Sonia Maria Losito

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Sonia Maria Losito e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 27 de agosto de 1.996

Assinatura: ______________

"O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO":

Um estudo na 4ª série do 1º grau

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

1996

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA FACULDADE DE EDUCAÇÃO/UNICAMP

Losito, Sonia Maria
L897s "O sistema de numeração decimal e o princípio multiplicativo" : um estudo na 4ª série do 1º grau / Sonia Maria Losito. -- Campinas, SP : [s.n.], 1996.

Orientador : Lucila Diehl Tolaine Fini.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Número - Conceito em crianças. 2. Educação matemática. 3. Psicologia genética. 4. Psicologia da aprendizagem. 5. Aritmética - Estudo e ensino (Primeiro grau). I. Fini, Lucila Diehl Tolaine. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do Título de MESTRE em EDUCAÇÃO na Área de Concentração: PSICOLOGIA EDUCACIONAL, à Comissão Julgadora da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, sob orientação da Profª Lucila Diehl Tolaine Fini.

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

COMISSÃO JULGADORA:

Maria Regina F. de Brito

A meus queridos filhos
Tiago, Lucila, Caio José e Diogo,
com meu desejo de muitas realizações...

À minha mãe
em homenagem à sua bondade.

A EEIPSG Gênese com votos de
constantes avanços no fazer pedagógico,
por uma Educação de qualidade.

Agradecimentos

Um trabalho de pesquisa é sempre resultado de muitas trocas intelectuais e até mesmo afetivas. Um sem número de pessoas me deram valiosas colaborações, e, como são muitas e não posso nomeá-las, gostaria que cada uma se sentisse nomeada e agradecida por mim.

Quero deixar registrado os meus agradecimentos à Lucila Diehl Tolaine Fini, minha orientadora, pelas críticas pertinentes, pelos esclarecimentos e reflexões, pela disponibilidade e dedicação com que contei sempre;

Aos alunos que desenvolveram as tarefas desta pesquisa, minha especial atenção. Participar deste trabalho, em alguns casos, exigiu tempo de dedicação e disponibilidade. A eles dedico "a esperança" de que o ensino da Matemática possa ser cada vez mais prazeroso e eficiente.

Quero, igualmente, agradecer:

- aos professores, pais e funcionários das escolas selecionadas para a aplicação desta pesquisa, pelo acolhimento, disponibilidade e compreensão;
- aos professores e funcionários da UNICAMP com quem pude contar em meu curso de mestrado;

- à professora Orly Z. Mantovani de Assis, que, num gesto carinhoso, despercebido talvez, incentivou-me ao projeto de seleção deste mestrado;
- à CAPES, pelo apoio financeiro;
- a meus filhos, pela solidariedade, compreensão, incentivo e pelo amor que circula entre nós, e ao Diogo, em especial, com quem contei na produção final deste trabalho;
- à família Cerasoli, por toda ajuda; em especial a João Roberto pelo incentivo, apoio e força que não me deixou faltar;
- a meu pai, (em memória) pelo prazer que tenho de estudar, fruto de sua vibração;
- às pessoas "especiais" que colaboraram intensamente na revisão e produção final deste trabalho;
- à Antonieta Moreira Leite que me transmitiu um tanto de seu entusiasmo e do saber ensinar;
- à Escola Nossa Senhora das Graças," meu berço construtivista";
- à Maria Cristina Souza Albuquerque Maranhão, que me orientou em determinado momento desta dissertação;
- à Escola Experimental Vera Cruz, pela acolhida, pela confiança, pela aprendizagem e, em especial à Mara Vada, Hebe Marques Brito e Lucíla Bechara Sanchez, com quem troquei ricas experiências;
- a todos com quem pude contar, de algum modo;
- a Deus, por tantas bênçãos...

"O ideal da educação é, antes de tudo, aprender a aprender; é aprender a se desenvolver e aprender a continuar a se desenvolver depois da escola".

(Piaget 1973, p.32)

Índice

Índice das Tabelas

Índice de Gráficos Comparativos

Resumo

O presente trabalho teve por objetivo analisar o processo da construção do conceito de número e o campo conceitual do Sistema de Numeração Decimal, investigando o desempenho de alunos de 4ª série do 1º grau, na solução de tarefas matemáticas.

Foram investigados os procedimentos de alunos de uma escola com proposta de ensino construtivista, fundamentada na teoria de Piaget e de outros estudiosos e pesquisadores cognitivistas e os procedimentos de alunos de outra escola, não envolvidos nesta proposta de ensino.

Investigou-se a construção do número, reconhecimento do valor posicional, os processos mentais de contagem, a operatoriedade matemática, a utilização do princípio multiplicativo do sistema de numeração decimal e a tomada de consciência do erro.

Os dados coletados mostraram que os resultados de alunos de uma escola e de outra não apresentaram diferença em relação às regularidades do sistema de numeração decimal, bem como em relação ao aspecto operatório aditivo. Foram constatados melhores resultados em relação à construção do senso numérico, da operatoriedade multiplicativa, do princípio multiplicativo do sistema de numeração decimal e da tomada de consciência do erro, nos sujeitos da escola de orientação construtivista.

Abstract

The objetive of the research presented here was to analyse the construction process of the concept of number and the conceptual field of the decimal numeration system,investigating the performance of the fourth grade students (primary school) concerning the soluction of mathematics tasks.

Kinds of procedure were investigated: the procedure of the students of a school that works with the construtive teaching approach, based on the Piaget theory and other cognitivists scholars and researchers, and the procedures of the students of another school not involved in the same teaching proposal.

It was investigated the constrution of number, the mental process of counting, the recognition of the posicional value,the mathematics operatoriety, the usage of the multiplicative principle of the decimal numeration system and the recognition of mistakes.

The collected data shows that the results presented by the students of both schools are same concerning the regularities of the decimal numeration system, as well as the additive operatory aspects. Better results have been observed concerning the building up of the decimal numeration system and the recognition of mistakes, by the students of the school utilizing the constructive teaching approach.

INTRODUÇÃO

Em meu trabalho como docente, tive o privilégio de participar de equipes de educadores conscientes do papel estimulador que a escola deve desempenhar em relação ao desenvolvimento psicológico de cada aluno. Algumas das escola nas quais iniciei minha carreira docente já optavam pelas concepções construtivistas em Educação e nelas aprendi a compreender, por exemplo, as relações entre o desenvolvimento cognitivo e a construção do número, bem como valorizar as contribuições da Psicologia para a melhoria do ensino.

Posteriormente, como orientadora educacional e coordenadora pedagógica, em escolas de 1º grau, chamou-me a atenção a dificuldade de professores e alunos em relação ao ensino e aprendizagem da Matemática. Com freqüência os professores comentavam em reuniões a respeito das dificuldades de alunos, do rendimento insatisfatório e insucesso em tarefas e provas escolares. Os pais de alunos, por sua vez, muitas vezes procuravam a escola reclamando das dificuldades que seus filhos apresentavam.

À medida que fui conhecendo os estudos e pesquisas de Jean Piaget, pude compreender melhor o desenvolvimento cognitivo do ser humano e entender as dificuldades que os alunos apresentavam no processo de aquisição do conhecimento matemático na escola.

A experiência docente, a observação de trabalhos em sala de aula, o acompanhamento de alunos que tinham dificuldades na aprendizagem indicavam a necessidade de os professores compreenderem o processo de construção do conhecimento matemático e o processo de desenvolvimento psicológico dos alunos. Conforme comenta Kamii (1995), é comum encontrar educadores que acreditam poder ensinar Matemática aos alunos como se este ensino fosse conhecimento social.

A prática docente e a atividade de coordenadora pedagógica mostraram ao longo dos anos que grande maioria das atividades propostas pelas escolas não exige muito mais dos alunos do que copiar ou memorizar questões apresentadas em livros didáticos, descrever ou repetir assuntos explicados pelo professor. O aluno, de modo geral, tem poucas oportunidades para pensar por si próprio, agir, estabelecer relações e, na escola, é desafiado, na quase maioria das vezes, apenas em nível de memória. É importante lembrar que, quando o ambiente familiar é estimulador e o aluno tem acesso a diferentes experiências fora da escola, as conseqüências de experiências pouco adequadas da vida escolar podem comprometer menos do que naqueles casos em que o meio não é bastante estimulador.

Em decorrência, pode-se indagar quanto daquilo que a grande maioria das pessoas se esforçou para aprender realmente foi aprendido e ficou retido, em relação ao muito que a escola pretendeu ensinar. Sempre me preocupou o fato de as exigências da escola não serem as mais adequadas para propiciar o acesso ao saber matemático, o que, na verdade, pareciam favorecer atitudes negativas em relação a esse ensino. Como comenta Rangel sobre o que se aprende na escola: "Só se sabe fazer quando se está continuamente fazendo, pois não há tomada de consciência sobre o que se executa. Se o exercício é interrompido, a aprendizagem é esquecida." (1992, p. 56).

Não seria responsabilidade da escola contribuir para o melhor desenvolvimento de estruturas de pensamento dos alunos, de modo que, se pudessem aproveitar melhor as oportunidades escolares? E, dispondo de um rol maior de possibilidades, esses alunos pudessem optar, no futuro, por soluções mais eficientes, especialmente no caso dos alunos de camadas menos favorecidas da população, que constitui a maioria em nosso país? Em uma democracia verdadeira, a escola não deveria assegurar a igualdade de oportunidades dos cidadãos, o que implicaria, por certo, melhores possibilidades de cada ser humano poder pensar, escolher e agir em diferentes situações ?

A escola, em geral, é um dos primeiros lugares onde a criança pode atuar por si mesma, sem o respaldo direto da família. Assim, ela haverá de ser o lugar por excelência, onde o aluno poderá ser melhor ouvido, respeitado e encorajado intelectualmente. A escola não pode pois, desperdiçar a chance de intervir, tendo em vista o desenvolvimento cognitivo, moral e emocional dos alunos, se realmente sua função é, acima de tudo, contribuir para o desenvolvimento da cidadania, inclusive por meio da transmissão dos conhecimentos culturalmente acumulados.

Um trabalho educativo voltado para o desenvolvimento intelectual, numa concepção que considere a construção do saber, está diretamente relacionado à conscientização e à capacitação de professores, um dos maiores problemas da escola brasileira.

É bastante difícil, neste atual mundo competitivo, lutar, tendo em vista a Educação, por um projeto voltado ao desenvolvimento global do ser humano. A sociedade, de uma forma geral, tem valorizado a escola que transmite uma grande quantidade de conteúdos. A escola mais valorizada, nesse caso, mesmo pelos pais, é a que prioriza a transmissão de um saber que o professor detém, que enfatiza a memorização e que centra especial atenção na preparação de alunos para o ingresso na Universidade. Uma escola como essa serve para poucos e estes poucos nem sempre aprendem o quanto deveriam.

Nem a escola, nem a sociedade, de maneira geral, consideram o desenvolvimento cognitivo do aluno, no desenrolar do curso de 1º grau. As constatações da Psicologia Cognitiva, no entanto, comprovam a importância de se levar em conta as diferentes maneiras de pensar, que se relacionam ao desenvolvimento das estruturas de pensamento, no decorrer desta formação.

A escola tem por objetivo garantir aos alunos o acesso ao saber, ao conhecimento acumulado pelo homem no decorrer dos tempos, bem como o desenvolvimento de hábitos e competências, mas tem sido criticada pela ineficiência em relação a seus resultados gerais. O trabalho escolar, no que se refere ao saber culturalmente valorizado, acentua pouco a compreensão, o estabelecimento de "relações", o significado do conhecimento. O conhecimento lógico-matemático descrito por Piaget, resultante das relações que o aluno deve fazer e só ele pode fazer, é pouco reconhecido pela escola: os alunos acabam por construir esse conhecimento quase sempre ao acaso, sem que lhe seja dada a devida importância. Os conteúdos escolares são quase sempre tratados apenas como conhecimento físico ou social (convencional, transmissão pura e simples).

"Há muito tempo, os educadores vêm tentando transmitir conhecimento às crianças de fora para dentro. Uma verdadeira transformação, no entanto, necessita focar a criança em seu interior, a fim de maximizar seu processo de construção." (Kamii, 1995, p. 13).

As implicações da teoria de Piaget para a prática educacional, diante dessa situação, poderiam dar uma importante contribuição para a melhoria do ensino, esclarecendo os professores em relação às características do funcionamento cognitivo.

Há escolas, hoje, que apresentam e defendem propostas diferentes das propostas mais convencionais de ensino e apontam maneiras diferentes de trabalhar com os alunos, bem como uma outra forma de distribuição dos conteúdos escolares dos programas do 1º grau, apoiadas em teorias construtivistas de Piaget. Nestas escolas, constata-se a preocupação com o processo de construção do conhecimento pelos alunos e com o desenvolvimento cognitivo.

O trabalho desenvolvido nessa vertente, no entanto, nem sempre tem sido analisado com cuidado e atenção.

A presente pesquisa tem por objetivo analisar as possibilidades de uma prática pedagógica que valorize a reflexão do aluno, a estimulação do pensamento, o "fazer e compreender", na perspectiva piagetiana, e contribuir para uma revisão da distribuição dos conteúdos programáticos atualmente usuais no ensino de 1º grau. Considera-se que, da maneira como vem sendo tradicionalmente ensinada a Matemática nesse nível de ensino, não se tem constituído em uma experiência capaz de contribuir para o desenvolvimento cognitivo, para a aprendizagem "lato sensu", conforme descrita por Piaget. Quase tudo nesses programas é tratado como conhecimento social, transmissão pura de informações. Para um investimento que se fundamente no construtivismo não será possível deixar de rever os programas oficiais, algumas vezes incompatíveis com o processo de construção de conhecimentos.

A prática de ensino de diferentes escolas mostrou, de maneira acentuada, as dificuldades dos alunos em construir a noção de quantidade dos números, que Kamii (1995) chama de "senso numérico", apesar desses alunos fazerem, muitas vezes, a leitura e a escrita dos numerais e utilizarem os algoritmos, corretamente. Para as crianças, os números grandes, algumas vezes, não têm significado numérico em razão de serem pouco usados nas contagens do cotidiano. A reflexão deste processo ensino-aprendizagem traz a preocupação da escassez de "feedbacks" importantes ao "fazer e compreender" e ao comprometimento do campo conceitual numérico que servirá de apoio à compreensão e construção de outros conjuntos numéricos (Q,Z,R) que devem ser construídos no decorrer do 1º grau.

Acreditamos, como Vergnaud, que o conceito de número seja a noção mais importante da Educação Matemática, no ensino de 1º grau, em razão de que, nesta pesquisa, nos propusemos a investigar alguns aspectos que compõem o campo conceitual da aprendizagem do número e do Sistema de Numeração Decimal.

Assim, a proposta desta pesquisa é a de investigar o desempenho de alunos no processo da construção operacional dos Números Naturais, as implicações e relações deste conhecimento para o desenvolvimento cognitivo da criança, em duas escolas, analisando os resultados do estudo do Sistema de Numeração Decimal.

Optamos, com base nas considerações anteriores, por analisar o desempenho de alunos em relação ao ensino do Sistema de Numeração Decimal em uma escola de uma cidade do interior de São Paulo que apresenta um projeto pedagógico definido como de orientação construtivista, em comparação com o trabalho desenvolvido em outra escola, da Rede Oficial de Ensino, não envolvida em semelhante projeto.

A escola, de fundamentação piagetiana, que se escolheu, teve, como ponto inicial de apoio, a prática da proposta construtivista trabalhada pela Escola Nossa Senhora das Graças, SP, e define seu projeto pedagógico com a assessoria da Escola Experimental Vera Cruz, SP, mantida pela Associação Universitária Interamericana, umas das pioneiras no Estado de São Paulo no ensino de orientação construtivista, inspirado na teoria de Piaget e na proposta de Dienes.

O presente trabalho inicia-se pela análise de algumas contribuições de Piaget para a compreensão do processo de acesso ao conhecimento, incluindo também as publicações especializadas e pesquisas na área do ensino da Matemática. Além disso, inclui a apresentação da proposta de trabalho da escola que adota a orientação construtivista para o ensino de Matemática. Completa-se com a apresentação e análise de dados coletados sobre o desempenho de alunos de duas escolas, na solução de tarefas matemáticas e considerações finais sobre o ensino do Sistema de Numeração Decimal.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA PIAGETIANA

A contribuição de Piaget para a atividade educativa é indiscutível, já que esclarece como o ser humano passa de um estado de menor para um de maior conhecimento.

Piaget (1991) defende a seguinte idéia expressa no artigo 26, item 4, da Declaração Universal dos Direitos do Homem: "A Educação deve visar ao pleno desenvolvimento da personalidade humana e ao reforço do respeito pelos direitos do homem e pelas liberdades fundamentais". O desenvolvimento da pessoa, segundo Piaget, no sentido de uma conquista no plano moral e intelectual, deve implicar o desenvolvimento da autonomia moral e intelectual e a abertura para a cooperação e reciprocidade no relacionamento humano.

Na perspectiva piagetiana, a meta da educação deve ser a formação de uma razão ativa e autônoma, a conquista de instrumentos lógicos ou racionais que assegurem a autonomia intelectual do educando. No domínio afetivo e moral, tem-se como impossível a formação de personalidades autônomas, se o indivíduo for submetido à coação intelectual.

Quando se trabalha na escola priorizando a transmissão pura e simples de conhecimentos, desconsiderando-se o significado do desenvolvimento psicológico e a atividade do sujeito cognoscente, corre-se o risco de contribuir para a formação de indivíduos que se submetem aos ditames externos e que podem ser conduzidos de forma acrítica, oprimida, compromissados com o estático e com o estratificado. A educação, nessa perspectiva, deixa de ser um processo transformador e pode significar uma imposição disfarçada de padrões, prejudicial, portanto, a longo prazo, às possibilidades de formação do educando como ser humano e cidadão.

Na perspectiva construtivista, defendida por estudiosos de abordagem piagetiana, a educação deve estar comprometida com um processo ensino-aprendizagem que valorize o aluno como sujeito capaz de assimilar conhecimentos por meio de sua atividade própria na interação com o meio. O acesso ao conhecimento não pode ser entendido, nessa vertente, como transmissão direta, desconsiderando-se a reorganização realizada pelo sujeito.

Um dos elementos que define a tendência pedagógica, característica da escola tradicional, é a ênfase na transmissão de conteúdos escolares. No caso do ensino da Matemática, enfatiza-se a exposição oral do raciocínio do professor, que deve explicar os "pontos" do programa, bem como a apresentação de uma quantidade considerável de conhecimentos e de tarefas de aplicação por meio de exercícios variados, submetendo o aluno a uma "ginástica intelectual", tendo em vista a consolidação do conteúdo ensinado. O possível esquecimento não é levado em conta, desde que o aluno mostre, no período de provas escolares, a retenção do que "aprendeu". Não parece ser preocupação de uma escola desse tipo o esquecimento, depois das provas, de grande parte dos conteúdos que deveriam ter sido aprendidos.

Observe-se, ainda, que, no presente, a escola considerada a melhor é, com freqüência, aquela que se propõe a transmitir e exigir dos alunos grande quantidade de conteúdos programáticos. Nem sempre se pode constatar uma preocupação e empenho em avaliar o rendimento escolar dos alunos e o trabalho do professor, nesse caso, no sentido de verificação dos reais resultados do ensino.

No presente, porém, também se percebe muita inquietação e insatisfação em relação a esse modelo de escola. Estudos e pesquisas têm colocado em foco essa visão de educação e alertam para a necessidade de se buscarem soluções para a melhoria do ensino e do desempenho dos alunos, procurando outras formas de trabalho capazes de contribuir para o desenvolvimento de estruturas lógico-elementares, de uma aprendizagem que persista à ação do tempo e do esquecimento, e que possa ser reconstruída em qualquer momento.

As pesquisas de Piaget e seguidores tornaram claro que não se pode transmitir e explicar o conhecimento lógico-matemático para as crianças. O próprio sujeito na interação com o meio físico e social é que deve construir esse conhecimento. As ações e o estabelecimento de relações são elementos primordiais na construção não só dos conhecimentos como das estruturas da inteligência.

Na perspectiva construtivista, de base piagetiana, a extensão do programa importa menos que a qualidade do trabalho desenvolvido com os alunos. Conseguir que o aluno construa o próprio saber é o ideal, pois significa igualmente a aquisição de um método de trabalho que será valioso para o aluno por toda a vida, contribuindo para aumentar permanentemente sua curiosidade em aprender. No enfoque construtivista, em lugar de dar prioridade a atividades de memorização, submetendo o aluno a exercícios rotineiros, impostos e desprovidos de significado, enfatiza-se o raciocínio do aluno, raciocínio esse que deve ser constantemente desafiado e exercitado.

Educar para o conhecimento significa formar seres humanos capazes de crítica e autocrítica, capazes de pensamento criativo e transformador; sujeitos que se posicionam diante da realidade e que sejam capazes de defender seu ponto de vista.

Qual é o significado de conhecimento?

> *"Conhecer não consiste em copiar o real, mas agir sobre ele e transformá-lo, de maneira a compreendê-lo, em função dos sistemas de transformações aos quais estão ligadas estas ações."* (Piaget, 1973, p. 15-16).

Na teoria de Piaget, o acesso ao conhecimento é explicado pela ação do sujeito. Piaget, em seus trabalhos, contrapõe-se ao empirismo e ao apriorismo e define-se como construtivista. Afirma que o fato primordial de acesso ao conhecimento é a atividade assimiladora do sujeito. Em especial, em relação ao conhecimento lógico-matemático, Piaget mostra que a atividade do sujeito é essencial.

O autor (1991), em um dos poucos trabalhos em que discute a educação defende a idéia de uma metodologia educacional ativa. Afirma que pesquisas psicológicas sobre o desenvolvimento das operações racionais e sobre a aquisição ou construção das noções fundamentais fornecem dados decisivos em favor de métodos ativos.

Amélia D. Castro (1981) assinala, por sua vez, que uma reforma do ensino intelectual seria bem mais radical do que poderiam imaginar os partidários da escola ativa. A autora comenta que a Escola Nova, no Brasil, marcou-se pela proposição de métodos ditos ativos, pela ênfase na atividade dos alunos, mas lembra que essa corrente de idéias não teve o respaldo teórico suficiente. Assinala que essa situação contribuiu para a deturpação da proposta de Dewey, seu autor original, e acabou caracterizando-se, no Brasil, por experiências técnicas isoladas no contexto educacional. A Escola Nova, como comenta a autora, serviu de confronto à escola tradicional, alertando educadores para inúmeros aspectos importantes, mas não garantiu o alcance dos objetivos educacionais gerais por ela definidos.

Piaget (1991) mostrou que as crianças se desenvolvem espontaneamente, na medida em que interagem com um meio físico e social. Um elemento importante do meio social das crianças é a escola, e será responsabilidade do educador proporcionar oportunidades de interações e desafios suficientes, para favorecer o desenvolvimento dos alunos. É preciso evitar-se a visão unilateral que, ao valorizar a atividade do aluno, com fundamento na teoria de Piaget, desconsidera a importância da atividade do professor, o que decorre, com certeza, de uma compreensão distorcida de ensino-aprendizagem. É preciso esclarecer a natureza das atividades docentes necessárias para facilitar ao aluno levar a bom termo "o fazer e o compreender" de sua ação. Essas atividades docentes devem ser analisadas em relação àquelas mais comumente enfatizadas na orientação mais tradicional em educação, bem como em relação à Escola Nova.

A característica da epistemologia genética de Piaget é de procurar descobrir as raízes dos diversos tipos de conhecimento, desde suas formas mais elementares, e de seguir seu desenvolvimento nos níveis posteriores até o pensamento científico.

Para Piaget, o conhecimento significa um sistema de significações. Todo conhecimento contém sempre e necessariamente um fator fundamental de assimilação, que confere significado ao que é percebido. Conhecer é algo mais que explicar ou vivenciar, embora para conhecer seja preciso vivenciar. O conhecimento parte da ação de uma pessoa sobre o meio (natureza, objetos construídos pelo Homem, idéias, valores, relações humanas). A idéia básica de conhecimento é a de que o objeto do conhecimento seja inserido num "sistema de relações".

O conhecimento parte da ação de uma pessoa sobre o meio em que vive, mas não ocorre sem a estruturação do vivido. As coisas ou os fatos adquirem significação para o ser humano quando inseridas em uma estrutura - é a isso que Piaget denomina assimilação.

> *"Conhecer é algo que se dá a partir da vivência (ou seja, da ação sobre o objeto do conhecimento) para que este objeto seja imerso em um sistema de relações" (Ramozzi Chiarottino, 1988, p. 3).*

> *"A idéia básica de que conhecer significa inserir o objeto do conhecimento em um sistema de relações, partindo de uma ação executada sobre esse objeto, é válida tanto para a criança que organiza seu mundo quanto para o cientista que descobre e explica o campo magnético. Piaget entende que há uma analogia entre a forma pela qual a criança constrói sua realidade, estruturando sua experiência vivida e a forma pela qual o cientista constrói a Física. As diferenças entre um tipo de conhecimento e outro expressariam níveis diferentes da capacidade humana de conhecer". (Ramozzi Chiarottino, 1988, p. 5).*

Em seus trabalhos Piaget, distingue três tipos de conhecimento:

Conhecimento físico - é o conhecimento dos objetos do mundo exterior. Na ação sobre os objetos o sujeito pode abstrair as propriedades físicas próprias dos mesmos, as quais podem ser conhecidas empiricamente. O conhecimento físico é tudo o que podemos observar por meio de nossos órgãos dos sentidos.

Conhecimento social - é aquele de natureza arbitrária, convencional, como a denominação dos objetos, e que pode ser transmitido, passado de uma pessoa para outra.

Conhecimento lógico-matemático - é aquele que consiste em relações criadas pelo sujeito, resultantes do conhecimento físico e social. O conhecimento lógico-matemático não está no objeto, mas é abstraído das ações e das relações que o sujeito estabelece. Considerando-se dois objetos, a característica de "mais leve" não está em um deles nem no outro, mas é resultante da relação entre os dois e a qualidade de leveza é estabelecida pelo pensamento.

Com relação ao ensino da Matemática, em especial, no caso do conhecimento lógico matemático, Piaget assinala que não é possível pretender-se poder transmiti-lo na forma de mero conhecimento social, convencional.

Piaget refere-se a dois tipos de experiências do sujeito em suas interações com o meio: a experiência física e a lógico-matemática. A experiência física consiste em agir sobre os objetos de modo a abstrair as suas propriedades diretamente observáveis (cor, forma, peso). A experiência lógico-matemática consiste também em agir sobre os objetos, mas o conhecimento que dela resulta não é abstraído das propriedades físicas destes objetos, mas das ações que foram exercidas sobre eles. O conhecimento adquirido, no segundo caso, não consiste nas propriedades físicas do objeto, mas nas relações estabelecidas pelo sujeito.

No caso de uma criança descobrir, por exemplo, por meio de manipulação, que as três figurinhas que tinha, somadas a uma que ganhou de seu irmão é a mesma quantidade que as cinco figurinhas que seu irmão tinha, menos a que ele lhe deu, é prova de que essa criança abstraiu esse conhecimento não das figuras em si, como objetos, mas das relações que estabeleceu mentalmente, no desenrolar desta atividade.

Quando se coloca uma criança sem indícios de operatoriedade diante da situação do transvasamento de água de um copo mais largo para um copo mais fino, depois de afirmar a igualdade de quantidade de líquido em dois copos idênticos, ela pode, com facilidade, realizar a leitura imediata dos fatos evidentes, como, por exemplo, que o nível de água nos copos da situação inicial era igual. Pode-se concluir que, depois do transvasamento, a quantidade em um permaneceu como estava e no outro tornou-se mais "alta", ou ficou mais "fina", considerando que a quantidade de água modificou-se. Esses dados exteriores que a experiência permite perceber são chamados de observáveis. Quando a criança conclui que a quantidade de água ficou diferente, sua decisão se baseia em um observável que está diretamente nos fatos imediatos.

Entretanto, a criança pode analisar o problema coordenando duas situações, como, por exemplo: antes tinha a mesma quantidade; não se tirou nem acrescentou nada; inferindo que a quantidade continua igual. Ou, em outro caso, baseando-se na ação de voltar ao mesmo frasco anterior, inferir que, se ocorre essa ação, ficará igual novamente. Ou, pela comparação da altura e largura de ambos os copos, coordená-las e inferir que continua a mesma quantidade de água. Nestes casos, a coordenação implica inferências e ultrapassa o observável, como leitura imediata de fatos com base na experiência.

Compreender alguma coisa ou assunto sempre implica estruturas de pensamento. Portanto, mesmo no caso do conhecimento físico ou social, é imprescindível a estrutura lógica que permita a assimilação.

Para compreender ou conhecer é preciso que o dado ou objeto exterior seja assimilado às estruturas do sujeito, e isso só é possível se tais estruturas já existirem anteriormente. O processo do conhecimento está restrito ao que o sujeito pode retirar, assimilar, em uma determinada situação de interação. O estudo de Piaget sobre a relação entre o sistema biológico e o sistema cognitivo enfoca a adaptação ao meio, tanto num sistema como no outro.

Piaget faz referência a hipóteses que abordam diferentemente esta questão e ressalta que, para uns, o meio desempenha um papel passivo, sendo colocada ênfase no aspecto endógeno do desenvolvimento (neodarwinismo), ao passo que para outros o meio aparece como constituindo a única fonte possível de progresso (behaviorismo).

Citando Piaget, "(...) *o neodarwinismo só se ocupa da hereditariedade genotípica e o behaviorismo de reações permanecendo essencialmente fenotípicas,* portanto, não hereditárias". (Piaget, 1974, p. 72) Trata-se da dicotomia entre maturação de mecanismos hereditários e experiências adquiridas em função do meio.

Piaget rejeita estas duas posições. Fundamenta sua posição pessoal no princípio de atuação do genótipo e do fenótipo, não isoladamente, já que existe uma relação entre ambos. As variações genotípicas (endógenas) e as variações fenotípicas (comportamentais ou conceituais), segundo Piaget são resultantes das ações que o organismo ou o sujeito exerce sobre o meio, e isto graças a iniciativas essencialmente endógenas.(Piaget, 1973)

De acordo com o ponto de vista deste autor, o organismo e o sujeito são fundamentalmente ativos e o meio desempenha um papel relevante como objeto de conquista e não de causalidade formadora. (Piaget, 1973)

Estas considerações tornam possível compreender o significados dos termos "exógeno" e "endógeno", utilizados por Piaget, o qual mostra que o conhecimento é construído por uma atividade lógico-matemática do sujeito, e, ao falar sobre processo de aquisição do conhecimento, o mesmo autor (1983) afirma que há "... *uma passagem progressiva do exógeno ao endógeno...*" (p. 47). A aplicação do termo "endógeno" às estruturas da inteligência deve-se ao fato de que elas são construídas pelo sujeito, em sua interação com o mundo exterior por auto-regulações internas. O sujeito as constrói com base nas formas mais gerais da coordenação de sua atividade; essas coordenações se apóiam sobre as coordenações nervosas e, portanto, orgânicas. Por outro lado, Piaget confirma o caráter endógeno destas estruturas após uma longa construção, baseando-se no funcionamento dedutivo, puramente interno, as quais se chega no final do desenvolvimento, momento em que as estruturas não dependem mais, em nada, dos dados exteriores (Piaget, 1973).

Ao defender sua posição interacionista, Piaget afirma sua crença na indissociação entre fatores internos e externos (endógenos e exógenos) no processo de desenvolvimento cognitivo e no acesso ao conhecimento.

A construção progressiva das estruturas da inteligência, como mostra Piaget, ocorre no curso do desenvolvimento por meio da interação do sujeito com o meio, processo a que Piaget chamou de "*equilibração majorante*".

> *"... o sujeito procura evitar a incoerência e tende, pois, sempre na direção de certas formas de equilíbrio, mas sem jamais atingi-las, senão às vezes a título de etapas provisórias, mesmo no que concerne às estruturas lógico-matemáticas, cujo fechamento assegura a estabilidade local, sobre novos problemas, devido às operações virtuais que ele torna possível construir sobre as precedentes." (Piaget, 1976, p.156).*

Em seus estudos finais, Piaget caracterizou dentro deste processo, as "*abstrações*".

A abstração faz-se presente no processo de construção do conhecimento de três formas: abstrações empíricas, reflexivas e pseudo-empíricas.

A "abstração empírica" retira o conhecimento de objetos físicos ou aspectos materiais da ação, ou seja, daquilo que transparece como "observável". Por exemplo: a cor, a forma, o peso de objetos.

À abstração que incide sobre operações do sujeito Piaget denomina de "*reflexiva ou refletora*". É reflexiva num duplo sentido, porque envolve dois processos: o "reflexionamento", no sentido de uma projeção sobre um nível superior daquilo que é tomado do nível precedente, e a "reflexão", no sentido de que aquilo que foi retirado do plano anterior se reorganiza numa nova totalidade no nível posterior, seja das representações, seja das formas. Apóia-se nas coordenações do sujeito e resulta da reflexão ou reorganização necessária sempre sobre novo plano. Quando a reflexão se dá no nível das representações, a abstração se torna "refletida", ou seja, na medida em que os resultados da abstração reflexiva se tornam conscientes, instala-se o pensamento reflexivo no sentido de que se torna objeto ou tema de reflexão, isto é, torna-se refletida.

Na ação do sujeito, enquanto troca com o meio, Piaget identifica dois componentes básicos denominados de observáveis e coordenações. Os observáveis podem ser definidos como todos os dados que o sujeito pode constatar pela experiência por meio de uma leitura imediata dos objetos ou fatos, fundada num processo de "*abstração empírica*". Esta leitura, no entanto, é determinada pelos instrumentos de que o sujeito dispõe, o que significa dizer, delimitados por seus esquemas de assimilação. O observável não pode, portanto, ser definido simplesmente como aquilo que é dado perceptivamente.

As coordenações, por sua vez, referem-se às inferências implícitas ou explícitas elaboradas pelo sujeito, consistindo em construções de relações novas que ultrapassam as fronteiras do observado, utilizando-se do processo de abstração reflexiva.

A abstração está limitada pelos esquemas de assimilação do sujeito. Quando o esquema de assimilação é insuficiente para o novo desafio, há uma modificação de esquemas, no mecanismo de acomodação. Por abstração, "*o sujeito retira o que seu esquema de assimilação atual possibilite que ele retire*" (Becker, 1993, p. 44).

A abstração reflexiva é um dos motores do desenvolvimento e um dos aspectos gerais da equilibração. A abstração reflexiva funciona num processo em espiral, pois "*cada reflexionamento de conteúdos (observáveis) pressupõe a intervenção de uma forma devida à reflexão*" (Piaget, 1977, p. 306). Desse modo, tem-se não só a construção de formas cada vez mais ricas, de alcances mais amplos, como também uma quantidade maior de formas em relação aos conteúdos, que, por sua vez, acarretam a qualidade das abstrações empíricas e pseudo-empíricas, no sentido de que, quanto maior for o instrumental para assimilação, mais nítidas ou diferenciadas se tornam as propriedades dos objetos e situações.

Piaget mostra que é preciso distinguir abstrações empíricas das que ele denominou de "*pseudo-empíricas,*" no sentido de que, antes do período operatório, a criança atua diretamente sobre os objetos, dando a impressão de que está apenas extraindo empiricamente as propriedades destes observáveis. No entanto, quando o objeto é modificado pelo sujeito, como no caso da ordenação de elementos de um conjunto, em que a ação de ordenar é resultado de propriedades conferidas pelo sujeito por intermédio da coordenação de ações, dá-se a abstração pseudo-empírica.

Nos níveis iniciais do desenvolvimento, estas formas construídas pela abstração reflexiva são muito simples, mas à medida que os progressos da inteligência se efetuam, elas caminham em direção a um estado "puro", isto é, libertam-se dos conteúdos empíricos, ao passo que estes jamais podem existir independentemente das formas. Logo, a abstração reflexiva, em suas formas elementares, não é possível ao sujeito quando incorporada a objetos (experiência física), na medida em que ele introduz nestes objetos características devidas às suas ações (como ordená-los ou reuni-los). Por isto, esta forma inicial de abstração reflexiva é denominada por Piaget de "*abstração pseudo-empírica*" (Piaget, 1974) que desempenha um papel psicogenético muito importante porque constitui o ponto de partida da dedução matemática.

A criança deve apoiar-se, inicialmente, em materiais concretos para poder chegar ao nível no qual as abstrações não mais necessite desses materiais. Em suas formas superiores, as abstrações reflexivas dão lugar aos sistemas formais elaborados de tal modo que o sujeito passa a considerar as próprias formas das estruturas anteriores as quais se tornam, neste caso, conteúdos de formas superiores (Piaget, 1977). Isto permite à abstração reflexiva projetar-se no mundo dos possíveis que ultrapassa infinitamente a natureza dos objetos físicos.

A evolução dos dois processos de abstração no curso do desenvolvimento é bem diferente. A abstração empírica, em qualquer nível que seja, jamais intervém sozinha porque, para tirar uma informação de um objeto, é indispensável utilizar instrumentos de assimilação, isto é, todo um conjunto de instrumentos necessários à "leitura" da experiência e que são provenientes de abstrações reflexivas anteriores. Por exemplo: a informação proveniente do objeto não existe isoladamente; é preciso sempre estabelecer relações de correspondência, de equivalência, de diferença... Logo, a experiência física implica sempre um quadro lógico-matemático, por mais elementar que ela seja, pois qualquer ação que resulta num conhecimento físico nunca é independente das coordenações mais gerais das ações que são a fonte do conhecimento lógico-matemático. É por esta razão que Piaget afirma não haver conhecimentos exógenos, senão aprendidos como conteúdos por meio de formas de origem endógena.(Piaget, 1974).

Um outro aspecto que diferencia os dois tipos de abstração refere-se ao sentido de necessidade. A abstração com base nos objetos (empírica) só dá lugar a constatações não necessárias em virtude de serem arbitrárias e, portanto, destituídas de necessidade lógica ao passo que as estruturas lógico-matemáticas elaboradas pela abstração reflexiva caracterizam-se por uma necessidade dedutiva interna (Piaget, 1973).

A abstração reflexiva caminha no sentido da construção das formas ao passo que a abstração empírica se torna progressivamente dependente da primeira em razão de inserção gradual dos conteúdos nas formas, pois, conforme Piaget, quanto mais se enriquecem as formas, melhor elas se prestam para a apreensão dos conteúdos. Esta relação entre abstração empírica e reflexiva deve-se ao jogo permanente entre assimilação e acomodação, uma vez que na abstração reflexiva interfere primordialmente o processo assimilador, já que ela incide sobre as coordenações, ou seja, sobre a assimilação recíproca de esquemas de ação ou de operações.

Uma outra diferença entre os dois tipos de abstrações advém do fato fundamental de que a abstração empírica pode conduzir a contradições e a abstração reflexiva faz-se no sentido de evitá-las, pois, com base nas coordenações lógicas, permite a compreensão das implicações necessárias que regem as operações. Por lidar com os observáveis, a abstração empírica está ligada a um quadro espaço-temporal, ao passo que a abstração reflexiva, graças à equilibração crescente, conduz à construção de estruturas atemporais que são as da Lógica e da Matemática.

Quando a abstração reflexiva ultrapassa o nível da ação para o da conceituação, as reestruturações dão origem à tomada de consciência.

> *"A tomada de consciência consiste em fazer passar alguns elementos de um plano inferior inconsciente a um plano superior consciente; constitui, pois, uma reconstrução no plano superior do que já está organizado de outra maneira no plano inferior (...) Do ponto de vista do procedimento estrutural, é reconstrução, o que se constitui numa conceitualização. O inconsciente é povoado de esquemas sensório-motores ou operatórios já organizados em estruturas, exprimindo, contudo, o que o sujeito pode "fazer" e não*

o que ele pensa. Dito isso, a reconstrução conceitualizada que caracteriza a tomada de consciência pode ser de antemão suficiente, quando não é inibida por nenhuma contradição. Se não, ela é primeiramente deformante e lacunar, depois se completa, pouco a pouco, graças a novos sistemas conceituais, permitindo ultrapassar as contradições por integração dos dados nesse novo sistema". (Piaget, 1973, p. 42-3).

Na experiência de transvasamento de líquidos, a criança negligencia a largura do copo para continuar mantendo o julgamento de que para **A e B** guardarem a mesma quantidade de líquido, basta que este ocupe nos recipientes o mesmo nível (mesmo que **B** seja mais largo que **A**).Graças à contradição, a criança não faz tomada de consciência porque não consegue coordenar o elemento provocador da contradição (largura) com o nível ocupado pelo líquido no recipiente. Para que ocorra a tomada de consciência, o sujeito precisa se dar conta da contradição vivenciada.

*"Uma das dificuldades da tomada de consciência ao nível das representações consiste no fato de que, durante muito tempo, a criança não entende que toda a ação comporta necessária e intrinsecamente um aspecto negativo e um aspecto positivo. Inicialmente, a criança só percebe o que é, mas não o que não é... Só com as estruturas operatórias, a criança vai entender que a cada afirmação corresponde uma negação possível, até compreender que chegar a uma conclusão necessária é excluir todas as outras possibilidades... Assim, a mais elementar "compreensão" ou a mais elementar "tomada de consciência" do que se passa, tanto no nível da ação como no da representação, implica a distinção entre o que **é** e o que **não é**, entre as relações necessárias e as contigentes." (Chiarottino, 1984, p. 72/3)*

Como explica Rangel:

"A abstração reflexiva na tomada de consciência envolve o problema do enfrentamento de contradições e a superação das mesmas (...). A compreensão decorrente das abstrações reflexivas relacionadas à tomada de consciência surge da necessidade do sujeito decidir, de escolher, após análise de várias possibilidades, aquelas que justificam o seu raciocínio. É o "pensar sobre" que caracteriza um conceito em contraste simultâneo com o que não o caracteriza (...). A contradição entre dois elementos geralmente é manifestada pela ausência de um conhecimento que possa englobar e relacionar estes elementos num todo coerente". (Rangel, 1992, p.47-8).

Piaget refere-se à abstração reflexiva como uma reequilibração por reconstrução endógena, seguida de um ultrapassamento graças a uma reorganização com novas combinações, mas cujos elementos são tirados do sistema anterior (Piaget, 1974). Trata-se aqui, portanto, do mecanismo das equilibrações "majorantes" e, neste sentido, pode-se dizer que a abstração reflexiva assegura cada vez mais um melhor equilíbrio interno entre os subsistemas na medida em que eles se coordenam entre si, sem contradições.

Para Piaget, assim como o resultado de uma abstração empírica conduz o grau de generalidade dos caracteres extraídos do objeto, o resultado de uma abstração reflexiva é sempre uma generalização.

> *"...toda generalização supõe uma abstração prévia, ou pelo menos, a delimitação das propriedades generalizadas".* (1995, p.59).

Como explica Chiarottino:

> *"Trata-se de um processo em espiral (...) uma alternância de forma e conteúdo, sem limites, sem fim e sem começos absolutos. A característica desta espiral é a de conduzir a formas cada vez mais ricas e, conseqüentemente, mais importantes em relação aos conteúdos. O constante processo de abstração reflexiva leva à construção de um maior número de formas em relação aos conteúdos".* (Chiarottino, 1984, p.70).

Numa abstração empírica, a generalização é indutiva e desprovida de necessidade ao passo que na abstração reflexionante há um reflexionamento de coordenações que implicam construção. A reflexão reorganizadora que daí resulta conduz a generalizações necessárias. A necessidade é de natureza lógico-matemática e não física. As leis da Lógica não são leis no sentido da generalidade dos observáveis, mas leis que regem composições operatórias originadas da coordenação das ações.

A generalização construtiva envolve uma assimilação recíproca de esquemas heterogêneos que, graças às diferenciações e integrações, reorganizam-se, integrando-se num novo sistema, orientado pela necessidade.

Macedo(1994) exemplifica as generalizações como abstrair das ações aquilo que é comum e aquilo que é diferente.

> *"(...) Trata-se de retirar das formas algo que não lhes pertence enquanto particular mas enquanto algo geral e comum a um conjunto de formas diferentes. O geral só pode ser retirado, na perspectiva de Piaget, da coordenação geral das ações que o sujeito atribui a cada uma das formas e a todas elas ao mesmo tempo."* (1994, p.120).

Toda aprendizagem de natureza lógico-matemática deve ser entendida como dependente das coordenações de ações do sujeito, submetidas aos mecanismos de regulação ou equilibração do desenvolvimento das noções operatórias.

Tentar compreender algo novo significa tentar assimilar este novo aos esquemas disponíveis em nível cognitivo, Quando um sujeito precisa abrir um objeto que lhe é desconhecido, aplica a este objeto todos os esquemas de que dispõe, provindos de ações anteriores, até que encontre o esquema adequado ou se acomoda à nova situação, criando novos esquemas.

Na perspectiva construtivista, o professor pode contribuir para o progresso de seus alunos criando e organizando situações que desafiem as estruturas mentais do aluno, conseguindo dele uma autêntica atividade mental.

Esse papel "desequilibrador" do professor piagetiano justifica-se pela teoria da equilibração que entende como fator de progresso os constantes desequilíbrios resultantes da interação com o meio. As sucessivas reequilibrações não são entendidas como um simples reajuste e uma volta ao equilíbrio anterior, mas como uma ultrapassagem de estados anteriores a novos estados, mais ampliados que os anteriores.

Neste contexto é inadmissível imaginar-se o "*laissez-faire*" pedagógico e a total não-diretividade, na perspectiva piagetiana. A atividade orientada, constantemente estimulada pelo mestre, ainda é a chave do procedimento didático.

> *"...a postura básica do educador é aquela aberta, que parte da percepção de cada aluno, e do grupo como um todo, que possibilita a cada aluno que "se conheça" e conheça seu colega".* (Abramovich, p. 41, 1985).

O conhecimento do aluno como indivíduo psicológico e epistêmico será o suporte de toda a conduta educacional. Para tanto, o professor deve ter o domínio da teoria do desenvolvimento cognitivo, embora conhecê-la não seja suficiente, mas é uma condição necessária ao seu bom desempenho.

Sendo responsável pelo processo do desenvolvimento cognitivo de seus alunos, cabe ao professor a seleção cuidadosa dos conteúdos escolares a serem focalizados na sala de aula e a organização de estratégias que deverá usar. Deve estar ciente de que a manipulação de objetos (reunião, separação, deslocamentos, montagens, ordenação, correspondência) faz apelo à atividade da criança, de acordo com os diferentes níveis de desenvolvimento.

Cabe destacar que a ação a que Piaget se refere não tem um sentido apenas de ação material, no sentido de manipulação de objetos. Mesmo porque, nos níveis superiores do desenvolvimento cognitivo a inteligência ainda consiste em executar e coordenar ações, mas caracteriza-se pela ação mental, em forma interiorizada, da reflexão, que corresponde às operações.

> *"...ser ativo cognitivamente não se reduz, bem entendido, a uma manipulação qualquer; pode haver atividade mental sem manipulação, assim como haver passividade com manipulação..."* (Inhelder, Bovet & Sinclair, 1977, p. 36).

Mesmo no caso da manipulação de objetos, cabe lembrar que a construção do conhecimento implica abstrações, extraindo dos objetos o conhecimento pela ação própria.

Para Piaget, compreender é passar de um estado de menos equilíbrio para um estado de maior equilíbrio e isso exige esforço porque não é simples cópia do real. Implica um processo de abstração reflexiva.

A abstração deve ser o ponto de chegada de um processo iniciado pela ação real e material; a inversão desse processo na educação leva inevitavelmente ao fracasso na aprendizagem. Sobre este fundamento, Piaget propõe que, desde a Escola Maternal, a criança seja estimulada por uma série de manipulações voltadas para os conjuntos lógicos, numéricos, comprimentos, superfícies. O ensino do 1° grau deverá desenvolver e enriquecer de forma sistemática tais atividades que, aos poucos, serão transformadas, no 2° grau, em experiências de Física e Mecânica elementares. (Piaget, 1991).

Cabe ao professor criar situações que levem à reflexão, tomada de consciência, criatividade, adequadas ao nível de desenvolvimento cognitivo de seus alunos. É importante que o professor ouça o aluno, mas também é importante que saiba fazer perguntas e criar dúvidas.

As crianças podem desenvolver a capacidade de pensar quando manipulam os objetos, mas esta capacidade não consiste em simples cópias do exterior na mente, não significa acumular informações justapostas. As mudanças intelectuais sempre implicam organização e reorganização, e, de acordo com Piaget, não se efetuam numa progressão linear, não se caracterizam por ser de natureza simplesmente aditiva. As ações sucessivas exercidas sobre o objeto organizam-se, coordenam-se umas às outras e auto-regulam-se internamente constituindo os instrumentos de assimilação que permitem à criança reorganizar cada vez melhor novas experiências e adquirir condutas novas, aperfeiçoadas, mais adaptadas.

Um estímulo só é significativo na medida em que existam processos individuais de organização que permitam a sua assimilação. A interação entre o ser humano e o meio físico proporciona à criança o desenvolvimento intelectual.

Ao discutir a educação, Piaget referiu-se à capacidade criativa do indivíduo, caracterizando homens inventivos, descobridores, criadores, capazes de fazer coisas novas, e à capacidade crítica, típica de indivíduos que procuram constantemente a verificação e a prova, o discernimento.

A atual caracterização que se busca para o professor, numa perspectiva piagetiana, está profundamente implicada nestes propósitos educacionais.

As metas educacionais propostas por Piaget permitem caracterizar um protótipo de professor intelectual e moralmente desenvolvido, na direção do exercício pleno de sua autonomia e da ampla cooperação com outras pessoas. Esta é uma disposição inerente à sua capacidade de descoberta, invenção e crítica.

O preparo adequado dos professores para o desempenho da atividade docente é o ponto crítico que os inúmeros pesquisadores, dentre os quais

Domingues de Castro. (1981) apontam no sistema educacional. Trata-se de uma questão bastante ampla relacionada a problemas sócio-político-econômicos de nosso país.

O processo de formação de professores é longo e complexo. O professor precisa ter claro quais são suas concepções sobre a educação, e sobre o conhecimento para poder atuar de maneira mais consistente. A melhoria de ensino também depende de o professor conseguir adotar uma atitude de pesquisador, de investigador do processo educacional, procurando entender cada vez melhor o que acontece na sala de aula, e avaliando sua própria intervenção no processo de construção do saber. A isso deve-se somar uma reflexão sobre os fundamentos da educação, um conhecimento cada vez melhor dos conteúdos escolares e das características do desenvolvimento e da aprendizagem humana.

Que acontece com um professor que, muitas vezes, é resultado de um processo educacional deficitário, de caráter autoritário, heterônimo, que enfatiza e castiga o erro? Como superar uma formação que, provavelmente, pode ter sido fragmentada, pouco consistente e superficial? A bibliografia especializada no Brasil, de maneira até exaustiva, tem analisado a questão da formação profissional do professor e mostrado que ela é, quase sempre, de baixa qualidade. Desestimulado em sua atividade profissional pelas condições precárias de trabalho, baixa remuneração e desprestígio da carreira docente, desestimulado em relação a sua capacidade de inventar e criar, ou traído pelo medo de errar, o professor pode mostra-se inapto em sua atuação profissional. O que se tem constatado é que tende a procurar aplicar receitas prontas, veiculadas por colegas na escola, pretensamente infalíveis a seus olhos pouco observadores, pouco críticos em lugar de procurar aprimorar-se teoricamente.

Rangel (1992), investigando a aprendizagem e o ensino de Matemática para crianças de 1ª série do 1º grau, em escolas públicas comenta as dificuldades de crianças tentando compreender o que suas professoras, por sua vez, tentam ensinar. Analisando falhas no trabalho docente, assinala um constrangimento da ação produtora do saber das crianças quando a escola tenta reduzir o conhecimento matemático a um conhecimento de regras e convenções. Conclui que as crianças não aprendem, embora ansiosas por aprender, e, por outro lado, os professores não fazem melhor porque não sabem como fazer.

No trabalho em escolas de 1º grau, como coordenadora e orientadora educacional, tem-se percebido que quando se trata de apresentar aos professores propostas novas em educação, não se pode considerá-los de maneira diferente da de seus alunos.. Também o professor, num caso como este, deve construir o saber, compreender e reorganizar as idéias e proposições sobre as teorias psicológicas, por exemplo. Não basta tentar transmitir ao professor idéias e procurar inculcar em cada um as novas orientações pedagógicas e psicológicas. Há necessidade de considerar os professores como alunos e perceber que nada pode ser modificado senão por um saber construído e valorizado. Quando isso não acontece, o trabalho construtivista é artificialmente imposto e não efetivo. A questão da autonomia do aluno foge completamente da visão do professor, em situações de conflito. Segundo Becker (1993), nos momentos essenciais, em que a situação foge ao controle, o professor age conforme sua crença verdadeira e usa do autoritarismo tanto intelectual quanto moral, nivelando a todos por comparações, desvalorizando o processo pessoal de cada aluno.

É preciso que se considere o tempo necessário para a construção do saber do professor. Cabe lembrar quer as condições não são inatas e que o processo de construção é longo e fruto da equilibração.

O conhecimento de teorias psicológicas, como, no caso, a de Jean Piaget, não é garantia para a superação de todos os problemas da educação. No entanto, uma reflexão sobre Fundamentos da Educação, em geral, e sobre Psicologia Educacional, em especial, pode significar uma grande contribuição para a melhoria da prática docente.

Uma prática docente totalmente baseada na intuição, baseada apenas no senso comum pode ter resultados desastrosos na escola. É preciso unir intuição à teoria, para uma prática mais coerente e adequada. Nessa condição, o professor saberá rever, avaliar e planejar sua atividade profissional e terá melhor discernimento para uma atuação docente mais coerente. Só as concepções e crenças do professor possibilitam a avaliação e a definição de metas consistentes e valiosas.

As contribuições da Psicologia da Educação para a melhoria do ensino da Matemática estão diretamente relacionadas ao melhor ou pior nível de compreensão que os professores possam ter sobre elas, não apenas em nível teórico como das possíveis implicações para a prática de sala de aula. Mesmo os projetos de ensino nos quais os autores já explicitam as implicações, nem sempre são bem compreendidos por todos. As tentativas de implementar inovações na sala de aula, por outro lado, nem sempre têm sido acompanhadas e avaliadas com o devido cuidado e rigor.

No caso da proposta das implicações da Teoria de Piaget e da proposta de Dienes para o ensino de Matemática, considera-se que um estudo sobre a experiência de uma escola que define toda sua prática nesses referencias pode constituir-se em uma contribuição interessante para melhoria e renovação do ensino.

CAPÍTULO II

A CONSTRUÇÃO DO NÚMERO

Estudos e descobertas de Jean Piaget e colaboradores mostraram que o conceito de número não pode ser transmitido para as crianças, seja por meio de exposição oral, por explicações, seja por meio de recitação e memorização. Ele é construído pelo indivíduo, por meio de um processo que envolve o amadurecimento neuronial do indivíduo, as experiências vividas e as informações que recebe do meio.

A construção do número pela criança dá-se em estreita relação com as estruturas lógicas. Conforme mostra Piaget não é suficiente que a criança saiba contar verbalmente ou recitar números. Recitar números não é indicativo de que a criança tenha o conceito nem é condição suficiente para a construção do número.

Construir o número implica a elaboração do sistema de inclusão de classes, das operações lógicas de classificação, seriação e das relações assimétricas, conforme mostra Piaget.

O número não é alguma coisa inata ou adquirida empiricamente, pela observação, ou pela linguagem. Gréco (1962) fez experimentações para provar que o número é alguma coisa que cada ser humano constrói através da coordenação de relações.

Quando a criança ainda não tem estrutura mental para a compreensão do número, isto é, ainda não é capaz de fazer as relações necessárias, ela baseia seu julgamento de quantidade no espaço ocupado pelo objeto da contagem ou pela percepção das fronteiras. Quando estimulada a comparar duas fileiras de contas para saber qual tem maior número de contas, se não tiver as estruturas mentais necessárias para a compreensão do número, usará a melhor coisa que lhe ocorre para fazer julgamentos quantitativos: a noção do espaço ocupado. Quando já a tiver construído, o espaço ocupado torna-se irrelevante, pois ela fará julgamento quantitativo. O que ocorre nesse caso que acabamos de analisar é que a criança com tais estruturas cognitivas tem a noção de "conservação" da quantidade independentemente da apresentação perceptual das quantidades a serem avaliadas.

Piaget e Inhelder (1963) fizeram um experimento em que a criança e o experimentador ficavam cada um com um copo e várias contas. Cada vez que o experimentador colocava uma conta em seu copo a criança deveria fazer o mesmo no seu. Após serem colocadas 5 contas, o experimentador pedia para a criança parar e só observar o que ele ia fazer. O pesquisador colocava mais uma conta em seu copo e dizia: "Agora vamos continuar como antes". E continuavam colocando contas em correspondência biunívoca em seus copos até que o experimentador dissesse que bastava. Se esta experiência é feita com uma criança de quatro anos e lhe for perguntado em qual dos copos há mais contas, a criança certamente dirá que ambos têm mesma quantidade porque o critério que usará para responder à indagação será o do aspecto visual, isto é, ela "vê" igual quantidade nos copos, pois avalia pela aparência. Quando questionada sobre o que aconteceu, ela relata corretamente os fatos, mas seu julgamento de igualdade dá-se pela aparência empírica das duas quantidades finais das contas.

Uma criança mais velhas, na faixa de cinco a seis anos, já deduz logicamente que o experimentador tem uma conta a mais.

Se uma criança afirma que o adulto tem uma conta a mais e lhe é colocada a questão de continuarem por todo um dia colocando contas (em correspondência um a um), ao final do dia quem teria mais contas? As respostas podem ser: "Você sempre terá uma a mais"; "Não sei porque nós ainda não tentamos" ou "Você não tem contas suficientes para fazer isso".

Professores que trabalham numa tendência tradicional, em Educação, acreditam que o número é uma propriedade do conjunto de números, e que se abstrai empiricamente esta propriedade do conjunto de objetos.

Pesquisas sobre a construção do número, com base nos trabalhos de Piaget, levaram Kamii a sugerir que o professor encoraje as crianças a pensarem ativamente, estimulando o desenvolvimento de suas estruturas mentais para a aquisição deste conhecimento.

A construção do número acontece gradualmente. Para a autora, o princípio de ensino que deve ser concebido é o de que para a construção dos grandes números, é importante possibilitar o desenvolvimento dos mesmos processos cognitivos que resultam na construção dos pequenos números. (Kamii, 1984).

Segundo Vergnaud:

> *"A noção de número é uma das mais importante das noções matemáticas ensinadas na escola. Além de ser uma noção elementar, apóia-se em outras noções como as de função, correspondência biunívoca, relação de equivalência e de ordem." (Vergnaud 1991, p.101).*

Para o autor, é a possibilidade de fazer somas que dá ao número seu caráter específico em relação às noções sobre as quais se apóia.

> *"O que dá aos números sua característica essencial é a possibilidade que temos de somá-los e dar sentido a esta adição" (Vergnaud 1991, p.42).*

O número, enquanto quantidade pensada, é um conceito. O número escrito é uma convenção, num sistema de numeração.

Quando se ensinam números, precisa-se ensinar a pensar e a registrar.

Vergnaud ressalta que não se pode confundir o conceito de número com sua representação escrita. O número pode ser escrito de diferentes maneiras: 9, em algarismo arábico, IX em algarismo romano, 21 em base quatro, e de outras maneiras. Há, portanto, diferentes modos de representar o mesmo número, com as mesmas propriedades: ser cardinal do conjunto de nove elementos, ser ímpar, ser múltiplo de três, ser sucessor de outro...

O número é o conceito para o qual existem vários sistemas possíveis de escrita. O sistema de numeração decimal, objeto de nossa investigação é um deles.

A dificuldade na aquisição do conceito de número está essencialmente no nível do conceito, embora haja interferência das dificuldades própria do sistema de numeração decimal das operações que o acompanham.

Segundo Vergnaud (1991), o sistema de numeração decimal é o suporte da conceitualização do número e é impossível falar em números grandes ou em decimais sem o recurso de sua representação escrita. Para esse autor, quando se fazem as primeiras aquisições das estruturas numéricas, a escrita do número fica imediatamente associada ao número de modo a confundir-se uma estrutura com a outra.

Piaget distingue o conhecimento em três tipos: o físico, o social e o lógico-matemático. O conceito de número é uma "relação" do pensamento e, portanto, faz parte do conhecimento lógico-matemático.

Quando a criança diz que há três carrinhos em seu bolso, o "três" não está em nenhum dos carrinhos. Ele é uma relação estabelecida mentalmente entre os conjuntos destes objetos e outros conjuntos eqüipotentes. A criança "abstrai" dessa contagem o conceito do número três ao estabelecer tais relações.

No início da construção do conceito do número, a criança não estabelece uma relação de ordem entre os objetos a serem contados e, por isso, conta o mesmo objeto mais de uma vez ou deixa até de contar alguns deles. Mais tarde, ela percebe, na sua interação com o meio, que precisa considerar um objeto já contado como integrante do grupo (conjunto) dos "já contados". Sente a necessidade de aplicar nesta contagem uma "ordem". Esta ordem não é, porém, apenas espacial. Se assim fosse, bastaria estar enfileirado para que não errasse a contagem. A "ordem" referida é uma ordenação mental, não literalmente espacial: cada objeto será contado uma e uma só vez e todos os objetos serão incluídos na contagem. Isso ainda não é suficiente para que possamos dizer que a criança tenha o conceito do número.

A criança pode ordenar os objetos mentalmente e contá-los sem omitir nem repetir nenhum objeto, mas pode fazer isso como se estivesse apenas dando nome aos objetos. Um deles é o um, o outro é o dois, o três, o quatro... Quando pedimos que pegue cinco objetos dentre os que contou, ela pega o "quinto", que recebeu o nome de "cinco". Isso acontece enquanto a criança não tiver adquirido a noção de quantidade, ou seja, o conceito de número cardinal.

Para que esse conceito esteja construído, ela precisa fazer a síntese de dois tipos de relações mentais: ordem e inclusão hierárquica (número cardinal e ordinal). Desse modo, ela precisa incluir em cada objeto contado o que o precedeu, na proporção de "mais um", "mais um"... É uma assimilação recíproca de dois esquemas: o esquema da ordenação e o de incluir hierarquicamente um em dois, dois em três, etc.

> *"A inclusão de classes maneja com qualidades tais como as que caracterizam cachorros, gatos e animais. Contudo, no número, todas as qualidades são irrelevantes porque o cachorro, o gato são ambos considerados "uns"* (Kamii, 1984, p.21-2).

Isso significa que ela tem de compreender a idéia de que o número representa unidades e que essas unidades podem ser colocadas em relação e em seqüência:

- perceber que o 7, por exemplo, é uma totalidade, que contém o 3 e o 4 como partes e ainda ser capaz de agrupar várias combinações para formar o 7 (inclusão de classes). Uma classe total é maior que uma grande subclasse incluída nela, ou seja, pensar simultaneamente no TODO e nas PARTES (não esquecer uma, quando pensar na outra) e tornar inversos os processos, mentalmente (pensar das partes para o todo e, depois, de volta para as partes, novamente).
- perceber que todos os números consecutivos estão conectados pela relação mais um.

Alegre-RS, afirma que existem hipóteses construídas pela criança em relação ao número, de natureza diferente das da lecto-escrita anunciadas por Ferreiro. O campo de conhecimento da Matemática difere do campo de conhecimento da linguagem. Esta foi construída pela humanidade, assim como o é pelo sujeito, na interação sócio-cultural como fonte de comunicação e expressão. Embora haja uma lógica fonética na relação fala-escrita, nem sempre esta relação é a que determinou as "regras" da escrita. O número, por sua vez, apresenta problemas diferentes para a criança porque a relação do número escrito não é com a fala; o código do número é ideográfico porque é a idéia de quantidade que está representada.

A Matemática difere ainda da linguagem porque tem conotação universal, não é específica a cada cultura. Surgiu de soluções de problemas do cotidiano do homem englobando relações de espaço, tempo, quantidade.

Do mesmo modo como a fala e a escrita, a criança já convive com situações que envolvem quantidade e número: o número da "minha" idade; número do telefone, o preço das coisas, números como grandeza (medida) de quantidades discretas (objetos soltos) ou contínuas. A complexidade do mundo físico e a ação da criança sobre sua realidade permitem a construção de invariantes operatórias importantes, tais como as "conservações".

Koch (fonte citada acima) fez o seguinte experimento: apresentou a crianças uma caixa de fósforos com dois compartimentos, uma passagem entre eles e uma tampa deslizante. Colocou dez objetos dentro, com a participação das crianças. Fechada a caixa, ela foi sacudida para que os objetos passassem de um compartimento a outro (sem que se vissem) e colocou-se a caixa novamente na mesa. Cada criança (do grupo) anotava seu palpite sobre quantos objetos ficavam de cada lado. Do ponto de vista da Matemática e do processo cognitivo, a situação proposta significa $\mathbf{x + y = 10}$ (sabemos o total mas não sabemos nenhuma das duas partes).

A criança precisa nesta situação coordenar as duas partes possíveis com o total já conhecido. As soluções dadas pelas crianças foram:

$\mathbf{x \geq}$ **ou** $\mathbf{y \geq 10}$: colocavam dois números, podendo um deles (ou os dois) ser mais que 10.

$x \leq 10$ **e** $y \leq 10$**, mas** $x + y \neq 10$: colocavam dois números menores ou iguais a 10 mas sua soma é superior a 10

$x \leq 10$ **e** $y \leq 10$**, sendo** $x + y = 10$: colocavam dois números que somados dessem 10, mesmo não sendo o número obtido depois, mesmo que não fossem os números obtidos na caixa, pois aí entrava a probabilidade de dar uma das combinações.

Um outro problema apresentado era o de mostrar a mesma caixa de fósforos, com os 10 objetos, porém, às crianças era apresentado um dos compartimentos. Restava a elas dizerem quantos objetos havia no outro compartimento.

Matematicamente, este problema abordava a questão do complemento: quantos faltam para fazer o total ou $a + x = 10$ (em que **a** significa o compartimento que foi mostrado na caixa).

As soluções foram:

$x > 10$: apontavam um número maior que 10;

$x \leq 10$ **mas** $a + x \neq 10$: pensavam num número menor que 10, mas que não formava 10 com o já conhecido;

$x \leq 10$ **e** $a + x \neq 10$: acertavam o número possível.

Nestes problemas da inclusão das partes no todo, o objeto de estudo da criança, ao jogar, consistiu numa relação quantitativa que incluía uma idéia operatória de quantidade: "a (s) quantidade (s) que não está (ão) presente (s) é que deve (m) ser pensada (s) em função de um total - um número conhecido.

Analisando o pensamento da criança, Koch assinala quatro invariantes operatórias, entre outras, como essenciais à construção da idéia de número:

- idéia de número como ordinal (seriações). Para ela, "a passagem da idéia do número ordinal para o cardinal tem a ver com a síntese que a criança faz entre a relação de correspondência - número-objeto - na contagem e a inclusão hierárquica dos objetos, anteriormente contados, à idéia do próximo número dito";
- idéia do número como cardinal (seriações e inclusão hierárquica);

- idéia de números como objeto permanente (em uma classe de transformações que não alteram a quantidade);

- idéia de número como possibilidade de composição(ões) e inclusão aditiva e complementar das partes no todo: quando não sabe nenhuma das partes, mas sabe o todo; quando não sabe uma das partes, sabe a outra e o todo.

Todos esses invariantes são construídos pela própria criança. Para a autora, os erros na solução dos problemas são indicativos das hipóteses que estão fazendo e em que momento se encontram nesta gênese.

Em relação à construção do número como representação ou linguagem, a mesma autora, cita "novas gêneses" que se inter-relacionam, mas sem depender uns dos outros: a contagem oral **um a um**, por agrupamentos, por agrupamentos de 10; a escrita de números; a leitura de números; o manejo das relações "mais que" e "menos que" entre números, tendo em vista a série numérica; a relação das partes com o todo dos algarismos no número, que é de natureza diferente da composição aditiva.

Com relação à contagem oral, Koch lembra que é um conhecimento que as crianças de classes populares trazem mais ou menos elaborado quando chegam à escola e que é um "instrumento" utilizado para solucionar problemas de comparação de quantidades, cálculos, escrita e leitura dos números, etc.

Koch fez o seguinte experimento: Propôs às crianças que contassem 56 objetos colocados em uma caixa. Aproximadamente duzentos alunos realizaram esta tarefa. O objetivo era saber como uma criança "conta" uma quantidade maior que a série que ela já organizou da contagem oral. "Saber contar número até 100 não é meramente decorar a série. A criança precisa estabelecer muitas "operações e relações" entre os elementos que ouve, desta contagem, nas brincadeiras, jogos, com adultos ou outras crianças. Entre estas relações estão: repetir, compor, ordenar, agrupar, fixar, classificar, isolar, generalizar, etc. e que vão aparecendo, isoladamente ou combinadas, na contagem que faz dos objetos propostos." (Koch, Caderno AMAE 1, p.71).

As soluções das crianças foram classificadas em níveis de complexidade crescente, numa relação de ordem, que Koch considera como sendo a que acontece na construção da contagem:

a) algumas dizem os números que conhecem ordenando partes, repetindo alguns ou partes da série, ao pegar cada objeto para contá-los (nem sempre fazendo correspondência biunívoca, número dito-objeto).

Exemplo: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,13, 14, 15, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10**. Aparentemente a única lógica que percebem quando ouvem alguém contar é que há números ou partes que repetem.

b) a criança já parece perceber a composição que surge, na contagem entre dezenas e unidades, sem que tenha descoberto a natureza desta composição, quando diz:

Exemplo: **1...8, 2...11, 15...24, vinte e oitenta, 28, 29, 9, 40, 41, 42, quarenta e vinte.** (os "..." significam que a série está completa neste intervalo).

c) outro erro que demonstra uma generalização da idéia da seqüência desta contagem pode ser notada aqui:

Exemplo: **1...19, dizedez, dizeonze... ou 1...13, dizequatro, dizecinco, dizesseis, 17....** É a partir do 16 que a contagem tem uma lógica seqüencial explícita, na fala da série numérica. Assim como se percebem as hipóteses de compreensão da conjunção de verbos pelo erro que a criança faz, ex.: **"fazi"** em vez de fiz (já que dizemos comi, escrevi,...) também faz generalizações baseando-se em seus erros construtivos na contagem.

d) a criança começa a agrupar algumas composições a partir das dezenas e/ou a ordenar as unidades que se compõem com certas dezenas, sem saber o que quer dizer unidade ou dezena.

Exemplo: **1...12, 14, 20, 5...10, 27, 21, 28, 29, 23, 9, 40, 41, 42, 44, 46, 48, 49, 40, 41, 20, 50, 10, 20, 22 ou 1...31, 42...49, 31...39, 40...49.**

e) a questão da ordenação das unidades, ciclicamente, e das dezenas, simultaneamente, é um problema que a criança tem de resolver por si própria e que passa por soluções como estas:

Exemplo: **1...29, 40...49, 60...69, 50...57.**

Algumas crianças, às vezes, param em sua contagem, por exemplo, no número 39 e perguntam:

Criança: Eu já disse o 50?

Professor: Não.

Criança: Então 50, 51....59. Eu já disse o 80?

Professor: Não.

Criança: Então 80, 81...

Para resolver o problema da ordenação das dezenas que se combinam com o ciclo das unidades, é necessário, segundo Koch, que elas tentem isolar estas palavras que se juntam com o 1 até 9, para perceber a lógica por trás desta nova série: 10, 20, 30...

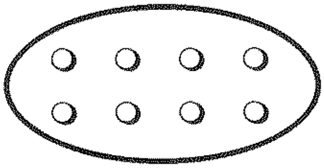
Em suas análises, Koch aponta que há realmente um processo de construção existente na criança e que as relações que ela estabelece na tentativa de "contar" estão presentes também nos problemas que envolvem a escrita e leitura do número, ou seja, no código do sistema de numeração que está tentando descobrir.

Koch pesquisou as concepções e idéias que faz a criança para descobrir o que significam os números escritos pelos adultos ou pessoas que já os conhecem. A criança tenta relacionar números (orais e escritos) a quantidades que conhece. A pesquisadora categoriza os números, segundo a complexidade que apresentam, na representação e/ou relacionamento com quantidades:

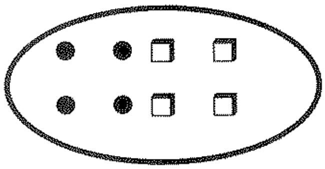
- **Número Perceptual**: a criança que não sabe contar consegue identificar a quantidade de uma face do dado e é capaz de pegar a mesma quantidade de objetos.

- **Número Elementar**: números que podem ser obtidos pela composição de números perceptuais ou já conhecidos.

Exemplo: "Douglas tinha que resolver um problema: buscar em outra sala a mesma quantidade de objetos que a do conjunto mostrado pelo professor.



Ele olhou, foi para a outra sala e trouxe oito objetos. Explicou porque tinha sabido trazer, reorganizando os 2 conjuntos assim:



E dizendo: **"Olha, aqui 4 e aqui 4".**

A organização espacial que usou para nos explicar sua ação foi realizada também em sua cabeça, foi pensada e antecipada.

Número com Representação Generalizável: é o número, a partir do 20, que já precisa de um suporte do entendimento das composições aditivas, mas também a compreensão do código do sistema de números decimais.

Koch mapeou os principais problemas que as crianças tentam resolver, na escola, para compreender o número como idéia e como representação generalizável. Esse entendimento não se dá linearmente, mas de forma dialética (as idéias de número, representação e operação estão imbricadas, dialeticamente, na construção do código de numeração decimal. Koch exemplifica que quando a criança encontra o número 36 escrito e já conhece os algarismos, pode pensar que está escrito:

- 3 e/ou 6 (sem vinculá-los);
- 9 (que é a soma de 3 e 6);
- um número como 16 ou 13 ou 26 (em que percebe a composição com e entre duas palavras que são números e usa apenas um algarismo do número na tentativa de síntese de seus elementos);
- 36 ou 63 (faltando resolver somente a questão da posição).

Ela considera que há como que um nível "alfabético" da Matemática. Há um processo básico, necessário, pessoal antes de acontecer os "aperfeiçoamentos matemáticos" sugeridos pela escola. Para tal, a criança precisa ter resolvido os problemas relativos aos invariantes:

- do número como objeto permanente"(conservação de quantidades discretas) ;
- do número como "invariante operatório", obtido por várias composições e decomposições de outros números (relação parte-todo).
- do número como representação generalizável, entendendo os diferentes estatutos do algarismo no número.
- na solução de problemas

> Segundo Koch, à criança deve ser permitido um modo particular de pensar matematicamente. A troca de estratégias e soluções que acontecem num grupo de alunos permite a produção de conflitos, desequilíbrios e reequilibrações. É uma questão complexa e complexa é a construção deste conhecimento pela criança. Acrescenta:
>
> *"(...)esta construção não determina uma única gênese, mas muitas gêneses relacionadas entre diferentes "ramos" e "aspectos", que vão se estruturando em patamares, cada vez mais abrangentes, que são desestruturados com o surgimento de novas questões e novamente estruturadas".* (Kock, Caderno AMAE 1, p.74)

Resnick, 1983, que propõe uma teoria do desenvolvimento da compreensão do número, em três momentos diferentes: no pré-escolar; no início da escolarização; e outra, durante as quatro séries iniciais do 1º grau.

Para a autora, a criança pré-escolar tem como esquema uma linha numérica mental, com sentido direcional, indicando que as últimas posições na linha são dos números maiores, cada número corresponde a uma posição nessa linha. Há a relação do "sucessor" ou de um "próximo". Esse esquema é usado para tarefas de contagem e comparação de quantidades, permitindo a resolução de um número considerável de problemas aritméticos.

No início da escolarização, a compreensão do número está baseada no esquema parte-todo que permite a relação entre três números: **5 + 2 = 7**. A criança começa a entender a estrutura composicional do número e que é possível partir e recombinar quantidades com uma certa flexibilidade. Inventa procedimentos de contagem mental baseados no princípio da comutatividade e da complementaridade da adição e subtração, envolvendo números pequenos. Só depois é que ocorre a memorização de fatos numéricos.

Nos anos seguintes de escolarização é que ocorre o desenvolvimento do sistema de numeração decimal. Inicialmente a criança descobre que as unidades são as relações fundamentais entre os números e trabalha bem com quantidades até vinte. A introdução desse sistema de numeração decimal exige a aprendizagem de uma nova relação entre os números (somando em 10), importante para a compreensão da estrutura de números formados por dois ou mais algarismos do sistema de notação posicional e, mais tarde, para os algoritmos de adição e subtração que exigem um reagrupamento do número pelo procedimento de **"vai um" e "empresta um".**

A aplicação do esquema parte-todo amplia a compreensão da estrutura de composição aditiva (todo número é composto de outros números menores).

No terceiro momento, Resnick considera três estágios no desenvolvimento do conhecimento do sistema de numeração decimal.

1. Partição única do número multidígito, em que uma única forma de decomposição é reconhecida. Ex.: 47 é 4 dezenas e 7 unidades.
2. Múltiplas partições de números multidígitos. A criança percebe que é possível estabelecer diversas equivalências, sem mudar a quantidade.
3. Aplicações do esquema parte-todo à aritmética escrita. A criança adquire as regras de sintaxe para algoritmos de adição e subtração, ignorando, porém, a semântica dos procedimentos de trocas.

Ross fez dois experimentos (1986 e 1990) com sessenta crianças de 2ª a 5ª. série, sendo 15 de cada série, em escolas urbanas e rurais, para perceber se elas tinham construído ou não o sistema de dezenas e o sistema de unidades. Usou material base 10 numa prova e feijão na outra.

Investigou as estratégias usadas pelas crianças para formar 52. Apresentou o material na base 10 (cubinho ou unidades 1 cm x 1 cm x 1 cm); barras ou dezenas (1 cm x 1 cm x 10 cm) e placas em centenas (1 cm x 10 cm x 10 cm) e pediu que fizessem "52", usando o material. Entregava apenas quarenta cubinhos de unidade e o resto em dezenas e centenas.

Constatou os seguintes resultados: 13% das crianças de segundas séries usaram simultaneamente os sistemas de unidades e dezenas na contagem: 53% das crianças de terceiras séries: 60% das crianças de quartas séries e 73% das de quintas séries.

Para que este insucesso não pudesse ser atribuído à não-familiaridade com o material base 10, Ross fez um experimento com feijões, com essas mesmas crianças.

Ross trabalhou com 48 feijões e nove copinhos plásticos; pedia que colocassem dez feijões em cada copinho, deixando os oito restantes sobre a mesa. Ross perguntava se sabiam quantos feijões havia ao todo sobre a mesa.

Apenas vinte crianças contaram de dez em dez.

> *"Enquanto a criança não confia no próprio sistema de dezenas, ela conta de um em um, mesmo tendo empiricamente, feito grupos de dez"* (in Kamii, 1995, p. 32).

Ross espalhava dez feijões de um copo sobre a mesa de modo a ter trinta nos copos e dezoito soltos e perguntava se agora teria mais ou menos feijões que antes.

Apenas onze crianças da 3ª série e onze de 4ª série conservavam a quantidade numérica. "Isto significa que "uma dezena não é necessariamente igual a "dez unidades", na cabeça do aluno, em formação.

É fácil, para o adulto, pensar em "barra"(dezena), mas para a criança é difícil pensar em "dez "e "uns "ao mesmo tempo.

Kamii (1995) comenta o raciocínio hierárquico utilizado na construção do conceito de número e do sistema decimal.

A criança usa um sistema de unidades para pensar nos números. Para ela, as quantidades totais se formam da união de unidades. Pensa: **1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1**, inicialmente. O recurso da correspondência termo a termo é encontrado em todos os inícios de pensamento matemático.

Kamii demonstra como a criança constrói o sistema de dezenas com base no sistema de unidades. "*Ela cria uma unidade de dez" (ou uma dezena)* *baseando-se em 'dez unidades de um' e condicionando relações de ordem e inclusão hierárquicas para esta nova classe*" (Kamii, 1995, p. 27).

Para a autora, quando a criança consegue pensar em uma dezena ("em dez") e dez unidades ("dez uns") ao mesmo tempo ela está iniciando a sua compreensão do Sistema de Numeração.

Kamii diz que a criança conserva o sistema de unidades ao construir o sistema de dezenas, e sem perder o sistema de unidades, nem o de dezenas, constrói o sistema de centenas. Segundo Piaget, as estruturas previamente construídas permanecem inteiras e intactas ao serem construídas novas estruturas.

Assim, às estruturas de unidades (saber pensar em dez "uns") integra-se uma nova estrutura de ordem superior, estrutura de dezena (saber pensar em um "dez") e assim por diante...

> *"Para que exista abstração é necessário que exista algo do que abstrair e este algo, nas formas elementares do pensamento, não pode ser mais que a organização das ações sobre os objetos concretos aos quais a criança tenha acesso" (Sastre, 1975, p.62).*

Para Kamii, a forma tradicional de ensino, com materiais base 10, parte do pressuposto de que idéias como "uma dezena" e "uma centena" podem ser adquiridas por abstração empírica, com base nos objetos do mundo exterior. "O conhecimento lógico-matemático, porém, só pode ser construído por abstração reflexiva (construtiva), com base em relações previamente construídas pelo sujeito. Uma dezena é, assim, uma construção feita sobre o sistema de unidades que está na cabeça da criança". (Kamii, 1995, p.29)

Para Ginsburg (1988) e seus colaboradores, há três sistemas cognitivos de conhecimento matemático. Os aspectos relacionados ao conceito de número, que a criança vive fora do contexto escolar, fazem parte do Sistema 1; não implicam em cálculos ou técnicas específicas, nem informações transmitidas pela cultura. Nesse Sistema 1, estão incluídas: "percepção de quantidade e diferentes aptidões para a elaboração de juízos sobre a correspondência um a um, a equivalência e a seriação, tal qual como foram estudadas por Piaget . Para Ginsburg (1988) as aptidões do Sistema 1, podem ser consideradas universais pois são encontrados em indivíduos de diferentes grupos culturais. Ressalta que essas aptidões desempenham um papel fundamental para a aprendizagem matemática. (in Silva,1987).

Ao tomar contato, através da Educação formal (institucionalizada ou não), com os símbolos numéricos, a criança integra o Sistema 2, segundo Ginsburg. Esse sistema é ainda informal, aparece no cotidiano da criança, às margens de contextos formais de instrução; é considerado cultural porque comporta os sistemas de signos construídos culturalmente. Ginsburg conclui que encontrou efeitos da influência da escolarização. O processo de formação do número passa pela mediação do professor.

Ao apropriar-se da escrita numérica e compreender o princípio do valor posicional dos algarismos do número, a criança estaria no Sistema 3 de Ginsburg. "Esse sistema é formal, ocorre em contexto de escolarização formal e cultural, implica o uso de sistema de signos desenvolvidos socialmente e apreendidos por transmissão". (in, Silva 1987).

Resnick, Resnick e Omanson (in Silva, 1987), ao considerarem erros das crianças nos algoritmos da subtração, observaram que na maioria dos casos o significado quantitativo dos símbolos é esquecido. As crianças trabalham com os símbolos gráficos, que para elas, não significam quantidades. Os autores consideram ser necessário que se introduzam modificações nos procedimentos da escola para dar aos símbolos significado de quantidades e não tratá-los apenas no sentido sintático.

Resnick e Omanson investigaram os resultados de treinamentos individuais com algumas crianças que faziam algoritmos da subtração defeituosos, em relação à compreensão dos princípios subjacentes à subtração escrita.

O método utilizado foi o mapeamento ("mapping instruction") onde a subtração era realizada concretamente por meio da manipulação dos blocos de Dienes. Foi verificado, no entanto, que, apesar da compreensão plena dos princípios, ao trabalhar com os blocos, ainda houve dificuldade em aplicar esses conhecimentos à subtração escrita continuando a apresentação de erros. Compreender os princípios não foi suficiente para corrigir os erros, porque as crianças já haviam automatizado algoritmos defeituosos. Segundo os pesquisadores citados, se o ensino, no início, tivesse focalizado a compreensão dos princípios, os alunos poderiam não apresentar erros.

Muitos pesquisadores fizeram uma análise dos procedimentos usados pelas crianças para realizarem com êxito, fora da escola, as operações aritméticas, apesar de fracassarem na Matemática ensinada na escola. (Resnick e Omanson, in press; Carraher, Carraher e Schliemann, 1982, Carraher e Schliemann, 1983, Carraher, 1985, Reed e lave, l981, Carraher, Carraher e Schliemann, 1987, Silva, 1987).

Ginsburg (1977) observou uma Matemática espontânea na criança, desenvolvida fora do contexto escolar que a torna capaz de resolver cálculos, com sucesso. No entanto, a criança fracassa ao usar os procedimentos usados pela escola. Ginsburg constatou uma dicotomia entre as estruturas do pensamento que a criança traz em seus procedimentos e os procedimentos que a escola quer transmitir. Há falta de conexão entre a maneira de pensar do aluno e a esperada pelo professor.

Carraher, Carraher e Schliemann (1982, 1988) observaram que jovens que vendem coisas nas ruas, que lidam com dinheiro são excelentes nos cálculos orais, têm boa noção de decomposição, valor relativo e valor absoluto do número. Tais jovens responderam a 98% dos problemas que lhes foram apresentados ao passo que, em situação semelhante à de escola, acertaram só 37% dos exercícios de cálculo e 67% dos problemas. Para tais crianças as adições e subtrações são feitas diferentemente das escritas, por um método que Carraher, Carraher e Schliemann denominaram decomposição. A criança separa os números em partes menores e opera sobre as partes, seqüencialmente.

As crianças, quando compram coisas, sentem a necessidade de contar o dinheiro. Quando contam dinheiro, as crianças precisam prestar atenção ao valor absoluto e ao valor relativo do dinheiro. Classificam as moedas ou as cédulas, contam-nas de uma em uma (valor absoluto), mas também precisam considerar o valor das moedas ou das cédulas (valor relativo). Contar dinheiro ajuda as crianças a compreender a decomposição dos números: uma quantia maior como 88 reais é representada pela repetição de quantias menores (oito notas de dez reais e oito notas ou moedas de um real). Essas idéias de valor relativo e absoluto, de decomposição e de repetição de um valor igual são importantes para a compreensão do sistema decimal, para a compreensão de propriedades importantes nas operações matemáticas.

Carraher (1985) defende a idéia de que é necessário fazer a distinção entre a compreensão do Sistema Decimal e o conhecimento da notação de valor do lugar. Para esta autora, o cálculo mental não exige o conhecimento da representação escrita do sistema baseada na teoria do valor do lugar. Tais procedimentos apóiam-se na decomposição e agrupamento usados na manipulação de quantidades e, por isso, não é necessária a compreensão da teoria do valor do lugar, usada na representação escrita.

Carraher (1984), Carraher, Carraher e Schliemann (1987) compararam o desempenho da criança resolvendo problemas oralmente ou usando procedimentos escritos, ensinados pela escola (algoritmos). Observaram que nos procedimentos orais a criança agrupa, decompõe, de forma a trabalhar com quantidades que ela mesma estabelece, conforme suas próprias relações. Lida, portanto, com quantidades significativas para si. Usa um pensamento flexível, diferente dos procedimentos exigidos ao usar o algoritmo.

Carraher refere-se a tais procedimentos como "procedimentos heurísticos" e identifica dois tipos de heurística: a decomposição e o agrupamento. Em ambos os casos a criança transforma a quantidade "oral" em quantidades que para ela são fáceis de trabalhar e nesta situação domina todo o processo.

Silva (1987), Recife, mostra que a prática da sala de aula não conduz o ensino dos algoritmos aos objetivos propostos. As crianças demonstram uma dificuldade muito grande para realizar as operações fundamentais, utilizando os procedimentos técnicos ensinados pela escola e buscam saídas, criando estratégias, que produzem algoritmos defeituosos.

A compreensão do sistema de numeração decimal não tem o êxito pretendido pela escola. É proposto à criança que memorize a seqüência dos números exercitando a escrita das séries numéricas com a intenção de que automatize a escrita e o reconhecimento de qualquer número que apareça posteriormente.

Se nos reportarmos aos estudos científicos, em especial às pesquisas piagetianas sobre como a criança constrói o conceito do número, veremos que não será pelos procedimentos que a escola vem sugerindo que ela adquirirá a noção da quantidade e o real significado do número.

Piaget investigou o conceito de quantidade nas crianças. Constatou que há um desenvolvimento do conceito de quantidades, próprio da evolução da capacidade de pensar. Num estágio inicial, a criança avalia quantidade pela configuração espacial dos objetos comparados. Num segundo momento de sua evolução, a criança já é capaz de julgar as quantidades independentemente da aparência (fileiras, pilha, ...), mas hesita ou se confunde quando as diferenças de aparência entre os conjuntos são muito grandes. No terceiro estágio, são capazes de compreender que as quantidades não mudam quando muda a arrumação de elementos do conjunto no espaço. A dificuldade ao estágio de uma criança na aprendizagem da Matemática pode estar relacionada ao seu estágio de desenvolvimento cognitivo.

Os números indicam quantidades. Esses números estão escritos e pensados com base nas regras de um sistema de numeração. Nosso sistema, o decimal, tem características que oferecem dificuldade no processo ensino-aprendizagem, tal qual desenvolvido pela escola.

O sistema de numeração decimal usa numerais de 0 a 9. Os numerais são símbolos que implicam relações. Esses simbolos têm dois valores: um valor absoluto, quando o símbolo está sozinho (ou em determinados contextos), e um valor relativo, quando acompanhado de outros, ocupando um valor posicional. Essa posição como indicativa de um valor relativo é complicada para a criança. Os símbolos que usamos na escrita de números são bastante abstratos e arbitrários. Não há relação lógica entre os símbolos e seus significados. Outros sistemas de numeração criados pelo homem usavam símbolos numa relação mais concreta com seus significados. Os maias, por exemplo, para escrever quatro usavam 0000, para escrever nove usavam $\overline{0000}$ e para o dez $=$. A compreensão do nosso sistema (decimal) exige que a criança realize operações mentais para descobrir o significado de um número.

Para Piaget, o conhecimento humano é semelhante à sociogênese histórica: resulta de um processo da construção humana através dos séculos. Há, possivelmente, um paralelo entre a maneira como a criança constrói seus conhecimentos e o modo como a humanidade o fez, no decurso do tempo.

Para Kamii (1995) o caminho percorrido pela humanidade, até chegar a um sistema de numeração simples e eficiente é semelhante ao processo de aquisição desse conceito pela criança.

A história mostra que nos primórdios da civilização, o homem sentiu a necessidade de controlar numericamente seus pertences. Fez, provavelmente, uso de pedras que correspondiam a cada objeto contado. Separava, por exemplo, uma pedra para cada ovelha que levava à pastagem. No fim do dia, ao recolhê-las, correspondia cada pedra a um animal. Se sobrassem pedras, isso lhe dizia da perda de algumas ovelhas.

Numa fase mais adiantada, a humanidade passou a usar representações, por meio de símbolos gráficos, também por correspondência biunívoca: para cada objeto fazia uma marca numa madeira ou um desenho.

Da necessidade de contar grandes quantidades surgiu a contagem por agrupamento, que foi uma conquista de pensamento de ordem superior, um avanço na forma de contar que superou a contagem por correspondência biunívoca, num raciocínio aditivo.

Historicamente, a contagem por agrupamentos surgiu quando a sociedade primitiva foi se tornando mais complexa, necessitando contar e controlar quantidades maiores. Para chegar à base decimal e ao sistema de numeração decimal, houve um longo percurso da Humanidade. Outras bases de contagem foram usadas: cinco, doze, sessenta, etc..

Apesar desta evolução ainda era difícil representar quantidades muito grandes. A humanidade acabou por criar um sistema cuja principal característica é o uso de apenas nove algarismos, acrescidos do zero, com a possibilidade de representar qualquer número ao infinito. Pela idéia de valor posicional, mediante um **princípio multiplicativo**, os algarismos recebem um valor relativo.

Este sistema de numeração é um "objeto cultural", resultado de uma evolução demorada e difícil.

Pesquisas sobre a maneira como as crianças constroem suas hipóteses para a compreensão do sistema de numeração decimal constataram que, enquanto na história da humanidade a construção foi um processo regido pelas necessidades reais, na criança o que se dá é a reinvenção individual que progride na medida em que se amplia a necessidade de a criança compreender as razões e as leis do sistema, já em uso no seu ambiente cultural. Enquanto, na história, o sistema estava sendo construído, para a criança a questão é já assimilar o já pronto, que deve ser compreendido. As pesquisas mostram ainda as coincidências de mecanismos comuns entre a história cultural e a criação individual de cada criança:

- utilização de correspondência biunívoca como primeira forma de controlar quantidades.
- uso de composições aditivas nas contagens.
- coordenação de aspectos aditivos e multiplicativos (códigos mistos) nas contagens.
- dificuldade em lidar com o zero.

O trabalho escolar deve permitir a redescoberta do conhecimento acumulado pelo Homem, na medida do possível. Deste modo, estará garantindo a continuação do saber.

No entanto, a atividade escolar passa ao lado do processo de desenvolvimento mental, contribuindo relativamente pouco para isso, pois cuida apenas da "transmissão" destes conhecimentos acumulados que são quantitativamente selecionados e exigidos.

Como lembra Carraher:

> *"Quando usamos a expressão: **"1 livro e 1 caderno"** temos dois números **"1"** representando as quantidades de modo simples. Quando dizemos: **"11 livros e cadernos"**, **"11"** não significa **"1 e 1"** e, sim, **"10 + 1"**.* (1989, p. 61)

O significado do nosso sistema baseia-se em operação mental (adição, multiplicação).

Ao iniciar a aprendizagem dos números, a criança pode não ser capaz, ainda, de conceber o sistema. O "quinze" é compreendido como um número composto por várias unidades, e ainda não compreendido também como composto por um grupo de dez e mais cinco unidades.

A numeração, no entanto, é ensinada a todos os alunos da classe, de forma indistinta e o "estágio de desenvolvimento cognitivo" é quase sempre, irrelevante ao professor. O que significa para a criança o 92? E o 120, o 102?

É muito freqüente que, ao escreverem números grandes que são maiores que os vivenciados no cotidiano, de forma corriqueira, as crianças utilizem suas próprias hipóteses na combinação dos algarismos. Confundem-se com relação ao uso do zero para representar classes ou ordens vazias, aumentando ou diminuindo o número de zeros apropriados, no registro escrevem 10020 ou 1020 para 120 ou 71 para 701, etc.

Carraher (1989) relata a dificuldade da criança com relação à escrita dos números, discute a habilidade de escrevê-los no sistema de numeração decimal e mostra que se espera da criança que adquira a compreensão e automatismo para escrever e reconhecer qualquer número natural pela memorização da seqüência de números, exercício da escrita de séries numéricas.

A escola tenta encarregar-se do ensino do sistema de numeração decimal por meio de atividades de leituras e escrita de números, de tarefas escolares de decomposição de um número em unidades, dezenas e centenas, com a utilização do "quadro de valor do lugar"; identificação do valor posicional dos algarismos; de comparação e seqüência dos números e das operações fundamentais de adição e subtração. Estes conteúdos trabalhados pela escola são, no entanto, dotados de práticas cujos fins estão nelas mesmas e quase sempre não há consciência de que a criança deve estabelecer relações, coordenações destes observáveis, nas suas próprias ações sobre o conhecimento.

Vários pesquisadores (Carraher, Silva, Nacarato, Kamii e muitos outros) lembram que a criança desenvolve gradativamente a capacidade de compreender o sistema de representação numérica e discutem as falhas da escola, no que se refere a propostas pedagógicas e conhecimento da psicogênese da construção do número.

> *"A criança desenvolve primeiro uma noção intuitiva da existência de dois tipos de valor. Depois, torna-se capaz de combinar com elementos concretos os dois tipos de valor para obter uma determinada quantidade. Finalmente, torna-se capaz de utilizar sistematicamente uma representação mais abstrata de quantidades com lápis e papel". (Carraher, 1989, p. 64).*

Carraher salienta que o processo de representação mental, ou seja, a compreensão do sistema numérico, é anterior à sua utilização efetiva com lápis e papel e não pode, portanto, ser um resultado do simples treino de leitura e escrita do número.

O desconhecimento das convenções de valor do lugar, refletido nas formas erradas de escrever os números, pode representar, segundo Carraher, uma tentativa do indivíduo de representar todos os valores componentes da quantidade total (30015 para trezentos e quinze). A autora considera que esta forma de demonstrar compreensão do sistema de numeração deve ser levada em consideração ao se ensinar o valor do lugar na escrita dos números. Para ela, isto é muito importante para a criança; é o resultado da sua reflexão, é a sua hipótese, que deve ser vista pelo professor como um erro construtivo, de valor para a aprendizagem.(Carraher,1989)

Se pensarmos na pesquisa de Emília Ferreiro, que estuda a aquisição da palavra escrita pela criança, por que não extrapolarmos para a escrita dos números?

Carraher (1985) considerando estudos anteriores (Carraher, Carraher e Schliemann, 1982, 1985; Carraher e Schliemann, 1983) defende a idéia de que crianças Pré-Escolares e analfabetos adultos têm compreensão das noções básicas do sistema decimal graças às suas experiências com dinheiro, mesmo sem nunca terem recebido estudo sistemático do sistema de numeração. Carraher em seus experimentos usou fichas de papel colorido, a que deu o nome de "Dinheiro Chinês". Essas representavam moedas de diferentes valores, conforme determinadas cores. Carraher analisou três aspectos do sistema nesse experimento:

- as propriedades básicas do sistema decimal: valores absoluto e relativo e a geração de qualquer quantidade maior a partir de quantidades menores repetidas e combinadas;
- a relação entre essas propriedades e a escrita de número pelo valor de lugar;
- a relação entre o sistema decimal, a notação do valor de lugar e os algoritmos escolares para a resolução de operações aritméticas.

Carraher e colaboradores instauraram na sala de aula, com o dinheiro chinês, um jogo faz-de-conta de "vendinha". Usou fichas amarelas que valiam um cruzeiro, vermelhas, dez cruzeiros e azuis, cem. Essas fichas eram quadradinhos de papelão colorido. As crianças brincavam em situação de venda simulada. O professor devia cuidar que as quantias usadas exigissem a combinação de valores diferentes, o que era importante para que as crianças tivessem que lidar com os aspectos do sistema. Os alunos registravam seus feitos em folha de papel. Houve, ainda, a criação de um Banco. Aprenderam a trocar o dinheiro toda vez que tivessem mais de nove notas de um só tipo, como resultado de uma soma. Os procedimentos escritos foram introduzidos posteriormente, como uma forma de notação das transações. Algumas crianças desenvolveram suas próprias notações para o "vai um" (trocas do sistema decimal).

Para Carraher, o uso de atividades que envolvem o "dinheiro chinês" traz vantagens para o processo de aprendizagem na sala de aula, pois é bastante motivador (as crianças gostam de brincar de "lojinha"), a atividade escolar se beneficia da vivência cotidiana e o conhecimento é melhor transferido às situações da vida.

Kamii (1990,1993,1995) também pesquisou a compreensão do Sistema de Numeração Decimal e a aprendizagem de algoritmos. Com base na teoria de Piaget, ela defende a reinvenção da Aritmética pela criança, alegando que, por se tratar de um conhecimento lógico-matemático, não pode ser simplesmente transmitido, mas construído e esse é um processo semelhante ao de nossos antepassados na construção do conhecimento matemático.

Considera Kamii que o ensino dos algoritmos nas séries iniciais é prejudicial, pois *"forçam o aluno a desistir de seu raciocínio numérico; desensinam o valor posicional e o desenvolvimento do senso numérico e tornam a criança dependente do arranjo espacial dos dígitos (ou de lápis e papel) e de outras pessoas."* (Kamii, 1995, p. 55).

A autora explica, que :

> *os algoritmos de adição, subtração e multiplicação são feitos, convencionalmente da direita para a esquerda. Salienta no entanto, que as crianças os fazem naturalmente da esquerda para a direita. A divisão convencional, por sua vez, dita procedimento da esquerda para as direita, e a criança o faz da direita para a esquerda. Obrigada a aprender os algoritmos na escola, ela precisa abrir mão de seu raciocínio e "obedecer" a regras que não entende. Obrigada a aprender o algoritmo, a criança não desenvolve o senso numérico (a noção da quantidade), pois precisa abandonar a idéia do número total para pensar em cada coluna como unidade.* (Kamii, 1995, p.57)

Rangel, igualmente, faz referências a este respeito dizendo:

> *"Como a adição com transporte é 'ensinada' pela regra do "vai um", sem permitir que a criança pense no número como totalidade e realize mentalmente agrupamento para encontrar o total, ela aprende o arbítrio e generaliza. Com isto, o que estão aprendendo na escola é que a Matemática é uma 'disciplina' de regras arbitrárias que não se vincula com o pensar efetivo sobre a realidade concreta" (*Rangel 1992, p.27).

Vários pesquisadores comentam sobre o fato de os professores pensarem que, conduzindo a criança durante as explicações, esclarecendo a questão, somando coluna das unidades, das dezenas e das centenas, as crianças estarão formando a noção de quantidade, mas isso muitas vezes pode não acontecer.

> *"Quando crianças utilizam o algoritmo tradicional para resolver problemas como o que se segue:*

$$\begin{array}{r} 987+ \\ \underline{345} \end{array}$$

> *...elas se esquecem do valor posicional e começam a pensar e falar da seguinte forma: "sete mais cinco dá doze, fica o dois e vai um (ou dez). Um mais oito e mais quatro, dá treze, fica o três e vai um (ou dez). Um mais nove e mais três, dá treze".* (Kamii 1995, p.57)

A autora defende a idéia de que para a criança, que ainda está aprendendo a numeração e não tem a noção do quanto significa um número multidígito, aprender algoritmo ao mesmo tempo é um contra-senso.

Com relação à multiplicação e divisão, Kamii também não acredita no ensino de algoritmos tradicionais, dizendo que as crianças, antes de usarem a multiplicação, fazem subgrupos menores do que dezenas usando somente a adição. Muitos estudantes "quebram" o doze em 4, 4 e 4, ao invés de 10 + 2 e fazem 23 + 23 + 23 + 23 = 92 e 92 + 92 + 92 + 92 = 276. Este é um passo necessário ao caminho e à construção da multiplicação. Depois, passam a fazer grupos de 23, grupos de três, quatro ou cinco "23". Kamii propõe que as crianças discutam procedimentos sem se preocuparem com números exatos.

Kamii refere-se às vantagens destes procedimentos, apoiando-se em dados obtidos em sua pesquisa na Escola Hall Kent, onde aponta que até mesmo a qualidade dos erros das crianças que usam seu próprio raciocínio para fazer algoritmos não-convencionais são mais razoáveis do que os erros dos alunos que já aprenderam o algoritmo convencional, tendo observado o não entendimento do valor posicional e um pobre senso numérico.

É por isso que alguns estudiosos defendem o ensino do algoritmo com o encorajamento de métodos "alternativos" (Lankford, 1974, Conselho Nacional de professores de Matemática, 1989). Outros, no Brasil, (Carraher, Carraher e Schliemann, 1987; Carraher e Schliemann, 1978) e na Inglaterra (Jones, 1975) têm questionado a adequação do ensino de algoritmos. Outro grupo defende o fim do ensino dos algoritmos: Nos Estados Unidos (Burns, 1982, Burns, 1992/1993, Kamii, 1985 e Madell, 1985), na Dinamarca (Bennedbek, 1981), na Inglaterra (Plunket, 1979), na Holanda (Treffers, 1987), na África do Sul

(Murray e Olivier, 1989; Murray, Olivier & Human, 1992; Olivier, Murray & Human, 1990, 1991). (citado in Kamii, 1995, p.75).

Dienes, inspirado em Piaget, sugere que a Matemática não seja ensinada como um conjunto de técnicas, mas como uma "estrutura de relações". Nos dias de hoje, as escolas ainda têm insistido nas proposições matemáticas (linguagem matemática) sobre as estruturas, sem que as estruturas propriamente ditas sejam compreendidas.

Muitas vezes, diz Dienes, as crianças são bastante destras nas técnicas utilizadas. Os alunos aplicam-se às atividades escolares tendo em vista apenas serem aprovados, mas não conseguem aplicar o pensamento matemático à realidade da vida. Esta situação acaba sendo considerada como normal, pois a Matemática é acreditada, por muitos, como difícil e ardilosa.

Dienes, entre outros, compreende por Matemática as efetivas conexões ou relações estruturais entre conceitos ligados à idéia de número (Matemática pura), e suas aplicações a diferentes problemas que se apresentam na realidade (Matemática aplicada). (1970).

O autor refere-se a teorias de aprendizagem "estímulo-reação" como inadequadas para a obtenção deste referido aprendizado. Estas teorias consideram a aprendizagem como um processo de condicionamento de certas respostas, evocadas por certos estímulos. Os estímulos, no caso, seriam apresentados e ligados a certas respostas, valorizadas como "respostas certas".

Nessas situações de ensino, a atenção à estrutura é feita de alguma forma, durante as explanações, o que garante o trabalho construtivo pessoal. A ênfase é dada ao "fazer certo" com o objetivo de garantir uma resposta específica a estímulo específico. As referências às estruturas parece mais um auxílio para colocar em execução este estado de coisas. Os alunos que dão respostas erradas são considerados como aqueles que não se mantiveram a par do desenvolvimento da estrutura. Acabam por aprender "truques para chegar às respostas certas. Não há garantia, no entanto, de que os que apresentam respostas certas compreenderam realmente as estruturas a que tais respostas se referem.

A Educação Matemática e os cálculos relacionais, as representações e o homomorfismo.

Piaget e outros cognitivistas defendem a idéia "de que o conhecimento consiste, em grande parte, no estabelecimento de relações e na organização destas relações em sistemas. As relações são feitas entre objetos no espaço, entre quantidades físicas e entre fenômenos biológicos, sociais e psicológicos.

Dienes defendia a idéia, hoje apoiada por Vergnaud em seus trabalhos, de que a concepção moderna de ensino da Matemática deve valorizar primordialmente o cálculo relacional, centrando assim o funcionamento da inteligência e o conhecimento que é próprio da Matemática. As relações são estabelecidas graças à troca do sujeito com o meio.

Piaget também considerava que a aprendizagem da Matemática é sustentada por estruturas lógico-matemáticas e estas estruturas correspondem, em grande parte, às da própria inteligência.

> *"O educador, para ser fiel ao espírito das matemáticas contemporâneas, deve considerar o pensamento matemático como um prolongamento das construções espontâneas da inteligência e recorrer, assim, aos ensinamento da Psicologia tanto quanto da Lógica."(Piaget 1968, p.27)*

Para Dienes, *"...a Matemática é o estudo das relações do abstrato"* (1974, p.124). Esse autor considera que as relações não são diferentes das relações usadas no cotidiano e é preciso que se encontrem meios educacionais de estabelecer no pensamento das crianças a clarificação desses relacionamentos e o asseguramento de que tais relações sejam usadas apropriadamente no raciocínio matemático.

Vergnaud (1991) considera que o conhecimento deve ser constituído pela própria criança, numa relação direta com as operações que for capaz de fazer no seu cotidiano, na sua realidade, com as relações que tiver condições de captar, compor e transformar e com os conceitos que for construindo progressivamente.

É importante que o professor estimule a atividade da criança e considere o conhecimento epistemológico sobre a construção do conhecimento do aluno, como sujeito cognoscente, fazendo da ação pedagógica um meio propulsor para o desenvolvimento e a aprendizagem

Para Vergnaud (1991) é preciso que o professor conheça bem as necessidades psicopedagógicas especiais de método de ensino de cada disciplina, devendo ter uma compreensão geral sobre a inteligência e o comportamento humano, além do conhecimento profundo sobre os conteúdos, para conseguir estabelecer as relações necessárias entre conteúdos específicos escolares e a prática pedagógica.

O autor esclarece que as relações não são o resultado de meras verificações do sujeito sobre o meio. São bem mais que isso. As relações transformam-se em "deduções e inferências" e "abstrações", porque são conduzidas pela inteligência. Todo raciocínio matemático pode ser analisado como um cálculo relacional. A noção de cálculo relacional aplica-se a toda classe de relações e mantém estreitos laços com a possibilidade da conduta de ação e aprendizagem do sujeito.

Na Matemática, no caso, há um conjunto de noções, relações e sistemas relacionais que formam como que uma rede. A compreensão destas noções, das relações e de sistemas relacionais não é adquirida pelo sujeito numa ordem total ou linear, progressiva de aquisição do conhecimento como se a criança devesse adquirir a noção A, depois a B, a C e etc. A aquisição das noções acontece numa ordem parcial ou de múltiplas ramificações. Algumas noções A e B, por exemplo, podem ser adquiridas numa ordem indiferente ou de forma simultânea, mesmo que para sua aquisição seja necessária antes a noção C.

Há, pois, ordem entre outras noções, mas não em todas, por isso a aprendizagem da Matemática é uma aprendizagem de ordem parcial ou de múltiplas ramificações. Para isso, Vergnaud exemplifica que é necessário aprender a série de um a nove antes do sistema decimal, mas a aprendizagem dos numerais não está condicionada, nem condiciona a aquisição de transitividade da relação de ordem: "Se João é maior que Paulo e Paulo é maior que Roberto, João será necessariamente, maior que Roberto. Esta aquisição (transitividade) e a noção de sistema decimal são necessárias para a aprendizagem de medidas de tamanho. Um dos problemas mais importantes da didática da Matemática é conhecer a ordem na qual as noções são passíveis de serem adquiridas pela criança.

As relações implicam uma atividade material e intelectual e isso depende das possibilidades do indivíduo. Vergnaud exemplifica, referindo-se à desigualdade de dois lápis, cuja diferença de comprimento é pequena. As crianças pequenas não podem verificar isso, não são ainda capazes de assegurar que a base dos objetos é variável para a criança e para fazer esta relação é preciso recorrer a explicações verbais de certa dificuldade.

Os matemáticos referem-se a diferentes tipos de relações: as binárias, relação de dois elementos entre si ("**sete** é maior que **três**" ou "os **coelhos** são **mamíferos**"), as ternárias, relação de três elementos entre si ("**seis** multiplicado por **cinco** são **trinta**") e as quaternárias, relação de quatro elementos entre si ("**dezoito** em **quinze** é o mesmo que **seis** em **cinco**" ou "**Antônio** é tão **moreno** quanto **Brígida** é **ruiva**").

Relações são muito importantes no desenvolvimento das atividades intelectuais da criança. Determinadas relações são fundamentais na aquisição da noção de quantidade, medida, número...

As relações possuem propriedades e a formação dos conceitos e generalizações está diretamente apoiada no conhecimento das propriedades que regem estas relações.

Vergnaud considera que a maior parte das relações podem se reduzir a "composições" de relações binárias, ternárias e quaternárias.

A ampliação das relações e o entendimento de suas propriedades é o que permite avançar em atividades classificatórias cada vez mais complexas. Os cálculos relacionais só são possíveis e válidos quando apoiados nas propriedades das relações.

As tarefas escolares são semelhantes às tarefas da vida cotidiana. *"Tudo é matéria para relacionar"* (Vergnaud 1991, p.67) Analisar uma situação, representá-la, operar sobre esta representação para encontrar uma solução e aplicar a solução encontrada, voltar a empregá-la se necessário é um processo psicológico fundamental na vida e na escola.

Rangel (1992) considera que a Matemática precisa estar comprometida com o desenvolvimento progressivo parcialmente espontâneo das estruturas operatórias do pensamento infantil.

Em Educação Matemática deve-se distinguir as experiências, identificando as que oportunizam a construção do pensamento matemático, e suas relações. A experiência física, enquanto abstração empírica ("A manteiga é amarela"), permite ao sujeito uma coordenação de novas relações tais como: "A manteiga está ao lado do sal" (relação binária); ou e "A manteiga está entre o sal e o vinho" (relação ternária).

Kamii (1995) em seus estudos refere-se às relações necessárias à conceitualização hierárquica dos números, ao referir-se ao sistema de unidades, dezenas, centenas...

Vergnaud (1991) chama de *campo conceitual* o conjunto de situações que permite ao indivíduo novas filiações e aprendizagens decorrentes da rede de relações entre conceitos adquiridos anteriormente.

Com relação ao campo conceitual, é preciso considerar além dos conceitos, as situações, os procedimentos e as representações. Um campo conceitual prevê a contextualização de qualquer aprendizagem em aspectos espaciais e temporais, imersos num universo de valorização sócio-afetiva e cultural do grupo social que vivencia.

Grossi explica que as classificações, as ordens e as funções são as relações binárias mais estudadas em Matemática.

> *"A Matemática (...) é uma produção tipicamente intelectual que tem seu centro na lógica das relações, mas se apóia em elementos básicos de vivência humana..."* (Grossi, "Um Espaço Para Ficar Inteligente" vol. 5, p.11).

A lógica das aprendizagens repousa em outros parâmetros, os quais têm a ver, como lembra Grossi (fonte referida acima) com a riqueza de experiências amplas num ambiente sócio-cultural que reflete não só um acúmulo histórico de construções inteligentes, como um leque grande de situações heterogêneas e de variadas complexidades desejantes a respeito de cada campo. Uma criança, antes de vir para a escola, confronta-se com números que extrapolam a primeira etapa prevista na escola, defronta-se com problemas que envolvem números pequenos e grandes, cardinais e ordinais, inteiros e fracionários e as situações de vida já lhe trazem experiências de adicionar, subtrair, dividir. O ensino tradicional trabalha a numeração de zero a nove, depois de nove a 99, a seguir de cem a 999,... julgando que, assim, serão assegurados conhecimentos na limpidez da organização crescente. As operações tem uma ordem de ensino e os conteúdos são trabalhados isoladamente sem que se procurem garantir as relações entre eles.

Nesta linha de raciocínio e como Grossi (fonte citada) afirma, há necessidade do ensino de Matemática ser revisto, pois seu enfoque tradicional prioriza os conceitos dentro do esquema objeto-instrumento, isto é, primeiro a teoria depois suas aplicações. Os livros-texto apresentam em cada capítulo as definições básicas, a análise de propriedades e princípios, as relações teóricas fundamentais e, em seguida, uma lista de exercícios de aplicação da parte teórica. O erro desta abordagem é que, à luz de muitos avanços das teorias cognitivas, sabe-se que as efetivas aprendizagens se dão de maneira inversa: com base no enfrentamento de problemas que envolvem a teoria é que esta pode ser reconstituída ativamente pelo sujeito aprendente.

A autora salienta que na Matemática não há aprendizagem linear, feita pedaço a pedaço, mas baseia-se em um campo conceitual. A Aritmética, por exemplo, estuda as propriedades e as relações elementares sobre o conjunto dos inteiros(N e Z) e dos números racionais, envolvendo, evidentemente, as quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão. Nos currículos tradicionais, o ensino é feito na seqüência acima e baseia-se na complexidade lógica de cada abordagem, de maneira isolada. Para a autora, dentre as quatro operações, a que faz mais sentido, é a divisão porque são freqüentes nas experiências dos alunos e desafiadoras de sua capacidade de realização de uma repartição eqüitativa de objetos, bem como da verificação de sua justeza.

> *"Aprendemos, de fato, quando somos mergulhados num universo de elementos que dizem respeito a um conjunto de conceitos, os*

> *quais se entrelaçam por seus vínculos lógicos, mas também por sua específica forma de imbricamentos de estados e de transformações, movidos por representações simbólicas que são o motor das elaborações intelectuais. O conhecimento em primeiro lugar é usado como instrumento para resolver problemas e, neste esforço ativo de busca, outros conhecimentos vão sendo elaborados numa seqüência, a qual passamos a batizar mais recentemente de sócio-psicogênese. A sócio-psicogênese é uma trajetória singular pela qual passam os que aprendem, juntando em estruturas cada vez mais abarcativas e complexas todos os elementos que configuram um campo conceitual.*" (Grossi, fonte citada, p.88).

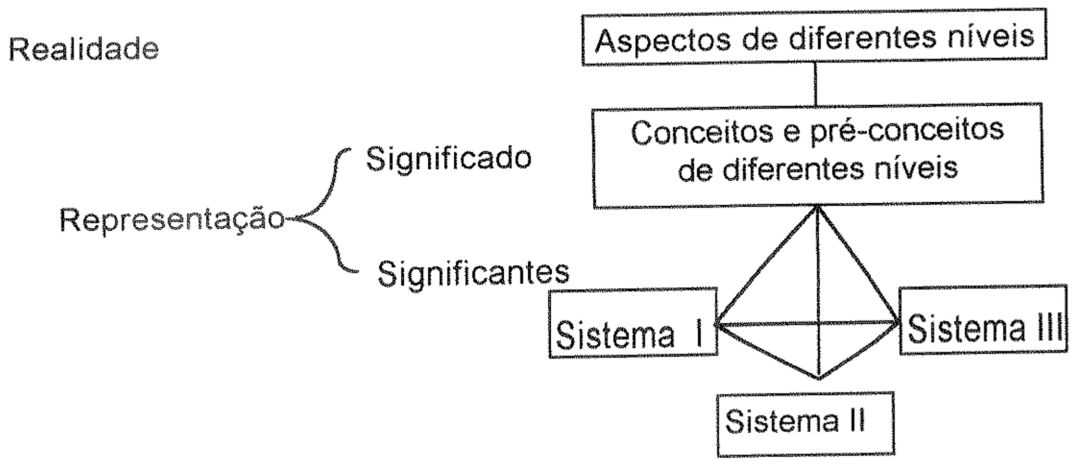
Os professores ensinam, muitas vezes, que a multiplicação é uma simples adição repetida, não se dando conta de que há uma dificuldade de ordem superior na construção do conceito de multiplicar, comparada ao conceito de adicionar. Na multiplicação se vai muito além da idéia de adição. Pode-se, até, obter a mesma solução ao problema adicionando n termos ou multiplicando-os por n.

> *"A multiplicação implica uma variável, que é o multiplicador, que diz respeito a conjuntos. O multiplicador é uma propriedade de conjuntos de conjuntos. O multiplicando é uma propriedade de conjuntos. Os dois fatores não se relacionam com o mesmo universo.(...) Na multiplicação trata-se de dois universos diferentes simultaneamente, ao passo que na adição trata-se de um único universo: o universo dos conjuntos. Na multiplicação, ao contrário, certos números se relacionam com conjuntos e outros com conjuntos de conjuntos. Isto configura uma diferença considerável e as atividades que os alunos tiverem realizado em conjuntos e com conjuntos de conjuntos e mesmo com conjuntos de conjuntos de conjuntos, os auxiliarão muito nos problemas que eles enfrentarão ao estudarem a multiplicação" (Dienes, 1966, in Grossi, fonte citada).*

Vergnaud utiliza-se de noção de homomorfismo (mesma forma ou mesma estrutura) para esclarecer como acontece o conhecimento objetivo e justificar seu ponto de vista a respeito do ensino da Matemática. Para este autor, a noção de homomorfismo acontece sempre que se passa da realidade para a representação. A representação, porém, só será operatória quando refletir a realidade de maneira pertinente e homomorfa. O autor ressalta, que nem sempre toda representação é necessariamente homomorfa à realidade, nem tampouco reflita toda a realidade.

A representação é, todavia, sempre, um reflexo da realidade.

Vergnaud apresenta o esquema abaixo para referir-se à representação e explica que o pensamento consiste de operações conceituais e pré-conceituais sobre os significados e de operações simbólicas sobre os significantes, os quais formam vários sistemas simbólicos distintos que têm vínculo entre eles e o significado.



(extraído de Vergnaud 1991, p.250)

O pensamento trabalha em diferentes níveis (elementos, classes, relações,..., relações de relações...) e com a ajuda de diferentes sistemas simbólicos (linguagem, representação imaginada, esquemas, espaço, álgebra...). Segundo Vergnaud, o pensamento consiste não só em passar de uma situação real à representação, mas em passar de uma representação a outra e regressar.

Por este ponto de vista a Educação Matemática deve, pois, estimular tais relações que favorecem o homomorfismo e as generalizações.

O homomorfismo é que permite ao sujeito, por abstração reflexiva, compreender as eqüivalências entre procedimentos operatórios nas relações entre realidade e representação, nas relações entre planos diferentes da representação e nas relações interiores num mesmo plano de represen-tações.

Para Piaget o insucesso escolar, em especial, na Educação Matemática decorre de uma passagem demasiado rápida da estrutura qualitativa (lógica) das questões para a quantitativa (numérica); para este autor, o desenvolvimento das noções lógicas (cálculos relacionais) constroem a infra-estrutura de todo o ensino científico elementar, o que leva a pensar na necessidade de uma reforma acentuada no ensino, em benefício do sucesso da aprendizagem.

Se perguntarmos a um homem qualquer, na rua, se entendeu a Matemática, quando a estudou na escola, a resposta será que seguiu as instruções do professor, mas que o porquê e o para quê do seu estudo nunca foram suficientemente claros.

Há realmente uma diferença entre aprender técnicas e compreender um determinado assunto, estabelecendo relações.

> "*Uma criança pode conhecer bastante a técnica das equações lineares sem ter muita noção do que venha a ser uma equação linear.*" (Dienes, 1970, p. 17)

O aluno pode resolver equações de maneira mecânica, com base na técnica e não saber o que está fazendo. Uma pergunta menos padronizada pode revelar a situação de não aprendizagem autêntica. Kamii (1995) e outros pesquisadores atuais tecem importantes considerações a este respeito.

É bastante comum que os professores acreditem na aprendizagem dedutiva do tipo " se já sabem as ordens e classes do sistema de numeração decimal e se sabem que um número é dez vezes maior quando está a esquerda e dez vezes menor quando está à direita de outro, isso é apoio suficiente para o entendimento dos decimais" Esta fala do professor significa, muitas vezes, a sua não consideração pela construção de estruturas de pensamento. Ele tem, em geral, medo de perder tempo com material manipulativo, ou até o usa, mas sem que esta manipulação traga desafios, desequilíbrios que contribuam à aquisição de novos conceitos, não adquirem valor significativo, abrangente.

Dienes critica o sistema escolar de "punições e recompensas" à base de notas, prêmios e penalidades que considera uma motivação artificial de aprendizagem. Este sistema acaba provocando uma atitude de "tentativa e erro" que garante, ao fim, algum aprendizado. Alerta, porém, que uma ausência prolongada de sucesso poderia levar o aluno ao "não gosto" de estudar.

Com base na análise crítica que faz em relação ao ensino do Sistema de Numeração Decimal na escola, Dienes apresentou uma proposta de trabalho específico que chegou a ser adotada no Brasil, no todo ou parcialmente, em algumas escolas.

CAPÍTULO III

UMA PROPOSTA CONSTRUTIVISTA DE ENSINO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Neste trabalho pretendeu-se analisar o desempenho, na solução de tarefas de Matemática, de alunos de uma escola que denominaremos escola "A". A escola "A" caracteriza-se por uma proposta pedagógica construtivista, que tem por fundamentação a teoria de Jean Piaget e foi inspirada no projeto de ensino de Z. P. Dienes, no que se refere ao estudo do sistema de numeração decimal.

A escola A, desde sua implantação, conta em sua equipe pedagógica com um elemento que participou do trabalho de implantação da proposta de Dienes no Brasil, na Escola Nossa Senhora das Graças, em São Paulo, há cerca de vinte anos atrás. Essa implantação foi realizada com orientação de uma professora e coordenadora pedagógica, aluna de Dienes, no Canadá e no Brasil. O projeto pedagógico da escola A, aqui apresentado, foi definido no ano de 1991, com a assessoria profissional pedagógica da Escola Experimental Vera Cruz, em São Paulo, a qual, por sua vez, também contou, entre os membros de sua equipe, com a orientação especial de uma professora e pesquisadora que havia sido aluna de Zoltan Dienes na década de 70. A escola "A" contratou a assessoria da escola Vera Cruz tanto para a elaboração e definição da proposta quanto para o acompanhamento de sua implementação.

A proposta em questão tem por proposições básicas os princípios enunciados por Dienes, considerando, no trabalho com alunos, as sugestões do pesquisador para a construção do conceito de números, suas propriedades, classes de equivalência, operações matemáticas...

Cabe assinalar que a proposta pedagógica da escola A, analisada nesta pesquisa, apresenta concepções epistemológicas fundamentadas na teoria de Piaget, mas também orientações pedagógicas, metodológicas, sugestões e atividades que são resultantes do estudo, da reflexão e da prática de profissionais envolvidos, há um longo tempo no trabalho construtivista em Primeiro Grau. As sugestões de Dienes, por exemplo, foram sendo ampliadas e adaptadas por professores envolvidos no trabalho escolar, em reuniões de estudo e discussões, até chegar à atual proposta.

A Psicologia Cognitiva tem mostrado que o ser humano constrói o conhecimento por meio de experiência com objetos e na interação social.

Segundo Piaget (1975), a construção dos conceitos matemáticos baseia-se em um movimento permanente de generalização completiva e de abstração reflexiva que garante ao mesmo tempo a continuidade, bem como a novidade responsável pelos progressos mentais.

Operar com números naturais supõe uma construção ao longo do tempo, implicando trocas com o meio, regulações lógico-matemáticas reveladas na forma de pensar, fazer correspondências, classificar, ordenar, compor, reverter, compensar, e assim por diante. A construção dos números naturais supõe o domínio das leis que regem o sistema de numeração do qual o número é um elemento. Implica compreensão da classificação e da ordenação: um número implica a consideração de elementos que se reúnem em uma classe; implica enumeração que exige uma ordem, uma seqüência determinada. Significa reconhecer e utilizar-se das propriedades subjacentes às operações, neste conjunto.

O caráter operatório do número é resultado das coordenações entre ações consubstanciadas na idéia de que uma quantidade qualquer expressa a operação de acrescentar (n+1), tirar (n-1), multiplicar (.n) ou dividir (:n) sendo, pois, produto de uma função operatória da adição e multiplicação de classes e das diferenças ordenadas ou relações assimétricas.

Para Piaget, os mecanismos cognitivos responsáveis por esta síntese são a abstração e a generalização, pois o número implica uma coleção de elementos que se tornaram equivalentes por uma ordem vicariante (abstraída) ou diferença generalizada, expressa na idéia de antecessor e sucessor, além do caráter multiplicativo nele contido, dado os valores relativos e absolutos que encerra.

Propostas construtivistas como a de Dienes e da escola focalizada neste trabalho assinalam que a dedicação de boa parte do tempo do trabalho em sala de aula, as observações, manipulações de objetos variados e as discussões entre os alunos, bem como entre alunos e professores, devem anteceder as atividades de formalização da Matemática.

Dienes, na perspectiva cognitivista, inspirou-se nos trabalhos de Piaget, elaborando uma proposta didática de base construtivista, na qual enfatiza a atividade do aluno, a utilização de jogos e de materiais especiais para apoiar o ensino da Matemática.

A proposta de Dienes teve sua origem na década de 70 e influenciou o ensino da Matemática não apenas no Canadá, mas também nos Estados Unidos e Brasil. Nessa proposta acha-se implícito o princípio da variabilidade: variabilidade perceptiva (diferentes materiais manipulativos) e variabilidade matemática (com diferentes bases, diferentes contagens a que chamaremos de diferentes "conteúdos". Nessa proposta, o objetivo do uso do material pretende que, ao trabalhar com ele, a criança capte a "forma" de pensar, abstraia a estrutura multiplicativa do nosso sistema de numeração, tenha possibilidades de fazer muitas relações decorrentes das coordenações que faz dos observáveis.

Piaget refere-se a Dienes como :

> *"Um matemático que tem o mérito de haver compreendido, por meio de sua experiência educativa, este fato essencial (que nossas pesquisas psicogenéticas sempre haviam evidenciado): a compreensão da Matemática elementar decorre da construção de estruturas inicialmente qualitativas (o número, por exemplo, aparece psicologicamente como uma síntese da inclusão de classes e da ordem serial) e quanto mais facilitada a construção prévia das operações lógicas, em todos os níveis de ensino da Matemática, tanto mais estará ele sendo favorecido".* (Piaget, 1991, p. 10).

Piaget diz, ainda, que Dienes desenvolveu esforços dignos de louvor no sentido de levar a criança a reinventar, em Matemática, aquilo que é capaz de fazer, ao invés de se limitar a ouvir e repetir. Para Piaget, no entanto, nem todas as atividades propostas por Dienes podem ser interpretadas como de pleno êxito.

As sugestões de Dienes (1974) para o ensino de Matemática apóiam-se em quatro princípios fundamentais:

O primeiro é o **Princípio Dinâmico** pelo qual o autor enfatiza que qualquer abstração, e portanto toda a Matemática, surge da experiência. Implica a introdução de jogos adequados aos diferentes estágios e etapas da construção do conhecimento e que consistiriam em experiências necessárias por meio das quais os conceitos matemáticos podem vir a ser construídos. O autor refere-se a jogos preliminares, jogos estruturados e de prática. Dienes lembra que inicialmente o material concreto é importante como apoio para os sujeitos de menos idade e que gradualmente esse material pode ser introduzido, o que chama jogos mentais, até se chegar à pesquisa Matemática que ele considera a aventura mais fascinante.

O segundo é denominado pelo autor de **Princípio da Construtividade.** Por esse princípio as crianças podem pensar construtivamente antes de fazê-lo logicamente. Daí a importância de formular situações que impliquem experiências e construção antes de se pretender um pensamento analítico do sujeito. Ao estruturar o jogo, a construção deve sempre preceder a análise, quase sempre ausente em situações de aprendizagem das crianças de menos de doze anos.

O terceiro é o **Princípio da Variabilidade Matemática.** Para o autor, quando se trabalha com determinado conceito, devem-se ter presente os aspectos essenciais da estrutura do conceito a ser apresentado em diferentes campos de sua aplicabilidade, para que se possam focalizar as invariantes específicas do conceito.

Disse Dienes que, se avaliarmos o conceito de valor posicional à luz da variabilidade matemática, perceberemos que três variáveis entram nesses arranjos numéricos:

I) os algarismos II) as potências III) a base

O número 126 em base 10 é representado desta maneira:

$$1x10^2+2x10^1+6x10^0$$

Em base 3 sua representação é: $1x3^4+1x3^3+2x3^2+0x3^1+0x3^0$

> *"Poderíamos variar qualquer ou todas estas variáveis sem destruir o aspecto essencial do valor de posição. O conceito de valor de posição é independente dos valores dos algarismos, exceto que o número destes é restringido em função da base." (Dienes, 1974 p.49).*

O quarto é o **Princípio da Variabilidade Perceptiva**, segundo o qual a mesma estrutura conceptual deve ser apresentada na forma de tantos equivalentes perceptivos quanto possível. Para que as crianças consigam não apenas aprender regras mecânicas mas, sim, chegar a abstrações, precisam de uma variedade grande de situações. Segundo Dienes é necessário introduzir objetos e atividades os mais diferentes uns dos outros, com uma mesma estrutura matemática essencial, para que a criança possa perceber essa última, desapegando-se do material concreto, num processo de abstração reflexiva e generalizações do conceito.

Com relação à aquisição do conceito de número, Dienes apresenta uma proposta pedagógica voltada à inclusão de classes e conservação, especialmente no que se refere aos números grandes. Há um momento em que as crianças necessitam comunicar umas às outras números relativamente grandes. Elas vêem em anúncios, jornais, panfletos, algarismos bastante grandes. A situação vivida desencadearia, no caso, a necessidade de compreender o sistema de numeração decimal, historicamente construído pelo homem. Precisará compreender, por exemplo, que 24579 significa:

$$2 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 9 \times 10^0$$

Chega o momento em que precisa aprender o que, em Aritmética, é denominado notação ou valor posicional. O sistema de valor de posição tem por base a contagem de grupos ou conjuntos de diferentes dimensões, contendo, cada um, elementos ou número de potências de uma determinada base escolhida (dez). Quando os objetos são contados, unitariamente ou por dezenas, por centenas ou, ainda por milhares, e assim progressivamente, faz-se uso da noção de potência que é inerente à noção de valor posicional.

Dienes concebe a formação do conceito numérico por meio da manipulação das variáveis contidas nesta noção. Este é um ponto importante desta proposta de construção do conceito de números grandes, pois há uma ênfase na lida do aluno com diferentes partes de um todo.

Tomando-se, por exemplo, a terceira potência de dez (10^3), o valor três é uma variável (a que chamamos de expoente), intrínseca ao número. Outra variável intrínseca é o valor dez, a que chamamos de base. Ainda que, no início da aquisição do conceito de número não se transmita à criança a denominação ou o nome convencional destas variáveis, ela é existente e necessária na compreensão do princípio multiplicativo do sistema de numeração decimal. Segundo Dienes, é preciso que as crianças manipulem diversas bases, diversos expoentes para construírem a verdadeira noção de quantidade. Para ele não basta que ela se utilize apenas da base 10, pois terá poucas oportunidades de abstrações e generalizações necessárias ao sistema de numeração e a muitas relações aritméticas importantes.

Dienes sugere que as crianças tenham contato com os conjuntos que possuem propriedades numéricas (potência de 2): 2, 4, 8, 16, 32...; (potência de 3): 3, 9, 27, 81...; (potência de 4): 4, 16, 64,...; (potências de 10): 10 100, 1000,...; jogos de agrupamentos, organizados com tudo o que lhes caia nas mãos: pedrinhas, tampinhas, miçangas, e até o corpo delas mesmas.

Dienes ressalta que saber contar até 20, 50, 100, nem sempre significa compreender que, por exemplo, 23 é um a mais que 22. Saber considerar os "seguintes" nem sempre pode estar significando "um a mais "na "quantidade" pensada.

Na proposta de contagens em diferentes bases, Dienes acredita estar criando condições para que a criança, ao lidar com quantidades de diferentes maneiras, possa abstrair conhecimento dessa variedade de contagens, tendo oportunidade de generalizações importantes para a construção do número, para o conceito da adição e multiplicação, de suas operações inversas e para a apropriação das propriedades destas operações, para facilitar o cálculo mental.

Dienes (1974) propõe contagem com grupos de objetos antes da utilização das peças do conjunto aritmético Multibase, de sua autoria.

Um exemplo da proposta desse autor, usando a base três, seria a organização de uma série de conjuntos de bolinhas, onde teríamos:

* um primeiro conjunto de uma bolinha

0 **código: 1**

* um segundo conjunto de duas bolinhas

0 0 **código: 2**

* um terceiro conjunto de três bolinhas. Como se está trabalhando com a base 3, para salientar que construímos um conjunto de três bolinhas, cada vez que se completem "três", colocam-se num pires as três bolinhas.

(000) — pires **código: 10**

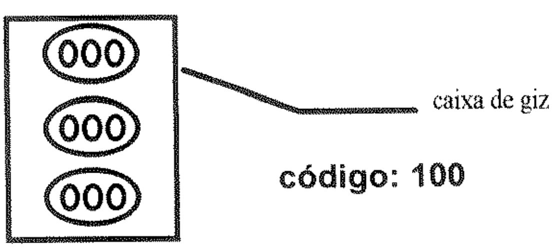
* o quarto conjunto terá três bolinhas num pires e uma bolinha solta, na mesa

(000) 0 **código: 11**

* o quinto conjunto terá três bolinhas e duas bolinhas soltas

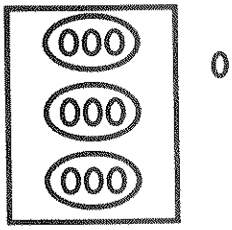
(000) 00 **código: 12**

E assim por diante, até o nono conjunto, que se constitui de três conjuntos de três bolinhas (três pires com três bolinhas cada um). Coloca-se então essa quantidade de bolinhas num recipiente diferente e maior, numa caixa de giz, por exemplo.

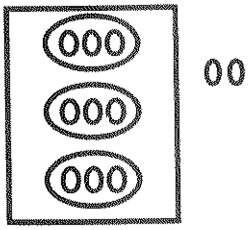


código: 100

Continuando a seqüência, temos:

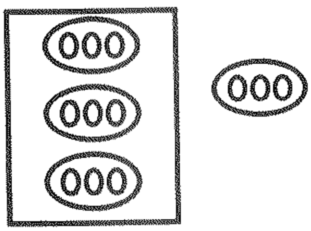


* (décimo conjunto)uma caixinha com três pires, com três bolinhas em cada pires e uma bolinha solta. **código: 101**



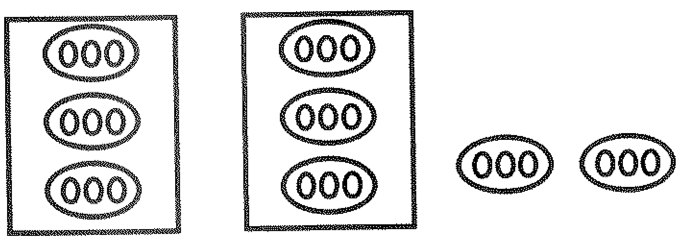
* (décimo primeiro conjunto) uma caixinha com três pires, com três bolinhas em cada pires e duas bolinhas soltas. **código: 102**

No décimo segundo conjunto temos:



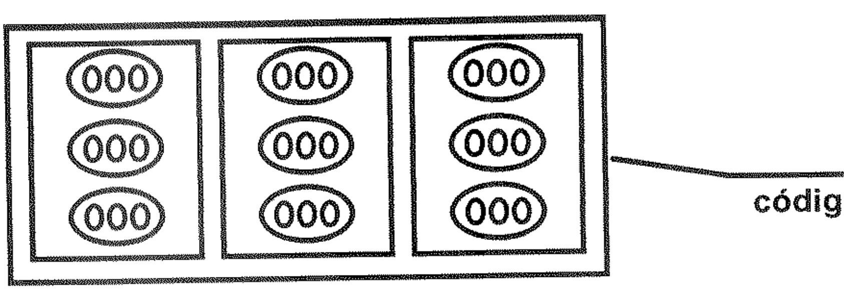
código: 110

Continuando, no 26º conjunto temos duas caixinhas de nove bolinhas (três pires com três bolinhas cada) e ainda dois pires com três bolinhas mais duas bolinhas



código: 220

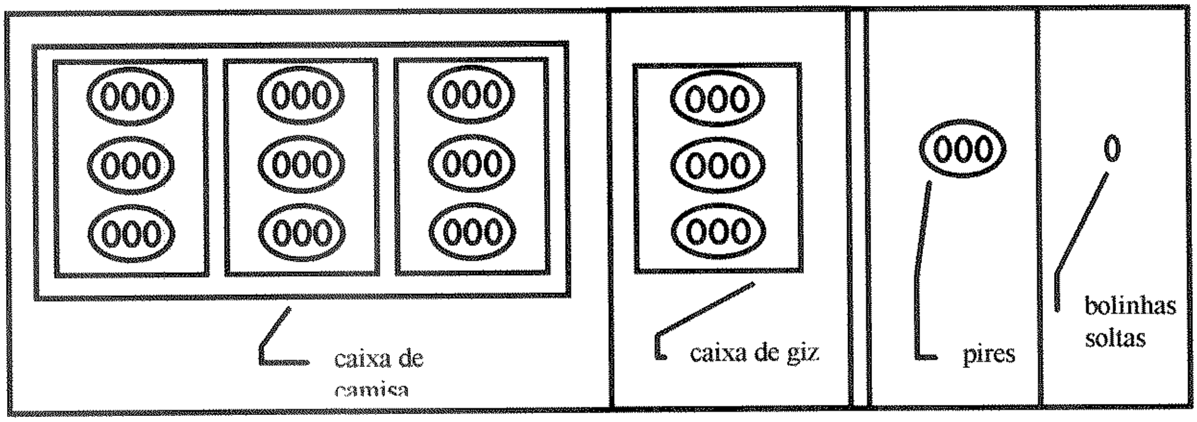
Acrescentando-se mais uma bolinha, será preciso mais um recipiente, maior que os já usados, para conter o novo reagrupamento, podendo ser, por exemplo, uma caixa de camisa.



caixa de camisa

código: 1000

Cada recipiente significa o lugar reservado a um conjunto cuja propriedade numérica é uma potência da base três:



A contagem em diferentes bases é considerada importante para a criança no processo de construção do sistema de numeração decimal. Após um trabalho como este, por exemplo, elas devem poder verificar que, com 27 bolinhas, os agrupamentos na base três permitem um registro com o seguinte código: 1000 (leia-se: um, zero, zero, zero), que significa (um terceiro agrupamento ou uma caixa de camisa; nenhum segundo agrupamento ou nenhuma caixa de giz; nenhum primeiro agrupamento ou nenhum pires e nenhuma bolinha solta). Agrupando estas mesmas 27 bolinhas na base quatro, as crianças verificam o código de posição: 123 (leia-se um, dois, três) que significa um segundo agrupamento (uma caixa de giz com 4 pires com 4 bolinhas em cada pires); dois primeiros agrupamentos (dois pires com 4 bolinhas em cada) e três bolinhas soltas. Na base cinco, o código será 102 (um segundo agrupamento, nenhum primeiro agrupamento e duas bolinhas soltas). Na base 10, o código de posição é 27 (dois primeiros agrupamentos ou dois pires com 10 bolinhas cada e sete bolinhas soltas).

Tanto os jogos quanto os materiais de apoio utilizados para o trabalho com múltiplas bases supõem o aproveitamento de muitos objetos simples, usualmente obtidos com facilidade na própria casa das crianças, ou a utilização do material didático usual.

Segundo Dienes:

> *"Deve haver uma rica variedade de experiências matemáticas, com base nas quais os conceitos matemáticos possam ser construídos pelas próprias crianças. Muitas experiências serão necessárias para cada conceito; de outro modo, só ocorrerá associação e não generalização." (Dienes, 1974, p.29)*

Dienes criou um material estruturado que representa, em cada peça de dimensões apropriadas, os conjuntos constituídos pelos agrupamentos (isomorfismo): um cubinho de 1 cm x 1 cm x 1 cm seria a unidade. Para cada base (de 2 a 10) há uma respectividade no material. Seja, por exemplo, a base 5. na qual teríamos: "um longo", conhecido também como barra, constituído por cinco cubinhos juntos (uma peça de 5 cm x 1 cm x 1 cm); "um fino", conhecido também por placa, constituído por cinco barras juntas ou por vinte e cinco cubinhos (peça de 5 cm x 5 cm x 1 cm) e um "bloco" ou um cubão, constituído por cinco placas ou vinte cinco barras ou cento e vinte e cinco cubinhos (peça de 5 cm x 5 cm x5 cm).

O autor esclarece que o uso do material estruturado não é obrigatório, mas considera-o muito útil quando a estrutura dos agrupamentos já está bem elaborada na mente da criança e este material (significante) remete a "significados" importantes em muitos trabalhos da Matemática, como a multiplicação com números grandes em que a criança pode efetuar, no material de base 10, operações equivalentes, que permitem fazer com compreensão tais operações, não pelo material em si, mas pelo significado "na cabeça" da criança.

Dienes sugere que o professor crie atividades interessantes para a criança e, tratando de uma mesma propriedade numérica, varie ao máximo as situações e o material a ser utilizado. Valendo-se de algarismos, para registros dos diferentes códigos de posição, possibilita-se o estabelecimento de relações do valor do lugar, do princípio multiplicativo implícito nesta posição e a conservação do número (parte-todo). Nas situações de agrupamentos e desagrupamentos, Dienes descreve um intenso desafio à conservação das quantidades numéricas, por meio de abstrações reflexivas, bem como a inclusão e hierarquia de classes.

Neste "deslocamento" do pensamento no qual a criança percebe as semelhanças das estruturas de pensamento nas diferentes situações, pode-se constatar que o papel funcional das negações e afirmações, no processo de diferenciação e integração, é o que caracteriza e permite o desenvolvimento do conhecimento.

Segundo Piaget, o fato de coordenar dois subsistemas ou captar a comunialidade entre esquemas, implica negações parciais, ou seja, saber que algo é igual a X e diferente de não X. Estas negações parciais possibilitam as diferenciações e são indispensáveis à coordenação dos observáveis.

Com base na fundamentação da teoria de Piaget, Dienes propõe este trabalho com alunos para que se evitem apenas associações no estudo do sistema de numeração decimal..

> *"Deve haver uma rica variedade de experiências matemáticas, a partir das quais os conceitos matemáticos possam ser construídos pelas próprias crianças. Muitas experiências serão necessárias para cada conceito; de outro modo só ocorrerá associação e não, generalização." (Dienes, p. 29, 1970).*

Sugere o mesmo autor que, entre os diferentes tipos de materiais valha-se das próprias crianças, em atividades de jogos. Um exemplo de jogo seria o corrupio, no pátio da escola, quando as crianças estariam inicialmente brincando de saltar isoladamente. Ao sinal de um apito, agrupam-se em três e brincam de "corrupio"; no segundo apito, cada grupo de três "corrupios" vai brincar de "lenço atrás"; no terceiro apito, cada grupo de três do jogo "lenço atrás" vai brincar de "telefone sem fio". Numa sala com 35 alunos teríamos: 1 grupo de "telefone sem fio", nenhum (0) grupo brincando de "lenço atrás, 2 grupos brincando de "corrupio" e 2 crianças brincando de pular, individualmente.

A aprendizagem da Matemática é considerada um processo que é favorecido pela "ação" sobre o objeto. Nenhum material, no entanto, é capaz de ensinar Matemática. Por si só e sem a atuação do sujeito cognoscente nenhum material de apoio, por melhor que seja, possibilita a aquisição de conhecimentos. Na proposta de ensino do sistema de numeração decimal de Dienes, o professor deve fazer uso de material variado (significantes) por meio do qual se crê possibilitar ao aluno coordenações mentais importantes para o processo de aquisição dos significados matemáticos, os quais espera que ele aprenda.

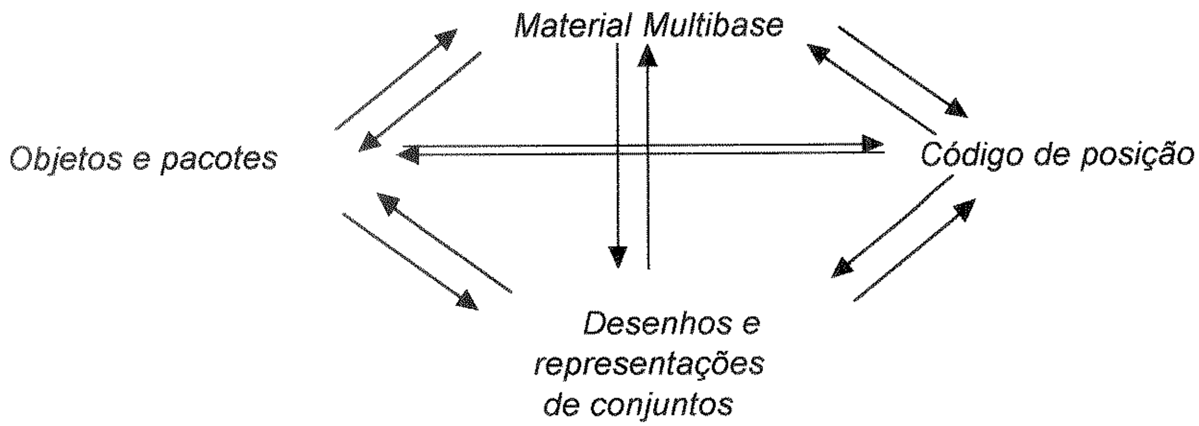
Ao analisar o ensino da Aritmética no 1º grau, e o ensino do sistema de numeração decimal, Kamii (1995), critica a utilização de material dourado e de outras estratégias como uso de material base 10, assinalando que o ensino com o uso desses materiais parece assentado no pressuposto de que o sujeito possa assimilar idéias como dezena e centena por abstração empírica. A autora assinala que o conhecimento lógico-matemático só pode ser construído por abstração reflexiva com base em relações previamente construídas pelo sujeito.

Segundo a proposta da escola "A ", o material de apoio justamente será utilizado em sala de aula com vistas à abstração reflexiva. Esse material, no caso, deve ser selecionado de acordo com a fase de desenvolvimento da criança, considerando-se as possibilidades de abstração, as características de crianças menores que exigem maior apoio do concreto. É esperado que o professor, no caso, seja sensível às exigências de cada situação e possa explorar o material, sempre em mudança, colocando perguntas pertinentes e que desencadeiem o raciocínio. O professor deve procurar identificar os processos de pensamento das crianças levando em conta as relações importantes em cada conceito.

Para Vergnaud nada é mais fecundo, no plano pedagógico, que os exercícios de troca de um material a outro ou de uma representação a outra. Passar de um material a número escrito correspondente, em forma recíproca, passar de um desenho de conjuntos a um material A, de um material A a um B, de um material B ao número escrito, e do número escrito a um desenho de conjuntos, é um meio seguro para fazer entender, sem dificuldades para as crianças, o sistema de numeração e seu princípio multiplicativo.

O autor (1991, p.143) ilustra o isomorfismo sugerido por Dienes, da seguinte maneira:

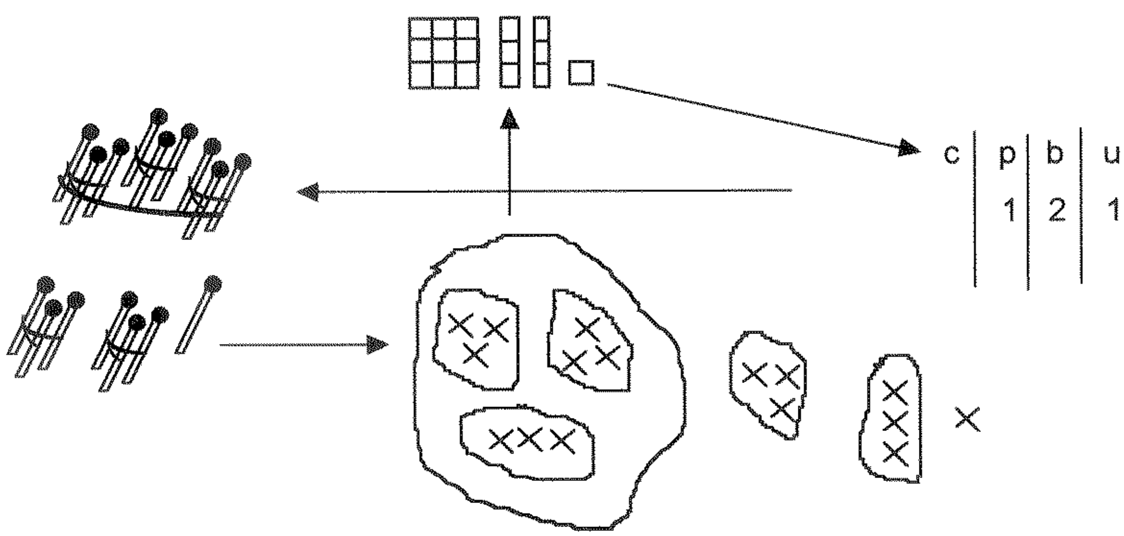
Os exercícios de trânsito de um material ou de uma representação a outra podem ser esquematizados da seguinte maneira:



Esquema de Vergnaud
(1991, pg. 143)

As flechas representam os possíveis exercícios de trânsito.

Vergnaud (1991) apresenta um exemplo em base três: pegar uma placa, duas barras e uma unidade; escrever o número correspondente ao código de agrupamentos, pegar um número de fósforos, agrupando-os em correspondência às quantidades anteriores, desenhar uma representação de conjuntos que corresponda, igualmente, e colocar em relação, essa representação, com o material multibase do começo. O autor ilustra esse isomorfismo da seguinte maneira:



(Desenho de Vergnaud, pg. 143, 1991)

A manipulação do material multibase não se restringe a atividades de contagem. O uso desse material na sala de aula permite uma intervenção pedagógica que pode contribuir para a "equilibração", tal como entendida por Piaget, nestes processos: estabelecimentos de relações, classificações, diferenciações, integrações... O uso deste material e desta proposta de ensino não tem sentido, se não compreendida no quadro de referência da Teoria do Desenvolvimento Cognitivo de Piaget, que lhe dá sustentação.

A proposta da escola "A" enfatiza o trabalho com o conflito, com desequilíbrios, com o apoio da análise de situações da vida cotidiana e valoriza jogos e brincadeiras com o objetivo de favorecer, pela diversificação, comparação e complementaridade, as abstrações reflexivas e generalizações necessárias à construção do conceito de número.

A idéia de fases de construção de conceitos, de Piaget, é resgatada, considerando-se a fase inicial (dos jogos preliminares), a de uma atividade informal, normalmente chamada jogo, a segunda, que é caracterizada por uma atividade mais estruturada (jogos de estruturação) na qual é importante garantir-se a variedade de experiências relacionadas com o conceito, e a terceira, relacionada à fixação e aplicação do conceito (jogos de prática). (Dienes, 1974).

A escola "A" valoriza a atuação do professor como o organizador de situações que se tornem significativas para os alunos e como o responsável por elaborar problemas de enredo, com apoio de material concreto, problemas esses que devem ser apresentados, oralmente, para serem analisados pelos alunos. Em especial, espera-se do professor sensibilidade e perspicácia para formular perguntas que incentivem os alunos a pensar, bem como espera-se que solicite explicações e justificativas, fomentando a reflexão e as discussões entre os próprios alunos.

Para um trabalho eficiente, é preciso que o professor tenha uma compreensão extensiva dessa proposta que permeia o 1º grau. Para implementá-la, é necessário que o professor saiba instaurar conflitos, desequilíbrios e saiba, especialmente, criar situações de aprendizagem adequadas aos interesses e experiências de vida de seus alunos.

Usualmente os professores esforçam-se para que os alunos entendam fórmulas ou equações por meio de explanações, apresentando o raciocínio no quadro-negro, explicando as idéias oralmente para os alunos, e apoiando-se em livro-texto. Dienes afirma que uma fórmula é um modo conciso de expressar uma variedade de experiências com números e é preciso que uma variedade de experiências se constituam como apoio para a construção da abstração.

Dienes enfatiza o fato de que, para um aprendizado proficiente de Matemática, os professores devem estar conscientes dos processos matemáticos, lógicos e psicológicos nele envolvidos. Assinala que uma fórmula, por exemplo, deve ser construída matematicamente e psicologicamente.

Dienes ressalta que, embora se acredite que em sala de aula se deva levar em conta tais princípios, isso não significa que a aprendizagem nunca ocorra de outro modo. Admite que há crianças que são capazes de abstrair conhecimento baseando-se em um número mais limitado de experiências, ainda que isso não ocorra com a maioria delas. Dienes comenta também que não se pode deixar de reconhecer, ainda, ser possível que o tipo de pensamento do professor possa coincidir com o do aluno, e, portanto, permitir abstrações e que as explicações possam ser eficientes, ou seja, as explanações podem ser capazes de surtir efeito.

De qualquer modo, Dienes critica o ensino da Matemática por meio do condicionamento, considerando-se que o aluno possa aprender por associações e reforço das respostas corretas, situação que considera inadequada para a apreensão do conhecimento lógico-matemático. Para construir o conhecimento, segundo o autor, a criança precisa refletir sobre suas ações. Essas reflexões são pessoais e decorrentes de um processo contínuo: cada nova experiência é integrada às experiências anteriores, resultando, por abstrações reflexivas, na construção de conceitos cada vez mais complexos.

Segundo Dienes, seria urgente que os métodos de ensino em sala de aula, nas quais o professor assume a posição central de detentor do saber e do poder, fossem substituídos por situações de aprendizagem individual ou em pequenos grupos, com apoio de material concreto, situações nas quais os professores deveriam agir como aqueles que intervêm estimulando o pensamento do aluno. O autor ressalta que o conhecimento não deve vir especialmente do professor, mas resultar da abstração desencadeada pelas ações sobre materiais, jogos ou pelos exercícios propostos por ele.

A proposta construtivista da escola "A" prevê que a essência de uma situação de aprendizagem construtivista, no que concerne ao professor, deve considerar a sutileza de perguntas que desencadeiem o raciocínio do aluno, que incentivem a solução de problemas por meio de procedimentos pessoais, que sugiram a análise de procedimentos, por meio de pedido de explicações e justificativas dos procedimentos. Enfatiza propostas de aprendizagem significativa e atividades que contribuam para o trânsito constante de material para material e trânsito entre situações diversificadas.

A ação do professor, nesta proposta, é bastante enfatizada: cabe-lhe selecionar o material apropriado às questões mais significativas; cabe-lhe apresentar problemas que, seqüencialmente favoreçam a abstração gradativa dos conceitos ; cabe-lhe acompanhar o processo individual de construção dos alunos, analisando os procedimentos e avaliando o progresso para intervir em favor da construção do conhecimento.

A interação entre professor e alunos, bem como o trabalho em grupo, são aspectos destacados na escola "A" com o objetivo de permitir discussões que possam dinamizar e dar mais significado à experiência escolar. A necessidade de explicar para o companheiro aquilo que se pensou, é considerada como ajuda para que cada um organize o próprio pensamento e tome consciência dos próprios procedimentos de solução de problemas. A organização mental (necessária à comunicação) e as trocas de opiniões são consideradas como oportunidades de enriquecimento das idéias (do grupo) e capazes de favorecer o processo de abstração pessoal.

Na sala de aula, espera-se que a colocação de questões, pelo professor, nos momentos adequados, favoreça a construção dos conceitos.

A proposta da escola "A " assenta-se na idéia de que as situações de sala de aula devem ser significativas para os alunos a fim de que desencadeiem neles o interesse pelo estudo, provoquem desafios e propiciem satisfação pessoal. Aos professores cabe a responsabilidade de identificar os temas e situações mais próximas da experiências e dos interesse dos alunos e que possam incentivar a busca de solução. Na busca de soluções, o sujeito estabelece relações com outras situações resolvidas anteriormente, que se organizam num esquema mais amplo de modo a incluir a nova questão.

A proposta pedagógica analisada neste trabalho considera a possibilidade de se refazer, em parte, o processo construtivo, similar ao de nossos antepassados, na construção histórica do número.

O aspecto central da proposta é a concepção de construção do conhecimento enfatizada por Piaget e pelo projeto de Dienes para o ensino da Matemática. Dienes acentua a importância de uma distribuição de conteúdos escolares, ao longo das séries escolares, buscando respeitar a gênese do desenvolvimento cognitivo, destacando as estruturas de pensamento do aluno, enfatizando atividades que permitam ao aluno o fazer com compreensão. A concepção construtivista de conhecimento de Dienes, como o próprio autor comenta, apóia-se, evidentemente na teoria de Piaget., bem como na de Bruner e Bartlet.

As situações de contagens em grupos, idéia endossada pela escola "A" seriam, no caso, oportunidades para favorecer as estruturas de pensamento necessárias à aquisição do conceito de número grande. Tais oportunidades seriam, por exemplo, aquelas em que os alunos podem manipular de maneiras variadas uma mesma "parte" em diferentes "todos" (conservação), em que estas mesmas partes-todo podem ser seriadas de muitos modos (relações assimétricas) e, ainda, situações em que enfrentem o desafio de poder pensar num número composto por unidades e. ao mesmo tempo, por dezenas, centenas, milhares, tendo a abstração reflexiva da estrutura multiplicativa contida nestas formas de agrupamento.

Kamii (1995) refere-se às mesmas estruturas: "saber pensar em "dez uns" ao mesmo tempo que em "um dez". Kamii não aponta o trabalho de contagens em diferentes grupos como estratégias válidas ao desenvolvimento do conceito numérico, mas reconhece e reforça a necessidade destas estruturas de pensamento.

Quando o aluno efetua contagem de variadas maneiras, consideradas as regras das bases, está intrinsecamente fazendo contagens com determinada unidade de medida. Segundo a proposta, espera-se que alunos submetidos a tal proposta encontrem facilidade em lidar com cálculos sexagenais em séries adiantadas do 1º grau, decorrentes da formação de estruturas de pensamento necessárias à compreensão do número, do sistema de numeração decimal conforme citações de Kamii (1995) e focalizados neste trabalho. Por fim, é esperado que o aluno capte, intrinsecamente por meio de seu raciocínio matemático o princípio multiplicativo do sistema de numeração e isto é bastante significativo nas relações matemáticas de base 10, no sistema monetário, no sistema métrico de comprimento, de área, de volume.

Por meio dos agrupamentos, a criança pode vivenciar situações que contribuam para o estabelecimento de relações de ordem e inclusão hierárquicas para novas classes de quantidades. Pode contar um "três"; um "sete" e dois "uns"; um "dez" e quatro "uns" e, mais tarde, um "cem", um "mil", que não são estruturas próprias do pensamento inicial da criança no contexto do número, mas necessárias à noção de quantidade.

Kamii (1995) faz importantes referências à concepção hierárquica do número, mostrando a diferença entre o sistema de unidades e o sistema de ordens mais elevadas, construído com base no conceito de unidades.

Na concepção didática analisada, o objetivo do trabalho é criar situações tais que a criança, apoiando-se nas generalizações feitas, elabore em seu pensamento as estruturas de ordens superiores que Kamii aponta como imprescindíveis à aquisição do conceito dos números grandes.

Como Dienes sugere, a escola deve permitir ao aluno manipular quantidades gradualmente maiores, em situações variadas, utilizando materiais de diferentes tipos, o que pode permitir a reinvenção do conhecimento por meio das abstrações que a atividade permite.

Ensinar o sistema de numeração decimal a crianças, usando apenas a base 10, pode favorecer uma aprendizagem empirista, com poucas relações e poucas abstrações reflexivas, além, segundo mostram as pesquisas de Kamii (1995), Ross (1986) e outros pesquisadores, de não garantir a aquisição mental do princípio multiplicativo implícito no valor posicional do nosso sistema de numeração, importantíssimo para a aprendizagem matemática.

> *"Para que existam abstrações é necessário que exista algo do que abstrair e este algo, nas formas elementares de pensamento, não pode ser mais que a organização das ações sobre os objetos concretos aos quais a criança tenha acesso". (Sastre, 1975, p. 62)*

A contagem em diferentes bases valorizada nesta proposta tem justamente a intenção de favorecer, pelos processos de abstração e generalização, a construção das estruturas multiplicativas do nosso sistema numérico, que estão intimamente relacionadas com outros conceitos matemáticos.

A conservação do número implica a compreensão de que o todo permanece constante, independente da maneira como as partes são agrupadas por relações aditivas e multiplicativas com o todo. Essa compreensão não surge imediatamente após a capacidade de contar. Ela vem mais tarde, somente quando a criança conceitua o número como constante e composto de elementos que podem ser agrupados e reagrupados de várias maneiras.

Em sua tese de doutorado, Grossi estuda a questão que está, para ela, no cerne das aprendizagens matemáticas escolares: o domínio da estrutura multiplicativa. Segundo ela a estrutura multiplicativa representa "a porta de entrada para a complexidade lógica da Matemática para além das possibilidades de aprendizagem por conta das experiências ordinárias do dia-a-dia." A estrutura multiplicativa, segundo a autora, requer um "*ensino sistematizado, regular e planejado que só é generalizado pela escola*". (Grossi, "Um espaço para ficar inteligente", vol. 5, p 13).

Para Grossi, (fonte citada acima), só se podem considerar as possibilidades de uma democracia verdadeira quando todos os indivíduos puderem ter asseguradas as bases da igualdade e uma delas, muito importante, é a possibilidade de poder pensar com estruturas multiplicativas, necessárias à solução de problemas que a vida impõe. A autora constatou em sua pesquisa, no entanto, que os verdadeiros elementos característicos da estrutura multiplicativa só são dominados pela maioria dos alunos, já em nível de 2º grau. Assinala que a população de baixa renda tem na escola sua única oportunidade de desenvolver as funções complexas do pensamento e que, no Brasil, a grande maioria da população é constituída pelos menos favorecidos economicamente. Esta clientela, desfavorecida economicamente, no entanto, na maior parte das vezes, não chega a concluir o 1º grau, e muito menos tem acesso ao ensino de 2º grau.

Resnick demonstrou haver *"um divisor de águas" entre as estruturas aditivas e as multiplicativas, em termos de exigências pedagógicas. As estruturas aditivas podem ser mais facilmente construídas nas atividades do dia-a-dia, ao passo que, em contraposição, a complexidade da Matemática presente nas problemáticas multiplicativas, não é passível de ser aprendida fora da escola, mesmo nas sociedades de primeiro mundo.* (in Grossi, "Um espaço para ficar inteligente", v. 5).

Segundo Grossi (fonte citada acima), Nunes, com base em estudos mais recentes com meninos de rua, comenta que os sujeitos entrevistados nestas pesquisas apresentavam limitações diante de problemas que apresentavam números muito grandes ou fracionários, pois a lógica necessária a estas soluções está embricada em raciocínios que requerem a construção de estruturas mais eficientes do que as que eles apresentavam.

O trabalho com diferentes bases coloca a criança diante de muitas situações em que deve lidar com números de diferentes tamanho, quantidades cada vez maiores devendo fazer muitas composições e decomposições numéricas diferentes das usuais, e que são apresentadas na maioria das vezes apenas nas ordens exatas (dezenas, centenas, ...). Existe uma variedade de situações apresentadas aos alunos no trabalho com diferentes bases, no caso em questão, as quais são organizadas de forma a desencadear abstrações importantes, possibilitando que as crianças possam compreender e dar significado a formas de representação destas quantidades; possam perceber relações e "vivenciar as propriedades dos números, aplicando-as em cálculos mentais. No inicio do trabalho a ênfase é sempre dada ao cálculo mental, sem exigências quanto a algoritmos e permitindo-se diferentes movimentos do raciocínio próprio de cada aluno.

Nesta proposta, os algoritmos convencionais só são apresentados aos sujeitos após terem tido experiências e tempo suficientes de desenvolverem estruturas aditivas e multiplicativas importantes à construção da noção de quantidade. A criança é encaminhada na construção da noção de quantidade, na compreensão do sistema de numeração e conduzida a buscar procedimentos próprios para a resolução das quatro operações. É encorajada a usar seus próprios recursos de cálculo valendo-se da decomposição e agrupamentos de quantidades significativas que, por sua vez, reforçam o entendimento do conceito de número.

Kamii (1995) enfatiza que os algoritmos convencionais inibem o raciocínio da quantidade numérica por obrigar a operar prematuramente com ordens decimais. Para ela, "*o algoritmo é conveniente para os adultos, se já compreenderem o valor posicional dos números* (...)" (Kamii 1995, p.57).

Na proposta da escola A espera-se que os alunos possam aprender e utilizar eficientemente algoritmos convencionais, com base na constatação da compreensão das propriedades das operações e da representação tendo primeiramente explorado procedimentos próprios, decorrentes de descobertas pessoais e da construção de significados.

> *"O princípio mais importante do aprendizado dinâmico e perceptivo é que os conceitos e as técnicas resultantes surjam das conseqüências naturais das experiências das crianças (...)" (Dienes 1974, p.63).*

Para Vergnaud:

> *"as diferentes técnicas de ensino da numeração devem ter como objetivo o fazer compreender a relação entre as operações sobre os objetos e os conjuntos, e as operações sobre os símbolos numéricos. Este é justamente o mérito da numeração em várias bases e, sobretudo nas pequenas (base três e quatro), fazem compreender o paralelismo entre os objetos e o dígito das unidades, entre os pacotes de primeira ordem e o primeiro dígito à esquerda do dígito das unidades, entre os pacotes de pacotes (de segunda ordem) e o segundo dígito à esquerda do dígito das unidades etc" (Vergnaud 1991, p.141).*

O autor considera que as bases pequenas permitem que se compreendam facilmente as operações necessárias de trocas, sem que haja dificuldade com o manejo de um grande número de objetos. A base dez traz mais dificuldades de manipulação que as bases pequenas, para a realização das contagens e trocas que o sujeito precisa entender para compreender o algoritmo da adição, e mesmo da subtração (Vergnaud 1991).

Ao lidar com diferentes agrupamentos nas contagens, a criança está construindo, sem perceber, os conceitos das quatro operações e interiorizando, por suas experiências, muitos dos fatos fundamentais e das propriedades dos números e estabelecendo relações importantes em sua aprendizagem. A tabuada, por exemplo, é uma aprendizagem plena de significados e lhe é apresentada como resultado das muitas relações que já domina. As contagens por agrupamentos, além de favorecerem o valor posicional dos números, já fazem a criança pensar em dois grupos de quatro, três grupos de cinco ou de dez, que nada mais são que multiplicações, além das relações como as de dobro, triplo, metade, utilizadas nos cálculos.

O pressuposto do trabalho de agrupamentos, fundamentado em Dienes, com material multibase é o de favorecer o desenvolvimento operacional. O raciocínio aditivo e multiplicativo, bem como a reversibilidade deles (subtração e divisão) são trabalhados nas diferentes situações. Baseando-se nas experiências com agrupamentos, espera-se que o aluno possa compreender melhor os fatos fundamentais da multiplicação e divisão, ou seja, da tabuada, sendo capaz de entendê-la por meio de relações de dobro, triplo, metade (se 3x8 = 24 então 6x8 = 24+24 que é 48 porque 6x8 é o dobro de 3x8). Esse desempenho implicaria uma diferença fundamental na aquisição do conceito de número.

Com um trabalho desenvolvido durante todo o 1º grau com o apoio da estratégia da multibase, a escola "A" propõe-se favorecer para os aluno a percepção da relação entre os tópicos focalizados no ensino da Matemática, os quais, usualmente, são tratados na escola como partes estanques, destacados uns dos outros. A utilização de materiais (significantes) tem a proposta de possibilitar aos alunos que direcionem pensamento a aquisições cognitivas anteriores (significados) que permitem novas abstrações reflexionantes, por meio das atividades variadas.

A teoria de Dienes propõe a contagem em diferentes bases, no decorrer de todo o curso de 1º grau, com o objetivo de favorecer a construção de estruturas de pensamento pelo aluno. A idéia é a de organizar situações que permitam, por meio da ação do sujeito, a construção do conceito de número, do sistema de numeração decimal, o desenvolvimento da operatoriedade necessária às quatro operações, a ampliação da compreensão do conceito de quantidade, contribuindo para um desenvolvimento cognitivo que possibilite a compreensão e reinvenção do conhecimento de outros temas tais como frações, decimais, potência, radiciação, polinômios, logaritmação.

Espera-se que um trabalho dessa natureza possa favorecer também a aquisição do conceito de frações e de decimais desde que, ao propor atividades com os agrupamentos em diferentes bases, o professor procure explorar acentuadamente os conceitos de parte-todo e possibilitar importantes abstrações. Ao lidar com os agrupamentos das ordens superiores ou inferiores (desagrupamentos ou reagrupamentos) estará, possivelmente, possibilitando a preparação de estruturas que serão importantes às noções de terços, quartos, quintos, décimos, centésimos, para os alunos, na aprendizagem da Matemática, em séries posteriores ao 1º grau.

Ao focalizar frações e decimais, nesta proposta, espera-se que os alunos possam estabelecer relações e atribuir significados a conteúdos anteriormente trabalhados, bem como, diante de novos problemas, permitir importantes tomadas de consciência e generalizações mais abrangentes (feedbacks).

Também é esperado que seja favorecida a potenciação. No caso, em lugar de o professor limitar-se a enunciar o axioma: "Todo número elevado a zero é igual a um" ou "multiplica-se a base por tantas vezes quantas forem o expoente" expressões tão vazias de significado para o aluno, prevê-se, na exploração do material, a construção desse conceito. Considerando-se que, por exemplo: 3^1, 3^2, 3^3 passam a ter significado para o aluno, ou seja, 3^1 igual a três bolinhas no pires; 3^2 igual a três pires com três bolinhas em cada um, colocados numa caixa de giz; 3^3 igual a três caixas de giz com três pires que contém três bolinhas em cada um, colocadas na caixa de camisa. Para esta criança o 3^0 significa o três que não foi agrupado, são bolinha(s) solta(s) na mesa. Nesse quadro, o trabalho em sala de aula deveria propiciar oportunidade para o aluno compreender o conceito, ao passo que, usualmente, o aluno, ao errar, não tem, nem como usar sua lógica de pensamento para perceber o erro.

Dienes considera o estudo das potências e das propriedades dos expoentes indispensável para a abordagem das propriedades das operações aritméticas de multiplicação e divisão, pois o sistema de numeração decimal comporta em si mesmo o princípio multiplicativo das potências. Por essa maneira há que se preocupar com a construção mental das crianças, neste estudo.

Outra questão importante apontada por Dienes é que este tipo de trabalho pode favorecer a internalização das propriedades das operações: comutatividade, associatividade, distributividade. O trabalho em sala de aula deve propiciar oportunidades para a criança usar em seus procedimentos estas propriedades, nas resoluções das situações propostas. No trabalho escolar o professor deveria solicitar à criança que resolva problemas, podendo com facilidade adicionar, subtrair, multiplicar e dividir, valorizando-se processos de composição aditivas e transformações multiplicativas (composições e decomposições) decorrentes do raciocínio do próprio aluno, sem imposição de uso de algoritmos determinados. É esperado que o aluno seja capaz de reinventar os algoritmos da adição e subtração, muitas vezes, por seu próprio raciocínio, porque agrupar e reagrupar em diferentes bases lhe confere as estruturas de pensamento necessárias para tal.

Como enfatiza Dienes, a compreensão do valor posicional do número é um dos elementos centrais em relação à compreensão de muitos dos conceitos aritméticos que o aluno deverá estudar depois dos primeiros anos do 1º grau, possibilitando relações como, por exemplo, em radiciação e logaritmação.

A proposta da escola "A" busca apoiar os novos conhecimentos dos alunos nas relações e significados anteriormente construídos por eles. Nessa proposta por todo o decorrer do 1º grau, espera-se que, nas aulas de Matemática os alunos possam estabelecer relações estruturais, apoiadas nas experiências iniciais e no conhecimento construído nas séries iniciais, acrescendo a elas novas experiências, ampliando as generalizações. A idéia que norteia o trabalho no ensino da Matemática é a de não procurar separar diferentes ramos e temas da área, tais como Álgebra e Aritmética, que apresentam conexões importantes. O trabalho é orientado no sentido de se resguardarem as conexões, trabalhando com os alunos, em diferentes níveis de complexidade, gradualmente retomando conceitos de todos os ramos. Um exemplo disso é remeter o estudo de medidas de área e volume às estruturas multiplicativas que possivelmente a criança pôde construir no estudo do sistema de numeração decimal, lançando mão de relações dos mesmos significantes para novos significados.

Nesta proposta, em que são constantes os desequilíbrios que os jogos ou atividades podem provocar no pensamento do aluno, pode-se perceber no desempenho das atividades a utilização das estruturas lógicas de pensamento descritas por Piaget, no período operatório concreto que, uma vez desenvolvidas, encaminham o sujeito à aquisição de novas estruturas de pensamento, próprias do pensamento formal.

Alguns estudiosos consideram o estudo das diferentes bases desnecessário e complicado para as crianças. Esta análise pode ser fruto de uma má compreensão da proposta em sua totalidade, o que pode resultar numa prática docente deficitária.

A respeito desse tipo de crítica, Dienes menciona a tendência de as pessoas temerem as mudanças. O autor afirma:

> "A dificuldade está na verdade, não nas crianças, mas nos professores. Os mestres, especialmente aqueles que estão imbuídos de um método tradicional de tratar tanto conteúdo quanto a metodologia do ensino da Matemática, são muito difíceis de mudar" *(Dienes, 1974, p.10)*.

As trocas de idéias, os estudos, avaliações e treinamentos são necessários para garantia da eficácia dos métodos ativos.

> *"...temos um contínuo programa de treinamento de professores, no qual centena de mestres estão sendo treinados por meio de sessões de laboratório, com trabalho com as crianças e por meio de discussões e conferências. Não adianta fingir que o trabalho é fácil - é difícil para os organizadores assim como para os professores, mas o resultado é enorme". (Dienes, p. 10, 1974).*

As conclusões de Silva, (1987), estudando a prática educacional no ensino da Matemática no 1º grau, reforçam a objetividade da presente proposta. A autora, analisando dados de pesquisa acentua que a aprendizagem dos algoritmos na escola tem correspondido à aprendizagem de um conjunto convencional de procedimentos ligados a convenções de notação, sem maior significado para o aluno.

Para Silva (1987) a escola deve:

- ensinar as convenções de notação, o que implica que a escrita dos números não pode ocorrer apenas por seqüências de séries numéricas.
- promover a relação entre símbolos e quantidades
- considerar as tarefas de escrita dos números, de identificação do valor posicional, não como prática isolada com fim em si mesma, mas para servir para a compreensão dos algoritmos.
- oferecer a oportunidade de comparar duas ou mais maneiras diferentes de "fazer as continhas".
- aproveitar as estratégias do cálculo mental na solução das continhas, feitas pelo modo como pensam.

Este tipo de orientação corresponde, em grande parte à proposta de trabalho da escola "A", apresentada neste capítulo

Trabalhos que levam em conta a teoria de Dienes foram desenvolvidos por estudiosos brasileiros.

Esther Pilar Grossi, sob orientação de Pierre Gréco, na Universidade de Sorbone, desenvolveu pesquisa sobre o uso de diferentes bases com alunos de 2ª série do 1º grau, em 1968.

Experiências docentes foram implementadas na Universidade de Passo Fundo, no Laboratório de Matemática, com posterior publicação do "Ensaio 1 - Sistema de Numeração e Operações em Diversas Bases.

Luzia Faraco Ramos, 1994, na série "A Descoberta da Matemática" refere-se a atividades embasadas na proposta de Dienes.

Dione Luchesi Carvalho apresenta um trabalho "Multiplicação e Divisão - Atividades de Transformações Multiplicativas da Pré escola à 6ª série" (1986) atividades matemáticas na linha de construção de Dienes. (Coleção Ensinando Aprendendo)

Para a implementação da proposta da escola "A' são enfatizadas atividades em sala de aula com a participação individual da criança, de trabalho em pares ou grupos, e envolvendo manipulação de diferentes materiais estruturados ou não, de fácil organização para o professor. Fica acentuado que a situação de exploração do material deverá ser de interesse da criança; que devem se valorizadas as idéias e experiências próprias da crianças e decorrentes de seu meio ambiente. Conforme Piaget, a aprendizagem sempre tem seu ponto de partida em assimilações pre-existentes.

A contagem em diferentes bases valorizada nesta proposta tem justamente a intenção de favorecer, pelos processos de abstração e generalização, a construção das estruturas multiplicativas do nosso sistema numérico, que estão intimamente relacionadas com outros conceitos matemáticos.

O professor, no caso, é responsável por desenvolver uma série de atividades-investigação iniciais sobre o conceito de número, partindo do princípio de que o aluno, em decorrência de suas experiências e do processo de equilibração próprio de sua interação com o mundo, já apresenta um inicio de construção que não deve ser ignorado pelo professor, na perspectiva construtivista. É importante que seja considerado o significado que tem o número para a criança e como ela o conserva na relação de ordem e inclusão.

A orientação da escola "A" é no sentido de que o professor inicie o trabalho por pesquisas feitas pelos alunos, destacando os números nas suas experiências diárias: número da casa, do andar de um prédio, do telefone, os preços do que compra, ou vendem, a idade das pessoas e assim por diante. Os trabalhos de Emília Ferreiro indicam possibilidades não apenas em relação à aquisição da leitura-escrita como também em relação aos demais conteúdos escolares, dentre eles a Matemática. As conclusões da autora sobre a experiência cultural da criança e o conhecimento escolar lembram-nos que isto ocorre em relação ao número, desde que o indivíduo nasce.

O aproveitamento de experiências específicas do contexto do aluno e de situações vividas é enfatizado no trabalho inicial de contagem quando alguns objetos devem ser contados, por exemplo, na forma de agrupamentos, ou seja, utilizando-se de uma contagem de ordem diferente da de unidades, como, por exemplo, as que fazemos ao comprar "Danones" nos supermercados, os quais usualmente vêm embalados de quatro em quatro ou seis em seis unidade; ou os potes de "Yakultes", ou as embalagens de "Coca-Cola" e muitos outro produtos que fazem parte do dia-a-dia dos alunos.

As atividades em que as crianças são envolvidas, nas contagens em diferentes bases visam o estabelecimento de relações hierárquicas do número, relação assimétrica e as classificações, e também favorecer o processo mental de abstração do valor posicional do número e a construção do princípio multiplicativo implícito no valor relativo dos números. Um exemplo de atividade interessante na proposta é a" Fábrica de Balas" ou de outro produto qualquer, na qual os alunos brincam de ser operários que estão aprontando encomendas para fregueses. O professor pode usar de toda sua criatividade neste momento, reforçando o envolvimento lúdico dos alunos na situação. As crianças utilizam objetos pequenos de qualquer tipo para representar "balas" e as empacotam conforme a determinação do "gerente da fábrica" (que pode ser o professor ou um dos alunos). Não há, no início, a intenção de registrar a atividade, mas de manipular os objetos e organizá-los em pacotes, com o acompanhamento do professor, que deve procurar garantir que os alunos tenham entendido a proposta.

A etapa seguinte do processo consiste em propor que os alunos registrem o "trabalho" realizado como "operários da fábrica". Este registro é inicialmente pessoal. A necessidade de utilizar registros comuns a todos, convencionais para que possam ser entendidos por todos deve surgir espontaneamente em decorrência das atividades e da interação entre os pares de alunos. No momento em que isto ocorre, o professor deve introduz a possibilidade de organização e utilização de tabelas para registro dos códigos das contagens feitas nas atividades propostas.

Em aulas coletivas, os professores devem apresentar atividades de contagens para os alunos, considerando o contexto e o interesse do grupo. A classe dividida em grupos executa as atividades propostas pelo professor.

Vale ressaltar que as atividades são realizadas inicialmente com apoio do material concreto, mas espera-se que os alunos passem para o registro gráfico depois que é constatada a representação mental correta e a compreensão da coordenação dos observáveis.

Em outros momentos da atividade, o envolvimento com a situação poderá ser aproveitado pedagogicamente em situações de produções de textos, em leituras, bem como em representações simbólicas importantes para a Matemática.

Para Dienes, o primeiro momento de aprendizagem escolar de um conceito deve passar pela exploração livre do material que será utilizado. Este momento de liberdade de exploração é importante porque permite a adaptação do pensamento do sujeito ao conteúdo que se quer desenvolver. Será o momento de abstrações empíricas que "abrem as portas" para relações importantes à aprendizagem. Este momento da aprendizagem parece difuso, porém a utilização de outros jogos ou atividades semelhantes do ponto de vista da estruturação conceitual e da interação com o outro oportunizarão ao sujeito a percepção da estrutura matemática, específica do conceito. A representação por meio de desenhos ou esquemas pessoais será um meio de unir os significados (realidade experimentada) e seus significantes a um sistema conceitual em construção. Tais representações exigirão o uso da linguagem como instrumento de socialização do que foi pensado e representado. O passo seguinte será o de poder introjetar uma linguagem matemática comum ao entendimento de todos, pois construída desde o seu "alicerce".

Destaca-se nesta proposta a construção de "trenzinhos de "n" a mais ou "n" a menos feitas em bases determinadas, bastante pertinentes à construção da noção de conservação (parte-todo) e relações assimétricas de classes.

- a escolha dos conteúdos trabalhados nos determinados momentos da aprendizagem (os algoritmos convencionais são trabalhados após os algoritmos criados pelos aluno, pelo uso de transformações aditivas e multiplicativas).

• o uso de representações como esquemas sagitais, gráficos, quadros cartesianos, escritas algébricas, correspondências entre conjuntos. No uso de "máquinas" de adicionar, subtrair, multiplicar, dividir a criança é levada a operar com quantidades significativas antes de lidar com escritas algébricas. Estas máquinas requerem o uso do pensamento reversível, em muitas situações, além de apresentarem aos alunos situações de conflito que implicam desequilíbrios importantes à aquisição dos conceitos estudados, no sentido de favorecer a construção de relações ternárias e o estabelecimento e compreensão de estados e transformações.

• o trabalho individual e em pares, com a utilização de fichas especificamente elaboradas em função do conteúdo priorizado pela proposta, ou fichas elaboradas pelo professor, conforme a necessidade individual do aluno.

• o enfoque pedagógico do homomorfismo no tratamento de relações e conceitos.

Neste trabalho pedagógico, as atividades foram apresentadas como exemplos ilustrativos do trabalho da escola "A", não sendo considerada a seqüência exata das mesmas na escola, durante o processo. Para efeito de ilustração, algumas fichas usadas na proposta analisada foram aqui anexados. (Anexos 2).

Considerou-se importante o aproveitamento da orientação construtivista, descrita neste capítulo, adotada pela escola A, há 6 anos e com supervisão regular do trabalho docente, para coletar alguns elementos que pudessem esclarecer as possibilidades do construtivismo na Educação.

CAPÍTULO IV

METODOLOGIA DA PESQUISA

Nesta pesquisa optou-se por um estudo que permitisse esclarecer as possibilidades de uma opção pelo construtivismo no 1º grau. O presente trabalho teve por objetivo investigar o desempenho de alunos na solução de tarefas matemáticas, relacionadas ao Sistema de Numeração Decimal. Pretendeu-se analisar os procedimentos apresentados por alunos de uma escola - **escola A**, que desenvolve um projeto pedagógico específico, de orientação construtivista, inspirado em trabalhos de Piaget e Dienes em comparação com alunos de outra escola - **escola B**, que não adota essa orientação específica.

A **escola A**, no caso, foi selecionada para ser objeto deste estudo de caso porque se caracteriza por um trabalho fundamentado na teoria de Piaget, adotando o uso de material concreto de apoio, manipulação de objetos reais ou figurativos e sistemática de trabalho em sala de aula, inspirados em Dienes, para o ensino do Sistema de Numeração Decimal. A **escola B** não adota tal orientação e os professores trabalham com os alunos de maneira convencional, apoiados no enfoque que usualmente é adotado no ensino daquele sistema , conforme explorado nos livros didáticos.

A Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (CENP) define seus guias curriculares sob orientação construtivista mas esta orientação nem sempre tem se efetivado na prática. A escola "B", no caso, apresenta a prática pedagógica usual do ensino do sistema de numeração decimal da maioria das escolas.

A proposta e o trabalho da escola A encontram-se descritos no capítulo III desta dissertação.

Foram analisados nesta pesquisa os seguintes aspectos:

- a construção do número
- a construção do sistema de numeração decimal
- o reconhecimento do valor posicional do número
- a aquisição da estrutura multiplicativa do sistema de numeração decimal
- a operatoriedade aditiva e multiplicativa
- os processos de pensamento em tarefas de contagem.

Optou-se por investigar alunos de 4º série do 1º grau, considerando-se que, supostamente, devam ter construído os conceitos de número e de sistema de numeração decimal.

SUJEITOS

Foram investigados os procedimentos de dezoito crianças da escola "A" e dezoito crianças da escola "B". Os sujeitos da escola "A" foram selecionados entre os alunos de 4ª série, tendo-se o critério de estudarem sob a descrita proposta construtivista desde a 1ª série. Os sujeitos da escola"B" foram obtidos através de sorteio, após ter-se obtido junto à secretaria da escola "B", a lista dos alunos matriculados na 4ª série do período vespertino .

Foi pedido aos pais autorização para a participação nesta pesquisa, comunicando-lhes que os sujeitos seriam filmados em vídeo.

PROCEDIMENTOS

Os sujeitos desta pesquisa foram entrevistados individualmente e fora da situação da sala de aula. As entrevistas foram gravadas em vídeo e posteriormente transcritas, pormenorizadamente, em protocolos.

Os vídeos foram assistidos tantas vezes quantas necessárias tendo-se em vista a transcrição para os protocolos. Posteriormente, os vídeos foram novamente assistidos para se recuperarem elementos necessários à análise dos dados que a leitura dos protocolos foi sugerindo e para esclarecimento de eventuais dúvidas em relação ao desempenho dos alunos.

Para essa análise foram apresentados aos alunos três tarefas de Matemática, individualmente, fora da sala de aula.

A aplicação dos experimentos foi feita numa seqüência aleatória para alunos de uma mesma série, alternadamente, ora iniciando-se por um experimento, ora por outro.

As tarefas foram explicadas e lidas pela pesquisadora para cada um dos sujeitos. Caso o sujeito não entendesse o trabalho a executar depois da primeira explicação, a investigadora a repetia.

Durante cada experimento, a pesquisadora apresentava perguntas e pedia explicações aos sujeitos, com apoio da orientação do Método Clínico Piagetiano.

EXPERIMENTOS

As tarefas utilizadas neste trabalho foram previamente avaliadas, em estudo exploratório, tendo-se o cuidado de verificar as possibilidades de compreensão das propostas das questões de cada tarefa, possíveis reações das crianças em relação às mesmas, bem como o tempo necessário para cada experimento.

1) Para investigar a compreensão do valor posicional do número foi apresentada às crianças a seguinte situação-problema:

"Num programa de TV houve um sorteio e aconteceu um empate; cinco crianças empataram. Para desempatar, os ganhadores precisarão sortear um número. Assim, serão colocadas cinco bolas de isopor, num saco de pano, com algarismos diferentes escritos nelas. Cada criança sorteará estes algarismos, um de cada vez, compondo um número. Os algarismos serão colocados da direita para a esquerda. Se alguém sortear esses algarismos na mesma ordem que um outro já tiver tirado, formando o mesmo número, deverá repetir o procedimento de modo a formar outro número, não repetido. Assim feito, o vencedor do concurso será aquele que formar o maior número". A pesquisadora mostrava à criança as bolas de isopor com os algarismos escritos e dizia: "Aqui estão os algarismos que serão sorteados. Vamos fazer o mesmo que será feito na TV? Você sorteará os algarismos e eu os marcarei neste papel. Depois você me dirá qual é o número do vencedor, ou seja qual dos números formados é o maior."À medida que os sujeitos formavam os números, fazíamos a leitura em voz alta e a pesquisadora registrava estes números no papel (questão 1.1). Dada a resposta, a experimentadora pedia ao sujeito que explicasse como teve certeza de que aquele era o maior número.(questão 1.2.a).

Após o sorteio e formação dos cinco números, era pedido à criança que fizesse, no papel, a seqüência decrescente dos números formados (questão1.2.b).

Para constatar o valor posicional do número, era pedido ao sujeito que imaginasse que naquela sala onde estavam, havia um saco de feijões e que o sujeito respondesse quantos feijões pegaria conforme o algarismo que ia sendo apontado num daqueles números formados. (questão 1.3)

A seguir a investigadora escrevia no papel um número maior que aquele trabalhado na questão 1.3, mudando apenas um dos cinco algarismos que formavam aquele número e perguntava ao sujeito se, para ter aquela quantidade de feijões, seria preciso pegar mais feijões ou devolver feijões e que quantidade seria essa (questão 1.4.a); a seguir, contra-argumentava a resposta do sujeito, dizendo que um menino de outra escola havia dito que faltavam (n) feijões e perguntava se o sujeito concordava com a resposta daquele menino ou não e por quê. Se o sujeito, inicialmente, desse a resposta certa, ela contra-argumentava com um resultado errado e, se houvesse inicialmente dado uma resposta errada, ela contra-argumentava com um resultado certo e outro errado. (questão 1.4.b)

Tarefa 2: Para investigar se a criança se apropriou da representação de números, da noção de quantidade e como se utiliza das operações para resolver as situações-problema, apresentamos à criança a seguinte situação:

"Aqui estão duas caixas (A e V) com blocos de papel e alguns papéis soltos. Uma é para você e a outra é para mim. Escolha a que quiser". Na caixa azul (A) há doze blocos de cem folhas de papel; na caixa vermelha (V) há um bloco com mil folhas e três folhas soltas. A criança escolhia sua caixa e a pesquisadora lhe pedia para escrever os números que representam as duas quantidades(questão 2.1 e 2.2). Feito isso, a experimentadora pergunta à criança: "Quem tem mais folhas de papel, você ou eu? Por que acha isso? "(questão 2.3) A seguir, lhe dizia: "Se você ganhar mais estes três blocos de cem folhas (questão 2.4) e eu ganhar estes três blocos de dez folhas (questão 2.5) quem ficará com mais? Escreva com quanto ficamos ao todo(questão 2.6).

E, prosseguindo, dizia: "Se eu tirar de sua caixa cinco blocos de cem folhas e três blocos de dez folhas, quantas ainda restarão? (questão 2.7).

Se eu quiser dar este número de folhas, que estão na minha caixa, para dez crianças, de quantas folhas vou precisar? (questão 2.8).

E para vinte e cinco crianças? (questão 2.9). E perguntava ainda:

Quantos blocos de dez folhas você pode fazer com 1203 folhas? (questão 2.10).

Quantos blocos de cem folhas pode fazer com estas 1203 folhas? (questão 2.11).

Quantos blocos de mil folhas pode fazer com estas 1203 folhas? (questão 2.12).

Distribua 1203 folhas entre você e seu (sua) irmão (irmã), de três maneiras diferentes. (questão 2.13)

Faça uma estimativa aproximada de quantas folhas você acha que receberá cada criança, se dividirmos 1203 entre cinco crianças. A pesquisadora explicava que a criança devia dar um número que achasse possível, sem fazer a conta. (2.14).

Por fim, pedia que dividisse 1203 entre cinco crianças de forma exata. Quantas folhas inteiras cada criança receberá? (questão 2.15).

Após a resolução de cada problema, a pesquisadora pedia: "Você sabe calcular de outro modo?" A intenção era a de verificar como a criança se utilizava dos algoritmos e quais seus procedimentos de cálculo.

Tarefa 3: A tarefa 3 visou investigar o campo conceitual do princípio multiplicativo utilizado no sistema de numeração decimal. Esta atividade foi adaptada da proposta de Carvalho (1986).

a) "Os meninos que moram perto de minha casa resolveram fazer um clube. Combinaram assim: "cada menino ou menina poderia convidar três amigos; quem já foi convidado não pode ser convidado outra vez. Alberto foi quem teve a idéia e, por isso, foi o primeiro a fazer os convites. Ele ficou sendo o "fundador" do clube. Alberto convidou Beto, Carlos e Dudu. Estes meninos constituíram, pois, a primeira turma de convidados. Beto, Carlos e Dudu receberam as carteirinhas de sócios do clube e cada um deles convidou, igualmente, três amigos. Estes amigos que foram chamados formaram a segunda turma de convidados. A segunda turma, por sua vez, após ter recebido as carteirinhas, saiu em busca de novos convidados para formar a terceira turma". Após certificar-se de que as crianças entenderam a forma de fazer convites e o significado das "turmas", a pesquisadora pergunta: "Na quarta turma de convidados, quantos sócios o clube terá ao todo? "A criança podia fazer cálculos, da maneira que quisesse, registrando num papel. Foi pedido que explicasse como pensou. (questões 3.1.a,.b,.c,.d).

E, continuando: b) "Se os convites fossem feitos de cinco em cinco, ao invés de três em três, quantas pessoas seriam chamadas na terceira turma? Use o papel para calcular, se quiser. Explique como pensou" (questão 3.2.a, .b).

c) "Se fossem feitos agrupamentos diferentes (não mais de três em três, nem cinco em cinco) e conseguissem mil sócios, na terceira turma, como teria sido a regra combinada para os convites?"(3.3.a,.b)

Após a resolução de cada questão das três tarefas, a pesquisadora pedia aos sujeitos para explicarem como haviam pensado para obter aquele resultado e fazia contra-argumentação.

Para terminar a tarefa 3, a pesquisadora dizia:

d) "Contei esta história do clube para um amigo meu e ele quis resolver por meio de um tipo de desenho, por gráfico. Ele fez alguns "desenhos". Qual deles serve direitinho para demonstrar as turmas dos convidados do clube fundado por Alberto, até a quarta turma?

A essa altura, a pesquisadora mostrava gráficos de "árvores do princípio multiplicativo" para a criança identificar qual correspondia à situação-problema, dizendo: Você é capaz de mostrar qual é este gráfico? (questão 3.4).

(ver anexo 1).

MATERIAIS

- Filmadora e fitas diversas
- Para o experimento 1:
- cinco bolas de isopor de aproximadamente cinco cm de diâmetro, com algarismos gravados.
- um saco de pano
- papel e lápis

Para o experimento 2:

- duas caixas de cores diferentes(vermelha e azul).
- dois blocos de mil folhas
- blocos de cem folhas
- blocos de dez folhas
- folhas soltas
- papel e lápis

Para o experimento 3:

- papéis contendo as propostas escritas, das atividades a, b, c, d, e
- gráfico das" árvores do princípio multiplicativo"
- papel e lápis

CAPÍTULO V

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

O principal objetivo desta pesquisa foi investigar como as crianças vêm se apropriando da noção de quantidade (senso numérico) dos números grandes e sua operatoriedade.

Pretende-se que a análise e discussão dos resultados deste trabalho contribuam para a melhoria da qualidade de ensino e para a revisão das propostas curriculares do ensino da Matemática.

Nesta pesquisa analisaram-se os procedimentos matemáticos de alunos de 4ª série do 1° grau, que receberam influência educacional da escola em que só se aprende a lidar com algoritmos depois de os alunos terem passado tempo suficiente em procedimentos pessoais, usando decomposição de números para operá-los, sempre em quantidades significativas, em descobertas pessoais e grupais (escola A) e de uma escola na qual os algoritmos são ensinados aos alunos desde a 2ª série (escola B).

Por meio da comparação do desempenho de sujeitos submetidos à proposta de ensino diferenciado na distribuição dos conteúdos nas séries, nas estratégias e intervenções com o desempenho de outros não submetidos a este programa, buscou-se, nos resultados, a inferência para o apontamento de hipóteses sobre mudanças de estratégias no processo ensino-aprendizagem, em benefício de melhor qualidade de desenvolvimento do raciocínio, das estruturas mentais, dos conceitos e das relações matemáticas.

Por meio da **Tarefa 1**, utilizada nesta pesquisa, teve-se a intenção de investigar os seguintes aspectos: a leitura de números formados por cinco ordens decimais, as relações assimétricas dos números, o conceito de relação parte-todo e o valor posicional dos números.

Os sujeitos, após terem entendido a Tarefa 1, passaram a sortear as cinco bolinhas de isopor nas quais estavam escritos cinco algarismos diferentes. As bolinhas foram sendo sorteadas e colocadas, da direita para a esquerda, sobre suportes (copinhos plásticos).

À medida que era formado um número, composto por cinco ordens, a pesquisadora pedia ao sujeito que o lesse. Esse número era registrado pela pesquisadora, num papel.

As bolinhas, em seguida, voltavam ao saco de pano que as continha, e novo sorteio se iniciava para a formação de outro número.

A pesquisadora mostrava ao sujeito a folha de papel na qual estavam registrados os cinco números formados, e solicitava-lhe que assinalasse o maior dentre todos, ou seja, o número que, no caso, seria do primeiro colocado no sorteio de desempate, simulado no experimento.

A seguir, a pesquisadora pedia aos sujeitos que colocassem os números registrados em ordem decrescente, de modo que se soubesse qual deles seria o número do segundo colocado; depois, qual seria o do terceiro colocado, e assim por diante.

Foi solicitado aos sujeitos que explicassem como haviam pensado para seqüenciar os números sorteados.

A última composição de números era mantida sobre a mesa. A pesquisadora, para sondar a compreensão do valor relativo do número, pedia ao sujeito que imaginasse haver naquela sala um grande saco de feijões. Pedia-lhes que lhes dissessem quantos feijões eles teriam que pegar, conforme o número que estava sobre a mesa. Apontando para cada um dos algarismos, de cada vez, pedia ao sujeito que dissesse quantos feijões pegaria, se tivesse que pegar aquele número de feijões considerando um algarismo que era apontado de cada vez, naquele número formado.

A seguir, a pesquisadora escrevia no papel um número diferente, em apenas um dígito, dizendo que precisaria daquela nova quantidade de feijões. Pedia ao sujeito que considerasse o que ele já havia respondido anteriormente, na última quantidade trabalhada, e indagava se seria preciso pegar mais feijões ou devolver feijões, e qual quantidade faltava ou sobrava.

Por fim, apresentava uma contra-argumentação à resposta do sujeito, com a intenção de confirmar a confiança do sujeito na resposta dada; e, no caso de erro, tentar desencadear uma tomada de consciência e ter mais dados sobre o raciocínio do sujeito.

À medida que formavam os números por meio de sorteio, os sujeitos liam estes números para a pesquisadora. Observou-se que alguns titubeavam fazendo leitura errada; todavia, corrigiam-se até encontrarem "a fala" adequada.

A tabela número 1.1 e o gráfico comparativo 1.1 apresentam os resultados obtidos, referentes à leitura dos números sorteados e formados pelos sujeitos.

Tabela 1.1

Resultado da leitura dos números formados pelos sujeitos por sorteio

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
leitura correta de todos os números	17	17
leitura incorreta de todos os números	1	1

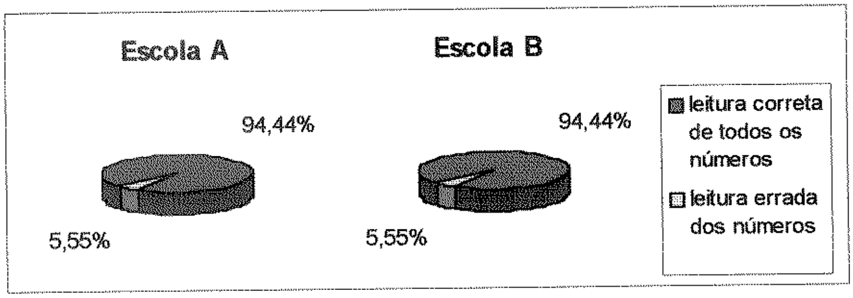
A tabela 1.1 demonstra que não houve diferença nos resultados apresentados, pelos sujeitos da escola A e da escola B, na leitura dos cinco números formados por cinco algarismos, em sorteio.

Ped (10;9), da escola B, lia, por exemplo, trezentos e quatro mil duzentos e sessenta e cinco, ao invés de trinta e quatro mil duzentos e sessenta e cinco. Corrigia-se em seguida. Art (10;10) e AP (11;0) também liam errado e corrigiam-se em seguida. Consideraram-se, como resultado incorreto, somente as leituras que não foram corrigidas no decorrer da aplicação

Man (10;7), da escola A, leu "dois mil, seis mil quatrocentos e vinte cinco", para 26425.

Jam (10;9), da escola B, leu "quarenta e três milhões e duzentos e cinqüenta e seis mil", para 43256.

Gráfico comparativo 1.1- percentual dos resultados da leitura dos números



O gráfico comparativo 1.1 mostra igualdade percentual nos resultados do desempenho dos sujeitos das duas escolas. Constatou-se que 94,44% dos sujeitos, tanto da escola A quanto da escola B, conseguiram ler corretamente os cinco números formados por meio do sorteio das bolinhas, resguardada a questão de titubear na leitura e de reconsiderá-la.

A tabela 1.2.a e o gráfico comparativo 1.2.a referem-se aos resultados das respostas dadas pelos sujeitos em relação à identificação do maior número da série.

Tabela 1.2.a

Resultado das respostas dadas à identificação do maior numero entre os cinco formados.

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	18	17
respostas incorretas	0	1

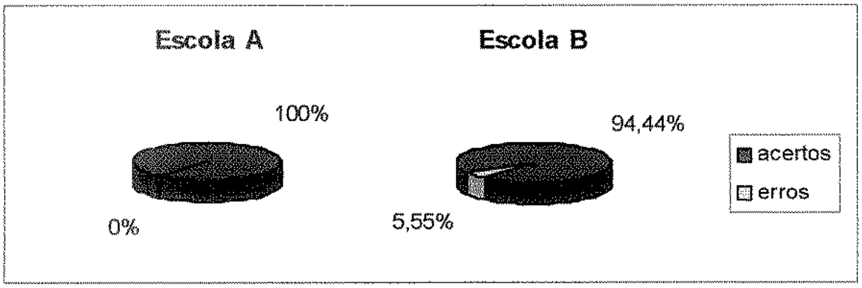
Com exceção de Jam (10;9), da escola B, não foram encontrados erros nas respostas dadas pelos sujeitos. A argumentação da grande maioria das crianças, ao justificarem suas respostas, esteve na observação do maior numeral colocado à esquerda do número. Nos casos de haver mais de um número começado pelo mesmo algarismo, os sujeitos buscavam o numeral imediatamente à direita deste, para determinar o maior. Quando acontecia de os dois primeiros algarismos serem iguais, alguns sujeitos comparavam o número formado pelos três últimos algarismos, comparando, por exemplo, 62345 com 62534 diziam:" 534 é maior que 345, por isso 62.534 é o maior."

Outros continuavam comparando os terceiros algarismos entre si e apontavam o maior número, conforme o desempate do terceiro algarismo.

Pode-se inferir que, neste caso, os sujeitos, na maioria, usaram o mecanismo das regularidades do sistema de numeração decimal.

Gráfico Comparativo 1.2.a

Percentual das respostas dadas à identificação do maior número da série.



O gráfico comparativo 1.2.a apresenta resultados semelhantes aos da questão anterior, apontando uma pequena diferença percentual entre os resultados dos sujeitos da escola A (100%) e os da escola B (94,44%).

A tabela 1.2.b e o gráfico comparativo 1.2.b referem-se à seqüência decrescente dos números formados na tarefa número 1.

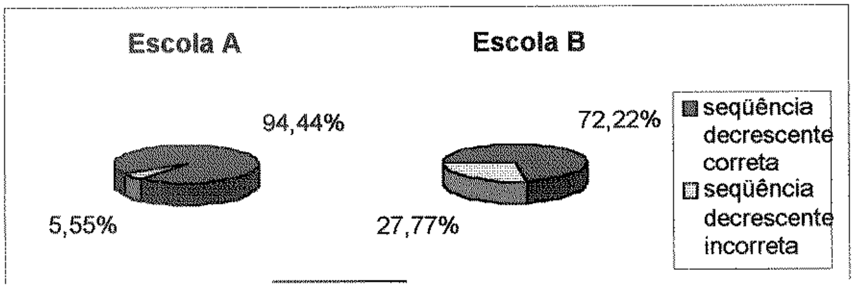
Tabela 1.2.b -Resultados da seqüenciação decrescente dos números da série

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
seqüência decrescente correta	17	13
seqüência decrescente incorreta	1	5

Os resultados obtidos da atividade de seqüenciar os números de uma série apresentaram maior quantidade de respostas incorretas, dadas pelos sujeitos da escola B que pelos sujeitos da escola A.

Ao explicarem seus procedimentos observou-se que os sujeitos usaram os mesmos recursos para identificar o maior da série. No entanto, colocar vários elementos em relação hierárquica ao mesmo tempo parece ter sido o motivo de erro de alguns sujeitos que não puderam dar conta de todos os observáveis da seqüência numérica.

Gráfico comparativo 1.2.b- percentual dos resultados da seqüênciação decrescente dos números



O gráfico comparativo 1.2.b mostra 94,44% de respostas corretas dos sujeitos da escola A e 72,22% de respostas corretas dos sujeitos da escola B, o que demonstra uma diferença percentual de 22,22% nos resultados dos alunos das escolas A e B, em relação à seqüência decrescente dos números da série.

Na tabela 1.3 e no gráfico comparativo 1.3 estão apresentados os resultados dos sujeitos quanto ao valor posicional dos algarismos (nos números)

Tabela 1.3

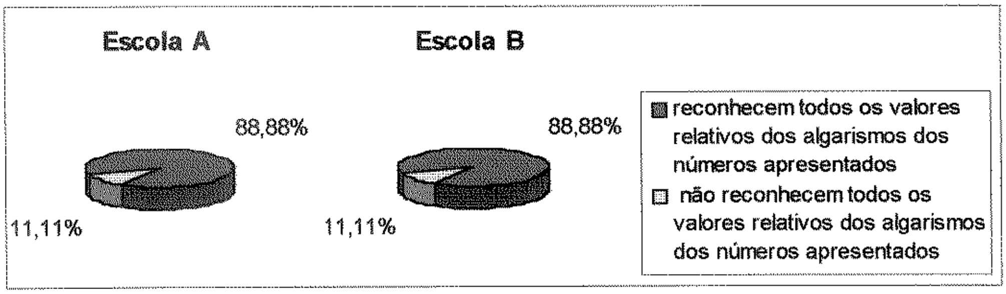
Resultado das respostas dadas quanto ao reconhecimento do valor posicional dos números

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
reconhecem todos os valores relativos dos números apresentados	16	16
não reconhecem todos os valores relativos dos números apresentados	2	2

Observou-se que os erros dos sujeitos da escola A e dos sujeitos da escola B recaíam sobre a dezena de milhar do número.

Alguns sujeitos, ao responderem às perguntas referentes ao valor de determinado algarismo num número, titubeavam e se corrigiam nos valores respondidos. Foram consideradas respostas incorretas apenas as que não sofreram correção no decorrer da aplicação.

Gráfico Comparativo 1.3- percentual das respostas dadas ao reconhecimento do valor posicional



O gráfico comparativo 1.3 demonstra que não houve diferença nos resultados de uma escola e de outra (88,88% de acertos), com relação ao conhecimento do valor posicional dos algarismos nos números.

As tabelas 1.4.a e 1.4.b, bem como os gráficos comparativos 1.4.a e 1.4.b apresentam resultados obtidos quanto à complementação de quantidade e reconhecimento implícito do valor posicional, em tarefa que pedia ao sujeito para compor novo total.

O número apresentado pela pesquisadora, para ser comparado e complementado, diferia em apenas um dígito do número anterior. Se o número anteriormente trabalhado fosse, por exemplo, 34562, a pesquisadora pedia que o sujeito dissesse quantos feijões seriam necessários para complementar 44562.

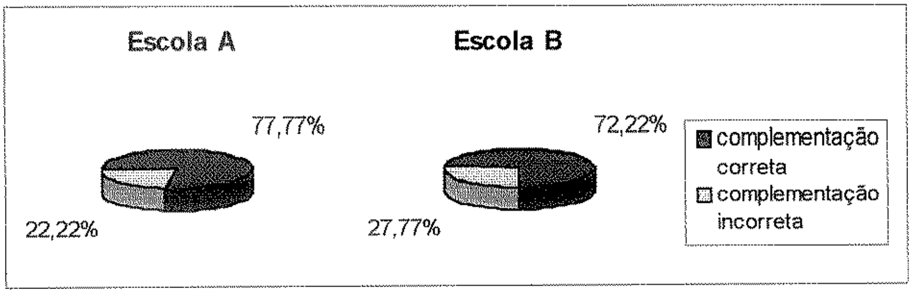
Esta questão foi analisada em dois momentos: o primeiro, após as respostas iniciais dadas pelos sujeitos (questão 1.4.a), e o segundo, após contra-argumentação da pesquisadora, dizendo que outra criança havia lhe dado resposta diferente daquela e pedindo ao sujeito que lhe dissesse se aquela criança estava certa ou errada (questão 1.4.b). Quando a criança acertava no primeiro momento, a pesquisadora, na contra-argumentação apresentando um resultado errado, e vice-versa.

Tabela 1.4.a

Resultado das repostas dadas quanto à complementação de quantidade para compor outro número.

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	14	13
respostas incorretas	4	5

Gráfico comparativo 1.4.a- percentual das respostas dadas à complementação da quantidade



No gráfico comparativo 1.4.a, pode-se observar, comparando os percentuais de respostas corretas e incorretas entre os sujeitos das duas escolas (escola A 77,77% e escola B 72,22% de acertos), que a diferença é de apenas 5.55%.

Tabela 1.4.b- Complementação da Quantidade

Respostas após contra-argumentação

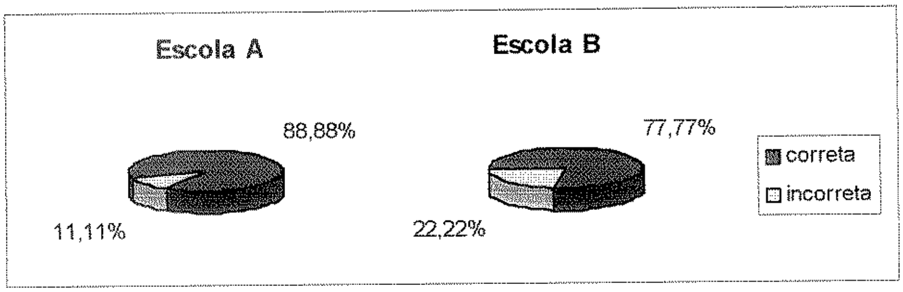
	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
complementação correta	16	14
complementação incorreta	2	4

Nesta questão, para saber a "parte" que faltava ao "todo", os sujeitos da escola B usaram algoritmo escrito. Os sujeitos da escola A usaram (na maioria) cálculo mental para complementar a quantidade que faltava ao total. Tal procedimento sugere uma noção de quantidade (senso numérico) melhor estabelecida nos sujeitos da escola A.

Comparando-se as tabelas 1.4.a e 1.4.b observa-se que dos quatro sujeitos da escola A, que deram respostas incorretas à questão 1.4.a, dois deles tomaram consciência do erro após contra-argumentação, e reelaboraram o resultado. Na escola B, dos cinco sujeitos que deram respostas incorretas à questão 1.4.a, apenas um deles tomou consciência de seu erro e reelaborou o resultado, após contra-argumentação.

Gráfico comparativo 1.4.b- percentual de respostas dadas após contra-argumentação

(Complementação da Quantidade)



O gráfico comparativo 1.4.b mostra 88,88% de respostas corretas dos sujeitos da escola A e 77,77% de respostas corretas dos sujeitos da escola B.

A análise geral das questões da Tarefa 1 apontou para uma equivalência nas resoluções das questões.

Os resultados obtidos tiveram níveis percentuais semelhantes de respostas corretas e incorretas dos sujeitos de ambas as escolas, o que permitiu inferir que não há relevância no processo da aprendizagem da leitura, comparação e seqüenciação de números, reconhecimento do valor posicional e complementação de quantidades, considerando-se a aprendizagem das regularidades do sistema de numeração decimal.

Pôde-se constatar que no grau de escolaridade dos sujeitos -4ª série do 1º grau- os referidos conteúdos são bem dominados pelos alunos, indiferentemente das propostas pedagógicas às quais estão submetidos.

Se nos reportarmos às pesquisas de Koch, Carraher e Lerner, referidas nesta pesquisa, parece-nos possível constatar que o conhecimento que as crianças trazem dos números, mais ou menos elaborado, quando chegam à escola, desenvolvido pelo trabalho escolar, em geral, permite o estabelecimento de relações que se fazem presentes na escrita e leitura dos números e imbricam, de certo modo, na construção do código de numeração decimal, sem, no entanto, garantir a construção do senso numérico e da operatoriedade.

Na Tarefa 2, teve-se a intenção de coletar dados que possibilitassem compreender a forma como os alunos constroem a noção de número, a operatoriedade aditiva e a multiplicativa, implícitas no sistema de numeração decimal e o processo de construção das propriedades do número.

Foi proposto aos sujeitos um trabalho com folhas de papel reunidas em duas caixas. A experimentadora pedia aos sujeitos que escolhessem uma das duas caixas que estavam sobre a mesa: a vermelha ou a azul.

Explicava, a seguir, que eles trabalhariam com blocos de papel de mil folhas, blocos de cem folhas, blocos de dez folhas e folhas soltas. As caixas continham quantidades diferentes de papéis.

A seguir, sugeriam-se atividades mentais ou manipulativas em que folhas eram acrescentadas às caixas, subtraídas, distribuídas em partes diferentes, em partes iguais, multiplicadas. Este experimento proporcionou uma coleta de dados sobre a maneira como os sujeitos lidam com os algoritmos, quais os procedimentos de raciocínio matemático usados por eles e possibilitou, igualmente, inferências sobre a aprendizagem e a tomada de consciência do erro.

Os sujeitos foram avaliados quanto à escrita de números, quanto aos procedimentos mentais usados para igualar quantidades, para adicionar, subtrair, multiplicar, dividir, bem como estimar quantidades.

Procurou-se investigar a noção de dezena, centena e milhar, conteúdo que a escola trabalha nas quatro séries iniciais do primeiro grau. A preocupação deste trabalho não foi com a denominação convencional, mas com a construção de noções e com estruturas de pensamento de tais conteúdos.

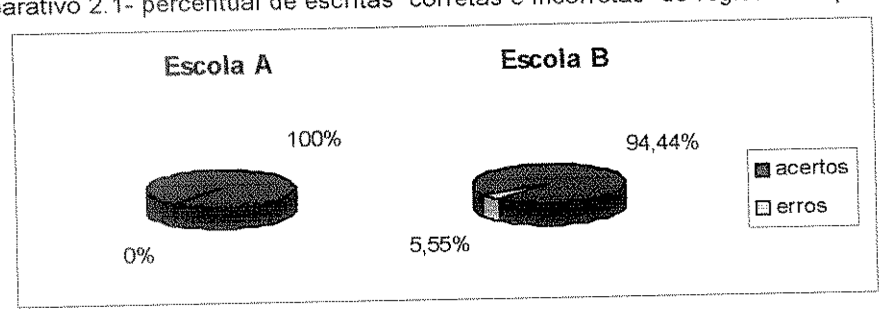
Na tabela 2.1, temos a distribuição das respostas dos sujeitos, em relação à escrita do número (referente à quantidade de um bloco de mil folhas e três folhas soltas, de papel). O gráfico comparativo 2.1 demonstra o percentual de escritas corretas e incorretas desta questão, dadas pelos sujeitos das duas escolas..

Tabela 2.1 -Resultado da escrita referente à quantidade de um bloco de mil folhas e três folhas soltas

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
escritas corretas	18	17
escritas incorretas	0	1

Alguns sujeitos escreviam 103, mas percebiam o erro. Só se consideram incorretas as escritas não corrigidas, como no caso de Jam (10;9), da escola B, que escreveu 13 para representar um bloco de mil folhas e três folhas soltas.

Gráfico comparativo 2.1- percentual de escritas corretas e incorretas do registro da quantidade (1003)



No gráfico comparativo 2.1 puderam-se observar níveis percentuais aproximados nos resultados dos sujeitos das duas escolas. Os sujeitos da escola A obtiveram 100% de acertos e os da B 94,44%

A tabela 2.2 e o gráfico comparativo 2.2 apresentam os resultados quanto à escrita do número referente à quantidade de doze blocos de cem folhas de papel.

A resolução desta questão exigiu, além da escrita do numeral, uma relação multiplicativa de doze blocos de cem folhas.

Tabela 2.2

Resultado da escrita referente à quantidade de doze blocos de cem folhas

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
escritas corretas	16	13
escritas incorretas	2	5

Dentre os sujeitos da escola A, MC (10;1) e Man (10;7) dão indícios de não terem pensado em doze blocos de cem, mas de mil e de dez folhas, respectivamente.

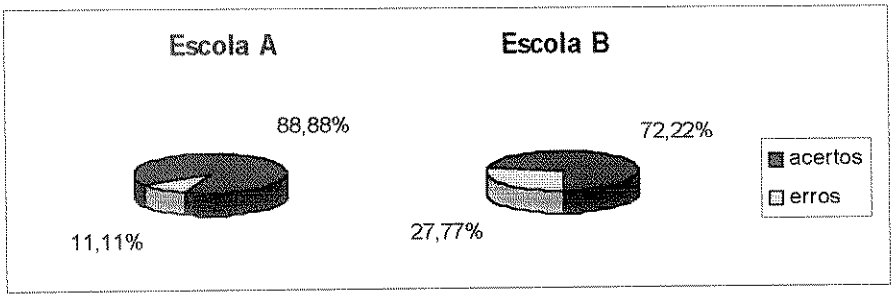
Dentre os sujeitos da escola B, Jam (10;9) e Tha (10;3) indicam terem pensado em 100+12 e não em 12x100. Cla (10;2) escreve 130 para doze blocos de cem.

Tha (10;3) e Art (10;10) da escola B percebem que haviam representado errado a quantidade de 12 blocos de cem, no decorrer do trabalho e recuperam o erro. Art (10;10) havia escrito 120 e Tha (10;3), 112, ao invés de 1200.

Cla (10;2), Jam (10;9) e AP (11;0) não se apropriam do erro, mesmo no desenvolver da tarefa.

Observou-se que nenhum sujeito da escola A recorreu a cálculo escrito, para saber a quantidade a representar ao passo que 11,11% dos sujeitos da escola B recorreram a cálculo escrito(12x100) e outros contaram de cem em cem, nos dedos, para saber a quantidade a escrever.

Gráfico comparativo 2.2- percentual de escritas corretas e incorretas do registro de quantidade



O gráfico comparativo 2.2 demonstra que houve 88,88% de escritas corretas dos sujeitos da escola A e 72,22% dos sujeitos da escola B na tarefa de registrar a quantidade de folhas de papel. A diferença entre os dois grupos foi de 16,66%

A tabela 2.3 e o gráfico comparativo 2.3 apresentam as respostas dadas pelos sujeitos na comparação de duas quantidades de folhas de papel. O sujeito devia responder quem tinha mais folhas: se a pesquisadora ou ele.

Tabela 2.3

Resultado das respostas dadas à identificação da maior quantidade de papel

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	17	14
respostas incorretas	1	4

Foram constatadas 17 respostas corretas dentre os sujeitos da escola A em comparação com 14 respostas corretas dos sujeitos da escola B.

É interessante observar que na tarefa 1, a questão 1.2.a, o número de respostas corretas foi de 94,44% em ambas as escolas. Naquela questão (1.2.a) trabalhou-se com os numerais. A presente questão (2.3) solicitou uma comparação de duas quantidades. Essa mesma questão requereu dos sujeitos relações comparativas mais complexas que a questão 1.2.a.

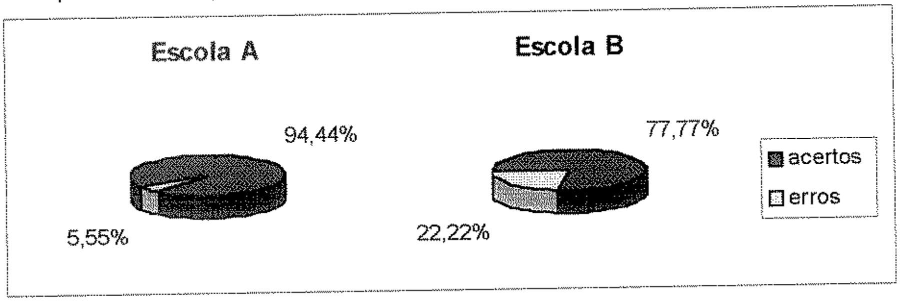
Man (10;7), da escola A, deu resposta incorreta quanto à identificação da maior quantidade, dando confirmação ao erro anterior onde pensou em doze blocos de cem como 120.

Tha (10;3), Art (10;10) e Cla (10;2), da escola B, erraram a maior quantidade, também em virtude de erro anterior (haviam escrito 112, 120, 112 e 130 respectivamente, ao invés de 1200).

AP (11;0), apesar de também ter errado anteriormente no número de folhas da caixa azul (12 blocos de cem), não erra esta questão porque, ocasionalmente, o número, mesmo errado (1300) era maior que 1003.

Constatou-se que os sujeitos que deram respostas incorretas não fizeram uso da comparação das duas quantidades de blocos de papel, empilhadas à sua frente, sobre a mesa, que demonstravam, visualmente, a diferença entre as quantidades.

Gráfico comparativo 2.3- percentual de respostas dadas à identificação da maior quantidade



O gráfico comparativo 2.3 mostra os resultados obtidos da identificação do maior número de folhas entre as do sujeito e as da pesquisadora. Houve 94,44% de acertos entre os sujeitos da escola A e 77,77% entre os sujeitos da escola B.

Esses resultados, em nível percentual, conforme gráfico acima, mostram a diferença de 16,67% entre os resultados incorretos entre os dois grupos de sujeitos.

A tabela 2.4 e o gráfico comparativo 2.4 apresentam os resultados dados à tarefa de adição do número de folhas que a criança tinha a três blocos de cem folhas.

Tabela 2.4

Resultado das respostas dadas à adição das folhas do sujeito a três blocos de cem folhas

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	16	14
respostas incorretas	2	4

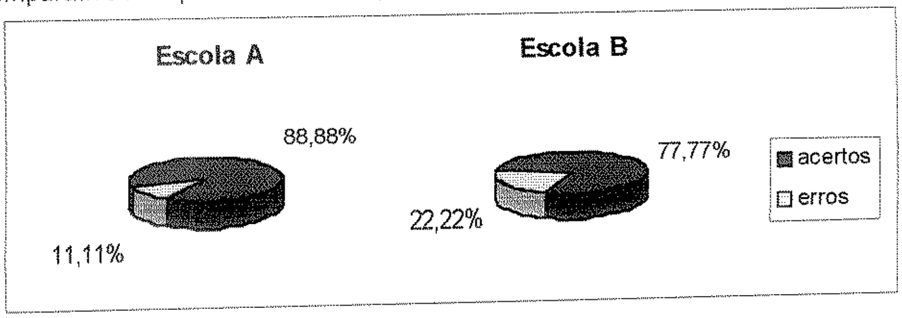
Nesta questão, os sujeitos deveriam antes de somar, relacionar que três blocos de cem correspondiam a trezentas folhas.

Esta questão sugere uma resolução bastante simples, mas que permite observar, com base nos procedimentos usados pelos sujeitos, a noção de dezenas e centenas construídas pelos mesmos.

Observou-se que os dois sujeitos da escola A apresentaram os seguintes erros: MC (10;2) demonstrou significar mil para bloco de cem, fez 12000 mais 3000 e não 12000 mais 300 e Man (10;7) adicionou a quantidade de apenas um bloco de 100 folhas e não três blocos de 100 (300) a 1003, fez, portanto, 1003 +100 ao invés de 1003 +300.

As respostas incorretas dos sujeitos da escola B foram as seguintes: Jam que adicionou mais 3 a 112 (que seria 1200 + 300). Cla (10;2) demonstrou ter representado 30 para significar três blocos de cem. Tha (10;3) multiplicou, ao invés de somar, fez 1003 x 300=30090 (que, no caso, seria 300900) ao invés de 1003 +300 =1303. Leo (11;2) escreveu 1050, tendo possivelmente pensado 1500.

Gráfico comparativo 2.4- percentual de respostas dadas à soma de determinada quantidade a 300



O gráfico comparativo 2.4 demonstra 88,88% de acertos entre os sujeitos da escola A e 77,77% entre os sujeitos da escola B, quanto à adição de três blocos de cem folhas às folhas da criança.

A tabela 2.5 e o gráfico comparativo 2.5 apresentam as respostas dadas pelos sujeitos, ao pedido de adicionar três blocos de dez folhas de papel à quantidade de folhas de papel da experimentadora.

Tabela 2.5

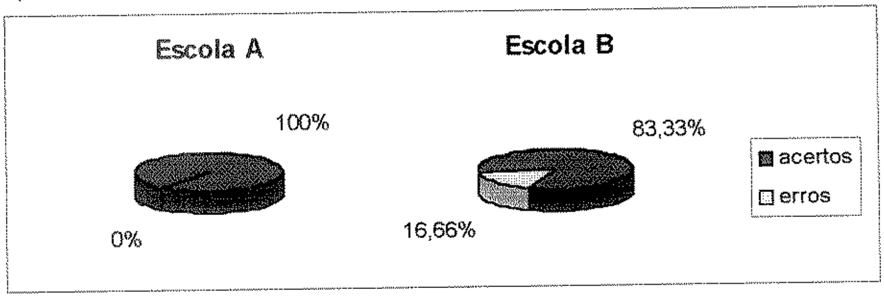
Resultado das respostas dadas à adição das folhas da pesquisadora a três blocos de dez

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	18	15
respostas incorretas	0	3

Dos 16,66% de erros da escola B temos: Kam (10;3) adicionado 10 a 1003 ao invés de 30 a 1003 (pensou em um só bloco); Tha (10;3) multiplicando 1200 por 30(36000) ao invés de somar 1200 a 30. Jam (10;9) adicionando a 1003 (que representou anteriormente por 13) a 3 (ao invés de 30), dá o resultado de 10006 (pensou em 1003 + 3 =1006 o que seria 1003 +30= 1033).

Não houve resultados incorretos dos sujeitos da escola A.

Gráfico comparativo 2.5- percentual de respostas dadas à adição de determinada quantidade a 30



O gráfico comparativo 2.5 demonstra 100% de respostas corretas dos sujeitos da escola A e 83,33% dos sujeitos da escola B à tarefa de adicionar três blocos de dez folhas à quantidade de folhas que a pesquisadora possuía em sua caixa.

A tabela 2.6 e o gráfico comparativo 2.6 referem-se à tabulação dos resultados da soma das folhas do sujeito com as folhas da experimentadora.

Tabela 2.6- resultado de respostas dadas à adição de duas quantidades de folhas

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	17	16
respostas incorretas	1	2

Na escola A, 94,44% dos sujeitos usaram cálculo mental por meio da decomposição dos números. A pesquisadora pediu que fizessem o algoritmo convencional também. Apenas um sujeito usou algoritmo convencional para resolver a questão.

Tha (10;7), da escola A errou e percebeu seu erro no decorrer do trabalho.

Neste caso, dada a simplicidade da questão, considerou-se seu primeiro resultado, que foi incorreto.

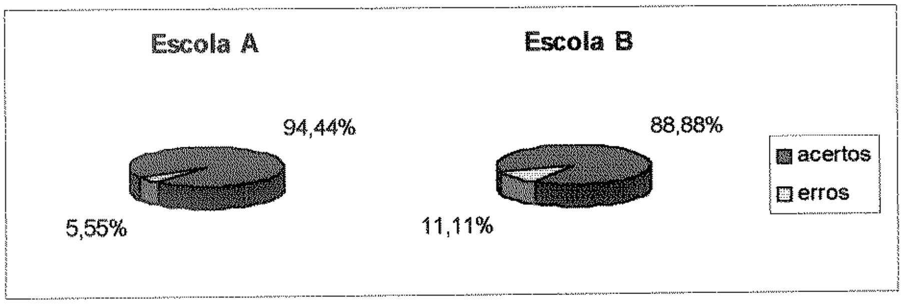
Na escola B, dos 88,88% de sujeitos que acertaram a questão, apenas 16,66% usaram processo de decomposição dos números, somando, por exemplo, 1000 mais 1000 (2000) a 500 (2500) a 33 (2533); 33,33% usaram algoritmo convencional mental, somando as 1ªs ordens, as 2ªs ordens, as 3ªs ordens, as 4ªs ordens (1+1=2 5+0=5, 0+3=3 e 3+0=3); e os 38,88% restantes, usaram o algoritmo convencional da adição sem reserva.

Leo (11;2), da escola B, ao fazer mentalmente o algoritmo convencional, trocou as posições dos números e, ao somar 1050 (que seria

1500) mais 1033, obteve um resultado de 2803. Jam (10;9) fez uma contagem termo a termo, procedendo da seguinte maneira: 115 +10006=1021 foi contando oralmente de um em um, a partir do 6 (do 10006, que é 1006 para ela, mas, na verdade 1033) mais 15 (que são os 15 blocos de cem =1500 folhas) dando 1021.

Gráfico comparativo 2.6

Percentual de respostas dadas à soma de soma de duas quantidades quaisquer de folhas



O gráfico comparativo 2.6 compara os resultados obtidos que atingiram o percentual de 94,44% nas respostas dos sujeitos da escola A e 88,88% nas respostas dos sujeitos da escola B.

A diferença percentual pouco relevante mostra que há entre os sujeitos das duas escolas, equivalência nos resultados, indiferentemente aos procedimentos usados pelos sujeitos.

A tabela 2.7 e o gráfico comparativo 2.7 apresentam os resultados da subtração de cinco blocos de cem folhas das folhas e três blocos de dez folhas do total de folhas do sujeito.

Tabela 2.7- resultado das respostas dadas à subtração de 530 folhas a uma quantidade

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	17	14
respostas incorretas	1	4

Antes de o sujeito usar alguma técnica para obter o resultado, a pesquisadora perguntava se era possível responder "de cabeça".

Na escola A, 94,44% dos sujeitos deram respostas corretas. Do total de sujeitos, 44,44% puderam fazer a subtração mentalmente, de forma correta, por decomposição, usando operadores aditivos, antes de fazerem o algoritmo convencional, solicitado pela experimentadora.

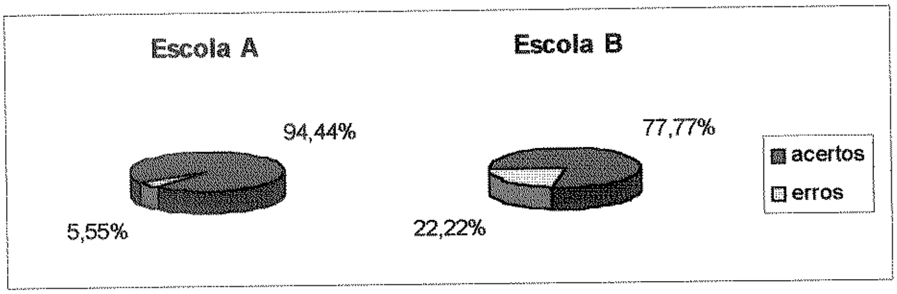
Na escola A, apenas um sujeito entre dezoito (5,55%) errou o algoritmo convencional. Mar (10;4) fez 1500-500=1000 e 1000-30=700; errou também o algoritmo convencional (1500-530=700)

Na escola B, 77,77% dos sujeitos deram respostas corretas. Destes sujeitos, 22,22% puderam resolver mentalmente: 16,66% [Tal (10;0), Lea (10;7) e At (10;10] fizeram cálculo mental por decomposição dos números e 5,55% (J.C.) fizeram algoritmo convencional mental. Os 22,22% de sujeitos que usaram cálculo mental também fizeram o algoritmo convencional, a pedido da pesquisadora

Na escola B, 22,22% dos sujeitos erraram a questão, demonstrando efetuação incorreta do algoritmo.

Lea (10;7), Jam (10;9) e AP (11;0) erraram na técnica do algoritmo da subtração. Jul. (10;5) subtraiu 53 ao invés de 530, indicando ter significado 53 para cinco blocos de cem e três blocos de dez

Gráfico comparativo 2.7- percentual das respostas dadas à subtração de 530 folhas a uma quantidade



A coleta de dados mostrou um percentual de 94,44% de respostas corretas dos sujeitos da escola A e 77,77% de respostas corretas dos sujeitos da escola B, conforme se pode observar nos gráficos comparativos 2.7.

Pôde-se observar que os sujeitos da escola B, que só usam o algoritmo convencional e o fazem há mais tempo que os sujeitos da escola A, tiveram maior número de resultados incorretos.

É interessante salientar que até esta questão (2.7) as soluções das questões solicitaram dos sujeitos procedimentos operacionais de estrutura aditiva. Poucas estruturas multiplicativas foram solicitadas nas resoluções das questões.

Já as questões abaixo solicitam estruturas multiplicativas em suas resoluções (multiplicação e divisão, em maior parte).

A tabela 2.8 e o gráfico comparativo 2.8 referem-se à tabulação dos resultados da questão: "Quero dar para dez crianças o mesmo tanto de folhas que eu (experimentadora) possuo. Quantas folhas precisarei ter para fazer isso?

Tabela 2.8- Resultado das respostas dadas à multiplicação de uma quantidade de folhas por 10

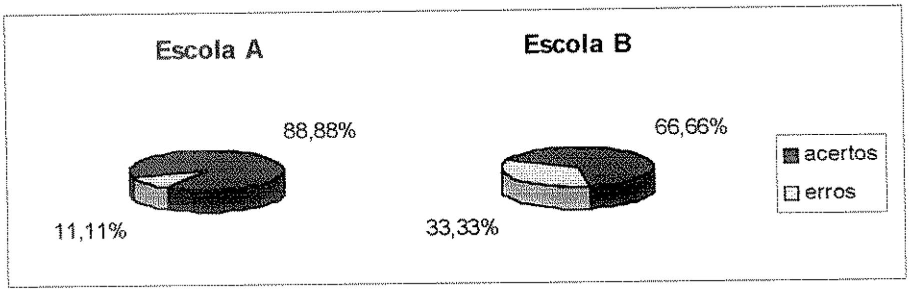
	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	16	12
respostas incorretas	2	6

Esta questão pode ser considerada bastante simples para alunos de 4ª série.

O gráfico comparativo abaixo (2.8) demonstra, no entanto, 88,88% de acertos entre os sujeitos da escola A e 66,66% entre os sujeitos da escola B. Nesta questão começa-se a encontrar um distanciamento entre os níveis percentuais de respostas corretas. A diferença percentual entre os resultados corretos é de 22,22%.

Gráfico comparativo 2.8

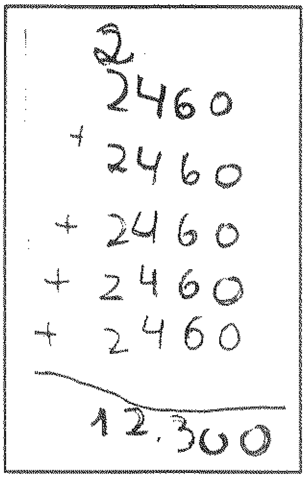
Percentual de respostas dadas à multiplicação de uma quantidade de folhas por 10



Muitos sujeitos da escola A (38,88%) encontraram o resultado da questão por cálculo mental. Entre os sujeitos da escola A, 16,66% recorreram à adição de parcelas iguais e à relação de dobro e metade para "encurtar" a conta. Apenas 11,11% somou dez parcelas para achar o resultado; 22,22% aplicaram a propriedade distributiva da multiplicação, 11,11% usaram algoritmo convencional.

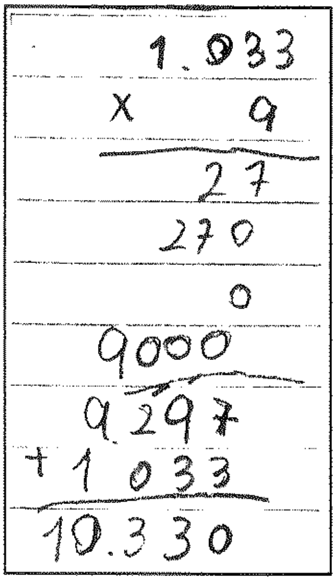
Abaixo estão apresentados os registros dos sujeitos da **escola A**, utilizados na resolução desta questão (2.8):

Ama (10;4)



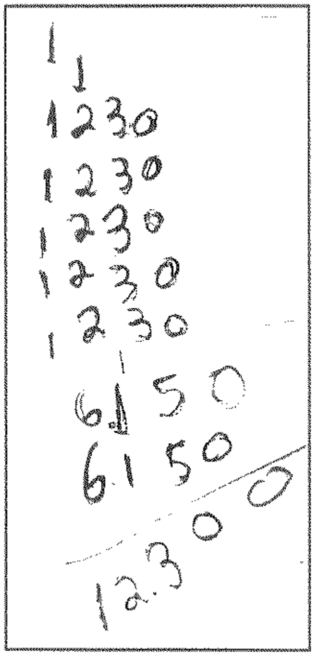
Ama (10,4) somou cinco parcelas de 2460, o dobro de 1203, ao invés de somar dez vezes esta quantidade

Edi (9;10)



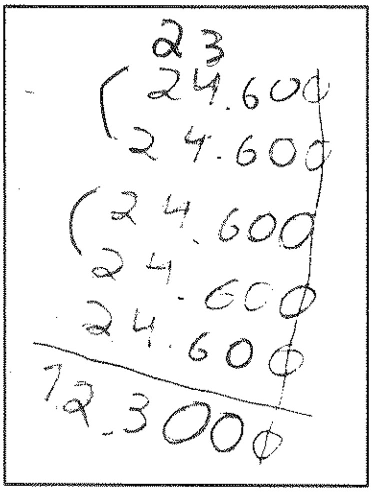
Edi (9,10) multiplicou 1033 por 9 e somou o resultado desta multiplicação a 1033. Explicou que assim o fez porque a pesquisadora, por já ter a sua caixa com 1033 folhas, precisaria de mais nove vezes essa quantidade para dar para dez crianças uma caixa como a sua.

Man (10;7)



Man (10,7) somou 1230 cinco vezes. Em seguida adicionou duas vezes esse resultado para obter o total de dez parcelas de 1033.

Den(10;8)



Den (10,8) somou o dobro de 1230, porém registrou um zero a mais em cada parcela. Percebeu seu erro e cortou os zeros que estavam escritos “a mais”.

Mar (10;4) e MC (10;1) registraram o resultado assim:

10x
1033
10 330

Mar (10;4)

1033
x 10
10330

MC (10;1)

JM (10;8) somou 10 parcelas de 1033 para obter o resultado

3
1033
1033
1033
1033
1033
1033
1033
1033
1033
1033
10.330

JM (10;9)

Dan (10;6) e Bia (10;4) multiplicam aplicando a propriedade distributiva

1.033
x10
30
300
10.000
10330

Dan(10;6)

1330
10x
300
2000
10.000
12.300

Bia (10;4)

Na escola A, houve 11,11% de respostas incorretas. Um sujeito da escola A, Gei (10;10) usou a soma de parcelas iguais (dez parcelas) para resolver a questão, mas errou no resultado. Lua (10;5),da escola A, errou na aplicação de n.0=0 (fez n.0=n).Não se verificou, no entanto, erro de raciocínio ou erro conceitual.

1230
X 10
10
300
2000
10.000
12.310

Lua (10;5)

3
1230
1230
1230
1230
1230
1230
1230
1230
1230
1230
1.3.0 0

Gei (10;10)

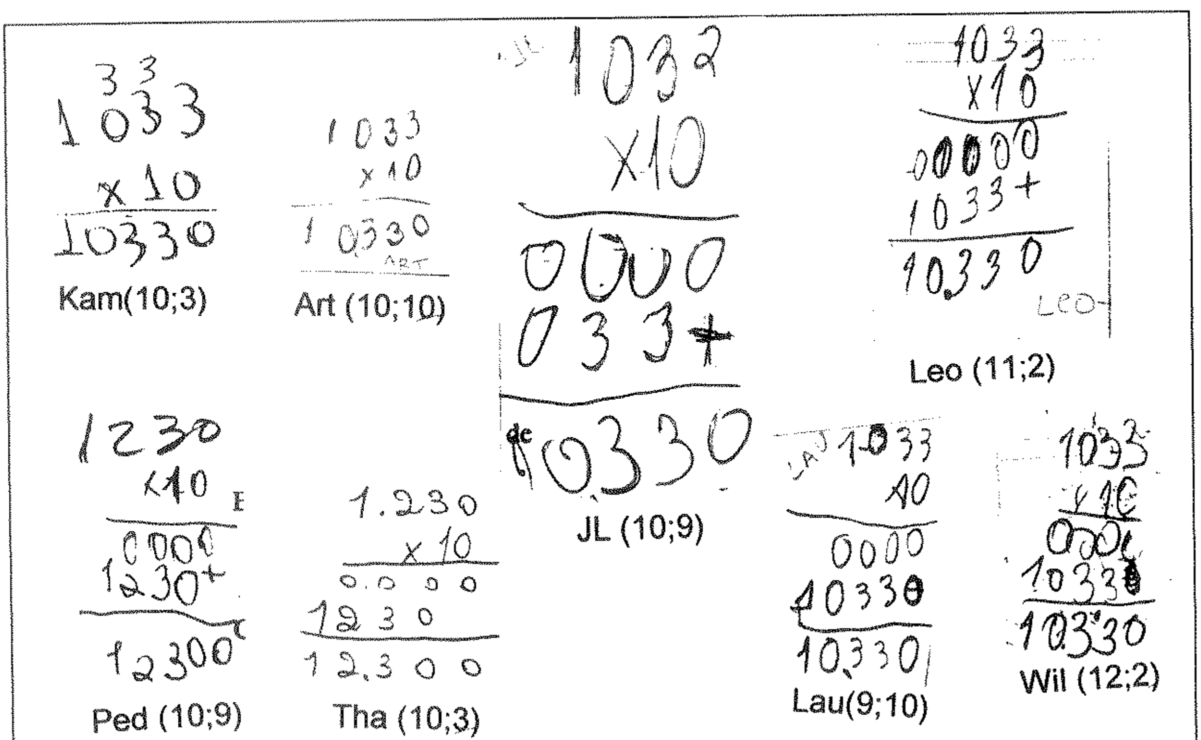
Dentre os sujeitos da escola B, 61,11% usaram algoritmo convencional; 27,77% recorreram à soma de parcelas iguais, porém, apenas 5,55% fizeram uso de relação de dobro para "encurtar" a conta; 11,11% não usaram de operação matemática apropriada.

Na escola B, 33,33% dos sujeitos erraram a questão, por uso de automatismo deficiente dos fatos fundamentais da adição e da multiplicação ou por erro conceitual: Ma (10;0), JC (12;4) e Tal (10;0) fizeram n.0=n ao invés de n, 0=0; Jam (10;9) negou-se a resolver, dizendo que não sabia fazer, e fez 1000+10=110 e Mai (10;2) fez 1033+10=1043 ao invés de multiplicar 1033x10, Cla (10;9), fez soma de parcelas iguais, usou a relação de dobro para encurtar a conta mas para dez vezes o 1033 deu um resultado de 10033.

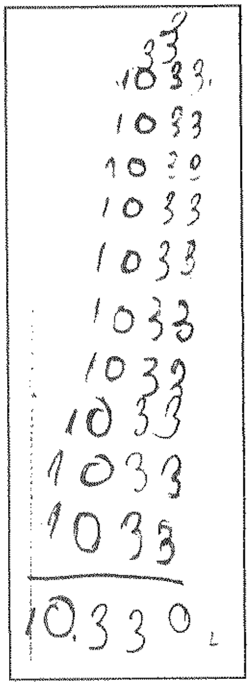
Para resolver esta questão, nenhum sujeito da escola B usou cálculo mental. Todos recorreram a registros escritos para calcular o resultado.

Abaixo, estão apresentados os registros utilizados pelos sujeitos da **escola B**, para resolver esta questão.

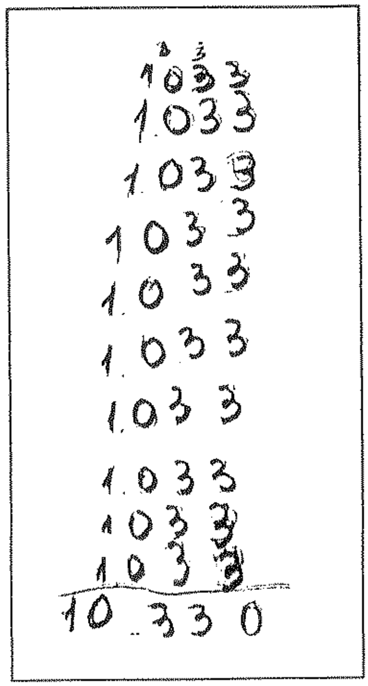
Ped (10;9), Tha (10;0, Art (10;10), JL (10;9), Lau (9;10) Wil (12;2), Leo (11;2), Kam (10;3) resolveram corretamente a questão e usaram algoritmo convencional, conforme se observa abaixo.



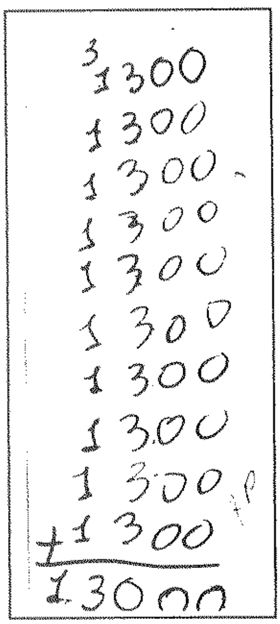
Lea (10;7), AP (11;0), Jul (10;5) e Mar (10;0) adicionaram dez parcelas e obtiveram o resultado correto da questão.



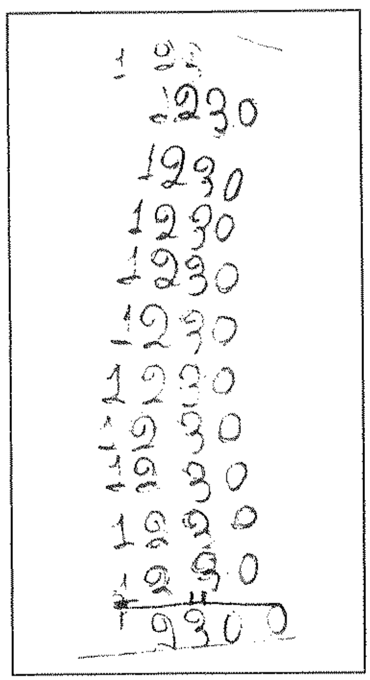
Lea 10;7



Mar (9;11)



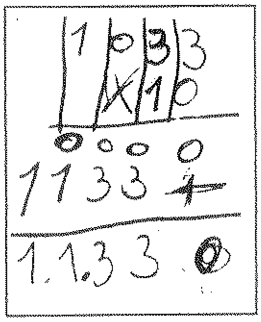
AP (11;0)

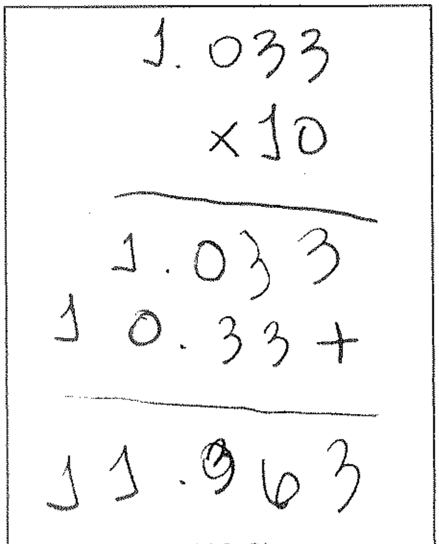


Jul (10;5)

Tal (10;0) multiplicou o "zero" do dez como se fosse "um". JC, igualmente, enganou-se na relação do "zero vezes um número". Ma(9;11) enganou-se no cálculo.

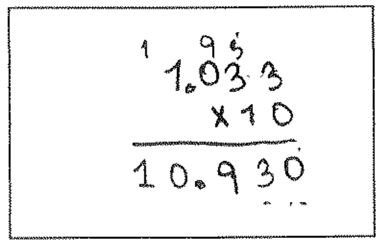
JC 12;4



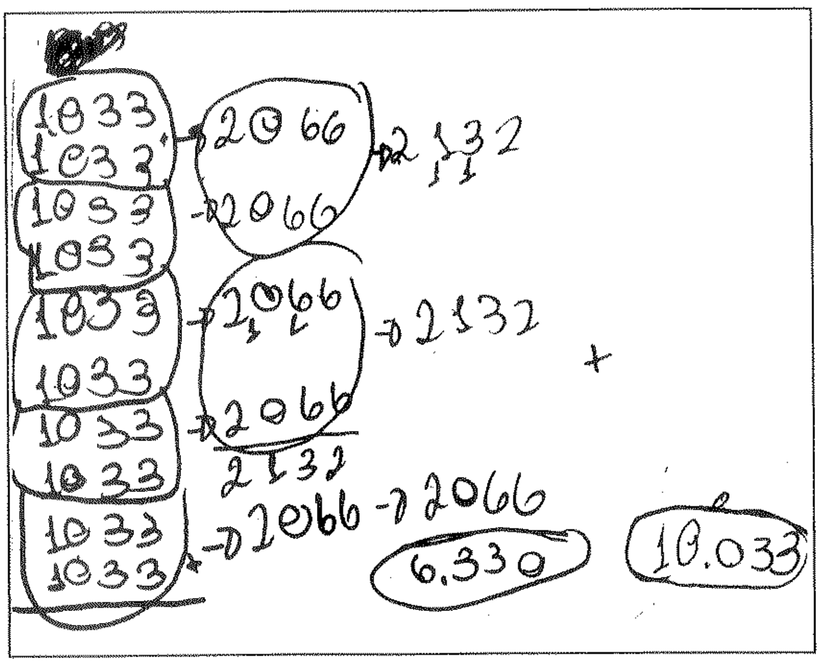


Tal (10;0)

Ma (10;0)

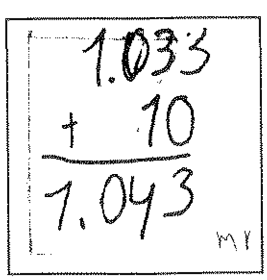


Apenas Cla (10;9) usou a relação de dobro para encurtar a conta, mas errou o resultado.



Cla (10;9)

Mai (10;2)somou ao invés de multiplicar.



Mai (10;2)

A tabela e os gráfico comparativo 2.9 apresentam o resultado das respostas dadas pelos sujeitos para responder a questão; "Você já sabe que para dez crianças precisarei de (x) folhas. E para 25 crianças, de quantas folhas precisarei?

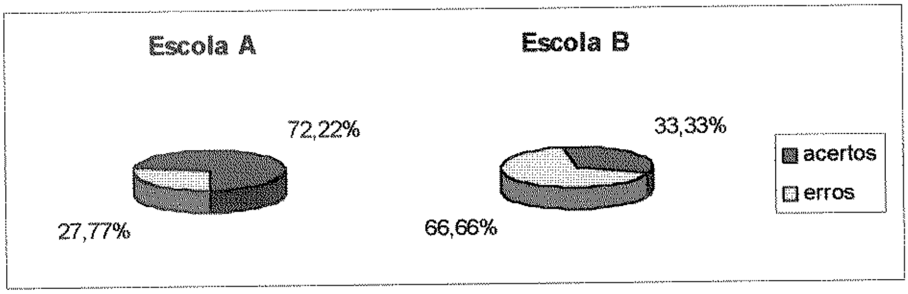
Tabela 2.9- resultado das respostas dadas à multiplicação de uma quantidade de folhas por 2

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	13	6
respostas incorretas	5	12

Treze em dezoito sujeitos da escola A deram resultados corretos a esta questão, ao passo que, apenas seis em dezoito sujeitos da escola B, apresentaram resultados corretos.

Gráfico comparativo 2.9

Percentual de respostas dadas à multiplicação de uma quantidade por 25



Pode-se observar no gráfico comparativo 2.9 os significativos índices de 72,22% de respostas corretas entre os sujeitos da escola A e 33,33% de respostas corretas entre os sujeitos da B, o que indica uma diferença percentual de quase 40% entre os resultados corretos dos sujeitos das duas escolas.

Não se observou na escola A erro conceitual (uso de operação matemática inadequada).

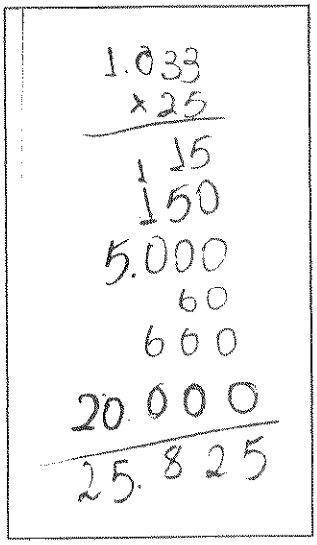
Dentre os sujeitos da escola A, 61,11% usaram algoritmo longo (distributiva), 33,33% fizeram soma de parcelas aproveitando o resultado de 10.n, já encontrado na questão anterior, recorrendo às relações de dobro, metade e a operadores aditivos e multiplicativos.

Dos 27,77% de erros ocorridos na escola A 11,11% foram decorrentes de erros no procedimento do algoritmo usado e 16,66% no cálculo.

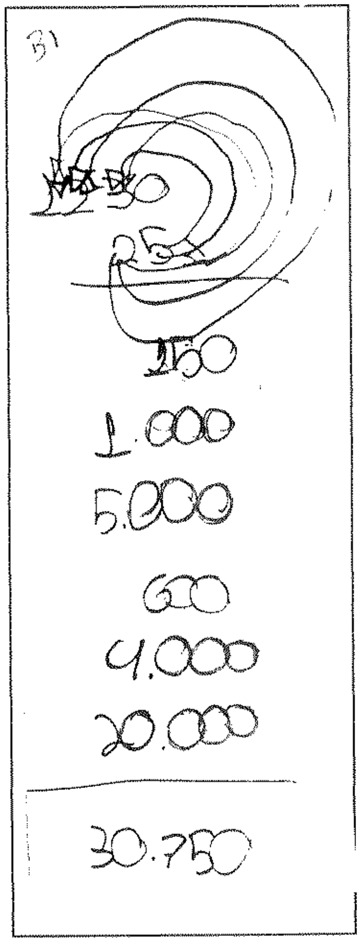
Os registros dos sujeitos da **escola A** vão apresentados abaixo:

Edi (10;10),Bia (10;4), Dan(10;6), Giu (10;4), Raf (10;6), VR (10;8), Den (10;7), Ama (10;4) usaram em seus procedimentos a propriedade distributiva da multiplicação, demonstrando compreensão da operação que faziam.

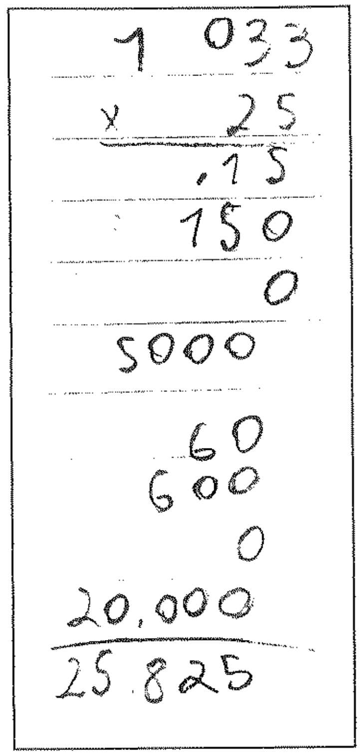
Bia (10;4)

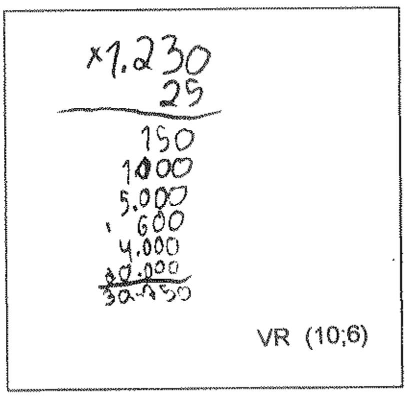


Dan(10;6)

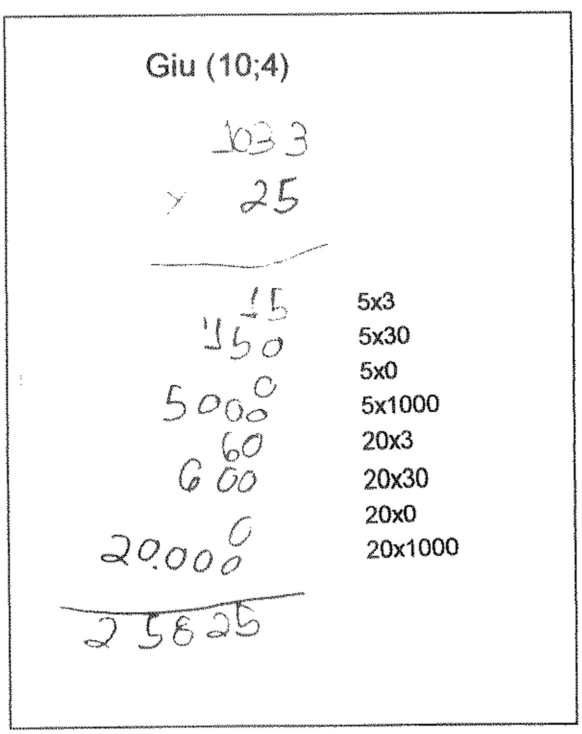


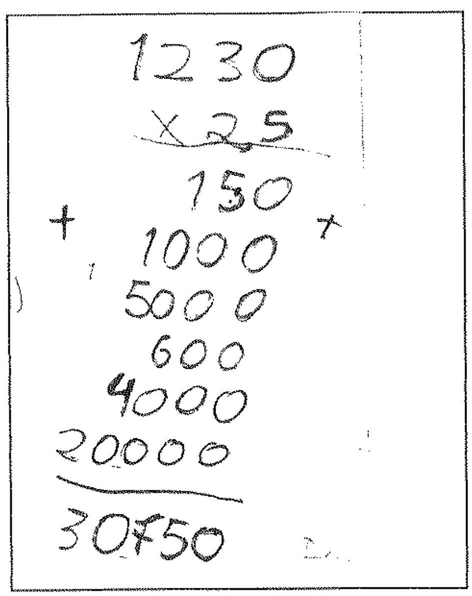
Edi (9;10)





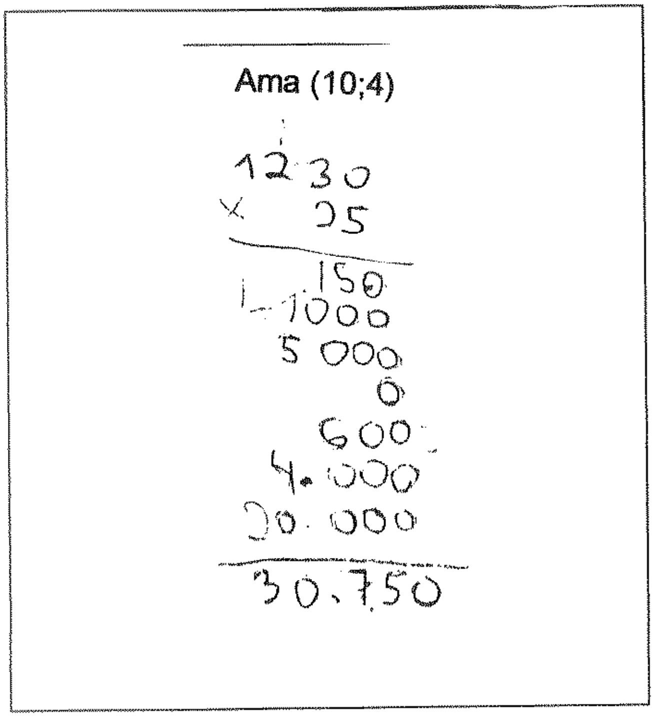
VR (10;6)





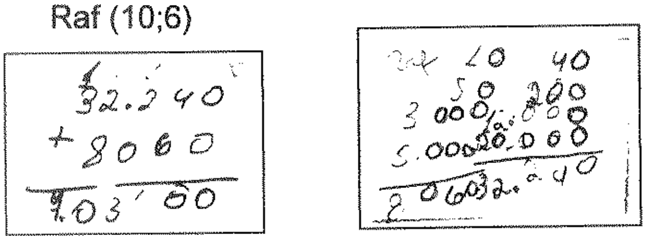
Den(10;8)

Ama (10;4)



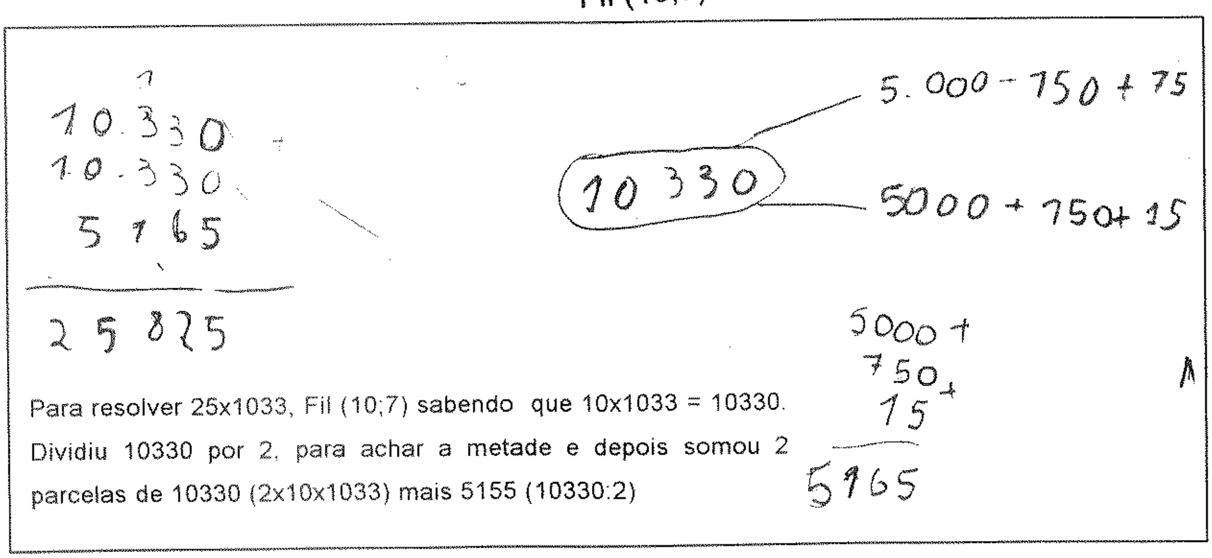
Raf (10;6) para saber 1612x25 calculou e registrou no papel da seguinte maneira: Fez 1612x25, depois 1612x20 e adicionou os dois resultados. Usou procedimentos pessoais e convencionais, numa mesma resolução, demonstrando operar bem com ambas as técnicas e possuir sólida construção da noção de número, usando seus recursos mentais para resolver a questão.

Raf (10;6)



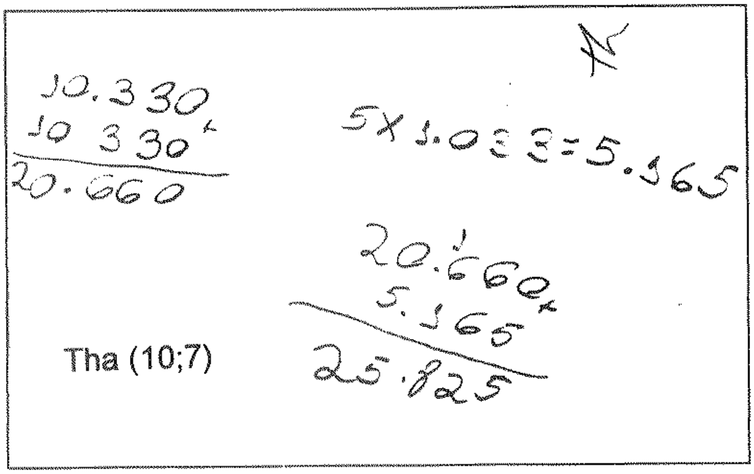
Fil (10,7), Tha (10,7) Man (10,7) Lai (10,11), Deb (10;9), usaram relações de dobro, metade e usaram operadores aditivos e multiplicativos

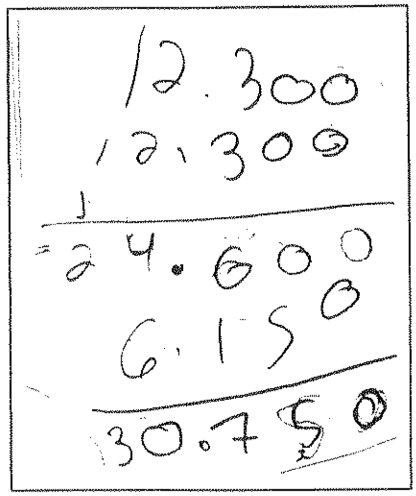
Fil (10;7)



Para resolver 25x1033, Fil (10;7) sabendo que 10x1033 = 10330. Dividiu 10330 por 2, para achar a metade e depois somou 2 parcelas de 10330 (2x10x1033) mais 5155 (10330:2)

Man (10;7)

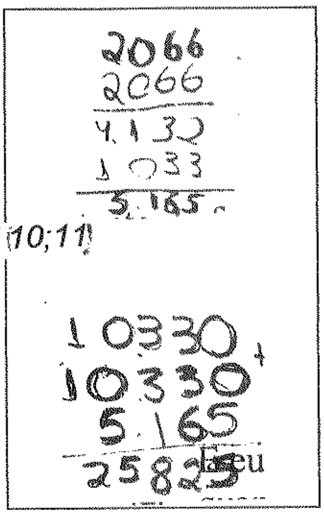




Tha somou duas parcelas de 10330 (2x10x1033) mais 5165 (5x1033).

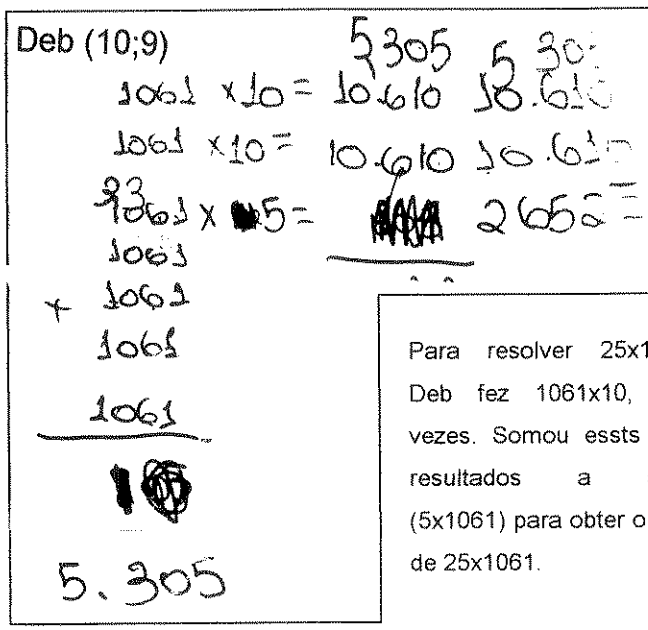
Man somou duas parcelas de 12300 (2x10x1230) a 6150 (5x1230).

Lai (10;11)



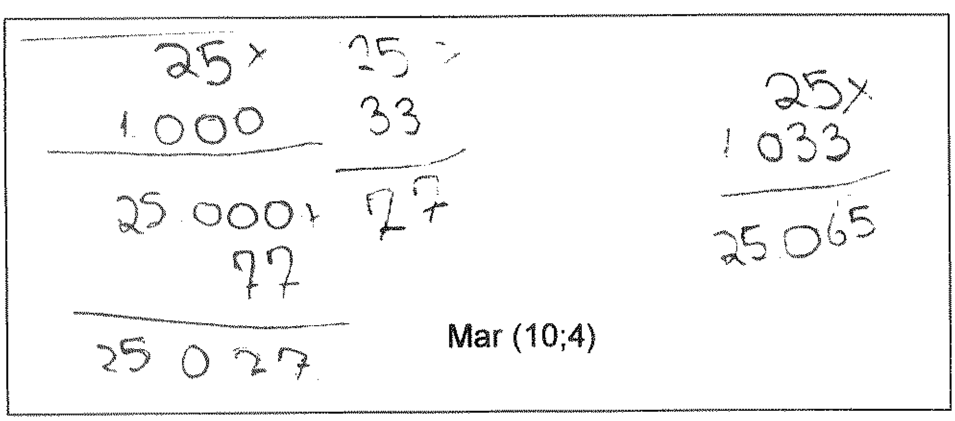
Lai somou 2066 (o dobro de 1033) duas vezes. Acrescentou 1033 a este resultado, para obter o total de cinco parcelas de 1033. Adicionou duas parcelas de 10330 (2x10x1033) a 5165 (2x2x1033+1033).

Deb (10;9)

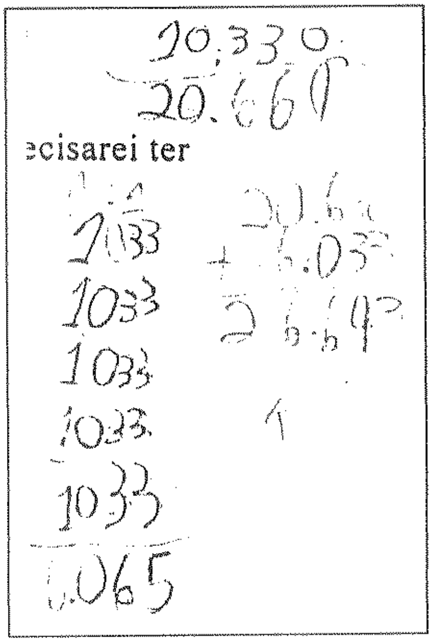


Para resolver 25x1061, Deb fez 1061x10, duas vezes. Somou essts dois resultados a 5305 (5x1061) para obter o total de 25x1061.

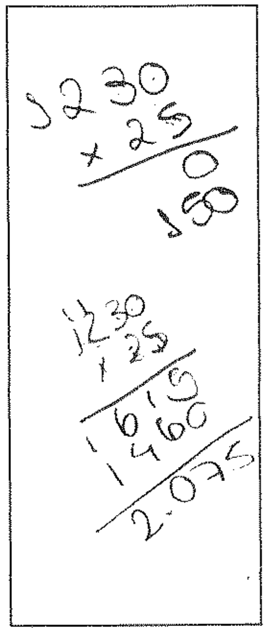
Mar(10;4) não conseguiu fazer a operação. Fez 25x1000=25000 e 25x33=77 (errou). Somou os dois resultados: 25000+77



JM (10;9)

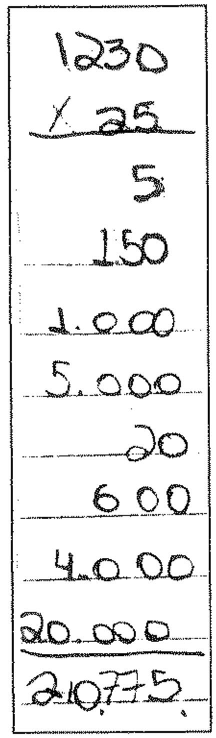


JM (10;9) dobrou o resultado de 10x1033 para adicionar cinco parcelas de 1033, mas errou na soma das parcelas.



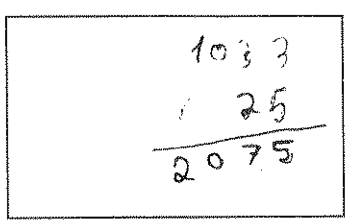
Gei(10;10) começou sua multiplicação por distributiva, de modo correto porém abandonou fez o algoritmo convencional (único sujeito) e errou;

Lua (10;5)



Lua (10;5) operou "n.0" como se fosse "n.1" e JM(10,9) que dobrou o resultado de 10x1033 para adicionar a cinco parcelas de 1033, mas errou na soma das parcelas.

MC (10;1) fez 1033x25=2075



MC (10;1)

16,66% usaram soma de parcelas e 11,11% não souberam recorrer à operação adequada. Do total dos sujeitos da escola B 5,55% usaram cálculo mental.

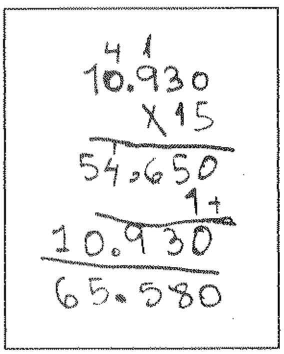
Observou-se na escola B erro conceitual na identificação da operação matemática adequada para resolver a questão.

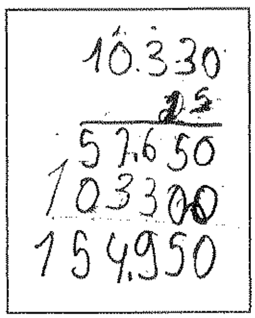
Dentre os resultados dos sujeitos da escola B houve 66,66% de soluções incorretas à questão Os erros atribuíram-se a: 11,11% por aplicação errônea dos operadores multiplicativos (10.n.15.n) ao invés de (10.n+15.n); 33,33% por erro de conta (algoritmo convencional); 11,11% por uso incorreto da operação matemática e 11,11% por resultado errado na soma das parcelas.

Os registros dos procedimentos utilizados pelos sujeitos da **escola B**, para a resolução desta questão acham-se apresentados abaixo:

Ma(10;0) e Wil(12;2) tentaram aproveitar o resultado do 10x1033, mas ao invés de fazerem 15x1033 + o resultado do 10x1033 multiplicaram o resultado do 10x1033, por 15;

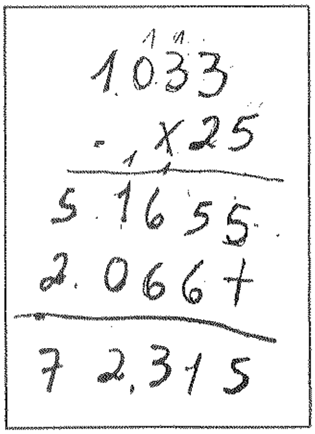
Ma (10;0)



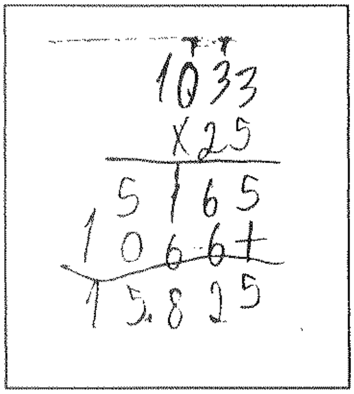


Wil (12;2)

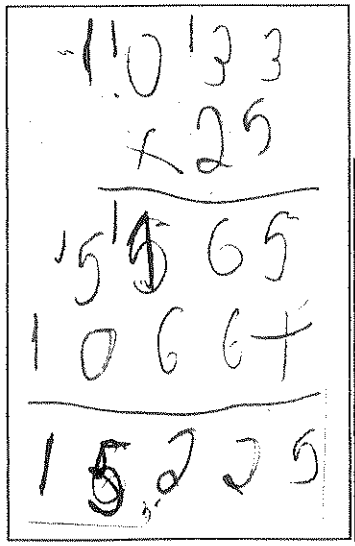
Mar (9;11),Leo(11;2), JL (10;9), Ped (10;9) erraram o algoritmo convencional;



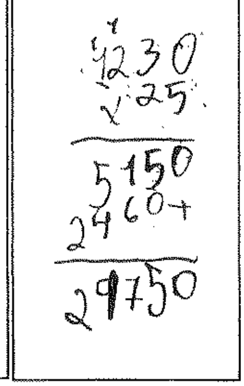
Mar (9;11)



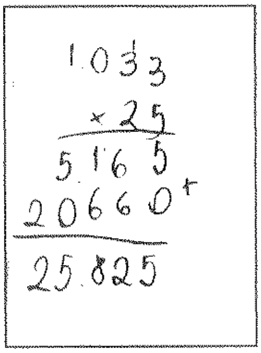
Leo (11;2)



JL (10;9)

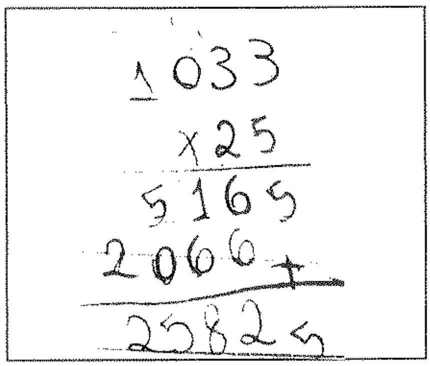


Kam (10;3), Art(10;10), Tha (10;3), Tal, (10;0) e Lea(10;7) usaram corretamente o algoritmo convencional (breve)

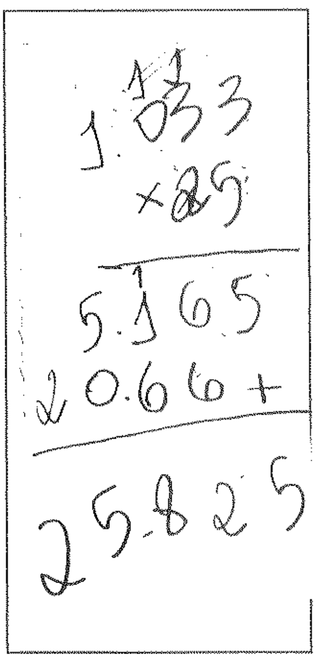


~~Art (10;10)~~

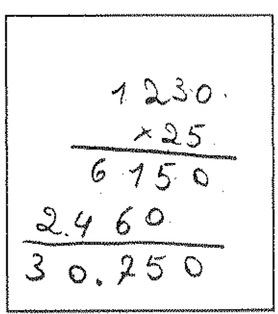
Kam(10;3)

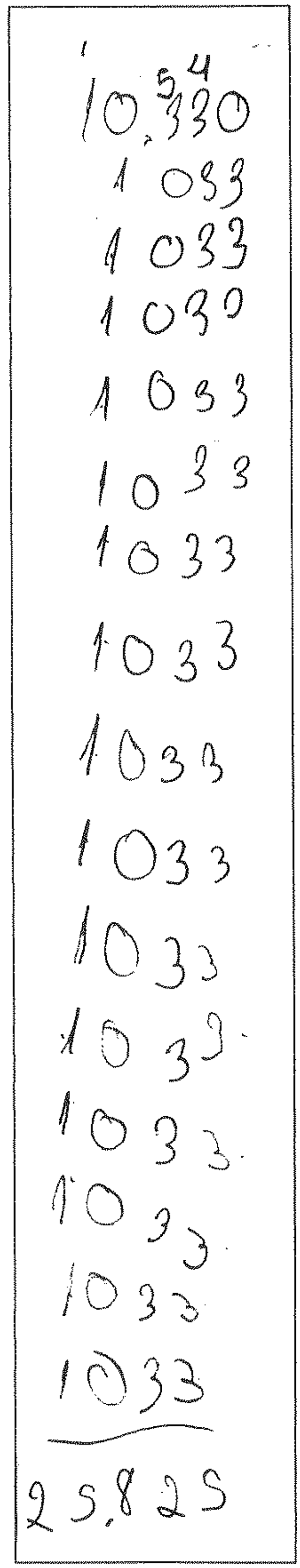


Tal (10;0)



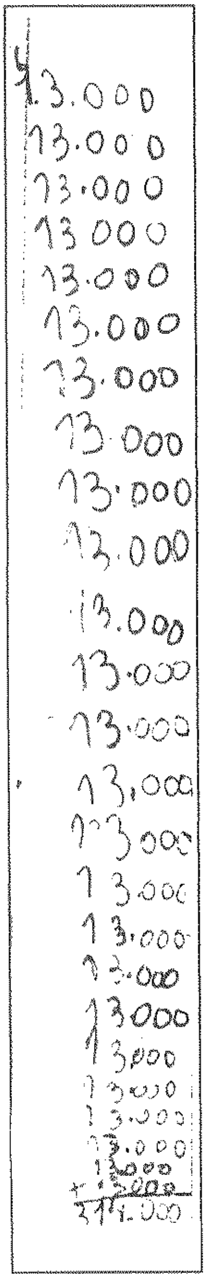
~~Tha (10;3)~~





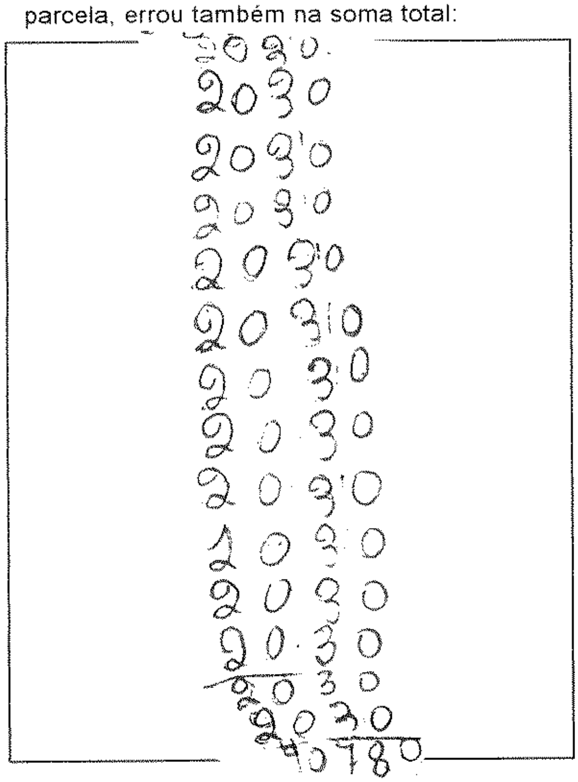
Lea 10;7

P(11;0) fez uma adição de 25 parcelas e obteve resultado incorreto;



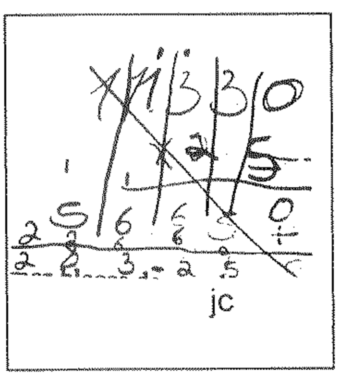
AP (11;0)

Jul (10;5) somou parcelas aproveitando o resultado de 1230x10, dobrou as parcelas para "encurtar" a conta, mas errou ao dobrar a parcela, errou também na soma total:



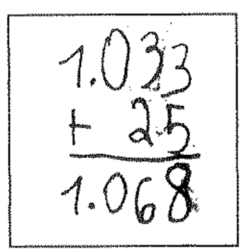
Jul (10;5)

JC(12;4) multiplicou o resultado de 10x1033 por 25;



JC 12;4

Mai (10;2) fez 1033+25 ao invés de 1033x25;



Mai (10;2)

Cla (10;9) disse: "Se 10 caixas têm 10.033 folhas (o certo seria 10.330), então 25 caixas têm 25.033 (o certo seria 25.825) e Jam(10;9) negou-se a dar a resposta.

A tabela e o gráfico comparativo 2.10 referem-se aos resultados da questão: "Quantos blocos de dez folhas, você pode fazer com 1.203 folhas?'

Tabela 2.10- resultado das respostas dadas à divisão de 1203 folhas em blocos de 10 folhas

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	16	6
respostas incorretas	2	12

Na escola A apenas 22,22% usaram algum tipo de recurso escrito para responder a questão.

Apenas uma entre dezoito respostas (5,55%) pode ser considerada ilógica: "com 1203 folhas posso fazer 1203 blocos de 10". (Den-10;8)

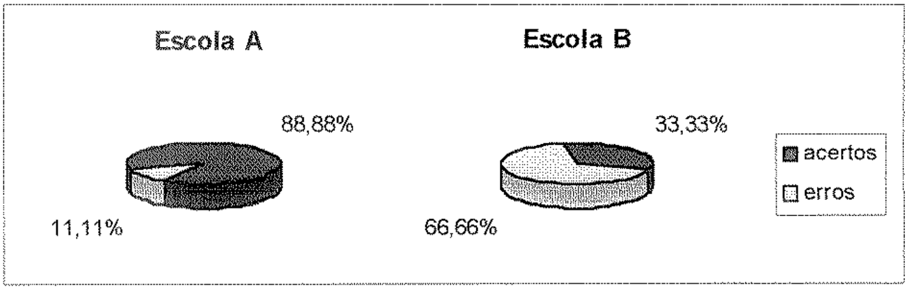
Na escola B, 22,22.% dos sujeitos recorreram a algoritmos para responder a questão, embora alguns inadequadamente.

Na escola B, 7 entre 18 respostas (38,88%) puderam ser consideradas respostas ilógicas, tais como: "com 1203 folhas posso fazer 10000/ 1230/ 1214/ 1193/ 1213/ 12030/ 1203 blocos de dez folhas.", o que permite inferir que os sujeitos não têm bem desenvolvido o conceito de divisão, além de fraco senso numérico.

Dois sujeitos entre dezoito (11,11%) não responderam a questão por não saber como fazer.

Gráfico comparativo 2.10

Percentual de respostas dadas à divisão de 1203 folhas em blocos de 10 folhas



Os resultados obtidos nesta questão indicam acentuada diferença percentual: 88,88% entre os sujeitos da escola A e 33,33% entre os sujeitos da escola B, conforme se pode observar no gráfico comparativo 2.10 que mostra uma diferença percentual de 55% entre as respostas corretas obtidas. Os sujeitos da escola A demonstraram confiança no conhecimento das dezenas contidas num número, o que não se observou nos sujeitos da escola B. Estes resultados dão indícios de deficiente construção do conhecimento do número e do sistema de numeração decimal, bem como da estrutura multiplicativa da relação "dividido por 10".

A tabela 2.11 e o gráfico comparativo 2.11 referem-se ao resultado das respostas dadas à questão: "Quantos blocos de cem folhas você consegue fazer com 1203 folhas?"

Tabela 2.11- Resultado das respostas dasdas à divisão de 1203 folhas em blocos de 100 folhas

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	17	9
respostas incorretas	1	9

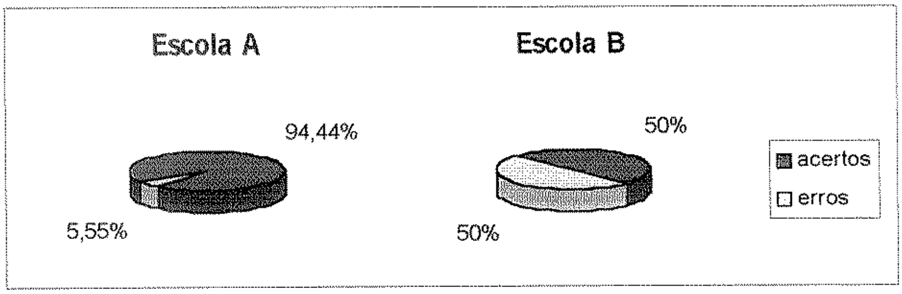
Na escola A não foi usado pelos sujeitos nenhum tipo de recurso escrito. Não se verificou uso de operação inadequada à resolução da questão, nem erro de cálculo.

Apenas um sujeito deu resposta incorreta mas reconheceu seu erro no decorrer da tarefa. Foi considerada a primeira resposta dada, que foi a incorreta.

Na escola B, 44,44% dos sujeitos erraram por se valerem de operação matemática inadequada à resolução do problema. Verificaram-se erros de cálculo. Um sujeito (5,55%) negou-se a dar a resposta, alegando não saber.

Gráfico comparativo 2.11

Percentual de respostas dadas à divisão de 1203 folhas em blocos de 100 folhas



Conforme se pode observar no gráfico comparativo 2.11, os sujeitos da escola A obtiveram 94,44% de respostas corretas e os da B, 50% de respostas corretas. Aqui também se observa que os sujeitos da escola A tinham muita confiança nas respostas dadas e demonstraram conhecimento de centenas contidas num número Metade dos sujeitos da escola B demonstrou não possuir a noção das centenas contidas num número e não reconheceram a relação "dividido por cem", o que reforça o indício de uma insatisfatória compreensão do sistema de numeração decimal

Os resultados da questão "Quantos blocos de mil folhas você consegue fazer com 1203 folhas?" está apresentada nas tabela 2.12 e no gráfico comparativo 2.12.

Tabela 2.12

Resultado das respostas dadas à divisão de 1203 folhas em blocos de 1000 folhas

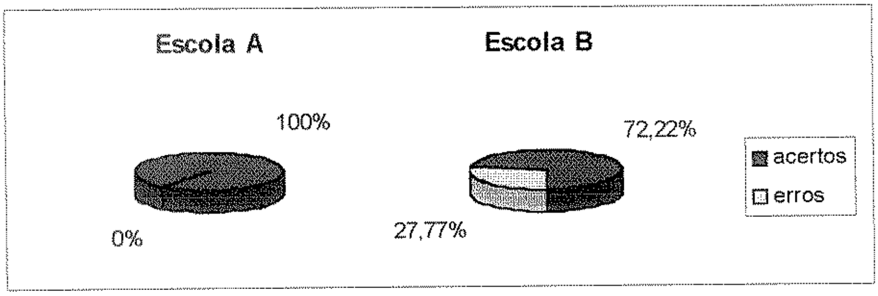
	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	18	13
respostas incorretas	0	5

Na escola B, 27,77% dos sujeitos erraram a questão por usarem procedimentos inadequados à resolução da questão. Observou-se que o material exposto diante do aluno (formado por um bloco de mil, dois blocos de cem e três folhas soltas) não foi suficiente para alguns sujeito acertarem a resposta, o que sugere que não tiveram a percepção visual do referido material concreto apresentado pela pesquisadora. Tais sujeitos responderam: "com 1203 folhas posso fazer 2203 / 203/ 3/ 1000 blocos de mil folhas.

Um sujeito da escola B, negou-se a responder por não saber como fazer.

Gráfico comparativo 2.12

Percentual de respostas dadas à divisão de 1203 folhas em blocos de 1000 folhas



O gráfico 2.12 demonstra 100% de acertos entre os sujeitos da escola A e 72,22% entre os da B.

Considera-se esta diferença percentual como significativa de construção insuficiente do conceito do número e do Sistema de Numeração Decimal nos sujeitos da escola B, o que não se pode observar nas respostas dadas pelos sujeitos da escola A.

Os resultados obtidos e demonstrados nesta pesquisa confirmam os estudos de Kamii (1995) que julga ineficiente o ensino do sistema de numeração decimal nos métodos de ensino usuais.

As questões acima, 2.10, 2.11 e 2.12 solicitaram dos sujeitos as noções de quantidade das dezenas, centenas e milhares contidas no número 1203.

Como se pode constatar nas três últimas questões, os sujeitos da escola B demonstraram, em seus resultados, não possuir noções destas quantidades contidas nos números. Já os sujeitos da escola A demonstraram uma sólida noção destas quantidades e destes conceitos.

A tabela 2.13 e o gráfico comparativo 2.13 referem-se às respostas dadas pelos sujeitos para a questão de distribuir para duas crianças 1203 folhas, em partes diferentes, de três maneiras. O gráfico 2.13 demonstra estes dados em percentuais.

tabela 2.12- Distribuição de 1203 folhas para duas crianças de três maneiras diferentes

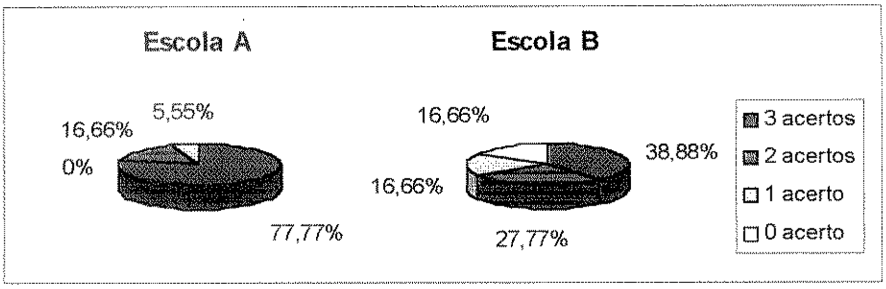
	número de sujeitos Escola A	número de sujeitos Escola B
3 maneiras corretas	14	7
2 maneiras corretas	3	5
1 maneira correta	0	3
nenhuma maneira correta	1	3

Dentre os sujeitos da escola A, 77,77% acertaram as três maneiras diferentes de distribuir o número. Destes, 66,66% fizeram por cálculo mental e 11,11% por uso de algoritmo. Dos 38,88% dos sujeitos da escola B que acertaram as três maneiras, 33,33% usaram cálculo mental e 5,55% usaram algoritmo. Estes dados sugerem a hipótese de que os sujeitos que têm a noção de parte-todo e a noção de número são mais capazes de utilizar cálculos mentais.

Observou-se que a conservação parte-todo do número 1203 parece melhor estabelecida entre os sujeitos da escola A que os da escola B.

Gráfico comparativo 2.13

Percentual de respostas dadas às 3 maneiras diferentes de distribuir 1203 folhas para 3 crianças.



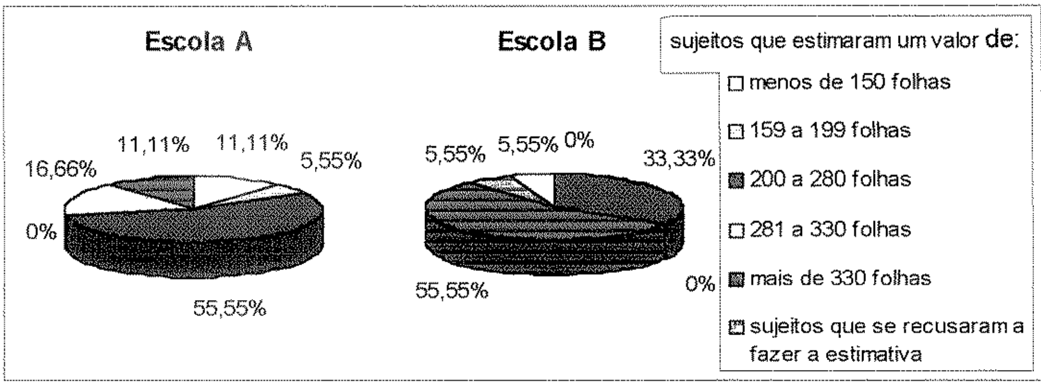
O gráfico comparativo 2.13 mostra que 94,44% dos sujeitos da escola A tiveram três ou duas maneiras corretas de distribuir 1203 folhas entre duas crianças (77,77% e 16,66% respectivamente), ao passo que 66,66% dos sujeitos da escola B tiveram três ou duas maneiras corretas de distribuir 1203 folhas entre duas crianças (38,88% e 27,77% respectivamente). De uma maneira geral, esta tarefa foi bastante simples para alunos de 4ª série. Ela exigia pensar três maneiras diferentes de distribuir 1203 folhas entre duas crianças (conservação parte todo). Observa-se, pela diferença percentual de respostas, que os sujeitos da escola A relacionaram com mais segurança as partes de um todo que os sujeitos da escola B. Pode-se inferir a este respeito pela análise comparativa dos resultados corretos dos cálculos mentais e dos procedimentos dos sujeitos.

A tabela 2.14 e o gráfico comparativo 2.14 referem-se à classificação dos sujeitos quanto ao valor estimado (aproximado) para a divisão de 1203 folhas para cinco crianças.

Tabela 2.14- resultado das respostas dadas à estimativa de 1203 folhas divididas entre cinco crianças.

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
estimaram um valor abaixo de 150 folhas	2	1
estimaram um valor entre 150 e 199 folhas	1	0
estimaram um valor entre 200 e 280 folhas	10	6
estimaram um valor entre 281 e 330 folhas	3	0
estimaram acima de 330	2	10
negaram-se a estimar	0	1

Gráfico comparativo 2.14- percentual das estimativas da divisão de 1203 folhas entre cinco crianças



Pôde-se observar que na escola A obtiveram-se 66,66% de estimativas adequadas ou lógicas ao passo que na escola B encontraram-se apenas 27,77% de respostas assim qualificadas.(percentagem obtida da soma de sujeitos entre todos de cada escola que deram resultado estimado entre 200 e 300)

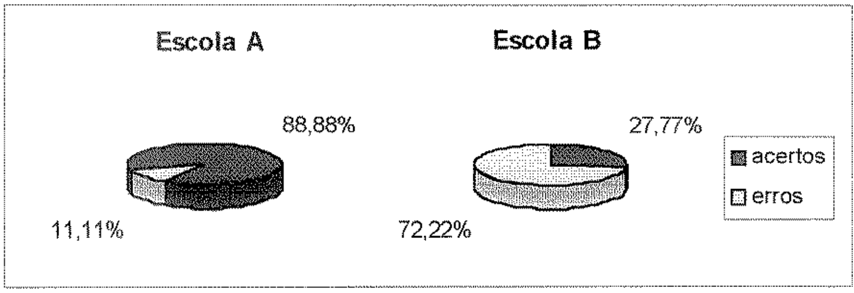
Foi possível inferir que os sujeitos da escola A têm melhor noção de quantidade do número 1203 que os da B, tendo em vista as estimativas dadas à divisão desta quantidade em cinco partes iguais.

A tabela e o gráfico comparativo 2.15 referem-se ao resultado da divisão de 1203 folhas (inteiras) em partes iguais para cinco crianças.

Tabela 2.15- resultado das respostas dadas à divisão de 1203 folhas para cinco crianças

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	16	5
respostas incorretas	2	13

Gráfico comparativo 2.15- percentual de respostas dadas à divisão de 1203 folhas por cinco crianças

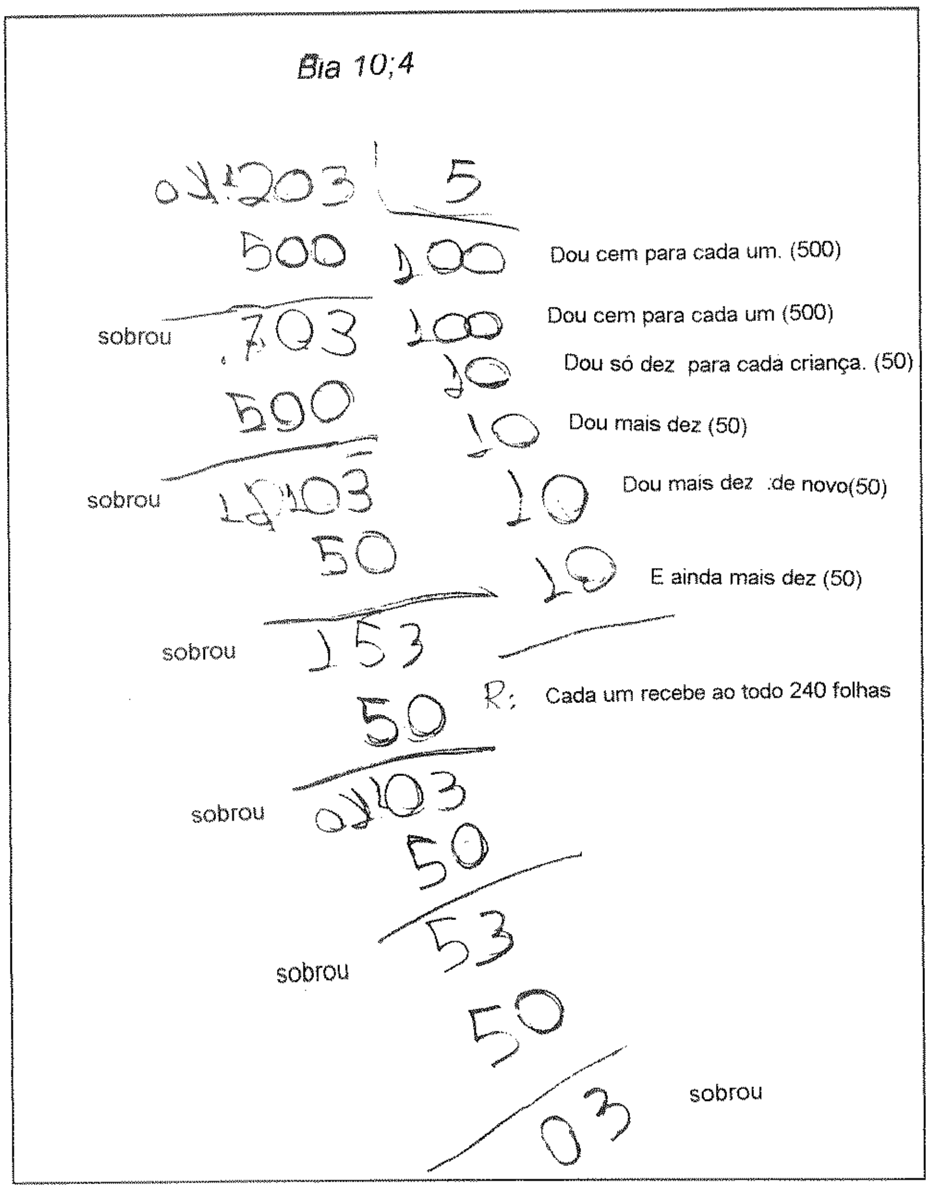


Conforme se verifica no gráfico 2.15, encontramos um percentual bastante diferenciado nos resultados dos sujeitos da escola A (88,88% de respostas corretas)e nos da escola B (27,77% de respostas corretas).

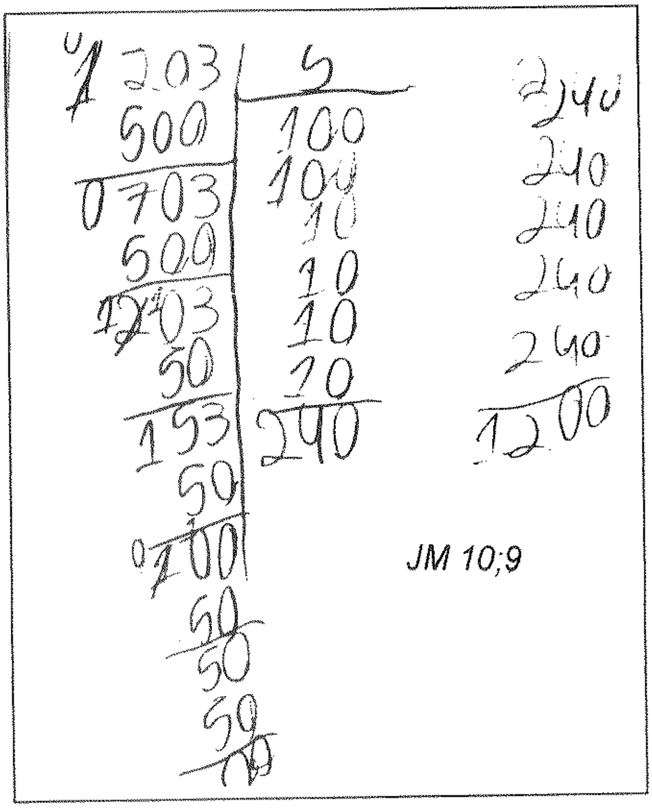
Na escola A, nenhum sujeito usou algoritmo convencional da divisão(nem processo curto, nem longo).Todos os sujeitos usaram divisão por decomposição de quantidades que distribuíam igualmente por cinco. Os sujeitos da escola A não conheciam em sua programação escolar, até o momento da aplicação desta pesquisa, o algoritmo convencional da divisão e resolveram a situação-problema da seguinte maneira:

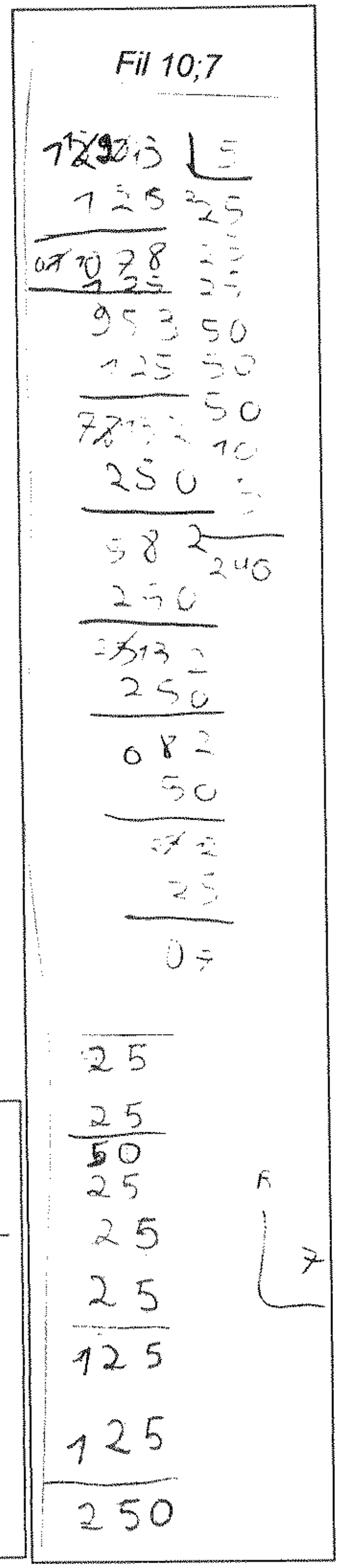
JM (10;9), Bia (10';4), Den (10;8),Fil (10;7), Dan (10;6), VR (10;6), Edi (9;10) usaram o mesmo tipo de procedimento, porém cada um deles foi dividindo partes do número 1203 de maneira como lhes era, particularmente, significativa.

Bia, (10;4) explicou seu procedimento assim:

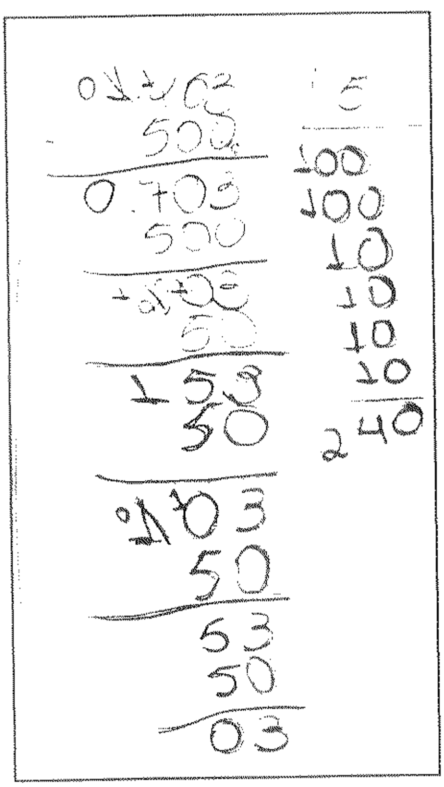


JM (10;9) fez como Bia: 100+100+10+10+10+10



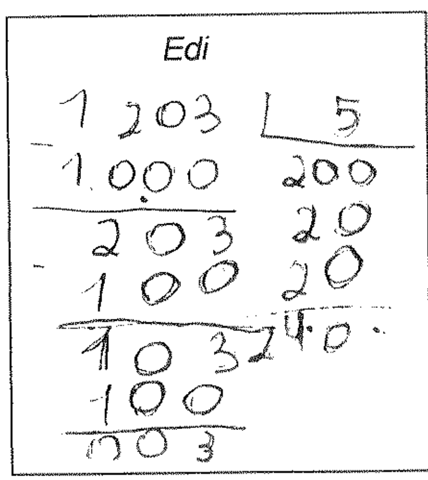


Dan (10;6), também dividiu 1203 por 5 da mesma maneira que Bia e JM: 100+100+10+10+10+10



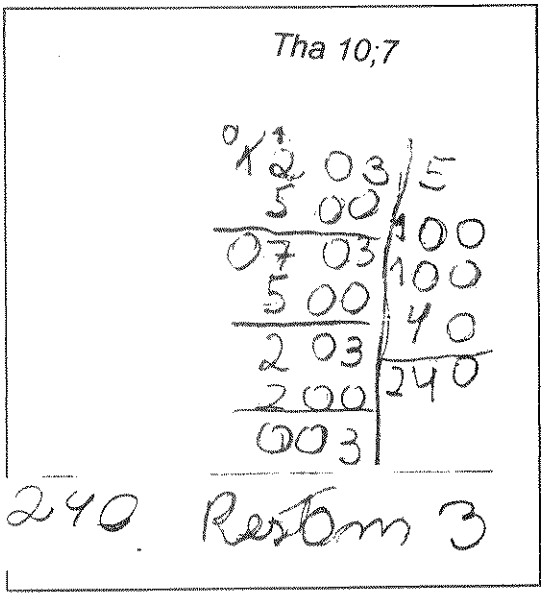
Dan 10;6

Edi (9;10) dividiu em 200+20+20

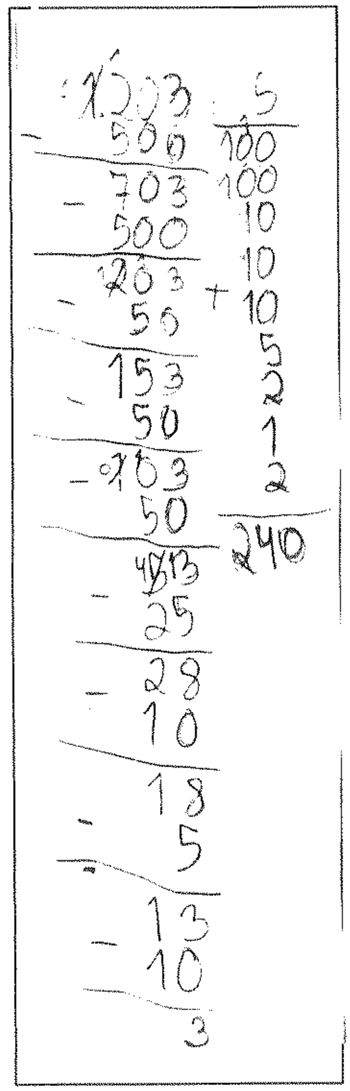


Fil (10;7), dividiu nas seguintes partes: 25+25+25+50+50+50+10+5 Num certo ponto da divisão,Fil somou os "25"para auxiliá-lo na distribuição das "partes".

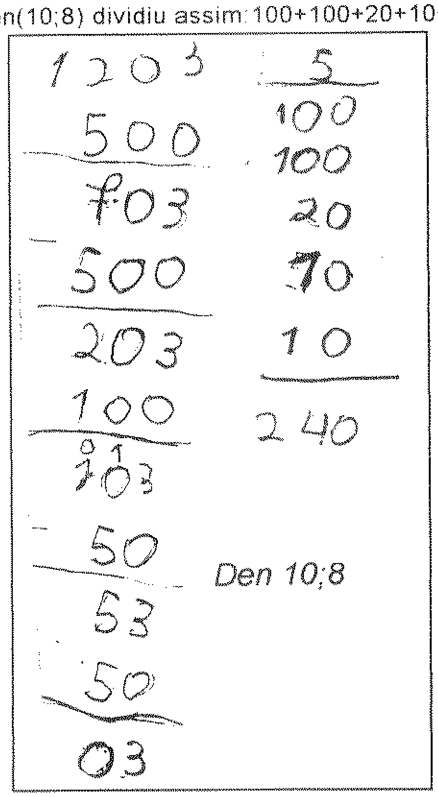
Tha (10;7), por sua vez, fez: 100+100+40



VR (10;6) dividiu em 100+100+10+10+10+5+2+1+2

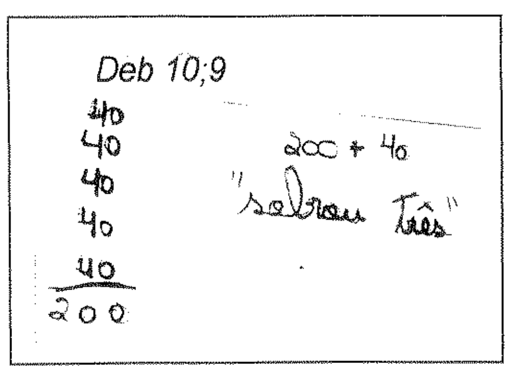


Den(10;8) dividiu assim: 100+100+20+10+10.

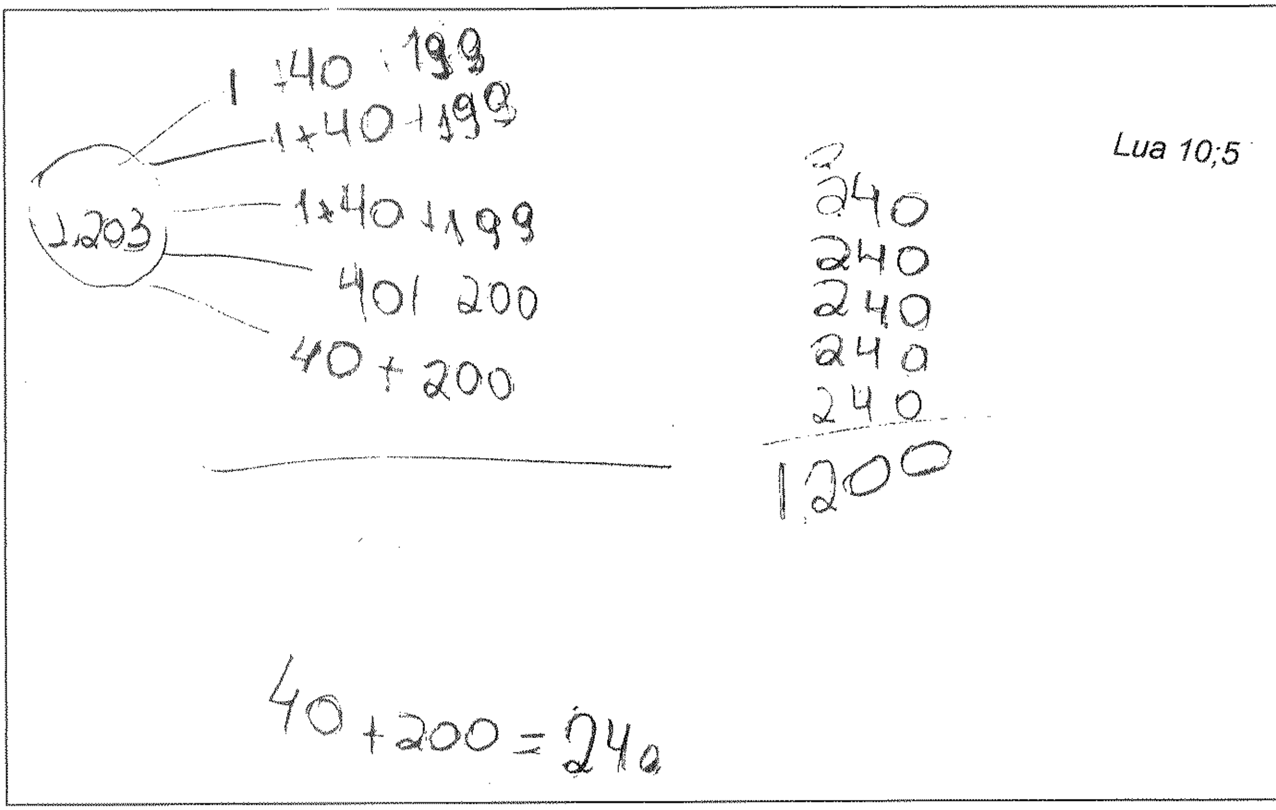


Cada criança ao realizar as operações, manipulou em seu pensamento, quantidades que lhes foram significativas.

Deb (10;9), não usou este tipo de procedimento. Dividiu 1000 por 5, mentalmente. Disse que cada criança ganharia 200 e que ainda faltavam repartir 203 folhas, registrando num canto da folha o que segue ao lado:



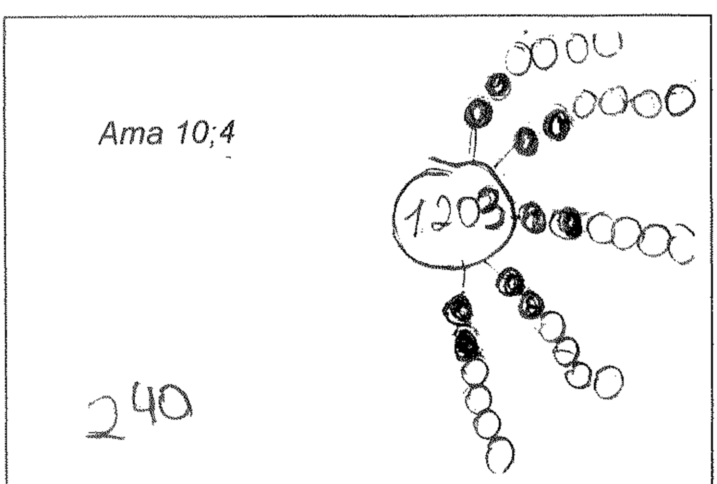
Lua (10;5) repartiu as quantidades da seguinte forma:



Explicou assim seu procedimento:

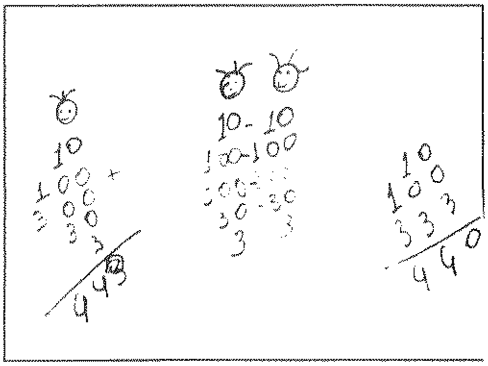
"Reparto as 3 folhas soltas. Depois reparto o 200 em 5 crianças, dá 40 folhas para cada uma." Quando foi repartir as 1000 folhas que ainda faltavam, deu 199 para as 3 primeiras, explicando que já lhes havia dado uma folha (quando começou a repartir as folhas soltas), e por isso deu 200 para as outras duas. Disse ainda que as três folhas que sobraram não distribuiria, pois seriam poucas para as cinco crianças. Lua somou 240 cinco vezes para confirmar o resultado.

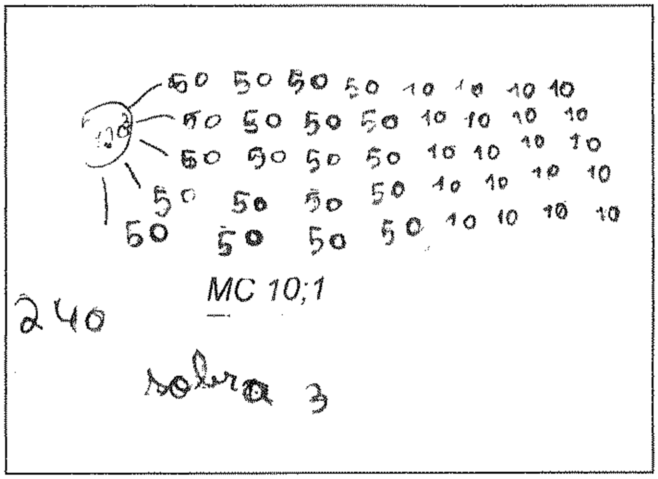
Ama (10;4) fez assim:

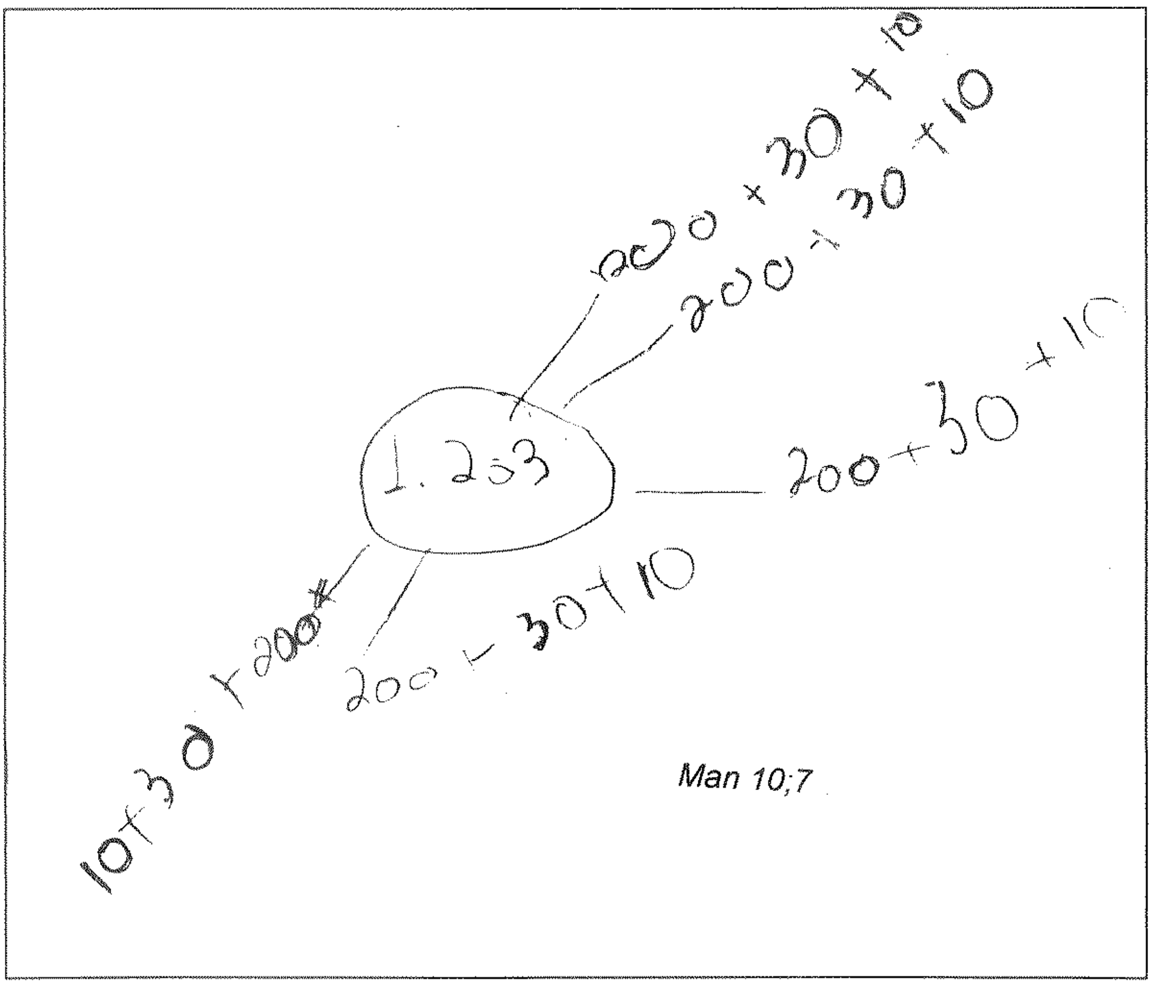


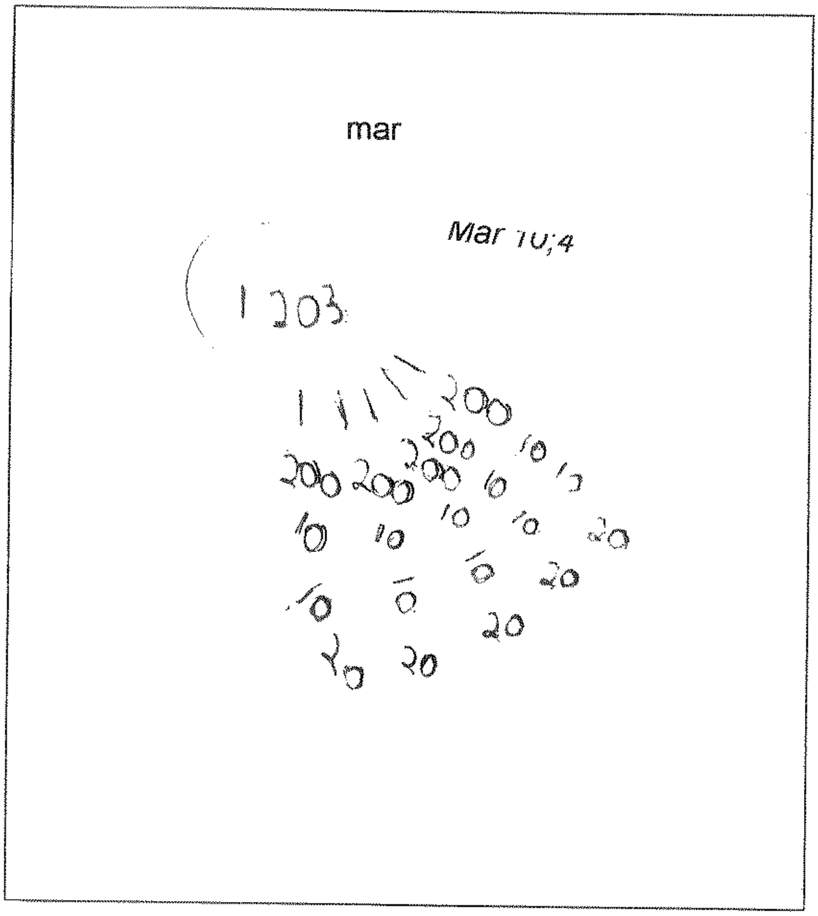
Ama (10;4) desenhou bolinhas escuras e claras. Deu o valor de 100 folhas para cada bolinha escura e o valor de 10 folhas para cada bolinha clara. Assim, repartiu o 1000 em 5 crianças dando 200 folhas para cada uma e de 203 que sobraram deu 40 para cada uma, disse que sobraram 3 folhas, sem dar para ninguém.

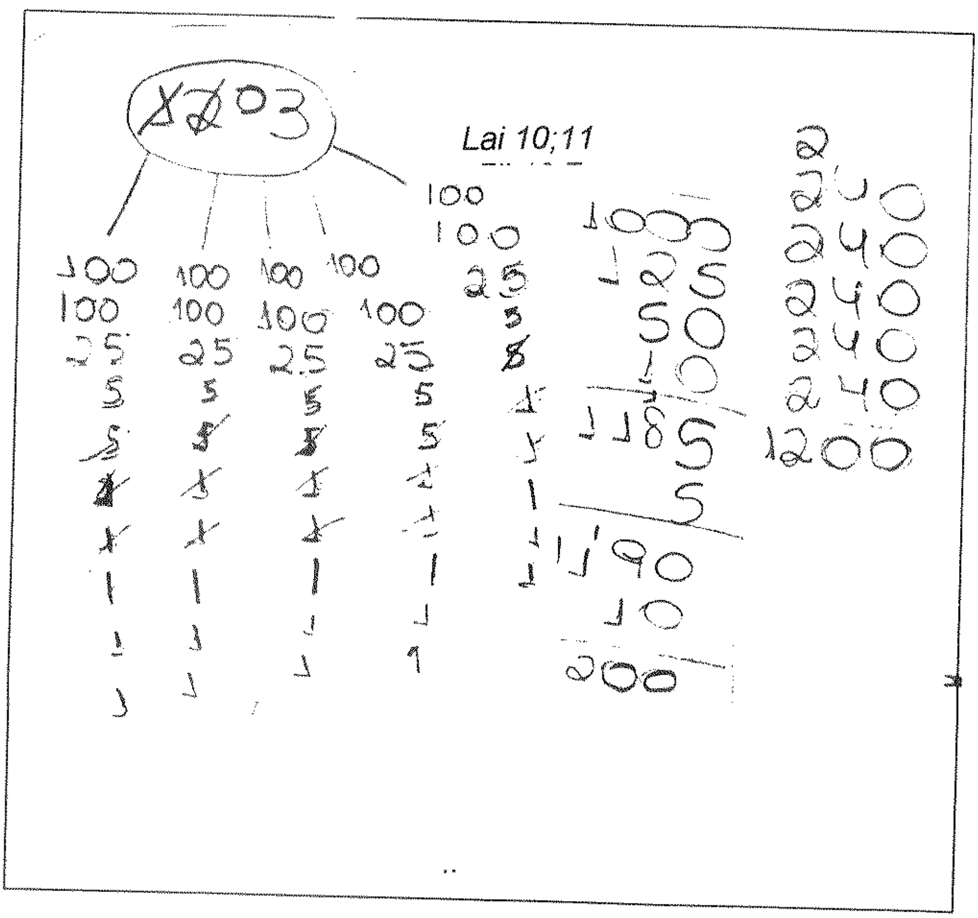
Raf (10,6), Man (10,7), MC (10,1) Lai (10,11), Mar (10,4) dividiram em quantidades que lhes eram significativas usando o mesmo tipo de esquema gráfico e acertaram o resultado. Os registros acham-se apresentados abaixo.

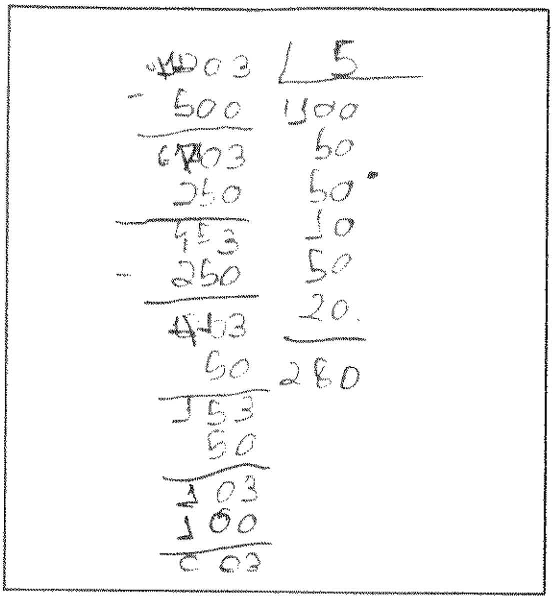




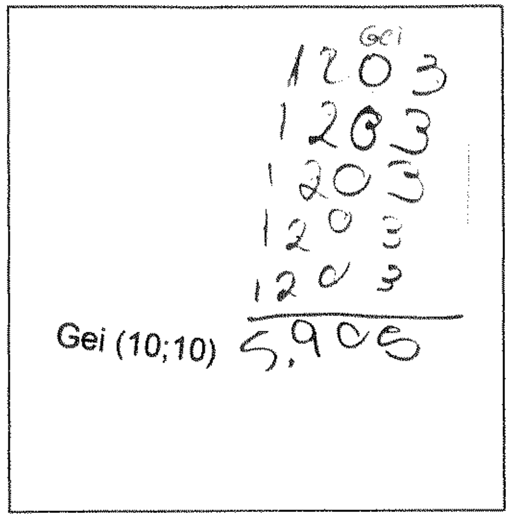



mar
Mar 10;4


Lai 10;11



Giu (10;4)



Gei (10;10)

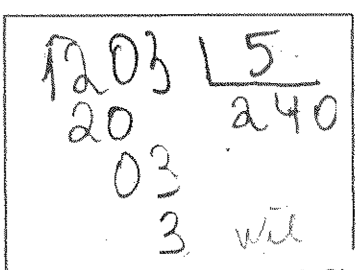
Na escola A, verificou-se que dois sujeitos entre 18, (11,11%) erraram o resultado sendo que um sujeito selecionou o algoritmo correto indicando uma compreensão do problema, mas apresentou erro de cálculo na solução (5,5%) e o outro sujeito errou por aplicação indevida de operação matemática fazendo 1203x5, ao invés de 1203:5. Os registros aqui apresentados demonstram os procedimentos destes sujeitos .

Na escola B, treze sujeitos entre dezoito (72,22%) erraram a questão, 27,77% do total dos sujeitos apresentaram erro ao efetuar o algoritmo convencional e 44,44% do total, que é quase a metade dos sujeitos, usaram operação matemática inadequada à resolução do problema. Apenas 27,77% dos sujeitos acertaram a questão.

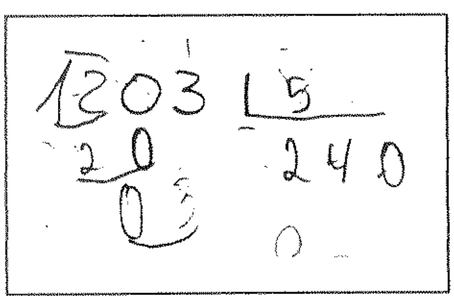
Os registros dos procedimentos utilizados pelos sujeitos da **escola B** estão apresentados abaixo:

Wil (12;2), Leo (11;2), Art (10;10), Mar (10;0) acertaram a questão usando algoritmo convencional

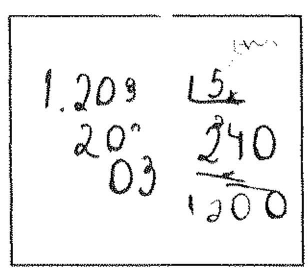
Art (10;10)

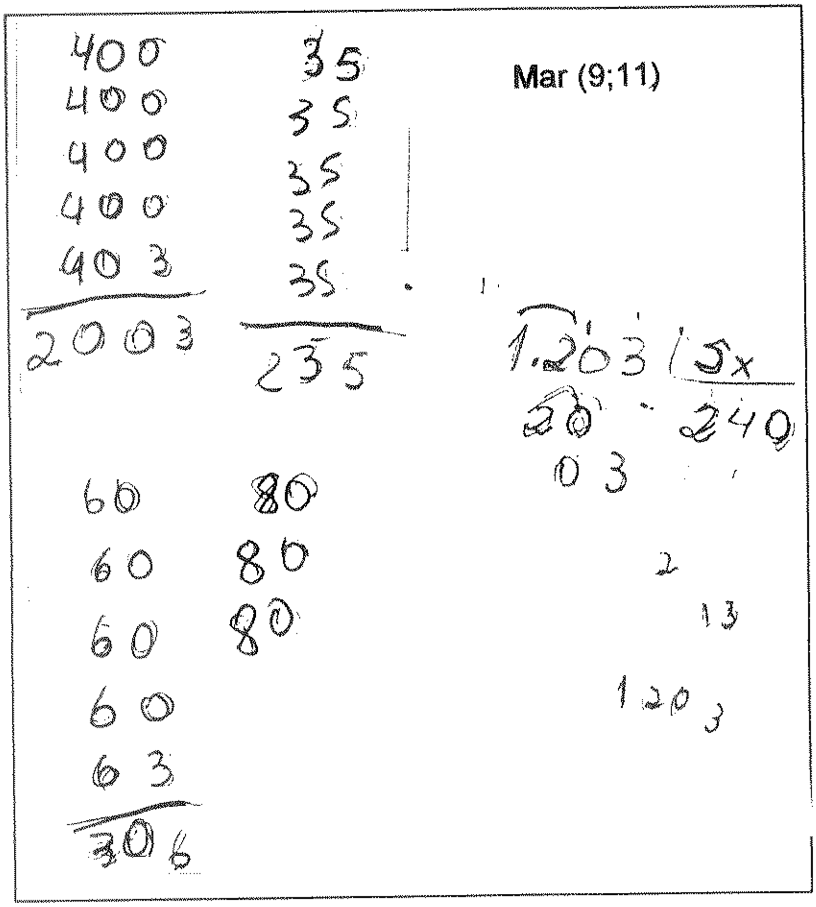


Wil (12;2)

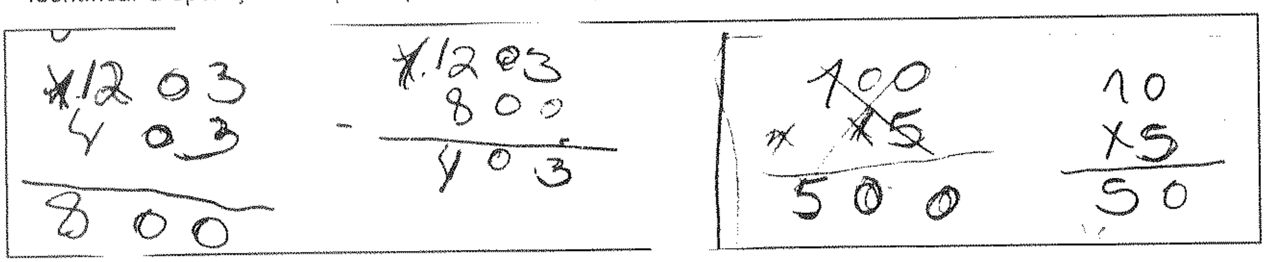


Leo (11;2)

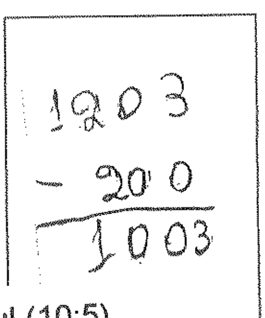




JC (12,4) não utilizou a divisão para obter o resultado. Primeiro subtraiu depois multiplicou, não soube resolver a questão. Jul (10,5), Ma (9,11), Mai (10,2), Tha (10,3) e também não souberam identificar a operação adequada para resolver a questão. Jam (10,9) negou-se a fazê-la.

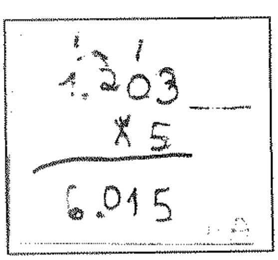


JC (12;4)

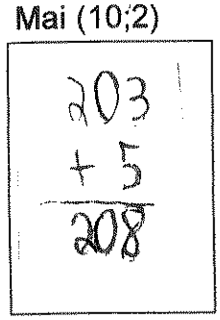


Jul (10;5)

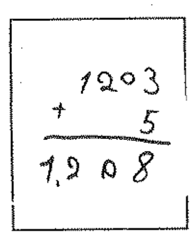
Ma (10;0)



Mai (10;2)

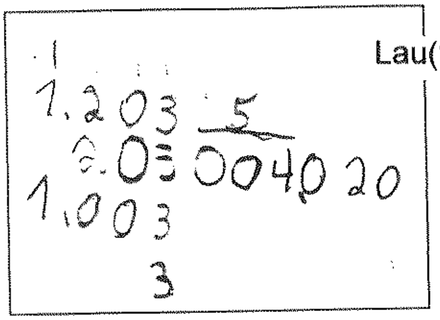


Tha (10



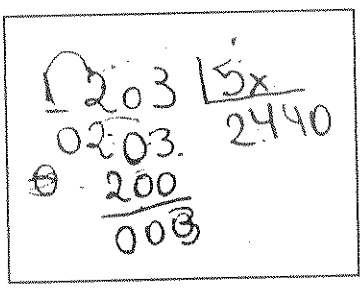
Lau (9,10) não lembrava como se fazia o algoritmo, dizendo que fazia tempo que a professora não dava este tipo de conta. Fez a conta no sentido contrário. Como diz Kamii (1995), "A instrução tradicional parece interferir no desenvolvimento do raciocínio lógico das crianças por não permitir que elas pensem por si próprias" (1995, p.270). A mesma autora afirma que "quando a criança é obrigada a seguir algoritmos, ela tem que abrir mão de sua maneira própria de pensar numericamente". (1995, p.57).

Lau(9;10)

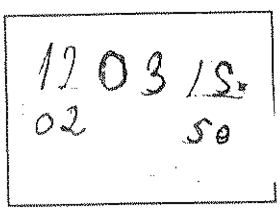


Observa-se que quando o esquecimento vem, a criança instruída segundo o ensino tradicional, quase sempre não sabe construir outro caminho. É o caso de Kam (10;3), Lea (10;7) JL (10;9) que confundiram-se com a técnica. Kam, por exemplo, colocou um número a mais e não se deu conta de que seria impossível dividir 1203 folhas entre 5 crianças e cada uma receber 2440 folhas. Lea, por sua vez, fez o algoritmo de modo incompleto e deu o resultado de 50 folhas para cada uma das cinco crianças. Lea não teve noção de que 50 seria muito pouco para este resultado.

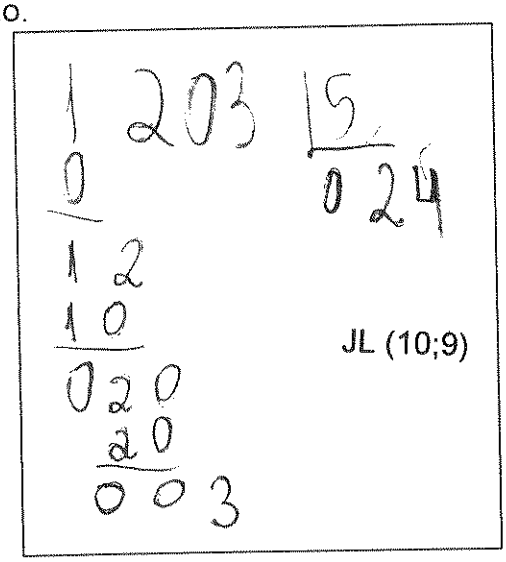
Kam(10;3)



Lea (10;7)

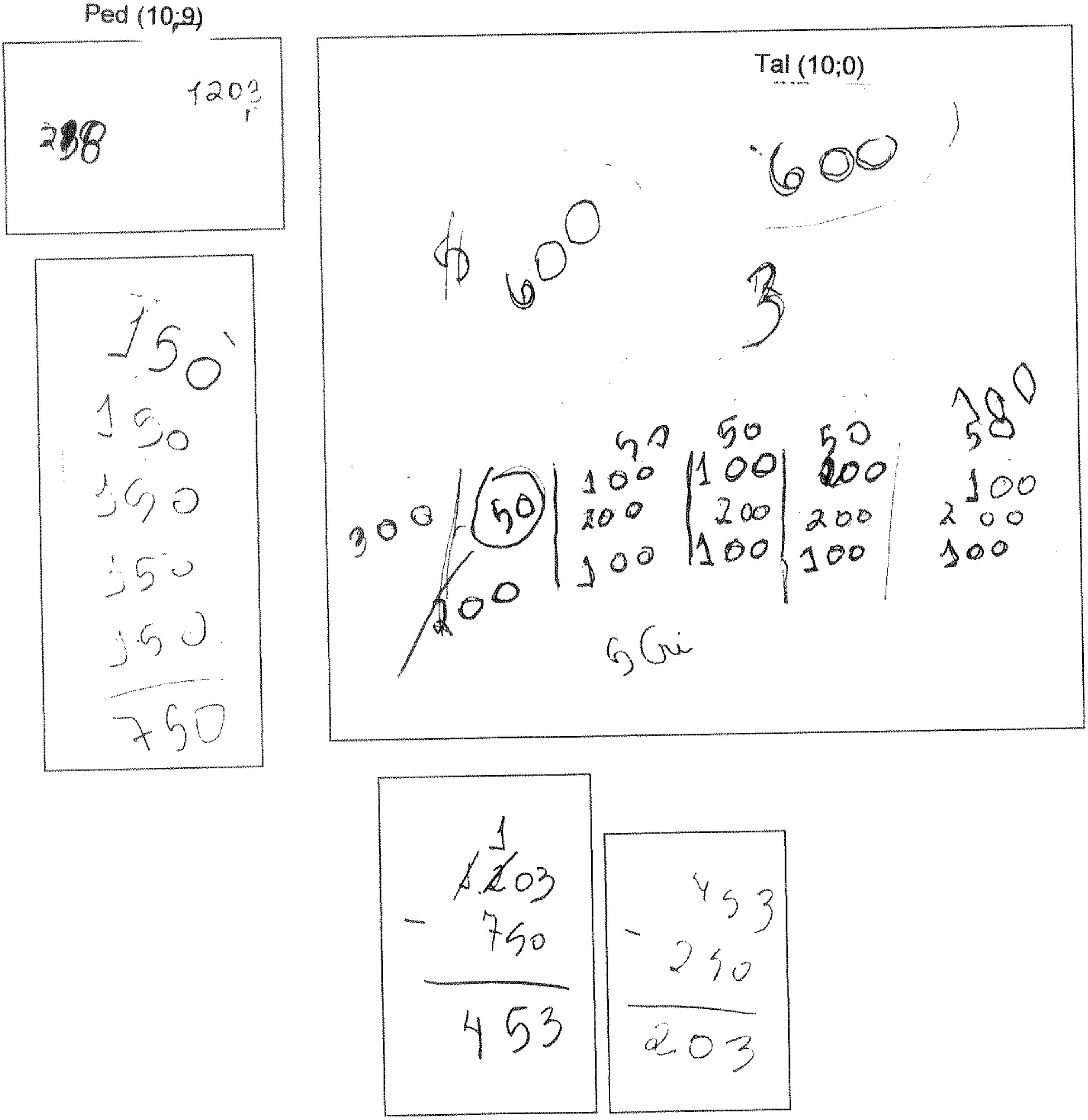


JL (10;9)



Tal (10;0) e Ped(10;9), no entanto, mostraram ser capazes de pensar nas quantidades e inventar seus próprios procedimentos, apesar da instrução que receberam. Ped (10,9) fez de cabeça. Pensou assim: 1000 folhas dá 200 para cada criança. Faltava 203 para dividir. Pensou em 100 e deu 20 para cada criança, sobravam 103 para serem divididos. Ped achou que seria 18 folhas para cada uma das cinco crianças e não sobrariam folhas. Somou as partes e respondeu 238 para cada criança. Tal (10;0), foi distribuindo quantidades, buscando apoio em adições e subtrações. Pareceu estar pela primeira vez tendo este tipo de procedimento. Demorou bastante para resolver a questão mas demonstrou satisfação em fazê-la.

Ped (10;9)



AP (11;0), respondeu "seiscentos" e não quis fazer a conta.

Cla (10;9), da escola B, para dividir 1203 folhas entre cinco crianças, mediu a altura total das folhas, usando como unidade de medida dois blocos de cem folhas. Deu resposta incorreta, dizendo que cada criança receberia cem folhas e sobrariam 403.

Os dados apontados por Kamii, em suas pesquisas (1995), no sentido, de que o uso de algoritmos prejudica a aprendizagem da criança ao invés de ajudá-la, parece confirmar-se nos resultados obtidos das respostas dos sujeitos da escola B. Os dados dos sujeitos da escola A, coletados e analisados nesta pesquisa, permitiram inferir que os algoritmos podem ser ensinados após a construção das operações e da noção numérica, por procedimentos pessoais e utilizando-se do uso de atividades lúdicas de situações-problema com diferentes bases, para que se abstraia o homomorfismo da técnica dos algoritmos com a estrutura aditiva e multiplicativa do sistema de numeração decimal.

Na Tarefa 3, a pesquisadora teve a pretensão de investigar a capacidade dos alunos de 4ª série em usar as estruturas operacionais de pensamento, implícitas nas estruturas multiplicativas das ordens e classes do sistema de numeração decimal, trabalhado pela escola nas séries iniciais do 1º grau.

Depois de a pesquisadora se certificar de que os sujeitos entendiam a forma de fazer convites e o significado das "turmas", era-lhes dada a possibilidade de fazerem os cálculos da maneira como quisessem, registrando-os no papel.

A tabela 3.1 e o gráfico comparativo 3.1 demonstram os resultados obtidos das respostas dadas pelos sujeitos das duas escolas, à questão 3.1, (1ª análise):

"Na quarta turma de convidados, quantos sócios o clube terá ao todo? Foram consideradas as respostas apresentadas pelos sujeitos logo após a formulação da questão. A 1ª análise(3.1.a) voltou-se tão somente para a aplicação do princípio multiplicativo, nas turmas(n),(n.n),(n.n.n),(n.n.n.n).

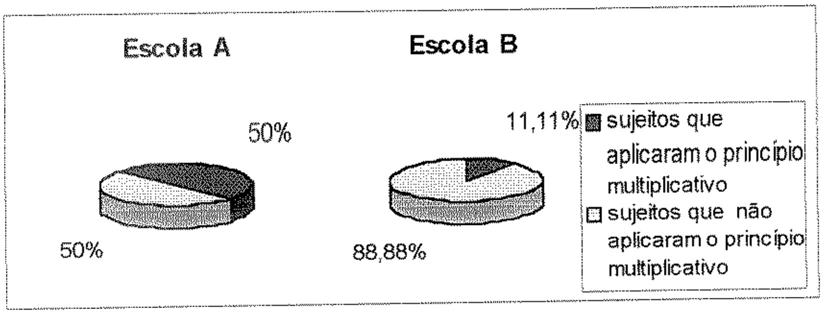
Tabela 3.1.a

Resultado da aplicação do Princípio multiplicativo (n), (n.n), (n.n.n), (n.n.n.n) nas quatro turmas de sócios (convites de três em três)

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
aplicam o princípio multiplicativo nas quatro turmas	9	2
não aplicam o princípio multiplicativo nas quatro turmas	9	16

Gráfico 3.1.a

Percentual de respostas dadas à aplicação do princípio multiplicativo nas 4 turmas.



O gráfico 3.1.a mostra que 50% dos sujeitos da escola A compreenderam o problema e aplicaram o princípio multiplicativo nas quatro turmas e, por outro lado, apenas 11,11% dos sujeitos da escola B o fizeram.

Conforme se pode observar no gráfico 3.1.a, há uma diferença acentuada nos percentuais de aplicação do princípio multiplicativo nas soluções usadas pelos sujeitos da escola A e os da escola B. para a resolução da questão.

A 2ª análise da mesma questão (aqui apresentada na tabela 3.1.b e no gráfico 3.1b)) esteve orientada para a apresentação de respostas corretas ou incorretas, na resolução das questões, o que significa ter que considerar um raciocínio desta ordem: "1+ (n) + (n.n) +(n.n.n) + (n.n.n.n)".

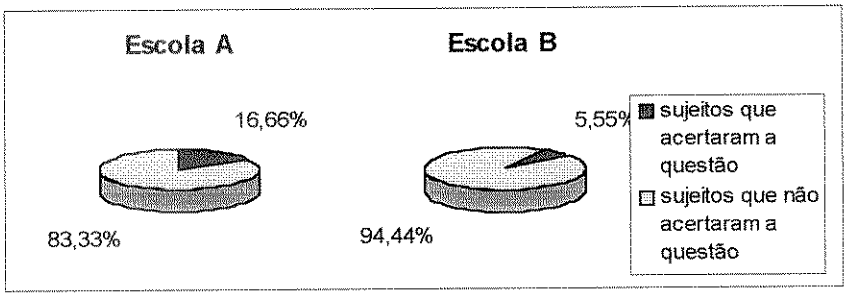
Tabela 3.1.b- Resultado das respostas dadas à pergunta:

"Quantos sócios o clube terá ao todo na quarta turma, com convites feitos de 3 em 3."

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	3	1
respostas incorretas	15	17

Conforme dados coletados, pode-se notar que a questão 3.1.b foi bastante difícil e o índice de respostas corretas foi bastante baixo entre os sujeitos das duas escolas.

Gráfico comparativo 3.1.b- Resultado das respostas dadas à pergunta: "Quantos sócios o clube terá ao todo, na 4ª turma de convidados se os convites são feitos de três em três?" (1+(n)+(n.n)+(n.n.n)+(n.n.n.n)=x)



O gráfico 3.1.b demonstra os resultados dos sujeitos, não apenas quanto à aplicação do princípio multiplicativo, mas, além disso, à percepção completa do raciocínio implícito na resolução do problema. Como se pode observar, houve apenas 16,66% de respostas corretas nos sujeitos da escola A e 5,55% nos sujeitos da escola B

Ao inteirar-se com o sujeito, após a resolução destas questões, a pesquisadora, procurava esquadrinhar o raciocínio do sujeito, apresentando outras perguntas tais como: "Como você pensou?", "Explique como encontrou este resultado," ou pedindo à criança que dissesse qual a regra combinada para os convites.

Tal procedimento teve a pretensão de possibilitar o processo de tomada de consciência dos sujeitos para a resolução da questão proposta. Ao sujeito era dada a oportunidade de corrigir seu erro, na medida em que o percebesse.

A tabela 3.2 e o gráfico comparativo 3.2 demonstram os resultados obtidos das respostas dadas pelos sujeitos das duas escolas, à questão 3.2, (1ª análise, onde só se considerou a aplicação do princípio multiplicativo nas três turmas):

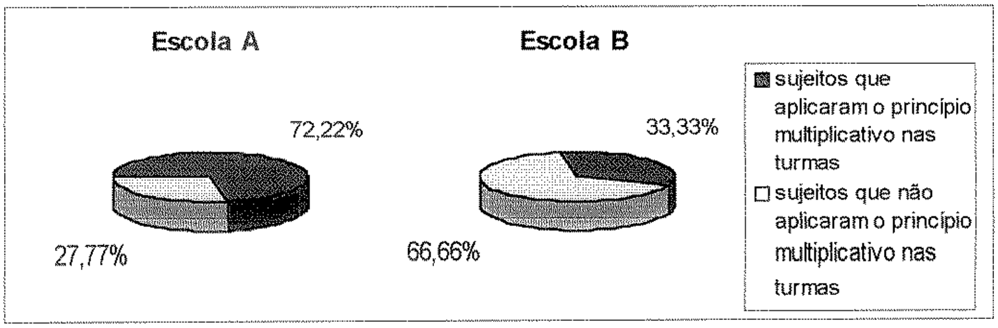
"Se os convites fossem feitos de cinco em cinco, ao invés de três em três, quantas pessoas seriam chamadas na terceira turma?"

Tabela 3.2.a

Resultado das respostas dadas á aplicação do princípio multiplicativo (n), (n.n), (n.n.n),

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
aplicaram o princípio multiplicativo nas turmas	13	12
não aplicaram o princípio multiplicativo nas turmas	5	6

Gráfico comparativo 3.2.a -Percentual da aplicação do princípio multiplicativo



O gráfico comparativo 3.2.a apresenta os resultados obtidos da 1ª análise da questão 3.2 na qual só se considerou a aplicação do princípio multiplicativo. Obtiveram-se os seguintes resultados: 72,22% entre os sujeitos da A aplicaram o princípio multiplicativo e 33,33% entre os sujeitos da escola B não aplicaram o princípio multiplicativo.

Foi possível notar que a questão 3.2 foi bem mais simples para a compreensão dos sujeitos, bem como cálculo do x 5 (fatos fundamentais da multiplicação).

Esta questão solicitava apenas que o sujeito aplicasse o princípio multiplicativo nas turmas, para saber quantos sócios haveria na terceira turma.

Após a aplicação desta questão, a pesquisadora também procurava esquadrinhar o raciocínio do sujeito, apresentando outras perguntas, tais como: "Como você pensou?", "Explique como encontrou este resultado," ou pedindo à criança que dissesse qual a regra combinada para os convites e/ou contra-argumentava.

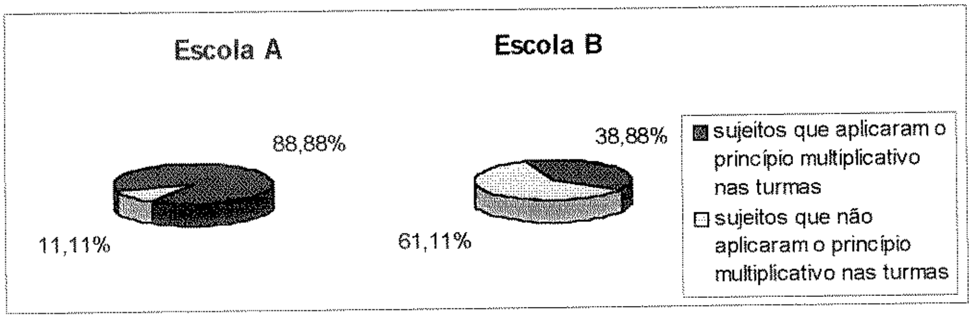
A 2ª análise da questão 3.2 voltou-se aos resultados reelaborados ou não, após terem explicado como pensaram, terem sido lembradas as regras dos convites e/ou receber uma contra-argumentação da resposta dada anteriormente (3.2.a).

A tabela 3.2.b e o gráfico comparativo 3.2.b referem-se ao resultado da aplicação do princípio multiplicativo nas três turmas (convites de 5 em 5), após contra-argumentação, 2º análise).

Tabela 3.2.b Após contra-argumentação, aplicação do princípio multiplicativo nas três turmas

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
aplicam o princípio multiplicativo nas turmas	16	7
não aplicam o princípio multiplicativo nas turmas	2	11

Gráfico comparativo 3.2.b -Percentual de aplicação do princípio multiplicativo, após contra-argumentação



O gráfico comparativo 3.2.b demonstra que 88,88% dos sujeitos da escola A aplicaram o princípio multiplicativo nas turmas. Apenas 38,88% aplicaram o princípio multiplicativo, após contra-argumentação.

A seguir, a pesquisadora voltava a questão 3.1 para a terceira e quarta análise, coletada após a aplicação da questão 3.2 e contra-argumentação da questão 3.1.

A 3ª análise da questão 3.1 (3.1.c) orientou-se a investigar novamente à aplicação do princípio multiplicativo, nas quatro turmas, após possível correção(n), (n.n), (n.n.n), (n.n.n.n), após contra-argumentação.

A tabela 3.1.c e o gráfico comparativo 3.1.c apresentam o resultado da 3ª análise da questão 3.1 que se refere à aplicação do princípio multiplicativo nas quatro turmas do clube (convites de três em três) após a aplicação da questão 3.2 e contra-argumentação à questão 3.1.

Tabela 3.1.c

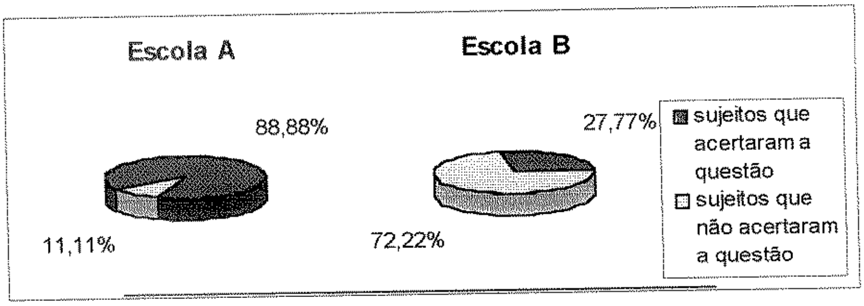
Resultado das aplicação do princípio multiplicativo nas quatro turmas (convites de três em três), após aplicação da questão 3.2 e contra-argumentação da questão 3.1.

Nova coleta de dados após possível correção.

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
aplicaram o princípio multiplicativo nas quatro turmas	18	17
não aplicaram o princípio multiplicativo nas quatro turmas	0	1

Os resultados dos sujeitos foram tabelados novamente, (após contra-argumentação feita pela pesquisadora às primeiras respostas dadas pelos sujeitos à questão 3.1, depois de terem sido corrigidas, caso os sujeitos tivessem notado seus erros.

Gráfico comparativo 3.1.c Percentual do resultado da aplicação do princípio multiplicativo nas quatro turmas de sócios (convites de três em três)



O gráfico 3.1.c refere-se ao percentual de respostas corretas e incorretas obtidas na 3ª análise da questão 3.1. Obtiveram-se 88,88% de aplicação do princípio multiplicativo pelos sujeitos da escola A nas quatro turmas de sócios e 27,77% pelos sujeitos da escola B.

A 4ª análise da questão 3.1 esteve orientada ao resultado das respostas corretas ou incorretas dada às questões, após contra-argumentação e possível correção " 1 + (n) + (n.n) + (n.n.n) + (n.n.n.n).

A tabela 3.1.d e o gráfico comparativo 3.1.d apresentam o resultado das respostas corretas e incorretas dadas à questão 3.1, após possível correção (4ª análise da questão 3.1).

Tabela 3.1.d

Resultado das respostas corretas e incorretas

dadas a questão 3.1, após possível correção [1 + (n) + (n.n) + (n.n.n) + (n.n.n.n)].

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	10	2
respostas incorretas	8	16

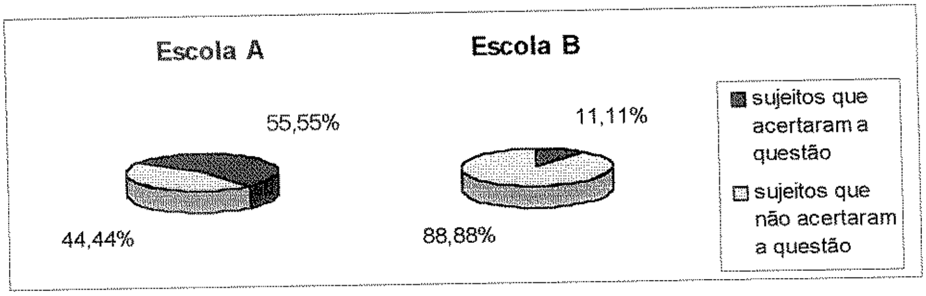
Esta questão, cuja solução exigia o raciocínio de 1 + (n) + (n.n) + (n.n.n) + (n.n.n.n), continuou sendo de difícil resolução mesmo no decorrer da aplicação do experimento.

Os dados desta tabela mostram os resultados dos sujeitos após possível tomada de consciência do erro e reelaboração dos resultados referindo-se não só à aplicação do princípio multiplicativo, mas também ao raciocínio correto da resolução da questão (3.1).

Gráfico comparativo 3.1.d

Percentual de respostas corretas e incorretas dadas pelos sujeitos à pergunta:

" Quantos sócios terá ao todo o clube, na 4ª turma? (convites de 3 em 3)- após possível correção



Na 4ª análise da questão 3.1 obtiveram-se os seguintes percentuais: 55,55% de respostas corretas dos sujeitos da escola A e 11,11% de respostas corretas dos sujeitos da escola B.

Na questão 3.3: "Se fossem feitos convites em quantidades diferentes (não mais de três em três, nem de cinco em cinco), e conseguissem mil sócios na terceira turma, como teria sido a regra combinada para os convites? os dados foram considerados em 1ª análise (4.3.a), pelo resultado correto ou incorreto da resolução em questão.

A intenção, na questão 3.3, foi a de perceber a compreensão e aplicação do princípio multiplicativo e, por meio da reversibilidade do pensamento, para resolver a questão proposta. A escolha da quantidade mil, na terceira turma, teve a pretensão de facilitar o pensamento da criança, uma vez que a base dez, com sua estrutura multiplicativa, no estudo do sistema de numeração decimal, é um componente curricular a que todos os sujeitos da pesquisa se acham submetidos.

A tabela 3.3.a e o gráfico comparativo 3.3.a demonstram os resultados das respostas dadas pelos sujeitos à pergunta: Se na 3ª turma havia mil sócios, quantos havia na 1ª turma?

Tabela 3.3.a

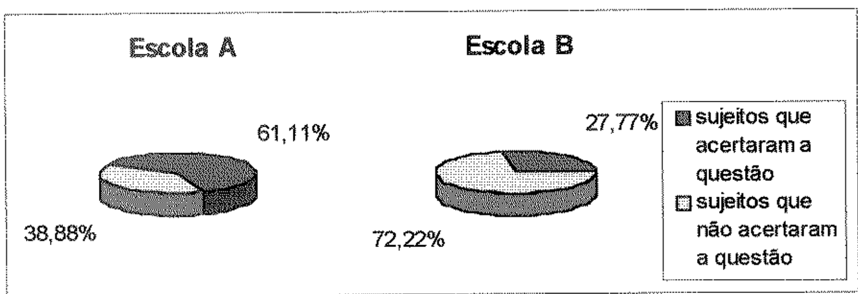
Resultado das respostas dadas pelos sujeitos à pergunta:

Se na 3ª turma havia mil sócios, quantos havia na 1ª turma?

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	11	5
respostas incorretas	7	13

O índice de respostas e procedimentos demonstraram maior conhecimento dos múltiplos de dez nos sujeitos da escola A que nos sujeitos da escola B, bem como o uso das estruturas do princípio multiplicativo do sistema de numeração decimal.

Gráfico comparativo 3.3.a - percentual de respostas corretas ou incorretas



O gráfico comparativo 3.3.a demonstra que 61,11% dos sujeitos da escola A conseguiram saber o número inicial de convites (incógnita da questão), ao passo que apenas 27,77% entre os sujeitos da escola B, puderam fazê-lo. Após as respostas dadas, a pesquisadora perguntava aos sujeitos como eles haviam pensado; retomava assim a explicação da questão e fazia a contra-argumentação.

A 2ª análise (3.3.b) considerou o resultado dado pelo sujeito após contra-argumentação. A tabela 3.3b e o gráfico 3.3.b mostram os resultados obtidos nesta análise.

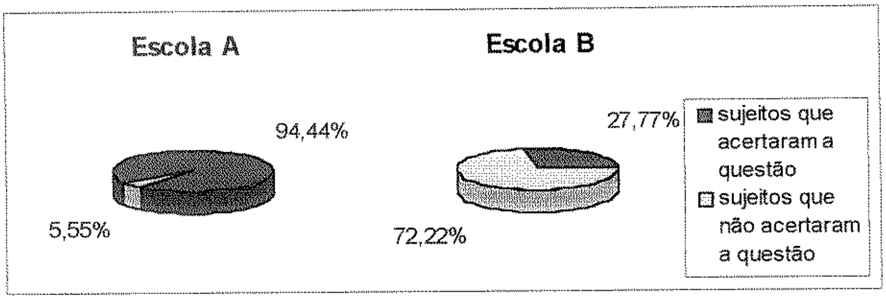
Tabela 3.3.b

resultado das respostas dadas à questão 3.3 após contra-argumentação e possível correção

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
respostas corretas	17	5
respostas incorretas	1	13

Pode-se observar que, após a contra-argumentação, os sujeitos da escola A retomaram suas respostas, julgaram as respostas sugeridas nas contra-argumentações e puderam recuperar o erro, ou manter o acerto. O mesmo não aconteceu com os sujeitos da B, que não tiveram a mesma facilidade de utilizar a contra-argumentação para analisar seus procedimentos e retomar seu erro ou confirmar seu acerto. Alguns sujeitos da escola B, que haviam dado respostas corretas, após várias buscas de resultados, não mantiveram o acerto diante da contra-argumentação.

Gráfico comparativo 3.3.b- percentual de respostas corretas e incorretas, após contra-argumentação.



O gráfico 3.3.b demonstra que após contra-argumentação 94,44% dos sujeitos da escola A deram respostas corretas à questão ao passo que, os sujeitos da escola B apresentaram apenas 27,77% de respostas corretas.

A análise da questão 3.3.a e b permite inferir que os sujeitos da escola A puderam utilizar-se das estruturas de pensamento do sistema de numeração decimal para a resolução da questão, além de demonstrarem maior familiaridade com os fatores, múltiplos e submúltiplos do sistema de numeração decimal. Os sujeitos da escola B demonstraram, por seus resultados, uma não aplicabilidade de estruturas multiplicativas próprias do sistema decimal, além de maior dificuldade em lidar com os fatores, múltiplos e submúltiplos.

Na questão 3.4 a pesquisadora dizia: "Contei esta história do clube para um amigo meu e ele quis resolver por intermédio de um tipo de desenho, de um gráfico. Ele fez alguns traçados. Um destes traçados serve direitinho para demonstrar as turmas dos convidados do clube fundado por Alberto, fazendo convites de três em três". Você sabe qual é este gráfico?

E, apresentando cinco gráficos, a pesquisadora pretendia observar quantos sujeitos podiam, num pensamento de ordem superior, abstrair e reconhecer a representação gráfica (simbólica) do princípio multiplicativo (anexos 1).

A análise das respostas dadas pelos sujeitos esteve voltada à resolução correta ou incorreta da questão, após a observação e análise dos gráficos apresentados.

Após a indicação do gráfico, a pesquisadora pedia que explicassem porque escolheram determinado gráfico e pedia que o sujeito localizasse Alberto, o fundador, seus convidados Beto, Carlos e Dudu e as outras turmas.

A tabela 3.4 e o gráfico comparativo 3.4 apresentam os resultados das respostas dadas pelos sujeitos quanto ao reconhecimento do gráfico de árvores do princípio multiplicativo referente à resolução da questão 3.1

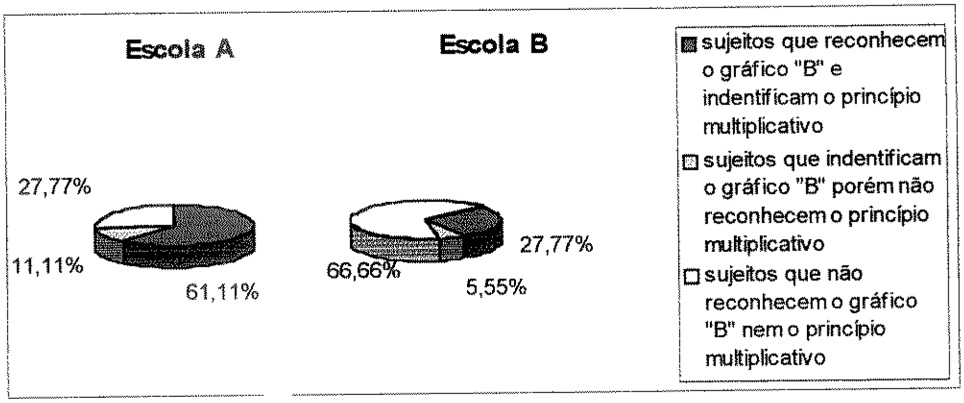
Tabela 3.4

resultado das respostas dadas ao reconhecimento do gráfico de árvore do princípio multiplicativo

	número de sujeitos escola A	número de sujeitos escola B
reconhecem o gráfico "B' e identificam o princípio multiplicativo	11	5
indicam o gráfico "B" porém não reconhecem o princípio multiplicativo	2	1
não reconhecem o gráfico "B" nem o princípio multiplicativo	5	12

Gráfico comparativo 3.4

Percentual do reconhecimento do gráfico de árvore do princípio multiplicativo que se referia a questão 3.1



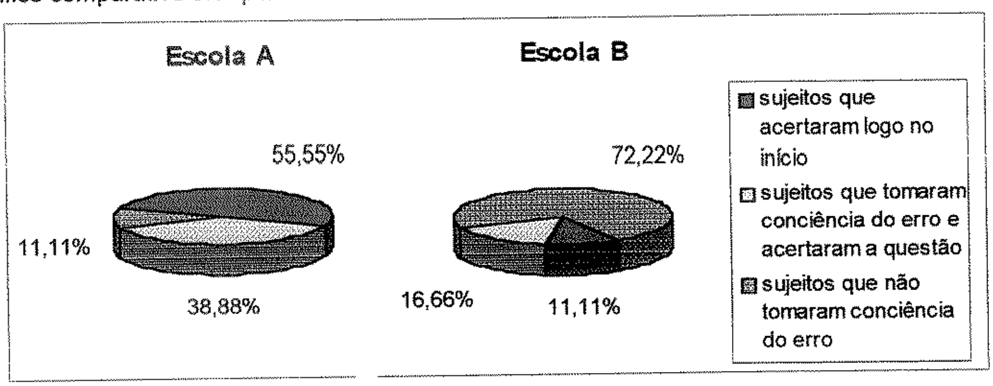
Os resultados mostram que 61,11% dos sujeitos da escola A e 27,77% dos sujeitos da escola B foram capazes de reconhecer na representação gráfica, por abstração reflexiva, o homomorfismo do princípio multiplicativo investigado na questão 3.1.

Foi considerada, em separado, uma análise exclusiva da tomada de consciência do erro das respostas dos sujeitos durante a aplicação da tarefa 3.

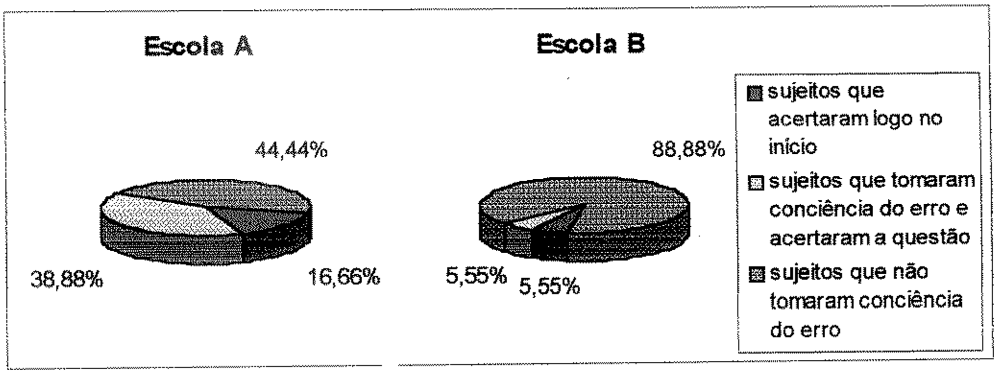
O gráfico comparativo 3.5 demonstra esta específica análise da tomada de consciência do erro, num segundo momento da aplicação das questões, nas quais se considerou a reelaboração dos resultados das questões(quadros 3.1.a, 3.1.b, 3.2.a e 3.3.a). As reelaborações referidas estão tabuladas nas tabelas 3.1.c, 3.1.d, 3.2.b, e 3.3.b, apresentadas anteriormente, neste trabalho.

Os gráficos comparativos 3.5 referem-se à tomada de consciência do erro (entre sujeitos da escola A e da escola B), apresentado num primeiro momento (logo após resolução das questões: questões 3.1.a, 3.1.b, 3.2.a e 3.3.a) e recuperação do erro num segundo momento (após dizerem como pensaram e serem relembrados das regras dos convites e/ou contra-argumentação: questões 3.1.c, 3.1.d, 3.2.b e 3.3.b).

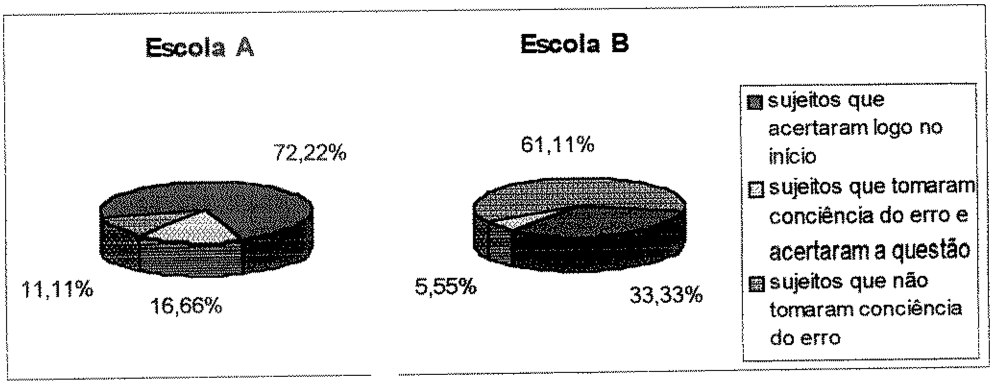
Gráfico comparativo 3.5- percentual referente às tomadas de consciências e recuperação do erro.



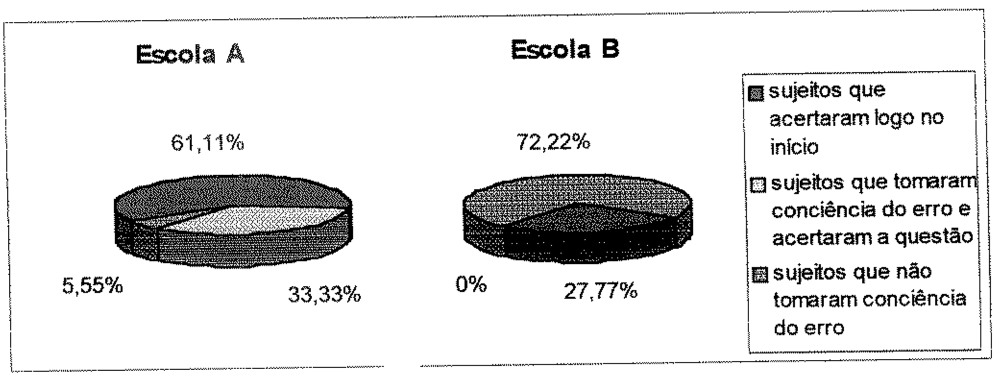
(gráfico comparativo 3.5.a- percentual referente às correções dos erros da questão 3.1.a)



(gráfico comparativo 3.5.b- percentual referente às correções dos erros da questão 3.1.b)



(gráfico comparativo 3.5.c- percentual referente às correções dos erros da questão 3.2.a)



(gráfico comparativo 3.5.d- percentual referente às correções dos erros da questão 3.3.a)

Os gráficos comparativos 3.5 referentes aos resultados da Tarefa 3 revelam uma tomada de consciência do erro, acentuadamente mais elevada, entre os da A que os da B, o que sugere uma melhor construção do conhecimento, nos sujeitos da A.

Pode-se verificar, nos gráficos acima, a pouca ou nenhuma mobilidade de reconstituir o erro, dando margem à interpretação de um campo conceitual de estruturas multiplicativas pouco desenvolvido.

Os resultados desta análise de tomada de consciência e retomada do erro permitem inferir uma melhor construção do princípio multiplicativo implícito no sistema de numeração decimal nos sujeitos da escola A que nos sujeitos da escola B. Este dado é confirmado pelos dados anteriores indicando que a construção do número foi melhor desenvolvida nos sujeitos envolvidos na proposta pedagógica da escola A que nos sujeitos envolvidos na proposta pedagógica da escola B.

Na Tarefa 1, que visou investigar a leitura de números compostos por cinco algarismos, o reconhecimento do valor posicional, a aplicação do algoritmo no número, as relações assimétricas e de inclusões de classes e as relações da conservação parte-todo, pela comparação de numerais formados por sorteio, a maioria dos sujeitos de 4ª série do 1º grau apresentaram desempenho satisfatório.

Os resultados parecem indicar que a escola consegue explorar com seus métodos e atividades, nos programas de ensino, em geral, o conhecimento em questão.

A numeração, assim como a escrita (das palavras), são conhecidas pelas crianças, antes de seu ingresso no 1º grau. Ela é um produto cultural e está presente no cotidiano de cada indivíduo. Délia Lerner (1992), em sua pesquisa, enfoca as hipóteses das crianças sobre a numeração e a abstração, assinalando que estas podem decorrer da observação das regularidades do sistema de numeração decimal, da troca de informações entre as crianças e do conhecimento social que é transmitido. Délia Lerner afirma que nem crianças que erram as continhas, nem aqueles que acertam, parecem entender que os algoritmos convencionais estão baseados na organização do sistema de numeração.

Este aspecto é muito importante de ser compreendido e analisado pelos educadores.

A equivalência dos resultados dos sujeitos da pesquisa na Tarefa 1 merece atenção, pois a grande maioria dos sujeitos apresentou acertos nesta tarefa e, no entanto, não mantiveram a competência nas questões que exigiram uma operatoriedade mais avançada em relação ao conceito de número. Este dado confirma a teoria do conhecimento de Piaget que considera as abstrações reflexivas como responsáveis pela assimilação do conhecimento.

Considerando-se os dados coletados, não se constatou diferença marcante entre os resultados dos sujeitos de 4ª série das escolas A e B, no que se refere à **leitura de números com cinco ordens, ao reconhecimento hierárquico**

do número, ao valor posicional, à complementação de quantidades, à escrita de números, à adição e subtração. A Tarefa 2 pode ser considerada fácil em relação às exigências do programa de ensino de 4ªs séries e bem específica de conteúdo escolarizado. As soluções das questões implicavam o uso de estruturas aditivas e multiplicativas.

Pôde-se constatar que apesar do treino que os sujeitos da escola B tiveram dos algoritmos convencionais, não usaram ou não mostraram possuir estruturas mentais da multiplicação e divisão bem desenvolvidas, como se poderia esperar, considerando-se o tempo de escolaridade dos alunos utilizados nesta pesquisa. Os sujeitos da escola B não conseguiram demonstrar em seus procedimentos a assimilação e vivência do conhecimento sobre as propriedades dos números (associação, distributividade) seja nas operações aditivas, seja nas multiplicativas que eram exigidas para a solução das tarefas. Os sujeitos da escola A apresentaram em seus procedimentos o uso de tais propriedades como facilitadoras de seus resultados.

Os recursos utilizados pelos sujeitos dos dois grupos (A e B) denotaram uma construção mais eficiente entre os sujeitos da escola A que entre sujeitos da escola B, além de maior número de acertos em nível de cálculos e de raciocínios corretos, também nos da escola A.

Entre os sujeitos da escola B, observou-se que pequeno percentual utilizou de cálculos mentais na solução das tarefas com quantidades numéricas (1000+1000=2000, 2000=500=2500,2500=33=2533). A grande maioria precisou de cálculos escritos (convencionais) ou fez "de cabeça" 1+1=2, 5+0=5, 3+0=3, 0+3 = 3 / 2533 ou seja, com o apoio de procedimentos convencionais de armar e efetuar contas.

Um pequeno percentual de sujeitos da escola B pôde fazer a subtração mentalmente, pois como se tratava de uma subtração com recurso, tornava-se difícil fazê-lo utilizando procedimento convencional, sem anotar no papel.

Os sujeitos da escola A puderam, na maioria, fazer a subtração mentalmente, pois operaram as quantidades numéricas pela decomposição significativa dos números, por procedimentos pessoais, o que facilitava a subtração, tal como fez Bia (10;4) que para subtrair 1303-530, fez:

1303- 300= 1003- 200= 803- 30=

Dizendo: "Deixo o 3 e penso só no 800: 800 - 30 = 770

então 770 + 3 = 773".

Ou, como explicou Edi (9;11):" tiro 300 de 1303, fica 1003; tiro mais 200 para completar o 500, fica 803. Tiro 30 de 800, fica 770; acrescento o 3 do 803 e fica 773."

Ou como explica Lai(10;11) : "de 1500 tiro 500, fica 1000. De 1000 tiro 30 fica 970".

Para resolver a questão 2.9 os sujeitos da escola B usaram algoritmo convencional e muitos erraram nos resultados. Alguns mostraram não conseguir compreender os dados do problema, pois, para resolver esta questão, somaram 25 ao número de folhas da caixa da pesquisadora ao invés de multiplicar por 25.

Todos os sujeitos conseguiram relacionar procedimentos corretos para a resolução desta situação-problema pelo uso da multiplicação, indicando compreender os dados do enunciado e as relações. Do total dos sujeitos da escola A, 27,77% erraram nos cálculos para encontrar o resultado.

Da análise de dados coletados nesta pesquisa, pôde-se observar que os sujeitos da escola A apresentaram maior quantidade de **raciocínios** e resultados corretos, qualquer que tenham sido os procedimentos usados nas resoluções dos problemas (convencionais ou não-convencionais).

Constatou-se uma acentuada diferença de **procedimentos** usados entre os sujeitos da escola A e os sujeitos da escola B. Os da escola A, usaram mais cálculos mentais obtidos por decomposição e composição não convencionais de números, permeando todas as questões da tarefa 2, o que indica um senso numérico bem desenvolvido. Os resultados das respostas dadas à questão 2-14 (estimativa de 1203 folhas divididas para cinco crianças) exemplificam, entre outras questões, a melhor operatoriedade mental e noção de quantidade nos sujeitos da escola A que nos da escola B.

Entre os sujeitos da escola A, 88,88% acertaram a questão 2.8 (n. 10) e metade o fez sem precisar de recurso escrito. Não houve erro de **raciocínio** na resolução da questão em nenhum sujeito da A. Dentre os sujeitos da escola B, 72,22% acertaram a referida questão, com a diferença que todos usaram recurso escrito de cálculo. Foi constatado erro de raciocínio (uso de operação adequada) em sujeitos da escola B, ao resolver a questão.

Uma maior incidência de tomada de consciência do erro no decorrer da aplicação da tarefa, parece anunciar, também, uma melhor construção do campo conceitual nos sujeitos envolvidos na proposta embasada em Dienes.

Os dados mostraram acentuada diferença nos resultados entre os sujeitos, da questão 2.9, até a questão 2.15, cujos procedimentos e raciocínios exigiam, com exceção da questão 2.13, para resolução da proposta, a **multiplicação ou divisão**.

A análise comparativa mostrou que 50% dos sujeitos da escola A usaram o resultado da questão 2.8 para obter o resultado da questão 2.9 em seus procedimentos, o que demonstra terem feito **relações** importantes para a conceituação numérica. Na resolução da questão 2.8 e 2.9 pôde-se observar que os sujeitos da escola A utilizaram em seus procedimentos, a soma de parcelas iguais lançando mão das relações de dobro e metade, ao passo que entre os sujeitos da escola B, apenas um sujeito usou esta relação. Os sujeitos da escola A também usaram, de forma correta, a relação (n. 10) para resolver a relação (n. 25), o que não aconteceu nas resoluções dos sujeitos da escola B.

Os resultados das questões 2.10, 2.11, 2.12 apontaram um nível muito baixo dos alunos da escola B, no que se refere à construção das **noções de dezenas, centenas e milhares, das estruturas de pensamento e da construção do senso numérico.** Dentre eles, menos da metade soube responder quantos dez existem dentro de 1203; apenas cerca da metade soube responder quantos cem tem em 1203 e somente 72,22% souberam quantos mil tem em 1203, tendo neste caso o material exposto à sua frente, composto de um bloco de mil folhas, dois blocos de cem e três folhas soltas. É possível observar que há uma construção melhor elaborada nos conceitos e noções numéricos dos sujeitos da escola "A" cujos acertos estiveram na ordem de 88,88%, 83,33% e 100%, nas referidas questões, respectivamente.

O trabalho escolar com dezenas, centenas e milhares dá indícios de ter sido melhor elaborado pelos sujeitos da escola A que pelos da escola B, também pelo desempenho dos sujeitos em toda a tarefa 3, especialmente, nas questões

3.3.a e 3.3.b, nas quais se pôde inferir que os sujeitos da escola A possuíram estruturas mentais para a compreensão e resolução das questões da Tarefa 3 que solicitou **a aplicação do princípio multiplicativo, implícito no sistema de numeração decimal.**

Na análise dos dados coletados nas questões **2.10, 2.11 e 2.12** foi possível perceber, entre os sujeitos da B um elevado índice de resultados incorretos, respostas ilógicas (com 1203 folhas posso fazer 12000 blocos de 10 folhas) e procedimentos mentais incorretos(1203 +10 ao invés de 1203 :10). Estes resultados apontam para uma deficiente noção de dezenas, centenas e milhares pois os sujeitos da escola B não puderam aplicar estas noções numa situação prática, que usualmente poderiam encontrar no cotidiano (como calcular :quantos blocos de dez há em 1203 folhas ou quantos blocos de cem e de mil em 1203 folhas). Cerca de 30% dos sujeitos não sabiam identificar a divisão como operação necessária. Alguns dos que acertaram precisaram fazer a divisão no papel, para saber a quantidade de dezenas ou centenas (não precisando para os de mil, possivelmente, porque as 1203 folhas não estavam soltas, à sua frente, mas arrumadas em um bloco de mil, dois de cem e três folhas soltas); mesmo assim houve 27,77 % de erros nesta questão.

Entre os sujeitos da escola A não houve erro quanto à identificação da divisão como operação mental a ser usada. A necessidade do uso de cálculo escrito foi restrita a poucos sujeitos da escola A. Os sujeitos que calcularam mentalmente apresentaram respostas que passaram por este raciocínio" em mil folhas tem cem blocos de dez; em cem folhas tem dez blocos de dez; então em mil duzentas e três tem cento e vinte folhas e sobram 3".

Constance Kamii (1995) referiu-se à conceitualização hierárquica necessária à construção do sistema de numeração decimal no qual a criança deve construir a "unidade" de dezenas, a" unidade" de centena, a "unidade' de milhar e assim por diante, sem perder o sistema de unidades, podendo pensar, simultaneamente em cada uma.

Kamii (1995) critica a forma tradicional de ensino que se utiliza especialmente do material de base 10, assinalando que, no caso, o sistema de numeração vem a ser visto apenas como a junção de dez em dez (dez unidades).

Os dados colhidos nas questões 2.11, 2.12, 2.13 mostram, como diz a autora citada (1995), que a forma tradicional de ensino, usando materiais base 10, pode ser pouco interessante porque parte do pressuposto de que idéias como "uma dezena" e "uma centena" podem ser simplesmente adquiridas por abstração empírica, com base nos objetos do mundo exterior.

Acreditamos, como Vergnaud, (1991) que o uso de diferentes bases favorece a compreensão do princípio fundamental da numeração: n, n.n, n.n.n,.., por abstrações reflexivas e que estas abstrações são as mesmas a que Kamii se refere em sua conceitualização hierárquica. " O conhecimento lógico-matemático só pode ser construído por abstração reflexiva (generalização construtiva), com base em relações previamente construídas pelo sujeito. Segundo Piaget, no reino do conhecimento lógico-matemático, as estruturas previamente construídas permanecem inteiras e intactas, ao serem construídas novas estruturas.

"As antigas estruturas integram-se às novas numa estrutura de ordem superior." "A criança não perde o sistema de unidades ao construir o sistema de dezenas." (Kamii,1995, p.29)

Na resolução da questão 2.13 que solicitava a repartição de 1203 folhas entre duas crianças de três modos diferentes (pensamento operatório aditivo), os sujeitos da escola A tiveram 94,44% de acertos nos índices de três e dois acertos ao passo que 66,65 % da B se localizaram entre os índices de três e dois acertos. Também nesta questão os sujeitos da escola A erraram menos e demonstraram relacionar com mais certeza as partes-todo do número.

Na questão 2.14, na qual se investiga a noção de número por meio de estimativas do resultado da divisão de 1203 folhas para 5 crianças, os resultados foram bastante favoráveis aos sujeitos da escola A que obtiveram 77,77% de respostas pertinentes às faixas de estimativas mais adequadas à questão. Apenas 33,33% dos sujeitos da escola B deram estimativas pertinentes e os outros distanciaram-se bastante das faixas de respostas lógicas. Alguns sujeitos da escola B fizeram estimativas tais como as que se seguem: Mar (10;0) disse **700** (10;3; Kam (10;3) e AP (11;0) disseram **500**, Leo (11;2) disse **630**, Jam (10;9) disse **1000**, Tha (10;3) disse **2000**, Wil (12;2), Lea (10;7) e Tal (10;0) disseram **400;**

Para resolver a questão 2.15 os sujeitos da escola B utilizaram-se do algoritmo convencional e houve considerada percentagem de erros, na busca do resultado. Constatou-se que os erros ocorreram em razão do deficiente emprego da técnica e da aplicação de operação inadequada para a resolução da situação-problema.

No caso dos sujeitos da escola A, não se verificou o uso da técnica convencional da divisão, pois nem sequer a conheciam sob forma escolarizada. Constatou-se elevado índice de acertos, tanto nos resultados quanto na utilização correta da operação para resolver a questão.

Não se verificou, na Tarefa 2, entre os sujeitos da escola A e da B, dificuldade nos fatos fundamentais da multiplicação (tabuada), mas nem por isso houve eqüivalência entre os índice de acerto nas questões de estrutura multiplicativa.

A Tarefa 3 exigiu, para sua resolução e aplicação, o princípio multiplicativo cuja elaboração mental apóia-se na estrutura multiplicativa do sistema de numeração decimal.

Os resultados indicaram uma possível falta de construção e compreensão do princípio multiplicativo entre os sujeitos da escola B, alunos de escola envolvidos num ensino que não adotava a proposta analisada nesta pesquisa.

Os dados coletados entre os sujeitos da escola A indicaram uma melhor construção das estruturas multiplicativas do sistema de numeração decimal (aplicado na questão 3.3.a e 3.3.b, bem como nas demais questões da tarefa 3).

Convém notar que conforme gráficos comparativos de erros e de respostas após contra argumentação da tarefa 3, pode-se observar que a tomada de consciência do erro aconteceu de maneira bastante acentuada entre os sujeitos da escola A, demostrando uma maior mobilidade de pensamento e uma reflexão sobre seus próprios procedimentos que permitem inferir uma melhor apropriação do conhecimento e uma escolaridade melhor aproveitada.

"A abstração reflexiva presente na tomada de consciência envolve o problema do enfrentamento de contradições e a superação das mesmas." (Rangel, 1992). O sujeito, ao se defrontar com idéias que contradizem as suas, só conseguirá tomar consciência de seu erro ou acerto, conforme sua capacidade de entender a realidade.

> *"Assim, a mais elementar 'compreensão' ou a mais elementar 'tomada de consciência' do que se passa, tanto no nível da ação como no da representação, implica entre o que é e o que não é, entre as relações necessárias e as contingentes." (Chiarotino,1984)*

Desse modo, os dados coletados denunciaram um maior números de sujeitos na escola A capazes de decidir, escolher e analisar os procedimentos, sujeitos capazes de justificar o seu raciocínio Na escola B, ao invés, houve um significativo número de sujeitos os quais não se mostraram capazes de pensar sobre o próprio raciocínio.

Os dados desta pesquisa revelaram a ausência de estruturas multiplicativas na maioria dos sujeitos trabalhados na escola B. Kamii critica o trabalho com diferentes bases talvez por analisá-lo na proposta original, e, eventualmente, mais estruturado, e rigidamente apresentado sobre diferentes bases com as deficiências e exageros do início de sua aplicação por Dienes, julgando-o eficiente apenas para alunos bem dotados em seu desenvolvimento cognitivo.

Lerner (1992) assinala que a tentativa de materializar a noção de agrupamentos em base 10 e em outras bases, não favorece a relação entre os agrupamentos e a escrita numérica. Lerner entende que mais importante é a analise da escrita numérica pela interação entre os sujeitos com a intervenção do professor, pois a escrita numérica é objeto de uso social cotidiano e produto cultural.

Vergnaud (1991) afirma que as diferentes bases, em especial, as menores (3,4,5) possibilitam aos alunos abstrair e generalizar o princípio multiplicativo implícito no sistema de numeração decimal, e ampliar inúmeras relações operatórias importantes ao conceito de número, como, por exemplo as propriedades numéricas incorporadas às estruturas de pensamento.

Os dados coletados indicam resultados interessantes do trabalho com diferentes bases fundamentadas na Teoria de Dienes (escola A) em comparação com outra maneira de trabalho no sistema de numeração decimal (escola B).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho delineou-se o perfil da construção do conjunto de Números Naturais e do Sistema de Numeração Decimal por meio da análise do resultado do desempenho de alunos de 4ª série do 1º grau de escolas com propostas diferentes de ensino quanto à distribuição dos conteúdos, estratégias usadas e intervenções: uma escola (A) com proposta pedagógica de fundamentação piagetiana, embasada em Dienes e, outra escola (B) com proposta de ensino da Rede Oficial. Embora a Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (CENP) tenha definido em seus guias uma orientação construtivista para o ensino da Matemática, esta nem sempre se efetiva, na prática.

Neste estudo foram considerados três aspectos: o primeiro, que diz respeito às regularidades do Sistema de Numeração Decimal (Tarefa 1); o segundo, que diz respeito à noção de quantidade dos números grandes e ao raciocínio operatório e suas propriedades (Tarefa 2) e o terceiro, que diz respeito às estruturas do princípio multiplicativo implícitas nas ordens e classes do Sistema de Numeração Decimal Tarefa 3).

Com relação ao primeiro aspecto, pôde-se concluir que aquilo que se refere às regularidades do Sistema de Numeração Decimal os sujeitos de ambas as escolas demonstraram ter construído as relações que possibilitam a leitura, a escrita, o valor posicional e hierárquico dos números.

Em relação à noção de quantidade ou ao senso numérico, conforme se refere Kamii (1995), o que se pôde constatar foi que os sujeitos da escola A conseguiram lidar com quantidades numéricas, resolvendo as questões por meio de procedimentos pessoais ou convencionais, porém sempre com significado, demonstrando sólida construção do senso numérico. Na escola B constatou-se que os sujeitos, na maioria, não operavam mentalmente as quantidades numéricas e, mesmo alguns sujeitos que acertaram muitas das questões e pareciam estar construindo da melhor maneira possível o conhecimento, não sabiam por que utilizavam alguns procedimentos. No algoritmo convencional da multiplicação, por exemplo, na hora de somar, alguns sujeitos não sabiam por que colocavam um sinal de mais (+) na segunda parcela (1ª ordem), justificando, quando interrogados, que "a professora disse que tinha que usar para não errar a conta" .ou, ainda, como Lau, que fez uma divisão convencional no sentido contrário, ou seja, começando das unidades e disse "faz tempo que a professora não dá este tipo de conta para fazer". Constatou-se que a maior parte dos sujeitos da escola B limitou-se a repetir a técnicas dos algoritmos, e construiu de modo restrito a operatoriedade aditiva e multiplicativa.

Quanto à noção de quantidade e operatoriedade, as respostas dadas pelos sujeitos à questão 2.14, que pedia uma estimativa da divisão de 1203 folhas para cinco crianças, mostraram que os sujeitos da escola A deram respostas pertinentes e só foram encontradas poucas respostas ilógicas. Já na escola B foram encontradas poucas respostas pertinentes e uma grande maioria de respostas ilógicas, distantes de um número possível.

Com relação às dezenas, centenas e milhares encontrou-se uma diferença acentuada na construção destas noções e foi possível notar as deficiências do ensino do Sistema de Numeração Decimal descritas por Kamii (1995)nos sujeitos da escola B, a qual pode ser considerada uma amostragem da escolaridade brasileira.

A autora (1995) igualmente assinalou que a multiplicação e a divisão que envolvem "dez" e "cem" parecem mais fáceis para as crianças do que as que envolvem outros números. "Multiplicar um número de dois dígitos por um múltiplo de dez não é muito difícil para estudantes avançados de 3ª série" (Kamii, 1995, p. 223). Verificou-se, no entanto, que na questão 2.8, que pedia ao sujeito a solução de quantas folhas seriam necessárias para se dar a dez crianças uma caixa como a da pesquisadora, foi encontrado um índice de erros de 33,33% nos sujeitos da escola B (4ª série). Esta questão, porém, se analisada entre outras que envolviam multiplicação e divisão (2.8 a 2.12 e 2.15), foi ainda a que teve menor número de respostas incorretas dos sujeitos da escola B. Já os sujeitos da escola A demonstraram desembaraço no procedimento de raciocínio multiplicativo, particularmente ao operarem com dezenas ou centenas exatas. No caso da questão 2.8 os sujeitos da escola A tiveram 11,11% de respostas incorretas.

Dentre os sujeitos da escola A, em todas as questões, quase não foram encontrados erros conceituais no uso de operações para resolução das questões. A este respeito, pode-se observar que o mesmo não aconteceu em relação aos sujeitos da escola B, pois encontraram-se diversos erros conceituais na resolução de problemas bastante simples como os apresentados na Tarefa 2, cujos assuntos focalizados foram folhas de papel e operações próprias da realidade do aluno.

Encontrou-se diferença acentuada na operatoriedade de estruturas multiplicativas entre os sujeitos da escola A e os da escola B. Em se tratando do princípio multiplicativo do Sistema de Numeração Decimal e demais estruturas multiplicativas, constatou-se que os sujeitos da escola A possuem, com acentuada diferença, um campo conceitual do princípio multiplicativo melhor desenvolvido que os sujeitos da escola B. Tais estruturas serão possivelmente necessárias às aprendizagens e construções de novos conceitos de área, volume, tempo, decimais, razão e proporção e outros conceitos.

Os resultados obtidos falam em favor da proposta de ensino da escola A, que parece favorecer aos sujeitos a construção de estruturas multiplicativas, bem como a operatoriedade e a noção de quantidade.

Tais resultados confirmam estudos anteriores os quais salientam que as estruturas multiplicativas devem passar necessariamente pelo desenvolvimento e aprendizagem que nem sempre o dia-a-dia oferece ao sujeito. A construção destas estruturas depende de uma didática melhor elaborada e é de responsabilidade da escola.

A análise desta pesquisa revelou que o trabalho realizado na escola, em geral não dá conta de garantir a operacionalização das estruturas multiplicativas, nem tampouco da construção do número e do Sistema de Numeração Decimal. A análise dos dados coletados das respostas dos sujeitos da escola B deixam confirmados estes aspectos.

Os resultados mostraram que é possível concordar com Dienes sobre o uso dos quatro princípios de sua teoria que pode oportunizar melhores abstrações reflexivas e generalizações.

A proposta da escola A, ao lidar, por exemplo, com atividades de diferentes bases em situações-problema, acompanhadas da intervenção do professor, parece possibilitar ao aluno maior número de relações importantes que preparam estruturas de pensamento de conteúdos que se entrelaçam em sua psicogênese nas situações, nos procedimentos, nas representações e nos conceitos, diferentemente do ensino tradicional que assegura o conhecimento em conteúdos estanques, numa estereotipada organização .

No que se refere ao valor do uso de procedimentos convencionais, que é uma exigência tradicional da escola, ou a ausência desse procedimento, segundo proposta de Kamii e de outros estudiosos, ou, ainda, seu uso após o desenvolvimento de operadores aditivos e multiplicativos em procedimentos pessoais e igualmente o uso de diferentes bases, como proposta da escola A e de outras poucas, os dados parecem indicar que a proposta da escola A traz resultados bastante satisfatórios para os objetivos da Educação Matemática.

Como assinala Kamii (1995), o uso precoce de algoritmos convencionais em crianças que estão desenvolvendo a construção do número, pode ser prejudicial e deformante. Para a autora, os algoritmos devem ser ensinados a adultos que já compreenderam o valor posicional do número. Os resultados dos sujeitos da escola A confirmam que crianças podem aprender algoritmos e fazê-los com compreensão, desde que tenham garantido a construção anterior da noção de quantidade dos números, desenvolvido muitas relações em seus procedimentos pessoais, utilizando-se de operadores aditivos e multiplicativos com significado e adquirido as estruturas do princípio multiplicativo do Sistema de Numeração Decimal.

A capacidade de tomada de consciência, investigada neste trabalho de pesquisa, revelou dados a favor da aprendizagem que é feita pela troca de opiniões entre os sujeitos. Os desempenhos dos sujeitos da escola A, em relação à tomada de consciência do erro, indicam que um trabalho em que se valorize e permita a troca de idéias entre alunos, as discussões em sala de aula dos procedimentos pessoais podem surtir melhores resultados em Educação Matemática que aquele cujo saber está na autoridade intelectual dos adultos.

Piaget refere-se à interação social como indispensável ao desenvolvimento do pensamento lógico. Para este autor, o confronto de pontos de vista é importante para o desenvolvimento do conhecimento lógico-matemático, porque coloca a criança num contexto social que a leva a pensar sobre os outros pontos de vista em relação ao seu próprio. Esclarece, ainda, que a interação social contribui de maneira diferente para a aquisição do conhecimento social e para a construção do raciocínio lógico-matemático. O conhecimento social refere-se à transmissão de informações de conteúdos socialmente estabelecidos, ao passo que a confrontação de idéias moderadamente diferentes a propósito de uma mesma situação mobiliza e força as reestruturações e o progresso intelectual. Para os cognitivistas este confronto ocasiona um conflito sócio-cognitivo resultado da confrontação entre esquemas de sujeitos diferentes, produto da interação social.

Na proposta de um método ativo podem ser criadas, com material disponível, situações específicas que têm por finalidade ativar os sistemas de assimilação da criança. "Os estudos realizados a partir destas situações mostram que os conflitos que surgem entre as hipóteses emitidas pelas crianças e os fatos observados originam sentimentos de contradição que, em muitos casos, dão lugar a compensações e consequentemente, a níveis de compreensão da realidade, cada vez mais complexos." (Inhelder et alii, 1977). A análise dos dados da tomada de consciência do erro entre os sujeitos das duas escolas apontou para a importância da interação entre os sujeitos e da intervenção do professor nas situações de troca de pontos de vista, de análise dos diferentes procedimentos, o que parece propiciar abstrações reflexivas com tomadas de consciência e melhor construção de conhecimento.

No desempenho da Tarefa 3 a qual se referiu à contagem de sócios nas turmas de convidados pôde-se observar, por meio dos resultados que os sujeitos da escola A tinham desembaraço em rever seu próprio pensamento, compará-lo com outros (contra-argumentação), fazendo diferenciações e integrações das relações necessárias à resolução das questões. Os sujeitos da escola B não apresentaram este desembaraço e, mesmo depois das segundas perguntas da investigadora, continuavam apresentando total imobilidade nos percentuais de respostas corretas e incorretas.

Constatou-se que a pesquisadora, ao repetir o que tinha sido dito pelo sujeito, ao levá-lo a responder como resolveu a questão ou ao fazer a contra-argumentação, favorecia a muitos dos sujeitos na organização de seus pensamentos, auxiliando-os, desse modo, na tomada de consciência de seus erros.

Não seria exatamente este o papel do professor construtivista que não é mais aquele que só transmite conhecimento, mas o que faz pensar?

Quando o professor está atento para considerar os procedimentos pessoais, pode compreender melhor o raciocínio dos alunos e as hipóteses que levanta. As perguntas adequadas, colocadas na hora certa, contribuem para que o aluno possa, por abstração reflexiva, tomar consciência e retomar seus erros.

Consideramos, como outros estudiosos, que o ensino do Sistema de Numeração Decimal, que perpassa as quatro séries iniciais do 1º Grau, envolve relações mentais complexas, ligadas ao conceito de número e suas propriedades, além do princípio multiplicativo, característica essencial desse Sistema. Como tal, a didática em sala de aula, no ensino desse Sistema de Numeração, deverá ser minuciosamente estudada, analisada e revista.

Com base na análise dos dados desta pesquisa e de outros trabalhos, tais como os de Silva, Carraher, Kamii e do conhecimento que se tem sobre programa de ensino tradicional, sentiu-se a necessidade de destacar alguns itens que merecem reflexão por parte dos envolvidos em Educação:

- Qual o grau de interesse, envolvimento e significado que o estudante pode ter no processo ensino-aprendizagem, se não alcançar estruturas mentais necessárias a essa aprendizagem?
- Qual o papel do professor no processo ensino-aprendizagem? Qual a importância em desencadear por meio do conflito cognitivo a tomada de consciência do erro?
- O que pode ser mais interessante e relevante para o aluno: saber utilizar algoritmos convencionais, em programas adiantados de ensino que são esquecidos quando em desuso, ou ser capaz de usar procedimentos pessoais diversos para a solução de diferentes tarefas?
- Como será a aprendizagem de conceitos mais complexos, como os de cálculos de decimais, potenciação, radiciação, polinômios...dos alunos que não tenham construído solidamente o conceito de Sistema de Numeração Decimal?
- Se as estruturas referidas aqui não forem desenvolvidas pela escola, no decorrer do período operatório completo, qual o comprometimento da aprendizagem futura, da maioria da comunidade escolar, aqui representada na amostra da escola B, ao darem continuidade aos seus estudos?
- O Sistema de Numeração Decimal pobremente trabalhado pela escola e a precocidade em que se apresentam aos alunos as técnicas operacionais, conforme cita Kamii em suas pesquisas e publicações (1993,1995), poderá ser um fator relevante na construção deficiente no conceito de Número Natural que servirá de base futura para os conceitos de outros conjuntos numéricos (Q, Z, R)?

O Sistema de Numeração Decimal traz em sua estrutura a multiplicação e divisão que são conteúdos importantes para o desenvolvimento da inteligência e precisam ser adequadamente abordados no contexto escolar, pois devem contribuir à formação de novas estruturas mentais, em estudos posteriores, que se entrelaçam num campo conceitual cada vez maior.

Esperamos, de alguma forma, poder ter contribuído para a reflexão da prática de ensino e seu papel no desenvolvimento das estruturas cognitivas; para a importância da atuação do professor como elemento propulsor do âmbito escolar; para a revisão da distribuição dos conteúdos da Educação Matemática nas séries iniciais do Primeiro Grau.

Este estudo foi sustentado pelo envolvimento e pelo compromisso com o fazer pedagógico que avança pela paixão de aprender e de ensinar a aprender.

BIBLIOGRAFIA

ASSIS, Orly Zucato Mantovani. *A solicitação do meio e a construção de estruturas lógicas elementares na criança.* Unicamp F.E. 1976.

BALDWIN, Alfred C. *Teorias de desenvolvimento da criança.* São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1973.

BECKER, Fernando. *A epistemologia do professor.* Petrópolis: Vozes, 1994.

__________. *Da ação à operação. O caminho da* em *aprendizagem,* J. Piaget e P. Freire. Porto Alegre: Est. Palmarinca. Educação e Realidade, 1993.

__________. *Ensino e construção do conhecimento. O processo de abstração reflexionante.* Revista Educação e Realidade. Porto Alegre. Jan/Jun, 1993.

BRENELLI, Rosely Palermo. Intervenção pedagógica via jogo Quilles e Cilada, para favorecer a construção de estruturas operatórias e noções aritméticas em crianças com dificuldade de aprendizagem, Unicamp. F.E., 1993.

Caderno AMAE 1. *Matemática em construção.* Fundação AMAE para Educação e Cultura.

Caderno de Pesquisa. Fundação Carlos Chagas. Agosto/ 1990, número 74.

CARRAHER,T.N. e SCHLIEMANN, A.D. *Computation routines prescribed by schols:Help or hindrance?* Journal for Research in Mathematics Education, nº16, 1985

CARRAHER, T.N, CARRAHER,D.W., e SCHLIEMANN, A .D. .*Writtten and oral mathematics.* Journal for Research in Mathematics Education,nº 18, 1987.

CARRAHER, Terezinha N. *Aprender pensando.* Petrópolis: Vozes. 1989.

CARVALHO, Dione Luchesi. *Coleção ensinando aprendendo.* Cadernos Brasileiros de Educação. São Paulo: Balieiro, 1986.

CECCON, Claudius; OLIVEIRA, Miguel Darcy e OLIVEIRA, Rosiska Darcy. *A vida na escola e a escola da vida*. Petrópolis: Vozes, 1991.

CHIAROTTINO,Zélia. Ramozzi. Em busca do sentido da obra de Jean Piaget.São paulo,Ática,1984.

CHIAROTTINO, Zélia Ramozzi. *Psicologia e epistemologia Genética de Jean Piaget*. Coleção temas básicos de Psicologia. Coordenadora/ Rappaport, Clara Regina. Grupo de Ed. de Livros Universitários, 1988.

COLL, Cesar. *Aprendizagem escolar e construção do conhecimento*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

COLOMB, Jacques.Apprentissages Mathematique à l'école élémentaire- cycle elementaire, tome 2. ERMEL 1978.

CRUSIUS, M. Fralho; GOMES, Carmem H. P. e DANYLUK, Ocsana. *Sistema de numeração e operações em diversas bases*. Gráfica e Editora UPF - R.S., 1977.

DIENES, Z. P. & GOLDING, E. W. *Conjuntos, Números e Potências*, São Paulo: Editora Herder, 1969.

__________. *As seis etapas do processo de aprendizagem*. São Paulo, Editora Herder, 1970.

__________. *Aprendizado moderno da matemática*. Rio de Janeiro: Zahar Editora, 1974.

FLAVELL John H.,*A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget*. São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1988.

GRÉCO, Pierre. *Aprendizagem e conhecimento*. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.

GRÉCO,P.,MORF,A.,Structures numériques élémentaires,Vol XIII (Colección de estudios de epistemologia Genética)P.U.F.,Paris,1962.

GROSSI, Esther Pillar. *Numeração em diversas bases. Trabalho de conclusão do curso de Psicologia da Aprendizagem*. Faculdade de Ciências de Paris-Sorbonne. Cópia da Tese de Mestrado, sem data.

__________. Um espaço para ficar inteligente. EDELBRA. Série Didática Pós-Piagetiana, sem data.

GROSSMAN, Sara. *Desenvolvimento das estruturas lógicas e desempenho escolar*. Campinas: 1988, Tese de Mestrado.

INHELDER, B. et al. *Psychologie et 'Epistémologie Genétiques: thermes piagetiens*. Paris, Dunod, 1966 (Homenage a Jean Piaget).

INHELDER, B., BOVET, M., e SINCLAIR, H. M. *Learning and the development of cognition*. Cambridge, MA:Harvard University Press,1974

INHELDER, B., BOVET, M., e SINCLAIR, H. .*Aprendizagem e estruturas do conhecimento*. São Paulo: Saraiva 1977.

INHELDER, B., BOVET, M., e SINCLAIR, H. *Aprendizagem e estruturas do conhecimento*. São Paulo: Saraiva,1977.

INHELDER, B. e PIAGET,P. *De l' interation des actios à la recurrence élémentaire*. In P.Greco,B. Inhelder ,B. Matalon e J. Piaget (Eds) La formation des raisonnements récurrentiels. Paris, Presses Universitaires de France.1963

KAMII, Constance. *A criança e o número*. Campinas: Papirus, 1984.

_________. *Reinventando a aritmética*. Campinas: Papirus, 1990.

_________. *Aritmética, novas perspectivas*. Campinas: Papirus, 1993.

_________. *Desvendando a aritmética*. Campinas: Papirus, 1995.

KAMII, Constance e DEVRIES, Rhita. *Jogos em grupos na educação infantil*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1991.

LEITE, Luci Banks e colaboradores. *Piaget e a Escola de* Genebra. Cortez Editora, 1987.

LERNER, Délia y SADOVISKY, Patrícia. *El Sistema de Numaraico: un problema didactico*. In: Parra, Cecília y Saiz, Irma (comps): Didática de las Matemáticas: Aportes y reflexiones.Argentina:Paidos,1994.

MACEDO, Lino de. *Ensaios construtivistas*. Coleção Psicologia e Educação. Casa do Psicólogo Livraria e Editora, 1994.

NACARATO, A. M. *A construção do conceito de número na educação escolarizada*.UNICAMP. Tese de Mestrado. 1995.

PARRA, Nélio. *O adolescente segundo Piaget*. biblioteca Pioneira de Ciências Sociais. São Paulo: Pioneira, 1983.

PIAGET, Jean. *La ensenannça de las matemáticas*. Madrid, Aguilar, 1968.

_________. *Biologia e conhecimento*. Petrópolis: Editora Vozes, 1973.

_________. *Problemas de epistemologia genética*. Rio de Janeiro: Forense, 1973

_________. *Recherches sur la contradicion 1 e 2*. Paris: P.U.FF, 1974.

_________. *Ensaio da lógica operatória*. Porto Alegre: Globo, 1976

__________. *A equilibração das estruturas cognitivas. Problema central do desenvolvimento.* Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

__________. *A tomada de consciência.* São Paulo: Editora Universal, 1977.

__________. *Fazer e compreender.* São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1978.

__________. *Las formas elementales de la dialética.* Gedisa, 1982.

__________. *O possível e o necessário. Evolução dos possíveis na criança.* vol. I. Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1985.

__________. *Para onde vai a educação.* São Paulo: José Olympio Editora, 1991.

PIAGET, Jean e colaboradores. *Abstração reflexionante: relações lógico-elementares e ordem das relações espaciais.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PIAGET, Jean & INHELDER, B. *A origem da idéia do acaso na criança.* Record Cultural, R.J. 1951.

________. *Da lógica da criança à lógica do adolescente.* Biblioteca Pioneira de Ciências Sociais, 1976.

________. *Gênese das estruturas lógicas elementares.* Rio de Janeiro: Zahar Editora, 1959.

PIAGET, Jean & SZIMINASKA, A. *A gênese do número na criança.* Rio de Janeiro: Zahar Editora, 1981.

RAMOS, Luzia Faraco. *O segredo dos números.* São Paulo: Editora Ática, 1994.

RANGEL, Ana Cristina Souza. *Educação matemática e a construção do número pela criança. Uma experiência em diferentes contextos sócio-econômicos.* Porto Alegre: Editora Artes Médicas do Sul Ltda., 1992.

RAPPAPORT, Clara R., FIORI, Wagner Rocha e DAVIS, Claudia. *Psicologia do desenvolvimento. A idade escolar e a adolescência* Vol. 4. Editora Pedagógica Universal Ltda, 1982.

RAPPAPORT, Clara R., FIORI,W.Rocha e DAVIS, Claudia. *Teorias do Desenvolvimento* vol.1-Edit. Pedagógica Universal -1982.

RESNICK, L. B. .*A developmental theory of number understanding.* In H. P. Ginsburg, The development of mathematical thinking, N. Iorque: Academic Press,1983

REVISTA EDUCAÇÃO E REALIDADE. *Construindo o* Construtivismo.vol.19 n. 1 jan/jun, 1994.

ROSS, S. H. .*The development of children's place- value numeration concepts in grades two through five. Paper* apresentado no encontro anual de American Educational Research Associat, São Francisco, abril 1986.

__________. Children's aquisition of place- value numeration concepts. The roles of cognitive development and instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. vol. 12, nº 1, 1990.

SCHLIEMANN, Ana Lucia Dias, CARRAHER, David William & CARRAHER, Terezinha Nunes. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez, 1989.

SILVA, Zélia M.M.Higino. *Por quê é difícil para a criança aprender a fazer continhas no papel?* Tese de Mestrado. Univ. Fed. Pernambuco. Recife (1987).

SISTO, Fermino F. *Fundamentos para uma aprendizagem construtivista. Proposições*. Rev.Quadrim. Faculdade de Ed. Unicamp vol.4 (1993).

TABOAS, C.M.Guacelli. *O número e sua historia cultural. Fundamentos necessários na formação do professor*. Unicamp (1993) tese mestrado.

TEIXEIRA, Leny M. T. .*Aprendizagem escolar de números inteiros: análise do processo na perspectiva construtivista piagetiana*. Tese de doutorado, São Paulo: USP, 1992.

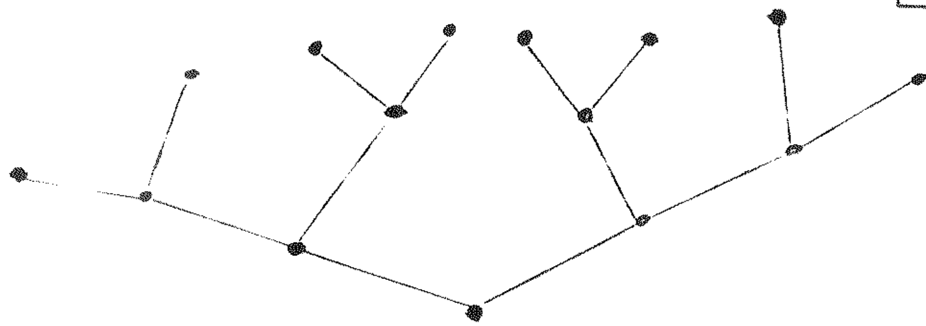
VERGNAUD, Gérard. *El nino, las matematicas y la realidad: Problemas de la ensenãnza de las matematicas en la escuela primaria*. Mexico: Trillas, 1991.

WADSWORTH, Barry J. *Inteligência e Afetividade da Criança na Teoria de Piaget*. São Paulo: Pioneira, 1993.

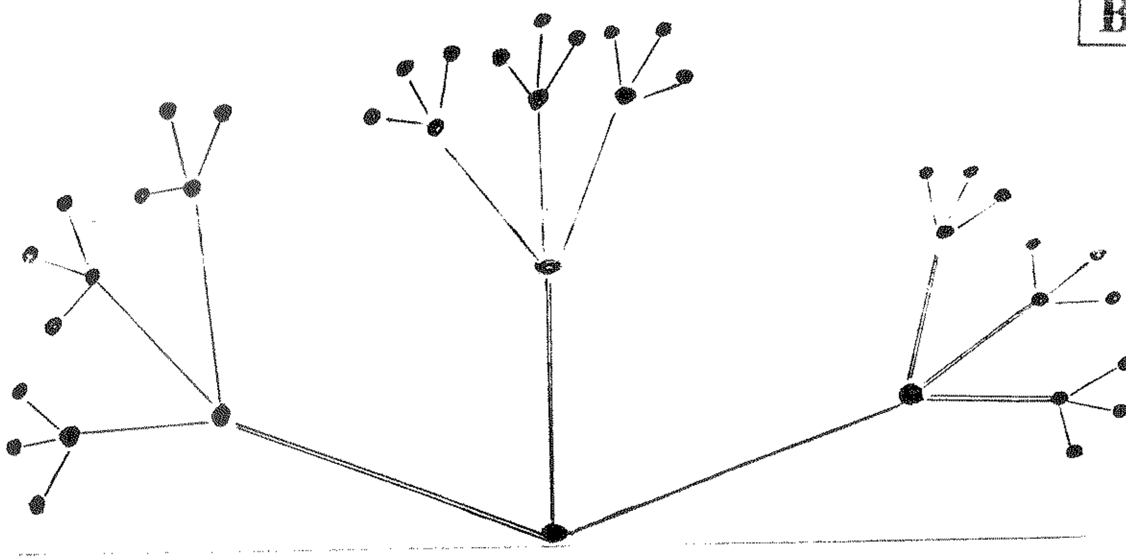
ANEXOS

ANEXO 1

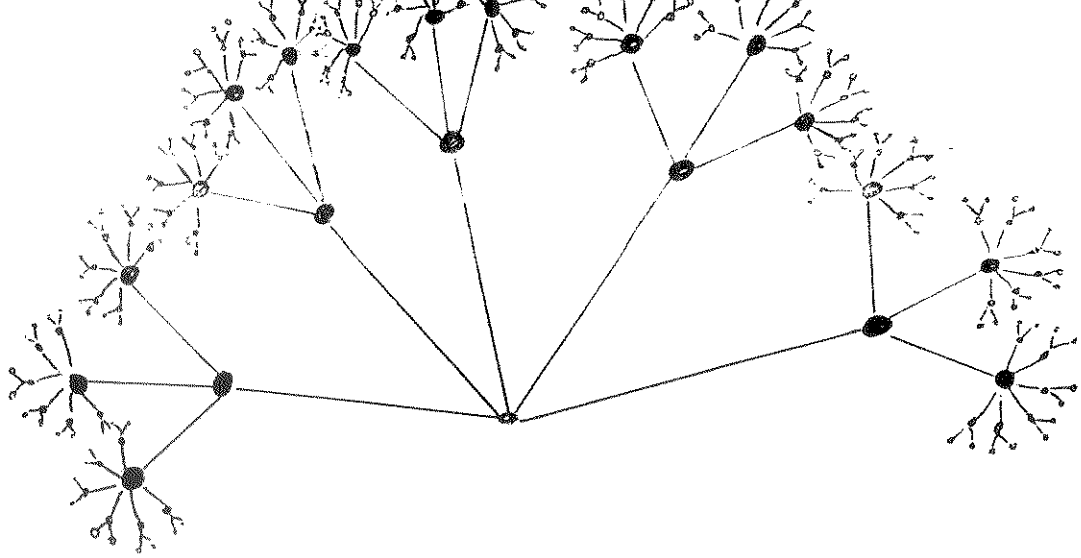
A

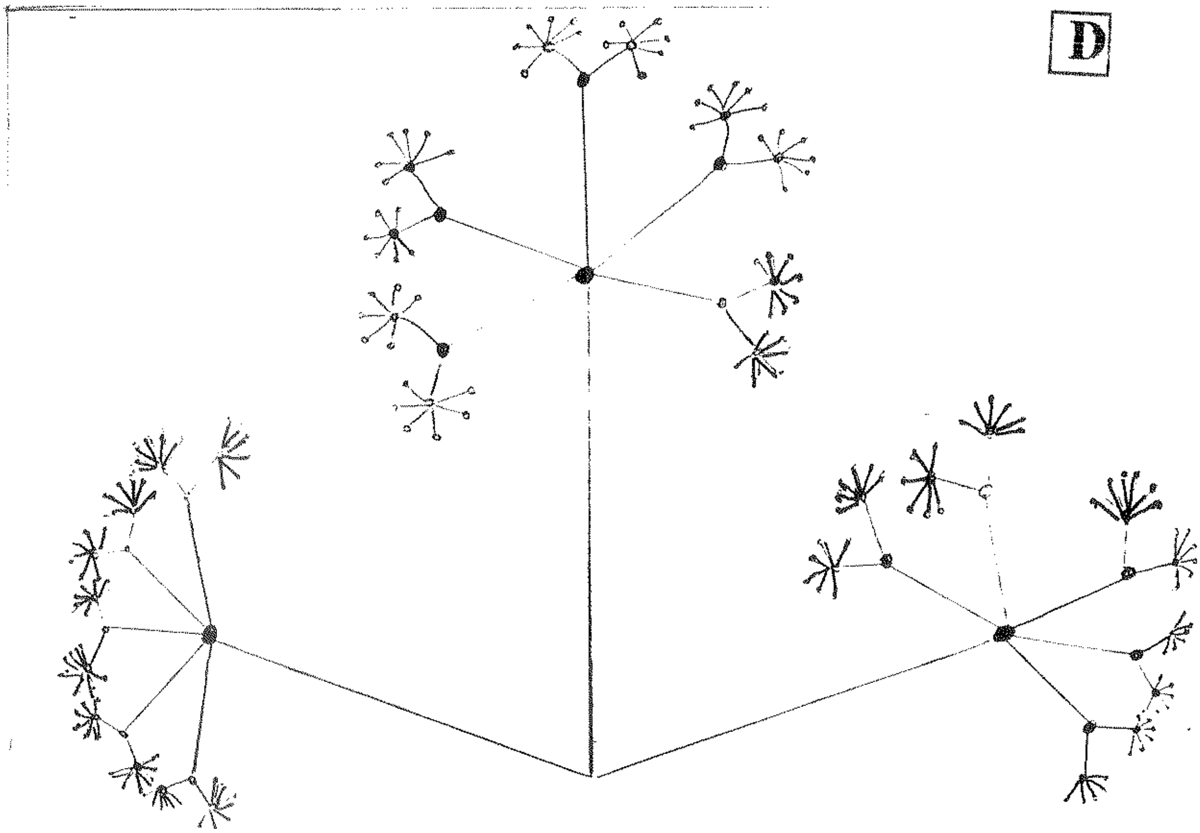


B

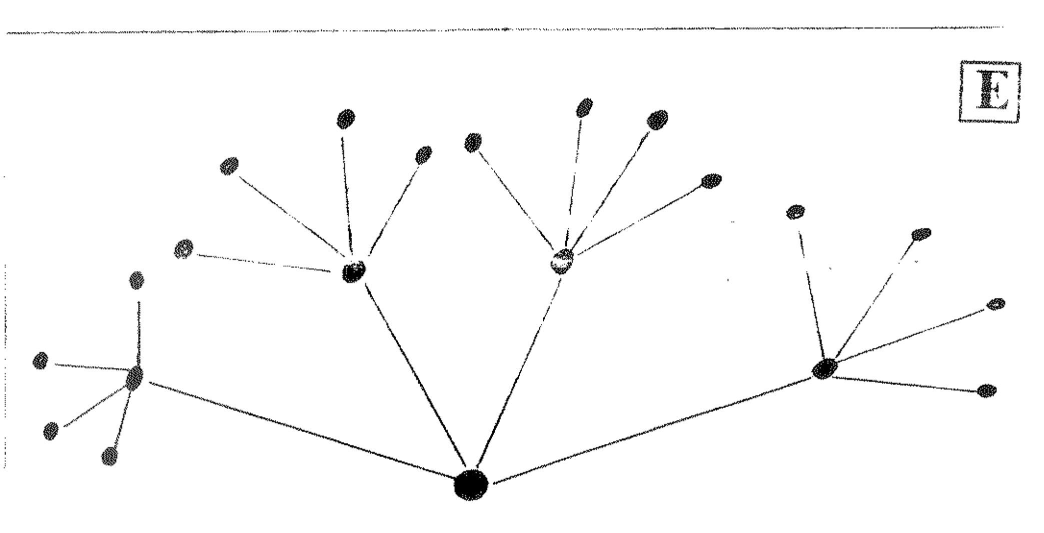


C





D



E

ANEXO 2

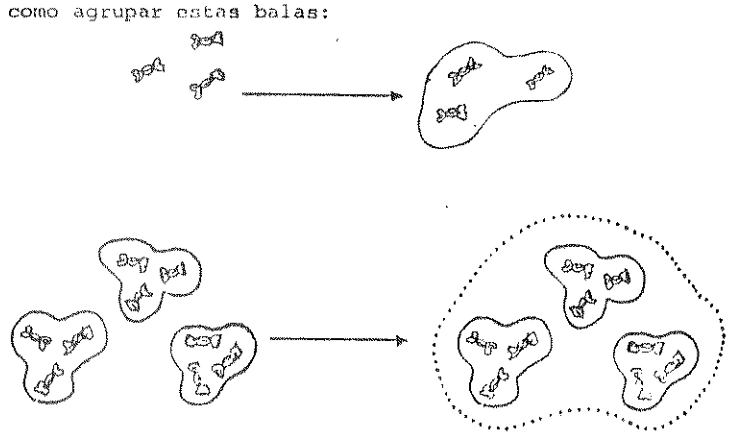
Fichas de trabalho individual ou em parcerias

(aplicadas após desenvolvimento de atividades concretas)

ATIVIDADE 1

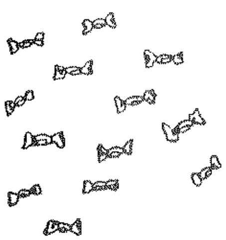
Contorne em vermelho os agrupamentos pontilhados em todas as páginas desta ficha.

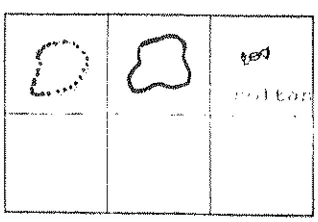
Veja como agrupar estas balas:



1 - Agrupe as balas.

Registre os agrupamentos que você conseguiu fazer e as balas que ficaram soltas.

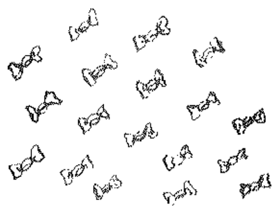




O conjunto de fichas apresentadas neste anexo (2) foram elaboradas pela Escola Vera Cruz que mantém assessoria pedagógica com a escola A , objeto de estudo desta pesquisa.

Agrupe as balas.

Registre os agrupamentos que você conseguiu fazer e as balas que ficaram soltas.



		soltas

		soltas

2 - Desenhe o que eu registrei:

		soltas
1	2	0

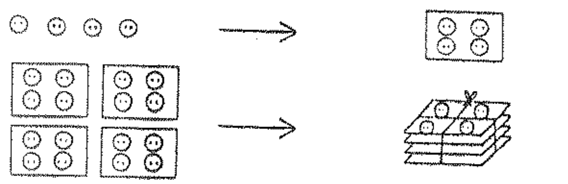
3 - Agora é você quem faz tudo:

As balas agrupadas e o registro.

		soltas

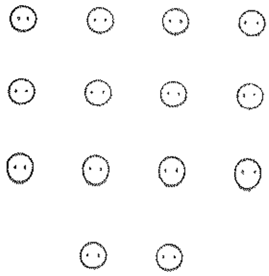
AGRUPAMENTO

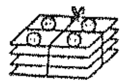
Veja como são vendidos os botões:

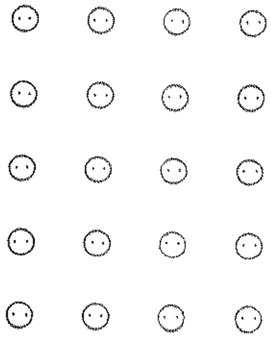


Arrume os botões a seguir.

Depois, registre suas arrumações.

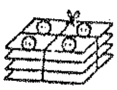
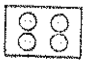


		 SOLTOS

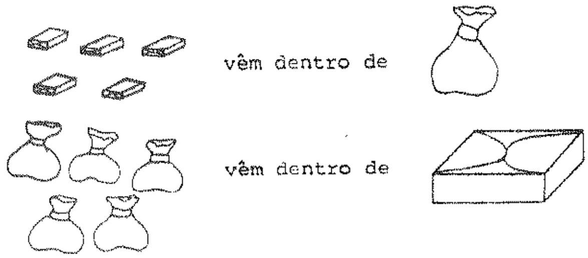


		 SOLTOS

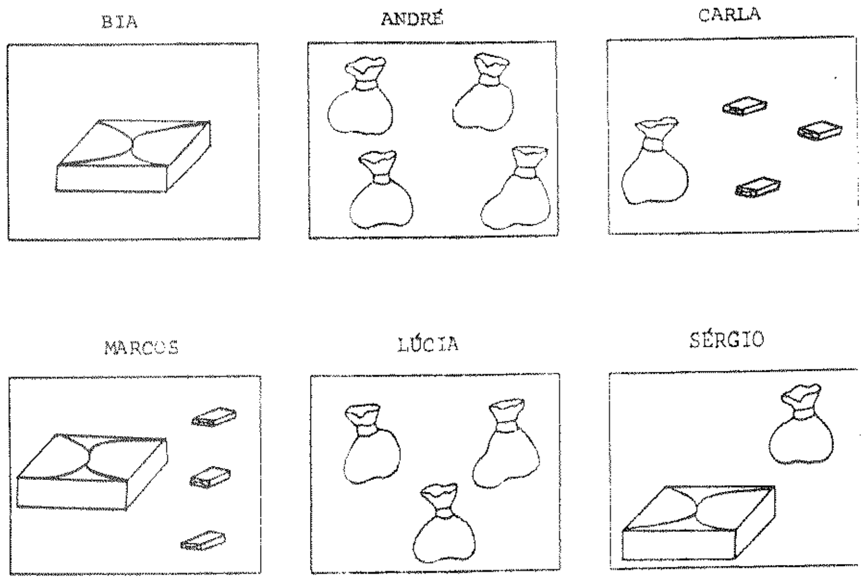
Desenhe os botões que o registro indica:

		
1	2	0

Na padaria estão vendendo chicletes assim:



1- Veja o que cada criança comprou:



2- Ordene os nomes das crianças de <u>quem comprou menos</u> chicletes para quem comprou mais chicletes:

________ → ________ → ________ →

→ ________ → ________ → ________

3- Complete e calcule:

a) Quem comprou <u>menos chicletes de todos</u> foi _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Comprou <u>ao todo</u> _ _ _ _ _ _ chicletes.

b) Quem comprou <u>mais chicletes de todos</u> foi _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Comprou <u>ao todo</u> _ _ _ _ _ _ _chicletes.

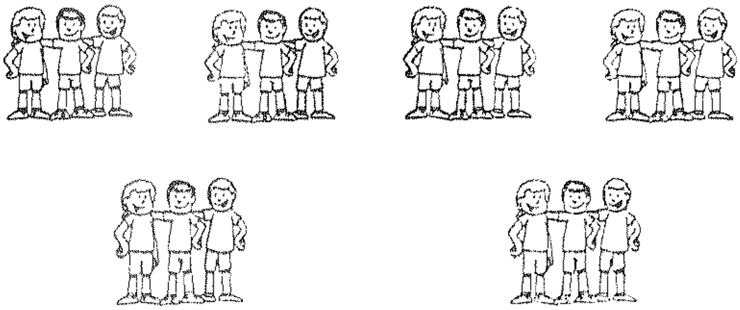
c) André comprou _ _ _ _ _ chicletes <u>a mais</u> que Lúcia.

Lembram-se do jogo que fizeram na arena?

cada	3	crianças dão corrupios.
cada	3	corrupios brincam de galinha do vizinho.
cada	3	galinhas do vizinho brincam de telefone sem fio.

1 - Agrupe estas crianças e descubra como elas terminaram a brincadeira.

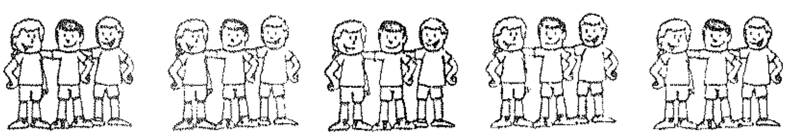
Depois, faça o registro.

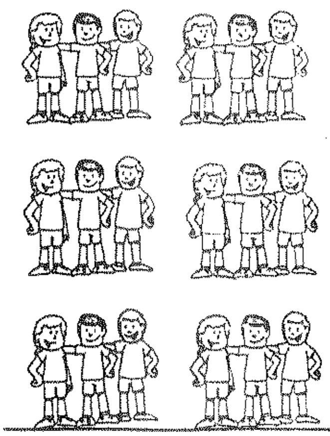


TELEFONE SEM FIO	GALINHA DO VIZINHO	CORRUPIO	PULANDO

2 - Também agrupe estas crianças e descubra como elas terminaram a brincadeira.

Depois, faça o registro:





TELEFONE SEM FIO	GALINHA DO VIZINHO	CORRUPIO	PULANDO

3 - Desenhe como estas crianças terminaram a brincadeira.

TELEFONE SEM FIO	GALINHA DO VIZI NHO	CORRUPIO	PULANDO
0	2	0	1

Quantas crianças ao todo entraram nessa brincadeira? ________

4 - Um outro grupo de 16 crianças também fez essa brincadeira.

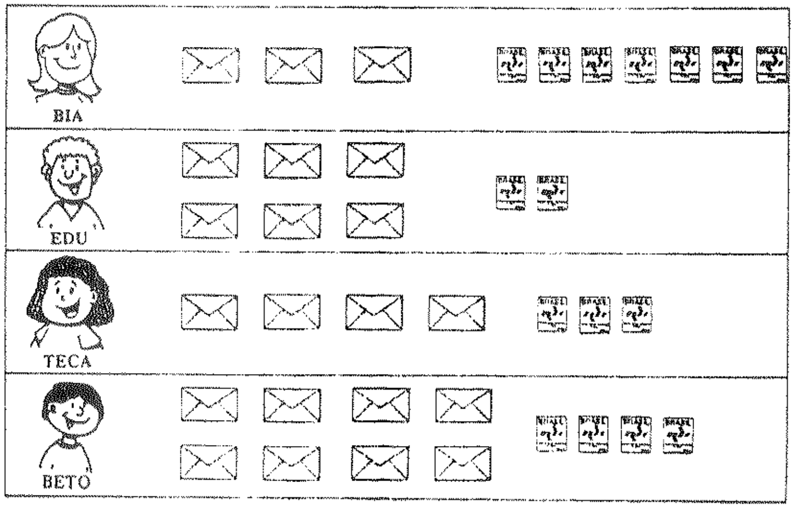
Como elas conseguiram terminar?

Desenhe e registre.

TELEFONE SEM FIO	GALINHA DO VIZI NHO	CORRUPIO	PULANDO

Agrupamento e Código - Base 10

1- Estas crianças guardaram 10 selos em cada envelope. Alguns selos não couberam nos envelopes.
Veja:



a) Qual criança guardou menos selos? ______________________

Quantos selos ela guardou? ______________________

b) Qual criança guardou mais selos? ______________________

Quantos selos ela guardou? ______________________

2- Complete o quadro abaixo com os selos que cada criança guardou.

	10 GRUPOS DE 10 OU CENTENAS	GRUPOS DE 10 OU DEZENAS	SELOS SOLTOS OU UNIDADES
BIA			
EDU			
TECA			
BETO			

AO TODO			

3- Observando o quadro, complete:

Ex.: Bia guardou:

_____ dezenas + _____ unidade ou

30 + _____ ou

10 + _____ + _____ + 7 selos.

Beto guardou:

______________________ ou

______________________ ou

______________________ selos.

As quatro crianças guardaram ao todo:

______________________ ou

______________________ ou

______________________ selos.

Em todos os quadros a seguir temos o mesmo código.

a) Construa com palitos os conjuntos correspondentes à base indicada.
Use cores diferentes para indicar cada agrupamento.

BASE 4
32

BASE 5
32

b) Escolha a base e faça o mesmo aqui.

BASE __
32

2. Observe o que você fez e responda:

a) Em qual dos conjuntos há menor quantidade de unidades ao tod

b) Em qual dos conjuntos há maior quantidade de unidades ao todo

3- Comprove o que você respondeu acima, completando a tabela:

CÓDIGO	BASE	TOTAL DE UNIDA
32	4	
	5	
	6	
	7	
	10	
	___	

4- Complete esta explicação, observando a tabela e os agrupamentos feit

Dado o mesmo código, quanto ________ (maior ou menor) a bas para fazer os agrupamentos, ________ (maior ou menor) quantic unidades serão necessárias.

Isso porque:

10 corresponde na

B_4 ⟶ ____ unidades

B_5 ⟶ ____ unidades

B_6 ⟶ ____ unidades

B_7 ⟶ ____ unidades

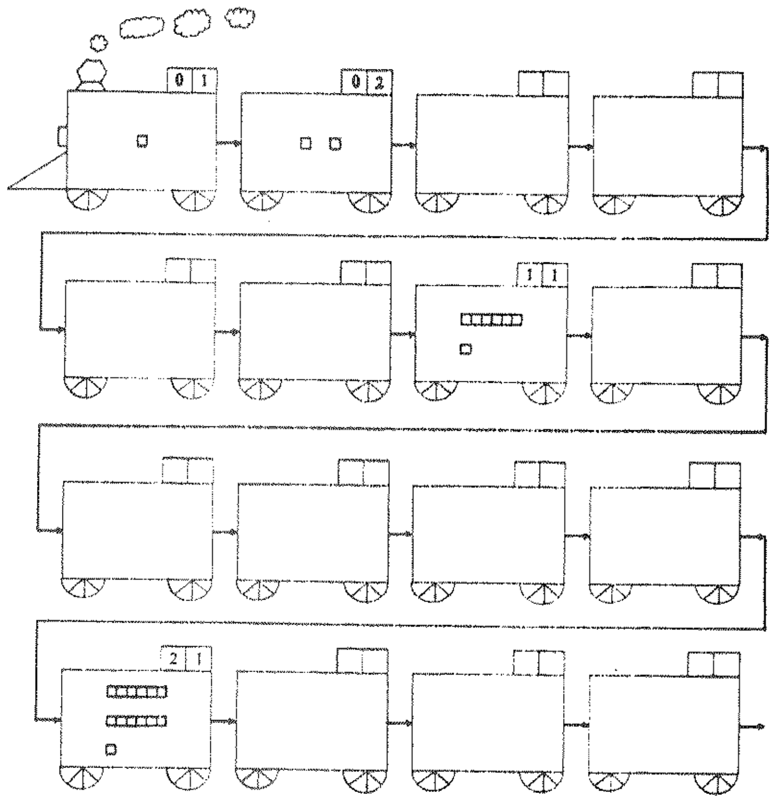
B_{10} ⟶ ____ unidades

$B_{\_}$ ⟶ ____ unidades

Seqüência - Base 6

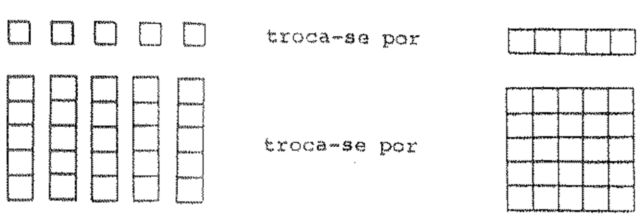
1- Observe a regra desse trem:
Cada vagão tem uma unidade a mais que o vagão anterior.

2- Complete a seqüência usando multibase no espaço BASE 6.



Seqüências

Na multibase no espaço da base 5:



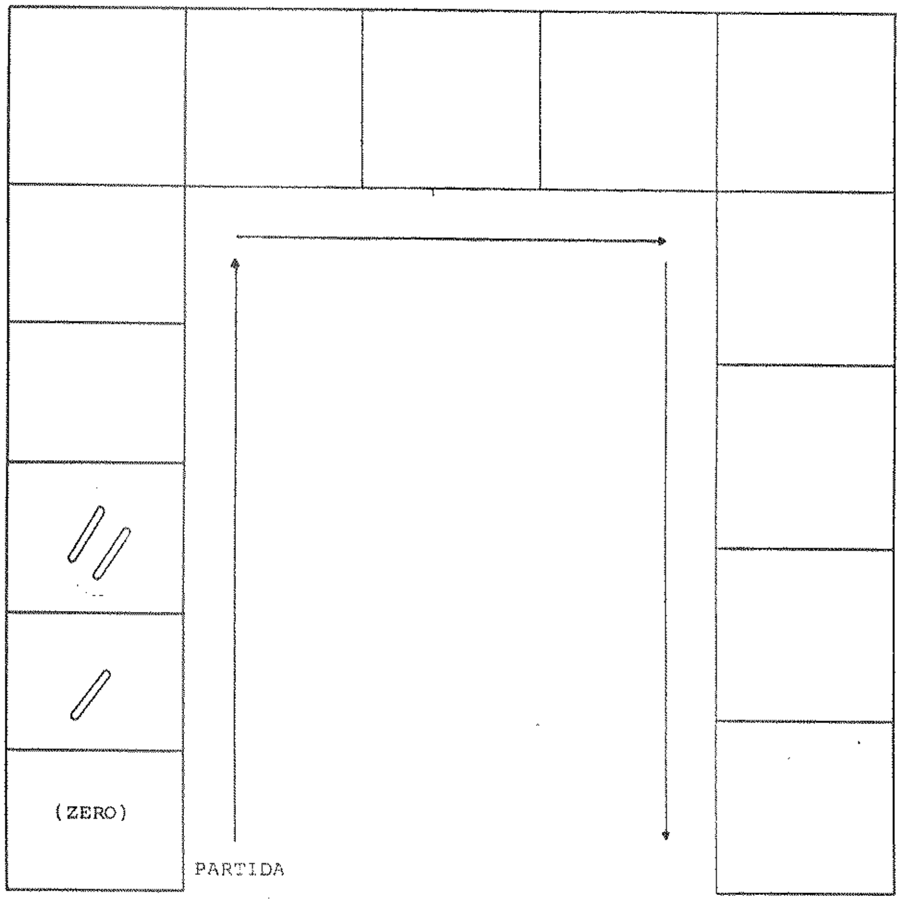
Descubra a regra da seqüência abaixo e complete-a.

Complete com os "vagões" que vêm <u>antes</u> e com os "vagões" que vem <u>depois</u>.

Veja como os palitos são agrupados.

 num amarrado 

Continue a seqüência do 1  a mais.
Não esqueça a regra do amarrado.



JOGO DO DADO - BASE 10

1 - Convide três colegas para jogar com você.

2 - Material necessário:

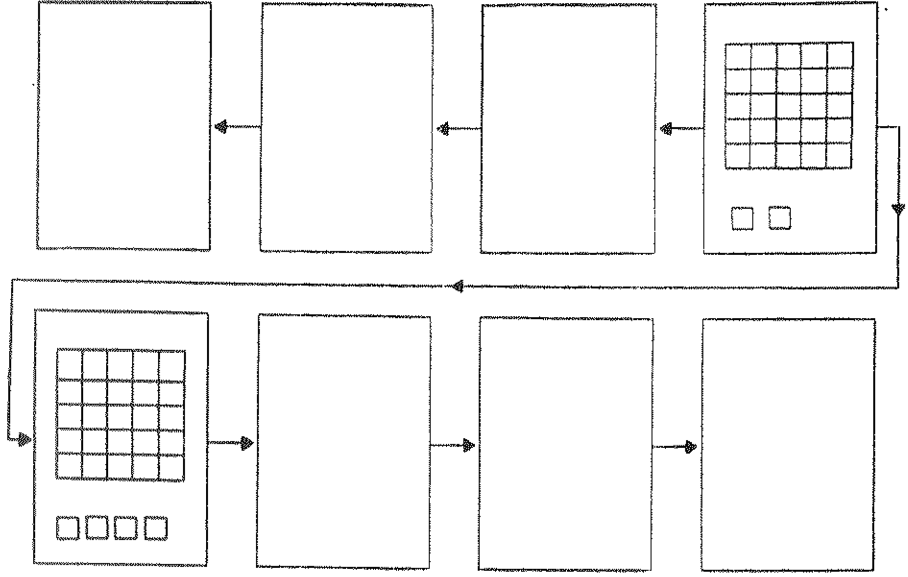
- 2 dados
- 1 caixa de fichas coloridas - material de troca
- folha de registro

3 - Regra de troca:

 = UNIDADE

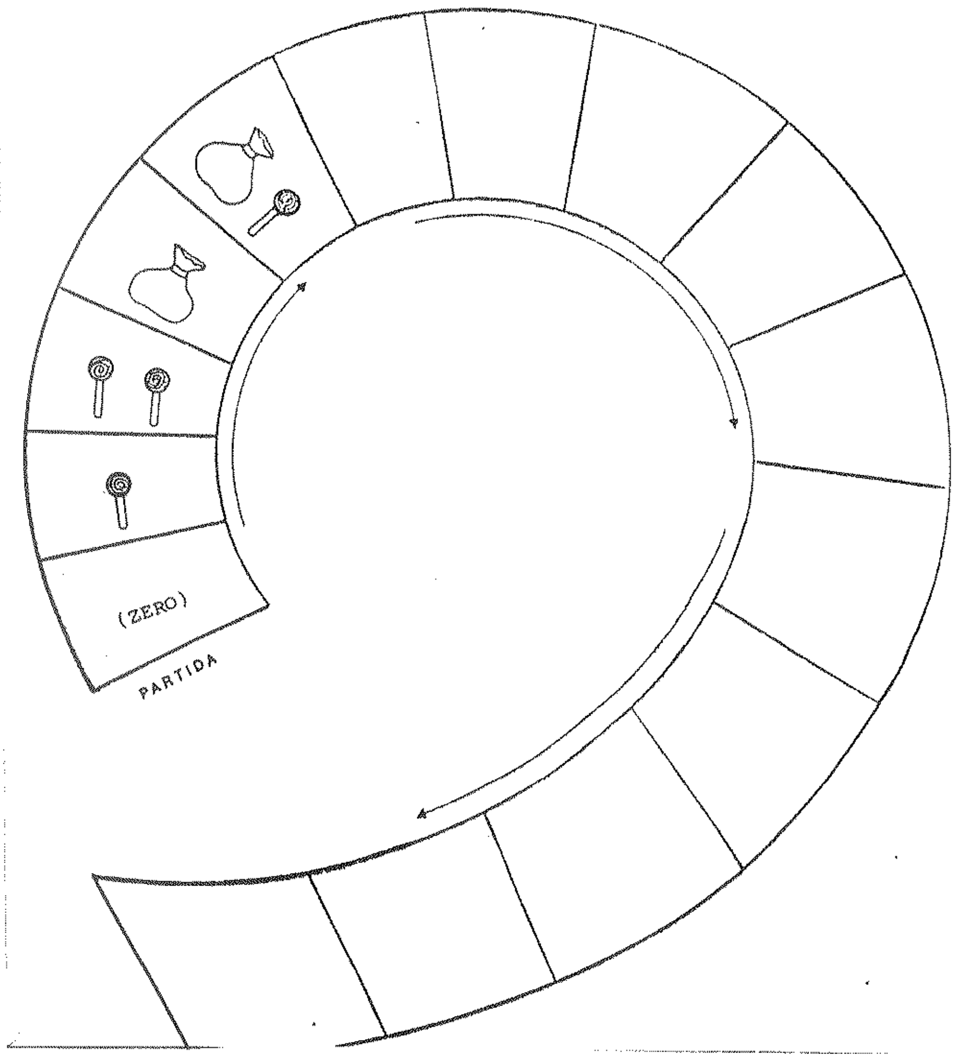
 = troca 

 = troca 



Observe a seqüência abaixo.

Descubra a regra e continue.



4 - Regra do jogo:

Cada jogador lança um dado na sua vez.

Em cada jogada, ganha-se tantas fichas ○ , que é a unidade, quanto a face do dado indica.

Termina o jogo quando um dos jogadores conseguiu uma ficha ● .

5 - Variação do jogo:

Joguem agora com dois dados.

Em cada jogada, ganha-se tantas fichas ○ , que é a unidade, quanto as duas faces dos dados indicam.

Termina o jogo quando um dos jogadores conseguir duas fichas ● ● .

Aí, todos os jogadores, preencher juntos a folha de registro, a seguir.

REGISTRO JOGO DO DADO - BASE 10

	NOME DOS JOGADORES	FICHAS CONSEGUIDAS NO FINAL DO JOGO
1º		
2º		
3º		
4º		

Agora juntem as fichas que cada jogador ganhou.

Façam as trocas necessárias.

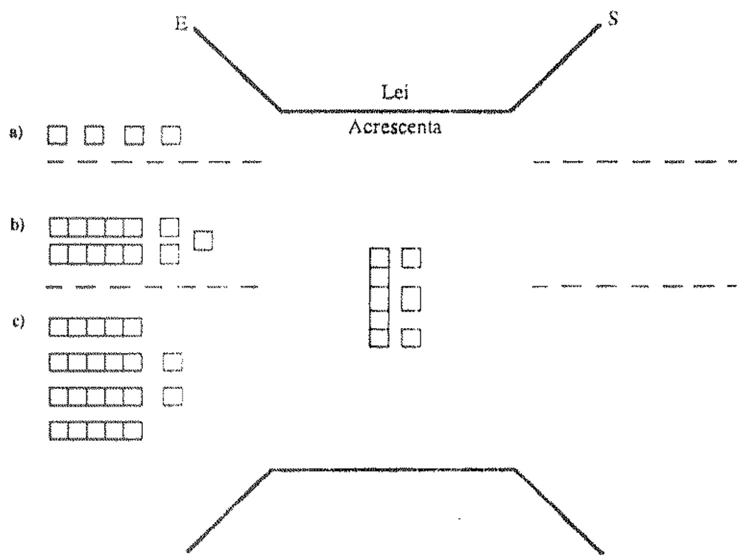
Registrem abaixo.

TOTAL DE FICHAS GANHAS PELOS 4 JOGADORES	TROCA

Máquinas Simples - Diferentes bases

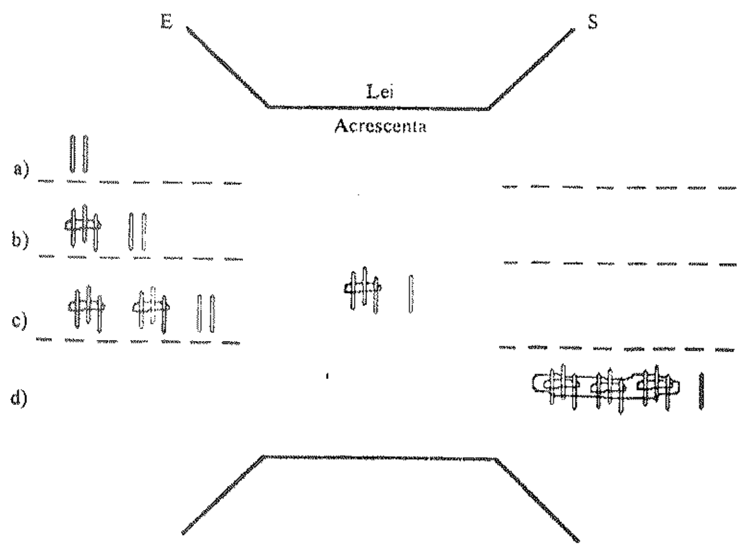
Agora você vai rever máquinas em diferentes bases.
Observe as entradas e as leis e descubra a base.
Dê as saídas.
Pegue material se precisar.

BASE _____

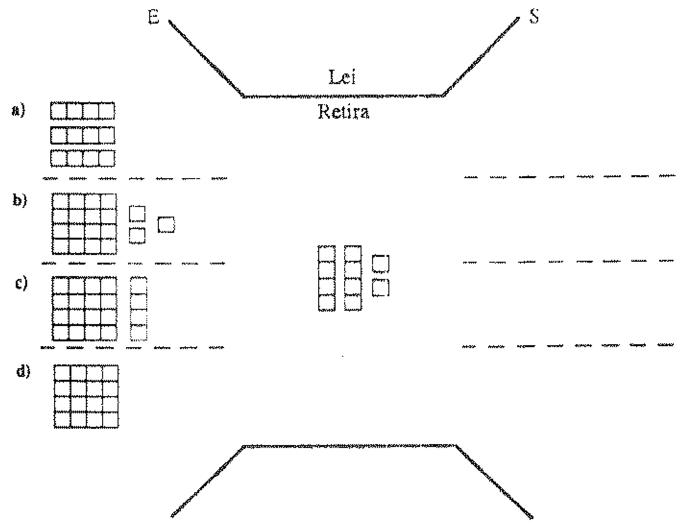


Máquinas Simples - Diferentes Bases

1- Complete estas máquinas:

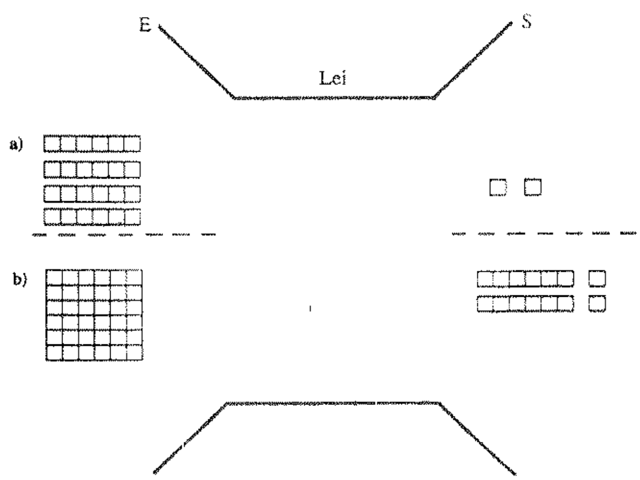


BASE ____



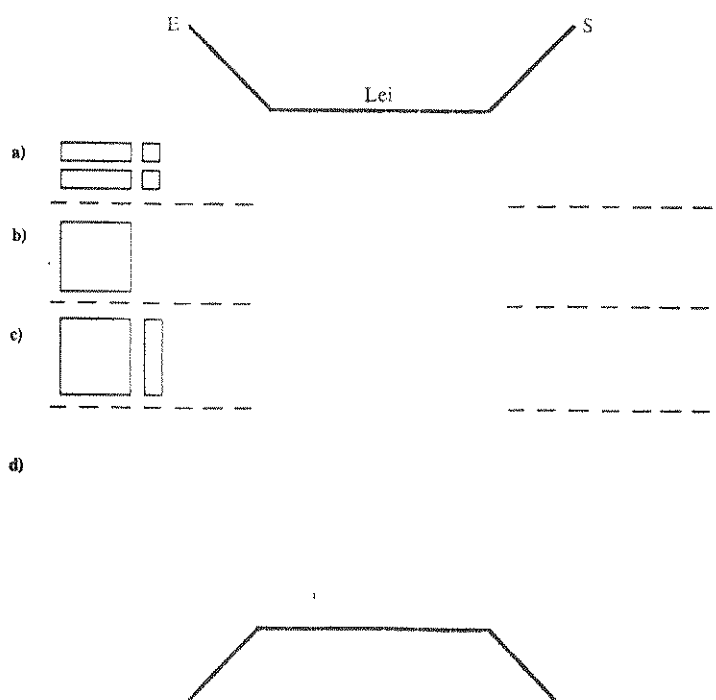
Descubra a Base e a Lei.

BASE ____



Você escolhe a Base e a Lei.
Depois, completa a máquina.

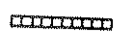
BASE ____

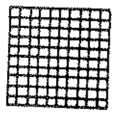


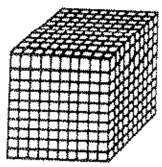
Numeração Decimal

1- Correspondam agrupamento, código e total de unidades da BASE 10.

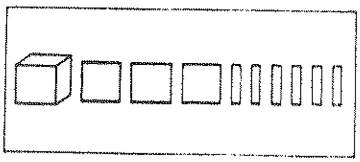
 ⟷ ☐☐☐☐ ⟷ 1 unidade

 ⟷ ☐☐☐☐ ⟷ ____ unidades

 ⟷ ☐☐☐☐ ⟷ ____ unidades

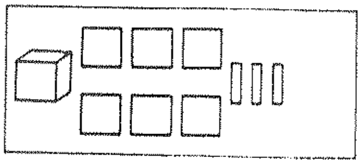
 ⟷ ☐☐☐☐ ⟷ ____ unidades

2- Agora correspondam os conjuntos.
Usem régua e cor diferente para cada correspondência.
Se vocês quiserem, peguem material.



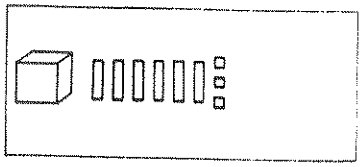
| 1 | 3 | 6 | 0 |

.... unidades



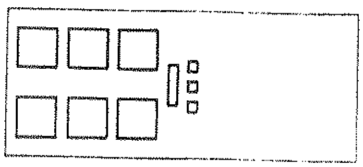
| | 6 | 1 | 3 |

.... unidades



| 1 | 6 | 0 | 3 |

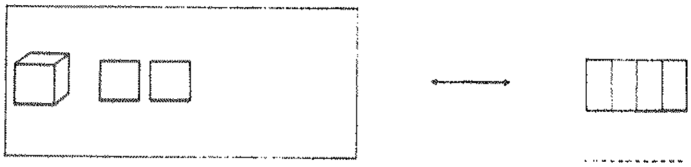
.... unidades



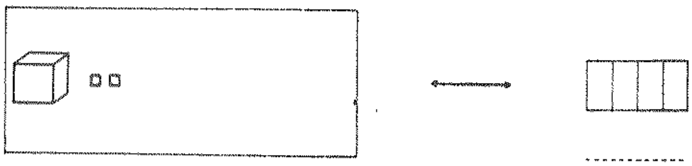
| | | | |

.... unidades

3- Agora são vocês quem fazem tudo.

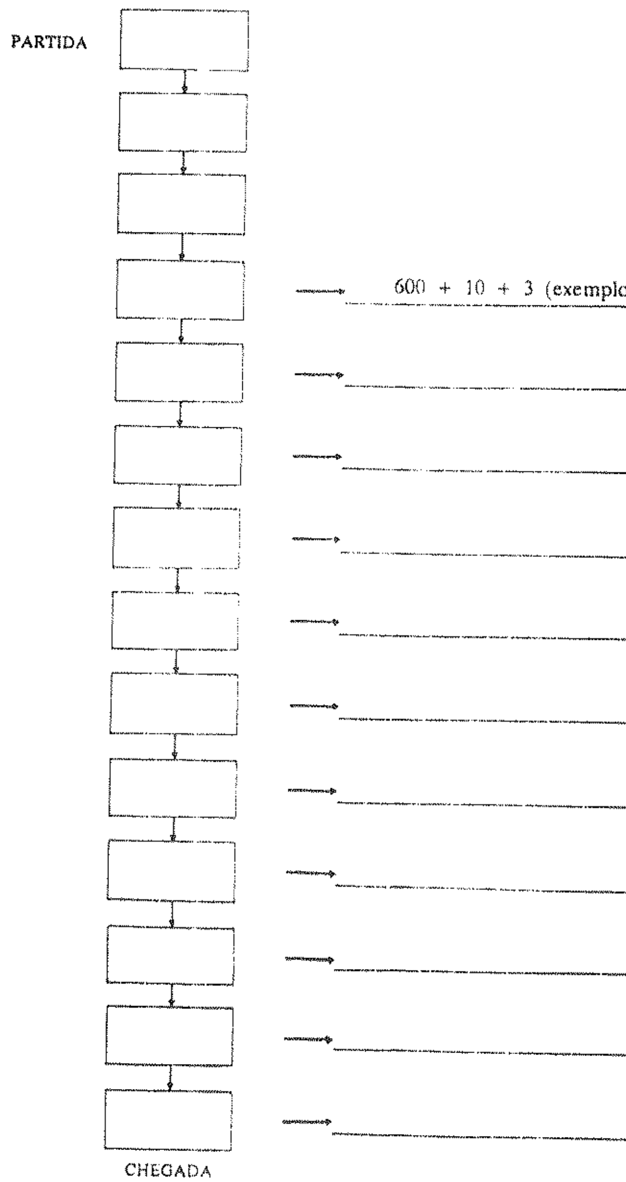


.... unidades



.... unidades

4- Ordenem todos os códigos desta ficha do menor para o maior.
Depois, decomponham os códigos indicados, como no exemplo:

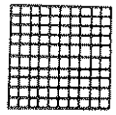


Numeração Decimal

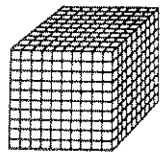
1- Complete, fazendo a correspondência:

a) MATERIAL

CÓDIGO



b)



Observem acima e respondam:

- Qual agrupamento representa maior quantidade, o a) ou o b)? ________
- Quantas unidades ao todo? ________________________________

- Qual agrupamento representa menor quantidade, o a) ou o b)? ________
- Quantas unidades ao todo? ________________________________

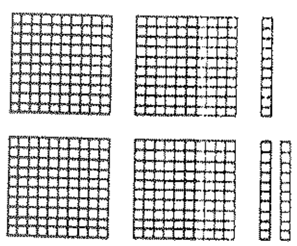
- Quantas unidades o agrupamento maior tem a mais que o menor? ______

- Quantas unidades o agrupamento menor tem a menos que o maior? ______

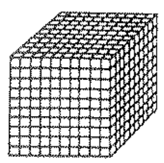
2- Façam o mesmo com os conjuntos a seguir.
Peguem material.

a) MATERIAL

CÓDIGO



b)



- Qual conjunto representa maior quantidade? ____________________
- Quantas unidades ao todo? ______________________________

- Qual conjunto representa menor quantidade? ____________________
- Quantas unidades ao todo? ______________________________

- Desenhem quanto falta no conjunto menor para ele ficar com o m
tanto que o maior.

3- Agora eu dou as respostas e vocês descobrem os conjuntos e seus códigos:

- O conjunto que representa maior quantidade é o conjunto a).
- Ele representa um mil quinhentos e oitenta unidades.

- O conjunto que representa menor quantidade é o conjunto b).
- Ele representa um mil duzentos e trinta unidades.

a)

b)

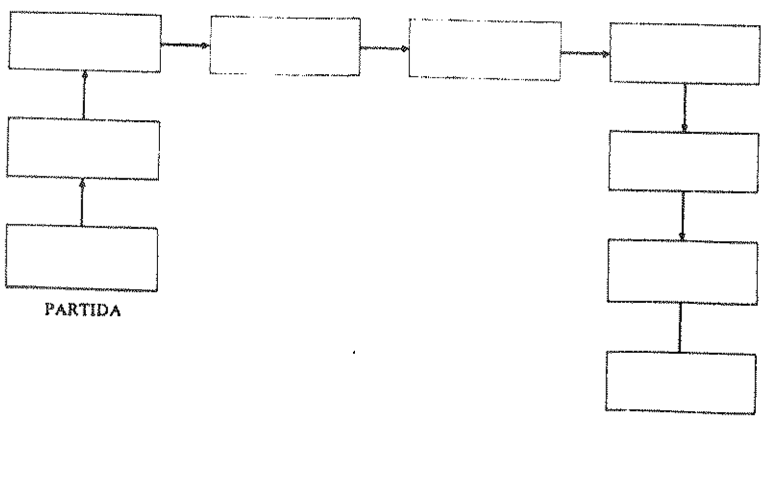
Observando acima, completem:

O conjunto maior tem ________ unidades a mais que o menor.

O conjunto menor tem ________ unidades a menos que o maior.

Falta para o conjunto menor ficar com o mesmo tanto que o maior ________.

4- Copiem todos os diferentes códigos desta ficha, ordenados do menor para o maior:

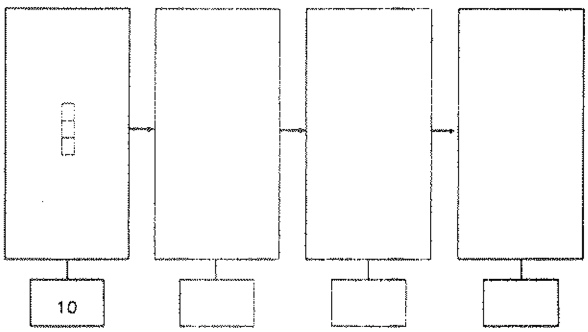


Seqüência - Base 3

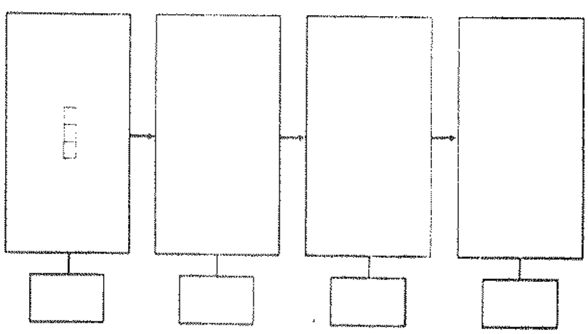
1- Complete cada seqüência, observando sua regra. Depois, codifique.

BASE 3

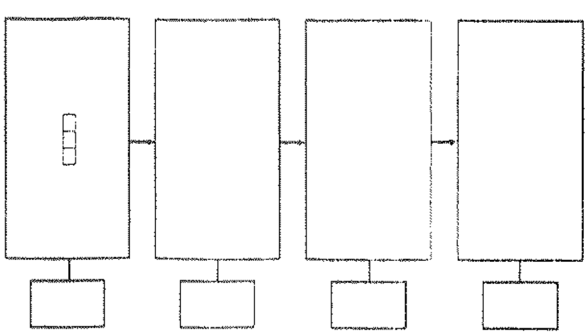
Acrescenta 2 unidades ou $\boxed{+ 2}$:



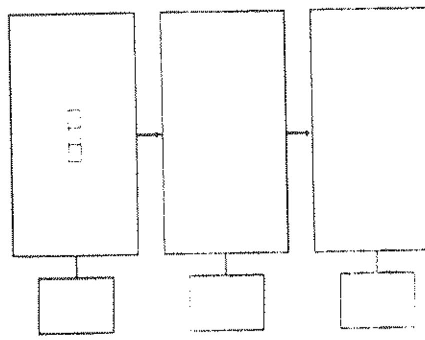
Multiplica por 2 ou $\boxed{x\ 2}$:



Acrescenta 1 primeiro agrupamento ou $\boxed{+ 10}$:



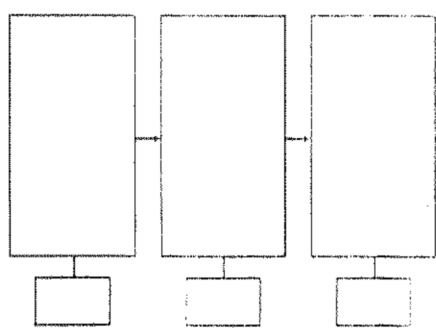
Multiplica pela BASE ou $\boxed{xb}$ ou $\boxed{x\ 3}$;



2- Agora é você quem escolhe e faz tudo!

BASE ____

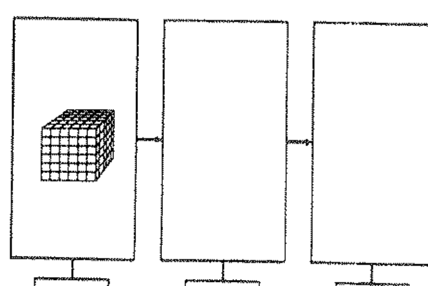
REGRA: multiplica pela BASE ou $\boxed{xb}$ *ou* $\boxed{}$



Complete cada seqüência, observando sua

BASE 6

a) Retire 2 ou $\boxed{-}$:

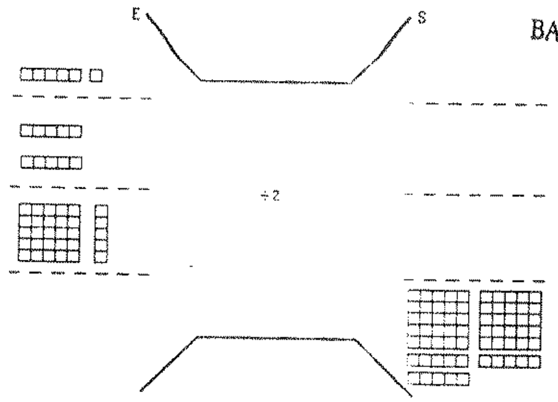


f) Dê as entradas:

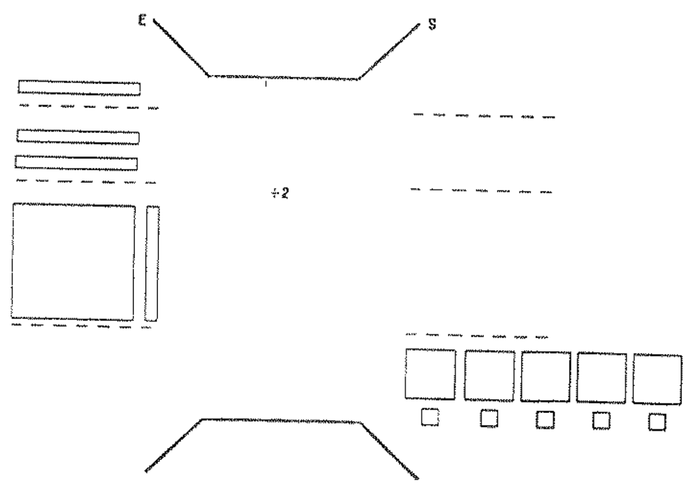
BASE 10

____	x	3	=	30
____	x	2	=	20
____	x	10	=	100
____	x	2	=	50
____	x	3	=	45
____	x	10	=	1500

BASE 5



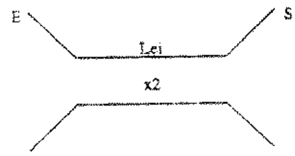
BASE 10



Máquinas de Multiplicar e Dividir

1- Vamos relembrar o que você já sabe sobre máquinas de multiplicação?

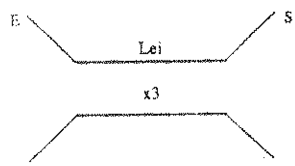
a)



A lei $\boxed{x\ 2}$ transforma cada saída no que da sua entrada? ____________
____

Em quais bases? ____
____

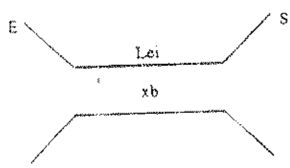
b)



A lei $\boxed{x\ 3}$ transforma cada saída no que da sua entrada? ____________
____

Em quais bases? ____
____

c)



A lei $\boxed{x \text{ base}}$ transforma cada saída no que da sua entrada? ________
____
____

Em quais bases? ____
____

d) Qual é a lei correspondente a x base na base 8? ____________

E na base 10? ____

e) Complete com a lei correspondente:

BASE 10

105 x ____ = 1050
15 x ____ = 30
12 x ____ = 36

POTENCIAÇÃO

EXERCÍCIO 7

Pegue o material multibase correspondente ao código na base 3.

Reagrupe esta mesma quantidade nas outras bases - 2, 4, 5 e 10.

Complete o quadro com os códigos correspondentes.

Base 3	$1 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 0 \times 3^0$
Base 2	$\_\_ \times 2^5 + \_\_ \times 2^4 + \_\_ \times 2^3 + \_\_ \times 2^2 + \_\_ \times 2^1 + \_\_ \times 2^0$
Base 4	$\_\_ \times 4^3 + \_\_ \times 4^2 + \_\_ \times 4^1 + \_\_ \times 4^0$
Base 5	$\_\_ \times 5^3 + \_\_ \times 5^2 + \_\_ \times 5^1 + \_\_ \times 5^0$
Base 10	$\_\_ \times 10^2 + \_\_ \times 10^1 + \_\_ \times 10^0$

POTENCIAÇÃO

EXERCÍCIO 8

Vamos trabalhar com a base 10.

1. Desenhe o material multibase correspondente aos códigos:

10^3	10^2	10^1	10^0

Código de posição

2. $2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

3. $3 \times 10^3 + 3 \times 10^1$

Código de posição

ERRATA

Título: "O Sistema de Numeração Decimal e o Princípio Multiplicativo": um estudo na 4ª série do 1º grau.
Autora: Sonia Maria Losito

Local	Onde se lê	Leia-se
p.150, tabela 3.2.a	12	6
	6	12
p.150, 1ºparág., 4ª linha	...escola B **não** aplicaram	...escola B aplicaram
p.160,3ª parág.,3ª linha	2000 = 500 =2500 2500 =33 =2533	2000 + 500 = 2500 2500 + 33 = 2533
bibliografia,1ª página,6ª linha (Becker,Fernando)	Da ação à operação. O caminho da **em** aprendizagem	Da ação à operação. O caminho da aprendizagem
bibliografia,3ª página,28ª linha (Piaget,Jean)	La **ensennança** de las matemáticas	La ensenãnza de las matemáticas