papel?*** Recife: Faculdade de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, 1987. (Tese, Mestrado em Psicologia Cognitiva).

STERNBERG, R.J. ***As Capacidades Intelectuais Humanas;*** uma abordagem em processamento de informações. Trad. Dayse Batista. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

VAN LIESHOUT, E., JASPERS, M.W.M. ***A training procedure for children with learning deficies to improve their representation of simple arithmetic word problems.*** In: Learning and Instruction; European research in an International context, v.2.2, 1990.

VERGNAUD, G. ***El niño, las Matemáticas y la Realidad***; problemas de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria. Trad. Luis O. Segura. México: Trillas, 1991.

_________. ***Multiplicative Structures.*** In: Editors Merlyn B, Laurence E. Associates. ***Number concepts and operations in the middle grades***. Reston : National Council of teachers of mathmatics, p 141-161. 1988.

________. ***Problem Solving and concert-formation in the learning of mathmatics.*** In: Learning and Instruction; European research in an international context, v. 2.2, 1990.

VERSCHAFFEL, L., DE CORTE, E. ***Do non-semantic factors also influence the solution process of addition and subtraction word problems?*** In: Learning and Instruction; European research in an international context, v.2.2, 1990.

ERRATA

ESTUDO SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS VERBAIS ARITMÉTICOS NAS SÉRIES INICIAIS

Fernanda de Oliveira Soares Taxa - Dissertação de Mestrado
(Unicamp - 1996)

Local	*Onde se lê*	*Leia-se*
Página 19 e 166	Morgado (1991)	Morgado (1994)
Página 145	6 + 6 = 24	6 + 6 = 12
Página 165	6 crianças (%)	6 crianças (30%)
Página 156 (2° parágrafo, 3ª linha)	36 crianças(60%) apresentaram resolução correta ...	22 crianças (36,67%) apresentaram resolução correta ...
Página 157 (1° parágrafo, 2ª linha)	22 crianças(36,67%) que resolvem incorretamente...	36 crianças (60%) que resolvem incorretamente...
Página 169(1° parágrafo, 2ª linha)	e na escola e ocupa ...	e na escola ocupa