UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

O ENSINO DE ÁLGEBRA NUMA PERSPECTIVA LÓGICO-HISTÓRICA: um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental

2004

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

O ENSINO DE ÁLGEBRA NUMA PERSPECTIVA LÓGICO – HISTÓRICA:
um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental

MARIA DO CARMO DE SOUSA
ORIENTADORA: PROFª DRª ANNA REGINA LANNER DE MOURA

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por Maria do Carmo de Sousa e aprovada pela Comissão Julgadora.
Em 12/03/2004.

Assinatura (Orientadora): ______________________

COMISSÃO JULGADORA:

____

____

____

____

____

2004

Catalogação na Publicação elaborada pela biblioteca
da Faculdade de Educação/UNICAMP
Bibliotecário: Rosemary Passos - CRB-8ª/5751

Sousa, Maria do Carmo de.

So89e O ensino de álgebra numa perspectiva lógico - histórica : um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental / Maria do Carmo de Sousa. -- Campinas, SP: [s.n.], 2004.

Orientador : Anna Regina Lanner de Moura.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Álgebra – História. 2. Lógica. 3. Dialética. 4. Pensamento. 5. Ensino. 6. Aprendizagem. I. Moura, Anna Regina Lanner de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

04-038-BFE

Tese apresentada como exigência parcial para obtenção do Título de DOUTOR (A) em EDUCAÇÃO na Área de Concentração: Educação Matemática à Comissão Julgadora da UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo.

À minha família, que soube entender minha opção pelo estudo; compreender e respeitar minha ausência em tantos momentos e, como ninguém, me apoiar nos momentos difíceis e brindar a cada etapa vencida.

À educadora Profª Drª Anna Regina Lanner de Moura pela amizade e por me proporcionar vivências que mostram a possibilidade do encontro pedagógico entre as pessoas e o conceito.

Aos amigos de estudos espiritualistas, dentro e fora da UNICAMP, nas pessoas de Dona Lola (in memorian), Nora Sakamoto, Seu Antônio e Malu.

A Gerson de Sousa, meu irmão, pela leitura profunda e pelas contribuições.

Aos educadores do grupo Caraça, em especial ao educador Luciano Castro Lima por ter conseguido elaborar uma proposta de trabalho humanizadora.

Às Professoras Drª Celi Aparecida Espasandin Lopes, Drª Maria Ângela Miorim e aos Professores Dr. Dario Fiorentini, Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura, Dr. Sérgio Apparecido Lorenzato e Dr. Wilson Pereira de Jesus, pelo incentivo e pela presença na Banca Examinadora.

Aos docentes e aos amigos dos Grupos de Pesquisa Educação Conceitual e PRAPEM do CEMPEM – FE – UNICAMP, em especial a Esther Pacheco de Almeida Prado pela leitura minuciosa do texto de Qualificação e aos pós-graduandos que confiaram a mim a leitura dos seus textos acadêmicos.

À Profª Drª Isabel Cabrita da Universidade de Aveiro por me receber no Departamento de Tecnologia Educativa e Didáctica.

Aos amigos que fiz em Portugal, em especial à família Miguéis, às Profªs Maria Bethânia Santos e Maria Teresa Neto pelo acolhimento e pela companhia.

À Juliana Aparecida Barbelino da Purificação e à família Benedito pela amizade e companheirismo.

Aos professores e futuros professores, alunos da FE-UNICAMP e da Universidade de Aveiro, Portugal que concordaram em vivenciar e discutir as atividades de ensino propostas. Sem eles seria impossível concretizar este trabalho.

A todos os amigos que fiz, durante todos esses anos na UNICAMP.

À Denize Moz Alves Rodrigues pela revisão do texto.

A todos aqueles que acreditam ser possível transformar o nosso mundo, a partir do conhecimento.

Ao apoio financeiro oferecido pela FAPESP, que através da bolsa de estudo concedida fez com que esta pesquisa se tornasse viável.

ESPECIALMENTE PARA:

Roque de Sousa (meu pai)

Maria Benedita de Almeida Sousa (minha mãe)

Claudete de Sousa Nogueira (minha irmã)

Célia Regina de Sousa Leite (minha irmã)

Sueli Aparecida de Sousa (in memorian), minha irmã

Gerson de Sousa (meu irmão)

Adilson de Sousa (meu irmão)

Rosália Leite de Almeida (minha avó)

Mariane Cristina de Sousa Nogueira (minha sobrinha)

Maysa Regina de Sousa Leite (minha sobrinha)

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo principal analisar as possíveis correlações existentes entre o pensamento manifesto do professor e os pressupostos do desenvolvimento conceitual, na perspectiva lógico-histórica abordados em atividades de ensino de álgebra, e como objetivo geral, contribuir para a formação de professores no que diz respeito à elaboração de atividades de ensino de álgebra. Foram envolvidos na pesquisa, professores do Ensino Fundamental, mediante o desenvolvimento de seções de estudo com propostas de vivência de atividades elaboradas previamente pela pesquisadora e de análise e elaboração de atividades, por parte dos professores. A relação entre o lógico e o histórico apresenta-se enquanto unidade dialética lógico-histórico, do desenvolvimento do conceito que estuda as conexões internas deste e não apenas de seu formalismo. As conexões internas do conceito de álgebra são os conceitos de: variação quantitativa, que se apresenta no movimento do cotidiano, variável, formalização de campo de variação, enumeração e densidade dos conjuntos numéricos. Cada conexão é estudada no seu movimento de formação de linguagem algébrica, tendo como referência as classes de desenvolvimento da álgebra: retórica, sincopada e simbólica, descritas por Smith (1958), Boyer (1974), Eves (1997), Ríbnikov (1987), Struik (1989), incluindo-se aí a álgebra geométrica. A metodologia da pesquisa envolveu o desenvolvimento de ações, que priorizaram a dinâmica indivíduo/coletivo, assim configuradas: a) estudo sobre propostas de iniciação algébrica no Ensino Fundamental; b) desenvolvimento de atividades planejadas que evidenciem a variável-palavra, a variável-figura, variável-numeral e a variável-letra, de modo a considerar a criação de expressões, em linguagem comum, para movimentos de variação dos quais deveriam definir a variável e seu campo de variação; c) análise e discussão dos erros mais freqüentes que alunos do Ensino Fundamental cometem ao realizar atividades de álgebra e e) elaboração de atividades que envolvem o desenvolvimento dos conceitos de variável, fluência e campo de variação. Os resultados da pesquisa mostram que o lógico-histórico do pensamento algébrico se constituiu em atividade formadora de professores e de pesquisa.

ABSTRACT

This research has as main objective to analyze the possible existent correlations between the teacher's obvious thought and the presuppositions of the conceptual development, in the logical-historical perspective approached in algebra teaching activities and as general objective, to contribute for the teachers' formation concerning the elaboration of algebra teaching activities. Teachers of the "Ensino Fundamental" were involved in the research, through the development of study sections with proposals of experience with activities previously elaborated by the researcher and through analysis and elaboration of activities, by the teachers. The relationship between the logical and the historical appears as logical-historical dialectic unit, of the development of the concept that studies its internal connections and not only its formalism. The internal connections of the algebra concept are the concepts of: quantitative variation, that appear in the everyday movement, variable, formalization of the variation field, enumeration and density of the numeric conjuncts. Each connection is studied in its formation of algebraic language moviment, having as its reference the development of the algebra classes, rhetoric, syncopated and symbolic, described by Smith (1958), Boyer (1974), Eves (1997), Ríbnikov (1987), Struik (1989), including the geometric algebra. The methodology of the research involved the development of actions that prioritized the individual/group dynamics, configured as the following. a) study on algebraic initiation proposals in the "Ensino Fundamental" b) development of planned activities that show the variable-word, the variable-figure, variable-numeral and the variable-letter, in a way to consider the creation of expressions, in common language, for variation moviments from which the variable and its variation field should be defined c) analysis and discussion of the most frequent mistakes that students from the "Ensino Fundamental" make when accomplishing algebra activities and d) elaboration of activities that involve the development of the variable concepts, fluency and variation field. The results of the research show that the logical-historical of the algebraic thought was created in teachers forming activity and research.

SUMÁRIO

Como um rio...

A melhor imagem que representa esta tese é a de um rio, o rio de Heráclito, que é descrito de tempos em tempos por todos aqueles que definem processo como movimento do vir a ser.

Durante a sua descida, no processo de constituir-se rio de águas barrentas ou cristalinas, um pequeno córrego representa a própria fluência, ao se encontrar com movimentos, desvios e obstáculos. A única certeza desse pequeno córrego, enquanto caminha ao seu destino, é a de que se unirá a outros córregos e rios para se tornar um, para se tornar mar.

A totalidade do mar contém a singularidade e a particularidade dos pequenos córregos e rios. O mar é diferente do córrego e do rio porque contém uma nova qualidade. Suas águas contêm a mistura de águas barrentas, cristalinas e doces... As águas dos córregos, rios e mares não conhecem o estático, o pronto, o rígido, o acabado, porque possuem ciclos intermináveis. O ciclo das águas permite que uma gota participe dos rios, dos córregos, dos mares, de poças d'água...

É assim que caracterizamos este estudo. Como uma gota d´água no mar das pesquisas que tratam da formação de professores e do ensino de álgebra.

No processo de escrever esta tese, tivemos, assim como os pequenos córrego e rios, a oportunidade de encontrarmo-nos com nós mesmos, com nossos alunos, com nossos colegas professores, com teóricos, com pesquisadores, com pessoas...

Descobrimos o nosso próprio movimento de estudar e conhecemos os obstáculos característicos da escrita de um trabalho acadêmico, porém, temos uma única certeza: enquanto estudávamos, nos unimos às diversas vozes para escrever um texto que representa uma pequena gota de conhecimento no infinito mar do desconhecimento, que é a formação daqueles que ensinam matemática nas séries iniciais.

É por esse motivo que escrevemos este estudo na primeira pessoa do plural. Nossa singularidade e particularidade de professora e pesquisadora contêm a particularidade e a singularidade de todas as vozes que ouvimos, durante anos.

A singularidade e a particularidade das vozes estiveram presentes em todo o processo de escrita deste estudo. Ao ouvirmos as vozes das pessoas que fizeram parte de nossa vida tivemos a intenção de elaborar uma investigação que constituísse o lógico-histórico (Kopnin, 1978) de nosso pensamento teórico sobre o ensino de álgebra.

O lógico reflete o histórico de forma teórica. O histórico contém o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento, as casualidades dos fatos e da vida. Em suma, o lógico é o histórico despido das casualidades que perturbam o histórico.

Tentaremos dividir com os leitores, na medida do possível, alguns dos aspectos históricos desse processo, o quais nos permitiram construir a lógica deste estudo.

A totalidade da pesquisa contém, a partir de estudos de caso, a singularidade e a particularidade das vozes de Ana Cristina[1], Andressa, Mudança e SN_1, bem como, algumas das elaborações feitas tanto individualmente como pelos grupos formados com os dezoito alunos matriculados na disciplina eletiva "Tópicos Especiais em Didática[2]".

Participamos da disciplina em todos os momentos, desde a elaboração da ementa até a orientação dos Projetos criados pelos grupos. Assim, neste estudo, em determinados momentos vamos focar a singularidade e a particularidade das pessoas, em outros, as sínteses elaboradas pelos grupos enquanto vivenciavam e analisavam as atividades de ensino propostas.

Fizemos essa opção porque as elaborações feitas em sala de aula, assim como o mar, contêm o singular e o particular de cada uma das pessoas que compõem uma sala de aula.

Assim, temos uma estrutura triádica de participantes desse estudo formada pela totalidade da classe[3]- pequenos grupos - sujeitos particulares.

---

[1] Ana Cristina e Andressa não criaram pseudônimos de identificação em seus diários. Usaram o primeiro nome. Mudança escolheu seu pseudônimo de identificação. SN_1 foi o pseudônimo que escolhemos para uma das alunas que não quis se identificar em seu diário de campo.
[2] Oferecida e ministrada no 2°semestre de 2001, na Faculdade de Educação da UNICAMP, em parceria com a Profª Drª Anna Regina Lanner de Moura, docente responsável pela disciplina.
[3] A totalidade da classe é formada por dezoito alunos e os pequenos grupos são formados por três ou quatro pessoas.

Essa estrutura lógica condiz com o histórico da dinâmica das aulas, pois durante a maioria dos encontros analisamos e vivenciamos atividades de ensino de álgebra a partir da dinâmica indivíduo-grupo-classe considerando o lógico e o histórico como formas de pensamento estudadas por Kopnin (1978).

O lógico-histórico se constitui o conceito central desse estudo.

A busca...

Na busca infinita de responder às questões que nos colocamos no dia-a-dia, enquanto tentamos nos constituir educadora, percebemos que, tanto o ensino de matemática como a formação dos professores, tornaram-se nossas preocupações teóricas, a partir do momento em que estas passaram a se configurar como nosso objeto de estudo, em 1997.

Aqui, a palavra objeto tem a conotação de ato de conhecimento (Kopnin, 1978; Kosik, 2002; Mora, 1991). Nesse sentido, ao estudar o movimento, presente em nosso próprio ato de conhecer, começamos a entender melhor o outro, ao mesmo tempo em que pudemos nos compreender melhor.

Ao concluirmos a Dissertação de Mestrado[4] pudemos compreender o quanto a formação de nós, professores de matemática, do Ensino Fundamental e Médio, há muito, está falha.

Muitos dos conteúdos que ministramos, dentre eles, Teoria dos Conjuntos, não são compreendidos em seu desenvolvimento lógico-histórico. Há prioridade do formalismo em seu último estágio de rigor no ensino de matemática. De forma geral, não se estuda com os alunos o desenvolvimento desse rigor, muito menos o porquê de se aprendê-lo em todos os níveis de ensino.

O resultado de anos desse rigor no ensino de matemática pode ser comprovado no primeiro depoimento de Adriane[5] (2001) quando começou a freqüentar a disciplina:

---

[4] Defendida em 16/08/1999 sob a orientação da Profa. Dra. Anna Regina Lanner de Moura, na Faculdade de Educação - UNICAMP

[5] Adriane preferiu manter seu primeiro nome no diário de campo da disciplina.

> "(...) Por não gostar de matemática, nunca quis saber como surgiu, só sabia que tinha números e letras. E, esses números, letras me deixavam louca, não tinha muita vontade de estudar e de me aprofundar, eu achava que tinha dificuldade, mas essa dificuldade é o fato de não gostar da disciplina" (Adriane: diário, 10/08/01).

A fala da aluna reflete, de alguma forma, o que vem acontecendo em boa parte dos escolarizados nos últimos quarenta anos. Há pessoas que afirmam que apesar de escolarizadas não aprenderam matemática. Não se dão com a área das exatas.

Nossos estudos, a Dissertação de Mestrado[6] e a atual investigação apontam também como os currículos de matemática dos anos 60, 70, 80 e 90 dos diversos níveis de ensino mostram que não é muito comum termos espaço para "filosofarmos" sobre a matemática, como propõe o pesquisador Pereira de Jesus (2002). Há ênfase na Pedagogia do Treinamento[7] (Lima & Moisés, 1997).

De forma geral, nos cursos de licenciatura, não pensamos sobre a natureza lógico-histórica do pensamento matemático. Ao mesmo tempo, quando formados, durante as reuniões pedagógicas passamos longas horas pensando sobre a natureza das dificuldades e aflições dos estudantes no que diz respeito ao fracasso em matemática.

Assim, é muito comum, durante as reuniões pedagógicas nas salas de professores, bem como em diversos trabalhos acadêmicos, considerarmos apenas alunos e professores os últimos responsáveis por fazer o ensino de matemática. Fracassar em matemática é algo quase que natural.

A sociedade admite que, realmente, aprender a lógica contida nos conceitos matemáticos é muito difícil. Apenas algumas pessoas têm e terão o privilégio de compreender tais conceitos.

---

[6] Conforme nota 4.

[7] Pedagogia do Treinamento é a Pedagogia que privilegia as repetições de informações sobre o conceito. Aqui, tanto aquele que aprende quanto aquele que ensina são apenas usuários do conceito. O uso do conceito não significa necessariamente o entendimento deste como criação humana lógico-histórica.

Preocupamo-nos com o como ensinar e o como aprender matemática, porém, não proporcionamos momentos de reflexões, a partir de vivências e análises de atividades de ensino, pelas quais estudantes e professores possam pensar sobre as diversas concepções de mundo que interferem no nosso modo de conceber a matemática. Não falamos da vida a partir dos conteúdos matemáticos e ignoramos a vida que pulsa nos conceitos matemáticos que ensinamos.

Quando o foco é o ensino de álgebra pudemos comprovar, a partir de nossa Dissertação de Mestrado e da atual pesquisa, que há ênfase, no currículo e na sala de aula, do aspecto formal da linguagem algébrica.

Prioriza-se o pronto e o acabado que se apresenta na álgebra simbólica[8]. Nesse contexto, o símbolo parece falar por si mesmo, parece ter vida própria. A fluência[9] não faz parte das aulas de álgebra.

É como se a álgebra tivesse tido início, a partir do formalismo proposto por Viète[10]. Ignora-se o desenvolvimento histórico do conceito de variável, o cerne do conceito de função.

O conceito de variável, quando apresentado no Ensino Fundamental, aparece somente em uma de suas dimensões: a incógnita e, raramente como parâmetro e variável propriamente dita (Souza & Diniz, 1996).

Não se menciona a contribuição das diversas civilizações no processo de construir o conceito de álgebra simbólica. É como se Viète tivesse feito tudo sozinho. Prioriza-se a representação. Esquece-se que por trás de toda representação lógica matemática, há uma história. Há vida a pulsar. Há o humano. Há o movimento da palavra, da figura e do número.

Ao tratarmos a álgebra simbólica, na escola, em seu último estágio de rigor faz-se necessário analisar a definição que Bila (2001)[11] construiu enquanto esteve nos bancos

---

[8] A álgebra simbólica é um dos estágios da álgebra (Smith, 1958) que estudaremos nesta pesquisa.
[9] Fluência: termo usado por Caraça (1998) para designar o fundamental da doutrina de Heráclito: o movimento. A fluência deveria ser o pensamento geral da humanidade sobre a realidade porque contradiz o pensamento da permanência.
[10] Viète era francês e é considerado pela maioria dos historiadores matemáticos, o "Pai" da álgebra simbólica. Não era matemático e sim advogado, porém, amava a matemática e adorava estudá-la.
[10] Pseudônimo escolhido por uma das alunas que freqüentou a disciplina para identificar seu diário de campo.

escolares do Ensino Fundamental e Médio, sobre a álgebra: "até agora era mais uma das coisas que se aprendia, mas sem saber onde iria ser útil, não considero que tenha tido o real aprendizado sobre ela (...) (Bila, questionário: 17/08/01)".

Será que o ensino de álgebra pode ser diferente? O que significa para Bila ter um real aprendizado da álgebra?

As questões colocadas nos levam a pensar que o conhecimento teórico, incluindo-se o algébrico é gerado no movimento da vida, faz parte da vida, porém, não é a própria vida. Está na vida.

A escola tenta desvincular a vida teórica da vida prática. Porém, ainda que queiramos e insistamos durante anos, séculos, não há como dissociar a "realidade objetiva"[12], vivida por todos nós, em nosso cotidiano, da realidade pensada, da realidade teorizada.

A totalidade da realidade contém o cotidiano de nossas ações e, o cotidiano, por sua vez, tem sua própria história e alimenta a História (Kosik, 2002). Portanto, se a teoria é lógica, essa lógica tem história e, por ter história, é parte do cotidiano. Nesse sentido, a lógica do conhecimento matemático e algébrico contém história e, muitas vezes é ignorada por todos nós que fazemos o ensino.

Esses pressupostos se apresentarão, de forma direta ou indireta, na elaboração e análise da pesquisa.

[12] Aqui a realidade objetiva tem a conotação do substantivo "ser". Algo que transcende a experiência (Mora, 1991; Kopnin, 1978; Kosik, 2002).

Encontros e desencontros

Os estudos de Miguel & Fiorentini & Miorim (1993); Miorim & Miguel & Fiorentini (1993) e Miorim (1998) mostram que o currículo de matemática dos anos 60 e 70 pendeu para a álgebra.

Até o final dos anos 70, na maioria dos países, a "vedete" do ensino de matemática era a álgebra. As atividades propostas tanto no currículo oficial como nos livros didáticos priorizaram a abordagem formalista das estruturas algébricas, síntese de um formalismo histórico que deu à matemática, a partir do século XIX, o status que tem hoje.

Há de se ressaltar a importância das estruturas algébricas, tanto para a matemática como para o matemático de hoje.

O entendimento do pensamento formalista que se apresenta nas estruturas algébricas trouxe e traz, ainda hoje, benefícios para a construção das teorias matemáticas.

Ríbnikov (1987) afirma que o século XIX assinala um novo período marcado por transformações internas na Matemática, servindo de causa fundamental para a Matemática atual. Aqui incluem-se as estruturas algébricas e a Teoria dos Conjuntos. Para entender essas transformações faz-se necessário distinguir três linhas de ação de caráter geral desse movimento:

1) Ampliação do conteúdo dos objetos da Matemática em que transcorria um processo de generalização de conceitos fundamentais; se substituíam uns conceitos por outros mais gerais;
2) Entre muitas investigações se produziu, nesse período, uma revisão crítica dos conceitos primários (definições) e afirmações (axiomas); se realizaram intentos de construção de um sistema rigoroso de definições e demonstrações; realizou-se uma revisão crítica dos métodos lógicos das demonstrações matemáticas;
3) Ampliação considerável do campo de aplicações em outras ciências exatas: mecânica e ótica.

Há nesse período uma busca em direção ao rigor matemático que se tornara peça chave para as novas descobertas de teorias matemáticas.

"O conceito de rigor matemático ou lógico no curso da história, como se sabe, varia. (...) Um padrão estável de rigor matemático lógico se formou somente ao final do século XIX. Baseava-se em concepções teóricas de conjuntos e na aritmética dos números naturais" (Ríbnikov, 1987: 341).

Transpor para o currículo escolar a mesma abordagem formalista que é ferramenta familiar do matemático, não só não teve sucesso para a formação matemática do estudante de primeiro e segundo graus, como mostram os estudos de Kline (1976), em "O fracasso da Matemática Moderna", como se constituiu e, porque não dizer, ainda se constitui, em insucesso, em horror à matemática e, principalmente à álgebra, para a maioria dos estudantes, incluindo-se aí, aqueles que, muitas vezes, se matriculam, na licenciatura em matemática e para os professores que lecionam no Ensino Fundamental (Sousa, 1999).

A exemplo de alguns participantes da atual pesquisa sobre o lógico-histórico algébrico na formação de professores percebemos que há estudantes que vêem a matemática enquanto algo incompreensível e que por isso a vêem como fator de angústia, de medo, de incompreensão, de inutilidade porque "desumaniza-o"[13]. Muitos estudantes fogem do curso de matemática por causa da álgebra: "(...) Cheguei a pensar em trancar a matéria, pois nunca gostei de matemática, essa disciplina seria então uma daquelas que a gente faz não sei porquê (....)" (Bila, diário: 10/08/01).

Há algo mais "desumanizador" do que ficar anos na escola tentando aprender algo que não se entende e que não serve para nada?

[13] Aqui, a desumanização ocorre pelo anti-conhecimento entendido como aquele que ao invés de possibilitar ao que aprende o entendimeto de si e da realidade em que vive o paralisa em sua capacidade de se produzir a si mesmo. O ato de aprender e de ensinar representa uma tarefa, uma obrigação, onde o conceito deve ser decorado e usado mecanicamente contrariando o conceito de atividade. Na atividade de ensino o estudante é convidado a ter um encontro pedagógico com o conceito (Lanner de Moura et al, 2003), com o lógico-histórico do conhecimento científico. O encontro tem por objetivo conhecer-se e conhecer o mundo enquanto se constrói para si o significado dos conteúdos que estuda.

A abordagem formalista das estruturas algébricas foi e ainda é considerada, em diversos currículos dos cursos de matemática, ponto de partida e de chegada para o entendimento dos conceitos algébricos.

Valente (1999), ao fazer um estudo sobre a história da matemática escolar no Brasil, mostra que a chamada álgebra elementar passou a fazer parte das aulas do ensino secundário, em 1837. Até o final do século XIX, apenas os alunos que estudavam artilharia, medicina e nos liceus tinham contato com a álgebra elementar, a partir dos livros-textos elaborados por Lacroix, Bézout, Drago e Serrasqueiro.

O ICMI de 1986 mostra que os currículos escolares, da maioria dos países, até a década de 60, eram divididos em duas partes bem específicas. Tentavam contemplar duas realidades distintas: a preparação profissional e a universidade.

O currículo que preparava para a vida profissional, se reduzia ao estudo da aritmética e da geometria, enquanto o currículo que preparava para a universidade, continha conteúdos de aritmética, álgebra e geometria. Foi o Movimento Matemática Moderna que, unificou o currículo. Todos deveriam aprender aritmética, álgebra e geometria, a partir da Teoria dos Conjuntos.

Os estudos que estamos fazendo sobre a álgebra escolar, permitem-nos afirmar que o ensino da álgebra, a partir das estruturas algébricas, pode ser um dos fatores que incide sobre o insucesso em matemática, quando se pensa que os conceitos algébricos ocupam pelo menos sete anos da vida de todos os escolarizados do mundo.

Os estudantes da maioria dos países, de maneira geral, desde os anos 60, segundo o ICMI de 1986, entram em contato com os conceitos algébricos a partir da 5ª série, segundo segmento do Ensino Fundamental.

Porém, pesquisadores como Lins & Gimenez (1997) e Ursini (1996-a) defendem que os estudantes tenham experiências algébricas cada vez mais cedo, a partir do conceito de número e da construção da idéia de número em geral.

Os atuais estudos de álgebra escolar que se fundamentam no grupo de matemáticos que compõe o NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) propõem a alfabetização algébrica a partir da pré-álgebra. Há uma tendência, desde o final dos anos

60, em possibilitar aos estudantes o encontro com a álgebra simbólica, cada vez mais cedo. Por que será que isso acontece?

Entendemos que as propostas para o ensino de matemática, até então, para os professores do Ensino Fundamental nas inovações curriculares não têm permitido aos professores adquirirem um conhecimento mais profundo para entender as dificuldades dos alunos em relação aos conceitos algébricos.

Essa obstrução não permite nem a um nem a outro, compreender a matemática como um processo de elaboração do próprio homem. Ao que parece, na pressa de ensinar o formalismo algébrico, tanto professor como aluno ficam presos às amarras do desconhecimento matemático e do desconhecimento algébrico.

Karlson (1961), Caraça (1935, 1961, 1998), Guillen (2000) e Bohm (1980) mostram que a construção da natureza da álgebra está no movimento da vida. Nesse sentido, a natureza do pensamento algébrico é social e cultural.

Concordamos com Pereira de Jesus (2002) quando afirma que tudo na matemática é um construto social. A matemática é social. Logo, tanto a lógica da matemática como a natureza de seus conteúdos são elaborações históricas.

Nossa preocupação é o ensino de álgebra. As leituras que fizemos permitiram-nos, desde o segundo semestre de 2000 delinear o estudo sobre ensino de álgebra, nos diversos níveis de ensino.

Partimos do pressuposto de que todos os professores, independentemente do nível em que atuam, têm como objetivo central do ensino, propiciar aos estudantes a elaboração do pensar teoricamente, os diversos conceitos que se apresentam nas diversas áreas do conhecimento. No caso desta pesquisa, o pensamento teórico a que estamos nos referindo está relacionado aos conceitos algébricos.

A escola, para desenvolver o pensamento teórico procura considerar as diversas estratégias de ensino que se fundamentam, de forma geral, nos pressupostos da Psicologia, esquecendo-se de que seria interessante aos professores e estudantes "filosofarem" enquanto aprenderem.

Entendemos que quando professores e alunos vivenciam o lógico-histórico da álgebra, em atividades de ensino, podem vir a "filosofar" no sentido de pensar a relação entre o movimento da vida e o lógico-histórico da álgebra. Não o pensar estático, contemplativo, mas ativo, dinâmico porque relaciona-se diretamente com a nossa vida.

Aqui, a atividade de pensar envolve a ação de realização do pensar sobre a natureza do pensamento algébrico ou ainda sobre os aspectos lógico-históricos que fundamentam a natureza do conhecimento matemático. Nesse movimento, há a fluência do pensamento algébrico. Há a oportunidade de pensar sobre os "nexos internos e externos"[14] (Davydov, 1982) dos conteúdos estudados.

Apenas uma pergunta...

A questão propriamente dita e o objeto de análise da pesquisa começaram a ser construídos formalmente, ou seja, cientificamente, à medida que começamos a observar alunos e professores em formação, nos cursos de graduação, tanto na formação inicial como na formação continuada, a partir de 2000.

Nossa experiência enquanto formadora de professores, em cursos de licenciatura e de formação continuada mostra que o ensino de álgebra atual propicia àquele que a aprende, repetição de expressões formais sem significado e, por conseguinte, ausência da criação. Embora os licenciandos e demais professores o reconheçam como tal, denotam dificuldades em se desfazer dessa concepção.

Ao analisar os primeiros dados que levantamos no início da pesquisa, em 2000 e 2001, surgiram vários questionamentos que envolvem a prática desses professores, tais como:

1) Por que os professores não conseguem se desprender dessa realidade, uma vez que as reformas curriculares de 1988 e os atuais Parâmetros Curriculares propõem mudanças consideradas significativas pelos teóricos no ensino de matemática?

[14] Os nexos internos do conceito são históricos, enquanto que os externos estão relacionados à linguagem formal do conceito. São lógicos (Davydov, 1982).

2) Por que, ainda hoje, a exemplo dos anos 60-70, os cursos de licenciatura em matemática priorizam um currículo de álgebra tão fragmentado, dissociado da aritmética e dos conceitos geométricos?

Tanto a reforma curricular do Movimento Matemática Moderna dos anos 60-70, como a Proposta Curricular de 1988 e os atuais Parâmetros Curriculares foram elaborados sem a participação da maioria dos que seriam nela envolvidos: os professores do Ensino Fundamental e Médio.

A maioria das propostas curriculares, até o momento, é elaborada "para" os professores e não "com" os professores, fazendo com que os profissionais do ensino sejam apenas, em última instância, "executores" de currículos que, de tempos em tempos, chegam até as escolas através de livros didáticos (Sousa, 1999).

O não envolvimento dos professores no processo de reformas curriculares faz com que continuem seguindo modelos que tiveram, enquanto estudantes. A maioria deles, ao ensinar os conteúdos algébricos, continua priorizando, a exemplo dos anos 60-70, um ensino de álgebra que não privilegia o entendimento de sua dinâmica histórica e sim o entendimento de suas regras lógicas formais.

Não é sem motivo que sempre que podem, afirmam que o currículo que ensinam foi feito por "eles", dando-nos a impressão de que executam apenas o que "eles" mandam (Sousa, 1999).

Dentre esses currículos que "eles" elaboraram, incluem-se os atuais Parâmetros Curriculares distribuídos nas escolas, pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC). Os PCNs "indicam a 'Resolução de Problemas' como ponto de partida da atividade matemática e discutem caminhos para 'fazer matemática' na sala de aula, destacando a importância da História da Matemática e das Tecnologias da Comunicação" (MEC/SEF, 1998: 16).

Ao elaborar os Parâmetros Curriculares, a equipe autora, subordinada ao MEC, afirma que: "ainda hoje se nota, por exemplo, a insistência no trabalho com a linguagem da Teoria dos Conjuntos nas séries iniciais, a formalização precoce de conceitos, o predomínio absoluto da álgebra nas séries finais e as poucas aplicações práticas da matemática no Ensino Fundamental" (MEC/SEF, 1998: 21).

Entendendo que: "as propostas curriculares são ainda bastante desconhecidas de parte considerável dos professores, que, por sua vez, não têm uma clara visão dos problemas que motivaram as reformas" (MEC/SEF, 1998: 21).

Os professores, em sua maioria, não conhecem as propostas. Ensinam os conteúdos matemáticos a partir das concepções que elaboraram enquanto se constituíam professores, na licenciatura (Sousa, 1999).

Apesar dessa realidade, no final dos anos 90, a equipe autora dos Parâmetros Curriculares, procurou evitar, a exemplo da Proposta Curricular de 1988, do estado de São Paulo, fornecer uma lista de conteúdos para que os professores executassem. Optou por indicar aos professores "alguns caminhos para 'fazer Matemática' na sala de aula" (MEC/SEF, 1998).

Mas de que forma os professores estão "fazendo" esses caminhos? Como eles estão "construindo" os conceitos de uma matemática que privilegie o desenvolvimento dos conceitos matemáticos e não a mecanização e memorização dos mesmos conceitos?

Até o momento, há muitos pesquisadores que se interessam pelo ensino de álgebra, nos diversos níveis de ensino.

Podemos citar, por exemplo, os estudos de Kieran (1992); Souza & Diniz (1996); Usiskin (1995); Araujo (1999); Fiorentini et al. (1993); Lins & Gimenez (1997); Utsumi (2000), Ursini (1996-a, 1996-b), Salgado (1995), Araujo (1999, mimeo), Paulovich (1998), Azarquiel (1993), Robayna et al. (1996), Groenwald &, Filippsen (2002), Krutetsky (1977), Lanner de Moura & Sacarlassari (2001-b), Lanner de Moura et al. (2001), Lanner de Moura & Sousa (2000, 2001-a, 2002-a, 2002-b, 2002-c), Oliveira (2002), Pérez (1996), Shulte & Coxford (1995), Socas et al. (1996), Usiskin (1995).

Os estudos de Lanner de Moura & Scarlassari (2001) e Oliveira (2002), a exemplo dos de Robayna et al. (1996), Salgado (1995) e Ursini (1996-a, 1996-b), comprovam, através dos erros cometidos pelos estudantes do Ensino Fundamental, o não entendimento por parte dos estudantes da atual abordagem da álgebra que se apresenta tanto nas propostas curriculares como nos atuais livros didáticos e que prioriza o formalismo do conceito.

Aqui no Brasil, ao tentar minimizar essas dificuldades, os atuais Parâmetros Curriculares - PCNs que se guiam pelos documentos do National Council of Teachers of Mathematic (NCTM), a exemplo de outros países que têm como fio condutor a Resolução de Problemas indicam aos professores do Ensino Fundamental que "o estudo da álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas" (MEC/SEF, 1998: 115).

Os autores dos PCNs sugerem ao professor que, ao abordar os conceitos algébricos no Ensino Fundamental iniciem um trabalho que proporcione aos estudantes realizarem experiências variadas a "partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a aritmética", de forma que os estudantes adquiram uma aprendizagem de álgebra mais sólida e rica de significados.

A esse trabalho articulado com a aritmética dá-se o nome de "pré-álgebra" (MEC/SEF, 1998). Defende-se a idéia de que "é preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra" (Lins & Gimenez, 1997:10), com o que concordamos.

O ensino a partir de experiências pré-algébricas é defendido também por Ursini (1996-a) que apresenta atividades de ensino de álgebra, aos professores, a partir do desenvolvimento histórico dos conceitos algébricos associado à ferramenta computacional Logo.

A autora afirma que o ensino não deve ou pode simular o desenvolvimento histórico da álgebra. Tal desenvolvimento sugere aproximações que "propiciem e facilitem a construção de idéias algébricas". Segundo Ursini (1996-a), a história da álgebra mostra como a humanidade resolveu problemas a partir da álgebra não simbólica. Ao solucionar problemas, a humanidade considerava o número, base da matemática, que não estava relacionado à aritmética e usava "uma simbologia que não pode ser considerada algébrica" (Ursini, 1996-a: 34).

O surgimento da álgebra está relacionado a problemas que envolviam o pensar sob três aspectos:

1) Determinação de uma incógnita específica;

2) Determinação de métodos gerais para resolver famílias de problemas e

3) Estudo das relações funcionais, entre quantidades.

Para a referida autora, esses aspectos devem ser tratados na sala de aula por professores e alunos.

Lins & Gimenez (1997), assim como Ursini (1996-a) e Salgado (1995) argumentam que a idéia de que a aritmética deva preceder, necessariamente, a álgebra, é infundada. Eles entendem ser necessário mostrar ao estudante a razão e a necessidade da linguagem algébrica sem se desconsiderar o conceito mais geral de número.

Os quatro autores citados acima defendem que há todo um conjunto de experiências aritméticas e algébricas extra-escolares trazidas pelas crianças, ao iniciar o trabalho escolar.

Esse conjunto leva-os a buscar a coexistência da educação algébrica com a aritmética, de modo que uma esteja implicada no desenvolvimento da outra.

Ao colocar-se em primeiro plano o tratamento de técnicas de cálculo, no tratamento da aritmética, perde-se a oportunidade de as crianças desenvolverem a capacidade de refletir sobre o que há de genérico sobre as situações envolvidas. Deve-se refletir sobre a lógica das operações, o que se refere a uma maior capacidade de articular os recursos postos em jogo, na solução de um problema ou na condução de uma investigação.

Ao mesmo tempo, Pérez (1996: 72) defende que idéias geométricas devam fazer parte das aulas de álgebra. Deve-se incentivar a geometrização da aprendizagem da matemática fundamentando-nos na "concepção de que a natureza própria do refazer matemático deve refletir-se na sala de aula".

Aqui Pérez defende que a sala de aula refaça, guardadas as devidas proporções, a natureza do pensar matemático, incluindo-se aí, a natureza do pensamento algébrico. Fica difícil pensar sobre a natureza dos conceitos algébricos, sem considerar a geometria.

Entendemos que a articulação entre álgebra, aritmética e aspectos da geometria se deu através das abstrações feitas pela humanidade, durante o desenvolvimento do conceito de variável e este está diretamente ligado ao desenvolvimento e refinamento dos conceitos de número e de geometria, conforme apontam Caraça (1935; 1961; 1998), Eves (1997), Hogben (1970), Klein (1968) e Boyer (1974).

Ao elaborar as atividades de ensino que levem em conta essas articulações, o professor pode ter como intenção, no ato de ensinar o pensamento algébrico, não só a generalização, através de estudos das regularidades que constam nas propriedades algébricas e a reflexão sobre os aspectos lógicos das operações nos diversos campos numéricos, como também o entendimento e a compreensão de seus alunos do desenvolvimento lógico-histórico do conceito de variável e dos elementos que a compõem. Neste caso, os conceitos de fluência, de número e de campo de variação ou domínio da variável, considera-se que o pensamento algébrico pode ser definido como:

> "A (...) linguagem responsável pelo pensamento numérico sem numeral, genérico e variante. Pensar o número sem seus particularismos, sem sua 'presença física': esta é a chave da idéia algébrica. Ao alcançar os cumes dos conjuntos numéricos, o estudante de matemática chega numa nova planície, extensa e rica. Penetrá-lo nesta planície é o objetivo da aprendizagem algébrica. É claro que sem pensamento numérico essa nova etapa da educação matemática é impossível" (Lima et al, 1998: 03).

Lima et al. (1998) chamam a atenção para o fato de que pensar algebricamente significa pensar o número sem o numeral.

O pensamento algébrico deve considerar os nexos internos dos conceitos de número: qualidade, quantidade, senso numérico, correspondência um-a-um, ordenação, agrupamento, valor posicional, base e representação, presentes no movimento do pensamento numérico e não apenas os aspectos formais que se apresentam no conceito mais geral do número que se formalizam nas propriedades dos campos numéricos diversos.

O pensar algébrico, ao considerar o conceito mais geral do número não pode estar apenas relacionado à presença física e formal do número: o numeral.

Ao pensar o número sem o numeral, o estudante necessariamente tem que conhecer o conceito de número.

O cerne do conceito de número não está na manipulação do numeral e sim no entendimento de que o número contém, por exemplo, os conceitos de senso numérico e correspondência, bem como admite diversos campos que historicamente foram ampliados, a partir de necessidades do dia-a-dia e da própria matemática, apresentando naturezas bem distintas (Caraça, 1998).

Pensar algebricamente é pensar cientificamente. É a arte que considera os objetos da álgebra: números absolutos e grandezas que deverão ser medidas, porém, tais grandezas desconhecidas, referem-se a qualquer coisa conhecida. É por isso que podem ser determinadas.

A coisa conhecida pode ser uma quantidade ou uma relação individualmente determinada. Ao analisarmos as condições do problema, chegamos à coisa conhecida. Na arte de pensar algebricamente se buscam relações que possam vincular as grandezas dadas no problema com a incógnita (Ríbnikov, 1987).

Não basta elaborarmos uma série de atividades que contenham o "número manual" (Lima et al,1998), ou seja, o numeral, representação da idéia de quantidades, para que o estudante possa elaborar generalizações em doses homeopáticas, substituindo a presença física do número, o numeral, pela presença física e ao mesmo tempo abstrata das diversas letras do alfabeto que representam, simbolicamente, a idéia de variável, em seus diversos aspectos.

Há de se considerar no pensamento algébrico os "nexos internos e externos" (Davydov, 1982) do pensar aritmeticamente: a idéia de número e o conceito fundamental do pensar algebricamente: o movimento.

As discussões que, por ora, estamos fazendo, levaram-nos a refletir sobre o ensino de matemática, com ênfase no movimento do pensamento algébrico e na relação que professores de matemática do Ensino Fundamental constróem com o conteúdo concreto da álgebra, a partir da "ascensão do abstrato ao concreto" ou ainda "do movimento que atua nos conceitos, no elemento da abstração"; "movimento no pensamento e do pensamento" (Kosik, 2002: 36) da álgebra.

Tais discussões consideram as relações que o pensamento faz com os conceitos de álgebra não simbólica e a álgebra simbólica, bem como os conceitos de fluência, campo de variação e variável, nexos conceituais do pensar algebricamente.

As discussões a que nos referimos podem ser feitas durante o desenvolvimento de atividades de ensino em cursos de formação inicial e continuada de professores, de forma que se tornem, ao longo da discussão do tema, a problemática de nossa investigação:

1) De que forma a História da Álgebra pode contribuir com a elaboração de atividades de ensino de álgebra pelo professor?
2) Até que ponto os nexos conceituais da álgebra têm relações com o desenvolvimento histórico do pensamento algébrico? De quais relações estamos falando?
3) O que vem a ser pensamento algébrico? Como ele se manifesta na sala de aula? Em que ele se diferencia dos pensamentos aritméticos e geométricos?

Ao analisar o conceito de álgebra sob o ponto de vista: a) das atuais propostas curriculares e livros didáticos; b) do desenvolvimento dos nexos conceituais da álgebra com base na dinâmica histórica do conceito e c) nos aspectos da linguagem na formação do conceito de variável; propomos aos professores do Ensino Fundamental, a construção do pensamento teórico da álgebra com os estudantes, a partir dos autores já citados que tratam da relação entre o lógico-histórico no desenvolvimento científico, incluindo-se aí a matemática e o pensamento algébrico.

Estudar os currículos dos programas escolares, de nível médio, nos fez constatar que estes contêm o conteúdo e as correntes fundamentais do desenvolvimento da matemática que ocorreram nos diversos períodos, das diversas civilizações. Revela-se aí, "a relação existente entre o histórico e o lógico no desenvolvimento da matemática". Confirma-se, nessa relação, a tese "de que o lógico na ciência é o histórico, porém só assimilado e posto em certa ordem" (Ríbnikov, 1987: 107).

O lógico e o histórico na matemática são inseparáveis. Para entendermos essa inseparabilidade, consideramos "o conhecimento dos fatos fundamentais da História da

Matemática e dos trabalhos clássicos, a compreensão das leis do desenvolvimento das ciências matemáticas e do caráter histórico da correspondência entre as disciplinas matemáticas particulares" (Ríbnikov, 1987: 18).

Há de se ressaltar que, a exemplo do que diz Ursini (1996-a), não estamos defendendo a reprodução na sala de aula, de forma linear, do desenvolvimento histórico da álgebra, como se o estudante de álgebra aprendesse os conceitos algébricos, simplesmente pelo fato de ter contato com a linearidade da história da álgebra.

Não é isso que propomos neste estudo, mesmo porque, com apoio em Ríbnikov (1987) e Aleksandrov et al. (1988) argumentamos que a indissociabilidade entre o lógico e o histórico mostra a inexistência da linearidade histórica.

O que há é o vir a ser. É o movimento do velho e do novo se processando a todo o momento no conhecimento humano, onde velho e novo não estão em oposição, gerando uma nova qualidade de pensamento.

Velho e novo se completam, se complementam. O que há, nesse movimento é a "interdependência[15] e a fluência" (Caraça, 1998). Velho e novo auxiliam o homem a compreender o mundo, na medida em que se propõe a humanizar-se [16] pelo conhecimento.

A partir do momento em que estamos tentando nos humanizar pelo conhecimento matemático, consideramos a relatividade das definições geradas, de tempos em tempos.

As definições matemáticas feitas até hoje não podem "ser consideradas como absolutamente rigorosas ou definitivas". O desenvolvimento dos conceitos matemáticos continua na atualidade. Uma ciência que não está morta e mumificada não é e nem pode ser de forma alguma, perfeita (Aleksandrov et al, 1988: 78).

Nesse sentido, defendemos que os conceitos algébricos não podem, de forma alguma, serem ensinados, pela informação e repetição do aspecto formal dos conceitos, como se a álgebra fosse algo pronto, acabado, morto, mumificado, portanto, imutável.

---

[15] A interdependência está relacionada com a totalidade da vida onde tudo tem a ver com tudo (Caraça, 1998).
[16] A partir de Kosik (2002) e Bohm (1980) entendemos que o humanizar-se pelo conhecimento envolve o conhecimento dos nexos internos e externos presentes no lógico-histórico da totalidade da vida. O que diferencia um animal do ser humano, por exemplo, não é apenas o fato de um deles ser racional, mas sim a relação que o ser racional trava consigo mesmo e com os seres viventes do Cosmos, enquanto se conhece e desenvolve a partir dos conceitos científicos e não científicos gerados em sua *praxis*.

Como se a matemática fosse a ciência mais perfeita, não passível de erros, por isso menos humana, por ser uma das mais antigas. A matemática ainda não é. Está por vir a ser. Por conseqüência, a álgebra também está por vir a ser. Ainda não é. Aqui, a expressão vir a ser tem a conotação de fluência, de movimento no conhecimento humano.

Defendemos que os professores considerem, nas aulas de matemática, o conceito de lógico-histórico da álgebra, cujos elementos constitutivos discutidos por este estudo são: a) os nexos conceituais presentes no desenvolvimento do pensar teoricamente a álgebra, isto é: fluência, conceito de campo de variação, desenvolvimento do conceito de variável e b) a álgebra não simbólica: retórica, sincopada e geométrica que se apresentou no movimento do pensamento teórico da álgebra a partir do desenvolvimento lógico-histórico do pensar algébrico das diversas civilizações em vistas de construir o pensamento teórico da álgebra.

Os pressupostos apresentados, até aqui, consideram os conceitos de lógico-histórico; nexos conceituais internos e externos; pensamento teórico; movimento; abstratividade; concreticidade; fluência; realidade objetiva; nova qualidade; singularidade; particularidade; variável; formação de professores; ensino de álgebra; humanização pelo conhecimento; álgebra não simbólica e álgebra simbólica.

Tais pressupostos nos auxiliaram a elaborar este estudo. Estão presentes em diversos momentos da pesquisa. Na medida do possível serão aprofundados.

Representam uma síntese de nossa busca, na tentativa de responder às muitas questões feitas desde o momento em que tínhamos como intenção definir de forma lógica o problema de investigação da pesquisa: **"Que relações podem ser estabelecidas entre o conhecimento de professores e os conceitos algébricos enquanto vivenciam e analisam atividades de ensino numa perspectiva lógico-histórica da álgebra?".**

Buscando respostas...

Esta investigação é qualitativa e buscamos conferir a ela as cinco características estudadas por Bogdan & Biklen (1994):

1) A fonte direta dos dados é a sala de aula, nosso ambiente natural de ensino e pesquisa;
2) A investigação procura descrever, a partir de "isolados"[17] (Caraça, 1998) as diversas elaborações feitas durante a vivência e análise de atividades de ensino;
3) Nosso foco é o processo do pensar sobre e não simplesmente os resultados ou produtos que se apresentam nas atividades de ensino estudadas;
4) A análise das informações foi elaborada na medida em que as informações particulares e singulares foram lidas e reelaboradas considerando-se como ponto de partida a totalidade das informações construídas e as relações entre elas, tal como um funil e não simplesmente juntando as partes como em um quebra-cabeças e,
5) A partir das análises, demos significados didático-epistemológicos às novas qualidades de pensamento decorrentes das diferentes elaborações individuais e dos grupos construídas pelos participantes do estudo. Esses significados se constituíram em uma categoria emergente de análise, a qual denominamos de pensamento flexível[18].

A pesquisa tem caráter propositivo. Damos a ela a especificidade de intervenção. A pesquisadora faz parte do grupo dos sujeitos, assumindo a orientação dos estudos aí desenvolvidos. A intervenção fica caracterizada, quando propomos à classe um conjunto de atividades de ensino previamente elaboradas.

Consultamos duas fontes diferentes para a elaboração e construção dos dados junto aos professores do Ensino Fundamental. A primeira fonte diz respeito à álgebra escolar. A leitura dessa fonte implicou em subsídios esclarecedores do contexto em que o professor do

---

[17] Isolados são seções da realidade escolhidas pelo homem para serem estudadas (Caraça, 1998).

[18] A partir das informações construídas em sala de aula, da teoria e das análises, definimos o conceito de pensamento flexível como elo de ligação entre os pensamentos empírico-discursivo e teórico estudados por Davydov (1982).

Ensino Fundamental desenvolve sua prática pedagógica e o pensamento algébrico de seus alunos, bem como o histórico do referencial teórico responsável pelas novas discussões pedagógicas e conseqüentemente o surgimento de propostas curriculares que apontam para uma tendência do ensino da matemática pela Resolução de Problemas. Aqui, os principais autores consultados foram: Lima & Moisés (1997; 1998; 2000); Moisés (1999); Kieran (1992); Souza & Diniz (1994); Usiskin (1995); Araujo (1999); Fiorentini & Miorim & Miguel (1993); Lins & Gimenez (1997); Utsumi (2000) e Robayna & Machìn & Medina & Domínguez (1996)

A segunda fonte de consulta está relacionada ao desenvolvimento conceitual da álgebra e aos nexos conceituais desenvolvidos pelo movimento do pensamento humano. Em se tratando do desenvolvimento conceitual da álgebra, os principais autores consultados foram: Caraça (1935; 1942; 1942-a; 1942-b; 1943; 1944; 1945; 1947; 1948; 1958; 1961; 1966; 1973-4; 1978; 1990; 1998; 1998-a), Eves (1997), Boyer (1997), Ríbnikov (1987), Smith (1958), Struik (1987). Buscamos ainda Kopnin (1978); Bohm (1980); Kosik (2002) e Davydov (1982) com o intuito de compreender os nexos conceituais desenvolvidos pelo pensamento humano, enquanto este se relaciona com a realidade.

Ao buscarmos estabelecer uma consonância teórica com esses autores fizemos uma composição de atividades, tendo por referência Lima & Moisés (1997; 1998; 2000). Demos a essas mesmas atividades a conotação de atividades de pesquisa por se tornarem o meio de construção das informações.

A Educação Conceitual (Lanner de Moura et al, 2003) define a atividade como movimento de abstrair o resultado de ações, antes mesmo de realizá-las, provocadas por necessidades reais, advindas da interação do homem com o meio pela condição de nele viver.

Assim, a atividade de ensino ou atividade de aprendizagem deve permitir aos envolvidos no processo, aprender a pensar criando conceitos num movimento semelhante ao da dinâmica da criação conceitual na história do conceito.

A atividade será orientadora quando for capaz de definir os elementos essenciais da ação educativa e respeitar as diversas dinâmicas de interações que muitas vezes fogem ao controle do professor (Moura, 2001).

A partir desses pressupostos, entendemos que a atividade será de pesquisa, quando for capaz de definir os elementos constitutivos que permeiam o pensar sobre as elaborações decorrentes da análise das atividades orientadoras de ensino, feita pelos envolvidos, ou, ainda, quando permitir a análise dos "inesperados" (Caraça, 1998), caso estes surjam durante o processo de formar-se pelo conhecimento científico.

As atividades de ensino consideram: a) o desenvolvimento histórico do conceito; b) os momentos dialéticos de sua formação e c) a vivência na participação dos sujeitos da pesquisa, vinculada a um processo reflexivo-ativo-explicativo, dimensionado pela dinâmica relacional indivíduo-grupo-classe.

Preocupamo-nos em estudar atividades de ensino que tratam do conceito de variável, a partir da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica.

Assim, nesta pesquisa não estaremos dando enfoque a atividades de ensino que tratam dos conceitos de equação e inequação, presentes na álgebra simbólica, e sim aquelas atividades que, de forma geral, não são tratadas no Ensino Fundamental, durante a iniciação algébrica de nossos estudantes.

As fontes das informações construídas durante o estudo são as mesmas que determinaram as atividades de ensino: a) as três dimensões da variável e b) a cultura matemática dos professores.

Nesse contexto, o lógico-histórico se constitui em atividade de aprendizagem para os participantes da pesquisa e, em especial, para a pesquisadora, em atividade de pesquisa.

Os participantes

As atividades de ensino de álgebra com enfoque na perspectiva lógico-histórica foram estudadas, tanto na formação inicial como na formação continuada de professores.

A exemplo de Darsie (1998: 62) denominamos esses professores de "professores-alunos" ou simplesmente alunos, pois eles têm como objeto de sua reflexão "o ato de aprender o que ensinam e aprender a ensinar".

Na formação inicial estudamos as atividades de ensino nas disciplinas "Metodologia do Ensino de Matemática" e "Tópicos Especiais em Didática" oferecidas no segundo semestre de 2000 e 2001, respectivamente, para os cursos de licenciatura em Matemática e Pedagogia.

Já na formação continuada estudamos as atividades de ensino na disciplina "Fundamentos Científicos e Didáticos da Formação de Professores -Teorias Pedagógicas e Produção de Conhecimento" oferecida no primeiro semestre de 2002. As três disciplinas foram ministradas na Faculdade de Educação da Unicamp pela Profª Drª Anna Regina Lanner de Moura[19].

Assim, pelo período de dois anos, de 2000 a 2002 analisamos e refletimos sobre as dúvidas e questionamentos que os professores-alunos fizeram enquanto refletiam, vivenciavam e analisavam atividades de ensino que tratam dos conceitos de fluência, variável, campo de variação e densidade numérica.

Ao tentarmos responder às muitas perguntas dos professores buscamos bibliografias que tratam da História da Matemática, História da Álgebra, do ensino de álgebra e da formação de professores.

Para efeito de sistematização e organização das informações a serem analisadas nesta pesquisa consideramos as atividades de ensino que foram ministradas no grupo de professores-alunos que cursou a disciplina "Tópicos Especiais em Didática"[20].

---

[19] Docente da Faculdade de Educação – UNICAMP, Depto. de Metodologia de Ensino.
[20] A disciplina faz parte do currículo do curso de Pedagogia.

Os participantes são professores e futuros professores do Ensino Fundamental. Dos dezoito professores-alunos matriculados na disciplina, apenas Everaldo[21] era licenciado em matemática e a minoria lecionava. Assim, durante quinze sextas-feiras nos encontramos com:

Disciplina EP-551: Tópicos Especiais em Didática – 2° semestre de 2001		
Adriana	Andressa	Míriam
Adriane	Clécios	Paula
Ana Carolina	Everaldo	Priscila
Ana Cristina	Gabriela	Silvia
Andrea	Luciane	Sônia
Andréia	Mariana	Tathiane

[21] Everaldo preferiu usar seu primeiro nome na identificação de seu diário de campo.

Fazendo recortes...

O foco da pesquisa foi delineado durante as vivências ocorridas em aula e enquanto líamos o diário de campo dos professores-alunos. Analisamos as elaborações feitas durante a vivência, discussão e reflexão das atividades propostas ao longo do curso, bem como a natureza da discussão e das reflexões que as atividades de ensino proporcionaram.

Dessa forma, nos apropriamos do conceito teórico da dialética lógico-histórico e percebemos que a importância de ensinar e aprender os conceitos algébricos, através da perspectiva lógico-histórica, não está simplesmente no fato de comprovar ou refutar a eficiência de uma certa perspectiva no ensino.

A perspectiva lógico-histórica pode estabelecer uma nova relação entre aqueles que ensinam e aprendem com os conceitos algébricos. Pode ser considerada atividade formadora para aqueles que aprendem e aqueles que ensinam.

A relação a que nos referimos se manifestou nas elaborações feitas durante o processo de análise e vivência das atividades. Podemos citar como exemplo uma das falas de RTS[22] (2001): "Estou começando a compreender a beleza da matemática, pois sempre pensei na matemática como um todo e um processo em constante movimento. Na realidade, encontrei pessoas que pensam da mesma forma e isso é bem interessante" (RTS, diário: 31/08/01).

Entendemos que as relações feitas a partir de elaborações podem dar novas formas ao movimento do pensamento no sentido da verdade construída por aquele que aprende, ainda que essa verdade seja momentânea.

Assim, as formas do movimento do pensamento, denominadas por Kopnin (1978: 197) de "juízo[23], dedução e conceito" foram construídas durante todo o processo de

[22] Pseudônimo escolhido por uma das alunas que freqüentou a disciplina para identificar-se em seu diário de campo.
[23] Juízo: "é um processo de apreensão do objeto pelo pensamento. As diversas formas de juizo são elos particularmente, momentos desse processo" (Kopnin, 1978: 198). Dedução: "é elemento indispensável do caráter criativo do trabalho humano. O desenvolvimento do trabalho, a prática geral é o desenvolvimento também da dedução" (Kopnin, 1978: 213). Conceito: "é uma forma original de reflexo dos objetos, das coisas do mundo material e das leis do movimento destes. Os conceitos são objetivos por conteúdo (...). São o concreto do pensamento. O conceito reflete o conteúdo que as coisas encerram" (Kopnin, 1978: 204).

aquisição do conhecimento, e no nosso caso específico reconhecemos essas formas na formação do pensamento algébrico.

Após o término da primeira aula, Andressa (2001) [24] emite juízo sobre a mesma, em seu diário de campo: "nesta aula aprendemos que a álgebra não se aprende só da forma que é passada em muitas escolas. Ela tem um fundamento, onde envolve uma lógica que desmistifica o número (...) (Andressa, diário: 10/08/01)".

Damos a esta elaboração o status de juízo pelo fato de Andressa estar reunindo de forma sincrética elementos da aula e das impressões que esses causam sobre suas concepções algébricas até então estabelecidas.

Os juízos elaborados constituem um tipo diferente de pensamento. Este pode ser (re)elaborado à medida que o conceito se (re)constrói tanto pelo indivíduo como pelo grupo, em sua subjetividade.

> "Estou me surpreendendo com o enfoque que está sendo abordado para nos apresentar a álgebra. Estou gostando da relação que está sendo apresentada com outras ciências, principalmente com a filosofia, trazendo questões muito interessantes. Meu interesse pela álgebra aumentou, pois estou vendo-a sob outros aspectos já vistos em minha vida anteriormente, porém há algumas questões muito abstratas que realmente, às vezes, fica um pouco complicado de se entender" (Dricme[25], diário: 17/08; 24/08/01).

As elaborações a que nos referimos, podem ou não trazer formas novas ao movimento do pensamento. Essas formas, quando vistas sob a ótica do ensino podem ser consideradas conquistas construídas na cumplicidade entre professor e aluno, no dia-a-dia da sala de aula, a partir do momento em que ambos se convencem de que o processo de aquisição do conhecimento é o que dá movimento à vida.

[23] Andressa preferiu usar seu primeiro nome na identificação de seu diário de campo enquanto cursou a disciplina.
[24] Pseudônimo escolhido por uma das alunas que freqüentou a disciplina para identificar-se em seu diário de campo.

É na cumplicidade do movimento da sala de aula que construímos para nós mesmos pensamento e linguagem algébrica. Nesse processo, novas formas do movimento do pensamento estão por vir à tona.

A verdade relativa construída, a partir da cumplicidade de ambos, é elaborada a partir do conhecimento de cada um, a respeito deste ou daquele tema. Por ser construída com os erros e acertos que se formam nessa cumplicidade, a verdade momentaneamente construída pode ser revista e (re)elaborada porque está conectada às premissas[26] construídas no dia-a-dia.

> "Estou cada vez mais envolvida com a disciplina e com as idéias que estão sendo trazidas à tona. Comecei a questionar muitas das coisas que aprendi... Mas, por outro lado, me questiono: será que seria positivo provocar toda essa "CONFUSÃO" nas crianças? É tão complicado partir de tantas premissas... Mas é legal acionar a dúvida, a curiosidade, e principalmente a elaboração de hipóteses, pensamentos... Uma das coisas mais importantes que ficou para mim nessas aulas do ensino de matemática é conhecer/ensinar que ela faz parte de uma construção histórica, de uma busca por respostas ou instrumentos de análise e de busca de outros conhecimentos" (Paula[27], diário: 17/08/01).

É nesse ir e vir, nessa cumplicidade entre professores e alunos na busca das verdades que há o surgimento do que denominamos de pensamento flexível[28].

O pensamento flexível contém o lógico-histórico do movimento do pensamento na busca incansável da verdade. Contém conceito, juízo e dedução. Contém a dúvida, a hesitação, a incerteza e o dilema. Não é tão organizado formalmente quanto o pensamento teórico nem tão sensorial quanto o pensamento empírico-discursivo, por isso, se constitui

[26] Premissa: tem a conotação de fato. O fato "é uma forma de conhecimento humano que deve possuir autenticidade. É "célula basilar da formação da teoria científica (...)". As propriedades dos fatos "constituem a premissa necessária de construção do sistema teórico, de seu desenvolvimento e sua demonstração" (Kopnin, 1978: 229).
[27] Paula preferiu usar seu primeiro nome na identificação de seu diário de campo.
[28] O termo pensamento flexível é usado por David & Lopes (1998: 37) como aquele tipo de pensamento que ressalta determinadas "habilidades de pensamento que são ressaltadas pelo grupo de pesquisadores da linha da aceleração cognitiva".

elo de ligação entre ambos. Abrange a totalidade do conceito porque permite-nos (re)conceituar e usar o conceito para interpretar a realidade.

Tal pensamento permite-nos o domínio dos nexos do conceito. Há vários níveis de flexibilidade nesse tipo de pensamento. A partir desse pensamento, por exemplo, enquanto pesquisadora, pudemos elaborar teoricamente os conceitos de atividade de pesquisa, nexos conceituais e lógico-histórico, numa perspectiva didática para a álgebra, bem como (re)definir o conceito de pensamento flexível estudado por David & Lopes (1998).

As atitudes presentes no pensamento flexível são:

1) Reconhecimento da verdade como sendo relativa e não absoluta;
2) Capacidade de tolerar ambigüidades e inquietude;
3) Capacidade de elaborar nossas próprias respostas, independentemente de nossos pares; destituição do medo de se expor;
4) Aceitação de que as verdades relativas podem ser reelaboradas a qualquer momento, de forma individual ou coletiva;
5) Capacidade de elaborar respostas a diversas questões que contenham a interdependência e a fluência, características essenciais do movimento do pensamento.

Nesse sentido, a professora-aluna Paula denomina de confusão o que Caraça (1998) denomina de "inesperado"[29], cuja conotação contém dilemas e problemas.

Ao que parece, a aluna gostaria que as perguntas tivessem uma única resposta e de que lhe fosse dado o acesso imediato a ela, sem que lhe fossem colocadas questões intermediárias a respeito. A confusão contida na fala de Paula está diretamente relacionada ao pensamento flexível que se apresenta nas questões que discutimos.

---

[29] A partir de Caraça (1998: 106) entendemos que o inesperado está relacionado ao isolado ou ainda seção da realidade estudada pelo homem. O inesperado pode ter a ver ou não com "um dos motivos principais do progresso no conhecimento da realidade" porque pode ou não nos obrigar a focar melhor ou ainda a determinar melhor o isolado que estamos querendo entender. Quando um inesperado ocorre em um isolado não podemos afirmar de antemão que escolhemos o isolado errado. Pelo contrário. Às vezes é o inesperado que nos mobiliza a necessidade de tomarmos "um isolado como elemento constitutivo de um outro mais largo", uma vez que a recomposição de um certo compartimento da realidade pode necessitar da construção constante de "cadeias e, a cada elo da cadeia corresponde um nível de isolado".

Tal pensamento é válido, quando Paula assume o papel de estudante, porém, quando se reveste de profissional do ensino tenta negar a necessidade da confusão, da flexibilidade do pensamento para a sua sala de aula.

Pode-se dizer que, apesar do envolvimento com a disciplina, Paula tem medo de tentar levar a flexibilidade para a sua própria sala de aula, porém, inquieta-se, se expõe sem medo e começa a pensar sobre a história da matemática e a busca incansável desta em delinear a verdade.

É como se fosse permitido a ela ver a mobilidade e a fluência do conhecimento enquanto estudante, enquanto "aprendente" (Assmann, 1998), porém, ao se revestir de educadora passa a duvidar dessa fluência, passando-nos a sensação de que talvez fosse muito mais interessante levar o conhecimento já lapidado para a sala de aula.

Em nome da não confusão, faz-se necessário levar certezas e não incertezas para a sala de aula. Faz-se necessário, enquanto professora, levar aos estudantes a "não dúvida", o pronto, o acabado, o imutável do conhecimento.

Transferir o sentido comum da expressão "confusão" pode tornar-se um impedimento didático-epistemológico para o desenvolvimento do pensamento flexível em álgebra.

Entendemos que o pensamento flexível seja nexo conceitual ou ainda elo de ligação entre os pensamentos empírico-discursivo e teórico estudados por Davydov (1982). A didática tradicional considera como ponto de partida, o pensamento empírico-discursivo e como ponto de chegada, o teórico.

Apesar do referido autor preconizar uma nova Didática para o desenvolvimento do pensamento teórico não dá interpretação ao elo de ligação entre uma Didática do pensamento empírico e a do pensamento teórico.

Se a mutabilidade é parte integrante da vida das pessoas temos que considerar a relatividade das coisas, incluindo-se aí, a relatividade do pensamento, a relatividade das verdades, o pensar flexível durante a elaboração de abstrações na sala de aula.

Ao defendermos que o lógico-histórico seja uma perspectiva didática para a álgebra, faz-se necessário considerar a mutabilidade do conhecimento científico que é lógica e histórica.

Não queremos considerar apenas as extremidades formais dos pensamentos empírico-discursivo e teórico, mas considerar o processo do movimento do pensamento, no sentido do constituir-se teórico. Não queremos negar a flexibilidade do pensamento nesse processo. É preciso considerar o movimento, a fluência elaborada nas abstrações; considerar o pensamento flexível que contém as verdades momentâneas que elaboramos ao tentarmos nos apropriar do pensamento teórico da álgebra.

> "Às vezes, fico em dúvida sobre a apostila 'A variável', se a intenção das questões é respondê-las ou ir além dela. Muitas vezes, alguns grupos levantam questões sobre as perguntas das apostilas, tipo: 'está dito isso e não aquilo'. Isso, para quem tem dificuldade em matemática e a aprendeu mecanicamente acaba provocando uma dificuldade de entendimento da idéia, mesmo porque se fica esperando uma resposta certa ou errada, o que muitas vezes não acontece. Espero que ficar em dúvida, deixar-nos em dúvida, seja um dos objetivos da disciplina" (Bila, diário: 14/09/01).

Entendemos que as formas definidas por Kopnin (1978) do movimento do pensamento: conceito, juízo e dedução, também se apresentam, de forma não muito organizada, no pensamento flexível.

Temos como hipótese, que o pensamento flexível preenche um vazio conceitual existente entre o pensamento empírico-discursivo, que considera, no conhecimento, os aspectos externos, perceptíveis do objeto e o pensamento teórico que considera a formalização científica, o último estágio de rigor científico do conhecimento. Os pensamentos empírico-discursivo e teórico fundamentam a didática tradicional (Davydov, 1982).

Quando se tem como ponto de partida, o pensamento empírico-discursivo e como ponto de chegada, o pensamento teórico dos conceitos, há uma ruptura entre o ensino escolar dos conceitos e a procedência destes (Davydov, 1982).

A procedência dos conceitos é lógico-histórica. Estão presentes no movimento do pensamento humano e por esse motivo devem fazer parte do ensino tendo como intuito auxiliar alunos e professores a construir relações entre os conceitos que aprendem e a vida fluente e mutável.

Ao se relacionar com o conhecimento de forma que o entenda, o conhecimento passa a ser uma atividade, no sentido de Leontiev (1983), para estudantes e professores.

Esse movimento de compreensão do que se estuda, se materializa nas elaborações que o movimento do pensamento constrói. Assim, na medida em que as elaborações são acometidas de "inesperados" (Caraça, 1998), surgem novas formas no movimento do pensamento.

A cada inesperado, o pensamento, necessariamente tem que se flexibilizar, para poder analisar a relatividade das verdades que estão em constante elaboração.

A questão que se coloca nesse momento é: todo o conteúdo presente em atividades de ensino ao se fundamentar na dialética lógico-histórico é capaz de, a todo o momento, trazer ao pensamento daquele que ensina e aprende, novas formas de movimento ao pensamento? Até onde essas atividades de ensino possibilitam ao professor-aluno ter pensamento flexível?

A partir dessas considerações e questionamentos, entendemos que o movimento presente no conceito lógico-histórico, enquanto perspectiva didática, deve focalizar, na sala de aula, o caráter epistemológico do pensamento de professores e alunos, presente no processo da busca das verdades, construídas tanto por aquele que aprende, como por aquele que ensina, ao se apresentar em atividades de ensino.

Aqui o processo de aquisição do pensamento algébrico é sinônimo de movimento do vir a ser do pensamento teórico, o qual está diretamente relacionado ao pensamento flexível que contém dúvidas e incertezas, logo, é mutável enquanto realiza a sua busca na resolução de atividades propostas.

O lógico-histórico é processo do vir a ser dos conceitos. Contém dúvidas, incertezas, inesperados, novas qualidades, medos, ousadias, descobertas, relações entre o velho e o novo, imutabilidade, mutabilidade, fluência, movimento. A escola não deve se eximir desse processo.

A fala de Bila (2001) mostra o seu entendimento quanto aos objetivos da disciplina. Mostra o lógico-histórico de seu pensamento no sentido de compreender a abordagem feita durante o curso.

Ao pensarmos sobre os conceitos aprendidos, o qual temos que ensinar podemos compreender melhor o que Caraça (1998) denomina de princípio de extensão, desde que se consiga relacionar tais conceitos com o movimento da vida.

É exemplo disso a fala de RTS (2001): "realmente, hoje estou começando a olhar a matemática de forma diferente. Com esse pensamento quando estiver em sala de aula, formarei uma nova ação pedagógica (RTS, diário: 14/09/01)".

Quando o ensino é tomado como atividade e não como tarefa ou exercício, deve ser capaz de satisfazer as necessidades dos estudantes na busca do conhecimento. A necessidade dos estudantes deve estar em sintonia com as necessidades de sua comunidade de aprendizagem.

Para Leontiev et al. (1991), "o objeto de conhecimento é o conteúdo e, sendo assim, é objetivo social tornado possível na sala de aula" (Moura, 2001: 158).

Os relatos dos professores-alunos mostram que os conteúdos matemáticos que haviam estudado até o momento em que iniciaram o curso estavam dissociados de suas vidas. Logo, essa dissociação fez o objeto do conhecimento, o conteúdo algébrico tornar-se uma simples tarefa.

É como se tivéssemos dois mundos bem distintos: o da vida que fica do lado de fora dos muros escolares, por isso, atividade humana e o da vida escolar, que fica restrito às salas de aulas, configurando-se em tarefa.

Há atividades de ensino que possibilitam ao pensamento fazer relações entre o conteúdo apreendido e a vida; entre o já conhecido e o desconhecido; entre o que é e o que poderá vir a ser; a fazer relações entre a mutabilidade e a imutabilidade; entre o certo e o incerto; entre a certeza e a incerteza. Enfim, possibilitam o pensamento a elaborar conexões internas entre o estudado, bem como elaborar conexões com a realidade que nos cerca.

Em nossa pesquisa, podemos citar as atividades que trataram das premissas; da permanência e da fluência; da palavra particular e universal; da álgebra geométrica, como exemplos de atividades que permitiram aos professores-alunos fazer relações entre o conteúdo apresentado e o movimento mais geral de suas vidas.

> "Filosofia e matemática – um agradável revisar de alguns conceitos muito interessantes. Ademais, surgiram, durante as discussões, várias abordagens interessantes – e uma inesperada. Uma colega colocou a questão do prédio como estático – e isso me causou estranheza, ademais pelo fato dela ser engenheira civil e usar sua 'formação exata' como argumento. Quem melhor poderia falar sobre a fluência do edifício?" (Clécios[30], diário: 31/08/01).

Em muitos momentos de nossa vida, ao darmos asas ao movimento de nosso pensamento, a lógica do que pensamos pode ser considerada formal, porém, essa mesma lógica, quando pensada por nós mesmos, em outro contexto e em outros momentos, pode tornar-se histórica. Podemos citar como exemplo, a álgebra sincopada de Diofanto[31] ou ainda a palavra "ahá" [32] inventada pelos egípcios.

No contexto grego, em determinado momento, a sincopação[33] de Diofanto representava o máximo da abstração a que o pensamento podia alcançar. O mesmo ocorreu com os egípcios quando designaram uma palavra para ser a representante de um pensamento numérico.

---

[30] Clécios preferiu usar seu primeiro nome para identificar-se em seu diário de campo.

[31] Diofanto ou ainda Diofante viveu na Grécia e trouxe grandes contribuições para a matemática de seu tempo. Para Silva (1942:15) a equação de Diofanto constitui-se "em um assunto nitidamente integrado na teoria da divisibilidade, intimamente relacionado com as noções de m.d.c. e de congrüência". Nesse contexto "será proibido pronunciar em aritmética a palavra 'equação'? Discutiremos com maior profundidade o trabalho de Diofanto no item "Lógico-histórico da álgebra não simbólica".

[32] A palavra ahá significa monte, montão (Lima & Moisés, 1997). Faz parte da álgebra egípcia.

[33] Álgebra sincopada é uma das classes da álgebra não simbólica (Smith, 1958).

Tanto a sincopação de Diofanto como o "ahá" dos egípcios, em nossos dias, tornaram-se históricos, justamente porque temos a variável-letra como a representante máxima da abstração de um pensamento.

Fundamentando-nos em Bohm (1980:219) podemos afirmar que, provavelmente, daqui a alguns séculos, a álgebra simbólica de hoje poderá vir a ser chamada de subálgebra, uma vez que a álgebra simbólica estudada no Ensino Fundamental é relativamente autônoma por estudar determinados movimentos "que são aspectos da 'álgebra total' indefinível". Daqui a tempos, o máximo da abstração de hoje tratada no Ensino Fundamental, ou seja, o máximo da formalização lógica de hoje que se manifesta na variável-letra, será descrita em termos de subálgebra.

É a lógica, materializada nas abstrações, que dá movimento ao pensamento humano. E são essas abstrações que compõem nossas elaborações. Tais abstrações também formam o pensamento flexível.

Assim, quando selecionamos atividades que seriam estudadas durante a pesquisa, nos preocupamos em escolher atividades de ensino que, entendíamos, serem capazes de dar mobilidade ao pensamento dos alunos, no sentido de construir verdades, a partir de premissas estabelecidas individualmente e acordadas coletivamente.

O mais importante das atividades não era saber enunciar o conceito em seu aspecto formal, mas sim enunciar respostas a questões que lhes era possível formular. Nos preocupamos com o processo de construir respostas e não com a resposta final.

Nossas preocupações estavam nas elaborações feitas no movimento do pensamento enquanto se pensava sobre os conceitos algébricos, enquanto os estudantes buscavam encontrar as verdades ou a verdade que fariam de uma certa resposta, a mais correta dentre todas.

As atividades permitiram a criação dos alunos de verdades momentâneas pelo movimento do pensamento de forma que estas viessem à tona das discussões, através das elaborações dos professores. Entendemos que algumas dessas verdades favoreceram o aluno a fazer relações com sua realidade. As atividades propiciaram elaborações inacabadas do conceito. Trouxeram novos significados para os alunos.

As elaborações inacabadas do conceito são os juízos construídos no processo do vir a ser da álgebra simbólica para aquele que a está aprendendo. Sua forma de desenvolvimento.

Elas não exigiram como ponto de partida e de chegada, o formalismo lógico do conceito, porque não tinham o caráter sintético que geralmente é dado pelo formalismo do pensamento algébrico. A construção do formalismo do pensamento algébrico levou em conta os nexos conceituais que compõem a álgebra simbólica: os conceitos de número, de geometria e de fluência.

Assim, ao estudarmos as elaborações dos professores-alunos, definimo-las como expressões orais e escritas processadas pelo movimento do pensamento que se caracteriza pelo pensar sobre os conceitos algébricos, objeto de estudo desta investigação.

A exemplo de Lanner de Moura (1995) e Prado (2000), que analisaram as manifestações dos alunos enquanto vivenciavam atividades de ensino com enfoque na Educação pelo conceito, analisamos as expressões orais e escritas dos professores durante o estudo e a vivência das atividades.

Nessas expressões, incluem-se os gestos, as falas mais eloqüentes, os diálogos, os escritos manifestos no processo de estudar e vivenciar as atividades de ensino de álgebra.

As atividades de ensino propostas para o estudo foram elaboradas por Lima & Moisés (1997; 2000) e consideram os conceitos de:

1) Fluência;
2) Variável e campo de variação;
3) Álgebra não simbólica: retórica, sincopada e geométrica e
4) Álgebra simbólica.

Para uma análise mais profunda das elaborações feitas durante a disciplina "Tópicos Especiais em Didática" tentamos perceber o movimento do pensamento dos professores, em todos os encontros, a partir de quatro momentos bem distintos: a) questionário; b) diário de campo; c) episódios ocorridos durante a aula e d) Elaboração e aplicação de projetos de ensino[34].

[34] Projetos de ensino: uma das modalidades de avaliação usada na disciplina.

Momentos ...

Questionário

O primeiro momento da pesquisa se caracterizou pela elaboração de um questionário, que continha cinco questões:

1) Escreva o que você sabe sobre álgebra.
2) Como você se sentiu quando começou a estudar álgebra?
3) Que aspectos da vida você acha que a álgebra explica e que o número não explica?
4) Existe relação entre número e geometria? Explique.
5) Existe relação entre número, geometria e álgebra? Explique.

Sugerimos que todos os alunos respondessem às questões após o término da primeira aula e nos entregassem o quanto antes, porém, nem todos, por diversos motivos, atenderam à nossa solicitação.

Alguns foram respondendo às questões, durante os encontros que se seguiram. Pudemos perceber que há diferenças nas respostas. De certa forma, os alunos que responderam às questões durante o curso foram (re)elaborando e (re)pensando a sua forma de ver os conceitos algébricos a partir das discussões feitas.

A análise do questionário teve como principal objetivo delinear o pensamento algébrico de entrada no curso, um momento histórico de cada um frente à álgebra, mesmo que já contaminado pelo início das aulas. O fato de alguns alunos entregarem-no durante o curso não interferiu em nossas análises.

A caracterização desse momento é a tentativa de dar uma breve permanência ao pensamento algébrico já em movimento de reflexão.

Essa caracterização foi importante porque pudemos tecer o lógico do histórico de alguns alunos e do próprio curso, visto que todos os estudantes e podemos afirmar, também os estudantes brasileiros, conforme aponta o ICMI de 1986, estudam, independentemente da escola que freqüentam, durante pelo menos sete anos de suas vidas, os conteúdos algébricos.

Reflexão distanciada

A "reflexão distanciada" (Darsie, 1998) ou "diário de campo" (Bogdan & Biklen, 1994) constituiu-se o segundo momento da investigação.

Os diários de campo representam formas imediatas de informações para pesquisa. Representam instrumentos ou ainda fontes de dados para os pesquisadores que fazem análises qualitativas em suas pesquisas.

Por ter uma conotação subjetiva, os diários de campo utilizados em pesquisas educacionais têm o intuito e a pretensiosa função de "mostrar" ou ainda de "apreender" um pouco do que se passa no pensamento de alguém, nos momentos em que interage com o conhecimento que se apresenta, na realidade objetiva da sala de aula.

Compreender o que se passa no pensamento é algo que há séculos se tenta fazer. Usamos entrevistas, observações, filmagens... Usamos os diários. É como se os diários tivessem o poder de uma lâmina que contém um filme preciosíssimo. Um filme que não tem preço, porque se trata de ousar "entrar" no pensamento do outro, mesmo que restritamente, pela linguagem escrita. Através do diário temos possibilidade de dialogar com o conhecimento do outro, que contém cada um de nós.

É como se o diário pudesse imprimir alguns dos movimentos do pensamento a partir das palavras. É como se o diário tivesse o poder de fotografar através da escrita, pequenos instantes ou "insights" (Bohm, 1980) das abstrações que fazemos durante todos os dias, todos os meses, todos os anos, enfim, durante a nossa vida toda....

Aqui, o diário tem o objetivo de registrar o que Darsie (1998:76) chama de "reflexão distanciada", ou ainda, reflexão que registra alguns dos momentos ocorridos em momentos diferenciados das aulas.

Quem de nós já não compartilhou boa parte dos nossos segredos com um amigo chamado diário? Quem de nós, na adolescência, não guardava esse precioso tesouro-amigo a sete chaves? E, ai daquele que procurasse e, para nossa infelicidade, encontrasse a chave...

No curso que ministramos, a exemplo de Darsie (1998), ousamos pedir aos professores-alunos que escrevessem um diário e arriscamos a lhes pedir as chaves.

Muitos poderão dizer ou ainda criticar: "não se pede para escrever um diário" ou ainda "diário deve ser escrito espontaneamente e, se possível, tudo o que estiver contido nele só deve interessar àquele que escreveu".

De certa forma, até podemos concordar com tais críticas, porém, quando falamos de um tesouro chamado "educação" estamos falando de coletividade e, ao falarmos sobre coletividade na educação consideramos que os meus segredos, quando compartilhados, se tornam nossos segredos. Principalmente quando a fonte emanadora desses segredos é a atividade matemática. Podemos comparar a partilha dos segredos ao encontro pedagógico, onde todos os envolvidos aprendem e ensinam.

Tentamos enveredar no pensar matemático dos professores. Tentamos enveredar pela "imensa floresta matemática" (Lima & Moisés, 1997), através do movimento do pensamento algébrico, através dos caminhos tortuosos do pensar sobre as abstrações matemáticas processadas nos professores enquanto analisaram, vivenciaram e resolveram as atividades propostas na disciplina. Tentamos desvendar, através dos escritos dos professores, como compreenderam e elaboraram para si as abstrações matemáticas que ensinam.

É de se notar que, com muita sorte, os segredos do pensar sobre o que ensinam podem, vez ou outra, ser compartilhados ou comentados com uma ou outra pessoa numa reunião ou outra, porém, nem sempre tais segredos são valorizados de forma coletiva.

Para nós, o diário do qual estamos falando representa uma forma de dialogar com professores do Ensino Fundamental que, até então, pelo que se tem notícia, não têm o hábito de escrever sobre suas aprendizagens matemáticas; nem sobre a matemática que ensinam e, muito menos sobre o movimento dos seus próprios pensamentos que contém aspectos conhecidos e desconhecidos dos conteúdos matemáticos; neste caso, os conteúdos algébricos.

Assim, um dos instrumentos que nos utilizamos para analisar o movimento do pensamento dos professores foi o diário de campo.

Solicitamos aos professores que fizessem anotações sobre suas impressões a respeito de seus processos com o desenvolvimento conceitual a partir das aulas, bem como anotações sobre a percepção de suas aquisições, em relação ao conhecimento e desconhecimento dos temas abordados.

Foram convidados a anotar, por exemplo, suas aflições, angústias e dúvidas ao vivenciar, refletir e analisar as atividades propostas. Puderam identificar-se através de pseudônimos. Estavam desobrigados a se identificarem a partir de seus nomes originais.

Assim como a pesquisadora Darsie (1998), que utiliza o diário há alguns anos, na formação inicial, a leitura dos diários desta pesquisa nos surpreendeu.

Já no início de seus escritos, os professores-alunos mostraram o inesperado encontro que tiveram com a matemática, a partir das atividades propostas. Encontramos:

> "para além de reflexões sobre a aprendizagem de matemática, reflexões sobre a aprendizagem do ensinar matemática e reflexões sobre ensino de maneira geral. Observamos que ao refletirem sobre suas aprendizagens dentro de um novo enfoque de ensino, os mesmos não só tomavam consciência dessas aprendizagens, mas também do novo enfoque como facilitador das mesmas. Observamos ainda que por esse processo de reflexão eles passaram a refletir e questionar sobre as práticas dos professores que tiveram durante sua vida escolar e os alunos, já professores, sobre suas próprias práticas" (Darsie, 1998: 76).

Há de se considerar ainda que os diários nos mostram a insegurança que um determinado grupo sentiu frente ao que denominamos de pensamento flexível, enquanto outro grupo conseguiu fazer relações do conteúdo com os aspectos mais gerais da vida. O primeiro grupo se manifestou favorável à crença de que a verdade das respostas deve ser "passada" pelo professor e não necessariamente construída pela classe.

É como se somente o professor tivesse condições de elaborar as verdades matemáticas. Observamos que para esse grupo específico, o pensamento flexível dificulta a aprendizagem porque traz várias formas de olhar o mesmo objeto. Traz muita confusão. Traz conflitos.

Reflexão imediata

Se os diários de campo podem ser denominados de reflexão distanciada, a aula propriamente dita pode ser entendida como reflexão imediata.

É durante as aulas, no auge das discussões, que muitos juízos são elaborados e (re)elaborados de forma individual e coletiva.

A riqueza da vivência da sala de aula está no próprio movimento da aula, na interação entre a tríade aluno-professor-conteúdo.

É na sala de aula que temos mais uma oportunidade de entender na prática o que vem a ser atividade de ensino.

Se a aula for capaz de mobilizar os participantes do ensino, professores e alunos para se conhecer e entender o mundo que nos cerca a partir dos conteúdos estudados, estamos diante de uma atividade.

Em nossa pesquisa, as aulas representaram o momento mais importante. Foram ministradas uma vez por semana, durante quinze semanas, na disciplina "Tópicos Especiais em Didática" totalizando sessenta horas.

Durante as aulas, foram solicitados:

1) Vivência, resolução e análise de atividades de ensino sobre os seguintes conceitos: fluência, campo de variação, variável, álgebra não simbólica[35] e álgebra simbólica;

2) Leitura, elaboração e discussão de "mapas conceituais"[36] de textos teóricos;

3) Elaboração e aplicação de projetos de ensino;

4) Auto-avaliação.

---

[35] Álgebra não simbólica é a álgebra que contém a variável palavra; a variável figura e a sincopação de Diofanto. Os estágios da álgebra não simbólica são: álgebra retórica, álgebra sincopada e álgebra geométrica ou figurada (Smith, 1958).

[36] Mapas conceituais: "(...) técnica de análise que pode ser usada para ilustrar a estrutura conceptual de uma fonte de conhecimentos. Essa ilustração chama-se Mapa (ou esquema) conceptual. (...) são diagramas hierárquicos indicando os conceitos e as relações entre esses conceitos" (Moreira & Buchweitz,1994).

Estudamos os nexos conceituais componentes da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: fluência, campo de variação, variável palavra, variável figura e variável letra, a partir de atividades de ensino.

Os textos teóricos escolhidos para a elaboração de mapas conceituais (Moreira & Buchweitz,1994) trataram de temas que discutem:

1) O conceito de ciência;
2) A História da Matemática e
3) A História da Álgebra.

A elaboração e a análise dos mapas conceituais seguiu em quase todos os momentos, o que a Educação Conceitual e Catalani (2002) denominam de dinâmica relacional indivíduo-grupo-classe.

A dinâmica das aulas

A dinâmica proposta permite ao aluno perscrutar em seu conhecimento a resposta a uma determinada atividade. Em seguida, a resposta de cada um dos alunos é compartilhada em pequenos grupos. A partir da (re)elaboração das respostas ou das respostas individuais, é feita uma síntese, em cada um dos grupos, para ser compartilhada com os demais grupos.

Durante todo o processo, o professor é convidado a ser o mediador do conhecimento. Propõe-se que, durante as discussões das atividades, a dinâmica relacional assuma o papel da "Teoria do Conhecimento" (Kopnin, 1978) ou ainda que auxilie o grupo a produzir o seu próprio conhecimento, onde a individualidade de cada um é respeitada ao construir suas verdades, a partir de seus referenciais.

Em seguida, essas verdades são compartilhadas com o coletivo de pelo menos duas formas: em pequenos grupos e com a classe.

Assim, ao mesmo tempo em que a verdade coletiva é construída pelos indivíduos, o mesmo coletivo interfere na (re)elaboração da verdade do indivíduo e do próprio coletivo.

Há nessa dinâmica, a intencionalidade de fazer o pensamento movimentar-se, através de diversas conexões individuais e coletivas, na busca da verdade conceitual.

Há a possibilidade de se pensar de forma flexível, ao tentar se emitir juízo, elaborar dedução e conceito, quer sobre os conteúdos, quer sobre a dinâmica das aulas.

Podem surgir nesse processo, os "inesperados" que podem propiciar ao estudante a elaboração de novas formas de pensamento, conforme afirma Caraça (1998).

Segundo Clécios (2001): "(...) é muito interessante como diferentes dinâmicas em aula possibilitam também, novos olhares. Podemos observar que as resistências à matemática estão diminuindo na turma (Clécios, diário: 24/08/01)".

Os mapas conceituais chamam a atenção de Dricme (2001), porém, a professora-aluna propõe mudanças na dinâmica de apresentação destes:

> "Achei muito bom o método de se fazer mapas conceituais. É uma maneira de apresentar os principais tópicos do texto, de uma maneira mais sucinta. Proponho como sugestão que cada grupo apresente um assunto. É menos cansativo do que todos abordarem a mesma questão (Dricme, diário: 31/08/01)".

Enquanto Dricme (2001) acena para a necessidade de (re)elaboração da apresentação, Sônia (2001) afirma que: "(...) a dinâmica da aula, o modo como refletimos os assuntos, não deixa perceber o tempo passar" (Sônia, diário: 24/08/01) e, Lili (2001) [37] ressalta o aspecto teórico do curso:

> "A leitura do texto para a aula já me fez refletir na minha experiência vivida com a matemática e a álgebra na escola (conforme relatei nas perguntas iniciais). Acho que vem daí a minha dificuldade em estar trabalhando com o pensamento lógico matemático. Achei interessante, como na aula, as discussões nos levam a pensar e a refletir sobre o que você pensou e como o grupo pensou.

[37] Pseudônimo escolhido por uma das alunas que freqüentou a disciplina, para identificar-se em seu diário de campo.

O contato com a parte histórica também é muito interessante para se refletir como esse pensamento flui ao longo da história (Lili, diário: 31/08/01)".

Além dos mapas conceituais e da leitura dos textos teóricos, os professores-alunos elaboraram durante o curso, projetos que foram aplicados nos seguintes níveis de ensino: infantil, fundamental, médio e universitário.

Projetos de ensino

Os projetos de ensino, em parte elaborados em sala de aula, sob a orientação da Profª Drª Anna Regina Lanner de Moura, que contou com a nossa colaboração foram escritos na forma de relatos de pesquisa. Seus resultados foram apresentados e discutidos com a classe. Fizeram parte da avaliação do curso e foram feitos em grupos. Continham atividades de ensino de álgebra desenvolvidas com sujeitos que foram alunos ou não dos elaboradores, os professores-alunos.

As atividades dos projetos foram desenvolvidas e vivenciadas na sala de aula em que os professores-alunos atuaram ou em outros locais escolhidos por eles. Os temas abordados e discutidos durante o curso fizeram parte dos projetos. Os professores fizeram adaptações, reelaborando as atividades de acordo com as turmas.

Educando o olhar...

Temos consciência de que não temos condições de analisar os quatro momentos da pesquisa: questionário, diários de campo, aula propriamente dita e projetos desenvolvidos, em sua totalidade.

Como afirmam Caraça (1998), Kosik (2002) e Bohm (1980) temos dificuldades em nos apropriar da totalidade da realidade em um só golpe de vista. Não há mente humana capaz de compreender, ao mesmo tempo, o todo da realidade. A realidade possui duas características fundamentais e bem definidas: "a interdependência e a fluência" (Caraça, 1998: 103).

Ao discutir essas duas características presentes na realidade, os autores citados no parágrafo anterior perguntam, por exemplo: Como não fragmentar a realidade fluente? Como compreender as relações que ocorrem na realidade fluente?

Enquanto nos intriga com essas questões, Caraça (1998), afirma que na impossibilidade de abraçar a totalidade do Universo, o observador recorta, destaca, um conjunto de seres e fatos da realidade. Cria isolados, recortes, ou ainda seções da realidade que podem ser escolhidas arbitrariamente na realidade para que possa entendê-la e compreendê-la. O autor ressalta ainda que, quando estamos diante de isolados, há "inesperados" que podem nos surpreender, constituindo-se motivos para que criemos o novo, a partir do já conhecido. O isolado estudado pelo observador contém movimentos qualitativos e quantitativos, os quais são regidos por diferentes tipos de leis. Tanto as leis qualitativas como as leis quantitativas dizem respeito à variação de qualidade ou de quantidade.

Os "inesperados" de Caraça (1998), componentes dos isolados, quando são compreendidos pelo pensamento, permitem dar novas qualidades ao movimento do nosso pensamento.

Porém, Bohm (1980) alerta que faz-se necessário atentarmos para não construirmos verdades absolutas, embora, muitas vezes se constituam teorias científicas, a partir da realidade fragmentada, a partir do estudo de suas partes, e a partir da análise dos isolados que, por sua vez, podem tornar-se novos isolados.

O que há então no Universo é a totalidade e não a fragmentação, o isolado ou o *detour* (Kosik, 2002).

Há de se considerar que Caraça (1998) e Bohm (1980) nos remetem a pensar sobre a relação que deva existir entre o isolado e a realidade.

Apesar do isolado ser um recorte, escolhido arbitrariamente da realidade, não deve ser confundido com ela. O isolado estudado pelo observador é apenas um aspecto da realidade, e não é nem de longe a própria realidade.

Ao compreendermos um determinado isolado, temos a possibilidade de compreendermos melhor o mundo que nos cerca, embora a realidade que nos cerca, já seja um isolado da natureza universal, do cosmos. Ao mesmo tempo em que tivermos possibilidades de compreender a realidade poderemos (re)elaborar nossa compreensão do que vem a ser o isolado que estamos estudando.

Ainda que escolhêssemos um isolado para analisar durante toda a nossa pequena existência humana, teríamos vários olhares para o mesmo isolado. Os olhares mudariam a cada vez que repensássemos a realidade e o nosso entendimento sobre esta mudaria todas as vezes que repensássemos o isolado.

A pesquisa que elaboramos já é um pequeníssimo isolado na imensidão do desconhecimento humano, destacado do mundo fluente. Representa uma pequena gota d'água no mar das pesquisas que tratam da formação de professores e do ensino de álgebra.

Surge aí uma questão: como fazer para analisar a riqueza das elaborações dos professores do Ensino Fundamental construídas durante o semestre? Onde focar nossa lente? Quais categorias de análise criar?

Essas questões acompanham a todos aqueles que fazem pesquisa de forma qualitativa.

Há novamente, nesse momento, o da escolha dos dados construídos para serem analisados, o dilema, a incerteza, a hesitação, a contradição, de que fala Caraça (1998).

O dia-a-dia do pesquisador, assim como o do professor, é composto por dilemas. Há sempre escolhas a fazer. Aqui, não há como separar a professora da pesquisadora. O cotidiano de ambas é muito parecido. Confundem-se,porque ambas almejam se constituir educadoras pelo conhecimento, a partir de atividades de ensino e de pesquisa.

Ao tentarmos responder a questão acima colocada, encontramos contribuições no trabalho de Moura (2000) para que pudéssemos nos guiar.

O pesquisador fundamentado em Caraça (1998), ao analisar as novas qualidades decorrentes dos inesperados que compõem os isolados construídos no movimento do formar-se professor, considerou a tensão criativa, o emblema e o dilema, presentes nestes isolados, elementos constitutivos de suas categorias de análise.

É nossa intenção apresentar nesta pesquisa, as qualidades novas como formas do movimento do pensamento que surgem, a partir das elaborações dos grupos compostos pelos dezoito professores e, em especial das professoras-alunas: Ana Cristina, Andressa, Mudança e SN_1 quando estas se propõem a pensar sobre atividades de ensino que se fundamentam no lógico-histórico do pensamento algébrico.

Há ainda a intenção de analisar se tais elaborações permitem aos professores-alunos fazer relações entre seus conhecimentos que se manifestam durante a reflexão e vivência das atividades de ensino e os fundamentos lógico-históricos do desenvolvimento conceitual de álgebra que configuram as atividades de ensino.

A cada novo isolado apresentado pretendemos verificar o lógico-histórico do movimento do pensamento dos professores-alunos, que se originou a partir das elaborações que fizeram e analisar as possíveis relações que fizeram entre o conteúdo estudado e o mundo em que vivem. Na realidade, está incluso o lógico-histórico da vida do professor que contém sua trajetória estudantil e profissional.

Entender o lógico-histórico da vida é entender o mundo no qual estamos inseridos, o qual se apresenta a todos nós, em todos os dias, a todo momento.

A realidade dos professores, sujeitos da pesquisa, é composta pela relação que travam consigo mesmos e com a vida. Esta inclui tanto a vida escolar como a vida do cotidiano.

Os isolados foram construídos a partir dos temas que foram discutidos em sala de aula e as atividades de ensino foram escolhidas a partir do momento em que lemos os diários e detectamos aquelas que permitiram aos professores explicitar suas elaborações a partir dos gestos, tons de voz, indignações, inesperados...

Assim foram escolhidas as atividades de ensino que permitiram a flexibilidade do pensar sobre, o movimento do pensamento flexível. A análise de cada isolado tem como referência a atividade de ensino que compõe cada um dos temas estudados.

Identificar o lógico-histórico do movimento do pensamento dos grupos e das quatro professoras de forma individual, a partir de anotações feitas em diários de campo e elaborações feitas em sala de aula, a partir dos textos, análise de atividades e projetos, nos permitiram verificar que elaborações foram construídas durante o desenvolvimento das atividades e quais delas permitiram aos professores dar novas formas ao movimento de seus próprios pensamentos.

Ao mesmo tempo, as estagnações que se apresentarem são indicadores de que não houve nenhum movimento novo no pensamento algébrico.

Queremos verificar, a partir das elaborações, até onde o contato com um novo isolado provoca o surgimento do inesperado no movimento do pensamento do professor.

Segundo Caraça (1998), todo inesperado leva ao surgimento de uma nova qualidade de pensamento. Aqui a nova qualidade de pensamento está diretamente relacionada ao pensamento flexível a que já nos referimos anteriormente. Reafirmamos aqui, novamente, que o pensamento flexível é o elo de ligação entre os pensamentos empírico-discursivo e teórico.

Nossos isolados estão relacionados, conectados aos conceitos estudados em sala de aula e têm a qualidade de serem conceituais.

Estamos denominando-os de:

1) Naturezas: universal, desconhecida e humana;
2) Fluência e permanência da realidade;
3) Variável e campo de variação;
4) Álgebra não simbólica: retórica, sincopada e geométrica;

5) Álgebra simbólica.

Estes cinco isolados se configuram como categorias de análise. Constituem-se por unidades didáticas que, por sua vez, contêm diversas atividades de ensino.

Estudaremos, em cada um dos isolados, as elaborações presentes no lógico-histórico do pensamento dos alunos.

Assim, nesta pesquisa, as informações construídas juntamente com os professores, denominados de professores-alunos serão consideradas da seguinte forma:

<table>
<tr><th>Participantes</th><th>Isolados</th><th>Unidade didática</th><th>Atividades de ensino</th><th>Fontes</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Professores do Ensino Fundamental</td><td>I</td><td>Naturezas</td><td>- natureza humana;
- natureza universal;
- natureza desconhecida;
- premissas;
- questionário</td><td rowspan="5">- Aula:

a) produção de mapas conceituais;
b) análise de atividades (individual e coletiva);
c)elaboração de projetos de ensino;
d) auto-avaliação

- Diário de campo</td></tr>
<tr><td>II</td><td>Fluência e permanência</td><td>- mundo fixo;
- metafisica do dia-a-dia;
- rompendo com o mundo estático;
- criação da idéia de fluência;
- método matemático de estudos do movimento</td></tr>
<tr><td>III</td><td>A variável e o campo de variação</td><td>- onde está o número?
- o pensamento numérico metafisico;
- entrando no mundo da variação</td></tr>
<tr><td>IV</td><td>Álgebra não simbólica</td><td>- variável palavra;
- desenhando a variação;
- variável figura;
- sincopação de Diofanto</td></tr>
<tr><td>V</td><td>Álgebra simbólica</td><td>- variável letra
- linguagem matemática simbólica</td></tr>
</table>

Compondo a totalidade da pesquisa...

A análise dos cinco isolados apresentados acima foi feita a partir dos grupos compostos pelos dezoito alunos matriculados na disciplina, após a discussão do conceito de lógico-histórico enquanto:

1) Forma de pensamento;
2) Forma de pensamento algébrico;
3) Didática da álgebra.

Em seguida, apresentaremos o lógico-histórico das atividades de ensino; o lógico-histórico vivenciado pelos professores-alunos e, a singularidade e a particularidade dos olhares sobre os citados isolados a partir de quatro professoras-alunas: Ana Cristina, Andressa, Mudança e SN_1.

As alunas foram selecionadas segundo os seguintes critérios:

1) Assiduidade;
2) Participação em grupos diferentes;
3) Conteúdo dos diários.

Por último, faremos considerações que justifiquem porquê o lógico-histórico, nesta pesquisa, se configurou para nós, enquanto atividade formadora de professores e de pesquisa.

Dimensões do conhecimento que podem ser assumidas pelo lógico-histórico

Forma de pensamento

Conforme anunciamos, neste item, temos como intenção apresentar a definição mais geral do que vem a ser o lógico-histórico, fundamentação teórica da pesquisa, definido por Kopnin (1978) enquanto uma das formas de pensamento elaborada pelos homens.

Os elementos constitutivos do lógico-histórico estão diretamente relacionados aos conceitos de: totalidade, realidade, *praxis*, movimento, fluência, interdependência, mutabilidade, imutabilidade, momentos de permanência, relatividade, lógica, história, processo, conhecimento e pensamento; e das categorias: concreto e abstrato, conceito, juízo e dedução estudados por Kopnin (1978) e Kosik (2002) no que diz respeito à teoria materialista do conhecimento.

Tendo como referência essa teoria, constatamos que Caraça (1935; 1961; 1966; 1990; 1998) estuda o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, enquanto Bohm (1980) estuda o desenvolvimento do conceito de matéria e Davydov (1982) estuda o desenvolvimento do pensamento teórico.

Assim, ao estudarmos esses elementos, percebemos que o lógico-histórico do pensamento humano, há algum tempo é objeto de estudo de filósofos, matemáticos, psicólogos e por que não dizer, de todos aqueles que de alguma forma se preocupam com o conhecimento e com o "como" o homem entende, em sua subjetividade, tudo aquilo que "apreende" (Kopnin, 1978; Bohm, 1980; Kosik, 2002) da realidade que contém leis objetivas,elaboradas no ato da atividade cognitiva de si próprio.

Segundo Kopnin (1978: 53), "uma vez apreendidas, as leis do mundo objetivo se convertem em leis do pensamento, e todas as leis do pensamento são leis representadas do mundo objetivo".

Dessa forma, "o mundo objetivo e suas leis interessam ao homem, não por si mesmos, mas enquanto meio de satisfação de determinadas necessidades sociais" (Kopnin, 1978: 61). Por isso mesmo, as leis são mutáveis quanto às necessidades sociais. Não são leis como entende a metafísica, algo determinista e imanente ao ser.

O pensamento humano busca formas que possibilitem a transformação contínua da realidade através de seu trabalho físico e intelectual durante a sua pequena trajetória ou viagem no universo, trajetória que designamos pelo nome de vida.

Entender o lógico-histórico da vida significa entender a relação existente entre a mutabilidade e a imutabilidade das coisas; a relatividade existente entre o pensamento humano e a realidade da vida, bem como compreender que tanto o lógico como o histórico da vida estão inseridos na lei universal, que é o movimento.

Assim, compreender o lógico-histórico da vida é compreender que todo conhecimento contém angústias, medos, aflições, ousadias, inesperados, novas qualidades, conflitos entre o velho e o novo, entre o passado e o futuro. É compreender que a totalidade do conhecimento é o próprio movimento da realidade objetiva que sempre estará por vir a ser.

Para Kopnin (1978), a totalidade do objeto está nos pares dialéticos, enquanto para Davydov (1982), tal totalidade está nos nexos internos e externos do conceito e defendemos que a totalidade está presente na confluência entre o lógico-histórico, pois tal confluência conecta o singular à totalidade, os nexos internos aos nexos externos do conceito, o pensamento flexível aos pensamentos empírico-discursivo e teórico.

Trata-se de um "movimento fluente" (Bohm, 1980) que nos auxilia a construir a realidade que nos propomos a ver.

Para tanto, consideramos o pressuposto de que a representação do histórico pelo lógico, a reprodução do substancial, do movimento do vir a ser do objeto, da história de sua formação e desenvolvimento se realiza nas diversas formas de movimento do pensamento (Kopnin, 1978).

Definido que a forma do pensamento pode ser entendida "como modo de representação da realidade por meio de abstrações" constituindo-se certos "elos do movimento no sentido da realidade objetiva", entendemos que "os resultados do conhecimento", possibilitam-nos chegar à conclusão que durante o "processo da eterna e infinita aproximação do pensamento ao objeto, estabelecem-se certos laços nos quais se refletem os resultados do conhecimento do objeto" e esses laços são justamente as formas de pensamento (Kopnin,1978: 187).

A realidade aqui descrita está definida como um substantivo e equivale a "ser". É algo transcendente, a experiência. Transcendente ao real apreendido pelas sensações (Mora, 1991).

O mundo real "é o mundo da *praxis* humana" entendida como ato interminável de criação. O mundo da realidade "é um processo no curso do qual a humanidade e o indivíduo *realizam* a própria verdade, operam a humanização do homem". É o mundo onde a verdade não está dada, predestinada, terminada, pronta, acabada, imutável. "É o mundo em que a verdade *dévem*". É por esse motivo que "a história humana pode ser o processo da verdade e a história da verdade".Nesse mundo de realidade mutável, "a verdade se faz; se desenvolve e se realiza" (Kosik, 2002:23) e o lógico da história representa a formalização de verdades a partir das tentativas do pensamento de determiná-las permanentemente.

Há de se considerar nesta análise duas características essenciais que compõem a realidade, no seu sentido pleno, quando esforçamo-nos para compreendê-la: a interdependência e a fluência (Caraça, 1998).

O conceito de interdependência está associado às relações entre as coisas. Toda a "realidade em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos compartimentos se comunicam e participam, todos, da vida uns dos outros" (Caraça, 1998: 103).

Na fluência, constata-se que "o Mundo está em permanente evolução; todas as coisas, a todo momento, se transformam, tudo *flui*, tudo *dévem*", afirmação já feita por Heráclito de Éfeso num tempo onde se acreditava na imutabilidade do mundo, porque tudo estava fixo, pronto, acabado, determinado, inclusive a verdade.

O conceito de fluência "pode ser verificado por qualquer um de nós, seja qual for aquele objeto em que fixemos a nossa atenção. Não é verdade que tudo está sujeito a uma mesma lei de nascimento, vida e morte, que por sua vez vai originar outros nascimentos?" (Caraça, 1998: 103).

A realidade é um processo; algo em movimento, ampla e se manifesta por categorias, sendo uma delas a realidade objetiva (Caraça, 1998; Bohm, 1980; Kosik, 2002 e Kopnin, 1978).

O que a filosofia chama de realidade e realidade objetiva, para efeito de ensino e aprendizagem dos conceitos algébricos, neste estudo, denominaremos de naturezas. As categorias ou subconjuntos são: a natureza humana, a natureza universal e a natureza desconhecida.

A realidade objetiva contém os reflexos dos resultados do conhecimento do objeto, que decorrem do movimento, da fluência, da interdependência, do pensamento humano. É o mundo das sensações elaborado pela *praxis* humana, abstraído e logicamente formalizado pelo pensamento em conceitos. Contém a verdade elaborada pelos homens. Tal realidade, ao ser pensada e elaborada, considera os nexos internos e externos presentes no movimento lógico-histórico do pensamento humano.

A realidade objetiva decorre, assim, do movimento lógico-histórico que o pensamento faz sobre a realidade. Na mesma linha de raciocínio, segue, no ensino-aprendizagem da álgebra, o conceito de naturezas.

As naturezas humana, universal e desconhecida decorrem do movimento lógico-histórico que o pensamento faz sobre a realidade.

Nesta pesquisa, a realidade a que estamos nos referindo é a sala de aula que estuda e vivencia atividades de ensino de álgebra, num processo que vai do abstrato para o concreto e do concreto para o abstrato.

O concreto do pensamento está relacionado com a realidade objetiva. É resultado do conhecimento.

No que diz respeito à álgebra, o concreto de seu pensamento considera facetas conhecidas e desconhecidas, presentes na realidade. O lógico-histórico presente no pensamento algébrico permite-nos dizer que o concreto do conteúdo algébrico é o conceito de movimento, de fluência, que se materializa no conceito de função. Tanto o conceito de movimento como o de função são lógico-históricos no pensamento do homem.

Assim:

> "O lógico reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento. Daí a unidade entre o lógico e o histórico, ser premissa necessária para a compreensão do processo de movimento do pensamento, da criação da teoria científica. À base do conhecimento dialético do histórico e do lógico resolve–se o problema da correlação entre o pensamento individual e o social; em seu desenvolvimento intelectual individual o homem repete em forma resumida toda a história do pensamento humano. A unidade entre o lógico e o histórico é premissa metodológica indispensável na solução de problemas de inter-relação do conhecimento e da estrutura do objeto e conhecimento da história de seu desenvolvimento" (Kopnin, 1978: 186).

Ao considerarmos a unidade dialética apresentada no lógico-histórico do movimento do pensamento, defendemos a idéia de que esse movimento, durante toda a sua existência procura se aproximar do movimento que compõe o objeto em estudo.

Essa composição é individual e coletiva. É histórica e lógica. Construindo-se no dia-a-dia das mais diversas civilizações. Todo objeto do conhecimento humano, em seu desenvolvimento, contém, necessariamente, a unidade dialética lógica-história.

Em termos de (re)criação do conceito científico no indivíduo consideramos que a própria construção da lógica do objeto, contém uma história, embora haja uma tendência em desconsiderar esta composição do apreender humano.

Ao nos aproximarmos para conhecer o todo que contém e está contido nos objetos, o foco do conhecimento deixa de ser o aspecto linear da história, enquanto sucessão de fatos e passa a ser o substancial, que é na verdade, a mutabilidade da história dos objetos contida e que contém uma realidade indivisível em constante movimento.

O cerne dessa realidade é a fluência, o movimento, a transformação, e não a fragmentação do próprio pensar humano que contém a interdependência, característica fundamental do movimento do pensamento.

Ao tomarmos consciência do movimento do pensamento enquanto algo responsável pela compreensão e apreensão do objeto, faz-se necessário "entender a natureza da realidade, em geral, e a da consciência, em particular, como um todo coerente, o qual nunca é estático ou complexo, mas um processo infindável de movimento e desdobramento. O próprio pensamento encontra-se num processo efetivo de movimento" (Bohm, 1980:09).

Quando o foco da discussão envolve pensar ou ainda eleger e analisar os principais aspectos que se apresentam e fundamentam a representação do histórico pelo lógico, assim como a história de sua formação e desenvolvimento realizada nas diversas formas do pensamento, não queremos nos esquivar, muito menos ignorar, as questões decorrentes do pensar a realidade, a partir da totalidade e não da fragmentação.

A totalidade está relacionada às nossas reflexões e ponderações "sobre a natureza do movimento, tanto no pensamento quanto no objeto do pensamento" (Bohm, 1980:10).

Ao pensarmos em alguma coisa, essa coisa parece "ser apreendida como algo estático, ou então como uma série de imagens estáticas. No entanto, na experiência efetiva do movimento, sente-se um processo de fluxo ininterrupto e indiviso, ao qual se relaciona a série de imagens estáticas no pensamento, como uma seqüência de fotografias ('paradas') que poderiam estar relacionadas à realidade de um carro em movimento", questão que já foi levantada filosoficamente por Zenão e até hoje está sem solução satisfatória (Bohm, 1980:09).

Ora, é difícil desconsiderar, durante a apreensão do objeto, para tentar estudá-lo, a lei universal, a lei do movimento, a lei da fluência e a lei da interdependência, embora, ao tentar compreender, cientificamente, aspectos que compõem o desenvolvimento do objeto, da coisa em estudo, o pensamento humano insista e necessite pensar de forma fragmentada, a partir de "isolados" (Caraça, 1998).

Tendo como pressuposto, a realidade, em sua totalidade, e a fragmentação desta enquanto a estudamos cientificamente será que podemos afirmar que o pensamento se assemelha à realidade, de tal forma que não conseguimos diferenciar pensamento de realidade, pois os dois são indivisíveis?

E ainda, se pensamento e realidades (objetiva e a propriamente dita) fazem parte da realidade, ao mesmo tempo em que a contém, então o que é certo e o que é errado? Até onde devemos considerar as verdades absolutas se a realidade é composta de diversos movimentos? Logo, as verdades são relativas por se adequarem e darem respostas a movimentos específicos? De quais movimentos estamos falando?

Para Bohm (1980), ao atuarmos no mundo, nos acostumamos a naturalizar a fragmentação, desumanizando-nos. Essa forma de pensar, naturalizada, parte do pressuposto da existência do fragmento e não do todo. Quando pensamos dessa forma desconsideramos o movimento e a interdependência, cerne da própria vida, ou por que não dizer, desconsideramos a própria vida.

Nascemos, crescemos e vivemos, portanto nos acostumamos a pensar que "a fragmentação de cidades, religiões, fratricídio etc., são a realidade. A totalidade é apenas um ideal, em direção ao qual talvez devamos nos empenhar" (Bohm, 1980: 27).

Não é isso que está sendo dito por nós, muito menos pelos diversos teóricos que insistem em apontar a necessidade de pensarmos a realidade, a partir da totalidade, da fluência, da interdependência como forma de nos humanizarmos pelo conhecimento.

A própria realidade analisada do ponto de vista da física quântica exige que o façamos a partir da totalidade. Os fundamentos da física quântica dizem que o macrocosmo contém o microcosmo e o microcosmo contém o macrocosmo.

O conhecimento fragmentado dos nexos externos do conceito, presentes no pensamento teórico não nos possibilita fazer as relações com a totalidade da vida. Essa impossibilidade é um aspecto de desumanização. O indivíduo fica alienado ao se inserir no conhecimento adquirido como produtor de si mesmo e do meio em que vive.

Pensar a totalidade nos auxiliará a compreender o que vem a ser humanização pelo conhecimento, porque o que existe é a totalidade e não a fragmentação das coisas.

Bohm (1980) se propõe a entender a totalidade da realidade e afirma que o pensamento em fragmento é uma percepção ilusória guiadora da ação do homem. A fragmentação e não a totalidade é a resposta que o homem obtém, devido à sua ação. Faz-se necessário que o homem dê atenção ao seu pensamento fragmentado para que possa ter consciência da necessidade de sua eliminação. Ao fazer isso, a totalidade não será apenas um sonho para a humanidade.

A partir da tese da totalidade, pode-se entender a atividade do pensamento como um "insight" (Bohm, 1980), um modo de ver, e não como cópia verdadeira da realidade. A atividade do pensamento não é a própria realidade. A atividade do pensamento, pode, muitas vezes, se tornar fragmentada, contrariando a própria realidade.

No que diz respeito à álgebra, analisamos a atividade do pensamento algébrico enquanto movimento, constituída, em sua totalidade, da fluência e da interdependência dos campos numéricos e dos aspectos da geometria.

Fundamentando-nos em Bohm (1980), afirmamos que é o lógico-histórico dos conceitos de fluência, campo de variação e variável que conectam o singular da álgebra não simbólica: a retórica, sincopada e geométrica e da álgebra simbólica com o conceito mais geral de álgebra, que está por vir a ser. O lógico-histórico da álgebra é que a conecta ao movimento, do seu vir a ser.

Quando analisamos a atividade do pensamento científico, dentre eles o pensamento algébrico, consideramos a possibilidade de termos, durante a nossa existência, uma infinidade de "tipos diferentes de insights" (Bohm, 1980). As teorias representam "insights" e não verdades únicas e absolutas. Não representam verdades imutáveis, que de tempos em tempos, desbancam antigas verdades.

Exemplos dessa mutabilidade são as álgebras não simbólicas, hoje não mais usadas pelos matemáticos, mas cada uma em sua época de predominância era o "insight" necessário para as necessidades de interpretar e representar movimentos.

Se a realidade é diversa, seus movimentos também o são. Segundo Bohm (1980) faz-se necessário considerar, ao analisar os movimentos da vida, as diversas teorias, ou ainda as diversas álgebras.

Aqui, as diversas álgebras de que fala o pesquisador não representam teorias prontas e acabadas, mas sim, "insights" do pensamento, no sentido de estudar, apreender e elaborar leis que possibilitem descrever os diversos movimentos da vida.

O lógico-histórico da álgebra advém das diversas teorias. De tempos em tempos, as diversas civilizações se lançaram a elaborar formas de pensar o movimento fluente, sem necessariamente representar tal movimento através do numeral.

Ao que parece, as questões de nosso tempo, apresentadas na realidade, obrigam nosso pensamento a buscar respostas em raízes até então fincadas em conhecimentos considerados imutáveis. Nos obrigam a procurar respostas nas diversas áreas do conhecimento, como a matemática, a biologia. Nos obrigam a buscar respostas nos conhecimentos científicos considerados amadurecidos.

Assim, ainda que as teorias respondam às nossas necessidades atuais, não podem ser consideradas como teorias que descaracterizem ou sejam consideradas superiores às teorias já desenvolvidas.

As teorias são sinônimos de "insights". Têm suas origens nas formas de pensamento: conceito, juízo e dedução, conforme mostram os estudos de Kopnin (1978).

O conceito contém o juízo e é definido enquanto confluência entre o lógico-histórico. Por sua vez, o juízo se apresenta no mundo objetivo não só como relação entre o singular e o universal, mas também como formas de inter-relação, ou ainda na interdependência das coisas. A dedução "é um processo de mediação e extração de juízos dos quais ela é sistema. É o elemento indispensável do caráter criativo do trabalho humano" (Kopnin, 1978: 212-3).

As formas lógicas de pensamento conduzem o movimento do pensamento no sentido da verdade. Constróem-se lógicas, a partir do movimento do pensamento, durante os diversos períodos históricos, nas diversas civilizações.

A lógica das formas de pensamento é elaborada a partir de premissas ditadas pela realidade objetiva em todos os tempos.

As formas lógicas de pensamento nos permitem dar contornos ao mundo ao qual estamos inseridos e queremos compreender. Ao mundo que estudamos. Não são a própria realidade, mas ajudam a construí-la. São construídas por todos nós, a partir do movimento do nosso próprio pensamento ao nos relacionarmos com o Universo. Permitem-nos conhecê-las melhor na medida em que conhecemos os contornos lógicos da realidade na qual estamos inseridos.

Davydov (1982: 296-7) define o pensamento como "uma atividade espiritual muito complexa" onde a "formação de representações sensoriais gerais, diretamente entrelaçadas com a atividade prática cria as condições" para que a atividade se desenvolva.

"O pensamento de um homem é o movimento das formas de atividade da sociedade historicamente constituídas e apropriadas por aquele" (Davydov, 1982: 279). O pensamento teórico contém os nexos internos, o movimento lógico-histórico do objeto estudado.

Aqui como em Kopnin (1978), o termo objeto, tem a conotação de ato de conhecimento e as leis dos seus movimentos. Os nexos internos dos objetos estudados só se realizam em movimento.

Davydov (1982) sugere que a didática se preocupe com o como possibilitar aos estudantes a construção do pensamento teórico, na sala de aula. Para tanto é preciso se preocupar com os nexos internos do conceito. Critica a didática tradicional que ao considerar a Psicologia tradicional se propõe a desenvolver nos estudantes o pensamento teórico a partir do pensamento empírico-discursivo.

O pensamento empírico-discursivo considera apenas o estudo dos aspectos externos do objeto estudado. Como exemplo, cita o estudo de ângulos feito com base na didática tradicional, na maioria das escolas.

De forma geral, o estudo de ângulos é feito a partir de algumas manipulações geométricas e algébricas que desconsideram o conceito de movimento. Prioriza-se, no pensamento empírico-discursivo, algumas relações estabelecidas entre a linguagem do cotidiano e a figura padronizada. É como se a figura tivesse vida própria e falasse por si mesma.

Nesse sentido, o simples fato de classificarmos os ângulos em reto, agudo e obtuso, na sala de aula, a partir de elementos angulares de objetos, seja da vida diária, seja construída pela criança ou ainda da observação da natureza não garante o entendimento profundo e complexo do conceito de ângulo. Há o esquecimento de se considerar o conceito de movimento que, por sua vez, a abordagem lógico-histórica desse conceito abrange.

Os nexos conceituais do ângulo não se estabelecem por apenas uma representação estática: o desenho, seja essa representação gráfica, seja nos objetos, mas, sobretudo pelo estudo das relações do movimento dos corpos.

Qualquer corpo em movimento em relação ao outro requer necessidade ou sugere a formação de ângulos. Assim, é a terra em relação ao sol. O ângulo aparece como resultado do movimento relativo desses dois corpos celestes.

Para Kopnin (1978:24) "a passagem do nível empírico ao teórico não é uma simples transferência de conhecimento da linguagem cotidiana para a científica, mas uma mudança de conteúdo e forma do conhecimento". No caso específico do conceito de ângulo, a generalização é possível quando se inclui o estudo dos movimentos relativos dos corpos celestes.

Tanto Caraça (1935, 1966, 1990, 1998) como Davydov (1982), Kopnin (1978) e Kosík (2002) falam de um certo movimento, de uma certa fluência que se apresenta na construção do conhecimento humano. Tal movimento ou fluência compõe a natureza do pensar científico, portanto, compõe a natureza do pensar matemático.

Davydov (1982) e Kopnin (1978) falam de nexos internos que se apresentam no pensamento teórico. Os nexos internos são diferentes dos nexos externos.

Os nexos externos se limitam aos elementos perceptíveis do conceito enquanto os internos compõem o lógico-histórico do conceito. Os nexos externos ficam por conta da linguagem. São formais. Exemplo disso é a classificação dos ângulos em retos, agudos, obtusos.

Chamaremos os nexos internos de Kopnin (1978) e Davydov (1982) de nexos conceituais ou ainda de nexos internos do conceito.

Os nexos conceituais que fundamentam os conceitos, contêm a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento.

Definimos nexo conceitual como o elo de ligação entre as formas de pensar o conceito, que não coincidem, necessariamente, com as diferentes linguagens do conceito

Os nexos internos do conceito mobilizam mais o movimento do aprendente do que os nexos externos.

Os nexos externos não deixam de ser uma linguagem de comunicação do conceito apresentada em seu estado formal, mas que não necessariamente denotam sua história. Dá pouca mobilidade ao sujeito para elaborar o conceito.

Ensinar, a partir dos nexos externos, traz resultados parciais ao aluno. Os prejuízos podem ser comprovados não só na falta da subjetividade do sujeito como também na formação do pensamento teórico. O pensamento teórico generaliza o conceito. Prova disso é aprender a variável só a partir da incógnita.

Entendemos que a conexão entre os nexos conceituais da álgebra: fluência, campo de variação e variável formam o conceito de álgebra.

Aprender a variação dentro de limites, conjuntos, fronteiras, condições definidas, significa relativizar a variação, criar dependências, criar a partir da variável, ampliar o conceito de variável para o conceito de função.

No caso da álgebra simbólica[38] os nexos conceituais não precisam coincidir com as linguagens retórica, sincopada, geométrica e simbólica, pois vão além destas, incluem os conceitos de fluência, de relatividade, campo de variação e o conceito de variável.

Mesmo porque a linguagem é o momento estático do pensamento, enquanto que as formas de pensamento se sobrepõem à linguagem. Não há como fazer categorias do pensamento da mesma forma que categorizamos a linguagem.

No caso dessa pesquisa percebemos que o estudo dos nexos internos do conceito de álgebra trouxe mobilidade ao pensamento dos professores. Há uma nova relação entre o aprendido e a realidade. Há um desencadeamento no movimento do pensamento do sujeito que não fica restrito ao conteúdo estudado.

[38] Álgebra simbólica é um dos estágios da álgebra que Smith (1958) estudou. Representa-se, de forma geral, a variável por letras do alfabeto.

A reflexão de Andréa (2001) é decorrente das discussões que fizemos sobre a variável-palavra, um dos nexos conceituais do conceito de variável.

> "A questão da palavra particular e universal discutida hoje, para mim é algo interessante, pois, analisando a sociedade atual, podemos perceber que o universal atravessa o particular e vice-versa. Durante a semana, com meus alunos, fiz uma atividade pedindo que eles escrevessem uma sentença matemática. Eles adoraram a atividade, porém, um aluno, ao invés de escrever, usou símbolos matemáticos e convencê-lo a escrever a sentença foi um pouco complicado. Penso ser esse um caso interessante, que mostra o quanto a linguagem (símbolos) matemática está arraigada, mesmo num aluno de terceira série do Ensino Fundamental" (Andréa, diário: 26/10/01).

A linguagem alimenta o pensamento. Os nexos conceituais alimentam as premissas. As premissas alimentam o conhecimento científico. Os nexos conceituais são lógico-históricos e se apresentam no movimento do pensamento, tanto daquele que ensina, como daquele que aprende.

Temos como pressuposto que os nexos internos dos conceitos que ensinamos estão presentes a todo o momento na sala de aula.

As abstrações que se processam nesse movimento devem se manifestar quando ensinamos e aprendemos os conceitos matemáticos. Se o conteúdo é a álgebra, faz-se necessário entender o movimento que se processa no pensamento, enquanto estudamos e aprendemos álgebra.

Kopnin (1978), ao estudar o pensamento teórico e suas relações com os nexos internos do objeto, diz que o movimento do pensamento é histórico e lógico. O lógico está isento das casualidades do histórico e Kosík (2002: 60) afirma que "a investigação lógica mostra onde começa o histórico, e o histórico completa e pressupõe o lógico".

Para melhor entendermos tais relações há de se considerar ainda o conceito de conceito.

Kopnin (1978: 195-196) define o conceito como a confluência entre o lógico e o histórico, o qual contém inúmeras abstrações elaboradas pela humanidade, de tempos em tempos ou ainda como "um juízo, cujo predicado é a idéia universal do fenômeno" e o juízo, por estar presente em toda abstração, é definido como "as formas mais simples e mais importantes de abstração, que constitui simultaneamente o traço característico de todo processo de pensamento" (Kopnin 1978: 195-6).

Assim, defendemos a idéia de que seja possível elaborar o conceito de álgebra na sala de aula, por professores e estudantes, à medida que os envolvidos tiverem a possibilidade de construir juízos sobre os nexos conceituais da álgebra, para poderem compreender a confluência existente entre o lógico-histórico, ou ainda entre as classes da álgebra que constituem o lógico do histórico da formação de sua linguagem formal, do movimento do pensamento algébrico, embora os diversos matemáticos, teóricos, estudiosos tenham definido, formalmente, o que vem a ser álgebra.

Para tanto, entendemos que o caminho a ser percorrido deverá ser aquele onde se considera a relação lógico-histórica do número, da figura e da letra. Esse caminho contém a fluência dos nexos conceituais internos e externos que compõem o conceito de variável.

Apesar das diversas definições feitas pelos teóricos, estamos interessados no entendimento dos sujeitos que estudam os conceitos formais da álgebra.

Como o objeto de estudo desta pesquisa envolve o pensar sobre os conceitos algébricos, ao construí-lo, consideramos os nexos internos: os conceitos de fluência, campo de variação e variável que compõem a natureza da álgebra, os quais contêm a lógica, a história, as abstrações e as formalizações do número e da figura, bem como a interdependência e a fluência de que fala Caraça (1935; 1966; 1990; 1998).

Resta-nos agora, enquanto pesquisadora e professora, pensar em como construir o movimento do pensamento teórico da álgebra, na sala de aula, a partir desses pressupostos, e pensar sobre os elementos que constituem os nexos conceituais do pensamento teórico da álgebra.

Pensar sobre os nexos conceituais na sala de aula é possível quando nos propomos a analisar as elaborações dos alunos ao desenvolverem atividades de ensino que lhes proporcionem reflexões sobre os nexos conceituais da álgebra, bem como a refletir e vivenciar com os professores em formação, quer inicial ou continuada, sobre possíveis atividades de ensino que contenham esses nexos.

Para tanto, consideramos que todo professor leva a concepção do conteúdo que ensina, para a sala de aula, a partir de atividades de ensino (Moura, 1998; 2000; 2001).

Quando nós, professores, selecionamos e criamos atividades de ensino para as nossas aulas, almejamos que as atividades proporcionem aos estudantes, a possibilidade de compreender o mundo que nos cerca, a partir do momento em que as abstrações forem se constituindo em conteúdo concreto para o pensamento.

Tanto Kopnin (1978) como Davydov (1982) consideram o concreto e abstrato enquanto categorias essenciais para a elaboração do pensamento teórico.

O concreto, segundo Kosik (2002) "se torna compreensível através da mediação do abstrato, o todo através da mediação da parte" (Kosík, 2002: 36).

Por concreto, também, "se entende o objeto solto sensorialmente perceptível ou sua imagem gráfica e, por abstrato, as reiteradas e similares propriedades soltas de um conjunto de objetos, mentalmente separadas dos mesmos e consideradas independentemente" (Davydov, 1982: 332).

Ao fazermos abstrações, podemos falar das propriedades gerais do objeto e até separá-las mentalmente de outras propriedades, ao mesmo tempo em que podemos operar com as propriedades abstraídas das representações dos objetos estudados.

O conteúdo das abstrações referido pelo autor não têm existência na realidade. Não há como negar a total fragmentação desse movimento, o de operar com abstrações, a partir de suas propriedades, totalmente desvinculadas do objeto estudado.

Na mesma linha de raciocínio, segue Kopnin (1978: 154), ao afirmar que o abstrato é a "separação, o isolamento de alguma propriedade sensorialmente acessível do objeto", porém, "a tarefa da abstração não é separar uns dos outros indícios sensorialmente perceptíveis, mas através deles descobrir novos aspectos no objeto, que traduzam as relações de essência[39]" (Kopnin, 1978: 161).

---

[39] Neste estudo os termos cerne, substância e substancial representam a essência de que fala Kopnin (1978).

O pensamento progride ao "mover-se em seu próprio elemento, isto é, no plano do abstrato, que é a negação da imediatidade, da evidência e da concreticidade sensível". Move-se seguindo o seu próprio movimento, "no pensamento e do pensamento", a partir da abstratividade à concreticidade (Kosik, 2002: 36).

O concreto no pensamento, para Kopnin (1978: 162) "se manifesta como forma superior do conhecimento concreto". É a unidade do diverso. Não é a soma mecânica de abstrações isoladas. "O concreto é o ponto de partida e chegada do conhecimento" (1978: 157).

> É "o *conhecimento* mais *profundo* e *substancial* dos fenômenos da realidade, pois reflete com o seu conteúdo não as definibilidades exteriores do objeto em sua relação imediata, acessível à contemplação viva, mas diversos aspectos substanciais, conexões, relações em sua vinculação interna necessária. Abstrações isoladas elevam o nosso conhecimento da apreensão do geral empírico ao universal, enquanto o *concreto* no pensamento, fundamenta a conexão do *singular* com o *universal*, fornece não uma simples unidade de aspectos diversos, mas a identidade dos contrários" (Kopnin, 1978: 162)

Kopnin (1978) e Kosik (2002) rompem com a idéia de que o movimento do conhecimento teórico ocorre a partir da transição do concreto manipulável ao abstrato, do pensamento empírico-discursivo ao pensamento teórico. Rompem com a visão empírica do pensamento, que considera o estudo do isolamento das propriedades que compõem o pensar humano. Afirmam que o conhecimento contém definibilidades conceituais decorrentes de conexões internas e não apenas definibilidades exteriores do objeto.

Quando o objeto é a álgebra simbólica afirmamos que o conhecimento mais profundo e substancial desta reflete não as definibilidades exteriores da variável-letra em sua relação imediata, acessível à contemplação viva, mas diversos aspectos substanciais, conexões, relações em sua vinculação interna com os conceitos de número, movimento e aspectos geométricos.

O abstrato e o concreto refletem a mudança da imagem cognitiva tanto no que concerne à multilateralidade da abrangência do conceito quanto à sua profundidade, a penetração em sua substância, em seu movimento. Expressam as leis da mudança que se opera no conteúdo do conhecimento, ao longo de seu desenvolvimento.

Exemplo disso seria o abstrato e o concreto do lógico-histórico da variável.

O abstrato e o concreto do lógico-histórico da variável refletem a mudança da imagem cognitiva, no que diz respeito à multilateralidade da abrangência do conceito de álgebra quanto à sua profundidade, à penetração em sua substância, em seu vir a ser, em seu movimento.

O movimento que vai do concreto ao abstrato, da álgebra, considera a transição do conceito de número como perda da concreticidade e da substancialidade de seus nexos internos, o fazer corresponder e o valor posicional, por exemplo, ao mesmo tempo em que o processo do abstrato ao concreto considera a totalidade concreta do número que se constitui a partir dos mesmos nexos internos, o fazer corresponder e o valor posicional, por exemplo, na qual se reproduz idealmente a realidade em todos os seus planos e dimensões, a partir do conceito de variável que se materializa no conceito de função.

O fato é que o concreto e o abstrato do conceito de número constitui os campos de variação. Não é possível falar em função, sem, necessariamente, considerar os campos de variação. Nesse caso, a concreticidade do número não está nos elementos perceptíveis do numeral, por exemplo, na fração que representa metades, terços, quartos etc. e sim nos Conjuntos Numéricos N, Z, Q, I ou R.

Nesse sentido, a formação do pensamento algébrico no aluno não pode se limitar como se fosse uma transposição de linguagens do todo caótico. Exemplo dessa transposição aparece em frases do tipo: o "x" pode ser qualquer coisa, ou ainda, um número natural, uma fração, um número inteiro. O aluno tem a impressão que a totalidade da álgebra é um todo organizado.

O concreto da álgebra se torna compreensível através de seus nexos internos e externos.

A possibilidade de generalização da álgebra vai ocorrer quando houver um conhecimento profundo do conceito de variável, de forma que o movimento do pensamento do indivíduo o torne autônomo. Para tanto, o estudo do conceito mais geral de variável deve considerar a palavra, a figura, o numeral e a letra.

O todo seria a álgebra que está por vir a ser e a parte, a álgebra não simbólica: retórica, sincopada e geométrica, e a álgebra simbólica.

O concreto do conteúdo algébrico se torna compreensível através da mediação das abstrações contidas nos conceitos de número, figura, palavra e letra, enquanto o todo da álgebra se torna compreensível através da mediação da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica.

Exemplo disso seria o estudo dos conceitos abstratos:

1) De permanência e fluência;
2) De campos numéricos: naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais;
3) Da variável: variável-palavra, variável-figura, variável-numeral e variável-letra que compõem o concreto da álgebra.

Após estudar a variável-palavra, a partir das palavras particular e universal, Coração (2001) [40] afirma que (...) "cada vez mais" tem "a impressão de que não existe o certo ou errado". E pergunta: "quando essa relatividade é construtiva e quando não é?" (diário: 19/10/01).

No mesmo raciocínio segue Ana Carolina[41] (2001), ao afirmar: "relativização demais tira o conceito do certo e do errado". E assim como Coração (2001), se pergunta: "Qual o meio termo entre a matemática não fixa com a fixa?" (Ana Carolina, diário: 2001).

Ao estudar o concreto contido nas palavras particular e universal, surge em Coração (2001) e em Ana Carolina (2001) novas questões sobre o conceito que poderão dar origem a uma nova forma de pensá-lo.

---

[40] Coração: Pseudônimo escolhido por uma das alunas que freqüentou a disciplina para se identificar em seu diário.
[41] A aluna preferiu manter seu primeiro nome em seu diário de campo.

Para elas, pode-se relativizar o certo e o errado. As alunas, num primeiro impacto, têm dificuldades em compreender todos os elementos abstratos que compõem o concreto das palavras particular e universal.

Para atingir o objetivo de estudar, juntamente com os professores, o concreto e o abstrato dos conteúdos algébricos, entendemos que há necessidade de se escolher um método o qual pode ser definido como o método do próprio pensamento. Nesse caso, o método escolhido considera o movimento que atua nos conceitos, no elemento da abstração.

Tal método é um movimento no pensamento e do pensamento. "O progresso da abstratividade à concreticidade é, por conseguinte, em geral, movimento da parte para o todo e do todo para a parte; do fenômeno para a substância e da substância para o fenômeno; da totalidade para a contradição e da contradição para a totalidade; do objeto para o sujeito e do sujeito para o objeto" (Kosík, 2002: 37).

O progresso da abstratividade à concreticidade para a álgebra é o movimento da álgebra que está por vir a ser e da álgebra que está por vir a ser para as álgebras não simbólica e simbólica; do número e da figura para a variável e da variável para a figura e o número; da figura para o número e do número para a figura; da álgebra simbólica para a contradição contida na palavra e na figura, e da contradição contida na palavra e na figura para a álgebra simbólica; do conceito teórico da álgebra que está por vir, para o estudo dos movimentos contidos na vida, pelo sujeito e do estudo dos movimentos contidos na vida, pelo sujeito, para o conceito teórico da álgebra.

> Assim, método e atividades de ensino devem contribuir para professores e estudantes terem momentos diversos que os possibilitem construir pensamento teórico na sala de aula, a entender o movimento de sua própria vida, a partir do conhecimento matemático, priorizando-se aqui o conhecimento algébrico.

Ao fazermos tais considerações, arriscamo-nos a conjecturar, com fundamentos em Kopnin (1978) e em Kosik (2002) e a defender a idéia de que o desenvolvimento do pensamento pode ser comparado a vários círculos, que durante o processo em que ocorre a aprendizagem de conceitos novos, se interligam e se contróem redes de espirais.

Tais redes ora representam a totalidade, ora o fenômeno, porém estão em constante movimento e podem ser entendidas sob diversos ângulos, a partir do *detour* (Kosik, 2002) ou ainda dos isolados (Caraça, 1998). A substância dessas redes é o próprio movimento. Está por vir a ser.

Ilustrando esse fenômeno na álgebra podemos considerar as discussões feitas pelos professores de nossa pesquisa ao vivenciarem atividades de ensino que consideram a álgebra simbólica e a álgebra não simbólica; a variável-letra e a variável-figura. Essa visão permite-lhes perceber os nexos internos e externos do pensamento algébrico e constatar que nessa circularidade não há rompimentos.

"É como se o pensamento se desenvolvesse conforme um círculo: da teoria (ou lógica) à história e desta novamente à teoria (lógica)" através das abstrações que se apresentam durante o seu desenvolvimento (Kopnin, 1978: 186). É um processo contínuo e dinâmico que nunca tem fim.

Os pressupostos que estamos considerando fazem-nos concordar com Davydov (1982) e Kopnin (1978) quando afirmam que o pensamento teórico se configura a partir de nexos internos dos conceitos e leis de movimento interdependentes, pois o pensamento teórico:

> "reflete o objeto no aspecto das relações internas e leis do movimento deste, cognoscíveis por meio da elaboração racional dos dados do conhecimento empírico. Sua forma lógica é constituída pelo sistema de abstrações que explica o objeto. A aplicação prática do conhecimento teórico é quase ilimitada, enquanto no sentido científico, a construção da teoria se manifesta como um resultado final, como conclusão do processo do conhecimento" (Kopnin, 1978: 152).

Nesse sentido, as abstrações e leis do movimento do pensamento, ao se constituir em sua forma lógica e teórica, consideram os aspectos lógicos, históricos e formais do objeto a ser estudado.

Ora o formal do pensamento se transforma em histórico, ora o histórico se transforma no formal do pensamento. O formal do pensamento está relacionado ao último estágio de rigor e abstração a que determinados povos ou civilizações conseguiram chegar em determinadas épocas. Está diretamente relacionado ao reconhecimento científico de uma determinada comunidade. No caso da álgebra, a "álgebra retórica"[42] não se aproximaria de um conhecimento empírico do movimento, do ponto de vista lógico de sua história.

Durante o primeiro momento da elaboração de novos conhecimentos pelo pensamento, ao que se percebe, a criação da lógica desse conhecimento, tem seu momento individual.

É composta por abstrações, que muitas vezes não são compreendidas pelo coletivo, em determinados períodos históricos. É nesse momento, o do não entendimento, ou ainda do "desconhecimento" (Caraça, 1998) de uma determinada lógica criada pelo pensamento de alguns, que a lógica elaborada pode ser rejeitada, muitas vezes, por séculos.

Tal lógica, ao ser elaborada em nossa realidade, considera a cultura em que estamos inseridos, portanto, é histórica, e quando sistematizada a partir do rigor científico, é entendida enquanto conhecimento teórico, portanto, é formal.

Assim, em determinados momentos, das diversas civilizações, o que não foi entendido pelo coletivo, pode ser retomado. Pode ser estudado, novamente, por outras lógicas, por outras abstrações, de outros tempos.

É nesse segundo momento, quando o coletivo compreende, em seu contexto, o concreto do conteúdo contido naquele determinado pensamento, que a lógica desse pensamento se torna científica e se impõe na prática social.

O que até então era lógico-histórico, quando científico, passa a ser formalizado e, muitas vezes, o que até então, era considerado extremamente formal, passa a ser lógico-histórico. Esse ir e vir das lógicas do pensamento ou insights do movimento do pensamento

---

[42] Álgebra retórica: pode ser definida como álgebra das palavras.

é determinado pelas diversas teorias das civilizações. Podemos citar como exemplo, a álgebra sincopada e a álgebra geométrica.

Tanto uma como outra, em determinados momentos foram extremamente formais. Hoje configuram-se em lógico-históricas, nexos internos da álgebra formal.

O concreto do conteúdo contido na álgebra sincopada de Diofanto, que se materializou na "variável-numeral" (Lima & Moisés, 1997; 2000) só foi entendido e, de certa forma, reelaborado por Viète, provocando mudança conceitual (Hofmann, 1961) no pensamento algébrico da época, a partir do final do século XV, quando a realidade posta começava a considerar a fluência e a interdependência presentes na realidade.

A variável-palavra e a variável-figura pensadas pelos egípcios e pelos gregos tornara-se, nesse contexto, um certo impedimento para que as diversas áreas do conhecimento pudessem usufruir do pensamento algébrico.

Entender o lógico-histórico do pensamento e dos objetos por ele apreendido envolve entender o porquê nós, seres humanos, não nos habituamos a viver sob o jugo do imutável.

As abstrações se processam a todo instante em nosso pensamento e estão em constante transformação, tornando-se, dessa forma, o conteúdo concreto de nosso pensamento.

O núcleo que processa as abstrações do pensamento está em constante movimento, em constante transformação, seguindo o ritmo do universo, seguindo o ritmo do mundo, seguindo o pulsar da vida, sempre pronto a elaborar novos conceitos, sem conseguir se desprender das raízes que o compuseram, pois para ter coragem de navegar e enfrentar o desconhecido, precisa estar preso às abstrações conhecidas, aos conceitos fixos e rígidos, ao considerado, até então, imutável.

Ao rompermos com o imutável damos uma nova forma ao pensamento. Isso é ciência: romper com o pronto, com o lógico e com o formal de um determinado pensamento, gerado em um determinado contexto; romper com as representações que nos foram passadas durante séculos, representações que muitas vezes são consideradas verdades uníssonas e absolutas.

Quando pensamos no movimento, pensamos no movimento da vida, movimento que nos atinge em nosso âmago, em nosso subjetivo. É como se desvendássemos um novo mundo. É como se conseguíssemos entrar no infinito de um mundo, que num primeiro momento nos fosse incompreensível.

Ao adentrarmos nesse novo mundo, podemos diferenciar os movimentos. Ora esses movimentos podem ser regulares, ora particulares, ora irregulares; não importa.

O que importa é que, ao tratarmos do movimento, encontramos uma chave que nos abre uma nova porta, que nos desvenda um novo mundo; um mundo lindo, mas que assusta porque nos permite sonhar novos sonhos, que nos permite traçar novos planos, que nos permite fazer novas relações; um mundo que antes era incompreensível, mas que nos toca porque o temos em nós.

É algo que está, ao mesmo tempo, imerso e submerso a nós, em nosso eu, dessa forma, tornando-se, algo que o corpo e que a mente já conhecem, uma vez que já estivemos e fizemos parte dele.

Esse mundo, ao qual estamos nos referindo, cuja substância é a lei universal do movimento, da mutabilidade, da fluência, da cooperação, da transformação, da relatividade, da interdependência é a vida de todos nós e, contrapõe-se à imutabilidade, à metafísica, à rigidez, ao fixo, ao pronto, ao acabado, ao absoluto, como já foi dessa forma entendido por Heráclito, Galileu Galilei, Isaac Newton, Einstein e Whitehead.

Foi preocupação daqueles, que de alguma forma, realmente fizeram diferença, ao questionar verdades absolutas; por pensadores que sempre buscaram mostrar, cada um em seu tempo, que as verdades são relativas e momentâneas; pessoas que, ao se debruçarem sobre o imutável, o pronto, o acabado, trouxeram e estão trazendo, ainda hoje, novas questões para a humanidade responder, de forma que novos pensamentos sejam elaborados.

Muitos desses pensamentos, quando amadurecidos, se tornam científicos, provocando mudanças no formalismo de conceitos que até então eram ou ainda são inquestionáveis; portanto, fica difícil concebermos o mundo sem movimento, sem fluência, sem mutabilidade, sem processo.

Dessa forma, a realidade deve ser entendida enquanto processo, implicada "no tocante à natureza da realidade". A melhor imagem de processo que podemos compor está relacionada ao rio descrito por Heráclito, ao:

> "curso d´água que flui, e cuja substância nunca é a mesma. Nela pode-se ver um padrão sempre cambiante de vórtices, encrespamentos, ondulações, ondas, respingos etc., que não têm, é claro, qualquer existência independente. Em vez disso, eles são abstraídos do movimento fluente, surgindo e desaparecendo no processo total do fluxo. Uma subsistência assim transitória, como a que podem possuir essas formas abstraídas, implica apenas numa relativa independência ou autonomia de comportamento, em vez de uma existência absolutamente independente enquanto substâncias fundamentais" (Bohm, 1980: 77-8).

A realidade entendida como o curso de um rio, ainda que seja apreendida, por alguns instantes, tem uma forma flexível e está em contínua transformação. Vale ressaltar que não há o certo absoluto nem o errado absoluto. Há, sim, uma relatividade das coisas e uma interdependência entre as coisas. Nessa realidade tudo tem a ver com tudo, já que a consideraríamos em sua totalidade e não em sua fragmentação.

A substância da noção de processo está no fato de que "não só todas as coisas estão mudando, mas tudo é fluxo. Ou seja, o que é, é o processo de tornar-se si mesmo, enquanto todos os objetos, eventos, entidades, condições, estruturas etc., são formas que podem ser abstraídas desse processo" (Bohm, 1980: 77).

Se a realidade é um processo, o conhecimento não pode deixar de sê-lo.

O conhecimento é uma "abstração extraída de um fluxo total, único, que é, portanto, em última instância, a base tanto da realidade quanto do conhecimento dessa realidade" (Bohm, 1980:78).

Nosso conhecimento não pode ser tratado "como um conjunto de verdades basicamente fixas e, assim, não dotadas da natureza de processo".

Não queremos através dessa afirmação concluir que o conhecimento é cumulativo, o que implicaria concluir "que seus elementos básicos são verdades permanentes que temos de descobrir" (Bohm, 1980: 79).

Ao defendermos que tudo é fluxo, não estamos afirmando que no conhecimento há algo de permanente.

Trazemos à tona da discussão questões colocadas por Bohm (1980:79) quando o tema é a fluência e a interdependência no processo do conhecimento:

1) "Se tudo é fluxo, então cada parte do conhecimento deve ter o seu ser como uma forma abstraída no processo de vir a ser, de modo que não pode haver elementos de conhecimento absolutamente invariantes?"
2) "Seria possível livrar-se dessa contradição, no sentido de se poder entender não somente a realidade, mas também todo o conhecimento, como alicerçado no movimento fluente?"
3) "Deve-se necessariamente considerar alguns elementos de conhecimento (por exemplo, aqueles que se referem à natureza de processo) como verdades absolutas, para além do fluxo do processo?"

Quando responde às questões colocadas, o referido autor diz que ao respondê-las, seria interessante afirmar:

> "todo conhecimento é produzido, exibido, comunicado, transformado e aplicado no pensamento. Este, considerado em seu movimento de vir a ser (e não apenas em seu conteúdo de imagens e idéias relativamente bem definidas) é de fato o processo em que o conhecimento existe efetiva e concretamente" (Bohm, 1980: 79).

Nesse sentido, o pensamento inclui movimentos intelectuais, emocionais, sensoriais e musculares. Todos esses movimentos fazem parte de um processo indissolúvel. Se tratarmos desses movimentos, separadamente, estamos favorecendo a fragmentação e a confusão (Bohm, 1980).

Ao assumirmos o lógico-histórico enquanto forma de pensamento, necessariamente, consideramos a flexibilidade, a relatividade, a interdependência, a fluência, o processo e o movimento do próprio pensamento que ocorre na totalidade do pensamento, enquanto define para si mesmo o que vem a ser a verdade elaborada pela *praxis* humana enquanto o homem tenta se humanizar pelo conhecimento.

A *praxis* humana defendida por Kosik (2002) não é sinônimo de senso comum, muito menos representa a prática construída historicamente de forma fragmentada. Não é definida enquanto contemplação da realidade, mas pode ser entendida como o ato do pensar humano que considera a totalidade, a relatividade e o movimento que ocorre do e no próprio pensamento, enquanto o homem constrói continuamente a realidade.

O homem só conhece a realidade à medida que cria a realidade humana e "se comporta antes de tudo, como ser prático" (Kosik, 2002: 28).

Assim, a *praxis*, para o autor, diferencia-se do conceito de prática enquanto senso comum e do conceito de experiência, porém, não nega que esses conceitos se apresentam na realidade criada pelo homem.

O lógico-histórico está presente na *praxis* humana e no pensamento teórico. Nesse sentido, é praticamente impossível elaborar pensamento teórico sem considerar o pensamento flexível.

Assumimos que o pensamento flexível é o elo de ligação ou ainda nexo conceitual entre os pensamentos empírico-discursivo e teórico, tal pensamento é lógico-histórico, faz parte da nossa *praxis* e está sempre por vir a ser formal. Com o pensamento algébrico isso não é diferente.

Tal pensamento também se apresenta na *praxis* humana. Enquanto busca a verdade, erra e acerta inúmeras vezes, ainda que, em determinados momentos, tenha uma certa aparência de permanência.

Em diversos momentos, quando pensamos sobre algo, procuramos respostas a problemas que nos impomos, e não temos clareza do que vem a ser o certo e o errado. Apenas tentamos fazer elaborações ou ainda conjecturas, a partir de algumas premissas que estabelecemos no contato diário com aqueles que nos cercam, a partir de relações que travamos com nós mesmos, enquanto usamos e abusamos do conteúdo de nosso próprio pensamento: as abstrações.

A História da Matemática "é a ciência das leis objetivas do desenvolvimento da matemática" (Ríbnikov, 1987: 10). Explica a natureza da matemática. Explica o desenvolvimento do pensar matemático, a partir de diversos pontos de vista. Ao conhecermos os diversos pontos de vista que são desenvolvidos nas diversas culturas, nos permitimos "filosofar" sobre a elaboração de nosso próprio conhecimento matemático. Nos permitimos ter dúvidas sobre as verdades matemáticas. E ensinar e aprender matemática não seria isso?

Ao estudarmos a História da Matemática, podemos perceber que as relações quantitativas e formas espaciais têm relações indissolúveis com as exigências da técnica e as ciências naturais.

Ao mesmo tempo, podemos nos conscientizar, a partir de inúmeros exemplos, de que suas verdades não foram construídas num processo harmonioso de "desenvolvimento contínuo e gradual".

O desenvolvimento da História da Matemática se dá através de uma luta "enfurecida do novo contra o velho", onde a "luta se revela particularmente forte quando o novo irresistivelmente vence, apesar dos fracassos", incluindo-se "a morte dos criadores da ciência" (Ríbnikov, 1987: 15).

Conhecer a história do desenvolvimento da matemática nos permite conhecer seu objeto, bem como "compreender o lugar dessa ciência na atividade produtiva e social dos homens" (Ríbnikov, 1987: 12).

> "A prática nos ensina que toda ordem lógica de qualquer ciência, sua estrutura, interrelação e inclusive a existência de ramos independentes não constituem algo imutável. Elas são fruto do desenvolvimento histórico. O desenvolvimento histórico das idéias sobre uma ciência não é outra coisa que o reflexo do processo histórico em forma conseqüente, abstrata e teórica" (Ríbnikov,1987: 18).

Concordamos com Miguel (1993, 1999, 2000) que considera que a história do desenvolvimento formal dos conceitos matemáticos na sala de aula não deve ser entendida como a tábua de salvação para que se aprendam os conceitos que se quer ensinar. Porém, compreender a história decorrente de certa filosofia ou a filosofia decorrente de uma certa história da matemática que compõem nosso "instrumento de trabalho", é fundamental "para a nossa prática" (Pereira de Jesus, 2002: 01).

Entendemos que a história dos conceitos matemáticos, só tem sentido, na sala de aula, quando professores e estudantes compreenderem o movimento das abstrações do pensamento que compuseram as formalizações que estudamos.

As abstrações, demonstrações e aplicações, são os principais traços característicos da matemática e são esses traços que, ainda hoje, fundamentam nossas aulas de matemática. Estudam-se, por exemplo, as multiplicações de números abstratos por outros. Não é muito comum estudarmos a multiplicação de número exato de pessoas por outras (Aleksandrov et al, 1988).

A história mostra que as abstrações que se processam no pensamento matemático auxiliam o homem a buscar métodos matemáticos universais, de forma que estes tenham a possibilidade de resolver todos ou a maioria dos problemas que planeja (Ríbnikov, 1987).

Os métodos matemáticos universais possuem três traços bem distintos: relações quantitativas e formas espaciais, abstraindo-as de todas as demais propriedades dos objetos; sucessão de graus de abstração crescente, como exemplo, as noções fundamentais de número e figura e o movimento quase por completo no campo dos conceitos abstratos e suas inter-relações (Aleksandrov et al, 1988).

Parte significativa dos métodos matemáticos universais elaborados pelas abstrações do pensamento humano em sua atividade está diretamente relacionada ao desenvolvimento dos conceitos algébricos.

Se desejamos estudar com certa profundidade os métodos e as abstrações do pensamento algébrico construídos de forma lógico-histórica no pensamento, faz-se necessário considerar que, em substância, não há nenhum cientista que trabalhe criativamente sem se dedicar à história de sua ciência (Ríbnikov, 1987).

Nesse sentido, ao defender um ensino de álgebra criativo que permita a professores e alunos se entenderem na realidade e no movimento da realidade, a partir da compreensão do pensamento algébrico enquanto descrição de movimentos, estamos acenando que o lógico-histórico da álgebra faça parte das aulas do Ensino Fundamental.

Propomos que o ensino de álgebra das séries iniciais se fundamente numa abordagem lógico-histórica do conceito de álgebra.

Consideramos nessa investigação a dialética lógico-histórico, enquanto: a) forma do pensamento (Kopnin, 1978); b) perspectiva didática para a álgebra e c) atividade formadora para professores e alunos.

Defendemos a idéia de que o lógico-histórico da álgebra na sala de aula possibilita a professores e alunos o entendimento da natureza do pensamento algébrico. Ao mesmo tempo em que possibilitou à pesquisadora elaborar o seu conceito de atividade de pesquisa.

A partir dos pressupostos teóricos apresentados até aqui sobre o lógico-histórico enquanto forma de pensamento, temos como intenção, nesta pesquisa, investigar e analisar as possíveis relações que podem se apresentar nas elaborações dos professores do Ensino Fundamental, enquanto vivenciam, analisam e pensam sobre atividades de ensino que consideram a perspectiva lógico-histórico da álgebra.

Nessa perspectiva, o pensamento flexível compõe o lógico-histórico do pensamento teórico da álgebra. Está contido e contém o pensamento de várias civilizações, dentre elas, a nossa.

As atividades de ensino têm a intenção de auxiliar os professores a pensarem sobre os conceitos de fluência, variável, campo de variação e álgebra não simbólica que compõem o pensamento teórico da álgebra simbólica, a qual é ensinada, atualmente, em nossas escolas de nível fundamental, em uma perspectiva formalista.

As atividades de ensino que constam na maioria dos livros didáticos têm como ponto de partida, a variável letra, a partir de Viète. De forma geral, a álgebra simbólica é ensinada sem o seu lógico-histórico.

Nessa investigação, o pensamento teórico algébrico é definido como escrita de movimentos. Partimos do seguinte pressuposto: se tudo que está na realidade, está por vir a ser, concordamos com Bohm (1980) e Caraça (1998) que deixam a entender que a álgebra ainda não é, sempre está por vir a ser. A álgebra que estudamos em nossas escolas representa breves permanências do vir a ser.

Para Bohm (1980), a partir da realidade analisada sob a ótica da física quântica, precisaríamos de subálgebras porque cada uma delas estudaria um determinado movimento da realidade.

Seguindo o raciocínio do autor podemos afirmar que todo conhecimento algébrico elaborado pela humanidade é um "insight", assim como todo conhecimento teórico elaborado pelo homem.

Sendo coerente com tal argumentação podemos interpretar que as álgebras[43] denominadas de: sincopada, retórica, geométrica, de Lie, abstrata, árabe, aritmética, babilônica, booleana, de Boole-Schröder, de classes, de Jordan, de pontos, dos quarténios, egipcia, grega, hindu, matricial, não-associativas, não-comutativas e outras ainda não catalogadas por historiadores como Eves (1997), seriam exemplos de subálgebras.

Neste estudo nos preocuparemos, em espécial, com a álgebra não simbólica: retórica, sincopada e geométrica e com a álgebra simbólica.

O lógico-histórico da álgebra simbólica contém a palavra, a figura e a letra. Se manifesta na fluência e na interdependência de que fala Caraça (1998), de tal forma que sua substância, o movimento, tem a sua representação no conceito formal de variável.

O entendimento que temos de Caraça nos permite fazer relações desses conceitos, interdependência e fluência com o conteúdo concreto da variável.

Caraça (1998), em seus estudos, faz preleções do conceito de fluência e interdependência, ao tratar do conceito de variável e do conceito de função. Esses conceitos, de alguma forma, estão nos trabalhos de Kopnin (1978) e Kosik(2002) quando discutem a questão do conhecimento como movimento do pensamento; por conseguinte, podemos trazer essa forma de ver o conhecimento no ensino de álgebra.

Ao que parece, o conceito de variável não pôde ser elaborado formalmente sem considerar a contradição contida na palavra, na figura, na sincopação de Diofanto, bem como a síntese contida no lógico-histórico dos sinais que se apresentam nas operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

---

[43] Não temos a intenção aqui de fazer um aprofundamento de todas essas álgebras citadas. Porém, esperamos que elas instiguem o leitor a estudá-las.

A história mostra que há conteúdos da álgebra simbólica, como por exemplo, sinais gráficos que foram criados, muitas vezes, por pessoas anônimas ou ainda matemáticos que nem sempre são reconhecidos como pessoas que contribuíram para que a álgebra tivesse o status de hoje.

A álgebra simbólica é histórica e por trás de sua representação, a variável letra, elaborada por Viète, há séculos de conceitos teóricos construídos, a partir do movimento do pensamento. Viète, ao elaborar sua variável letra, assim como Newton, Einstein e os diversos pensadores das várias épocas estavam sobre o ombro de gigantes, ainda que muitos desses gigantes sejam anônimos.

A partir de algumas civilizações, vamos pensar sobre o movimento do pensamento presente no lógico-histórico da álgebra simbólica que ensinamos, anos após anos, em nossas escolas, no Ensino Fundamental.

Neste item tentamos explicitar a partir de um estudo filosófico o porquê o par dialético lógico-histórico fundamenta a pesquisa.

Forma de pensamento algébrico

Do ponto de vista da matemática podemos compor a imagem do rio de Heráclito, descrita por Bohm (1980) ao definir processo, quando analisamos seus conteúdos. Nesse caso específico, trataremos do conceito atual de álgebra simbólica ensinada no nível fundamental em nossas escolas.

O rio que flui e cuja substância nunca é a mesma, é a matemática. Nela pode-se ver um padrão sempre "cambiante" nas diversas álgebras, que de tempos em tempos, são abstraídas do movimento fluente, surgindo e desaparecendo no processo total do fluxo.

Essas álgebras, dentre elas, a álgebra simbólica, quando abstraídas do fluxo possuem uma relativa independência ou autonomia de comportamento que se materializa na variável letra, representação feita por Viète, a partir das letras do alfabeto, para resolver problemas matemáticos que envolvem valores desconhecidos.

Entendemos, a partir de Caraça (1935; 1961; 1966; 1998) que a variável, enquanto conceito, representa o pensamento concreto do conteúdo abstrato da lei universal do movimento do pensamento matemático, que contém em seu fluxo as diversas álgebras.

A variável é a fluência, o próprio movimento, o fluxo do pensamento. Sua constituição considera os pensamentos do campo numérico e geométrico. Tais pensamentos são teóricos. Porém, o seu lógico-histórico mostra que estes se originaram das abstrações feitas pelos homens a partir da elaboração dos conceitos formais de número e de aspectos da geometria.

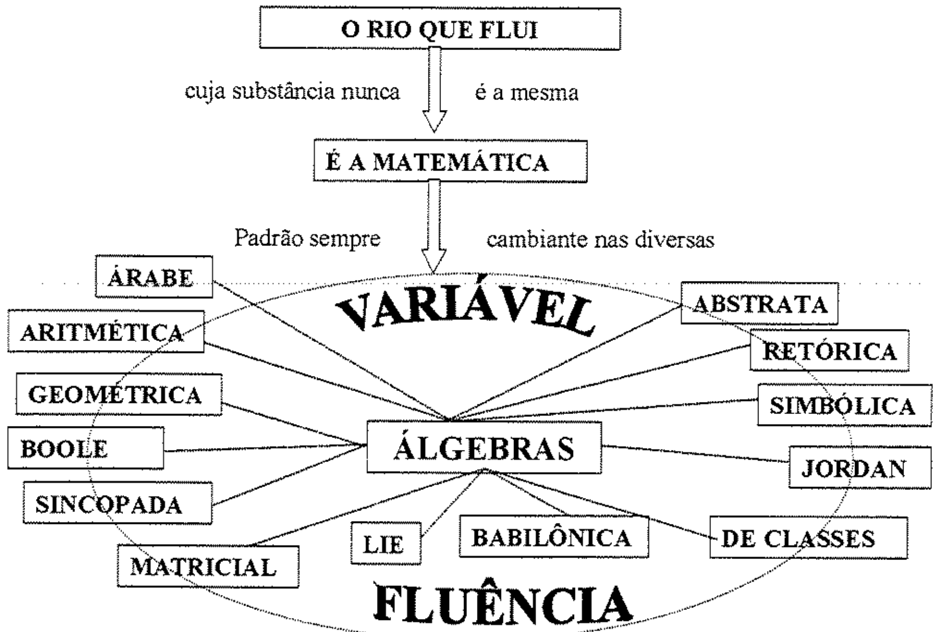
Só há sentido em mencionar a palavra variável, a partir do momento em que se considere campo numérico. Ela não tem existência por si só, enquanto ser em si.

A existência da variável, necessariamente, está relacionada ou associada a um determinado campo de variação. Do contrário, não se pode falar nela.

A variável não pode representar uma partícula da matemática que pode ser isolada ao se tentar dividir o indivisível, justamente porque "a variação é a variável" (Lima & Moisés, 2000:40) e se apresenta nas álgebras que citamos, as quais, dependendo da realidade em que atuarmos e do movimento que estudarmos podem ser consideradas substâncias transitórias da totalidade da matemática.

Assim, o lógico-histórico da álgebra está inserido no movimento fluente da vida, conforme representamos no diagrama que se segue:

MOVIMENTO FLUENTE DA VIDA



ÁLGEBRAS RELATIVAMENTE AUTÔNOMAS

Com o olhar de hoje, século XXI, podemos dizer, por exemplo que a álgebra não simbólica (retórica, sincopada e geométrica) é uma substância transitória da totalidade da matemática. Se a olharmos de forma isolada, não podemos fazer tal afirmação. Só faz sentido estudá-la, na medida em que a relacionarmos com o conceito de variável e com a álgebra simbólica.

"Naturalmente, a álgebra é, em si mesma, uma forma limitada de matematização", uma vez que à medida que o conhecimento científico avança, principalmente aquele que rege as leis da física quântica, faz-se necessário que se pense e que se criem outras espécies de matematização (que envolvam, por exemplo, anéis e retículos, ou estruturas ainda mais gerais, que ainda têm de ser criadas)" (Bohm, 1980:217).

A partir de uma nova visão, que se apresenta em nosso século, onde se prevê que a física quântica determinará muito da realidade, haverá necessidade de se pensar em uma álgebra que dê conta de estudar certos "movimentos" da Física, entendendo-se, nesse contexto, que o significado básico de um símbolo algébrico é que ele "descreve um certo tipo de movimento" (Bohm, 1980: 218).

Quando o símbolo algébrico é visto de forma isolada, se assimila a uma palavra que "se evidencia plenamente apenas na maneira pela qual é utilizada a linguagem como um todo". De modo semelhante, na matematização algébrica há de se considerar uma linguagem mais geral, onde predomine o "reomodo", entendendo-se *rheo* como sinônimo de fluir da linguagem (Bohm, 1980: 216). Aqui o "reomodo" da linguagem tem a conotação de modo de sua fluência.

No "reomodo", a palavra deixa de ser tomada como "um átomo indivisível de significado" e passa a ser vista como não mais que um indicador conveniente no movimento total da linguagem, nem mais nem menos fundamental que a oração, a sentença, o parágrafo, o sistema de parágrafos etc." (Bohm, 1980: 68-9).

A linguagem, no campo da álgebra, a partir do reomodo, passa a ser considerada como totalidade de uma álgebra indefinível na qual o significado básico de cada termo é que ele significa um "movimento total" da álgebra.

Nesse sentido, se fala de uma álgebra que está por vir, ser criada. Não é um volicínio sobre o futuro da álgebra, mas, como diz Bohm (1980), no campo da Física, é uma necessidade.

Aqui, a álgebra indefinível está relacionada com as possibilidades de estudar movimentos diversos que, não necessariamente, sejam regulares. Isso não quer dizer que a Matemática compartilhe dessa visão. Mesmo porque, há uma luta entre o velho e o novo da Matemática em fazer "isolados" do movimento da vida, para melhor estudá-los e compreendê-los. Esse fato contribui com que a Matemática "congele", por alguns instantes, o movimento e pense sobre ele. Ou seja, enquanto a Física luta para apreender a totalidade do movimento enquanto ele acontece, a Matemática congela os diversos instantes de um determinado movimento para melhor compreendê-lo.

O concreto do conteúdo definido a partir desse congelamento induz-nos a pensar na exatidão da Matemática.

Talvez Bohm (1980) se remeta, quando fala da álgebra indefinível, a uma álgebra dos movimentos da totalidade. Nós temos hoje álgebras de movimentos particulares: dos movimentos dos astros, dos movimentos da matéria, da vida, da realidade objetiva.

A partir dessa discussão sobre a álgebra indefinível, surge a possibilidade de uma matematização coerente do tipo de descrição geral que considera a totalidade como certos movimentos indefiníveis e imensuráveis.

Diante desse fato, há de se considerar que ao tratarmos da realidade em sua totalidade, teríamos que levar em conta a necessidade de se conhecer e estudar as "subálgebras" (Bohm, 1980), que são "relativamente autônomas".

> "(...) cada subálgebra é, em última instância, limitada pelo fato de que a lei relevante envolve movimentos que ultrapassam o âmbito daqueles que podem ser descritos em termos da subálgebra em questão" (Bohm, 1980: 218-219).

Ainda que tenhamos que criar subálgebras que dêem conta de estudar certos movimentos da realidade quando estudamos os aspectos conceituais das álgebras elaboradas e, quando até aqui, nos remetemos ao lógico-histórico da criação de seu pensamento, entendemos que essas álgebras tentaram compreender o movimento da realidade (Karlson, 1961). Nesse sentido, essas álgebras, de alguma forma, consideram em seu cerne, os conceitos de: fluência, número, variável e campo de variação.

Esses conceitos, aos quais estamos denominando de nexos conceituais da álgebra, constituem o substancial, o movimento do pensamento algébrico no sentido da busca da verdade relativizada. Fundamentam as diversas álgebras, denominadas de subálgebras por Bohm (1980), elaboradas estruturalmente pelos matemáticos das diversas civilizações, de tempos em tempos, no intuito de descrever, de formalizar os diversos movimentos presentes no mundo no qual estamos inseridos.

As álgebras: retórica, sincopada e geométrica, conhecidas como não simbólica, bem como as álgebras de Lie, de Jordan, grega, hindu, Wallis, matricial, booleana, árabe, abstrata, babilônica, de pontos, simbólica, citadas por historiadores como Eves (1997), de alguma forma, tentam desvendar matematicamente e descrever o mundo maravilhoso do movimento.

De alguma forma, essas álgebras procuram numeralizar ou criar hipóteses numéricas sobre o mundo do movimento, ainda que muitas das álgebras mencionadas, como por exemplo, a álgebra geométrica, não tenha como nexo conceitual o conceito formal de variável, elaborado só ao final do século XIX.

Há historiadores que, categoricamente, não consideram a álgebra geométrica como uma classe da álgebra.

Afirmam, como o Prof. Dr. Gert Schubring[44] (2002) que os gregos não fizeram álgebra, simplesmente porque não conheciam o conceito formal de variável, contrapondo-se aos estudos de Eves (1997), Boyer (1994), Hogben (1970) e Smith (1958) que consideram a álgebra de Diofanto e de Euclides como um tipo de álgebra figurada.

Smith (1958), ao tratar da natureza da álgebra, considera o progresso geral desta, e ao falar da história do desenvolvimento algébrico, chama a atenção para a necessidade de considerarmos o significado do termo álgebra.

Se definirmos a álgebra enquanto ciência da resolução de equações do tipo $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ expressas nesses símbolos, a história começa no século XVII. Se removermos a restrição desses símbolos particulares e conceder esses símbolos, para outros, menos convenientes, teremos um menor grau de possibilidade da história ter começado no século III. Se concedermos para a resolução de equações acima, métodos geométricos, sem símbolos algébricos de qualquer tipo, dizemos que a álgebra começou com a Escola de Alexandria ou um pouco antes. Por último, se afirmarmos que a álgebra está dividida em classes, qualquer problema que resolveríamos por álgebra nos dias atuais, até mesmo considerando as resoluções por adivinhações ou alguns processos aritméticos embaraçosos, a ciência de que estamos tratando, foi desconhecida desde 1800 a.C. e, provavelmente até antes.

Assim, a partir de Smith (1958), podemos concordar com Schubring se considerarmos que a álgebra só pode ser denominada álgebra, a partir do formalismo da

---

[44] Professor da Faculdade de Bielefeld, Alemanha, em sua palestra intitulada "Metodologia de pesquisas em História da Matemática", ministrada em 27/08/02, na Faculdade de Educação da UNICAMP.

álgebra simbólica, porém, podemos discordar do historiador quando consideramos a álgebra tal como Bohm (1980) e Caraça (1942; 1998), enquanto escrita de movimentos que contém o pensamento do número, ao mesmo tempo em que não o contém.

Parafraseando Lima & Moisés (1997; 2000) estamos considerando o ser e o não-ser do conceito de número, o qual se materializa na fluência, na variável; ao mesmo tempo em que o número está, ele não está.

Para pensar algebricamente, civilizações como a egipcia e pensadores como Diofanto foram buscar no concreto do conceito de número, o seu nexo conceitual. O ponto de partida é o número, algo que já, relativamente, conhecem, porque uma teoria mais geral do número só foi elaborada, a partir de Cantor, no século XIX (Ribnikov, 1987).

O conceito de número, no contexto de Diofanto é algo utilizado em seu dia-a-dia, porém, para os gregos desse período construírem o novo e ampliarem o próprio pensamento de número, têm que negá-lo novamente, fazendo a negação da negação do conceito de número (Caraça, 1998). Diofanto cria a variável-numeral (Lima & Moisés, 2000).

Ifrah (1998) e Caraça (1961; 1966) dizem que o conceito de número é um dos conceitos mais fascinantes criados pela mente humana. O homem, em determinado momento histórico, faz uma relação fantástica entre objetos distintos: pedra-ovelha (Ifrah, 1998; Hogben, 1970; Caraça, 1998). Cria, nesse momento, um dos conceitos matemáticos mais fascinantes: a correspondência um-a-um e é essa relação que vai permitir a demonstração da teoria do número real de Cantor (Guillen, 1987; Caraça, 1998) que se estende para o conceito de função.

É no fervilhar da elaboração dos conceitos de número, variável, campo de variação que o pensamento algébrico se refina.

O pensamento algébrico não está dissociado do conceito de número, muito menos dos conceitos de movimento e de fluência, pensado por Heráclito para explicar a realidade. A construção dos conceitos algébricos considerou os elementos históricos desenvolvidos pelo pensamento humano desde as mais remotas civilizações. Nunca esteve dissociado da cultura e do trabalho humanos.

Quando Galileu Galilei rompeu com o horror que boa parte da humanidade tinha, ao pensar sobre o movimento, sustentando a teoria de que tudo se move, permitiu às áreas científicas lançarem um novo olhar sobre os objetos em estudo e a matemática é uma dessas áreas. Assim, nos séculos seguintes, o movimento começa a fazer parte do movimento do pensamento da humanidade, dos matemáticos, de toda a gente.

A partir da definição de que tudo se move, tudo *dévem*, tudo se transforma, nada está pronto, nada é fixo, faz-se necessário se debruçar sobre o próprio conceito de número. Há necessidade de rever os conceitos aritméticos. Há novas elaborações matemáticas, a partir do inesperado: nada é fixo.

Não há como negar a rigidez do número, muito menos negar a numerosidade contida no próprio número, que se apresenta em suas propriedades.

Essa numerosidade só pode ser descrita formalmente, pela "ferramenta mais importante da ciência natural: a fórmula ou ainda o formalismo algébrico" (Piaget & Garcìa, 1984), no entanto, a própria numerosidade, quando tiver as propriedades, presentes nos diversos campos numéricos só faz sentido quando utilizamos a álgebra. Ainda que façamos milhões de cálculos não conseguimos nos convencer de que há validade das propriedades comutativa, associativa, dentre outras, presentes nos campos dos números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos.

Não podemos fazer generalizações, apenas a partir da retórica: em qualquer adição, independentemente do campo numérico em que se atua, a ordem das parcelas não altera a soma. A validade dessa afirmativa fez sossegar o movimento do pensamento humano quando as diversas civilizações aceitaram que as propriedades numéricas ou a numerosidade do número só faz sentido quando utilizamos os números algébricos para representar as generalizações que até então eram representadas em linguagem retórica e hoje: $\mathbf{a + b = b + a; a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)}$, por exemplo.

Ao que parece é nesse momento que o movimento de nosso pensamento se sente convencido e não mais questiona essa "verdade", até que tenhamos a intenção de estender essa "verdade" a outros conteúdos matemáticos. Apesar da rigidez dessa verdade ser válida para os entes numéricos devemos ter cautela quando pensamos em outros movimentos não numéricos. Nem sempre essa "verdade" será válida. Comprovamos então que temos uma suposta "verdade".

Apesar das demonstrações inquestionáveis, tal "verdade" é relativa. E, ainda bem. É a compreensão do porquê essa "verdade" é momentânea, que convoca o pensamento a se movimentar novamente. Damos vida ao pensamento. Não sossegamos. Saímos em busca de uma nova "verdade". Temos que construir novas premissas, porém, não podemos negar a "verdade" que construímos sobre as propriedades numéricas.

A numerosidade do número, se apresenta, em todos os campos numéricos que construímos até os nossos dias. Não há como negar o número na expressão: **a+b = b+a**. Ao mesmo tempo em que o numeral não está materializado na expressão, faz parte da expressão.

Essa forma de pensar o número se apresenta em qualquer campo numérico e pode ser utilizada em todas as situações problemas, elaboradas por diversas áreas do conhecimento.

Ao ampliarmos tal numerosidade para a operação multiplicação, através da expressão **a.b = b.a** nos campos numéricos, teremos a sua validade, porém, essa validade é questionada, quando deixamos de operar com números. Podemos citar como exemplo, a multiplicação entre matrizes.

A multiplicação entre matrizes mostra que ainda que tentemos criar o pronto, o fixo, o acabado, através das fórmulas matemáticas, somos obrigados a repensar a validade de nossas construções. Não há como defender a idéia da imutabilidade das propriedades operatórias, mesmo quando as "congelamos" a partir da algebrização numérica. Temos que continuamente analisar com muito cuidado a validade dessas propriedades para todas as categorias que escapam ao número.

Ainda que congelemos e tentemos generalizar a propriedade comutativa da multiplicação para os diversos campos numéricos, a mesma propriedade não representa a verdade absoluta, pois falha, quando é transposta para o estudo de operações que envolvem matrizes (Caraça, 1990).

Os estudos de Caraça (1935; 1942; 1961; 1966; 1990; 1998) mostram a existência de uma relação direta entre os pensamentos aritmético, algébrico e geométrico. Para o autor, essa relação se explicita e se amplia quando focalizamos a geometria analítica.

Na geometria analítica há relação direta entre qualidade e quantidade. Aritmética, álgebra e geometria caminham de mãos dadas. Em nenhum momento podem se separar. Os conceitos dessas três áreas do conhecimento matemático formam elos de ligação, gerando uma nova qualidade na geometria.

Para entendermos melhor o entrelaçamento entre esses conteúdos, analisemos o seguinte exemplo, apresentado pelo autor quando faz uma "excursão histórica e filosófica" para apresentar o conceito de função.

Ao elaborarmos a equação da elipse, $\mathbf{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1}$ vamos perceber que, à medida que **b** vai crescendo e se aproximando de **a**, a elipse vai sofrendo modificações, porém, não deixa de ser elipse e, por esse motivo, se diferencia de uma circunferência. Porém, se, num dado momento de sua variação, **b** se igualar a **a**, teremos a seguinte equação: $\mathbf{x^2/a^2 + y^2/a^2 = 1}$ donde se conclui que $\mathbf{x^2 + y^2 = a^2}$.

Nesse momento, a elipse desaparece e dá lugar à circunferência de raio igual a **a**.

As variações quantitativas foram tantas, que nos proporcionam efetuar mudanças na forma original da elipse. Ao manipularmos os números na flexibilidade da fórmula geométrica, nos damos conta que temos condições de transformar a elipse em uma outra figura completamente diferente: a circunferência.

Há aí o primado do número. A variação quantitativa mudou, transformou a qualidade da forma. Embora a fórmula geral da elipse descreva um movimento diferenciado do movimento da circunferência, é a rigidez do número que vai fazer com que cada vez que $\mathbf{1 = a^2}$, a elipse deixe de ser elipse para ser uma circunferência, ou seja, quando $\mathbf{1 = a^2}$, é o número que faz com que haja mudanças na forma da elipse, ao mesmo tempo em que é a flexibilidade da variável, presente no ente algébrico da generalização da fórmula que nos permite mudar e transformar a expressão de elipse, para circunferência.

Embora os gregos tivessem horror ao movimento e adorassem o número, deixaram a todos nós um legado, a partir da figura plana e do segmento que comprova a não presença física do número, ou seja, do numeral.

Os gregos fizeram inúmeras transformações geométricas (Hofmann, 1961) para demonstrar que o número estava presente em determinados pensamentos teóricos, representados pelas figuras, sem necessariamente conter a presença física do número, o numeral.

Aqui, a palavra transformação não deve ser entendida como fluência, movimento, justamente porque grande parte da civilização grega escolheu a figura para eternizar determinados instantes do belo que compõe a realidade. Há nesse eternizar, a contradição entre a intenção de negar o movimento, a fluência, o imutável, ao mesmo tempo em que se tenta registrá-los a partir do numeral.

Na própria Grécia há contradição na palavra transformação. Transformação para Euclides se diferencia em muito do que vem a ser transformação para Heráclito e Diofanto. Os trabalhos dos três estudiosos espelham essa contradição, porque a natureza dos mesmos são distintos.

Quando estudamos a transformação geométrica do ponto de vista de Euclides, não podemos afirmar que o conceito de variável se apresenta em suas definições, embora a álgebra figurada de Euclides contenha letras do alfabeto. O conteúdo concreto da álgebra de Euclides é a medida e não a fluência. Euclides criou sua álgebra a partir da régua e do compasso.

Na tentativa de se livrar do numeral físico para descrever os movimentos da vida sem estar preso ao numeral e sim, à idéia de número, as diversas civilizações mostram que a partir de suas tentativas, conseguiram contribuir para a formalização da álgebra de hoje, que ensinamos nas escolas e institutos de matemática.

A linguagem formal da álgebra de hoje apresentada no Ensino Fundamental é a linguagem da álgebra simbólica. Compõe-se dos nexos internos da álgebra não simbólica: o conceito de fluência, o campo de variação e o conceito de variável, historicamente construído, neste sentido, é o lógico-histórico da álgebra.

No formalismo do conceito de variável há o lógico-histórico da incógnita que já foi conhecida pelas palavras: **aritmo** de Diofanto, **coisa** ou **raiz**, utilizadas por europeus e árabes (Fraile, 1998); **ahá** criada pelos egípcios (Lima & Moisés, 1997); **res**, em latim; **cosa**, em italiano e **coss**, em alemão (Hofmann, 1961).

Ao estudarmos a natureza do pensamento algébrico na Índia, na China, no Egito, na Grécia, entre árabes e persas, entre os escritores medievais, no renascimento e no novo mundo, a partir das lentes de Smith (1958), Eves (1997) e Hofmann (1961), percebemos que em um dado momento histórico, as diversas civilizações sentiram necessidade de formular a sua própria álgebra. Há uma certa regularidade presente dentre as álgebras pensadas: a busca de resolver problemas do dia-a-dia que envolvem movimentos regulares. Esses movimentos são denominados por Lima & Moisés (1997; 2000) de equações.

A resolução de equações é decorrente da *praxis* de filósofos, matemáticos. É resultado da tentativa de compreender a regularidade contida na realidade. Antes de ser uma ciência, a álgebra, assim como a matemática, foi uma atividade, no sentido de Leontiev (1991). A álgebra envolvia "ações combinadas e interdependentes, fruto de acordos entre os sujeitos que deverão satisfazer uma necessidade do grupo" (Moura, 2001:156).

Os estudos de Hofmann (1961) mostram, por exemplo, que:

> "A matemática hindu está caracterizada por rechaçar métodos geométricos para a resolução de problemas algébricos e, sobretudo, pela tendência geral aritmético-algorítmica; a qual significa uma mudança do método demonstrativo, que é o especial da ciência grega. Os muçulmanos recebem dos hindus, por mediação dos iranianos, o sistema de posição, conhecimentos algébricos e detalhes astronômicos-trigonométricos, pelos demais, somente fragmentos de ciências hindus" (Hofmann, 1961: 50).

Para o referido autor, enquanto os hindus rechaçam os métodos geométricos, os chineses (200 a.C. até 1300 d.C.) resolvem equações auxiliares a partir de transformações geométricas e, é no Renascimento que "se tenta, por um lado, adquirir uma compreensão mais profunda das coisas e, por outro, desenvolver inteligente e independentemente os conhecimentos conseguidos de novo". Surge a época de transição, denominada de barroco (1450-1580) e, em seguida o período barroco contemporâneo que vai de aproximadamente 1550 até 1650.

Nesse período, há progressos técnicos dos professores simpatizantes do moderno, no que diz respeito às equações simples. Emprega-se aqui a incógnita, a partir da palavra e de suas potências e raízes primeiras "com signos individuais; pouco a pouco, se usa também abreviaturas para os símbolos operativos, como **p˜** em vez de **plus**, **m˜** em vez de **minus** e por fim, signos algébricos como + e - " (Hofmann, 1961: 98).

Quando tratam de buscar soluções para seus problemas, as diversas civilizações têm como ponto de partida a linguagem natural, a palavra e as representações que envolvem a figura, o desenho.

A partir daí, dá-se o salto para a elaboração de uma simbologia própria que, de alguma forma, está conectada, entrelaçada ao número e ao desconhecido sem desvincular-se da atividade humana. Tal simbologia, quando elaborada por uma pessoa, matemática ou não, para ser compreendida pelo coletivo, necessariamente tem que ser transmitida ou ainda transferida para o grupo.

A linguagem estrutural pensada e criada para ser compreendida, necessariamente tem que ser compartilhada por todos, quando se almeja que uma grande maioria a compreenda.

É nesse momento, quando uma pequena comunidade de teóricos aceita a argumentação do pensador que uma atividade passa a ter caráter científico para aquela comunidade. Isso não quer dizer que todas as comunidades científicas aceitarão aquele conhecimento, enquanto científico.

Para que isso possa ocorrer, novos caminhos, novas elaborações lógicas terão que ser percorridas. O processo se inicia, mas nunca tem fim. O que é científico para determinados pesquisadores não é considerado como tal, para outros. Assim, o que muitos historiadores, pesquisadores e matemáticos consideram álgebra, necessariamente não é compartilhado por outros.

Não há, portanto, ao longo da história do pensar algébrico, uma regularidade de definição e conteúdo, assim como na matemática. Há, porém, uma tendência, que contém um aspecto pedagógico, porque mostra caminhos de formação e entendimento do conceito. É aí que está a importância de se estudar o aspecto lógico-histórico presente na formação do conceito da álgebra na sala de aula.

Contrapomo-nos à idéia de ensinar, em nossas escolas, a partir do formal dos conceitos algébricos, a partir do formalismo do pensamento algébrico, para em seguida propor aos estudantes a aplicação de tais conceitos na realidade fluente. Propomos aqui exatamente o contrário.

Para entender a álgebra enquanto descrição de movimentos, propomos que o ponto de partida das aulas seja o estudo dos conceitos de: a) movimento; b) fluência; c) número e álgebra não simbólica e d) variável e campo de variação presentes na vida fluente, para que em seguida, possamos fazer isolados ou ainda *detour* dessa realidade, com o intuito de estudantes e professores compreenderem que dentre os movimentos presentes na vida, há aqueles que são regulares e aqueles que são irregulares.

Por acaso, a matemática tenta descrever e entender muitos deles, a partir do pensamento algébrico. Tenta mostrar, através de inúmeras demonstrações, que o pensamento algébrico pode auxiliar a compreender os movimentos regulares. A partir do momento em que estudamos e compreendemos tais movimentos, criamos movimentos quantitativos e qualitativos, a partir de leis.

Em determinados estudos, as leis qualitativas podem ser representadas a partir das quantidades, a tal ponto, que elaboramos funções. Nesse momento, podemos prever tais movimentos, simplesmente porque os numeralizamos, os controlamos. Na representação dos movimentos, estudados por nós, podemos nos utilizar da figura que pode se apresentar na forma gráfica (Caraça, 1998).

O conceito de álgebra é a confluência entre o lógico-histórico presente nas abstrações do pensamento, onde o lógico está despido das casualidades do histórico, porém, algumas casualidades foram responsáveis por novas elaborações algébricas. É dessa forma que entendemos a natureza do pensar algébrico que queremos discutir com alunos e professores dos diversos níveis de ensino.

Queremos que nas discussões sobre as atividades de ensino de álgebra, estudantes e professores compreendam a relação lógico-histórica que existe entre a palavra, a figura e a letra.

Gostaríamos que compreendessem enquanto estudam álgebra, que essas relações, palavra-figura-letra contêm as imperfeições, a mutabilidade, a imutabilidade, a fluência, a dúvida, a incerteza do pensar humano enquanto elabora abstrações no sentido de sintetizar e generalizar os movimentos que apreende da realidade que nos cerca. Enquanto o pensamento busca elaborar a verdade humanizada e relativizada das coisas, a partir da matemática.

Ao estudarmos o lógico-histórico do pensamento algébrico do ponto de vista de Hogben (1970) prestemos atenção em sua definição: a álgebra é a pedra angular de toda a matemática moderna que se fundamenta na gramática dos números.

Tal gramática se aperfeiçoou para poder servir às novas necessidades sociais. Teve origem na Índia, próxima à mesma época em que se criou a numeração posicional. Há de se considerar três grandes correntes que contribuíram para que o mundo muçulmano estendesse suas fronteiras, da Índia à Espanha: a necessidade de elaborar regras de calcular mais simples; a solução para problemas práticos e o estudo das séries.

A primeira corrente, necessidade de se elaborar regras de calcular mais simples, considera os "algorismos", sinônimo de algoritmos, em nossos dias.

Os chamados algorismos, ou ainda algoritmos, contêm:

1) O estudo das sete operações: adição, subtração, duplicação, diminuição, multiplicação, divisão e extração de raiz quadrada;
2) O abandono do ábaco;
3) O desenvolvimento da escola mercantil, responsável pela origem das leis do cálculo, como, por exemplo, pedir emprestado na subtração e divisão;
4) Os fundamentos da nova aritmética que cria novas propriedades numéricas.

Na solução de problemas práticos, segunda corrente apresentada pelo autor, há os fundamentos das álgebras retórica, sincopada e simbólica. Essas três álgebras possibilitam a transferência de linguagem, da vulgar, do homem comum para a algébrica, matemática e vice-versa.

Hogben (1970) é enfático, ao afirmar que para compreender a matemática faz-se necessário entender a transição da álgebra retórica para a simbólica que, por sua vez, está relacionada à moderna álgebra: álgebra das equações e símbolos operatórios.

A álgebra das equações contém duas regras elaboradas por Al-karismi para a resolução das equações. A primeira regra é denominada de al-muqabalah, que significa redução de termos semelhantes e a segunda de al-gebra, que significa transferência de quantidade de um para outro membro das equações (Hogben, 1970; Caraça, 1998; Radice, 1985).

Na terceira corrente temos o estudo das séries que se fundamentam nas leis de formação:

1) Dos números triangulares, Triângulo de Pascal, base da moderna Teoria estatística;
2) Dos números quadrados e
3) Dos números pentagonais.

As correntes defendidas por Hogben (1970) mostram a não dissociação da álgebra da realidade fluente, do movimento da vida dos muçulmanos, civilização hábil na resolução de problemas relacionados à contabilidade, à contagem, e à manipulação dos símbolos numéricos.

Lembremos que a história mostra que os muçulmanos eram exímios negociantes. Usavam o ábaco com desenvoltura e inventaram o zero, o sistema decimal que contém a base dez e o valor posicional, facilitadores de cálculos. Embora, em se tratando da invenção do zero, haja controvérsias entre os historiadores.

O pensamento algébrico dos muçulmanos esteve relacionado ao desenvolvimento do número, das regras do cálculo e ao desenvolvimento das séries por muito tempo. O desenvolvimento das séries, por sua vez, está associado à teoria da Estatística que, por sua vez, tem por objetivo, propiciar o bem-estar humano.

Estatística é sinônimo de "Aritmética do bem-estar humano" (Hogben, 1970: 649). A álgebra considera tal aritmética, no seu sentido pleno. Considera o bem-estar humano. Ela se origina na *praxis*, na atividade humana e tem por objetivo servir o próprio homem. Nesse sentido, a álgebra é um conceito que está na vida teórica do homem e serve a própria vida. Em um primeiro momento, não fica restrita apenas ao seu aspecto formal.

Hogben (1970) considera ainda que a matemática hindu se originou com o livro de Lilavati, de Aryabhata em 470 d. C. onde o autor aplica as leis dos sinais de Diofanto.

O mundo islamita aperfeiçoou muito do que os hindus elaboraram. Um dos matemáticos que se destacou foi Al-karismi.

A linguagem algébrica proposta por Al-Karismi é retórica (Fraile, 1998; Eves, 1997; Smith, 1958). Os problemas e desafios propostos por ele estão diretamente relacionados com a vida do povo. São contados a partir de poemas e prosas. São resolvidos, na maioria das vezes, a partir da figura, a partir dos segmentos, a partir das transformações geométricas, a partir do método de completar quadrados. Al-karismi propõe "a regra que hoje usamos para resolver equações. Seu método é idêntico ao descoberto por Diofanto" (Hogben, 1970: 332).

Hindus e árabes tentam construir a gênese do pensamento teórico da álgebra, a partir do estudo da realidade que os cerca. Tentam modelar formalmente os diversos problemas da realidade a partir da palavra, da sincopação e da figura.

Do ponto de vista de Kline (1998: 101), não há divisão alguma entre aritmética e álgebra. O que realmente há é apenas uma transição entre ambas, quando empregamos e raciocinamos em função de símbolos. Nesse sentido, a álgebra é considerada aritmética superior, uma vez que "no emprego de símbolos e no raciocínio em função destes é, onde, em geral, se reconhece a transição da aritmética à álgebra, ainda que, na realidade, não haja linha divisória alguma".

A mesma linha de raciocínio pode ser encontrada nos estudos de Socas et al (1996). Esses autores compreendem que a álgebra está diretamente ligada ao conceito de número. A álgebra é, em substância, a doutrina das operações matemáticas considerada formalmente desde um ponto de vista geral, com abstração dos números concretos.

Ao defender essa tese, Lima (1998:100) entende que a partir da criação do simbolismo, "a matemática se separa definitivamente da linguagem das palavras, adquirindo uma forma própria de representar e registrar as idéias matemáticas".

Nesse processo evolutivo de descolamento da linguagem comum para a simbologia algébrica, Sheremetievskii, referendado por Vygotsky & Luria (1996) afirma que um único traço característico transforma a álgebra numa máquina de pensar, que realiza seu trabalho com a velocidade e precisão de um mecanismo bem ajustado.

Podemos dizer que a tese de Sheremetievskii, até certo ponto, é compartilhada por Kline (1998: 103), pois o autor, quando se refere à álgebra simbólica entende que "por meio de símbolos, a álgebra pode manejar toda classe de problemas em um só episódio de raciocínio". Os matemáticos, ao raciocinarem sobre a forma geral $(\mathbf{ax + b = 0})$ podem abarcar os milhões de casos diferentes que se apresentam quando **a** e **b** tiverem valores determinados.

O cálculo algébrico nasce como generalização do modelo numérico. Todo cálculo algébrico se constrói a partir de cinco propriedades características do sistema numérico: a comutativa e associativa da soma e do produto e a distributiva do produto pela soma.

"Parece óbvio que os problemas próprios da aritmética se transladem à álgebra e que ao ser esta uma generalização daquela, lhe surjam problemas inerentes. Há dois aspectos nesse sentido: o símbolo e a substituição formal" (Socas et al, 1996).

Quando tratamos do símbolo de igualdade, na aritmética, podemos entendê-lo como uma ação física.

A presença na álgebra do símbolo de igualdade tende a desaparecer. O sentido de igualdade aritmética se conserva na álgebra quando trabalhamos com algumas expressões algébricas, denominadas de tautologias algébricas. As tautologias são "fórmulas que são sempre verdadeiras, qualquer que seja o valor de verdade" (Mora: 1991: 387) de suas partes constituintes. Porém, não em expressões como $\mathbf{4x - 3 = 2x + 7}$ que é verdadeira somente para $\mathbf{x = 5}$ ou em situações que expressem uma álgebra não comutativa. Temos como exemplo a seguinte situação: $\boldsymbol{\alpha} \mathbf{\ o\ } \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$. Tal expressão pode implicar em $\mathbf{a + b = b + a}$, onde $\mathbf{a = b}$. Aqui tanto $\mathbf{4x - 3 = 2x + 7}$ como $\boldsymbol{\alpha} \mathbf{\ o\ } \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$ não representam uma tautologia. Porém, a expressão $\mathbf{a + b = b + a}$ é válida quando estamos tratando de propriedades nos conjuntos numéricos para quaisquer valores que demos a **a** e **b**.

Da identidade $\mathbf{(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2}$ se obtém, ao representar **a** por $\mathbf{a + c}$ e **b** por $\mathbf{b + d}$ a seguinte expressão: $\mathbf{(a + c + b + d)\ (\ a + c - b - d) = (a + c)^2 - (b + d)^2}$ onde variáveis de uma expressão são substituídas por expressões mais complexas que são novamente variáveis.

"Essas transformações algébricas constituem um poderoso instrumento de cálculo algébrico que está à metade do caminho entre o puramente formal e um conhecimento explícito de seu significado". A substituição formal é um "instrumento de cálculo algébrico importante. O campo de suas aplicações se manifesta em diferentes processos matemáticos: i) generalização; ii) simplificação; iii) eliminação; iv) complicação estrutural; v) particularização (Socas et al, 1996: 27-28)".

Para Ríbnikov (1987) a chamada álgebra moderna se inter-relaciona com outros campos da matemática e participa da formação de novas disciplinas "limítrofes" (a álgebra topológica, a teoria dos grupos, as álgebras de Lie etc.).

A história da sua criação está relacionada com a resolução de alguns problemas histórico-matemáticos e as idéias gerais sobre a natureza e a composição da álgebra, em substancial, só se formou no século XX. O simbolismo algébrico da forma que conhecemos tem aproximadamente 400 anos (Ríbnikov, 1987; Eves, 1997):

> "A álgebra moderna é um campo da matemática excessivamente amplo e ramificado. Une um grande número de disciplinas científicas independentes. Seu objeto comum são as operações algébricas, as quais representam abstrações distantes das operações da álgebra elementar. Essas operações se definem em variados conjuntos. (...) Faz-se necessário preocupar-se com conhecida proximidade das propriedades das operações nelas definidas e as propriedades das operações com números. Assim se constituiu a classe das formações algébricas, entre as quais o maior significado foi adquirido pelos campos, anéis, grupos e estruturas" (Ríbnikov, 1987: 342).

Hofmann (1961: 03) afirma que do século IV ao VI há o desenvolvimento dos princípios utilizáveis de uma álgebra simbólica.

Esses princípios se formam "com a evolução para o estudo quantitativo da natureza e do aproveitamento técnico, um conceito geral do mundo apoiado em uma base matemático-naturalista que, através da conseqüente transição aos métodos de observação infinitesimais, contém o impulso decisivo para o conceito de função e para a representação simbólica" o qual se formalizará a partir do século XV.

Um olhar mais atento aos estudos de Smith (1958), Hogben (1970), Socas et al (1996); Boyer (1974); Eves (1997); Caraça (1935; 1961; 1966; 1998); Karlson (1961), Radice (1985); Hofmann (1961), Struik (1987) e Kline (1998), possibilita-nos entender a análise de Ríbnikov (1987) quando este afirma que há um distanciamento entre o objeto comum da álgebra de hoje e as operações da álgebra elementar. Arriscamos afirmar que esse distanciamento se estende para o lógico-histórico do sentido que atribuímos ao pensar algébrico.

A história mostra que para hindus e árabes, o pensar algébrico estava diretamente conectado com os movimentos da vida, com os problemas da vida, a tal ponto que a álgebra retórica representava a transição ou ainda a transferência da linguagem de senso comum vulgar para a linguagem algébrica, para a matemática e vice-versa, o que não acontece quando analisamos o pensamento algébrico a partir de sua simbologia ou ainda a partir da manipulação dos símbolos, do número algébrico.

Ao afirmarmos, por exemplo qual **a.b = b.a** parece que não precisamos, nos dias de hoje, avisar aos homens letrados de que **a** e **b** estamos tratando.

Porém, se estivermos estudando essa síntese lingüística no Ensino Fundamental temos que elaborar atividades de ensino que façam com que os estudantes possam compreender o que vem a ser os signos **a** e **b,** ainda que em nossa cultura, usemos como senso comum tal expressão **a.b = b.a** em frases do tipo "a ordem dos fatores não altera o produto".

Em nossa cultura, as crianças ouvem essa expressão desde o momento em que nascem. Porém, no contexto do ensino, entender de qual **a** e **b** se trata traz muitas dificuldades aos alunos, principalmente se, o ensino priorizar os nexos externos do conceito e o pensamento teórico presente nessa expressão.

O pensar sobre essa expressão e o relacioná-la com a representação não é algo natural para o estudante. É algo que tem que ser aprendido no contexto escolar.

Os signos **a** e **b** de que estamos tratando pode ser um número ou ainda uma matriz. Nem todos os letrados do mundo, embora tenham cursado o Ensino Fundamental e Médio têm clareza do que seja, por exemplo, uma matriz.

Se considerarmos, na história do movimento do pensamento algébrico, apenas o lógico-histórico do simbolismo algébrico, percebemos, através dos autores citados, que o simbolismo, a linguagem simbólica, aos poucos, de tempos em tempos, séculos após séculos, vai se dissociando do movimento presente na lida do dia-a-dia.

Dissocia-se da realidade sensitiva presente no cotidiano de todos nós, ainda que faça parte da *praxis* humana. Fica restrita a algumas áreas do conhecimento, como por exemplo, a Física, a Biologia e a Matemática, dando-nos a impressão de que essas áreas não descrevem movimentos da vida. Temos aí o novo mundo de que fala Lima & Moisés (1997).

A partir do simbolismo algébrico, o mundo se amplia ao estudante. Ao pensar sobre movimentos que possam ser numeralizados ele não tem que recorrer, necessariamente, ao numeral, ao número aritmético. Pode recorrer ao número algébrico. Pode usufruir do simbolismo algébrico, à vontade.

Há novas abstrações nesse novo mundo, porém, as abstrações são de outra ordem, de outro nível, de outra natureza, tem uma nova qualidade de pensamento. Aqui o concreto do pensamento é o símbolo e parece não representar ou descrever certos movimentos que se apresentam na atividade do homem comum.

Esse mundo, quando não compreendido, faz parte da atividade do homem letrado, do homem escolarizado, do homem acadêmico, justamente porque a linguagem usada descola-se da linguagem comum. Esse novo mundo contém a mutabilidade das quantidades. Contrapõe-se à imutabilidade das quantidades presente no mundo aritmético.

O pensamento teórico da álgebra, quando visto do ponto de vista do simbolismo, considera apenas o aspecto lógico-formal das abstrações que se materializam na letra, na variável letra de Viète. O conteúdo das abstrações parece não ter existência na realidade.

Há fragmentação ao operarmos com tais abstrações, a partir de suas propriedades, totalmente desvinculadas do objeto que se estuda, o movimento que se apresenta na realidade. Há o isolamento, a separação dos elementos que compõem o pensar teoricamente os conceitos algébricos.

Nesse sentido, a abstração que se processa no pensamento se separa uns dos outros indícios sensorialmente perceptíveis do objeto álgebra. Não há descobertas de novos aspectos no objeto álgebra que traduzam as relações da substância, do movimento, da fluência presentes nos conceitos algébricos.

O simbolismo algébrico que conhecemos contém a síntese de um longo processo de conhecimento das idéias que envolvem variações quantitativas, destacando-se a variável-palavra, a variável-figura, a variável-numeral e a variável-letra" (Lima & Moisés, 1997; 2000).

Porém, na gestação do simbolismo, o conteúdo do pensamento não é a simbologia em si, mas sim, a escrita de movimentos que se apresentam na realidade das civilizações. Por esse motivo, o conteúdo é humano, embora sua simbologia esteja muito distante do humano, do movimento que se quer descrever.

O desenvolvimento do simbolismo matemático considera o crescimento do conteúdo dos conhecimentos matemáticos (Lima & Moisés, 2000).

Um desses conteúdos, sem sombra de dúvidas, é a álgebra, que teve um longo processo de amadurecimento: "da álgebra literal (retórica) à álgebra simbólica por via de abreviaturas (sincopada) das palavras e depois, a introdução de símbolos" (Ríbnikov, 1987: 132).

O aperfeiçoamento do aparato e simbolismo algébrico, ocorrido nos fins da Idade Média, séculos XV e XVI, foi o maior ganho dos matemáticos europeus, pois estes enriqueceram "o conceito de número, introduzindo os radicais e as operações com eles" (Ríbnikov, 1987: 127).

O conhecimento da álgebra simbólica pressupõe o conhecimento da sua história e desenvolvimento; mas deve-se estudar a história da álgebra tendo-se certo conhecimento da substância, do processo desta, enquanto movimento numérico, enquanto fluência da vida, pois do contrário pode-se tomar por álgebra apenas o aspecto literal, rígido e fixo do conceito de variável em uma de suas formas: a incógnita, ou seja, o lógico-histórico de apenas um tipo de álgebra.

Lima & Moisés (1997; 2000) sugerem que ao estudarmos a álgebra simbólica, consideremos duas idéias filosóficas que se apresentaram no desenvolvimento do pensamento científico, durante séculos: a metafísica e a fluência. Às idéias filosóficas, aliamos este estudo como um modo de desenvolver o pensamento algébrico.

Os autores entendem que a fluência se preocupa com a mobilidade do pensamento, enquanto que a metafísica se preocupa com a imutabilidade. Essas idéias tiveram origem na sociedade grega.

A aritmética associa-se ao conceito de imutabilidade, por se fundamentar no conceito do número. O numeral aritmético representa uma contagem particular da realidade imediata. O numeral, como pensavam os gregos, "seria incapaz de apanhar o que eles chamavam de 'verdades absolutas' ou ainda de 'princípio de todas as coisas'" (Lima & Moisés, 2000: 40).

Por outro lado, a álgebra estaria associada ao conceito de mutabilidade, por se fundamentar no conceito de fluência.

A variável indicaria uma certa movimentação numérica, impossível de ser representada pelo numeral aritmético. A variável letra está associada à variável palavra, à variável figura e à sincopação, que pode ser representada por signos que não conseguem se desprender da palavra, ao mesmo tempo em que não representam apenas letras do alfabeto.

A proposta de Lima & Moisés (1997; 2000) mostra que o conceito de álgebra simbólica contém o lógico-histórico da variável, presente na variável palavra dos egípcios, o ahá e nas transformações geométricas, presentes nos estudos de Euclides, a partir da variável figura e, na sincopação de Diofanto, além de considerar os estudos de Heráclito, Roger Bacon, Leonardo da Vinci e Galileu Galilei, sobre o movimento.

Assim, entendemos que a linguagem simbólica da álgebra, tornada sintética e ágil, materializada na variável-letra está totalmente desvinculada dos significados do contexto da realidade, que trouxe a necessidade de controlar a variação na continuidade. É um pensamento teórico. Por isso, síntese de diversos pensamentos.

A álgebra simbólica representa o lógico do histórico da álgebra que envolveu durante séculos, palavras e figuras geométricas. Ela representa o lógico do histórico da variação, cuja notação passou por três estágios ou fases: retórica, sincopada e simbólica

(Caraça, 1998; Boyer, 1974; Eves, 1997; Paradís & Malet, 1989; Usiskin, 1995; Smith, 1958; Fraile, 1998; Ríbnikov, 1987).

A fase da retórica representou a primeira tentativa do homem em representar o desconhecido das quantidades. Para isso cria uma palavra. Já a fase sincopada, tenta enxugar as palavras. Sintetiza o palavrório que fez parte da matemática durante milênios. E a fase simbólica rompe, de certa forma, com a das palavras. Sua representação é extremamente sintética.

Trataremos de cada uma dessas álgebras no próximo item.

Compreender o lógico-histórico da álgebra simbólica significa compreender o processo do vir a ser da variável-letra. É compreender que no processo de constituir-se linguagem simbólica, síntese da síntese de abstrações diversas, a álgebra contém o movimento da vida, expresso a partir da palavra e da figura. Contém os inesperados e as novas qualidades de que fala Caraça (1998), que são gerados a partir dos movimentos presentes nos problemas da vida das diversas culturas. Tais movimentos, analisados com o olhar de hoje, são históricos, porém, não são lineares, pois contêm a incerteza, a mutabilidade e a fluência do pensar humano. Por esse motivo é que os movimentos estudados na álgebra simbólica são considerados por nós, lógico-históricos.

É desse lógico-histórico e formal do pensamento algébrico, presente nos estágios denominados de retórico, sincopado e geométrico que leva ao pensamento flexível da realidade, elaborado pelas várias civilizações, nos diversos momentos históricos, que trataremos a seguir.

O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes

Modo I

A aparição da álgebra está associada à origem do zero e, foi definida, por Bell (1995), segundo Fraile (1998), como fenômeno notável da história. Sua aparição considera o pensar humano das diversas civilizações. Na mesma linha de raciocínio, segue Ifrah (1998: 237), ao afirmar que: "do infinito ao zero há um só passo: o que leva à álgebra, já que o nulo é o inverso do ilimitado".

O zero foi uma "invenção difícil e genial" e abriu "caminho para o desenvolvimento da álgebra moderna e de todos os ramos da matemática a partir do Renascimento europeu". Porém, "a álgebra não teria conhecido um tal avanço se esta generalização do número não tivesse sido acompanhada por uma descoberta igualmente fundamental, realizada em 1591 por François Viète e aperfeiçoada em 1637 por René Descartes: a notação simbólica literal". A invenção da notação simbólica literal "abriu uma era totalmente nova na história da matemática, assim como a descoberta do princípio de posição e do zero criou a aritmética moderna" (Ifrah, 1998: 237).

A álgebra moderna, ensinada em nossas escolas, constitui a generalização do número, que por sua vez, não está dissociado dos números transfinitos de Cantor, da criação dos números algébricos, que foram definidos como aqueles que representavam "a solução de uma equação algébrica de coeficientes inteiros", no século XIX, por Niels Henrik Abel e Evariste Galois (Ifrah, 1998: 331).

Ao focar as lentes no objeto história do surgimento do pensamento algébrico, para melhor estudá-lo, teóricos, pensadores e historiadores o dividem, fazem "isolados" (Caraça, 1951; 1984; 1998) que se denominam períodos, estágios, classes ou fases.

Fraile (1998) diz que antes de se inventar a palavra, propriamente dita, álgebra, tínhamos a pré-álgebra, enquanto Paradís et al. (1989) nos afirmam em seus estudos, que há existência da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica.

Entendemos que se considerarmos, como Socas et al. (1996) e Lins & Gimenez (1997) que esses estágios constituem apenas a evolução de notações, estaremos considerando apenas o final do processo, o lógico-formal da variável-letra. Não estaremos considerando todo o processo, o percurso do movimento do pensar humano, que configura as diversas elaborações sobre os conceitos de número, movimento e variável que permitiram a elaboração do conceito de variável.

A linguagem retórica da álgebra é definida por Fraile (1998: 11) como "a ferramenta inicial, a mais básica, a linguagem ordinária". É com essa linguagem, retórica, que, após uma depuração e precisão dos termos para que se evitem ambigüidades, se faz maravilhas: "se reflete, se constróem teorias". Tomemos como exemplo, a lógica aristotélica que serve não apenas para se comunicar, mas, sim, como "ferramenta de pensamento".

A álgebra retórica, quando estudada do ponto de vista dos estágios, pertence ao período que antecede Diofanto. Nesse estágio, há o uso de descrições em linguagem comum para resolver tipos particulares de problemas e pela falta de símbolos ou sinais especiais para representar incógnitas (Kieran, 1994). Há apenas o uso das palavras (Lins & Gimenez,1997). Nesse estágio, "os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos" (Eves, 1997: 206).

Do ponto de vista de Lima & Moisés (1993; 2000), uma palavra, *ahá*, que significa monte, montão, foi criada pelos egípcios para representar quantidades, sem, necessariamente, recorrer ao numeral. É a partir de uma palavra, que os egípcios pensam sobre o valor desconhecido, a incógnita.

> "A criação egípcia marca o ponto de partida do desenvolvimento da linguagem matemática. Com ela, o pensamento matemático começa a desenvolver uma linguagem própria, diferente da linguagem usual das palavras. É, portanto, com a matemática egípcia, que a linguagem matemática começa a se separar da linguagem usual. Trata-se da linguagem matemática através de palavras, que apesar de ser um pequeno passo, quase despercebido por ainda usar palavras, foi importante no sentido de criar um vocabulário próprio (...) – a língua da

> matemática. A linguagem Matemática através de Palavras é o primeiro passo da criação da linguagem especificamente matemática para o qual são escolhidas as palavras que mais direta e claramente expressam movimentos matemáticos (Lima & Moisés, 2000: 27-8).

Através de uma palavra, "aritmo", Diofanto resolve problemas que envolvem incógnita. A palavra escolhida por Diofanto está associada ao número, representa o próprio número, aritmo. Diofanto reconhece na incógnita, o pensamento numérico. Ao solucionar problemas, se desprende do numeral físico, porém, ao criar uma palavra que represente o desconhecido, a incógnita, faz questão de nos avisar que a incógnita, o desconhecido, representa um número. Assim como o zero, a palavra "aritmo" guarda o valor de uma quantidade desconhecida.

Árabes e europeus, ao se lançarem na resolução de problemas algébricos e desafios que envolveram romances, vida e morte, durante séculos, representam o desconhecido, a incógnita, a partir da palavra coisa ou raiz (Garbi, 1997; Fraile, 1998; Eves, 1953, 1997). Aqui, a função da palavra é equivalente à função do zero na aritmética, por assegurar que ali falta algo. A palavra representa a "casa" ou o valor desconhecido.

Al-karismi construiu uma álgebra retórica. Em seu livro, "Kitab al-jbr wa al-muqabalah", livro da restauração e da oposição, não usa simbolismo e detalha "passo por passo com instruções precisas tudo o que se tem que fazer". Tem como objetivo, segundo Fraile (1985: 25) "sistematizar todas as equações de primeiro e segundo graus reduzindo-as a seis tipos básicos":

1) Quadrado igual à raiz;
2) Quadrado igual ao número;
3) Raiz igual a número;
4) Quadrado e raiz são iguais a número;
5) Quadrado e número são iguais à raiz;
6) Raiz e número são iguais a quadrado.

O livro ainda reúne tradições mesopotâmicas, hindus e gregas, não pertencendo a nenhuma das três civilizações.

Hogben (1970) afirma que a transição da álgebra retórica para a álgebra simbólica pode trazer dificuldades, até mesmo entre os matemáticos, ao traduzir problemas em linguagem vulgar usada pelo homem comum em sentença matemática. Não há como aprender matemática sem aprender a fazer a transição da álgebra retórica para a álgebra simbólica. Ao resolvermos equações, estamos efetuando essa transição, de forma que o significado da equação se torne evidente para nós. Aqui se defende a idéia de que a matemática é compreensível se compreendermos a transição da álgebra retórica para a álgebra simbólica.

O autor compara a dificuldade que temos ao fazer a tradução da retórica para a simbólica com a aprendizagem de uma língua estrangeira, uma vez que toda língua contém suas idiossincrasias particulares de ordenação e idioma. Se não conhecermos o idioma, ao tentarmos traduzir uma frase, só a partir da busca no dicionário, corremos o risco de confundir-nos.

A retórica, definida a partir da base comum da retórica, é "discurso natural que serve para convencer. A retórica na matemática seria, simplesmente, a linguagem comum posta a serviço de convencer-nos de que alguma coisa ligada à matemática é o ponto importante", alerta-nos Davis & Hersh (1988: 69). O matemático, ao elaborar suas demonstrações lógicas e formais nos diversos teoremas que estuda, faz uso da retórica. As frases que usa para nos convencer de que está certo não constituem a prova do teorema. "Elas são a retórica a serviço da prova" (Davis & Hersh, 1988: 70). A verdade da matemática "é considerada como estabelecida por meios que são a antítese da retórica". Não podemos nos esquecer "que a filosofia da matemática também evolui mediante a argumentação retórica" (Davis & Hersh, 1988: 69). Aqui a retórica presente na álgebra nos auxiliaria a compreendermos as demonstrações e argumentações que se apresentam no cálculo de operações da álgebra simbólica.

A álgebra geométrica foi elaborada pelos gregos em um contexto onde predominava a "degradação do número, o horror ao infinito e o horror ao movimento" (Caraça, 1998: 78), ao *devir*, ao vir a ser. A geometria estava descolada da aritmética. Nesse tempo, as verdades eram representadas a partir das formas. Há o primado da figura em relação ao número. Ela se distingue pelo esforço em criar, a partir das necessidades científicas, "uma teoria matemática geral adequada tanto para os números racionais como para as grandezas irracionais". Acreditava-se que as grandezas geométricas eram muito mais completas do que o conjunto dos números racionais. Até que se descobrisse a irracionalidade numérica, era oportuno operar a partir de um cálculo mais geral, o geométrico (Ríbnikov, 1987: 54).

Os segmentos de reta são os elementos primários da álgebra geométrica. A partir deles foram se definindo todas as operações do cálculo: adição, subtração, multiplicação e divisão.

A soma era representada como adição de segmentos. A diferença como eliminação de parte do segmento igual ao segmento subtraendo. A multiplicação conduzia à construção de representação bidimensional. O produto de **a** por **b** representava um retângulo com lados **a** e **b**. O produto de três segmentos formava paralelepípedo e não podia considerar-se o produto maior de fatores. A divisão só podia ser efetuada quando o dividendo era maior do que a dimensão do divisor. Representava-se a divisão, a partir do conceito de área (Ríbnikov, 1987).

Na álgebra geométrica incluía-se, também, o conjunto de "proposições geométricas que interpretavam as identidades algébricas". O livro II de Euclides "contém transformações algébricas como o cálculo de $\mathbf{a\ (b + c)}$ ou $\mathbf{(a + b)^2}$ mediante métodos geométricos". O método geométrico serve para resolução da equação quadrática em geral: $\mathbf{x^2 = a\ (a - x)}$ enquanto "ampliação do Teorema de Pitágoras e do Teorema da altura" (Hofmann, 1961: 31).

Tomemos, por exemplo, a identidade: $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$. Ao se geometrizar tal identidade, temos como resultado a área de um quadrado de lado $\mathbf{a + b}$, que é representado pela área de um quadrado de lado **a**, $\mathbf{a^2}$; acrescido da área de dois retângulos de lados **a** e **b**; **2ab**; acrescido da área de um quadrado de lado **b**, $\mathbf{b^2}$. A álgebra geométrica pode ser equivalente e tem o mesmo papel da geometria das equações das seções cônicas expressa nos trabalhos de Apolônio, cientista rival de Arquimedes (Ríbnikov, 1987).

Por linguagem sincopada podemos definir o "passo intermediário entre a resolução retórica, com língua ordinária, dos problemas e a utilização de símbolos precisos e de aceitação universal" (Fraile, 1998: 12).

Ao invés de escrevermos tudo, como na retórica, construímos estruturas que aparecem continuamente, na resolução dos problemas. Escrevemos abreviado. Tal linguagem, a sincopada, está muito próxima da linguagem simbólica. Há alguma notação especial, em particular palavras abreviadas (Lins & Gimenez, 1997). É uma fase intermediária entre a expressão retórica e a escrita simbólica atual. Pode-se dizer que a linguagem sincopada simplifica a escrita "ao modo de uma taquigrafia" (Fraile, 1998: 28). Na álgebra sincopada, "se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais freqüentemente" (Eves, 1997: 206).

A exemplo de Euclides, Arquimedes e Apolônio, Diofanto se utiliza da figura, para elaborar e resolver problemas que envolvem incógnita. Ao mesmo tempo em que se utiliza das abreviações, o matemático nos mostra como podemos solucionar problemas que envolvem equações de grau dois, se soubermos completar quadrados.

A obra de Diofanto, intitulada Arithmetica, contém 189 problemas, os quais foram resolvidos por métodos diferentes, usando linguagem direta e simples (Fraile, 1998). "Segue e desenvolve a tradição egípcio-babilônica em oposição ao método grego. Nos oferece, em forma muito algebrizada, com a introdução de abreviaturas adequadas, exemplos interessantes que nos demonstram como domina perfeitamente a resolução de equações lineares" (Hofmann, 1961: 44).

Ao resolver os problemas, utiliza valores numéricos especiais e só realiza operações com números. Não trata de teoremas gerais. Ao designar a quantidade da incógnita nas equações e escrever as funções desta, foi obrigado a elaborar um sistema de símbolos. Sua simbologia está relacionada à abreviação das palavras (Ríbnikov, 1987).

Na época de Diofanto se consideravam os conceitos de números poligonais[45]

[45] "Se designam os números por pontos e se distribuem em forma de qualquer figura. Assim, as somas parciais das progressões aritméticas podem ser representadas na forma de polígonos semelhantes e os correspondentes valores numéricos podem chamar-se (e se chamam) poligonais" (Ríbnikov, 1987: 101).

surgidos na matemática pitagórica, "como conseqüência da interpretação geométrica das relações teórico-numéricas" e se estendeu a idéia ao espaço, obtendo-se números espaciais. Representavam-se esses números por famílias de paralelepípedos semelhantes, números piramidais, dentre outros. O nome de Diofanto também está associado à teoria dos números. Sua obra representa a substância do ponto de partida para as investigações teórico-numéricas e algébricas (Ríbnikov, 1987).

A sincopação da álgebra considera os estudos do matemático grego Diofanto, que por sua vez, constitui em nexos conceituais, as figuras e imagens que auxiliam o pensamento, na elaboração de abstrações e na resolução de equações, característica própria da matemática grega. "A difusão da escrita sincopada coincide com o desenvolvimento da imprensa" (Fraile, 1998: 28).

Segundo Hofmann (1961: 44), os muçulmanos continuam a usar os princípios algébricos de Diofanto e a origem do período barroco (1450-1580) "contém o desenvolvimento das idéias diofantinas, a álgebra de letras e a moderna teoria dos números".

Quando estudamos a relação existente entre os trabalhos de Diofanto e Viète, entramos, de certa forma, em um fogo cruzado e divergente, dos historiadores da matemática. A argumentação de todos eles é convincente. Fica muito difícil tomar partido de uma ou outra visão.

Há historiadores que consideram Viète como o compilador, o sistematizador do trabalho de Diofanto, enquanto que o trabalho de Klein (1966) é elogiado por Piaget & García (1984), por romper com essa visão, mostrando-nos a insuficiência da argumentação feita pelos diversos historiadores. Piaget & García (1984: 138) afirmam que Klein (1966) tem o mérito de nos mostrar porquê Viète "deve ser considerado como o verdadeiro fundador da álgebra".

O pensar a álgebra, a partir de Diofanto, significa que devemos pensar os conceitos algébricos, conectados ao objeto número, enquanto unidade. Ao mesmo tempo, pensar a álgebra a partir de Euclides, significa pensar a álgebra a partir de aspectos geométricos, a imagem, a figura. O pensar sobre a álgebra a partir do número e dos aspectos geométricos remete-nos a pensar sobre os entes, as coisas.

O pensar a álgebra, a partir de Viète, significa pensar a álgebra a partir da propriedade do número, que contém as coisas e a numerosidade do número, o número em geral. Permite-nos pensar em espécies e não mais em entes, em coisas. As espécies contêm o número, a geometria e a numerosidade do número, as propriedades do número. A natureza do pensamento de Viète é bem diferente da natureza do pensamento de Diofanto.

A lógica de Diofanto é numérica, enquanto que a lógica de Viète é de espécies. A lógica de Viète é o que permite que as diversas áreas do conhecimento façam da álgebra, uma ferramenta. É a partir de Viète, segundo Piaget & García (1984: 139) que podemos pensar no "formalismo simbólico, ferramenta mais importante da ciência natural matemática, a fórmula".

A importância do trabalho de Viète está no "cálculo 'especioso', na operação com espécies, com letras" (Fraile, 1998: 33). "O cálculo de Viète se precede pela aritmética, a qual opera com números: *logística numérica*. O cálculo com letras recebe o nome de *logística speciosa*, da palavra espécies que é o termo de uma expressão matemática" (Ríbnikov, 1987, p. 133).

O pensamento de Viète continha os grandes êxitos dos matemáticos italianos na resolução das equações de 3° e 4° graus que se apoiavam na grande efetividade dos métodos algébricos, porém, ele achava que era necessário "conjugar a efetividade dos métodos algébricos com o rigor das construções geométricas antigas", que já lhe eram conhecidas, as quais representavam "modelos de autêntica análise científica" (Ríbnikov, 1987: 133).

Foi o simbolismo pensado por Viète que possibilitou a escrita de expressões de equações e suas propriedades, a partir de fórmulas gerais. Os objetos das operações matemáticas passaram a ser, não problemas numéricos e sim as próprias expressões algébricas. A característica do cálculo elaborado por ele é a arte. Tal característica permitiria a realização das descobertas matemáticas. Os símbolos elaborados sofreram modificações pelos matemáticos contemporâneos. Apesar da beleza do trabalho, a álgebra de Viète era ainda "imperfeita e tinha grandes insuficiências". Rapidamente, foi ofuscada pela álgebra de Descartes (Ribnikov, 1987: 136).

Em um primeiro momento, a algebrização de Viète representou "uma generalização da aritmética", onde o "**x**", "**y**" ou qualquer outra letra constituíam "uma espécie de novo algarismo" e representavam "um número, ainda desconhecido". Pode-se dizer que as letras se tratavam de sinais que estavam à espera de um número, que deviam ocupar "o lugar de um ou de vários algarismos, por vir, assim como o zero ocupa lugar de uma ordem de potência sem conteúdo".

Porém, as letras não tratam de "um mero artifício da forma. O uso da letra alfabética para designar um parâmetro ou uma incógnita, liberou definitivamente a álgebra da escravidão do verbo". Antes da notação literal, toda proposição geral continha a ambigüidade das línguas humanas, e "qualquer afirmação levava ao domínio das interpretações sujeitas a todo tipo de variação" porque não passava de palavrório. O simbolismo algébrico "criou uma espécie de 'língua internacional' compreendida sem equívoco pelos matemáticos do mundo inteiro" (Ifrah, 1998: 337-8).

Em seguida, "a notação literal se libertou por si mesma de determinadas variações das quais ficara prisioneira durante séculos: o '**x**' e o '**y**' não mais representaram simplesmente números, mas tornaram-se totalmente independentes dos objetos ou das grandezas que deveriam figurar", adquirindo "uma significação que ultrapassava o objeto representado, tornando-se, a partir de então, um ser matemático completo, submetido às regras do cálculo ordinário". A letra permite que os raciocínios sejam abreviados e sistematizados, permitindo que o acesso ao abstrato seja muito mais fácil (Ifrah, 1998: 337).

Segundo Ifrah (1998: 338), Leibniz afirmava que "este método", a algebrização pelas letras, 'poupa o espírito e a imaginação, cujo uso é preciso economizar'. Tal método 'nos permite raciocinar sem muito esforço, ao colocar os caracteres no lugar das coisas para desimpedir a imaginação'".

Modificação conceitual: esta é a definição que podemos dar à linguagem simbólica proposta por Viète. Tal linguagem, a partir de convenções, tem por objetivo auxiliar o pensamento na realização de suas tarefas. Propicia à matemática ser ferramenta para outras ciências (Fraile, 1998). É na álgebra simbólica "que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos, que aparentemente nada têm a ver com os entes que representam" (Eves, 1997: 206).

Se considerarmos a álgebra simbólica como estágio, estamos nos referindo ao terceiro e último estágio, onde há o uso da letra para significar o que era dado, como também para a quantidade incógnita (Kieran, 1994). Há apenas os símbolos e sua manipulação (Lins & Gimenez, 1997). Através dos símbolos, a álgebra pode manejar toda classe de problemas em um só episódio de raciocínio (Kline, 1998).

A partir de Viète, no período que vai de 1550 até 1650, a álgebra pouco a pouco muda o seu sentido, porém, há de se considerar que:

> "no exílio, Viète estuda as edições matemáticas clássicas de Commandino (impressas desde 1558); ademais, as obras de Cardano (1545; 1570); Tartaglia (1546; 1556/80); Bombelli (1572); Holtzmann Diophant (1575) e Stevin (1585). O formalismo algorítmico repetindo-se sempre em Diophant e seus interpretadores, lhe induz, ao tratar-se de transformações gerais, a introdução de grandezas algébricas numericamente indeterminadas, a saber, das letras em vez dos números. Assim, se origina a Logística Speciosa, na qual as grandezas conhecidas se designam por consoantes e as desconhecidas, por vogais" (Hofmann, 1961: 113).

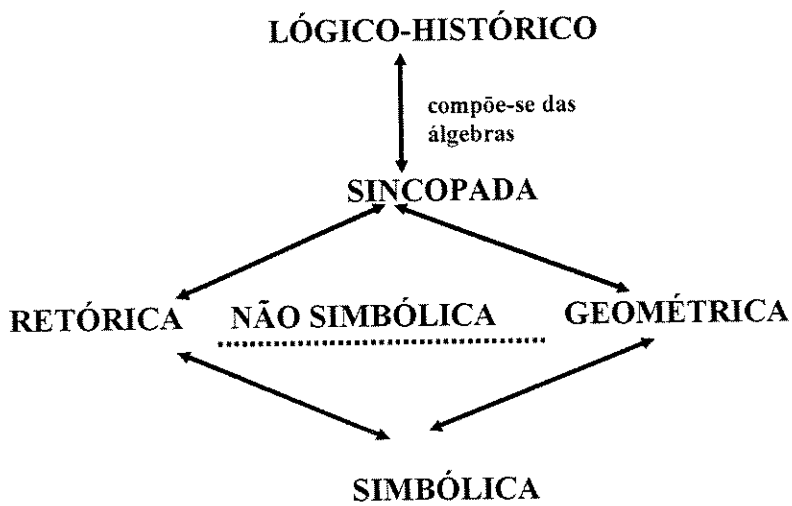
Pode-se afirmar que, "em outros aspectos, Viète apenas tem superado os seus mestres italianos por limitar o emprego das letras a grandezas positivas", tendo que distinguir "muitos casos supérfluos". Nesse sentido, "a álgebra de letras empregada algoritmicamente é reduzida a exemplos numéricos, explica o sentido e o conteúdo da coleção de Diofanto, é usada como meio auxiliar em geometria, como explicará o livro VII das coleções de Pappo" (Hofmann, 1961: 115).

A álgebra retórica, sem simbolismo, se parece com a álgebra desenvolvida e aplicada pelos egípcios, babilônios, gregos, hindus e árabes. Do ponto de vista de Kline (1998), pode-se afirmar que a álgebra simbólica chegou à álgebra, tarde, nos séculos XVI e XVII. A idéia de utilizar símbolos, não era nada nova e nesse período, as outras ciências estavam fazendo pressão para que a matemática aumentasse a sua eficiência. Assim, os matemáticos foram estimulados a estender a aplicação do simbolismo e rapidamente o adotaram.

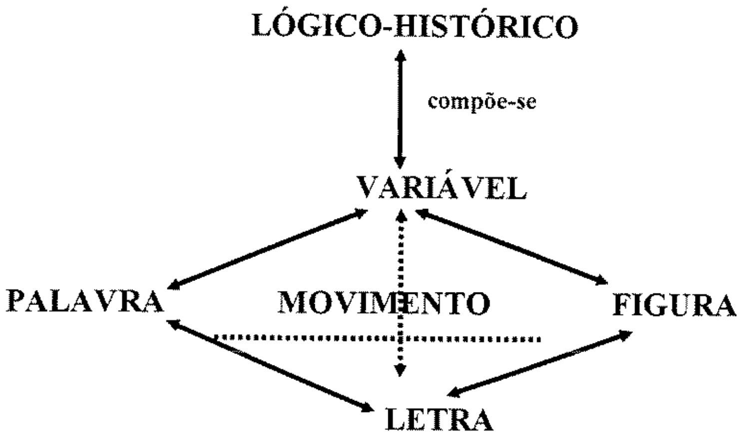
O lógico-histórico da álgebra do ponto de vista de Hofmann (1961: 10-11) mostra ainda que no contexto da civilização babilônica "as instruções dadas para o manejo de exercícios práticos são pouco menos que introduzíveis à linguagem vulgar e mostram certo grau de parentesco com as reproduções algébricas em forma de fórmulas".

No quadro a seguir, apresentamos um esquema do que representou o desenvolvimento da linguagem algébrica que denominamos de Modo I:

ESTÁGIOS/CLASSES DE DESENVOLVIMENTO DA LINGUAGEM ALGÉBRICA: MODO I

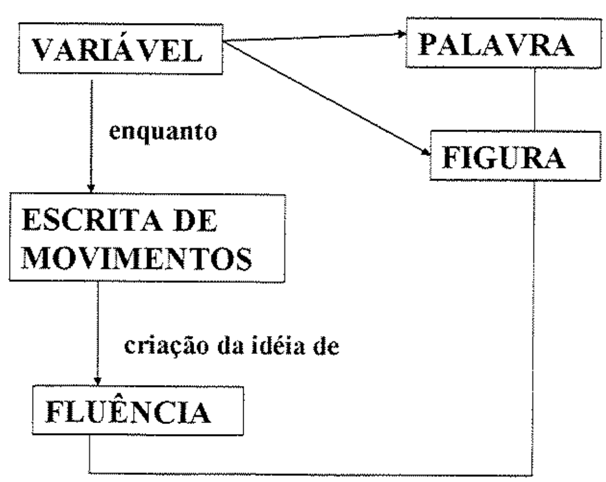


Nessa perspectiva temos ainda:

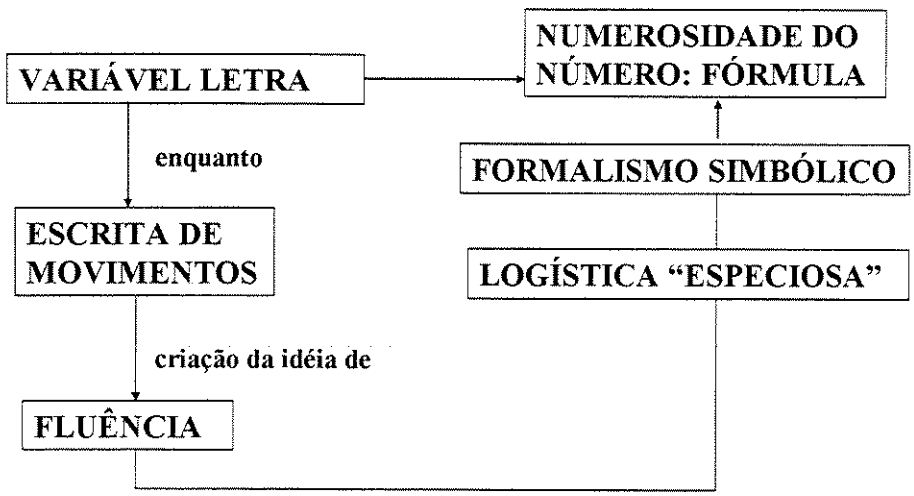


Que, por sua vez, se ramifica em:

ÁLGEBRA NÃO SIMBÓLICA: RETÓRICA, SINCOPADA E GEOMÉTRICA (Smith, 1958)



ÁLGEBRA SIMBÓLICA: MUDANÇA CONCEITUAL



O modo I da álgebra se caracteriza fundamentalmente pela contribuição das diversas civilizações no que diz respeito à criação da álgebra simbólica.

A álgebra simbólica ou a logística "especiosa" de Viète representou uma radical mudança conceitual no pensamento da época, no Renascimento.

Com a álgebra simbólica é possível elaborar as fórmulas. Há nesse período a necessidade de criar conceitos mais gerais que dêem conta de entender os movimentos da vida. A palavra e a figura vão para um segundo plano, porque são ambiguas. Imagine-se, em pleno período do Renascimento, ter que explicar todas as palavras particulares e figuras elaboradas, para representar determinados movimentos da vida.

O novo contexto econômico, político, social e cultural do Renascimento traz novas necessidades. É a fluência e a interdependência empurrando o pensamento humano para a frente.

Modo II

Como já vimos, ao analisarem o contexto histórico do pensamento algébrico, Socas et al. (1996) consideram que o desenvolvimento da álgebra passou por três fases: a álgebra geométrica, álgebra simbólica e a álgebra abstrata contemporânea ou álgebra moderna.

A primeira fase compreende o período de 1700 a.C. a 1700 d.C.. Há a invenção gradual dos símbolos e a resolução de equações. A álgebra desenvolvida pelos gregos (300 a.C.) é chamada de álgebra geométrica. É rica em métodos geométricos para resolver equações algébricas.

A nova etapa está associada a Viète (1540-1603) e à introdução da notação simbólica. Destaca-se a contribuição de Descartes (1596-1650). Nesse momento, a álgebra se converte na ciência dos cálculos simbólicos e das equações.

Euler (1707-1783) a define como a teoria dos "cálculos com quantidades de distintas classes" (cálculos com números racionais inteiros, frações ordinárias, raízes quadradas e cúbicas, progressões e todo tipo de equações). George Peacock (1791-1858) produz trabalhos que vão fundamentar e justificar as operações com expressões literais.

A ele se deve o "princípio da permanência", que diz: "Todos os resultados da álgebra aritmética que se deduzem por aplicação de suas regras e que são gerais em sua forma, ainda que particulares em seu valor, são igualmente resultados da álgebra simbólica, donde são gerais tanto em seu valor como em sua forma" (Socas et al, 1996: 40).

Até o final do século XVIII e primeira metade do século XIX, a álgebra era a ciência das equações e seu problema fundamental firmava-se na teoria de resolução de equações algébricas.

A terceira fase, a álgebra abstrata contemporânea ou álgebra moderna prescinde dos números, por isso, "álgebra abstrata e os objetos utilizados podem ser quaisquer (matrizes, vetores, tensores etc.) sobre os quais se definem certas operações que verificam umas determinadas propriedades, construindo-se a álgebra a partir de axiomas previamente definidos" (Socas et al, 1996: 40).

Apesar dos teóricos e historiadores divergirem quanto ao desenvolvimento histórico da álgebra, todos consideram que o termo foi assimilado pelas diversas civilizações a partir da escrita de um tratado denominado Aljebr w'al mûqâbalah, escrito por Mohammed ibn Mûsâ al-Khowârizmi, no início do século IX (Caraça, 1951; 1984; 1998; Ríbnikov, 1987; Hogben, 1970, Eves, 1953, 1997; Aleksandrov et al., 1988).

Esse tratado se refere a uma das regras de resolução da equação do primeiro grau, talvez a mais importante, que consiste da passagem de um termo de um membro da igualdade para outro, com troca de sinal. Assim, ao resolver uma equação do tipo **ax + b = 0**, temos duas passagens fundamentais que são conseqüências diretas das leis elementares da aritmética:

1ª) de **ax + b = 0** para **ax = -b**

2ª) de **ax = - b** para **x = - b/a**

O uso dessas regras se tornou muito freqüente e a influência desse tratado foi muito grande. O nome "al-jebr" passou a designar tudo que diz respeito às equações e todo um ramo duma ciência (Caraça, 1951; 1984; 1998; Ríbnikov, 1987; Hogbem, 1970; Eves, 1953, 1997; Aleksandrov et al., 1988).

Há autores como Lins & Gimenez (1997) que fazem críticas a essa "tendência letrista" da álgebra que estamos abordando.

Para eles, ao seguirmos os passos do pensamento algébrico por mudanças na notação, deixamos de lado, no caso da história, a álgebra islâmica medieval (a partir de Al-karismi) e quase tudo da matemática chinesa clássica. Além disso, não é possível se saber até hoje os primeiros passos dados por Diofanto em relação à notação. Nesse sentido, há uma grande perda, porque o que temos nesses dois casos são conceitualizações que não são redutíveis a outras, por exemplo, a de Diofanto.

Os autores afirmam ainda que não é possível ver Al-karismi nem como "evolução" em relação ao trabalho de Diofanto nem como "contido" em Diofanto. Do ponto de vista da técnica, a álgebra de Al-karismi é muito mais pobre do que a aritmética de Diofanto, mas o que é feito em Al-karismi não pode ser encontrado em Diofanto" (Lins & Gimenez, 1997: 96-7).

Lins & Gimenez (1997) fazem ainda uma crítica ao matemático francês Jean Dieudonné que diz, em seu livro "Em honra do espírito humano" que Al-karismi foi "autor" de obras de astronomia e de um tratado de álgebra sem originalidade. Entendem que Dieudonné fez essa declaração sem profundidade. Caracterizou a atividade algébrica apenas do ponto de vista de uma descrição e que a álgebra de Al-karismi não tem "originalidade" porque não traz nenhum resultado novo em relação aos que vieram antes dele.

Podemos concordar com Lins & Gimenez (1997) se considerarmos apenas a linearidade da história. Com o olhar de hoje, podemos emitir vários juízos referentes às elaborações lógicas e formais que Diofanto, Viète e Al-karismi fizeram. Porém, se observarmos e estudarmos o contexto em que o concreto do conteúdo desses conceitos foi elaborado, a partir do lógico-histórico, podemos perceber a busca em que se lançaram, no sentido de "desvendar" e entender a verdade.

A verdade a que estamos nos referindo, diz respeito à descrição de movimentos da vida. Não se vê na história contada por Eves (1953; 1997), Caraça (1951; 1984; 1998), Fraile (1998) e Ríbnikov (1987) que as civilizações faziam álgebra somente com o intuito de sintetizar a escrita. Os nexos internos do conceito de álgebra, aí elaborados, são fundamentais para se entender, por exemplo, a diferença entre o trabalho de Viète e Diofanto.

O foco de Diofanto era o número que até então, não conhecia uma teoria mais geral. Já o contexto de Viète vai lhe permitir pensar sobre a variável, a partir do movimento, da fluência. Não é sem sentido que Lima & Moisés (1997; 2000) afirmam que Diofanto criou a variável-numeral e Viète a variável-letra, apesar de ambos se utilizarem das letras do alfabeto para representarem quantidades desconhecidas.

Os "insights" feitos pelo pensar sobre a realidade desses personagens nos auxiliam até hoje a compreender a necessidade do pensamento em se desprender do numeral sem ignorar o número.

As subálgebras propostas por Bohm (1980) nos dias de hoje podem ser mais bem compreendidas quando percebemos que filósofos e matemáticos de todos os tempos tentaram descrever movimentos da realidade a partir de seu subjetivo, de seu próprio olhar. Deixaram-nos um legado histórico e cultural que nos permite acreditar na possibilidade de criar representações diversas para os problemas que se apresentam na realidade. E não estaria aí a beleza do pensamento algébrico?

A síntese da escrita numérica elaborada a partir da retórica, da sincopação e da álgebra simbólica, incluindo-se aí, a álgebra geométrica, está diretamente relacionada aos problemas do cotidiano, quer seja do matemático, quer seja do povo, de cada uma das épocas.

Se nos períodos mais remotos, a resolução dos diversos problemas da realidade, das mais diversas civilizações eram solucionados por um grupo seleto de matemáticos, filósofos, astrônomos, é quase natural a busca desses estudiosos, no sentido da síntese da escrita e da linguagem.

O que estamos dizendo aqui é que a lógica formal da álgebra simbólica foi construída a partir da necessidade intelectual desses estudiosos. A atividade sintética presente na lida, na *praxis* desses teóricos se materializa na variável-letra.

É decorrente de acordos históricos.

Com o passar do tempo, torna-se uma taquigrafia ou ainda uma linguagem universal para os teóricos.

Em nenhum momento, os historiadores nos dizem que os estudiosos se fechavam em seus aposentos para pensar na síntese de uma escrita. A síntese da escrita foi feita a partir das necessidades presentes nas diversas civilizações, nos diversos momentos, sem desconsiderar os estudos relacionados com a Teoria dos Números e com a Geometria. A síntese presente na álgebra simbólica foi construída durante séculos.

É quase natural que o matemático de cada época, de cada civilização, procure encontrar uma espécie de taquigrafia para simplificar ao máximo sua escrita. Afinal, a busca do ser humano, há muito, está relacionada à diminuição do trabalho físico e braçal.

Queremos nos dedicar ao ócio para podermos pensar nos diversos movimentos da vida. Queremos criar muito mais do que ficar escrevendo palavras inteiras. Queremos que o nosso pensamento pense sobre o que ainda não foi pensado. Queremos encontrar regularidades nos movimentos da vida para que possamos elaborar generalizações. Queremos criar fórmulas gerais para tentarmos compreender os diversos movimentos do mundo. Só conseguimos elaborar essas fórmulas quando conseguimos apreender movimentos regulares que se apresentam nos fenômenos da vida.

As necessidades científicas, nos vários momentos históricos exigem maiores estudos. As relações entre os povos vão se estreitando, a partir do Renascimento, nos séculos XV e XVI. A realidade se transforma com uma certa rapidez. Enquanto a vida acontece há novas descobertas. Há o encontro das diversas culturas.

Não é de hoje que a humanidade tenta encontrar formas de se entender e, sem dúvida, o simbolismo algébrico auxilia em muito a comunicação entre os estudiosos das mais diversas ciências. É praticamente, a partir de uma certa naturalidade, que o pensamento algébrico caminha, no sentido de se pensar o desconhecido, a incógnita, a partir da letra.

A partir da metade do século XVII a álgebra simbólica começa a se impor enquanto conhecimento científico. Faz-se necessário que o conhecimento matemático avance (Eves, 1953, 1997).

É nesse período que a teoria do número começa a ser gestada. Apesar disso, a retórica e a figura permanecem com as chamas bem acesas, em nossos dias, tanto em nossas salas de aula como nos institutos científicos dos diversos países. Não conseguimos, ainda que façamos um esforço imenso, nos desvencilhar totalmente da palavra e do desenho.

Porém, ao ensinarmos a álgebra simbólica esquecemo-nos da álgebra retórica e da álgebra figurada. Há aqui, uma contradição.

Apresentamos aos estudantes a variável-letra e queremos insistentemente que eles entendam o pensamento algébrico.

Os alunos, nesse contexto, aprendem a fazer manipulações algébricas que, por sua vez, não tem nada a ver com a palavra e a figura estudadas em outras áreas do conhecimento. Os elementos perceptíveis contidos na variável-letra, as letras do alfabeto, parecem falar por si.

Há uma ou outra proposta curricular que sugere aos professores a criação de atividades algébricas que não desvinculem a palavra, da figura e da letra. Tenta-se elaborar nesta, atividades que considerem a relação estreita que há entre aritmética, álgebra e geometria. Sugere-se que os professores façam essa relação a partir da história, porém, nem sempre o professor consegue fazer sozinho tal relação.

Assim, temos no modo II do lógico-histórico da álgebra a seguinte síntese:

ESTÁGIOS/CLASSES DE DESENVOLVIMENTO DA LINGUAGEM ALGÉBRICA: MODO II
(Socas et al., 1996)

LÓGICO-HISTÓRICO

compõe-se das álgebras

GEOMÉTRICA

SIMBÓLICA **FLUÊNCIA** **ABSTRATA**

Que, por sua vez, pode ser assim estendida:

FASES DE DESENVOLVIMENTO DA LINGUAGEM ALGÉBRICA: MODO II

(Socas et al., 1996)

ÁLGEBRA GEOMÉTRICA
➢INVENÇÃO GRADUAL DOS SÍMBOLOS ➢RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

ÁLGEBRA SIMBÓLICA
➢VIÈTE (1540-1603) ➢ INTRODUÇÃO DA NOTAÇÃO SIMBÓLICA

ÁLGEBRA ABSTRATA CONTEMPORÂNEA OU ÁLGEBRA MODERNA
➢PRESCINDE DOS NÚMEROS; ➢OBJETOS UTILIZADOS PODEM SER QUAISQUER (MATRIZES, VETORES, TENSORES ETC.)

O Modo II de ver o pensamento algébrico mostra o aspecto formal dos conceitos algébricos elaborados a partir do século XIX.

A criação de uma matemática abstrata coincide com a criação da álgebra abstrata. O concreto do conteúdo da álgebra abstrata é o formal dos conteúdos da álgebra geométrica e da álgebra simbólica.

Não há preocupações explícitas com a palavra e o desenho mas sim, com a geometria de Euclides e com a variável-letra de Viète. Aqui, o número não representa nexo conceitual da álgebra porque essa álgebra prescinde dos números.

A variável

Ao estudarmos o conceito de variável, consideramos a sua relação quase que direta com o conceito de função.

Ambos os conceitos têm relações intrínsecas porque representam "generalizações abstratas de variáveis concretas". Como exemplo de variáveis concretas, podemos citar o tempo, a distância, a velocidade, o ângulo de rotação e a área de uma superfície, bem como "as interdependências" que ocorrem entre essas variáveis: a distância depende do tempo, e assim por diante (Aleksandrov et al, 1988: 65).

Nesse contexto, "a variável é a imagem abstrata de uma grandeza que varia, o que supõe distintos valores durante o processo em consideração. Uma variável matemática x é algo ou mais exatamente, qualquer coisa que pode tomar distintos valores numéricos". Podemos entender por variável, "o tempo, a distância ou qualquer outra grandeza variável" (Aleksandrov et al., 1988: 66).

Um aluno do Ensino Fundamental, ao ler a definição de Aleksandrov et al (1988) pode nos dizer que esta não se diferencia da definição de incógnita feita pelos matemáticos árabes e europeus.

Para árabes e europeus, incógnita representava qualquer coisa desconhecida. A própria palavra, "coisa", tinha o objetivo de representar o desconhecido, enquanto que a representação da coisa, na letra "x" nos remete, quase que automaticamente, ao trabalho de Viète, à álgebra simbólica dos séculos XVI e XVII. Porém, ao estudarmos com maior cuidado o trabalho de historiadores matemáticos, podemos constatar que, historicamente, os conceitos de variável e função, refletem o problema central da Física, do século XVI: o estudo do movimento.

Longe de apenas representar o valor desconhecido da incógnita, os conceitos grandezas variáveis e função aparecem na matemática como reflexos das "propriedades gerais do conceito de mudança". Determinam uma nova etapa para a matemática: a matemática das grandezas variáveis (Aleksandrov et al, 1988: 65).

Essas definições só começam a fazer sentido na matemática, quando grande parte dos estudiosos passou a pensar sobre os trabalhos de Kleper e Galileu Galilei, que se fundamentavam no conceito de movimento, a partir do momento em que a humanidade aceitou a idéia de movimento (Karlson, 1961).

Há, nesse período, a partir da resolução de problemas do cotidiano da física, quase que, obrigatoriamente, a necessidade de se pensar em um instrumento que seja possível descrever movimentos da vida, quer esses movimentos sejam regulares, quer sejam irregulares. Referir-se apenas à incógnita, ao desconhecido, até aquele momento era fazer referência a um tipo de movimento, o regular, à equação.

No século XVIII, Euler definiu que "uma função de quantidade variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira por essa quantidade variável e números ou quantidades constantes". Classificou as funções em algébricas e transcendentes.

As algébricas se subdividiam em irracionais e racionais, e as transcendentes se subdividiam em trigonométricas e logarítmicas. Por sua vez, as racionais se subdividiam em inteiras e fracionárias. A classificação proposta por Euler considerava algumas propriedades por ele definidas.

A definição feita por Euler, de certa forma, se assemelhava à definição de Bernoulli que definia uma função, simplesmente como "uma expressão analítica". Por sua vez, Leibniz já havia introduzido em seus trabalhos, "a idéia geral de dependência funcional, introduzindo o termo função e o símbolo correspondente para todos os segmentos relacionados com a curva", de forma que o comprimento dessa dependesse da "posição do ponto sobre a curva: ordenadas, segmentos de tangentes, subtangentes, normais, subnormais" (Aleksandrov et al, 1988: 220).

A definição do conceito de variável como "um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números" (Eves, 1997: 661), foi feita por Lejeune Dirichlet, no século XIX, numa tentativa de dar uma definição de função ampla o suficiente, a ponto de englobar as relações estudadas por Joseph Fourier[46]. Ao nosso ver, tal

[46] Em suas pesquisas, Joseph Fourier (1768-1830) teve que considerar as chamadas séries trigonométricas, as quais "envolvem uma forma de relação mais geral entre as variáveis que as que já haviam sido estudadas anteriormente" (Eves, 1997: 661).

definição se completa a partir de Caraça (1935; 1966; 1984; 1998) que vê na fluência, a característica fundamental do conceito de função:

> "A variável é, portanto, uma entidade que, dizendo respeito a um nível de isolado – o conjunto – superior ao do número, é, ela própria, de uma natureza superior. (...) no entanto, o caráter contraditório do conceito – a variável é e não é cada um dos elementos do conjunto – deu origem a que a sua introdução na Ciência seja relativamente recente. Pelo seu caráter essencial – síntese do ser e não ser – ela sai fora daquele quadro de idéias que quer ver na realidade uma permanência e irrompe ligada à corrente de pensamento, que expressa ou tacitamente vê, na fluência, a primeira das suas características. Uma variável é o que for determinado pelo conjunto numérico que ela representa – a sua substância, o seu domínio (...)" (Caraça, 1998: 120).

Dessa forma, quando definimos o conceito de variável, em um determinado Conjunto (C) qualquer, cujos elementos são números reais ou complexos, o qual pode ser denominado de campo ou domínio da variável, consideramos dois aspectos inseparáveis e que contém a síntese do ser e não ser do número - o aspecto simbólico e o aspecto substancial:

> "(...) dado o conjunto (C) qualquer, de números reais ou complexos, ao símbolo representativo dos seus elementos dá-se o nome de variável. A esse conjunto chama-se campo ou domínio da variável. O conceito de variável apresenta, conforme a definição, um duplo aspecto — o aspecto simbólico, da letra ou símbolo tomados, e o aspecto substancial, do conjunto que esse símbolo representa; esses dois aspectos são inseparáveis, e a sua síntese é o conceito de variável. A vantagem da introdução desse conceito na Análise reside na possibilidade que ele dá de raciocinar em "globo" sobre um conjunto de números, deduzindo propriedades a que satisfaçam todos esses números,

> como elementos do conjunto. À variável, símbolo coletivo de todos os números do seu campo, pode ser atribuído, como valor particular, a quaisquer desses números, e tudo o que se tiver deduzido como verdadeiro para o símbolo — a variável — será verdadeiro para cada um desses valores particulares" (Caraça, 1966: 01).

O desenvolvimento histórico do conceito de variável apresenta uma relação direta com o conceito de número, de movimento e com o desenvolvimento da Física, entretanto, sob o ponto de vista lógico e formal do desenvolvimento do conceito, a variável tem sua formalização mais geral no século XIX, quando, tanto a Teoria dos Conjuntos como a Teoria dos Números e o conceito mais geral de função foram formalizados.

A função é a ferramenta atual de todos os matemáticos, ferramenta que permite ao homem dar nexos e compreender os movimentos fluentes do cotidiano, da realidade, da vida (Karlson, 1961) que ora podem ser regulares, ora podem ser irregulares. A palavra função, expressa, provavelmente, a idéia mais importante de toda a História da Matemática (Kasner & Newman, 1968).

Nesse sentido, compartilhamos do pensamento de Caraça (1951; 1966; 1984; 1998) quanto à sua afirmação sobre a recente introdução na ciência do conceito de variável. Seu desenvolvimento não é linear. Surge à medida que os movimentos numéricos se refinam, através do pensamento humano.

O quadro que segue é uma síntese dos pressupostos do lógico-histórico em geral e da álgebra em particular:

Pressupostos teóricos do conceito de lógico-histórico	Pressupostos teóricos do lógico-histórico da álgebra
O conceito mais geral de lógico-histórico considera : - formas de pensamento: juízo, conceito e dedução; - concretividade e abstratividade dos conceitos; - interdependência e fluência; - movimentos do pensamento empírico-discursivo; do pensamento flexível e do pensamento teórico; - nexos internos e externos do conceito; - conteúdo do pensamento: as abstrações; - realidade e realidade objetiva; - totalidade da vida; - o vir a ser; - isolados	O conceito mais geral de álgebra considera: - formas de pensamento: juízo, conceito e dedução da álgebra não simbólica; - formas de pensamento: juízo, conceito e dedução da álgebra simbólica; - concretividade e abstratividade dos conceitos de movimento, fluência, campo de variação, variável, número e aspectos da geometria; - nexos conceituais do número, da figura e da palavra; - concretividade e abstratividade da variável-palavra; variável-figura; variável-numeral; variável-letra; - o vir a ser da álgebra: necessidade de se criar subálgebras; - conceito de função; - estudo dos movimentos da vida; - realidade e realidade objetiva; - lógica "espiciosa"; - mudança conceitual; - movimentos do pensamento no sentido de conhecer e descrever as verdades matemáticas; - premissas; - isolados; - concretividade e abstratividade da matemática.

Perspectiva didática

O atual ensino de álgebra

Os estudos de Renshaw (1999) sobre o currículo elementar de matemática consideram os trabalhos de Vygotsky e Davydov. Mostram que toda a atividade humana está contextualizada em "um particular contexto histórico, cultural e institucional" e que ao implementarmos um currículo, seria interessante considerar as análises: lógica, psicológica e didática, propostas por Davydov (Renshaw, 1999: 10).

Renshaw (1999) entende que do ponto de vista da lógica, Davydov (1982) mostra que é possível estabelecer os conceitos fundamentais da matemática, que podem ser usados como uma base para o desenvolvimento conceitual subseqüente. Quando trata da análise psicológica afirma que esta é necessária para que possamos estabelecer "as capacidades das crianças – o seu desenvolvimento, tanto das funções mentais inferiores como das superiores – que poderia ser aplicada para apreender os conceitos matemáticos fundamentais" enquanto que "a análise didática é necessária para criar procedimentos de ensino, poderosos o bastante para construir conexões entre os conceitos científicos (quer dizer, os conceitos matemáticos fundamentais) e os conceitos cotidianos do estudante" (Renshaw, 1999: 03).

A partir de relações entre quantidades, Renshaw (1999) apresenta "experiências pedagógicas", que se iniciam com as crianças elaborando "juízos quantitativos simples de objetos concretos" e terminam com as crianças "usando notação algébrica para representar relações quantitativas de uma maneira abstrata e generalizada" (Renshaw, 1999: 04).

Para tanto, o pesquisador sugere os estudos de Davydov, pois tais estudos consideram o processo que se dá entre os conceitos cotidianos e os conceitos científicos. Não se constrói processo pedagógico sem a construção dessas conexões. Não há como ocorrer apropriação de conceitos científicos de forma automática.

Assim como o estudo de Renshaw (1999) essa pesquisa que trata da álgebra no contexto da sala de aula pode ser entendida como uma experiência pedagógica onde analisaremos o movimento do pensamento algébrico sob dois pontos de vista da dialética lógico-histórica: forma de pensamento algébrico e perspectiva didática.

O ponto de partida das atividades de ensino considera os movimentos que se apresentam no cotidiano dos professores-alunos e o ponto de chegada considera os conceitos científicos.

A partir da análise dos movimentos que estão em nosso cotidiano, vamos, juntamente com os professores-alunos, construindo linguagem e pensamento algébrico. Temos como intenção elaborar atividades de ensino que se fundamentam no movimento lógico-histórico da álgebra, de forma que estas propiciem aos alunos o estudo de movimentos a partir da linguagem comum, do senso comum, para que, através do pensamento flexível, possamos elaborar pensamento e linguagem algébrica.

Os conceitos a que estamos nos referindo foram construídos historicamente. Temos como pressuposto que podemos propiciar o movimento do pensamento dos participantes da pesquisa, a partir da dialética lógico-histórico, enquanto forma de pensamento e perspectiva didática.

Do ponto de vista do pensar algébrico, estudamos, até o momento, os nexos internos que fizeram com que a álgebra simbólica, ensinada em nossas escolas, chegasse ao refinamento atual.

Para isso, levamos em conta a Teoria de Conhecimento, elaborada por Kopnin (1978), os estudos de Davydov (1982) sobre a generalização no ensino e dos teóricos que vêem na história a possibilidade de entendimento dos nexos conceituais que compõem o movimento do pensar humano, dentre eles o pensamento da álgebra simbólica.

Kopnin (1978) e Davydov (1982) convergem para o mesmo sentido. Afirmam que a lógica de determinado conhecimento se constitui histórica. Portanto, fica muito difícil se referir ao conhecimento humano, sem considerar o desenvolvimento lógico-histórico que se apresenta nos conceitos lógico-formais. De modo geral, o lógico-histórico no ensino diário não é considerado.

Temos como intenção, neste item relacionar Teoria de Conhecimento, Psicologia e Didática. Para tanto, buscamos os estudos de Davydov (1982).

Renshaw (1999: 03) afirma que assim como Vygotsky, Davydov se preocupou "com as mudanças subjetivas no indivíduo, produzidas pela apropriação" de ferramentas culturais consideradas como "meios de mediação" e que têm o poder de transformar "a relação do sujeito individual com o mundo social e físico". Davydov argumentava que "a atividade educacional não é dirigida principalmente à aquisição de conhecimento, mas à mudança e ao enriquecimento do indivíduo". Faz-se necessário criar práticas pedagógicas particulares onde os indivíduos possam conectar os conceitos cotidianos e os conceitos matemáticos ou científicos.

Ao tratar dos diversos tipos de generalização no ensino, Davydov (1982) aponta algumas rupturas existentes entre o ensino escolar dos conceitos e sua procedência. Há rupturas entre o pensamento teórico que se quer ensinar e sua procedência, sua gênese, sua história constituída pela humanidade, formalmente quando se ignora o lógico-histórico do conteúdo.

O tipo de pensamento que se projeta no sistema de ensino baseado na psicologia pedagógica e na didática tradicionais, se fundamentam tão somente no pensamento empírico e no pensamento teórico. Nesse tipo de ensino, sugere-se que, a partir das sensações, as crianças elaborem pensamento teórico.

De modo geral, na maioria das salas de aula, o ponto de partida do conhecimento é a manipulação e a experimentação dos objetos e o ponto de chegada do conhecimento é o lógico-formal dos conceitos estudados.

Os objetos, quando vistos do ponto de vista da álgebra, são as abstrações que se apresentam na álgebra simbólica, a partir da variável letra.

Nesse contexto de ensino fica muito difícil para professores e alunos se apropriarem do conhecimento científico ou matemático e fazer conexões com os movimentos de suas vidas. O importante aqui não é o processo e, sim, o resultado. Falta aqui o pensamento flexível. Há na sala de aula, a predominância de um ensino que prima pelo treino das equações, inequações e funções.

Paulovich (1998), Pérez (1996), Souza & Diniz (1994), Ursini (1996-a), Usiskin (1995), Utsumi (2000), Robayna (1996), Azarquiel (1993), Groenwald & Filippsen (2002), Araújo (1999, mimeo), Kieran (1992), Krutetsky (1977), Oliveira (2002) e Salgado (1995) são pesquisadores que sugerem mudanças no ensino de álgebra.

As atividades e os problemas propostos por esses estudiosos tentam romper com o treinamento, porém, consideram como ponto de partida e de chegada os movimentos regulares, os quais são modelados até que se consiga efetuar generalizações.

A realidade não é composta apenas por movimentos regulares. Apesar disso, a escola prima por estudá-los de forma que possa abstraí-los e generalizá-los a partir de fórmulas matemáticas.

De modo geral, os pesquisadores que citamos há pouco procuram elaborar atividades de álgebra a partir do que Davydov (1982) chama de pensamento empírico-discursivo para proporcionar ao estudante pensamento teórico da álgebra.

O ponto de partida é o aspecto perceptível do pensamento algébrico que se materializa de forma lógica e formal no pensamento do estudante.

A experiência escolar nos diz que o ponto de partida usado pelo professor, por exemplo, é o movimento regular, a figura geométrica, a imagem, o software Logo e a variável letra, materializada na incógnita. Tais conceitos se compõem de elementos perceptíveis do conceito. Representam para o estudante do Ensino Fundamental, o máximo de abstração, de rigor matemático. O estudo dos conceitos algébricos considera o aspecto formal do conceito da álgebra simbólica.

Há aqui uma abordagem empírica da álgebra na escola, apresentada em nível da linguagem formal. Se reduz o conceito de variável a um de seus aspectos, a incógnita. Quando se solicita que o estudante faça uso do conceito de variável na resolução de diversos problemas, tanto nas aulas de matemática como nas aulas de física e química, por exemplo, este tem dificuldades em resolvê-los porque não entende o conteúdo concreto do conceito em questão.

Parece que o aluno tem obrigação de assimilar um pensamento teórico a partir de um pensamento empírico e fazer uso do pensamento teórico em todas as disciplinas que solicitarem o uso do conceito de variável.

Desconsidera-se o estudo, por exemplo, do que significa movimento, movimento regular, movimento irregular, fluência, interdependência, campo de variação e as diversas formas que a variável pode assumir, ao tentarmos descrever a realidade. As atividades são elaboradas com o objetivo de generalizar movimentos regulares.

Embora se entenda que as atividades são relativamente "fáceis" de serem assimiladas no Ensino Fundamental, os estudantes, ao elaborarem as respostas dos problemas, necessariamente têm que conhecer os conceitos de perímetro e área, por exemplo, bem como os de movimento regulares presentes nas propriedades numéricas, para efetuarem as generalizações solicitadas pelo professor.

A principal característica do pensamento empírico, afirma Davydov (1982), fundamentado em Kopnin (1978), está no fato de que este consiste no reflexo dos objetos, desde a ótica de suas manifestações e vínculos externos, exeqüíveis e acessíveis à percepção, contrapondo-se ao pensamento teórico que reflete os nexos internos dos objetos e as leis de seu movimento. Os nexos internos dos objetos só se realizam em movimento. Os nexos internos dos objetos representam o processo.

Queremos aqui, novamente, chamar o exemplo do estudo do conceito de ângulo feito nas escolas.

O pensamento empírico de ângulo é o que relaciona suas características perceptíveis como: a classificação dos ângulos relativa ao ângulo reto; a classificação de ângulos de uma figura plana etc. Essa abordagem não permite a generalização do conceito de ângulo.

Já o pensamento teórico de ângulo abrange estes aspectos perceptíveis de representação de ângulos mas também a idéia de movimento relativo relacionado a ângulo, ângulo como posição, como medição de distância, como equilíbrio, como projeção etc. Percebemos que há uma certa pobreza de raciocínio na abordagem empírica que a didática tradicional desenvolve.

A atividade prática objetiva, produtiva, o trabalho, deve ser entendida como base do pensamento humano. Todas as formas do pensamento se constituem e funcionam "dentro dos modos historicamente formados dessa atividade, transformadora da natureza" (Davydov, 1982: 280).

A leitura de Davydov (1982: 280) sobre os estudos de Engles faz com que afirme que "a base imediata e essencial do pensar humano é precisamente a modificação da natureza pelo homem e não a natureza mesma como tal. O homem desenvolve-se à medida que aprende a modificar a natureza".

No processo de trabalho faz-se necessário que o homem não leve em conta apenas "as propriedades externas do objeto. Deve considerar, também, a medida de seu 'rompimento': tais conexões internas, cuja consideração permite modificar sua forma e atributos e fazê-los passar de um estado a outro" (Davydov, 1982: 280).

A história da filosofia mostra que desde a antiguidade há preocupações em estudar e diferenciar os dois níveis de pensamento: o empírico e o teórico.

No estudo desses níveis de pensamento, destaca-se a atividade mental, que de um lado, orienta só a separação, registro e descrição dos resultados da experiência sensorial e do outro, revela a profundidade e multilateralidade dos objetos, as leis intrínsecas de seu desenvolvimento.

A "separação" e a "abstração" conduzem ao "geral abstrato" (identidade abstrata) contrapondo-se ao particular, sendo funções do raciocínio, pelo qual se inicia o conhecimento racional.

É o raciocínio que permite aos objetos presentes serem captados em suas disparidades concretas e se consolidarem a título independente no isolamento dele. Tanto no domínio teórico como no prático, o raciocínio permite ao homem alcançar a solidez e a certeza imutável e da diferenciação desta última com respeito a outras certezas, permitindo que se origine o conhecimento racional.

Mediante a separação, comparação e abstração, nasce o conhecimento da identidade abstrata e do geral abstrato que cristaliza no conceito. Essa identidade condiciona de modo imediato no conhecimento, o trânsito de uma definição a outra.

Como exemplo, podemos citar a geometria, que compara figuras entre si, destacando o que elas têm de idêntico. Nesse caso, o "raciocínio não é mais que a faculdade de conceituar no geral". Para Hegel, "quando se trata do pensamento em geral ou de chegar aos conceitos em particular, muitas vezes, se refere, nesse caso, só à atividade do raciocínio" (Davydov 1982:199).

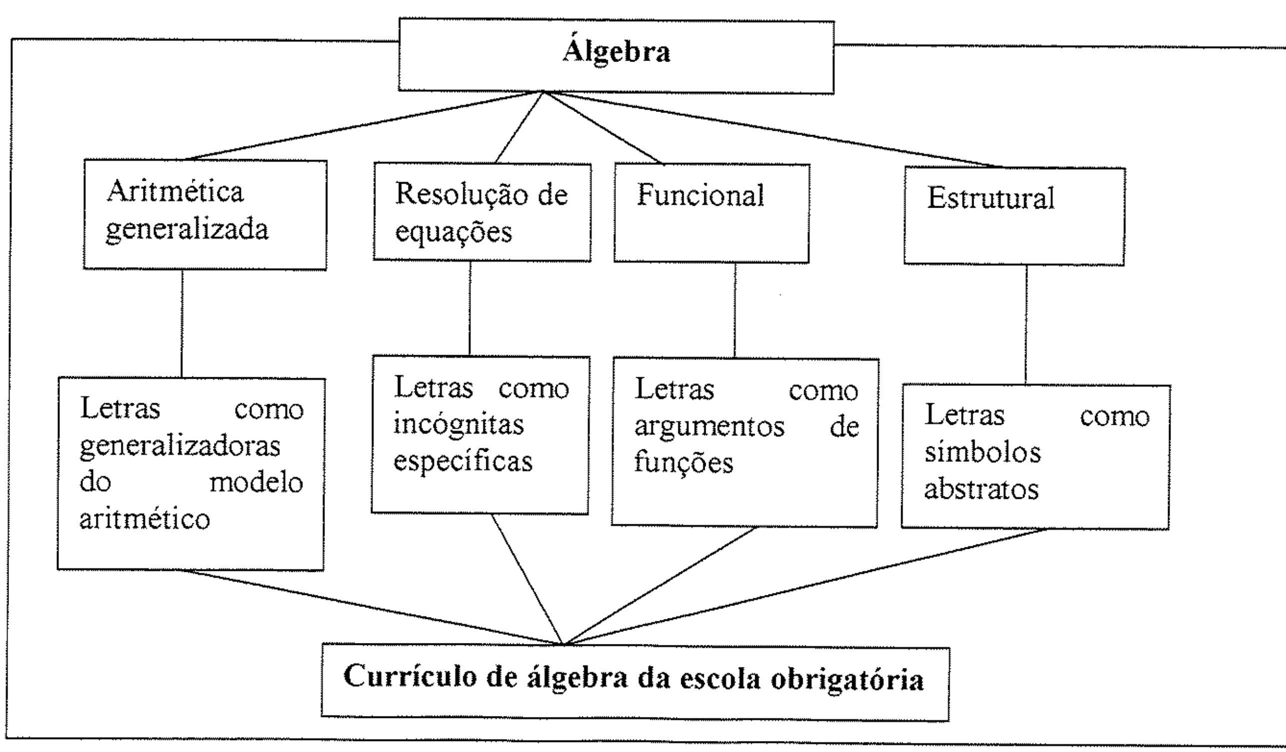
A partir das considerações apresentadas, analisemos como se apresenta o conteúdo algébrico em alguns currículos:

"A álgebra, entendida como o desenvolvimento de habilidades para manipular letras e outros símbolos que possam significar coisas diferentes e também, como construção de operações, expressões ou entidades abstratas através de relações bem definidas, tem sido considerada nos diversos currículos de formas distintas. Sua introdução parte muitas vezes de elementos da linguagem, dando ênfase em seu aspecto sintático (programas anteriores a 1971), ou em seu duplo aspecto, semântico e sintático (Nuffield, 1978), outras, nas estruturas (programas de 1971: Dienes, 1971) e, em ocasiões, de elementos funcionais (programas de 1981: Castelnuovo-Barra, 1983). Insistem, pelo geral, na relação da álgebra com a resolução de problemas e com os processos de generalização, alguns com a ajuda da visualização geométrica e outros com o uso de "modelos" (Robayna et al., 1996:110).

Com referência em (Usikin, 1995) e (Robayna et al., 1996), elaboramos a tabela que segue a qual contém várias interpretações ou ainda, várias concepções relacionadas ao uso das variável nos currículos escolares:

Interpretações da álgebra	Análise dessas interpretações
como aritmética generalizada	Fazendo uma análise histórica, se observa que este sentido generalizador da álgebra teve uma repercussão imediata, posto que desde a invenção da notação algébrica (Viète) até o nascimento do cálculo passaram escassamente cento e cinqüenta anos. A geometria analítica se inventou entre essas duas etapas.
como estudo dos métodos para resolver certos problemas concretos: as equações	Neste caso, as letras se consideram como incógnitas específicas a determinar.
como estudo de relações entre quantidades (funcional)	Neste caso se considera a variável em seu sentido completo de variabilidade.
como estrutura (interpretação estrutural)	As letras constituem entes pertencentes às estruturas algébricas tais como grupos, anéis, Domínios de integridade ou corpos, pode-se-lhe aplicar as propriedades satisfeitas por cada um dos conjuntos nos que se atue.

Essas concepções ou interpretações podem assim ser sintetizadas (Robayna et al., 1996):



Todas essas interpretações de álgebra se manifestam no currículo, exigindo do estudante, apenas o raciocínio de que fala Hegel.

Ao atuarem nas generalizações formais presentes nessas interpretações, os estudantes buscam aproximações entre essas abordagens para poder apenas comparar os aspectos formais apresentados na generalização de cada uma delas. Há desconhecimento dos nexos conceituais que compõem o objeto álgebra simbólica: os conceitos de fluência, de variável, de campo de variação e da álgebra não simbólica.

O pensamento teórico da álgebra inexiste. O ensino se fundamenta apenas nos aspectos perceptíveis do raciocínio algébrico: as letras.

Ao ouvir a palavra álgebra, o estudante tem certeza que estamos nos referindo a expressões que contêm letras. Aprender álgebra para esse estudante significa trocar letras por números e vice-versa.

O entendimento e a comparação dos aspectos perceptíveis presentes nas abstrações dessas interpretações formalizadas traz aos estudantes uma série de dificuldades que se traduzem em erros (Robaina et al., 1986).

Segundo estudos do Reino Unido, pelo grupo de álgebra do projeto Estratégias e Erros Matemáticos no Secundário (S.E.S.M.), entre 1980 e 1983, sobre os tipos de erros mais comuns que estudantes (entre 13 e 16 anos) cometem na aprendizagem da álgebra mostram que: "o termo álgebra era considerado no sentido de 'aritmética generalizada', o que implica o uso de letras para números e a escrita de expressões gerais que representam regras aritméticas e expressões dadas" (Robayna et al., 1986: 96-7).

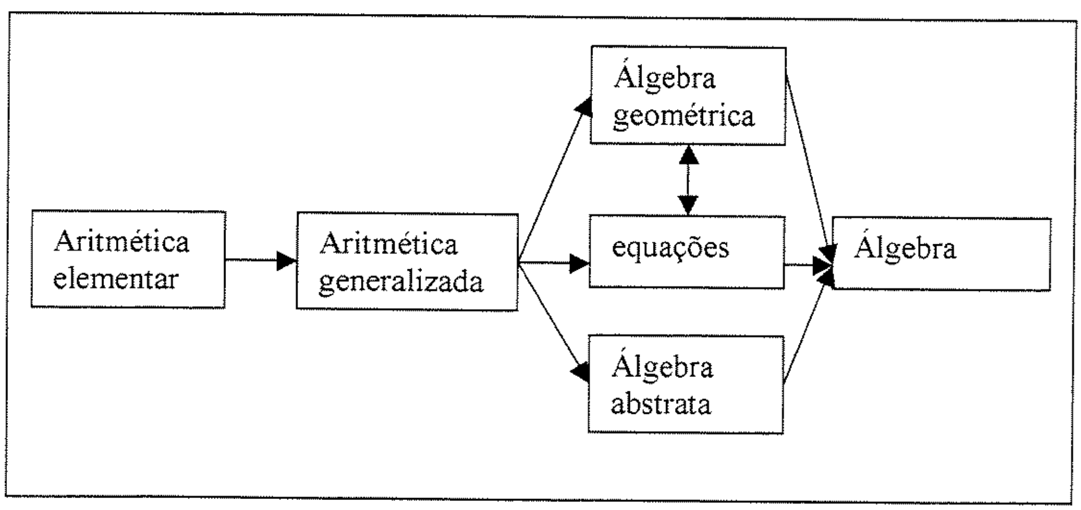
A natureza dos erros pode ser atribuída aos seguintes aspectos, segundo Robayna et al.(1986: 97):

1) "A natureza e significado dos símbolos e das letras";
2) "O objetivo da atividade e a natureza das respostas em álgebra";
3) "A compreensão da aritmética por parte dos estudantes";
4) "Ao uso inapropriado de 'fórmulas' ou 'regras de procedimentos'".

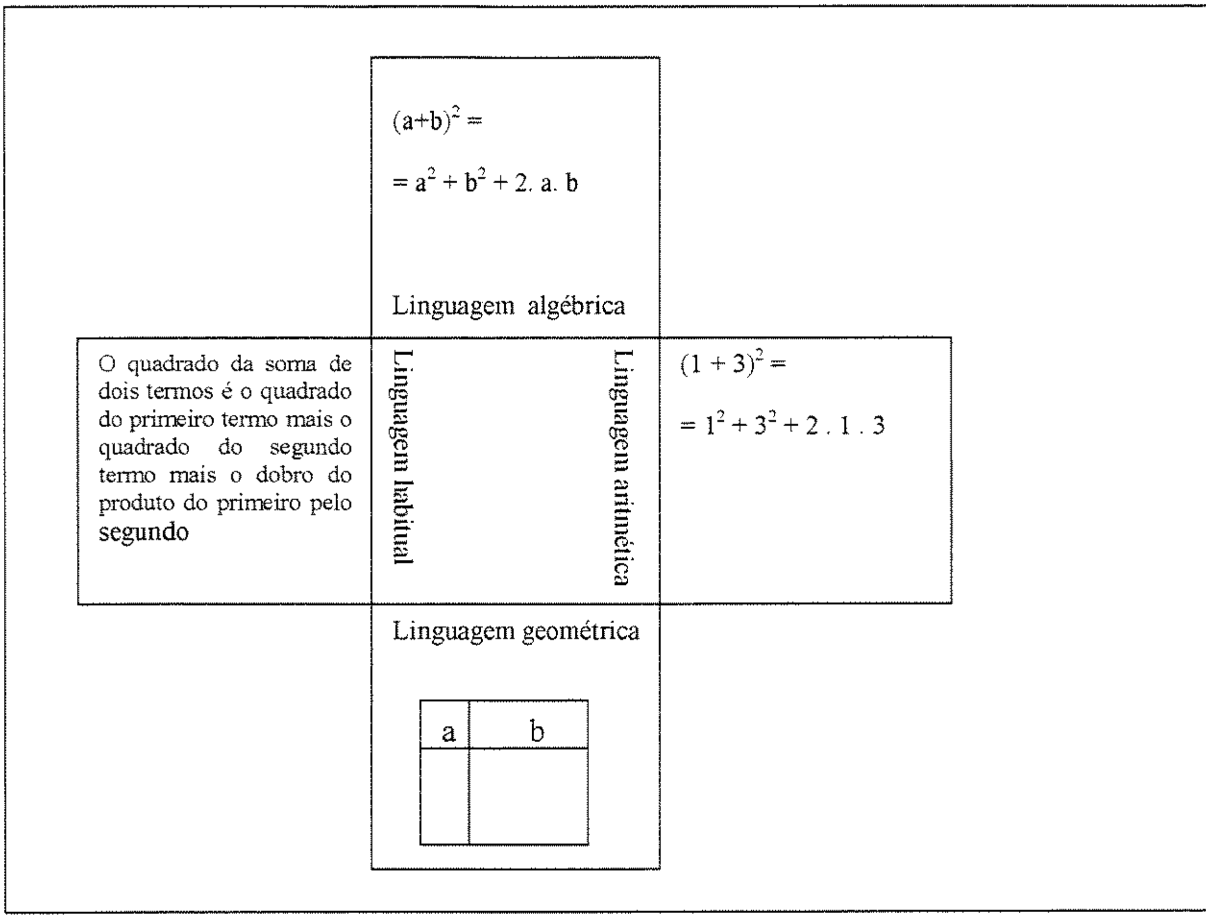
Se levarmos em consideração, apenas o uso da notação formal, no ensino de álgebra, podemos conduzir os estudantes a elaborarem regras irracionais, a manipularem os símbolos algébricos sem sentido, porém, não podemos ignorar que a manipulação formal de símbolos é uma característica fundamental da matemática (Robayna et al., 1986).

Embora usar o conceito de variável, em matemática, na resolução de problemas, seja uma prática comum, as dificuldades em lidar com esse conceito aparece em forma de erros nos alunos mais aptos. Parte dessas dificuldades possivelmente está ligada à álgebra ensinada na escola. A álgebra escolar não "desenvolve suficientemente o sentido de variabilidade ligada às letras. Essa prática comum tem servido mais para obscurecer o significado do termo, mesmo que para mostrar a diferença real como sentido que podem ter as letras" (Robayna et al., 1996).

O tratamento da álgebra no âmbito escolar, proposto por Robayna et al. (1996) para tentar sanar as dificuldades dos estudantes, leva em conta os aspectos lógico-formais, presentes na História da Álgebra:



Para resolver a dificuldade dos alunos os autores propõem aos professores se utilizarem das linguagens habitual, aritmética, geométrica e formal, como segue:



As linguagens sugeridas pelos autores encontram-se em diversos livros didáticos e propostas curriculares desde o final dos anos 90.

No entanto, os autores reconhecem que tanto os professores como os alunos, ainda possuem muitas dificuldades em compreender o substancial do conceito de variável e o seu conteúdo concreto. Ao que parece, o ensino-aprendizagem da álgebra simbólica, na maioria das escolas como em toda a matemática simbólica traz uma "grande variedade de dificuldades" (Robayna et al. 1996: 91).

Podemos destacar pelo menos quatro tipos de dificuldades:

1) Dificuldades devido à natureza do tema álgebra, dentro do contexto da matemática;

2) Dificuldades que surgem dos processos do desenvolvimento cognitivo dos alunos e da estrutura e organização de suas experiências;
3) Dificuldades atribuídas à natureza do currículo, à organização das lições e aos métodos de ensino usados;
4) Dificuldades devido às atitudes afetivas e não racionais para a álgebra.

A esta lista de dificuldades acrescentaremos mais uma: a dificuldade relacionada à própria natureza do tema álgebra, entendida no contexto da variação como escrita de movimentos de aspectos da realidade.

Os autores citados enfatizam ainda que de uns tempos para cá, parece haver unanimidade, nas escolas, quanto às competências da álgebra, pois "a álgebra deve ocupar-se do estudo das 'letras' ou 'variáveis' e das propriedades que as relacionam" (Robayna et al.,1996:91).

Aqui no Brasil, os atuais Parâmetros Curriculares se fundamentam nos documentos do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que a exemplo de outros países, tem como fio condutor a Resolução de Problemas.

Indica-se aos professores do Ensino Fundamental que ao estudarmos a álgebra estamos constituindo espaços significativos para os alunos desenvolverem e exercitarem "sua capacidade de abstração e generalização", possibilitando a aquisição de "uma poderosa ferramenta para resolver problemas" (MEC/SEF, 1998: 115).

Os autores dos PCNs sugerem aos professores que ao abordarem os conceitos algébricos no Ensino Fundamental iniciem um trabalho que proporcione aos educandos realizarem experiências variadas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a aritmética, de forma que os alunos adquiram uma aprendizagem de álgebra mais sólida e rica de significados. A esse trabalho articulado com a aritmética dá-se o nome de "pré-álgebra" (MEC/SEF, 1998) ou "atividade pré-algébrica" (Mason et al., 1999).

Para Lins & Gimenez (1997:10) "é preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra". Os autores afirmam ainda que a idéia de que a aritmética deve preceder necessariamente a álgebra na escola, é infundada. Há todo um conjunto de experiências aritméticas e algébricas extra-escolares, que as crianças trazem consigo ao iniciar o trabalho escolar, o que deve nos levar a pensar que devemos buscar a coexistência da educação algébrica com a aritmética, de modo que uma esteja implicada no desenvolvimento da outra.

Ao colocar-se, em primeiro plano, no tratamento da aritmética, o tratamento de técnicas de cálculo, perde-se a oportunidade das crianças desenvolverem a capacidade de refletir sobre o que há de genérico sobre as situações envolvidas, refletir sobre a lógica das operações no que refere-se a uma maior capacidade de articular os recursos postos em jogo na solução de um problema ou na condução de uma investigação.

Concordamos com Lins & Gimenez (1997) sobre a necessidade de se articular aritmética, álgebra e geometria. Porém, não a partir do formalismo dos conceitos de número, álgebra simbólica e geometria euclidiana. Há muito mais nessa articulação.

Do nosso ponto de vista, há pelo menos três idéias filosóficas que devem ser compreendidas por professores e estudantes enquanto pensam sobre e analisam essa articulação: metafísica fluência e interdependência. Tais idéias estão e estiveram presentes na elaboração do pensamento teórico das diversas civilizações.

Assim, o estudante que se inicia na álgebra deveria ter em mente que o que faz o pensamento aritmético ser diferente do algébrico, por exemplo, é a permanência do conceito de número na contagem de quantidades, o que já não ocorre no pensamento algébrico.

Essas idéias, necessariamente, são aprendidas. Não são percebidas "naturalmente" a partir de atividades formalizadas que têm por objetivo o estudo da álgebra simbólica. O que fundamenta a álgebra simbólica são as espécies, ou seja, a numerosidade do número que contém as propriedades numéricas e a possibilidade de generalizar movimentos a partir das fórmulas e não apenas os entes numéricos presentes na aritmética.

Os pesquisadores que tratam da álgebra escolar há muito apontam para a necessidade de se repensar o ensino desse conteúdo.

Poderíamos, juntamente com Davydov (1982), perguntar:

1) Apesar da problemática apontada pelos diversos pesquisadores, ao que parece, não é verdade que conseguimos propiciar em nossas aulas que os alunos elaborem pensamento teórico sobre a álgebra?
2) De onde saem os homens da ciência, os cientistas de talento? Eles não aprenderam álgebra?
3) Até que ponto as atividades elaboradas, no ensino fundamental não proporcionam a elaboração do pensamento algébrico nos estudantes?

E respondemos sem pestanejar, juntamente, com o mesmo autor: Pois sim, a escola colabora com a formação do pensamento teórico dos estudantes!

Primeiro, não em todos os escolares, em muito poucos; segundo, com notáveis falhas e terceiro, com freqüência, de modo espontâneo e a despeito das orientações da psicologia pedagógica e da metodologia tradicionais.

Davydov (1982) afirma ainda que psicologia pedagógica tradicional não expressa a especificidade do pensar humano nem tampouco caracteriza o processo generalizador e formativo de conceitos, intrinsecamente relacionado com a investigação da própria natureza deles mesmos e tem como conseqüência disso, o fato de que o ensino dos conceitos na escola se efetua desvinculado de sua procedência.

Dessa forma ignora-se na escola tudo o que permite conhecer a gênese e a natureza dos conceitos por não estar em consonância com as suas possibilidades. A escola se limita a descrever o pensamento empírico-discursivo onde a racionalidade é o elemento inevitável presente nas formas mais desenvolvidas do pensamento, dotando de consistência e certeza os conceitos.

Essa tendência presente nas práticas escolares leva a várias conseqüências negativas e a principal delas está no fato de que já na idade escolar cristalizam-se nos alunos os componentes "do pensamento racional", a partir do pensamento empírico.

Há ênfase no pensamento teórico, sobretudo na matemática, na física e na biologia.

As práticas que temos no sistema escolar fazem com que os estudos dos fundamentos da ciência e a presença de métodos de ensino dos mesmos sejam vistos numa ótica de perfeição, criando por si só uma série de condições objetivas para formar nos escolares o pensamento teórico.

Essa constatação faz com que as crianças não captem tanto a contraposição como a unidade, por exemplo, do fenômeno e da substância, da causa e do efeito, de atributos isolados do objeto e da integridade dos mesmos.

O professor, ao seguir tais normas, não pode, muitas vezes, destacar e consolidar em tempo nas crianças, os singulares movimentos do pensar, nas definições contrapostas.

Os métodos de ensino adotados não podem superar a espontaneidade na formação do pensar teórico das crianças, resultado inevitável do qual é o muito diverso nível e qualidade de sua integração real em uns ou outros alunos.

As crianças saem da escola com a impressão de que os conceitos científicos que aparecem nos livros didáticos de forma linear, sem hesitação, estão prontos e acabados, são imutáveis, bastando-se a si mesmos. Aqui o conhecimento científico não tem história. É algo sem história, a-histórico, porque desaparece a atividade humana, desaparece a contribuição cultural dos povos em sua elaboração (Caraça, 1998).

Poucas crianças, as mais aptas, segundo os estudos de Krutetzki, no que tange à matemática, conseguem fazer generalizações. Para a maioria dessas crianças, a generalização está relacionada com um longo processo comparativo de fatos similares e a associação gradual dos mesmos em uma certa classe ou operações do tipo discursivo empírico (Davydov, 1982).

Se a escola não orienta a formação do pensamento teórico, ao insistir numa didática empírica de matemática, continuaremos a assistir ao fenômeno de seletividade: uma minoria reduzida entendendo matemática.

Quando se exige que se mantenha o dito conteúdo somos conduzidos ao empirismo, que por sua vez exalta as percepções na forma de representações e leis gerais sem poder atribuir-lhes nenhuma transcendência, salvo a de que se contém e justifica na percepção.

Nos trabalhos de Davydov (1982), se considera o entendimento de Hegel sobre o estudo inicial das ciências e para as atividades cotidianas. Faz-se necessário ter como característica o "modo de pensar ingênuo", que reproduz o conteúdo das sensações e da contemplação, sem tomar ainda consciência "da contraposição do pensamento dentro de si e a si mesmo", sem reflexão interna.

A separação (análise) dos atributos "concrescentes" no mesmo objeto perceptível induz o passar da percepção direta ao pensamento e dá a esses atributos (definições) a forma de generalidade. O empirismo deixa ao pensamento "só a abstração, a generalidade formal e a identidade", mas trata de reter nelas o mutável conteúdo concreto da contemplação, recorrendo a suas variadas "definições" diretas e baseando-se nas representações.

As características do raciocínio que descrevemos se apresentam no pensamento empírico (discursivo-empírico), cuja função principal consiste em classificar os objetos e estruturar um esquema estável de "índices".

Esse tipo de pensamento tem dois caminhos: um "de baixo pra cima" e outro "de cima pra baixo".

O primeiro se baseia na abstração (conceito) do formalmente geral onde sua substância não pode expressar em forma mental o conteúdo especificamente concreto do objeto, ao passo que no segundo caminho, o "de cima pra baixo", essa abstração vem saturada de imagens gráficas do objeto correspondente, não como estrutura mental e sim como combinação de descrições ilustrativas e exemplos concretos da mesma.

Davydov (1982), fundamentado em Hegel considera ainda que, o pensamento é antes de tudo, pensar discursivo, não se detendo, contudo, nisso. Nem o conceito é tampouco mera definição de raciocínio.

Para ultrapassar os marcos do pensar discursivo faz-se necessário considerar a obra do pensamento racional ou dialético, o qual descobre no objeto sua autenticidade como ente concreto, como unidade das diferentes definições, que o raciocínio tem por verdadeiras em sua individualização, pois algo especulativo e abstrato é também, por sua vez, algo concreto, já que não se trata de unidade simples e formal e sim de unidade de definições diferenciadas (princípio da dialética).

O pensar dialético revela transições, o movimento e o desenvolvimento. Ao considerá-la podemos estimar as coisas "em si e para si, ou seja, de acordo com sua própria natureza", onde radica o autêntico valor do pensamento dialético para a ciência. A lógica formal tradicional (lógica corrente) não reconhece os métodos do pensamento discursivo e sim o pensamento racional.

Há de se ressaltar que o processo constitutivo das formas de pensamento contém:

1) O processo objetivo da atividade humana;
2) O movimento da civilização humana e da sociedade como autêntico sujeito do pensamento.

Assim, "o pensamento de um homem é o movimento de formas de atividade da sociedade historicamente constituídas e apropriadas por aqueles". As debilidades fundamentais da psicologia infantil e pedagógica tradicionais estão radicadas na não consideração do pensamento do indivíduo como uma função historicamente desenvolvida do "autêntico sujeito" da mesma, assimilada por aquele.

Ao analisarmos a psicologia tradicional, percebemos a impotência do psicólogo "para compreender a ontogênese do pensamento científico, sem saber os valores essenciais de sua filogênese. O conhecimento de cujas regularidades requer sair do domínio da lógica histórica-objetiva". Essa lógica orienta corretamente as investigações psicológicas do processo formativo do pensamento nas crianças (Davydov, 1982: 279).

Para se aperfeiçoar a instrução e entrar em consonância com os conhecimentos científico-técnicos deste século, supõe-se mudar o tipo de pensar projetado no sistema docente, aconselha Davydov (1982). Segundo o autor, o pensamento teórico, dialético, há de ser o novo "modelo".

Ao se criar esse novo modelo faz-se necessário estudar, no mínimo, tarefas científicas de três níveis:

1) Uma minuciosa descrição lógico-gnoseológica do conteúdo, das formas e regularidades do pensamento dialético e de seu alcance atual;
2) A análise dos mecanismos psicológicos formativos desse tipo de pensar nos escolares e a descrição da atividade das crianças que lhes permitam aplicar-se aos meios fundamentais do pensamento teórico;
3) Criar manuais didático-metodológicos mediante os quais os alunos possam – ao estudar determinado sistema de conceitos – dominar as bases do pensamento teórico e de seus componentes.

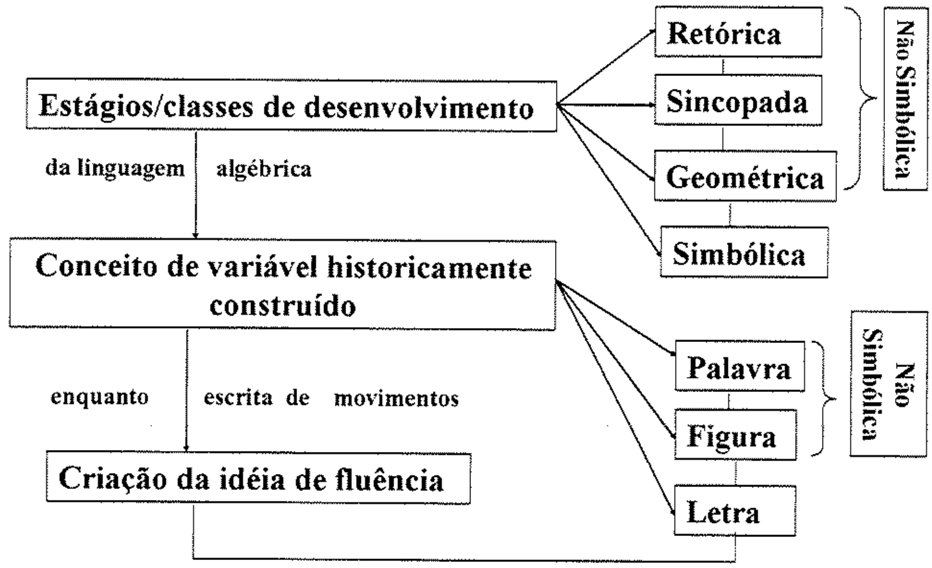
Cada um desses três níveis tem sua problemática especial, mas todos estão inter relacionados.

Estamos nos propondo, nesta pesquisa, estudar aspectos dos níveis 1 e 3, do que Davydov (1982) denomina de tarefa científica, a partir de atividades de ensino de álgebra que articulem os nexos internos dos pensamentos numéricos e geométricos, de forma que possamos construir com os professores-alunos pensamento algébrico, através de uma minuciosa descrição lógico-histórica do conteúdo, das formas e regularidades do pensamento dialético e de seu alcance atual.

Entendemos que a articulação entre álgebra, geometria e aritmética, mais do que a elaboração de atividades que busquem a generalização, através de estudos das regularidades que constam nas propriedades algébricas e a reflexão sobre os aspectos lógicos das operações nos diversos campos numéricos, deva conter em seu cerne, em seu movimento, o desenvolvimento lógico-histórico da variável e dos elementos que a compõem, neste caso, os conceitos de fluência, número e campo de variação ou domínio da variável.

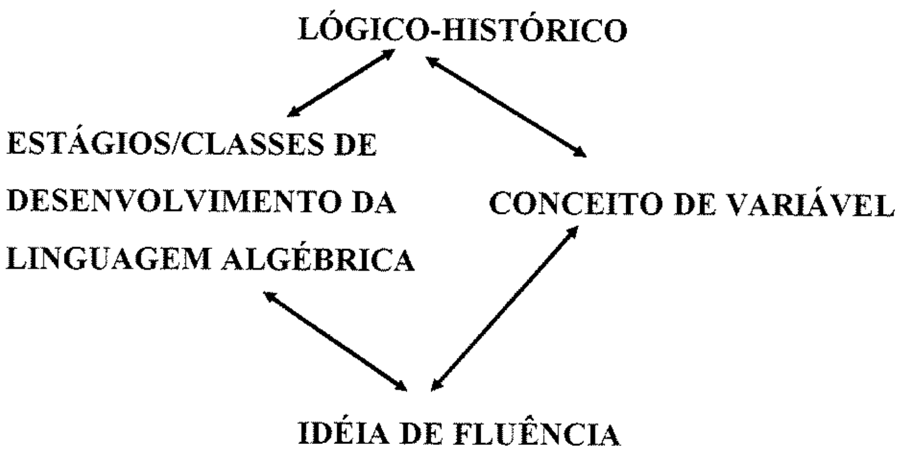
Dessa forma, estamos propondo que os professores, ao construírem pensamento algébrico com estudantes do Ensino Fundamental, lancem mão do lógico-histórico algébrico, enquanto ações pedagógicas, que envolve o desenvolvimento do conceito de variável, historicamente construído, conforme descrevem os esquemas que seguem:

ELEMENTOS QUE COMPÕEM A ÁLGEBRA

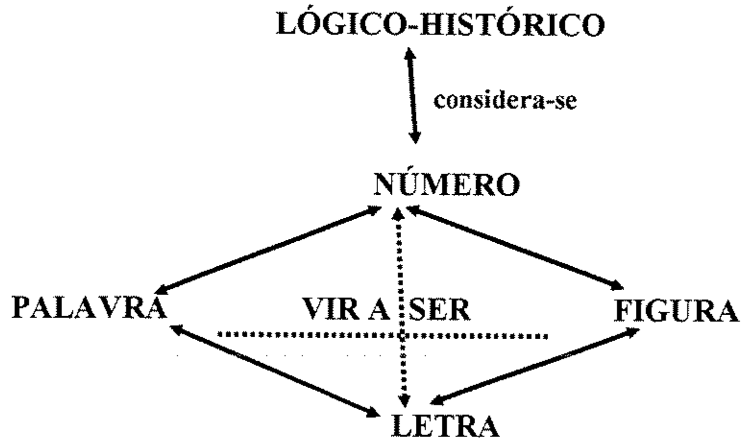


As figuras que seguem sintetizam nossa proposta:

ELEMENTOS QUE COMPÕEM A ÁLGEBRA



A TOTALIDADE DA ÁLGEBRA É CONSTITUÍDA PELOS CONCEITOS DE:



Consideramos o conceito atual de álgebra como uma elaboração que contém a síntese de um longo processo de conhecimento das idéias que envolvem variações quantitativas, destacando-se a variável palavra, a variável figura e a variável letra.

Faz-se necessário tornar este construto teórico do conceito de variável, domínio do professor. O que vem sendo proposto até então para os professores, na maioria das inovações curriculares, ao nosso ver, não tem permitido a eles adquirirem um conhecimento mais profundo que lhes permitam entender as dificuldades dos alunos, e essa obstrução não permite nem a um nem a outro entender a matemática como um processo de elaboração do próprio homem.

A proposta da Educação Conceitual

A Educação Conceitual (Lanner de Moura et al, 2003) tem como pressuposto que ensinar matemática é realizar um encontro pedagógico com o conceito, de forma que professores e alunos componham um movimento afetivo de entendimento de si mesmos, das coisas e dos outros, ao (re)criarem os conceitos científicos em suas subjetividades.

A partir desse pressuposto, entende-se que o movimento afetivo se constitui na sala de aula enquanto educador-aluno-conceito mantém-se sob a "tensão criativa" do desenvolvimento conceitual, ao problematizarem os nexos conceituais dos conteúdos estudados, a partir da dinâmica relacional indivíduo-grupo-classe.

Nesse sentido, a Educação Conceitual se contrapõe à Pedagogia do Treinamento.

Enquanto a Pedagogia do Treinamento se preocupa com o indivíduo produtivo necessário à mecanização das forças produzidas e incorpora os mecanismos da repetição das formas abstratas dos conceitos científicos: a) trabalho enxuto, b) ênfase no fazer e c) redução do humano à máquina, a Educação Conceitual se preocupa com o indivíduo produtivo e criativo, bem como com o desenvolvimento da inteligência e o emocional e incorpora a dinâmica de criação e desenvolvimento do conceito (Lima, 1998):

1) Trabalho construtivo e criativo;
2) Saber fazer e saber pensar e
3) Integração do intelecto e do emocional no ser humano.

Assim, na Pedagogia do Treinamento, o pensamento e o conhecimento são fragmentados, enquanto na Educação Conceitual o pensamento dialoga com o conhecimento lógico, criativo, imaginativo, social, cultural e afetivo.

A Pedagogia do Treinamento considera quatro momentos no ensino-aprendizagem, enquanto que a Educação Conceitual considera cinco momentos (Lima, 1998), a saber:

Momentos da Pedagogia do Treinamento:	**Momentos da Educação Conceitual**
1) Mostrar o conceito	1) Desconhecimento
2) Demonstrar o funcionamento do conceito	2) Autolocalização
3) Treinar o conceito	3) Tensão criativa
4) Avaliar o conceito	4) Reordenação lógica
	5) Construção do conceito

Lanner de Moura et al (2003) definem o conceito como forma do movimento do pensamento, que objetiva, mediante a explicação pela linguagem lógica, a atividade do ser humano sobre a realidade em que pelas condições do vir a ser, está inserido e se insere.

Ao mesmo tempo, a partir de Leontiev (1983), consideram a atividade como movimento de abstrair o resultado de ações, antes mesmo de realizá-las, ações essas provocadas por necessidades reais, advindas da interação do homem com o meio, pela condição de nele viver. Os processos de formação da necessidade que se apresentam em nosso meio e que constituem a atividade mostram que o homem aprendeu a pensar, criando, historicamente, conceitos (Kopnin, 1978). A necessidade é a mola propulsora que motiva a humanidade a elaborar atividades enquanto constrói os diversos conceitos que se apresentam em nossas vidas (Lanner de Moura et al, 2003).

Considerando que a definição mais geral da atividade tem por princípio mover os sujeitos a se entenderem e a entenderem a realidade mutante enquanto criam conceitos, no âmbito do ensino tal atividade deve permitir aos professores e alunos pensarem sobre os conceitos científicos ensinados e aprendidos, os quais foram e são historicamente construídos pelos homens das mais diversas civilizações.

As atividades aí elaboradas na e para a sala de aula, denominadas atividades de ensino, devem, portanto, permitir aos envolvidos no processo, aprender a pensar criando conceitos num movimento semelhante ao da dinâmica da criação conceitual na história do conceito (Lima & Moisés, 1992; 1998).

Isso não quer dizer que a Educação Conceitual defende a idéia de que o conceito científico deva ser novamente criado, seguindo uma certa linearidade histórica de fatos, todos os dias, em nossas escolas. O conceito que ensinamos é um construto social e já foi elaborado de forma lógica nos diversos momentos da trajetória humana.

Aqui a história assume o papel de nexo conceitual entre a causalidade dos fatos e a formalização dos conceitos científicos decorrentes da análise e do entendimento desses fatos, por permitir o entendimento do movimento do pensamento teórico no sentido de estabelecer o que vem a ser verdade.

O pensamento teórico, então, é elaborado pela humanidade enquanto se permite conhecer, a partir do conhecimento científico. Nesse sentido, a história deixa de ser factual e passa a ser compreendida enquanto "possibilidade" (Freire, 1992) de entendimento do nosso próprio movimento de vir a ser; a partir da criação de conceitos. A história passa a ser o elo de ligação entre a causalidade dos fatos e a possibilidade de criação de novas definibilidades que permitam compreender a realidade estudada.

A partir de Davydov (1982); Kopnin (1978); Caraça (1998) e Kosik (2002), afirmamos que os nexos conceituais elaborados historicamente, por meio de definibilidades próprias de cada indivíduo ou ainda de cada uma das civilizações, nos auxiliam a compreender a natureza do conhecimento científico, ao mesmo tempo em que permite-nos conhecer a nós mesmos.

Ao focarmos parte da realidade, estamos fazendo isolados, porém, não podemos tratar a realidade como se fosse a soma das partes, a soma dos isolados. O que há é a totalidade. (Caraça, 1998; Bohm, 1980; Kosik, 2002). Cada isolado contém a totalidade e as totalidades contêm os isolados. A totalidade não vive sem os isolados e os isolados não vivem sem a totalidade. É como na respiração. Não há como inspirar sem expirar. No momento em que inspiramos, temos que expirar. É a partir da análise da relação totalidade-isolado e isolado-totalidade que podemos nos deparar com os "inesperados" (Caraça, 1998).

São os inesperados que alimentam os conceitos científicos. Possibilitam ao homem a geração de novos conhecimentos por permitir-lhe alçar novos vôos ao desconhecido. Permitem ao homem fazer nexos, entre o conhecido e o desconhecido; entre o velho e o novo; entre o lógico e o histórico. Dão movimento ao pensamento, permitindo às civilizações a elaboração de "insights" (Bohm, 1980). Permitem ao homem o surgimento de novas elaborações, novas formas e novas qualidades no movimento de seu pensamento.

Assim, quando se trata de elaborar atividades de ensino, surgem questões diversas:

1) Como elaborar atividades de ensino que possam formar professores e alunos de forma que os envolvidos possam pensar sobre o lógico-histórico do conhecimento científico?
2) Como elaborar atividades de ensino de matemática que proporcionem o surgimento de inesperados, de forma que os envolvidos possam compreender a realidade fluente da vida a partir da totalidade?
3) Como as atividades de ensino podem se tornar orientadoras, de forma que os envolvidos possam entender a realidade mutável a partir do conhecimento científico, dentre eles o conhecimento matemático?
4) Como ensinar os conteúdos matemáticos, de forma que estes não sejam tão fragmentados a ponto de os alunos acharem que aritmética, álgebra e geometria são isolados que não têm nada a ver com a totalidade da Matemática? Com a totalidade da vida?

Partimos do pressuposto de que para ser orientadora, a atividade de ensino deve ser estruturada de forma que permita aos sujeitos interagirem, mediados pelos conteúdos e enquanto negociam significados, solucionem situações-problemas coletivamente (Moura, 1996, 2001).

Nas dinâmicas de interações e nas situações-problemas faz-se necessário o pensar sobre a totalidade do conhecimento científico e a relação deste com os conteúdos específicos estudados. Nessa perspectiva, poderá haver o surgimento de inesperados, pois estes surgem a partir de situações conflituosas.

Nosso estudo sobre o ensino de álgebra nas séries iniciais, a exemplo de Kieran (1992) e Souza & Diniz (1994), considera o conceito de variável como um dos nexos internos que compõe o pensamento algébrico. Nesse sentido, faz-se necessário que o estudante compreenda que a variável pode assumir pelo menos três formas: incógnita, parâmetro e variável propriamente dita.

Entendemos que a gênese do substancial da álgebra está no desenvolvimento histórico do conceito de variável, o qual contém em seus fundamentos a palavra, a sincopação, a figura e a letra.

As atividades elaboradas com ênfase no desenvolvimento histórico da variável serão consideradas de ensino, a partir do momento que proporcionarem aos envolvidos o surgimento de inesperados, a partir de situações conflituosas, de modo que permitam aos professores-alunos dialogarem com o pensamento flexível, elo de ligação entre os pensamentos empírico-discursivo e teórico.

O esquema que segue sintetiza os aspectos que abordaremos nas atividades de ensino:

A TOTALIDADE DA PESQUISA CONSTITUI-SE PELOS CONCEITOS DE:

LÓGICO-HISTÓRICO DA ÁLGEBRA NÃO SIMBÓLICA E DA ÁLGEBRA SIMBÓLICA

considera-se

SUBSTÂNCIA

FLUÊNCIA MOVIMENTO RELATIVIDADE

VIR A SER DO NÚMERO, DA FIGURA E DA LETRA

A chamada álgebra simbólica, ensinada em nossas escolas, é síntese desse movimento histórico; movimento pensado e recriado pelas várias civilizações, dentre elas, a egípcia e a grega, mas é apresentada apenas em sua constituição simbólica.

O entendimento do movimento histórico, ditado pelo movimento do pensamento, no sentido de elaborar conceitos algébricos, nos faz defender uma proposta de ensino de álgebra que leve em conta esse movimento; ou seja, a dinâmica lógico-histórica de criação do conceito de variável.

As propostas curriculares, conforme já estudamos, enfatizam o aspecto analítico e funcional do conceito de variável, pois priorizam o conceito da álgebra simbólica, a qual representa o último estágio de rigor e de abstração do pensamento algébrico.

Pelo mesmo fato, as atividades de ensino são elaboradas, priorizando o aspecto lógico-formal do conceito da variável. Aqui, a relação lógico-formal se apresenta apenas na intencionalidade de se ensinar, a partir de atividades, o rigor algébrico como algo imutável, pronto e acabado. Tanto alunos como professores não o (re)constróem para si, em sua subjetividade, na sala de aula.

A abordagem formalista da variável se materializa praticamente todos os dias em nossas escolas, no ensino da variável-letra e de incógnita.

Há, nessa abordagem, uma fragmentação. A variável descola-se de todo o movimento do pensamento que a compôs, dando a idéia a professores e alunos de que ela se sustenta por si mesma. É como se a variável-letra tivesse vida própria sem nenhuma relação com os pensamentos aritmético e geométrico. Há a descaracterização do movimento do pensamento humano que a compôs. Perde-se a idéia de fluência presente nos conceitos que se quer ensinar.

A maioria dos livros didáticos, ao apresentar a variável, desconsidera a sua substância que é a fluência, o movimento do pensamento.

O conceito que se quer apresentar aos estudantes fica completamente descolado de uma das idéias mais fantásticas: o movimento, elaborada por estudiosos como Heráclito (Mason, 1964), Copérnico, Galileu Galilei e Einstein. Idéia que, segundo Karlson (1961), só foi aceita pela humanidade, a partir do momento em que se assumiu que tudo se transforma, tudo tem movimento, tudo *dévem*.

Ao seguir as atividades que constam nesses livros, o professor, ao introduzir, por exemplo, o conceito de função, procura estratégias para auxiliar os estudantes a não errarem as respostas dos problemas sugeridos, priorizando funções que tenham domínio e imagem no conjunto dos números reais, ainda que, na realidade fluente, existam movimentos diversos, como por exemplo, os irregulares, ou ainda aqueles que não são contínuos.

A partir daí, os alunos passam a construir os gráficos e entram em um dilema quando, por exemplo, o professor de física, química ou de biologia, apresenta-lhes problemas que envolvam movimento, embora tenham aprendido e feito quantidade razoável de exercícios de álgebra. Têm muitas dificuldades ao executar as atividades. Não só não conseguem resolver um problema que trate do movimento, como não o relacionam com a aula de função. Não conseguem perceber que a ferramenta que nos auxilia a descrever qualquer movimento, seja ele na área da matemática, da física, da química ou da biologia, é a função.

De forma geral, os estudantes têm dificuldades em compreender que as expressões que descrevem os movimentos dos diversos fenômenos estudados, em todas as áreas do conhecimento, podem ser formalizados e descritos em linguagem algébrica.

Hogben (1970), Karlson (1961) e Eves (1997) afirmam que o cerne, o fundamental do pensamento de hoje, é o conceito de função. O movimento do pensamento de hoje, se materializa na função.Tudo é função. A função representa o próprio movimento da vida. Representa muito da realidade objetiva, chegando muitas vezes a se confundir com ela. Ao mesmo tempo em que não podemos imaginar a realidade objetiva de hoje, sem o conceito de função, não podemos pensar a função sem pensar sobre o conceito de variável.

A variável é a substância da função. É a própria fluência. O próprio movimento do pensamento. É ela que permite ao pensamento alçar vôos desconhecidos, inimagináveis, a partir do estudo de movimentos qualitativos, quer esses movimentos sejam regulares ou irregulares, os quais se apresentam em nosso universo. No conceito de função, a variável assume o seu real sentido: a "variável realmente varia" (Lima & Moisés, 1997; Souza e Diniz, 1994).

Enquanto a função é a representante "natural" do movimento da vida de hoje, nada mais contraditório a essa idéia, é o que acontece em nossas escolas, no ensino de função.

Conseguimos nos formar professores e continuamos a formar nossos estudantes sem entender que aprender função é entender, antes de tudo, que a totalidade da realidade está em movimento. Na realidade fluente, tudo flui e tudo *devém*, inclusive o próprio pensamento que a pensa.

Aprender função a partir dessa perspectiva faz com que o estudante relacione o conceito à realidade fluente porque terá oportunidade de pensar matematicamente o mundo. De forma geral, apresentamos aos estudantes o conceito de função já formalizado, não permitindo-lhe a dúvida.

Quando ensinamos o conceito de função, tendo como ponto de partida e de chegada o aspecto lógico-formal do conceito, embora nos utilizemos de representações gráficas e nos esforcemos para encontrar problemas do cotidiano representantes desse conceito, na maioria das vezes, temos a sensação de que nossos estudantes não conseguem entender que a função dá mobilidade ao pensamento matemático sobre a realidade.

A impressão que temos é que, durante as aulas ministradas, os alunos entendem apenas o aspecto externo do conceito, os elementos perceptíveis do conceito (Davydov, 1982).

Para eles, ao resolver uma função, basta, apenas, substituir de uma forma mecânica o "tradicional **x**"[47] que se apresenta nos problemas e, em seguida, fazer o gráfico. O pensar sobre o movimento que a função representa e a relação do conceito de função com os conceitos de domínio, imagem e contradomínio não fazem parte da aula, já que o gráfico da função fala por si mesmo.

Ao substituir o "tradicional **x**", em uma **f(x)** qualquer, por números, de forma mecânica, ficamos impossibilitados de ver que a expressão **f(x)** é a síntese de todo o conhecimento humano que só se formalizou a partir do século XIX. Antes disso, o pensar sobre uma variável e no caso sobre o "**x**", só era possível usando a retórica que se manifestou na variável palavra de civilizações diversas e usando a figura geométrica que dizemos ter se expressado na variável figura[48].

---

[47] Termo usado por um aluno durante a discussão sobre ensino de álgebra, na disciplina "Fundamentos da Matemática" ministrada na Faculdade de Educação – UNICAMP pela Profª Drª Anna Regina Lanner de Moura no primeiro semestre de 2001.

[48] Usamos a expressão "variável figura" nos apoiando em Lima & Moisés (1997) para distinguir da representação retórica da variável na "variável palavra".

A representação desse "**x**" em uma função qualquer de hoje, ao mesmo tempo em que aprisiona uma determinada quantidade, dá mobilidade a essa quantidade. Com a expressão "**x**", estamos pensando o número sem estarmos vinculados à sua representação pelo numeral. Porém, ao substituirmos o "**x**" por um valor numérico, temos que pensar em que campo de variação estamos atuando. É aqui que se manifesta a mudança conceitual feita por Viète.

Aqui, o "**x**" não representa um ente numérico, mas sim, uma espécie, porque contém a idéia de quantidade, bem como as propriedades dos campos numéricos: Natural, Inteiro, Racional, Irracional ou Real. O campo numérico estará associado ao tipo de problema estudado.

O campo de variação depende diretamente do movimento da realidade tratada. Não há uma resposta pronta e absoluta, embora boa parte dos movimentos da realidade pareça ocorrer no campo dos números reais.

Para cada movimento da realidade, apreendido pelo movimento do pensamento, em sua regularidade, o matemático tenta representá-lo através de uma função, porque ainda não se conseguiu encontrar uma função absoluta e única, capaz de conter todas as outras, de forma que dê conta de descrever todo e qualquer movimento que se apresentar na realidade objetiva ao pensamento.

Concordamos com Caraça (1998), quando afirma que aprender álgebra deveria implicar uma mudança da concepção polarizada na permanência das coisas.

Educar algebricamente seria proporcionar ao aluno, também a formação de uma visão de transformação e de movimento contínuo da realidade humana. Para o professor do Ensino Fundamental reconstruir e (re)criar o conceito de variável com seus alunos, a partir de leituras da realidade em que vivem, torna-se necessário planejar atividades que tenham esse processo como objetivo.

Até o momento, podemos apontar apenas a proposta de Lima & Moisés (1993; 1997; 2000) para o ensino de álgebra, nas séries iniciais que tem por objetivo permitir a estudantes e professores o pensar sobre os conceitos algébricos enquanto descrição de movimentos, quer esses sejam regulares ou não.

Ao apontarmos o lógico-histórico enquanto perspectiva didática da álgebra, não podemos deixar de considerar os estudos de Miguel (1993), Anglin (2001), Bolema (1992) e Valente (2002), bem como o Laboratório de História da Matemática proposto por Sebastiani em todos os níveis de ensino, ao mesmo tempo em que compartilhamos dos pensamentos de Ríbnikov (1987) e de Moisés (1999).

Ríbnikov (1987) defende a importância do estudo da História da Matemática pelo professor, porque a história se constitui em uma parte importantíssima da preparação dos professores de matemática, necessária para uma correta compreensão da substância, do fundamento da ciência dada, bem como para uma eleição correta da orientação e formas de sua atividade individual como do pensamento. Aqui, a História é vista enquanto possibilidade de entendimento do movimento histórico científico construído pela humanidade, através das diversas civilizações.

Moisés (1999) defende a abordagem da relação lógico-histórica na prática pedagógica do professor, pois tal relação "se configura, (...) no centro da ação pedagógica comprometida com a dinâmica que combina as dimensões do relacionamento humano do indivíduo/particular até o coletivo/geral" (Moisés, 1999: 68).

Em sua palestra intitulada Laboratório de História da Matemática, proferida no VII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, ocorrido em julho de 2001, na Universidade Federal do Rio de Janeiro, o Prof. Dr. Eduardo Sebastiani convidou-nos a refletir sobre os três sentidos/significados que a história pode assumir: o histórico, o social e o cultural.

O significado histórico da história está relacionado com a construção "das coisas" feita pelo homem, durante a sua trajetória no planeta. Nesse sentido, podemos dizer que a história é temporal. Garaudy afirma que "o ocidente é um acidente", porém, não há como negar que grande parte da Matemática que se apresenta hoje nos currículos de nossas escolas é ocidental.

O sentido do social empregado na história está associado à construção da ciência pela humanidade; ao fato científico e aos tipos de saberes diferenciados que foram construídos entre as diversas sociedades. Já o significado cultural da história contém as idéias, tanto do "Relativismo" como do "Racionalismo".

Ao destacar o Relativismo temos que considerar a não existência da comparação entre as culturas; idéia contrária ao Racionalismo que defende a existência de um núcleo comum entre as culturas, ou seja, os racionalistas defendem que as culturas podem ser comparadas. O autor se define como relativista e afirma que quando tratarmos da Etnomatemática, não há possibilidade de não sermos relativistas.

E qual seria o significado/sentido que a Educação Matemática assume nesse contexto? - indaga o palestrante.

Ao tentar responder à questão colocada, o pesquisador ressalta que o termo Educação Matemática está ligado à história, à cultura e à sociologia da matemática, ao mesmo tempo em que faz referência a René Thom que critica o método experimental. Segundo Thom, não há compatibilidade entre os termos método e experimento.

Quando Thom estuda os experimentos científicos considera os processos. Defende que um experimento só pode se considerar científico quando é reprodutível e interessa no âmbito prático ou teórico, ao meio acadêmico. Além disso, deve-se considerar o porquê do fazer a experiência, imaginando-se que a resposta a essa questão pode estar presente na necessidade tecnológica; na hipótese (fundamental) do experimento ou ainda no diálogo das duas anteriores.

Ao fazer essas considerações, Sebastiani nos apresenta os objetivos de seu Laboratório de História da Matemática, os quais estão ligados aos momentos de "revolução" que ocorreram no desenvolvimento da Matemática. Porém, a questão que se coloca é: "como dar significado à História da Matemática na sala de aula"?

Ao responder a questão colocada, o pesquisador se remete novamente aos estudos de Thom sobre experimento científico.

Thom entende que ao se fazer um experimento há de se considerar: o isolamento; os ingredientes e a perturbação do ambiente, além da escrita do relatório que deve ser feita pelo pesquisador. Ao propor o Laboratório de História da Matemática em todos os seus níveis de ensino, Sebastiani defende que os professores (re)produzam em suas salas o que Thom define como experimento científico.

Nesse contexto, o laboratório pode ser representado por uma sala de aula que se desobriga de ter quatro paredes. A sala de aula pode ser qualquer lugar. Pode ser um jardim, um parque ou ainda um laboratório de informática. No nosso entender, para Sebastiani, a sala de aula constitui-se em todo e qualquer lugar onde possa ocorrer aprendizagem.

O isolamento da sala de aula está relacionado com o experimento que representa o problema histórico. Os ingredientes são os enchimentos do laboratório. São os artefatos matemáticos. Pode-se citar como exemplo de artefato matemático alguns dos problemas egípcios.

Vale a pena destacar que guardadas as devidas proporções, durante a resolução desses problemas, os alunos ficam imersos no pensamento da época, de forma que se utilizem apenas dos recursos que determinados povos tinham naquele determinado momento histórico.

A perturbação do ambiente está relacionada com o "como" da resolução, o qual representa a substância, o conteúdo da Matemática, onde a análise representa a forma desse conteúdo. E, finalmente, temos o inventário ou relatório do experimento que deve ser feito pelos alunos.

Há de se destacar ainda:

1) A chamada "revolução" matemática, que atualmente conhecemos, e que é defendida por alguns autores e criticada por outros, ocorreu em sua forma e nunca em seu conteúdo. A História da Matemática nos mostra que, até o momento, não se tem conhecimento de que um conteúdo matemático tenha sido substituído por outro. A partir do momento em que um conteúdo matemático foi aceito socialmente, permaneceu na Matemática e nunca mais foi substituído. O que não aconteceu com outros conteúdos, como por exemplo, a lei do uso e do desuso, que é estudada na Biologia.
2) A contextualização da atividade deve ser feita com a matemática existente na época. Ao falar sobre o envolvimento de uma turma do 3° grau, no estudo de problemas relacionados ao Cálculo, Sebastiani destacou que o maior envolvimento dos alunos ocorreu em dois momentos bem distintos. O primeiro, quando da apresentação do problema enquanto desafio histórico, onde os estudantes tiveram que pensar e

refletir sobre a resolução feita por Apolônio e no último, quando os estudantes já tinham refletido sobre as soluções do mesmo problema apresentadas por outros povos e tentavam resolvê-lo no laboratório de informática, com o conhecimento e as ferramentas de hoje. Após muitas discussões, conseguiram elaborar um programa que resolvesse o problema.

3) O curso todo e as disciplinas específicas devem ser ministrados através da história do seu conteúdo e dos momentos marcantes que fizeram com que esse conteúdo fosse revisto e (re)elaborado.
4) Quando refletimos sobre o currículo das licenciaturas de matemática temos que ter claro que não se trata apenas de trocar um conteúdo por outro, uma vez que é importante salientar que a Matemática é uma ciência inacabada. Ela está em constante transformação.

Quando nos propomos a refletir sobre o laboratório proposto por Sebastiani, entendemos que a ênfase ainda é o lógico-formal do conceito.

Não podemos dizer que a proposta se fundamenta no lógico-histórico. Os estudantes são convidados a resolverem os problemas clássicos e históricos que estão presentes no Cálculo, a partir das ferramentas disponíveis nas diversas civilizações, para em seguida resolver os mesmos problemas com as ferramentas de hoje, os softwares ou ainda criarem programas de computador.

Entendemos que nessa proposta, quando os estudantes estão resolvendo os problemas de ontem com a matemática de hoje, no computador, lançam mão de todos os conceitos que já conhecem.

Nessa perspectiva, os alunos, ao estudarem o conceito de determinados conteúdos e conceitos presentes no Cálculo, através da matemática de ontem e ao refletirem sobre a solução do mesmo problema com a matemática de hoje, têm a oportunidade de (re) construírem, de (re)criarem o conceito formal dos conteúdos para si mesmos, em sua subjetividade, ainda que esse problema, aparentemente, não tenha aplicação imediata no cotidiano.

Já Miguel (1993), mediante três estudos sobre História e Educação Matemática, procura "caracterizar (...) a diversidade de opiniões que procuram estimular o recorrer ao procedimento histórico; esse procedimento, através da consideração exaustiva das funções pedagógicas atribuídas à história". As principais funções, estudadas pelo pesquisador nos diversos textos, consideram a história como (Miguel, 1993: 107):

"1) Uma fonte de motivação para o ensino-aprendizagem (história-motivação);
2) uma fonte de seleção de objetivos para o ensino-aprendizagem (história-objetivo);
3) Uma fonte de métodos adequados de ensino-aprendizagem (história-método);
4) Uma fonte para a seleção de problemas práticos, curiosos ou recreativos a serem incorporados de maneira episódica nas aulas de matemática (história-recreação);
5) Um instrumento que possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação de seu ensino (história-desmistificação);
6) Um instrumento na formalização de conceitos matemáticos (história-formalização);
7) Um instrumento para a constituição de um pensamento independente e crítico (histórica-dialética);
8) Um instrumento unificador dos vários campos da matemática (história-unificação);
9) Um instrumento promotor de atitudes e valores (história-axiologia);
10) Um instrumento de conscientização epistemológica (história-conscientização);
11) Um instrumento de promoção da aprendizagem significativa e compreensiva (história-significação);
12) Um instrumento de resgate da identidade cultural (história-cultura);
13) Um instrumento revelador da natureza da matemática (história-epistemológica)".

Após a análise cuidadosa desses diferentes pontos de vista e fazer críticas ao modo como "se tenta justificar alguns deles isoladamente", Miguel (1993, 107-112):

1) Aponta a ausência de projetos histórico-pedagógicos que "tentando operacioná-los, acompanhem através de estudos qualitativos analíticos o modo como estudantes

respondem a tais iniciativas". Alertando-nos "que devemos encarar com prudência a suposta importância pedagógica da história";

2) Assume a posição intermediária entre aquelas que defendem e acreditam que a história tudo pode ou que a história nada pode: "apenas quando devidamente reconstruída com fins pedagógicos e organicamente articulada com as demais variáveis que intervêm no processo de planejamento didático – pode e deve desempenhar um papel subsidiário em educação matemática";
3) Acredita que para poderem ser pedagogicamente úteis é necessário que histórias da matemática sejam escritas sob o ponto de vista do educador matemático. A história da matemática deveria ser pedagogicamente orientada, assim: a) "poderia prestar grande auxílio para os professores intencionados em contrapor-se a uma tal tendência tecnicista do ensino, pois poderia explorar e revelar que "armas nucleares, desde o fat man e little boy, que arrasaram hiroxima e nagasaki, até o mx e o cruise de nossos dias, são objetos matemáticos". Os armamentos construídos pela humanidade "estão saturados de matemática de ponta a ponta. É triste dizer isso, mas poderiam ser vistos como o apogeu de uma grande parte da matemática de nossos tempos e de tempos passados", como atesta Davis Hersh, um dos raríssimos matemáticos que ousou incluir em sua obra um capítulo intitulado "a matemática e a ética";
4) Afirma que a história pedagogicamente orientada é uma história viva, esclarecida e dinâmica (...). Poderia subsidiar uma prática pedagógica em matemática, que cumprisse efetivamente as funções didáticas atribuídas à história, pelos autores citados no estudo.

Miguel (1993:112) assume que tem preferência pela história-significação, pois esta vai além das propostas de "história satírica" e de "história-destilada" definições dadas por Grattan-Guinness e Lakatos. Exige a inserção da dialética, proposta por Lakatos, "numa dimensão propriamente social que não se traduz na busca dos fundamentos sociais desse jogo puramente intelectual de idéias construídas *a priori*, mas em mostrar como esse jogo pode constituir-se e produzir-se a partir de determinadas condições sociais, que não se reduzam necessariamente à instância econômica ou a outra qualquer do real".

Segundo o mesmo autor, "para que a história da matemática possa efetivamente desempenhar o papel auxiliar na promoção de uma aprendizagem significativa, não podemos jamais nos esquecer de que a rede de significações que envolve idéias matemáticas é, ela própria, uma construção social, uma vez que não só a atividade matemática como toda atividade humana é uma experiência social construtora de significados" (Miguel, 1993: 113 - 4).

A melhor maneira de efetivar a humanização da ciência é contando sua história, desejo de George Sarton compartilhado por Miguel (1993: 114), pois "uma parte considerável de nossos cientistas (mesmo aqueles que mais se distinguem) são técnicos e nada mais. Se formos bem sucedidos, os homens de ciência deixarão de ser meros técnicos e tornar-se-ão homens educados (idéia defendida por Swetz, 1984, pág. 62)".

É com esse sentido, o de humanizar-se pela matemática, ou ainda poder entender o mundo, a partir do ensino de matemática que, ao analisarmos as propostas curriculares e propostas de atividades de ensino de álgebra que fariam parte de nossos estudos, selecionamos aquelas que poderiam trazer aos professores uma nova forma de dar movimento ao pensamento, um reomodo de ensinar a álgebra, a partir dos estudos que envolviam o desenvolvimento dos conceitos algébricos.

Para tanto estamos considerando a relação entre a lógica e a história presente no desenvolvimento dos conceitos, a partir de Kopnin (1978), Davydov (1982), Ríbnikov (1987) e os trabalhos de Lanner de Moura (1995) e Moisés (1999) que envolvem o estudo das conexões internas do conceito e não apenas de seu aspecto formal em sala de aula.

Quando analisamos a relação lógico-histórica no desenvolvimento dos conceitos algébricos definimos como conexões internas os seguintes conceitos:

1) O de variação quantitativa, presente no cotidiano, no movimento da realidade, no movimento da vida;
2) O de variável;
3) A formalização de campo de variação;
4) As características de enumeração e

5) Densidade dos conjuntos numéricos.

Cada conexão é estudada na sua formação de linguagem algébrica, tendo como referência as classes de desenvolvimento da álgebra: retórica, sincopada e simbólica, descritas por Smith (1958), Boyer (1974), Eves (1997), Ríbnikov (1987), Struik (1989) e Fraile (1998). Denominamos, ainda, uma álgebra geométrica, não sendo esta descrita por esses autores como classe.

Durante nossos estudos, faremos uso dessas classes, interpretando-as como descrição do desenvolvimento conceitual e do conceito de fluência, definido por Caraça (1998).

Essa fundamentação serviu de base para estudar e desenvolver com os professores atividades de formação que se contrapõem ao ensino mecânico da álgebra. A relação assim estabelecida não se detém apenas numa evolução de notação, conforme defendem Lins & Gimenez (1997).

Queremos enfatizar que essa abordagem se diferencia do ensino tradicional de álgebra, que se fundamenta na aprendizagem das formas analíticas das expressões algébricas, por considerar, durante a construção do pensamento pelos alunos, as conexões internas ou ainda os nexos conceituais do pensamento algébrico.

As conexões internas do objeto estudado, conforme diz Davydov (1982), se constróem a partir do entendimento do movimento histórico que compõe o objeto. Do contrário, temos apenas uma visão dos aspectos externos do objeto que se quer estudar.

A principal função da relação lógico-histórica, enquanto perspectiva didática, presente nas atividades de ensino estudadas é a de propiciar ao pensamento a criação de abstrações, através de elaborações que dêem movimento ao pensamento, enquanto este constrói a partir da análise da realidade, pensamento algébrico.

Aqui, a função da História da Matemática no ensino, a partir do lógico-histórico da álgebra assume o papel de elo de ligação entre a causalidade dos fatos e a possibilidade de criação de novas definibilidades que permitam compreender a realidade estudada.

É nexo conceitual entre a causalidade dos fatos, a formalização dos conceitos científicos decorrentes da análise e do entendimento desses fatos, por permitir o entendimento do movimento do pensamento teórico, no sentido de estabelecer o que vem a ser verdade algébrica.

Assim, o foco das atividades de ensino não está nos fatos históricos e sim nos nexos conceituais elaborados pelas diversas civilizações no sentido de se desprender do numeral, para descrever os movimentos da vida. A História da Matemática passa a ser compreendida como "possibilidade" de entendimento do nosso próprio movimento de vir a ser, a partir da criação de conceitos.

A função estabelecida pela relação lógico-histórica no ensino de álgebra pode possibilitar a estudantes e professores estabelecerem relações entre os conteúdos apreendidos em sala de aula e o movimento fluente da vida, uma vez que entender o lógico-histórico do conceito algébrico presente no movimento do pensamento, das diversas civilizações, significa entender a relação existente entre a mutabilidade e a imutabilidade das coisas, bem como entender a relatividade existente entre o pensamento e a realidade, na qual estamos inseridos e ajudamos a construir, no movimento do vir a ser.

Nesse sentido, a dialética lógico-histórica do pensamento algébrico não estaria incluída em nenhuma das funções da história, estudadas tanto por Miguel (1993) como por Sebastiani (2001), porque está fundamentada no entendimento lógico do próprio movimento da vida.

Na perspectiva lógico-histórica, a partir da análise dos diversos momentos históricos presentes no movimento do pensamento das diversas civilizações, se busca entender o movimento da vida de todos nós e sua relação com o pensar algebricamente.

Nesse sentido, o foco da proposta deixa de ser apenas o conteúdo em si e passa a ser o processo que se apresenta no movimento elaborado pelo pensamento, enquanto este tenta buscar possíveis soluções para problemas que de tempos em tempos, afligiram a humanidade; problemas que se apresentam e se apresentaram enquanto o homem quer se entender e entender o movimento de sua própria vida.

Nessa pesquisa estudamos as elaborações feitas pelos professores, à medida que vivenciaram e analisaram os diversos momentos históricos apresentados na álgebra não simbólica e na álgebra simbólica.

Estudamos as possíveis relações estabelecidas no movimento do pensamento dos professores, enquanto estes pensavam sobre o processo de seus próprios pensamentos, no sentido de conhecer melhor os nexos conceituais da álgebra. Aqui o foco é o processo do pensar sobre, e não apenas o conteúdo que se apresenta na álgebra não simbólica e na álgebra simbólica.

Analisamos as relações estabelecidas pelos professores com a realidade fluente, a partir do momento em que as atividades focaram, inicialmente, o conceito de totalidade, de movimento, para em seguida focalizar o como e o porquê precisamos da álgebra para tentar descrever movimentos da realidade.

Nesse item, tivemos como intenção discutir os conceitos mais gerais da dialética lógico-histórico enquanto forma de pensamento, bem como sua relação com o pensamento algébrico. Dessa relação, a Educação Conceitual apresenta sua proposta de ensino da álgebra.

Os pressupostos teóricos apresentados até aqui serviram de base para elaborarmos a análise das elaborações feitas pelos professores-alunos, enquanto vivenciavam e pensavam sobre atividades de ensino de álgebra a partir da perspectiva lógico-histórica.

O lógico-histórico da álgebra em atividades de ensino

Neste item, temos a intenção de descrever as atividades de ensino vivenciadas e analisadas pelos professores-alunos na perspectiva lógico-histórica.

Ao mesmo tempo, procuraremos analisar as elaborações feitas pelos pequenos grupos e alguns dos dezoito alunos matriculados na disciplina, a partir de episódios de sala de aula e atividades de ensino que compõem os cinco isolados.

As atividades de ensino da disciplina consideraram o que matemáticos, filósofos, pesquisadores, de tempos em tempos, nas diversas civilizações sempre que puderam, procuraram discutir: a natureza da matemática.

Esses pensadores discutiram e discutem seus pontos de vista sobre os fundamentos da matemática de formas tão diversas, que quase nunca chegam a consenso algum e como não chegam a consensos, criam suas escolas.

Há os logicistas, os formalistas, os intuicionistas e aqueles como Ludwig Wittgenstein, Imre Lakatos e Paul Ernest, que defendem as filosofias sociais da matemática, conforme mostra a pesquisa de Pereira de Jesus (2002).

Cada uma dessas escolas se preocupa em convencer-nos de suas verdades em relação ao conhecimento da área mais antiga do mundo: a matemática. Cada uma dessas escolas construiu suas verdades a partir de premissas. Logo, a natureza da matemática é humana e está inserida num contexto mais amplo que contém a natureza universal, a qual se compõe do conhecido e do desconhecido.

Parafraseando os teóricos que tratam da construção do conhecimento podemos afirmar que o conhecimento é uma gota e o desconhecimento, o mar. Assim é a natureza humana relativamente à natureza universal.

Se a matemática faz parte da natureza humana, a cada novo "insight" matemático ou nova teoria elaborada pelo homem, a partir de novas premissas, a humanidade vai construindo o conhecimento matemático. Apesar de toda a construção que já fizemos, o conhecimento matemático é infinitamente pequeno, é uma pequena gota no mar do desconhecimento humano.

De modo geral, as verdades matemáticas que se configuram nos "insights" ou nas chamadas novas teorias procuram desvendar para os estudiosos os mistérios contidos nos objetos e entes matemáticos, que compõem o pensar matemático e que de alguma forma freqüentam as salas de aulas todos os dias.

A pergunta chave que se coloca de forma explícita ou implícita, no decorrer da história das diversas civilizações enquanto se procura ou se desvenda as verdades é: a matemática é uma descoberta ou uma invenção? E seus conteúdos, incluindo-se aí, a álgebra, é uma descoberta ou uma invenção?

Ao tentarmos nos convencer de que a matemática é uma descoberta, compartilharemos de uma visão platonista e contemplativa da matemática. Caso assumamos que a matemática é uma invenção teremos como ponto de partida as suposições que se originam no labor humano (Caraça, 1998).

Entendemos que a matemática está na relação que o ser humano trava consigo mesmo e com a realidade. Nesse sentido, há uma interação entre a matemática contemplativa e aquela que é inventada a partir de uma necessidade. É descoberta e inventada a partir da *praxis* humana. As premissas são criadas a partir dessas relações.

As suposições, por sua vez, podem ser definidas como princípios certos e evidentes que partem de hipóteses, as quais descendem de proposição em proposição até que se chegue naquelas em que se tem que demonstrar (Dou, 1970).

Se partirmos do pressuposto de que a matemática é uma descoberta, a partir de alguns métodos traçaremos suposições que levarão em conta algumas hipóteses, as quais se originarão de algumas proposições. Nosso intuito será provar de forma lógica que estaremos falando a verdade.

Ao mesmo tempo, se partirmos do pressuposto de que ela é uma invenção, lá estaremos nós, novamente, às voltas com o tecer de novos argumentos lógicos para nos convencer e convencermos àqueles que estiverem à nossa volta de que estaremos corretos nas premissas que criarmos. A verdade de nossos argumentos estará sempre por vir a ser.

As escolas que elaboraram muitas teorias matemáticas, apesar de afirmarem que construíram verdades matemáticas não poderão afirmar nunca que construíram a verdade absoluta. Os argumentos ainda que, muitos deles sejam lógicos e demonstráveis não podem ser definidos como sendo absolutos.

Os estudos de Pereira de Jesus (2002) e de Dou (1970), nos fazem afirmar que a condicional "**se... então...**", as suposições ou premissas, elaboradas pelo movimento do pensamento do homem na relação que trava com a lida de todos os dias, são as responsáveis pelas elaborações dos filósofos e matemáticos na construção de pressupostos ou conjecturas lógicas que podem ou não nos convencer da verdade de uma argumentação.

Tanto as suposições como as premissas podem ser entendidas como proposições ou fatos dos quais decorrem conseqüências. Tais conseqüências, quando bem argumentadas, se tornam verdades. A conseqüência lógica é determinada pela "causa", premissa. A validade da argumentação está relacionada com a forma lógica dos argumentos, do sistema.

Nos cursos de graduação e de formação continuada de professores é muito comum discutirmos sobre a natureza do erro dos alunos no que diz respeito aos conteúdos matemáticos: álgebra, aritmética e geometria; porém, não é comum discutirmos com professores e futuros professores sobre a natureza da matemática e a natureza do pensamento algébrico. De forma geral, essas discussões fazem parte dos currículos da pós-graduação. Formamo-nos professores de matemática e atuamos na formação de professores de matemática sem discutirmos sobre a natureza do pensamento matemático, sem filosofar, sem pensar sobre os conceitos. Utilizamos os conceitos somente na resolução de exercícios.

Na disciplina "Tópicos Especiais em Didática" fizemos essas discussões, a partir de textos teóricos e atividades de ensino. Antes de iniciarmos a discussão com os professores e futuros professores sobre a natureza do pensamento algébrico, propusemos a análise de atividades de ensino sobre os conceitos de natureza universal, natureza desconhecida e natureza humana porque é no movimento desse conhecimento mais geral da relação sujeito-objeto que se insere a relação menor, sujeito-objeto-álgebra.

Ao deslocarmos as discussões dos filósofos, matemáticos e estudiosos da matemática para a sala de aula, nos perguntamos: como os professores e futuros professores constróem seus argumentos para nos convencer das verdades da natureza do pensamento matemático? Como professores do Ensino Fundamental definem o conceito de natureza?

Até onde é importante para o aprendizado da matemática discutir tal conceito na sala de aula? Quais as elaborações que podem ser construídas a partir do momento em que professores e futuros professores se propõem discutir e vivenciar atividades de ensino que consideram os conceitos de natureza universal, natureza desconhecida e natureza humana? O que essas naturezas têm a ver com o pensamento matemático e o pensamento algébrico?

Questões desse gênero foram colocadas para os professores-alunos, sujeitos da pesquisa, em atividades de ensino, durante o curso.

Em meio à discussão surge a necessidade de se entender o que vêm a ser as premissas, pois ao se definir, logicamente, um determinado conceito, se faz necessário estabelecer proposições e suposições.

Faz-se necessário afirmar que na lógica tradicional as proposições, suposições, conjecturas são equivalentes às hipóteses, enquanto que na lógica moderna e na matemática as premissas ou hipóteses podem ser definidas enquanto conjunto de dados de que se parte para demonstrar por via lógica, uma proposição lógica (Dou, 1970).

Assim, nesse sistema de conhecimento, o fato pode ser definido como célula basilar da teoria científica. Os fatos são realmente premissas necessárias de teoria, a hipótese é a forma de desenvolvimento da ciência e a suposição é "apenas um momento essencial" que se apresenta no sistema de conhecimento que surge para explicar o objeto estudado (Kopnin,1978: 247).

As atividades de ensino que compõem os isolados (Caraça, 1998), têm por objetivo discutir o que vêm a ser essas naturezas, bem como analisar o papel das premissas na elaboração dos conceitos científicos.

Partimos do pressuposto que o pensamento algébrico é construído a partir das premissas. Essas premissas são históricas porque contêm os conceitos de número, variável e campo de variação.

É intenção das atividades proporcionar ao professor um encontro consigo mesmo, com o lógico-histórico de seu próprio pensamento, de forma que possa, através das atividades de ensino, refletir sobre a relação que seu pensamento trava com o conhecimento científico, com o conhecimento algébrico e com o movimento de sua própria vida.

Estudamos, nas primeiras aulas, com os professores e futuros professores, a relação entre as naturezas universal, desconhecida e humana, bem como a relação entre as naturezas e as premissas. Ao analisarmos o conceito de premissa, em sala de aula, procuramos considerar o movimento fluente da vida.

Discutimos que elaboramos várias premissas ou suposições, ao longo de nossas vidas. Há aquelas que permite-nos construir o nosso pensamento teórico sobre algo, quanto àquelas que servirão de bases para teorias científicas, e, ainda, as que nos ajudam a resolver de forma lógica e quase que precisa, os problemas da vida. Ou seja, as premissas são elaboradas no movimento do nosso pensamento. Nesse sentido, o pensamento pode refletir os aspectos da realidade de que estamos tratando.

As premissas foram e ainda são as responsáveis pelas elaborações do pensamento teórico que fundamentam os conceitos científicos. São elas que ajudam a compor todo o conteúdo concreto da matemática (Aleksandrov, 1985). São responsáveis pelas abstrações matemáticas que se processam e se elaboram no pensamento daqueles que as estudaram e as estudam em todos os momentos da história da humanidade.

Ao pensarmos em premissas, construímos hipóteses, logo, fica difícil pensar em hipóteses e premissas, sem considerar a condicional **se**.

Temos que avisar ao pensamento sobre a lógica do movimento que estamos elaborando. Ao elaborarmos uma hipótese temos um ponto de partida. Consideramos algumas suposições. Temos que deixar claro de onde estamos falando.

Não é à-toa que a maioria dos estudantes, em todos os tempos, independentemente das propostas pedagógicas que estão em vigor, ouve com certa naturalidade os professores das várias áreas dizer-lhes: "se tal coisa é verdade, então, ..." ; "se eu pegar essa estrada, então...", "se você tiver tantos reais para gastar, então em tais condições dá para fazer tal coisa"; "se receber tantos reais, então, provavelmente conseguirei pagar tal prestação..."; se a inflação do mês aumentar, então, os preços, certamente irão sofrer aumentos"; "se $\mathbf{f(x)= x^2}$, então quando **x** for igual a ..., teremos como resultado ...".

Esses vários exemplos se apresentam em nosso cotidiano. Mostram-nos que a condicional **se**, está presente tanto na língua materna, como nas diversas áreas do conhecimento: na história, na arte, na música, na matemática, enfim, nosso cotidiano não consegue se desvencilhar das suposições, das premissas, uma vez que essa condicional pressupõe uma certa lógica. Ela direciona o movimento lógico de nosso pensamento.

A condicional **se** faz parte do pensamento teórico e do pensamento científico. A condicional **se**, permite ao pensamento se orientar "por certas normas, certos princípios", pelo "princípio de extensão" (Caraça, 1998: 09-10), a partir de hipóteses que poderão ser testadas na medida em que formos dando lógica ao movimento do pensamento.

É nesse movimento que o pensamento vai encontrar ou não motivação para se (re) elaborar. A partir do momento em que a (re)elaboração trouxer novos desafios ou inesperados, poderemos criar novas qualidades em nosso próprio pensamento (Caraça, 1998).

Muitas vezes a condicional **se**, pode nos trazer muitas certezas, como pode nos remeter a incertezas de forma que possamos elaborar novas hipóteses, novas questões. O que vale é que sempre haverá relação de dependência entre a premissa e a sua possível resposta.

E é essa relação de dependência, que faz o conhecimento humano avançar, pois o pensamento teórico e o pensamento científico fazem parte da natureza humana e só se desenvolvem quando alguém lança uma dúvida no que até então era tido como absoluto, como verdadeiro, como imutável.

Palavras como relação, dependência, movimento, mutabilidade, campo numérico, são nexos conceituais do conceito de variável. Podem ser entendidas como substância, a fluência, o movimento que compõe o pensamento algébrico.

Não é à-toa que Hogben (1970) e Caraça (1998) afirmam que o conceito atual de função passou a ser entendido enquanto principal "ferramenta", ou ainda, enquanto principal "instrumento" de todo matemático a partir do final do século XIX.

A inteligência artificial, que contém as diversas funções dos diversos movimentos da vida, está presente nas máquinas de nossos dias e, de certa forma, as funções presentes nessas máquinas legitimam na prática do dia-a-dia a afirmação dos dois teóricos. Não há como usar, nos dias de hoje, nenhuma máquina, sem considerar a função.

A função contém a relatividade e a variação, porque tenta, enquanto instrumento, descrever os movimentos que estão contidos na vida. Movimentos de uma vida que tem fluência e que é mutável.

Com a função é permitido descrever a altura de uma planta, a altura de uma criança, a trajetória de alguém caminhando pela floresta, a trajetória de um carro, a divisão celular, retirar dinheiro de um caixa eletrônico, fazer funcionar máquinas de lavar roupas, carros, pratos. Enfim, através da função pode-se descrever movimentos regulares e é por isso que se pode fazer previsões de determinados movimentos que se apresentam no cotidiano de todo ser vivente.

A função é o próprio movimento e todo movimento, para ser estudado com profundidade, tem como ponto de partida a condicional **se**, tem uma premissa. Para se estudar qualquer movimento da realidade através da função, temos que eleger um campo de variação, um campo numérico. Ao criá-lo temos a dependência, a interação, a relativização do movimento, mesmo que esse seja a substância, o fundamental, porque o movimento é relativo. O domínio e a imagem têm a ver com a relação de dependência que caracteriza a função.

Se estivermos com o domínio no campo dos números naturais, então a imagem, necessariamente, tem que ser um número natural. Se nesse caso específico, a imagem não for um número natural, teremos que rever o problema ou o movimento de que estamos tratando. Pode ter surgido aí um inesperado decorrente do isolado escolhido (Caraça, 1998).

Se aceitarmos que tudo é movimento, teremos que aceitar que tudo se transforma a todo instante.

Teremos que aceitar a existência dos vários olhares para o mesmo objeto estudado. Teremos que aceitar a tese de Bohm (1980) sobre a não existência de verdades absolutas quando, ao refletirmos sobre os diversos ângulos do mesmo objeto que se transforma a todo instante, entendermos que, se há movimento, há fluência, o que significa dizer que o pensamento humano, a todo o momento, elabora "insights" ou certezas relativas e nunca certezas ou ainda teorias absolutas.

Nunca poderemos afirmar que o conhecimento é absoluto. O máximo que podemos fazer é absolutilizá-lo por pequenos períodos, pequenos instantes históricos, breves permanências. O que não significa dizer que esse absoluto não é passível de erros.

Esses "insights" partem necessariamente de uma premissa e se a premissa estiver correta, teremos uma resposta que corresponderá à premissa elaborada. Ao mudarmos a premissa, novas respostas poderão ser obtidas. Assim, nunca teremos a verdade absoluta sobre o objeto estudado.

Sempre conheceremos uma parte do objeto, nunca teremos certeza de que já o conhecemos em sua totalidade. Sempre haverá novas premissas, que serão acompanhadas de novas possibilidades. Isso não quer dizer que as premissas, ainda que sejam diferentes, não sejam interdependentes. Há uma relação de interdependência entre elas, justamente porque todas as premissas e hipóteses elaboradas sobre o mesmo objeto nos fazem conhecê-lo cada vez mais, com maior profundidade.

Assim, entendemos que a compreensão do que venham a ser as premissas é o fundamental para iniciarmos a alfabetização matemática de nossos estudantes no que diz respeito ao pensamento algébrico.

Foi por esse motivo que iniciamos o curso, com ênfase no pensamento algébrico, a partir do estudo das premissas e da relativização das naturezas, fonte do movimento do conhecimento.

Em seguida, estudamos os conceitos que compõem a álgebra não simbólica e simbólica: fluência, campo de variação, variável-palavra, variável-figura, variável-numeral e variável letra.

Vale a pena ressaltar que, nesta pesquisa não nos preocupamos em estudar com os professores-alunos atividades de ensino que envolvem todos os conceitos da álgebra simbólica estudados no Ensino Fundamental, como por exemplo, os conceitos de equação e inequação. Nos preocupamos em estudar atividades de ensino que tratam do conceito de variável, a partir do lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica.

Os nexos conceituais que compõem as álgebras não simbólicas e simbólicas consideraram as premissas: número, palavra, figura e letra.

Ao representar e estudar movimentos, egípcios, europeus e árabes, por exemplo, fizeram uso das palavras, enquanto que Euclides fez uso dos segmentos e das figuras; Diofanto, palavras e letras e Viète considerou apenas as letras, conforme mostram os estudos de Smith (1958); Fraile (1998); Hofmann (1961); Ifrah (1998); Hogben (1970); Klein (1998); Piaget & García (1984).

Assim, as aulas se configuraram pela vivência, elaboração e discussão de atividades que tratam do conceito de ciência, de matemática e de álgebra. Os conteúdos estudados foram distribuídos em "isolados" (Caraça, 1998). Assim, foram estudados os nexos conceituais do pensamento algébrico a partir de cinco unidades didáticas, denominadas de isolados:

1) Naturezas;
2) Fluência e permanência;
3) A variável e o campo de variação;
4) Álgebra não simbólica;
5) Álgebra simbólica.

As aulas do curso não priorizaram atividades de ensino que tratam dos conceitos de equação e inequação. Priorizaram atividades de ensino que tratam do conceito de variável a partir da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica.

Isolado I: Naturezas

Os objetivos do isolado "Naturezas" estavam conectados à formação, à pesquisa e à atividade.

No que diz respeito à formação tínhamos como objetivo estudar duas visões possíveis da vida, com enfoque na fluência e permanência; ver como a ciência as encara, mais especificamente a Matemática, e nesta, a álgebra.

Quanto à pesquisa tivemos como objetivo levantar o conhecimento primeiro da álgebra que os professores-alunos tinham quando se matricularam no curso e questioná-los perante as duas visões, a fluência e a permanência.

E, finalmente, o objetivo das atividades consistia em elaborar um pensamento de generalização da dinâmica de numeralização da realidade superando a restrição feita à contagem de coisas.

Assim, as atividades de ensino vivenciadas e analisadas consideraram:

1) As naturezas humana, universal e desconhecida;
2) O papel das premissas no conceito científico;
3) O conhecimento prévio que os alunos tinham sobre álgebra.

O foco das atividades está em considerar que a totalidade do Universo, ou seja, a natureza universal é composta pelas naturezas desconhecida e humana (Lima & Moisés, 1998).

A partir desse pressuposto, discutiu-se as formas diversas encontradas pelo homem para conhecer, numeralizar, portanto, dominar aspectos da natureza.

Quando o homem domina alguns desses aspectos, dizemos que estamos diante da natureza humana, o que não quer dizer que, por ser do domínio do homem, essa natureza seja de todo conhecida. Há sempre algo desconhecido no aparentemente conhecido.

Há isolados na natureza, organizados em unidades naturais e há isolados não organizados em unidades naturais. As leis quantitativas regentes desses movimentos são de naturezas distintas. O homem, para distingui-las e poder controlá-las criou campos numéricos diversos, como por exemplo, o conjunto dos Números Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais, Reais e Complexos.

Ao numeralizar a natureza em unidades utilizamos o conjunto dos Números Naturais. Ao mesmo tempo, pensamos sobre os números não naturais, necessários para numeralizar isolados não organizados em unidades naturais. Porém, há algo na natureza que se movimenta e nem sempre pode ser representado a partir de contagem. É aí que precisamos pensar numa representação que contenha e não contenha o número. Precisamos pensar em como numeralizar a variação.

A História da Matemática mostra que as representações demonstradoras do domínio humano, a partir de numeralizações, partiram de premissas, suposições, conjecturas. Criamos teorias ou tivemos "insights" (Bohm, 1980).

Quando discutimos o papel das premissas no conhecimento científico podemos pensar sobre a natureza do pensamento científico, incluindo-se aí a matemática, bem como a relação estabelecida entre homem e ciência.

Assim, a partir das atividades e da leitura de Hogben (1952), os professores-alunos concluíram que na relação homem-ciência há:

1) Choque entre a ciência e a sociedade, uma vez que a ciência é construto social;
2) Má aplicabilidade da ciência;
3) Separação entre o cientista especializado e aqueles que se dedicam à política e ao bem-estar social;
4) Desconsideração da ciência natural enquanto parte essencial da educação individual das pessoas;
5) Influências da história da ciência na vida cotidiana das pessoas;
6) História da ciência física;
7) Necessidade de se considerar o conhecimento das coisas e dos fenômenos naturais, enquanto ponto de partida para a análise das necessidades materiais e intelectuais do homem;

8) Necessidade de se considerar que no início da ciência o homem começou a fazer planos antecipados para as estações usando o corpo e o registro permanente do corpo ou da periodicidade das estações;

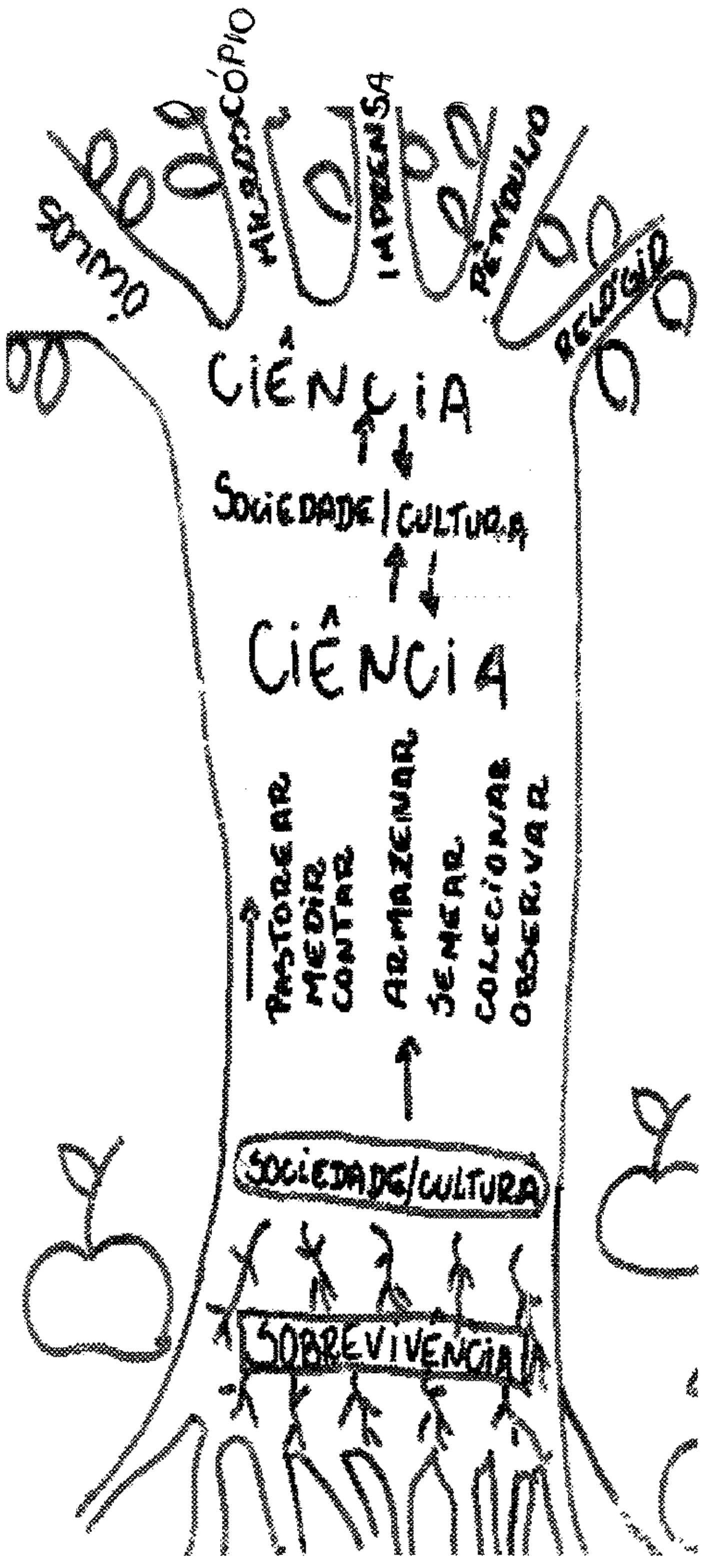
9) Necessidade de se considerar a atitude individual do investigador como um dos aspectos do progresso científico;

10) Atitude no homem livre, o não escravo, disposição e interesse em aperfeiçoar e inventar "apetrechos";

11) Raciocínio científico expresso por uma espécie de estenografia denominada álgebra ou ilustrados por certos esquemas a que chamamos de geometria;

12) Repouso da ciência no laborioso reconhecimento da uniformidade da natureza.

Assim, a classe através do mapa conceitual elaborado por um dos grupos sintetizou a discussão o tema. A fala de Bila (2001) representa o pensamento da classe: "a apresentação mais representativa para mim foi a da metáfora da árvore (Bila, diário:17/08/01)", que segue:



A ciência pode ser comparada a uma grande árvore que contém raízes profundas, as quais estão fincadas na sociedade de cada cultura, desenvolvendo-se à medida que o homem busca sobreviver em seu meio.

Há uma relação entre ciência-sociedade-cultura, pois à medida que um dos aspectos desse tríduo se desenvolve, há interferência nos demais. Logo, a ciência nunca está pronta, acabada.

Faz-se necessário prestar atenção nos frutos que estão caídos no chão e nos ramos dessa árvore.

Os frutos que caem no chão e "apodrecem" representam as teorias que, de tempos em tempos, na medida em que a sociedade e a cultura mudam, necessariamente têm que ser revistas ou até mesmo abandonadas por muitas vezes, porque se tornam obsoletas.

Os frutos presos aos galhos das árvores podem estar "verdes", maduros ou estarem amadurecendo representam as novas teorias. Estas, por sua vez, possuem interdependência com as folhagens e com o tronco da árvore.

Cada novo ramo dessa árvore pode ser estudado em seu conjunto ou individualmente e pode representar um conhecimento novo que, quanto mais burilado pela mente humana, traz novas relações, novas hipóteses, novas possibilidades de conhecimentos à própria humanidade.

Os alunos perceberam que as premissas não surgem magicamente. São elaboradas pela humanidade, nos diversos períodos históricos, nas diversas civilizações.

Para melhor compreendê-las faz-se necessário compreender que suas definições estão diretamente ligadas à natureza humana, a qual cria critério científico, pois é do domínio do homem, possuindo, portanto, uma visão que se fundamenta na ciência moderna, onde tudo é mensurável. Há necessidade de se usar o mensurável das premissas para entender e modificar o mundo. Esse é um caminho do pensamento matemático.

Ao analisarem citações do tipo:

> "O homem é parte da natureza. **Natureza** é o movimento universal do qual o homem é parte integrante. O homem conhece alguns movimentos naturais e deles se utiliza para sobreviver. Chamamos de **natureza humana** ao conjunto de movimentos naturais que o homem conhece e administra para a sua sobrevivência. Chamamos de natureza **desconhecida** ao conjunto de movimentos naturais que o homem desconhece" (Lima & Moisés, 1998: 10);

representar, a partir de desenhos, as naturezas universal, desconhecida e humana e descrever os elementos que compõem o pensamento algébrico a partir da seguinte premissa: "a definição de natureza humana não é um mero acaso. Está atrelada aos critérios científicos que são de domínio do homem, à visão de ciência moderna, à mensurabilidade", os estudantes utilizam respostas que tinham seu momento criativo no movimento individual e que por esse motivo estavam recheadas de contornos difusos, os juízos[47] (Kopnin, 1978) sobre a lógica matemática. De imediato, não conseguiram fazer relações dessas atividades com o pensar algébrico.

Começaram a perceber, por exemplo, que as premissas "(...) são realmente fundamentais para o entendimento da matemática e também responsáveis pela maneira como ela será ensinada (Bila, diário: 10/08/01)". E que, "a partir de uma premissa, parte-se

[47] "Juízo é toda idéia relativamente acabada, que reflete as coisas, os fenômenos do mundo material, as propriedades, conexões e relações deste" (Kopnin, 1978: 198).

para um raciocínio lógico. Todas as minhas respostas dependerão dessa premissa; portanto, se usa aí a lógica matemática" (Sônia, diário: 17/08/01).

Esses juízos individuais, quando discutidos nos pequenos grupos e no grupo classe, deram lugar a questões que muitas vezes questionavam os juízos submetidos à lógica da certeza de determinado estudante ou de determinado grupo, mudando a lógica das certezas sustentadora de tais juízos referentes à matemática e ao seu ensino.

Essa lógica, quando repensada pelos pequenos grupos e pela classe como um todo, foi (re)elaborada por todos os componentes da classe, de forma que se tornaram, ainda que, por alguns instantes ou durante os vários encontros sucedidos, verdades absolutas para aqueles que as construíram. As verdades, ainda que momentâneas, elaboradas pela classe, foram compreendidas e aceitas pela maioria dos alunos.

É a partir do amadurecimento dos contornos difusos, juízos ou ainda do amadurecimento das certezas individuais, pelos grupos formados na classe, que os conceitos de natureza da matemática, do ensino de matemática começaram a ser questionados.

Ao estudar a relação ciência-premissa e ao apresentar seus desenhos e mapas conceituais surgiram questões do tipo:

1) O que as premissas têm a ver com a matemática? Como aprender matemática a partir das premissas?
2) Como aprender matemática através de questões que podem ter diferentes formas de representar a resposta? E
3) Será que essa maneira de ver a matemática não vai nos causar mais confusão?

Esses questionamentos ora estiveram explícitos nas falas durante as aulas, ora se apresentaram na forma de reflexões escritas, nos diários.

Assim, a primeira unidade didática, nosso primeiro isolado, se constituiu em um convite para que os alunos percebessem a matemática como parte integrante da totalidade dos conhecimentos científicos. Como parte integrante da natureza universal que contém as naturezas conhecida e desconhecida. O pensamento algébrico também se insere nesse contexto.

Os relatos dos alunos mostraram o surgimento de uma nova qualidade de pensamento: o juízo na forma de questionamento, conflito e curiosidade sobre o conhecimento matemático e seu ensino, que até então, parecia estar pronto e acabado. A elaboração desse juízo se constituiu em convite para os alunos pensarem sobre a natureza da matemática e a natureza do pensamento algébrico. Muitos alunos aceitaram o convite, apesar de estarem em conflito. Bila (2001) foi uma dessas alunas:

> "Essa aula realmente me deixou em conflito. Quando eu achava que estava entendendo as questões, percebi que estava totalmente enrolada de novo. Mas foi bom, porque esse conflito veio por não estar clara, no momento, a premissa que eu havia estabelecido, sendo assim, não conseguiria sequer colocar o porquê de uma questão ser falsa ou verdadeira. Não consegui responder o porquê naturalizamos a criação humana (...)" (Bila, diário: 17/08/01).

A partir dos relatos sobre o primeiro isolado, percebemos o movimento do pensamento flexível que se manifesta no inesperado encontro com uma nova abordagem para a álgebra que causa estranheza e incomodação.

As relações estabelecidas a partir da unidade didática estudada foram:

Isolado I			
Unidade didática: Naturezas			
Atividades de ensino	**Fontes**	**Relações estabelecidas entre o conhecimento dos professores e os conceitos algébricos presentes nas atividades de ensino**	**Elaborações feitas pelos professores do Ensino Fundamental a partir da análise das atividades de ensino**
- natureza humana; - natureza universal; - natureza desconhecida; - premissas; - questionário	- Aula: a) produção de mapas conceituais; b) análise de atividades (individual e coletiva); c)questionário d) auto-avaliação - Diário de campo	- conhecimento científico e matemática; - natureza universal e natureza humana; - natureza universal e natureza desconhecida; - natureza humana e natureza desconhecida; - premissas e natureza humana; - premissas e conhecimento científico; - premissas e matemática; - totalidade e natureza universal; - matemática e a totalidade do conhecimento científico; - conhecimento estudantil e conhecimento profissional; - questionamento e curiosidade; - interpretação de problemas e erro dos alunos; - relatividade e ambigüidade; - matemática e formas de pensamento; - matemática e sensibilidade; - filosofia e matemática; - dinâmica das aulas e diminuição de resistência à matemática.	- descoberta de que assim como o conhecimento científico, a matemática não está pronta e acabada; - descoberta de que há diferentes formas de representar uma resposta, ainda que seja no contexto matemático; - descoberta de que as premissas determinam os fundamentos do conhecimento científico, dentre eles a matemática; - insegurança em aceitar a flexibilidade em que se apresenta o pensamento matemático; - compreensão de que a matemática é um todo; um processo; - perceber que está mudando a forma de ver a matemática; - autolocalizar suas dificuldades; - reelaborar conceitos a partir das discussões feitas nos grupos; - sugerir mudanças na dinâmica de apresentação dos mapas conceituais; - começar a analisar suas experiências vividas com a matemática; - apresentar dúvidas quanto às intenções das atividades propostas: só respondê-las ou ir mais além? - necessidade de ter uma resposta certa ou errada para as atividades discutidas; - expectativa de que a dúvida seja um dos objetivos da disciplina; - a complexidade de algumas atividades promoveu a elaboração de conclusões que antes não faziam.

Isolado II: Fluência e Permanência

Este isolado tinha como principal objetivo de formação estudar de que forma as duas visões de mundo, metafísica e fluência influenciaram o conhecimento científico, dentre eles, a Matemática e seus conteúdos.

Ao mesmo tempo, tivemos como objetivo de pesquisa a organização dos grupos para a elaboração de projetos de ensino que deveriam ser aplicados, a partir das discussões feitas em sala de aula, nos diversos níveis de ensino.

As atividades de ensino focaram:

1) A realidade em que vivemos e sua relação com as idéias filosóficas gregas de metafísica e fluência;
2) O estudo dos métodos matemáticos que tentam apreender os movimentos;
3) A fluência enquanto nexo conceitual do conceito de variável;
4) As relações: aritmética-álgebra e metafísica-fluência;
5) O conceito de variável e
6) Formação dos grupos para elaboração de projetos de ensino.

Para tanto, consideramos, por exemplo, questões que se fundamentam nos estudos de Karlson (1961:375).

O autor considera que a humanidade "vivia bem protegida, num mundo seguro, harmonicamente estruturado" há muito tempo atrás. Parecia que tudo estava bem organizado, fixo, pronto, acabado. Negava-se a interdependência e a fluência (Caraça, 1998) da realidade. As verdades eram tidas como absolutas. Será que essa idéia, a da metafísica, contrária ao movimento, ainda existe em nossa realidade?

A única verdade absoluta, a do movimento, da fluência, da transformação, só foi aceita pela humanidade a partir dos estudos de Copérnico e de Galileu, apesar de Heráclito brindar a humanidade desde os tempos mais remotos com idéias que contradiziam a metafísica. O segredo das idéias defendidas por Heráclito está na simples observação da vida. É aí que está o segredo da variação, que vai fundamentar os conceitos científicos, incluindo-se o conceito matemático de hoje.

Surge então, a necessidade de considerar a experiência como instrumento científico para o conhecimento de um movimento (Lima & Moisés, 1997; 2000).

Essa necessidade pode ser considerada um inesperado (Caraça, 1998) que contém a fluência e a interdependência (Caraça, 1998; Bohm, 1980; Kosik, 2002). Há mudanças conceituais na relação homem-realidade: desvendar o mundo maravilhoso do movimento.

Durante o Renascimento, a humanidade resolve aceitar as idéias de Heráclito e passa a se perguntar:

1) Como apanhar o movimento?
2) Como estudá-lo?

Nesse período, o homem passou de contemplativo, para experimentador. Incluiu em seus pensamentos a necessidade de experimentar para teorizar.

Alguns pensadores se destacaram em elaborar experiências que pudessem reproduzir movimentos da vida. Esses pensadores queriam controlar os movimentos.

Anotavam suas observações. Porém, só a experiência não basta. Fez-se necessário criar métodos científicos que permitissem registrar numericamente a experiência para melhor compreendê-la. Estamos falando de: Roger Bacon, Galileu Galilei e Leonardo da Vinci (Lima & Moisés: 1997; 2000).

Refletir, vivenciar e analisar atividades que relacionam o conceito de fluência pensado por Heráclito e sua relação com os conceitos algébricos, através de perguntas simples como:

1) "Você é o mesmo de um ano atrás?; de um mês atrás?; de uma semana atrás?; de um segundo atrás? por quê?";

2) "Quantas pessoas estão em sua casa agora?" por quê?;

3) "Olho uma pedra; fecho os olhos e vejo novamente a pedra? É a mesma? Por quê?" trouxe um certo desconforto a alguns professores, ao mesmo tempo em que proporcionou à maioria deles compreender de que fluência, movimento e relatividade falávamos.

A maioria dos professores-alunos começou a perceber a necessidade de se buscar métodos científicos, que tinham por objetivo tentar apreender para numeralizar e controlar os movimentos da realidade.

Percebemos que ao elaborarem suas respostas, individualmente, às perguntas colocadas, achavam-nas simples por demais. Porém, começavam a perceber que as respostas não eram tão simples e muito menos absolutas quando as discutiam nos pequenos grupos e, passavam a compreender a importância das mesmas no contexto da Matemática.

Havia professores que se perguntavam:

1) "Qual seria a resposta certa" para elas?
2) "Que relações aquelas questões teriam com o pensamento algébrico"?
3) Afinal de contas, o que viria a ser a "verdade"?
4) O que viria a ser uma resposta matemática verdadeira?
5) O que é certo e o que é errado, se temos que considerar as premissas?

Surpreendiam-se quando a maioria da classe afirmava que não haveria uma única resposta. Ao construirmos uma resposta para qualquer questão, consideramos as premissas, ainda que tenhamos um método científico para apreender o movimento estudado.

Os professores-alunos, não satisfeitos com a argumentação durante os encontros que se seguiram, ou ainda durante suas reflexões nos diários perscrutavam ainda mais as questões. Mostravam que a fluência e a permanência estão presentes no pensar humano, incluindo-se a área educacional. Porém, isso não queria dizer que concordavam o tempo todo com as mudanças decorrentes do movimento de seus próprios pensamentos.

Afirmavam, por exemplo " (...) que o estático é importante e que o estudo dele é essencial para uma compreensão mais aprofundada das coisas. Mas por outro lado, não se pode negar o movimento e o contexto" (Paula, diário: 24/08/01).

Consideraram que "(...) o mundo ainda tem uma visão metafisica. Essa visão metafisica é uma forma de acreditar que tudo acontece porque tem que acontecer e esses acontecimentos não mudam, talvez seja esse o motivo de continuar existindo a dicotomia na educação" (RTS, diário: 24/08/01). Por esse motivo, devemos "acabar com o conceito de produto acabado na matemática e implantar o hábito de pensar e questionar; mudar do estático para o dinâmico" (Everaldo, diário: 10/08/01).

Em sua "reflexão" sobre o conteúdo estudado, Andréa (2001) afirma:

> "Como é interessante e bom saber que a fluência teve início com a sociedade. A partir da evolução desta, houve uma evolução também nos processos matemáticos. Eu, que ADORO observar as sociedades, tanto as antigas quanto as atuais vejo o quão importante é a pesquisa, bem como perceber que todos os campos de conhecimento estão interligados, um depende do outro, é isso que nos falta ver (...)" (Andréa, diário: 30/11/01).

A aluna observa "numa matéria exata, o quanto ele tem e é flexível. Porém, para que isso fosse percebido, o 'monstro' da matemática foi aos poucos sendo desmascarado e agora, ao invés de conhecermos um monstro tenebroso, conhecemos um monstrinho inofensivo (...)" (Andréa, diário: 30/11/01).

Há nas falas individuais de Paula, RTS, Everaldo e Andréa o que Caraça (1998) denomina de princípio da extensão.

Os temas propostos na unidade didática, fluência e permanência foram analisados sob diferentes perspectivas: cotidiano, educação, formas de ver e ensinar a matemática.

As falas se apresentaram nas discussões dos grupos. Puseram o pensamento dos professores em movimentos diversos. A natureza da mobilidade do pensamento e sua relação com os conceitos estudados foram sintetizados por Paula (2001), a partir de questões que envolviam a metafísica e a sua ação pedagógica:

> "No início da aula ficamos no grupo tentando organizar a idéia do nosso projeto... . 'Até que ponto o pensamento dos alunos é metafísico?' Foi muito legal ficar imaginando como as crianças reagiriam. Fiquei pensando como as crianças da turma onde estou fazendo estágio, lidariam com essa pesquisa. A turma não trabalha matemática em sala. A pesquisa ficaria muito 'jogada' pras crianças, instigaria e estacionaria. Então, de que adianta aplicar essa pesquisa

> ali? Será que eu consigo pensar em um projeto um pouco mais amplo para que a matemática e as reflexões matemáticas não sejam apenas pontuais? Conversei com a professora do estágio da turma e decidimos elaborar um projeto de construção de brinquedos e jogos a partir de sucata. Agora penso ... Será que dá pra tentar relacionar os dois projetos? Os brinquedos e a reflexão da metafísica. Vou pensar nisso com mais carinho durante a semana... Tenho um pouco de medo de instigar a turma, que não tem trabalhado matemática, e não levar adiante as reflexões. Talvez fosse melhor manter o projeto com o grupo e desenvolver uma coisa diferente com as crianças, não incluindo-as no projeto. Tenho também um pouco de receio quanto à professora, que não tem me dado nenhum tipo de abertura dentro de sala. Caso tenham sugestões, sintam-se à vontade para relacioná-las aqui" (Paula, diário: 21/09/01).

A partir do segundo isolado, a maioria dos professores-alunos manifestaram o pensamento flexível a partir da relatividade da verdade e dos diversos conhecimentos, foram se destituindo do medo de se expor, aceitaram o desafio de (re)elaborar suas respostas a partir das discussões, começaram a entender os conceitos de fluência e interdependência presentes tanto nas atividades como na realidade.

Fizeram as seguintes elaborações e relações:

Isolado II			
Unidade didática: Fluência e permanência			
Atividades de ensino	**Fontes**	**Relações estabelecidas entre o conhecimento dos professores e os conceitos algébricos presentes nas atividades de ensino**	**Elaborações feitas pelos professores do Ensino Fundamental a partir da análise das atividades de ensino**
- metafísica; - fluência; - método matemático para estudo do movimento	- Aula: a) produção de mapas conceituais; b) análise de atividades (individual e coletiva); c) elaboração de projetos de ensino d) auto-avaliação - Diário de campo	- conhecimento científico e matemática; - metafísica e matemática; - fluência e matemática; - metafísica e movimento no conhecimento científico; - pensamento aritmético e metafísica; - pensamento algébrico e fluência; - dinamicidade do número e dinamicidade da vida; - produção de texto e dinamicidade; - dinamismo da álgebra e dinamismo das palavras; - desenvolvimento do pensamento e busca da razão; - desenvolvimento do hábito de pensar e análise; - desenvolvimento do pensamento matemático e processo evolutivo.	- faz uma (re) leitura de Platão; - percebe que há necessidade em estudar o estático para compreender com maior profundidade as coisas, sem a negação do movimento e da contextualização; - faz críticas ao ensino de matemática e à escola: cristalização do pensamento; - tem dúvidas quanto à "nova" concepção de matemática que está sendo apresentada; - analisa a oportunidade em vivenciar o passado, refletir sobre o mesmo e perceber que o mundo ainda tem uma visão metafísica; - analisa a dicotomia na educação: metafísica e fluência; - define os conceitos de número manual e algorismo; - entende que faz-se necessário despertar a consciência do indivíduo desde criança na pré-escola; - questiona a aversão que a maioria dos alunos têm em relação à matemática, uma vez que ela é histórica e cultural; - não percebe os conceitos matemáticos no texto: autolocaliza suas dificuldades; - percebe como a figura evolui do conceito de número; - sente, ao mesmo tempo, tristeza e alegria ao começar a ter uma nova visão de matemática; - surpreende-se por ser tão participativa em aulas de matemática; - faz críticas às dinâmicas das aulas; - acena desinteresse pelas aulas apesar de considerar seu crescimento pessoal e intelectual; - percebe que, até aquele momento, não há aplicações do conteúdo estudado na Educação Infantil; - tem dificuldades em aceitar as diversas respostas que são apresentadas no decorrer das discussões; - entende seus próprios conflitos e dificuldades: autolocaliza seu desconhecimento.

Isolado III: A variável e o campo de variação

Neste isolado procuramos discorrer sobre os conceitos de variável e campo de variação, a partir de questões que tratam do conceito de número.

Aqui, as atividades têm como objetivo estudar a relação que ocorre entre aritmética e álgebra, a partir das idéias filosóficas metafísica e fluência, bem como estudar os nexos conceituais: variável e campo de variação presentes nas álgebras não simbólica e simbólica.

Partimos do pressuposto que a aritmética nos ajuda a numeralizar determinados movimentos quantitativos, porém, há na realidade movimentos que, de imediato, não podem ser representados a partir do "número manual".

Assim, podemos perguntar, juntamente com Paula (2001):

> "(...) O que é número manual? O que é número falso? Todos os números variam? Todo número que varia tem uma 'regra' de variação ou variam aleatoriamente? Será que quando definimos como ocorre a variação provocamos fixidez no número (quantidade)? Se o conceito de cada um (sobre ciência, sobre álgebra, sobre outras coisas) também é variável, como podemos 'conversar'? Democraticamente, uma das formas ganhando de, e prevalecendo outra? Ou como? Será que cada um pode simplesmente manter sua forma de pensar, com sua lógica, seu ponto de vista? É legal a idéia de variação da temperatura (...) tem-se várias formas de medir uma mesma temperatura e elas estão corretas; uma não nega a outra. Acho que a reflexão do nosso grupo resume bem os meus questionamentos: o que é ciência? Temos as ciências exatas, as ciências humanas (...). E, além disso, temos, no fazer ciência, a visão de mundo de cada um. Será que é ciência tudo aquilo que se repete independentemente do cientista etc.? (...)" (Paula, diário: 14/09/01).

"O 'Número manual' é a compreensão de que o número só existe a partir da contagem, isto é, na forma de numeral e, portanto, visível, fixo, imutável, podendo ser 'pego com as mãos e visto com os olhos'" (Lima & Moisés, 2000: 19).

Sônia (2001) diz que "o número manual é contrário ao movimento. É a idéia de que o número existe quando ele é fixo. Na nossa mente, sempre vem a idéia errônea de um número rígido, fixo, mas sempre há a possibilidade do movimento, da variação (Sônia, diário: 14/09/01".

Sônia é uma das poucas alunas que de imediato relaciona o conceito de movimento estudado ao número manual. De certa forma, (re)elabora a definição de "número manual" feita por Lima & Moisés (2000).

A definição feita por Sônia auxiliou a classe a analisar as questões colocadas acima por Ana Paula (2001), a partir das frases:

1) Viajaram no meu carro cinco pessoas;

2) Alguns alunos chegaram atrasados;

3) Metade dos eleitores votou nulo;

4) A população de São Paulo é muito numerosa;

5) Naquele ônibus cabem dois times completos de futebol;

6) Remilton tem trinta e quatro anos;

7) Aparecida tem a metade da idade de sua mãe;

8) São dezesseis horas.

A classe definiu que estamos diante do movimento numérico, quando não temos o numeral explícito, o "número manual". Quando temos dúvida do valor exato. Quando não podemos "pegar o número com as mãos" (Lima & Moisés, 1997; 2000).

A partir dessa definição, as frases de número: 02; 03; 04, 05 e 07 foram consideradas pelos professores-alunos, indicativas de movimento numérico, enquanto que as frases de números 01, 06 e 08, não. Porém, nem todos concordavam que a frase de número 05: "Naquele ônibus cabem dois times completos de futebol", indicava movimento numérico.

Um dos grupos interferiu nas discussões da classe, com a seguinte argumentação: se levarmos em conta apenas o item "dois times", não temos movimento numérico, pois ao falarmos dois times de futebol, automaticamente temos um número fixo, um "número manual" (Lima & Moisés, 2000) que é 22. "Para a FIFA – Federação Internacional de Futebol, um time de futebol deve ser constituído por 11 jogadores". Porém, se levarmos em conta a capacidade do ônibus e a frase enunciada, ao analisarmos o verbo "caber", podemos perceber que há indicação de possibilidades, levando-nos a pensar em um determinado campo de variação, indicando assim, um movimento numérico.

Entendemos que o interessante dessa questão está no fato de que quando o grupo refletiu individualmente, dos quatro componentes, três deles responderam que a frase não indicava movimento numérico. No entanto, após a discussão "calorosa" ocorrida entre os membros, se fez necessário considerar mais uma possibilidade, a de movimento numérico.

Três deles, acharam por bem, (re)elaborar suas respostas e entenderam que deviam trazer as dúvidas para que fossem refletidas pela sala toda. Para o relator do grupo, o movimento analisado varia, uma vez que "no ônibus cabem x pessoas, mas x pode ser maior ou igual a 22 pessoas".

A partir da argumentação, boa parte da sala passa a defender que falar em time completo de futebol é falar em 11 pessoas, logo, o número é fixo, não indicando movimento numérico. Porém, há de se destacar que para alguns alunos, essa idéia de que um time de futebol tenha necessariamente 11 jogadores, é arbitrária, pois deveria se considerar outras pessoas que também fazem parte do time como, por exemplo, o treinador, ou ainda outros tipos de futebol. Há variação inclusive na palavra futebol. De que futebol estamos tratando? Nesse sentido, deve-se considerar que a frase indica movimento numérico ou mudar a frase para que se saiba de que futebol, especificamente, se fala.

Enquanto mediadora da discussão, tendemos a afirmar que a frase não indica movimento numérico à medida em que a quantidade de jogadores, incluindo ou não o técnico, o treinador, inclusive os reservas, tem como fundamento um número fixo que quase consigo "pegar" com as mãos. Independentemente da qualidade de futebol que estamos tratando, a quantidade de pessoas é explícita. Basta apenas uma contagem simples para identificá-la.

Ao analisarmos a capacidade do ônibus, a resposta é semelhante porque existe um número "fixo" de lugares no ônibus e ainda, que os passageiros fiquem em pé, podemos fazer rapidamente uma contagem direta, sem necessariamente recorrer ao pensamento de fluência. A solução desse problema pode ser elaborada a partir de uma contagem direta tal como indicam as frases de número 01, 06 e 08.

Há nessa discussão a necessidade de se pensar algebricamente. Alguns grupos, para pensarem algebricamente recorreram à representação. Utilizaram-se da variável letra "**x**" para poderem compreender melhor, por exemplo, as diferenças entre as frases 01 e 03. Só a partir da representação da variável letra "**x**" é que conseguiram compreender o objetivo das atividades.

Aa falas dos alunos presente no episódio mostra o quanto o pensamento está impregnado de representação. A representação antecede o pensamento. Enrijecendo-o. O movimento do pensamento fica truncado pela representação da letra "**x**".

Os alunos procuram elementos perceptíveis do conceito (Davydov, 1982) nas expressões, para primeiro representá-las formalmente e só após a representação, pensar se estamos ou não diante de um movimento numérico. Esse fato faz com que a representação seja antítese do movimento.

O conceito de variação contém a relatividade e a interdependência. Contém a dependência. A dependência está associada às premissas estabelecidas (Caraça, 1998; Bohm, 1980) que, por sua vez, estão associadas ao campo de variação, a valores de mínimo e máximo.

Esses conceitos, campo de variação, variável, interdependência e fluência foram apresentados à classe a partir de novas questões como as que se seguem:

1) Qual a sua idade?
2) Quantas pessoas podem ser transportadas num fusca?
3) Quantas pessoas estão em sua casa agora?
4) Quantos alunos há na sua classe?

5) Que horas são?

6) Qual o preço de um pãozinho?

7) Quantos são os jogadores de um time de futebol?

Surgem aí, novas dúvidas, hesitações, inesperados, dilemas (Caraça, 1998), ao respondê-las.

Segundo Andréia (2001):

> "Com a discussão realizada ao final da aula percebi que mesmo no grupo não havíamos percebido a questão da variação na atividade 11 da apostila. É engraçado, pois mesmo estudando a variação em diversos momentos com a reflexão é que vem à tona como ainda estamos presos ao número manual ou físico. Como é difícil percebermos a **relativização**! Questão importante para o ensino da álgebra que foi debatida: acredito que é pertinente refletirmos sobre este ensino somente ligado com a resolução de equações, o qual busca resolver o valor da incógnita transformando em um número manual, ou seja, perde-se toda a variação" (Andréia, diário: 14/09/01).

A atividade 11 da apostila de que fala Andréia (2001) é composta pelas sete questões acima enunciadas que tratam da variação quantitativa. Ao respondê-las, os grupos tiveram que considerar novamente os conceitos de fluência e interdependência discutidos nos isolados anteriores.

O grupo de Andréia prefere pensar sobre a resolução de equações, pois ao resolvê-las, esquecemos a variação. Congelamo-la por um pequeno instante.

Ao pensar as questões de forma individual, os professores-alunos acreditam que todas as respostas são exatas, porém, ao considerarem, novamente a definição feita por Sônia (2001) sobre número manual e movimento, percebem que há dentro da própria permanência do número, variação, porque existe o depende.

No que diz respeito ao preço de um pãozinho, por exemplo, não temos mais certezas. Hoje, podemos comprar pão por quilo, em pacotes ou ainda, por unidade. O preço de "um" pãozinho é arbitrário. Depende de qual "pão" estamos falando, da grandeza que estamos utilizando no momento da compra.

Quando analisamos o número de pessoas que podem ser transportadas em um fusca ou que estão em nossa casa, nesse instante, também não temos certeza. Temos apenas uma hipótese. Partimos de premissas.

A solução a questões tão simples está associada à lei de dependência, cujos fatores são alheios à nossa vontade, ao mesmo tempo em que estão associados à interdependência, pois tudo tem a ver com tudo.

Ora, se tudo está em movimento, como responder exatamente a minha idade? O número de alunos da classe? Que horas são? Quantos são os jogadores de um time de futebol?

Por incrível que pareça, para responder às questões temos que fazer "isolados" (Caraça, 1998). Temos que "congelar" os instantes, senão não seremos capazes de responder a nenhuma das perguntas. Novamente, as respostas estão dependentes das premissas, são relativas, precisamos do pensamento flexível.

Ao assumirmos que a realidade é fluente (Bohm, 1980; Caraça, 1998), como apreender e escrever numericamente uma quantidade que é e não é ela? Como escrever numericamente uma quantidade que ao mesmo tempo em que está, não está? (Lima & Moisés, 1997; 2000).

Um dos primeiros povos a sentir necessidade de superar o "número manual" foi o egipcio. Grandes construtores, vivendo numa sociedade complexa, com grandes centros urbanos, os egípcios lidavam com inúmeros movimentos e, portanto, com múltiplas formas de variação quantitativa (Lima & Moisés, 2000).

Analisemos a atividade de ensino proposta aos professores-alunos que considera a necessidade da civilização egípcia em numeralizar o desconhecido, em tentar apreender para numeralizar e controlar movimentos da vida.

Estamos há quatro mil anos atrás. Os escravos estão trabalhando, carregando pedras para a construção da pirâmide do faraó. Na tenda do arquiteto Amon Toado, encarregado geral da obra, chega o chefe do depósito de pedras:

- Mandou-me chamar, senhor?
- Sim, mandei, Tuc Anon. Preciso saber quantas pedras temos no depósito para levantar a coluna mestra da pirâmide.
- Temos 60, senhor.
- Quantas pedras os escravos já colocaram até hoje?
- 12, senhor.
- Tudo bem, Tuc Anon, pode ir embora.
- Com sua permissão, senhor.

Amon Toado virou-se para os seus papiros e pensou:

- "Pois é, colocamos já 12 pedras na coluna mestra. Temos, no depósito, 60 pedras que podem ser usadas nessa coluna. Acontece que o faraó ainda não se decidiu qual a altura de sua pirâmide. Dessa forma não posso indicar quantas pedras no total terá a coluna mestra. Porém eu preciso deixar escrito aqui no projeto a altura da pirâmide para que os encarregados da obra fiquem com os dados registrados e não se confundam. Esse é o meu problema: como vou escrever a altura da coluna, considerando as 12 pedras já colocadas, as 60 pedras do depósito que podem ser usadas todas ou não, e a altura que eu ainda desconheço? Como escrever isso de forma matemática, quer dizer, da forma mais simples possível e utilizando a linguagem das quantidades, isto é, a linguagem numérica?"

Pois é, pessoal, temos aí o problema do arquiteto das pirâmides:

Como escrever, utilizando a linguagem numérica, uma frase onde apareça um número desconhecido?

Reproduzimos a seguir, uma das discussões ocorrida em um dos grupos.

As questões levantadas sintetizam as dúvidas que apareceram nos demais grupos enquanto tentavam responder à questão do problema: **Como escrever, utilizando a linguagem numérica, uma frase onde apareça um número desconhecido?**

Diálogo ocorrido em um dos grupos

Aluna R: Quantas pedras?

Resposta dos alunos do grupo: Vai depender da altura da pirâmide.

Aluna B: Gente, por incrível que pareça não consegui resolver esse problema. Cheguei à conclusão que não tenho pensamento matemático.

Aluno C: Qual é o máximo que podemos colocar?

Resposta de A e B: 60

Aluno C: Qual é o máximo de altura?

Resposta de A e B: 72

Aluna B: Essas 60 podem ser usadas todas ao mesmo tempo?

Aluna D: A altura no mínimo é 12 mesmo e vai variando mas não no infinito; só até cobrir os 60 que tem no estoque. Então, chamando de **h** a altura a gente escreve **h= 12 + x** e **x** varia até 60.

Aluna B: Ainda varia... Deixa de ser esnobe! Que 12 + 60 é altura eu consegui. Mas não consegui colocar ela variando...

Altura = 60 + 12

Aluna P: O total não pode passar de 72. Assim:

h		**sobras**
(12 + x)	+	(60 – x) = 72

h= 72 – (60 – x)
h= 72 – 60 + x
h= 12 + x

Educando o olhar

A **aluna R** dá o tom da discussão. A pergunta do problema é: **Como escrever, utilizando a linguagem numérica, uma frase onde apareça um número desconhecido?** e não **quantas pedras?** Os demais alunos não percebem o equívoco de **R** e a **aluna B** chega à conclusão de que não tem pensamento matemático.

O grupo tenta encontrar a solução a partir de uma altura mínima e altura máxima, porém, no problema, o faraó não definiu nenhuma das duas alturas.
Há de se considerar ainda que o problema pede uma **frase**. A **aluna D** sabe que existe variação tanto na altura **h** e em **x**. Há dúvida no número 60: **essas 60** e **os 60 que tem no estoque**. Apesar disso cria uma fórmula para **h** onde **x** varia até 60.

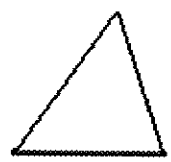
Ao mesmo tempo, a **aluna B** fixa a altura em **72**. Sabe que altura varia, mas não consegue mostrar onde está a variação.

A **aluna P** alerta que o total não pode passar de 72 e apresenta duas fórmulas: para **h** e para as **sobras**. Sugere que seja feita uma adição entre as duas fórmulas. A partir de manipulação algébrica cria uma fórmula para **h** que confirma a primeira fórmula que havia criado. Não resolve a adição que sugeriu.

Aluna B: Pensei assim...

A altura compõe um triângulo. Tá certo.

é matemática



e tem o **x**; as pedras que não sei... Então escrevi: **12 + x**.

Mas o meu colega diz que isso é a altura: **h= x + 12**

Verificar a equação para a altura 100 com 60 pedras

$H = x + 12 \longrightarrow 72$
$100 = x + 12 + 60$
$100 = x + 72$
$- \quad x = 72 - 100$
$x = 38$

$72 \leq h \leq 100$
$72 \leq x + 12 \leq 100$
$x + 12 \geq 72$
$x \geq 60$

$x + 12 \leq 100$
$x \leq 88$

Diante do problema, quantas pedras faltariam?

Agora é a vez da **aluna B** apresentar sua solução. Usa um triângulo retângulo e ressalta que triângulo é matemática e tem **x**. Não sabe o total das pedras e cria uma fórmula: **12 + x**, porém, tem dúvidas quanto a essa fórmula, uma vez que seu colega afirma que a fórmula que escreveu é da altura.

De repente, surge a necessidade de se verificar a validade da **equação** para altura 100 com 60 pedras. Não se explica de onde vieram tais valores. Há ainda o aparecimento de uma nova letra **H** e um valor para **x**.
Manipulam-se os símbolos algébricos e encontra-se um valor para **x**.
Em seguida, o grupo cria expressões com desigualdades. Os alunos se perdem nos valores encontrados e alguém pergunta novamente, tal como a **aluna R** no início da discussão: quantas pedras faltariam?

No episódio acima, apesar das discussões, o grupo não chega a nenhuma solução e nem percebe que a pergunta era outra. Isso só vai acontecer na discussão com a classe, após a apresentação de todos os grupos.

Durante as discussões que ocorreram nos pequenos grupos percebemos a tendência dos alunos em resolver uma equação, em achar valores numéricos para os valores desconhecidos. Para isso utilizaram-se de manipulações algébricas.

Prenderam-se novamente aos elementos perceptíveis do conceito (Davydov, 1982). O tema da atividade envolvia valor desconhecido. Tradicionalmente, a expressão "valor desconhecido" está relacionado com equação, com incógnitas. Os alunos sabem que há algo a descobrir e que, ao mesmo tempo há variação a considerar. Mas o que?

Os juízos (Caraça, 1998) emitidos pelos grupos, a partir da álgebra simbólica que tiveram enquanto estudantes, não relacionam o problema ao conceito de função.

Enquanto emitem seus juízos, esquecem-se de analisar alguns itens extremamente importantes para a solução do problema:

1) O problema se passa no contexto da civilização egípcia, motivo pelo qual a questão envolve a escrita de uma frase;
2) A relação de dependência existente entre o número de pedras e a altura;
3) A altura está indefinida;
4) Há necessidade de se estabelecer um campo de variação para a altura;
5) Há necessidade de analisar as condições de existência do problema: as premissas.

Ao analisarmos as discussões ocorridas nos grupos com a classe, prestemos atenção nas reflexões de Bila (2001):

> "Por que é tão importante para o pensamento matemático a criação de uma linguagem própria? O pensamento matemático tornou-se, no decorrer da história da humanidade, um componente fundamental na vida do homem. Dessa maneira, sua própria evolução exigiu uma linguagem própria, para poder ser entendida por qualquer pessoa, isso porque a linguagem retórica fica sujeita a interpretação, que além de variar de pessoa a pessoa, vai variar os significados de acordo com a região, pela mudança de linguagens, de dialetos. Quanto à aula: ainda estou confusa com alguns conceitos, e tenho certeza que o meu aprendizado de matemática foi bastante precário. Atividades que observo a

classe fazer tranqüilamente, encontro muita dificuldade, o que me deixa, muitas vezes, angustiada. É claro que as atividades tem me feito pensar muito, mas, ainda assim, acho que deixo a desejar" (Bila, diário: 05/10/01).

Por outro lado, a atividade mostrou para Coração (2001) que a matemática em linguagem escrita:

"(...) pode ser ambígua e como devemos ter cautela na escrita portuguesa da matemática. Notei como a vírgula, parênteses, ou seja, pontuações em geral, podem transformar o resultado matemático e, às vezes não damos a devida atenção e importância a isso. Quantas crianças podem ter interpretado de diversas maneiras um exercício mal escrito, estando certas, mas julgadas como erradas?" (Coração, diário: 19/10/01).

É a partir do isolado III que as elaborações dos professores-alunos se remetem a uma análise mais profunda sobre o erro dos alunos, a importância da linguagem escrita, a relação desta com as diversas áreas de conhecimento e a necessidade de se criar uma linguagem própria para a matemática, incluindo-se aí, a linguagem algébrica.

O pensamento flexível dos alunos se manifesta quando a maioria deles começa a reconhecer e a (re)pensar seus próprios erros. A partir daí começam a tolerar as ambigüidades e inquietudes que aparecem nas discussões. Há tolerância com o erro do outro.

Isolado III			
Unidade didática: A variável e o campo de variação			
Atividades de ensino	**Fontes**	**Relações estabelecidas entre o conhecimento dos professores e os conceitos algébricos presentes nas atividades de ensino**	**Elaborações feitas pelos professores do Ensino Fundamental a partir da análise das atividades de ensino**
- conceito de variação; - número desconhecido; - campo de variação	- Aula: a) produção de mapas conceituais; b) análise de atividades (individual e coletiva); c) elaboração de projetos de ensino d) auto-avaliação - Diário de campo	- função e conjunto numérico; - infinito-vida-movimento; - linguagem matemática e movimento; - algoritmo e informática; - função e informática; - variação e número manual; - regras de variação e variação aleatória; - definição das regras de variação e "fixidez" do número; - variação de temperatura e medida; - variação e conhecimento científico; - movimento e metafísica; - ciência e referencial	- define os conceitos de variável e função; - começa a relacionar o conceito de função com a sua área profissional; - tem necessidade de avaliar a reflexão pessoal que faz a partir das discussões feitas no grupo; - apresenta dificuldade em perceber a relativização; - começa a ter necessidade em refletir sobre o ensino de álgebra; - levanta questões sobre o "como" conversar, se as pessoas têm interpretações várias sobre os conceitos de ciência, álgebra etc. O que é ciência? E ciências exatas? E ciências humanas?

Isolado IV: Álgebra não simbólica

Neste isolado tivemos como objetivo vivenciar e analisar atividades de ensino que tratam da: a) variável-palavra; b) variável-figura; c) variável-numeral. Estudamos os nexos conceituais da variável a partir dos trabalhos das civilizações egípcia e grega, nas figuras de Euclides e Diofanto.

Pensar sobre a linguagem matemática através da palavra, analisar o sentido da variável-palavra egípcia, o "ahá", em movimentos do cotidiano, analisar o sentido da "palavra-universo" e da "palavra-particular" e vivenciar as atividades de ensino propostas sobre o sentido das palavras trouxe aos professores-alunos a necessidade de se pensar com certa profundidade sobre o que vem a ser a palavra, o papel que esta representa em nosso contexto e o conceito de relatividade.

A "**palavra-particular** é aquela utilizada para descrever situações particulares, imediatas e fixas" (Lima & Moisés, 2000: 35), enquanto que a palavra-universo descreve situações mais gerais, generaliza. Temos uma tendência em particularizar as palavras.

Os relatos dos professores-alunos mostram o quanto foi difícil identificar em situações diversas o sentido da palavra-particular e da palavra-universo.

Citamos como exemplo, as atividades:

1) Qual é o sentido da palavra **altura**, nas frases:

   i) Aquele time de basquete só aceita jogadores com altura entre 1,70 m e 2,10 m;

   ii) A altura dele é 1,73 m; ou ainda,

2) Como escrever duas frases, uma utilizando **bonito** enquanto palavra-universo e outra enquanto palavra-particular?

Segundo Coração (2001)

> " (...) O conceito de 'UNIVERSAL' é muito amplo, dando margem a várias interpretações. A partir dessa aula, fico com um receio crescente em futuramente corrigir uma prova de matemática (por exemplo). Como poderei dar errado em uma questão, se a pessoa pode ter interpretado de maneira

> diferente da minha, com argumentos que poderiam justificar sua concepção? (...)" (Coração, diário: 19/10/01).

A palavra é ambígua. Não é à-toa que Hogben (1970) afirma que a transição da álgebra retórica para a álgebra simbólica pode trazer dificuldades até mesmo entre os matemáticos, ao traduzir problemas em linguagem vulgar usada pelo homem comum em sentença matemática. O contrário também é verdadeiro.

Para Sônia (2001), "a idéia da palavra particular vem sempre à nossa cabeça. Temos a mania de particularizar tudo, esquecendo o universo da palavra. Aquilo que é incontável é universal e aquilo que se enumera é particular (Sonia, diário: 26/10/01)".

Quando a palavra está no âmbito da matemática, Sônia entende que o inumerável e universal caminham juntos, enquanto que o enumerável é particular.

A matemática se debateu durante anos com os conceitos de comensurabilidade e incomensurabilidade. Percebeu que a partir da palavra era muito difícil mostrar tal diferença, porém, não conseguiu, até hoje, se desvincular da palavra, ao tratar dos pensamentos numérico e algébrico.

Para tanto, criou linguagem própria. Criou campos numéricos diversos.

> A "**Linguagem matemática através de Palavras** é o primeiro passo da criação da linguagem especificamente matemática para o qual são escolhidas as palavras que mais direta e claramente expressam os movimentos numéricos" (Lima & Moisés, 2000: 28).

Sônia (2001) se pergunta: "(...) Por que é tão importante para o pensamento matemático a criação de uma linguagem própria?" E ela mesma responde: "acho que ficaria muito difícil, ou até impossível lidar com equações, funções etc., com a retórica... A própria necessidade fez com que se simplificassem as sentenças matemáticas e daí, a criação de sua própria linguagem (Sônia, diário: 28/09/01)".

Ao estudarmos a variável-palavra pudemos perceber que a palavra egípcia "ahá", que significa monte, montão (Lima & Moisés, 1997; 2000) foi utilizada enquanto expressão da variável em todos os grupos, somente quando o exercício solicitava de forma explícita que esta fosse usada.

Nas atividades de ensino que sugerem a criação de uma variável-palavra, apenas um grupo usa o "ahá". Há um outro que usa a grafia do som da letra **x** (xis).

Sílvia (2001) faz parte desse grupo. Afirma que trabalhou com a "variável palavra **x** (xis)". A partir desse pressuposto, a professora-aluna e seu grupo representaram as expressões: a) Um número acrescido de 7; b) O quádruplo de um número; c) A terça parte de um número; d) Um número diminuído de 4; e) 6 subtraído de um número; f) A quinta parte de um número acrescida de um e g) 4 subtraído do quíntuplo de um número, das seguintes formas: "xis + 7; 4 . xis; xis⁄3; xis – 4; xis – 6; xis⁄5 + 1; 5 xis – 4".

Nas discussões dos grupos, há dúvidas quanto à representação da expressão."Um número diminuído de 4". Porque há alunos que expressaram-na a partir da variável-letra, assim: "4 – x".

A partir da discussão, os alunos percebem que não conseguem pensar a palavra sem estarem conectados à álgebra simbólica, cuja síntese é feita a partir da variável-letra.

> "A aula foi bastante interessante: trabalhou a variável palavra e a variável letra. Nessa forma de trabalhar fica clara a precisão de uma linguagem própria da matemática e nos permite perceber os equívocos com mais facilidade, fazendo com que reflitamos sobre nosso raciocínio. Isso, por exemplo, impediria que 'tirássemos errado' num exercício matemático, sem saber o por quê" (Bila, diário: 19/10/01).

Ao ler as atividades propostas, inicialmente, resolvem-nas a partir da variável-letra, o "tradicional **x**" e, logo em seguida, trocam a representação pela palavra "xis".

Não conseguem pensar, muito menos criar uma palavra que dê a idéia de variação, de movimento, de fluência. Ao que parece, qualquer palavra que seja pensada ou criada, nos dias de hoje, terá sentido particular. Talvez a palavra-universo inexista.

Davis e Hersh (1988) afirmam que a retórica serve para nos convencer da verdade, ou ainda, que os matemáticos utilizam a retórica para fazer demonstrações. Logo, as palavras estariam a serviço da prova. Nesse sentido, a retórica na álgebra teria o papel de nos auxiliar a compreender as demonstrações e argumentações que se apresentam no cálculo de operações da álgebra simbólica.

Em nossa pesquisa, os grupos nos mostraram exatamente o contrário do que Davis & Hersh (1988) apresentam em seus estudos.

Conseguiram provar que quando estamos com o pensamento "congelado", no sentido de mecanizado, a usar o "tradicional **x**", fica difícil criar e imaginar palavras novas. A retórica fica limitada ao "xis".

Utilizou-se o símbolo, a variável-letra para compreender o que está se solicitando para somente depois se utilizar da palavra. Confirmou-se o que os autores dizem em relação à verdade matemática. Tal verdade "é considerada como estabelecida por meios que são a antítese da retórica (Davis & Hersh, 1988: 69)".

Aqui a antítese da retórica é o "tradicional **x**" que é substituído pela palavra "xis". O pensamento não consegue se desvencilhar do velho, para criar o novo. É o velho se sobressaindo à tentativa de pensar o novo.

Quando se trata de vivenciar e analisar atividades de ensino que tratam da variação, dois grupos manifestaram entender o significado da variação enquanto movimento numérico, extraindo corretamente das expressões que seguem, a parte retórica que indica variação:

1) A chuva de ontem derrubou o dobro das árvores que caíram no domingo;
2) Um número par;
3) Clarêncio andou, hoje, cinco quilômetros a mais do que anda todo dia;
4) Rute cantou metade da soma das canções do coral com 9;
5) A idade de Roberto é o sêxtuplo da idade de Marcos acrescido de 3;

6) Natalício dançou 8 subtraído do triplo de músicas que Severino dançou.

Os professores, tal como Euclides, perceberam que a palavra, na matemática e no pensamento algébrico, por causa da ambigüidade trouxe e traz muitas dificuldades para a representação dos movimentos. A partir da retórica fica quase que impossível pensar e criar uma palavra que represente quantidades desconhecidas.

Euclides preferiu desenhar a variação e representar as operações que envolviam adição e subtração a partir de segmentos de reta. Os segmentos representavam números conhecidos e desconhecidos. É por isso que as duas operações, adição e subtração são lineares na álgebra figurada. A multiplicação e divisão foram representadas a partir de áreas. Por isso, são operações planas (Lima & Moisés, 2000).

No contexto de Euclides há necessidade de se representar sentenças do tipo "duas vezes um número, menos um" ou ainda "duas vezes um número menos um".

No primeiro caso, onde a expressão tem uma vírgula temos uma sentença plana-plana e no segundo, linear-plana (Lima & Moisés, 2000: 56-7).

Faz-se necessário ressaltar que as denominações linear-plana e plana-plana não são usadas pelos historiadores de modo geral. Lima & Moisés (1997; 2000) são os primeiros autores, que se tem notícia, a fazer uso dessas expressões.

Para apresentar a problemática vivida por aqueles que faziam uso do pensamento de Euclides, solicitamos aos professores-alunos que inventassem uma "forma de representar a variação numérica" que não usassem palavras ou símbolos numéricos.

A partir de então, deveriam representar, por exemplo, (Lima & Moisés, 2000):

1) A variação da altura de uma pessoa de forma que ela ficasse imediatamente visível aos olhos;
2) Os conjuntos numéricos N, Z, Q e R;
3) O conjunto universo de um número que pertence ao conjunto dos números reais tal que é maior que -3;
4) O conjunto universo do movimento que represente a velocidade de um carro na Rodovia dos Bandeirantes;
5) O consecutivo par de um número (também par);

6) O antecessor ímpar de um número (também ímpar);

7) A soma de três números consecutivos.

Surgem novas questões: "O conjunto dos números naturais inicia-se no 0 ou no 1? Quando um número pertence ao conjunto dos números racionais ou reais e como representar a sua não inclusão? Ao representar a variação dentro do conjunto dos números reais não posso dividir a linha com auxílio de 'pauzinhos'?" (Mudança, diário: 31/10/01).

A classe escolhe a unidade □ (quadradinho) como representação da variação numérica.

Quando analisaram as diferenças e as semelhanças entre a unidade grega (segmento) e a da classe (quadradinho) os professores-alunos acentuaram a forma. A questão das dimensões linear e bidimensional não foi abordada.

As atividades mostram aos pofessores-alunos que assim como a palavra, o desenho também traz ambigüidades.

Aqui, percebemos o quanto necessitamos de um pensamento flexível para responder às questões de forma que não tenhamos medo de errar. Aqueles que têm medo de errar ficam assustados com as transformações das expressões e com as dúvidas que nos causam.

As dúvidas que essas expressões trazem nos dias atuais são idênticas às dos estudiosos de várias épocas: como saber quando estamos diante de um movimento que pode ser representado de forma linear-plana? E plana-plana? Como descobrir, a partir da figura já construída, quando esta representa um movimento linear-plano ou plano-plano?

A fala de Mudança (2001) sintetiza os relatos da maioria dos alunos: "tive muita dificuldade em classificar as sentenças em plana-plana e linear-plana (Mudança, diário: 23/11/01)".

Os matemáticos gregos também tiveram muita dificuldade. Durante muito tempo, expressões que envolviam essas duas idéias, linear e plano tiraram-lhes o sono.

Ao representar o movimento, a partir da figura, nem sempre temos certeza de que a expressão que o representa é linear-plana ou plana-plana, pelos seguintes motivos: a) é complicado definir a medida da variável como algo desconhecido; b) fica difícil interpretar a figura ao olharmos apenas o desenho; c) uma figura não indica um único enunciado; d) há dificuldades em representar, por exemplo, os enunciados "consecutivo par de um número (também par)" e, "antecessor ímpar de um número (também ímpar)".

Surgem questões do tipo: "como é que podemos representar essas expressões a partir dos segmentos"? "E na álgebra de hoje?".

Na álgebra de hoje definimos um número par pela expressão **2x**, o antecessor par de um número par, será **2x – 2** e o sucessor par de um número par, **2x + 2**. Ao mesmo tempo, um número ímpar pode ser representado a partir das expressões **2x + 1** e, **2x -1**, justamente porque, tanto o antecessor como o sucessor de um número par é um número ímpar. Temos aqui, um movimento regular formalizado a partir da álgebra simbólica. Porém, essa expressão formal, ou essas expressões formais não nasceram prontas.

A explicação lógica do porquê hoje usarmos essas expressões fez com que muitos professores compreendessem os conceitos de números pares e ímpares.

Uma boa parte da classe via essa seqüência da seguinte forma: para ver se o número é ímpar sempre volto duas unidades. Entre dois números pares há sempre um número ímpar.

Os professores acham que porque têm o domínio do simbólico, sabem muito, mas não sabem os nexos que fundamentam o simbólico. Percebem que não sabem ensinar os conceitos de par e ímpar porque trabalham somente em cima da percepção e não das generalizações. Exemplo: entre dois pares sempre há um ímpar.

Andréa (diário: 19/10/01) após a discussão afirmou que entendeu "(...) a idéia de par e ímpar (movimentos regulares), pois (...) como a maioria, aprendeu e ainda aprende a matemática decoradamente. Como foi interessante observar a linguagem escrita na matemática!"

Os saltos epistemológicos e que são decorados, conforme afirma Andréa acontecem porque, para expressar o retórico se dá o salto para o simbólico. Exemplos: o antecessor ímpar de um número; criar a imagem numérica; um número mais seu sucessor; o dobro de um número, mais um.

A linguagem geométrica dá várias interpretações simbólicas.

No contexto de Euclides, o somar unidades ou subtraí-las estava diretamente relacionado ao segmento, ao linear, porém, as multiplicações e divisões chamavam o plano.

Logo, vem a dúvida: na expressão "o dobro de um número acrescido de um", como deve ser esse um? Deve ser um quadrado de lado um, acrescido ao lado de um retângulo, por isso temos uma figura plana-plana? Deve ser uma unidade linear acrescida ao retângulo? Mas essa representação não equivale à expressão "o dobro do antecessor de um número"? Ou ainda um retângulo que contenha como medidas de comprimento duas vezes a unidade conhecida, acrescida de mais uma unidade conhecida, tudo isso multiplicado pela altura desconhecida? Mas essa figura não representa a expressão "o triplo de um número"?

Ao tentarmos representar a expressão "o dobro de um número acrescido de um", a partir da figura e dos critérios de Euclides, temos no mínimo, três opções. Apesar disso, ao mostrarmos a alguém a figura isolada de sua expressão, teremos que tecer muitas argumentações para convencer esse alguém de que a expressão representa o que queremos. Ao definir a expressão e a representação que queremos, usamos, obrigatoriamente, a retórica e os sinais gráficos, como exemplo, a vírgula.

Assim, a expressão "o dobro do antecessor de um número", se diferencia da expressão, "o dobro de um número, menos um".

Na primeira expressão, temos uma figura linear-plana, por se tratar do dobro de uma diferença, na álgebra de hoje, $\mathbf{2.(x-1)}$, enquanto que, na segunda expressão temos uma figura plana-plana por se tratar da diferença entre áreas, na álgebra de hoje, $\mathbf{2x - 1}$.

A história mostra que a retirada ou acréscimos de uma unidade causou muita polêmica entre os gregos. Provavelmente, durante muito tempo não se tinha clareza de quando usar o linear ou o plano.

Ao vivenciar e analisar atividades de ensino que tratam da variável-figura, a partir de atividades de ensino (Lima & Moisés, 2000) que solicitavam: a) a representação, num desenho, da variação limitada ou restrita da variável-figura; b) a representação, utilizando a variável-figura, em diversas sentenças, como por exemplo, "cinco subtraído do dobro de um número", a maioria dos professores teve medo de errar, evitando, dessa forma, se utilizar o pensamento flexível.

Andréa (2001) foi uma das poucas alunas que aceitou o desafio de dar mobilidade ao seu pensamento enquanto respondia às atividades. Ao final da análise concluiu: "podemos usar várias figuras, porém cada um terá uma interpretação da figura. É complicado usar só figuras. Há a necessidade de usar a escrita e/ou o próprio número" (Andréa, diário: novembro/01). E desabafou: "Ai, que difícil".

Assim, relacionar o "raciocínio numérico" (Lima & Moisés, 2000) com a figura, "implica a indisponibilidade em representar a variação, a flexibilidade do número" (Andréa, diário: novembro/01).

A partir de suas próprias dificuldades, os professores começam a entender o porquê dessa forma de escrever a variável, a partir da figura, teve que ser revista a partir do Renascimento. Essa linguagem não é prática, traz muita confusão e congela o movimento, congela a variação. É como uma fotografia que congela um instante particular. Apenas aqueles que participaram do momento em que a fotografia foi tirada conseguem, com certa facilidade, interpretá-la e compreendê-la.

Enquanto Euclides primava pela figura, vamos encontrar na própria Grécia, Diofanto, um matemático que achava que Euclides estava equivocado. Ao contrário de Euclides, Diofanto defendia que a variável estava relacionada com o número, logo, deveria ter outra representação: a variável-numeral.

A álgebra sincopada de Diofanto se diferencia da álgebra de Euclides, porque abrevia as palavras.

Essa discussão foi feita na sala de aula a partir de atividades de ensino.

Os professores-alunos, ao se depararem com a situação problema que envolvia a criação de uma variável que fosse "mais próxima possível do numeral", a "variável-numeral" (Lima & Moisés, 2000: 72) e, a partir dela representar expressões do tipo: a) a minha idade daqui há 7 anos; b) o antecessor do dinheiro que tenho no bolso; c) o par sucessor do dobro da minha idade; d) o triplo da idade que Eugênio tinha há três anos e e) o quadrado da altura de Luiz, perceberam que não conseguiam se desprender da palavra e do enxugamento das mesmas.

Mudança (diário: 30/11/01) diz que seu grupo, após muitas discussões criou o "QC (qualquer coisa)" para representar a "variável única". Assim, segundo Gabriela (diário: 30/11/01) que também faz parte do grupo as expressões acima têm as seguintes representações: a) QC + 7; b) QC – 1; c) QC .2 + 2; d) 3 (QC – 3) e, e) QC . QC.

O grupo criador da variável-numeral "QC" se aproxima da álgebra de Diofanto ao representar a "coisa" desconhecida. Porém, há algumas diferenças a considerar.

Diofanto foi buscar sua variável **S**, na palavra arithmos, que quer dizer número (Lima & Moisés, 2000) e criou um método para usar o mínimo de palavras, porque os sinais gráficos das operações ainda não haviam sido inventados. O matemático entendia que o desconhecido estava conectado ao conceito de número.

Já o grupo, vai buscar sua representação nas iniciais de uma palavra que indica algo desconhecido, se aproximando da representação dos europeus e árabes que usavam a palavra "coisa" para representar o desconhecido (Fraile, 1998; Hofmann, 1961). E esqueceram-se de que no contexto de Diofanto, os sinais gráficos ainda não haviam sido criados. Fizeram uso dos sinais gráficos atuais para representar as operações nas expressões solicitadas.

Os demais grupos, ao criarem a variável-numeral utilizaram palavras, letras gregas, o "tradiconal **x**" e ainda a figura.

Andressa (2001) usou a palavra **"quantia"** para representar "Número indefinido". Seu depoimento sintetiza a dificuldade dos grupos: "não consegui representar uma variável sem fugir da álgebra retórica, de representar através da letra **x**, por exemplo. Para mim foi muito complicado representar essa variável e chegar numa solução (Andressa, diário: 23/11/01)".

Assim, no isolado IV, pensamento flexível dos professores manifestou-se a partir da capacidade em tolerar ambigüidades e inquietudes.

Isolado IV			
Unidade didática: Álgebra não simbólica			
Atividades de ensino	**Fontes**	**Relações estabelecidas entre o conhecimento dos professores e os conceitos algébricos presentes nas atividades de ensino**	**Elaborações feitas pelos professores do Ensino Fundamental a partir da análise das atividades de ensino**
- variável; - variável-palavra; - palavra universal; - palavra particular; - campo de variação; - variável-figura; - sincopação de Diofanto; - álgebra retórica; - álgebra geométrica; - álgebra sincopada	- Aula: a) produção de mapas conceituais; b) análise de atividades (individual e coletiva); c) elaboração de projetos de ensino d) auto-avaliação - Diário de campo	- geometria-aritmética e introdução do zero; - álgebra geométrica e processos matemáticos; - álgebra geométrica e criação de linguagem própria; - pensamento matemático e evolução humana; - linguagem retórica e interpretações diversas; - palavra particular e universo das palavras; - álgebra retórica e movimentos regulares (generalização): noção de par e ímpar; - álgebra retórica e ensino de matemática; - álgebra retórica e sociedade; - álgebra retórica e trajetória profissional; - conjunto universo-conjunto variação e movimento; - conjunto particular e movimento; - linguagem matemática e linguagem coloquial; - variável-palavra e variável- letra; - matemática e linguagem escrita; - sinais gráficos e transformações matemáticas; - resolução de problemas (interpretações) e ensino.	- preocupa-se com os significados e interpretações na linguagem retórica; - enquanto profissional do ensino passa a se preocupar com as palavras que usa em sala de aula; - analisa a sociedade atual, onde o universal atravessa o particular e vice-versa; - enquanto profissional do ensino passa a analisar a sala de aula em que atua; - autolocaliza suas dificuldades durante a resolução das atividades propostas; - preocupa-se com o sentido ambíguo das palavras; - define os conceitos de conjuntos universal e particular; - analisa as diferenças que ocorrem entre a linguagem coloquial e a linguagem matemática; - começa a ter cautela ao escrever expressões matemáticas; - começa a prestar mais atenção nos sinais gráficos e matemáticos; - passa a preocupar-se mais enquanto as crianças resolvem problemas; - começa a preocupar-se com a avaliação no ensino de matemática e a ter receio em corrigir as provas; - incomoda-se com a possibilidade de não existir o certo e o errado; - apresenta dúvidas quanto à relatividade: quando ela é construtiva? Quando ela não é construtiva? - descobre que há possibilidades de existirem vários pensamentos em torno de um mesmo assunto; - percebe que a álgebra geométrica envolve a criação de linguagem clara, simples, abstrata e distante da realidade; - percebe que a álgebra geométrica traz ambigüidades; - preocupa-se com a relação material didático e linguagem matemática; - preocupa-se com o não entendimento do enunciado das atividades propostas. Há verdades individuais que são diferentes das verdades coletivas.

Isolado V: Álgebra simbólica

Neste isolado estudamos a álgebra simbólica, a partir da variável-palavra. As atividades tiveram como objetivo analisar e vivenciar atividades de ensino que sintetizam a palavra, a figura e o numeral na letra.

Para tanto, consideramos que no século XVI, definitivamente, a Matemática se liberta das palavras.

Há o surgimento da:

> "linguagem matemática moderna, que é conhecida como linguagem matemática simbólica. A matemática adquire símbolos próprios, (...) fica voltada especialmente para a expressão e representação do pensamento matemático. Linguagem Matemática Simbólica é a representação dos movimentos numéricos feitas com símbolos matemáticos" (Lima & Moisés, 2000: 75).

Essa linguagem traz mudança conceitual à álgebra, a partir dos estudos feitos por Viète e passa a ser denominada de álgebra simbólica.

A partir da vivência e análise das atividades que consideram a variável-letra percebemos que as discussões são menos "calorosas".

A variável-letra não permite ambiguidades. É síntese das variáveis palavra, figura e numeral.

Durante as aulas, os alunos-professores se limitam a discutir a dificuldade em compreender a representação de expressões do tipo: "8 subtraído do dobro de um número"; "8 diminuído do dobro de um número"; "8 tirado do dobro de um número".

A questão que fica é: no contexto da álgebra simbólica, os verbos subtrair, diminuir e tirar são sinônimos? Caso sejam, as expressões são idênticas. Caso não sejam, como explicar essas possíveis diferenças para as crianças?

Há necessidade da turma pesquisar sobre essas dúvidas. Buscam-se livros didáticos. Conversa-se com pessoas de outras áreas.

Durante as pesquisas, os alunos descobrem que a maioria dos livros didáticos procura não levar tal dúvida para a sala de aula, simplesmente abolindo as expressões desse tipo. Usa-se, ao invés do subtraído, do tirado, do diminuído, a palavra diferença.

Assim, as expressões "8 subtraído do dobro de um número"; "8 diminuído do dobro de um número"; "8 tirado do dobro de um número" seriam substituídas pelas expressões "calcule a diferença entre 8 e o dobro de um número" ou "calcule a diferença entre o dobro de um número e oito".

Nesse contexto, a palavra diferença parece ser palavra-universal. Não há mais dúvidas, nem discussão, nem dilema na classe, justamente porque os alunos utilizarão o minuendo e subtraendo da subtração, corretamente.

Há de se considerar ainda que nesse isolado houve a apresentação dos grupos no que diz respeito à aplicação dos projetos de ensino.

As atividades estudadas e vivenciadas pelos professores-alunos, foram adaptadas, vivenciadas e estudadas em outros locais, fora do contexto da Faculdade de Educação da UNICAMP, a partir dos projetos de ensino elaborados pelos grupos, durante todo o semestre.

Os temas escolhidos pelos professores-alunos se relacionam aos conceitos de:

1) Metafísica: idéia filosófica contrária ao movimento, à fluência;

2) Fluência e

3) Variação.

O público alvo que participou dos projetos foi muito variado: crianças a partir de quatro anos, incluindo-se aí, aquelas com dificuldades especiais; adolescentes; jovens e adultos.

A classe concluiu, durante a apresentação dos mesmos, que de modo geral, as crianças possuem o pensamento de fluência mais elaborado e aguçado do que o adolescente, o jovem e o adulto.

Os resultados mostraram que à medida que as crianças crescem e participam da cultura escolar, o pensamento flexível, fluente, dá lugar e espaço para o pensamento metafísico.

O pronto e acabado ou ainda a relativa permanência do conhecimento se torna algo extremamente verdadeiro para a maioria das pessoas.

É como se o adulto tivesse certeza de tudo, não admitindo, por exemplo, que no movimento da vida, nada é fixo, tudo se transforma, tudo *dévem*.

Essa constatação pôde ser feita a questões que pediam a simples observação da natureza ou ainda em questões que se relacionam com o movimento da própria vida. Uma dessas perguntas se relacionava com a cor do céu.

Foi comum observarmos que nessa questão, em específico, os adultos não admitem, por exemplo, que a cor do céu pode variar.

Quando se pergunta "quantas pessoas estão em sua casa agora"? as crianças usam a relatividade e a dependência. Aceitam a idéia de que o número de pessoas que pode estar em sua casa pode não ser aquele determinado por elas. Não se incomodam com isso. É natural para elas não terem certeza do número exato de pessoas que estão em sua casa. Utilizam premissas e a partir de premissas elaboram suas argumentações.

Para o adulto, necessariamente, existe uma única maneira ou fórmula que está relacionada ao número físico, ao numeral, que determina com exatidão a resposta da maioria dos problemas que são elaborados a partir dos conteúdos matemáticos.

No isolado V o pensamento flexível praticamente não se manifesta. O que aparece são apenas dúvidas que são esclarecidas na medida em que os professores pesquisam os diversos livros didáticos.

Isolado V			
Unidade didática: Álgebra simbólica			
Atividades de ensino	**Fontes**	**Relações estabelecidas entre o conhecimento dos professores e os conceitos algébricos presentes nas atividades de ensino**	**Elaborações feitas pelos professores do Ensino Fundamental a partir da análise das atividades de ensino**
- linguagem matemática simbólica; - campo de variação; - variável-letra	- Aula: a) produção de mapas conceituais; b) análise de atividades (individual e coletiva); c) elaboração de projetos de ensino d) auto-avaliação - Diário de campo	- atividades de ensino estudadas e projetos de ensino	- análise dos projetos elaborados.

O ensino de álgebra vivenciado pelos professores-alunos: a particularidade e a singularidade dos olhares

Neste item, apresentaremos e discutiremos as elaborações que os professores-alunos fizeram enquanto respondiam as cinco questões do questionário. Temos como intenção, aqui, analisar o lógico-histórico dos professores em relação ao conteúdo concreto da álgebra.

Os professores-alunos, participantes da pesquisa, enquanto cursavam o Ensino Fundamental e Médio resolveram questões como "ache o valor do quadradinho", "ache o valor das letras", ou ainda, estudaram as generalizações das propriedades numéricas como $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, freqüentes nos livros didáticos.

Mediante esse tipo de exercícios, os estudantes, por volta dos oito ou nove anos, são iniciados na álgebra simbólica. São inseridos em uma álgebra formal que contêm a síntese de um longo processo histórico.

De forma geral, os professores que lecionam no Ensino Fundamental apresentam problemas ou desafios que envolvem a idéia de incógnita, aos estudantes, com o intuito de desafiá-los a encontrarem os valores dos "quadradinhos" ou os valores das "letras", durante os primeiros anos de sua alfabetização matemática.

Há uma tendência em se priorizar um dos aspectos da variável, a incógnita. Tenta-se fazer nas escolas a relação entre aritmética e pensamento algébrico, a partir da resolução de exercícios que contém a incógnita.

Nos últimos anos, autores como Lins & Gimenez (1997), a partir das sugestões do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) elaboraram propostas de atividades que aconselham os professores a ensinarem aritmética, álgebra e geometria, de forma interligada, a partir das séries iniciais.

Os atuais Parâmetros Curriculares Nacionais partem do seguinte pressuposto: para que o estudante possa entender a álgebra simbólica faz-se necessário que os professores considerem, nas séries iniciais, a "pré-álgebra" (Coxford & Shulte, 1995).

Passam a idéia de que antes de se aprender a álgebra simbólica faz-se necessário ter prontidão algébrica, a qual supostamente se apresenta de forma "natural" no estudante, quando este passa a fazer exercícios que envolvem o conceito de regularidade.

Os exercícios apresentados, por sua vez, proporcionam ao estudante a possibilidade de fazer generalizações, a partir da aritmética. Essa prontidão, se apresenta nos primeiros anos de escolaridade dos estudantes.

Encontrar o valor de um número desconhecido e fazer generalizações a partir de seqüências numéricas e geométricas faz parte dessa prontidão conforme mostram os estudos de Souza & Diniz (1996).

Há nos livros didáticos das primeiras séries, uma preocupação em possibilitar aos alunos substituírem cada vez mais cedo o "quadradinho" pelas letras do alfabeto, pois é dessa forma que desenvolvemos o pensamento de generalização.

Propõe-se a alunos e professores, atividades que lhes possibilitem fazer relações entre aritmética, álgebra e geometria através do formalismo, do último estágio de abstração e de rigor, elaborado pelo pensamento, no que diz respeito a esses conteúdos.

Aqui o foco do ensino são as generalizações decorrentes das regularidades e não o movimento.

Ao mesmo tempo em que se tenta romper com a linguagem formal das estruturas algébricas da Matemática Moderna mantém-se o fundamento desse pensamento em propostas que primam pela Resolução de Problemas: o último estágio de rigor dos conceitos elaborados por Cantor, Viète e Euclides.

São os estudos de Kieran (1992) e Lins & Gimenez (1997) que mostram as dificuldades das crianças ao tentar compreender a variável, um dos nexos conceituais da álgebra simbólica. Apesar da prontidão esperada, os alunos de todo o mundo fazem os pesquisadores se perguntarem constantemente: por que os jovens não conseguem aprender o fundamental dos conceitos algébricos, o conceito de variável?

Os três pesquisadores citados acima afirmam que, apesar do currículo da maioria das escolas serem "recheados" de conteúdos algébricos, os alunos mostram que não os aprendem.

Quando aprendem a manipular os símbolos algébricos consideram a álgebra enquanto parte da matemática que substitui o número pela letra, ou ainda, a defini-la como sinônimo de equação, cuja redução pode obstruir a compreensão do conceito de função e do conceito de variável.

Nesse estudo tivemos a oportunidade de analisar alguns exemplos dessa aprendizagem.

Em atividades propostas pudemos presenciar discussões entre os professores-alunos a respeito dos significados de expressões do tipo $\mathbf{f(x) = x}$; $\mathbf{H = x}$; ou ainda, se a altura de uma criança pode ser ou não representada da seguinte forma: $\mathbf{0 < x < 1{,}5}$ onde $\mathbf{x \in R_{+}}$.

Apesar de já terem estudado essas representações algébricas muitos deles não compreendiam o que elas significavam, confirmando o que diversos autores apontam; poucos são os estudantes que entendem o papel da variável no pensamento algébrico. Grande parte dos alunos, se forma, sem reconhecer os três aspectos que podem ser assumidos pela variável: incógnita, parâmetro e variável propriamente dita.

Com os professores-alunos desta pesquisa, essa realidade não foi diferente. A maioria deles não se dava bem com a álgebra. Ao iniciarem o curso, muitos alunos afirmam que nunca a aprenderam a contento. Inscreveram-se na disciplina para ter a possibilidade de compreender o que até então não haviam compreendido.

Foi durante a primeira aula da disciplina que propusemos um questionário aos alunos, com o intuito de convidá-los a pensar sobre o ensino de álgebra que tiveram. Para tanto, sugerimos as seguintes questões:

1) Escreva o que você sabe sobre álgebra.

2) Como você se sentiu quando começou a estudar álgebra?

3) Que aspectos da vida você acha que a álgebra explica e que o número não explica?

4) Existe relação entre número e geometria? Explique.

5) Existe relação entre número, geometria e álgebra? Explique.

Analisemos as respostas dadas às questões propostas.

Antes de iniciarmos a leitura das respostas às questões, gostaríamos de chamar a atenção para um detalhe. Pelos mais diversos motivos, alguns professores-alunos entregaram o questionário com o curso já em andamento. Logo, há diferenças nas respostas a considerar, pois alguns alunos foram incorporando, de forma tímida, em suas respostas, idéias discutidas na sala de aula.

Escreva o que você sabe sobre álgebra:

"Parte da matemática que estuda os processos formais de operações (contendo números e letras)" (Adriane, 17/08/01)[48]

"Que ela usa letras para representar as variáveis" (Ana Carolina, 2001).

"Profundamente, quase nada. Tive que recorrer a uma enciclopédia para me inteirar um pouco do termo. É a parte da matemática que se vale de letras (variáveis) para auxiliar nas contas. Essas letras representam números que podem variar, desde que a sentença ainda seja verdadeira. São equações de 1° e 2° graus etc." (Lili, 17/08/2001).

"O que sei sobre álgebra é que até hoje não serviu para nada" (RTS, 17/08/2001).

"Tive pouco contato com a álgebra, apesar de ter estudado em pouco mais sobre o assunto para o vestibular. O que sei são somente expressões matemáticas estáticas e fixas, que não nos fazem pensar a matemática como uma ciência relacionada com o nosso dia-a-dia" (Dricme, 19/10/2001).

"Álgebra é substituir alguns números por letras ou símbolos para assim formular uma expressão algébrica que pode ser resolvida substituindo as letras ou símbolos pelos números dados" (SN_2, 17/08/01).

Educando o olhar

Ao definirem para si mesmas o conceito de álgebra que estudaram, Adriane, Ana Carolina, Lili, RTS, Dricme, SN_2 e Bila a relacionam com números, letras, conjuntos, operações, relações, equações, expressões matemáticas, ou ainda, como algo que não lhes serviu para nada. Não fazem nenhuma relação com a possibilidade da álgebra representar os movimentos da realidade fluente.

As definições apresentadas por Adriane consideram a existência de uma certa ligação entre os aspectos algébricos e os aspectos aritméticos. Para essas estudantes, os aspectos algébricos ampliam os aspectos operatórios formais que se apresentam na resolução de problemas aritméticos. Suas definições se aproximam da definição feita por Diofanto.

Em seu livro "Arithmos", Diofanto apresenta uma álgebra que tem lógica estritamente numérica (Klein,1968; Piaget & García, 1984), a qual está diretamente relacionada ao ente, ao objeto, ao número.

O contexto histórico no qual Diofanto estava inserido quando escreveu sua definição de álgebra não considera o aspecto mais geral do número: sua formalização que se apresenta nos diversos campos numéricos. E nem poderia ser diferente, pois a teoria mais geral do número só foi elaborada a partir de

[48] Adriane, Ana Cristina, Andréia, Andressa, Clécios, Everaldo, Sílvia e Sônia preferiram usar seus primeiros nomes na identificação dos diários de campo. Bila, Dricme, Lili , Mudança e RTS escolheram pseudônimos. SN_2 preferiu não se identificar. A denominação SN_2 foi escolhida por nós.

"Até agora era mais uma das coisas que se aprendia, mas sem saber onde iria ser útil; não considero que tenha tido o real aprendizado sobre ela e não teria outra forma de explicá-la a não ser substituindo letra por número" (Bila, 17/08//2001).

Cantor, no século XIX (Eves, 1987; Guillen, 1987).

A definição de Diofanto não considera as espécies que permitem a Viète compor o formalismo simbólico da álgebra no final do século XV: o número, sua numerosidade ou propriedades e seu aspecto geométrico (Klein, 1968; Piaget & Garcia, 1984). A sincopação de Diofanto permite apenas guardar um certo lugar que precisa ser preenchido por um número, tal qual o zero na aritmética (Ifrah, 1998).

É o entendimento desse formalismo simbólico que possibilitará à humanidade generalizar, através do conceito de função os movimentos regulares da realidade em que vivemos e da própria vida, sejam estes movimentos numéricos ou geométricos. Movimentos esses, que a partir do século XIX serão estudados e generalizados em qualquer área do conhecimento, como a física, a biologia, a história, a geografia, enfim, nas ciências de um modo geral.

Nesse período, há de se considerar o amadurecimento do formalismo geométrico descrito por Euclides, o formalismo algébrico descrito por Viète, o formalismo da teoria do número real descrito por Cantor, bem como a formalização do conceito de variável definido por Lejeune Dirichlet como "um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números" (Eves, 1997: 661).

Lili tenta explicitar para si mesma uma possível relação existente entre o conceito de variável e a álgebra. Em um primeiro momento considera que a variável pode assumir-se enquanto incógnita, apresentando o funcional do conceito de álgebra, parte da matemática em que se substitui letras por números, e nos auxilia a resolver as contas. Porém, logo em seguida, o que até então era definido pela estudante como aspecto funcional, passa a ser a própria definição de álgebra. Álgebra é equação do 1° e do 2° graus.

Embora tenham estudado aspectos da álgebra na resolução de equações, por pelo menos seis anos, durante os Ensinos Fundamental e Médio, as afirmações de Dricme e RTS de que a álgebra pode ser definida como expressão matemática dissociada do nosso cotidiano ou ainda como algo que se aprende sem saber sua utilidade, fazem-nos pensar sobre o ensino de álgebra apresentado aos estudantes todos os dias, em nossas escolas públicas e particulares.

Apesar dos currículos escolares do Ensino Fundamental, Médio e dos cursinhos brasileiros estarem "recheados" de álgebra, ao responderem a primeira questão, Lili recorreu a uma enciclopédia, Dricme fala do pouco contato que teve com o tema e Sônia não se considera apta para tratar do tema. A partir dessa resposta, Sônia não se arrisca a responder as demais questões.

Clécios define o conceito de álgebra a partir da História da Matemática e Andréia emite juízos sobre a relação algébrica, número desconhecido e número físico.

Lili, Clécios, Andréia e Silvia incluem em suas

"Eu não estou apta a responder tais questões, pois há muitos anos que não estudo matemática e não lembro nada sobre álgebra" (Sônia, 24/08/2001).

"Ramo da matemática que se desenvolveu a partir da necessidade, de um maior grau de abstração, capaz de ir além do conteúdo 'estático' de número. Ferramenta capaz de possibilitar o desenvolvimento de funções e análise matemática. Ramo muito desenvolvido no Oriente Médio, mesmo já quando da Baixa Idade Média Ocidental" (Clécios, 17/08/2001).

"Álgebra é uma forma de entender o

mundo, ela ~~nã~~ abandona o número, mas amplia a sua visão para uma visão de movimento. Por exemplo: Em uma sala tem **x** pessoas. A letra **x** é variável, pois a cada momento pode-se entrar ou sair pessoas dessa sala e ainda o **x** tem um número mínimo e máximo de pessoas nesta sala. Desta maneira o trabalho algébrico com os alunos deve iniciar com essas situações de movimento que o número físico não possibilita. A álgebra permitiu um avanço na construção das máquinas, reorganizou a matemática do final do século passado e início deste, com a criação das máquinas e no percurso da Resolução de Problemas insolúveis" (Andréia, 17/08/2001).

"A álgebra introduz o conceito de variável" (Everaldo, 24/08/2001).

"Álgebra parte da matemática que indica movimento, pois trabalha com variáveis" (Silvia, 10/08/2001).

definições a variável como responsável pela ampliação do conceito de número. O mesmo ocorre com Everaldo e Silvia.

As elaborações de Sônia, Dricme e Lili mostram o quão desconhecido é o termo álgebra, embora já tenham estudado álgebra elementar. Afirmam que não conhecem praticamente nada do tema.

O ensino que tiveram não lhes permitiu ter domínio sobre um dos conteúdos mais estudados nas escolas. O conteúdo algébrico representa algo em torno de 50% do currículo dos Ensinos Fundamental e Médio.

Ao que parece, as aulas que essas alunas tiveram até aquele momento não foram suficientes para convencê-las de um fator essencial: o pensamento algébrico compreende modos de pensar os movimentos do nosso viver.

Como você se sentiu quando começou a estudar álgebra?

"Ao estudar álgebra, recordo-me que a professora, em tom solene anunciava que iríamos adentrar 'um novo mundo cheio de possibilidades'. Anunciava uma palavra nova: **incógnita**, representada por **x** – e **x**, dizia ela, podia ser qualquer coisa, dependendo da ocasião. De início, parecia um salto no escuro – não houve um passo intermediário, não existiu um preparo, foi algo do tipo: 'em uma segunda-feira começou um assunto novo'" (Clécios, 17/08/2001).

Educando o olhar

A exemplo da questão anterior, a partir das falas dos professores-alunos, podemos perceber que a álgebra fica um pouco distante do cotidiano de suas vidas. É como se a álgebra fosse algo importante apenas no âmbito escolar.

Clécios afirma que a palavra incógnita, um dos aspectos da variável, é empregada pela sua professora como sinônimo da álgebra.

Podemos inferir que a definição feita pela professora de Clécios mostra que uma única palavra tem o poder de definir uma área do conhecimento matemático, extremamente ampla, como a álgebra.

A palavra incógnita refere-se a um mundo que trará muitas possibilidades à Matemática. Aqui, uma única letra de nosso alfabeto, o **x**, representará qualquer coisa, dependendo da ocasião. O aluno não tem muito claro o que vem a ser essas possibilidades, muito menos consegue relacionar tais possibilidades com um mundo novo. De que mundo fala sua professora? De álgebra?

Ao que parece, essa forma de ver a álgebra, não está muito elaborada para a professora de Clécios e se não está bem elaborada para ela, não ficará elaborada para os estudantes que estão adentrando na "imensa floresta matemática"[49] (Lima & Moisés, 1997).

Há de se questionar, quando a professora

[49] Expressão usada por Boyer e posteriormente por Lima & Moisés (1997).

afirma que a letra, a incógnita, representará qualquer coisa.

O que vem a ser essa qualquer coisa? Um campo numérico? Uma matriz? A área ou o perímetro de uma figura? A que qualquer coisa o pensamento de nossas crianças se remetem quando lhes apresentamos essa definição de álgebra? Aqui, a coisa e a incógnita são sinônimas.

Somos obrigados a nos lembrar da álgebra retórica de Al-karismi (Fraile, 1998; Eves, 1997; Smith, 1958). Porém, a forma de apresentação do pensamento algébrico para as crianças se fundamenta na álgebra simbólica de Viète.

As crianças não são convidadas a pensar nos movimentos algébricos a partir dos poemas, versos e prosas como propunha a álgebra de Al-karismi e sim a se apropriarem do pensamento algébrico a partir da simbologia proposta por Viète.

Talvez as crianças que também fomos, quando apresentadas ao pensamento algébrico dessa forma, perguntem-se: a que qualquer coisa a professora se refere?

No contexto árabe, o valor desconhecido, a incógnita, é representado pela palavra "coisa" e não pelo "tradicional **x**".

Em Al-karismi, como a matemática tem relações estreitas com a vida das pessoas, a "coisa" e a incógnita são algo quase que natural que se apresenta na linguagem comum, na linguagem materna das pessoas.

Busca-se descobrir o valor da coisa a partir de movimentos que se apresentam no contexto da vida árabe e isso parece não ocorrer na sala de aula em que Clécios estuda.

A professora, ao se referir a "qualquer coisa", de forma quase inconsciente se utiliza de um conceito histórico para justificar a nova dimensão que passará a tratar na sala de aula. Porém, tal conceito fica completamente descontextualizado dos movimentos da vida dos estudantes que assistem à aula.

Ao refletir sobre o modo como foi apresentado à álgebra, Clécios sente necessidade de uma referência, de uma preparação, de um passo intermediário que possibilite criar nexos entre o que vinha aprendendo até aquele momento de matemática e o que deveria aprender. Entre o conteúdo ensinado e o "assunto novo", sem o qual tudo não passaria de um salto no escuro.

Sem perceber, Clécios caracteriza a escuridão epistemológica a que o aluno é acometido ao aprender matemática. Não que a professora tenha se planejado para tanto. A reflexão do aluno legitima um dos resultados negativos de um ensino mecânico da matemática: aquele que justapõe o sujeito aos conceitos.

"Sinceramente, a matemática, na escola, foi tão sem sentido para mim que nem me lembro quando comecei a estudar álgebra. Parece que foi na 1ª série do 2° grau. Se foi mesmo nesse ano, lembro que tive muitas dificuldades e muita dúvida do por quê estava estudando aquilo. Parecia que não servia para nada" (Lili, 17/08/2001).

Lili faz um alerta para nós, professores de matemática. Mostra o quanto a matemática não lhe faz sentido e do quanto a álgebra não serve para nada.

"Eu senti quando comecei a estudar a álgebra: foi uma coisa distante entre a matemática e eu" (RTS, 17/08/2001).

"A matemática parecia ser mais difícil do que a apresentada antes. As letras facilitam o entendimento do aluno" (SN_2, 17/08/01).

"Faz muito tempo, não lembro. No entanto, matemática nunca foi um problema para mim" (Sílvia, 10/08/2001).

"Quando comecei a estudar álgebra, se me lembro, fiquei apavorada, pois, já não gostava da disciplina matemática em geral" (Adriane, 17/08/2001).

"O primeiro contato foi um grande susto. Com o tempo e o exercício, fui me acostumando com a idéia" (Everaldo, 24/08/2001).

"Quando comecei, realmente, não me lembro. Quando comecei neste curso, principalmente com a leitura do programa fiquei bastante assustada, ainda mais porque considerei que não seria capaz de colocar aqueles conteúdos dentro da minha cabeça, como: pensamento da fluência; numeralização do desconhecido; álgebra retórica, simbólica, gênese do conceito variável etc... Confesso que ainda acho extremamente difícil entender tudo isso, entretanto, pelo que vi nestas duas primeiras aulas, resolvi dar uma chance a mim" (Bila, 17/08/2001).

E RTS fala do distanciamento que havia entre a álgebra e ela.

Apenas SN_2 e Sílvia parecem não ter tido problemas com o ensino de álgebra que tiveram. Pelo contrário.

Para SN_2, aprender álgebra fez com que se relacionasse com a matemática de uma outra forma, mais fácil e Sílvia continuou a se dar bem com a matemática, apesar da introdução dos conceitos algébricos feita por seus professores.

Assim como Adriane, Everaldo, até se acostumar com os exercícios, mostra-se um pouco assustado quando entra em contato com a álgebra.

O não entendimento do que se está aprendendo, faz com que os professores-alunos se adaptem aos conceitos estudados, sem necessariamente entender para que servem.

Adriane, Bila e Everaldo mostram esse fato em seus escritos e é Everaldo quem nos permite analisar que, embora não entendam os conteúdos algébricos, encontram mecanismos para "sobreviverem" ao que não é entendido e compreendido.

Acostumam-se com a aplicação de regras nos exercícios resolvidos mecanicamente. Afinal, eles deixam cair no esquecimento o não entendimento do conceito.

Ao que parece, Bila, Everaldo e Adriane utilizam o lado memorístico do pensamento (Lima & Moisés, 1997). Procuram aplicar corretamente as regras nas atividades sem o menor esclarecimento de sua gênese. Nesse tipo de aprendizagem, prioriza-se apenas o fazer e o resultado.

O importante é apresentar o resultado correto para as atividades propostas. Aprender álgebra é uma tarefa e não uma atividade de ensino, já que a atividade de ensino deve ser entendida como ação formadora (Moura, 2001).

Quando o ensino é tomado como atividade, deve ser capaz de satisfazer as necessidades dos estudantes na busca do conhecimento. A necessidade dos estudantes deve estar em sintonia com as necessidades de sua comunidade de aprendizagem.

Para Leontiev et al. (1991), "o objeto de conhecimento é o conteúdo e sendo assim, é objetivo social tornado possível na sala de aula" (Moura, 2001: 158).

Pelos relatos dos estudantes, os conteúdos matemáticos aprendidos estão dissociados de suas vidas. Logo, essa dissociação faz o conteúdo algébrico, objeto do conhecimento, se tornar uma simples tarefa dissociada do objetivo social.

Através dessa dissociação, há a negação dos aspectos da vida, que acontece todos os dias no interior e exterior da escola. Os conteúdos algébricos não têm nada a ver com o movimento comum de vida.

Andréia, Dricme e Bila remetem-se, automaticamente, à disciplina que estão cursando. É

"Muito confusa, muitos debates em sala

de aula e muitos exercícios individuais ou em grupo. Não consigo acompanhar o raciocínio e acabo não entendendo. Dessa forma acabo achando a álgebra muito difícil e ela talvez nem seja" (Andréia, 17/08/2001).

como se o significado de aprender adquirisse um novo sentido. O que conheciam sobre álgebra antes de iniciarem o curso não aparece em suas respostas.

Bila não se lembra de como se sentiu ao começar a estudar álgebra nos dando a impressão de ter iniciado o estudo de álgebra a partir do momento que leu o programa da disciplina cursado em 2001.

"No início, achei que iria ser um pouco entediante pois pensei que seria abordada a álgebra do mesmo modo que aprendi. Até então não conhecia os outros enfoques da álgebra, pois a escola não me proporcionou tal possibilidade. Depois, quando fui vendo esses novos "caminhos" para se estudar a álgebra, confesso que me interessei e estou aprendendo bem mais do que imaginava" (Dricme, 19/10/2001).

O sentimento que Andréia desenvolve em relação aos conceitos algébricos parece estar relacionado às novas descobertas, enquanto que para Dricme, o tédio que se apresentava nas aulas de álgebra que teve enquanto estudante, desaparece. O tédio dá lugar ao interesse em aprender o que não conhecia.

O pensar sobre os nexos conceituais da álgebra: fluência, variável, campo de variação, álgebra não simbólica e álgebra simbólica, a partir de atividades de ensino traz novas possibilidades aos alunos, a ponto de Andréia começar a relacioná-la com outras áreas do conhecimento e Dricme elaborar críticas sobre o ensino que teve, até então.

Andréia fala de um mundo novo. Podemos inferir que a fala de Andréia está diretamente conectada com as de Lima & Moisés (1993; 1997; 2000).

O mundo novo de que falam é sinônimo de movimento, fluência, mutabilidade e relatividade. Parece movimentar o pensar sobre, dos alunos, durante o curso.

Ao mesmo tempo, a fala de Ana Carolina não está diretamente relacionada ao sentimento que

"Vi que não existe verdade absoluta, ela está ligada à premissa que você estabelece. A partir daí, todo o raciocínio que parte de uma premissa é uma verdade" (Ana Carolina, 2001).

desenvolveu quando começou a aprender álgebra.

Sua resposta à questão, incorpora o conceito de premissa e sugere que a aluna começou a aprender álgebra a partir da disciplina. Porém, o conceito de premissa e de verdade ficam completamente desconectados da pergunta que a aluna tentou responder.

Que aspectos da vida você acha que a álgebra explica e que o número não explica?

"Essa é uma questão que ainda não tenho claro, pois o que sabia de matemática tem sido colocado em xeque nestas aulas. Tenho uma idéia de que a álgebra está ligada à relativização das respostas, dos conhecimentos e o número representa a concretização estática, mas não tenho uma resposta ainda" (Bila, 17/08/2001).

"Eu não tenho a mínima idéia do que a álgebra explica e a matemática não" (RTS, 17/08/2001).

"Às vezes eu fico um pouco confusa e penso por quê temos que saber tantos números, letras e fórmulas, não compreendendo direito, o estudo da álgebra e do número; um exemplo: tem uma pessoa que conheço que não tem estudo algum, mas tem a experiência da vida, e outra pessoa que é engenheiro civil. O superior dessas duas pessoas pediu para construir um galpão para colocar trens para consertar, então, a pessoa que não tinha estudo algum fez um projeto (desenho do galpão a olho), ele o imaginava e pediu para o engenheiro fazer também. O engenheiro, através de várias fórmulas não conseguia confeccionar o projeto, mas o projeto da pessoa sem estudos já estava pronto, sem fórmulas. Com certeza, tinha uma medida, mas não com cálculos técnicos. Foi passado para o engenheiro que através das suas fórmulas chegou à mesma conclusão. Como explicar isso???" (Adriane, 17/08/2001).

Educando o olhar

Bila não tem ainda uma resposta clara sobre o tema em discussão. RTS acaba confundindo número com a própria matemática.

Adriane fica confusa. Explicita sua confusão ao mesmo tempo em que questiona a necessidade de se saber números, letras e fórmulas. A partir de um exemplo, questiona a relação teoria e prática dos conteúdos matemáticos.

Adriane chama a atenção para a não existência de elos entre o que se entende e o pensar no movimento natural da vida. Pelo contrário, mostra o fosso existente entre o saber fazer o conceito e saber pensá-lo. O exemplo dado diz respeito ao saber pensar, criar o modelo e saber aplicar regras na construção de um galpão.

A aluna questiona a necessidade imposta pela sociedade de se obrigar os estudantes a aprenderem conteúdos matemáticos, especificamente, álgebra e número, pois tais conteúdos não são compreendidos por todos. Lamenta ainda o não entendimento das aplicações das fórmulas, em problemas do cotidiano, por alguns profissionais que estudaram muita matemática na faculdade, ao mesmo tempo em que aponta o oposto: muitas vezes, quem estudou "menos" matemática consegue relacioná-la com a vida.

A partir das observações da aluna, perguntamos: para que serve a escola? Que tipo de pensar desenvolve? Para que serve as aulas de matemática, se muitas vezes aqueles que não a conhecem formalmente conseguem resolver os problemas do cotidiano?

Não se trata de questionar a serventia da escola, mas sim de questionar o seu papel e se o conhecimento construído é capaz de desenvolver o pensar e o entender desses indivíduos no mundo em que vivem.

A escola tem por objetivo desenvolver no estudante pensamento científico e pensamento teórico. Tal objetivo poder-se-ia comprometer em proporcionar aos alunos a relação dos conteúdos estudados com o movimento fluente da vida.

O contexto escolar, ainda que deseje ardentemente, não pode desvincular a vida de seus estudantes dos conteúdos que ensina, justamente porque o conhecimento que está nos currículos é social. Foi construído historicamente e para ter sentido, é necessário ser entendido pelos indivíduos.

Talvez a fala de Adriane nos coloque diante de um exemplo do que pode produzir a "Pedagogia do Treinamento"[50] (Lima, 1998) ou ainda da Pedagogia da repetição daquilo que já foi elaborado, já pronto e acabado, portanto, imutável.

Essa Pedagogia está há muito tempo em nossas escolas, desvinculada da vida de estudantes e professores, priorizando o aspecto mecânico do pensamento humano. A ênfase do conhecimento

[50] Na Pedagogia do Treinamento há ênfase no saber fazer o conceito. Desconsidera-se o pensar sobre o conceito que está sendo estudado.

vincula-se à repetição das verdades apresentadas pelos professores. A repetição da interrogação na fala de Adriane pode representar o seu espanto ao acordar dessa ilusão.

> "As idéias de movimento, variação" (Ana Carolina, 2001).

Ana Carolina, Clécios e Dricme relacionam a álgebra e o número, aos conceitos estudados: metafísica, fluência, variação e movimento.

> "A álgebra consegue explicar a fluência matemática que não é possível atingir com o número fixo. É um movimento numérico que podemos vislumbrar 'enquanto ele está acontecendo'. Uma analogia possível é com um filme que podemos 'pausar' em qualquer cena que quisermos. Ou podemos assistir a um trecho específico" (Clécios, 17/08/2001).

Com sua analogia sobre o "pausar" e o "congelar" de um filme, Clécios consegue mostrar por onde caminha sua compreensão sobre o pensar algébrico. Para ele, a álgebra tem o poder de congelar instantes matemáticos. Tem o poder de mostrar a fluência dos movimentos através da matemática, porém, esse congelamento não representa o filme como um todo. Representa apenas algumas cenas da totalidade do filme.

> "A álgebra, na minha opinião, permite expressar a idéia de novas alternativas, novos pensamentos dentro da matemática, ou seja, a idéia de movimento. Quanto ao número também compreendo que ele transmita a idéia de movimento, porém é visto como um conceito mais estático, o que não acontece com a álgebra, pois a possibilidade de novas alternativas parece bem maior" (Dricme, 19/10/2001).

Quando congelamos determinados movimentos regulares, podemos fazer formalizações, podemos algebrizá-los. Ao formalizarmos, podemos fazer previsões. E é isso que faz com que um determinado momento possa ser repetido inúmeras vezes. Porém, apesar de conseguirmos fazer esse congelamento, jamais podemos afirmar que encontramos a verdade única e absoluta sobre o comportamento desses movimentos.

Essa verdade poderá mudar a partir do momento que construirmos novas premissas sobre os movimentos em estudo. Os congelamentos algébricos representam as paradas das cenas do filme, descritas por Clécios.

Tais congelamentos são relativas verdades, como

"São as situações onde a verdade é relativa e não absoluta e aspectos da vida onde existe ou ocorre movimento" (Everaldo, 24/08/2001).

"Bem, eu acho que a álgebra entra quando não temos muita certeza dos fatos. Quando você fala 'tal coisa é tanto', você limita, fecha essa quantidade. Acho que pensar algebricamente seria não limitar, não fechar, essa quantia poderia variar" (Lili, 17/08/2001).

"Já citado na questão número 1, a álgebra explica as situações de movimento, que o número físico, não" (Andréia, 17/08/2001).

Acredito que a álgebra facilite a explicação de alguns pressupostos numéricos que apenas com números seria difícil explicar" (SN_2, 17/08/01).

afirmam Everaldo e Lili e representam movimentos da vida, segundo Andréia. Os movimentos de que fala Andréia estão conectados com os movimentos numéricos que representam idéias de quantidades.

Seguindo o mesmo raciocínio de Andréia, podemos afirmar que não é à-toa que para representar as quantidades relacionadas aos diversos movimentos da vida, nos remetemos aos campos numéricos que criamos, ainda que a maioria das representações pareçam estar vinculadas ao Conjunto dos Números Reais.

Porém, SN_2 alerta que ao estudarmos determinados movimentos podemos não conseguir explicitá-los, a partir da rigidez dos números. Temos que recorrer ao pensamento algébrico porque este pode ampliar de alguma forma nossos "pressupostos numéricos".

Existe relação entre número e geometria? Explique:

"Me parece que sim. A geometria nasceu no Egito antigo com estudos que eles faziam para medir a terra. Quando a gente mede, se vale de números para isso. Eu poderia dizer que os números são a base da geometria? Eu não sei em que momento, essa geometria, que nasceu de uma necessidade tão concreta, passou a ser essa coisa tão abstrata como conhecemos hoje. Hoje, ela parte de pressupostos que são abstratos: ponto, uma coisa que não tem dimensão; reta, uma coisa infinita; plano etc..." (Lili, 17/08/2001).

"Acho que deve haver, mas os professores sempre colocaram como algo distante" (RTS, 17/08/2001).

"Sim, através do número, podemos expressar formas geométricas" (Ana Carolina, 2001).

"Sim. Para calcular as medidas dos triângulos, quadrados, retângulos etc." (Adriane, 17/08/2001).

"Sim. As formas geométricas podem ser medidas, comparadas, sobrepostas. Podem ser construídas a partir de outras. Tudo isso é possível pela internalização do conceito de número" (Clécios, 17/08/2001).

"Sim. Podemos relacionar os números com as figuras geométricas (triângulo, quadrado, pentágono etc.)" (Everaldo, 24/08/2001).

"Sim. É a partir do número que

Educando o olhar

Ao responderem a questão sobre a existência de uma relação entre número e geometria, obtemos a resposta afirmativa da maioria dos estudantes.

O sim dos alunos, de uma forma ou de outra, relaciona-se à necessidade da medição de figuras geométricas.

Lili não tem muita certeza da existência dessa relação e ao responder a questão, remete-se ao Egito. Questiona a mudança ocorrida entre uma geometria concreta, nascida da necessidade humana e de uma outra, a dos dias de hoje, que parte de pressupostos abstratos.

A dúvida também aparece na fala de RTS, ao achar que deve haver relações entre ambos os conceitos. Porém, culpa seus professores por deixarem essa relação muito distante.

A fala dos alunos permite interpretar que a geometria tem ou pode ter relação com o número, a partir do seu aspecto operacional, ou seja, o conceito de número envolve noção de quantidade. Tal aspecto, segundo Ana Carolina, está relacionado com as formas geométricas.

Ao construir e medir figuras geométricas em nossa realidade temos essa relação explícita, porque a medida é expressa por um numeral, desde que os entes chegamos aos cálculos geométricos" (SN$_2$, 17/08/01).

"Essa é uma questão ainda muito difícil para mim. Deve existir, mas a relação maior está, penso isso agora e não com muita clareza, com a álgebra, uma vez que a considerei como uma relativização das respostas e dos conhecimentos, isso porque pensar a geometria é pensar o espaço e assim poderá existir infinitos raciocínios para uma mesma questão" (Bila, 17/08/2001).

"Sim, acredito que existam muitas relações entre esses dois conceitos, pois o número pode ser expresso geometricamente para representar formas (geométricas) presentes em nossa vida. É ele que permite estabelecer uma alternativa, fazendo proposições e hipóteses de algo mais complexo a se representar" (Dricme, 19/10/2001).

"Número. Geometria, estudo das formas que aparecem na natureza. O número possibilita o estudo das formas com valores fixos" (Sílvia, 10/08/2001).

"Sim. Porque o ideal de ordenação matemática desaparece por um tempo, mas ajuda a explicar essa relação, pois a mesma tem que perder a feição quantitativa e refugiar-se nos domínios do qualitativo. E é nessa matemática "qualitativa em que o número cede o passo à figura, à forma" (Caraça, pág. 193). Dessa maneira, a ordenação matemática está subordinada às relações de figuras geométricas" (Andréia, 17/08/2001).

numéricos sejam fixos.

As respostas desconsideram os "números algébricos[51]". Ficaram restritas ao fixo e à rigidez dos aspectos operacionais da aritmética.

Os conceitos e juízos (Kopnin, 1978) emitidos pelos estudantes sobre a relação da geometria e número, estão relacionados com o conceito de medida que utilizamos no dia-a-dia. Há esquecimento do número algébrico. Em nenhum momento os alunos fazem referência a ele.

Andréia é a única aluna da turma que responde essa questão utilizando-se da teoria. Teoria que passa a conhecer a partir da bibliografia usada no curso. Ao responder a questão, ela foge do senso comum e vai buscar sua resposta em Caraça, edição de 1984.

Numa primeira análise não tínhamos nos apercebido de quão bonita e complexa é a resposta de Andréia.

Quando nos detivemos nessa resposta, resolvemos seguir o raciocínio da aluna e fomos buscar o mesmo autor em que a estudante se fundamentou, para analisarmos melhor a profundidade de sua afirmação.

Constatamos que os estudos de Coelho (1990) descrevem as controvérsias ocorridas entre António Sérgio e Jesus Caraça sobre a natureza e valor da

[51] O número algébrico foi definido por Cantor como um tipo de número real, o qual pode ser denominado de transcendente. A classe a qual pertencem os números algébricos é "muito mais geral que a dos racionais" e têm "a mesma potência que a dos inteiros. São os números transcendentes que dão aos sistemas de números reais a 'densidade' que resulta em maior potência" (Boyer, 1999, pág. 393, 2ª edição).

ciência que ocorreram nos anos de 1945-6 em Lisboa, a partir das afirmações feitas por Caraça, transcritas na resposta de Andréia.

Para Caraça (1998:193), o "primado do número atinge toda a profundidade de seu significado" quando consegue explicar "uma variação de qualidade – a forma duma figura por uma variação de quantidade", comprovando a "lei geral de que a passagem da qualidade para a quantidade" gera uma nova qualidade.

O autor afirma ainda que é esse fato que permite à "matemática grega, no seu período áureo", ser essencialmente qualitativa, onde o número "cede o passo à figura". É no "primado da figura e conseqüentemente na degradação do número", que "reside um dos aspectos principais da matemática grega".

A matemática grega tenta descrever o mundo através da qualidade da figura. Um dos últimos diálogos de Platão, descrito no Timeo, mostra que os quatro elementos: terra, água, ar e fogo, constitutivos do mundo nascem a partir dos dois tipos de triângulos retângulos onde um é isósceles e o outro escaleno.

Segundo Caraça (1984; 1998), o filósofo descreve ainda "os poliedros regulares e mostra como eles podem ser gerados a partir dos triângulos" e continuando a fantasia, "atribui a cada elemento um poliedro regular: "à terra atribuamos a figura cúbica. Porque a terra é mais difícil de mover das quatro espécies e é de todos os corpos, o mais tenaz. E é muito necessário que o que tem mais propriedades tenha recebido, ao nascer, bases mais sólidas....", à água atribui o icosaedro, ao ar o octaedro e ao fogo o tetraedro" (Caraça, 1984: 193-194).

O referido autor diz que Platão entendia que as relações numéricas desses elementos diziam respeito ao "seu número, aos seus movimentos e outras propriedades, estando harmonizados", matematicamente, por Deus.

Há aí, embora se queira negar "o ideal da ordenação matemática", a qual está "subordinada às relações de figuras geométricas". Dessa forma, a "aritmética cedeu passo à geometria, a figura ascendeu ao primeiro plano". Nos Elementos de Euclides "há traços pronunciados dessa mesma influência" (Caraça, 1984: 194).

A álgebra geométrica pensada no contexto grego tenta dispensar o número. É descrita através de pontos e segmentos. As operações algébricas dão lugar à linearidade do espaço e à própria delimitação do espaço, através do cálculo da soma de segmentos e do cálculo da área. Há horror ao número. Nega-se a aritmética (Caraça, 1998). Podemos dizer que a álgebra euclidiana ao negar o número, nega a fluência dos movimentos. Prioriza-se a rigidez da figura, ao mesmo tempo em que se tenta considerar o número. Porém, a figura está em primeiro plano.

Coelho (1990) alerta em sua obra que ao fazermos a discussão sobre o primado da figura e do número, assim como ocorreu com Caraça e Sérgio em meados dos anos quarenta, estamos delineando o conflito das filosofias, que pode ser pensado pelo menos de dois modos: a polêmica e a controvérsa.

Apesar desse conflito entre filosofias ousamos afirmar que a álgebra euclidiana tem horror ao movimento, embora Platão, segundo os estudos de Caraça (1998), ao descrever a gênese dos entes geométricos considere, num primeiro momento, que as relações numéricas dos quatro elementos diziam respeito ao seu próprio número, aos seus movimentos e outras propriedades. Aqui movimento é sinônimo de transformação geométrica, há passagem do linear para o espaço, dos comprimentos para a área.

Ao analisarmos os trabalhos de Euclides podemos afirmar que a figura, a forma, é mais relevante do que o número. A qualidade supera a quantidade. Porém, é na mesma Grécia de Euclides que vamos encontrar Diofanto priorizando número em seus trabalhos. Os estudos de Diofanto têm como foco o número. Suas equações, as diofantinas, têm uma relação direta com o número.

Dessa forma, compartilhamos das dúvidas de Silva (1942) quando este pergunta aos pensadores do currículo:

1) Por que as equações de Diofanto são tratadas na álgebra e não na aritmética?
2) Não é verdade que as equações de Diofanto estão integradas com a teoria da divisibilidade, que por sua vez se relaciona com as noções de máximo divisor comum e de congruência?
3) "Será proibido pronunciar em Aritmética a palavra 'equação'?" (Silva, 1942: 15).

Existe relação entre número, geometria e álgebra? Explique.

"Essa questão ainda não sei responder" (Bila, 17/08/2001).

"Respondo depois. Achei a pergunta muito complexa. Pensei muito e não consegui" (Lili, 17/08/2001).

"(...) faz tanto tempo que não trabalho com matemática que confesso não lembrar direito do que se trata (a aritmética, a geometria, a álgebra,...). O que cada uma trabalha? Bom, vou tentar dar uma pesquisada..." (Paula, 24/08/01).

"Acho que deve existir, mas não sei explicar" (RTS, 17/08/2001).

"Sim. Na geometria existem fórmulas que utilizam letras (álgebra) que são posteriormente substituídas por números, existindo assim a relação" (SN_2, 17/08/01).

"O número possibilita cálculos com valores fixos, tanto na geometria quanto na álgebra" (Sílvia, 10/08/2001).

"Sim. Pelos meus conhecimentos há uma relação entre eles, para calcular as formas geométricas, usando o número e a álgebra" (Adriane, 17/08/2001).

"Sim, pois as variações geométricas podem ser representadas por números algébricos" (Ana Carolina, 2001).

"Sim, porque se o número cede espaço para a figura, dessa forma o movimento (álgebra) existe, pois a figura pode variar de tamanho ou um de seus lados ser uma incógnita" (Andréia, 17/08/2001).

"A álgebra amplia as possibilidades do

Educando o olhar

A resposta de Adriane é afirmativa. Bila prefere não arriscar uma resposta. Lili e Paula acenam para a dificuldade da pergunta e avisam que a responderão depois. Porém, até o final da disciplina não detectamos as respostas das alunas em seus diários.

RTS tem dúvida. SN_2 e Sílvia mostram a relação entre número, geometria e álgebra a partir da possibilidade de permanência do número, tanto na álgebra como na geometria.

Para Sílvia e Adriane, a relação existente entre esses três conteúdos ensinados em nossas escolas, desde a pré-escola até o Ensino Médio, se dá pela possibilidade da realização dos cálculos que aparecem na geometria. Ao realizarmos esses cálculos devemos considerar os valores fixos dos números.

Tal como na questão anterior, a maioria dos professores considera apenas a rigidez e a imutabilidade presentes no número aritmético. Desconsideram a flexibilidade e a mutabilidade do número algébrico. Apenas Ana Carolina faz menção aos números algébricos.

Ao responder a questão, Andréia, Clécios, Dricme e Everaldo não têm mais dúvidas, respondendo sim.

Andréia complementa a resposta de Everaldo. Fica claro para Andréia que no contexto geométrico a variação das dimensões é representada pela incógnita. A aluna segue o mesmo raciocínio da resposta que deu à número (aumento de fluência matemática). A álgebra dá a mobilidade à geometria" (Clécios, 17/08/ 2001).

"Sim. As relações entre esses 3 conceitos são ainda maiores pois abrem muito mais possibilidades de representações, abrindo um maior número de pensamentos e estimulando o raciocínio. Assim como o número pode expressar formas geométricas, a álgebra pode unir-se a ele para representações algébricas mais complexas" (Dricme, 19/10/2001).

"Sim. Podemos relacionar o número com a álgebra, com a geometria, na variação das dimensões das figuras geométricas. O número, a geometria e a álgebra, na determinação das dimensões da figura" (Everaldo, 24/08/2001).

questão anterior. Utiliza-se de uma linguagem teórica ao afirmar, novamente, que o "número cede espaço à figura". Podemos inferir que a aluna, tal como Ana Carolina, se refere com uma certa propriedade ao número algébrico.

Clécios considera a ampliação das possibilidades numéricas e a mobilidade geométrica decorrente do pensamento algébrico. De certa forma, Dricme complementa a resposta de Clécios, ao focar as múltiplas representações que podem se originar das relações entre os três conceitos, quando assimilados pelo pensamento.

As cinco questões apresentadas aos alunos, no início do curso, a partir de um questionário colocou o pensamento flexível da maioria dos professores-alunos em evidência, enquanto alguns se omitiram, deixando as questões em branco.

Há nas respostas uma variação muito grande do que vem a ser a álgebra e sua relação com a aritmética e com a geometria. Porém, o pensar sobre tais questões trouxe para alguns uma nova qualidade de pensamento sobre os conteúdos algébricos.

Ao pensar sobre as questões, Lili e Clécios pesquisam dicionários, enciclopédias e a História da Matemática, enquanto que Andréia busca Caraça, um dos autores em que nos fundamentamos para elaborar as atividades de ensino que foram vivenciadas e analisadas pela classe.

Ao mesmo tempo, Andréia, Ana Carolina, Clécios, Everaldo e Sílvia incorporam algumas das discussões sobre fluência, metafísica, número físico, número algébrico e número manual feitas nas primeiras aulas, aos juízos que emitem sobre a álgebra e sua relação com a aritmética e a geometria.

Ao que parece, Sílvia, Andréia, Ana Carolina, Everaldo e Clécios mobilizam o pensar sobre alguns dos nexos conceituais da álgebra, ao mesmo tempo em que tentam definir para si mesmos o conceito de álgebra, relacionando-o com o conceito mais geral da variável. Não se prendem somente a um de seus aspectos: a incógnita.

É aí que está a nova qualidade de pensamento. Saber até onde vai a rigidez do número e onde começa a flexibilidade deste. A palavra chave é a fluência, o movimento, a variação.

As representações algébricas contêm a fluência e a permanência do número e dos conteúdos geométricos. Um dos nexos conceituais da álgebra é o conceito de variação, e conseqüentemente, seu campo de variação, que é numérico. A álgebra contém o ser e o não ser da variável, que por sua vez, contém o ser e o não ser do número e da figura.

Pensar a álgebra dessa forma trouxe a Caraça muitos dilemas e problemas. A ponto de o autor travar com António Sérgio uma das mais belas discussões teóricas do século XX (Coelho, 1990).

Com certeza, essa discussão é muito mais antiga. Deve ter ocorrido entre os matemáticos e filósofos de outrora. Tal discussão, guardadas as devidas proporções, também adentraram a nossa sala de aula e trouxeram dilemas a Paula, RTS, Bila e Andréia, por exemplo.

Através das questões colocadas, os alunos tiveram oportunidade de "filosofar" sobre o primado do número e da figura. Tiveram oportunidade de pensar sobre a relação aritmética-álgebra-geometria a partir de seus próprios juízos.

Alguns começam a perceber que no pensar algébrico há mobilidade e é essa mobilidade de pensamento que dá o status atual à álgebra moderna, descrito nos estudos de Viète. Procuram relacionar suas definições a alguns exemplos. Essa mudança esteve, de alguma forma, conectada à leitura dos textos, vivência e discussões feitas em sala de aula, a partir de atividades.

As elaborações das respostas às questões estão, de certa forma, relacionadas à concreticidade e à substanciabilidade dos nexos internos da álgebra que estudamos, ainda que muitas das elaborações apareçam um tanto confusas. Não importa. O que importa é que os alunos, ao responderem as questões, tiveram oportunidade de pensar sobre o ensino de álgebra que tiveram. Ao mesmo tempo, puderam fazer relações entre o que já conheciam e uma nova abordagem da álgebra.

Passam a pensar sobre o "ser e o não ser do número" descrito por Lima & Moisés (1993; 1997; 2000). Pensar algebricamente significa pensar o número sem o numeral. Ao mesmo tempo em que o número está, ele não está.

Nas respostas desses alunos há indicações de percepções sobre possíveis diferenças existentes entre o pensar aritmético e o pensar algébrico. Ao mesmo tempo que há diferenças entre esses dois pensamentos, eles estão ligados, conectados. Porém, os alunos não têm muito claro, de que diferenças e relações estão tratando.

Os juízos elaborados por Adriane, Bila, Dricme, Lili, RTS e Sônia constituem-se uma pequena amostra de uma certa permanência de definições que constam nas reminiscências daqueles que durante pelo menos sete anos de suas vidas escolares estudaram álgebra.

As alunas comprovam em suas respostas, o distanciamento que tiveram da álgebra enquanto estudavam-na. Porém, aceitam o desafio de entendê-la e colocam em movimento o pensar sobre. Não têm medo em emitir juízos, nem mesmo em colocar suas dúvidas no papel. O pensamento flexível está em ação.

De modo geral, o que se percebe é que quando os professores-alunos se dispõem a pensar sobre a álgebra que se apresentam nas atividades de ensino, começam a fazer relações de suas aprendizagens com o mundo que os cerca.

Exemplo disso são as questões trazidas por Adriane sobre:

1) O papel das teorias matemáticas e suas relações com a vida prática;
2) A necessidade do conhecimento matemático e algébrico;
3) O ensino que teve;
4) A relação desse ensino com seus professores, a escola e o conhecimento.

Dizemos que as respostas de parte dos professores ao questionário mostram que estes se colocaram em movimento de formação. Responder às cinco questões propostas parece que não se constituiu uma simples tarefa para eles, onde o foco era apenas o conteúdo. É exemplo disso, as falas de Bila, Dricme e Sônia que resolveram se dar uma chance para aprender o que até então não lhes fazia sentido.

O ensino de álgebra vivenciado pelas professoras-alunas: Ana Cristina, Andressa, Mudança e SN_1

Neste item, temos como intenção analisar as particularidades e singularidades das elaborações feitas por quatro das professoras-alunas inscritas na disciplina. Chamamos a este item de estudo de caso.

Iniciaremos o estudo a partir da análise do questionário que as alunas responderam. Em seguida, apresentaremos e analisaremos, de forma individual, as anotações feitas pelas professoras-alunas no diário.

Por último, analisaremos as elaborações das quatro professoras-alunas, no que diz respeito às atividades de ensino que consideram os nexos conceituais da álgebra não simbólica.

1) **Escreva o que você sabe sobre Álgebra.**

"Álgebra= '[do ar-jabrâ] s.f.1. parte da matemática que estuda as leis e processos formais de operações com entidades abstratas: (...)' (Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa. Ed. Nova fronteira, 2ª edição). Portanto, álgebra é o segmento da matemática responsável pelo estudo dos elementos abstratos do pensamento lógico. Esses elementos abstratos seriam as variáveis, que são responsáveis pela ampliação dos números enquanto elemento infinito. Os números, como relação biunívoca, se tornam insuficientes para explicarem fenômenos naturais, assim como a geometria, que é o estudo das formas fixas, então a álgebra veio para ampliar a capacidade de abstração ao pensamento matemático, implementando o conceito de referencial. As teorias lógico matemáticas são infinitamente amplas, mas devem seguir uma lógica seqüencial de afirmações de um referencial próprio (variável), para que sejam tidos como verdades" (Ana Cristina, 17/08/01).

"É o uso de símbolos, sinais e números (negativos e positivos) para a resolução de um problema. Equação matemática. É formada também por um conjunto de elementos, operações e relações sobre esse conjunto" (Andressa, 17/08/01).

"O meu conhecimento matemático é

Educando o olhar

Nesta primeira elaboração que Ana Cristina, Andressa, Mudança e SN_1 fazem da álgebra vemos dois movimentos distintos relativos ao lógico-histórico algébrico de como entendem a álgebra.

O primeiro movimento tem como representantes as professoras-alunas Ana Cristina, Andressa e SN_1.

Ao escrever sobre a álgebra, as três alunas não manifestam seu estado afetivo com esse objeto.

Descrevem a álgebra como algo externo às suas emoções. Emitem seus juízos pelo já definido, mais objetivo.

Embora não falem da imutabilidade da álgebra, deixam transparecer que o objeto em estudo está muito distante delas. É algo observável, descritível, definido.

O outro movimento tem como representante a professora-aluna Mudança.

A aluna traz à tona a incomodação de se sentir ignorante no assunto. Ao mesmo tempo sente-se na obrigação de emitir seu juízo sobre a álgebra.

A emoção lhe vem à tona. A aluna mostra que está "contaminada" pelas atividades de ensino discutidas em sala de aula.

O juízo que emite é carregado de subjetividade. Constitui-se de elementos que lhe são significativos na sua relação mais subjetiva com o muito pouco, quase nulo. Nunca tive muita afinidade com essa área. A escolha dessa disciplina é uma tentativa de compreendê-la melhor para poder ensiná-la, longe de repetições, fórmulas e mesmices. Álgebra, durante muito tempo significou para mim uma frustração. Agora significa desafio. Pelo que estamos estudando compreendi que a álgebra é uma ampliação da visão numérica dentro de uma concepção de movimento. O número deixa de ser estático e passa a ser variável. Essa visão dinâmica possibilitou inúmeros avanços tecnológicos" (Mudança, 24/08/01).

objeto estudado.

O juízo de Ana Cristina tem uma certa mistura, onde os ingredientes são a definição contida em um dicionário e uma certa elaboração sua que advém das primeiras discussões feitas em aula. A elaboração da aluna tem como ponto de partida a rigidez de uma definição e como ponto de chegada, a flexibilidade contida nas premissas, como por exemplo, a que indica os números como relação biunívoca e no conceito de variável.

"Pra mim, álgebra são operações matemáticas que possuem variáveis, como por exemplo, o Teorema de Pitágoras" (SN_1, 17/08/01).

Andressa não foge muito às definições clássicas que se encontram na maioria dos livros didáticos. Há uma tentativa em relacionar a álgebra com a Resolução de Problemas.

SN_1 não introduz, em seu juízo, aspectos discutidos na sala de aula.

2) Como você se sentiu quando começou a estudar álgebra?

Quando se trata de analisar o sentimento desenvolvido ao aprender a álgebra constatamos, novamente, dois movimentos distintos das alunas.

"Aprendi a relacionar formas, expressões e números para obter resultados matemáticos de um determinado problema. Desenvolvi também o raciocínio lógico, facilitando a compreensão e resolução de um problema matemático. Me senti descobrindo um mundo novo, que possui soluções para diversos problemas de outras áreas" (Andressa, 17/08/01).

Embora a pergunta esteja relacionada ao envolvimento emocional com a álgebra, Andressa apenas apresenta os resultados positivos de seu desenvolvimento de forma lógica. Não fala de suas emoções. Sua fala é de certa forma, mecânica, no sentido da Pedagogia do Treinamento. Mostra que sabe lidar bem com as regras. Adaptou-se ao mundo do jogo lógico. Manifesta satisfação em fazer parte desse mundo.

"Frustrada. Somente era capaz de aplicar regras e quando era necessário

A fala de Andressa nos dá um alerta: o que algum outro tipo de raciocínio, eu não era capaz" (Mudança, 24/08/01).

está na iniciação algébrica dos alunos tende a permanecer.

O sentimento que Mudança e SN_1 desenvolveram quando iniciaram seus estudos em álgebra envolve a confusão e a frustração. Ao que parece, a confusão de que falam está relacionada ao não entendimento do conteúdo.

"Confusa. Como uma letra poderia significar um número? E, ainda, qualquer número, dependendo da operação" (SN_1, 17/08/01).

Mudança tem uma certa incomodação por não ter desenvolvido o pensamento teórico, as generalizações que a ajudariam a entender as relações que ocorrem entre os dois tipos de pensamento: empírico-discursivo e teórico (Davydov, 1982).

A relação empírica feita, ao que parece, fragmentou o raciocínio.

SN_1 elabora uma questão que explicita de certa forma, o desconhecimento de muitos dos alunos que estudam os conceitos algébricos, a partir da variável-letra. Parece que o número não se relaciona com a letra.

O desconhecimento dessa relação pode ser comprovado na fala de Mudança.

Há aqui, nas falas de Mudança e SN_1 o exemplo do que vem a ser o uso da Pedagogia do Treinamento (Lima, 1998) pelo aluno.

Quando não se compreende o conceito, lança-se mão da memória e faz-se uso das fórmulas, sem necessariamente compreendê-las. Há manipulação algébrica a partir dos elementos

3) Que aspectos da vida que você acha que a álgebra explica e que o número não explica?

"A álgebra explica como se chegar numa solução de um mesmo problema de diferentes formas, enquanto que o número estático, é aquele e somente aquele resultado" (Andressa, 17/08/01).

"Eu creio que tudo o que pode assumir mais do que um valor matemático" (Mudança, 24/08/01).

"A geometria, variação de lados de polígonos, por exemplo, são bem explicados pela álgebra, pois o valor do número é fixo e os lados dos polígonos podem variar" (SN_1, 17/08/01).

4) Existe relação entre número e geometria? Explique.

"Sim, a geometria, apesar de contar em seu conteúdo com formas e figuras, estas necessitam dos números para que se calcule e obtenha o tamanho, área, ângulo etc. da figura, onde estes, então, são representados pelos números" (Andressa, 17/08/01).

"Penso que estão intimamente ligados. Para mim, geometria são figuras que podem ser expressas, medidas, através de números" (Mudança, 24/08/01).

"Sim. Na geometria são atribuídos valores aos elementos. Esses valores são representados por números" (SN_1, 17/08/01).

5) Existe relação entre número, geometria e álgebra? Explique.

perceptíveis do conceito (Davydov, 1982).

Ao emitir juízos sobre as relações entre álgebra e número; número e geometria; álgebra, número e geometria, as alunas vão buscar as respostas no jogo lógico da matemática formal.

Não se fala do mundo dos movimentos, da fluência e da interdependência (Karlson, 1961; Caraça, 1998; Bohm, 1980).

Em todas as respostas os objetos em estudos, aritmética, álgebra e geometria estão distantes do movimento mais geral da vida das alunas.

Os juízos emitidos sobre as relações que ocorrem entre esses conceitos não têm praticamente nada da subjetividade das alunas.

Chama a atenção de Andressa, Mudança e SN_1 o estático do número e da figura.

A relação que as alunas fazem entre os três conceitos não foge das relações feitas na maioria dos livros didáticos, onde há a substituição do número, ao se calcular, por exemplo, as medidas de área e perímetro de figuras geométricas.

O não estático da álgebra estaria associado à possibilidade de várias soluções de problemas geométricos que envolvem o conceito de medida.

Dá-nos a impressão que nesse contexto considera-se apenas um dos aspectos da variável, a incógnita.

Nesse sentido, a relação entre número, álgebra e geometria estaria nos nexos externos dos

"Sim, a geometria se originou de termos de uma teoria algébrica. Utiliza-se álgebra para encontrar soluções geométricas, que conseqüentemente são representadas pelos números" (Andressa, 17/08/01).

"Imagino, enquanto pessoa leiga, que sim. Muitas vezes os desenhos geométricos são expressos algebricamente" (Mudança, 24/08/01).

"Sim. Considerando a resposta anterior, sabe-se também que tudo na geometria pode variar, por exemplo, os lados de um triângulo retângulo. Para isso, usa-se a álgebra (Teorema de Pitágoras)" (SN_1, 17/08/01).

conceitos (Davydov, 1982). Na arte de solucionar problemas diversos que admitiriam várias soluções geométricas e/ou numéricas e não na totalidade dos três conceitos que se constituem pelo lógico-histórico dos nexos internos dos conceitos de campo numérico, palavra, figura, intermediação entre palavra e letra e; letra.

A flexibilidade e a relatividade dessas relações ficariam por conta das soluções diversas aos problemas estudados.

Consideramos que essas elaborações denotam um ensino fragmentado da álgebra impedindo uma relação mais dinâmica com o conteúdo concreto do pensamento algébrico.

Reflexão distanciada das professoras-alunas sobre o lógico-histórico da álgebra

Analisemos as elaborações de Ana Cristina, Andressa, Mudança e SN_1 quando pensam sobre e analisam atividades de ensino com enfoque no lógico-histórico da álgebra:

ANA CRISTINA

ISOLADO II: FLUÊNCIA E PERMANÊNCIA

24/08: Grécia antiga: - separação do conhecimento aritmético do geométrico para atender à necessidade de explicação do conhecimento científico pela metafísica. "A imutabilidade das coisas, a eterna rotina sem transformação acontecia, porque tudo, tudo enfim, desde a vida de uma pequena formiguinha até o aparente movimento do sol, já estava pré-determinado por uma idéia absoluta existente fora do mundo material – daí o significado da palavra "metafísica" – que dominaria todas as coisas determinando sua imutabilidade" (pág. 4 - Apostila "A variável: ser e não ser" – CTEAC). Início; Sócrates / Platão. Caráter de elite (homem obreiro ≠ homem do pensar). Metafísica socrática difundida no Brasil oficialmente até 1920, mas utilizada na educação matemática até hoje. Por isso é tão difícil para as crianças entenderem o pensamento matemático. Como compreender um pensamento fixo e imutável se o próprio homem e tudo que o cerca se mostra em constante movimento? A matemática se mostra absolutamente desprendida do real.

14/09: Essa aula foi muito gratificante no sentido de me fazer refletir sobre o quanto meu pensamento, frente às ciências exatas, segue os caminhos fixos. Essa fluência de pensamento é algo muito pouco trabalhado ou levado à discussão quando nós passamos pela educação matemática, ou mesmo escola e o que nos faz cristalizar um pensamento que está sendo

Educando o olhar

A fala de Ana Cristina sobre determinados conteúdos advém de pesquisas teóricas que faz. É exemplo disso a informação que dá sobre o início dos estudos da metafísica no Brasil.

O fato de ter extraído parte do texto, dado em aula, que discute o pensamento da fluência e da metafísica como concepção do mundo, e da ciência em particular, indicou que essa reflexão não só lhe chamou a atenção como também mostrou o quanto se apropriou dela para discutir a concepção de matemática que a escola lhe proporcionou.

A sua elaboração se aprofunda quando faz referência à dificuldade enfrentada pela criança para aprender matemática, devido a uma contradição que lhe é posta por uma abordagem da matemática imutável que prima pelo "pensamento fixo, imutável" quando "o próprio homem e tudo que o cerca se mostra em constante movimento".

Reforça essa sua questão ao se perguntar, quase que indignada: "como pode a criança entender essa contradição?". Como pode a matemática ser algo imutável se tudo está em constante movimento?

Chama a atenção para que se o conhecimento matemático é passado dessa forma, temos que entender que "a matemática se mostra desconstruído pouco a pouco. É incrível como passa a fazer mais sentido a ciência frente a um referencial, do que aquele pensamento único, sujeito ao certo e ao errado. A metafísica é algo tão intrínseco ao nosso pensamento que essa abordagem flexível me trouxe ao mesmo tempo um bem-estar, mas também um medo de uma "relativização" total das coisas, momento em que não haveria mais o certo e o errado, já que o referencial é fundamental. Eu ainda não consegui encontrar, particularmente, o meio termo entre a matemática fixa, a qual sempre fui exposta e essa "nova" concepção.

absolutamente desprendida do real".

Ana Cristina se auto-localiza (Caraça, 1998) em seu desconhecimento ao entender que seu pensamento, até então, está um tanto cristalizado, não fluente, não flexível.

Dá a entender, frente ao impacto do inesperado, que não há flexibilização entre o certo e o errado. Logo, há falibilidade da matemática.

A aluna percebe o seu pensamento enrijecido, polarizado em uma ciência que saiba definir nitidamente as fronteiras entre o certo e o errado, apesar de na vida haver mutabilidade continuamente.

Entendemos que o impacto sofrido por Ana Cristina se deve ao fato das leituras sugeridas em sala de aula.

Porém, se daria razão ao seu medo se os textos questionassem isoladamente a autoridade da ciência.

No entanto, há de se considerar que as questões discutidas em sala de aula consideram a vida em mudança como ponto de partida; a premissa na ciência que interpreta a realidade e a escola que estuda os fenômenos da vida. A escola teria o papel de auxiliar os estudantes a interpretarem a mutabilidade da vida.

O primeiro momento de impacto de Ana Cristina se justifica, porque a aluna perde a referência sólida que estava inculcada em sua vida escolar.

Interpreta de uma forma radical o impacto que teve, a partir de uma outra concepção de matemática. Entende que devia ficar na relatividade. Seu inesperado está na relativização das coisas. Entra em dilema (Caraça, 1998).

A abordagem flexível da matemática é algo novo e com conseqüências radicais que lhe causa medo. Prefere, como diz, encontrar uma posição de meio termo entre o fixo e o totalmente mutável.

Essa abordagem flexível é algo novo, incomodativo para a aluna. Num primeiro momento toma uma posição radical que tem ausência dos extremos certo e errado. Há ausência do certo e do errado que se configura no caos.

Ana Cristina reconhece que está em busca de encontrar um meio termo entre a matemática que conhecia antes de fazer a disciplina e a "nova" concepção apresentada. O medo está relacionado à relatividade das coisas.

Nas palavras de Kosik (2002), o medo está relacionado à perda da concreticidade e do absolutismo que aparece no certo e no errado.

Se há relativização total das coisas teríamos um "momento em que não haveria mais o certo e o errado, já que o referencial é fundamental".

A aluna entende que a abordagem de uma matemática fixa e imutável que lhe foi ensinada e é ensinada ainda assim para a criança, trouxe prejuízos, tanto para ela quanto para a criança. Para esta última se torna difícil entender ainda hoje os conceitos matemáticos. Para Ana Cristina, essa abordagem conferiu-lhe um pensamento fixo das coisas do qual se sente ainda prisioneira.

A análise da professora-aluna não se referiu especificamente à álgebra, mas das respostas que deu às questões sobre o pensamento algébrico; mostra apresentar disponibilidade para mudanças em sua concepção sobre a álgebra. Mudança esta determinada por uma nova compreensão de variável.

Segundo Caraça (1998), o inesperado pode causar dilemas e problemas na humanidade. Quando o inesperado ocorre temos a possibilidade de nos auto-localizar em nosso próprio desconhecimento. Buscamos formas de responder aos problemas decorrentes do inesperado. Surge uma nova qualidade em nosso pensamento.

No caso de Ana Cristina vemos sua auto-localização quando estuda aspectos da variável. Há o conhecido na variável eterna e o desconhecido na variável, enquanto representante de movimento. A própria aluna entra em movimento, quando sofre os dois impactos.

O primeiro impacto está relacionado ao meio termo entre a flexibilidade e a falibilidade da ciência e o segundo impacto está na localização de seu desconhecimento.

Esses impactos sofridos por Ana Cristina a fazem buscar caminhos para resolver o inesperado. Criar caminhos para resolver o problema.

Enuncia o problema que a aflige de forma lógica, ao elaborar o seu TCC – Trabalho de Conclusão de Curso. Elabora um estudo e escolhe um tema: fração. Utiliza em seu estudo a abordagem lógico-histórica.

Em 05/12/2002 Ana Cristina apresenta para apreciação da Faculdade de Educação da UNICAMP, seu trabalho. Além disso, apresentou e expôs seu estudo no Seminário dos TCCs – Trabalhos de Conclusão de Curso[52] da mesma faculdade.

Percebemos que o lógico-histórico de Ana Cristina está enquadrado em uma visão que possui um referencial mais fixo, o que chamaríamos de mais rígido, mais formal. Ao mesmo tempo em que considera suas próprias elaborações, ao definir conceitos para si mesma.

[52] [52] O seminário do qual a aluna fez parte é anual, e tem por objetivo tornar público os Trabalhos de Conclusão do Curso de Pedagogia.

ANDRESSA

ISOLADO I: NATUREZAS

10/08: Nesta aula, aprendemos que a álgebra não se aprende só da forma que é passada em muitas escolas. Ela tem um fundamento, onde envolve uma lógica que desmistifica o número. Aprendemos também a identificar os tipos de naturezas existentes (universal, humana e desconhecida) e as suas intenções, através de exercícios lógicos, estimulando o pensamento matemático.

ISOLADO II: FLUÊNCIA E PERMANÊNCIA

24/08: Nesta aula, vimos a separação da geometria e da aritmética e depois a sua fundamental união. Vimos também o conceito de metafísica, de mundo imutável, de como as pessoas aceitam ou não pacificamente as coisas como são expostas.

31/08: Aprendemos o conceito de metafísica, que até então não conhecia. Passei a perceber, que mesmo buscando sempre mudar, conhecer coisas novas e idéias, temos sempre o nosso lado metafísico, pacífico, onde não queremos mudar, pois queremos que esta situação continue a mesma. Ou seja, ainda temos o pensamento baseado nos pensadores da Grécia antiga. Discutimos as idéias de grandes pensadores, como Platão, Roger Bacon, Leonardo da Vinci, onde o material e o espiritual, a razão e o pensamento se contrapõem para alcançar os objetivos, a verdade das coisas. Chegamos à conclusão de que o mundo está em constantes mudanças, buscando a harmonia e a razão das coisas que compõem o mundo.

Educando o olhar

Ao analisarmos o diário de Andressa percebemos poucas elaborações feitas pela professora-aluna no que diz respeito às suas aprendizagens sobre os conteúdos vivenciados e estudados.

Chama a atenção da aluna, a dinâmica e a metodologia utilizada em sala de aula ao tratar os conteúdos algébricos. Porém, quando tratamos dos conceitos de fluência, Andressa emite um novo juízo sobre a álgebra que teve, enquanto estudante.

Afirma que "a álgebra que até então conhecia" era "a formal, imposta". A partir da dinâmica e das atividades propostas desmistificou "o conceito" de álgebra e descobriu que há outras formas de se aprender álgebra.

A álgebra que até então conhecia entra em xeque.

Entendemos que é nesse momento que a aluna se auto-localiza em seu desconhecimento algébrico. Porém, não consegue explicitá-lo de forma que acene como vai lidar com o inesperado encontro que teve com a nova abordagem da álgebra.

As falas de Andressa mostram a tentativa de se apropriar das discussões teóricas feitas em

14/09: A álgebra que até então conhecia é a formal; imposta, me foi ensinada na escola e agora conheci, através das apresentações dos mapas conceituais, que esta não é a única forma de se ensinar álgebra, **desmistificando** o seu conceito. Através dos exercícios da apostila, percebi o quanto nos apegamos a números para representar e muitas vezes acreditar em algo que nos é transmitido, sendo muitas vezes, um número "falso", devido às constantes variações das coisas.
21/09: O sistema de numeração atual não foi desenvolvido pelos grandes pensadores gregos, mas por um povo, os hindus, que conseguiram criar os algorismos, o método que desvinculava do uso do ábaco e permitia ampliar o horizonte dos números, possibilitando facilitar o cálculo mercantil. Esse sistema surgiu devido à necessidade comercial de quem estava precisando e não surgiu de quem estava já com esses recursos e não se interessavam por esse método. Ou seja, um povo simples, que não detinha recursos, criou esse sistema de cálculo revolucionário, pois eram capazes. Já os que detinham os recursos e os grandes pensadores, não sentiram essa necessidade, por isso não se preocuparam em criar esse método, criando assim um certo "conflito" entre esses valores.

ISOLADO III: A VARIÁVEL E O CAMPO DE VARIAÇÃO

28/09: Discussão do conceito de variável. A variável é diferente da incógnita, a variável nos dá a noção de movimento. Infelizmente, não fiquei até o final da aula e não assisti as discussões dos problemas, mas acho que seria uma maneira interessante de envolver a sala de aula, expondo as origens, e os por quês das fórmulas e não a aplicação direta destas.
05/10: Idéia de função, onde tenho uma sala de aula. Ao tentar se apropriar das discussões, a aluna procura repetir algumas expressões estudadas em sala de aula.

Andressa afirma, por exemplo, que:

1) Estamos tão acostumados a mexer com os números que nem nos apercebemos que, às vezes, estamos diante de um número falso, uma vez que utilizamos os numerais para representar a variação;
2) A álgebra desmistifica o número; o número é um pensamento particular que não expressa movimento;
3) A álgebra, ao contrário, permite expressá-los;
4) Há visões diferentes de ver o mundo: a metafísica pela qual tudo é estático e a visão de que tudo está em mudança, contínua.

Apesar de suas afirmações Andressa não faz explicitamente a relação das duas visões: a que tinha, e a nova abordagem com a álgebra e com o número.

Fica implícito em sua fala, a percepção de que há uma outra abordagem de se ensinar a álgebra, diferente daquela que lhe foi ensinada. Mas qual é a abordagem? Em que se diferencia da abordagem que teve?

Emite juízos sobre os conceitos de variável e função, ao mesmo tempo em que tenta relacionar esses juízos com sua área de atuação profissional, a informática.

variável trabalhando em função de outra, num conjunto numérico irreal. A idéia de infinito, vida e movimento, o homem percebe que o mundo, o todo, está em constante transformação e começa a "colocar" esses movimentos em linguagens matemáticas. Trabalho na área da informática, com programação, uso constantemente os algoritmos que utilizam a função, sendo esta a principal base para que o sistema, o software, seja desenvolvido.

ISOLADO IV: ÁLGEBRA NÃO SIMBÓLICA

19/10: Tivemos a idéia de como expressar as expressões numéricas, o número desconhecido, a variável em palavras e as diversas formas que podemos representá-las na oração, na variável palavra, tomando o cuidado para representar a idéia de adição, subtração, multiplicação e divisão, da mesma forma que é utilizada na expressão matemática, sem que o sentido se perca, sem que haja ambigüidade.

26/10: Como foi difícil realizar as atividades desta aula, onde discutimos o que é universo e particular. A língua portuguesa nos permite ter um sentido ambíguo para uma determinada palavra, daí a razão de particularizarmos tudo, não conseguimos diferenciar uma determinada palavra, pois o conceito fixo, particular, prevalece em nosso pensamento. Já sobre o conjunto universo percebemos que abrange um conjunto de variação, nos transmite a idéia de movimento; já a particular, é fixa, generalizada. Aprendi que há conjuntos universais, ou seja, dentro do universo, temos um conjunto particular, mas que também é universal. Daí a necessidade da linguagem matemática para poder definir a ambigüidade da língua escrita. Percebi que temos que analisar de modo diferente

Há aqui, ainda que de forma tímida, o princípio de extensão de que fala Caraça (1998). A aluna tenta fazer, ainda que de forma sintética e por isso um pouco confusa, uma relação entre o conteúdo estudado, com uma determinada área de conhecimento.

Preocupa-se, ainda, em dar sugestões para que fossem discutidas na sala de aula as origens e os por quês das fórmulas, enfatizando a necessidade de entendimento do conceito.

Expôs suas dificuldades durante a vivência e análise de atividades de ensino, que trataram da palavra particular e universal, ao mesmo tempo em que elabora uma síntese sobre uma das discussões feitas em aula, que envolve o conceito de número. Porém, não cria elaborações sobre o conceito e sua relação com a álgebra.

A fala fica um tanto desconectada dos conteúdos algébricos.

A dificuldade contida em determinadas atividades que tratam da variável-palavra permitiu com que surgisse em Andressa uma nova qualidade (Caraça, 1998) de pensamento, relacionada ao enxugamento da linguagem matemática.

Essa linguagem enxuta, sintética, nasceu da necessidade das civilizações e permitiu com que a matemática desenvolvesse uma linguagem própria (Lima & Moisés, 1997; 2000).

da norma gramatical, para que não haja ambigüidade, pois a língua portuguesa é muito complexa.

ISOLADO V: ÁLGEBRA SIMBÓLICA

07/12: Sinceramente, no início deste curso fiquei assustada em relação à matéria, pois não imaginava que seria matemática; confesso que fiquei confusa e pensei em desistir, mas com as primeiras aulas, comecei a perceber que isso não era um bicho de sete cabeças e que poderia me ajudar e muito a descobrir e comparar como foi o meu aprendizado. Agora, chegamos ao final e a sensação que tenho é que tenho muito ainda a aprender com relação aos conceitos da matemática e percebi o quanto o meu ensino foi diferente, metafísico, sempre aprendi aquilo pronto e não entendia o por quê de tudo. Acho que agora, com esta matéria, pude ter uma "clareada" e desmistificar o conceito sobre matemática. Confesso que achei muito interessante a metodologia de ensino, onde primeiro a sua opinião era formada, depois se discutia em pequenos grupos, buscando uma opinião geral para a discussão. Para mim foi muito válida, pois aprendi a expor mais as minhas opiniões, apesar de não participar muito em discussões gerais, mas aprendi o quanto é importante expor e escutar a opinião do próximo para chegar ao resultado final. Obrigada (...).

Do diário de Andressa não dá para perceber explicitamente todas as novas aprendizagens que a aluna teve em relação ao conteúdo específico da álgebra, somente quanto a uma nova abordagem de ensiná-la, que ainda lhe está confusa.

As anotações feitas mostram que Andressa tenta gerar um novo movimento de pensar a álgebra, o número e as coisas da vida. Mas a aluna não consegue explicitá-lo de uma forma mais elaborada.

Apesar de um inesperado (Caraça, 1998) encontro com a matemática, provocado pela disciplina, Andressa se colocou o desafio de tentar compreendê-la.

Percebe que mudou sua visão e estava satisfeita com essa mudança, tanto que agradeceu essa oportunidade, mas não consegue expressar a particularidade da mudança, nem mesmo quanto ao seu pensamento algébrico. Expressa apenas uma impressão geral de que há outra forma de se aprender matemática. Digamos que estaria lançada a motivação para aprofundar um estudo da álgebra na perspectiva que vislumbra.

MUDANÇA

ISOLADO II: FLUÊNCIA E PERMANÊNCIA

24/08: Adorei ler e discutir o texto escrito por Bento Caraça. Confesso que a princípio não compreendi muito bem onde as minhas professoras queriam chegar através das idéias de Platão. Ao fim, pude compreender não só os objetivos das professoras como também a origem histórica de muitos problemas ainda hoje encontrados. Adorei a experiência, foi muito enriquecedora. Pude bem compreender as noções de variáveis, além de outras, que só a origem histórica pôde bem clarear.

31/08: Devido à opressão do dia-a-dia, da correria que é a vida de todos nós, muitas vezes achamos que nada muda. Nossa, que chato! Todos os dias a mesma rotina! A idéia de fluência, a reflexão que estamos sendo levados a fazer nos ajuda a compreender essa dinamicidade do número e de nossas vidas. Como estou trabalhando a produção de texto, estou percebendo também esse processo como dinâmico, assim como a idéia de que o que ali o autor registra, pode não ser a mesma interpretação do leitor. Será que apenas a álgebra é dinâmica ou as palavras também são? Novas reflexões... Eu também estou em movimento!

21/09: Tive dificuldade em resolver as questões que exigiram raciocínio matemático. Acho que passei a maior parte de minha vida escolar aplicando fórmulas e regras. Todas as vezes que tenho que pensar em uma variação, tenho dificuldade. Gostaria de ver como funcionam os cálculos com o ábaco, creio que seria mais fácil fazer com que as crianças compreendam as operações com números (e eu também). Talvez refazendo o percurso que a humanidade fez com os números, seja mais fácil compreender a matemática, hoje.

ISOLADO III: A VARIÁVEL E O CAMPO DE VARIAÇÃO

28/09: Como disse durante a aula, estou me sentindo roubada. Como a escola tradicional, a eterna aplicação de regras, sem o entendimento do processo e da origem dessas fórmulas pode levar as pessoas a perderem o vínculo com a compreensão, com a realidade, com a vida. Se a minha história escolar fosse diferente, se eu tivesse entendido a matemática, ao invés de decorar regras, a minha vida hoje seria diferente? Posso afirmar, com certeza, que sim, principalmente com relação ao meu auto-conceito, minha auto-estima.

Educando o olhar

O diário de Mudança mostra que a professora-aluna tinha um problema pessoal com a matemática. Seu inesperado (Caraça, 1998) foi descobrir que o problema não era só dela. A sua incomodação está relacionada com a "nova" abordagem da álgebra.

Essa "nova" abordagem lhe trouxe novas conquistas. Novas possibilidades do raciocínio. Uma nova relação com a matemática. Uma nova qualidade em sua formação matemática. A ponto de afirmar que iniciou "uma nova era" em sua "relação" com seus "alunos em sala de aula".

Avisa que gostaria que outras pessoas não passassem pelo mesmo bloqueio que teve quando aprendeu matemática.

Colocou sua atenção na idéia de movimento. Faz "(...) novas reflexões...". E conclui que está em movimento.

Ao fazer essa descoberta chamou-nos para avisar-nos que havia escolhido seu pseudônimo: Mudança. Há espanto em sua voz e lágrimas em seus olhos

Estou muito contente em começar a conhecer a matemática agora, e ao mesmo tempo, triste por ser tão tarde. Ainda há tempo, espero! Agradeço.

ISOLADO IV: ÁLGEBRA NÃO SIMBÓLICA

19/10: Estou muito contente em estar acompanhando os raciocínios desenvolvidos em classe, o que eu não me julgava capaz a princípio. Sinto apenas não ter uma base matemática mais ampla para poder aproveitar melhor. Por outro lado, estou contente com minhas conquistas. Fico me perguntando se ao final do curso estarei compreendendo os exercícios algébricos, que até bem pouco tempo eram apenas regras aplicadas sem entendimento. Isso quando conseguia aplicar as regras! Estou começando a compreender as relações matemáticas. Fico assustada ao perceber que o meu caminho está apenas começando. Ainda é necessário muito esforço e tempo para conseguir recuperar o que foi perdido. (...) Gostei de aprender (...) que um número é par e poder agrupar estes números 2 a 2 (sem resto). Antes esses conceitos eram decorados: se o 1 é ímpar, o 2 tem que ser par. É um conceito tão simples que eu me pergunto também: por que eu não vi isso antes?
31/10: Penso que foi muito importante para a difusão e entendimento dos processos matemáticos como um todo, independente de tempo e espaço, a criação de uma linguagem clara, simples, abstrata e o mais distante possível da realidade concreta. Esse processo impede que aconteçam ambigüidades como as que ocorrem com o uso das palavras de qualquer língua. Por conta disso, interpretei mal o enunciado de algumas questões do livro e por isso as minhas respostas não coincidem com as de meus colegas. Que tal escrever o próximo livro de exercícios em linguagem matemática? O sentido seria assegurado, porém, creio que perderíamos muito em recursos, estilos e diversidades.
09/11: Gostei muito do exemplo que a professora Anna Regina deu sobre as Olimpíadas, onde as crianças deveriam medir e registrar as medidas dos que saltaram. Achei genial o uso dos tubos de papel higiênico como unidade de medida e o fato de perceber como as crianças são capazes de resolver problemas práticos e "reinventar a matemática", sem que se ensine para elas passo a passo. Esse tipo de ensino certamente formará sujeitos que compreendem melhor o mundo em que se inserem e não somente usa a matemática como uma técnica, que não tem elo nenhum com a vida prática. Os PCNs dizem que o ensino de matemática deve dar-se através de desafios, de problemas, de jogos... No entanto, os professores estão preparados

quando se descobre em movimento. Parece que a aluna não havia se dado conta desse aspecto em sua vida.

Refaz conceitos a partir da discussão de atividades de ensino que tratavam da permanência e da fluência; da variável-palavra e da variável-figura.

Quando considera que em alguns momentos, a dinâmica das aulas repetiu aspectos de uma abordagem tradicional, reclama.

A aluna, que se coloca em movimento de formação, não engole mais as coisas prontas e acabadas. Mostra que sabe o que quer: romper com um ensino que teve até então, memorístico, fragmentado, pronto e acabado. Suas ações são coerentes com suas novas aprendizagens.

As reflexões de Mudança relacionam-se com o seu próprio movimento de aprendizagem. Com o seu movimento de formar-se.

A partir do inesperado encontro com uma nova abordagem da álgebra, não tem medo de errar, nem medo de explicitar as suas dificuldades, dúvidas e incertezas.

Se no início do curso explicita o problema pessoal que tinha com a para essa tarefa? Creio que é necessário que esses últimos voltem aos bancos escolares, leiam constantemente, porque, caso contrário, não haverá mudança na educação.

23/11: Compreendo a necessidade de termos uma grande quantidade de exercícios para entregarmos de uma só vez, visto que o grande número de feriados não permitiu que fosse de outra forma, além do que, é necessário cumprir todo o programa. No entanto, essa gama de atividades foi muito cansativa e não deixou muito tempo para reflexão, principalmente no meu caso, já que tenho muita dificuldade com a matemática. Porém, devo acrescentar que esses exercícios foram de grande valia para o meu crescimento pessoal (auto-estima) e intelectual. (...) Neste momento penso: Será que tudo o que fiz está errado? O exemplo dado para trabalhar a potenciação parece tão simplificado e ao mesmo tempo não consigo ver uma lógica. Basta-me acrescentar quadradinhos a um quadrado maior? A esta altura não tenho tempo de rever os demais. Tenho dúvidas, não sei resolver estes exercícios! (...). Após refazer estes exercícios eu penso em todo o tempo que perdi utilizando os quadradinhos, conforme fiz anteriormente. Foi muito mais trabalhoso. Porém, isso demonstra o processo pelo qual passei, para compreender os exercícios em questão. No primeiro momento eu defini os valores. Trabalhei com valores fixos e no segundo momento trabalhei com a variável. Será que estou começando a deixar o mundo da metafísica? A disponibilidade para troca de idéias, a compreensão da diferença existente entre as pessoas e o incentivo dado pelas professoras foram fundamentais nesse processo.

ISOLADO V: ÁLGEBRA SIMBÓLICA

07/12: Ao fim deste bimestre sinto-me alegre e triste ao mesmo tempo. Alegre por sentir que o problema com a matemática que enfrentei por toda a minha vida escolar não é culpa minha e sim do contexto em que se deu minha educação. Estudar a matemática através de sua evolução e encontrar uma lógica nessas atividades, mostrou-me que sou capaz de compreender a disciplina, pensar matematicamente. Isso inicia também uma nova era em minha relação com meus alunos em sala de aula. Triste por sentir que um contato dessa natureza, no decorrer de minha história escolar poderia ter mudado o rumo de muitas coisas em minha vida e no entanto sinto que é tarde demais. Porém, não é tarde demais para continuar a busca pelo saber matemático e alterar a história de outras pessoas! Obrigada!

matemática, mostra, a partir da vivência e da análise das atividades de ensino, propostas que estava disposta a (re)elaborar quando preciso, as suas próprias respostas, de forma autônoma.

Seu pensamento passa a aceitar a verdade como relativa, e não absoluta, a ponto de aprender a tolerar as ambigüidades, a inquietude, a elaboração das próprias respostas que deu às atividades. Houve a destituição do medo de se expor pra si mesma.

Quando sente necessidade, refaz as atividades de ensino. Ao refazê-las, considera as discussões feitas tanto no grupo, como na classe. Reflete sobre as suas e as respostas da classe.

Traz a fluência para o seu próprio movimento de formação, o qual lhe permite se auto-localizar em seu desconhecimento (Caraça, 1998) e colocar-se à disposição para efetuar mudanças em sua prática.

Entende que "não" era "tarde demais para continuar a busca pelo saber matemático e alterar a história de outras pessoas".

Agradece pela oportunidade de alterar a sua e as próximas histórias daqueles que vierem a ser seus alunos.

ISOLADO I: NATUREZAS

10/08: Na primeira aula discutimos os conceitos de natureza universal, natureza humana e natureza desconhecida. Achei a discussão após termos feito os desenhos, interessante, e percebi que o ponto de vista, a premissa que se leva em consideração, pode levar a diferentes interpretações de um mesmo assunto. Só que eu não entendi onde a professora quer chegar com isso.(o mesmo acontece com as perguntas). O problema é que depois que você formou uma idéia na cabeça, a discussão de tantos pontos de vista diferentes me confundiu um pouco.

17/08: Leitura do texto sobre ciência e produção de mapa conceitual. Achei o texto interessante no ponto em que trata das diferentes maneiras que a ciência pode desenvolver, principalmente pela necessidade do homem resolver novos problemas que vão surgindo; e como isso contribuiu para o desenvolvimento da vida do próprio homem.

31/08: Começamos discutindo, em grupo, as questões 1 e 2 da apostila[53] que já tínhamos feito individualmente. Foram feitos mapas conceituais das idéias de Bacon, Platão e Newton, relacionando esses pensadores e estudiosos com a matemática. Debatemos e interpretamos as idéias de Leonardo da Vinci e Newton e discutimos algumas questões da apostila. A atividade 9 da apostila foi feita com a sala e discutida. As discussões que surgem, muitas vezes, são muito interessantes.

SN_1

Educando o olhar

O diário da professora-aluna mostra os juízos de valor que emite sobre situações particulares da aula. Não há um entendimento no sentido de generalização do universo. Por exemplo, quando se discutiu o primeiro isolado: "Naturezas".

Chama a atenção de SN_1 o conceito de premissas, porque esse conceito permite a diversidade "dos pontos de vista". Apesar disso, a aluna não entende que relações esse conceito tem com o pensamento algébrico.

Há uma certa resistência de penetração no novo, que considera a diversidade das idéias e as premissas. Esse novo está relacionado à abordagem da álgebra e à dinâmica das aulas.

SN_1 apropria-se da definição de premissa a partir da leitura dos textos teóricos de Hogben (1970) e Caraça (1998). Afirma gostar das discussões. No entanto, mostra certa incoerência quando assinala que essas discussões ficam "monótonas", desmotivando-a.

Entende durante as discussões, que quem estabelece a teoria é o homem. A criação do conceito científico parte de premissas, inclusive os conceitos matemáticos. Essa idéia é interessante porque a ciência nasce da necessidade do homem em resolver novos problemas que surgem. Há mutabilidade na ciência (Caraça, 1998; Bohm, 1980; Kosik, 2002),

[53] A apostila de que fala SN_1 refere-se ao caderno intitulado: "A variável", escrito por Lima & Moisés, 2000.

ISOLADO II: FLUÊNCIA E PERMANÊNCIA

14/09: Hoje a aula sofreu mudanças devido à reclamação dos alunos (estava repetitiva e cansativa por causa das apresentações dos mapas de todos os grupos). Com certeza, a aula melhorou. Primeiramente discutimos os mapas individuais do texto: "O conceito de variação como um dos fundamentos da álgebra elementar" e fizemos um mapa em grupo. Um dos grupos apresentou uma visão diferente da anterior. Isso é bom para a aula. Vemos que um determinado texto pode apresentar diferentes leituras. Fizemos algumas atividades da apostila individualmente e em seguida discutimos em grupo e com a classe. Creio que não existe necessidade para tantos exercícios repetitivos, tantas perguntas abstratas sem que saibamos onde isso quer chegar. Acho que isso desmotiva um pouco. Quando a aula estava acabando Anna Regina explicou o projeto, o que melhorou minha compreensão sobre ele. Acho que deveríamos ter algum tempo (1 hora mais ou menos) para trabalhar o projeto em sala. Além de não termos tempo de nos reunir podemos já ir discutindo questões com a professora.

21/09: Até as 9 h, pesquisamos livros e teses para a produção do projeto. Meu grupo definiu o público (adulto). Resolvemos com quais pessoas iremos aplicar. Também esboçamos o projeto, definindo suas partes. Depois disso, discutimos os mapas conceituais individuais do texto "A aurora do nada" e fizemos um mapa conceitual do grupo. Este foi o mapa mais complicado, tanto para fazer o mapa individual quanto o em grupo. O texto era denso e com muitas informações. Foi um texto difícil. Dois grupos apresentaram para a classe o mapa conceitual do grupo e a professora explicou alguns pontos, aprofundando a discussão. A professora pediu para outro

mas fica difícil para SN_1 mudar o que vai à cabeça a partir de diversos pontos de vista, inclusive a forma como vê a matemática.

Há ainda resistências em aceitar as opiniões dos grupos e da classe. Há um certo desconforto em aceitar que as respostas às atividades fossem construídas. Ao que parece, sente-se mais confortável nos momentos individuais.

Porém, em determinados momentos parece que muda de opinião quando "(...) um dos grupos apresentou uma visão diferente da anterior". Há um ir e vir em suas resistências. Ao mesmo tempo que se sente confortável em fazer as discussões, se contradiz.

Seu inesperado (Caraça, 1998) está relacionado com a nova abordagem da álgebra e com a dinâmica das aulas.

O inesperado encontro de SN_1 com essa abordagem mostra que as atividades de ensino que tinham um cunho mais reflexivo mexem com o seu pensamento, no sentido de trazer-lhe um incômodo, no movimento deste. Não lhe agrada discutir essas atividades. Talvez a aluna se sinta melhor em resolver atividades que não exijam tantas reflexões.

O incômodo de SN_1 pode ser entendido como uma nova qualidade de pensamento porque traz a explicitação de suas contradições. Ao mesmo tempo em que a diversidade de pensamentos é considerada interessante choca-lhe as certezas.

Ora a diversidade de idéias é boa. Ora, não.

grupo apresentar, para acrescentar algumas coisas. Acho que essa repetição deixa a aula muito cansativa. O que os grupos tivessem a acrescentar deveria só ser colocado em aula, não vejo necessidade de uma nova apresentação. Na segunda parte da aula discutimos os exercícios da apostila que tínhamos feito em casa individualmente, e fizemos em grupo. Discutimos as questões.

ISOLADO III: A VARIÁVEL E O CAMPO DE VARIAÇÃO

28/09: Aconteceu a discussão da variável e da palavra "ahá" (problema da altura da pirâmide). Depois discutimos as questões 15 e 16 (pág. 27) da apostila sobre linguagem matemática. Dois alunos apresentaram dois problemas esclarecendo bastante coisa do que tínhamos lido no texto. Ao final da aula conversamos com a professora e com a classe sobre os projetos (para melhorar o encaminhamento).

19/10: Discutimos a questão 19 da página 32. Fizemos em grupo as questões das páginas 33 e 34. Novamente discutimos a palavra "aha" como variável. As aulas estão ficando muito monótonas, sempre iguais e não estou me interessando pelas discussões que estão acontecendo.

26/10: Discutimos os exercícios sobre "palavra universal" e palavra particular. Ao final da aula aconteceu uma discussão sobre os projetos. Cada grupo relatou o que estava fazendo e como estava encaminhando a aplicação dos exercícios.

Em determinado momento, a aluna se coloca como representante da classe, ao afirmar que os alunos solicitaram mudanças na dinâmica das aulas.

A partir de uma pequena mudança, na apresentação dos grupos, parece se sentir satisfeita, mas logo em seguida, fala de uma certa monotonia que a desmotiva.

O impacto de SN_1 com a abordagem feita em sala de aula sobre o pensamento algébrico é um dilema (Caraça, 1998). Esse dilema está relacionado com a percepção de que as verdades matemáticas também podem ser questionadas a partir de novas premissas. Há mutabilidade na matemática.

Se essa mutabilidade ocorre no conhecimento científico, também ocorre em nossas interpretações sobre um determinado tema ou atividade que estamos estudando.

A ação da mudança parece ser interessante quando tratamos do conhecimento científico. Porém, a aluna não incorpora em sua própria ação na sala de aula, esse movimento.

Entendemos que é por esse motivo que SN_1 tem dificuldades em pensar sobre as suas idéias a partir das diversas discussões feitas em classe.

A partir do inesperado, SN_1 faz uma opção. Reafirma o que já pensava. Não mostra disponibilidade em (re)elaborar conceitos algébricos. Limita-se a resolver as atividades e em algumas delas, explicita que não as entende, deixando-as em branco.

Reflexão imediata das professoras-alunas sobre o lógico-histórico da álgebra em atividades de ensino

Ana Cristina, Andressa, Mudança e SN_1 apresentam em seus diários, além de reflexões sobre a aula, as respostas que deram às atividades escritas, propostas em aula. Anotam suas dúvidas e incertezas. Fazem críticas.

Ao que parece, as atividades de ensino que tratam da álgebra não simbólica permite que as alunas se auto-localizem em seus desconhecimentos algébricos.

A vivência de atividades de ensino que tratam dos campos de variação; da palavra-particular e da palavra-universal, por exemplo, permite a explicitação de Andressa, Mudança e SN_1 de suas dificuldades. Afirmam que não possuem pensamento fluente, de forma que as permita compreender o sentido do conceito de universal, bem como do que vem a ser campo de variação. Ao resolverem as atividades propostas não conseguem se desprender dos campos numéricos particulares.

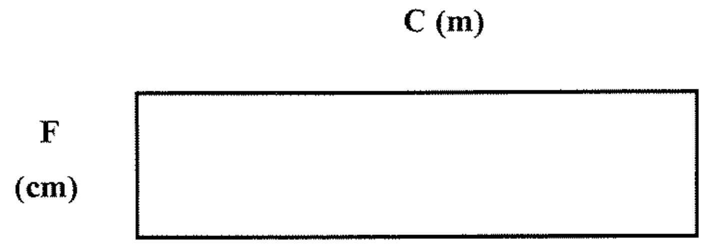
É aqui que se encontra a principal dificuldade das alunas, em relação aos conteúdos algébricos. A generalização não faz parte do movimento concreto de seus pensamentos.

As alunas reconhecem que estão presas a conceitos rígidos, fixos, prontos, acabados. É difícil para elas se libertarem dessas amarras.

Esse fato fica muito claro quando estudam a álgebra geométrica de Euclides. A figura sintetiza a rigidez dos movimentos. Traz confusão. No entanto, esse modo de pensar o movimento permaneceu pó séculos, na humanidade.

A fala de Mudança (2001), de certa forma sintetiza as principais dificuldades das professoras-alunas, ao "representar, num desenho, a variação limitada ou restrita, da variável-figura" (Lima & Moisés, 2000: 65):

> "Eu penso que uma das limitações e distorções que acontecem é o trabalho não levando em conta as unidades diferentes. Assim, posso representar o espaço percorrido por um carro e uma formiga no mesmo espaço de tempo, desta forma:



> Isso não dá idéia da relação de espaço percorrido entre eles. Não creio que esse exemplo possa estar correto. Eu não relacionei a velocidade entre eles. No entanto, não consigo pensar em nada, além disso. Sei que existem limitações, mas não sei dizer quais. Afinal, fui treinada, durante toda a vida para repetir o que foi ensinado e não para pensar. Sei que o trabalho de vocês está lançando um pouco de luz na minha escuridão matemática. Mas ainda não é o suficiente para dissolver todo o processo anterior" (Mudança, diário: 23/11/01).

Ao elaborar uma resposta à atividade de ensino proposta, as alunas, necessariamente, tem que lançar mão do pensamento flexível. Não podem ter medo de errar. Não podem repetir fórmulas prontas porque tais fórmulas simplesmente não existem. A resposta formal e teórica à atividade deve considerar os insights dos alunos presentes em suas argumentações, uma vez que o simples fato de desenhar a variação, não explicita de que movimento se está falando.

Há necessidade, nesse tipo de atividade em romper com o pensamento enrijecido da álgebra.

O mesmo vai ocorrer quando se solicita que as alunas inventem "uma variável que seja o mais próxima do numeral" (Lima & Moisés, 2000: 72).

Não há uma resposta pronta e acabada, isso porque estamos nos referindo a uma atividade de criação. Precisamos, novamente, dar asas à imaginação. Precisamos criar. Precisamos da flexibilidade do pensamento.

Os diários de Ana Cristina, Andressa, Mudança e SN_1 mostram que para Mudança e Ana Cristina o inesperado é posto, a partir da segunda aula, enquanto que para Andressa e SN_1, não.

Ao longo do curso, vez ou outra, Andressa e SN_1 têm percepções da qualidade do inesperado que tiveram frente a uma abordagem do ensino de álgebra. Falam de suas dificuldades com os conteúdos, mas suas elaborações não explicitam com clareza se estão ou não (re)elaborando os conceitos estudados. Talvez, em um próximo curso, haja disponibilidade e terreno fértil para compreender o cerne das atividades propostas e suas relações com o movimento mais geral da vida.

À guisa de conclusão

Ao tentarmos responder a questão norteadora da pesquisa: "Que relações podem ser estabelecidas entre o conhecimento de professores e os conceitos algébricos enquanto vivenciam e analisam atividades de ensino numa perspectiva lógico-histórica da álgebra?", durante alguns anos, nos encontramos com nós mesmos e descemos, juntamente com os professores-alunos, teóricos, docentes, pesquisadores, enfim, com as pessoas, o rio de Heráclito.

Perscrutamos e pesquisamos sobre a Formação de Professores, a História da Álgebra, o Ensino de Álgebra e a Teoria do Conhecimento. Encontramos-nos com o nosso desconhecimento. Tivemos inesperados. Entramos em dilema. Encontramo-nos com o lógico-histórico de nós mesmos. Entendemos que o lógico-histórico deveria fundamentar a pesquisa.

O lógico-histórico na sala de aula, e conseqüentemente, no ensino de álgebra, tem como principal função auxiliar o pensamento a movimentar-se no sentido de encontrar as verdades, a partir de definibilidades próprias do conceito.

Aqui a história assume o papel de elo de ligação entre a causalidade dos fatos e a possibilidade de criação de novas definibilidades do conceito, que permitam compreender a realidade estudada. Há a necessidade de se elaborar juízos sobre os conceitos. Não se apresentam, aos alunos, os conceitos prontos e acabados. Convida-se o estudante a pensar sobre tais conceitos.

Entendemos que as aulas de matemática devem ter como objetivo convidar o estudante a humanizar-se pelo conhecimento matemático. Devem permitir que haja um encontro afetivo com o conceito; no nosso caso, com o conceito algébrico.

Ao fazermos tal afirmação estamos de braços dados com todos os teóricos e pesquisadores, que defendem a idéia de que o formar-se homem acontece desde o momento em que o pensamento começa a movimentar-se para entender o mundo na lida do dia-a-dia.

O entendimento do mundo e de nós mesmos permite-nos entrar em contato com a concreticidade e a abstratividade dos conceitos.

O formar-se nunca termina, porque a vida pulsa enquanto tenta se recriar a todo o momento, na fluência dos movimentos do universo. A vida humana faz parte da natureza universal. Não se desvincula nunca, ainda que queira, da lei universal, que é a fluência e a interdependência.

Tentamos mostrar a cada item deste estudo o quanto de vida existe, quando a humanidade, a partir das diversas civilizações tentou se desvencilhar do numeral.

As civilizações criaram definibilidades próprias para entender o número conhecido e o desconhecido do número. Criaram representações para desvendar o maravilhoso mundo dos movimentos. Criaram o conceito de variável, de campo de variação, de fluência. Fizeram uso da variável. Representaram-na a partir da palavra, da figura, da intermediação entre palavra e letra. Criaram letras.

Ousaram. Acreditaram. Deixaram-nos um legado de que é sempre possível alçar vôos em direção ao novo, sem se desvencilhar do velho, porque não há novo e velho e sim, idéias, insights.

Apresentamos as álgebras retórica, geométrica, sincopada e simbólica. Discutimos suas relações. Chamamos de mudança conceitual a álgebra simbólica. Álgebra que freqüenta nossas salas de aulas do Ensino Fundamental, praticamente todos os dias.

Percebemos que o elo de ligação entre elas é o movimento, a fluência. Há interdependência entre o movimento que se quer estudar e sua representação.

A palavra, o desenho e a letra fazem parte da *praxis* humana. São abstrações que fazem parte da vida do homem, do movimento de seu pensamento, para marcar sua presença no universo. São os conteúdos concretos do pensamento do homem.

Convidamos os professores-alunos a pensarem sobre os nexos conceituais da álgebra: fluência, campo de variação e variável que constituem, na visão da Educação Conceitual e de Lima & Moisés (2000), a primeira unidade necessária para se iniciar a alfabetização algébrica no Ensino Fundamental. Dezoito deles aceitaram o convite.

No início do curso, percebemos que o conhecimento dos professores sobre a álgebra estava relacionado aos nexos externos do conceito de álgebra. Os professores falavam do "tradicional **x**" e tentavam responder às atividades de ensino, a partir desse conhecimento.

No decorrer das aulas, percebemos que os alunos tiveram um inesperado encontro pedagógico com os conceitos algébricos.

As atividades de ensino que propúnhamos não lhes exigiam uma resposta formal, pronta e acabada. Pelo contrário, as respostas teriam que ser construídas e elaboradas a partir de definibilidades próprias dos indivíduos e dos grupos. Há aqui uma outra concepção de ensino que considera três movimentos:

1) A relatividade do conhecimento;

2) A flexibilidade do conhecimento;

3) A totalidade dos sujeitos envolvidos.

Há, tanto na sala de aula como na elaboração da pesquisa, uma preocupação em não fragmentar esses movimentos.

As elaborações dos alunos nos permitem afirmar que quando se trata do par dialético lógico-histórico em atividades de ensino há o aparecimento dos inesperados.

Cada indivíduo, em sua particularidade, dá conta de responder a esse inesperado, a partir de sua subjetividade.

Ana Cristina, por exemplo, tenta responder ao seu inesperado, estudando, criando uma questão de investigação. Enquanto Mudança tenta pensar no "como" fazer, para que não prejudique o outro enquanto ensina. SN_1 e Andressa não mostram explicitamente como vão lidar com seus inesperados. Talvez num próximo encontro estejam abertas para lidarem melhor com seus inesperados.

As elaborações feitas pelos professores-alunos mostram ainda que há atividades de ensino que contribuem para que os professores-alunos façam relações mais gerais com a vida e o conteúdo, onde o afetivo com o objeto estudado vem à tona. Trazem mobilidade ao sujeito que inicia um novo movimento com o seu próprio conhecimento de álgebra.

Há aqui, o despertar do pensamento flexível. Não se considera a imutabilidade das respostas às questões e sim as relações que podem ser estabelecidas entre as definibilidades do sujeito e as definibilidades elaborada pelas diversas civilizações.

Não há medo de se expor, dos sujeitos, nem mesmo de explicitar as dificuldades e perguntas frente ao desconhecido.

Ao mesmo tempo há elaborações de alunos que mostram que o objeto de estudo, nesse caso, a álgebra, fica externo a si. As relações que decorrem dessas elaborações também ficam externas ao sujeito. Apenas no âmbito do conteúdo. Não há aqui a explicitação de um certo envolvimento emocional mais forte daquele que aprende com o conteúdo.

O que chama a atenção dos professores é o fato de construirmos os conhecimentos científicos, dentre eles, a matemática, a partir de premissas.

Na primeira discussão sobre premissas, os alunos estabelecem uma relação entre o tema da aula com a matemática. Descobrem que a matemática pode ter falibilidades. Isso os assusta. Até aquele momento acreditavam numa matemática pronta, acabada, rígida, exata. Incomodam-se com esse fato. Perguntam-se, afinal de contas, o que vem a ser a verdade?

Ao estudarem os conceitos de fluência, campo de variação, variável, e especificamente, as palavras particular e universal, usam o princípio de extensão de Caraça (1998), ao refletirem sobre a formação que tiveram e a formação de seus alunos. Há aqui, novamente, um inesperado encontro consigo mesmo.

Os alunos relacionam os conceitos estudados com a sua vida profissional e pessoal. Exemplo disso é a questão que Adriane elabora sobre as contradições que há entre aqueles que estudam muita matemática e aqueles que a usam na prática, quando responde a questão: "Que aspectos da vida você acha que a álgebra explica e que o número não explica?".

Percebemos que as atividades que exigiram uma certa criatividade dos alunos trouxeram-lhes dilemas. Sentiram-se confusos.

Os alunos nos mostram que têm dificuldades em fazer criações. Exemplo disso são as atividades que tratam da variável-figura e da variável-numeral. Essas atividades exigem uma certa criatividade que, pelo que vimos, os alunos não tinham. O conhecimento dos alunos sobre álgebra não lhes permite alçar novos vôos. Ficam limitados aos nexos externos do conceito da álgebra simbólica. Não há entendimento do conteúdo concreto da álgebra simbólica.

Exemplo disso é o diálogo que apresentamos, na forma de episódio, de um dos grupos, quando tenta solucionar o problema que trata da construção da pirâmide.

O problema pede a elaboração de uma frase e não pergunta a quantidade de pedras que devem ser usadas na construção da pirâmide. O objetivo do problema é o pensar sobre um dos nexos conceituais da variável, a variável-palavra e o campo de variação.

Os alunos se debatem, mas não conseguem perceber que a pergunta do problema é diferente daquela que tentam responder. Giram em círculos, porque o movimento de seus pensamentos está preso a determinados aspectos da álgebra simbólica. Não conseguem se desprender disso.

Mostram que têm dificuldades em usar as palavras no contexto da matemática. Ficam presos à variável-letra **x** e não conseguem se desvencilhar dela. Falta a esses alunos o pensamento flexível. Estão muito acostumados ao uso das letras, mas não sabem exatamente para que servem.

As atividades discutidas em aula exigem-lhes uma nova forma de lidar com os conceitos matemáticos. Isso tira-lhes o chão, por exemplo, das alunas SN_1 e SN_2.

As alunas passam a emitir juízos sobre aspectos particulares da aula, esquecendo-se de que o objetivo das aulas é o pensar sobre. Percebemos que SN_1 e SN_2 incomodam-se com a dinâmica das aulas. Desviam sua atenção dos conteúdos estudados. Não aceitam o convite de fazerem uso do pensamento flexível.

A relação estabelecida pelas alunas entre o conhecimento que tinham sobre a álgebra e a nova abordagem, é de incômodo. O mais interessante é que as alunas não desistem da disciplina. Freqüentam-na assiduamente e transformam seus diários em um caderno de reclamações, críticas e de resolução de exercícios.

Ao que parece, para essas duas alunas, em especial, a disciplina se torna uma tarefa e não uma atividade.

Ao contrário de SN_1 e SN_2 vamos encontrar Mudança, Paula, Dricme, Sônia, Andressa, Clécios, Sílvia, Adriane, Andréa, Andréia, Bila, Coração, Lili, Everaldo, RTS, Ana Carolina e Ana Cristina que explicitam seus incômodos, inesperados, a partir de questões, dúvidas, incertezas e até se descobrem em movimento, como Mudança[54].

Arriscamos a dizer que, para esse grupo, a disciplina se configurou em atividade de aprendizagem.

As relações estabelecidas aí, lhe permitiram ver a matemática, o ensino de matemática e o ensino de álgebra, com um novo olhar.

Há então, um contraponto entre a discussão da álgebra ocorrida na sala de aula, a partir do lógico-histórico e o conhecimento dos alunos sobre a álgebra.

O conhecimento que os alunos trazem para a sala de aula, sobre a álgebra, não se diferencia, num primeiro momento, do conhecimento da maioria dos estudantes que estuda a álgebra simbólica em nossas escolas.

A formação desses alunos não lhes permite criar definibilidades próprias.

No decorrer do curso, percebemos que poucos são os alunos que tentam criar suas próprias definições do que vem a ser a álgebra, por exemplo. A maioria deles fica presa a definições já estabelecidas em determinados livros didáticos.

Apesar disso, durante quinze semanas, lá estavam todos os alunos, para pensarem sobre os conceitos algébricos. Ao final do curso, durante a apresentação dos projetos, percebemos que muitos deles começam a questionar com mais ênfase o ensino de álgebra memorístico que se apresenta nas escolas.

As discussões feitas em sala de aula permitem aos alunos perceberem que há outras perspectivas de se ensinar os conteúdos matemáticos. Há outras dinâmicas que podem freqüentar a sala de aula. Há outras formas de se avaliar, em matemática.

Essa nova perspectiva envolve a mobilidade do pensamento. Necessita do pensamento flexível dos alunos. Tem relatividade.

Os conteúdos são apresentados a partir do pensar sobre. Os conceitos são elaborados por todos os participantes da aula. O certo e o errado de determinadas respostas são elaborados a partir das relações estabelecidas entre o conteúdo e aquele que aprende.

[54] Dezoito professores-alunos estavam matriculados na disciplina e foram sujeitos da pesquisa, no entanto, uma das alunas, no início do curso usou seu primeiro nome nos mapas conceituais e nas atividades de ensino propostas. Definiu seu pseudônimo a partir do segundo encontro.

Em nenhum minuto há rigidez nas respostas, justamente porque se parte do pressuposto que o conhecimento considera as premissas.

As verdades podem ser questionadas a qualquer momento. A fluência faz parte da ação daquele que aprende e daquele que ensina.

A relatividade no conhecimento, segundo Paula, traz muita confusão. E Ana Cristina tenta encontrar um meio termo entre a matemática fixa, que teve enquanto estudante e a nova concepção que lhe foi apresentada.

As falas dos alunos mostram que, apesar de criarem poucas definibilidades sobre os conceitos estudados, começam a questionar sobre as verdades matemáticas, o ensino de matemática, a formação que tiveram e o modo como vão ensinar matemática, a partir da disciplina.

A partir dos isolados estudados os alunos entraram em dilema. Enfrentaram problemas, para entender os inesperados surgidos. Percebem que há outras formas de se ensinar os conteúdos matemáticos. Aparecem qualidades diferentes para um mesmo isolado. Há mudanças explícitas no subjetivo dos sujeitos. Essas mudanças podem ser comprovadas a partir dos gestos, tons de voz, discussões "acaloradas", idas a bibliotecas, resolução das atividades. Há aqui um certo movimento, o pensamento flexível que também aparece com várias qualidades. Há dinâmicas diferentes. Alguns alunos até agradecem pela oportunidade que tiveram em se encontrar com os conceitos algébricos.

Há uma certa regularidade no modo de transformação dos sujeitos: a incomodação com a verdade, com o movimento e com a ambigüidade. É a partir dessa incomodação que a maioria dos professores-alunos se autolocalizam em seus desconhecimentos matemáticos e fazem relações tanto com o movimento mais geral de suas vidas como com sua vida profissional.

Na dinâmica apresentada, todos podem participar, opinar, contribuir com as definições formais e lógicas criadas pelos teóricos. As aulas podem permitir a dúvida, a incerteza, a busca, porque a palavra chave da sala de aula é o movimento, a fluência. E esse movimento permite-nos teorizar, "filosofar". Isso não quer dizer que não há o certo e o errado. Mas sim, o estudo do por quê tal solução é verdadeira ou falsa.

Enquanto pesquisadora, ao propormos as atividades de ensino, tivemos a oportunidade de vivenciá-las, analisá-las, revisá-las. Estivemos em movimento.

Construímos definibilidades sobre o pensamento flexível, elo de ligação entre os pensamentos empírico-discursivo e teórico. Definimos as características desse pensamento. Entendemos que o lógico-histórico pode ser uma perspectiva didática para a álgebra. Estabelecemos a função da História da Matemática na sala de aula.

Ao mesmo tempo, percebemos que há outras formas de ensinar, de avaliar, considerando-se a dinâmica: indivíduo-grupo-classe que decorre de uma certa Teoria do Conhecimento.

Com essa dinâmica construímos uma nova forma de avaliar. Nessa nova forma, o aluno constrói projetos, aplica-os, analisa-os e apresenta-os.

Ao mesmo tempo, a sua nota também é construída a partir de si mesmo, do grupo e da classe.

Nesta pesquisa, tanto o futuro professor como aquele que está na sala de aula há muito tempo, tiveram a oportunidade de construir e participar de sua própria nota. Pesquisadora e alunos tiveram a oportunidade de elaborar definibilidades para o conceito avaliação.

É por esse motivo que afirmamos: o lógico-histórico representa atividade formadora para todos nós, professores, participantes da pesquisa.

As contribuições deste trabalho têm breve permanência porque estão aqui, para serem (re)pensadas por outros pesquisadores, por professores que investigam a própria prática e por nós, que pretendemos dar prosseguimento à pesquisa estudando as possíveis elaborações que os professores do Ensino Fundamental fazem quando estudam atividades de ensino que tratam dos conceitos de equação e inequação com o enfoque lógico-histórico.

BIBLIOGRAFIA

ALEKSANDROV, A.D. et al. - **La matemática:** su contenido, métodos y significado. Madrid, Alianza Editorial, 1988

ANGLIN, W.S. - **Matemática e História**. Tradução: Carlos Roberto Vianna e Maria Laura M. Gomes in História e Educação Matemática. Revista da Sociedade Brasileira de História da Matemática, v. 1, no. 1, janeiro/junho de 2001

ARAUJO, E. A. - **Influências das habilidades e das atitudes em relação á Matemática e a escolha profissional**. Faculdade de Educação. UNICAMP/SP. Tese de Doutorado, 1999

ARAUJO, E.A. et al. - **Diferentes abordagens para o ensino de álgebra**, mimeo

ASSMANN, H. - **Reencantar a educação**: rumo à sociedade aprendente. Rio de Janeiro, Editora Vozes, 2ª. Edição, 1998

AZARQUIEL, G. - **Ideas y actividades para ensenar álgebra**. Caderno 33 da Colleción Matemáticas: cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis, 1993

BELL, E.T. - **Historia de las matemáticas**. Traducción de R. Ortiz, Fondo de cultura económica - México, 1995

BOHM, D. - **A totalidade e a ordem implicada**. São Paulo/SP, 12ª. edição, Cultrix, 1980

BOGDAN, R.C. & BIKLEN, S.K. - **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução a teoria e aos métodos. Colecção Ciências da Educação - 12. Porto Editora, 1994

BOLEMA, Boletim de Educação Matemática. **O uso da História da Matemática na formalização de conceitos**. Seminário de História e Educação Matemática, IMECC-UNICAMP/SP, Especial no. 2, p. 21 - 26, 1992

BOYER, C. B. - **História da Matemática**, São Paulo, Edgar Blucher, 1974

CARAÇA, B. J. - **Lições de álgebra e análise**, vol. I - Funções, limites, continuidade - Bertrand (Irmãos) Ltda., Lisboa, 1935

______. **Galileo e Newton**. Gazeta de Matemática, Livraria Sá da Costa, Lisboa, ano III, nº. 11, julho, p. 1-2, 1942

______. **Galileo** – valor científico e valor moral de sua obra. Gazeta de Matemática, Livraria Sá da Costa, Lisboa, ano XXXIV-VI, nº. 129-132, p. 49-89, jan-dez 1973-74

______. **Lições de álgebra e análise**, vol. II - Funções, limites, continuidade - Bertrand

(Irmãos) Ltda., Lisboa, 1966

______. **Conferências e outros escritos**. Associação para o ensino Bento de Jesus Caraça, Lisboa – 2ª edição, 1978

______. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Portugal - Gradiva, Edições de 1984 e de 1998

CATALANI, E.M.T. - **A inter-relação forma e conteúdo no desenvolvimento conceitual da fração**. Faculdade de Educação, UNICAMP/SP. Dissertação de Mestrado, 2002

COELHO, A. – **Desafio e refutação**: controvérsia entre António Sérgio e Jesus Caraça sobre a natureza e o valor da ciência. Lisboa – Livros Horizonte, Ltda., 1990

COXFORD, A. F. &SHULTE, A.P. - **As idéias da álgebra**. São Paulo, Atual Editora, 1995

DARSIE, M. M. P. - **A reflexão distanciada na construção dos conhecimentos profissionais do professor em curso de formação inicial**. Faculdade de Educação, USP/SP. Tese de Doutorado, 1998

DAVID, M.M.M.S. & LOPES, M.P. – **Professores que explicitam a utilização de formas de pensamento flexível podem estar contribuindo para o sucesso em Matemática de alguns de seus alunos** in Zetetiké, volume 6, número 9, janeiro/junho de 1998, CEMPEM - FE – UNICAMP, p. 31 - 57

DAVIS, P.J. & HERSH, R. - **A matemática e a retórica** in O sonho de Descartes. Rio de Janeiro. Livraria Francisco Alves Editora S.A., p. 61 - 80, 1988

DAVYDOV, V.V. - **Tipos de generalización en la enseñanza**. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Havana, 2ª. Reimpresión, 1982

DOU, A. - **Fundamentos de la matemática**. Serie Nueva Collecion Labor, Barcelona, 1970

EVES, H. - **Introdução à História da Matemática**. Campinas/SP, Editora da Unicamp, 2ª. edição 1997

FIORENTINI, D. - **Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil**. UNICAMP/SP. Tese de Doutorado, 1995

FRAILE, A. R. - **El álgebra**: del arte de la cosa a las estructuras abstractas. Ciencia Hoy., Santillana, 1998

FREIRE, P. - **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. Editora Paz e terra. Coleção Leitura, 6ª. Edição, 1997

GARBI, G. G. - **O romance das equações algébricas**: a história da álgebra, São Paulo, Makron Books, 1997

GROENWALD, C.L.O. & FILIPPSEN, R.M.J. - **O meio ambiente na sala de aula**: função polinomial de 2°. Grau modelando o plantio de morangos in Educação Matemática em revista. Revista da Soiedade Brasileira de Educação Matemática, ano 9, no. 12, p. 21-29, junho de 2002

GUILLEN, M. – **Pontes para o infinito**: o lado humano das matemáticas. Gradiva, Lisboa, 1987

_______. **Cinco equações que mudaram o mundo**. Coleção Ciência Aberta, Gradiva, 2ª edição, 2000

HOFMANN, J. E. - **Historia de la matemática**. Traducción al español por Vicente Valls y Angles y Gonzalo Fernández Tomaz. 1ª. Edición en español, Talleres Gráficos Toledo S.A., I. Ciencias Matemáticas, U.T.E.H.A., México, 1961

HOGBEN, L. - **Maravilhas da Matemática**: influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos. Editora Globo, Porto Alegra, 1970

_______. **O homem e a ciência**: o desenvolvimento científico em função das exigências sociais. Primeiro volume. Fundo de Cultura Geral, vol. 7, Editora Globo, 1952

ICMI, International Commission on mathematical Instruction - **Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90**. Propostas de Didáctica, Kuwait, 1986

IFRAH, G. - **Os números**: a história de uma grande invenção. São Paulo/SP, 9ª. Edição, Editora Globo, 1998

KARLSON, P. - **A Magia dos Números**: a matemática ao alcance de todos. Coleção Tapete Mágico XXXI, Editora Globo, 1961

KASNER, E. & NEWMAN, J. - **Novos nomes em lugar dos velhos** in Matemática e imaginação. Biblioteca de Cultura Científica, Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1968

KIERAN, C. - **The learning and teaching of school algebra** - in Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Université du Québec à Montréal, 1992

KLEIN, J. **Greek mathematical trought and the origin of álgebra**. Translated by Eva Brann. The M.I.T. Press, Massachusetts Institute of Technology Cambrigde, Massachussetts, and London, England, 1968

KLINE, M. - **Matemáticas para los estudiantes de humanidades**. Sección de obras de ciência y tecnologia, México, Conselho Nacional de Ciência y Tecnologia, 1998

______. - **O fracasso da Matemática Moderna**, São Paulo, IBRASA, 1976

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Coleção Perspectivas do homem. Editora Civilização Brasileira S.A., Rio de Janeiro/RJ, Volume 123, 1978

KOSIK, K. - **Dialética do concreto**. Rio de Janeiro/RJ. Editora Paz e Terra, 7ª. Edição, 2002

KRUTETSKY, V.A. - **Algumas características do desenvolvimento do pensamento nos estudantes com pouca capacidade para as matemáticas in Psicologia e Pedagogia** in Psicologia e Pedagogia: investigações experimentais sobre problemas didácticos específicos, Biblioteca de Ciências Pedagógicas, Editorial Estampa, 1977

LANNER DE MOURA, A.R. - **A medida e a criança pré-escolar**. Faculdade de Educação, UNICAMP/SP. Tese de Doutorado, 1995

LANNER DE MOURA, A.R. & SCARLASSARI, N.T. - **Dificuldades de alunos do ensino fundamental, em álgebra e suas possíveis origens**. Faculdade de Educação, UNICAMP/SP. Relatório final de atividades relativo ao projeto de iniciação científica - CNPQ, 2001-b

LANNER DE MOURA, A R. & SOUSA, M.C. - **O desenvolvimento da álgebra pré-simbólica**: o conceito de variável - in anais doVI EPEM, 2001 e www.uol.com.br/cultvox, março 2001-a

______. **Construindo o conceito de álgebra pré-simbólica com professores do Ensino Fundamental** in Profmat 2000 -Actas (Universidade da Madeira - Madeira Tecnopolo), Portugal, vol. 1, p. 198 - 204, 2000

______. O lógico-histórico: uma perspectiva didática da álgebra na formação de professores. Goiânia, XI Endipe - Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, 26 a 29 de maio de 2002-a

______. **Quando professores do ensino fundamental pensam sobre o lógico-histórico da álgebra**. Faculdade de Educação, UNICAMP/SP, VI EPRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, p. 581-587, 2002-b

______. **O lógico-histórico**: uma perspectiva para o ensino de álgebra. Viseu/Portugal, Actas XIII SIEM - Seminário de Investigação em Educação Matemática, p. 345-363, 2002c

LANNER DE MOURA, A.R. et al. - **O conceito de variação como um dos fundamentos da álgebra elementar** in Coletânea de trabalhos do PRAPEM - VII ENEM.

CEMPEM/PRAPEM, Faculdade de Educação, UNICAMP/SP, p. 98-106, 2001

______. **Movimento Conceitual em sala de aula** in anais da XI Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM, Blumenau/SC, 13-17 de julho de 2003

LEONTIEV, A. N. – **Actividad, consciência, personalidad**. Editorial Pueblo y Educación, Habana, 2ª reimpresión, 1983

LIMA, L.C.– **Da mecânica do pensamento ao pensamento emancipado da mecânica** in Programa Integrar, Caderno do Professor, Trabalho e Tecnologia, p. 95 – 103, CUT/SP, 1998

LIMA, L. & MOISÉS, R. P. - **A Teoria dos Campos Numéricos**: A longa marcha da criação numérica, São Paulo: CEVEC/CIART, edições de 1992 e 1997

______. **Apostila básica de Matemática**. FAEP, Universidade de Mogi das Cruzes/SP, Secretaria de Estado da Educação, Projeto de Educação Continuada, Pólo 3, 1998

______. **A variável**: escrevendo o movimento. A linguagem Algébrica 1. São Paulo/SP, CEVEC/CIARTE, edições de 1993; 1997 e 2000

LIMA, L. et al. - **Equações**: o movimento se particulariza. São Paulo/SP CEVEC-CIARTE, 1998

LINS, R. & GIMENEZ, J. - **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI.** Campinas/SP, Paiprus, 3ª. Edição, 1997.

MASON, J. et al. - **Rutas hacia el álgebra**. Raíces del álgebra, traducción y Edición: Cecilia Agudelo Valderrama, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 1999

MASON, S.F. - **História da ciência**. As principais correntes do pensamento científico. São Paulo/SP, Editora Globo, 1964

MEC/SEF - **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 1998

MIGUEL, A. - **Uma investigação acerca de algumas formas de se conceber o papel da História da Matemática na pesquisa contemporânea em Educação Matemática**. Faculdade de Educação, UNICAMP/SP, Relatório de pesquisa desenvolvido em período de semestre sabático, julho a dezembro de 1999

______. **Três estudos sobre História e educação Matemática**. Faculdade de Educação, UNICAMP/SP. Tese de Doutorado, 1993

______. **Educação Matemática e Epistemologia**. Faculdade de Educação, UNICAMP/SP, mimeo.

MIGUEL, A. & FIORENTINI, D. & MIORIM, M.A. - **Álgebra ou geometria**: para onde pende o pêndulo? Pro-posições, vol. 3 no. 1 [7] , março de 1992

MIORIM, M.A. & MIGUEL, A. & FIORENTINI, D. - **Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro**. Revista Zetetiké, ano I - no. 1, CEMPEM - Faculdade de Educação - UNICAMP, 1993

MIORIM, M.A. – **Introdução à história da Educação Matemática**. Atual Editora, São Paulo/SP, 1998

MOISÉS, R. P. - **A resolução de problemas na perspectiva histórico/lógica**: o problema em movimento. Faculdade de Educação. USP/SP. Dissertação de Mestrado, 1999

MORA, J.F. - **Dicionário de Filosofia**. Lisboa, Publicações Dom Quixote, 1991

MOREIRA, M.A. & BUCHWEITZ, B. - **Novas estratégias de ensino e aprendizagem**: os mapas conceptuais e o Vê epistemológico. Lisboa, Plarano - Edições Técnicas, 1ª. Edição, 1994

MOURA, M.O. - **A atividade de ensino como ação formadora** in Ensinar a ensinar. São Paulo, Pioneira Thmson Learning, 2001

______. **O educador matemático na coletividade de formação**: uma experiência com a escola pública. Faculdade de Educação, USP/SP. Tese de livre docência, 2000

______. **A educação escolar como atividade** in anais do IX Endipe - Encontro Nacional de Didática e prática de ensino: "olhando a qualidade do ensino a partir da sala de aula", volume II/2, de 04 a 08 de maio de 1998, Águas de Lindóia/SP, 1998

OLIVEIRA, A.T. C.C. - **Reflexões sobre a aprendizagem da álgebra** in Educação Matemática em revista. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano 9, no. 12, p. 35-39, junho de 2002

PARADÍS, J. & I., J.M. & MALET, A. - **La génesis del Álgebra Simbólica.** En Álgebra en el período renacentista. La recuperación de los clásicos griegos, (vol. II). Barcelona, Promociones y Publicaciones Universitaris, S.A., 1989 -a

______. **Los orígenes del álgebra**: de los árabes al renacimiento (vol. I). PPU. Barcelona, 1989-b

PAULOVICH, L. - **Um estudo sobre formação de conceitos algébricos** in Ciência & Educação, v.5, no. 2, p. 39-48, 1998

PEREIRA DE JESUS, W. - **Educação Matemática e Filosofias sociais da matemática:** um exame das perspectivas de Ludwig Wittgenstein, Imre Lakatos e Paul Ernest. Faculdade de Educação - UNICAMP. Tese de Doutorado, 2002

PÉREZ, J.A. - **Ideas geométricas en álgebra elemental** in Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamérica, vol. 8, no. 3, p. 72-84, diciembre 1996

PIAGET, J. & GARCÍA, R. - **Psicogénesis e historia de la ciencia**. Siglo Veintiuno editores, Colombia, 2ª. Edición, 1984

PRADO, E.P.A. –**Uma reflexão sobre formação de profesores no ensino da matemática**. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo/SP. Dissertação de Mestrado, 2000

RADICE, L.L. - **Os símbolos e os novos números** in A matemática de Pitágoras a Newton. Biblioteca Básica de Ciência, edições 70, 1985

RENSHAW, P. D. - **A teoria sociocultural de ensino-aprendizagem**: implicações para o currículo no contexto australiano in Cadernos pedagógicos, no. 18, Secretaria Municipal de Educação de Porto Alegre, 1999

RÍBNIKOV, K. - **Historia de las matemáticas**. Editorial Mir Moscú, 1987

ROBAYNA, M.M.S. et al. - **Iniciacion al álgebra**. Caderno 23 da Colleción Matematicas: cultura y aprendizaje, Editorial Sintesis, 1ª. Reimpresión, 1996

SILVA, J.S. – **Pedagogía Por quê?...** Gazeta de Matemática, Livraria Sá da Costa, Lisboa, ano III, nº. 11, julho, p. 15 - 16, 1942

SALGADO, J.R.R. - **La comprensión del álgebra y los números racionais** in Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamérica, vol. 7 no. 2, p. 44-59, agosto de 1995

SMITH, D.E.- **History of mathematics**. Vol I, New York, Dover, 1958

SOCAS, M.M. et al. - Iniciacion al álgebra. Coleção Matematicas: cultura y aprendizaje, Editorial Sintesis, 1996.

SOUSA, M.C. - **A percepção de professores atuantes no ensino de matemática nas escolas estaduais da Delegacia de Ensino de Itu, do Movimento Matemática Moderna e de sua influência no currículo atual**. Faculdade de Educação. UNICAMP/SP. Dissertação de mestrado, 1999

SOUZA, E.R. & DINIZ, M. I. S. - **Álgebra: das variáveis às equações e funções**. IME -

USP, São Paulo, 2ª. edição, 1996

STRUIK, D. J. - **História concisa das matemáticas**. Ciência aberta, Gradiva, 1987

URSINI, S. - **Experiencias pre-algebricas** in Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamérica, vol. 8, no. 2, p. 33-40, agosto de 1996-a

________. **Una perspectiva social para la educación matemática**: la influencia de la teoría de L.S. Vygotsky in Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamérica, vol. 8, no. 3, p. 42-49, diciembre 1996-b

USISKIN, Z. - **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis** in As idéias da álgebra, SHULTE, A.P. & COXFORD, A. F. - São Paulo, Atual Editora, 1995

UTSUMI, M. C. - **Atitudes e habilidades envolvidas na solução de problemas algébricos**: um estudo sobre o gênero, a estabilidade das atitudes e alguns componentes da habilidade matemática. Faculdade de Educação. UNICAMP/SP. Tese de Doutorado, 2000

VALENTE, W. - **Educação Matemática e política**: a escolarização do conceito de função no Brasil in Educação Matemática em revista. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano 9, no. 12, p. 16-20, junho de 2002

______. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730 - 1930)**. São Paulo, Annablume Editora, 1999

VYGOTSKY, L.S. & LURIA, A.P.R. - **Estudos sobre a história do comportamento**: símios, homem primitivo e criança. Artes Médicas, Porto Alegre, 1996

ANEXOS

ISOLADO I: NATUREZAS

Atividades orientadoras de ensino e de pesquisa

Atividade 1: **natureza humana, natureza universal e natureza desconhecida**

A totalidade do Universo contém o que Lima (1998) denomina de natureza universal, natureza desconhecida e natureza humana. Assim as atividades discutidas em aula com os professores-alunos são adaptações feitas pelo autor e têm por objetivo analisar a totalidade dos movimentos presentes na realidade, no mundo, a partir de três isolados denominados por ele de natureza humana, natureza universal e natureza desconhecida. A partir desse pressuposto discute-se as formas diversas encontradas pelo homem para numeralizar a natureza. Há isolados na natureza que são organizados em unidades naturais e há isolados que não são organizados em unidades naturais. As leis quantitativas que regem esses movimentos são de naturezas distintas. Ao numeralizar a natureza em unidades, nos utilizamos do conjunto dos Números Naturais, ao mesmo tempo, temos que pensar sobre os números não naturais para numeralizar isolados que não estão organizados em unidades.

Dinâmica:

- Leitura em grupo do texto que segue abaixo;
- Responder e argumentar, primeiro individualmente, depois em grupos se, você concorda ou não com as seguintes afirmações:

> "O homem é parte da natureza. **Natureza** é o movimento universal do qual o homem é parte integrante. O homem conhece alguns movimentos naturais e deles se utiliza para sobreviver. Chamamos de **natureza humana** ao conjunto de movimentos naturais que o homem conhece e administra para a sua sobrevivência. Chamamos de natureza **desconhecida** ao conjunto de movimentos naturais que o homem desconhece" (Lima, 1998: 10).

- Elaboração de desenhos que representem :

a) a **Natureza Universal**;
b) a **Natureza Humana**;
c) a **Natureza Desconhecida**

- Leitura, análise das várias sentenças. Em seguida, indicar se são verdadeiras ou falsas, justificando as respostas. Eis algumas delas:

1) "A transformação da natureza desconhecida em natureza humana acontece com o homem organizando todas as quantidades em unidades[1]".
2) "O crescimento da natureza humana ocorre no interior da natureza humana, com o homem criando uma forma de controlar a quantidade de uma qualidade nova".

[1] Unidade de forma geral, do ponto de vista de Bohm (1980): de tempo, espaço, energia, biológica, ou seja, a que dá ordem a totalidade.

Dinâmica:

- Leitura individual e em seguida nos pequenos grupos de um excerto selecionado por nós do capítulo I do livro "O homem e a ciência", de Hogben (1970), que descreve "o começo da ciência" através do aparecimento do calendário;

- Elaboração individual e em seguida nos pequenos grupos do mapa conceitual referente ao texto lido;
- Apresentação e discussão dos mapas conceituais pelos grupos;
- Análise individual e em grupo, através de Caraça (1998) dos elementos que compõem o pensamento algébrico. Na análise os professores-alunos tinham que considerar a seguinte premissa, estabelecida por nós:

> "a definição de natureza humana não é um mero acaso. Está atrelada aos critérios científicos que são de domínio do homem, à visão de ciência moderna, à mensurabilidade".

Atividade 3: **Sobre a álgebra que tiveram enquanto estudantes**

Individualmente:

1) Escreva o que você sabe sobre álgebra
2) Como você se sentiu quando começou a estudar álgebra?
3) Que aspectos da vida você acha que a álgebra explica e que o número não explica?
4) Existe relação entre número e geometria? Explique
5) Existe relação entre número, geometria e álgebra? Explique