

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

**A TENSÃO ENTRE RIGOR E INTUIÇÃO
NO ENSINO DE CÁLCULO E ANÁLISE:
A VISÃO DE PROFESSORES-PESQUISADORES
E AUTORES DE LIVROS DIDÁTICOS.**

Autor: Frederico da Silva Reis
Orientador: Prof. Dr. Dario Fiorentini

Este exemplar corresponde à redação final da
tese defendida por Frederico da Silva Reis e
aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 23/02/2001

Assinatura: _____

Comissão Julgadora:

CAMPINAS, 2001

Tese apresentada como exigência parcial para
obtenção do título de DOUTOR EM
EDUCAÇÃO na área de concentração:
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA à Comissão
Julgadora da Faculdade de Educação
da Universidade Estadual de Campinas,
sob a orientação do Professor Doutor
DARIO FIORENTINI.

DEDICATÓRIA

À minha mãe Arlete Traspadini Reis,
que sempre acreditou no meu potencial e tanto
fez para que eu chegasse onde agora cheguei,
sem medir esforços e sem economizar amor.

AGRADECIMENTOS

À minha querida esposa Aline Matuzalém Rincon Reis, professora de Geografia e de Amor, pelas muitas alegrias e dificuldades que juntos vivemos em família.

Aos meus filhos Thomas e Nicholas Rincon Reis, pela felicidade a mim proporcionada pelo simples pronunciar da palavra “pai”.

Aos meu sogros Américo e Antônia Rincon, que foram verdadeiros pais nos momentos em que mais precisei de ajuda, especialmente no primeiro ano de curso.

Aos meus irmãos, sobrinhas e cunhados, pela saudade que bateu forte nestes quatro anos de Campinas, mas que foi amenizada por telefonemas e visitas.

Aos irmãos da Igreja Luterana de Campinas, especialmente Roberval e Tânia, pela certeza de que tudo contribui para o bem daqueles que amam a Deus, meu maior “Doutor”.

Ao Prof. Dr. Dario Fiorentini, pela orientação correta e segura e acima de tudo, pela motivação e amizade que nunca precisaram ser revisadas.

À Prof^a. Dra. Vera Lúcia Xavier Figueiredo, pelo grande incentivo desde o momento da apresentação do projeto para a seleção ao doutorado até a defesa da tese.

Aos professores Antônio Miguel e Márcia Maria Fusaro Pinto, pelas sugestões apresentadas no exame de qualificação que muito contribuíram para a redação final da tese.

Aos professores Arlindo José de Souza Jr. e Tadeu Oliver Gonçalves, pelas contribuições enquanto colegas de curso e enquanto membros da banca de defesa.

Às professoras Ana Regina Lanner de Moura e Dione Lucchesi de Carvalho e aos colegas do Grupo de Pesquisa – Prática Pedagógica em Matemática – CEMPEM / FE / UNICAMP, especialmente Wilton, Giácomo, Nílson, Dale e Maria do Carmo, pelas discussões enriquecedoras que tanto contribuíram para minha formação profissional.

À funcionária Nadir Aparecida Gomes Camacho, pela competência na PG / FE.

Aos professores Roberto Ribeiro Baldino, Geraldo Severo de Souza Ávila, Djairo Guedes de Figueiredo e Elon Lages Lima, pelo total incentivo à realização deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, pela confiança em mim depositada quando da liberação para a realização do curso.

À Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa da UFOP que viabilizou a execução desta pesquisa mediante a concessão de uma bolsa dentro do programa CAPES / PICDT.

RESUMO

O objetivo deste estudo é compreender como a relação tensional entre rigor e intuição acontece e manifesta-se no ensino universitário de Cálculo e Análise. Isto é realizado mediante análise de manuais didáticos e de entrevistas semi-estruturadas com quatro professores-pesquisadores que destacam-se, nesta área, como autores de estudos e livros didáticos.

A pesquisa, além de abordar alguns aspectos históricos e epistemológicos do Cálculo e da Análise e de seu ensino, analisa algumas categorias de saberes docentes manifestados pelos depoentes bem como a percepção que os mesmos apresentam da relação entre rigor e intuição na prática pedagógica destas disciplinas e, especialmente, no contexto da formação do professor.

Os resultados mostram que esta relação quase sempre é desigual e dicotômica nas abordagens dos manuais didáticos e que o conjunto de posições defendidas pelos depoentes aponta para a necessidade de um rompimento com o ensino formalista atual, tendo em vista, principalmente, a formação de um professor de matemática com multiplicidade e flexibilidade de conhecimentos específicos, pedagógicos e curriculares.

ABSTRACT

The goal of this study is to understand how the tense relationship between rigor and intuition occurs in the tertiary level teaching of Calculus and Analysis. This is done face to analysis of didactic books and partly organized interviews with four professors / researchers, authors of investigations and didactic books.

The research, not only approaches some historical and specific aspects of Calculus and Analysis and of their teaching, but also analyses some categories of teacher knowledges showed by interviewees as well their perception about the relationship between rigor and intuition in pedagogical practice and, specially, in teacher's training.

The conclusions show that this relationship is almost always unequal and dichotomic in the didactic books approaching and that the interviewees' point of view converges to the rupture of actual formalist teaching objectifying, basically, the training of a mathematics teacher who has multiplicity and flexibility of specific, pedagogical and curricular knowledges.

APRESENTAÇÃO

Este trabalho se propõe a discutir as relações existentes entre o rigor e a intuição no ensino de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Matemática na universidade.

A transição do Cálculo para a Análise nos mostra, historicamente, como a busca pelo rigor em substituição da intuição influenciou / marcou o desenvolvimento das disciplinas e com isso, influencia / marca o seu ensino, ainda hoje.

Para desenvolvermos esta tese, optamos por realizar, inicialmente, um estudo histórico-filosófico sobre o desenvolvimento do Cálculo e da Análise, atendo-nos à questão da transição ocorrida desde o século XVII (Fundamentos do Cálculo) até o século XIX (Aritmetização da Análise).

Nosso interesse maior é a construção de alguns direcionamentos que colaborem para a reflexão e a transformação do ensino de Cálculo e Análise. Por isso, julgamos fundamental investigar o saber experiencial de professores que, além de conhecerem o desenvolvimento histórico dessas disciplinas, possuem longa experiência profissional como professores que vem pesquisando, lecionando e escrevendo sobre o ensino de Cálculo e Análise. Assim sendo, optamos pela realização de entrevistas com quatro professores-pesquisadores e autores de livros didáticos: Prof. Roberto Ribeiro Baldino – UNESP – Rio Claro; Prof. Geraldo Ávila – UFG; Prof. Djairo Guedes de Figueiredo – UNICAMP e Prof. Elon Lages Lima – IMPA – RJ, cujas transcrições seguem em anexo.

No Capítulo 1, é apresentada uma breve introdução ao problema relacionando o nosso interesse na pesquisa com os fatos que demarcaram nossa formação acadêmica e experiência docente. Procuramos também, construir uma justificativa da relevância do problema que, após ser identificado, é seguido da configuração da pesquisa e dos procedimentos metodológicos utilizados, tanto para coleta como para análise das informações.

Apresentamos, no Capítulo 2, uma breve revisão da literatura nacional e estrangeira relacionada com o ensino de Cálculo e Análise, com destaque para os trabalhos do Professor Roberto Baldino e do “Advanced Mathematical Thinking”.

No Capítulo 3, preocupamo-nos em identificar alguns aspectos da história do desenvolvimento do Cálculo e da Aritmetização da Análise, analisando ainda, sua influência no ensino de tais disciplinas.

O Capítulo 4, considerado central nesta tese, discute alguns aspectos rigorosos e intuitivos do ensino de Cálculo e Análise. Também é discutida, mais especificamente, a relação dicotômica / não-complementar entre rigor e intuição verificada no ensino atual, à luz da questão da formação do professor de matemática.

No Capítulo 5, analisamos as abordagens rigorosa e intuitiva de determinados tópicos em alguns manuais didáticos de Cálculo e Análise, utilizados em diversas universidades brasileiras. Os tópicos escolhidos para esta análise foram: Limites e Continuidade.

Apresentamos, no Capítulo 6, uma breve descrição profissional de cada um dos entrevistados, destacando alguns dos fatos que marcaram sua trajetória acadêmica e profissional e que os notabilizaram enquanto pesquisadores e autores de materiais curriculares no ensino de Cálculo e Análise.

No Capítulo 7, exploramos as categorias de saberes profissionais do professor de Cálculo e de Análise, a partir da análise das entrevistas. Estes saberes foram categorizados em: específicos, pedagógicos e curriculares.

Por fim, no Capítulo 8, procuramos ressignificar a tensão entre o rigor e a intuição no ensino, destacando novas perspectivas para o ensino de Cálculo e o papel da Análise na formação do professor de matemática.

Concluindo, apresentamos os resultados da pesquisa, que apontam para a necessidade de se romper com uma visão dicotomizada entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. Esta visão deve ser superada mediante a constatação / percepção de que há uma relação tensional entre rigor e intuição a ser seriamente considerada no contexto da formação do professor.

Esta percepção, no entanto, só é possível, mediante a realização de pesquisas em sala de aula, as quais podem transformar o professor de Cálculo e Análise num sujeito reflexivo e investigativo de sua própria prática pedagógica.

SUMÁRIO

RESUMO

ABSTRACT

APRESENTAÇÃO

CAPÍTULO 1

O PERCURSO DE CONSTRUÇÃO DESTE ESTUDO..... 11

1.1) Alguns antecedentes estudantis e profissionais que motivaram este estudo

1.1.1) A graduação: uma paixão

1.1.2) A pós-graduação: uma opção

1.1.3) A experiência docente: uma nova paixão

1.1.4) O Doutorado em Educação: uma nova opção

1.2) Configurando um problema de estudo

1.2.1) Questionando o ensino de Cálculo

1.2.2) Questionando o ensino de Análise

1.2.3) Apresentando uma hipótese de trabalho e a questão de investigação

1.3) Configuração da pesquisa e metodologia

1.3.1) Procedimento de coleta de informações: o caso dos livros didáticos

1.3.2) Procedimento de coleta de informações: o caso das entrevistas

1.3.3) A análise e o tratamento dos dados

CAPÍTULO 2

ALGUNS ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE CÁLCULO

E ANÁLISE: Uma breve revisão bibliográfica..... 35

2.1) Os diferentes modos de produzir significados para os conceitos do Cálculo,
segundo o MTCS

2.2) A contribuição fundamental dos estudos do Professor Roberto Baldino

2.3) Alguns trabalhos relacionados ao ensino de Cálculo e Análise apresentados no ICME 8

2.4) A contribuição fundamental dos estudos do "Advanced Mathematical Thinking"

CAPÍTULO 3

ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS ACERCA DO CÁLCULO E DA ANÁLISE E SUA INFLUÊNCIA NO ENSINO..... 53

- 3.1) Alguns elementos da história do Cálculo
- 3.2) A Aritmetização da Análise
- 3.3) A influência da “tradição” dos limites no ensino de Cálculo
- 3.4) A influência da Aritmetização da Análise no ensino de Análise

CAPÍTULO 4

RIGOR E INTUIÇÃO NO ENSINO DE CÁLCULO E ANÁLISE E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA..... 69

- 4.1) O que há de intuitivo no ensino de Cálculo ?
- 4.2) O que há de rigoroso no ensino de Análise ?
- 4.3) A questão da formação do professor de matemática
 - 4.3.1) A prova rigorosa na formação do professor de matemática
 - 4.3.2) O pensamento flexível e os conhecimentos procedimental e conceptual

CAPÍTULO 5

O CURRÍCULO PÚBLICO DE CÁLCULO E ANÁLISE: A tensão entre rigor e intuição nos manuais didáticos..... 91

- 5.1) A organização curricular do Cálculo presente em alguns livros didáticos
- 5.2) Os livros didáticos de Cálculo e Análise do Professor Geraldo Ávila
- 5.3) A organização curricular da Análise presente em alguns livros didáticos

CAPÍTULO 6

APRESENTANDO OS PROTAGONISTAS DESTE ESTUDO..... 137

- 6.1) O Professor Roberto Ribeiro Baldino
- 6.2) O Professor Geraldo Severo de Souza Ávila
- 6.3) O Professor Djairo Guedes de Figueiredo
- 6.4) O Professor Elon Lages Lima

CAPÍTULO 7

OS SABERES PROFISSIONAIS DO PROFESSOR DE CÁLCULO E DE ANÁLISE NAS VOZES DOS DEPOENTES..... 149

- 7.1) Saberes do Cálculo e da Análise enquanto campos de conhecimento
historicamente constituídos
- 7.2) Saberes curriculares relativos ao ensino de Cálculo e Análise
- 7.3) Saberes pedagógicos do conteúdo em face dos saberes da experiência docente

CAPÍTULO 8

RESSIGNIFICANDO A RELAÇÃO ENTRE RIGOR E INTUIÇÃO NO ENSINO DE CÁLCULO E ANÁLISE NO CONTEXTO DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA..... 175

- 8.1) Níveis de rigor e exemplos de intuição
- 8.2) A ortodoxia ϵ -ônica no ensino de Limites e Continuidade
- 8.3) Buscando novas perspectivas para o ensino de Cálculo
- 8.4) O papel da Análise na formação do professor de matemática

CONSIDERAÇÕES FINAIS..... 195

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... 205

APÊNDICE

ALGUNS TRABALHOS APRESENTADOS NO ICME-8..... 213

ANEXOS..... 221

- A.1) Entrevista com o Prof. Roberto Ribeiro Baldino – UNESP – Rio Claro
- A.2) Entrevista com o Prof. Geraldo Severo de Souza Ávila – UFG
- A.3) Entrevista com o Prof. Djairo Guedes de Figueiredo – UNICAMP
- A.4) Entrevista com o Prof. Elon Lages Lima – IMPA – RJ

CAPÍTULO 1

O PERCURSO DE CONSTRUÇÃO DESTE ESTUDO

“Finalmente, julgo eu, seria capaz de olhar para o Sol e de o contemplar, não já a sua imagem na água ou em qualquer sítio, mas a ele mesmo, no seu lugar.”

Platão

Este capítulo inicial pontua alguns antecedentes de nossa carreira discente e docente que, por paixão ou por opção, certamente colaboraram para que realizássemos o presente estudo. Acreditamos que nossa opção por realizar, a partir de 1990, o Mestrado em Matemática e, a partir de 1997, o Doutorado em Educação Matemática, foi sempre feita / guiada por nossa paixão pela profissão de Professor de Matemática, exercida na Universidade Federal de Ouro Preto, desde 1992.

Procuraremos, também, configurar nossa questão de investigação que pode ser enquadrada dentro de uma linha de pesquisa relacionada ao ensino superior, especificamente, ao ensino de Cálculo e Análise. Destacaremos alguns questionamentos em relação ao ensino destas duas disciplinas como forma de obter alguns elementos que demonstrem a relevância da pesquisa e justifiquem a pertinência da questão central de investigação.

Em relação à questão metodológica, explicitaremos os procedimentos utilizados tanto para a coleta de informações como para a análise das entrevistas realizadas com professores-pesquisadores e para a análise de manuais didáticos.

1.1) ALGUNS ANTECEDENTES ESTUDANTIS E PROFISSIONAIS QUE MOTIVARAM ESTE ESTUDO

Inicialmente, procuremos estabelecer alguns fatos que marcaram nossa trajetória de vida discente e docente, os quais, irremediavelmente, influenciaram a opção pela realização do presente estudo.

1.1.1) A graduação: uma paixão

No 1º semestre de 1986, ingressei no curso de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo – UFES, inicialmente com a idéia de fazer Licenciatura Plena em Matemática e ministrar aulas no 1º e 2º graus. Estas opções (de curso e de vida), entretanto, mudariam no decorrer do curso. Naquele semestre inicial, cursei a disciplina de “Cálculo I” , pela qual aguardava ansiosamente, já que na 3ª série do 2º grau, ao concluir o curso técnico de Edificações na Escola Técnica Federal do Espírito Santo – ETFES, havia estudado, em matemática, uma introdução aos limites e à derivada. Essa breve iniciação me fascinou de tal maneira que mudei minha opção no vestibular, de Arquitetura para Matemática.

Como a grande maioria dos meus colegas calouros, resolvia a maioria dos exercícios do livro-texto utilizado, *Cálculo Diferencial e Integral 1* – Thomas & Finney, aplicando corretamente todas as regras de derivação e integração. Entretanto, já naquele período, uma coisa me intrigava profundamente: do que realmente se tratava a “complexa” definição de limite envolvendo elementos tão “estranhos”, então chamados de épsilons e deltas ? E mais: como eu e meus colegas manejavamos tão bem as técnicas de cálculo de limites e ninguém sabia, com um mínimo grau de profundidade, o que realmente significava uma indeterminação do tipo $[0 / 0]$ ou $[\infty / \infty]$?

Um outro fato que também vale recordar é que meu professor, que sempre foi tido – e de fato, era – um dos melhores do Departamento na área de Cálculo, afirmava, ao enunciar alguns teoremas, que as demonstrações dos mesmos só ganhariam real importância na disciplina de “Análise I”, integrante do 5º período do curso. Eu não entendia

se tais demonstrações não tinham realmente a menor importância ou se, ao contrário, eram tão difíceis que ainda não estaríamos aptos para entendê-las.

Após cursar “Cálculo I e II” nos dois primeiros períodos e ter me tornado monitor daquelas disciplinas, no 1º semestre de 1987 fui convidado a ministrar um curso de “Introdução ao Cálculo”, oferecido para os vestibulandos aprovados em diversos cursos da área de Ciências Exatas, cujo objetivo era “corrigir” falhas na sua formação matemática do 2º grau, visando um melhor desempenho nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Recordo-me que alguns tópicos integrantes do Conteúdo Programático do curso eram: “Introdução à Lógica Matemática”, onde era apresentada uma breve teoria dos conjuntos com notações como $A \cap B = \{ x / x \in A \wedge x \in B \}$ e demonstrações de resultados como $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; estudo de funções reais de uma variável, com destaque para as funções polinomiais e racionais; noção intuitiva de limites, com a apresentação da função $y = 1 / x$. Embora eu tenha sido bem avaliado pelos alunos e a maioria dos alunos tenha sido bem sucedida, eu não obtive elementos consolidados que pudessem comprovar a eficácia do curso em relação aos objetivos inicialmente propostos. O principal questionamento que eu levantava era: minimamente, estariam aqueles alunos "aptos" a obter um bom desempenho nas disciplinas de conteúdo matemático do 1º período de seus respectivos cursos ? Eu julgava e, fortemente, esperava que sim !

Finalmente, no 1º semestre de 1998, cursei a disciplina de “Análise I”, considerada pelos alunos veteranos como a mais difícil de todo o curso. Surpresa: logo nos primeiros capítulos do livro-texto, *Curso de Análise – Volume I – Elon Lages Lima*, iríamos estudar os Números Reais. Ora, desde o 1º grau eu já sabia tudo o que era necessário saber sobre os números reais: formavam um conjunto infinito; composto pelos números racionais (inteiros positivos, negativos e frações) e pelos números irracionais ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... e algumas aberrações como π). As noções de enumerabilidade e densidade me deixaram extasiado e adorava perder horas demonstrando propriedades do supremo e do ínfimo. Não ! Aquela não me parecia ser a disciplina mais difícil mas sim, a mais importante do curso pois, por exemplo, dois anos após a "visualização inicial" do “Teorema do Valor Intermediário” agora o demonstraríamos, de fato, com épsilons, deltas e tudo o mais que a topologia da reta permitisse.

Após ter me tornado monitor de “Análise I”, decidi cursar as disciplinas do Bacharelado em Matemática Pura, especialmente “Análise II”, visando obter uma melhor preparação para fazer Mestrado em Matemática.

1.1.2) A pós-graduação: uma opção

Em janeiro de 1989, fiz o curso de verão no Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA – RJ, cursando a disciplina “Análise Real”, com o Prof. Elon Lages Lima, autor do conceituado livro-texto que eu havia estudado em “Análise I”. Durante o curso, foram utilizados notas de aula que mais tarde se constituiriam no livro *Análise Real* – Volume 1, notadamente mais “enxuto” que o *Curso de Análise* e introduzindo o estudo da fórmula de Taylor, das funções convexas e côncavas, das aproximações sucessivas e método de Newton dentro das aplicações da derivada. Após esta experiência ímpar de passar o verão na cidade do Rio de Janeiro demonstrando lemas, teoremas e corolários, um ano depois, após a conclusão da graduação, eu estava de volta para iniciar minha pós-graduação.

Em 1990, iniciei o Mestrado em Matemática na Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, cujo currículo previa a realização de dois blocos de disciplinas: um primeiro bloco constituído por disciplinas obrigatórias das áreas de Análise, Álgebra, Geometria Diferencial e Equações Diferenciais; um segundo bloco constituído por disciplinas optativas de uma das áreas, a ser escolhida pelo aluno. Após cursar as disciplinas obrigatórias, realizei meu exame de qualificação referente às disciplinas de Análise e Álgebra e optei por cursar as disciplinas eletivas na área de Análise: “Introdução à Análise Funcional”, “Análise Funcional Aplicada”, “Medida e Integração” e “Seminário de Análise”.

Após concluir com sucesso as disciplinas do núcleo comum e da área de Análise, a aprovação no exame de qualificação foi, naquele instante, a certeza de que eu estava preparado para ingressar no magistério superior. Afinal de contas, minha formação teórica / matemática já estava praticamente concluída (só faltava a dissertação de mestrado, que julgava não passar de uma introdução à pesquisa em Matemática) e minha formação

prática / pedagógica, que na época considerava bem menos importante e muito mais fácil, seria construída "com o tempo", somente a partir de minha própria "experiência".

Pensando assim, no início de 1992, fui aprovado num concurso para Professor Auxiliar na Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, o que me obrigou a interromper a realização da minha dissertação de mestrado, que só pude defender em agosto de 1994, sob o título *Generalização de Operadores Auto-adjuntos aos Espaços de Banach Complexos*, sob a orientação do Prof. Dr. Jorge Alberto Barroso. Atualmente, ao reler meu trabalho, o que mais me salta aos olhos é a total ausência de qualquer gráfico ou cálculo numérico dentro daquele emaranhado de definições e teoremas, destinando aos números um papel “burocrático”: página 10, Capítulo 2, Teorema 4.1 e nada além, o que não impediu, logicamente, que eu me tornasse um “Mestre em Matemática”.

1.1.3) A experiência docente: uma nova paixão

No início de 1987, quando cursava o 3º período da graduação, fui convidado para ministrar aulas de Matemática no 2º grau que estava sendo implantado naquele ano na cidade onde morava, Nova Almeida – ES, uma pequena vila de pescadores com pouco mais de 10.000 habitantes, localizada a 50 km da capital, Vitória. Dentre os meus alunos, havia muitos que foram meus colegas de 1ª à 4ª série primária e que não haviam tido condições financeiras de continuar os seus estudos em Vitória. Já na primeira aula, percebi que tinha um enorme desafio pela frente: muitos alunos estavam sem estudar há 10, 15 e até 20 anos e não mais se recordavam sequer de como efetuar $2 - 5$. Lembro-me que durante um semestre tive que fazer uma revisão de tópicos básicos de Álgebra e Geometria do 1º grau para, somente no final do ano, introduzir o estudo de funções. Penso que tomei a decisão acertada pois, ao final do 3º ano, havia conseguido cumprir quase todo o programa das disciplinas "Matemática, Estatística e Matemática Financeira" e hoje, o professor de Matemática do Ensino Médio daquela cidade é um de meus ex-alunos que, posteriormente, cursou Matemática na UFES. Orgulho-me muito de ter sido o paraninfo daquela 1ª Turma de Formandos da cidade, no final de 1989.

Em 1992, então, comecei minha carreira de professor universitário no Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de

Ouro Preto – DEMAT / ICEB / UFOP, inicialmente como Professor Auxiliar e dois anos mais tarde, após concluir o meu mestrado, como Professor Assistente, categoria à qual ainda pertenço atualmente. No 1º semestre daquele ano, ministrei uma disciplina chamada “Elementos de Cálculo Diferencial e Integral”, integrante do novo currículo do curso de Farmácia, implantado exatamente naquele ano. Como existia apenas uma ementa da disciplina sem um conteúdo programático definido, decidi não adotar livro-texto. Também tomei a iniciativa de procurar o Presidente do Colegiado do Curso de Farmácia e indagá-lo a respeito das disciplinas dos períodos subsequentes que possuíam a disciplina de Cálculo como pré-requisito. Este sugeriu-me procurar os professores de Físico–Química (disciplina oferecida pelo Departamento de Química) e Bio–Física (disciplina oferecida pelo Departamento de Ciências Biológicas). Estes, por sua vez, ressaltaram a utilidade dentro de suas disciplinas dos seguintes tópicos: funções reais de uma ou duas variáveis; regras de derivação e derivadas parciais; noções básicas de integração.

Mas como ministrar um conteúdo estimado para 120 horas numa disciplina de 90 horas ? Não tive dúvidas: eliminei uma grande parte das técnicas de cálculo de limites e outra boa parte das aplicações da derivada, especialmente as que envolviam derivadas de funções trigonométricas inversas e funções hiperbólicas, já que tal conteúdo não serviria, de fato, como um pré-requisito para as disciplinas específicas. Apesar de ter ouvido algumas críticas de colegas de departamento, o reconhecimento obtido junto aos professores acima mencionados me aliviaram do peso da “ousadia”.

No 2º semestre de 1992, fui selecionado para ministrar “Cálculo I” para as Engenharias (Civil, Metalúrgica, Geológica e de Minas). É óbvio que eu me sentia, na época, muito bem preparado para tal tarefa; afinal de contas, minha área de concentração no mestrado havia sido Análise e Cálculo...bem, Cálculo era apenas uma “Análise para principiantes”, em minha visão à época. Adotei o livro-texto *Cálculo A* – Flemming & Gonçalves, que julgava ser adequado por sua teoria “resumida”, exemplos “importantes” e muitos, mas muitos exercícios de “fixação”.

Mas, após os capítulos iniciais sobre Números Reais e Funções, considerados válidos pelos alunos por revisar tópicos já estudados no 2º grau, deparei-me com o capítulo de Limites: noção intuitiva; definição; unicidade do limite; propriedades dos limites; limites laterais; cálculo de limites; limites no infinito; limites infinitos; propriedades dos limites

infinitos; limites fundamentais e finalmente, continuidade. Logo reconheci que toda a formação matemática adquirida no mestrado não era suficiente para me diferenciar, na essência, do meu professor de “Cálculo I”. Como então deveria explorar o Cálculo de modo a evitar que meus alunos se deparassem com as mesmas contradições / dúvidas que me incomodavam até bem pouco tempo atrás: ϵ 's, δ 's, lim's ??? Perguntava-me por que e para que tudo isso ???. Ao final do semestre, o índice de reprovação, na faixa dos 40 %, ‘pareceu bastante aceitável diante do fato de que outros professores da disciplina de outras turmas não tiveram aprovados sequer a metade dos alunos matriculados.

A explicação para índices de reprovação que na maioria das disciplinas variavam entre 20 % e 60 % era mais simples do que inquietante: os alunos eram extremamente mal preparados ! Eu, então, me perguntava: Mas, quais alunos ? Os mesmos aprovados no vestibular que elaborávamos ? E nós, professores, nada podíamos fazer senão aceitar passivamente o “despreparo” ?

Estas questões, nada fáceis de ser respondidas, foram ficando um tanto quanto abrandadas / esquecidas à medida que, nos semestres seguintes, fui ministrando “Cálculo II” e “Cálculo III”, cujo índice de reprovação oscilava entre 10 % e 30 %, devido ao “peneiramento” executado por “Cálculo I” e “Geometria Analítica”. Para aquelas disciplinas adotei como livro-texto *Cálculo com Geometria Analítica – Volume 2 – Swokowski*. Esta escolha foi norteadada pelos mesmos critérios que considerava válidos para o livro-texto de “Cálculo I”: pouca teoria e muitos exercícios, ou seja, pouco blá-blá-blá e muita prática !

Ainda na graduação, ministrei aulas de Cálculo e Álgebra para o curso de Ciência da Computação, no qual não havia o problema de altos índices de reprovação, fato este atribuído à altíssima concorrência no vestibular. Entretanto, as disciplinas de Cálculo para o curso de Computação possuíam o mesmo conteúdo programático que as disciplinas oferecidas para os cursos de Engenharia, já que não existia até então um laboratório específico para ensino de matemática utilizando computadores, o qual somente seria criado em 1997. Logo, as disciplinas eram ministradas indistintamente para os cursos da área de exatas.

Já na pós-graduação, tive a oportunidade de ministrar as disciplinas de “Cálculo Avançado I” e “Cálculo Avançado II” no curso de Especialização em Matemática,

oferecido pelo meu departamento no período de julho de 1992 a janeiro de 1994. Os alunos eram professores de matemática de rede pública do estado de Minas Gerais e, em sua maioria, formados em Licenciatura Curta em Matemática (Licenciatura em Ciências, com habilitação em Matemática) por faculdades do interior mineiro. Do ponto de vista do cumprimento da ementa, penso que ministrei algo como “Cálculo Semi-Avançado I e II”, mas a experiência foi extremamente válida, em especial pelo contato, após três anos, com o cotidiano do professor de matemática de 1º e 2º graus, mesmo que estivesse então, numa outra posição: a de formador deste professor !

Tamanha responsabilidade só me incentivou a coordenar o próximo curso de Especialização em Matemática, oferecido no período de julho de 1995 a janeiro de 1997, para o qual recebemos uma quota de trinta bolsas de estudo concedidas pela CAPES a serem distribuídas para os alunos selecionados de um total de cerca de duzentos inscritos. Transformei minhas disciplinas em “Cálculo Diferencial e Integral” e “Análise Real” dentro do novo currículo por mim elaborado e que contemplava, dentre outras, as disciplinas “Introdução à Lógica Matemática”, “Tópicos de Educação Matemática I”, “Tópicos de Educação Matemática II” e “Métodos e Técnicas de Pesquisa”. A partir desta experiência de coordenar um curso de formação continuada de professores de matemática atuantes nos ensinos fundamental e médio, comecei a me decidir por uma mudança de direcionamento em minha vida acadêmica.

1.1.4) O Doutorado em Educação: uma nova opção

No ano de 1994, assumi a coordenação de um dos maiores e mais antigos projetos de extensão da UFOP: o “Projeto Matemática 1º grau”, cuja proposta era a implantação de uma nova proposta didático-pedagógica para o ensino de matemática nas quatro séries iniciais do 1º grau. A proposta AME-Atividades Matemáticas que Educam, de autoria dos professores Reginaldo Naves de Lima e Maria do Carmo Vila da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, estava sendo implantada em 6 escolas da rede pública da região de Ouro Preto.

O contato com as professoras e os alunos do primário através das reuniões, treinamentos e seminários me enriqueceram profundamente, a ponto de relatar tal

experiência num congresso em Cuba, em 1995¹. Naquele mesmo ano, o “Projeto Matemática 1º grau” integrou o “Programa de Capacitação e Informatização no Ensino Fundamental da cidade de Ouro Preto – MG, nas áreas de Matemática e Ciências”².

Em janeiro de 1995, na qualidade de Chefe do Departamento de Matemática da UFOP fui convidado para integrar a Banca Examinadora de um Concurso Público para Professor de Matemática da Escola Técnica Federal de Ouro Preto – ETFOP e pude constatar num grupo de professores de matemática daquela escola, o desejo de aperfeiçoar sua formação matemática já que todos eles haviam se graduado em Engenharia pela UFOP, com exceção do Chefe do Departamento, licenciado em Matemática. Naquele ano, então, ofereci como projeto de extensão universitária o “Curso de Análise Real”, destinado àqueles docentes da ETFOP que nunca haviam estudado Análise Matemática. Ao trabalhar com o livro *Análise Real* – Volume 1 do Prof. Elon Lages Lima, surpreendi-me ao constatar que aqueles professores não conseguiam debater, com um certo grau de profundidade, questões ligadas aos números reais tais como: Qual conjunto é “maior”: os racionais ou os irracionais ? Afinal de contas, o que é o “infinito”: um número, um símbolo ou um conceito ?

A partir dali, comecei a questionar: Seria a Análise Real fundamental para a formação de um professor universitário ou do ensino médio ? Seria “aquela” Análise constituída apenas por teoremas e demonstrações, tal como eu havia estudado e que agora eu procurava reproduzi-la ?

Em julho de 1996, participando do ICME 8 – 8th International Congress of Mathematical Education – assisti à exposição de alguns (poucos) trabalhos apresentados dentro do grupo temático de Ensino Superior que versavam sobre o Cálculo enquanto “disciplina instrumental”. Instrumental para quem: para o professor, para o aluno ou para o profissional ?

¹ “Una Nueva Propuesta para la Enseñanza de Matematica en la Escuela Primaria: la Experiencia del Proyecto Matematica 1º grado en Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil” – Congresso “Pedagogia 95 – Encuentro por la Unidad de los Educadores Latinoamericanos”, realizado em Havana – Cuba, em fevereiro de 1995.

² Este projeto foi apresentado e contemplado com verbas pelo Programa de Fomento à Extensão Universitária – PROEXTE – 1995 da Secretaria de Educação Superior – SESu / MEC.

Diante destas (e de muitas outras) reflexões e visando ao processo de seleção para pós-graduação em 1997, decidi elaborar e apresentar um projeto de pesquisa inicialmente intitulado “O Papel do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Real na Formação do Pensamento Matemático”, o qual deu origem a esta tese de doutorado em Educação, na área de concentração em Educação Matemática da FE – UNICAMP.

1.2) CONFIGURANDO UM PROBLEMA DE ESTUDO

Antes de formular uma questão de estudo, estabeleceremos alguns questionamentos que problematizam o ensino de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise Real.

1.2.1) Questionando o ensino de Cálculo

O ensino de Cálculo nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes dos primeiros períodos, matriculados nesta disciplina. (p. 4)

Com esta abordagem inicial, a Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, destaca a necessidade de se aprofundar a discussão sobre o ensino de Cálculo, em um de seus boletins informativos do ano de 1995 (N° 6).

É óbvio que o questionamento dos problemas no ensino de Cálculo, ali levantados, é feito, basicamente, à luz da perspectiva de se resolver o problema do alto índice de reprovação e a consequente evasão dos alunos. Se considerarmos índices na faixa de 30 % a 50 % de reprovação, verificados numa grande parte das universidades públicas brasileiras, que em algumas o índice chega a 60 % e que em poucas o índice se aproxima de 20 %, o ensino de Cálculo realmente deve se transformar num sério objeto de investigação por parte dos pesquisadores em Educação Matemática, que terão pela frente um enorme desafio no âmbito do ensino superior.

Comparando, ainda que de forma simplista, a situação com uma encenação teatral vemos, de um lado, os atores (professores) atuando em uma peça mal ensaiada e mal dirigida, fazendo com que o público (alunos), de outro lado, não capte sua mensagem e se retire antes do último ato. De quem é a culpa no palco da sala de aula ? Dos atores e sua má performance ou do público e sua insensibilidade ? Ou seria do diretor ?

Uma das coordenadoras de um projeto especial de apoio ao ensino de Cálculo da UFRJ³, BARRETO (1995), ao ser questionada a respeito dos altos índices de reprovação nas disciplinas iniciais de Cálculo e dos motivos que levam os alunos a não apresentarem um bom desempenho nas mesmas, não vacila em afirmar que o aluno e a escola são os principais responsáveis:

As causas são muitas e já bem conhecidas, principalmente a má formação adquirida durante o 1º e 2º graus, de onde recebemos um grande contingente de alunos passivos, dependentes, sem domínio de conceitos básicos, com pouca capacidade crítica, sem hábitos de estudar e conseqüentemente, bastante inseguros. (p. 4)

Está aí retratada uma visão muito comum entre os professores de Cálculo, de que a formação inadequada dos alunos é a principal causa dos problemas no processo ensino-aprendizagem de Cálculo.

Por outro lado, na visão discente, as deficiências maiores se encontram no ensino, sobretudo na forma como o professor conduz sua prática pedagógica.

O professor, segundo BECKER (1995), tende a encaminhar o processo de ensino e aprendizagem sob uma das formas pedagógicas seguintes:

- a) Uma pedagogia centrada no professor, que tende a valorizar relações hierárquicas que, em nome da transmissão do conhecimento, acabam por produzir ditadores por um lado e indivíduos subservientes, anulados em sua capacidade criativa, por outro. A epistemologia empirista fundamenta e legitima essa forma pedagógica;

³ O projeto em questão chamava-se "Atendimento Especial em Cálculo I" e era realizado no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ.

- b) Uma pedagogia centrada no aluno, que pretende enfrentar os desmandos autoritários do modelo anterior, atribuindo ao aluno qualidades que ele não tem, como: domínio do conhecimento sistematizado em determinada área, capacidade de abstração suficiente, especialmente na área de atuação específica do professor e volume de informações devidamente organizadas. A epistemologia apriorista fundamenta e legitima essa forma pedagógica;
- c) Uma pedagogia centrada na relação, que tende a desabsolutizar os pólos da relação pedagógica, dialetizando-os, sem que nenhum disponha de hegemonia prévia. Professor e aluno trazem suas próprias bagagens que, diferenciadas, entram em relação e, na medida dessa relação, professor e aluno constroem conhecimento. A epistemologia construtivista fundamenta e legitima essa forma pedagógica.

Em síntese, BECKER (1995) acredita que: *... o compromisso, mesmo inconsciente, com determinada epistemologia, redundando em determinação – não a única ! – da prática pedagógica. (p. 27)*

Ao se analisar a prática pedagógica de uma grande parte dos professores de Cálculo, inclusive a nossa própria até o início do processo de construção deste estudo, acreditamos que a pedagogia centrada na relação é a forma menos adotada no encaminhamento do processo ensino-aprendizagem de Cálculo e possivelmente, de várias disciplinas de conteúdo matemático.

Analisando os pontos de vista descritos anteriormente, parece que chegamos a um processo cíclico, já que os argumentos docentes tropeçam na seguinte barreira: os próprios professores universitários são os responsáveis pela formação dos professores dos ensinos fundamental e médio que, por sua vez, são os responsáveis pela formação dos alunos que (mal preparados !) ingressam na universidade.

Refletir especificamente sobre este entrave não é objetivo desta tese. Entretanto, na tentativa de atender aos argumentos discentes não podemos desprezar a ação de diversos grupos formados por professores de Cálculo de universidades brasileiras que, através de

inovações pedagógicas, vêm buscando elementos que possam contribuir efetivamente para tal discussão .

No Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas – IMECC / UNICAMP, um grupo de professores está desenvolvendo projetos voltados para o ensino de Cálculo com aplicações. Sob uma ótica exploratória e construtiva do conhecimento, FIGUEIREDO & COSTA & GROU (1995) vem tentando mudar o ensino de Cálculo com auxílio do computador:

Nós temos proposto aos estudantes, projetos de pesquisa onde computadores são usados como um Laboratório Experimental de simulação de trajetórias, estabelecendo conjecturas e visualizando conceitos. (p. 1)

É óbvio que softwares computacionais, como o *Mathematica*, podem ser utilizados como ferramentas valiosas na aprendizagem de conceitos analíticos, especialmente aqueles com grande apelo geométrico. Também é reconhecida a importância do trabalho de projeto enquanto método educativo, conforme ressalta ABRANTES (1995), lembrando ainda que:

No entanto, o valor educativo do trabalho de projeto como componente do currículo está ligado a fatores de natureza pedagógica que incluem a escolha dos problemas a abordar, o ambiente de aprendizagem e a própria gestão do projeto. (p. 22)

Entretanto, uma questão que precede à elaboração de currículos e ementas, à escolha de bibliografias e livros-textos e à opção por uma determinada metodologia ou recursos metodológicos, é que a prática pedagógica do professor de Cálculo deve se pautar, primeiramente, na reflexão e compreensão do papel fundamental do Cálculo Diferencial e Integral na formação matemática de seus alunos. Somente estabelecendo elementos que esclareçam a real função do Cálculo na formação matemática do aluno, o professor terá condições de refletir sobre que objetivos traçar, que conteúdos e metodologias estabelecer, enfim, que prática pedagógica desenvolver !

Observemos que as noções do Cálculo formam um conteúdo integrante de diversas disciplinas para cursos universitários que formam profissionais com os diferentes perfis, como por exemplo: Engenharia, Física, Economia e Farmácia, além, obviamente, de Matemática. Uma prática muito comum, entre os professores de Cálculo, é ministrar esta disciplina sempre da mesma forma (mesmos conteúdos, mesma metodologia, mesmos exemplos, mesmas aplicações), sem levar em consideração a natureza do curso. Não concordando com essa prática, entendemos que cada um desses cursos profissionalizantes exige do professor uma transposição didática própria, de modo que a produção de significados das idéias do Cálculo esteja em estreita relação com o contexto profissional do curso.

Pois bem, mas como esta tese pretende contribuir para uma reflexão do professor de Cálculo sobre sua prática pedagógica ? Ela pretende criar ou propor uma nova metodologia mágica, capaz de magicamente zerar os índices de reprovação e tornar a aprendizagem totalmente eficaz ? Não, definitivamente não é este o objetivo desta tese.

Inicialmente, achamos por bem colocar que, apesar de, vez ou outra, reportarmos-nos ao Cálculo enquanto disciplina integrante do currículo de cursos da área de exatas, humanas ou biológicas, neste trabalho centraremos nosso foco no ensino de Cálculo para estudantes de Licenciatura em Matemática por dois motivos principais:

- Pretendemos, também, abordar o ensino de Análise Real, o qual ocorre, em nível de graduação, apenas nos cursos de Matemática;
- Pretendemos, ainda, discutir uma relação que julgamos crucial no ensino destas duas disciplinas: a relação entre rigor e intuição.

1.2.2) Questionando o ensino de Análise

Ao se discutir o ensino de Cálculo para o Licenciando em Matemática, somos levados, inevitavelmente, a refletir também sobre o ensino de Análise, enquanto disciplina formadora do professor de Matemática. Isto porque os tópicos fundamentais de um curso de Análise são os mesmos de um curso de Cálculo. Entretanto, se no Cálculo os temas são

abordados sob uma perspectiva aplicativa, com a interpretação intuitiva das noções, na Análise eles são abordados, geralmente, sob uma perspectiva lógico-formal, com a definição rigorosa dos objetos estudados.

O Prof. Geraldo Ávila, no prefácio de seu livro *Introdução à Análise Matemática*, diz acreditar que uma análise histórica permite mostrar que desde o surgimento do Cálculo, com Newton e Leibnitz no século XVII, vários matemáticos célebres como os irmãos Bernoulli, Euler, D'Alembert e Lagrange tentaram, sem sucesso, dar ao Cálculo uma formulação rigorosa, só obtida no início do século XIX, com Dedekind e Peano, após as contribuições fundamentais de Cauchy e Weierstrass.

Em seu livro “Abrégé D'Histoire des Mathématiques”, DIEUDONNÉ (Apud ÁVILA, 1993) conclui que:

A falta de rigor imputada aos matemáticos do século XVIII provém sobretudo, das dificuldades por eles enfrentadas em definir de maneira precisa as noções básicas do Cálculo, das quais, todavia, tinham muitas vezes uma boa concepção intuitiva. (p. 22)

Entretanto, o Prof. Ávila acredita ter sido esta concepção intuitiva que os levou ao estabelecimento de importantes resultados o que justifica, segundo o professor, a necessidade de um *equilíbrio* entre o rigor necessário à Análise e a intuição tão fundamental no desenvolvimento das idéias matemáticas.

Seria este *ponto de equilíbrio*, talvez, o divisor de águas entre o ensino de Cálculo e o ensino de Análise na formação matemática do aluno, colocando de um lado, o pensamento diferencial intuitivamente construído e do outro lado, o pensamento analítico formalmente construído ? E mais, que tipo de *equilíbrio* deve existir ? É realmente possível, na prática pedagógica, se atingir um *equilíbrio* ? De fato, isto é importante para a formação do professor de Matemática ? Mesmo que ele só atue nos ensinos fundamental e médio ?

A Análise Real está presente na maioria das grades curriculares dos cursos de Matemáticas das universidades brasileiras. Presença obrigatória no currículo dos bacharelados, é de se estranhar que algumas licenciaturas não possuam a disciplina “Análise I” no grupo das disciplinas obrigatórias, remetendo-a para o grupo das disciplinas

eletivas. Afinal, ao professor que irá atuar nos ensinos fundamental e médio, é dispensável o conhecimento analítico do Cálculo ou, então, dos campos numéricos ?

Entretanto, analisando os cursos de Análise ministrados na graduação, parece-nos que numa boa parte deles há um excesso de formalismo e rigor na exposição dos temas, o que pretendemos compreender. Diante desta prática, resta aos alunos a memorização dos principais resultados e de suas demonstrações que, espera-se, tenham sido entendidos intuitivamente no Cálculo.

Novamente então, deparamo-nos com a necessidade de compreender melhor a forma como o rigor e a intuição são explorados / entendidos, o que certamente nos remeterá ao estudo da história do desenvolvimento destas áreas e, especialmente, de que forma a busca pelo rigor foi um determinante histórico. Por um outro lado, a intuição é um elemento fundamental em qualquer situação de ensino, especialmente no ensino destas disciplinas, tão passível de questionamentos.

1.2.3) Apresentando uma hipótese de trabalho e a questão de investigação

Tomando por base nossa prática profissional de professor de Cálculo e de Análise e frente às leituras que temos realizado, assumimos, de princípio, que existe uma relação desigual e dicotômica entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e de Análise, sobre a qual pretendemos, neste estudo, refletir e melhor compreender.

Sem uma compreensão epistemológica e pedagógica mais profunda dessa relação, acreditamos ser difícil romper / superar esta visão / abordagem da prática docente em Cálculo e Análise e, então, articular uma melhor formação matemática do professor.

Esta é a nossa hipótese de trabalho. Por acreditar nela é que formulamos a seguinte questão de estudo para esta investigação:

Como a relação entre rigor e intuição encontra-se nos manuais didáticos de Cálculo e de Análise, como ela é percebida / enfrentada pelos seus autores e pesquisadores e quais são suas possíveis implicações na formação matemática do professor ?

Obviamente, não esperamos obter uma resposta una e definitiva para cada uma das questões que constituem o problema central de pesquisa. Ainda assim, levantando discussões e apontando direcionamentos, esperamos contribuir para uma ação formativa do professor de Cálculo e/ou Análise, o que certamente implicará em mudanças em sua ação pedagógica, pois acreditamos, como FIORENTINI (1995), que: ... *cada professor constrói idiossincraticamente seu ideário pedagógico a partir de pressupostos teóricos e de reflexão sobre a prática.* (p. 3)

1.3) CONFIGURAÇÃO DA PESQUISA E METODOLOGIA

O objetivo central de nossa pesquisa é compreender como a relação tensional entre rigor e intuição acontece e manifesta-se no ensino de Cálculo e de Análise no Brasil.

Entretanto, para que esta compreensão da prática pedagógica do ensino de Cálculo e de Análise não seja superficial ou ingênua, necessitamos de aportes teóricos, os quais pretendemos buscar a partir, basicamente, de duas fontes:

- 1) Estudos histórico-filosóficos sobre o desenvolvimento do Cálculo e da Análise e seus reflexos no ensino destas disciplinas;
- 2) Estudos / pesquisas recentes sobre questões relacionadas ao ensino / aprendizagem destas disciplinas.

Estes estudos serão apresentados nos Capítulos 2, 3 e 4.

Acreditamos que, como nossa questão central de pesquisa está relacionada a aspectos históricos, filosóficos, epistemológicos e pedagógicos relacionados ao ensino de Cálculo e Análise, a busca de respostas à mesma será mais eficiente e melhor consolidada a partir da análise de uma série de dados de natureza qualitativa proporcionados, de um lado, pelos manuais didáticos de Cálculo e Análise e, de outro, pelo pensamento ou ponto de vista de seus principais autores e responsáveis pelo currículo público de Cálculo e Análise.

Este estudo qualitativo, entretanto, requer do pesquisador habilidade e sensibilidade, como afirma WILSON (1977):

O empreendimento da pesquisa qualitativa depende da habilidade do pesquisador em se tornar um sensível instrumento de pesquisa ao transcender sua própria perspectiva e se tornar familiarizado com as perspectivas daqueles que ele está estudando. (p. 245)

ANDRÉ (1978) destaca como um estágio fundamental da pesquisa qualitativa: *uma busca mais sistemática daqueles dados que o pesquisador selecionou como os mais importantes para compreender e interpretar o fenômeno estudado. (p. 10)*

Pensando nisso e tendo em vista o nosso objetivo de compreender como acontece ou é tratada a relação tensional entre rigor e intuição no currículo público (manuais didáticos) e como ela é percebida e encarada pelos seus autores e estudiosos, é que optamos por centrar foco no conceito de Limites e Continuidade. A opção por este foco deve-se ao fato de que é em torno dele que tanto histórica quanto pedagogicamente, o problema da tensão entre rigor e intuição tem atingido um de seus pontos mais críticos.

Portanto, tanto a análise dos livros didáticos quanto as entrevistas com os autores terão como núcleo central os conceitos de limite e de continuidade.

A seguir, apresentaremos maiores detalhes sobre o processo de coleta de dados e de análise.

1.3.1) Procedimento de coleta de informações: o caso dos livros didáticos

A opção pela investigação de como a relação entre rigor e intuição é tratada / percebida nos livros didáticos foi feita com base nas seguintes considerações, que se baseiam em diversas experiências vivenciadas em nossa prática docente no ensino médio e principalmente, no ensino superior:

- 1) o papel fundamental que o livro didático desempenha dentro da configuração do currículo público de Cálculo e de Análise: nas ementas dos cursos de Cálculo e de Análise de qualquer universidade brasileira, certamente, um ou mais livros são disponibilizados como referência (s) bibliográfica (s). Na prática, sabemos que muitos deles são, de fato, adotados como referência principal para o desenvolvimento de toda a disciplina, especialmente, no caso de Análise;
- 2) o papel inegável que o livro didático exerce enquanto expoente dos saberes particulares de seus autores: um livro carrega não somente uma síntese de conhecimentos específicos sobre Cálculo e / ou Análise mas também uma enorme gama de conhecimentos pedagógicos de seu (s) autor (es), cuja combinação culmina com a experiência de se escrever um livro de conteúdo matemático que se propõe didático.

Pensando assim, a escolha dos livros didáticos a serem analisados, foi pautada nos seguintes critérios:

- 1) os livros didáticos deveriam ser adotados num número considerável de cursos de graduação no Brasil: aqui, contou nossa experiência enquanto Chefe do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, quando tivemos a oportunidade de analisar currículos de cursos de Licenciatura em Matemática de diversas universidades brasileiras;
- 2) os autores deveriam estar, de alguma forma, ligados à nossa pesquisa: aqui, selecionamos renomados autores nacionais, que concordaram em nos conceder entrevistas e com isso, selecionamos alguns autores internacionais que foram utilizados como referência nos livros escritos pelos primeiros.

Selecionamos, no total, doze manuais didáticos de Cálculo e de Análise. Visando obter uma análise mais representativa e consistente, optamos por subdividí-los em três grupos:

1) Livros didáticos de Cálculo

- 1) *O Cálculo com Geometria Analítica* – Louis Leithold – Editora Harbra – Volume 1 – São Paulo – 1982;
- 2) *Cálculo com Geometria Analítica* – Earl William Swokowski – Editora Makron Books – Volume 1 – São Paulo – 1994;
- 3) *Cálculo A* – Diva Marília Flemming & Míriam Buss Gonçalves – Editora Makron Books – Volume Único – São Paulo – 1992;
- 4) *Cálculo com Geometria Analítica* – C. H. Edwards Jr & D. E. Penney – Editora Prentice-Hall – Volume 1 – São Paulo – 1998.

2) Livros didáticos de Cálculo e de Análise do Professor Geraldo Ávila

- 1) *Cálculo 1* – Geraldo Ávila – Editora Livros Técnicos e Científicos – Volume Único – Rio de Janeiro – 1982;
- 2) *Introdução ao Cálculo* – Geraldo Ávila Editora Livros Técnicos e Científicos – Volume Único – Rio de Janeiro – 1998;
- 3) *Introdução às Funções e à Derivada* – Geraldo Ávila – Editora Atual – Volume Único – São Paulo – 1994;
- 4) *Introdução à Análise Matemática* – Geraldo Ávila – Editora Edgard Blucher – Volume Único – São Paulo – 1993.

3) Livros didáticos de Análise

- 1) *Conceitos Fundamentais da Matemática* – Bento de Jesus Caraça – Editora Livraria Sá da Costa – Volume Único – Lisboa – 1951;
- 2) *Princípios de Análise Matemática* – Walter Rudin – Editora Ao Livro técnico S.A. – Volume Único – Rio de Janeiro – 1971;
- 3) *Análise I* – Djairo Guedes de Figueiredo – Editora UNICAMP – Volume Único – Campinas – 1996;
- 4) *Análise Real* – Elon Lages Lima – Editora IMPA – Volume 1 – Rio de Janeiro – 1993.

A análise destes manuais, o leitor encontrará no Capítulo 5 deste estudo.

1.3.2) Procedimento de coleta de informações: o caso das entre vistas

Ao realizar as entrevistas, procuramos nos reportar às habilidades destacadas por BRUYM (1996), especialmente nos lembrando de que *os entrevistados devem vir a confiar e valorizar o entrevistador o suficiente para querer dividir seus pensamentos íntimos com ele e responder a um grande número de questões.*

Em relação à escolha dos entrevistados, o mesmo autor ressalta que o pesquisador deve *fazer o possível para que a amostragem seja representativa.*

Portanto, como a questão central da pesquisa nos remete à necessidade de identificar elementos da história do desenvolvimento do Cálculo e da Análise que influenciam o ensino atual, acreditamos que autores de artigos e livros didáticos reúnem condições de relacionar os fatos históricos com a sua influência no ensino, isto é, relacionar o “lá e então” com o “aqui e agora”.

É fundamental explicitar que cremos, fortemente, que autores de livros didáticos certamente influenciam o ensino por relacionar, eventualmente, os fatos históricos ou sua visão dos mesmos com sua própria proposta pedagógica, por exemplo, na tomada de

decisão de com que rigor tratar o Cálculo ou qual a abordagem intuitiva que se deve dar à Análise. Ao analisarmos, no Capítulo 5, alguns manuais didáticos de Cálculo e Análise voltaremos a esta questão da influência real dos autores no ensino das disciplinas.

Diante desta opção / convicção, contactamos e entrevistamos os seguintes professores, que pronto concordaram em ser entrevistados:

- 1) **Roberto Ribeiro Baldino**; graduado em Engenharia pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, em 1956; mestre pela Universidade de Stanford – USA; doutor pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA; foi professor da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ e atualmente é professor da UNESP – Rio Claro; autor de diversos artigos relacionados ao ensino de Cálculo; orientador de dissertações e teses na área de Educação Matemática;
- 2) **Geraldo Severo de Souza Ávila**; bacharel e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo – USP, em 1956; mestre e doutor pela Universidade de New York – USA; foi professor do Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA, do Instituto de Física Teórica – UNESP, da Universidade de Wisconsin – USA, da Universidade Georgetown de Washington – USA, da Universidade de Brasília – UnB, da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP e atualmente, é professor da Universidade Federal de Goiás – UFG; foi presidente da Sociedade Brasileira de Matemática e é membro titular da Academia Brasileira de Ciências e da Academia de Ciências do Estado de São Paulo; autor, dentre outros, dos livros *Introdução ao Cálculo* e *Introdução à Análise Matemática*;
- 3) **Djairo Guedes de Figueiredo**; graduado em Engenharia Civil pela Universidade do Brasil – RJ, em 1956; mestre e doutor pela Universidade de New York – USA; foi professor do Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, da Universidade de Brasília – UnB, da Universidade de Illinois – USA, da Universidade de Wisconsin – USA, da Univesidade de Chicago – USA, da Universidade Maryland – USA, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ e atualmente, é professor da

Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP; é membro titular da Academia Brasileira de Ciências; autor, dentre outros, dos livros *Análise I* e *Equações Diferenciais Parciais*;

- 4) **Elon Lages Lima**; bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, em 1954; mestre e doutor pela Universidade de Chicago – USA; foi diretor e atualmente, é professor do Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA; foi presidente da Sociedade Brasileira de Matemática e é membro titular da Academia Brasileira de Ciências; autor, dentre outros, dos livros *Análise Real* e *Curso de Análise*.

Realizamos, com cada um, entrevistas "semi-diretivas ou semi-estruturadas" (THIOLENT, 1980), nas seguintes datas: Prof. Baldino, em 22/08/98; Prof. Ávila, em 05/11/98; Prof. Djairo, em 29/10/99 e Prof. Elon, em 05/11/99. As transcrições completas constam nos anexos desta tese. As entrevistas foram baseadas no seguinte roteiro, previamente enviado aos entrevistados, mas, sujeito a alterações por parte dos mesmos:

- 1) **Formação Profissional e Experiência Docente:** graduação, mestrado e doutorado; experiência docente de Cálculo e de Análise; fracassos, sucessos, frustrações e alegrias.
- 2) **História do Cálculo e da Análise:** a relação rigor x intuição; rigorização e modernização da Análise; a Aritmetização da Análise.
- 3) **Ensino de Cálculo:** épsilons e deltas e a exclusão da definição de limites do programa de um curso de Cálculo; excesso de rigor num curso de Cálculo; ensino de Cálculo no ensino médio.
- 4) **Ensino de Análise:** a importância da intuição num curso de Análise; Análise não-standard; a experiência enquanto autor de artigos e/ou livros didáticos.
- 5) **Formação do Professor de Matemática:** importância do Cálculo e da Análise; pensamento matemático do professor; pensamento diferencial e pensamento analítico.

1.3.3) A análise e o tratamento dos dados

Acreditamos, como PATTON (1990), que o aspecto da credibilidade de uma pesquisa qualitativa está ligado, fundamentalmente, às *técnicas rigorosas e métodos para reunião e análise de dados qualitativos, destacando especial atenção para a questão da validade, confiabilidade e triangulação*.

Sob esta perspectiva, procuramos estabelecer para análise, categorias e sub-categorias, as quais emergiram da interpretação dos depoimentos dos entrevistados, tendo sempre como norte a obtenção de respostas à nossa questão central da pesquisa.

Assim sendo, a categorização final foi feita através da comparação das falas de nossos entrevistados umas com as outras, com os seus respectivos artigos e livros didáticos, sempre levando em consideração nossa visão enquanto pesquisador.

Inicialmente, procuramos enumerar as falas dos depoentes de acordo com os tópicos do roteiro de entrevista, para em seguida, subdividi-las de acordo com cada assunto tratado naquele tópico.

Entretanto, este método se mostrou um tanto quanto falho na medida em que muitos assuntos eram abordados em tópicos diferentes e, no entanto, era inviável / ineficaz a realização de uma análise que não fosse comparativa.

Daí, nossa opção por agrupar determinados assuntos que tinham um núcleo / tema em comum em duas grandes categorias: os saberes profissionais do professor de Cálculo e de Análise, descritos no Capítulo 7 e a relação entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e de Análise, ressignificada no Capítulo 8.

Acreditamos que esta forma de análise nos possibilitou o estabelecimento de algumas considerações significativas acerca do problema investigado.

CAPÍTULO 2

ALGUNS ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE CÁLCULO E ANÁLISE: UMA BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

*“A idade áurea da matemática – não foi a de
Euclides, é a nossa (século vinte).”*

Keyser

Iniciaremos nossa revisão de literatura destacando os trabalhos realizados dentro do Modelo Teórico dos Campos Semânticos, os quais podem contribuir para uma reflexão epistemológica do Cálculo e de seu ensino.

A seguir, examinaremos alguns trabalhos de autoria do Professor Roberto Baldino, um dos professores-pesquisadores que mais tem contribuído para uma reflexão sobre o ensino de Cálculo no Brasil, através de seus artigos e de suas orientações de dissertações e teses na área de ensino superior. De uma forma especial, destacaremos os estudos relacionados às possíveis relações / confusões que podem acontecer entre um curso de Cálculo e um curso de Análise, bem como aqueles que discutem a abordagem de determinados tópicos no ensino de Cálculo, à luz de diversas experiências vivenciadas pelo professor, em sua prática pedagógica do Cálculo.

De forma breve, destacamos alguns trabalhos relacionados ao ensino de Cálculo e Análise apresentados no 8º Congresso Internacional de Educação Matemática – ICME 8. Os resumos destes trabalhos constam de um apêndice, que segue ao final desta tese.

Por fim, apresentamos alguns estudos que foram realizados dentro da linha de pesquisa do “pensamento matemático avançado”, que abordam, em geral, diversas questões relacionadas, principalmente, ao ensino de Análise. Muitas questões fundamentais para esta tese serão aqui discutidas, destacadamente a didática da Análise, o desenvolvimento da intuição lógica refinada em Análise e a compreensão dos estudantes de Análise Real.

2.1) OS DIFERENTES MODOS DE PRODUZIR SIGNIFICADOS PARA OS CONCEITOS DO CÁLCULO, SEGUNDO O MTCS

Em sua tese de doutorado, SAD (1998) relacionou 62 artigos publicados na última década, em diversos periódicos⁴. Após dividir estes estudos em cinco grupos⁵, centrou foco, em sua revisão bibliográfica, naqueles que abordavam aspectos epistemológicos do Cálculo Diferencial e Integral.

Tomando como referencial teórico o Modelo Teórico dos Campos Semânticos – MTCS – a pesquisadora discute o conceito de Campo Semântico⁶, o qual contempla os diferentes modos de produção de significados através de *estipulações locais*, que podem ser entendidas como premissas as quais tomamos como certas, mas cujo caráter é não-permanente, uma vez que o MTCS só considera a criação destas premissas em meio às atividades.

As estipulações locais, que constituem o *núcleo* de um Campo Semântico, foram relacionadas ao Cálculo através de uma caracterização dos seguintes tipos: estipulações locais visuais-geométricas (a partir de princípios ou resultados geométricos, gráficos e desenhos de figuras planas ou espaciais), estipulações locais infinitesimais (a partir de elementos baseados na noção de infinitésimo) , estipulações locais de limite (a partir da definição weierstrassiana de limite de uma função de uma variável real) e estipulações locais algorítmicas (a partir de algoritmos, regras, fórmulas e seqüências memorizadas).

É importante destacar que não é pretensão da autora esgotar todas as possibilidades de caracterização dos elementos que constituem o pensamento diferencial, ainda que as estipulações citadas acima desempenhem um papel fundamental nesse sentido.

⁴ Os periódicos consultados foram: *Educational Studies in Mathematics*, *Journal for Research in Mathematics Education*, *Journal of Mathematics Education*, *Journal of Mathematics Teacher Education*, *Recherches en Didactique des Mathématiques* e *The American Mathematical Monthly*, além dos *proceedings* dos diversos grupos mundiais de pesquisa em Educação Matemática.

⁵ Os grupos foram: 1) Abordagens de Conteúdo: 8 artigos; 2) Informática e Computação: 17 artigos; 3) Ensino e Aprendizagem: 20 artigos; 4) História: 5 artigos; 5) Epistemologia: 12 artigos.

⁶ Proposto por LINS (1984), orientador da tese, em seu artigo *O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: uma análise epistemológica da Álgebra e do pensamento algébrico* – Dynamis – Vol. 1, Nº 7 – Blumenau.

Fica evidente ainda, nas conclusões gerais de sua pesquisa, que SAD (1998) relaciona a formação do pensamento diferencial e integral à produção de significados, a partir de situações relacionadas ao ensino de determinados tópicos ou conceitos específicos:

Pensar em termos de diferencial e integral inclui, por exemplo, produzir significado para situações que envolvem noções básicas como a de função e outras relacionadas ao pensamento algébrico.(p. 300)

Num estudo anterior, a noção de Campo Semântico havia sido explorada na dissertação de mestrado de CABRAL (1992) , intitulada *Vicissitudes de Aprendizagem em um Curso de Cálculo*, na qual é analisada a formação do pensamento diferencial, que compreende a noção de função relacionada a um pensamento geométrico e algébrico, permitindo assim, a aprendizagem do aluno em Cálculo.

A pesquisadora participou como observadora de aulas de Cálculo I para uma turma do curso de Matemática, durante um ano, acompanhando ainda, alguns alunos da mesma turma num trabalho de "ensino remedial" realizado em sessões noturnas. Nas considerações finais de seu trabalho, a autora afirma que pretende "*continuar o estudo da formação do pensamento diferencial, como articulação de campos semânticos*".

Ainda dentro do MTCS, a dissertação de CASSOL (1998) , intitulada *Produção de Significados para a Derivada*, analisa os significados produzidos pelos alunos para a derivada: derivada como taxa de variação instantânea; derivada como um limite; derivada como declividade; derivada como medida de variação; derivada como resultado de uma fórmula.

Dentre a metodologia qualitativa adotada na pesquisa, merecem destaque os testes de sondagens aplicados a alunos de graduação e pós-graduação que, recentemente, já tinham cursado disciplinas de Cálculo. Entretanto, o próprio autor reconheceu que o melhor "instrumento" para a verificação de uma real aprendizagem de derivadas é buscar os significados declarados para tudo o que é afirmado e operacionalizado / executado pelos alunos.

Por abalizar suas conclusões nas noções de Campo Semântico, enquanto uma *forma de produzir significados* e de conhecimento, enquanto uma *crença-afirmação e justificação para tal crença*, podemos estabelecer algumas ligações dos trabalhos realizados dentro do

MTCS com nossa questão de investigação. Na tentativa de caracterizar o pensamento diferencial, podemos identificar duas vertentes cognitivas que desempenham um papel diferenciado porém, complementar nesta caracterização:

- 1) um pensamento mais "intuitivo" claramente presente na busca dos alunos por produção de significados, o que pode ser comprovado nas estipulações locais visuais-geométricas caracterizadas por Sad e nos pensamentos geométrico e algébrico relacionados à noção de função por Cabral;
- 2) um pensamento mais "rigoroso" necessariamente presente na tentativa dos alunos de justificar suas crenças-afirmações, até então somente operacionalizadas / executadas sem uma significação declarada, segundo Cassol.

Voltaremos a estas questões posteriormente ao discutirmos as relações entre procedimento e conceituação. Por agora, concluímos concordando com SAD (1998) que, ao defender que *aprender é aprender a produzir significado*, afirma que:

Não há um verdadeiro e absoluto modo de pensar sobre Matemática, de produzir seus significados, como historicamente também podemos evidenciar... (Ibidem, p. 301)

Passaremos a revisar, agora, alguns trabalhos do Prof. Roberto Ribeiro Baldino – UNESP – Rio Claro, responsável pela autoria de vários artigos e orientações de dissertações e teses na área de ensino de Cálculo.

2.2) A CONTRIBUIÇÃO FUNDAMENTAL DOS ESTUDOS DO PROFESSOR ROBERTO BALDINO

Ao tentarmos compreender a relação entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e de Análise somos inevitavelmente levados a estudar as relações entre um curso de Cálculo e

um curso de Análise à luz de reflexões sobre a prática pedagógica de um e outro curso. Daí, poderemos estabelecer possíveis causas e implicações de problemas / obstáculos no processo de ensino-aprendizagem destas duas disciplinas.

Assim sendo, consideramos fundamentais os questionamentos apresentados pelo Prof. Roberto Baldino, ao longo de vários textos que, agora, passaremos a revisar mais detalhadamente.

Em *Cálculo Infinitesimal: Passado ou Futuro*, BALDINO (1995) contesta a insistência de se manter o conceito de limite como fundamento do Cálculo e aponta o Cálculo Infinitesimal como alternativa didática para as disciplinas de Cálculo e Análise⁷. As questões iniciais que desencadearam os argumentos do autor foram:

*Qual a relação do curso de Cálculo com o curso de Análise ?
Em que medida um curso de Cálculo deve ou pode ser um curso de
Análise ? Que alternativas temos para evitar o uso do conceito de limite
em um primeiro curso de Cálculo ? (p. 6)*

Em *A Ética de uma Definição Circular de Número Real*, BALDINO (1997) ressalta que a maioria dos livros-textos do ensino médio apresentam uma "circularidade" ao definirem os irracionais como números que não são racionais e os reais como a união dos racionais com os irracionais. O autor argumenta que:

*... essa circularidade reforça a crença em uma noção abstrata a priori de
número que rege o discurso sobre os reais e que esse é o mesmo
obstáculo contra o qual lutaram Bolzano e Cauchy em suas
demonstrações do teorema do Valor Intermediário. (p. 1)*

⁷ A seqüência de disciplinas que, atualmente, integram o currículo dos cursos de Matemática é: Cálculo Diferencial e Integral (baseado na noção de limites) – Análise Matemática. A proposta defendida por BALDINO (1995) é: Cálculo Infinitesimal (baseado em infinitésimos) – Análise não-standard, que, neste caso, também é fundamentada / desenvolvida tomando por base o conceito de infinitésimos.

Já em *Do Coeficiente Angular da Reta ao Conceito de Diferencial: Crítica ao Ensino Atual e Proposta Alternativa*, BALDINO et al (1995), a partir de problemas surgidos em aulas de Cálculo no 1º ano do curso de Matemática, discutem a relação entre: tangente e derivada; derivada e inclinação; inclinação e ângulo; ângulo e coeficiente angular.

Após analisar as relações existentes entre os campos semânticos da geometria analítica-trigonometria e o campo semântico funcional, é apresentada a noção de derivada enquanto "operador multiplicativo" dentro de uma proposta de reformulação que inclui até mesmo sugestões para o ensino de derivadas no ensino médio. Novamente, BALDINO et al (1995) questionam o papel do ensino de limites num primeiro curso de Cálculo:

Se todo o arsenal teórico sobre limites, mesmo que apresentado apenas em aspecto intuitivo, sempre ocupa boa parte do primeiro semestre de cálculo mas termina ficando suspenso até o curso de Análise Matemática, cabe perguntar: haverá maneira mais útil de empregar o tempo dedicado ao conceito de limite no primeiro curso de Cálculo ? Não seria melhor usar esse tempo para reforçar o conceito de função com exemplos, como os de velocidade, densidade e pressão ? O curso de Cálculo não poderia ser fundado sobre a idéia de continuidade que, enfim, é a que termina ficando ? (p. 15)

As dificuldades que um aluno de Cálculo apresenta ao calcular uma integral indefinida são examinadas em *Erro de Significado ou Significado do Erro ?* BALDINO & CABRAL (1997) mostram que muitos erros no cálculo de uma integral indefinida são cometidos em função de dificuldades de manipulações algébricas elementares, ao nível de ensino fundamental.

O assunto está intimamente ligado à prática pedagógica, já que a relação entre dificuldade de ensinar e construir estratégias didáticas, para BALDINO & CABRAL (1997), é praticamente direta, na medida em que:

As estratégias formuladas na literatura repousam em idéias de aprendizagem ativa e aprendizagem significativa e, para alcançar esse escopo, lança-se mão de: reforçar o uso de intuições e metáforas, construir novos softwares, trabalhar com manipulações simbólicas, elaborar engenharia didática, usar mapas cognitivos, resolução de problemas, modelagem, entre outros. (p. 2)

Finalizando, destacamos o texto *Assimilação Solidária Onze Anos Depois*, no qual BALDINO (1994) revê os "textos geradores" da pedagogia da Assimilação Solidária, escritos em 1983, quando o autor lecionava Cálculo para alunos do curso de Farmácia da UFRJ: *Matemática e Farmácia*, no qual o autor denomina o ensino de Cálculo para aquele curso como o Cálculo-Farsa e *A Intervenção Diferencial*, no qual o autor generaliza a crítica feita ao ensino de Cálculo para toda a Matemática.

Escritos em "estilo panfletário", conforme terminologia usada pelo próprio BALDINO (1994), os textos denunciam a existência de uma farsa no ensino de Cálculo, tida como um caso particular de uma farsa no ensino de Matemática em geral:

O ensino tradicional prefere evitar cuidadosamente as dificuldades e armar o curso sobre uns tantos malabarismos algébricos como o cálculo de derivadas, a integração de frações racionais, a regra de L'Hospital, etc. Com essa tática, os alunos que passam são os que conseguiram aprender muito mais que isso, além dos sobreviventes do sistema, que não se vexam em decorar rotinas para conseguir o diploma. Os demais ficam intrigados com o sentido dessa farsa, antes de serem centrifugados como reprovados. O fracasso do ensino de Cálculo pode ser escondido mas não pode ser negado. (p. 3, grifo do autor)

A questão central que permanece é: tal "denúncia" do Cálculo-Farsa tem fundamento ainda hoje, quase vinte anos depois ?

Obviamente, a resposta não é consensual, mas para todos os professores que ousarem emití-la, impõe-se a necessidade de reflexão sobre sua própria prática pedagógica.

Certamente, muitas das questões levantadas pelo Prof. Baldino serão retomadas quando da análise das entrevistas. A própria questão da farsa no ensino foi citada diversas vezes pelo professor, especialmente se referindo ao ensino de determinados conteúdos "pedagogicamente inalcançáveis" para os alunos de cursos iniciais de Cálculo:

E aí, você fica desobrigado de ensinar porque você já sabe que ninguém vai entender. Então, você dá uma aula e pronto, o ensino tá feito, você dá uma aula caprichadamente, eles copiam tudo, para testemunhar que você deu a aula, que você deu aquela matéria, tá tudo no caderno deles, manda olhar: "Olha, tá escrito tudo como eu dei". A sua obrigação de professor tá cumprida. Você ensinou, agora se ele não aprendeu o problema é outro. E aí, você faz uma falcaturra qualquer para não reprovar além da conveniência. Então, o mundo todo tá funcionando na base dessa farsa. (Ent. Baldino – ago/98)

A grande contribuição dos estudos do Prof. Roberto Baldino para nosso trabalho vem de suas críticas em relação à atual abordagem do Cálculo, onde ocorre um excesso de rigor na apresentação de tópicos como limites, derivadas e integrais e não se verifica uma preocupação com suas aplicações, que, caso fossem melhor tratadas / exploradas, poderiam gerar novas compreensões sobre as idéias e os conceitos fundamentais do Cálculo.

2.3) ALGUNS TRABALHOS RELACIONADAS AO ENSINO DE CÁLCULO E ANÁLISE APRESENTADOS NO ICME 8

Dentre as comunicações apresentadas nos grupos de trabalho do ICME 8⁸ podemos destacar trinta trabalhos relacionados ao ensino de Cálculo e Análise, cujos resumos integram os anais do evento.

⁸ 8th International Congress on Mathematical Education – Sevilha – Espanha – 1996 – Topic Groups: 3 – University mathematics; 8 – Proofs and proving: why, when and how; 11 – The future of Calculus.

Como a grande maioria dos temas dos trabalhos não são diretamente ligados ao nosso tema de tese, optamos por relacioná-los no apêndice, juntamente com os anexos desta tese. Os trinta trabalhos podem ser divididos em quatro grupos:

- 1) Trabalhos que relatam experiências gerais ligadas ao ensino de Cálculo (14);
- 2) Trabalhos que relatam experiências ligadas à utilização de computadores no ensino de Cálculo (6);
- 3) Trabalhos que abordam questões gerais ligadas ao ensino de Análise, tais como a prova rigorosa e o pensamento intuitivo (6);
- 4) Trabalhos que abordam questões epistemológicas ligadas ao ensino de Análise, centradas em conteúdos específicos (4).

A maioria dos trabalhos destacados discute as questões de um ponto de vista “técnico”. Um exemplo do que estamos afirmando é o trabalho relacionado ao ensino de Análise intitulado *A concept of function limit: two points of view*, no qual BAKAEV (1996) compartilha sua experiência enquanto professor de Análise Matemática. O autor discute, fundamentalmente, a abordagem usual do conceito de limite de uma função feita através de uma família de vizinhanças e argumenta que as principais dificuldades ocasionadas por esta abordagem se encontram na formulação e demonstração do teorema de limite de uma função composta. Por fim, o professor apresenta algumas sugestões para se superar tais dificuldades.

Logo, trouxemos estes estudos para nossa revisão não porque eles contribuam significativamente para nossa questão de investigação mas, sim, para constataremos que a problemática envolvendo a relação entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise ainda é pouco tratada / estudada pelos educadores matemáticos, de um modo geral, dada o grande porte de um evento como o ICME 8⁹.

⁹ Como o ICME 9 só foi realizado em julho de 2000, em Tóquio – Japão, após esta tese já ter sido submetida ao exame de qualificação, não foi possível relacionar os trabalhos apresentados neste evento.

2.4) A CONTRIBUIÇÃO FUNDAMENTAL DOS ESTUDOS DO "ADVANCED MATHEMATICAL THINKING"

Dentro da mesma lista de periódicos que contêm pesquisas voltadas para a história e o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, são encontrados poucos artigos relacionados especificamente à história e/ou ao ensino de Análise Matemática, o mesmo valendo para os *proceedings* dos diversos grupos mundiais de pesquisa em Educação Matemática.

Desde a proposta inicial do projeto que gerou esta tese de doutorado, tínhamos consciência de que existiam novas pesquisas relacionadas ao ensino de Cálculo em todo o mundo porém, sabíamos também que o ensino de Análise não é objeto de pesquisa em muitos grupos mundiais, comparativamente a outros focos de estudo dentro da Educação Matemática. Tal constatação vale ainda para hoje, o que por um lado representa dificuldades em relação à escassez de literatura mas, por outro, remete-nos a um interessante desafio ao abordar a história e ensino de Análise e, em especial, dentro desta história, a relação entre rigor e intuição e as possíveis consequências na abordagem pedagógica tanto do Cálculo como da Análise.

Um acontecimento recente merece destaque: o *I Premio Internacional de Investigación em Educación Matemática "Thales-San Fernando"*, promovido pela revista "EPSILON" da Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES", com sede em Sevilla – Espanha, concedido ao trabalho de CANTORAL & FARFAN (1998), *Pensamiento y Lenguaje Variacional em la Introducción al Análisis*.

A pesquisa traz, em sua revisão, os trabalhos de ARTIGUE (1998) e TALL (1991), cujas investigações tratam sobre a didática da Análise se apoiando em distintas metáforas da aprendizagem, tendo pontos em comum com a tese que relaciona a epistemologia genética com o desenvolvimento do pensamento.

Outro ponto destacado na pesquisa é o fato de que tais investigações foram centradas em problemáticas que se ocupam da matemática relevante no ensino superior, assumindo que a matemática intervém nesse nível exclusivamente como principal disciplina de ensino, esquecendo-se de um fato fundamental que caracteriza o sistema didático da educação superior: também e, talvez com maior força, a matemática escolar está

a serviço de outros domínios científicos e outras práticas de referência, de onde, por sua vez, adquire sentido e significação.

A proposta é desenvolvida através do desenho de algumas situações didáticas, cuja análise permitiu aos autores obter como conclusões que o ensino e aprendizagem de situações variacionais está relacionado com diversas questões não triviais. Cada conceito avançado que se deseja ensinar deve apoiar-se em conceitos mais elementares e a aprendizagem estará comprometida se não for precedida por um sólido entendimento dos conceitos prévios. Este passo da investigação, que segundo Cantoral & Farfan é fundamental no desenvolvimento de engenharias didáticas, remete a três grandes questões a serem investigadas:

1) Quais são as leis que regem as situações de ensino do pensamento e linguagem variacional em nosso sistema educacional e no meio social ?

2) De que natureza são os métodos nas atitudes de entendimento, perante situações que precisam do pensamento e linguagem variacional ?

3) Quais são as formas de articulação de tais saberes matemáticos de modo que a apreensão de situações variacionais seja alcançada pela maioria dos estudantes de uma classe ? (pp. 367-368, tradução nossa)

Os trabalhos tratados na revisão desta pesquisa foram escritos por autores que pertencem a uma linha de pesquisas que culminou com a elaboração do livro *Advanced Mathematical Thinking*, em 1991, contendo diversos artigos relacionados ao ensino de matemática avançada e tendo David Tall como seu editor. A obra possui três focos centrais:

- 1) a natureza do pensamento matemático avançado, cujos tópicos incluem os processos envolvidos na concepção do pensamento matemático avançado, a criatividade matemática e a prova matemática;

- 2) a teoria cognitiva do pensamento matemático avançado, cujos tópicos incluem o papel das definições, o papel dos símbolos e a abstração reflexiva;
- 3) a pesquisa envolvendo o ensino e a aprendizagem do pensamento matemático avançado, cujos tópicos incluem o desenvolvimento cognitivo e dificuldades conceituais relacionadas a funções, limites, Análise, infinito, prova e ainda, o uso do computador.

No Capítulo 1 – *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking*, TALL (1991) caracteriza o pensamento matemático avançado como aquele que *da atitude produtiva de se considerar a contextualização de um problema, numa investigação matemática, leva à formulação produtiva de conjecturas e ao estágio final de refinamento e prova.*

Em relação ao ciclo de atividades relacionadas ao pensamento matemático avançado, TALL (1991) afirma que existe uma semelhança com as atividades relacionadas ao pensamento matemático elementar :

... muitas das atividades que ocorrem neste ciclo também ocorrem na resolução de problemas matemáticos elementares, mas a possibilidade de definição formal e dedução é um fator que distingue o pensamento matemático avançado. (p. 3, tradução nossa)

Ainda em relação às diferenças entre os pensamentos matemáticos elementar e avançado, o autor descreve a transição de um para outro como um processo baseado em *entidades abstratas* construídas pelo indivíduo através de deduções das definições formais:

O movimento do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: de descrever para definir, de convencer para provar de uma maneira lógica baseada nas definições. Esta transição requer uma reconstrução cognitiva, a qual é vista durante a luta inicial dos estudantes universitários com as abstrações formais,

enfrentadas por eles no primeiro ano de universidade. (Ibidem, p. 20, tradução nossa, grifo do autor)

A concepção de rigor e intuição como termos mutuamente excludentes é criticada por TALL ao citar os matemáticos que sugerem que uma "explicação intuitiva" é aquela em que, necessariamente, "falta rigor". O autor reconhece, entretanto, que:

Existe um veio de verdade nisto, pois normalmente uma intuição acontece por inteiro na mente e com isso pode ser difícil separar suas componentes segundo uma ordem lógica dedutiva. Mas a oposição entre os dois conceitos é uma falsa dicotomia... (Ibidem, p. 13, tradução nossa)

Após considerar vários aspectos cognitivos relacionados à intuição, o autor apresenta algumas caracterizações da intuição (grifo nosso):

- 1) Segundo TALL & VINNER (1981), intuição é o produto das imagens conceituais, que são estruturas cognitivas associadas ao processo de aquisição de um conceito, tais como processos mentais e imagens mentais;
- 2) Segundo POINCARÉ (1913), existem muitos tipos de intuições: primeiramente, o apelo aos sentidos e à imaginação; depois, generalização por indução, copiadas, por assim dizer, dos procedimentos das ciências experimentais; finalmente, a intuição de número puro...
- 3) Segundo FISCHBEIN (1978), existem dois tipos de intuição: intuições primárias, que se referem àquelas crenças cognitivas desenvolvidas pelos próprios seres humanos, de maneira natural, antes e independentemente de instrução sistemática; intuições secundárias, que são desenvolvidas como um resultado de treinamento intelectual sistemático. A intuição secundária já havia sido denominada por F. Klein, em 1898, de "intuição refinada" e por F. Severi, em 1951, de "intuição de segundo grau".

Finalizando, ao afirmar que aspectos da lógica também podem vir a ser mais "intuitivos" para a mente matemática, TALL julga que o desenvolvimento desta intuição lógica refinada deve ser um dos maiores objetivos de uma educação matemática mais avançada.

Já no Capítulo 11 – *Analysis*, ARTIGUE (1991) apresenta brevemente os pontos centrais da evolução histórica dos conceitos de derivada e integral de funções de uma variável real, analisando o conflito diferencial / derivada e sua repercussão educacional, bem como o impacto na educação do século XX do surgimento da Análise não-standard.

Ao apresentar pesquisas empíricas e interpretações especulativas para obter um catálogo das concepções mentais construídas por estudantes submetidos à educação tradicional, a autora cita os erros relativos a problemas de aproximação, em que a maioria dos estudantes acredita que escrever um ϵ ao final de uma fórmula é suficiente para torná-la rigorosa. ARTIGUE (1991) pondera que, ao se trabalhar com "noções físicas":

... o problema do rigor é manipulado diferentemente, com frases tais como desde que dz seja suficientemente pequeno sendo usadas em vez do método ϵ - δ . (p. 182, tradução nossa, grifo da autora)

Finalizando, a autora apresenta alguns tratamentos instrucionais para derivadas, integrais e equações diferenciais, dentro da linha francesa da "engenharia didática", que compreende atividades de desenvolver e testar novos métodos de ensino e aprendizagem. Como conclusões, ARTIGUE (1991) acredita que se deve:

- *direcionar o foco para a construção e o controle de significados;*
- *procurar por um melhor equilíbrio entre representações diferentes para os conceitos, em particular, preocupar-se com um melhor uso de um contexto gráfico;*
- *preocupar-se em utilizar as possibilidades oferecidas pelo computador para repensar o conteúdo da educação em termos de*

adequação epistemológica dos domínios considerados e da capacidade cognitiva dos estudantes." (Ibidem, p. 195, tradução nossa)

Destacaremos, agora, alguns estudos relacionados ao ensino de Análise baseados em idéias desenvolvidas dentro da linha do "pensamento matemático avançado".

Em *Cognitive Difficulties in Learning Analysis*, TALL (1985) critica os professores que, ao se questionarem "por que os alunos não aprendem Análise ?", simplesmente tentam reorganizar a disciplina, alterando alguns tópicos do conteúdo, sem primeiro investigar como os alunos pensam: *Para compreender por que os estudantes não conseguem aprender Análise, claramente se requer um estudo dos estudantes como o sujeito-problema / objeto da pesquisa.* (p. 1, tradução nossa, grifo do autor)

Ao estudar as concepções dos estudantes sobre a teoria em que a Análise está construída, TALL destaca os conflitos causados pelas imagens conceituais nos estudantes, especialmente aqueles referentes a números reais e limites. Finalmente, o autor aponta para o problema da utilização de definições nas provas matemáticas como uma das maiores dificuldades na aprendizagem de Análise.

A questão dos conflitos na aprendizagem de números reais e limites, já havia sido tratada anteriormente por TALL & SCHWARZENBERGER (1978) em *Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits*. Neste estudo, os autores citam exemplos de conflitos entre "decimal" e "limite", entre "decimal" e "fração", entre "número" e "limite", entre "sequência" e "série".

Em alguns casos, a causa do conflito pode estar associada simplesmente a uma "infelicidade linguística" e o conflito pode ser eliminado por uma escolha mais cuidadosa de motivações ou definições. Em outros casos, o conflito vem de uma genuína distinção matemática, por exemplo entre sequências e séries, que pode ser removido concentrando o estudo em sequências primeiramente, introduzindo o termo série somente mais tarde. Em outros casos ainda, o conflito vem de eventualidades particulares na experiência anterior de um indivíduo e pode ser sanado apenas por um professor sensível ciente de toda a situação.

Finalizando, os autores ressaltam a importância de uma atitude docente na busca de

caminhos para a resolução de qualquer dos tipos de conflito, baseando-se, antes de tudo, na consciência e discernimento dos mesmos :

Em todos os três tipos de conflito, o papel do professor em encontrar uma resolução adequada será crucial e mais decisivo que fatores como a escolha de ementa, livro didático ou recursos áudio-visuais. (p. 49, tradução nossa)

Finalmente, em *Difficulties Teaching Mathematical Analysis to Non-Specialists*, PINTO & GRAY (1998) destacam os efeitos do ensino de Análise Matemática para estudantes que serão professores da escola elementar e que cursam a disciplina de Análise no último ano do curso de Licenciatura em Matemática na universidade¹⁰.

Baseando-se numa série de considerações relativas à utilização de imagens e definições e em entrevistas individuais realizadas com vinte estudantes, os autores os dividiram em três grupos:

- 1) um grupo muito pequeno (2 estudantes – 10 %) pareceu adquirir uma compreensão formal do assunto, usando as definições formais significativamente ou reconhecendo a necessidade de linguagem formal e prova lógica;
- 2) um segundo grupo muito maior (10 estudantes – 50 %) tentaram aprender as definições decorativamente, sem efetivamente compreender os conceitos subjacentes / fundamentais, sendo que a maioria destes estudantes demonstrou dificuldades iniciais na interpretação de problemas;
- 3) um terceiro grupo também considerável (8 estudantes – 40 %) utilizou imagens conceituais inadequadas formadas a partir de concepções matemáticas anteriores, como por exemplo a tentativa de se estabelecer um resultado formal através de generalização de casos específicos.

¹⁰ Na Inglaterra, mesmo os professores da escola elementar devem cursar Licenciatura em Matemática na universidade para estarem habilitados.

De um modo geral, o que está sendo questionado pelos autores é a racionalidade ou o sentido do ensino formalista de Análise Matemática, a nível de graduação, para aqueles que não serão matemáticos especialistas. Apesar da pesquisa ter sido realizada com estudantes da Inglaterra, o questionamento supra citado, obviamente, está diretamente relacionado a uma questão fundamental que esta tese pretende discutir que é a importância / o papel do ensino de Análise para estudantes de Licenciatura em Matemática, aqui no Brasil. Em tempo, caso a pesquisa tivesse sido realizada com estudantes brasileiros, os resultados e categorizações teriam sido diferentes ? Na essência, acreditamos que não !

Ainda sob a mesma temática, destacamos a tese *Student's Understanding of Real Analysis*, na qual PINTO (1998), após acompanhar estudantes do Departamento de Matemática e do Instituto de Educação da Universidade de Warwick – Inglaterra, que cursavam Análise Real ao final de seus cursos, concluiu que poucos estudantes aparentaram estar realmente capazes de compreender e utilizar os aspectos formais do conteúdo estudado.

A autora identificou duas estratégias diferentes utilizadas pelos estudantes em suas tentativas de construir conceitos a partir de definições formais, assim denominadas pela mesma: "*significação conferida*" (construção através de experiências anteriores), utilizada pelos aprendizes "*naturais*"; "*significação extraída*" (construção através das definições formais), utilizada pelos aprendizes "*formais*". Entretanto, a autora destaca que nenhuma destas duas vias de aprendizagem, necessariamente, levam ao sucesso ou ao fracasso.

Concluindo seu trabalho, PINTO (1998) ataca uma problemática central do ensino de Análise, com a qual também encerramos esta breve revisão bibliográfica, que certamente contribuirá para uma melhor compreensão teórica de nossa questão de investigação:

O ensino de Análise Matemática tem demonstrado ser uma tarefa difícil. Estando no centro vital da transição dos estudantes do pensamento elementar para o avançado em matemática, demandas conceituais são colocadas aos estudantes, como aquelas preocupadas com o procedimento com definições formais e prova formal. (p. 293, tradução nossa)

Em síntese, acreditamos que a principal contribuição das idéias do “pensamento matemático avançado” para nosso estudo é a constatação de que a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado não significa, determinadamente, uma transição do pensamento intuitivo para o pensamento rigoroso.

No terreno do ensino, o processo de desenvolvimento de um pensamento matemático mais avançado demanda atividades de significação de processos mentais, consideradas mais intuitivas, às quais precedem às atividades com definições e provas formais, por sua vez, mais rigorosas.

Concluindo, concordamos com TALL (1991), ao ressaltar que existe uma falsa dicotomia em se tentar “opor totalmente” o rigor à intuição. Mesmo a nível conceitual, veremos que existe uma concepção não-antagônica acerca dos mesmos e de sua relação.

CAPÍTULO 3

ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS ACERCA DO CÁLCULO E DA ANÁLISE E SUA INFLUÊNCIA NO ENSINO

"Na maior parte das ciências uma geração põe abaixo o que outra construiu e o que uma estabeleceu, a outra desfaz. Somente na matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura."

Hankel

Este capítulo destaca, inicialmente, alguns dos principais matemáticos que desempenharam, pelo conjunto de suas obras, um papel fundamental no desenvolvimento dos conceitos do Cálculo.

Simultaneamente à descrição de alguns resultados que contribuíram para que o Cálculo se tornasse uma área da matemática de grande interesse por parte de seus pesquisadores, tentaremos destacar alguns acontecimentos que nos levaram a constatar que, no processo de transição do Cálculo para a Análise, a busca de um rigor lógico-formal inabalável foi determinante em várias situações.

Nossa breve incursão histórica se inicia no século XVII, com o estabelecimento dos fundamentos do Cálculo, percorre o século XVIII, onde acontecem as primeiras tentativas de rigorização do Cálculo e desemboca no século XIX, com o movimento de Aritmetização da Análise.

Por fim, pretendemos discutir alguns reflexos, no ensino atual, desta transição histórica do Cálculo, inicialmente explorado de maneira mais intuitiva e natural, para a Análise, essencialmente desenvolvida de maneira mais rigorosa e formal.

3.1) ALGUNS ELEMENTOS DA HISTÓRIA DO CÁLCULO

Ao tentar descrever, mesmo que sucintamente, as origens e principais contribuições ao desenvolvimento do Cálculo, torna-se quase que obrigatório iniciar por Zenão. Zenão viveu por volta de 450 a.C. e seus paradoxos dividem os historiadores em relação à sua interpretação e influência sobre a matemática grega. Outro grego importante foi Arquimedes (287 - 212 a.C.), cujo problema do traçado da reta tangente à espiral desencadeou a busca por métodos gerais de traçado de tangentes a curvas.

Fundamental, também, foi a contribuição de Fermat (1601 - 1665) que, mais tarde, foi saudado por Laplace (1749 –1827) como “o verdadeiro inventor do Cálculo Diferencial” e de Barrow (1630 – 1677) que, dos matemáticos que “anteciparam” partes do Cálculo Diferencial e Integral, foi o que mais se aproximou da Análise ainda que algébrica.

Entretanto, iniciaremos nossa investigação sobre rigor x intuição na história do Cálculo, destacando os trabalhos de Newton (1642 – 1727) e Leibniz (1646 – 1716).

Newton e Leibniz são apontados pelos historiadores da Matemática como os maiores responsáveis pelo desenvolvimento do Cálculo não só devido aos seus métodos de derivação mas principalmente pelos seus resultados, destacadamente o Teorema Fundamental do Cálculo. GRATTAN-GUINESS (1997), entretanto, pondera que:

... este teorema é somente parte de sua contribuição e a segunda parte dela. Estes dois matemáticos primeiramente perceberam que a finalidade do Cálculo era encontrar novas funções ou relações das variáveis de uma dada função ou relação: $df(x) / dx$, ou algo análogo, para diferenciação e a função integral $\int f(x) dx$, para integração. (p. 70)

Tal consideração está diretamente ligada à sua proposta de "sátira de história" ou "história satírica" através da qual o historiador inglês defende a presença da história na abordagem dos conteúdos de ensino, ainda que especialmente em outros níveis de ensino. MIGUEL (1997) explica em que consiste a proposta pedagógica da história satírica:

Nada mais do que uma imitação do desenvolvimento de um determinado tema ou teoria, omitindo os contextos históricos nos quais ela se desenvolveu. A história satírica seria, portanto, nada mais do que uma história cronológica descontextualizada de um tema. (p. 97)

Obviamente, face aos objetivos de nosso trabalho, não discutiremos propostas de utilização de história do Cálculo no ensino nem também transcreveremos integralmente as idéias centrais da Teoria dos Fluxos de Newton ou da Teoria dos Infinitesimais de Leibniz, mas procuraremos destacar, ao longo do desenvolvimento do Cálculo nos séculos XVII e XVIII, alguns aspectos relacionados ao problema de sua fundamentação.

Por não conseguirem dar uma formulação devidamente rigorosa para as suas interpretações/aplicações do Cálculo, Newton e Leibniz, após a publicação de seus trabalhos, respectivamente, em 1671 e em 1686, receberam críticas sobretudo em relação às operações com quantidades infinitamente pequenas, assim relatadas por BRITO & CARDOSO (1997):

Foram debatidos dois aspectos problemáticos do Cálculo: um com relação aos conceitos e princípios fundamentais e outro referente ao fato de o Cálculo conduzir a erros. No primeiro aspecto, discutia-se a falta de rigor lógico dos conceitos, destacando a falta de fundamentação do infinitamente pequeno e do infinitamente grande (principalmente sobre os diferenciais de ordem superior); os diferenciais de Leibniz, segundo Rolle (1652-1719), podiam ser interpretados tanto como quantidades não nulas determinadas, quanto como zero. Rolle sustentava que no Cálculo o todo era igual à parte, pois uma grandeza x somada ao seu diferencial dx era igual a ela própria; e que, além disto, os diferenciais eram manipulados diferentemente, conforme as necessidades para se atingir a solução do problema (a solução já era conhecida anteriormente). Varignon (1654-1722), com base no método Newtoniano, respondeu a essas críticas de Rolle; porém, não

satisfatoriamente, pois usou apenas um jogo de palavras que não esclareceu nada. (p. 138)

Aproveitando este interessantíssimo debate, tão bem resumido por BRITO & CARDOSO, iniciamos um outro igualmente interessante: por que a nossa “tradição” em Cálculo é, reconhecidamente, leibniziana, conforme podemos constatar nos livros didáticos ? Teria sido pela notação de Leibniz ($d \int x = \int dx = x$), mais intuitiva e aplicável que a de Newton ($\overset{|}{x} = \overset{|}{x} = x$) ?

GRATTAN-GUINESS (1970) argumenta que a principal causa do sucesso da “tradição leibniziana” reside na qualidade de seus sucessores, destacadamente os irmãos Jacques Bernoulli (1654-1705) e Jean Bernoulli (1667-1748), cujo interesse pelos infinitésimos se deu a partir dos artigos de Leibniz publicados entre 1684 e 1686 e, principalmente, por aquele que é considerado o matemático mais produtor de todos os tempos, Euler (1707-1783).

Sua enorme contribuição para o desenvolvimento do Cálculo no século XVIII se deu tanto no trabalho de extensão ao caso de várias variáveis com as diferenciais parciais, como nas equações diferenciais, na teoria das funções, séries e integrais, enunciando resultados fundamentais para a matemática pura e aplicada.

Mais ainda, Euler certamente pode ser considerado o primeiro matemático da era pós-cálculo que se preocupou em conseguir, e de fato conseguiu, alguns refinamentos nos fundamentos daquela disciplina, sendo sua *Introductio in Analysin Infinitorum* considerada a chave de abóbada da Análise, conforme afirma BOYER (1974):

Ao avaliar desenvolvimentos da matemática devemos sempre ter em mente que as idéias atrás das notações são de longe a melhor metade; quanto a isso também a obra de Euler marcou época. Pode ser dito com justiça que Euler fez pela análise infinita de Newton e Leibniz o que Euclides fizera pela geometria de Eudoxo e Teetetus, ou o que Viète fizera pela álgebra de al-Khowarizmi e Cardano. Euler tomou o cálculo diferencial e o método dos fluxos e tornou-os parte de um ramo mais

geral da matemática que a partir daí é chamado “análise” – o estudo de processos infinitos. (p. 326)

Ainda no final do século XVIII, Lagrange (1736 – 1813), numa tentativa de oferecer uma abordagem rigorosa ao Cálculo, foi o responsável pela “tradição” das séries de Taylor que, juntamente com as “tradições” de limites e diferenciais, dividiam a preferência dos autores de livros didáticos do período. Dentre esses autores destacaram-se Lacroix (1765 – 1843), que apresentou as três abordagens em seu *Lacroix Calculus* e Carnot (1753 – 1823), que defendia tanto os limites como os infinitésimos em seu *Carnot Calculus*.

Também no ensino, verificava-se na *Ecole Polytechnique* de Paris tendências do ensino de limites, com Ampère (1775 – 1836) e do ensino de infinitésimos, com Laplace (1749 – 1827). Esta situação perdurou até o início do século XIX, mais precisamente quando se inicia o movimento de Aritmetização da Análise, que será destacado a seguir.

3.2) A ARITMETIZAÇÃO DA ANÁLISE

Retomando a questão das tentativas fracassadas de se apresentar uma abordagem rigorosa para o Cálculo, realizadas no final do século XVIII, podemos qualificar tais tentativas como os primeiros passos em direção à fundamentação da Análise.

A respeito das causas e, ao mesmo tempo, da importância dos fracassos, o historiador da matemática EVES (1995) relata:

Foi isso essencialmente o que aconteceu com a Análise durante o século seguinte à invenção do Cálculo. Tangidos pela aplicabilidade imensa do assunto e carecendo de um entendimento real dos seus fundamentos, os matemáticos manipulavam os processos analíticos de uma maneira quase cega, muitas vezes guiados apenas pela intuição... Alguns matemáticos conscientes se sentiram na obrigação de tentar a difícil tarefa de estabelecer uma fundamentação rigorosa para a Análise. (pp. 609-610)

Torna-se aqui necessário apontar algumas "diferenças" históricas entre Cálculo e Análise. Apesar de não serem consideradas áreas completamente distintas e separáveis dentro da matemática, a passagem do Cálculo para a Análise esteve diretamente relacionada a uma outra área até então "intocável" da matemática: a toda poderosa Geometria, em cujas noções o Cálculo estava irrevocavelmente baseado / assentado.

Um destaque histórico conciso sobre esta questão foi feito por BARON & BOS (1985), ao defenderem que:

A transição do Cálculo para a Análise no século XVIII não foi somente uma questão de crescimento e divisão em subcampos; envolveu também uma transformação fundamental em sua natureza. O Cálculo, por volta de 1700, era ainda essencialmente orientado para a geometria. Tratava de problemas sobre curvas, empregava símbolos algébricos, mas as quantidades de que se utilizava eram principalmente interpretadas como ordenadas e abscissas de curvas, ou como outros elementos de figuras geométricas. Durante a primeira metade do século diminuiu o interesse pela origem geométrica dos problemas e os matemáticos passaram a se interessar mais pelos símbolos e fórmulas do que pelas figuras. A Análise tornou-se o estudo e manipulação de fórmulas. (p. 43)

Mas o problema era bem mais profundo do que uma simples questão de interesses de pesquisa. Na realidade, como foram verificadas várias falhas nos fundamentos geométricos do Cálculo, deveria ser buscada uma outra alternativa para a Análise: uma fundamentação baseada em números !

Neste processo, é considerada fundamental a contribuição de Bolzano (1781 – 1848) que, por ter percebido a necessidade de rigor em Análise, foi saudado mais tarde por Klein (1849 – 1925) como "o pai da Aritmetização". Outra contribuição inquestionável foi a de Gauss (1777 – 1855). Ele publicou três demonstrações consecutivas do "Teorema fundamental da Álgebra" na tentativa de encontrar uma prova inteiramente algébrica, sem se basear em considerações geométricas.

Mencionando ainda os trabalhos de Fourier (1768 – 1830) e Dirichlet (1805 – 1859), iniciaremos a caracterização de uma tendência / movimento denominado por Klein, em 1895, de "Aritmetização da Análise", destacando os papéis do "príncipe do rigor" (Cauchy) e, em seguida, do "pai da Análise" (Weierstrass).

Após ser nomeado para o corpo docente da *École Polytechnique* de Paris em 1816, como professor da nova cátedra de Análise Matemática, Cauchy (1789 – 1857) inicia um movimento de refinamento da teoria de limites e utiliza-a como base de uma nova e ampla disciplina ordenada rigorosamente, desenvolvida através de um conjunto consistente de definições e teoremas apresentados formal e logicamente, com uma notação una e coerente ao longo de todo o texto de seu *Cours d'analyse* (1821).

Uma das principais contribuições da Análise de Cauchy, descrita detalhadamente por GRABINER (1981), foi uma definição quase tão precisa de limite como a que se tem hoje:

"Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de modo a finalmente diferir deste de tão pouco quanto se queira, esse último chama-se o limite de todos os outros." (CAUCHY, Apud BOYER, 1974, p. 380)

Mas, talvez, a maior contribuição de Cauchy não esteja no rigor da definição de limite. A diferença fundamental em relação a muitos matemáticos anteriores é que estes concebiam o infinitésimo enquanto um número fixo, ao passo que Cauchy definiu-o claramente como uma variável dependente:

"Diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce indefinidamente de modo a convergir para o limite zero." (CAUCHY, Apud BOYER, 1974, p. 380)

A partir deste conceito de limite, Cauchy desenvolveu os conceitos de continuidade, diferenciabilidade e integral, cujas definições são, em sua essência, as encontradas nos livros de Cálculo e Análise de hoje, embora com formulações mais elaboradas.

Em uma de suas lições de Cálculo Diferencial e Cálculo Integral contidas no *Résumé* (1823), Cauchy apresentou enfim, uma versão mais rigorosa do Teorema Fundamental do Cálculo, no sentido de que a notação foi utilizada de maneira coerente, com noções consistentemente fundamentadas:

$$\text{“} \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(x) dx = f(x) \text{” (diferenciação e integração como processos inversos)}$$

Entretanto, uma questão relacionada à procura de uma sólida fundamentação para a Análise ainda não havia sido resolvida por Cauchy: sua teoria dos limites foi construída sobre uma noção intuitiva do sistema dos números reais.

Tendo, pois, como principal motivação a Análise deixada por Cauchy, Weierstrass (1815 – 1897) defendeu a necessidade de que o sistema de números reais fosse tornado rigoroso, o que se concretizou, no final do século XIX, com Dedekind (1831 – 1916) e Peano (1858 – 1932), que mostraram como o sistema dos números reais pode ser deduzido de um conjunto de postulados para o sistema dos números naturais; o primeiro com sua noção de "corte", que permitiu a demonstração rigorosa dos teoremas fundamentais sobre limites sem utilizar recursos geométricos e o segundo, que introduziu um "simbolismo" uniforme, criando assim, uma nova forma de lógica matemática.

BARKER (1976) afirma que:

Esta conquista foi denominada Aritmetização da Análise, pois trata de revelar de que modo as partes da Matemática reunidas sob o título de Análise podem ser reduzidas à parte elementar da Aritmética (ou Teoria Elementar dos Números, como também é chamada). (p. 79)

Citando Weierstrass como defensor de um "programa" de rigorização da Análise, objetivando a sua confiabilidade, EVES (1995) também afirma que:

Esse notável programa, conhecido como Aritmetização da Análise, revelou-se difícil e intrincado, mas acabou se concretizando através de Weierstrass e seus seguidores e, hoje, a Análise pode ser deduzida

logicamente de um conjunto de postulados que caracterizem o sistema dos números reais. (p. 611)

A importância de Weierstrass não só pode ser constatada ao se examinar o sentido de "rigor weierstrassiano": raciocínio extremamente cuidadoso, mas também pela influência que ele exerceu como professor da Universidade de Berlim onde, influenciado por suas aulas, seu aluno Heine (1821 – 1881) definiu, em 1872, o limite de uma função $f(x)$ num ponto x_0 da seguinte maneira:

"Se, dado qualquer ε , existe um η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$, a diferença $f(x_0 \pm \eta) - L$ é menor em valor absoluto que ε , então L é o limite de $f(x)$ para $x = x_0$." (HEINE, Apud BOYER, 1974, p. 411)

Observemos que, substituindo-se a letra grega η por δ , tal definição é, essencialmente, a mesma, encontrada nos livros atuais, onde as provas por ε - δ fazem parte do instrumental comum dos matemáticos de hoje.

De forma concisa, BOYER (1974) caracteriza / divide o movimento de Aritmetização da Análise em três fases distintas:

1º Programa: compreende os trabalhos de rigorização da Análise realizados, com pouco ou muito sucesso, pelos matemáticos pré-weierstrassianos, destacadamente Cauchy;

2º Programa: compreende a "Idade do Rigor", que havia chegado com Weierstrass ao substituir os antigos conceitos intuitivos por precisão lógica crítica;

3º Programa: compreende os trabalhos de refinamento dos weierstrassianos, destacadamente Riemann (1826 - 1866) e Cantor (1845 – 1918) que tentaram dar à Análise um estado de perfeição rigorosa, através de suas contribuições fundamentais das aplicações da Topologia à Análise.

Adentrando no século XX, destacamos ainda os trabalhos de Lebesgue (1875 – 1941), especialmente importante no desenvolvimento da Teoria da Medida e Integração e, mais recentemente, de KEISLER (1976) que introduziu um curso de Cálculo usando infinitésimos baseando-se na Análise não-standard.

3.3) A INFLUÊNCIA DA "TRADIÇÃO" DOS LIMITES NO ENSINO DE CÁLCULO

Conforme relatamos no item 3.1, as "tradições" do ensino através de limites e de infinitésimos dominaram o cenário pedagógico do Cálculo ao final do século XVIII, confundindo importantes autores de livros didáticos da época, tais como Lacroix e Carnot. Também entre grandes professores de famosas universidades houve divisão, como na *Ecole Polytechnique* de Paris, onde, destacadamente, Ampère optou pelo ensino de limites e Laplace se mostrou partidário do ensino através de infinitésimos.

Estas diferentes formas de se abordar o Cálculo, decorrentes das diferentes tradições, perduraram até o início do século XIX, quando ocorreu um período de "primazia dos limites" por influência de Cauchy, que refinou a teoria dos limites com o objetivo de consolidar as bases da Análise Matemática. A partir deste processo, as noções fundamentais do Cálculo seriam desenvolvidas através do conceito de limite, o que foi confirmado por Weierstrass e seus seguidores.

A "tradição" dos limites é, indiscutivelmente, a tendência predominante no ensino atual de Cálculo. Nossa afirmação se sustenta com base nas seguintes constatações:

- 1) Influenciados pelo modelo *cauchyano*, tradicionalmente, iniciamos o estudo do Cálculo pela noção de limite de uma função e, em seguida, destacamos que: a continuidade depende de um limite (existir e ser igual ao valor da imagem da função no ponto); a derivada é um limite (do quociente incremental); a integral é um limite (das somas de Riemann);

- 2) A partir do refinamento *weierstrassiano* das definições, verificamos na maioria dos livros didáticos atuais¹¹, o desenvolvimento da teoria de derivadas e integrais posterior à apresentação dos limites. Estes, em geral, são definidos a partir do par ε - δ e em seguida, são destacadas as principais propriedades e alguns teoremas mais importantes relacionados aos limites.

Em abril de 1997, tivemos a oportunidade de conversar pessoalmente com o historiador e professor inglês Ivor Grattan-Guinness. Nessa ocasião, o professor havia proferido uma palestra sobre História do Ensino de Cálculo, na Faculdade de Educação da UNICAMP. O professor afirmou que a história nos mostra o desenvolvimento do Cálculo, na seguinte ordem: cálculo integral; cálculo diferencial; cálculo de limites; noção de número real. Entretanto, o ensino inverte completamente esta ordem: números – limites – derivadas – integrais. Grattan-Guinness apontou duas causas principais para esta "inversão pedagógica da história" (grifo nosso):

- 1) O papel preponderante dos limites na teoria inicialmente desenvolvida por Cauchy e, posteriormente, formalizada por Weierstrass: a definição de limite por ε - δ foi tão marcante que ainda hoje, segundo o historiador, vivemos sob uma "ortodoxia epsilonica", descrita como um "rígido molde" para os livros didáticos;
- 2) A influência do movimento de Aritmetização da Análise: na busca pelo rigor, as redefinições de conceitos como continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade utilizando a linguagem dos limites representou garantia inquestionável de obtenção de um nível de formalização bastante aceitável para os padrões acadêmicos da época e, porque não dizer, para as exigências acadêmicas da sociedade matemática a nível mundial de hoje.

¹¹ Uma análise mais detalhada de alguns dos principais manuais didáticos utilizados nas disciplinas de Cálculo e Análise de universidades brasileiras será feita no Capítulo 5.

Baseando-nos, principalmente, em nossa própria experiência profissional na docência do Cálculo, reconhecemos que o ensino de limites tem demonstrado ser um ponto de grandes questionamentos em relação à sua abordagem excessivamente rigorosa, segundo a ortodoxia epsilon. Também encontramos respaldo teórico por várias pesquisas relacionadas ao ensino de limites, realizadas em diversos países e cursos. Dentre estas, destacaremos, agora, alguns estudos de educadores matemáticos da escola francesa de Didática da Matemática, que se baseiam na definição de obstáculo epistemológico apresentada por BACHELARD (1971). Este, por sua vez, afirmou que, no próprio ato de conhecer:

... aparecem, por uma espécie de necessidade funcional, lentidões e perturbações. É aqui que residem causas de estagnação e mesmo de regressão, é aqui que iremos descobrir causas de inércia a que chamaremos obstáculos epistemológicos. (p. 165, grifo do autor)

Em *Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite*, SIERPINSKA (1985) constatou, numa investigação junto a estudantes de Cálculo, a existência de diversos tipos de obstáculos ligados à aprendizagem da noção de limites pelos estudantes, assim classificados pela pesquisadora:

- 1) Obstáculos relacionados a um certo "horror ao infinito";
- 2) Obstáculos relacionados à própria noção de função;
- 3) Obstáculos relacionados a fundamentos geométricos;
- 4) Obstáculos relacionados a fundamentos lógicos;
- 5) Obstáculos relacionados ao simbolismo utilizado.

Somente dentro do primeiro grupo, por exemplo, Sierpinska enumera vários obstáculos relacionados ao ensino de limites de funções e de sequências, dentre eles:

- 1.1) A passagem ao limite¹² é considerada um método de demonstração rigoroso pelos estudantes, eliminado o problema com o infinito;
- 1.2) A operação de passagem ao limite é tida pelos estudantes como um raciocínio baseado numa indução incompleta, mesmo historicamente;
- 1.3) A operação de passagem ao limite é considerada pelos estudantes uma pesquisa daquilo que se pode conhecer apenas de forma aproximada, o que encontra justificativa histórica;
- 1.4) O resultado obtido através da passagem ao limite é considerado pelos estudantes completamente satisfatório, sem a necessidade de justificativa através de uma demonstração rigorosa, sendo suficiente o estabelecimento de uma fórmula coerente com o resultado obtido no sentido de que o próprio cálculo a verificaria e consequentemente, estaria validando-a;
- 1.5) A transferência automática das propriedades dos termos de uma sequência para o seu limite;
- 1.6) A utilização automática dos métodos algébricos de manipulação de grandezas finitas para a manipulação com grandezas infinitas;
- 1.7) A interpretação excessivamente literal de expressões como "aproximar-se de", "tender para", etc.

¹² Termo utilizado para se referir ao processo de cálculo do valor limite de uma função ou do ponto limite de uma sequência.

Parece ficar claro que os obstáculos acima relacionados, estão ligados à forma de tratamento lógico-formal dada ao infinito. Mais ainda, examinando, mesmo que superficialmente, os tipos de obstáculos levantados pela pesquisadora, podemos constatar que muitos deles também seriam verificados caso fôssemos professores-pesquisadores de nossa própria prática pedagógica ou de nossa própria sala de aula.

Já CORNU (1983), em sua tese de Doutorado intitulada *Apprentissage de la notion de limite, conceptions et obstacles*, afirma que, na aprendizagem de limites, existem duas coisas distintas a serem consideradas: a noção de limite, fundamental para o cálculo de limites e suas aplicações; a definição de limites por ε - δ , fundamental para a demonstração de teoremas e propriedades.

O pesquisador recorre, então, a fatos da História da Matemática ao afirmar que a noção de limite foi explorada / utilizada por matemáticos como Zenão (no estabelecimento dos paradoxos) e Eudoxo (no Método da Exaustão), muito tempo antes de ter sido estabelecida a definição atual de limite. Com tal comparação, em nosso entendimento, Cornu tende a ressaltar a importância de nós, professores, no intuito de eliminarmos obstáculos epistemológicos, procurarmos valorizar mais as *concepções espontâneas* dos estudantes, antes de que eles formem, através do ensino, suas *concepções próprias*. Aqui, o pesquisador denomina *espontâneas* aquelas concepções / idéias que os estudantes trazem a priori, antes de uma situação de ensino e *próprias* aquelas concepções pessoais formadas a partir das espontâneas e de situações de ensino.

Mesmo concordando com REZENDE (1994), quando este defende que a identificação dos obstáculos epistemológicos pode ser um fator altamente positivo na perspectiva do conhecimento real das operações com limites, paramos para nos questionar: existiria uma outra alternativa pedagógica para o ensino de Cálculo baseado em limites ?

Timidamente, Grattan-Guinness compara o Cálculo baseado em limites de Cauchy e o Cálculo baseado em infinitésimos de Leibniz, como um caso de confronto entre rigor e intuição. Já Baldino, declaradamente, aponta o Cálculo baseado em infinitésimos, seguido da Análise não-standard, como uma alternativa didática ao ensino tradicional vigente, tanto em artigos revisitados no capítulo anterior como em sua entrevista, que será analisada analisada a posteriori.

3.4) A INFLUÊNCIA DA ARITMETIZAÇÃO DA ANÁLISE NO ENSINO DE ANÁLISE

A influência da Aritmetização da Análise no desenvolvimento da Matemática, enquanto ciência, foi claramente destacado: o rigor formal, a partir de então, passou a ser valorizado e perseguido, não só em Análise, mas em todas as áreas que constituem a matemática pura.

Mas esse movimento teria exercido algum tipo de influência sobre a matemática do século XX ? Não só exerceu como continua exercendo, segundo EVES (1995): *A par dessa rigorização da matemática, verificou-se uma tendência no sentido da generalização abstrata, um processo que se tornou muito pronunciado nos dias de hoje. (p. 613)*

Apesar de se constituir tarefa difícil, tentaremos, a partir de agora e nos próximos capítulos, verificar a existência de uma ligação entre o rigor necessário ao desenvolvimento de teorias matemáticas e o rigor presente no ensino destas teorias. Especificamente, iniciamos por questionar de que maneira o rigor da Aritmetização influenciou o ensino de Análise. Nada melhor para isso, do que examinar, inicialmente, as idéias de um professor que experimentou *in loco* a realidade de mudanças significativas no padrão do pensar e do agir em Matemática.

Um matemático não muito conhecido chamado Pierpont vivenciou, no final do século XIX, os três programas considerados mais importantes da Matemática naquela época: a Aritmetização da Análise, segundo Weierstrass; a Fundamentação da Teoria dos Conjuntos, segundo Cantor; e a Filosofia do Formalismo, segundo Frege (1848 – 1925). Tais programas, apesar de separados em seus objetivos, estavam ligados por alguns detalhes, na medida em que Pierpont não resistia à "visão de rigor total" oferecida pelos três.

PIERPONT (1899) traduziu de forma concisa e interessante o que significou o programa de Aritmetização que tornou o Cálculo "mais rigoroso" (ou, ainda, a Análise): *What can be proved should be proved – O que pode ser provado deve ser provado. (p. 395, grifo nosso, tradução nossa)*

Apesar disso, ele entendia que a Matemática estava irrevogavelmente baseada em idéias, o que expressa da seguinte forma:

De nossa intuição, nós temos as noções de curvas, superfícies, continuidade, etc. Ninguém pode mostrar que as formulações aritméticas são coextensivas com seus conceitos intuitivos correspondentes. (Ibidem, pp. 400-401, grifo do autor, tradução nossa)

Na realidade, a mesma inquietação que tomou conta de Pierpont e certamente, de outros matemáticos do final do século XIX, toma conta, ainda hoje, de matemáticos, destacadamente, professores que percebem que, muitas vezes, o preço pago pela *clareza e precisão do rigor* é a *total separação do mundo de nossos sentidos*.

Concluimos este capítulo, observando que o desenvolvimento histórico do ensino das disciplinas Cálculo e Análise sempre esteve atrelado / determinado pelo desenvolvimento histórico do Cálculo e da Análise, enquanto campos de conhecimento matemático. Isso pode ser resumido da seguinte forma:

- 1) os fundamentos epistemológico-filosóficos sempre nortearam as ações no campo didático-pedagógicas, o que podemos comprovar através do papel da "tradição dos limites" no ensino de Cálculo;
- 2) as transformações percebidas na relação entre rigor e intuição no processo de Aritmetização da Análise tiveram fortes repercussões no ensino, o que pode ser comprovado pela “máxima de Pierpont”, certamente válida ainda hoje, mesmo no campo do ensino onde, muitas vezes, "o que pode ser provado é, de fato, provado".

Esta constatação nos leva a buscar um maior aprofundamento do sentido dos termos rigor e intuição, bem como de suas relações com o ensino de Cálculo e Análise.

CAPÍTULO 4

RIGOR E INTUIÇÃO NO ENSINO DE CÁLCULO E ANÁLISE E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

*"Para Tales ... a questão primordial não era o
que sabemos, mas como o sabemos."*

Aristóteles

Neste capítulo, pretendemos discutir os aspectos intuitivos e rigorosos do ensino de Cálculo e Análise, bem como analisar as possíveis implicações das diferentes abordagens no processo de ensino e aprendizagem destas disciplinas na formação do professor de matemática.

Para tal, optamos por examinar, inicialmente, o significado dos termos rigor e intuição fornecido pelo dicionário. Acreditamos que esta primeira significação poderá ser útil, quando da exemplificação de situações da prática pedagógica, que estarão relacionadas a aspectos intuitivos no ensino de determinados tópicos do Cálculo ou a aspectos rigorosos no ensino de certos conteúdos da Análise.

Na sequência, iniciamos uma discussão sobre a formação de professores de Matemática que, aqui, será feita à luz dos aspectos rigorosos e intuitivos do Cálculo e da Análise, já que estas disciplinas integram a grade curricular da grande maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática do Brasil.

Sob esta perspectiva, analisaremos algumas categorias de conhecimento profissional do professor. A partir desta análise, discutiremos três tópicos, cuja interação julgamos fundamentais na relação entre rigor e intuição no ensino e na formação do professor de matemática: a prova rigorosa, o pensamento flexível e os conhecimentos procedimental e conceptual.

4.1) O QUE HÁ DE INTUITIVO NO ENSINO DE CÁLCULO ?

Examinemos, inicialmente, os significados da palavra intuição em alguns dicionários:

- 1) Apreensão direta, imediata e atual de um objeto na sua realidade individual;¹³
- 2) Pressentimento, espécie de instinto pelo qual se adivinha, descobre ou conhece o que é ou deve ser;¹⁴
- 3) Conhecimento imediato e claro, sem recorrer ao raciocínio.¹⁵

Nos mesmos dicionários, encontramos uma interpretação filosófica para a intuição:

- 1) Contemplação pela qual se atinge em toda a sua plenitude uma verdade de ordem diversa daquelas que se atingem por meio da razão ou do conhecimento discursivo ou analítico;¹³
- 2) Percepção, conhecimento claro, direto, imediato e espontâneo da verdade sem auxílio do raciocínio;¹⁴
- 3) Conhecimento claro, direto, imediato e espontâneo da verdade.¹⁵

Retomando uma questão levantada anteriormente no Capítulo 1, sobre qual seria o ponto de equilíbrio entre o rigor necessário no estabelecimento das proposições e a intuição fundamental no desenvolvimento das idéias, analisaremos mais detalhadamente as categorias de intuição estabelecidas por PERMINOV (1988), tentando caracterizar o ensino intuitivo através de várias situações de ensino que, na grande maioria das vezes, passam totalmente despercebidas aos olhos do professor que desconhece as múltiplas faces / fases intuitivas relacionadas à aprendizagem de certos tópicos do Cálculo.

¹³ Novo Dicionário da Língua Portuguesa – Aurélio Buarque de Holanda Ferreira – Editora Nova Fronteira – Rio de Janeiro – 1986.

¹⁴ Dicionário Contemporâneo da Língua Portuguesa – Caldas Aulete – Editora Delta – Rio de Janeiro – 1974.

¹⁵ Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa – Mirador Internacional – Editora Melhoramentos – São Paulo – 1975.

A opção por este autor se deve ao fato de que, com os exemplos de pensamento intuitivo aqui destacados do Cálculo, não pretendemos utilizar / explorar, neste momento, a noção de intuição enquanto produto de imagens conceituais de TALL & VINNER (1981), muito menos nos enquadrar nos tipos de intuição muito específicos de POINCARÉ (1913), descritos sucintamente no Capítulo 2.

Por outro lado, entendemos que em relação aos dois tipos de intuição caracterizados por FISCHBEIN (1978)¹⁶, nossos exemplos se enquadram, todos, na categoria de intuições secundárias (ou refinadas, ou ainda, de segundo grau) por serem resultantes de um processo que envolve claramente, um treinamento intelectual feito de forma sistematizada ao longo dos vários anos de instrução que precedem ao ensino universitário.

Já o texto de PERMINOV (1988), *Sobre a confiabilidade das provas matemáticas*¹⁷, distingue cinco tipos de intuição que desempenham o papel principal no raciocínio, que passaremos a analisar e tentaremos exemplificar.

Ressaltemos que tal tarefa é extremamente difícil e passível de múltiplas interpretações, visto que, as categorias de intuição descritas no texto aparecem, na prática de sala de aula, simultaneamente num mesmo exemplo. Isto significa que um exemplo aqui citado dentro de uma categoria pode conter elementos que, possivelmente, também o enquadrariam numa outra categoria.

Passemos à apresentação das categorias de intuição:

- 1) A intuição empírica, que baseia-se na analogia e diretamente da experiência adquirida no processo de manipulação de uma classe de objetos, transfere os atributos comuns desta classe para novos objetos da mesma classe.

Um exemplo interessante de intuição empírica no Cálculo ocorre no cálculo de derivadas onde o aluno, após as definições iniciais e frente aos exemplos das funções x , x^2 e x^3 , cujas derivadas são, respectivamente, $1.x^{1-1} = 1$, $2.x^{2-1} = 2x$ e $3.x^{3-1} = 3x^2$, infere que a derivada da função x^n é $n.x^{n-1}$.

¹⁶ Veja Capítulo 2, item 2.4.

¹⁷ Tradução de Antonio Miguel – FE / UNICAMP.

Obviamente, tal resultado, apesar de correto, necessita ser demonstrado. O autor também afirma que:

Logicamente, a intuição empírica é uma inferência posterior por analogia e, embora seja óbvia, não é demonstrativa; inferências feitas de acordo com ela são verificadas e retificadas por análise lógica. (p. 502)

- 2) A intuição objetiva, também chamada de praxeológica, que envolve a faculdade humana de distinguir e identificar os objetos no ambiente e suas combinações simples.

No cálculo de limites, ao calcularmos o limite da soma de duas funções (por exemplo, $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 3x + 2$), os alunos "elementarmente" somam as duas funções e calculam o limite da função resultante, devido muito mais à sua experiência com a manipulação de funções [$f(x) + g(x) = 5x + 3$] do que ao teorema que garante que o limite da soma é a soma dos limites.

As inferências feitas de acordo com tal intuição são tidas como imediatamente óbvias e, segundo o autor:

A intuição praxeológica é autoritária em relação à lógica no sentido de que a análise lógica leva em consideração tais afirmações praxeológicas (explica-as), mas nunca as refuta. (Ibidem, p. 502)

- 3) A intuição lógica, que se manifesta primariamente nas conclusões “por definição”, bem como nas conclusões extraídas por meio de modelos lógicos de transitividade, contraposição, etc., sem a formulação óbvia dos modelos.

Por exemplo, ao se demonstrar que toda função derivável num ponto a é contínua nesse ponto, utilizando as definições de derivabilidade e continuidade envolvendo limites, pode-se concluir, "logicamente", que se uma função não é contínua num ponto a , então ela não é derivável nesse ponto ($p \rightarrow q \equiv \text{não } q \rightarrow \text{não } p$)

Obviamente, a demonstração contém passos desencadeados logicamente, contribuindo para um raciocínio significativo e convincente do aluno. O autor afirma que:

A intuição lógica, portanto, também representa um elemento estável e inalterável do raciocínio matemático. (Ibidem, p. 503)

- 4) A intuição categórica, também chamada de geométrica ou espacial, que relaciona as suposições aos conceitos de espaço e tempo, sendo utilizada em instâncias elementares, como em figuras visíveis, finitas.

Um exemplo interessantíssimo da utilização desse tipo de intuição no Cálculo acontece na exposição inicial do Teorema do Valor Intermediário ou de um de seus corolários mais importantes: se uma função f é contínua em $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, então existe pelo menos um número c entre a e b tal que $f(c) = 0$.

É interessante observar que uma simples figura "explica / demonstra" tal proposição, mesmo que de maneira elementar, o que não contradiz o autor ao afirmar que:

"Este tipo de intuição é algumas vezes cheio de erros, mas em instâncias elementares ele é também absolutamente autoritário com respeito à lógica. (Ibidem, p. 503)

- 5) A intuição conceptual, que acrescenta à noção de um objeto, um componente derivado da teoria dentro da qual o objeto é considerado, refletindo a estrutura lógica desta teoria.

Como exemplo do Cálculo, podemos citar as importantes aplicações da derivada a outras teorias tais como a Mecânica, onde os conceitos de velocidade e aceleração podem ser vistos como taxas de variação, o que será compreendido pelo aluno ao identificar a noção de derivada enquanto taxa de variação aplicada aos conceitos da Física.

É óbvio que o conceito de derivada deve ter sido bem trabalhado anteriormente às aplicações, já que para o autor:

A intuição conceptual, bem como a empírica, parece ter somente um valor heurístico e parece obedecer completamente os resultados do raciocínio lógico. (Ibidem, p. 503)

Parece-nos que a categorização das intuições feita por Perminov não contradiz o sentido mais geral da palavra “intuição”, pois mesmo os termos *sem recorrer ao raciocínio* ou *sem auxílio do raciocínio* que aparecem em algumas definições dos dicionários parecem soar como *instantaneamente após a apresentação*. O fato é que intuição é um *conhecimento claro e imediato* e, portanto, não podemos deixar de analisar os limites e possibilidades deste conhecimento.

PERMINOV (1988), na verdade, queria com este artigo, produzir alguns argumentos que refutassem o “falibilismo radical” defendido por LAKATOS (1978). Por isso, ao fazer uma análise das provas matemáticas, mostra que o movimento do processo de produção do conhecimento matemático tem uma fase inicial mais empírica e intuitiva e uma fase seguinte de aperfeiçoamento da prova, momento em que o rigor se faz mais presente. Acerca do raciocínio matemático, presente nas provas matemáticas, o autor conclui que:

Num primeiro estágio, ele deriva-se de todos os tipos de validação direta, incluindo inferências por analogia. A verificação da prova conduz, principalmente, à eliminação de uma suposição indutiva desta espécie. Em seguida, a prova é aperfeiçoada... (Ibidem, p. 504)

Independentemente de se tratar de uma demonstração de um resultado importante ou do desenvolvimento de um determinado conceito, constatamos que a intuição deveria, obrigatoriamente, estar presente no processo de ensino-aprendizagem do Cálculo e, conseqüentemente, no processo de construção da Análise, a qual, para atingir uma validação lógico-formal, isto é, rigorosa, jamais poderia prescindir da fase intuitiva e criativa das idéias matemáticas.

Mas, o que é o rigor tão perseguido pelos matemáticos desde a "criação" do Cálculo e de que forma ele foi obtido ? Esta discussão nos remete, inicialmente, à disciplina de Análise. Isto porque a Análise é considerada o "Cálculo rigorizado".

Mas o que isto significa ? Cálculo: estudo "intuitivo" de funções, limites, continuidade, derivadas e integrais; Análise: estudo "rigoroso" dos mesmos tópicos ?

Um professor universitário com esta visão dicotômica tende a realizar uma transposição didática nos mesmos moldes, com a qual também não podemos concordar. Isto porque, de acordo com o que vimos até agora, rigor e intuição caminham juntos, tanto no Cálculo como na Análise e ambos tem papéis igualmente importantes e complementares na formação do pensamento / conhecimento diferencial, integral e analítico, tanto de um professor de matemática quanto de um matemático.

4.2) O QUE HÁ DE RIGOROSO NO ENSINO DE ANÁLISE ?

Observemos, inicialmente, que do dicionário, vêm os seguintes significados diretos para a palavra rigor:

- 1) Ausência de qualquer desvio, clareza;¹⁸
- 2) Concisão, exatidão, precisão;¹⁹
- 3) Forma exata, rigorosa e precisa.²⁰

Nos mesmos dicionários, encontramos sentidos figurados para o rigor:

- 1) Regra de procedimentos, preceito: "o rigor manda que...";¹⁸
- 2) Sentido preciso e necessário, interpretação restrita, explicação exata: "o rigor de uma demonstração...";¹⁹
- 3) Último ponto a que se pode chegar alguma coisa, sentido próprio (das palavras): "o rigor matemático...".²⁰

¹⁸ Novo Dicionário da Língua Portuguesa – Aurélio Buarque de Holanda Ferreira – Editora Nova Fronteira – Rio de Janeiro – 1986.

¹⁹ Dicionário Contemporâneo da Língua Portuguesa – Caldas Aulete – Editora Delta – Rio de Janeiro – 1974.

²⁰ Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa – Mirador Internacional – Editora Melhoramentos – São Paulo – 1975.

Ao apresentarmos aqui, os principais sentidos da palavra “rigor” e considerando que no item anterior já havíamos feito o mesmo com a palavra “intuição”, tentaremos, a partir de agora, caracterizar a relação entre os dois termos no ensino. Para tanto, também como foi feito no item anterior, procuraremos caracterizar o ensino rigoroso através de situações de ensino que envolvem certos conceitos e definições “apresentados” no Cálculo e “rigorizados” na Análise.

Inicialmente, examinemos LOYES (1993) que, com o propósito de construir uma concepção própria da Matemática frente às correntes filosóficas e pedagógicas atuais, aponta três papéis relacionados ao rigor:

- 1) O rigor é uma característica inerente ao método matemático: as definições são acabadas e perfeitas;
- 2) O rigor é um fantasma: nossas demonstrações são sempre suscetíveis de serem criticadas, nossos conceitos de serem completados, nossa linguagem de ser enriquecida;
- 3) O rigor é um imperativo do trabalho matemático: busca-se no método dedutivo a confirmação dos processos construtivos que se utilizam de definições parciais, demonstrações informais e linguagens representativas ou empíricas.

Retomando a história da Análise, a “revolução do rigor” iniciada por Cauchy e que atingiu um patamar definitivo com Weierstrass, mostra-nos que o rigor foi perseguido por vários matemáticos em diferentes épocas e situações, conforme já observamos anteriormente, através do desenvolvimento do conceito de limite ao longo dos anos.

Tomaremos agora, como exemplo, a definição de continuidade de uma função num ponto atribuída, historicamente, a Cauchy & Weierstrass²¹, que se utiliza da notação com épsilons e deltas, na forma em que ela aparece na grande maioria dos livros didáticos de Análise:

²¹ Formulação inicial feita por Cauchy, formalizada pelos Weierstrassianos.

"Uma função $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$."

Na tentativa de estabelecer uma estrutura metafórica da Matemática, dentro de um novo campo de estudo – a ciência cognitiva da Matemática –, LAKOFF & NÚÑEZ (1997) apresentam, em seu trabalho, uma crítica contundente em relação ao papel desempenhado pela definição de continuidade apresentada acima no desenvolvimento do conceito de continuidade.

Basicamente, a crítica feita pelos autores segue a seguinte linha argumentativa a respeito da definição de continuidade por ε - δ :

- 1) Quando se resume a continuidade de uma função a um processo de, dado um ε , encontrar um δ , está se caracterizando não a continuidade em si, mas uma "correspondência" entre os dois elementos ε e δ ;
- 2) Nos termos apresentados na definição, uma linha, no caso, o gráfico da função contínua, é considerada um conjunto de pontos, para os quais se verifica isoladamente a continuidade, explicitando uma visão discreta e não-holística;
- 3) Logo, por ressaltar uma idéia de correspondência e ser apresentada pontualmente, a definição não contempla a essência da "continuidade natural" de uma função, concebida por Euler ao caracterizar uma função contínua como sendo "a curva descrita pelo movimento livre de uma mão através do plano cartesiano".

Por fim, ao comentar a abordagem inicial da continuidade feita em alguns livros didáticos atuais, onde após a apresentação de uma noção intuitiva, é colocada a necessidade de uma definição "mais rigorosa" de continuidade, LAKOFF & NÚÑEZ (1997) disparam: *... entretanto, a versão mais rigorosa é apenas uma metáfora e não mais que isto.* (p. 59, grifo do autor, tradução nossa)

Após relacionar a questão do rigor e do formalismo com a Aritmetização da Análise (ou Aritmetização do Cálculo, como é chamada no texto), LAKOFF & NÚÑEZ (1997) questionam: o que é preciso (rigoroso) nas definições de Weierstrass ?

Os autores fazem uma correlação que, em nosso entendimento, também é verificada nas concepções de muitos professores, talvez encontrando respaldo na sociedade matemática a níveis nacional e mundial:

Muitos estudantes de Matemática são levados falsamente a acreditar que é a porção epsilon-delta destas definições que constitui o rigor desta Aritmetização do Cálculo. A porção epsilon-delta, na realidade, desempenha um papel cada vez mais limitado. (Ibidem, p. 71, grifo nosso, tradução nossa)

Ao defenderem um retorno às noções "naturais" na apresentação dos conceitos, relacionando-os a elementos físicos e geométricos, LAKOFF & NÚÑEZ estão questionando não somente o que é "rigoroso" na Matemática, mas também quais são as vantagens que este rigor proporciona ao seu ensino.

Consideramos tais questionamentos extremamente relevantes, uma vez que a crítica dos autores pode ser contextualizada pedagogicamente. Inicialmente, está em questão um dogma até então inquestionável do ensino de Análise: nem tudo que se pauta pelo rigor é tão rigoroso assim ! Então, o que significa se pautar pelo rigor no ensino de Análise ?

Retomando uma das definições iniciais, se o máximo de rigor é obtido quando chegamos ao último ponto possível de se chegar, então, em se tratando de prática pedagógica da matemática, temos que concordar com GRATTAN-GUINESS (1997) sobre a existência de diferentes níveis de rigor:

... a história da matemática ensina muito claramente que, de fato, o rigor se dá em níveis, os quais, portanto, devem ser especificados antes de se avaliar o trabalho matemático do estudante. (p. 81, grifo nosso)

Portanto, cabe a nós, professores de Cálculo e Análise, a avaliação de qual nível de rigor é conveniente atingir sem que, com isso, percamos o sentido e a real compreensão das idéias matemáticas. Para isso, devemos levar em consideração, fundamentalmente, o perfil do nosso estudante no que se refere a sua formação matemática anterior e aos objetivos das disciplinas que ministramos para os diversos cursos da carreira universitária, os quais formam profissionais com os mais diferentes espectros.

Fazendo uma pequena síntese do que vimos até aqui, neste capítulo, podemos afirmar que é inadmissível separar intuição e rigor no ensino de qualquer conceito matemático. Igualmente inaceitável seria associar ao ensino de Cálculo, uma abordagem essencialmente intuitiva e ao ensino de Análise, uma abordagem essencialmente rigorosa.

Uma primeira visão contrária à concepção dicotômica entre rigor e intuição é apresentada por BICUDO (1992) que defende:

É por essa tensão dialética entre intuição e rigor que se sobe na espiral do conhecimento matemático. Mesmo que não percebamos, a intuição está impregnada do rigor que colaborou na possibilidade de sua criação. É o equilíbrio das tendências de diferenciação (intuição) e unificação (rigor). Não há avanço de uma sem a outra. (p. 64, grifo nosso)

Ainda para o mesmo autor, ser rigoroso em Matemática:

... significa proceder de acordo com as regras de sua gramática, a Lógica... não houve, ao longo dos tempos, uma modificação do conceito de rigor em Matemática, o que significa sempre seguir inflexivelmente os cânones da Lógica. (Ibidem, p. 61)

Portanto, existe uma relação dialética e não-dicotômica entre intuição e rigor cujo estabelecimento / esclarecimento é extremamente necessário a este trabalho. Para atingir tal objetivo, procuraremos nas pesquisas e na história, fundamentos que nos auxiliem na interpretação e análise qualitativa dos dados provenientes dos manuais didáticos e das entrevistas realizadas.

Examinaremos, no capítulo seguinte, a atual estruturação do currículo público de Cálculo e Análise, tentando identificar como a "tensão" entre intuição e rigor que se fez presente desde o surgimento do Cálculo, no século XVII, ganhou contornos relevantes no século XVIII e se concretizou no século XIX com a Aritmetização da Análise, determinou o ensino destas disciplinas no século XX e, no século XXI, certamente influenciará no processo de formação do conhecimento profissional do professor de matemática.

O problema da relação entre rigor e intuição parece afetar tanto o formador de professores de matemática, como nos mostra GONÇALVES (2000), quanto o futuro professor de matemática. A seguir, tentaremos aprofundar o estudo das repercussões desse problema na formação do professor de matemática.

4.3) A QUESTÃO DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

No Brasil, tem-se observado, mais recentemente, que as disciplinas de Análise, como "Análise I" ou "Análise Real" estão sendo remetidas para o grupo de disciplinas eletivas / optativas, dando ao estudante de Licenciatura, portanto, a opção por cursá-las ou não. Isto nos traz uma série de indagações: Fica, então, a critério do estudante decidir se Análise é ou não importante para sua formação de professor ? Por outro lado, perguntamos: Os próprios professores do curso de Licenciatura não consideram mais a disciplina de Análise, importante para a formação profissional de seus alunos ?

Antes de mais nada, gostaríamos de deixar claro nossa convicção de que Análise é uma disciplina / área fundamental para a formação do professor de Matemática, convicção esta proveniente de nossa prática pedagógica com formação de professores e que pretendemos reafirmar / reelaborar durante a análise das entrevistas, momento em que questionamos nossos entrevistados a respeito da importância do Cálculo e da Análise na formação do professor de Matemática. Entretanto, começaremos por tentar entender ou até mesmo explicitar algumas das razões que levam à dúvida sobre o real valor do Cálculo e da Análise para a formação do professor de Matemática.

O professor de Matemática, tanto do ensino fundamental como do médio, é formado pela universidade no curso de Licenciatura em Matemática. Seus formadores também são professores de Matemática, só que do ensino superior, obviamente. Formados por quem ? Por outros professores de Matemática do ensino superior.

Num número considerável de casos ou talvez, na grande maioria dos casos, os professores universitários que ministram aulas para os cursos de licenciatura em Matemática são Bacharéis, Mestres e Doutores em Matemática, especialmente nas universidades públicas. Reflitamos, então, sobre o questionamento feito por VASCONCELOS (1996) ao observar que, para o exercício de qualquer profissão, inclusive a de professor, é necessário um aprendizado não apenas informal, mas também formal ou específico da profissão:

A grande questão está em determinarmos até que ponto (e até quando) se pode permitir que o "professor" universitário, aquele sem qualquer formação pedagógica, aprenda a ministrar aulas por ensaio e erro, desconsiderando o caráter nobre do sujeito com o qual trabalha: o aluno. Além de desconsiderar também que ministrar aulas envolve o domínio de técnicas específicas e um tipo de competência profissional, a pedagógica, que deve ser aprendida e desenvolvida como qualquer outra competência e não simplesmente ser considerada como um "dom". (p. 1)

Finalizando sua dura crítica ao que podemos denominar "sistema acadêmico-universitário", a autora dispara: *Muitos dos problemas da educação universitária brasileira não residirão na falta do "saber pedagógico" por parte de seus docentes ? (Ibidem, p. 1)*

O "saber pedagógico", destacado por VASCONCELOS, compreende uma das categorias de conhecimento do professor definidas por SCHULMAN (1986), as quais são fundamentais à formação de professores e podem ser descritas da seguinte forma:

- 1) Conhecimento do Conteúdo Específico: não se refere apenas aos conceitos, mas às ligações entre eles; refere-se à acumulação e à organização do conhecimento na mente

do professor; pensar sobre o conteúdo do conhecimento é ir muito além dos fatos ou conceitos de um domínio, sendo necessário compreender as estruturas²² dos assuntos;

- 2) Conhecimento Pedagógico do Conteúdo: formas de representação mais úteis das idéias mais ensinadas; melhores analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações; compreensão do que faz com que a aprendizagem de um determinado tópico seja fácil ou difícil; conhecimento das concepções e preconceitos relacionados aos tópicos mais ensinados que alunos de diferentes idades trazem consigo e de estratégias provavelmente mais frutíferas para reorganizar a compreensão dos alunos;
- 3) Conhecimento Curricular: arsenal completo de programas desenvolvidos para o ensino de tópicos e matérias específicas num determinado nível; variedade de materiais instrucionais disponíveis em relação a estes programas; estabelecimento de um conjunto de características que servem tanto como indicação como contra-indicação para uso de materiais curriculares ou programáticos; familiaridade com materiais curriculares e programáticos de outras disciplinas (conhecimento curricular lateral); habilidade para relacionar o conteúdo de um curso ou de uma aula com tópicos ou assuntos que foram ou serão ensinados durante anos anteriores ou futuros (conhecimento curricular vertical).

Um estudo mais detalhado acerca da formação dos professores formadores de professores foi feito por GONÇALVES (2000). Tal estudo mostra que, no caso específico daquela pesquisa, a formação acadêmica dos professores de matemática que ministram cursos na Licenciatura em Matemática, foi predominantemente técnico-formal com ênfase quase exclusiva na formação matemática, ou seja, no conhecimento específico do conteúdo. Acerca dos programas de pós-graduação pelos quais passaram os professores, GONÇALVES (2000) avalia que neles:

²² Segundo Schwab, as estruturas podem ser substantivas, que são os modos nos quais os conceitos e princípios são organizados para incorporar seus fatos ou sintáticas, que são os modos nos quais a verdade ou falsidade ou validade ou invalidade são estabelecidas.

... os formadores não tiveram oportunidade para refletir epistemologicamente e historicamente sobre as idéias matemáticas e seu processo de produção e sistematização. A formação matemática nesse nível de ensino, tem priorizado mais os aspectos procedimentais ou sintáticos do conhecimento que seus aspectos conceptuais e semânticos.
(p. 197)

Apesar do trabalho ter se caracterizado por um "estudo de caso", poderíamos nos perguntar: não seria esta a realidade de quase todos os "casos" relacionados à formação dos professores formadores de professores no Brasil ?

Acreditamos que sim ! Os professores universitários, formados sob uma perspectiva técnico-formal, enfatizam / priorizam o conhecimento específico do conteúdo em sua ação enquanto formadores de professores e estes, os últimos na "hierarquia docente" encabeçada por seus formadores, tendem a reproduzir em sala de aula no ensino fundamental e médio uma adaptação do "show" de conhecimentos específicos dado por seus formadores, mestres e doutores de inquestionável conhecimento matemático.

Também SCHEIBE (1987) faz uma análise sobre a "subestimação do pedagógico" no trabalho docente universitário e, mais, afirma que esta postura não é exclusiva do professor mas ganha apoio institucional. De fato, para os grandes centros de pesquisa, por exemplo, vale mais um bom pesquisador "na mão" do que dois bons professores "voando", parodiando o ditado popular !

Pois, muito bem, voltando à questão do rigor e da intuição na formação do professor de Matemática, destacaremos dois aspectos que julgamos fundamentais nesta ligação.

4.3.1) A prova rigorosa na formação do professor de Matemática

A questão do papel e da importância da prova rigorosa para a formação do futuro professor de Matemática foi amplamente discutida na tese *Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática*, na qual GARNICA (1995), após uma completa revisão bibliográfica acerca da prova e da

formação de professores, apresenta duas leituras distintas oriundas da análise de sua questão de investigação:

No tocante à prova rigorosa, os que a trabalham norteados pela leitura técnica, por um lado, com toda a atmosfera de arte que isso possa requerer, debruçam-se sobre o viés sintático da demonstração, descontextualizando-a de outra região que não seja a produção de conhecimento matemático feita profissionalmente. Partem do pressuposto de que a função de uma prova é a de meramente validar o conhecimento que ela gera, assegurando-o, e vêem sua garantia no rigor empregado, garantia essa que cobra uma sujeição aos critérios ditados pela Lógica, desconsiderando parâmetros outros... Assim, certas ferramentas, como o são os esquemas geométricos, podem servir de guia, nunca de consolidação ou via de referência para a certeza das afirmações feitas.
(pp. 193-194, grifo do autor)

Após concluir que a importância das demonstrações para o professor, segundo tal leitura, reside no fato de que as demonstrações agem como "veículos das concepções dominantes no seio da produção científica em Matemática", o autor faz o contra-ponto:

Por outro lado, a leitura crítica sobre a importância da prova rigorosa na formação do professor de Matemática, já o dissemos, não se desfaz do viés da técnica. Antes, pretende expô-lo a público, clareando seus métodos de ação. Às situações de ensino e de aprendizagem, a prova rigorosa deve ser integrada por meio de motivações que levantem abordagens históricas e filosóficas de modo a permitir um esclarecimento quanto ao modo de criação e divulgação das concepções que permeiam o fazer matemático. (Ibidem, pp. 194-195, grifo do autor)

E alerta / aconselha que cabe ao futuro professor:

... conhecer as dualidades e relativismos que marcam a inserção da prova no discurso matemático, onde a investigação – tomada numa acepção mais ampla que a simples procura de resultados novos e não só enfadonha repetição, mas re-produção, criação, trans-fazer – é uma das grandes responsáveis por essa procura consciente do saber sobre o que se fala. (Ibidem, p. 195, grifo do autor)

O autor constatou, em sua pesquisa, que o trabalho com a prova rigorosa é reservado às disciplinas de conteúdo específico, *posto que não precisa ser tematizado*. Esta discussão é fundamental tanto para o ensino de Análise, onde a prova rigorosa é ponto nevralgico como para o ensino de Cálculo, onde a prova rigorosa é ponto questionável.

Muitas “provas” em Cálculo podem ou não atingir um "nível de rigor" que as classifique em demonstrações ou tão somente em idéias da demonstração. Isto nos faz lembrar GRATTAN-GUINNESS quando sustenta que o rigor se dá em níveis. Por exemplo, consideremos um simples desenho de um gráfico de uma função contínua num intervalo $[a, b]$, com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, no qual fazemos notar que a curva, necessariamente, passará por um ponto $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = 0$. Esta ilustração pode ser considerada uma prova de um dos principais corolários do Teorema do Valor Intermediário ?

Uma leitura técnica jamais aceitaria este desenho como uma prova rigorosa, mesmo reconhecendo-se que a prova "formal", através de ε - δ , por sup-inf ou com conjuntos abertos-fechados só possa ser rigorizada num curso de Análise. Talvez uma leitura mais crítica reconheça que tal desenho carrega idéias intuitivas geométricas-espaciais importantes de serem exploradas por alunos em formação e que depois de formados, serão os responsáveis pela formação matemática dos alunos nos níveis pré-universitários.

Diferentes leituras originam diferentes posturas. Um professor do ensino médio, por exemplo, ao apresentar o termo geral de uma P. A., pode induzir seus alunos à fórmula do termo geral através da sequência $a_2 = a_1 + 1.r = a_1 + (2 - 1).r$; $a_3 = a_2 + 1.r = a_1 + 1.r + 1.r = a_1 + 2.r = a_1 + (3 - 1).r$; ... ; até os alunos concluírem / intuïrem empiricamente que, certamente, $a_n = a_1 + (n - 1).r$; ou, simplesmente enunciar a fórmula do termo geral, convencido de que uma demonstração rigorosa adequada só é possível através do Princípio

de Indução Matemática que, infelizmente, foge ao nível dos alunos e certamente, escapa aos seus objetivos.

Definitivamente, a primeira conduta encontra respaldo em CARVALHO (1990) que dentre os princípios metodológicos baseados na aquisição de conhecimento através de um processo dialeticamente dinâmico, destaca que o rigor matemático é um efeito da atividade e não sua condição prévia: *O acesso ao significado das proposições matemáticas se constrói a partir de uma linguagem intermediária num trabalho em que é importante articular significações, ligar etapas do raciocínio.* (p. 107)

4.3.2) O pensamento flexível e os conhecimentos procedimental e conceptual

Retomando os trabalhos da linha cognitivista de TALL acerca da construção do pensamento matemático avançado, dois aspectos são apontados como fundamentalmente complementares pelo autor na elaboração de conceitos e resultados: a criatividade ao se gerar novas idéias e conceitos e o convencimento da validade de um certo resultado através da prova matemática. Eis aqui mais uma visão da possibilidade de complementariedade entre a intuição presente na criação de novos resultados e o rigor no seu estabelecimento formal, quer seja através de uma prova ou de uma definição formal de um conceito.

Aliás, TALL & VINNER (1981) fazem uma separação inicial entre "conceitos matemáticos formalmente definidos" (referentes às *definições conceituais*, isto é, palavras utilizadas na especificação do conceito que, sendo repassadas ou construídas pelos próprios alunos, podem mudar com o passar do tempo diferindo, inclusive, de uma definição conceitual formal tida academicamente como a mais precisa) e "processos cognitivos que constituem os conceitos" (referentes às *imagens conceituais*, isto é, as estruturas cognitivas ligadas ao conceito, tais como processos, propriedades e imagens mentais evocadas pelos alunos podendo, inclusive, criar alguns conflitos cognitivos quando contrastadas com as definições conceituais).

Em estudo mais recente, GRAY & TALL (1993) buscam relacionar os processos como os alunos trabalham com os conceitos através da noção de *proceptos*, que são objetos mentais que combinam um procedimento e um conceito produzido por esse procedimento ou ainda um símbolo utilizado na representação de qualquer um dos dois. Um exemplo

simples é o símbolo $2 + 1$ que pode representar tanto o *processo* de se somar 2 com 1 como o *conceito* de adição de 2 e 1. É interessante destacar que, para os autores, a noção de procepto pode estar relacionada a conceitos de Análise que são inicialmente aprendidos através de um procedimento (como é o caso de boa parte do cálculo de limites, especialmente aqueles envolvendo quociente de polinômios que geram, inicialmente, indeterminações do tipo $[0 / 0]$ ou $[\infty / \infty]$) mas não a conceitos que são aprendidos via definição (como o conceito de reta tangente à uma curva, introduzido através de recursos geométrico-espaciais e tendo apresentada, posteriormente, sua definição através da equação envolvendo a derivada da função no ponto).

O fato é que, conforme constataram DAVID & MACHADO (1996), a ênfase em procedimentos formais (regras e algoritmos) isolados dos conceitos subjacentes ao processo não contribuem para a formação de um fator que deve ser considerado fundamental por todos os professores de Matemática em todos os níveis: a flexibilidade do pensamento em Matemática. Segundo DAVID & LOPES (1998), as seguintes habilidades, disposições e atitudes podem ser consideradas como formas de manifestação do pensamento flexível:

- *pensar criativamente e autonomamente, como no caso de um aluno que é capaz de pensar num caso particular que não havia sido estudado ainda;*
- *generalizar e provar, como no caso de um aluno que espontaneamente tenta generalizar uma propriedade e depois apresenta uma prova para ela;*
- *dar sentido, como no caso dos alunos que preferem se apoiar na sua compreensão de um conceito em vez de buscar apoio numa regra ou algoritmo anteriormente memorizado;*
- *curiosidade, que está presente em todos os casos em que o aluno busca uma solução diferente. (p. 3)*

Por outro lado, ao tentar privilegiar o desenvolvimento do pensamento flexível em Matemática de seus alunos, torna-se também fundamental que os professores de Matemática conheçam as limitações e aspectos relevantes das diferentes representações e a adequação do significado utilizado em certos conceitos e resultados, ou seja, também apresentem um conhecimento flexível em Matemática. Esta flexibilidade do conhecimento do professor é assim descrita por LLINARES & SÁNCHEZ (1996):

A idéia da flexibilidade do conhecimento do professor deve ser entendida como a habilidade que devem possuir os estudantes para professor de modificar o significado associado aos conceitos matemáticos em relação às características das tarefas traçadas e/ou às características do sistema de representação empregado. Este é um aspecto do conhecimento do professor que determina sua capacidade para ajudar os alunos a construir sua compreensão das idéias matemáticas (McDiarmid et al, 1989) e a caracterizar os processos de negociação dos significados associados ao diferentes modos de representação utilizados. (p. 109, tradução nossa)

Logo, uma questão ligada ao pensamento flexível dos alunos, privilegiado por professores que buscam um conhecimento flexível passa pela forma como é trabalhada pelo professor, em sala de aula, a relação processo – conceito, já anteriormente explorada através da noção de procepto. Na prática pedagógica, deparamo-nos com situações em que a relação entre procedimento e conceituação acontece com as mais variadas facetas, muitas vezes não percebidas / entendidas pelo professor. Analisemos um exemplo central: a manipulação com ε 's e δ 's na definição de um limite é uma atividade que privilegia o conceito (de limite) ou o procedimento (da relação entre dar um ε e encontrar um δ) ? É possível caracterizar como conceitual uma atividade que, na essência, é procedimental ? Então, uma demonstração é muito mais procedimental do que conceitual ? Mas o que seria, por fim, uma atividade que privilegie mais o conceitual ?

Inicialmente é necessário caracterizar o *conhecimento procedimental*²³ como um conhecimento de regras, algoritmos e procedimentos padrões na aprendizagem, como por exemplo, as regras de cálculo de limites ou as regras de derivação e integração.

Já o *conhecimento conceptual*²⁴ é exigido, por exemplo, na resolução de um problema na qual os alunos devem identificar e relacionar os conceitos apropriados ao contexto / conteúdo do problema.

Um exemplo interessante são as aplicações das derivadas que aparecem em diversos problemas sob o "título" de taxa de variação, devendo o aluno fazer a relação de que a taxa de variação é, no fundo, a derivada da função em questão. Isto é, antes do procedimento adequado é necessário a identificação do conceito subjacente ao tópico em que está inserido o problema. Assim sendo, concordamos totalmente com WHITE & MITCHELMORE (1996) quando afirmam que o conhecimento procedimental deve estar fundamentado num conhecimento conceptual e caso isto não aconteça *"ele não passa de um conhecer de regras sem conhecer como elas realmente funcionam"*,

Cabe aqui uma oportuna observação: para exemplificar a intuição conceptual no item 2.1, utilizamos o caso das aplicações das derivadas a conceitos físicos.

Portanto, mesmo o conhecimento conceptual está ligado à intuição de uma forma tão íntima que, desde já, deixamos claro a inveracidade / impossibilidade de se relacionar conhecimento procedimental – intuição e conhecimento conceptual – rigor.

Na prática de sala de aula, o professor deve procurar explorar todos os elementos da forma o mais dinâmica possível. Mas, isto só será possível caso ele, em sua formação inicial ou continuada, vivenciar as possibilidades desta interação dinâmica em sua experiência discente.

Daí, nossa convicção de que o ciclo vicioso, para o qual chamamos atenção no Capítulo 1, só pode ser interrompido por um redirecionamento da prática pedagógica de matemática, começando pela universidade, formadora de professores que irão atuar nos ensinos fundamental e médio e que, por sua vez, contribuirão fundamentalmente para a formação dos alunos que ingressarão naquela mesma universidade.

²³ *Procedural knowledge* – Ver HIEBERT (1986).

²⁴ *Conceptual Knowledge* – Ver HIEBERT (1986).

Outrossim, acreditamos que este direcionamento só será possível mediante a reflexão sobre a importância das diversas abordagens do ensino na formação de um professor de matemática com pensamento flexível e multiplicidade de conhecimentos específicos, pedagógicos e curriculares.

Passaremos, então, a analisar como algumas das relações aqui destacadas estão explicitadas, ou não, nos textos que integram diversos livros didáticos de Cálculo e Análise adotados em universidades brasileiras.

CAPÍTULO 5

O CURRÍCULO PÚBLICO DE CÁLCULO E ANÁLISE:

A tensão entre rigor e intuição nos manuais didáticos

“Não há ramo da matemática, por abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.”

Lobachevsky

Como observamos no capítulo anterior, o ensino de Cálculo foi marcado por diversas tendências que se diferenciavam ao seguir uma ou outra "tradição". Notada, certamente, foi a influência que os mais renomados autores de livros didáticos exerceram no ensino. Também o ensino de Análise foi altamente influenciado por autores de "lições" como Cauchy e por professores como Weierstrass, cuja legião de "rigorosos" seguidores perpetua-se até os dias de hoje.

Até agora, discutimos como o rigor e a intuição permearam a história do desenvolvimento do Cálculo e da Análise, enquanto campos de conhecimento e de ensino, centrando foco nos conceitos de limite e continuidade.

Neste capítulo, trataremos de investigar como é tratado / explorado pelo currículo público e, destacadamente, pelos manuais didáticos, a idéia / o conceito de limite e continuidade, tanto no ensino de Cálculo como no de Análise. A escolha de "Limites e Continuidade" ocorreu devido ao fato de que esses tópicos já foram e serão ainda bem mais explorados dentro dessa tese, quer seja em nosso referencial teórico, onde discutimos a questão do rigor presente na definição de continuidade, quer seja na análise das entrevistas realizadas, cujo roteiro contemplou importantes questões relativas ao ensino de limites.

Inicialmente, há de observar a diferença existente entre o saber particular de cada professor – saber docente – quando o situa no contexto da prática de ensino e o saber

público, sistematizado através de manuais e outros materiais didáticos (CD-ROMS, vídeos, ...) e que se encontra disponibilizado em livrarias, bibliotecas, internet,...

Quanto ao conceito de "saber docente", nos apoiamos em FIORENTINI, NACARATO & PINTO (1999) que o concebem como:

... um saber reflexivo, plural e complexo porque histórico, provisório, contextual, afetivo, cultural, formando uma teia, mais ou menos coerente e imbricada, de saberes científicos – oriundos das ciências da educação, dos saberes das disciplinas, dos currículos – e de saberes da experiência e da tradição pedagógica. (pp. 18-19)

Além disso, por detrás da configuração do currículo público, existe todo um conjunto de valores, crenças, concepções, experiências, estudos e leituras pertencente às pessoas que pensam / produzem tal currículo que, mesmo público, vem carregado de saberes particulares.

Logo, ao pensarmos em currículo público, não podemos desprezar o papel fundamental do livro didático no "desenho" deste currículo, já que o livro didático expõe a plenitude dos saberes particulares do autor e, direta ou indiretamente, sua postura e experiência enquanto docente daquela disciplina.

Ainda que o contexto histórico seja essencialmente diferente dos tempos de Lacroix e Carnot, não podemos negar que, ainda hoje, os livros didáticos desempenham um papel fundamental no ensino de Cálculo e Análise, pois é inegável que na maioria das universidades públicas ou privadas brasileiras existe uma ementa das disciplinas de Cálculo e Análise que contém um programa a ser cumprido e, invariavelmente, indica um ou mais livros a serem adotados.

Uma outra questão que não pretendemos discutir a fundo, mas apenas levantar, é: até que ponto a adoção de um livro didático auxilia ou prejudica a prática pedagógica de um professor de Cálculo ou de Análise ?

Obviamente, professores mais experientes, muitas vezes, preferem não adotar um único livro didático, elaborando suas próprias notas de aula, as quais muitas vezes transformam-se em apostilas. Estas notas geralmente tomam por base dois ou três livros

diferentes e com ordens diferentes de apresentação dos conteúdos. Entretanto, para um professor que está começando a ministrar um curso de Cálculo ou, principalmente, de Análise, mostra-se mais prático / seguro, adotar um único livro, tentando seguí-lo na apresentação dos conteúdos.

Passaremos, então, à análise de alguns manuais didáticos de Cálculo e de Análise que são utilizados em diversas universidades brasileiras, conforme pudemos constatar por ocasião de nossa passagem pela chefia do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto quando tivemos contato com as ementas das disciplinas integrantes dos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática oferecidos por diversas instituições de ensino superior brasileiras. Um destaque especial será dado ao conjunto da obra do Prof. Geraldo Ávila, pois é o único autor brasileiro que possui livros didáticos nas duas disciplinas.

5.1) A ORGANIZAÇÃO CURRICULAR DO CÁLCULO PRESENTE EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS

Um fator fundamental deve ser levado em consideração quando se pensa em uniformidade no ensino de Cálculo: o Cálculo enquanto disciplina "instrumental" que já foi tema de discussão em alguns eventos importantes, inclusive no ICME 8²⁵. O interesse primordial, presente nessas discussões, era sugerir métodos mediante os quais as disciplinas de matemática poderiam ser mais efetivas a serviço de outras disciplinas dos mais diversos cursos e apontar novas áreas para esses cursos.

Os reflexos desta discussão podem ser notados pela produção de livros didáticos de Cálculo destinados, especificamente, às áreas de exatas (Engenharia, Arquitetura, Matemática, ...), humanas (Administração, Economia, Ciências Contábeis, ...) e até mesmo biológicas (Biologia, Farmácia, Nutrição, ...).

²⁵ 8th International Congress on Mathematical Education – Sevilha – Espanha – 1996, Work Group 17 – Mathematics as a service subject at the tertiary level.

Assim sendo, e considerando, sobretudo, que a análise de livros didáticos não é o objetivo principal deste estudo, decidimos focar nossa análise no desenvolvimento do tópico envolvendo limites e continuidade de funções reais de uma variável. A escolha deste tópico, como já dissemos anteriormente, é decorrente do fato de que este está diretamente relacionado ao núcleo central de nosso problema de investigação.

Os aspectos que procuraremos destacar são: a forma como o(s) autor(es) introduz(em) as noções / os conceitos de limite e continuidade; o número de páginas destinadas ao desenvolvimento da teoria, dentro do total de páginas de cada livro; a abordagem dos teoremas relativos a estes tópicos e suas demonstrações (destacadamente a utilização da definição ε - δ); o número de exercícios relativos a cada tópico e sua natureza; os destaques, de cunho geral, feitos pelo(s) próprio(s) autor(es) na apresentação de sua obra.

Na medida do possível, procuraremos fazer algumas considerações relacionadas à nossa própria experiência com a utilização de um ou outro livro como referência principal ou secundária em alguma disciplina de Cálculo por nós ministrada em cursos de graduação.

Os quatro livros selecionados foram:

- 1) *O Cálculo com Geometria Analítica* – Louis Leithold – Editora Harbra – Volume 1 – São Paulo – 1982;
- 2) *Cálculo com Geometria Analítica* – Earl William Swokowski – Editora Makron Books – Volume 1 – São Paulo – 1994;
- 3) *Cálculo A* – Diva Marília Flemming & Míriam Buss Gonçalves – Editora Makron Books – Volume Único – São Paulo – 1992;
- 4) *Cálculo com Geometria Analítica* – C. H. Edwards Jr & D. E. Penney – Editora Prentice-Hall – Volume 1 – São Paulo – 1998.

Passemos à análise dos livros selecionados:

1) O Cálculo com Geometria Analítica – Louis Leithold.

Certamente, o livro de Leithold é referência em quase todas as ementas dos cursos de Cálculo oferecidos para os cursos da área de exatas no Brasil. Não só pelas quase 1000 páginas de seus Volumes 1 e 2, mas por se tratar, de fato, de um dos livros mais ricos em exemplos e demonstrações de resultados, que normalmente são remetidas para os livros de Análise.

Observando o Capítulo 2 – Funções, Limites e Continuidade, destacamos os seguintes itens:

- 2.4) O Limite de uma Função;
- 2.5) Teoremas sobre Limites de Funções;
- 2.6) Limites Unilaterais;
- 2.7) Limites no Infinito;
- 2.8) Limites Infinitos;
- 2.9) Assíntotas Horizontais e Verticais;
- 2.10) Teoremas Adicionais sobre Limites de Funções;
- 2.11) Continuidade de uma Função em um Número;
- 2.12) Teoremas sobre Continuidade;
- 2.13) Continuidade em um Intervalo.

A noção de limite é explorada, inicialmente, através do exemplo da função $f(x) = [(2x + 3) \cdot (x - 1)] / (x - 1)$, definida para todos os valores reais de x , exceto $x = 1$. Após o cálculo de $f(x)$ para valores de x um pouco menores ou maiores que 1 (0,9, 0,99 ou 1,1, 1,01, ...), verifica-se que $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 5. Na sequência, é apresentada uma "maneira mais precisa de se escrever esta situação" usando dois símbolos para diferenças pequenas, ε e δ , sendo afirmado que $|f(x) - 5|$ será menor que ε sempre que $|x - 1|$ for menor que δ . A validade da afirmação é verificada numericamente, através da atribuição de valores para ε (0,2, 0,002, ...) e da obtenção de respectivos valores para δ (0,1, 0,001, ...) e justificada geometricamente, através de um gráfico da função (uma reta com uma bola aberta no ponto (1,5)) destacando os intervalos de

amplitudes ε (em torno de $f(x) = 5$) e δ (em torno de $x = 1$). Passa-se, então, à seguinte definição (LEITHOLD, 1982, p. 64):

A noção de continuidade é explorada, inicialmente, através da mesma função $f(x) = [(2x + 3) \cdot (x - 1)] / (x - 1)$, definida para todos os valores reais de x exceto $x = 1$, cujo gráfico apresenta um "salto" no ponto (1,5). O conceito é então apresentado através da seguinte definição (LEITHOLD, 1982, p. 95):

Cabe destacar ainda que são destinadas 33 páginas para o desenvolvimento da teoria de limites, nas quais quase todos os teoremas são demonstrados utilizando-se ε - δ e os que não são demonstrados, são remetidos ao leitor em forma de exercícios propostos que perfazem um total de 172, incluindo os Exercícios de Revisão ao final do capítulo, em

forma de demonstração ou cálculo de limites. Já as 12 páginas destinadas ao estudo da continuidade de funções, contêm quase todas as demonstrações dos teoremas e 114 exercícios propostos, dentre demonstrações e verificações de continuidade.

No prefácio do livro, o autor justifica que o grande número de exercícios permite que ele seja destinado a estudantes de Engenharia, Ciências Físicas, Economia e áreas não-técnicas.

A respeito dos enfoques formal e intuitivo, cuja relação deve ser levada em consideração ao se escrever um livro didático, o autor comenta:

Tratou-se de obter um equilíbrio entre a apresentação formal do cálculo elementar e o enfoque clássico intuitivo e computacional. Tendo em mente que um livro de texto deve ser escrito para o estudante, procurou-se que a exposição estivesse sempre à altura da experiência e maturidade do principiante, sem omitir ou deixar de explicar nenhuma passagem. Desejo que o leitor esteja consciente que estas demonstrações estejam bem motivadas e cuidadosamente explicadas, para que sejam compreensíveis pelo aluno que alcançou um bom domínio das seções precedentes. Se um teorema é enunciado sem demonstração, em geral é ampliada a discussão mediante figuras e exemplos e, em tais casos, sempre se faz ressaltar que o que se apresenta é uma ilustração do conteúdo dos teoremas e não sua demonstração. (pref.)

Entretanto, o que parece não ficar claro, é como as demonstrações serão motivadoras para um aluno que não alcançou um "bom domínio das seções precedentes" e levando-se em consideração que as demonstrações estão presentes desde o Capítulo 1, quais seriam os precedentes exigidos do aluno que, logo na primeira seção de exercícios propostos, deve demonstrar desigualdades envolvendo números reais ?

Mais ainda, parece-nos complicado avaliar os objetivos de uma seção de exercícios (2.10) que, em todos os seus 6 exercícios, solicita que o aluno "demonstre o Teorema 2.10....", trazendo algumas sugestões para as demonstrações, mas nenhum exercício de aplicação imediata dos teoremas visando à obtenção de corolários e / ou casos particulares.

Em nossa opinião, o autor acredita que a demonstração num curso de Cálculo sempre deverá ser feita na medida em que os alunos tenham os pré-requisitos matemáticos necessários, sequer se importando se tal opção didática é ou não viável. Se esta é uma escolha do professor, que ele não se impressione com o viés procedimental do autor disfarçado em preocupação com o conhecimento conceitual.

2) **Cálculo com Geometria Analítica – Earl William Swokowski.**

Atualmente, o livro de Swokowski é referência em muitos programas das disciplinas de Cálculo oferecidas para os cursos da área de exatas no Brasil. Seus Volumes 1 e 2, com mais de 1400 páginas, são divididos de acordo com os conteúdos programáticos de Cálculo I, Cálculo II, Cálculo III e/ou Equações Diferenciais, já que em alguns casos o chamado Cálculo III se resume a um curso de Equações Diferenciais, variando de curso para curso e, em algumas vezes, dentro de uma mesma universidade.

Observando o Capítulo 2 – Limites de Funções, destacamos os seguintes itens:

- 2.1) Introdução ao Conceito de Limite;
- 2.2) Definição de Limite;
- 2.3) Técnicas para a Determinação de Limites;
- 2.4) Limites que Envolvem Infinito;
- 2.5) Funções Contínuas.

A "introdução ao conceito de limite" realiza-se através do mesmo tipo de análise numérica feito por Leithold, só que para diversas funções, apresentando quadros que resumem as discussões precedentes, ilustrando-as graficamente, como por exemplo (SWOKOWSKI, 1994, p. 51):

Os limites laterais são também introduzidos através do seguinte quadro (SWOKOWSKI, 1994, p. 58):

A "significação intuitiva" enunciada pelo autor trata, obviamente, de um apelo à intuição categórica, o que é comprovado pela interpretação geométrica subsequente.

Somente após uma seção de 58 exercícios propostos de cálculo de limites através do esboço do gráfico de funções, é apresentado o "significado preciso de limite de uma função" através de duas definições equivalentes (SWOKOWSKI, 1994, p. 66):

Podemos classificar as “tolerâncias” como uma metáfora conceptual, uma vez que se trata de um objeto de uma outra teoria sendo ressignificado na matemática (ou seja, matematizado, modelado). Esta “modelagem” que, no caso, se refere a problemas de física (como o autor deixa claro no início do capítulo), pode ser vista como um interessante exemplo de intuição conceptual (ver Capítulo 4).

A abordagem da continuidade de uma função é feita brevemente através de exemplos de gráficos contínuos e descontínuos para, em seguida, apresentar a definição (SWOKOWSKI, 1994, p. 99):

Interessante destacar ainda que são destinadas 49 páginas para o desenvolvimento da teoria de limites, nas quais apenas alguns dos teoremas são demonstrados e contendo um total de 248 exercícios propostos, incluindo os Exercícios de Revisão ao final do capítulo, sendo que quase todos envolvem cálculos de limites. Já as 13 páginas destinadas ao estudo da continuidade de funções, contêm 72 exercícios propostos, dentre verificações de continuidade e aplicações do Teorema do Valor Intermediário.

No prefácio do livro, o autor afirma que existe uma maior ênfase na significação gráfica dos limites e são utilizadas "aplicações físicas" e afirmações "não muito rigorosas" para motivar a definição ϵ - δ . A respeito das aplicações do Cálculo, o autor comenta:

As aplicações do Cálculo aqui mencionadas são apenas algumas dentre as muitas que serão estudadas neste livro. Certamente não poderemos discutir todas as aplicações do Cálculo, inclusive porque sempre novas aplicações vêm sendo desenvolvidas à medida que a técnica avança. Qualquer que seja o campo de interesse do estudante, o Cálculo quase que certamente será utilizado em alguma investigação pura ou aplicada. Talvez o próprio estudante venha a desenvolver mais uma aplicação para este ramo da ciência. (pref.)

Destacamos, por fim, o manual de transparências que segue junto com o livro, destinado ao professor, tendo como finalidade "facilitar o seu trabalho de modo a poupar-lhe tempo e possibilitar-lhe enriquecer pedagogicamente suas aulas", segundo os seus editores.

Ainda que com o propósito de criticar sua estrutura, afirmando ser a mesma dos outros livros de Cálculo, BALDINO (1995) destaca vários aspectos positivos no livro de Swokowski, notadamente a nova organização em relação à edição anterior, cujas mudanças feitas eram necessárias sob a ótica de quem realmente trabalha com o material em sala de aula. Na avaliação do Prof. Baldino, mereceram destaques, ainda, o capítulo inicial denominado Revisão Pré-Cálculo e a ampliação/melhoria de exemplos, exercícios e figuras, motivos estes que o levaram a qualificar Swokowski, possivelmente, como o "livro da década entre nós".

Em nossa experiência com o ensino de “Cálculo II” e “Cálculo III” observamos a boa aceitação por parte dos alunos da adoção de Swokowski como principal referência. Esta aceitação, entretanto, não se dá pelas aplicações, como acredita o autor, mas provavelmente pelos exercícios coerentes com o conteúdo desenvolvido. Isto significa que sua vertente procedimental, ao contrário de Leithold, consegue conquistar os alunos que não se deparam com um grande número de exercícios que não conseguem resolver.

Aqui, cabem alguns questionamentos: A preferência dos alunos por este livro não seria decorrente do fato de que, por conseguir resolver os exercícios propostos, eles desenvolvem a falsa sensação de que estão aprendendo ? Essa mesma crença não seria também compartilhada por muitos professores e autores de livros didáticos, que valorizam uma abordagem mais procedimental que conceitual do Cálculo ?

3) Cálculo A – Diva Marília Flemming & Míriam Buss Gonçalves.

Atualmente, o livro de Flemming & Gonçalves é um dos livros de autoria nacional que mais vem sendo utilizado como referência em programas das disciplinas de Cálculo oferecidas para os cursos da área de exatas no Brasil. O livro, com mais de 600 páginas, é fruto de uma experiência de mais de vinte anos das autoras como professoras do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, cobrindo

basicamente todos os conteúdos programáticos de Cálculo I e recebeu, posteriormente, uma continuação através dos livros *Cálculo B* e *Cálculo C*.

Observando o Capítulo 3 – Limite e Continuidade, destacamos os seguintes itens:

- 3.1) Noção Intuitiva;
- 3.2) Definição;
- 3.3) Exemplos;
- 3.4) Proposição (Unicidade do Limite);
- 3.5) Propriedades dos Limites;
- 3.6) Exercícios;
- 3.7) Limites Laterais;
- 3.8) Exercícios;
- 3.9) Cálculo de Limites;
- 3.10) Exercícios;
- 3.11) Limites no Infinito;
- 3.12) Limites Infinitos;
- 3.13) Exercícios;
- 3.14) Limites Fundamentais;
- 3.15) Exercícios;
- 3.16) Continuidade;
- 3.17) Exercícios.

A noção intuitiva de limite é explorada através da análise numérica de diversas funções, assim como em Swokowski, mas sem apresentar quadros descritivos de cada situação. Após tais exemplos, os leitores são considerados aptos a "formular as definições formais", contidas na seguinte definição (FLEMMING & GONÇALVES, 1992, p. 78):

Sem se referir a qualquer exemplo em particular, a definição de continuidade é apresentada, também, como uma sequência de condições, da seguinte forma (FLEMMING & GONÇALVES, 1992, p. 130):

Cabe destacar, ainda, que são destinadas 59 páginas para o desenvolvimento da teoria de limites, onde uma boa parte dos teoremas são demonstrados e contendo um total de 136 exercícios propostos, distribuídos nas seções específicas de exercícios, sendo que quase todos envolvem cálculos de limites. Já as 14 páginas, destinadas ao estudo da continuidade de funções, contêm 10 exercícios propostos, dentre verificações de continuidade e algumas demonstrações de propriedades.²⁶

Na nota ao leitor, as autoras afirmam que incluíram os capítulos sobre Métodos de Integração e Aplicações da Integral Definida na mais recente edição, procurando explorar as idéias intuitivas e geométricas e apresentando exemplos de aplicações práticas:

Cada capítulo apresenta enunciados claros das definições, propriedades e teoremas relativos ao assunto abordado. Sempre que possível, são apresentadas as correspondentes idéias intuitivas e geométricas, bem como exemplos de aplicações práticas. São propostas listas de exercícios, com respostas, para complementar a aprendizagem do aluno. Algumas demonstrações de teoremas, que foram omitidas, podem ser encontradas em livros de Análise Real. (pref.)

²⁶ Cabe destacar que, por exemplo, o livro *Cálculo com Geometria Analítica* – George F. Simmons – Ed. McGraw-Hill – Vol. 1 – São Paulo – 1987, aqui não analisado por não ser adotado em um grande número de universidades, destina apenas 8 páginas à apresentação inicial de Limites e Funções Contínuas, incluindo problemas e, somente no apêndice, aborda os teoremas sobre limites e continuidade.

Nos dois primeiros anos de nossa experiência docente com Cálculo I, adotamos o livro de Flemming & Gonçalves para os cursos de Engenharia e Ciência da Computação. Por parte dos alunos, houve um índice de aceitação muito grande, pois, segundo eles, a linguagem utilizada era clara e objetiva, o que ajudava bastante na leitura em busca de um maior embasamento visando à resolução dos exercícios propostos. De nossa parte, consideramos que a utilização do livro, como referência principal no desenvolvimento da disciplina, foi uma experiência bem sucedida, uma vez que os exemplos contidos no livro puderam ser ricamente explorados em sala de aula. Obviamente, é inegável também, que nossas notas de aula eram organizadas / planejadas tendo como base a exposição dos assuntos conforme o livro, o que muito facilitou meu trabalho de professor iniciante de Cálculo I.

Entretanto, não poderíamos deixar de destacar que nossa tarefa enquanto professor foi seriamente dificultada pelo tratamento detalhado que as autoras dão ao estudo de limites. Utilizamos praticamente um mês de aula para ministrar o capítulo de Limites e Continuidade, quase que em sua íntegra, omitindo-se apenas as demonstrações das proposições por ε - δ e, em seguida, utilizamos mais um mês de aula com Derivadas e Aplicações e outro mês com Integrais e Métodos de Integração. Considerando-se que, em nossa universidade, a disciplina de Cálculo I possui uma carga horária de 90 horas/aula semestrais, o que equivale a 6 horas/aula semanais, praticamente um quarto da carga horária da disciplina foi utilizado somente para o cálculo de limites, isso para o total desespero dos alunos, conforme pudemos avaliar à época.

O tempo gasto por um professor para ministrar um determinado conteúdo, medido em aulas, horas, semanas ou meses, certamente varia de professor para professor, de disciplina para disciplina, de curso para curso ou de universidade para universidade. Entendemos que qualquer curso inicial de Cálculo deve estar voltado para o estudo de Derivadas e Integrais que, mesmo utilizando o conceito de limite, não justifica, em nossa opinião, o tratamento amplo e completo dos limites dado pelas autoras. Ademais, a abordagem rigorosa apresentada, especialmente das proposições e propriedades iniciais, leva os alunos a considerarem o assunto "impossível de ser entendido / aprendido", restando a tentativa de uma boa manipulação dos cálculos de limites caracterizando a

perigosa busca do procedimental sem o embasamento conceptual adequado, conforme já havíamos alertado anteriormente.

4) Cálculo com Geometria Analítica – C. H. Edwards Jr & D. E. Penney.

Da mais recente safra de livros de Cálculo, o livro de Edwards & Penney pode ser considerado um dos mais indicados como referência em programas das disciplinas de Cálculo que envolvem projetos de ensino com a utilização de computadores. Seu Volume 1, com mais de 500 páginas, contempla cerca de 48 projetos suplementares que utilizam aspectos da tecnologia computacional moderna para ilustrar as principais idéias do conteúdo exposto e ainda, contendo problemas adicionais para resolução com o uso de calculadoras gráficas ou softwares, tais como *Derive*, *Maple* e *Mathematica*.

Observando o Capítulo 2 – Introdução ao Cálculo, destacamos os seguintes itens:

- 2.1) Tangentes e a Derivada – Uma Primeira Apresentação;
- 2.2) O Conceito de Limite;
- 2.3) Ainda sobre Limites;
- 2.4) O Conceito de Continuidade.

Precedendo a definição de derivada, já é apresentada uma noção intuitiva de um limite e sua notação. O autor aproveita esta primeira apresentação, que compreende alguns cálculos de limites de quocientes incrementais relacionados às derivadas de algumas funções para já explorar a seguinte idéia de limite apresentada numa "linguagem intuitiva", apelando para a noção de "proximidade" de números, que repousa sobre a intuição geométrico-espacial do leitor (EDWARDS & PENNEY, 1998, p. 56):

Depois de enunciar, sem demonstrar, algumas "leis dos limites", os autores apresentam a definição de limite, ilustram-na graficamente, mas depois, não mais se referem a ela no decorrer do capítulo (EDWARDS & PENNEY, 1998, p. 63):

Após comparar a "diferença drástica" entre os gráficos de duas funções, tais que um pode ser traçado com um movimento contínuo – sem saltos – do lápis da esquerda para a direita, enquanto o outro implica num salto súbito do lápis ao traçá-lo, é apresentado conceito de continuidade da seguinte forma (EDWARDS & PENNEY, 1998, p. 76):

Cabe destacar, ainda, que são destinadas 21 páginas para o desenvolvimento da teoria de limites. Nestas páginas encontramos 159 exercícios propostos, incluindo os Exercícios de Revisão ao final do capítulo, praticamente todos envolvendo cálculos de limites. Já as 13 páginas destinadas ao estudo da continuidade de funções contêm 69 exercícios propostos, os quais exploram verificações de continuidade e aplicações do Teorema do Valor Intermediário.

Destaques especiais vão para os projetos suplementares denominados: "Pesquisa Numérica de Limites", que utiliza valores aproximados para o cálculo de limites com indeterminações e remete 10 problemas ao leitor; "Aplicações das Equações Cúbicas e Quárticas", que utiliza o Teorema do Valor Intermediário para provar a existência e localizar raízes reais de equações do 3º e 4º graus.

Sobre a questão da utilização do computador no ensino de Cálculo, os autores comentam:

O papel e o uso da matemática estão passando atualmente por uma revolução, devida, em grande parte, à tecnologia computacional. As calculadoras e os computadores proporcionam aos estudantes e aos professores um poder matemático jamais imaginado por gerações anteriores. Diariamente tomamos conhecimento de eventos surpreendentes, como a demonstração do último teorema de Fermat, recentemente anunciada. Sem dúvida, em termos de matemática, esta é a época mais estimulante de toda a história. (pref.)

Uma outra observação fundamental é que, dos quatro livros aqui analisados, o livro de Edwards & Penney, apesar da abordagem tradicional em relação à escolha e sequência dos tópicos, conforme julgamento dos próprios autores no prefácio, é o único em que uma apresentação da derivada é feita antes da apresentação do conceito de limite, através de problemas envolvendo retas tangentes.

Características como a citada acima, fazem com que consideremos Edwards & Penney um livro de Cálculo realmente inovador, escrito por autores conscientes de que um bom manual didático para o ensino de Cálculo deve conter não só uma apresentação visual cativante e elucidativa dos conteúdos mas, principalmente, uma abordagem exploratória e problematizadora dos conteúdos, sob a mediação das novas tecnologias.

Assim, pois, gostaríamos de encerrar esta pequena análise comparativa entre alguns manuais didáticos de Cálculo, compartilhando da visão de Edwards & Penney em relação à busca de um equilíbrio entre rigor e intuição:

Entretanto, um olhar atento ao tratamento dado a tópicos padrões pode revelar nosso envolvimento com a revitalização do ensino de Cálculo. Continuamos a apoiar uma abordagem intuitiva que dê ênfase tanto à parte conceitual como ao cuidado na formulação de definições e conceitos-chave do Cálculo. Algumas demonstrações que podem ser omitidas a critério do professor foram colocadas no fim das seções; outras podem ser encontradas nos apêndices. Dessa forma, procuramos deixar ampla margem de variação na busca de um equilíbrio entre rigor e intuição. (pref.)

5.2) OS LIVROS DIDÁTICOS DE CÁLCULO E ANÁLISE DO PROFESSOR GERALDO ÁVILA

Destacaremos, agora, o conjunto da obra do Prof. Geraldo Ávila. Este destaque é feito em razão do Prof. Ávila ser, possivelmente, o único autor brasileiro (ao menos, nas últimas décadas) de livros didáticos das duas áreas (Cálculo e Análise). Os Profs. Djairo e Elon, cujos livros de Análise serão analisados no próximo item, não escreveram livros didáticos especificamente para o ensino de Cálculo e também desconhecemos a existência de livros de Análise escritos por autores de livros de Cálculo.

O Prof. Ávila possui uma vasta experiência enquanto professor de Cálculo e Análise do ITA, da UnB, da UNICAMP e, atualmente, da UFG. Em sua entrevista, ele manifesta seu saber docente sobre o cuidado que um professor deve ter, especialmente quando está iniciando o ensino de Cálculo:

Então, eu aprendi a ensinar o Cálculo depois dos erros, como você observou, das frustrações, eu aprendi que era preciso ser humilde, vamos usar uma palavra muito valiosa. É preciso ser humilde e ... realista... e entender que o aluno tem de começar como que engatinhando. Ele não vai começar andando e correndo como a gente quer. (Ent Ávila. – nov/98)

O desenvolvimento do seu trabalho, principalmente ao longo dos últimos anos, parece refletir claramente esta idéia da necessidade de um aprendizado gradativo e contínuo, especialmente em seus livros didáticos na área de Cálculo.

Se compararmos seus trabalhos iniciais, cujas primeiras edições são datadas do final da década de 70, *Cálculo 1* e *Cálculo 2*, com seus trabalhos mais recentes, *Introdução ao Cálculo* e *Introdução às Funções e à Derivada*, constatamos uma importante preocupação em apresentar um Cálculo menos rigoroso e mais intuitivo, conforme o próprio autor reconheceu:

Então, depois de toda esta minha experiência com ensino, eu acordei para esta realidade de que o ensino rigorizado desde o início não é a melhor coisa. A gente tem de lembrar que o intelecto não é só racional, não é só lógica, mas tem a intuição, a visualização geométrica, que muito ajudam no aprendizado. (Ent. Ávila – nov/98)

Procuraremos analisar aqui, a abordagem dada pelo Prof. Ávila aos conceitos de limite e de continuidade em cada um dos livros selecionados e as principais diferenças entre eles, destacadamente o público alvo a que se destinam. Também merecerão destaque, a estruturação e algumas características interessantes de cada livro analisado.

Os quatro livros selecionados foram:

- 1) *Cálculo 1* – Geraldo Ávila – Editora Livros Técnicos e Científicos – Volume Único – Rio de Janeiro – 1982;
- 2) *Introdução ao Cálculo* – Geraldo Ávila Editora Livros Técnicos e Científicos – Volume Único – Rio de Janeiro – 1998;
- 3) *Introdução às Funções e à Derivada* – Geraldo Ávila – Editora Atual – Volume Único – São Paulo – 1994;

- 4) *Introdução à Análise Matemática* – Geraldo Ávila – Editora Edgard Blucher – Volume Único – São Paulo – 1993.

Passemos à análise dos livros selecionados:

1) Cálculo 1 – Geraldo Ávila.

O livro é uma tentativa do autor de contribuir às necessidades de professores e estudantes, à época, "expostos a um mercado dominado, quase que exclusivamente, por traduções, nem sempre adaptadas às exigências atuais do ensino no Brasil". Aqui, vale lembrar que o livro foi publicado em 1982, quando o número de livros de Cálculo escrito por autores brasileiros era notadamente inferior à produção nacional atual.

Sua estruturação é a seguinte:

- Cap. 1) Os Números Reais;
- Cap. 2) Equações e Gráficos;
- Cap. 3) Funções, Limite e Derivada;
- Cap. 4) Funções Elementares e suas Derivadas;
- Cap. 5) Comportamento das Funções;
- Cap. 6) A Integral;
- Cap. 7) Regras de Integração.

Diferentemente de todos os livros de Cálculo analisados no item anterior, aqui não é apresentada uma definição de limite utilizando ε - δ , sendo que a idéia de limite aparece naturalmente através de problemas com retas tangente. Somente após uma brevíssima exposição em 2 páginas de limites laterais, limites infinitos e limites no infinito, o autor propõe uma seção de 24 exercícios de cálculos de limites e nada mais.

A definição de continuidade é apresentada também, de uma forma breve e concisa (ÁVILA, 1982, p. 67):

Ao final de cada capítulo, são apresentadas algumas "notas complementares" destacando as contribuições de alguns matemáticos ao desenvolvimento de determinados tópicos integrantes daquele capítulo. O autor destaca que, apesar do Cálculo ser, atualmente, um instrumento para físicos, engenheiros, químicos, biólogos, estatísticos, economistas e cientistas sociais: *seus conceitos fundamentais são profundos e sutis, e desafiaram os melhores matemáticos por cerca de século e meio. A devida apreciação desses conceitos só pode ser adquirida gradualmente e por via intuitiva.* (pref.)

Entendendo que o bom senso deve sempre prevalecer no terreno do ensino, o autor acredita que: *o Cálculo deve ser apresentado com um mínimo de formalismo, com apelo à intuição e aos problemas de Física e Geometria que lhe deram origem.* (pref.)

E, convictamente, dispara uma dura crítica às abordagens formais e rigorosas do Cálculo:

É importante atentar para estes fatos quando, em nossos dias, o ensino da Matemática ainda padece de formalismo e rigor excessivos e extemporâneos e de pouca, ou quase nenhuma, preocupação em relacionar a Matemática com outras áreas do conhecimento. Isto constitui-se, frequentemente, um entrave à tarefa mais importante, que é a apresentação livre e desembaraçada dos conceitos. (pref.)

Apesar de feita há duas décadas atrás, a crítica do Prof. Ávila ao excesso de rigor no ensino da Matemática, parece-nos ter uma validade bastante atual. Obviamente, esta é uma questão a qual retornaremos posteriormente.

2) Introdução ao Cálculo – Geraldo Ávila.

O mais recente livro do Prof. Ávila, definido pelo próprio autor como uma "versão simplificada de nosso *Cálculo I*", destina-se especialmente ao estudante que "ingressa num curso superior com deficiências de formação na Matemática do ensino médio".

Sua estruturação é a seguinte:

- Cap. 1) Equação da Reta;
- Cap. 2) Funções;
- Cap. 3) A Derivada;
- Cap. 4) Continuidade e Limites;
- Cap. 5) Regras de Derivação;
- Cap. 6) Aplicações da Derivada;
- Cap. 7) A Integral;
- Cap. 8) Logaritmo Natural;
- Cap. 9) Exponenciais e Logaritmos com bases quaisquer;
- Cap. 10) Teorema do Valor Médio e Aplicações;
- Cap. 11) Tópicos Complementares.

A grande inovação desta nova versão do livro de Ávila, comparando-se com a exposição tradicional dos conteúdos, é que os conceitos de continuidade e limites só aparecem após um capítulo inicial de derivada, que contém problemas envolvendo retas tangentes e normais, a definição de derivada através do limite da razão incremental e algumas interpretações geométricas e físicas para a derivada. O termo "limite" é apresentado, inicialmente, através do "declive da curva" (ÁVILA, 1998, p. 50):

No capítulo seguinte, Continuidade e Limites, os limites de funções contínuas, limites laterais, limites infinitos, limites no infinito e limites de polinômios são explorados em 8 páginas, somente através de exemplos, sem definições formais, sendo remetido ao leitor uma seção de 30 exercícios propostos sobre cálculo de limites.

Já a continuidade é estudada, inicialmente, através da função $f(x) = |x|/x$ e de gráficos de funções contínuas e descontínuas, passando-se para a apresentação do Teorema do Valor Intermediário e da relação entre Derivabilidade e Continuidade, após a seguinte definição (ÁVILA, 1998, p. 75):

Retomando a questão das deficiências na formação matemática em nível médio dos alunos que ingressam na universidade e cursam disciplinas de Cálculo, Ávila não concorda com aqueles que defendem que, antes de iniciar o Cálculo, deve-se revisar as matérias do ensino médio:

A experiência tem mostrado que tal providência é frustrante, tanto para o aluno como para o professor. De fato, tornando-se universitário, o aluno vem com a expectativa de aprender coisas novas; e fica decepcionado ao ver, logo de início, que terá de se dedicar a coisas já ensinadas no ensino médio. Isso explica – em parte, pelo menos – o pouco proveito dessas recordações. O professor, por sua vez, também se sente desanimado ao constatar que seus alunos pouco estão aprendendo com a recordação em andamento. (pref.)

Então, propõe uma alternativa a esta situação, visando uma maior motivação por parte dos alunos:

Por essas razões pensamos que o melhor mesmo é introduzir o aluno ao Cálculo, sem demora. Ele se sentirá estimulado com o aprendizado de conceitos novos; e é preciso aproveitar o entusiasmo que lhe vem de seu recente ingresso no curso superior. (pref.)

De fato, as deficiências de formação matemática no ensino médio são verificadas em diferentes momentos e níveis nos cursos de Cálculo e, portanto, a proposta de que tais deficiências sejam sanadas simultaneamente ao aprendizado do Cálculo deve ser seriamente considerada e discutida.

3) Introdução às Funções e à Derivada – Geraldo Ávila.

Este trabalho, no âmbito brasileiro, constitui-se num dos raríssimos livros dedicados especificamente ao ensino de Cálculo no ensino médio.

O livro se propõe a mostrar "como o conceito de derivada pode ser ensinado no ensino médio, de maneira fácil, através de uma apresentação intuitiva e com apelo à visualização geométrica, sem necessidade de um desenvolvimento sistemático da teoria de limites". Logo, segundo o próprio autor, o livro é dirigido a professores que já atuam no ensino médio ou que estão se preparando para tal ao cursar Licenciatura em Matemática.

Sua estruturação é a seguinte:

- Cap. 1) Funções e Gráficos;
- Cap. 2) Derivada e Aplicações;
- Cap. 3) A Derivada em Cinemática;
- Cap. 4) O Logaritmo e a Exponencial;
- Cap. 5) Aplicações da Função Exponencial.

Aqui, não são abordados os conceitos de limite e continuidade, apenas o conceito de derivada que, assim como no livro *Introdução ao Cálculo*, contempla uma breve idéia de limite em sua definição, explorada através de problemas da reta tangente a uma curva.

No prefácio, Ávila aponta duas justificativas para a viabilidade / utilidade do ensino de derivada logo na 1ª série do ensino médio, ambas relacionadas ao ensino de funções:

Uma delas é que nesse início do ensino médio é que se introduz e se estuda mais detidamente o conceito de função. Ora, a derivada lança muito mais luz nesse estudo – particularmente, na análise da variação das funções, como seu crescimento ou decrescimento. (pref.)

A outra razão apontada pelo autor, relacionada às aplicações da derivada, é o ensino de Física, na 1ª série do Ensino Médio:

Aqui o professor de Física precisa introduzir os conceitos de velocidade e aceleração instantâneas e apresentar as equações dos movimentos uniforme e uniformemente variado. Ora, essas coisas ficam bem mais fáceis de ensinar e muito mais claras para o aluno quando fundamentadas no conceito de derivada. (pref.)

Deste modo, o autor deixa claro a sua preocupação com uma articulação do ensino de Matemática com outras disciplinas, especialmente, Física. Em sua entrevista, poderemos notar que isto se deve, em grande parte, à sua formação acadêmica.

4) Introdução à Análise Matemática – Geraldo Ávila.

Após publicar uma série de livros sobre Cálculo de funções de uma ou várias variáveis, Ávila também quis oferecer ao leitor um livro de Análise, para "mostrar-lhe o lado rigoroso do Cálculo", uma vez que, segundo ele próprio, seu livro de *Cálculo 1* foi escrito num estilo pouco formal e rigoroso, apelando sempre para a intuição e a visualização geométrica. Cabe aqui, uma pergunta: Isto foi bom ou ruim ? Obviamente, a resposta será dada pelo próprio professor em nossa entrevista, quando tocarmos na questão do "estilo" ideal das abordagens do Cálculo e da Análise.

Assim sendo, estruturou seu livro introdutório de Análise da seguinte forma:

Cap. 1) Os Números Reais;

Cap. 2) Sequências Infinitas;

Cap. 3) Séries Infinitas;

Cap. 4) Funções, Limite e Continuidade;

Cap. 5) Funções Globalmente Contínuas;

Cap. 6) O Cálculo Diferencial;

Cap. 7) A Integral de Riemann;

Cap. 8) O Teorema Fundamental do Cálculo e Aplicações do Cálculo;

Cap. 9) Sequências e Séries de Funções.

As definições de limite e continuidade são apresentadas em conjunto, numa sequência natural, de uma forma coerentemente enunciada. Destacada, ainda, é a utilização de noções e notações topológicas (ÁVILA, 1993, pp. 83-84):

Merecem destaque, ainda, as "Notas Complementares" ao final de cada capítulo, que contêm não somente dados biográficos e históricos mas também orientações ao leitor objetivando auxiliá-lo no entendimento da evolução dos conceitos. A última delas, ao final do capítulo 9, descreve resumidamente o movimento de Aritmetização da Análise (ÁVILA, 1993, p. 243):

Inicialmente, gostaríamos de deixar claro que consideramos um avanço a introdução de notas históricas complementares, pois as mesmas refletem uma preocupação do autor em permitir / contribuir para uma contextualização histórica dos conteúdos aprendidos por parte dos alunos. Entretanto, a abordagem apresentada ainda retrata uma certa dicotomia na medida em que coloca em textos separados os aspectos mais sintáticos / procedimentais (parte inicial dos capítulos com definições formais e propriedades) e os aspectos mais semânticos / histórico-conceituais (notas complementares ao final dos capítulos).

O autor reafirma sua posição enquanto matemático e principalmente, enquanto educador matemático, ao destacar o papel da história da matemática no ensino:

Muitas teorias matemáticas são de difícil compreensão, no seu porquê, quando vistas isoladamente ou separadas do contexto histórico em que se desenvolveram. Cremos que o estudo da matemática, auxiliado pelo acompanhamento de sua evolução histórica, de seu papel num contexto científico mais amplo e do fascinante jogo das idéias no cenário da invenção e descoberta, é estimulante e enriquecedor na formação do aluno, sobretudo de sua apreciação crítica da disciplina. (pref.)

A respeito da influência do formalismo e do rigor no ensino, no prefácio do livro, o autor afirma que:

Qualquer curso, seja de Cálculo, Análise ou outra disciplina matemática, deve, antes de tudo, transmitir idéias. E isto nem sempre é possível numa exposição carregada de formalismo e rigor. Até mesmo em cursos mais avançados, a insistência excessiva nesses elementos da apresentação frequentemente dificulta a transmissão das idéias e o próprio aprendizado. (pref.)

Um último ponto a ser observado é a pouca presença de figuras no desenrolar do texto relativo aos números reais, sequências infinitas e séries infinitas, aparecendo apenas alguns gráficos a partir do estudo das funções e suas propriedades.

Finalizando, gostaria de retomar a questão do rigor e da intuição, citando Ávila ao comentar a apresentação dos resultados em seu livro:

Por isso mesmo, embora rigor e formalismo sejam ingredientes essenciais de um curso de Análise, procuramos fazê-los presentes, em nossa apresentação, de maneira equilibrada, sem descurar as virtudes do pensamento intuitivo. (pref.)

A grande questão que permanece e que continuará sendo discutida neste trabalho é: O que significa este ponto de equilíbrio e como ele acontece entre o pensamento formal e o pensamento intuitivo ?

No próprio texto de Ávila, por exemplo, as definições de limite e continuidade, apesar de precedidas por uma abordagem mais intuitiva com exploração geométrica, ainda continuam sendo apresentadas de maneira rigorosa e formal. O equilíbrio se daria, então, da seguinte maneira: inicialmente, uma abordagem essencialmente intuitiva e, em seguida, uma abordagem essencialmente rigorosa ? Ou haveria outra alternativa ?

Analisaremos, a seguir, textos didáticos de Análise de outros autores.

5.3) A ORGANIZAÇÃO CURRICULAR DA ANÁLISE PRESENTE NOS LIVROS DIDÁTICOS

Como destacamos anteriormente em relação ao ensino de Cálculo, o ensino de Análise também foi marcado por diversas tendências que se diferenciavam por conseguir um maior ou menor rigor na apresentação dos resultados. Obviamente, esta procura pela "perfeição rigorosa" balizou – e, em nosso entendimento, ainda hoje baliza – a ação dos autores de livros didáticos de Análise Matemática.

Assim como tem ocorrido com o ensino de Cálculo, o ensino de Análise também é marcado e influenciado pelos livros didáticos. Mesmo professores mais experientes, muitas vezes, preferem adotar um único livro didático e elaborar suas notas de aula baseando-se integralmente no desenvolvimento dos conteúdos que ele apresenta.

Cabe destacar que as disciplinas de Análise I e II são oferecidas para cursos de Licenciatura e / ou Bacharelado em Matemática²⁷ e não só se diferenciam pelo nome, mas também pela ementa e, principalmente, pela carga horária que, em geral, varia de 60 a 120 horas / semestre. Daí vem a opção de um professor por um determinado livro ao considerá-lo mais adequado às suas necessidades / possibilidades.

²⁷ Em geral, Análise I integra o currículo de Licenciaturas e Bacharelados, ao passo que Análise II é disciplina quase que exclusiva dos Bacharelados.

Um outro aspecto a ser levado em consideração é que todo livro de Análise – assim como ocorre com qualquer outro livro de outra área – reflete as concepções, crenças e valores de seu autor acerca da Matemática, de seu ensino e, em particular, do papel pedagógico desempenhado pela Análise na formação do pensamento / conhecimento matemático.

Este aspecto é muito bem observado por GRATTAN-GUINNESS (1997) quando analisa os textos escritos por Cauchy:

Sua matemática parece-me frequentemente refletir sua personalidade, a saber, o desejo por ordem e sistematização não apenas em matemática, mas na vida política e religiosa da França Católica dos Bourbon, na qual ele vivia. Logo, a impressão original do Résumé revela a seguinte característica. Cada uma das 40 lições está impressa em 4 páginas ou 1 folha, talvez para a distribuição de lição por lição aos estudantes. Mas, além disso, cada lição termina exatamente na última linha da última página. O mesmo ocorre em dois adicionais posteriores, de 12 e 4 páginas exatamente. E isto ocorre num livro fundamentado matematicamente na teoria de limites... (pp. 75-76)

Cabe considerar, inicialmente, face ao grau de precisão e clareza exigidas num texto de Análise, que escrever um livro de Análise é tarefa que demanda experiência didática e acadêmica, alta capacidade de sistematização e síntese e amplo conhecimento específico. Acreditamos que todas estas características / qualidades se fazem presentes nos autores selecionados.

Além de averiguar a abordagem dada a Limites e Continuidade, procuraremos fazer, também, uma análise da estrutura geral de cada obra, destacando alguns aspectos, tais como a presença ou ausência de elementos históricos ligados a determinados tópicos e a utilização de recursos visuais geométricos como figuras e / ou gráficos relacionados ao enunciado ou demonstração de um resultado e não como idéia central contida no enunciado ou demonstração de vários resultados.

Um outro aspecto fundamental a ser observado será a tensão entre rigor e intuição na abordagem dos conceitos e a importância (ou não) que cada autor confere a esta relação.

A escolha dos livros para análise foi feita segundo duas motivações: em primeiro lugar, os livros de Análise de funções reais de uma variável deveriam ser aqueles mais adotados nas universidades brasileiras. Nesta categoria encontramos, além do livro de ÁVILA (1993) já analisado, os livros de FIGUEIREDO (1996) e LIMA (1993); em segundo lugar, selecionamos também duas obras internacionais, CARAÇA (1951) e RUDIN (1971), as quais tiveram historicamente, grande influência no Brasil, segundo depoimento de nossos entrevistados e referências em seus trabalhos.

Os quatro livros selecionados, portanto, foram:

- 1) *Conceitos Fundamentais da Matemática* – Bento de Jesus Caraça – Editora Livraria Sá da Costa – Volume Único – Lisboa – 1951;
- 2) *Princípios de Análise Matemática* – Walter Rudin – Editora Ao Livro técnico S.A. – Volume Único – Rio de Janeiro – 1971;
- 3) *Análise I* – Djairo Guedes de Figueiredo – Editora UNICAMP – Volume Único – Campinas – 1996;
- 4) *Análise Real* – Elon Lages Lima – Editora IMPA – Volume 1 – Rio de Janeiro – 1993.

Passemos à análise dos livros selecionados:

1) *Conceitos Fundamentais da Matemática* – Bento de Jesus Caraça.

Obviamente, o livro de Caraça não pode ser considerado um livro didático nos mesmos moldes dos demais aqui analisados. Essa diferença não deve-se à época em que foi publicado (1951), mas, principalmente, refere-se à forma como foi escrito. Não obstante, o mesmo pode ser considerado uma rica referência não só para cursos de Análise como

também cursos de Álgebra, por abordar conceitos fundamentais à formação do pensamento matemático do professor, tais como números, funções e continuidade. Enfim, *Conceitos Fundamentais da Matemática* pode ser considerado um "clássico" entre os educadores matemáticos luso-brasileiros.

A estruturação do livro é a seguinte:

1ª Parte: Números

- Cap. I) O Problema da Contagem;
- Cap. II) O Problema da Medida;
- Cap. III) Crítica do Problema da Medida;
- Cap. IV) Um Pouco de História;
- Cap. V) O Campo Real;
- Cap. VI) Números Relativos.

2ª Parte: Funções

- Cap. I) Estudo Matemático das Leis Naturais;
- Cap. II) Pequena Digressão Técnica;
- Cap. III) Equações Algébricas e Números Complexos;
- Cap. IV) Excursão Histórica e Filosófica.

3ª Parte: Continuidade

- Cap. I) O Método dos Limites
- Cap. II) Um Novo Instrumento Matemático – As Séries;
- Cap. III) O Problema da Continuidade.

A definição de limites está ligada à teoria dos infinitésimos, desenvolvida para sucessões numéricas e redefinida para funções reais através dos "infinitésimos principais" $x - a$ e $1/x$, sendo apresentada nos seguintes termos (CARAÇA, 1951, p. 295):

Já uma "teoria matemática quantitativa da continuidade" é inicialmente apresentada com as seguintes definições que, em seguida, são exploradas sob outros aspectos e ilustradas geometricamente (CARAÇA, 1951, pp. 302-303):

Uma das características mais marcantes em todo o texto é a preocupação em apresentar o contexto histórico-social em que foi desenvolvido um conceito, paralelamente à apresentação daquele conteúdo. Isto pode ser percebido nos Capítulos IV da 1^a e 2^a Partes, onde é feita não só uma abordagem histórica, como também filosófica, dos números e funções.

Tal atitude é justificada pelo autor ao tecer o seguinte comentário com vertente inegavelmente crítica aos padrões e aos métodos relacionados ao desenvolvimento da Matemática enquanto ciência:

Será esta a atitude que tomaremos aqui. A Matemática é geralmente considerada como uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete, um gabinete fechado, onde não entram os ruídos do mundo exterior, nem o sol nem os clamores dos homens. Isto só em parte é verdadeiro. Sem dúvida, a Matemática possui problemas próprios, que não têm ligação imediata com outros problemas da vida social. Mas não há dúvida também de que os seus fundamentos mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real; uns e outros entroncam na mesma madre. (pref.)

Destacamos, ainda, a preocupação do autor em destrinchar determinadas definições em "modos de definição": noção, definição analítica e / ou definição geométrica e a grande frequência em que aparecem figuras e gráficos na exposição e, principalmente, visando à compreensão dos resultados que, por sua vez, não são apresentados na forma de lemas, teoremas e corolários.

Com isso, o autor procura explorar a dimensão intuitivo-geométrica do leitor na compreensão dos conceitos que, por sua vez, são situados em contextos sócio-históricos. Em resumo, podemos concluir que sua abordagem privilegia mais o conceitual do que o procedimental, aspecto que fundamental para a formação matemática de um professor de Matemática.

2) Princípios de Análise Matemática – Walter Rudin.

O livro de Rudin foi e ainda continua sendo utilizado como referência em diversas disciplinas de Análise Matemática de universidades brasileiras, inclusive nos chamados cursos de verão e / ou nivelamento de alguns programas de pós-graduação em Matemática.

Observamos também, que o referido livro é citado como referência bibliográfica nos três livros de autores nacionais aqui analisados (Ávila, Figueiredo e Lima).

Sua estruturação é a seguinte:

- Cap. 1) Números Reais e Complexos;
- Cap. 2) Elementos da Teoria dos Conjuntos;
- Cap. 3) Sucessões e Séries Numéricas;
- Cap. 4) Continuidade;
- Cap. 5) Derivação;
- Cap. 6) Integral de Riemann-Stieltjes;
- Cap. 7) Sucessões e Séries de Funções;
- Cap. 8) Outros Tópicos da Teoria das Séries;
- Cap. 9) Funções de Várias Variáveis;
- Cap. 10) Teoria de Lebesgue.

A definição de limite é apresentada em termos de espaços métricos e, em seguida, reformulada em termos de limites de sucessões, tomando a forma de teorema (RUDIN, 1971, pp. 83-84):

A identificação de uma função como uma aplicação entre espaços métricos continua presente na definição de continuidade, que é seguida de um teorema equivalente (RUDIN, 1971, pp. 85-86):

Sem apresentar figuras ou gráficos, nem qualquer tipo de referências ou notas históricas, uma característica marcante do autor é sua preocupação em apresentar uma Análise "aritmética", o que pode ser verificado no destaque à parte inicial do Capítulo 1:

...em que foram introduzidos os números reais por meio de cortes no conjunto dos números racionais, pode escapar a uma primeira leitura; se isto acontecer, encontrar-se-á uma fundamentação lógica para o resto do trabalho, considerando o Teorema de Dedekind como postulado e ponto de partida...(Cap. 1) Uma discussão satisfatória dos principais conceitos da Análise (por exemplo, convergência, continuidade, diferenciação e integração) tem que se basear em uma definição rigorosa de número. (pref.)

De modo geral, podemos considerar que a abordagem do autor possui algumas características que, segundo FIORENTINI (1995), a enquadrariam na tendência denominada "formalista moderna" por *procurar os desdobramentos lógico-estruturais das idéias matemáticas, tomando por base não a construção histórica e cultural deste conteúdo, mas sua unidade e estruturação algébrica mais atuais:*

A concepção formalista moderna manifesta-se na medida em que passa a enfatizar a Matemática pela Matemática, suas fórmulas, seus aspectos estruturais, suas definições (iniciando geralmente por elas), em detrimento da essência e do significado epistemológico dos conceitos.
(p. 16)

E quais seriam os aspectos que demarcam esse enquadramento formalista da abordagem da obra de Rudin ? Segundo FIORENTINI (Ibidem), porque: *se preocupa exageradamente com a linguagem, com o uso correto dos símbolos, com a precisão, com o rigor, sem dar atenção aos processos que o produzem; porque enfatiza o lógico sobre o psicológico, o formal sobre o social; o sistemático estruturado sobre o histórico...* (p. 16)

Não estamos afirmando, categoricamente, que Rudin seja um formalista moderno, mas esta foi a tendência hegemônica de ensino de Matemática nos anos de 1950 a 1970, época que coincide com a formação matemática do referido autor. Além disso, sua abordagem pende, por excelência, para uma apresentação dos conteúdos de maneira formal e rigorosa.

3) Análise I – Djairo Guedes de Figueiredo.

Atualmente, o livro de Figueiredo é um dos livros de autoria nacional que mais vem sendo utilizado como referência em programas das disciplinas de Análise oferecidas para os cursos de Matemática no Brasil.

Segundo o autor, o livro é escrito para leitores pressupostamente familiarizados com a "técnica" do Cálculo Diferencial e Integral de funções reais de uma variável, o que justifica a ausência de "um número suficientemente grande de exercícios que contenham problemas do tipo computacional".

Em sua entrevista, ao ser questionado se o papel do Cálculo é fazer com que o aluno adquira a técnica para, somente em Análise, aprender os conceitos, o Prof. Djairo ressaltou:

Não foi bem isso que eu quis dizer. O que eu quis dizer é o seguinte. É que eu, para apresentar um curso destes, eu imagino que o fulano já saiba coisas como derivada de seno, derivada de cosseno. Essa parte mais mecânica, compreende, de que ele viu potências, como é que se deriva, etc. Daí eu vou formalizar a coisa, mas que não seria totalmente novidade para ele todas as coisas. (Ent. Djairo – out/99)

Na análise das entrevistas, certamente voltaremos a esta questão da relação de um curso de Cálculo com um curso de Análise, que se tornará fundamental para nossa investigação.

A estruturação do livro é a seguinte:

- Cap. 1) Números Reais;
- Cap. 2) Funções Reais;
- Cap. 3) Funções Deriváveis;
- Cap. 4) Funções Trigonométricas;
- Cap. 5) A Integral;
- Cap. 6) Funções Logarítmica e Exponencial;
- Cap. 7) Relações entre Derivação e Integração;
- Cap. 8) Integrais Impróprias;
- Cap. 9) Sucessões e Séries de Funções.

O conceito de limite é explanado utilizando-se os conceitos de limites laterais que, por sua vez, utilizam-se dos conceitos de limite e convergência de sucessões numéricas, o que é justificado pelo autor. Cabe destacar a tentativa do autor em ilustrar com exemplos as definições, como segue (FIGUEIREDO, 1996, p. 52):

Observemos que após a apresentação das Definições 2 e 3, o autor apresenta as motivações que o levaram à utilização de sucessões nas definições dos limites laterais. Podemos dizer que tal atitude se constitui num importante avanço para a construção de uma "metateoria", isto é, um falar sobre a teoria ou um justificar sobre as opções tomadas. Mais ainda: tal construção parece oportuna para a formação de um leitor crítico / reflexivo, como o deve ser, especialmente, um professor de Matemática em formação, cursando a disciplina de Análise.

Nota-se também, uma preocupação do autor em ressaltar uma característica bastante peculiar do limite, cuja interpretação gera muitas dúvidas nos alunos (FIGUEIREDO, 1996, p. 54):

Já a definição de continuidade é feita também através dos limites laterais (FIGUEIREDO, 1996, p. 59):

Na sequência, então, é apresentada a definição equivalente utilizando-se ε - δ só que em forma de teorema cuja demonstração é remetida ao leitor, o que parece demonstrar a preocupação do autor muito mais com o aspecto conceitual / semântico do que com o aspecto procedimental / sintático (FIGUEIREDO, 1996, p. 60):

Ao longo do texto, e não ao final de cada capítulo como em ÁVILA (1993), estão presentes várias notas históricas com o objetivo de complementar a apresentação de uma teoria com as idéias norteadoras de sua evolução e algumas aplicações que pretendem mostrar a relação da Análise com outros ramos da matemática e até mesmo outras ciências. Entretanto, é verificada a presença de poucas figuras e gráficos ilustrativos.

No prefácio da primeira edição, o rigor histórico da Análise é citado pelo autor ao comentar que:

O texto é escrito com o rigor que a Análise ganhou no decorrer do século passado. A fundamentação lógica é logo apresentada no primeiro capítulo, o que o torna relativamente longo. Através dos exemplos e de várias observações, procuramos estimular no estudante o espírito crítico e nele despertar curiosidade por outros cursos de Matemática. (pref. 1ª ed.)

Mas grande questão a ser investigada é a seguinte: o rigor que a Análise "ganhou" no século passado, seguramente, foi essencial para o estabelecimento dos fundamentos de uma nova área da Matemática; entretanto, este mesmo rigor ou este mesmo nível de rigor é essencial num livro didático direcionado, em muitos casos, a um público constituído por professores de Matemática em formação ? Questão complicada que necessita de uma reflexão mais aprofundada !

Também a questão da transição do Cálculo para a Análise é abordada, no prefácio da segunda edição, quando o autor afirma ter tido a preocupação de apresentar um texto de Análise enquanto continuação natural dos cursos de Cálculo:

Assim, introduzimos o Cálculo Diferencial e Integral de funções reais de uma variável real, após a apresentação axiomática dos números reais. Isto nos permite oferecer uma teoria dedutiva rigorosa, mas agradável e bonita! (pref. 2ª ed.)

Por apresentar os conceitos e aplicações de um modo mais narrativo / discursivo (de mostrar / justificar os resultados), Figueiredo parece não valorizar ou não enfatizar a abordagem "formalista moderna" como foi verificado em RUDIN (1971).

Por outro lado, sua abordagem mais "geométrica" verificada nas definições e teoremas e até mesmo sua preocupação com a contextualização histórica dos conceitos, aproximam sua Análise daquela desenvolvida por Ávila, questão esta, debatida com os autores em suas entrevistas, à qual retornaremos em outro momento.

4) Análise Real – Elon Lages Lima.

Atualmente, o livro de Lima é um dos livros de autoria nacional que mais vem sendo utilizado como referência em programas das disciplinas de Análise oferecidas nos cursos de Matemática do Brasil.

Sobre o processo de transição entre este livro e o *Curso de Análise – Volume I*, aproximadamente duas vezes mais longo, o autor ressaltou que: *é verdade também, que esse livro não é um subconjunto do outro, porque tem umas coisas que tem aí que não tem no outro. Por exemplo, o método de Newton...* (Ent. Elon – nov/99)

A estruturação do livro é a seguinte:

Cap. 1) Conjuntos Finitos e Infinitos;

Cap. 2) Números Reais;

Cap. 3) Sequências de Números Reais;
Cap. 4) Séries Numéricas;
Cap. 5) Algumas Noções Topológicas;
Cap. 6) Limites de Funções;
Cap. 7) Funções Contínuas;
Cap. 8) Derivadas;
Cap. 9) Fórmula de Taylor e Aplicações da Derivada;
Cap. 10) A Integral de Riemann;
Cap. 11) Cálculo com Integrais;
Cap. 12) Sequências e Séries de Funções.

A definição de limite é feita de maneira tradicional, ainda que, logo nas primeiras propriedades, já sejam utilizadas noções topológicas, característica de todo o conjunto do texto (LIMA, 1993, p. 61):

A mesma observação vale para a definição de continuidade, caracterizada como um "fenômeno local" (LIMA, 1993, pp. 73-74):

Ao longo do texto, não são observadas notas ou referências históricas, excetuando-se, obviamente, nomes de matemáticos em destaque por seus resultados célebres, nem tampouco muitas figuras ou gráficos.

Em relação à apresentação elementar, contendo exemplos ilustrativos, o autor preocupou-se em:

... justificar cuidadosamente todas as afirmações feitas, de forma coerente mas sem exageros formais. A escolha dos tópicos visou a um equilíbrio entre a estrutura lógica do assunto e a utilidade em possíveis aplicações. (pref.)

A ausência de uma contextualização histórica relacionada ao desenvolvimento dos conceitos e a preocupação com a estrutura lógica parece aproximar a abordagem "topológica" de Lima da Análise desenvolvida por Rudin.

O autor afirma ainda, que, como a finalidade do livro é servir de texto para um primeiro curso de Análise Matemática, então:

Os assuntos nele tratados são expostos de maneira simples e direta, evitando-se maiores digressões. Assim, espero facilitar o trabalho do professor que, ao adotá-lo, não precisará perder muito tempo selecionando os tópicos que ensinará e os que vai omitir. (pref.)

Em nossa experiência como professor de Análise Real, para alunos do curso de Especialização em Matemática, adotamos o livro de Lima como referência principal da disciplina que possuía uma carga horária de 60 horas / aula. Nossa avaliação é que, de fato, o trabalho foi facilitado em relação ao nosso professor de Análise I na graduação, na medida em que o mesmo sofria ao ter de selecionar os conteúdos do *Curso de Análise – Volume 1* que iria ministrar. Entretanto, não conseguimos perceber em nossos alunos, atitudes / reações diferentes das dos nossos colegas de turma: o sentimento de perplexidade diante da dificuldade do assunto e a dúvida sobre o papel da disciplina em sua formação !

No fundo, esta avaliação está ligada à seguinte questão: qual é a importância da Análise para um professor de Matemática dos ensinos fundamental e médio ? Voltaremos a esta discussão no último capítulo deste estudo.

Em síntese, esta breve análise dos manuais didáticos, que aqui concluímos, contribuiu para reforçar uma suposição que havíamos assumido como hipótese de trabalho e que desencadeou o desenvolvimento de nossa questão de investigação: existe, de fato, uma relação bastante desigual entre os aspectos intuitivos e rigorosos na abordagem do Cálculo e da Análise, percebida na forma como os manuais didáticos apresentam e desenvolvem os conteúdos de limites e de continuidade de funções reais de uma variável.

Seria esta, a percepção de alguns autores destes manuais e de professores-pesquisadores ? Tentaremos, a partir de agora, elucidar este questão, tomando por base as falas das entrevistas realizadas.

CAPÍTULO 6

APRESENTANDO OS PROTAGONISTAS DESTE ESTUDO

“Não é paradoxo dizer que nos nossos momentos de inspiração mais teórica podemos estar o mais próximo possível de nossas aplicações mais práticas.”

Whitehead

Este capítulo tem por objetivo fazer uma apresentação da trajetória de vida de cada um dos depoentes, destacando informações relativas à sua formação acadêmica e experiência docente de Cálculo e de Análise.

Como poderemos observar nesta apresentação de nossos sujeitos de pesquisa, todos realizaram sua graduação na década de 50. Isso não foi proposital de nossa parte, ao contrário, essa curiosa coincidência nos causou surpresa e nos faz perguntar: por que não surgiram, ainda, lideranças mais jovens neste campo ?

Por fim, tentaremos destacar a visão dos depoentes sobre determinados acontecimentos que marcaram sua trajetória, destacadamente, a experiência de autoria de manuais didáticos.

6.1) O PROFESSOR ROBERTO RIBEIRO BALDINO

Nosso primeiro depoente não é graduado em Matemática pois é de um tempo no qual "quem gostava de matemática devia fazer engenharia". Formou-se, então, em Engenharia na UFRGS em 1961 e, após passar um período de dois anos no IMPA – RJ, fez seu Mestrado em Matemática na Universidade de Stanford – USA. Em Stanford, também iniciou seu doutorado, o qual foi concluído em 1972 no mesmo IMPA – RJ na área de

Análise, sob a orientação do famoso Prof. Leopoldo Nachbin, tido como um dos maiores matemáticos analistas do Brasil em todos os tempos. Seu pós-doutorado foi realizado na França.

De sua experiência discente na graduação e na pós-graduação, o Prof. Baldino pouco falou além de datas e nomes mas deixou claro que, na interseção de sua guinada da Matemática Pura para a Educação Matemática se encontram uma profunda decepção com o ambiente acadêmico-universitário do qual não poupou duras críticas e com a própria perspectiva profissional vislumbrada a partir deste sistema no qual estava inevitavelmente inserido, anteriormente como aluno e agora como professor:

Então, uma desilusão quanto aos matemáticos em si e uma desilusão quanto à administração do país que não reconhecia, não valorizava isso. E aí ficavam discutindo quem é que tinha publicado mais ou menos, enfim ... e aí a "Federal" entrou por aquele caminho da promoção automática na carreira universitária, se você não fizer nada você é promovido do mesmo jeito. Então, essas coisas todas aí, fizeram me separar disso e entrar para a Educação Matemática. (Ent. Baldino – ago/98)

A "Federal" à qual o Prof. Baldino se refere é a UFRJ, universidade para a qual ele foi transferido em 1970, após iniciar sua carreira docente universitária contratado como professor catedrático titular da UFRGS, em Porto Alegre. Permaneceu como professor adjunto no Rio de Janeiro até 1988, quando começou a se dedicar à Educação Matemática e se transferiu, como professor assistente, para a UNESP, em Rio Claro – SP. Ele mesmo observa que sua carreira docente começou "de cima (como professor titular) para baixo (até professor assistente)".

Ao analisar alguns aspectos que mais se destacaram ao longo destes vários anos de docência superior, o professor considera bem sucedidas algumas experiências ocorridas logo nos primeiros cursos de Álgebra e Álgebra Linear que ministrou, em função de sua preocupação primeira que sempre foi "como é que ele podia explicar a coisa de um jeito que o aluno entendesse". Entretanto, segundo o depoente, é difícil conciliar este tipo de

preocupação com uma outra de natureza diferente: a preocupação em realizar um bom trabalho enquanto pesquisador da área de matemática. Para o Prof. Baldino, de um modo geral:

... se você tá preocupado em como uma universidade funciona, preocupado com a aprendizagem dos alunos e preocupado com os cursos que você tá dando, fica mais difícil ainda você fazer matemática de ponta, matemática para pesquisa, matemática de vanguarda. Você tem mesmo que abstrair de tudo, esquecer o ensino, fazer um ensino com o menor tempo possível, chutar aquelas aulas da melhor maneira possível, se desvencilhar daquilo, ter o menor número possível de alunos para poder se dedicar à matemática... então, este tipo de fracasso me incomodou... (Ent. Baldino – ago/98)

Para nós, enquanto docentes universitários, parece insustentável esta condição profissional, apontada pelo Prof. Baldino, do professor-pesquisador nos Departamentos de Matemática. Será que o desenvolvimento profissional de um professor de Matemática não poderia e não deveria contemplar avanços mediante reflexões de seus papéis enquanto docente e pesquisador ? Seria o caso de uma simples questão de escolha de atuação em uma ou outra área da carreira docente ? Não haveria a possibilidade de complementariedade entre ensino, pesquisa e extensão, tripé básico não só da atividade docente bem como de todas as atividades universitárias ?

Por outro lado, reconhecemos a dificuldade em se levantar e, de forma eficiente, resolver questionamentos / problemas de diversas ordens relacionados ao ensino, atitude que sempre marcou a postura acadêmica do prof. Baldino. Especificamente, na área de Cálculo, é inegável sua contribuição para uma reflexão acerca do seu ensino no Brasil, quer seja através de seus artigos (aos quais já nos referimos anteriormente), ou de dissertações e teses por ele orientadas. Certamente, sua produção enquanto professor-pesquisador se pautou em sua própria prática pedagógica em cursos de Cálculo, que ministrou várias vezes para os mais variados cursos de graduação e em cursos de Análise, que ministrou por "três

ou quatro anos" na pós-graduação da UFF, após ter tido uma primeira experiência nesta disciplina na graduação da UFRJ.

Ao refletir sobre sua trajetória de professor de Análise, o Prof. Baldino destaca a importância docente na aprendizagem e no desenvolvimento conceitual deste campo de conhecimento:

É, Análise eu sempre digo o seguinte: ninguém aprende Análise Matemática antes de dar dois ou três cursos de Análise Matemática. Se você não tiver pra quem falar, você não aprende. E a oportunidade de aprender Análise me foi dada por um curso de pós-graduação que eu fiz no mestrado do "Fundão", e foi uma daquelas coisas que foi sucesso, depois eu fiquei sabendo que o pessoal valorizou o curso e eu não sabia porque. Eu fiz o melhor que pude. (Ent. Baldino – ago/98)

À época da entrevista, o Prof. Baldino estava ministrando uma disciplina de Cálculo para o curso de Física na UNESP – Rio Claro, instituição à qual ainda está ligado, embora já esteja atualmente aposentado. Através do programa de pós-graduação em Educação Matemática, o professor continua a orientar dissertações de mestrado e teses de doutorado ligadas ao ensino de Cálculo e, eventualmente, ainda ministra algumas disciplinas dentro do programa.

Para finalizar, destacamos que, em sua entrevista, o depoente lança uma série de questionamentos endereçados diretamente aos autores de livros didáticos, que devem ser sempre escritos "pro aluno que vai ler o livro". Aos professores de Cálculo, o Prof. Baldino recomenda:

Ensina-se ouvindo, aprende-se falando ! Se quiser ensinar, comece a ouvir, comece a ouvir o que seu aluno tem a dizer, comece a ouvir o que o aluno pensa, tente entrar no pensamento do aluno e explicar pro aluno o que ele está dizendo, por mais doido que seja, por mais errado que seja... (Ent. Baldino – ago/98)

6.2) O PROFESSOR GERALDO SEVERO DE SOUZA ÁVILA

Nosso segundo depoente é Bacharel e Licenciado em Matemática pela USP em 1956 e, em fevereiro de 1957 já começou, como Auxiliar de Ensino, a dar aulas de Cálculo para turmas com vinte alunos – categorizados por ele como "muito bons" – do Instituto Tecnológico da Aeronáutica – ITA. Esta experiência durou apenas um semestre pois, na sequência, o Prof. Ávila foi fazer seu mestrado e doutorado, o qual foi concluído em 1961, na área de Análise na Universidade de New York – USA.

De volta ao Brasil, o Prof. Ávila ministrou a disciplina de Variáveis Complexas no Instituto de Física Teórica – UNESP, fato destacado pelo depoente como "uma primeira experiência de ensinar para físicos". Esta passagem durou apenas dez meses, pois o professor se transferiu, em 1962, para a UnB onde, juntamente com o Prof. Djairo Guedes de Figueiredo, procurou estruturar um curso de mestrado para os demais professores que, posteriormente, passariam a integrar o corpo docente do Departamento de Matemática daquela universidade que não possuíam formação de pós-graduação. Acerca desta etapa de sua carreira docente, o próprio Prof. Ávila faz uma interessante observação relacionada ao ensino de Cálculo:

Ah, vale mencionar que na experiência da Universidade de Brasília em 62, eu já orientei, pelo menos dei alguns cursos de Cálculo usando o ... o livro usado na época era um livro assim, que apresentava o Cálculo de uma maneira rigorosa.²⁸ (Ent. Ávila – nov/98)

Após dois anos, foi fazer seu pós-doutorado nos USA onde permaneceu como professor da Universidade de Wisconsin entre 1963 e 1965 e da Universidade Georgetown de Washington entre 1965 e 1973. Neste período ministrou, por várias vezes, disciplinas de Cálculo e de Análise para cursos de graduação e a disciplina de Análise Funcional na pós-graduação.

²⁸ O livro em questão era de autoria de Jonhson & Kiokemeister, a ser destacado no item 7.2.

Ao comentar sobre sua experiência como professor nos USA e, especificamente, sobre os livros didáticos de Cálculo adotados naquelas universidades, observa o quanto foi difícil ensinar com rigor o Cálculo aos alunos que ingressavam na universidade:

*... então eu aprendi mais sobre o ensino de Cálculo e Análise ... Mas, eu confesso que eu tive muitas frustrações, muitas decepções em tentar com esse ensino rigorizado pro aluno no primeiro ano de faculdade.
(Ent. Ávila – nov/98)*

Com a conclusão de que "sua experiência foi um aprendizado gradual", o Prof. Ávila observa que só veio a escrever seu primeiro livro em 1973, isto é, doze anos após ter concluído seu doutorado:

... neste período de doze anos, eu já tinha passado por uma experiência de ensino que me ensinou muita coisa, que me mostrou que muitas tentativas eram um fracasso, eu me frustrei muito com as tentativas de ensinar o cálculo rigorizado desde o início, aliás, eu como aluno, fui submetido a esta experiência de aprender a Análise Matemática desde o primeiro ano na USP em São Paulo. (Ent. Ávila – nov/98)

De fato, conforme já analisamos no capítulo anterior, os livros didáticos de Cálculo do Prof. Ávila demonstram uma preocupação em explorar mais os aspectos intuitivos e aplicacionais do Cálculo em detrimento de uma abordagem mais rigorosa, o que pode ser notado claramente na exposição inicial do conceito de derivada sem, anteriormente, apresentar o desenvolvimento sistematizado de uma teoria de limites.

Já em relação ao seu livro de Análise, comparando-o com outros livros didáticos de autores nacionais, o Prof. Ávila o considera mais semelhante com o livro do Prof. Djairo Guedes de Figueiredo "por causa da formação" de ambos. Entendemos que esta formação comum a que se refere o Prof. Ávila é o Doutorado em Análise no Courant Institute, tradicionalmente conhecido pela importância que dá às aplicações da matemática. Há de se

considerar, ainda, a vertente aplicada à Física explicitada e defendida por ambos os professores em suas entrevistas.

Concluindo, mesmo demonstrando uma postura humilde ao analisar a adequação de seu livro a cursos de Licenciatura em Matemática, o professor fala de um audacioso e importante projeto:

Eu confesso que tenho experimentado este livro nas disciplinas da licenciatura e não tenho tido muito sucesso. Nós estamos pensando em um outro projeto. Num livro chamado "Elementos de Análise" direcionado pro aluno da licenciatura... (Ent. Ávila – nov/98)

À época da entrevista, o Prof. Ávila estava ministrando aulas nos cursos de graduação e pós-graduação da Universidade Federal de Goiás, instituição da qual ainda é professor, após ter se aposentado na Universidade Estadual de Campinas.

6.3) O PROFESSOR DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO

Nosso terceiro depoente é graduado em Engenharia na antiga Universidade do Brasil (atual UFRJ) em 1956 e, por influência de seu Prof. Maurício Matos Peixoto, a quem qualifica como "uma pessoa que não se perdia em formalidades, que não se deixava enganar por estruturas", acabou por fazer Mestrado e Doutorado em Matemática na Universidade de New York – USA, na área de Análise, a partir de 1957. O Prof. Djairo afirma ter entrado para a matemática pela "porta da matemática aplicada" pois, devido à sua formação de engenheiro, sempre procurou dar significado às idéias matemáticas através das aplicações:

O curso de Engenharia me mostrou a possibilidade de usar a matemática em mecânica, isso foi uma coisa que marcou muito também ... então, eu tive uma tendência muito grande assim, para a matemática aplicada ... (Ent. Djairo – out/99)

O Prof. Djairo acredita ter feito a escolha correta ao ir para o Courant Institute devido às influências do próprio Courant (ainda vivo à época) sobre a atitude em relação à matemática desenvolvida no referido instituto, resumida pelo professor como sendo "matemática e aplicações". Uma das causas desta tendência, segundo o Prof. Djairo, era a ligação de Courant com Hilbert:

... e o Hilbert era uma pessoa que fazia matemática, matemática pura mas ele sempre, ele achava que a matemática aplicada era um farol, que você tendo os problemas da vida, do universo, aí você via problemas da matemática, você trazia para a matemática e desenvolvia. E esses problemas que você começava a desenvolver criavam uma nova matemática que eventualmente voltaria para as aplicações. Então, ele sempre falava que a matemática deveria ter uma ponte com tráfego nas duas direções entre o universo dos problemas reais e os problemas que ela trabalhava. (Ent. Djairo – out/99)

O Prof. Djairo admite que esta relação entre a matemática e suas aplicações "se reflete muito no que ele escreve" e cita como exemplo seu livro *Equações Diferenciais Aplicadas*, recentemente reeditado pelo Projeto Euclides – IMPA – RJ (1997), no qual foi introduzido um capítulo de utilização do *Mathematica* na resolução de algumas equações que "modernizou o livro"²⁹.

Já seu livro de Análise é fruto de sua experiência ao longo de vários anos como professor de graduação e pós-graduação do IMPA – RJ, da UfB e da UNICAMP, onde trabalha atualmente. Um dos seus princípios / eixos é resumido pelo Prof. Djairo, da seguinte forma:

²⁹ Esta foi uma experiência destacada pelo professor, em sua entrevista, como um importante exemplo de utilização do computador no ensino. A discussão deste destaque será feita no Capítulo 8, quando analisaremos as propostas de mudanças no ensino de Cálculo sugeridas pelos depoentes.

... você não pode também ficar muito preocupado no começo em dar ... em ter muito cuidado com a topologia, outras coisas. Você dá ... como eu faço aí a apresentação de números reais, uma apresentação rigorosa mas sem construção e, novamente, chegar em coisas relevantes ... você não pode ficar muito amarrado nos preâmbulos ... se você fica muito nos fundamentos, você não fez modificar a matemática. (Ent. Djairo – out/99)

Ainda a respeito de seu livro de Análise, o Prof. Djairo afirma estar muito satisfeito por ter procurado "chegar na Análise sem uma descontinuidade muito grande com Cálculo" e o compara com os livros didáticos do Prof. Elon Lages Lima e do Prof. Geraldo Ávila, com quem concorda em sua análise comparativa, conforme pudemos observar no item anterior:

Ele se aproxima mais do Prof. Ávila do que propriamente do prof. Elon. Eu acho o livro do prof. Elon para alunos mais motivados, alunos de melhor nível, talvez seja melhor. Mas, para a média dos nossos alunos, eu tô satisfeito com este meu texto. (Ent. Djairo – out/99)

Finalizando, destacamos ainda que a experiência docente do Prof. Djairo com Cálculo se deu a partir de 1965 nos USA, em algumas das universidades onde o professor atuou, inclusive como pesquisador (Universidade de Illinois, Universidade de Wisconsin, Universidade de Chicago e Universidade de Maryland), até 1971, quando o professor retornou ao Brasil. Desta experiência o professor guarda as lembranças de um sistema "completamente diferente do nosso", apesar da semelhança a nível de programas de disciplinas.

À época da entrevista, o Prof. Djairo estava ministrando aulas nos cursos de graduação e pós-graduação da Universidade Estadual de Campinas, instituição da qual ainda é professor e orientador de dissertações e teses na pós-graduação em Matemática, nas áreas de Análise e Equações Diferenciais.

6.4) O PROFESSOR ELON LAGES LIMA

Nosso quarto e último depoente é Bacharel em Matemática pela antiga Universidade do Brasil (atual UFRJ) em 1954 e fez seu mestrado e doutorado na área de Análise na Universidade de Chicago – USA. Quando saiu do Brasil para cursar a pós-graduação, já estava envolvido com o IMPA – RJ, instituição para a qual retornou, cinco anos depois, como professor, “fazendo lá toda a sua carreira”, tendo inclusive sido seu Diretor no período de 1989 a 1993. Á época da entrevista, o Prof. Elon ainda era professor do IMPA – RJ.

Por um breve período de um ano e meio, foi professor da UnB, onde ministrou aulas de Cálculo, o que também ocorreu durante um semestre na Universidade de Rochester – USA. Ao ser indagado sobre o programa desenvolvido nestes cursos de Cálculo, o Prof. Elon destaca um mesmo aspecto também considerado por alguns de nossos depoentes anteriores:

... eu tinha a noção de que um curso de Cálculo para alunos que entram no primeiro ano tem sempre isso mais voltado para aspectos, digamos assim, práticos, com algumas aplicações. Na época, não existiam muitos meios de fazer o aluno usar métodos computacionais. Nem sequer calculadoras gráficas existiam naquela época. (Ent. Elon – nov/99)

Mesmo com a inversão de tal situação, devido à possibilidade de utilização de métodos computacionais no ensino atual, o Prof. Elon observa que, ainda assim:

... eu tinha perfeitamente a noção de que o curso de Cálculo para o aluno inicial, como eu ainda acho hoje, deve enfatizar não os aspectos teóricos exageradamente, mas deve ter uma visão um pouco mais pragmática porque afinal de contas o Cálculo, ele é fantástico pelas aplicações, pelos exemplos maravilhosos para explicar as coisas da natureza e certas situações científicas mais gerais. (Ent. Elon – nov/99)

Apesar desta visão e de sua vasta experiência como autor, o Prof. Elon nunca escreveu um livro didático de Cálculo destinado a cursos de graduação.

Já sua longa experiência didática com Análise foi amplamente transferida / contemplada na autoria de diversos livros didáticos, como, por exemplo, seu *Curso de Análise* – Volumes 1 e 2 (considerado, no meio acadêmico matemático, um verdadeiro *Tratado de Análise* em $\mathbb{R}$ e no $\mathbb{R}^n$) e o mais recente *Análise Real* – Volume 1 (já analisado no capítulo anterior), sendo que está escrevendo o Volume 2.

A elaboração deste segundo aconteceu devido à necessidade do Prof. Elon em ministrar um curso de Análise para alunos de Mestrado em Economia da Fundação Getúlio Vargas – RJ, onde o professor ministrava aulas havia sete anos. Este mestrado é considerado "muito matematizado" pelo Prof. Elon, que assim descreve o perfil dos seus colegas professores integrantes do corpo docente do programa:

Vários desses professores de lá já foram alunos aqui do IMPA e são pessoas que têm uma formação matemática muito boa. E então, eu tinha que dar pros economistas uma coisa bem concisa e bem objetiva. Análise, porém sem perder muito tempo. Então, a experiência me guiou para fazer este livro. Foram as duas coisas. (Ent. Elon – nov/99)

Concluindo, o Prof. Elon afirma que tanto o livro do Prof. Geraldo Ávila como o livro do Prof. Djairo Guedes de Figueiredo são muito bons, preferindo não tecer uma comparação com o seu e descrevendo suas motivações básicas para escrever um livro:

Eu acho que o livro é a pessoa. O livro é o reflexo da pessoa que escreve. Então, a pessoa escreve um livro, principalmente quando escreve um livro elementar, tem duas motivações básicas para você escrever um livro. Se é um livro elementar é porque você acha que a maneira de ver o assunto é uma maneira que vale a pena que outras pessoas vejam também daquela maneira e você quer divulgar a sua maneira de ver. Quando é um livro avançado então, a pessoa escreve para aprender o assunto. Quer dizer, aprender no seguinte sentido: você tem uma noção

bastante boa da coisa do ponto de vista de pesquisa e do pensamento original, é um livro avançado. (Ent. Elon – nov/99)

Passaremos, a seguir, à análise das entrevistas, com vistas à construção de categorias emergentes.

CAPÍTULO 7

OS SABERES PROFISSIONAIS DO PROFESSOR DE CÁLCULO E DE ANÁLISE NAS VOZES DOS DEPOENTES

“Na medida em que as leis da matemática se referem à realidade, não são certas, e na medida em que são certas, não se referem à realidade.

Einsten

Neste capítulo, procuraremos identificar as diversas categorias de conhecimento descritas por SCHULMAN (1996): conhecimento específico, conhecimento pedagógico e conhecimento curricular. Lembramos que tais categorias foram abordadas de forma mais detalhada no Capítulo 4.

FIORENTINI; SOUZA JÚNIOR & MELO (1998), entretanto, afirmam que, apesar dos textos em educação normalmente utilizarem os termos “conhecimento” e “saber” indistintamente, pode-se fazer a seguinte distinção entre os mesmos:

“Conhecimento” aproximar-se-ia mais com a produção científica sistematizada e acumulada historicamente com regras mais rigorosas de validação tradicionalmente aceitas pela academia; o “saber”, por outro lado, representaria um modo de conhecer / saber mais dinâmico, menos sistematizado ou rigoroso e mais articulado a outras formas de saber e fazer relativos à prática, não possuindo normas rígidas formais de validação. (p. 312)

Portanto, como as questões aqui discutidas são relativas á prática pedagógica do Cálculo e da Análise, decidimos pela categorização dos saberes da profissão docente.

7.1) SABERES DO CÁLCULO E DA ANÁLISE ENQUANTO CAMPOS DE CONHECIMENTO HISTORICAMENTE CONSTITUÍDOS

Dentre as três categorias de conhecimentos básicos que um professor deve possuir, segundo SHULMAN (1986), um deles diz respeito ao conhecimento da matéria que deve ensinar. A primeira questão que nos surge é: *o que significa saber bem uma matéria, tendo em vista a tarefa de ensiná-la?*

Para SHULMAN (1986), o domínio adequado de uma área de conhecimento – por exemplo, a Matemática – tendo em vista o ofício de ensiná-la, requer um domínio diferente daquele requerido para ser, por exemplo, um matemático. FIORENTINI; SOUZA JÚNIOR & MELO (1998), ao interpretar o pensamento de SHULMAN, sintetizam dizendo que o conhecimento da matéria de ensino, necessário para ensiná-la, deve ser amplo, flexível e diversificado, envolvendo aspectos históricos, culturais, epistemológicos e conceituais, isto é, não ser:

apenas sintático (regras e processos relativos à manipulação e aplicação do conteúdo), mas sobretudo substantivo e epistemológico (relativo à natureza e aos significados dos conhecimentos, ao desenvolvimento histórico das idéias, ao que é fundamental e ao que é secundário, aos diferentes modos de organizar e explorar os conceitos e princípios básicos da disciplina, e às concepções e crenças que os sustentam e legitimam). Este domínio profundo do conhecimento é fundamental para que o professor tenha autonomia intelectual para produzir o seu próprio currículo se constituindo efetivamente como mediador entre o conhecimento historicamente produzido e aquele - o escolar reelaborado e relevante sócio-culturalmente - a ser apropriado/construído pelos alunos. (p. 316)

Há que se ter cuidado, entretanto, para não se reduzir o saber do professor apenas a essa dimensão. Segundo GAUTHIER et al (1998), isso significaria “negar-se a refletir de forma mais profunda sobre a natureza desse ofício e dos outros saberes que lhe

são necessários”. Numa palavra, o saber do “magister” não se resume apenas ao conhecimento da matéria.

Embora o saber da matéria de ensino esteja relacionado a outros saberes do ofício docente, neste tópico analisaremos somente aqueles saberes conceituais, históricos, culturais e epistemológicos relativos ao Cálculo e à Análise. Na análise que segue, tentaremos, portanto, investigar este tipo de saber manifestado ou subjacente nas falas dos professores-pesquisadores.

Uma primeiro tipo de saber do Cálculo e da Análise são os saberes históricos que os entrevistados evidenciam acerca do desenvolvimento do Cálculo e da Análise. Tais saberes não só se referem a acontecimentos que os entrevistados julgam fundamentais numa retrospectiva histórica mas, principalmente, pelas relações que estabelecem com o ensino e o currículo dessas matérias.

O Prof. Baldino, por exemplo, aconselha a tomarmos a história como uma "advertência" para o ensino no sentido de que podemos evitar muitos problemas relacionados ao ensino de determinados conteúdo se, de antemão, conhecermos a evolução histórica daquele assunto:

Se você vai fazer uma coisa no ensino, olha pra história e vê se você não tá invertendo as coisas. Se você tá invertendo as coisas, trata de pensar muito bem porque pode não dar certo. Tome a história como um ponto de advertência. Olha para a história como um referencial de alerta ...
(Ent. Baldino – ago/98)

A questão da "inversão pedagógica da história" já levantada no Capítulo 3, aqui ganha impulso novamente, pois, assim como GRATTAN-GUINESS (1997), o Prof. Baldino considera preponderante o papel dos limites na Teoria de Weierstrass, à qual ele se refere como uma "fatalidade histórica". Entretanto, resignado, ele destaca o fato de que os infinitésimos ainda tinham seu espaço com Cauchy, até sua grande façanha ser alcançada:

Não teria sido possível não passar pela Teoria de Weierstrass. O Cauchy, se você olhar a história, você vê que o Cauchy tanto trabalha com

infinitésimos quanto trabalha com limites. O mérito de Cauchy foi ter transformado o limite no conceito central. (Ent. Baldino – ago/98)

Obviamente, é bastante discutível a idéia de que a Teoria de Weierstrass pode ser considerada uma fatalidade na história do Cálculo e da análise, uma vez que são inegáveis as enormes contribuições de seus seguidores para toda a matemática até os dias atuais. Além disso, apesar de todo o crescimento da Análise não-Standard, ainda se verifica no ensino, um predomínio da Teoria Weierstrassiana, evidenciada principalmente pela hegemonia da linguagem ϵ -lônica dos livros didáticos. Entretanto, é por isso que não nos esquivaremos de nos posicionar criticamente frente ao impacto desta "ortodoxia ϵ -lônica" no ensino, à luz da relação entre os aspectos rigorosos e intuitivos desta abordagem. Faremos isso no próximo capítulo.

Ainda em relação às idéias de Weierstrass, o Prof. Baldino argumenta que tanto os infinitésimos quanto a noção de limite já haviam sido explorados pelos gregos e considera Arquimedes um Weierstrassiano. Por fim, ao se reportar a este processo de precisão / rigorização, o Prof. Baldino faz uma afirmação contundente:

... isso desembocou no século XX com a noção precisa de número real, que não foi dada por Dedekind, o Dedekind dizia que ele tava descrevendo o número real... quem disse que o número real é ontologicamente um par de duas retas, foi o Bertrand Russel em 24, bem depois. Quer dizer, a partir dessas precisões é que houve um deslanchar no século XX, da Teoria de Weierstrass ... (Ent. Baldino – ago/98)

Independentemente de quem realmente mereça os méritos pela noção precisa de número real, esta polêmica nos mostra, antes de mais nada, que a própria noção de "precisão" é passível de interpretações altamente subjetivas, mesmo dentro de uma comunidade formada por matemáticos, cujos saberes históricos são diferenciados porque também o são suas concepções de matemática e do desenvolvimento dos conceitos e teorias.

Isto talvez explique porque muitos historiadores, por exemplo, ao relatarem um mesmo acontecimento ou desenvolvimento histórico dêem créditos diferenciados a um ou outro sujeito como o principal responsável pelo estabelecimento de um conceito central dentro de uma teoria. Ou seja, tudo está ligado à forma como cada historiador enxerga a relevância da contribuição de cada sujeito para que se pudesse chegar a uma "definição precisa" ou a um resultado "rigorosamente comprovado". Aqui, indubitavelmente, entra a subjetividade das noções de precisão e rigor, na medida em que tais noções não possuem um único sentido / significado.

A Aritmetização da Análise é vista pelo Prof. Baldino como uma questão de "hegemonia" na medida que o pensamento geométrico que perdurou até o século XIX perdeu status com a tentativa da Análise algebrizar a Geometria Euclidiana. Como a Aritmética e a Análise estão relacionadas ao conceito de número, o Prof. Baldino considera: *muito mais natural você fazer esse Cálculo, muito mais rigoroso e exato ... pelo controle da cadeia significativa do que fazer através de geometria com desenhos...* (Ent. Baldino – ago/98)

Esta relação do desenvolvimento da Análise com a substituição ao pensamento geométrico, até então hegemônico, é também destacado pelo Prof. Ávila, que relaciona a "fragilidade" da fundamentação da matemática na geometria à questão da busca pelo rigor imperativa à época:

Pensava-se que a geometria era um modelo de rigor. Agora, viram que a coisa era frágil. E quando Hilbert tenta rigorizar a geometria, faz a rigorização da geometria, surgem os problemas de consistência, completeza de postulados e dependência ... Ele leva o modelo geométrico para ... transfere para a Aritmética. A responsabilidade da fundamentação da geometria fica com a Aritmética. Se nós fizermos uma boa fundamentação dos números, nós teremos da geometria. (Ent. Baldino – nov/98)

Segundo o Prof. Ávila, podemos apontar Cauchy, Weierstrass, Riemann e, destacadamente, Hilbert como os grandes responsáveis por esta transferência do problema da fundamentação da Análise Matemática para a Aritmética, uma vez que suas obras permitiram que conceitos como a integral, por exemplo, pudessem ser definidos em termos puramente aritméticos. Entretanto, extremamente interessante é a principal consequência desta aritmetização destacada pelo professor:

Então, nós trocamos o papel das coisas, isso que é o significado da Aritmetização da Análise. Hoje, a matemática é toda aritmetizada, a própria geometria assenta-se sobre os números, é uma coisa muito interessante. E nós não sabemos se vai ser sempre assim, porque nós estamos ainda vendo a evolução das coisas. (Ent. Ávila – nov/98)

De fato, não podemos prever se este modelo aritmetizado da matemática continuará sendo considerado o ideal do ponto de vista lógico ou, talvez, o mais consistente de se desenvolver / fazer matemática, mas parece-nos inegável que um de seus principais legados ao ensino é seu modelo de rigor que, se ainda não podemos considerar "frágil", ao menos, podemos questionar na medida em que houve um notável desenvolvimento de novos resultados e teorias em diversas áreas da matemática mas, também, uma notável estagnação nos princípios axiológico-teleológicos do ensino de muitas áreas, notadamente Cálculo e Análise.

Portanto, queremos acreditar, como o Prof. Ávila, que "as coisas ainda estão em evolução" e assim, podem surgir outros modelos pautados por outros princípios e ideais. Esperamos que o desenvolvimento de novas idéias no campo científico seja acompanhado pelo desenvolvimento de novas idéias do campo pedagógico, uma vez que a questão da transposição didática da matemática está inequivocadamente relacionada aos patamares de rigor possíveis e / ou adequados, não só como mostra a história da Análise mas, também, como mostra seu ensino atual.

Ao longo de toda a entrevista, o Prof. Ávila destaca o desenvolvimento continuado das tentativas de se rigorizar o Cálculo, mesmo com algumas objeções até mesmo de filósofos como Berkeley, que afirmavam não existir fundamentação rigorosa do Cálculo:

Nem por isso deixavam de levar a coisa adiante, como o Euler, o próprio D'Alembert, que conclamava aos companheiros: "Não, tenham fé e vamos em frente. Nós não podemos ficar parados esperando". Veja o que aconteceu com os gregos. Os gregos toparam com problemas difíceis, tiveram uma crise, ficaram apavorados. Não fizeram mais nada. Só vão fazer geometria, não mexe mais com números. Eles paralisaram, quer dizer, o escrúpulo exagerado com o rigor levou ao estancamento da matemática na Grécia antiga. (Ent. Ávila – nov/98)

Esta visão, apesar de contestável ou, pelo menos, não consensual no campo da história da matemática, vem ao encontro de uma afirmação feita pelo Prof. Djairo, ao destacar que, apesar de Newton e Leibniz serem reconhecidos como "criadores do Cálculo" devido ao Teorema Fundamental do Cálculo, "Arquimedes quase chegou ao Cálculo". Apesar de não relacionar o método arquimedianos de uma certa forma com a precisão weierstrassiana, como o fez o Prof. Baldino, o Prof. Djairo acredita que a preocupação com o rigor demonstrada por Weierstrass e outros matemáticos de "primeira linha" contribuiu para o surgimento de problemas relevantes como o problema de Dirichlet para a equação de Laplace, que se tornou interessante por suas muitas aplicações físicas:

E eu acho que essas preocupações com esses problemas e o pessoal vendo que o chão estava muito instável, eu acho que ocasionou ... Weierstrass foi uma das pessoas que se preocupou muito com a fundamentação rigorosa da Análise. (Ent. Djairo – out/99)

Ainda segundo o Prof. Ávila, o processo de rigorização iniciado no século XIX continua no século XX, com destaque para Hilbert e Tonelli, dentre outros:

Então, voltando à questão do rigor, eu acho que esta década de 70, ela é proporcionada por certos problemas que estavam sendo trabalhados e a constatação de que havia imprecisões, de que certas coisas não estavam sendo corretas. Então, tinha que formalizar um pouco mais. Eu acho que

isso deu toda essa rigorização que começa em 1870, ela continua nesse século ... com o Cálculo das Variações ... (Ent. Ávila – out/99)

Uma interessante observação é que, paradoxalmente, o mesmo rigor tão importante na "estabilização do terreno" em que se encontram muitos problemas com aplicações físicas pode ser o responsável, por um lado (a nível científico), pela aproximação da matemática com outras áreas do conhecimento humano e, por outro lado (a nível pedagógico), pelo distanciamento da mesma matemática do mundo real, destacadamente no caso da transposição / transformação deste rigor numa tendência didática essencialmente formalista, que se encontra detalhadamente estudada por FIORENTINI (1995).

Concluindo esta manifestação de saberes históricos de nossos depoentes, destacamos a afirmação do Prof. Elon de que na história do desenvolvimento do Cálculo e da Análise, não se pode apontar "marcos históricos" inteiramente definidos por nomes e datas, uma vez que:

*... as coisas evoluem, cada um dá a sua contribuição, às vezes esta contribuição consiste em uma sistematização como Euclides, muitas vezes Euler fez isso também. Mas cada um acrescenta um pouco.
(Ent. Elon – nov/99)*

Isto nos leva a refletir sobre quais as consequências deste "acrécimo" que vem com as pequenas ou grandes contribuições ao longo da história do desenvolvimento dos conceitos e resultados centrais de uma determinada teoria. Um exemplo interessante, descrito por GRABINER (1983), é o conceito de derivada, “utilizado” implicitamente por Fermat, “descoberto” por Newton e Leibniz, “desenvolvido” por Taylor, Euler e McLaurin, “nomeado e caracterizado” por Lagrange e “definido” por Cauchy e Weierstrass, após mais de duzentos anos do acréscimo de Fermat (p. 204).

Já um exemplo de algumas consequências de acréscimos nos é fornecido por BOYER (1994) que, ao analisar a modificação da noção de integral desde os tempos da Grécia antiga, tece o seguinte comentário:

Se Eudoxo ressurgisse no século XX, certamente teria dificuldade em reconhecer esses ascendentes do Método de Exaustão; mas ele se sentiria completamente à vontade com respeito pelo menos a um aspecto da matemática de hoje. O empenho pela precisão de pensamento do qual surgiu o antigo Cálculo Integral encontra hoje um correspondente na insistência comparável quanto ao rigor em Análise. (p. 28)

Um segundo tipo de saber do Cálculo e da Análise são os saberes epistemológicos relativos à natureza do pensamento diferencial e analítico. Recuperando o Capítulo 1, onde questionávamos a possibilidade de existência de um ponto de equilíbrio entre o pensamento diferencial intuitivamente construído e o pensamento analítico rigorosamente construído, reconhecemos que, por uma pré-concepção equivocada de nossa parte, tentávamos, de qualquer modo, associar a intuição ao pensamento diferencial e o rigor ao pensamento analítico. Como todos os depoentes demonstraram, esta associação não pode ser feita de forma dicotômica ou reducionista.

O Prof. Baldino admite que ainda não possui uma caracterização completa do pensamento diferencial tal como existe atualmente sobre o pensamento algébrico, o qual é considerado, pelo MTCS, como um pensamento aritmético, analítico e internalista. Apesar disso, o professor consegue fazer algumas distinções. Por exemplo, considera que o pensamento diferencial vai além do pensamento algébrico por introduzir a questão da decomposição das grandezas. O Prof. Baldino acredita que a gênese do pensamento diferencial é mais fácil de ser acompanhada a partir do século XIX, uma vez que a história do desenvolvimento deste pensamento aponta para várias perspectivas e direções:

O pensamento diferencial, no fundo, é isso, é algo que não se reduz a pensamentos anteriores. Será que o Cavalieri teria tido um pensamento diferencial ? Eu acho que poderia ser um precursor, mas eu acho que ainda não era bem, a idéia dele era decomposição, mas não era uma decomposição infinitesimal. Ele decompunha em indivisíveis. E quantos haviam ? Uma quantidade ilimitada de indivisíveis. Quer dizer, o Cavalieri trabalhava com um conceito de infinito que era o conceito dos

gregos, bem diferente do conceito de Leibniz que fazia uma decomposição infinitesimal de um intervalo finito. (Ent. Baldino – ago/98)

Já o pensamento analítico, segundo o Prof. Baldino, pode ser resumido como: “se supor uma coisa, tomar aquilo como hipótese e fazer a análise daquilo”. Portanto, ele é muito anterior ao próprio movimento de Aritmetização da Análise, que pode ser visto como um desenvolvimento do pensamento analítico:

... quando o Bolzano vai lá examinar porque o Teorema do Valor Intermediário vale, ele quer se livrar da geometria, das intuições geométricas, quer fazer tudo em termos simbólicos, em termos rigorosos, aquilo ali ele tá fazendo uma análise. E é bem anterior à Aritmetização da Análise ... Mesmo Euler, eu acho que o Euler coloca, o pensamento analítico já tá ali. O Arquimedes, eu acho que o Arquimedes é um precursor do pensamento analítico, ele tem mais prazer em demonstrar que aquele teorema dele, que o método funciona, do que chegar ao resultado. (Ent. Baldino – ago/98)

De fato, apesar do rigor ter sido um elemento importante no desenvolvimento do pensamento analítico, também o Prof. Ávila não considera correta a identificação do pensamento rigoroso com o pensamento analítico, com o que, agora, concordamos integralmente. Entretanto, segundo o professor:

O pensamento analítico é algo que se contrapõe a um pensamento mais geométrico, digamos assim, ... ou tudo bem, você quer ver na expressão pensamento analítico uma coisa assim, mais rigorizada. Então, uma pergunta que você faz é: “Desde quando ?” Esta preocupação com a rigorização da matemática está presente desde a Grécia antiga. E o surgimento do Cálculo começa com Arquimedes, com o Cálculo Integral nas idéias de Arquimedes. (Ent. Ávila – nov/98)

Comparando as idéias dos professores Baldino e Ávila, notemos a coincidência em caracterizar o pensamento analítico como um pensamento que se contrapõe, de certa forma, ao pensamento geométrico, ainda que isto não signifique uma contraposição do pensamento rigoroso ao pensamento intuitivo, uma vez que o próprio Arquimedes, apontado como um precursor do pensamento analítico por Baldino e do pensamento diferencial por Ávila, utilizava-se da intuição para fazer suas descobertas e demonstrava um rigor refinado nas demonstrações contidas em seus livros.

Os professores Djairo e Elon, apesar de inqueridos, não chegaram a se pronunciar quanto a uma caracterização, até mesmo histórica, dos pensamentos diferencial e analítico, se limitando a identificar diversos elementos de comparação entre o Cálculo e a Análise do ponto de vista didático-pedagógico.

Como podemos verificar, pela própria dificuldade de discutir e caracterizar os pensamentos diferencial e analítico demonstrada por nossos depoentes, a tentativa de análise e a dificuldade de realizá-la, por nossa parte, mostram que o domínio conceitual destas duas formas de pensamento é ainda pouco conhecido / explorado na produção da Educação Matemática.

Acreditamos que os aspectos aqui destacados pelos nossos depoentes convergem para a constatação de que na interseção / relação histórica entre Cálculo e Análise se encontra, necessariamente, a questão do rigor, na medida em que o próprio fenômeno da Aritmetização da Análise é retratado / identificado como um processo de rigorização do Cálculo. Entretanto, é necessário analisar com maior profundidade a relação entre Cálculo e Análise no terreno pedagógico. Para tal, procuraremos explorar uma outra categoria de saberes manifestados pelos nossos entrevistados.

7.2) SABERES CURRICULARES RELATIVOS AO ENSINO DE CÁLCULO E ANÁLISE

SHULMAN (1986), TADIF; LESSARD & LAHAYE (1991) e FIORENTINI; SOUZA JÚNIOR & MELO (1998), ao discutirem os saberes fundamentais à profissão

docente, destacam, além dos saberes relativos ao conteúdo do ensino e à prática pedagógica, os saberes curriculares.

Primeiramente, há que se distinguir o saber cientificamente constituído, aquele produzido pelos pesquisadores e cientistas, e o saber escolar ou curricular que é objeto de ensino / aprendizagem. Segundo GAUTHIER et al (1998), o conhecimento curricular se refere ao conhecimento dos programas de ensino, daquilo que a escola considera fundamental ser ensinado. Não é o conhecimento científico propriamente dito.

Os educadores franceses denominaram a passagem ou transformação do saber científico em saber curricular de *transposição didática*: *A transposição didática designa o processo pelo qual um elemento do saber instituído se transforma depois num conhecimento a ensinar, num objeto de ensino.* (CHEVALLARD, 1985, apud ARTIGUE E DOUADY, 1993, p. 48)

Assim, os saberes curriculares, segundo TARDIF; LESSARD & LAHAYE (1991), *correspondem aos discursos, objetivos, conteúdos e métodos, a partir dos quais, a instituição escolar categoriza e apresenta os saberes sociais que ela definiu e selecionou como modelo da cultura erudita e de formação na cultura erudita* (p. 220).

Para SHULMAN (1986), o conhecimento curricular não engloba apenas os programas, mas também a variedade de materiais instrucionais disponíveis para tais programas. Este conhecimento, segundo este autor (Apud FIORENTINI; SOUZA JÚNIOR & MELO, 1998, p. 317), *diz respeito ao currículo específico e conexo à(s) disciplina(s) que ensina e compreende a organização e estruturação dos conhecimentos escolares e aos respectivos materiais (livros-texto, propostas curriculares, e todo o tipo de material instrucional, como jogos pedagógicos, materiais para manipulação, vídeos, softwares, CD-ROMs, etc).*

Para GIMENO SACRISTÁN (1998), entretanto, o currículo é visto como uma *construção social*, ou melhor, como uma prática determinada socialmente e articulada às iniciativas dos diferentes atores (aqueles que propõem ações e aqueles que as realizam na prática):

O currículo é uma prática, expressão da função socializadora e cultural que determinada instituição tem, que reagrupa em torno dele uma série

de subsistemas ou práticas diversas, entre as quais se encontra a prática pedagógica desenvolvida em instituições escolares que comumente chamamos ensino. É uma prática que se expressa em comportamentos práticos diversos (p.16) ... É uma prática sustentada pela reflexão enquanto práxis, mais do que ser entendida como um plano que é preciso cumprir, pois se constrói através de uma interação entre o refletir e o atuar...(p. 48)

Um aspecto importante do saber curricular relativo ao ensino de Cálculo e Análise, e que tem sido bastante controverso, é a relação que se estabelece entre o programa das duas disciplinas. Que relações são comumente estabelecidas entre um curso de Cálculo, integrante do ciclo básico de diversos cursos de graduação e um curso de Análise, integrante do currículo de cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática ? O que seria específico de um currículo de Cálculo ? O que seria específico de um currículo de Análise ? No que eles se assemelham e no que eles diferem ?

Em nossa revisão bibliográfica, já havíamos destacado a crítica feita por BALDINO (1995) em relação à enorme confusão existente entre os cursos de Cálculo e de Análise. Essa confusão é evidenciada, na maioria das vezes, nos cursos de Cálculo, principalmente, quando estes são ministrados sob uma abordagem formalista que valoriza o rigor lógico de apresentação e justificação / prova dos conceitos e se estrutura em definições, propriedades, teoremas e suas demonstrações, para só então explorar alguns resultados e aplicações.

Essa visão curricular do Cálculo, segundo o Prof. Baldino, está estreitamente relacionada à concepção formalista dos matemáticos que supervalorizam a linguagem simbólica e algébrica, isto é, a dimensão sintático-procedimental, por considerá-la a única capaz de garantir a validade lógica das proposições:

O matemático, ele tende a achar que os símbolos, a linguagem simbólica, ela dá conta de tudo e que ... ele pode pensar em termos geométricos, em termos intuitivos, mas na hora da apresentação ele quer apresentar a coisa de maneira rigorosa em termos de uma cadeia de significantes que

se prendem um ao outro sem quebra. Ele quer apresentar demonstrações.
(Ent. Baldino – ago/98)

No fundo, parece-nos que o Prof. Baldino quer dizer que existem duas categorias de professor de Cálculo: o matemático e o educador matemático. Ainda assim, devemos ressaltar que mesmo Mestres e Doutores em Matemática podem demonstrar uma prática pedagógica radicalmente diferente da explicitada pelo Prof. Baldino, como, por exemplo, ele próprio, um Doutor em Matemática que tem contribuído imensamente para um redirecionamento do ensino de Cálculo a partir de uma argumentação baseada em sua ampla experiência enquanto professor reflexivo.

Por um outro lado, entendemos que uma das causas da “confusão” entre Cálculo e Análise são os problemas com a utilização e apropriação da linguagem simbólica, o que foi confirmado por GRATTAN-GUINESS (1997), que não só defende uma uniformização historicamente consistente da linguagem simbólica por parte dos professores de Cálculo como também resalta a necessidade de que os mesmos tenham consciência da existência de níveis de rigor para, a partir daí, traçarem seus objetivos e elaborarem suas metodologias de ensino.

Uma interessante experiência relacionada ao nível de rigor empregado no ensino de Cálculo foi vivenciada pelo Prof. Ávila enquanto estudante da USP, onde por influência da matemática italiana, eram ministrados cursos de Análise Matemática desde o primeiro ano. Acerca desta experiência discente, o professor manifesta claramente sua posição, tendo-a ressignificado, obviamente, pela sua experiência docente:

Então, nós passamos por esta experiência de querer aprender Análise desde o primeiro ano. E ... a gente aprendeu, mas foi muito penoso. Então, depois de toda esta minha experiência com ensino, eu acordei para esta realidade de que o ensino rigorizado desde o início não é a melhor coisa. (Ent. Ávila – nov/98)

Também impulsionados pela nossa própria experiência com o ensino de Cálculo, não só discente mas, principalmente, docente, temos que concordar com o Prof. Ávila

quando defende um Cálculo Diferencial e Integral que não seja, na prática, Análise Matemática. Mas, antes disso, é preciso ter clara a diferença, é preciso discutir coletivamente, com todos os professores de Cálculo e de Análise sobre o papel e o currículo de cada uma destas disciplinas, pois, afinal de contas, o currículo é uma construção social e uma prática reflexiva.

Julgamos, ainda, ser necessário questionar: quantos professores de Cálculo ainda “não acordaram para esta realidade” ? E mais: o que será preciso para que isto aconteça ? Anos e anos de fracasso similar à experiência da USP, onde, segundo o Prof. Ávila, as turmas do curso de Matemática iniciavam o ano com 30 alunos e concluía-m-no com 7 ou 8 alunos ?

Apesar da preocupação com o ensino rigorizado do Cálculo, ao longo de toda a entrevista, o Prof. Ávila procura definir as possíveis relações entre os cursos Cálculo e Análise. Segundo o professor, o curso de Análise é uma rigorização do Cálculo, isto é, em Análise se demonstra, com base nas propriedades dos números reais, os fatos que nem sempre podem ser demonstrados no Cálculo.

Como o Prof. Ávila se manifestou, por um lado, claramente contrário a um ensino de Cálculo rigorizado e por outro lado, claramente favorável a um ensino de Análise onde haja um tratamento rigoroso dos conceitos e idéias do Cálculo, sentimos a necessidade de questioná-lo a respeito do papel central do rigor na diferença / separação entre Cálculo e Análise, ao que o professor respondeu:

Olha, isso é uma questão mais didática, não é, porque é mais de organização didática do ensino. Porque Cálculo é Análise, Cálculo é Análise Matemática. (Ent. Ávila – nov/98)

Esta visão de que a diferença entre Cálculo e Análise é meramente didática é também compartilhada pelo Prof. Elon que caracteriza o ensino de Cálculo como um ensino com ênfase nas aplicações e manipulações e o ensino de Análise como um ensino com ênfase no raciocínio e no método dedutivo. Ainda, acerca desta diferença, o professor faz uma interessante comparação baseando-se na história da matemática e de seu ensino:

É a diferença entre o livro do Heron e o livro do Euclides. O Heron era um cara aplicado, os livros dele eram voltados para as aplicações da matemática, enquanto que o livro do Euclides tinha por objetivo sistematizar, embora ambos fossem didáticos, sistematizar o conhecimento matemático de forma a mais rigorosa possível dentro dos padrões da época. Então, essa diferença de Cálculo e Análise é uma diferença meramente didática que eu acho, eu insisto que é um ponto de vista generalizado, que o Cálculo deve preceder a Análise por motivos de evolução da maturidade intelectual. (Ent. Elon – nov/99)

No fundo, tal posicionamento do Prof. Elon está baseado em sua concepção de ensino baseada em conceituações, manipulações e aplicações, a qual será melhor detalhada no item 7.3, onde explicitaremos os princípios em que se baseia o professor para o estabelecimento destas três componentes.

Ainda acerca da questão do nível de rigor associado a uma determinada época, oriunda da fala do Prof. Elon, um exemplo interessante nos é fornecido por GRATTAN-GUINNESS (1997), ao afirmar que: *o axioma da escolha constituiu um aprofundamento do nível de rigor Weirstrassiano, assim como os Weirstrassianos aprofundaram o rigor do período de Cauchy. (p. 81)*

Por fim, ao comentar a diferenciação entre Cálculo e Análise, o Prof. Djairo é o único depoente que explicitou a possibilidade de um ensino de Análise que não seja marcadamente rigoroso, de modo que todas as proposições sejam necessariamente demonstradas:

No Cálculo, você pode apresentar algumas coisas e não demonstrar, e dizer que não tá demonstrado. Como em Análise, se você tem algum resultado mais fino que você não quer demonstrar, você diz: “Olha, tá aqui um teorema. Eu não vou demonstrar este teorema”. Eu acho que esta atitude tem que ser tomada em todos os cursos de Matemática. A pior mensagem que você transmite é acochambrar demonstrações. (Ent. Djairo – out/99)

Cabe destacar que, aqui, não estamos sendo reducionistas, ao ponto de identificar um ensino rigoroso como um ensino unicamente caracterizado pela primazia das demonstrações, mas certamente esta é uma característica sintomática de um ensino rigorizado, especialmente no Cálculo.

Um exemplo relevante destacado pelo Prof. Djairo é o Teorema Fundamental do Cálculo. O professor acredita que ele pode perfeitamente ser enunciado no curso de Cálculo, mesmo que não seja demonstrado, pois o importante é que os alunos compreendam “o que ele quer dizer”. A justificativa para esta atitude está relacionada a uma outra categoria de saberes explicitados por nossos depoentes, que será destacada no item a seguir.

Segundo SCHULMAN (1986), conhecer e avaliar / escolher materiais didáticos (textos didáticos) também faz parte do conhecimento curricular. Como vários livros foram citados pelos nossos depoentes com diferentes avaliações, optamos por relacionar os mais significativos. O Prof. Djairo, por exemplo, destaca os livros de Cálculo do Prof. Ávila como textos nacionais que desempenharam um importante papel na tentativa de se criar uma literatura alternativa à americana, dominante à época. Já em relação à Análise, o professor considera seu livro *Análise I* bem adaptado / adequado á média dos alunos brasileiros, especialmente se acreditarmos que deve haver uma transição “sem descontinuidade” do Cálculo para a Análise.

Curiosamente, o Prof. Elon, que nunca escreveu um livro didático de Cálculo, foi quem mais citou manuais didáticos de Cálculo, dos quais critica o livro de Johnson & Kiokemeister por apresentar um Cálculo com uma ênfase inadequada nas demonstrações e, portanto, na abordagem formalista. O Prof. Ávila também faz referências críticas a este livro, pois o considera um livro que apresenta o Cálculo de uma maneira rigorosa e que, infelizmente, foi muito utilizado no Brasil nas décadas de 60 e 70.

Uma mudança de direção, segundo o Prof. Ávila, só foi possível devido ao livro de Serge Lang, no qual a idéia foi “deixar o rigor mais para um curso de Análise”. O professor se diz influenciado em sua experiência como autor de livros didáticos, pelos manuais de Lang e de Courant. O livro de Lang ganha o mesmo destaque na fala do Prof. Elon.

Já o livro de Michael Spivak, apesar de ser considerado, pelo Prof. Ávila, enriquecedor para um curso de Cálculo, é também considerado, pelo Prof. Baldino,

adequado para um curso de Análise, pois apresenta boas explicações, bons exemplos e exercícios. Também o *Curso de Análise* do Prof. Elon recebe destaque do Prof. Baldino, juntamente com os livros de Laurent Schartz.

Em relação ao ensino de Cálculo, os livros mais destacados pelo Prof. Baldino foram os livros de Swokowski, qualificado anteriormente (capítulo 5) como o “livro da década” e Leithold, considerado um livro “adaptável”. Entretanto, o professor acredita que existe uma super-produção desnecessária de livros de Cálculo e de Análise, crítica que encontra apoio na fala do Prof. Elon, que afirma existir uma indústria de livros de Cálculo, os quais têm se tornado verdadeiros “kits”. Para ilustrar esta afirmação, o professor cita a evolução das edições do livro de Thomas & Finney, um dos livros adotados como livro-texto em nossa graduação.

Entretanto, o Prof. Elon reconhece que, após o surto de livros de Cálculo puramente computacional, como por exemplo o *Harvard Calculus*, recentemente existe uma tendência de livros por ele considerados bem equilibrados no que diz respeito à dosagem adequada das componentes conceituação, manipulação e aplicações. Os melhores representantes desta nova tendência, segundo o professor, seriam *Calculus: Concepts and Contexts*, de James Stewart e *Cálculo com Geometria Analítica*, de, por nós analisado no Capítulo 5. Apesar do livro de Stewart não ter sido analisado no Capítulo 5, de fato, podemos identificar que, assim como em Edwards & Penney, existe espaço para as “descobertas” de alunos e professores, o que os diferencia de outros livros “expositores, prontos e acabados”.

Passemos, agora, a uma última categoria de saberes profissionais identificada.

7.3) SABERES PEDAGÓGICOS DO CONTEÚDO EM FACE DOS SABERES DA EXPERIÊNCIA DOCENTE

Um terceiro tipo de saber profissional do professor, segundo SCHULMAN (1986), é o saber pedagógico da matéria. Este saber diz respeito às diferentes formas de representar e explorar os conteúdos de modo a torná-los compreensíveis e significativos aos alunos. Este saber envolve conhecimento de exemplos, contra-exemplos, analogias, explicações, situações-problema e ilustrações relativas ao conteúdo de ensino.

A maioria destes saberes, entretanto, foram sendo construídos e ressignificados reflexivamente pelos professores, no exercício da prática docente. A esse tipo de saber docente, FIORENTINI et al (1999) têm chamado de saber experiencial: *Trata-se de um “saber prático”, geralmente não sistematizado pelas ciências disciplinares ou da educação e, na maioria das vezes, sequer socializado / discutido coletivamente pelos professores* (p. 36)

Os professores, segundo estes autores, tendem a valorizar esses saberes e os tomam como referencial para avaliar tanto a sua competência como a dos outros. É a partir dos saberes da experiência que os professores concebem os modelos de excelência profissional no interior da profissão. Sendo assim, esses saberes são determinados pelo contexto experiencial e por valores, crenças, conhecimentos, emoções, ideologias, poder, etc.

Um tema recorrente em todas as entrevistas foi a abordagem didático-pedagógica dada às aplicações da matemática, de uma maneira geral. Este assunto foi discutido com todos os entrevistados e, curiosamente, não era um dos itens previstos pelo roteiro de entrevista enviado previamente aos professores.

As experiências docentes dos professores Baldino, Djairo e Ávila, ainda que diferenciadas, apontam para um papel motivador das aplicações do Cálculo, as quais desempenhariam uma função importantíssima na apresentação da disciplina, especialmente as aplicações ou situações-problema relacionadas a conceitos físicos.

Notadamente por sua formação de engenheiro, o Prof. Djairo entende que a motivação faz “parte de pedagogia mesmo”, destacando a importância do professor motivar os assuntos que apresenta. Para o professor, motivar o ensino de Cálculo exige:

... a necessidade do Cálculo com certas aplicações. Eu acho que tudo que a pessoa estuda ... é muito importante que ele veja que isso serve para mais alguma coisa. O negócio não fica fechado dentro de si. Então, essa questão da motivação, eu acho que é extremamente importante. E essa parte da matemática oferece uma riqueza de motivações. (Ent. Djairo – out/99)

O Prof. Baldino, também engenheiro, possui uma rica experiência com o ensino de Cálculo para estudantes do curso de Física e critica duramente o posicionamento de certos estudantes de Matemática ao comparar sua reação diante da exploração de determinados exemplos ou fenômenos físicos que permitem dar significado aos conceitos do Cálculo:

A Matemática, em geral, quer é apresentar as coisas prontas, decorar e tal. E a Física aceita se você fizer as motivações através do movimento de inércia, através do centro de massa, eles aceitam esse tipo de coisa. E como eu tenho formação de engenheiro, eu sempre me preocupei com o porquê das coisas. Com o porquê nesse sentido, não da Matemática, mas com o porquê no sentido da aplicação ... Não só o significado matemático, mas o sentido que aquilo possa ter para a vida de uma pessoa que é profissional. E a Física reconhece isso. (Ent. Baldino – ago/98)

Com base em nossa própria experiência discente, não só concordamos com a crítica feita pelo Prof. Baldino, mas, também, perguntamos: Quais seriam as razões dos estudantes de Matemática não se interessarem por aplicações e situações-problema da física, da economia e/ou biologia ?

O fato é que, por um motivo ou por outro, estudantes de graduação, que não se interessam pelas aplicações da matemática, tendem, de um modo geral, a reproduzir uma prática pedagógica que não explora aplicações ou situações-problema de qualquer natureza para o ensino dos conceitos matemáticos. Isto contribui para o estabelecimento de uma tradição disciplinar em que a matemática é vista como uma disciplina isolada, fechada nela mesma, sem conexão com outras disciplinas do currículo escolar.

Esta falta de competência de saber relacionar o conhecimento matemático com outras áreas de conhecimento e de explorá-lo de múltiplas formas é um problema que se faz presente também, segundo o Prof. Djairo, entre os professores universitários de Cálculo:

Eu conheço colegas que dão cursos de Cálculo e no curso de Cálculo tem várias aplicações ... ele não dá porque tem medo. Ele tem medo de falar em aceleração e depois ... Então, ele omite todas as aplicações ...

Eu acho que isso é um erro. Eu acho que a motivação em mostrar que aquilo é importante em outras áreas, é essencial tendo em vista que a maior parte dos alunos não vai ser constituída por matemáticos. São pessoas que, ou nunca vão utilizar nada ou, se vão, é para as aplicações, as coisas deles. (Ent. Djairo – out/99)

O Prof. Ávila também reconhece a importância desse saber relacional do professor de Cálculo e propõe, inclusive, que os professores de Cálculo e Física trabalhem juntos:

Nós não podemos deixar de reconhecer ... que o casamento da física com a matemática, principalmente no Cálculo e na Análise ... é para sempre. ... Deve-se ensinar física pra se ensinar Cálculo. Deve-se trabalhar junto com o professor da física. Eu acho que o ensino de disciplinas de Cálculo deve se dar ao lado das disciplinas de física. As duas coisas se completam muito bem, dão muito certo. É claro que há muitos exemplos interessantes da economia, você pode trazer exemplos de outras áreas científicas, mas eu acho que ainda os problemas da física, da mecânica especialmente são muito relevantes no ensino do Cálculo. (Ent. Ávila – nov/98)

O Prof. Ávila não foi o único depoente que se referiu, mesmo que de forma rápida, à questão das aplicações da Análise. O Prof. Djairo também destacou as aplicações da Análise Funcional e da Análise Global e, de um modo geral, das aplicações da Topologia à Análise e da Teoria das Distribuições às Equações Diferenciais Parciais, ao defender que, na matemática, uma teoria deve “permeiar por outras”.

Entretanto, se a tônica do assunto com os três entrevistados anteriores passou pela motivação que representam as aplicações físicas num curso de Cálculo, o assunto foi abordado por nosso último depoente de uma maneira distinta, em sua essência. Como todos os seus colegas, o Prof. Elon acredita que um curso de Cálculo é “fantástico pelas aplicações, pelos exemplos maravilhosos para explicar as coisas da natureza e certas situações científicas mais gerais”. Aprofundando-se nesta discussão, o professor afirma se

basear num princípio que, segundo ele, rege, não só o ensino de Cálculo mas o ensino da matemática de um modo geral:

... deve-se respeitar sempre o princípio de que o ensino de matemática tem três componentes: a conceituação, a manipulação e as aplicações. E essas três componentes, elas não se sustentam. São como três pernas de um tripé. Se você tirar uma, vão duas e o tripé desaba. Então, você tem que procurar acompanhar um equilíbrio entre essas três coisas qualquer que seja o nível em que você esteja ensinando. (Ent. Elon – nov/99)

Mas como o Prof. Elon situa esse tripé no contexto do ensino de Cálculo e Análise ? Vejamos, a seguir, alguns indícios de resposta a essa pergunta:

- a) O nível de conceituação deve ser igual em Cálculo e Análise, uma vez que o problema não é o nível de conceituação em si mas, sim, a ênfase que se dá à conceituação sobre as manipulações ou as aplicações, isto é, uma maior ênfase à conceituação deve ser dada somente em Análise. Segundo o professor, a conceituação desempenha um papel semântico, isto é, de produção de significados ou sentidos às idéias e noções básicas;
- b) No ensino de Cálculo, mesmo tendo sofrido variações, sempre predominou a parte de manipulação relacionada aos cálculos de derivadas, integrais, critérios de convergência de séries e soluções de equações diferenciais, que são importantes para a formação de um matemático ou de um profissional que utilizará matemática. Segundo o professor, a manipulação representa a sintaxe, isto é, o sistema de símbolos que representam as idéias matemáticas e as regras para escrevê-los ou transformá-los em expressões e resultados logicamente válidos;
- c) Com exceção da formação de um futuro matemático, é necessário que as noções sejam sempre apresentadas aliadas ao seu uso, às suas aplicações que não são necessariamente aplicações de natureza científica ou tecnológica ou práticas, mas aplicações num

sentido mais amplo, como aplicações à própria matemática. Segundo o professor, a aplicação é uma modelagem.

Ainda relacionando as três componentes, como as aplicações transformam uma semântica não-matemática numa semântica matemática, o Prof. Elon acredita que:

... a conceituação ... é mais importante nas aplicações, principalmente hoje em dia, do que a manipulação. Então, o ensino moderno de Cálculo, o ensino de Cálculo hoje, ele está passando por uma fase – muito recente, de um ou dois anos para cá – que eu acho que atingiu um equilíbrio notável. (Ent. Elon – nov/99)

Ao analisar o ensino de Cálculo atual, dentro da linha do pensamento do Prof. Elon, não podemos concordar com o mesmo quando afirma identificar uma fase de “equilíbrio notável” entre conceituação, manipulação e aplicações no ensino atual de Cálculo. Basta examinarmos alguns livros didáticos de Cálculo analisados no Capítulo 5, para observarmos que a conceituação é exarcebada no livro de Leithold, as manipulações continuam “predominando” no livro de Flemming & Gonçalves e as aplicações estão atreladas a um “avanço da técnica” no livro de Swokowski. Para concluir, o livro de Edwards & Penney talvez seja aquele em que esse equilíbrio esteja mais presente. Mas este livro é ainda pouco utilizado nas universidades brasileiras.

De uma forma geral, por mais consistente que pareça a esquematização do ensino feita pelo Prof. Elon, com base nas três componentes acima destacadas, entendemos que existem outras componentes igualmente fundamentais a serem consideradas quando analisamos / refletimos sobre o ensino da matemática de um modo geral. Por exemplo, os objetivos, as finalidades e os valores daquilo que ensinamos, que demandam uma carga de saberes axiológico-teleológicos bem mais amplos.

Por fim, acreditamos que a natureza dos saberes aqui tratados está relacionada, inequivocadamente, à formação matemática de nossos depoentes e a sua experiência docente de Cálculo, no caso dos professores Baldino e Ávila, e de Análise, no caso dos professores Djairo e Elon. Também acreditamos que foi esta experiência que certamente os

levou a diversas reflexões e a formulação de várias críticas em relação ao ensino, que serão analisadas no item a seguir.

Concluindo, a questão das aplicações do Cálculo e da matemática, de um modo geral, está relacionada a uma proposta de maior amplitude, envolvendo a dimensão sócio-cultural da matemática, defendida por D'AMBROSIO (1979) que, em fevereiro de 1978, numa conferência pronunciada no Primeiro Congresso Internacional da Associação de Professores de Matemática, realizado em Toluca – México, já alertava:

Voltar o estudo do Cálculo a suas origens experimentais e intuitivas é a resposta à tendência de orientar o estudo da matemática para uma realidade e a um momento sócio-cultural e natural que deve ser o determinante em nossos esforços para fazer ciência e tecnologia. (p. 55)

Por fim, acreditamos que explicitar uma visão global do ensino de Cálculo e Análise de cada um dos nossos depoentes é uma tarefa complicada na medida em que as experiências relatadas perfazem um espectro ao mesmo tempo rico e vasto. Tentaremos, pois, apresentar algumas idéias centrais retiradas das falas de nossos entrevistados.

A tese polemicamente defendida pelo Prof. Baldino é de que existe uma farsa no ensino de Cálculo, conforme já revelamos no Item 2.2. Mas o interessante é que o professor estende a sua crítica para toda a universidade, por ele chamada de “universidade da farsa”, na qual o conhecimento é mero álbi para uma prática docente que se resume a cumprir programas e que, no fundo, se preocupa com o funcionamento da universidade ao invés do processo ensino-aprendizagem. Este, por sua vez, é assim tratado pelo depoente:

... a aprendizagem é outro problema. Cumprir o programa é fácilimo. Eu cumpro o programa, a burocracia fica satisfeita e ninguém pode dizer nada, tá cumprido. Agora, a aprendizagem ... vai ser outro departamento. A aprendizagem ... é que o ensino não tem nada a ver com a aprendizagem. O ensino é uma coisa, a aprendizagem é outra. Você ensina uma coisa, o aluno aprende outra. Você ensina matemática, o aluno aprende a passar. (Ent. Baldino – ago/98)

A afirmação de que vivemos numa universidade onde se vive uma farsa total pode ser contestada sob uma ótica não-generalizadora. Entretanto, baseados em nossa própria experiência docente, podemos retirar alguns recortes de fatos que confirmam a tese de que muitas vezes ensinamos ou pensamos que estamos ensinando Cálculo ou Análise quando, na verdade, nossos alunos aceitam o jogo, desejando apenas ser aprovados no curso de Cálculo ou Análise. As razões são muitas, mas talvez a escola como um todo, em todos os seus níveis, não seria, num grande número de casos, uma escola da farsa ?

Já o Prof. Ávila aponta para determinadas atitudes dos professores de Cálculo como sendo as principais causas dos problemas com o seu ensino. Dentre elas, destacam-se a artificialidade de se querer ensinar qualquer coisa sem uma motivação prévia, especialmente através de problemas concretos e a falta de maturidade demonstrada pelos alunos egressos do ensino médio, que ingressam na universidade com uma postura passiva e que é cultivada / incentivada pelos professores universitários:

... nós, professores universitários, temos também as nossas limitações, nossas dificuldades de conduzir o ensino de uma maneira diferente. O desejável, eu acho, é que o professor fizesse menos preleções e levasse os alunos a uma participação maior, a um papel mais ativo no aprendizado, porque o aluno é que tem que aprender. (Ent. Ávila – nov/98)

Em suma, o Prof. Ávila acredita que o professor deva assumir uma postura de “colega mais velho, mais experiente”, o que, no papel, parece fácil e pedagogicamente correto. No entanto, o que se verifica, especialmente no ensino de Cálculo e Análise, é uma relação hierarquizada baseada numa prática pedagógica fundamentada e legitimada pela epistemologia empirista (BECKER, 1995), descrita no Capítulo 1.

Assim sendo, não há espaço para uma tentativa de crescimento em conjunto, tendo o aluno que aceitar a apresentação de “uma coisa pronta e acabada”. Enfim, há uma certa semelhança com a farsa do ensino denunciada por Baldino, na medida em que ele se torna um acomodado.

Curiosamente, entre as reflexões dos professores Djairo e Elon podemos estabelecer uma comparação quando ambos abordam a questão de uma prática pedagógica em que a

palavra de ordem é a “honestidade” para com os alunos, o que, de certa forma, mostra uma preocupação de ordem ética.

Se, por um lado, o Prof. Djairo critica a forma geral de se fazer matemática com base em generalizações que podem criar barreiras ao desenvolvimento de uma certa teoria, por outro lado, o professor argumenta que, na prática pedagógica, especialmente de Cálculo e Análise, faz-se necessário “queimar algumas etapas” para se chegar logo nos tópicos por ele considerados, essenciais do Cálculo: a derivada e a integral. Entretanto, neste processo, *o que é importante é a atitude honesta e cientificamente o que você faz, perante o aluno.* (Ent. Djairo – out/99)

Já para o Prof. Elon, esta questão está ligada a uma atitude de equilíbrio entre as componentes do ensino na medida em que trabalhar com as aplicações do Cálculo não significa desprezar os conceitos de uma maneira tal que o professor se veja obrigado a contradizer futuramente, algumas afirmações feitas na abordagem inicial daqueles conceitos. O professor aconselha:

... você deve ensinar Cálculo como você deve ensinar matemática sempre de forma honesta. Você pode não exagerar na conceituação, mas sempre você deve se colocar numa posição defensável do ponto de vista lógico. ... Você pode não dizer toda a verdade, mas sempre dizer a verdade.
(Ent. Elon – nov/99)

Na realidade, estas questões foram levantadas pelos professores Djairo e Elon dentro do tópico do roteiro que contemplava a questão do excesso de rigor no ensino de Cálculo e a necessidade do rigor no ensino de Análise. Considerando que a relação dialética entre rigor e intuição constitui o núcleo central de nossa investigação, é necessário um último e derradeiro capítulo que contemple esta categoria específica de saberes manifestados por nossos depoentes.

CAPÍTULO 8

RESSIGNIFICANDO A RELAÇÃO ENTRE RIGOR E INTUIÇÃO NO ENSINO DE CÁLCULO E ANÁLISE NO CONTEXTO DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

“Por que a intuição geométrica ainda continua vital, mesmo nos domínios que aparentemente não têm ligação com a Geometria ? Evidentemente porque a intuição geométrica nos pode sugerir o que é importante, interessante e acessível e nos pode acautelar contra o desvio no deserto imenso dos problemas, das idéias e dos métodos.”

Freudenthal

Neste último capítulo, estaremos analisando a percepção que nossos depoentes possuem da relação entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise.

Inicialmente, examinaremos alguns aspectos específicos da prática pedagógica do Cálculo e da Análise que exemplificam, na visão dos depoentes, a relação tensional entre o rigor e a intuição.

A seguir, analisaremos o impacto da “ortodoxia epsilônica”, herança wierstrassiana, na abordagem de Limites e Continuidade no ensino de Cálculo e de Análise.

Por fim, destacaremos novas perspectivas para o ensino de Cálculo, mediante algumas alternativas pedagógicas apresentadas pelos depoentes e, concluindo, discutiremos o papel da Análise na formação de um professor com multiplicidade e flexibilidade de conhecimentos.

8.1) NÍVEIS DE RIGOR E EXEMPLOS DE INTUIÇÃO

A percepção da relação entre rigor e intuição que os nossos depoentes possuem, pode ser obtida através de suas falas relacionadas aos níveis de rigor, os quais, geralmente, aparecem associados às definições e demonstrações, em contraposição aos exemplos que possibilitam uma abordagem intuitiva dos conceitos.

Inicialmente, cabe esclarecer que, em momento algum das entrevistas, solicitamos aos entrevistados que dessem uma definição de rigor ou de intuição. A idéia era tentar caracterizar a forma como eles percebiam / enfrentavam essa relação, a partir de concepções e reflexões sobre sua própria experiência enquanto autores de livros didáticos e / ou professores de Cálculo e Análise.

Assim sendo, o Prof. Baldino questiona a necessidade / validade de se demonstrar resultados que os alunos conseguem compreender e aceitar intuitivamente, argumentando que isto pode gerar uma problemática que não faz sentido para os mesmos. Um primeiro exemplo citado é o fato de uma função com derivada nula num intervalo ser constante no mesmo. Neste caso, não faz sentido a demonstração deste resultado para um aluno do curso de Física que o interpreta fazendo uma analogia com a velocidade de um automóvel: “ se a velocidade de um automóvel é zero num determinado intervalo de tempo, é óbvio que ele está parado durante este período”. O Prof. Baldino assim se pronuncia acerca da questão:

Ele tá demonstrado a nível da turma, porque o que que é demonstrar ? Demonstrar, no fundo, é justificar. Ele tá justificado, ele tem justificações. O aluno fala, ele mostra com um gesto que se a derivada é zero, a função não se mexe, é constante. Então, isso pra ele é uma demonstração. Agora, pro matemático não é, mas é outro contexto, é outro campo semântico. Num campo semântico de um curso de Cálculo, isso aí tá mais do que demonstrado, não tem o que fazer mais, não tem o que duvidar. (Ent. Baldino – ago/98)

Ou seja, o conceito de rigor, para o Prof. Baldino, não é absoluto, variando de acordo com o contexto em que os conceitos matemáticos são trabalhados.

Entretanto, perguntamos: teria razão o Prof. Baldino, quando afirma que um matemático tenderia a não aceitar como demonstração uma simples justificativa que convence o aluno da validade de um determinado resultado ? Examinemos esta questão à luz de um outro exemplo.

Um dos teoremas com presença obrigatória em vários cursos de Cálculo, principalmente nas disciplinas que integram o currículo básico de cursos da área de exatas, é o Teorema do Valor Intermediário que possui um interessante corolário apresentado com a seguinte abordagem intuitivo-geométrica: se uma função f , contínua em $[a, b]$, é tal que $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos, então existe um $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = 0$. A questão central é: um simples desenho, que é facilmente compreendido / visualizado pelos alunos pode ser considerado como uma demonstração, ainda que não rigorosa do ponto de vista formal ?

O Prof. Baldino tentou discutir a idéia “cercando o número real c como limite de uma sequência” e a reação dos alunos de Física foi a de não aceitar a problematização, uma vez que o valor intermediário era obviamente atingido. Neste caso, o nível de rigor a que se chegou foi o suficiente para que os alunos compreendessem o resultado, ainda que este processo de compreensão esteja carregado de intuições, principalmente as geométrico-espaciais.

O Prof. Elon parece concordar com o Prof. Baldino sobre os níveis de exigência de rigor, pois considera a idéia de se apresentar o resultado através de um gráfico “bastante aceitável”. Ele acredita, no caso acima, que uma questão que deve ser provocada pelo professor é a forma de se encontrar o ponto c , uma vez que não existe fórmula para o determinar: *Você não deve ir além do que os seus alunos necessitam, se eles estão satisfeitos com a sua explicação ... desde que não seja uma mentira. (Ent. Elon – nov/99)*

Em relação à mesma questão, o Prof. Ávila não só reconhece o importante papel da intuição e da visualização concreta dos fatos, como defende que o ensino das propriedades de funções deve ser sempre precedido por uma visualização gráfica, como a própria história da matemática nos mostra, através das descobertas de resultados inicialmente de uma maneira intuitivo-visual e posteriormente de uma maneira lógico-rigorosa. O professor adverte:

A gente tem que lembrar que o intelecto não é só racional, não é só lógica, mas tem a intuição, a visualização geométrica, que muito ajudam no aprendizado. Então, às vezes o rigor encobre as idéias, ele dificulta a apreensão das idéias, ao invés de ajudar. O rigor é importante numa fase um pouco ... de maior amadurecimento do aluno, quando ele já tem um espírito crítico, uma capacidade de questionar. Aí é que é a hora do rigor e da organização lógica da matemática. (Ent. Ávila– nov/98)

O que diferencia a posição do Prof. Ávila em relação à do Prof. Baldino é que o Prof. Ávila, embora admita o rigor complementar à intuição, ainda parece concebê-los como entidades dicotômicas, de modo que uma acontece em um momento diferente da outra. Ou seja, o professor parece não identificar a existência de diferentes níveis de rigor.

Esta variação dos níveis de rigor é admitida pelo Prof. Djairo, ao apresentar um exemplo histórico para ilustrar que o rigor varia com o tempo:

... alguém falou que um grande matemático chamado Lefschetz ... nunca demonstrou um teorema corretamente, mas ele nunca enunciou um teorema errado. Todos os teoremas que ele criou foram teoremas verdadeiros, mas nenhuma demonstração tava certa. E talvez seja a questão do rigor né, de que, possivelmente, o rigor dele evoluiu e com o tempo ... (Ent. Djairo – out/99)

Além de ressaltar a variação dos níveis de rigor, este exemplo demonstra também a complementariedade entre a intuição que guiou Lefschetz ao estabelecimento de resultados e a busca de um rigor que os justificasse ou demonstrasse como válidos.

Acreditamos que esta mesma relação de complementariedade deve prevalecer, com muito mais razão, no terreno pedagógico do Cálculo e destacadamente, da Análise, considerada um modelo de disciplina na qual todas as afirmações são justificadas e demonstradas. Ressaltamos, entretanto, que tais afirmações devem ser, primeiramente, estabelecidas e compreendidas. Isto nos mostra a importância de uma prática pedagógica que relaciona, tensionalmente, o rigor à intuição.

8.2) A ORTODOXIA EPSILÔNICA NO ENSINO DE LIMITES E CONTINUIDADE

Apropriando-nos do termo criado por GRATTAN-GUINNESS (1997) para se referir à tradição deixada por Cauchy e Weierstrass para fundamentar o Cálculo, iniciamos nossa discussão pelo posicionamento defendido pelo Prof. Baldino, acerca da maneira tradicional de apresentação dos limites, especialmente nas disciplinas introdutórias do Cálculo:

Não tem sentido algum você fazer num curso de Cálculo um capítulo sobre Teoria de Weierstrass, sobre épsilons e deltas, percebe ? Aquilo ali, primeiro tem que acontecer pra depois se justificar, pra depois, numa outra instância, esse aluno retomar aquilo se ele quiser e poucos vão fazer, vão retomar aquilo em termos de verificar até que ponto aquela ferramenta que ele tá usando vale. (Ent. Baldino – ago/98)

Baseado em sua experiência docente em Cálculo, o Prof. Baldino recomenda: “Não problematize a questão dos limites !” Isto porque, após um eventual capítulo somente de teoria e cálculo de limites, todos os limites são calculados por continuidade, isto é, através da substituição do ponto na função. Logo, a questão dos limites deve ser desviada e o curso deve seguir direto rumo às derivadas, integrais e suas aplicações.

Em relação à questão da ortodoxia epsilônica, o professor narra um episódio pitoresco acontecido na sua experiência docente na UFRJ, em julho / 74:

... tava todo mundo decorando fórmulas para achar o delta quando era dado o épsilon da função tal ... naquele tempo as provas eram sem consulta e eles estavam decorando fórmulas e colando fórmulas para achar o delta ... Ou seja, eles estavam fazendo aquilo sem a menor compreensão ... Apesar de todos os roteiros que a gente fazia para ver se eles entendiam ... talvez um terço dos alunos das melhores turmas entendia, mas o resto não entendia nada. E eu duvido ... que exista um

sistema de ensino que faça o aluno chegar em um ano entendendo os épsilons e deltas. Duvido. Pouquíssimos, pouquíssimos. (Ent. Baldino – ago/98)

Quando afirma que “se ensina o limite e os alunos acham que o limite é dar épsilon e achar delta”, o Prof. Baldino reforça a dura crítica ao método ε - δ feita por Lakoff & Núñez (cf. item 4.2) que, embora esteja relacionada à definição de continuidade, ressalta apenas a visão discreta da idéia de correspondência associada ao método. E mais ainda, não teriam os nossos alunos de hoje, quase duas décadas depois, a mesma reação / atitude diante da perspectiva de se depararem, numa prova de Cálculo, com questões de demonstração de limites por épsilons e deltas, mesmo que a prova fosse com consulta ?

Num certo sentido, o Prof. Ávila se contrapõe ao Prof. Baldino, quando este afirma que as definições e demonstrações por épsilons e deltas constituem um conteúdo “pedagogicamente inalcançável” para os alunos. Embora o Prof. Ávila admita que se constitui num exagero o ensino de épsilons e deltas logo nos primeiros cursos de Cálculo, ele acredita, por outro lado, que os mesmos deveriam ser ensinados numa fase mais adiantada do Cálculo. Entretanto, o professor não apresenta uma justificativa plausível para esta crença:

Não é preciso esperar um curso de Análise para se entrar com épsilons e deltas. Eu acho que deve se entrar sim. Mas, no início, até que o aluno adquira uma certa maturidade com os conceitos de derivada, limite, aí, enquanto isso não acontece, não convém entrar com épsilons e deltas. (Ent. Ávila – nov/98)

A afirmação do Prof. Ávila nos faz questionar: Como detectar se o aluno já adquiriu esta tal maturidade necessária ? O que o aluno ganharia aprendendo épsilons e deltas no Cálculo ? Ou bastaria apenas dar uma idéia mais precisa e rigorosa ? E mais, como seria o ensino de limites sem épsilons e deltas ?

Estas questões são respondidas pelo Prof. Ávila com um apelo à experiência histórica do desenvolvimento dos limites, que só veio a acontecer após a concepção da

derivada, da reta tangente e da velocidade instantânea. Isto talvez justifique a atitude demonstrada pelo professor em seus livros, de só apresentar uma teoria de limites posteriormente à apresentação de derivadas e de problemas envolvendo reta tangente.³⁰

De modo similar ao Prof. Baldino, o Prof. Ávila também pensa que o aluno não compreende / assimila a noção de limite ao trabalhar somente com funções contínuas, o que só vai fazer sentido quando se lida com a derivada:

Então, depois de fazer esta apresentação inicial da derivada, que não precisa nada de teoria de limites, de épsilons e deltas, o aluno vai amadurecendo pra questionar: “Sim, mas o que que é essa idéia de limite, como é que a gente rigoriza isto ?” Mas ele só fará este questionamento, se eu conseguir chegar a um estágio em que eu já tenha apresentado exemplos de funções, exemplos de cálculos de limites em que a coisa não lida só com funções contínuas ... (Ent. Ávila – nov/98)

Posteriormente, o Prof. Ávila afirma que, para a maioria dos alunos brasileiros que vão fazer Cálculo I em turmas com até 60 ou 70 alunos, ensinar épsilons e deltas “é uma loucura”.

Uma postura muito parecida com a do Prof. Ávila é tomada pelo Prof. Elon, que também acredita que tem havido um exagero no ensino de épsilons e deltas em cursos iniciais de Cálculo. Ele ilustra esta posição com a narrativa de um curioso fato “caseiro”:

Por exemplo, eu tenho uma filha que é antropóloga e que fez a graduação dela em biologia na UFRJ e puseram uma professora de Cálculo para ela que ficou o tempo todo: “Dado o épsilon, calcular o delta correspondente para este épsilon. Uma coisa que não tem o menor interesse para um futuro biólogo ... e nem sequer para um matemático. Ninguém fica calculando deltas a partir de épsilons. Então, isso é um exagero. (Ent. Elon – nov/99)

³⁰ Estaria o Prof. Ávila fazendo uma história satírica ? (cf. GRATTAN-GUINESS (1997), item 3.1)

Devemos confessar que fomos surpreendidos por esta postura demonstrada pelo Prof. Elon, uma vez que, como autor de diversos livros didáticos de Análise, pensávamos que ele iria defender a utilização do método epsilônico também no Cálculo. Outrossim, acreditamos que sua crítica à postura da professora foi baseada na ênfase que esta estava dando, ao aspecto procedimental ou sintático, ou seja, na inadequação das atividades de manipulação.

O Prof. Elon também parece concordar com o Prof. Ávila, quando propõe que a apresentação de limites não aconteça antes da noção de derivada, no ensino inicial de Cálculo e cita uma frase dita a ele por Serge Lang, em relação ao ensino de limites: *“As pessoas já nascem sabendo o que é limite; o que atrapalha são os livros.”*

Ainda sobre estas questões, envolvendo o ensino de limites através de épsilons e deltas, o Prof. Djairo preferiu não se pronunciar por não estar tendo, nos últimos anos, uma experiência docente de Cálculo. Tal atitude pode ser interpretada como uma demonstração de respeito e consideração pelo saber experiencial, por parte do Prof. Djairo.

8.3) BUSCANDO NOVAS PERSPECTIVAS PARA O ENSINO DE CÁLCULO

Inicialmente, devemos ressaltar que ocorreu, por parte de todos os depoentes, uma identificação de rigor com formalismo, ou seja, os aspectos apontados pelos depoentes como característicos de um ensino rigoroso estão muito próximos àqueles descritos por FIORENTINI (1995) como característicos de um ensino formalista. Também em várias passagens das entrevistas o termo formalismo foi utilizado para se referir a situações de rigor no ensino.

Assim sendo, todos os nossos depoentes manifestaram-se insatisfeitos com a abordagem rigorosa, isto é, formalista, tradicionalmente utilizada no ensino de Cálculo no Brasil. Em contrapartida, eles tentam apresentar algumas alternativas didáticas que rompam com esta tradição de ensino de Cálculo.

Estas alternativas tentam resgatar o primado das idéias intuitivas, de modo que o tratamento rigoroso não venha impedir a compreensão e o significado das mesmas. Uma

destas alternativas, segundo o Prof. Baldino, é desenvolver um curso de Cálculo com base no conceito de infinitésimos, seguindo a sequência: Cálculo Infinitesimal – Análise não-standard, a qual serviria de alternativa à atual sequência: Cálculo – Análise (cf. item 2.2).

Não detalharemos aqui o conceito de infinitésimos que fundamenta a Análise não-standard. Recomendamos, aos interessados, o artigo de BALDINO (1995) e o livro de KEISLER (1976) que, aliás, recebe uma crítica do Prof. Baldino no sentido de que sua abordagem ao Cálculo Infinitesimal repete o mesmo erro das abordagens tradicionais do Cálculo baseado em limites, que é a rigorização na apresentação dos conceitos no curso de Cálculo:

O Keisler quis fazer este curso de Cálculo, tem um livro muito famoso dele, que tenta levar pro curso de Cálculo a Análise não-standard e ele comete o mesmo erro que todos os cursos de Cálculo, que a maioria deles comete, que é tentar fazer do curso de cálculo um curso de Análise. Ele tenta levar pro Cálculo não os infinitésimos pra depois justificar através de um curso de Análise, ele tenta levar pro Cálculo os infinitésimos já na forma rigorosa, ou pelo menos o mais possível rigorosa. (Ent. Baldino – ago/98)

Notamos, então, que a questão do excesso de rigor na abordagem dos conceitos do Cálculo é um problema tão abrangente que envolve diferentes tendências de ensino, tradicionais ou não. Mas, não existiriam outras alternativas para se conseguir um ensino mais intuitivamente eficiente, tanto do ponto de vista matemático como sob uma ótica pedagógica ?

Ao ter presente que o problema no ensino de Cálculo é, antes de tudo, um problema epistemológico e conceitual, o Prof. Baldino propõe uma abordagem – explorando os infinitésimos – que enfrente realmente este problema.

Ao contrário do Prof. Baldino, o Prof. Ávila propõe soluções mais técnicas ou didáticas que epistemológicas ou conceituais. Ele acredita que a alta reprovação nesta disciplina é decorrente de problemas de ordem institucional (turmas numerosas de alunos)

e didática, sugerindo como alternativa de solução, o auxílio de monitores e uma metodologia centrada na resolução de problemas:

Aprender matemática se faz através de resolver problemas. Quanto mais o aluno resolve problemas, mais ele aprende. E ele vai buscar teoria à medida em que ele encontra dificuldade nos problemas. Então, se nós pudéssemos mudar o enfoque do ensino para esta direção, certamente muito progresso seria feito e muito dessa reprovação no Cálculo cairia. (Ent. Ávila – nov/98)

Não nos surpreende a apresentação, por parte do Prof. Ávila, da resolução de problemas como um alternativa didática que pode contribuir para um redirecionamento do ensino de Cálculo inclusive colaborando para a solução do grave problema dos níveis de reprovação da disciplina, uma vez que a RP tem se configurado como uma das linhas de pesquisa em Educação Matemática que mais tem gerado trabalhos nos mais variados níveis de ensino. Entretanto, ficamos realmente surpresos com sua perspectiva cética quanto ao uso de novas tecnologias – como, por exemplo, o computador – para a superação dos problemas do ensino de Cálculo. A experiência por ele vivenciada na época em que era professor de Cálculo em universidades americanas foi assim descrita:

Eu acredito que há muito que se fazer para melhorar o ensino mas não é tanto no sentido de encher as salas de aula de computadores. Eu acho que não é por aí. Computador é uma ferramenta muito útil, mas temos que ter cuidado que nós acabamos usando o computador erradamente. O computador tem o seu papel sim, no lugar certo. Não é enchendo a sala ... já tivemos a experiência de colocar televisão na sala de aula. As universidades americanas fizeram isso, 300 alunos numa sala assistindo televisão. Não deu em nada, não foi boa a experiência. Então, nós precisamos ter cuidado com as inovações, tem que ser feito com prudência e valendo-se de experiência ... um aprendizado continuado que se deve fazer. (Ent. Ávila – nov/98)

Isso parece até razoável na perspectiva do Prof. Ávila, talvez porque o mesmo perceba, no uso do computador, apenas uma solução técnica para o problema. Se o Prof. Ávila percebesse, como mostrou SOUZA JÚNIOR (2000), que a exploração do Cálculo pelo computador pode significar também uma mudança no modo de conceber e representar as idéias ou conceitos do cálculo, provavelmente mudaria de opinião ... por outro lado, é compreensível a preocupação demonstrada pelo Prof. Ávila com a “prudência” que se deve tomar frente às inovações, mas para nos valermos de uma experiência, temos que enfrentá-la de modo reflexivo e investigativo para poder extrair (ex) dessa situação arriscada e perigosa (peri) uma aprendizagem ou um novo conhecimento (ência), como nos mostra LARROSA (1998).

Um exemplo de que novas experiências podem levar a novos conhecimentos é ilustrado pelo Prof. Djairo. Se, de um lado, o professor entra em sintonia com o Prof. Ávila ao defender que o aluno “aprende estudando” e considerar as tentativas de resolução de exercícios uma forma de “sedimentação dos conceitos”, de outro, o professor reconhece que a utilização do software *Mathematica* não apenas “modernizou” seu livro *Equações Diferenciais Aplicadas* mas, principalmente, proporcionou novos significados geométrico-espaciais às equações e às soluções:

... hoje em dia para você apresentar essas coisas é muito importante que você procure usar a tecnologia que aí está. Compreende, você tem uma equação diferencial, não tem possibilidade de você integrar explicitamente, mas por métodos numéricos você pode ter uma idéia da solução. Então, se você usar esses pacotes aí que existem, o Mathematica, você usando o computador ... (Ent. Djairo – out/99)

O Prof. Elon, assim como os demais, também parece acreditar que uma das soluções para o problema do ensino de Cálculo é romper com sua tradição formalista e procedimental. Ele propõe, para isso, que se utilize outros recursos para dar significado e entendimento às idéias do Cálculo. Por exemplo, para o cálculo da raiz de uma função graficamente visualizada pelo Teorema do Valor Intermediário, onde não existe uma

fórmula, vários métodos podem ser aplicados como o da bisseção, o da secante e o de Newton :

Isso aí é uma deixa excelente para você dar uma idéia num curso de Cálculo, do que é a matemática hoje em dia. Não basta você saber que existe o ponto, você quer saber como você vai obter um daqueles pontos. E eu acho que, para o aluno, isso é muito mais importante do que você demonstrar rigorosamente a existência daquilo ali. Se você der um processo de chegar até lá. (Ent. Elon – nov/99)

Apesar deste avanço, o Prof. Elon ainda parece não conceber o aluno como construtor de conhecimento, alguém capaz, com precisão ou não, de construir seu próprio processo de significação e resolução dos problemas. É claro que a mediação do professor é importante nesse processo. Mas o professor não precisa “dá-lo”.

Há de se destacar, entretanto, subjacentes à fala do Prof. Elon, dois aspectos fundamentais para o ensino de Cálculo, os quais gostaríamos de comentar sob uma conotação um pouco diferente daquela apresentada por ele:

- 1) Para que o professor possa exercer uma boa mediação no ensino de Cálculo, ele deve possuir um conhecimento flexível e múltiplo do saber a ser ensinado e aprendido. Mas como seria esse tipo de conhecimento profissional ? Para LLINARES & SÁNCHEZ (1996), o professor com flexibilidade de conhecimento profissional deveria ser capaz de estabelecer e promover múltiplos significados aos conceitos e idéias matemáticas e, associadamente, saber utilizar diferentes sistemas instrucionais de representação e exploração dessas noções. Nesta perspectiva, um professor de Cálculo deve saber usar métodos aproximativos, cálculo numérico, calculadora, recursos computacionais e manifestar um saber declarativo e relacional das idéias do Cálculo, isto é, saber falar sobre a matéria, demonstrando uma visão histórico-cultural ampla.
- 2) Algumas demonstrações, atualmente, já estão sendo feitas com a utilização de computadores, através de aproximações. Exemplos interessantes podem vir da Análise

Numérica. Um exemplo disso é a demonstração feita por computador de que são suficientes quatro cores para colorir qualquer mapa sem que dois países vizinhos tenham a mesma cor. Mesmo que a aceitação destas demonstrações ainda seja motivo de controvérsia no meio acadêmico, é inegável que isto significa uma revolução em matemática ou, ao menos, na forma de produzir uma demonstração com um rigor não-formal.

Entretanto, apesar de entender que todas as considerações acerca do ensino de Cálculo, feitas por nossos depoentes, devem ser objeto de discussão por parte de todos os professores, coordenadores e autores de textos didáticos de cálculo, entendemos que um redirecionamento em seu ensino só se tornará realidade quando todos compreenderem a importância de se trabalhar de uma maneira conjunta, através de projetos de ensino como sugere ABRANTES (1995) (cf. item 1.2.1).

Um exemplo do que estamos defendendo é o projeto “Cálculo com Aplicações”, que vem sendo desenvolvido no IMECC / UNICAMP, sob a coordenação da Prof^a.Dra. Vera Figueiredo. A equipe que participa do projeto é constituída por professores de disciplinas da área de Cálculo Diferencial e Integral do IMECC / UNICAMP e por alunos de graduação e pós-graduação de diversos cursos da UNICAMP. Uma das principais atividades do grupo está sendo o desenvolvimento de projetos por parte dos alunos com a utilização de softwares aplicativos (*Mathematica*, *Maple*, etc).

Esta experiência foi objeto de estudo da Tese de Doutorado de SOUZA JÚNIOR (2000), *Trabalho Coletivo na Universidade – Trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral*.

O autor inicia o estudo fazendo uma ampla revisão de literatura sobre a utilização de computadores no ensino de Cálculo para, em seguida, estruturar a análise da trajetória do grupo em três grandes eixos: a dinâmica do trabalho coletivo; o envolvimento no trabalho coletivo; a produção coletiva de saberes sobre as atividades, sobre o trabalho de pesquisa e sobre a avaliação.

Mesmo considerando as particularidades de diversos grupos de ensino de Cálculo com computadores que já existem no Brasil, acreditamos que algumas reflexões do autor

devem ser compartilhadas, pois possuem uma amplitude que supera os limites locais e gera uma contribuição global. Um exemplo do que estamos afirmando vem da seguinte análise:

No trabalho coletivo, os elementos do grupo realizaram reflexões sistemáticas e coletivas sobre o processo de aprender e ensinar Cálculo, a partir da reflexão cotidiana sobre o desenvolvimento de uma prática educativa com os alunos. Nesse processo foram desenvolvidos alguns saberes coletivos sobre como trabalhar com o computador e com projetos. Esse fato fez com que o grupo refletisse também sobre o processo de avaliação e sobre a aprendizagem dos alunos. Nesse movimento, o grupo começou a construir um caminho no qual alunos e professores se reconheceram como produtores de saberes e conhecimentos. (págs. 295-296)

Uma outra constatação importante verificada em seu trabalho é a produção de novos materiais didáticos e a reflexão sobre livros didáticos de Cálculo, possibilitada pelos projetos desenvolvidos pelos integrantes do grupo:

No processo de produção das atividades e dos projetos, percebemos que o grupo passou a organizar o que havia produzido, refletindo sobre a sua própria produção e sobre as diferentes fontes utilizadas, inclusive livros textos de Cálculo. (Ibidem, pág. 295)

Por fim, acreditamos que a utilização do computador se constitui numa forma de abordagem intuitiva do ensino de Cálculo, não só pela possibilidade de visualização gráfica de conceitos e resultados como pela própria revolução do conhecimento procedimental que sua utilização representa, em comparação ao atual padrão massacrantemente manipulativo a ele associado.

Daí, fica nossa crença de que a utilização do computador no ensino de Cálculo, e no ensino da matemática de uma maneira geral, deve ser considerada e buscada por todos os interessados e responsáveis pelo ensino dessa disciplina. Mas, para que essa mudança da

prática pedagógica seja, de fato, radical, será necessário, também, uma mudança nas crenças, concepções e valores daqueles que ensinam.

Concluindo, acreditamos que a solução dos problemas do ensino de Cálculo não é técnica, pois exige, antes de mais nada, uma reconceptualização das idéias epistemológicas, isto é, que se trabalhe o Cálculo de maneira problematizadora, explorando os múltiplos significados e representações destas idéias. Nesta perspectiva, o computador se constitui numa valiosa ferramenta para a produção de novos significados e compreensões para os conceitos do Cálculo.

8.4) O PAPEL DA ANÁLISE NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Se existiu uma questão, no roteiro de entrevistas, que gerou respostas essencialmente parecidas, apesar de justificadas de maneira diferenciada, esta foi a questão relacionada à importância da Análise na formação do professor de matemática. Como todos os depoentes julgaram fundamental o ensino de Análise para alunos de Licenciatura em Matemática, examinemos os principais argumentos que justificam sua presença na formação inicial do professor de matemática.

O Prof. Elon considera a Análise Matemática uma forma de se habituar o futuro professor com o método dedutivo, resumido por ele nas seguintes palavras: “Toda conclusão pressupõe uma hipótese”, isto é, todas as conclusões seguem um modelo de raciocínio dedutivo a partir de hipóteses. Este tipo de pensamento está na base da Análise Matemática e deveria ser intencionalmente explorado e desenvolvido. Entretanto, o professor tece uma pesada crítica aos cursos de licenciatura do Brasil que, inicialmente, procuravam seguir o modelo italiano “repleto de teorias matemáticas bastante avançadas”, mas que, atualmente, foi se modificando até atingir um modelo “mais atenuado”, no qual a abordagem analítica praticamente sumiu:

Num certo sentido é um faz de conta. Você tem Análise, você tem Topologia, você tem Variáveis Complexas, um montão de coisas e na

verdade você não tem nada disso, porque os professores fingem que ensinam, os alunos fingem que aprendem e nenhum dos dois sabe nada disso. Então, se é para ter essa ficção de ter Análise Matemática na licenciatura mas, sem ser seriamente dosada, então é melhor que não tenha ... agora, se é importante ter Análise Matemática, eu acho que sim, um curso inicial de Análise Matemática porque é uma coisa útil, não só para licenciatura mas para várias áreas do ensino superior.
(Ent. Elon – nov/99)

À primeira vista, podemos comparar esta crítica do Prof. Elon com a denúncia da farsa do ensino feita pelo Prof. Baldino (cf. item 7.3), na medida em que ambas estão relacionadas ao ensino de matemática na universidade, mesmo que a crítica do Prof. Baldino seja estendida a todo o sistema de ensino universitário. Entretanto, ao retomarmos a fala do Prof. Elon, observamos que sua crítica está diretamente relacionada à ausência de conteúdos específicos nos cursos de licenciatura que ele considera fundamentais na formação de professores que irão atuar nos ensinos fundamental e médio, destacadamente, análise combinatória e trigonometria:

... o objetivo primordial da licenciatura é formar professores da escola fundamental, do ensino básico, seja fundamental ou seja médio. É formar professores do ensino básico. E como tal, a coisa mais importante é que o professor tenha, durante o seu curso de licenciatura, sido treinado nos conceitos e conteúdos da matéria que ele vai ensinar, porque é muito comum, é praticamente a regra geral, que o professor saia da escola sem nunca ter visto a maior parte das coisas que ele vai ensinar.
(Ent. Elon – nov/99)

Ninguém discorda que o professor deve ter um domínio da matéria que irá ensinar. Onde não existe consenso é em relação à forma e ao conteúdo dessa formação. Por exemplo, o que quer significar o Prof. Elon, quando diz que o licenciando deve ser “treinado nos conceitos e conteúdos da matéria que vai ensinar” ? Se for um domínio

formal e procedimental da matéria, por mais exigente que seja, envolvendo muitos exercícios e problemas a resolver, não podemos concordar com o Prof. Elon, pois este “treinamento” pouco contribuirá à formação profissional do professor. Porém, se for um conhecimento “da” e “sobre” a matéria desde a perspectiva de seu ensino, como o defendem BLANCO & RUIZ (1995), então, certamente, esta será uma formação profissional relevante, formação esta, que visa um domínio múltiplo e flexível dos saberes a ensinar. Um desses domínios é a capacidade de tratar / explorar analiticamente os conceitos matemáticos.

Esta concepção de conhecimento profissional e de formação do professor implica que repensemos o papel de algumas disciplinas, dentre elas a Análise, no currículo dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Mas, antes de nos enveredarmos pelo caminho aberto por esta discussão, retomemos a análise da perspectiva dos demais depoentes, que fazem coro com o Prof. Elon quando este defende a Análise Matemática como disciplina fundamental para a formação matemática do futuro professor. Examinemos alguns trechos de suas falas:

... eu acho fundamental o licenciando passar por isso, passar por um curso de Cálculo, passar por uma introdução à Análise, um curso inicial de Análise de seis meses onde ele vai ter teoria das convergências, das seqüências, dos limites. Seria importante ele ter também uma introdução a números reais e a números hiper-reais, de alguma maneira ... Eu acho que pra ensinar com liberdade tem que passar por esse tipo de coisa. Senão, ele vai ser um brinquedo. Ele vai ser brinquedo dos autores de livro-texto, ele não vai ter liberdade. (Ent. Baldino – ago/98)

Eu acho que é importante, não é que ele vai ensinar, mas eu creio que o professor que sabe um pouco mais do que aquilo que ensina, ele é melhor professor, ele tem mais segurança. Se ele faz um curso de Análise e ele é forçado a raciocinar, a ver aquelas coisas mais delicadas, eu acho que isso mentalmente para ele, para a formação dele é importante. O que não quer dizer que ele vai utilizar aquilo. Tem uma série de coisas que a gente

estuda e que nunca utiliza. Mas faz parte da formação da pessoa. (Ent. Djairo – out/99)

... o aluno da licenciatura precisa ser informado sobre vários fatos da Análise. Não tanto quanto um aluno do bacharelado. Então eu acho que, para a licenciatura é necessário. E quando eu fiz desta, condição no Provão de Matemática lá do MEC e uns colegas que lá estiveram comigo, todos concordamos que é preciso uma dose de Análise pra licenciatura, mas uma dose moderada e uma apresentação também moderada. Nós estamos estudando a possibilidade de fazer um texto mais direcionado pro pessoal da licenciatura. (Ent. Ávila – nov/98)

Entendemos o posicionamento defendido pelo Prof. Baldino de que conhecimento é poder, poder de tomar decisões, poder de discernimento e de autonomia. Também reconhecemos que a formação de um professor deve contemplar a multiplicidade de conhecimentos como se pronuncia o Prof. Djairo e ainda, concordamos com o Prof. Ávila ao destacar a necessidade de uma apresentação diferenciada da Análise para a licenciatura. Entretanto, não enxergamos tais idéias como um avanço real no sentido de se reestudar / repensar o papel da Análise na formação do professor de matemática.

Mas quais seriam os caminhos a serem trilhados rumo a uma reestruturação dos cursos de Análise para alunos de Licenciatura em Matemática ?

Uma contribuição neste sentido vem do trabalho realizado por SOARES; FERREIRA & MOREIRA (1999) que (re) discute o papel de conteúdos, como é o caso dos números reais, na formação do professor de matemática. A metodologia de pesquisa envolveu a aplicação de questionários a alunos dos cursos de Matemática da UFMG e da UFSC, possibilitando a análise das imagens conceituais construídas pelos alunos ao longo de sua experiência escolar, na perspectiva de TALL & VINNER (1981) (cf. item 2.4), que entendem as imagens conceituais como sendo os processos e imagens mentais relacionados à aquisição de um conceito.

Classificando como ingênua a suposição de que os alunos vão abandonar suas imagens, construídas ao longo de sua vida escolar, “para substituí-las de imediato por uma

definição formalmente correta apresentada pelo professor de um curso de Análise na universidade”, os autores acreditam que os alunos tendem a modificar suas imagens geralmente de maneira distorcida pela definição formal apresentada. Logo, para SOARES; FERREIRA & MOREIRA (1999):

A questão que se impõe, então, na formação matemática do futuro professor, é o estabelecimento de uma seqüência didático-pedagógica eficaz que substitua a seqüência puramente lógico-formal usualmente adotada. Para a elaboração dessa seqüência didática é fundamental conhecer e analisar as imagens que os alunos possuem sobre os conceitos a serem trabalhados. (pp. 97-98)

Mas os autores reconhecem que este procedimento não tem sido usualmente comum em se tratando da formação matemática dos alunos do curso de licenciatura, pois proceder desta forma implica fundamentalmente: *em reconhecer, no processo de ensino-aprendizagem da matemática, não somente aquilo que se vai ensinar, mas também aqueles que se empenham em aprender (Ibidem, p. 98)*

Esta constatação coincide com a perspectiva de TALL (1985) que defende o estudo dos alunos como o objeto de pesquisas que pretendem investigar problemas relacionados ao ensino de Análise, que não são facilmente resolvidos através de uma simples reorganização de conteúdos e metodologias.

Nas conclusões de seu trabalho, os autores se sentem desafiados a trabalhar com o universo de representações dos alunos como forma de auxiliá-los na reelaboração de sua intuição sobre os elementos conceituais que certamente estarão presentes em sua prática pedagógica. Em outras palavras, SOARES; FERREIRA & MOREIRA (1999) afirmam:

... aprofundar a formação matemática do professor é, na nossa concepção, aprofundar a sua visão intuitiva dos conceitos relevantes dentro da sua prática. Isso significa uma superação tanto da abordagem

formal axiomática dos cursos de Análise como daquela encontrada nos livros didáticos escolares ... (Ibidem, p. 116)

Ao confrontar os resultados obtidos pela nossa pesquisa com aqueles obtidos por SOARES & FERREIRA & MOREIRA (1999), reafirmamos que esta superação só será possível mediante a superação da dicotomia entre rigor e intuição, também no ensino de Análise, tradicionalmente formalista. E esta relação só será superável, caso entendamos que não apenas o rigor, está presente no processo de construção dos conceitos em Análise, suposição por nós já levantada e refutada ao longo deste trabalho. Também a intuição desempenha um papel fundamental neste processo, uma vez que a mesma permeia as imagens conceituais construídas pelos alunos, mesmo antes de iniciar o curso de Análise.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando iniciamos este estudo, havíamos assumido como hipótese de trabalho que o problema do ensino do Cálculo e da Análise estava relacionado à existência de uma relação desigual e dicotômica entre rigor e intuição. Refletir, investigar e, então, melhor compreender essa relação, passou, portanto, a ser um dos objetivos deste estudo. Um outro objetivo, decorrente do primeiro, era compreender melhor, o lugar e o papel do ensino de Cálculo e Análise na formação matemática do professor de matemática.

Para melhor direcionar e delimitar nosso foco de estudo, havíamos elaborado a seguinte questão de investigação:

Como a relação entre rigor e intuição encontra-se nos manuais didáticos de Cálculo e de Análise, como ela é percebida / enfrentada pelos seus autores e pesquisadores e quais são suas possíveis implicações na formação matemática do professor ?

A análise dos livros didáticos de Cálculo e Análise realizada no Capítulo 5 e a análise das entrevistas com professores com larga experiência profissional enquanto pesquisadores, professores e produtores de materiais didáticos no campo do ensino do Cálculo e da Análise, forneceram alguns resultados a partir dos quais podemos, à guisa de conclusão, delinear algumas respostas àquela questão.

O primeiro conjunto de respostas diz respeito à forma como a intuição e o rigor encontra-se presente nos manuais de Cálculo e Análise. A análise realizada no Capítulo 5 mostra que **estes manuais refletem um relação desigual e dicotômica entre rigor e intuição na apresentação dos conteúdos, ocorrendo uma primazia do primeiro elemento deste par tensional em detrimento do segundo.**

De fato, dos seis livros analisados de ensino de Cálculo para o ensino superior, apenas dois (ÁVILA, 1998 e EDWARDS & PENNEY, 1998) não utilizam a abordagem rigorosa dos conceitos de limite e continuidade, seguindo a tradição ϵ -delta weierstrassiana. Com isso, o “enfoque clássico intuitivo” (LEITHOLD, 1982), que todos

defendem para o ensino de Cálculo, é disfarçado sob a máscara de umas poucas figuras e gráficos que rapidamente perdem espaço para uma sequência de teoremas e propriedades, os quais, obviamente, devem ser demonstrados ou têm sua demonstração deixada a cargo do leitor.

Em síntese, podemos dizer que a proposta de ensino de Cálculo apresentada pelos livros didáticos é, ainda, predominantemente formalista e procedimental.

De fato, a grande quantidade de exercícios relacionados ao cálculo de limites e verificação das condições de continuidade de funções demonstra, no fundo, um viés procedimental que deveria estar fundamentado num conhecimento conceptual, segundo WHITE & MICHELMORE (1996).

Lembramos que, na prática da sala de aula do Cálculo, tanto o procedimental como o conceptual vêm carregados de aspectos intuitivos que devem ser explorados pelos professores e alunos que constroem estes conhecimentos. Cabe aos professores, então, refletir sobre uma melhor utilização, como referência para suas disciplinas, de livros que claramente apresentam uma abordagem rigorosa dos conteúdos e raramente exploram situações-problema, exemplos, contra-exemplos e ilustrações que poderiam produzir significados e melhor compreensão dos conceitos.

Já um exame dos livros de Análise, aqui destacados, mostra que as diferenças entre suas abordagens passam por uma maior ou menor utilização de noções topológicas e pela alteração na ordem de apresentação ou na natureza de alguns conteúdos. Afinal de contas, como afirma o próprio Prof. Ávila, um de nossos entrevistados, “rigor e formalismo são ingredientes essenciais de um curso de Análise”.

De fato, se por um lado, com a Aritmetização da Análise chegou-se à “Idade do Rigor” (BOYER, 1974), mais de um século depois é necessário reconhecer a existência de diferentes “níveis de rigor” (GRATTAN-GUINNESS, 1997). Isso, no contexto da prática docente universitária, significa que o “rigor acadêmico”, dominante no mundo das publicações e apresentações de trabalhos, artigos científicos e outros, não pode ser transposto de uma maneira direta, mecânica ou simplista para o ensino. Essa transposição, na verdade, deveria proporcionar uma exploração múltipla e flexível (LLINARES & SÁNCHEZ, 1996) dos conceitos, de modo que os mesmos sejam intuitivamente significativos e compreensíveis, tendo um tratamento de validação e demonstração (isto é,

rigor) compatível ao contexto de ensino (instituição; Licenciatura ou Bacharelado; conhecimento prévio dos alunos; etc), numa perspectiva muito próxima daquela defendida por Baldino.

Neste sentido, concordamos com Ávila quando este afirma que os manuais de Análise, hoje em circulação no Brasil, não são adequados aos cursos de Licenciatura em Matemática e, por isso, tem um projeto de elaborar um material de Análise especificamente voltado para a formação matemática do professor de matemática. Essa adequação, entretanto, não deve ser entendida como afrouxar, facilitar ou atenuar o curso de Análise. Ao contrário, significa proporcionar uma outra abordagem, igualmente profunda, só que sob uma outra concepção de conhecimento. Uma abordagem que permita uma exploração múltipla e flexível (envolvendo aspectos formais e não-formais) dos conceitos e idéias matemáticas, e não sob um enfoque teórico único, por melhor que este seja. Enquanto isso não acontecer, o livro de CARAÇA (1951), embora também limitado, parece, dentre todos os analisados, aquele que melhor atende a esta expectativa, pois explora os conceitos matemáticos sob diferentes ângulos: o histórico-filosófico, o cultural e o social.

Um segundo conjunto de respostas à nossa questão de investigação diz respeito ao **modo como os profissionais brasileiros, com larga experiência em pesquisa, ensino e produção de material didático para o ensino de Cálculo e Análise, percebem e enfrentam a relação entre rigor e intuição no ensino da matemática.**

Segundo mostram os resultados obtidos nos Capítulos 7 e 8, todos os nossos depoentes apresentam, embora de modo diferente, uma visão que relativiza e flexibiliza essa relação.

Com efeito, enquanto três dos nossos entrevistados (Baldino, Djairo e Elon) parecem reconhecer, de modo semelhante a GRATTAN-GUINESS (1997), a existência de diferentes níveis de rigor, e provavelmente também de intuição, um (Ávila) parece perceber a intuição e o rigor como entidades, talvez dicotômicas, que se complementam, as quais aconteceriam em momentos diferentes: *O rigor é importante numa fase... de maior amadurecimento do aluno, quando ele já tem um espírito crítico...* (Ent. Ávila – nov/98).

Para Ávila, a intuição sempre deveria preceder o rigor, por isso, em seu Livro de *Introdução ao Cálculo*, a conceituação intuitiva de derivada precede uma conceituação mais rigorosa de limite e continuidade.

Os dois depoentes, que apresentaram uma visão mais relativista de rigor, foram Baldino e Djairo. Entretanto, se, de um lado, para Djairo, o rigor varia ao longo do tempo, como mostra através da história do Cálculo e da Análise ou ao longo dos anos de escolarização, de outro, para Baldino, o rigor varia de acordo com o contexto em que os conceitos matemáticos são trabalhados. Ou seja, para Baldino, o rigor com que se prova ou justifica uma afirmação matemática num curso de Cálculo para a Engenharia ou para a Física é, normalmente, diferente daquele utilizado no Bacharelado em Matemática ou na Licenciatura. Ou seja, para ambos, haveriam diferentes níveis de rigor e caberia ao professor atingir ou não determinado nível, tendo em vista os conhecimentos prévios dos alunos e a finalidade da disciplina na formação matemática do futuro profissional.

Elon, ao criticar o uso e abuso dos épsilons e deltas num curso de Cálculo ministrado a sua filha, quando fazia Biologia, parece também reconhecer a existência de diferentes níveis de rigor, sobretudo quando aceita ou recomenda, dependendo do contexto em que o curso se realiza, diferentes modos de justificar ou provar. Tal flexibilidade, entretanto, parece ser reduzida quando trata-se, por exemplo, de um curso de Análise, o qual deveria privilegiar o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo. Assim, poderíamos dizer que Ávila e Elon tendem a apresentar um conceito não-dialético da relação entre rigor e intuição. Isto, de certa forma, pode ser evidenciado quando afirmam que o curso de Cálculo deve privilegiar a intuição e a Análise o rigor.

Face a essas considerações de Elon e Ávila, perguntamos: Não existiriam também, diferentes níveis de rigor no ensino intuitivo de Cálculo ou, não existiriam diferentes níveis de rigor e intuição num curso rigoroso de Análise ? É possível ou recomendável isolar o raciocínio hipotético-dedutivo de outras formas de raciocinar matematicamente, como, por exemplo, por indução, abdução ou analogia ? Até que ponto estas outras formas de raciocinar, mais ligadas á intuição que ao rigor, não representam alternativas férteis para a formulação de novas hipóteses e proposições ?

Um aspecto que nos chamou atenção nas entrevistas, sempre que se falava de rigor no ensino da matemática, é a identificação feita, pelos depoentes, entre ensino rigoroso com

ensino formalista. Talvez a visão dicotômica entre rigor e intuição, expressa em vários momentos por alguns depoentes, seja decorrente dessa identificação. Entendemos, com base em FIORENTINI (1995), que um ensino formalista aceita como legítimas, apenas algumas formas de rigor no tratamento dos conceitos e expressões matemáticas – aquelas que se fundamentam no modelo euclidiano ou no modelo hilbertiano ou bourbakista.

O modelo euclidiano consiste na sistematização das idéias matemáticas em teoremas e corolários, os quais são deduzidos a partir de leis lógicas e sob um tratamento do tipo hipotético-dedutivo a partir de axiomas / postulados e definições. O modelo bourbakista, por outro lado, é constituído a partir do aperfeiçoamento do modelo euclidiano, o qual passou a ser sistematizado sob o fundamento das estruturas algébricas e da linguagem da teoria de conjuntos. Perguntamos: Não existiriam outras formas de rigor matemático, seja em Cálculo, seja em Análise, e que não se encaixam nesses modelos formalistas ? Os exemplos apresentados pelos nossos depoentes, de modos alternativos e aceitáveis de produzir uma demonstração ou justificação matemática, mostram que sim.... Então, não faz sentido identificar, total e absolutamente, ensino rigoroso com ensino formalista.

Entretanto, existiu uma forma de rigor que foi recusado por todos os depoentes: o ensino de Cálculo fundamentado no conceito weierstrassiano de limites e continuidade, com ϵ s e δ s. Isso já representa um pequeno avanço. Mas, por outro lado, perguntamos: Este tipo de rigor com ϵ s e δ s, continua necessário para um curso de Análise visando à formação matemática do professor do ensino fundamental e médio ? A proposta da Análise não-standard, formulada por Baldino, parece mostrar que não. Mas, acreditamos, há ainda um enorme campo de estudo e experiência a ser desenvolvida em torno dessa questão. Essa é uma, dentre outras questões, a serem por nós estudadas, após a conclusão do doutorado.

Um terceiro conjunto de respostas à nossa questão de investigação refere-se às **possíveis implicações do modo como é concebida e tratada a tensão entre rigor e intuição na formação matemática do professor de matemática do ensino fundamental e médio.**

Em primeiro lugar, cabe destacar que os nossos entrevistados foram unânimes em considerar a Análise um curso fundamental à formação matemática do professor de matemática. Entretanto, não houve concordância e consistência nas falas dos depoentes com relação à forma como essa disciplina poderia ser melhor desenvolvida, tendo em vista a finalidade de formar o professor de matemática.

Elon, por exemplo, justifica de maneira simplista, dizendo que a Análise Matemática representaria uma forma de se habituar o futuro professor com o método dedutivo. Perguntamos: Esse seria o principal objetivo do ensino da Análise ? Por trás deste método, não existiria um conteúdo que precisa ser trabalhado e explorado conceitualmente ?

Entretanto, há que se ter cuidado, segundo Ávila, que essa exploração conceitual não seja prejudicada pela escolha de um método rigoroso-formal de tratamento das idéias. Essa preocupação de Ávila reflete-se no fato dele não “*estar totalmente satisfeito com o seu livro de Introdução à Análise*” para os cursos de formação do professor de matemática e estar, no momento, empenhado em escrever um outro livro de Análise, destinado especificamente aos alunos de Licenciatura em Matemática.

Quanto ao Cálculo, todos são unânimes em afirmar que este deve ser um curso menos formal, baseado fortemente em aplicações e em situações-problema, fazendo o pêndulo entre intuição e rigor pender mais para o lado da intuição sem que, com isso, deixe de existir algum tipo de rigor, de preferência não-formal (isto é, sem épsilons e deltas, por exemplo).

O nosso estudo, em síntese, parece mostrar que intuição e rigor são dimensões interdependentes, uma não podendo existir sem a outra, embora possamos, equivocadamente, privilegiar uma delas em detrimento da outra. Ambas estão presentes no ensino de Cálculo e de Análise, onde cumprem papéis importantes e complementares na formação do pensamento e do conhecimento diferencial, integral e analítico, tanto do professor de matemática quanto do matemático.

Mas, para que isso de fato aconteça, existe ainda um grande caminho a ser construído pelos docentes formadores de professores. Em primeiro lugar há que se desenvolver um curso de Análise de acordo com as condições intelectuais dos alunos e seus conhecimentos prévios. Se o pensamento analítico implica numa mudança no modo de

conceber e encarar o conhecimento matemático, essa ruptura, como nos mostra Baldino, não pode acontecer sem a busca de uma continuidade com a forma como o aluno pensa e trata o conhecimento matemático.

O estudo desenvolvido por SOARES; FERREIRA & MOREIRA (1999) parece apontar para essa direção, na medida que defendem, para a formação do professor de matemática, a elaboração de sequências didático-pedagógicas eficazes à mudança conceitual, substituindo, assim, as tradicionais seqüências lógico-formais. Mas, para que essas novas seqüências possam efetivamente problematizar ou ressignificar pseudo-conceitos é preciso que, primeiramente, se investigue e analise as imagens conceituais que os alunos trazem quando ingressam na Licenciatura em Matemática.

Esse processo de problematização, ressignificação e sistematização de conceitos a partir das imagens conceituais dos alunos lembra, de certa forma, a noção de rigor de PERMINOV (1988), especialmente quando ele afirma que o *rigor* pode ser visto como um *processo de conceptualização de intuições*. Nesse processo, umas são mantidas, outras não. Isto significa que nenhuma categoria de intuição pode, de antemão, ser desprezada. O rigor pode e deve complementar a intuição, nunca sobrepujá-la.

Um exemplo relacionado a este processo dialético e complementar entre intuição e rigor pode ser encontrado na Tese de Doutorado de NACARATO (2000). A autora descreve um caso em que uma professora, que diferenciava o cilindro do círculo apenas pela existência de uma altura, entra em conflito cognitivo quando um aluno questiona se uma moeda é ou não um cilindro. A professora precisou estabelecer uma análise mais cuidadosa sobre o referido conceito (e, portanto, rigorosa), permeada pela experiência de empilhar moedas (ou rodela de papel) para, então, ressignificar seu conceito anterior, compreendendo, finalmente, que o cilindro diferenciava-se do círculo por possuir uma terceira dimensão – a altura – por menor que ela possa ser.

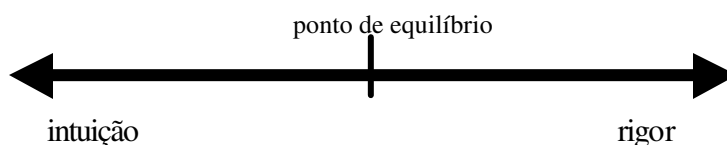
O Cálculo desempenha, simultaneamente, o papel de ponte e de síntese entre um pensamento matemático mais elementar (relacionado a conteúdos como números e funções) e um pensamento avançado mais avançado (relacionado a conteúdos como derivadas e integrais). Entretanto, isto não quer dizer que no ensino de Cálculo deve acontecer a transição de um pensamento mais intuitivo para um pensamento mais rigoroso.

O rigor, num outro nível, se faz presente na constituição de conceitos elementares, assim como a intuição, sob múltiplas faces, permeia o desenvolvimento de idéias avançadas.

A Análise, por sua vez, desempenha o papel de desencadeadora da autonomia intelectual do futuro professor, por ampliar, flexibilizar e diversificar seu conhecimento específico dos conteúdos do Cálculo (FIORENTINI; SOUZA JÚNIOR & MELO, 1998). Mesmo assim, acreditamos que é fundamental, neste processo, que se leve em consideração as concepções espontâneas e imagens conceituais dos alunos relacionadas aos conteúdos, os quais deverão ser sistematizados mediante um processo de rigor compatível, podendo este ser lógico-formal ou exploratório, como no caso da moeda e do cilindro.

Ao finalizar este estudo, gostaríamos de rever nossa metáfora anterior do pêndulo para representar a tensão entre intuição e rigor. O movimento pendular é natural, depende basicamente da gravidade e após um número finito de oscilações ele tende a estabilizar-se numa posição de equilíbrio quando para de oscilar. Além disso, quando em movimento, ele sempre pode atingir seus pontos extremos. O mesmo não acontece com a tensão entre rigor e intuição no ensino da matemática. Em nenhum momento podemos conseguir, por mais que o professor tente, um estado de puro rigor ou um estado de pura intuição.

Talvez a melhor metáfora, que agora se nos apresenta, seja o de uma reta com dupla seta, onde, numa extremidade pode-se representar o rigor e, na outra, a intuição:



É claro que o ponto ideal é o do equilíbrio, mas este ponto, na verdade, é difícil de ser conseguido no ensino. O trabalho do professor pode situar-se em qualquer um dos pontos dessa reta contínua. O professor tem autonomia para deslocar-se para qualquer ponto dessa reta. Se o deslocamento tenderá a ser, com mais freqüência, para a esquerda (intuição), isso pode denotar uma preocupação pedagógica mais voltada à produção de sentidos e significados e à formação de conceitos. Se o deslocamento for, com mais freqüência, para a direita (rigor), isso poderá significar uma preocupação e uma ação

pedagógica mais sintático-procedimental. Essas tendências, mais à direita ou à esquerda, dependem, de um lado, das concepções, valores e conhecimentos do professor e, de outro, das condições intelectuais dos alunos e materiais (aqui, entrariam os livros didáticos) da instituição.

Com base em PERMINOV (1988), também é possível estabelecer uma outra metáfora para a relação entre a intuicionalização, identificada como um movimento de estabelecimento de raciocínios plausíveis (às vezes verdadeiros, às vezes falsos) e a rigorização, identificada como um movimento de conceptualização de intuições. No plano de construção do conhecimento matemático, observamos que:

- 1) O movimento de rigorização não pode iniciar-se antes do movimento de intuicionalização;
- 2) O rigor pode ser concebido como uma grandeza que varia em função da intuição, sendo esta última uma variável independente, enquanto que o rigor é uma variável dependente;
- 3) Como nenhum movimento de intuicionalização se processa em um estado de ausência absoluta de rigor, quando o movimento de intuicionalização se inicia, ele já atua sobre o movimento de rigorização, a partir de um certo patamar diferente de zero.

Então, esta metáfora funcional pode ilustrar o modo como o par tensional rigor – intuição pode ser concebido / tratado no processo de ensino – aprendizagem, não apenas do Cálculo e da Análise, mas também de qualquer campo da matemática e em qualquer nível de ensino. O modelo visual correspondente a esta metáfora se aproximaria, então, de uma curva de uma função $R = f(I)$, em um gráfico cartesiano.

Por fim, poderíamos, ainda, pensar em representar a relação entre rigor e intuição através de um intervalo aberto sobre a reta real:

$$\text{ponto de equilíbrio}$$

$$(\text{intuição} \quad ; \quad \text{rigor})$$

Neste caso, a movimentação ocorre através de um deslocamento do intervalo no “corpo ordenado completo” do ensino. Como o intervalo é “aberto”, não existem “mínimo e máximo” desta relação. Entretanto, como o intervalo é “limitado”, existem “supremo e ínfimo”, cuja localização na “reta real” do ensino varia de acordo com seus objetivos, fins, e valores e, inegavelmente, é determinada, pela metodologia / pedagogia que o professor encaminha durante o processo de ensino e aprendizagem.

Esta, acreditamos, é a múltipla e flexível compreensão epistemológica que nós, professores de Cálculo e Análise, devemos assumir e demonstrar em nossa prática pedagógica, como forma de superar a abordagem excessivamente rigorosa do ensino tradicional universitário para, só então, articular uma melhor formação do professor de matemática. Que não nos desviemos desta compreensão e que assumamos o papel que nos é devido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDRÉ, M. E. D. (1978). *A Abordagem Etnográfica: uma nova perspectiva na Avaliação Educacional*. Tecnologia Educacional, 7 (24) 9-12.
- ABRANTES, P. (1995). *Projetos, Matemática e Aprendizagem*. Anais do II Congresso Brasileiro de Ação Pedagógica. Belo Horizonte, 21-24.
- ARTIGUE, M. (1991). *Analysis*. Advanced Mathematical Thinking, Capítulo 11, 167-198. Londres: Kluwer Academic Publisher.
- _____ (1998). *L'evolution des problematiques em Didactique de l'Analyse*. Recherches em Didactique des Mathématiques, 2 (18) en prensa.
- ARTIGUE, M.; DOUADY, R. (1993). *A Didática da Matemática na França*. Quadrante, 2 (2).
- BACHELARD, G. (1971). *A Epistemologia*. Rio de Janeiro: Edições 70.
- BAKAEV, N. (1996). *A concept of function limit: two points of view*. Anais do 8th International Congress on Mathematical Education. Sevilha, 196.
- BALDINO, R. R. (1994). *Assimilação Solidária onze anos depois*. Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática. UNESP – Rio Claro.
- _____ (1995). *Cálculo Infinitesimal: passado ou futuro ?* Temas & Debates, 8 (6) 6-21.
- _____ (1997). *A Ética de uma definição circular de número real*. Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática. UNESP – Rio Claro.

- BALDINO, R. R.; CABRAL, T. C. B. (1997). *Erro do significado ou significado do erro ?* I Simpósio de Educação e Ensino. UNESP – São José do Rio Preto.
- BALDINO, R. R. et al (1995). *Do coeficiente angular da reta ao conceito de Diferencial: crítica ao ensino atual e proposta alternativa.* V Encontro Nacional de Educação Matemática – SBEM, Aracaju.
- BARKER, S. F. (1976). *Filosofia da Matemática.* Rio de Janeiro: Zahar Editores.
- BARON, M. E.; BOS, H. J. M. (1985). *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo.* Brasília: Universidade de Brasília.
- BARRETO, A. (1995). *O Ensino de Cálculo I nas universidades.* Informativo da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, (6), 4-5.
- BECKER, F. (1995). *A Epistemologia do Professor.* Anais do II Congresso Brasileiro de Ação Pedagógica. Belo Horizonte, 27-28.
- BICUDO, I. (1992). *Análise Não-Standard.* Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, (8) 60-67.
- BICUDO, M. A. V. (Org.) (1987). *Educação Matemática.* São Paulo: Moraes.
- BLANCO, L.; RUIZ, C. (1985). *Conocimiento didáctico del contenido y formación del profesorado.* Blanco y Mellado (Eds.) *La formación del profesorado de ciencias y matemáticas en España y Portugal.* Badajoz: Depto. De las Ciencias Experimentales de las Matemáticas.
- BRITO, A. J.; CARDOSO, V. C. (1997). *Uma abordagem histórico-pedagógica dos fundamentos do Cálculo Diferencial: reflexões metodológicas.* Zetetiké, 5 (7) 129-144.

BOYER, C. B. (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover.

_____ (1974). *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blücher.

_____ (1994). *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Cálculo*. São Paulo: Atual.

BRUYN, S. (1966). *Human Perspective in Sociology*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice – Hall.

CABRAL, T. C. B. (1992). *Vicissitudes da Aprendizagem em um curso de Cálculo*. Dissertação de Mestrado. UNESP – Rio Claro.

CANTORAL, R.; FARFÁN, R. M. (1998). *Pensamiento y language variacional em la introducción al análisis*. Epsilon, 14 (42) 353-369.

CARVALHO, D. L. (1990). *Metodologia do Ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez.

CASSOL, M. E. D. (1997). *Produção de Significados para a Derivada: Taxa de Variação*. Dissertação de Mestrado – UNESP – Rio Claro.

CORNU, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite, conceptions et obstacles*. Tese de Doutorado – Université Scientifique et Médicale – Grenoble.

D'AMBROSIO, U. (1979). *Nuevas tendencias em la enseñanza del Cálculo*. Matemática y Enseñanza, México, (11) 43-56.

_____ (1996). *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus.

- DAVID, M. M. M. S.; LOPES, M. P. (1998). *O papel do professor no desenvolvimento do pensamento flexível de seus alunos em Matemática*. Encontro de Estudantes de Matemática – UFG – Goiânia.
- DAVID, M. M. M. S.; MACHADO, M. P. (1996). *Como alguns procedimentos de ensino estão contribuindo para o erro e o fracasso em Matemática*. Educação e Matemática, 40, 25-29.
- EVES, H. (1995). *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas.
- FIGUEIREDO, V. L. X.; COSTA, S.; GROU, M. A. (1995). *Mechanical Curves – A kinematic greek look trough computer*. Campinas, IMECC / UNICAMP.
- FIORENTINI, D. (1995). *Alguns modos de ver e conceber o Ensino da Matemática no Brasil*. Zetetiké, 3 (4) 51-60.
- FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M.; PINTO, R. A. (1999). *Saberes da experiência docente em Matemática e educação continuada*. Quadrante, Associação de Professores de Matemática de Portugal, em prensa.
- FIORENTINI, D.; SOUZA JÚNIOR, A. J.; MELO, G. (1998). *Saberes docentes: Um desafio para acadêmicos e práticos*. Geraldi, C. M. G.; Fiorentini, D.; Pereira, E. M. A. (orgs.) *Cartografias do Trabalho Docente: Professor (a)-pesquisador (a)*. Campinas: Mercado das Letras.
- FISCHBEIN, E. (1978). *Intuition and Mathematical Education*. Osnabrucker Schriften zur Mathematik, 1, 148-176.
- GARNICA, A. V. M. (1995). *Fascínio da Técnica, Declínio da Crítica: Um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática*. Tese de Doutorado. UNESP – Rio Claro.

- GAUTHIER, C. et al (1998). *Por uma teoria da pedagogia: Pesquisa contemporânea sobre o saber docente*. Trad. Francisco Pereira. Ijuí: UNIJUÍ.
- GIMENO SACRISTÁN, J. (1998). *O currículo: Uma reflexão sobre a prática*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- GONÇALVES, T. O. (2000). *Formação e Desenvolvimento Profissional de Formadores de Professores: O caso dos professores de Matemática da UFPa*. Tese de Doutorado. UNICAMP – Campinas.
- GRABINER, J. (1981). *The origins of Cauchy's rigorous Calculus*. Cambridge, Mass.: M. I. T. Press.
- _____ (1983). *O conceito mutante de mudança: A derivada de Fermat a Weirstrass*. Mathematics Magazine 56 (4) 195-206.
- GRATTAN-GUINNESS, I. (1970). *The development of the foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. Cambridge, Mass.: M. I. T. Press.
- _____ (1997). *O que foi e o que deveria ser o Cálculo ?* Zetetiké, 5 (7) 69-94.
- GRAY, E. M.; TALL, D. O. (1993). *Success & Failure in Mathematics: The flexible meaning of symbols as process and concept* . Mathematics Teaching, 142, 6-10.
- HIEBERT, H. (Ed.) (1986). *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- KEISLER, H. J. (1976). *Elementary Calculus and foundations of Infinitesimal Calculus*. Boston: Prindle, Weber and Schmidt.
- LAKATOS, I. (1978). *A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações*. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

- LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. E. (1997). *The metaphorical structure of Mathematics: sketching out cognitive foundations for a mind-based Mathematics*. L. D. English (Ed.). *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images*, Capítulo 2, 21-89. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- LARROSA, J. (1998). *La experiencia de la lectura: Estudios sobre Literatura y Formación*. Barcelona: Laertes S. A.
- LLINARES, S.; SÁNCHEZ, V. (1996). *Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de primaria*. J. Gimenez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Capítulo 4, 95-118. Granada: Comares.
- LOYES, C. C. (1993). *La Matematica: creación y descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas.
- MIGUEL, A. (1997). *As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores*. *Zetetiké*, 5 (8) 73-105.
- NACARATO, A. M. (2000). *Educação continuada sob a perspectiva da pesquisa-ação: Currículo em ação de um grupo de professoras ao aprender ensinando geometria*. Tese de Doutorado. UNICAMP – Campinas.
- PATTON, M. Q. (1990). *Qualitative Educacion Methods*. Capítulo 9. California: Sage Publications.
- PERMINOV, V. Y. (1988). *On the reliability of mathematical proofs*. *Revue Internationale de Philosophie*, 42 (167) 500-508.
- PIERPONT, J. (1899). *On the Arithmetization of Mathematics*. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 394-406.

- PINTO, M. M. F. (1998). *Students Understanding of Real Analysis*. Tese de Doutorado. University of Warwick – England.
- PINTO, M. M. F.; GRAY, E. M. (1998). *Difficulties teaching Mathematical Analysis to non-specialists*. Encontro do PME – Recife.
- POINCARÉ, H. (1913). *The Foundations of Science*. New York: The Science Press.
- REZENDE, W. M. (1994). *Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite*. Dissertação de Mestrado. USU – Rio de Janeiro.
- SAD, L. A. (1998). *Cálculo Diferencial e Integral: Uma abordagem epistemológica de alguns aspectos* . Tese de Doutorado. UNESP – Rio Claro.
- SCHEIBE, L. (1987). *A Subestimação do Pedagógico no Trabalho do Docente Universitário*. Tese de Doutorado. PUC – São Paulo.
- SCHULMAN, L. S. (1986). *Those who understand: the knowledge growths in teaching*. Educational Researcher, February, 4-14.
- SIERPINSKA, A. (1985). *Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite*. Recherches em Didactique des Mathématiques, 1 (6) 5-67.
- SOARES, E. F. E.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. (1999). *Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura*. Zetetiké, 7 (12) 95-117.
- SOUZA JÚNIOR, A. J. (2000). *Trabalho Coletivo na Universidade: Trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral*. Tese de Doutorado. UNICAMP – Campinas.
- TALL, D. O. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Londres: Kluwer Academic Publisher.

TALL, D. O. (1985). *Cognitive difficulties in learning Analysis*. Mathematical Association Committee on University Mathematics Teaching. University of Warwick – England.

_____ (1991). *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking*. Advanced Mathematical Thinking, Capítulo 1, 3-21. Londres: Kluwer Academic Publisher.

TALL, D. O.; SCHWARZENBERGER, R. L. E. (1978). *Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits*. Mathematics Teaching, 82, 44-49.

TALL, D. O.; VINNER, S. (1981). *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

TARDIF, M.; LESSARD, C.; LAHAIE (1991). *Os professores face ao saber: Esboço de uma problemática do saber docente*. Teoria e Educação, 4, 215-233.

THIOLLENT, M. (1987). *Crítica Metodológica, Investigação Social e Enquete Operária*. Capítulo 3, 79-99. São Paulo: Polis.

VASCONCELOS, M. L. M. C. (1996). *A Formação do Professor de Terceiro Grau*. São Paulo: Pioneira.

WHITE; MITCHELMORE (1996). *Procedural and Conceptual knowledge in introductory Calculus*.

WILSON, S. (1977). *The use of Ethnografic Techniques in Educational Research*. Review of Educational Research, 47 (1) 245-246

APÊNDICE

OS TRABALHOS RELACIONADOS AO ENSINO DE CÁLCULO E ANÁLISE APRESENTADOS NO ICME 8

Grupo 1) Ensino de Cálculo: experiências gerais

Uma prova de que o ensino de Cálculo tem motivado diversas pesquisas em todo o mundo foi o bom número de trabalhos que relataram diversos tipos de experiências. Apesar de não estarem diretamente ligadas às questões centrais de nossa pesquisa, optamos por relatar, em poucas palavras, as idéias básicas de cada trabalho por entender que, com isso, é possível obter uma visão geral das preocupações / questionamentos ligados ao ensino de Cálculo em todo o mundo. Passemos, então, ao relato destas experiências:

- 1) ZU-HUA, G. (China). *L'Hospital rule of a function of several variables*. O trabalho apresenta uma experiência de ensino através de uma fórmula de interpolação utilizando derivadas parciais de ordem superior, generalizando a regra de L'Hospital para funções de uma variável.
- 2) BALDINO, R. R. (Brasil). *Work and achievement grades: correlation or dispersion ?* O trabalho apresenta uma experiência com o ensino de Cálculo para o curso de Física, onde os estudantes podem escolher por desenvolver um curso baseado em limites ou infinitésimos.
- 3) ALSON, P. (Venezuela). *Uma ingeniería didáctica para la graficación de funciones reales*. O trabalho apresenta uma investigação mais detalhada de certos objetos que são utilizados de maneira informal na maioria dos cursos elementares de Cálculo: as translações horizontais e verticais das funções, que permitem a definição de uma engenharia didática (no sentido da escola didática francesa) para o ensino de gráficos de funções reais.

- 4) GROU, M. A.; COSTA, S. (Brasil). *Enseñanza del Calculo por medio de proyectos*. O trabalho apresenta uma experiência que se baseia na elaboração de projetos de aplicação que são realizados e apresentados pelos alunos. O desenvolvimento dos tópicos do Cálculo se realiza de uma forma tradicional, enfatizando os conceitos que são apresentados dentro de uma perspectiva histórica e construídos através das aplicações.
- 5) DIAZ, M. V.; POBLETE, A. (Chile). *Tipos de problemas y evaluacion de los aprendizajes em Calculo Diferencial*. O trabalho apresenta os resultados da aplicação de um teste contendo problemas de Cálculo envolvendo derivadas aplicado a estudantes de nível secundário e superior.
- 6) KIM, K. H.; KANG, O. K.; SHIN, H. S. (Coréia do Sul). *Student Difficulties in learning basic concepts of Calculus*. O trabalho mostra que as principais dificuldades na aprendizagem dos conceitos básicos de limites, derivadas e integrais e ainda, como os professores podem preparar a sequência instrucional baseando-se nessas noções errôneas por parte dos alunos.
- 7) AGARD, E.; ARDILA, A.; BEITIA, G.; CASTILLO, G.; HERNÁNDEZ, J. (Panamá). *La enseñanza del Calculo em d nivel medio*. O trabalho pretende dar a resposta a algumas dificuldades apresentadas por alunos da escola secundária, ao abordarem temas do Cálculo, no aspecto cognitivo, sem considerar outros elementos como: aspectos administrativos, metodológicos, sociais e os interesses, as atitudes e as habilidades dos professores e dos alunos.
- 8) DÍAZ, L. M.; OTEIZA, F. M. (Chile). *Preconceptos en Calculo superior*. O trabalho determina aspectos da evolução de conceitos em estudantes durante a participação de alunos e professor numa intervenção pedagógica voltada para o ensino de um conceito central do Cálculo diferencial: limite. É averiguada, ainda, a presença de obstáculos epistemológicos na formação de conceitos no Cálculo superior.

- 9) MURPHY, C. (USA). *Kinesthetic intelligence for Calculus*. O trabalho apresenta uma seleção de atividades relacionadas a conceitos do Cálculo, cujo objetivo é auxiliar o estudante a decidir quando o Cálculo pode ser aplicado em outras disciplinas do seu curso bem como analisar corretamente problemas durante o curso de Cálculo.
- 10) SOARES, R. F.; FOSSA, J. A. (Brasil). *Alternative assessment and learning Calculus*. O trabalho apresenta uma experiência no ensino de Cálculo usando técnicas que avaliam os estudantes quase que diariamente e que têm um alto poder diagnóstico de revelar noções errôneas individuais, obstáculos e barreiras na aprendizagem dos conceitos do cálculo. Algumas atividades realizadas em pequenos grupos objetivam refletir sobre o aspecto social da matemática.
- 11) FERINI-MUNDY, J.; GOROFF, D. (USA). *Evaluating and documenting Calculus reform*. O trabalho discute várias abordagens e considerações para documentar e conduzir uma avaliação qualitativa da reforma do cálculo, usando exemplos de um projeto que documenta a implementação nacional dos materiais curriculares oriundos da "Calculus Consortium" da Universidade de Harvard.
- 12) MARTÍNEZ, M. P. T. (México). *Sobre la enseñanza del Calculo*. O trabalho relata as principais atividades integrantes do Projeto "Melhoramento do Ensino de Calculo diferencial e Integral", que são: organização de ciclos de conferências sobre temas do Cálculo; organização de seminários quinzenais com os professores de Cálculo; edição de um boletim sobre temas do cálculo; implantação de mini-cursos e mesas-redondas sobre temas do Cálculo.
- 13) ESPINOZA , L. S. (Espanha). *Tecnicas naturalizadas em la enseñanza del concepto limite*. O trabalho apresenta a problemática geral da análise do pensamento do professor centrado no caso particular do ensino da noção de limite na escola secundária (alunos de 15-16 anos). O interesse maior está nos aspectos mais naturais das técnicas docentes, isto é, naqueles gestos e estratégias que o professor realiza de maneira totalmente espontânea.

- 14) SÁNCHEZ, C. G.; CONTRERAS, A. F. (Espanha). *Um estudio sobre concepciones de los alumnos de primer curso de diplomaturas técnicas em torno a la noción de límite de uma función.* O trabalho apresenta a análise das respostas de um questionário aplicado a alunos do primeiro ano de diversos cursos de Engenharia que permitiu extrair elementos de informação sobre obstáculos e dificuldades em torno da idéia de limite, que foi a base de uma investigação sobre a metodologia que o professor aplica nos primeiros cursos do ensino universitário, objetivando a realização de uma proposta nesse sentido.

Grupo 2) Ensino de Cálculo: experiências com computadores

Uma tendência inegavelmente irreversível no ensino de Cálculo e, de um modo geral, de todo o ensino de Matemática superior, é a utilização de softwares computacionais enquanto "ferramentas educacionais". As experiências relatadas foram as seguintes:

- 1) TECHAPIWAT, P. (Tailândia). *Computer assisted learning Calculus.* O trabalho apresenta um projeto chamado CLC (A Computer Laboratory in Calculus), desenvolvido através da utilização de softwares computacionais em atividades de aprendizagem de acordo com o currículo de um primeiro curso de Cálculo. Os tópicos trabalhados são classificados em três domínios: Conhecimento Conceitual, Metodologia e Problemas do Mundo Real.
- 2) VILLAREAL, M. E.; BORBA, M. G. (Brasil). *Computers and calculus: visualization and experimentation to characterize extremes of functions.* O trabalho mostra a influência de computadores na construção de conhecimento matemático, objetivando: estudar a possibilidade de uma caracterização detalhada do conceito de extremo de uma função e o conceito geométrico de derivada e a relação entre f e f' através da análise de diferentes gráficos.

- 3) FIGUEIREDO, V. L. X.; COSTA, S.; GROU, M. A. (Brasil). *Advanced Calculus students research projects through computer*. O trabalho apresenta uma experiência de ensino de Cálculo para estudantes de Engenharia de um ponto de vista construtivista através da proposta de projetos de pesquisa desenvolvidos pelos estudantes utilizando o computador.
- 4) SOUZA, L. G. S.; MOREIRA, D. T. (Brasil). *Visualizing the Calculus*. O trabalho apresenta uma nova abordagem para o ensino de Cálculo através da interação com Geometria Descritiva e da utilização de softwares adequados à visualização do Cálculo. Como resultados são observados uma melhoria no desempenho dos estudantes em Cálculo, bem como uma maior competência verificada do ponto de vista visual.
- 5) SALVADOR, J. A.; SANTOS, V. M. P. (Brasil). *Calculus and computer*. O trabalho apresenta uma investigação do impacto, efeitos e papel da utilização do computador como uma ferramenta educativa para o auxílio do ensino de Cálculo. A pesquisa foi desenvolvida com estudantes de Engenharia, Administração e Física.
- 6) BEZERRA, J. Q.; FOSSA, J. A. (Brasil). *Calculus, computers and conceptual learning*. O trabalho considera os conceitos matemáticos do Cálculo como seu aspecto fundamental, servindo de base para o desenvolvimento de técnicas e aplicações práticas. São explanadas as vantagens e as limitações da utilização do computador no conhecimento conceitual.

Grupo 3) Ensino de Análise: questões gerais

Destacaremos, agora, alguns trabalhos cujo tema central está ligado ao ensino de Análise e abordam questões relacionadas ao nosso tema de tese, tais como a relação entre o pensamento intuitivo e o pensamento lógico, a prova rigorosa e o seu papel na formação de professores de Matemática, dentre outros. Estes trabalhos são:

- 1) MASATAKA, K. (Japão). *Complementarity of intuition and logical thinking*. O trabalho demonstra a complementariedade dos pensamentos intuitivo e lógico num processo de compreensão matemática, se baseando em duas noções básicas de modelo mental e pensamento reflexivo.
- 2) GARNICA, A. V. M. (Brasil). *Rigorous proof and teacher's training*. O trabalho apresenta como questão central a investigação do significado da prova rigorosa na formação de professores de matemática. A pesquisa foi desenvolvida através de entrevistas de professores, cuja análise qualitativa, feita sob uma perspectiva fenomenológica, revelou duas categorias de análise: perspectiva técnica e perspectiva crítica.
- 3) VALVERDE, L. R. (Cuba). *Enseñar a fundamentar y demostrar*. O trabalho expõe os resultados de uma investigação realizada no ensino universitário cubano, onde se propõe um método para contribuir com o desenvolvimento da habilidade por parte dos alunos para fundamentar e demonstrar uma proposição matemática e um sistema de exercícios particularmente adequados para este fim.
- 4) FLOWER, J. (Grã-Bretanha). *Proof in higher education*. O trabalho apresenta um projeto de pesquisa desenvolvido no Institut Chichester – UK chamado "Flexible Learning Approaches in Mathematics in Higher Education", que estuda o papel da prova em cursos de graduação em Matemática e como os estudantes compreendem a prova. Apresenta ainda, as interpretações dos estudantes do formalismo do uso de linguagem lógica e suas atitudes com respeito à prova ao longo do 1º ano.
- 5) MACÍAS, T. G.; ABALLE, M. A. V. (Espanha). *Situación para el estudio y desarrollo de los útiles de prueba de los alumnos*. O trabalho apresenta uma contribuição através de situações de aprendizagem centradas na prova e um estudo das utilidades da prova que os alunos utilizam dentro dessas situações. A pesquisa é desenvolvida com futuros professores ao longo de um trimestre letivo.

- 6) PETOCZ, P.; PETOCZ, D. (Austrália). *Pattern and Proof – The art of mathematical thinking*. O trabalho apresenta a prova como uma noção central em matemática e o pensamento matemático como uma combinação de "padrão e prova" ou pensamento indutivo e dedutivo. "Pattern and Proof" é um vídeo de 25 minutos com material escrito de suporte.

Grupo 4) Ensino de Análise: questões epistemológicas

Apresentaremos, agora, os trabalhos que discutem questões relacionadas a alguns conteúdos específicos de um curso de Análise, ainda que os próprios pesquisadores não tenham se referido às suas pesquisas enquanto trabalhos especificamente voltados para o ensino de Análise. Estes trabalhos são:

- 1) NET, P. G. (Argentina) – *Obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite* – O trabalho investiga as concepções espontâneas dos alunos em relação à idéia intuitiva de reta tangente, concepções estáticas e dinâmicas, a topologia do plano real, a estrutura de retas e curvas, a noção de interior e exterior, os conceitos de distância na reta real e densidade.
- 2) BURENKOV, V. I.; TARARYKOVA, T. V. (Rússia) – *Overcoming difficulties in learning limits* – O trabalho critica a definição tradicional de limites de sequências utilizando a notação $\epsilon - N$ e apresenta uma outra definição utilizando supremos e ínfimos, demonstrando que tal definição, equivalente à tradicional, pode ser explorada pedagogicamente.
- 3) SIERRA, M. V.; GONZÁLEZ, T. A. ; LÓPEZ, C. E. (Espanha) – *Análisis de los conceptos de límite y continuidad en los libros de textos de Bachillerato (1950 – 1996)* – O trabalho investiga os conceitos de limite e continuidade nos livros didáticos, através da análise de 30 manuais de Bacharelado em Matemática desde o final da guerra

civil espanhola até recentemente, em três dimensões: modo de apresentação do conceito, estrutura do seu desenvolvimento e exercícios e problemas.

- 4) REPO, S. (Finlândia) – *Constructing the concept of derivate*– O trabalho investiga se um ambiente de aprendizagem baseado nos estágios da abstração reflexiva pode contribuir para a construção da estrutura cognitiva dos estudantes em relação ao conceito de derivada.

ANEXOS

A.1) ENTREVISTA COM O PROF. ROBERTO RIBEIRO BALDINO

– UNESP – Rio Claro – SP – 22/08/98

(E. Entrevistador / B. Baldino)

E. Professor Baldino, em primeiro lugar boa noite, obrigado pela força que o Sr. está dando pro meu trabalho através desta entrevista, e a gente escolheu, eu em conjunto com meu orientador e a minha co-orientadora, escolhemos justamente o Sr. para entrevistar pelo fato de ser um matemático com formação na área de Cálculo e Análise e de ter experiência no ensino de Cálculo e Análise, além de ter escrito alguns trabalhos que motivaram uma série de questões que a gente vai começar a conversar agora, tá legal? Então, primeiramente eu queria que o Sr. falasse um pouco de sua formação profissional, de sua experiência docente com Cálculo e com Análise, o que aconteceu de bom, o que aconteceu de ruim ...

B. Sei. Eu me formei em engenharia. No meu tempo, quem gostava de matemática devia fazer engenharia. Então, entrei em engenharia em 1956, me formei em 1961, nunca tive dúvida de que queria fazer engenharia e ... eu gostava de mecânica e carpintaria quando era guri, então quer dizer, naturalmente que o caminho era por aí. Então fiz a graduação na Escola de Engenharia na UFRGS. Depois, naquele tempo não havia mestrado nem doutorado no Brasil, eu tive uns dois anos no IMPA, pra começar a pós-graduação informal, aí fui pros EUA, fui pra Stanford, trabalhei lá, fiz o mestrado, que eles davam automaticamente, mas trabalhei mais do que isso, fiz o início do ... fiz a qualificação, passei na qualificação e não terminei a dissertação lá, não terminei a tese, vim pro Rio de Janeiro, terminei ... aliás, eu vim pra Porto Alegre e terminei a dissertação depois no Rio de Janeiro. Quer dizer, quando eu vim de Stanford ainda tinha o mestrado, ainda não tinha o doutorado pronto, e fui contratado como professor catedrático na UFRGS em Porto Alegre.

E. Em Porto Alegre ?

B. É, quer dizer que minha carreira começou como catedrático. Em seguida como professor titular que era um instituto de matemática né, tinha essa possibilidade. E ... daí eu vim para o Rio de Janeiro em 70 pra terminar o doutorado, então me transferi para a UFRJ, baixei uma posição, fui professor adjunto, e terminei o doutorado com o Leopoldo Nachbin em 72 no IMPA e aí me demiti do Rio Grande do Sul e vim pra UFRJ, lá fiquei como professor adjunto até 1988 quando então eu comecei a me dedicar à Educação Matemática, me transferi pra cá, pra Rio Claro. Aí baixei mais uma posição, passei pra assistente, porque eu achei que era importante para a carreira, para a atuação que eu tava tendo. Então minha carreira começou foi atrás para adiante, ela começou como catedrático titular e terminou agora como assistente. Agora fracassos e sucessos, bem, os sucessos, eles nunca são previstos. De repente eles acontecem, você não sabe bem porque, e você nunca pode repetir, você tenta repetir um sucesso e em geral não consegue. Quando eu estava no Rio Grande

do Sul, em 1967, 68, 69, que eu substituí um catedrático da Faculdade de Filosofia, eu dei um curso de, acho que naquele tempo era ... era Álgebra ou Álgebra Linear, uma coisa assim. E através desta disciplina eu consegui que o pessoal se entusiasmasse pela matemática e essa turma, que era a turma de 68 da Faculdade de Filosofia, ela congregou a turma que vinha antes e com outros que vieram depois, e juntou, formou um grupo muito importante, que depois foi todo pro IMPA pra fazer doutorado e dessa turma nasceram 16 *Phds*. Quer dizer, esse movimento iniciado, o Elon quando se refere a mim em geral nota esse aspecto que foi um sucesso, mas foi um sucesso que de repente aconteceu, não sei como. Quando eu fui pro Rio de Janeiro que eu quis fazer a mesma coisa na UFRJ, eu disse: “Olha, mas agora é só continuar né?”. Aí comecei também a dar um curso de Álgebra, Álgebra I no primeiro ano, só que não deu certo. Quando chegou no mês de julho as notas eram 0, 1 e 2 pra todo mundo ... acho que nem no mês de julho; foi maio, abril. As notas eram baixíssimas, o pessoal se revoltou, eu tive que refazer o curso, aí comecei a ficar preocupado, quer dizer, o que que tava acontecendo, que eu imaginava que era uma coisa tão simples, né, era o tempo da Matemática Moderna, eu achava que se eu ensinasse a linguagem seria fácil transmitir os conceitos e o pessoal não aprendia a linguagem, porque começava com a linguagem abstrata de teorias dos conjuntos, que eu achava simplíssima e era uma dificuldade tremenda, ninguém entendia coisa nenhuma. Então isso me preocupou muito, quer dizer, já nessa época eu fiquei preocupado de como é que eu podia explicar a coisa de um jeito que o aluno entendesse. Aí eu terminei o doutorado, passei um tempo no exterior, fui pra França e ... quando eu voltei em 80 pro Rio de Janeiro, eu comecei a me preocupar mais com o problema do ensino. E a minha preocupação era saber como é que eu podia atingir esse aluno que tava na sala de aula olhando para mim e que você explica, ele não entende, você explica de novo e continua demonstrando que não entendeu e eu marcava horas de aulas separadas pra tratar o aluno, apareciam os que tinham nota alta, não apareciam os fracos. Eu não conseguia atingir o aluno. Então, quer dizer, a partir de 81, 82, já no Rio, de volta do pós-doutorado na França, eu resolvi me dedicar à Educação Matemática. Quem me influenciou muito foi o Charles Guimarães Filho, que naquele tempo tava dedicado a isso, a Tânia (esposa) era colega, ela tava estudando com ele e... bom, aí terminei vindo pra Rio Claro em 88, porque abriu uma posição aqui, eu achei que era importante participar desse movimento pioneiro, que o mestrado aqui era pioneiro nessa época e bom, quer dizer, então quer dizer, fracassos e sucessos são coisas que acontecem. Você quando vê tá no meio de um deles e não sabe como. E frustrações e alegrias, talvez frustração por compreender que pra ser um matemático num país de terceiro mundo, você tem que se conformar em ser um matemático de segunda, terceira grandeza. De segunda é muito difícil. De terceira grandeza é normal. Então você fica sendo julgado, porque as coisas circulam no primeiro mundo com grande velocidade, e você não tendo acesso, não tendo ligado ao primeiro mundo, fica dedicando, fica preocupado com ensino e você não consegue se manter numa posição de vanguarda. E, se você tá preocupado em como uma universidade funciona, preocupado com a aprendizagem dos alunos e preocupado com os cursos que você tá dando, fica mais difícil ainda você fazer matemática de ponta, matemática pra pesquisa, matemática de vanguarda. Você tem mesmo que abstrair de tudo, esquecer o ensino, fazer um ensino com o menor tempo possível, chutar aquelas aulas da melhor maneira possível, se desvencilhar daquilo, ter o menor número possível de alunos para poder se dedicar à matemática, isso pra conseguir ser de segunda grandeza, se conseguir, senão fica na base da terceira grandeza.

Então esse tipo de fracasso me incomodou, eu digo: “Olha, eu não vou ficar fazendo matemática a vida inteira para tá sendo julgado por pessoas que no fim entendem menos do que eu do que eu tô fazendo”. E aquelas injunções políticas lá no “Fundão”, pessoas que eu não vou citar os nomes mas que no fim eram os julgadores das coisa, telefonavam pra outra, então eu não vou ficar deixando meu trabalho ficar sendo julgado por esse tipo de gente. E então resolvi sair mesmo da área e vim para a Educação Matemática e isso me dá uma alegria ... acho que tenho um certo sucesso, eu tô dando um curso de Cálculo pra Física já há 4 anos, pretendo dar durante 5 anos e repara, a Tânia tá indo pra Bauru, tá com a casa arrumada lá, a gente tá pagando dois aluguéis. Por que ? Porque eu não quero ir pra Bauru. Por que eu não quero ir pra Bauru ? Porque eu não quero largar a turma da física que já tá há 4 anos comigo. Eu tenho certeza que se eu largar, quer dizer, isso aqui volta, a turma da Física volta a ser um curso de serviço de terceira categoria lá pro Departamento de Matemática. Então, quer dizer, essa turma me dá alegria. Quer dizer, o que eu consegui com essa turma, desde 1995 até hoje, o progresso que a turma fez, por que que é a turma? Porque sempre metade passa, metade fica, durante quatro anos vai formando um lastro né, de que aquilo ali sempre acontece daquele jeito. E eu espero ainda o ano que vem encontrar talvez alguns que não tenham conseguido passar esse ano, com outros novos que vão chegar o ano que vem e isso forma então um movimento. Eu quero saber até que ponto o Departamento de Matemática e o de Física aceitam esse tipo de permanência, esse tipo de interferência, essa é a pesquisa realmente que eu tô fazendo. Quer dizer, até que ponto eles aguentam que um professor faça aquilo que não é esperado. O esperado é que você faça uma farsa e não incomode ninguém. Quer dizer, eu não faço a farsa e incomodo né, porque apresento isso que eu faço de uma certa maneira. Então isso é um sucesso atual que me dá alegria. É claro, teve sucessos que me deram muita alegria quando eu passei na qualificação em Stanford, que era um exame difícil, eu exultei durante dias, fiquei parado um mês celebrando a passagem na qualificação, aliás eu confundi a qualificação com o PhD, por isso que eu não terminei lá, quer dizer, eu achei que eu passando na qualificação taria pronto, é só depois fazer o doutorado. E o meu orientador saiu, foi passar um ano na França, e aí eu fiquei um ano lá ao Deus dará, sem saber o que fazer, até que eu voltei para o Brasil, eu achei que não era questão de continuar. Mas são essas coisas aí. Vamos comer, depois a gente continua. (pausa)

E. Professor, por essas coisas que o Sr. colocou aí, pelas colocações anteriores do Sr., duas coisas me saltaram aos olhos. Eu estou errado ou parece-me que na interseção dessa sua mudança, dessa sua guinada da Matemática Pura pra Educação Matemática, se encontra em primeiro lugar, essa vontade em descobrir a resposta pra pergunta, difícil de se responder, que é como atingir o aluno, como se fazer entendido pelo aluno e, em segundo lugar, também um pouco de decepção com a própria estrutura da Matemática Pura, ou eu tô enganado?

B. A primeira certamente. Quer dizer, como é que se chega no aluno, aquilo me incomodava tremendamente. Quer dizer, eu falar para uma audiência e eu notar que as pessoas não tão entendendo é algo que me desarma, né. Eu me lembro que há uns dois anos atrás eu fiz uma conferência em Santos, cheguei lá era uma platéia de mais de 1000 pessoas, professores de primeiro e segundo graus. Ninguém tava interessado em ouvir nada, era

aquele zunzun, aquilo lá me fez um mal tremendo. Não sabia o que fazer com aquilo. Mas, então como é que se atinge o aluno, certamente isso foi a coisa motivante. Agora a matemática sim nesse aspecto da, ... não da matemática em si, porque se você pegar um problema e ficar fechado num ar condicionado no Rio de Janeiro, resolvendo e pensando é uma delícia, né. Você esquece o mundo e fica 2, 3 dias. No tempo que eu fiz meu doutoramento em 71... 70, 71, até maio de 72, que eu consegui uma estrutura tal em casa que eu podia chegar em casa e me fechar até onze e meia, meia noite, a hora que eu quisesse e no outro dia ia pro IMPA, trabalhava lá, isso é uma beleza. Você fica pensando num problema, depois de um certo tempo você começa ver as coisas, como você tá vendo esse copo de vinho aqui, você praticamente pega aqueles objetos. E aí as coisas começam a acontecer e você começa a ver, começa a sentir e apalpar aquelas coisas. Agora, por outro lado, a decepção é com a pequenez das pessoas que trabalhavam naquela área né. Bom, aí eu vou citar mesmo, se você quiser botar você bota. O ... (risos) é, eu acho que tem que citar né. Eu era aluno do Leopoldo Nachbin e tinha ao redor pessoas que eram as pessoas que conversavam com ele pelo telefone à noite. Então ele vinha no outro dia com a cabeça pronta, feita por essas pessoas. E essas pessoas é que julgavam né. Então eu tava dando um curso de Álgebra pelo livro do Leopoldo e, bom, quando eu vi lá pelas tantas, em maio, ninguém tava entendendo nada. Eu digo, olha, de fato o livro tem certos problemas, a gente tem que melhorar essas partes. Ah, o Leopoldo ficou tremendamente ofendido, que eu tinha criticado o livro dele. Alguém soprou no ouvido dele. Ora, não me interessa mais o doutoramento, não preciso publicar a tese, vou fazer outra coisa. Chutei tudo pra cima. Porque tava sendo julgado por pessoas que não enxergavam, nem do ensino nem de nada, entendiam de Flamengo e Fluminense, fora disso era uma mesquinha, uma miudezinha ali de brigar todo dia. Aquelas posições dentro da universidade, aquilo me irritava tremendamente. Mesmo depois que eu fui pra França, eu fiz o pós-doutorado, trouxe o Dedelec com quem eu tinha trabalhado lá, no “Fundão”, trabalhou lá uns 2 meses comigo. Mas é, sempre aquela mesma história, quer dizer, é um ambientezinho mesquinho. As pessoas ficam assim, disputando poder. Então a matemática, por causa dos matemáticos, me dá uma certa repugnância. É claro, não vou desculpar com isso minha falta de competência porque eu não sou um gênio em matemática. Eu fiz o que eu pude, melhor que muita gente, não tão bem como eu gostaria de ter feito, mas quer dizer, não ia ficar a vida inteira batalhando, malhando em ferro frio por uma coisa que não teria tido ... não teria tido proveito, né. Eu me lembro em 72 quando eu tava terminando o doutorado, o Brasil tava em plena decolagem, o Brasil era um Brasil grande, que ia ser um espetáculo, né. E eu queria terminar o doutorado pra participar da apoteose que era o grande Brasil que estava se formando, pra chegar na universidade e ensinar, ia transformar o ensino. E no fim de 72, teve aquela coisa do aumento do petróleo, o Brasil fez um cavalo de pau, não decolou, a coisa toda afundou, então o ambiente foi se desmoronando. Aquelas grandes ambições que a gente tinha com a reforma do ensino de 69, que depois em 71 teve aumento do salário e tudo, a criação da COPPE no Rio de Janeiro, a FINEP, né, aqueles incentivos todos, aquilo ali deu em nada. Na primeira inflação que houve, a primeira coisa que eles fizeram foi cortar o salário, daí pra diante não parou de cortar, e você sabe, o salário que hoje você ganha veio a partir disso. Então uma desilusão quanto aos matemáticos em si e uma desilusão quanto à administração do país que não reconhecia, não valorizava isso. E aí ficavam discutindo quem é que tinha publicado mais ou menos, enfim ... e aí a “Federal” entrou por aquele caminho da promoção automática na carreira universitária, se você

não fazer nada você é promovido do mesmo jeito. Então essas coisas todas aí, fizeram me separar disso e entrar para a Educação Matemática.

E. Já agora adentrando mais para o ensino de Cálculo e o ensino de Análise, o Sr. colocou a satisfação que está tendo agora, ministrando Cálculo para um curso de Física, não é isso? Então, fala um pouco mais sobre isso e também sobre as suas experiências com o curso de Análise, qual era o público, como é que foi essa experiência também ?

B. Bom, o Cálculo pro curso de Física, ele me entusiasma principalmente porque eu posso apresentar as motivações, as aplicações e eles valorizam ... na Matemática se você faz uma motivação ou quer apresentar uma aplicação daquilo, eles logo perguntam se aquilo cai em prova: “Isso aí vai cair na prova?”. Bom, isso é pra você entender porque a gente vai demonstrar os teoremas. Eles não querem saber. A Matemática em geral quer é apresentar as coisas prontas, decorar e tal. E a Física aceita se você fizer as motivações através do movimento de inércia, através do centro de massa, eles aceitam esse tipo de coisa. E como eu tenho formação de engenheiro, eu sempre me preocupei com o porquê das coisas. Com o porquê nesse sentido não da matemática mas com o porquê no sentido da aplicação, no sentido da ... é o sentido mesmo, né. Não só o significado matemático mas o sentido que aquilo possa ter para uma vida de uma pessoa que é profissional. E a Física reconhece isso. E especialmente eu me dediquei a partir de uns 5 anos pra cá, à questão do Cálculo Infinitesimal. Eu descobri a análise não-standard recentemente, era uma deficiência minha de não ter prestado atenção a isso antes, mas descobri que a Análise não-standard fundamenta o Cálculo Infinitesimal, que foi o Cálculo que eu tive quando eu era estudante de engenharia, quando me mostraram o Cálculo de infinitésimos. E durante todo o tempo depois, quando a gente começou a fazer Análise, a gente aprendeu que os infinitésimos eram coisa ultrapassada, que não tinha sentido, que o interessante era a Teoria de Weierstrass que se usava nos limites, inclusive eu desenvolvi toda a Análise de pós-graduação através desta Teoria de Weierstrass e até dominava bem, Análise Funcional e tudo. Quando eu descobri a Análise não-standard fundamentando os infinitésimos, eu digo: “Olha, tá a maneira de fundamentar uma linguagem que naturalmente eu posso empregar num curso de Cálculo pra Física”. Então eu tenho empregado isso, eu faço questão que meus alunos descrevam todos os elementos de área antes de integrar, o elemento de volume, os elementos de massa, o elemento de momento e como é que vai fazer essa decomposição infinita e como é que vai somar isso através de uma integral definida. Quer dizer, isso pra eles é importante, que a mecânica sempre fez isso, a matemática se lixa pra isso, mas a mecânica sempre fez. Então me sinto bem, quer dizer, eu me sinto num ambiente onde eu posso falar uma linguagem onde eu sou entendido, que é a minha linguagem natural sem violentar nada. As demonstrações pra eles não têm sentido, quer dizer, a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo, eu faço de grupo em grupo, em 3 minutos, quando eles me perguntam: “Por que que isso aqui é verdade? Olha, é por isso, por isso e por isso”. Em 3 minutos, eu produzo pra eles uma demonstração compreensível ao nível deles, pro fato de que a área é a variação, se mede pela variação de uma primitiva da função, que é o Teorema Fundamental do Cálculo. Então, quer dizer, isso me dá o ambiente, eu me sinto bem ministrando um curso de Cálculo pra esse pessoal.

E. No ensino de Análise, o Sr. também já teve essa experiência com o público de estudantes de matemática ?

B. É, Análise eu sempre digo o seguinte: ninguém aprende Análise Matemática antes de dar dois ou três cursos de Análise Matemática. Se você não tiver pra quem falar você não aprende. E a oportunidade de aprender Análise me foi dada por um curso de pós-graduação que eu fiz no mestrado do “Fundão”, e foi uma daquelas coisas que foi sucesso, depois eu fiquei sabendo que o pessoal valorizou o curso e eu não sabia porque. Eu fiz o melhor que pude. E por duas ou três oportunidades que o Constantino Menezes de Barros, que era meu amigo, me proporcionou na “Fluminense”, pro curso de mestrado na “Fluminense”. Eu dava Análise lá. Quer dizer, a minha experiência em ensino de Análise tá limitada a isso aí. Aqui eu não dei ainda o curso de Análise, tive alguns alunos de iniciação científica trabalhando com Análise, mas, quer dizer, foram ... o ensino mesmo de Análise foi resumido a uma disciplina no “Fundão”, e eu acho que 3 anos que eu lecionei, 3 ou 4 anos na “Fluminense”.

E. Em relação ao Cálculo Infinitesimal, vamos agora trabalhar no sentido de fazer essa comparação entre Cálculo Infinitesimal e Cálculo baseado em limites. Basicamente, quer dizer, quando o Sr. fez esta descoberta, quando o Sr. abriu os olhos pra esta questão do Cálculo Infinitesimal, isso foi se baseando em que, especificamente? No passado ou no futuro ? Para parafrasear o artigo em que o Sr. trabalha com :”Cálculo Infinitesimal: Passado ou futuro?” Quer dizer, resgatando essa perspectiva histórica mas no sentido de que ele pode ser aplicado, de que ele é viável num curso de Cálculo pra estudantes de Física, por exemplo, num curso de Cálculo inicial pra estudantes de graduação ?

B. É, aí as questões são mais complicadas. Ele é viável não só para um curso de Física. Eu acho que ele é viável numa maneira de pensar. Por exemplo, quando você pensa na reta numérica você em geral pensa num contínuo magro, onde cada ponto tá isolado, é um ponto que... o 0, por exemplo, não tem além dele, não ... quer dizer você tem uma infinidade de positivos. Enquanto que no Cálculo Infinitesimal entre o 0 e os positivos você ainda tem os infinitésimos, os infinitésimos positivos. Quer dizer ... e além, quando você passa para os números grandes, você tem uma hora que não tem mais números, você vai, 1, 2, 3, tal, e aquilo não termina. Enquanto que no Cálculo Infinitesimal você tem números que estão além de todos os naturais, são números. Então essa reta numérica que é a reta hiper-real, que eu chamaria um contínuo gordo, isso poderia formar uma maneira de pensar natural. A pessoa não precisaria tá obrigada a pensar num contínuo como foi definido a partir do Dedekind no fim século passado; poderia pensar num contínuo como pensava o Leibniz e agora com o rigor, mas é um rigor posterior à Teoria de Weierstrass, um rigor que foi feito a partir de Weierstrass, a partir da Teoria de Weierstrass você demonstra as propriedades dos infinitésimos de uma maneira rigorosa e isso poderia constituir uma maneira de pensar, quer dizer, isso seria uma espécie de reformulação da maneira geral de pensar. É um projeto político que a gente luta por ele mas nunca ... sabe que não vai ser implantado porque não vai mudar o mundo através disto. Mas é uma coisa perfeitamente razoável pensar nisso. E, bom, agora por que ? Agora teria que entrar dentro de mim mesmo, olhar pra mim mesmo e pensar que a revolta que eu sentia quando eu recebi um curso de Cálculo Infinitesimal na Engenharia no Rio

Grande do Sul, em 1956 e depois aprendi em 58, que aquilo ali não tinha sentido, que aquilo ali era coisa ultrapassada, pra depois em 60, a coisa ser reformulada e tornada rigorosa por Robinson e eu não sabia disso. Então, toda essa passagem de negação dos infinitésimos até hoje depois de 30 anos, quer dizer, uma recuperação possível da teoria infinitesimal nos cursos de Cálculo, quer dizer, aí é uma questão de passado tornado presente, tornado atual, é interessante, mas é uma perspectiva muito pessoal sobre a qual eu não tenho uma visão clara. Eu procuro o porque que eu fiz isso, qual foi a minha trajetória e isso eu acho que as pessoas que estão olhando pra mim talvez possam dizer com mais segurança. Mas eu sinto que há uma possibilidade futura pra história na formulação, na inovação, no sentido de tornar a teoria infinitesimal numa teoria aceitável na universidade e legitimada por um curso de Análise, aplicada nos cursos de Cálculo, certamente pras Engenharias e Física sem a menor dúvida, mas eu acho que também como elemento intermediário na própria Educação Matemática porque o conceito de derivada através de limites exige demais do aluno, quer dizer, é um conceito tremendamente complicado pro aluno entender. Quer dizer, você bota um ponto p sobre uma curva perto de um ponto q , você faz o ponto q tender a p , o aluno fica prestando atenção naquele ponto que tá tendendo a p , e aí ele não vê que você tá querendo que ele pense na relação $\Delta y / \Delta x$ e qual é que vai ser o limite desta relação e quando aquilo chega lá no ponto p , desaparece o Δy e o Δx , como eu já tive alunos que disseram: “Mas cadê o Δy , ficou zero, não tá mais aqui ?” Aí você tem que usar estratégias, né, mas a medida em que ele vai tendendo a zero, quando ele é muito pequeno você volta e toma o Δx como sendo uma base 1, faz um Teorema de Tales e aí você vai ver que a derivada vai aparecer aqui neste segmento, isso pro aluno é tremendamente complicado. Ele não passa por isso. Quer dizer, é muito mais fácil você dizer: “Não, o $\Delta y / \Delta x$ vai tender a zero sim, mas antes de chegar em zero ele vira dy / dx , tá aqui o ponto, tá vendo”, amplia aquele ponto, amplia a mônada ao redor do ponto e mostra pra ele: “Olha, tá aqui, a curva e a reta coincidem, então tá aqui, o dy , o dx não sumiu não, a relação entre os dois infinitésimos é que é derivada”. É uma aproximação. Na teoria não é bem a relação, é o número real associado à parte standard. Mas tudo bem, isso aí funciona e tem funcionado, eu tenho explicado assim e tem satisfeito. Eles não tem ficado mais naquela problemática: “Será que o limite chega, será que não chega?”. Quer dizer, resolve uma porção de problemas. Eu acho que isso funcionaria bem nas turmas de Matemática também. Aí dependeria dos nossos matemáticos que lecionam pra Matemática terem abertura de querer pensar nessas coisas, não ficarem repetindo aquilo que eles sabem sem querer se abrir pra mais nada. E eu acho que do ponto de vista dos alunos é natural, quer dizer, o aluno pensa de maneira infinitesimal de maneira natural, quer dizer, pra ele o 0,999... é menor do que 1, porque tem um pedacinho ali que não é igual. Ele acha isso.

E. Professor, vamos ver se eu estou correto e para me situar um pouquinho dentro desta perspectiva histórica, vou voltar um pouquinho. Então quer dizer, na realidade o grande culpado pela tendência hoje de se ensinar limites e se esquecer ou até se desprezar o Cálculo Infinitesimal, teria sido Cauchy ? Porque você tinha antes no Conselho da Escola Politécnica de Paris até uma divisão, ora se ensinava por infinitésimos, ora por limites. Laplace incentivava os infinitésimos, Ampère já tinha privilegiado o uso dos limites e Cauchy, com aquilo que o Prof. Grattan-Guinness chamou em seu artigo de “Primazia dos Limites” e de lá pra cá isso veio

reinando, junto, com o próprio fenômeno da Aritmetização da Análise, talvez, que foi a formalização desses conceitos todos e que é a filosofia reinante hoje no ensino da matemática. Tudo bem formal, tudo com formalismo, tudo rigorosamente demonstrado, e isso, depois é o que foi feito pelos sucessores de Cauchy. Então teria sido a partir de Cauchy esse desprezo, essa colocada pra escanteio dos infinitésimos, que hoje algumas pessoas talvez isoladamente tentam recuperar?

B. É, eu acho que a Teoria de Weierstrass, ela foi uma fatalidade histórica. Não teria sido possível não passar pela Teoria de Weierstrass. O Cauchy, se você olhar a história, você vê que o Cauchy tanto trabalha com infinitésimos quanto trabalha com limites. O mérito do Cauchy foi ter transformado o limite no conceito central.

E. E a noção dele de infinitésimos era um pouco obscura pra época, não?

B. Ah, sim, como todas as noções de infinitésimos na época eram obscuras. Quer dizer, o pessoal quando chegou no fim do século XIX, as questões infinitesimais, nas quedas de braço que os matemáticos fazem para demonstrar que o que eles fazem é bom, cada um trabalha contra o outro. A matemática é uma queda de braço. Quer dizer, cada um trabalha tentando mostrar que o seu trabalho é bom e que o trabalho do outro que tá falando com ele não vale nada. Então nessa queda de braço que certamente foi ocorrendo durante o século XIX e os paradoxos que eles foram encontrando, as questões das séries de Fourier que convergiam pra vários pontos, aquelas discontinuidades todas, eles foram tendo que dizer com mais precisão do que se tratava, quando falavam de números, número real e tal e ... então foi havendo uma vitória da Teoria Weierstrassiana sobre os infinitésimos, diante de quadro negro, diante de uma prática concreta de demonstração, de hegemonia, de demonstrar que o que você faz é que é o bom. Porque o pessoal que falava em infinitésimo chegava um ponto em que começava a balbuciar e gaguejar porque não conseguia sustentar o discurso contra épsilons e deltas lá do Weierstrass. E aí eu acho que essa fatalidade histórica tinha que acontecer mesmo. Tinha que se passar por isso, os infinitésimos do Cauchy, que ele usava de uma maneira intuitiva, mas também tinha definição, mas ele não usava sistematicamente a definição de limite, quer dizer, os épsilons e deltas estão desde do Arquimedes, quer dizer, o Arquimedes já é um Weierstrassiano, um precursor de Weierstrass. Se você olhar pra essas coisas na história, tanto infinitésimos quanto Weierstrass estão lá desde os gregos. Tudo tá misturado lá. Agora o Cauchy, o que vai acontecer na história é que certas coisas vão tendo relevância, vão tendo proeminência. No caso do Cauchy que tornou proeminente os infinitésimos, como o caso do Weierstrass que tornou proeminente uma coisa que já tava talvez, no Método da Exaustão do Arquimedes. Então, aí a coisa tá ficando precisa e aí isso desembocou no século XX com a noção precisa de número real, que não foi dada por Dedekind, o Dedekind dizia que ele tava descrevendo o número real, quem disse que o número real é ontologicamente um par de duas retas, foi o Bertrand Russel em 24, bem depois. Quer dizer, a partir dessas precisões é que houve um deslanchar no século XX, da Teoria de Weierstrass, quer dizer o grande entusiasta pela teoria de Weierstrass foi primeiro o próprio Bertrand Russel que quis fazer, a princípio, matemática, depois o Bourbaki quis levar adiante esse modelo, transformar toda a matemática em

termos precisos. E até o próprio Robinson que de repente pega os infinitésimos e consegue através da teoria dos modelos dele dar uma definição precisa dos infinitésimos dentro da Teoria de Weierstrass e dentro dos modelos de teoria de conjuntos existentes. Quer dizer que a recaptura da teoria infinitesimal não é um reviver do passado. Ela é recapturada dentro da Teoria de Weierstrass, ela é recapturada depois. Quer dizer, dificilmente a gente poderia ter um caminho histórico, que tivesse havido um caminho através dos infinitésimos, uma vitória dos infinitésimos e aí como subproduto dos infinitésimos entre os números hiper-reais tivesse se tirado os números reais como consequência. Hoje seria possível fazer isso, hoje você pode fazer uma teoria infinitesimal e dizer: “Olha, aqui tem um subconjunto, um subcorpo ordenado que é completo e portanto forma um conjunto dos números reais”. Você pode fazer isso. Mas historicamente não poderia ter acontecido isso. Historicamente o caminho foi outro, que dificilmente a gente poderia imaginar uma história que não fosse assim. Então você caminha nessa direção aí dos infinitésimos, agora o ponto é o seguinte, que de 1960 pra cá, é possível você fazer uma teoria infinitesimal rigorosa. Então não há motivo nenhum para que se evite num curso de Cálculo para uma Engenharia, para uma Física, essa teoria. Os livros de Cálculo que são levados lá e os professores que vão dar aula lá, nesses cursos de serviço, fazem coisas completamente inúteis do ponto de vista da aplicação, quer dizer, eles tão pouco se lixando pro conceito de verdade da matemática. O aluno de Física tem um conceito de verdade que é o conceito físico. O que ele vai precisar é de uma matemática instrumental, uma matemática que o auxilie. Então, pra ele é muito mais útil entender uma decomposição infinita de uma área pra fazer o cálculo da somatória infinita dos elementos de área do que entender que aquilo ali é o limite de somas de Riemann. Não tem sentido algum você fazer num curso de Cálculo um capítulo sobre Teoria de Weierstrass, sobre épsilons e deltas, percebe ? Aquilo ali primeiro tem que acontecer pra depois se justificar pra depois numa outra instância esse aluno retomar aquilo se ele quiser e poucos vão fazer, vão retomar aquilo em termos de verificar até que ponto aquela ferramenta que ele tá usando vale. Essa é a questão dos infinitésimos.

E. E essa teoria precisa dos infinitésimos seria a Análise não-standard?

B. Sim, essa teoria precisa dos infinitésimos é a Análise não-standard. Agora, o erro que se faz é o seguinte. O Keisler quis fazer este curso de Cálculo, tem um livro muito famoso dele, que tenta levar pro curso de Cálculo a Análise não standard e ele comete o mesmo erro que todos os cursos de Cálculo, a maioria deles comete, que é tentar fazer do curso de Cálculo um curso de Análise. Ele tenta levar pro Cálculo não os infinitésimos pra depois justificar através de um curso de Análise, ele tenta levar pro Cálculo os infinitesimos já na forma rigorosa, ou pelo menos o mais possível rigorosa.

E. Seria um erro semelhante ao você levar a definição de limites por épsilons e deltas, a definição de continuidade por épsilons e deltas e não em decorrência das três condições de existência do limite, a existência do valor da função e de serem iguais ?

B. Exatamente. O erro que o Keisler comete é exatamente esse erro de tentar fazer do curso de Cálculo um curso de Análise. Quer dizer, um curso de Cálculo tem que ser um curso de Cálculo e num curso de Análise depois ele tem que fundamentar aquilo, claro que tem outras direções pro curso de Análise, mas uma delas é a fundamentação do Cálculo e aí ele tem a obrigação de fazer no final de um curso de Análise comum da reta, ele tem a obrigação de fazer um curso de Análise não-standard, pelo menos durante um bimestre, ou um semestre, pra fundamentar a questão pelo menos dos principais teoremas do Cálculo em termos de infinitésimos. Isso é perfeitamente possível.

E. E o Sr. saberia dar outros erros que, no fundo, parece-me que é o que o Sr. chama desta confusão que existe entre o curso de Cálculo e o curso de Análise?

B. É, em todos os cursos pra um aluno o erro básico é o seguinte. O matemático, ele tende a achar que os símbolos, a linguagem simbólica, ela dá conta de tudo e que ... ele pode pensar em termos geométricos, em termos intuitivos, mas na hora da apresentação ele quer apresentar a coisa de maneira rigorosa em termos de uma cadeia de significantes que se prendem um ao outro sem quebra. Ele quer apresentar demonstrações. Então eu vejo, por exemplo, quando eu chego lá na aula de Física, eu vejo que o professor que me precedeu deu uma aula de Geometria Analítica ou de Álgebra Linear, o quadro tá todo ele arrumadinho, com proposições, teoremas, sem uma figura. Então eu digo: “Puxa, eu escrevo às vezes, se vai lá escrever isso por que não dá uma xerox pros alunos desse negócio ? Pra que ficar perdendo tempo escrevendo e os alunos copiando esse negócio ? Não tem coisa mais útil pra fazer durante duas horas com um bando de 50 estudantes que tão querendo aprender alguma coisa do que ficar escrevendo coisa no quadro pra eles copiarem esperando que o aluno daí vá formar alguma imagem daquela simbologia toda ?” É impossível, quer dizer, se o aluno pudesse a partir de uma definição de “linearmente dependente” ele pudesse formar uma idéia de um espaço de vetores independentes, não precisasse fazer figuras, nada mais, ele não precisaria estar fazendo curso de Cálculo. Ele seria um matemático e taria fazendo outra coisa, pós-graduação, sei lá. É claro que numa sala de 50, 5 ou 6 vão entender aquilo a partir da simbologia e os outros, se faz qualquer coisa pra não reprovar todo mundo, faz uma falcatura qualquer e toca pra diante. Quer dizer, isso é a universidade que a gente tem, a universidade da farsa.

E. Isso seria um exemplo da troca da intuição pelo rigor num curso inicial de Cálculo, ou de álgebra linear, ou de geometria analítica ? Por exemplo, o professor não utilizar figuras nas demonstrações de seus exercícios, não apelar pra figuras, quer dizer, no fundo você não estaria apelando pra intuição geométrico-espacial do aluno, não é ?

B. É, não é a troca, que ele tá esperando que através da definição, através do simbólico, o aluno reconstitua a imagem. Ele tá esperando que o aluno seja capaz, tenha essa habilidade tremenda, que o matemático também desenvolve, de através de uma cadeia simbólica refazer a imagem. Eu sei disso que isso é difícil porque, por exemplo, eu fiz o doutorado em holomorfia. Quando eu terminei o doutorado eu pegava aquelas funções

holomórficas, aquelas séries lá de potência, aquilo ali praticamente eu encontrava aquilo dentro de casa, quase que tropeçando naquilo, eram objetos. Mas depois eu fui fazer a Matemática Aplicada, entrei pra Análise Numérica e aí eu tive que pegar dos livros e fazer dali as imagens e é muito mais difícil você pegar as coisas escritas e formar imagens. Quer dizer, eu senti uma tremenda falta de ter feito até em nível de graduação, de ter passado pelo curso de graduação, sem que eu tivesse pensado nas questões de equações diferenciais parciais que eu estava tendo. Quer dizer, formar imagens a partir do simbólico é muito duro. E o matemático parece que pressupõe que o aluno tem essa capacidade. Ele quer dialogar com os alunos que têm essa capacidade. Quem não tem ele joga fora. Ele não tá interessado em dialogar. Diz que o aluno não se interessa ou que não quer nada com nada, que é mal aluno. Ele quer jogar com os bons, que são pouquíssimos. Em cada turma 2 ou 3. Então há uma substituição. Há uma preocupação com o rigor porque esse rigor é aquilo que o matemático precisa tá aprendendo. E pra ele aprender esse rigor ele precisa ter certeza de ser bem recebido quando ele fala disso. Então quem aprende Análise num curso de Análise é o professor. Ele precisa ter esses cursos pra ele poder se desenvolver. Então quando ele tem, por exemplo, que fazer uma pesquisa numa área e o curso que ele tá dando é um curso elementar ou noutra área, pra ele é uma tortura, porque tem que interromper a pesquisa pra fazer uma coisa que tá fora do domínio dele. Agora se ele tá dando um curso de ... pesquisando equações parciais, ele tem que dar um curso de Física Matemática pra pós-graduação, isso pra ele é ótimo, porque uma coisa puxa a outra. Ele vai terminar escolhendo os tópicos pro curso dele que são os tópicos ligados à pesquisa que ele tá fazendo. Então tá ótimo. Ele vive dia e noite em termos de ensino, em termos de pesquisa e é isso aí. E no exterior acontece isso, quer dizer, os bambas lá na França que eu vi, são caras, o Jacques Cuminon que fazia aquelas coisas de homogeneização naquele tempo, o seminário dele era a continuação do que ele fazia, ele fazia um seminário, o ensino dele era todo ligado a isso. E o pessoal ensinava o que tava pesquisando, ligado. Agora você vai no Brasil e dizem assim: “Não, hoje você tem que dar Geometria Analítica, no semestre que vem você vai ter que dar uma disciplina de Complementos de Matemática pra turma não sei das quantas lá”. E aí, você vai fazer sua pesquisa como ? Não é fácil. Quer dizer, o matemático, ele precisa do aluno pra ele aprender. Então ele finge que tá ensinando. Bulufas, não tá. Ele tá aprendendo. Ele tá fazendo um discurso pra ele ter certeza do que ele sabe. Ele tem que arrumar as idéias dele. Essa é uma contingência da matemática. Eles não admitem isso porque, é claro, se admitissem isso ficava feio. Mas no fundo é isso. Quer dizer, ninguém aprende Análise sem dar 2 ou 3 cursos de Análise e por aí vai, tudo mais.

E. Então, por exemplo, professor, realmente é muito complicado você conseguir ministrar um curso de Cálculo I baseado em limites ou mesmo baseado na teoria dos infinitésimos, transformando esse curso num curso totalmente rigoroso, um curso totalmente formal, transformando realmente num curso de Análise. Existem certos teoremas, o Teorema do Valor Intermediário, por exemplo, que é impossível de você demonstrar pra um aluno de Cálculo I. Então, o Sr. Considera, por exemplo, que a demonstração através de uma visualização gráfica seria uma demonstração num certo sentido rigorosa, pra esses teoremas ?

B. Olha, o Teorema do Valor Intermediário uma vez eu tentei numa aula de Física, quando eu estava discutindo isso, eu tentei dizer pros caras “Olha, aqui, como é que você vai cercar esse número real aqui, vai ser o limite de uma sequência, etc”. E um cara disse: “Mas, pra que, se a curva passa de cima pra baixo tem que cortar num ponto. Isso não tem sentido”. Eles não aceitaram a problematização que eu tava querendo pôr, atinge o valor intermediário, vai cortar e acabou. O Teorema do Valor Médio, por exemplo, quer dizer, o que que aquilo é. Tem aí num artigo desses que eu escrevi. Quer dizer, o cara faz uma aplicação: a derivada, agora, a aplicação do Teorema do Valor Médio, se a derivada é 0 então a função é constante, olha aqui, porque existe um ponto intermediário, etc. Aí o aluno de física diz assim: “Mas quer dizer então, que um automóvel com velocidade 0 fica parado?”. É, no fundo é isso. Não precisa demonstrar. Não tem sentido demonstrar isso. É evidente, velocidade 0 vai ficar parado. Se a função tem derivada 0 ela é constante, demonstrar o que? Que problemática é essa? Ele vai pensar em que? Não é um problema dele. Quer dizer, voce tá querendo que o sujeito pense num problema que não é dele. Ora, ele vai decorar. Não tem sentido pra ele.

E. Com certeza, então quer dizer, a própria intuição levou à aquisição daquele conhecimento sem a necessidade dele ser formalizado a nível de demonstração, com épsilons e deltas...

B. Sem a menor dúvida. Ele tá demonstrado a nível da turma, porque o que que é demonstrar? Demonstrar, no fundo, é justificar. Ele tá justificado, ele tem justificações. O aluno fala, ele mostra com um gesto que se a derivada é 0 a função não se mexe, é constante. Então isso pra ele é uma demonstração. Agora, pro matemático não é, mas é outro contexto, é outro campo semântico. Num campo semântico de um curso de Cálculo, isso aí tá mais do que demonstrado, não tem o que fazer mais, não tem o que duvidar. Você só vai duvidar disso quando você entrar no: “O que que é, afinal, um número real onde a curva corta o eixo, o que que é esse número real?”. Aí, o próprio Bolzano errou, o próprio Cauchy não tinha essa demonstração. Ele não tinha o conceito de número real. Então você vai cobrar do aluno uma coisa que os matemáticos do passado não foram capazes de fazer. Isso é uma sacanagem, em primeiro lugar.

E. Então esse limite, entre aspas, outro limite, não o nosso limite problemático, esse “limite” dessa passagem entre o que é Cálculo e o que é Análise, o que já passa a ser Análise, quer dizer, na realidade, ele é definido também pelo bom senso do professor na sua própria prática pedagógica, na sua própria sala de aula?

B. Olha, eu diria o seguinte. Análise eu entendo como a Teoria de Weierstrass aplicada nas questões. A Análise é por ali. Quer dizer, um corpo ordenado completo, ou você constrói o corpo, ou você parte desse axioma e continua pra diante. Análise é isso. E o Cálculo é você saber trabalhar, no fundo, no fundo, a única coisa que fica é isso. É você pegar uma grandeza, decompor em partes infinitesimais, somar e integrar. Quer dizer, você precisa saber aplicar isso em várias ocasiões, em várias circunstâncias. Você integrar diferenciais. Você ligar essas duas coisas, isso é o Cálculo. E isso deve durar pelo menos dois anos até você ter o início das equações diferenciais, aplicações na física, etc. Isso tem que durar pelo menos dois anos. Depois de dois anos,

no terceiro ano, se o sujeito for pra matemática. pode se dizer pra ele: “Olha, agora tá na hora de você olhar pra até onde vai isso aí”. E aí você pode dizer pra ele: “Escuta, por que $1/n$, o limite de $1/n$ é 0”. Aí ele vai dizer: “Ah, porque bom, o n tende para o infinito, se aproxima de 0, vai chegando perto ...”. “Nada disso, isso aí agora morreu, você não pode usar nenhum palavreado desse universo do tender a, se aproximar de, chegar perto de, isso é muito pequeno, isso tudo aí morreu. Você tem que provar isso apenas usando a definição”. Daí você joga a definição, isso é uma definição lógica: “Pra todo ϵ existe um n , tal que, pra todo n maior do que n , $1/n$ menos o limite 0 é menor do que ϵ ”. E ele tem que provar isso, e isso é um conteúdo lógico do qual ele tem que saber. Ele tem que dar conta desse conteúdo como ele dá conta dos demais conteúdos do Cálculo. Ele não pode fazer como os matemáticos vivem assim dizendo: “Não, esse negócio de lógica é pra dar calo na cuca, isso aí não precisa”. Não, ele tem que dar conta do conteúdo lógico. E aí começa a Análise. Ao tentar dar conta desse conteúdo lógico aplicado ele vai então passar para um outro nível, um outro campo semântico pra falar precisamente, onde as justificações não são mais aquelas do Cálculo. Então ele tá na Análise. E aí a Análise se desenvolve a ponto de se perguntar pra ele: “O que que é o raiz de 2”. Em determinado momento ele tem que entender que o raiz de 2 é uma classe equivalente de sequências cujos termos se aglutinam à medida que a ordem avança, ou ele vai dizer que o raiz de 2 é uma semi-reta de números racionais, ele vai ter que dar uma resposta porque ele tem que construir esse raiz de 2. Isso faz parte da Análise. Quer dizer, ele tem que saber e se a licenciatura vai precisar ou se o bacharelado vai precisar é uma coisa a discutir, mas ele tem que saber onde é que esses conhecimentos matemáticos são arquivados nas suas prateleiras e nas suas pastas. Onde é que isso aí é guardado. De onde é que isso aí depende de uma teoria dos conjuntos que é o fundamento da matemática atual ou de uma outra teoria dos conjuntos, ele tem que saber como é que organiza isso. Se ele vai pra Física provavelmente ele não vai precisar de um curso de Análise. Se ele vai pra Matemática certamente, mesmo pra licenciatura, ele vai precisar de pelo menos uma matemática que construa os números reais, que construa os racionais a partir do conjunto vazio, mostrando alguns axiomas de teoria dos conjuntos, de uma maneira ou intuitiva ou mais rigorosa, quer dizer, ele tem que passar por uma formalização dessas. Senão ele vai chegar em sala de aula, “Bom, raiz de 2, o que que é um número real ? Um número real é um número que é ou racional ou irracional. E o que que é um número irracional? Um número irracional é um número real que não é racional”. E fica nesse circulo vicioso. E ele não tem como sair disso. Então ele precisa, mesmo na licenciatura, de uma formalização dessas. E o bacharelado nem se fala, porque o bacharelado só tem sentido se ele for pra pós-graduação e se ele tiver querendo fazer a carreira de matemático. E pra carreira de matemático ele tem que pelo menos conquistar o doutorado. Então ele vai precisar de tudo isso quanto mais cedo melhor. Tem que fazer. Na licenciatura eu acho que uma disciplina de Análise é fundamental, uma disciplina de fundamentos axiomáticos da matemática seria fundamental e por aí poderia parar. Pro bacharelado não, ele teria que ir adiante. Ele tem que avançar na introdução da Análise Funcional, alguma coisa lá daquelas sequências, Espaços de Hilbert, um l^2 pequeno, por exemplo, certamente precisaria. Pelo menos um l pequeno dois.

E. Então, com base nessa pontuação do que realmente já deixou de ser Cálculo e passou a ser Análise, por conta da sua própria estrutura formal e rigorosa, é que realmente deveria se dar essa relação do Cálculo com a Análise ? Quer dizer, a confusão vai muito por aí, justamente pelo fato dos professores não compreenderem ...

B. Não, a confusão vai por outro caminho. Olha, em 72, eu cheguei na UFRJ e em 73 que eu fui dar um curso de Cálculo. Então eu era o coordenador do curso de Cálculo e tinha juntado naquele tempo todas as turmas da Matemática, da Engenharia e do Instituto de Química, tinha 1200 alunos de Cálculo. Eu reuni a equipe, tinha umas 16 pessoas, sei lá quantas e vamos ver o que a gente vai fazer. O pessoal, a maioria tava fazendo mestrado no IMPA e eles tavam precisando de estudar Análise. Então o que que eles sugeriram ? Vamos fazer no curso de Cálculo o livro do Spivak, em 73. Eu fiquei meio assim, bom... mas é o seguinte, quer dizer, esse pessoal então que pegou o curso de Cálculo, que tava fazendo mestrado no IMPA, eles precisavam urgentemente aprender Análise. Eles queriam estudar o Spivak e eles enfiaram o curso de Cálculo do Spivak pra Engenharia do “Fundão” e funcionou perfeitamente bem em 1973, 74. Deixa eu ver, em 72 eu entrei em maio, aí nesse ano eu dei Álgebra Linear, dei Álgebra I. Em 73 eu peguei o curso de Cálculo, eu acho, foi em 73. Em 73 funcionou muito bem. E todo aluno de engenharia tava com o Spivak debaixo do braço. E em 74 eu chamei a turma toda que havia ... esse pessoal já tinha ido embora e ficaram outros professores, eu fui coordenar a turma e digo: “Olha, ano passado o curso foi pelo Spivak e esse ano vai ser pelo Spivak”. “Ah, tão impondo livro e tal” e o curso foi um fracasso. Por que ? Porque quando o pessoal foi pra sala de aula em 73, com o Spivak debaixo do braço, eles queriam levar aquilo pra adiante. Era Análise, eles queriam dar Análise. E fizeram daquele curso um curso de Análise de muito sucesso. E o pessoal que chegou no ano seguinte com o curso imposto, quer dizer, então tinha que ser o livro do Spivak, eles já rejeitaram o livro e os alunos muito mais. Quer dizer, o curso foi um desastre. Quer dizer, o que define o curso de Cálculo e o curso de Análise como a Tânia diz é mais a turma, quer dizer, se a turma aceita, se a equipe de professores tá afim de fazer aquilo. Quer dizer, num curso de Cálculo, se você introduz uma questão de Análise, é muito difícil hoje você conseguir um sucesso, né, porque a maioria não vai entender. Agora pode ser que não, porque, por exemplo, o Jorge Barbosa na “Fluminense”, ele não fez nem isso. Ele colocou sabe o que no primeiro ano ? O Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*. Os alunos andavam com certas dúvidas: “Será que nós estamos entendendo, será que não estamos?”. Quando chegou o Dieudonné nunca mais tiveram dúvidas. Ninguém tava mais com dúvidas se tava entendendo ou não porque o entendimento passava tão longe, tão longe do que eles tavam fazendo, que ninguém mais tinha dúvidas se tavam entendendo ou não. Eles não tinham a menor idéia do que seria entender aquilo. E os professores ficavam o ano inteiro definindo bola aberta e bola fechada das primeiras páginas do Dieudonné, porque também não tinham condições de entender o que estavam fazendo. E aquilo ali funcionou, a universidade funcionou muito bem com aquilo. Quer dizer, pra fazer um curso funcionar hoje numa universidade pública, basta o professor ter o salário mínimo. Eu consigo fazer uma universidade funcionar com a fachada, perfeitamente, sem ninguém questionar que ali dentro não tá acontecendo o ensino pagando salário mínimo pra professor. Contrato professor por um salário mínimo e digo: “Faz qualquer coisa aí”, instruo o cara pra dizer: “Olha, não pode dar problema e tal”, é tranquilo.

Ninguém vai notar que ali não tá acontecendo o ensino, ninguém tá preocupado com isso, eles tão preocupados com outro tipo de coisa, que é o funcionamento da universidade.

E. Um outro fator professor, também seria a questão dos programas inadequados das disciplinas. Quer dizer, as ementas são montadas muitas vezes em cima de livros-textos e esses livros-textos não têm essa adequação a uma disciplina, quer seja Cálculo, quer seja Análise. Por exemplo, um livro-texto que é fortemente recomendado nos cursos de Cálculo hoje, quer seja como primeira bibliografia ou como referência bibliográfica é o livro do Leithold. O Sr. acha que seria um bom manual didático, o Sr. acha que isso também não causaria problemas no programa e na sala de aula do professor ?

B. Olha, o livro hoje não é o que atrapalha. Qualquer livro é bom desde que você passe na guilhotina, embaralhe as páginas e faça dali fichas de trabalho, funciona. Não é o fato de ser o Leithold ou um livro A, B ou C que vai dificultar ou trancar o carro. Se fosse o Spivak você teria que introduzir mais exercícios aplicáveis e tal, seria mais complicado. Mas entre Leithold, Swokowski, bom, o Lang, que é dos piores ou o Kaplan, por exemplo ou os mais novos né, é... todo livro é livro. Quer dizer, não é por aí que vai. Se você diz: “Ah, tá na ementa os épsilons e deltas”. Mas também se você não der os épsilons e deltas e não disser que não deu, ninguém vai te incomodar. Agora se você diz assim: “Olha, eu não dei”, aí todo mundo vai cair em cima: “Mas como você não deu ? Coitado dos meninos, agora tão precisando no Cálculo II e não têm”.

E. Mas, como é que seria não dar os épsilons e deltas ? Como é que seria o ensino de limites ? Seria a forma tradicional, simplesmente se omitindo o conceito de limites por épsilons e deltas, partindo-se da noção intuitiva, indo diretamente pro Cálculo de limites e aí o tradicional ?

B. Olha, num livro como o Swokowski, ele só faz um ... ele faz um capítulo de limites que é uma excelente introdução à Análise, inclusive eu usei e vou usar na pós-graduação esse ano o livro do Swokowski, como introdução à Análise, na pós-graduação, mas esse capítulo de limites que ele faz, ele não usa, a não ser no momento quando ele vai ter que definir o que que é integral de Riemann e diz que aquilo era o número i e tal, que pra todo épsilon, tal, tal, tal, e diz que aquilo ali é um limite, o que já é mentira, que não é, porque não tem uma função ali explícita, a soma de Riemann não é uma função, então ele faz uma mentira nessa hora. Fora disso, todos os limites são calculados por continuidade. Ele substitui a função num ponto, a função é contínua e tá ali o limite. Quer dizer que é absolutamente inútil. Então, quer dizer, o que eu tenho feito nos cursos de Cálculo aí é simplesmente tocar pra adiante o curso, dá derivada, como relação infinitesimal, passar pras regras de derivação, ensinar a regra da cadeia, específico derivada do seno de uma função é o cosseno da função vezes a derivada da função, dou regra por regra para eles aprenderem a usar, usam aquilo e eventualmente em alguma aula conceitual eles vão entender porque que a derivada do x^2 é o $2x$, a derivada do x^3 tem uma fatoração, né e na hora de fazer a simplificação lá daquelas, do 0 sobre 0, primeiro eu faço a simplificação algébrica pra depois passar ao limite. Então a derivada do x^2 fica $x + 2$ no ponto 2, então vai

tender pra 4, o $\Delta x + 2$ tende pra 4, quando x tende pra 2, vai tender pra 4 e eles não têm o menor problema com isso. Você não problematiza: “Olha, aqui tem um 0 sobre 0, repare, não pode dividir por 0 então nós temos que levantar a indeterminação, vamos passar o limite, êêêê... pra que entrar neste tipo de coisa, não interessa isso no primeiro ano no mês de março, abril, maio. O pessoal tá trabalhando com outras coisas, você vai inventar um problema que não é o problema deles, que vai ficar todo mundo grilado com aquele 0 sobre 0. Toca pra adiante o curso. À medida que, de repente, um veterano começa a falar em limite porque ele ouviu falar, eu falo em infinitésimo, assim que ele fala em limites eu falo em infinitésimos. Mando estudar alguma coisa pelo livro, toda teoria de limites que eles entram eu entro com uma teoria infinitesimal e mando eles escolherem qual é a melhor. “Ah, mas o que que eu devo escolher ?” “Escolher a que você gostar”. “Mas qual é a melhor ?” “A melhor é a que você achar a melhor, você vai ter que pensar nisso a vida inteira. Veja se você vai pensar em infinitésimos ou vai pensar em limites”. Ele é levado para uma situação de escolha, um compromisso dele diante daquela teoria. Agora já no final do ano, bom, aí entra a regra de L’Hospital, entram os limites das sequências, então a gente vai aplicar a questão das integrais impróprias, que vai ver que, $1/x$ quando a área tende para infinito, mas se você fizer um sólido de revolução, aquela coisinha fininha lá vai ter um volume finito. Então, quer dizer, aí entra a questão dos limites, mas associado a coisas grandes ou coisas pequenas. Não ficar preocupado em mostrar que o limite de x^2 , quando x tende a 2, é 4, isso não tem o menor sentido. Então, quer dizer, a questão dos limites, ela é desviada, ela não é problematizada. No curso que eu faço, a sugestão que eu dou é “Não problematize a questão do limite, porque limite ...” Por exemplo, eu dei um curso para a Geologia, agora. Eu ensinei a derivar, a integrar e a fazer aplicações de derivada e aplicações de integrais. Eles tiveram para a prova, problemas do tipo ... máximos e mínimos, da primeira lista do Swokowski e problemas de cálculo de áreas. Isso foi em um semestre, numa turma da geologia.

E. Tudo isso através de infinitésimos...

B. Nada. Nem isso entrou, quer dizer, entrou à medida que, talvez, uma explicação e outra, eu precisava que dar.

E. Mas, derivada formal ...

B. Derivada formal, o que que aquilo significava, quer dizer, porque que tinha que derivar para igualar a 0 e ver onde é que a curva tinha um máximo, eles entenderam isso, eles procuravam achar a função, como é que era a área, aí sim, na área eu dei umas explicações: “Olha, são elementos de área que você tá somando. Essa integral é uma soma. Você calcula assim, assim, assim”. Um grupo perguntou por que e aí eu mostrei o Teorema Fundamental do Cálculo num grupo. Os outros grupos não perguntaram e se conformaram que aquilo ali era assim, era dado por Deus e pronto, vamos fazê-lo. Então em 6 meses eles tiveram o que em geral a professora não faz em 1 ano. O ano passado a professora que deu, chegou no fim do ano não tinha feito nada de integral. Aí a professora da Matemática, eu conversei com ela em maio: “Ah, mas eu ainda não

entrei em derivada”. Eu falei: “Bom, mas eu já estou fazendo aplicação de integral”. E ela tinha 6 horas por semana e eu tinha 3. Quer dizer, depende do que você vai escolher como problema, o que que você vai botar pra criança pensar. Vai ficar preocupado em pensar nos fundamentos de tudo pra depois chegar lá. Não, chega logo no que interessa, pois eles vão precisar daquilo ali pro ano seguinte, para fazer aplicações daquilo, toca, toca as taxas de variação, os máximos e mínimos, alguma coisa de achar uma equação diferencial que ele possa resolver, como cálculo de juro composto. Você tem que jogar a coisa pro sujeito. Não é a Matemática que vai dizer o que que tem que ser dado no curso de Cálculo. Então essas ementas todas são irrelevantes. Os livros, como eles estão feitos, são estruturas à prova de ensino. Nenhum aluno consegue pegar um livro e aprender por ali. Não vai aprender por ali, não tem como. Ele vai entender na primeira página e trancar, porque na segunda página já tá falando em números reais e pra números reais ele precisa do livro todo, senão ele não entende. A gente fez isso. A gente tentou pegar o livro do Lang e botar o pessoal pra ler o Lang. Trancou na primeira página. Falava em número real, o que que era isso, o que que era aquilo, você via que não dava. A estrutura toda matemática daquilo ali era muito complicada. Então qualquer livro é livro desde que você embaralhe e as ementas não atrapalhem. Você tem uma liberdade de fazer... desde que você não declare. Se você disser: “Eu não vou dar épsilons e deltas nesta turma”, aí é um caos, porque eles entram no ano seguinte e perguntam: “O professor deu épsilons e deltas para vocês ?” “Não, ele disse que não daria”. “Ah, então vocês estão prejudicados pelo resto da vida porque, então, vocês nunca mais vão ter a oportunidade de recuperar. Então, coitados, vocês estão desculpados de não saberem nada, eu tô desculpado de ser um professor que não vou ensinar nada, então vamos entrar felizmente na nossa eterna farsa do tradicional vigente”. Então o que que eu faço. Na primeira aula eu chego lá, faço uma baita duma exposição de épsilons e deltas. “Uuuuu, isso cai em prova ?” “Não, isso não cai em prova”. Mas se eu não desse, o professor ia reclamar. Então tá dado. Primeira aula, meia hora de exposição de épsilons e deltas. Com todo rigor. “Uuuuu”. Aquele choque anafilático. É o que eu fiz esse ano. Não pode dizer que não dei. Não, tá dado sim. Agora se precisarem tá aí. “Quer que caia em prova”. “Não, nós não queremos que caia em prova”. “Então não cai”. Mas tá dado. Para dar o curso eu termino o programa em um dia, eu dou duas exposições e termino o programa. Ninguém pode dizer que eu não dei. “Ah, não deu”. “Dei ó, tá lá, mostrei, falei. Dei todas as definições”.

E. Mas sem o que o Sr. chamou de sucesso, né?

B. Não, até com sucesso. Até com sucesso, porque eles vão dizer que eu dei. Eles não vão poder dizer que eu não dei. Agora a aprendizagem deles é outro problema. Essa leva um ano, a gente batalhando e tem muita gente que no fim do ano que não consegue fazer um “O” com um copo. Você dá um copo, manda fazer um “O”, eles não fazem. E aí é duro. Tem cara que tá lá 3, 4 anos comigo e ao integrar o círculo, ele bota integral de π^2 , em vez de integral de raiz quadrada de $1 - x^2$, integral de $\pi^2 dx$ e aí vai. “Olha, desde que eu conheço você, você está escrevendo essas coisas aí. Como é que vai ser ?”. Quer dizer, a aprendizagem é outro problema. Cumprir o programa é fácilimo. Eu cumpro o programa, a burocracia fica satisfeita e ninguém pode

dizer nada, tá cumprido. Agora a aprendizagem, aí você faz, vai ser outro departamento. A aprendizagem ... é que o ensino não tem nada a ver com a aprendizagem. O ensino é uma coisa, a aprendizagem é outra. Você ensina uma coisa, o aluno aprende outra. Você ensina matemática, o aluno aprende a passar.

E Professor, nessa experiência então, que o Sr. teve com esse ensino “rápido” de limites e em outras ocasiões também, o que que acontece com esse ensino? Na verdade, ele fica desperdiçado se você utiliza os épsilons e deltas, porque fica totalmente deslocado ? Na realidade, o que também não é cobrado, os alunos não se interessam em aprender, em estudar e, por um outro lado também, é claro que é muito complicado essa formalização, entraria naquela questão da formalização, isso já seria mais um capítulo inicial da Análise, não um capítulo de Cálculo mesmo...

B. É, os épsilons e deltas são um capítulo inicial da Análise, que no “Fundão”, por exemplo, em 74, foi o segundo ano, quando o ano letivo chegou em julho, tava todo mundo decorando fórmulas para achar o delta quando era dado o épsilon da função tal. Eles tavam procurando ... naquele tempo as provas eram sem consulta. e eles estavam decorando fórmulas e colando fórmulas para achar o delta. Quando a função é x^2 , então o delta é tal, quando a função é x^3 , o delta é tal e assim eles tinham os deltas todos prontos, que ia cobrar aquilo em prova. Ou seja, eles estavam fazendo aquilo sem a menor compreensão, né. Apesar de todos os roteiros que a gente fazia para ver se eles entendiam. Alguns da Engenharia, das melhores turnas, talvez um terço dos alunos das melhores turmas entendia, mas o resto não entendia nada. E eu duvido que exista uma maneira de pegar um aluno, dos nossos alunos aqui, que chegam nas universidades e eu diria até na USP, nas estaduais paulistas, porque não deve ser muito diferente, o segundo grau que a gente tem é o mesmo, eu duvido que exista um sistema de ensino que faça o aluno chegar em um ano entendendo os épsilons e os deltas. Duvido. Pouquíssimos, pouquíssimos. Se a gente vai fazer um ensino para poucos e dizer: “Olha, eu vou ensinar pra quem vai fazer o bacharelado e o resto dane-se ou finge que estuda porque eu aprovo”. Aí tudo bem. Aí você faz a Teoria de Weierstrass, você forma os bons matemáticos a partir daí, você tá interessado na elite. Se você tá interessado pela elite, tudo bem, pode dar épsilons e deltas, aquilo ali vai ser muito bem vindo para alguns, a maioria não vai entender nada, mas você faz uma decoreba qualquer lá, pede uns deltas lá, eles decoram umas fórmulas e acham os deltas, você dá 5 para alguns e tal, aprova e não reprova além da conveniência. Agora, eu não estou comprometido com a elite, eu tô comprometido com a maioria, especialmente com o mau aluno, aquele aluno que se esforça e não consegue aprender. Então eu tenho todo um sistema de privilegiar e dar uma pontuação pelo aluno que se esforça. E à medida que ele está se esforçando eu tô ajudando, tô provocando outro esforço igual. Então esse aluno com épsilons e deltas, ele vai ser simplesmente massacrado. Não há possibilidade, duvido, pago pra ver quem conseguir, um processo de ensinar essa análise de épsilons e deltas em nível de primeiro ano. Para o terceiro ano, depois do sujeito ter passado por bons cursos de Cálculo, eu acho que com um curso cuidadoso de Análise é possível ensinar metade. Metade dos alunos aprenderiam essa Teoria de Weierstrass. E também aí olhe lá, eu não tenho visto. Eu tenho visto aluno se formar na Matemática que não consegue fazer um diagrama de Venn pra dois conjuntos. Quer dizer, usar os círculos e os amarelos, como é que coloca os círculos, onde é que coloca os

amarelos e os círculos amarelos onde ficam ? E aí ? E não faz. E não fazem o diagrama de Venn, não classifica. Formado em matemática. Eu já vi uma professora lá no Rio de Janeiro, que não conseguiu jogar um jogo de trilha, desses de jogar o dado e contar 1, 2, 3, 4, 5 na trilha, porque ela não conseguia contar na trilha. Ela botava 1, 2, 3 e a mão dela deslizava, e aquilo lá ia pra lá. Eu dizia: “Mas conta”. E ela não sabia contar. Não sabia contar numa trilha e era formada em Matemática. Licenciatura plena. Então quer dizer, a farsa tá plantada. Tá aí feita. Você chegar numa universidade, se você fizer a farsa, ninguém vai descobrir que você não tá ensinando. Numa universidade pública hoje, se você fizer a farsa, você é muito bem recebido e aplaudido, pode chegar a reitor. Se você for hábil, você chega a reitor. Sem nunca ninguém descobrir que você não ensinou absolutamente nada, que você fez falcaturia o tempo todo e que o conhecimento foi mero álibi pra sua prática docente em sala de aula. Você tava lá em nome do conhecimento e o conhecimento nunca teve presente em lugar algum. É perfeitamente possível você fazer isso. Agora, se você disser: “Não, eu vou lutar, eu vou ensinar e quem não aprender, paciência, mas eu vou tentar ensinar”. Aí você vai ter problemas. Você vai ter muitos problemas. Vão questionar você de todos os lados. “Ah, isso que você tá fazendo é demais pros meninos, eles não estão acostumados com isso, não estão acostumados a ler o livro, então por que que você não escreve no quadro, não passa um exercício parecido pra fazer a prova, por que você tá dando uma coisa tão difícil na prova, suas provas são muito difíceis”. Você ouve de tudo. “Ah, você não deu os épsilons e deltas, então é por isso que eles estão tendo dificuldade em Cálculo”. Toda essa babaquice que acontece por aí. Essa babaquice revoltante. Se você não mudar, você se acertar dentro dos conformes, ninguém vai questionar. Ninguém vai descobrir que você não tá ensinando. Universidade é um lugar onde ninguém te manda trabalhar. Felizmente ainda, ninguém impede. Não tá sendo impedido. Mas ninguém te manda trabalhar. É por isso que o salário é baixo. O salário é baixo por isso. Porque pra fazer o que a gente faz, metade do salário dava. A verdade é essa. Quer dizer, aqui eles estão discutindo agora a carga horária: “Ah, porque se aposentou muita gente, carga horária e tal, então tem gente que vai ter que dar 12, 16 horas”. Ah, eles estão furiosos. “Quem é que vai dar 16 horas e tal ?” Ninguém quer dar aula. Também, se o camarada é um grande matemático e tá fazendo pesquisa, aula atrapalha, a não ser que seja uma aula ligada ao que ele esteja fazendo, mas aqui não tem nenhum matemático desse nível. Aqui todo mundo é terceira e quarta categoria. E aí querem imitar os outros e dizem: “Não, não quero dar aula porque atrapalha a minha pesquisa”. Ora, caramba.

E. Muito interessante uma coisa que o Sr. coloca em um de seus artigos, justamente também nessa relação épsilon e delta. Na realidade, o aluno que sabe, dado um épsilon, achar um delta, isso não é garantia de que ele esteja realmente compreendendo, captando o conceito como um todo. Apenas ele se fixa na relação. Ele sabe muito bem calcular o delta, mas talvez se você perguntar pra ele, e aí, então, agora, qual é o conceito de limite que está embutido aí nessa função: $f(x) = x$, a função identidade, por exemplo ? Muitas vezes ele não vai ter essa conexão do discreto, dessa relação discreta entre épsilon e delta, pra noção mais “contínua” do limite, ou não ?

B. É, acontece é isso aqui. Você dá o limite e o camarada acha que o limite é dar ϵ e achar δ . Ele não se dá conta, ele não vê, ele oblitera a continuação. Esse δ é tal que para todo x , se $x - a$ menor do que δ e maior do que 0 então, $f(x) - f(a)$ menor do que ϵ . Ele não se dá conta que a proposição continua, que esse δ que ele achou é um δ que satisfaz uma condição e que não adianta ele achar o δ se ele não provar que o δ satisfaz a condição que tem que satisfazer. Então ele fica parado na primeira página: “Me dado ϵ , achei o δ e esse δ pra que ? Não sei”. Ele não vai adiante na definição, ou seja, ele não entendeu a definição. Ele fica parado no δ que ele achou. Não há uma condição de continuidade. Não há o porque que ele continua. Não há uma continuação da proposição. E então vira burocracia. E a gente tentou isso há uns 2 anos atrás. Fiz um trabalho com umas meninas aqui da graduação e foi muito difícil tirar elas da idéia dos conceitos intuitivos. Elas começavam a falar, daqui a pouco elas falavam que o ϵ tendia a 0. Ou seja, o ϵ tender a 0 é uma mistura de campos semânticos violenta. Quer dizer, você quer pegar uma coisa e não tem nada a ver, o ϵ não tende a 0, o ϵ é um dado e você vai achar um δ . E aí vem aquelas coisas, o ϵ tão pequeno quanto se queira, um δ conveniente, o δ tão pequeno quanto se queira, o ϵ vem depois, ih meu Deus do céu, é um horror. Essa é uma dificuldade. Mas, quer dizer, a definição mesmo, usar, operacionalizar a definição com 3 quantificadores é muito complicado. Um outro que tá com grande dificuldade é o Geraldo Garcia na Álgebra Linear, pela questão da dependência linear. E ele também usou o mesmo estratagema do que eu: “Dizemos que um conjunto de vetores é x pto se, quaisquer que sejam a, b, c, d , etc o somatório igual a 0 implica que $a = 0, b = 0$ etc e aí trabalhar com isso. Fazer o pessoal provar que um conjunto é x pto ou não, através da definição. Se falar que é linearmente dependente eles vem com essa: “Não, porque um depende dos outros, os dois dependem, são todos dependentes, dependem ...”, entra com todo um modelo, né, com todo um palavreado relativo ao modelo, que nada tem a ver com a definição. Então nunca entende o que que é a definição. Então você tem que radicalizar a demanda, para aos poucos ele ir conseguindo alcançar o que você quer. Mas a demanda tem que ser radicalizada.

E. Conclusão: então, sob a desculpa, sob o pretexto de que se está fortalecendo o conceito de limite, através dos ϵ s e δ s, na realidade, você está privilegiando mais um procedimento ? É mais um processo, um procedimento do que você estar trabalhando realmente na construção daquele conceito ? Ou seja, está se privilegiando, na realidade, um conhecimento procedimental, sob o pretexto, sob o pano de fundo de que se está privilegiando um conhecimento conceptual, seria isso?

B. É, eu diria mais o seguinte, quer dizer, você dá os ϵ s e δ s porque na medida que 90% não vai entender e você não vai poder reprovar os 90%, você fica livre pra usar o critério que você bem entender para aprovar metade desses 90%, porque ninguém vai entender. Então, quer dizer, é uma coisa, como aconteceu na “Fluminense”, quer dizer, você joga uma coisa que ninguém entende e você fica cavaleiro pra decidir quem passa, porque, quer dizer, do ponto de vista matemático, aquilo ali é prematuro, aquilo ali do ponto de vista deles, pedagógico, pedagogicamente é inalcançável para eles. Então você fica fingindo que ensina e a farsa é ótima. Quer dizer, os ϵ s e δ s são os instrumentos privilegiados para você instituir a farsa. Você finge

que tá ensinando alguma coisa, o aluno finge que tá entendendo e você dá uma aprovação por um critério que você bem entende. Aí você vai aprovar por exemplo, quem é branco, quem é preto você reprova, ... quem vai bajular você, você aprova. Que dizer, tem todo um critério aí discricionário de valores de classe, inclusive de repressão. A mulher não sabe, então você reprova, o homem que sabe, você aprova, todos esses valores, então você fica cavaleiro pra exercer o controle da aprovação pelos critérios que você bem entender, que não são critérios de conhecimento, porque aquela teoria de épsilons e deltas 99% não entendem. E aí você fica desobrigado de ensinar porque você já sabe que ninguém vai entender. Então você dá uma aula e pronto, o ensino tá feito, você dá uma aula caprichadamente, eles copiam tudo, para testemunhar que você deu a aula, que você deu aquela matéria, tá tudo no caderno deles, manda olhar: “Olha, taí escrito tudo como eu dei”. A sua obrigação de professor tá cumprida. Você ensinou, agora se ele não aprendeu o problema é outro. E aí você faz uma falcaturia qualquer para não reprovar além da conveniência. Então o mundo todo tá funcionando na base dessa farsa. Não é por outra coisa que o Brasil é o centésimo vigésimo sexto país no mundo. Ele só ganha de Moçambique, em matemática. Uma enquête da ONU, de 10, 12 anos atrás provou is so. Quer dizer, o ensino de matemática no Brasil é um dos piores do mundo. Aí vem esses bobões aí como o ministro por exemplo, querer remendar as coisas e fazer uma prova, então: “Ah, repara agora estamos melhorando porque os índices melhoraram”. É claro, o pessoal aprende a fazer a prova, decora pra prova. Tem universidade particular que já tá preparando desde o primeiro ano, o pessoal pra prova do MEC.

E. Professor ... fazendo o gancho então do ensino de limites baseado nos épsilons e deltas com a questão do Cálculo Infinitesimal. Então, é nesse sentido que o Sr. realmente propõe enquanto alternativa didática a essa estrutura atual de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Matemática a sequência de Cálculo Infinitesimal e Análise não-standard ? Quer dizer, no sentido de romper com que o Prof. Grattan-Guinness chama de tradição epsilônica ?

B. Certamente, certamente. O Grattan-Guinness, o que ele falou é exatamente isso. Quer dizer, é você introduzir os infinitésimos como maneira de pensar, como maneira de raciocinar e como justificativa em nível de curso de Cálculo. Trabalhar com isso e posteriormente você fazer uma Teoria de Weierstrass terminando uma teoria infinitesimal. Sem dúvida, esse é o encadeamento lógico. É por aí. Quer dizer, não só pro pessoal de curso de serviço, que vai pensar e trabalhar com infinitésimos a vida inteira, quem vai fazer um curso de mecânica vai topa com infinitésimos desde a primeira página, como também pro aluno de Matemática que vai ter pelo menos uma maneira de operacionalizar essa matemática e avançar mais antes de começar a se preocupar com questões que não são dele.

E. E isso daria essa recuperação histórica pro Cálculo de se enquadrar com a nossa notação hoje , no Cálculo, que é basicamente Leibniziana, não é ?

B. Ah, a notação de Leibniz nunca foi abandonada. Quer dizer, o que ele pensou em termos de notação, tá aí até hoje. É um testemunho, um testemunho não só da grandiosidade da pessoa, muito além do Newton, muito

superior ao Newton, mas como também testemunho de que aquilo ali é uma maneira natural das pessoas pensarem. Que aquilo ali faz sentido. Quer dizer, então, se você olhar pelo lado da história, não gosto de usar a palavra “recuperar” a história, porque não é bem isso do que se trata, né, mas seria um ensino, um ensino que respeitaria num certo sentido o desenvolvimento histórico. Isso é perigoso. Dizer que vai se imitar a história é complicado porque a história não tem uma imitação no sujeito. Mas, quer dizer, você levando em conta que a humanidade primeiro passou por certas idéias para depois chegar a outras, é natural você pensar que os processos de passagem num sujeito iniciante vão encontrar mais facilidade com as idéias historicamente anteriores. Então, quer dizer, você pode tentar caminhar por aí. Não que isso seja um dogma nem que vá se transformar num paradigma. Mas é uma advertência, quer dizer, você olha, os infinitésimos na história vieram primeiro e foram pensados. O Cavalieri foi até anterior ao Leibniz, então quer dizer, é provável que por aí os alunos vão encontrar mais facilidade. E não só isso, como também que certos pensamentos ... o pensamento da maioria dos alunos hoje é infinitesimal. Se você perguntar do 0,999 se é menor que 1, 80% vai te dizer que é. E os que te dizem que não, que é igual, é porque ouviram dizer que é igual, que o certo é responder que é igual, mas poucos estão convencidos que é igual. Eles acham que tá faltando alguma coisa. E confunde o processo com o produto. Então por que dizer: “Não, você tem que esquecer o processo e olhar o produto”. Porque que não trabalha com o processo como ele é ? “Não, de fato é menor. O 0,999 é menor do que 1, porque é um infinitésimo antes. Ele tá um infinitésimo aquém. Como o 0,999999 é maior do que o 0,999 e é menor do que 1 também. Percebe, porque é uma sequência que vai mais rápida. Então você entra com a velocidade de convergência da sequência, a taxa de convergência da sequência, faz disso um conceito, em vez de esquecer isso e querer unificar todas as sequências com 1, porque todas elas convergem para 1.

E. Então, na realidade, não seria uma limitação da história, mas seria uma repassagem pela evolução do pensamento matemático, seria isso ?

B. É, o Rolando Garcia coloca isso em termos das etapas, quer dizer, as etapas, a passagem de uma etapa para outra na história é semelhante à passagem de uma etapa para outra num sujeito. Mas é um problema também, essa coisa das etapas não é lá muito bem vista hoje em dia. Quer dizer, eu ficaria mais numa posição um pouco anterior, dizendo: “Olha, tome a história como uma advertência pro ensino. Tome a história como um dado não positivo mas como um dado negativo. Se você vai fazer uma coisa no ensino, olha pra história e vê se você não tá invertendo as coisas. Se você tá invertendo as coisas, trata de pensar muito bem porque pode não dar certo. Tome a história como um ponto de advertência. Olha para a história como um referencial de alerta, né. Não como um dado positivo a ser imitado, mas como um referencial de alerta”. Acho que é por aí.

E. Professor, o Sr. já tocou, mas eu queria retomar um pouco esta questão da importância de um curso de Cálculo e, especificamente, de um curso de Análise para um professor de matemática, na licenciatura e no bacharelado. Quer dizer, no bacharelado o Sr. deixou bem claro a sua importância com vistas à sua formação matemática, que depois vai ser enriquecida com o mestrado, doutorado, muito provavelmente no Brasil, com

a vida acadêmica numa universidade, atividades de ensino, pesquisa e extensão, não é verdade ? Mas, especificamente pro licenciado, pra licenciatura, como é que o Sr. poderia definir a importância do papel da Análise, a importância do papel do Cálculo para a formação de um professor de matemática quer vai atuar, por exemplo, em primeiro e segundo graus ?

B. É, isso aí, a resposta é o programa de uma disciplina que a gente fez aqui há uns anos atrás quando se mudou o currículo, que tinha uma disciplina que era Matemática Elementar do ponto de vista avançado e eu substitui por Matemática Elementar do ponto de vista axiomático, que eu acho importante ele passar por uma construção pra ele saber onde é que as coisas estão. Quer dizer, o que que é que ele tá falando quando fala de número racional ? Número racional é um par ordenado de números inteiros. E quando ele fala de número inteiro ? É um par ordenado de números naturais. Como é que se opera ? E quando ele vai falar da trigonometria do seno e o cosseno, o que que é o seno ? O seno não é aquele segmento que ele desenha ali, o seno é o limite de uma série de potências. Isso converge, tem um raio de convergência. Quer dizer, ou por equações diferenciais, tirar o seno e o cosseno; a teoria dos determinantes; a álgebra linear. Quer dizer, ele ter a questão do determinante como a aplicação multilinear alternada de um espaço de dimensão n , então portanto tem um número. Enfim, ele tem que ter uma fundamentação matemática rigorosa da matéria que ele vai ensinar em segundo grau. Então, você tem que pegar toda essa matéria de primeiro e segundo graus e dar para ele uma fundamentação matemática atual do ponto de vista de uma teoria dos conjuntos, no caso, Halmos, Zermelo...é mais do que suficiente e que aquilo ali tem uma construção, que aquilo ali não é uma coisa que cai do céu, que a matemática não é uma descrição do mundo, que a matemática é um conjunto de conhecimentos arquivados de uma certa maneira. Então eu acho isso pro licenciando, fundamental. É daí que ele pode ter liberdade de escolha. Se ele não tiver isso, ele não tem liberdade, ele só pode repetir o que o livro-texto faz. Ele não tem como se libertar disso e fazer outra coisa. Ele não tem autonomia. Então, eu acho fundamental o licenciando passar por isso, passar por um curso de Cálculo, passar por uma introdução à Análise, um curso inicial de Análise de 6 meses onde ele vai ter teoria das convergências, das sequências, dos limites. Seria importante ele ter também uma introdução a números reais e a números hiper-reais, de alguma maneira. Uma construção dos reais com construção dos hiper-reais. É, poderia talvez ter alguma coisa dos transfinitos, que a teoria dos transfinitos de Cantor, o livro do Cantor é mais acessível talvez do que o próprio livro do Halmos, é mais adaptável a uma teoria de conjuntos, aqueles agregados do Cantor são mais adaptáveis a um ensino do que o próprio livro do Halmos. Quer dizer, mas tem que passar por isso. Eu acho que pra ensinar com liberdade tem que passar por esse tipo de coisa. Senão ele vai ser um brinquedo. Ele vai ser brinquedo dos autores de livro-texto, ele não vai ter liberdade. E outro tanto na geometria, quer dizer, ele vai ter que passar por um curso de geometria. Aí já não é a minha área, mas ele vai ter que passar por uma geometria euclidiana, vai ter que ter noções de um sistema axiomático de geometria ou do próprio Euclides, estudar um pouco aquilo que não faz mal pra ninguém ou uma coisa mais rigorosa, enfim...

E. Professor, o que o Sr. pensaria a respeito dessa questão do pensamento diferencial e do pensamento analítico. Como é que o Sr. poderia comparar essas coisas ?

B. É, o pensamento diferencial foi uma tentativa que a gente fez há 2 anos num curso pra pós-graduação, em que a gente trabalhou com os livros de história da matemática, do Cálculo, da Margareth Baron, examinando onde é que as coisas nasceram, como é que apareceram aqueles teoremas no Barrow, no Newton, como é que o Leibniz pensava a integração que hoje a gente conhece como integração por partes e quer dizer, o pensamento diferencial no fundo, quer dizer, é algo que vai além do pensamento algébrico e que se refere basicamente à decomposição de uma grandeza em pedaços infinitesimais e à reintegração dessa grandeza através de um cálculo integral. Quer dizer, no fundo é uma equação diferencial que você resolve, um cálculo de área e de volume, a ligação da área com a taxa de variação da função, você poder dizer num certo sentido que a derivada da área é uma primitiva ... a derivada da área é a própria função, que a área é uma primitiva ou você dizer que se você integrar uma taxa de variação integrando a derivada, que é o segundo teorema, você recupera a função, quer dizer, que a área é uma variação de uma primitiva. Quer dizer, tá ligado a esse tipo de resultado. O pensamento diferencial no fundo é isso, é algo que não se reduz a pensamentos anteriores. Será que o Cavalieri teria tido um pensamento diferencial ? Eu acho que poderia ser um precursor, mas eu acho que ainda não era bem, a idéia dele era decomposição, mas não era uma decomposição infinitesimal. Ele decompunha em indivisíveis. E quantos haviam ? Uma quantidade ilimitada de indivisíveis. Quer dizer, o Cavalieri trabalhava com um conceito de infinito que era o conceito dos gregos, bem diferente do conceito do Leibniz que fazia uma decomposição infinitesimal de um intervalo finito. Quer dizer, o Cavalieri funcionava bem, mas ainda não era, talvez fosse um precursor do pensamento diferencial. O próprio Aristóteles naquele método de exaustão dele, quer dizer, já era ali uma decomposição que ele integrava. Quer dizer, eu não tenho pra mim bem caracterizado o que que seria o pensamento diferencial, no sentido, por exemplo, que o Rômulo (Campos Lins) tenta caracterizar o pensamento algébrico dizendo que é um pensamento analítico, internalista e aritmético. As 3 condições do pensamento algébrico para ele são estas: a aritmeticidade, a analiticidade e a internalidade. O pensamento diferencial, ele vai além disso aí, certamente depois do pensamento algébrico, ele introduz essa questão da decomposição das grandezas. E o curso que a gente fez foi praticamente um curso de história do Cálculo, o pessoal ficou estudando e decifrando aquelas demonstrações iniciais e vendo como é que as idéias de hoje já estavam lá. Elas apenas foram rearranjadas. Algumas idéias se tornaram proeminentes e outras foram se tornando aspecto secundário. Mas foi mais difícil, porque a gente pegou o século XVII, princípio do século XVIII. Mas se a gente tivesse pego, por exemplo, o século XIX, com Cauchy, com o livro de Análise do Cauchy, teria sido mais fácil você notar quando é que ele falava de número real e dizer: “Mas o que que ele tá falando quando fala de número real ? Ele não tinha a definição. O que que era isso pra ele ?” Você vê que as idéias estão lá, os números inclusive estão lá, mas não correspondem ao que a gente conhece hoje. Quer dizer, é mais fácil você comparar a matemática do século XIX com a do século XX para você ter uma idéia do desenvolvimento histórico. Enquanto que se você pegar o próprio Barrow, com a demonstração dele ou aquelas coisas iniciais do Leibniz, que colocava as coisas em sistemas de eixos e quando era negativo ele fazia tudo de novo e dava muitos exemplos, então os vários segmentos de reta que eram tangentes ou que eram secantes, eram coisas enroladas. E é mais difícil você acompanhar aquilo hoje. O século XIX é mais fácil. Então a gênese do pensamento diferencial talvez fosse mais fácil acompanhar a partir do século XIX, que é a partir da própria origem. Que não há origens na

matemática. O que existe é um caldeirão com carne cozinhando, a carne vai sendo cozida lá e vai se separando do osso. Quer dizer, a melhor metáfora para a história da matemática é essa. É um cozido. A carne vai cozinhando e se separando do osso. Não existe uma origem, não existe um começo. Desde sempre todas as idéias já estavam lá. Elas apenas não tinham relevo. O Duhamel, por exemplo, fala em limites de infinitésimos, os infinitésimos tinham limites. E hoje é um contra-senso, mas ele falava isso. Tanto os infinitésimos quanto os limites estavam lá presentes.

E. E o pensamento analítico, se caracterizaria mais como uma coisa posterior ao fenômeno da Aritmetização da Análise, à própria criação da Análise ?

B. Não, não. O pensamento analítico tá lá desde o início, né. O pensamento analítico é você supor que uma coisa é, tomar aquilo como hipótese e fazer a Análise daquilo. Isso eu acho que talvez tivesse até anterior, né. Quer dizer, a tentativa de Análise, muito antes da Aritmetização, o próprio movimento de Aritmetização da Análise você pode ter uma idéia como sendo um desenvolvimento do pensamento analítico. Quer dizer, quando o Bolzano vai lá examinar porque que o Teorema do Valor Intermediário vale, ele quer se livrar da geometria, das intuições geométricas, quer fazer tudo em termos simbólicos, em termos rigorosos, aquilo ali ele tá fazendo uma análise. E é bem anterior à Aritmetização da Análise, é princípio do século XIX. Mesmo Euler, eu acho que as coisas que o Euler coloca, o pensamento analítico já tá ali. O Arquimedes, eu acho que o Arquimedes é um precursor do pensamento analítico, ele tem mais prazer em demonstrar que aquele teorema dele, que o método funciona do que chegar ao resultado. Se ele não tivesse chegado ao resultado ele não poderia aplicar a exaustão. Quer dizer, o processo de limite vem sempre a posteriori. Você só pode mostrar que o limite é uma determinada coisa se você conhece o que ele é. E o Arquimedes mostrava exaustivamente que o método de exaustão era muito bom, quer dizer, era quase que um modelo estético da apresentação, muito mais do que um instrumento matemático, uma estética da apresentação. Então o pensamento analítico tá ali. Talvez agora, a gente pudesse voltar antes até o século V, o Arquimedes é do século III, voltar antes até.

E. Então, na realidade, se o pensamento analítico é muito anterior ao fenômeno da Aritmetização da Análise, esse fenômeno seria mais um fenômeno político / acadêmico de criação da Análise mesmo, enquanto área, enquanto área temática da matemática, enquanto disciplina, onde todas as coisas que até então eram tidas como integrantes da Análise foram reunidas sob uma determinada área que foi chamada de Análise Matemática, seria por aí ?

B. Bom, eu acho que a partir do fim do século XIX, houve uma área chamada Matemática, porque a matemática não era área. O Gauss, por exemplo, era físico e era matemático. Esse pessoal todo pensava em tudo simultaneamente. Foi no século XIX, de Cauchy pra diante que a Matemática foi sendo isolada como uma ciência autônoma, que não havia matemática, né, ela tava junto com a física e junto com as outras investigações. Era filosofia, tudo era filosofia antes. Quer dizer, e a Análise dentro da matemática, bom, você

pode dizer que ela tomou um impulso a partir da Teoria de Weierstrass e aí ela se tornou hegemônica. Antes, você tinha os pensamentos geométricos que funcionavam durante o século XIX, mas, na minha visão, a Análise se tornou hegemônica na matemática e foi varrendo a geometria, descartando a geometria e o último descarte que ela fez foi a álgebra linear, algebrizou totalmente a geometria euclidiana. Isso é uma coisa do século XX, isso é uma questão de hegemonia. Quer dizer, houve uma... num certo sentido, podemos imaginar assim, quer dizer, a geometria estava para os reis e barões assim como a Análise estava para o burguês. A Análise é uma questão que vem do número, quer dizer, que a aritmética e a Análise são questões que vem pelo lado numérico. E a geometria estava associada aos palácios e à nobreza. Então, num vôo de pássaro essa tendência aí é fatal para o século XIX, a proliferação do controle de tudo... quando você sobe num avião que você aposta sua vida que aquilo não cai, você tá apostando a vida num significativo, porque é uma cadeia de significantes, é um discurso que produziu aquilo. É um cálculo. O cara foi calculando aquilo e disse: “Olha, vai que isso aí não cai”. Você tá agarrado numa caneta, você tá agarrado num bico de pena, num cálculo que foi feito. Então é muito mais natural você fazer esse Cálculo, muito mais rigoroso e exato você fazer esse cálculo pelo controle da cadeia significativa do que fazer através de geometria com desenhos, com axiomatizações que você não alcança uma vez. A contabilidade da burguesia é ... o número aí é preponderante. A Aritmetização da Análise pode ser considerada como um coroamento da cultura burguesa. Meio atrevido, mas acho que é por aí. (risos)

E. Professor, mais uma questão que eu gostaria de colocar é a seguinte: dentro dessa ótica que o Sr. discorreu ao longo desta entrevista, o Sr. já colocou que acha que a escolha do manual didático necessariamente não é tão importante assim, quer seja de Cálculo quer seja de Análise. Mas o Sr. poderia citar alguns manuais que o Sr., por exemplo, recomendaria ? E outros que o Sr. não recomendaria? E, especificamente, por que ?

B. A primeira recomendação é a seguinte: se você for dar um curso de Cálculo, primeira coisa, pergunte qual é o livro adotado e não mude. Então adote o livro que foi adotado, para não abrir um problema desnecessário de você mudar o livro e ficar responsável pelo livro. Não mude. Agora se você tiver chance de inventar um livro, o que é muito raro, você chegar num lugar e ninguém souber qual é o livro adotado no período anterior e, né, você for adotar, eu me satisfaço com Swokowski. Todo mundo diz: “Ah, mas o Swokowski, pra mim tem erros”. Ah, tá ótimo, cada erro que tem no Swokowski é um problema a mais que eu coloco para eles. Quer dizer, não é o livro que tranca. Agora, por exemplo, o livro do Lang eu acho terrivelmente ruim. Eu já tive experiência com o livro do Lang e aquilo não funciona. O livro do Kaplan é tremendamente complicado pra eles. Tem esses livros novos do Strang, tem um livro escrito por uma equipe lá, eu acho que da... não é do MIT, eu acho que é de Harvard, é uma equipe grande que escreveu. São livros que, você pega o livro na primeira página ele já dá 3 dribles no aluno, já deixa o aluno completamente sentado e eles vão com a bola embora. Quer dizer, todos eles ... parece que a vontade que o cara tem de escrever o livro é escrever um livro para um aluno ideal. Como eu tava te dizendo agora, você vai perguntar alguma coisa para um autor de livro texto, pergunta pra ele isto: “Escuta, quando você escreve o seu livro você está pensando nos alunos que você já teve, nos alunos que você gostaria de ter, no aluno ideal, você tá pensando no editor que vai vender o livro

ou na comunidade matemática que vai julgar se você escreveu bobagem?”. O cara que escreve livro-texto escreve diante disso e no fundo, o aluno muitas vezes é driblado a cada instante do livro. Quer dizer, eu digo que os livros textos em geral são estruturas à prova de ensino. Você põe aquilo na mão de um aluno, é certo que o aluno não vai conseguir entender nada daquilo. Então quer dizer, o Swokowski me satisfaz. Qual é outro livro que eu adotaria? O próprio Leithold não é um livro ruim, é um livro adaptável, você pode usar, eu acho que o Boulos é uma tragédia, exige que você leia desde a primeira página e entenda tudo desde a primeira página. Se você se perder, você tá frito. Outro é o Boldrini, o livro do Boldrin também é uma tragédia. Esses livros do pessoal da UNICAMP são tragédias. Eles parecem que foram feitos para um aluno completamente abstrato, ideal, que não existe em lugar nenhum. Quer dizer, botar aquilo na mão de um aluno é uma desgraça. Agora claro, o Swokowski eu sou suspeito de dizer, porque porque já estou com o Swokowski há 4 anos. Quando eu cheguei, ele já tava sendo adotado e eu não mudei. Outro razoável é o Alshenk embora mais completo um pouco, mas você pode trabalhar com o Alshenk. O Swokowski, por exemplo, da edição antiga pra nova você vê que ele foi experimentado em sala de aula, ele mudou muita coisa, ele fez muitas modificações. Ele antecipou, por exemplo, aqueles probleminhas de “escreva tal coisa em função de tal coisa” e toca uma geometrizinha pra cima do cara pra escrever o y em função do x . E isso precisa depois, porque senão chega nos máximos e mínimos o cara não consegue achar a função, então não sabe nem o que ele vai fazer, então tem várias vantagens. Agora tem um capítulo inicial de limites que eu simplesmente não uso. Vou usar no curso de Análise. E ele tem uma ... ele posterga os logaritmos e a exponencial e eu anticipo. Eu trabalho com logaritmo e exponencial desde o início: “O que que é o logaritmo? Logaritmo é uma curva assim, serve pra isso, olha aqui, esse logaritmo de a vezes b é o logaritmo de a mais o logaritmo de b e tal”. Pronto, são as propriedades fundamentais dos logaritmos. A exponencial: “Ah, você conhece o 2 elevado a x , faz o gráfico de 2 elevado a x ”. Todo mundo faz. “Olha, o e elevado a x é um pouquinho maior porque o e é 2,718”. Você faz o gráfico. “Ah, então isso é o e elevado a x ” e pronto. Você ficar problematizando: “O e elevado à raiz de 2, que coisa é essa, são dois irracionais, olha, imagina”, pra que? Agora, livros de Análise aí, eu nem lembro agora, eu nem lembro os nomes porque eu não estou ligado a isto, mas se eu tivesse que dar um curso de Análise hoje, eu tranquilamente pegava o livro de Cálculo do Spivak, tranquilamente pegava o livro de Cálculo do Spivak, está mais do que bom, é um curso de Análise bem explicado, também bons exemplos, bons exercícios, não precisaria mais do que aquilo, quer dizer, eu acho que há uma super-produção desnecessária de livros de Cálculo e de Análise, dois ou três de Cálculo, dois ou três de Análise, não precisava mais do que isso, quer dizer, todo ano eles ficam inventando novos livros, novas metodologias, livros que dizem que o método vai ser diferente e no fundo é tudo igual, quer dizer, eu não vejo diferença básica entre livros, todos eles são perfeitamente exequíveis; têm livros de Análise, o Elon é um excelente autor, por exemplo, ele tem livros, eu não sei o Curso de Cálculo ou de Análise dele que eu nunca estudei a fundo mas, o livro de Espaços Métricos, o livro de Topologia dele é excelente, todos os dois, quer dizer, é um bom autor, enfim... agora Análise mesmo, se você quisesse pegar um livro de Análise pra valer, pegaria agora a edição nova do Laurent Schwartz, é, esse sim, esse tem tudo, tem numa maneira razoavelmente geral, não geral demais e... enfim, quer dizer, é um livro excelente de Análise; os quatro volumes que saíram agora; vieram em dois, né e agora saíram quatro volumes melhorados,

quer dizer, esse aí seria um livro de referência para qualquer curso de Análise e pro dia a dia o Spivak está mais do que bom, quer dizer um aluno que saia da graduação, mesmo a nível de bacharelado, se souber o que está no Spivak, com aquelas construções todas, bah... excelente, não precisa inventar mais... é isso aí.

E. Professor, o senhor gostaria de fazer algum comentário final, fechar alguma coisa, algum gancho que não foi falado, fazer mais algum comentário sobre essa problemática toda envolvendo Cálculo, Análise, ensino de Cálculo, ensino de Análise, papel do professor ou formação do professor de matemática ?

B. É, eu perguntaria pros autores de livros e mesmo pros professores, quer dizer, quando eles colocam um aluno pra ler o livro que eles escreveram, se eles têm paciência de ver o que o aluno está entendendo daquilo que ele está lendo, se de fato está entendendo ou não, pra quem ele está escrevendo esse livro, se de fato é pro aluno que vai ler o livro ou se é pra alguma outra entidade abstrata e qual ? E o professor que dá aula, quando ele vai pro quadro negro, faz as demonstrações e sai feliz da vida porque fez o ensino, quer dizer, o que ele espera que o aluno entenda do que ele está fazendo, ele dá pro aluno uma chance de falar e ele ficar escutando...ficar escutando ? Se eu pudesse terminar com alguma frase, eu diria isso: ensina-se ouvindo, aprende-se falando ! Se quiser ensinar, comece a ouvir, comece a ouvir o que seu aluno tem a dizer, comece a ouvir o que o aluno pensa, tente entrar no pensamento do aluno e explicar pro aluno o que ele está dizendo, por mais doido que seja, por mais errado que seja, tente entender o que o aluno está pensando e o que ele está dizendo, faça o aluno falar porque se é o aluno que tem que aprender é o aluno que tem que falar e se é o professor que vai ensinar, ele tem que aprender a ouvir; se ele não ouvir, ele não vai ensinar, ele vai aprender; se ele quiser usar o aluno pra ele aprender, tudo bem: ele faz uma aula expositiva; só que depois que você dá dez cursos de Cálculo, você já deve ter aprendido, então porque não começa a ensinar ??!!

A.2) ENTREVISTA COM O PROF. GERALDO SEVERO DE SOUZA ÁVILA

– UFG – Goiânia – GO – 05/11/98

(E. Entrevistador / A. Ávila)

E. Bom, professor, em primeiro lugar eu gostaria que o senhor falasse um pouco de sua formação profissional de mestrado, doutorado e, em especial, um assunto que me interessa bastante nessa minha tese de doutorado, sobre a sua experiência com ensino de Cálculo e ensino de Análise, enquanto professor, não ainda como autor de livro texto. Isto a gente vai explorar depois.

A. Perfeito

E. Quais foram as coisas legais que aconteceram, os sucessos, os fracassos, as tristezas, alegrias...

A. De fato, é uma experiência que ocorreu ao longo de muitos anos, não é... Você vê, eu me formei no bacharelado em 56 e logo no semestre seguinte, isso foi em dezembro de 56, eu, no semestre seguinte, de fevereiro em diante eu comecei a dar aula de Cálculo. Então eu era muito inexperiente nessa época. Foi a primeira experiência de dar aulas. Foi lá no Instituto Tecnológico de Aeronáutica, as turmas eram muito pequenas, eu trabalhava com 20 alunos e eu dei o curso de Cálculo para turmas de alunos muito bons e foi a primeira experiência que eu tive com isso. Aí depois, durou um semestre apenas, eu saí para fazer o mestrado e doutorado e voltei a dar aulas quase 5 anos depois disso, em 1961. Aí eu não dei aula propriamente, não foi de Cálculo nem de Análise ainda. Eu dei aula de Variáveis Complexas. Também foi uma primeira experiência de ensinar Variáveis Complexas para físicos. Isso foi lá em São Paulo, no Instituto de Física Teórica, que existe até hoje e que aliás, agora, é um organismo da UNESP. E de lá, após esta experiência de 10 meses que eu fiquei lá, eu passei para a Universidade de Brasília. E na Universidade de Brasília, juntamente com o professor Djairo Figueiredo, isso foi em 62, nós fomos os primeiros professores de matemática lá e nós procuramos estruturar um mestrado para aqueles professores que vieram nos ajudar e que não tinham formação de pós-graduados. Então foi... aconteceu mais uma experiência de ensino. Aí eu passei 2 anos sem... eu fui fazer um pós-doutorado no exterior e só voltei a lecionar em 1965. Ah, vale mencionar que na experiência da Universidade de Brasília em 62 eu já orientei, pelo menos dei alguns cursos de Cálculo usando o... o livro usado na época era um livro assim, que apresentava o Cálculo de uma maneira rigorosa. Mas eu voltei a dar aula em 65 e...

E. O Sr. lembra o nome do livro?

A. Lembro, o livro existe ainda até hoje, é um livro que foi popular na época, porque na época, no começo da década de 60, o Cálculo ensinado nas universidades americanas ainda era nesse Cálculo enfatizado o rigor e o livro do Kiokemeister, Johnson & Kiokemeister, foi um livro popular, foi um livro bastante usado e ele apresentava o Cálculo de uma maneira rigorosa. Aliás, quando eu voltei a dar aula, em 65, lá em Washington,

na universidade de Georgetown, onde eu fiquei 7 anos, lá eu ensinei o Cálculo muito, eu dei muitas vezes Cálculo e cursos de Análise na pós-graduação, Análise Funcional, então eu aprendi mais sobre o ensino de Cálculo e Análise e lá nós usávamos o livro do Jonhson & Kiokemeister. Era muito usado. Mas eu confesso que eu tive muitas frustrações, muitas decepções em tentar com esse ensino rigorizado pro aluno no primeiro ano de faculdade. E depois vieram, nós podemos falar, eu acho que, vamos ver qual é a sua próxima pergunta porque eu acho que tem a ver com os livros-texto. Mas, em conclusão desta primeira parte, a minha experiência foi um aprendizado gradual. Você vê, eu só vim a escrever meu primeiro livro depois, em 1973, mas é... 12 anos após ter feito o doutorado. Então neste período de 12 anos eu já tinha passado por uma experiência de ensino que me ensinou muita coisa, que me mostrou que muitas tentativas eram um fracasso, eu me frustrei muito com as tentativas de ensinar o Cálculo rigorizado desde o início, aliás eu como aluno, fui submetido a esta experiência de aprender a Análise Matemática desde o primeiro ano na USP em São Paulo.

E. Ou seja, quando o Sr. coloca este Cálculo rigorizado desde o início, isso já era praticamente uma Análise Matemática?

A. Exatamente. Veja, quando a USP foi fundada na década de 30, os professores que vieram para a área de matemática foram italianos, principalmente na área de Análise, o Fantapié, Luigi Fantapié. O Fantapié era um matemático de peso e ele trouxe para o Brasil, na USP naquela época a experiência italiana, o que estava em voga na Itália, que era um ensino da Análise Matemática desde o primeiro ano. Isso ficou lá depois, ele deixou, quando ele voltou para a Itália, ficou no lugar dele o professor Omar Catunda, de saudosa memória, já falecido, foi meu professor, a professora Elza Gomide, que está lá na USP até hoje dando aulas, já com 70 anos, creio eu. Então nós passamos por esta experiência de querer aprender Análise desde o primeiro ano. E... a gente aprendeu, mas foi muito penoso. Então depois de toda esta minha experiência com ensino, eu acordei para esta realidade de que o ensino rigorizado desde o início não é a melhor coisa. A gente tem de lembrar que o intelecto não é só racional, não é só lógica, mas tem a intuição, a visualização geométrica, que muito ajudam no aprendizado. Então, às vezes o rigor encobre as idéias, ele dificulta a apreensão das idéias, ao invés de ajudar. O rigor é importante numa fase um pouco, de maior amadurecimento do aluno, quando ele tem já um espírito crítico, uma capacidade de questionar. Aí é que é a hora do rigor e da organização lógica da matemática. É assim que eu vejo.

E. Professor, então o Sr. está falando aqui agora em rigor e intuição, a gente depois pode conversar um pouco mais sobre isso lá na história do Cálculo e da Análise, justamente a diferença que houve entre estas duas disciplinas, destas duas áreas, mas especificamente entrando mais agora no ensino de Cálculo, como é que o Sr. considera que deve ser um bom curso de Cálculo que não seja como esses que o Sr. teve, um curso de Cálculo que privilegie isto que o Sr. chamou de intuição, de interpretação geométrica ?

A. Olha, me permita começar lembrando o seguinte: em primeiro lugar, na década de 60, no final da década de 60, eu vim a conhecer o livro do Prof. Serge Lang. Foi o primeiro livro de Cálculo escrito com essa idéia

de deixar de lado o rigor mais pra um curso de Análise. O curso do Prof. Serge Lang, ele escreveu um livro de 2 volumes e ele se rebelava principalmente com o fato de que os livros de Cálculo nos Estados Unidos haviam chegado a limites absurdos, de mais de 1000 páginas num livro de Cálculo. Ele achava isto um absurdo. Que Cálculo era uma coisa que se devia ensinar logo, o aluno tinha que aprender logo, não podia ficar demorando muito, para entrar em outras disciplinas da matemática. E o livro do Serge Lang foi traduzido para o português pela LTC do Rio de Janeiro, ele foi muito utilizado no Brasil. Na Universidade de Brasília, na década de 70, nós usamos muito o livro do Serge Lang. Então o Serge Lang abriu uma nova direção, um novo caminho no ensino da matemática. Eu acho que o Lang é muito responsável por isto. É um matemático de peso, muito conceituado, autor de muitos livros, gosta muito de escrever, escreve muito bem e deu origem a muitos outros livros. Então quando fui escrever o livro de Cálculo, eu me vali muito da experiência do Lang, da experiência do Courant, que é um livro antigo, de 1927 que foi escrito na Alemanha, depois foi traduzido para o inglês, em 1937, foi traduzido para o português pela antiga Editora Globo de Porto Alegre, este livro existe nas bibliotecas brasileiras, em português. Um livro muito precioso. Depois veio um livro mais recente do próprio Courant e John, eles reescreveram este livro, mas a tônica já é bem diferente. O volume I do livro de Courant & John é ainda muito bem feito e muito no espírito do Courant antigo, mas não é bem assim o volume II. Aliás, o Prof. Elon é que tem uma crítica ao volume II, ele pode explicar muito bem isso que eu ia dizendo, eu não vou me alongar muito sobre isso. Mas então, a minha experiência no ensinar o Cálculo, com o aprendizado ao longo dos anos, a gente começa a acordar pra certas realidades que a gente não reconhece muito quando é jovem. O aluno que entra na universidade não tem a maturidade que a gente tem quando saiu e o professor jovem se ilude muito, ele se engana muito, ele vai tratar com o aluno, como se aquele aluno tivesse a maturidade dele e ele não tá muito preparado para reconhecer no aluno essa falta de maturidade. É muito parecido com o caso do pai que vai educar o filho e às vezes confunde o filho com um adulto em miniatura. Não é, a criança é outra psicologia, é outro tipo de personalidade, que tem de ser tratada adequadamente. Então, eu aprendi a ensinar o Cálculo depois dos erros, como você observou, das frustrações, eu aprendi que era preciso ser humilde, vamos usar uma palavra muito valiosa. É preciso ser humilde e... realista.. e entender que o aluno tem de começar como que engatinhando, ele não vai começar andando e correndo como a gente quer. Engatinhando quer dizer, vamos dar a ele os recursos do aprendizado desde o início para que ele, depois de engatinhar, aprenda a andar e esteja preparado para mais tarde fazer e com muito proveito de um curso de Análise e com muito mais rapidez até, do que tentar ensinar desde o início. Volto a lembrar a minha experiência na USP. As turmas que entravam no curso de matemática da USP eram arrasadas. Entravam 30 alunos, sobravam 7, 8 no final do ano. É um absurdo, não é? Então, por que? Porque era uma tentativa errada de querer dar a Análise Matemática desde o início. Então eu acho assim, que nós temos de reconhecer o importantíssimo papel da intuição e da visualização concreta das coisas. Vamos ensinar uma função, nós temos que fazer um gráfico, nós temos de ter a visualização gráfica da função pra poder perceber as propriedades, depois é que nós vamos demonstrar as propriedades. Aliás, você vê que na história da matemática, as descobertas se processam desta maneira, se processam assim. As coisas são descobertas primeiro intuitivamente, visualmente. Depois é que a pessoa diz: “Ah, esse resultado é verdadeiro, vou ver se consigo demonstrar”. E vai procurar agora os recursos da demonstração lógica,

rigorosa, completa, não é ? Então eu acho que é por aí. E eu confesso pra você que tem sido muito gratificante essa experiência de abrir mão do rigor em grande parte, começar pela intuição, de levar o aluno a um aprendizado progressivo, continuado até que ele atinja aquele grau de amadurecimento que permita então a rigorização da disciplina.

E. Interessante! Essa experiência que o Sr. citou da USP é de 19...

A. Na década de 50.

E. Na década de 50! O Sr. não acha que hoje ela se repete em muitas salas de aula de Cálculo nas universidades brasileiras?

A. Sem dúvida, a USP teve uma influência muito grande, principalmente no Estado de São Paulo.

E. E eu digo isso também, porque o índice de reprovação ainda é muito alto no ensino de Cálculo. Será que não seria também por causa disto ? Por causa desta Análise Matemática disfarçada de Cálculo ?

A. Pode ser em parte, mas em grande parte não, porque a gente sabe de universidades onde o Cálculo é ensinado de uma maneira intuitiva e onde ocorre grande reprovação. Aliás, eu vou falar um pouquinho sobre isso. Olha, veja bem, eu acho que o aluno que entra na universidade, ele vem do segundo grau, ele vem com várias deficiências e vícios. Um dos vícios que ele traz é o de querer aprender na sala de aula. Ele vem com uma atitude passiva de que o professor vai ensinar e ele vai ficar quietinho aprendendo. E infelizmente, muito infelizmente, lamentavelmente, na universidade, esta atitude do aluno é, digamos assim, ela é cultivada. O professor, nós professores universitários, temos também as nossas limitações, nossas dificuldades de conduzir o ensino de uma maneira diferente. O desejável, eu acho, é que o professor fizesse menos preleções e levasse os alunos a uma participação maior, a um papel mais ativo no aprendizado, porque o aluno é que tem que aprender. O professor é um colega mais velho, mais experiente. Tem que ser visto como um colega mais velho, mais experiente. Mas não como uma pessoa que sabe tudo, que vai me ensinar e que vai me dar uma coisa pronta e acabada. Isso é um erro enorme. Agora se nós formos analisar as razões do porquê as coisas não podem ser melhoradas, então há muitas coisas pra falar, seria eu acho que até sair do roteiro seu porque, veja bem...

E. Seria uma outra questão muito mais complicada...

A. Exatamente! “Como é que eu posso conduzir uma turma participando ativamente ?” Eu tenho que ter turmas pequenas. Por exemplo, o ITA tinha essa experiência com 20 alunos na sala de aula, no meu tempo. Devia ser mesmo uma turma de 20 alunos, o professor tem que dialogar os alunos, conversar, bater papo, botar o pessoal pra trabalhar e ficar andando na sala, ir vendo como é que as coisas estão acontecendo, talvez

dividir em grupos. Isso é muito difícil numa turma de 40, 50 alunos pra um professor só. Tem que colocar mais gente ajudando o professor, monitores, auxiliares. Aí a gente faz. Olha, eu gostaria de lembrar que nós fizemos aqui nesta Universidade Federal de Goiás, eu dei o curso de Cálculo no ano passado, em 97 e eu tinha dois auxiliares, duas moças que me ajudaram. Então eu fiz um trabalho mais nessa direção e os resultados foram muito melhores. O índice de reprovação caiu muito naquele ano, por causa desta experiência, eu diria. E eu fiz esta experiência, não fiz uma inovação, eu ouvi um relato de um colega lá de Pernambuco, o Prof. Manoel Lemos. Eles enfrentam este problema em todas as universidades e em Pernambuco também. Ele falou: “Olha, nós pusemos os alunos pra trabalhar na sala de aula. Pouca preleção e muito trabalho. Dar problemas para os alunos, resolver problemas. Aprender matemática se faz através de resolver problemas. Quanto mais o aluno resolve problemas, mais ele aprende. E ele vai buscar teoria à medida em que ele encontra dificuldade nos problemas. Então, se nós pudéssemos mudar o enfoque do ensino para esta direção, certamente muito progresso seria feito e muito dessa reprovação no Cálculo cairia. Eu acredito que há muito que se fazer para melhorar o ensino mas não é tanto no sentido de encher as salas de aula de computadores. Eu acho que não é por aí. Computador é uma ferramenta muito útil, mas temos que ter cuidado que nós acabamos usando o computador erradamente. O computador tem o seu papel sim, no lugar certo. Não é enchendo a sala... já tivemos a experiência de colocar televisão na sala de aula. As universidades americanas fizeram isso, 300 alunos numa sala assistindo televisão. Não deu em nada, não foi boa a experiência. Então nós precisamos ter cuidado com as inovações, tem que ser feito com prudência e valendo-se de experiência... um aprendizado continuado que se deve fazer.

E. Professor, então voltando ainda para esta questão do ensino de Cálculo, como é que o Sr. avalia hoje a questão dos ϵ s e δ s dentro do Cálculo, das definições por ϵ s e δ s ? Isso seria um ponto no qual poderia haver essa confusão de desprezo da intuição em prol de um excesso de rigor que não seria devido naquele momento, o Sr. acha que existe exagero nisto?

A. Olha, eu acho que o exagero existe quando se quer colocar os ϵ s e δ s logo no começo. Eu acho que sim, os ϵ s e δ s tem um valor importantíssimo, mesmo dentro de um curso de Cálculo. Não é preciso esperar um curso de Análise para se entrar ϵ s e δ s. Eu acho que deve se entrar sim. Mas, no início, até que o aluno adquira uma certa maturidade com os conceitos de derivada, limite, aí, enquanto isso não acontece, não convém entrar com ϵ s e δ s.

E. Mas então, como é que seria só o ensino de limites sem ϵ s e δ s?

A. Ah, sim senhor, porque veja bem, vamos aprender com a experiência histórica. De onde é que vem esta história do limite ? Vem da derivada. Primeiro os matemáticos conceberam a derivada, a reta tangente, a velocidade instantânea. É através desta realidade, desta experiência inicial, que você vai chegar ao limite. Eu não gosto de ensinar limite em primeiro lugar, porque todo aluno tem o direito de falar: “Professor, por que que nós estamos estudando isso ?” Então, o aluno não tem a satisfação do porquê. Ao começar limite: “Pra

que isso professor?”. Pra começar, você não tem funções mais complicadas. As funções que você pode apresentar aos alunos são muito simples, para as quais a noção de limite é totalmente dispensável, não faz sentido falar de limite de $x^2 + 1$ quando x tende a 0. É claro que é 1. Então, é o valor da função no ponto 0. Então, eu só lido com funções contínuas e o aluno não entende porque que eu tô falando em limite, que eu tô introduzindo o conceito de limite. O conceito de limite faz sentido quando eu lido com a derivada, porque aí eu tenho que lidar com um limite do tipo 0 sobre 0. E aí é uma forma indeterminada, eu posso apresentar pros alunos várias formas indeterminadas e aí ele vê que faz-se necessário calcular o limite sim, para saber o verdadeiro valor da forma indeterminada. Então a derivada, a razão incremental que vai levar à definição de derivada é uma legítima forma indeterminada. E é necessário calcular o limite sim, pra calcular a reta tangente à uma curva, pra calcular a velocidade instantânea de um móvel. Então depois de fazer esta apresentação inicial da derivada, que não precisa nada de teoria de limites, de épsilons e deltas, o aluno vai amadurecendo pra questionar: “Sim, mas o que que é essa idéia de limite, como é que a gente rigoriza isto ?” Vai chegar um momento em que ele vai questionar. Mas ele só fará este questionamento, se eu conseguir chegar a um estágio, em que eu já tenha apresentado exemplos de funções, exemplos de cálculos de limites em que a coisa não lida só com funções contínuas...

E. Ou seja, num estágio em que ele já foi devidamente motivado para que possam surgir estas questões.

A. Exatamente, exatamente! Todo aprendizado tem que ser motivado. Não há como, é artificial querer ensinar qualquer coisa sem uma motivação prévia. Então a motivação, não é apenas chegar e dizer: “Olha, vou dar uma motivação pra isso”. Eu não posso chegar e dizer: “Olha, vou dar uma motivação pra limite: quando a gente for estudar derivada nós vamos precisar do conceito de limite”. Isso não é uma resposta honesta pra pergunta do aluno que fala: “Professor pra que que nós estudamos isso ?” Como, por exemplo, lá na escola elementar: “Professor, porque que nós temos que estudar toda esta história de triângulos, congruência, soma dos ângulos internos, semelhança”, e o professor responde: “É porque isso é importante para entender outros estágios mais avançados da geometria, quando você for estudar física, você vai precisar disso!” Essa resposta não satisfaz, não é honesta. Mas se o professor disser: “Olha, os triângulos são muito importantes, semelhanças, você quer ver a idéia de semelhança e proporcionalidade, então vamos aqui mostrar como que Erastotes calculou o raio da terra pela primeira vez, vocês vão ver funcionando a idéia de proporcionalidade e semelhança. Vamos ver como Aristágonos fez para calcular, para fazer uma estimativa da distância da terra ao sol, comparativamente à distância da terra à lua”. Aí sim, são problemas concretos que vão responder honestamente à pergunta do aluno. Aí o aluno fala: “Ah, agora eu entendi porque é tão importante saber as propriedades dos triângulos”. Ou então, como é que um agrimensor faz para fazer um levantamento topográfico. Eu tô aqui na beira do rio Araguaia, quero calcular a largura do rio. Se eu andar alguns passos ao longo do rio e formar um triângulo retângulo, eu calculo esta distância sem instrumento nenhum. É uma triangulação. Aí o aluno vai ficar satisfeito: “Ah, esta matemática que ele tá me ensinando é relevante!”

E. Então, o Sr. acredita que essa motivação vem justamente das aplicações que a matemática possui ?

A. Exatamente. Isso mesmo.

E. Indo pro Cálculo agora, uma coisa que eu queria te perguntar já desde o início da entrevista. A sua formação é na área de Análise, seu mestrado e seu doutorado ?

A. Exatamente.

E. Mas o Sr. tem uma ligação muito íntima com a física, não ?

A. Muito! Porque o meu desejo inicial era ser físico e eu fui frustrado de certo modo... aliás, eu li há pouco uma entrevista com um matemático americano bastante eminente, o Prof. Louis Neremberg e ele conta que ele queria ser físico. Mas ele foi para Nova York, lá no Instituto Courant, o Courant só ensinava matemática e ele acabou virando matemático. Então eu diria pra você que a minha paixão pela física persiste, eu adoro física e eu dedico bastante do meu tempo a estudar, a procurar entender problemas físicos e eu quando fui fazer o doutorado, eu tinha terminado o meu curso de licenciatura e bacharelado na faculdade e a minha intenção era reingressar na faculdade pra completar o curso de Física. Porque eu já tinha estudado várias disciplinas de física no curso de Matemática, o currículo de Matemática muito rico em física. Mas aí eu ganhei uma bolsa pro exterior, era uma das primeiras bolsas do CNPq, era uma oportunidade única, eu não quis perder aquela oportunidade e eu falei: “Não, eu vou estudar matemática aplicada, vai”. E eu fui fazer matemática aplicada. Meu mestrado foi sobre um assunto de ondas em líquidos, propagação de ondas em líquidos, em rios e canais. Um assunto muito interessante. Depois eu fiz o doutorado também sobre propagação de ondas eletromagnéticas em meios não-homogêneos. Foi um assunto interessante que eu estudei. No doutorado eu tive que estudar bastante eletromagnetismo, acústica, mecânica quântica. Então eu aprendi mais física. De certo modo, eu satisfiz o meu desejo inicial de ser físico. Eu sou meio lá e meio cá. Na verdade, eu gosto de tudo, sabe Fred. Eu gosto muito de história, eu gosto muito de filosofia, então eu tô sempre lendo, procurando ler história da ciência e história da civilização também. Então, na verdade, é muito difícil, a gente não pode abarcar o mundo com as mãos e tem que se contentar com o que pode.

E. Mas então, eu não estava errado nesta minha idéia inicial de que esse seu lado “físico” se reflete diretamente nessa visão que o Sr. tem do Cálculo enquanto aplicação, enquanto esse Cálculo aplicado que vai motivar os alunos pra sua utilização, não é ?

A. Porque houve e tem havido tendências recentes. Por exemplo, eu me lembro na virada dos anos 60 pra 70, eu tava lá nos Estados Unidos na Universidade de Georgetown, eu era professor lá, eu vi surgirem muitos livros que vieram com esta idéia inovadora: “Não, a partir de agora, a matemática contínua fica de lado, vamos ensinar o Cálculo baseado na matemática discreta porque tá o computador, o computador discretiza” e eram livros de Cálculo nessa linha de pensamento. Não duraram 3, 4 anos, sumiram todos. Porque há certas coisas que tem um valor permanente. Nós não podemos deixar de reconhecer o seguinte: que o casamento da

física com a matemática, principalmente no Cálculo e na Análise, mas no Cálculo inicialmente, é pra sempre. Então, não adianta dizer: “Ah, não precisa ensinar mais física pra ensinar Cálculo”. Deve se ensinar física pra se ensinar Cálculo. Deve-se trabalhar junto com o professor da física. Eu acho que o ensino de disciplinas de Cálculo deve se dar ao lado de disciplinas de física. As duas coisas se completam muito bem, dão muito certo. É claro que há muitos exemplos interessantes da economia, você pode trazer exemplos de outras áreas científicas, mas eu acho que ainda os problemas da física, da mecânica especialmente são muito relevantes no ensino do Cálculo.

E. E é uma pena, não é, professor, porque o que a gente vê hoje, na minha universidade e em algumas outras que eu ouço o depoimento de colegas, não só há o ensino separado, como também há uma separação entre os dois departamentos...

A. Exatamente.

E. Os professores da física, quando precisam de uma matemática chegam a dizer pros alunos: “Não, olha, eu vou precisar disso aqui, eu faço pra vocês o que eu precisar de matemática”. E os professores da matemática, ao se depararem com os problemas, com as primeiras aplicações da física em integrais duplas, etc, dizem: “Não, isso é por conta do pessoal da física, não me interessa”. É uma pena, não é ?

A. É, isto é lamentável e em grande parte, a responsabilidade disto está nos currículos de licenciatura. Porque veja, os currículos de licenciatura colocam a física meio que de má vontade. O que colocam de física é muito pouco e quando colocam é sempre com uma certa má vontade: “Bom... tal... põe uma disciplina de física”. Isso é muito errado, porque o que acontece, o professor de matemática, o professor que se forma na licenciatura, forma com aquela idéia de que ele é professor de matemática, exclusivamente. A matemática é muito enriquecedora, mas ela é muito rica mais ainda quando vista numa perspectiva mais ampla. Vamos ver como a matemática nasceu, o Arquimedes, vamos ver o Riemann, que foi um matemático puro extremamente preocupado com os problemas de magnetismo e eletricidade, desenvolveu a Teoria das Funções Analíticas em grande parte pensando nos problemas concretos que ele queria resolver. Então é muito importante... até modernamente, a matemática está se desenvolvendo muito por causa dos problemas de física atuais. Então isso é muito importante. Então, na formação do professor pra escola, pro ensino fundamental e médio, eu acho muito importante um bom ensino de física, para que, quando ele estiver ensinando matemática no ensino médio, ele tenha muito boa vontade e até entusiasmo em dialogar com o professor da física, em combinar com o professor de física sobre o desenvolvimento de certos tópicos: “Olha professor, meu colega aqui da física, eu vou fazer agora as funções e você vai fazer vai estudar o movimento uniforme e uniformemente variado, vamos fazer juntos, vamos ensinar a noção de derivada, vai ser importante pra você e pra mim aqui”. Por que não? Eu me rebelo muito contra essa eliminação do ensino da derivada no segundo grau. Porque as pessoas tem uma idéia errada de que para ensinar isso precisa ensinar toda uma teoria de limites. Não é por aí. E nós, como país com ambições de desenvolvimento, nós estamos ficando para trás. Você vai em outros países e

essas coisas são ensinadas no 2º grau. Olha na França, por exemplo, na Alemanha, no Japão, nos Estados Unidos. Os alunos, às vezes, entram na universidade, muitos alunos... meu neto tá estudando no 2º grau lá nos Estados Unidos. Quando ele entrar na universidade, ele já fez o Cálculo. Ele já fez, praticamente, o meu Cálculo I quando ele terminar o ano agora. Eu vejo o seguinte: nós precisamos de uma escola flexível, se aparece um aluno com talento para estudar música, meu Deus, vamos deixar que ele estude música desde os 10 anos de idade, ou antes! Por que não? Não vamos fazer ele ficar esperando. Se aparece um aluno com talento pra matemática, que ele possa estudar Cálculo logo, pra quando ele chegar na universidade, quem sabe, ele já vai estudar coisas mais avançadas, não precisa começar o Cálculo na universidade. Eu acho muito ruim essa camisa de força de que no 2º grau não se aprende Cálculo, está proibido aprender Cálculo, é só na universidade. Do mesmo modo que eu me rebelo contra a idéia de que nós temos que ensinar muita matemática pra todos os alunos. Pra que? Se o aluno tem mais talento pra Direito, vai estudar humanidades, vai estudar latim, se quiser, grego, estudos clássicos. Se ele tem talento pra medicina, que avance mais na biologia, na química. Se ele tem talento pra matemática, pra engenharia, deixa que ele avance mais. As escolas tem que estar preparadas para atender esta variedade enorme de talentos. E não é obrigado que todo aluno tenha que estudar matemática demais, tudo por igual no segundo grau, no ensino médio. Eu acho que não deve ser assim. Deve haver sim, um ensino pra todos de idéias matemáticas e caminhos para que se possa aprender mais matemática quem tiver talento para aquilo, logo.

E. Em relação a esta questão do ensino de Cálculo no 2º grau, essa frase contida aqui na contracapa do seu livro *Introdução às Funções e à Derivada*, me chamou muito a atenção: “O livro *Introdução às Funções e à Derivada* mostra como o conceito de derivada pode ser ensinado no 2º grau, de maneira fácil, através de uma apresentação intuitiva e com apelo à visualização geométrica, sem necessidade de um desenvolvimento sistemático da teoria de limites”.

A. Exatamente.

E. Quer dizer, o que eu gostaria de lhe perguntar é o seguinte: o Sr. acha que estas mesmas palavras, guardadas as devidas proporções, também não se aplicam ao ensino de derivada no 3º grau, num curso de Cálculo?

A. Claro que sim, claro que sim. Só que lá, nós vamos avançar muito mais...

E. Com mais possibilidades do ensino de novas funções, que os alunos do início do 2º grau ainda não têm em mãos...

A. Perfeitamente, perfeitamente. Veja bem. No segundo grau, quando eu falo em ensino de derivada, eu me daria por super-satisfeito se o aluno fosse levado a aprender como derivar o trinômio de segundo grau, ou seja, derivar a função $y = x$ e a função $y = x^2$. Aí, já dá pra fazer a cinemática da física muito bem feitinha,

tudo arrumadinho e ele aprender direito esse conceito de derivada que ele pode depois, estudar função exponencial, logaritmo, de uma maneira muito mais enriquecedora. Agora, como você observou, na universidade, como eu pego esses bolo de alunos, eu não posso separar, porque se eu pudesse separar, digamos 5, 6 ou 10 alunos que entraram, porque eles têm um talento muito direcionado pra matemática, então estes eu posso tratar de maneira diferente, eu posso até ensiná-los, dar pra eles um Cálculo mais ambicioso. Se eles já tem noção de derivada, tivessem aprendido no 2º grau alguma coisa de derivada, eles já vão aprender o Cálculo com os épsilons e deltas. Pode entrar. Em muitas universidades americanas, existe o chamado *honors courses*, cursos de honra, digamos assim. São certos cursos direcionados pra este tipo de aluno. Agora, o grosso dos alunos que vão fazer um curso de Cálculo I, 60, 70 alunos numa turma, pra estes eu só posso dar um Cálculo intuitivo pra começar. Não vou dar épsilons e deltas, é uma loucura.

E. Só uma pergunta: mesmo o Cálculo com épsilons e deltas, Cálculo, não Análise?

A. Sim senhor, não Análise.

E. Mesmo tendo épsilons e deltas, um curso que prime pelas aplicações dos conceitos envolvidos no Cálculo, é isso?

A. Um curso de Cálculo bem mais enriquecedor, eu vou até te citar um livro. O livro do Prof. Michael Spivak. É um belíssimo livro, um livro maravilhoso. Tá traduzido pro espanhol, creio eu. É um livro muito bonito de Cálculo pra um curso desses que eu citei, é um curso especial de Cálculo.

E. O livro de Cálculo, não o livro de *Cálculo em Variedades* ?

A. Sim, porque os alunos que passarem por um curso desses, de um ano fazendo esse Cálculo, no segundo ano eles vão embarcar num curso de Análise que vai levá-los muito além das fronteiras do que estes livros levam, como o meu livro de Análise. Meu livro de Análise é um livro de introdução à Análise. Porque o que se deseja, o desejável é que já no bacharelado, o aluno que fizesse um curso de Análise no segundo ano já pudesse ter feito muito mais Análise do que o que tá. Entende, por exemplo, um estudo detalhado de Séries de Fourier, da integração de Lebesgue, então quando ele entrar pro mestrado, ele já vai... muita coisa do mestrado podia vir para a graduação, pros bacharelados de graduação.

E. Inclusive Teoria da Medida ?

A. Sim, senhor, inclusive Teoria da Medida. Isso seria muito bom pra se fazer o mestrado mais rapidamente, porque o mestrado tá ficando muito longo, porque os alunos chegam no mestrado com deficiências de formação da graduação.

E. E vão, inclusive, fazer nos cursos de verão, Análise I, Álgebra Linear... quando o que poderia ser feito talvez pudesse ser Análise no $\mathcal{R}^n$...

A. Exatamente. Então, essa questão do ensino, eu não vejo o ensino do Cálculo como uma coisa monolítica, um modelo único, não é assim. Agora, este modelo que está aí, que é ilustrado pelo meu livro de Cálculo é o modelo adequado ao grosso das faculdades. E veja bem, o meu livro de Cálculo já é difícil pra muitas faculdades particulares. Tanto que eu escrevi um livro mais recente chamado *Introdução ao Cálculo* e que tá sendo bem aceito nas particulares. Mas é um livro... é uma simplificação do *Cálculo I*, é pra faculdades particulares. Então eu acho que nós devíamos nos preparar e nos equipar pra poder dar Cálculo mais... pra poder até dar um Cálculo mais rigorizado, mais rico não só no rigor, mas no conteúdo da disciplina, pra alunos que possam fazer estes cursos, né, numa universidade grande, por exemplo, a USP, digamos, talvez ela possa juntar lá um grupo de alunos que façam um Cálculo mais enriquecedor.

E. Agora, o Sr. acha que isso só seria possível de uma maneira mais global, se existisse já esse início do curso de Cálculo no 2º grau?

A. Pois é, exatamente. Agora, o ensino de 2º grau tem lá muitas deficiências, você não pode pedir que as escolas... eu acho que este ensino de derivada que eu estou preconizando pro 2º grau, é um ensino modesto. Muitos professores têm na cabeça... eu fui conversar uma vez com uma pessoa encarregada do ensino oficial do estado de São Paulo, lá na Secretaria da Educação e ele falou: “Professor, mas isso é muito elitista!” Eu falei: “Que que é isso! Eu vou ensinar isso numa escola de favela!”. Porque ele era do PT e ele falou para mim que eu tava elitizando: “Eu quero isso pro pessoal das favelas, não é pro pessoal, pros filhinhos de papai dos colégios particulares não...pra eles também!”. Não é uma coisa que... é um modo de reestruturar o ensino de funções e colocar o Cálculo e ensino de logaritmo e exponencial de uma maneira mais modernizada. Tá tudo na anacrônico. Logaritmo é uma coisa ensinada sem saber pra que. Porque vieram as calculadoras, eliminaram aquele papel antigo do logaritmo, que era um instrumento de cálculo, manual e agora eles não sabem o que fazer com logaritmo, mas continuam ensinando logaritmo e chega num ponto, não sabem o que fazer com ele.

E. Por força da obrigatoriedade...

A. Por força da obrigatoriedade, quando o que se devia fazer é imediatamente pegar a função exponencial e ensinar como função, com derivada, estudar os problemas interessantes de população, de crescimento, decaimento radioativo, essas coisas. Há muita coisa a se fazer como eu mostro nesse livrinho aí. Então... reestruturar os programas.

E. E isso, penso eu, poderia inclusive, motivar mais as pessoas a fazerem Matemática...

A. Muito mais, muito mais, porque uma das coisas ruins que trabalha contra o ensino da matemática, é a falta de motivação. É esta história de querer ensinar hoje sem dizer pro aluno por que e pra que. Então isso é um desastre, ao meu ver. Porque as pessoas se empolgam com aquelas idéias que dizem respeito a alguma coisa maior e não pela idéia em si, não é verdade? Veja bem, porque que uma música pega tão bem, como estas músicas do Chico Buarque, “A Banda”, “Roda Viva” ? Porque aquilo, o Chico Buarque, ele tem aquela percepção do que o povo quer. Ele tá inserido num contexto cultural. Então, ele soube captar esses elementos culturais, pra chegar e fazer uma obra. Mas no ensino de matemática, de filosofia, de história também é assim, tem que empolgar o aluno. Como é que o aluno vai se interessar por História do Brasil, Deodoro, Floriano, Campos Sales, sei lá o que, toda a história do Brasil. Tem que empolgar o aluno. Tem que começar com alguma coisa que empolgue, então talvez, tenha que começar daqui pra trás. Os problemas sociais de hoje, vamos vendo como é que foi a Era Getúlio Vargas, como é que as coisas foram tratadas. História tem que ser motivada. Aluno detesta história quando é decorar datas, nomes, guerras, batalhas. Tudo tem que ter uma justificativa, uma motivação.

E. Tá jóia. Professor, agora pra gente poder fazer o contraponto, como é que o Sr. vê hoje, o ensino de Análise. O Sr. acha que mesmo em Análise, enquanto rigorização do Cálculo, o Sr. não acha que existe um certo excesso de rigor nos cursos de Análise? Ou o Sr. acha que isso é realmente indispensável pro desenvolvimento do pensamento analítico?

A. Não, eu acho que na Análise tem que haver agora um tratamento rigoroso dos fatos, que na verdade, a Análise, a introdução à Análise Matemática não é mais do que o Cálculo. Por exemplo, fazer uma teoria da integral, da derivada. Então, nós temos que entrar com os elementos da Análise, as propriedades dos números reais, a completeza dos números reais é muito importante, vem aí outros fatos, estudar funções contínuas em conjuntos compactos. Isso aí tem que ser feito com um certo rigor. O que talvez eu possa criticar é o seguinte: dependendo do tipo de aluno que vem pra fazer esse curso, vamos pegar o aluno típico, o aluno que nós mais vemos por aí. É aquele que tá fazendo bacharelado, fez um curso de Cálculo e agora vem fazer um curso de Análise. Então, o que é um curso de Análise pra este aluno ? Eu acho que o curso de Análise pra este aluno é mais uma rigorização do Cálculo, aquilo era integral que eu mencionei do Cálculo Diferencial. Os fatos que nem sempre podem ser demonstrados lá no Cálculo vão agora ser demonstrados com base nas propriedades dos números reais. Agora, o que pode acontecer, é um curso de Análise que esteja acima da possibilidade desse tipo de aluno, que há livros de Análise mais ambiciosos...

E. Por exemplo...

A. Exemplo, o livro do Dieudonné de Análise, que é um livro mais ambicioso. Então, não dá pra começar por aí. Só se o aluno já tivesse feito aquele Cálculo que eu descrevi, baseado no Spivak, mais matemático. Quando ele chegar lá na Análise, ele pode entrar em espaços normados, diretamente, já vai ver coisas mais avançadas. Porque ele pressupõe então que ele já tenha tido essa Análise que nós damos aqui nas

universidades brasileiras. Por exemplo, o meu livro, o do Djairo, o próprio livro do Prof. Elon, são livros todos mais ou menos do mesmo nível. Não são tão ambiciosos assim. Então, eu acho que nas universidades brasileiras o curso de Análise eu acho que tá bem equilibrado. Eu acho que não tá havendo esses excessos de rigor. O que há, é de um autor pra outro, por exemplo, você pega o livro do Prof. Elon, pela própria formação dele, o livro dele é muito diferente do meu livro e do livro do Prof. Djairo. Você vai ver muito mais semelhança entre o meu e o do Prof. Djairo por causa da nossa formação.

E. O que o Sr. acha que seria essa diferença, é voltado mais para os aspectos topológicos?

A. É... ele tem, por exemplo, tem hora que você diz: “Esse aqui é um algebrista”, como os livros do Lang também. O Lang é um algebrista, então inescapavelmente, vai aparecer nos textos dele esta componente algébrica.

E. Professor, nessas notas complementares de seu livro *Introdução à Análise Matemática*, o Sr. salienta em diversas partes esse jogo, esse balanço entre rigor e intuição e como é que isso vem definindo justamente Cálculo e Análise. Sobre os reflexos disto no ensino o Sr. já falou bastante, mas como é que o Sr., de forma resumida, vê isso enquanto justamente a diferença entre Cálculo e Análise ? Seria isso: Cálculo, intuição; rigor, Análise ?

A. Olha, isso é uma questão, eu acho que mais didática, não é, porque é mais de organização didática do ensino. Porque, Cálculo é Análise, Cálculo é Análise Matemática.

E. Então, né, mas quando a gente olha pra história, a gente consegue associar ao Cálculo, ao próprio surgimento do Cálculo, Newton, Leibnz, talvez Barrow, um pouco o Cavalieri e ao olhar pra Análise, a gente vê que não há esse marco do surgimento da Análise. O Sr. a todo instante usa rigorização, modernização até chegar na Aritmetização da Análise. Então, o Sr. acredita que aonde surgiu realmente a Análise matemática? Que nomes o Sr. associaria à Análise Matemática?

A. Muito bem. Eu acho aí que é, como você falou, uma questão de rigorização, porque a Análise Matemática... o Cálculo começou a se desenvolver lá no século XVII e todo o século XVIII é um desenvolvimento continuado desse Cálculo e como você deve saber, com objeções de até filósofos como o Berkeley de que não havia fundamentação rigorosa daquela disciplina. Nem por isso deixaram de levar a coisa adiante, como o Euler, o próprio D’Alembert, que conclamava os companheiros: “Não, tenham fé e vamos em frente. Nós não podemos ficar parados esperando”. Veja o que aconteceu com os gregos. Os gregos toparam com problemas difíceis, tiveram uma crise, ficaram apavorados. Não fizeram mais nada. Só vão fazer geometria, não mexe mais com números. Eles paralisaram, quer dizer, o escrúpulo exagerado com o rigor levou ao estancamento da matemática na Grécia antiga. Levou , se não ao estancamento, vamos dizer assim, levou a uma virada pro lado da geometria. Eles acharam: “Bom, nós podemos fazer geometria rigorosamente,

vamos embarcar na geometria”. E começaram a fazer geometria, geometria, geometria. Virou aquela tradição geométrica. E é até curioso que até mesmo em tempos bem recentes, os matemáticos são chamados de geométricos, você fala numa universidade inglesa, em Oxford, *professor of geometry*. É um professor de hoje e o que ele é ? O título dele é *professor of geometry* . Porque geometria ficou sendo sinônimo de matemática. Até recentemente. Bom, então você me pergunta, quando é que ocorre esta diferenciação. Eu não vejo uma diferenciação. Então, mesmo no século XVIII, houve tentativas de rigorizar o Cálculo e uma das mais importantes é a de Lagrange, no final do século já. E o que aconteceu? Não conseguiram! Não conseguiram! Mas houve um amadurecimento, não é, por exemplo... há um estudo muito interessante de uma professora americana chamada Judith Grabiner, *As Origens das Idéias de Cauchy* , não sei se você conhece o livro, vale a pena, viu, depois você escreve aí. Ela mostra, por exemplo, que até recentemente, a impressão que se tinha é que: “Bom, aí chegou na época do Bolzano e Cauchy, o pessoal acordou pra necessidade de rigorizar o Cálculo”. Nada disso. A coisa vinha de antes. Essa gente, como o Cauchy e Bolzano, essa gente foi beber nas fontes do século passado. É claro que eles sabiam o que estava fazendo Lagrange, então essa gente pode rigorizar o Cálculo porque eles são uma continuação de uma tradição que já existia. Então, aí o Cálculo começa a se rigorizar. Cauchy, Bolzano, depois Dirichlet, aí vem Dedekind com a história dos números reais. Veja bem que coisa interessante. Eles já vinham trabalhando com os números reais de longa data, os matemáticos todos. Euler principalmente. Mas não tinha uma teoria dos números reais, as coisas aconteceram ao contrário... Aí veio o problema da série trigonométrica, que foi um problema muito presente em todo o desenvolvimento da Análise do século passado e a Análise se desenvolve. Então nós chamarmos de Análise é mais uma questão didática. Não é uma nova disciplina. É o Cálculo, mas agora numa roupagem nova, rigorizada, não é ? Então teve um papel extraordinário a intuição, não é, no desenvolvimento do Cálculo, principalmente com Euler. Euler era um homem extraordinário, de ver as coisas. A intuição de um matemático pra enxergar e ver o caminho que deve seguir, é tão importante como no músico, pra compor uma peça. Como num Beethoven... é a mesma coisa. É criatividade. Veja o Riemann por exemplo, o Riemann cria um geometria que não tinha nada a ver com nada... Mas Gauss falou: “Puxa, isso é importante”. Gauss percebeu. E depois veio a ser muito importante a Geometria Riemanniana. Então, o gênio tem essa capacidade que nem todo mundo tem de enxergar o caminho que é importante: “É por aqui”. E andar por aquele caminho que está certo.

E. Mas, o Sr. considera como fundamental o movimento da Aritmetização da Análise, pra essa Análise que a gente tem hoje aí?

A. Sim, porque o que aconteceu foi uma... veio também ao lado do desenvolvimento da Análise no passado, aconteceu o problema da geometria. Finalmente, os matemáticos começaram a perceber, tiveram, acabaram descobrindo que o postulado das paralelas era independente, então, a fundamentação da matemática na geometria era uma coisa, agora, vista como frágil. Pensava-se que a geometria era um modelo do rigor. Agora, viram que a coisa era frágil. E quando Hilbert tenta rigorizar a geometria, faz a rigorização da geometria, surgem os problemas de consistência, completeza de postulados e dependência e aí, como é que

verifica estas coisas ? Ele fez um isomorfismo com a aritmética. Ele leva o modelo geométrico para... transfere para a aritmética. A responsabilidade da fundamentação da geometria fica com a aritmética. Se nós fizermos uma boa fundamentação dos números, nós teremos da geometria. Então isso transferiu de vez o problema da fundamendação da Análise Matemática para a geometria. Bom, não é só isso. Antes, o desenvolvimento da teoria da integral. A teoria da integral lá no começo era vista como: “A integral é uma área. Mas o que é uma área? Bom, isso é uma idéia geométrica”. Agora com Cauchy e depois Riemann, a integral é definida em termos puramente aritméticos, puramente aritméticos. Nós vamos agora definir a área em termos aritméticos. Então, nós trocamos o papel das coisas, isso que é o significado da Aritmetização da Análise. Hoje a matemática é toda aritmetizada, a própria geometria assenta-se sobre os números, é uma coisa muito interessante. E nós não sabemos se vai ser sempre assim, porque nós estamos ainda vendo a evolução das coisas.

E. E o Sr. acha que a gente poderia associar esse movimento principalmente a Weierstrass e a Dedekind por conta dessa fundamentação dos números reais ?

A. Certamente eles são muito responsáveis, Riemann também e Cauchy também, Weirstrass, sem dúvida todos estes grandes analistas do século passado. São responsáveis para que, culminasse isso na obra de Hilbert. Porque eu acho que a obra de Hilbert sobre geometria mostra claramente que essa Aritmetização da Análise, que já tinha acontecido, tava acontecendo, é uma coisa muito importante...

E. Porque, na realidade, a matemática inteira foi aritmetizada a partir dali... Professor, só mais uma coisinha. Então, olhando para a história, como é que o Sr. acha que eu poderia identificar o pensamento diferencial e o pensamento analítico. O pensamento analítico, pro Sr., estaria até mesmo antes do século XIX, já no século XVIII, com a tentativa daqueles matemáticos tornar tudo rigoroso ? Isso já seria um pensamento analítico ?

A. Olha, eu não identificaria, Fred, eu não sei se está certo a gente identificar o pensamento rigoroso com o pensamento analítico. Veja bem, a Análise, como eu já falei antes... Cálculo é Análise. Rigor é outra coisa. Então, eu chamo isso aqui de Cálculo e chamo aquilo ali de Análise só por uma conveniência didática. Podia chamar tudo de Análise: “Olha, vai dar um curso de Análise no primeiro ano, só que lá você não usa rigor; vê a coisa de uma maneira intuitiva”. Certo, então eu não vejo porque este problema... o que que é Análise, é outra coisa complicada. Nós teríamos que gastar muito tempo pra conversar sobre isso.

E. Mas, o pensamento analítico em si...

A. O pensamento analítico é algo que se contrapõe a um pensamento mais geométrico, digamos assim, mais... ou tudo bem, você quer ver na expressão pensamento analítico uma coisa assim, mais rigorizada. Então, uma pergunta que você faz é: “Desde quando” ? Esta preocupação com a rigorização da matemática está presente

desde a Grécia antiga. E o surgimento do Cálculo começa com Arquimedes, com o Cálculo Integral nas idéias de Arquimedes.

E. Então, lá em Arquimedes já teria também o pensamento diferencial e integral ?

A. Ah sim, porque Arquimedes, ele tinha uma preocupação enorme com o rigor, sendo ele um grego, já um helenístico, mas era ligado à tradição grega, ele tá muito preocupado com o rigor. Mas Arquimedes, curiosamente, você deve saber daquele livro chamado *O Método* que o Arquimedes escreveu, que só foi descoberto por volta de 1900, na virada do século, mostra como ele fazia as descobertas dele. Era de uma maneira muito intuitiva, apelando para experiências físicas, de balança, pesando a esfera de um lado, o cone, para poder chegar ao relacionamento do volume de um com o volume de outros sólidos geométricos. Depois ele passa à demonstração. Os livros dele que ficaram, eram livros com demonstração de um rigor muito refinado e eram da geometria. Veja, quando os matemáticos do século XVII retomam estes problemas de volumes e áreas, que começam a pintar o Cálculo, eles estavam inspirados em coisas da geometria, em trabalhos dos gregos, aí eles criam uma disciplina nova, que é o que, eu acho que a gente deve chamar de Análise Matemática, que é o que se chama Análise Matemática, desde a geometria analítica pra cá, seja rigorosa ou não rigorosa. Então, essa parte não rigorosa que a gente apresenta nos primeiros anos, a gente chama de Cálculo.

E. Então, agora concluindo mesmo, o Sr. acha que a Análise Matemática também é importante na formação de um professor de matemática, mesmo na licenciatura? E o Sr. considerou isso ao escrever seu livro?

A. Eu acho que é. Eu confesso que tenho experimentado este livro nas disciplinas da licenciatura e não tenho tido muito sucesso. Nós estamos até pensando em um outro projeto. Num livro chamado *Elementos de Análise* direcionado pro aluno da licenciatura, porque o aluno da licenciatura precisa ser informado sobre vários fatos da Análise. Não tanto quanto um aluno do bacharelado. Então, eu acho que para a licenciatura, é necessário. E quando eu fiz desta, condição no provão de matemática lá do MEC e uns colegas que lá estiveram comigo, todos concordamos que é preciso uma dose de Análise pra licenciatura, mas uma dose moderada e uma apresentação também moderada. Nós estamos estudando a possibilidade de fazer um texto mais direcionado pro pessoal da licenciatura.

E. Professor, o Sr. gostaria de colocar mais alguma coisa?

A. Muito obrigado pela oportunidade, foi um prazer conversar com você, conhecê-lo pessoalmente e gostaria de poder conversar mais. Desejo muita felicidade para você, pro seu trabalho, acho muito importante o que você está fazendo e faça isso com bastante entusiasmo, como é o que eu estou percebendo que você tem.

A.3) ENTREVISTA COM O PROF. DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO
– UNICAMP – Campinas – SP – 29/10/99 (E. Entrevistador / F. Figueiredo)

E. Bom, Professor, primeiro eu queria agradecer por este apoio que o Sr. está me dando concedendo esta entrevista, pro meu trabalho isso é muito importante. Eu queria começar pedindo que o Sr. começasse falando um pouco sobre sua experiência profissional, sua formação de graduação, mestrado, doutorado e depois fosse adentrando um pouco mais na sua experiência docente, especialmente com Cálculo e Análise na graduação.

F. Certo. Bom, eu acho que toda a minha atitude com relação à matemática é muito influenciada pela formação que eu tive. Eu sou formado em Engenharia Civil pela Universidade do Brasil, a antiga Universidade Federal do Rio de Janeiro, na época em que o Rio de Janeiro era a capital, me formei pela Universidade do Brasil e eu tive contato, durante o curso de graduação em Engenharia, tive contato com o Maurício Matos Peixoto, e ele era o catedrático em Mecânica Racional. Eu tinha assim, muito gosto pela matemática, eu já estudava matemática sozinho, mas o contato com ele foi muito importante, porque ele mantinha no que a gente chamava de gabinete de Mecânica Racional, que naquela época tinha catedrático e o catedrático tinha uma área que era chamado gabinete daquela cátedra. E o Maurício tinha essa área e ele dividiu essa área em um pequeno pedaço para ele e em um outro pedaço para o pessoal, para os monitores dele. Eu fui um aluno muito bom no curso dele e ele me convidou para ser um monitor da cadeira dele. E como monitor eu tive a oportunidade de ter bastante contato com ele, nós tínhamos seminários frequentes lá. Antes de ir para os EUA, eu só fiz o curso de Engenharia né. Então a matemática superior, que eu aprendi além dessa matemática do Cálculo que a gente aprende na escola de Engenharia, toda a matemática que eu aprendi, como a Álgebra Linear, Variáveis Complexas, Álgebra Moderna e cursos mais refinados de Análise, tudo isso eu aprendi através de seminários no gabinete de Mecânica. Eu tive colegas de grande projeção no futuro. Tive o Mário Henrique Simonsen, ele foi meu contemporâneo e a gente fazia seminários juntos.

E. Isso paralelamente ao curso de Engenharia Civil ?

F. Paralelamente ao curso de Engenharia Civil. E o Maurício tinha uma formação, uma atitude em relação à matemática, uma coisa muito interessante. Ele era uma pessoa que não se perdia em formalidades né. Não se deixava enganar por estruturas. Ele queria entrar mesmo na parte mais fina da matemática e... por exemplo, para você ter uma idéia, nós estudamos um curso com ele, tivemos um seminário, porque tudo era através de seminário né. Nós fizemos um seminário com ele sobre o livro *Métodos Matemáticos da Física* do Courant e Hilbert, que é um livro bastante pesado, não é um livro com a matemática da época Bourbaki; é um livro anterior. Então tem certas imprecisões. Mas é um livro que educa muito para uma atitude com relação à matemática. Então nesses seminários, outros colegas, inclusive o Lindolfo de Carvalho Dias, que foi diretor do IMPA, foi do Ministério até recentemente, então era uma boa companhia que a gente tinha naquela época e o Maurício nos dirigia muito bem. Então essa formação que eu tive de matemática, não só matemática pura

mas também aplicações. O curso de Engenharia me mostrou a possibilidade de usar a matemática em mecânica, isso foi uma coisa que marcou muito também, usarmos um curso de dinâmica dos fluidos, que a gente chamava de hidráulica. E então eu tive uma tendência muito grande assim para a matemática aplicada tanto que...

E. Digamos assim que o Sr. entrou para a matemática pela porta da matemática aplicada...

F. Pela porta da matemática aplicada, exatamente. Inclusive o CNPq criou em 1955 três bolsas de doutoramento nos EUA para fazer matemática aplicada. Havia uma preocupação de que precisava desenvolver no país matemática aplicada. E o CNPq criou estas bolsas e eu me candidatei a uma destas bolsas, era do meu gosto e ganhei uma destas bolsas e fui para a Universidade de Nova York, pro Courant.

E. Em 1965 ?

F. Não, eu fui em... eu me formei em 1956 e em 1957, meio ano depois eu fui para os EUA, para a Universidade de Nova York, no Courant Institute. Na época não chamava Courant porque o Courant estava vivo ainda. Nessa época era o Institute of Mathematical Sciences. Então eu fui para lá e foi uma boa escolha, porque é uma universidade que tem essa atitude. Compreende... matemática e aplicações. Compreende, o Courant foi um matemático muito ligado com Hilbert e o Hilbert era uma pessoa que fazia matemática, matemática pura mas ele sempre, ele achava que a matemática aplicada era um farol, que você tendo os problemas da vida, do universo aí, você via problemas da matemática, você trazia para a matemática e desenvolvia. E esses problemas que você começava a desenvolver criavam uma nova matemática que eventualmente voltaria para as aplicações. Então ele sempre falava que a matemática deveria ter uma ponte com tráfego nas duas direções entre o universo, dos problemas reais e os problemas que ela trabalhava. E a gente tava cansado de ver exemplos disso. A matemática por exemplo, desenvolvida na Grécia antiga, as cônicas... Apolônio. Você vê que quando Kepler vai desenvolver toda a mecânica celeste, ele volta para estas coisas aí e outros exemplos nós temos aí na mecânica quântica, na mecânica relativista, de matemática que já existia. Então essa minha ida pro Courant, eu acho que foi providencial. Porque eu fui para um ambiente em que realmente eu estava bem. E a formação que eu tive lá foi sempre essa. De modo que isso se reflete muito no que eu escrevo, compreende. Por exemplo, num livro recente que eu escrevi *Equações Diferenciais Aplicadas*, um livro que foi originado num Colóquio Brasileiro de Matemática, acho que em 1975, se não me engano e ele ficou aí como um livrinho do colóquio e eu sempre pensava em refazer, em reescrever como livro, mas com tantas outras coisas para fazer eu fui deixando de lado. Até que encontrei um colaborador, que foi o Aloísio Neves aqui do Instituto e disse “Ok, Djairo, eu dou uma mão a você” , deu uma lida, fez a revisão, faltava alguma coisa como Transformada de Laplace, um pouco mais de sistemas de equações e ele introduziu tudo isso e hoje em dia para você apresentar essas coisas é muito importante que você procure usar a tecnologia que aí está. Compreende, você tem uma equação diferencial, não tem possibilidade de você integrar explicitamente, mas por métodos numéricos você pode ter uma idéia da solução. Então, se você usar esses pacotes aí que existem, o Mathematica, você usando o computador... e ele introduziu um capítulo, que

modernizou o livro neste sentido, que você pode entrar, deu um cursozinho de como você usar esse pacote o Mathematica e resolver algumas equações.

E. Através de soluções aproximadas...

F. Através de soluções aproximadas. Então isso tudo é... estou contando tudo isso porque isso tem a ver com minha formação e que implicou no tipo de coisa que eu escrevo né. Eu sempre procuro, eu sempre procuro dar a aplicação, entendeu. Acho que é muito importante em matemática, que é uma coisa muito bonita na matemática a meu ver, é quando uma teoria permeia por outras. Quando a teoria é muito estanque, eu não gosto. Eu gosto de ver por exemplo, por que eu gosto de Análise, Análise Funcional, Análise Global, Topologia. Porque ela vai se ramificando, ela vai se aplicando em outras coisas. Por exemplo, eu vou citar uma coisa. Eu nunca gostei, quando eu era aluno, de Topologia. O cara falava “Ah, Topologia !”, eu falava, “mas porque esse negócio de Topologia, espaço métrico chega, Topologia, esse negócio muito geral”. Eu tinha aquela impressão que era uma generalização. E eu acho que a matemática não pode se desenvolver com generalizações. Tem uma teoria, então vamos generalizar essa matemática !. Acho que isso não é uma boa conduta.

E. O sr. acha que o verdadeiro progresso estaria para o lado da aplicação ?

F. Motivado por alguma coisa ! Por exemplo, Topologia. Topologia, eu só vim a acreditar em Topologia quando eu estava na oportunidade, eu estava na Universidade de Brasília na época, 1963 e veio ao Brasil, eles convidaram para lá um matemático francês, mas que mora nos EUA, chamado François Trèves. Ele foi aluno do Laurent Schwartz. E então o Trèves, ele deu um curso que era o seguinte: ele tinha um problema de equação diferencial. Queria mostrar que uma equação diferencial linear tinha solução. Então ele disse: “Pra isso, eu vou precisar de Teoria das Distribuições de Schwartz”. Tudo bem. “Mas para desenvolver a teoria das distribuições de Schwartz eu vou precisar de espaços vetoriais topológicos. E para desenvolver espaços vetoriais topológicos eu vou ter que estudar um pouco de Topologia”. E então, aí ele me convenceu. Aí eu estudei Topologia com entusiasmo, em seguida, espaços vetoriais topológicos, em seguida, teoria das distribuições e em seguida equações diferenciais parciais.

E. Tudo bem, foi uma grade de...

F. Uma grade. Eu acho que essa coisa, a gente deveria procurar transmitir para os alunos. De que as coisas tem ligação uma com a outra. Sem aquele negócio estanque, só Topologia, taca espaços mais gerais. Você precisa dizer para que tá fazendo aquilo, ou seja, a aplicação daquilo.

E. Então, já que a gente está falando de interligamento entre cursos e aplicações, me fala um pouco mais agora sobre sua experiência com ensino de Cálculo. Se o Sr. já ensinou Cálculo inicialmente, para que cursos, quando...

F. Olha, a minha experiência com a graduação eu diria que foi mais nos EUA.

E. Interessante.

F. Porque quando eu me formei, eu tirei o doutoramento... bom, eu fui monitor quando eu era aluno, aqui na Escola de Engenharia, mas era da cadeira de mecânica e dava um pouco de Geometria Analítica e... aquelas turmas imensas. É... antigamente não havia divisão, você pegava 200 alunos, tinha uma sala lá na Escola de Engenharia que se chamava Maracanã. Bom, depois que eu voltei dos EUA, eu fiquei um pouquinho de tempo no IMPA, mas no IMPA na época não tinha posições... eram bolsistas e foi no ano que criaram a Universidade de Brasília e o Darcy Ribeiro me convidou para começar o Departamento de Matemática lá. E a UnB, quando foi criada, a concepção do Darcy Ribeiro era que a universidade começaria com pós-graduação. Duas coisas revolucionárias da UnB: uma... acabou a cátedra, não tinha catedrático. Na época, no Brasil todo, no sistema universitário brasileiro era cátedra.. Então a UnB entrou com um sistema muito parecido com o americano, tinha o professor titular, o professor associado e os professores assistentes. Tem toda uma cadeia e não havia uma disciplina que fosse propriedade de ninguém. Você tem que dar tudo. Bom, você podia dar um pouco de Álgebra, Geometria, não havia propriedades: “Eu sou catedrático de Análise”. Então eu fui para a UnB dentro desta concepção de que a universidade ia dar pós-graduação e de fato, nós começamos o Departamento de Matemática só com pós-graduação. E eu fiquei na UnB até a revolução de 64 e foi o ano que eu fui para os EUA e eu só dei curso de pós-graduação. Que a gente tava justamente querendo... a concepção da universidade era formar os quadros e depois a universidade começaria com a graduação.

E. Entendi.

F. Então eu fui para os EUA, e nos EUA eu ensinei a... o sistema era completamente diferente do nosso. O sistema americano é muito organizado, você recebe um texto, você recebe os sílabos. Os sílabos é uma discriminação aula por aula, do que você dá. Então você segue aquilo lá. Em geral as turmas são pequenas, em torno de 25 alunos, não tem problema de disciplina, então todo mundo vai a aula... Não ficam bagunçando na tua aula, eu acho que é um sistema diferente, eu acho que é uma cultura diferente, compreende. Então é muito mais fácil você interagir e dar as aulas né.

E. Mas a ementa do curso de Cálculo lá é parecida com a ementa dos cursos de Cálculo aqui?

F. É muito parecido, é muito parecido especialmente os textos que se usou no Brasil até recentemente, antes de se criar uma literatura brasileira, eram livros americanos, acho que até hoje, tem gente que não gosta do

livro do Ávila, que prefere textos americanos. Mas os textos são os mesmos. Agora a velocidade de apresentação é diferente, compreende; nos EUA é maior. Você tem menos tempo falando em aula do que no Brasil. No Brasil, depois que eu voltei para Brasília em 1971, os cursos é... então naquela época era outra experiência, depois a gente fala sobre isso. Mas posteriormente os cursos eram de 8 horas de aula, uma matéria que nos EUA você dá em 3 horas, entende ? Por que ? Porque o professor tem uma atitude de ir para o quadro, fazer todos os detalhes, se ele sente que ele não está fazendo todos os detalhes o aluno pode pensar que ele não sabe. Então, na realidade muitos dos nossos professores vão se exhibir, mostrar pro aluno que ele sabe. Bom é aquele que não olha no papel. Aquele que chega lá... quanto mais fluência ele mostrar, mais ele impressiona o aluno, entende ? Não é a atitude contrária. O cara tem que vir na calma, eu faço aqui esse negócio e se olhar no papel, por que não ? Entende, uma atitude mais tranquila. Então é por isso que os cursos têm muitas horas. Ainda hoje eu ainda acho que os cursos de Cálculo, por exemplo, da UNICAMP são de 6 horas. Não precisa disso.

E. O Sr. acha que é demais ? Pelo tipo de conteúdo que está proposto ?

F. Eu acho que é demais. Pelo tipo de conteúdo e pela atitude que creio que deve ser avisada logo ao aluno que ele aprende a analisinha dele em casa. Compreende, a função do professor é orientar, mostrar o texto, dar aquela visão mais global que você, quando pega no livro você não consegue. Você pega um livro...mas eu acho que o professor deve dar coisas mais globais. Dizer: “Olha, aqui $a + b$ tatatatata... isso implica isso” isso ele faz e ele tem que fazer. O aluno não pode jamais pensar que ele foi à aula, e tá bom “Agora vou fazer uns probleminhas aqui”. Não, ele tem que pegar a teoria também. Com o lapizinho na mão, ir fazendo, trabalhando. Acho que é aí que ele entende.

E. E dentro desta perspectiva, como é que o Sr. vê hoje no curso de Cálculo a questão do ensino de limites ? Vamos colocar assim, é uma questão divisora de águas. O Sr. acha que há um excesso de ensino de limites ou isso estaria equilibrado ?

F. Bom, isso aí tá mais difícil de eu dizer porque como eu não tenho contato no dia a dia com isso aí dentro dos cursos de Cálculo né, mas eu acho que você tem que dar essa noção de limite, eu acho que tem que tá presente porque é uma coisa importante para o Cálculo...sem essa noção...

E. Não, com certeza. Mas a questão é qual seria a medida correta ? É difícil né, porque a gente vê por exemplo alguns livros textos em que o maior capítulo do livro é o de limites. Então, às vezes, se um professor vai seguir rigorosamente aquele livro texto, ele vai ficar falando um mês e meio em limites e depois sobra duas semanas para ele dar derivadas e aplicações das derivadas.

F. Não, tá certo, tá certo. Eu acho que você tem... você vê por exemplo, no meu livro eu procuro passar nos preliminares o mais rapidamente. Você vê que no curso de Análise, você poderia dizer: “Bom, nós vamos trabalhar com números reais. Então nós vamos estruturar direitinho, mostrar o que são números reais”.

E. Construir rigorosamente os números reais...

F. Mas eu acho que aí começam certas barreiras, compreende. Você introduzir os números reais para o aluno que tá começando, através dos Cortes de Dedekind ou sequências de Cauchy, é um negócio que como você disse, prolonga demais, antes de ele chegar nas coisas que a meu ver que são a natureza do Cálculo, que é a derivada e a integral. Eu acho que isso tem que chegar logo. Entende, então...

E. Daí tudo isso, ser remetido apenas para o curso de Análise.

F. Para o curso de Análise. Você tem que queimar algumas etapas aí e chegar logo na questão de derivada e integral. É claro que limite aparece... agora se começar com muita sofisticação você não para né. “Limite: limite superior, limite inferior”, e aí começa a engordar né, compreende ?

E. Então, quer dizer é uma noção importante porque tudo é um limite. A derivada é um limite, a integral é um limite, a continuidade depende do limite...

F. Exatamente.

E. Mas, apesar de ser uma noção que está permeada nas outras, você não pode ficar muito tempo lá porque senão você acaba se desviando do objetivo central...

F. Exatamente, porque você pega certos livros e você vai ver a derivada introduzida no meio do livro. Você tem que procurar introduzir logo, que são as coisas necessárias do Cálculo. Eu, outro dia, fiz uma conferência aqui. Tem o “Cursão”. O Renato me pediu para fazer uma conferência no “Cursão”. Aí eu fiz uma conferência chamada “Uma Breve História da Análise”, parodiando o Stephen Hawking e eu... uma coisa que eu mostrei lá, insisti muito com os alunos que foi o seguinte: “Dois problemas. Um problema você tem uma função e você quer calcular a área limitada pelo eixo, pelo gráfico dessa função positiva, esse é um problema. O outro problema, é o problema de você resolver uma equação diferencial $dy / dx = f(x)$. Você dá a função $f(x)$ e quer encontrar a função $y(x)$ que resolve esta equação, eu quero achar uma primitiva. Eu digo esse problema aqui é um problema global. Você quer calcular uma área. Então como é que o pessoal fazia na Grécia antiga ? Aqui tal tal...

E. Fazia aproximações por figuras cuja área era conhecida...

F. Fazia aproximações por figuras cuja área era conhecida. Esse problema aqui é um problema local. Porque é um problema que você tá num ponto, você quer calcular uma derivada. Então o que esse problema tem a ver com isso ? É o Teorema Fundamental do Cálculo. Então, enfatizei que esse é o mais importante do Cálculo, que é o teorema que permite a você para calcular essa área, você encontra a solução dessa equação diferencial, que é uma primitiva. Aí essa área o que que é ? Essa área aí é a integral de a até b de $f(x) dx$, que nada mais é do que a primitiva calculada em b menos a primitiva calculada em a . Quer dizer que para resolver um problema global você resolve um problema local. Então você calcula a primitiva e aí essa questão da integral, em vez de ficar fazendo aproximaçõezinhas você simplesmente calcula 2 números. Isso é a coisa mais importante do Cálculo.

E. E é uma pena, professor, porque os nossos alunos não saem com esta visão. Eles saem com a visão de que o grande truque do Cálculo é saber simplesmente derivar isoladamente e integrar isoladamente. Um bom aluno de Cálculo é aquele que deriva bem e que integra bem. E muitas vezes não tem a noção da união dessas duas coisas através do Teorema Fundamental do Cálculo.

F. Que é o teorema mais importante do Cálculo. E is so aí você tem que chegar, em qualquer curso de Cálculo você tem que chegar logo nisso daí. Tem que dar os conceitos e chegar “Olha aqui a beleza deste negócio”.

E. E inclusive historicamente deu a Newton e Leibniz o título de inventores e criadores do Cálculo, apesar de trabalhos anteriores de Barrow e de outros matemáticos antes que tinham trabalhado...Fermat, Arquimedes...

F. Arquimedes ! Arquimedes quase chegou no Cálculo !

E. Hoje a gente olha para o Cálculo e fala: “Os criadores e inventores do Cálculo: Newton e Leibniz” por causa do danado do Teorema Fundamental do Cálculo.

F. Exatamente.

E. Professor, e a sua experiência com ensino de Análise, como é que tem sido ? Eu sei que ultimamente o Sr. tem dado cursos de Análise na graduação e na pós.

F. Até, Análise eu creio que é isso também como eu falei. A gente tem que... você não pode também ficar muito preocupado no começo em dar... em ter muito cuidado com a topologia, outras coisas. Você dá... como eu faço aí a apresentação de números reais, uma apresentação rigorosa mas sem construção. E novamente chegar em coisas relevantes. Você vê que eu chego aí até Teoremas Talberianos. Esse tipo de coisa. É sempre neste sentido. Eu acho que você tem que ir longe. Você tem que mostrar... você não pode ficar muito amarrado nos preâmbulos. Eu acho que se você fica muito nos fundamentos, você não fez modificar a matemática.

E. Mas aí, não a Análise como um todo, enquanto disciplina, mas na hora mesmo do ensino, daí já não fica mais difícil você, vamos dizer assim, criar aplicações para Análise do que pro Cálculo pelo fato da Análise estar ligada a esta questão da formalidade, do formalismo, do rigor. Como o Sr. escreveu aqui no prefácio do seu livro. O Sr. escreveu o seguinte, “Contém parte substancial daquele curso apresentado de modo cuidadoso dentro do rigor imprescindível para o curso de matemática”. Então será que por conta deste rigor, não seria pelo menos teoricamente mais difícil a gente partir, ter esta visão mais aplicativa da Análise?

F. Não, eu não acho que a questão do rigor aí, tá ligada ao método dedutivo. Eu acho que... compreende, o que que é o método dedutivo? O método dedutivo você pode ir indo cá trás. Eu não estou satisfeito com isso... eu vou... você quer ir no axioma. Vou por uma coisa prévia e isso aqui fica como teorema. Eu acho que com o método dedutivo você pode começar num nível de que os axiomas podem eventualmente ser teoremas. O que é importante é a atitude honesta e cientificamente que você faz, perante o aluno. De que “Olha, eu vou demonstrar isso aqui baseado nisso. Isso aqui é a minha definição e esses aqui são os meus axiomas e aqui tá a demonstração. Não tô fazendo... enganando, pulando. Isso aqui tá demonstrado porque tá apoiado nisto”. Então, esse é a meu ver o método dedutivo. Compreende, eu acho por exemplo, eu tive que dar um... vamos lá para atrás; vamos para a Geometria Euclidiana. Isso aqui é uma experiência que eu tive como aluno de primeiro grau. A Geometria Euclidiana o cara vinha e tinha dois triângulos e ele ia mostrar que os dois triângulos eram congruentes. Eu achava a maior besteira. Tava claro para mim que era a mesma coisa, então eu não entendia o método dedutivo. Porque naquele estágio, tava sendo demonstrado coisas triviais, compreende, coisas que são óbvias, e não é por aí. Seria muito melhor que ele tivesse pegado postulados e tivesse ido lá para frente, para demonstrar coisas mais relevantes da geometria, que não fossem óbvias. Aí o cara começa a acreditar. Então eu acho que o método dedutivo, você pode começar em qualquer estágio. O que que eu faço neste livro ? Eu poderia ter pegado os números reais e construído. Então, eu não construí. Peguei e joguei como um postulado. Agora, isso aí deu um corte, você começou lá em cima, mas você vai mais longe. Agora a atitude rigorosa vem em cada instância ao dizer “Isso, a demonstração tá aqui, o postulado de Dedekind”.

E. Então essa questão do rigor estaria atrelada à questão... à própria questão do método ?

F. Do método que você faz e de onde você começa. Compreende, daí você vai para frente. Porque se você ficar preocupado com o começo você vai indo para trás. Você vai terminar em lógica. Bertrand Russel foi um dos caras que começou a ir para trás, para trás, nos princípios né. Aí era fundamentação. E o que é mais grave é que se você ir muito para trás, começam a surgir problemas sérios né. Você vê, tem gente por exemplo que, você sabe da matemática construtiva né. Tem gente que não aceita o axioma da escolha. Compreende... aí vai a hipótese do contínuo...

E. E o lema de Zorn...

F. Exatamente, o lema de Zorn, o axioma da escolha, etc. Então, com isso, você se tolhe de demonstrar um bocado de coisas. Você não demonstra o teorema de Hahn-Banach da Análise Funcional.

E. Que depende disso, qualquer uma das versões...

F. Então, é uma questão de,,, novamente eu sou mais Hilbert. Hilbert teve uma grande polêmica, você deve saber, com Brouwer, no início do século, sobre o negócio de construtividade e numa determinada hora o Hilbert disse: “Olha, eu prefiro fazer matemática com as duas mãos em vez de fazer com uma amarrada nas costas”. Ele considerava que você começando a.. tira o axioma da escolha, tira isso, tira aquilo, você tá se limitando no tipo de matemática que você vai fazer. Mas então é tudo uma questão de onde você começa. Você ter... sobre esse método dedutivo e sobre o rigor, você tem as suas bases, os seus axiomas, suas definições, e daí em diante você prossegue honestamente. Eu acho que rigor é isso, não tem acochambração. “Como é que você demonstra isso? Tá aqui. Onde é que você usou o axioma da escolha, onde é que o sr. usou o postulado de Dedekind ? Eu usei aqui”. Então, com isso, você educa o aluno. Eu acho que é por aí. Você não pode... bom isso é na demonstração. Agora tem outra coisa sobre rigor, uma coisa também que eu falei que é o seguinte: a questão de como é que o fulano faz matemática. O sujeito tem a impressão de que o matemático quando tá criando, ele tá extremamente cuidadoso em fazer uma coisa e usar o método dedutivo no processo de criação da matemática. Isso não é verdade. No processo de criação de matemática, o cara usa intuição, tentativa, faz de conta que isso vai funcionar. Uma vez que tá tudo... que ele chegou à conclusão: “Ah, de fato, este negócio deve ser verdade”. Aí sim, aí ele tem que sentar e na hora de escrever o artigo, o artigo tem que ser escrito com com rigor. Mas o processo de criação não é assim.

E. Mas então o Sr. concorda comigo que a intuição é fundamental para a busca do rigor ?

F. Para a busca do rigor, inclusive também do aluno. Compreende, o aluno quando vai resolver os problemas dele, ele deve soltar a imaginação dele, fazer tentativas e em determinado momento: “Será que isso seria desse jeito ?”. Fazer uma hipótese meio absurda. Fazer umas contas e tudo. Depois que ele tiver uma imagem daquilo, aí ele senta e escreve o problema de modo rigoroso. Mas nesse processo ele não pode ficar muito amarrado: “Pô isso aqui, eu vou fazer isso aqui, eu vou dividir pela função $f(x)$ e se a função $f(x)$ for 0 ? Aí eu não posso fazer”. Toca em frente. Faz de conta que não é 0. E vai fazendo suas continhas lá. Se der certo...

E. Bom, depois você analisa o caso separado de onde ela é 0...

F. Isso, pois se você ficar apavorado na hora que você vai fazer “Ah é 0”, e você abandona a idéia, você não vai chegar a lugar nenhum. Então você fica tolhido “Ah, não posso, não posso, isso não pode ser 0, não vai dar”. Toca em frente e vê no que vai dar. Se der coisas que fazem sentido aí você volta, analisa. Claro que você só vai ostentar o resultado depois de ter verificado todas essas dificuldades. Mas nesse processo de pesquisa você tem que fazer isso. Essa é a minha opinião sobre isso.

E. Com certeza. Professor, nessa palestra que o Sr. deu sobre “Uma Breve História da Análise” aí, olhando então o roteiro dessa palestra que o Sr. fez aí para os alunos do “Cursão”, eu queria discutir um ponto com o Sr. que é a relação do rigor com a Análise. Eu tenho estudado esse fenômeno da Aritmetização da Análise, associando a ele os nomes de Cauchy, Weierstrass, Riemann, Bolzano, esses nomes. Então, a grande questão que até agora eu estou me perguntando é: seria, na realidade, a Aritmetização da Análise, esse fenômeno de rigorização da Análise, de modernização da Análise, seria o fenômeno da própria criação da Análise enquanto área mesmo ? Será que a gente poderia dizer isso ? Quer dizer, se a gente associa ao Cálculo os nomes de Newton e Leibniz, que nomes estariam associados, que o Sr. associaria, por exemplo, à Análise ?

F. Olha, aí tem uma história muito interessante né. Tem o problema, chamado o problema de Dirichlet para a equação de Laplace. É um problema que, fisicamente, representa o estado estacionário de certos fenômenos: o equilíbrio de uma membrana, problemas de eletrostática, enfim é uma coisa que interessa ao pessoal, isso desde o século XVIII, uma coisa assim e esse tipo de problema, no começo do século passado, Fourier para resolver este tipo de problema da equação do calor, ele introduziu as séries de Fourier. E isso também foi utilizado... você vê a equação da corda vibrante é de D'Alembert, século XVIII e então, veio essas técnicas para resolver estes tipos de problemas. Muito bem, mas as técnicas de Fourier diziam respeito muito a regiões que tinham certas simetrias, por exemplo, o quadrado, bolas, etc. E para regiões mais gerais, isso também interessou ao Gauss. Gauss e Lord Thompson. Então eles introduziram um método, chamado método direto do Cálculo das Variações. No Cálculo das Variações você tinha um problema, por exemplo, o problema braquistócrona: dados dois pontos você quer encontrar uma curva, tal que uma partícula soltada aqui, vem em tempo mínimo para cá. Então, esse problema é um problema em que você vai minimizar o tempo como função da curva. Então, é uma função que é definida no espaço de curvas, com valores na reta. Então, você quer minimizar essa função tempo. Então, o que que o Cálculo de variações faz. Ele faz uma equivalência desse problema com uma equação diferencial. Isso já foi feito por Euler e Lagrange depois.

E. No século XVIII ?

F. No século XVIII. Muito bem, o que que o Gauss e Thompson fizeram ? Olharam no sentido contrário. Você tinha uma equação diferencial que era essa equação de Laplace e tudo e escreveram uma função que tinha que ser minimizada e que para Gauss tinha sentido físico e tem sentido físico. Uma integral de energia, uma energia ligada ao fenômeno. Então a solução para ele era o mínimo daquela energia, um negócio razoável e então, isso, por volta do meio do século. E então, essa minimização dessa função foi considerada por ele, Gauss, Thompson, pelo próprio Dirichlet, foi considerada como uma coisa trivial, porque era uma função positiva que, limitada inferiormente, deve assumir o seu ínfimo e o seu ínfimo é a solução. Muito bem, isso foi usado por Riemann no trabalho dele sobre representação conforme, acho que até o próprio teorema de Riemann usa o princípio de Dirichlet mas sem base rigorosa. Agora isso não tinha problema pelo seguinte: no meio do século passado, os números reais não estavam formalizados. Não havia um conceito muito preciso do que seria continuidade, do que seria compacidade. Hoje em dia, o pessoal fica escandalizado como é que

alguém que diz que uma função limitada inferiormente assume seu ínfimo ou e^x é positiva, limitada inferiormente, mas não tem nenhum ponto onde e^x é 0. Mas naquela época isso foi ligado a que ? Ligado com continuidade ... com esse tipo de coisa que não tinha naquela época. Bom, então o que eu quero dizer é o seguinte: havia interesse nestes problemas e o pessoal estava fazendo matemática. Mas aí veio o pessoal que começa a contestar e Weierstrass foi um deles. Weierstrass, olhando o trabalho de Riemann e de Gauss disse: “Isso tá furado”. E ele deu vários exemplos de funcionais limitados inferiormente que a princípio não assumiam seu ínfimo, compreende... então eu acho que isso é década de 70. Eu acho que isso começou a trazer um mal estar...

E. Década de 70 do século passado ?

F. Do século passado. 1870. Essas coisas do Dirichlet é mais ou menos 1850, do Gauss mais ou menos. Então você vê que a Análise, até do próprio Gauss tinha furos.

E. Inclusive tem alguns teoremas que Gauss demonstrou uma vez e depois, demonstrou com mais rigor, mais pra frente.

F. Exatamente. Então eu acho que esse tipo de dificuldade que começou a aparecer de problemas relevantes... que esse problema do Dirichlet é um problema que preocupou, no século passado tava o Gauss em cima disso, o Dirichlet, o Riemann, o problema de Dirichlet para a equação de Laplace. Então esse problema era um problema que tinha muita aplicação física, então muita gente se interessava. Esses matemáticos aí, de primeira linha. E eu acho que essas preocupações com esses problemas e o pessoal vendo que o chão estava muito instável, eu acho que ocasionou, Weierstrass foi uma das pessoas que se preocupou muito com a fundamentação rigorosa da Análise. Bom, seja aí o Dedekind...

E. Que depois fundamentou rigorosamente os números reais...

F. Cantor. E com Cantor aí já vem, novamente Fourier volta à baila. Porque para representar as soluções dos problemas você tinha séries. Então você tinha o problema de, por exemplo, ver a convergência das séries, onde converge, onde não converge. Então começou uma Análise fina dos pontos onde ela converge, onde ela não converge, etc, então foi preciso mais rigor aí. O problema de você permutar a série com a integral. Quer dizer, um negócio importante neste tipo de problema. Aí viu-se que a integral de Riemann não era uma integral boa e Lebesgue, no fim do século... o trabalho de Lebesgue que é ligado às séries trigonométricas. Então a teoria da integração é ligada com as séries trigonométricas criadas por Fourier para resolver esses problemas. Aí você vê novamente aqui o problema de Dirichlet dá esse problema que Weierstrass indicou incorreção, o princípio de Dirichlet. Então todo mundo ficou em cima, você encontra um trabalho do Poincaré nesse problema, ele criou um método chamado Balayage. Balayage em francês significa varredura. Então ele tinha que resolver o problema numa certa região, então ele resolvia numa bola, numa bola é fácil de resolver

até por técnica de Fourier. Aí ele resolveu numa bola aqui ao lado e vai varrendo o negócio com bolas e esse método de Poincaré da Balayage, ele gerou um método hoje que se chama o método de Perron das subfunções, na década de 1920, mais ou menos. Mas, você vê. Poincaré trabalha nisso. Hilbert trabalha nesse problema. Hilbert volta a considerar este problema como problema de minimização de um funcional usando o Cálculo de Variações e ele vai ver onde é que tá errado, onde é que os outros pisaram na bola. E ele consegue formalizar e dar uma demonstração correta usando essas integrais de energia. Isso ele faz por volta de 1900. Um outro nome que a gente tem muito na história da matemática, Fredholm. O Fredholm olhou para o problema também, só que sob outro ponto de vista. Ele transformou o problema em um problema de equação integral. E todo desenvolvimento das equações integrais do que a gente chama Análise funcional hoje em dia começa nesse tipo de coisa com Fredholm e com Hilbert, visando esse tipo de problema. Então voltando à questão do rigor, eu acho que esta década de 70, ela é proporcionada por certos problemas que estavam sendo trabalhados e a constatação de que havia imprecisões, de que certas coisas não estavam corretas. Então tinha que formalizar um pouco mais. Eu acho que isso deu toda essa rigorização que começa em 1870, ela continua nesse século né, com o Cálculo das Variações, depois do Hilbert, recebe dos italianos, Tonelli, a noção de função semi-contínua inferiormente. Tanta coisa interessante, né. O aluno quando estuda Análise, ele estuda função contínua, aí você diz: “Vou definir função semi-contínua”, o cara diz: “Besteira”. Mas, no entanto, a semi-contínua é essencial no Cálculo das Variações. Agora, só faz sentido ao meu ver. você num curso de Análise insistir em função semi-contínua se você tem necessidade. Eu não creio que faz sentido, eu fazer um capítulo todo de funções semi-contínuas se eu não tenho um exemplo relevante e porque o pessoal desenvolveu a função semi-contínua. Então... mas se você tá dentro do Cálculo das Variações, tá um belo exemplo e importante.

E. Isso que o Sr. relatou a respeito de Tonelli, já é do nosso século ?

F. Já é do nosso século.

E. Então quer dizer, na realidade, esse movimento, essa questão do rigor, da aritmetização, da modernização, da rigorização da Análise, não sei se o Sr. concorda comigo, mas na realidade, acho que influenciou a matemática toda de lá pra cá. Hoje em dia, na realidade, ainda existe essa questão do rigor, que está em alta, quer dizer, tudo, as teses de doutorado, tudo tem que ser feito, demonstrado de maneira rigorosa... marcou a matemática lá e continua marcando aqui.

F. Continua...agora é interessante você ver o seguinte. Parece que a questão do rigor varia um pouco com o tempo. Se você pegar artigos do começo do século, tenta ver um artigo do começo do século, você sente que tem coisa que você não concorda muito. Compreende, eu acho que há uma variação com o tempo. O próprio livro, que eu citei há pouco do Courant e Hilbert, diz que são as aulas do Hilbert, que o Courant anotou. E ele publicou. Tem muita imprecisão lá dentro, compreende. Recentemente, eu tenho trabalhado em regiões nodais

para auto-funções e tem um famoso teorema de Courant e aquela demonstração não tá assim tão rigorosa como a gente hoje faria e no entanto, foi feita por Courant, por Hilbert lá no começo do século...

E. E na época era o máximo de rigor aceitável.

F. Era o máximo de rigor, tinha até, eu não sei, alguém falou que um grande matemático chamado Lefschetz... diz que o Lefschetz nunca demonstrou um teorema corretamente, mas ele nunca enunciou um teorema errado. Todos os teoremas que ele criou foram teoremas verdadeiros, mas nenhuma demonstração tava certa. E talvez seja a questão do rigor né, de que, possivelmente, o rigor dele evoluiu e com o tempo...

E. Bom, então tá bom, pelo menos ele enunciou...

F. Enunciou mas...

E. O resultado não deixa de ser válido, não é verdade ? Professor, então só para encerrar um pouquinho esta parte de Cálculo, Análise, rigor e intuição, que a gente vai falar um pouco agora sobre a sua experiência enquanto autor de livro-texto. Na entrevista com o Prof. Ávila ele me disse: “Olha, Fred, eu não sei se tá muito certo associar o pensamento analítico com o pensamento rigoroso, assim como o pensamento diferencial do Cálculo com o pensamento intuitivo”. O Sr. concorda com isso ? Porque na realidade, quer dizer, o pensamento analítico, a idéia mesmo, mesmo que as coisas só foram totalmente implementadas do século XIX para cá com esta questão do rigor, mas ele já existia antes lá com Arquimedes e tudo mais, não ?

F. É, exato, você vê uma parte substancial da matemática já foi desenvolvida antes de 1870. Você vê, os próprios trabalhos de Gauss, Riemann...

E. Euler.

F. Euler, então muita matemática foi desenvolvida antes do pessoal ter uma definição, uma formalização precisa do que era número real. É um negócio que realmente eu acho que é uma espécie de uma lição né, de que nesse sentido que a gente falou a pouco, a gente não pode ficar muito amarrado. Você tem que dar um pouco de asas à sua imaginação e depois procurar formalizar, não pode ficar muito amarrado não. Agora eu não entendi a sua pergunta, exatamente sobre...

E. Sim, se eu quisesse fazer uma diferenciação, o pensamento do Cálculo e o pensamento da Análise, o pensamento diferencial com o pensamento analítico. Me parece difícil até fazer esta diferenciação porque Cálculo é Análise e Análise é Cálculo, num certo sentido não?

F. É, bom, aí eu acho que o que acontece é o seguinte. No Cálculo você pode apresentar algumas coisas e não demonstrar e dizer que não tá demonstrando. Como em Análise, se você tem algum resultado mais fino que você não quer demonstrar, você diz: “Olha, tá aqui um teorema. Eu não vou demonstrar este teorema”. Eu acho que esta atitude tem que ser tomada em todos os cursos de matemática. A pior mensagem que você transmite é acochambrar demonstrações. Eu acho que é preferível você não demonstrar no curso de Cálculo “Teorema Fundamental do Cálculo. É esse aqui. Não vou demonstrar. Mas entendam o que ele quer dizer. O teorema quer dizer isso aqui”.

E. É uma postura didática do professor.

F. Didática e cientificamente correta. Eu acho que no Cálculo, tendo em vista a finalidade do tipo de aluno que faz, você pode tomar uma atitude de não demonstrar muitas coisas e de dar, dizer: “Olha, isso aqui é um teorema, eu não vou demonstrar esse teorema, se usa deste modo e o que quer dizer”. Eu acho que os conceitos são extremamente importantes, esses aí você não pode deixar que o aluno não entenda. A gente falou agora há pouco de limite, mas acho que dá para o aluno de Cálculo entender o que é o limite. Talvez seja mais difícil para ele, seguir uma demonstração cheia de...

E. Épsilons, deltas...

F. Épsilons e deltas. Mas, entender os conceitos, porque para ele que vai para uma outra área que precise de alguma matemática eu acho que ele entender o conceito de derivada, que é a taxa de variação. Acho que esse negócio tem importância. Eu acho que os conceitos são extremamente importantes. Nisso aí deve ser feita grande ênfase e eventualmente, no curso de Cálculo retirar algumas demonstrações. Mas sempre dizendo: “Olha, isso aqui tem que ser demonstrado. Se você se interessar você vai no livro ou se você vai fazer outro curso, você vai ver”. Mas eu acho que a atitude tem que ser esta.

E. Com certeza.

F. Há uma grande diferença aí, como você perguntou, entre o curso de Cálculo e o curso de Análise. Não faz sentido, por exemplo, um cara que faz Engenharia de Alimentos, você chegar e começar a demonstrar. Não só não tem utilidade para ele, como você não motiva. O cara não tá nem aí. E por isso é que ele não vai....

E. Com certeza. Agora vamos para a outra ponta. No caso da Análise para o professor de matemática, da Análise dentro do currículo da licenciatura. Como é que o Sr. vê isso ? É importante ou não é ? O aluno do curso de licenciatura que vai ser professor, não o bacharel, que vai seguir por exemplo um mestrado, fazer uma pós-graduação. O aluno da licenciatura, o Sr. acha importante o curso de Análise para ele?

F. Eu acho que é importante, não é que ele vai ensinar, mas eu creio que o professor que sabe um pouco mais do que aquilo que ele ensina, ele é melhor professor, ele tem mais segurança. Se ele faz um curso de Análise e ele é forçado a raciocinar, a ver aquelas coisas mais delicadas, eu acho que isso mentalmente para ele, para a formação dele é importante. O que não quer dizer que ele vai utilizar aquilo. Tem uma série de coisas que a gente estuda e que nunca utiliza. Mas faz parte da formação da pessoa.

E. Não quer dizer que ele vai ensinar, ao apresentar os números reais para os alunos os conceitos de densidade, de enumerabilidade, mas... ele vai ter mais segurança.

F. É a mesma coisa você dizer: “Então, porque que ele vai estudar Cálculo se ele vai ensinar no primeiro grau ?” Então, qual seria a atitude? A pessoa só estuda aquilo que ele vai ensinar ? Teríamos que chegar ao extremo.

E. O que não estaria correto...

F. Não estaria correto. Você tem que dar uma formação um pouco maior, o cara tem que ter uma certa segurança, ele tem que saber mais. Vez por outra ele encontra alunos que fazem perguntas. Por exemplo, eu me lembro quando eu tava no primeiro grau, antigamente era o curso de ginásio, segunda série, eu perguntei para o professor o que era 2 elevado à raiz de 2 e ele deve ter ficado até um pouco nervoso. Não devia ter a mínima idéia. Era interior do Ceará, um professor que... era um colégio diocesano e os professores eram estudantes de seminário, que num determinado estágio desistiam de ser padre e iam ser professor no interior. Então eles sabiam aquele livrinho da quarta série e aquela pergunta, ele não tinha condição para isso. Então se o cara faz um curso de Cálculo e de Análise, ele pode entusiasmar o aluno: “Olha, isso aqui você não vai ver, mas você vai ver isso depois, tal tal”, ele pode ter uma conversa inteligente com o aluno. E aí é que tá a função do professor, que é motivar o aluno, é entusiasmar o aluno pela matéria. Eu acho que quando ele sabe mais, ele pode ter mais entusiasmo. Se aparecer um aluno inteligente, aí ele tem possibilidade... e aparece né.

E. Com certeza. O que acontece é que, às vezes, o talento é desperdiçado. Não é aproveitado.

F. Exatamente. Numa população como a nossa, vai me dizer que não aparece um bocado de gente com talento em matemática. Claro que aparece. Agora, grande parte não tem a mínima chance. Principalmente de escola pública e de escola particular, eu acho que é desvirtuado. Porque fica nessa preparação sistemática para o vestibular e completamente bitolado...

E. Professor, eu li os prefácios da primeira e da segunda edição do seu livro *Análise I* e eu vou mostrar algumas frases que me chamaram a atenção. No prefácio aqui da primeira edição, o Sr. diz assim: “Pressupõe-se que o leitor esteja familiarizado com a técnica, entre aspas, do Cálculo Diferencial e Integral de funções reais de variável real”. Então, o Sr. acha que existe essa relação de que o importante para a Análise é a técnica

que ele adquire no Cálculo: “Ah, não, ele já adquiriu a técnica, agora vamos ensinar os conceitos para ele aqui da Análise”. Seria isso?

F. Não, deixa eu explicar. Não foi bem isso que eu quis dizer. O que eu quis dizer é o seguinte. É que eu para apresentar um curso destes, eu imagino que o fulano já saiba coisas como derivada de seno, derivada de cosseno. Essa parte mais mecânica, compreende, de que ele viu potências, como é que se deriva, etc. Daí eu vou formalizar a coisa, mas que não seria totalmente novidade para ele todas as coisas.

E. Pelo menos a questão da técnica mesmo, do simbolismo e tal.

F. Exato.

E. Mas será que... o Sr. não acha que só o fato dele saber todas as derivadas não garante que ele realmente tenha uma noção, uma visão maior do conceito de derivada ?

F. Exato. Exatamente. Esse exemplo que nós acabamos de dar do Teorema Fundamental do Cálculo, o Teorema Fundamental do Cálculo não precisa ser dado Análise. Ele pode ser explicado no Cálculo. E se ele é explicado e entendido no Cálculo e o aluno não entende porque que ele está estudando um capítulo sobre cálculo de primitivas, você veja, é um capítulo de truques de como você encontrar primitivas: “Pra que que você tá fazendo isso ? Quer dizer que você tá atrás de arco tangente, de seno, de cosseno. Pra que você tá fazendo isso tudo ?” Se você tem o Teorema Fundamental do Cálculo você tem uma motivação. E não precisa demonstrar o Teorema Fundamental do Cálculo. Se o cara entender a filosofia do negócio... a primitiva tá ligada ao cálculo da área...então, isso aí é mais no sentido de que eu imagino que o cara já tenha tido um curso de Cálculo. Essencialmente é isso aí.

E. E no prefácio da segunda edição, eu acho que a gente já discutiu um pouco sobre isso, mas eu gostaria de frisar uma frase do Sr. que é muito interessante: “Trabalhar nesses exercícios é uma parte essencial no processo de aprendizagem dessa matéria. As sugestões ao final do texto só devem ser usadas após muitas tentativas de resolver esses exercícios. São precisamente essas tentativas, possivelmente muitas vezes frustradas que constituem o método de estudo e criação em matemática”. É mais ou menos isso que a gente discutiu.

F. É, exatamente.

E. Todas as tentativas que foram feitas com sucesso ou nem tanto sucesso por causa dessa falta de rigor no século XVIII, na realidade, foram criações importantes apesar de só serem rigorizadas mais tarde...

F. É assim que ele aprende. É assim que ele, fazendo tentativas de como é que resolve, ele vai sedimentando os conceitos. É aí que ele aprende. Volta novamente pra questão do número de horas. E que eu preferia que ao invés dessas 6 horas, fossem 3 horas e 3 horas ele ficasse sozinho trabalhando, estudando lá. Você sabe que houve em Brasília, quando eu cheguei em 71, tinha um método chamado método... não sei se era Taylor... era um método o seguinte: você pegava a turma de Cálculo e digamos... 100 alunos. Você dividia...99, você dividia em turmas de 11. Não sei se 11 tinha algum fator político na época... você dividia em turmas de 11. E cada turma dessas tinha um monitor. Não havia aula. Você tinha um anfiteatro, o aluno chegava e dizia: “Bom, eu quero...” e a matéria era dividida em unidades. 15 unidades. Então, ele estudava a primeira unidade, se ele tinha alguma dúvida ele vinha para a aula e perguntava ao monitor dele. Então, o monitor explicava para ele, ele estudava. Então, quando ele sentia que tava bem na primeira unidade, ele vinha e fazia a prova daquela unidade. Então, ele tinha preparado lá um conjunto de 20 de cada unidade, 20 provas de cada unidade, tirava uma arbitrária, ele sentava lá e fazia. Ele fazia, o monitor corrigia, se tava certo, ok. Ele vai para a unidade seguinte. Então ele ia, estudava, qualquer dúvida ficava um professor lá, parecia um mercado persa, porque tinha aluno estudando, o monitor explicando, o professor explicando, tinha outros fazendo prova. Então era um sistema...

E. Mas a idéia em si, lhe parecia interessante ?

F. Porque era a idéia de que você aprende estudando. Você tem dúvida, você pergunta. Mas você tem que trabalhar. Agora era um sistema extremamente oneroso. Você vê que se você tem uma turma de 990, quantos monitores devem ser. Então ele morreu na UnB porque chegou num momento que tinha mais de 100 monitores. E aí não tem condições de você encontrar os monitores, porque os monitores eram os próprios alunos, os alunos mais avançados. E aí tem um problema de que você não consegue este número e também tem o problema de que são da mesma faixa etária, em geral, e às vezes eles se amedrontam. O monitor aprendeu há pouco tempo, então ele fica um pouco... principalmente na hora de corrigir... Mas a idéia em si é muito boa nesse sentido de que você aprende estudando. Aí tem uma frase do Khalil...Gibran Kalil Gibran, que eu falo aí no livro, que no fundo corresponde a isso, a aprendizagem através do estudo individual.

E. Professor, só para finalizar, como é que o Sr. analisa o seu livro de Análise ? O Sr. acha que é um livro adequado para o curso de graduação de Análise ? O Sr. acha que é um livro adequado para o curso de Análise para a licenciatura, por exemplo, ou o Sr. acha que poderiam existir textos complementares ? Como é que o Sr. vê isso ?

F. Não, eu tô satisfeito com ele. Eu acho, Fred, que tem uma coisa aqui que é o seguinte: eu procurei chegar na Análise sem uma descontinuidade muito grande com Cálculo. Procurei ir ascendendo aos poucos. Em vez de começar, digamos: “Vamos introduzir os números reais, então vamos primeiro introduzir os inteiros, os axiomas de Peano, esse negócio, depois introduz os racionais”. Então eu resolvi chegar muito perto do Cálculo e partir dali, ascendendo. Foi uma atitude. É claro que tem outros livros, por exemplo, o próprio Elon

tem outra atitude. Ele começa bem mais, eu acho que ele dá uma série de coisas que não tão aí nesse começo. Mas essa foi a atitude que eu achei que é boa para o aluno, para o aluno de universidade. Principalmente, tendo em vista uma maior formação do nosso aluno. Eu acho que pra média do nosso aluno, eu gosto, eu acho que o livro tá bem adaptado. E acho também que, por exemplo, certas coisas mais refinadas eu introduzo quando eu preciso. Por exemplo, tem o Heine-Borel, acho que tá lá no meio do livro. Eu podia ter introduzido logo, não depende de nada. No começo, quando você tem a reta, você já pode dar o conceito de compacidade, depois o teorema de Heine-Borel, uma série de coisas logo no começo. Mas eu acho que não é bom. É melhor que você vá avançando, quando você precisa, aí você dá. Tem coisas aí mais refinadas que eu dou à proporção que eu preciso. Então eu acho que é uma atitude que... é uma atitude minha, muito de introduzir aquilo que você precisa. E procurar ir longe, naquele espírito de que a coisa é importante para outras coisas e ter um pouco de impaciência. Mas com o devido cuidado. Eu posso queimar etapas mas sem enganar a pessoa. Bom, eu acho que é um livro...

E. E o Sr. acha que se aproxima mais, por exemplo, do livro do Prof. Ávila, *Introdução à Análise Matemática* ?

F. Eu acho que se aproxima mais. Ele se aproxima mais do Prof. Ávila do que propriamente do Prof. Elon. Eu acho que o livro do Prof. Elon para alunos mais motivados, alunos de melhor nível, talvez seja melhor. Mas para a média dos nossos alunos, eu tô satisfeito com este meu texto.

E. Quando o Sr. fala em alunos mais motivados seriam, por exemplo, do bacharelado, de Análise II ou Análise I a nível de nivelamento para mestrado ?

F. É, aí sem sombra de dúvida. Sem sombra de dúvida, o livro do Elon seria bem mais indicado. Um curso já, como você disse, de preparação para o mestrado, não sei qual é o nome disso aí...

E. Nivelamento né, o curso de verão anterior ao nível de mestrado. Algumas universidades adotam esse procedimento.

F. Aí sim, aí claro, sem sombra de dúvida. Esse aí eu diria que é mais para um... é melhor para alunos de licenciatura e bacharelado. A pessoa que tá começando, que acabou de fazer um curso de Cálculo. Então, acho que essa atitude minha de fazer a continuidade suave com o curso de Cálculo.

E. Bom Professor, eu já estou bastante satisfeito. O Sr. gostaria de fazer uma complementação, dizer alguma coisa para finalizar ? Fique à vontade.

F. Eu acho que nós tocamos praticamente em todos esses tópicos aqui.

E. O Sr. gostaria de colocar mais alguma coisa para encerrar?

F. Não, não, acho que tá bom. Só uma coisa que você tocou aqui, que eu acho que já vai da parte de pedagogia mesmo. É a parte de motivação. Eu acho que é muito importante você motivar as coisas que apresenta. Eu acho que nesses papéizinhos que eu lhe dei, mostra muito esta atitude, por exemplo, as leis de Kepler. Então motivar o Cálculo, a necessidade do Cálculo com certas aplicações. Eu acho que tudo que a pessoa estuda é muito importante que ele veja que isso serve para mais alguma coisa. O negócio não fica fechado dentro de si. Então essa questão da motivação, eu acho que é extremamente importante. E essa parte da matemática oferece uma riqueza de motivações. Eu, por minha formação, dou mais aplicações a coisas de engenharia, de física, mas tem as aplicações na biologia... muitas aplicações, o pessoal de ciências humanas, economia. Então tem... eu acho que esse tipo de coisa não pode deixar de ser oferecido nos cursos.

E. Então, quer dizer, o professor tem que ter conhecimento dessas coisas para se motivar e então, saber motivar os seus alunos.

F. Exato. Na realidade, ele não precisa saber muito não. Não precisa ser um economista para dar umas motivações da economia. Existem textos, inclusive, onde você tem essas aplicações.

E. Mas, minimamente, é necessário que ele se disponha a correr atrás, num certo sentido. Não se tornar um especialista na matéria, mas correr atrás para saber por onde encaminhar.

F. Exato. Eu conheço colegas que dão cursos de Cálculo e no curso do Cálculo tem várias aplicações, ele não dá porque tem medo. Ele tem medo de falar em aceleração e depois... compreende. Então, ele omite todas as aplicações.

E. E fica só nas técnicas de derivação e integração.

F. Exatamente. Eu acho que isso é um erro. Eu acho que a motivação em mostrar que aquilo é importante em outras áreas, é essencial tendo em vista que a maior parte dos alunos não vai ser constituída por matemáticos. São pessoas que, ou nunca vão utilizar nada, ou se vão utilizar é para as aplicações, as coisas deles. Então aí, eu acho que tem uma... no meu livro de... esse aqui.

E. *Equações Diferenciais ?*

F. Você tem esse aqui?

E. Eu tenho o de capa branca, não é isso ?

F. Esse aqui é a primeira edição dele, do Colóquio Brasileiro de Matemática. Isso aqui é um diálogo que eu fiz com... é uma entrevista do autor ao Diário Planeta. E esse CK é o super-homem. Como é o nome dele ?

E. Clark Kent.

F. Clark Kent. E então aqui é um diálogo com ele, em que ele começa a me fazer perguntas e eu começo a responder. Então, ele diz que todo texto tem uma mensagem e pergunta: “Qual foi sua motivação para escrever este texto ?” Aí eu explico e depois ele diz: “Então você acha que não se deve dar um curso de equações diferenciais com um enfoque exclusivamente matemático ?” Aí eu respondo qual é o negócio. E aí ele pergunta: “Se o aluno vai ser pesquisador nessas equações diferenciais sofisticadas, qual foi a utilidade daquele primeiro curso meio aplicado ?”

E. Mais ainda, né. Para ser pesquisador tem que conhecer as duas, especialmente as meio-aplicadas.

F. “Então quer dizer que aqueles alunos de matemática que não se destinam ao magistério podem prescindir deste curso ?” Eu explico que o cara vai ser professor e sai por aí afora “Como, então, eu creio que todo matemático deve saber aplicações, como é que você posiciona um matemático puro dentro dessas aplicações ?” Então foi um diálogo que eu fiz com ele que te dá um pouco da filosofia do...

E. Eu gostaria de ler com mais calma.

F. Se você quiser, eu só tenho esse exemplar...

E. Não, não. Eu tiro uma xerox. Professor, então eu gostaria de lhe agradecer, foi um prazer estar conversando com o Sr.

F. Tá ótimo. O prazer foi meu. Muito obrigado.

E. Eu espero também, que qualquer contribuição que o Sr. possa vir a dar, como o Sr. está bem perto aqui da Faculdade de Educação, qualquer probleminha que eu tiver eu posso recorrer, não ?

F. Sem dúvida, sem dúvida, estou aqui às suas ordens.

A.4) ENTREVISTA COM O PROF. ELON LAGES LIMA
– IMPA – Rio de Janeiro – RJ – 05/11/99 (E. Entrevistador / L. Lima)

E. Professor, inicialmente eu gostaria de agradecer este apoio que o Sr. está dando me concedendo esta entrevista, já trabalhei com o Prof. Geraldo Ávila, com o Prof. Djairo Figueiredo e não poderia deixar de entrevistar o Sr. também. Eu gostaria que, inicialmente, o Sr. falasse um pouco de sua formação acadêmica e chegasse na parte de ensino, sua experiência de ensino, dos lugares onde o Sr. trabalhou e especialmente o que interessa para mim é esta questão das experiências que o Sr. possivelmente já teve com ensino de Cálculo e ensino de Análise. Pode ficar à vontade.

L. Bom, eu não acho que a minha formação tenha muito a ver com o seu trabalho mas, é... você quer saber a respeito de...

E. De sua graduação, mestrado, doutorado, exatamente isso...

L. Tá bom, embora eu ache que isso não tenha nada a ver com o seu trabalho...

E. Mas, tudo bem...

L. Olha, eu comecei minha graduação em Fortaleza e terminei no Rio, na Universidade Federal, então Universidade do Brasil, hoje a Universidade Federal do Rio de Janeiro, fiz o mestrado na Universidade de Chicago, fiz o doutorado lá também. E já quando eu saí do Brasil já estava mais ou menos envolvido com o IMPA, quando eu voltei, eu voltei para o IMPA, onde fiz a minha carreira, exceto por um breve período que eu estive na UnB, toda a minha carreira foi aqui no IMPA. Agora sobre Análise, eu nunca... eu poucas vezes dei aula de Cálculo. Eu dei aula de Cálculo um ano e meio em Brasília...

E. Na UnB?

L. Na UnB e dei aula de Cálculo um semestre na Universidade de Rochester nos EUA.

E. E era para que tipo de curso?

L. Em Brasília, eu dei para os alunos que ingressaram na universidade, para os primeiros anos, o primeiro ano e meio. E em Rochester eu dei um curso de equações diferenciais para alunos que estavam no segundo, terceiro ano. Mas a Análise eu já ensinei em vários lugares.

E. Este curso de Cálculo que o Sr. deu era mais ou menos nos mesmos moldes como ainda é dado hoje ? Com a mesma ementa ?

L. Olha, não foi na pré-história. Foi um pouco depois de Cauchy, Weierstrass, Newton certamente já tinha morrido nessa época. Mas... não, o curso de Cálculo, eu tinha perfeitamente a noção de que um curso de Cálculo para alunos que entram no primeiro ano tem sempre isso mais voltado para aspectos, digamos assim, práticos, com algumas aplicações. Na época não existiam muitos meios de fazer o aluno usar métodos computacionais. Nem sequer calculadoras gráficas existiam naquela época. Mas eu tinha perfeitamente a noção de que o curso de Cálculo para o aluno inicial, como eu ainda acho hoje, deve enfatizar não os aspectos teóricos exageradamente, mas deve ter uma visão um pouco mais pragmática porque afinal de contas o Cálculo, ele é fantástico pelas aplicações, pelos exemplos maravilhosos para explicar as coisas da natureza e certas situações científicas mais gerais. Agora, isso não significa que você deve depois desdizer mais tarde as coisas que você disse no começo. Eu acho que você deve ensinar Cálculo como você deve ensinar matemática sempre de forma honesta. Você pode não exagerar na conceituação mas, sempre você deve se colocar numa posição defensável do ponto de vista lógico. Você não vai dizer besteira, não vai dizer que pode dividir por 0, não vai dizer que pode extrair uma raiz quadrada real de um número negativo, não vai dizer bobagem, não pode subtrair duas desigualdades do mesmo sentido, coisas assim. Você pode não dizer toda a verdade, mas sempre dizer a verdade. E, deve-se respeitar sempre o princípio de que o ensino de matemática tem três componentes: a conceituação, a manipulação e as aplicações. E essas três componentes, elas não se sustentam. São como três pernas de um tripé. Se você tirar uma vai duas e o tripé desaba. Então, você tem que procurar acompanhar um equilíbrio entre essas três coisas qualquer que seja o nível em que você esteja ensinando. Você deve sempre buscar o equilíbrio entre as três componentes fundamentais do ensino da matemática que são, como eu disse antes, a conceituação, a manipulação e as aplicações.

E. Agora, se eu estou entendendo bem, o Sr. acha que existe, apesar das três componentes serem separadas, existem, vamos dizer assim, níveis diferentes de acordo com a disciplina. Por exemplo, o nível de conceituação no Cálculo é um e na Análise é outro.

L. O nível de conceituação deve ser o mesmo em todos. O problema não é o nível de conceituação, mas a ênfase que se dá à conceituação sobre as aplicações ou as manipulações. Por exemplo, nos meus livros de Análise que você conhece, a conceituação tem uma primazia muito grande. Isso porque estes livros supõem, pressupõem que o leitor já tenha praticado anteriormente bastante manipulação no Cálculo e algumas aplicações elementares. Então, esses livros que eu escrevi, eles se situam entre um período básico de manipulação e um período posterior de possíveis aplicações, não só numa carreira de matemática aplicada como também aplicações à própria matemática. As aplicações não são necessariamente aplicações de natureza científica ou tecnológica ou práticas, são aplicações no sentido amplo.

E. Com certeza.

L. O que acontece é que, tradicionalmente, o ensino de Cálculo tem sofrido diversas variações, mas predominou sempre a parte de manipulação. A manipulação a que eu me refiro, são os cálculos de derivada, integrais, critérios de convergência de séries e solução de equações diferenciais por métodos já ultrapassados. Essas coisas de manipulação algébrica que são importantes na formação de um matemático ou de uma pessoa que vai usar matemática, não se pode imaginar uma pessoa que vai fazer matemática ou usar matemática sem ter não uma habilidade razoável nas manipulações. É como se você, por exemplo, vai treinar um jogador de voleibol, mas antes ele tem que aprender a sacar, a bloquear e os outros fundamentos. Ou se você vai treinar um futuro pianista, ele tem que praticar horas e horas intermináveis de escalas musicais e as manipulações estão para a matemática assim como as escalas musicais estão para a música. Você tem que manipular bem para não perder tempo com detalhe. Não se pense que o advento do computador e das calculadoras eletrônicas eliminou a necessidade de fazer isso. Simplificou bastante a vida, mas não eliminou. Então, as manipulações são uma parte fundamental. Mas para as aplicações, que são para a maioria das pessoas a razão pela qual elas estudam matemática, em particular, estudam Cálculo, para as aplicações, por incrível que pareça, a conceituação é mais importante do que a manipulação. Porque quando você tem um problema quer de natureza científica, quer de natureza tecnológica, social ou o que for, econômica...esses problemas não vêm com uma formulazinha, não vem dizendo: “Olha, este problema é um problema de função exponencial, de logaritmo, de equações diferenciais”. O problema vem formulado em termos, em geral, em termos não matemáticos e cabe à pessoa que vai querer resolvê-lo descobrir qual o modelo matemático que vai se encaixar ali. E para descobrir esta modelagem matemática, ela não pode ser feita se não tiver uma conceituação adequada de quais são os instrumentos matemáticos. Isso vai desde a escola primária, porque o menino quando vai fazer uma continha, ele para resolver um probleminha no primário, a primeira coisa que ele pensa é: “Eu vou somar ou multiplicar ?” Mas ele não vai saber se vai somar ou multiplicar se ele não souber a diferença entre adição e multiplicação. Então, ele tem que ter já, a conceituação já vem aí. Junto com a manipulação ele tem que saber que 7×8 são 56 ao mesmo tempo em que ele tem que saber se ele vai fazer 7×8 ou $7 + 8$. E esses 7×8 são 56, que ele vai ter que saber se são 7×8 ou $7 + 8$, só tem sentido se for em conexão com uma questão de natureza não necessariamente matemática e que ele vai resolver usando a matemática. Então, você tem a conceituação que desempenha o papel da semântica, você tem a manipulação que representa a sintaxe e você tem a aplicação que é uma modelagem, que é transformar a semântica não matemática em uma semântica matemática. Então, essa questão do equilíbrio entre essas três componentes da matemática deve reger o ensino da matemática desde os primeiros níveis elementares, desde os primeiros anos da escola, até a universidade, até a pós-graduação, até ensinos mais avançados.

E. Não sei se eu estou errado, Professor, mas este mesmo exemplo que o Sr. deu na questão do primário poderia ser comparado com um aluno de Cálculo, por exemplo, que às vezes pode até saber derivar muito bem, saber todas as regras da derivação, mas talvez não consiga identificar, num problema que fala sobre taxa de variação, a relação com derivadas ?

L. E não sabe, se ele não souber exatamente o conceito de derivada, se ele vai resolver uma equação diferencial, como é que ele vai aplicar a pequena teoria ou grande que ele aprendeu. De modo que a conceituação, eu repito, ela é mais importante nas aplicações, principalmente hoje em dia, do que a manipulação. Então, o ensino moderno de Cálculo, o ensino de Cálculo hoje, ele está passando por uma fase muito recente de um ou dois anos para cá, que eu acho que atingiu uma posição de equilíbrio notável. Veja que nós acompanhamos a evolução do ensino de Cálculo desde a época do Granville, que era um livro de Cálculo estudado já pelos meus antecessores, o pessoal da geração dos meus pais, que era um livro que teve um sucesso enorme e muito bem escrito, extraordinariamente bem feito sob o ponto de vista de clareza e organização e era um livro que ditou uma época porque ele marcava a supremacia, a hegemonia da manipulação com algumas aplicações, mas aplicações que se baseavam já em formas dadas. Ele não tinha modelagem. Então, essa foi uma tendência que predominou durante os anos da minha formação matemática. Depois veio a onda da matemática moderna que influenciou também o ensino de Cálculo, aí você teve a predominância dos livros de Cálculo que enfatizavam as demonstrações, a parte conceitual e menosprezava, até um certo ponto, as aplicações e as manipulações existiam mas, moderadamente. O que, moderadamente, não é em si um mal.

E. Um exemplo desses, por exemplo ?

L. O Kiokemeister & Johnson, que era um livro muito popular no Brasil na década de 60, 70. Tem um livro também chamado *Livro de Cálculo*, é um livro muito bom também mas... essas coisas você tem que dizer bom mas dentro de um certo contexto, o livro do Kitchen, por exemplo. E outros livros, que tinham qualidades didáticas apreciáveis mas eram partidários de um ponto de vista em que a conceituação predominava de modo quase que absoluto. Isso foi seguido depois por uma onda de reação a esse exagero por livros de natureza mais aplicada e, posteriormente, quando veio o advento dos computadores e das calculadoras, principalmente as calculadoras gráficas, modernas, aí houve um surto de livros de Cálculo puramente computacional, o livro do Latz, aquela coleção de livros *Harvard Calculus* que chegavam ao extremo de não definir limites. Não definir limites tudo bem, eu acho que é ok, a noção de limites é uma noção muito sofisticada para o aluno de Cálculo e não é necessária. Basta que se tenha uma noção intuitiva e com isso pode se fazer bastante coisa. Mas o *Harvard Calculus* foi um extremo muito grande, uma coisa exagerada e foi seguido muito recentemente por uma tendência de livros bem equilibrados em que você tem essas três componentes dosadas adequadamente. Alguns desses livros, como o livro do Stewart, um deles foi traduzido para o português, é o livro do Edwards & Penney, que é um livro razoável, embora seja excessivamente verboso para o meu gosto. Mas tem outros ainda melhores do que ele. Tem o livro do Zorn, Zorn e tem um outro autor, no momento eu não me lembro o nome. E tem esse livro que é o melhor de todos que eu conheço, que é o livro do James Stewart, o autor tem o mesmo nome de um famoso ator cinematográfico. É um livro que chama-se *Calculus: Concepts and Contexts*. Conceitos e contextos, é um jogo de palavras, mas significa conceituação e modelagem, aplicações.

E. A contextualização seria no sentido de aplicação ?

L. É, de aplicação. Esses livros olham sempre para as coisas do ponto de vista gráfico, do ponto de vista numérico, do ponto de vista conceitual. E esse equilíbrio é realmente muito bom. O problema de quem escreve um livro de Cálculo é um problema muito complexo e um dos problemas, é você ser ao mesmo tempo, claro e conciso. Isso aí é uma coisa que já preocupa os matemáticos há muitos séculos, como conciliar a clareza com a concisão. São coisas quase que, se a pessoa não tiver um dom, um talento artístico para fazer isto, elas são incompatíveis. Já dizia Kepler que você pode não enxergar uma coisa ou porque está na escuridão ou porque está ofuscado por luz demais. Quer dizer, se você começar a explicar demais, termina a coisa ficando difícil de entender. Se você pega uma coisa muito simples, qualquer palavra. Pega a palavra lápis. Aí você repita 200 vezes, lápis, lápis.... depois de você repetir 200 vezes a palavra lápis, você já não sabe mais o que você está dizendo. A coisa começa a soar estranho: “Lápis, que palavra esquisita”. Esse é um exagero, mas quer dizer o seguinte: um livro muito verboso, ele confunde o leitor. Mas o que eu quero dizer é que os livros de Cálculo tem uma história, eu poderia falar um tempão sobre livros de Cálculo. Existe uma indústria, uma indústria de livros de Cálculo, que envolve mais de 1 bilhão de dólares anuais. A quantidade de livros de Cálculo... eu digo só nos EUA, fora o resto do mundo. Autor de livros de Cálculo é uma profissão. Você não pode, hoje em dia, já a algum tempo, você não pode dizer: “Fulano é professor da faculdade tal e escreveu ou escreve livro de Cálculo”. Não, autor de livro de Cálculo é uma profissão porque você tem que estar todo o tempo envolvido naquilo. Então, você tem que ter uma equipe para pesquisar, entre aspas, para você, exemplos interessantes, ilustrações mais bonitas, coloridos mais atraentes, porque você tem que competir com os seus rivais na indústria. Existe uma competição muito grande, como em toda indústria. E você tem que estar atento para atrair clientela, ou seja, que seu livro seja adotado por mais e mais escolas. E o editor, que envolveu uma quantidade apreciável de dinheiro na produção desse livro, quer que o seu livro seja o mais atraente ao mesmo tempo em que tenha qualidade científica e isso envolve o trabalho de muita gente. E os livros, o que acontece ? Eles vão aumentando de tamanho. A última edição que eu vi do livro do Thomas, que foi um livro que eu adotei quando eu dei uma vez o curso de Cálculo em Brasília, há trinta e tantos anos atrás, o livro do Thomas que...

E. Thomas e Finney ?

L. É. A última edição que eu vi, quando eu fui a um congresso do ICME em Quebec, lá tinha um *stand* da Addison-Wesley, eu vi o livro da última edição e tinha mais de 1000 páginas. Então, essa coisa vai se tornando praticamente sem limites. Uma reação a isso, que eu estava dizendo quando fomos interrompidos, foi quando surgiu o livro do Lang. Porque o Lang pegou e resolveu: “Não, agora eu vou...”. Claro, isso é um princípio geral, essas tendências surgem sempre uma reação no sentido oposto, que é fazer um livro mais enxuto possível, que aliás é a característica do Lang, ele próprio é enxuto, ele é magérrimo. É o estilo dele, conciso, objetivo, etc. O livro enxuto, ele tem uma vantagem para o professor competente, porque ele é um guia que o professor pode complementar com suas experiências e seus exemplos. Mas são raros os

professores que podem fazer isso. Em geral, o professor quer que o livro já tenha todos os dados. Então, o livro de Cálculo de hoje em dia, esses livros modernos que eu mencionei, eles trazem... são verdadeiros kits. Não é um livro. Ele vem, ele tem um livro, ele tem um disquete, ele tem vídeos, ele tem livro do professor, ele tem livro de exercícios, ele tem livro de provas e questões, etc, e é um kit completo que representa um preço enorme. Só o texto, por exemplo, o livro básico de texto de Cálculo do Stewart, que não tem 1000 páginas, tem 800 e poucas páginas, custa 162 dólares. Só um livro. Então, por aí você tem uma idéia, o que é que significa hoje em dia, livro de Cálculo. Agora, deve-se dizer que a qualidade, essa última tendência, a qualidade realmente é boa no sentido de que atende a essas observações que eu fiz a respeito dos componentes fundamentais do ensino da matemática que são válidas em todos os níveis.

E. Agora, Professor, voltando um pouquinho numa questão que o Sr. falou, que é muito interessante para mim, que é sobre o ensino de limites em Cálculo. Então, têm alguns livros que, por exemplo, trazem um capítulo enorme de limites. Se gasta um mês dando limites: limites infinitos, limites finitos, casos especiais, etc. E o que que acontece ? O que me parece é o seguinte: é que às vezes as pessoas têm uma boa manipulação do cálculo de limites mas a parte da conceituação mesmo, fica um pouco de lado...

L. Ou vice-versa.

E. Ou vice-versa, pode acontecer, com certeza. Mas, como é que o Sr. vê isso aí ? Eu queria que o Sr. falasse um pouco mais sobre isso. Dessa questão do conceito que o Sr. acha muito...

L. Olha, uma vez o Serge Lang disse para mim o seguinte: “As pessoas já nascem sabendo o que que é limite; o que atrapalha são os livros”. Quer dizer, a noção do limite é uma noção intuitiva e que para as pessoas que vão usar a matemática como um instrumento, ele aparece com muito mais frequência ou, quase que exclusivamente, embutido dentro da noção de derivada. Não exclusivamente, mas fica embutido dentro da noção de derivada, de modo que uma coisa natural é você introduzir o limite ao mesmo tempo que introduz a derivada. Depois falar em limites em outras situações. Mas é preciso, a menos que você vá formar um futuro matemático, é preciso que você tenha essas noções sempre aliadas a um uso delas. Nada em matemática é feito pelo bel-prazer de fazer. Você faz uma coisa porque aquilo tem relação com outras coisas na matemática, com outras aplicações. E a noção de derivada é uma noção das mais fáceis de se apresentar, tem aplicações interessantes. Eu acho que a noção de limites deve vir junto com a noção de derivada. Isso no ensino do Cálculo, no ensino inicial. Agora, quando a pessoa quer ter uma formação melhor, isso tem que ser seguido posteriormente de uma formulação adequada, precisa de livros...

E. E aí, nesse estágio, entraria a questão dos épsilons e deltas ?

L. É. Agora os épsilons e deltas, ele tem sido exagerado. Por exemplo, eu tenho uma filha que é antropóloga e que fez a graduação dela em Biologia na UFRJ e puseram uma professora de Cálculo para ela que ficou o

tempo todo: 'Dado o ϵ , calcular o δ correspondente para este ϵ . Uma coisa que não tem o menor interesse para um futuro biólogo e muito menos para um... e nem sequer para um matemático. Ninguém fica calculando deltas a partir de ϵ s. Então, isso é um exagero. O outro exagero é você não ter a definição; ter só exemplos e exemplos e exemplos e a pessoa não saber numa situação mais delicada. O perigo de não ter a definição precisa, é que em certas situações mais delicadas você comete erros por falta da conceituação adequada. Então, aí o professor tem que ficar atento. Se as aplicações vão ser só aplicações mais simples... eu quando estudei no colégio, nos últimos anos do colégio tinha um pouco de Cálculo e eu ficava atônito porque eu não conseguia explicar porque falar tanto em limites, se todos os limites que apareciam tinham o valor da função no ponto. Então, para que falar em limite ? Então é preciso que o professor tenha exemplos na mão, o exemplo mais simples é $\sin x / x$. Aí, não é o valor da função no ponto. Mas os outros limites de natureza algébrica, quando não é o valor da função no ponto diretamente, você simplifica a fração e fica o valor da função num ponto. Então, é preciso que quando você fale em limites, você dê exemplos de situações que não é o valor da função no ponto para o jovem ter idéia de que aquilo é uma noção necessária. Agora, esta questão de rigor, até que ponto o rigor, é uma questão que tem que ser resolvida caso a caso. Depende da turma, depende do grau de maturidade, depende dos objetivos que o seu ensino visa. Quando você escreve um livro de Cálculo - que nunca tive a coragem de escrever um e tenho certeza que nunca vou escrever - você tem que achar uma posição de equilíbrio levando em conta de que, como eu disse antes, uma atividade basicamente de natureza comercial, que você tem que atender o maior número de fregueses possível. É como, por exemplo, você ter um restaurante que serve comida baiana. A menos que você esteja na Bahia, você tem que servir essa comida baiana com um tempero bem comedido, senão você vai ter 1 ou 2 clientes por dia e nada mais do que isso. A mesma coisa é o livro de Cálculo. Você não pode nem exagerar de um lado nem de outro. Por isso que eu acho que essas tendências atuais de fazer as coisas do ponto de vista numérico, gráfico, geométrico e computacional, completam as coisas e substituem quase que perfeitamente a definição precisa de limites com ϵ s e δ s. Se você vê as coisas de vários aspectos...

E. Desde que não haja um exagero para este lado também. Quer dizer, numa certa hora é necessário o aluno calcular algumas derivadas, calcular algumas integrais básicas antes de simplesmente um programa...

L. Não, eu estou dizendo do ponto de vista numérico, do ponto de vista gráfico e do ponto de vista computacional, manipulativo e do ponto de vista conceitual sendo que, neste caso, o conceito de limite é um conceito muito mais sofisticado e que requer um grau de maturidade maior para o aluno. Para quem escreve um livro de Cálculo inicial ou para quem tá dando o primeiro curso de Cálculo é melhor deixar isso para depois.

E. Tá certo. Professor, então adentrando um pouco mais nesta questão do rigor, se a gente olhar para a história do Cálculo, por mais autores diferentes que a gente estude, eles vão apontar para Newton, para Leibniz, alguns podem falar em Fermat, se você for remontar toda a história da matemática pode até se pensar em Arquimedes, mas que nomes o Sr. acha que estariam ligados à questão da Análise ? O Sr. acha que seriam

Cauchy, Weierstrass ? O Sr. acha que exatamente a partir da Aritmetização da Análise, deste fenômeno que a gente poderia dizer: “Não, este é o marco histórico da Análise, este é o nascimento da Análise, o surgimento da Análise” ? Como é que o Sr. vê isso ?

L. Olha, marco histórico realmente só existem aqueles marcos que os portugueses traziam quando descobriam uma terra nova, que eles punham aquele marco assim, de pedra...

E. Quer dizer, na matemática nada é tão delimitado assim ?

L. Não, não é, as coisas evoluem, cada um dá a sua contribuição, às vezes esta contribuição consiste em uma sistematização como Euclides, muitas vezes Euler fez isso também. Mas cada um acrescenta um pouco. Cauchy sem dúvida é um pioneiro, mas todo mundo sabe dos erros que ele cometia, que todo limite pontual de funções contínuas é uma função contínua, uma série de funções contínuas converge para uma função contínua, mesmo que a convergência não seja uniforme, coisa que ele não sabia na época mas parece que admitia implicitamente. Até mesmo depois de Weierstrass, Riemann cometeu um erro histórico, quando ele resolveu estudar o problema de Dirichlet, ele admitiu que a esfera unitária de um espaço de Banach é compacta, implicitamente ele não tinha a noção de que era compacta mas que toda função contínua numa esfera unitária atinge um máximo e isso aí está longe de ser verdadeiro. Quer dizer, então essas coisas, o rigor, ele evolui passo a passo. E dependendo da atitude das pessoas, você nunca atinge um rigor absoluto. O absoluto é uma coisa terrível para a matemática, tornaria a matemática impalatável, difícil de engolir. Eu acho que você tem que responder à questão do rigor sempre com honestidade, eu acho que demonstrar é convencer as outras pessoas. Na medida em que seus interlocutores estão convencidos, você não precisa demonstrar. Isso em se tratando de ensino. Por exemplo, você está dando aula no ginásio. Daí você pega 3 pontos sobre uma circunferência. Você não vai provar para os seus alunos que 3 pontos distintos sobre uma circunferência nunca estão na mesma reta, nunca são colineares. Todo mundo aceita isso. Então, para que que você vai provar isso ? Mas, na verdade, isso aí precisa ser provado, a partir da definição de circunferência. Mas então, eu costumo dizer para os meus alunos que rigor e exigência de precisão em matemática é muito parecido, quando você dá aula, é muito parecido com ensinar educação sexual para uma criança. Você vai até o ponto em que ela fica satisfeita. Mais tarde, quando ela for amadurecendo, você vai mais longe. E mais tarde quando ela for amadurecendo mesmo, não precisa mais de você, ela já sabe. A mesma coisa é em matemática. Você não deve ir além do que os seus alunos necessitam, se eles estão satisfeitos com a sua explicação... desde que não seja uma mentira. Você não vai dizer para o seu filho que as crianças vieram com a cegonha, por exemplo, que depois você vai ter que se desdizer mais tarde. É a mesma coisa em matemática. Você não vai fazer uma coisa dizendo que $a + b$ ao quadrado é igual $a^2 + b^2$ porque depois você vai ser pego na mentira. Mas, respeitando esse princípio de que você sempre deve dizer a verdade, mas não necessariamente toda a verdade, eu acho que aí está um dos pontos de equilíbrio do ensino.

E. Então vamos ver se eu estou certo. Se eu estou, por exemplo, num curso inicial de Cálculo e vou falar lá sobre o Teorema do Valor Intermediário num caso particular. “Uma função contínua num intervalo tem um valor negativo, digamos o f de a é negativo e o f de b é positivo, como ela é contínua naquele intervalo, então vai ter um ponto em que ela vai tocar o eixo x ”. Eu vou lá e faço um gráfico. Pronto, o aluno tá vendo ali, não tá ? Claro que ela vai cortar, tem um ponto ali, um “cezinho” que o f de c é 0. Então, aquilo ali não é o máximo de rigor para aquilo. O máximo de rigor você vai encontrar num curso de Análise, aquele teorema formalmente demonstrado e tudo, mas é o que é possível fazer naquele instante, não ?

L. É bastante aceitável. O que pode surgir e deve surgir e se não surgir é até bom que o professor provoque o surgimento, é como encontrar este ponto ? Existe algum método que me leve ou uma fórmula, porque este é um dos defeitos terríveis do ensino básico da matemática que é levado para o ensino superior, é os alunos acreditarem, isso é um exagero nas manipulações que levam a isso, que as fórmulas são as melhores maneiras de você entender as respostas de uma questão. Não existe uma fórmula para determinar isso. Hoje em dia, as pessoas estão aos poucos entendendo - o que já se sabia em matemática, já se sabia a muito tempo - que as fórmulas não são a resposta ideal. Os algoritmos são muito mais eficientes do que as fórmulas. Então, a pessoa pode perguntar: “Existe uma fórmula para eu calcular este ponto ?” Em primeiro lugar, você tem que dizer: “Esse ponto podem ser esses pontos”. Nada impede, aí você faz uma figura e rapidamente ele se convence de que podem existir vários pontos. Mas se a função for crescente ou decrescente, aí tem um único ponto. Como é que eu vou calcular esse ponto ? Aí você tem que... é muito simples, você fala nos métodos, você fala no método da bisseção, você divide o intervalo ao meio, nos dois extremos, um vai ter que ser positivo, o outro negativo, a função vai assumir valores com sinais opostos nestes extremos e vai dividindo ao meio, dividindo ao meio e você depois diz “Olha, esse método não é o método mais eficiente, embora seja simples, existem outros métodos: o método da secante e, finalmente o método de Newton que é o mais eficiente de todos, inclusive, com outros métodos que aperfeiçoam o método de Newton”. Isso aí é uma deixa excelente, para você dar uma idéia num curso de Cálculo, do que é a matemática hoje em dia. Não basta você saber que existe o ponto, você quer saber como você vai obter um daqueles pontos. E eu acho que para o aluno, isso é muito mais importante do que você demonstrar rigorosamente a existência daquilo ali. Se você der um processo de chegar até lá.

E. Especialmente para um aluno de Cálculo, não é verdade?

L. É, para o aluno de Cálculo. Você vai ganhar com isso uma audiência mais atenta, mais motivada. Porque deixa de ser uma coisa misteriosa; “Ah, ah, eu posso chegar lá com aproximações”. E aí, é uma maneira de você dizer: “Olha, aprenda a ver que essas coisas, vocês nunca vão obter o valor exato mesmo porque o valor exato é uma ficção, não existe o valor exato. O valor é sempre aproximado. Você tem a aproximação que você quiser”.

E. Tá certo. Professor, agora eu queria conversar um pouquinho sobre o seu livro...

L. (risos) Agora você vai me pegar, eu vou pagar pelos meus pecados...

E. Não, de jeito nenhum. Algumas coisas aqui no prefácio do seu livro... a primeira coisa o seguinte: isso é interessante, isso é história da Análise, com certeza, do ensino de Análise no Brasil. Como é que foi, Professor, a transição do *Curso de Análise* para o *Análise real* ? Eu fiz, inicialmente, o curso de Análise na graduação com o *Curso de Análise*. O meu professor foi o Prof. Florêncio Guimarães na Universidade Federal do Espírito Santo e foi um curso ótimo, eu praticamente, pelo menos uma vez, pensei em quase todos os exercícios do *Curso de Análise*. Me delicieei com aquilo...

L. Mais pelo Florêncio do que pelo texto.

E. Não, o texto é fantástico e eu me apaixonei por aquilo: “Não, isso é que eu vou estudar, que eu vou continuar sempre estudando...” e tudo mais. Mas aí depois, quando eu vim no verão de 89, eu vim fazer o seu curso e eu tenho até hoje as notas de aula. E aí, inclusive, com as notas de aula, quer dizer, eu não me lembro, não me recordo ao certo quais foram as palavras, mas o Sr. deu a entender em 89, que estava trabalhando num outro livro, vamos dizer, as únicas palavras que me vêm à mente seriam “mais enxuto” do que o *Curso de Análise*. E algumas coisas que o Sr. coloca aqui no prefácio me chamaram a atenção, como por exemplo isso aqui: “Assim espero facilitar o trabalho do professor que, ao adotá-lo, não precisará perder muito tempo selecionando os tópicos que ensinará e os que vai omitir”. O Sr. acha que era mais ou menos isso que acontecia com o outro livro ?

L. Isso foi uma das motivações para escrever este livro mais enxuto, como você disse. É que muitas vezes colegas meus diziam o seguinte: “Olha, eu gosto muito do seu livro” - e esse prefácio é sempre uma maneira agradável de você começar a crítica - “eu gosto muito do seu livro mas, eu tenho dificuldades porque ele é muito longo, e o curso de um semestre tem 40 e poucas horas de aula...”

E. Em geral são 60 ou 90. São 4 horas por semana ou em alguns casos 6...

L. Ah é, um curso de Análise I ?

E. É, um curso de Análise I.

L. “É, o programa do semestre obriga a gente a escolher que tópicos vai oferecer e que tópicos vai omitir e mais adiante eu chego com surpresa à conclusão de que eu tenho que voltar para dar uma coisa que eu omiti porque senão eu não consigo dar nada”. Isso foi o que seus colegas diziam. Então, eu resolvi fazer uma versão mais resumida na qual acontecesse isso aí que você acabou de ler; a pessoa não tivesse que escolher. E a idéia, inclusive, a idéia de fazer essa coleção, que é a coleção chamada *Matemática Universitária*, essas coleções foram todas inventadas por mim, o *Projeto Euclides* foi um e essa é outra, que é uma coleção para

graduação. Nenhum livro dessa coleção podia ter mais do que 150 páginas. Aí essa coisa, esse princípio foi violado rapidamente e tal. Mas a idéia é que essa coleção toda fosse assim, de livros em que a pessoa não tivesse que escolher o que é que vai dar. Que desse tudo, que dava para dar tudo num período letivo. Isso foi uma das motivações. E ao mesmo tempo, quando eu escrevi, que este livro foi escrito assim muito rapidamente, eu me baseei na experiência que eu tinha já, nessa época já fazia uns 6 anos, 7 anos que eu dava aula na pós-graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas para o pessoal que está fazendo mestrado em Economia e a Fundação Getúlio Vargas tem esse mestrado em Economia muito matematizado. Vários desses professores de lá já foram alunos aqui do IMPA e são pessoas que têm uma formação matemática muito boa. E então, mas eu tinha que dar pros economistas uma coisa bem concisa e bem objetiva. Análise, porém sem perder muito tempo. Então, a experiência me guiou para fazer este livro. Foram as duas coisas. Agora, é verdade também que esse livro não é um subconjunto do outro, porque tem umas coisas que tem aí que não tem no outro. Por exemplo, o método de Newton...

E. Isso, as fórmulas de Taylor, as aplicações da derivada...

L. Tem essas coisas de funções convexas, tratado de uma forma mais completa do que tem no outro. Porque aí é a motivação dos economistas, que estão todo o tempo com função côncava. Eles preferem a côncava porque na economia as coisas são côncavas. É o princípio dos retornos decrescentes, cada vez mais que você obtém um resultado, você tem que aplicar um estímulo muito maior, aliás, não é só em economia não. Em fisiologia também. Quando aumenta o estímulo a reação aumenta, mas não proporcionalmente. À medida que os estímulos são maiores, maiores, maiores, as reações são menores, menores, menores. Para essas coisas você precisar estudar funções côncavas e convexas. E o que mais ? Tem um pouco de integrais impróprias, também. Mas a idéia é essa. Você tem... infelizmente, a vida me levou por outros caminhos e eu até agora não tive a oportunidade de fazer o volume 2. Este se chama volume 1 e as pessoas ficam me cobrando o volume 2. Mas...

E. Também para trabalhar em Análise II, que é disciplina eletiva do bacharelado...

L. Mas eu tenho feito outras coisas. Eu não fiquei parado. Nesse meio tempo, de 89 para cá, eu publiquei já um monte de livros mas, em outros assuntos. E principalmente agora com este meu trabalho para professores do 2º grau aí, a gente fez uma série enorme de livros, tem uma terceira coleção, a *Coleção do Professor de Matemática*. São três coisas que eu inventei: o *Projeto Euclides*, a *Coleção Matemática Universitária* e a *Coleção do Professor de Matemática*. Nos 3 níveis. Já me perguntaram: “Quando é que você vai lançar a coleção do jardim de infância ?” Então eu não tive tempo. Aí saiu o *Álgebra Linear* também. Mas é... se Deus me der vida e força, eu vou fazer o volume 2. Então, as pessoas ficam me cobrando: “E o seu livro de topologia algébrica que você já vinha prometendo, tem umas notas escritas aí também...” É isso.

E. E como é que tem sido o retorno com esse *Análise Real*, vamos dizer assim, que agora então seria o mais didático ?

L. É, os dois tem disputado palmo a palmo a preferência dos leitores. O outro *Curso de Análise* tem sido mais...

E. Usado como referência ?

L. Não, ele tem sido usado mais em Portugal, no Chile e em outros países. Agora, esse *Análise Real* acaba de ser traduzido para o espanhol também. Porque tem uma versão do *Curso de Análise* em espanhol publicada na Espanha, mas essa teve uma divulgação muito fraca e não tem vendido muito, mas o *Análise Real* foi traduzido para o espanhol e publicado no Peru e está tendo uma boa aceitação lá também. Mas aqui mesmo no Brasil os dois estão disputando... por exemplo, o *Curso de Análise* está na nona edição. Acabou de sair a nona edição. Isso representa uma quantidade enorme de livros vendidos. E o *Análise Real*, eu já soube que está esgotando a quarta edição dele. Vai para a quinta. Então, o problema é que não sei o porquê, as pessoas preferem o meu livro. Talvez, porque não tenha competição. Se bem que em *Análise* tem, tem o livro do Geraldo, tem o livro do Djairo, que são livros muito bons.

E. Também. Como é que o Sr. compara os dois ? Tanto o Prof. Djairo - para ser bem honesto com o Sr. e isso é interessante - quanto o Prof. Ávila acham, por exemplo, que os livros deles são mais parecidos entre si e o do Sr. seria um pouco mais diferente, por se tratar mais de um tratado de *Análise*, um tipo de coisa assim. O Sr. acha que é por aí ? Comparando os três, o Sr. vê pontos em comum ?

L. Eu acho que o livro é a pessoa. O livro é o reflexo da pessoa que escreve. Então, a pessoa escreve um livro, principalmente quando escreve um livro elementar, tem duas motivações básicas para você escrever um livro. Se é um livro elementar é porque você acha que a maneira de ver o assunto é uma maneira que vale a pena que outras pessoas vejam também daquela maneira e você quer divulgar a sua maneira de ver. Quando é um livro avançado então, a pessoa escreve para aprender o assunto. Quer dizer, aprender no seguinte sentido: você tem uma noção bastante boa da coisa do ponto de vista de pesquisa e de pensamento original, é um livro avançado. Mas, existem certos detalhes, certa organização lógica e digamos, até mesmo estética do assunto, para ficar bem trabalhado na sua mente, que você não fará nunca se você não for obrigado a escrever um livro. Então você escreve o livro e com isso você arruma as coisas. Então são as duas motivações básicas. Eu quando escrevi este livro de *Análise*... agora deixa eu falar uma coisa mais pessoal, desde muito cedo na minha vida que eu sempre quis escrever. Eu sempre tive mania de escrever. Uma época eu pensei que eu ia ser escritor, que eu ia ser poeta ou dramaturgo, literato de modo geral, era a minha intenção. Depois eu entrei, por motivos que não vêm ao caso agora, na matemática e sempre achando que deveria escrever livros de matemática. Então, teve uma época que eu... eu conheci o Djairo, ele era menino ainda. Eu sou o que ? 4 ou 5 anos mais velho do que ele. Era mais ou menos isso. Ele tinha 16 anos na época, eu tinha 20, 21 por aí. E ele

foi meu primeiro aluno de Análise, quando ele tinha 19 para 20 anos eu resolvi dar um curso de Análise para ele e para um colega dele. Ensinava o que era número real, etc e eu estava aprendendo na época, aprendendo e ensinando para eles. E a gente tem... ele escreve muito bem, o Djairo tem um dom de escrever com bastante elegância e fluência, além de ser um bom matemático, excelente matemático. E uma vez eu escrevi umas notas de matemática e ia dar um curso no Colóquio sobre Análise. Eu propus o curso de Análise e nessa reunião da comissão, o Djairo não estava presente. Ele também fazia parte da comissão. Na reunião seguinte, ele sem saber de nada apresentou um curso de Análise. Então, eu retirei o meu: “Não, deixa o curso do Djairo, eu retiro o meu e dou outro curso”. Aí escrevi um de Álgebra Exterior e dei o curso. Mas ele escreveu um livro e depois eu estive em Brasília, na época que ele estava em Brasília e me deu o original, eu li, fiz uma revisão completa do original dele. Mas eu achei que o livro era muito bom, como é um livro muito bom, mas não era minha maneira de fazer, não era o meu jeito, eu não estava satisfeito com aquilo: “Tá bom mas não é assim que eu quero”. Então eu voltei á idéia e peguei minhas notas originais e escrevi o *Curso de Análise*, que não é nem melhor nem pior do que o dele, é diferente. Representam formações diferentes. O Djairo é... a formação básica dele é engenheiro e a minha formação básica é matemática. O Geraldo é diferente, o Geraldo Ávila a formação básica dele é física matemática e então ele também tem a abordagem dele. Então, são as três alternativas. É verdade que o Djairo e o Geraldo, eles estão mais próximos. Eu acho que todos são bons livros, é ótimo que tenhamos bons livros, eu gostaria que mais pessoas com a competência deles e desejo de escrever, a vontade, a coceira no dedo, escrevessem mais livros e quem sabe eu teria uma idéia melhor de que os meus livros são vendidos e usados não apenas porque são os únicos, mas porque estão dentro de uma competição. É muito bom, isso faz muito bem. Eu gostaria que o Djairo e o Geraldo escrevessem os volumes 2 dos livros deles e escrevessem mais livros, que são todos os dois pessoas muito queridas e muito competentes.

E. Com certeza. Professor, agora vamos falar um pouquinho sobre as diferenças entre Cálculo e Análise...

L. Bom, primeira coisa. Esta questão, esta pergunta que você fez: a diferença entre Cálculo e Análise. A diferença entre Cálculo e Análise é meramente didática. Quer dizer, se você vai ensinar com ênfase nas aplicações e nas manipulações, então você vai ensinar Cálculo. Agora, se você quer por ênfase no raciocínio, no método dedutivo, na organização da matemática, da Análise Matemática como ciência dedutiva então é Análise. É a diferença entre o livro do Heron e o livro do Euclides. O Heron era um cara aplicado, os livros dele eram voltados para as aplicações da matemática, enquanto que o livro do Euclides era um livro que tinha por objetivo sistematizar, embora ambos fossem didáticos, sistematizar o conhecimento matemático de forma a mais rigorosa possível dentro dos padrões da época. Então, essa diferença de Cálculo e Análise é uma diferença meramente didática que eu acho, eu insisto que é um ponto de vista generalizado, que o Cálculo deve preceder a Análise por motivos de evolução da maturidade intelectual. Agora, a Análise matemática é uma forma de você habituar o futuro professor, o matemático, o cientista ou o que seja com um princípio que para todos os matemáticos é absolutamente óbvio, mas que para as outras pessoas nem sempre é, que é o seguinte: toda conclusão pressupõe uma hipótese. Você não pode tirar conclusões se você não admitir

tacitamente ou explicitamente algumas hipóteses. Todas as conclusões seguem um modelo dedutivo a partir de uma hipótese e a aplicação desse tipo de raciocínio, desse tipo de pensamento é uma coisa que você aprende na Análise Matemática como também você aprende na Geometria, mas na geometria é muito mais complicado, você aprende melhor ainda na Álgebra. Mas a Análise Matemática é uma média entre a Álgebra e a Geometria, que na Geometria as hipóteses são muitas e muito variadas e se você for admiti-las todas explicitamente, você termina fazendo um tratado tipo Hilbert, *Fundamentos da Geometria*, que fica muito difícil de entender. Já na Análise Matemática as hipóteses são muito claras, muito simples, você se baseia, basicamente, fundamentalmente, na concepção do número real, corpo ordenado completo e o resto é tudo consequência daí. Então, o ensino da Análise matemática tem essa virtude de habituar as pessoas com o método dedutivo que é uma coisa que pode ter o seu uso até mesmo na vida prática para a pessoa chegar a concluir certas afirmações e você ter certeza que aquela conclusão é consequência de hipótese, se você não aceitar aquela hipótese você não é obrigado a aceitar aquela conclusão. A Análise matemática tem esse mérito. Agora, o que foi mais que você perguntou ?

E. Não, sobre esta questão da Análise na licenciatura...

L. Sobre esta questão da Análise na licenciatura. Bom, olha, tem uma frase de um professor que eu já citei uma vez para você conversando pelo telefone, que é um grande nome da Educação Matemática no Brasil, que escreveu que na Educação Matemática o importante é a educação, não é a matemática. Então se a pessoa leva essa afirmação ao pé da letra, você pode até tirar toda matemática da licenciatura. Para que a matemática ? O importante é a educação. Então, a licenciatura que eu fiz - eu não fiz licenciatura, eu fiz bacharelado - mas na minha época, a licenciatura era basicamente a mesma coisa que o bacharelado, só diferia no último ano que tinha umas cadeiras que eram trocadas. Mas a licenciatura, tradicionalmente no Brasil, seguia o modelo italiano que é extremamente repleto de teorias matemáticas bastante avançadas, ela foi aos poucos se modificando e, hoje em dia, ela segue um modelo atenuado, este modelo atenuado mas muito fictício. Num certo sentido é um faz de conta. Você tem Análise, você tem Topologia, você tem Variáveis Complexas, um montão de coisas e na verdade você não tem nada disso, porque os professores fingem que ensinam, os alunos fingem que aprendem e nenhum dos dois sabe nada disso. Então, se é para ter essa ficção de ter Análise Matemática na licenciatura mas, sem ser seriamente dosada, então é melhor que não tenha. Aliás, isso se aplica para qualquer coisa, não é só para Análise Matemática. Agora, se é importante ter Análise Matemática, eu acho que sim, um curso inicial de Análise Matemática porque é uma coisa útil, não só para licenciatura mas para várias áreas do ensino superior. Mas, é bom não esquecer, que o objetivo primordial da licenciatura é formar professores da escola fundamental, do ensino básico, seja fundamental ou seja médio. É formar professor do ensino básico. E como tal, é a coisa mais importante é que o professor tenha, durante o seu curso de licenciatura, sido treinado nos conceitos e conteúdos da matéria que ele vai ensinar, porque é muito comum, é praticamente a regra geral que o professor saia da escola sem nunca ter visto a maior parte das coisas que ele vai ensinar. Principalmente, se essas coisas são matéria do ensino médio. Por exemplo, em quantas faculdades do Brasil, o professor estuda análise combinatória? Em quantas? Então, mas ele vai

ensinar isso. Em quantas faculdades do Brasil, o professor estuda coisas como trigonometria, noções de probabilidade, estatística, coisas assim ? Raramente você tem isso. Em algumas escolas você tem. Então, você fala: “Mas trigonometria é uma banalidade !” É uma banalidade sim, para todos os professores de matemática do ensino superior, todos os matemáticos profissionais, trigonometria é uma banalidade. Entretanto, há cerca de 10 anos atrás, um pouco menos, 8 anos atrás, eu tive a oportunidade de fazer uma tomada de opinião, nós enviamos 25.000 questionários para todo o Brasil para os leitores da *Revista do Professor de Matemática*, tivemos cerca de 7.000 respostas, que para os entendidos nisso, foi um negócio extraordinário esse número de respostas. E uma das perguntas que a gente fazia era a seguinte, para os leitores da *Revista do Professor de Matemática*: “Se você tivesse que fazer um curso de aperfeiçoamento para professores de ensino médio, quais as matérias que você gostaria de estudar ?”. Aí fizemos um elenco e dissemos: “Ponha os números, em primeiro lugar, a, segundo lugar, b, etc...” A trigonometria ganhou em primeiro lugar, o que foi uma surpresa enorme, porque eu não esperava. Em segundo lugar ficaram, mais ou menos empatados, análise combinatória e geometria espacial. Mas o curioso - eu tenho esses dados aqui catalogados, computadorizados, etc - é que a resposta era a mesma do Amazonas ao Rio Grande do Sul, as preferências eram basicamente as mesmas. Então, eu fiquei pensando por que a trigonometria era uma coisa que causa tanta perplexidade aos professores. Tem algumas tentativas de respostas mas não é o caso aqui. Mas o que eu quero dizer é o seguinte: antes de tudo, é fundamental que o professor aprenda na faculdade aquilo que ele devia ter aprendido no ensino médio e não aprendeu e que vai ensinar, para evitar um círculo vicioso, porque você entra na faculdade para ensinar no ensino médio. Mas no ensino médio que você fez, você não aprendeu aquilo ou aprendeu mal...

E. E vai ensinar mal, o aluno aprende mal e entra mal na faculdade...

L. E os autores de livros didáticos brasileiros, que seguiram este mesmo curso, vão escrever livros que são, de modo geral, de muito má qualidade. Existem exceções que não são de má qualidade, que são de qualidade média, mas não existe nenhum livro bom, comparado com a literatura que a gente tem estudado, a literatura de outros países; a literatura que eu me refiro é os livros-textos de ensino médio de outros países, os livros brasileiros são muito ruins. Não por falta de profundidade, não é questão de profundidade maior ou menor, mas é questão de respeitar aqueles princípios que eu enunciei no começo, que são o equilíbrio entre as três componentes fundamentais do ensino.

E. Mas aí, quando o Sr. defende este estudo destes tópicos na graduação, na licenciatura, isso não seria feito apenas de uma forma que servisse de revisão para aqueles tópicos, mas mais avançado do que isto, um aprofundamento dessa matemática elementar ?

L. O meu ponto de vista está explicitamente contido nos livros que eu e mais três colegas escrevemos. Chama-se *A Matemática do Ensino Médio*, volumes 1, 2 e 3. Esses livros, eles contém todo o programa do ensino médio, salvo o Cálculo, o eventual curso de Cálculo que se dê no ensino médio, nós não fizemos isso.

Esses livros são escritos da forma como eu gostaria que esses assuntos fossem ensinados na universidade. Quer dizer, a matéria é tratada de um ponto de vista elementar, porém, com uma linguagem adulta, madura e que se torna interessante para o ouvinte ou leitor, o aluno que vai ser professor, que está na universidade. A linguagem é completamente diferente da linguagem que você usaria se você estivesse escrevendo um livro para um aluno de 2º grau. Mas o teor, o nível, é o mesmo. É o nível elementar. Agora, feito de uma forma mais sofisticada porque se você for repetir para o professor o conteúdo dos livros que tem por aí, não tem graça nenhuma e você estaria descumprindo a sua missão. Mas os problemas podem ser usados, os problemas, a orientação, pode ser... eu gostaria que fosse feito... esse livro tem aliás... não sei se você conhece, *A Matemática do Ensino Médio*, esse livro, por exemplo, o volume 1, acabou de sair a quarta edição, agora você viu a Maria Isabel passar por aqui dizendo que acabou de sair a quarta edição. O volume 2 está na segunda edição, o volume 3 também na segunda edição, porque o volume 1 saiu primeiro. Além disso, é da natureza das coisas que em qualquer coleção o volume 1 sempre vende mais do que o volume 2, mais que o volume 3, isso aí...

E. É normal ...

L. É normal. Além disso, ele saiu 1 ano antes do outro, 2 anos antes do terceiro...

E. Então, dentro desta ótica, as coisas se encaixam, quer dizer, aí então a Análise seria importante para um professor de licenciatura, porque quando você está, na realidade, estudando com um pouco mais de profundidade a reta real... ora, o conjunto dos números reais é trabalhado no 1º e 2º graus...

L. É trabalhado da seguinte forma: você pega um livro de 2º grau no Brasil e ele diz assim: "Chama-se número racional o número que se expressa pelo quociente de dois números inteiros, sendo o segundo diferente de 0. Chama-se número irracional todo o número que não é racional".

E. E chama-se real todo o número que é racional ou irracional...

L. É. Aí eu pergunto, então um número irracional é um número irracional, porque não é racional. Então, o número de uma revista é irracional, quer dizer, é uma brincadeira. Quer dizer, eu acho que o professor devia ter um acesso a uma visão mais correta das coisas. Não precisa ser rigorosa. Por exemplo, não tem sentido você descrever os números reais como o conjunto dos cortes de Dedekind. Não é o caso. Mas, você tem uma alternativa que me parece extremamente válida que é você dizer o seguinte: número é o resultado da comparação entre uma grandeza e outra grandeza de mesma espécie tomada como padrão chamada unidade. Aí quando essa grandeza é discreta, o resultado dessa comparação é um número inteiro. Quando essa grandeza é contínua o resultado dessa comparação é um número real. Então, se a grandeza que você quer medir é comensurável com a grandeza unidade, ou seja, que existe um submúltiplo comum para ambas, então o resultado da medida é um número racional. Quando é incomensurável com a unidade, então o número é

irracional. Aí você dá exemplos de grandezas incomensuráveis. É assim que eu acho que eu vejo as coisas. Eu vejo as coisas desse modo. Eu acho que é perfeitamente honesto. Falta o que ? Falta uma coisa mais rigorosa que é o que significa medir uma grandeza, mas isso não é um erro; é uma coisa que pode ser tornada rigorosa. O Bourbaki tem um volume do tratado dele que chama-se *Measure de Grandeur*. Quer dizer, medida das grandezas é um volume do Bourbaki, quer dizer, pode se tornar a coisa tão rigorosa quanto se queira. É aquilo que eu disse: você não precisa entrar em detalhes sofisticados mas você também não deve falar coisas que você tem que desdizer mais tarde. Então, a medida das grandezas é uma noção perfeitamente correta matematicamente e além disso tem um apelo objetivo, prático, concreto muito grande que é assim que as pessoas usam os números reais. Usam para efetuar medidas, não é isso ? E a matemática é importante na vida, na sociedade, porque tem suas aplicações. Se a matemática fosse apenas um jogo lógico, uma ciência abstrata dedutiva sem nenhuma relação com nada, não teria a importância social que tem. Eu acho que número real pode ser olhado deste modo e eu fico escandalizado quando eu vejo que a maioria dos professores com quem eu tenho trabalhado, professores do ensino básico, desconhecem a noção de grandezas comensuráveis e incomensuráveis, os leigos, em geral, usam a palavra incomensurável com o significado completamente errado, incomensurável como sendo uma coisa muito grande e quando a partícula “co” aí já impõe uma comparação entre duas coisas. Então, é essa a minha visão.

E. E essa experiência, o Sr. poderia falar um pouco mais sobre esta experiência que o Sr. está tendo com professores dos ensinos fundamental e médio ? É um ciclo de palestras, é isso?

L. Não, esta experiência teve origem em 1991 com um projeto que eu apresentei à Vitae que é uma sociedade sem fins lucrativos que visa o desenvolvimento da educação, da arte no desenvolvimento social e a Vitae patrocinou um projeto que eu apresentei para eles, que era um projeto de treinamento e aperfeiçoamento de professores do ensino médio nas áreas de matemática, física e língua portuguesa. Nós desenvolvemos este projeto em vários estados brasileiros durante 4 anos, após os quais a Vitae se retirou, porque a Vitae não tem que ficar subsidiando projetos a vida toda, isso não é missão dela. Mas aí, deu a saída. Mas aí, o Prof. Abílio Baeta Neves, que hoje em dia é o Secretário do Ensino Superior e Presidente da CAPES, teve conhecimento do nosso projeto e teve uma idéia de apresentar esse projeto ao Banco Mundial para dar continuidade ao mesmo. Mas nesse meio tempo, eu nem sei se o Banco Mundial aprovou ou não aprovou, ele foi nomeado para a CAPES então, ele resolveu levar este projeto para a CAPES, tirou a língua portuguesa, mas em compensação colocou química e biologia e criou o projeto Pró-Ciências. E este projeto Pró-Ciências a gente tem em todos os estados do Brasil, é mantido pela CAPES e nós temos trabalhado nele. Todo ano a gente participa deste projeto, que como eu disse tem em vários estados do Brasil. Este projeto consiste em pegar professores de 2º grau... eles têm diferentes variações de como fazer. Mas aqui, nós fazemos assim: nós damos 2 semanas por ano, uma em janeiro e outra em julho, de curso intensivo, 8 horas por dia durante 5 dias. E depois, uma vez por mês, um domingo a gente se reúne o dia todo aqui no IMPA e fazemos problemas, trabalho e tal, tem aula teórica, tem grupos de trabalho, fazemos uma série de atividades relativas ao ensino médio. E, como sempre, eu faço desde o primeiro dia de nosso programa na Vitae, nós escrevemos textos.

Esse programa da Vitae deu origem a 11 livros, que eram livros temáticos. Tinha um sobre logaritmos, um sobre trigonometria e números complexos, um sobre áreas e volumes, outros sobre construções geométricas, etc e depois que nós começamos o Pró-Ciências, que é este projeto da CAPES, a gente mudou o estilo: ao invés de fazer por temas, a gente faz por série. Então escrevemos uma coleção que se chama *A Matemática do Ensino Médio*, volumes 1, 2 e 3. E esses livros, eu acho que, inclusive, tem um papel muito mais importante do que as aulas. Porque as aulas a gente dá dentro de quatro paredes, o eco acaba e o som termina. Mas os livros se propagam. Esses livros tem sido utilizados aí em cursos semelhantes em todo o Brasil, tanto é que o volume 1 está na quarta edição. Isso significa 8.000 livros vendidos. Significa 8.000 professores, eu já vi gente com esses livros. E mesmo que eles não leiam todos, esses livros tem assim um aspecto doutrinário. Ele expõe a matemática, dá aplicações da matemática, e ao mesmo tempo faz recomendações aos professores: “Olha, não faça isso, não faça aquilo e tal”. Então, é por isso que não são livros para serem adotados no colégio. Eu não pretendo, como não pretendo escrever um livro de Cálculo, não pretendo escrever, pode ser que eu mude de idéia, mas no momento eu não tenho a mínima intenção de escrever livro para ensino básico. Não me sinto competente suficientemente para isso, porque me falta experiência da sala de aula, que eu já tive a muitos anos atrás, quando eu comecei minha carreira como professor do ensino médio e fundamental.

E. Interessante.

L. Mas é isso aí.

E. Tá jóia, Professor. O Sr. gostaria de complementar com mais alguma coisa?

L. Não, eu já disse... falei mais do que devia. Desculpe o tom pessoal das coisas.

E. Não, muito pelo contrário. Mas aí é que está o interessante...

L. Não, eu acho que o interessante não está aí. O interessante está na...

E. Naquilo que contribui...

P. É, nas contribuições.