

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**INICIAÇÃO A PRÁTICAS DE LETRAMENTO ALGÉBRICO EM AULAS
EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS**

**FERNANDO LUÍS PEREIRA FERNANDES
ORIENTADOR: PROF. DR. DARIO FIORENTINI**

Dissertação de Mestrado apresentada à
Comissão de Pós-graduação da Faculdade de
Educação da Universidade Estadual de
Campinas, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Educação, na
área de concentração Ensino e Práticas
Culturais.

**Campinas
2011**

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca
da Faculdade de Educação/UNICAMP**

Bibliotecário: Rosemary Passos – CRB-8ª/5751

F391i	Fernandes, Fernando Luís Pereira Iniciação a práticas de letramento algébrico em aulas exploratório-investigativas / Fernando Luís Pereira Fernandes. – Campinas, SP: [s.n.], 2011. Orientador: Dario Fiorentini. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. 1. Educação matemática. 2. Matemática. 3. Letramento. 4. Álgebra – estudo e ensino. I. Fiorentini, Dario. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título. 11-058/BFE
-------	--

Título em inglês: Initiation into algebraic literacy practices in mathematics investigations classes

Keywords: Mathematic education; Mathematics; Literacy; Algebra – Study and teaching

Área de concentração: Ensino e Práticas Culturais

Titulação: Mestre em Educação

Banca examinadora: Prof. Dr. Dario Fiorentini (Orientador)

Prof. Dr. Dione Lucchesi de Carvalho

Profª. Drª. Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão

Profª. Drª. Anna Regina Lanner de Moura

Profª. Drª. Maria do Carmo de Sousa

Data da defesa: 28/02/2011

Programa de pós-graduação: Educação

e-mail: fernandoribeirao@yahoo.com.br

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Iniciação a práticas de letramento algébrico
em aulas exploratório-investigativas**

Autor: Fernando Luís Pereira Fernandes
Orientador: Prof. Dr. Dario Fiorentini

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação
defendida por Fernando Luís Pereira Fernandes e aprovada pela
Comissão Julgadora.

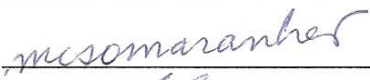
Data: 28/02/2011

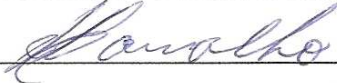
Assinatura:.

Orientador: Prof. Dr. Dario Fiorentini

COMISSÃO JULGADORA:







2011

iii

Dedico aos meus pais Maria Zélia e Humberto, pelo que sou hoje, pela formação que tive e pelo apoio incondicional.

À minha esposa, Luzia, pela sua cumplicidade.

Agradeço...

A DEUS, pela existência maravilhosa e repleta de oportunidades permitindo o meu crescimento e evolução.

À minha família: pai, mãe, meus irmãos Márcia, Danilo e Marco Aurélio, pela confiança e pelo carinho, apesar da distância física que nos separa.

Ao meu orientador, o professor Dario, por acreditar na possibilidade de desenvolvimento desse e outros projetos, por compartilhar o seu conhecimento e experiência na docência e na pesquisa.

Às professoras Dione e Cristina Maranhão, pelas contribuições no Exame de Qualificação e por participarem da defesa.

À professora Anna Regina Lanner de Moura, pela leitura atenciosa desse trabalho e pela participação no Exame de Qualificação.

Ao professor Sergio Lorenzato, pela parceria acadêmica, pelas conversas e conselhos, como aqueles recebemos de um avô... pela amizade!

Aos companheiros de Prapem – Ronaldo, Dora, Cida, Admur, Keli, Marisol, Adriana Lima, Adriana Molina, Adriana Correa, LÍlian, Valdete, Dolores – pela confiança, apoio e amizade.

Ana Luísa, auxiliar de pesquisa, por colaborar no desenvolvimento do trabalho de campo, por aceitar e fazer parte dessa investigação durante a regência de suas aulas do estágio supervisionado.

Aos colegas de Grupo de Sábado, que colaboraram na constituição do professor que (tenta) refletir e investigar a própria prática: há uma grande parcela de “culpa” desse grupo colaborativo...

À equipe gestora, aos funcionários e professores da EE Jornalista Roberto Marinho, que permitiram e colaboraram para a realização da coleta de dados em 2008;

Aos meus alunos do 7º A e 7ºB, do ano 2008, sujeitos dessa pesquisa, pela participação e engajamento nas atividades propostas.

Aos mestres que tive, aos amigos e aos parentes - que sempre me apoiaram nesse projeto de vida – ser educador matemático!

RESUMO

O objetivo principal desta pesquisa foi compreender como se dá o desenvolvimento do letramento algébrico de alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública no interior do estado de São Paulo. Foram escolhidas duas classes, nas quais eu era o professor responsável. Trata-se de uma pesquisa sobre a própria prática desenvolvida em um ambiente exploratório-investigativo, de natureza qualitativa, sobretudo interpretativa. A coleta de dados contou com a participação de uma auxiliar de pesquisa. O material de campo foi constituído pelo diário de campo do pesquisador e narrativas produzidas pela auxiliar de pesquisa, relatórios e cartazes produzidos pelos alunos e gravações em áudio e vídeo, sendo algumas delas transcritas. Como categorias de análise, temos (i) a mediação realizada pelo professor em diferentes momentos das aulas, dando atenção especial ao momento de socialização/sistematização das apresentações no processo de letramento algébrico; (ii) a constituição de um letramento algébrico, tendo como foco de análise e interpretação as crenças, valores e saberes mobilizados pelos alunos e a produção de sentidos e a negociação de significados desenvolvidas por eles durante a atividade investigativa e a socialização/sistematização de suas produções. Podemos afirmar a aprendizagem não se restringiu às tarefas contempladas. Além de os alunos se apropriarem de um modo de produzir sentido e estabelecer relação com a atividade algébrica, concebida como prática social de leitura e escrita de textos que mobilizam signos próprios da álgebra, também se apropriaram do modo de relacionar-se com o conhecimento matemático, mediante a uma dinâmica exploratório-investigativa.

Palavras-chave: Educação Matemática; Matemática; Letramento; Álgebra – Estudo e ensino.

ABSTRACT

The main objective of this research was to understand how the literacy development of students in algebraic seventh year of elementary school of the public school in the state of Sao Paulo. Two classes were chosen, in which I was the teacher. This is a survey about their own practice developed in an exploratory environment, investigative, qualitative, interpretive above. Data collection included the participation of a research assistant. The field material was created by the diary of the narratives produced by the researcher and research assistant, reports and posters produced by students and in audio and video recordings and some of them transcribed. As categories of analysis, we have (i) mediation carried out by teacher at different times of the classes, giving special attention to the moment of socialization / systematization of the presentations in the literacy process algebraic, (ii) to establish an algebraic literacy, focusing on analysis and interpretation of the beliefs, values and knowledge mobilized by the students and the production of meaning and negotiation of meanings carried by them during the research activity and socialization / systematization of their productions. We affirm the learning was not restricted to tasks covered. Besides the students take ownership of a way to produce meaning and establish relationship with the algebraic activity, conceived as a social practice of reading and writing texts that mobilize themselves signs of algebra, also seized on the way to relate with mathematical knowledge, through a exploratory-investigatory dynamic.

Keywords: Mathematic education; Mathematics; Literacy; Algebra – Study and teaching.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
2	NARRANDO A MINHA HISTÓRIA E OS ANTECEDENTES QUE MOTIVARAM A REALIZAÇÃO DESTE ESTUDO	5
2.1	Antes e depois da experiência com a escrita nas aulas de Matemática	5
2.2	As Investigações Matemáticas e a Iniciação Científica	8
2.3	O Grupo de Sábado	10
2.4	O projeto de pesquisa que deu origem a esta dissertação	13
3	OS CAMINHOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA	17
3.1	O que pesquisar?	17
3.2	Descrevendo a escola e a sua comunidade	19
3.3	A comunidade de alunos e a família	20
3.4	A pesquisa de campo	21
3.5	A Auxiliar de Pesquisa	24
3.6	Categorias de análise	26
4	SOBRE ÁLGEBRA	29
4.1	As diferentes funções da Álgebra	29
4.2	As concepções de Álgebra e Educação Algébrica	32
4.3	Sobre o Currículo de Matemática, os Conteúdos Algébricos e Padrões	36
4.4	A linguagem algébrica	40
5	LETRAMENTO E LETRAMENTO ALGÉBRICO: ALGUNS ASPECTOS TEÓRICOS	43
5.1	Concepção e modelos de letramento	43
5.2	Um letramento algébrico?	49
6	NARRANDO E ANALISANDO O TRABALHO DE CAMPO	57
6.1	Os primeiros contatos dos alunos com as Investigações Matemáticas	57

6.2	As fases de uma aula exploratório-investigativa	60
6.3	Iniciando uma atividade investigativa	61
6.4	Socializando os primeiros resultados	67
6.5	Quais foram as primeiras impressões dos alunos após uma aula “diferente”?	75
6.6	Que sentidos os alunos atribuem à Álgebra e às aulas exploratório- investigativas?	76
6.7	A segunda tarefa proposta	78
6.8	Algumas interpretações dos alunos registradas em relatórios escritos	81
6.9	Sistematizando a segunda atividade	85
6.10	A terceira tarefa exploratório-investigativa	90
6.11	Socialização e sistematização da terceira atividade	96
7	APROFUNDANDO A ANÁLISE DAS PRÁTICAS DE LETRAMENTO ALGÉBRICO	103
7.1	A mediação do professor escriba nas práticas de letramento algébrico	103
7.2	As práticas de leitura e escrita no desenvolvimento do letramento algébrico	108
7.3	Destacando um caso de desenvolvimento de letramento algébrico	112
8	PONTOS PARA CONCLUIR E OUTROS PARA PROSSEGUIR...	117
8.1	Quais foram as limitações? Em que se pode prosseguir?	122
	REFERÊNCIAS	125

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Sequência de figuras, extraído de Imenes e Lellis (2006)	31
Figura 2	Interpretação realizada por Bruna e Tatiane	63
Figura 3	A continuação da tabuada do 5, em "L" ao contrário	67
Figura 4	Escrita da dupla Matheus e Matheus	70
Figura 5	Parte do relatório da dupla Alessandra e Cléo	73
Figura 6	Interpretação de Mário sobre uma aula investigativa	79
Figura 7	Trecho de relatório do grupo 2, relativo à segunda tarefa	82
Figura 8	Escrita do grupo de Walter	83
Figura 9	Trecho do relatório do grupo de Walter (I).....	84
Figura 10	Trecho do relatório do grupo de Walter (II).....	84
Figura 11	Figura elaborada por Andresa, Cristiane e Bruna – Regra 1.....	86
Figura 12	Figura baseada na interpretação de Alessandro, Manoel e Cesar - 7º A	94
Figura 13	Fotografia tirada ao final da sistematização dos resultados da tarefa 2	95
Figura 14	Representação feita pelo professor Fernando, com vistas a representar por meio de uma ilustração as ideias da equipe.....	99
Figura 15	Trecho do relatório de Walter referente à tarefa 3	100

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Diferentes definições para tarefas matemáticas, segundo Ponte (2003)	9
Quadro 2	Movimento de uma espiral auto-reflexiva (Fiorentini e Lorenzato, 2006)	23

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Síntese das diferentes concepções de Álgebra, segundo Usiskin (1995)	29
Tabela 2	Tabela elaborada por Fernando, baseada na resolução da Regra 1	86
Tabela 3	Tabela constituída por Fernando para comparar as Regras 1 e 2.1	89
Tabela 4	Tabela referente às duas regras utilizadas na sistematização da segunda atividade investigativa	106

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Esta é uma pesquisa de mestrado, motivada pelas experiências de docência e pesquisa, iniciada quando eu ainda era aluno da Licenciatura em Matemática. Eu não imaginava que a investigação realizada na Iniciação Científica abriria tantas possibilidades de prosseguir os estudos nos níveis de Pós-Graduação *Stricto Sensu*... Pretendo apresentar algumas considerações a respeito do ensino da Álgebra Elementar, da iniciação dos alunos no mundo do letramento algébrico, tendo como contexto as aulas exploratório-investigativas. Como questão de pesquisa, procurarei responder à questão: **Como se dá o desenvolvimento da linguagem e do letramento algébricos de alunos de 7º ano, inseridos em um ambiente de exploração e investigação em aulas de Matemática?**

Os objetivos desta pesquisa são: (i) descrever e/ou narrar o processo de produção e negociação de sentidos e significados dos alunos no trabalho de exploração e investigação, que contempla as tarefas de cunho algébrico e a mediação do professor nesse processo; (ii) interpretar e analisar o processo de utilização e constituição da linguagem algébrica, mediante o desenvolvimento de um letramento algébrico, a partir da atividade algébrica realizada pelos alunos; (iii) analisar as aulas exploratório-investigativas como práticas de letramento.

Trata-se de uma investigação da própria prática. A coleta de dados ocorreu no segundo semestre de 2008, no período de outubro a novembro daquele ano, em duas classes do 7º ano do Ensino Fundamental, classes em que eu era o professor responsável. Foram considerados os seguintes materiais para a análise: diário de campo do professor-pesquisador; vídeos e gravações em áudio das aulas e algumas de suas transcrições; narrativas produzidas pela auxiliar de pesquisa e relatórios elaborados pelos alunos, resultado das investigações por eles realizadas. Após o

desenvolvimento da pesquisa de campo, alguns indícios me levaram a considerar duas dimensões da investigação como categorias de análise, que se mostraram como fundamentais na iniciação dos alunos, sujeitos da pesquisa, no mundo do letramento algébrico: (i) a mediação realizada pelo professor em diferentes momentos das aulas, dando atenção especial ao momento de socialização/sistematização das apresentações no processo de letramento algébrico; (ii) a constituição de um letramento algébrico, tendo como foco de análise e interpretação as crenças, os valores e os saberes mobilizados pelos alunos e a produção de sentidos e a negociação de significados por eles desenvolvidas durante a atividade investigativa e a socialização/sistematização de suas produções.

No capítulo 2 – **Narrando a minha história e os antecedentes que motivaram a realização deste estudo** –, apresento a minha trajetória estudantil, profissional e acadêmica, dando destaque à importância da escrita em minha formação, à constituição do pesquisador, desde a iniciação científica, do professor, do professor-pesquisador e ao papel dos diferentes contextos de formação inicial e contínua na constituição do professor-pesquisador. No mesmo capítulo, os objetivos são elencados, acompanhados das categorias de análise e os seus porquês.

No capítulo 3 – **Os caminhos metodológicos** –, procuro descrever a comunidade escolar em que a pesquisa foi realizada, o papel da auxiliar de pesquisa, que também assumiu o papel de estagiária, e apresento os princípios que nortearam a Metodologia da Pesquisa, a aproximação de uma pesquisa-ação.

No capítulo 4 – **Sobre Álgebra** – é realizada uma revisão bibliográfica referente ao campo do ensino da Álgebra Elementar, das diferentes funções da Álgebra (Usiskin (1995) e Sousa e Diniz (1994)), das concepções de Educação Algébrica de Fiorentini et al. (1993), bem como dos aspectos históricos do desenvolvimento da Álgebra, em particular da linguagem algébrica e do desenvolvimento curricular desse tema no Brasil e em Portugal.

No capítulo 5 – **Sobre Letramento** – são apresentados os referenciais teóricos sobre letramento, as diferenças entre letramento e alfabetização, os modelos de letramento e o letramento como prática social. Nesse capítulo, procuro identificar os

pontos de contato entre os estudos do letramento como prática social de leitura e escrita e uma interpretação a respeito do letramento algébrico, como constructo teórico.

No capítulo 6 – **Narrando e analisando o trabalho de campo** –, descrevo e narro o que e como aconteceu o desenvolvimento das três tarefas exploratório-investigativas propostas. Os momentos da atividade investigativa, bem como os de socialização e sistematização, são destacados com algumas análises sobre as descobertas dos alunos.

No capítulo 7 – **Aprofundando a análise das práticas de letramento algébrico** –, baseado nas categorias apresentadas no capítulo 2, alguns episódios ocorridos na coleta de dados são realçados, a fim de elucidar, esclarecer e aprofundar os temas elencados nos objetivos, sob o olhar da teoria. A mediação do professor e a constituição do letramento algébrico são, entre diversos aspectos destacados na investigação, os escolhidos para análise.

No último capítulo – **Pontos para concluir e outros para prosseguir...** –, destaco as contribuições formativas desta investigação para os alunos, o que, de fato, eles aprenderam nessa experiência, as contribuições à Academia, em particular, à área de Educação Matemática, e elenco as limitações e as possibilidades de prosseguimento dos estudos a respeito do letramento algébrico.

CAPÍTULO 2

NARRANDO A MINHA HISTÓRIA E OS ANTECEDENTES QUE MOTIVARAM A REALIZAÇÃO DESTE ESTUDO

2.1 Antes e depois da experiência com a escrita nas aulas de Matemática

Contar um pouco sobre a minha história, profissional e acadêmica, é trazer a relação entre a pesquisa e a prática: o “ser professor” e o “ser pesquisador”. Antes de apresentar a importância da escrita para as distintas situações, busco em minhas memórias como surgiu o “ser professor”. Esse “ser” esteve sempre presente em minha vida. Quando criança, adorava brincar de escolinha, na qual eu sempre era o professor. Alguns anos depois, essa brincadeira foi se tornando mais séria: iniciei, aos doze anos de idade, a prática de dar aula particular aos filhos de pessoas conhecidas, moradoras próximas de minha residência. Acredito que minha opção e preferência pela docência devem-se, também, à formação de meus pais. Minha mãe, formada em Licenciatura em Ciências, com Habilitação em Matemática, foi professora de ambas as disciplinas por 12 anos. Meu pai, embora nunca tenha lecionado, chegou a concluir o antigo curso Normal (Magistério).

A partir dessas experiências, decidi-me pelo caminho da docência. Escolhi o curso de Matemática e prestei alguns processos seletivos. Prestei em cinco universidades públicas, porém, optei pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Já cursando a graduação em Licenciatura em Matemática, exceto as disciplinas lecionadas na Faculdade de Educação, os primeiros dois anos do curso foram dedicados ao estudo de disciplinas como Cálculo I, II e III, Geometria Analítica, Álgebra Linear, Física Geral I e II, além das disciplinas de Laboratório de Física. Essas disciplinas não procuravam estabelecer relação entre o que era estudado na

licenciatura e o que seria o campo da docência no Ensino Fundamental e Médio. Além disso, o modo de estudo era, em geral, resolver listas de exercícios, de maneira a ter um bom desempenho na prova. Entretanto, apesar de estudar muito, não era garantido o êxito no fim do processo.

A partir do terceiro ano de curso, alguns episódios ocorreram, os quais, acredito, tenham sido fundamentais para a minha formação, sobretudo para a constituição do “ser professor” e do “ser pesquisador”.

Naquela época, cursei a disciplina de Geometria Plana e Desenho Geométrico¹, a qual foi desenvolvida sob uma abordagem didática muito diferente das disciplinas até então cursadas no Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), da Unicamp: havia um momento com aulas expositivas, nas quais constavam as demonstrações e teoremas da Geometria Plana, e um outro, em que era valorizada a resolução de problemas relacionados ao conteúdo estudado na aula anterior, mas utilizando um *software* de Geometria Dinâmica. Essas aulas foram ministradas pela docente responsável, de maneira a colaborar com a pesquisa de doutorado de Freitas (2006)².

O seu objeto de pesquisa era analisar a contribuição da escrita discursiva em aulas de Geometria, para a formação do futuro professor de Matemática. E, para mim, esse foi um momento muito importante. Afinal, voltar a escrever tornava-se prazeroso, novamente... A linguagem matemática – formalista, coesa e simbólica – parecia bastar-se a si mesma. Assim, até então, não havia tido a oportunidade de escrever de maneira dissertativa, algo que sempre gostei de fazer, e nem me lembrava mais do quão bem aquilo me fazia, desde os tempos em que eu era aluno do Ensino Médio e escrevia pequenas dissertações.

Na verdade, não tive, durante a minha escolarização, a cultura de escrever de maneira dissertativa nas aulas de Matemática. E, atualmente, enquanto professor, procuro promover aulas “diferentes”, que incluem esse tipo de escrita por parte do aluno. Na disciplina de Geometria Plana, escrever era, por exemplo, um modo de

¹ Disciplina oferecida no 1º Semestre de 2003 pela Profa. Dra. Sandra Augusta Santos.

² Título da Tese: A Escrita no Processo de Formação Contínua do Professor de Matemática.

representar uma demonstração de um teorema com a utilização da linguagem materna. Sem desvalorizar a importância da linguagem matemática e seu formalismo, mas sentia que era um modo de ressignificar o que era nosso objeto de estudo. Enquanto professor, ao solicitar que meus alunos escrevam, tenho a intenção de promover esse modo de atribuir sentido e significado aos conceitos matemáticos a partir de “nossas palavras”.

Arthur Powell e Marcelo Bairral, ao refletirem a respeito do processo de matematização de José, um aluno que participou de uma de suas pesquisas, afirmam que

A escrita força os interlocutores a refletir, diferentemente, sobre sua experiência matemática. Enquanto examinamos nossas produções, desenvolvemos nosso senso crítico. A escrita suporta atos de cognição e metacognição. Ao adquirir confiabilidade no processo de matematização, José continuou a debater com suas idéias sobre como determinar o menor múltiplo comum de um grupo de números inteiros. Construiu e reconstruiu sentido. Escreveu e reescreveu suas reflexões, um processo mediado por comentários externos do seu professor. Passou a expressar suas idéias com mais clareza e confiança e, também, a selecionar o tipo de linguagem mais apropriado para descrever suas percepções e ações. (POWELL e BAIRRAL, 2006, p. 26)

Concordando com os autores, também considero que, em especial, ao alunado que tenho todos os dias na escola em que trabalho, “a escrita ajuda-os também a tornarem-se mais confiantes na matemática e a engajarem-se no material aprendido mais profundamente.” (ibidem, p. 27). Em sua maioria, há o predomínio de histórias de fracasso em relação ao desempenho escolar em Matemática. Antes de se pensar em promover uma relação de ensino-aprendizagem significativa para aluno, é preciso trazê-lo ao centro da discussão e promover a sua participação no processo.

Retornando à minha trajetória de estudante do curso de Matemática, concomitantemente à disciplina de Geometria Plana e Desenho Geométrico, também cursava a disciplina de Prática de Ensino e Estágio Supervisionado. Mais presente ainda, a escrita instigava-me a falar sobre mim, quando nas primeiras aulas foi solicitada uma autobiografia escolar. Vieram, depois, as resenhas e a elaboração do diário de campo das observações realizadas no Estágio Supervisionado. No primeiro semestre, não houve minha intervenção nas aulas ministradas pela professora

responsável pela classe. Isso ocorreu apenas no 2º semestre, quando deveria descrever, e principalmente refletir, sobre as minhas primeiras aulas de regência.

2.2 As Investigações Matemáticas e a Iniciação Científica

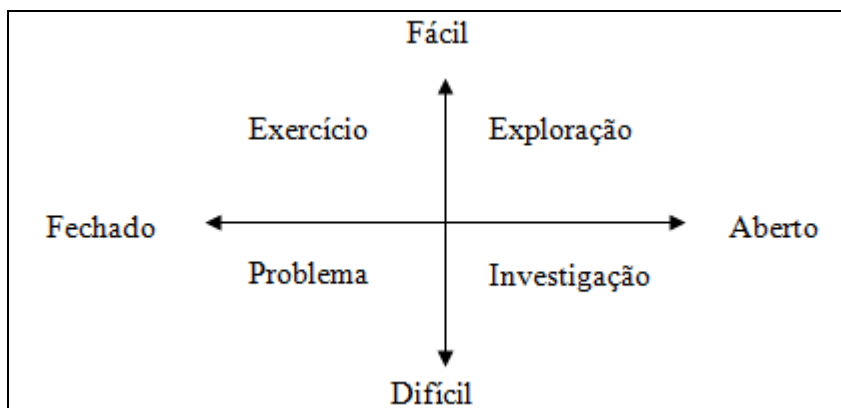
Foi durante a regência, ao pensar nas aulas que iria desenvolver no Estágio Supervisionado, que tive contato com as Investigações Matemáticas (IM). O professor Dario³ salientou que aquelas tarefas eram muito interessantes e que instigavam os alunos a realizarem um trabalho diferenciado. E eu me encantei com aquele mundo novo, com outra possibilidade de ensinar e aprender Matemática.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 23),

os exercícios e os problemas têm uma coisa comum. Em ambos os casos, o seu enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido. Não há margem para ambigüidades. A resposta é sabida de antemão, pelo professor, e a resposta do aluno está certa ou está errada. Numa investigação, as coisas são um pouco diferentes. Trata-se de situações mais abertas – a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição. E uma vez que os pontos de partida podem não ser exatamente os mesmos, os pontos de chegada podem ser também diferentes.

De fato, pensar na possibilidade de ensinar Matemática de outra maneira, diferente mesmo do modo que aprendi e que pretendia até então ensinar, diferente dos modelos de professor que eu tinha como exemplo, de lousas impecáveis e aulas expositivas e tidas como tradicionais... Sobre essa separação entre as diferentes definições de tarefa, Ponte (2003) utiliza um diagrama, contemplando quatro diferentes tarefas e o grau de abertura de cada uma delas:

³ Prof. Dr. Dario Fiorentini, docente responsável pelas disciplinas Prática de Ensino em Matemática e Estágio Supervisionado I e II, no ano de 2003.



Quadro 1 – Diferentes definições para tarefas matemáticas, segundo Ponte (2003)

Qual seria o limite entre uma exploração e uma investigação? Quais seriam os elementos que diferem um do outro? Pensando que esse limite é difuso, usarei a expressão tarefa exploratório-investigativa (FIORENTINI, FERNANDES e CRISTOVÃO, 2005), para denominar essas tarefas de caráter aberto, sem a preocupação de categorizar uma ou outra tarefa. Estendendo essa ideia, denominarei as aulas, em que essas tarefas são desenvolvidas, de aulas exploratório-investigativas.

A novidade que eram, para mim, as Investigações Matemáticas levou-me a elaborar um projeto de Iniciação Científica⁴, o qual foi financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e desenvolvido durante o ano de 2004. Esse projeto tinha como objetivo principal identificar e analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos da 6ª série do Ensino Fundamental, de uma escola pública estadual. Como resultado, foram apresentadas comunicações orais em eventos nacionais e internacionais.

Após o desenvolvimento de duas tarefas exploratório-investigativas, baseadas em algumas das funções da Álgebra, em que a primeira contemplava o aspecto da generalização e a segunda a variação/relação entre grandezas, foi possível elaborar três categorias de desenvolvimento do pensamento algébrico: primeira, os alunos *que denotaram um pensamento pré-algébrico*; segunda, aqueles *que denotaram um*

⁴ Título: Investigações Matemáticas no Ensino de Álgebra: estudo de suas potencialidades pedagógicas. Financiamento do Fundo de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). Processo: 03/11233-4.

pensamento de transição do aritmético ao algébrico, e, terceira, aqueles alunos *que denotaram um pensamento algébrico mais desenvolvido* (FIORENTINI, FERNANDES e CRISTOVÃO, 2005, p. 16-17). Isso foi notado a partir da análise dos relatórios escritos e dos modos pelos quais os alunos expressavam entender a generalização e utilizavam (ou não) expressões algébricas para representar uma situação-problema.

Como eu ainda era estudante de graduação e não estava lecionando, procuramos – eu e meu orientador – um professor que pudesse ser parceiro para o desenvolvimento do trabalho de campo. Fui convidado a participar do Grupo de Sábado (GdS) em 2004, na Faculdade de Educação da Unicamp, pois, segundo o professor Dario, seriam importantes as contribuições de seus integrantes para a elaboração das tarefas exploratório-investigativas e, posteriormente, para a análise do material coletado durante as aulas.

2.3 O Grupo de Sábado

O Grupo de Sábado (GdS) é um grupo colaborativo de professores que se reúnem quinzenalmente, voluntariamente, na Faculdade de Educação da Unicamp, para discutir sobre os desafios de ser professor na atualidade, ocasião em que são destacados os problemas enfrentados pelos docentes nos diferentes sistemas de ensino e são compartilhadas as experiências didático-pedagógicas produzidas pelos participantes do grupo. É denominado como grupo de trabalho colaborativo, pois se constituiu ao longo do tempo e de modo a contemplar algumas de suas características: voluntariedade, identidade, espontaneidade, liderança compartilhada, apoio e respeito mútuo (FIORENTINI, 2004).

No início, o grupo era constituído apenas por professores de Matemática, mas, nos últimos anos, tem tido a participação de professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental e da Educação Infantil, ampliando, assim, as discussões e a contribuição do grupo para o desenvolvimento profissional de cada participante. Por exemplo, quem possui formação específica em Matemática, como é o meu caso, tem muito a aprender com a convivência com esses professores.

Um ponto importante a falar do GdS é a participação de alunos da graduação, contribuindo para ampliar, de acordo com Bakthin, os *excedentes de visão* no interior do grupo (FIORENTINI, 2009). E eu entrei no GdS ainda enquanto aluno da Graduação. Tornar-me um participante ativo e deixar de ser periférico não foi algo que levou tanto tempo.

No GdS, conheci a professora Eliane Matesco Cristovão, que participava do grupo desde 2003. Ela foi muito colaborativa para com a minha pesquisa de Iniciação Científica, disponibilizando espaço e tempo em suas aulas, para que eu pudesse desenvolver o trabalho de campo com os seus alunos.

Na época, foram elaboradas duas tarefas exploratório-investigativas, com a participação e colaboração do GdS, e, posteriormente, essas mesmas tarefas foram aplicadas em duas classes do 7º ano, sob a responsabilidade da professora Eliane. Os resultados da pesquisa mostraram potencialidades no trabalho com tarefas exploratório-investigativas, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Concluindo a pesquisa de Iniciação Científica, veio o desafio de escrever o relatório final a ser enviado ao órgão de fomento. Foi um desafio, pois escrever em um diário de campo é muito diferente da escrita de um relato de investigação.

Quando ingressei no GdS, havia uma cultura consolidada em relação à prática da escrita, uma escrita reflexiva dos professores, de forma a contribuir para o seu desenvolvimento profissional. A minha participação deixava de ser, aos poucos, menos periférica e se tornava mais ativa ou central em relação ao foco da prática do grupo. Encontrava-me e me encantava com um outro modo de produzir conhecimento sobre a prática de ensinar e aprender: as narrativas reflexivas sobre aulas de Matemática. O grupo já havia produzido dois livros de histórias de aulas de Matemática. Sentir confiança e liberdade para apresentar por escrito suas ideias e sua produção foi (e continua sendo) um aprendizado para mim.

O GdS, enquanto *comunidade de prática*⁵ (FIORENTINI, 2009), tem incorporado, como parte de sua cultura, a prática de produzir narrativas, de contar histórias e experiências de aulas de Matemática, bem sucedidas ou não. E logo me identifiquei com esse modo de produção de conhecimento, um conhecimento da prática de ensinar e aprender Matemática.

Apesar de ter lecionado voluntariamente, em um curso pré-vestibular comunitário, nos dois anos anteriores à conclusão do curso de graduação, tive a chance de, pela primeira vez, ser o professor responsável por classes no Ensino Fundamental, – três classes, uma 5ª e duas 6ª séries⁶ –, em uma escola privada na cidade de Campinas, São Paulo. Um dos projetos apresentados à escola foi a respeito das Investigações Matemáticas. Ali, iniciava o professor Fernando com outro tipo de uso da escrita.

Então, no primeiro semestre de 2005, desenvolvi uma tarefa exploratório-investigativa, a qual contemplava os fractais. Foi uma experiência formativa única, tendo em vista o meu “atrevimento” em desenvolver tarefas de caráter exploratório e investigativo no primeiro ano de docência... Formativo, não apenas para os alunos, como também para o professor Fernando. Havia uma tensão, e me cobrava e era cobrado, também. Apesar de contar com total apoio da direção da escola para o desenvolvimento de projetos, eu tinha a preocupação de que o conteúdo programático fosse cumprido.

Para mim, essa experiência foi mais importante ainda, principalmente por ter sido a minha primeira narrativa⁷, a primeira história de sala de aula, pela qual pude contar e refletir sobre a experiência, compartilhando com outras pessoas a produção de meus alunos. O ato de escrever essa narrativa foi muito prazeroso e formativo para mim.

⁵ Fiorentini (2009), com base em Wenger (2001), apresenta os elementos que caracterizam a comunidade de prática GdS: “seu domínio comum de interesse e de significação são a educação matemática e o trabalho docente na escola básica. O repertório cultural que suporta esse domínio é resultado da dinâmica de negociação de significados do/no grupo, que implica participação permanente de todos os membros dessa comunidade e um processo contínuo de produção de reificações” (p.238)

⁶ Quando me refiro à 5ª série do Ensino Fundamental, essa seria o 6º ano de escolaridade, pela nova nomenclatura do Ensino Fundamental de nove anos.

⁷ Fractais e “Porcariazinhas”: Professor, acaba ou não acaba?, IN: FIORENTINI, D. e CRISTOVÃO, E. M. (org). **Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática**. Campinas: Alínea, 2006.

Desde então, sinto que algumas dessas experiências, que comentei anteriormente, foram formativas e vieram a constituir o professor Fernando. Lembro-me de Larrosa, que comenta

se a experiência não é o que acontece, mas o que nos acontece, duas pessoas, ainda que enfrentem o mesmo acontecimento, não fazem a mesma experiência. O acontecimento é comum, mas a experiência é para cada qual sua, singular e de alguma maneira impossível de ser repetida. (LARROSA, 2002, p.27)

De fato, mesmo que tenha desenvolvido em outras oportunidades essas tarefas exploratório-investigativas, em nenhuma delas repetiu-se aquilo que aconteceu na primeira vez. Algo que contribui para isso é a expectativa criada por mim, esperando que aquele momento volte e aconteça novamente.

2.4 O projeto de pesquisa que deu origem a esta dissertação

O projeto elaborado e enviado para ingresso no Programa de Pós-Graduação em Educação, da Faculdade de Educação (FE) da Unicamp, trazia os meus anseios e as minhas intenções de aprofundar e de dar continuidade ao trabalho desenvolvido na Iniciação Científica.

Eu tinha a intenção de um projeto que contemplasse as investigações matemáticas e o ensino da Álgebra, visando investigar, em especial, o desenvolvimento da linguagem algébrica de alunos da 6ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública. Desde 2006, tornei-me professor titular de cargo na rede estadual paulista de ensino, na cidade de Campinas. Seria um desafio realizar uma pesquisa sobre a própria prática, lidando com o “ser professor” e o “ser pesquisador”. Ao mesmo tempo em que o Fernando, professor, tinha o compromisso de levar seus alunos a conhecerem a cultura do mundo da Álgebra, o Fernando, pesquisador, tinha a preocupação de coletar as informações e os dados necessários para compreender e analisar a atividade investigativa. Iniciaria, nesse processo, outra tensão: a relação entre ensinar-aprender-pesquisar.

Outro motivo para escolher essas classes foi a situação nelas diagnosticada e que, de modo geral, parece ocorrer em boa parte das escolas públicas, pelo que lemos em notícias ou conversamos com colegas professores e professoras da escola pública: “alunos que não sabem nada”; “faltam pré-requisitos”; que “não sabem tabuada”, e por aí vai... Apesar das possíveis dificuldades que os alunos tenham, há algo a ser feito. Além disso, contemplar a Álgebra é fundamental, pois as maiores dificuldades apresentadas pelos alunos encontram-se na fase em que eles entram em contato com os conteúdos tradicionalmente chamados de algébricos, como tem mostrado Pinto (1997) e Scarlassari (2007).

E por que isso ocorre? Uma hipótese para isso seria a inadequação das práticas escolares referentes ao ensino da Álgebra e das exigências atuais dos currículos de Matemática. Apesar de, de um lado, terem ocorrido avanços em termos de pesquisa em relação ao ensino e aprendizagem da Álgebra no Brasil e no mundo, nos últimos anos, após o Movimento da Matemática Moderna – esse é o caso dos trabalhos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Lins e Gimenez (1996), Kieran (1992); Lee (1996); Mason (1996); Carraher et al (2006) –, de outro lado, segundo Sousa (2007), ainda é pequeno o impacto desses estudos na mudança das práticas didático-pedagógicas dos docentes que ensinam Álgebra nas escolas.

O estudo de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), por exemplo, identifica três concepções de Educação Algébrica, que têm, historicamente, prevalecido no ensino brasileiro de Matemática: a *lingüístico-pragmática*, a *fundamentalista-estrutural* e a *fundamentalista-analógica*. Essas concepções têm em comum, segundo os autores, a valorização e a priorização do transformismo algébrico (transformação de uma expressão algébrica em outra mais simples), em detrimento da semântica (produção de sentido e significado aos entes e expressões algébricas).

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), a partir dessa análise e do estudo da evolução da história da Álgebra, apresentam uma quarta concepção, sustentando que, pedagogicamente, o pensamento algébrico pode ser desenvolvido gradativamente antes mesmo da existência de uma linguagem algébrica simbólica. Isso acontece, sobretudo, quando a criança estabelece relações/comparações entre expressões

numéricas ou padrões geométricos; percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, ainda, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente (FIORENTINI, FERNANDES e CRISTOVÃO, 2005).

Na prática, conforme pesquisa de Beltrame (2009), são poucos os livros didáticos que tentam trazer essa nova perspectiva de ensino da Álgebra, sobretudo os múltiplos sentidos e usos da variável, e que tentam romper com a prática de iniciar o estudo desse conteúdo a partir do chamado cálculo algébrico. Ou seja, ainda permanecem, nesses manuais, resquícios dos modelos *linguístico-pragmático* e *fundamentalista-estrutural*. De fato, em geral, o capítulo introdutório de iniciação à Álgebra começa com a distinção de monômios e polinômios, vindo, em seguida, as operações entre monômios, contemplando o chamado transformismo algébrico.

Pensar nas práticas docentes também não parece ser tarefa fácil... Afinal, lidar com as concepções e as crenças de professores, com anos de carreira, não é cômodo, nem simples. Esse quadro não é identificado apenas entre professores com experiência em ensino. Professores em início de carreira, mesmo que tenham tido contato, em algum momento, durante o curso de graduação ou até mesmo em sua vida escolar nos ensinos fundamental e médio, com algumas perspectivas inovadoras de ensinar e aprender Álgebra, quando estão em sala de aula, reproduzem um modelo de aula que tiveram em toda a sua vida escolar: uma aula expositiva, na qual não se valorizam a problematização, a atribuição de sentidos e a negociação de significados aos entes algébricos.

De maneira sucinta, procurei trazer aspectos relevantes e marcantes de minha trajetória profissional e acadêmica. É notório que, em cada uma das fases desse percurso caminhado, a escrita esteve presente, e, nem mesmo eu havia percebido a

importância que ela teve na constituição do professor e do pesquisador. Assim, é imprescindível que os estudos sobre letramento, como veremos mais adiante, sejam contemplados nesta investigação, pois a prática de leitura e de escrita esteve presente em minha formação inicial e ainda continua em minha prática docente.

Além disso, quando penso nos sujeitos da pesquisa, reitero a afirmação acima, da importância do letramento nas aulas de Matemática. A inserção desses alunos no mundo letrado, tendo em vista que as práticas de leitura e escrita não são comuns nas aulas de Matemática, deve se tornar uma forma de ressignificar seu próprio mundo, ou, pelo menos, que a Álgebra produzida e escrita por eles tenha significado.

O letramento, como prática social de leitura e escrita, tem a sua importância na análise deste trabalho, tendo em vista a necessidade de elucidar o modo como os alunos – sujeitos da pesquisa – apropriam-se das ideias da Álgebra e como é estabelecida a relação entre a leitura e a escrita algébrica. Isso surgiu como um eixo emergente de análise, durante o desenvolvimento do trabalho de campo.

A seguir, no capítulo 2 – *Caminhos Metodológicos* –, o leitor encontrará uma breve descrição das opções e dos percursos metodológicos de investigação, que vai desde a formulação da questão investigativa e dos objetivos, passando pela descrição da escola escolhida para realização do trabalho de campo e da sua comunidade. Conhecer a comunidade, e nesse caso, a escolar, é essencial para pensar nos diferentes letramentos em que os alunos estão imersos e que os constituem como sujeitos.

CAPÍTULO 3

OS CAMINHOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentarei a questão norteadora da pesquisa, acompanhada de seus objetivos. Em seguida, farei uma breve descrição da escola em que o trabalho de campo foi realizado, trazendo alguns elementos que possam descrever a comunidade escolar e as classes escolhidas para o desenvolvimento da pesquisa de campo, com informações sobre o número de alunos por classe e o número de aulas dedicado.

Como contei, na coleta de dados, com a participação de uma auxiliar de pesquisa, que, na época, era estagiária de Matemática, julgo necessário trazer um histórico dos motivos que a levaram a participar desta investigação. Para finalizar, apresentarei as duas categorias de análise que julguei serem as mais relevantes para responder à questão norteadora.

3.1 O que pesquisar?

Tendo em vista minha trajetória acadêmica e profissional, desde a Iniciação Científica até as práticas didático-pedagógicas adotadas em minhas aulas, assumi a seguinte questão como norteadora de minha investigação para o curso de mestrado:

Como se dá o desenvolvimento da linguagem e do letramento algébricos de alunos de 7º ano, inseridos em um ambiente de exploração e investigação em aulas de Matemática?

Para buscar respostas e interpretações acerca da questão, tenho como objetivos da pesquisa:

- a) Descrever e/ou narrar o processo de produção e negociação de sentidos e significados dos alunos no trabalho de exploração e investigação, que contempla tarefas de cunho algébrico e a mediação do professor nesse processo;
- b) Interpretar e analisar o processo de utilização e constituição da linguagem algébrica, mediante o desenvolvimento de um letramento algébrico, a partir da atividade algébrica realizada pelos alunos;
- c) Analisar as aulas exploratório-investigativas, como práticas de letramento.

Entendo sentido e significado na perspectiva de Vigotski (2000). Para o autor,

o sentido de uma palavra é a soma de todos os fatos psicológicos que ela desperta em nossa consciência. Assim, o sentido é sempre uma formação dinâmica, fluida, complexa, que tem várias zonas de estabilidade variada. O significado é apenas uma dessas zonas de sentido que a palavra adquire no contexto de algum discurso e, ademais, uma zona mais estável, uniforme e exata. Como se sabe, em contextos diferentes, a palavra muda facilmente de sentido. O significado, ao contrário é um ponto imóvel e imutável que permanece estável em todas as mudanças de sentido da palavra e diferentes contextos. Foi essa mudança de sentido que conseguimos estabelecer como fato fundamental na análise semântica da linguagem. (VIGOTSKI, 2000, p, 465)

Dessa forma, considero os sentidos atribuídos pelos alunos como sendo suas primeiras interpretações acerca da Álgebra e das aulas exploratório-investigativas, passíveis de mudança e de tratamento, sendo constituídas a partir das experiências e vivências de cada sujeito. Já a expressão significado remete àquele entendimento mais estável ou institucionalizado e que é compartilhado pela sociedade e tomado como referência.

Em relação ao conceito de mediação, tomarei como referência Fontana (2000):

A mediação do outro desperta na mente da criança um sistema de processos complexos de compreensão ativa e responsiva, sujeitas às experiências e habilidades que ela já domina. Mesmo que ela não elabore ou não apreenda conceitualmente a palavra do adulto, é na margem dessas palavras que passa a organizar seu processo de elaboração mental, seja para assumi-las ou para recusá-las. (FONTANA, 2000, p. 19)

Durante toda a pesquisa de campo, ficou evidente a importância da mediação do professor para a constituição do letramento algébrico dos alunos. A dinâmica das aulas exploratório-investigativas proporcionou esse ambiente, favorecendo aspectos da semântica do pensamento algébrico e, em particular, da linguagem algébrica.

3.2 Descrevendo a escola e a sua comunidade

A escola em que o trabalho de campo foi realizado denomina-se Escola Estadual Jornalista Roberto Marinho, localizada no bairro Jardim Renascença, pertencente ao distrito de Nova Aparecida, em Campinas, São Paulo. A escola, que atende aos alunos do Ensino Fundamental (EF), - Ciclo II e Ensino Médio (EM), nas modalidades de ensino regular e Educação de Jovens e Adultos (EJA), foi construída para atender à população que foi morar nos 1.160 apartamentos construídos pela Companhia de Desenvolvimento Habitacional e Urbano (CDHU), vinculada à Secretaria da Habitação do Estado de São Paulo, além das famílias que residiam em bairros próximos à unidade escolar. Há, no bairro, outra escola, porém direcionada exclusivamente a crianças do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. A escola foi inaugurada no segundo semestre de 2004, antes mesmo do término da construção dos apartamentos.

Desde 2006, sou professor nessa unidade escolar, quando fui chamado para assumir o cargo de Professor de Educação Básica II – PEB II, logo após terem sido entregues os apartamentos da CDHU aos moradores.

Em 2008, quando a pesquisa de campo foi desenvolvida, havia na escola aproximadamente 1.600 alunos matriculados, distribuídos em classes do ensino regular e da Educação de Jovens e Adultos, 80 professores, e um total de 45 salas de aula, sendo 15 salas em cada um dos três períodos (matutino, vespertino e noturno). Além disso, um diretor, dois vice-diretores, dois coordenadores pedagógicos, sendo um para o Ensino Fundamental e outro para o Ensino Médio. A escola também possui biblioteca, refeitório, sala de Informática, duas salas para turmas de reforço e uma sala denominada Uso Múltiplo.

Algo que surpreende a mim e a qualquer pessoa que visita a escola é o seu estado de conservação. Na escola, não há pichações em paredes das salas de aulas e dos corredores. Quando alguma aparece, imediatamente os alunos são advertidos e chamados a limpar. Pouquíssimos são os vidros quebrados, e a escola encontra-se sempre limpa. Digo isso com entusiasmo, pois o que deveria ser algo normal e cotidiano, nem sempre é encontrado nas escolas públicas.

De fato, essa estrutura é mantida por conta da presença da diretora, que está na direção dessa unidade escolar desde meados de 2005. Segundo professores que trabalham na escola desde a sua fundação, em meados de 2004, já passaram pela direção da unidade oito diretores, antes da chegada da atual diretora.

A postura exigente e enérgica da atual diretora – acredito – é que garante esse quadro favorável, possibilitando o desenvolvimento de um bom trabalho pedagógico. Os problemas de indisciplina são raros, e, quando ocorrem, os docentes têm respaldo e apoio necessários para a sua solução.

3.3 A comunidade de alunos e a família

A convivência com alunos – crianças, jovens e adultos – permite conhecer um pouco de suas vidas, de suas crenças e de seus modos de ver o mundo. Nesse contato diário, vivemos parte dos dilemas e dificuldades por eles enfrentadas, em conversas informais com os pais de alunos – embora muitos deles sejam meus alunos da EJA – ou nas reuniões de pais que ocorrem bimestralmente. Acredito que a aproximação com esses pais, que também são alunos, pode, de alguma forma, contribuir para estreitar as relações entre escola e família.

Posso dizer que a população que reside nas proximidades da escola ainda esteja se constituindo como uma comunidade. Segundo Barton e Hamilton (2004), comunidade pode ser definida de duas maneiras:

En primero lugar, en términos geográficos, como un pueblo pequeño y como un vecindario dentro de dicho pueblo. En segundo lugar, en términos de clase social, como una comunidad de clase trabajadora. (...) Así, durante o proceso investigativo, resultaba útil el no tener una definición precisa de comunidad desde

un principio, ya que las ideas sobre este particularse iban desarrollando a medida que el estudio avanzaba. (BARTON e HAMILTON, 2004, p.124)

Apesar da primeira concepção de comunidade ser válida, afinal os seus integrantes estão na mesma região geográfica, a meu ver, ainda não constituíram o que é comum a todos: uma identidade. Apesar de considerar que exista uma identificação comum entre aqueles que residem no CDHU e, uma outra identificação entre os moradores do bairro já existente, a meu ver, ainda não foi criada uma identidade comum entre ambas as comunidades. Noto, inclusive, que não há uma identificação das comunidades com a escola. Ao seu redor, há diversos bairros, alguns deles surgidos a partir da ocupação de moradores, os quais levantaram seus lares de maneira qualquer e sem o mínimo de condições de saneamento básico e serviços essenciais, como água, telefone e energia elétrica.

Os condomínios de apartamentos foram construídos pela CDHU sem a intenção de incluir as pessoas que moravam nas áreas ocupadas. Vieram pessoas de várias regiões da cidade de Campinas, mas percebo que ainda não encontraram elementos comuns, de modo a constituir realmente uma comunidade.

3.4 A pesquisa de campo

A pesquisa de campo ocorreu no segundo semestre de 2008, em duas classes do 7º ano do Ensino Fundamental, nas quais eu era o professor responsável. As aulas foram desenvolvidas em um período de um mês, de outubro a novembro, contabilizando um total de 19 horas-aula, no 7º ano A, e 20 horas-aula, no 7º ano B. Os alunos, em sua maioria, possuíam idades entre 11 e 13 anos. No 7º ano A havia 35 alunos matriculados, e no 7º ano B, 34 alunos matriculados.

As aulas, em sua quase totalidade, foram gravadas em áudio e vídeo, e algumas – aquelas que atendiam aos propósitos da presente pesquisa – foram totalmente transcritas. O material de análise foi constituído por esses registros e também pelos diários de campo por mim elaborados, pelos relatórios escritos pelos alunos e pelas

narrativas produzidas por uma auxiliar de pesquisa, que me auxiliou na filmagem de algumas aulas e no atendimento aos alunos.

Essas aulas foram desenvolvidas em uma sala denominada *Uso Múltiplo*, a qual tem a função de receber as classes para a exibição de vídeos, filmes, e apresentação de seminários. É uma sala com área maior que as demais da unidade escolar. Isso contribuiu de maneira significativa na constituição das equipes de alunos, evitando que os grupos ficassem muito próximos e que alguns alunos viessem a perturbar os demais colegas.

Foram elaboradas e desenvolvidas três tarefas exploratório-investigativas. A primeira foi desenvolvida em duplas e as demais em equipes de três ou quatro alunos, de forma que cada integrante da equipe assumisse uma função ou tarefa. Essa divisão de funções foi realizada pelos alunos.

A atividade exploratório-investigativa decorrente da primeira tarefa foi desenvolvida em cinco horas-aula no 7º A e quatro horas-aula no 7º B. A atividade relativa à segunda tarefa exigiu sete horas-aula no 7º A e oito horas-aula no 7º B. A atividade relativa à terceira tarefa consumiu sete horas-aula no 7º A e oito horas-aula no 7º B.

Posso caracterizar esta pesquisa como uma investigação sobre a própria prática, pois, segundo Ponte (2002, p. 7),

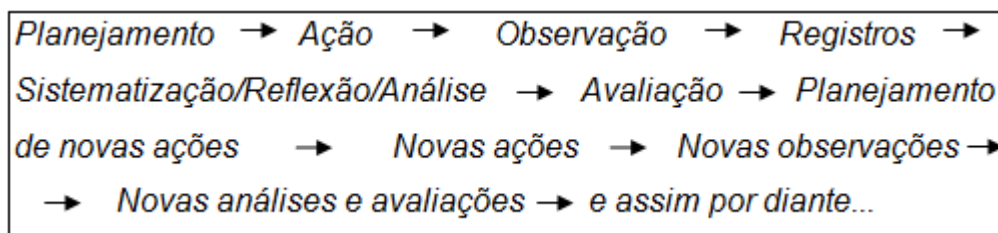
a investigação sobre a prática pode ter dois tipos principais de objectivos. Por um lado pode visar principalmente alterar algum aspecto da prática, uma vez estabelecida a necessidade dessa mudança e, por outro lado, pode procurar compreender a natureza dos problemas que afectam essa mesma prática com vista à definição, num momento posterior, de uma estratégia de acção.

Penso que os dois objetivos destacados por Ponte foram contemplados em minha pesquisa, embora a ênfase recaia sobre o segundo, pois minha maior preocupação foi compreender como a linguagem algébrica pode ser adquirida e desenvolvida em aulas exploratório-investigativas. No ensino de Matemática, o nó a ser desatado ocorre geralmente quando o aluno tem seus primeiros contatos com a

Álgebra, de maneira descontextualizada e com reduzido espaço para exploração e produção/negociação de significados.

Uma característica desse modo de pesquisar “refere-se ao facto de o investigador ter uma relação muito particular com o objecto de estudo – ele estuda não um objecto qualquer, mas um aspecto de sua própria prática profissional” (PONTE e SERRAZINA, 2003, p. 54).

Não gostaria de enquadrar esta pesquisa em uma das modalidades apresentadas em livros de metodologia de pesquisa. Porém, considero importante citar a aproximação que ela faz a algumas delas. Entre essas, destaco a aproximação com a pesquisa-ação, embora não tenha seguido os momentos de uma pesquisa-ação, os quais, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p.113), podem ser associados ao *movimento de uma espiral auto-reflexiva formada por ciclos sucessivos de:*



Quadro 2 - Movimento de uma espiral auto-reflexiva (Fiorentini e Lorenzato, 2006)

De fato, durante o desenvolvimento do trabalho de campo, momento em que foram realizadas e registradas as três atividades exploratório-investigativas, não fiz análises e reflexões de maneira sistemática acerca do que havia ocorrido naquelas aulas. Entretanto, percebi que ocorreram mudanças ao longo das aulas, sobretudo em relação à maneira de conduzi-las. Por exemplo, ao longo do desenvolvimento das atividades, passei a observar detalhes e nuances da prática de ensinar e aprender que, no início do trabalho, não me eram evidentes. Isso será descrito de maneira mais clara e detalhada quando irei, no capítulo 5, narrar as atividades de campo.

Esse aspecto parece reforçar a aproximação entre a pesquisa da própria prática e a pesquisa-ação, pois, essa última

também pode ser vista como uma modalidade de pesquisa que torna o participante da ação um pesquisador de sua própria prática e o pesquisador um participante que intervém nos rumos da ação, orientado pela pesquisa que realiza. Acreditamos que esse é o principal sentido da pesquisa-ação. E, em que pese o sufixo “ação”, a pesquisa-ação também deve ser concebida como um processo investigativo intencionado, planejado e sistemático de investigar a prática. (FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p. 114)

Dessa forma, acredito que esta pesquisa, de natureza qualitativa, sobretudo interpretativa, tenha elementos de uma pesquisa-ação e de investigação sobre a própria prática.

3.5 A Auxiliar de Pesquisa

Para a realização da pesquisa de campo, contei com a colaboração de Ana Luisa Soubhia, aluna do último semestre do curso de Licenciatura em Matemática, em 2008, tornando-se, assim, minha auxiliar de pesquisa. Na época, ela cursava a disciplina de Prática de Ensino em Matemática e Estágio Supervisionado II, que exigia, do aluno-futuro-professor, o desenvolvimento de atividades de regência de aulas.

Ana, no primeiro semestre do ano anterior, havia acompanhado minhas aulas em uma escola privada de Campinas. Eram três turmas, uma turma de 6º ano e duas do 7º ano do Ensino Fundamental. Portanto, já nos conhecíamos e tínhamos uma relação harmoniosa e de muito respeito.

No mesmo ano, Ana Luisa fez a inscrição para participar de um intercâmbio universitário com Portugal, em um convênio estabelecido entre a Unicamp e a Universidade de Coimbra. Ela foi contemplada e seguiu para lá, passando seis meses naquele país. Ao retornar para o Brasil, aguardou o segundo semestre para realizar o Estágio. Foi quando a professora Dione⁸ recomendou-lhe desenvolver o estágio em minhas aulas, mas agora na rede pública estadual. Em princípio, parecia-me que Ana Luisa tinha alguma resistência em desenvolver o trabalho na escola pública. Segundo ela, de tanto ouvir falar mal da escola pública, da impossibilidade de desenvolver um

⁸ Profa. Dra. Dione Lucchesi de Carvalho, docente da FE/Unicamp.

trabalho didático pedagógico satisfatório, não tinha grandes expectativas em relação a essa possibilidade de estágio.

Entretanto, após conversar com ela, Ana Luisa aceitou e iniciou o acompanhamento das aulas no fim de agosto. Fez a observação das aulas durante quase dois meses e colaborou no acompanhamento dos alunos durante a resolução dos exercícios, sanando suas dúvidas. Assim, para os alunos, tornou-se algo normal ter dois professores nas aulas de Matemática.

O “pré-conceito” de Ana Luisa em relação à escola pública foi por água abaixo, logo após o término da apresentação dos alunos do 7º ano A, momento em que eles puderam socializar com os colegas as interpretações produzidas pelas duplas durante a primeira atividade exploratório-investigativa:

Depois de decidir como seriam as atividades investigativas, estávamos ansiosos em aplicá-las. Eu estava muito nervosa, mas o Fernando me passou a segurança necessária para a realização do trabalho. (...) Não sabia o que iria ocorrer. Só de imaginar, eu, intermediando uma socialização, “tremi na base”. E lógico, que tudo estava sendo registrado através da filmadora e da câmera fotográfica. (...) Quando os alunos já estavam perdendo o interesse, um menino iniciou a discussão sobre a diagonal. Ele percebeu que os elementos da diagonal eram a multiplicação dos elementos da primeira linha por ele mesmo. (...) Essa foi a minha primeira socialização. Comentei com Fernando que não tenho um parâmetro, é difícil dizer se foi de boa qualidade ou não. Eles gritavam, participavam, atropelavam os outros que já estavam falando. Eu gostei da experiência. Foi cansativa, mas muito gratificante. (Trecho de uma das narrativas produzidas por Ana Luisa, 21/10/2008).

De fato, não deve ter sido fácil para Ana Luisa iniciar a socialização da primeira tarefa. Faz parte da constituição do “ser professor” esse conhecimento que é próprio da prática. Eu diria que, para agravar a sua situação, o ambiente constituído foi bem diferente daquilo que era habitual para ela. Ela estava habituada, desde a sua escolarização (e isso prosseguiu durante o curso de graduação), com aulas expositivas de Matemática e que não valorizavam e não abriam espaço para a participação efetiva dos alunos, não lhes favorecendo, assim, um engajamento. Além disso, eram aulas que, em geral, tinham como norte a resolução de exercícios e de problemas pouco desafiadores.

3.6 Categorias de análise

Mediante os objetivos propostos para esta investigação e após o desenvolvimento da pesquisa de campo, tomei como eixos de análise dois aspectos:

- 1º. A mediação realizada pelo professor e auxiliar de pesquisa em diferentes momentos das aulas, dando atenção especial ao momento de socialização/sistematização das apresentações no processo de letramento algébrico;
- 2º. A constituição de um letramento algébrico, tendo como foco de análise e interpretação as crenças, valores e saberes mobilizados pelos alunos e a produção de sentidos e a negociação de significados desenvolvidos por eles durante a atividade investigativa e no momento de socialização/sistematização de suas produções.

O primeiro eixo de análise foi constituído a partir dos objetivos, pois, em pesquisa anterior (FIORENTINI et al, 2005), ficou evidente a importância da mediação do professor no desenvolvimento e na construção da linguagem algébrica dos alunos. Além disso, os referenciais teóricos relacionados à perspectiva histórico-cultural contribuíram para a configuração e a fundamentação desse eixo.

O segundo eixo de análise é emergente da pesquisa de campo. Inicialmente, eu não tinha a preocupação de analisar a constituição e o desenvolvimento do letramento matemático dos alunos. Entretanto, após o desenvolvimento da primeira tarefa, notei como a relação oralidade/escrita era forte, mostrando a facilidade dos alunos em se expressarem oralmente e a sua resistência em escrever.

D'Agostini (2005, p. 67) comenta que, *em uma pesquisa qualitativa a fundamentação teórica, ao invés de ser um conjunto de teorias a priori pode ser construída ao longo da análise dos dados* [grifo do autor].

Foi isso que ocorreu... Ao término do trabalho de campo, vendo e revendo os vídeos das aulas, além da leitura dos relatórios elaborados pelos alunos, comecei a

olhar para a sala de aula sob a perspectiva do letramento e a conceber as práticas, que ali ocorriam, como práticas sociais e situadas.

No capítulo seguinte – Sobre Álgebra –, apresentarei uma revisão bibliográfica a respeito da Álgebra: as funções da Álgebra, as tendências de Educação Algébrica e o que recomendam os documentos nacionais e internacionais, em especial, brasileiros e portugueses. Conhecer os estudos referentes à Educação Algébrica é fundamental na busca de respostas para a questão de investigação. Além disso, pensar em um letramento *algébrico* significa buscar novos elementos que possam justificar e valorizar o ensino da Álgebra na atualidade.

CAPÍTULO 4

SOBRE ÁLGEBRA

Neste capítulo, apresentarei uma revisão bibliográfica a respeito da Álgebra, trazendo alguns aspectos relevantes às suas diferentes funções (Usiskin, 1995, e Sousa e Diniz, 1996), as concepções de Educação Algébrica e as recomendações curriculares dos documentos oficiais brasileiros e de Portugal. Na parte final, trarei uma abordagem histórica da constituição da linguagem algébrica, visando observar a relação entre a constituição dessa linguagem historicamente e a dificuldade dos alunos em compreender a sua constituição e o seu uso.

4.1 As diferentes funções da Álgebra

Com base em Usiskin (1995) e Sousa e Diniz (1996), seguem as diferentes funções da Álgebra, em relação ao uso da letra. Na tabela a seguir, Usiskin (1995, p. 20) estabeleceu quatro diferentes funções da Álgebra, apresentando-as de maneira resumida e simplificada.

Concepção da Álgebra	Usos das variáveis
Aritmética generalizada	Generalizadores de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Tabela 1 - Síntese das diferentes concepções de Álgebra, segundo Usiskin (1995)

Antes de iniciar uma breve descrição a respeito de cada uma das diferentes funções da Álgebra, gostaria de esclarecer a interpretação da palavra variável empregada por Usiskin (1995) e Sousa e Diniz (1996). Para eles, as variáveis referem-se às letras presentes em qualquer expressão literal (Usiskin, 1995, p. 9), não separando incógnita de variável (quando a letra é usada em relações funcionais). Prefiro classificar como variável, como o próprio nome diz, aquilo que *varia dentro de um campo de possibilidades*, distinguindo-se, assim, de incógnita, parâmetros ou sinais arbitrários, conforme as diferentes funções da Álgebra. Essa expressão é utilizada para as quatro diferentes funções em que a letra é utilizada. Buscando evitar confusão sobre o emprego desse termo, utilizarei o termo variável apenas na situação em que a letra desempenha o papel de variável, no estudo das relações entre grandezas, e desde que haja um campo (explícito ou implícito) de variação⁹.

Na primeira função da Álgebra, generalizadora da Aritmética, a letra aparece como números genéricos quaisquer, visando representar casos particulares de maneira genérica, permanecendo suas propriedades na Aritmética. Seria o caso, por exemplo, da representação dos números ímpares $- 1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1$.

Na segunda função, *a Álgebra como estudos de processos para a resolução de problemas* (SOUSA e DINIZ, 1996, p.8), a letra assume o papel de incógnita. Em geral, a partir de um problema que exige a sua resolução por meio da estruturação de uma equação, do aluno é exigida não só a compreensão do problema como também a habilidade na resolução da equação.

Na terceira função da Álgebra, *como relação e variação entre grandezas*, a letra assume o papel de variável. Quando se solicita, por exemplo, a expressão da função do 1º grau que possui a representação gráfica – a reta – que passa pelos pontos (1, 3) e (4, 7), as letras x e y (ou $f(x)$) não assumem um único valor, mas estabelecem uma relação de dependência entre ambos.

Na quarta função da Álgebra, como *estudo de estruturas matemáticas*, a letra aparece como símbolo arbitrário, não denotando nenhuma das funções anteriores. A

⁹ Moura e Sousa (2005), apoiadas em Caraça, definem o conceito de variável vinculado ao campo ou conjunto numérico dentro do qual pode variar, de modo que “a variável é e não é cada um dos elementos do conjunto” (p. 39).

letra pode ser manipulada mediante as propriedades aritméticas ou, ainda, seguindo uma *estrutura algébrica mais complexa*. (ibidem, p. 9)

Entre essas funções, desenvolverei as tarefas exploratório-investigativas considerando a primeira e a terceira função presentes na tabela anterior. Ao meu ver, ambas funções se complementam. Observemos o exemplo a seguir¹⁰:

Vejamos a sequência de figuras:

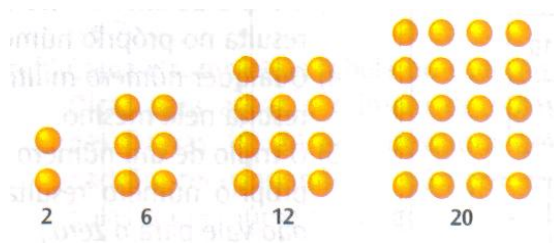


Figura 1 – Sequência de figuras, extraído de Imenes e Lellis (2006)

- a) O número de bolas da figura 1 é $F_1 = 2$, da figura 2 é $F_2 = 6$ e da figura 3 é $F_3 = 12$. Qual é o valor de F_7 ?
- b) Complete a fórmula $F_n = \dots\dots\dots$

Deveria ser considerada a expressão geral que relaciona a quantidade de bolas e a posição que ocupa na sequência como uma expressão genérica ou uma relação funcional? Nesse exemplo, como essa diferença é sutil, prefiro não realizar categorias: o mesmo problema poderia contemplar a função de relações entre grandezas e generalizações numéricas.

A aproximação da Aritmética generalizada com o conceito de variável é assim justificada por Radford (1996, p. 110): *números genéricos aparecem como pré-conceitos do conceito de variável* [tradução minha]. Nesse sentido, o autor distingue o uso da letra como incógnita do uso da letra como variável. Isso ocorre, pois, na resolução de problemas, a letra também pode assumir o papel de incógnita, nesse caso, para a resolução de equações. Na resolução de um problema algébrico, a intenção é descobrir um número, isto é, em geral, obtém-se um resultado numérico a partir da resolução de uma equação.

¹⁰ Extraído de IMENES, L. M. e LELLIS, M. C. **Matemática Para todos**: 6ª série: 7º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: Scipione, 2006.

Entretanto, quando se está em busca de representações genéricas ou de se criar modelos que representem certa situação, a letra aparece como variável. Incógnita e variável vêm de diferentes concepções. Historicamente, a presença da incógnita é bem mais antiga, tendo em vista que, apesar das diferentes linguagens algébricas implicadas – retórica, sincopada e simbólica – ela já era presente na resolução de problemas. O uso da variável, mesmo que tenham sido encontrados em tábuas babilônicas registros de relações entre duas grandezas – esse fato é considerado por alguns historiadores da Matemática como um dos indícios da origem da variável –, sua importância veio a acontecer com o advento da linguagem simbólica, com Viète.

4.2 As concepções de Álgebra e de Educação Algébrica

Analisando sob o olhar do desenvolvimento do ensino da Álgebra, o trabalho de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), traz um histórico das quatro concepções da Álgebra, que tiveram sua influência na constituição dessa área do conhecimento e, a partir dessas concepções, descrevem três concepções de Educação Algébrica que vigoraram durante o século XX. As concepções da Álgebra seriam:

- *processológica*, que considera a Álgebra como sendo um conjunto de procedimentos e técnicas, instrumentalizando a resolução de problemas;
- *linguístico-estilística*, que considera a Álgebra como uma linguagem específica e artificialmente criada com o propósito de expressar concisamente as entidades genéricas e os procedimentos do transformismo algébrico. Considerá-la dessa forma implica em constituir uma linguagem mais autônoma do pensamento algébrico, sem relacioná-la com as formas cotidianas de matematizar e nem com outros campos de conhecimento;
- *linguístico-sintático-semântica*, que possui característica comum a anterior, por considerar a Álgebra como uma “linguagem específica e concisa, mas cujo poder criativo e instrumental não reside propriamente em seu domínio estilístico, mas

em sua dimensão sintático-semântica” (p. 82). Difere no que se refere sobre a dimensão sintático-semântica. Pode-se dizer que essa concepção é mais rigorosa que a linguístico-estilística, ampliando o distanciamento entre o símbolo e o que ele representa ou significa;

- *linguístico postulacional*, que concebe a Álgebra como “a ciência das estruturas gerais comuns a todas as partes da Matemática, incluindo a Lógica”, segundo Piaget e Garcia (apud FIORENTINI, . MIORIM e MIGUEL, 1993, p. 83);

A partir das quatro concepções de Álgebra, esses autores descrevem três concepções de Educação Algébrica, que influenciaram (e ainda influenciam o ensino):

- *A linguístico-pragmática*, cuja tendência predominou do fim do século XVIII até meados do século XX. Essa tendência antecedeu o Movimento da Matemática Moderna e tinha como característica no ensino a apresentação dos conteúdos algébricos após o estudo da Aritmética e anterior ao da Geometria. Em geral, a ordem dos conteúdos era: cálculo literal, equações, problemas e desigualdades do 1º grau e do 2º grau. Era comum a grande quantidade de exercícios a serem resolvidos, valorizando o uso de técnicas de manipulação de expressões algébricas.

- *A fundamentalista-estrutural* teve início no período da Matemática Moderna. As características dessa concepção, em geral, são de um estudo das estruturas das operações, com a realização de justificação lógica de cada passagem. Segundo Fiorentini e Miorim (1993, p. 30),

acreditava-se que a justificação lógica dos fatos matemáticos garantiria não apenas a transposição desses resultados para qualquer problema ou situação dentro da Matemática, como também a aplicação em qualquer outra área do conhecimento.

- *A fundamentalista-analógica* surge após o Movimento da Matemática Moderna. Buscou-se no ensino da Álgebra a significação dos conceitos algébricos e apropriação de sua linguagem, a partir de relações entre a Álgebra e a Geometria.

Esperava-se que, sem o excessivo rigor e formalismo exigido pela Matemática Moderna e o resgate das técnicas de transformação algébrica, pudesse colaborar para uma melhor compreensão da Álgebra. A relação com a Geometria era justificada a partir da exploração e do apelo visual. O uso de expressões algébricas e os seus termos eram justificados, por exemplo, pelo uso do cálculo da área de quadrados e retângulos e o volume de cubos e prismas.

Entretanto, a questão levantada pelos autores é que, em linhas gerais, essas concepções valorizam aspectos técnicos e de manipulação de expressões algébricas, sem dar significados àquelas expressões, isto é, há uma valorização no transformismo algébrico, em detrimento dos aspectos que caracterizam o pensamento algébrico e da semântica das expressões algébricas. Supôs-se, por muito tempo, que o pensamento algébrico seria subordinado ao desenvolvimento e à “manipulação sintática da linguagem, desconsiderando o fato de que, no plano histórico quanto no pedagógico, a linguagem é, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento.” (p. 85)

Esse argumento pode ser justificado a partir do que Vigotski (2000, p. 482) afirma na parte final de um dos capítulos de “A Construção do Pensamento e da Linguagem”, que “só nos interessou uma questão fundamental: descobrir a relação entre o pensamento e a palavra como processo dinâmico, como via do pensamento à palavra, como realização e materialização do pensamento na palavra.”

Em contraposição às três concepções de Educação Algébrica, esses autores propõem uma quarta concepção, a qual teria o seu início mediante exploração de

situações-problema relativamente abertas ou problematização de fatos tidos como aritméticos ou geométricos que demandem a construção de generalizações, a representação de número generalizado ou de grandezas incógnitas e variáveis. (FIORENTINI; MIORIM, 1993, p. 33-34).

Penso que as tarefas exploratório-investigativas tenham esse caráter aberto e problematizador, pois podem mobilizar e explorar aspectos relacionados à Álgebra (seu pensamento e linguagem), a partir da problematização de assuntos referentes à Aritmética ou à Geometria. Além disso, a proposição realizada pelos autores é de utilizar três das quatro funções da Álgebra (Aritmética generalizada, incógnita e

variável). Nessa etapa, não haveria a preocupação com os aspectos lingüísticos, mas com a percepção da existência de elementos que caracterizam o pensamento algébrico: “percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença de generalização” (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993, p. 87)

Uma segunda etapa seria o caminho inverso: a partir de uma expressão algébrica arbitrária, fazer com que o aluno atribua sentido e significado a ela. Nessa fase, busca-se estabelecer relações entre os aspectos semântico e sintático da Álgebra.

E, finalizando, na terceira etapa, “a ênfase deve recair sobre o transformismo, isto é, sobre o modo como uma expressão algébrica transforma-se em outra equivalente e sobre os procedimentos que legitimam essas transformações” (ibidem, p. 90).

Essa não seria uma sequência rígida, mas independentemente disso, é importante possibilitar ao aluno rever ideias mal compreendidas e elaboradas, “abrindo-lhe o caminho de acesso à construção sólida de seu pensamento algébrico” (p. 90). Eu ainda acrescentaria a possibilidade de o aluno compreender os significados dos termos algébricos e de manipular, de maneira autônoma, a linguagem algébrica.

Lins e Gimenez (1997) apresentam, em seu projeto de Educação Algébrica, a importância da significação. Acredito que, para permitir que os alunos desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente, é necessário passar pelo aspecto semântico da Álgebra. Conforme a quarta concepção de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997), a questão da sintaxe deveria ser desenvolvida após ou concomitantemente ao trabalho com a produção e a negociação de significados. Para Vigotski (2000, p.394), “o desenvolvimento do aspecto semântico é o processo básico e decisivo do desenvolvimento do pensamento e da linguagem da criança”.

Ambas as propostas de Educação Algébrica (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993 e LINS e GIMENEZ, 1997) serão minhas referências para o estudo e a análise da constituição e desenvolvimento do letramento algébrico. A partir das apresentações

dessas propostas, fica claro não ser possível ao aluno desenvolver uma linguagem algébrica, de modo a compreendê-la e dela fazer um uso consciente. Além disso, desenvolver uma linguagem sem ter possibilitado a exploração do pensamento algébrico também não seria aceitável.

Dessa forma, com as tarefas exploratório-investigativas, considero possível desenvolver ambos “em paralelo”, afinal pensamento e linguagem são interdependentes e não haveria como dissociá-los.

4.3 Sobre o Currículo de Matemática, os Conteúdos Algébricos e Padrões

Ao fazer as primeiras leituras de documentos oficiais brasileiros e internacionais, relativos ao currículo de ensino de Álgebra na educação básica, percebi que eles estão em consonância.

Brocardo et al. (2006), ao analisarem o desenvolvimento curricular do ensino dos números e da Álgebra para o século XXI, em Portugal, destacam que documentos portugueses tomaram como referência o National Council of Teachers of Mathematics – NCTM, do ano 2000, o qual apresenta quatro objetivos relativos ao ensino da Álgebra e que se estende desde a educação infantil até o ensino secundário (no Brasil, até o fim do Ensino Médio):

1. compreender padrões, relações e funções;
2. representar e analisar situações;
3. usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
4. analisar mudança em vários contextos (BROCARD et al., 2006, p.72).

As autoras, em relação a esses objetivos, comentam a importância de inserir o aluno, desde os primeiros anos de escolaridade, no mundo da Álgebra, sendo esse um *precursor* para os estudos mais formalizados da Álgebra em anos escolares mais avançados. Esses comentários reforçam o que já diziam Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), e, mais recentemente, Carraher et al. (2006).

Carraher et al. (2006), por exemplo, discutem a importância de o aluno dos primeiros anos de escolaridade ter contato com a Álgebra, a partir de problemas aritméticos. Em pesquisa realizada com crianças de oito a dez anos de idade, aqueles autores obtiveram resultados positivos, baseados em uma linha de trabalho orientada por:

(1) a compreensão das crianças das estruturas aditivas fornece um ponto de partida fértil para uma aritmética “algebrificada”; (2) estruturas aditivas exigem que as crianças desenvolvam uma consciência precoce de números negativos e as quantidades e a sua representação na reta numerada; (3) múltiplos problemas e representações para a manipulação de incógnitas e variáveis, incluindo a notação algébrica em si, pode e deve fazer parte do repertório das crianças o mais cedo possível e (4) significado e notações espontâneas das crianças devem fornecer uma base para as estruturas sintáticas durante o aprendizado inicial, embora o raciocínio da sintaxe deva se tornar relativamente autônomo ao longo do tempo. [tradução minha] (CARRAHER, et al., 2006, p.110)

Para estabelecer ligação entre os números e a Álgebra, Brocardo et al. (2006) sugerem tomar como ponto de partida atividades numéricas, que tenham respostas numéricas simples, e transformá-las em atividades algébricas, as quais possibilitem espaço para a criação de um ambiente em sala de aula que valorizem, por exemplo, a elaboração de conjecturas, a constituição de padrões, a generalização e a justificação de relações matemáticas. Segundo as autoras, “a variação da forma como se apresenta um problema pode conduzir a que um problema aritmético simples se transforme numa questão algébrica”. (p.77)

Sobre a caracterização das tarefas, comentam sobre a possibilidade de relacionar problemas referentes às áreas Tratamento da Informação e Geometria, a partir da experiência que os alunos têm com os números. Em Portugal, uma das tendências indicadas em várias pesquisas é o uso de *tarefas de natureza investigativa* (p. 84), apresentando aspectos positivos e negativos da sua utilização. Em alguns estudos sobre a temática, tem-se buscado compreender as dificuldades dos alunos na realização da tarefa. Ponte e Segurado (apud BROCARD et al., 2006) mostram, como resultado de um estudo, “que com esse tipo de tarefas, as concepções dos alunos relativamente à Matemática podem sair enriquecidas”, tendo evidenciado uma

superação da concepção anterior de Matemática associada estritamente ao Cálculo (p. 85). Além disso, notou-se que houve também mudança nas atitudes dos alunos, sobretudo em relação à motivação e à participação.

Outros estudos têm investigado as possibilidades de desenvolvimento profissional de professores que utilizam essa perspectiva de trabalho, isto é, os desafios postos aos docentes por essas tarefas.

Entre os empecilhos observados e analisados, aparece a *imprevisibilidade* que a tarefa possibilita. Pelo seu caráter aberto, permite uma infinidade de interpretações, gerando, em alguns professores, certo incômodo e desconforto, por esses não estarem habituados à dinâmica de uma aula exploratório-investigativa.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) mantêm a mesma perspectiva do NCTM, tendo em vista a possibilidade de iniciar os alunos dos primeiros anos do Ensino Fundamental em alguns aspectos da Álgebra. Os PCN reiteram que será nos anos finais do ensino fundamental que o aluno poderá, a partir da resolução de problemas, reconhecer

diferentes funções da álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação (BRASIL, 1998, p.50).

Além disso, afirmam que o início do estudo em Álgebra “a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos.” (BRASIL, 1998, p. 51).

Ao tentar interpretar essa citação, entendo que os documentos oficiais brasileiros justificam a recomendação da exploração de padrões e regularidades como estratégia para introduzir e subsidiar o desenvolvimento da noção de função. Essa recomendação, de certa forma, reafirma uma das implicações pedagógicas apontadas por Fiorentini et al. (1993), em relação à quarta concepção de Educação Algébrica e que diz respeito “ao momento de iniciação do pensamento algébrico no currículo escolar”:

Se esse tipo de pensamento não prescinde de uma linguagem estritamente simbólico-formal para sua manifestação, não há razão para sustentar uma iniciação relativamente tardia ao ensino-aprendizagem da álgebra. Ao contrário, acreditamos que, desde as séries iniciais, o trabalho com esse tipo de pensamento se deve fazer presente na formação do estudante. Nas séries iniciais se deve visar o desenvolvimento da capacidade de perceber regularidades e de captar e expressar retoricamente, ou de forma semiconcisa, a estrutura subjacente às situações-problemas, através do processo de generalização (p. 89).

Além desses estudos, podemos apontar também o trabalho de Lee (1996, p. 87) que apresenta a Álgebra como cultura, isto é, como um modo de compreender e interpretar a realidade e que se dá através do processo de generalização. Segundo o autor, quando o aluno é iniciado no trabalho com Álgebra, nele é provocado um “choque de culturas”, tendo em vista o modo pelo qual estava habituado na Aritmética.

Além disso, tem como relevância o trabalho com atividades que contemplam a generalização, por acreditar que essa seja *a base da atividade humana* (p. 105). Mason (1996), por exemplo, considera a generalização o *coração da Matemática* (p. 65).

Uma das conclusões obtidas por esse autor refere-se à questão do ensino de Álgebra. Para ele, ainda permanece uma apropriação da Álgebra, em que se valoriza a sintaxe em detrimento da semântica. Sugere ainda a valorização dos significados elaborados pelos alunos para o desenvolvimento desse conhecimento, a partir da generalização.

Sessa (2005), que também considera *a generalização o coração da Matemática* (p. 71), defende que a iniciação do aluno no mundo algébrico deva ocorrer mediante processos de generalização. Além disso, comenta sobre as maneiras pelas quais se pode contemplar a generalização:

Estamos pensando nesta ferramenta como bem adequada para poder tanto expressar a generalização como fornecer um mecanismo para validação de conjecturas apoiadas em regras de transformação. Estamos pensando nas letras representando números gerais ou genéricos (...) Uma terceira forma, não completamente separada da anterior, seria a construção da idéia de *dependência* entre duas quantidades ou grandezas e pela consideração das letras para expressar estas quantidades variáveis.[tradução minha] (SESSA, 2005, p.71)

De fato, contemplar o aspecto da generalização nos primeiros contatos com a Álgebra pode promover o desenvolvimento do pensamento algébrico e da linguagem algébrica.

Em relação aos PCN, eles sugerem que o aluno, por meio da exploração de situações de aprendizagem, possa ser levado a:

- reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;
- traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;
- utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico (BRASIL, 1998, p.64).

Observe-se que, no último item, os PCN reforçam que é imprescindível o domínio das operações numéricas e de suas propriedades, para que ocorra de maneira eficiente o domínio da manipulação.

4.4 A linguagem algébrica

Uma das maiores dificuldades dos alunos em se apropriar do conhecimento da Álgebra elementar é a pouca significação que eles atribuem à linguagem simbólica. Uma prática que, acredito, ainda seja comum no atual ensino de Álgebra é a iniciação à Álgebra a partir do ensino e uso da linguagem simbólica, mediante o cálculo literal, aspecto reforçado pelas três primeiras tendências de Educação Algébrica apresentadas por Fiorentini et al. (1993).

Historicamente, a principal marca no desenvolvimento da linguagem algébrica foi a resolução de problemas. Segundo Rojano (1996), o processo de desenvolvimento da linguagem algébrica, passando pelas formas retórica, sincopada e simbólica – esta última a partir do fim do século XVI e início do século XVII, com Viète – teve sua importância, por exemplo, no desenvolvimento de outras ciências e áreas do conhecimento, como a Física. Muitas dessas características presentes na Álgebra instrumental foram estendidas ao ensino daquela disciplina nas escolas.

Em culturas antigas, como a grega ou babilônica, a representação da Álgebra se dava a partir da retórica, sendo os problemas representados na língua materna. A ausência, naquele período, de uma representação simbólica para a Álgebra tem sido atribuída ao fato de que os procedimentos usados para a resolução dos problemas eram específicos para cada situação, não havendo uma necessidade ou uma preocupação em produzir uma representação genérica. Mesmo na obra *Arithmetica*, do grego Diofanto, apesar do uso das abreviações para expressar os números quadrados ou números cúbicos, os problemas que constavam em sua obra eram resolvidos sem a presença de um método geral, utilizando um modelo de resolução específico para cada problema. É importante ressaltar que, em *Arithmetica*, havia os dois tipos de representações, a retórica e a sincopada. Na linguagem sincopada, há a presença da linguagem retórica, com a presença de símbolos que surgem com a intenção de abreviar parte da resolução dos problemas.

Por exemplo, em *Liber Abaci*, considerado um dos primeiros textos de ábaco, a resolução de problemas era apoiada na Aritmética, utilizando a linguagem retórica, sendo apresentadas diferentes estratégias que poderiam ser analisadas, hoje, sob o olhar algébrico, idênticas às utilizadas atualmente por nós. Para Rojano (1996, p. 57-58), “Diofanto é considerado o principal protagonista da Álgebra grega sincopada, por ter introduzido curtas abreviações para denotar incógnitas e potências, bem como subtrações, igualdades e as recíprocas” [tradução minha].

Com o advento do Renascimento, o desenvolvimento da Álgebra simbólica ocorreu mediante a busca de resolução de problemas em aberto, como, por exemplo, a trissecção de um ângulo. A novidade era a tentativa de resolvê-los sem o uso de régua e compasso, procedimento fortemente presente na cultura grega antiga. Pode-se afirmar que o foco continuava a ser a resolução de problemas, mas não de problemas rotineiros. Além disso, a intenção era desenvolver um modo de resolver os problemas que não fosse particular a cada um deles.

De fato, foi notório, na história do desenvolvimento da Matemática, esse salto qualitativo no campo dessa Ciência e de outras ciências, proporcionando um grande progresso da Álgebra. Mas, o seu desenvolvimento não parou por aí. Com o surgimento

da Matemática abstrata e, conseqüentemente, da Álgebra abstrata, ou moderna, em meados do século XIX, essa Álgebra tinha a letra-variável com outra conotação. Segundo Moura e Sousa (2005, p. 36),

A criação de uma matemática abstrata coincide com a criação da álgebra abstrata. O concreto do conteúdo da álgebra abstrata é o formal dos conteúdos da álgebra geométrica e da álgebra simbólica. Não há preocupações explícitas com a palavra e o desenho, mas sim, com a geometria de Euclides e com a variável letra de Viète. Aqui, o número não representa nexos conceitual da álgebra, porque essa álgebra prescinde dos números.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p.83) também mencionam a concepção de Álgebra *linguístico-postulacional*, a qual, em sua concepção, assume que o

caráter simbólico do signo lingüístico é ampliado, isto é, ele passa a representar não apenas uma quantidade geral, discreta ou contínua, mas também entidades matemáticas que não estão, necessariamente, sujeitas ao tratamento quantitativo, tais como as estruturas topológicas, as estruturas de ordem, a estrutura de espaço vetorial etc.

Apesar de suas diferentes funções e das variadas conotações que a linguagem algébrica assume, no ensino da Álgebra essas diferentes representações estão presentes, exceto no da Álgebra moderna, restrita ao ensino superior.

No capítulo seguinte – *Letramento e Letramento Algébrico: alguns aspectos teóricos* –, apresentarei uma revisão bibliográfica relacionada à área de letramento (Soares, 2003 e Barton e Hamilton, 2004), estabelecendo relações entre letramento autônomo e ideológico (Street, 2004). Farei uma aproximação da concepção de letramento como prática social de leitura e escrita ao ensino de Matemática.

CAPÍTULO 5

LETRAMENTO E LETRAMENTO ALGÉBRICO: ALGUNS ASPECTOS TEÓRICOS

Este capítulo tem como objetivo apresentar as referências teóricas que embasam o conceito de letramento e, em particular, de letramento algébrico, e que constituirão as lentes pelas quais analisarei as práticas de letramento algébrico de sala de aula. Para isso, me apoiarei, entre outros, em autores como Soares (2003), Barton e Hamilton (2004), Street (2004), Street e Street (2004) e Ray (2008).

Como as leituras realizadas sobre letramento são quase todas inerentes ao campo da Alfabetização e da Linguagem, procurarei estabelecer um diálogo com essa teoria, tentando aproximar essas concepções de letramento com a área de estudo em questão, a Educação Algébrica. Espero, assim, constituir, modestamente, um modelo teórico capaz de subsidiar as análises de práticas de letramento algébrico em sala de aula.

5.1 Concepção e modelos de letramento

Os estudos de letramento se iniciaram em meados da década de 1980, quando linguistas e educadores buscavam diferenciar letramento de alfabetização.

Segundo Soares (2003), o surgimento de algumas expressões se dão a partir das necessidades sociais em determinado momento histórico. Socialmente, tem sido mais popular o uso do termo analfabeto do que o termo alfabetizado. Soares relata que isso tem ocorrido também no idioma inglês. A palavra *illiteracy* consta no *Oxford English Dictionary* desde 1660, tendo surgido apenas no fim do século XIX a palavra *literacy*.

A origem da expressão vem do inglês *literacy* (literate + cy), em que o sufixo *cy* indica estado ou condição de quem é letrado (literate = letra).

Soares (2003) busca diferenciar as expressões alfabetizado, analfabeto e letrado:

Há, assim, uma diferença entre saber ler e escrever, ser *alfabetizado*, e viver na condição ou estado de quem sabe ler e escrever, ser *letrado* (atribuindo a essa pessoa o sentido que *literate* em inglês) Ou seja, a pessoa que aprende a ler e a escrever – que se torna *alfabetizada* – e que passa a fazer uso da leitura e de escrita, a envolver-se nas práticas sociais de leitura e escrita - que se torna *letrada* – é diferente de uma pessoa que não sabe ler e escrever – é *analfabeta* – ou, sabendo ler e escrever, não faz uso da leitura e da escrita – é *alfabetizada*, mas não é *letrada*, não vive no estado ou condição de quem sabe ler e escrever e pratica a leitura e a escrita.[grifos da autora] (SOARES, 2003, p. 36)

Pensando no significado de ser letrado, isto é, estado ou condição daquele que conhece e participa das práticas sociais de leitura e escrita, podemos discutir não apenas o letramento, mas vê-lo como possíveis letramentos. Soares (2009) – como também Barton e Hamilton (2004) – tratam o letramento como sendo multifacetado, pois as práticas sociais de leitura e escrita não são restritas ao processo de escolarização.

Para Barton e Hamilton (2004, p.109), *o letramento é antes de tudo algo que as pessoas fazem, é uma atividade localizada no espaço entre o pensamento e o texto* [tradução minha]. Sob o ponto de vista da constituição de uma teoria social do letramento, esses autores apresentam como elemento fundamental dessa teoria a existência de práticas e eventos letrados.

A própria reconceitualização de letramento se dá através desses dois conceitos: *o letramento se compreende melhor como um conjunto de práticas sociais que podem ser inferidas a partir de práticas letradas mediadas por textos escritos* (p. 113) [tradução minha]. As práticas letradas seriam mais fluidas e difíceis de serem observadas, tendo em vista que essas surgem das relações interpessoais. Os eventos letrados são situações, as quais se apoiam em textos escritos, cumprindo uma função ou papel social.

Essa concepção de letramento tem sido tomada como referência para aqueles que estudam ou pesquisam nas perspectivas antropológica e/ou etnográfica.

O trabalho de Street (2004) se tornou um marco nos estudos sobre letramento, tendo em vista que o autor questiona a divisão estabelecida pelos linguistas sobre a relação entre a oralidade e a escrita. Em vez de estabelecer essa separação ou divisão

entre o oral e o escrito, Street vê a relação entre ambos como de continuidade (*continuum*). Não haveria uma ruptura entre a aquisição da escrita e a oralidade.

Street (2004), em contraposição a esse modelo de letramento, que valoriza um letramento em si mesmo, autônomo e independente do contexto, em que a escrita é tratada apenas como tecnologia – modelo *autônomo* de letramento – propõe o modelo *ideológico* de letramento.

Esse modelo considera outras dimensões que constituem o letramento, em diferentes contextos e naturezas (social, individual, por exemplo). Para ele, não se deveria considerar o letramento como, somente, aquisição e domínio das habilidades de leitura e escrita. Levam-se em consideração as relações de poder e as ideologias que permeiam as práticas sociais, questionando a predominância de um letramento dominante, convenientemente mantido por instituições, como o governo e a escola. Além disso, a dimensão ideológica de letramento permite olhar para os diferentes letramentos constituídos nos diferentes grupos étnicos e culturais, os quais, em muitos casos, não são reconhecidos ou valorizados.

Street e Street (2004), quando discutem a *pedagogização do letramento*¹¹, apresentam a análise de uma investigação realizada em uma escola localizada no subúrbio de uma grande cidade dos Estados Unidos. Tinham como objetivo analisar as possíveis relações entre o letramento existente nas práticas familiares e aquele que ocorre dentro das salas de aula.

Essa escola atendia aos alunos do 1º ao 5º ano, com, aproximadamente, 20 alunos por classe. Alguns dos aspectos relevantes apresentados pelos autores nessa pesquisa foi o caráter fortemente autônomo das aulas. As aulas consideradas não eram de Matemática, mas de língua inglesa. Entre os aspectos por eles analisados, que justificam o letramento como sendo autônomo, destacam-se: *o distanciamento entre os sujeitos e a linguagem; os usos metalinguísticos, a ação de privilegiar* [a escrita em relação à oralidade] [tradução minha] (STREET e STREET, 2004, p. 189).

A partir da observação realizada, os pesquisadores notaram a predominância de aspectos relativos à oralidade e à escrita, mas privilegiando práticas que se aproximam

¹¹ Tradução de *pedagogización de la literacidad* (Street e Street, (2004) , p.182)

de um modelo autônomo de letramento. Essas práticas tomavam como elemento fundamental a divisão entre a oralidade e a escrita. No processo de escolarização, notou-se que a oralidade é pouco explorada, dando destaque, nas aulas de língua inglesa, à gramática e à sintaxe, em detrimento da discussão, socialização das produções particulares dos alunos e o processo de negociação de significados.

A relação estabelecida entre os professores e a linguagem era de total distanciamento, como se aquela linguagem lhes fosse algo alheio. Da mesma forma, essa distância era mantida entre a linguagem e os estudantes, a partir do uso inadequado do quadro negro, de modo que a natureza da linguagem se justifica por si mesma:

El objetivo era que los niños siguieran los procesos de trabajo de la maestra para así luego imitarlos. Hubo poca discusión sobre el significado del language, sobre interpretaciones alternativas de los textos o sobre la manera como la maestra había llegado al sentido de lo que significaban (STREET e STREET, 2004, p.191).

Pensando no processo de *pedagogização* do letramento, buscando a construção e a interiorização da voz pedagógica, esse se centra nos processos de *nomear o espaço* e os *procedimentos*. Considero importante ressaltar esses dois aspectos, pois o espaço escolar e os procedimentos utilizados nas salas de aula são determinantes no letramento desenvolvido pelos professores, sujeitos da pesquisa realizada.

O primeiro aspecto refere-se a desde as pessoas que promovem a gestão e o funcionamento do espaço escolar, agentes da limpeza e manutenção, secretaria, professores, até orientações e documentos oficiais e arquitetura da unidade escolar. Essa última representa o Estado, o poder. Também são considerados o modo de organização das salas de aula, a disposição de mesas e cadeiras e o que está afixado em suas paredes. Esse sistema de signos promove o desenvolvimento de um tipo de letramento, em geral, um letramento distante daquilo que o aluno traz de seus lares e de sua comunidade.

Os procedimentos também seriam um dos processos que constituem a prática pedagógica e “dominam a aula e formam a maior parte da voz pedagógica” (STREET e STREET, 2004, p. 196). São as tarefas direcionadas aos alunos e ao controle do

espaço e do tempo em prol do desenvolvimento da tecnologia da leitura e escrita. Pode-se dizer que esses procedimentos respondem às expectativas do modelo autônomo de letramento.

Ao assumir a existência de diversos tipos de letramento, Soares (2003) apresenta o que seria o letramento escolar e discute como seria o modo de medir e avaliar esse letramento:

As escolas fragmentam e reduzem o múltiplo significado do letramento: *algumas* habilidades e práticas de leitura e escrita são selecionadas e, então organizadas em grupos, ordenadas e avaliadas periodicamente, através de um processo de testes e provas tanto padronizadas quanto informais. O conceito de letramento torna-se, assim, fundamentalmente determinado pelas habilidades e práticas adquiridas através de uma escolarização burocraticamente organizada e traduzidas nos itens de testes e provas de leitura e escrita. A consequência disso é um conceito de letramento reduzido, determinado pela escola, muitas vezes distante das habilidades e práticas de letramento que realmente ocorrem fora do contexto escolar. (SOARES, 2003, p. 85)

Diante de uma visão de letramento escolar que mais controla do que expande a concepção de letramento, parece-me aproximar essa concepção da dimensão autônoma de letramento. Uma questão a ser colocada é: haveria alguma avaliação que mediria o letramento, em outras dimensões que não fosse a autônoma? Acredito que as avaliações em larga escala não tenham a capacidade de medir essas práticas.

Uma outra questão: como seria uma intervenção no espaço escolar que contemplasse um letramento ideológico? Faço essa pergunta pois também não sei a resposta... Penso nas escolas brasileiras, nas aulas de Matemática e, mais especificamente, no ensino da Álgebra elementar, geralmente iniciado na 6ª série/7º ano do ensino fundamental. O ensino dessa área da Matemática valoriza mais aspectos da tecnologia da escrita, da forma, da sintaxe, ou aspectos da semântica e da significação dos entes algébricos?

Um dos questionamentos realizados por Street e Street (2004, p.200) é de “como e por que esta versão de letramento é construída, assimilada e interiorizada em diversos contextos, incluindo a escola”.

Buscando respostas para algumas das questões apresentadas, encontrei alguns trabalhos publicados nos Estados Unidos, que tratam de um letramento quantitativo (*quantitative literacy*).

Nesses estudos, há um consenso entre diversos educadores sobre o modelo de escola presente nos dias atuais, com currículos e práticas pedagógicas que se assemelham aos liceus do início do século XX. Além disso, discorrem sobre as pressões que os agentes escolares – professores, equipe gestora, funcionários – sofrem diante das políticas públicas de educação, as quais se empenham em cumprir metas estabelecidas pelo estado mínimo neoliberal.

Em algumas universidades norte-americanas, pesquisadores começaram a olhar para a escola básica com preocupação. Esses pesquisadores notaram a dificuldade de muitos ingressantes na universidade acompanharem disciplinas de Ciências Exatas, como de Engenharias e de Física. Alguns desses alunos mostraram dominar procedimentos e definições matemáticas, sabiam, como ninguém, manipular expressões algébricas monstruosas, porém encontravam dificuldades na interpretação das situações aplicadas. Como paliativo, criaram disciplinas de nivelamento em Matemática, de modo a dar condições aos alunos que ingressaram na universidade.

A partir disso, investigações sobre o tema têm sido realizadas, com o intuito de identificar onde estaria o abismo entre a academia e a escola básica. A escola básica tornou-se o foco de discussão e análise. Steen et al. (2001, p. 1) comentam que

Infelizmente, apesar de anos de estudo e experiência de vida num ambiente imerso em dados, muitos adultos educados continuam funcionalmente inumerados. A maioria dos estudantes dos EUA sai do ensino médio com habilidades quantitativas muito abaixo do que eles precisam para viver bem na sociedade atual. As empresas lamentam a falta de competências técnicas dos funcionários a serem contratados; e praticamente todos os universitários consideram que muitos estudantes necessitam de recuperação em matemática [Tradução minha]¹²

¹² Unfortunately, despite years of study and life experience in an environment immersed in data, many educated adults remain functionally innumerate. Most U.S. students leave high school with quantitative skills far below what they need to live well in today's society; businesses lament the lack of technical and quantitative skills of prospective employees; and virtually every college finds that many students need remedial mathematics.

Segundo aqueles autores, a preocupação no ato de ensinar Matemática deveria ir além de conhecer e dominar todas as regras de fatoração, fórmulas e equações, por exemplo. A preocupação deveria ser de fazer com que os alunos vissem o mundo através da Matemática, com que houvesse a valorização de desenvolver a capacidade de raciocinar matematicamente, sem o apego às tradições do ensino de Matemática, numa perspectiva tecnicista ou meramente procedimental. Essa tradição de ensino seria justificada pela hegemonia de um letramento autônomo, o qual valoriza os aspectos tecnológicos da escrita – uma escrita em si mesma.

Desse modo, o modelo de escola que vigora ainda hoje se mostra falido, incapaz de acompanhar e agregar em sua estrutura, gestão e organização curricular, as necessidades do mundo globalizado.

É preciso pensar e repensar sobre as práticas escolares, práticas essas que colaboram e interferem na constituição do letramento de nossos alunos. Talvez, uma possibilidade de promover um letramento matemático, o qual privilegiaria não só aspectos importantes da sintaxe, da manipulação e dos procedimentos e algoritmos, mas, também, aspectos relacionados ao modo como os alunos leem e interpretam problemas e operações e expressões numéricas e algébricas, figuras, gráficos e tabelas, e atribuem sentidos a esses elementos. Ou seja, o desafio da escolarização, nesse sentido, seria promover uma aproximação entre os modelos autônomo e ideológico de letramento.

5.2 Um letramento algébrico?

Visando ampliar essa concepção de letramento escolar, penso que seria possível discutir um letramento algébrico. Para essa discussão, é interessante que ambos os modelos (ideológico e autônomo) não sejam tratados de maneira dicotômica. Street (2004, p. 90) explica que

o modelo ideológico, não trata de negar as habilidades técnicas ou os aspectos cognitivos de leitura e escrita, mas as compreende como encapsuladas em totalidades culturais e dentro de estruturas de poder. Nesse sentido é que o

modelo ideológico inclui não exclui, o trabalho realizado, usando o modelo autônomo [tradução minha]

Primeiramente, seria necessário pensar nas práticas escolares, e letradas, que sejam próprias das aulas de Álgebra. Não posso afirmar como são as aulas da maioria dos professores que lecionam para as séries que contemplam esse conteúdo, porém tomarei como base o trabalho realizado por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), o qual apresenta as tendências de Educação Algébrica que vigoraram no Brasil e projeta uma quarta tendência. As três primeiras, conforme já comentado, apesar de terem se desenvolvido a partir de recursos e procedimentos diferentes, têm em comum a valorização do transformismo algébrico, isto é, a manipulação e simplificação de expressões algébricas, sem a exploração de sentidos atribuídos pelos alunos aos entes algébricos.

Um ensino de Álgebra que não seja significativo aos alunos e, até mesmo, aos professores, mostra-se incapaz de articular a aprendizagem e a atribuição de sentidos àquele conhecimento matemático, o qual não é composto apenas pela sintaxe (isto é, pela forma como se representa), mas também pela sua semântica. Logo, podemos afirmar que uma aula de Álgebra, na qual predominam a manipulação e o transformismo algébrico, aproxima-se do modelo autônomo de letramento.

O uso do termo ideológico não tem necessariamente um enfoque marxista. Segundo Street (2004), *ideologia é o ponto de tensão entre, por um lado, autoridade e poder e, por outro, resistência e criatividade (p. 89)*. Ao analisarmos esse termo, podemos pensar no trabalho didático-pedagógico do professor de Matemática, o qual traz a sua história e experiência com aquele conhecimento, e que se depara com os mais variados livros didáticos, que valorizam a Álgebra de maneira diversa, com os documentos oficiais e com o contexto institucional em que está inserido. Para completar, se depara com alunos, de interesses, conhecimento e experiências diferentes, e, muitas vezes, desenvolve o letramento dominante, sem ter consciência das consequências daquele tipo de formação recebida por seus alunos. Aliás, nem imagina que é possível desenvolver um letramento matemático em seus alunos.

Em diversos momentos, não nos questionamos (e eu me incluo nessa prática) do porquê e do como se ensinar certo conteúdo matemático. Mas, mesmo assim, o fazemos de um modo ou de outro. Para Street e Street (2004), não apenas na escola, como também dentro das famílias, *as visões particulares* reforçam a hegemonia de um letramento dominante: “Todo esto debe entenderse esencialmente como procesos sociales que contribuyen a la construcción de un tipo particular de ciudadano, un tipo de particular de identidad y un concepto particular de nación” (p. 204).

A partir da concepção de ideologia, os autores colocam, como fundamental diante do modelo ideológico de letramento, a *ideologia da linguagem*, como sendo um sentido *mais contundente que se inscreve a relação entre o indivíduo e a instituição social e a mediação desses através de sistemas de signos* (p.203). Enfim, quando estamos nas mais variadas situações de leitura, escrita, audição ou de visão, somos atingidos e *posicionados* por essa linguagem.

Entendo que, no processo de ensinar e aprender Matemática, esses aspectos estejam permeados, intrínsecos a todos que estão na área de Educação, mesmo que inconscientemente.

Ao retomar a definição dada por Barton e Hamilton (2004, p.113) sobre letramento – concebido “como um conjunto de práticas sociais que podem ser inferidas a partir de práticas letradas mediadas por textos escritos” –, podemos conceituar o letramento algébrico como um conjunto de práticas sociais de leitura e escrita, nas quais os eventos letrados são mediados por diferentes registros escritos, situações-problema, expressões numéricas e algébricas, equações e inequações, tabelas, gráficos, padrões e regularidades em sequências de diferentes tipos, mas sempre permeadas pela produção e negociação de significados. Nesse sentido, penso que numa aula de Álgebra podemos promover eventos letrados que contribuam para o desenvolvimento do letramento algébrico.

Por exemplo, em aulas exploratório-investigativas, sob a orientação de um professor que valoriza a mediação como forma de proporcionar o desenvolvimento e o progresso de seus alunos, esse docente pode promover um ambiente favorável à participação e engajamento dos alunos, além da argumentação e comunicação

matemática, tendo papel fundamental no desenvolvimento do letramento algébrico dos alunos.

Diferentemente do quadro descrito por Street e Street (2004), nas aulas observadas, que privilegiavam a escrita em detrimento da oralidade, estabelecendo uma cisão entre práticas de oralidade e de escrita, no caso de meu trabalho de campo, objeto de análise desta investigação, parece-me que elas tomaram outra direção. De fato, a partir da dificuldade apresentada pelos alunos, que não conseguiam registrar suas ideias e observações acerca da primeira tarefa, isso foi possível por meio da argumentação e da apresentação oral dos alunos para que houvesse uma sistematização coletiva das observações encontradas. Eles haviam entendido a tarefa, mas o registro era barrado na dificuldade de escrever o que tinham encontrado.

Outro ponto que considero importante para a compreensão do significado de letramento algébrico seria retomar os modelos elaborados por Street (2004). Tendo por base esse autor, entendo que, no letramento algébrico, seria importante a aproximação das duas dimensões de letramento. No letramento algébrico, a dimensão autônoma, a qual denota a escrita como tecnologia, corresponderia à sintaxe (ênfase no transformismo algébrico) das expressões algébricas, enquanto a dimensão ideológica corresponderia à semântica dessas expressões (ênfase ao processo de produção e negociação de significados).

A dimensão ideológica – que traz a discussão das relações de poder e dos letramentos presentes nas comunidades – seria contemplada pelo tratamento dos aspectos semânticos, que, no caso de uma aula exploratório-investigativa, seriam desenvolvidos conforme a evolução de cada sujeito, de acordo com a zona de desenvolvimento proximal em que ele se encontra (VIGOTSKI, 2000). A atribuição de sentidos e a negociação de significados podem promover a autonomia do sujeito, que não seria formado para ser mais um na sociedade a executar determinada função.

Vejo, nessa prática de ensinar e aprender, a possibilidade de formar um sujeito, um cidadão letrado que saiba *o que, como, quando e por que* ler e escrever: um sujeito constituído numa dimensão *forte* de letramento (SOARES, 2003, p.75). Lankshear (apud Soares, 2003) “afirma que é impossível distinguir letramento do contexto utilizado

para adquiri-lo e transmiti-lo, e de quaisquer vantagens ou desvantagens advindas dos usos que são feitos dele, ou das formas que assume” (p. 75).

Na busca por referências teóricas sobre letramento algébrico, encontrei, na tese de Ray (2008), subsídios importantes para a iniciação a práticas de letramento algébrico de meus alunos, sujeitos da pesquisa. Ray construiu um modelo de desenvolvimento de letramento algébrico (DAL – *Development Algebraic Literacy*), com a intenção de analisar o desenvolvimento do letramento algébrico de alunos com dificuldades em aprendizagem.

Ray (2008) defende que o letramento algébrico deve ser desenvolvido com os alunos, do mesmo modo como se faz em relação ao desenvolvimento de competências referentes à leitura e à escrita da língua materna. Ou seja, deve ser iniciado desde os primeiros anos de escolaridade, contemplando como temas a concepção de número e o desenvolvimento do senso numérico.

A concepção de letramento algébrico da autora encontra aproximações e pontos de contato com a concepção de letramento algébrico por mim apresentado anteriormente, constituído com base em Barton e Hamilton (2004) e Street (2004). Para ela, entende-se que

letramento algébrico como sendo definido como as habilidades precisas e consistentes de um aluno para usar a linguagem para descrever conceitos algébricos; empregar materiais para ilustrar conceitos; utilizar organizadores visuais e gráficos para mostrar conexões entre os conceitos alvo e outras aprendizagens, fornecer bases racionais para resolver problemas em torno de conceitos, e usar a resolução de problemas e de computação para responder a perguntas sobre conceitos [Tradução minha]. (RAY, 2008, p. 56)¹³

Nesse modelo, em virtude das múltiplas representações que o letramento algébrico pode se manifestar, Ray (2008) elencou sete aspectos das práticas de letramento:

¹³ For the purpose of this study, “algebraic literacy” is defined as a student’s accurate and consistent ability to use language to describe algebraic concepts; employ materials to illustrate concepts; utilize graphic organizers to show connections between target concepts and other learning; provide rationales to solve issues surrounding concepts; and use problem-solving and computation to answer questions on concepts.

- 1) Representação concreto-abstrata: esse aspecto tem como objetivo contemplar atividades que, inicialmente, partam de situações que explorem materiais concretos, caminhando a situações que explorem representações pictóricas de símbolos abstratos.
- 2) Contextos autênticos: esse modelo envolve a resolução de problemas. A aprendizagem da Matemática, como em outras disciplinas, se dá quando os alunos podem estabelecer conexões. Isso, de algum modo, faz com que encontrem interesse em participar e engajar-se na atividade. Assim, seria o contexto autêntico aquele em que o aluno engaja-se e participa da atividade, mobilizando seu pensamento e raciocínio.
- 3) Apresentação de modelos: o seu uso é recomendado acompanhado de outras práticas pedagógicas. Consiste em apresentar e explicitar modelos, guiados pelo professor, um modo de mostrar ao aluno um “pensar em voz alta do professor”, explicando passagens e a sistematização da resolução de determinados problemas.
- 4) Andaime: procura facilitar a aprendizagem do aluno ao aplicar novos conceitos, gradualmente. Pode ser reforçada através do trabalho com as estruturas metacognitivas do aluno, dando condições para que ele tome consciência de seu modo de pensar e que isso possa ser empregado na resolução de problemas.
- 5) Uso de organizadores visuais: a exploração de diagramas e esquemas pode contribuir na compreensão de conceitos importantes, como o de variável ou incógnita.
- 6) Múltiplas oportunidades para a prática de conceitos matemáticos, mais especificamente os algébricos.
- 7) Acompanhamento contínuo do progresso do aluno.

Tendo em vista o desenvolvimento do trabalho de campo, pretendo privilegiar alguns dos aspectos apresentados anteriormente na prática de letramento com os meus alunos, sujeitos da pesquisa.

Sem dúvida, em uma aula exploratório-investigativa, o uso de tarefas de caráter aberto promove a participação e engajamento dos alunos. Segundo Ray, para possibilitar o engajamento e participação dos alunos, é recomendável o uso de contextos autênticos. Essa denominação é pertinente, pois há uma concepção de atividades contextualizadoras como sendo aquelas em que há situações da realidade para serem investigadas e analisadas pelos alunos. Em outras experiências que tive, como em Fernandes (2006), a curiosidade e a participação dos alunos na atividade investigativa não foi menor em virtude da pouca ou nenhuma relação com temas da realidade.

Outro aspecto pertinente à minha pesquisa é o do Andaime. Acredito que, na atividade investigativa, será necessária a participação do professor e da auxiliar de pesquisa, como andaimes, a colaborar na aprendizagem matemática dos alunos. Um ponto importante citado por Ray é a possibilidade de o aluno tomar consciência do próprio modo de pensar sobre a atividade, oportunizando a metacognição. Talvez, seja esse o caminho.

O uso de organizadores visuais também poderá contribuir para a dinâmica do trabalho de campo, pois, na fase inicial, os alunos, com as dificuldades comuns na iniciação à Álgebra, e os professores sentem a necessidade de explorar o uso de diagramas e esquemas para colaborar na compreensão dos conceitos algébricos em questão. Na passagem de uma linguagem retórica para a sincopada, poderão fazer uso desses recursos.

Como um dos objetivos da pesquisa é descrever e/ou narrar a constituição do letramento algébrico dos alunos, é fundamental o acompanhamento e monitoramento contínuo dos alunos. Não seria possível analisar o desenvolvimento do letramento algébrico dos alunos em aulas exploratório-investigativas, se não acompanharmos o progresso dos alunos, apontando o que foi relevante para a formação, e como as representações se modificaram durante o período em que eles participaram da dinâmica.

Ao finalizar este capítulo, cabe destacar que, no Brasil, os trabalhos sobre alfabetização desenvolvidos sob a concepção de Paulo Freire denotam essa

característica do letramento ideológico forte, revolucionário. Ao contrário da constituição de um cidadão funcional, Paulo Freire defendia a importância daquele modelo de alfabetização – instrumento fortemente político – na mudança social das pessoas.

Longe de ter essa pretensão, não considero que meu trabalho tenha contribuído para a mudança social daquelas crianças e jovens. Acredito que eu tenha contribuído, modestamente, para que eles, no mínimo, olhassem com outras lentes o conhecimento matemático, tendo a oportunidade de acompanhar o seu próprio desenvolvimento intelectual e, principalmente, sociocultural.

CAPÍTULO 6

NARRANDO E ANALISANDO O TRABALHO DE CAMPO

6.1 Os primeiros contatos dos alunos com as Investigações Matemáticas

Ao iniciar o relato das primeiras aulas do trabalho de campo, recordo-me experiências iniciais que tive com as Investigações Matemáticas em sala de aula. Das aulas de regência de Prática de Ensino e Estágio Supervisionado, do desenvolvimento da pesquisa de Iniciação Científica, da tarefa exploratório-investigativa referente aos fractais – no primeiro ano de docência após a conclusão da graduação – das experiências com os alunos da rede estadual em relação à escrita nas aulas de Matemática... Por mais que eu já tenha realizado inúmeras vezes essas atividades, sinto que cada uma delas é única e não repetível. Antes mesmo de iniciar o trabalho com esses alunos, eu já acreditava que o trabalho seria realizado de outra maneira.

Eu não havia trabalhado tarefas exploratório-investigativas com essas classes, apesar de valorizar a resolução de problemas em interação dialógica com os alunos, visando à sua participação, de modo que eles pudessem constituir a sua própria aprendizagem.

O que motivou a elaboração da primeira tarefa foi Ana Luisa. Enquanto estagiária e auxiliar de pesquisa, acompanhou minhas aulas e, ao auxiliar os alunos na resolução dos problemas e exercícios propostos no dia a dia, mostrou-se angustiada e apreensiva com a dificuldade desses alunos com a tabuada. Quando conversamos sobre as aulas que ela iria desenvolver, manifestou o interesse de trabalhar alguma tarefa investigativa, que contemplasse a tabuada, com aquelas crianças. Inclusive, trouxe uma tarefa investigativa desenvolvida por Conti e Soares (2006), baseada no livro de Ponte,

Brocardo e Oliveira (2003). Tendo em vista a oportunidade de realizarmos um trabalho em conjunto, sugeri que utilizássemos a tábua pitagórica.¹⁴

Essa tábua foi utilizada no ano anterior por uma dupla de estagiários da Licenciatura em Matemática que, ao acompanharem as minhas aulas e iniciarem a regência, também se sentiram incomodados pelo fato de os alunos não dominarem a tabuada de multiplicação. Porém, naquela oportunidade, não foi proposto desenvolver uma exploração/investigação acerca da tábua pitagórica. Era simplesmente um instrumento para que os alunos pudessem recorrer e concluir os cálculos de multiplicação e divisão. E foi assim que surgiu a primeira tarefa a ser aplicada e desenvolvida no trabalho de campo.

Na primeira aula, em ambas as classes, expliquei que teríamos dois professores para auxiliá-los em dúvidas que poderiam surgir. Além disso, informei que haveria uma câmera para registrar o que iria ocorrer em uma aula daquele tipo. Deixei claro que a utilização das imagens seria importante para o trabalho que eu e Ana Luisa estávamos fazendo na Unicamp e, por isso, solicitei a colaboração e o empenho de todos. Não acredito que eles tenham entendido tudo que falei, mas notei que eles levaram a sério a proposta...

Fiz o esclarecimento sobre a importância de manterem a sala limpa, pois apenas duas classes da escola estavam tendo aula na sala Multiuso (Uso Múltiplo). Os alunos questionaram se, naquela aula, usariam o livro didático, como era habitual em nossas aulas. Expliquei-lhes que, em algumas delas, talvez a eles recorrêssemos, como meio de atribuir tarefas “para casa”.

A primeira tarefa aplicada às classes foi a seguinte:

¹⁴ Tábua ou tabela de multiplicações criada por Pitágoras ou pelos pitagóricos.

Uma tabela diferente...

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81
8	8	16	24	32	40	48	56	64	
7	7	14	21	28	35	42	49		
6	6	12	18	24	30	36			
5	5	10	15	20	25				
4	4	8	12	16					
3	3	6	9						
2	2	4							
1	1								

“O que você encontra de interessante nesta tabela?”

Como fazia parte do trabalho de campo a iniciação de Ana Luisa na docência – afinal, ela estava colaborando com o meu trabalho, e eu, com o seu trabalho, dando-lhe oportunidade e espaço para que desenvolvesse a sua regência – ela ficou responsável por dar o arranque inicial à tarefa. Ao invés de deixar os alunos perceberem o que havia de interessante na tabela, ela fez a explicação do funcionamento da tabela, da relação entre as linhas e colunas, culminando nos valores que a constituíam.

Até certo ponto, foi importante deixar claro o que ocorria com a tabela, pois, ainda assim, muitos alunos não sabiam o que investigar. Eram os seus primeiros contatos com as investigações matemáticas.

Mesmo assim, algumas questões ainda surgiram:

- Dona, não entendi!
- O que é pra fazer?

- Sinceramente, dona, não entendi nada!
- Professora, de lápis ou de caneta?
- Quantas linhas?

Ana Luisa: – Não tem mínimo, nem tem máximo! Tem que anotar o que você viu de interessante.

Pode-se afirmar que essa primeira tarefa serviu para introduzir os alunos em outro tipo de prática matemática escolar. Nessa, as duplas constituídas puderam estabelecer uma relação mais exploratória de produção e negociação de sentidos à/na Matemática escolar.

6.2 As fases de uma aula exploratório-investigativa

O primeiro momento de uma aula exploratório-investigativa seria a *introdução da tarefa pelo professor* (OLIVEIRA, SEGURADO e PONTE, 1996). Nessa fase, é fundamental o arranque inicial, uma leitura da tarefa posta aos alunos ou, ainda, a sua apresentação oral. Nesse trabalho, optei por introduzir as tarefas impressas, pensando que, em especial na primeira tarefa, eu perderia muito tempo do trabalho, pedindo aos alunos que copiassem a tabela da lousa.

A segunda fase seria a *realização da investigação*. Quando os alunos iniciam a exploração, eles buscam meios e formas de responder às questões. A observação, o levantamento de hipóteses e a elaboração de conjecturas e a sua posterior validação, ou não, são alguns dos aspectos realizados pelas equipes.¹⁵ É importante ressaltar que esse modo de desenvolver a atividade matemática não é trivial para os alunos, pois os alunos não estão habituados com essa prática de ensinar e aprender Matemática. O rompimento com essa prática tradicional será inevitável, desestabilizando crenças e valores pertinentes à Matemática...

A terceira fase seria a *socialização/sistematização das produções dos alunos*. Nessa última fase, os alunos compartilham e negociam com os demais colegas as suas observações, conjecturas e/ou demonstrações, mesmo que essas sejam simples. O

¹⁵ Essas são características presentes na atividade de um matemático profissional, o qual utiliza, de maneira análoga, um caminho metodológico para pesquisar.

objetivo dessa dinâmica é estimular e valorizar a argumentação e a comunicação matemática. Em geral, eu procuro fazer uma sistematização das produções apresentadas, com o objetivo de contemplar algum ponto não trazido ou explorado pelos alunos ou de dar relevância a algum dos aspectos levantados por eles, de modo a facilitar a sua apropriação e internalização do conhecimento em jogo.

6.3 Iniciando uma atividade investigativa

Durante a atividade investigativa, aproximando-me de alguns alunos da equipe do aluno Walter, a qual estava observando a tabela, perguntei-lhes se poderia filmar o que estavam produzindo. No primeiro dia, a câmera era a novidade, alguns olhavam e brincavam, *mandando beijos para a mamãe*. Outros alunos, mais introspectivos, mal levantavam a cabeça para conversar comigo ou com a Ana Luisa. Entretanto, não houve resistência por parte dos alunos, tanto que, nas demais aulas em que a filmadora estava funcionando, não mais se importavam com essa presença.

É importante, nesse momento da atividade, levantar alguns questionamentos que norteiem a investigação. Tudella et al. (1999) ressaltam as *interacções professor-alunos* e *aluno-aluno*, sendo as primeiras imprescindíveis para um bom desenvolvimento da tarefa. Pensando em meus alunos, que estavam se iniciando nas investigações, seria mais importante ainda... Aqueles autores comentam que as interações são as mais variadas, utilizadas conforme a fase em que se encontram os trabalhos. Alguns exemplos são: *estímulo ao confronto de opiniões, incentivo ao sentido crítico, à reflexão e à argumentação, informações pertinentes e aproveitamento do erro e motivação* (ibidem, 1999).

Eu questionei os alunos sobre o que, de fato, eles encontraram de diferente. Alessando, um dos alunos da equipe, disse ser importante completar a tabela. Então, sugeri que ele continuasse nesse caminho. Mas, tal iniciativa parecia não ser um consenso dentro da equipe.

Algumas das primeiras observações de Walter, o qual já havia escrito uma página de observações sobre a tabela, comentou que os números da vertical vezes os

números da horizontal *dá* os números da tabela. Perguntei se havia mais algum detalhe que eles perceberam, quando observaram somente as linhas, ou somente as colunas.

Walter: – Professor, são múltiplos!

Fernando: – Isso! Então, vá explicando. O que mais que tem, Marcos? E o que você percebeu?

Marcos: – Uma tabela que representa a tabuada!

Fernando: – Só?

Marcos: – Não. Tem mais coisa...

Fernando: – Então, vai lá! Tem tempo ainda!

A divisão de tarefas da dupla Andréia e Thais me chamou a atenção. Fez-me pensar como se dá a constituição das duplas, como os alunos buscam e se identificam com seus pares. Thais anotava aquilo que Andréia percebia na tabela. E, a meu ver, não era porque Andréia tivesse o domínio de um conteúdo que Thais não tinha. Parece-me que a divisão de tarefas ocorreu por conta da valorização da caligrafia mais bonita de Thais. Andréia ditava, para que Thais registrasse na folha a ser entregue. Essa era a primeira versão do relatório da dupla. O que era percebido pelas alunas era registrado, sem a preocupação de validar as suas primeiras impressões. Que letramento passa por uma situação como essa? A visão e a valorização dos alunos passam por uma escolha da beleza e da organização externa, sem dar muita atenção aos aspectos que deveriam ser valorizados, tais como a capacidade dos integrantes das duplas interagirem e produzirem matemática?

Apesar da explicação inicial de Ana Luisa, a dupla Vinicius e Cesar estava com dificuldade em localizar o produto na tabela. Durante a atividade, questionei onde estava localizado o resultado de 6×8 . Para eles, não havia o produto na tabela, sendo necessário completá-la. Invertendo a ordem dos fatores, perguntei-lhes o resultado de 8×6 . Com muito custo, responderam 48. Eles não haviam percebido, ainda, a relação entre as linhas e as colunas, e, nem mesmo, a propriedade comutativa da multiplicação. Na verdade, percebi que muitos alunos não sabiam o sentido das palavras horizontal e vertical.

A dupla Matheus e Matheus produziu um relatório com observações sobre a ordem dos números (decrecente), falaram sobre números pares e ímpares, além de

comentarem a existência de múltiplos. Incentivando-os a continuar e a aprofundar na investigação, pedi-lhes que dissessem quais seriam esses múltiplos. Porém, seu registro escrito não foi além daquilo que haviam encontrado até então.

Outra observação muito interessante, realizada por Bruna e Tatiane, foi olhar para os números presentes na diagonal. Elas comentaram sobre isso durante a atividade investigativa, mas não registraram em seu relatório que os valores somados aos números presentes na diagonal são sempre ímpares. Além disso, não perceberam que os números da diagonal eram quadrados perfeitos.



Figura 2 - Interpretação realizada por Bruna e Tatiane

Alessandra e Cléo perguntaram à Ana Luisa como era para realizar o desenvolvimento da atividade. Ela, simplesmente disse: “*Escreva!*” Em princípio, deu-me a impressão de que ela, ao invés de trazer as alunas para participar da atividade investigativa, estivesse provocando o contrário, ao não colaborar com uma explicação. Tenho certeza de que essa não era a sua intenção e considero ter sido importante essa resposta, pois evidenciou a sua preocupação para com que os alunos registrassem suas descobertas por escrito, algo que sempre tenho enfatizado em aulas exploratório-investigativas.

Sob o ponto de vista do letramento, posso dizer que o escrever nas aulas de Matemática não é característica comum. Há uma cultura de que uma boa aula de Matemática precisa ter muitas “contas”, e, durante aquele ano letivo, eu já havia solicitado atividades que requeriam a resolução comentada dos alunos, mas não em uma dinâmica de exploração e investigação. A partir do término da primeira tarefa, notei mudanças, por parte dos alunos, na prática de ler e escrever suas interpretações e

significações. E percebi que essa prática letrada favoreceu o desenvolvimento da sua autonomia e o seu engajamento.

Sobre a escrita matemática, Carrasco (1999, p. 199) diz que

participar do processo de criação não deve ser exclusividade de mentes especiais, privilegiadas, que retêm conhecimentos especializados em determinada área. O encanto e o prazer resultantes desse processo devem ser experienciados por todos os indivíduos.

Nesse sentido, essa oportunidade de escrita dos alunos em aulas de Matemática pode ser única e especial. Aliás, esse processo de ensinar e aprender Matemática, a partir das práticas de leitura e escrita, também foi formativo para mim e, certamente, para Ana Luisa, pois era a primeira vez que experienciava esse tipo de atividade.

Acredito que uma das contribuições de Barton e Hamilton a respeito da teoria do letramento seja a distinção entre um evento letrado e uma prática letrada. Parece-me que, ao falar de eventos, referem-se a “atividades nas quais o letramento cumpre seu papel.” (p. 113). Em princípio, poderíamos pensar em atividades que tenham textos escritos. Porém, para os autores, os eventos não seriam restritos apenas ao que é representado por escrito. Por exemplo: produções em que outros sentidos são mobilizados, as quais utilizam representações simbólicas diversas, como um filme, uma música ou logotipos referentes a marcas de roupas ou de um supermercado.

As práticas letradas seriam mais amplas, principalmente pelo seu caráter complexo, difíceis de serem definidas. Mesmo assim, os autores trazem uma concepção: “são as formas culturais generalizadas de uso da língua escrita, nas quais as pessoas encontram inspiração para suas vidas” [tradução minha] (p. 112).

As práticas letradas seriam tão *fluidas* e *dinâmicas* quanto as mudanças pelas quais passam os grupos culturais (p. 120). Mas, ao pensarmos na escola como sendo uma dessas comunidades, onde também há um tipo de letramento, um letramento escolar (identificado com o modelo autônomo), por que na escola esse letramento pouco tem se alterado ao longo do tempo?

Poderia, para o presente estudo, estabelecer uma relação entre a teoria do letramento e as investigações matemáticas em sala de aula. O evento letrado seria a

aula exploratório-investigativa, a situação na qual o letramento ocorre, e as práticas letradas seriam diversas. Desde o momento em que os alunos estão em atividade, observando, levantando conjecturas, validando-as ou refutando-as, práticas comuns e que caracterizam essa comunidade, uma *comunidade de aprendizagem*, são algumas das práticas letradas presentes no evento “Aula Exploratório-Investigativa”.

Sendo as práticas letradas dinâmicas e fluidas e, segundo Barton e Hamilton (2004), há *literacidades*, e aqui não caberia uma discussão acerca dos vários letramentos. Voltemos, então, à narrativa da atividade exploratório-investigativa.

Continuando o auxílio às duplas, percebi que um tipo de cultura de trabalho em grupo ainda persiste: um aluno resolve e os outros copiam a resposta (ou nem isso). No caso do grupo de Joaquim, Diogo e Lucas Daniel, isso ocorreu, pois Lucas não se engajou na atividade conjunta com Joaquim e Diogo.

Em outra dupla, ao ser chamado pelo aluno Carlos Caldeira, aluno que terá neste trabalho algumas linhas a ele reservadas, ele me disse não ter entendido nada. Eu o questionei por que não perguntara à Ana Luisa, que estava próxima da dupla, e, segundo ele, mesmo com a explicação da auxiliar (estagiária), não entendera nada. Solicitei, então, que olhasse para a tabela, mas que olhasse observando, “*olhe com atenção, veja o que você percebe na tabela. A tabela tem linhas, tem colunas, diagonal...*”

Carlos: – Ela não é quadrada.

Fernando: – Ok, não é quadrada. Então, com que ela parece? Que formato ela tem?

Carlos: – Uma escadinha deitada.

Fernando: – Então observe o que acontece nas linhas, nas colunas...

Carlos: – A tabuada!

Fernando: Que tabuada?

Carlos: – Do 9... Todas as tabuadas!

Fernando: – E nas colunas?

Carlos: – Do 9 ao 1.

Fernando: – Isso que você tá explicando, é o que eu quero que você escreva. Isso já é uma explicação do que você encontrou na tabela. Certo? Pode ser que, para você, isso não tenha nada a ver, mas você já está explicando. Douglas (parceiro de dupla), entendeu? Vá ajudando ele!

Com Giovani e Lucas R., ao lhes perguntar sobre a tabela e o que já haviam encontrado de interessante, disseram que era uma tabuada. Questionei: “*aí tem um*

monte de números, onde tem tabuada? Deem um exemplo”. Eles mostraram: “7 x 4 dá 28.”

Fernando: – Ah, tá. Então, você encontra o resultado da tabuada de que jeito?

Giovani: – *Somando* [sic] o número dessa coluna aqui [indicando os valores que constam na primeira coluna] com os números daqui [indicando a primeira linha da tabela]

Fernando: – Hum... com a linha. Agora, uma coisa que você pode escrever para explicar para mim: observe o que acontece na primeira linha, o que acontece na segunda linha, olhe com atenção. Não é só olhar assim, *bater o olho*, tenta explicar o que está acontecendo na 1ª linha, na 2ª, na 1ª coluna, na 2ª coluna, na 3ª coluna... Certo? Isso é importante porque fica mais fácil para a compreensão da tarefa. Tudo isso que você perceber, você escreve, da mesma forma que você explicou para mim o resultado da tabuada, é importante você explicar também. Está bem? Tudo bem, Lucas?

Nesse diálogo, é interessante ressaltar a importância do uso de nomenclatura para as operações matemáticas. Giovani – como outros alunos também disseram durante as aulas – utiliza a expressão soma para indicar qualquer operação, e não apenas para a operação de adição. Quando diz *somando os números da coluna com os da linha*, refere-se à multiplicação dos dois números. Alguns alunos usam a expressão somar para indicar qualquer operação matemática, inclusive para a subtração.

Ao me aproximar de Alessandra e Cléo, perguntei-lhes se já tinham terminado o relatório.

Alessandra: – O que é isso?

Fernando: – O trabalho que vocês vão me entregar.

Alessandra: Professor, não consigo!

Fernando: – Por quê?

Alessandra: – Não consigo...

Entendi que Alessandra não conseguia escrever as observações que as duas tinham encontrado. Mas, para a sua parceira Cléo, Alessandra estava falando muita *baboseira*. Ressaltei a importância das duas trabalharem juntas, solicitando a participação de ambas. Quando lhes perguntei o que poderiam analisar na tabela, observando as linhas, as colunas e as diagonais, elas questionaram qual era a linha e qual era a coluna.

Expliquei-lhes, a partir da própria tabela, relacionando a ideia de coluna à posição vertical e de linha à posição horizontal. Depois que elas perceberam qual seria a diagonal, começamos a buscar os produtos de algumas multiplicações e as tabuadas, como elas mesmas assim se referiam. A partir da tabuada do 5, acompanharam a linha até chegar a 5×5 . Antes mesmo de perguntar-lhes qual seria o resultado de 5×6 , elas buscaram uma forma de continuar a sequência, sem a necessidade de completar a tabela: uma forma em “L” ao contrário.

					5
					45
					40
					35
					30
5	5	10	15	20	25

Figura 3 - A continuação da tabuada do 5, em "L" ao contrário

Para elas, quando me apresentaram algo e obtiveram apoio, incentivando-as a continuar a investigação, pareceu-me que, a partir daquele momento, elas iniciaram o trabalho, ficando motivadas e animadas a continuar.

Sem dúvida, a mediação do professor é de fundamental importância em eventos de letramento escolar. Em aulas exploratório-investigativas, sem a mediação do professor, ou de outro adulto, ou ainda, de um colega da equipe, muito pouco seria produzido pelos alunos, principalmente na iniciação a uma prática letrada em Matemática.

6.4 Socializando os primeiros resultados

Nas páginas anteriores, narrei parte da produção dos alunos e o modo como eles reagiram ao iniciarem um trabalho de exploração e investigação matemática, mediada pela escrita. A partir de uma conversa com Ana Luisa e da análise dos relatórios produzidos pelas duplas, percebi que foram poucas as duplas que, de fato, trouxeram

representações matemáticas, por mais simples que fossem. Boa parte das duplas registrou que a tabela era muito interessante, composta de linhas e colunas, que era crescente de 1 em 1 para os números da primeira linha, e de 2 em 2, para os da segunda linha, e assim por diante.

Independentemente disso, eu e Ana Luisa faríamos a socialização dos resultados, procurando dar oportunidade de participação – e, portanto, de aprendizagem (WENGER, 2001) – aos alunos que não conseguiram produzir durante a atividade em grupo. E eu tentei me controlar para não explicar do “meu jeito”... Em face disso e tendo como propósito instituir uma prática de letramento matemático – e principalmente algébrico –, optei por tomar como ponto de partida aquilo que eles conseguiram encontrar e representar no trabalho em pequenos grupos.

O primeiro questionamento realizado foi a necessidade ou não de completar a tabela.

Fernando: – Pessoal, a Thais está fazendo a observação de que a tabela está incompleta. O que vocês acham? Todo mundo concorda?

Alunos: – Sim.

Fernando: – Está faltando algum número aqui? Sim ou não?

Aluno 1: – Sim!

Outros alunos: – Não está!

Fernando: – Ah! Não está? Um [aluno] acha que está faltando e o outro diz que não está. Vejam só, eu preciso completar a tabela para saber todos os resultados da tabuada? Sim ou não?

Alunos: – Não!

Fernando: – Então, vou fazer uma situação. Eu pergunto pra vocês, quanto que é 7×9 , olhando na tabela?

Aluno 2: – 54.

Fernando: – Olhando na tabela... vamos olhar para a tabela...

Aluno 1: – Professor, tá faltando um pedaço!

Fernando: – Ah, tá faltando um pedaço. Então tá ... Por exemplo, olhe nessa linha aqui, do 7. se eu procurar, 7×9 , dá para descobrir o valor que está aqui? [a tabela termina antes de chegar no 63]

Walter: – 63!

Fernando: – Com essa regra dá para descobrir o valor que está aqui [eu, apontando para a tabela]?

Alunos: – Não!

Walter: – Tem um jeito!

Fernando: – Qual é, Walter, o outro jeito?

Walter: – Pega o outro 7 [referindo-se ao número 7 que se encontra na parte superior da tabela].

Fernando: – Ah, então começo por esse 7 primeiro... Legal!

...

Fernando: – Ah, então se eu quiser descobrir o resultado de 5×7 na tabela, o que acontece? ...

Aluno 3: – Não tem o valor.

Aluno 4: – Aí mesmo professor, dá sim!
Fernando: – Então, podemos dizer que 7×9 é igual a ...
Alunos: – 9×7 !
Fernando: – E 5×7 ?
Alunos: – 7×5 !
Fernando: – E agora, será que eu preciso da tabela completa?
Alunos: [em coro] – Não!

Notemos que o fato de completar ou não a tabela pode ser justificado pela compreensão e interpretação que o aluno tenha a respeito da comutatividade na multiplicação. Fica evidente, também, que alguns alunos ainda não dominam a tabuada. Uma questão, entretanto, surgiu após a análise desse episódio: será que, ao fim desse diálogo, todos os alunos entenderam, de fato, o que seria a ideia da comutatividade, presente na tabela? Seria importante que os alunos soubessem, antes, as propriedades comutativa, associativa, distributiva e elemento neutro, para, então, obterem melhor desempenho em atividades como essa? Ou a problematização e a sistematização dessas propriedades poderiam ocorrer no próprio momento e contexto em que elas emergem durante a atividade matemática?

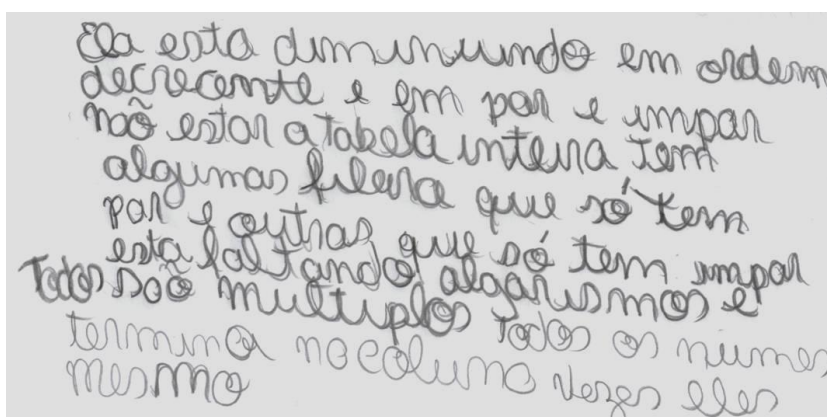
Quando Walter diz “*haver outro modo*”, que é só “*pegar o outro 7*”, demonstra compreender o funcionamento da tabela. Em seu relatório, escreveu que “*completamos [ele e seu parceiro] a tabela e vimos que um lado é espelho do outro*”. E eu acho que é por isso que Ana Luisa não completou a tabela inteira. Eu não havia trabalhado com os alunos a noção de simetria. Entretanto, sem ter desenvolvido tal conteúdo, Walter, à sua maneira, estabeleceu uma relação interessante: não haveria a necessidade de completar a tabela, pois a parte a ser completada é idêntica à presente na tabela. Penso que, pelo menos, podemos afirmar que os alunos apresentaram alguns indícios de pensamento algébrico, como a percepção de regularidades e de estrutura. Além disso, a apropriação dessas percepções aconteceu mediante um processo de negociação de significados.

Ao concluir a análise desse episódio, percebo agora – após minha reflexão sobre a prática pedagógica desenvolvida – que eu, enquanto professor mediador dessa prática, perdi a oportunidade de problematizar e sistematizar uma propriedade importante da Álgebra – a comutatividade da multiplicação –, no momento em que ela

se fazia relevante. Acredito que não havia espaço para problematizar novamente essa questão.

Outras observações e interpretações também vieram à tona durante o processo de socialização. A dupla Matheus e Matheus disse que os números que estão no fim de cada coluna (isto é, encontram-se na diagonal) são resultados da multiplicação de um número por ele mesmo. Quando apresentaram tal conclusão, alguns alunos não tinham dado conta de que, ao fim de cada coluna, os números tinham quadrados perfeitos.

Com alguma dificuldade de organizar por escrito, essa dupla trouxe em seu relatório:



Esta está diminuído em ordem
decrecente e em par e impar
não está a tabela inteira tem
algumas linhas que só tem
par e outras que só tem impar
esta faltando alguns números e
tudo são múltiplos todos os números
terminam na mesma coluna vezes eles

Figura 4 - Escrita da dupla Matheus e Matheus

Desse episódio, vale lembrar uma relação que o aluno Tomas estabeleceu com os números quadrados perfeitos: “Professor, isso aí não é o número da raiz quadrada?” (transcrição da socialização, dia 23/10/08).

Essa relação foi feita por ele apenas naquele momento. Em seu relatório, não há nada registrado sobre isso, e nem mesmo nas conversas que tivemos durante a atividade investigativa. Cabe destacar que o tema da radiciação não foi por mim desenvolvido durante o ano letivo, nem mesmo comentei sobre ele durante a aula investigativa. Seriam reminiscências do que Tomas aprendera na 5ª série?

Poderia ter sido explorado o próprio conceito de raiz quadrada, relacionado à área de um quadrado. Naquele momento, ao dar relevância à discussão, entraríamos em um assunto que os alunos não tinham visto: a área. O que fazer? Acabei por não comentar o assunto, prevalecendo naquele momento o pesquisador, o qual estava

buscando indícios que denotassem características do pensamento algébrico em construção ou desenvolvimento dos alunos (e, até ali, estava indo bem), e o professor ficou em segundo plano...

Penso que esse seja um dos dilemas do professor que investiga a própria prática. A relação e o conflito que são construídos durante o processo de investigação provocam angústias e dúvidas, tendo em vista a minha responsabilidade em garantir àqueles alunos um ambiente favorável à aprendizagem.

Essa intervenção de Tomas nos surpreendeu e nos faz perguntar: por que ele não registrou em seu relatório essa relação? Uma hipótese levantada seria a da facilidade que ele tinha em comunicar-se oralmente, como outros colegas de classe também demonstraram. Essa facilidade, mais oral que escrita, pode também estar relacionada à sua prática social, em que o letramento escrito ainda é pouco exigido ou mobilizado. Daí a importância da escola no desenvolvimento da prática da escrita.

Parte da atividade exploratória foi realizada durante a socialização. Após sua intervenção, Walter parece descobrir mais alguma coisa na tabela:

Fernando: – Vamos retomar nosso trabalho. Essas anotações que estão aqui no quadro são alguns dos resultados que vocês descobriram, e podemos ver mais anotações. Quanto mais anotações a gente fizer, quanto mais a gente detalhar os resultados encontrados, melhor ficará o nosso trabalho. Quem mais gostaria de estar completando? De estar fazendo a observação... Quem?

Alunos: – Walter!

Fernando: – Walter? Pode falar, Walter! Todo mundo pode aprender um pouco com o colega

Walter: – Acrescentar o zero

Fernando: – Acrescentar o zero, onde?

Walter: – Na primeira linha.

Fernando: – Vocês estão ouvindo o que o colega está falando? Todo mundo entendeu o que é pra fazer, ou não? [conversa na sala de aula, após a vinda dos alunos do intervalo]

Alunos: – Não!

Fernando: – Vamos Cesar, é pra abrir o caderno, por favor!

Então, veja só qual é a ideia do colega. O que acontece se eu fizer isso daqui, colocar o zero aqui [na frente dos números da 1ª linha], que número eu encontro?

Um burburinho na classe...

Fernando: – Qual foi a ideia de colocar esse zero? O que você pensou aqui, Walter?

Tomas: – Professor, na minha opinião, se colocar o zero na 1ª linha, o resultado aparece da tabuada do 10: $9 \times 10 = 90$

Fernando: – Ah! Então, se eu pegar esse 8×10 (acrescentando o zero na frente do 1) tem 80. 7×10 , 70. 6×10 ...

Alunos: – Sessenta!

Fernando: – Então em todos esses aqui se eu completar com o zero,

Alunos: – Acrescenta o zero.

Fernando: – Mas será o que acontece na 2ª coluna. Por exemplo, $9 \times \dots 20$? bom eu sei que 9×2 dá...

Aluno: – 18.

Fernando: – Então, 9×20 dá quanto?

Alunos: – 180.

Fernando: – Então, se acrescenta o zero [no final de cada número da 1ª linha] o que acontece no fim?

Alunos: – Aumenta o zero [em cada um dos resultados].

Fernando: – Então, vamos anotar essa informação, que é bem legal! Então, olha só, outra informação: acrescentando um zero em cada um dos números da 1ª linha, também acrescenta o zero..., onde?

Alunos: – No resultado.

Com a intenção de não perder as informações obtidas pelos alunos e mostrando-lhes como seria um trabalho de investigação, o que seria relevante para se registrar no relatório, validar ou não uma conjectura, fui registrando as observações encontradas durante a atividade e a socialização.

Outras maneiras bem criativas de interpretar a tabela e justificar que não havia a necessidade de completá-la vêm da explicação dada pela dupla Alessandra e Cléo. Como as alunas estavam tímidas para expor suas ideias (e se exporem) aos seus colegas, procurei intervir de modo a explorar tal criatividade:

Fernando: – Bom, o que eu quero explicar pra vocês é o seguinte: tem um grupo que, sem completar a tabela, encontrou o resultado da tabuada inteira... Por exemplo, vou pegar a tabuada do 5. A tabuada do 5 tá aqui. Vou começar por esse número... 5×1 .

Alunos: – 5

Fernando: – Vezes 2?

Alunos: – 10.

Fernando: – Vezes 3.

Alunos: – 15.

Fernando: – Vezes 4.

Alunos: – 20.

Fernando: – Vezes 5.

Alunos: – 25.

Fernando: – Percebeu que chegou no 25 e acabaram os números da coluna?

Aluno 1: – Sim.

Fernando: – Como é que posso continuar o 5×6 agora? Aí Cléo, lembra o jeito que vocês marcaram, que fizemos juntos, aquela forma de vocês...

Cléo: – Não lembro. [talvez, que não estivesse lembrando mesmo...]

Fernando: – Alessandra?

Cesar: – Subindo!

Fernando: – Isso! Como fica mesmo? ... 5×6 ,
Cesar: – Está em cima.
Fernando: – 5×7 ?
Cesar: – Em cima.
Fernando: – 5×8 ?
Cesar: – Em cima
Fernando: – 5×9 ?
Cesar: – Em cima.
Fernando: – E 5×10 ?
Alunos: – É só por o zero!
Fernando: – Como vocês tinham falado, 50. Então, na verdade, ao invés de dizermos que está incompleta, ela pode fazer uma curva. A tabuada do 5 tá aqui [eu, apontando para a figura formada com os valores da tabuada do 5];
Aluno 1: – Professor, parece um L!
Aluno 2: – Um L ao contrário

Abaixo, temos parte do relatório da dupla Alessandra e Cléo.

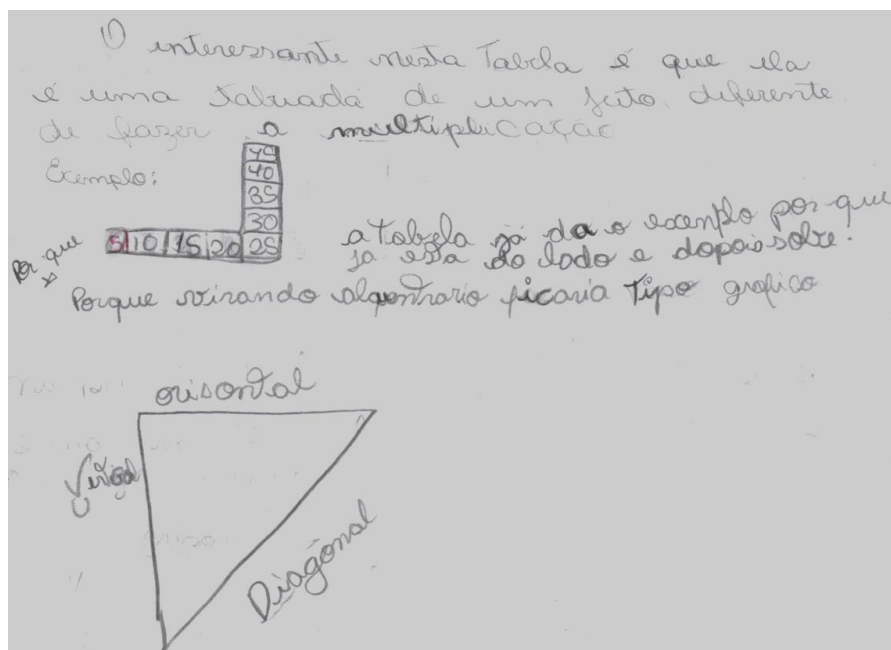


Figura 5 - Parte do relatório da dupla Alessandra e Cléo

É importante ressaltar que as alunas não se sentiram à vontade para explicar as suas descobertas, e tive a colaboração de um aluno de outra dupla, o qual não sabia do que se tratava a descoberta das colegas; durante a socialização, também percebeu a possibilidade de continuar a tabuada, colaborando na explicação da tabuada em “L ao contrário”.

A socialização favorece a negociação e a argumentação dos alunos. Para muitos alunos, não foi apenas um momento de socializar o que haviam encontrado de resultados. Estavam não somente aprendendo com outros colegas, mas também ensinando.

A mediação do professor foi fundamental, tanto no momento da socialização dos resultados quanto durante o desenvolvimento da atividade dos alunos. Vigostki (2000), quando apresenta a zona de desenvolvimento imediato¹⁶, faz a seguinte exemplificação:

Quando se define o nível de desenvolvimento atual, aplicam-se testes que exigem solução autônoma e só são exemplares em relação às funções já constituídas e maduras. Mas tentemos aplicar um novo procedimento metodológico. Suponhamos que nós definimos a idade mental de duas crianças que verificamos ser equivalente a oito anos. Se não nos detemos neste ponto, mas tentamos esclarecer como ambas as crianças resolvem testes destinados a crianças das idades seguintes – que elas não estão em condições de resolver sozinhas – e se as ajudamos com demonstrações, perguntas sugestivas, início de solução etc., verificamos que uma das crianças pode, com ajuda, em cooperação e por sugestão, resolver problemas elaborados para uma criança de doze anos, ao passo que a outra não consegue ir além da solução de problemas para crianças de nove anos. Essa discrepância entre a idade mental real ou nível de desempenho atual, que é definida com o auxílio dos problemas resolvidos com autonomia, e o nível que ela atinge ao resolver problemas sem autonomia, em colaboração com outra pessoa, determina a zona de desenvolvimento imediato da criança. (VIGOTSKI, 2000, p.327)

Sentindo a dificuldade dos alunos em registrar o que encontraram de interessante na tabela, procurei, durante a etapa final, registrar na lousa as conclusões obtidas pelas duplas. Pensei que, ao realizar esse procedimento, poderia aproximar mais os alunos de uma comunicação não apenas oral, mas também escrita. Além disso, acreditava que estaria, desse modo, encorajando os alunos para que também produzissem registros escritos em futuras atividades.

¹⁶ Na tradução realizada por Paulo Bezerra, 1ª edição, trata a zona de desenvolvimento proximal como sendo a zona de desenvolvimento imediato.

6.5 Quais foram as primeiras impressões dos alunos após uma aula “diferente”?

Ao fim da primeira socialização da tarefa 1, pedi para que os alunos se manifestassem sobre as aulas que tivemos, o que foi de diferente, se foi bom para eles e por quê.

Fernando: – O que vocês acharam das aulas que tivemos nessa última semana? Foram legais, diferentes ou não?

Aluno 1: – Eu achei bem legal!

Fernando: – Levante a mão quem quiser falar...

Aluno 2: – Foi interessante!

Fernando: – O que teve de interessante?

Aluno 3: – A câmera.

Fernando: – A câmera, a câmera, a câmera e a câmera?

Alunos: – Não, professor!

Fernando: – O que mais vocês acharam dessas aulas, gostaram dessa sala para trabalhar?

Aluno 4: – É muito melhor, tem mais espaço!

Fernando: – É, tem mais espaço, o ventilador funciona! ... O que mais? Eu gostaria de ouvir vocês... Vamos ouvir o Wellington.

Wellington: – O desenvolvimento dos alunos.

Fernando: – O que você achou, que os alunos produziram mais?

Wellington: – Ah! Eu acho que fez mais sim!

Aluno 5: – Professor, eu acho que lá em cima (na sala de aula normal) os alunos ficam mais na zoeira, aqui não, estão participando mais.

Segundo os próprios alunos, as aulas desenvolvidas nessa dinâmica foram positivas, chamaram a atenção pela presença da câmera, a qual causou algum estranhamento somente na primeira aula. Sentiram-se valorizados, afinal, aquelas aulas ocorreram por conta da participação deles. As questões sobre o espaço físico utilizado e a mudança de postura dos alunos foram por eles comentadas, tendo em vista a participação de muitos colegas que antes não se engajavam na resolução das tarefas propostas. Apesar de terem explorado uma tabela diferente, sem necessariamente envolver uma contextualização ou situação-problema, possibilitou-lhes atribuir sentidos e significados a operações matemáticas, como, por exemplo, a comutatividade da multiplicação.

Penso que, com atividades exploratório-investigativas, os alunos aprendem a trabalhar como comunidade de aprendizagem, através da produção/negociação

conjunta de significados. Não há dúvida de que, nesse tipo de prática de letramento, os alunos aprendem Matemática. Como diz Jean Lave (2001), em uma

teoria de aprendizagem situada em comunidade de prática (...) a aprendizagem é parte integrante da atividade no/com o mundo em todos os momentos. (Ou seja,) produzir aprendizagem não se constitui um problema. O que se aprende é sempre complexamente problemático (p. 20).

E esse é o meu desafio enquanto pesquisador: perceber e mostrar o que os alunos podem estar aprendendo conjuntamente e como, nesse processo, desenvolvem o seu letramento algébrico.

6.6 Que sentidos os alunos atribuem à Álgebra e às aulas exploratório-investigativas?

Logo após o término da socialização e sistematização da primeira tarefa e antes de iniciar o desenvolvimento da segunda tarefa, propomos – eu e Ana – duas questões para os alunos responderem da maneira que desejassem:

O que você entende por Álgebra?

O que você entende por aula investigativa?

Tínhamos a intenção de saber quais eram os sentidos atribuídos pelos alunos sobre o que seria Álgebra.

Das duas classes, num total de 45 alunos, 7 alunos responderam algo referente ao que seria Álgebra. Os demais, por mais de 20 minutos, diziam nunca ter ouvido falar sobre isso. Fico pensando na convivência que esses alunos têm com seus familiares e de que maneira discussões sobre a escola surgem no âmbito familiar. Gee (2004) comenta que os pais de classe média nos Estados Unidos costumam interagir com seus filhos, mesmo com aqueles em idade pré-escolar, de modo a proporcionar

experiências com a linguagem ou com a cultura letrada, experiência essa que, em famílias de classe pobre, são pouco frequentes. Um exemplo disso é o hábito de pais que contam histórias para as crianças antes de elas dormirem. Essas histórias são impregnadas de concepções e *estabelecem padrões de conduta que reaparecem nas vidas de crianças e adultos de classe média, na escola e em outras instituições*. (p. 44)

Signorini (2001, p. 68) trata esse processo como sendo de *continuidade e ruptura*, quando a criança é inserida no letramento escolar. Para as crianças brancas, filhas de pais escolarizados, que residem nas cidades e que pertencem às camadas média e alta da sociedade, esse processo é de continuidade, pois tiveram a exploração e a valorização da linguagem. Para as crianças excluídas, pobres e que residem nas periferias, o processo de ruptura inevitavelmente acontece, pois as práticas familiares, religiosas ou de outras comunidades de letramento, não seguem e nem se aproximam do letramento escolar padrão.

A seguir, apresento algumas significações prévias dos alunos sobre o que seria a Álgebra:

“Tem algo a ver com letra, mas nunca fiz essa aula.”
“Contas com letras no lugar de números.”
“Eu acho que é uma conta.”
“Eu não sei. Acho que é numero e letras misturados.”
“Exemplo: $10 + x - 50 \cdot x - 2 =$ no final desta conta o valor que está escondido no x vai aparecer.”
“ $x + 13 \cdot 4 =$. Muitas pessoas usam uma expressão numérica, pode fazer de outro jeito, no final da equação o x é descoberto, porque representa um número.”

Essas significações prévias provavelmente foram produzidas a partir de conversas com amigos ou irmãos mais velhos que já passaram pela prática escolar com a Álgebra. E, nesse sentido, é interessante observar que eles construíram socialmente uma imagem (ou representação social) da Álgebra como uma prática escolar que se aproxima das concepções *processológica* e *linguístico-estilística* de Álgebra ou *linguístico-pragmática de Educação Algébrica*, conforme caracterização feita por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993).

Sobre as aulas exploratório-investigativas, muitos alunos estabeleceram relações com as experiências que tiveram nas aulas anteriores, sem que eu tenha comentado sobre o assunto:

“Na aula passada, o professor passou alguns problemas que nós não sabíamos, mas ele fez isso para que nós pensamos e investigamos, ou tentamos fazer.”

“É uma aula que a gente investiga o que sabemos e o que não sabemos, como a aula da tabela.”

“Aulas que se faz em grupos”

“Uma aula investigativa foi que nem aquela tabela da tabuada para a gente procurar as pistas para poder chegar nas respostas. E as respostas estavam nas linhas verticais, horizontais e diagonal, mas a minha dupla Gabi demoramos muito pra descobrir. Eu acho que é isso uma investigação. Por exemplo: o meu pai é policial e quando alguma pessoa mata a outra, o meu pai investiga as pistas até chegar no assassino. E isso também na aula de matemática, quando o professor Fernando dá algum problema, a gente tem que ler e achar as pistas para poder chegar na resposta do problema.”

Alguns alunos representaram sua interpretação sobre o que seria uma aula investigativa desenhando:

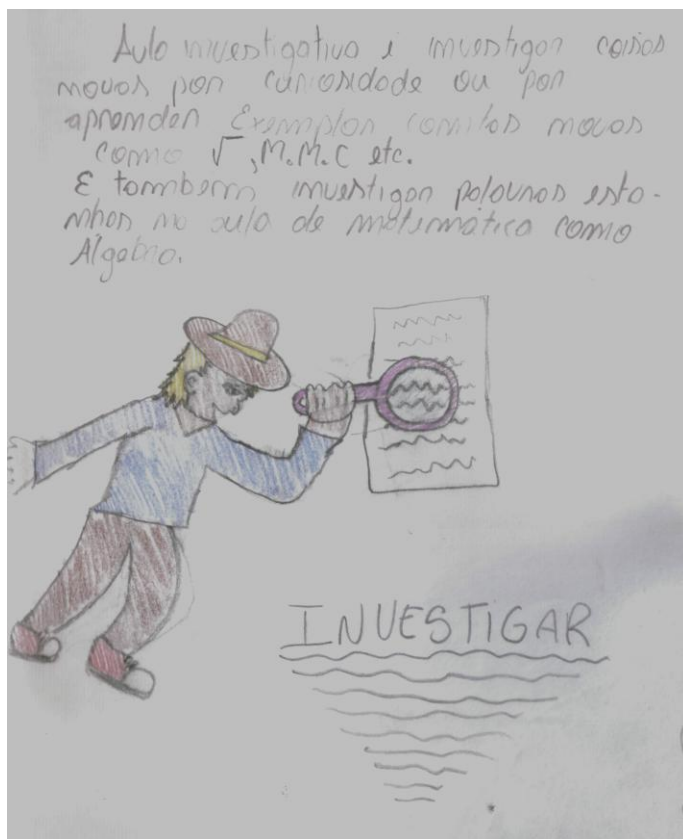


Figura 6 – Interpretação de Mário sobre uma aula investigativa¹⁷

É muito interessante observar como os alunos veem e entendem uma aula investigativa. As diferentes representações, seja pela escrita ou pelo desenho, são permeadas de sentidos e significados, que vão desde a prática escolar recente (primeira atividade decorrente da tarefa da tabela-tabuada), até a prática profissional de um policial (pai de uma aluna), quando esse precisa buscar as pistas para identificar o autor de um crime.

¹⁷ Transcrição: Aula investigativa é investigar coisas novas por curiosidade ou por aprender. Exemplos: contas novas como $\sqrt{}$, m.m.c. etc. E também investigar palavras estranhas na aula de Matemática como Álgebra.

6.7 A segunda tarefa proposta

A tarefa apresentada abaixo tem como objetivo contemplar uma das funções da Álgebra: a generalização. Com essa tarefa, esperava-se, também, que o aluno relacionasse a posição e a correspondente quantidade de quadrados, explorando, assim, a ideia de variável, percebendo regularidades ou permanências em situações que variam.

Tarefa Investigativa 2: A Investigação de Sequências e a Busca por Padrões

Instruções

As equipes serão constituídas por três ou quatro alunos (as), de tal forma que cada um de seus integrantes tenha as funções a seguir. Escolham:

- Um Coordenador: responsável pela organização do trabalho e pela resolução de possíveis conflitos;
- Um Redator: responsável pela redação final do registro a ser entregue.
- Dois Relatores: responsáveis pela apresentação (para toda a classe) dos resultados encontrados pela equipe.

Nas equipes em que tiver três integrantes, **não** haverá coordenador. Caso um dos membros da equipe falte, o coordenador ficará responsável pela apresentação ou pela redação do relatório.

Apesar da divisão de funções, **todos** deverão participar das etapas de produção do trabalho. Por isso, é importante que anotem as informações, raciocínios e tentativas de resolução com detalhes, **no caderno**, para que, no fim, seja passado a limpo. Além disso, o capricho e os cuidados em sua versão final também são critérios de avaliação.

A Tarefa Proposta

Hoje, trataremos, nessa tarefa, de sequências de figuras e regularidades. Convido vocês a investigá-la e a desvendá-la!

Observem a sequência abaixo:



(1ª) (2ª)

Sabendo que a 1ª posição possui 1 quadradinho e a 2ª posição possui 3 quadradinhos:

- Continuem a sequência a seguir, desenhando até a 5ª posição, de tal forma que se mantenha um padrão ou regularidade.
- Sabendo que não há uma única forma de realizar a construção dessa sequência, criem outras sequências que tenham a mesma descrição nas duas

primeiras posições (*1ª posição possui 1 quadradinho e a 2ª posição possui 3 quadradinhos*), mas que o formato e/ou a quantidade de quadradinhos para as outras posições seja diferente. Assim, mudar o formato da 2ª posição...

c) Escolham uma das sequências obtidas no item anterior e encontrem o número de quadradinhos na 10ª posição. E a 25ª posição, quantos terão? Justifiquem sua resposta.

d) Procurem uma maneira de representar a 100ª posição e respondam: quantos quadradinhos terá a 100ª posição?

e) Digam quantos quadradinhos teria uma posição *qualquer* da sequência. Apresentem uma regra, padrão ou expressão matemática, explicando como a equipe obteve essa resposta.

Considero importante essa divisão de papéis para o trabalho em grupo, principalmente por ser a primeira experiência que esses alunos teriam com *investigações matemáticas* (PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, 2003) e por considerar um modo de promover a sua efetiva participação, tentando engajar todos os membros do grupo no desenvolvimento da atividade. Essa dinâmica, por mim proposta, é baseada em Castro (2003), que estabeleceu, em seu trabalho com investigações matemáticas, essa divisão de tarefas dentro de cada equipe. Caso alguém não cumprisse a sua parte no trabalho, a equipe seria prejudicada. Apesar dessa proposta, alguns alunos, mesmo assim, como veremos mais adiante, não se engajaram nas atividades.

Acredito que essa seja uma das maneiras de contemplar a proposta de Educação Algébrica apresentada por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993).

6.8 Algumas interpretações dos alunos registradas em relatórios escritos

A seguir, são apresentadas algumas interpretações realizadas pelos alunos e extraídas dos relatórios por eles elaborados.

Quando foram questionados sobre o número de quadradinhos na 10ª posição, o Grupo 1, do 7º A, respondeu:

terão 19 quadradinhos na 10ª posição e na 25ª posição, 48 quadradinhos. Nós chegamos nesse resultado de 2 em 2, da 1ª posição até a 10ª posição e a 25ª posição. No item D: a 100ª posição pode ser representada por fileiras de 10, ou contar de 2 em 2 também, são 190 quadradinhos e também nós podemos

multiplicar 19×10 ; porque na 10ª posição, o resultado 19 quadradinhos e nós multiplicamos.

Esse grupo não apresentou uma sequência de figuras que pudesse favorecer a identificação da quantidade correta de quadrados. Além disso, não houve a preocupação em validar a quantidade de quadrados encontrada para a 100ª posição: 190. O grupo apresentou o resultado, argumentando que ele fora obtido a partir da constituição de 19 fileiras de 10 quadrados, cada uma.

A recursividade – *contando de dois em dois* – foi também uma característica marcante nas interpretações apresentadas pela maioria dos grupos. Embora tenham percebido certa regularidade (sequência aritmética de razão 2), interpretamos esse procedimento como um indício de um pensamento com características mais aritméticas que algébricas, conforme Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005).

Apenas dois grupos, cada um de uma classe diferente do 7º ano, não recorreram à recursividade, realizando interpretações com características mais algébricas.

O grupo 2, do 7º B, por exemplo, ao responder o item C, registrou:

A quantidade de quadradinhos está indo de 2 em 2. Na ordem dos números ímpares começando por 1, 3, 5, 7, 9 e etc. Para saber a 25ª posição, multiplica $25 \times 2 = 50$ e diminui 1, que dará 49, e pra saber a 10ª [posição] faz 10×2 que dá 20, tirando 1 dá 19.

Em relação aos itens D e E, o grupo 2 escreveu:

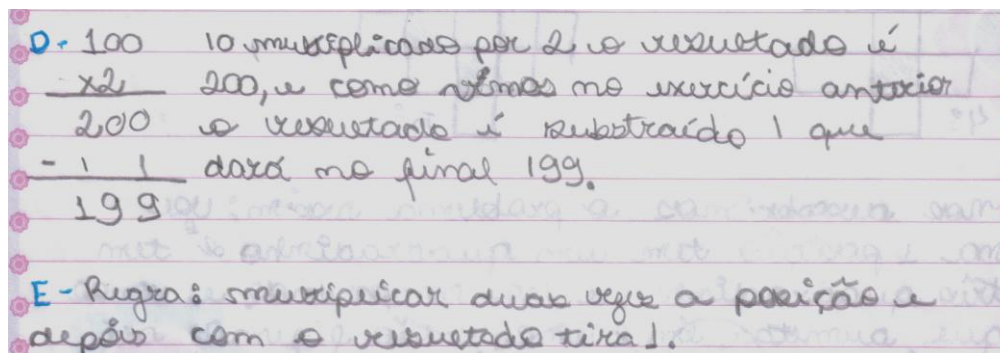


Figura 7 – Trecho de relatório do grupo 2, relativo à segunda tarefa (7º B)

Notemos que esse grupo apresentou uma regra genérica no item E, o que, apesar de não utilizar notação simbólica, denota indício de um *pensamento algébrico desenvolvido* (ibidem, 2005). Para chegar a uma expressão como a que foi apresentada, as alunas tiveram que observar o que ocorria em cada um dos cálculos realizados nos itens anteriores.

Um outro registro, semelhante ao apresentado anteriormente, foi iniciado pelo aluno Walter, do 7º A, após ter dado continuidade à resolução dessa tarefa em casa. Walter trouxe um relatório de quatro páginas, explicando como seria a maneira de se obter a quantidade de quadrados para uma posição qualquer. Vejamos, por exemplo, o que Walter escreveu para justificar por que a 10ª posição teria 19 quadrados:

$$\begin{array}{r}
 +10 \\
 -10 \\
 -20 \\
 +1 \\
 \hline
 19
 \end{array}$$

→ números de posição
 → resultados da conta
 → números de quadrados da (10ª) posição.

Figura 8 – Escrita do grupo de Walter

Depois desse exemplo, Walter concluiu que “*é só somar a posição mais ela mesma e tira um quadradinho do resultado*”. Em síntese, interpretamos que esse é mais um exemplo de generalização, utilizando uma linguagem retórica.

A última parte de seu relatório foi escrita em classe, juntamente com seus colegas de grupo. Os seus parceiros, entretanto, tiveram inicialmente dificuldades em entender o que ele havia feito. Pedi para que ele explicasse aos seus colegas o que havia descoberto e, percebendo a facilidade que ele teve nessa atividade, procurei incentivá-lo a continuar a investigação com a colaboração do grupo, tentando, agora, utilizar uma linguagem simbólica. Ao questionar “*Como seria isso?*”, deixei como tarefa para o que tentasse escrever essa generalização como uma fórmula.

A tentativa de usar as letras era de substituí-las por números. Eles escolheram as letras W, B e L, que eram as iniciais dos nomes dos integrantes do grupo 3. Mas,

como eu disse que as letras teriam qualquer valor, esses valores foram atribuídos arbitrariamente, conforme é apresentado na figura 9.

Handwritten mathematical work on lined paper. The left column shows two calculations: $W + W = 97$ and $L = 27 + L = 53$. The right column shows $B = 77 + B = 154$ and a handwritten note: "Por exemplo se $W+W=W.W$ e a mesma coisa de $27+27=154$."

Figura 9 – Trecho do relatório do grupo de Walter (I)

Inicialmente, quando escreveram $W+W$, deram como resposta W^2 . Com a intervenção de Ana Luisa, que procurou esclarecer o que seria o " W^2 " e o " $2.W$ ", chegaram à seguinte interpretação, ainda assim vinculando valores à letra W :

Handwritten note on lined paper: "Por exemplo se $W+W=2W$ e a mesma coisa de $27+27=154$ ".

Figura 10 – Trecho do relatório do grupo de Walter (II)

Apesar das interpretações dos alunos sobre o uso da letra serem pessoais, quando eles relacionam as letras a serem utilizadas com as iniciais dos nomes dos integrantes da equipe, estavam iniciando uma prática de letramento algébrico, na busca de aproximação de sua linguagem ao modo sugerido pela auxiliar de pesquisa Ana Luisa. Esse episódio também evidencia que os participantes, alunos e auxiliar, estavam entrando em uma zona proximal de desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica, sendo a auxiliar fundamental nesse processo, dando condições para os alunos prosseguirem na iniciação da representação algébrica da atividade.

6.9 Sistematizando a segunda atividade

A seguir, foi realizada a apresentação oral dos relatórios produzidos pelos grupos, que foi semelhante à realizada na primeira atividade, tendo como diferencial a ordenação dos grupos a partir da complexidade das interpretações e descobertas realizadas por eles. Além disso, os alunos utilizaram cartazes para explicitar, aos demais grupos, as interpretações realizadas.

Fiz uma retomada daquilo que os alunos haviam apresentado, tentando sistematizar algumas relações importantes. Expliquei aos alunos que seria importante pensarmos em obter uma maneira mais simples de encontrar a quantidade de quadrados de uma figura, a partir de uma posição qualquer. Afinal, a maioria das equipes encontrou o valor 199 a partir da contagem recursiva de dois em dois.

Eu tinha o propósito de, durante a sistematização, rever aquilo que os alunos apresentaram e, a partir da sua própria escrita e fala, introduzir a linguagem simbólica da Álgebra e construir expressões algébricas que representassem os modelos por eles elaborados. Para isso, selecionei algumas das explicações dadas pelos grupos do 7º A que não recorreram à recursividade para encontrar a quantidade de quadrados, com a ideia de compará-las no fim da sistematização. Apresentei, a seguir, parte da sistematização realizada em uma das classes e que consiste na exploração daquilo que convençionei chamar de Regra 1, Regra 2 e Regra 2.1.

A Regra 1 foi obtida por um trio de garotas, a partir do desenho abaixo.

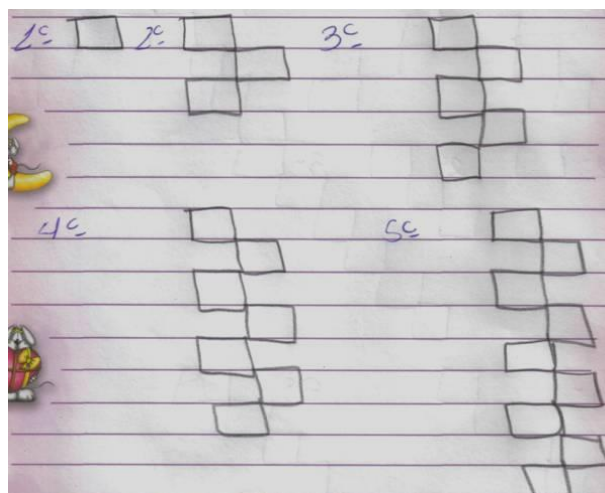


Figura 11 – Figura elaborada por Andresa, Cristiane e Bruna – Regra 1

As alunas notaram que, a partir da 2ª posição, pode-se observar duas colunas. Na 1ª coluna, coincidem a quantidade de quadrados e a posição da figura, e, na 2ª coluna, encontra-se o valor do antecessor da posição. Na verdade, essa relação também é válida na 1ª posição ($1 = 1 + 0$).

No quadro abaixo, registrei a quantidade de quadrados das cinco primeiras posições e da décima posição, buscando identificar o padrão encontrado pelas alunas.

POSIÇÃO	QUANTIDADE DE QUADRADOS
1ª	1
2ª	$3 = 2 + 1$
3ª	$5 = 3 + 2$
4ª	$7 = 4 + 3$
5ª	$9 = 5 + 4$
10ª	$19 = 10 + 9$

Tabela 2 – Tabela elaborada por Fernando, baseada na resolução da Regra 1

Com isso, pareceu-me que, para alguns alunos que não haviam entendido a explicação das colegas durante a socialização, tenha ficado mais claro após apresentar, passo a passo, a soma do número da posição pelo número anterior. Eu não havia usado o termo antecessor, mas quando falei em número anterior, um aluno interveio e disse que era o seu antecessor. Com a colaboração da classe, pedi para

que eles dissessem qual seria a regra que leva a obter a quantidade de quadrados para uma posição qualquer: “*A soma da posição com o seu antecessor mostra a quantidade de quadrados*”. A regra foi anotada no quadro.

Em seguida, foram apresentadas as regras 2 e 2.1, também registradas no quadro, com a participação dos alunos. Essas regras foram apresentadas por Walter, o aluno que havia realizado o desenvolvimento da tarefa em casa. A regra 2 refere-se àquela que foi apresentada por ele durante a apresentação: “*Somar o número da posição mais ele mesmo e tira 1 quadradinho do resultado*”. Como ele havia obtido uma outra regra em seu relatório, considerei importante apresentá-la aos demais alunos. Essa regra foi chamada de 2.1: “*Dobrando a posição e retira 1.*”

Após anotar as três regras, expliquei como seria a próxima etapa da sistematização. Disse que eles estavam em contato com uma tarefa que contemplava a Álgebra e que estávamos fazendo Álgebra. Eu havia solicitado, no último item da segunda tarefa, que encontrassem *uma regra, um padrão ou expressão matemática*, que relacionasse a quantidade de quadrados e a posição da sequência.

Faremos, então, um trabalho com a Álgebra, de regularidades, padrões, que vocês perceberam e construíram, e vocês escreverão fórmulas ou expressões matemáticas... Então, a gente vai tentar escrever essas regras, que foram escritas na lousa, por uma lei de formação. O que é uma lei de formação? Uma forma de abreviar... Ao invés de escrever de dois em dois, a gente vai encontrar um jeito mais fácil de descobrir quais são os valores [as quantidades dos quadrados] relacionando à posição que a figura ocupa (Transcrição da sistematização. 10/11/2008).

Como teríamos que iniciar o uso de letras para a constituição das fórmulas, perguntei aos alunos qual letra poderia ser usada para expressar a posição. Alguns alunos disseram “W”, pois se tratava da inicial de seus nomes. De uma maneira que todos entendessem o significado da letra, sugeri que usássemos a letra P, de posição. Bem, usando a letra P para a posição, logo os alunos disseram que poderia usar Q para quadrados, ou quantidade de quadrados. “*Assim, qual seria a fórmula?*”, alguns alunos disseram que o antecessor de P seria “O”, a letra que antecede P no alfabeto.

Questionei os alunos como usar a posição que a letra ocupa no alfabeto, caso se desejasse descobrir a 100ª posição. Eles perceberam que não haveria como usar a

posição. Para isso, enfatizei que a letra P não teria o valor da sua posição no alfabeto, e, sim, teria qualquer valor referente à posição na sequência.

Fernando: – Vamos supor que a posição vale 100, isso representa quantos quadradinhos? Então, qual seria o antecessor?

Aluno: – A letra O.

Fernando: – Veja, para evitar que a gente use várias letras diferentes, vamos tentar escrever, usando a mesma letra, P. Então, pessoal. Vamos lembrar, o antecessor, não é um a menos? O anterior? Então, pensando nos números, poderíamos escrever como?

Para confirmar se era mesmo essa interpretação que o aluno estava tendo, retornei à tabela da regra 1 e pedi para que analisassem novamente a 1ª posição, a 2ª e assim por diante. Novamente, o mesmo aluno diz: “C, C + B. D, D + C.” Como estávamos nos referindo ao antecessor, ele tomou a letra B como o antecessor de C, que se referia à 3ª posição. O mesmo ele fez com a letra D e o seu antecessor C.

Retomando a tabela constituída, que relacionava a soma da posição com o seu antecessor, foi possível chegarmos à expressão $Q = P + P-1$ [ou $Q = P + (P-1)$]. Essa expressão foi escrita por mim no quadro, com a intervenção e a participação da classe. A sua escrita foi feita ao fim da aula, sem ter sido possível discuti-la de maneira analítica. A conclusão da sistematização seria realizada na aula seguinte.

No 7º B, o trabalho foi semelhante ao realizado no 7º A, obtendo duas regras diferentes: Regra 1 – *O dobro da posição menos 1* – e Regra 2 – *Você pega a posição , qualquer e soma por ela mesma. E tira um número do resultado.*

Visando relacionar as duas regras obtidas, questionei os alunos: “*Pessoal, o que essas duas regras têm de semelhante? Vamos analisá-las!*”

Tomando a regra 2 como exemplo, de que “*outra maneira podemos representar $5 + 5$?*” Os alunos pareceram não entender muito bem. Dei um outro exemplo: “*se fosse $13+13+13$, como poderíamos simplificar a expressão?*”

Alguns notaram que poderiam usar a multiplicação como forma de abreviar a escrita da adição. “*Então, classe, qual é o significado de $13+13+13+13$?*” E os alunos: “4.13.”

Retomamos os valores que constituem a tabela da regra 2, buscando representar a soma de parcelas iguais na forma de multiplicação:

POSIÇÃO	QUANTIDADE DE QUADRADOS	Representação com o uso da multiplicação
1 ^a	1	$2 \cdot 1 - 1$
2 ^a	$3 = 2 + 2 - 1$	$2 \cdot 2 - 1$
3 ^a	$5 = 3 + 3 - 1$	$2 \cdot 3 - 1$
4 ^a	$7 = 4 + 4 - 1$	$2 \cdot 4 - 1$
5 ^a	$9 = 5 + 5 - 1$	$2 \cdot 5 - 1$
10 ^a	$19 = 10 + 10 - 1$	$2 \cdot 10 - 1$

Tabela 3 – Tabela constituída por Fernando para comparar as Regras 1 e 2.1

Quando foi escrito dessa forma, os alunos perceberam que foi obtida a regra 1. Entretanto, não havíamos trabalhado com o uso da letra. Após essa escrita, perguntei a eles: “*quanto vale $P + P$?*” Logo, alguns responderam: “ *$2P$ ou $2 \cdot P$.*”

Encontrei a chance de trabalhar com os alunos a questão da soma de monômios. Quando questionados como representar $13+13+13+13$, perguntei também de como seria a soma de $P + P + P + P + P$:

Fernando: – Trocou o valor, a letra, pelo valor escolhido. Vamos supor na posição tal... Tudo bem? Pessoal, é normal terem dúvida no início, é a primeira vez que vocês estão fazendo cálculos, contas com letras e é normal. Mas, o que eu queria que vocês percebessem, seria isso. Vamos tentar só fazer um exercício, olha! Se eu falar p mais p , eu teria uma regra... como 5 mais 5, que pode ser representado como $2 \cdot 5$ [duas vezes cinco], e $13+13+13+13$ é o mesmo que $4 \cdot 13$ [quatro vezes 13], é uma forma abreviada de escrever a adição, o que seria somar, por exemplo, assim, a posição.. somar a posição... assim, qual seria o resultado?

Aluno: – Cada um vale 10.

Fernando: – Eu não dei valor para o p . Eu fiz $p + p + p + p$.

Aluno: – Dá Q!

Fernando: – Isso, mas quantas vezes que a gente tem que somar?

Aluno: – Cinco vezes p .

Fernando: – Será que é cinco vezes p ?

Aluno: – É.

Fernando: – S e no lugar do p fosse número? Vamos supor que p vale... alguém falou 10. Se for 10, 10...mais 10...mais 10...

Aluno: – 50!

Fernando: Mais 10...mais 10. 10 mais 10 mais 10 mais 10 mais 10, dá quanto?

Aluno: – 50!

Fernando: – Mas, se eu não quiser descobrir o resultado, eu quero saber na forma de multiplicação, como seria, como escreveria na forma de multiplicação, abreviando essa escrita? O 10 apareceu quantas vezes? Quantas parcelas?

Márcia: – 5 vezes 10.

Fernando: – Cinco...vezes..10. e se no lugar do 10 for 20?

Alunos: – Cinco vezes 20.

Fernando: – 5 vezes 20. E se no lugar do número fosse uma letra? $p+p+p...$

Aluno: – Vai ser 5 vezes p .

Cabe destacar, para finalizar esta parte, que, em ambas as classes, essa intervenção dialógica foi muito importante para atribuir sentido à multiplicação de um número por uma letra que representava um número qualquer, conforme alguns tentaram fazer. Não havia uma expectativa de minha parte em obter expressões algébricas como resultado da atividade desenvolvida. Dessa forma, essa atividade foi além do esperado.

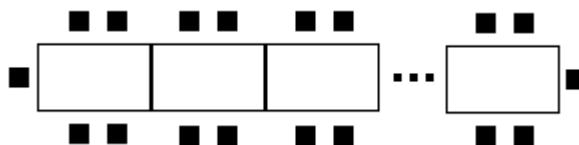
6.10 A terceira tarefa exploratório-investigativa

A terceira tarefa proposta incluiu, novamente, as instruções para a constituição das equipes, do mesmo modo como havíamos feito com a segunda tarefa:

Tarefa Investigativa 3: Álgebra em festa de casamento?

A Tarefa Proposta

Em uma determinada festa de casamento, cada mesa comporta 6 pessoas. Esperando que houvesse uma aproximação e união dos convidados presentes para a confraternização, esses resolveram juntá-las na seguinte disposição¹⁸:



¹⁸ Desenho baseado no trabalho de Arcavi, A. El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In: VALE, I. et al. Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores. Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2006, p.29-48.

Será que há Álgebra numa festa de casamento?

Vejamos... Seguem algumas questões para a nossa investigação: **(Lembrem-se! Todas as respostas devem ser justificadas, com cálculos ou desenhos!)**

a) Construam uma tabela que relaciona a **quantidade de mesas** e a **quantidade de cadeiras** utilizadas. Encontrem o número de cadeiras utilizadas com, pelo menos, 6 mesas. Observem as possíveis relações entre **mesas** e **cadeiras**...

b) Qual o número máximo de mesas que deve ser usado para formar essa fileira de mesas? E de cadeiras? Expliquem o raciocínio da equipe.

c) Usando 15 mesas, quantas cadeiras são necessárias? Justifiquem.

d) Se houver 42 cadeiras, quantas mesas serão necessárias? Justifiquem.

e) É possível constituir uma fileira de mesas que tenha 100 cadeiras? Se possível, quantas mesas seriam necessárias? Por quê?

f) Investigando a sequência, a partir do desenho e/ou da tabela construída no item a), expliquem, com as suas palavras, como ela é constituída. Qual é o padrão existente?

Escrevam uma **expressão matemática** que relaciona o número de mesas e o número de cadeiras. **É importante o uso de uma linguagem mais elaborada, aproximando-se de uma fórmula...** Que letras poderiam ser usadas?

Bom Trabalho, caros detetives!

A terceira tarefa exploratório-investigativa foi elaborada com o intuito de contemplar a questão da relação entre grandezas, a quantidade de cadeiras e a quantidade de mesas. Do ponto de vista da variedade de respostas e interpretações possíveis, ela não é tão aberta, mas acredito que permite a interpretação dos resultados por diversos caminhos. Quando solicitei a elaboração de uma tabela como um possível apoio, esperava que o aluno pudesse estabelecer relações entre os números de uma coluna (número de mesas) e da outra coluna (número de cadeiras). Mas, como veremos mais adiante, ela também acabou, em alguns casos, limitando a possibilidade de uma exploração mais aberta da tarefa. Entretanto, essa não é a única forma de obter os resultados. A ilustração presente na tabela também colabora nas diversas interpretações do mesmo resultado. O interessante é que, durante a socialização, foi possível discutir expressões equivalentes.

Assim, uma das funções da Álgebra contemplada nessa tarefa foi a relação entre grandezas. Apesar do aspecto da generalização estar presente, não faz sentido

perguntar, por exemplo, quantas cadeiras seriam necessárias para 259 mesas dispostas linearmente.

Inicialmente, quando elaborei a tarefa, pensei que a constituição de uma tabela no item A pudesse colaborar para o desenvolvimento da atividade investigativa, pensando no arranque inicial. Na verdade, para alguns alunos, isso se tornou um *obstáculo didático* (Brousseau, 1983), pois o uso da recursividade permaneceu. Muitos alunos começaram a realizar a contagem das cadeiras, aumentando de quatro em quatro, e números mais altos não os desencorajavam.

Analisemos o item d, que propunha a resolução inversa àquela proposta pelos primeiros itens.

Abaixo, a interpretação de uma das equipes:

A primeira coisa a fazer é inverter o cálculo que nós fizemos na questão c.
Então, veja, era assim: $2 \times 4 = 8 + 2 = 10$, essa conta eu descobri o número de cadeiras, agora eu invertei. Pego $10 - 2 = 8 : 4 = 2$ mesas.
Então, para saber quantas mesas tem calculamos
 $42 - 2 = 40 = 10$ mesas

Eu descobri um jeito de saber o número de mesas:

— Só fazer o número de cadeiras $\div$ por 4 — 2 [menos 2] e dará o resultado

Trecho do relatório de Paula, Giovana, Alessandra e Márcia — 7º B

O interessante dessas interpretações é que, sem falar em equação, as respostas dos alunos referiam-se às operações inversas àquelas que eles estavam realizando para encontrar a quantidade de cadeiras. Pelo tempo disponível para realizar o trabalho de campo, não foi possível discutir esse aspecto com as classes. Eu tinha em vista a generalização e variação entre grandezas...

O mesmo grupo, quando respondeu à questão f, representou a igualdade de maneira semelhante à presente anteriormente:

Regra

Para descobrir o número de cadeiras, você multiplica 4x o número de mesas e aumenta dois.

Exemplo:

$$\underbrace{2}_{\text{mesas}} \times 4 = 8 + 2 = \underbrace{10}_{\text{cadeiras}}$$

Para saber o número de cadeiras, você faz ao contrário.

Exemplo:

$$\text{não é o } \underbrace{2}_{\text{mesas}} \times 4 = 8 + 2 = \underbrace{10}_{\text{cadeiras}}$$

Agora ao contrário:

$$\underbrace{10}_{\text{cadeiras}} - 2 = 8 \div 4 = \underbrace{2}_{\text{mesas}}$$

Porque ao contrário de mais (+) é (-) menos e de multiplicação (x) ao contrário (÷) divisão, e também troquei os sinais e a ordem.

Fórmula

É de mesa a letra m e a de cadeira é a letra c.

$$M \times 4 = 8 + 2 = C$$

Trecho do relatório de Paula, Giovana, Alessandra e Márcia – 7º B

Após apresentar as interpretações de alguns grupos, chamo a atenção para o modo que eles representaram aritmética ($2 \times 4 = 8 + 2 = 10$) e algebricamente ($M \times 4 = 8 + 2 = C$) a relação entre o número de mesas e cadeiras, denotando um sentido de igualdade inapropriado à compreensão da Álgebra: o signo de “igual” com o significado de “o resultado é...”

Booth (1995) e Kieran (1992) mostraram em seus trabalhos como a interpretação de igualdade – “o resultado é” – dificulta a compreensão e a representação algébrica de alunos iniciados nessa linguagem.

Além disso, para Fiorentini (2000), pode-se atribuir essas dificuldades a uma apresentação errônea do conceito de igualdade nas séries iniciais, apresentando o sentido de “o resultado é” como o único. Observemos que o grupo representa o número de cadeiras quando duas mesas estiverem dispostas, escrevendo $2 \times 4 = 8 + 2 = 10$ (isto é, para duas mesas, teremos $2 \times 4 = 8$ cadeiras. Somando ao resultado as duas cadeiras das extremidades, chega-se às dez cadeiras) .

Uma outra maneira de representar a relação entre mesas e cadeiras, também obtida a partir da estrutura do desenho, foi obtida por uma das equipes e, abaixo,

apresento parte do relatório por eles elaborado. A equipe exemplificou quantas cadeiras teriam 20 mesas e 30 mesas, porém o trecho seguinte refere-se apenas às 30 mesas:

30 mesas dará 122 ao total de cadeiras e de cada lado terá 60 *mesas* [sic: quis dizer “cadeiras”] e nas pontas 2.
 O tanto de mesas x [vezes] dois é o resultado que terá também x 2 e incluir 2 cadeiras. Trecho do relatório de Alessandro, Manoel e Cesar – 7º A.

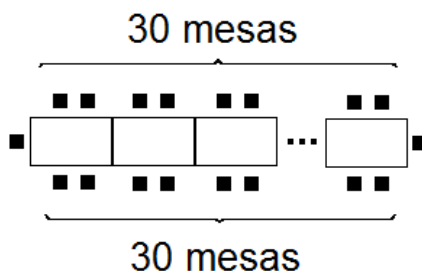


Figura 12 – Figura baseada na interpretação de Alessandro, Manoel e Cesar - 7º A

A ilustração acima foi feita por mim na lousa, pensando em representar a explicação do grupo e em facilitar o entendimento daquele modo peculiar de encontrar o número de cadeiras. Como o grupo não fez em seu relatório qualquer tipo de representação gráfica ou desenho para apresentar essa compreensão, durante a socialização procurei dar ênfase ao raciocínio por eles utilizado. Eles até chegaram a fazer a tabela, porém não se prenderam a ela para perceber essas relações. O problema, conforme apresentado, não necessitaria da constituição de uma tabela, pois a estrutura da disposição das mesas e cadeiras seria suficiente para perceber padrões e regularidades no crescimento da sequência.

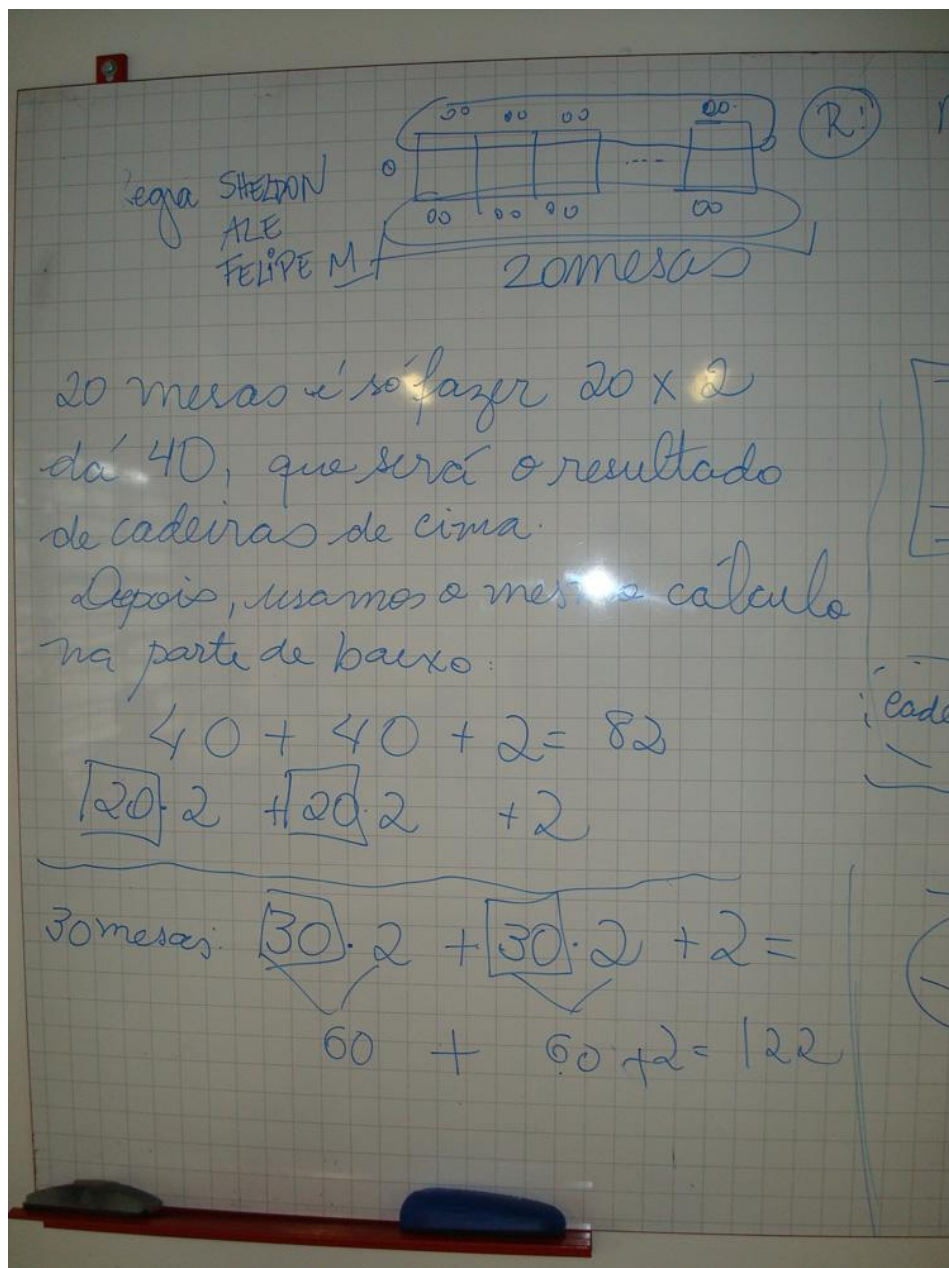


Figura 13 – Fotografia tirada ao final da sistematização dos resultados da tarefa 2

A fotografia acima foi tirada após a sistematização dos resultados da terceira tarefa.

6.11 Socialização e sistematização da terceira atividade

Ao iniciar a socialização dos resultados obtidos a partir da terceira atividade, procurei dar ênfase aos aspectos que cada equipe encontrou durante a investigação. Para isso, não foi realizada a elaboração de cartaz para a apresentação dos resultados. Aquilo que foi produzido por todos, fui registrando no quadro.

Após escrever a tabela, os alunos disseram ter obtido os resultados aumentando os valores de quatro em quatro. Quando foram questionados sobre o item b, que se referia ao número máximo de mesas que deveriam usar, poucas equipes se preocuparam em registrar. Alguns que escreveram disseram que:

Não pode, porque eu não sei o tamanho do lugar, quantas mesas as pessoas tem para a festa e também o número de cadeiras que a pessoa tem (Fabrício, Carlos, Carlos e Douglas – 7º B)

Depende do tamanho do local e o número de pessoas por isso não sabemos o número exato. (Walter, Tomas Bruno e Wellington – 7º A)

Vamos supor que num casamento tinha 100 convidados, isto significa que tem 100 cadeiras então preciso descobrir o valor de mesas então dividimos 100 por 4 que deu 25 mesas.” (Paula, Márcia, Giovana e Alessandra – 7º B)

As justificativas das equipes estão relacionadas ao contexto físico e não abstraem as suas condições (*não sei o tamanho do lugar*) ou trabalham com hipóteses particulares (*vamos supor*). Embora eu esperasse generalizações, essas respostas também fazem sentido, pois há outras variáveis que podem interferir no caso e que não foram, inicialmente, previstas por mim.

Uma discussão acerca da resposta apresentada por um dos grupos mobilizou alguns alunos. Notemos que, apesar de explicar e acompanhar a atividade investigativa dos alunos, a verificação de conjecturas e hipóteses ainda não se tornou comum à atividade matemática de alguns deles:

Fernando: – Algum outro grupo escreveu outras coisas? Teresa...

Teresa: – Nós dissemos que teria 50.

Fernando: – 50 cadeiras?

Teresa: – 50 mesas.

Fernando: – E vocês encontraram quantas cadeiras?
Marcos: – 220.
Fernando: – Hum... 220. Como vocês chegaram a esse resultado? Pessoal, vamos acompanhar a explicação do grupo. Fala pra mim, como o grupo fez?
Teresa: – Dez vezes cinco, 50.
Fernando: – Dez...vezes.. cinco... 50. E depois?
Teresa: – 10×22 .
Fernando: – E por que 10×5 e 10×22 ? Qual foi o raciocínio que vocês usaram?
Mário: – Na tabela, 5 mesas dá 22 cadeiras. Aí 5×10 dá 50, pra encontrar as cadeiras 10×22 .
Fernando: – Deixa eu tentar entender... você fez uma conta parecida com aquela que nós já estudamos, quem lembra?
 (...)
 Fernando: – O assunto, pessoal, era proporcionalidade. Lembra, ele usou quando multiplica por 10 de um lado ele multiplicou por 10 do outro lado. A questão é a seguinte: 50 mesas vai dar 220?
Tomas: – Não.
Fernando: – Por que não? Qual o cálculo que deveria fazer para chegar às 50 mesas, pessoal?
Tomas: – 50×4 , eu acho.
Fernando: – Então, dá...
Tomas: – 200.
Fernando: – Todo mundo concorda com o Tomas?

Nesse momento, o aluno Walter, que era integrante de outra equipe, retomou seus cálculos e foi verificar se o resultado era 200 mesmo...

Walter: – Dá 202.
Fernando: – Olha ali. Falou que dá 202. O Tomas falou que é 200.
Tomas: – Ele colocou mais 2.
Walter: – Fiz 50×4 e mais 2.
Fernando: – Hum...
Tomas: – Ah, ele contou as duas cadeiras das pontas (fazendo com as mãos...)
Fernando: – Bom, agora como a gente pode verificar a resposta do grupo do Marcos, a Teresa, Bruna e ..., o quarteto.
Cesar: – Quarteto Fantástico!
Fernando: – Isso! Eu falo quarteto e você tem que completar o fantástico. A ideia idéia é a seguinte:
 De 5 para 50, multipliquei por 10. Para encontrar o 220, também multipliquei por 10. Essa regra, se for uma regra, se existe um padrão, essa conta aqui... Se for sempre constante, ela vai ter que acontecer para qualquer conta. Eu vou tomar como exemplo para verificar: o 2 para 4 (mesas) o que acontece?
Aluno: – Vezes 2.
Fernando: – Então, dobra. Vezes... 2 (registrando no quadro). Se essa regra funcionar, o que vai ter que acontecer com o 10 (cadeiras)?
Aluno: – Vezes 2.
Fernando: E 10×2 dá quanto?
Aluno: – 20.
Fernando: E na tabela, tinha dado quanto?
Aluno: – 18.

Fernando: – Então, será que essa regra de multiplicar por 10 funciona? O que você acha, Marcos?

Marcos: – Aí tinha que dar certo.

Em princípio, ao solicitar a elaboração da tabela, acreditava que ela poderia contribuir na investigação e na dedução da expressão que relaciona o número de mesas e cadeiras. Entretanto, não foi isso que ocorreu durante a terceira tarefa, pois boa parte dos grupos obteve os valores a partir da recursividade, aumentando de quatro em quatro. Dessa forma, o uso da tabela, como já disse anteriormente, tornou-se um *obstáculo didático* à percepção da estrutura matemática da situação, que poderia ser obtida pela exploração ou observação global (ou estrutural) da ilustração presente na tarefa.

Notemos que, apesar de os alunos terem passado por duas outras tarefas e pela socialização/sistematização, ainda alguns têm dificuldades em realizar testes para validar suas conjecturas. Walter pareceu ter compreendido a importância da verificação. Quando questionei se todos concordariam com o Tomas ao dizer que haveria 200 cadeiras em 50 mesas, imediatamente, Walter retomou suas anotações e foi calcular quanto seria o resultado. Já a equipe de Marcos, ao contrário, considerou que a relação entre mesas e cadeiras seriam grandezas diretamente proporcionais, sem verificarem se suas observações eram corretas.

Durante a atividade, esse detalhe passou despercebido por mim e pela Ana Luisa. Interpreto, hoje, que a socialização foi fundamental para o confronto das estratégias e dos resultados obtidos pelas equipes. E isso contribuiu, como veremos a seguir, para uma melhor justificação ou argumentação matemática.

Tendo em vista contemplar a elaboração de uma expressão algébrica a partir dos resultados obtidos pelas equipes, pude, em ambas as classes, estabelecer uma comparação entre duas regras, sendo essas obtidas a partir dos resultados dos alunos.

No 7º A, registrei duas regras que foram diferentes para obter a quantidade de cadeiras. A primeira regra foi elaborada pelo grupo formado por Cesar, Alessandro e Manoel. A segunda foi obtida pela equipe formada por Walter, Tomas, Bruno e Wellington, com pouca participação dos dois últimos.

Manoel, sentindo-se valorizado por ter tido uma das interpretações escolhidas, quis prontamente ler o que eles tinham encontrado de interessante: “*20 mesas é só fazer $20 \times 2 + 40$ que será o resultado de cadeiras.*” Como Manoel não mostrou ter entendido o que estava escrito no relatório, Alessandro interveio: “*tem 40 na parte de cima*” (mostrando com as mãos).

“*Então, o que estamos escrevendo aqui, quando vocês disseram que será o resultado de cadeiras, de onde?*”, questionou Alessandro. E ele responde: “*de cima.*”

“*Ah! Então, vamos completar o que vocês escreveram, o resultado de cadeiras de cima.*”

Registrando no quadro, elaborei uma maneira de expressar a regra obtida pelo grupo.

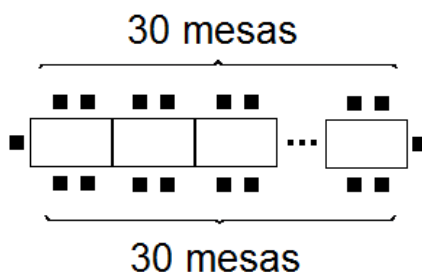


Figura 14 - Representação feita pelo professor Fernando, com vistas a representar por meio de uma ilustração as ideias da equipe

Cesar, exemplificando: – 20 mesas é só fazer 20×2 dá 40, que será o resultado de cadeiras de cima. Depois, usamos o mesmo cálculo na parte de baixo: $40 + 40 + 2 = 82$.

No quadro, procurei registrar o que havia ocorrido, passagem por passagem:

$$20 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 2 = 82$$

$$40 + 40 + 2 = 82$$

Para explicar aos demais colegas da classe, utilizamos o mesmo raciocínio para 30 mesas:

$$30 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 2 = 122$$

$$60 + 60 + 2 = 122$$

A regra que estava em seu relatório era a seguinte: “o tanto de mesas x [vezes] dois é o resultado que terá também x 2 e incluir 2 cadeiras.”

A regra 2 veio do grupo de Walter e de uma forma muito sintética: “Multiplicando por 4 e sempre aumentando 2.”

Achei muito criativo e diferente o modo pelo qual o grupo – o aluno – representou a expressão algébrica:

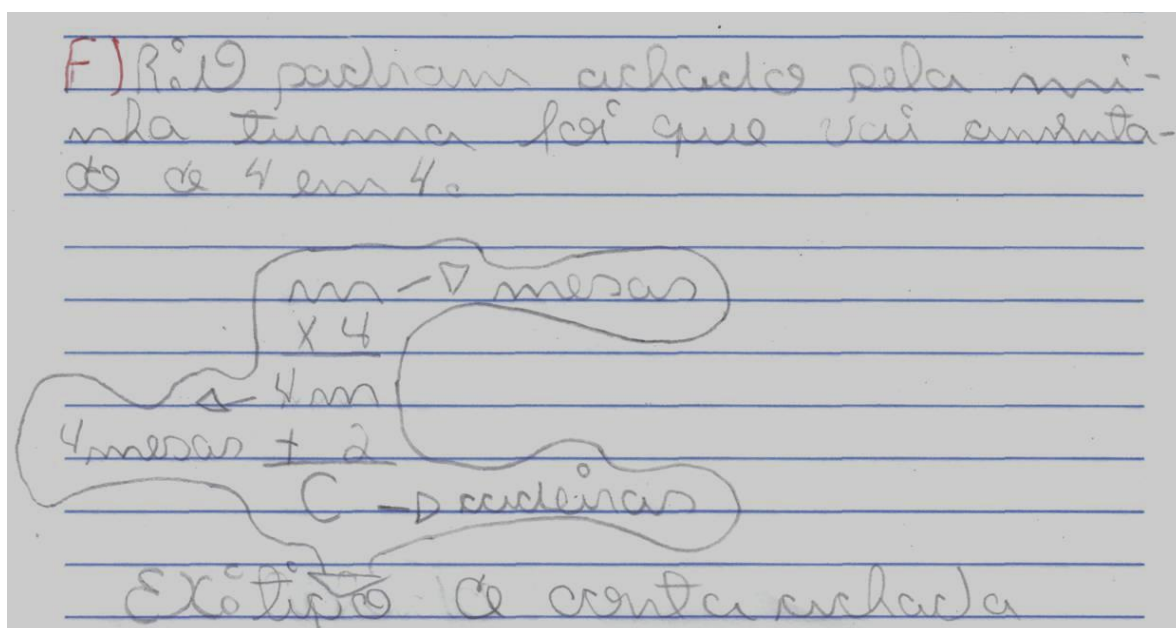


Figura 15 – Trecho do relatório de Walter referente à tarefa 3

Percebamos que ele utilizou a estrutura do algoritmo da multiplicação (conta armada) para representar a expressão geral. Ele indica com flechas o significado de cada letra, m para mesas e c, para cadeiras. Observemos que, na flecha do lado esquerdo, indicando o significado de 4 m, está escrito 4 mesas. Outro ponto a ser questionado é o sentido de igualdade utilizado por ele. Ao escrever a relação entre mesas e cadeiras usando a “conta armada” da multiplicação, denota, como a maioria dos alunos, a ausência do significado algébrico de igualdade como equivalência de valores ou de expressões, isto é, o que está de um lado da igualdade vale tanto quanto o que está do outro lado.

Será que ele teria se apropriado da ideia da multiplicação de um número com uma letra? Parece-me ainda cedo para fazer essa conclusão. Mas considero relevante retomar a representação feita pelo aluno: em vez de usar $4 \cdot m$ como sendo a multiplicação de um número por uma letra, o aluno utiliza a expressão abreviada $4 m$.

No quadro, representei a mesma expressão, mas reescrevendo-a na horizontal, conforme é habitual a sua escrita: $4 \cdot M + 2 = C$

Durante a comparação de ambas as regras, e, nesse caso, com as minhas intervenções, foi possível chegar a uma mesma expressão a partir das regras obtidas individualmente por eles.

A partir da regra 1, tínhamos:

$$20 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 2 = 42$$

$$30 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 2 = 122$$

Dialogando com os alunos, fui questionando-os sobre o que havia permanecido e o que tinha mudado em ambos os cálculos. Alguns, de imediato, observaram que sempre multiplicava por 2 duas vezes e que variavam a quantidade de mesas e o respectivo número de cadeiras.

“Que tal tentarmos escrever uma fórmula, como na tarefa investigativa anterior? Será que a gente consegue?”

As letras, sugeridas pelos alunos, foram M e C, para mesas e cadeiras, respectivamente.

Logo, alguns já queriam trocar os valores 20 (ou 30) pela letra M e 42 e 122, por C. Fui registrando no quadro:

$$20 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 2 = 42$$

$$30 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 2 = 122$$

$$M \cdot 2 + M \cdot 2 + 2 = C$$

Bom, eu queria que os alunos percebessem a questão da equivalência de ambas expressões. Eles já haviam notado que, para o mesmo número de cadeiras, obtém-se o mesmo número de mesas.

Retomando algumas das propriedades já estudadas nas duas primeiras tarefas, foi possível estabelecer relações entre a tarefa atual e as anteriores. Os alunos, inclusive, se apropriaram da dinâmica de uma aula exploratório-investigativa. Perguntei-lhes como também poderia representar a multiplicação $M \cdot 2$, e alguns alunos argumentaram dizendo que era o mesmo que escrever $2 \cdot M$. Assim, reescrevemos toda a expressão:

$$2 \cdot M + 2 \cdot M + 2 = C$$

Na segunda tarefa, quando introduzimos – eu e Ana Luisa – o uso da letra para a constituição de expressões simbólicas, tínhamos discutido a soma de letras. Pergunto a eles se haveria mais algum cálculo a ser realizado na expressão. Alguns disseram que não, outros se lembraram de nossas discussões anteriores, e falaram que seria $4 \cdot M$, que seria a soma de $2M$ com $2M$.

A intenção de desenvolver a terceira tarefa era de contemplar a relação entre grandezas, uma das funções da Álgebra, mas visando à representação algébrica simbólica das interpretações. As duas primeiras tarefas foram importantes para introduzir os alunos em uma prática exploratória e investigativa, mediada pela leitura e pela escrita. Nesse processo, os alunos foram instigados a escrever de outro modo as relações percebidas nas figuras contempladas na linguagem verbal e, posteriormente, a representá-las em uma linguagem matemática.

A prática de explorar, nas atividades desenvolvidas, a generalização, a construção de relações entre grandezas e a construção de expressões escritas das leis de formação, contribuiu para que os alunos sentissem a necessidade – e isso foi percebido por eles – de buscar uma representação sincopada e, até mesmo, simbólica, que abreviasse a escrita das leis de formação.

No próximo capítulo, *Aprofundando a análise das práticas de letramento algébrico*, serão apresentados alguns pontos para o aprofundamento a respeito das práticas de letramento algébrico, tomando como referências as categorias de análise desta pesquisa.

CAPÍTULO 7

APROFUNDANDO A ANÁLISE DAS PRÁTICAS DE LETRAMENTO ALGÉBRICO

Neste capítulo, tenho como objetivo apresentar alguns dos pontos apresentados no capítulo 5, com a intenção de aprofundar a análise dos episódios ocorridos. Essa análise será realizada com base nas categorias de análise, já mencionadas no segundo capítulo, sendo a primeira categoria pertinente à mediação do professor e da auxiliar de pesquisa durante os diferentes momentos da atividade investigativa dos alunos, em especial à socialização e sistematização das interpretações dos diferentes grupos.

A segunda categoria corresponde à constituição de um letramento algébrico, a partir das práticas de letramento constituídas em aulas exploratório-investigativas, tendo como foco de análise, em especial, crenças, valores e saberes mobilizados pelos alunos e a produção de sentidos e a negociação de significados por eles desenvolvidos.

Durante o texto, não me preocupei com a separação das duas categorias, pois acredito que ambas sejam complementares para a análise dos episódios escolhidos. Fatos marcantes e que merecem destaque para o aprofundamento do estudo da iniciação dos alunos à prática de letramento são a mediação do professor escriba, as práticas de leitura e escrita no desenvolvimento do letramento algébrico e um episódio da terceira atividade ocorrido com o aluno Carlos.

7.1 A mediação do professor escriba nas práticas de letramento algébrico

Após a realização da socialização/sistematização da primeira tarefa, notei que meus alunos, apesar da dificuldade na elaboração dos relatórios, tiveram desenvoltura para apresentar oralmente suas ideias. Fiquei pensando o porquê de esse fato ter ocorrido. Somente me dei conta, ao fim da primeira atividade realizada, que, na

verdade, a dificuldade do registro escrito era suprida por minha intervenção, ao registrar no quadro as interpretações que faziam durante a atividade investigativa.

Alguns alunos já possuíam um pensamento algébrico relativamente desenvolvido, mas ainda não dominavam a linguagem simbólica. E é compreensível, pois, apesar de já terem visto alguma fórmula ou expressão algébrica nas aulas de Matemática, essa certamente foi a primeira experiência que tiveram para elaborar uma expressão literal. Semelhante à escrita da língua materna, na Matemática não parece ser diferente. Muitos deles já haviam resolvido o problema, porém não sabiam como escrever usando uma linguagem simbólica. Nesse sentido, a mediação do professor-escriba foi importante para o desenvolvimento do letramento algébrico dos alunos.

Martins (2008), em uma experiência análoga à minha, porém com crianças da Educação Infantil, relatou como iniciava as crianças no mundo letrado, a partir do desenho. A professora servia de escriba, “traduzindo” para a língua materna escrita o que aquelas crianças desejavam. Para elas, era o primeiro contato com um novo mundo, um mundo desconhecido. Acredito que, no contexto de aulas de Matemática, quando os alunos se deparam com a Álgebra pela primeira vez, podem experienciar, dependendo do modo como ela é explorada e desenvolvida, uma sensação de estranhamento/rejeição a essa nova abordagem ou de encantamento com aquele novo conhecimento. Para Lee (1996, p. 87), a Álgebra é *como uma mini-cultura dentro da larga cultura matemática*.

Pensando na constituição do letramento algébrico dos discentes, o papel do professor é fundamental na mediação entre o aluno e o conhecimento. Diante das práticas de leitura e escrita em aulas de Matemática, mais especificamente nas aulas de Álgebra, é necessária a construção de uma prática social de escrever matematicamente. A imagem imediata que os alunos fazem da Matemática é que ela é uma matéria procedimental que enfatiza os cálculos e a sintaxe das operações e fórmulas, contemplando, assim, a dimensão autônoma de letramento.

Retomando a concepção de letramento algébrico assumida nesta investigação, analisarei, a seguir, alguns eventos em que esse letramento fica evidente. Na linguagem algébrica, como em outras linguagens, podemos analisar as suas

representações simbólicas em dois parâmetros: a sintaxe e a semântica. A sintaxe refere-se à forma pela qual a representação é vista. A semântica refere-se ao significado que aquele objeto representa.

A partir das duas dimensões de letramento – a autônoma e a ideológica, segundo Street (2004) –, vejo a possibilidade de aproximar essas dimensões às formas inerentes à Álgebra. Por exemplo, podemos dizer que a dimensão autônoma estaria para a sintaxe, assim como a dimensão ideológica estaria para a semântica.

Considero que o processo de significação de um objeto – a semântica – se dá mediante interação social entre pessoas sobre o que o objeto representa para elas. Essa significação, entretanto, pode ser múltipla, mas não qualquer, pois varia de acordo com as crenças, as concepções e a visão de mundo das pessoas envolvidas.

Quando esse processo de produção e negociação de significados é valorizado na escola, de alguma forma isso permite mobilizar as culturas trazidas pelos alunos, as quais foram constituídas em diversas comunidades, como a familiar, a religiosa e a escolar, cruzando-as ou aproximando-as com a cultura matemática, constituída historicamente pela humanidade. Acredito que, ao viabilizar, na prática pedagógica, essa aproximação ou a relação e a problematização entre ambas, estamos contemplando e explorando a dimensão ideológica de letramento.

Para melhor esclarecer, vou retomar a sistematização da segunda atividade, quando um aluno, buscando representar uma expressão algébrica que relacionasse a posição e o número de quadrados, disse que o antecessor de P (posição) era O (a letra O do alfabeto).

Esse exemplo denota ainda a ausência de um letramento algébrico, apesar da participação e do engajamento do aluno, o qual está atribuindo sentido à letra, evidenciando o que ele está pensando e como está interpretando a letra na expressão algébrica. Considero que essa interpretação não é única; a meu ver, representa uma ideia no coletivo da classe. Essa não foi apenas a primeira vez, nem unânime, em sala de aula. Em geral, uma das primeiras associações que os alunos fazem com a letra é relacioná-la ao alfabeto. Podemos dizer que a dimensão ideológica de letramento manifesta-se nesse modo de significar a letra no contexto escolar.

Sobre o papel mediador do professor no processo de apropriação do significado da letra pelo aluno, cabe destacar que a generalização foi desenvolvida a partir de relações já estudadas na Aritmética. Por exemplo, foram explorados a representação da multiplicação como a soma de parcelas iguais, o uso de nomenclaturas como o dobro de um número, a metade de um número, o antecessor de um número... Para isso, alguns recursos foram utilizados, como, por exemplo, a elaboração de uma tabela, na qual se procurava destacar aspectos invariantes em relação a outros que não variavam.

Com as contribuições do professor e da auxiliar de pesquisa, a escrita dos alunos passou por transformações que, no início, era permeada de um sentido de letra referente apenas ao alfabeto. Após, aos poucos, os alunos perceberam a necessidade de inserir as letras nas representações algébricas obtidas por eles, na passagem de uma escrita híbrida e sincopada para uma linguagem simbólica.

A tabela a seguir foi apresentada no capítulo 5 e construída por mim no momento de sistematização, com a preocupação de destacar elementos que variam e outros que permanecem constantes.

POSIÇÃO	QUANTIDADE DE QUADRADOS	Representação com o uso da multiplicação
1 ^a	1	$2 \cdot 1 - 1$
2 ^a	$3 = 2 + 2 - 1$	$2 \cdot 2 - 1$
3 ^a	$5 = 3 + 3 - 1$	$2 \cdot 3 - 1$
4 ^a	$7 = 4 + 4 - 1$	$2 \cdot 4 - 1$
5 ^a	$9 = 5 + 5 - 1$	$2 \cdot 5 - 1$
10 ^a	$19 = 10 + 10 - 1$	$2 \cdot 10 - 1$

Tabela 4 – Tabela referente às duas regras utilizadas na sistematização da segunda atividade investigativa

Notemos que, na segunda coluna, é destacada a soma do número da posição com o seu antecessor. Na terceira coluna, para mostrar que, apesar de ser uma forma diferente de chegar à quantidade correta, encontra-se a relação do dobro do número da posição, diminuído de uma unidade.

O diálogo a seguir ocorreu posteriormente à apresentação da tabela acima. A minha intenção era estabelecer uma comparação entre as duas expressões obtidas, de forma a mostrar aos alunos a equivalência entre elas. O que procurei discutir? A soma de termos semelhantes, por exemplo, $x + x + x = 3 \cdot x$.

Fernando: (...) – Se eu falar p mais p , eu teria uma regra... como 5 mais 5, que pode ser representado como $2 \cdot 5$ [duas vezes cinco], e $13+13+13+13$ é o mesmo que $4 \cdot 13$ [quatro vezes 13], é uma forma abreviada de escrever a adição, o que seria somar, por exemplo, assim, a posição... Somar a posição... Assim, qual seria o resultado?

Aluno: – Cada um vale 10.

Fernando: – Eu não dei valor para o p . Eu fiz $p+ p+ p+p$.

Aluno: – Dá Q.

Fernando: – Isso, mas quantas vezes que a gente tem que somar?

Aluno: – Cinco vezes p .

Fernando: – Será que é cinco vezes p ?

Aluno: – É.

Fernando: – Se no lugar do p fosse número? Vamos supor que p vale... alguém falou 10. Se for 10, 10...mais 10...mais 10...

Aluno: – 50!

(...)

Fernando: – 5 vezes 10. E se no lugar do número fosse uma letra? $p+p+p...$

Aluno: – Vai ser 5 vezes p .

O que ocorreu depois disso? O encerramento da segunda atividade foi provocativo... Afinal, os alunos saíram com mais dúvidas do que com soluções. Tínhamos, Ana Luisa e eu, iniciado a introdução da letra nas produções dos alunos. Se, para alguns, isso provocava receio, para outros, isso instigava a curiosidade.

Quando os alunos iniciaram a resolução da terceira tarefa, tive a impressão, em um primeiro momento, de que a discussão e sistematização realizada na atividade anterior não havia sido produtiva diante das dificuldades e dúvidas apresentadas pelos alunos. Porém, eles demonstraram certa facilidade ou, pelo menos, buscaram representar simbolicamente as relações obtidas, tendo como modelo o que foi desenvolvido na segunda tarefa. Alguns grupos, inclusive, tentaram representar por meio de uma expressão algébrica, fazendo da letra um número genérico.

Eu também considero importante destacar a relevância da construção da tabela na segunda tarefa, pois, para os alunos compreenderem a soma de termos semelhantes na Álgebra, a meu ver seria necessário utilizar exemplos aritméticos,

destacando a multiplicação como soma de parcelas iguais. Pode parecer elementar fazer uso de exemplos como esse para justificar a soma de termos semelhantes, mas acredito que não seja tão simples assim...

Dessa forma, os alunos, por meio da negociação de sentidos por eles atribuídos sobre a letra e das expressões algébricas ali constituídas, na passagem de um estágio que contemplava a Aritmética para um outro que introduz a letra com outra conotação, ao explorar outros sentidos que não sejam apenas da letra no alfabeto – da letra como variável –, apresentaram um *salto e uma brusca reconstrução da relação do conceito com o objeto e das relações de generalidade entre os conceitos* (VIGOTSKI, 2001, p.374).

7.2 As práticas de leitura e escrita no desenvolvimento do letramento algébrico

Para descrever um letramento como sendo algébrico, acredito que o diálogo seja um dos instrumentos mais importantes para a constituição de um letramento algébrico. Mas, não somente o diálogo. Como consequência, a exploração da oralidade permite levar a uma elaboração escrita do que foi objeto de discussão. Enfim, práticas permeadas pela leitura e pela escrita. Mas, que tipo de leitura e escrita seria esse que possa ser reconhecido como pertinente ao mundo da Álgebra? É sobre isso que tentarei discutir a seguir.

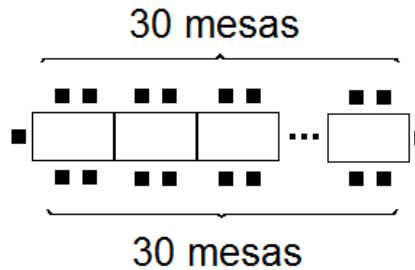
Neste trabalho, não foi contemplada apenas a leitura das tarefas exploratório-investigativas e dos relatórios elaborados pelos alunos. É importante ressaltar também a leitura das imagens presentes nas tarefas.

Nos relatórios apresentados por duas equipes da mesma classe, podemos observar duas diferentes interpretações sobre o modo de relacionar a quantidade de mesas dispostas linearmente com as cadeiras correspondentes:

Interpretação 1

30 mesas dará 122 ao total de cadeiras e de cada lado terá 60 *mesas* [cadeiras] e nas pontas 2.

O tanto de mesas x [vezes] dois é o resultado que terá também x 2 e incluir 2 cadeiras. (Alessandro, Manoel e Cesar, 7º A)



Interpretação 2

São necessárias 62 cadeiras para 15 mesas, porque sempre tirando as cadeiras das pontas, no meio sempre fica 4 cadeiras em cada mesa, por exemplo: nós fizemos tipo tinha 15 mesas nós tiramos as mesas das pontas com as cadeiras e fizemos $15 - 2 = 13$, que fizemos 13×4 que deu 52 cadeiras no meio e juntando as 52 cadeiras do meio com 5 de uma ponta e 5 da outra que, juntas dão 10, juntamos tudo que deu 62. (Trecho do relatório de Raquel – 7º B)

Os dois grupos haviam percebido essa relação, porém não realizaram a construção do desenho. Considerei conveniente valorizar essa interpretação, pois era uma forma possível de responder à questão da atividade por meio da estrutura da ilustração. Desse modo, construí o desenho para todos os alunos, buscando relacionar a escrita dos alunos com uma leitura que eles teriam feito da ilustração inicial. Em ambas interpretações, os alunos não realizaram qualquer desenho para explicar o raciocínio utilizado. A percepção da estrutura da situação (relação entre mesas e cadeiras) e a representação dessa estrutura ou relação, por meio de uma linguagem sincopada, são algumas das características do pensamento algébrico, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993).

Outras leituras também poderiam ser realizadas, mas não foram aqui contempladas. As diferentes leituras de um esquema ou desenho e as suas diferentes representações formais ou algébricas, elaboradas pelos alunos ou grupos em sala de aula, precisam ser compartilhadas e analisadas coletivamente, explicitando, sobretudo, as possíveis relações entre a situação ou desenho e a expressão algébrica que o representa. Para o desenvolvimento do letramento, parece-me relevante explorar e analisar as diferentes representações semióticas de uma situação ou objeto de estudo,

pois alguns alunos lidam melhor com as representações figurais do que com registros escritos.

Nesta investigação, observei que a escrita dos relatórios passou por três diferentes fases:

Fase 1 – Na primeira tarefa, os alunos tiveram dificuldade em registrar o que haviam encontrado de interessante e diferente na tabela. Dessa forma, a maioria não conseguiu representar por escrito as suas descobertas ou produções. Acredito que, muitos deles, não tinham dado conta do que poderia ser investigado.

Fase 2 – Após a escrita dos alunos, na socialização e sistematização, conforme os alunos explicavam o que haviam percebido, eu anotava no quadro e pedia para que eles também registrassem no caderno. Em princípio, esse era mais um procedimento pedagógico do que metodológico da investigação. Depois, refletindo, vi nesse processo um modo de os alunos se apropriarem e investigarem em Matemática e, além disso, de registrarem, por escrito, o que descobriam em uma aula exploratório-investigativa. Não posso afirmar que isso tenha ocorrido com todos os alunos. Alguns deles podem ser considerados copistas, pois copiavam ou desenhavam as palavras no caderno, e , ou não sabem ler ou leem com muita dificuldade;

Fase 3 – A escrita do segundo relatório evidenciou uma grande transformação no letramento dos estudantes. Essa transformação é decorrente, em boa parte, dos esforços anteriores de sistematização das atividades, sobretudo do modo como foi conduzida. De fato, os registros passaram a ser mais elaborados, denotando, em muitos deles, características do pensamento algébrico e o uso da linguagem retórica para explicar as regras de generalização relativas à segunda tarefa. Além disso, percebe-se uma mistura da oralidade com a escrita, a qual tem sido denominada por Signorini (2001) como escrita *híbrida*.

No ambiente escolar, como em outras instituições sociais, há uma valorização de uma escrita que siga as normas cultas da língua. Segundo Signorini (2001), *para os bem-sucedidos, o oral e o escrito não se separam tão radicalmente, mas, ao contrário, mantêm relações complexas de hibridização de gêneros e modalidades* (p. 68).

Acredito que essa experiência seja importante para a constituição da escrita algébrica, passando por uma fase da linguagem sincopada, na tentativa de expressar por escrito aquilo que o aluno está pensando, e promove uma ressignificação sobre o que havia pensado.

Trago novamente trecho do relatório de Raquel (6^a E):

São necessárias 62 cadeiras para 15 mesas, porque sempre tirando as cadeiras das [mesas das] pontas, no meio sempre fica 4 cadeiras em cada mesa, por exemplo: nós fizemos tipo tinha 15 mesas nós tiramos as mesas das pontas com as cadeiras e fizemos $15 - 2 = 13$, que fizemos 13×4 que deu 52 cadeiras no meio e juntando as 52 cadeiras do meio com 5 de uma ponta e 5 da outra que, juntas dão 10, juntamos tudo que deu 62.

A aluna não fez qualquer ilustração para apresentar a interpretação. Em relação à produção do texto, notemos que a sua descrição traz termos como *tipo*, bem presente na oralidade, mas justificado no discurso da aluna como sendo um exemplo. Apesar da presença de expressões presentes na oralidade, quando a aluna diz que “*no meio sempre ficam 4 cadeiras*”, ela evidencia um aspecto característico do pensamento algébrico: *percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam* (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993, p. 87).

Poderíamos realizar uma aproximação dessa escrita híbrida com a linguagem algébrica retórica. Não somente na escrita da aluna Raquel, como também na de outros alunos, o uso coloquial da língua está presente nas primeiras tentativas de representar algebricamente. Entretanto, esses registros foram se transformando, ao longo do tempo, na participação das atividades exploratório-investigativas, evidenciando, assim, a apropriação de um modo de elaborar relatórios.

Se retomarmos as três atividades desenvolvidas e analisarmos as interpretações dos alunos, acompanhando o processo de construção da argumentação, do pensamento e da linguagem algébrica, veremos similaridades com o desenvolvimento histórico da linguagem algébrica. Inicialmente, as representações da resolução dos problemas foram apresentadas na linguagem retórica, depois passaram pelas linguagens sincopadas, chegando, finalmente, à linguagem simbólica. Isso mostra como o desenvolvimento da linguagem algébrica dos alunos, mesmo em um curto

espaço de tempo – um mês de duração da coleta de dados – apresenta semelhanças com o desenvolvimento histórico da linguagem algébrica.

7.3 Destacando um caso de desenvolvimento de letramento algébrico

Um fato ocorrido durante a terceira atividade nos chamou a atenção. O aluno Carlos Caldeira, da 6ª E, que durante o ano letivo parecia ser displicente para com os estudos, faltando muito às aulas e sem apresentar justificativas, nos surpreendeu com a sua participação no contexto das aulas exploratório-investigativas. As suas ausências ocorriam com tanta frequência, que ele chegou a ser convocado a participar das aulas de reforço, que ocorrem no período oposto ao do estudo do aluno. Ele faltava tanto, que não tinha sido possível avaliá-lo de uma maneira com que pudesse ser identificada a natureza de suas dificuldades.

Soubemos, depois de alguns meses após o início do ano letivo, que o seu interesse era jogar *badminton*¹⁹. Havia um projeto desenvolvido por uma professora de Educação Física da escola, promovendo a inclusão de alunos da comunidade no meio esportivo, levando-os, inclusive, a participar de competições regionais, nacionais e até internacionais. Carlos era um desses atletas. Como um dos pré-requisitos para participar do projeto era ter frequência às aulas, Carlos chegou a ser suspenso do projeto por um mês.

Com isso, voltou a estar presente nas aulas, mas sem ter grande destaque e participação. Carlos parecia não se identificar com o modelo de aula que vínhamos desenvolvendo até então. Entretanto, após iniciar o projeto com aulas investigativas em Álgebra, a sua atitude em classe começou a mudar radicalmente.

O seu engajamento foi crescendo ao longo dessas aulas e, na primeira aula relativa à terceira atividade, Carlos nos surpreendeu, realizando a sua resolução em menos de uma aula, chegando a uma expressão algébrica da situação proposta, embora não fosse simbólica. Ana Luisa então o acompanhou, instigando-o a escrever,

¹⁹ Esporte individual ou em duplas, semelhante ao tênis, porém utiliza-se no lugar da bola uma espécie de peteca.

com o seu grupo, a expressão algébrica encontrada, porém utilizando uma linguagem literal, isto é, simbólica:

Para alguns grupos a construção do terceiro item [da tarefa] não foi complicada, pois, seguiram o modelo da atividade anterior. Mas a construção do quarto item causou muitas dúvidas, pois , os alunos ainda não tinham o raciocínio do processo inverso.

A construção da resposta do último item foi muito interessante. Acompanhei um grupo em especial. Eles haviam somente respondido: “Multiplicar por 4 quantidade de M, colocar mais 2 que vai dar o tanto de C que você tem que pôr”. Pedi para que eles tentassem escrever essa frase “tirando” as palavras em português, e eles escreveram:

$$M \times 4 \text{ mais } 2 = C$$

Antes de eu dizer sobre a palavra “mais”, um membro do grupo fez a observação de que eles poderiam substituir a palavra mais pelo símbolo da adição:

$$M \times 4 + 2 = C$$

E assim foi construída uma expressão matemática que relacionava o número de mesas e o número de cadeiras.

Narrativa produzida por Ana Luisa (dia 11/11/2008)

Apesar das poucas observações realizadas pela auxiliar, seu comentário “*Pedi para que eles tentassem escrever essa frase tirando as palavras em português*”, mostra como a sua mediação foi fundamental na elaboração de uma expressão algébrica, utilizando linguagem simbólica. A primeira resposta : “*Multiplicar por 4 quantidade de M, colocar mais 2 que vai dar o tanto de C que você tem que pôr*” já denotava um pensamento algébrico desenvolvido, embora utilizando uma linguagem retórica. Ao reescrever a afirmação “tirando” as palavras e substituindo-as por símbolos, $M \times 4 \text{ mais } 2 = C$, denota a utilização de uma linguagem sincopada, situação em que a linguagem materna e a linguagem simbólica se misturam. Cabe destacar aqui o papel da mediação de Ana Luisa, auxiliando o grupo a passar de uma forma de representação escrita (retórica), até então produzida pelos alunos, a outra mais sofisticada (simbólica), construída com a ajuda da professora.

Para Vigotski (2000, p. 332), a aprendizagem *sempre começa daquilo que ainda não está maduro na criança*. Tomarei como referência o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal, que seria

discrepância entre a idade mental real ou nível de desenvolvimento atual, que é definida com o auxílio dos problemas resolvidos com autonomia, e o nível que ela [a criança] atinge ao resolver problemas sem autonomia, em colaboração com outra pessoa.(VIGOTSKI, 2001, p. 327).

Parece-me que, no caso de Carlos, isso foi possível, pois, a partir de sua escrita retórica, Ana Luisa pôde realizar uma intervenção de maneira que ele pudesse evoluir de uma linguagem retórica para uma linguagem simbólica.

Isso é confirmado mediante entrevista concedida por Carlos, ao fim da pesquisa de campo, esclarecendo como ocorrera aquele momento:

Fernando: – Carlos, explique como foi que aconteceu essa escrita (da fórmula) , você se lembra?

Carlos: – Ah, ela [Ana Luisa] sentou lá, como a explicar e saiu isso daí. (risos)

Fernando: – Mas, isso foi você que escreveu, não foi ela...

Carlos: – Fui eu!

Fernando: – Com as suas palavras, com as suas ideias...

Carlos: – Sim, fui eu!

Fernando: – E como é que você passou dessa escrita... Aí escreveu uma fórmula?

Carlos: – Aí, ela falou que era para escrever usando letras.

Fernando: – Foi fácil?

Carlos: – Mais ou menos.

Fernando: – Ah, é?!

Carlos: – Com a ajuda dela, foi!

Carlos havia compreendido a resolução do problema proposto e atribuiu a escrita da expressão algébrica à contribuição de Ana Luisa. Sozinho, Carlos representou por meio de uma linguagem verbal um raciocínio matemático elaborado e relativamente complexo para o seu nível escolar. Faltava, entretanto, representar o mesmo raciocínio de maneira simbólica, abstrata, aproximando-se da linguagem típica da Matemática escolar.

Podemos dizer, com base em Vigotski (1991), que Carlos passou por um processo de internalização de um modo de expressar algebricamente uma situação-problema, modo esse que, para Carlos, começou na interação com seus colegas de grupo, mobilizando oralmente sentidos sobre a situação-problema, esboçando desenhos e diagramas, escrevendo significações por meio da escrita discursiva. Após, com a mediação de Ana Luisa, os alunos empenharam-se na tentativa de representar a situação-problema por meio de uma expressão algébrica, composta por números e letras, semelhante àquela privilegiada pela Matemática escolar. Ou seja, foi um processo de internalização que teve início na classe, na interação com o grupo e com a auxiliar Ana Luisa, e, finalmente, foi sintetizada individualmente por Carlos, com a construção da expressão algébrica simbólica.

Freitas (2005, p. 306), apoiada em Vigotski, descreve o que seria propriamente o processo de internalização:

A transformação dos processos interpessoais em intrapessoais constitui-se no que Vigotski(1984) chama de internalização, a reconstrução interna da atividade externa. Para ele, a internalização implica uma reorganização das atividades psicológicas que só se viável porque emerge de um terreno social, de uma interação com os outros por meio da linguagem. Sem os outros, a conduta instrumental não chegaria a converter-se em mediação significativa, em signos, e sem estes não seria possível a internalização e a construção das funções superiores. O momento mais significativo desse desenvolvimento ocorre justamente quando a fala e a atividade prática, antes linhas independentes, convergem. E isso só é possível em um contexto comunicativo em que adulto e criança interagem. A fala internaliza-se na criança pelo mesmo caminho do interpessoal para o intrapessoal, isto é, do social para o individual, ficando aí evidente a importância do outro.

Conforme Vigotski (apud Freitas, 2005) apresenta, a linguagem não é uma mera representação do pensamento. Vai além disso... “o pensamento não é simplesmente expresso em palavras: é por meio delas que ele passa a existir” (p. 309).

As primeiras interpretações de Carlos estão impregnadas de sentidos produzidos a respeito da atividade realizada. Para o autor, primeiramente o desenvolvimento da criança se dá no meio social, em interação entre seus pares, entre aluno e professor, para, depois, ocorrer de modo intrapessoal, interno, buscando reestruturar-se, ressignificando o que havia encontrado e ressignificando-se enquanto sujeito. Carlos,

depois desse episódio, era outro sujeito. E podemos concluir que Carlos não apenas aprendeu Álgebra, ele também vem constituindo-se pela linguagem.

CAPÍTULO 8

PONTOS PARA CONCLUIR E OUTROS PARA PROSSEGUIR...

A investigação, em algum momento, precisa ser finalizada... E o que ficou após ler, escrever, reler, reescrever, analisar, reanalisar? Salientei, no início deste texto, que a motivação desta investigação teve o seu princípio a partir de experiências docentes e de pesquisa, essa última quando era aluno da Licenciatura em Matemática. O tempo passou um pouco, mas tornar-me mais experiente na docência não me tirou a capacidade de vibrar por aquilo que é produzido e aprendido pelos alunos, pela possibilidade de compartilhar alguns dos resultados dessa pesquisa com outros colegas, professores e/ou pesquisadores em Educação Matemática.

Ao tentar responder à questão investigativa – **Como se dá o desenvolvimento da linguagem e do letramento algébricos de alunos do 7º ano, inseridos em um ambiente de exploração e investigação em aulas de Matemática?** – avalio que, por meio desta pesquisa, obtive resultados satisfatórios. Entretanto, tenho consciência de que eles são relativos às circunstâncias em que a pesquisa de campo foi realizada. Se ela tivesse ocorrido sob outras condições, poderia obter outros resultados e tirar outras conclusões. Por exemplo, considerando as mesmas tarefas aplicadas, o que poderia ter ocorrido se não fosse eu o professor responsável pelas classes? Não sei.

No caso desta pesquisa, não há dúvidas de que a produção escrita dos alunos foi modificada substancialmente durante o processo pedagógico. É visível a evolução entre as primeiras escritas (1ª atividade) e as últimas (3ª atividade) no uso de códigos matemáticos e algébricos para expressar suas significações. De fato, é possível evidenciar nessa evolução que a inter-relação entre a oralidade e a escrita nas aulas de Matemática, em uma perspectiva em que uma não anula nem subjuga a outra, deu condições para os alunos adentrarem no mundo do letramento matemático. Esse olhar para a oralidade surgiu durante o processo de coleta de dados da pesquisa. Eu e Ana

Luisa ficamos preocupados no início do trabalho de campo, em virtude da produção escrita apresentada pelos alunos. Nem mesmo nós, professores, esperávamos que a saída fosse por meio da oralidade. Podemos afirmar que essas crenças são resultado de nossa formação em uma dimensão autônoma de letramento, sendo a escrita supervalorizada, em detrimento da oralidade, como possibilidade de comunicar-se e argumentar matematicamente.

De fato, os alunos necessitavam de orientação sobre o modo como poderiam organizar as suas primeiras significações relativas à atividade matemática que estavam realizando. Depois de ter vivido outras experiências com aulas exploratório-investigativas, talvez eu tenha me esquecido de que essa foi a primeira atividade dessa natureza de meus alunos.

Desse modo, o desenvolvimento da pesquisa de campo, com a posterior análise do material coletado, tentou evidenciar o processo de constituição do letramento algébrico dos alunos. Em um ambiente de exploração e investigação, os alunos tomaram contato com problemas abertos que não são típicos da cultura da Matemática escolar. Isso lhes exigiu uma leitura diferenciada das tarefas propostas e um processo de escrita e reescrita de suas produções. Essa escrita diferenciava-se da escrita matemática antes utilizada, pois, para aquela, havia pouca ou nenhuma solicitação de argumentação e de justificação dos procedimentos e interpretações empregados nas resoluções.

O processo de letramento algébrico, como também o de outros letramentos – numérico, geométrico, estatístico – não ocorre exclusivamente por meio de aulas exploratório-investigativas. Porém, como mostrou a presente pesquisa, esse processo pode ser *catalisado*²⁰ por práticas de sala de aula que tenham como característica geral instigar e valorizar a participação e as produções dos alunos, sejam elas orais ou escritas. Mas isso implica em tornar os estudantes os principais protagonistas do processo de aprendizagem.

²⁰ Em Ciências Humanas, o termo “catálise” tem sido utilizado como figura de linguagem para representar “um processo que ativa e desencadeia a transformação ou a mudança das práticas sociais” (FIORENTINI, 2010, p. 24).

Nesta investigação, a iniciação a práticas de letramento algébrico, associada às aulas exploratório-investigativas, evidenciou um campo fértil do ponto de vista pedagógico e investigativo. Sob o ponto de vista pedagógico, em outras pesquisas realizadas, as investigações matemáticas mostraram-se um ambiente rico e potencializador do processo de ensinar e aprender Matemática, especialmente a aprendizagem algébrica (FIORENTINI, et al., 2005). As contribuições de minha pesquisa para o campo pedagógico referem-se ao olhar que devemos dar para as práticas de ensinar e de aprender Álgebra, as quais se assemelham às práticas de uma dimensão autônoma de letramento. A preocupação com a escrita algébrica, acompanhada de suas algebreiras cheias de manipulações, valorizando o aspecto sintático da Álgebra, pode dificultar que o aluno possa, de maneira simples, produzir Álgebra. Simples, mas que faça sentido e evite diversos porquês no futuro. Por exemplo, em uma resolução de uma equação, o aluno até pode “passar para o outro lado, realizando a operação inversa”, mas acredito que ele deva saber o porquê disso, sem matemáticas...

Sob o ponto de vista investigativo, o olhar para o ensino de Álgebra, na perspectiva do letramento, permitiu estabelecer relações entre os modelos de letramento apresentados por Street (2004) e aprofundar os estudos sobre essa temática.

A questão de investigação não foi completamente respondida, tendo em vista o tempo destinado ao trabalho de campo. Além disso, com o tempo de integralização do mestrado menor que o do doutoramento, tornou-se inviável um estudo longitudinal neste momento. Outro ponto relevante ao aspecto investigativo – a relação investigações matemáticas e letramento – mostrou-se fértil, com possibilidades de aprofundamento. As atividades exploratório-investigativas podem ser vistas como eventos letrados, isto é, situações em que práticas de letramento algébrico são mediadas por textos escritos produzidos pelo professor, por manuais didáticos, por outras mídias (jornais, encartes de propaganda, Internet, bulas ou receitas...), ou pelos próprios alunos, como foi com os alunos do 7º ano.

Como uma das preocupações da pesquisa passava pelo registro escrito das primeiras expressões algébricas dos alunos, foi necessária, e fundamental, a mediação docente. O papel do professor-escriva como mediador no processo de escrever e representar matematicamente permitiu aos alunos se expressarem e terem alguém para registrar suas significações e resoluções. No ato da docência, na prática cotidiana, não tinha me dado conta da importância de o ser um escriba para o aluno. Não devemos confundir o seu significado²¹ como alguém que substitui o outro na relação comunicativa, isto é, o aluno deve ser o agente que transmite o que deseja ser representado pelo professor.

A mediação, enquanto categoria de análise, colaborou para explicitar a importância do professor no processo de desenvolvimento do letramento algébrico. No episódio do aluno Carlos com a auxiliar de pesquisa Ana Luisa, ficou evidente um dos aspectos do modelo de desenvolvimento do letramento algébrico de Ray (2008): o andaime. O professor, a partir do que o aluno é capaz de significar, introduz gradativamente elementos importantes da linguagem algébrica, no nosso caso, a letra, como variável ou como número genérico.

Esta pesquisa mostrou que foi possível dar condições para os alunos saírem do estágio de aprendizagem em que se encontravam para galgar mais um degrau e aprofundar o seu conhecimento matemático, despertando-lhes a capacidade de ler, analisar e fazer uso de outras representações matemáticas que não sejam apenas aquelas apresentadas por uma conta.

Diferentemente de Ray (2008), que explorou histórias da literatura infantil para garantir a participação e o engajamento dos alunos, procurei privilegiar os contextos autênticos do letramento algébrico escolar, mas sob uma abordagem exploratório-investigativa, a qual também ajudou a despertar a curiosidade e o engajamento de meus alunos na atividade tipicamente matemática. O engajamento se manteve não apenas por isso, mas foi decorrente, também, do modo pelo qual os alunos se sentiram

²¹ s.m. Na Antiguidade, pessoa encarregada de escrever, como copista, secretário ou redator. / Doutor da lei entre os judeus. / Escrivão. / Fig. Funcionário subalterno que apenas copia textos. / Pej. Mau escritor. Extraído de <http://www.dicionariodoaurelio.com/Escriva>.

participantes e responsáveis pelo desenvolvimento da aula de Matemática e pelo seu próprio aprendizado.

Entretanto, após terem participado dessas práticas de letramento algébrico, não posso afirmar categoricamente que os alunos estariam letrados algebricamente. Como consta no título desta dissertação, essa foi apenas uma iniciação dos alunos no mundo da Álgebra. Entendo que um aluno pode ser considerado letrado algebricamente, se ele estiver em condições de ler, descrever, analisar, compreender, representar e escrever textos que utilizam códigos algébricos, sejam eles de natureza numérica, gráfica, retórica, esquemática, simbólica. Esses textos podem aparecer tanto na escola quanto fora dela.

Para Steen et al. (2001), sob o ponto de vista do letramento quantitativo, deveríamos olhar para a Matemática não somente pelas suas definições, mas também para os diferentes modos com que a Matemática é expressa na sociedade. Talvez, esse seja um caminho possível para o desenvolvimento de um ensino de Matemática preocupado com a aprendizagem e a formação cidadã.

Nesse sentido, pergunto: o que os alunos desta pesquisa aprenderam com tudo isso? Muito mais que representar algebricamente um número genérico ou a relação entre duas grandezas – um saber fazer que poderia ter sido adquirido mecanicamente e permeado de regras e exercícios –, os alunos aprenderam como fazer e como construir essa relação. Embora essa prática seja morosa, demandando mais tempo, interpreto que ela proporcionou um aprendizado mais significativo e durável.

Em síntese, posso afirmar que a aprendizagem obtida não ficou restrita à aquisição da escrita das fórmulas matemáticas. Destacaram-se um modo de aprender Matemática com significação e um modo de expressar, seja pela escrita, que revela a sua identidade, os anseios dos alunos diante de algo novo e inusitado, que é produzir Matemática, seja pela apresentação oral de suas ideias e raciocínios, estando eles corretos ou não, sendo validados e negociados não somente pelo professor, mas também pelos próprios alunos.

9 Quais foram as limitações? Em que se pode prosseguir?

Gostaria de ressaltar, além dos aspectos satisfatórios obtidos por esta investigação, as limitações encontradas durante o processo de pesquisa.

Como o próprio título remete, essa foi uma pesquisa que contemplou a iniciação dos alunos em práticas de letramento algébrico. Não posso afirmar que os alunos estejam letrados algebricamente, e sim que eles tiveram os seus primeiros contatos com o mundo da Álgebra em um período de um mês, no 7º ano da Educação Básica.

A questão do tempo disponível foi um fator limitante para o desenvolvimento de outras tarefas que pudessem aprofundar e contemplar outras funções da Álgebra, por exemplo, as equações. Após o término do período letivo de 2008 e, conseqüentemente, a interrupção da coleta de dados, eu ainda tinha a intenção de continuar essa atividade. Porém, o processo de atribuição de aulas impediu que eu pudesse acompanhar as mesmas classes.

O que não foi possível nesta investigação, em virtude do tempo reduzido para a coleta de dados, seria a continuidade de tarefas de cunho algébrico, que pudessem contemplar situações em que os alunos fariam uso da leitura e da escrita no cotidiano, como a interpretação de notícias de jornal ou texto científico que apresentassem diversas formas de manifestar representações algébricas – diagramas, expressões, gráficos, tabelas, entre outras.

Outra possibilidade poderia ser o desenvolvimento de tarefas exploratório-investigativas que abordassem outras funções da Álgebra, tendo em vista que nesta investigação, procurei contemplar a noção de Aritmética generalizada (número genérico) e a relação entre grandezas. Por que não contemplar as equações e suas incógnitas?

A investigação mostrou uma gama de possibilidades de continuidade dos estudos sobre o ensino da Álgebra na perspectiva do letramento algébrico, tendo em vista que, para os objetivos propostos, não tive condições de aprofundar os estudos e de analisá-los com mais cuidado.

Uma possível questão de investigação poderia ser relacionada ao letramento algébrico do professor que ensina Matemática. Quais são as suas concepções e as suas crenças a respeito da Álgebra ensinada na escola? Que intervenções são realizadas pelos professores de modo a desenvolver o letramento algébrico de seus alunos? Ou ainda, investigar as concepções que alunos dos cursos de licenciatura em Matemática fazem da Álgebra e dos conteúdos que, futuramente, virão a lecionar.

Essas são algumas questões que poderiam contemplar o letramento algébrico na formação continuada e inicial de professores que ensinam Matemática.

REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In: VALE, I. et al. **Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2006, p.29-48.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 10520**: informação e documentação. Citações em documentos: apresentação. Rio de Janeiro, 2002a. 7 p.

_____. **NBR 14724**. Informação e documentação. Trabalhos acadêmicos: apresentação. Rio de Janeiro, 2005. 9 p.

_____. **NBR 6023**. Informação e documentação. Referências: elaboração. Rio de Janeiro, 2002b. 24 p.

_____. **NBR 6024**. Informação e documentação. Numeração progressiva das seções de um documento escrito. Rio de Janeiro, 2003a. 3 p.

_____. **NBR 6027**. Informação e documentação. Sumário: apresentação. Rio de Janeiro, 2003b. 2 p.

_____. **NBR 6028**. Informação e documentação. Resumo: apresentação. Rio de Janeiro, 2003c. 2 p.

BARTON, D.; HAMILTON, M. La literacidad entendida como práctica social. In: ZAVALA, V.; NIÑO-MURCIA, M.; AMES, P. (eds.) **Escritura y Sociedad: nuevas perspectivas teóricas y etnográficas**. Lima: Red para El Desarrollo de las Ciencias Sociales en el Perú, 2004, p.109-139.

BEDNARZ, N.; JANVIER, B. Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (org.) **Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching**. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 115-136.

BELTRAME, J. T. **A álgebra nos livros didáticos**: um estudo dos usos das variáveis, segundo o Modelo 3UV. 2009. 157p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — PUC-SP, São Paulo (SP).

BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.). **As idéias da Álgebra**. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995, p. 23-37.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília, MEC/SEF, 1998. 148p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> Arquivo capturado em 21 mar.2010.

BROCARD, J.; DELGADO, C.; MENDES, F.; ROCHA, I.; SERRAZINA, L. Números e Álgebra: desenvolvimento curricular. In: VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARO, P. (org.) **Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação – Secção de Educação Matemática, 2006, p.65 – 92.

BROUSSEAU, G. Les Obstacles et les problemes em Mathématiques. In: **Recherches em Didactique de Mathématiques**. Bordeaux, 4[2]: p.165-198, 1983.

CARRAHER, D.; SCHILIMANN, A. D.; BRIZUELA, B. M.; EARNEST, D. Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. In: **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 37, n. 2, p. 87-115, 2006.

CARRASCO, L. H. M. Leitura e escrita na matemática. In: NEVES, I.C.B; SOUZA, J.V.; SCHÄFFER, N. O.; GUEDES, P.C.; KLÜSENER, R. (org.) **Ler e escrever: compromissos de todas as áreas**. 2ª Edição. Porto Alegre: Ed. Da Universidade/UFRGS, 1999, p.190-204.

CASTRO, J. F. **Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de matemática**. 2004. 197 p. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática). Campinas: FE/Unicamp.

CASTRO, J. F. Quadrados e Perímetros: uma experiência sobre aprender a investigar e investigar para aprender. In: FIORENTINI, D.; JIMENEZ, A. (org) **Histórias de aulas de**

matemática: compartilhando saberes profissionais. Campinas: Gráfica FE: Cempem, 2003, p. 69-79.

CONTI, K. C., SOARES, D. L. Primeiras Experiências em Aulas Investigativas. In: FIORENTINI, D., CRISTOVÃO, E. M. **Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática.** Campinas: Alínea, 2006, p.134-152.

D'AGOSTINI, A. Leitura e fundamentação teórica são fontes de conflitos. In: MORAES, R.; HACKMANN, B. G.; MANCUSO, R. **De Marte a Narciso: (sobre)vivências e dissertações de mestrado.** Ijuí: Ed. Unijuí, 2005, p. 61 – 74.

FIORENTINI, D. Pesquisando com professores – reflexões sobre o processo de produção e re-significação dos saberes da profissão docente. In: MATOS, J. F. FERNANDES, E. (Eds). **Investigação em Educação Matemática – perspectivas e problemas.** Lisboa: APM, 2000. p. 187-195.

_____. Quando acadêmicos da universidade e professores da escola básica constituem uma comunidade de prática reflexiva e investigativa. In: FIORENTINI, D.; GRANDO, R. C.; MISKULIN, R. G. S. (org) **Práticas de formação e de pesquisa de professores que ensinam matemática.** Campinas: Mercado de Letras, 2009, p.233-256.

_____. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M.C.; ARAÚJO, J.L. (Org.) **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004, p. 47-76.

_____. FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico.** Artigo apresentado no Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas e na Formação de Professores, Lisboa: FCUL, 2005 [on-line] Disponível na internet via <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc>. Arquivo capturado em 10 ago.2007.

_____. LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, 2006.

_____. MIORIM, M. A. Algumas Concepções de Educação Algébrica: Fundamentos para repensar o ensino da Matemática elementar. In: **Anais do III EPEM – Encontro Paulista de Educação Matemática**. Bauru, 1993, p. 29-35.

_____. MIORIM, M. A; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. In: **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 10, p.78-91, mar.1993.

FREITAS, M. T. A. Nos textos de Bakhtin e Vigotski: um encontro possível. In: BRAIT, B. (org.) **Bakhtin, dialogismo e construção do sentido**. Campinas: Editora da Unicamp, 2005, p. 295-314.

FREITAS, M. T. M. **A Escrita no Processo de Formação Contínua do Professor de Matemática**. 300 p. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, SP.

FONTANA, R. A. C. **Mediação Pedagógica na sala de aula**. Campinas: Autores Associados, 2000, 176 p.

GEE, J. P. Oralidad y literacidad: de El pensamiento salvaje a Ways with Words. In: ZAVALA, V.; NIÑO-MURCIA, M.; AMES, P. (eds.) **Escritura y Sociedad: nuevas perspectivas teóricas y etnográficas**. Lima: Red para El Desarrollo de las Ciencias Sociales en el Perú, 2004, p..23-55.

KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. In: GROUWS, D. A. (Ed.) **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Simon & Schuster Macmillan, 1992, p. 390-419.

MOURA, A.R.L.; SOUSA, M.C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. Campinas: **Zetetiké**, v.13, n. 24, p.11-45, jul-dez.2005.

LARROSA, J. Notas sobre a experiência e o saber da experiência In: **Revista Brasileira de Educação**, n. 19, p. 20-28, jan-abr.2002.

LAVE, J. La práctica del aprendizaje. In: CHAIKLIN, S.; LAVE, J. (Ed.). *Estudiar las practicas: perspectivas sobre actividad y contexto*. Buenos Aires: Amorrortu editores, 2001, p. 15-45.

LEE, L. An initiation into algebraic culture through generalization activities. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (org.) **Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching**. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 87-106.

MARTINS, M. S. C. **Oralidade, escrita e papéis sociais na infância** (Série Gêneros e Formação). Campinas: Mercado de Letras, 2008, 80 p.

MASON, J. Expressing generality and roots of algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (org.) **Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching**. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1996, p.65-86.

PINTO, R. A. **Erros e dificuldades no ensino da álgebra: tratamento dado por professores de 7a série em aula**. 1997. 110p. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática) — FE, Unicamp, Campinas (SP).

OLIVEIRA, H. M.; SEGURADO, M. I.; PONTE, J. P.; **Explorar, Investigar e Discutir na Aula de Matemática**. Actas do ProfMat96, Lisboa: APM, 1996, p. 207-213.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Coleção Tendências em Educação Matemática – Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

_____. Investigar a nossa própria prática. In: **Refletir e Investigar sobre a prática profissional**. Lisboa:APM, 2002, p. 5-28.

_____. SERRAZINA, L. Professores e Formadores Investigam a Sua Própria Prática: o Papel da Colaboração. In: **Zetetiké**. Campinas: Cempem - FE – Unicamp- v.11, n.20, Jul/Dez 2003, p. 51-84.

POWELL, A.; BAIRRAL, M. **A escrita e o pensamento matemático: interações e potencialidades**. Campinas: Papirus, 2006, 111p.

RADFORD, L. Some reflections on teaching algebra through generalization In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (org.) **Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching**. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1996, p.107-111.

RAY, S. N. E. **Evaluating the Efficacy of the Developing Algebraic Literacy Model: Preparing Special Educators to Implement Effective Mathematics Practices**. 2008.

409p. Tese (Doutorado em Filosofia). College of Education. University of South Florida. Extraído de <http://purl.fcla.edu/usf/dc/et/SFE0002797>. Data: 10 de Novembro de 2010.

ROJANO, T. The role of problems and problem solving in the development of algebra In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (org.) **Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching**. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 55 - 62.

ROJO, R. H. R. Letramento Escolar, Oralidade e Escrita em Sala de Aula: diferentes modalidades ou gêneros do discurso. In: SIGNORINI et al. (org.). **Investigando a relação oral/escrito**. – Campinas: Mercado de Letras, 2001, p. 51-76.

SCARLASSARI, N. T. **Um estudo de dificuldades ao aprender Álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do Ensino Fundamental**. 2007. 149p. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática) — FE, Unicamp, Campinas (SP).

SESSA, C. **Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas**. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2005, 128 p.

SIGNORINI, I. Construindo com a escrita “outras cenas de fala”. In: SIGNORINI et al. (org.). **Investigando a relação oral/escrito e as teorias do letramento**. – Campinas: Mercado de Letras, 2001, p.97 - 134.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. **BOLEMA** – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

SOUSA, A.S. **Metacognição e ensino da álgebra**: Análise do que pensam e dizem professores de matemática da Educação Básica. 2007. 184p. Dissertação (Mestrado em Educação) — FEUSP, São Paulo (SP).

SOUZA, E.R.; DINIZ, M.I.S.V. **Álgebra: das variáveis às equações e funções**. 2ª. Edição, IME – USP, 1996, 111 p.

STEEN, L. A. The Case for Quantitative Literacy. In: STEEN, L. A. (ed.) **Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative**. The Woodrow Wilson National Fellowship Foundation, 2001, p.1-12.

STREET, B. Los Nuevos Estudios de Literacidad. In: ZAVALA, V.; NIÑO-MURCIA, M.; AMES, P. (eds.) **Escritura y Sociedad: nuevas perspectivas teóricas y etnográficas**. Lima: Red para El Desarrollo de las Ciencias Sociales en el Perú, 2004, p. 81-107.

STREET, J. C.; STREET, B. La escolarización de la literacidad. In: ZAVALA, V.; NIÑO-MURCIA, M.; AMES, P. (eds.) **Escritura y Sociedad: nuevas perspectivas teóricas y etnográficas**. Lima: Red para El Desarrollo de las Ciencias Sociales en el Perú, 2004, p.181-210.

TUDELLA, A., FERREIRA, C., BERNARDO, C., PIRES, F., FONSECA, H., SEGURADO, I., & VARANDAS, J.. Dinâmica de uma aula com investigações. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999, p. 87-96. Extraído de http://ia.fc.ul.pt/textos/p_87-96.pdf. Data: 18 de Novembro de 2009.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilização de variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.). **As idéias da Álgebra**: traduzido por Hygino H. Domingues. – São Paulo: Atual, 1995, p. 9-22.

VIGOTSKI, L. S. A construção do pensamento e da linguagem: tradução de Paulo Bezerra. – São Paulo: Martins Fontes, 2000.

WENGER, E. *Comunidades de prática*: aprendizaje, significado e identidad. Barcelona: Paidós, 2001 (Original do Inglês em 1998).