MARIA CANDIDA MULLER

MODELOS MATEMÁTICOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada como exigência parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação - Metodologia de Ensino, à Comissão Julgadora da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação do Prof.Dr.Lafayette de Moraes.

1986

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

MARIA CANDIDA MULLER

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Maria Candida Müller e aprovada pela Comissão Julgadora em 17.12.86

Data: 17.12.86

Assinatura:

MODELOS MATEMÁTICOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Esta dissertação foi aprovada com o conceito -A- excelente.

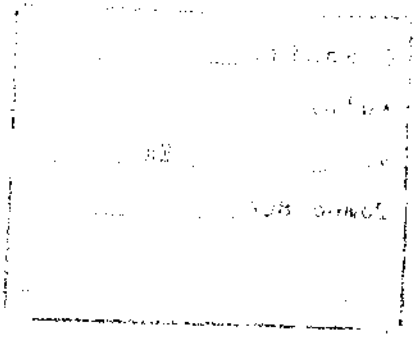
18.12.86

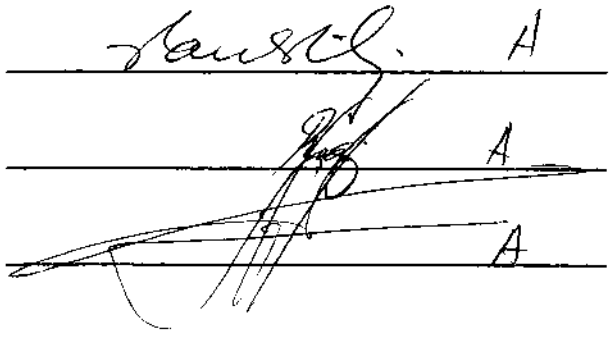
Prof. Dr. Newton Aquiles Von Zuben
COORDENADOR DE PÓS-GRADUAÇÃO
Faculdade de Educação - UNICAMP

Dissertação apresentada como exigência parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação - Metodologia de Ensino, à Comissão Julgadora da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação do Prof. Dr. Lafayette de Moraes.

1986

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL





INDICE

APRESENTAÇÃO..... i

CAPÍTULO I - CARACTERIZAÇÃO DE MODELO..... 1

1. O CONCEITO DE MODELO..... 1

1.1 Axioma..... 1
1.2 Termos primitivos, regras de inferência e sistemas de axiomas..... 6
1.3 Teoremas, prova, teoria matemática..... 8
1.4 Interpretação de um sistema de axiomas..... 11
1.5 Conceituação de modelo..... 13

2. A CARACTERIZAÇÃO DE UM MODELO MATEMÁTICO..... 17

2.1 A caracterização do Professor Barreto..... 17
2.2 A caracterização do Professor D'Ambrosio..... 19
2.3 A caracterização do Professor de Lange..... 22
2.4 O processo de modelagem..... 24

3. A RELAÇÃO ENTRE O CONCEITO DE MODELO E A CARACTERIZAÇÃO DE UM MODELO MATEMÁTICO..... 38

4. EXEMPLOS..... 40

4.1 Modelos finitos..... 40
4.2 Modelos infinitos..... 45

CAPÍTULO II - MODELOS NO ENSINO..... 50

1. MATERIAIS DIDÁTICOS..... 50

1.1 Histórico..... 51
1.2 Uma estratégia de ensino utilizando materiais didáticos..... 52
1.3 Principais características de um material didático. 60

2. MODELOS GRÁFICOS 62

2.1 Exemplos..... 63

3. MODELOS MATEMÁTICOS..... 65

3.1 Exemplos 70

CAPÍTULO III - ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE MODELOS MATEMÁTICOS.108

1. A DIMENSÃO POLÍTICA DA UTILIZAÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS..108

2. A NOÇÃO DE MODELO E A CRIAÇÃO MATEMÁTICA.....111

3. UMA EXPERIÊNCIA EM SALA-DE-AULA.....120

CONSIDERAÇÕES FINAIS.....125

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....127

O presente trabalho foi desenvolvido a partir de uma reflexão sobre os problemas mais freqüentes encontrados hoje em dia no ensino da matemática. Enumerá-los, achamos não ser necessário , pois estão presentes no dia-a-dia de qualquer professor de matemática. No entanto, destacaremos um que consideramos de grande importância. Trata-se da maneira como apresentamos aos nossos alunos esta disciplina, ou seja, os recursos que utilizamos no desenvolvimento dos conteúdos e como os relacionamos com as demais disciplinas e com o próprio cotidiano do aluno.

Este problema não está relacionado apenas com questões técnicas, referentes à forma como trabalhamos os diversos assuntos , mas está em estreita ligação com a idéia que transmitimos ao aluno daquilo que entendemos por matemática. Este aspecto é fundamental, pois dele dependerá o conceito que o aluno formará sobre o que é e para que serve esta disciplina.

Com isso, se no decorrer de nossa prática docente enfatizarmos o desenvolvimento do conteúdo e de exercícios privilegiando aspectos formais desta disciplina, estaremos destacando uma de suas características. Enquanto que, ao enfatizarmos suas aplicações, estaremos proporcionando condições para que um outro aspecto da matemática seja trabalhado pelo aluno, fazendo com que um conceito mais amplo sobre o papel da matemática para o desenvolvimento social e científico seja elaborado por ele.

A questão acima, ou seja, enfatizar a chamada *matemática pura* ou a *aplicação da matemática*, podemos dizer que é crucial para o ensino desta disciplina. Particularmente, não achamos que um aspecto deva ser privilegiado em detrimento de outro. Pelo contrário, entendemos que na medida do possível, todo professor deve trabalhar igualmente com os dois . Ambos são imprescindíveis para que tenhamos uma visão abrangente sobre o que é a matemática e sua importância para os demais ramos do conhecimento.

Sem dúvida, as estratégias de ensino que utilizamos para

trabalhar os conteúdos desempenham papel importante no tratamento desta questão.

O objetivo principal desse trabalho é apresentar uma estratégia de ensino que, a princípio, privilegia a aplicação da matemática. Assim, através de sua utilização poderemos relacionar a matemática com as outras disciplinas, bem como com a vida do aluno, de uma forma natural. Esta estratégia está baseada nos chamados *modelos matemáticos*.

Por considerarmos importante localizar dentro da história da educação matemática o desenvolvimento desta estratégia de ensino, faremos a seguir um rápido histórico.

No início dos anos setenta, os problemas originados pelo chamado "fracasso da matemática moderna"(*), provocaram uma reavaliação das tendências existentes até então, no ensino da matemática. Basicamente, o *conteúdo* era o eixo central de todos os trabalhos desenvolvidos nesta área e, com o declínio da matemática moderna, era necessário traçar novos rumos para o ensino desta disciplina.

A partir desta reavaliação, o aspecto externo da matemática(**), que envolve as condições sócio-culturais e históricas do desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos, passa a ser considerado, juntamente com o conteúdo, como uma das bases de novas estratégias de ensino. Além disso, o aspecto externo trata da relação desta disciplina com as demais, enfatizando a sua aplicabilidade.

As origens desse novo rumo dado ao ensino da matemática estão ligadas ao II Congresso de Educação Matemática, realizado em 1972, na Inglaterra. Neste congresso, apesar de a maioria dos tra

---

(*) Ver Morris Kline. O fracasso da matemática moderna [Why Johhny can't add: the failure of the new math]. Sao Paulo, IBRASA, 1976.

(**) Segundo notas do curso "Tendências em Educação Matemática", ministrado pelo Prof. Ubiratan D'Ambrosio, no primeiro semestre de 1985.

balhos apresentados referirem-se ao aspecto interno da matemática, privilegiando o conteúdo, propostas levando em consideração o aspecto externo foram apresentadas e suscitaram discussões sobre esta tendência.

Foi em 1976, no III Congresso de Educação Matemática, na República Federal da Alemanha, que as propostas apresentadas no congresso anterior, agora já amadurecidas, desempenharam papel fundamental para o desenvolvimento de novos caminhos no ensino da matemática. Os objetivos gerais do ensino desta disciplina, anteriormente baseados em Bloom, foram reformulados, enfatizando o aspecto externo.

Em conseqüência, surgiram vários trabalhos e propostas para a reformulação das estratégias de ensino da matemática e, dentre estes, destacamos a utilização de *modelos matemáticos*.

Os *modelos matemáticos* passaram a ser utilizados freqüentemente entre engenheiros, físicos, estatísticos e economistas,após a Segunda Guerra Mundial e, com o advento dos computadores, começaram a ser utilizados nas chamadas ciências não-exatas, como biologia, psicologia, geografia e antropologia.

Resumidamente, podemos definir um modelo matemático como o resultado final da "matematização" de um determinado problema. Matematizar tem o sentido de descrever em linguagem matemática o problema em questão.

Com isso vemos que os modelos matemáticos tem sua origem no relacionamento entre a matemática e outras ciências e ao estudá-los, podemos distingüir três aspectos: um primeiro relacionado ao trabalho do matemático aplicado, que seria a *criação de modelos matemáticos* propriamente ditos; um segundo, relacionado com o *ensinar a criar modelos matemáticos*, que seria relativo a um trabalho a ser desenvolvido a nível de graduação e pós-graduação; e um terceiro, relacionado com a *utilização de modelos matemáticos como estratégia de ensino desta disciplina*, relativo ao trabalho

do professor de matemática.

Neste estudo, desenvolveremos o terceiro aspecto e assim,no Capítulo I estudaremos o que significa o termo *modelo*, caracterizando-o em dois níveis. Um primeiro, relacionado com a acepção utilizada pela lógica e matemática,apresentando o *conceito de modelo*. Um segundo, relacionado com a noção de modelo, utilizada pela matemática aplicada e outras ciências, possibilitando a caracterização de um *modelo matemático*.

No Capítulo II nos dedicaremos exclusivamente à utilização de modelos matemáticos no ensino. Trataremos dos materiais didáticos que consideramos uma primeira aproximação da aplicação da idéia de modelo na educação. Neste capítulo, apresentaremos uma estratégia de ensino que utiliza especificamente os modelos matemáticos, descrevendo e analisando cada etapa no processo de modelagem. No final, desenvolveremos uma série de exemplos de modelos matemáticos que podem ser utilizados no ensino de primeiro, segundo e terceiro graus.

O último capítulo tratará da discussão de algumas questões gerais envolvendo a utilização de modelos matemáticos, como por exemplo: a dimensão política existente ao utilizá-los como elementos auxiliares na descrição de um determinado problema, a possibilidade de manipulação dos dados iniciais no processo de modelagem e sua conseqüência para o modelo matemático. Além disso, apresentaremos dois exemplos especiais. Um relacionado com a criação matemática e os modelos matemáticos. Procuraremos através da história do desenvolvimento do cálculo infinitesimal mostrar o aprimoramento de um modelo concebido na Grécia e que possibilitou a criação de um ramo da matemática. O outro exemplo que apresentaremos, relata a experiência de um trabalho desenvolvido na sala de aula, utilizando modelos matemáticos como estratégia de ensino.

No desenvolvimento do trabalho, procuraremos apresentar exemplos que possibilitem uma maior compreensão das idéias que discutimos.

Além disso, desde quando escolhemos este tema para nossa dissertação, delimitamos como um dos objetivos gerais, a elaboração de um texto em linguagem acessível aos professores de primeiro e segundo graus. Não queremos com isso que a linguagem seja menos precisa, mas que pessoas que normalmente não tem acesso ao meio acadêmico, possam utilizar estas idéias para o aprimoramento de sua atividade docente.

Ao terminar esta apresentação gostaria de registrar meus agradecimentos. Primeiro ao Professor Lafayette de Moraes pelo estímulo, auxílio e compreensão durante o desenvolvimento deste trabalho. Também aos Professores Rodnev Bassanezi e Eduardo Sebastiani pelas sugestões e indicações de leitura que muito nos auxiliaram. Aos amigos Ires e Ary pelo incentivo e carinho durante este tempo. Quero lembrar também o Professor Mário Matos, pelo apoio num momento difícil. Não deixaria de lembrar também a Faculdade de Educação - UNICAMP, pela bolsa de incentivo acadêmico que nos permitiu realizar, em parte, este estudo. E a Isabel que datilografou este trabalho.

CAPÍTULO I

CARACTERIZAÇÃO DE MODELO

O termo *modelo* tem, fundamentalmente, dois aspectos a serem considerados. Um primeiro, que abordaremos a seguir, refere-se ao *conceito de modelo* como é utilizado no âmbito da lógica e da matemática. O segundo, refere-se à utilização do termo *modelo* nas chamadas ciências empíricas, e este segundo aspecto, nos interessará mais de perto. No entanto, é bom enfatizarmos que, tanto na matemática e na lógica quanto nas ciências empíricas, o conceito de *modelo* está intimamente ligado com o de *interpretação*.(1) Assim, segundo Newton da Costa [10] (2), discutir sobre *interpretação*, equivale a tratar de *modelos* e reciprocamente; com isso, os *modelos* passam a ser um dos conceitos centrais, tanto na matemática e na lógica, quanto nas ciências naturais e humanas.

1 - *O CONCEITO DE MODELO*

Um modelo, considerado pelo prisma da lógica matemática é, a grosso modo, visto como uma interpretação de um determinado sistema de axiomas. Para um refinamento desta afirmação, faremos um estudo sobre o que entendemos por axioma e sistema de axiomas.

1.1 - *Axioma*

A utilização do termo *axioma* remonta à Antigüidade; para Euclides, no seu célebre trabalho, "Os Elementos", o termo *axioma*

---

(1) Newton da Costa, "Interpretaciones y modelos en ciência", in Revista Universitária, Universidad Católica de Chile, 1985: afirma que falar de interpretação, significa falar de uma linguagem em um possível modelo e, no caso das ciências empíricas, das relações deste modelo com a realidade.

(2) O numeral entre colchetes indica a localização da obra na referência bibliográfica no final do trabalho.

era utilizado para designar uma verdade evidente por si mesma. Axioma era o que podemos considerar como um conhecimento universal e indiscutível, numa época em que se acreditava na existência desse tipo de conhecimento.

Nesse período havia a distinção nítida entre os termos *axioma* e *postulado*. Os postulados eram afirmações de caráter mais específico; por outro lado, os axiomas,como já dissemos, expressavam verdades universais, globais.

Um axioma, para os gregos, seria uma afirmação do seguinte tipo:

Somar quantidades iguais a ambas partes de uma desigualdade, não altera esta desigualdade.

Enquanto que, a afirmação:

Dois pontos determinam uma reta,

exemplifica o que para eles era considerado um postulado.

Uma reavaliação do significado destes termos só ocorre no século XIX, com o surgimento das geometrias não-euclidianas.

A tentativa de demostração de que o quinto postulado da geometria euclidiana[3] não era independente dos demais, levou à construção de outras geometrias e, com isso, a idéia de existência de verdades universais teve de ser reconsiderada.

---

(3) Numa tradução portuguesa do livro de Asger Aaboe [1], p.92 , o referido postulado recebe a seguinte redação: "Se duas retas, que fazem ângulos com uma terceira prolongadas concorrerão; outras duas retas, que fizerem com a mesma ou com outra terceira, ângulos respectivamente iguais, para a mesma banda semelhantemente concorrerão." Hilbert [17], porém, reformulou este texto e, criou a formulação mais conhecida do quinto postulado: "Por um ponto fora de uma reta, passa uma e somente uma reta paralela a esta".

Vários matemáticos, em trabalhos independentes, constataram que o "postulado das paralelas"[4] é independente dos outros, ou seja, não pode ser deduzido dos demais. Dentre estes matemáticos, encontramos Gauss, Bolyai, Lobatchevsky e Riemann. Cada um contribuiu para o desenvolvimento do que hoje denominamos, genericamente, *geometrias não-euclidianas*. Riemann, por exemplo, substituiu o quinto postulado de Euclides, pela afirmação: "por um ponto fora de uma reta *não* passa reta paralela a esta"[5], criando a chamada Geometria Riemanniana, sem a qual, Einstein não poderia ter formulado a sua Teoria da Relatividade Generalizada.

Como ilustração do que ocorre em geometrias não-euclidianas, apresentamos o seguinte quadro, onde resultados da geometria euclidiana são comparadas com as geometrias de Riemann e Lobatchevsky.

	GEOM.EUCLIDIANA	GEOM. DE RIEMANN	GEOM. DE LOBAT.
Dada uma reta r e um ponto P não em r, existe	uma e só uma reta paralela a r passando por P.	nenhuma reta paralela a r passando por P.	pelo menos duas retas paralelas a r passando por P.
A reta r	é separada em duas partes por um ponto.	não é separada em duas partes por um ponto.	é separada em duas partes por um ponto.
Duas retas distintas se interceptam em	no máximo um ponto.	em um ponto (se for elíptica única); em dois pontos (se for elíptica dupla).	no máximo em um ponto.
Retas paralelas	mantém a distância entre si constante.	não existem.	não mantém a distância entre si constante.
A soma dos ângulos internos de um triângulo é	igual a 180º.	maior do que 180º.	menor do que 180º.

(4) Outro nome dado ao quinto postulado de Euclides.

(5) Segundo a formução de Hilbert [17].

A partir do desenvolvimento dessas geometrias, o termo *axioma* passa a ser considerado como uma afirmação verdadeira sobre determinado assunto. Segundo Tarski, [33], p.118, temos: "Algumas dessas afirmações, que para nós têm a aparência de evidentes, são escolhidas para serem "afirmações primitivas" ou "axiomas"; nós as aceitamos como verdades sem que sua veracidade seja verificada".

Com a finalidade de tornar mais clara nossa caracterização de axioma, consideremos a afirmação seguinte:

"O *todo* é *maior* do que as *partes*" (1.1.1)

Dependendo do significado que atribuirmos aos termos *todo*, *maior* e *partes*, a afirmação (1.1.1) poderá ser verdadeira, ou não, conforme veremos a seguir:

Consideremos, inicialmente, *conjuntos finitos*, isto é, conjuntos com um número finito de elementos. Para fixar idéias, consideremos o conjunto A de três elementos:

$$A = \{a,b,c\}.$$

Neste caso, *todo* significa o conjunto A; o termo *maior* refere-se ao número de elementos do conjunto; *partes* se refere aos subconjuntos próprios de A, que são:

$$\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\ .$$

Vemos que, considerando o conjunto A com os respectivos significados dados aos termos *todo*, *maior* e *partes*, a afirmação (1.1.1) é verdadeira, pois nenhum subconjunto próprio de A possui um número maior de elementos do que A.

Pensemos agora, em *conjuntos infinitos*. Em particular, o

conjunto dos números naturais, representado por $\mathbb{N}$.

Os termos de (1.1.1) continuam com os significados atribuídos anteriormente.

Tomemos como subconjunto próprio de $\mathbb{N}$, o conjunto dos números pares, que denotaremos por $2\mathbb{N}$.

Mostraremos, a seguir, que ao considerar o conjunto $\mathbb{N}$ e seu subconjunto próprio $2\mathbb{N}$, a afirmação (1.1.1) não é verdadeira,pois existem tantos números pares quantos números naturais. De fato,

seja a função f dada por

$$f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$$
$$n \to 2 \cdot n$$

Afirmamos que a função f, acima definida, é uma função bijetiva, ou seja, é injetora e sobrejetora. Vejamos:

(i) f é injetora:

se $2n = 2m$, temos que $n = m$, assim imagens iguais implicam em que os elementos do domínio também sejam iguais.

(ii) f é sobrejetora:

seja k um elemento de $2\mathbb{N}$. Logo k é um elemento do tipo $2 \cdot p$, para algum p elemento de $\mathbb{N}$. Assim, $k = f(p)$, ou seja, k é imagem de algum elemento de $\mathbb{N}$.

De (i) e (ii) temos que f é bijetiva e, com isto, concluímos que $2\mathbb{N}$ tem o mesmo número de elementos que $\mathbb{N}$. Logo, (1.1.1) não é verdadeira.

Com este exemplo, vemos a necessidade de delimitarmos o assunto a que se refere a afirmação, para que esta seja um axioma.

Antes de terminarmos estas considerações sobre os axiomas , achamos importante salientar dois aspectos:

1) os axiomas são aceitos tacitamente;

2) os axiomas, segundo sua natureza, podem ser classificados em:

   (a) axiomas lógicos;

   (b) axiomas específicos da disciplina que se está estudando; no nosso caso, axiomas matemáticos.

Por exemplo, considerando as afirmações α e β, a seguinte sentença: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$, é um axioma lógico, onde o símbolo " $\rightarrow$ " significa "se...então". Considerando a teoria dos números naturais, a afirmação "zero não é sucessor de algum número natural", é um axioma específico.

1.2 - *Termos Primitivos, Regras de Inferência e Sistemas de Axiomas*

Observemos que ao formular um axioma, necessitamos de alguns termos básicas, não definidos, que se apresentam como imediatamente compreendidos. São os chamados *termos primitivos* ou *termos não-definidos*. Como exemplo, podemos citar os termos *ponto, reta, plano*, na formulação usual da geometria euclidiana.

As *regras de inferência* são as ferramentas fundamentais para a obtenção de novos resultados a partir dos axiomas dados. Estas regras são leis da lógica que, quando aplicadas, fornecem conclusões verdadeiras, sempre que as hipóteses o sejam. Segundo Tarski, [33], p.47, são as regras de inferência que indicam as "direções" que devemos tomar para que, a partir de resultados verdadeiros, possamos transformá-los e produzir novas afirmações também verdadeiras.

Duas regras de inferência que podemos considerar como básicas são: a *regra de substituição* e a *regra modus ponens*.

A *regra de substituição* consiste, numa primeira aproximação, no seguinte: a sentença ϕ é obtida da sentença ψ pela substituição da variável θ em ψ, pela variável ω. Podemos afirmar que ϕ é verdadeira se ψ for aceita como verdadeira. Vejamos um exemplo:

ψ é a sentença: "Todo número par é da forma $2 \cdot \theta$, para θ elemento de $\mathbb{N}$".

Se substituímos a variável θ por ω, obtemos a seguinte sentença, que chamamos ϕ : "Todo número par é da forma $2 \cdot \omega$, para ω elemento de $\mathbb{N}$".

Como ψ é verdadeira, temos que ϕ também é verdadeira.

A *regra modus ponens* estabelece que se duas afirmações ϕ e α são aceitas como verdadeiras, onde ϕ é da forma $\alpha \rightarrow \beta$, então podemos inferir β, ou seja, reconhecê-la como verdadeira.

Por exemplo, se admitirmos como verdadeiras as seguintes afirmações:

α : Todo número par é da forma $2 \cdot r$, para r elemento de $\mathbb{N}$.

ϕ : *Se* todo número par é da forma $2 \cdot r$, para r elemento de $\mathbb{N}$, *então* 2 divide todo número par.

Pela regra modus ponens, podemos afirmar que "2 divide todo número par" é uma sentença verdadeira.

Tendo em mãos estes três elementos - termos primitivos, axiomas e regras de inferência - estamos em condições de caracterizar um *Sistema Axiomático* ou *Sistema de Axiomas*, como também é chamado.

Um *Sistema de Axiomas* é composto por:

(a) uma coleção de termos não-definidos, termos primitivos;

(b) axiomas que relacionam estes termos; e

(c) regras de inferência.

Vejamos um exemplo:

(a) Consideremos como termos primitivos as palavras ÁRVORE e CERCA.

(b) Os axiomas que relacionam estes termos são:

A_1: Toda cerca é um conjunto de árvores, contendo pelo menos dois elementos.

A_2: Existem pelo menos três árvores.

A_3: Dadas quaisquer duas árvores distintas, T_1 e T_2, existe uma e só uma cerca contendo as duas árvores.

A_4: Dada qualquer cerca F e uma árvore T não em F, então existe uma e só uma cerca F', contendo T, não contendo árvore comum com F.

(c) Como regras de inferência, consideremos as duas regras definidas anteriormente: regra de substituição e regra modus ponens.

A partir de (a),(b) e (c), temos um Sistema de Axiomas, que chamamos de Σ.

Nas seções seguintes, voltaremos a este exemplo e a tratar de sistemas axiomáticos.

1.3 - *Teoremas, Prova, Teoria Matemática*

Como já sabemos, os axiomas são proposições aceitas tacitamente como verdadeiras. Há no entanto, proposições que só aceitamos como verdadeiras após o estabelecimento de sua validade, usan

do para isso, apenas axiomas, definições ou proposições anteriormente provadas. As proposições que necessitam ser estabelecidas, são os chamados *teoremas* e o processo para estabelecer sua veracidade é chamado de *prova* ou *demonstração*.

Observemos que a lógica subjacente ao sistema axiomático,ou seja, a lógica presente implicitamente na formulação e dedução de resultados a partir dos axiomas, possibilita a criação dos teoremas. Estes teoremas são derivados dos axiomas específicos do sistema, a partir das regras de inferência e axiomas lógicos, presentes na lógica subjacente.

As *teorias da matemática*, como por exemplo a Teoria de Grupos, a Teoria de Conjuntos, a Teoria dos Números, são ilustrações do que afirmamos acima. Vejamos, em especial, a Teoria dos Grupos, que é o conjunto dos resultados obtidos a partir dos seguintes axiomas específicos.

Dados um conjunto finito G e uma operação interna *, que relaciona elementos de G. Um grupo (G,*) é caracterizado por:

G_1: Dados a,b,c elementos de G, temos:
a*(a * c) = (a * b) * c (associatividade);

G_2: Existe um elemento "e" em G, chamado *elemento neutro*, tal que:

a * e = a, qualquer que seja o elemento a de G;

G_3: Para todo elemento a de G, existe um elemento a' de G, chamado *elemento inverso* de a, tal que: a * a' = e.

Outro exemplo de teoria matemática é dado pelos chamados *Axiomas de Peano*, que formalizam o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$).

Os símbolos não lógicos dessa teoria são:

- a constante 0(zero);
- a operação S, chamada sucessor, que a cada elemento x de $\mathbb{N}$, associa seu sucessor Sx = x + 1;
- as operações + e ·;
- a relação "menor que" dada pelo símbolo <.

Os axiomas não lógicos de $\mathbb{N}$ são:(6)

N_1: $Sx \neq 0$

N_2: $Sx = Sy \rightarrow x = y$

N_3: $x + 0 = x$

N_4: $x + Sy = S(x + y)$

N_5: $x \cdot 0 = 0$

N_6: $x \cdot Sy = (x \cdot y) + x$

N_7: $\sim(x < 0)$

N_8: $x < Sy \leftrightarrow x < y \vee x = y$

N_9: $x = y \vee x < y \vee y < x$.

---

(6) Em linguagem natural, temos:
N_1: zero não é sucessor de qualquer x de $\mathbb{N}$.
N_2: se o sucessor de x é igual ao sucessor de y, então x é igual a y.
N_3: zero é o elemento neutro da operação +.
N_4: x adicionado ao sucessor de y é igual ao sucessor de (x + y): x + Sy = x + (y + 1) = S(x + y).
N_5: O produto de qualquer x de $\mathbb{N}$ por zero é igual a zero.
N_6: O produto de x pelo sucessor de y é igual ao produto de x por y adicionado de x: x · S(y) = x·(y + 1) = xy + x.
N_7: não existe x em $\mathbb{N}$ menor que zero.
N_8: x é menor que o sucessor de y se e só se x é menor que y ou x é igual a y.
N_9: Dados dois elementos x, y de $\mathbb{N}$, ou x é igual a y, ou x é menor que y ou y é menor que x.

Nosso próximo passo para chegarmos à conceituação de um modelo será a caracterização do que é uma interpretação de um sistema axiomático.

1.4 - *Interpretação de um sistema de axiomas*

Antes de iniciar, gostaríamos de observar que estamos considerando apenas sistemas axiomatizáveis; outros sistemas, onde a axiomatização não é possível, estão excluídos de nossa consideração.

Ao caracterizar um sistema axiomático, não estamos preocupados com o significado dos termos primitivos que estamos utilizando. Uma *interpretação* de um sistema de axiomas, pode ser vista, num primeiro momento, como a atribuição de um significado aos termos primitivos de um sistema.

Na caracterização do sistema axiomático, apenas criamos símbolos (termos primitivos) e os relacionamos logicamente através dos axiomas. Não nos preocupamos com o significado destes símbolos, estamos trabalhando com o nível sintático do sistema.

Ao fazermos uma correspondência entre os símbolos e determinados significados para estes símbolos, estaremos interpretando nosso sistema e, com isso, passamos a trabalhar a nível semântico.

Observemos que esta interpretação do sistema tem duas características principais:

(a) dá significados aos termos primitivos,

(b) torna verdadeiros os axiomas do sistema para estes significados.

Com isso, ao interpretarmos um sistema, estamos dando significado à expressão "verdade segundo uma interpretação"[7]. É im-

---

(7) Para maior aprofundamento desta questão, ver Tarski [34] ou Mates [24].

portante observarmos que falar em "verdade de uma afirmação" só faz sentido após havermos dado um significado para os termos dessa afirmação.

Um aspecto importante a ser destacado se refere ao fato de que as regras de inferência dos sistemas preservam a validade, ou seja, se A é uma afirmação verdadeira e B é obtida de A por aplicação de uma regra de inferência, então B é uma afirmação verdadeira para a interpretação considerada.

A consequência principal do que observamos acima, diz respeito aos teoremas derivados de um sistema axiomático. Os teoremas são deduzidos a partir dos axiomas, por meio das regras de inferência, e como estas regras preservam a validade de uma afirmação, temos que os teoremas são afirmações verdadeiras para esta interpretação dos axiomas do sistema.

Vejamos um exemplo:

Consideremos o sistema Σ visto anteriormente. Os termos primitivos de Σ são as palavras ÁRVORE e CERCA e os axiomas são:

A_1: Toda *cerca* é um conjunto de *árvores* contendo pelo menos dois elementos.

A_2: Existem pelo menos três *árvores*.

A_3: Dadas quaisquer duas *árvores* distintas, T_1 e T_2, existe uma e só uma *cerca* F contendo as duas *árvores*.

A_4: Dada qualquer *cerca* F e uma *árvore* T não em F, então existe uma e só uma cerca F', contendo T, não contendo árvore comum com F.

Tomemos os seguintes significados ou interpretações para os termos primitivos de Σ:

(i) *árvores* terão o significado de *pontos* da geometria euclidia

na; *cerca* terá o significado de *reta*.

(ii) os axiomas, com esta interpretação, ficam:

A_1: Toda *reta* é um conjunto de *pontos* contendo pelo menos dois elementos.

A_2: Existem pelo menos três *pontos*.

A_3: Dados quaisquer dois pontos distintos, T_1 e T_2, existe uma e só uma reta F contendo os dois pontos.

A_4: Dada qualquer reta F e um ponto T não em F, então existe uma e só uma reta F', contendo T, não contendo ponto em comum com F.

Os axiomas, com esta interpretação, são os axiomas da geometria euclidiana, que sabemos serem verdadeiros segundo a interpretação usual.

Observemos que os significados atribuídos aos termos primitivos, satisfazem as condições (i) e (ii), vistas anteriormente ; com isto, temos uma *interpretação* do sistema Σ.

É importante salientarmos que, neste contexto, só faz sentido nos referirmos à verdade de uma dada afirmação, se considerarmos a interpretação do sistema da qual é derivada. Além disso, a toda afirmação de um sistema axiomático, após darmos uma interpretação, poderemos atribuir um e apenas um dos valores lógicos, verdadeiro (V) ou falso (F).

Estamos agora, em condições de conceituar um *modelo* de uma forma mais elaborada.

1.5 - *Conceituação de Modelo*

Tendo em mãos estes dois elementos essenciais - um sistema axiomático S e uma interpretação de S - estamos em condições de conceituar um modelo.

Uma interpretação é um *modelo* para um sistema axiomático S, se todos os axiomas forem verdadeiros para esta interpretação.

Um aspecto importante a destacar é que esta definição de verdade, segundo uma determinada interpretação, aplica-se, de forma rigorosa, a uma linguagem formalizada, o que não é nosso caso. Para um aprofundamento deste assunto, indicamos os trabalhos de Tarski [34] e Mendelson [25].

Observemos que um sistema poderá ter vários modelos, pois poderemos ter diversas interpretações de um mesmo sistema.

Ainda considerando o sistema Σ, vejamos alguns modelos para esse sistema axiomático.

M_1: A palavra *árvore* terá o significado usual. Além disso, consideraremos um conjunto com apenas três árvores. A palavra *cerca* significará o conjunto formado pelas três árvores.

Vejamos como os axiomas A_1, A_2, A_3, A_4 ficam com esta interpretação dos termos primitivos de Σ.

A_1: *Toda cerca é um conjunto de árvores contendo pelos menos dois elementos.*

- Como a única cerca, segundo nossa interpretação, possui três elementos, este axioma é verdadeiro.

A_2: *Existem pelo menos três árvores.*

- Como tomamos um conjunto com três árvores, este axioma é verdadeiro para nossa interpretação.

A_3: *Dadas quaisquer duas árvores distintas,* T_1 *e* T_2, *existe uma e só uma cerca* F *contendo as duas árvores.*

- Segundo nossa interpretação, existe apenas uma cerca, logo A_3 é verdadeiro.

A_4: *Dada qualquer cerca* F *e uma árvore* T *não em* F, *então*

existe uma e só uma cerca F', *contendo* T, *não contendo árvore em comum com* F.

- Todos os elementos de nossa interpretação, estão presentes na única árvore existente, logo, como o antecedente de nossa implicação não se verificará, temos que A_4 é verdadeiro.

Ao considerarmos esta interpretação para Σ, os axiomas tornam-se afirmações verdadeiras; logo M_1 é um modelo para o sistema Σ.

M_2: A palavra *árvore* terá novamente seu significado usual. Teremos agora, um conjunto com quatro árvores, chamadas A,B,C e D. A palavra *cerca* será definida da seguinte forma: cada conjunto de dois e apenas dois elementos é uma cerca. Assim, para esta interpretação, teremos as seguintes cercas:

$F_1 = \{A,B\}$ $\qquad$ $F_4 = \{B,C\}$

$F_2 = \{A,C\}$ $\qquad$ $F_5 = \{B,D\}$

$F_3 = \{A,D\}$ $\qquad$ $F_6 = \{C,D\}$

Vejamos como ficam os axiomas com esta interpretação:

A_1: *Toda cerca é um conjunto de pelo menos dois elementos.*

- Na interpretação M_2, cercas são exatamente os conjuntos com dois elementos, logo A_1 é verdadeiro.

A_2: *Existem pelo menos três árvores.*

- Como estamos considerando um conjunto com quatro árvores, A_2 é verdadeiro.

A_3: *Dadas quaisquer duas árvores distintas* T_1 *e* T_2, *existe uma e só uma cerca* F *contendo as duas árvores.*

- Pela interpretação que demos ao termo *cerca*, este axioma é satisfeito por todos elementos A,B,C,D.

A_4: *Dada qualquer cerca* F *e uma árvore* T *não em* F, *então existe uma e só um cerca* F', *contendo* T, *não contendo árvore comum com* F.

- Este axioma é verificado para cada elemento A,B,C,D e para cada cerca F_1,F_2,F_3,F_4,F_5,F_6 de nossa interpretação. Tomemos, por exemplo, a árvore A e a cerca F_4; vemos que A não está em F_4 e a única cerca contendo A disjunta de F_4 é F_3. Ao repetirmos este processo para todas as possibilidades, veremos que A_4 é verdadeiro.

Assim, novamente, M_2 satisfaz a definição de Modelo.

M_3: Como um terceiro exemplo de modelo para Σ, consideremos a interpretação dada à pág.12. Os termos primitivos, neste caso, são identificados com os termos *ponto* e *reta* da geometria euclidiana. Segundo a interpretação usual da geometria euclidiana, os axiomas A_1,A_2,A_3 e A_4 são verdadeiros e portanto, esta interpretação é um modelo para o sistema Σ.

Outro exemplo importante de modelo de um sistema axiomático, teremos ao considerar os axiomas de Peano vistos na pág.9. Os números naturais são uma interpretação para estes axiomas, ou seja, segundo esta interpretação, os axiomas são satisfeitos. Assim, o conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, é um modelo para este sistema.

O conceito de modelo visto nesta seção, como observamos, está ligado especialmente com a lógica matemática. Procuraremos, no decorrer do capítulo, mostrar sua ligação com os chamados *mode-*

los matemáticos[8] cuja caracterização veremos a seguir.

2 - A CARACTERIZAÇÃO DE UM MODELO MATEMÁTICO

Com o objetivo de caracterizar um modelo matemático, de uma forma mais abrangente possível, apresentaremos três abordagens distintas sobre o que é um modelo matemático. Os trabalhos escolhidos apresentam aspectos diversos de um modelo matemático e isso nos auxiliará na nossa formulação sobre o que é um modelo matemático.

2.1 - A *caracterização do Professor Barreto*

O primeiro trabalho que apresentamos é do Professor Aristides Camargos Barreto. O artigo em que baseamos nossas observações foi escrito em 1984, para ser apresentado no V Congresso de Educação Matemática e trata os modelos matemáticos como uma estratégia educacional viável para o terceiro mundo[9].

Para o Professor Barreto, um modelo matemático é o resultado final de vários esforços para matematizar uma determinada situação; ou seja, um modelo matemático seria uma representação aproximada e seletiva, em termos matemáticos de uma dada situação.

A partir dessa caracterização, o autor procura colocar em termos matemáticos, o que entende por um modelo matemático. Para

---

(8) Neste trabalho, utilizaremos a expressão modelo matemático a fim de enfatizar a acepção de modelo utilizada nas ciências empíricas e em matemática aplicada, enquanto que, ao nos referirmos ao conceito, como é utilizado na lógica, utilizaremos o termo modelo.

(9) Aristides Camargos Barreto. Models: a viable strategy for the third world. 1984, mimeografado.

tanto, utiliza as seguintes representações:

Seja S_0 uma situação real ou imaginária. Esta situação terá várias componentes e interdependências entre elas. Por exemplo, se pretendemos estudar as diversas relações existentes entre vários animais em uma floresta, representaremos todo este complexo, constituído pelos animais e as interações entre eles, por S_0.

Ao selecionarmos componentes e interpendências chegaremos a uma situação mais simplificada, que chamaremos de S. No exemplo anteriormente citado, se selecionarmos apenas os animais que satisfazem a relação "ser da mesma família que" estaremos restringindo nosso estudo a esses animais e a esta interdependência.

Como queremos criar um modelo matemático de uma situação S, ou seja, como queremos matematizar S, devemos considerar alguma estrutura matemática[10], para relacionarmos com a situação estudada. Chamemos de E esta estrutura matemática. Assim, E é um conjunto não-vazio que possui uma ou várias relações entre seus elementos.

Nosso objetivo é relacionar a situação S (pertencente ao mundo real) com a estrutura E (pertencente ao mundo matemático). Para tanto, necessitamos do auxílio de uma função f, que está definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f : S &\to E \\ x &\to x' \end{aligned}$$

Ou seja, f tem como imagem de um componente de S, um ele

---

(10) É importante observarmos que a expressão estrutura matemática está sendo utilizada como sinônimo da expressão sistema axiomático. No entanto, a nível formal, estrutura tem outro significado que pode ser visto em Schoenfield [32].

mento de E. Além disso, f deverá preservar a interdependência dos componentes, isto é, se x e y, componentes de S são interdependentes, então f(x) e f(y) estão relacionados em E.

Com isto, o Professor Barreto define quando a estrutura matemática E é um modelo matemático da situação S (ver Barreto [6], p.4):

"Dizemos que E é um modelo matemático de S, se existe uma aplicação m : S → E, tal que componentes distintas de S correspondam, através de m, a elementos distintos em E e, interdependências distintas em S, correspondam a relações distintas em E, com a aplicação m preservando cada interdependência. Esta aplicação m é dita ser uma representação, uma modelação, ou uma matematização de S".

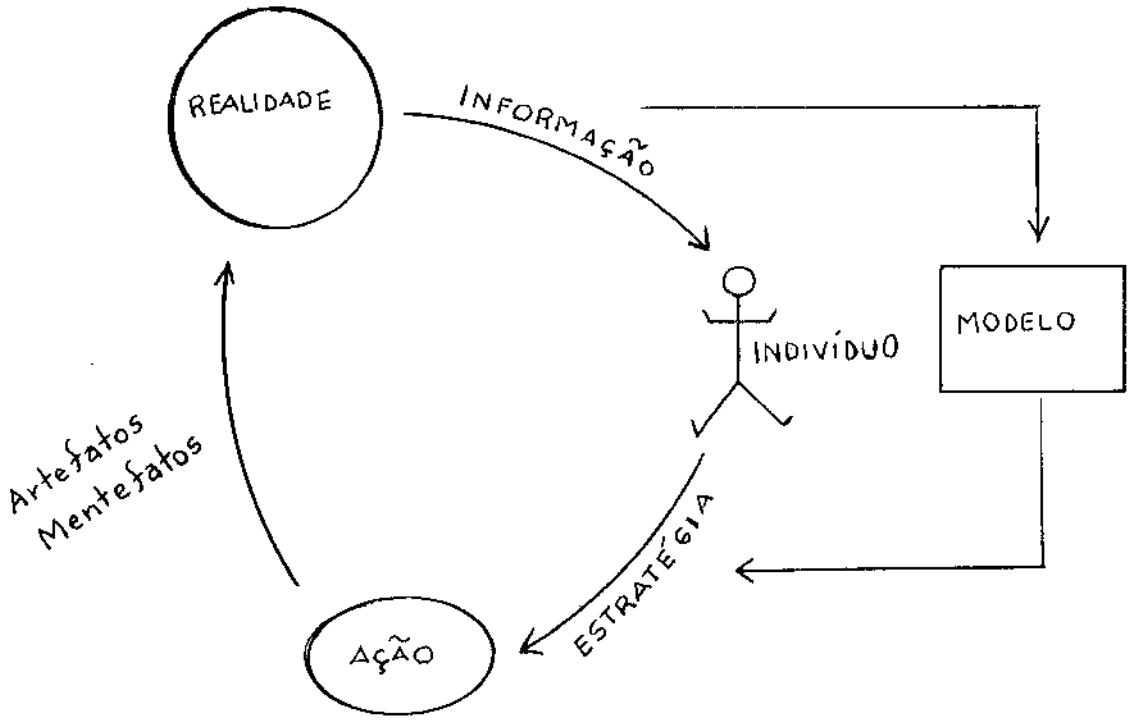
Nesta caracterização de modelo matemático, dada pelo Professor Barreto, alguns aspectos do processo de modelagem (que no caso seria a aplicação m) não ficam evidenciados, como por exemplo, a etapa de verificação e testagem dos resultados obtidos através do modelo matemático.

Com o propósito de esclarecer melhor este aspecto, apresentamos a seguir a caracterização do Professor Ubiratan D'Ambrosio.

2.2. - *A Caracterização do Professor D'Ambrosio*

As idéias apresentadas nos parágrafos seguintes estão baseadas nas notas de aula do curso ministrado pelo Professor Ubiratan D'Ambrosio, no segundo semestre de 1985, na Faculdade de Educação da UNICAMP e no seu livro "Da Realidade à Ação" [11].

Partindo do seguinte esquema, o Professor Ubiratan caracteriza o que entende por um modelo matemático.



Neste contexto, a *realidade* é constituída por elementos classificados em concretos e abstratos. Os elementos concretos, o autor denomina de *artefatos*, enquanto que as idéias, ou elementos abstratos, tem a designação de *mentefatos*(11).

O *indivíduo* é parte e ao mesmo tempo observador da realidade. É ele quem coleta e armazena as informações sobre determinada situação e busca, através da produção de novas idéias (mentefatos) e de objetos concretos (artefatos), exercer uma *ação* sobre a realidade.

O ideal seria que o indivíduo fosse capaz de encarar a realidade como um todo e a partir daí começar uma análise de detalhes,

---

(11) A esta classificação dos elementos que constituem a realidade (artefatos e mentefatos), acrescentaríamos, para acompanhar a nomenclatura dada pelo Professor Ubiratan D'Ambrosio, os antefatos. Um antefato seria tudo que ainda não se tornou um mentefato, por ser apenas uma intuição para o indivíduo. Na história da matemática encontramos diversos exemplos.

usando as linguagens convencionadas das ciências[12].

O *modelo* seria o ponto de ligação entre as informações captadas pelo indivíduo e sua ação sobre a realidade. O modelo situa-se no nível do indivíduo e é criado por ele como um instrumento de auxílio para a compreensão da realidade. O processo de modelagem, ou seja, o caminho de criação do modelo, é o processo mediante o qual se definem as estratégias de ação do sujeito sobre a realidade[13].

O modelo, segundo o Professor D'Ambrosio, seria uma estratégia que dá ao homem condições de exercer seu poder de análise da realidade. Tal estratégia se aplica, em geral, a todas as linguagens convencionadas; usando a linguagem convencionada da *matemática*, obtemos um *modelo matemático*.

Esta caracterização de modelo matemático tem uma abordagem mais global, pois é fundamental que voltemos à realidade de onde partimos, para que, através das estratégias de ação indicadas pelo modelo, modifiquemos a situação inicial. Além disso, a partir da verificação dos resultados obtidos e de uma possível reconsideração de outros aspectos do problema, teremos um aprimoramento do modelo construído e, portanto, o aperfeiçoamento ou criação de novas estratégias. Em suma, podemos destacar que o modelo não apenas cria estratégias mas, também é uma estratégia de ação sobre a realidade.

A terceira caracterização de um modelo matemático que apresentaremos foi extraída do trabalho apresentado pelo Professor Jan de Lange [14], em sua visita à Faculdade de Educação,UNICAMP,

---

(12) Ubiratan D'Ambrosio. Da realidade à ação, p.63

(13) Ubiratan D'Ambrosio. Da realidade à ação, p.65

(14) O Professor Jan de Lange apresentou as linhas gerais de um trabalho que está sendo desenvolvido na rede oficial de ensino da Holanda, onde a utilização de modelos matemáticos tem grande destaque.

em novembro de 1985.

2.3 - *A caracterização do Professor de Lange*[15]

O trabalho do Professor de Lange está baseado no desenvolvimento de um currículo que classificou de realista. Em resumo, este currículo enfatiza os seguintes pontos:

(i) o domínio de problemas reais, onde o contexto serve tanto para desenvolver conceitos matemáticos, como para propiciar o desenvolvimento e aplicação dos mesmos;

(ii) a atenção geral é voltada para o desenvolvimento de esquemas, simbolização e modelos;

(iii) o caráter interativo do processo de ensino-aprendizagem.

Além desses aspectos, o Professor de Lange enfatiza a necessidade de conhecermos o poder de comunicação da linguagem matemática. Segundo ele, este poder de comunicação é resultado do fato de a usarmos sempre que ela possa auxiliar ou tornar mais claro um argumento apresentado.

Ao mesmo tempo em que caracteriza um modelo matemático, o autor introduz procedimentos didáticos para a utilização de modelos como estratégia de ensino.

Partindo de que um modelo matemático é a *matematização* de um problema, o Professor de Lange define o que significa matemati-

---

(15) Apesar dos trabalhos do Professor Barreto e do Professor D'Ambrosio estarem também voltados para o ensino da matemática, é nesta caracterização que enfatizaremos este aspecto.

zar[16], destacando dois níveis: a matematização horizontal e a matematização vertical.

A *matematização horizontal* tem como características principais:

(i) identificação dos aspectos matemáticos específicos do problema apresentado;

(ii) transferência do problema para um modelo conhecido;

(iii) formulação do problema de diversas maneiras;

(iv) reconhecimento de isomorfismos entre diferentes problemas;

(v) identificação de relações e regularidades;

(vi) esquematização do problema, em termos matemáticos.

A *matematização vertical* caracteriza-se pelo tratamento matemático do problema. Seus pontos principais são:

(i) elaboração de uma expressão matemática que represente a relação encontrada;

(ii) utilização de sucessivos *modelos matemáticos* que, em princípio, ofereceriam tratamentos adequados ao problema.

(iii) refinamento e ajuste do modelo encontrado;

(iv) integração de diversos modelos de um mesmo problema;

(v) generalização dos resultados obtidos.

---

(16) Matematizar é uma atividade que visa organizar e estruturar um problema apresentado, colocando-o em termos matemáticos.

Após estas etapas, passamos, segundo de Lange, à interpretação dos resultados obtidos através do modelo matemático. Neste estágio, são discutidas as restrições do modelo e o método utilizado no processo de modelagem (matematização horizontal e vertical). O modelo é analisado criticamente e possíveis manipulações nos dados ou erros de identificação de variáveis e relações poderão ser detectados.

É importante observarmos que, nos três trabalhos apresentados, ao caracterizarmos um modelo matemático, implicitamente tratamos do processo de modelagem. Com o objetivo de caracterizar as diversas etapas desse processo, faremos a seguir uma descrição mais detalhada do *processo de modelagem*.

2.4 - *O processo de modelagem*

Encontramos em diversos autores, várias descrições do processo de modelagem. No entanto, baseamos nossa descrição no trabalho de Maki e Thompson [23], por considerá-lo minucioso e por abranger aspectos das três caracterizações apresentadas.

Com o objetivo de tornar mais claro cada estágio do processo, apresentamos concomitantemente um exemplo. Para que o leitor possa ter uma boa visualização, criamos um quadro, onde, na primeira coluna, descrevemos a etapa do processo e na segunda, desenvolvemos o exemplo. Vejamos então:

PROCESSO DE MODELAGEM	EXEMPLO
1º - Observação de uma situação, seja em laboratório ou vida cotidiana.	Tomemos como situação a ser estudada a interação natural entre n espécies coexistindo num mesmo nicho ecológico. Observemos que há várias relações entre as espécies, como por exemplo, a cadeia alimen

	tar, a divisão do espaço físico, etc.
2º - Seleção de aspectos que consideramos relevantes para o objetivo de nosso estudo. Simplificamos a situação original.	Selecionemos como aspecto relevante para nosso estudo, a relação natural entre as espécies dada por: "... ser presa de ..." . Restringimos com isto a situação inicial, à observação apenas dessa relação.
3º - Identificação de processos operativos que possibilitarão a codificação do problema em linguagem matemática. As variáveis principais e as relações entre elas são representadas por símbolos e relações matemáticas. É a identificação da estrutura M anteriormente citada, como também a realização dos itens (i), da matematização horizontal e vertical; (v) e (vi) da matematização horizontal.	As variáveis que estamos estudando são as diversas espécies. A relação entre elas é: "...ser presa de...". Assim, podemos adotar a notação: i : variando de 1, ... , n; j : variando de 1, ... , n. Estas duas variáveis possibilitarão o estudo do relacionamento entre as espécies pela relação selecionada. Então: $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se a espécie i não estiver relacionada com j.} \\ 1, \text{ se a espécie i estiver relacionada com j.} \end{cases}$

PROCESSO DE MODELAGEM	EXEMPLO
	Em particular se estivéssemos trabalhando com três espécies, de tal forma que: na espécie 1 houvesse canibalismo e esta fosse presa de 3; a espécie 2 fosse presa da espécie 1 e 3; a espécie 3 fosse presa de 2. Teríamos então: $a_{11} = 1$; $a_{12} = 0$; $a_{13} = 1$ $a_{21} = 1$; $a_{22} = 0$; $a_{23} = 1$ $a_{31} = 0$; $a_{32} = 1$; $a_{33} = 0$ Conseguimos, através dessa notação, identificar como estrutura matemática que se adapta ao problema, o anel das matrizes. Assim, a matriz do nosso caso particular é: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Este é um modelo matemático que descreve nossa situação.
4º - Estudo da formulação matemática obtida para o problema, através de téc	Através de resultados específicos da teoria de matrizes obtemos resultados importantes sobre o pro-

nicas específicas.	blema em questão. Utilizando apenas o fato do problema ser representado em forma matricial, temos que a soma dos elementos de uma linha i da matriz, nos dá o número de espécies que se alimentam de i. Na matriz particular que determinamos: a espécie 1 é presa de duas espécies; a espécie 2 é presa de duas espécies; a espécie 3 é presa de uma espécie.
5º - Último passo no processo, diz respeito à comparação entre os resultados obtidos matematicamente e o que ocorre na situação real. Esta seria a etapa de verificação dos resultados obtidos, ou ainda, o momento de interpretação dos resultados do modelo.	Comparamos os resultados obtidos com o auxílio da matemática com os resultados observados do problema. Após uma avaliação, caso seja necessário, retomaremos todo o processo novamente a fim de adaptá-lo melhor ao nosso estudo.

Algumas observações com respeito a cada estágio do processo se fazem necessárias.

A primeira etapa do processo é caracterizada pela necessidade

de termos como auxiliar um especialista da área a que pertence o problema que iremos estudar. O especialista terá melhores condições de situar e criar hipóteses sobre o problema que é apresentado. Estas hipóteses são o resultado de um estudo meticuloso ou mesmo da intuição do cientista. Além do estudo e intuição, o cientista, para formular estas hipóteses, poderá utilizar o reconhecimento de similaridades com outras situações já estudadas. Seria este o momento em que estaríamos passando pelas etapas (ii),(iii), (iv) da matematização horizontal.

O segundo estágio não deve ser encarado apenas como uma simplifição da situação inicial. Temos o objetivo de tornar a formulação do problema tão precisa quanto possível. Buscamos uma compreensão clara e precisa das palavras e conceitos que utilizaremos, necessitando para isso, fazer idealizações e aproximações da situação inicial, identificando variáveis básicas e dispensando toda informação que for julgada desnecessária para a resolução do problema.

Neste estágio, chegamos ao chamado *Modelo Real*, ou seja, a descrição de uma determinada situação após sua simplificação e identificação dos dados essenciais.

O terceiro passo, que se refere à codificação matemática do problema, envolve um alto grau de criatividade. Através do modelo real, já obtido, chegamos ao modelo matemático, onde elaboramos uma expressão matemática que representa a relação encontrada entre as variáveis do problema. Todo o valor do trabalho de construção de um modelo reside nesta fase, pois uma identificação inapropriada do mundo real com o mundo matemático poderá levar a resultados infrutíferos, ou até mesmo errados, comprometendo todo o trabalho anterior.

O modelo matemático que obtemos ao final desta etapa, geralmente não é único; vários modelos podem descrever uma mesma situação. Estes diversos modelos dependerão da ênfase dada,ao cons-

truirmos o modelo real, a certos aspectos do problema.

Os resultados obtidos, através do modelo matemático construído, podem ser classificados em:

(i) teoremas do ponto de vista matemático;

(ii) previsões sob o ponto de vista empírico.

O ponto principal da quarta etapa do processo de modelagem é o fato de podermos produzir novas informações sobre o problema inicial a partir de técnicas matemáticas. Além disso, não apenas informações específicas sobre o problema são criadas, mas resultados mais gerais, de natureza matemática, que poderão impulsionar a pesquisa em várias áreas desta disciplina. É nesta etapa que passamos pelos itens (ii), (iii), (iv) e (v) da matematização vertical.

O último estágio do processo de modelagem diz respeito à decodificação dos resultados obtidos anteriormente. Comparações entre a situação original e as previsões obtidas são feitas e avaliadas, sendo, muitas vezes, necessária uma reconsideração de todo o processo de modelagem, havendo, em consequência, um refinamento do modelo obtido. Novamente, estaríamos passando pelas fases (iii), (iv) e (v) da matematização vertical.

A descrição do processo de modelagem permite que façamos a seguinte *caracterização de um modelo matemático*:

> Um modelo matemático é o sistema obtido após o terceiro estágio do processo de modelagem, ou seja, é a explicitação das relações matemáticas entre os dados iniciais do problema em questão.

A distinção que fazemos entre um modelo real e um modelo matemático, geralmente não é muito marcante, e, na prática, ocorre

a utilização de modelos que podemos considerar como *mistos*. Estes modelos, que podemos considerar como mistos, são uma simplificação de um determinado problema, porém, apenas algumas das expressões utilizadas pertencem ao mundo matemático.

No entanto, é bom salientarmos que, a não distinção entre estes dois tipos de modelos, pode levar a conclusões erradas,principalmente quando estamos trabalhando com assuntos da área de ciências humanas e sociais, onde os conceitos utilizados são difíceis de serem quantificados.

Outro aspecto que merece destaque sobre a distinção entre modelo real e modelo matemático, é o fato que as conclusões sobre o mundo matemático não são conclusões sobre o mundo real. É importante que façamos a distinção entre os modelos do fenômeno e a que tipo de modelo as conclusões se referem.

Ao construirmos um modelo matemático, este poderá ser classificado em *modelo determinístico* ou *modelo estocástico*. Um *modelo* será *determinístico* se ele predizer o que ocorrerá, ao darmos informações suficientes em um momento ou estágio, com o comportamento futuro de todo o sistema. Em geral, é com este tipo de modelo matemático que trabalhamos. Quando incorporamos ao modelo um comportamento probabilístico, ou seja, não importará a quantidade de dados e informações que tenhamos, os resultados serão sempre dados através de probabilidade; estaremos trabalhando com um *modelo estocástico*. Com este tipo de modelo não há como predizer, com absoluta certeza, o procedimento futuro do sistema.

A utilização de um tipo ou outro de modelo matemático, dependerá da situação e dos recursos disponíveis. Quando trabalhamos com as ciências humanas e sociais, a utilização de modelos envolve chances e incertezas; com isto e pelo fato do mundo real dar fortes evidências de ser um modelo estocástico, este tipo de modelo deverá ser o mais utilizado ao tratarmos com estes problemas. No entanto, não podemos esquecer que o modelo determinístico

pode ser visto como uma primeira aproximação do problema e,muitas vezes, as dificuldades técnicas tornam proibitivas a utilização de modelos estocásticos.

Em suma, podemos dizer que o modelo matemático é um dos tratamentos científicos que podemos dar a um problema. Quando este problema tiver origem em ciências físicas, o modelo matemático dará um tratamento efetivo na descrição do fenômeno. Quando o problema envolver questões da área de ciências humanas e sociais, obteremos algum sucesso através do modelo matemático, porém este, muitas vezes, não será o mais apropriado, pois nestas ciências temos aspectos difíceis de serem quantificados; melhor seria estudarmos a situação no contexto do modelo real, onde os significados para as variáveis são não matemáticos.

Ao finalizarmos esta seção é necessário, mais uma vez, que enfatizemos a importância do confronto entre os resultados obtidos através do modelo e o problema que o originou. Sem esta etapa, o modelo matemático não terá uma dinâmica que possibilitará a sua reformulação e o seu aprimoramento.

Um exemplo da importância dessa etapa é dado pelos seguintes modelos matemáticos que descrevem a dívida externa de um país[17].

Estes modelos tem o nome de *Modelo de Dívida de Domar*, e, o primeiro deles é o seguinte:

Sejam D e y respectivamente a dívida nacional e a renda nacional de um determinado país. Suponhamos que:

(a) a taxa de aumento da dívida nacional é igual a uma proporção fixa da renda nacional;

---

(17) Nos exemplos que seguem, utilizaremos equações diferenciais. Para um leitor não familiarizado com o assunto pedimos que antes procure este em algum livro de cálculo, onde poderá encontrar facilmente.

(b) a renda nacional aumenta a uma taxa constante β ao longo do tempo.

Em linguagem matemática, temos:

(A) $\frac{dD}{dy} = \alpha y(t)$, equação que representa a condição (a).

(B) $\frac{dy}{dt} = \beta$, equação que representa a condição (b).

Além disso, tomaremos como equações que estabelecem as condições iniciais do modelo, as seguintes:

(C) $y(0) = y_0$

(D) $D(0) = D_0$

Como as equações (A) e (B) são equações diferenciais e, como nosso objetivo é determinar a razão entre a dívida nacional e a renda nacional, resolveremos as equações (A) e (B). É bom observarmos que, em termos de avaliação econômica, é esta razão entre a dívida e a renda nacional que importam.

Resolvendo a equação (B) temos:

$$\int dy = \int \beta dt$$

$$\boxed{y = \beta t + C}$$

Como $y = y_0$, quando $t = 0$, temos que $y_0 = C$; logo, podemos escrever:

$$\boxed{y = \beta t + y_0}$$

Substituindo o valor de y acima obtido em (A), temos:

$$\frac{dD}{dt} = \alpha(\beta t + y_0) = \alpha\beta t + \alpha y.$$

Resolvendo esta equação:

$$\int dD = \int (\alpha\beta t + \alpha y_0)\, dt$$

$$D = \alpha\beta \frac{t^2}{2} + \alpha y_0 t + C$$

Como $D = D_0$, quando $t = 0$, temos que $D_0 = C$.

Logo,

$$\boxed{D = \frac{1}{2}\alpha\beta t^2 + \alpha y_0 t + D_0}$$

A solução do modelo matemático é dada por:

$$\begin{cases} D(t) = \frac{1}{2}\alpha\beta t^2 + \alpha y_0 t + D_0 \\ y(t) = \beta t + y_0 \end{cases}$$

Calculemos agora, a razão entre a dívida e a renda nacional:

$$\frac{D(t)}{y(t)} = \frac{\frac{1}{2}\alpha\beta t^2 + \alpha y_0 t + D_0}{\beta t + y_0}$$

ou melhor,

$$\frac{D(t)}{y(t)} = \frac{D_0}{\beta t + y_0} + \frac{\alpha y_0 t}{\beta t + y_0} + \frac{\frac{1}{2}\alpha\beta t^2}{\beta t + y_0}$$

Ao fazermos t tender a infinito, ou seja, $t \to \infty$, temos:

a) $$\frac{D_0}{\beta t + y_0} \longrightarrow 0$$

b) $$\frac{\alpha y_0 t}{t(\beta + y_0/t)} \longrightarrow \text{constante} = \frac{\alpha y_0}{\beta}$$

c) $$\frac{\frac{1}{2}\alpha\beta t^2}{\beta t + y_0} \longrightarrow \infty$$

Logo, quando $t \to \infty$, a razão $\frac{D(t)}{y(t)} \to \infty$, ou seja, a dívida do país cresce muito mais rapidamente que a renda; logo, este país é economicamente inviável.

Sendo assim, o modelo que está descrevendo esta situação deve ser modificado, pois ao compararmos o resultado obtido pelo modelo e o que ocorre em um determinado país, vemos que estes resultados não se adaptam à realidade econômica.

Como a equação (A) descreve a relação entre a dívida e a renda, esta não será modificada. No entanto, a equação (B), onde está relacionada a renda a uma taxa constante, sofrerá modificações, passando a ser descrita como:

$$(B') \quad \frac{dy}{dt} = \beta y(t).$$

Isto significa que a renda nacional varia a uma proporção constante da própria renda.

Nosso modelo fica com as seguintes equações:

$$(A) \quad \frac{dD}{dt} = \alpha y(t)$$

$$(B') \quad \frac{dy}{dt} = \beta y(t)$$

$$(C) \quad y(0) = y_0$$

$$(D) \quad D(0) = D_0, \quad \text{além disso, } \alpha > 0, \beta > 0.$$

Este é chamado *Segundo Modelo de Dívida do Domar*.

Resolvendo a equação (B'), temos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \beta dt$$

$$\ell n\, y = \beta t + C$$

$$y = C\, e^{\beta t}$$

Como $y = y_0$, quando $t = 0$, temos, $y_0 = C$. Assim,

$$\boxed{y = y_0 e^{\beta t}}$$

Substituindo em (A) o valor de y encontrado acima, obtemos:

$$\frac{dD}{dt} = \alpha y_0 e^{\beta t}$$

Resolvendo esta equação:

$$\int dD = \int \alpha y_0 e^{\beta t} dt$$

$$D = \frac{\alpha}{\beta} y_0 \, e^{\beta t} + C$$

$D = D_0$, quando $t = 0$, logo $D_0 = \frac{\alpha}{\beta} y_0 + C$ e assim,

$$C = D_0 - \frac{\alpha}{\beta} y_0$$

Logo, a solução da equação é:

$$D = \frac{\alpha}{\beta} y_0 \, e^{\beta t} + D_0 - \frac{\alpha}{\beta} y_0$$

ou ainda,

$$\boxed{D = D_0 + \frac{\alpha}{\beta} y_0 \, (e^{\beta t} - 1)}$$

E a solução do modelo matemático é:

$$\begin{cases} D(t) = D_0 + \frac{\alpha}{\beta} y_0 (e^{\beta t} - 1) \\ y(t) = y_0 e^{\beta t} \end{cases}$$

Como queremos conhecer a expressão da razão $\frac{D(t)}{y(t)}$, obtemos:

$$\frac{D(t)}{y(t)} = \frac{D_0 + \frac{\alpha}{\beta} y_0 (e^{\beta t} - 1)}{y_0 e^{\beta t}}$$

que, quando $t \to \infty$, temos:

$$\frac{D_0}{y_0 e^{\beta t}} \longrightarrow 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\alpha}{\beta} \frac{y_0 (e^{\beta t} - 1)}{y_0 e^{\beta t}} \to \frac{\alpha}{\beta}$$

Assim, quando $t \to \infty$, $\frac{D(t)}{y(t)} \longrightarrow \frac{\alpha}{\beta}$, que é uma constante finita e, portanto, oferece parâmetros para que passamos avaliar o desenvolvimento econômico de um país. A razão que encontramos tem um significado econômico; por exemplo, enquanto esta razão for menor que 75% ou seja, $\frac{3}{4}$, o país é economicamente viável.

Este exemplo demonstra a importância de, após obter o modelo matemático, confrontar os dados obtidos através do modelo com aqueles do problema específico que estamos trabalhando.

3 - A RELAÇÃO ENTRE O CONCEITO DE MODELO E A CARACTERIZAÇÃO DE UM MODELO MATEMÁTICO

Nesta seção, procuraremos estabelecer algumas relações entre o que chamamos de conceito de modelo (seção 1) e as diversas caracterizações apresentadas anteriormente.

Chegamos ao conceito de modelo como sendo uma *interpretação* de um determinado sistema de axiomas, onde os significados atribuídos aos termos primitivos do sistema, tornam os axiomas verdadeiros para esta interpretação. Com este tratamento, situamos o modelo no âmbito da lógica matemática.

Nas diversas caracterizações de um modelo matemático vistas na seção anterior, temos como ponto comum, o fato do modelo matemático ser apresentado como uma *interpretação*, através da linguagem matemática, de um determinado problema.

Com isto, geralmente, poderemos relacionar o termo *modelo* com o termo *interpretação*, ou seja, um modelo poderá ser visto como uma interpretação de uma determinada estrutura, sendo esta matemática ou pertencente ao que chamamos de mundo real.

Este relacionamento merece algumas ressalvas: primeiro, é importante considerarmos que, ao trabalhar com entes matemáticos teremos uma avaliação precisa do modelo, enquanto que, ao trabalharmos com entes do chamado mundo real, o modelo, como interpretação, passa a ter uma abrangência parcial, dependendo dos aspectos do problema que estamos privilegiando. Em segundo, esta idéia de que o modelo matemático é uma interpretação, através da linguagem matemática, de um determinado problema, poderá fazer com que aspectos relevantes do mesmo, por não poderem ser descritos por esta linguagem, sejam deixados de lado. Além disso, a matemática pode ser descrita em uma linguagem formalizada, o que já não ocorre com o mundo real, dificultando a relação mundo matemático/mundo real.

Badiou em [3], enfatiza a relação entre modelo e modelo matemático. Neste trabalho, onde o autor procura dar uma introdução a uma epistemologia materialista da matemática, ele desenvolve a tese de que existem duas instâncias da palavra *modelo:* uma seria a noção descritiva da atividade científica e outra se referiria ao conceito da lógica matemática.

O modelo visto como uma noção descritiva da atividade científica, seria um objeto artificial, destinado a reproduzir, a imitar o objeto real que queremos investigar. ([3] p.17).

Após esta caracterização do que seria a noção de modelo, Badiou o classifica em dois grupos:

1º) Modelos teóricos ou matemáticos: seriam um feixe de hipóteses, cuja coerência e desenvolvimento dedutivos estão garantidos por uma codificação matemática. Neste grupo, estariam inseridos os modelos matemáticos que caracterizamos anteriormente, além de exemplos clássicos como modelos do universo, estudados em cosmologia.

2º) Montagens materiais, cujo destino é triplo:

i) apresentar num espaço de modo sintético processos não-espaciais: grafos, diagramas, etc...;

ii) modelos que tendem a realizar estruturas formais. Como exemplo, o autor cita um trabalho que expõe como construir efetivamente em cartão ou madeira os cinco poliedros convexos, como apresentar um conetivo lógico sob a forma de um circuito elétrico simples[18].

---

(18) Neste item, incluiríamos a criação de materiais didáticos para o ensino.

iii) modelos que visam imitar comportamentos: como exemplo, os robôs.

Quanto ao *conceito* de modelo, o autor dá um tratamento semelhante ao nosso, porém atendo-se a questões mais formais, como a definição de uma linguagem formalizada, de um dispositivo de interpretação, para finalmente trabalhar com o conceito de modelo.

Em suma, podemos delimitar dois níveis de utilização da palavra *modelo*. Um primeiro, relacionado à lógica, apresenta o modelo como um conceito bem definido; um segundo, onde tratamos da noção de modelo, onde, este é visto como uma interpretação de um determinado problema, tendo, assim, a denominação de *modelo matemático*.

4 - *EXEMPLOS*

Apresentaremos alguns exemplos de modelos, tratando especialmente do conceito de modelo. Os modelos matemáticos, por serem o objeto principal deste estudo, terão um tratamento mais detalhado no capítulo seguinte.

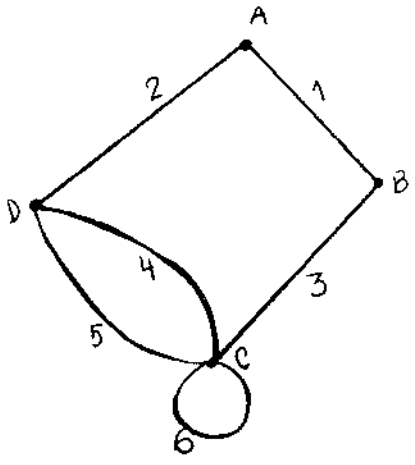
4.1 - *Modelos finitos*

Antes de apresentar o primeiro exemplo, faremos uma rápida apresentação da estrutura de *grafo*, que possibilitará a criação de exemplos de modelos finitos.

Um grafo G, segundo Lucchesi [22], consiste em um conjunto finito, chamado VG, de elementos chamados *vértices* e uma função de incidência, chamada ψG, que associa a cada aresta α de G um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos) de G, chamados extremos de α.

Podemos representar um grafo através de um diagrama, onde cada vértice é representado por um ponto, e cada aresta por uma

linha ligando os pontos que representam seus extremos. Por exemplo, seja G o grafo representado pelo seguinte diagrama:



Temos assim,

$$VG = \{A,B,C,D\} \quad ,$$

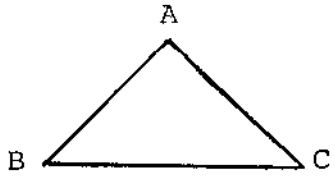
o conjunto de vértices de G e

$$aG = \{1,2,3,4,5,6\} \quad ,$$

o conjunto de arestas de G.

4.1.1 - Seja G o grafo representado pelo diagrama abaixo:

GRAFO G



---

(19) Este exemplo está baseado em Barreto [4].

Consideremos um sistema axiomático cujos termos primitivos são: *ponto*, *linha*, *plano*. Atribuindo os seguintes significados para estes termos: *ponto* será cada um dos vértices de G; *linha* será cada um dos pares AB, BC, CA; como único *plano* o conjunto ABC. Com estes significados, vemos que G satisfaz os seguintes axiomas:

P_1: Existem pelo menos dois pontos em uma linha.
Em G, exatamente dois.

P_2: Existem alguns pontos que estão fora de uma linha dada.
Em G, exatamente um.

P_3: Dois pontos determinam uma linha.
Em G, temos como linhas os pares AB, BC, CA; logo, P_3 está satisfeito.

P_4: Em um plano, existem pelo menos três pontos não na mesma linha.
Em G, temos um único plano ABC que satisfaz P_4.

P_5: Três pontos, não em uma mesma linha, determinam um plano.
Em G, o único plano, satisfaz P_5.

P_6: Uma linha contendo dois pontos de um plano está contida nesse plano.
Em G, isto ocorre trivialmente.

Assim, G é um modelo para o sistema axiomático formado pelos axiomas $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$. Observemos que G é um *modelo parcial* da geometria euclidiana, pois da forma como definimos o grafo G, ele não possui linhas paralelas.

4.1.2 - *Modelos Interdisciplinares*

Utilizando o mesmo conjunto de axiomas visto anteriormente, podemos ter as seguintes interpretações, relacionando-os com outras disciplinas.

PONTOS A,B,C	LINHAS AB,BC,CA	PLANO ABC	MODELO
Cidades	estrada de mão dupla	circuito interurbano	de transporte
Três cores primárias	combinação de duas cores	combinação de três cores	óptico
Vitaminas	dieta de segunda ordem	dieta completa	biológico
Fatores de produção da inflação	pequenas inflações	grande inflação	econômico
Vértices	fios	circuito	elétrico

4.1.3 - *Nesse exemplo, baseado em Nagel* [28], *a palavra 'classe' será entendida como uma coleção de elementos distintos. Cada elemento é chamado de 'membro' da classe.*

Dadas duas classes K e L, consideremos os seguintes axiomas:

A_1: Quaisquer dois membros de K estão contidos em apenas um membro de L.

A_2: Nenhum membro de K está contido em mais do que dois membros de L.

A_3: Os membros de K não estão todos contidos em um único

membro de L.

A_4: Quaisquer dois membros de L contêm apenas um membro de K em comum.

A_5: Nenhum membro de L contém mais do que dois membros de K.

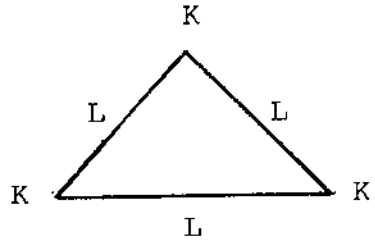
Consideremos a seguinte interpretação para as classes K e L:

K = classe dos pontos que são vértices de um triângulo.

L = classe das retas que são lados desse triângulo.

A afirmação "um membro de K está contido em um membro de L", significa que um ponto que é um vértice se encontra sobre uma reta que é um lado.

Assim, considerando a seguinte figura:



Vejamos como ficam os axiomas:

A_1: Quaisquer dois vértices estão contidos num mesmo lado.

A_2: Nenhum vértice está contido em mais do que dois lados.

A_3: Os vértices não estão todos contidos em um único lado.

A_4: Quaisquer dois lados contêm apenas um vértice em comum.

A_5: Nenhum lado contém mais do que dois vértices.

Pela figura anterior, vemos que os axiomas são verdadeiros para esta interpretação, logo obtivemos um modelo para o sistema axiomático apresentado.

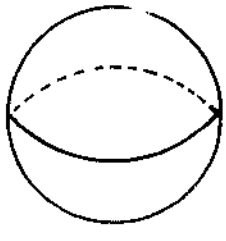
4.2 - *Modelos Infinitos*

Um modelo infinito será aquele cujo sistema axiomático exige um número infinito de elementos para interpretá-lo. É o caso, por exemplo, dos modelos das geometrias euclidiana , riemanniana e de Lobatchevsky. Além disso, é importante observarmos que os modelos infinitos são, necessariamente, ideais, ou seja, seus objetos não são do mundo real, como os modelos do exemplo 4.1.2.

4.2.1 - *Para a geometria euclidiana temos como modelo, o espaço euclidiano.*

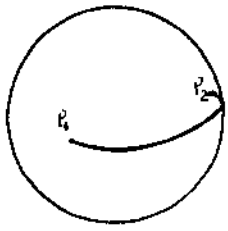
4.2.2 - *Para a geometria riemanniana, temos o seguinte modelo:*

Consideremos uma esfera que chamaremos S^2.



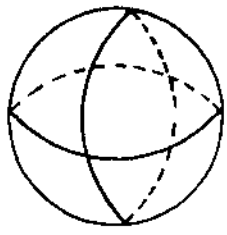
No plano euclidiano poderemos definir uma reta como sendo a menor distância entre dois pontos e a chamaremos *geodésica*.

Na esfera S^2, o que significará uma geodésica (linha de caminho mais curto entre dois pontos)?

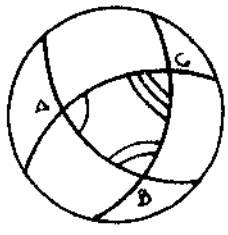


A linha que liga P_1 a P_2 é o caminho mais curto entre estes pontos, logo deve fazer parte de alguma curva geodésica de S^2.

Ao considerarmos a esfera, suas geodésicas serão as *"circunferências maiores"* ou *"círculos máximos"* de S^2, ou seja, são os equadores da esfera.

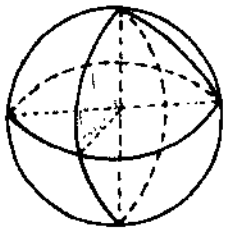


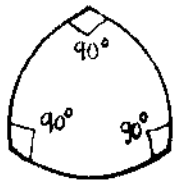
Um triângulo na esfera será constituído inevitavelmente por três arcos contidos em três circunferências maiores.



Ao somarmos $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$, veremos que seu resultado estará entre 180° e 900°. Por exemplo, a uma curta distância, a calota da esfera (ou seja sua casca) difere pouco de um plano. A soma, neste caso, está também próxima de 180°.

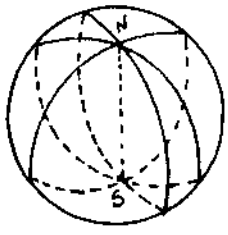
Um triângulo interessante de considerarmos seria:



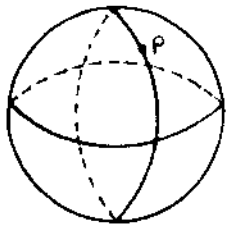


Este triângulo é retângulo e equilátero e ocupa $\frac{1}{8}$ da superfície da esfera e $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 270^{\circ}$.

Dois pontos de uma esfera podem unir-se por dois arcos geodésicos constituindo um grande círculo. Mas se os pontos P_1 e P_2 são antípodas, então por eles passa uma infinidade de geodésicas.

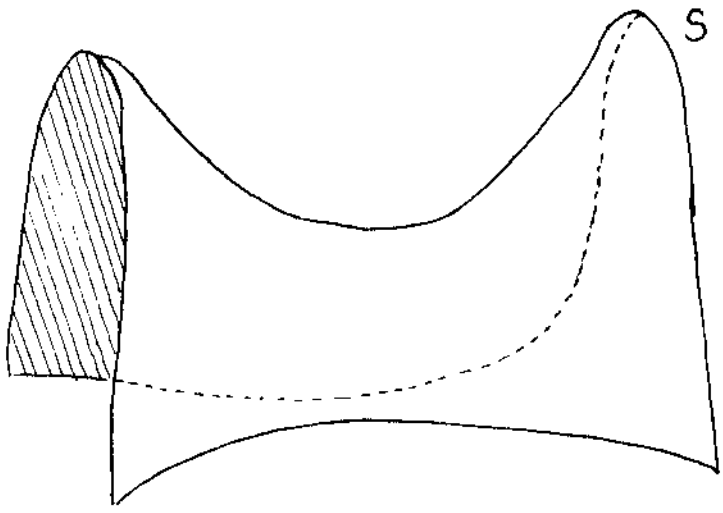


Vemos também que dada uma reta r em S^2 (geodésica) e um ponto P não pertencente a esta reta, não existirá uma reta paralela a r contento P. Por exemplo:



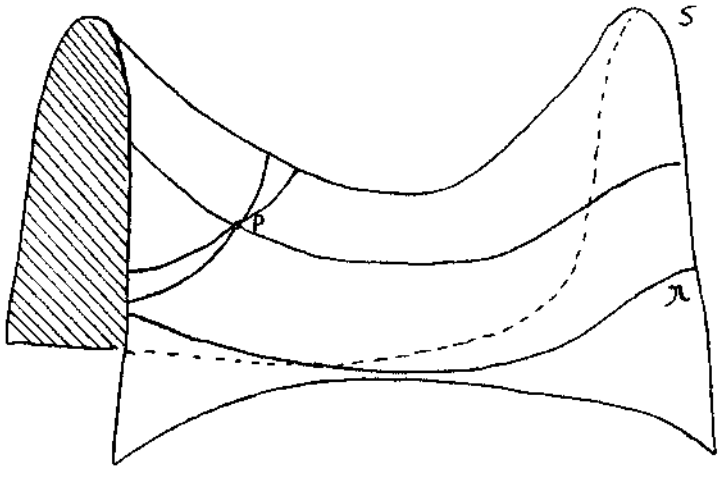
4.2.3 - *Um modelo para a geometria de Lobatchevsky seria*:

Consideremos uma superfície representada pela forma de uma sela de cavalo; a chamaremos S.

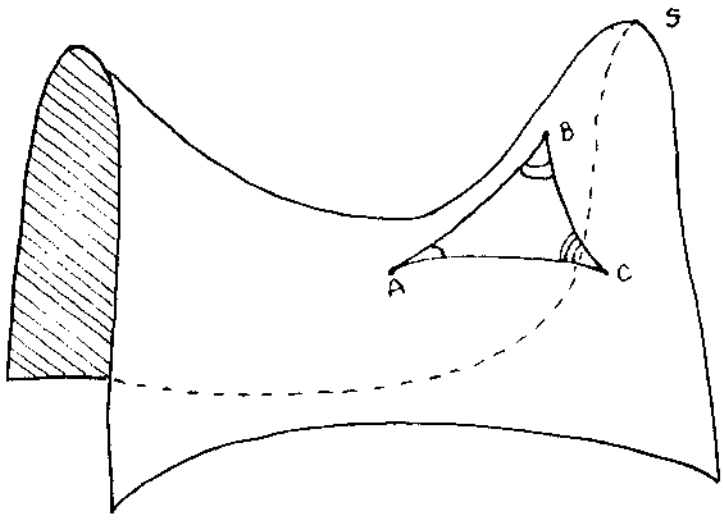


As retas na superfície S serão dadas pela interseção de S com qualquer plano euclidiano.

Poderemos verificar facilmente que este modelo satisfaz os axiomas euclidianos exceto o axioma das paralelas:



Além disso, ao traçarmos um triângulo sobre esta superfície veremos que a soma de seus ângulos internos será menor que 180^{o}.



Com os exemplos vistos anteriormente poderemos chegar a um importante conceito geométrico: *a curvatura de uma superfície*.

Uma superfície curva é uma superfície onde os teoremas euclidianos não funcionam. Sobre uma superfície de curvatura positiva, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180^{o} (caso da esfera). Ao traçarmos uma circunferência de raio ℓ sobre esta superfície, verificaremos que a área do círculo é menor que $\pi\ell^2$ e seu perímetro inferior a $2\pi\ell$. Numa superfície de curvatura negativa (caso da sela), a soma dos ângulos de um triângulo é menor que 180^{o}. Se traçarmos uma circunferência de raio ℓ, obteremos uma área maior que $\pi\ell^2$ e um perímetro superior a $2\pi\ell$.

No capítulo seguinte, trataremos de modo especial dos *modelos matemáticos* aplicados ao ensino da matemática.

CAPÍTULO II

MODELOS NO ENSINO

Faremos neste capítulo um estudo sobre a utilização de modelos no ensino da matemática. Assim, antes de tratarmos especificamente de modelos matemáticos associados ao ensino, faremos um rápido estudo sobre os materiais didáticos que, pela classificação de Badiou[20], podem ser considerados como uma interpretação concreta (material) de uma determinada estrutura matemática, podendo assim, ser chamados de *modelos concretos*.

1 - *MATERIAIS DIDÁTICOS*

Inicialmente, gostaríamos de precisar o que entendemos por material didático.

De uma maneira geral, podemos considerar como material didático todos os elementos auxiliares no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem. Sendo assim, mesmo os modelos matemáticos podem ser vistos como elementos auxiliares no ensino de matemática. No entanto, como queremos ressaltar a importância dos modelos matemáticos, vendo sua utilização como uma forma de encarar o ensino da matemática, achamos mais interessante nos limitar à concepção de materiais didáticos como materiais concretos (utilizados principalmente nas primeiras séries do primeiro grau), como por exemplo, os blocos lógicos, as barras de Cuisenaire, material dourado montessoriano, ou qualquer outro material que confeccionamos para auxiliar no desenvolvimento do estudo de determinado conceito matemático.

Após este esclarecimento, faremos um breve histórico do aparecimento e da utilização de materiais didáticos no ensino.

---

(20) Ver página 39 deste trabalho.

1.1 - *Histórico*

Nas primeiras décadas do século XX, a médica Maria Montessori, após aperfeiçoar seus estudos em psicologia e pedagogia, publica seu primeiro trabalho, *"Antropologia Pedagógica"*, onde apresenta a idéia de utilização de materiais didáticos (concretos) como elementos auxiliares no processo de ensino-aprendizagem. Este trabalho teve como ponto de partida as idéias dos médicos franceses Séguin e Itard e, após desenvolver uma pesquisa sobre a recuperação de crianças excepcionais, transferiu os procedimentos desenvolvidos nesse estudo, para o trabalho com crianças de desenvolvimento normal, culminando pela sua posição em defesa da utilização de objetos concretos no ensino.

O pensamento de Montessori recebeu influência de cientistas e educadores da época, como por exemplo Dewey, que juntamente com a evolução da biologia e psicologia, deram forma ao movimento conhecido como Escola Nova, no início deste século. Ela, apesar de não se considerar como participante do movimento escolanovista, tem vários pontos de contato com estas idéias, principalmente no que diz respeito à utilização de materiais concretos[21].

Montessori utiliza o material como ponto inicial para o desenvolvimento de conceitos; para ela, os materiais são "abstrações materializadas"[22]. No livro *"Pedagogia Científica"* [26], publicado pela primeira vez em 1909, a utilização de materiais didáticos é apresentada dentro de um conjunto de propostas para educação pré-escolar, onde o desenvolvimento do processo de ensino

---

(21) Dewey, um dos teóricos da Escola Nova, defendeu a existência de experiência direta no programa educacional da criança, enfatizando a necessidade de utilização de materiais didáticos, como auxiliares neste processo.

(22) Ver Izaltina de Lourdes Machado, Educação Montessori: de um homem novo para um novo mundo, p.48.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

aprendizagem está baseado na experiência concreta da criança através de materiais.

Devido a diversas mudanças sociais que ocorreram no início deste século, a escola passa a ser possível, também, à classe trabalhadora. Com esta expansão e o aumento do contingente de alunos, vindos de diversos meios e classes sociais, houve a necessidade de se criar novas condições para o ensino. Os materiais didáticos tem um papel de destaque nessa transformação educacional. Eles possibilitam a formação de *um conceito* através de atividades envolvendo objetos que, de forma ingênua, contribuem para essa formação.

No ensino da matemática, a utilização de materiais concretos e o desenvolvimento, a nível formal, de uma estratégia de ensino baseada em materiais, tem seu ponto culminante com o trabalho do Professor Dienes, na década de setenta. Dentre os trabalhos do Professor Dienes, o que descreve os estágios que ele considera como fundamentais para o desenvolvimento do estudo de determinada estrutura matemática, chama-se "Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématique",que em português tem o título "As seis etapas no processo de aprendizagem em matemática"[13].

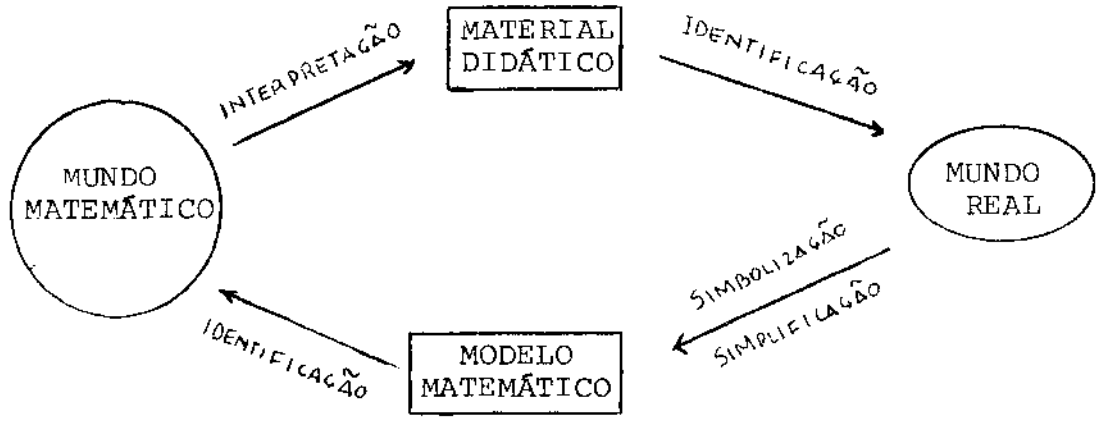
Com este trabalho, a idéia da necessidade de utilizarmos situações concretos para chegarmos a estruturas mais abstratas e complexas como as estruturas matemáticas, tornou-se comum às pessoas interessadas no ensino da matemática.

1.2 - *Uma estratégia de ensino utilizando materiais didáticos*

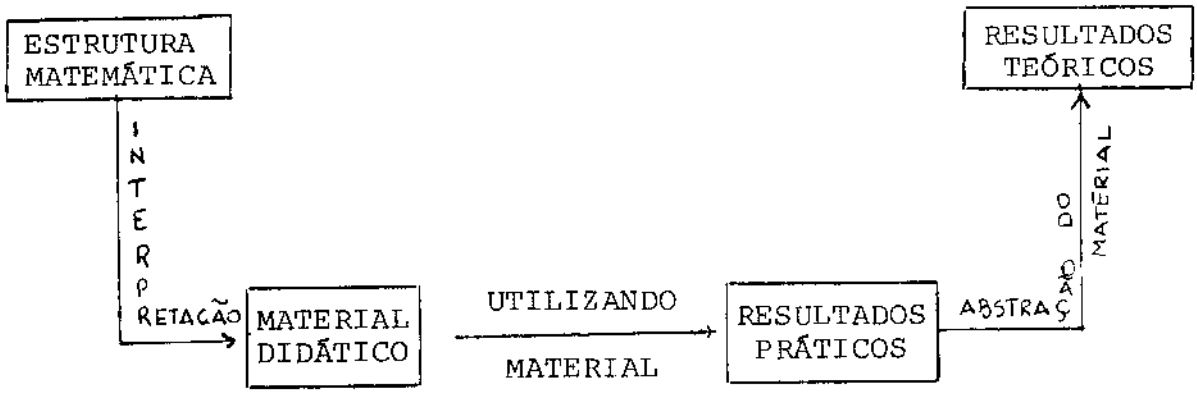
O material didático, como já observamos, é um elemento auxiliar para a formação de conceitos. Ele ajuda a desenvolver um conceito, que está num nível abstrato, através de atividades ou ilustrações, que estão num nível concreto. Podemos desenvolver melhor esta idéia: partimos do que chamaremos "mundo matemático", delimitando um determinado assunto que queremos estudar. Com o objetivo

de facilitar um primeiro contato com estas idéias que queremos desenvolver, fazemos uma primeira aproximação (ou, ainda, interpretação) através do material didático. Esta interpretação"concreta", tem como característica o fato de que o significado atribuído a um determinado termo tem existência física (é um objeto concreto), pertencente ao mundo que rodeia o aluno. Através do material didático temos possibilidade de identificar um elemento do mundo matemático, com um elemento do que podemos chamar de mundo real. De uma forma esquemática temos:

Ao fazer o caminho de volta nesse esquema, ou seja, quando partimos do mundo real para chegarmos ao mundo matemático, encontramos como estágio intermediário, justamente os *modelos matemáticos*. Em suma: a partir de uma situação que delimitamos no mundo real, criamos através de uma simplificação e de uma simbolização dos elementos, um *modelo matemático*. Após a criação do modelo matemático, podemos identificar seus elementos com elementos do "mundo matemático". Assim completando o esquema temos:



O processo de aprendizagem, utilizando materiais didáticos como elementos auxiliares, tem certas etapas bem definidas que Wilmer [37], esquematiza da seguinte forma:



O estágio de interpretação da estrutura matemática[23] caracteriza-se pela escolha ou criação do material didático necessário para o desenvolvimento das idéias que levarão ao conceito que queremos estudar. É através dessa interpretação que criaremos condições para o aluno associar entes matemáticos com objetos concretos.

Veremos a seguir uma ilustração do processo acima descrito, através do estudo das operações de simetria de um paralelogramo.

1.2.1 - *O problema matemático*

Queremos determinar as operações de simetria de um paralelogramo que não seja um quadrado e nem um losango.

Neste primeiro momento, procuraremos escolher o material mais adequado para auxiliar no desenvolvimento do conceito de simetria. Para tanto é necessário que estejamos seguros do conceito,

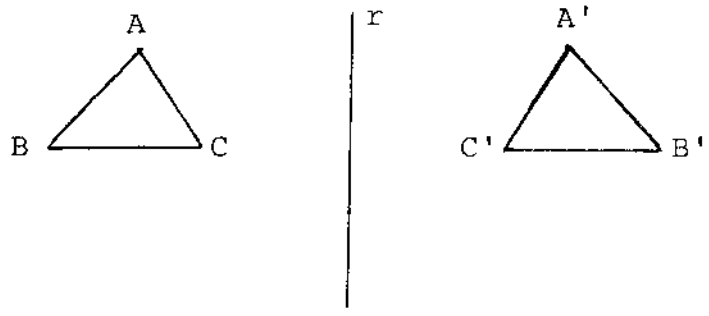
---

(23) Ver nota (10).

ou seja, do conteúdo que queremos desenvolver. Assim, um estudo preliminar será de grande importância para o desenvolvimento do resto do trabalho. Comecemos, portanto, com este estudo.

Antes de estabelecer a definição formal de simetria, procuraremos pensar em algum exemplo mais concreto,como a nossa imagem refletida em um espelho: a imagem refletida é simétrica ao objeto que é refletido.

Os triângulos ABC e A'B'C', na figura abaixo são simétricos



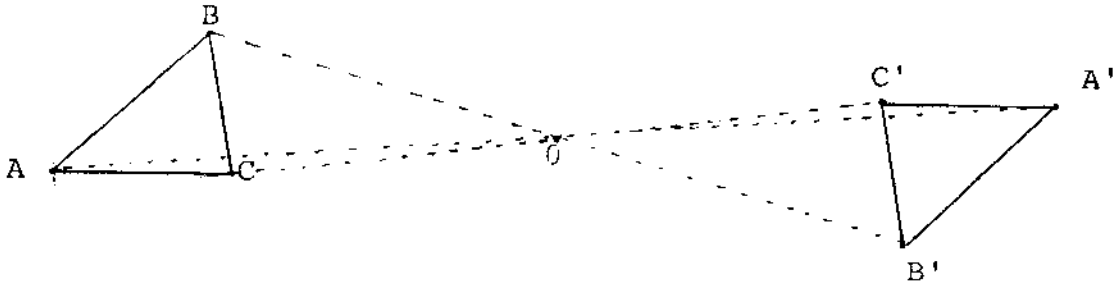
Tanto no exemplo do espelho, quanto neste dos triângulos , podemos detectar alguns pontos em comum. Em ambos os casos, sempre temos um referencial a partir do qual afirmamos que duas figuras são simétricas. No caso do primeiro exemplo, o espelho é este referencial; o espelho, a grosso modo, pode ser visto como um plano e, portanto, podemos chamá-lo de *plano de simetria*. No exemplo dos triângulos, temos como referência a reta r, que podemos considerar como *eixo de simetria*. Outro aspecto que podemos observar é que os pontos simétricos são eqüidistantes do eixo ou plano de simetria. Estas duas situações são exemplos de uma *simetria axial*, ou seja, são simetrias cujo referencial é um eixo ou plano.

Outro tipo de simetria que encontramos é a *simetria central*, onde o referencial é um ponto do plano.

Vejamos um exemplo: considere um ponto 0 de um plano. Dado um ponto P, qualquer desse plano, considere a reta $\overleftrightarrow{OP}$. Usan-

do o compasso com a ponta seca em 0 e abertura $\overline{OP}$, marque o ponto P' na semi reta oposta a $\overrightarrow{OP}$. Com este processo, obtemos o ponto P' simétrico ao ponto P, em relação ao ponto 0.

No caso de um triângulo ABC, temos:



O triângulo A'B'C' é simétrico ao triângulo ABC em relação ao ponto 0.

Quando queremos deslocar um ponto de uma dada região de um espaço, de um plano, ou de uma reta, utilizamos uma *função*. No caso da operação de simetria, utilizaremos também uma função, só que esta deverá satisfazer algumas condições. Dada uma função f, esta será uma operação de simetria se tiver as seguintes propriedades:

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todo x,y pertencente ao domínio da função f.

(ii) $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$, para todo elemento λ pertencente ao conjunto dos números reais.

E, além disso, satisfaça a propriedade de "levar uma figura sobre si mesma" (é o caso de dobrarmos a página sobre a reta r, no exemplo dos triângulos).

As duas propriedades descritas acima, caracterizam o que chamamos de *função linear*. Vejamos um exemplo:

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por $x \longrightarrow 3 \cdot x$

Verifiquemos as duas propriedades:

(i) $f(x+y) = 3\cdot(x+y) = 3\cdot x + 3\cdot y = f(x) + f(y)$.

(ii) $f(\lambda\cdot x) = 3\cdot(\lambda\cdot x) = \lambda\cdot(3 \cdot x) = \lambda\cdot f(x)$

Como (i) e (ii) são satisfeitas, a função f, acima definida, é uma função linear.

Para definir uma operação de simetria, precisamos formalizar a propriedade de "levar uma figura sobre si mesma".

Assim, dados uma função f que satisfaz as propriedades (i) e (ii) e um ponto x do domínio de f, dizemos que f é uma operação de simetria se

$$f(x) = x' ,$$

onde x' é o ponto simétrico de x.

Como exemplo, consideremos a função

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ , dada por}$$
$$x \longrightarrow -x$$

Esta função satisfaz (i) e (ii):

(i) $f(x + y) = -(x + y) = -x - y = -x + (-y) = f(x) + f(y)$

(ii) $f(\lambda \cdot x) = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x) = \lambda \cdot f(x)$

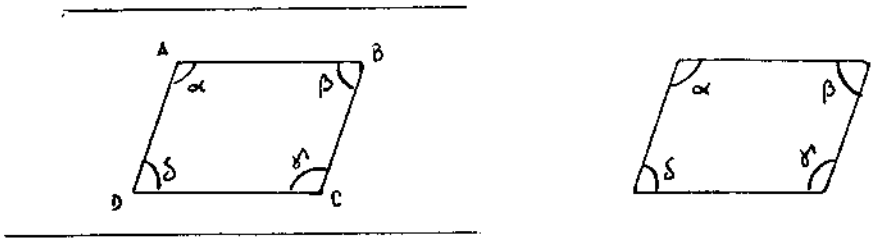
Além disso, dado qualquer x pertencente ao conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), $f(x) = -x$ é exatamente o ponto simétrico a x.

1.2.2 - *Material Didático*

Após este estudo, estaremos com melhores condições de escolher um material adequado à situação que queremos desenvolver.

Geralmente, os problemas que envolvem figuras geométricas , possibilitam a confecção do material pelo próprio aluno. No entanto, será sempre bom esclarecermos que, ao trabalharmos com geometria plana, o material criado estará representado em três dimensões uma figura que possui apenas duas.

Neste exemplo, poderemos utilizar uma faixa de cartolina. Após desenhar uma figura com forma de paralelogramo, a recortaremos da faixa, marcando os vértices e ângulos correspondentes tanto de um lado, quanto de outro da cartolina. Assim, graficamente podemos representar



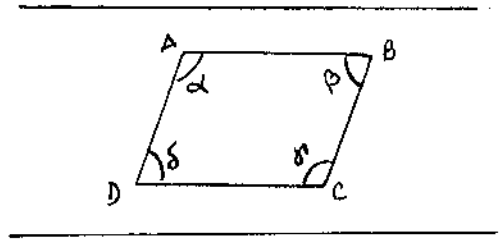
ao vértice A corresponde o ângulo α;
ao vértice B corresponde o ângulo β;
ao vértice C corresponde o ângulo γ;
ao vértice D corresponde o ângulo δ.

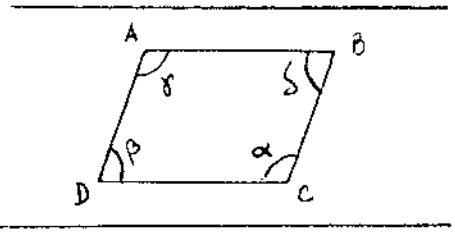
A seguir, associaremos à operação de simetria, as diversas maneiras que encontramos para encaixar a figura recortada na faixa de cartolina. Temos com isto, uma representação "concreta" do problema inicial.

1.2.3 - *Resultado Prático*

A figura do paralelogramo poderá ser encaixada na cartolina, das seguintes formas:

1º) colocando cada ângulo da figura com seu vértice correspondente na faixa:





2º) colocando o ângulo α em correspondência com o vértice C; o ângulo β em correspondência com o ângulo D; o ângulo γ em correspondência com o ângulo A; o ângulo δ em correspondência com o ângulo B.

Observemos que se determinarmos os pontos médios dos lados AD e BC e traçarmos uma reta passando por estes pontos, obteremos um eixo horizontal. Ao traçarmos uma reta paralela aos lados AD e BC, passando pelos pontos médios dos lados AB e DC, obteremos um eixo vertical. Chamemos de P o ponto de interseção destes eixos.

A segunda forma que encontramos de encaixar o paralelogramo, determina uma operação de simetria que, a grosso modo, podemos de

finir como "girar o paralelogramo, em relação ao ponto P, num ângulo de 180^{o}".

Poderemos verificar, experimentalmente, que não há outras formas de encaixar o paralelogramo. O passo seguinte será o desenvolvimento de resultados teóricos obtidos após este trabalho.

1.2.4 - *Resultado Teórico*

Neste estágio, formalizaremos os resultados obtidos, definindo o que significa cada uma das operações encontradas.

A primeira forma de encaixe do paralelogramo é chamado *OPERAÇÃO IDENTIDADE*, pois apenas associa os vértices aos ângulos correspondentes.

A segunda operação encontrada, onde o paralelogramo gira 180^{o} em torno do ponto P (centro do paralelogramo), chama-se ROTAÇÃO.

A conclusão final é de que o paralelogramo estudado possui apenas estas duas operações de simetria:

(1) identidade e
(2) rotação de 180^{o} em torno de seu centro.

1.3 - *Principais características de um material didático*

O exemplo acima utiliza como material didático, elementos simples como cartolina, recorte, cores. No entanto, encontramos materiais já elaborados como os blocos lógicos de Dienes, o material Cuisenaire, o material didático montesoriano, entre outros. É importante observarmos que, devido a participação do aluno, a melhor estratégia de trabalho com materiais concretos, na nossa opinião, será aquela em que o aluno precisará confeccionar o material.

Tanto nos materiais já elaborados como naqueles que serão

confeccionados pelos alunos, devemos encontrar algumas características básicas, como:

- o material deve proporcionar ao aluno condições para que este estude uma propriedade específica, além de possibilitar que ele próprio a descubra;

- o material deve ser o mais simples possível;

- o material deve favorecer a etapa seguinte,em que utilizaremos a linguagem matemática para estabelecer,de maneira rigorosa,os fatos obtidos através dele.

Devemos considerar o fato de ser o uso adequado do material concreto que proporcionará bons resultados no processo de ensino-aprendizagem. Uma aplicação indevida ou uma má utilização do material por parte do professor, poderá ocasionar mais danos que benefícios ao aluno. É fundamental tanto o domínio do conteúdo matemático quanto da técnica de utilização do material escolhido.

Utilizar adequadamente o material didático como auxiliar no processo de aprendizagem implica em tomarmos alguns cuidados, como por exemplo, o tipo de programa que desenvolveremos, a freqüência que utilizaremos materiais, a adaptação do conteúdo a este tipo de abordagem, a adequação do material ao assunto a ser trabalhado. A abordagem dos assuntos deverá ser explorativa e indutiva, proporcionando um melhor aproveitamento do material.

Se tomarmos como padrão o professor tradicional, ou seja, aquele tipo que trabalha apenas com aulas expositivas, num esquema de teoria - exemplos - exercícios, vemos que, o papel do professor, ao adotar uma abordagem com base em materiais didáticos, deve ser basicamente modificado. A função principal do professor, nessa estratégia, se concentra em facilitar interações adequadas entre os alunos e o material. O professor deverá discutir,

rever, perguntar, e incentivar explorações futuras, fazendo perguntas adequadas ou orientando no momento oportuno. Em suma, o trabalho de um professor que utiliza materiais didáticos difere sensivelmente do trabalho de um professor tradicional.

A seguir faremos referência ao que chamamos de *modelos gráficos*. Um modelo gráfico também é um material didático porém, achamos interessante considerá-los separadamente, pois são muito utilizados no ensino em níveis mais avançados onde o trabalho com materiais concretos não fornece a estratégia de ensino mais adequada.

2 - *MODELOS GRÁFICOS*

O modelo gráfico desempenha no ensino da matemática o mesmo papel que os materiais didáticos. São auxiliares no processo de ensino-aprendizagem, possibilitando uma abordagem mais intuitiva de um determinado conceito matemático.

Wilmer [37], p.38, define um modelo gráfico como:

"modelo gráfico de um conceito (algébrico, analítico, geométrico, etc.) é uma figura geométrica ou um diagrama suficientemente bem definido, de modo que, o raciocínio sobre ele tenha a mesma validade que o raciocínio formal sobre o conceito".

A finalidade principal de um gráfico ou diagrama, na acepção que ora enfocamos, é auxiliar a compreensão intuitiva de um determinado conceito, principalmente, conceitos complexos como os que encontramos, por exemplo, em variedades diferenciáveis e topologia geral.

Os exemplos mais importantes de modelos gráficos são: o plano cartesiano; os diagramas de Venn; os grafos; os gráficos de funções; etc.

Os gráficos de funções interpretam geometricamente um conceito algébrico, o de função, facilitando seu entendimento. Além

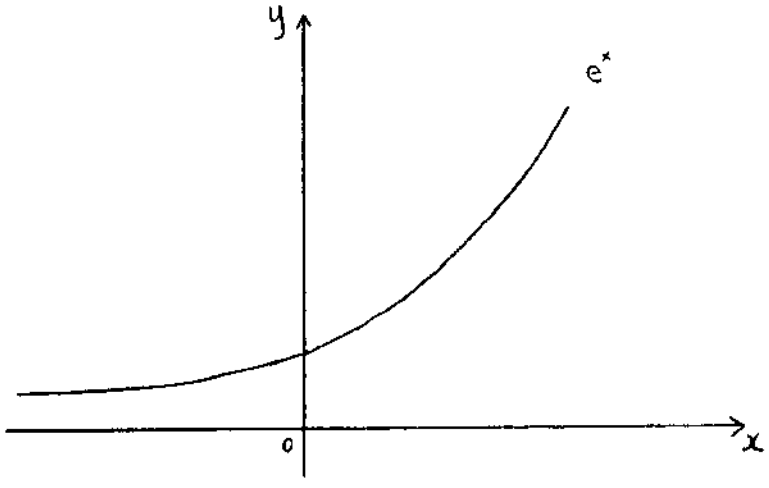
disso, possibilitam o aprimoramento de nossa intuição.

Vejamos a seguir alguns exemplos que ilustram estas afirmações.

2.1. *Exemplos*

2.1.1 - *A função exponencial*

A função e^x é definida no conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) e assume valores reais positivos ($\mathbb{R}^+$). Um esboço do seu gráfico é:



Através do gráfico, podemos observar duas propriedades analíticas importantes dessa função, ou seja, ela não é limitada superiormente, porém tem com limite inferior o número zero. Em símbolos:

i) $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

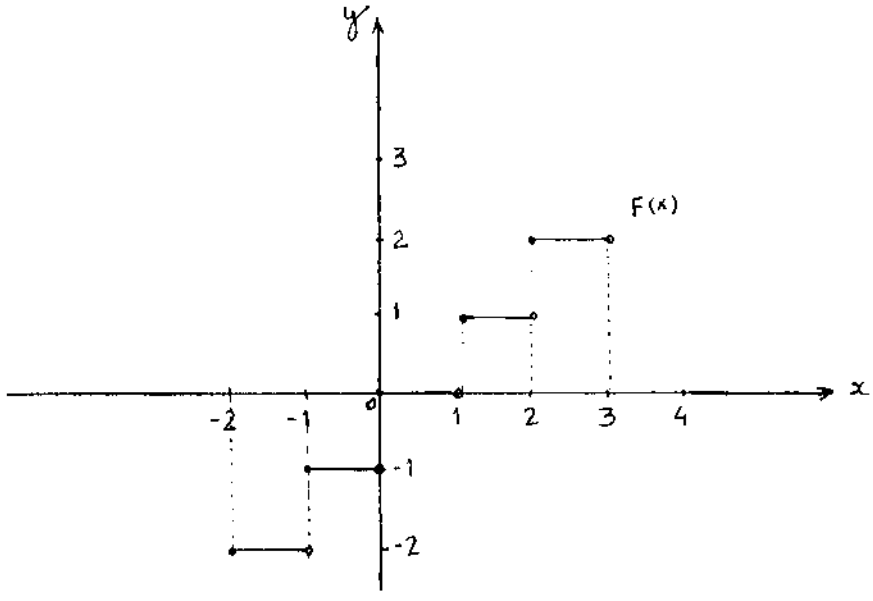
ii) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

2.1.2 - *A função maior inteiro (função escada)*

F é a função maior inteiro definida por

$F(x) = [\![x]\!] = n$ se $n \leq x < n + 1$, onde $n \in \mathbb{Z}$

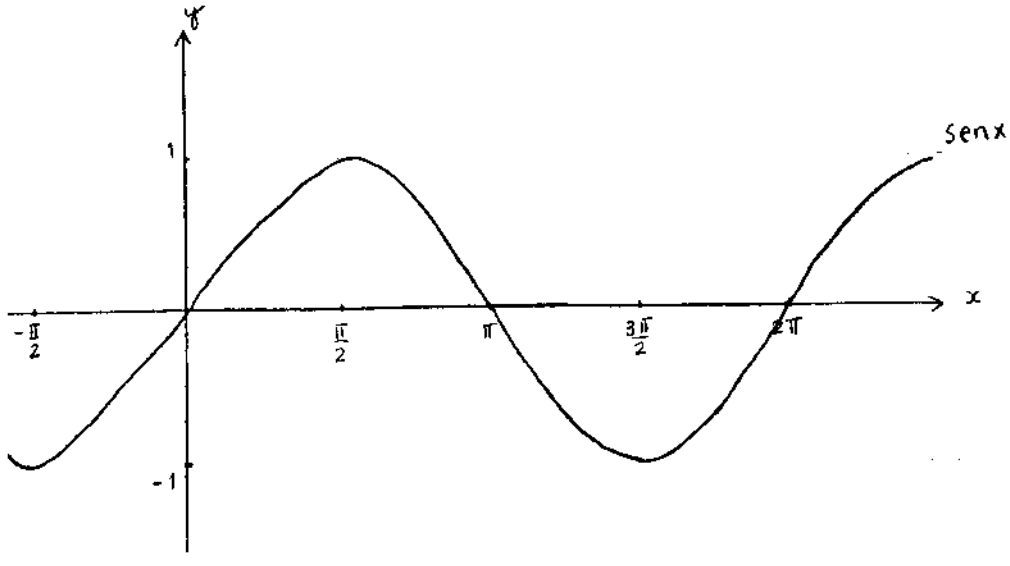
Um esboço do gráfico de F é dado por:



Através dele podemos verificar que $F(x)$ é contínua nos intervalos $[n, n+1)$, porém $F(x)$ não é contínua em todo seu domínio.

2.1.3 - *A função seno*

A função seno é definida no conjunto $\mathbb{R}$ e assume valores no intervalo $[-1,1]$. Um esboço do gráfico é:



Através do gráfico podemos verificar as seguintes propriedades da função sen x:

i) seus pontos de máximo e mínimo são respectivamente 1 e -1.

ii) sen x é uma função periódica, com período 2π.

Quando relacionarmos os modelos matemáticos com gráficos (ver exemplo 3.1.1 - Cap. II), teremos oportunidade de estudar outros exemplos.

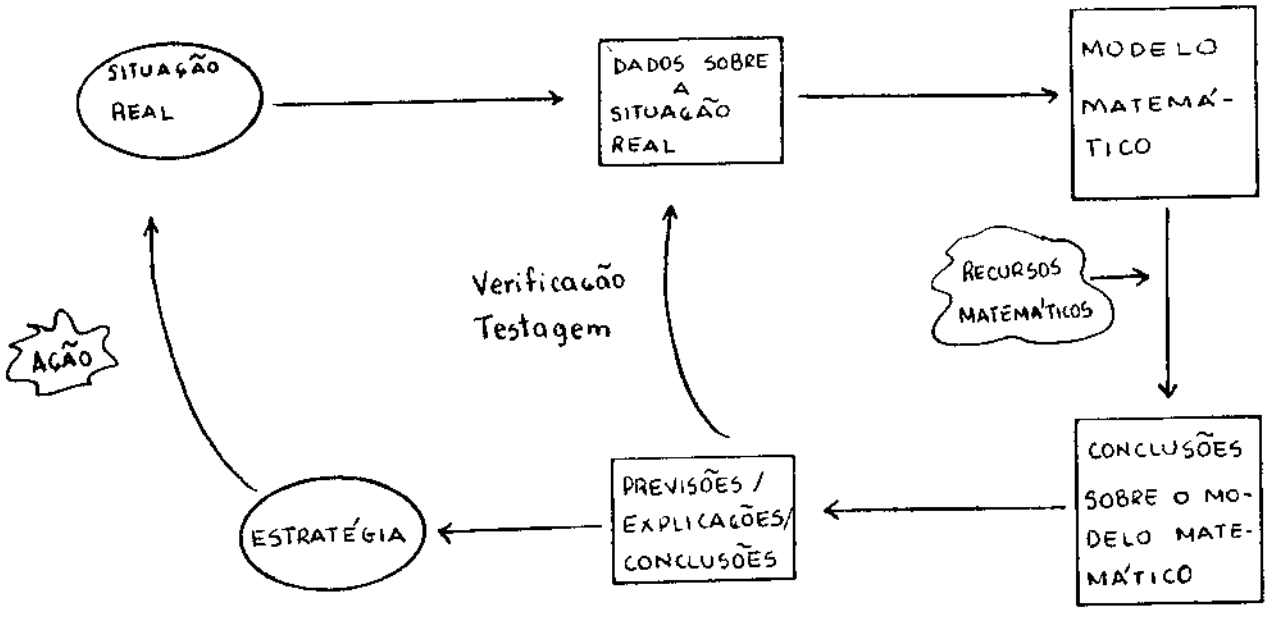
Na seção seguinte veremos a utilização de modelos matemáticos no ensino.

3 - *MODELOS MATEMÁTICOS*

Esta seção será dedicada ao estudo da utilização de modelos matemáticos (Cap. I - seção 2), como estratégia de ensino.

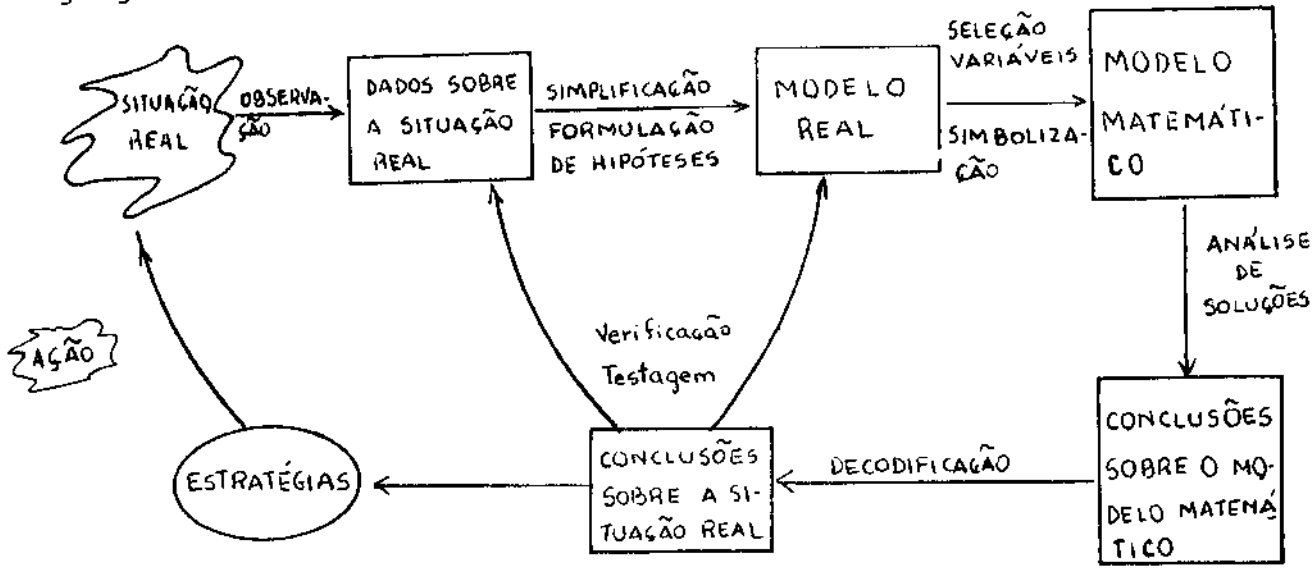
Faremos, primeiramente, uma retomada do processo de modelagem, visto no Capítulo anterior.

Os diversos estágios para criação de um modelo matemático podem ser, resumidamente, representados no seguinte esquema:



Partindo de uma *situação real*, observamos e simplificamos determinado aspecto do problema que consideramos relevante, com isto obtemos *os dados* sobre a situação real. Após esta etapa, temos condições de formular hipóteses, identificar relações entre os dados e de codificar em linguagem matemática o que foi observado, obtendo-se assim o *modelo matemático*. Este modelo, geralmente, é formado por uma ou mais equações que descrevem as relações detectadas entre as variáveis selecionadas. Disporemos, agora, dos recursos matemáticos existentes, para solucionar este modelo, chegando a resultados e *conclusões* sobre o modelo matemático. O estágio seguinte refere-se à interpretação desses resultados matemáticos, gerando previsões, explicações ou conclusões sobre a situação inicial. Devemos então, fazer a validação desses resultados, comparando-os com os dados e a situação geradora do modelo. Após verificarmos a adequação desses resultados, poderemos utilizá-los para elaborar uma *estratégia* de ação sobre a realidade.

Podemos aprimorar o esquema anterior, inserindo uma etapa intermediária entre as fases de coleta de dados sobre a situação e a formulação do modelo matemático. Trata-se do que denominamos de modelo real (Cap. I, p. 29). Neste estágio obtemos uma simplificação da situação real, porém ainda não estamos utilizando a linguagem matemática. O esquema agora fica:



Algumas observações com relação a estes esquemas se fazem necessárias. Em primeiro lugar, é importante observarmos que um modelo real consitui-se na primeira tentativa de descrever o fato observado, além disso, esta etapa possui um caráter fundamental para o processo de modelagem, pois é através do modelo real que selecionamos as variáveis e as relações que determinarão o modelo matemático.

Após a elaboração do modelo, nosso objetivo passa a ser a resolução do problema matemático e, para isso, utilizamos os recursos matemáticos já existentes e, caso estes não sejam suficientes, deveremos reformular o modelo ou então "criar" novos recursos matemáticos.

Uma fase importante do processo, já salientada anteriormente, diz respeito à verificação dos resultados obtidos através da solução matemática, confrontando-os com a própria situação ou então com o modelo real. Somente após este estágio é que teremos condições de avaliar se criamos ou não um bom modelo matemático.

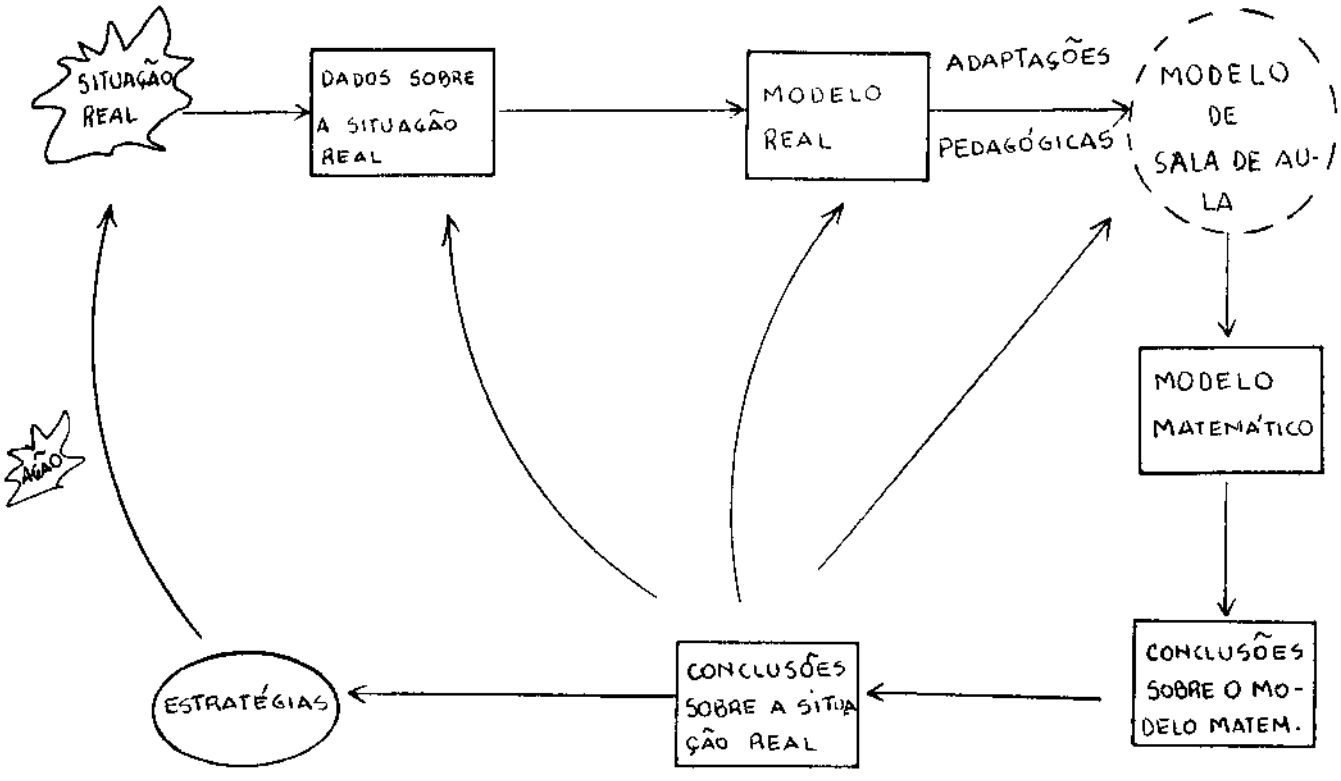
Ao utilizar um modelo matemático como estratégia de ensino, proporcionamos ao aluno uma visão mais abrangente da matemática e de seu relacionamento com outras ciências pois, como podemos observar, ao partir de uma situação real, esta, por estar dentro de algum contexto, terá sempre aspectos sociais, científicos, filosóficos e políticos a serem considerados.

Após estas considerações cremos que fica claro que a estratégia de ensino não utiliza apenas o modelo matemático mas sim, todo o processo de modelagem e, além disso, toda uma idéia de ensinar matemática colocando-a dentro de um contexto comum aos alunos, relacionando-a com as ciências e o dia-a-dia das pessoas.

Para que possamos utilizar o processo de modelagem dentro de uma perspectiva educacional, devemos fazer algumas modificações para que este se adapte melhor a esta finalidade. Com isto, temos que o estágio de formulação do modelo real deverá ser sim-

plificado e colocado, de forma que se torne interessante e compreensível para os estudantes, possibilitando também que trabalhemos o conteúdo matemático que desejamos.

Assim, deveremos adaptar o processo de modelagem, inserindo uma nova etapa que é denominada "modelo de sala-de-aula" (Maki & Thompson [23], ficamos então:



Necessitamos salientar alguns aspectos desse novo esquema. Na maioria das vezes, os problemas que encontramos no nível dos alunos já se encontram na forma do modelo real. Por exemplo, ao lermos sobre algum problema da comunidade em um jornal, o reporter para descrevê-lo já o simplificou e adaptou, necessitando ainda do que chamamos de "adaptações pedagógicas", para que se enquadre dentro do assunto que queremos desenvolver.

Na etapa de solução do modelo matemático é que as condições para trabalharmos o conteúdo desejado se apresentam de uma forma

mais propícia pois, o aluno estará suficientemente motivado e interessado pelas conclusões finais, além de estar sentindo a necessidade de novos conhecimentos matemáticos para chegar a tal fim.

Após a obtenção dos resultados matemáticos e de sua interpretação, ou seja, de sua decodificação para chegarmos às conclusões, previsões e soluções da situação real, devemos fazer a testagem dos resultados obtidos. É nessa etapa que coroamos todo o nosso trabalho anterior, pois é aí que avaliamos e discutimos todo o processo realizado, tendo como passo seguinte a criação de estratégias baseadas nesses resultados ou então, caso seja necessário, refazendo todos os passos, anteriores, buscando um novo modelo que descreva adequadamente a situação real.

É importante termos claro que sempre necessitaremos fazer adaptações, tanto da situação quanto do modelo real, às condições que se apresentam no momento, não apenas condições a nível de conteúdo matemático, como também a nível de compreensão e envolvimento dos alunos. Apesar disso, o processo de modelagem nos oferece um dos caminhos para que possamos relacionar a matemática com outros ramos do conhecimento, fazendo com que esta disciplina tenha um papel atuante dentro do contexto escolar e, em última análise, dentro da vida do aluno.

Estas adaptações permitem também que, um mesmo problema seja trabalhado em vários níveis, obtendo-se vários modelos de uma mesma situação. Além disso, ao enfocar diversos aspectos de um mesmo problema, estaremos criando condições para o aluno reavaliar e, consequentemente, reformular o modelo criado, a medida que novos dados e conhecimentos são adquiridos.

A utilização de uma estratégia de ensino baseada em modelos matemáticos pode ser considerada valiosa para uma compreensão maior da matemática e de sua abrangência, além do fato de que existe por trás desse trabalho a intenção de colocar esta disciplina dentro de um contexto mais próximo ao do aluno.

A seção seguinte será dedicada a alguns exemplos de modelos matemáticos que podem ser utilizados no desenvolvimento de alguns conteúdos.

3.1 - *Exemplos*

Antes de desenvolvermos esta seção, salientamos o fato de que as situações ou problemas apresentados são escolhidos previamente. Com isso, o primeiro estágio do processo de modelagem, ou seja, a coleta de dados sobre uma situação real, é um pouco prejudicado. No entanto, é importante considerarmos o fato de que em uma situação real de sala-de-aula, surgirão assuntos de interesse geral que, após discussões e algumas adaptações poderão ser estudados através deste modelos, recuperando-se assim, esta etapa do processo.

Procuraremos nos exemplos abaixo, trabalhar com a aplicação da matemática em outras áreas do conhecimento. Serão exemplos que abrangem 1º, 2º e 3º graus, onde procuraremos enfatizar os modelos interdisciplinares (Cap. I, 4.1.2).

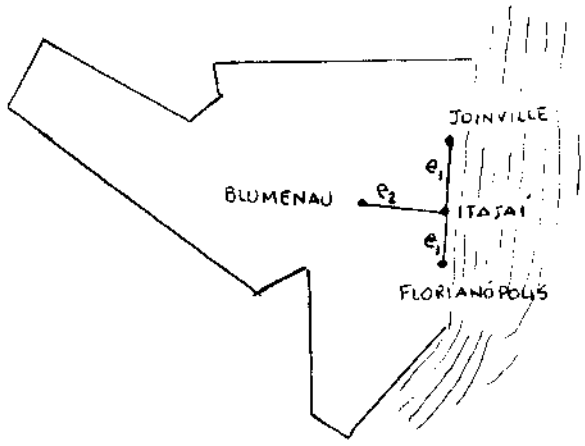
3.1.1 - *Assunto a ser desenvolvido: conceito de relação*
Nível a ser apresentado: 1º grau

Neste exemplo, utilizaremos um mapa do Estado de Santa Catarina, onde estão localizadas as cidades de Florianópolis, Itajaí, Blumenau e Joinville. Ligando estas cidades existem duas rodovias: uma estrada federal BR101 e uma estrada estadual, que identificaremos pela sigla SC.

Num primeiro momento, faremos um esboço do mapa,localizando apenas, as cidades que interessam.

---

(24) Exemplo baseado em Anna Averbuch [et al.] , Matemática saber e fazer, 8ª série, 1º grau, p.69.



Esta situação é bastante simples, porém podemos observar dois aspectos importantes neste exemplo. Primeiro, pelo fato de ser simples, a situação poderá facilitar o trabalho do conceito de relação. Segundo, existem outras questões, além da matemática, que podemos estudar com esta situação. Por exemplo, o problema do transporte rodoviário, taxas rodoviárias, imposto cobrado sobre mercadorias, pagamento de frete, e outros.

Ao observar o mapa, podemos obter a seguinte relação entre as cidades e as rodovias:

"pela cidade C passa a rodovia E"

Temos como dados da situação, as diversas cidades e as duas rodovias:

Cidades: Florianópolis, Itajaí, Blumenau, Joinville; rodovias: BR 101, SC.

Uma maneira de simplificar estes dados é abreviando os nomes das cidades e rodovias. Assim:

Cidades: C
Florianópolis: f

Itajai: i
Blumenau: b
Joinville: j
estradas: E
BR-101: e_1
SC: e_2

Chamaremos de R a relação:

"pela cidade x, passa a estrada y"

Logo, quando uma cidade e uma estrada satisfizerem a relação R, escreveremos:

fRe_1; iRe_1; iRe_2; bRe_2; jRe_1 (*)

Utilizando a notação de conjuntos, podemos escrever:

$C = \{f,i,b,j\}$

$E = \{e_1, e_2\}$

O passo seguinte será relacionar os dois conjuntos. Faremos isso através da noção de produto cartesiano, que poderemos apresentar como uma combinação entre os elementos dos dois conjuntos. Esta combinação será de tal forma que só poderemos combinar dois elementos de cada vez, um de cada conjunto sendo que, ao escrevermos, o primeiro será do conjunto C e o segundo do conjunto E; faremos todas as combinações possíveis de dois elementos, preservando esta ordem. Assim, temos:

$CxE = \{(f,e_1);(f,e_2);(i,e_1);(i,e_2);(b,e_1);(b,e_2);(j,e_1);(j,e_2)\}$

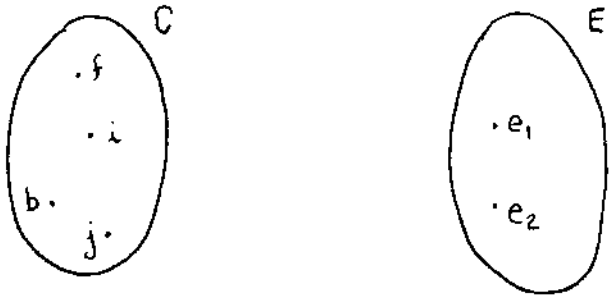
Observemos que os pares que relacionamos anteriomente em (*), estão representados nesse produto cartesiano. Logo, podemos escrever:

$$R = \{(f,e_1);(i,e_1);(i,e_2);(b,e_2);(j,e_1)\}$$

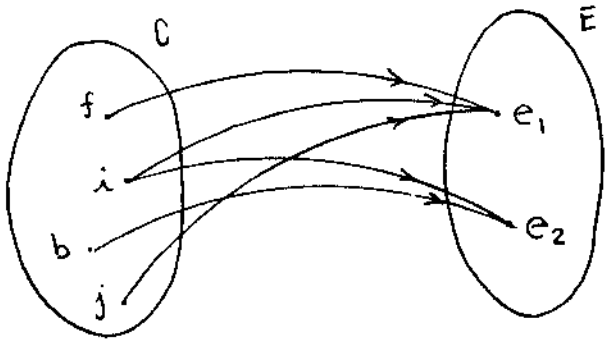
onde R, representa a relação existente entre os elementos dos pares ordenados selecionados.

Obtemos assim, um *modelo matemático* dos dados observados no mapa. Este modelo também ilustra o conceito formal de uma relação entre dois conjuntos.

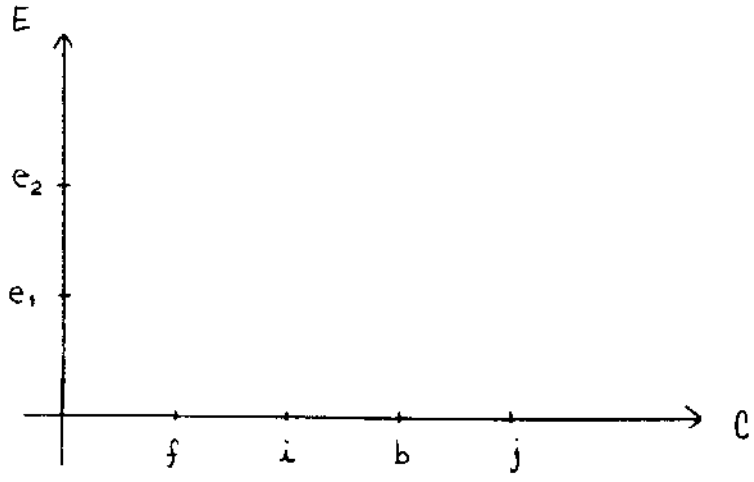
A partir da mesma situação, poderemos construir um modelo gráfico para descrê-la. Utilizando a notação gráfica usual de representar conjuntos (através de diagramas de Venn), representaremos os conjuntos C e E, da seguinte forma



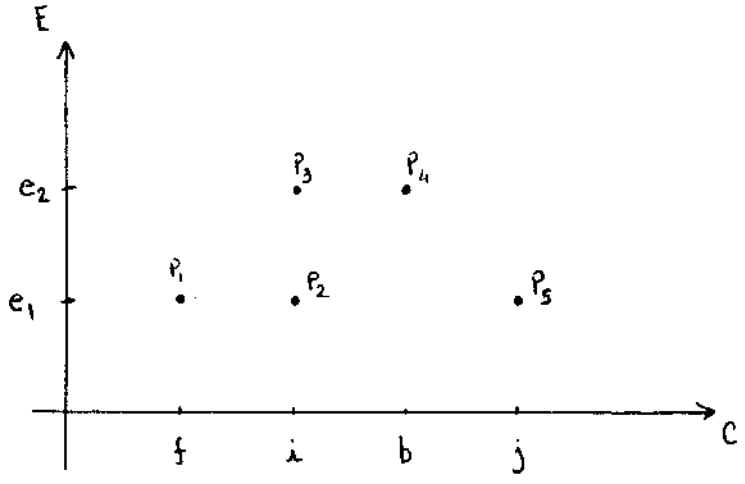
Para representarmos a relação existente entre os elementos de C e E, utilizaremos uma flecha, com início num elemento de C e final, num elemento de E. A representação da relação R, fica então:



Poderemos também, utilizar o plano cartesiano para representar a relação R. Neste caso, os eixos cartesianos representarão os conjuntos C e E, escolhendo-se o eixo horizontal para representar o primeiro conjunto, ou seja, C e o eixo vertical para representar o conjunto E. Marcaremos pontos a uma mesma distância (a partir da origem 0), tanto para representar os elementos de E quanto os elementos de C. Obteremos, então:



Quando os pontos do conjunto C estiverem relacionados com elementos do conjunto E, representaremos esta relação através de um ponto obtido na interseção de duas semi-retas: uma vertical, obtida partindo do ponto em C e outra horizontal, obtida de um ponto do conjunto E. Temos então, a representação de R:



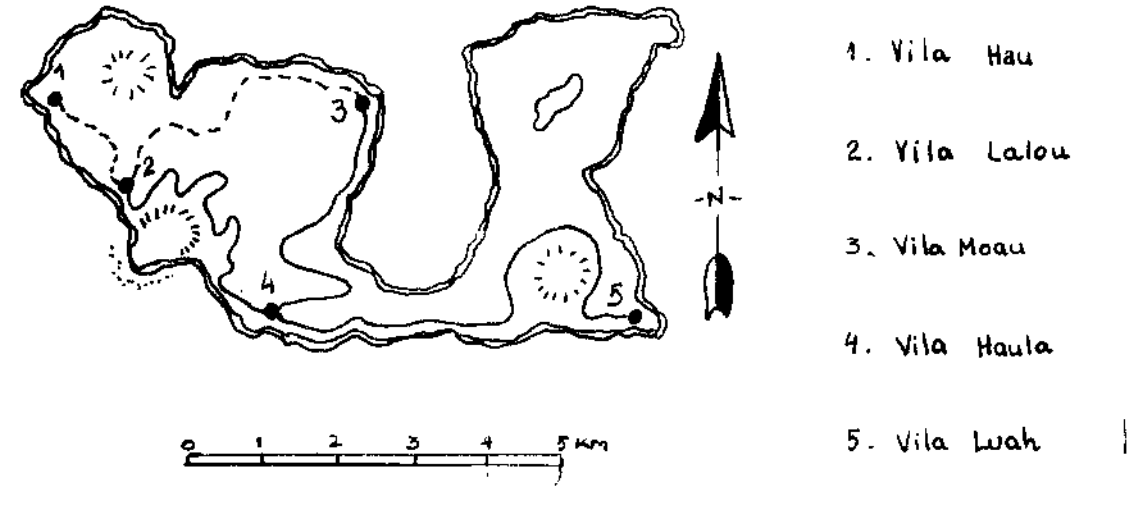
Com esta representação vemos que o ponto P_1, tem como coordenadas os pontos f e e_1, ou seja, o par ordenado (f,e_1), que está na relação R, dada através do produto cartesiano.

Ao observar este modelo gráfico de R, podemos obter as seguintes informações, que dão uma interpretação do que esta aí representado. Em primeiro lugar, para irmos a Blumenau saindo de Florianópolis, pela BR101, necessariamente, teremos que passar por Itajaí. Em segundo, existem pelo menos dois caminhos distintos para irmos de Florianópolis a Joinville: caminho 1: $P_1 - P_2 - P_5$, ou seja, Florianópolis, Itajaí, Joinville (note que os três pontos estão alinhados no gráfico); caminho 2: f - i - b - i - j, ou seja, dando uma volta em Blumenau.

Estas observações, poderão ser comprovadas, facilmente, observando o mapa.

3.1.2 - *Assunto a ser desenvolvido: Conceito de Matriz*
Nível a ser trabalhado: 2º grau

Este exemplo e o seguinte estão baseados no trabalho"MATRICES" dos professores Jan de Lange e Martin Kindt, editado na Holanda em 1983.



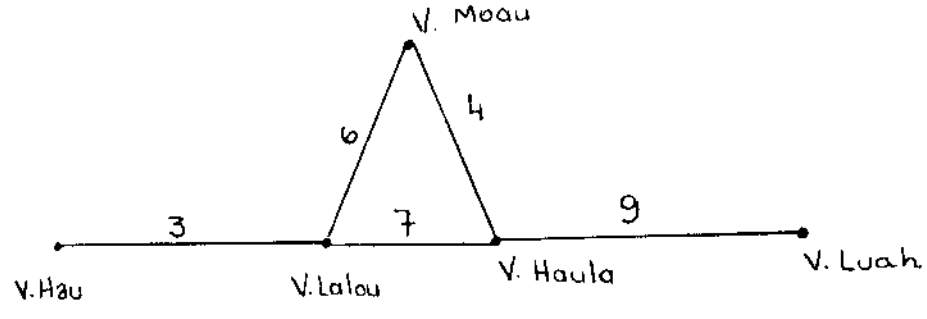
Na figura acima temos o mapa de uma ilha imaginária do Oceano Pacífico, chamado Hau. Sua origem é vulcânica e sua vegetação tropical.

Existe um plano de implantação de uma escola na ilha. O mapa nos mostra a localização das cinco vilas existentes em Hau; um dos fatores que será considerado importante ao ser decidido em que vila ficará a escola é a quantidade de quilômetros que o aluno deve percorrer (a pé, a cavalo ou de bicicleta) para chegar à escola.

Para que possamos avaliar este aspecto, ou seja, a distância entre as vilas, necessitaremos fazer um diagrama, onde as vilas e as distâncias estejam relacionadas. Sabemos que a distância de

Vila Hau à Vila Lalou é 3 km
Vila Moau à Vila Lalou é 6 km
Vila Haula à Vila Lalou é 7 km
Vila Moau à Vila Haula é 4 km
Vila Haula à Vila Luah é 9 km

Podemos construir o seguinte grafo (Ver Cap. I - 4.1), onde os pontos são as vilas e os caminhos que ligam estes pontos representam o caminho entre duas vilas:



Este grafo já é uma simplificação do problema original e, através dele, poderemos continuar a busca pela solução do nosso problema, ou seja, encontrar a vila para construir a escola de tal forma que a distância percorrida pelos alunos para chegar à escola seja a menor possível.

O passo seguinte será a construção de uma tabela de distâncias entre as vilas. Uma forma de construí-la poderá ser:

PARA →	HAU	LALOU	MOAU	HAULA	LUAH
DE→Hau	0	3	9	10	19
Lalou	3	0	6	7	16
Moau	9	6	0	4	13
Haula	10	4	4	0	9
Luah	19	16	13	9	0

Considerando apenas os elementos numéricos da tabela temos a seguinte representação:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 & 10 & 19 \\ 3 & 0 & 6 & 7 & 16 \\ 9 & 6 & 0 & 4 & 13 \\ 10 & 4 & 4 & 0 & 9 \\ 19 & 16 & 13 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

A esta representação chamamos *matriz*, e sua característica principal é que cada elemento possui um lugar determinado na matriz. Assim, considerando o fato de haver 5 linhas e 5 colunas na tabela, poderemos identificar qualquer elemento, bastando indicar a linha e coluna desejadas.Por exemplo:

- o elemento da 3º linha e 4º coluna é 4

Notemos que é importante a ordem: primeiro linha, depois coluna, pois isso facilita a notação:

a_{34} = elemento da 3ª linha e 4ª coluna = 4

a_{15} = 19

Continuando a busca de solução para o nosso problema, que já está na forma de modelo matemático, pois o escrevemos como uma matriz, vamos somar os elementos de cada linha da matriz; isto dará a soma das distâncias percorridas por alguém que parte da vila que está representada pela linha e anda por toda a ilha.

Assim, temos:

linha 1: 0 + 3 + 9 + 10 + 19 = 41 km
linha 2: 3 + 0 + 6 + 7 + 16 = 32 km
linha 3: 9 + 6 + 0 + 4 + 13 = 32 km
linha 4: 10 + 4 + 4 + 0 + 9 = 27 km
linha 5: 19 + 16 + 13 + 9 + 0 = 57 km

Observemos que o elemento 0 em cada linha está indicando que a pessoa partirá daquela vila.

Após esta soma, encontramos que para a distância percorrida ser a menor possível, teremos que construir a escola na quarta vila, ou seja Vila Haula, resolvendo,assim, nosso problema inicial.

Com este problema, conseguimos introduzir o conceito de matriz e, sem dúvida, agora será o momento propício para fazermos algumas considerações sobre a notação, ordem de matriz,construção de matrizes através do índice do elemento.

3.1.3 - *Assunto a ser desenvolvido: operação com matrizes*
Nível a ser apresentado: 2º grau.

Outra aplicação importante da Matemática que encontramos é em economia. O exemplo que segue, trata de alguns assuntos relacionado com este ramo do conhecimento ao mesmo tempo que trabalha as operações com matrizes.

A situação inicial é a seguinte:

Em uma loja especializada em roupas esportivas, a seção de jeans é uma das mais movimentadas. Existem várias marcas e tamanhos e, no depósito,encontramos o seguinte estoque:

23 calças da marca Wrangler (W) com os seguintes tamanhos:

40 → 3 peças
42 → 11 peças
44 → 6 peças
46 → 3 peças

De outras marcas, encontramos as seguintes quantidades distribuídas respectivamente pelos tamanhos 40,42,44 e 46:

L = Levis: 5,5,3 e 4
US = US TOP: 1,7,0 e 0
LEE = LEE: 6,2,2 e 2
CK = Calvin Klein: 3,0,0 e 3

Toda esta informação pode ser armazenada em forma de matriz, bastando que se disponha, por exemplo, os tamanhos como linha e as marcas como coluna. Temos assim:

	marca:	W	L	US	LEE	CK
tamanho:	40	3	5	1	6	3
	42	11	5	7	2	0
	44	6	3	0	2	0
	46	3	4	0	2	3

Colocando os dados na forma matricial poderemos determinar, por exemplo, quantas calças do tamanho 42 há em estoque basta que somemos os elementos da segunda linha: $11 + 5 + 7 + 2 + 0 = 25$. Ou então, quantas peças da marca LEE existem basta somar a coluna correspondente: $6 + 2 + 2 + 2 = 12$.

O comerciante deseja ampliar seu estoque, para isso, deverá considerar as seguintes condições:

a) as marcas Wrangler e Levis vendem aproximadamente o dobro das outras.

b) os tamanhos 42 e 44 vendem duas vezes mais rápido que os outros.

c) de uma mesma marca não quer ter mais que 40 peças.

Uma forma de representar o pedido de compra de novas peças pode ser feita através de matrizes, onde as condições a e b acima também estão especificadas.

$$P = \begin{pmatrix} 2x & 2x & x & x & x \\ 4x & 4x & 2x & 2x & 2x \\ 4x & 4x & 2x & 2x & 2x \\ 2x & 2x & x & x & x \end{pmatrix}$$

Esta é a matriz P de pedidos.

Agora, como a condição C deve ser satisfeita e como já existem no depósito as quantidades descritas pela matriz A a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 6 & 3 \\ 11 & 5 & 7 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Temos

$$A+P = \begin{pmatrix} 3+2x & 5+2x & 1+x & 6+x & 3+x \\ 11+4x & 5+4x & 7+2x & 2+2x & 2x \\ 6+4x & 3+4x & 2x & 2+2x & 2x \\ 3+2x & 4+2x & x & 2+x & 3+x \end{pmatrix}$$

Como a condição C coloca que de uma mesma marca teremos no máximo 40 peças, ficamos com

$$(3+2x) + (11+4x) + (6+4x) + (3+2x) = 23 + 12x \leq 40.$$

Escolhemos a marca Wrangler por esta possuir a maior quantidade em estoque. Assim

$$x \leq \frac{17}{12} \cong 1,4 \quad \therefore \quad x = 1.$$

Assim, a matriz P, de pedidos, fica:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Após este trabalho, podemos formular algumas considerações sobre a adição de matrizes.

Somamos as matrizes A e P e esta adição foi feita através da soma de elementos correspondentes em cada matriz. Por exemplo, sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & x & z \end{pmatrix}$$

Então,

$$A + B = \begin{pmatrix} a + p & b + q & c + r \\ d + s & e + t & f + u \\ g + v & h + w & i + x \end{pmatrix}$$

Logo, só poderemos somar matrizes de mesma ordem[25] (e esta é a única condição para somarmos matrizes).

Ainda utilizando este problema, podemos trabalhar a multiplicação de matrizes.

O estoque foi ampliado e agora a matriz A é a seguinte:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 & 7 & 4 \\ 15 & 9 & 9 & 4 & 2 \\ 10 & 7 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

---

(25) A ordem de uma matriz é dada por seu número de linhas e número de colunas. Neste caso nossa matriz soma tem ordem 3×3, ou seja três linhas por três colunas.

Em uma semana são vendidas as seguintes peças, representadas pela matriz V:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Assim, o estoque ficou:

$$A - V = \begin{pmatrix} 5-1 & 7-3 & 2-0 & 7-1 & 4-2 \\ 15-5 & 9-8 & 9-6 & 4-1 & 2-2 \\ 10-2 & 7-3 & 2-1 & 4-2 & 2-0 \\ 5-0 & 6-1 & 1-1 & 3-0 & 4-3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 10 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

O preço de cada peça, segundo a marca, é o seguinte:

WRANGER:	Cz$479,00
LEVIS:	Cz$329,00
US TOP:	Cz$209,00
LEE:	Cz$319,00
CALVIN KLEIN:	Cz$579,00

O que queremos determinar é quanto o comerciante ganhou com a venda das calças de tamanho 40.

Novamente, para auxiliar na resolução dessa questão, poderemos escrever o preço em forma matricial:

$$P = \begin{pmatrix} 479 \\ 329 \\ 209 \\ 319 \\ 579 \end{pmatrix}$$

Para calcularmos o quanto ganhou o comerciante, consideramos a linha 1 da matriz V, que corresponde ao tamanho 40.

$$(1 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 2) \qquad \begin{pmatrix} 479 \\ 329 \\ 209 \\ 319 \\ 579 \end{pmatrix}$$

Assim temos:

$1 \cdot 479 + 3 \cdot 329 + 0 \cdot 209 + 1 \cdot 319 + 2 \cdot 579 = 2.943$

Ou seja, com a venda das calças de tamanho 40, o comerciante ganhou Cz$ 2.943,00.

Fazendo o mesmo para os outros tamanhos temos:

TAMANHO 42:

$$(5 \quad 8 \quad 6 \quad 1 \quad 2) \qquad \begin{pmatrix} 479 \\ 329 \\ 209 \\ 319 \\ 579 \end{pmatrix}$$

$5 \cdot 479 + 8 \cdot 329 + 6 \cdot 209 + 1 \cdot 319 + 2 \cdot 579 = 7.758$

TAMANHO 44:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 479 \\ 329 \\ 209 \\ 319 \\ 579 \end{pmatrix}$$

$2 \cdot 479 + 3 \cdot 329 + 1 \cdot 209 + 2 \cdot 319 + 0 \cdot 579 = 2.792$

TAMANHO 46:

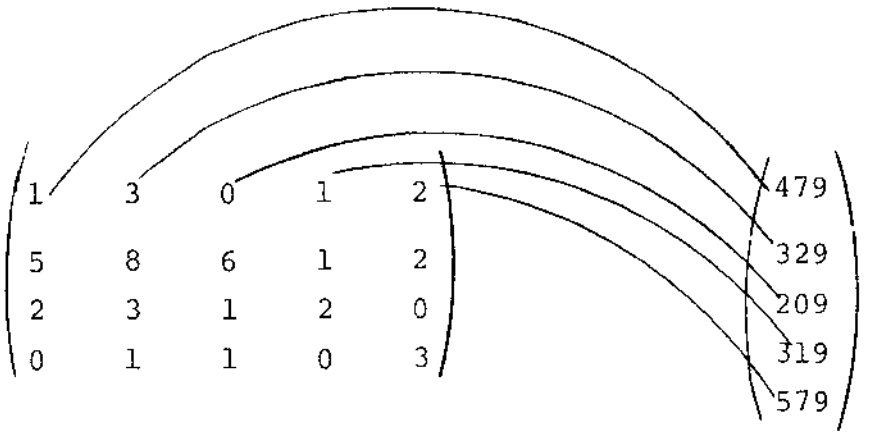
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 479 \\ 329 \\ 209 \\ 319 \\ 579 \end{pmatrix}$$

$0 \cdot 479 + 1 \cdot 329 + 1 \cdot 209 + 0 \cdot 319 + 3 \cdot 579 = 2.275$

Assim, os ganhos do comerciante podem também ser representados por uma matriz G.

$$G = \begin{pmatrix} \text{ganhos tamanho 40} \\ \text{ganhos tamanho 42} \\ \text{ganhos tamanho 44} \\ \text{ganhos tamanho 46} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.943 \\ 7.758 \\ 2.792 \\ 2.275 \end{pmatrix}$$

ou então de uma forma mais explícita:



$= G$

$$G = \begin{pmatrix} 1\cdot479 + 3\cdot329 + 0\cdot209 + 1\cdot319 + 2\cdot579 \\ 5\cdot479 + 8\cdot329 + 6\cdot209 + 1\cdot319 + 2\cdot579 \\ 2\cdot479 + 3\cdot329 + 1\cdot209 + 2\cdot319 + 0\cdot579 \\ 0\cdot479 + 1\cdot329 + 1\cdot209 + 1\cdot319 + 3\cdot579 \end{pmatrix}$$

Temos assim, uma sugestão de como se procede a regra de multiplicação de duas matrizes. Resta-nos agora formalizar, ressaltando a necessidade das matrizes satisfazerem a seguinte condição sobre as ordens: número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz.

3.1.4 - *Este exemplo está baseado no exemplo apresentado pelo professor de Lange, em novembro de 1985, em conferência apresentada na Faculdade de Educação - UNICAMP.*

Antes de formularmos o problema é interessante observar que, segundo o Prof. de Lange, ele foi apresentado a professores universitárias holandeses e que, de um grupo significativo, apenas dois resolveram.

Consideremos a seguinte situação:

Um casal de ratos, a cada 40 dias procria 6 novos ratos: 3 machos e 3 fêmeas. A cada 120 dias um casal de ratos novos está apto a procriar.

O problema: Considerando que não há mortalidade, calcular o número de ratos após 400 dias.

Uma forma de resolvermos o problema é através de um modelo matemático que descreva a situação acima.

1 - Dados do problema:

- 1 casal de ratos ao final de 40 dias procria 6 ratos: 3 machos, 3 fêmeas.
- no período de *400 dias*, os ratos *não morrem*.
- a cada 120 dias um casal de ratos novos está apto a procriar.

2 - A partir desses dados, podemos construir uma tabela, onde contaremos o tempo, o número de ratos novos a cada intervalo e o total da população. Os intervalos serão de 40 dias. Assim temos:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RATOS NOVOS	0	6	6	6	24	42	60	132	258	438	834
TOTAL	2	8	14	20	44	86	146	278	536	974	1808

Este modelo da situação apresentada tem como resposta ao problema, o valor 1808 ratos.

3 - Poderemos também obter outro modelo matemático da situação apresentada. Este novo modelo poderá ser dado através de um grafo e da matriz associada a este grafo.

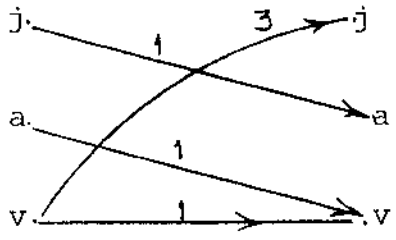
Representaremos os períodos de vida de um rato, da seguinte forma:

0 - 40 dias: jovem → j

40 - 80 dias: adulto → a

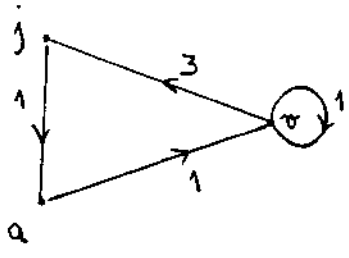
mais de 80 dias: velho → v

Como pontos para o grafo temos: j,a,v, representando, como já dissemos, os períodos pelos quais passa, em geral, um rato. Estes períodos estarão ligados por linhas que representarão a passagem de um período a outro. Assim, num primeiro esboço, temos:



Os números em cada linha, representam a probabilidade de um rato que está em um período passar para outro. Como no nosso caso, excluímos a possibilidade de morte dos ratos, todos têm 100% de probabilidade, nesse caso, escrevemos probabilidade igual a 1. Além disso, o caminho que liga um rato velho a um rato jovem, existe pelo fato de cada casal velho procriar três novos casais , assim a linha que liga um velho a um jovem tem valor três.

Assim, podemos reescrever o grafo:



e chamá-lo G

Observemos que temos o laço no ponto v, pois não há mortalidade entre os ratos, ou seja, um rato após atingir este estágio ficará eternamente nele.

Temos, a seguinte matriz associada a G:

$$\begin{array}{c} \\ j \\ a \\ v \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} j & a & v \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

que chamamos R.

Com esta matriz R, poderemos determinar o número de ratos após 400 dias, bastando que determinemos uma matriz que dê o número de ratos a cada intervalo de 40 dias. Consideremos a seguinte matriz linha N, dada por

$$N = (j \quad a \quad v),$$

onde em cada coluna está o número de ratos do respectivo período. Assim, no primeiro período, ou seja, quanto $t = 0$, temos

$$N = (0 \quad 0 \quad 2)$$

A matriz R explicita como estão relacionados estes períodos (R é proveniente de G), assim, para o período seguinte, ou seja, 40 dias após, quando $t = 1$, temos

$$(0 \quad 0 \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (6 \quad 0 \quad 2)$$

e o total = 8 ratos

Esta matriz, resultante do produto, é a nova matriz N, obtida no final do período.

No intervalo seguinte, t = 2, temos:

$$(6 \quad 0 \quad 2)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (6 \quad 6 \quad 2)$$

total: 14 ratos

E assim, até t = 10, onde teremos

$$(438 \quad 258 \quad 278)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (834 \quad 438 \quad 536)$$

total: 1808 ratos.

A vantagem principal deste modelo é que através da matriz N, que determinanos para cada período de tempo, podemos determinar quantos ratos existem em cada período (jovem, adulto, velho), ou seja, (j,a,v).

Os dados desse problema são, sem dúvida, irreais; sabemos que é impossível encontrarmos a taxa de mortalidade com valor nulo. Assim, consideremos outros dados para nosso problema.

Suponhamos que, após um período de observação em laboratório, os cientistas chegassem aos seguintes dados:

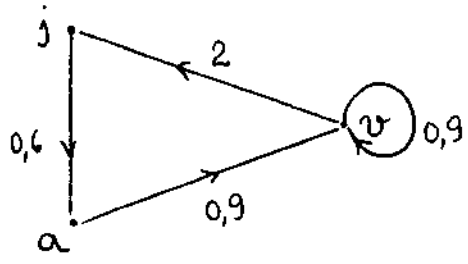
- a cada 40 dias um casal de ratos procria 4 ratos: 2 machos, 2 fêmeas.
- a probabilidade de um rato jovem passar para o período adulto é de 0,6.
- a probabilidade de um rato adulto sobreviver e tornar-se velho é de 0,9.

- a probabilidade de um rato velho sobreviver neste período é 0,9.
- a cada 120 dias um casal de ratos novos está apto a procriar.

Queremos determinar o número de ratos após um período de 400 dias.

Com esta nova situação, o primeiro modelo apresentado não poderá ser utilizado, pois agora a probabilidade de um rato velho sobreviver ao período de 400 dias é menor que um e, nesse modelo, este dado é fundamental. Assim, o modelo mais indicado é o segundo, onde cada período de vida está especificado na matriz N e a matriz R relaciona cada um destes.

O grafo G, agora, com os novos dados fica:



E a matriz R passa a ser

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \\ 2 & 0 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Com estes novos dados, qual será o número de ratos após quatrocentos dias? Como podemos verificar, a nova matriz R, quantitativamente, tem seus elementos com valores bem próximos dos da matriz anterior.Logo, é de se esperar, que o resultado final não seja muito diferente dos 1808 encontrados anteriormente. Porém,is

so não ocorrerá, haverá uma diferença significativa entre os resultados finais. Senão, vejamos, quando $t = 1$ temos:

$$(0 \quad 0 \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \\ 2 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} = (4 \quad 0 \quad 1,8)$$

total: $5,8 \approx 6$ ratos

$t=2$

$$(4 \quad 0 \quad 1,8) \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \\ 2 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} = (3,6 \quad 2,4 \quad 1,6)$$

total: $7,6 \approx 8$ ratos

Com estes dois resultados, já podemos observar alguma diferença; quando passam-se 180 dias temos:

$$(12,8 \quad 7,7 \quad 14,3) \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (19,4 \quad 7,7 \quad 14,3)$$

total: $41,4 \approx 41$ ratos

Com os dados anteriores, no mesmo período, obtemos um total de 278 ratos, e esta é,sem dúvida uma grande diferença. Vejamos ao final de 400 dias:

$$(39,2 \quad 17,2 \quad 28,3) \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \\ 2 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} = (56,6 \quad 23,8 \quad 40,9)$$

total: 121,3 ratos $\approx$ 121 ratos

Vemos assim, que uma breve modificação dos dados iniciais do problema, ocasiona modificações relevantes nos resultados. Isto nos alerta para a importância da coleta de dados e hipóteses iniciais, pois o modelo matemático criado estará diretamente subordinado a eles e consequentemente as conclusões finais.

3.1.5 - *Assunto a ser desenvolvido: introdução ao conceito de derivada.*
Nível a ser trabalhado: 2º grau(26)

Seja uma partícula descrevendo uma trajetória cuja função deslocamento (dada em função do tempo) é dada por:

$$S(t) = 3t^2 - 5t + 2,$$

onde S = distância em metros (m)
t = tempo em segundos (s).

a) Qual a velocidade média (V_m) da partícula no intervalo [2s,4s] ?

Sabemos da física que a V_m é dada pela razão entre a distância percorrida e o tempo necessário a este deslocamento. Assim, temos

$$V_m = \frac{S_{final} - S_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Portanto, neste intervalo [2s,4s], temos:

---

(26) Exemplo baseado em Luiz Márcio P. Imenes, Matemática Aplicada, 2º grau, p. 23.

$S(2) = 4$ $\qquad$ $E_{inicial} = 2$

$S(4) = 30$ $\qquad$ $t_{final} = 4$

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{30 - 4}{4 - 2} = \frac{26}{2} = 13 \text{ m/s.}$$

b) Calculemos a V_m no intervalo [2s,3s]:

$S(2) = 4$ $\qquad$ $\Delta t = 1$

$$V_m = \frac{14-4}{1} = 10 \text{ m/s}$$

c) A partir de agora, pensemos em intervalos de tempo cada vez menores, por exemplo [2s;2,1s].

temos $V_m = \frac{4,73 - 4,0}{0,1} = \frac{0,73}{0,1} = 7,3$ m/s.

Uma forma de denotarmos o extremo superior do nosso intervalo de tempo é: $2 + \Delta t$, onde para o caso (a) temos $\Delta t = 2$, para (b) $\Delta t = 1$; para (c) $\Delta t = 0,1$.

Calculemos a V_m para o intervalo $[2,2 + \Delta t]$:

$$\Delta S = S(2 + \Delta t) - S(2) = 3\ (2 + \Delta t)^2 - 5(2 + \Delta t) + 2 - 4$$
$$= 3\Delta t^2 + 7\Delta t$$

Assim

$$V_m = \frac{3\Delta t^2 + 7\Delta t}{\Delta t} \quad \therefore \quad V_m = \frac{\Delta t(3\Delta t + 7)}{\Delta t} = 7 + 3\Delta t$$

tomando Δt cada vez mais próximo de zero até $\Delta t = 0$ temos:(isto significa $\Delta t \longrightarrow 0$ (Δt tende a zero)) $V_m = 7$ m/s.

Assim, $V(2) = 7$m/s.

Que é também conhecida como velocidade instantânea, para $t = 2$.

Usando a linguagem dos LIMITES, temos:

$$\lim_{\Delta t \to 0} (7 + 3\Delta t) = 7$$

ou seja, queremos dizer que à medida que $\Delta \to 0$, $(7 + 3\Delta t) \to 7$.

De uma forma geral

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

significa que quando $x \to a$, $f(x) \to b$.

Assim, seja f uma função real definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in I$; diremos que a função f é derivável no ponto $x = a$ se existir e for igual a um número real o seguinte limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Quando a função f for derivável no ponto a, denotaremos por $f'(a)$ a derivada da função f no ponto a.

De uma forma geral $f'(x)$ é a derivada da função f no ponto x que também pode ser denotada por $\frac{df}{dx}$, com a finalidade de lembrarmos que este conceito deriva de uma razão que no nosso exemplo é $\frac{\Delta S}{\Delta t}$.

3.1.6 - *Assunto a ser desenvolvido: introdução ao conceito de integral*

Nível: 3º grau

Problema:

Uma partícula se desloca descrevendo uma trajetória, obedecendo a seguinte função velocidade (dada em termos da variável tempo t): $v(t) = 2 \cdot t$. Calcular o deslocamento dessa partícula, com $\Delta t = 1$.

Sabemos que (1) $V_m(t) = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t}$, onde $\Delta s(t)$ é a variação do deslocamento no intervalo de comprimento Δt, quando

$\Delta(t) \to 0$ temos: $\to V(t) = s'(t)$

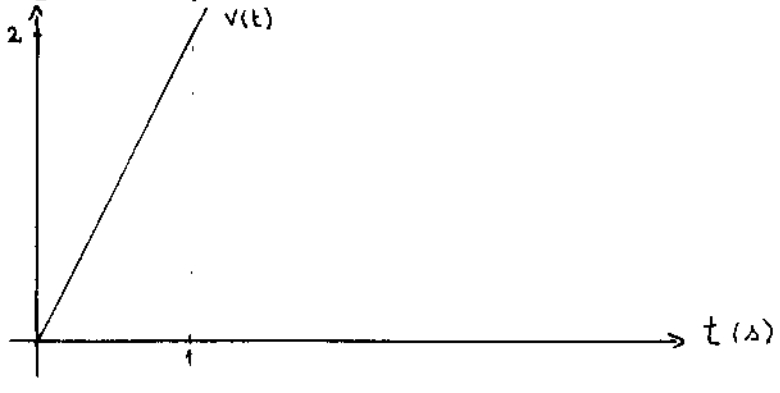
Assim, de (1) temos

$$\Delta t \cdot V_m(t) = \Delta s(t)$$

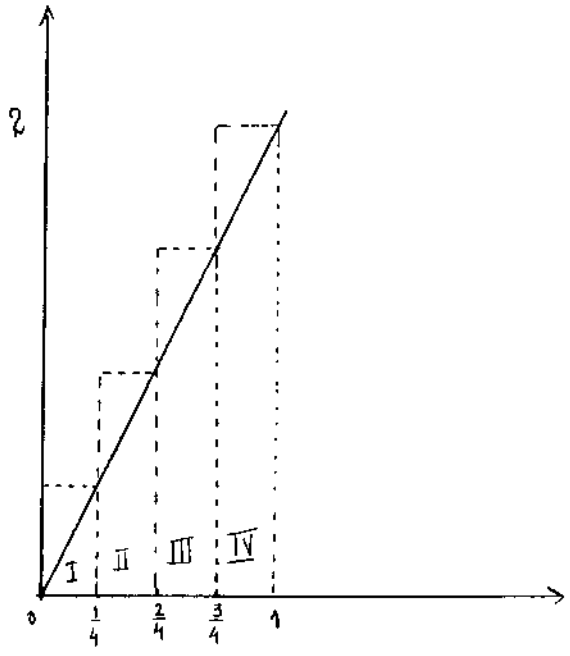
Logo, para cada Δt, se calcularmos a área de um retângulo de base Δt e altura $vm(t)$, teremos a variação do deslocamento.

Assim, quanto $t = 1$, para determinarmos a função deslocamento, bastará que calculemos a área da figura delimitada pela função $v(t)$ e as retas $x = 0$ e $x = 1$.

Graficamente, temos



Primeiramente, determinemos uma área aproximada de A, dividindo o intervalo [0,1] em 4 subintervalos iguais. Então construímos retângulos em cada subintervalo, usando para altura dos retângulos, o valor da função em cada extremo superior dos subintervalos. Assim, teremos:



A área de cada retângulo é dada pela seguinte tabela:

RETÂNGULO	ALTURA	ÁREA
I	$v(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$	$(\frac{1}{4}) \cdot (\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$
II	$v(\frac{2}{4}) = 1$	$(\frac{1}{4}) \cdot 1 = \frac{1}{4}$
III	$v(\frac{3}{4}) = \frac{3}{2}$	$(\frac{1}{4}) \cdot (\frac{3}{2}) = \frac{3}{8}$
IV	$v(1) = 2$	$(\frac{1}{4}) \cdot 2 = \frac{1}{2}$

A área de A é aproximadamente a soma das áreas dos retângulos I,II,III,IV. Assim,

$$A \simeq \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{10}{8} = 1\frac{1}{4}$$

Como poderemos melhorar esta aproximação?

Observemos que quanto menor a partição, ou seja, o comprimento de Δt, a altura de cada retângulo tende a se aproximar da reta $2t$. Assim, tomemos uma partição, onde o comprimento de cada subintervalo é $\frac{1}{n}$. O retângulo é então construído em cada subintervalo de base $\frac{1}{n}$ e altura dada por $v(\frac{1}{n})$.

A área de cada retângulo é dada por:

RETÂNGULO	ALTURA	ÁREA
1	$v(\frac{1}{n}) = 2\cdot\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$
2	$v(\frac{2}{n}) = 2\cdot\frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}\cdot\frac{4}{n}$
⋮		
n	$f(\frac{n}{n}) = 2\cdot\frac{n}{n}$	$\frac{1}{n}\cdot\frac{2n}{n}$

A área de A é aproximadamente a soma das áreas dos n-ésimos retângulos. Assim,

$$A \simeq \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{4}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{6}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\cdot\frac{2n}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n} + \frac{4}{n} + \frac{6}{n} + \ldots + \frac{2n}{n}\right) =$$

$$= \frac{2}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n}\right) =$$

$$= \frac{2}{n^2}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) =$$

$$= \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n^2 + n}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} .$$

Assim,

$$A \simeq 1 + \frac{1}{n}$$

A medida que aumentamos o número de nossa partição do intervalo $[0,1]$, mais próximos ficamos da área verdadeira.

Assim, a medida que n aumenta, temos:

$$A \simeq 1 + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

Para verificarmos se esta é uma boa aproximação para A, calculemos a área de A através da área do triângulo, pois A nada mais é que um triângulo de base = 1 e altura = 2.

Assim

$$\text{Área } A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

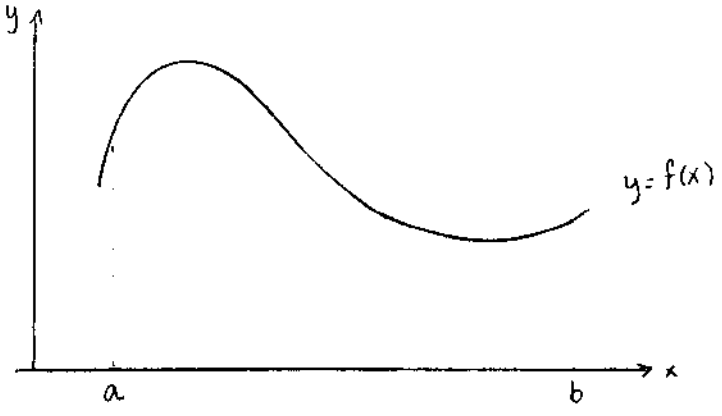
Como 1 é a área de A temos

$$A = \lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{n}$$

Assim, o deslocamento da partícula, do instante $t = 0$ ao instante $t = 1$, é igual a 1 m.

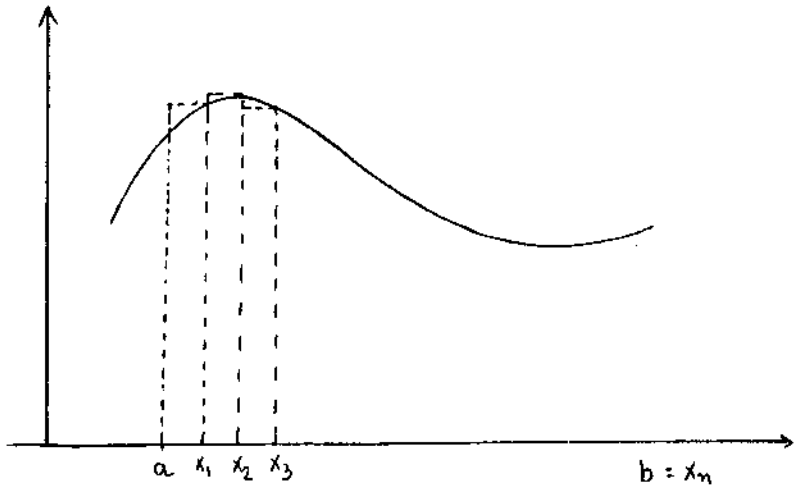
É possível usar este mesmo tipo de procedimento para uma função f, definida num intervalo $[a,b]$, onde $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$.

1) Assim, seja f definida por $y = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.



2) Dividamos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento. O comprimento de cada subintervalo é Δx, que é dado por $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

3) Sejam x_1 o valor do extremo superior do 1º subintervalo; x_2 o valor do extremo superior do 2º subintervalo;... e x_n o valor do extremo superior do n-ésimo intervalo. Assim,



4) Correspondendo a cada x_i, temos $f(x_i)$, que serão as respectivas alturas de cada subintervalo.

5) Temos a soma:

$$f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \ldots f(x_n) \cdot \Delta x$$

que é a área aproximada da figura delimitada por $f(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$.

Esta soma é chamada soma de Riemann e podemos representá-la por

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x$$

6) Tomando o limite dessa soma de Riemann, quando n aumenta, ou seja, quando aumentamos o número de subintervalos, ou ainda, quando tomamos $n \to \infty$. Se esse limite existir, ou seja, for um número real, o chamamos de *integral definida* de f de a até b e denotamos por

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Temos com isso que a integral de Riemann de uma função pode ser vista como a área delimitada pela função e as respectivas retas $x = a$ e $x = b$, bastando para isso que tomemos subintervalos cada vez menores.

3.1.7 - *Assunto a ser desenvolvimento: Equações diferenciais*
Nível: 3º grau

Este exemplo tem a finalidade de trabalhar a *noção de taxa*.

Assim:

Existindo uma relação funcional $y = f(x)$ entre as variáveis y e x, dizemos que o valor de variação de y ao x variar uma unidade é a TAXA DE VARIAÇÃO de y relativamente a x.

Sendo dada a relação funcional $y = f(x)$, a *taxa porcentual* de variação de y em relação a x é dada por

$$\frac{dy/dx}{y}$$

PROBLEMA REAL:

Até o fim do século acredita-se que a demanda mundial de petróleo cresça a uma taxa anual de 3,3%.Queremos obter o valor da demanda num ano t qualquer.

DADOS SOBRE O PROBLEMA

- taxa anual de crescimento: 3,3%
- Demanda: D
- Tempo: t (anos)
- Além disso, a demanda D está em função do tempo t, assim: $D = D(t)$.

Sabemos que

$$\frac{dD/dt}{D} = 0,033$$

Trabalhando com esta equação, temos:

$$\frac{dD}{D} = 0,033\ dt$$

Obtemos assim, uma equação diferencial linear de primeira ordem; como queremos encontrar a expressão da função D, integramos ambos os lados e obtemos:

$$\ell nD(x) - \ell nD(0) = 0{,}033 \quad x$$

$$e^{[\ell nD(x) - \ell nD(0)]} = e^{0{,}033\ x}$$

$$\frac{e^{\ell nD(x)}}{e^{\ell nD(0)}} = e^{0{,}003\ x}$$

$$D(x) = e^{0{,}033\ x} \cdot D(0)$$

Ou seja,

$$D(t) = D(0) \cdot e^{0{,}033\ t} \qquad (**)$$

E este é um Modelo que determina o valor da demanda em relação ao tempo.

Desta equação (**) podemos chegar à seguinte conclusão:

- O crescimento da demanda será exponencial.

Como neste modelo a taxa percentual é constante,dizemos que a função D, cresce segundo o MODELO DE MALTHUS.

O Modelo de Malthus de uma função f que está em função de x, ou seja, $y = f(x)$ é dado por:

$$\frac{dy/dx}{y} = \lambda,$$

onde λ é uma constante.

3.1.8 - *O exemplo que segue trabalhará ainda com equações diferenciais, só que agora nosso problema será determinar a data de uma antigüidade, através do método do carbono 14.*

PROBLEMA REAL:

A datação através do carbono está baseada em princípios de radioatividade descobertas e desenvolvidas no início do século principalmente por Rutherford. Certos átomos são instáveis e, assim, com o passar do tempo, sem passarem por nenhuma influência externa, através de uma transição eles se transformarão em um átomo de um novo elemento. Durante a transição emitirão radiação. A partir de evidências colhidas experimentalmente, Rutherford formulou um modelo bastante simples para descrever a forma pela qual a amostra radiotiva se transforma. Se $N = N(t)$ representa o número de átomos em uma amostra radioativa em um tempo t, então:

$$-\frac{dN}{dt}$$

representa o número de desintegrações nessa unidade de tempo. Rutherford mostrou que o número de desintegração é proporcional ao número de átomos existentes, assim

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (*)$$

onde λ é uma constante positiva, chamada de constante de decaimento. Cada substância terá sua constante λ associada,que será determinada experimentalmente.

Na prática, não medimos diretamente a constante λ, mas a meia-vida τ. A constante τ é definida como o tempo necessário para que a metade de uma determinada quantidade de átomos decaia Para relacionarmos τ com λ, basta resolvermos a equação (*),

com condição inicial $N = N_0$, quando $t = 0$. Temos assim que

$$N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t} \quad (**)$$

Assim, se $N = \frac{N_0}{2}$ quando $t = \tau$, temos:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \, e^{-\lambda \tau} ,$$

isto nos dá

$$\boxed{\tau = \frac{\ell n 2}{\lambda}} \quad (***)$$

Como a meia-vida do carbono 14 (C^{14}) é de 5568 anos, considerando (***) temos que λ, para C^{14}, é $1{,}245 \times 10^{-4}$ por ano.

No método de datação através de C^{14}, temos que, como a atmosfera terrestre é continuamente bombardeada com raios cósmicos e estes combinando-se com o nitrogênio, formam C^{14}, faz com que todos os seres vivos possuam C^{14}. Nas plantas e animais vivos, a razão de absorção de C^{14} é balanceada pela razão natural de decaimento e um estado de equilíbrio é obtido. A suposição básica na datação por carbono é de que a intensidade de bombardeamento da superfície terrestre por raios cósmicos tem permanecido constante através do tempo. Isto significa que a razão original de desintegração de C^{14} em uma amostra de madeira é a mesma que a razão medida hoje em um pedaço de madeira ainda não cortada da árvore. Quando uma amostra é formada, a madeira é isolada de sua origem e os átomos de C^{14} decaem por não haver absorção.

O problema é determinar a data de fabricação de uma mesa redonda que está fixada na parede do castelo de Winchester. A mesa

tem 18 polegadas de diâmetro com 25 setores, um para o rei e os outros para cada um de seus cavaleiros. A forma circular faz com que nenhum cavaleiro preceda o outro. Alguns especialistas afirmavam que era a mesa redonda do rei Artur. Em 1976, alguns cientistas e arqueólogos estimaram a data dessa peça através de vários métodos, sendo um deles o de C^{14}, para tanto utilizaram o modelo criado por Rutherford descrito acima.

Considerando as observações do penúltimo parágrafo, suponhamos que a mesa foi feita quanto $t = 0$. Seja R_0 a razão inicial de desintegração, assim

$$R_0 = - \left.\frac{dN}{dt}\right|_{t_0} = \lambda N_0$$

A razão atual de desintegração, $R(t)$, é dada por

$$R(t) = \frac{dN}{dt} = \lambda N(t) = \lambda e^{-\lambda t} N_0$$

usando (**).

Assim:

$$\frac{R_0}{R(t)} = \frac{\lambda N_0}{\lambda N_0 e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t}$$

$$\ell n\left(\frac{R_0}{R(t)}\right) = \ell n e^{\lambda t}$$

(***) $\ell n\,[R_0/R(t)] = \lambda t \therefore \frac{1}{\lambda} \ell n\,[R_0/R(t)] = t$

Para madeira em seu estado vivo, ou seja, ainda na árvore antes de ser cortada, a razão de desintegração (por minuto / por grama de amostra) é 6,68, assim, tomamos este valor quando a mesa é construída, isto é,

$$R_0 = 6,68.$$

Das medições feitas em 1977, a razão era de

$$R(t) = 6,08$$

Usando a equação (***) temos:

$$t = \frac{1}{1,245 \times 10^{-4}} \quad \ell n \left[\frac{6,68}{6,08}\right] \simeq 700 \text{ anos}$$

Assim, a data de fabricação da mesa é mais ou menos 1275, o que claramente indica que a mesa não é do rei Artur, pois este viveu no século V.

Com estes exemplos, encerramos o capítulo II. A seguir, trataremos de algumas questões gerais envolvendo o uso de modelos matemáticos.

CAPÍTULO III

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE MODELOS MATEMÁTICOS

Neste capítulo, discutiremos algumas questões envolvendo a utilização de modelos matemáticos como um instrumento de auxílio à resolução de um problema. Procuraremos destacar alguns aspectos, como por exemplo, a possibilidade de manipulação dos dados iniciais de um problema.

Uma das seções deste capítulo será dedicada ao estudo do desenvolvimento do cálculo infinitesimal, onde através da história da matemática, veremos o aprimoramento de um modelo matemático criado na Grécia antiga e que possibilitou o crescimento dos conhecimentos matemáticos.

Finalmente, com o propósito de incentivar e exemplificar a adoção desta estratégia de ensino utilizando modelos matemáticos, relataremos um trabalho desenvolvido em sala de aula.

1 - *A DIMENSÃO POLITICA DA UTILIZAÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS*

O exemplo 3.1.4 do capítulo anterior, apesar de relatar uma situação bastante simples, apresenta uma questão de grande importância, tanto para o processo de modelagem, quanto para a avaliação dos resultados obtidos através do modelo. Esta questão refere-se à possível manipulação dos dados iniciais do problema que queremos estudar através do modelo matemático.

Neste exemplo, queríamos criar um modelo que descrevesse a situação e possibilitasse a previsão de crescimento de uma ninhada de ratos, constituída inicialmente por um casal apto a procriar.

Numa primeira apresentação do problema, além do casal, tínhamos como dados o fato de que cada gestação produziria 6 novos ratos (3 machos e 3 fêmeas); a cada 120 dias, os filhotes já es-

tariam amadurecidos e em condições de se acasalar; a taxa de mortalidade era nula.

A partir desses dados, construimos dois modelos que descreviam a situação e permitiam que se previsse o número de ratos após 400 dias. Com estas hipóteses, chegamos que ao final desse período teríamos 1808 ratos.

Numa segunda apresentação do problema, partimos de outros dados: mantivemos como ponto de partida apenas um casal apto a procriar e conservamos, também, o tempo necessário para o amadurecimento sexual das crias; no entanto, diminuímos para quatro o número de ratos a cada gestação; passamos a admitir a possibilidade de mortalidade entre os ratos, diminuindo a probabilidade de um rato passar de uma faixa para outra de vida, segundo nossa classificação, de 1 para 0,6; 0,9; 0,9 respectivamente.

Com estes dados e hipóteses e utilizando o mesmo modelo determinado anteriormente, chegamos a um resultado aproximado de 121 ratos no final do mesmo período de tempo. É interessante observarmos que, aparentemente, os novos dados não apresentam uma diferença relevante com relação aos anteriores, no entanto, os resultados apresentam uma diferença significativa.

A partir desse exemplo, identificamos um aspecto importante a ser discutido com relação ao uso de modelos matemáticos como instrumentos de auxílio à compreensão e resolução de um problema. Este aspecto refere-se à possibilidade de manipulação dos dados e hipóteses, ocasionando a elaboração de estratégias tendenciosas baseadas no modelo criado a partir desses dados.

Durante o processo de modelagem, ao fazermos a verificação e testagem dos resultados obtidos através do modelo, poderemos detectar esta possível manipulação dos dados iniciais. No entanto, devemos observar que, ao construir um modelo matemático, temos objetivos e os resultados do modelo poderão servir aos mais diversos interessses. Assim, como a coleta de dados sobre o problema

faz parte do processo de criação de um modelo, a possível manipulação destes poderá ser justificada como uma atitude para defender os objetivos e interesses de quem constrói o modelo.

A partir dessa discussão inicial, vemos que ao utilizar um modelo matemático é importante considerarmos uma outra dimensão além do aspecto auxiliar dos modelos, que seria o caráter político de sua utilização.

Geralmente, as decisões que tomamos com respeito à solução de um problema, devem ter a qualificação de *ótima* ou *racional*, reforçando a dimensão política do uso do modelo matemático, visto que este indica soluções.

Claro que quando o problema a ser estudado não possuir relações sociais, ou melhor ainda, não envolver variáveis humanas , pelo menos diretamente, este aspecto político do modelo fica um tanto diluído. No entanto, isto só ocorre aparentemente pois, dificilmente encontraremos um problema cuja solução não implique em conseqüências a nível social.

Com o objetivo de exemplificar as afirmações acima, podemos pensar em um exemplo simples e, até certo ponto, ideal em algumas considerações. Observemos que o objetivo do dono de uma empresa de transporte é, em última análise, o lucro de sua empresa. O passageiro, o usuário do transporte, consciente de seus direitos, terá como exigência a eficiência e a segurança do transporte.

Assim, ao criarmos um modelo matemático relacionando estas variáveis - lucro, eficiência e segurança - dificilmente encontraremos uma solução que proporcione, ao mesmo tempo, um lucro máximo para o empresário e um máximo de eficiência e segurança para o usuário. Logo, no caso de utilizarmos este modelo como auxiliar na solução de um problema envolvendo estas variáveis, teremos que optar em atender os interesses do empresário ou do usuário.

Na maioria das vezes, dificilmente encontraremos soluções que atendam a objetivos diversos. Um modelo matemático será sem-

pre uma aproximação do problema e portanto não poderá dar conta de todos os seus aspectos. Além disso, seus objetivos estarão subordinados aos interesses de quem o criou ou de quem promoveu sua elaboração.

Em suma, a criação de um modelo não é uma atividade neutra. Ao criarmos um modelo temos interesses e este procurará atendê-los. No entanto, os métodos matemáticos de resolução de um modelo serão os mesmos para solucionar problemas com objetivos mais diversos. A não neutralidade de um modelo está caracterizada pelos objetivos de quem o criou e sua utilização.

2 - *A NOÇÃO DE MODELO E A CRIAÇÃO MATEMÁTICA*

Os modelos matemáticos surgiram praticamente quando o homem passou a se preocupar em compreender o universo e a natureza. Dentro da história da matemática podemos citar Pitágoras, Newton, Euler, Lagrange, Maxwell como grandes criadores de modelos matemáticos do universo físico. Mais recentemente, temos Volterra,Lotka, Leontief, Samuelson e outros que tem tentado criar modelos do universo social e biológico. Podemos dizer que paralelamente a uma história da matemática, existe uma história da modelagem matemática, ou ainda, uma história dos modelos matemáticos. O conceito de modelo, visto no âmbito da lógica, só foi desenvolvido no início deste século, apesar de com Euclides já termos um primeiro esboço de sistema formal.

Com o propósito de mostrar o desenvolvimento de uma idéia matemática até esta chegar a constituir-se em um ramo da matemática, faremos um estudo do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, mostrando também o aprimoramento de um modelo criado na Grécia Antiga e que possibilitou este desenvolvimento.

Ao contrário do que geralmente ocorre em um curso de cálculo, onde em primeiro lugar estudamos a diferenciação e após integração, historicamente, as idéias de integração desenvolveram-se

antes que as da diferenciação. É na Grécia Antiga que os problemas relacionados com o processo de soma e o cálculo de área e volume de determinadas figuras aparecem pela primeira vez, originando o desenvolvimento de idéias sobre a integração. Somente na Idade Moderna, por volta do século XVII, que a diferenciação passa a ser estudada a partir de problemas relacionados com a determinação de tangentes de curvas e o cálculo de máximos e mínimos de uma função. O relacionamento entre integração e diferenciação,considerando-as como operações mutuamente inversas,apareceu no final do século XVII, no trabalho de Barrow (Barrow's Lectiones), predecessor de Newton.

A origem do cálculo integral está ligada a escolas gregas como dos Eleatas e Sofistas. Os famosos paradoxos de Zenão (pertencente à escola sofista) tratam da questão da divisão infinita de uma grandeza e estão relacionadas a problemas que atualmente pertencem a assuntos como continuidade e processos limites.

Um destes é ilustrado pela história de Aquiles e a tartaruga e, em essência, é a seguinte[27]:

Aquiles, um famoso corredor da época, vai disputar uma corrida contra uma tartaruga. Com o propósito de ser justo Aquiles dá uma vantagem a sua oponente. Mas contrariamente a sua expectativa e a nossa experiência, Aquiles perde a corrida. O raciocínio de Zenão é o seguinte, quando Aquiles atinge o ponto em que a tartaruga se encontrava no início da corrida esta por mais lenta que fosse, já teria se movido para um ponto mais à frente. Quando Aquiles atingir este novo ponto, sua oponente já terá se movimentado para um ponto mais à frente e quando ele atingir este novo ponto, ocorrerá o mesmo até o fim da corrida e ele nunca conseguirá alcançá-la.

---

(27) Ver Asger Aaboe. Episódios da história antiga da matemática, p.51.

Por meio de um recurso hábil, Zenão dividiu o intervalo de tempo entre o momento de partida de Aquiles e o instante em que ele alcançaria a tartaruga em uma infinidade de intervalos, afirma então que a soma de um número infinito de parcelas deve ser necessariamente infinito o que é naturalmente errado. Se raciocinarmos desta forma, poderemos afirmar que $\frac{1}{3}$ é infinito, pois $\frac{1}{3} =$ $= 0,333... = 0,3 + 0,03 + 0,003+ ...$, onde temos um número infinito de parcelas do lado direito.

Os primeiros problemas que aparecem na história do cálculo dizem respeito à determinação de áreas e volumes de figuras como a circunferência, a esfera, o cone, etc. A resolução destes problemas possibilitou o desenvolvimento da idéia de divisão de grandezas.

Por exemplo, o famoso problema grego da quadratura do círculo, ou seja, o problema de determinar um quadrado cuja área seja igual à área de um círculo, lançou um dos germens de desenvolvimento do *método de exaustão de Eudoxos*. Antifon (aprox. 430 a.C.), contemporâneo de Sócrates, defendeu a idéia de que dobrando sucessivamente o número de lados de um polígono regular inscrito em um círculo, a diferença entre a área de um e de outro, no final, deixaria de existir, ou seja, haveria exaustão da área do círculo pelo polígono. Como é possível construir um quadrado de área igual à área de qualquer polígono regular, então é possível construir um quadrado de área igual à de um círculo.

O *método de exaustão* é usualmente creditado a Eudoxos(aprox. 370 a.c.) e podemos considerá-lo como a resposta da escola platônica aos paradoxos de Zenão. O método supõe a divisibilidade infinita das grandezas e tem por base a proposição: se de uma grandeza de onde subtraímos uma parte não menor que sua metade, da parte que sobra substraímos uma outra não menor que sua metade e assim por diante, haverá um comprimento cuja grandeza (tamanho) é menor que qualquer outra grandeza do mesmo tipo.

Arquimedes (aprox. 287-212 a.C.) foi quem aplicou de forma mais elegante o método de exaustão, aproximando-se do atual cálculo integral.

O método de exaustão, apesar de rigoroso, é estéril, não possibilita a obtenção de fórmulas ou resultados, apenas os justifica. Em outras palavras, dada uma fórmula conhecida, o método de exaustão pode construir uma maneira elegante de estabelecê-la, mas não possibilita a descoberta inicial do resultado. No entanto, sabemos que Arquimedes não apenas estabelecia resultados, ele também descobria as fórmulas que posteriormente "demostrava" utilizando o método de exaustão.

Em 1906, foi descoberta em Constantinopla, uma cópia do tratado *Método* escrito por Arquimedes e endereçado a Eratóstenes, onde descreve a maneira que utiliza para descobrir os resultados e fórmulas. A idéia fundamental deste método, o chamado *Método do Equilíbrio*, está em considerar uma grandeza como constituída de um grande número de partes atômicas, ou seja, não divisíveis, sendo esta, em essência, a idéia presente no cálculo moderno.

Até o início da Idade Moderna, houve poucos avanços nestas idéias. Por volta de 1450, alguns trabalhos de Arquimedes chegam à Europa Ocidental através de manuscritos do século IX. No entanto, só no início do século XVII é que estas idéias de Arquimedes recebem novas contribuições.

O maior impulso dado ao cálculo integral e diferencial é devido a problemas de astronomia e mecânica que surgiram no Renascimento, visto que o uso de infinitésimos é um instrumento indispensável para o desenvolvimento dessas ciências.

Seguindo os passos de Arquimedes, Kepler desenvolveu idéias de infinitésimos em conexão com a integração, levado sempre por razões de ordem mais prática que teórica. Por exemplo, Kepler se propôs a comparar a capacidade de tonéis de vinho que se usava então, nas quais estudava o volume de numerosos corpos de rotação,

obtidos ao fazer girar arcos de cônicas ao redor de eixos paralelos ao eixo das mesmas. Desta maneira, descreveu e denominou, geralmente com nomes derivados de frutas mais de noventa corpos.

Recorrendo diretamente a expressões de caráter infinitesimal e, admitindo que as figuras fossem compostas de infinitas figuras, infinitamente pequenas e cuja área e volumes são conhecidas , Kepler consegue determinar, muitas vezes com êxito, a área e volume de algumas figuras já conhecidas através dos trabalhos de Arquimedes.

Por exemplo, Kepler via o círculo como um polígono regular possuindo um número infinito de lados. Considerando cada um desses lados como base de um triângulo cujo vértice é o centro do círculo. Com isso, a área do círculo está dividida em um número infinito de finos triângulos, todos com a altura igual ao raio do círculo. Sabendo que a área do triângulo é a metade do produto da medida de comprimento da base pela medida da altura, temos que a área do círculo é igual à metade da medida do comprimento da circunferência pelo raio, ou seja, $\frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$.

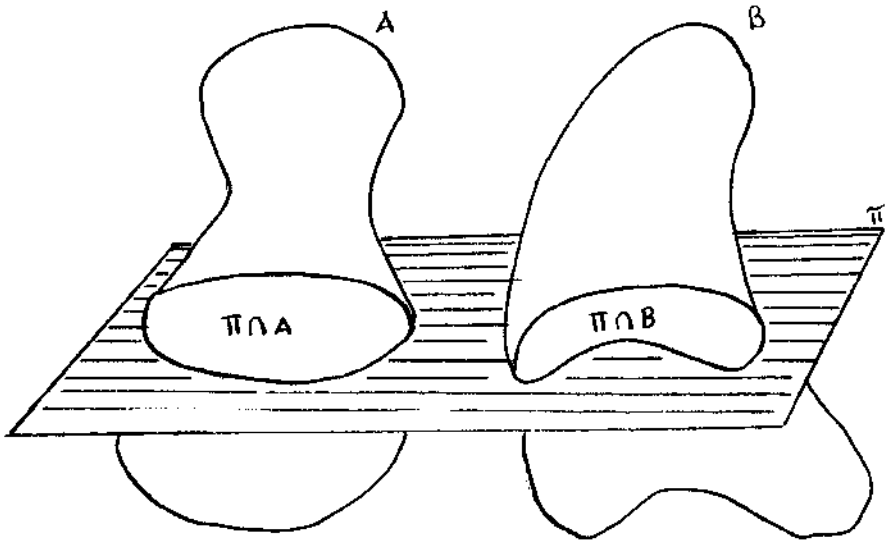
Concepções semelhantes à de Kepler e também vinculadas às investigações de Arquimedes encontram-se, segundo Babini [2], no trabalho de Cavalieri que além de trabalhar com trigonometria e com as aplicações dos logarítmos, é autor de um método para calcular áreas e volumes de figuras através do que chamou *"indivisíveis"*. E, este método, podemos considerar como intermediário entre os trabalhos de Arquimedes e os procedimentos para a determinação de áreas e volumes, que seriam desenvolvidas mais tarde,culminando com o que hoje conhecemos por cálculo integral e diferencial.

Este método de Cavalieri tem como ponto fundamental o *conceito de indivisível*, no entanto, fica difícil determinar o que ele entendia por indivisível. Exemplificando, podemos dizer que os pontos são os indivisíveis da reta; as retas os indivisíveis

de uma figura plana e as seções planas de um sólido, os indivisíveis deste. Com este conceito de *indivisível*, que para Cavalieri é uma forma de se expressar e de referir aos elementos de duas figuras que está comparando, e com certa técnica algébrica ele consegue determinar, com grande precisão, as áreas e volumes de diversas figuras.

Vejamos como encontramos atualmente a redação do chamado *Princípio de Cavalieri*, cujo valor prático no cálculo de volumes é , sem dúvida, muito grande, principalmente a nível de segundo grau, quando ainda não trabalhamos com cálculo integral.

Sejam A e B dois sólidos. Cada plano horizontal π determina nos sólidos A e B seções planas, que indicaremos respectivamente por $\pi \cap A$ e $\pi \cap B$ (pois estas são as interseções do plano π com os sólidos respectivos). Se, para todos os planos horizontais π , as figuras planas $\pi \cap A$ e $\pi \cap B$ tem a mesma área, o Princípio de Cavalieri afirma que o volume de A e o volume de B são iguais. Graficamente, temos:



Observemos que é plausível pensarmos que duas fatias bastante finas, de mesma altura, cujas bases tem mesma área, têm aproximadamente o mesmo volume. Conseguiremos aprimorar, a medida em que consideramos fatias cada vez mais finas. Temos assim, através do Princípio de Cavalieri, a redução do problema de cálculo de volume ao problema de calcular área.

Cavalieri pertencia ao círculo científico formado pelos discípulos e amigos de Galileu. Deste grupo, ocuparam-se de questões ligadas à infinitésimos, Vivianni e Torricelli. Além disso, o estudo da *curva ciclóide*, permitiu à maioria dos matemáticos da primeira metade do século XVII, desenvolver os métodos infinitesimais. A *ciclóide*, nome dado por Galileu, é a curva descrita por um ponto de uma circunferência que roda, sem tocar, numa reta e de cujas propriedades se ocuparam Galileu, Mersenne, Torricelli, Descartes, Fermat, Wallis, entre outros.

Entre os precursores do chamado cálculo diferencial e integral vários outros matemáticos merecem menção. Contudo, destaque especial devemos dar a Isacc Barrow, professor de Newton que, como já nos referimos, deu a primeira versão do *Teorema Fundamental do Cálculo*.

Vários matemáticos, e em especial os citados anteriormente, prepararam o caminho para que Newton e Leibniz, através de seus trabalhos independentes, firmassem este ramo da matemática, criando um simbolismo e um conjunto sistemático de regras, que hoje conhecemos como cálculo diferencial e integral.

O trabalho matemático de Isacc Newton está intimamente ligado a suas investigações de filosofia natural e não se limita ao cálculo, trata também de alguns tópicos de álgebra e geometria.

Entre as obras dedicados ao cálculo, encontramos "De Analysis per Aequationes Numero Terminorum Infinitas", de 1669, porém só publicado em 1711. Este trabalho trata de séries, apesar do algoritmo não ser estudado em si, mas como recurso para calcular com

primento de curvas e áreas. Neste tratado aparece também o teorema geral do binômio, que é a generalização para expoente qualquer da fórmula bem conhecida de desenvolvimento da potência de um binômio com expoentes inteiros e positivos, que chamar-se-á *Binômio de Newton*.

A contribuição mais importante de Newton para o desenvolvimento do cálculo é o *método das variações*. Este método foi tema de um tratado escrito em 1671 e publicado em 1736. Em 1672, numa carta, Newton traçou as linhas gerais do método ao dizer que podia se aplicar não só ao traçado de tangentes a qualquer curva, seja ela geométrica ou mecânica, como também se aplicaria para resolver qualquer tipo de problema sobre curvatura, área, comprimentos, centros de gravidade, etc. Além disso, afirmava que entrelaçou este método com um outro método que consiste em trabalhar com as equações, reduzindo-as a séries infinitas.

De fato, este método não é outro senão um método que usamos hoje em cálculo infinitesimal. Sua natureza é geométrico-mecânica, pois supõe que todas as grandezas geométricas são criadas por movimentos de velocidade diferentes, enquanto o tempo "flui continua e uniformemente". Temos disso que o tempo, atuando como pano de fundo, não aparece explicitamente, porém implicitamente nas velocidades, nas velocidades de velocidades (aceleração), etc. As grandezas criadas são as *variáveis*, suas velocidades são as *variações* e Newton denomina *momento* ao produto do incremento de tempo pela respectiva variação. Para variações sucessivas, ele introduziu uma notação característica, que ainda se usa em mecânica e consiste em colocar pontos acima da letra que indica a variável correspondente. Observemos que as variações e momentos de Newton são as derivadas e diferenciais que conhecemos.

Newton, ainda que de forma obscura, trabalhou com a importante noção de limite. Em um tratado de 1704, introduziu a expressão "razão dos incrementos evanescentes", com a finalidade de levantar certas objeções de ordem técnica que seu método despertava.

Enquanto na Inglaterra, através do trabalho de Newton, o cálculo infinitesimal atingia grandes resultados e adquiria as primeiras notas que lhe conferiam autonomia e identidade, no continente europeu, por obra de Gottfried Wilhelm Leibniz, esta autonomia e identidade se acentuavam. Se a obra de Newton foi a de um "filósofo natural", a de Leibniz foi a de um filósofo preocupado com a clareza e o rigor de seus conceitos. Esta preocupação com o formalismo matemático lhe permitiu, entre outras coisas, que criasse o simbolismo adequado ao novo algoritmo.

Leibniz, além de suas contribuições para o cálculo, desenvolveu seu trabalho matemático na área da teoria dos números, da combinatória, da álgebra e podemos considerá-lo como precursor de vários ramos da matemática como: o cálculo geométrico, a teoria dos determinantes, a lógica matemática e a topologia.

As considerações de Leibniz sobre os infinitésimos, se encontram manuscritas desde 1673, partem da consideração de um triângulo especial (o *triângulo característico*, como denomina) que já figurava no trabalho de Barrow, mas Leibniz diz tomá-lo de Pascal. Através do estudo deste triângulo e suas semelhanças, reconheceu que o problema de determinar a tangente e a área são inversos e encontrou relações entre as somas dos elementos geométricos que "preludiam" as fórmulas de cálculo integral.

O primeiro trabalho de Leibniz sobre este tema data de 1684 e refere-se ao cálculo diferencial. É um artigo bastante breve onde aparecem definidas as diferenciais na forma atual e as regras comuns de diferenciação das expressões racionais e irracionais.

Em 1686 apareceram os primeiros artigos de Leibniz sobre o cálculo integral e pela primeira vez aparece publicado o conhecido símbolo de integral $\int$. Posteriormente, aparecem outras questões originais como o teorema das diferenciais sucessivas de um produto, que hoje leva seu nome, intervindo em todos os problemas de origem geométrica e mecânica que interessavam dos matemáticos da época.

Com este breve histórico podemos ter uma idéia de como os conhecimentos matemáticos são produzidos e, fazendo uma analogia com os modelos matemáticos, podemos encarar o desenvolvimento matemático como o aprimoramento de um modelo. No caso do cálculo , o aprimoramento de um modelo criado por Arquimedes e que proporcionou o desenvolvimento de uma área da matemática.

A seção seguinte é dedicada à descrição de uma experiência realizada por nós em sala de aula utilizando modelos matemáticos como estratégia de ensino.

4 - UMA EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA

Da mesma forma que anteriormente procuramos exemplificar a criação matemática, através do aperfeiçoamento de um modelo matemático, nosso objetivo agora é exemplificar a utilização de modelos como estratégia de ensino.

Antes de iniciar, gostaríamos de observar que esta experiência foi realizada sem maiores preocupações com o rigor necessário para classificá-la de científica. No entanto, a incluímos no trabalho por considerá-la importante não só para nossa prática, como também, como exemplo e estímulo para a utilização de modelos matemáticos na sala de aula.

Trabalhamos com dois grupos que na realidade são duas turmas de segundo ano do segundo grau de uma escola técnica. Os alunos destas turmas estão cursando a terminalidade *Técnico em Processamento de Dados*, sendo a carga de matemática de três aulas no primeiro ano e duas no segundo. As turmas eram do período noturno e o assunto desenvolvido foi o conceito e operações com matrizes.

Os dois grupos eram bastante heterogêneos. Denominamos de *grupo* A a turma que utilizamos como grupo de controle, onde desenvolvemos o assunto de uma maneira tradicional, através de conceito (definição), exemplos e exercícios. Esta turma possuia 52

alunos, dos quais 85% trabalhava durante o dia. A segunda turma tinha apenas 14 alunos, dos quais 70% trabalhava durante o dia. Nesta turma, que denominamos *grupo* B, desenvolvemos o assunto através da utilização de modelos matemáticos.

A média de idade dos alunos era praticamente a mesma e variava entre 17 e 25 anos. Quanto à formação anterior, a maioria cursou o primeiro grau regularmente em escolas da rede estadual, alguns poucos alunos cursaram o supletivo de primeiro grau. O nível de conhecimento e domínio dos conteúdos de primeiro grau, nos dois grupos, pode ser considerado baixo. Notamos durante o trabalho uma grande dificuldade em trabalhar algebricamente (resoluções de equações 1º e 2º graus, inequações,...).

Não houve possibilidade de escolhermos aleatoriamente os integrantes de cada um dos grupos o que seria preferível para desenvolvermos mais tecnicamente nossa experiência. Além disso, não aplicamos um pré-teste onde colheríamos dados para uma comparação posterior. Por estes motivos, nos deteremos na descrição e avaliação do desenvolvimento do processo, não enfatizando os momentos inicial e final.

Tínhamos com cada grupo um encontro semanal de noventa minutos (equivalente a duas aulas semanais). Nosso trabalho foi desenvolvido durante seis encontros.

No grupo A, como já observamos, baseamos nosso trabalho no tripé: teoria, exemplos, exercícios. Este enfoque podemos classificar de tradicional e, sem dúvida, é o que usualmente encontramos na prática do professor de matemática.

Com o grupo B, o trabalho foi desenvolvido basicamente com os problemas apresentados em 3.1.2 e 3.1.3 do capítulo anterior. No primeiro encontro, apresentamos um problema, no caso, o mapa de uma ilha com a localização de suas vilas e os diversos caminhos entre elas. O problema apresentado era o de determinar em qual das vilas seria mais propício implantar-se uma escola, levan

do-se em consideração apenas a menor distância que o aluno deveria percorrer para chegar até ela.

Neste primeiro contato com o grupo, quando apresentamos o problema, procuramos ressaltar a importância de identificar e reconhecer os dados relevantes de um problema. Discutimos, também,a necessidade e importância de representar estes dados de uma forma clara e precisa, favorecendo assim a compreensão do problema a ser estudado.

Na semana seguinte retomamos a discussão sobre a importância de identificação e representação dos dados. Trabalhamos com o conceito de matriz, enfatizando que todo elemento da matriz está "bem localizado" através da linha e coluna correspondentes. Ao trabalharmos esta caracterização de um elemento da matriz, os dados já estavam representados em forma matricial e a discussão partiu das duas matrizes encontradas pelos alunos (onde as linhas e colunas estavam trocadas). Após este trabalho, chegamos ao conceito de *ordem de uma matriz*, classificando os diversos tipos: matriz quadrada, matriz linha, matriz coluna. Com isto, estávamos desenvolvendo as "ferramentas" necessárias para solucionar o problema proposto.

Nas duas primeiras semanas, o grupo B apresentou um desenvolvimento mais lento que o grupo A, provavelmente isto ocorreu devido à abordagem diferente que não estavam acostumados.Além disso, a necessidade de participação de cada elemento no decorrer do trabalho fez com que o conteúdo fosse desenvolvido mais lentamente e, este seria um primeiro ponto a observarmos sobre um trabalho utilizando modelos matemáticos: a participação de cada aluno é fundamental, pois só com a discussão do problema e sua representação é que poderemos proseguir.

No grupo A, estávamos desenvolvendo o assunto tradicionalmente. No primeiro encontro, definimos o que é uma matriz, ordem de matriz e exemplificamos apresentando os diversos tipos. Nesta

turma trabalhamos com um número maior de exercícios, no entanto , podemos observar que os alunos do grupo B apresentavam uma maior segurança na resolução do mesmo tipo de exercício. Podemos atribuir esta diferença, ao fato dos alunos no grupo B chegarem através da discussão a estes conceitos, sem precisarmos definí-los.

Os três encontros seguintes foram dedicados ao estudo das operações com matriz: adição, subtração, multiplicação par escalar, multiplicação por matriz.

Apresentamos ao grupo B um novo problema (3.1.3 cap.II). Os alunos tiveram uma menor dificuldade para determinar os dados relevantes e para representá-los utilizando matriz. O problema referia-se ao movimento de estoque de uma loja de artigos esportivos. Estudamos cada uma das operações na medida em que era necessária para a resolução do problema. No final, propusemos uma lista de exercícios envolvendo estas operações e, os alunos, apresentaram um certo domínio para resolvê-los, tendo, novamente, uma maior facilidade que os integrantes do outro grupo na resolução dos mesmos problemas.

A última semana foi dedicada a um exercício de avaliação com dois grupos. Reservamos este momento de avaliação formal em primeiro, porque estávamos desenvolvendo o trabalho em uma escola e necessitaríamos destes dados para a avaliação bimestral e em segundo, porque mesmo não tendo realizado um pré-teste, julgamos que seria um dado indicativo do desenvolvimento do assunto em cada grupo.

Procuramos elaborar exercícios equivalentes para os dois grupos, dirigindo a avaliação para o nível de compreensão do conceito e das operações estudadas. Não avaliamos no grupo B, o desenvolvimento com relação à "elaboração" de um modelo matemático, procuramos detectar apenas, a compreensão do conteúdo propriamente dito. O máximo de pontos para os exercícios era 10, o grupo A teve uma média de 6,2 e o grupo B, 7,0. Apesar de ter sido apenas uma avaliação quantitativa, a nível de conteúdo, não conside-

rando aspectos mais abrangentes do desenvolvimento do aluno, acreditamos ter colhido alguns dados para uma posterior reflexão sobre esta estratégia de ensino.

Como conclusões finais temos: durante o desenvolvimento do trabalho, o grupo B mostrou-se mais envolvido e interessado pelo asssunto que o grupo A; às questões apresentadas buscavam solução dentro do que estávamos estudando. O crescimento deste grupo foi mais homogêneo que o grupo A; na avaliação, os alunos do grupo B tiveram seus pontos entre 6,0 e 9,0, enquanto que no A, os pontos variaram entre 3,0 e 10,0.

Sem dúvida, ao descrevermos esta experiência, estamos deixando de considerar várias questões que surgiram durante cada encontro e que se perderam no decorrer do próprio trabalho. No entanto, acreditamos que com os dados descritos acima, podemos perceber algumas características dessa estratégia de ensino como,uma maior participação e envolvimento dos alunos, maior interesse e desenvolvimento tanto a nível cognitivo como afetivo (os alunos passam a ver a matemática sob um novo prisma).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao utilizarmos os modelos matemáticos como base de uma estratégia de ensino não podemos deixar de observar que algumas etapas do processo de modelagem não se apresentam tão bem definidas como vimos anteriormente. Através dos exemplos estudados no capítulo II já podemos perceber este fato e, principalmente, isto ocorrerá ao trabalharmos com o aluno, onde sempre temos que nos adaptar às condições que se apresentam. Assim, muitas vezes, teremos que eliminar etapas, "fundir" outras ou até mesmo criar novos estágios, dependendo do trabalho que queremos desenvolver. Em suma, a utilização desta estratégia não implica em etapas rígidas que não possibilitem adaptações.

O importante no decorrer do trabalho é preservar o que podemos chamar de "filosofia dos modelos matemáticos", ou seja, a apresentação da matemática como algo relacionado com outras disciplinas e presente em situações do nosso dia-a-dia. Isto é possível principalmente quando estamos trabalhando com conteúdos de primeiro e segundo graus, onde a matemática estudada é "aplicável" à várias situações interdisciplinares e da vida diária.

Como toda estratégia, esta também tem limitações, ou seja, não é o "ovo de Colombo" para o ensino da matemática. Porém, com esta abordagem podemos dar uma visão ampla do que é a matemática e teremos condições de responder às célebres perguntas: "para que serve isto?" ou "onde vou utilizar isto?".

A utilização de modelos matemáticos como estratégia implicará em que muitas vezes a combinemos com outras abordagens como a etnomatemática, a resolução de problemas, e outras. Isto dependerá do enfoque que pretendemos dar ao nosso trabalho.

Ao procurarmos novos caminhos que possibilitem uma melhoria do ensino da matemática não podemos esquecer que esta disciplina está inserida em algo mais amplo que é o sistema educacional brasileiro e, este apresenta uma problemática bastante complexa que muitas vezes impede o desenvolvimento de novas idéias. Em resumo,

não podemos nos iludir de que conseguiremos uma melhoria do ensino da matemática enquanto não houver mudanças drásticas na política educacional do nosso país. No entanto, não podemos nos deixar levar pelo caos é necessário alguma resistência e o aprimoramento do trabalho docente é um dos pontos de resistência do professor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] AABOE, Asger. *Episódios da história antiga da matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

[2] BABINI, Jose. *História sucinta de la matemática*. Espasa-Calpe Argentina S.A., Buenos Aires, 1952.

[3] BADIOU, Alain. *Sobre o conceito de modelo*. Editorial Estampa, Lisboa, 1972.

[4] BARRETO, Aristides C. *Inter-Disciplinary models for teaching geometry*. III International Congress on Mathematical education, R.F. Alemanha, 1976.

[5] BARRETO, Aristides C. *Ensino a partir de modelos*. IMECC-UNICAMP, Campinas, 1977.

[6] BARRETO, Aristides C. *Mathematical Education based on interdisciplinary models: a viable strategy for the third world* manuscrito, 1984.

[7] BOYER, Carl B. *The history of the calculus and its conceptual development*. Dover publications, INC, New York, 1959.

[8] BURCHES, D.N. & BORRIE, M.S. *Modelling with differential equations*. John Wiley & Sons, Great Britain, 1981.

[9] COSTA, Newton C.A.da. *Introdução aos fundamentos da matemática*. Ed. Hucitec, São Paulo, 1977.

[10] COSTA, Newton C.A,da. *Interpretaciones y modelos en ciencia*, Revista Universitária, Universidad Católica do Chile, 1985.

[11] D'AMBRIOSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação reflexões sobre educação e matemática*. Summus Editorial, São Paulo, Ed. UNICAMP, Campinas, 1986.

[12] DAVIS, Philip & HERSH, Ruben. *A experiência matemática*. Francisco Alves, Rio de Janeiro, 1985.

[13] DIENES, Zoltan P. *As seis etapas do processo de aprendizagem*. EPU-MEC, São Paulo, 1975.

[14] EVES, H. *An Introduction to the history of mathematics*, 5th edition, University of Maine, 1983.

[15] FREMONT, H. *Teaching secondary mathematics through applications*, 2ed. edition. Pridle, Weber, Schmidt, Boston, 1979.

[16] HABERMAN. R. *Mathematical models*. Prentice Hall Inc., N. Jersey, 1977.

[17] HILBERT, D. *The foundation of geometry*. Open Court. Publishing Co., La Salle, Illinois, 1902.

[18] KAPUR, J.N. The art of teaching the art of mathematical modelling", *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, vol. 13, 1982, p.185-192.

[19] KLINE, Morris, *O fracasso da matemática moderna*. Ed. Ibrasa, São Paulo, 1973.

[20] LANGE, Jan de & KINDT, Martin. *Matrices*. S.ed. Utrecht, Paises Bajos, 1985.

[21] LIMA, Elon Lages. *Áreas e volumes*. Sociedade Brasileira de

Matemática, s.d.

[22] LUCCHESI, Cláudio L. *Introdução à teoria dos grafos*. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[23] MAKI, Daniel & Thompson Maynard. *Mathematical models and applications*. Prentice-Hall, INC, New Jersey, 1983.

[24] MATES, Benson. *Elementary logic*. Oxford University Press, New York, 1972.

[25] MENDELSON, E. *Introduction to mathematical logic*, 2n ed.Van Nostrand, New York, 1979.

[26] MONTESSORI, Maria. *Pedagogia Científica*. Ed. Flamboyant , São Paulo, 1965.

[27] MORRIS, Willian T. "On art of modelling", *Management Science*, vol. 13, 1967 p. 185-192.

[28] NAGEL, Ernest & Newmann, James. *Prova de Gödel*. Perspectiva, Ed. USP, São Paulo, 1973.

[29] NCTM - National Council of teachers of mathematics - *Applications in School Mathematics - year-book* 1979,NCTM, 1979.

[30] PETIT, Jean-Pierre. *Os mistérios da geometria*. Publicações Dom Quixote, Lisboa, 1982.

[31] POLYA, G. *How to Solve it*, 2nd. ed. Princeton University, Princeton, 1973.

[32] SHOENFIELD, J. *Mathematical Logic*.Massachusetts, Addison-Wesley, 1967.

[33] TARSKI, Alfred. *Introduction to logic and the methodology of deductive sciences*. Oxford University Press, New York, 1946.

[34] TARSKI, Alfred. "The semantics conception of truth",*Philosophy and Phenomelogical Research*, vol. 4, 1944, p.341.

[35] TROTTA, Fernando et alli. *Matemática aplicada 2º grau*, Ed. Moderna, S.Paulo, 1980.

[36] WILDER, R.L. "Mathematics and its relations to other disciplines", Mathematics teacher, dec. 1973, p.679-685.

[37] WILMER, Celso B. *Modelos na aprendizagem da matemática*. Tese de mestrado, PUC-RJ, 1976.