UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

SOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS: DIFICULDADES E PERSPECTIVAS

NELSON ANTONIO PIROLA

ORIENTADORA: PROFª DRª MÁRCIA REGINA FERREIRA DE BRITO

COMISSÃO JULGADORA:

____

____

____

____

2000

Este exemplar corresponde à redação final da Tese de Doutorado defendida por **Nelson Antonio Pirola** e aprovada pela comissão julgadora.

Data: ____/____/____

Assinatura: ______________________

Orientadora

A Deus que me criou

Aos meus pais que me educaram

À professora Márcia pelo exemplo de pesquisadora comprometida com a educação

À professora Waldirlene que me despertou o interesse pela Matemática

AGRADECIMENTOS

Um agradecimento especial a todas as pessoas que contribuíram para a realização deste trabalho. De modo especial agradeço:

- À professora Dr.ª Márcia Regina ferreira de Brito pelas contribuições valiosas para o meu crescimento intelectual e profissional;
- Aos amigos do Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática pelas sugestões dadas ao trabalho;
- Às amigas Valéria Scomparim e Maria Helena Gonçalez pela amizade e incentivo;
- À Claudette Vendramini pelo auxílio dado à análise estatística dos dados da pesquisa;
- À professora Nilze Abdala e professora Iracema Torquato pela correção ortográfica do trabalho;
- À professora Dr.ª Maria Lúcia B. Queiroz e professora Dr.ª Evely Boruchovitch pelas sugestões dadas no exame de qualificação;
- Ao professor Valdecir de Andrade e à professora Rosemeire de Andrade pela amizade e contribuições dadas na digitação do trabalho;
- À secretária do Departamento de Educação - UNESP - Bauru, Elaine C. Cerigatto, pelas orientações dadas para a formatação e digitação do trabalho;
- À CAPES pelo financiamento parcial da pesquisa;
- Aos professores do Departamento de Educação - UNESP - Bauru, pelo incentivo à pesquisa;
- Ao professor Valdecir de Andrade e à professora Maria José Soqueti pela contribuição dada na correção dos problemas utilizados na pesquisa;
- Ao diretor da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de São José do Rio Pardo, prof. José Márcio e ao diretor da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de São João da Boa Vista, prof. Amilton pela autorização dada para a coleta de dados;
- Aos professores Alexandre, Jarbas e Silvana que contribuíram na aplicação dos problemas nas faculdades e no CEFAM;

À diretora Regional de Ensino de São João da Boa Vista, professora Célia, pela autorização dada para a realização da coleta de dados nas escolas estaduais;

- Aos coordenadores pedagógicos das escolas estaduais que auxiliaram na aplicação dos problemas de pesquisa;
- À diretora Regional de Ensino de Casa Branca, professora Jacy, e diretores das escolas estaduais pela autorização dada para a coleta de dados nas unidades escolares;
- Aos alunos do curso de magistério e de Licenciatura em Matemática que participaram da pesquisa;
- À prof.ª Drª Ana Maria Freire pelas sugestões dadas sobre formação de professores e Educação Continuada;
- Às amigas Eloisa e Lucélia pela amizade, paciência e confiança no desenvolvimento do trabalho;
- Às profesores Miriam Utsumi pela disponibilidade em analisar alguns capítulos da tese e pelo empréstimo de alguns textos relacionados às habilidades;
- À professora Iara, Assistente Pedagógica da Diretoria de Ensino de São João da boa Vista, pelo dinamismo em aceitar o projeto Pró-Matemática, desenvolvido com alunos do Magistério a partir dos dados desta pesquisa, enfatizando a solução de problemas em geometria;
- Aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UNESP - Bauru, que colaboram em responder algumas questões sobre o ensino e a aprendizagem de geometria;
- Ao diretor da Faculdade de Ciências das UNESP - Bauru, prof. Dr. José Misael Ferreira do Vale, pela permissão para utilização de material da faculdade;
- Às professoras Dr.ª Ana Caldeira, Dr.ª Ana Daibem e Dr.ª Maria da Glória, que sempre estiveram disponíveis para conversar e trocar idéias sobre a formação de professores e educação continuada;
- À professora Ms. Lair, companheira de viagem para a UNICAMP, pela troca de experiências sobre a formação e o papel do professor de matemática no ensino fundamental e médio.

RESUMO

A presente pesquisa teve como principal objetivo investigar a solução de problemas geométricos tendo como sujeitos 124 estudantes do curso de Habilitação Específica do Magistério (HEM) e de 90 alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma faculdade do interior de São Paulo. Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram: um questionário informativo, contendo questões a respeito da vida escolar dos alunos e uma prova contendo dez problemas elaborados a partir dos problemas utilizados por Krutetskii (1976), ambos envolvendo problemas com informações completas, incompletas e supérfluas. A análise dos dados mostrou que houve diferenças significativas entre os dois cursos quanto à utilização de conceitos e princípios. Os sujeitos provenientes do curso de Licenciatura utilizaram os conceitos e princípios mais corretamente que os alunos provenientes do curso de magistério. A análise dos dados também mostrou que houve diferenças significativas entre os dois cursos quanto ao desempenho global na solução de problemas, sendo que as médias dos cursos foram muito baixas, 2,0 para os alunos da Licenciatura e 0,68 para os alunos do Magistério, em uma escala de zero a dez. Os tipos de problemas em que os estudantes dos dois cursos tiveram maior dificuldade foram problemas com informações incompletas e problemas com informações supérfluas. O desempenho sofrível dos futuros professores mostra a necessidade de que programas de educação continuada sejam desenvolvidos contemplando tanto os aspectos metodológicos relacionados ao ensino e à aprendizagem de conceitos e princípios utilizados em solução de problemas geométricos , como os conteúdos matemáticos.

Palavras-chave: Solução de Problemas, Conceitos Geométricos, Educação Matemática, Psicologia Educacional, Formação de Professores.

ABSTRACT

The present research had as its main goal to investigate the solution of geometry problems. Its subjects were individuals belonging to two distinct samples: in the first one there were 124 future primary school teachers; and the other was composed by 90 undergraduate students, future Elementary and Secondary School Mathematics teachers. The tools used to collect data were: an informative questionnaire with questions related to the school life of students and a set of ten math questions elaborated according to Krutetskii (1976). In this set of questions there were problems categorized as complete and incomplete, and problems with superfluous information. We could detected meaningful differences – related to the utilization of concepts and principles – when comparing the solutions presented by students of these two different groups, since the future Elementary and Secondary School teachers' sample used concepts and principles more appropriately than those belonging to the Primary School teachers' sample. Data analyzed also showed meaningful differences, related to the global achievement in problem solving, between these two samples, although the samples' scores were both too low: 2,0 for the undergraduate students and 0,68 to those belonging to the elementary and Secondary Mathematics teachers, in a zero-to-ten scale. Incomplete problems and superfluous information ones were a common difficulty to students of both samples. The future teachers' poor achievement shows the necessity in implementing continuing education programs in which must be discussed not only math content properly, but also methodological aspects related to teaching and learning of concepts and principles used in geometrical problems.

Key-Words: Problem Solving, Geometrical Concepts, Mathematics Education, Educational Psychology, Teachers Formation

(.....) "O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes" (Pozo et al., 1998, p.9)

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

ANEXOS

PRÓLOGO

Os professores necessitam ser solucionadores de problemas pedagógicos bem como solucionadores de problemas matemáticos. (Cooney, 1994, p. 67)

O presente trabalho foi formulado a partir das várias experiências pelas quais passei, tanto em situações de ensino como de aprendizagem, no exercício de funções docentes, discentes e administrativas, no ensino público e no particular. Essas atividades, somadas à experiência obtida durante a realização da pesquisa, desenvolvida no Mestrado em Educação, relativa à formação de conceitos em geometria, deram-me subsídios para elaborar o presente estudo sobre a solução de problemas, envolvendo conceitos geométricos.

Durante trabalhos de orientação técnica a professores do ensino fundamental e médio da rede pública de ensino, foi observado que uma grande parte daqueles que estão atuando no ensino de matemática parecem apresentar dificuldades para trabalhar com a solução de problemas, particularmente em situações que envolvem conceitos geométricos. Esta dificuldade pode estar associada à formação que esses professores tiveram nos cursos de Magistério e de Licenciatura em Matemática, que muitas vezes, não priorizam a formação do professor em solução de problemas.

Para o professor trabalhar a solução de problemas em geometria, é fundamental que o mesmo tenha experiências com este tema, conhecendo estratégias de ensino e de aprendizagem. É importante também que o professor conheça, além dos conceitos aritméticos e algébricos, os principais conceitos de geometria, pois muitos problemas que são trabalhados, em sala de aula, envolvem conceitos geométricos. Segundo Krulik e Rudnik (1982):

> *Se o professor é para ser um guia efetivo para a aprendizagem de solução de problemas, então ele ou ela deve, primeiro, se tornar um solucionador de problemas*
> *(*Krulik e Rudnik, 1982, *p. 42)*

Esses autores consideraram que o professor precisa, primeiramente, estar familiarizado com as situações que envolvem problemas, pois só assim podem ensinar, efetivamente, seus alunos a serem bons solucionadores de problemas matemáticos.

Considerando esses aspectos, o presente estudo analisou o desempenho apresentado por alunos do curso de Magistério e do curso de Licenciatura em Matemática, na solução de problemas com informações completas, incompletas e supérfluas, envolvendo os conceitos de área, de perímetro e de volume. Foram analisadas também as principais dificuldades encontradas pelos sujeitos durante a solução dos problemas. É importante ressaltar que, no processo de ensino e aprendizagem, o professor precisa apresentar problemas desafiadores para seus alunos, despertando a curiosidade e o desejo de buscar soluções adequadas. Tal situação está diretamente relacionada aos cursos de formação de professores e à maneira como estes são ensinados a trabalhar com problemas.

INTRODUÇÃO

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN, (SEF/MEC,1998)[1], os conceitos geométricos devem ser articulados com os conceitos de números e medidas. O ensino e a aprendizagem dos conceitos geométricos se constituem em um campo importante dentro do currículo de matemática, pois através deles os alunos têm a oportunidade de desenvolver um tipo de pensamento que favorece a compreensão, descrição, representação e organização do mundo em que vive tendo em vista que *"o estudo da geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente"(SEF/MEC, 1998, p. 51).*

Pavanello (1993) observou que a ênfase do ensino de matemática, principalmente nos dias atuais, tem se concentrado na valorização da álgebra e no conseqüente abandono do ensino da geometria. Esse fato pode prejudicar a formação dos alunos, pois a estes não é ensinada a geometria, que é um conteúdo necessário para a solução de problemas geométricos.

Os conceitos matemáticos, notadamente os geométricos, não devem ser trabalhados desvinculados das situações-problema. Atuando no ensino fundamental e médio, era freqüente ouvir por parte dos alunos a seguinte expressão: *"eu não gosto de problemas"*. Esta afirmação pode significar que os alunos já adquiriram um sentimento aversivo à situação de solução de problemas. Este fato parece ser agravado quando os problemas envolvem conceitos geométricos.

Trabalhando com solução de problemas com alunos do ensino fundamental e médio, minha percepção era que, muitas vezes, sem ler o problema, a grande maioria dos

---

[1] Os Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática têm como finalidade fornecer subsídios para um debate nacional sobre o ensino dessa área de conhecimento, bem como promover uma socialização de informações e resultados de pesquisas, divulgando-os aos professores brasileiros. Visam também à construção de um referencial que possibilite a inserção de crianças e jovens brasileiros no mundo do trabalho e nas relações sociais e culturais presentes no mundo que nos cerca.

estudantes desistia de sua solução. Esta situação não era diferente, quando lecionava para alunos do curso de Habilitação Especifica de segundo grau para o Magistério (HEM)[2]. Tais alunos preferiam resolver exercícios padronizados, os chamados problemas-tipo (aplicação direta de modelos de problemas).

Em 1994, lecionei para uma turma de quarto magistério de uma escola de Campinas e, de acordo com o programa, um dos conteúdos trabalhados era Análise Combinatória. Minha percepção era que havia muita resistência por parte dos alunos com relação a este conteúdo, pois envolvia solução de problemas. Foi percebido, também, que os problemas que envolviam conceitos aritméticos eram melhor compreendidos que aqueles que envolviam conceitos geométricos.

O problema a seguir ilustra o fato descrito anteriormente.

> *Dado um polígono regular de n lados, quantas diagonais podem ser traçadas?*

Quando esse problema era apresentado aos alunos, podia-se perceber que muitos estudantes tinham conhecimento de que deveriam utilizar uma fórmula de combinação, mas o problema começava com os conceitos a serem utilizados: polígono, polígono regular e diagonais. Parecia que, desde que os conceitos geométricos tinham sido aprendidos de maneira inadequada, isto impossibilitava muitos alunos de solucionar este problema.

Atuando em um curso de Licenciatura em Matemática, a situação não era diferente daquela detectada no ensino fundamental e médio. A geometria estava colocada na grade curricular do último ano e o conteúdo tratado era a geometria de posição e a

---

[2] Em virtude da implantação da LDB 9394/96, o curso de Habilitação Específica de segundo grau para o Magistério (HEM) passa a ter a denominação de curso normal. Esse curso forma docentes para a educação infantil e para as primeiras séries do ensino fundamental. O artigo 62 dessa lei diz: " a formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, em Universidades e Institutos Superiores de Educação, admitida como formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil e nas quatro primeiras séries do ensino fundamental, a oferecida em nível médio, na modalidade normal". Embora a nomenclatura tenha se modificado, no presente trabalho utilizaremos a nomenclatura antiga, HEM, usada no período em que foi realizada a pesquisa.

geometria métrica. Através de avaliações e comentários de alunos, durante a solução de problemas em sala de aula, foi percebido que uma grande parte deles desconhecia os principais conceitos da geometria, como área e volume.

Vale destacar também que muitos problemas, envolvendo conceitos geométricos, não eram solucionados pelos alunos.

Em síntese, trabalhando com professores e alunos, uma questão ficou evidente: os problemas, principalmente aqueles que envolviam os conceitos geométricos, pareciam não ser bem entendidos nem pelos professores e nem pelos alunos.

Em termos conceituais, uma grande parcela dos professores alegava que não podia ensinar os conceitos geométricos, porque não os havia aprendido no curso de magistério e/ou licenciatura. Assim, a ênfase do ensino de matemática era mais concentrada na aritmética e na álgebra. Através de orientações técnicas a professores de matemática PEB II[3], parecia que muitos docentes, tentando ensinar geometria, baseavam-se em um ensino que priorizava as definições, os conceitos como entidades públicas, não se detendo nos conceitos como constructos mentais[4].

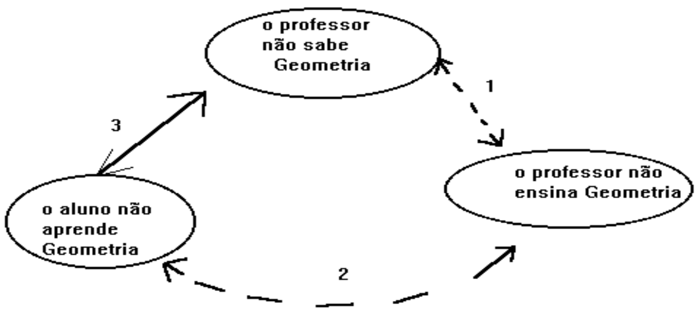


Figura 1: Possível situação do ensino de geometria nos cursos de Habilitação Específica do Magistério

---

[3] PEB II - Professor de Educação básica II - professor habilitado a lecionar da 5ª série do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio.

[4]Klausmeier e Goodwin (1977) consideraram importante a diferenciação dos conceitos em duas categorias: Os **conceitos como entidades públicas** que são aqueles baseados em definições e que aparecem nos livros, dicionários, enciclopédias etc., e os **conceitos como constructo mental** que são os conceitos idiossincráticos, próprios de cada indivíduo e formado a partir das experiências do sujeito com o conceito.

A figura 1 tenta mostrar uma situação em que um estudante faz um curso de Habilitação Específica do Magistério (HEM). Parte-se do pressuposto de que o professor que está atuando na HEM não possui os conhecimentos necessários de geometria para ensiná-los aos seus alunos.

É importante salientar o sentido duplo das setas **1** e **2,** indicando que o professor que não sabe geometria, provavelmente não a ensinará. Por outro lado, o fato de o professor não ensinar geometria pode ser decorrente do fato de ele não ter aprendido este conteúdo durante a sua formação. O pontilhado é utilizado para ilustrar que não se trata de uma afirmação do tipo *se* $\Rightarrow$ *então*. O professor pode não ensinar geometria por outros motivos, por exemplo, por não gostar dela. O mesmo fato pode ser estendido para a seta **2**. O aluno pode não aprender geometria por outros motivos, por exemplo, por não gostar, ou até mesmo por problemas de ordem cognitiva. A seta **3** indica que o aluno que não aprendeu geometria será um professor que não possuirá os conhecimentos necessários desta matéria para ensiná-la a seus alunos.

Olhando a figura 1, pode-se cometer o erro de afirmar que se trata de uma situação estática, irremediável. Isto não é verdade. Hoje, pelo menos no Estado de São Paulo, muitos cursos de especialização estão sendo ministrados para os professores que estão atuando no magistério público e/ou particular. Os programas de Educação Continuada também vêm contribuindo para uma melhor capacitação dos professores da rede pública de ensino. Esses cursos têm como principal objetivo tratar de temas relativos à Matemática e à Educação Matemática, com o intuito de melhorar o ensino e a aprendizagem dessa disciplina.

A minha experiência como aluno e, posteriormente, como professor mostrou-me que muitos professores, que lecionam geometria nesses cursos, tomam como pressuposto básico que os alunos já conhecem os conceitos elementares da geometria do ensino fundamental e médio. Isto nem sempre ocorre. Este fato pode gerar uma situação na qual o estudante poderá estar em contato com uma geometria superior, como é o caso das geometrias não-euclidianas, geometria diferencial etc., sem conhecer os conceitos básicos que irão ensinar nas escolas.

Por outro lado, as chamadas disciplinas pedagógicas parecem não conseguir articular os conceitos específicos com os procedimentos metodológicos ao ensino. Não é excessivo afirmar a importância da aprendizagem dos conteúdos e das maneiras como o conhecimento é adquirido pelos alunos. No ensino, é sempre importante valorizar a formação conceitual e os processos de solução de problemas.

Na escola, parece que um conceito mal formado dificulta e, em determinados casos, até impede a solução de determinados problemas. Se os conceitos são aprendidos de forma errônea, eles podem ser ensinados de forma equivocada.

Um exemplo para ilustrar esta afirmação é o ensino do conceito de área. Para muitos professores e alunos, calcular a área de determinada figura significa calcular a área de figuras já conhecidas (figuras tidas como padrão), como o triângulo, o retângulo, o quadrado etc., cujas fórmulas são memorizadas e aplicadas posteriormente sem muita relação com o significado.

Figuras não-convencionais[5] são, muitas vezes, percebidas como figuras cujas áreas não podem ser calculadas. Isto não é verdade, pois trabalhando com o papel quadriculado, é possível ensinar aos alunos do ensino fundamental e médio um método para o cálculo aproximado da área de figuras não convencionais.

Alguns autores de livros didáticos (Jakubo e Lellis, 1994)[6]. dentre outros, já inseriram, em suas obras, atividades com o conceito de área, valorizando o cálculo de áreas de figuras não-convencionais e propondo problemas desafiadores para os alunos.

O presente trabalho foi elaborado a partir dessas constatações, feitas por meio de várias experiências com o ensino de geometria, e tem, como principal objetivo, estudar a solução de problemas envolvendo conceitos geométricos. Os sujeitos foram futuros professores de Matemática, mais especificamente, alunos provenientes do curso de Magistério e do curso de Licenciatura em Matemática.

O presente estudo investigou o seguinte problema de pesquisa:

---

[5] Chamaremos de figuras não-convencionais àquelas que não possuem fórmulas prontas para o seu cálculo e que necessitam ser decompostas em outras figuras ou até mesmo ser quadriculada para a obtenção de sua área aproximada.

[6] Autores do livro "Matemática na medida certa". Essa coleção de livros para o ensino fundamental (5ª à 8ª séries) trata os temas números, medidas e geometria de forma integrada em todos os capítulos.

Existem diferenças significativas entre o desempenho de alunos da Licenciatura em Matemática e alunos do curso de Habilitação Específica do Magistério na utilização de conceitos e princípios de área, perímetro e volume contidos em problemas com informações completas, incompletas e supérfluas?

Além de tentar responder à questão de pesquisa, o presente estudo também descreve alguns aspectos dos cursos de Magistério das escolas que compõem a Diretoria de Ensino de São João da Boa Vista e a da Licenciatura em Matemática de uma faculdade do interior de São Paulo. Foram analisados os planejamentos de ensino de Matemática e da disciplina chamada Conteúdos Metodológicos de Matemática, bem como os conteúdos de geometria ensinados nestes dois cursos.

Em relação à formação do professor, foram feitas considerações sobre o domínio de conceitos e as habilidades para solucionar problemas de geometria necessários para um bom desempenho profissional. Nesse estudo, foram analisados os conceitos de perímetro, área e volume, escolhidos porque, na prática pedagógica dos professores das séries iniciais e dos professores do ensino fundamental e médio, são absolutamente necessários.

O presente trabalho foi estruturado da seguinte maneira:

O capítulo I, intitulado *Psicologia da Educação Matemática, Solução de Problemas e o ensino da Geometria,* trata dos objetivos e campos de atuação da Psicologia da Educação Matemática, destacando um dos campos de pesquisa que está tendo grande avanço, o da solução de problemas.

O capítulo II apresenta a fundamentação teórica do trabalho, sendo composto de duas partes. A primeira delas, apresenta as idéias de alguns autores sobre a solução de problemas matemáticos. A segunda parte, apresenta aspectos da teoria de Krutetskii sobre as habilidades matemáticas.

O capítulo III mostra a revisão da literatura pertinente e tem como objetivo relatar algumas pesquisas que foram realizadas sobre a solução de problemas. Algumas pesquisas tratam de situações de solução de problemas com alunos do ensino fundamental e médio, tendo sido consideradas importantes pela metodologia empregada e pelos conceitos tratados. Essas pesquisas também se relacionam ao presente trabalho porque envolvem sujeitos do ensino médio.

O capítulo IV procura relatar a situação do ensino de geometria nos cursos de Magistério e de Licenciatura em Matemática, procurando relacionar esse ensino à formação de conceitos e à solução de problemas.

O capítulo V apresenta os sujeitos, procedimentos, materiais e o método utilizados no desenvolvimento da pesquisa.

O capítulo VI mostra a análise dos dados e os resultados . As conclusões e implicações do estudo estão apresentadas no capítulo VII.

CAPÍTULO I

PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, SOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O ENSINO DA GEOMETRIA

"Resolver problemas torna a espécie humana capaz de se adaptar ao ambiente físico e de modificá-lo. Isto é possível na medida em que cada geração aprende a resolver problemas"
(Klausmeier e Goodwin, 1977, p.347)

Psicologia da Educação Matemática

É consenso, atualmente, a importância que deve ser dada à formação dos futuros professores que atuarão no ensino fundamental e médio, buscando tornar a Matemática mais próxima do cotidiano dos alunos, isto é, o ensino de Matemática também deve priorizar, além da abstração, os aspectos práticos. (Boettger, 1996).

É importante esclarecer que a Matemática não deve ser ensinada em nossas escolas, somente pelos aspectos práticos, mesmo porque é uma área que envolve uma grande quantidade de abstrações, há uma evolução histórica e métodos elaborados ao longo do tempo.

Atualmente, existe uma tendência de se priorizar tanto os aspectos práticos da Matemática, como as questões relativas à sua aprendizagem, sendo a Psicologia uma disciplina fundamental para a compreensão dos fenômenos que envolvem o pensamento humano complexo (formação conceitual e solução de problemas). Segundo Resnick e Ford (1981):

> *Para uma verdadeira Psicologia da Matemática, precisamos tanto da Psicologia como do conteúdo matemático. Os matemáticos estabelecem o conteúdo mas o psicólogo traz à tona o conhecimento sobre como o indivíduo pensa e, mais importante, como estudar o como as pessoas pensam. É esse duplo conhecimento - conhecimento da estrutura Matemática e conhecimento sobre como as pessoas pensam, raciocinam e usam suas capacidades intelectuais - que fornece os ingredientes para a Psicologia da Matemática (Resnick e Ford, 1981, p. 4)*

Por estas colocações fica evidenciado que a Psicologia e a Matemática se constituem em duas áreas indissociáveis, pois de uma lado estão os conteúdos que são desenvolvidos pelos matemáticos e, do outro, os estudos da Psicologia sobre como as pessoas processam e adquirem conceitos, retêm estes conceitos na estrutura cognitiva e conseguem transferi-los para outras situações.

A palavra Matemática, que vem do grego - MATHEMA - significa aprendizagem (São Paulo, 1991, p. 10). A Psicologia, com suas pesquisas, pode contribuir para que os conceitos matemáticos possam ser aprendidos e ensinados de forma significativa. Psicologia aqui refere-se, de forma especial, à Psicologia Educacional que se constitui, segundo Ausubel (1968), em um ramo especial da Psicologia, preocupado com a natureza, as condições, os resultados, a avaliação e retenção da aprendizagem escolar.

As diversas teorias da Psicologia Educacional são utilizadas para compreender elementos como: aprendizagem, habilidades, atitudes, motivação etc., que estão presentes no ensino da Matemática.

Ausubel (1968) mostrou que os trabalhos sobre questões psicoeducacionais são importantes, pois procuram analisar o aproveitamento da aprendizagem e a capacidade de solucionar problemas. A formação dos futuros professores de Matemática é enriquecida com a disciplina Psicologia Educacional, obrigatória em todos os cursos de licenciatura, pois fornece subsídios para que os professores conheçam o desenvolvimento cognitivo dos alunos, as maneiras de aprender e os mecanismos de memória.

Os trabalhos de Thorndike (1911) com aprendizagem, especialmente sua obra *Animal Intelligence*, publicada em 1898, além de suas idéias sobre a aprendizagem escolar, e os trabalhos de Hull com crianças e adolescentes, levaram Crombach (1951) a atribuir, em seu livro *Educational Psychology,* a origem desse ramo da Psicologia a esses dois pesquisadores.

Atualmente, nas pesquisas sobre aprendizagem matemática, são utilizados muitos dos elementos desenvolvidos anteriormente por Thorndike e Hull. Em termos de exemplificação, Brito (1993) salientou que, apesar das críticas feitas à teoria de Thorndike, muitos educadores utilizam esta teoria no ensino de Matemática, muitas vezes, acreditando tratar-se de uma "nova metodologia de ensino" ou " uma metodologia atual"

> *Apesar das críticas aos trabalhos de Thorndike, muitos educadores usam os mesmos princípios e regras propostos por ele, e, alguns, com novas roupagens, são os que mais atraem os educadores nos dias de hoje. Para exemplificar estes aspectos basta abrirmos a proposta curricular para o Ensino de Matemática de 1º grau do Estado de São Paulo (p.102), onde encontramos uma sugestão para o ensino da área do paralelogramo. A mesma sugestão, usando a noção de transposição, encontra-se no capítulo XII do livro Uma Nova Metodologia da Aritmética (Thorndike,1922), que foi usado pelas normalistas do Estado de São Paulo na década de 40. (Brito, 1993, p. 38)*

Em linhas gerais, pode ser verificado que, apesar das pesquisas em aprendizagem terem avançado nos últimos anos, falar em aprendizagem matemática é falar também das contribuições que a Psicologia Educacional proporciona para se compreender melhor os fenômenos educacionais.

A formação dos conceitos matemáticos e dos princípios e o estudo dos processos de solução de problemas em Matemática, que constituem o pensamento humano complexo, são de interesse não apenas dos psicólogos, mas também de matemáticos e dos professores de Matemática que procuram encontrar meios para que o ensino e a aprendizagem de Matemática sejam eficazes e significativos aos estudantes.

As pesquisas que estão sendo desenvolvidas, nesse campo, ultrapassam as questões relativas somente à aprendizagem de conceitos; elas abordam também os aspectos referentes ao pensamento matemático avançado, aos fatores afetivos, ao pensamento algébrico, à avaliação, às crenças, à tecnologia no ensino de Matemática, aos fatores culturais, ao pensamento geométrico espacial, à formação de professores e à solução de problemas, entre muitos outros.

Os Congressos de Educação Matemática e as pesquisas em solução de problemas

A análise dos livros de resumo do ICME-8 (1996) (8^{th} International Congress on Mathematical Education) e PME-21 (1997) (21^{st} Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education) mostrou que está havendo uma grande preocupação com o ensino e a aprendizagem de Matemática em todo o mundo, principalmente, no que diz respeito à formação conceitual e à habilidade em solução de problemas matemáticos. No PME-21, foram apresentados quatorze trabalhos sobre o pensamento geométrico espacial, sendo que algumas dessas pesquisas mostravam que o ensino de geometria deveria contribuir para o progresso do aluno em termos do pensamento geométrico espacial.

É válido salientar que a maioria das pesquisas relatadas sobre o ensino de geometria enfatizava a importância de seu ensino através de computadores, inclusive com a utilização de softwares como o LOGO e o CABRI-GÉOMÈTRE. Foram poucas as pesquisas sobre solução de problemas que tinham como sujeitos alunos universitários, pois a maioria trabalhou com alunos do ensino fundamental (1^a à 4^a série).

A análise do livro de resumos dos trabalhos em Psicologia da Educação Matemática, apresentados em 1997, permitiu verificar que:

1- A maior parte das pesquisas prioriza a solução de conceitos algébricos e aritméticos, pois, aproximadamente 12,4% dos relatos apresentados no PME-21 tratavam especificamente do pensamento algébrico e aritméticos enquanto 7,9% tratavam do pensamento geométrico;
2- Apenas 3,3% tratavam de solução de problemas, sendo que a maioria explorava temas relativos às séries iniciais e não contemplava aspectos geométricos (a maioria contemplava estudos relacionados às quatro operações);
3- A respeito da geometria ensinada no nível médio e superior, o tema freqüentemente tratado foi a demonstração formal, não tendo sido encontrado nenhum estudo sobre a solução de problemas com alunos universitários.

Já no PME-22 (1998) realizado em Stellenbosch, África do Sul, 7,3% dos trabalhos apresentados eram sobre o pensamento geométrico, imagem e visualização. Aproximadamente 6,7% dos trabalhos se relacionavam à solução de problemas e 12,7% eram trabalhos que versavam sobre formação de professor.

O terceiro Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, CIBEM, realizado em Caracas, Venezuela, evidenciou uma preocupação com a formação de professores e a solução de problemas. No total, foram apresentadas 185 comunicações científicas das quais 7,5% eram trabalhos sobre a solução de problemas e 19,3% eram sobre a formação de professores. Uma análise desses trabalhos mostrou que, na área de solução de problemas, a ênfase das pesquisas ainda recai sobre o ensino fundamental.

Não constam trabalhos relacionando à formação de professores de Matemática e a formação concomitante em solução de problemas e formação de conceitos. Aproximadamente 3,7% dos trabalhos apresentados no III CIBEM (1998) se referiam ao ensino de geometria, mas apenas um trabalho tratava das noções elementares de geometria presentes em alunos e professores.

Apesar dos congressos internacionais mostrarem uma preocupação com a formação inicial e continuada do professor de matemática, a grande maioria das pesquisas se concentra em aspectos que enfatizam a solução de problemas com alunos do ensino fundamental. Não foram encontrados muitos trabalhos sobre a formação do professor e seu treinamento para trabalhar com solução de problemas geométricos.

Essa situação deveria ser mudada, pois é de fundamental importância que o professor tenha uma formação integral nas três áreas: aritmética, álgebra e geometria. A formação deficitária do professor poderá levá-lo a somente ensinar aquilo que ele gosta, ou sabe bem.

O Ensino de Geometria

Aparentemente, existe um abandono da geometria em algumas escolas e autores como Perez (1995), Fainguelernt (1995), Biembengut e Silva (1995), Pirola (1995), têm chamado a atenção sobre essa negligência, propondo formas de otimizar esse ensino.

Porém, isso não ocorre somente no Brasil. Mesquita (1999) também mostrou que, na França, os programas escolares dão um lugar reduzido à geometria. Isnardi (1998) apontou que na Argentina são encontrados poucos estudos de geometria nos diferentes níveis de ensino, sendo notado que falta uma preparação dos professores para trabalhar com atividades que conduzam às construções geométricas.

Bulut, Ekici, Iseri, Kilpatrick e Yenal (1996) também mostraram, através de entrevistas com professores de Matemática de algumas escolas de Ankara, Turquia, que alguns professores não tinham conhecimento necessário de geometria e nem experiências com o ensino desse tópico. Segundo esses autores, os estudantes memorizam as regras e fórmulas, muitas vezes, sem compreensão. Os mesmos salientaram que o estudo da geometria é importante e ela não é ensinada efetivamente na Turquia.

Nasser (1992) observou que muitos professores, atuantes nas séries iniciais, não possuem conhecimentos de conteúdos de geometria suficientes para ensinar a seus alunos. Segundo essa autora:

> *Como professores primários não têm um treinamento especial em matemática, eles, em geral, não gostam e não sabem geometria suficiente para ensina-la, evitando este tema* (Nasser, 1992, p. 100)

A geometria não está sendo ensinada, na maior parte de nossas escolas, por vários fatores, dentre eles a falta de preparação dos professores, que muitas vezes não conseguem solucionar problemas simples de geometria.

Lorenzato (1995) realizou um estudo com 255 professores de primeira à quarta série do ensino fundamental que tinham cerca de dez anos de magistério. Os sujeitos foram submetidos a uma prova contendo oito questões, envolvendo conceitos da geometria plana, como perímetro, área e volume. Neste estudo foram obtidas 2040 respostas erradas, sendo que 8% dos professores afirmaram que tentavam ensinar geometria a seus alunos.

A geometria constitui-se em um tema presente nos currículos escolares, desde as primeiras séries e seu ensino, de acordo com a Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo, PCM[7] deve estar integrado com NÚMEROS e MEDIDAS.

A geometria não é apenas um capítulo do livro didático que se esgota em si mesmo ou que se apresenta como um tema facultativo, mas deve ser considerada como um elemento fundamental ao desenvolvimento do raciocínio, da criatividade, da abstração, bem como da aprendizagem da lógica e da organização do conhecimento.

Lorenzato (1995) afirmou que é importante a presença da geometria em nossas escolas, pois esta parte da Matemática auxilia as pessoas a solucionarem problemas do cotidiano que, muitas vezes, são geometrizadas. Esse mesmo autor considerou importante a geometria na escola, pois ela auxilia as pessoas na compreensão e solução de questões de outras áreas do conhecimento. Outros autores, como Saraiva (1992), também concordaram sobre a importância de se ensinar geometria, argumentando que esta disciplina propicia a descoberta e a aprendizagem da realidade.

---

[7] A Proposta Curricular para a Rede Estadual começou a ser preparada em 1985, mas não há levantamento que indique quantas das seis mil escolas da rede adotaram a nova pedagogia. A Proposta Curricular para o Ensino de Matemática sugere, como metodologia de ensino, a solução de problemas

Sherard III (1981) salientou que a geometria é importante, pois tem aplicações em problemas da vida real e em problemas envolvendo outros tópicos da Matemática, como álgebra, aritmética e estatística. Além disso, a geometria contribui com uma valiosa preparação dos indivíduos para os cursos superiores de matemática e às carreiras que requerem habilidade matemática. O autor, citado anteriormente, salientou que a aprendizagem da geometria fornece oportunidade de desenvolver a percepção espacial.

> *A geometria pode servir de veículo para estimular e exercitar habilidades de pensamento e de solução de problemas, fornecendo aos estudantes oportunidades de olhar, medir, estimar, generalizar e abstrair (Sherard III, 1981, p. 21)*

Fainguelernt (1995) argumentou que o ensino de geometria pode propiciar a passagem do estágio de operações concretas para o das operações abstratas. Segundo essa autora, a geometria desempenha "um *papel primordial no ensino, porque a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituem a sua essência" (p. 46).*

Para Cornieles e Haffar (1998), a geometria sempre foi um obstáculo ao professor e ao aluno para aprendê-la. Parece haver concordância, por parte dos autores, que a presença da geometria nos currículos escolares, é de fundamental importância.

Entretanto, apesar dos esforços, pode ser percebido que alguns alunos saem das escolas sem terem aprendido os conceitos básicos da geometria.

Shriki e Bar-On (1997) afirmaram que muitos pesquisadores tentaram encontrar razões para o fracasso dos estudantes em geometria. Segundo esses autores, a literatura apontou dois grande motivos para que isso ocorresse: o primeiro trata das dificuldades cognitivas dos alunos para organizar o pensamento e construir argumentos lógicos; lidar com deduções e aspectos relativos às provas formais e à necessidade de escrever a prova formal. O segundo motivo, pelo qual os alunos apresentaram dificuldades na aprendizagem de geometria, estaria relacionado aos métodos de ensino adotados, pois estes são, em grande parte, não adequados.

Shriki e Bar-On (1997) analisaram as principais dificuldades escolares e verificaram que os estudantes apresentavam: a) dificuldade na organização do conhecimento e construção de argumentos lógicos – o estudante tem dificuldade de organizar o conteúdo aprendido, pois este é ensinado através de fórmulas já prontas, bastando escrever a expressão e calcular o valor da incógnita, sendo que estas fórmulas e expressões, muitas vezes, estão desvinculadas do conhecimento dos alunos; b) dificuldade de elaborar deduções a respeito de provas formais. Muitos trabalhos têm tratado das provas matemáticas no ensino (Zack, 1997; Cronjé, 1997; Mariotti et al., 1997) havendo uma coincidência entre eles sobre o fato de a maioria das escolas não estar trabalhando com esse tipo de questão. Além disso, os trabalhos sobre provas matemáticas discutem a importância dessas dentro da escola, pois elas auxiliam não apenas na compreensão dos conceitos matemáticos, mas também no desenvolvimento das argumentações lógicas; c) dificuldade em escrever as provas formais. É importante que os alunos do ensino fundamental e médio, os alunos do curso de Magistério e, sobretudo, os estudantes de Licenciatura em Matemática, saibam trabalhar com hipóteses e teses, pois isto pode colaborar para uma maior clareza sobre as argumentações lógicas que são usadas em geometria.

Saraiva (1992), em um trabalho realizado em Portugal, afirmou que as demonstrações são realizadas por meio de imitações, ou seja, o aluno copia a demonstração de um determinado teorema, exposto na lousa, memoriza-o e, posteriormente, reescreve-o quando é solicitado em uma situação de avaliação.

Um outro aspecto, que pode estar contribuindo para essas dificuldades, refere-se à ausência de um trabalho com desenho geométrico na maioria das escolas. As construções geométricas, com auxílio de régua e de compasso, são de fundamental importância à compreensão dos conceitos geométricos, bem como à organização dos conhecimentos relevantes às demonstrações geométricas. Em um trabalho anterior (Pirola, 1995) foi exposto que, na grade curricular das escolas da rede pública do estado de São Paulo, a disciplina Desenho Geométrico havia sido abolida, embora fosse nessa disciplina que os alunos tinham oportunidade de realizar construções geométricas.

Anteriormente, Nasser (1992) já havia observado que uma grande parte dos livros didáticos, utilizados no ensino fundamental, não enfatizava as construções geométricas.

Com a incorporação do desenho geométrico às aulas de matemática, o professor, muitas vezes, não preparado, ensina geometria dando ênfase maior aos cálculos, abdicando do uso da régua e do compasso. O desenho geométrico poderia evitar muitas dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem de geometria, pois o uso de régua e de compasso poderia ajudar no desenvolvimento das habilidades espaciais.

A ênfase do ensino de geometria está concentrada mais nos aspectos algébricos e aritméticos sendo que os conceitos geométricos ficam à mercê de sobra de tempo, pois a geometria só é ensinada se houver tempo no final do ano, caso contrário, a responsabilidade de ensiná-la ficará para o professor da série seguinte.

A geometria não tem sido valorizada em grande parte de nossas escolas e os alunos não apresentam um desempenho adequado. Pirola, (1995), em um estudo realizado com 30 alunos distribuídos entre o primeiro colegial, a sétima série e o terceiro colegial utilizou uma prova sobre paralelogramo. Os sujeitos responderam a um instrumento que continha questões a respeito desse conceito. A análise dos protocolos mostrou que 56% dos alunos de primeiro colegial, 46% dos alunos de terceiro colegial e 70% dos alunos de sétima série não souberam responder à pergunta, revelando o desconhecimento de uma figura geométrica cujo conceito é, ou pelo menos deveria ser, ensinado desde as séries iniciais.

Neste estudo foi mostrado que os conceitos de geometria não são processados de forma a valorizar aspectos relevantes da formação dos conceitos como o uso de atributos definidores, exemplos e não-exemplos. Também foi verificado que a série na qual o estudante se encontrava não era um indicativo para afirmar que estudantes de séries mais adiantadas possuíam os conceitos de triângulo e paralelogramo de forma mais completa (com relação a seus atributos definidores, exemplos e não-exemplos) que estudantes de séries menos adiantadas.

Se a formação dos conceitos de figuras é deficitária (triângulos e paralelogramos), como os alunos poderão solucionar problemas envolvendo tais conceitos?

Solução de Problemas Geométricos

Quando um aluno apresenta dificuldade em determinado conceito, provavelmente terá dificuldades em solucionar problemas envolvendo os mesmos, tendo em vista que um conceito mal elaborado dificulta a solução de problemas. Este fato é evidenciado por Klausmeier e Goodwin (1977) que propõem o seguinte problema ilustrativo:

Dado que os lados a, b e c do triângulo abaixo são iguais em comprimento, quantos graus há no ângulo Â?

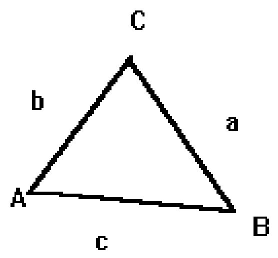


Figura 2: Tipo de triângulo usado nos experimentos de Klausmeier e Goodwin (extraído de Klausmeier e Goodwin, 1977, p. 348)

Para que um estudante solucione este problema, ele precisa conhecer que há 180º em um triângulo, ou seja, a soma dos seus ângulos internos é 180º (informação factual) e também que se os lados de um triângulo têm a mesma medida, então os seus ângulos são congruentes (princípio).

De acordo com a teoria do desenvolvimento conceitual, proposta por Klausmeier e Goodwin (1977), o desconhecimento dos princípios e informações factuais dificulta a solução de determinados problemas.

O contato com professores mostra que muitos deles acreditam que seus alunos não sabem solucionar problemas e que têm dificuldades em interpretar os enunciados dos mesmos, mas, aparentemente, os alunos não conseguem ordenar as informações e princípios para chegar à solução do problema. Em muitos casos, o aluno conhece o procedimento de solução, mas desconhece ou não consegue se lembrar das informações e dos conceitos que devem ser utilizados para se chegar à solução correta do problema.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), cuja meta é se constituir "*como elemento catalisador de ações na busca de uma melhoria da qualidade da educação brasileira" (SEF/MEC, 1998, p. 13),* não foram elaborados como o único elemento a resolver os problemas do ensino no Brasil, pois são muitas as variáveis a serem analisadas, dentre elas a formação inicial e continuada, a política de salários dos professores, o plano de carreira etc., *"mas esta qualificação almejada implica colocar também, no centro do debate, as atividades escolares de ensino e aprendizagem e a questão curricular como de inegável importância para a política educacional da nação brasileira" (SEF/MEC,1998, p.13)*

Em uma avaliação internacional de Matemática, que envolveu 20 países com crianças de 13 anos, o Brasil ficou classificado em penúltimo lugar, à frente apenas de Moçambique. As questões que apresentaram desempenhos mais baixos foram aquelas que exigiam a transferência de conceitos para situações-problema. As questões nas quais os estudantes brasileiros se saíram melhor foram aquelas que exigiam memorização.

É importante salientar que uma abordagem de ensino fundamentada na solução de problemas é importante pois:

> *A solução de problemas é uma habilidade cognitiva complexa que caracteriza uma das atividades humanas mais inteligentes. Da infância em diante, ativamente solucionamos problemas que o mundo nos apresenta. Adquirimos informações sobre o mundo e as organizamos em estruturas de conhecimento sobre objetos, eventos, pessoas e nós mesmos, que são armazenadas em nossas memórias (Chi, M. T. H. e Glaser, R., 1992, p. 250)*

De acordo com esses autores, os alunos não aprendem (ou não deveriam aprender) os conceitos matemáticos (frações, equações, sistemas de equações, produtos notáveis, etc) apenas para desenvolver o raciocínio lógico ou para mostrar o conhecimento frente a uma bateria de exercícios repetitivos, mas para solucionar problemas. Aliás, a maior parte dos conceitos matemáticos se desenvolveu a partir das necessidades do homem em solucionar problemas práticos de sua vida. Apesar de a proposta curricular de Matemática do estado de São Paulo enfatizar e valorizar a solução de problemas, pode ser constatado, em algumas escolas, um ensino em que a resposta final do problema é mais importante do que o processo e o raciocínio utilizados na busca de solução.

A Secretaria de Estado da Educação realizou, em 1996, uma avaliação de desempenho de alunos de sétima série com a finalidade de analisar a situação do ensino-aprendizagem das escolas estaduais. Na região de São João da Boa Vista, participaram da avaliação 2264 alunos da sétima série do curso diurno e 598 alunos da mesma série do curso noturno. A prova, elaborada pela própria Secretaria, constava apenas de problemas envolvendo os conceitos já estudados, como os conceitos algébricos, geométricos e aritméticos. A prova era do tipo múltipla escolha e a maior parte era composta por problemas que exigiam uma boa interpretação do enunciado e utilização dos conceitos supostamente já aprendidos por parte dos estudantes.

Os pontos ABCD e E dividem uma circunferência de centro O em cinco partes iguais, conforme mostra a figura abaixo: Quanto mede o ângulo x?

a) 140º b)144º c) 148º d) 150º

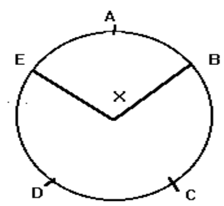


Figura 3: problema constante em uma das provas do SARESP (1996)[8]

[8] SARESP – Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.

Nessa avaliação, as questões mais difíceis de solução foram as que envolviam os conceitos geométricos. Um exemplo é o problemas mostrado na figura 3.

Na região de São João da Boa Vista, a média geral de acerto dessa questão foi de 13%, média essa muito baixa, principalmente por se tratar de um conceito elementar, envolvendo princípios básicos da geometria plana. Para solucionar este problema, o aluno deveria apenas saber que uma circunferência possui 360º e fazer uma divisão de 360º por 5, obtendo 72º. Assim, a medida do ângulo x será de 144º.

Possivelmente, o problema acima teria um melhor entendimento se os alunos tivessem passado por uma fase de construção geométrica com régua e compasso, o que, infelizmente, não acontece na maioria de nossas escolas. Isso acaba tendo impacto nas questões dos vestibulares, que envolvem conceitos de geometria, em que estas também têm tido pouco acerto. Um exemplo é a questão mostrada a seguir, solicitada na primeira fase do vestibular de 1993 da UNICAMP, na qual 15,5% dos candidatos tiraram nota zero, ou seja, sequer conseguiram iniciar um processo adequado de solução.

Os vértices de um losango são os pontos médios dos lados de um retângulo. Mostre que a área do retângulo é o dobro da área do losango.

Ávila (1993) observou que muitos candidatos tentaram solucionar este problema através da fórmula da área do losango, *Dd/2* e ressaltou que *“as fórmulas são elementos auxiliares na explicitação do raciocínio, muitas vezes até indispensáveis, mas quando não são necessárias, por que usá-las?”*

O problema em questão possui outras implicações. Muitos estudantes podem não tê-lo resolvido por não dispor, na estrutura cognitiva, do conceito de losango definido como um quadrilátero que possui todos os lados iguais. É possível que muitos estudantes não consigam solucionar alguns tipos de problemas em geometria, simplesmente porque não tiveram experiências com os processos de solução. Esse fato pode estar relacionado à formação dos professores de Matemática que também podem não ter tido experiências com a solução de problemas em geometria em seus cursos de licenciatura e/ou HEM.

Um levantamento de opiniões foi realizado em 1998 com dezesseis alunos do terceiro ano de Licenciatura em Matemática de uma universidade estadual com o objetivo de, entre outros, verificar como o ensino de geometria estava sendo tratado no curso de graduação (anexo 6). Os estudantes responderam a um questionário durante uma aula da disciplina de "Prática de Ensino de Matemática". A análise das respostas mostrou que parecia haver uma dicotomia entre aquilo que o aluno aprende na faculdade e a sua opinião sobre os objetivos do ensino de geometria na escola fundamental e média. Algumas respostas para a pergunta "r*elate o ensino de geometria que você teve (ou está tendo) na graduação e quais as contribuições que esse ensino está proporcionando para a sua atuação no ensino fundamental e médio"*, extraídas dos protocolos desses sujeitos, são mostradas a seguir.

"A geometria na graduação não está voltada ao ensino fundamental e médio"
"Horrível! Nenhuma contribuição! Deveria ser dado de maneira mais prática"
"Até agora está muito abstrato. Não acho que seja ideal e suficiente para que possamos ensinar futuramente"
"Foi deprimente e deficiente as primeiras disciplinas de geometria que tivemos na universidade. Em função disso é difícil acompanhar o nível das disciplinas de geometria que estão sendo estudadas"
"Por enquanto o ensino de geometria continua tudo igual. Ainda não consegui aprender muita coisa. Acho que esse ensino é muito importante, mas não têm contribuído muito"

A análise das respostas, dadas por estes estudantes, parece mostrar que eles, futuros professores de matemática, que atuarão no ensino fundamental e médio, acreditavam que a experiência que tiveram com a geometria não foi muito satisfatória. Esse fato pode gerar nos estudantes atitudes aversivas com relação à geometira, implicando em um abandono do ensino dessa parte da matemática pelos mesmos.

É válido lembrar que, em termos de ensino fundamental e médio, as constantes avaliações da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo apontaram a solução de problemas, envolvendo geometria, como um grande desafio a ser enfrentado por professores e alunos. Tal desafio vai estar presente em todos os níveis, inclusive na formação do futuro professor.

Com relação à formação do professor, é importante analisar alguns dos vários motivos que levam o aluno a optar pela Licenciatura em Matemática.

Aparentemente, é possível que, mesmo apresentando dificuldades em Matemática, o estudante possa optar pelo curso de Licenciatura em Matemática. Esta afirmação não é contraditória, pois este fato é evidenciado, com maior freqüência, em algumas faculdades do interior de São Paulo, por três grandes motivos: a) muitos alunos, por variados motivos (problemas econômicos, familiares, etc), para não saírem para estudar em outras cidades mais distantes, onde existe o curso que gostariam de fazer, acabam por optar pelo curso que é oferecido pela faculdade de sua região; b) muitos fazem o curso de Matemática, acreditando ser essa a disciplina escolar que dispõe de uma grande quantidade de aulas e, portanto, necessita de um número maior de professores. Isso pode ocorrer, pois para algumas séries como a quinta, algumas escolas reservam seis aulas semanais; c) os cursos de Licenciatura, em algumas faculdades, têm duração de três anos.

Com relação ao curso de Magistério do segundo grau, é possível que muitos alunos busquem essa opção como uma maneira de não se submeterem a essa disciplina, mas, posteriormente, terão que ensinar os conteúdos matemáticos, conforme tratado por Gonçalez (1996) e Moron (1998).

Partindo de elementos trabalhados em reuniões com professores de primeira à quarta série e de quinta à oitava série foi percebido que a maioria não ensinava geometria a seus alunos pelas seguintes razões: a) não tinha formação adequada, quando estudantes; b) achava a geometria um tema muito difícil. Algumas professoras de quarta série chegaram a afirmar que quem deveria trabalhar este tópico era a professora de Educação Artística.

Levantamento de opiniões sobre a formação do professor em geometria.

A Diretoria de Ensino (DE)[9] de São João da Boa Vista, até 1998, administrava 58 escolas estaduais, abrangendo oito cidades: Vargem Grande do Sul, Águas da Prata, Aguaí, Espírito Santo do Pinhal, Santo Antonio do Jardim, Divinolândia, São Sebastião da Grama e São João da Boa Vista. A maioria dos professores que atua nessas escolas (de 1ª a 4ª séries) teve formações em escolas estaduais que ofereciam curso de Magistério, como é o caso do CEFAM (Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério) e escolas como as de Vargem Grande do Sul e São Sebastião da Grama.

No início do ano de 1998, trinta e quatro professores de matemática, PEB II, responderam a um questionário quando participavam de uma reunião de professores, para a discussão do planejamento escolar (Anexo 5). O questionário constava de oito questões sobre a formação dos professores em geometria. A análise das respostas mostrou que, quando perguntados se consideravam a aprendizagem anterior de geometria suficiente para atuar como professores no ensino fundamental e médio, 76,4% deles responderam não, 5,9% responderam que haviam aprendido pouca coisa, 5,9% responderam que só aprenderam os conteúdos de geometria do ensino fundamental e 11,8% consideraram haver aprendido o suficiente para atuar como professor no ensino fundamental e médio.

As pessoas que responderam que o curso de licenciatura propiciou uma formação adequada para atuar no ensino fundamental foram as mesmas que responderam que, durante o curso de Licenciatura em Matemática, aprenderam conteúdos como geometria espacial e geometria plana. Isto mostrou uma certa contradição, pois esses conteúdos são (ou deveriam ser) trabalhados no ensino médio.

Quando foram analisadas as respostas dadas à questão: "Você gosta de geometria?", foi verificado que 76,47% responderam gostar de geometria, 17,65% afirmaram não gostar de geometria, 2,94% responderam gostar mais ou menos de geometria e 2,94% deixaram a questão sem resposta.

---

[9] A partir de 1999 a nomenclatura de Delegacia de Ensino passou a ser Diretoria Regional de Ensino.

Um dos professores deu a seguinte resposta à questão "*Não sei, pois não a conheço*". Quando perguntado sobre " *Qual(is) o(s) conceito(s) que você tem mais dificuldade em Geometria?*" este mesmo professor respondeu "to*dos*".

Este professor atuava há 14 anos no magistério e afirmou que não conhecia geometria.

Pelas respostas dadas neste questionário opinativo, foi possível ter um indicador de que esse professor pode não estar trabalhando os conceitos geométricos há alguns anos pelo fato de não conhecer os conteúdos necessários para o ensino da geometria.

Embora muitos professores envolvidos nesse levantamento de opiniões tenham demonstrado gostar de geometria, mostraram, ao mesmo tempo, a preferência em solucionar problemas aritméticos ao invés de algébricos. Isto foi evidenciado através da análise da questão *"Você gosta de solucionar problemas de Matemática? Quais aqueles de que mais gosta: os problemas aritméticos, algébricos ou geométricos?*

A análise das respostas mostrou que é nítida a preferência dos professores pela solução de problemas aritméticos e algébricos, sendo que os geométricos tiveram menor preferência. Talvez isso possa ser atribuído ao fato dos professores não dominarem os conteúdos de geometria, como mostraram as respostas dadas à questão quatro em que 17,65% dos entrevistados afirmaram que gostavam de solucionar problemas aritméticos; 29,41% preferiam solucionar problemas algébricos, apenas 2,94% gostavam de solucionar problemas geométricos; 5,89 afirmaram que preferiam solucionar problemas aritméticos e geométricos.

Na questão sete em que era solicitado que os professores enumerassem os pontos que a Delegacia de Ensino deveria considerar importantes em termos de geometria, aproximadamente 97% responderam que deveriam ser promovidos cursos com conteúdos e metodologia para o ensino de geometria.

Também foi constatado que esses professores do ensino fundamental e médio usavam problemas com enunciados completos, sendo que problemas com enunciados incompletos e supérfluos não eram trabalhados.

Considerando todos os aspectos aqui expostos, foi formulado o seguinte problema de pesquisa:

Existem diferenças significativas entre o desempenho de alunos da Licenciatura em Matemática e alunos do curso de Habilitação Específica do Magistério na utilização de conceitos e princípios de área, perímetro e volume contidos em problemas com informações completas, incompletas e supérfluas?

Em decorrência do problema selecionado, foram investigadas as seguintes questões:

1- Existem diferenças significativas entre os alunos do magistério e licenciatura, quanto a utilização de conceitos e princípios na solução de problemas?
2- Existem diferenças significativas no desempenho de alunos do magistério e da Licenciatura em Matemática, quando solucionam problemas de diversos tipos (problemas com informações completas, incompletas e supérfluas)?
3- Existem diferenças no grau e no tipo de dificuldades apresentadas por alunos do curso de licenciatura em matemática e alunos do curso de habilitação específica do magistério, que possam ser atribuídas ao tipo de problemas? (informação completa, informação incompleta ou informação supérflua)?
4- Existem diferenças significativa nos conceitos de área, perímetro e volume, apresentados pelos alunos do curso de habilitação específica do magistério e pelos alunos do curso de licenciatura em matemática?

CAPÍTULO II

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA :
SOLUÇÃO DE PROBLEMA

> *A solução de problemas se refere a qualquer atividade em que tanto a representação cognitiva da experiência passada como os componentes de uma situação problemática atual são reorganizados para atingir um objetivo designado*
> *(Ausubel, Novak e Hanesian, 1980)*

Muitos autores têm se dedicado ao estudo da teoria de solução de problemas (Mayer, 1992; Sternberg, 1994; Echeverría e Pozo, 1998) e concordaram com a importância do ensino desse tema nas escolas.

Echeverría e Pozo (1998) consideraram que ensinar a solucionar problemas:

> *não consiste somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas também em criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta (p. 14)*

De acordo com essa idéia é importante não apenas ensinar os alunos a solucionarem problemas, mas também a propor problemas, na tentativa de transformar algumas situações do cotidiano em problemas a serem investigados e estudados.

É de fundamental importância, para o ensino da Matemática escolar que os alunos compreendam os conceitos e princípios[10], envolvidos nos problemas, bem como os algoritmos utilizados na solução dos mesmos.

O entendimento do algoritmo das operações fundamentais da Matemática, sem uma relação com as situações-problema, passou a exigir um ensino em que a solução de problemas fosse priorizada dentro das salas de aula.

D'Ambrosio (1989) enfatizou que a proposta de se ter um ensino centrado em solução de problemas tem sido amplamente discutido na comunidade internacional de Educação Matemática, considerando a solução de problemas como uma metodologia de ensino:

> *Os estudos iniciais de resolução de problemas propunham um ensino sobre diferentes heurísticas e passos na resolução de problemas. Muitas vezes essa abordagem gerava um ensino visando o ocasional envolvimento com a resolução de problemas. Hoje a proposta está um tanto modificada e a resolução de problemas é encarada como uma metodologia de ensino em que o professor propõe ao aluno situações problemas caracterizadas por investigação e exploração de novos conceitos (p. 16)*

De acordo com o texto acima, é importante, dentro desta proposta de solução de problemas, que o aluno seja estimulado a construir os conceitos matemáticos através de situações que estimulem a sua curiosidade e dê condições para que os mesmos utilizem sua criatividade.

Segundo Boavida (1992), o ensino de solução de problemas deve requerer bem mais do que a aplicação direta de um algoritmo, constituindo-se em um desafio,

---

[10] Conceito, segundo Klausmeier e Goodwin (1977), é definido como *" informação ordenada sobre as propriedades de uma ou mais coisas – objetos, eventos ou processos – que torna qualquer coisa ou classe de coisas capaz de ser diferenciada de, ou relacionada com outras coisas ou classe de coisas" (p. 312).* Para esse mesmo autor princípio é uma relação entre dois ou mais conceitos. *" Um princípio é um construto mental do indivíduo e uma entidade pública. Todos os indivíduos atribuem significados ou interpretações únicas a um princípio específico, possuídos por eles" (p.314*

envolvendo os alunos em situações em que os mesmos possam construir o conhecimento de maneira duradoura.

Segundo essa autora, essa perspectiva está de acordo com as orientações metodológicas inseridas nos novos currículos de matemática que consideram a solução de problemas como um eixo organizador do ensino de Matemática, em que os alunos podem *"construir conceitos e princípios, descobrir relações, observar, experimentar, conjecturar, argumentar e avaliar" (Boavida, 1992, p. 112).*

Um problema pode ser visto como uma situação em que o sujeito necessita alcançar algum objetivo. Alguns autores, como Boavida (1992), argumentaram que é muito difícil dar uma definição coerente para o conceito de problema, uma vez que esse é caracterizado pela subjetividade, temporalidade e caráter contextual.

Segundo Chi e Glaser (1992), pode-se ter um problema na tentativa de solucionar um quebra-cabeça, um problema de álgebra, em economizar dinheiro ou controlar a inflação. Quando se fala em problema, muitas pessoas pensam em problemas matemáticos, aqueles que devem ser solucionados usando equações, logaritmos, funções, etc..

Muitos alunos chegam a relatar que os problemas escolares não têm relações com o seu cotidiano e, freqüentemente, *"lêem o problema no livro texto uma vez e afirmam "eu não entendi o problema" ou "eu não posso solucioná-lo". (Henderson e Pingry, 1953, p.248).* Isso significa que a causa de os alunos não serem "bons solucionadores de problemas" pode ser devida ao não entendimento do problema, o que pode gerar, nos estudantes, atitudes negativas em relação à solução de problemas e à própria matemática.

Mayer (1992) mostrou que na solução de problemas não podem ser esquecidos os aspectos lingüísticos e quando o aluno diz "eu não entendi o problema" não significa, necessariamente, que ele não sabe os conceitos e princípios já aprendidos, mas pode significar que ele não compreendeu algumas palavras que o problema traz. Partindo deste fato, Mayer (1992) mostrou alguns tipos de conhecimento que podem ser relevantes para a representação dos problemas e para a solução dos mesmos. Esse autor classificou da seguinte maneira: conhecimento lingüístico, conhecimento factual, conhecimento de esquema, conhecimento de estratégias e conhecimento algorítmico.

Conhecimento Lingüístico:

Diz respeito à compreensão da língua materna, tal como a análise de uma sentença em partes da fala, ou sobre o significado das palavras. Este tipo de conhecimento é fundamental para a análise de um determinado problema.

Um dos objetivos do ensino, através da solução de problemas, deve ser levar o estudante a compreender e a interpretar problemas, pois a tradução dos mesmos requer o conhecimento lingüístico. Alguns autores, como Loftus e Suppes (1972) e Greeno (1980) (como citados em Mayer, 1992, p. 149) afirmaram que existem evidências de que os estudantes apresentam dificuldades para a representação das proposições de relações. Exemplo*: Mary é duas vezes mais velha do que Betty era dois anos atrás. Mary tem 40 anos. Quantos anos tem Betty?*[11] O professor de Matemática deverá estar atento aos problemas que envolvem relações, tentando auxiliar seus alunos na compreensão dos mesmos.

> *A tradução do problema (o primeiro componente na representação do problema) exige um conhecimento específico da linguagem e dos fatos. Em particular, a compreensão das proposições de relação é necessária para o sucesso na tradução de alguns problemas matemáticos (Mayer, 1992, p. 151)*

Echeverría e Pozo (1998) também concordaram que é de fundamental importância a compreensão das palavras envolvidas no problema. *"Compreender ou traduzir um problema matemático consiste em transformar a informação que consta nesse problema em termos matemáticos com os quais aluno ou a pessoa que quer resolver a tarefa possam lidar" (p.53). Os autores* observaram que o conhecimento semântico do

[11] Problema citado em Mayer, 1992, p. 149

problema engloba o conhecimento dos fatos do mundo, que é necessário para interpretar o contexto do problema e dar sentido a ele.

É importante salientar que a proposição de um problema muitas vezes pode gerar certas ambigüidades. Neste sentido, Echeverría e Pozo (1998) comentaram que a ambigüidade lingüística da pergunta pode levar *"a diferentes soluções, mas em muitos outros pode fazer com que o problema se torne insolúvel, ou que o aluno chegue a soluções impossíveis" (p.55)*.

Todas estas questões devem fazer parte de uma reflexão um pouco mais ampla tanto por parte dos professores que já estão atuando no ensino de Matemática, como daqueles que estão em preparação para exercerem o magistério dessa disciplina. É importante que o professor perceba que muitas dificuldades de aprendizagem apresentadas pelo aluno são, em grande parte, problemas enfrentados por ele ao interpretar e contextualizar problemas.

Conhecimento Factual:

Refere-se ao conhecimento dos fatos que são utilizados no problema. Por exemplo:

Um quadrado tem seus lados medindo 13cm. Um outro quadrado tem lados que medem 0,5m. Qual o quadrado que tem maior perímetro?

Este problema supõe o conhecimento factual das unidades de medidas.

Segundo Klausmeier e Goodwin (1977), a aprendizagem de informação factual é um importante objetivo educacional, desde o jardim de infância até a pós-graduação. Segundo esses autores, a informação seria composta a partir das discriminações feitas pelos indivíduos.

> *A informação factual é uma informação discriminada por muitos indivíduos que compartilham o mesmo "background" cultural e também é aceita como correta e apropriada. Uma grande quantidade de informação factual tem sido acumulada em todas as áreas de conteúdos ensinadas nas escolas. Este é o tipo de informação aceita pelos professores, pelos autores de livros de textos e por outros que conhecem a área, como sendo exata (Klausmeier e Goodwin, 1977, p. 283).*

Conhecimento de Esquema:

Refere-se ao conhecimento dos tipos de problemas, tais como a diferença entre problemas de áreas e problemas de perímetros. No problema anterior é importante que o solucionador saiba que se trata de um problema envolvendo comparações entre medidas. Mayer (1992), afirmou que em particular, "*a compreensão das pessoas sobre os problemas com palavras e estórias é influenciada pelo fato de terem ou não (e de acessarem ou não) um esquema apropriado para o problema" (p. 56).*

A compreensão do conceito de esquema é fundamental para o professor. Para Lim, Dixon e Moore (1996) esquema é um "*constructo cognitivo que permite aos solucionadores de problemas reconhecerem problemas como pertencentes a uma categoria particular requerendo mudanças específicas para a solução" (p. 421).* Mayer (1992) considerou que os esquemas descrevem o formato de um corpo de conhecimentos organizados na memória, isto é, seriam os esquemas os responsáveis pela estruturação do conhecimento.

Hayes, Waterman e Robinson (1977) e Robinson e Hayes (1978) (como citados em Mayer, 1992, p. 153) observaram que seus alunos utilizavam esquemas para analisar as informações relevantes e irrelevantes que eram apresentadas nos problemas propostos. Em um estudo, realizado por esses autores, um problema era apresentado aos alunos com uma frase de cada vez. No experimento, à medida que cada frase era acrescentada ao problema, o experimentador perguntava se a mesma era necessária ou não para a solução do problema. Os autores concluíram que os sujeitos podiam fazer julgamentos sobre a relevância das informações que eram apresentadas no problema.

Segundo Mayer (1992), quando os esquemas errados são utilizados para solucionar um problema, muitas dificuldades tendem a aparecer.

Para ilustrar esse fato, Hinsley, Hayes e Simon (1977) (como citados em Mayer, 1992, p. 154) trabalharam com alunos um problema que envolvia velocidade, tempo e distância, sendo que o mesmo continha informações irrelevantes sobre um triângulo. Foi verificado que metade dos estudantes interpretou-o como um problema sobre triângulos.

Lim e outros (1996) verificaram que o treino de solução de problemas, através de exemplos trabalhados anteriormente, constitui-se em um bom meio para a obtenção de esquemas, pois "*isso envolve comparação de atividades paralelas entre o novo problema apresentado e os problemas exercitados, e tem sido sugerido como um passo crucial na obtenção dos esquemas" (p. 422).*

Conhecimento de Estratégias:

Refere-se ao conhecimento sobre como desenvolver e monitorar um plano de solução. Autores, como Polya (1994) consideraram as estratégias de solução de problemas como passos ou estágios. Esse autor descreveu quatro passos para a solução de problemas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. É importante salientar que cada etapa é relacionada com a anterior através de uma verificação, dando também a este modelo um caráter cíclico e dinâmico. Os fatos básicos devem ser dominados por meio de exercícios e prática.

Neste aspecto é importante salientar que a solução de problemas não descarta de uma vez por todas o ensino dos algoritmos e dos exercícios, para a fixação dos conceitos e princípios. Os fatos básicos também devem ser dominados para a solução de problemas, principalmente devem levar os estudantes a observar que nem sempre a resposta final de um problema é a solução do mesmo. Um exemplo disso é uma questão elaborada para a quarta série do ensino fundamental pela Secretaria de Educação no projeto de Avaliação Continuada mostrado a seguir:

> Vários torcedores do Bragantino pretendem alugar alguns ônibus para assistir a um jogo no estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 770 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?
> a) 20 b) 19 c) 18.3333.... d) 18.3 e) 18

Nesse problema, a grande maioria dos alunos assinalou incorretamente a alternativa **c**. A resposta esperada é que seriam necessários 19 ônibus e não 18.33333.

Aparentemente, muitos alunos resolvem um problema sem conferir se a resposta é coerente com a realidade, isto é, o resultado do problema não é conferido com a estória do mesmo, o que permitiria verificar a adequação entre o resultado encontrado, a questão do problema e a realidade.

> *Geralmente os planos, metas e submetas que o aluno pode estabelecer em sua busca durante o desenvolvimento do problema, são denominados estratégias ou procedimentos heurísticos de solução de problemas (Echeverría e Pozo, 1998, p. 24).*

A revisão da literatura, sobre estratégias de solução de problemas, mostrou uma grande variedade que podem ser utilizadas para a solução de problemas, dentre elas as tentativas por meio de ensaio e erro e o uso de problemas análogos.

Em relação à primeira estratégia, tentativas e erros, Sternberg (1994) indicou que "p*elo fato do solucionador de problemas ter que encontrar a solução, parece inevitável que uma atividade essencial é tentar diferentes abordagens e cometer erros até que a abordagem correta seja encontrada" (Sternberg, 1994, p. 23)*

A utilização da estratégia de ensaio e erro é mostrada a seguir:

De todos os retângulos de perímetro 2p, determine aquele de maior área.

Nesse problema, a solução pode ser encontrada por meio de tentativa e erro, ou seja, um aluno poderia atribuir valores para o perímetro e verificar o que acontece com os lados do retângulo. Assim, observando o que ocorre com o perímetro, verificaria que o retângulo deveria ser um quadrado.

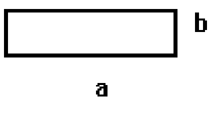
Se o perímetro for 32cm, por exemplo, as medidas dos lados do retângulo poderiam ser as seguintes:

15cm, 15cm, 1cm e 1cm. A área do retângulo nesse caso é $15cm^2$.
12cm, 12cm, 4cm e 4cm. A área do retângulo nesse caso é $48cm^2$
14cm, 14cm, 2cm e 2cm. A área do retângulo nesse caso é $28cm^2$
8cm, 8cm, 8cm e 8cm. A área do retângulo nesse caso é $64cm^2$

Sem utilizar demonstrações, o aluno poderia, através de tentativas e erros, chegar à solução do problema.

Por outro lado, poderia ser feita a demonstração algébrica do problema, pois, fixado o perímetro, o retângulo de área máxima é o quadrado, como mostrado a seguir.

Seja um retângulo de lados a e b.



Perímetro = 2a + 2b
$2p = 2a + 2b$
$p = a + b$
$b = p - a$

Como é solicitado que a área do retângulo seja máxima:

$A = ab \Rightarrow A = a(p-a)$

$A = -a^2 + ap$. Determinando o valor do discriminante Δ é encontrado o valor $\Delta = p^2$ e, assim, pode ser determinado o ponto máximo através do vértice de uma parábola.

Pode ser observado que a área máxima é dada por $p^2/4$ e o lado do retângulo para que esta área seja atingida é dado por $p/2$.

Com isto conclui-se que $a=b= p/2$ e, portanto, o retângulo, é um quadrado.

Um gráfico ilustrativo poderia ser utilizado para uma melhor compreensão do problema.

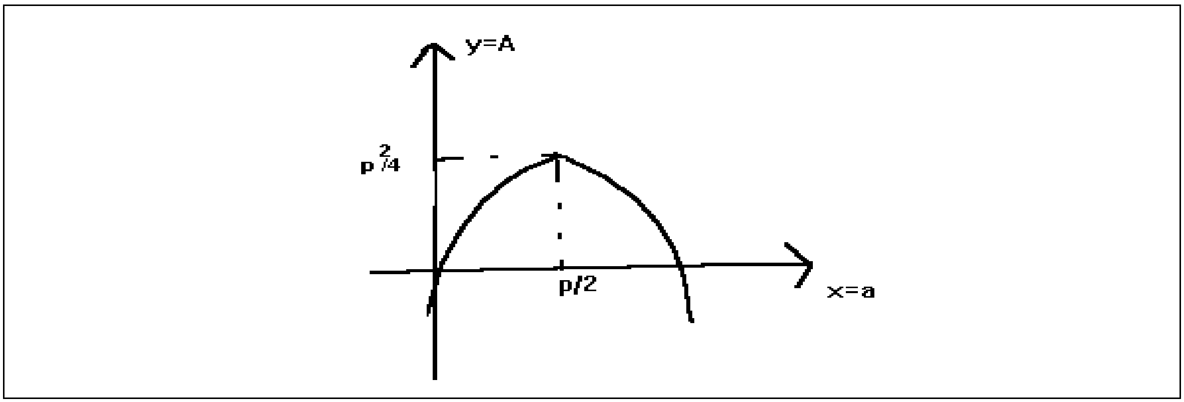


Figura 4: Representação gráfica do problema sobre área máxima

A segunda estratégia, solução de problemas por analogia, foi estudada por Gick e Holyoak (1980, 1983), que analisaram o uso de analogias no processo de solução de problemas, afirmando que a *"essência do pensamento analógico é a transferência de um conhecimento de uma situação para outra por um processo de mapeamento" (p. 2).*

O objetivo de um determinado problema pode ser mais facilmente atingido quando o novo problema é análogo a algum outro solucionado anteriormente. Polya (1994) considerou importante o uso de problemas análogos. A solução por analogia é baseada nas semelhanças e leva o sujeito a descobrir os procedimentos necessários à solução.

Em síntese, a utilização de diferentes estratégias, segundo Echeverría e Pozo (1998), depende de três fatores importantes que são: o desenvolvimento de regras suficiente para a solução do problema, a estrutura da tarefa e também as instruções que acompanham as mesmas.

<u>**Conhecimento de Algoritmo**</u>:

Refere-se aos algoritmos utilizados em uma operação planejada. Krutetskii (1976) definiu o algoritmo como *"uma indicação precisa e delimitada sobre quais operações realizar e em qual seqüência resolver qualquer problema de um determinado tipo. Um algoritmo é uma generalização desde que seja aplicável a todos os problemas de um determinado tipo" (p.87).*

Nessa mesma direção, Mayer (1992), apontou que a busca da solução de um determinado problema exige que o solucionador seja capaz de realizar algumas operações, como por exemplo, cálculo computacional, resolver uma equação, desenvolver um produto notável, dentre outros. Segundo esse autor, para a solução de problemas, o solucionador *"precisa de algum conhecimento sobre os procedimentos para a solução, isto é, de um conhecimento algorítmico" (Mayer, 1992, p. 159)*

A importância do conhecimento dos algoritmos foi enfatizada por Schoenfeld (1987) mostrando que, ao depararem com situações problema, os estudantes tinham conhecimento das técnicas que seriam úteis para a solução dos problemas, mas falhavam na aplicação de procedimentos corretos. Isso indicou que muitos alunos podiam dispor dos procedimentos necessários para a solução de um problema, mas isto nem sempre implicava que os estudantes conseguiriam desenvolvê-los adequadamente.

Echeverría e Pozo (1998) afirmaram que, quando um aluno não consegue solucionar um determinado problema, essa dificuldade é atribuída ao desconhecimento dos procedimentos adequados. Porém, muitas vezes, a falha pode não estar no procedimento utilizado, mas na formação conceitual inadequada.

Assim, quando era solicitado a estudantes com idades entre 13 e 14 anos que colocassem em ordem cronológica as datas correspondentes a diferentes eras ou calendários (gregoriano, muçulmano, judeu, etc.) podia-se concluir erroneamente que os alunos não eram capazes de realizar operações adequadas, não porque fossem incapazes, mas porque não entendiam o significado da tarefa, por não terem conhecimento de uma representação adequada do tempo histórico (Echeverría e Pozo, 1998, p. 15).

Existe uma estreita relação entre o conhecimento declarativo e o conhecimento de procedimentos, sendo que esses últimos se aplicam a alguns conteúdos factuais e conceituais que precisam ser compreendidos para se obter sucesso na solução de problemas.

Anderson (1983), na sua teoria a respeito da arquitetura da cognição, assim como outros teóricos do processamento de informações, apontou a importância, no contexto de solução de problemas, do conhecimento declarativo e do conhecimento de procedimentos. O conhecimento declarativo se baseia em saber o quê, ou seja, é facilmente verbalizado e o conhecimento de procedimento se refere ao saber como.

Muitas vezes o aluno é capaz de verbalizar algumas coisas sobre determinados conceitos e princípios, mas não sabe como utilizá-los na solução de problemas. Para Anderson (1983), os procedimentos são importantes para a automatização dos conhecimentos, ou seja, é desejável que o conhecimento declarativo (por exemplo, instruções ou passo para a solução de uma equação do segundo grau) seja transformado em processos automatizados (seqüência de ações requeridas para a execução de um procedimento).

Mayer (1992) afirmou que os vários tipos de conhecimento são importantes para a solução de problemas, tendo em vista que:

> *O conhecimento lingüístico e factual é necessário para a tradução do problema; o conhecimento sobre esquemas é necessário para a integração do problema; o conhecimento de estratégias é necessário para o planejamento da solução, e o conhecimento algorítmico é necessário para a execução da solução (p.149).*

Esse mesmo autor salientou que problemas não se referem somente àqueles envolvendo conteúdos matemáticos, pois há os práticos que podem ser solucionados sem cálculos. Por exemplo, uma pessoa fica trancada em uma sala. O que ela poderá fazer? Poderá tentar arrombar a porta, ou gritar por socorro; poderá verificar se é possível sair pela janela ou até mesmo bater na porta a fim de que alguma pessoa possa ouvi-la. Neste caso, a referida pessoa tem um problema a resolver e poderá tentar utilizar algum instrumento para solucioná-lo. Um problema deve partir de algum objetivo. Nesse exemplo, o objetivo é sair da sala.

Henderson e Pingry (1953) (in Wilson, Fernandez e Hadaway, 1993), mostraram que para se obter a solução de um problemas é necessário ter um objetivo, uma delimitação, além de uma aceitação do objetivo. Esta definição dada deixa claro que, para se analisar a questão da solução de problemas, é necessário levar em consideração o individual, pois, o que é problema para um indivíduo, pode não ser para outro. O objetivo de solução pode ser diferente para diferentes sujeitos. De acordo com esses autores, um determinado aluno tem como objetivo não falhar ao solucionar um problema, ou seja, satisfazer seu nível de aspiração de nunca falhar; já uma menina pode ter como objetivo acertar o problema para chamar a atenção dos meninos. É importante que os professores percebam essa variedade de objetivos, pois, além daqueles de caráter emocional e afetivo, existem os objetivos do problema e são esses que devem ser atingidos por todos.

A Teoria de Krutetskii a Respeito das Habilidades Matemáticas de Crianças Escolares

A psicologia soviética revelou nomes de pesquisadores que contribuíram para o avanço das pesquisas em desenvolvimento e aprendizagem e, dentre eles, destaca-se V. A. Krutetskii, que foi um dos poucos psicólogos soviéticos a trabalhar com crianças em escolas. Esse autor enfocou as habilidades matemáticas e seus componentes, principalmente no que diz respeito às habilidades de solução de problemas matemáticos.

O trabalho desse autor ficou conhecido a partir da tradução do livro *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren* para o inglês.

A tradução desse livro nos Estados Unidos estimulou algumas pesquisas sobre a memória para solucionar problemas e sobre a maneira como as crianças percebem e relatam as soluções de problemas aritméticos, algébricos e geométricos. Brito, Garcia e Fini (1994) realizaram um estudo exploratório com o objetivo de analisar as relações entre a solução de problemas e o desempenho verbal em alunos universitários. Foi utilizado o modelo teórico proposto por Krutetskii. Nesse estudo, os autores salientaram que:

> *Estudando a aprendizagem matemática, Krutetskii (1959) investigou características psicológicas referentes à capacidade para matemática (características de percepção, memória, imaginação e raciocínio). Segundo Krutetskii (1976), a incapacidade absoluta para a matemática, tipo cegueira para matemática, não existe e todo aluno normal, com um bom ensino poderá apresentar resultados melhores ou piores em um curso, dependendo de poder adquirir as correspondentes noções e capacidades (Brito, Garcia e Fini, 1994, p.37)*

Em relação ao desenvolvimento das habilidades matemáticas em escolares, Krutetskii (1976) afirmou que:

> *O professor não deve se contentar com a noção de que desempenhos variados das crianças em matemática, por exemplo, são reflexos dos níveis de habilidades das mesmas. Habilidades não são algo pré-determinados de uma vez por todas, são formadas e desenvolvidas através de instrução prática, e domínio de uma atividade. Portanto, falamos da necessidade de formar, desenvolver, cultivar e melhorar as habilidades das criança.*
>
> *(p. 4)*

Krutetskii (1976) utilizou o termo *habilidade para a solução de problemas* e afirmou que todos os alunos normais têm essa habilidade, podendo ser mais desenvolvida em alguns estudantes. Para esse autor *"as habilidades são sempre o resultado de desenvolvimento. São formadas e desenvolvidas em vida, durante atividade, ensino e treino" (Krutetskii, 1976, p. 60). Segundo Krutetskii (1976) a*s habilidades são características psicológicas individuais que capacitam os sujeitos para desempenhar uma tarefa rapidamente e bem.

De acordo com esse autor, até 1936 as pesquisas sobre habilidades e diferenças individuais eram baseadas em testes mentais. Porém, com a proibição do uso desse tipo de testes pelo comitê central do partido comunista, os pesquisadores tiveram que procurar outros recursos para avaliar o progresso mental do aluno. Alguns pesquisadores, entre eles o referido autor, utilizaram problemas matemáticos sendo que os alunos eram solicitados a "pensar em voz alta", para que o pesquisador pudesse acompanhar o procedimento de solução e o progresso mental dos alunos.

Essa metodologia de avaliação dos procedimentos de solução de um problema foi utilizada com bastante ênfase por Krutetskii. Segundo ele, durante a solução de um determinado problema, o pesquisador poderia dar "dicas" para o aluno ou então modificar o problema. Se um aluno ficasse muito nervoso, a aplicação da prova poderia ser feita em várias sessões até que os alunos se acostumassem com a situação de solução de problemas proposta pelo pesquisador.

Kilpatrick e Wirszup (1976) na introdução do livro *The Psychology of Mathematical Abilities in Scoolchildren* afirmaram que Krutetskii considerava que os problemas matemáticos podiam ser solucionados de várias maneiras, mas isto não era evidenciado através do resultado dos testes psicológicos, que eram comumente aplicados.

De acordo com Krutetskii (1976), os principais objetivos a serem analisados eram a generalização, a abreviação ou encurtamento do pensamento ("curtailment"), a percepção de relações e fatos concretos em um problema, a generalização do material não matemático, entre outros.

O método de investigação utilizado por Krutetskii (1976) se constituiu em um processo de solução de problemas por alunos cujas habilidades matemáticas apresentavam diferentes níveis de desenvolvimento. O estudo, de caráter experimental, foi planejado em conformidade com os princípios da psicologia soviética, tendo considerado que os problemas experimentais deveriam ser a base da atividade matemática dos alunos.

Além disso, através das soluções dos problemas, o autor acreditava que seria possível compreender as diferenças entre aqueles alunos considerados "mais habilidosos" e os "menos habilidosos" em matemática. Para Krutetskii (1976), os problemas deveriam ter diferentes graus de dificuldade. Os problemas não padronizados, utilizados nas pesquisas, tinham o objetivo de analisar a criatividade dos sujeitos.

Segundo Dubrovina (1992), os alunos matematicamente habilidosos eram aqueles que aprendiam matemática sem esforço e resolviam os problemas propostos mais rapidamente que os demais alunos, freqüentemente apresentando soluções originais a problemas inéditos. Os estudantes médios necessitavam de um tempo maior para a solução de problemas e geralmente aprendiam um conteúdo após numerosos exercícios. Esses estudantes apresentavam dificuldades para transferir conceitos aprendidos para novas atividades. Os estudantes menos habilidosos em matemática geralmente necessitavam trabalhar várias vezes com um único problema para sua compreensão. Além disso, esses alunos entendiam a explicação do professor com grande dificuldade e mostravam um cansaço maior nas aulas de matemática.

A solução dos problemas pelos alunos, através do método de "pensar em voz alta", permitia ao pesquisador evidenciar a natureza das habilidades, pois: *"quando os problemas são resolvidos, aquelas características da atividade mental, que são específicas da atividade matemática, deveriam ser manifestadas" (Krutetskii, 1976, p. 91).*

Krutetskii (1976) afirmou que há dois tipos especiais de problemas, sendo um deles baseado em conhecimento que utiliza fórmulas, demonstração de teoremas; e o outro refere-se aos problemas criativos. Os problemas experimentais, selecionados por esse autor, não tinham o objetivo de avaliar o aluno mais capaz em matemática, mas fornecer um quadro detalhado dos componentes da habilidade matemática que se evidenciavam durante os procedimentos de solução. Os problemas experimentais utilizados por Krutetskii (1976) "*tinham vários graus de dificuldade (baixa, média e alta), incluindo problemas não-padronizados requerendo elementos da criatividade matemática"* (*p. 90).*

Os problemas foram aplicados para avaliar o processo de solução e não somente o resultado final, pois o objetivo era descrever os processos de solução.

Krutetskii (1976) dividiu os vários tipos de problemas usados nas várias séries em problemas aritméticos (22 testes), problemas algébricos (17 testes), problemas geométricos (25 testes) e outros (15 testes), sendo estes divididos em 26 séries de problemas, em um total de 79 testes. As séries de problemas estão divididas em quatro categorias:

1- obtenção das informações, que compreende os tipos de enunciado – informações incompletas e supérfluas;
2- processamento de informações, envolvendo problemas que tratam de generalização, flexibilidade de pensamento, reversibilidade do processo mental, e outros;
3- retenção de informações, que envolvem problemas relacionados à memória matemática;
4- tipologia, que envolvem problemas com formulação verbal e visual, e problemas relacionados a conceitos espaciais, dentre outros.

O presente estudo não pretende abordar todas as categorias citadas anteriormente, pois os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram baseados nas séries II e III dos trabalhos de Krutetskii (1976), pertencentes à categoria de obtenção da informação matemática. No grupo de Psicologia da Educação Matemática da Faculdade de Educação da Unicamp, estão sendo desenvolvidas pesquisas (Brito, 1997; Garcia, 1995; Oliveira, 1998; Spalletta, 1998; Silva, Pirola e Vendramini, 1998; Alves, 1999), Araújo (1999), utilizando diferentes conjuntos desses problemas.

Obtenção da informação matemática

Krutetskii (1976) considerou de fundamental importância que as informações, ao serem utilizadas na solução de um determinado problema, sejam bem compreendidas. Para ele, a compreensão inicia-se na identificação dos componentes matemáticos presentes no enunciado. Esse autor classificou os problemas de acordo com o tipo de informação contida em seu enunciado e tratou-os como: problemas com informações incompletas e problemas com informações supérfluas. No presente estudo, foi acrescentado uma outra categoria de problemas – problemas com informações completas.

O objetivo básico, do estudo dos problemas com informações incompletas foi analisar as relações e fatos concretos presentes num problema. Os problemas com informações supérfluas tinham como objetivo básico analisar as relações e fatos concretos em um problema, além de analisar a memória matemática.

PROBLEMAS COM INFORMAÇÕES COMPLETAS: São aqueles nos quais os enunciados possuem todas as informações necessárias para se atingir a solução. Nesta categoria, os dados do enunciado dos problemas são suficientes para o estudante ativar os conhecimentos e chegar a uma resposta específica. O exemplo a seguir ilustra essa categoria:

Calcular o volume de um cubo cuja aresta mede 10cm.

As informações contidas no enunciado do problema são suficientes para chegar à reposta específica do problema, $1000cm^3$. O problema só admite essa solução.

PROBLEMAS COM INFORMAÇÕES INCOMPLETAS: São problemas que apresentam uma deficiência em seu enunciado, parecendo que o mesmo não tem solução. Quando uma informação é introduzida, o problema passa a ter uma solução.

> *Naturalmente, até mesmo a partir de fatos incompletos um tipo de solução pode ser extraído, uma certa proposição pode ser deduzida (Krutetskii, 1976, p.108).*

Com esta afirmação, Krutetskii sugere que mesmo não sendo possível obter uma resposta para o problema, é possível levantar algumas hipóteses de solução. Em alguns casos, a falta de dados pode tornar o problema impossível de ser solucionado. De acordo com Krutetskii, esse tipo de problema requer que o estudante faça uso de hipóteses.

Segundo o autor, os problemas dessa série (série II) procuraram mostrar que os fatos ausentes somente poderiam ser indicados precisamente pelo aluno, quando a estrutura formal do problema era percebida. Na aplicação dos problemas, o examinador fazia alguns questionamentos: p*or que você não pode dar uma resposta precisa? o que você precisa para solucioná-lo? o que deve ser acrescentado? prove que agora o problema pode ser solucionado precisamente.*

O grupo básico de examinandos foi composto de 18 estudantes, altamente habilidosos em matemática que cursavam a sétima série. Esse grupo foi comparado com um outro composto de 14 alunos médios e com um grupo de 8 alunos, considerados não habilidosos em matemática.

Em relação à percepção da estrutura dos problemas, com informações incompletas por alunos de várias habilidades matemáticas, o estudo conduzido por Krutestkii mostrou que: 1) 52,9%, dos alunos considerados não habilidosos, não conseguiram detectar os dados ausentes do problema, mesmo com a ajuda do experimentador, não conseguindo estabelecer relações entre eles; 2) 53,8%, dos alunos médios e 24%, dos alunos não habilidosos, detectaram os dados ausentes no enunciado do problema e estabeleceram relações entre eles com a ajuda do experimentador; 3) 23,9%, dos alunos habilidosos em matemática, 42,9%, dos alunos médios e 23,1%, dos alunos não habilidosos, conseguiram detectar os dados ausentes no enunciado dos problemas, mas não imediatamente, cometendo alguns erros; 4) 76,1%, dos alunos habilidosos e 3,3%, dos alunos médios, perceberam os dados ausentes no enunciado dos problemas, dominando relações entre os dados dos mesmos.

A seguir, é apresentado um exemplo de problema com informações completas e outro com informações incompletas.

Problema 1: Calcule o lado de um quadrado de área $64cm^2$. [12]
Problema 2: Calcule os lados de um retângulo com área de 36 cm^2.

O primeiro diz respeito a um problema com enunciado completo, envolvendo o conceito de quadrado e de área do quadrado. Para esse problema existe uma única solução e, ativando os procedimentos necessários, o aluno deve chegar à resposta que cada lado deve medir 8cm.

O segundo problema possui informações incompletas. Não foi mencionada a medida de um dos lados ou a relação entre suas medidas. É importante observar que esse problema não possui uma única resposta. Se o retângulo for um quadrado, então, seus lados medem 6cm. Pode-se ter um retângulo com lados medindo 9cm e 4cm, o que resulta em uma área com 36 cm^2 .

Um outro problema utilizado por Krutetskii (1976, p. 109) mostrado a seguir, envolve o conceito de perímetro.

Os lados de um triângulo estão na razão 5:4:3. Encontre as medidas de seus lados.

Supondo que o perímetro do triângulo seja 60cm e os lados desse mesmo triângulo fossem a, b e c, o problema poderia ser desenvolvido da seguinte maneira:

$a/5=b/4=c/3=k$, onde k é a constante de proporcionalidade.

Se o perímetro é 60cm então, $(a+b+c)/(5+4+3) = a/5$.

$60/12 = a/5$, ou seja, $a = 25cm$. Repetindo o mesmo processo para os demais lados, verifica-se que:

$b = 20cm$ e $c = 15cm$, sendo que a constante de proporcionalidade é $k = 5$.

---

[12] Problema 1 da categoria B - testes geométricos - Krutetskii (1976), p. 109

Esta é apenas uma das soluções do problema e refere-se ao perímetro com valor de 60cm, porém, esse é um problema que admite infinitas soluções.

PROBLEMAS COM INFORMAÇÕES SUPÉRFLUAS: Krutetskii (1976) verificou se o aluno era capaz de distinguir o complexo de relações entre as quantidades matemáticas para solucionar o problema e eliminar os fatos desnecessários (p. 109). Com relação a esta categoria, o citado autor salientou que o objetivo era analisar se os alunos conseguiriam isolar os elementos necessários e suficientes para a solução do problema daquilo que era supérfluo e desnecessário.

> *Esta série de problemas permitiu-nos descobrir como os alunos, usando coleções de quantidades que eram dadas a ele, isolavam aquelas que representavam um conjunto de relações, constituindo a essência de um problema e que eram necessárias e suficientes para solucionar o problema*
>
> *(Krutetskii, 1976, p. 110)*

Nos experimentos de Krutetskii (1976), depois de receber o cartão com o problema, o examinando deveria escolher o número mínimo de fatos para a solução e explicar porque os outros fatos eram supérfluos. Para analisar a memória matemática, o examinador pediu aos sujeitos para reproduzirem a solução dos problemas, depois da solução dada, depois de um mês e depois de três meses. Procurou-se investigar se os alunos, depois de um certo tempo, conseguiam se lembrar do tipo de problema que haviam solucionado, os fatos específicos contidos nos problemas e as informações supérfluas dos mesmos.

Em relação à análise da percepção da estrutura dos problemas, com informações supérfluas de alunos de várias habilidades, os resultados obtidos por Krutetskii (1976) foram os seguintes:

1- 56,8%, dos alunos não habilidosos, não conseguiram separar os dados supérfluos do problema, mesmo com a ajuda do experimentador;
2- 9,1%, dos alunos habilidosos, 54,5%, dos alunos médios e 25%, dos alunos não habilidosos, conseguiram separar os dados supérfluos com a ajuda do experimentador;

3- 27,8%, dos alunos habilidosos, 41,6%, dos alunos médios e 18,2%, dos alunos não habilidosos, conseguiram separar os dados supérfluos, mas não imediatamente, cometendo alguns erros inicialmente;
4- 63,1%, dos alunos habilidoso e 3,9% dos alunos médios, conseguiram indicar imediatamente os dados supérfluos do problema.

Um exemplo de problema com informação supérflua, é mostrado a seguir:

Dado um triângulo isósceles, com um dos lados medindo 2cm, outro 10cm, e o terceiro igual a um dos dois lados dados, encontre o terceiro lado.

Nesse problema aparece uma informação supérflua (o terceiro lado igual a um dos dois lados), pois, o enunciado já fornece a informação que o triângulo é isósceles.

É importante salientar o significado da palavra supérfluo. Krutetskii insistiu na idéia que aquilo que é supérfluo para um aluno pode não o ser para outro. No caso do problema anterior, um aluno que não possui o conceito de triângulo isósceles poderá não considerar supérflua a informação de que um lado tem a mesma medida que um dos outros dois lados. Assim, em problemas desse tipo, é possível que o aprendiz, de posse de uma informação que não possuía antes consiga solucionar o problema.

CAPÍTULO III

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O objetivo principal da revisão da literatura foi buscar conhecer pesquisas desenvolvidas em solução de problemas, formação de conceitos geométricos e formação de professores. Algumas pesquisas encontradas não se referem, especificamente, aos conceitos geométricos, mas foram consideradas relevantes pela metodologia e fundamentação teórica utilizadas. A busca de alguns artigos foi realizada no sistema ERIC (Educational Resources Information Center), abrangendo os últimos cinco anos, mas foram encontrados poucos estudos referentes à formação de conceitos e solução de problemas com sujeitos universitários.

A grande maioria das pesquisas encontradas, através do ERIC, tratava da solução de problemas, tendo como sujeitos os alunos do ensino fundamental. O tema aritmética é o mais freqüente nas pesquisas. Alguns artigos foram extraídos dos "Proceedings" dos últimos três encontros do grupo internacional de Psicologia da Educação Matemática (1997, 1998 e 1999), pois estes apresentam artigos completos de pesquisas e não apenas os resumos.

A revisão da literatura centrou-se em estudos sobre a formação em geometria, nos cursos de Licenciaturas e Magistério, solução de problemas, formação de conceitos de geometria, além de algumas outras investigações pertinentes ao presente estudo.

Perez (1991), com o objetivo de descrever o ensino de geometria a partir da percepção dos professores, trabalhou com questionários e entrevistas, tendo como sujeitos professores da rede estadual. O estudo procurou conhecer, com maior profundidade, como estava se processando o ensino de geometria no primeiro e segundo graus (ensino fundamental e médio).

Em uma primeira análise qualitativa de instrumentos, respondidos por 20 sujeitos, escolhidos aleatoriamente, foi verificado que: 1- há pouco ensino de geometria no ensino de primeiro e segundo graus, sendo que a geometria é colocada no final do programa e, muitas vezes, "não dá tempo" do professor ensinar esse conteúdo; 2- Falta metodologia apropriada ao professor; 3- para que esse ensino se realize, a preferência, da maior parte dos professores, é por geometria intuitiva e experimental, apesar dos professores alegarem não terem materiais para trabalhar e terem pouco conhecimento para elaborá-los. Apesar das falhas apontadas pelos professores, os mesmos consideraram importante o ensino de geometria no nível fundamental e médio.

Posteriormente, o referido autor, com o objetivo de obter uma amostra mais ampla de todo o estado de São Paulo, contatou 500 professores de 1ª à 4ª série, 500 professores de matemática de 5ª à 8ª série e 150 professores de matemática do ensino médio. Foram recebidos de volta 228 questionários respondidos por professores de 1ª à 4ª série, 190 respondidos por professores de matemática de 5ª à 8ª série e 67 questionários respondidos por professores de matemática, que atuavam no ensino médio. Aleatoriamente, foram escolhidos para análise, 50 questionários de primeira à quarta série, 50 questionários de quinta à oitava série e 30 questionários do segundo grau. Foram entrevistados também 18 alunos do curso de Matemática da UNESP - Rio Claro. O autor apontou algumas deficiências do ensino de geometria que estavam presentes nos depoimentos, nos quais os professores afirmaram que pouco aprenderam de geometria na escola e que, a formação nas Licenciaturas e Magistério, era deficiente. Em adição, os futuros professores de matemática alegaram ter sido submetidos a um péssimo ensino de geometria sem o uso de materiais concretos, em que eram valorizadas as aulas expositivas.

Alves, Tancredi, Reali, Martucci, Reyes, Lima, Mizukami, Adib e Melo (1998) investigaram a percepção de professores em exercício sobre a formação que tiveram em geometria. Esses autores concordaram que a formação desses professores, em geometria, era percebida como precária. Para uma análise detalhada sobre o que se ensina de geometria na sala de aula, os autores solicitaram cadernos de alunos de sete quartas séries de uma escola pública de São Carlos. Foi solicitado aos professores que escolhessem seis cadernos de alunos assim distribuídos: dois cadernos de alunos fortes, dois de alunos médios e dois de alunos fracos. Os cadernos foram selecionados, partindo do princípio de que o caderno é um material de estudo e de aprendizagem do aluno e que o estudante, muitas vezes, se utiliza dele para estudar para as avaliações. Dentre os diferentes assuntos tratados foram listados 56 tópicos, sendo que 52 desses referiam-se a temas aritméticos e apenas 4 referiam-se à geometria: estudo de polígonos, perímetro, área e retas paralelas e perpendiculares. Perímetro foi o único tópico que se encontrava em cinco das sete classes analisadas. A análise dos cadernos possibilitou aos autores supor que a geometria euclidiana proposicional foi a mais presente nas séries analisadas. Não houve indícios de atividades precedentes com material concreto ou com a geometria espacial, como preconizam as diferentes propostas curriculares recentes.

Manrique, Almouloud, Coutinho, Campos e Pires (1998), apontaram que a geometria é pouco ensinada em grande parte das escolas, a partir de uma sondagem feita com o objetivo de caracterizar professores de matemática de 5ª à 8ª série da rede pública que participavam de um projeto de educação continuada. O questionário foi respondido por 903 professores e incluiu questões sobre a sua formação, os conhecimentos e a utilização da proposta curricular de matemática do ensino fundamental, além de questões referentes aos conteúdos matemáticos ensinados nesse nível. Os resultados mostraram que na 5ª série o conteúdo “áreas e perímetros” era aquele que despertava mais interesse nos estudantes. Além disso, uma parte dos professores considerou números e álgebra como conteúdos essenciais e incluiu como importantes, mas não essenciais, os temas relativos à geometria. Segundo os autores, no ensino e na aprendizagem da geometria para alunos das quatro últimas séries do ensino fundamental, é importante haver uma passagem da geometria "pragmática" (experimentação, manipulação, descoberta, etc.) para uma geometria "intelectual", envolvendo construções geométricas, provas e demonstrações.

Mello e Almouloud (1998), partindo da idéia de que a solução de problemas deve ser um dos objetivos do ensino, em particular em geometria, submeteram 160 alunos a uma série de problemas de geometria tendo sido observada a dificuldade dos sujeitos em justificar suas decisões e em usar as figuras como âncora das hipóteses dadas aos problemas. Os autores constataram que os professores daqueles alunos deram pouca importância à geometria e não trabalharam com as demonstrações geométricas.

Para iniciar um trabalho com solução de problemas, envolvendo conceitos geométricos, é de fundamental importância que o professor tenha conhecimento sobre a diferenciação entre problema e exercício. Segundo Andrade e Onuchic (1998), muitas vezes o professor, que está atuando no ensino de matemática, não tem a clareza dessa diferenciação.

Esses autores realizaram uma pesquisa para investigar as diferentes perspectivas de solução de problemas dos professores que estavam atuando em sala de aula. O instrumento para a coleta de dados foi baseado em entrevistas semi-estruturadas e qualitativas. Foi constatado, entre outras coisas, que havia um desencontro entre o que a literatura acadêmica diz sobre solução de problemas e o que realmente acontece na sala de aula. A literatura apontou que a solução de problemas é vista como metodologia de ensino e, nas escolas, ela não é utilizada como aplicação de conceitos, mas como aplicação de fórmulas mecanizadas.

Com o objetivo de investigar a solução de problemas em alunos universitários, Silva, Pirola e Vendramini (1998) realizaram um estudo exploratório com 15 estudantes do último ano do curso de licenciatura em matemática. Foram investigadas possíveis correlações entre os seguintes aspectos: tipo de enunciado - completo, incompleto e supérfluo; desenvolvimento - aritmético, geométrico ou algébrico, idade e tempo gasto para a solução dos problemas. Os sujeitos responderam a um teste, contendo nove problemas, envolvendo aritmética, álgebra e geometria, extraídos da série de problemas experimentais, propostos por Krutetskii (1976). Os problemas utilizados apresentavam situações com informações supérfluas, informações completas e incompletas. Os alunos foram solicitados a resolver problemas, identificando em qual tipo se inseria cada um deles, considerando a informação dada. Além do tipo de enunciado, também foi analisado o tipo de estratégia utilizada - solução por meio de cálculos aritméticos, solução por meio de cálculos algébricos e solução através da observação das figuras, utilizando conceitos e princípios da geometria. A análise dos dados mostrou que, aparentemente, os alunos não tinham familiaridade com problemas com enunciados incompletos e supérfluos, sendo que muitos alunos não conseguiram solucionar alguns problemas.

Nessa mesma perspectiva, Tarmizi e Sweller (1988) investigaram se o efeito do direcionamento, durante a solução de problemas (envolvendo conceitos de geometria por estudantes) era válido. Foram sujeitos da pesquisa 33 estudantes do ensino médio, subdivididos em três grupos: grupo que utilizava o método convencional, grupo que utilizava recursos livres e grupo que utilizava soluções guiadas. As sessões eram individuais, utilizando o método de "pensar em voz alta" e os sujeitos eram solicitados a demonstrar dois teoremas de geometria plana. Os resultados indicaram que o grupo de solução direcionada obteve resultados significativamente maiores que os outros dois grupos.

Os dois estudos acima citados utilizaram procedimentos diferentes para a coleta de dados, pois enquanto o primeiro utilizou o procedimento de análise dos testes tipo lápis e papel, o segundo utilizou o procedimento de pensar em voz alta. Nos dois estudos foram analisados o desempenho dos estudantes, sendo que a natureza dos erros cometidos pelos alunos, ao solucionarem os problemas, não foram explicitados.

O trabalho de Ower e Sweller (1985) analisou os erros dos estudantes ao solucionarem problemas envolvendo conceitos geométricos. Para o desenvolvimento desse experimento foram utilizados alguns problemas sobre conceitos e princípios de trigonometria - seno, coseno e tangente. Os sujeitos foram vinte alunos de uma escola do ensino médio da Austrália, que eram solicitados a dizer qual a era a equação necessária para encontrar o lado de uma figura, não precisando solucionar o problema. Os erros, apresentados no experimento, foram classificados como erro trigonométrico, que seria o desconhecimento das razões trigonométricas, ou seja, os sujeitos descreviam como e em qual situação os conceitos e princípios poderiam ser aplicados. Classificou-se também o erro fundamental que se caracterizava por situações, em que os estudantes apresentavam uma equação na qual o lado a ser descoberto não estava presente nas seguintes situações: quando um segundo lado não conhecido estava presente na equação; quando a equação havia sido derivada de um triângulo não retângulo; quando os lados e ângulos trabalhados não eram de um mesmo triângulo e o seno, coseno ou tangente de 90º foram citados.

Ower e Sweller (1985) realizaram um outro experimento, usando testagem individual com 20 estudantes de uma escola de ensino médio de Sydney, divididos entre grupo experimental e grupo controle, sendo que os sujeitos não tinham experiências prévias com trigonometria. Os resultados do experimento indicaram que os esquemas associados com cada razão trigonométrica, uma vez adquiridos, podiam ser úteis em todos os problemas que requeriam as mesmas razões. Em estágios preliminares da aprendizagem, o progresso na solução de problemas deve ser determinado, primeiramente, pelo progresso da adequação das representações dos princípios matemáticos.

Os trabalhos, aqui revistos, enfatizaram a importância da utilização dos conceitos e princípios na solução de determinados problemas escolares. A solução de problemas, em determinados casos, torna-se facilitada quando a solução é dirigida e há uma compreensão mais efetiva sobre quais tipos de erros são cometidos com maior freqüência.

A compreensão do processo de solução de problemas, especialmente os referentes aos problemas geométricos escolares, é de grande importância . A análise do conhecimento do professor sobre esses tópicos é importante e tem sido tema de várias pesquisas, dentre elas pode ser citado o trabalho de Swafford, Jones e Thornton (1997) que estudaram os efeitos da instrução, usando um programa de intervenção que era destinado a incrementar o conhecimento dos professores de quarta a oitava séries sobre geometria. Quarenta e nove professores participaram de um curso durante quatro semanas. Os autores partiram do pressuposto de que é baixo o conhecimento dos professores do ensino fundamental e médio e dos alunos dos cursos de formação de professores e que existem poucas pesquisas sobre a percepção dos docentes sobre o conhecimento que os estudantes tiveram em geometria ou o impacto desse conhecimento sobre a instrução. O modelo adotado assumia que a prática instrucional era influenciada pelo conhecimento do professor, tanto no que diz respeito aos aspectos de conteúdo, como no que diz respeito aos aspectos do conhecimento dos estudantes. Com relação ao aspecto conhecimento do professor a respeito do conhecimento dos alunos, Swafford et al. (1997) mostraram que não bastava apenas o professor saber o conteúdo a ser trabalhado na sala de aula, mas deveria também entender o pensamento dos estudantes sobre os conteúdos aprendidos. O estudo demonstrou que um programa de intervenção para aumentar o conhecimento do professor sobre geometria e o seu conhecimento a respeito da cognição dos estudantes poderia influenciar a prática instrucional. Nesse mesmo estudo, os dados de oito professores foram analisados com maior detalhamento. Esses professores, após o programa, apresentaram mudanças significativas sobre o *que ensinar e como ensinar*. Os autores atribuíram essas mudanças à ampliação do conhecimento sobre geometria e do conhecimento dos professores a respeito do pensamento dos estudantes.

Esses resultados estão de acordo com aqueles obtidos por Hershkowitz e Vinner (1984) (conforme citado em Swafford, Jones e Thornton, 1997) que mostraram que os estudantes e seus professores (de quinta a oitava séries) exibiam erros e falsa compreensão em geometria, revelando baixo nível de conhecimento sobre as figuras geométricas e os seus atributos. Esses resultados também foram observados em um estudo no Brasil por Pirola (1995) que mostrou que os alunos das quatro últimas séries do ensino fundamental da escola estudada, apresentavam baixo conhecimento sobre os aspectos definidores, exemplos e não-exemplos das figuras geométricas básicas

O estudo desenvolvido por Ruti (1999) mostrou a importância de o professor conhecer os processos de pensamento dos alunos em situações-problema. Usando o estudo de caso com 6 professores (de primeira à terceira série), estudaram o desenvolvimento do pensamento das crianças, em situações de solução de problemas, a partir de várias pesquisas atuais. Os professores aprenderam também a ouvir as crianças, na tentativa de compreender os processos de solução de problemas. A pesquisa foi realizada a partir de 100 observações de sala de aula, além de entrevistas com professores e pequenas reflexões escritas dos mesmos. A análise dos dados mostrou que cinco professores mudaram suas crenças e comportamentos de sala de aula. Através dos estudos realizados, os professores começaram a perceber que as crianças podiam, muitas vezes, aprender os conceitos matemáticos sem uma instrução dirigida. O professor não é mais visto como a pessoa que transmite os conhecimentos a seus alunos, mas um condutor da aprendizagem.

Outro estudo que revelou um baixo conhecimento de alunos com relação aos conceitos básicos da geometria foi o de Brito, Lima, Pirola, Utsumi, Mendes e Alves (1998). Os dados obtidos com sessenta estudantes de primeiro e segundo anos do ensino médio mostraram que esses apresentavam conceitos no nível de identidade, ou seja, não conseguiam formar categorias para diferentes tipos de quadriláteros. Os mesmos resultados já tinham sido obtidos em um outro estudo envolvendo o conceito de triângulo desenvolvido por Brito, Pirola e Lima (1997). Nesse estudo, com 32 alunos de 5ª série de uma escola particular, foi observado que a maioria deles apresentou dificuldades para trabalhar no nível classificatório.

Outhred e Michelmore (2000) relataram alguns resultados obtidos em testes escolares aplicados nos Estados Unidos, evidenciando um baixo conhecimento dos estudantes de sétima série com relação ao conceito de área e perímetro, mostrando que a maioria desses sujeitos fazia confusão entre esses dois conceitos. Esses testes mostraram que muitos sujeitos conseguiram calcular a área do retângulo quando eram dadas as suas dimensões, mas somente 13% conseguiram solucionar o problema quando era solicitado a área do quadrado, sendo dado a medida do lado.

É importante que o professor, no processo de ensino dos conceitos, leve em consideração as propriedades e os atributos relevantes e irrelevantes do conceito estudado. Para isso é necessário que os cursos de formação de professores abordem temas relacionados à aprendizagem da geometria, como, por exemplo, o papel da visualização no ensino-aprendizagem da geometria espacial.

Castro et al. (1998) pesquisaram as habilidades básicas para o desenvolvimento do pensamento espacial e a influência da visualização e da percepção das formas geométricas na construção das imagens mentais. Os sujeitos do estudo foram estudantes com idades entre 16 e 17 anos de uma escola particular do Rio de Janeiro. Foram desenvolvidas atividades baseadas na teoria de Van Hiele e Hofer. A análise dos dados mostrou que nas atividades, os estudantes podiam transferir a aprendizagem de uma situação para outra sem a presença de ilustrações geométricas. Além da importância da visualização, os autores destacaram que os estudantes podiam trabalhar com representações das ilustrações para solucionar problemas.

Hershkowitz, Bruckheimer e Vinner (1987), baseados nas teorias cognitivas, realizaram estudos, envolvendo estudantes e professores, sendo que um destes teve como sujeitos 518 estudantes de 5ª e 8ª séries, 142 alunos de curso de formação de professores da escola elementar e 25 professores de uma escola de Israel. O objetivo foi comparar imagens dos conceitos geométricos presentes na estrutura cognitiva. Os conceitos investigados nesse estudo foram ângulo e altura do triângulo. A atividade envolvendo o conceito de ângulo, consistia no reconhecimento de uma figura, sendo que os sujeitos deveriam reconhecer quais pontos eram interiores ao ângulo. O resultado mostrou que menos da metade dos estudantes conceituou o ângulo como sendo uma entidade infinita. Com relação aos professores, um pouco mais da metade deles, 68% dos professores em formação e 55% dos professores já formados, tinham o conceito correto de ângulo. A outra atividade envolvendo o conceito de altura do triângulo, consistiu em traçar a altura de um triângulo obtusângulo e também traçar diagonais de polígonos não-convexos. Nessa atividade, muitos professores e alunos desenharam medianas ao invés de alturas e também traçaram diagonais internas no polígono (53% dos estudantes e 49% dos professores desenharam uma semi-reta unindo um vértice ao lado oposto num determinado polígono não convexo).

Um outro estudo (realizado com o objetivo de analisar o conhecimento dos estudantes de um curso de formação de professores sobre alguns conceitos básicos da geometria) foi conduzido por Lawrie e Pegg (1997). O objetivo foi identificar o nível conceitual dos sujeitos utilizando o teste de Mayberry, anteriormente desenvolvido para diagnosticar os níveis de Van Hiele. O teste foi aplicado, durante entrevista individual, com sessenta professores das quatro primeiras séries do ensino fundamental e constava de questões sobre os seguintes conceitos de geometria: quadrado, triângulo retângulo, triângulo isósceles, círculo, linhas paralelas, congruência e semelhança. Os resultados mostraram que a maioria dos estudantes se encontrava no nível dois de Van Hiele, ou seja, os estudantes conseguiam listar propriedades a respeito dos conceitos solicitados, mas não conseguiam estabelecer relações entre essas propriedades.

Um outro estudo, baseado nos níveis de Van Hiele, foi conduzido por Saads e Davis (1997) que investigaram conceitos de geometria tridimensional e habilidade espacial apresentados por vinte e cinco estudantes, envolvidos em um curso de treinamento de professores do ensino médio, tendo sido estudado a linguagem empregada na identificação das propriedades dos poliedros, os níveis de Van Hiele e as categorias da percepção espacial propostas por Del Grande. Foi verificado que a descrição oral de certas formas geométricas dependia da combinação do nível geométrico geral, da habilidade espacial e da habilidade para expressar as propriedades das formas através da linguagem. O estudo confirmou a natureza hierárquica dos níveis de Van Hiele, sendo que a avaliação da percepção espacial de Del Grande não apresentou natureza hierárquica.

Patkin e Millet (1997) também utilizaram os níveis propostos por Van Hiele, ao trabalhar em programas de educação de professores. Com o objetivo de verificar as possíveis mudanças de trinta professores, em relação aos conceitos geométricos, ao conceito de pesquisa e avaliação em matemática, os autores constataram que o programa de formação de professores proposto havia resultado em uma melhoria do desempenho em geometia e no conceito de pesquisa. Além disso, estes professores se saíram bem na criação de avaliações alternativas em geometria.

Um aspecto importante, evidenciado no estudo anterior, é a questão da avaliação do conhecimento em geometria. Pode-se correr o risco de considerar, como ideal, apenas a avaliação de geometria que requer a memorização de fórmulas. Isso é um equívoco, pois outros aspectos devem ser solicitados em uma avaliação como, por exemplo, a criatividade na solução de problemas geométricos.

Afonso, Caramacho e Socas (1999) compararam a situação de um grupo de professores a respeito de suas experiências e comportamento em situações de ensino e de aprendizagem de geometria. Analisaram se o perfil do professor, em questão, estava ou não de acordo com o proposto na reforma educacional da Espanha, cujo ensino de geometria era baseado em Van Hiele. Os sujeitos da pesquisa foram seis professores de matemática com mais de dez anos de experiência no ensino. Os instrumentos usados para a coleta de dados foram testes para avaliar o nível de raciocínio geométrico, entrevistas e gravação de aulas. A metodologia usada era essencialmente qualitativa e a análise dos resultados mostrou que os professores utilizaram estilos diferentes para conduzir suas aulas. Três professores utilizaram um estilo investigativo ao invés do tradicional, dois utilizaram o estilo tecnológico e um professor utilizou os dois estilos, tradicional e tecnológico, ao mesmo tempo. Os autores concluíram que o sistema de reformas educacionais da Espanha, envolvia mudanças significativas no treinamento de professores, sendo que esses programas não deveriam ser baseados somente em uma série de receitas de como conduzir o ensino baseado em Van Hiele, mas baseado na interpretação, justificativa e orientação a partir dos resultados de sua prática.

Santos (1997), considerando a importância de programas de capacitação para professores que estão atuando no ensino fundamental e médio, estudou a influência desses sobre o comportamento, as ações, as crenças, as avaliações e as atitudes dos professores. A pesquisadora salientou também que, através desses programas, os professores começaram a utilizar a própria sala de aula como um laboratório experimental para a implantação de mudanças no ensino de matemática, podendo refletir melhor sobre os problemas e dificuldades enfrentados pelos alunos. Para se alcançar um ensino que priorize a aprendizagem significativa, os currículos atuais, principalmente os de geometria, deveriam valorizar a formação conceitual e as situações-problema.

Carrol (1998), através de um estudo sobre o conhecimento geométrico, investigou as diferenças, em termos conceituais, presentes entre os estudantes que utilizaram um currículo diferenciado (76 alunos da 5ª série e 109 da 6ª série) e estudantes que utilizavam o currículo tradicional (91 alunos da 5ª série e 137 alunos da 6ª série). Baseado em estudos comparativos entre países, mostrando que os alunos americanos têm uma fraca compreensão e aplicação dos conceitos geométricos, o currículo diferenciado enfatizava a solução de problemas geométricos e tanto o pré como o pós-teste foram construídos usando os níveis de Van Hiele como referência. Os resultados mostraram que os alunos, que utilizaram o currículo diferenciado, tiveram um desempenho superior nas atividades propostas, quando comparados com aqueles, que utilizaram o currículo tradicional. O autor salientou que os resultados do estudo forneceram um quadro otimista para o desempenho em matemática, pois essa realização pode ser fortemente influenciada por mudanças no currículo.

Gal (1998) também procurou investigar o conhecimento dos professores a respeito de alguns conceitos básicos da geometria plana, incluindo o conceito de bissetriz e mediana. Foram sujeitos da pesquisa sete alunos de um curso de formação de professores e a coleta de dados foi feita mediante: a observação de algumas lições sobre o conceito de bissetriz e as dificuldades nas definições; discussão com os professores sobre a lição dada; observação da lição após uma entrevista; conversa com o professor. Os resultados mostraram que esses professores, em suas aulas, não indicavam obstáculos especiais em classe, não manifestando preocupação com os níveis de pensamento dos estudantes.

Além desses aspectos, na formação de professores, uma outra área de pesquisa, envolvendo cursos de treinamento, refere-se às fases de solução de problemas e quais os procedimentos e estratégias empregados.

Em estudos sobre esses aspectos, Chinnappan e Lawson (1996) analisaram, usando grupo controle e experimental, quais eram as estratégias pelos estudantes na solução de problemas geométricos e concluíram que o grupo que havia recebido treinamento teve desempenho significativamente melhor que aqueles que não o haviam recebido. Em uma das atividades utilizadas no experimento, um triângulo retângulo era mostrado ao sujeito. O aluno, inicialmente era treinado para prestar atenção às características relevantes para a determinação do valor *x*. Eram feitos os seguintes questionamentos: *leia o problema, identifique os dados da figura; releia o problema, o que você pode encontrar? o que você poderia tentar utilizar para encontrar o valor de x, a partir dos dados do problema?*

Isto parece semelhante ao que ocorre nas aulas de matemática quando é dado um problema ao aluno e ele faz a seguinte pergunta: "O que é para fazer?" Isto indica que a primeira parte ressaltada pelos autores acima não foi considerada, ou seja, primeiramente deve haver uma leitura do problema e a seguir a identificação dos dados relevantes para a solução. Muitas vezes, é possível que a dificuldade de interpretação da proposição dos problemas pode estar relacionada às habilidades verbais dos estudantes.

As relações entre a solução de problemas (que evidenciam o raciocínio matemático) e o desempenho verbal dos alunos foram estudadas por Brito, Fini e Garcia (1994) que utilizaram como fundamentação, a teoria das habilidades matemáticas de Krutetskii (1976). Através de um estudo exploratório, com sessenta alunos do curso de graduação em matemática, envolvendo doze problemas de natureza aritmética e algébrica, bem como através de um teste de raciocínio verbal, verificaram que esse apresentou alguma relação com o fator matemático geral, através da análise dos componentes principais. Nesse estudo, concluiu-se também que provavelmente a compreensão verbal do enunciado do problema seja anterior à compreensão da natureza matemática do problema. Verificou-se, portanto, que é necessário um mínimo de habilidade verbal para uma maior compreensão da natureza matemática do problema.

Nessa mesma perspectiva, Alves (1999) realizou um estudo exploratório dos componentes da habilidade matemática, requeridos na solução de problemas aritméticos, por estudantes do ensino médio. Utilizando a teoria de Krutetskii (1976), utilizou, como sujeitos da pesquisa, 53 estudantes concluintes do ensino médio de uma escola pública. Foi verificado que os sujeitos apresentaram maior dificuldade no primeiro estágio da solução de problemas, em que ocorre a obtenção da informação matemática a partir do enunciado verbal.

Utilizando problemas das séries desenvolvidas por Krutetskii (1976) e tendo como objetivo analisar alguns conceitos já aprendidos e as suas competências em solucionar problemas, Brito et al. (1997), conduziram um estudo com 410 sujeitos da quinta série do ensino médio. Foi verificado que os problemas envolvendo geometria foram aqueles com menor número de acertos, sendo que um problema, que envolvia o conceito de perímetro, teve apenas 8,3% de acerto, o que revelou uma grande dificuldade, por parte dos alunos, em trabalhar com esse conceito e com as transformações do sistema métrico decimal. Foi verificado também que, ao solicitar ao aluno o nome do quadrilátero que tem todos os lados iguais, apenas 12,9% dos alunos acertaram, evidenciando que alguns alunos não conseguiam fazer a inclusão de classes das figuras geométricas. Além disso, foi constatado que existiam diferenças significativas ($p \leq 0,050$) quando era considerada a variável idade, sendo que os sujeitos com onze anos apresentaram desempenho superior aos outros grupos (12, 13 e 14 anos).

A habilidade verbal também foi tema de investigação de Hershkowitz, Bruckheimer e Vinner (1987). Em um estudo realizado com 518 alunos de 5ª e 8ª séries, 142 professores em formação e 25 professores formados, foi investigado o papel da definição verbal na formação de conceitos relevantes. Foi utilizado o conceito artificial de *"bitrian"* (forma geométrica formada por dois triângulos tendo um vértice comum). O resultado para professores e alunos foram muito parecidos em ambas as atividades e, em relação a algumas figuras, os estudantes tiveram uma média de acerto maior que a dos professores.

Cooney e Swanson (1990), trabalhando com 35 estudantes universitários concluiram que os processos subjacentes à memória de curto prazo são importantes fontes de diferenças individuais na percepção de problemas, na habilidade para eliminar informações não relacionadas a partir de representações mentais do problema matemático e nas habilidades para integrar informações relativas à representação do problema.

A revisão dos estudos apresentados apontou para a idéia que tanto professores como alunos parecem não ter conhecimento sobre as definições, as propriedades e as relações entre as figuras geométricas elementares. Além disso, muitos professores parecem não dominar o conteúdo específico de geometria e isso determina, em muitos casos, a aprendizagem maior ou menor dos estudantes. Parece também que os problemas com informações insuficientes não são familiares aos estudantes, sendo que os problemas bem estruturados parecem ser os mais familiares.

Viana (2000) avaliou o conhecimento geométrico de alunos do curso CEFAM (Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério) sobre figuras tridimensionais mais comuns – que deveriam ser, de acordo com várias propostas curriculares, objetos de estudo das séries iniciais do Ensino Fundamental. Foram sujeitos da pesquisa 377 alunos das quatro séries do CEFAM. Além de serem avaliados com relação ao desempenho, os alunos foram classificados de acordo com os graus de aquisição dentro dos níveis de conceituação propostos por Van Hiele. Foi observado que a maioria dos alunos – que admitiu não estar preparada para ensinar geometria espacial – foi classificada nas categorias referentes a não-aquisição, baixa e média aquisição dos Níveis 1 (reconhecimento e nomeação de figuras) e 2 (análise de propriedades), estabelecidas a partir da porcentagem de acertos das questões selecionadas para representar cada nível.

As pesquisas citadas anteriormente estão em consonância com a realidade encontrada no projeto de Educação Continuada - convênio da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, Universidades e Banco Mundial. O principal objetivo do projeto foi, durante um ano e meio, através de módulos, dar subsídios aos professores das escolas da rede Oficial de Ensino do Estado de São Paulo, para trabalhar, de maneira significativa, os conteúdos de Matemática. O projeto, (Brito, 1996) foi elaborado de tal forma a contemplar os dois aspectos salientados na pesquisa de Swafford, Jones e Thornton (1997): conteúdos de Matemática e a importância do conhecimento sobre os aspectos cognitivos dos estudantes.

Em um primeiro módulo foi trabalhado, dentro do sub-projeto Psicologia da Educação Matemática, o tema *"o professor como pesquisador em sala de aula"*. O objetivo do módulo era discutir com os professores a importância de ser um pesquisador em sala de aula, no sentido de investigar os principais problemas que estão envolvidos no ensino aprendizagem de Matemática e que se manifestam em sala de aula. Os professores foram solicitados a responder um questionário como parte das atividades. A análise desses instrumentos revelou que: a) os professores, muitas vezes, dominavam os conteúdos de álgebra e aritmética, mas não compreendiam porque seus alunos não aprendiam os conceitos ensinados; b) a maioria dos professores não dominava os conceitos básicos da geometria, principalmente os relativos à inclusão de classes das figuras geométricas. Foi verificado que uma grande parte dos professores não compreendia o princípio *"todo quadrado é um retângulo"*, ou seja, não estabelecia a relação entre o conjunto dos quadrados e o conjunto dos retângulos; c) ensinavam geometria, enfatizando a aplicação das fórmulas; d) acreditavam que a dificuldade para trabalhar com a solução de problemas ocorria porque os alunos apresentavam muita dificuldade na interpretação do enunciado dos problemas.

É importante salientar que foi dada ênfase ao tópico solução de problemas, sendo que, em um segundo módulo, foram tratados a formação de conceitos em Matemática e o uso de princípios para a solução de problemas.

Ao final do módulo, os professores relataram que, além de ganhos em termos de conhecimentos sobre conteúdos, também houve ganhos em termos de aprendizagem, atribuindo esse incremento ao interesse, por parte dos professores, em saber sobre o processo de aquisição do conhecimento por parte dos alunos. Esse resultado corrobora os obtidos por Swafford et al. (1997).

Finalizando, cabe uma palavra a respeito da importância da transferência da aprendizagem, pois no trabalho com solução de problemas junto aos alunos, não basta apenas o domínio dos conteúdos (conceitos e princípios), mas também a transferência daquilo que foi aprendido para novas situações.

CAPÍTULO IV

A FORMAÇÃO EM GEOMETRIA NO CURSO DE MAGISTÉRIO E NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

É claro que falta a muitos professores um profundo entendimento das matérias que lecionam, e alguns não são motivados para aumentá-lo.
(Gardner, 1999, p. 159)

Muitos professores que estão atuando no ensino de Matemática afirmam que os cursos de Licenciatura em Matemática não forneceram o suporte metodológico e, em alguns casos, nem mesmo o teórico, para que atuassem no ensino fundamental e médio. Parece que a situação não é muito diferente com aqueles professores que estão atuando (ou vão atuar) no ensino fundamental (1ª a 4ª séries).

Em 1996, período em que os cursos de Magistério foram analisados, a preparação dos profissionais que iriam atuar no ensino fundamental (1ª a 4ª séries) estava a cargo de algumas escolas estaduais e do CEFAM (Centros Específicos para a Formação de Alunos do Magistério). A duração desses cursos era de quatro anos e correspondia ao ensino de nível médio. A grade curricular desses cursos era formada por uma parte de disciplinas do núcleo comum, como Língua Portuguesa, Matemática, Química, Física, Biologia, História, Geografia e Educação Artística. Algumas dessas disciplinas não estavam presentes em todos os anos escolares, sendo ministradas somente no primeiro ano, considerado como básico. Além dessas disciplinas aparecem também as disciplinas pedagógicas, formadas pela Psicologia, Conteúdos Metodológicos de Matemática e Ciências, Conteúdos Metodológicos de Língua Portuguesa, Conteúdos Metodológicos de Estudos Sociais, Conteúdos Metodológicos de Educação Artística e Educação Física, Conteúdos Metodológicos de História e Filosofia da Educação.

Com relação à Matemática, a maioria dos cursos ofertava essa disciplina durante os quatro anos de formação do futuro profissional, mas os professores, que lecionavam Matemática para esses cursos, não seguiam, aparentemente, um programa definido. O que muitos professores pareciam desconhecer é que deveria haver uma integração entre os conteúdos que visam a formação geral do indivíduo, dando subsídios para ele prosseguir nos seus estudos, e os conteúdos que visam capacitar os futuros professores para atuarem no ensino fundamental.

A Proposta Curricular de Matemática para o CEFAM e Habilitação Específica para o Magistério (HEM) (São Paulo, 1990) afirma que o curso de HEM deve conter temas, que contribuam para a formação geral do indivíduo, levando-o à reflexão mais aprofundada sobre o que é a Matemática e suas contribuições para a compreensão da realidade. Nesse sentido, os conteúdos de geometria, estatística, funções e problemas de contagem devem ser ensinados não somente para fornecer subsídios para que os alunos prossigam seus estudos, mas para a autonomia do indivíduo frente à sociedade. Os conteúdos de Números, Medidas e Geometria deveriam ser ensinados enfocando os conteúdos básicos que os futuros professores trabalharão, em sala de aula, no ensino fundamental.

A proposta curricular para o ensino de matemática do CEFAM e Habilitação Específica do Magistério salienta a importância do ensino de geometria, nos cursos de Magistério, enfatizando a relevância da geometria na solução de problemas da vida prática, dentre eles o cálculo de áreas, de perímetros, de volumes etc.. A Proposta salienta, ainda que:

> *Por que ensinar geometria na HEM? Para que o futuro professor possa desenvolver em si mesmo e, futuramente, em seus alunos habilidades de observação, percepção espacial, argumentação, representação gráfica, habilidades lógicas e inter relacionar o*

> *estudo de Geometria com outros campos de conhecimento, instigando idéias, propondo aplicações práticas para que seus alunos possam enfrentar problemas reais que são, em geral, de natureza interdisciplinar. Além disso, mesmo no ensino de números, são empregados modelos geométricos que devem ser dominados e por outro lado, esquemas geométricos podem auxiliar a visualização de certos problemas e propriedades(São Paulo, 1990, p.117)*

Além disso, a proposta considera a presença da geometria de fundamental importância em todos os anos escolares. Os conceitos são distribuídos, ao longo das séries, da seguinte forma.

Tabela 1 : Distribuição dos conceitos nas séries da HEM

1ª série	2ª série	3ª série	4ª série
Números	Números: Campos Numéricos	Problemas de Contagem	Projetos de Resolução de Problemas e de História de Matemática
Geometria	Geometria	Geometria	Sistematização da Geometria
Estudo informal de Estatística e Funções	Estatística e Funções	Funções	

(Extraída da Proposta Curricular de Matemática para o CEFAM e HEM). (São Paulo, 1990, p.14)

Na primeira série, a proposta curricular sugere que seja feita a retomada dos conceitos básicos da geometria estudados no ensino fundamental. Após este primeiro estágio, os conteúdos de geometria do ensino médio são introduzidos. Tradicionalmente, tanto a maioria dos livros didáticos, como vários professores, procuram ensinar a geometria enfatizando a geometria plana, pois essa é considerada o pré-requisito para a aprendizagem da geometria espacial.

A proposta busca mostrar que é importante (e de fundamental relevância) a realização de um trabalho que faça a passagem não do plano para o espacial, mas do espacial para o plano. Assim, através de objetos tridimensionais, é possível realizar o estudo das figuras planas, seus conceitos e propriedades usando planificações. Essa é a principal tônica da geometria da primeira série da HEM e CEFAM. Através dos poliedros, é possível realizar um estudo mais detalhado sobre as propriedades das figuras planas.

Em um primeiro momento, a proposta sugere que sejam trabalhados os aspectos históricos do desenvolvimento dos conceitos geométricos. O estudo dos poliedros pode ser iniciado a partir do relato de fatos interessantes da História da Matemática. Através do estudo dos sólidos geométricos, é possível construir conceitos como a posição relativa de duas retas. Pela observação das arestas é possível identificar pares de retas paralelas, concorrentes e reversas; a partir da posição relativa de dois planos, é possível estudar o poliedro, possibilitando a análise dos pares de planos que são paralelos e os que são concorrentes, procurando compreender que a intersecção de dois planos é uma reta.

O estudo da posição relativa de retas e planos também é importante. Nesse tópico observa-se que uma reta pode ser paralela a um plano, perpendicular ou secante.*"No caso da exploração do perpendicularismo entre reta e plano, um esquadro, um lápis e uma folha ilustram bem tanto a definição como algumas propriedades" (São Paulo, 1990, p. 127).*

No estudo do conceito e das propriedades das figuras planas, através de planificações dos sólidos geométricos - prismas e pirâmides - é possível realizar um aprofundamento sobre os seguintes conceitos: polígonos, figuras planas e não-planas, figuras convexas e não-convexas, soma dos ângulos internos de um polígono, áreas, volumes e etc. No curso de formação de professores, que atuarão no ensino básico, é relevante que o docente consiga formar significativamente os conceitos de geometria para que possam construí-los a partir da observação e manipulação dos objetos tridimensionais.

O objetivo do trabalho da geometria, na segunda série, é estender e aprofundar os conceitos que já foram desenvolvidos na série anterior. *"O que se pretende é* *que, a partir desta série, o aluno comece a ter um maior contato com a formalização de propriedades e teoremas geométricos. Entretanto, isto não significa abandonar o processo experimental de estímulo à intuição e às conjecturas" (São Paulo, 1990, p. 157).*

Os principais conceitos a serem trabalhados nesta série são: ângulos, polígonos, triângulos, quadriláteros, área, perímetro, volume e semelhança.

A terceira série é dedicada ao estudo da circunferência e dos corpos redondos. Os principais conceitos desenvolvidos nesta série são: circunferência e círculo, cone, cilindro e esfera. Através de trabalhos experimentais, o professor poderá ensinar o processo utilizado para a obtenção da fórmula do cálculo da área do círculo e do comprimento da circunferência. Além disso, as planificações de cilindros e cones podem auxiliar os alunos a compreenderem os procedimentos utilizados na obtenção das fórmulas para o cálculo de áreas superficiais e de volume.

Na quarta série são desenvolvidos os projetos envolvendo os conceitos aprendidos nas séries anteriores. A metodologia usada é a da solução de problemas e/ou História da Matemática.

O Ensino de área, Perímetro e Volume.

É importante analisar que o estudo de área, perímetro e volume não se restringe a uma única série, de acordo com a proposta curricular. A cada série esses temas são retomados e aprofundados. Na primeira série, a ênfase encontra-se no conceito de área. Através do trabalho com malhas triangulares e quadrangulares, é possível encontrar área de diferentes figuras. Após o trabalho com esse conceito, é proposta a formalização da área do quadrado e do retângulo, bem como o cálculo da área da superfície de alguns poliedros compostos por estas figuras, como por exemplo, a área da superfície do cubo e do paralelepípedo retângulo e depois planificá-los para constatar que a área total da superfície não se altera com esse processo.

Uma das grandes dificuldades encontradas por alunos de diferentes séries do ensino fundamental e médio é a diferenciação entre área e perímetro. Em muitos casos, em que é solicitado encontrar a área de uma figura, o aluno encontra o perímetro. Vale ainda acrescentar que a relação entre área e perímetro, muitas vezes, não é estabelecida. Muitos alunos, e até mesmo professores, acreditam que se duas figuras têm o mesmo perímetro, necessariamente têm a mesma área. A proposta curricular salienta que este fato se deve, em grande parte, pela forma com que estes dois conceitos, área e perímetro, foram trabalhados, que normalmente são desvinculados uns dos outros. *"É preciso compreender que é no confronto destes dois conceitos que os alunos aprendem a distingui-los" (São Paulo, 1990, p. 150).*

Uma atividade interessante que pode ser trabalhada com os estudantes (futuros professores), e que estes poderão trabalhar também com seus alunos para a diferenciação entre o conceito de área e perímetro, é a seguinte:

Pedir que cada aluno desenhe em um papel quadriculado um retângulo com perímetro 30cm. A seguir, o professor organiza na lousa, a seguinte tabela:

Comprimento	Largura	Perímetro (cm)	área (cm^2)

(Atividade extraída da página 150, São Paulo, 1990)

A tabela mostrará que retângulos de mesmo perímetro podem ter áreas diferentes. O professor poderá variar esta atividade, fixando a área.

A introdução do conceito de volume, na primeira série da HEM, segue o mesmo procedimento adotado para a introdução do conceito de área e perímetro. Trabalhando com um cubo unitário, é possível chegar à conclusão de que o volume pode ser entendido como a quantidade de cubos unitários que preenchem um determinado sólido geométrico.

A proposta curricular observa que é importante trabalhar com atividades de preenchimento em que é dado um cubo unitário e um outro cubo qualquer e pede-se, então, para que o aluno verifique quantos cubos unitários são necessários para preencher o cubo dado. É importante acrescentar que as atividades devem ser variadas. Torna-se necessário dar cubos, em que não é possível preenchê-lo com um número inteiro de cubos unitários, levando o estudante a subdividir o cubo unitário em unidades menores.

Na segunda série, o trabalho com área, perímetro e volume deve complementar o estudo iniciado na primeira série. Aqui, é trabalhado a formalização da área de triângulos e quadriláteros, utilizando alguns teoremas já aprendidos. A composição e decomposição de figuras, para se trabalhar com o conceito de área, é de fundamental importância (pode ser utilizado o tangram como atividade de composição e decomposição de figuras). O volume de prismas e pirâmides é trabalhado através da compreensão do princípio de Cavalieri.

Na terceira série, é introduzido o estudo do círculo e da circunferência e também o estudo de seu perímetro e área. Nessa série são introduzidas atividades para calcular áreas de figuras que não possuem uma fórmula pronta (trabalho com papel quadriculado). O estudo do volume é direcionado aos corpos redondos: cilindros, cones e esferas.

A quarta série da HEM é destinada a projetos envolvendo história da Matemática e solução de problemas matemáticos, podendo estar relacionados aos conceitos de área, perímetro e volume.

Uma análise mais aprofundada sobre os conteúdos de geometria, contidos na proposta curricular, mostra uma preocupação com o ensino desta parte da Matemática tão menosprezada por uma maioria de professores. Esses conteúdos devem ser estudados no curso da HEM, preparando o futuro professor para atuar no ensino fundamental, já que as crianças aprendem os conceitos de área, perímetro e volume nessas séries. É importante analisar que não há uma preocupação excessiva com a aplicação de fórmulas, mas com o conceito. As crianças, nas séries iniciais, deveriam formar corretamente os conceitos de maneira a adquirir os princípios necessários à solução de problemas.

O exposto anteriormente refere-se ao programa de geometria considerado ideal para a formação do futuro professor, que atuará nas séries iniciais do ensino fundamental, mas não é assegurado o cumprimento desse programa pelas escolas de formação de professores.

Este fato foi observado através da análise de seis programas de Matemática das escolas da Diretoria de Ensino de São João da Boa Vista que possuem o curso de HEM, bem como alguns programas da disciplina Conteúdos Metodológicos de Ciências e Matemática - CMCM.

Através de contatos com a Diretoria de Ensino de São João da Boa Vista, foram solicitados os planos de ensino de Matemática e de CMCM das seis escolas que ofereciam o curso de magistério, sendo os mesmos apresentados a seguir.

<u>ESCOLA 1: Análise do 3º Magistério - Matemática</u>: Os conteúdos trabalhados, nessa escola, em Matemática são: geometria analítica, sistema de coordenadas, distância entre dois pontos, estudo da reta, estudo da circunferência. É feito também um estudo sobre os polinômios, equações algébricas, números complexos e noções de matemática financeira. O professor responsável desta série coloca, ainda, como conteúdo, revisão para o vestibular e estudo dos números decimais.

Em relação à disciplina CMCM, os objetivos específicos salientados pelo professor da série são: *" A metodologia de Ciências e Matemática tem como objetivo principal levar e oferecer ao " futuro" professor a importância da Ciências e da Matemática mostrando-lhes que ambas não devem ser vistas apenas como uma "matéria" a mais no currículo escolar e sim o seu significado e sua importância teórico-prática no decorrer do ensino - aprendizagem desde o primeiro ciclo".* Os principais temas a serem trabalhados nesta série são: 1- Estudo da Proposta Curricular de Ciências e Matemática; 2- Por que ensinar Ciências desde o primeiro ciclo? 3- Como aplicar os conteúdos e as atividades de Ciências desde o primeiro ciclo? 4- O lugar da Matemática no Currículo escolar; 5- Recursos didáticos; 6- Classificação, Seqüência, números naturais e geometria; 7- Conteúdos teóricos do primeiro e segundo ciclos; 8- A Ciência feita em casa; 9- A Ciência calma e a Ciência agitada; 10- Como proceder o trabalho de Ciências durante o ano letivo; 11- A Matemática e seus mistérios; 12- Jogos e atividades Matemáticas e sua importância na aprendizagem da criança; 13- O que planejar, para que planejar e para quem planejar; 14 - A exploração da criatividade e da capacidade lógico-matemática da criança ao realizar atividades matemáticas.

É importante observar que nos planejamentos não constam a carga horária de cada disciplina e, em CMCM, a parte dedicada à Matemática ocupa, aproximadamente, 35,7% dos temas tratados, sendo que a geometria só aparece em um tema. Não consta do planejamento quais seriam os conteúdos estudados em geometria. Já na disciplina Matemática houve uma preocupação em se trabalhar a geometria analítica e outros conteúdos da Matemática do ensino médio. Não houve preocupação em se estudar conteúdos relacionados às séries iniciais (com exceção de números decimais e frações que constam no planejamento de matemática). Não foi colocado em nenhum momento o estudo de áreas, perímetros e volumes.

<u>ESCOLA2: Matemática - 3º Magistério -</u> Nessa série, o professor responsável coloca como objetivos gerais do ensino de matemática: *A Matemática tem como objetivo desenvolver nos alunos as seguintes capacidades: compreensão dos conceitos, sintetização, abstração, generalização, discriminação, comparação e memorização. A matemática também se preocupa com o desenvolvimento do raciocínio lógico e deve se constituir em um instrumento útil para a compreensão da realidade".* É interessante observar que em nenhum momento se propõe preparar o professor para atuar nas séries iniciais.

São ministradas três aulas semanais e os principais conteúdos a serem trabalhados são: frações, números decimais, polígonos, áreas e perímetro. No planejamento, é ressaltado que o estudo de áreas e perímetro deve ser realizado com materiais concretos, como os blocos geométricos. Nesta série, a geometria se constitui em 50% dos conteúdos estudados. Já em CMCM, com 4 aulas semanais, ministrada no quarto ano de magistério, o objetivo é: *"Levar o futuro professor ao domínio do conteúdo programático de Ciências e Matemática a ser desenvolvido nas quatro primeiras séries do ensino fundamental para que possa adotar uma metodologia, fundamentada nas respectivas propostas curriculares".* Os principais temas tratados são: 1- proposta Curricular de Ciências e Matemática; 2-

noções de Números Naturais; 3- exploração sensorial dos objetos; 3- sistema de numeração decimal e operações; 4- noção de polígonos, quadriláteros e perímetro de figuras planas; 5- divisibilidade; 6- porcentagem; 7- medidas de capacidade e de massa; 8- área do retângulo, triângulo e trapézio.

Percebe-se que, nessa série, áreas e perímetros são trabalhados, bem como as medidas de capacidade. É importante salientar que analisando os objetivos específicos da série, o que fica evidente é a análise das propostas curriculares e os conteúdos trabalhados em cada série, mas não são propostas formas de trabalho com os conteúdos. Um dos objetivos específico diz: *"Fazer com que o aluno se aprofunde no estudo das propostas referentes à quarta série, adotando uma atitude crítica relativa às estratégias utilizadas"*.

ESCOLA 3: Disciplina de CMCM - terceiro e quarto anos do curso de HEM - Os principais temas desenvolvidos nestas séries são: 1- proposta Curricular para a Educação Infantil; 2- aquisição do conhecimento físico pela criança; 3- aquisição do conhecimento lógico-matemático; 4- proposta curricular para o ensino de Matemática e Ciências; 5- reflexões sobre o conteúdo a ser desenvolvido com as crianças e a correspondente adequação das metodologias de ensino praticadas.

Não foram encontrado registros sobre os processos utilizados para o ensino dos conceitos matemáticos, em especial os de Geometria.

ESCOLA 4: Disciplina de CMCM - terceiro ano de HEM - Nessa escola o professor responsável considera importante desenvolver os seguintes temas: 1- Importância da Matemática e Ciências; 2- Conceitos referentes a grandeza, posição e sentido; 3- Número natural e operações; 4- Múltiplos e divisores; 4- Número racional; 5- Medidas e Geometria. No planejamento não consta sobre os temas que são abordados em medidas e Geometria.

ESCOLA 5: Disciplina de CMCM - quarto ano de HEM - conteúdos trabalhados: 1- números e operações; 2-múltiplos e divisores; 3- números racionais absolutos; Medidas (área, perímetro e unidades de capacidade); 4- geometria - conceito de superfície e composição e decomposição de figuras.

ESCOLA 6: Disciplina de CMCM - terceiro ano do curso de HEM - O professor responsável pela disciplina da série salientou que *" Serão estudados os Parâmetros Curriculares em seus diversos ângulos. As propostas curriculares nortearão o estudo. Pretende-se que ao final do curso o aluno tenha uma visão global de inter-relação com outras disciplinas, e que tenha consciência de se estudar ciências".*

Os principais temas abordados são: 1- concepções de Matemática e razão do ensino de matemática nas séries iniciais; 2- operações não matemáticas; 3- transformações aditivas e multiplicativas; 3- proporcionalidade; 4- cálculo mental; a matemática aprendida fora da escola; 5- o processo de construção da linguagem matemática; 6- figuras Geométricas -áreas e perímetros. Foi o primeiro planejamento em que estava o conceito de proporcionalidade e que demonstrou preocupação em analisar os Parâmetros Curriculares Nacionais. Nessa série, é trabalhado o conceito de área e perímetro, mas no planejamento não constava a maneira como é ensinado o conceito.

CONCLUSÕES DA ANÁLISE: Através da análise dos planos de ensino puderam ser percebidos os seguintes aspectos:

1- Parece não haver concordância entre as seis escolas, sobre quais conteúdos devam ser trabalhados em Matemática e em CMCM, pois, algumas escolas trabalham conceitos matemáticos em Matemática e outras em CMCM. Além disso, os conceitos de área, perímetro e volume não são trabalhados em todas as séries. De acordo com a proposta curricular foi constatado, anteriormente, que os conteúdos de matemática do ensino médio devam ser "mesclados" com aqueles que os futuros docentes ensinarão nas séries iniciais e esses constam do programa da disciplina Matemática.

Em alguns planos, verificados anteriormente, pode-se perceber que muitos conteúdos estão em CMCM. O professor de Matemática, teoricamente o responsável pelo embasamento teórico nessa disciplina, parece deixar o ensino desses conteúdos para o professor de CMCM, que, geralmente, é alguém oriundo do curso de Pedagogia.

O Professor de CMCM deveria trabalhar mais os métodos de ensino e a aprendizagem dos conceitos matemáticos, a importância do uso de materiais pedagógicos na aprendizagem de matemática, as propostas curriculares, dentre outros. O principal objetivo do ensino de conteúdos matemáticos, nas séries iniciais, não é simplesmente fazer uma recordação daquilo que os alunos já aprenderam, mas desenvolver um embasamento matemático, através da história da matemática, enfatizando a solução de problemas.

Os professores de CMCM salientaram que é importante estudar as propostas curriculares de Matemática mas, ao mesmo tempo, demonstraram que não a conheciam, já que não seguiam os conteúdos e as metodologias sugeridas. Apenas a escola três inseriu a história da matemática no curso.

2- Na parte de Metodologia não é enfatizado pelas escolas (nas séries analisadas) um trabalho com solução de problemas. O que se percebe é um trabalho voltado mais às aplicações de fórmulas. A parte conceitual não apareceu enfatizada, nos planos de ensino, impossibilitando uma análise mais aprofundada.

3- Apesar de a proposta curricular sugerir o ensino de proporcionalidade,que é um conceito muito importante, juntamente com o conceito de área, perímetro e volume, o que se percebeu foi que somente uma escola priorizava tal conceito.

4- Não foi constatado o ensino efetivo dos tópicos áreas e perímetros de figuras não convencionais, sendo que somente uma escola se mostrou preocupada em trabalhar a questão da composição e decomposição de figuras.

A análise dos programas, dessas duas séries finais, mostrou que não existia a distribuição eqüitativa dos conceitos e tópicos da geometria, ao longo das séries, nas seis escolas estudadas

A Geometria em Alguns Cursos de Licenciatura em Matemática

Foram analisadas as grades curriculares de dois cursos de Licenciatura em Matemática de uma Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de duas cidades do interior do estado de São Paulo com o objetivo de verificar a presença da geometria nesses cursos. A faculdade 1 é uma instituição particular com curso noturno de Licenciatura em Matemática. Essa faculdade foi utilizada para a testagem prévia dos instrumentos, possuindo curso de

Licenciatura curta em Ciências, com habilitação em Matemática, com duração de quatro anos. A faculdade 2 é uma autarquia municipal e possui curso noturno de Licenciatura em Matemática. Essa faculdade foi utilizada para a coleta dos dados da pesquisa, possuindo Licenciatura curta em Ciências com habilitação em Matemática com duração de três anos.

FACULDADE 1: Nos dois primeiros anos, a geometria não está incluída na grade curricular, sendo que a ênfase é maior em matrizes, logaritmos, funções e análise combinatória.

Ela é alocada a partir do terceiro ano, quando é feita uma revisão de geometria plana, e o estudo de prismas e pirâmides. A disciplina aparece novamente no primeiro semestre do quarto ano, sendo apresentados conceitos como: cilindro, cone e esfera. O desenho geométrico também é disciplina desta etapa, sendo estudadas as construções geométricas, incluindo alguns conceitos de geometria plana como: paralelismo, bissetrizes, polígonos e ângulos. A disciplina geometria analítica estava incluída no segundo semestre do quarto ano.

FACULDADE 2: Nessa faculdade, a geometria aparece elencada em todas as séries. Nos dois primeiros anos, a análise dos documentos mostrou que a ênfase é concentrada na geometria plana e, no terceiro ano, é estudada a geometria métrica e a geometria analítica.

Foi percebido, através da análise dos programas curriculares das duas faculdades, que a geometria é um aprofundamento daquela ensinada ou constantes do programam do ensino médio. Foi percebido também, através de entrevistas, que os professores acreditavam que a grande maioria dos estudantes termina o ensino médio sem os conceitos elementares de geometria, o que tem dificultado o trabalho, nessa disciplina, no curso de licenciatura.

Não se pode perder de vista que não se deve iniciar um trabalho metodológico com a geometria se os seus fundamentos não estão solidificados. Os conteúdos específicos da matemática (especialmente os de geometria) não podem estar desvinculados das disciplinas de Didática da Matemática e da Prática de Ensino. O que se pretende é que o aluno do curso de licenciatura, e também os alunos da HEM, consigam relacionar o conteúdo que irão ensinar com os aspectos metodológicos do ensino. No curso de graduação em matemática, seria recomendável que os tópicos de geometria fossem distribuídos da seguinte maneira:

Primeira e Segunda séries ou quatro primeiros semestres : Revisão de geometria plana e espacial, levando-se em consideração o aspecto histórico do desenvolvimento dos conceitos e princípios da geometria. É de fundamental importância que o futuro professor consiga desenvolver habilidades de demonstração de alguns teoremas importantes da geometria e deduções de algumas fórmulas utilizadas no ensino fundamental e médio. Os conceitos de área, perímetro e volume poderão ser trabalhados através de situações-problema, envolvendo os seguintes aspectos: 1- definições das principais figuras geométricas e suas propriedades; 2- inclusão de classes das figuras geométricas levando-se em consideração suas propriedades; 3- conceituação de área, perímetro e volume através de um trabalho com materiais concretos e com exemplos práticos; 4- deduções de fórmulas de áreas, perímetros e volume; 4- cálculo de áreas, perímetros de figuras não convencionais, e volume de sólidos não convencionais.

É importante que, nas séries iniciais, os estudantes sejam levados a solucionar problemas em geometria, envolvendo enunciados completos, problemas com enunciados incompletos e supérfluos.

Nos programas de ensino das séries iniciais, deve ser reforçado o ensino das estratégias de solução de problemas matemáticos, especialmente aqueles utilizados nos problemas geométricos. Na *Agenda para a Ação do NCTM* (Suydam, 1980) foi evidenciada a preocupação com o ensino de estratégias de solução de problemas, a partir dos seguintes elementos: 1- as estratégias de solução de problemas podem ser ensinadas; 2- a aprendizagem das estratégias de solução de problemas fornecem aos estudantes subsídios para que os mesmos utilizem caminhos variados, solucionando problemas de vários tipos; 3- os estudantes devem ser encorajados a tentar alternativas diferentes de estratégias de solução.

Além disso, é importante que os conceitos e princípios da geometria plana e espacial não estejam desvinculados das construções geométricas, realizadas com régua e compasso.

Terceira e quarta séries da Licenciatura : Nessas duas séries, seria importante levar os estudantes a conhecerem, mais detalhadamente, a geometria métrica e a geometria de posição, além de adquirir familiaridade com gometrias não-euclidianas.

Na Didática da Matemática e na Prática de Ensino dessa disciplina, os alunos deveriam aprender a preparar planos de aula, abordando conteúdos específicos de matemática, sem deixar de lado os conceitos geométricos, além dos tópicos que incluem desenho geométrico. Os processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos também poderão ser abordados nessas disciplinas.

A Formação do Professor e a sua Prática

O documento da Secretaria de Ensino Fundamental (SEF/MEC, 1997) salientou que as deficiências escolares estão relacionadas a dois tipos principais de problemas, sendo um, de natureza mais geral, e outro mais específico à formação docente. O primeiro deles diz respeito às questões de cunho social, como a desvalorização da carreira do professor, os baixos salários, as más condições das escolas, as dificuldades de acesso a programas de aperfeiçoamento científico e pedagógico (SEF/MEC, p. 14). Atualmente, as principais reformas do estado de São Paulo (Projeto Escola de Cara Nova) estão voltadas para a eliminação da evasão e repetência escolar, e os principais problemas que os professores estão enfrentando, em sua prática, são: as classes superlotadas, muitas delas com mais de 50 alunos; a progressão continuada; a indisciplina generalizada, dentre outros. Todos esses fatores contribuem para o desinteresse de muitos professores que acabam não valorizando o ensino e a aprendizagem dos alunos.

O segundo problema, de natureza específica, diz respeito à formação inicial e continuada do professor, tanto em termos dos conteúdos de matemática como em relação às maneiras de ser professor. Buscando a melhoria do ensino em geral, os documentos a respeito do ensino fundamental (SEF/MEC, 1997) apontaram que a superação dessas dificuldades:

> *esbarra nas limitações do corpo docente das escolas de magistério, das universidades e das faculdades de formação de professores e na acentuada dicotomia entre a formação matemática e a formação pedagógica. Além disso, a formação inicial do professor é afetada por uma nítida separação entre o saber estudado e os problemas da prática profissional" (p.15).*

Geralmente, o professor - que atua nas séries iniciais - é polivalente e egresso de escolas de magistério e/ou cursos de pedagogia. Segundo a SEF (1997), a formação pedagógica e de conteúdo desses profissionais é insuficiente; pois, em "*nosso país, considera-se que para lecionar matemática elementar nas séries iniciais é suficiente uma formação superficial do professor"(SEF, 1997, p. 14)*.

No que diz respeito à formação do professor que atuará nas quatro últimas séries do ensino fundamental e no ensino médio, a LDB 9394/96 propõe mudanças. O artigo 65 da LDB diz que *"a formação docente, exceto para a educação superior, incluirá prática de ensino de, no mínimo, trezentas horas" (LDB 9394/96, art. 65)*. Todos os cursos de Licenciatura tiveram que se adaptar às novas mudanças e os ingressantes nesses cursos a partir de 1997, foram obrigados a cumprir uma carga horária mínima de trezentas horas de Prática de Ensino.

Segundo o parecer 744/97 da Câmara de Ensino Superior, aprovado em 03/12/97,o objetivo da disciplina de Prática de Ensino constitui

> *o espaço por excelência da vinculação entre formação teórica e início da vivência profissional, supervisionada pela instituição formadora. A prática de ensino consiste, pois, em uma das*

> *oportunidades nas quais o estudante-docente se defronta com os problemas concretos do processo de ensino-aprendizagem e da dinâmica própria do espaço escolar" (Parecer 744/97 - CES)*

A Prática de Ensino seria o momento de síntese das situações de ensino e de aprendizagem presentes nas escolas. É uma oportunidade para que o estudante perceba e vivencie os problemas e as dificuldades enfrentadas pelos professores em exercício.

A Prática de Ensino é subdividida em três partes associadas entre si e são as aulas teóricas, o estágio supervisionado e a regência de classe. As aulas teóricas têm como principal objetivo proporcionar aos alunos subsídios à compreensão das reformas educacionais - que estão ocorrendo em nosso país - e as suas implicações no ensino e na aprendizagem dos alunos. Os estágios supervisionados *"abrangerão, obrigatoriamente, atividades referentes à elaboração, execução e avaliação das propostas pedagógicas das escolas da rede pública ou particular particular" (Deliberação CEE 12/97, artigo 3º, parágrafo único)*. A regência de classe consiste em propiciar ao aluno oportunidade para que o mesmo ministre algumas aulas de determinados conteúdos, sob a coordenação do professor de Prática de Ensino e sob a supervisão do professor da série.

Pode-se dizer que a prática de ensino é o fio condutor dos cursos de Licenciaturas, constituindo-se em um elo entre os conteúdos específicos e os conteúdos pedagógicos, vivenciados na prática escolar.

A prática de ensino de matemática deverá proporcionar aos alunos um momento de reflexão sobre os principais problemas enfrentados pelos professores e pelos alunos na unidade escolar. Com uma carga horária extensa, é recomendável que essa disciplina esteja presente nos cursos de Licenciatura desde o primeiro ano. No caso específico da Matemática, é importante que o aluno conheça a unidade escolar como um todo: seu projeto pedagógico, seu regimento escolar, os planos de ensino de matemática, os projetos desenvolvidos pela escola e os objetivos do ensino da matemática em nível fundamental e médio.

Através de observações em sala de aula e entrevistas com os professores de matemática, o estudante poderá conhecer alguns dos problemas que envolvem o abandono da geometria em nossas escolas e poderá começar a elaborar maneiras para superar os problemas dessa área. Através das observações em sala de aula, o aluno estagiário poderá comparar as diversas metodologias de ensino de geometria, empregadas por diferentes professores, e essas metodologias poderão ou não ser incorporadas à sua futura prática profissional.

A educação continuada do professor (que não deve ser entendida apenas como cursos de capacitação para suprir uma determinada necessidade metodológica) poderia proporcionar oportunidades de uma reflexão maior sobre o ensino da disciplina e as maneiras mais adequadas de trabalhar esses conteúdos em sala de aula.

Formação de Professores e solução de Problemas:

A literatura sobre solução de problemas é bastante vasta e muitos autores, como Fernandes (1992), consideraram que a solução de problemas é a componente da investigação, em educação matemática, mais estudada nos últimos anos e muitos destes estudos referem-se às atitudes de professores e alunos em relação à solução de problemas. É desejado que o professor conheça diferentes estratégias de solução de problemas e tenha atitudes positivas em relação à essa atividade pois, assim poderá ensinar aos alunos maneiras mais eficazes para trabalhar com esse conteúdo matemático.

É importante que os professores tenham experiências positivas de solução de problemas, sendo imprescindível que os programas de educação inicial e continuada de professores contemplem este tema. Autores como Krulik e Rudnick (1992) têm desenvolvido programas de formação de professores que privilegiam a solução de problemas em matemática. Os autores partiram do pressuposto de que é impossível para um professor levar os alunos a solucionar problemas se o professor não for um "bom solucionador". Os programas de formação de professores deveriam deixar claro aos estudantes que a solução de problemas é um processo e, como tal, seria "*o meio pelo qual* *um indivíduo usa conhecimentos e compreensões adquiridos previamente para satisfazer a demanda de uma situação não familiar" (p.42).*

Como a solução de problemas é vista como um processo, e não como um produto, é importante encontrar as respostas corretas para os problemas, mas é crucial a compreensão dos processos e estratégias relacionados a cada um dos problemas ensinados.

Para LeBlanc (1982), um modelo de curso de formação de professores, que priorize a solução de problemas, contemplaria os seguintes aspectos: 1- os professores deveriam solucionar problemas que envolvessem a utilização de diferentes estratégias e também solucionar problemas contidos nos livros didáticos, pois esses são importantes e formativos.; 2- nessa fase, os professores aprendem as etapas de solução de problemas propostas por Polya: compreensão, execução, planejamento e avaliação; 3- essa fase é denominada de fase prática, pois os professores deverão estar envolvidos em situações de solução de problemas matemáticos diversificados, sendo que cada problema deverá ser detalhadamente explorado. Nela ainda, *"cada problema deverá ser detalhadamente explorado; isto é, devem discutir-se as diferentes soluções e extensões possíveis" (Fernandes, 1992, p. 85)*; 4- Na quarta etapa, os futuros professores devem elaborar uma coleção de problemas sendo que cada um deverá conter questões que levem os estudantes à compreensão do problema como um todo. O autor acredita que os futuros professores serão melhores solucionadores de problemas se a sua auto-confiança for trabalhada e se os mesmos conhecerem os processos e estratégias de solução.

As idéias de Jacobs (1983) também estão de acordo com as colocações de Leblanc (1982) e Krulick e Rudnick (1982). Jacobs (1983) salientou que, sendo a solução de problemas o foco principal do ensino de Matemática, esse tema deve ser uma constante na formação dos professores. *"Não se pode esperar que os professores ensinem a resolver problemas baseados exclusivamente no estudo que fizeram de matemática"(Jacobs, 1983,in Fernandes, 1992, p. 82).*

As colocações do autor, citado anteriormente, mostram uma preocupação no que diz respeito à formação inicial do professor. Somente o estudo realizado na graduação pelos estudantes, (que muitas vezes se restringem a resolver listas de exercícios para aplicar alguns teoremas aprendidos) não é suficiente para prepará-los para ensinar em nível fundamental e médio.

Outros autores também demonstraram preocupação com a formação de professores em solução de problemas. Charles e Lester (1986), por exemplo, afirmaram que a principal finalidade de formar professores em solução de problemas é proporcionar subsídios para que os docentes consigam ensinar os tópicos de matemática através dessa metodologia.

Borralho (1992), analisando as recomendações dos autores Krulick e Rudnick (1982), LeBlanc (1982), Charles e Lester (1986), a respeito da formação de professores, salientou que, com exceção de Charles e Lester (1986), os outros autores parecem não ter dado uma relevância maior ao papel da avaliação, tanto a avaliação do ensino de solução de problemas como a avaliação do desempenho dos alunos.

Os professores necessitam de informações sobre como avaliar o ensino de solução de problemas e como avaliar o desempenho dos alunos nas atividades desenvolvidas em sala de aula.

A avaliação das atividades de solução de problemas, na sala de aula, tem merecido uma atenção especial e parece haver algumas dificuldades relativas à avaliação, como a dificuldade em identificar, com clareza, os elementos que influenciam o desempenho dos alunos, como as variáveis afetivas e o nível de conhecimento dos mesmos.

Fernandes (1992) relacionou alguns educadores matemáticos que se preocuparam em elaborar modelos para avaliar a solução de problemas em sala de aula. Dentre eles, pode ser destacado o trabalho de Charles (1983) que descreveu duas formas para avaliar o desempenho na solução de problemas, a saber: análise dos trabalhos escritos dos estudantes e pela observação do comportamento dos mesmos, enquanto solucionam problemas. O modelo adotado por Charles (1983) procurou analisar a compreensão do problema e a utilização de estratégias de solução apropriadas, além da obtenção da resposta correta. O modelo busca também questionar os estudantes sobre os meios utilizados por eles para chegar à resposta correta do problema.

Embora as respostas sejam importantes no processo de solução de problemas, elas não devem ser valorizadas em detrimento do processo. As respostas são decorrentes da utilização de procedimentos adequados e da criatividade Se apenas o produto final (resposta) é avaliado, o professor terá dificuldades para reconhecer as diversas maneiras que os estudantes buscam ao solucionar um determinado problema.

CAPÍTULO V

SUJEITOS, MATERIAIS, MÉTODO E PROCEDIMENTO

O presente estudo teve como objetivo estudar a solução de problemas matemáticos em futuros professores. O problema de pesquisa foi formulado como se segue.

Existem diferenças significativas entre o desempenho de alunos da Licenciatura em Matemática e alunos do curso de Habilitação Específica do Magistério na utilização de conceitos e princípios de área, perímetro e volume contidos em problemas com informações completas, incompletas e supérfluas?

Os instrumentos foram selecionados buscando dados que tornassem possível obter respostas às seguintes questões:

3- Existem diferenças significativas entre os alunos do magistério e licenciatura, quanto a utilização de conceitos e princípios na solução de problemas?

4- Existem diferenças significativas no desempenho de alunos do magistério e da Licenciatura em Matemática, quando solucionam problemas de diversos tipos (problemas com informações completas, incompletas e supérfluas)?

3- Existem diferenças no grau e no tipo de dificuldades apresentadas por alunos do curso de licenciatura em matemática e alunos do curso de habilitação específica do magistério, que possam ser atribuídas ao tipo de problemas? (informação completa, informação incompleta ou informação supérflua)?

4- Existem diferenças significativa nos conceitos de área, perímetro e volume, apresentados pelos alunos do curso de habilitação específica do magistério e pelos alunos do curso de licenciatura em matemática?

Sujeitos:

A amostra do presente estudo, selecionado por conveniência, foi composta de 214 sujeitos, distribuídos da seguinte maneira:

- 124 estudantes do curso de magistério de cinco escolas de ensino médio da região de São João da Boa Vista que cursavam a quarta série;
- 90 estudantes de primeiro, segundo e terceiro anos provenientes do curso de Licenciatura em Ciências com Habilitação em Matemática de uma faculdade (autarquia municipal) de São José do Rio Pardo.

Material:

O material utilizado para a coleta de dados foi composto de:

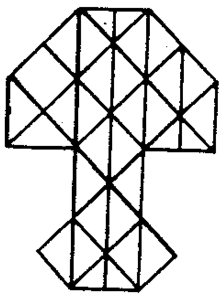
1- Questionário informativo contendo questões relativas aos dados dos alunos e outras elaboradas para atender às necessidades do presente trabalho. Os questionários aplicados nos sujeitos dos dois cursos se diferenciavam em algumas questões que eram específicas de cada curso, sendo que a maioria delas era igual nos dois questionários.
2- Um teste elaborado a partir das séries II (problemas com informações incompletas) e III (problemas com informações supérfluas) do conjunto de problemas utilizados por Krutetskii (1976). O referido autor utilizou essas séries, pertencentes à categoria de obtenção da informação matemática, com o objetivo de analisar, nos sujeitos, a percepção das relações e fatos concretos presentes no enunciado dos problemas propostos. A série II, utilizada por Krutetskii (1976), possui oito problemas de

aritmética e cinco de geometria. Já a série III possui seis problemas de aritmética e cinco de geometria.

Os problemas utilizados no presente estudo foram os seguintes:

Problemas com informações completas:

Problema 1: Calcule a medida do lado de um quadrado de área 64cm^2.
Problema 3: A área de uma face de um cubo é 36 cm^2. Calcule o seu volume.
Problema 9: - Utilizando como unidade de medida de área, determine a área da figura abaixo



Problemas com informações incompletas:

Problema 5: Calcule o lado de um retângulo de área 36 cm^2.
Problema 6: Em um triângulo isósceles a medida do lado lateral é menor que a base. Seu perímetro é 31cm. Qual a medida de cada lado do triângulo?
Problema 7: Calcular o volume de um paralelepípedo reto-retângulo sabendo que duas de suas dimensões são 8cm e 27 cm.

Problemas com informações supérfluas:

Problema 2: Dado um triângulo isósceles com um lado medindo 2cm, o outro medindo 10cm o terceiro lado com medida igual a um dos outros dois lados. Calcule sua área.

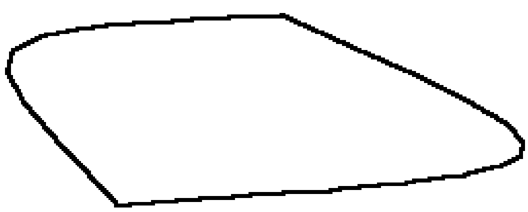
Problema 4: Dois lados de um triângulo isósceles estão na razão 3:8. Encontre os lados, se o perímetro do triângulo é igual a 38 cm e um dos lados é 10 cm maior que o outro. Os lados são expressos por números inteiros.

Problema 8: Quantos litros de água são necessários para encher completamente uma piscina que tem 25 m de comprimento, 10m de largura, 2,2m de profundidade e tem uma capacidade de 550m^3?

Em cada problema o estudante deveria escrever se o mesmo possuía uma única solução, várias soluções (nesse caso, ele deveria citar pelo menos três soluções) ou se o problema não possuía solução. Ao final, o estudante deveria apontar qual (is) a(s) dificuldade(s) sentida(s) durante a execução da prova.

No problema dez, os estudantes deveriam descrever um processo para o cálculo da área de uma figura não convencional.

Problema 10: Explique um procedimento para calcular a área da figura abaixo



Além de solucionar os problemas, os estudantes deveriam responder algumas questões sobre o conceito de área, perímetro e volume.

Problema 11:

O que você entendo por área?

O que você entende por Perímetro?

O que você entende por volume?

Testagem prévia dos instrumentos utilizados na coleta dos dados.

Com o objetivo de verificar possíveis dificuldades (vocabulário, tempo necessário para a realização da prova, espaço deixado para a solução dos problemas etc.) foi realizada uma testagem prévia dos dois instrumentos. O grupo que respondeu a essa testagem prévia era composto de oito estudantes do terceiro ano de um curso de Licenciatura em ciências com Habilitação em Matemática, vinte alunos do quarto ano do mesmo curso e vinte e cinco alunos do quarto ano do curso de Magistério do CEFAM (Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério). Esses sujeitos não participaram do estudo final.

Após a aplicação dos instrumentos, foi decidido que o questionário informativo não sofreria alterações, porque os sujeitos afirmaram que não tiveram problemas em entendê-lo, sendo que todos os alunos responderam ao questionário. Com relação aos problemas da prova, houve substituição de um deles (o de número nove), tendo em vista que nenhum dos sujeitos conseguiu chegar à solução. Além disso, o problema retirado envolvia muitos conceitos, além daqueles que estavam sendo investigados. Também foi retirado o problema três, porque os sujeitos afirmaram que o enunciado não estava muito claro, sendo que nenhum aluno conseguiu solucioná-lo. Esse foi substituído por outro problema que envolvia o volume do cubo.

Os problemas foram corrigidos levando-se em consideração a análise dos procedimentos e das respostas. Foi atribuído a cada problema **um ponto**: meio ponto para o desenvolvimento correto do procedimento e meio ponto para a resposta correta.

. A análise da testagem prévia mostrou que 50,9%, dos sujeitos (n=53) tiraram nota zero e apenas 1,9%, dos alunos, obtiveram nota 5,0.

A tabela 2 mostra a média dos sujeitos envolvidos na testagem prévia. É interessante observar, na tabela a seguir, que a nota máxima dos sujeitos foi 5,0, ocorrendo no curso de Licenciatura em Matemática. É importante observar também que as médias dos alunos foram baixas, visto que a pontuação da prova aplicada variava de zero a dez.

Tabela 2 - Estatística das notas dos sujeitos envolvidos na testagem prévia

Grupo	N	Média	Desv.padrão	erro padrão	mínimo	máximo
CEFAM	24	0.3333	0,5247	0,1071	0.0000	1.5000
LICENC. 4º ANO	20	0.8750	1,4037	0,3139	0.0000	5.0000
LICENC. 3º ANO	8	0,8750	1,0938	0,3867	0.0000	3.0000
Total	52	0,6250	1,0473	0,1452	0.0000	5.0000

Através dessa testagem, foi possível observar que muitos alunos não conseguiram diferenciar o conceito de área do conceito de perímetro. O problema 1, por exemplo, que solicitava o cálculo do lado de um quadrado de área $64cm^2$, mostrou que 25%, dos alunos de Licenciatura em Matemática, utilizaram o conceito de perímetro e não o de área para resolver o problema.

MÉTODO: A pesquisa teve caráter descritivo com análise de protocolos. Os dados foram coletados e submetidos à análise estatística com o objetivo de procurar respostas para as questões de pesquisa. A partir dos resultados dessa análise e da fundamentação teórica, foi possível estabelecer as conclusões e implicações educacionais.

Procedimentos Utilizados para a Coleta de Dados

Os instrumentos para a coleta de dados foram aplicados em cinco escolas situadas em diferentes cidades da região de São João da Boa Vista.

Primeiramente, foi feito contato com a diretora regional de ensino com o intuito de explicar os objetivos da pesquisa e solicitar autorização para a aplicação dos instrumentos para a coleta de dados nas escolas e foram contatados seis coordenadores de escolas públicas e um professor do curso de Licenciatura para serem os aplicadores dos instrumentos. O objetivo era treinar as pessoas que iriam aplicar os instrumentos. Nessas reuniões, tratou-se de discutir as questões do questionário informativo, familiarizar os coordenadores com a prova e os problemas, fornecendo aos mesmos todas as informações necessárias para a aplicação dos instrumentos.

Das escolas que possuem o curso de Magistério e que pertencem à Diretoria Regional de Ensino de São João da Boa Vista, somente uma escola foi excluída, pois o coordenador não participou da reunião de treinamento para aplicação.

Foi salientado que os alunos não poderiam utilizar calculadoras, cadernos ou quaisquer materiais didáticos. Cada aluno deveria solucionar os problemas individualmente. Foi pedido aos coordenadores que orientassem os sujeitos para preencher o quadro de respostas, e para que, ao final, redigissem um texto sobre as dificuldades encontradas na solução de cada problema.

O tempo médio gasto pelos sujeitos para responder ao questionário e solucionar os problemas foi de, aproximadamente, duas horas.

No presente estudo, serão utilizadas as seguintes siglas: $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ etc., para alunos do curso de magistério; $\mathbf{PL_1}$, $\mathbf{PL_2}$, etc., para alunos do primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática; $\mathbf{SL_1}$, $\mathbf{SL_2}$, etc., para alunos do segundo ano de Licenciatura em Matemática e $\mathbf{TL_1}$, $\mathbf{TL_2}$ etc., para alunos do terceiro ano de Licenciatura em Matemática.

CAPÍTULO VI

ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS

Após a coleta dos dados, os mesmos foram submetidos à análise estatística. Foi utilizado o pacote SPSS com os seguintes objetivos:

1- Validar a prova matemática: Primeiramente foi calculado o coeficiente *alfa de Cronbach* para verificar a consistência interna do instrumento. A seguir foi verificado se a amostra era adequada para medir ao que se propunha (Kaiser-Meyer-Olkin). O teste de esfericidade de Bartlett foi utilizado para avaliar a hipótese de que os dados provinham de uma população normal multivariada.

2 Responder às questões de pesquisa: Para verificar a existência de diferença significativa ente os alunos do Magistério e Licenciatura, quanto a utilização de conceitos e princípios na solução dos problemas propostos, foi utilizado o teste Qui-quadrado. A análise de variância de Friedman foi utilizada para verificar a existência de diferenças significativas entre as notas dos sujeitos de acordo com os três tipos de problemas. Para a análise das diferenças entre as médias obtidas pelos sujeitos dos dois cursos, foi utilizado o teste U de Mann-Whitney

Procedimento para pontuação das questões

Os problemas propostos foram corrigidos levando-se em consideração os seguintes aspectos:

1- Tipo de informação do problema: informações completas, informações incompletas e informações supérfluas;

2- Utilização de conceitos e princípios: utilização de conceitos e princípios corretamente e utilização de conceitos e princípios incorretamente. Foram analisadas também as situações em que o aluno não respondeu ou escreveu *não sei.*

Foi analisado se o aluno conseguiu utilizar os conceitos e princípios de área, perímetro e volume de forma correta. Foi verificado, ainda, se os alunos conseguiram utilizar, de forma correta, o conceito de triângulo isósceles.

Foi observado se o aluno utilizou conceitos e princípios, mas de forma inadequada. Por exemplo: utilizar o conceito de perímetro para solucionar um problema de área.

3- Tipo de resposta dada ao problema: Foi analisado, em cada problema, se o aluno conseguiu identificar se o problema possuía uma solução, várias soluções ou se o problema não possuía solução. Foram atribuídos valores de **acertou, errou, não sei** ou **não respondeu**

4- Dificuldades apresentadas: Em cada problema o aluno deveria expressar a dificuldade que sentiu para soluciona-lo. As dificuldades foram categorizadas de acordo com as respostas mais freqüentes dos alunos. As respostas com menor freqüência foram categorizadas como *Outras dificuldades.*

5- Conceito de área, perímetro e volume: As respostas dos alunos foram categorizadas de acordo com os atributos definidores mais freqüentes. Os atributos com menor freqüência foram categorizados como *outros conceitos.* Nesse item, foi verificado se o aluno conseguiu definir o conceito, utilizando alguns de seus atributos definidores.

6- Desempenho geral: Os problemas (1 a 10) foram avaliados da seguinte maneira: Cada problema foi avaliado em **1** ponto (**0,5** para o procedimento correto e **0,5** para o tipo de resposta correta). Os problemas foram, assim, avaliados em uma escala de zero a dez. A questão 11 foi analisada separadamente, conforme explicitado no item anterior.

Em relação ao questionário informativo, as questões foram categorizadas de acordo com as freqüências em que apareceram.

Caracterização da amostra:

A amostra foi composta por 214 alunos, sendo 124 do Magistério e 90 de Licenciatura em Matemática conforme dados apresentados na tabela a seguir:

Tabela 3: – Distribuição dos sujeitos de acordo com o curso e a série

Curso e Série	*Quantidade de alunos*	
	Nº	*%*
Licenciatura		
1º ano	25	27,7%
2º ano	30	33,3%
3º ano	35	39,0%
Subtotal	*90*	*42,0%*
Magistério		
EEPSG 'Dep. Eduardo Vicente Nasser'	11	8,9%
EEPSG 'Dona Geny Gomes'	11	8,9%
EEPSG 'Alexandre Fleming'	18	14,5%
EESG 'Professora Egle Luporini Costa'	14	11,3%
EESG 'Cel. Cristiano Osório de Oliveira	70	56,4%
Subtotal	*124*	*58,0%*
TOTAL	*214*	*100,00*

Idade:

Dos sujeitos provenientes do curso de magistério, a maioria tinha idades entre 17 e 20 anos (77,4%), enquanto os alunos de Licenciatura, situavam-se entre 17 e 20 (23,3%) e 25,5% entre 21 e 24 anos.

Gênero:

Foi constatada uma predominância de sujeitos do gênero feminino (98,4%) no curso de magistério. Já nos cursos de Licenciatura em Matemática foi observada a seguinte distribuição: 40,0% de alunos e 51,1% de alunas, sendo que o restante dos sujeitos (8,9%) não especificou o gênero.

Tabela 4 –*Distribuição dos sujeitos de acordo com o gênero*

Gênero	*Magistério*		*Licenciatura*	
	Nº de alunos	*% de alunos*	*Nº de alunos*	*% de alunos*
Masculino	2	1,6%	36	40,0%
Feminino	122	98,4%	46	51,1%
Não especificou	-	0,0%	08	8,9%
Total	*124*	*100,0%*	*90*	*100,0%*

Motivo de escolha do curso.

Uma das questões do questionário informativo buscava investigar as razões da escolha de cada um dos cursos. A análise das respostas dos sujeitos provenientes do curso de licenciatura mostrou que o "gostar" (da matemática, de trabalhar com cálculos, de exatas e do curso) foi apontado por 62 sujeitos (68,9%), enquanto os demais apontaram "que a matemática desafia o raciocínio (5), ter facilidade (5); para aprender matemática (3); falta de opção de curso (4). Razões como: gostar de resultados exatos, aptidão, é um curso rápido, oferece outros campos profissionais, vocação, o curso está ligado ao trabalho exercido, é mais acessível financeiramente, é um desafio, pelo diploma e como um instrumento de trabalho, foram apresentadas por apenas um sujeito em cada uma. Um sujeito da Licenciatura não respondeu a essa questão.

Já no curso de Magistério, as respostas dadas pelos sujeitos foram: gostar de crianças (35), gostar de ensinar (24), gostar da profissão (17), totalizando 61,3% dos sujeitos. Os demais motivos apresentados foram: é um curso profissionalizante (13), é um bom curso (4), Não tinha condições de realizar outro curso (2), pela dignidade da profissão (2). Cada razão a seguir foi apresentada por três sujeitos: influência de outras pessoas, tem retorno satisfatório, não tinha opção, pelo diploma. As outras respostas a essa pergunta foram: é um dom de Deus/ Vocação (4). Cada razão, a seguir, foi apresentada por um sujeito: os professores podem mudar o mundo, preparar para a vida, sonho, para ter maior aprimoramento, só a educação transforma o país. Um sujeito não especificou o motivo da escolha do curso e cinco não responderam.

As respostas apontadas pelos sujeitos do Magistério em relação à opção do curso, parecem estar de acordo com aquelas obtidas no estudo de Gonçalez (1996). Essa autora estudou a ocorrência, o tipo e a estabilidade das atitudes com relação à matemática, presentes nos professores de primeira à quarta séries (203 professores) e nos alunos do curso de magistério (295 alunos) e constatou que as pessoas optavam pelo Magistério, em primeiro lugar, por gostarem de lecionar; como segunda opção, os alunos achavam um curso fácil. Segundo essa autora, os professores indicavam, como primeira opção, o amor pelas crianças e, em segundo lugar, a falta de opção.

Os motivos apontados pelos alunos de magistério diferiram dos apresentados pelos alunos de Licenciatura. Enquanto 28,2% dos alunos de Magistério afirmaram que optaram pelo curso por gostar de criança, 41,1% dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática, afirmaram que optaram pelo curso por gostar de matemática.

Aproximadamente, 10,4% dos alunos afirmaram que optaram pelo curso de magistério por falta de outro curso profissionalizante. A resposta do sujeito **M_1** é mostrada a seguir: como exemplo.

Por que escolheu este curso?

Por falta de curso profissionalizante na cidade

Com relação à pergunta: *Você gostou ou gosta de geometria?*, foi percebido que 45 sujeitos do curso de Magistério relataram não gostar de geometria pelos seguintes fatores: influência do professor (5); porque tem dificuldade (5); porque é difícil (4); porque não tem conhecimento nessa área (3); porque não se empenha (4); porque tem pouco conhecimento de geometria (6). Dezoito sujeitos não especificaram o motivo de não gostar de geometria.. Em relação ao "gostar de geometria", 41 sujeitos afirmaram positivamente, e os principais motivos apontados por eles foram: a geometria está em nossa volta (5); desenvolve a aprendizagem e o raciocínio (4); desenvolve a criatividade (2), importante na construção do conhecimento (12), gosta de gráficos (5); é legal e interessante (8); possui variedades (3). Um sujeito afirmou gostar somente da geometria ensinada nas séries iniciais e também um sujeito afirmou que antes não gostava de geometria e agora gosta. O restante dos sujeitos (38) não responderam a pergunta.

Em relação ao curso de Licenciatura, 28 sujeitos consideraram não gostar de geometria, ou porque não aprenderam o suficiente, ou porque o curso não forneceu subsídios teóricos para atuarem no ensino de geometria. **PL$_1$** relatou que não gosta de geometria *" talvez por não ter encontrado ainda alguém que saiba explicar realmente o que ela significa e é. Odeio geometria. Já estou de exame"* . Nesse caso, o sujeito atribui aos antigos professores de geometria a culpa pela sua aversão. Quarenta e seis sujeitos afirmaram gostar de geometria, sendo que o restante não respondeu a essa questão.

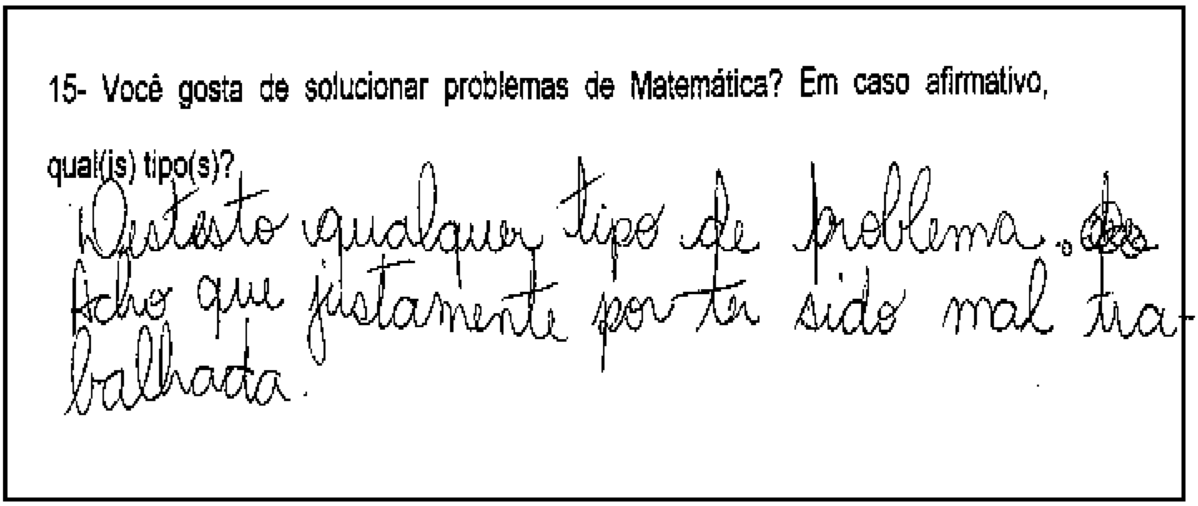
Quando perguntados se estariam aptos a ensinar geometria, a maior parte dos sujeitos do curso de licenciatura em matemática (79,0% do total e 74,2% dos alunos do terceiro ano) afirmaram que não estavam preparados para ensinar geometria.. A resposta a seguir extraída do protocolo do sujeito **TL$_1$** é mostrada a seguir.

> 8- Você já se considera apto para ensinar Geometria no primeiro e segundo graus? Por quê?
>
> Não, o curso é vago, sem uso de instrumento, ñ nos prepara.

Através do questionário informativo do curso de Licenciatura em Matemática, foi possível fazer uma relação entre a questão oito, citada anteriormente, e a questão doze que perguntava: *Em seu curso de licenciatura você aprendeu a utilizar materiais para o ensino de geometria? Quais?* Nessa questão, os alunos de licenciatura em matemática, em quase sua totalidade, afirmaram que não aprenderam a utilizar materiais para o ensino da Matemática, pois as aulas eram muito teóricas. É importante salientar que o aluno que respondeu com um não à questão oito, também respondeu com um não à questão doze.

Já no curso de magistério as respostas para a questão treze *"O seu professor de matemática e/ou conteúdos metodológicos de matemática utilizava materiais para o ensino de geometria? Quais?"* foram bastante diferenciadas. Alguns alunos da HEM relataram que aprenderam a utilizar tangran, blocos lógicos, sólidos geométricos e instrumentos de desenho geométrico, como régua, compasso, esquadros e transferidores.

A análise da questão *"você gosta de resolver problemas de matemática? Quais?"* mostrou que alguns estudantes do curso de magistério parecem não gostar de solucionar problemas, talvez pelo fato de não terem tido experiências que tivessem despertado atitudes positivas com relação a esta parte da matemática, como é mostrado a seguir (resposta dada por **M$_2$**).


15- Você gosta de solucionar problemas de Matemática? Em caso afirmativo, qual(is) tipo(s)?

Detesto qualquer tipo de problema. Acho que justamente por ter sido mal trabalhada.

Com o objetivo de verificar o sentimento (gostar) em relação à atividade de solução de problemas, foi feita a pergunta *você gosta de solucionar problemas matemáticos? Qual (is) o(s) tipo(s)?*

A análise dos dados dos alunos de Magistério mostrou que 47 estudantes (38,1%) afirmaram não gostar da atividade de solucionar problemas, sendo que 5 deles disseram que não gostavam por ter dificuldades nessa atividade e 42 não especificaram o motivo pelo qual não gostavam. Por outro lado, 62 sujeitos, desse grupo, afirmaram gostar e destes, 15 não especificaram porque gostavam. Dentre os que afirmaram gostar, os tipos de problemas indicados foram: operações fundamentais (9); problemas da realidade (8), equações (7), problemas de raciocínio (5), os problemas simples (4), problemas envolvendo porcentagens e equações (2); áreas e perímetros (2). Os problemas (envolvendo delta, os não geométricos, os que não envolviam frações, os problemas não complicados e todos os tipos de problemas) foram os apontados como preferidos por dois sujeitos em cada. Três sujeitos responderam que gostavam de *fazer e responder problemas* e um sujeito não respondeu à pergunta. Os demais (13 sujeitos) ou não responderam (4) ou afirmaram gostar mais ou menos (9).

Já dentre os sujeitos da Licenciatura, apenas 4 disseram não gostar de solucionar problemas, enquanto 80 sujeitos afirmaram gostar de solucioná-los, indicando os seguintes tipos de problemas: raciocínio (11); algébricos (9); práticos (6); juros e porcentagem (5); probabilidade (5), álgebra e geometria (4); variados (4), cálculos (3); sistemas (3); equações (2); estatísticos (2); os problemas que não envolvem geometria (4); problemas fáceis (2), somente alguns (3). Já os problemas considerados pelos sujeitos como: problemas que exigem dedicação, problemas complicados, expressões, geometria espacial e problemas simples, foram indicados por um sujeito cada.

O restante dos sujeitos indicou que gostava de todos (9), ou de alguns (3). O número de sujeitos que não respondeu a esta questão foi seis.

Validação da Prova Matemática.

As variáveis consideradas foram as dez questões matemáticas propostas. Os resultados da análise estatística mostraram que o instrumento apresentou uma alta consistência interna dado que o coeficiente *alfa* de Cronbach geral foi de 0,8484 e o valor do *alfa* padronizado igual a 0,8638.

A nota média da prova 1,24 com um desvio padrão de 1,72 mostrou que os alunos não tiveram bom desempenho na solução dos problemas.

O valor encontrado para a medida de adequação da amostra de Kaiser-Meyer-Olkin é igual a 0,846 indicando que a amostra é adequada para medir o que se propõe.

O teste de esfericidade de Bartlett permitiu avaliar a hipótese de que os dados provêm de uma população normal multivariada com igualdade de variância-covariância nos grupos estudados, $\chi^2_{aproximado}(45)= 963{,}887$ e p=0,0000.

A análise fatorial de componentes principais com rotação *varimax* mostrou que apenas dois fatores tiveram valores maiores ou iguais a 1,0 e responderam a 60,0% da variância total. O primeiro fator respondeu por 47,7%, da variância total, indicando sua dominância e confirmando a unidimensionalidade da prova; o segundo fator por 12,4% da variância total, e todos os outros apresentaram valores inferiores a 9,0%, conforme dados da tabela 5.

Pode ser observado, na tabela 6, que o fator 1 apresenta valores altos para os problemas de 1 a 9 e valor baixo para o problema 10, enquanto que o fator 2 apresenta valores baixos para os problemas de 1 a 9 e valor alto para o problema 10. Na maioria dos casos o fator é relativamente puro, isto é, se há alta saturação em um fator, há baixa saturação no outro.

O problema 10 foi o único que diferiu dos outros. Nesse problema, era solicitado que o aluno explicasse um procedimento para calcular a área. Os demais problemas não pediam o detalhamento sobre a explicação do conceito utilizado.

Tabela 5– Distribuição dos autovalores e variação explicada por fator

Fator	Autovalor	Variância (%) Simples	Variância (%) Acumulada
1	4,768	47,684	47,684
2	1,236	12,358	60,042
3	0,849	8,487	68,529
4	0,777	7,775	76,304
5	0,687	6,872	83,175
6	0,460	4,602	87,777
7	0,417	4,166	91,943
8	0,316	3,163	95,106
9	0,256	2,563	97,669
10	0,233	2,331	100,000

Tabela 6- Distribuição das cargas fatoriais por problema e conceito envolvido

Problema	Conceito envolvido	Fator1	Fator2
1	Área	0,795	-0,083
2	Área	0,791	-0,011
3	Volume	0,799	-0,094
4	Perímetro	0,420	-0,619
5	Área	0,839	-0,132
6	Perímetro	0,677	-0,219
7	Volume	0,726	0,357
8	Volume	0,769	0,044
9	Área	0,593	0,321
10	Área	0,253	0,734

Respostas às Questões de Pesquisa

1- Existem diferenças significativas entre os alunos do magistério e licenciatura, quanto à utilização de conceitos e princípios na solução de problemas?

Problema 1:

Calcule a medida do lado de um quadrado de área $64cm^2$.

Esse problema possui o enunciado contendo informações completas. Primeiramente, os estudantes deveriam ativar os esquemas adequados à sua solução, reconhecendo, dessa forma, que esse problema diz respeito ao conceito de área e não de perímetro. A seguir, o estudante deveria utilizar o conhecimento do algoritmo adequado para chegar à resposta correta.

Os alunos de Licenciatura (72,2%) utilizaram os conceitos e princípios de área mais corretamente do que os alunos de Magistério (21,0%). O teste Qui-quadrado mostrou a existência de diferenças significativas entre esses dois grupos de sujeitos quanto a utilização de conceitos e princípios de área do quadrado.(χ^2 = 60,068; p= 0,00000).

No problema 1, pode ser utilizado o seguinte princípio: $A = l^2$, onde A é a área do quadrado e l é a medida do lado. O conceito de área do quadrado é trabalhado, segundo a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática (São Paulo, 1991), desde a quarta série do ensino fundamental. 17,8% dos estudantes de licenciatura e 34,7% dos estudantes de magistério solucionaram o problema, utilizando os conceitos e princípios de forma incorreta, ou seja, solucionaram um problema, envolvendo o conceito de área, aplicando o conceito de perímetro.

Tabela 7 – Distribuição dos sujeitos de acordo com a utilização de conceitos e princípios pelos alunos de Magistério e Licenciatura para a solução do problema 1

Utilização de conceitos e princípios Problema 1	*Tipo de curso*		
	Licenciatura	*Magistério*	*Total*
Utilizou conceitos e princípios corretamente	65	26	91
Utilizou conceitos e princípios incorretamente	16	43	59
Não sei	5	46	51
Em branco	4	9	13
Total	*90*	*124*	*214*

Nota: 0 células (0,0%) apresentaram valor esperado menor que 5. O valor esperado mínimo foi de 5,47.

É interessante observar, na figura 5, a diferença entre a quantidade de alunos que responderam *não sei* nos dois cursos. Aproximadamente 37%, dos alunos de Magistério, e 5,5%, dos estudantes de Licenciatura, responderam *não sei.* Os mesmos sujeitos que escreveram *não sei* nesse problema, foram aqueles que apontaram como dificuldade n*ão lembrar a fórmula para a solução.*

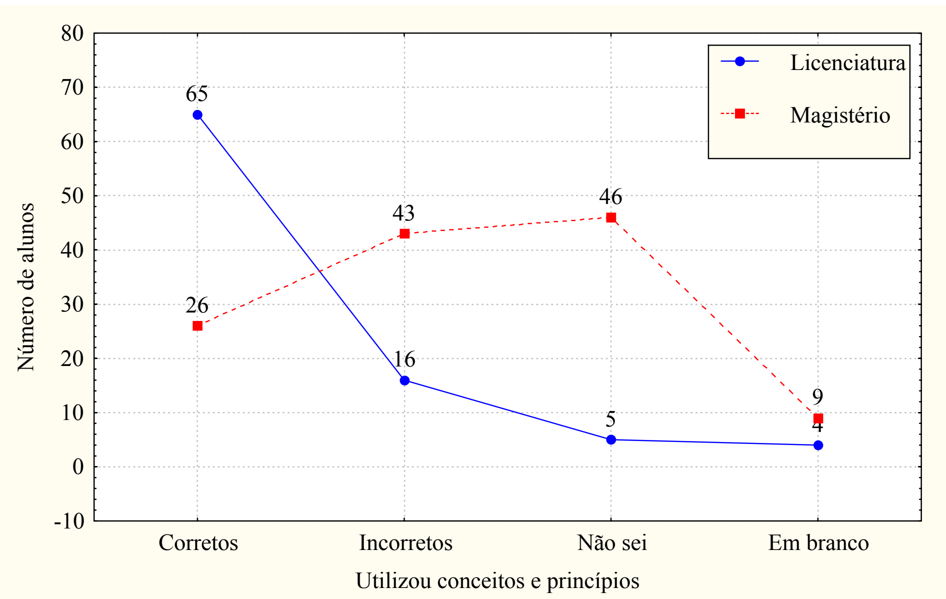
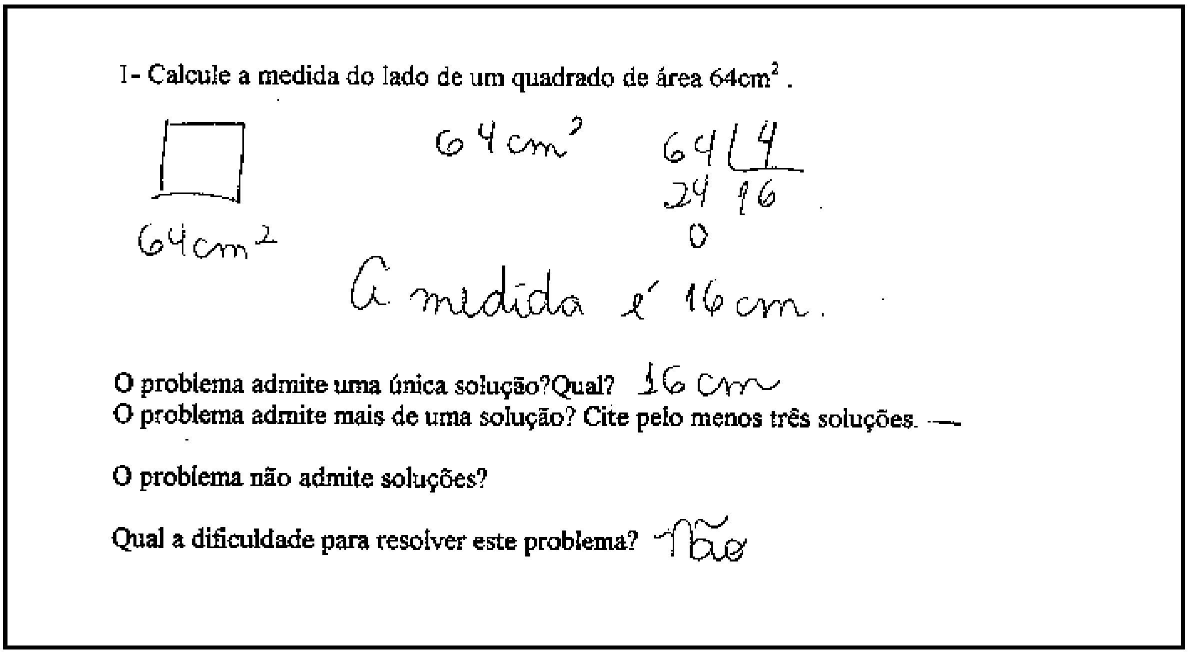


Figura 5 - Utilização de conceitos e princípios pelos alunos de Magistério e Licenciatura para a solução do problema 1

A análise de alguns procedimentos utilizados pelos alunos na solução do problema 1 mostrou que o sujeito **M_3** utilizou conceitos e princípios incorretamente, pois utilizou o conceito de perímetro em um problema que tratava de área.

O sujeito **M_3** admitiu não encontrar dificuldades para encontrar a solução do problema, mesmo utilizando o conceito incorreto para o problema em questão.



1- Calcule a medida do lado de um quadrado de área 64cm².

64cm²

64cm²

64 | 4
24 16
0

A medida é 16cm.

O problema admite uma única solução?Qual? 16 cm

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções. —

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema? Não

A resposta a seguir foi dada por **SL_1** e mostra que o mesmo também utilizou um conceito errado para o cálculo do lado do quadrado. Esse sujeito relatou que o problema admitia mais de uma solução, quando admitia apenas uma única.

1- Calcule a medida do lado de um quadrado de área $64cm^2$.

$64cm^2$

$A_{\square} = 64\ cm^2$

$L = \frac{64}{2}$

$L = 32\ cm$

O problema admite uma única solução?Qual? Não, mais de uma
O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.
Sim, mas não estou lembrada.
O problema não admite soluções?
admite.
Qual a dificuldade para resolver este problema?
nenhuma, só não me lembro direito.

As soluções dadas ao problema 1 por **M_3** e **SL_1,** destacadas anteriormente, estão de acordo com os resultados obtidos em um teste de escolaridade nos Estados Unidos, relatados por Outhred e Mitchelmore (2000), que afirmaram que muitos alunos da escola elementar e da escola secundária tendem a fazer confusão entre o conceito de área e de perímetro. Na presente pesquisa, foi observado que alguns alunos de Licenciatura em Matemática também confundiram os dois conceitos.

Problema 2:

Dado um triângulo isósceles com um lado medindo 2cm, o outro medindo 10cm e o terceiro lado com medida igual a um dos outros dois lados. Calcule sua área.

Os alunos de licenciatura(48.9%) utilizaram os conceitos e princípios mais corretamente do que os alunos de magistério (27,4%). O teste Qui-quadrado mostrou que existe diferença significativa entre esses dois cursos, quanto a utilização dos conceitos e princípios de área. (χ^2 = 44,907; p = 0,00000).

Tabela 8 – Distribuição dos sujeitos de acordo com a utilização de conceitos e princípios pelos alunos de Magistério e Licenciatura para a solução do problema 2

Utilização de conceitos e princípios pelo aluno para o Problema 2	*Tipo de curso*		
	Licenciatura	*Magistério*	*Total*
Utilizou conceitos e princípios corretamente	16	3	19
Utilizou conceitos e princípios incorretamente	19	32	51
Utilizou o conceito de triângulo corretamente e o de área incorretamente	25	31	56
Utilizou o conceito correto mas não desenvolveu	3	0	3
Não sei	11	53	64
Em branco	16	5	21
Total	*90*	*124*	*214*

Nota: 2 células (16,7%) apresentaram valores esperados menores que 5. O valor esperado mínimo foi de 1,26

Na tabela 8, é importante analisar que, apesar de alguns alunos do curso de Licenciatura (27,8%) e Magistério (25%) terem utilizado o conceito de triângulo isósceles corretamente, o problema não foi solucionado completamente, pois esses mesmos estudantes não conseguiram calcular a área do triângulo, quando eram dados os três lados dessa figura.

Os alunos que conseguiram alcançar a solução correta aplicaram o Teorema de Pitágoras. Apenas um aluno aplicou a fórmula de Herão. Isso pode ser atribuído ao fato de que a escola não prioriza as diversas maneiras disponíveis para calcular a área de um triângulo. Parece que os estudantes só conseguem efetuar os cálculos de área de um triângulo, quando são fornecidas a base e altura.

Foi observado que houve uma má compreensão dos dados contidos na proposição desse problema, porque era fornecido os lados do triângulo e não a sua altura. Porém, alguns alunos utilizaram o 2 como base e o 10 como altura, como mostra o protocolo de **TL_2**.

2- Dado um triângulo isósceles com um lado medindo 2cm, o outro medindo 10cm o o terceiro lado com medida igual a um dos outros dois lados. Calcule sua área. 2

$A = \frac{b.h}{2}$

$A = \frac{2.10}{2}$

$A = 10\ cm^2$

**

O sujeito **PL_1** escreveu: *"Ele não dá a altura e só tem medida dos lados sendo que tem que ter base x altura".* O mesmo sujeito acrescentou que esse problema não tinha solução.

O problema 2 possui informações supérfluas, pois sendo um triângulo isósceles, não precisa ser dada a informação que um dos lados tem a mesma medida que um dos outros lados. Krutetskii (1976), trabalhando com essa categoria de problemas, observou que alunos, com baixa capacidade em Matemática, não conseguiram distinguir os dados redundantes, presentes nos problemas. A maioria dos alunos, com capacidade média em Matemática, conseguiu isolar os dados supérfluos apenas com o auxílio do experimentador. Somente os estudantes altamente capacitados em matemática conseguiram isolar os dados redundantes e chegar a solucionar o problema.

O objetivo do problema não foi avaliar se o aluno possuía alta, média ou baixa capacidade de solução, mas sim analisar a habilidade dos sujeitos, quanto à percepção das relações e fatos presentes nos problemas.

A análise dos protocolos mostrou que o baixo desempenho, apresentado pelos sujeitos na solução desse problema, foi influenciado pelo conhecimento prévio de triângulo isósceles, pelo conhecimento de procedimentos para o cálculo de área do triângulo e pela deficiência, por parte dos alunos, na percepção das relações existentes entre os dados fornecidos no problema.

Problema 3

A área de uma face de um cubo é 36 cm^2. Calcule o seu volume

Para solucionar o problema 3, que possui enunciado com informações completas, os alunos de Licenciatura (55,5%) utilizaram os conceitos e princípios mais corretamente do que os alunos de Magistério (14,5%). O teste Qui-quadrado mostrou que havia diferenças significativas entre os sujeitos, quando agrupados de acordo com o curso em relação à maneira como utilizavam os conceitos e princípios. (χ^2 =56,279; p=0,00000).

Tabela 9 – Distribuição dos sujeitos de acordo com a utilização de conceitos e princípios pelos alunos de Magistério e Licenciatura para a solução do problema 3

Utilização de conceitos e princípios pelo aluno para o Problema 3	*Tipo de curso*		
	Licenciatura	*Magistério*	*Total*
Utilizou conceitos e princípios corretamente	49	18	67
Utilizou conceitos e princípios incorretamente	8	21	29
Utilizou o conceito correto mas não desenvolveu	1	0	1
Não sei	15	73	88
Em branco	17	12	29
Total	*90*	*124*	*214*

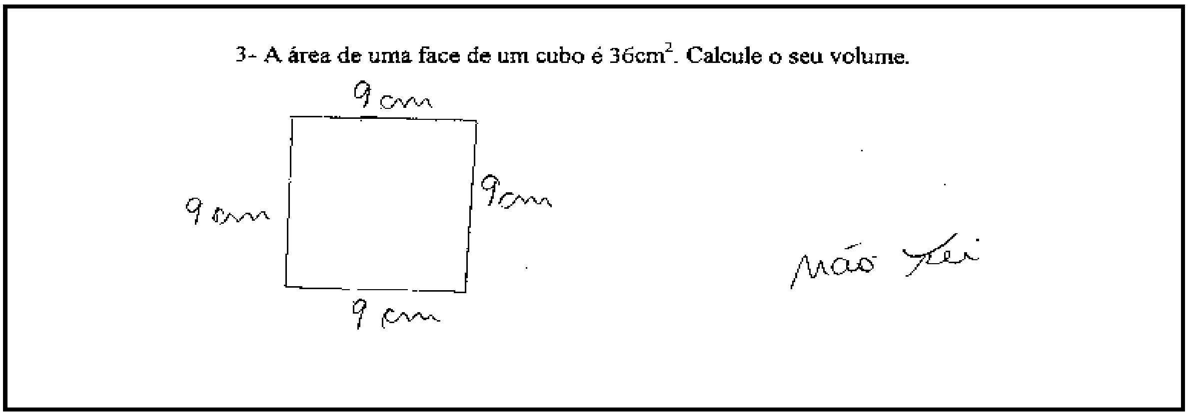
Nota: 2 células (20,0%) apresentaram valores esperados menores que 5. O valor esperado mínimo foi de 0,42.

O problema 3 envolve os conceitos de área e de volume e a análise dos protocolos mostrou que os estudantes afirmavam: *"não saber solucionar o problema"* e *"não lembrar a fórmula".* Esse problema possui informações completas e com uma única resposta, sendo esse tipo encontrado freqüentemente em livros didáticos de matemática do ensino médio. É importante observar a quantidade de sujeitos que respondeu *"não sei":* 88 alunos.

Alves (1999) encontrou, como resultado em seu estudo sobre os componentes da habilidade matemática, requeridos na solução de problemas aritméticos por estudantes do ensino médio, que os sujeitos - que demostravam possuir uma representação eficiente de um problema - também eram aqueles que demostravam possuir o conhecimento prévio sobre ele. Outros autores como Chi e Glaser (1992) e Echeverría e Pozo (1998) também concordaram que o conhecimento específico de uma área influencia na solução de problemas.

É válido observar, na tabela 9, que 58,9%, dos sujeitos do curso de Magistério, não conseguiram iniciar o problema, escrevendo *não sei.* Há um índice significativo de respostas em branco e não sei, totalizando 54,7% da amostra.

A resposta a seguir extraída do protocolo de **M₄** mostrou que esse sujeito não discriminava corretamente entre o conceito de área e perímetro, pois apresentou uma resposta (incorreta) para a medida do lado do quadrado (medida de uma aresta do cubo), afirmando que não sabia calcular o volume do sólido em questão.



Para atingir a resposta, um procedimento adequado seria, em primeiro lugar, calcular a raiz quadrada de 36, procedimento esse realizado a partir da recuperação na memória, da fórmula necessária para o cálculo da área. Assim, a raiz quadrada de 36 resulta 6, indicando que cada lado da face do cubo mede 6cm. (O sujeito precisa recuperar também a informação de que o cubo possui seis faces quadradas). A seguir o sujeito precisa buscar os conceitos e princípios necessários para a execução da segunda parte da tarefa que seria referente aos procedimentos de cálculo do volume. Precisa também ativar na memória quais os conhecimentos necessários para realizar essa tarefa. Se o conhecimento declarativo e de procedimento a respeito do cubo já tiverem sido automatizados (e não decorados), o sujeito tornará esse conhecimento disponível na estrutura cognitiva, aplicando os procedimentos de solução, isto é, usando a fórmula $V = l^3$ para chegar à resposta correta.

PL_2, utilizou a medida da área da face do cubo como medida do lado, conforme mostrado a seguir:

$$V = a^2$$
$$V = (36)^2$$
$$\boxed{V = 1296\ cm^3}$$

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 3 \\ 36 \\ 36 \\ \hline 216 \\ 108 + \\ \hline 1296 \end{array}$$

Problema 4

Dois lados de um triângulo isósceles estão na razão 3:8. Encontre os lados, se o perímetro do triângulo é igual a 38 cm e um dos lados é 10 cm maior que o outro. Os lados são expressos por números inteiros.

Os alunos de Licenciatura utilizaram os conceitos e princípios mais corretamente do que os alunos de Magistério. O teste Qui-quadrado revelou que existe diferença significativa entre esses dois grupos quanto à utilização de conceitos e princípios (χ^2=33,520 ; p=0,00000).

Tabela 10 – Distribuição dos sujeitos de acordo com a utilização de conceitos e princípios pelos alunos de Magistério e Licenciatura para a solução do problema 4

Procedimento utilizado pelo aluno para o Problema 4	*Tipo de curso*		
	Licenciatura	*Magistério*	*Total*
Utilizou conceitos e princípios corretamente	10	2	12
Utilizou conceitos e princípios incorretamente	16	9	25
Utilizou o conceito correto mas não desenvolveu	5	0	5
Não sei	35	92	127
Em branco	24	21	45
Total	*90*	*124*	*214*

Nota: 2 células (20,0%) apresentaram valor esperado menor que 5. O mínimo esperado foi de 2,10.

Embora tenham sido encontradas diferenças significativas entre os sujeitos dos dois cursos quanto ao procedimento utilizado, a tabela 10 mostra que um número baixo de sujeitos, tanto da Licenciatura quanto do Magistério, utilizou os conceitos e princípios corretamente, sendo que 80,3% dos sujeitos não conseguiram sequer iniciar os procedimentos de solução, respondendo que não sabiam solucionar. Isso parece indicar que os sujeitos desse grupo apresentavam pouca resistência à frustração e baixa persistência diante do fracasso ou insucesso. Como esses aspectos são aprendidos e, posteriormente, passíveis de serem ensinados na escola, poderiam constar dos planos de ensino, nos aspectos referentes à formação das atitudes.

A análise dos protocolos mostrou que o baixo desempenho no problema foi influenciado pela presença do conceito de razão no enunciado do mesmo.

Como o problema 4 contém em sua proposição o conceito de razão, sendo exigido do aluno que o utilize na solução do problema, foi observado (através dos protocolos) que os sujeitos tiveram um baixo desempenho e isso pode ser atribuído ao desconhecimento a respeito desse conceito.

O conceito de proporcionalidade, muitas vezes, aparece desvinculado dos conceitos de geometria. Na maior parte dos livros didáticos, por exemplo, o conceito de proporcionalidade é aplicado na solução de problemas aritméticos (divisão em partes proporcionais e regra de três), não havendo uma relação desse conceito em solução de problemas geométricos.

Problema 5

Calcule o lado de um retângulo de área 36 cm^2

Os alunos de Licenciatura utilizaram os conceitos e princípios mais corretamente do que os alunos de Magistério. O teste Qui-quadrado mostrou que existe diferença significativa entre esses dois cursos, quanto ao procedimento utilizado (χ^2=52,026; p=0,00000).

Neste problema, que apresenta infinitas soluções, 34,4% dos alunos de licenciatura e 19,3% dos estudantes do curso de magistério conseguiram identificar várias soluções para os lados do retângulo. Os alunos que utilizaram os conceitos e princípios corretamente foram os mesmos que cumpriram todas as etapas do problema, acertaram o procedimento e também as respostas. Alguns alunos do curso de licenciatura (8,9%) demostraram conhecer o procedimento para o cálculo da área do retângulo, escrevendo a fórmula $A = bh$, embora não tenham encontrado nenhuma solução para o problema.

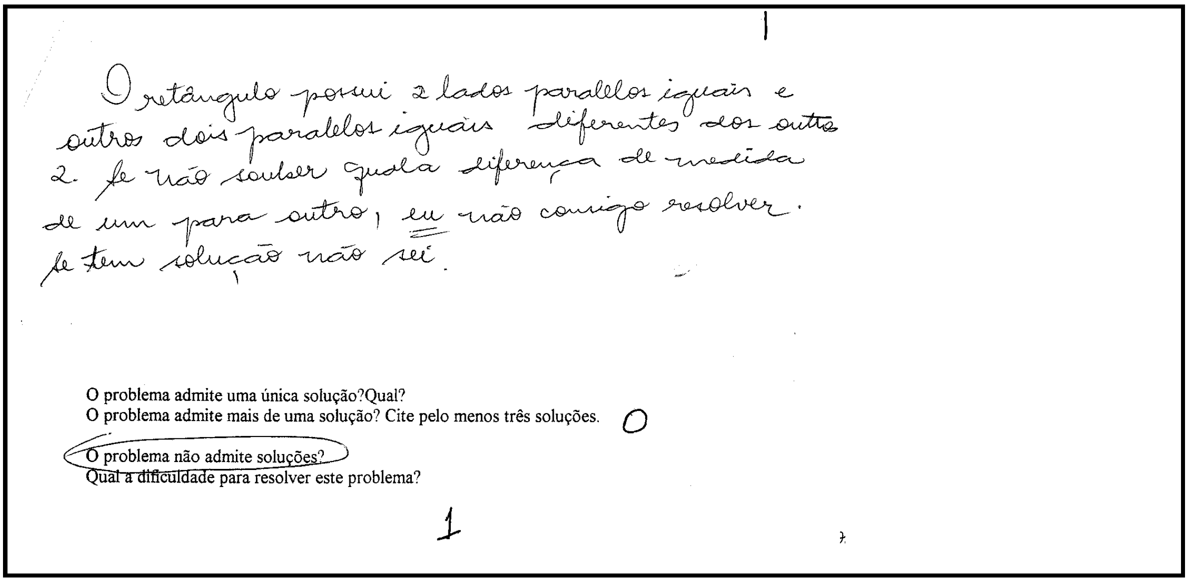
Tabela 11– Distribuição dos sujeitos de acordo com a utilização de conceitos e princípios pelos alunos de Magistério e Licenciatura para a solução do problema 5

Procedimento utilizado pelo aluno para o Problema 5	*Tipo de curso*		
	Licenciatura	*Magistério*	*Total*
Utilizou conceitos e princípios corretamente	31	24	55
Utilizou conceitos e princípios incorretamente	13	23	36
Utilizou o conceito correto mas não desenvolveu	8	0	8
Não sei	14	69	83
Em branco	24	8	32
Total	*90*	*124*	*214*

Nota: 2 células (20,0%) apresentaram valor esperado menor que 5. O mínimo esperado foi de 3,26.

Do total de sujeitos, 53,8% deixaram o problema sem resposta, não conseguindo iniciar nenhum procedimento de solução. Já, 17% dos sujeitos dos dois cursos utilizaram os conceitos e princípios de forma incorreta.

O sujeito **SL$_2$** iniciou o problema fornecendo uma definição de retângulo. Pela definição que apresentou pode ser inferido que para esse sujeito o quadrado não seria um retângulo. O estudante afirmou ainda que o problema não admite soluções e isto pode ser atribuído ao fato de não dispor do conhecimento relativo a medidas, porque não conhece a diferença entre as figuras.



O retângulo possui 2 lados paralelos iguais e outros dois paralelos iguais diferentes dos outros 2. Se não souber qual a diferença de medida de um para outro, eu não consigo resolver. Se tem solução não sei.

O problema admite uma única solução?Qual?
O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções. 0
O problema não admite soluções?
Qual a dificuldade para resolver este problema?
1

Para chegar à resposta correta, os sujeitos deveriam recuperar na memória o conceito de retângulo bem como o procedimento adequado para o cálculo de sua área. A seguir, o sujeito precisa encontrar dois números cujo produto é igual a 36, uma vez que a área do retângulo é obtida através do produto das medidas da base pela altura. Finalmente, os estudantes poderiam chegar à conclusão de que o problema proposto possui infinitas soluções. Nesse problema, se o lado medir 6cm, então o retângulo é um quadrado.

Embora não estivesse especificada a medida de um dos lados do retângulo ou a relação entre os seus lados, o problema exigia do aluno algumas hipóteses para se chegar à solução. Para que ele seja solucionado, o aluno deveria ter desenvolvido as habilidades necessárias, percebendo as relações entre os dados e fatos, presentes no problema, e as suas possíveis soluções. Além disso, os alunos deveriam ter ativado os esquemas e estratégias para encontrar os procedimentos adequados ao problema. O uso da metodologia da solução de problemas, por parte dos professores de Matemática, pode contribuir ao desenvolvimento, nos alunos, das habilidades essenciais para solucionar problemas em situações novas.

A análise dos protocolos do problema cinco mostrou que a maioria dos estudantes não chegou sequer a buscar a estrutura matemática contida na proposição do problema, informando que o mesmo não admitia solução. O sujeito **SL$_3$** forneceu a seguinte solução:

A = b x h
36 = b x h
2 incógnitas?

Esse sujeito afirmou que o problema não admitia solução. Krutetskii (1976) observou que a grande maioria dos estudantes, com média capacidade em Matemática, apresentava dificuldades para detectar os dados faltantes e relacioná-los na solução do problema. Não é excessivo salientar que esse tipo de problema parece não ser familiar à maioria dos sujeitos envolvidos no estudo.

Problema 6

Em um triângulo isósceles a medida do lado lateral é menor que a base. Seu perímetro é 31cm. Qual a medida de cada lado do triângulo?

Os alunos de Magistério utilizaram, nos procedimentos de solução, conceitos e princípios mais corretos do que os alunos de Licenciatura, sendo que o teste Qui-quadrado mostrou diferença significativa entre esses dois cursos quando é tratada a utilização de conceitos e princípios (χ^2=39,662; p = 0,00000).

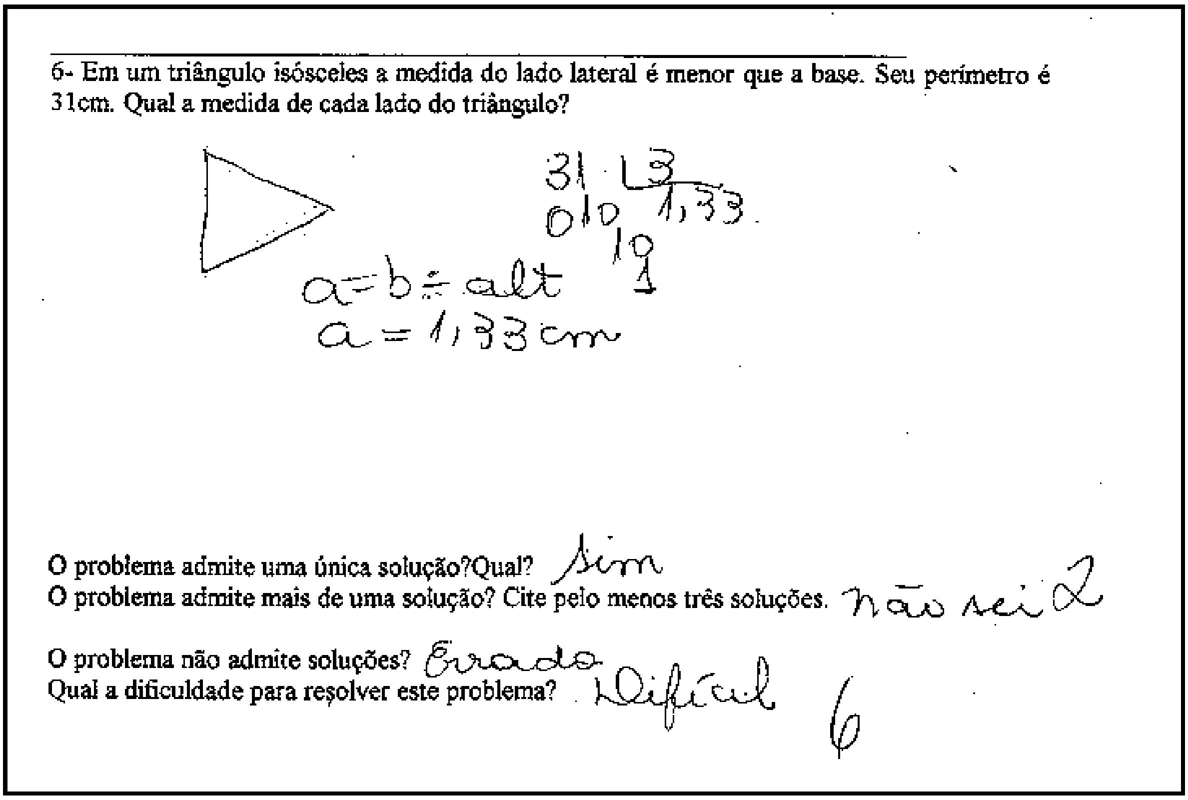
Tabela 12 – Distribuição dos sujeitos de acordo com a utilização de conceitos e princípios pelos alunos de Magistério e Licenciatura para a solução do problema 6

Utilização de conceitos e princípios pelo aluno para o Problema 6	*Tipo de curso*		
	Licenciatura	*Magistério*	*Total*
Utilizou conceitos e princípios corretamente	10	14	24
Utilizou conceitos e princípios incorretamente	9	4	13
Utilizou o conceito de triângulo corretamente e o de área incorretamente	1	1	2
Não sei	29	89	118
Em branco	41	16	57
Total	*90*	*124*	*214*

Nota: 2 células (20,0%) apresentaram valor esperado menor que 5. O mínimo esperado foi de 0,84.

Nesse problema, os alunos do curso de Magistério tiveram um desempenho um pouco melhor do que os alunos do curso de Licenciatura, sendo que os alunos que acertaram o problema completamente, foram os mesmos que conseguiram utilizar adequadamente o conhecimento declarativo. A tabela 12 mostra que foram poucos os alunos de ambos os cursos que conseguiram *relacionar* o conceito de perímetro com os dados fornecidos pelo problema. Houve um predomínio de problemas em branco e de respostas *não sei.* No total, 82% dos sujeitos não conseguiram iniciar um procedimento para a solução do problema.

É importante observar que o sujeito $\mathbf{M_5}$ fez confusão entre o conceito de triângulo isósceles e triângulo eqüilátero, como mostra a solução, a seguir, em que o sujeito dividiu o valor da medida do perímetro por três.



6- Em um triângulo isósceles a medida do lado lateral é menor que a base. Seu perímetro é 31cm. Qual a medida de cada lado do triângulo?

31 |3
010 1,33.
10
1

a=b≠alt
a = 1,33 cm

O problema admite uma única solução?Qual? Sim
O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções. não sei 2

O problema não admite soluções? Errado
Qual a dificuldade para resolver este problema? Difícil 6

Para chegar às soluções do problema, um procedimento que poderia ser utilizado seria, inicialmente, ativar, na memória, os conceitos necessários para a solução (conceito de triângulo isósceles e perímetro). Uma vez fixado o perímetro e sabendo que o triângulo é isósceles, o aluno poderia encontrar medidas para os lados do triângulo cujo perímetro é 31cm, sendo que duas medidas eram iguais. Por exemplo, (10, 10, 11), (9,9,13) etc.. Chi e Glaser (1992) também concordaram que a utilização desse tipo de estratégia pode facilitar a solução do problema. Segundo esses autores: *"uma heurística freqüentemente útil em muitos casos é a de gerar um conjunto de possíveis soluções para um determinado problema diretamente e depois testá-los um de cada vez para ver se é a solução correta" (p. 262).*

É importante, também, destacar que, além de encontrar os lados do triângulo, era necessário a verificação das soluções, utilizando a desigualdade triangular.

Problema 7

Calcular o volume de um paralelepípedo reto-retângulo sabendo que duas de suas dimensões são 8cm e 27 cm.

No problema 7, que possui o enunciado com informações incompletas e que tratava do conceito do volume do paralelepípedo reto-retângulo, 13 alunos de Licenciatura e 16 de Magistério fizeram utilização correta dos mesmos, enquanto 27 sujeitos de Licenciatura e 80 de Magistério afirmaram que não sabiam solucionar o problema. O teste Qui-quadrado revelou que existiam diferenças significativas entre esses dois cursos quanto a utilização de conceitos e princípios (χ^2=33,217; p=0,00000).

Tabela 13– Distribuição dos sujeitos de acordo com a utilização de conceitos e princípios pelos alunos de Magistério e Licenciatura para a solução do problema 7

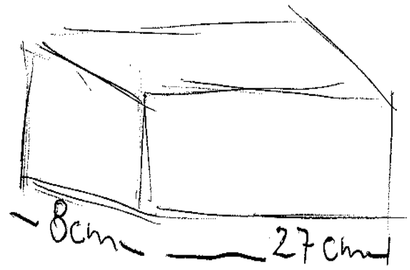
Utilização de conceitos e princípios pelo aluno para o Problema 7	*Tipo de curso*		
	Licenciatura	*Magistério*	*Total*
Utilizou conceitos e princípios corretamente	13	16	29
Utilizou conceitos e princípios incorretamente	9	11	20
Utilizou o conceito correto mas não desenvolveu	3	0	3
Não sei	27	80	107
Em branco	38	17	55
Total	*90*	*124*	*214*

Nota: 2 células (20,0%) apresentaram valor esperado menor que 5. O mínimo esperado foi de 1,26.

Um número pequeno de alunos dos cursos de Magistério e Licenciatura acertou o problema, sendo 14,4%, dos alunos de Licenciatura, e 13,0%, dos alunos de Magistério. Houve um predomínio de problemas em branco e de resposta *não sei*, num total de 76,0% dos sujeitos.

A dificuldade dos alunos pode ser atribuída ao fato do enunciado não fornecer a medida de uma das dimensões do paralelepípedo. Como trata-se de um problema cujo enunciado possui informações incompletas, os sujeitos que conseguiram solucioná-lo, ou atribuíram um valor particular para a outra dimensão, ou representaram-na com uma variável, mostrando que o volume do paralelepípedo era dependente da dimensão desconhecida. A análise dos protocolos evidenciou que a ausência dessa informação comprometeu os procedimentos de solução, conforme mostram alguns exemplos a seguir.

O sujeito **TL_3** relatou que o problema não admitia solução, uma vez que uma das dimensões da figura era desconhecida.



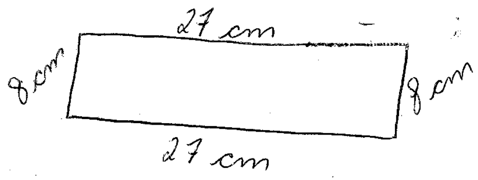
É IMPOSSIVEL CALCULAR O VOLUME DESTE SÓLIDO DESCONHECENDO UMA DE SUAS MEDIDAS.

O problema admite uma única solução?Qual?
O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções? SIM, NÃO ADMITE SOLUÇÕES.
Qual a dificuldade para resolver este problema? NENHUMA.

Embora **TL**$_3$ afirme não ter encontrado nenhuma dificuldade para solucionar o problema, não relaciona o fato de não ter todas as informações à dificuldade para solucionar o problema.

Já o sujeito **M**$_6$ considerou o paralelepípedo como um retângulo, representando o problema da seguinte maneira:



$$\begin{array}{r} {}^{5} \\ 27 \\ \times\, 8 \\ \hline 216 \text{ cm} \end{array}$$

O resultado fornecido por esse sujeito indica a área do retângulo (que é uma figura plana) e não o volume do paralelepípedo (que é tridimensional).

A análise dessa representação parece indicar que, embora o sujeito apresente conceitos relacionados à representação no plano, não é capaz de transferi-los para uma outra dimensão.

Problema 8

Quantos litros de água são necessários para encher completamente uma piscina que tem 25 m de comprimento, 10m de largura, 2,2m de profundidade e tem uma capacidade de 550m^3

A análise dos protocolos mostrou que os alunos de Licenciatura utilizaram os conceitos e princípios mais corretamente do que os alunos de Magistério. O teste Qui-quadrado apontou diferenças significativas entre os sujeitos dos dois cursos, quanto a utilização do conceito e princípio de volume (χ^2=35,252; p=0,00000).

Tabela 14 – Distribuição dos sujeitos de acordo com a utilização de conceitos e princípios pelos alunos de Magistério e Licenciatura para a solução do problema 8

Utilização de conceitos e princípios pelo aluno para o Problema 8	*Tipo de curso*		
	Licenciatura	*Magistério*	*Total*
Utilizou conceitos e princípios corretamente	32	21	53
Utilizou conceitos e princípios incorretamente	7	11	18
Não sei	22	78	100
Em branco	29	14	43
Total	*90*	*124*	*214*

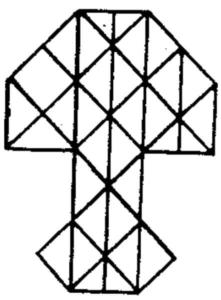
Nota: 0 células (0,0%) apresentaram valor esperado menor que 5. O valor esperado mínimo foi de 7,57.

O problema 8 apresentava uma proposição com informações supérfluas, que era relativo ao volume da piscina, pois o mesmo já era mencionado. O procedimento de solução seria a transformação de metros cúbicos para litros e, embora esse seja um problema que pode ser considerado fácil (a transformação de metros cúbicos em litros é - ou deveria ser - trabalhada desde a quinta série do ensino fundamental), 78 alunos de Magistério e 22 da Licenciatura não souberam iniciar os procedimentos de solução. De acordo com a proposta curricular para o ensino de Matemática - ensino fundamental - um dos objetivos instrucionais da quinta série é que o aluno estabeleça as relações entre metros cúbicos e o litro. (p.73).

Aparentemente, esse objetivo não vem sendo atingido, pois apenas 3 sujeitos desse grupo conseguiram estabelecer essa relação, tendo os demais deixado o problema em branco, ou escrito que não sabiam responder ou, quando tentavam, utilizavam os conceitos de forma incorreta. Do total, 75,2% não obtiveram êxito na solução do problema. Um protocolo que mostrou o reconhecimento da informação supérflua foi o de **SL$_4$** pois afirmou que: "*Não precisa nem calcular. O problema já dá a resposta".*

<u>Problema 9</u>

Utilizando como unidade de medida de área, determine a área da figura abaixo.



Assim como nas demais questões, nessa também foi verificada a superioridade dos alunos de Licenciatura sobre os de Magistério, quando se considerou a utilização do conceito e princípio de área, necessários para solucionar o problema. O teste Qui-quadrado revelou que existiam diferenças significativas entre os sujeitos dos dois cursos, quanto a utilização desses conceitos e princípios (χ^2=49,451; p=0,00000).

Tabela 15– Distribuição dos sujeitos de acordo com a utilização de conceitos e princípios pelos alunos de Magistério e Licenciatura para a solução do problema 9

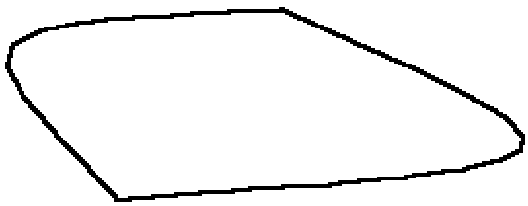
Utilização de conceitos e princípios pelo aluno para o Problema 9	*Tipo de curso*		
	Licenciatura	*Magistério*	*Total*
Utilizou conceitos e princípios corretamente	20	13	33
Utilizou conceitos e princípios incorretamente	13	6	19
Utilizou o conceito correto mas não desenvolveu	4	0	4
Não sei	17	82	99
Em branco	36	23	59
Total	*90*	*124*	*214*

Nota: 2 células (20,0%) apresentaram valores esperados menor que 5. O valor esperado mínimo foi de 1,68.

Nesse problema, foi dado um triângulo como unidade de área e os alunos deveriam realizar a contagem dessas unidades, contidas na figura. Embora esse problema possa ser considerado de fácil solução, apenas um número pequeno dos sujeitos atingiu a solução, utilizando os conceitos e princípios de área de forma correta tendo a porcentagem de 22,5% dos alunos de Licenciatura e 10,5% dos alunos do curso de Magistério. Aproximadamente 73,8% do total dos sujeitos não conseguiram solucionar o problema deixando a questão em branco.

<u>Problema 10</u>

Explique um procedimento para calcular a área da figura abaixo:



Qual a dificuldade para resolver este problema?

Esse problema tinha como objetivo analisar diferentes procedimentos que poderiam ser utilizados para encontrar a área de uma figura não convencional.

Tanto os alunos de Licenciatura, quanto os de Magistério apresentaram alto grau de dificuldade na utilização dos conceitos e princípios necessários para a solução. O teste Qui-quadrado revelou que existiam diferenças significativas entre os sujeitos desses dois cursos quanto a utilização de conceitos e princípios necessários para descrever o procedimento correto ($\chi^2 = 19{,}597$; $p=0{,}00021$).

<u>Tabela 16</u>– Distribuição dos sujeitos de acordo com a utilização de conceitos e princípios pelos alunos de Magistério e Licenciatura para a solução do problema 10

Utilização de conceitos e princípios pelo aluno para o Problema 10	*Tipo de curso*		
	Licenciatura	*Magistério*	*Total*
Utilizou conceitos e princípios corretamente	2	1	3
Utilizou conceitos e princípios incorretamente	13	15	28
Não sei	31	79	110
Em branco	44	29	72
Total	*90*	*124*	*214*

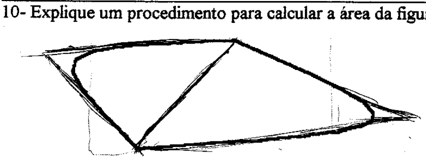
Nota: 2 células (25,0%) apresentaram valores esperados menor que 5. O valor esperado mínimo foi de 1,26.

A tabela 16 mostra que uma quantidade muito pequena de sujeitos conseguiu relatar o procedimento utilizado para encontrar a área da figura. O número de sujeitos, que conseguiu chegar à solução desse problema, mostrou efetivamente o uso correto dos conceitos e princípios que, de certa forma, garantiu a obtenção da resposta correta. Por outro lado, muitos alunos que utilizaram conceitos e princípios de forma incorreta relataram que, para achar a área da figura, seria necessário dividir a figura em dois triângulos.

Com relação às dificuldades, as mais freqüentes foram:

1- *Não conseguir encontrar o método;*
2- *Não conseguir resolver por falta de dados;*
3- *Não conseguir resolver porque a figura era irregular;*
4- *Não conseguir resolver porque não se lembrava da fórmula para aplicar;*
5- *Não conseguir resolver porque a figura era arredondada;*
6- *Não conseguir resolver porque não entendia a pergunta.*

A análise do desempenho dos estudantes, nesse problema, mostrou que aparentemente os sujeitos não estavam familiarizados com figuras não convencionais às quais não existem fórmulas para serem aplicadas. O sujeito **TL₄** apresentou, como procedimento inicial, a idéia de que, traçando-se dois triângulos, poder-se-ia encontrar a área aproximada da figura. Embora tenha apresentado um procedimento inicial consistente, esse mesmo estudante considerou o problema difícil, conforme mostra a figura a seguir.


10- Explique um procedimento para calcular a área da figura abaixo:

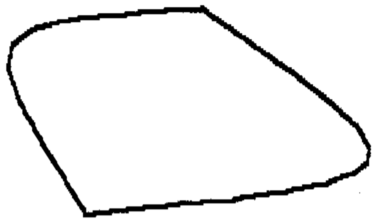
Traça-se linhas, encontra-se 2 triângulos Já é um começo!

Qual a dificuldade para resolver este problema?

Difícil

Como se tratava de uma figura não-convencional, alguns sujeitos, como **PL_3**, cujo protocolo é reproduzido a seguir, relataram que não sabiam o procedimento inicial para a solução do problema.

10- Explique um procedimento para calcular a área da figura abaixo:



Qual a dificuldade para resolver este problema?

Não sei nem por onde começar

Aparentemente, **PL_3** não encontrou uma representação em sua estrutura cognitiva que correspondesse à figura desenhada. Isso pode estar mostrando a dificuldade em transferir de uma representação, usualmente apresentada, para uma outra que foge aos padrões convencionais.

A análise dos protocolos dos sujeitos, desse grupo, no aspecto relativo ao emprego de conceitos e princípios, mostrou que os mesmos encontraram grande dificuldade para disponibilizar, na estrutura cognitiva, os elementos necessários à sua solução. Os resultados mostrados por esses sujeitos podem estar indicando que os mesmos, em sua escolarização, foram submetidos a um ensino que privilegiava o uso de problemas rotineiros, o que tem contribuído para produzir mudanças nas características da percepção mental dos sujeitos a respeito do problema matemático. A repetição de algoritmos e estratégias podem ter levado esses estudantes a desenvolverem o pensamento reprodutivo, muitas vezes, incapacitando-os para desenvolver novas formas de solucionar os problemas propostos.

2- Existem diferenças significativas no desempenho de alunos do Magistério e da Licenciatura em Matemática, quando solucionam problemas de diversos tipos (problemas com informações completas, incompletas e supérfluas)?

Em primeiro lugar, foi analisado o desempenho global na prova, que variava de acordo com o erro ou acerto. Os alunos da Licenciatura e do Magistério apresentaram diferenças entre as médias, como pode ser observado na Figura 6. O teste U de Mann-Whitney mostrou que existiam diferenças significativas entre os sujeitos desses dois cursos quanto ao desempenho na prova (U = 2478,00; p=0,0000).

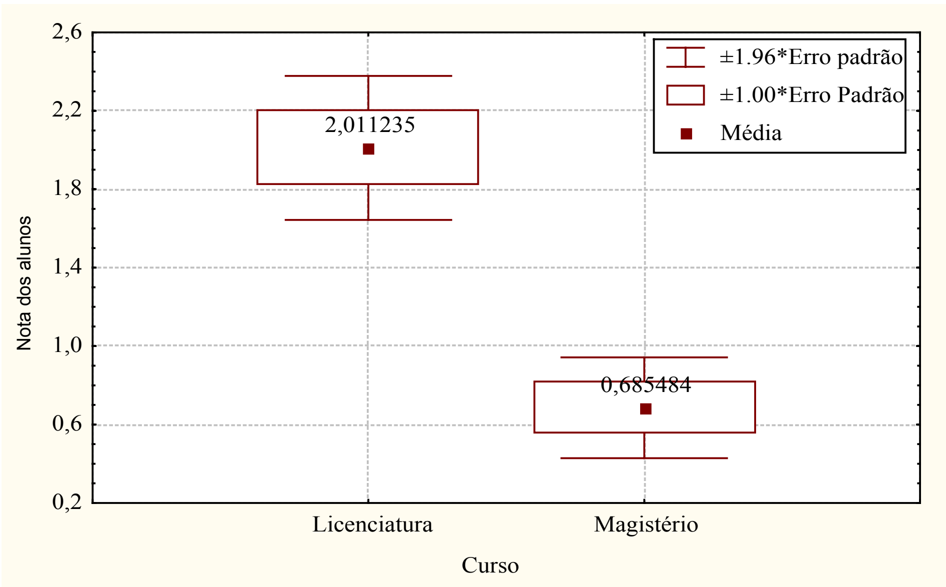


Figura 6 – Médias globais das notas dos alunos por curso

Poder-se-ia esperar que os estudantes do curso de Licenciatura, em vias de serem licenciados para ensinar matemática, tivessem um desempenho alto. Isso não foi verificado, o que de certa forma ratifica algumas posições que consideram a saída de sujeitos dos cursos de Licenciatura sem nenhum preparo para ensinar matemática.

Em seguida, foi considerado o desempenho dos sujeitos dos dois cursos em cada um dos tipos de problema e foi verificado que os problemas com informações completas foram os que tiveram maior nota, embora muito baixa. Em seguida, estão os problemas com informações supérfluas e as mais baixas referem-se aos problemas com informações incompletas.

Embora os alunos do curso de Licenciatura em Matemática tenham um desempenho melhor que os alunos do curso de magistério, é importante analisar que as médias de ambos os cursos foram muito baixas, uma vez que a prova foi avaliada em uma escala de zero a dez. A análise de variância de Friedman revelou que existiam diferenças significativas entre as notas de acordo com três tipos de problemas (χ^2 = 63,35096; g.l.=2; p=0,0000).

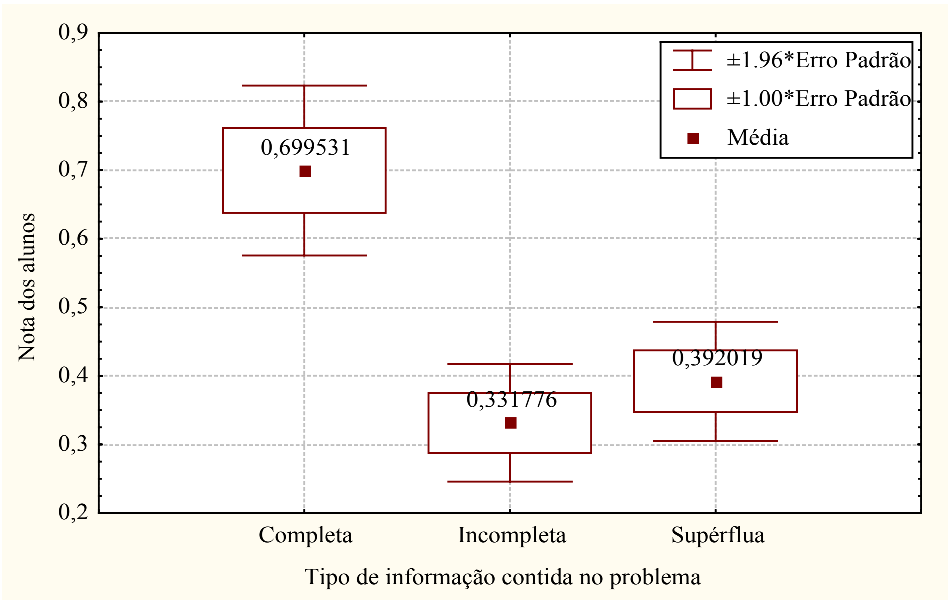


Figura 7 – Médias das notas dos alunos por tipo de problema

Como pôde ser constatado, as médias dos estudantes nos diferentes tipos de problemas, foram baixas, sendo que a maior média se concentrou nos problemas com informações completas e as menores, nos problemas com informações incompletas. Isso parece indicar que quando a proposição do problema continha os elementos necessários para a solução, o sujeito apresentou um desempenho melhor.

Em seguida, foram consideradas as médias obtidas em cada tipo de problema, e então, consideradas de acordo com o curso. Foi verificado que as médias nos problemas com informações completas, quando os sujeitos são agrupados de acordo com o curso, são significativamente diferentes sendo a média da Licenciatura significativamente maior que a do Magistério (χ^2 = 53,25744; g.l.=1; p=0,0000).

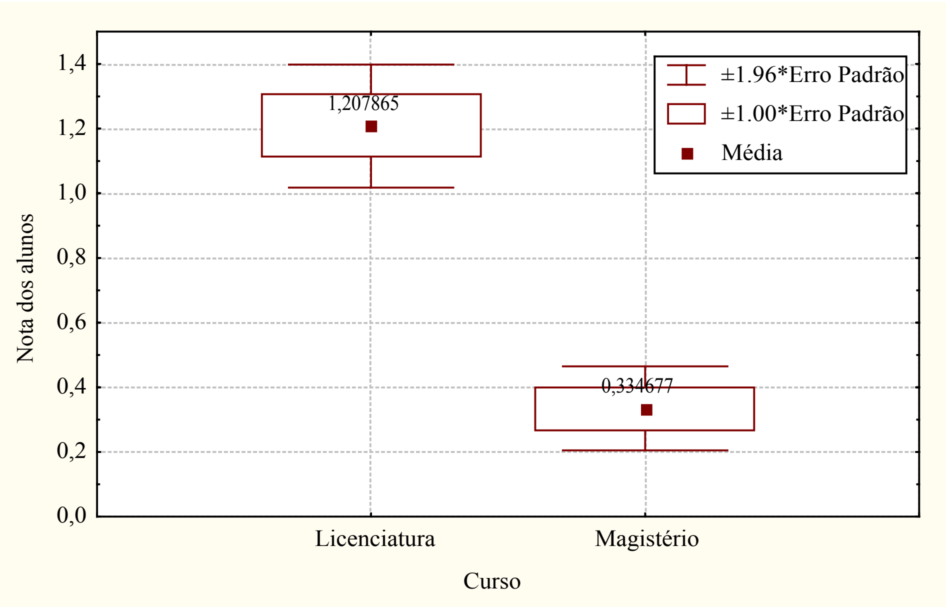


Figura 8– Médias das notas obtida na solução dos problemas com informação completa de acordo com o curso

A figura 8 mostra que, embora os estudantes de licenciatura em matemática tenham tido um desempenho melhor que os alunos do curso de Magistério, as médias nesse tipo de problema, em ambos os cursos, foram baixas, sugerindo a necessidade de se usar problemas com enunciados bem formulados e, de certa forma, mostrando a relação entre a compreensão do enunciado e a solução do problema.

Em seguida, foi feita a comparação entre os cursos em relação aos problemas com informações incompletas e verificou-se que as médias referentes a esta categoria foram diferentes para o curso de Licenciatura e Magistério. A nota média da Licenciatura é significativamente maior que a do Magistério (Figura 9) (χ^2=14,26202; g.l.=1; p=0,0002). A diferença entre as médias é menor para este tipo de problema (informação incompleta) que para problemas com informações completas, cuja diferença foi bem maior, mostrando que quando a informação é incompleta, tanto os sujeitos da Licenciatura quanto os de magistério tendem a apresentar um desempenho pior.

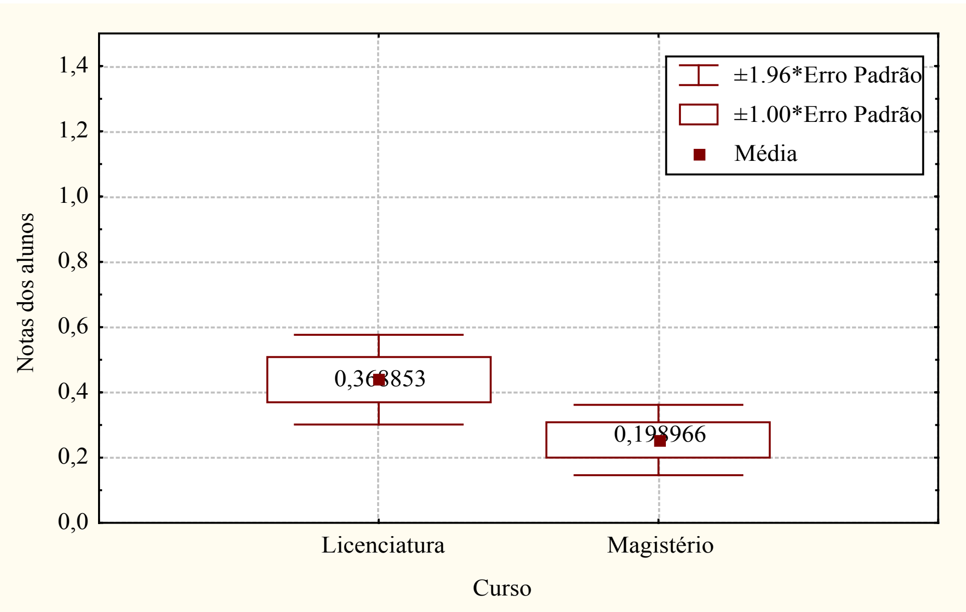


Figura 9 – Médias das notas obtidas na resolução dos problemas com informação incompleta

O passo seguinte foi comparar as médias de notas obtidas nos problemas com informações supérfluas, separando os sujeitos de acordo com o curso. Essa análise mostrou que as médias nos problemas com informação supérflua, foram diferentes para o curso de Licenciatura e Magistério. A média da Licenciatura é significativamente maior do que a do Magistério (χ^2=20,43287; g.l.=1; p=0,0000). A diferença entre os dois cursos é menor para esse tipo de problema (informação supérflua) do que para o de informações completas, mas um pouco superior do que a de informações incompletas, parecendo indicar que o excesso de informação em um problema afetou os dois grupos de sujeitos.

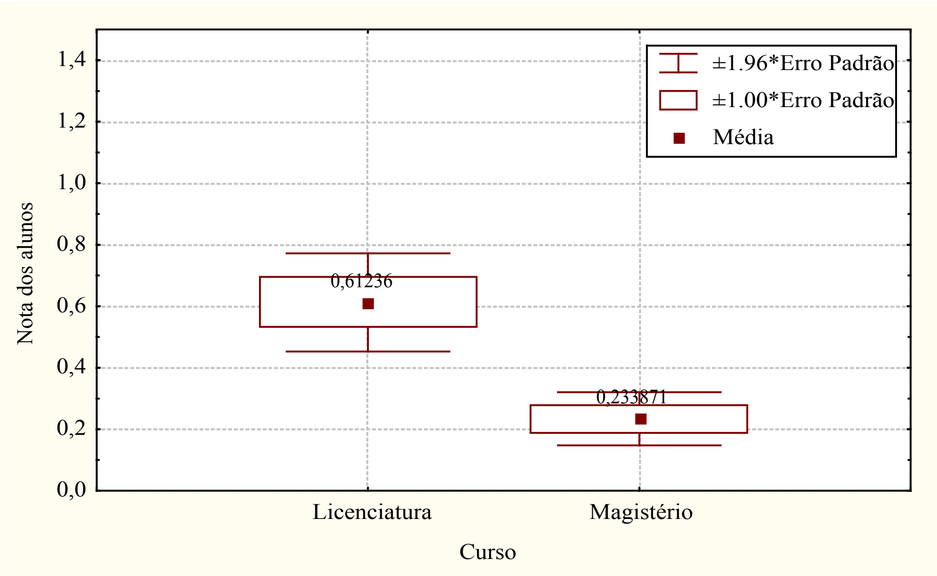


Figura 10- Médias das notas obtida na resolução dos problemas com informação supérflua

Em seguida, tentou-se estabelecer se existiriam diferenças significativas entre as dificuldades apontadas pelos estudantes, buscando responder a seguinte questão de pesquisa.

3- Existem diferenças no grau e no tipo de dificuldades apresentadas por alunos do curso de licenciatura em matemática e alunos do curso de habilitação específica do magistério, que possam ser atribuídas ao tipo de problemas? (informação completa, informação incompleta ou informação supérflua)?

As respostas à questão relativa à dificuldade são mostradas na tabela 17.

Tabela 17– Distribuição dos sujeitos de acordo com as dificuldades apontadas pelos mesmos.

Dificuldade apontada pelo aluno	*Informação completa*			*Informação incompleta*			*Informação supérflua*			*Área*
	P1	*P3*	*P9*	*P5*	*P6*	*P7*	*P2*	*P4*	*P8*	*P10*
Não lembra a fórmula	8	15	3	7	4	8	19	9	5	4
Não aprendeu	7	5	5	5	4	4	8	3	3	4
Encontrar o método	4	3	3	3	5	6	6	7	3	10
Faltam dados	0	1	1	12	5	2	6	0	0	9
Não especificou	0	2	1	1	1	1	2	1	2	2
Não sabe geometria	0	1	2	0	0	1	1	1	0	0
Não entendeu a pergunta	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
Não sabe responder	48	79	94	83	110	100	57	111	92	97
Outros	84	40	22	25	18	14	39	16	29	18
Todas	3	4	3	2	2	3	5	6	3	12
Em branco	60	64	80	76	65	75	70	59	77	58
Total	*214*	*214*	*214*	*214*	*214*	*214*	*214*	*214*	*214*	*214*

*Nota:*Pi = Problema i

A tabela 17 mostra que as principais dificuldades apontadas pelos sujeitos estão relacionadas à memória (não lembrar a fórmula, não ter aprendido, não encontrar o método etc.). Isso pode ser um indicativo de que muitas fórmulas e algoritmos podem ter sido memorizadas sem compreensão e, com a provável falta de treino dessas, tenha ocorrido o esquecimento.

Agrupando as respostas dos alunos nas categorias apresentadas na Tabela 18, a seguir, foi possível verificar que 36 sujeitos afirmaram não ter dificuldades para a solução dos problemas com informação completa e, em menor número, 16 sujeitos afirmaram não encontrar dificuldades em solucionar problemas com informação supérflua. Mas o teste Qui-quadrado mostrou que o número de alunos que não têm dificuldade caem significativamente, quando estes resolvem problemas com informação incompleta, χ^2=50,125; g.l.=9; p=0,0000.

Tabela 18 – Agrupamento das dificuldades apontadas pelos alunos na solução de cada tipo de problema

Dificuldade apontada	*Tipo de informação por problema*			
	Completa (problemas 1, 3, 9)	*Incompleta (problemas 5, 6, 7)*	*Supérflua (problemas 2, 4, 8)*	*Área (problema 10)*
Não tem dificuldade	36	10	16	2
Em branco	62	65	65	57
Não sabe responder	70	100	84	97
Outras alternativas	46	39	49	58
Total	*214*	*214*	*214*	*214*

Finalizando a análise, buscou-se responder à quarta questão de pesquisa proposta para o presente trabalho.

4- Existem diferenças significativas nos conceitos de área, perímetro e volume, apresentados pelos alunos do curso de habilitação específica do magistério e pelos alunos do curso de licenciatura em matemática?

Para possibilitar a aplicação do teste do Qui-quadrado, os dados foram reagrupados, incluindo na alternativa "outros" todas as alternativas com freqüências menores.

A questão onze procurou analisar o entendimento dos sujeitos a respeito do conceito de área, perímetro e volume.

O que você entende por área?

Foram encontradas diferenças significativas dos sujeitos à pergunta relativa ao conceito de área, conforme dados apresentados na Tabela 21,em que os sujeitos foram agrupados de acordo com o curso (χ^2=26,8187, g.l.=6, p=0,000157).

Tabela 19– Conceito de área descrito pelos alunos

Conceito de área descrito pelos alunos	*Curso*		*Total*
	Licenciatura	*Magistério*	
Compreende um determinado território	3	9	12
Parte interna de uma figura	8	5	13
Medida total dos lados	10	7	17
Superfície	7	16	23
Quantidade de unidades quadradas que uma figura pode ter	1	-	1
Soma dos lados de uma figura	2	-	2
Não respondeu	34	29	63
Não sabe responder	4	34	38
Não lembra	-	2	2
Outras	20	22	42
Total	*89*	*124*	*213*

Na tabela anterior é importante observar que 101 sujeitos do curso de Licenciatura e do curso de Magistério (47,4% do total dos sujeitos) não responderam ou relataram que não sabiam responder à questão. Apenas um sujeito forneceu uma definição adequada para o conceito de área: *Quantidade de unidades quadradas que uma figura pode ter.* É interessante também notar que dois sujeitos forneceram o conceito de perímetro (soma dos lados de uma figura) para o conceito de área.

Na categoria *outras* foram colocadas respostas dadas que apareceram com menor freqüência, tais como: p*arte do quadrado e do retângulo, qualquer espaço que se pede para resolver, multiplicação do comprimento pela largura, espaço que o homem ocupa, calcular a área de uma sala, metro quadrado de um lugar, tamanho total das formas.*

Alguns alunos apresentaram o conceito de área mas não utilizaram os atributos definidores do conceito, valendo-se apenas de exemplos específicos. Analisando o desempenho dos sujeitos nos problemas e as respostas dadas ao conceito de área, parece que muitos deles resolvem problemas sem se deterem nos atributos criteriais do conceito, utilizado na solução do problema. Esse fato pareceu ser evidenciado também em outros conceitos da geometria, como os de perímetro e volume.

O que você entende por perímetro?

A análise das definições dadas a perímetro mostrou que havia diferenças significativas nas respostas dos sujeitos dos dois cursos (χ^2=20,790; g.l.=4; p=0,00035)

.

Tabela 20 – Conceito de perímetro descrito pelos alunos

Conceito de perímetro descrito pelos alunos	*Curso*		*Total*
	Licenciatura	*Magistério*	
Não respondeu	33	29	61
Não sei	5	39	44
Soma dos lados	36	46	82
Área	1	1	2
Medida dos lados	7	6	13
Contorno	3	-	3
Todos os lados iguais	-	1	1
Lados da área		1	1
Medidas de um triângulo	1	-	1
Outros	4	1	4
Total	*90*	*124*	*214*

Tanto no curso de Licenciatura, quanto no Magistério, os alunos afirmaram que não sabiam ou não responderam à questão (105 sujeitos). Como se trata de um conceito elementar de geometria, trabalhado desde das séries iniciais do ensino fundamental, não era esperado um número baixo de acertos. Na categoria *outros,* foram dadas as respostas como: *Espaço total da frente do objeto, metade do todo, volta dada, nada.*

O que você entende por volume?

Foram encontradas diferenças significativas sobre o conceito de volume (χ^2=25,558 g.l.=7, p=0,00060).

Tabela 21 – Conceito de volume descrito pelos alunos

Conceito de volume descrito pelos alunos	*Curso*		*Total*
	Licenciatura	*Magistério*	
Não respondeu	33	31	64
Não sei	4	33	37
Quantidade de massa	4	6	10
Refere-se a litro, quantidade	8	20	28
Capacidade	19	18	37
Espaço que um corpo possui	6	4	10
Figura geométrica	-	1	1
Medida de um líquido	1	-	1
Base vezes altura	1	-	1
Multiplicação de todos os lados	2	4	6
Outras	12	7	18
Total	*90*	*124*	*214*

Na tabela anterior, um total de 101 sujeitos não responderam ou relataram que não sabiam o conceito de volume. As respostas que constam da tabela mostram que a maioria dos estudantes definiu o conceito referindo-se à quantidade de líquidos e capacidade que um corpo possui. Na categoria *outros* foram dadas as seguintes respostas: *nada, conteúdo, tudo que cabe dentro de um lugar, algo cheio, massa cúbica, quantidade em ml, total do que se pede,quantidade na massa da área, figura geométrica, dentre outras.*

Muitas respostas parecem mostrar uma certa confusão entre os conceitos, supostamente já aprendidos, como é o caso de conceituar volume como sendo uma figura geométrica, ou como sendo algo cheio.

De uma maneira geral, a análise dos dados mostrou:

1- Um baixo desempenho dos sujeitos na solução de problemas geométricos, sendo que a dificuldade maior apareceu nos problemas envolvendo informações incompletas e supéfluas. Isso foi devido, em grande parte, à dificuldade que os sujeitos encontraram para obter a informação matemática a partir do enunciado dos problemas propostos. Quando a estrutura matemática do problema não é bem compreendida, muitas dificuldades, relacionadas à percepção dos dados - contidos no enunciado dos problemas - tendem a aparecer, dificultando e, em muitos casos, impedindo a solução de problemas;

2- Algumas dificuldades, por parte dos sujeitos, em ativar os esquemas e estratégias adequadas para a solução dos problemas propostos, principalmente aqueles problemas que envolviam informações incompletas e supérfluas;

3- Desconhecimento (e/ou esquecimento), pela maior parte dos sujeitos, de alguns conceitos básicos da geometria (área, perímetro, volume, triângulo isósceles) e também de alguns princípios geométricos (fórmulas para o cálculo de áreas, perímetro e volume);

A amostra de conveniência usada, aqui, não permite generalizar os dados, mas indica algumas dificuldades, evidenciadas pelos sujeitos da pesquisa, na atividade de solução de problemas e que também podem ser encontradas por outros sujeitos que, provavelmente, serão futuros professores.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES E IMPLICAÇÕES DO ESTUDO

O presente estudo mostrou que, embora tenham sido encontradas diferenças significativas nas médias da prova matemática dos dois grupos, Licenciatura e Magistério, as médias foram muito baixas, sendo 2,0 para os alunos de Licenciatura em Matemática e 0,68 para os estudantes do curso de Magistério, indicando um desempenho sofrível.

A análise estatística dos dados mostrou que os estudantes tiveram um desempenho melhor nos problemas que envolviam informações completas, sendo a média geral de 0,7. Já nos problemas com informações incompletas e supérfluas, as médias foram menores sendo, respectivamente, 0,33 e 0,40. Os resultados desse estudo parecem confirmar algumas hipóteses da pesquisa realizada por Silva, Vendramini e Pirola (1998) que mostraram que o desempenho dos estudantes de licenciatura em matemática em solução de problemas aritméticos, algébricos e geométricos era maior nos problemas que possuíam informações completas, o que não ocorria em relação aos problemas com informações incompletas e supérfluas. Alves (1999) também mostrou que a maior dificuldade encontrada pelos sujeitos na solução dos problemas propostos estava centrada no primeiro estágio do processo: a representação do problema. Segundo essa autora:

> *Analisando os estágios da solução de problemas em que os sujeitos apresentaram maior dificuldade, foi observado que a obtenção da informação matemática, a partir do enunciado verbal, foi o estágio responsável pelo maior número de fracassos. (Alves, 1999, p. 147)*

A não familiaridade dos estudantes com outras categorias de problemas é influenciada por muitos livros didáticos que, em sua maioria, contempla somente uma categoria específica de problemas. A diversidade de tipos de problemas é um instrumento importante para desenvolver nos alunos habilidades à compreensão da estrutura dos mesmos. Segundo Krutetskii (1976), o enunciado é uma parte integrante da categoria de compreensão do problema. Através dos dados do enunciado, é possível verificar, antes de iniciar os procedimentos de solução, o tipo de resposta do mesmo, ou seja, é possível verificar se o problema proposto possui uma solução, infinitas soluções, ou se o problema não admite soluções.

No presente estudo, não foi possível uma análise mais detalhada sobre o reconhecimento, por parte dos alunos, dos tipo de resposta dada em cada problema, pois a grande maioria deixou essa parte em branco.

A compreensão do problema requer dos solucionadores habilidades básicas como: habilidade verbal (Brito, Garcia e Fini, 1994) e habilidade para perceber relações entre os dados fornecidos no problema. (Krutetskii, 1976). Essas habilidades podem ser desenvolvidas na escola através de um ensino adequado que priorize a metodologia da solução de problemas, capacitando o aluno para solucionar problemas matemáticos diversificados. Essa metodologia também pode levar o sujeito à compreensão de conceitos e princípios, habilitando-o a transferi-los para novas situações. É importante salinetar que o desempenho na solução de problemas é influenciado por muitos fatores, dentre os quais podemos citar: as habilidades, as atitudes, os hábitos, as destrezas, os conhecimentos prévios e as características da personalidade. É de fundamental importância que o professor atente para esses fatores ao utilizar a solução de problemas como metodologia de ensino.

Para o professor estar capacitado a trabalhar com essa metodologia é necessário que os cursos de formação de professores estejam direcionados para o ensino e a aprendizagem significativa de conceitos matemáticos bem como para o desenvolvimento de habilidades de solução de problemas.

O baixo desempenho dos alunos na solução dos problemas, envolvendo conceitos geométricos, é um indicativo de que a aprendizagem de conceitos e princípios de geometria pelos estudantes desse grupo pode ter sido feita através de aplicações de fórmulas e algoritmos que, na maior parte dos casos, foram esquecidos, dificultando a solução dos problemas propostos. Esse fato foi observado na análise dos protocolos, em que uma boa parte dos alunos afirmou que não conseguiu solucionar o problema por não se lembrar das fórmulas necessárias à obtenção da resposta. Isso é mostrado em depoimentos como o de **PL**$_5$ que apontou a memória e a passagem do tempo como causa de sua incapacidade para solucionar o problema.

Me desculpe por ter escrito não sei nos problemas, eu fui sincera. Não me lembro mesmo, das fórmulas de área, volume... Não sei!! Faz[120] tempo que estudei isso.

O sujeito em questão era estudante do curso de Licenciatura em Matemática e afirmou que não solucionou os problemas porque não se lembrava das fórmulas de área, perímetro e volume. Mas esses conceitos são (ou deveriam ser) trabalhados desde as séries iniciais. Esse depoimento pode ser um indicativo de que só é possível solucionar um problema quando a fórmula correta é aplicada. Uma vez esquecida a fórmula, o problema não pode ser solucionado. Quando a fórmula é esquecida o estudante pode se reportar ao conceito e tentar deduzi-la. Se não se consegue lembrar a fórmula da área do retângulo, o estudante pode se valer do conceito geral de área (quantidade de unidades quadradas que cabem em uma determinada figura). A memorização de fórmulas, sem uma compreensão do significado do conceito, pode gerar o esquecimento e a incapacidade do aluno em aplicar os conceitos supostamente aprendidos na solução de problemas.

O sujeito **TL**$_5$ reconheceu que, realmente, conhecia esses conceitos e que, essa era a parte da matemática que ele menos sabia.

Agradeço pela oportunidade e também vc me mostrar o Grau de meu conhecimento, por se tratar de uma prova Não Relacionada a materia que estou aprendendo vejo que Estou somente acostumado a resolver o que me é cobrado ou seja estuda-se um Assunto, Logo vem a prova, refaço os exercicio tiro boas Notas, mais ao mesmo tempo não estou preocupado em saber o porque. porque achar a Area, o Volum e o perimetro, pois NÃO me Lembro AS formulas.

Lá e Infelismente é Assim. O Professor monta a aula em sima de um Livro cujo os mesmo já vem Resolvidos se coloca à frente e essim, é claro que há exessões mais são Raros os que se dedicam totalmente.

obs: Essa é parte da matematica que Eu em particular menos sei.

A situação descrita por esse sujeito indicou um fato que parece estar presente na maior parte das escolas, pois muitos alunos parecem estar acostumados a utilizar o pensamento reprodutivo nas avaliações de matemática, muitas vezes não utilizando a sua criatividade para buscar novos procedimentos à solução de problemas.

A análise dos dados possibilitou concluir que o desconhecimento de um determinado conceito dificultou a solução de problemas que exigia o conhecimento do conceito de área, perímetro e volume. A importância da presença, na estrutura cognitiva, dos conceitos e princípios necessários à solução de um problema já foi tratada por Klausmeier e Goodwin (1977) que considerou o conhecimento específico de uma área, essencial para a solução de problemas. Foi observado, por exemplo, através da análise dos protocolos, que 51 sujeitos não conseguiram obter sucesso na solução do problema dois, pelo desconhecimento do conceito de triângulo isósceles e do conceito e do princípio da área de um triângulo.

A dificuldade dos alunos na transferência do conceito de área para situações novas, foi possível observar no problema dez, no qual era solicitado aos alunos para descreverem os procedimentos para o cálculo de área de figuras não-convencionais, e no problema nove em que os sujeitos deveriam contar as unidades de área que preenchiam a figura dada. O desconhecimento do conceito de perímetro e volume foi observado na questão onze, em que os alunos não conseguiram dar uma definição adequada a esses conceitos. O conhecimento prévio sobre razão foi um dos fatores que impossibilitou a solução completa do problema quatro, em que 127 sujeitos afirmaram não saber solucionar o problema

Na solução de problemas, o conhecimento de conceitos específicos utilizados em sua solução é importante, sendo que este deve ser utilizado para ativar os esquemas adequados. Mayer (1992) observou que, quando os esquemas errados são ativados para solucionar problemas, muitas dificuldades aparecem, muitas vezes, impossibilitando a solução completa de um determinado problema. Isso foi observado na solução do problema um, em que 59 sujeitos utilizaram os conceitos e princípios de área e perímetro de forma errônea (confundiram os dois conceitos) e 51 estudantes não conseguiram iniciar sequer o procedimento de solução. Os sujeitos que utilizaram esses conceitos e princípios de forma errônea foram os mesmos que consideraram o problema relacionado a áreas, como sendo um problema envolvendo o conceito de perímetro. Essa confusão entre o conceito de área e de perímetro também foi observada por Outhred e Michelmore (2000).

Os estudos revistos (Hershkowitz et al., 1987, Lawrie e Pegg, 1997 e Gal, 1998) também mostraram um baixo conhecimento por parte dos professores de vários conceitos básicos da geometria.

Foi observada uma deficiência por parte dos sujeitos envolvidos no presente estudo quanto ao conhecimento declarativo e de procedimentos, envolvendo os conceitos de área, perímetro e volume. Esse fato foi observado, através do baixo desempenho dos sujeitos na utilização de conceitos e princípios para a solução de problemas e também, através das questões, que solicitavam seus conceitos.

É importante observar que os sujeitos participantes dessa pesquisa serão futuros professores. Esses, egressos do curso de Licenciatura, deverão ensinar os conceitos de área, perímetro e volume no ensino fundamental (5ª à 8ª série) e no ensino médio (1º ao 3º colegial). Serão esses sujeitos capazes de ensinar esses conceitos? Ou será que ensinarão esses conceitos através da mera reprodução do livro didático? Provavelmente, uma boa parte desses futuros professores ensinarão tais conceitos priorizando o uso de fórmulas passíveis de serem decoradas, sem uma compreensão significativa: dos conceitos, de seus atributos definidores, exemplos e não-exemplos.

Os mesmos questionamentos podem ser estendidos para os alunos do curso de habilitação específica para o magistério. As séries iniciais exigem um trabalho com materiais manipulativos para facilitar a aprendizagem dos alunos. Como esses profissionais ensinarão seus alunos, se muitos conceitos não foram bem formados por eles prórpios?

Os resultados da análise estatística dos dados mostraram que, por exemplo, 17% dos estudantes de Magistério conseguiram estabelecer a relação entre metros cúbicos e litros, que são dois conceitos utilizados constantemente em problemas de medida, trabalhados desde as séries iniciais. O problema 9 também obteve um índice baixo de acertos, pois apenas 10,4% dos alunos conseguiram contar as unidades de área na figura.

O protocolo do sujeito $\mathbf{M_7}$ mostrou a sua dúvida em relação à possibilidade de ensinar geometria, quando estiver atuando no ensino fundamental (1ª à 4ª série), mostrando que o sujeito percebeu, no decorrer do teste, que possuía um conhecimento deficitário sobre os conceitos solicitados.

Respondi tudo com a maior sinceridade,
agora acho que dá para vocês entenderem !
por que não estou apta para ensinar Geome-
tria no ensino fundamental.
Agora, uma coisa lhes digo:
– Estou "boba" por não saber nada disso, sa-
bia que o ensino era fraco, mas não tanto.
Obs: – Falta "professor" de verdade, e nessa "bola
de neve" a coisa continua aumentando, se-
rá que terei base para ensinar corretamente?

Por outro lado, a estudante apontou, como causa do seu fraco desempenho, o ensino, considerando-o em relação aos poucos bons professores (professores de "verdade", segundo a aluna). É provável que essa situação gere ansiedade nos futuros professores que se percebem despreparados para atuar efetivamente no ensino de matemática. Essa mesma dúvida pode ser também a dúvida de muitos alunos que se encontram despreparados para ensinar geometria.

Os trabalhos revistos (Perez, 1991, Alves et al.,1998, Manrique et al.,1998, Melo e Almouloud, 1998) apontaram a deficiência e a pouca ênfase dada ao ensino de geometria. Essa deficiência pode estar relacionada à formação que os professores tiveram no curso de magistério e/ou licenciatura, conforme mostrou o protocolo de $\mathbf{M_7}$.

A falta de conhecimento, para ensinar corretamente os conceitos geométricos, pode ser decorrente, segundo o depoimento de $\mathbf{M_7}$, de professores que possivelmente não ensinaram geometria (ou ensinaram de forma superficial), pois ela não a aprendeu. Conseqüentemente esta aluna, sem a compreensão dos conceitos geométricos, provavelmente, não ensinará geometria para os seus alunos e, possivelmente, formará outras pessoas não competentes para a geometria.

Com as novas reformas educacionais, principalmente no estado de São Paulo, os professores deveriam estar mais atentos ás dificuldades de aprendizagem dos alunos. Isto requer do professor o conhecimento dos processos de pensamento dos estudantes (como mostrou o trabalho conduzido por Ruti, 1999), isto é, como eles formam os conceitos e princípios, como solucionam problemas, como retém os conteúdos e como os transfere para outras atividades. Além disso, os professores poderiam se deter mais nas dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos, planejando atividades adequadas a cada situação específica, ensinando e monitorando os estudantes não apenas o conhecimento declarativo, mas também o conhecimento de procedimentos.

Com o regime de Progressão Continuada adotado pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, SEE, o professor necessita conhecer os processos de aprendizagem dos seus alunos, pois espera-se que a *"escola encontre maneiras de ensinar que assegurem a efetiva aprendizagem de sua clientela e, consequentemente, seu progresso intra e inter ciclos" (Secetaria de Estado da Educação, 1998, p. 1).*

> *A progressão Continuada visa concentrar todo o empenho possível e mobilizar todos os recursos disponíveis para levar cada aluno a se beneficiar das atividades de ensino, de modo que possa se desenvolver afetiva, social e cognitivamente. Agora é o progresso, e não mais o fracasso, o que está na ordem do dia. (SEE, 1998, p. 02)*

Para atingir esses objetivos torna-se importante que os futuros professores sejam preparado, em seus cursos de formação inicial, para detectar os principais problemas de aprendizagem apresentados por seus alunos e propor atividades adequadas para cada tipo de problema. Em se tratando da geometria, é importante que o professor utilize materiais diversos, como o geoplano, os tangrans, os blocos lógicos e os mosaicos para facilitar a aprendizagem dos conceitos geométrico e a solução de problemas envolvendo os mesmos.

É importante que os programas de Educação Continuada também contribuam para a formação do professor, levando-os a buscar novas formas de trabalhar a geometria no ensino fundamental e médio e novas formas de avaliação, uma vez que o regime de progressão continuada pede avaliação contínua do processo de aprendizagem dos alunos.

A literatura analisada sobre formação continuada de professores (Santos, 1997, Brito, 1996) mostrou que é importante que o professor utilize a sala de aula como um ambiente à investigação dos problemas relacionados à aprendizagem. Nesse contexto, o professor deve ser um pesquisador em sala de aula, no que diz respeito à investigação dos fatores intervenientes no processo de aprendizagem dos alunos. Se um determinado estudante apresenta dificuldade para solucionar um problema envolvendo algum conceito, por exemplo, conceito de área, de perímetro ou de volume, o professor investigaria os fatores que poderiam estar associados a essas dificuldades, como: a transferência do conceito, a dificuldade de interpretação dos problemas dados e, ainda, ausência de motivação.

Um tema que poderia auxiliar os professores a compreender melhor os processos de pensamento dos estudantes envolvidos em situações-problema, seria a metacognição. Pode-se dizer que a metacognição é o processo de pensamento sobre o pensamento. Segundo alguns teóricos da Psicologia, citados por González (1998), a metacognição *"é um construto de natureza teórica e diz respeito aos conhecimentos que uma pessoa tem acerca de sua própria atividade cognitiva" (p.63).* A utilização da metacognição, segundo González (1998), propicia ao solucionador, entre outras coisas, manter o auto-controle sobre as ações realizadas e avaliar o processo.

Schoenfeld (1987) considerou que a metacognição desempenha um papel fundamental no ensino via solução de problemas, sendo identificado quatro técnicas que podem ser utilizadas pelos professores para desenvolver as capacidades metacognitivas dos alunos. Essas técnicas seriam: a) utilização de filmes, mostrando outros estudantes solucionando problemas. Essa técnica também auxilia os alunos a refletirem sobre o seu próprio comportamento durante o ensino; b) o professor modela os procedimentos, isto é, o professor deve motivar o aparecimento de vários comportamentos e processos através da solução dos problemas e não apresentar soluções prontas e acabadas; c) controle e auto-regulação dos conhecimentos e discussão das soluções, envolvendo todos os alunos

Todos os aspectos citados anteriormente podem ser incluídos nos programas de formação inicial e continuada do professor. É desejável que a geometria não seja desprezada pelos cursos que formam os profissionais do ensino de matemática e, conseqüentemente, desprezada pelas escolas onde esses professores irão atuar.

A análise dos resultados, evidenciando um baixo desempenho dos sujeitos em problemas e indicando dificuldades na obtenção da informação matemática envolvendo conceitos de geometria e tipos de enunciados diversificados, mostra que uma atenção especial deve ser dada à formação, em solução de problemas, de professores que atuarão no ensino fundamental e médio. Essa formação deve (além de fornecer subsídios para que os futuros professores desenvolvam habilidades em solução de problemas em aritmética e álgebra e geometria) proporcionar aos estudantes recursos teóricos e metodológicos para o ensino desses conceitos e princípios.

Quando se fala em formação do professor, não se pode perder de vista a sua formação inicial e continuada. Os futuros professores, principalmente aqueles que estão na última série do curso de licenciatura e no último ano do curso de magistério, devem estar preparados adequadamente em cursos de formação continuada que tratem, não somente dos conteúdos pedagógicos mas, também dos conteúdos específicos da geometria, capacitando-os a atuar, de forma efetiva, no ensino e na aprendizagem dos conceitos matemáticos, notadamente nos conceitos envolvendo área, perímetro e volume.

REFERÊNCIAS BIBLIORÁFICAS:

Afonso, M.C., Caramacho, M., & Socas, M. M. (1999). Teacher profile in the geometry curriculum based on the Van Hiele theory. In Zaslavsky, O. (Ed.), Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education .(vol.2, pp. 1-8). Haifa, Israel.

Alexander, P.A.(1996) The past, present, and future of knowledge research: A reexamination of the role of knowledge in learning and instruction. Educational Psychologist, 31 (2), 89-92.

Alves, D. M., Tancredi, Reali, M.S. P., M. M. R., Martucci, E. M., Reyes, C., Lima, E. F., Mizukami, M. G. N., Adib, M. L. S., & Melo, R. (1998). Conteúdos geométricos encontrados nos cadernos de alunos de 4ª série: indícios de prática pedagógica? In Anais do quinto encontro paulista de Educação Matemática. São José do Rio Preto, S.P., 60-63.

Alves, E. V. (1999). Um estudo exploratório dos componentes da habilidade matemática requeridos na solução de problemas aritméticos por estudantes do ensino médio. Dissertação de Mestrado. Campinas, FE. UNICAMP.

Andelfinger, B. (1994). Global mathematics education. In Bazzini, L. (Ed.), Proceedings of Fifth International Conference on Systematic Cooperation Between Theory and Practice in Mathematics Education (pp. 1-7). Grado, Italy: ISDAF.

Anderson, R. (1983). The architecture of cognition. Cambridge, Ma.: Harvard University Press.

Anderson, J.R., Reder, L.M. e Simon, H.A.(1996). Situated learning and education. Educational Researcher, 25 (4), 5-11

Anderson, J.R., Greeno, J.G., Kline, P.J., & Neves, D.M. (1981). Acquisition of problem-solving skill. In Anderson, J.R. (1981). Cognitive Skills and Their Acquisition (pp. 191-230). Hilladale, N.J.: Erlbaum.

Andrade, S., & Onuchic, L. R. (1998). Resolução de problemas na perspectiva do professor de matemática. In Anais do quinto encontro paulista de Educação Matemática. São José do Rio Preto, S.P., 132-133.

Araújo, E. A. (1999). Influências das habilidades e das atitudes em relação à Matemática e a escolha profissional. Dissertação de Mestrado. Campinas, FE. UNICAMP

Ausubel, D.P. (1968). Is there a discipline of Educational Psycholoy? Educational Psychologist, 6, 1-9.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1980). Psicologia Educacional. (tradução de Nick, E.). Rio de Janeiro: Editora Interamericana Ltda.

Ávila, G. (1993). Vestibular da UNICAMP- Matemática - Editora Globo

Balzan, N.C. (1989) O Papel das universidades na formação do professor. In Anais do I Encontro Paulista de Educação Matemática. Campinas, 99-100

Balzan, N.C., & Paoli, N.J.(1988). Licenciaturas - o discurso e a realidade. Ciência e Cultura. 40 (2), 99-100.

Batanero, M. C., Godino, J. D., & Pelayo, V. N. (1994). Epistemology and mathematics instruction: implications for curricular development. In Bazzini, L. (Ed.). Proceedings of Fifth International Conference on Systematic Cooperation Between Theory and Practice in Mathematics Education. (pp. 9-18).Grado, Italy: ISDAF.

Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. Journal for Research in Mathematics Education, 21 (1), 47-60.

Baxter, G.P., Elder, A. D., & Glases, R. (1996) - Knowledge-based cognition and performande assessment in the science classroom - Educational Psychologist, 31 (2), 133-140

Bell, A. (1994) Awareness of learning, refletion and transfer in school mathematics. In Bazzini, L. (Ed.). Proceedings of Fifth International Conference on Systematic Cooperation Between Theory and Practice in Mathematics Education. (pp.19-25).Grado, Italy: ISDARF.

Biembengut, M. S., & Silva, V. C. (1995). Ornamentos versus criatividade. Uma alternativa para ensinar geometria plana e simetria. A Educação Matemática em Revista - SBEM, nº1, 39-44.

Bigge, M.L.(1977). Teorias da aprendizagem para professores. São Paulo: EPU/Edusp

Billett, S. (1996). Situated learning: bridging sociocultural and cognitive theorising. Learning and Instruction, 6 (3), 263-280.

Bjuland, R. (1999). Problem solving process in geometry. Teachers student's co-operation in small group: a dialogical approach. In Zaslavsky, O. (Ed.), Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (vol.2, p. 121). Haifa, Israel.

Black, P., Atkin, M., & Pevsner, D (1997). Changing the subject: Inovation and Change in science and tecnology education. Journal of Curriculum Studies, 29 (4), 485-488.

Boavida, A. M. (1992). Resolução de problemas: que rumos para a Educação Matemática? In Brown, M., Fernandes, D., Matos, J. F. e Ponte, J. P. (Eds.), Educação Matemática. (pp. 105-114). Coleção temas de Investigação. Lisboa.

Boettger, J.R.J. (1996). Refletiendo la reación entre abstracto y el concreto - Comunicaciones Breves. In 8º Congresso Internacional de Educación Matemática. (p.16). . Coordenador: Coordenador: Gonzales, R. L. Sevilla, España.

Borralho, A. (1992). Resolução de problemas: que rumos para a Educação Matemática? In Brown, M., Fernandes, D., Matos, J. F. e Ponte, J. P. (Eds.), Educação Matemática. (pp. 115-122). Coleção temas de Investigação. Lisboa.

Braga, M.M. (1988). A licenciatura no Brasil: um breve histórico sobre o período 1973-1987. Ciência e Cultura, 40 (2), 151-157.

Brasil (1996). Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei 9.394/96.

Brasil (1997). Parecer 744/97. Câmara de Ensino Superior.

Brasil (1997). Deliberação 12/97. Conselho Estadual de Educação.

Brito, M.R.F.; Spalletta,A.G.; Mendes, C.R.M; Alves, E.V.;Jesus, M.A.S.; Gonçales, M.H.C.C., Utsumi, M.C., Pirola, N.A., & Lima, V.S.(1997). Um estudo das competências matemáticas adquiridas por estudantes nas séries iniciais do ensino fundamental. Trabalho não publicado, FE- UNICAMP.

Brito, M.R.F. (1993). Psicologia e Educação Matemática - Revista de Educação Matemática da Sbem, (1), 31-63

Brito, M.R.F; Fini, L.D.T.; & Garcia, V.J.N. (1994). Um Estudo exploratório sobre as relações entre o raciocínio verbal e o raciocínio matemático - Pro-Posições,5 (1), 37-44

Brito, M.R.F., Pirola, N.A., & Lima, V.S., (1997). Concept formation and representation: a study about triangles in fist grade students. Poster apresentado no 21º PME. In Pehkonen, E. (Ed.) Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (Vol 1, p. 221). Lahti, Finlândia.

Brito, M. R. F. , Lima, V. S., Pirola, N. A., Utsumi, M. C., Mendes C. R., & Alves, E. V. (1998). An exploratory investigation about concept formation of quadrilaterals in second grade students. In Olivier, A. e Newstead, K. (Ed.) Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (Vol 1, p. 221). Stellenbosch, África do Sul.

Brito, M. R. F. (1996). O professor como pesquisador em sala de aula. Projeto de Educação Continuada - SEE/UNICAMP. Campinas.Trabalho não publicado

Bulut, S., Ekici, C., Iseri, A., Kilpatrick, J., & Yenal, E. (1996). Teaching/learning materials for geometry. Comunicaciones Breves. In 8º Congresso Internacional de Educación Matemática. (p.169). Coordenador: Gonzales, R. L. Sevilla, España.

Burns, M. (1982). How to teach problem solving. Arithmetic Teacher, 29 (6), 46-49

Burton. L. (1994). Research, Theory and Practice - A Triad - Theory and Practice in Mathematics Education - In Bazzini, L. (Ed.). Proceedings of Fifth International Conference on Systematic Cooperation Between Theory and Practice in Mathematics Education. (pp. 57-65).Grado, Italy: ISDARF.

Cabrera, F.S.S.; & Hernández, V.S. (1996). Estratégias para a resolução de problemas em análise combinatória - Comunicaciones Breves - In 8º Congresso Internacional de Educación Matemática. (p.93). Coordenador: Gonzales, R. L Sevilla, España.

Carroll, W. M. (1998). Geometric knowledge of middle school students in a reform-based mathematics curriculum. School Science and Mathematics, 98 (4), 188-197.

Castro, M. R., Fainguerlernt, E. K., & Medalha, V. (1998). The role visualization in teaching spatial geometry. Poster apresentado no 22º PME. In Olivier, A. e Newstead, K. (Ed.). Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (Vol 4, p. 221). Stellenbosch, África do Sul.

Charles, R. (1993). The role of problem solving. Arithmetic Teacher, 32, 48-50.

Charles, R., & Lester, F. (1986). Mathematical problem solving. Springhouse, PA: Learning Institute.

Chi, M. T.H., Feltovich, P. J., & Glaser, R. (1981) - Categorization and representation of physics problems, by experts and novices. Cognitive Science, 5, 121-152.

Chi, M. T. H., & Glaser, R. (1992). A capacidade para a solução de problemas. In Sternberg, R. As capacidades intelectuais humanas. Uma abordagem em processamento de informação (Tradução de Batista, D.). (pp. 250- 275).Porto Alegre: Artes Médicas.

Chinnappan, M., & Lawson, M. J. (1996). The effects of trainig in the use of executive strategies in geometry problem solving. Learning and Instruction , 6(1), 1-17.

CIBEM (1998). Memorias do III Congresso Iberoamericano de Educación Matemática. Comité Editor: Beyer, W. Caracas, Venezuela.

Comiti, C., & Baltazar, P.M.(1997). Learning process for the concept of area of planar regions in 12-13 year-old - In Pehkonen, E. (Ed.). Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education .(vol.3, pp. 264-271). Lahti, Finlândia.

Cooney, J. T. (1994). Teacher education as a crucible for systematic cooperation between theory and practice. In Bazzini, L. (Ed.). Proceedings of Fifth International Conference on Systematic Cooperation Between Theory and Practice in Mathematics Education. (pp. 67-79).Grado, Italy: ISDARF.

Cooney, J.B., & Swanson, H.L. (1990). Individual differences in memory for mathematical story problems: memory span and problem perception - Journal of Educational Psychology , 82 (3), 570-577.

Cornieles, I. D., & Haffar, K. E. (1998). Diagnóstico de las nociones elementales de geometría en niños y maestros. In Memorias do III Congresso Iberoamericano de Educación Matemática. Comité Editor: Beyer, W. Caracas, Venezuela. pp. 290-298.

Crombach, L. J. (1951). Educational Psychology. NY: Brace and Co.

Cronjé, F. (1997). Deductive prooof: a gender study - In Pehkonen, E. (Ed.).Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (vol. 1, p. 227). Lahti, Finlândia.

Cummins, D.D., Kintsch, W., Reusser, K., & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. Cognitive Psychology, 20, 405-438

D'Ambrosio, B.S. (1989). Como ensinar matemática Hoje? Temas e Debates 2 (2), 15-19

D'Ambrosio, U. (1993). Etnomatemática. São Paulo: Editora Ática.

Dewey, J. (1916). Democracy and Education: An Introduction to the Philosophy of Education. London: Mac Millan.

Diaz, M.V., & Poblete,A. (1996) Tipos de problemas y evaluation de los aprendizajes en calculo diferencial. Comunicaciones Breves - In 8º Congresso Internacional de Educación Matemática. Coordenador: Gonzales, R. L (p. 102). Sevilla, España.

Dominowski, R., & Bourne Jr.,L. E. (1994). History of research on thinking and problem solving. In Sternberg, R. J. (Ed.) Thinking and problem solving. (pp. 1-35). Califórnia: Academic Press.

Dubrovina, I. V. (1992). A study of mathematical abilities in children in the primary grades. Soviet Studies in School Mathematics Education, 8, 3-96

Echeverría, M. P. P., & Pozo, J. I. (1998). Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In Pozo, J.I. (org.), Echeverría, M. D. P. P., Castillo, J. D., Crespo, M. A. M. e Angón, Y. P. (pp. 13-42). A Solução de Problemas: Aprender a Resolver, Resolver para aprender.(tradução de Neves, B. A.). Porto Alegre: ARTMED. (publicado originalmente em 1994).

Echeverría, M. P. P. (1998). A solução de problemas em matemática. In Pozo, J.I. (org.), Echeverría, M. D. P. P., Castillo, J. D., Crespo, M. A. M. e Angón, Y. P. (pp. 43-65). A Solução de Problemas: Aprender a Resolver, Resolver para aprender.(tradução de Neves, B. A.). Porto Alegre: ARTMED. (publicado originalmente em 1994).

Engen, H. V. (1953). The formation of concepts - In Fehr, H. (Ed.), The Learning of Mathematics: Its Theory and Practice (pp. 69-97). Twenty-first Yearbook, NCTM. Washington, D.C.

Ericsson, K. A., & Hastie, R. (1994). Contemporary approaches to the study of thinking and problem solving. In Sternberg, R. J. (Ed.) Thinking and problem solving. (pp. 37-75). Califórnia: Academic Press.

Eysenk, M. W., & Keane, M. T. (1994). Psicologia Cognitiva – Um manual introdutório. Porto Alegre: Artes Médicas.

Fainguelernt, E. K. (1995). O Ensino de geometria no 1º e 2º graus. A Educação Matemática em Revista - SBEM, nº1, 45-53.

Fennell, C.S. (1995). Oral and written communication for promoting mathematical undestanding: teaching examples from grade 3. Journal of Curriculum Studies, 27 (1), 31-54.

Fernandes, D. (1992). Resolução de problemas: investigação, ensino, avaliação e formação de professores. In Brown, M., Fernandes, D., Matos, J. F. e Ponte, J. P. (Eds.), Educação Matemática. (pp. 45-103). Coleção temas de Investigação. Lisboa.

Fortunato, I., Hencht, D., Tittle, C.K., & Alvarez, L. (1991). Metacognition and problem solving. Arithmetic Teacher, 39 (4), 38-40

Friedman, N. (1976). Cognitive emphasis of geometry teacher's questions. Journal for Research in Mathematics Education. November, 259-263.

Gal, H. (1998). What do they really think? What students think about median and bisector of na angle in the triangle, what they say and what their teachers know about it. In Olivier, A. e Newstead, K. (Ed.). Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (Vol 2, 321-328). Stellenbosch, África do Sul

Gal, H., & Vinner, S. (1997). Perpendicular lines- What is the problem? Pre-service teacher's lack of knowledge on how to cope with students' dificulties. In Pehkonen, E. (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics (vol. 2, pp. 281-288). Lahti, Finlândia.

Garcia, V. J. N. (1995). Um estudo exploratório sobre as relações entre o conceito de automatismo da teoria do processamento de informação de Sternberg e o conceito de pensamento resumido na teoria das habilidades de Krutetskii. Dissertação de Mestrado. Campinas, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

Gardner, H. (1999). O verdadeiro, o belo e o bom. Os princípios básicos para uma nova educação. (trad. Cabral, A.). Rio de Janeiro: Objetiva.

Gick, M., & Holyoak, K. (1980). Analogical problem solving. Cognitive Psychology, 12, 306-355.

____________________(1983). Schema induction and analogical transfer. Cognitive Psychology, 15, 1-38

Gjone, G. (1994). Who makes The mathematics curriculum? A framework for investigating the role of mathematics educator. In Bazzini, L. (Ed.). Proceedings of Fifth International conference on Systematic Cooperation Between Theory and Practice in Mathematics Education. (pp.).Grado, Italy: ISDARF.

Gonçalez, M. H. C. C. (1995). Atitudes (des)favoráveis com relação à matemática. Dissertação de mestrado. Faculdade de Educação. UNICAMP.

Gonçalez, M. H. C. C., & Brito, M. R. F. (1996).). Atitudes (des)favoráveis com relação à matemática. Zetetiké, 4, (6), 45-63.

González, F. E. (1998). Metacognicion y tareas intelectualmente exigentes. El caso de la resolución de problemas matemáticos. Zetetiké, 9, (6), 59-87.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. Educational Studies in Mathematics, 35, 207-231.

Henderson, K.B., & Pingry, R. E. (1953).) Problem solving in mathematics. In Fehr, H. (Ed.), The Learning of Mathematics: Its Theory and Practice (pp. 228-270). Twenty-first Yearbook, NCTM. Washington, D.C.

Hershkovitz, R., Bruckheimer, M., & Vinner, S. (1987). Activities with teachers based on cognitive research. In National Council of Teachers of Mathematics. Reston, V.A: Author.

Hiebert, J., Carpenter, T.P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H. Olivier, A., & Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: the case of mathematics. Educational Researcher, 25 (4), 12-21.

ICME-8 (1996). 8th International Congress on Mathematical Education. Comunicaciones Breves. Coordenador: Gonzales, R. L. Sevilha, Espanha.

____________ 8th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures. Edited by: Alsina, C., Alvarez, J. M., Hodgson, B., Laborde, C. e Pérez, A. Sevilha, Espanha: S.A.E.M. "THALES".

____________Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education.. Edited by: Alsina, C., Alvarez, J. M., Niss, M., Pérez, A., Rico, L. e Sfard, A. Sevilha, Espanha: S.A.E.M. "THALES".

Ignatyev, V. A. (1996). The method of " basis" problems - Comunicaciones Breves. In 8º Congresso Internacional de Educación Matemática (p. 82). Coordenador: Gonzales, R. L. Sevilla, España.

Isnardi, O. L. (1998). Matematizacion del espacio en niños de 3 meses a 8 años. In Memorias do III Congresso Iberoamericano de Educación Matemática. Comité Editor: Beyer, W. Caracas, Venezuela. pp. 278-282.

Jacobs, J. E. (1983). One point of view: preparating teachers to teach problem solving. Arithmetic Teacher, 31, p. 1.

Jakubo, J., & Lellis, M. (1994). Matemática na medida certa. 4 volumes (5ª à 8ª séries). São Paulo: Editora Scipione.

Jaquet, F. (1994). Texbooks: a problematical articulaton between theory and practice. In Bazzini, L. (Ed.), Proceedings of Fifth International Conference on Systematic Cooperation Between Theory and Practice in Mathematics Education (pp. 111-120). Grado, Italy: ISDARF.

Jong, T., & Hessler, M.G.M.F. (1996). Types and qualities of knowledge. Educational Psychologist, 31 (2), 105-113.

Justice, E.M., & McDougall, R.G.W. (1989). Adults' knowledge about memory: awareness and use of memory strategies across tasks. Journal of Educational Psychology, 81 (2), 214-219.

Klausmeier, H.J., & Goodwin, W. (1977). Manual de Psicologia Educacional - aprendizagem e capacidades humanas: (Tradução de Abreu, M. C. T. A.). São Paulo: Harper & Row.

Krainer, K. (1996). Some considerationson problems and perspectives of inservice mathematics teacher education. In Alsina, C., Alvarez, J. M., Niss, M., Pérez, A., Rico, L. e Sfard, A. (Eds), 8th International Congress on Mathematics Education. Selected Lectures (pp. 303-321). Sevilha, Espanha.

Krulik,S., & Rudnick, J. (1982). Teaching problem solving to preservice teachers. Arithmetic Teacher, 29 (6), 42-45.

Krutetskii, V. A. (1976). The psychology of mathematical abilities in scoolchildren. (Teller, J. (trad.), Kilpatrick, J. e Wirszup, I. (Eds)). Chicago: University of Chicago Press.

Langley, P and Simon, H.A. (1981) - The central role of learning in cognition. In Anderson, J.R. (1981). Cognitive Skills and Their Acquisition (pp. 361-380). Hilladale, N.J.: Erlbaum.

Lawrie,C., & Pegg, J. (1997). Some issues using mayberry's test to identify Van Hiele levels. In Pehkonen, E. (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 3, pp.184-191). Lahti, Finlândia.

LeBlanc, J. F. (1982). Teaching textbook story problems. Arithmetic Teacher, 29 (6), 52-54.

Lerman, S. (1997). The psychology of mathemaics teacher's learning: in search of theory. In Pehkonen, E. (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol.3 , pp. 200-207). Lahti, Finlândia.

Lim, E.L., Dixon, R., & Moore, D.W. (1996). Worked examples versus non-goal-specific problems: a test of schema development in geometry. Educational Psycology, 16 (4), 421-438

Lorenzato, S. (1995) Por que não ensinar geometria? A Educação Matemática em Revista - SBEM, nº1, 3-13.

Lorenzato, S., & Vila, M. C. (1993). Século XXI: qual matemática é recomendável? Zetetiké, nº1, 41-49.

Lovett, M.C., & Anderson, J.R. (1996). History of success and current context in problem solving. Cognitive Psychology, 31 (2), 168-217

Malara, N. (1994) Mediating theory and practice: a case study. In Bazzini, L. (Ed.), Proceedings of Fifth International Conference on Systematic Cooperation Between Theory and Practice in Mathematics Education (pp. 157-168). Grado, Italy: ISDARF.

Manrique, A. L., Almouloud, S. A., Coutinho, C. Q. S., Campos, T. M. M., & Pires, C. M. C. (1998). Perfil e representações de professores de matemática de 5ª a 8ª séries da rede pública do estado de São Paulo. In Anais do quinto Encontro Paulista de Educação Matemática. (pp. 107-111). São José do Rio Preto, S.P.

Mariotti, A. M.; Bussi, M.G.B.; Boero, P.; Ferri, F.; & Garuti,R. (1997). Approaching geometry theorems in context: from history and epistemology to cognition. In Pehkonen, E. (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (vol. 1, pp. 180-195). Lahti, Finlândia.

Mayer, R. E. (1992). Thinking, problem solving, cognition. New York: W. H. Freeman and Company.

Mayer, R. E. (1992). A capacidade para a matemática. In Sternberg, R. As capacidades intelectuais humanas. Uma abordagem em processamento de informação (Tradução de Batista, D.) (pp. 144-168). Porto Alegre: Artes Médicas

McCormick, C. B, Miller,G., & Pressley, M. (Eds.) (1989). Cognitive strategy research: from basic research to educational applications. New York: Springer-Verlag.

McKeachie, W.J. (1990) Learning, Thinking and Thorndike. Educational Psychology, 25 (2), 127-141.

Mello, E. G. S., & Almouloud, S. A. (1998). Um questionamento sobre a importância do aprendizado na demonstração em geometria no 1º grau. In Anais do quinto Encontro Paulista de Educação Matemática. (pp. 127-128). São José do Rio Preto, S.P.

Mesquita, A. L. (1999). On developing tridimensional space at school. In Zaslavsky, O. (Ed.), Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (vol.1, p. 298). Haifa, Israel.

Miorim, M. A., Miguel, A., & Fiorentini, D. (1993). ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. Zetetiké, 1 (1), 19-39.

Moreira, C.Q., & Contente, M. R. (1997). The role of writing to foster pupils' learning about area. In Pehkonen, E. (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 2, pp. 256-263). Lahti, Finlândia.

Moron, C. F. (1998). Um estudo exploratório sobre as concepções e as atitudes dos professores de educação infantil em relação à matemática. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas.

Murphy, P.K., & Woods, B.S.(1996). Situating knowledge in learning and instruction: unanswered questions and future directions. Educational Psychologist, 31 (2), 141-145

Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1998). Learning through problem solving. In Olivier, A. e Newstead, K. (Eds), Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (Vol.1, pp. 169-185). Stellenbosch, África do Sul.

Nasser, L. (1992). Using the Van Hiele theory to improve secondary school geometry in Brazil. Thesis submitted for the PhD degree for the University of London. University of London.

________ (1994). Usando a teoria de Van Hiele para melhorar o ensino secundário de geometria no Brasil. In Seminário sobre novas perspectivas da educação matemática no Brasil. Série documental: Eventos, nº 4, 2ª parte. Águas de São Pedro: INEP.

NCTM (1989). Curriculum an evaluation standards for school mathematics. Reston, Virgínia.

Oliveira, C., Lopes, H.C., Filho, J.C.S., Araújo, M.H.F., Ambrosetti, N.B., Pimenta, S.G., Wey, V.L., Leite, Y.U.F., & Oliveira, Z.M. (1999). Relatório final da comissão especial para desenvolvimento de estudos sobre a formação dos profissionais da educação no estado de São Paulo. Revista de Educação - APEOESP, (10), 60-66.

Oliveira, L. T. F. (1998). Habilidades espaciais subjacentes às atividades de discriminação e composição de figuras planas utilizando o tangran e o tegran. Dissertação de Mestrado - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

Outhred, L. N., & Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. Journal for Research in Mathematics Education, 31 (2), 144-167.

Ower, E., & Sweller (1985) What do students learn while solving mathematics problems? Journal of Educational Psychology, 77 (3), 272-284.

Patkin, D., & Millet, S. (1997). Upgrading the pratical pedagogical knowledge of mathematics teacher through mediated-learning. In Pehkonen, E. (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol.1, 255). Lahti, Finlândia.

Pavanello, R. M. (1993). O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências - Zetetiké, 1 (1), 7-17

Perez, G. (1991). Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares. Tese de doutorado. Universidade Estadual de Campinas.

Perez, G. (1995). A Realidade sobre o ensino de geometria no 1º e 2º graus, no estado de São Paulo. A Educação Matemática em Revista - SBEM, nº1, 55-64.

Piceno, J.C.R.; Fernández, J.L.M., & Slisko, J. (1996). Conocimientos, habilidades y estratégias usados por maestros em la solución de um problema de geometria - Comunicaciones Breves. In 8º Congresso Internacional de Educación Matemática (p. 160). Sevilla, España.

Pirola, N. A. (1995) - Um estudo sobra a formação dos conceitos de triângulos e paralelogramos em alunos de primeiro grau - Dissertação de Mestrado - UNICAMP.

PME-21 (1997). Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Edited by Pehkonen, E.(vol.1, vol. 2, vol. 3 e vol. 4 , pp. 256-263). Lahti, Finlândia.

PME-22 (1998). Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Edited by Olivier, A. e Newstead, K. (Vol.1, vol. 2, vol. 3 e vol. 4). Stellenbosch, África do Sul.

PME-23 (1999). Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Edited by Zaslavsky, O. (vol.1, vol.2, vol.3 e vol. 4.). Haifa, Israel.

Polya, G. (1973). How to solve it - Princeton University Press - (Originalmente editado em 1945).

Polya, G. (1994). A arte de resolver problemas. Um novo aspecto do método matemático. (Tradução de Araújo, H. L.). Rio de Janeiro: Interciência. (Segunda impressão, 1975)

Ponte, J. P. (1994). Knowledge, biliefs, and conceptions in mathematics teaching and learnig. In Bazzini, L. (Ed.), Proceedings of Fifth International Conference on Systematic Cooperation Between Theory and Practice in Mathematics Education (pp. 169-177). Grado, Italy: ISDARF.

Pozo, J.I. (org.), Echeverría, M. D. P. P., Castillo, J. D., Crespo, M. A. M., & Angón, Y. P. (1998). A Solução de Problemas: Aprender a Resolver, Resolver para aprender. (tradução de Neves, B. A.). Porto Alegre: ARTMED.(publicado originalmente em 1994).

Pozo, J. L., & Angón, Y. P. (1996). A solução de problemas como conteúdo procedimental da educação básica. In Pozo, J.I. (org.), Echeverría, M. D. P. P., Castillo, J. D., Crespo, M. A. M. e Angón, Y. P. (pp. 139-165). A Solução de Problemas: Aprender a Resolver, Resolver para aprender.(tradução de Neves, B. A.). Porto Alegre: ARTMED. (publicado originalmente em 1994)

Reed, S.K. (1985). Effect of computer grafics on improving estimates to algebra word problems. Journal of Educational Psychology, 77 (3), 285-298

Reimann, P, & Schult, T. J. (1996). Turning examples into cases: acquiring knowledge structures for analogical problem solving. Educational Psychologist. 31 (2), 123-132

Renkl, A., Mandl, H., & Gruber, H. (1996). Inert knowledge analyses and remedies. Educational Psychologist, 31 (2), 115-121

Reynolds, R.E.; Sinatra, G.M., & Jetton, T.L. (1996). Views of knowledge acquisition and representation: a continuum from experience centred to mind centered. Educational Psychologist, 31 (2),93-104

Resnick, L.B., & Ford, W.W. (1981). The psychology of mathematics for instruction, Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Roberts, M. J., & Erdos, G. (1993). Strategy selection and metacognition. Educational Psychology, 13 (3,4), 259-266

Ruti, S. (1999). Teachers in a process of change: reforming mathematics by building on children's thinking. In Zaslavsky, O. (Ed.), Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (vol.1, p. 321). Haifa, Israel.

Saads, S., & Davis, G. (1997). Spatial abilities, Van Hiele levels, & language use in three dimensional geometry. In Pehkonen, E. (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 4, pp. 104-111). Lahti, Finlândia.

Sacristán, J.G., & Gómez, A.I.P. (1995). Comprender y transformar la enseñanza. Madrid: Ediciones Morata.

Santos, V.M.P. (1997). Examination of teachers'professional development. In Pehkonen, E. (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol.1, p. 263). Lahti, Finlândia.

São Paulo (Estado) (1991). Proposta curricular para o ensino de matemática - 1º Grau. Secretaria da Educação - CENP.

São Paulo (Estado) (1990). Proposta curricular para o ensino de matemática para o CEFAM e HEM. Secretaria da Educação - CENP.

Saraiva, M.J.F.S. (1992). O computador na aprendizagem da geometria: uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade. Quadrante - Revista Teórica e de Investigação. nº 1. Associação de Professores de Matemática.

SARESP (1996). Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. Relatório Final de Avaliação. SEE/FNDE.

_______(1997). Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. Relatório Final de Avaliação. SEE/FNDE.

Schoenfeld, A. H. (1985). Ideas Y Tendencias En La Resolucion de Problemas - Edipubli S.A.

_________________(1985). Mathematical Problem solving - FL: Academic Press

_________________(1987). Cognitive Science and Mathematics Education. London: Erlbaum.

Secretaria de Ensino Fundamental (SEF/MEC) (1997). Projeto Pró-Matemática na formação do professor. Acordo de cooperação educacional Brasil-França. Brasília.

Secretaria de Ensino Fundamental (SEF/MEC) (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília.

Secretaria de Estado da Educação (SEE) (1998). Planejamento 98 - Progressão Continuada. São Paulo.

Sherard III, W. H. (1981). Wy is geometry a basic skill? Arithmetic Teacher, Janeiro.

Shin, H.S. (1996). Teacher's preparation in math. teaching: a study designing a network for math. relations. Comunicaciones Breves - In 8º Congresso Internacional de Educación Matemática. (p. 120). Coordenador: Gonzales, R. L . Sevilla, España.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15, 4-14

Shriki, A., & Bar-On, E (1997). Theory of global and local coherence and aplications to geometry. In Pehkonen, E. (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 4, pp. 152-159). Lahti, Finlândia.

Silva, V.M., Pirola, N.A., & Vendramin, C.M.M. (1998). Um estudo sobre a resolução de problemas em alunos universitários. Memorias do III Congresso Iberoamericano de Educación Matemática. Comité Editor: Beyer, W. Caracas, Venezuela. pp. 617-625.

Skemp, R. (1980). Psicologia del aprendizaje de las matemáticas. Madrid: Ediciones Morata

Soloway, E. J. L., & Clement, J. (1982). Does computer programming enhance problem solving ability? Some positive evidence on algebra word problems. In R.J. Seidel, R.E. Anderson e B. Hunter (Eds), Computer Literacy - New York: Academic Press.

Spalletta, A. G (1998).. Desenvolvimento das habilidades matemáticas: um estudo sobre as relações entre o desempenho e a reversibilidade do pensamento durante a solução de problemas. Dissertação de Mestrado - Faculdade de Educação, UNICAMP

Spencer, P.J., & Lester, F.K. (1981). Second graders can be problem solvers! Arithmetic teacher, 29 (1), 15-17.

Stacey, K., & Southwell, B. (1984). Teaching techniques for problem solving. The Australian Mathematics Teacher, 40 (1), 5-7

Sternberg, R. (1992). As capacidades intelectuais humanas. Uma abordagem em processamento de informações. (Tradução de Batista, D.). Porto Alegre: Artes Médicas.

Sternberg, R. J.(Ed.) (1994). Thinking and problem solving. Califórnia: Academic Press.

Suydam, M. N. (1980). Research report: problem solving. Arithmetic Teacher, 31, p. 36.

Swafford, J. O., Jones, G. A., & Thornton, C. A. (1997). Increased knowledge in geometry and instructional practice. Journal for Research in Mathematics Education, 28 (4), 467-483.

Tarmizi, R.A., & Sweller, J. (1988). Guidance during mathematical problem solving. Journal of Educational Pychology, 80 (4), 424-436.

Thorndike, E. L. (1911). Animal Intelligence. NY: Macmillan.

Viana, O.A. (2000). O conhecimento geométrico de alunos do CEFAM sobre figuras espaciais: um estudo das habilidades e dos níveis de conceito. Dissertação de Mestrado. Campinas, F.E., UNICAMP.

Wilson, J.W., Fernandez, M.L., & Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving - research ideas for the classroom high school mathematics - Research Interpretação Project.

Wihelms, W. (1997). Elementary componentes of problem solving behaviour. In Pehkonen, E. (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (vol. 4, pp. 198-205). Lahti, Finlândia.

Zack, V. (1997). " You have to prove us wrong" : proof at the elementary school level. In Pehkonen, E. (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (vol. 4, pp. 291-298). Lahti, Finlândia.

ANEXO 1

QUESTIONÁRIO INFORMATIVO

ALUNOS DE MAGISTÉRIO E LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO INFORMATIVO - ALUNOS DE MAGISTÉRIO

Instruções: Prezado estudante, você irá responder a um questionário sobre suas experiências com a Geometria. Responda-o com toda a sua sinceridade. Por favor, não deixe nenhuma questão em branco. Obrigado!

1-Escola:____ Idade:____________

2- Cidade____

3- Curso que está fazendo:

( ) Curso de Magistério - CEFAM

( ) Curso de Magistério - Escola Estadual:

4- Por que escolheu este curso?

5- Você foi reprovado(a) alguma vez durante o curso? ( )sim ( )não

Se você respondeu afirmativamente a questão 5, então responda às questões 6, 7 e 8;

6- Quantas vezes você foi reprovado(a)?

( )1 vez

( )2 vezes

( )mais de duas vezes

7- Em quais matérias você foi reprovado(a)?

( )Matemática

( ) Outras:_________________________________

8- A que você atribui a sua reprovação?

9- Você já estudou Geometria durante seu curso?

( )sim

( )não

10- O que você se lembra de ter estudado em Geometria?

11- Você gostou ou gosta de Geometria? Por quê?

12- Você já ministrou alguma Regência de Geometria? Qual o assunto? Qual a série?

13- O seu professor de Matemática e/ou Conteúdos metodológicos de Matemática utilizava materiais para o ensino de Geometria? Quais?

14- Você conhece a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática (PCM)? Em caso afirmativo comente sobre o ensino da Geometria segundo a PCM.

15- Você gosta de solucionar problemas de Matemática? Em caso afirmativo, qual(is) tipo(s)?

16- Qual (is) conteúdo(s) que você tem ou teve mais dificuldade em matemática?

17- Você se considera apto(a) para ensinar Geometria no primeiro grau (1ª a 4ª série)?

QUESTIONÁRIO INFORMATIVO: ALUNOS UNIVERSITÁRIOS

Instruções: Prezado estudante, você irá responder a um questionário sobre suas experiências com a Geometria. Responda-o com toda a sua sinceridade. Por favor, não deixe nenhuma questão em branco. Obrigado!

1-Faculdade:____idade______

2- cidade____

3- Por que você escolheu este curso?

4- Você está fazendo dependência em alguma disciplina? Qual?

5- Quando você fazia o primeiro e segundo graus, você estudou Geometria?

6- Qual parte da Geometria você considera mais difícil?

7- Qual parte da Geometria você considera mais fácil?

8- Você já se considera apto para ensinar Geometria no primeiro e segundo graus? Por quê?

9- Cite alguns tópicos da Geometria que você estudou na faculdade.

10- Você conhece a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática (PCM)? Em caso afirmativo comente sobre o ensino da Geometria segundo a PCM.

11- Você já realizou ou está realizando o Estágio Supervisionado? Já ministrou alguma aula de Geometria?

12- Em seu curso de Licenciatura você aprendeu a utilizar materiais para o ensino de Geometria? quais?

13- Em sua opinião, porque devemos ensinar Geometria?

14-Você gosta de solucionar problemas matemáticos? Que tipo de problema?

15- Você gosta de Geometria?

16- O que você entende por problema?

17- Você gosta de solucionar problemas? Qual o tipo de problema?

ANEXO 2

PROBLEMAS UTILIZADOS NA TESTAGEM PRÉVIA

INSTRUMENTO UTILIZADO NA TESTAGEM PRÉVIA

INSTRUÇÃO: Você irá resolver alguns problemas envolvendo os conceitos de área, perímetro e volume. Em cada problema escreva o procedimento de sua resolução. Se não souber resolver algum, escreva " não sei". Obrigado pela sua colaboração!

1- Calcule a medida do lado de um quadrado de área $64cm^2$.

O problema admite uma única solução?Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

2- Dado um triângulo isósceles com um lado medindo 2cm, o outro medindo 10cm o o terceiro lado com medida igual a um dos outros dois lados. Calcule sua área.

O problema admite uma única solução?Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

3- Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo sabendo que suas dimensões são proporcionais aos números 2,3 e 6 e que a diagonal mede 63cm.

O problema admite uma única solução?Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

4- Dois lados de um triângulo isósceles estão na razão 3:8. Encontre os lados, se o perímetro do triângulo é igual a 38 cm e um dos lados é 10 cm maior que o outro. Os lados são expressos por números inteiros.

O problema admite uma única solução?Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

5- Calcule o lado de um retângulo de área 36 cm^2 .

O problema admite uma única solução? Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

6- Em um triângulo isósceles a medida do lado lateral é menor que a base. Seu perímetro é 31cm. Qual a medida de cada lado do triângulo?

O problema admite uma única solução?Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

7- Calcular o volume de um paralelepípedo reto-retângulo sabendo que duas de suas dimensões são 8cm e 27 cm.

O problema admite uma única solução?Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

8- Quantos litros de água são necessários para encher completamente uma piscina que tem 25 m de comprimento, 10m de largura, 2,2m de profundidade e tem uma capacidade de 550m^3.

O problema admite uma única solução?Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

9- Determinar a área de um quadrado cujo perímetro é igual ao perímetro de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio r/2.

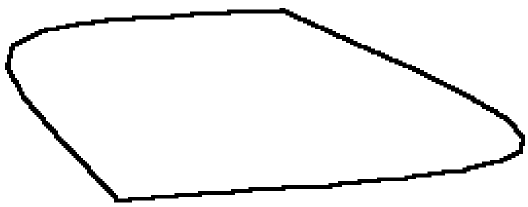
O problema admite uma única solução?Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

10- Explique um procedimento para calcular a área da figura abaixo:



Qual a dificuldade para resolver este problema?

11- O que você entendo por área?

O que você entende por Perímetro?

O que você entende por volume?

ANEXO 3

PROBLEMAS UTILIZADOS NA COLETA DE DADOS

INSTRUMENTO UTILIZADO NA COLETA DOS DADOS

INSTRUÇÃO: Você irá resolver alguns problemas envolvendo os conceitos de área, perímetro e volume. Em cada problema escreva o procedimento de sua resolução. Se não souber resolver algum, escreva " não sei". Obrigado pela sua colaboração!

1- Calcule a medida do lado de um quadrado de área $64cm^2$.

O problema admite uma única solução?Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

2- Dado um triângulo isósceles com um lado medindo 2cm, o outro medindo 10cm o o terceiro lado com medida igual a um dos outros dois lados. Calcule sua área.

O problema admite uma única solução?Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

3- A área de uma face de um cubo é 36 cm^2. Calcule o seu volume

O problema admite uma única solução?Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

4- Dois lados de um triângulo isósceles estão na razão 3:8. Encontre os lados, se o perímetro do triângulo é igual a 38 cm e um dos lados é 10 cm maior que o outro. Os lados são expressos por números inteiros.

O problema admite uma única solução?Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

5- Calcule o lado de um retângulo de área 36 cm^2 .

O problema admite uma única solução? Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

6- Em um triângulo isósceles a medida do lado lateral é menor que a base. Seu perímetro é 31cm. Qual a medida de cada lado do triângulo?

O problema admite uma única solução?Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

7- Calcular o volume de um paralelepípedo reto-retângulo sabendo que duas de suas dimensões são 8cm e 27 cm.

O problema admite uma única solução?Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

8- Quantos litros de água são necessários para encher completamente uma piscina que tem 25 m de comprimento, 10m de largura, 2,2m de profundidade e tem uma capacidade de $550m^3$.

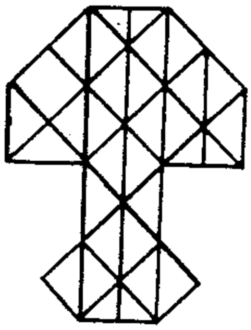
O problema admite uma única solução?Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

9- Utilizando como unidade de medida de área, determine a área da figura abaixo.



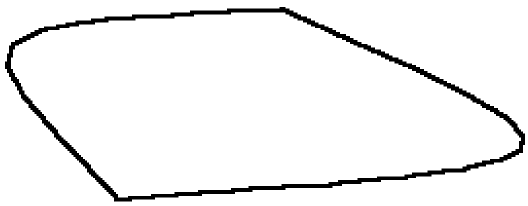
O problema admite uma única solução? Qual?

O problema admite mais de uma solução? Cite pelo menos três soluções.

O problema não admite soluções?

Qual a dificuldade para resolver este problema?

10- Explique um procedimento para calcular a área da figura abaixo:



Qual a dificuldade para resolver este problema?

11- O que você entendo por área?

O que você entende por Perímetro?

O que você entende por volume?

ANEXO 4

CATEGORIZAÇÃO DOS PROBLEMAS

CATEGORIZAÇÃO DOS PROBLEMAS

PROBLEMAS	CONCEITOS	INFORMAÇÕES	RESPOSTA
1	ÁREA	COMPLETA	UMA ÚNICA
2	ÁREA	SUPÉRFLUA	UMA ÚNICA
3	VOLUME	COMPLETA	UMA ÚNICA
4	PERÍMETRO	SUPÉRFLUA	UMA ÚNICA
5	ÁREA	INCOMPLETA	VARIAS
6	PERÍMETRO	INCOMPLETA	VÁRIAS
7	VOLUME	INCOMPLETA	VÁRIAS
8	VOLUME	SUPÉRFLUA	UMA ÚNICA
9	ÁREA	COMPLETA	UMA ÚNICA

CATEGORIZAÇÃO DAS QUESTÕES 10 E 11

QUESTÃO 10: Explicação de um procedimento para se calcular a área de uma figura não-convencional (figura que não apresenta uma fórmula pronta para aplicação direta).

QUESTÃO 11: Perguntas para analisar os conceitos de área, perímetro e volume.

ANEXO 5

INSTRUMENTO UTILIZADO NO LEVANTAMENTO DE OPINIÕES COM PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL.

INSTRUMENTO UTILIZADO NO LEVANTAMENTO DE OPINIÕES COM PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL.

INSTRUÇÃO: As perguntas que se seguem fazem parte de uma pesquisa desenvolvida por mim sobre a formação de conceitos e solução de problemas em Geometria. Peço a fineza de respondê-las com toda sinceridade. Agradeço sua colaboração.

1- Séries que está lecionando:__________________Tempo de Magistério:______

2- Já deu aulas para o curso de Magistério? Se a resposta for sim, quais os conteúdos de Geometria que você ensinou?

3- quando você fazia o curso de Licenciatura, o que aprendeu de Geometria?

4- O que você aprendeu de Geometria foi o suficiente para atuar como professor no primeiro e segundo graus?

5- Você gosta de Geometria?

6- Qual(is) o(s) conceitos(s) que você tem mais dificuldade em Geometria?

7- O que você gostaria que a Delegacia de Ensino promovesse em termos de ensino de Geometria?

8- Você gosta de solucionar problemas de Matemática? Quais aqueles que mais gosta: os problemas aritméticos, algébricos ou geométricos?

Prof. Nelson Antonio Pirola

ANEXO 6

INSTRUMENTO UTILIZADO NO LEVANTAMENTO DE OPINIÕES A RESPEITO DO ENSINO DE GEOMETRIA. ALUNOS UNIVERSITÁRIOS

LEVANTAMENTO DE OPINIÕES

1- Por que é importante ensinar geometria?

2- Você gosta de solucionar problemas que envolvem conceitos geométricos?

3- Relate o ensino que você teve no ensino fundamental e médio.

4- Relate o ensino de geometria que você teve (ou está tendo) na graduação e quais as contribuições que esse ensino está proporcionando para a sua atuação no ensino fundamental e médio.

5- Você gosta de geometria? Por quê?

6- Quais os conceitos de geometria que você acha mais fácil e quais aqueles que você acha mais difícil?

ANEXO 7

TABELAS

Tabela 22– Distribuição dos sujeitos da Licenciatura e Magistério de acordo com os municípios de origem.

Municípios	*Quantidade de alunos por curso*		
	Licenciatura	*Magistério*	*Total(%)*
Aguaí	1	14	7,0
Caconde	2	-	0,9
Casa Branca	4	-	1,8
Divinolândia	-	11	5,1
Itobi	1	-	0,5
Leme	1	-	0,5
Mococa	1	-	0,5
Mogi-Guaçu	1	-	0,5
Pirassununga	3	-	1,4
Porto Ferreira	3	-	1,4
Santa Cruz da Conceição	1	-	0,5
Santa Cruz das Palmeiras	2	-	0,9
São Benedito das Areias	1		0,5
São João da Boa Vista	-	70	32,7
São José do Rio Pardo	46	-	21,5
São Sebastião da Grama	1	11	5,6
Tambaú	3	-	1,4
Tapiratiba	2	-	0,9
Vargem Grande do Sul	4	18	10,3
Não respondeu	13	-	6,1
Total	*90*	*124*	*100,0*

Tabela 23– Distribuição dos sujeitos da Licenciatura de acordo com a resposta dada à questão: *Quando você fazia o primeiro e segundo graus, voc6e estudou geometria?*

Estudou Geometria	*Quantidade de alunos*	
	Nº	*%*
Sim	77	85,5%
Não	13	14,5%
Total	*90*	*100,0%*

Tabela 24- Parte da Geometria considerada mais difícil pelos alunos de Licenciatura

Parte da Geometria mais difícil	*Quantidade de alunos*	
	Nº	*%*
Geometria analítica	24	26,6
Geometria espacial	16	17,8
Tudo	8	8,9
Teoremas	7	7,8
Trigonometria	6	6,7
Geometria plana	5	5,7
Circunferência	4	4,4
Ângulos	3	3,3
Não me lembro	3	3,3
Nenhuma	2	2,2
Fórmulas	1	1,1
Interpretar textos	1	1,1
Área e volume	1	1,1
Quase nenhuma	1	1,1
Decorar fórmulas	1	1,1
Não especificou	5	5,7
Não respondeu	1	1,1
Total	*90*	*100,0*