UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

LEODAN ACUÑA TORRES

Adjuntos Generalizados e Germes de Ideais de Operadores Lineares e Polinômios Homogêneos

Campinas

2019

Leodan Acuña Torres

Adjuntos Generalizados e Germes de Ideais de Operadores Lineares e Polinômios Homogêneos

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Anne Caroline Bronzi

Coorientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho

Este exemplar corresponde à versão final da Tese de Doutorado defendida pelo aluno Leodan Acuña Torres e orientada pela Profa. Dra. Anne Caroline Bronzi.

Campinas

2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Ac93a

Acuña Torres, Leodan, 1985-
Adjuntos generalizados e germes de ideais de operadores lineares e polinômios homogêneos / Leodan Acuña Torres. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Anne Caroline Bronzi.
Coorientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Banach, Espaços de. 2. Operadores lineares. 3. Polinômios homogêneos. 4. Operadores de composição. 5. Operadores adjuntos. 6. Análise funcional. I. Bronzi, Anne Caroline, 1984-. II. Botelho, Geraldo Márcio Azevedo. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Generalized adjoints and germs of ideals to linear operators and homogeneous polynomials
Palavras-chave em inglês:
Banach spaces
Linear operators
Homogeneous polynomials
Composition operators
Adjoint operators
Functional analysis
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Geraldo Márcio de Azevedo Botelho [Coorientador]
Sergio Antonio Tozoni
Vinícius Viera Fávaro
Mary Lilian Laurenço
Joedson Silva dos Santos
Data de defesa: 31-05-2019
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-1990-5999
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/9364554441325461

Tese de Doutorado defendida em 31 de maio de 2019 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). GERALDO MÁRCIO DE AZEVEDO BOTELHO

Prof(a). Dr(a). SERGIO ANTONIO TOZONI

Prof(a). Dr(a). VINÍCIUS VIEIRA FÁVARO

Prof(a). Dr(a). MARY LILIAN LOURENÇO

Prof(a). Dr(a). JOEDSON SILVA DOS SANTOS

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

AGRADECIMENTOS

- À Deus, e a minha família pelo apoio contínuo durante todo o programa de Doutorado, especialmente aos meus pais Andres Acuña Berna e Griselda Torres Garcia.

- À minha orientadora Profa. Anne Bronzi pela disponibilidade.

- Ao meu coorientador Prof. Geraldo Botelho pela acessibilidade, confiança, disponibilidade e paciência.

- Ao Prof. Jorge Mujica, pela colaboração neste trabalho.

- Aos meus amigos e colegas pelo suporte e colaboração ao longo desses 4 anos de permanência na UNICAMP.

- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) - Processo: 140650/2018-0.

- O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Nesse trabalho introduzimos e desenvolvemos a teoria de adjuntos generalizados de polinômios homogêneos entre espaços de Banach, que generalizam o adjunto clássico de um operador linear contínuo e o adjunto de Aron e Schottenloher de um polinômio homogêneo contínuo. Semelhanças e diferenças com as teorias clássicas são estabelecidas. Para estudar as estruturas algébrica e topológica dos conjuntos formados pelos adjuntos generalizados, introduzimos e desenvolvemos a noção de germes de ideais de operadores e de polinômios homogêneos. Além da teoria básica de germes de ideais, estudamos também os germes fechados, injetivos e sobrejetivos. Por fim apresentamos aplicações dos adjuntos generalizados e dos germes de ideais na obtenção de versões não-lineares de alguns resultados lineares conhecidos sobre operadores de composição.

Palavras-chave: Espaços de Banach, polinômios homogêneos, ideais de operadores, ideais de polinômios, adjuntos generalizados, germes de ideais, operadores de composição.

Abstract

In this work we introduce and develop the theory of generalized adjoints of homogeneous polynomials between Banach spaces, which generalizes the classical adjoint of a bounded linear operator and the Aron and Schottenloher adjoint of a continuous homogeneous polynomial. Similarities and differences with the classical theories are established. In order to study the algebraic and topological structures of the sets formed by the generalized adjoints, we introduce and develop the theory os germs of operator ideals and germs of polynomial ideals. Besides of the basic theory of germs of ideals, we also study closed, injective and surjective germs. Finally, as applications of the generalized adjoints and of the germs of ideals we provide nonlinear versions of some known linear results on composition operators.

Keywords: Banach spaces, homogeneous polynomials, operator ideals, polynomial ideals, generalized adjoints, germs of ideals, composition operators.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \ldots\}$.
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$.
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais.
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos.
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$E_1, \ldots, E_m, E$ e F	espaços vetoriais, espaços vetoriais normados ou espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$.
B_E	bola unitária fechada $\{x \in E : \|x\| \leqslant 1\}$.
$\overset{\circ}{B}_E$	bola unitária aberta $\{x \in E : \|x\| < 1\}$.
$\mathrm{Im}(f)$	imagem da aplicação f.
$\ker(f)$	núcleo da aplicação f.
$E^\sharp$	dual algébrico do espaço vetorial E.
E^*	dual topológico do espaço vetorial E.
$\mathrm{span}\{A\}$	espaço vetorial gerado pelo conjunto A.
$\widehat{E}$	completamento do espaço normado E.
$E = F$	espaços normados isomorfos topologicamente.
$E \overset{1}{=} F$	espaços normados isométricos.
Id_E	operador identidade definido em E.

$\sigma(E, E^*)$ topologia fraca no espaço normado E.

$\sigma(E^*, E)$ topologia fraca-estrela no dual E^* do espaço normado E.

$Ax^{(m)}$ $:= A(x, \overset{(m)}{\ldots}, x)$, se A é uma aplicação m-linear.

$J_E \colon E \overset{1}{\hookrightarrow} E^{**}$ mergulho canônico de E em E^{**}, definido por $J_E(x)(x^*) = x^*(x)$.

$J_E^{m,n} \colon E \longrightarrow \mathcal{P}(^m\mathcal{P}(^nE))$ mergulho canônico generalizado de E em $\mathcal{P}(^m\mathcal{P}(^nE))$, definido por $J_E^{m,n}(x)(q) = [q(x)]^m$.

$\ell_1(B_E)$ $:= \left\{ (\xi_x)_{x \in B_E} \in \prod_{x \in B_E} \mathbb{K} : \sum_{x \in B_E} |\xi_x| < \infty \right\}$.

$\ell_\infty(B_{E^*})$ $:= \left\{ (\xi_\varphi)_{\varphi \in B_{E^*}} \in \prod_{\varphi \in B_{E^*}} \mathbb{K} : \sup_{\varphi \in B_{E^*}} |\xi_\varphi| < \infty \right\}$.

$Q_E \colon \ell_1(B_E) \overset{1}{\twoheadrightarrow} E$ sobrejeção métrica canônica (E um espaço de Banach).

$I_E \colon E \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(B_{E^*})$ injeção métrica canônica.

$L(E_1, \ldots, E_m; F)$ espaço vetorial dos operadores m-lineares de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F.

$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ espaço vetorial dos operadores m-lineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F.

$L(^mE; F)$ $L(E, \overset{(m)}{\ldots}, E; F)$.

$\mathcal{L}(^mE; F)$ $\mathcal{L}(E, \overset{(m)}{\ldots}, E; F)$.

$L^s(^nE; F)$ subespaço vetorial de $L(^nE; F)$ das aplicações multilineares simétricas.

$\mathcal{L}^s(^mE; F)$ subespaço vetorial de $\mathcal{L}(^mE; F)$ das aplicações multilineares simétricas.

$P(^mE; F)$ espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m-homogêneos de E em F.

$\mathcal{P}(^mE; F)$ espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m-homogêneos contínuos de E em F.

$\mathcal{I}$ ideal de operadores.

$\mathcal{I}^{dual}$ ideal dual de $\mathcal{I}$.

$\mathcal{I}^{inj}$ envoltória injetiva de um ideal de operadores $\mathcal{I}$.

$\mathcal{F}$ ideal dos operadores de posto finito.

$\overline{\mathcal{F}}$ ideal dos operadores aproximáveis.

$\mathcal{K}$	ideal dos operadores compactos.
$\mathcal{W}$	ideal dos operadores fracamente compactos.
$\mathcal{D}_\infty$	ideal de operadores de Asplund.
$\mathcal{R}$	ideal de operadores de Rosenthal.
$\mathcal{M}$	ideal de aplicações multilineares.
$\mathcal{Q}$	ideal de polinômios homogêneos contínuos.
$\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$	ideal de composição de polinômios.
$\mathcal{I}^{\mathcal{P}-dual}$	ideal polinomial do ideal de operadores $\mathcal{I}$.
$\mathcal{P}_f(^mE;F)$	conjunto dos polinômios m-homogêneos de tipo finito de E em F.
$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^mE;F)$	conjunto dos polinômios m-homogêneos de posto finito entre os espaços vetoriais E e F.
$\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^mE;F)$	conjunto dos polinômios m-homogêneos contínuos compactos entre os espaços de Banach E e F.
$\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^mE;F)$	conjunto dos polinômios m-homogêneos contínuos fracamente compactos entre os espaços de Banach E e F.
$\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$	ideal de polinômios gerado pelo ideal $\mathcal{M}$.
$\mathcal{Q}^{inj}$	envoltória injetiva de um ideal de polinômios $\mathcal{Q}$.
$\mathcal{G}^{inj}$	envoltória injetiva de um germe de ideal de operadores, germe de ideal de polinômios ou germe de hiper-ideal de polinômios $\mathcal{G}$.
$\mathcal{I}^{sur}$	envoltória sobrejetiva de um ideal de operadores $\mathcal{I}$.
$\mathcal{Q}^{sur}$	envoltória sobrejetiva de um ideal de polinômios $\mathcal{Q}$.
$\mathcal{G}^{sur}$	envoltória sobrejetiva de um germe de ideal de operadores, germe de ideal de polinômios $\mathcal{G}$.
$\Delta_k^n P$	k-adjunto generalizado de ordem n do polinômio P.
$\Delta_k^n \mathcal{Q}_n$	k-dual do ideal de polinômios n-homogêneos $\mathcal{Q}_n$.
$\mathcal{A}_{m,left}^{comp}$	m-ideal de composição a esquerda associado ao ideal de operadores $\mathcal{A}$.
$\mathcal{A}_{m,right}^{comp}$	m-germe de composição a direita associado ao ideal de operadores $\mathcal{A}$.
$\Delta_k^n \mathcal{Q}_n(^mE;F)$	$(\Delta_k^n \mathcal{Q}_n) \cap \mathcal{P}(^mE;F)$, componente m de $\Delta_k^n \mathcal{Q}_n$.

$x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$	tensor elementar definido por $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m(A) = A(x_1, \ldots, x_m)$ para toda aplicação $A \in L(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K})$.
$\otimes^m E$	$E \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes E$.
$\otimes^{m,s} E$	produto tensorial simétrico de E, definido como o subespaço do produto tensorial $\otimes^m E$ gerado pelos tensores da forma $x \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x, x \in E$.
$\otimes_\pi^{m,s} E$	espaço normado $(\otimes^{m,s} E, \pi)$.
$\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E$	completamento do espaço normado $\otimes_\pi^{m,s} E$.
P_L	Linearização de $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$.
$L_k^E \colon \mathcal{P}(^k E) \longrightarrow \left(\widehat{\otimes}_\pi^{k,s} E\right)^*$	isomorfismo topológico, definido por $L_k^E(q) = q_L$.

Sumário

INTRODUÇÃO

A Análise Funcional Linear tem como principal meta estudar os operadores lineares contínuos entre espaços normados e espaços de Banach. Nesta tese estamos interessados na interseção de três desenvolvimentos centrais da teoria. Para descrevê-los, sejam E e F espaços de Banach, E^* o dual topológico de E e $\mathcal{P}(^mE;F)$ o espaço dos polinômios m-homogêneos contínuos de E em F.

O primeiro desenvolvimento é a noção clássica de adjunto $u^*\colon F^* \longrightarrow E^*$ de um operador linear contínuo $u\colon E \longrightarrow F$, que é uma ferramenta básica da Análise Funcional e permeia praticamente todas as suas sub-áreas.

O segundo é a Teoria de Ideais de Operadores, que surgiu a partir dos trabalhos de vários matemáticos a partir da metade do século 20, em especial os trabalhos de A. Grothendieck. Essa teoria estuda as classes especiais de operadores lineares que satisfazem a propriedade clássica de ideal da álgebra, a saber: na seguinte cadeia de operadores lineares contínuos entre espaços de Banach

$$E \xrightarrow{v} F \xrightarrow{u} G \xrightarrow{t} H,$$

se u pertence à classe, então $t \circ u \circ v$ também pertence à classe. Exemplos clássicos são os operadores de posto finito, os operadores compactos e os operadores fracamente compactos. O aparecimento de um grande número de classes de operadores desse tipo e a importância dessas classes para a teoria dos espaços de Banach culminou na criação de uma teoria abstrata de ideais de operadores, concebida por A. Pietsch na década de 1960 e formalizada por ele no livro [35].

Esses dois primeiros desenvolvimentos se encontram na definição do ideal dual $\mathcal{I}^{dual}$ do ideal de operadores $\mathcal{I}$, que é formado pelos operadores u tais que u^* pertence a $\mathcal{I}$ (veja, por exemplo, [20, 21, 35]). Essa noção se tornou básica na teoria e dá origem a termos como *ideal simétrico* e *ideal completamente simétrico*.

O terceiro desenvolvimento é o avanço da teoria para o caso não-linear, com o advento da teoria de operadores multilineares, polinômios homogêneos e funções holomorfas, teoria esta que se desenvolveu fortemente na segunda metade do século 20 e teve no matemático brasileiro Leopoldo Nachbin um dos seus maiores expoentes (veja, por exemplo, [34]).

O primeiro desenvolvimento se encontra com o terceiro no trabalho de R. Aron e M. Schottenlher [4] de 1976 no qual é introduzida a noção de adjunto de um polinômio m-homogêneo contínuo $P\colon E \longrightarrow F$ da seguinte forma:

$$P^*\colon F^* \longrightarrow \mathcal{P}(^mE)\ ,\ P^*(\varphi)(x) = \varphi(P(x)).$$

O adjunto de um polinômio homogêneo tem sido ferramenta importante no estudo de espaços de polinômios homogêneos e em holomorfia em dimensão infinita. Para aplicações recentes do adjunto de um polinômio, veja, por exemplo [19, 29, 44].

O segundo desenvolvimento se encontra com o terceiro com o advento da teoria de ideais de operadores multilineares e de ideais de polinômios homogêneos que se iniciou nas décadas de 1980 e 1990, principalmente com os trabalhos de A. Pietsch [36] e K. Floret e S. Hunfeld [25]. Uma grande quantidade de artigos tem sido publicada nesta área nas últimas três décadas, a ponto da American Mathematical Society ter criado, em 2010, um código específico para designá-la: 47L22 - Ideals of polynomials and of multilinear mappings.

Os três desenvolvimentos tiveram um primeiro encontro no trabalho [14], de 2014, onde se estuda o dual polinomial de um ideal de operadores. É interessante notar que, apesar de estar no escopo da teoria não-linear, o adjunto P^* de um polinômio homogêneo P é um operador linear. Isso não impediu que essa noção encontrasse muitas aplicações, mas deixa campo aberto para a investigação de noções mais gerais, indo mais a fundo na não-linearidade do assunto. Este é, precisamente, o objetivo central da presente tese. Com o intuito de aprofundar as relações dos três desenvolvimentos acima e buscando explorar o aspecto não-linear da matéria, introduzimos o conceito de dual generalizado de um polinômio homogêneo da seguinte forma: para cada polinômio m-homogêneo contínuo $P\colon E \longrightarrow F$ e para cada par n, k de número naturais, definimos o polinômio n-homogêneo

$$\Delta_k^n P\colon \mathcal{P}(^kF) \longrightarrow \mathcal{P}(^{mnk}E), \Delta_k^n P(q)(x) = [q(P(x))]^n,$$

chamado de k-adjunto generalizado de ordem n do polinômio P. Os casos já estudados são casos particulares pois $\Delta_1^1 u = u^*$ para todo operador linear u e $\Delta_1^1 P = P^*$ para todo polinômio P.

No segundo capítulo da tese (o primeiro capítulo é dedicado a noções e resultados preliminares) estudamos as propriedades básicas dos adjuntos generalizados. Mostramos que muitas propriedades conhecidas dos adjuntos já estudados são casos particulares dos adjuntos generalizados, mostramos que algumas propriedades conhecidas não se estendem ao caso geral e descobrimos também algumas propriedades do caso geral que não tinham como serem descobertas nos casos clássicos.

De acordo com a definição do dual de um ideal de operadores lineares, um passo natural na teoria geral é considerar, para um dado ideal de polinômios n-homogêneos $\mathcal{Q}_n$, o conjunto

$$(\Delta_k^n \mathcal{Q}_n)\,(^m E; F) = \left\{P \in \mathcal{P}(^m E; F) : \Delta_k^n P \in \mathcal{Q}(^n\mathcal{P}(^k F); \mathcal{P}(^{mnk} F))\right\}.$$

Em vista do ambiente fortemente não-linear, não é de se esperar que esse conjunto seja um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^m E; F)$. Entretanto, a única propriedade de ideais de polinômios que esse conjunto não necessariamente goza é que a adição de dois de seus elementos pertence ao conjunto. Todas as outras propriedades, inclusive a propriedade de ideal, são satisfeitas. Isso nos levou a definir as noções de germe de ideais de operadores lineares e de germe de ideais de polinômios homogêneos. Os conjuntos $\Delta_k^n \mathcal{Q}_n$ são exemplos importantes dessa nova categoria por nós chamada de *germes de ideais*. Esses germes de ideais pretendem ser uma versão não-linear da teoria de ideais.

No terceiro capítulo introduzimos e estudamos os germes de ideais de operadores lineares e de polinômios homogêneos, suas propriedades básicas e damos vários exemplos ilustrativos. Como era de se esperar, os adjuntos generalizados de ideais aparecem como exemplos centrais. A estabilidade de um ideal de operadores em relação à formação do produto tensorial projetivo simétrico mostrar-se-á uma ferramenta fundamental para a obtenção de resultados mais profundos e para o estudo dos germes gerados por alguns ideais clássicos, principalmente os ideais dos operadores compactos e fracamente compactos.

Como é usual na teoria de ideais de operadores, no quarto capítulo estudaremos germes de operadores satisfazendo propriedades especiais, mas especificamente, estudaremos germes fechados, germes injetivos e germes sobrejetivos.

No quinto capítulo apresentamos aplicações da teoria desenvolvida para o estudo de operadores de composição. O objetivo é usar os germes determinados pelos adjuntos generalizados para obter resultados na linha daqueles obtidos por Lindström e Schlüchtermann em [31] no caso linear. Além de avançar no caso não-linear, nossos resultados recuperam os resultados originais como casos particulares. Mais especificamente, consideramos e damos algumas respostas para o seguinte problema geral: dados E, E_1, F, F_1 espaços de Banach, $R \in \mathcal{L}(E; F)$ e $B \in \mathcal{L}(E_1; F_1)$ operadores lineares contínuos não nulos, $\mathcal{A}$ um ideal de operadores e $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal Banach de polinômios homogêneos, quais são as condições, de preferência necessárias e suficientes, para que o operador linear contínuo

$$S_{RB}\colon \mathcal{Q}(^m F_1; E) \longrightarrow \mathcal{Q}(^m E_1; F)\ ,\ S_{RB}(P) = R \circ P \circ B,$$

pertença ao ideal $\mathcal{A}$?

No final incluímos um pequeno apêndice no qual provamos um resultado sobre a associatividade do produto tensorial projetivo simétrico de que precisamos em um dado momento da tese. Apesar de acharmos que este resultado é conhecido, não o encontramos na literatura e optamos por demonstrá-lo no apêndice.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo introduziremos os conceitos básicos, e suas respectivas notações, que serão necessários para o desenvolvimento da tese.

Dado um espaço normado E, por E^* denotamos seu dual topológico munido da norma usual de funcionais lineares e por B_E sua bola unitária fechada. Ao longo do trabalho, todos os espaços vetoriais são sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Operadores multilineares

Definição 1.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços vetoriais. Dizemos que um operador A: $E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é *n-linear (ou multilinear)* se é linear em cada uma das suas variáveis, isto é,

$$A(x_1, \ldots, x_i + \lambda x_i', \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \lambda A(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n),$$

para quaisquer $x_i, x_i' \in E_i$, com $i = 1, \ldots, n$, e $\lambda \in \mathbb{K}$. Se $F = \mathbb{K}$, dizemos que A é uma *forma n-linear*.

O conjunto de todos os operadores n-lineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F será denotado por $L(E_1, \ldots, E_n; F)$. Se $F = \mathbb{K}$ denotamos $L(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$ por $L(E_1, \ldots, E_n)$. No caso em que $E = E_1 = \cdots = E_n$ denotamos este conjunto por $L(^nE; F)$. Se $E = E_1 = \cdots = E_n$ e $F = \mathbb{K}$ escrevemos simplesmente $L(^nE)$. No caso $n = 1$ escrevemos $L(^1E; F) = L(E; F)$. Se $n = 1$ e $F = \mathbb{K}$ então $L(E; \mathbb{K}) = E^\sharp$= dual algébrico de E.

A seguir definiremos as operações algébricas usuais no conjunto $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ no sentido de torná-lo um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$:

1) A cada par de operadores n-lineares $A, B \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ fazemos corresponder um operador n-linear $A + B \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ definido por:

$$A + B \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F;$$
$$(A + B)(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n) + B(x_1, \ldots, x_n).$$

2) A cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ e cada operador n-linear $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ fazemos corresponder o operador n-linear $\lambda A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ definido por:

$$\lambda A \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F, \ (\lambda A)(x_1, \ldots, x_n) = \lambda A(x_1, \ldots, x_n).$$

Proposição 1.2. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços vetoriais normados. Para cada operador $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$, as afirmações seguintes são equivalentes:*

(*i*) *A é contínuo.*

(*ii*) *A é contínuo na origem.*

(*iii*) *Existe uma constante $C \geqslant 0$ tal que*

$$\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant C \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|,$$

para quaisquer $x_j \in E_j, j = 1, \ldots, n$.

(*iv*) $\|A\| := \sup \{\|A(x_1, \ldots, x_n)\| : x_j \in E_j \text{ e } \|x_j\| \leqslant 1, j = 1, \ldots, n\} < +\infty.$

Demonstração. Veja [32, Proposition 1.2]. □

Definição 1.3. Sejam $E, E_1, \ldots, E_n$ e F espaços vetoriais normados. Denotaremos o conjunto de todos os operadores n-lineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F por $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Se $E_1 = \cdots = E_n = E$ escrevemos $\mathcal{L}(^nE; F)$. No caso $n = 1$ e $F = \mathbb{K}$ escrevemos E^* no lugar de $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ e dizemos que E^* é o dual topológico de E. Para $n = 0$ escrevemos $\mathcal{L}(^0E; F) = F$ (espaço das funções constantes a valores em F).

Proposição 1.4. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços vetoriais normados.*

(*i*) *$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_n; F)$.*

(*ii*) *A função $A \longrightarrow \|A\|$ é uma norma em $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$.*

(*iii*) *Se F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ com a norma do item (ii) também é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [32, Proposition 1.3]. □

Definição 1.5. Um operador multilinear $A\colon E^n \longrightarrow F$ é dito ser *simétrico* se

$$A(x_1, \dots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ e toda permutação $\sigma \in S_n$, onde S_n denota o conjunto das permutações dos primeiros n números naturais.

Os conjuntos dos operadores multilineares simétricos e dos operadores multilineares simétricos contínuos $A\colon E^n \longrightarrow F$ serão denotados, respectivamente, por $L^s({}^nE; F)$ e $\mathcal{L}^s({}^nE; F)$. É fácil ver que $L^s({}^nE; F)$ é subespaço vetorial de $L({}^nE; F)$ e que $\mathcal{L}^s({}^nE; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}({}^nE; F)$.

Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos $\mathcal{L}({}^nE; F) = \mathcal{L}({}^nE)$ e $\mathcal{L}^s({}^nE; F) = \mathcal{L}^s({}^nE)$. Para $n = 0$ escrevemos $\mathcal{L}^s({}^0E; F) = F$ (espaço das funções constantes a valores em F).

Definição 1.6. Para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada multi-índice $\gamma = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k$, definimos :

$$\begin{cases} \|\gamma\| &= n_1 + \cdots + n_k \\ \gamma! &= \displaystyle\prod_{j=1}^{k} n_j! \end{cases}$$

Definição 1.7. Sejam $A \in L({}^nE; F)$ e $k \leqslant n$. Para cada $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$ e cada multi-índice $\gamma = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k$ com $\|\gamma\| = n$, definimos

$$Ax_1^{(n_1)} \cdots x_k^{(n_k)} = A(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{x_k, \dots, x_k}_{n_k \text{ vezes}}).$$

Definição 1.8. Para cada $A \in L({}^nE; F)$, o operador n-linear

$$A^s\colon E^n \longrightarrow F \ , \ A^s(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

é chamado de *simetrização* de A.

Teorema 1.9 (Fórmula de Leibniz)**.** *Sejam E, F espaços vetoriais e $A \in L^s({}^nE; F)$. Então para quaisquer $x_1, \dots, x_k \in E$, temos*

$$A(x_1 + \cdots + x_k)^{(n)} = \sum_{\|\gamma\| = n} \frac{n!}{\gamma!} Ax_1^{(n_1)} \cdots x_k^{(n_k)}.$$

Demonstração. Veja [32, Theorem 1.8]. □

Corolário 1.10 (Fórmula Binomial de Newton)**.** *Se $A \in L^s({}^nE; F)$, então para quaisquer $x, y \in E$ temos*

$$A(x + y)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} Ax^{(n-j)} y^{(j)}.$$

Demonstração. Veja [32, Corollary 1.9]. □

Teorema 1.11 (Fórmula de Polarização)**.** *Sejam E, F espaços vetoriais e $A \in L^s(^nE;F)$. Então*

$$A(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_i=\pm 1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n A(x_0+\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_nx_n)^{(n)},$$

para quaisquer $x_j \in E$, com $j = 0,1,\ldots,n$.

Demonstração. Veja [32, Theorem 1.10]. □

1.2 Polinômios homogêneos

Definição 1.12. Sejam E e F espaços vetoriais normados e $m \in \mathbb{N}$. Uma aplicação $P\colon E \longrightarrow F$ será denominada *polinômio m-homogêneo*, ou *polinômio homogêneo de grau m*, se existir um operador $A \in L(^mE;F)$ tal que $P(x) = Ax^{(m)}$ para todo $x \in E$.

Denotaremos por $P(^mE;F)$ o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau m, denotaremos também por $\mathcal{P}(^mE;F)$ o subespaço vetorial de $P(^mE;F)$ formado pelos polinômios m-homogêneos contínuos. Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos $P(^mE)$ no lugar de $P(^mE;F)$ e $\mathcal{P}(^mE)$ no lugar de $\mathcal{P}(^mE;F)$.

Para cada $P \in P(^mE;F)$, definimos $\|P\| := \sup\{\|P(x)\| : x \in E, \|x\| \leqslant 1\}$.

A seguir apresentamos alguns resultados sobre polinômios homogêneos, que podem ser encontrados em [32] e [22], mas por questões didáticas nos referimos à referência [2].

Proposição 1.13. *Sejam E, F espaços vetoriais normados. Para cada $A \in L(^mE;F)$ considere a aplicação dada por*

$$\widehat{A}\colon E \longrightarrow F,\ \widehat{A}(x) := Ax^{(m)}.$$

Desse modo, a correspondência $A \longmapsto \widehat{A}$ induz um isomorfismo entre os espaços vetoriais $L^s(^mE;F)$ e $P(^mE;F)$. Mais ainda,

$$\|\widehat{A}\| \leqslant \|A\| \leqslant \frac{m^m}{m!}\|\widehat{A}\|.$$

Demonstração. Veja [2, Proposição 1.2.2]. □

Observação 1.14. De acordo com a Proposição 1.13, para cada $P \in P(^mE;F)$ existe um único operador multilinear simétrico $A \in L^s(^mE;F)$ tal que $Ax^{(m)} = P(x)$ para todo $x \in E$. Nesse caso denotamos $\check{P} := A$.

Proposição 1.15. *Sejam E, F espaços normados e $P \in P(^mE; F)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *P é contínuo.*

(ii) *P é contínuo na origem.*

(iii) $\|P\| < \infty$.

(iv) *Existe $K \geqslant 0$ tal que $\|P(x)\| \leqslant K \cdot \|x\|^m$ para todo $x \in E$.*

(v) *O operador n-linear simétrico $\check{P}$ é contínuo.*

(vi) *Existe $A \in \mathcal{L}(^mE; F)$ tal que $P(x) = Ax^{(m)}$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. Veja [2, Proposição 1.2.7]. □

Proposição 1.16. *Sejam E, F espaços normados. Então $(\mathcal{P}(^mE; F), \| \cdot \|)$ é um espaço normado (de Banach se F for Banach). Mais ainda,*

$$\|P(x)\| \leqslant \|P\| \cdot \|x\|^m$$

para todos $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ e $x \in E$.

Demonstração. Veja [2, Proposições 1.2.8 e 1.2.10]. □

Proposição 1.17. *O operador*

$$\varphi \colon \mathcal{L}^s(^mE; F) \longrightarrow \mathcal{P}(^mE; F) \ , \ \varphi(A) = \widehat{A},$$

é um isomorfismo topológico.

Demonstração. Veja [2, Proposição 1.2.9]. □

Definição 1.18. Dizemos que o espaço normado E *contém uma cópia isomorfa* do espaço normado F se existe um subespaço G de E isomorfo (topologicamente) a F.

Proposição 1.19. *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Então o espaço vetorial normado $\mathcal{P}\left(^mE; \mathcal{P}(^nE; F)\right)$ contém uma cópia isomorfa do espaço normado $\mathcal{P}(^{m+n}E; F)$ por meio do operador:*

$$P \in \mathcal{P}(^{m+n}E; F) \mapsto \widetilde{P}(x)(y) = \check{P}(x^{(m)}, y^{(n)}).$$

Demonstração. Veja [2, Proposição 1.2.12]. □

Definição 1.20 (Polinômios de posto finito)**.** Dizemos que um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ é de *posto finito* se $\text{span}\{P(E)\}$ é subespaço de dimensão finita de F.

Sejam E, F espaços normados. Denotaremos por $\mathcal{P}_{\mathfrak{F}}(^nE; F)$ o conjunto dos polinômios $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ de posto finito. Exemplos canônicos deste tipo de polinômios são dados da seguinte forma:

$$q \otimes b \colon E \longrightarrow F, \; q \otimes b(x) = q(x)b,$$

onde $q \in \mathcal{P}(^nE)$ e $b \in F$. Além disso, prova-se que todo polinômio de posto finito é uma combinação linear de polinômios desta forma:

Proposição 1.21. *Para todos espaços de Banach E e F e $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^nE; F) = \left\{ \sum_{j=1}^{m} q_j \otimes b_j : m \in \mathbb{N}, q_j \in \mathcal{P}(^nE), b_j \in F \right\}.$$

Em particular, $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^nE; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^nE; F)$.

Demonstração. Veja [42, Proposição 1.2.10] ou [37, Proposição 4.2.1]. □

Definição 1.22 (Polinômio de tipo finito)**.** Dados E, F espaços normados, dizemos que um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ é de *tipo finito* se existem $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in E^*$ e $b_1, \ldots, b_m \in F$ tais que $P(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j^n(x) b_j$ para todo $x \in E$.

É claro que os polinômios de tipo finito formam um subespaço de $\mathcal{P}(^nE; F)$, que será denotado por $\mathcal{P}_f(^nE; F)$.

1.3 Ideais de operadores e polinômios homogêneos

O conceito de ideais de operadores foi sintetizado por A. Pietsch [35] a partir de classes especiais de operadores lineares. A seguir apresentamos a definição de ideal de operadores, e nela notamos que o fato de cada componente ser um espaço vetorial é uma noção importante.

Definição 1.23 (Ideais de operadores)**.** Um *ideal de operadores* $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para quaisquer espaços de Banach E e F, as componentes

$$\mathcal{I}(E; F) := \mathcal{L}(E; F) \cap \mathcal{I}$$

satisfazem:

(1) $\mathcal{I}(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ que contém os operadores de posto finito;

(2) Propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $v \in \mathcal{I}(F;G)$ e $t \in \mathcal{L}(G;H)$, então $t \circ v \circ u \in \mathcal{I}(E;H)$.

Se existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} \colon \mathcal{I} \longrightarrow [0,+\infty)$ tal que

(*a*) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita a $\mathcal{I}(E;F)$ é uma norma para quaisquer espaços de Banach E e F;

(*b*) $\|id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : id(\lambda) = \lambda\|_{\mathcal{I}} = 1$;

(*c*) Se $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $v \in \mathcal{I}(F;G)$ e $t \in \mathcal{L}(G;H)$, então $\|t \circ v \circ u\|_{\mathcal{I}} \leqslant \|t\| \cdot \|v\|_{\mathcal{I}} \cdot \|u\|$,

então $\mathcal{I}$ é chamado de *ideal normado de operadores*. Se as componentes $\mathcal{I}(E;F)$ forem completas com respeito à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, dizemos que $\mathcal{I}$ é um *ideal Banach de operadores*. Também, se as componentes $\mathcal{I}(E;F)$ forem fechadas com respeito à norma usual de $\mathcal{L}(E;F)$, dizemos que $\mathcal{I}$ é um *ideal fechado de operadores*.

Proposição 1.24. *As seguintes afirmações são satisfeitas por um ideal normado de operadores* $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$*:*

(*i*) $\|u\| \leqslant \|u\|_{\mathcal{I}}$ *para todo* $u \in \mathcal{I}(E;F)$.

(*ii*) $\|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi\| \cdot \|y\|$ *para todos* $\varphi \in E^*$ *e* $y \in F$.

Demonstração. Veja [20, 9.3] □

Proposição 1.25. *Se* $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ *e* $(\mathcal{J}, \|\cdot\|_{\mathcal{J}})$ *são dois ideais de Banach de operadores tais que* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$*, então existe uma constante* $\rho > 0$ *tal que* $\|u\|_{\mathcal{J}} \leqslant \rho\|u\|_{\mathcal{I}}$ *para todo* $u \in \mathcal{I}$.

Demonstração. Veja [20, Proposition 9.5]. □

Definição 1.26. Uma sequência $(x_n)_n$ em um espaço de Banach E é uma *sequência fraca de Cauchy* se para todo $x^* \in E^*$, $(x^*(x_n))_n$ é uma sequência de Cauchy.

Definição 1.27. Um subconjunto K do espaço de Banach E é chamado um *conjunto de Asplund* se $\left((\overline{\operatorname{span}}K_0)^*, p_{K_0}\right)$ é separável para todo subconjunto enumerável $K_0 \subset K$, onde p_{K_0} é uma seminorma definida por $p_{K_0}(x^*) := \sup\limits_{x \in K_0} |x^*(x)|$, para todo $x^* \in (\overline{\operatorname{span}}K_0)^*$. Diz-se que E é um *espaço de Asplund* se B_E é um conjunto de Asplund.

Definição 1.28. Sejam E, F espaços de Banach e $u \in \mathcal{L}(E, F)$. O operador u é:
(a) *compacto* se $\overline{u(B_E)}$ é um subconjunto compacto de F.
(b) *fracamente compacto* se $\overline{u(B_E)}^{\sigma(F,F^*)}$ é um subconjunto $\sigma(F, F^*)$-compacto de F.
(c) um *operador de Asplund* se $u(B_E)$ é um subconjunto de Asplund em F.
(d) um *operador de Rosenthal* se toda sequência $(u(x_n))_n$, com $(x_n)_n \subseteq B_E$, admite uma subsequência fraca de Cauchy.

Teorema 1.29 (Teorema ℓ_1 de Rosenthal [26])**.** *Um espaço de Banach E não contém uma cópia isomorfa de ℓ_1 se, e somente se, toda sequência limitada em E tem uma subsequência fracamente de Cauchy.*

Beauzamy [6] mostrou que qualquer operador de Rosenthal fatora-se através de um espaço de Banach que não contém uma cópia isomorfa de ℓ_1, e Reĭnov [38], Heinrich [27] e Stegall [41] mostraram, independentemente, que qualquer operador de Asplund fatora-se através de um espaço de Asplund.

Definição 1.30. (a) Um operador linear $i \colon F \hookrightarrow G$ entre espaços normados é chamado de *injeção métrica* se $\|i(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$.
(b) Um operador linear $j \colon G \twoheadrightarrow E$ entre espaços normados é chamado de *sobrejeção métrica* se j é sobrejetor e

$$\|y\|_E = \inf\{\|x\|_G : j(x) = y\} \text{ para todo } y \in E.$$

O exemplo canônico de injeção métrica é a inclusão de um subespaço no espaço; e o exemplo canônico de sobrejeção métrica é a projeção $\pi \colon E \longrightarrow E/F$ de um espaço normado E no espaço quociente E/F de E por um subespaço fechado F.

Observação 1.31. Vejamos que um operador linear $j \colon G \twoheadrightarrow E$ entre espaços normados é uma sobrejeção métrica se j é sobrejetora e $\|j(x)\|_E = \|\overline{x}\|_{G/\ker(j)}$ para todo $x \in G$. De fato, basta observar que se $y_0 \in E$, como j é sobrejetora, existe $x_0 \in G$ tal que $j(x_0) = y_0$, Assim,

$$\begin{aligned}
\|y_0\|_E = \|j(x_0)\|_E &= \inf\{\|x\|_G : j(x) = j(x_0)\} = \inf\{\|x\|_G : j(x - x_0) = 0\} \\
&= \inf\{\|x_0 + z\|_G : j(z) = 0\} = \inf\{\|x_0 + z\|_G : z \in \ker(j)\} \\
&= \|\overline{x_0}\|_{G/\ker(j)} = \|j(x_0)\|_E.
\end{aligned}$$

De [35, C.3.3, C.3.7] temos os seguintes exemplos:

Exemplo 1.32. Se E é um espaço de Banach, definimos

$$\ell_1(B_E) := \left\{ (\xi_x)_{x \in B_E} \in \prod_{x \in B_E} \mathbb{K} : \sum_{x \in B_E} |\xi_x| < \infty \right\},$$

$$\ell_\infty(B_{E^*}) := \left\{ (\xi_\varphi)_{\varphi \in B_{E^*}} \in \prod_{\varphi \in B_{E^*}} \mathbb{K} : \sup_{\varphi \in B_{E^*}} |\xi_\varphi| < \infty \right\}.$$

(i) O operador

$$I_E\colon E \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(B_{E^*})\ ,\ I_E(x) = (\varphi(x))_{\varphi \in B_{E^*}}\ ,$$

é uma injeção métrica, chamada de imersão métrica canônica.

(ii) O operador

$$Q_E\colon \ell_1(B_E) \overset{1}{\twoheadrightarrow} E\ ,\ Q_E\left((\xi_x)_{x \in B_E}\right) = \sum_{x \in B_E} \xi_x x,$$

é uma sobrejeção métrica, chamada de sobrejeção métrica canônica.

Definição 1.33 (Ideais injetivos e sobrejetivos)**.** Dizemos que um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é:
(a) *injetivo* se dados $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e uma injeção métrica $i : F \hookrightarrow G$ tais que $i \circ u \in \mathcal{I}(E;G)$, tem-se $u \in \mathcal{I}(E;F)$. Um ideal normado $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é *injetivo* se, além disso, $\|u\|_{\mathcal{I}} = \|i \circ u\|_{\mathcal{I}}$.
(b) *sobrejetivo* se dados $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e uma sobrejeção métrica $s : G \twoheadrightarrow E$ tais que $u \circ s \in \mathcal{I}(G;F)$, tem-se $u \in \mathcal{I}(E;F)$. Um ideal normado $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é sobrejetivo se, além disso, $\|u\|_{\mathcal{I}} = \|u \circ s\|_{\mathcal{I}}$.

Proposição 1.34. *Seja $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado de operadores. Então existe um único menor ideal de operadores injetivo $\mathcal{I}^{inj}$ que contém $\mathcal{I}$. Se $I_F\colon F \hookrightarrow \ell_\infty(B_{F^*})$ denota a imersão métrica do Exemplo 1.32, então para cada $u \in \mathcal{L}(E;F)$,*

$$u \in \mathcal{I}^{inj}(E;F) \Leftrightarrow I_F \circ u \in \mathcal{I}(E;\ell_\infty(B_{F^*})).$$

Definindo $\|u\|_{\mathcal{I}^{inj}} := \|I_F \circ u\|_{\mathcal{I}}$, $\left(\mathcal{I}^{inj}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{inj}}\right)$ é um ideal normado de operadores, que é Banach se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ for Banach. O ideal $\left(\mathcal{I}^{inj}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{inj}}\right)$ é chamado de **envoltória injetiva** *de $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$.*

Demonstração. Veja [20, 9.7]. □

Proposição 1.35. *Seja $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado de operadores. Então existe um único menor ideal de operadores sobrejetivo $\mathcal{I}^{sur}$ que contém $\mathcal{I}$. Se $Q_E\colon \ell_1(B_E) \twoheadrightarrow E$ denota a sobrejeção métrica do Exemplo 1.32, então para cada $u \in \mathcal{L}(E;F)$,*

$$u \in \mathcal{I}^{sur}(E;F) \Leftrightarrow u \circ Q_E \in \mathcal{I}(\ell_1(B_E);F).$$

Definindo $\|u\|_{\mathcal{I}^{sur}} := \|u \circ Q_E\|_{\mathcal{I}}$, $(\mathcal{I}^{sur}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{sur}})$ é um ideal normado de operadores, que é Banach se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ for Banach. O ideal $(\mathcal{I}^{sur}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{sur}})$ é chamado de **envoltória sobrejetiva** *de $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$.*

Demonstração. Veja [20, 9.8]. □

Para um ideal de operadores $\mathcal{I}$ mostra-se que:

- $\mathcal{I}$ é injetivo se, e somente se, $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{inj}$;
- $\mathcal{I}$ é sobrejetivo se, e somente se, $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{sur}$.

De [35], sabemos que as classes de operadores compactos $\mathcal{K}$, fracamente compactos $\mathcal{W}$, Asplund $\mathcal{D}_\infty$ e Rosenthal $\mathcal{R}$ são todas ideais de operadores fechados, injetivos e sobrejetivos.

Definição 1.36 (Ideal dual de operadores)**.** Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Definimos o seu *dual* da seguinte forma:

$$\mathcal{I}^{dual}(E;F) = \{u \in \mathcal{L}(E;F) : \; u^* \in \mathcal{I}(F^*;E^*)\},$$

para todos E, F espaços de Banach.

Se $\mathcal{I}$ é um ideal normado de operadores e $u \in \mathcal{I}^{dual}(E;F)$, então definindo $\|u\|_{\mathcal{I}^{dual}} := \|u^*\|_{\mathcal{I}}$, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.37. *Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal normado de operadores (Banach), então $\left(\mathcal{I}^{dual}; \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{dual}}\right)$ é um ideal normado de operadores (Banach).*

Demonstração. Veja [20, 9.9] □

Corolário 1.38. *Se $\mathcal{I}$ é um ideal fechado, então $\mathcal{I}^{dual}$ é também um ideal fechado.*

Definição 1.39. Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é:

(i) *simétrico* se $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\text{dual}}$;

(ii) *anti-simétrico* se $\mathcal{I}^{\text{dual}} \subseteq \mathcal{I}$;

(iii) *completamente simétrico* se $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{dual}}$.

Teorema 1.40. (a) *Teorema de Schauder: O ideal dos operadores compactos é completamente simétrico, isto é, $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{dual}$.*
(b) *Teorema de Gantmacher: O ideal dos operadores fracamente compactos é completamente simétrico, isto é, $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{dual}$.*

Demonstração. Veja [28, Theorem 17.1.3 e Theorem 17.2.5]. □

Definição 1.41 (Propriedade da aproximação)**.** Um espaço de Banach E possui a *propriedade da aproximação* se para todo $K \subset E$ compacto e todo $\varepsilon > 0$ existe $u \in \mathcal{F}(E,E)$ tal que $\|u(x) - x\| < \varepsilon$ para todo $x \in K$.

Proposição 1.42. (a) *Se F tem a propriedade da aproximação, então $\overline{\mathcal{F}(E,F)} = \mathcal{K}(E,F)$ para todo espaço de Banach E.*
(b) *Se E^* tem a propriedade da aproximação, então $\overline{\mathcal{F}(E,F)} = \mathcal{K}(E,F)$ para todo espaço de Banach F.*

Demonstração. Veja [35, Proposition 10.1.3 e Proposition 10.1.4]. □

Definição 1.43 (Ideal de polinômios homogêneos)**.** Um *ideal de polinômios homogêneos* é uma classe $\mathcal{Q}$ de polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$ e quaisquer espaços de Banach E e F, as componentes

$$\mathcal{Q}(^m E; F) := \mathcal{P}(^m E; F) \cap \mathcal{Q}$$

satisfazem:

(1) $\mathcal{Q}(^m E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^m E; F)$ que contém os polinômios m-homogêneos de tipo finito;

(2) Propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(G; E)$, $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então $t \circ P \circ u \in \mathcal{Q}(^m G; H)$.

Se existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \colon \mathcal{Q} \longrightarrow [0, +\infty)$ tal que

(a) Para cada natural m, $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ restrita a $\mathcal{Q}(^m E; F)$ é uma norma para quaisquer espaços de Banach E e F;

(b) $\|id_{\mathbb{K}}^m : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : id_{\mathbb{K}}^m(\lambda) = \lambda^m\|_{\mathcal{Q}} = 1$ para todo m;

(c) Se $u \in \mathcal{L}(G; E)$, $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$\|t \circ P \circ u\|_{\mathcal{Q}} \leqslant \|t\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|u\|^m,$$

então $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é chamado de *ideal normado de polinômios homogêneos*. Se as componentes $\mathcal{Q}(^m E; F)$ são completas com respeito à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$, dizemos que $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é um *ideal Banach de polinômios homogêneos*. Para um ideal fixo $\mathcal{Q}$ de polinômios homogêneos e $m \in \mathbb{N}$, a classe

$$\mathcal{Q}_m := \bigcup_{E,F} \mathcal{Q}(^m E; F)$$

é chamada de *ideal de polinômios m-homogêneos*. Um ideal de Banach de polinômios m-homogêneos é dito *fechado* se cada componente $\mathcal{Q}(^m E; F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{P}(^m E; F)$ na norma usual. Um ideal $\mathcal{Q}$ de polinômios homogêneos é *fechado* se cada $\mathcal{Q}_m$ é fechado. Se $\mathcal{Q}$ é um ideal de polinômios, definimos $\mathcal{Q}(^0 E; F) = F$ para todos E e F.

A noção a seguir foi introduzida em [43].

Definição 1.44 (Hiper-ideal de polinômios)**.** Dizemos que uma subclasse $\mathcal{Q}$ da classe de todos os polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach é um *hiper-ideal de polinômios* se, para todo $m \in \mathbb{N}$ e quaisquer espaços de Banach E e F, as componentes

$$\mathcal{Q}(^m E; F) := \mathcal{P}(^m E; F) \cap \mathcal{Q}$$

satisfazem:

(1) $\mathcal{Q}(^m E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^m E; F)$ contendo os polinômios m-homogêneos de tipo finito;

(2) Propriedade de hiper-ideal: Para m, $n \in \mathbb{N}$, e espaços de Banach E, F, G e H, se $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$, $Q \in \mathcal{P}(^n G; E)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então $t \circ P \circ Q \in \mathcal{Q}(^{mn} G; H)$.

Se existe uma função $\| \cdot \|_{\mathcal{Q}} \colon \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

(a) Para cada natural m, $\| \cdot \|_{\mathcal{Q}}$ restrita a qualquer componente $\mathcal{Q}(^m E; F)$ é uma norma;

(b) $\|id_{\mathbb{K}}^m : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : id_{\mathbb{K}}^m(\lambda) = \lambda^m\|_{\mathcal{Q}} = 1$ para todo m;

(c) Se $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$, $Q \in \mathcal{P}(^n G; E)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então $\|t \circ P \circ Q\|_{\mathcal{Q}} \leqslant \|t\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|Q\|^m$;

então o par $(\mathcal{Q}, \| \cdot \|_{\mathcal{Q}})$ é chamado de *hiper-ideal normado de polinômios*.

A noção a seguir foi introduzida em [18].

Definição 1.45 (Ideal bilateral de polinômios)**.** Dizemos que uma subclasse $\mathcal{Q}$ da classe de todos os polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach é um *ideal bilateral de polinômios* se, para todo $m \in \mathbb{N}$ e quaisquer espaços de Banach E e F, as componentes

$$\mathcal{Q}(^m E; F) := \mathcal{P}(^m E; F) \cap \mathcal{Q}$$

satisfazem:

(1) $\mathcal{Q}(^m E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^m E; F)$ contendo os polinômios m-homogêneos de tipo finito;

(2) Propriedade de ideal bilateral: Para m, n, $r \in \mathbb{N}$, e espaços de Banach E, F, G e H, se $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$, $Q \in \mathcal{P}(^n G; E)$ e $R \in \mathcal{P}(^r F; H)$, então $R \circ P \circ Q \in \mathcal{Q}(^{rmn} G; H)$.

Se existe uma função $\| \cdot \|_{\mathcal{Q}} \colon \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

(a) Para cada natural m, $\| \cdot \|_{\mathcal{Q}}$ restrita a qualquer componente $\mathcal{Q}(^m E; F)$ é uma norma;

(b) $\|id_{\mathbb{K}}^m : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : id_{\mathbb{K}}^m(\lambda) = \lambda^m\|_{\mathcal{Q}} = 1$ para todo m;

(c) Se $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$, $Q \in \mathcal{P}(^n G; E)$ e $R \in \mathcal{P}(^r F; H)$, então $\|R \circ P \circ Q\|_{\mathcal{Q}} \leqslant \|R\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}}^r \cdot \|Q\|^m$;

Então o par $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é chamado de *ideal bilateral normado de polinômios.*

As correspondentes noções de hiper-ideal e ideal bilateral de polinômios Banach/fechado são definidas de maneira óbvia.

Os ideais abaixo são consequências naturais das classes introduzidas em [36]. Para maiores detalhes veja [15].

Definição 1.46 (Ideal de composição)**.** Dados um ideal de operadores $\mathcal{I}$ e $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$, dizemos que P pertence ao *ideal de composição* $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$, denotado por $P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^m E; F)$, se existem um espaço de Banach G, um polinômio $Q \in \mathcal{P}(^m E; G)$ e um operador $u \in \mathcal{I}(G; F)$ tais que $P = u \circ Q$. Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|)$ é um ideal normado de operadores, então a expressão

$$\|P\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{P}} = \inf \{\|u\|_{\mathcal{I}} \cdot \|Q\| : P = u \circ Q,\ u \in \mathcal{I}(G; F),\ Q \in \mathcal{P}(^m E; G)\}$$

faz de $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ um ideal normado de polinômios.

Definição 1.47. O *dual polinomial* de um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é definido por

$$\mathcal{I}^{\mathcal{P}-dual}(^m E; F) = \{P \in \mathcal{P}(^m E; F) : P^* \in \mathcal{I}(F^*; \mathcal{P}(^m E))\}.$$

Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal normado de operadores, definimos $\|P\|_{\mathcal{I}^{\mathcal{P}-dual}} := \|P^*\|_{\mathcal{I}}$.

Teorema 1.48. *Se $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores, então $\mathcal{I}^{\mathcal{P}-dual} = \mathcal{I}^{dual} \circ \mathcal{P}$. Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal normado de operadores, então $\|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\mathcal{P}-dual}} = \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{dual} \circ \mathcal{P}}$.*

Demonstração. Veja [14, Theorem 2.2]. □

Em particular, o dual polinomial de um ideal de operadores (fechado, normado, Banach) é um ideal de polinômios (fechado, normado, Banach).

Definição 1.49. Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é chamado:

(i) *Compacto*, em símbolos $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^m E; F)$, se $\overline{P(B_E)}$ é um subconjunto compacto de F.

(ii) *Fracamente compacto*, em símbolos $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^m E; F)$, se $\overline{P(B_E)}^{\sigma(F,F^*)}$ é um subconjunto $\sigma(F, F^*)$-compacto de F.

Proposição 1.50. (a) $\mathcal{P}_{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \circ \mathcal{P} = \mathcal{K}^{dual} \circ \mathcal{P} = \mathcal{K}^{\mathcal{P}-dual}$.
(b) $\mathcal{P}_{\mathcal{W}} = \mathcal{W} \circ \mathcal{P} = \mathcal{W}^{dual} \circ \mathcal{P} = \mathcal{W}^{\mathcal{P}-dual}$.

Demonstração. Veja [14, Corollary 2.4]. □

1.4 O produto tensorial projetivo

Nesta seção construiremos, para uso posterior, o produto tensorial projetivo de espaços normados e faremos uma breve exposição sobre a linearização de operadores multilineares e polinômios homogêneos.

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ espaços vetoriais. Dados $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$, considere o funcional linear

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \colon L(X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow \mathbb{K};\ x_1 \otimes \cdots \otimes x_n(T) = T(x_1, \ldots, x_n).$$

O *produto tensorial* de $X_1, \ldots, X_n$ é o subespaço do dual algébrico de $L(X_1, \ldots, X_n)$ gerado pelos funcionais da forma $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$. Denotamos esse espaço por $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ e chamamos seus elementos de *tensores*. Já seus geradores, isto é, os tensores da forma $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$, com $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$, são chamados de *tensores elementares*. Dessa forma, um tensor $z \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ é uma combinação linear de tensores elementares, ou seja, é da forma $z = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n$, onde $\lambda_j \in \mathbb{K}$ e $x_j^l \in X_l$ para $l = 1, \ldots, k$.

Proposição 1.51 ([40, Proposition 2.1])**.** *Dados espaços normados $E_1, \ldots, E_n$, a função $\pi \colon E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \longrightarrow [0; \infty)$ definida por $\pi(x) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{k} \|x_j^1\| \cdots \|x_j^n\| \right\}$, onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações $x = \sum_{j=1}^{k} x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n$, é uma norma em $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. Além disso, $\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ para quaisquer $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$.*

A norma definida acima é chamada de *norma projetiva* e o espaço normado resultante é denotado por $E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_n$. Esse espaço é completo se, e somente se, $E_1, \ldots, E_n$ são de dimensão finita [40, Ex.2.4, Ex.2.5]. Como pretendemos trabalhar com espaços de dimensão infinita, consideraremos o completamento $E_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E_n$ de $E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_n$ segundo a norma projetiva.

O espaço completado é chamado de *produto tensorial projetivo*. Dados espaços normados $E_1 \ldots, E_n$, da definição da norma projetiva segue que o operador n-linear canônico

$$\sigma_n \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_n\ ,\ \sigma_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n,$$

é contínuo e $\|\sigma_n\| = 1$.

Proposição 1.52 ([40, Theorem 2.9])**.** *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços de Banach. Para cada operador n-linear contínuo $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ existe um único operador linear contínuo $A_L \in \mathcal{L}(E_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E_n; F)$ tal que $A = A_L \circ \sigma_n$. Além disso, a correspondência $A \longleftrightarrow A_L$ é um isomorfismo isométrico entre os espaços de Banach $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\mathcal{L}(E_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E_n; F)$.*

O operador linear A_L é chamado de *linearização* do operador n-linear A.

Definição 1.53. Seja E um espaço normado. Dizemos que um tensor $z \in E \otimes E$ é *simétrico* se tem uma representação $z = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes b_i + b_i \otimes a_i)$, onde $n \in \mathbb{N}$, a_i, $b_i \in E$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

Os tensores simétricos formam um subespaço de $E \otimes E$, que denotamos por $E \otimes^s E$. Também denotaremos por $E \widehat{\otimes}_\pi^s E$ o fecho de $E \otimes^s E$ no completamento $E \widehat{\otimes}_\pi E$ de $E \otimes E$.

Da mesma forma definimos um tensor *n-simétrico* como um tensor $z \in \otimes^n E = E \otimes \overset{(n)}{\cdots} \otimes E$ que tem uma representação da forma

$$z = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{(i)} \otimes x_{\sigma(2)}^{(i)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}^{(i)},$$

onde S_n denota o grupo de permutações de n elementos e $x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)} \in E$ para cada $i = 1, \ldots, m$.

Definimos, para $x_1, \ldots, x_n \in E$,

$$x_1 \otimes^s x_2 \otimes^s \cdots \otimes^s x_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}.$$

Notemos que para $x_1 = \cdots = x_n = x$, temos $\otimes^n x := x \otimes \overset{(n)}{\cdots} \otimes x = x \otimes^s \overset{(n)}{\cdots} \otimes^s x$.

Usando a clássica formula de polarização

$$x_1 \otimes^s x_2 \otimes^s \cdots \otimes^s x_n = \frac{1}{n! 2^n} \sum_{\delta_1, \ldots, \delta_n \in \{-1,1\}} \delta_1 \cdots \delta_n \otimes^n \left[x_0 + \sum_{k=1}^{n} \delta_k x_k \right],$$

temos o seguinte resultado:

Corolário 1.54 ([24, Corollary 1.5])**.**

$$\begin{aligned} \otimes^{n,s} E &= \operatorname{span}\{x_1 \otimes^s x_2 \otimes^s \cdots \otimes^s x_n : x_j \in E\} = \operatorname{span}\{\otimes^n x : x \in E\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \otimes^n x_j : m \in \mathbb{N},\ x_j \in E,\ \alpha_j \in C_{\mathbb{K}}^n \right\}, \end{aligned}$$

onde $C_{\mathbb{K}}^n := \{-1, 1\}$ *se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *e* n *é par e* $C_{\mathbb{K}}^n := \{1\}$ *caso contrário.*

Definimos $\otimes_\pi^{n,s} E = E \otimes_\pi^s \overset{(n)}{\cdots} \otimes_\pi^s E$ como sendo o espaço vetorial gerado pelos n-tensores simétricos munido com a topologia projetiva, que é a topologia induzida pela topologia projetiva em $\otimes_\pi^n E = E \otimes_\pi \overset{(n)}{\cdots} \otimes_\pi E$. O completamento de $\otimes_\pi^{n,s} E$ será denotado por $\widehat{\otimes}_\pi^{n,s} E$ e chamado de *produto tensorial simétrico projetivo.*

O resultado a seguir é imediato.

Proposição 1.55. *Seja $m \in \mathbb{N}$. A aplicação*

$$\delta_E^m \colon E \longrightarrow \widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E, \ \delta_E^m(x) := \otimes^m x,$$

é um polinômio m-homogêneo contínuo de norma 1.

Um importante resultado devido a R. Ryan em [39] é o seguinte.

Teorema 1.56. *Sejam E, F espaços normados. Se $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$, então existe um único operador linear $P_L \in \mathcal{L}(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E; F)$ tal que $P = P_L \circ \delta_E^m$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\delta_E^m"'] & F \\ \widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E \arrow[ur, "P_L"'] & \end{tikzcd}$$

Mais ainda, a correspondência $P \longleftrightarrow P_L$ é um isomorfismo topológico entre os espaços normados $\mathcal{P}(^m E; F)$ e $\mathcal{L}(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E; F)$.

O operador linear P_L é chamado de *linearização* do polinômio P.

Observação 1.57. Será importante considerarmos o caso escalar no Teorema 1.56, isto é $F = \mathbb{K}$. Neste caso, chamando de L_m^E a correspondência $P \longmapsto P_L$, decorre que o operador

$$L_m^E \colon \mathcal{P}(^m E) \longrightarrow \left(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E\right)^* \ , \ L_m^E(P) = P_L,$$

é um isomorfismo topológico.

Teorema 1.58. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, E, $E_1, \ldots, E_n$, F, $F_1, \ldots, F_n$ espaços normados, $u \in \mathcal{L}(E; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(E_j; F_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Então:*

(i) Existe um único operador linear contínuo

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \colon E_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E_n \longrightarrow F_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi F_n,$$

tal que

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_n(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = u_1(x_1) \otimes \cdots \otimes u_n(x_n)$$

para todo $x_j \in E_j$. Mais ainda, $\|u_1 \otimes \cdots \otimes u_n\| = \|u_1\| \cdots \|u_n\|$.

(ii) Existe um único operador linear contínuo $\otimes^n u \colon \widehat{\otimes}_\pi^n E \longrightarrow \widehat{\otimes}_\pi^n F$ tal que $\otimes^n u(\otimes^n x) = \otimes^n u(x)$ para todo $x \in E$. Mais ainda, $\| \otimes^n u\| = \|u\|^n$.

(iii) Existe um único operador linear contínuo $\otimes^{n,s} u \colon \widehat{\otimes}_\pi^{n,s} E \longrightarrow \widehat{\otimes}_\pi^{n,s} F$ tal que $\otimes^{n,s} u(\otimes^n x) = \otimes^n u(x)$ para todo $x \in E$. Mais ainda, $\| \otimes^{n,s} u\| = \|u\|^n$.

Demonstração. Veja [40, Proposition 2.3] para (i), (ii) é consequência direta de (i), e (iii) segue de (ii). $\square$

Recordamos a seguir alguns conceitos desenvolvidos por R. Alencar e K. Floret em [1] que nos serão úteis mais à frente.

Definição 1.59. Sejam E um espaço normado e $0 \leqslant \alpha < 1$.

(i) Uma sequência $(x_n)_n \subseteq E$ é dita τ_α*-convergente a 0* se existe uma constante $C \geqslant 0$ tal que $\left\| \sum_{n \in B} x_n \right\| \leqslant C|B|^\alpha$ para todo subconjunto finito $B \subset \mathbb{N}$ ($|B|$ denota a cardinalidade de B).

(ii) Uma sequência $(x_n)_n \subseteq E$ é chamada de τ_α*-convergente a* $x \in F$ se $(x_n - x)_n$ é τ_α-convergente a 0.

(iii) E tem *rank* α se a τ_α- convergência em E implica em convergência com respeito à norma. Dizemos que E tem *loose rank* $\alpha \in (0, 1]$ se tem rank ρ para todo $0 \leqslant \rho < \alpha$.

(iv) E tem a *propriedade* P_α se toda sequência $\sigma(E, E^*)$-nula admite uma subsequência τ_α-convergente.

Proposição 1.60. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo com a propriedade P_α e F um espaço de Banach reflexivo com rank ρ (ou loose rank ρ) tal que $m\alpha \leqslant \rho$ (ou $m.\alpha < \rho$). Então:*

(i) *Todo polinômio $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é compacto.*

(ii) *$\mathcal{P}(^m E; F)$ é reflexivo.*

Demonstração. Ver [1, Corollary 3.2.3] $\square$

CAPÍTULO 2

ADJUNTOS GENERALIZADOS

O adjunto (dual, conjugado ou transposto) $u^*: F^* \longrightarrow E^*$ de um operador linear contínuo $u: E \longrightarrow F$ entre espaços de Banach é uma noção central em Análise Funcional Linear. Estendendo esta noção para o caso não-linear, Aron e Schottenloher [4] definiram o adjunto P^* de um polinômio homogêneo contínuo P, que se tornou uma ferramenta básica instantaneamente em Análise Funcional Não-Linear e em Holomorfia em Dimensão Infinita. Aplicações recentes do adjunto de um polinômio homogêneo podem ser encontradas, por exemplo, em [19, 29, 44].

Nosso propósito neste capítulo é mostrar que estes adjuntos são casos particulares de uma noção muito mais geral, que chamaremos de adjuntos generalizados.

Nas Seções 2.1 e 2.2 desenvolvemos as primeiras propriedades desses adjuntos generalizados. Estabeleceremos, por um lado, que muitas características da teoria linear são, na verdade, casos particulares da teoria geral (não-linear). Por outro lado, uma diferença crucial entre as duas teorias será detectada (veja Proposição 2.19 e Exemplo 2.20), deixando claro que há espaço para novas pesquisas na teoria geral.

Devido ao forte sabor não linear da teoria geral, espera-se que os argumentos lineares canônicos não funcionem no cenário geral. Claro que isso é verdade, argumentos não lineares serão demandados ao longo de todo o trabalho; mas, tão importante quanto isso, o cenário geral também revela fenômenos que não podem ser descobertos na teoria clássica (ver Proposição 2.23), reforçando a pertinência de futuras pesquisas no assunto.

Na Seção 2.3, tendo em mente o trabalho de R. Alencar e K. Floret [1], estabelecemos um teorema de coincidência para os adjuntos generalizados $\Delta_k^1\mathcal{I}$, $k \in \mathbb{N}$, do ideal de operadores $\mathcal{I}$.

2.1 Teoria geral

A seguir apresentamos a definição de adjunto generalizado de um polinômio homogêneo e damos algumas propriedades.

Definição 2.1 (Adjunto Generalizado)**.** Dados $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$, n, $k \in \mathbb{N}$, definimos o *k-adjunto generalizado de ordem n do polinômio P* da seguinte forma:

$$\Delta_k^n P : \mathcal{P}(^kF) \longrightarrow \mathcal{P}(^{mnk}E)\ ,\ \Delta_k^n P(q)(x) = [q(P(x))]^n.$$

Antes de apresentar as propriedades dos adjuntos generalizados, vamos apresentar um lema técnico que vai nos ajudar nas contas. Por $\overset{\circ}{B}_E$ indicaremos a bola unitária aberta do espaço normado E.

Lema 2.2. *(i) Seja $j\colon G \twoheadrightarrow E$ uma sobrejeção métrica entre espaços normados. Então $\|j\| = 1$ e $j(\overset{\circ}{B}_G) = \overset{\circ}{B}_E$.*

(ii) Se $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$, então $\|P\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|P(x)\|$.

(iii) Se $x \in E$ e $k \in \mathbb{N}$, então $\|x\|^k = \sup\limits_{q \in B_{\mathcal{P}(^kE)}} |q(x)|$.

Demonstração. (i) Veja [35, B.3.6].
(ii) Notemos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $(1-1/k)B_E \subseteq \overset{\circ}{B}_E \subseteq B_E$. Logo,

$$\sup_{x\in(1-1/k)B_E} \|P(x)\| \leqslant \sup_{x\in\overset{\circ}{B}_E} \|P(x)\| \leqslant \sup_{x\in B_E} \|P(x)\|.$$

E também para todo $k \in \mathbb{N}$ vale que

$$\sup_{x\in(1-1/k)B_E} \|P(x)\| = \sup_{y\in B_E} \|P((1-1/k)y)\| = (1-1/k)^m \sup_{y\in B_E} \|P(y)\|.$$

Portanto,

$$(1-1/k)^m \sup_{y\in B_E} \|P(y)\| \leqslant \sup_{x\in\overset{\circ}{B}_E} \|P(x)\| \leqslant \sup_{x\in B_E} \|P(x)\|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. O resultado segue fazendo $k \to \infty$.
(iii) De fato, sabemos que $|q(x)| \leqslant \|q\| \cdot \|x\|^k$, logo $\sup\limits_{q\in B_{\mathcal{P}(^kE)}} |q(x)| \leqslant \|x\|^k$. Para $x \neq 0$, pelo Teorema de Hanh-Banach existe $\varphi \in E^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x) = \|x\|$. Logo, $q := \varphi^k \in \mathcal{P}(^kE)$, $\|q\| = \|\varphi\|^k = 1$ e $\varphi^k(x) = \|x\|^k$. Assim,

$$\|x\|^k = |\varphi(x)|^k \leqslant \sup_{q\in B_{\mathcal{P}(^kE)}} |q(x)|.$$

□

Um primeiro resultado nos diz que o adjunto generalizado de um polinômio é um polinômio e que, além disso, recupera as noções clássicas de adjunto de um operador linear e de adjunto de um polinômio homogêneo no sentido de Aron e Schottenloher.

Proposição 2.3.

(*i*) *Se* $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$, n, $k \in \mathbb{N}$, *então* $\Delta_k^n P$ *é um polinômio* n*-homogêneo contínuo bem definido e* $\|\Delta_k^n P\| = \|P\|^{kn}$.

(*ii*) Δ_k^n *é um polinômio* kn*-homogêneo contínuo, isto é,*

$$\Delta_k^n \in \mathcal{P}\left(^{kn}\mathcal{P}(^mE;F);\mathcal{P}(^n\mathcal{P}(^kF);\mathcal{P}(^{mkn}E))\right),$$

e $\|\Delta_k^n\| = 1$.

Este primeiro resultado generaliza os seguintes fatos: $u^* \in \mathcal{L}(E;F)$, $P^* \in \mathcal{L}(F^*;\mathcal{P}(^mE))$, $\|u^*\| = \|u\|$, $\|P^*\| = \|P\|$ e as correspondências $u \mapsto u^*$ e $P \mapsto P^*$ são operadores lineares de norma 1.

Demonstração. (i) Lembrando que a composição de um polinômio l-homogêneo com um polinômio s-homogêneo é um polinômio ls-homogêneo e que a multiplicação de dois polinômios escalares em $\mathcal{P}(^lE)$ é um polinômio em $\mathcal{P}(^{2l}E)$, segue que $\Delta_k^n P$ é bem definido. É fato que $\Delta_k^n P$ é um polinômio n-homogêneo contínuo pois é gerado pelo operador n-linear contínuo $A\colon \left[\mathcal{P}(^kF)\right]^n \longrightarrow \mathcal{P}(^{mnk}E)$ definido por

$$A(q_1,\dots,q_n)(x) = q_1(P(x))\cdots q_n(P(x)),$$

para todos $q_1,\dots,q_n \in \mathcal{P}(^kF)$ e todo $x \in E$. Usando o Princípio do Supremo Iterado (veja [5, Exercise 2.4.12]) e o Lema 2.2,

$$\begin{aligned}\|\Delta_k^n P\| &= \sup_{\|q\|\leqslant 1}\|\Delta_k^n P(q)\| = \sup_{\|q\|\leqslant 1}\sup_{\|x\|\leqslant 1}|\Delta_k^n P(q)(x)| = \sup_{\|q\|\leqslant 1}\sup_{\|x\|\leqslant 1}|q(P(x))|^n \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\sup_{\|q\|\leqslant 1}|q(P(x))|^n = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|P(x)\|^{kn} = \|P\|^{kn}.\end{aligned}$$

(ii) Basta usar (*i*) e o fato de que a aplicação $A\colon \mathcal{P}(^mE;F)^{kn} \longrightarrow \mathcal{P}(^n\mathcal{P}(^kF);\mathcal{P}(^{mkn}E))$ dada por

$$A(P_1,\dots,P_k,\dots,P_{nk})(q)(x) = \check{q}(P_1(x),\dots,P_k(x))\cdots\check{q}(P_{(n-1)k+1}(x),\dots,P_{kn}(x)),$$

é uma aplicação kn-linear contínua que gera Δ_k^n. $\square$

Para avançar nas propriedades dos adjuntos generalizados precisamos do seguinte resultado.

Lema 2.4. *Dado um polinômio* $R \in \mathcal{P}(^mE;F)$, *existe um polinômio* $W_R \in \mathcal{P}(^m(E\times E);F)$ *tal que:*

(*i*) $R(x+y) = R(x) + R(y) + W_R(x,y)$ *para todos* $x, y \in E$.

(*ii*) *Se R é não nulo, então $W_R = 0$ se, e somente se, $m = 1$.*

Demonstração. (i) Para $R = 0$ basta tomar $W_R = 0$. Suponhamos $R \neq 0$. Para $m = 1$ simplesmente tomamos $W_R = 0$. Para $m > 1$, do Corolário 1.10 temos

$$R(x+y) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \check{R}(x^{(j)}, y^{(m-j)}) = R(x) + R(y) + \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m}{j} \check{R}(x^{(j)}, y^{(m-j)}),$$

onde $\check{R}(x^{(j)}, y^{(m-j)}) = \check{R}(x, \overset{(j)}{\ldots}, x, y, \overset{(m-j)}{\ldots}, y)$. A afirmação segue do fato que a aplicação

$$W_R \colon E \times E \longrightarrow F \ , \ W_R(x,y) = \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m}{j} \check{R}(x^{(j)}, y^{(m-j)}),$$

é um polinômio m-homogêneo contínuo. De fato, W_R é gerado pela aplicação m-linear contínua $A \colon (E \times E)^m \longrightarrow F$ dada por

$$A\left((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)\right) = \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m}{j} \check{R}(x_1, x_2, \ldots, x_j, y_{j+1}, y_{j+2}, \ldots, y_m).$$

cuja continuidade segue de

$$\begin{aligned}
\|A((x_1,y_1),\ldots,(x_k,y_k),\ldots,(x_m,y_m)\| &\leqslant \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m}{j} \|\check{R}(x_1,\ldots,x_j,y_{j+1},\ldots,y_m)\| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m}{j} \|\check{R}\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_j\| \cdot \|y_{j+1}\| \cdots \|y_m\| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m}{j} \|\check{R}\| \left(\|x_1\| + \|y_1\|\right) \cdots \left(\|x_j\| + \|y_j\|\right) \\
&\quad \left(\|x_{j+1}\| + \|y_{j+1}\|\right) \cdots \left(\|x_m\| + \|y_m\|\right) \\
&= \left(\|\check{R}\| \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m}{j} \right) \|\left(x_1, y_1\right)\| \cdots \|\left(x_m, y_m\right)\|.
\end{aligned}$$

(ii) É claro que $W_R = 0$ se $m = 1$. Agora suponhamos que $W_R = 0$. Neste caso temos $R(x+y) = R(x) + R(y)$ para todos $x, y \in E$. Tome $x_0 \in E$ tal que $R(x_0) \neq 0$ e note que, como R é um polinômio m-homogêneo contínuo, $2^m R(x_0) = R(2x_0) = 2R(x_0)$, de onde segue que $m = 1$. $\square$

O seguinte resultado, que segue do Lema 2.4 e da Proposição 2.3, generaliza as fórmulas $(u + \lambda v)^* = u^* + \lambda v^*$, $(P + \lambda Q)^* = P^* + \lambda Q^*$ e mostra que as correspondências clássicas $u \mapsto u^*$ e $P \mapsto P^*$ são as únicas que são lineares.

Proposição 2.5. (*i*) *Existe um polinômio kn-homogêneo contínuo $W_{\Delta_k^n}$ de $\mathcal{P}(^m E; F) \times \mathcal{P}(^m E; F)$ em $\mathcal{P}(^n \mathcal{P}(^k F); \mathcal{P}(^{mkn} E))$ tal que*

$$\Delta_k^n(P+Q) = \Delta_k^n P + \Delta_k^n Q + W_{\Delta_k^n}(P,Q)$$

para todos $P, Q \in \mathcal{P}(^m E; F)$.

(ii) $\Delta_k^n(P+Q) = \Delta_k^n P + \Delta_k^n Q$ *para todos* $P, Q \in \mathcal{P}(^mE; F)$ *se, e somente se,* $k = n = 1$.

(iii) $\Delta_k^n(\lambda P) = \lambda^{kn}\Delta_k^n P$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e todo* $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$.

É conhecido, e fácil de ser provado, que as correspondências $u \mapsto u^*$ e $P \mapsto P^*$ são injetivas. Para investigar a injetividade da correspondência geral $P \mapsto \Delta_k^n P$, que na verdade é um polinômio homogêneo, primeiramente precisamos lembrar quando um polinômio homogêneo pode ser injetivo. Apesar de ser bem conhecido, provaremos o seguinte resultado:

Lema 2.6. *Se existe um polinômio injetivo em* $\mathcal{P}(^mE; F)$*, então ou* $m = 1$ *ou* m *é ímpar e* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Demonstração. Basta mostrar que se $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ é injetivo e $m > 1$, então m é ímpar e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Para isso, suponhamos, por absurdo, que m seja par ou que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, consideremos $\alpha, \theta \in \mathbb{C}$, raízes m-ésimas da unidade distintas. Note que

$$P(\theta x) = \theta^m P(x) = P(x) = \alpha^m P(x) = P(\alpha x)$$

para todo $x \in E$. Tomando $x \neq 0$, como P é injetivo, temos $\theta x = \alpha x$. Isso implica que $\alpha = \theta = 0$, o que é uma contradição.

- Se m é par, para todo $x \in E$ com $x \neq 0$ tem-se $P(x) = P(-x)$ e, como P é injetivo, segue que $x = -x$, contradição esta que completa a demonstração.

□

Tendo em mente o lema acima, o próximo resultado mostra que a correspondência $P \mapsto \Delta_k^n P$ é injetora sempre que pode ser injetora.

Proposição 2.7. *Se ou* $k = n = 1$ *ou* kn *é ímpar e* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, então a correspondência* $P \in \mathcal{P}(^mE; F) \mapsto \Delta_k^n P \in \mathcal{P}(^n\mathcal{P}(^kF); \mathcal{P}(^{mkn}E))$ *é injetora.*

Demonstração. O caso $k = n = 1$, segue da Proposição 2.3, pois nesse caso a correspondência é uma isometria linear. Suponhamos agora que kn seja ímpar, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $P_1 \neq P_2$. Tomando $x_0 \in E$ tal que $P_1(x_0) \neq P_2(x_0)$, pelo Teorema de Hahn-Banach existe $y^* \in F^*$ tal que $y^*(P_1(x_0)) \neq y^*(P_2(x_0))$. Portanto $(y^*)^k \in \mathcal{P}(^kF)$ e

$$(\Delta_k^n P_1)((y^*)^k)(x_0) = y^*(P_1(x_0))^{kn} \neq y^*(P_2(x_0))^{kn} = (\Delta_k^n P_2)((y^*)^k)(x_0).$$

□

Agora mostraremos que as fórmulas $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ e $(u \circ P)^* = P^* \circ u^*$ são casos particulares de uma fórmula muito mais geral.

Proposição 2.8. *Sejam $m, n, k, r, s \in \mathbb{N}$, E, F e G espaços de Banach. Se $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ e $Q \in \mathcal{P}(^r F; G)$, então $\Delta_k^{ns}(Q \circ P) = \Delta_{rnk}^s P \circ \Delta_k^n Q = \Delta_{rsk}^n P \circ \Delta_k^s Q$.*

Demonstração. Considere as seguintes cadeias de operadores:

$$E \xrightarrow{P} F \xrightarrow{Q} G$$

$$\mathcal{P}(^k G) \xrightarrow{\Delta_k^n Q} \mathcal{P}(^{rnk} F) \xrightarrow{\Delta_{rnk}^s P} \mathcal{P}(^{mnkrs} E) \ .$$

Para $q \in \mathcal{P}(^k G)$ e $x \in E$,

$$\begin{aligned}
(\Delta_{rnk}^s P \circ \Delta_k^n Q)(q)(x) &= (\Delta_{rnk}^s P)(\Delta_k^n Q(q))(x) = [\Delta_k^n Q(q)(P(x))]^s \\
&= q(Q(P(x)))^{ns} = q((Q \circ P)(x))^{ns} = \Delta_k^{ns}(Q \circ P)(q)(x).
\end{aligned}$$

Isso prova a primeira igualdade. A segunda segue da simetria da primeira em relação a n e s. □

Corolário 2.9. *Dados $l \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$, então*

$$\left(\Delta_{mnk}^l (id_E)\right) \circ \Delta_k^n P = (\Delta_k^n P)^l = \Delta_k^{nl} P.$$

Demonstração. Se $q \in \mathcal{P}(^k F)$, $x \in E$,

$$\begin{aligned}
(\Delta_k^n P)^l (q)(x) &= [(\Delta_k^n P)(q)]^l (x) = [(\Delta_k^n P)(q)(x)]^l = [q(P(x))^n]^l \\
&= q(P(x))^{nl} = \left(\Delta_k^{nl} P\right)(q)(x) = \left[\Delta_k^{nl}(P \circ id_E)\right](q)(x) \\
&= \left[\left(\Delta_{mnk}^l (id_E)\right) \circ \Delta_k^n P\right](q)(x).
\end{aligned}$$

□

Se um operador linear u é sobrejetor (respectivamente, um isomorfismo), então seu adjunto u^* é injetivo (respectivamente, um isomorfismo). Agora daremos versões mais gerais desses fatos. Devemos ter em mente as restrições dadas no Lema 2.6 para um polinômio homogêneo ser injetivo.

Proposição 2.10. *(i) Seja $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ um polinômio sobrejetor. Se ou $n = 1$ ou n é ímpar e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então $\Delta_k^n P$ é injetor para todo $k \in \mathbb{N}$.*

(ii) Se $j : G \twoheadrightarrow E$ é uma sobrejeção métrica, então $\Delta_k^1 j$ é uma injeção métrica para todo $k \in \mathbb{N}$.

(iii) Se $u \in \mathcal{L}(E; F)$ é um isomorfismo (isométrico), então $\Delta_k^1 u$ é um isomorfismo (isométrico) e $\left(\Delta_k^1 u\right)^{-1} = \Delta_k^1(u^{-1})$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (i) Seja $k \in \mathbb{N}$. Analisemos os seguintes casos:

- $n = 1$. Neste caso, $\Delta_k^1 P\colon \mathcal{P}(^k F) \longrightarrow \mathcal{P}(^{mk} E)$ é um operador linear contínuo. O resultado segue da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta_k^1 P(q) = 0 \quad &\Rightarrow q(P(x)) = 0 \text{ para todo } x \in E \\ &\Rightarrow q(y) = 0, \text{ para todo } y \in F \text{ (pois } P \text{ é sobrejetor)} \\ &\Rightarrow q = 0. \end{aligned}$$

- n é ímpar e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Neste caso, $\Delta_k^n P$ é um polinômio n-homogêneo contínuo. Suponhamos que $\Delta_k^n P(q_1) = \Delta_k^n P(q_2)$, onde q_1, $q_2 \in \mathcal{P}(^k F)$. Então $q_1(P(x))^n = q_2(P(x))^n$ para todo $x \in E$. Logo, $q_1(P(x)) = q_2(P(x))$ para todo $x \in E$. Portanto, $q_1(y) = q_2(y)$ para todo $y \in F$ (pois P é sobrejetor). Assim, $q_1 = q_2$.

(ii) Para todo $q \in \mathcal{P}(^k E)$,

$$\|\Delta_k^1 j(q)\| = \|q \circ j\| = \sup_{\|x\| < 1} |q(j(x))| = \sup_{\|y\| < 1} |q(y)| = \|q\|,$$

onde a primeira igualdade segue da definição de adjunto generalizado, a segunda e quarta igualdade seguem do Lema 2.2(ii) e a terceira igualdade é consequência do Lema 2.2(i).

(iii) Seja $k \in \mathbb{N}$. Por (i), sabemos que $\Delta_k^1 u$ é injetor. Agora mostremos que $\Delta_k^1 u$ é sobrejetor, isto é, para todo $R \in \mathcal{P}(^k E)$ existe $S \in \mathcal{P}(^k F)$ tal que $\Delta_k^1 u(S) = R$. De fato, dado $R \in \mathcal{P}(^k E)$, definindo $S := R \circ u^{-1} \in \mathcal{P}(^k F)$, temos

$$\Delta_k^1 u(S)(x) = S(u(x)) = (R \circ u^{-1})(u(x)) = R(x).$$

Segue que $\Delta_k^1 u$ é bijetor. Como $\Delta_k^1 u$ é um operador linear contínuo bijetor entre espaços de Banach, pelo Teorema da Aplicação Aberta segue que $\Delta_k^1 u$ é um isomorfismo. Agora suponhamos que u seja um isomorfismo isométrico. Neste caso, $\|x\| \leqslant 1 \Leftrightarrow \|u(x)\| \leqslant 1$, donde segue que

$$\|\Delta_k^1 u(q)\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|q(u(x))\| = \sup_{\|u(x)\| \leqslant 1} \|q(u(x))\| = \|q\|.$$

Considerando as cadeias de operadores

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{u^{-1}} E \xrightarrow{u} F, \text{ e}$$

$$\mathcal{P}(^k F) \xrightarrow{\Delta_k^1 u} \mathcal{P}(^k E) \xrightarrow{\Delta_k^1(u^{-1})} \mathcal{P}(^k F) \xrightarrow{\Delta_k^1 u} \mathcal{P}(^k E),$$

de

$$\Delta_k^1(u^{-1} \circ u) = \Delta_k^1 id_E = id_{\mathcal{P}(^k E)} \text{ e } \Delta_k^1(u \circ u^{-1}) = \Delta_k^1 id_F = id_{\mathcal{P}(^k F)}$$

segue que

$$\Delta_k^1 u \circ \Delta_k^1(u^{-1}) = id_{\mathcal{P}(^kE)} \text{ e } \Delta_k^1(u^{-1}) \circ \Delta_k^1 u = id_{\mathcal{P}(^kF)},$$

o que nos permite concluir que $\left(\Delta_k^1 u\right)^{-1} = \Delta_k^1(u^{-1})$. □

Sejam $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e $J_E \colon E \longrightarrow E^{**}$ o mergulho canônico. Nosso próximo objetivo é mostrar que o bem conhecido diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, bend right, "J_E"'] & F \arrow[d, bend left, "J_F"] \\ E^{**} \arrow[r, "u^{**}"] & F^{**} \end{tikzcd}$$

é verdade em um nível muito alto de generalidade. Primeiro, precisamos da seguinte generalização do mergulho canônico J_E.

Definição 2.11. Sejam m, $n \in \mathbb{N}$ e E um espaço de Banach. Definimos

$$J_E^{m,n} : E \longrightarrow \mathcal{P}\left(^m\mathcal{P}(^nE)\right), \; J_E^{m,n}(x)(q) = q(x)^m.$$

Proposição 2.12. *$J_E^{m,n}$ é um polinômio mn-homogêneo contínuo e $\|J_E^{m,n}(x)\| = \|x\|^{mn}$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. Vejamos que $J_E^{m,n}$ é um polinômio mn-homogêneo. Para isso, considere a aplicação $A \colon E \times \overset{(mn)}{\cdots} \times E \longrightarrow \mathcal{P}(^m\mathcal{P}(^nE))$ definida por

$$A(x_1, \ldots, x_{mn})(q) = \check{q}(x_1, \ldots, x_n)\check{q}(x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) \cdots \check{q}(x_{(m-1)n+1}, \ldots, x_{mn}),$$

para todos $x_1, \ldots, x_{mn} \in E$ e todo $q \in \mathcal{P}(^nE)$. Notemos que A é bem definida, pois para $x_1, \ldots, x_{mn} \in E$ fixos, cada $A(x_1, \ldots, x_{mn})$ é o polinômio gerado pelo operador m-linear contínuo $B_{(x_1,\ldots x_{mn})} \colon \mathcal{P}(^nE)^m \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por

$$B_{(x_1,\ldots,x_{mn})}(q_1, \ldots, q_m) = \check{q}_1(x_1, \ldots, x_n) \cdots \check{q}_m(x_{(m-1)n+1}, \ldots, x_{mn}),$$

para todo $q_1, \ldots, q_m \in \mathcal{P}(^nE)$, cuja continuidade segue de

$$\begin{aligned} |B_{(x_1,\ldots,x_{mn})}(q_1, \ldots, q_m)| &= |\check{q}_1(x_1, \ldots, x_n) \cdots \check{q}_m(x_{(m-1)n+1}, \ldots, x_{mn})| \\ &\leqslant \|\check{q}_1\| \cdots \|\check{q}_m\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\| \cdots \|x_{(m-1)n+1}\| \cdots \|x_{mn}\| \\ &\leqslant K\|q_1\| \cdots \|q_m\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\| \cdots \|x_{(m-1)n+1}\| \cdots \|x_{mn}\|, \end{aligned}$$

para alguma constante $K > 0$. A mn-linearidade de A é óbvia e sua continuidade segue de

$$\begin{aligned} \|A(x_1, \ldots, x_{mn})\| &= \sup_{\|q\|\leqslant 1} |A(x_1, \ldots, x_{mn})(q)| \\ &= \sup_{\|q\|\leqslant 1} |\check{q}(x_1, \ldots, x_n) \cdots \check{q}(x_{(m-1)n+1}, \ldots, x_{mn})| \\ &\leqslant K'\|x_1\| \cdots \|x_n\| \cdots \|x_{(m-1)n+1}\| \cdots \|x_{mn}\| \end{aligned}$$

para alguma constante $K' > 0$.

É claro que $J_E^{m,n}$ é o polinômio gerado por A.

Para a segunda afirmação, dado $x \in E$, usando o Lema 2.2 (iii), temos

$$\|J_E^{m,n}(x)\| = \sup_{\|q\|\leqslant 1} |J_E^{m,n}(x)(q)| = \sup_{\|q\|\leqslant 1} |q(x)^m| = \|x\|^{mn}.$$

$\square$

Observação 2.13. (a) Dizemos que o polinômio $J_E^{m,n}$ é uma generalização do mergulho canônico J_E pois $J_E^{1,1} = J_E$.

(b) Vale a fórmula $J_E^{m,n} = \Delta_1^m id_{\mathcal{P}(^nE)} \circ J_E^{1,n}$ para todos m, n. De fato, para todos $q \in \mathcal{P}(^nE)$ e $x \in E$,

$$\begin{aligned}\left(\Delta_1^m id_{\mathcal{P}(^nE)} \circ J_E^{1,n}\right)(x)(q) &= \Delta_1^m id_{\mathcal{P}(^nE)}(J_E^{1,n}(x))(q) = \left[J_E^{1,n}(x)(id_{\mathcal{P}(^nE)}(q))\right]^m \\ &= \left[J_E^{1,n}(x)(q)\right]^m = q(x)^m = J_E^{m,n}(x)(q).\end{aligned}$$

Agora estamos em condições de mostrar que o diagrama comutativo do bidual de um operador linear é um caso particular de algo bem mais geral.

Proposição 2.14. *Dados $m, n, k, r, s \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$, $\Delta_r^s(\Delta_k^n P) \circ J_E^{r,mnk} = J_F^{nrs,k} \circ P$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "P"] \arrow[d, "J_E^{r,mnk}"'] & F \arrow[d, "J_F^{nrs,k}"] \\ \mathcal{P}\left(^r\mathcal{P}(^{mnk}E)\right) \arrow[r, "\Delta_r^s(\Delta_k^n P)"] & \mathcal{P}(^{nrs}\mathcal{P}(^kF)) \end{tikzcd}$$

Demonstração. De fato, para todos $x \in E$ e $q \in \mathcal{P}(^kF)$,

$$\begin{aligned}\left(\Delta_r^s(\Delta_k^n P) \circ J_E^{r,mnk}\right)(x)(q) &= \Delta_r^s(\Delta_k^n P)\left(J_E^{r,mnk}(x)\right)(q) = \left[J_E^{r,mnk}(x)(\Delta_k^n P(q))\right]^s \\ &= [\Delta_k^n P(q)(x)]^{rs} = q(P(x))^{nrs} = J_E^{nrs,k}(P(x))(q) \\ &= \left(J_F^{nrs,k} \circ P\right)(x)(q).\end{aligned}$$

$\square$

Trabalharemos agora no sentido de investigar a continuidade $w^* - w^*$ dos adjuntos generalizados.

Lema 2.15. *Sejam $\widehat{E}$ o completamento do espaço normado E, $(\varphi_\lambda)_\lambda$ uma rede limitada em $(\widehat{E})^*$ e $\varphi \in (\widehat{E})^*$ tais que $\varphi_\lambda(x) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $x \in E$. Então $\varphi_\lambda \xrightarrow{w^*} \varphi$.*

Demonstração. Já sabemos que $\varphi_\lambda(x) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $x \in E$ e devemos mostrar que $\varphi_\lambda(\widehat{x}) \longrightarrow \varphi(\widehat{x})$ para todo $\widehat{x} \in \widehat{E}$. Seja $K > 0$ tal que $\|\varphi_\lambda\| \leqslant K$ para todo λ e $\|\varphi\| \leqslant K$. Dados $\widehat{x} \in \widehat{E}$ e $\varepsilon > 0$, da densidade de E em $\widehat{E}$ existe $x \in E$ tal que $\|\widehat{x} - x\| \leqslant \varepsilon/3K$. Como $\varphi_\lambda(x) \longrightarrow \varphi(x)$, existe λ_0 tal que $|\varphi_\lambda(x) - \varphi(x)| < \varepsilon/3$ para todo $\lambda_0 \preceq \lambda$. Logo, para todo $\lambda_0 \preceq \lambda$,

$$\begin{aligned} |\varphi_\lambda(\widehat{x}) - \varphi(\widehat{x})| &= |\varphi_\lambda(\widehat{x}) - \varphi_\lambda(x) + \varphi_\lambda(x) - \varphi(x) + \varphi(x) - \varphi(\widehat{x})| \\ &\leqslant |\varphi_\lambda(\widehat{x}) - \varphi_\lambda(x)| + |\varphi_\lambda(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(\widehat{x})| \\ &\leqslant \|\varphi_\lambda\| \cdot \|\widehat{x} - x\| + \varepsilon/3 + \|\varphi\| \cdot \|x - \widehat{x}\| \\ &< K\frac{\varepsilon}{3K} + \frac{\varepsilon}{3} + K\frac{\varepsilon}{3K} = \varepsilon, \end{aligned}$$

provando que $\varphi_\lambda(\widehat{x}) \longrightarrow \varphi(\widehat{x})$ para todo $\widehat{x} \in \widehat{E}$. □

Adjuntos de operadores lineares são sempre $w^* - w^*$ contínuos. Para generalizar este fato, devemos dizer o que significa a topologia fraca estrela em $\mathcal{P}(^kE)$.

Definição 2.16. Definimos a *topologia w^** em $\mathcal{P}(^kE)$ como sendo a topologia em $\mathcal{P}(^kE)$ induzida pela topologia w^* de $\left(\widehat{\otimes}_\pi^{k,s} E\right)^*$ por meio do isomorfismo topológico

$$L_k^E \colon \mathcal{P}(^kE) \longrightarrow \left(\widehat{\otimes}_\pi^{k,s} E\right)^* ; \; L_k^E(q) = q_L,$$

onde $\widehat{\otimes}_\pi^{k,s} E$ é o completamento do produto tensorial simétrico projetivo $\otimes_\pi^{k,s} E$ e q_L é a linearização do polinômio q (ver [24, 39]). Como é usual, para $x \in E$ escrevemos $\otimes^k x = x \otimes \overset{(k)}{\cdots} \otimes x$.

À semelhança do que ocorre na teoria linear, provamos a seguir que os adjuntos generalizados são sempre $w^* - w^*$-contínuos.

Proposição 2.17. *Para todos $n, k \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$, o polinômio $\Delta_k^n P \colon \mathcal{P}(^kF) \longrightarrow \mathcal{P}(^{mnk}E)$ é w^*-w^*-contínuo.*

Demonstração. Seja $(q_\lambda)_\lambda$ uma rede em $\mathcal{P}(^kF)$ tal que $q_\lambda \xrightarrow{w^*} q \in \mathcal{P}(^kF)$. Provaremos que $\Delta_k^n P(q_\lambda) \xrightarrow{w^*} \Delta_k^n P(q)$ em $\mathcal{P}(^{mnk}E)$. Começamos notando que, como $q_\lambda \xrightarrow{w^*} q$ em $\mathcal{P}(^kF)$, então $(q_\lambda)_L \xrightarrow{w^*} q_L$ em $\left(\widehat{\otimes}_\pi^{k,s} F\right)^*$, e portanto

$$(q_\lambda)_L(z) \longrightarrow q_L(z) \text{ para todo } z \in \widehat{\otimes}_\pi^{k,s} F. \tag{2.1}$$

Agora seja $w = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \otimes^{mnk} x_j \in \otimes_\pi^{mnk,s} E$. De (2.1), para $j = 1, \ldots, r$, temos

$$[q_\lambda(P(x_j))]^n = [(q_\lambda)_L(\otimes^k P(x_j))]^n \longrightarrow [q_L(\otimes^k P(x_j))]^n = [q(P(x_j))]^n,$$

isto é

$$\Delta_k^n P(q_\lambda)(x_j) \longrightarrow \Delta_k^n P(q)(x_j), \text{ para } j = 1, \ldots, r. \tag{2.2}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\left[\Delta_k^n P(q_\lambda)\right]_L(w) &= \left[\Delta_k^n P(q_\lambda)\right]_L \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \otimes^{mnk} x_j\right) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \left[\Delta_k^n P(q_\lambda)\right]_L (\otimes^{mnk} x_j) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \Delta_k^n P(q_\lambda)(x_j) \overset{(2.2)}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \Delta_k^n P(q)(x_j) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \left[\Delta_k^n P(q)\right]_L (\otimes^{mnk} x_j) \\
&= \left[\Delta_k^n P(q)\right]_L \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \otimes^{mnk} x_j\right) = \left[\Delta_k^n P(q)\right]_L (w).
\end{aligned}$$

Portanto, $\left[\Delta_k^n P(q_\lambda)\right]_L(w) \longrightarrow \left[\Delta_k^n P(q)\right]_L(w)$ para todo $w \in \otimes_\pi^{mnk,s} E$. Como $(q_\lambda)_\lambda$ é limitada, uma vez que é w^*-convergente, de

$$\| \left[\Delta_k^n P(q_\lambda)\right]_L \| = \| \left[\Delta_k^n P(q_\lambda)\right]^\vee \| \leqslant \frac{(mnk)^{mnk}}{(mnk)!} \|\Delta_k^n P(q_\lambda)\| \leqslant \frac{(mnk)^{mnk}}{(mnk)!} \|\Delta_k^n P\| \cdot \|q_\lambda\|^n$$

para todo λ, segue que a rede $(\left[\Delta_k^n P(q_\lambda)\right]_L)_\lambda$ é limitada. Usando o Lema 2.15 temos $\left[\Delta_k^n P(q_\lambda)\right]_L \xrightarrow{w^*} \left[\Delta_k^n P(q)\right]_L$ em $\left(\widehat{\otimes}_\pi^{mnk,s} E\right)^*$, isto é $\Delta_k^n P(q_\lambda) \xrightarrow{w^*} \Delta_k^n P(q)$ em $\mathcal{P}(^{mnk}E)$. $\square$

É bem sabido que a recíproca do resultado acima é válida no caso linear, isto é, todo operador linear $w^* - w^*$-contínuo de F^* em E^* é o adjunto de algum operador de E em F. Isso também é verdade para o adjunto de Aron-Schottenloher de um polinômio homogêneo: se T é um operador linear $w^* - w^*$-contínuo de F^* em $\mathcal{P}(^mE)$, então existe um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ tal que $\Delta_1^1 P = P^* = T$ (veja a demonstração em [17, Corollary 2.3]). Nosso próximo objetivo é mostrar que essa recíproca não é mais verdadeira no caso generalizado.

Lema 2.18. *Se $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$, então $L_{mk}^E \circ \Delta_k^1 P \circ (L_k^F)^{-1} = \left[(\delta_F^k \circ P)_L\right]^*$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(^kF) \arrow[r, "\Delta_k^1 P"] \arrow[d, "L_k^F"'] & \mathcal{P}(^{mk}E) \arrow[d, "L_{mk}^E"] \\
\left(\widehat{\otimes}_\pi^{k,s} F\right)^* \arrow[r, "\left[(\delta_F^k \circ P)_L\right]^*"] & \left(\widehat{\otimes}_\pi^{mk,s} E\right)^*
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Notemos que, como $\delta_F^k \circ P \in \mathcal{P}(^{mk}E; \widehat{\otimes}_\pi^{k,s} F)$, temos

$$(\delta_F^k \circ P)_L \in \mathcal{L}(\widehat{\otimes}_\pi^{mk,s} E; \widehat{\otimes}_\pi^{k,s} F).$$

Logo, para todo $\varphi \in (\widehat{\otimes}_\pi^{k,s} F)^*$,

$$\begin{aligned}\left[L_{mk}^E \circ \Delta_k^1 P \circ (L_k^F)^{-1}\right](\varphi) &= L_{mk}^E(\Delta_k^1 P((L_k^F)^{-1}(\varphi))) = L_{mk}^E(\Delta_k^1 P(\varphi \circ \delta_F^k)) \\ &= L_{mk}^E(\varphi \circ \delta_F^k \circ P) = (\varphi \circ \delta_F^k \circ P)_L \\ &= \varphi \circ (\delta_F^k \circ P)_L = \left[(\delta_F^k \circ P)_L\right]^* (\varphi).\end{aligned}$$

□

Agora estamos em condições de mostrar que, mesmo no caso $n = 1$, a recíproca da Proposição 2.17 não é válida em geral. Isso estabelece que, não apenas em relação às demonstrações, mas também em relação aos resultados, as teorias generalizada e clássica não são idênticas. Isso evidencia a pertinência do estudo da teoria geral e deixa claro que há muito o que fazer nesta teoria.

Proposição 2.19. *Seja $k > 1$ e suponha que exista um polinômio sobrejetivo $R \in \mathcal{P}(^{mk}E; \ell_1)$. Então existe um operador $w^* - w^*$-contínuo $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^k\ell_1); \mathcal{P}(^{mk}E))$ tal que $T \neq \Delta_k^1 P$ para todo $P \in \mathcal{P}(^mE; \ell_1)$.*

Demonstração. Como $\widehat{\otimes}_\pi^{k,s} \ell_1$ é topologicamente isomorfo a $\widehat{\otimes}_\pi^k \ell_1$ [3, Lemma 5.2] e este último espaço é isomorfo topologicamente a ℓ_1 [40, Ex.2.6], podemos considerar um isomorfismo topológico $I \colon \ell_1 \longrightarrow \widehat{\otimes}_\pi^{k,s} \ell_1$. Uma vez que $R \in \mathcal{P}(^{mk}E; \ell_1)$ é um polinômio sobrejetivo, $Q := I \circ R \in \mathcal{P}\left(^{mk}E; \widehat{\otimes}_\pi^{k,s} \ell_1\right)$ é um polinômio sobrejetivo também. Definimos

$$T := (L_{mk}^E)^{-1} \circ (Q_L)^* \circ L_k^{\ell_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^k\ell_1); \mathcal{P}(^{mk}E)),$$

e notamos que, como adjuntos de operadores lineares são $w^* - w^*$-contínuos, T é $w^* - w^*$-contínuo pela Definição 2.16. Suponhamos que exista um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE; \ell_1)$ tal que $T = \Delta_k^1 P$. Neste caso, do Lema 2.18 temos $(Q_L)^* = \left[(\delta_{\ell_1}^k \circ P)_L\right]^*$, portanto $Q = \delta_{\ell_1}^k \circ P$, isto é, $Q(x) = \otimes^k P(x)$ para todo $x \in E$. Portanto,

$$\widehat{\otimes}_\pi^{k,s} \ell_1 = Q(E) \subseteq \otimes_\pi^{k,s} \ell_1 \subseteq \widehat{\otimes}_\pi^{k,s} \ell_1,$$

a partir do qual poderíamos concluir que o espaço incompleto $\otimes_\pi^{k,s} \ell_1$ é completo. Essa contradição completa a demonstração. □

O próximo exemplo completa a falha da recíproca da Proposição 2.17, o que confere uma característica própria à teoria generalizada de adjuntos.

Exemplo 2.20. Sejam $m, k \in \mathbb{N}$ tais que mk seja ímpar e $k > 1$. Vejamos que

$$R\colon \ell_{mk} \longrightarrow \ell_1 \ , \ R((\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}) = (\lambda_j^{mk})_{j\in\mathbb{N}},$$

é um polinômio mk-homogêneo sobrejetivo contínuo, tanto no caso real como no caso complexo. De fato, R é o polinômio gerado pelo operador mk-linear

$$\check{R}\colon (\ell_{mk})^{mk} \longrightarrow \ell_1 \ , \ \check{R}\left((\lambda_j^1)_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_j^{mk})_{j\in\mathbb{N}}\right) = \left(\lambda_j^1 \cdots \lambda_j^{mk}\right)_{j\in\mathbb{N}},$$

que é contínuo devido à forma generalizada da desigualdade de Hölder. O polinômio R é sobrejetor pois, dada $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em ℓ_1, para todo $j \in \mathbb{N}$ existe $\lambda_j \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_j^{mk} = \alpha_j$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{mk} = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j^{mk}| = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| < +\infty.$$

Finalmente, pela Proposição 2.19 existe um operador $w^*$$-$$w^*$-contínuo $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^k\ell_1); \mathcal{P}(^{mk}\ell_{mk}))$ tal que $T \nparallel \Delta_k^1 P$ para todo $P \in \mathcal{P}(^m\ell_{mk}; \ell_1)$.

2.2 Polinômios de tipo finito e posto finito

Agora que sabemos, como esperado, que resultados lineares podem falhar na teoria geral, seguiremos na direção oposta, a saber, nosso próximo objetivo é mostrar que na teoria geral valem alguns resultados que são insuspeitados no caso linear. Isso reforça nossa tese de que há muito a ser descoberto na teoria geral.

Lema 2.21. *Dados E, F espaços de Banach e $m \in \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{P}_f(^mE; F) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \varphi_{1,j}\varphi_{2,j}\ldots\varphi_{m,j} \otimes b_j : \varphi_{i,j} \in E^*, \ b_j \in F, \ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Demonstração. Lembrando que $\mathcal{P}_f(^mE; F) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \varphi_j^m \otimes b_j : \varphi_j \in E^*, \ b_j \in F, \ k \in \mathbb{N} \right\}$, segue imediatamente que

$$\mathcal{P}_f(^mE; F) \subseteq \left\{ \sum_{j=1}^{k} \varphi_{1,j}\varphi_{2,j}\ldots\varphi_{m,j} \otimes b_j : \varphi_{i,j} \in E^*, \ b_j \in F, \ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Agora seja $P = \sum_{j=1}^{k} \varphi_{1,j}\varphi_{2,j}\ldots\varphi_{m,j} \otimes b_j$, onde $\varphi_{i,j} \in E^*$, $b_j \in F$, $k \in \mathbb{N}$. Usando [22, página 42], temos que para cada j, $\varphi_{1,j}\varphi_{2,j}\ldots\varphi_{m,j} \in \mathcal{P}_f(^mE)$, logo $\varphi_{1,j}\varphi_{2,j}\ldots\varphi_{m,j} = \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{j,i} f_{j,i}^m$, onde $f_{j,i} \in E^*$ e $\alpha_{j,i} \in \mathbb{K}$. Assim

$$P = \sum_{j=1}^{k} \left[\left(\sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{j,i} f_{j,i}^m \right) \otimes b_j \right] = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(f_{j,i}^m \otimes (\alpha_{j,i} b_j) \right) \in \mathcal{P}_f(^mE; F).$$

$\square$

Lema 2.22 (Formula Multinomial)**.** Se A é um anel comutativo e $x_1, \ldots, x_l \in A$, então

$$(x_1 + \cdots + x_l)^n = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_l=n} \frac{n!}{\prod_{i=1}^l \alpha_i!} \prod_{i=1}^l x_i^{\alpha_i}.$$

Demonstração. Veja [7, página 33]. $\square$

De acordo com o que acontece com o adjunto de um operador linear e com o adjunto de um polinômio homogêneo segundo Aron-Schottenloher (ver [17, Lema 2.1]), espera-se que se o polinômio P for de tipo finito (respectivamente, de posto finito), então $\Delta_k^n P$ é de tipo finito (respectivamente, de posto finito) também. Para operadores lineares, ser de tipo finito é o mesmo que ser de posto finito, e esta é a razão pela qual a seguinte propriedade mais geral só pode ser revelada em nosso cenário generalizado.

Proposição 2.23. *Sejam E, F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$. Se $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^mE; F)$, então $\Delta_k^n P \in \mathcal{P}_f(^n\mathcal{P}(^kF); \mathcal{P}(^{mnk}E))$ para todos k, $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Sejam $l \in \mathbb{N}$, $P_1, \ldots, P_l \in \mathcal{P}(^mE)$ e $b_1, \ldots, b_l \in F$ tais que $P(x) = \sum_{j=1}^{l} P_j(x)b_j$ para todo $x \in E$. Aplicaremos um argumento combinatório delicado usando a Fórmula de Leibniz e a Fórmula Multinomial. Para facilitar a compreensão do leitor, faremos um caso específico primeiro, e depois voltaremos ao caso geral. Façamos, neste primeiro momento, o caso $l = n = k = 2$. Neste caso, para $q \in \mathcal{P}(^2F)$ e $x \in E$,

$$\begin{aligned}
[\Delta_2^2 P](q)(x) &= q(P(x))^2 = [q\left(P_1(x)b_1 + P_2(x)b_2\right)]^2 \\
&= [\check{q}\left(P_1(x)b_1 + P_2(x)b_2, P_1(x)b_1 + P_2(x)b_2\right)]^2 \\
&= \left[\sum_{k_1+k_2=2} \frac{2!}{k_1!k_2!} P_1(x)^{k_1} P_2(x)^{k_2} \check{q}\left(b_1^{(k_1)}, b_2^{(k_2)}\right)\right]^2 \\
&= \left[\tfrac{2!}{2!0!} P_1(x)^2 P_2(x)^0 \check{q}\left(b_1^{(2)}, b_2^{(0)}\right) + \tfrac{2!}{1!1!} P_1(x)^1 P_2(x)^1 \check{q}\left(b_1^{(1)}, b_2^{(1)}\right) + \tfrac{2!}{0!2!} P_1(x)^0 P_2(x)^2 \check{q}\left(b_1^{(0)}, b_2^{(2)}\right)\right]^2 \\
&= \sum_{\alpha_{2,0}+\alpha_{1,1}+\alpha_{0,2}=2} \left(\frac{2!}{\alpha_{2,0}!\alpha_{1,1}!\alpha_{0,2}!}\right) \cdot C_{2,0} \cdot C_{1,1} \cdot C_{0,2},
\end{aligned}$$

onde

$$C_{2,0} = \left[\frac{2!}{2!0!} P_1(x)^2 P_2(x)^0 \check{q}\left(b_1^{(2)}, b_2^{(0)}\right)\right]^{\alpha_{2,0}}, \quad C_{1,1} = \left[\frac{2!}{1!1!} P_1(x)^1 P_2(x)^1 \check{q}\left(b_1^{(1)}, b_2^{(1)}\right)\right]^{\alpha_{1,1}} \quad \text{e}$$

$$C_{0,2} = \left[\frac{2!}{0!2!} P_1(x)^0 P_2(x)^2 \check{q}\left(b_1^{(0)}, b_2^{(2)}\right)\right]^{\alpha_{0,2}}.$$

Esta é a igualdade que nos permitirá concluir a demonstração. Voltando ao caso geral, para $q \in \mathcal{P}(^kF)$ e $x \in E$, da Fórmula de Leibniz (Teorema 1.9) e da Formula

Multinomial (Lema 2.22), temos

$$\begin{aligned}
[\Delta_k^n P](q)(x) = q(P(x))^n &= \left[q\left(\sum_{j=1}^{l} P_j(x) b_j\right)\right]^n = \left[\check{q}\left(\sum_{j=1}^{l} P_j(x) b_j\right)^{(k)}\right]^n \\
&= \left[\sum_{k_1+\cdots+k_l=k} \frac{k!}{\prod_{i=1}^{l} k_i!} P_1(x)^{k_1}\cdots P_l(x)^{k_l}\check{q}\left(b_1^{(k_1)},\ldots,b_l^{(k_l)}\right)\right]^n \\
&= \sum_{\sum\limits_{k_1+\cdots+k_l=k} \alpha_{k_1,\ldots,k_l}=n} \left(\frac{n!}{\prod\limits_{k_1+\cdots+k_l=k} \alpha_{k_1,\ldots,k_l}!}\right) \prod_{k_1+\cdots+k_l=k} C_{k_1,\ldots,k_l},
\end{aligned}$$

onde $C_{k_1,\ldots,k_l} = \left[\frac{k!}{\prod_{i=1}^{l} k_i!}\left(\prod_{i=1}^{l} P_i(x)^{k_i}\right)\check{q}\left(b_1^{(k_1)},\ldots,b_l^{(k_l)}\right)\right]^{\alpha_{k_1,\ldots,k_l}}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\prod_{k_1+\cdots+k_l=k} C_{k_1,\ldots,k_l} &= \prod_{k_1+\cdots+k_l=k}\left[\frac{k!}{\prod_{i=1}^{l} k_i!}\left(\prod_{i=1}^{l} P_i(x)^{k_i}\right)\check{q}\left(b_1^{(k_1)},\ldots,b_l^{(k_l)}\right)\right]^{\alpha_{k_1,\ldots,k_l}} \\
&= \prod_{k_1+\cdots+k_l=k}\left[\left(\frac{k!}{\prod_{i=1}^{l} k_i!}\right)^{\alpha_{k_1,\ldots,k_l}}\left(\prod_{i=1}^{l} P_i(x)^{k_i\alpha_{k_1,\ldots,k_l}}\right)\check{q}\left(b_1^{(k_1)},\ldots,b_l^{(k_l)}\right)^{\alpha_{k_1,\ldots,k_l}}\right] \\
&= (k!)^n K_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)} P_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)}(x) Q_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)}(q),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
K_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)} &= \prod_{k_1+\cdots+k_l=k}\left(\frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{l} k_i!\right)^{\alpha_{k_1,\ldots,k_l}}}\right), \\
P_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)}(x) &= \prod_{k_1+\cdots+k_l=k}\left(\prod_{i=1}^{l} P_i(x)^{k_i\alpha_{k_1,\ldots,k_l}}\right), \\
Q_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)}(q) &= \prod_{k_1+\cdots+k_l=k}\left[\check{q}\left(b_1^{(k_1)},\ldots,b_l^{(k_l)}\right)^{\alpha_{k_1,\ldots,k_l}}\right].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[\Delta_k^n P](q)(x) = \sum_{\substack{\sum\limits_{k_1+\cdots+k_l=k} \alpha_{k_1,\ldots,k_l}=n}} \Theta_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)} P_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)}(x) Q_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)}(q) =$$

$$\left(\sum_{\substack{\sum\limits_{k_1+\cdots+k_l=k} \alpha_{k_1,\ldots,k_l}=n}} \Theta_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)} P_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)} Q_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)} \right)(q)(x),$$

onde

$$\Theta_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)} = \left(\frac{n!(k!)^n}{\prod\limits_{k_1+\cdots+k_l=k} \alpha_{k_1,\ldots,k_l}!} \right) K_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)}.$$

Notemos que $P_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)} \in \mathcal{P}(^{mnk}E)$ e o polinômio $Q_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)} \in \mathcal{P}(^n\mathcal{P}(^kF))$ é de tipo finito, pois

$$Q_{(\alpha_{k_1,\ldots,k_l}:k_1+\cdots+k_l=k)} = \prod_{k_1+\cdots+k_l=k} \left[\Psi_{\left(b_1^{(k_1)},\ldots,b_l^{(k_l)}\right)} \right]^{\alpha_{k_1,\ldots,k_l}},$$

onde

$$\Psi_{\left(b_1^{(k_1)},\ldots,b_l^{(k_l)}\right)} : \mathcal{P}(^kF) \longrightarrow \mathbb{K},\ \Psi_{\left(b_1^{(k_1)},\ldots,b_l^{(k_l)}\right)}(q) = \check{q}\left(b_1^{(k_1)},\ldots,b_l^{(k_l)}\right)$$

é um funcional linear contínuo. Finalmente, do Lema 2.21 segue que $\Delta_k^n P$ é de tipo finito. □

Terminamos esta seção com uma recíproca parcial da proposição acima. A demonstração ilustra a interação entre argumentos lineares e não-lineares.

Proposição 2.24. *As seguintes afirmações são equivalentes para um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$:*

(i) P tem posto finito.

(ii) $\Delta_k^1 P$ é um operador linear de posto finito para todo $k \in \mathbb{N}$.

(iii) $\Delta_k^1 P$ é um operador linear de posto finito para algum $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. A implicação (i) $\Longrightarrow$ (ii) segue da Proposição 2.23 e a implicação (ii) $\Longrightarrow$ (iii) é óbvia. Para provar a implicação (iii) $\Longrightarrow$ (i), suponhamos que $\Delta_k^1 P \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^kF);\mathcal{P}(^{mk}E))$ tenha posto finito. Como a classe dos operadores de posto finito é um ideal de operadores, do Lema 2.18 concluímos que o operador linear $\left[(\delta_F^k \circ P)_L\right]^* \in$

$\mathcal{L}\left(\left(\widehat{\otimes}_\pi^{k,s}F\right)^*;\left(\widehat{\otimes}_\pi^{mk,s}E\right)^*\right)$ tem posto finito. Mas o ideal de operadores de posto finito é completamente simétrico [35, Proposition 4.4.7], logo $(\delta_F^k \circ P)_L \in \mathcal{L}\left(\widehat{\otimes}_\pi^{mk,s}E;\widehat{\otimes}_\pi^{k,s}F\right)$ tem posto finito. Agora, de [15, Proposition 3.2.b] temos $\delta_F^k \circ P \in \mathcal{F}\circ\mathcal{P}\left({}^{mk}E;\widehat{\otimes}_\pi^{k,s}F\right)$. Por outro lado, em [33, Proposition 3.1.b] mostra-se que $\mathcal{F}\circ\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{F}}$. Assim segue que o polinômio $\delta_F^k \circ P$ tem posto finito. Desse modo, concluímos que a imagem de $\delta_F^k \circ P$ não contém infinitos vetores linearmente independentes.

Suponhamos que P não tenha posto finito, isto é, existe $(x_j)_{j=1}^\infty \subseteq E$ tal que o conjunto $\{P(x_1), P(x_2), P(x_3), \ldots\}$ é linearmente independente em F. De [40, Proposition 1.1] sabemos que o conjunto $\{P(x_{i_1}) \otimes P(x_{i_2}) \otimes \cdots \otimes P(x_{i_k}) : \ i_1, i_2, \ldots i_k \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente em $\otimes^k F$, assim seu subconjunto $\left\{\otimes^k P(x_1), \otimes^k P(x_2), \otimes^k P(x_3), \ldots\right\}$ é linearmente independente na imagem de $\delta_F^k \circ P$. Esta contradição mostra que P tem posto finito. $\square$

2.3 Um teorema de coincidência

Por teorema de coincidência entendemos um resultado que mostra uma situação específica em que uma classe especial de operadores (ou polinômios), que em geral não coincide com o espaço todo, nesta situação específica coincide com o espaço todo. Por exemplo, é bem conhecido que (relembre que $\mathcal{W}$ denota o ideal dos operadores lineares fracamente compactos):

(i) Se E é reflexivo, então $\mathcal{L}(E;F) = \mathcal{W}(E;F) = \Delta_1^1\mathcal{W}(E;F)$ para todo espaço de Banach F;

(ii) Se F é reflexivo, então $\mathcal{L}(E;F) = \mathcal{W}(E;F) = \Delta_1^1\mathcal{W}(E;F)$ para todo espaço de Banach E.

Dados espaços de Banach E e F, definimos

$$\Delta_k^1\mathcal{W}(E;F) = \{u \in \mathcal{L}(E;F) : \Delta_k^1 u \in \mathcal{W}(\mathcal{P}({}^kF);\mathcal{P}({}^kE))\}.$$

A estrutura matemática desse conjunto será estudada na Seção 3.3. Nesta seção mostramos que, sob certas condições, $\Delta_k^1\mathcal{W}(E;F) = \mathcal{L}(E;F)$ para todo $k \geqslant 2$. Precisaremos do lema a seguir e que o leitor se lembre da convenção $\mathcal{P}({}^0E;F) = F$, isto é, que polinômios 0-homogêneos são funções constantes.

Lema 2.25. *Sejam r, $s \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$ tais que $r + s \leqslant k$ e $u, v \in \mathcal{L}(E;F)$. Então a aplicação*

$$R_{u^r,v^s}^k : \mathcal{P}({}^kF) \longrightarrow \mathcal{P}({}^rE;\mathcal{P}({}^sE;\mathcal{P}({}^{k-r-s}F))),$$

$$R^k_{u^r,v^s}(q)(x)(x')(y) = \check{q}\left([u(x)]^{(r)}, [v(x')]^{(s)}, y^{(k-r-s)}\right)$$

para todos $q \in \mathcal{P}(^kF)$, x, $x' \in E$ e $y \in F$, é um operador linear contínuo, isto é, $R^k_{u^r,v^s} \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^kF); \mathcal{P}(^rE; \mathcal{P}(^sE; \mathcal{P}(^{k-r-s}F))))$.

Demonstração. Provemos primeiramente que $R^k_{u^r,v^s}$ é bem definida. Sejam $q \in \mathcal{P}(^kF)$, x, $x' \in E$. Por ser fácil, omitimos a demonstração de que, da maneira como definiu-se, $R^k_{u^r,v^s}(q)(x)(x') \in \mathcal{P}(^{k-r-s}F)$. Para ver que $R^k_{u^r,v^s}(q)(x) \in \mathcal{P}(^sE; \mathcal{P}(^{k-r-s}F))$, note que é o polinômio gerado pelo operador multilinear

$$A(x'_1, \ldots, x'_s)(y) = \check{q}\left([u(x)]^{(r)}, v(x'_1), \ldots, v(x'_s), y^{k-r-s}\right)$$

para todos $x_1, \ldots, x_s \in E$, $y \in F$, que é contínuo pois

$$\begin{aligned}
\|A(x'_1, \ldots, x'_s)\| &= \sup_{\|y\| \leqslant 1} \left|\check{q}\left([u(x)]^{(r)}, v(x'_1), \ldots, v(x'_s), y^{k-r-s}\right)\right| \\
&\leqslant \|\check{q}\| \cdot \|u\|^r \cdot \|x\|^r \cdot \|v\|^s \cdot \|x'_1\| \ldots \|x'_s\|.
\end{aligned}$$

E $R^k_{u^r,v^s}(q) \in \mathcal{P}(^rE; \mathcal{P}(^sE; \mathcal{P}(^{k-r-s}F)))$ pois é o polinômio gerado pelo operador multilinear

$$B(x_1, \ldots, x_r)(x')(y) = \check{q}(u(x_1), \ldots, u(x_r), v(x')^s, y^{k-r-s}),$$

que é contínuo pois

$$\begin{aligned}
\|B(x_1, \ldots, x_r)\| &= \sup_{\|x'\| \leqslant 1} \|B(x_1, \ldots, x_r)(x')\| \\
&= \sup_{\|x'\| \leqslant 1} \sup_{\|y\| \leqslant 1} |B(x_1, \ldots, x_r)(x')(y)| \\
&= \sup_{\|x'\| \leqslant 1} \sup_{\|y\| \leqslant 1} \left|\check{q}(u(x_1), \ldots, u(x_r), v(x')^s, y^{k-r-s}\right| \\
&\leqslant \|\check{q}\| \cdot \|u\|^r \cdot \|x_1\| \ldots \|x_r\| \cdot \|v\|^s.
\end{aligned}$$

Vejamos agora que $R^k_{u^r,v^s}$ é linear: se p, $q \in \mathcal{P}(^kF)$, x, $x' \in E$, $y \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned}
R^k_{u^r,v^s}(p + \lambda q)(x)(x')(y) &= (p + \lambda q)^\vee \left([u(x)]^r, [v(x')]^s, y^{k-r-s}\right) \\
&= (\check{p} + \lambda\check{q})\left([u(x)]^{(r)}, [v(x')]^{(s)}, y^{k-r-s}\right) \\
&= \check{p}\left([u(x)]^{(r)}, [v(x')]^{(s)}, y^{(k-r-s)}\right) + \lambda\check{q}\left([u(x)]^{(r)}, [v(x')]^{(s)}, y^{k-r-s}\right) \\
&= R^k_{u^r,v^s}(p)(x)(x')(y) + \lambda R^k_{u^r,v^s}(q)(x)(x')(y).
\end{aligned}$$

Por fim, a continuidade segue de

$$\begin{aligned}\|R^k_{u^r,v^s}(q)\| &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|R^k_{u^r,v^s}(q)(x)\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\sup_{\|x'\|\leqslant 1}\|R^k_{u^r,v^s}(q)(x)(x')\| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\sup_{\|x'\|\leqslant 1}\sup_{\|y\|\leqslant 1}\left|R^k_{u^r,v^s}(q)(x)(x')(y)\right| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\sup_{\|x'\|\leqslant 1}\sup_{\|y\|\leqslant 1}\left|\check{q}\left([u(x)]^r,[v(x')]^s,y^{k-r-s}\right)\right| \\ &\leqslant \|\check{q}\|\cdot\|u\|^r\cdot\|v\|^s \leqslant \frac{k^k}{k!}\|q\|\cdot\|u\|^r\cdot\|v\|^s.\end{aligned}$$

□

O Lema 2.25 nos permite fazer a seguinte definição:

Definição 2.26. Sejam $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e $k \in \mathbb{N}$. Para cada $r \in \{0,\ldots,k\}$, definimos

$$\Delta^1_{(k,r)}u := R^k_{u^r,u^0} \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^kF);\mathcal{P}(^rE;\mathcal{P}(^{k-r}F))).$$

Notemos que $\Delta^1_{(k,0)}u = id_{\mathcal{P}(^kF)}$ e $\Delta^1_{(k,k)}u = \Delta^1_k u$.

Lema 2.27. *Sejam r, $k \in \mathbb{N}_0$ tais que $0 \leqslant r \leqslant k-1$. A aplicação*

$$D\colon \mathcal{P}(^rE;\mathcal{L}(E;\mathcal{P}(^{k-r-1}F))) \longrightarrow \mathcal{P}(^{r+1}E;\mathcal{P}(^{k-r-1}F))\ ,\ D(Q)(x)(y) = Q(x)(x)(y),$$

é um operador linear contínuo.

Demonstração. Dado $Q \in \mathcal{P}(^rE;\mathcal{L}(E;\mathcal{P}(^{k-r-1}F)))$, $Q(x) \in \mathcal{L}(E;\mathcal{P}(^{k-r-1}F))$ para todo $x \in E$, e portanto $Q(x)(x') \in \mathcal{P}(^{k-r-1}F)$ para todos x, $x' \in E$. Logo, $D(Q)(x) = Q(x)(x) \in \mathcal{P}(^{k-r-1}F)$, para todo $Q \in \mathcal{P}(^rE;\mathcal{L}(E;\mathcal{P}(^{k-r-1}F)))$ e todo $x \in E$. Agora vejamos que $D(Q) \in \mathcal{P}(^{r+1}E;\mathcal{P}(^{k-r-1}F))$. Como $\check{Q}(x_1,\ldots,x_r) \in \mathcal{L}(E;\mathcal{P}(^{k-r-1}F))$ para todos $x_1,\ldots,x_r \in E$, o seguinte operador é multilinear:

$$A\colon E\times \overset{(r+1)}{\cdots} \times E \longrightarrow \mathcal{P}(^{k-r-1}F),\ A(x_1,\ldots,x_{r+1}) = \check{Q}(x_1,\ldots,x_r)(x_{r+1}),$$

e é contínuo pois

$$\begin{aligned}\|A(x_1,\ldots,x_{r+1})\| &= \|(Q)^\vee(x_1,\ldots,x_r)(x_{r+1})\|_{\mathcal{P}(^{k-r-1}F)} \\ &\leqslant \|(Q)^\vee(x_1,\ldots,x_r)\|_{\mathcal{L}(E;\mathcal{P}(^{k-r-1}F)}\cdot\|x_{r+1}\| \\ &\leqslant \|\check{Q}\|\cdot\|x_1\|\cdots\|x_r\|\cdot\|x_{r+1}\|.\end{aligned}$$

Isso prova que $D(Q)$ é o polinômio gerado pelo operador $(r+1)$-linear contínuo A, e portanto D está bem definido. Por outro lado, dados Q, Q_1, $Q_2 \in \mathcal{P}(^rE;\mathcal{L}(E;\mathcal{P}(^{k-r-1}F)))$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, para todo $x \in E$ temos

$$\begin{aligned}D(Q_1+\lambda Q_2)(x) &= (Q_1+\lambda Q_2)(x)(x) = (Q_1(x)+\lambda Q_2(x))(x) \\ &= Q_1(x)(x)+\lambda[Q_2(x)(x)] = D(Q_1)(x)+\lambda D(Q_2)(x),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|D(Q)\|_{\mathcal{P}(^{r+1}E;\mathcal{P}(^{k-r-1}F))} &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|D(Q)(x)\|_{\mathcal{P}(^{k-r-1}F)} = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Q(x)(x)\|_{\mathcal{P}(^{k-r-1}F)}\\ &\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Q(x)\|_{\mathcal{L}(E;\mathcal{P}(^{k-r-1}F))}\cdot\|x\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Q\|\cdot\|x\|^r\cdot\|x\| = \|Q\|,\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

Proposição 2.28. *Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores, $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e r, $k \in \mathbb{N}_0$ tais que $0 \leqslant r \leqslant k-1$. Se $\Delta^1_{(k,r)}u \in \mathcal{I}(\mathcal{P}(^kF);\mathcal{P}(^rE;\mathcal{P}(^{k-r}F)))$, então*

$$\Delta^1_{(k,r+1)}u \in \mathcal{I}(\mathcal{P}(^kF);\mathcal{P}(^{r+1}E;\mathcal{P}(^{k-r-1}F))).$$

Demonstração. Relembremos as definições:

$$\begin{aligned}\Delta^1_{(k,r)}u : \mathcal{P}(^kF) &\longrightarrow \mathcal{P}(^rE;\mathcal{P}(^{k-r}F))\\ q &\longmapsto \Delta^1_{(k,r)}u(q)(x)(y) = \check{q}\left([u(x)]^{(r)}, y^{(k-r)}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^1_{(k,r+1)}u : \mathcal{P}(^kF) &\longrightarrow \mathcal{P}(^{r+1}E;\mathcal{P}(^{k-r-1}F))\\ q &\longmapsto \Delta^1_{(k,r+1)}u(q)(x)(y) = \check{q}\left([u(x)]^{(r+1)}, y^{(k-r-1)}\right).\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.25 sabemos que $T := R^k_{u^r,u}$ é um operador linear contínuo.

Provemos que $T \in \mathcal{I}(\mathcal{P}(^kF);\mathcal{P}(^rE;\mathcal{L}(E;\mathcal{P}(^{k-r-1}F))))$. Para isso, considere a composição

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{P}(^kF) & \xrightarrow{\Delta^1_{(k,r)}u} & \mathcal{P}(^rE;\mathcal{P}(^{k-r}F)) & \xrightarrow{\delta_{\Delta^1_{(k-r,1)}u}} & \mathcal{P}(^rE;\mathcal{L}(E;\mathcal{P}(^{k-r-1}F)))\\ q & \longmapsto & \Delta^1_{(k,r)}u(q) & \longmapsto & \left(\Delta^1_{(k-r,1)}u\right)\circ\left(\Delta^1_{(k,r)}u(q)\right),\end{array}$$

onde

$$\begin{aligned}\delta_{\Delta^1_{(k-r,1)}u} : \mathcal{P}(^rE;\mathcal{P}(^{k-r}F)) &\longrightarrow \mathcal{P}(^rE;\mathcal{L}(E;\mathcal{P}(^{k-r-1}F)))\\ Q &\longmapsto \Delta^1_{(k-r,1)}u\circ Q.\end{aligned}$$

Vejamos que $\delta_{\Delta^1_{(k-r,1)}u}$ é um operador linear contínuo: dados P, $Q \in \mathcal{P}(^rE;\mathcal{P}(^{k-r}F))$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$,

$$\begin{aligned}\delta_{\Delta^1_{(k-r,1)}u}(P+\lambda Q)(x) &= \left[\Delta^1_{(k-r,1)}u\circ(P+\lambda Q)\right](x) = \Delta^1_{(k-r,1)}u(P(x)+\lambda Q(x))\\ &= \Delta^1_{(k-r,1)}u(P(x)) + \lambda\Delta^1_{(k-r,1)}u(Q(x))\\ &= \left(\Delta^1_{(k-r,1)}u\circ P\right)(x) + \lambda\left(\Delta^1_{(k-r,1)}u\circ Q\right)(x)\\ &= \left(\delta_{\Delta^1_{(k-r,1)}u}(P) + \lambda\delta_{\Delta^1_{(k-r,1)}u}(Q)\right)(x),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|\delta_{\Delta^1_{(k-r,1)}u}(Q)\| &= \|\Delta^1_{(k-r,1)}u\circ Q\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|\left(\Delta^1_{(k-r,1)}u\circ Q\right)(x)\|\\ &\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|\Delta^1_{(k-r,1)}u\|\cdot\|Q(x)\| \leqslant \|\Delta^1_{(k-r,1)}u\|\cdot\|Q\|.\end{aligned}$$

Dessa forma, $\left(\delta_{\Delta^1_{(k-r,1)}u} \circ \Delta^1_{(k,r)}u\right) \in \mathcal{I}(\mathcal{P}(^kF); \mathcal{P}(^rE; \mathcal{L}(E; \mathcal{P}(^{k-r-1}F))))$ e, para cada $q \in \mathcal{P}(^kF)$,

$$\left(\delta_{\Delta^1_{(k-r,1)}u} \circ \Delta^1_{(k,r)}u\right)(q) = \delta_{\Delta^1_{(k-r,1)}u}\left(\Delta^1_{(k,r)}u(q)\right) = \Delta^1_{(k-r,1)}u \circ \left(\Delta^1_{(k,r)}u(q)\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left(\delta_{\Delta^1_{(k-r,1)}u} \circ \Delta^1_{(k,r)}u\right)(q)(x)(x')(y) &= \left(\Delta^1_{(k-r,1)}u \circ \left(\Delta^1_{(k,r)}u(q)\right)\right)(x)(x')(y) \\ &= \left(\Delta^1_{(k-r,1)}u\left(\Delta^1_{(k,r)}u(q)(x)\right)\right)(x')(y) \\ &= \left(\Delta^1_{(k,r)}u(q)(x)\right)^\vee u(x')y^{(k-r-1)} \\ &= \check{q}[u(x)]^{(r)}u(x')y^{(k-r-1)} = T(q)(x)(x')(y),\end{aligned}$$

provando que $T = \delta_{\Delta^1_{(k-r,1)}u} \circ \Delta^1_{(k,r)}u$.

Para completar a demonstração basta mostrar que $\Delta^1_{(k,r+1)}u = D \circ T$.

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{P}(^kF) & \xrightarrow{T} & \mathcal{P}(^rE; \mathcal{L}(E; \mathcal{P}(^{k-r-1}F))) & \xrightarrow{D} & \mathcal{P}(^{r+1}E; \mathcal{P}(^{k-r-1}F)) \\ q & \longmapsto & T(q) & \longmapsto & D(T(q))\end{array}$$

De fato,

$$[D(T(q))](x)(y) = T(q)(x)(x)(y) = \check{q}\left([u(x)]^{(r)}, u(x), y^{(k-r-1)}\right) = \Delta^1_{(k,r+1)}u(q)(x)(y).$$

□

Provamos a seguir o teorema de coincidência.

Corolário 2.29. *Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores e E e F espaços de Banach tais que*

$$\mathcal{I}\left(\mathcal{P}(^kF); \mathcal{P}(^{k-1}E; F^*)\right) = \mathcal{L}\left(\mathcal{P}(^kF); \mathcal{P}(^{k-1}E; F^*)\right).$$

Então $\Delta^1_k\mathcal{I}(E; F) = \mathcal{L}(E; F)$.

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{L}(E; F)$. Por definição, $\Delta^1_{(k,k-1)}u \in \mathcal{L}\left(\mathcal{P}(^kF); \mathcal{P}(^{k-1}E; F^*)\right)$, e pela hipótese temos $\Delta^1_{(k,k-1)}u \in \mathcal{I}\left(\mathcal{P}(^kF); \mathcal{P}(^{k-1}E; F^*)\right)$. Segue da Proposição 2.28 que $\Delta^1_k u = \Delta^1_{(k,k)}u \in \mathcal{I}\left(\mathcal{P}(^kF); \mathcal{P}(^kE)\right)$, isto é, $u \in \Delta^1_k\mathcal{I}(E; F)$. □

Daremos a seguir um exemplo concreto em que o teorema de coincidência acima se aplica. O exemplo foi inspirado no trabalho [1] de R. Alencar e K. Floret.

Exemplo 2.30. Sejam $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, E um espaço de Banach reflexivo com a Propriedade P_α e F um espaço de Banach tal que F^* é reflexivo e tem rank ρ (ou loose rank ρ), tal que $(k-1)\alpha \leqslant \rho$ (ou $(k-1)\alpha < \rho$). Vejamos que

$$\Delta^1_k\mathcal{W}(E; F) = \mathcal{L}(E; F).$$

De fato, pela Proposição 1.60, sabemos que o espaço $\mathcal{P}({}^{k-1}E; F^*)$ é reflexivo e, portanto

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{P}({}^{k}F); \mathcal{P}({}^{k-1}E; F^*)\right) = \mathcal{W}\left(\mathcal{P}({}^{k}F); \mathcal{P}({}^{k-1}E; F^*)\right).$$

A coincidência desejada segue agora do Corolário 2.29.

Observação 2.31. No exemplo acima, notemos que se $k.\alpha \leqslant \rho$ (ou $k.\alpha < \rho$), então a Proposição 1.60 garante que $\mathcal{P}({}^{k}E; F^*)$ é reflexivo. Logo, como para $y^* \in B_{F^*}$ fixo o operador linear

$$\mathcal{P}({}^{k}E) \hookrightarrow \mathcal{P}({}^{k}E; F^*),\ q \mapsto q \otimes y^*,$$

é uma imersão isométrica, segue de [16, Corolário 6.4.6] que o espaço $\mathcal{P}({}^{k}E)$ é reflexivo. Assim, para cada $u \in \mathcal{L}(E; F)$, o operador $\Delta_k^1 u$ toma valores no espaço reflexivo $\mathcal{P}({}^{k}E)$, e portanto é fracamente compacto. Isso prova que $\Delta_k^1 \mathcal{W}(E; F) = \mathcal{L}(E; F)$. O Exemplo 2.30 mostra que obtemos o mesmo resultado considerando apenas $(k-1)\alpha \leqslant \rho$ (ou $(k-1)\alpha < \rho$).

CAPÍTULO 3

GERMES DE IDEAIS DE OPERADORES E POLINÔMIOS

Um conceito central na teoria de ideais de operadores é o ideal dual $\mathcal{I}^{dual}$ de um ideal de operadores $\mathcal{I}$, já visto na Definição 1.36. De maneira análoga, dados um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$, $k,n \in \mathbb{N}$ e um ideal de polinômios n-homogêneos $\mathcal{Q}_n$, pode-se perguntar se o polinômio n-homogêneo $\Delta_k^n P$ pertence ou não ao ideal $\mathcal{Q}_n$, e ir mais além e considerar o conjunto formado por tais polinômios, isto é, o conjunto

$$(\Delta_k^n \mathcal{Q}_n)\,(^mE;F) = \left\{P \in \mathcal{P}(^mE;F) : \Delta_k^n P \in \mathcal{Q}(^n\mathcal{P}(^kF);\mathcal{P}(^{mnk}E))\right\}.$$

O dual polinomial de um ideal de operadores é um caso particular desta construção, pois $\mathcal{I}^{dual} = \Delta_1^1\mathcal{I}$. O que se pode dizer sobre a estrutura deste conjunto? Dada a natureza fortemente não linear dos adjuntos generalizados, não é de se esperar que $(\Delta_k^n \mathcal{Q}_n)\,(^mE;F)$ seja um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^mE;F)$, muito menos que $\Delta_k^n \mathcal{Q}_n$ seja um ideal de polinômios m-homogêneos.

Este capítulo é o resultado da descoberta que a única condição de ideal de polinômios que $\Delta_k^n \mathcal{Q}_n$ não cumpre é que a soma de dois polinômios deste conjunto também pertence ao conjunto. Isso nos levou a introduzir um conceito mais fraco que ideal, o qual chamamos de *germe de ideal*, que já nasce com os exemplos dados pelos adjuntos generalizados.

3.1 Germes de ideais de operadores

Começamos o capítulo com a noção de germe de ideal de operadores lineares, que nada mais é que retirar a propriedade da adição do conceito de ideal de operadores.

Definição 3.1 (Germe de ideal de operadores)**.** Um *germe de ideal de operadores* $\mathcal{G}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para quaisquer espaços de Banach E e F, as componentes

$$\mathcal{G}(E;F) := \mathcal{L}(E;F) \cap \mathcal{G}$$

satisfazem:

(i) $\mathcal{G}(E;F)$ é um subconjunto de $\mathcal{L}(E;F)$ que contém os operadores de posto finito;

(ii) Se $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $v \in \mathcal{G}(F;H)$ e $t \in \mathcal{L}(H;X)$, então $t \circ v \circ u \in \mathcal{G}(E;X)$.

Observação 3.2. Note que, Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v \in \mathcal{G}(E;F)$, então $\lambda v \in \mathcal{G}(E;F)$. De fato, $T_\lambda \colon F \longrightarrow F,\ T_\lambda(y) = \lambda y$, é um operador linear contínuo e $\lambda v = T_\lambda \circ v$.

Exemplo 3.3. Todo ideal de operadores $\mathcal{I}$ é um germe de ideal de operadores.

Além de fornecer muitos exemplos de germes, o resultado a seguir nos permitirá exibir germes que não são ideais de operadores.

Proposição 3.4. *Sejam $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ ideais de operadores. Então:*

(i) *$\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ é um germe de ideal de operadores.*

(ii) *$\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ é um ideal de operadores se, e somente se, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ ou $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$.*

Demonstração. O item (i) é imediato e omitimos a demonstração. Façamos o item (ii). Suponhamos que $\mathcal{I} \nsubseteq \mathcal{J}$ e $\mathcal{J} \nsubseteq \mathcal{I}$. Neste caso existem $u_1 \in (\mathcal{I}(E_1;F_1) - \mathcal{J}(E_1;F_1))$ e $u_2 \in (\mathcal{J}(E_2;F_2) - \mathcal{I}(E_2;F_2))$. Chame $E = E_1 \times E_2$ e $F = F_1 \times F_2$, com qualquer uma das normas usuais no produto cartesiano. Para $j = 1, 2$, defina os operadores lineares contínuos:

$$\widetilde{u_j} \colon E \longrightarrow F\ ,\ \widetilde{u_1}(x,y) = (u_1(x), 0), \quad \widetilde{u_2}(x,y) = (0, u_2(y)).$$

E ainda considere as inclusões e projeções canônicas

$$E_j \xrightarrow{i_j} E \xrightarrow{\pi_j} E_j,\ F_j \xrightarrow{k_j} F \xrightarrow{\sigma_j} F_j.$$

Como $\widetilde{u_1} = k_1 \circ u_1 \circ \pi_1$ e $\widetilde{u_2} = k_2 \circ u_2 \circ \pi_2$, segue que $\widetilde{u_1} \in \mathcal{I}(E;F)$ e $\widetilde{u_2} \in \mathcal{J}(E;F)$ e, portanto, $\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2} \in (\mathcal{I} \cup \mathcal{J})(E;F)$. Suponha que $\widetilde{u_1} + \widetilde{u_2} \in \mathcal{I}(E;F)$. Como $u_2 = \sigma_2 \circ (\widetilde{u_1} + \widetilde{u_2}) \circ i_2$, teríamos $u_2 \in \mathcal{I}(E_2;F_2)$, o que não ocorre. Isso prova que $\widetilde{u_1} + \widetilde{u_2} \notin \mathcal{I}(E;F)$. De forma análoga prova-se que $\widetilde{u_1} + \widetilde{u_2} \notin \mathcal{J}(E;F)$, donde segue que $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ não é ideal de operadores. A recíproca é óbvia. □

Damos a seguir um exemplo concreto de germe que não é ideal. Para isso relembremos a definição do ideal dos operadores lineares completamente contínuos.

Definição 3.5. Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(E;F)$ é *completamente contínuo*, e denotamos este fato por $T \in \mathcal{CC}(E;F)$, se a seguinte propriedade se cumpre:

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ em } E \Longrightarrow T(x_n) \longrightarrow T(x) \text{ em } F.$$

Lema 3.6. *$id_{\ell_1} \in (\mathcal{CC} - \mathcal{W})(\ell_1;\ell_1)$ e $id_{\ell_2} \in (\mathcal{W} - \mathcal{CC})(\ell_2;\ell_2)$.*

Demonstração. A afirmação $id_{\ell_1} \in \mathcal{CC}(\ell_1;\ell_1)$ segue do fato de que ℓ_1 tem a propriedade de Schur (veja, por exemplo, [16, Teorema 6.2.12]). Por outro lado, do Teorema de Kakutani [16, Teorema 6.4.5] segue que $id_{\ell_1} \notin \mathcal{W}(\ell_1;\ell_1)$, pois ℓ_1 não é reflexivo.

Como ℓ_2 é reflexivo, de [12, Proposition 3] segue que $id_{\ell_2} \in \mathcal{W}(\ell_2;\ell_2)$. Para provar que $id_{\ell_2} \notin \mathcal{CC}(\ell_2;\ell_2)$, consideremos os vetores unitários canônicos $(e^n)_n$ e vejamos que $e^n \xrightarrow{w} 0$ em ℓ_2. Com efeito, dado $\varphi \in (\ell_2)^* = \ell_2$, onde $\varphi = (a_1, a_2, \ldots)$, tem-se $\varphi(e^n) = a_n \longrightarrow 0$. Por outro lado, como $\|e^n\|_{\ell_2} = 1$ para todo n, tem-se que $(e^n)_n$ não converge em norma para zero. $\square$

Combinando a Proposição 3.4 com o Lema 3.6, temos o seguinte exemplo concreto:

Exemplo 3.7. $\mathcal{CC} \cup \mathcal{W}$ é um germe de ideal de operadores que não é um ideal de operadores.

Na Seção 3.3 daremos mais exemplos interessantes de germes de ideais de operadores.

Utilizamos a palavra *germe* no sentido de que um germe de ideal de operadores gera um ideal de operadores. Os dois resultados a seguir expressam o sentido preciso desta afirmação.

Definição 3.8. Seja $\mathcal{A}$ um germe de ideal de operadores. O *gerado* de $\mathcal{A}$, denotado por $\widetilde{\mathcal{A}}$, é definido da seguinte forma:

$$\widetilde{\mathcal{A}}(E;F) := \{u \in \mathcal{L}(E;F) : u \in \operatorname{span}\{\mathcal{A}(E;F)\}\}$$

para quaisquer espaços de Banach E e F.

Proposição 3.9. *Se $\mathcal{A}$ um germe de ideal de operadores, então $\widetilde{\mathcal{A}}$ é um ideal de operadores.*

Demonstração. É claro que $\widetilde{\mathcal{A}}(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ e contém os operadores de posto finito, pois $\mathcal{A}(E;F)$ já tem essa propriedade.

Sejam $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $v \in \widetilde{\mathcal{A}}(F;G)$ e $t \in \mathcal{L}(G;H)$. Existem $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_j \in \mathbb{K}$ e $v_j \in \mathcal{A}(F;G)$, $j = 1, \ldots, k$ tais que $v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$. Logo,

$$\begin{aligned}(t \circ v \circ u)(x) = t(v(u(x))) &= t\left(\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j\right)(u(x))\right) = t\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j(u(x))\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j t(v_j(u(x))) = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j (t \circ v_j \circ u)\right)(x)\end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Portanto, $t \circ v \circ u = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (t \circ v_j \circ u) \in \widetilde{\mathcal{A}}(E;H)$ pois cada $t \circ v_j \circ u \in \mathcal{A}(E;H)$. □

Proposição 3.10. *Se $\mathcal{A}$ é um germe de ideal de operadores, então $\widetilde{\mathcal{A}}$ é um ideal normado de operadores com a norma $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{A}}}\colon \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow [0, +\infty)$,*

$$\|u\|_{\widetilde{\mathcal{A}}} = \inf\left\{\sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \cdot \|u_j\| : k \in \mathbb{N}, u = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j, \lambda_j \in \mathbb{K}, u_j \in \mathcal{A}(E;F)\right\},$$

para todo $u \in \widetilde{\mathcal{A}}(E;F)$.

Demonstração. É claro que a função $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ está bem definida, pois cada operador $u \in \widetilde{\mathcal{A}}(E;F)$ tem pelo menos uma representação como requerido. Também é claro que $\|u\|_{\widetilde{\mathcal{A}}} \geqslant 0$ e que $\|0\|_{\widetilde{\mathcal{A}}} = 0$.

Suponha que $\|u\|_{\widetilde{\mathcal{A}}} = 0$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe uma representação $u = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j$ com cada $u_j \in \mathcal{A}(E;F)$ tal que $\sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \cdot \|u_j\| < \varepsilon$. Como $\|u\| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \|u_j\| < \varepsilon$, segue que $u = 0$.

Dados $u \in \widetilde{\mathcal{A}}(E;F)$ e $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\|\lambda u\|_{\widetilde{\mathcal{A}}} &= \inf\left\{\sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \cdot \|u_j\| : k \in \mathbb{N}, \lambda u = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j, \lambda_j \in \mathbb{K}, u_j \in \mathcal{A}(E;F)\right\} \\ &= \inf\left\{|\lambda| \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{|\lambda_j|}{|\lambda|} \|u_j\| : k \in \mathbb{N}, u = \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\lambda} u_j, \lambda_j \in \mathbb{K}, u_j \in \mathcal{A}(E;F)\right\} \\ &= |\lambda| \cdot \inf\left\{\sum_{j=1}^{k} \left|\frac{\lambda_j}{\lambda}\right| \cdot \|u_j\| : k \in \mathbb{N}, u = \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\lambda} u_j, \lambda_j \in \mathbb{K}, u_j \in \mathcal{A}(E;F)\right\} \\ &= |\lambda| \cdot \|u\|_{\widetilde{\mathcal{A}}}.\end{aligned}$$

Sejam $u, v \in \widetilde{\mathcal{A}}(E;F)$. Para cada representação $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j$ de u e cada representação $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i v_i$ de v, $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j + \sum_{i=1}^{l} \alpha_i v_i$ é uma representação de $u + v$. Isso significa que

$$\{\text{representações de } u + \text{ representações de } v\} \subseteq \{\text{representações de } u+v\},$$

donde segue que

$$\begin{aligned}
&\|u+v\|_{\widetilde{\mathcal{A}}} \leqslant \\
&\inf\left\{\sum_{j=1}^{m}|\lambda_j|\cdot\|u_j\| + \sum_{i=1}^{l}|\alpha_i|\cdot\|v_i\| : m,l\in\mathbb{N}, u=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j, v=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i v_i, \lambda_j,\alpha_i\in\mathbb{K}, u_j,v_i\in\mathcal{A}\right\}\\
&= \inf\left\{\sum_{j=1}^{m}|\lambda_j|\cdot\|u_j\| : m\in\mathbb{N}, u=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j, \lambda_j\in\mathbb{K}, u_j\in\mathcal{A}(E;F)\right\}\\
&\quad + \inf\left\{\sum_{i=1}^{l}|\alpha_i|\cdot\|v_i\| : l\in\mathbb{N}, v=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i v_i, \alpha_i\in\mathbb{K}, v_i\in\mathcal{A}(E;F)\right\}\\
&= \|u\|_{\widetilde{\mathcal{A}}} + \|v\|_{\widetilde{\mathcal{A}}}.
\end{aligned}$$

Provemos que $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\widetilde{\mathcal{A}}} = 1$. Por um lado, como $id_{\mathbb{K}} \in \mathcal{A}(\mathbb{K};\mathbb{K})$, então $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\widetilde{\mathcal{A}}} \leqslant \|id_{\mathbb{K}}\| = 1$. Por outro lado, se $\sum_{i=1}^{n} u_i = id_{\mathbb{K}}$ onde cada $u_i \in \mathcal{A}(\mathbb{K};\mathbb{K})$, temos

$$u_i(\lambda) = \lambda\cdot u_i(1) = u_i(1)\cdot id_{\mathbb{K}}(\lambda)$$

para cada $i = 1,\ldots,n$. Dessa forma, $u_i = u_i(1)\cdot id_{\mathbb{K}}$. Assim $id_{\mathbb{K}} = \sum_{i=1}^{n} u_i(1)\cdot id_{\mathbb{K}}$ onde $\sum_{i=1}^{n} u_i(1) = 1$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n}\|u_i\| = \sum_{i=1}^{n}|u_i(1)|\cdot\|id_{\mathbb{K}}\| = \sum_{i=1}^{n}|u_i(1)| \geqslant \left|\sum_{i=1}^{n}u_i(1)\right| = 1.$$

Da definição de $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ segue que $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\widetilde{\mathcal{A}}} \geqslant 1$.

Por fim, sejam $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $v \in \widetilde{\mathcal{A}}(F;G)$ e $t \in \mathcal{L}(G;H)$. Para cada representação $v = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j v_j$, onde $\lambda_j \in \mathbb{K}$ e $v_j \in \mathcal{A}(F;G)$, $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(t\circ v_j\circ u)$ é uma representação de $t\circ v\circ u$ em $\widetilde{\mathcal{A}}(E;H)$, portanto

$$\begin{aligned}
\|t\circ v\circ u\|_{\widetilde{\mathcal{A}}} &\leqslant \inf\left\{\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|\cdot\|t\circ v_j\circ u\| : k\in\mathbb{N}, v=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j v_j, \lambda_j\in\mathbb{K}, v_j\in\mathcal{A}(F;G)\right\}\\
&\leqslant \inf\left\{\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|\cdot\|t\|\cdot\|v_j\|\cdot\|u\| : k\in\mathbb{N}, v=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j v_j, \lambda_j\in\mathbb{K}, v_j\in\mathcal{A}(F;G)\right\}\\
&= \|t\|\cdot\inf\left\{\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|\cdot\|v_j\| : k\in\mathbb{N}, v=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j v_j, \lambda_j\in\mathbb{K}, v_j\in\mathcal{A}(F;G)\right\}\cdot\|u\|\\
&= \|t\|\cdot\|v\|_{\widetilde{\mathcal{A}}}\cdot\|u\|.
\end{aligned}$$

□

3.2 Germes de ideais de polinômios

Analogamente ao caso de um germe de ideal de operadores e tendo em mente o artigo [18] sobre hiper-ideais de polinômios e ideais bilaterais de polinômios, estudamos nesta seção os germes de ideais de polinômios, de hiper-ideais de polinômios e de ideais bilaterais de polinômios.

Definição 3.11. Seja $\mathcal{G}$ uma subclasse da classe $\mathcal{P}$ de todos os polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ e quaisquer espaços de Banach E e F, a componente

$$\mathcal{G}(^mE;F) := \mathcal{P}(^mE;F) \cap \mathcal{G}$$

é um subconjunto de $\mathcal{P}(^mE;F)$ que contém os polinômios de tipo finito.

Dizemos que $\mathcal{G}$ é um:

(i) *Germe de ideal de polinômios* se satisfaz a seguinte condição: se $u \in \mathcal{L}(G;E)$, $P \in \mathcal{G}(^mE;F)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$, então $t \circ P \circ u \in \mathcal{G}(^mG;H)$.

(ii) *Germe de hiper-ideal de polinômios* se satisfaz a seguinte condição: se $Q \in \mathcal{P}(^nG;E)$, $P \in \mathcal{G}(^mE;F)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$, então $t \circ P \circ Q \in \mathcal{G}(^{mn}G;H)$.

(iii) *Germe de ideal bilateral de polinômios* se satisfaz a seguinte definição: se $Q \in \mathcal{P}(^nG;E)$, $P \in \mathcal{G}(^mE;F)$ e $R \in \mathcal{P}(^rF;H)$, então $R \circ P \circ Q \in \mathcal{G}(^{rmn}G;H)$.

Observação 3.12. Em todos os três casos da definição acima, se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $P \in \mathcal{G}(^mE;F)$, então $\lambda P \in \mathcal{G}(^mE;F)$. De fato, considerando o operador linear contínuo $T_\lambda \colon F \longrightarrow F$, $T_\lambda(y) = \lambda y$, tem-se $T_\lambda \circ P = \lambda P$.

Exemplo 3.13. Todo ideal de polinômios (respectivamente, hiper-ideal de polinômios e ideal bilateral de polinômios) é um germe de ideal de polinômios (respectivamente, germe de hiper-ideal de polinômios, germe de ideal bilateral de polinômios).

Veremos a seguir alguns exemplos não triviais.

Proposição 3.14. *Sejam $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ ideais de polinômios (respectivamente, hiper-ideais de polinômios, ideais bilaterais de polinômios). Então:*

(a) *$\mathcal{Q} \cup \mathcal{R}$ é um germe de ideal de polinômios (respectivamente, germe de hiper-ideal de polinômios, germe de ideal bilateral de polinômios).*

(b) *$\mathcal{Q} \cup \mathcal{R}$ é um ideal de polinômios (respectivamente, hiper-ideal de polinômios, ideal bilateral de polinômios) se, e somente se, $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$ ou $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}$.*

Demonstração. Omitimos a demonstração do item (a). Façamos o item (b). Suponhamos que $\mathcal{Q} \nsubseteq \mathcal{R}$ e $\mathcal{R} \nsubseteq \mathcal{Q}$. Neste caso existem $P_1 \in (\mathcal{Q}(^m E_1; F_1) - \mathcal{R}(^m E_1; F_1))$ e $P_2 \in (\mathcal{R}(^m E_2; F_2) - \mathcal{Q}(^m E_2; F_2))$. Chame $E = E_1 \times E_2$ e $F = F_1 \times F_2$, com qualquer uma das normas usuais no produto cartesiano. Para ver que, para $j = 1, 2$, as seguintes aplicações são polinômios m-homogêneos contínuos:

$$\widetilde{P_j} \colon E \longrightarrow F \ , \ \widetilde{P_1}(x, y) = (P_1(x), 0) \ , \ \ \widetilde{P_2}(x, y) = (0, P_2(y)),$$

basta notar que são os polinômios gerados pelos seguintes operadores multilineares contínuos:

$$A_1 \colon E \times \overset{(m)}{\cdots} \times E \longrightarrow F_1 \times F_2, \ A_1\left((x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)\right) = \left(\check{P}(x_1, \ldots, x_m), 0\right),$$

$$A_2 \colon E \times \overset{(m)}{\cdots} \times E \longrightarrow F_1 \times F_2, \ A_2\left((x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)\right) = \left(0, \check{P}(y_1, \ldots, y_m)\right).$$

Considere as inclusões e projeções canônicas

$$E_j \xrightarrow{i_j} E \xrightarrow{\pi_j} E_j \ , \quad F_j \xrightarrow{k_j} F \xrightarrow{\sigma_j} F_j.$$

Como $\widetilde{P_1} = k_1 \circ P_1 \circ \pi_1$ e $\widetilde{P_2} = k_2 \circ P_2 \circ \pi_2$, segue que $\widetilde{P_1} \in \mathcal{Q}(^m E; F)$ e $\widetilde{P_2} \in \mathcal{R}(^m E; F)$ e, portanto, $\widetilde{P_1}, \widetilde{P_2} \in (\mathcal{Q} \cup \mathcal{R})(^m E; F)$. Suponha que $\widetilde{P_1} + \widetilde{P_2} \in \mathcal{Q}(^m E; F)$. Como $P_2 = \sigma_2 \circ (\widetilde{P_1} + \widetilde{P_2}) \circ i_2$, teríamos $P_2 \in \mathcal{Q}(^m E_2; F_2)$, o que não ocorre. Isso prova que $\widetilde{P_1} + \widetilde{P_2} \notin \mathcal{Q}(^m E; F)$. De forma análoga prova-se que $\widetilde{P_1} + \widetilde{P_2} \notin \mathcal{R}(^m E; F)$, donde segue que $\mathcal{Q} \cup \mathcal{R}$ não é ideal de polinômios (respectivamente, hiper-ideal de polinômios e ideal bilateral de polinômios). A recíproca é óbvia. $\square$

A seguir daremos um exemplo concreto de germe de ideal de polinômios, usando a Proposição 3.14. Para isso recordamos a seguinte definição (veja, por exemplo, [22]).

Definição 3.15. Dizemos que um polinômio $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é *fracamente sequencialmente contínuo*, e denotamos isso por $P \in \mathcal{P}_{wsc}(^m E; F)$, se P transforma sequências fracamente convergentes em E em sequências convergentes em norma em F.

É bem conhecido que a classe formada pelos polinômios fracamente sequencialmente contínuos é um ideal de polinômios.

Por $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$ denotamos o ideal dos polinômios homogêneos fracamente compactos ($P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é fracamente compacto se $P(B_E)$ é um subconjunto relativamente fracamente compacto de F).

Exemplo 3.16. Vejamos que $\mathcal{P}_{wsc} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{W}}$ é um germe de ideal de polinômios que não é ideal de polinômios.

Dado $m \in \mathbb{N}$ e conforme já dito no inicio da demonstração da Proposição 2.19, podemos considerar um isomorfismo topológico $u \colon \widehat{\otimes}_\pi^{m,s} \ell_1 \longrightarrow \ell_1$. Pelo Teorema 1.56 existe um único polinômio m-homogêneo $P\colon \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ tal que $P_L = u$. Vejamos primeiramente que P é fracamente sequencialmente contínuo. Se $x_n \xrightarrow{w} x$ em ℓ_1, de [16, Teorema 6.2.12] segue que $x_n \longrightarrow x$, e da continuidade de P concluímos que $P(x_n) \longrightarrow P(x)$, o que prova que $P \in \mathcal{P}_{wsc}(\ell_1;\ell_1)$. Por outro lado, suponhamos que $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(\ell_1;\ell_1)$. De [15, Proposition 3.2.(b)] segue que $u = P_L \in \mathcal{W}\left(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s}\ell_1;\ell_1\right)$. Pela propriedade de ideal, $id_{\ell_1} = u \circ u^{-1} \in \mathcal{W}(\ell_1;\ell_1)$, o que é um absurdo pois ℓ_1 não é reflexivo. Isso prova que P não é fracamente compacto.

Agora consideremos o polinômio m-homogêneo contínuo

$$Q\colon \ell_{2m} \longrightarrow \ell_2 \ , \ Q((\lambda_j)_j) = (\lambda_j^m)_j.$$

É claro que Q é fracamente compacto pois polinômios contínuos levam conjuntos limitados em conjuntos limitados e o espaço de chegada ℓ_2 é reflexivo. Por outro lado, Q não é fracamente sequencialmente contínuo pois, ao considerar a sequencia $(e^n)_n$ dos vetores unitários canônicos em ℓ_{2m}, temos $e^n \xrightarrow{w} 0$ em ℓ_{2m}, mas $Q(e^n) = e^n \not\longrightarrow 0$ em ℓ_2.

Finalmente, a Proposição 3.14 garante que $\mathcal{P}_{wsc} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{W}}$ é um germe de ideal de polinômios que não é ideal de polinômios.

A seguir mostramos que, como no caso linear, germes de ideais de polinômios (respectivamente, germes de hiper-ideais de polinômios) geram ideais (hiper-ideais) normados de polinômios.

Definição 3.17. Seja $\mathcal{Q}$ um germe de ideal de polinômios (respectivamente, germe de hiper-ideal de polinômios). O *gerado* de $\mathcal{Q}$, denotado por $\widetilde{\mathcal{Q}}$, é definido da seguinte forma:

$$\widetilde{\mathcal{Q}}(^mE;F) := \{P \in \mathcal{P}(^mE;F) : P \in \operatorname{span}\{\mathcal{Q}(^mE;F)\}\}$$

para quaisquer espaços de Banach E e F.

Proposição 3.18. *Se $\mathcal{Q}$ é um germe de ideal de polinômios (respectivamente, germe de hiper-ideal de polinômios), então $\widetilde{\mathcal{Q}}$ é um ideal de polinômios (respectivamente, hiper-ideal de polinômios).*

Demonstração. Basta mostrar o caso em que $\mathcal{Q}$ é um germe de hiper-ideal de polinômios.

É imediato que $\widetilde{\mathcal{Q}}(^mE;F)$ é um subespaço vetorial que contém os polinômios de tipo finito.

Sejam $Q \in \mathcal{P}(^nE;F)$, $P \in \widetilde{\mathcal{Q}}(^mF;G)$ e $t \in \mathcal{P}(G;H)$. Podemos escrever $P =$

$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j$, onde $\lambda_j \in \mathbb{K}$ e $P_j \in \mathcal{Q}(^m F; G)$. Para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned}(t \circ P \circ Q)(x) &= t\left(P(Q(x))\right) = t\left(\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j\right)(Q(x))\right) = t\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j(Q(x))\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j t\left(P_j(Q(x))\right) = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(t \circ P_j \circ Q\right)\right)(x).\end{aligned}$$

Portanto, $t \circ P \circ Q = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (t \circ P_j \circ Q) \in \widetilde{\mathcal{Q}}(^{mn} E; H)$ pois cada $t \circ P_j \circ Q \in \mathcal{Q}(^{mn} E; H)$, uma vez que $\mathcal{Q}$ é um germe de hiper-ideal de polinômios. □

Proposição 3.19. *Se $\mathcal{Q}$ é um germe de ideal de polinômios (respectivamente, hiper-ideal de polinômios), então $\widetilde{\mathcal{Q}}$ é um ideal normado de polinômios (respectivamente, hiper-ideal normado de polinômios) com a norma*

$$\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{Q}}} \colon \widetilde{\mathcal{Q}} \longrightarrow [0, +\infty),$$

$$\|P\|_{\widetilde{\mathcal{Q}}} = \inf\left\{\sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \cdot \|P_j\| : k \in \mathbb{N}, P = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j, \lambda_j \in \mathbb{K}, P_j \in \mathcal{Q}(^m E; F)\right\}$$

para todo $P \in \widetilde{\mathcal{Q}}(^m E; F)$.

Demonstração. Basta mostrar o caso em que $\mathcal{Q}$ é um germe de hiper-ideal de polinômios.

É claro que $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{Q}}} \geqslant 0$, está bem definida pois sempre existe uma tal representação e que $\|0\|_{\widetilde{\mathcal{Q}}} = 0$.

Suponhamos que $P \in \widetilde{\mathcal{Q}}(^m E; F)$ seja tal que $\|P\|_{\widetilde{\mathcal{Q}}} = 0$. Neste caso, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma representação $P = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j$ tal que $\sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \cdot \|P_j\| < \varepsilon$. Segue que $\|P\| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \cdot \|P_j\| < \varepsilon$, donde concluímos que $P = 0$.

Dados $P \in \widetilde{\mathcal{Q}}(^m E; F)$ e $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\|\lambda P\|_{\widetilde{\mathcal{Q}}} &= \inf\left\{\sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \cdot \|P_j\| : k \in \mathbb{N}, \lambda P = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j, \lambda_j \in \mathbb{K}, P_j \in \mathcal{Q}(^m E; F)\right\} \\ &= \inf\left\{|\lambda| \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{|\lambda_j|}{|\lambda|} \|P_j\| : k \in \mathbb{N}, P = \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\lambda} P_j, \lambda_j \in \mathbb{K}, P_j \in \mathcal{Q}(^m E; F)\right\} \\ &= |\lambda| \cdot \inf\left\{\sum_{j=1}^{k} \left|\frac{\lambda_j}{\lambda}\right| \cdot \|P_j\| : k \in \mathbb{N}, P = \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\lambda} P_j, \lambda_j \in \mathbb{K}, P_j \in \mathcal{Q}(^m E; F)\right\} \\ &= |\lambda| \cdot \|P\|_{\widetilde{\mathcal{Q}}}.\end{aligned}$$

Sejam $P, Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}(^mE;F)$. Para cada representação $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j$ de P e cada representação $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i Q_i$ de Q, $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j + \sum_{i=1}^{l} \alpha_i Q_i$ é uma representação de $P+Q$. Isso significa que

$$\{\text{representações de } P + \text{ representações de } Q\} \subseteq \{\text{representações de } P+Q\},$$

donde segue que

$$\begin{aligned}
\|P+Q\|_{\widetilde{\mathcal{Q}}} &\leqslant \inf\left\{\textstyle\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|\cdot\|P_j\|+\sum_{i=1}^{l}|\alpha_i|\cdot\|Q_i\| :\ m,l\in\mathbb{N},\ P=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j P_j,\ Q=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i Q_i,\ \lambda_j,\ \alpha_i\in\mathbb{K},\ P_j,\ Q_i\in\mathcal{Q}\right\}\\
&= \inf\left\{\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|\cdot\|P_j\| : m\in\mathbb{N}, P=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j P_j, \lambda_j\in\mathbb{K}, P_j\in\mathcal{Q}(^mE;F)\right\}\\
&\quad + \inf\left\{\sum_{i=1}^{l} |\alpha_i|\cdot\|Q_i\| : l\in\mathbb{N}, Q=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i Q_i, \alpha_i\in\mathbb{K}, Q_i\in\mathcal{Q}(^mE;F)\right\}\\
&= \|P\|_{\widetilde{\mathcal{Q}}} + \|Q\|_{\widetilde{\mathcal{Q}}}.
\end{aligned}$$

Provemos que $\|id_{\mathbb{K}}^m\|_{\widetilde{\mathcal{Q}}} = 1$. Por um lado, como $id_{\mathbb{K}}^m \in \mathcal{Q}(^m\mathbb{K};\mathbb{K})$, então $\|id_{\mathbb{K}}^m\|_{\widetilde{\mathcal{Q}}} \leqslant \|id_{\mathbb{K}}^m\| = 1$. Por outro lado, se $\sum_{i=1}^{n} q_i = id_{\mathbb{K}}^m$ onde cada $q_i \in \mathcal{Q}(^m\mathbb{K};\mathbb{K})$, temos

$$q_i(\lambda) = \lambda^m \cdot q_i(1) = q_i(1)\cdot id_{\mathbb{K}}^m(\lambda)$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. Dessa forma, $q_i = q_i(1)\cdot id_{\mathbb{K}}^m$. Assim $id_{\mathbb{K}}^m = \sum_{i=1}^{n} q_i(1)\cdot id_{\mathbb{K}}^m$ onde $\sum_{i=1}^{n} q_i(1) = 1$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n}\|q_i\| = \sum_{i=1}^{n}|q_i(1)|\cdot\|id_{\mathbb{K}}^m\| = \sum_{i=1}^{n}|q_i(1)| \geqslant \left|\sum_{i=1}^{n} q_i(1)\right| = 1.$$

Da definição de $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{Q}}}$ segue que $\|id_{\mathbb{K}}^m\|_{\widetilde{\mathcal{Q}}} \geqslant 1$.

Por fim, sejam $Q \in \mathcal{P}(^nE;F)$, $P \in \widetilde{\mathcal{Q}}(^mF;G)$ e $t \in \mathcal{L}(G;H)$. Para cada representação $P = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j P_j$, onde $\lambda_j \in \mathbb{K}$ e $P_j \in \mathcal{Q}(^mF;G)$, $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(t\circ P_j\circ Q)$, onde $t\circ P_j\circ Q \in \mathcal{Q}(^{mn}E;H)$ é uma representação para $t\circ P\circ Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}(^{mn}E;H)$, portanto

$$\begin{aligned}
\|t\circ P\circ Q\|_{\widetilde{\mathcal{Q}}} &\leqslant \inf\left\{\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|\cdot\|t\circ P_j\circ Q\| : k\in\mathbb{N}, P=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j P_j, \lambda_j\in\mathbb{K}, P_j\in\mathcal{Q}(^mF;G)\right\}\\
&\leqslant \inf\left\{\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|\cdot\|t\|\cdot\|P_j\|\cdot\|Q\|^m : k\in\mathbb{N}, P=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j P_j, \lambda_j\in\mathbb{K}, P_j\in\mathcal{Q}(^mF;G)\right\}\\
&= \|t\|\cdot\|Q\|^m\cdot\inf\left\{\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|\cdot\|P_j\| : k\in\mathbb{N}, P=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j P_j, \lambda_j\in\mathbb{K}, P_j\in\mathcal{Q}(^mF;G)\right\}\\
&= \|t\|\cdot\|Q\|^m\cdot\|P\|_{\widetilde{\mathcal{Q}}}.
\end{aligned}$$

□

3.3 Duais generalizados de ideais de polinômios

O objetivo desta seção é mostrar que os adjuntos generalizados fornecem muitos exemplos concretos de germes de ideais de operadores e de germes de ideais (hiper-ideais) de polinômios. Na verdade são os germes estudados nesta seção que nos levaram à definição de germes.

Definição 3.20. Sejam m, n, $k \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{Q}_n$ um ideal de polinômios n-homogêneos. Para $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$, dizemos que $P \in (\Delta_k^n \mathcal{Q}_n)(^mE;F)$ se $\Delta_k^n P \in \mathcal{Q}(^n\mathcal{P}(^kF);\mathcal{P}(^{mnk}E))$. Isto é,

$$(\Delta_k^n \mathcal{Q}_n)(^mE;F) = \left\{P \in \mathcal{P}(^mE;F) : \Delta_k^n P \in \mathcal{Q}(^n\mathcal{P}(^kF);\mathcal{P}(^{mnk}E))\right\}.$$

$\Delta_k^n \mathcal{Q}_n$ é chamado de *k-dual do ideal de polinômios n-homogêneos $\mathcal{Q}_n$.*

Observação 3.21. (i) Podemos definir o k-dual de um hiper-ideal de polinômios e o k-dual de um ideal bilateral de polinômios exatamente da maneira como fizemos na definição acima. Nesses casos usaremos a mesma notação introduzida na definição acima.

(ii) Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Relembrando as definições do dual de $\mathcal{I}$ e do dual polinomial de $\mathcal{I}$ (veja Definições 1.36 e 1.47), na notação introduzida na definição acima temos

$$\mathcal{I}^{dual}(E;F) = \left(\Delta_1^1 \mathcal{I}\right)(E;F) \text{ e } \mathcal{I}^{\mathcal{P}-dual}(^mE;F) = \left(\Delta_1^1 \mathcal{I}\right)(^mE;F)$$

para todos espaços de Banach E e F. Isso mostra que, de fato, essas novas noções generalizam o dual e o dual polinomial de um ideal de operadores. Além disso da Proposição 2.5 segue que, no caso $n = k = 1$, $\Delta_k^n \mathcal{Q}_n$ é um espaço vetorial.

(iii) No caso em que $nk > 1$, não necessariamente $\Delta_k^n \mathcal{Q}_n(^mE;F)$ é um espaço vetorial, e portanto não podemos falar em norma neste conjunto. Entretanto, podemos topologizar este conjunto definindo

$$d\colon \Delta_k^n \mathcal{Q}_n(^mE;F) \times \Delta_k^n \mathcal{Q}_n(^mE;F) \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ d(P_1,P_2) = \|\Delta_k^n P_1 - \Delta_k^n P_2\|_{\mathcal{Q}_n},$$

e notando que $(\Delta_k^n \mathcal{Q}(^mE;F), d)$ é um espaço pseudo-métrico. Dessa forma, definindo a relação de equivalência: $P_1 \sim P_2 \Leftrightarrow d(P_1,P_2) = 0$, a função

$$d^*\colon \left(\frac{\Delta_k^n \mathcal{Q}_n(^mE;F)}{\sim}\right) \times \left(\frac{\Delta_k^n \mathcal{Q}_n(^mE;F)}{\sim}\right) \longrightarrow \mathbb{R},\ d^*([P_1],[P_2]) = d(P_1,P_2),$$

é uma métrica no conjunto quociente.

Veremos agora que os duais generalizados de fato fornecem muitos exemplos concretos de germes. Seria de esperar que um dual generalizado de um ideal de polinômios fosse um germe de ideal de polinômios, mas na verdade mostraremos que vale algo mais que isso.

Proposição 3.22. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{Q}_n$ um ideal de polinômios n-homogêneos. Então:*

(*i*) *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\Delta_k^n \mathcal{Q}_n$ é um germe de hiper-ideal de polinômios.*

(*ii*) $\bigcap_{k=1}^{\infty} (\Delta_k^n \mathcal{Q}_n)$ *é um germe de ideal bilateral de polinômios.*

Demonstração. (i) Da Proposição 2.23 sabemos que $\Delta_k^n \mathcal{Q}_n$ contém os polinômios de tipo finito (na verdade sabemos que $\Delta_k^n \mathcal{Q}_n$ contém os polinômios de posto finito). Basta então mostrar a propriedade de hiper-ideal. Para isso sejam $Q \in \mathcal{P}(^l G; E)$, $P \in \Delta_k^n \mathcal{Q}_n(^m E; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Devemos mostrar que $R := t \circ P \circ Q \in \Delta_k^n \mathcal{Q}_n(^{ml} G; H)$. Da Proposição 2.8 temos

$$\Delta_k^n R = \Delta_k^n (t \circ (P \circ Q)) = \Delta_k^n (P \circ Q) \circ \Delta_k^1 t = \Delta_{mnk}^1 Q \circ \Delta_k^n P \circ \Delta_k^1 t.$$

Como $\Delta_{mnk}^1 Q$ e $\Delta_k^1 t$ são operadores lineares e $\Delta_k^n P$ pertence ao ideal de polinômios $\mathcal{Q}_n$, segue da propriedade de ideal que $\Delta_k^n R$ pertence a $\mathcal{Q}_n$, isto é, R pertence a $\Delta_k^n \mathcal{Q}_n$.

(ii) De forma análoga, usando a Proposição 2.23, basta mostrar a propriedade de ideal bilateral. Para isso sejam $Q \in \mathcal{P}(^l G; E)$, $P \in \Delta_k^n \mathcal{Q}_n(^m E; F)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $R \in \mathcal{P}(^r F; H)$. Em particular, $P \in \Delta_{kr}^n \mathcal{Q}_n(^m E; F)$, isto é, $\Delta_{kr}^n P \in \mathcal{Q}_n(\mathcal{P}(^{kr} F); \mathcal{P}(^{mnkr} E))$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Da Proposição 2.8 temos

$$\Delta_k^n (R \circ P \circ Q) = \Delta_k^n (R \circ (P \circ Q)) = \Delta_{rk}^n (P \circ Q) \circ \Delta_k^1 R = \Delta_{mnkr}^1 Q \circ \Delta_{kr}^n P \circ \Delta_k^1 R,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Pela propriedade de ideal temos $\Delta_k^n (R \circ P \circ Q) \in \mathcal{Q}(^n \mathcal{P}(^k H); \mathcal{P}(^{lmnkr} G))$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $R \circ P \circ Q \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_k^n \mathcal{Q}_n(^{mlr} G; H)$. □

Seja $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado de operadores. Sabemos que $\Delta_k^1 \mathcal{I}$ é apenas um germe de hiper-ideal de polinômios, e portanto suas componentes $\Delta_k^1 \mathcal{I}(^m E; F)$ nem sempre são subespaços vetoriais, impossibilitando assim a introdução de uma norma no caso geral. Vimos nas Proposições 3.18 e 3.19 uma maneira de tornar o subespaço gerado por este conjunto um espaço normado (e portanto tornar o conjunto um espaço métrico), mas aquela construção está associada à norma usual, não tendo nada a ver com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ do ideal $\mathcal{I}$. Terminamos esta seção mostrando como munir $\operatorname{span}\{\Delta_k^1 \mathcal{I}(^m E; F)\}$ de uma estrutura de hiper-ideal normado de polinômios com uma norma intimamente relacionada com a norma do ideal.

Observe que, da Proposição 2.24, sabemos que $\Delta_k^1 (id_{\mathbb{K}}^m) \in \mathcal{I}(\mathcal{P}(^k \mathbb{K}); \mathcal{P}(^{mk} \mathbb{K}))$, o que nos permite considerar o número $\|\Delta_k^1 (id_{\mathbb{K}}^m)\|_{\mathcal{I}}$.

Proposição 3.23. *Sejam $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado de operadores e $k \in \mathbb{N}$. Definimos a função $\|\cdot\|_{\Delta_k^1\mathcal{I}} \colon \Delta_k^1\mathcal{I} \longrightarrow [0, +\infty)$ por*

$$\|P\|_{\Delta_k^1\mathcal{I}} := \|\Delta_k^1 P\|_{\mathcal{I}}^{1/k} \cdot \|\Delta_k^1(id_{\mathbb{K}}^m)\|_{\mathcal{I}}^{-1/k} \text{ para todo } P \in \Delta_k^1\mathcal{I}(^mE; F).$$

A função $\|\cdot\|_{\Delta_k^1\mathcal{I}}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\|P\|_{\Delta_k^1\mathcal{I}} \geqslant 0$ *para todo* $P \in \Delta_k^1\mathcal{I}(^mE; F)$.

(ii) $\|P\|_{\Delta_k^1\mathcal{I}} = 0$ *se, e somente se,* $P = 0$.

(iii) $\|\lambda P\|_{\Delta_k^1\mathcal{I}} = |\lambda| \cdot \|P\|_{\Delta_k^1\mathcal{I}}$ *para todos* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $P \in \Delta_k^1\mathcal{I}(^mE; F)$.

(iv) $\|id_{\mathbb{K}}^m \colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : id_{\mathbb{K}}^m(\lambda) = \lambda^m\|_{\Delta_k^1\mathcal{I}} = 1$.

(v) *Se* $Q \in \mathcal{P}(^nE; F)$, $P \in \Delta_k^1\mathcal{I}(^mF; G)$ *e* $t \in \mathcal{L}(G; H)$, *então*

$$\|t \circ P \circ Q\|_{\Delta_k^1\mathcal{I}} \leqslant \|t\| \cdot \|P\|_{\Delta_k^1\mathcal{I}} \cdot \|Q\|^m.$$

Demonstração. (i) e (iv) são imediatas.

(ii) Suponhamos que $\|P\|_{\Delta_k^1\mathcal{I}} = 0$. Então $\Delta_k^1 P = 0$, ou seja, $q \circ P = 0$ para todo $q \in \mathcal{P}(^kF)$. Portanto $q(P(x)) = 0$ para todo $q \in \mathcal{P}(^kF)$ e todo $x \in E$. Do Lema 2.2(iii) segue que $\|P(x)\| = 0$ para todo $x \in E$, isto é, $P = 0$. A recíproca é satisfeita trivialmente.

(iii) Dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $P \in \Delta_k^1\mathcal{I}(^mE; F)$,

$$\begin{aligned}\|\lambda P\|_{\Delta_k^1\mathcal{I}} &= \|\Delta_k^1(\lambda P)\|_{\mathcal{I}}^{1/k} \cdot \|\Delta_k^1(id_{\mathbb{K}}^m)\|_{\mathcal{I}}^{-1/k} = \|\lambda^k \Delta_k^1 P\|_{\mathcal{I}}^{1/k} \cdot \|\Delta_k^1(id_{\mathbb{K}}^m)\|_{\mathcal{I}}^{-1/k} \\ &= |\lambda| \cdot \|\Delta_k^1 P\|_{\mathcal{I}}^{1/k} \cdot \|\Delta_k^1(id_{\mathbb{K}}^m)\|_{\mathcal{I}}^{-1/k} = |\lambda| \cdot \|P\|_{\Delta_k^1\mathcal{I}}.\end{aligned}$$

(v) Usando as Proposições 3.22, 2.8 e 2.3, temos

$$\begin{aligned}\|t \circ P \circ Q\|_{\Delta_k^1\mathcal{I}} &= \|\Delta_k^1(t \circ P \circ Q)\|_{\mathcal{I}}^{1/k} \cdot \|\Delta_k^1(id_{\mathbb{K}}^m)\|_{\mathcal{I}}^{-1/k} \\ &= \|\Delta_{mk}^1 Q \circ \Delta_k^1 P \circ \Delta_k^1 t\|_{\mathcal{I}}^{1/k} \cdot \|\Delta_k^1(id_{\mathbb{K}}^m)\|_{\mathcal{I}}^{-1/k} \\ &\leqslant \|\Delta_{mk}^1 Q\|^{1/k} \cdot \|\Delta_k^1 P\|_{\mathcal{I}}^{1/k} \cdot \|\Delta_k^1 t\|^{1/k} \cdot \|\Delta_k^1(id_{\mathbb{K}}^m)\|_{\mathcal{I}}^{-1/k} = \|Q\|^m \cdot \|P\|_{\Delta_k^1\mathcal{I}} \cdot \|t\|.\end{aligned}$$

□

Faltam apenas duas desigualdades simples para chegarmos ao nosso objetivo:

Observação 3.24. Sejam $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$, $\mathcal{Q}$ um ideal de polinômios e n, $k \in \mathbb{N}$.

(i) Se $P \in \mathcal{Q}(^mE; F)$, então $\|\Delta_k^n P\| \leqslant \|P\|_{\mathcal{Q}}^{kn}$.

(ii) Se $P \in \Delta_k^n\mathcal{Q}(^mE; F)$, então $\|P\| \leqslant \|\Delta_k^n P\|_{\mathcal{Q}}^{1/kn}$.

De fato, se $P \in \mathcal{Q}(^mE;F)$, então $\|P\| \leqslant \|P\|_{\mathcal{Q}}$, e daí $\|P\|^{kn} \leqslant \|P\|_{\mathcal{Q}}^{kn}$. Da Proposição 2.3(i) segue que $\|\Delta_k^n P\| \leqslant \|P\|_{\mathcal{Q}}^{kn}$. Agora, se $P \in \Delta_k^n \mathcal{Q}(^mE;F)$, então $\Delta_k^n P \in \mathcal{Q}(^n\mathcal{P}(F);\mathcal{P}(^{mnk}E))$, e portanto $\|\Delta_k^n P\| \leqslant \|\Delta_k^n P\|_{\mathcal{Q}}$. Finalmente, da Proposição 2.3(i) temos $\|P\|^{kn} \leqslant \|\Delta_k^n P\|_{\mathcal{Q}}$, e assim $\|P\| \leqslant \|\Delta_k^n P\|_{\mathcal{Q}}^{1/kn}$.

Usando as propriedades provadas na Proposição 3.23 e na Observação 3.24, e relembrando que na Proposição 3.22 já provamos que $\Delta_k^1\mathcal{I}$ é um germe de hiper-ideal de polinômios, a demonstração da Proposição 3.19 se adapta imediatamente para provar o seguinte resultado. Omitimos os detalhes da demonstração para evitar repetições desnecessárias.

Proposição 3.25. *Sejam $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado de operadores e $k \in \mathbb{N}$. Então* $\operatorname{span}\left\{\Delta_k^1\mathcal{I}\right\}$ *é um hiper-ideal normado de polinômios com a norma*

$$\|\cdot\|_{\operatorname{span}[\Delta_k^1\mathcal{I}]} \colon \operatorname{span}[\Delta_k^1\mathcal{I}] \longrightarrow [0,+\infty)$$

dada por

$$\|P\|_{\operatorname{span}[\Delta_k^1\mathcal{I}]} = \inf\left\{\sum_{j=1}^{l}|\lambda_j|\cdot\|P_j\|_{\Delta_k^1\mathcal{I}} : l \in \mathbb{N}, P = \sum_{j=1}^{l}\lambda_j P_j, \lambda_j \in \mathbb{K}, P_j \in \Delta_k^1\mathcal{I}(^mE;F)\right\}$$

para todo $P \in \Delta_k^1\mathcal{I}(^mE;F)$.

3.4 Estabilidade tensorial

A estabilidade de um ideal de operadores pela formação do produto tensorial projetivo e pelo produto tensorial simétrico projetivo (as definições precisas serão dadas nesta seção) é uma ferramenta muito útil no estudo de classes de polinômios homogêneos (veja, por exemplo, [8, 9, 18] e as referências ali citadas). Usaremos nesta seção a estabilidade tensorial para obter diversos resultados sobre os germes de ideais gerados pelos adjuntos generalizados. Obteremos condições, primeiro suficientes e depois necessárias e suficientes, para que um polinômio homogêneo $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ pertença ao k-dual generalizado $\Delta_k^n\mathcal{I}$ de um ideal de operadores $\mathcal{I}$. Várias aplicações desses resultados serão obtidas.

No primeiro resultado da seção faremos uso de uma propriedade que é mais forte que ser ideal de polinômios e mais fraca que ser ideal bilateral. Por ser muito mais fraca que ser ideal bilateral, daremos um nome a ela para que o resultado fique mais geral do que seria ao exigir que o ideal seja bilateral.

Seja $\mathcal{Q}$ um ideal de polinômios e chame de $\mathcal{Q}_1$ a sua componente linear, isto é, $\mathcal{Q}_1$ é o ideal de operadores formado por todos os operadores lineares pertencentes a $\mathcal{Q}$. Dizemos que $\mathcal{Q}_1$ *é bilateral* se satisfaz a seguinte condição:

$$P \in \mathcal{P}(^mE;F), u \in \mathcal{Q}_1(F,G) \text{ e } Q \in \mathcal{P}(^nG;H) \Longrightarrow Q \circ u \circ P \in \mathcal{Q}(^{mn}E;H).$$

A seguir mostramos que, para que um polinômio P esteja no k-dual de um ideal de operadores é suficiente que sua linearização P_L esteja na componente linear do k-dual.

Proposição 3.26. *Sejam $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ e $k \in \mathbb{N}$.*

(i) *Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Se $P_L \in \Delta_k^1\mathcal{I}(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s}E;F)$, então $P \in \Delta_k^1\mathcal{I}(^mE;F)$.*

(ii) *Seja $\mathcal{Q}$ um ideal de polinômios tal que $\mathcal{Q}_1$ é bilateral. Se $P_L \in \Delta_k^1\mathcal{Q}_1(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s}E;F)$, então $P \in \Delta_k^n\mathcal{Q}(^mE;F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. (i) Usando a Proposição 1.55 é claro que

$$M_{\delta_E^m} : \mathcal{P}(^k\widehat{\otimes}_\pi^{m,s}E) \longrightarrow \mathcal{P}(^{mk}E),\ M_{\delta_E^m}(R) = R \circ \delta_E^m,$$

é um operador linear. Sua continuidade segue de

$$\|M_{\delta_E^m}(R)\| = \|R \circ \delta_E^m\| \leqslant \|R\| \cdot \|\delta_E^m\|^k = \|R\|$$

para todo $R \in \mathcal{P}(^k\widehat{\otimes}_\pi^{m,s}E)$. Note que no caso $k = 1$ tem-se $M_{\delta_E^m} = (L_m^E)^{-1}$. Para todo $q \in \mathcal{P}(^kF)$,

$$\begin{aligned}\Delta_k^1P(q) &= q \circ P = q \circ (P_L \circ \delta_E^m) = (q \circ P_L) \circ \delta_E^m = \left[\Delta_k^1(P_L)(q)\right] \circ \delta_E^m \\ &= M_{\delta_E^m}(\Delta_k^1(P_L)(q)) = \left[M_{\delta_E^m} \circ \Delta_k^1(P_L)\right](q),\end{aligned}$$

provando que $\Delta_k^1P = M_{\delta_E^m} \circ \Delta_k^1(P_L)$, donde segue o resultado.

(ii) Considere a aplicação

$$L\colon \mathcal{P}(^{mk}E) \longrightarrow \mathcal{P}(^{mnk}E)\ ,\ L(q) = id_{\mathbb{K}}^n \circ q,$$

isto é, $L(q)(\lambda) = q(\lambda)^n$. É fácil ver que L é um polinômio n-homogêneo contínuo pois é gerado pelo operador n-linear contínuo

$$A\colon \left[\mathcal{P}(^{mk}E)\right]^n \longrightarrow \mathcal{P}(^{mnk}E),\ A(q_1,\ldots,q_n) = q_1\cdots q_n.$$

Para todo $q \in \mathcal{P}(^kF)$,

$$\begin{aligned}\Delta_k^nP(q) &= \left[\Delta_k^1P(q)\right]^n = \left[\left(M_{\delta_E^m} \circ \Delta_k^1(P_L)\right)(q)\right]^n \\ &= L\left(\left(M_{\delta_E^m} \circ \Delta_k^1(P_L)\right)(q)\right) = \left[L \circ M_{\delta_E^m} \circ \Delta_k^1(P_L)\right](q),\end{aligned}$$

o que prova que $\Delta_k^nP = L \circ M_{\delta_E^m} \circ \Delta_k^1(P_L)$ e completa a demonstração. □

A seguir, fazendo uso do produto tensorial simétrico, damos uma forma equivalente de dizer quando um polinômio P pertence ao k-dual de um ideal de operadores. Essa equivalência vai nos permitir estudar, na sequência desta seção, o k-dual de um ideal de operadores de uma maneira mais eficiente e nos dar algumas propriedades relacionadas com a estabilidade tensorial do ideal.

Para estabelecer a equivalência anunciada precisamos de um resultado que pode ser entendido como uma forma fraca da associatividade do produto tensorial simétrico projetivo. Acreditamos que esse resultado seja conhecido, mas como não o encontramos na literatura, optamos por demonstrá-lo no Apêndice. Mais precisamente, na Proposição A.8 no Apêndice provamos que, dados $m, k \in \mathbb{N}$ e um espaço de Banach E, existe um operador linear contínuo

$$I_{k,m} \colon \widehat{\otimes}_\pi^{km,s} E \longrightarrow \widehat{\otimes}_\pi^{k,s} \left(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E\right),$$

que é um isomorfismo sobre sua imagem e $I_{k,m}(\otimes^{km} x) = \otimes^k(\otimes^m x)$ para todo $x \in E$.

Para o produto tensorial projetivo simétrico $\otimes^{k,s} u$ de um operador linear u, veja o Teorema 1.58(iii).

Teorema 3.27. *Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores, $k \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$. Então $P \in \left(\Delta_k^1 \mathcal{I}\right)(^m E; F)$ se, e somente se, $\left(\otimes^{k,s} P_L\right) \circ I_{k,m} \colon \widehat{\otimes}_\pi^{mk,s} E \longrightarrow \widehat{\otimes}_\pi^{k,s} F$ pertence a $\mathcal{I}^{dual}(\widehat{\otimes}_\pi^{mk,s} E; \widehat{\otimes}_\pi^{k,s} F)$.*

Demonstração. Relembrando que os operadores L_k^F e L_{mk}^E são isomorfismos, basta provar que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\left(\widehat{\otimes}_\pi^{k,s} F\right)^* \arrow[r, "\left[\left(\otimes^{k,s} P_L\right) \circ I_{k,m}\right]^*"] & \left(\widehat{\otimes}_\pi^{mk,s} E\right)^* \\
\mathcal{P}(^k F) \arrow[u, bend left, "L_k^F"] \arrow[r, "\Delta_k^1 P"] & \mathcal{P}(^{mk} E) \arrow[u, bend right, "L_{mk}^E"']
\end{tikzcd}$$

Para isso sejam $\varphi \in \left(\widehat{\otimes}_\pi^{k,s} F\right)^*$ e $x \in E$. Temos

$$\begin{aligned}
\left[(\otimes^{k,s} P_L) \circ I_{k,m}\right]^* (\varphi)(\otimes^{mk} x) &= \varphi\left(\left[(\otimes^{k,s} P_L) \circ I_{k,m}\right](\otimes^{mk} x)\right) \\
&= L_k^F(q)\left[(\otimes^{k,s} P_L)\left(\otimes^k(\otimes^m x)\right)\right] \\
&= q_L(\otimes^k P(x)) = q_L(\delta_F^k(P(x))) \\
&= q(P(x)) = \Delta_k^1 P(q)(x) \\
&= \left[\left(\Delta_k^1 P(q)\right)_L \circ \delta_{km}^E\right](x) \\
&= \left(\Delta_k^1 P(q)\right)_L (\otimes^{mk} x) \\
&= L_{mk}^E\left((\Delta_k^1 P)(q)\right)(\otimes^{mk} x) \\
&= L_{mk}^E\left[\Delta_k^1 P\left((L_k^F)^{-1}(\varphi)\right)\right](\otimes^{mk} x) \\
&= \left[L_{mk}^E \circ \Delta_k^1 P \circ (L_k^F)^{-1}\right](\varphi)(\otimes^{mk} x).
\end{aligned}$$

Isso prova que $\left[(\otimes^{k,s}P_L)\circ I_{k,m}\right]^*(\varphi)(\otimes^{mk}x) = \left[L^E_{mk}\circ\Delta^1_k P\circ(L^F_k)^{-1}\right](\varphi)(\otimes^{mk}x)$. Agora, como $\left[(\otimes^{k,s}P_L)\circ I_{k,m}\right]^*(\varphi)$ e $\left[L^E_{mk}\circ\Delta^1_k P\circ(L^F_k)^{-1}\right](\varphi)$ são operadores lineares, segue que

$$\left[(\otimes^{k,s}P_L)\circ I_{k,m}\right]^*(\varphi)(z) = \left[L^E_{mk}\circ\Delta^1_k P\circ(L^F_k)^{-1}\right](\varphi)(z),$$

para todos $\varphi \in \left(\widehat{\otimes}^{k,s}_\pi F\right)^*$ e $z \in \otimes^{mk,s}_\pi E$. Usando que os operadores $\left[(\otimes^{k,s}P_L)\circ I_{k,m}\right]^*(\varphi)$ e $\left[L^E_{mk}\circ\Delta^1_k P\circ(L^F_k)^{-1}\right](\varphi)$ são contínuos e que $\otimes^{mk,s}_\pi E$ é denso em $\widehat{\otimes}^{mk,s}_\pi E$, concluímos que $\left[(\otimes^{k,s}P_L)\circ I_{k,m}\right]^*(\varphi) = \left[L^E_{mk}\circ\Delta^1_k P\circ(L^F_k)^{-1}\right](\varphi)$ para todo $\varphi \in \left(\widehat{\otimes}^{k,s}_\pi F\right)^*$. Disso segue a comutatividade do diagrama, isto é,

$$\left[(\otimes^{k,s}P_L)\circ I_{k,m}\right]^* = L^E_{mk}\circ\Delta^1_k P\circ(L^F_k)^{-1},$$

da qual segue o resultado. □

Considerando o caso $m = 1$ na proposição acima, temos o seguinte corolário, que será muito útil na sequência.

Corolário 3.28. *Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores, $k \in \mathbb{N}$ e $u \in \mathcal{L}(E;F)$. Então $u \in \left(\Delta^1_k\mathcal{I}\right)(E;F)$ se, e somente se, $\otimes^{k,s}u\colon \widehat{\otimes}^{k,s}_\pi E \longrightarrow \widehat{\otimes}^{k,s}_\pi F$ pertence a $\mathcal{I}^{dual}(\widehat{\otimes}^{k,s}_\pi E; \widehat{\otimes}^{k,s}_\pi F)$.*

Uma vez que temos a equivalência dada pelo Teorema 3.27, podemos estabelecer propriedades adicionais do k-dual de um ideal de operadores. Para isso vamos precisar do seguinte lema.

Lema 3.29. *Sejam $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $k \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Se $\otimes^{k+1,s}u \in \mathcal{I}(\widehat{\otimes}^{k+1,s}_\pi E; \widehat{\otimes}^{k+1,s}_\pi F)$, então $\otimes^{k,s}u \in \mathcal{I}(\widehat{\otimes}^{k,s}_\pi E; \widehat{\otimes}^{k,s}_\pi F)$. Portanto, se $\otimes^{n,s}u$ pertence a $\mathcal{I}$ para algum n, então $\otimes^{k,s}u$ pertence a $\mathcal{I}$ para todo $k \in \{1,\ldots,n\}$.*

Demonstração. Seguiremos a construção feita por F. Blasco em [11, Theorem 3]. Dado $u \neq 0$, existe $e \in E$ tal que $u(e) \neq 0$. Pelo Teorema de Hanh-Banach existe $\overline{\varphi} \in F^*$ tal que $\overline{\varphi}(u(e)) = 1$. Definindo $\varphi := (\overline{\varphi}\circ u)$ e usando os operadores j_E e π_F definidos em [11, Theorem 3], podemos considerar o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\otimes}^{k+1,s}_\pi E \arrow[r, "\otimes^{k+1,s}u"] & \widehat{\otimes}^{k+1,s}_\pi F \arrow[d, "\pi_F"] \\
\widehat{\otimes}^{k,s}_\pi E \arrow[u, hook, "j_E"] \arrow[r, "\otimes^{k,s}u"] & \widehat{\otimes}^{k,s}_\pi F
\end{tikzcd}$$

Da definição de j_E temos

$$j_E(\otimes^k x)\varphi(x) = \otimes^{k+1}x - \otimes^{k+1}(x - \varphi(x)e),$$

e então

$$\otimes^{k+1,s}u(j_E(\otimes^k x)\varphi(x)) = \otimes^{k+1,s}u(\otimes^{k+1}x - \otimes^{k+1}(x-\varphi(x)e)) = \otimes^{k+1}u(x) - \otimes^{k+1}u(x-\varphi(x)e).$$

Disso e da definição de π_F segue que

$$\begin{aligned}\pi_F(\otimes^{k+1,s}u(j_E(\otimes^k x)\varphi(x))) &= \pi_F(\otimes^{k+1}u(x) - \otimes^{k+1}u(x-\varphi(x)e))\\ &= \pi_F(\otimes^{k+1}u(x)) - \pi_F(\otimes^{k+1}u(x-\varphi(x)e))\\ &= \overline{\varphi}(u(x)) \otimes^k u(x) - \overline{\varphi}(u(x-\varphi(x)e)) \otimes^k u(x-\varphi(x)e)\\ &= \overline{\varphi}(u(x)) \otimes^k u(x) = \varphi(x) \otimes^k u(x).\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\pi_F \circ \otimes^{k+1,s}u \circ j_E)(\otimes^k x) = (\otimes^{k,s}u)(\otimes^k x) \text{ para todo } x \notin \ker(\varphi).$$

Agora usando [11, Lemma 2], para cada $\theta \in \otimes^{k,s}E$ existe uma representação $\theta = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \otimes^k x_i$ onde $\varphi(x_i) \neq 0$ para todo $i = \{1, \ldots, N\}$. Logo $x_i \notin \ker(\varphi)$ para todo $i = \{1, \ldots, N\}$, e assim

$$\begin{aligned}(\pi_F \circ \otimes^{k+1,s}u \circ j_E)(\theta) &= \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(\pi_F \circ \otimes^{k+1,s}u \circ j_E)(\otimes^k x_i)\\ &= \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(\otimes^{k,s}u)(\otimes^k x_i) = \otimes^{k,s}u(\theta).\end{aligned}$$

Como $\otimes_\pi^{k,s}E$ é denso em $\widehat{\otimes}_\pi^{k,s}E$ e $\pi_F \circ \otimes^{k+1,s}u \circ j_E$ e $\otimes^{k,s}u$ são contínuos, concluímos que $(\pi_F \circ \otimes^{k+1,s}u \circ j_E)(z) = \otimes^{k,s}u(z)$ para todo $z \in \widehat{\otimes}_\pi^{k,s}E$. Portanto o diagrama comuta, isto é, $(\pi_F \circ \otimes^{k+1,s}u \circ j_E) = \otimes^{k,s}u$, e assim se $\otimes^{k+1,s}u$ pertence a $\mathcal{I}$, então $\otimes^{k,s}u$ pertence a $\mathcal{I}$. □

Combinando o Lema 3.29 com o Corolário 3.28, podemos concluir que as componentes lineares dos k-duais de um ideal de operadores formam uma sequência decrescente cujo primeiro termo é o dual do ideal, isto é:

Corolário 3.30. *Para todo ideal de operadores $\mathcal{I}$ as componentes lineares do germe de hiper-ideal de polinômios $\Delta_k^1\mathcal{I}$ formam uma sequência decrescente, isto é:*

$$\mathcal{F} \subseteq \cdots \subseteq \left(\Delta_k^1\mathcal{I}\right)_1 \subseteq \cdots \subseteq \left(\Delta_3^1\mathcal{I}\right)_1 \subseteq \left(\Delta_2^1\mathcal{I}\right)_1 \subseteq \left(\Delta_1^1\mathcal{I}\right)_1 = \mathcal{I}^{\text{dual}}.$$

Vejamos no exemplo abaixo que as inclusões acima podem ser todas estritas.

Exemplo 3.31. É claro que, para todo espaço de Banach E e todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_k^1 id_E = id_{\mathcal{P}(^kE)}.$$

Usaremos o seguinte resultado (veja, por exemplo, [1, Seção 4]):

$$\mathcal{P}(^k\ell_p) \text{ é reflexivo} \iff p > k. \tag{3.1}$$

Como antes, denotamos por $\mathcal{W}$ o ideal dos operadores fracamente compactos. Do Teorema de Kakutani [16, Teorema 6.4.5] segue que $id_E \in \mathcal{W}(E; E)$ se, e somente se, E é reflexivo.

Dado $k \geqslant 2$, por um lado temos:

$$\mathcal{P}(^k\ell_k) \text{ não é reflexivo} \overset{(3.1)}{\Rightarrow} \Delta_k^1 id_{\ell_k} = id_{\mathcal{P}(^k\ell_k)} \notin \mathcal{W}(\mathcal{P}(^k\ell_k); \mathcal{P}(^k\ell_k)) \Rightarrow id_{\ell_k} \notin \Delta_k^1\mathcal{W}(\ell_k; \ell_k).$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(^{k-1}\ell_k) \text{ é reflexivo} &\overset{(3.1)}{\Rightarrow} \Delta_{k-1}^1 id_{\ell_k} = id_{\mathcal{P}(^{k-1}\ell_k)} \in \mathcal{W}(\mathcal{P}(^{k-1}\ell_k); \mathcal{P}(^{k-1}\ell_k)) \\ &\Rightarrow id_{\ell_k} \in \Delta_{k-1}^1\mathcal{W}(\ell_k; \ell_k).\end{aligned}$$

Assim, $id_{\ell_k} \in \left(\left(\Delta_{k-1}^1\mathcal{W}\right)_1 - \left(\Delta_k^1\mathcal{W}\right)_1\right)(\ell_k; \ell_k)$, provando que $\left(\Delta_k^1\mathcal{W}\right)_1 \subsetneq \left(\Delta_{k-1}^1\mathcal{W}\right)_1$ para todo $k \geqslant 2$. Para o caso $k = 2$, relembre que $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{\text{dual}}$ (Teorema de Gantmacher). Como $id_{\ell_{k+1}} \in \left(\left(\Delta_k^1\mathcal{W}\right)_1 - \mathcal{F}\right)(\ell_{k+1}; \ell_{k+1})$, usando Corolário 3.30, segue que $\mathcal{F} \subsetneq \left(\Delta_k^1\mathcal{W}\right)_1$ para todo k.

A seguir apresentamos as definições de ideal tensorstable e s-tensorstable, que conforme dissemos na introdução desta seção, têm sido muito utilizadas. Um primeiro objetivo é mostrar que, em certas condições, $\mathcal{I} = \left(\Delta_k^1\mathcal{I}\right)_1$ para todo $k \geqslant 2$.

Definição 3.32. Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é *tensorstable* se $u \otimes v \in \mathcal{I}(E_1\widehat{\otimes}_\pi E_2; F_1\widehat{\otimes}_\pi F_2)$ sempre que $u \in \mathcal{I}(E_1; F_1)$ e $v \in \mathcal{I}(E_2; F_2)$.

Neste caso, da associatividade da norma projetiva segue que

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_m \in \mathcal{I}(E_1\widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E_m; F_1\widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi F_m)$$

sempre que $u_j \in \mathcal{I}(E_j; F_j)$, $j = 1, \ldots, m$. No caso em que $u = u_1 = \cdots = u_m$, escrevemos $\otimes^m u$.

Definição 3.33. Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é *simetricamente tensorstable ou s-tensorstable* se $\otimes^{k,s}u \in \mathcal{I}(\widehat{\otimes}_\pi^{k,s}E; \widehat{\otimes}_\pi^{k,s}F)$ para todo $k \geqslant 2$ sempre que $u \in \mathcal{I}(E; F)$.

Em [18, Proposition 5.7] é mostrado que todo ideal $\mathcal{I}$ de operadores tensorstable é s-tensorstable. Uma lista de ideais tensorstables e portanto s-tensorstables, pode ser encontrada [18, Example 5.8].

Definição 3.34. Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é dito *regular* se $u \in \mathcal{I}(E; F)$ sempre que $J_F \circ u \in \mathcal{I}(E; F^{**})$.

Listas de ideais regulares podem ser encontradas em [21, 1.20] e [35, Proposition 4.5.8].

Proposição 3.35. *(i) Se $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores tal que $\mathcal{I}^{dual}$ é s-tensorstable, então $(\Delta_k^1\mathcal{I})_1 = \mathcal{I}^{dual}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Em particular, $\left(\Delta_k^1\mathcal{I}\right)_1$ é um ideal de operadores.*

(ii) Se $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores completamente simétrico e s-tensorstable, então $\mathcal{I} = \left(\Delta_k^1\mathcal{I}\right)_1$ para todo $k \geqslant 2$. Em particular, $\left(\Delta_k^1\mathcal{I}\right)_1$ é um ideal de operadores.

Demonstração. (i) Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $u \in \Delta_k^1\mathcal{I}(E;F)$. Pelo Corolário 3.28 temos $\otimes^{k,s}u \in \mathcal{I}^{dual}(\widehat{\otimes}_\pi^{k,s}E;\widehat{\otimes}_\pi^{k,s}F)$, logo do Lema 3.29 segue que $u \in \mathcal{I}^{dual}(E;F)$. Reciprocamente, se $u \in \mathcal{I}^{dual}(E;F)$, então $\otimes^{k,s}u \in \mathcal{I}^{dual}(\widehat{\otimes}_\pi^{k,s}E;\widehat{\otimes}_\pi^{k,s}F)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, pelo Corolário 3.28 temos $u \in \Delta_k^1\mathcal{I}(E;F)$.

O item (ii) é consequência direta do item (i). □

Vale ainda a seguinte recíproca parcial da proposição anterior:

Proposição 3.36. *As seguintes condições são equivalentes para um ideal de operadores regular $\mathcal{I}$:*

(a) $\mathcal{I} = \left(\Delta_k^1\mathcal{I}\right)_1$ para todo $k \geqslant 2$.

(b) $\mathcal{I} \subseteq \left(\Delta_k^1\mathcal{I}\right)_1$ para todo $k \geqslant 2$.

(c) $\mathcal{I}$ é completamente simétrico e s-tensorstable.

Neste caso, $\left(\Delta_k^1\mathcal{I}\right)_1$ é ideal de operadores para todo $k \geqslant 2$.

Demonstração. A implicação (a) $\Rightarrow$ (b) é óbvia. A implicação (c) $\Rightarrow$ (a) segue da Proposição 3.35. Basta provar (b) $\Rightarrow$ (c). Para isso, suponha que $\mathcal{I} \subseteq \left(\Delta_k^1\mathcal{I}\right)_1$ para todo $k \geqslant 2$. Usando o Corolário 3.30, temos que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{dual}$, provando que $\mathcal{I}$ é simétrico. Como todo ideal de operadores simétrico e regular é completamente simétrico (veja [35, Proposition 4.5.7]), segue que $\mathcal{I}$ é completamente simétrico. As implicações, para um dado operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$,

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{I}(E;F) &\Longrightarrow u \in \left(\Delta_k^1\mathcal{I}\right)_1(E;F) \Longrightarrow \otimes^{k,s}u \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(\widehat{\otimes}_\pi^{k,s}E;\widehat{\otimes}_\pi^{k,s}F) \\ &\Longrightarrow \otimes^{k,s}u \in \mathcal{I}(\widehat{\otimes}_\pi^{k,s}E;\widehat{\otimes}_\pi^{k,s}F), \end{aligned}$$

onde a primeira segue da hipótese, a segunda do Corolário 3.28 e a última segue do fato já provado de $\mathcal{I}$ ser totalmente simétrico, provam que $\mathcal{I}$ é s-tensorstable. □

A demonstração da proposição anterior deixa claro que a condição "$\mathcal{I} = (\Delta_k^1\mathcal{I})_1$ para algum $k \geqslant 2$" não é equivalente às condições da Proposição 3.36 em geral. O resultado a seguir mostra qual hipótese deve ser adicionada para que todas essas condições sejam equivalentes.

Proposição 3.37. *As seguintes condições são equivalentes para um ideal de operadores regular e s-tensorstable $\mathcal{I}$:*

(a) $\mathcal{I} = \left(\Delta_k^1 \mathcal{I}\right)_1$ *para todo* $k \geqslant 2$.

(b) $\mathcal{I} = \left(\Delta_k^1 \mathcal{I}\right)_1$ *para algum* $k \geqslant 2$.

(c) $\mathcal{I} \subseteq \left(\Delta_k^1 \mathcal{I}\right)_1$ *para todo* $k \geqslant 2$.

(d) $\mathcal{I} \subseteq \left(\Delta_k^1 \mathcal{I}\right)_1$ *para algum* $k \geqslant 2$.

(e) $\mathcal{I}$ *é completamente simétrico.*

Neste caso, $\left(\Delta_k^1 \mathcal{I}\right)_1$ *é ideal de operadores para todo* $k \geqslant 2$.

Demonstração. As implicações (a) $\Rightarrow$ (c), (c) $\Rightarrow$ (d), (a) $\Rightarrow$ (b) e (b) $\Rightarrow$ (d) são óbvias. Basta mostrar (d) $\Rightarrow$ (e) e (e) $\Rightarrow$ (a). (d) $\Rightarrow$ (e) segue do Corolário 3.30 e do fato de $\mathcal{I}$ ser regular. Finalmente (e) $\Rightarrow$ (a) segue da Proposição 3.35(ii). $\square$

A seguir apresentamos uma outra propriedade relacionando os duais generalizados de um ideal de operadores com o ideal de polinômios de composição gerado pelo ideal. Esta propriedade nos mostra que sob certas condições o k-dual de um ideal de operadores sempre contém o ideal de composição polinomial associado.

O leitor deve ter em mente que, dado um ideal de operadores $\mathcal{I}$, o ideal de composição $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ é um ideal bilateral de polinômios se, e somente se, $\mathcal{I}$ é s-tensorstable [18, Theorem 5.3].

Proposição 3.38. *Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores simétrico tal que $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ é um ideal bilateral de polinômios. Então*

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{P} \subseteq \Delta_k^1 \mathcal{I} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^m E; F)$. Como $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ é um ideal bilateral de polinômios, $\delta_F^k \circ P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^{mk} E; \widehat{\otimes}_\pi^{k,s} F)$. De [15, Proposition 3.2(b)] segue que $(\delta_F^k \circ P)_L \in \mathcal{I}(\widehat{\otimes}_\pi^{mk,s} E; \widehat{\otimes}_\pi^{k,s} F)$, e como $\mathcal{I}$ é simétrico temos $\left[(\delta_F^k \circ P)_L\right]^* \in \mathcal{I}\left(\left(\widehat{\otimes}_\pi^{k,s} F\right)^*; \left(\widehat{\otimes}_\pi^{mk,s} E\right)^*\right)$. Do Lema 2.18 decorre que $\Delta_k^1 P \in \mathcal{I}(\mathcal{P}(^k F); \mathcal{P}(^{mk} E))$, isto é $P \in \Delta_k^1 \mathcal{I}(^m E; F)$. $\square$

Como consequência quase imediata temos o seguinte resultado para o ideal $\mathcal{K}$ dos operadores lineares compactos e para o ideal $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$ dos polinômios homogêneos compactos.

Corolário 3.39. *$\mathcal{P}_{\mathcal{K}} \subseteq \Delta_k^1 \mathcal{K}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Segue do fato de $\mathcal{K}$ ser um ideal de operadores completamente simétrico (Teorema de Schauder) e s-tensorstable [18, Example 3.6], do Corolário 1.50 e da Proposição 3.38. □

Em forte contraste com o que mostramos para o ideal dos operadores fracamente compactos no Exemplo 3.31, no caso dos operadores compactos vale o seguinte:

Corolário 3.40. *$\left(\Delta_k^1 \mathcal{K}\right)_1 = \mathcal{K}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e E e F espaços de Banach. Do Corolário 3.30 temos $\Delta_k^1 \mathcal{K}(E; F) \subseteq \mathcal{K}^{dual}(E; F) = \mathcal{K}(E; F)$. A inclusão inversa segue da Proposição 3.38 e do já mencionado fato de $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$ ser um ideal bilateral [18, Example 3.6]. □

O Corolário acima, na verdade, vale em um contexto mais geral, que pode ser demonstrado como no corolário anterior ou usando resultados anteriores:

Corolário 3.41. *Se $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores, completamente simétrico e tal que $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ é um ideal bilateral de polinômios, então $\mathcal{I} = \left(\Delta_k^1 \mathcal{I}\right)_1$ para todo $k \geqslant 2$.*

Demonstração. O resultado segue de uma combinação da Proposição 3.35 com [18, Theorem 5.3]. □

A seguir mostramos uma relação do ideal dos operadores compactos com os duais generalizados do ideal dos operadores fracamente compactos.

Exemplo 3.42. Vejamos que

$$\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{K} \subsetneq \cdots \subsetneq \left(\Delta_k^1 \mathcal{W}\right)_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \left(\Delta_3^1 \mathcal{W}\right)_1 \subsetneq \left(\Delta_2^1 \mathcal{W}\right)_1 \subsetneq \left(\Delta_1^1 \mathcal{W}\right)_1 = \mathcal{W}^{\text{dual}} = \mathcal{W}.$$

Em vista do Exemplo 3.31 e do Corolário 3.40, basta provar que $\mathcal{K} \subsetneq \left(\Delta_k^1 \mathcal{W}\right)_1$ para todo k. A inclusão segue do Corolário 3.40. Para ver que a inclusão é estrita para cada $k \geqslant 1$, note, num primeiro momento, que o operador $id_{\ell_{k+1}} \colon \ell_{k+1} \longrightarrow \ell_{k+1}$ não é compacto pois ℓ_{k+1} tem dimensão infinita. E agora, como $\Delta_k^1 id_{\ell_{k+1}} = id_{\mathcal{P}(^k \ell_{k+1})}$ e $\mathcal{P}(^k \ell_{k+1})$ é reflexivo, temos $\Delta_k^1 id_{\ell_{k+1}}$ é fracamente compacta, isto é, $id_{\ell_{k+1}} \in \Delta_k^1 \mathcal{W}(\ell_{k+1}; \ell_{k+1})$.

A seguir estabelecemos uma relação entre o k-dual de um hiper-ideal e seu 1-dual.

Proposição 3.43. *Se $\mathcal{Q}$ é um hiper-ideal de polinômios, então $\Delta_k^n \left(\mathcal{Q}_n\right) \subseteq \Delta_1^{kn} \left(\mathcal{Q}_{kn}\right)$ para todos $k, n \in \mathbb{N}$*

Demonstração. Se $P \in \Delta_k^n(\mathcal{Q}_n)(^mE;F)$, então $\Delta_k^n P \in \mathcal{Q}_n(^n\mathcal{P}(^kF);\mathcal{P}(^{mnk}E))$. Usando a Proposição 2.8,

$$\Delta_1^{kn}P = \Delta_1^{kn}(id_F \circ P) = (\Delta_k^n P) \circ \left(\Delta_1^k id_F\right),$$

e portanto, $\Delta_1^{kn}P \in \mathcal{Q}\left(^{kn}F^*;\mathcal{P}(^{mnk}E)\right)$. □

Lema 3.44. *(i) Sejam v_1, $v_2 \in \mathcal{L}(\widehat{\otimes}_\pi^{k,s}E;F)$. Se $v_1(\otimes^k x) = v_2(\otimes^k x)$ para todo $x \in E$, então $v_1 = v_2$.*

(ii) Se $Q \in \mathcal{P}(^nE;F)$ e $v \in \mathcal{L}(F;G)$, então $(v \circ Q)_L = v \circ Q_L$.

Demonstração. (i) Como $v_1(\otimes^k x) = v_2(\otimes^k x)$ para todo $x \in E$ e v_1, v_2 são lineares, temos $v_1(z) = v_2(z)$ para todo $z \in \otimes_\pi^{k,s}E$. Da continuidade de v_1 e v_2 e como $\otimes_\pi^{k,s}E$ é denso em $\widehat{\otimes}_\pi^{k,s}E$, segue que $v_1 = v_2$.
(ii) Para todo $x \in E$,

$$(v \circ Q)_L(\otimes^n x) = (v \circ Q)(x) = v(Q(x)) = v(Q_L(\otimes^n x)) = (v \circ Q_L)(\otimes^n x).$$

O resultado agora segue do item (i). □

Observação 3.45. Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores e $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$. De [14, Theorem 2.2] e [15, Proposition 3.2.b] segue que

$$P \in \mathcal{I}^{dual-\mathcal{P}}(^mE;F) \Longleftrightarrow P_L \in \mathcal{I}^{dual}(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s}E;F).$$

Proposição 3.46. *Se $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores, então para todo $k \in \mathbb{N}$,*

$$\Delta_k^1\left(\mathcal{I}^{dual}\right) \subseteq \Delta_1^k\left(\mathcal{I}^{dual-\mathcal{P}}\right).$$

Demonstração. Podemos demonstrar esta Proposição de duas formas:

Primeira demonstração: Sejam k, $m \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$. Se $P \in \Delta_k^1\left(\mathcal{I}^{dual}\right)(^mE;F)$, então por definição $\Delta_k^1 P \in \mathcal{I}^{dual}(\mathcal{P}(^kF);\mathcal{P}(^{mk}E))$. Por outro lado, da Proposição 2.8, sabemos que $\left(\Delta_k^1 P\right) \circ \left(\Delta_1^k id_F\right) = \Delta_1^k P$, logo $\left[\left(\Delta_k^1 P\right) \circ \left(\Delta_1^k id_F\right)\right]_L = \left(\Delta_1^k P\right)_L$. Usando o Lema 3.44 temos $\Delta_k^1 P \circ \left(\Delta_1^k id_F\right)_L = \left(\Delta_1^k P\right)_L$, e portanto $\left(\Delta_1^k P\right)_L \in \mathcal{I}^{dual}(\widehat{\otimes}_\pi^{k,s}F^*;\mathcal{P}(^{mk}E))$. Pela Observação 3.45 temos $\Delta_1^k P \in \mathcal{I}^{dual-\mathcal{P}}(^kF^*;\mathcal{P}(^{mk}E))$, isto é $P \in \Delta_1^k\left(\mathcal{I}^{dual-\mathcal{P}}\right)(^mE;F)$.

Segunda demonstração: Combinando [43, Teorema 3.4.5] com [14, Theorem 2.2] segue que $\mathcal{I}^{dual-\mathcal{P}} = \mathcal{I}^{dual} \circ \mathcal{P}$ é um hiper-ideal de polinômios. O resultado agora segue da Proposição 3.43. □

3.5 Germes de composição

Seguindo uma das linhas clássicas da teoria, que vem desde o artigo seminal de A. Pietsch [36], definiremos e estudaremos os germes de composição, que serão definidos da mesma forma que se faz com os ideais (veja Definição 1.46). Uma aplicação aos duais generalizados de um ideal de operadores será obtida.

Proposição 3.47. *Sejam $\mathcal{G}$ um germe de ideal de operadores e $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(*i*) *Existem um espaço de Banach G, um polinômio $Q \in \mathcal{P}(^mE;G)$ e um operador $u \in \mathcal{G}(G;F)$ tais que $P = u \circ Q$.*

(*ii*) $P_L \in \mathcal{G}(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s}E;F)$.

Demonstração. Suponhamos que existam um espaço de Banach G, um polinômio $Q \in \mathcal{P}(^mE;G)$ e um operador linear $u \in \mathcal{G}(G;F)$ tais que $P = u \circ Q$. Pelo Lema 3.44,

$$P_L = (u \circ Q)_L = u \circ Q_L \in \mathcal{G}(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s}E;F).$$

Reciprocamente, suponhamos que $P_L \in \mathcal{G}(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s}E;F)$. O resultado segue da igualdade $P = P_L \circ \delta_E^m$. □

Definição 3.48. Dados um germe de ideal de operadores $\mathcal{G}$ e um polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$, dizemos que $P \in \mathcal{G}\circ\mathcal{P}(^mE;F)$ se P satisfaz as condições equivalentes da proposição anterior.

Proposição 3.49. *Se $\mathcal{G}$ é um germe de ideal de operadores, então $\mathcal{G} \circ \mathcal{P}$ é um germe de hiper-ideal de polinômios.*

Demonstração. Provemos primeiramente que $\mathcal{P}_f(^mE;F) \subseteq \mathcal{G} \circ \mathcal{P}(^mE;F)$. Para isso seja $P = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^m \otimes b_j \in \mathcal{P}_f(^mE;F)$, onde $\varphi_j \in E^*$ e $b_j \in F$. Consideremos o polinômio m-homogêneo contínuo

$$Q\colon E \longrightarrow \mathbb{K}^n\ ,\ Q(x) = (\varphi_1^m(x), \ldots, \varphi_n^m(x)),$$

e o operador linear contínuo

$$u\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow F\ ,\ u(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j.$$

Para todo $x \in E$,

$$(u \circ Q)(x) = u(Q(x)) = u(\varphi_1^m(x), \ldots, \varphi_n^m(x)) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^m(x) b_j = P(x).$$

Note que $u \in \mathcal{G}(G;F)$ pois u tem posto finito.

Provemos agora a propriedade de hiper-ideal. Sejam $P \in \mathcal{G} \circ \mathcal{P}(^mE;F)$, $R \in \mathcal{P}(^nH;E)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H_1)$. Como $P \in \mathcal{G} \circ \mathcal{P}(^mE;F)$, temos $P = u \circ Q$ onde G é um espaço de Banach, $u \in \mathcal{G}(G;F)$ e $Q \in \mathcal{P}(^mE;G)$. De

$$t \circ P \circ R = t \circ (u \circ Q) \circ R = (t \circ u) \circ (Q \circ R)$$

e como $t \circ u \in \mathcal{G}(G;H_1)$, segue que $t \circ P \circ R \in \mathcal{G} \circ \mathcal{P}(^{mn}H;H_1)$. □

No caso dos germes de ideais de operadores que são duais generalizados de um ideal, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.50. *Se $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores, então $\left(\Delta_k^1\mathcal{I}\right)_1 \circ \mathcal{P} \subseteq \Delta_k^1\mathcal{I}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$. Usando as igualdades $P = P_L \circ \delta_E^m$ e $\Delta_k^1 P = \Delta_k^1 \delta_E^m \circ \Delta_k^1(P_L)$, temos

$$\begin{aligned} P \in \left(\Delta_k^1\mathcal{I}\right)_1 \circ \mathcal{P}(^mE;F) &\Leftrightarrow P_L \in \Delta_k^1\mathcal{I}(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s}E;F) \\ &\Leftrightarrow \Delta_k^1(P_L) \in \mathcal{I}\left(\mathcal{P}(^kF);\mathcal{P}(^k\widehat{\otimes}_\pi^{m,s}E)\right) \\ &\Rightarrow \Delta_k^1 P \in \mathcal{I}\left(\mathcal{P}(^kF);\mathcal{P}(^{mk}E)\right) \\ &\Leftrightarrow P \in \Delta_k^1\mathcal{I}(^mE;F). \end{aligned}$$

□

CAPÍTULO 4

GERMES DE IDEAIS FECHADOS, INJETIVOS E SOBREJETIVOS

Na teoria de ideais é comum considerar ideais com propriedades especiais, por exemplo ideais regulares, fechados, simétricos, injetivos, sobrejetivos, minimais e maximais (veja [20, 35]). Neste capítulo iniciamos a teoria de germes de ideais com propriedades especiais, a saber, estudaremos germes fechados, injetivos e sobrejetivos.

Entre outras coisas, mostramos, no caso de germes fechados, que o k-dual de um ideal de polinômios fechado é um germe fechado. Para o caso de germes injetivos e sobrejetivos, estabelecemos sua relação com o ideal gerado e com as envoltórias injetivas e sobrejetivas. No caso de germes injetivos de polinômios, estabelecemos uma equivalência com o que chamamos de propriedade da dominação polinomial, que generaliza uma equivalência conhecida no caso linear.

4.1 Germes de ideais fechados

Começamos com a definição no caso linear.

Definição 4.1. Um germe de ideal de operadores $\mathcal{G}$ é *fechado* se para quaisquer espaços de Banach E e F, a componente $\mathcal{G}(E;F)$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{L}(E;F)$ com a norma usual de operadores.

E para o caso polinomial:

Definição 4.2. Um germe de ideal de polinômios (respectivamente, germe de hiper-ideal, germe de ideal bilateral de polinômios) $\mathcal{G}$ é *fechado* se para qualquer $m \in \mathbb{N}$ e quaisquer espaços de Banach E e F, a componente $\mathcal{G}(^mE;F)$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{P}(^mE;F)$ com a norma usual de polinômios.

Para provar o primeiro resultado sobre o fecho de um germe precisamos do seguinte lema técnico.

Lema 4.3. *Sejam E, F, G, H espaços de Banach, m, n, $r \in \mathbb{N}$, $R \in \mathcal{P}(^rF;H)$ e $Q \in \mathcal{P}(^nG;E)$. Então a aplicação*

$$S_{RQ}\colon \mathcal{P}(^mE;F) \longrightarrow \mathcal{P}(^{mnr}G;H)\ ,\ S_{RQ}(P) = R \circ P \circ Q,$$

é um polinômio r-homogêneo contínuo.

Demonstração. A aplicação S_{RQ} é bem definida pois a composição de polinômios homogêneos é um polinômio homogêneo. A r-homogeneidade se nota na igualdade

$$S_{RQ}(\lambda P) = R \circ (\lambda P) \circ Q = \lambda^r (R \circ P \circ Q).$$

É fácil verificar que

$$A(P_1, \ldots, P_r)(x) = \check{R}(P_1(Q(x)), \ldots, P_r(Q(x))),$$

é um operador r-linear contínuo que gera S_{RQ}. □

Definição 4.4. (i) Dados um germe de ideal de operadores $\mathcal{G}$ e espaços de Banach E e F, definimos

$$\overline{\mathcal{G}}(E;F) := \overline{\mathcal{G}(E;F)},$$

onde o fecho é tomado em relação a norma usual de operadores.

(ii) Dados um germe de ideal de polinômios (respectivamente, germe de hiper-ideal de polinômios, germe de ideal bilateral de polinômios) $\mathcal{G}$, $m \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach E e F, definimos

$$\overline{\mathcal{G}}(^mE;F) := \overline{\mathcal{G}(^mE;F)},$$

onde o fecho é tomado em relação a norma usual de polinômios.

A seguir mostramos, como esperado, que o fecho de um germe de ideal é um germe fechado de ideal.

Proposição 4.5. *Se $\mathcal{G}$ é um germe de ideal de operadores (respectivamente, germe de ideal de polinômios, germe de hiper-ideal de polinômios, germe de ideal bilateral de polinômios), então $\overline{\mathcal{G}}$ é um germe fechado de ideal de operadores (respectivamente, germe fechado de ideal de polinômios, germe fechado de hiper-ideal de polinômios, germe fechado de ideal bilateral de polinômios).*

Demonstração. É suficiente provar o caso em que $\mathcal{G}$ é um germe de ideal bilateral de polinômios.

É claro que $\overline{\mathcal{G}}$ contém os polinômios de tipo finito, pois $\mathcal{P}_f \subseteq \mathcal{G} \subseteq \overline{\mathcal{G}}$.

Sejam $m, n, r \in \mathbb{N}$, $P \in \overline{\mathcal{G}}(^mE; F)$, $Q \in \mathcal{P}(^nG; E)$ e $R \in \mathcal{P}(^rF; H)$. Como $P \in \overline{\mathcal{G}}(^mE; F)$, existe uma sequência $(P_n)_n$ em $\mathcal{G}(^mE; F)$ tal que $P_n \longrightarrow P$ na norma usual de $\mathcal{P}(^mE; F)$. Logo $R \circ P_n \circ Q \in \mathcal{G}(^{mnr}G; H)$ para cada n e usando a continuidade do operador S_{RQ} do Lema 4.3 concluímos que

$$R \circ P_n \circ Q = S_{RQ}(P_n) \longrightarrow S_{RQ}(P) = R \circ P \circ Q$$

na norma usual de $\mathcal{P}(^{mnr}E; F)$. Portanto, $R \circ P \circ Q \in \overline{\mathcal{G}}(^{rmn}G; H)$. □

A seguir, mostramos uma condição suficiente para que o k-dual de um ideal de polinômios seja fechado.

Proposição 4.6. *Se $\mathcal{Q}_n$ é um ideal fechado de polinômios n-homogêneos, então, $\Delta_k^n \mathcal{Q}_n$ é um germe fechado de hiper-ideal de polinômios para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Dado $k \in \mathbb{N}$, da Proposição 3.22 segue que $\Delta_k^n \mathcal{Q}_n$ é um germe de hiper-ideal de polinômios. Dados $m \in \mathbb{N}$ e E e F espaços de Banach, mostraremos a seguir que $\Delta_k^n \mathcal{Q}_n(^mE; F)$ é fechado em $\mathcal{P}(^mE; F)$. Para isso, seja $(P_j)_j$ uma sequência em $\Delta_k^n \mathcal{Q}_n(^mE; F)$ tal que $P_j \longrightarrow P$ na norma usual de $\mathcal{P}(^mE; F)$. Logo

$$\Delta_k^n P_j \in \mathcal{Q}(^n\mathcal{P}(^kF); \mathcal{P}(^{mnk}E)) \text{ para todo } j.$$

Da continuidade do polinômio Δ_k^n (Proposição 2.3(ii)) segue que $\Delta_k^n P_j \longrightarrow \Delta_k^n P$ na norma usual. Como o ideal $\mathcal{Q}_n$ é fechado, concluímos que $\Delta_k^n P \in \mathcal{Q}_n(^n\mathcal{P}(^kF); \mathcal{P}(^{mnk}E))$. □

4.2 Germes sobrejetivos

Seguindo a linha do que é feito no caso de ideais de operadores lineares em [20, 35] e no caso de ideais de polinômios homogêneos em [10] e [35], definimos e estudamos nesta seção os germes sobrejetivos de ideais. Tanto para os germes sobrejetivos de ideais de operadores como para germes sobrejetivos de ideais de polinômios, estudamos suas envoltórias sobrejetivas e por meio destas caracterizamos os operadores/polinômios que pertencem aos ideais.

Começamos definindo o que é um germe sobrejetivo de ideal de operadores.

Definição 4.7. Dizemos que um germe de operadores lineares $\mathcal{G}$ é *sobrejetivo* se dados um operador $u \in \mathcal{L}(E; F)$ e uma sobrejeção métrica $s\colon H \twoheadrightarrow E$ tais que $u \circ s \in \mathcal{G}(H; F)$, tem-se $u \in \mathcal{G}(E; F)$.

Para o caso polinomial, temos:

Definição 4.8. Dizemos que um germe de ideal de polinômios (respectivamente, um germe de hiper-ideal de polinômios, um germe de ideal bilateral de polinômios) $\mathcal{G}$ é *sobrejetivo* se dados um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ e uma sobrejeção métrica $s\colon G \twoheadrightarrow E$ tais que $P \circ s \in \mathcal{G}(^mG;F)$, tem-se $P \in \mathcal{G}(^mE;F)$.

Exemplo 4.9. Todo ideal (de operadores ou de polinômios) sobrejetivo é um germe de ideal (de operadores ou de polinômios) sobrejetivo. Listas de ideais de operadores sobrejetivos podem ser encontradas em [21, 1.20] e [35, Proposition 4.7.12]. Em [10] encontramos vários exemplos de ideais de polinômios sobrejetivos, por exemplo o ideal bilateral $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ dos polinômios homogêneos de posto finito é sobrejetivo [10, Example 2.6].

Com o objetivo de caracterizar os germes de ideais sobrejetivos, introduzimos e estudamos a seguir a envoltória sobrejetiva de um germe de ideal (tanto no caso linear como no caso polinomial).

Proposição 4.10. (*i*) *Seja $\mathcal{G}$ um germe de ideal de operadores. Então existe um único menor germe sobrejetivo de ideal de operadores $\mathcal{G}^{sur}$ que contém $\mathcal{G}$. Se Q_E denota a sobrejeção canônica $\ell_1(B_E) \twoheadrightarrow E$, então para cada $u \in \mathcal{L}(E;F)$,*

$$u \in \mathcal{G}^{sur}(E;F) \Longleftrightarrow u \circ Q_E \in \mathcal{G}(\ell_1(B_E);F).$$

(*ii*) *Seja $\mathcal{G}$ um germe de ideal de polinômios. Então existe um único menor germe sobrejetivo de ideal de polinômios $\mathcal{G}^{sur}$ que contém $\mathcal{G}$. Se Q_E denota a sobrejeção canônica $\ell_1(B_E) \twoheadrightarrow E$, então para cada $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$,*

$$P \in \mathcal{G}^{sur}(^mE;F) \Longleftrightarrow P \circ Q_E \in \mathcal{G}(^m\ell_1(B_E);F).$$

O germe $\mathcal{G}^{sur}$ é chamado de *envoltória sobrejetiva* do germe $\mathcal{G}$.

Demonstração. É claro que basta provar (ii). Para isso, dados m, E e F, definimos

$$\mathcal{G}^{sur}(^mE;F) = \{P \in \mathcal{P}(^mE;F) : P \circ Q_E \in \mathcal{G}\}.$$

Vejamos que $\mathcal{G}^{sur}$ é um germe sobrejetivo de ideal de polinômios e $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{sur}$.

A continência $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{sur}$ decorre da propriedade de ideal de $\mathcal{G}$. E dela segue que $\mathcal{G}^{sur}$ contém os polinômios de tipo finito, pois o próprio germe $\mathcal{G}$ contém esses polinômios.

Provemos agora a propriedade de ideal. Sejam $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $P \in \mathcal{G}^{sur}(^mF;G)$ e $t \in \mathcal{L}(G;H)$. Como $P \in \mathcal{G}^{sur}(^mF;G)$, temos $P \circ Q_F \in \mathcal{G}(^m\ell_1(B_F);G)$. Usando que $\ell_1(B_E)$ tem a propriedade do levantamento [35, Proposition C.3.6], existe um operador

$s \in \mathcal{L}(\ell_1(B_E); \ell_1(B_F))$ tal que $u \circ Q_E = Q_F \circ s$.

$$\begin{tikzcd} \ell_1(B_E) \arrow[r, "Q_E"] \arrow[drr, "s"'] & E \arrow[r, "u"] & F \arrow[r, "P"] & G \arrow[r, "t"] & H \\ & & \ell_1(B_F) \arrow[u, "Q_F"'] & & \end{tikzcd}$$

Assim, $t \circ P \circ u \circ Q_E = t \circ (P \circ Q_F) \circ s \in \mathcal{G}(^m\ell_1(B_E); H)$ pois $P \circ Q_F \in \mathcal{G}(^m\ell_1(B_F); G)$.

Provemos que $\mathcal{G}^{sur}$ é sobrejetivo. Sejam $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ e $j\colon G \twoheadrightarrow E$ uma sobrejeção métrica tais que $P \circ j \in \mathcal{G}^{sur}(^mG; F)$. Usando novamente a propriedade do levantamento de $\ell_1(B_E)$, existe um operador $s \in \mathcal{L}(\ell_1(B_E); \ell_1(B_G))$ tal que $Q_E = j \circ Q_G \circ s$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads, "j"] & E \arrow[r, "P"] & F \\ \ell_1(B_G) \arrow[u, "Q_G"] & \ell_1(B_E) \arrow[l, "s"'] \arrow[u, "Q_E"'] & \end{tikzcd}$$

Portanto, $P \circ Q_E = P \circ j \circ Q_G \circ s \in \mathcal{G}(^m\ell_1(B_E); F)$ pois $P \circ j \in \mathcal{G}^{sur}(^mG; F)$. Isso mostra que $P \in \mathcal{G}^{sur}(^mE; F)$.

Vejamos agora que se $\mathcal{G}_1$ é um germe sobrejetivo de ideal polinômios tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_1$, então $\mathcal{G}^{sur} \subseteq \mathcal{G}_1$. De fato, se $P \in \mathcal{G}^{sur}(^mE; F)$, então $P \circ Q_E \in \mathcal{G}(^m\ell_1(B_E); F) \subseteq \mathcal{G}_1(^m\ell_1(B_E); F)$, e portanto $P \circ Q_E \in \mathcal{G}_1(^m\ell_1(B_E); F)$. Como $\mathcal{G}_1$ é sobrejetivo, segue que $P \in \mathcal{G}_1(^mE; F)$.

Por fim, provemos que $\mathcal{G}^{sur}$ é o único germe com as propriedades acima. Com efeito, suponhamos que exista um outro menor germe sobrejetivo de ideal de polinômios $\mathcal{G}_1$ tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_1$. Como $\mathcal{G}^{sur}$ também é um germe sobrejetivo que contém $\mathcal{G}$, segue da minimalidade de $\mathcal{G}_1$ que $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}^{sur}$. E da minimalidade de $\mathcal{G}^{sur}$ segue que $\mathcal{G}^{sur} \subseteq \mathcal{G}_1$. $\square$

Proposição 4.11. *Seja $\mathcal{G}$ um germe de ideal de operadores (respectivamente, germe de ideal de polinômios). Então:*

(i) *$\mathcal{G}$ é sobrejetivo se, e somente se, $\mathcal{G}^{sur} = \mathcal{G}$.*

(ii) $\operatorname{span}\{\mathcal{G}\} \subseteq \operatorname{span}\{\mathcal{G}^{sur}\} \subseteq (\operatorname{span}\{\mathcal{G}\})^{sur}$.

(iii) *Se* $\operatorname{span}\{\mathcal{G}\}$ *é sobrejetivo, então* $\operatorname{span}\{\mathcal{G}\} = \operatorname{span}\{\mathcal{G}^{sur}\}$.

Demonstração. (i) Suponhamos que $\mathcal{G}$ seja sobrejetivo. Já sabemos que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{sur}$. Para a inclusão inversa, se $P \in \mathcal{G}^{sur}(^mE; F)$, então $P \circ Q_E \in \mathcal{G}(^m\ell_1(B_E); F)$. Mas como $\mathcal{G}$ é sobrejetivo, segue que $P \in \mathcal{G}$. A recíproca é óbvia.

(ii) Como $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{sur}$, temos $\operatorname{span}\{\mathcal{G}\} \subseteq \operatorname{span}\{\mathcal{G}^{sur}\}$. Para a outra inclusão, se $P \in \operatorname{span}\{\mathcal{G}^{sur}\}(^m E; F)$, então $P = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j P_j$, onde $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{K}$ e $P_j \in \mathcal{G}^{sur}(^m E; F)$. Logo

$$P \circ Q_E = \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j P_j \right) \circ Q_E = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (P_j \circ Q_E) \in \operatorname{span}\{\mathcal{G}(^m \ell_1(B_E); F)\},$$

pois cada $P_j \circ Q_E \in \mathcal{G}(^m \ell_1(B_E); F)$. Portanto $P \in (\operatorname{span}\{\mathcal{G}\})^{sur} (^m E; F)$.

O item (iii) Segue do item (ii). $\square$

Mostramos na proposição a seguir que a envoltória sobrejetiva satisfaz as propriedades que se espera de uma envoltória.

Proposição 4.12. *Na classe dos germes de ideais de operadores (respectivamente, germes de ideais de polinômios), a correspondência*

$$sur \colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^{sur}$$

é um procedimento de envoltória no sentido que:

(i) Se $\mathcal{G}$ é um germe de ideal de operadores (respectivamente, germe de ideal de polinômios), então $\mathcal{G}^{sur}$ é um germe de ideal de operadores (respectivamente, germe de ideal de polinômios).

(ii) Se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{R}$ são germes de ideal de operadores (respectivamente, germes de ideal de polinômios) tais que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{R}$, então $\mathcal{G}^{sur} \subseteq \mathcal{R}^{sur}$.

(iii) $(\mathcal{G}^{sur})^{sur} = \mathcal{G}^{sur}$ para todo $\mathcal{G}$ germe de ideal de operadores (respectivamente, germe de ideal de polinômios).

(iv) $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{sur}$ para todo $\mathcal{G}$ germe de ideal de operadores (respectivamente, germe de ideal de polinômios).

Demonstração. Basta mostrar o caso em que $\mathcal{G}$, $\mathcal{R}$ são germes de ideal de polinômios. Os itens (i) e (iv) foram provados na Proposição 4.10.

(ii) Se $P \in \mathcal{G}^{sur}(^m E; F)$, então $P \circ Q_E \in \mathcal{G}(^m \ell_1(B_E); F) \subseteq \mathcal{R}(^m \ell_1(B_E); F)$, donde segue que $P \in \mathcal{R}^{sur}(^m E; F)$.

(iii) Lembrando que $\mathcal{G}^{sur}$ é um germe sobrejetivo de ideal de polinômios, o resultado segue da Proposição 4.11(i). $\square$

Não desenvolveremos a teoria de ideais normados sobrejetivos de polinômios pois isso já foi feito em [10].

4.3 Germes de ideais injetivos

Tendo como referência a definição clássica de ideais de operadores injetivos (veja [20, 35]), definiremos e estudaremos os germes de ideais injetivos, tanto no caso linear como no caso polinomial. Em ambos os casos estudaremos a envoltória injetiva desses germes que, como esperado, estabelece uma caracterização dos operadores/polinômios que pertencem ao germe. Estabeleceremos também uma caracterização de germes injetivos por meio de uma propriedade de dominação, que generaliza a conhecida caracterização de ideal de operadores injetivo por meio da propriedade de dominação.

Definição 4.13. Dizemos que um germe de operadores lineares $\mathcal{G}$ é *injetivo* se dados um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e uma injeção métrica $j\colon F \hookrightarrow H$ tais que $j \circ u \in \mathcal{G}(E;H)$, tem-se $u \in \mathcal{G}(E;F)$.

Analogamente, para o caso polinomial definimos:

Definição 4.14. Dizemos que um germe de ideal de polinômios (respectivamente, um germe de hiper-ideal de polinômios, um germe de ideal bilateral de polinômios) $\mathcal{G}$ é *injetivo* se dados um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ e uma injeção métrica $j\colon F \hookrightarrow G$ tais que $j \circ P \in \mathcal{G}(^mE;G)$, tem-se $P \in \mathcal{G}(^mE;F)$.

Exemplo 4.15. É claro que todo ideal injetivo de operadores/polinômios é um germe de ideal de operadores/polinômios injetivo. Listas de ideais de operadores injetivos podem ser encontradas em [21, 1.20] e [35, Proposition 4.6.12]. De [18, Example 3.6] sabemos que a classe $\mathcal{P}_\mathcal{K}$ dos polinômios compactos é um ideal bilateral de polinômios. Mostraremos na Proposição 4.23 que $\mathcal{P}_\mathcal{K}$ é injetivo.

A seguir caracterizamos os germes injetivos de ideais de operadores, de ideais e de hiper-ideais de polinômios usando a envoltória injetiva.

Proposição 4.16. *(i) Seja $\mathcal{G}$ um germe de ideal operadores. Então existe um único menor germe injetivo de operadores $\mathcal{G}^{inj}$ que contém $\mathcal{G}$. Se I_F denota a injeção canônica $F \hookrightarrow \ell_\infty(B_{F^*})$, então para $u \in \mathcal{L}(E;F)$,*

$$u \in \mathcal{G}^{inj}(E;F) \Longleftrightarrow I_F \circ u \in \mathcal{G}(E;\ell_\infty(B_{F^*})).$$

(ii) Seja $\mathcal{G}$ um germe de ideal de polinômios (respectivamente, germe de hiper-ideal de polinômios). Então existe um único menor germe injetivo de ideal de polinômios (respectivamente, germe de hiper-ideal de polinômios) $\mathcal{G}^{inj}$ que contém $\mathcal{G}$. Se I_F denota a injeção canônica $F \hookrightarrow \ell_\infty(B_{F^*})$, então para $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$,

$$P \in \mathcal{G}^{inj}(^mE;F) \Leftrightarrow I_F \circ P \in \mathcal{G}(^mE;\ell_\infty(B_{F^*})).$$

O germe $\mathcal{G}^{inj}$ é chamado de *envoltória injetiva* do germe $\mathcal{G}$.

Demonstração. Basta mostrar (ii) no caso em que $\mathcal{G}$ é um germe de hiper-ideal de polinômios. Neste caso definimos, para $m \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach E e F,

$$\mathcal{G}^{inj}(^mE; F) = \{P \in \mathcal{P}(^mE; F) : I_F \circ P \in \mathcal{G}(^mE; \ell_\infty(B_{F^*}))\}.$$

Vejamos que $\mathcal{G}^{inj}$ é um germe de hiper-ideal de polinômios injetivo e $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{inj}$. A inclusão $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{inj}$ segue da propriedade de ideal de $\mathcal{G}$, e dela segue que $\mathcal{G}^{inj}$ contém os polinômios de tipo finito, pois o próprio $\mathcal{G}$ contém esses polinômios.

Provemos a propriedade de ideal. Sejam $Q \in \mathcal{P}(^nE; F)$, $P \in \mathcal{G}^{inj}(^mF; G)$ e $t \in \mathcal{L}(G; H)$. Como $P \in \mathcal{G}^{inj}(^mF; G)$, então $I_G \circ P \in \mathcal{G}$. Aplicando a propriedade de extensão de $\ell_\infty(B_{H^*})$ [35, Proposition C.3.2] para o operador $I_H \circ t$, existe um operador $s \in \mathcal{L}(\ell_\infty(B_{G^*}); \ell_\infty(B_{H^*}))$ tal que $I_H \circ t = s \circ I_G$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "Q"] & F \arrow[r, "p"] & G \arrow[r, "t"] \arrow[d, "I_G"'] & H \arrow[r, "I_H"] & \ell_\infty(B_{H^*}) \\
 & & \ell_\infty(B_{G^*}) \arrow[urr, "s"] & &
\end{tikzcd}$$

Portanto

$$I_H \circ t \circ P \circ Q = (s \circ I_G) \circ P \circ Q = s \circ (I_G \circ P) \circ Q \in \mathcal{G}(^{mn}E; \ell_\infty(B_{H^*})).$$

Isso prova que $t \circ P \circ Q \in \mathcal{G}^{inj}(^{mn}E; H)$.

Vejamos que o germe $\mathcal{G}^{inj}$ é injetivo. Sejam $I\colon F \hookrightarrow G$ uma injeção métrica e $Q \in \mathcal{P}(^mE; F)$ tais que $I \circ Q \in \mathcal{G}^{inj}(^mE; G)$. Usando uma vez mais a propriedade de extensão de $\ell_\infty(B_{F^*})$, como $I_G \circ I$ é uma injeção métrica, existe $T \in \mathcal{L}(\ell_\infty(B_{G^*}); \ell_\infty(B_{F^*}))$ tal que $I_F = T \circ I_G \circ I$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "Q"] & F \arrow[r, "I"] \arrow[d, hook, "I_F"'] & G \arrow[d, hook, "I_G"] \\
 & \ell_\infty(B_{F^*}) & \ell_\infty(B_{G^*}) \arrow[l, "T"']
\end{tikzcd}$$

Portanto $I_F \circ Q = T \circ I_G \circ I \circ Q \in \mathcal{G}(^mE; \ell_\infty(B_{F^*}))$, ou seja, $Q \in \mathcal{G}^{inj}(^mE; F)$.

Provemos agora a minimalidade. Seja $\mathcal{R}$ é um germe injetivo de hiper-ideal de polinômios tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{R}$. Se $P \in \mathcal{G}^{inj}(^mE; F)$, então $I_F \circ P \in \mathcal{G}(^mE; \ell_\infty(B_{F^*})) \subseteq \mathcal{R}(^mE; \ell_\infty(B_{F^*}))$, portanto $I_F \circ P \in \mathcal{R}(^mE; \ell_\infty(B_{F^*}))$. Mas como $\mathcal{R}$ é injetivo, temos $P \in \mathcal{R}(^mE; F)$, provando que $\mathcal{G}^{inj} \subseteq \mathcal{R}$.

Finalmente vejamos a unicidade de $\mathcal{G}^{inj}$. Suponhamos que exista um outro menor germe injetivo de hiper-ideal de polinômios $\mathcal{R}$ tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{R}$. Pela minimalidade de $\mathcal{R}$ temos $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G}^{inj}$, e pela minimalidade de $\mathcal{G}^{inj}$ temos $\mathcal{G}^{inj} \subseteq \mathcal{R}$. Portanto $\mathcal{R} = \mathcal{G}^{inj}$. □

Proposição 4.17. *Seja $\mathcal{G}$ um germe de ideal de operadores (respectivamente, germe de ideal de polinômios, germe de hiper-ideal de polinômios). Então:*

(*i*) *$\mathcal{G}$ é injetivo se, e somente se, $\mathcal{G}^{inj} = \mathcal{G}$.*

(*ii*) $\operatorname{span}\{\mathcal{G}\} \subseteq \operatorname{span}\{\mathcal{G}^{inj}\} \subseteq (\operatorname{span}\{\mathcal{G}\})^{inj}$.

(*iii*) *Se* $\operatorname{span}\{\mathcal{G}\}$ *é injetivo, então* $\operatorname{span}\{\mathcal{G}\} = \operatorname{span}\{\mathcal{G}^{inj}\}$.

Demonstração. Basta mostrar o caso em que $\mathcal{G}$ é um germe de hiper-ideal de polinômios.

(i) Suponhamos que $\mathcal{G}$ seja injetivo. Sabemos que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{inj}$, e por outro lado, se $P \in \mathcal{G}^{inj}(^mE; F)$, $I_F \circ P \in \mathcal{G}(^mE; \ell_\infty(B_{F^*}))$. Logo $P \in \mathcal{G}(^mE; F)$ pois $\mathcal{G}$ é injetivo. Segue que $\mathcal{G}^{inj} = \mathcal{G}$. A recíproca é óbvia.

(ii) Como $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{inj}$, então $\operatorname{span}\{\mathcal{G}\} \subseteq \operatorname{span}\{\mathcal{G}^{inj}\}$. Agora se $P \in \operatorname{span}\{\mathcal{G}^{inj}\}(^mE; F)$, então $P = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j P_j$, onde $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $P_j \in \mathcal{G}^{inj}(^mE; F)$. Logo

$$I_F \circ P = I_F \circ \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j P_j \right) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (I_F \circ P_j) \in \operatorname{span}\{\mathcal{G}\}(^mE; \ell_\infty(B_{F^*})),$$

pois que cada $I_F \circ P_j \in \mathcal{G}(^mE; \ell_\infty(B_{F^*}))$. Portanto $P \in (\operatorname{span}\{\mathcal{G}\})^{inj}\,(^mE; F)$.

O item (iii) segue do item (ii). □

Mostramos na proposição seguinte que a envoltória injetiva tem o comportamento esperado de uma envoltória.

Proposição 4.18. *Na classe dos germes de ideais de operadores (respectivamente, germes de ideais de polinômios, germes de hiper-ideais de polinômios), a regra*

$$inj \colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^{inj}$$

é um procedimento de envoltória no sentido que:

(*a*) *Se $\mathcal{G}$ é um germe de ideal de operadores (respectivamente, germe de ideal de polinômios, germe de hiper-ideal de polinômios), então $\mathcal{G}^{inj}$ é um germe de ideal de operadores (respectivamente, germe de ideal de polinômios, germe de hiper-ideal de polinômios).*

(*b*) *Se $\mathcal{G}$, $\mathcal{R}$ são germes de ideal de operadores (respectivamente, germes de ideal de polinômios, germes de hiper-ideal de polinômios) tais que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{R}$, então $\mathcal{G}^{inj} \subseteq \mathcal{R}^{inj}$.*

(*c*) *$(\mathcal{G}^{inj})^{inj} = \mathcal{G}^{inj}$ para todo $\mathcal{G}$ germe de ideal de operadores (respectivamente, germe de ideal de polinômios, germe de hiper-ideal de polinômios).*

(d) $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{inj}$ *para todo* $\mathcal{G}$ *germe de ideal de operadores (respectivamente, germe de ideal de polinômios, germe de hiper-ideal de polinômios).*

Demonstração. Basta mostrar o caso em que $\mathcal{G}$ e $\mathcal{R}$ são germes de hiper-ideal de polinômios. Os itens (a) e (d) foram provados na Proposição 4.16.

(b) Se $P \in \mathcal{G}^{inj}(^mE; F)$, então $I_F \circ P \in \mathcal{G}(^mE; \ell_\infty(B_{F^*})) \subseteq \mathcal{R}(^mE; \ell_\infty(B_{F^*}))$, portanto $P \in \mathcal{R}^{inj}(^mE; F)$.

(c) Lembrando que $\mathcal{G}^{inj}$ é um germe injetivo de hiper-ideal de polinômios, da Proposição 4.17(i) segue que $\left(\mathcal{G}^{inj}\right)^{inj} = \mathcal{G}^{inj}$. □

Ao contrário dos ideais normados sobrejetivos de polinômios, que foram estudados em [10], os ideais normados injetivos de polinômios ainda não foram tratados na literatura. Como necessitaremos disso no Capítulo 5, estudaremos os ideais normados injetivos de polinômios agora.

Definição 4.19. Dizemos que um ideal normado de polinômios (respectivamente, um hiper-ideal normado de polinômios, um ideal bilateral normado de polinômios) $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é *injetivo* se dados $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ e uma injeção métrica $j\colon F \hookrightarrow G$ tais que $j \circ P \in \mathcal{Q}(^mE; G)$, tem-se $P \in \mathcal{Q}(^mE; F)$ e $\|P\|_{\mathcal{Q}} = \|j \circ P\|_{\mathcal{Q}}$.

Proposição 4.20. *Seja* $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ *um ideal normado de polinômios (respectivamente, hiper-ideal normado de polinômios). Então existe um único menor ideal normado injetivo de polinômios (respectivamente, hiper-ideal normado injetivo de polinômios)* $(\mathcal{Q}^{inj}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}})$ *que contém* $\mathcal{Q}$ *e* $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}} \leqslant \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$. *Se* I_F *denota a injeção canônica* $F \hookrightarrow \ell_\infty(B_{F^*})$, *então para* $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$,

$$P \in \mathcal{Q}^{inj} \iff I_F \circ P \in \mathcal{Q} \quad \text{e} \quad \|P\|_{\mathcal{Q}^{inj}} := \|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}}.$$

Mais ainda, $\left(\mathcal{Q}^{inj}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}}\right)$ *é um ideal de Banach de polinômios (respectivamente, hiper-ideal de Banach de polinômios) se o ideal* $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ *for de Banach.*

Demonstração. Basta mostrar o caso em que $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é um hiper-ideal normado de polinômios. Definimos

$$\mathcal{Q}^{inj}(^mE; F) = \{P \in \mathcal{P}(^mE; F) | I_F \circ P \in \mathcal{Q}\} \text{ e } \|P\|_{\mathcal{Q}^{inj}} := \|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}}.$$

A inclusão $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}^{inj}$ e a desigualdade de normas segue da propriedade de ideal de $\mathcal{Q}$.

Provemos que $\left(\mathcal{Q}^{inj}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}}\right)$ é um ideal normado e injetivo.

É fácil ver que $\mathcal{Q}^{inj}(^mE; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^mE; F)$ e que contém os polinômios de tipo finito, pois $\mathcal{P}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}^{inj}$.

Para verificar a propriedade de hiper-ideal, sejam $Q \in \mathcal{P}(^nE;F)$, $P \in \mathcal{Q}^{inj}(^mF;G)$ e $t \in \mathcal{L}(G;H)$. Como $P \in \mathcal{Q}^{inj}(^mF;G)$, então $I_G \circ P \in \mathcal{Q}$. Como como I_G é uma injeção métrica, aplicando a propriedade de extensão de $\ell_\infty(B_{H^*})$ para o operador $I_H \circ t$, existe um operador $s \in \mathcal{L}(\ell_\infty(B_{G^*});\ell_\infty(B_{H^*}))$ tal que $I_H \circ t = s \circ I_G$ e $\|s\| = \|I_H \circ t\|$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "Q"] & F \arrow[r, "P"] & G \arrow[r, "t"] \arrow[d, "I_G"'] & H \arrow[r, "I_H"] & \ell_\infty(B_{H^*}) \\ & & \ell_\infty(B_{G^*}) \arrow[urr, "s"] & & \end{tikzcd}$$

Portanto

$$I_H \circ t \circ P \circ Q = (s \circ I_G) \circ P \circ Q = s \circ (I_G \circ P) \circ Q \in \mathcal{Q}(^{mn}E;\ell_\infty(B_{H^*})),$$

isto é, $t \circ P \circ Q \in \mathcal{Q}^{inj}(^{mn}E;H)$ e

$$\begin{aligned} \|t \circ P \circ Q\|_{\mathcal{Q}^{inj}} &= \|I_H \circ t \circ P \circ Q\|_{\mathcal{Q}} = \|s \circ I_G \circ P \circ Q\|_{\mathcal{Q}} \leqslant \|s\| \cdot \|I_G \circ P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|Q\|^m \\ &= \|I_H \circ t\| \cdot \|I_G \circ P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|Q\|^m \leqslant \|t\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}^{inj}} \cdot \|Q\|^m. \end{aligned}$$

Quanto aos axiomas de norma, é claro que $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}} \geqslant 0$ e $\|0\|_{\mathcal{Q}^{inj}} = 0$, e é fácil verificar que $\|\lambda P\|_{\mathcal{Q}^{inj}} = |\lambda| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}^{inj}}$.

Suponhamos que $\|P\|_{\mathcal{Q}^{inj}} = 0$. Neste caso, $\|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}} = 0$, e da desigualdade $\|I_F \circ P\| \leqslant \|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}}$ segue que $\|I_F \circ P\| = 0$. Logo

$$0 = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|(I_F \circ P)(x)\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|I_F(P(x))\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|P(x)\| = \|P\|,$$

donde concluímos que $P = 0$.

Para a desigualdade triangular, para todos $P, Q \in \mathcal{Q}^{inj}(^mE;F)$,

$$\begin{aligned} \|P + Q\|_{\mathcal{Q}^{inj}} &= \|I_F \circ (P + Q)\|_{\mathcal{Q}} = \|I_F \circ P + I_F \circ Q\|_{\mathcal{Q}} \\ &\leqslant \|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}} + \|I_F \circ Q\|_{\mathcal{Q}} = \|P\|_{\mathcal{Q}^{inj}} + \|Q\|_{\mathcal{Q}^{inj}}. \end{aligned}$$

Vejamos que $\|(id_{\mathbb{K}})^m\|_{\mathcal{Q}^{inj}} = 1$:

$$\begin{aligned} 1 = \|(id_{\mathbb{K}})^m\| &= \|I_{\mathbb{K}} \circ (id_{\mathbb{K}})^m\| \leqslant \|I_{\mathbb{K}} \circ (id_{\mathbb{K}})^m\|_{\mathcal{Q}} = \|(id_{\mathbb{K}})^m\|_{\mathcal{Q}^{inj}} \\ &= \|I_{\mathbb{K}} \circ (id_{\mathbb{K}})^m\|_{\mathcal{Q}} \leqslant \|I_{\mathbb{K}}\| \cdot \|(id_{\mathbb{K}})^m\|_{\mathcal{Q}} = 1. \end{aligned}$$

Para comprovar a injetividade, sejam $I \colon F \hookrightarrow G$ uma injeção métrica e $Q \in \mathcal{P}(^mE;F)$ tais que $I \circ Q \in \mathcal{Q}^{inj}(^mE;G)$. Como $I_G \circ I$ é uma injeção métrica, da propriedade de extensão de $\ell_\infty(B_{F^*})$ existe um operador $T \in \mathcal{L}(\ell_\infty(B_{G^*});\ell_\infty(B_{F^*}))$ tal que $I_F = T \circ I_G \circ I$ e $\|T\| = \|I_F\| = 1$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "Q"] & F \arrow[r, "I"] \arrow[d, hook, "I_F"'] & G \arrow[d, hook, "I_G"] \\ & \ell_\infty(B_{F^*}) & \ell_\infty(B_{G^*}) \arrow[l, "T"'] \end{tikzcd}$$

Portanto, $I_F \circ Q = T \circ I_G \circ I \circ Q \in \mathcal{Q}(^mE; \ell_\infty(B_{F^*}))$, o que prova que $Q \in \mathcal{Q}^{inj}(^mE; F)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned}\|Q\|_{\mathcal{Q}^{inj}} &= \|I_F \circ Q\|_{\mathcal{Q}} = \|T \circ I_G \circ I \circ Q\|_{\mathcal{Q}} \leqslant \|T\| \cdot \|I_G \circ I \circ Q\|_{\mathcal{Q}} \\ &= \|I \circ Q\|_{\mathcal{Q}^{inj}} \leqslant \|I\| \cdot \|Q\|_{\mathcal{Q}^{inj}},\end{aligned}$$

provando que $\|Q\|_{\mathcal{Q}^{inj}} = \|I \circ Q\|_{\mathcal{Q}^{inj}}$.

A minimalidade e a unicidade de $\mathcal{Q}^{inj}$ seguem da mesma forma que fizemos em demonstrações anteriores.

Finalmente, provemos que se $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é um ideal de Banach, então $\left(\mathcal{Q}^{inj}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}}\right)$ também é de Banach. Dados E e F espaços de Banach, provemos que $\left(\mathcal{Q}^{inj}(^mE; F), \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}}\right)$ é um espaço de Banach. Para isso seja $(P_n)_n \subset \mathcal{Q}^{inj}(^mE; F)$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|P_n\|_{\mathcal{Q}^{inj}} < \infty$. Como $\|P_n\| \leqslant \|P_n\|_{\mathcal{Q}^{inj}}$ para todo n, temos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|P_n\| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|P_n\|_{\mathcal{Q}^{inj}} < \infty$. Do fato de $\mathcal{P}(^mE; F)$ ser um espaço de Banach existe um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ tal que $P = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ na norma de $\mathcal{P}(^mE; F)$. Por outro lado, como cada $P_n \in \mathcal{Q}^{inj}(^mE; F)$, temos $I_F \circ P_n \in \mathcal{Q}(^mE; \ell_\infty(B_{F^*}))$ para todo n, daí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|I_F \circ P_n\|_{\mathcal{Q}} = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n\|_{\mathcal{Q}^{inj}} < \infty.$$

Do fato de $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ ser um ideal Banach, existe $Q \in \mathcal{Q}(^mE; \ell_\infty(B_{F^*}))$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (I_F \circ P_n) = Q \tag{4.1}$$

na norma de $\mathcal{Q}(^mE; \ell_\infty(B_{F^*}))$. A desigualdade $\|\cdot\| \leqslant \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ implica que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (I_F \circ P_n) = Q$ na norma usual de $\mathcal{P}(^mE; \ell_\infty(B_{F^*}))$. Para todo k,

$$\left\| I_F \circ P - \sum_{n=1}^{k} (I_F \circ P_n) \right\| = \left\| I_F \circ (P - \sum_{n=1}^{k} P_n) \right\| \leqslant \|I_F\| \cdot \left\| (P - \sum_{n=1}^{k} P_n) \right\|,$$

e portanto

$$\lim_{k\to\infty} \left\| I_F \circ P - \sum_{n=1}^{k} (I_F \circ P_n) \right\| \leqslant \|I_F\| \cdot \lim_{k\to\infty} \left\| P - \sum_{n=1}^{k} P_n \right\|,$$

o que prova que $Q = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (I_F \circ P_n) = I_F \circ P$, e assim $P \in \mathcal{Q}^{inj}(^mE; F)$. De (4.1) temos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (I_F \circ P_n) = I_F \circ P$ na norma de $\mathcal{Q}(^mE; \ell_\infty(B_{F^*}))$, isto é,

$$0 = \lim_{k\to\infty} \left\| I_F \circ P - \sum_{n=1}^{k} (I_F \circ P_n) \right\|_{\mathcal{Q}} = \lim_{k\to\infty} \left\| I_F \circ \left(P - \sum_{n=1}^{k} P_n \right) \right\|_{\mathcal{Q}} = \lim_{k\to\infty} \left\| P - \sum_{n=1}^{k} P_n \right\|_{\mathcal{Q}^{inj}}.$$

Isso prova que a série $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ é convergente na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}}$. □

Proposição 4.21. *(i) Um ideal de polinômios (respectivamente, hiper-ideal de polinômios) $\mathcal{Q}$ é injetivo se, e somente se, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{inj}$.*

(ii) Um ideal normado de polinômios (respectivamente, hiper-ideal normado de polinômios) $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é injetivo se, e somente se, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{inj}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} = \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}}$.

Demonstração. Basta mostrar (ii) no caso em que $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é um hiper-ideal normado de polinômios. Suponhamos que o ideal seja injetivo. Já sabemos que $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}^{inj}$. Agora, se $P \in \mathcal{Q}^{inj}({}^mE; F)$, temos $I_F \circ P \in \mathcal{Q}({}^mE; \ell_\infty(B_{F^*}))$. E como I_F é uma injeção métrica e o ideal é injetivo, segue que $P \in \mathcal{Q}({}^mE; F)$ e $\|P\|_{\mathcal{Q}} = \|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}} = \|P\|_{\mathcal{Q}^{inj}}$.

A recíproca segue da Proposição 4.20. □

Proposição 4.22. *(1) Na classe dos ideais de polinômios (respectivamente, hiper-ideais de polinômios), a regra*

$$inj\colon \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}^{inj}$$

é um procedimento de envoltória no sentido que:

(a) Se $\mathcal{Q}$ é um ideal de polinômios (respectivamente, hiper-ideal de polinômios), então $\mathcal{Q}^{inj}$ é um ideal de polinômios (respectivamente, hiper-ideal de polinômios).

(b) Se $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ são ideais de polinômios (respectivamente, hiper-ideais de polinômios) tais que $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$, então $\mathcal{Q}^{inj} \subseteq \mathcal{R}^{inj}$.

(c) $(\mathcal{Q}^{inj})^{inj} = \mathcal{Q}^{inj}$ para todo $\mathcal{Q}$ ideal de polinômios (respectivamente, hiper-ideal de polinômios).

(d) $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}^{inj}$ para todo $\mathcal{Q}$ ideal de polinômios (respectivamente, hiper-ideal de polinômios).

(2) Na classe dos ideais normados de polinômios (respectivamente, hiper-ideais normados de polinômios), a regra

$$inj\colon\ (\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}) \longrightarrow \left(\mathcal{Q}^{inj}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}}\right)$$

é um procedimento de envoltória no sentido que:

(a) Se $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é um ideal normado de polinômios (respectivamente, hiper-ideal normado de polinômios) (Banach), então $\left(\mathcal{Q}^{inj}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}}\right)$ é um ideal normado de polinômios (respectivamente, hiper-ideal normado de polinômios) (Banach).

(b) *Se* $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ *e* $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$ *são ideais normados de polinômios (respectivamente, hiper-ideais normados de polinômios) tais que* $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$ *e* $\|\cdot\|_{\mathcal{R}} \leqslant \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$*, então* $\mathcal{Q}^{inj} \subseteq \mathcal{R}^{inj}$ *e* $\|\cdot\|_{\mathcal{R}^{inj}} \leqslant \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}}$*.*

(c) $(\mathcal{Q}^{inj})^{inj} = \mathcal{Q}^{inj}$ *e* $\|\cdot\|_{(\mathcal{Q}^{inj})^{inj}} = \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}}$ *para todo* $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ *ideal normado de polinômios (respectivamente, hiper-ideal normado de polinômios).*

(d) $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}^{inj}$ *e* $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}} \leqslant \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ *para todo* $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ *ideal normado de polinômios (respectivamente, hiper-ideal normado de polinômios).*

Demonstração. Basta mostrar (2) para o caso de hiper-ideal normado de polinômios.

Os itens (a) e (d) foram provados na Proposição 4.20.

(b) Se $P \in \mathcal{Q}^{inj}(^mE;F)$, então $I_F \circ P \in \mathcal{Q}(^mE;\ell_\infty(B_{F^*})) \subseteq \mathcal{R}(^mE;\ell_\infty(B_{F^*}))$, portanto $P \in \mathcal{R}^{inj}(^mE;F)$ e

$$\|P\|_{\mathcal{R}^{inj}} = \|I_F \circ P\|_{\mathcal{R}} \leqslant \|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}} = \|P\|_{\mathcal{Q}^{inj}}.$$

(c) Lembrando que $(\mathcal{Q}^{inj}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}})$ é um hiper-ideal normado injetivo de polinômios, da Proposição 4.21 temos $\left(\mathcal{Q}^{inj}\right)^{inj} = \mathcal{Q}^{inj}$ e $\|\cdot\|_{(\mathcal{Q}^{inj})^{inj}} = \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}}$. □

Proposição 4.23. *Os ideais fechados dos polinômios compactos* $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$ *e dos polinômios fracamente compactos* $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$ *são injetivos.*

Demonstração. Sejam $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ e $j\colon F \hookrightarrow G$ uma injeção métrica tais que $j \circ P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^mE;G)$. Dada uma sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E, como $j \circ P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^mE;G)$, a sequência $((j \circ P)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente em G, digamos $((j \circ P)(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$. Como toda sequência convergente é de Cauchy, temos

$$\lim_{k,l\to\infty} \|(j \circ P)(x_{n_k}) - (j \circ P)(x_{n_l})\| = 0.$$

Para todos $k, l \in \mathbb{N}$,

$$\|(j \circ P)(x_{n_k}) - (j \circ P)(x_{n_l})\| = \|j(P(x_{n_k}) - P(x_{n_l}))\| = \|P(x_{n_k}) - P(x_{n_l})\|,$$

e portanto $\lim\limits_{k,l\to\infty} \|P(x_{n_k}) - P(x_{n_l})\| = 0$. Isso prova que $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^mE;F)$

Agora sejam $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ e $j\colon F \hookrightarrow G$ uma injeção métrica tais que $j \circ P \in \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^mE;G)$. Dada uma sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E, como $j \circ P \in \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^mE;G)$, a sequência $((j \circ P)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência fracamente convergente em G, digamos $(j \circ P)(x_{n_k}) \xrightarrow{w} y$ em G. Por ser uma injeção métrica, j é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem, que, por ser isomorfa ao espaço de Banach F, é um subespaço fechado de G. Como subconjuntos convexos fechados são fracamente fechados, $j(E)$

é fracamente fechado, e portanto $y \in j(E)$. Considerando o operador linear contínuo $j^{-1}\colon j(E) \longrightarrow E$ e usando que operadores lineares contínuos são $w - w$ contínuos, temos

$$P(x_{n_k}) = j^{-1}(j(P(x_{n_k})) \xrightarrow{w} j^{-1}(y),$$

provando que $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^mE; F)$. □

Veremos no Exemplo 5.12 o resultado mais geral que garante que se $\mathcal{I}$ é um ideal normado de operadores injetivo, então $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ é um ideal normado de polinômios injetivo.

4.4 A propriedade da dominação polinomial

Os ideais de operadores injetivos são caracterizados por uma propriedade que diz que todo operador que é dominado em norma por um operador do ideal também está no ideal. Isso aparece como exercício no livro [20] e está provado em [13, Lemma 3.1]. Nesta seção tratamos deste tipo de propriedade de dominação para o caso de germes de ideais de operadores lineares e de polinômios homogêneos.

Definição 4.24. Dizemos que um germe $\mathcal{G}$ de ideal de operadores lineares tem a *propriedade da dominação* se dados $u \in \mathcal{G}(E; F)$ e $v \in \mathcal{L}(E; G)$ tais que $\|v(x)\| \leqslant C \cdot \|u(x)\|$ para todo $x \in E$ e alguma constante $C \geqslant 0$ (dependendo eventualmente de E, F, G, u, v), então $v \in \mathcal{G}(E; G)$.

Conforme dito acima, o resultado abaixo está provado em [13, Lemma 3.1] para o caso de ideais de operadores. Repetimos a demonstração para deixar claro que também funciona para o caso de germes.

Teorema 4.25. *Um germe de ideal de operadores $\mathcal{G}$ é injetivo se, e somente se, $\mathcal{G}$ tem a propriedade da dominação.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{G}$ seja injetivo e sejam $u \in \mathcal{G}(E; F)$ e $v \in \mathcal{L}(E; G)$ tais que $\|v(x)\| \leqslant C \cdot \|u(x)\|$ para todo $x \in E$ e alguma constante $C \geqslant 0$. Vejamos que o operador

$$W\colon u(E) \subseteq F \longrightarrow G \ , \ W(u(x)) = v(x),$$

está bem definido. De fato,

$$u(x) = u(y) \Longrightarrow u(x - y) = 0 \Longrightarrow \|v(x - y)\| \leqslant C \cdot \|u(x - y)\| = 0 \Longrightarrow v(x) = v(y).$$

É claro que W é linear e sua continuidade segue de

$$\|W(u(x))\| = \|v(x)\| \leqslant C \cdot \|u(x)\|.$$

Existe então um único operador linear contínuo $W_1 \colon \overline{u(E)} \subseteq F \longrightarrow G$ operador linear contínuo tal que $W_1|_{u(E)} = W$. Denotando por $i \colon \overline{u(E)} \longrightarrow F$ o operador inclusão, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & \overline{u(E)} \arrow[r, "i"] \arrow[dl, "W_1"'] \arrow[dr, dashed, "J_G \circ W_1"'] & F \arrow[d, dashed, "\widetilde{W_1}"] \\
G \arrow[rr, "J_G"'] & & \ell_\infty(B_{G^*})
\end{tikzcd}$$

Como J_G é a injeção métrica canônica, da propriedade de extensão de $\ell_\infty(B_{G^*})$ existe um operador $\widetilde{W_1} \in \mathcal{L}(F; \ell_\infty(B_{G^*}))$ tal que $J_G \circ W_1 = \widetilde{W_1} \circ i$ e $\| \widetilde{W_1} \| = \|J_G \circ W_1\|$. Como $J_G \circ W_1 = \widetilde{W_1} \circ i$, temos $J_G \circ W_1 \circ u = \widetilde{W_1} \circ i \circ u$, e de

$$(W_1 \circ u)(x) = W_1(u(x)) = W(u(x)) = v(x) \text{ para todo } x \in E,$$

concluímos que $J_G \circ v = \widetilde{W_1} \circ i \circ u = \widetilde{W_1} \circ u$. Como $u \in \mathcal{G}(E; F)$, $J_G \circ v \in \mathcal{G}(E; \ell_\infty(B_{G^*}))$. Além disso, $\mathcal{G}$ é injetivo e J_G é uma imersão métrica, logo $v \in \mathcal{G}(E; G)$. Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{G}$ tenha a propriedade da dominação. Sejam $u \in \mathcal{L}(E; F)$ e $j \colon F \hookrightarrow G$ uma injeção métrica tais que $j \circ u \in \mathcal{G}(E; G)$. Para todo $x \in E$,

$$\|u(x)\| = \|j(u(x))\| = \|(j \circ u)(x)\|,$$

e como $\mathcal{G}$ tem a propriedade da dominação, temos $u \in \mathcal{G}(E; F)$. $\square$

Passando para o caso polinomial, estamos interessados em uma propriedade similar à propriedade da dominação que caracterize os germes injetivos de ideais de polinômios. A tentativa óbvia é adaptar diretamente a propriedade da dominação para o caso de polinômios.

Definição 4.26. Dizemos que um germe $\mathcal{G}$ de ideal de polinômios tem a *propriedade da dominação polinomial fraca* se dados $P \in \mathcal{G}(^mE; F)$ e $Q \in \mathcal{P}(^mE; G)$ tais que $\|Q(x)\| \leqslant C \cdot \|P(x)\|$ para todo $x \in E$ e alguma constante $C \geqslant 0$ (dependendo eventualmente de E, F, G, P, Q, m), então $Q \in \mathcal{G}(^mE; G)$.

É fácil provar que a propriedade da dominação polinomial fraca é suficiente para o germe ser injetivo.

Proposição 4.27. *Seja $\mathcal{G}$ um germe de ideal de polinômios. Se $\mathcal{G}$ tem a propriedade da dominação polinomial fraca, então $\mathcal{G}$ é injetivo.*

Demonstração. Sejam $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ e $j \colon F \hookrightarrow G$ uma injeção métrica tais que $j \circ P \in \mathcal{G}(^mE; G)$. Para todo $x \in E$,

$$\|P(x)\| = \|j(P(x))\| = \|(j \circ P)(x)\|,$$

e portanto a propriedade da dominação polinomial fraca de $\mathcal{G}$ implica que $P \in \mathcal{G}(^m E; F)$. $\square$

Não sabemos se a propriedade da dominação polinomial fraca é equivalente ao ideal ser injetivo. Entretanto, identificamos uma propriedade relacionada que, essa sim, é equivalente ao ideal ser injetivo.

Definição 4.28. Dizemos que um germe $\mathcal{G}$ de ideal de polinômios tem a *propriedade da dominação polinomial forte* se dados polinômios $P \in \mathcal{G}(^m E; F)$ e $Q \in \mathcal{P}(^m E; G)$ tais que

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q(x_i) \right\| \leqslant C \cdot \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P(x_i) \right\|$$

para todos $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in E$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ e alguma constante $C \geqslant 0$ (dependendo eventualmente de E, F, G, P, Q, m), então $Q \in \mathcal{G}(^m E; G)$.

Note que ambas as propriedades da dominação polinomial recuperam a propriedade da dominação linear como caso particular.

O resultado a seguir é original mesmo no caso de ideais de polinômios.

Teorema 4.29. *Um germe de ideal de polinômios é injetivo se, e somente se, tem a propriedade da dominação polinomial forte.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{G}$ seja um germe injetivo de ideal de polinômios e sejam $P \in \mathcal{G}(^m E; F)$ e $Q \in \mathcal{P}(^m E; G)$ tais que

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q(x_i) \right\| \leqslant C \cdot \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P(x_i) \right\| \tag{4.2}$$

para todos $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in E$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ e alguma constante C. Considere o operador

$$W \colon \operatorname{span}\{P(E)\} \subseteq F \longrightarrow G \ , \ W\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P(x_i) \right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q(x_i).$$

Vejamos que W está bem definido:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P(x_i) = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j P(x_j) &\Longrightarrow \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P(x_i) - \sum_{j=1}^{l} \alpha_j P(x_j) \right\| = 0 \\ &\overset{(4.2)}{\Longrightarrow} \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q(x_i) - \sum_{j=1}^{l} \alpha_j Q(x_j) \right\| = 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q(x_i) = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j Q(x_j). \end{aligned}$$

A linearidade de W é clara e sua continuidade segue de

$$\left\| W\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i P(x_i)\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{k}\lambda_i Q(x_i)\right\| \overset{(4.2)}{\leqslant} C\cdot\left\|\sum_{i=1}^{k}\lambda_i P(x_i)\right\|.$$

Existe então um único operador linear contínuo $W_1\colon \overline{\operatorname{span}\{P(E)\}} \subseteq F \longrightarrow G$ tal que $W_1|_{\operatorname{span}[P(E)]} = W$. Denotando por $i\colon \overline{\operatorname{span}\{P(E)\}} \longrightarrow F$ o operador inclusão, temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "P"] \arrow[d, "Q"'] & \overline{\operatorname{span}[P(E)]} \arrow[r, "i"] \arrow[dl, "W_1"'] \arrow[dr, dashed, "J_G\circ W_1"'] & F \arrow[d, dashed, "\widetilde{W_1}"] \\
G \arrow[rr, "J_G"'] & & \ell_\infty(B_{G^*})
\end{tikzcd}$$

Como J_G é uma injeção métrica canônica, da propriedade de extensão de $\ell_\infty(B_{G^*})$ existe um operador $\widetilde{W_1}\in \mathcal{L}(F;\ell_\infty(B_{G^*}))$ tal que $J_G\circ W_1 = \widetilde{W_1}\circ i$ e $\|\ \widetilde{W_1}\ \| = \|J_G\circ W_1\|$. Como $J_G\circ W_1 = \widetilde{W_1}\circ i$, temos $J_G\circ W_1\circ P = \widetilde{W_1}\circ i\circ P$, e de

$$(W_1\circ P)(x) = W_1(P(x)) = W(P(x)) = Q(x) \text{ para todo } \in E,$$

concluímos que $J_G\circ Q = \widetilde{W_1}\circ i\circ P = \widetilde{W_1}\circ P$. Como $P\in \mathcal{G}(^mE;F)$, $J_G\circ Q \in \mathcal{G}(^mE;\ell_\infty(B_{G^*}))$. E como $\mathcal{G}$ é injetivo, segue que $Q\in\mathcal{G}(^mE;G)$.

Reciprocamente sejam $P\in\mathcal{P}(^mE;F)$ e $j : F \hookrightarrow G$ uma injeção métrica tal que $j\circ P\in\mathcal{G}(^mE;G)$. Notemos que para todos $k\in\mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_k\in E$, $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{K}$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\lambda_i P(x_i)\right\| = \left\| j\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i P(x_i)\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{k}\lambda_i (j\circ P)(x_i)\right\|,$$

e como $\mathcal{G}$ tem a propriedade da dominação polinomial forte, temos que $P\in\mathcal{G}(^mE;F)$. $\square$

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES A OPERADORES DE COMPOSIÇÃO

Neste capítulo mostramos como os adjuntos generalizados e os germes de ideais por eles gerados podem ser úteis para provar versões não-lineares de alguns resultados lineares devidos a Lindström e Schlüchtermann [31] sobre operadores de composição. Nossos resultados, em particular, recuperam os resultados originais como casos particulares.

5.1 Problema geral

Consideramos o seguinte problema: sejam E, E_1, F, F_1 espaços de Banach, $R \in \mathcal{L}(E;F)$ e $B \in \mathcal{L}(E_1;F_1)$ operadores lineares contínuos não nulos, $\mathcal{A}$ um ideal de operadores e $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal Banach de polinômios homogêneos. É fácil mostrar que a aplicação

$$S_{RB}\colon \mathcal{Q}(^mF_1;E) \longrightarrow \mathcal{Q}(^mE_1;F)\ ,\ S_{RB}(P) = R \circ P \circ B,$$

é um operador linear contínuo. Estamos interessados em obter condições necessárias e/ou suficientes para que o operador S_{RB} pertença ao ideal $\mathcal{A}$.

A seguinte condição se mostrou muito eficiente para fornecer respostas para este problema.

Definição 5.1. Dizemos que um ideal de Banach de polinômios $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ *contém os polinômios de posto finito fortemente* se para cada $m \in \mathbb{N}$ existe uma constante K_m tal que para quaisquer espaços de Banach E e F, qualquer polinômio $q \in \mathcal{P}(^mE)$ e todo $y \in F$ tem-se $q \otimes y \in \mathcal{Q}(^mE;F)$ e $\|q \otimes y\|_{\mathcal{Q}} \leqslant K_m\|q\| \cdot \|y\|$.

Hiper-ideais de Banach de polinômios cumprem essa condição, mas para os nossos propósitos muitas vezes é suficiente trabalhar com ideais que cumprem a condição, sem exigir que cumpram a condição de hiper-ideal.

O resultado a seguir é uma versão não-linear de [31, Proposition 2.1], que recupera o resultado original como caso particular. A partir de agora, E, E_1, F, F_1 são espaços de Banach.

Teorema 5.2. *Sejam $R \in \mathcal{L}(E;F)$ e $B \in \mathcal{L}(E_1;F_1)$ operadores não nulos, $\mathcal{A}$ um ideal de operadores e $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal Banach de polinômios homogêneos tais que o operador linear contínuo*

$$S_{RB} \colon \mathcal{Q}(^m F_1; E) \longrightarrow \mathcal{Q}(^m E_1; F)\ ,\ S_{RB}(P) = R \circ P \circ B,$$

pertence ao ideal $\mathcal{A}$. Então:

(i) $R \in \mathcal{A}(E;F)$.

(ii) Se $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ contém os polinômios de posto finito fortemente, então $B \in \Delta^1_m \mathcal{A}(E_1;F_1)$.

Demonstração. (i) Escolhemos $\varphi \in F_1^*$ e $z \in E_1$ tais que $\varphi(B(z)) = 1$ e definimos

$$u_\varphi \colon E \longrightarrow \mathcal{Q}(^m F_1; E)\ ,\ u_\varphi(x) = \varphi^m \otimes x,$$

$$t_z \colon \mathcal{Q}(^m E_1; F) \longrightarrow F\ ,\ t_z(P) = P(z).$$

É claro que t_z está bem definido e u_φ também está bem definido pois $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ contém os polinômios de tipo finito uma vez que é um ideal de polinômios. Os dois operadores são obviamente lineares, e suas continuidades seguem de

$$\|u_\varphi(x)\|_{\mathcal{Q}} = \|\varphi^m \otimes x\|_{\mathcal{Q}} = \|\varphi\|^m \cdot \|x\|,$$

$$\|t_z(P)\| = \|P(z)\| \leqslant \|P\| \cdot \|z\|^m \leqslant \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|z\|^m.$$

Temos então a cadeia de operadores lineares contínuos

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{u_\varphi} & \mathcal{Q}(^m F_1; E) & \xrightarrow{S_{RB}} & \mathcal{Q}(^m E_1; F) & \xrightarrow{t_z} & F \\ x & \longmapsto & u_\varphi(x) & \longmapsto & R \circ u_\varphi(x) \circ B & \longmapsto & (R \circ u_\varphi(x) \circ B)(z) \end{array}$$

na qual, para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned} (t_z \circ S_{RB} \circ u_\varphi)(x) &= (R \circ u_\varphi(x) \circ B)(z) = R(u_\varphi(x)(B(z))) \\ &= R([\varphi(B(z)]^m x)) = [\varphi(B(z)]^m R(x). \end{aligned}$$

Isso prova, pela propriedade de ideal de $\mathcal{Q}$, que $R = t_z \circ S_{RB} \circ u_\varphi \in \mathcal{A}(E;F)$.

(ii) Neste caso escolhemos $z \in E$ e $\varphi \in F^*$ de modo que $\varphi(R(z)) = 1$. Como $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é um ideal Banach de polinômios contendo os polinômios de posto finito fortemente, as aplicações

$$w_z \colon \mathcal{P}(^m F_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(^m F_1; E)\ ,\ w_z(q) = q \otimes z,\ \text{ e}$$

$$v_\varphi \colon \mathcal{Q}(^m E_1; F) \longrightarrow \mathcal{P}(^m E_1)\ ,\ v_\varphi(P) = \varphi \circ P,$$

são operadores lineares bem definidos, cujas continuidades decorrem das seguintes desigualdades:

$$\|w_z(q)\| = \|q \otimes z\|_{\mathcal{Q}} \leqslant K_m \|q\| \cdot \|z\| \text{ e } \|v_\varphi(P)\| = \|\varphi \circ P\| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|P\| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}}.$$

Na cadeia de operadores lineares contínuos

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{P}(^m F_1) & \xrightarrow{w_z} & \mathcal{Q}(^m F_1; E) & \xrightarrow{S_{RB}} & \mathcal{Q}(^m E_1; F) & \xrightarrow{v_\varphi} & \mathcal{P}(^m E_1) \\ q & \longmapsto & q \otimes z & \longmapsto & R \circ (q \otimes z) \circ B & \longmapsto & \varphi \circ R \circ (q \otimes z) \circ B \end{array}$$

é verdade que

$$(v_\varphi \circ S_{RB} \circ w_z)(q) = \varphi \circ R \circ (q \otimes z) \circ B = \varphi(R(z)) \cdot (q \circ B) = \Delta_m^1 B(q)$$

para todo $q \in \mathcal{P}(^m F_1)$. Logo $v_\varphi \circ S_{RB} \circ w_z = \Delta_m^1 B$, e novamente pela propriedade de ideal de $\mathcal{A}$ temos $\Delta_m^1 B \in \mathcal{A}(\mathcal{P}(^m F_1); \mathcal{P}(^m E_1))$. $\square$

A versão de [31, Proposition 2.1] que acabamos de provar ainda guarda resquícios da teoria linear, ao trabalhar com um ideal de operadores $\mathcal{A}$. Nosso próximo propósito é dar uma outra versão, mais fortemente não-linear, de [31, Proposition 2.1]. Uma preparação curta é necessária.

Lema 5.3. *Sejam $m, r, s \in \mathbb{N}$, $R \in \mathcal{P}(^r E; F)$, $B \in \mathcal{P}(^s E_1; F_1)$ polinômios não nulos e $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal bilateral Banach de polinômios homogêneos. Então a aplicação*

$$S_{RB} \colon \mathcal{Q}(^m F_1; E) \longrightarrow \mathcal{Q}(^{mrs} E_1; F)\ ,\ S_{RB}(P) = R \circ P \circ B,$$

é um polinômio r-homogêneo contínuo.

Demonstração. S_{RB} é bem definido pois $\mathcal{Q}$ é um ideal bilateral de polinômios. Uma conta rotineira prova que $A \colon \mathcal{Q}(^m F_1; E)^r \longrightarrow \mathcal{Q}(^{mrs} E_1; F)$ definido por

$$A(P_1, \ldots, P_r)(x) = \check{R}(P_1(B(x)), \ldots, P_r(B(x)))$$

é um operador r-linear contínuo que gera S_{RB}. $\square$

Em vista do lema acima, podemos considerar o seguinte problema mais geral: dados m, r, $s \in \mathbb{N}$, $R \in \mathcal{P}(^r E; F)$, $B \in \mathcal{P}(^s E_1; F_1)$ polinômios não nulos, $\mathcal{R}$ um ideal de polinômios e $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal bilateral Banach de polinômios homogêneos, sob quais condições o polinômio S_{RB} pertence ao ideal $\mathcal{R}$?

O teorema abaixo mostra que são os germes de ideais de polinômios associados aos adjuntos generalizados que resolvem o problema.

Teorema 5.4. *Sejam $m, r, s \in \mathbb{N}$, $R \in \mathcal{P}(^r E; F)$ e $B \in \mathcal{P}(^s E_1; F_1)$ polinômios não nulos, $\mathcal{R}$ um ideal de polinômios, $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal bilateral de Banach de polinômios homogêneos tais que o polinômio contínuo*

$$S_{RB} \colon \mathcal{Q}(^m F_1; E) \longrightarrow \mathcal{Q}(^{mrs} E_1; F)\ ,\ S_{RB}(P) = R \circ P \circ B,$$

pertence ao ideal $\mathcal{R}$. Então:

(i) $R \in \mathcal{R}(^r E; F)$.

(ii) $B \in \Delta_m^r \mathcal{R}(^s E_1; F_1))$.

Demonstração. (i) Escolhemos $\varphi \in F_1^*$ e $z \in E_1$ tais que $\varphi(B(z)) = 1$ e definimos

$$u_\varphi \colon E \longrightarrow \mathcal{Q}(^m F_1; E)\ ,\ u_\varphi(x) = \varphi^m \otimes x,$$

$$t_z \colon \mathcal{Q}(^{mrs} E_1; F) \longrightarrow F,\ t_z(P) = P(z).$$

É claro que t_z está bem definido e a boa definição de u_φ, decorre do fato de $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ conter os polinômios de tipo finito por ser um ideal bilateral de polinômios (veja [18, Proposition 2.3]). Que são lineares é óbvio e suas continuidades seguem de

$$\|u_\varphi(x)\|_{\mathcal{Q}} = \|\varphi^m \otimes x\|_{\mathcal{Q}} = \|\varphi\|^m \|x\|,$$

$$\|t_z(P)\| = \|P(z)\| \leqslant \|P\| \cdot \|z\|^{mrs} \leqslant \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|z\|^{mrs}.$$

Podemos então considerar a seguinte cadeia de operadores

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{u_\varphi} & \mathcal{Q}(^m F_1; E) & \xrightarrow{S_{RB}} & \mathcal{Q}(^{mrs} E_1; F) & \xrightarrow{t_z} & F \\ x & \longmapsto & u_\varphi(x) & \longmapsto & R \circ u_\varphi(x) \circ B & \longmapsto & (R \circ u_\varphi(x) \circ B)(z), \end{array}$$

onde, para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned} (t_z \circ S_{RB} \circ u_\varphi)(x) &= (R \circ u_\varphi(x) \circ B)(z) = R(u_\varphi(x)(B(z))) \\ &= R([\varphi(B(z))]^m x)) = [\varphi(B(z))]^{mr} R(x). \end{aligned}$$

Da propriedade de ideal de $\mathcal{R}$ segue que $R = t_z \circ S_{RB} \circ u_\varphi \in \mathcal{R}(^r E; F)$.

(ii) Escolhemos agora $z \in E$ e $\psi \in F^*$ tais que $\psi(R(z)) = 1$ e definimos

$$w_z \colon \mathcal{P}(^m F_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(^m F_1; E)\ ,\ w_z(q) = q \otimes z,$$

$$v_\psi\colon \mathcal{Q}(^{mrs}E_1;F) \longrightarrow \mathcal{P}(^{mrs}E_1)\ ,\ v_\psi(P) = \psi \circ P.$$

De forma similar ao que fizemos na demonstração do item (i) temos que w_z e v_φ são operadores lineares, cujas continuidades seguem de

$$\|w_z(q)\| = \|q \otimes z\|_{\mathcal{Q}} \leqslant \|q\| \cdot \|z\|,$$

$$\|v_\psi(P)\| = \|\psi \circ P\| \leqslant \|\psi\| \cdot \|P\| \leqslant \|\psi\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}}.$$

Na seguinte cadeia

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{P}(^mF_1) & \xrightarrow{w_z} & \mathcal{Q}(^mF_1;E) & \xrightarrow{S_{RB}} & \mathcal{Q}(^{mrs}E_1;F) & \xrightarrow{v_\psi} & \mathcal{P}(^{mrs}E_1) \\ q & \longmapsto & q\otimes z & \longmapsto & R\circ(q\otimes z)\circ B & \longmapsto & \psi\circ R\circ(q\otimes z)\circ B \end{array}$$

é verdade que, para cada $q \in \mathcal{P}(^mF_1)$,

$$(v_\psi \circ S_{RB} \circ w_z)(q) = \psi \circ R \circ (q \otimes z) \circ B = (q \circ B)^r \cdot \psi(R(z)) = \Delta_m^r B(q)$$

e, portanto, $\Delta_m^r B = v_\psi \circ S_{RB} \circ w_z \in \mathcal{R}(^r\mathcal{P}(^mF_1);\mathcal{P}(^{mrs}E_1))$. □

5.2 m-Ideal de composição à esquerda $\mathcal{A}_{m,left}^{comp}$

Voltamos ao nosso problema inicial e, considerando o Teorema 5.2, vamos proceder de forma similar ao que foi feito em [31] no sentido de abordar o problema do qual estamos tratando neste capítulo dividindo-o em duas partes. Tratamos da primeira parte, que gera ideais de operadores, nesta seção, e da segunda parte, que gera germes de ideais de operadores, na seção seguinte.

Definição 5.5. Sejam $\mathcal{A}$ um operador ideal e $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal de Banach de polinômios contendo os polinômios de posto finito fortemente. Para $m \in \mathbb{N}$, dizemos que um operador $R \in \mathcal{L}(E;F)$ pertence a $\mathcal{A}_{m,left}^{comp}(E;F)$ se, para quaisquer espaços de Banach E_1 e F_1 e qualquer operador $B \in \Delta_m^1\mathcal{A}(E_1;F_1)$, o operador

$$S_R\colon \mathcal{Q}(^mF_1;E) \longrightarrow \mathcal{Q}(^mE_1;F)\ ,\ S_R(P) = R \circ P \circ B,$$

pertence ao ideal $\mathcal{A}$.

Note que os adjuntos generalizados já aparecem na definição desta nova classe.

Este conceito generaliza os ideais $\mathcal{A}_{left}^{comp}$ estudados em [31]. De fato, $\mathcal{A}_{1,left}^{comp} = \mathcal{A}_{left}^{comp}$. Note que, na definição original, usa-se um segundo ideal de operadores no lugar em que usamos um ideal de polinômios. Recuperamos a noção original pois a componente linear de um ideal de polinômios é um ideal de operadores.

Apesar de trabalharmos com espaços de polinômios homogêneos, assim como no caso original este procedimento à esquerda gera ideais de operadores (para todo $m \in \mathbb{N}$). O próximo resultado recupera [31, Proposition 2.2] como um caso particular.

Proposição 5.6. *Sejam $\mathcal{A}$ um ideal fechado de operadores e $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal Banach de polinômios que contém os polinômios de posto finito fortemente. Então:*

(1) *Para todo $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}^{comp}_{m,left}$ é um ideal fechado de operadores contido em $\mathcal{A}$.*

(2) *Se $\mathcal{A}$ e $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ são ideais injetivos, então $\mathcal{A}^{comp}_{m,left}$ é também um ideal injetivo para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. (1) Que $\mathcal{A}^{comp}_{m,left}(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ segue facilmente: para todos R_1, $R_2 \in \mathcal{A}^{comp}_{m,left}(E;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} S_{\lambda R_1 + R_2}(P) &= (\lambda R_1 + R_2) \circ P \circ B = \lambda(R_1 \circ P \circ B) + R_2 \circ P \circ B \\ &= \lambda S_{R_1}(P) + S_{R_2}(P) = (\lambda S_{R_1} + S_{R_2})(P), \end{aligned}$$

e portanto $S_{\lambda R_1 + R_2} = \lambda S_{R_1} + S_{R_2}$ que pertence a $\mathcal{A}$.

Vejamos que $\mathcal{A}^{comp}_{m,left}(E;F)$ contém os operadores de tipo finito. Sejam $\varphi \in E^*$, $b \in F$, E_1, F_1 espaços de Banach e $B \in \Delta^1_m \mathcal{A}(E_1;F_1)$. As hipóteses sobre o ideal de polinômios $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ garantem que

$$\delta_\varphi \colon \mathcal{Q}(^m F_1; E) \longrightarrow \mathcal{P}(^m F_1)\ ,\ \delta_\varphi(P) = \varphi \circ P,$$

$$M_b \colon \mathcal{P}(^m E_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(^m E_1; F)\ ,\ M_b(q) = q \otimes b,$$

são aplicações bem definidas. É fácil mostrar que são lineares, e suas continuidades seguem de

$$\|\delta_\varphi(P)\| = \|\varphi \circ P\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(\varphi \circ P)(x)| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\varphi\| \cdot \|P(x)\| = \|\varphi\| \cdot \|P\| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}},$$

$$\|M_b(q)\|_{\mathcal{Q}} = \|q \otimes b\|_{\mathcal{Q}} \leqslant K_m \|q\| \cdot \|b\|,$$

para todos $P \in \mathcal{Q}(^m F_1; E)$ e $q \in \mathcal{P}(^m E_1)$. Podemos considerar então a cadeia

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{Q}(^m F_1; E) & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \mathcal{P}(^m F_1) & \xrightarrow{\Delta^1_m B} & \mathcal{P}(^m E_1) & \xrightarrow{M_b} & \mathcal{Q}(^m E_1; F) \\ P & \longmapsto & \varphi \circ P & \longmapsto & \varphi \circ P \circ B & \longmapsto & (\varphi \circ P \circ B) \otimes b, \end{array}$$

na qual, para todos $P \in \mathcal{Q}(^m F_1; E)$ e $x \in E_1$,

$$\begin{aligned} S_{\varphi \otimes b}(P)(x) &= [(\varphi \otimes b) \circ P \circ B](x) = [(\varphi \circ P \circ B) \otimes b](x) = (\varphi \circ P \circ B)(x) b \\ &= (M_b \circ \Delta^1_m B \circ \delta_\varphi)(P)(x), \end{aligned}$$

provando que $S_{\varphi \otimes b} = (M_b \circ \Delta^1_m B \circ \delta_\varphi)$ pertence a $\mathcal{A}$, isto é, $\varphi \otimes b$ pertence a $\mathcal{A}^{comp}_{m,left}$. Como $\mathcal{A}^{comp}_{m,left}(E;F)$ é um subespaço vetorial, isso é suficiente para provar que contém os operadores de posto finito.

Para verificar a propriedade de ideal, sejam G, H espaços de Banach, $A \in \mathcal{L}(G;E)$, $R \in \mathcal{A}^{comp}_{m,left}(E;F)$ e $C \in \mathcal{L}(F;H)$. Dados E_1, F_1 espaços de Banach e $B \in \Delta^1_m\mathcal{A}(E_1;F_1)$, temos

$$S_{C\circ R\circ A}\colon \mathcal{Q}(^mF_1;G) \longrightarrow \mathcal{Q}(^mE_1;H); S_{C\circ R\circ A}(P) = C\circ R\circ A\circ P\circ B.$$

É fácil ver que

$$\delta_A\colon \mathcal{Q}(^mF_1;G) \longrightarrow \mathcal{Q}(^mF_1;E)\ ,\ \delta_A(P) = A\circ P,$$

$$\delta_C\colon \mathcal{Q}(^mE_1;F) \longrightarrow \mathcal{Q}(^mE_1;H)\ ,\ \delta_C(Q) = C\circ Q,$$

são operadores lineares bem definidos cujas continuidades seguem de

$$\|\delta_A(P)\|_{\mathcal{Q}} = \|A\circ P\|_{\mathcal{Q}} \leqslant \|A\|\cdot\|P\|_{\mathcal{Q}} \ \text{ e}$$

$$\|\delta_C(Q)\|_{\mathcal{Q}} = \|C\circ Q\|_{\mathcal{Q}} \leqslant \|C\|\cdot\|Q\|_{\mathcal{Q}}.$$

Temos então a cadeia

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{Q}(^mF_1;G) & \xrightarrow{\delta_A} & \mathcal{Q}(^mF_1;E) & \xrightarrow{S_R} & \mathcal{Q}(^mE_1;F) & \xrightarrow{\delta_C} & \mathcal{Q}(^mE_1;H) \\ P & \longmapsto & A\circ P & \longmapsto & R\circ A\circ P\circ B & \longmapsto & C\circ R\circ A\circ P\circ B. \end{array}$$

Assim como de outras vezes, prova-se que $S_{C\circ R\circ A} = \delta_C\circ S_R\circ\delta_A$, que nos permite concluir que $S_{C\circ R\circ A}$ pertence ao ideal $\mathcal{A}$, isto é, $C\circ R\circ A$ pertence a $\mathcal{A}^{comp}_{m,left}$.

Provemos agora que $\mathcal{A}^{comp}_{m,left}$ é um ideal fechado, sejam $R \in \mathcal{L}(E;F)$ e $(R_n)_n \subset \mathcal{A}^{comp}_{m,left}(E;F)$ uma sequência tal que $R_n \longrightarrow R$ na norma usual. Como cada $R_n \in \mathcal{A}^{comp}_{m,left}(E;F)$, para quaisquer espaços de Banach E_1, F_1 e qualquer $B \in \Delta^1_m\mathcal{A}(E_1;F_1)$, o operador

$$\begin{array}{rcccl} S_{R_n} & : & \mathcal{Q}(^mF_1;E) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(^mE_1;F) \\ & & P & \longmapsto & R_n\circ P\circ B \end{array}$$

pertence a $\mathcal{A}$. Para todo n,

$$\begin{aligned} \|S_{R_n} - S_R\| &= \sup_{\|P\|_{\mathcal{Q}}\leqslant 1} \|(S_{R_n} - S_R)(P)\|_{\mathcal{Q}} = \sup_{\|P\|_{\mathcal{Q}}\leqslant 1} \|S_{R_n}(P) - S_R(P)\|_{\mathcal{Q}} \\ &= \sup_{\|P\|_{\mathcal{Q}}\leqslant 1} \|R_n\circ P\circ B - R\circ P\circ B\|_{\mathcal{Q}} = \sup_{\|P\|_{\mathcal{Q}}\leqslant 1} \|(R_n - R)\circ P\circ B\|_{\mathcal{Q}} \\ &\leqslant \sup_{\|P\|_{\mathcal{Q}}\leqslant 1} \|R_n - R\|\cdot\|P\|_{\mathcal{Q}}\cdot\|B\|^m = \|R_n - R\|\cdot\|B\|^m. \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_{R_n} - S_R\| = 0$, e como $\mathcal{A}$ é um ideal fechado, temos $S_R \in \mathcal{A}(\mathcal{Q}(^mF_1;E);\mathcal{Q}(^mE_1;F))$, isto é, $R \in \mathcal{A}^{comp}_{m,left}(E;F)$. Isso prova que $\mathcal{A}^{comp}_{m,left}(E;F)$ é fechado em $\mathcal{L}(E;F)$ na norma usual.

Para comprovar que $\mathcal{A}^{comp}_{m,left} \subset \mathcal{A}$, seja $R \in \mathcal{A}^{comp}_{m,left}(E;F)$. Então, para quaisquer espaços de Banach E_1, F_1 e qualquer $B \in \Delta^1_m\mathcal{A}(E_1;F_1)$, o operador

$$\begin{array}{rcccl} S_R & : & \mathcal{Q}(^mF_1;E) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(^mE_1;F) \\ & & P & \longmapsto & R\circ P\circ B \end{array}$$

pertence ao ideal $\mathcal{A}$. Consideremos o caso em que $E_1 = F_1 = \mathbb{K}$ e $B = id_{\mathbb{K}}$ e definamos

$$\delta\colon E \longrightarrow \mathcal{Q}(^mF_1; E) \ , \ \delta(x) = id_{\mathbb{K}}^m \otimes x,$$

$$\gamma\colon \mathcal{Q}(^mE_1; F) \longrightarrow F \ , \ \gamma(P) = P(1).$$

É claro que γ está bem definida e é linear. A aplicação δ é bem definida pois $\mathcal{Q}$ contém os polinômios de tipo finito, e é linear pois

$$\begin{aligned}\delta(x + \alpha y)(\lambda) &= [id_{\mathbb{K}}^m \otimes (x + \alpha y)](\lambda) = \lambda^m(x + \alpha y) = \lambda^m x + \alpha\lambda^m y \\ &= (id_{\mathbb{K}}^m \otimes x)(\lambda) + \alpha(id_{\mathbb{K}}^m \otimes y)(\lambda) = [\delta(x) + \alpha\delta(y)](\lambda).\end{aligned}$$

Ambas são contínuas uma vez que

$$\|\delta(x)\|_{\mathcal{Q}} = \|id_{\mathbb{K}}^m \otimes x\|_{\mathcal{Q}} = \|id_{\mathbb{K}}\|^m \cdot \|x\| = \|x\|,$$

$$\|\gamma(P)\| = \|P(1)\| \leqslant \|P\| \leqslant \|P\|_{\mathcal{Q}},$$

para todos $x \in E$ e $P \in \mathcal{Q}(^mE_1; F)$. Considerando a cadeia

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{Q}(^mF_1; E) & \xrightarrow{S_R} & \mathcal{Q}(^mE_1; F) & \xrightarrow{\gamma} & F \\ x & \longmapsto & id_{\mathbb{K}}^m \otimes x & \longmapsto & R \circ (id_{\mathbb{K}}^m \otimes x) \circ id_{\mathbb{K}} & \longmapsto & [R \circ (id_{\mathbb{K}}^m \otimes x) \circ id_{\mathbb{K}}](1) \end{array}$$

temos

$$(\gamma \circ S_R \circ \delta)(x) = [R \circ (id_{\mathbb{K}}^m \otimes x) \circ id_{\mathbb{K}}](1) = R((id_{\mathbb{K}}^m \otimes x)(1)) = R(x)$$

para todo $x \in E$, o que prova que $R = \gamma \circ S_R \circ \delta \in \mathcal{A}(E; F)$.

(2) Suponhamos que o ideal de operadores $\mathcal{A}$ e o ideal de polinômios $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ sejam injetivos. Sejam $R \in \mathcal{L}(E; F)$ e $I\colon F \longrightarrow G$ uma injeção métrica tais que $I \circ R \in \mathcal{A}_{m,left}^{comp}(E; G)$. Por definição, para quaisquer espaços de Banach E_1, F_1 e qualquer $B \in \Delta_m^1\mathcal{A}(E_1; F_1)$, o operador

$$\begin{array}{rcccc} S_{I\circ R} & : & \mathcal{Q}(^mF_1; E) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(^mE_1; G) \\ & & P & \longmapsto & I \circ R \circ P \circ B \end{array}$$

pertence ao ideal $\mathcal{A}$. Pela injetividade de $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ temos que o operador

$$\delta_I\colon \mathcal{Q}(^mE_1; F) \longrightarrow \mathcal{Q}(^mE_1; G) \ , \ \delta_I(P) = I \circ P,$$

é uma injeção métrica. Considerando a composição

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Q}(^mF_1; E) & \xrightarrow{S_R} & \mathcal{Q}(^mE_1; F) & \xrightarrow{\delta_I} & \mathcal{Q}(^mE_1; G) \\ P & \longmapsto & R \circ P \circ B & \longmapsto & I \circ R \circ P \circ B \end{array}$$

segue facilmente que $S_{I\circ R} = \delta_I \circ S_R$. Da injetividade do ideal $\mathcal{A}$ segue que S_R pertence a $\mathcal{A}$, isto é, $R \in \mathcal{A}_{m,left}^{comp}(E; F)$. Isso prova que $\mathcal{A}_{m,left}^{comp}$ é injetivo. $\square$

5.3 m-Germe de composição à direita $\mathcal{A}_{m,right}^{comp}$

Tratamos nesta seção do caso polinomial do procedimento à direita de [31].

Definição 5.7. Sejam $\mathcal{A}$ um operador ideal e $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal Banach de polinômios contendo os polinômios de posto finito fortemente. Para $m \in \mathbb{N}$, dizemos que $R \in \mathcal{L}(E; F)$ pertence a $\mathcal{A}_{m,right}^{comp}(E; F)$ se para quaisquer espaços de Banach E_1, F_1 e qualquer $B \in \mathcal{A}(E_1; F_1)$, o operador

$$S_R \colon \mathcal{Q}(^m F; E_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(^m E; F_1)\ ,\ S_R(P) = B \circ P \circ R,$$

pertence ao ideal $\mathcal{A}$.

Este conceito generaliza os ideais $\mathcal{A}_{right}^{comp}$ estudados em [31]: de fato, $\mathcal{A}_{1,right}^{comp} = \mathcal{A}_{right}^{comp}$. Lembramos, novamente, que a definição original usa um segundo ideal de operadores no lugar em que usamos um ideal de polinômios. A componente linear do ideal de polinômios recupera o conceito original.

Quando estivermos tratando do conceito original $\mathcal{A}_{right}^{comp}$, como precisamos de um segundo ideal de operadores (que na verdade é um ideal de Banach de operadores) no lugar do ideal de Banach de polinômios em nossa definição, este segundo ideal de operadores, seguindo a notação de [31], será denotado por $\mathcal{B}$.

Antes de abordarmos este caso vamos precisar de algumas definições e resultados técnicos enunciados a seguir. Já adiantamos que, ao contrário do procedimento à esquerda e ao contrário do caso linear original, para $m \geqslant 2$ a classe $\mathcal{A}_{m,right}^{comp}$ é apenas um germe de ideal.

Definição 5.8. Um ideal normado de operadores $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ é *super-injetivo* se:

(i) $\mathcal{B}$ é injetivo;

(ii) Existe um ideal de operadores normado, simétrico e injetivo $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{I}^{dual}$ e o operador

$$\begin{array}{rccc} \delta_{J_E} & : \mathcal{I}(E^{**}; F_1^{**}) & \longrightarrow & \mathcal{B}(E; F_1^{**}) \\ & T & \longmapsto & T \circ J_E \end{array}$$

é bem definido, linear e contínuo, para todos espaços de Banach E e F_1.

Para quadrar nossa abordagem e terminologia com o que é feito originalmente em [31], provamos a seguinte caracterização:

Proposição 5.9. *Um ideal normado de operadores $\mathcal{B}$ é super-injetivo se, e somente se, $\mathcal{B}$ é injetivo e simétrico.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{B}$ seja injetivo e simétrico. Para ver que $\mathcal{B}$ é super-injetivo basta tomar $\mathcal{I} = \mathcal{B}$. Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{B}$ seja super-injetivo e seja $\mathcal{I}$ o ideal de operadores que provém do item (ii) da definição de ideal super-injetivo. Só precisamos mostrar que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^{dual}$, isto é, se $u \in \mathcal{B}(E;F)$, então $u^* \in \mathcal{B}(F^*;E^*)$. De fato, se $u \in \mathcal{B}(E;F)$, então como $\mathcal{B} \subset \mathcal{I}^{dual}$ temos $u \in \mathcal{I}^{dual}(E;F)$, isto é $u^* \in \mathcal{I}(F^*;E^*)$. Logo $u^{**} \in \mathcal{I}(E^{**};F^{**})$ pois $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}^{dual}$. Portanto, pelo mesmo fato temos $u^{***} \in \mathcal{I}(F^{***};E^{***})$. Olhando para a composição de operadores

$$F^* \xrightarrow{J_{F^*}} F^{***} \xrightarrow{u^{***}} E^{***},$$

e lembrando que, por hipótese, $\delta_{J_{F^*}}$ está bem definido, temos $u^{***} \circ J_{F^*} \in \mathcal{B}(F^*;E^{***})$. Mas $u^{***} \circ J_{F^*} = J_{E^*} \circ u^* \in \mathcal{B}(F^*;E^{***})$, e como o ideal $\mathcal{B}$ é injetivo, segue que $u^* \in \mathcal{B}(F^*;E^*)$ pois J_{E^*} é uma imersão métrica. $\square$

Com essa compatibilização de terminologia, o resultado [31, Proposition 2.3] pode ser lido da seguinte forma:

Proposição 5.10. *Sejam $\mathcal{A}$ um ideal de operadores fechado e $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ um ideal Banach de operadores. Então:*

(1) *$\mathcal{A}^{comp}_{right}$ é um ideal de operadores fechado contido em $\mathcal{A}^{dual}$.*

(2) *Se $\mathcal{A}$ é injetivo e $\mathcal{B}$ é super-injetivo, então $\mathcal{A}^{comp}_{right}$ é sobrejetivo.*

Optamos por enunciar [31, Proposition 2.3] na forma equivalente acima pois será nessa nova forma que generalizaremos para o caso polinomial. Com essa finalidade estendemos a Definição 5.8 para o caso polinomial da seguinte maneira:

Definição 5.11. Dado $m \in \mathbb{N}$, dizemos que um ideal normado $(\mathcal{Q}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}_n})$ de polinômios m-homogêneos é *super-injetivo* se:

(i) $\mathcal{Q}_m$ é injetivo;

(ii) Existe um ideal normado de operadores $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ injetivo e simétrico tal que $\mathcal{Q}_m \subset \left(\mathcal{I}^{dual-\mathcal{P}}\right)_m$ e o operador

$$\begin{array}{rccc} \delta_{J_E^{1,m}} : & \mathcal{I}(\mathcal{P}(^mE)^*;F_1^{**}) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(^mE;F_1^{**}) \\ & T & \longmapsto & T \circ J_E^{1,m} \end{array}$$

é bem definido, linear e contínuo, para todos espaços de Banach E e F_1.

Relembre que o polinômio $J_E^{1,m}$ foi introduzido e estudado no Capítulo 2 (veja Definição 2.11 e os resultados que a seguem).

Exemplo 5.12. Vejamos que se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de operadores normado, injetivo e simétrico, então o ideal de polinômios de composição $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ é super-injetivo.

Para ver que o ideal de polinômios $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ é injetivo, sejam $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ e $j \colon F \hookrightarrow G$ uma injeção métrica tais que $j \circ P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^mE; G)$. De [15, Proposition 3.2.b] segue que $(j \circ P)_L \in \mathcal{I}\left(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E; G\right)$. Como já provamos que $(j \circ P)_L = j \circ P_L$ e $\mathcal{I}$ é injetivo, concluímos que $P_L \in \mathcal{I}\left(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E; F\right)$. Usando novamente [15, Proposition 3.2.b], temos $P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^mE; F)$. Por outro lado, usando [15, Proposition 3.7] temos

$$\|j \circ P\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{P}} = \|(j \circ P)_L\|_{\mathcal{I}} = \|j \circ P_L\|_{\mathcal{I}} = \|P_L\|_{\mathcal{I}} = \|P\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{P}}.$$

Vejamos agora que $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ satisfaz a segunda condição de ser super-injetivo. Usando que $\mathcal{I}$ é simétrico e [14, Theorem 2.2], temos

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{P} \subseteq \mathcal{I}^{dual} \circ \mathcal{P} = \mathcal{I}^{dual-\mathcal{P}}.$$

Dados espaços de Banach E e F_1, o operador

$$\delta^{\mathcal{I}}_{J_E^{1,m}} \colon \mathcal{I}\left(\mathcal{P}(^mE)^*; F_1^{**}\right) \longrightarrow \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^mE; F_1^{**}),\ \ \delta^{\mathcal{I}}_{J_E^{1,m}}(T) = T \circ J_E^{1,m},$$

é bem definido pela definição de $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$, é claramente linear e é contínuo pois

$$\|T \circ J_E^{1,m}\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{P}} = \|T \circ (J_E^{1,m})_L\|_{\mathcal{I}} \leqslant \|T\|_{\mathcal{I}} \cdot \|(J_E^{1,m})_L\|.$$

Portanto, como os ideais fechados dos operadores compactos $\mathcal{K}$ e fracamente compactos $\mathcal{W}$ são injetivos e simétricos, segue que os ideais dos polinômios homogêneos compactos $\mathcal{P}_{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \circ \mathcal{P}$ e dos polinômios fracamente compactos $\mathcal{P}_{\mathcal{W}} = \mathcal{W} \circ \mathcal{P}$ são ideais de polinômios super-injetivos.

Ainda precisamos de mais uma definição para enunciar e provar nosso resultado para o caso polinomial do procedimento à direita.

Definição 5.13. Dizemos que um ideal normado de polinômios $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é *P-simétrico* se satisfaz a seguinte propriedade: dados $m \in \mathbb{N}$, E, F, G espaços de Banach, $P \in \mathcal{Q}(^mE; F)$ e $R_j \in \mathcal{L}(G; E)$, $j = 1, \ldots, m$, então

$$\left[\check{P} \circ (R_1, \ldots, R_m)\right]^\wedge \in \mathcal{Q}(^mG; F) \ \text{ e}$$

$$\left\|\left[\check{P}(R_1, \ldots, R_m)\right]^\wedge\right\|_{\mathcal{Q}} \leqslant \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|R_1\| \cdots \|R_m\|.$$

Exemplo 5.14. Seja $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ um multi-ideal de Banach fortemente simétrico (para a definição veja [23, Definição 2.65]) e sejam $\widehat{\mathcal{M}}$ e $\widecheck{\mathcal{M}}$ os ideais de Banach de polinômios gerados por $\mathcal{M}$, isto é,

$$\widehat{\mathcal{M}} := \left\{\hat{A} : A \in \mathcal{M}\right\},\ \widecheck{\mathcal{M}} := \left\{P : \check{P} \in \mathcal{M}\right\},$$

$$\|P\|_{\widehat{\mathcal{M}}} := \inf\left\{\|A\|_{\mathcal{M}} : \widehat{A} = P,\ A \in \mathcal{M}\right\},\ \|P\|_{\widecheck{M}} := \|\check{P}\|_{\mathcal{M}}.$$

Em [23, Proposição 2.66] está provado que $\widehat{\mathcal{M}} = \widecheck{\mathcal{M}}$ isometricamente. Vejamos que este ideal de Banach de polinômios é P-simétrico. Para simplificar a notação, escrevemos $\mathcal{Q} = \widehat{\mathcal{M}} = \widecheck{\mathcal{M}}$.

Sejam $m \in \mathbb{N}$, E, F, G espaços de Banach, $P \in \mathcal{Q}(^mE; F)$ e $R_j \in \mathcal{L}(G; E)$, $j = 1, \ldots, m$. Como $\check{P} \in \mathcal{M}(^mE; F)$, temos $\check{P} \circ (R_1, \ldots, R_m) \in \mathcal{M}(^mG; F)$ e, portanto,

$$\left[\check{P} \circ (R_1, \ldots, R_m)\right]^{\wedge} \in \widehat{M}(^mG; F) = \mathcal{Q}(^mG; F).$$

Da igualdade de normas $\|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{M}}} = \|\cdot\|_{\widecheck{\mathcal{M}}}$, concluímos que

$$\begin{aligned}\left\|\left[\check{P} \circ (R_1, \ldots, R_m)\right]^{\wedge}\right\|_{\mathcal{Q}} &= \left\|\left[\check{P} \circ (R_1, \ldots, R_m)\right]^{\wedge}\right\|_{\widehat{\mathcal{M}}} \leqslant \left\|\check{P} \circ (R_1, \ldots, R_m)\right\|_{\mathcal{M}} \\ &\leqslant \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} \cdot \|R_1\| \cdots \|R_m\| = \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|R_1\| \cdots \|R_m\|.\end{aligned}$$

Lema 5.15. *Seja $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal normado de polinômios. Dados m, $n \in \mathbb{N}$, E, F espaços de Banach, φ_1, $\varphi_2 \in E^*$, $y \in F$ e $P = \varphi_1^m\varphi_2^n \otimes y \in \mathcal{P}(^{m+n}E; F)$, temos*

$$P \in \mathcal{Q}(^{m+n}E; F) \text{ e } \|P\|_{\mathcal{Q}} \leqslant C^{m,n}_{\varphi_1,\varphi_2} \cdot \|y\|,$$

onde $C^{m,n}_{\varphi_1,\varphi_2}$ é uma constante não-negativa que depende de m, n, φ_1 e φ_2.

Demonstração. Que $P \in \mathcal{Q}(^{m+n}E; F)$ vem do fato que $\mathcal{Q}$ é um ideal de polinômios, e portanto contém os polinômios de tipo finito, e do Lema 2.21. Definimos

$$u\colon E \longrightarrow \mathbb{K} \times \mathbb{K},\ u(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x));\ w\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ w(\alpha, \beta) = \alpha^m\beta^n,$$

É claro que u é um operador bem definido e linear, cuja continuidade segue de

$$\|u(x)\| = \|(\varphi_1(x), \varphi_2(x))\| = |\varphi_1(x)| + |\varphi_2(x)| \leqslant (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|)\,\|x\|.$$

E w é um polinômio $(m + n)$-homogêneo de tipo finito, pois $w = \pi_1^m\pi_2^n \otimes 1$, e portanto w pertence a $\mathcal{Q}$. Agora vejamos que, para todo $x \in E$,

$$\left[(id_{\mathbb{K}} \otimes y) \circ w \circ u\right](x) = (id_{\mathbb{K}} \otimes y)(w(u(x))) = w(u(x))y = \varphi_1(x)^m\varphi_2(x)^n y = P(x),$$

provando que $P = (id_{\mathbb{K}} \otimes y) \circ w \circ u$, donde segue que

$$\begin{aligned}\|P\|_{\mathcal{Q}} &= \|(id_{\mathbb{K}} \otimes y) \circ w \circ u\|_{\mathcal{Q}} \leqslant \|id_{\mathbb{K}} \otimes y\| \cdot \|w\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|u\|^{m+n} \\ &= \|y\| \cdot \|w\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|u\|^{m+n} =: C^{m,n}_{\varphi_1,\varphi_2} \cdot \|y\|.\end{aligned}$$

□

Finalmente estamos em condições de enunciar o resultado polinomial para o procedimento de composição à direita. Como veremos, diferentemente do caso à esquerda, agora teremos germes de ideais operadores. Isso pode ser visto como mais um indício da relevância da noção de germes, a saber: precisamos dos germes para estender o resultado linear [31, Proposition 2.3], na forma da Proposição 5.10, para o caso polinomial.

Proposição 5.16. *Sejam $\mathcal{A}$ um ideal fechado de operadores, $m \in \mathbb{N}$ e $(\mathcal{Q}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}_m})$ um ideal Banach de polinômios m-homogêneos que contém os polinômios de posto finito fortemente. Então:*

(1) $\mathcal{A}^{comp}_{m,right}$ *é um germe de operadores contido em $\Delta^1_m\mathcal{A}$. Mais ainda, se $\mathcal{Q}_m$ é P-simétrico, então $\mathcal{A}^{comp}_{m,right}$ é fechado.*

(2) *Se $\mathcal{A}$ é injetivo e $\mathcal{Q}_m$ é super-injetivo, então $\mathcal{A}^{comp}_{m,right}$ é um germe sobrejetivo.*

Demonstração. (1) Comecemos provando que $\mathcal{F}(E;F) \subseteq \mathcal{A}^{comp}_{m,right}(E;F)$. Dados $R = \varphi_1 \otimes b_1 + \ldots + \varphi_k \otimes b_k \in \mathcal{F}(E;F)$, para E_1, F_1 espaços de Banach e $B \in \mathcal{A}(E_1;F_1)$, consideremos o operador

$$S_R \colon \mathcal{Q}(^mF;E_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(^mE;F_1),\; S_R(P) = B \circ P \circ R.$$

Notemos que, pela Formula de Leibniz,

$$\begin{aligned}
[B \circ P \circ R](x) &= B(P(\varphi_1(x)b_1 + \cdots + \varphi_k(x)b_k)) = B(\check{P}(\varphi_1(x)b_1 + \cdots + \varphi_k(x)b_k)^{(m)}) \\
&= B\left(\sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_k=m \\ \alpha_j\in\mathbb{N}_0}} \frac{m!}{\alpha_1!\ldots\alpha_k!}\check{P}\left((\varphi_1(x)b_1)^{(\alpha_1)}, \ldots, (\varphi_k(x)b_k)^{(\alpha_k)}\right)\right) \\
&= \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_k=m \\ \alpha_j\in\mathbb{N}_0}} \frac{m!}{\alpha_1!\ldots\alpha_k!}\varphi_1(x)^{\alpha_1}\ldots\varphi_k(x)^{\alpha_k}B\left(\check{P}\left(b_1^{(\alpha_1)}, \ldots, b_k^{(\alpha_k)}\right)\right).
\end{aligned}$$

Definimos, para cada escolha de $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tais que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = m$,

$$W_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} \colon \mathcal{Q}(^mF;E_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(^mE;F_1),$$
$$W_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(P)(x) = \varphi_1(x)^{\alpha_1}\ldots\varphi_k(x)^{\alpha_k}B\left(\check{P}\left(b_1^{(\alpha_1)}\ldots b_k^{(\alpha_k)}\right)\right).$$

Do Lema 2.21 e do fato que ideais de polinômios contêm os polinômios de tipo finito sabemos que $W_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ está bem definido. Da igualdade

$$S_R = \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_k=m \\ \alpha_j\in\mathbb{N}_0}} \frac{m!}{\alpha_1!\ldots\alpha_k!}W_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k},$$

basta mostrar que cada $W_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ pertence a $\mathcal{A}$. Para isso, denotamos

$$b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} := \left(b_1^{(\alpha_1)}, \ldots, b_k^{(\alpha_k)}\right) \quad \text{e} \quad \varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} := \varphi_1^{\alpha_1}\ldots\varphi_k^{\alpha_k},$$

e notamos que, definindo

$$\delta_{b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}} \colon \mathcal{Q}(^mF;E_1) \longrightarrow E_1\ ,\ \delta_{b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}}(P) = \check{P}(b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}),$$

$$\delta_{\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}} \colon F_1 \longrightarrow \mathcal{Q}(^mE;F_1)\ ,\ \delta_{\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}}(x) = \varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} \otimes x,$$

obtemos operadores bem definidos (a boa definição de $\delta_{\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}}$ é devida ao Lema 2.21 e ao fato que o ideal de polinômios contém os polinômios de tipo finito), lineares e contínuos pois:

$$\begin{aligned}\left\|\delta_{b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}}(P)\right\| &= \left\|\check{P}\left(b_1^{(\alpha_1)}\ldots b_k^{(\alpha_k)}\right)\right\| \leqslant \|\check{P}\|\cdot\|b_1\|^{\alpha_1}\ldots\|b_k\|^{\alpha_k}\\ &\leqslant \frac{m^m}{m!}\|P\|\cdot\|b_1\|^{\alpha_1}\ldots\|b_k\|^{\alpha_k} \leqslant \frac{m^m}{m!}\|P\|_{\mathcal{Q}}\cdot\|b_1\|^{\alpha_1}\ldots\|b_k\|^{\alpha_k},\end{aligned}$$

o que garante a continuidade de $\delta_{b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}}$ e

$$\left\|\delta_{\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}}(x)\right\|_{\mathcal{Q}} = \|\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\otimes x\|_{\mathcal{Q}} = \|\varphi_1^{\alpha_1}\ldots\varphi_k^{\alpha_k}\otimes x\|_{\mathcal{Q}} \leqslant C_{\varphi_1,\ldots,\varphi_k}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\cdot\|x\|,$$

que em conjunto com o lema anterior garante a continuidade de $\delta_{\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}}$. Na cadeia

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{Q}(^mF;E_1) & \xrightarrow{\delta_{b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}}} & E_1 & \xrightarrow{B} & F_1\\ P & \longmapsto & \check{P}(b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}) & \longmapsto & B\left(\check{P}(b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k})\right)\end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc}F_1 & \xrightarrow{\delta_{\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}}} & \mathcal{Q}(^mE;F_1)\\ B\left(\check{P}(b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k})\right) & \longmapsto & \varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\otimes B\left(\check{P}(b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k})\right),\end{array}$$

temos, para todos $P\in\mathcal{Q}(^mF;E_1)$ e $x\in E$,

$$\begin{aligned}\left(\delta_{\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}}\circ B\circ\delta_{b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}}\right)(P)(x) &= \left[\delta_{\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}}\left(B\left(\delta_{b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}}(P)\right)\right)\right](x)\\ &= \left[\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\otimes B\left(\check{P}(b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k})\right)\right](x)\\ &= \varphi_1(x)^{\alpha_1}\ldots\varphi_k(x)^{\alpha_k}B\left(\check{P}(b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k})\right)\\ &= W_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(P)(x).\end{aligned}$$

Isso prova que $W_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} = \delta_{\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}}\circ B\circ\delta_{b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}}$ pertence a $\mathcal{A}$ pois B pertence a $\mathcal{A}$. Segue que S_R pertence a $\mathcal{A}$.

Para provar a propriedade de ideal, sejam G, H espaços de Banach, $A\in\mathcal{L}(G;E)$, $R\in\mathcal{A}_{m,right}^{comp}(E;F)$ e $C\in\mathcal{L}(F;H)$. Dados E_1, F_1 espaços de Banach e $B\in\mathcal{A}(E_1;F_1)$, consideremos o operador

$$S_{C\circ R\circ A}\colon \mathcal{Q}(^mH;E_1)\longrightarrow\mathcal{Q}(^mG;F_1);\ S_{C\circ R\circ A}(P) = B\circ P\circ C\circ R\circ A.$$

Definimos

$$\delta_C\colon \mathcal{Q}(^mH;E_1)\longrightarrow\mathcal{Q}(^mF;E_1),\ \delta_C(P) = P\circ C,$$

$$\delta_A\colon \mathcal{Q}(^mE;F_1)\longrightarrow\mathcal{Q}(^mG;F_1),\ \delta_A(P) = P\circ A.$$

Da mesma forma que fizemos váiras vezes, verifica-se que δ_C e δ_A são bem definidos, lineares e contínuos. Da cadeia

$$\begin{array}{ccccccc}\mathcal{Q}(^mH;E_1) & \xrightarrow{\delta_C} & \mathcal{Q}(^mF;E_1) & \xrightarrow{S_R} & \mathcal{Q}(^mE;F_1) & \xrightarrow{\delta_A} & \mathcal{Q}(^mG;F_1)\\ P & \longmapsto & P\circ C & \longmapsto & B\circ P\circ C\circ R & \longmapsto & B\circ P\circ C\circ R\circ A\end{array}$$

prova-se que $S_{C\circ R\circ A} = \delta_A \circ S_R \circ \delta_C$, e como $R \in \mathcal{A}^{comp}_{m,right}(E;F)$, segue que $S_{C\circ R\circ A} \in \mathcal{A}$, isto é, $C \circ R \circ A \in \mathcal{A}^{comp}_{m,right}(G;H)$.

Vejamos que $\mathcal{A}^{comp}_{m,right}(E;F) \subseteq \Delta^1_m \mathcal{A}(E;F)$. Par isso, seja $R \in \mathcal{A}^{comp}_{m,right}(E;F)$. Então, para quaisquer E_1, F_1 espaços de Banach e qualquer $B \in \mathcal{A}(E_1;F_1)$, o operador

$$S_R \colon \mathcal{Q}(^mF;E_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(^mE;F_1),\ S_R(P) = B \circ P \circ R,$$

pertence a $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{Q}(^mF;\mathbb{K}) \subseteq \mathcal{P}(^mF)$ e $\mathcal{P}(^mF) \subseteq \mathcal{Q}(^mF;\mathbb{K})$ pois $\mathcal{Q}$ contém os polinômios de posto finito, temos $\mathcal{P}(^mF) = \mathcal{Q}(^mF;\mathbb{K})$. Portanto, considerando $E_1 = F_1 = \mathbb{K}$ e $B = id_{\mathbb{K}}$, temos que o operador

$$S_R : \mathcal{P}(^mF) \longrightarrow \mathcal{P}(^mE),\ S_R(P) = P \circ R,$$

pertence a $\mathcal{A}$, isto é, $S_R = \Delta^1_m R$ pertence a $\mathcal{A}$.

Para completar a demonstração do item (1), provemos que $\mathcal{A}^{comp}_{m,right}(E;F)$ é fechado em $\mathcal{L}(E;F)$. Seja $(R_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{A}^{comp}_{m,right}(E;F)$ tal que $R_n \longrightarrow R$, onde $R \in \mathcal{L}(E;F)$. Pela definição de $\mathcal{A}^{comp}_{m,right}(E;F)$, para quaisquer espaços de Banach E_1,F_1 e qualquer $B \in \mathcal{A}(E_1;F_1)$, o operador

$$S_{R_n} \colon \mathcal{Q}(^mF;E_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(^mE;F_1),\ S_R(P) = B \circ P \circ R_n,$$

pertence a $\mathcal{A}$. Para todo n,

$$\begin{aligned}\|S_{R_n} - S_R\| &= \sup_{\|P\|_{\mathcal{Q}} \leqslant 1} \|(S_{R_n} - S_R)(P)\|_{\mathcal{Q}} = \sup_{\|P\|_{\mathcal{Q}} \leqslant 1} \|B \circ P \circ R_n - B \circ P \circ R\|_{\mathcal{Q}} \\ &\leqslant \sup_{\|P\|_{\mathcal{Q}} \leqslant 1} \|B\| \cdot \|P \circ R_n - P \circ R\|_{\mathcal{Q}} = \|B\| \cdot \sup_{\|P\|_{\mathcal{Q}} \leqslant 1} \|P \circ R_n - P \circ R\|_{\mathcal{Q}}.\end{aligned}$$

E para todo $x \in E$, por [22, Lemma 1.9],

$$(P \circ R_n - P \circ R)(x) = P(R_n(x)) - P(R(x)) = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \check{P}\left(R(x)^{(j)}, (R_n(x) - R(x))^{(m-j)}\right).$$

Então,

$$P \circ R_n - P \circ R = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \left[\check{P} \circ \left(R^{(j)}, (R_n - R)^{(m-j)}\right)\right]^{\wedge}.$$

Como $\mathcal{Q}$ é P-simétrico, segue que

$$\begin{aligned}\|P \circ R_n - P \circ R\|_{\mathcal{Q}} &= \left\| \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \left[\check{P} \circ \left(R^{(j)}, (R_n - R)^{(m-j)}\right)\right]^{\wedge} \right\|_{\mathcal{Q}} \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \left\| \left[\check{P} \circ \left(R^{(j)}, (R_n - R)^{(m-j)}\right)\right]^{\wedge} \right\|_{\mathcal{Q}} \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|R\|^j \cdot \|R_n - R\|^{m-j}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|S_{R_n} - S_R\| &\leqslant \|B\| \cdot \sup_{\|P\|_{\mathcal{Q}} \leqslant 1} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|R\|^j \cdot \|R_n - R\|^{m-j} \right\} \\ &\leqslant \|B\| \cdot \left[\sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \|R\|^j \cdot \|R_n - R\|^{m-j} \right],\end{aligned}$$

e portanto $\|S_{R_n} - S_R\| \longrightarrow 0$ pois $R_n \longrightarrow R$. Do fato de $\mathcal{A}$ ser fechado segue que S_R pertence ao ideal $\mathcal{A}$.

(2) Provaremos que $\left(\mathcal{A}^{comp}_{m,right}\right)^{sur} = \mathcal{A}^{comp}_{m,right}$. Já sabemos que $\mathcal{A}^{comp}_{m,right} \subset \left(\mathcal{A}^{comp}_{m,right}\right)^{sur}$, logo basta provar a inclusão inversa. Para isso, seja $R \in \left(\mathcal{A}^{comp}_{m,right}\right)^{sur}(E;F)$, isto é, $R \circ Q_E \in \mathcal{A}^{comp}_{m,right}(\ell_1(B_E);F)$. Por definição, para quaisquer espaços de Banach E_1, F_1 e qualquer $B \in \mathcal{A}(E_1;F_1)$, o operador

$$S_{R\circ Q_E} \colon \mathcal{Q}(^m F; E_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(^m \ell_1(B_E); F_1)\ ,\ S_{R\circ Q_E}(P) = B \circ P \circ R \circ Q_E,$$

pertence a $\mathcal{A}$. O operador

$$\delta \colon \mathcal{Q}(^m \ell_1(B_E); F_1) \longrightarrow \mathcal{I}(F_1^*; \mathcal{P}(^m \ell_1(B_E)))\ ,\ \delta(P) = P^*,$$

é bem definido, linear e contínuo pois $\mathcal{Q}_m \subseteq \left(\mathcal{I}^{dual-\mathcal{P}}\right)_m$ e

$$\|\delta(P)\|_{\mathcal{I}} = \|P^*\|_{\mathcal{I}} \leqslant C \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}_m}.$$

Assim, o operador

$$\delta \circ S_{R\circ Q_E} \colon \mathcal{Q}(^m F; E_1) \longrightarrow \mathcal{I}(F_1^*; \mathcal{P}(^m \ell_1(B_E))$$

pertence ao ideal $\mathcal{A}$ e é tal que

$$\delta \circ S_{R\circ Q_E}(P) = (B \circ P \circ R \circ Q_E)^* = \Delta^1_m Q_E \circ (B \circ P \circ R)^*.$$

Como já fizemos várias vezes antes, verifica-se que os operadores

$$W \colon \mathcal{Q}(^m E; F_1) \longrightarrow \mathcal{I}(F_1^*; \mathcal{P}(^m E))\ ,\ \ W(Q) = Q^*,$$

$$\delta_{\Delta^1_m Q_E} \colon \mathcal{I}(F_1^*; \mathcal{P}(^m E)) \longrightarrow \mathcal{I}(F_1^*; \mathcal{P}(^m \ell_1(B_E)))\ ,\ \delta_{\Delta^1_m Q_E}(u) = \Delta^1_m Q_E \circ u,$$

são bem definidos, lineares e contínuos (a boa definição de W segue da inclusão $\mathcal{Q}_m \subset \left(\mathcal{I}^{dual-\mathcal{P}}\right)_m$ e sua continuidade de $\|W(Q)\|_{\mathcal{I}} = \|Q^*\|_{\mathcal{I}} \leqslant C \cdot \|Q\|_{\mathcal{Q}_m}$). Da Proposição 2.10 sabemos que $\Delta^1_m Q_E$ é uma injeção métrica e, como $\mathcal{I}$ é um ideal normado injetivo, $\delta_{\Delta^1_m Q_E}$ é uma injeção métrica pois

$$\|\delta_{\Delta^1_m Q_E}(u)\|_{\mathcal{I}} = \|\Delta^1_m Q_E \circ u\|_{\mathcal{I}} = \|u\|_{\mathcal{I}}.$$

Da cadeia

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{Q}(^mF;E_1) & \xrightarrow{S_R} & \mathcal{Q}(^mE;F_1) & \xrightarrow{W} & \mathcal{I}(F_1^*;\mathcal{P}(^mE)) & \xrightarrow{\delta_{\Delta_m^1 Q_E}} & \mathcal{I}(F_1^*;\mathcal{P}(^m\ell_1(B_E))) \\ P & \longmapsto & B\circ P\circ R & \longmapsto & (B\circ P\circ R)^* & \longmapsto & \Delta_m^1 Q_E\circ(B\circ P\circ R)^* \end{array}$$

concluímos que $\delta_{\Delta_m^1 Q_E}\circ W\circ S_R=\delta\circ S_{R\circ Q_E}$ pertence a $\mathcal{A}$, e como $\mathcal{A}$ é injetivo, segue que $W\circ S_R$ pertence a $\mathcal{A}$.

Definimos agora o operador

$$Z\colon \mathcal{I}(F_1^*;\mathcal{P}(^mE))\longrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{P}(^mE)^*;F_1^{**})\ ,\ Z(T)=T^*,$$

que é bem definido (pois $\mathcal{I}$ é um ideal simétrico), linear e contínuo. Considerando os operadores

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{Q}(^mF;E_1) & \xrightarrow{S_R} & \mathcal{Q}(^mE;F_1) & \xrightarrow{W} & \mathcal{I}(F_1^*;\mathcal{P}(^mE)) & \xrightarrow{Z} & \mathcal{I}(\mathcal{P}(^mE)^*;F_1^{**}) \\ P & \longmapsto & B\circ P\circ R & \longmapsto & (B\circ P\circ R)^* & \longmapsto & (B\circ P\circ R)^{**} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}(\mathcal{P}(^mE)^*;F_1^{**}) & \xrightarrow{\delta_{J_E^{1,m}}} & \mathcal{Q}(^mE;F_1^{**}) \\ (B\circ P\circ R)^{**} & \longmapsto & (B\circ P\circ R)^{**}\circ J_E^{1,m}, \end{array}$$

temos

$$\begin{aligned} (Q^{**}\circ J_E^{1,m})(x)(\varphi) &= [Q^{**}(J_E^{1,m}(x))](\varphi)=\left[J_E^{1,m}(x)\circ Q^*\right](\varphi)=J_E^{1,m}(x)(Q^*(\varphi)) \\ &= J_E^{1,m}(x)(\varphi\circ Q)=(\varphi\circ Q)(x)=\varphi(Q(x))=(J_{F_1}\circ Q)(x)(\varphi) \end{aligned}$$

para todos $Q\in\mathcal{Q}(^mE;F_1)$, $x\in E$ e $\varphi\in F_1^*$. Portanto, $(B\circ P\circ R)^{**}\circ J_E^{1,m}=J_{F_1}\circ(B\circ P\circ R)$. Consideramos finalmente o operador

$$\delta_{J_{F_1}}\colon \mathcal{Q}(^mE;F_1)\longrightarrow \mathcal{Q}(^mE;F_1^{**}),\ \delta_{J_{F_1}}(Q)=J_{F_1}\circ Q,$$

que é claramente bem definido e linear. É também uma injeção métrica pois $\mathcal{Q}_m$ é um ideal de polinômios m-homogêneos injetivo, J_{F_1} é uma injeção métrica e assim

$$\|\delta_{J_{F_1}}(Q)\|_{\mathcal{Q}_m}=\|J_{F_1}\circ Q\|_{\mathcal{Q}_m}=\|Q\|_{\mathcal{Q}_m}.$$

Da composição

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Q}(^mF;E_1) & \xrightarrow{S_R} & \mathcal{Q}(^mE;F_1) & \xrightarrow{\delta_{J_{F_1}}} & \mathcal{Q}(^mE;F_1^{**}) \\ P & \longmapsto & B\circ P\circ R & \longmapsto & J_{F_1}\circ B\circ P\circ R \end{array}$$

e das observações anteriores segue que $\delta_{J_E^{1,m}}\circ Z\circ W\circ S_R=\delta_{J_{F_1}}\circ S_R$. Como $W\circ S_R$ pertence a $\mathcal{A}$, segue que $\delta_{J_{F_1}}\circ S_R$ pertence a $\mathcal{A}$, e como $\mathcal{A}$ é injetivo, finalmente concluímos que S_R pertence a $\mathcal{A}$, isto é, R pertence a $\mathcal{A}_{m,right}^{comp}$. $\square$

5.4 Consequências

Obteremos nesta seção, como consequências dos resultados provados nas seções anteriores, algumas respostas concretas para o problema posto no início do capítulo. Consideraremos os casos particulares dos ideais de operadores compactos, dos operadores de Asplund e dos operadores de Rosenthal. Os resultados desta seção generalizam vários resultados provados em [31].

Um operador $R \in \mathcal{L}(E;F)$ é *aproximável* se R é o limite na norma de $\mathcal{L}(E;F)$ de uma sequência de operadores de posto finito.

Proposição 5.17. *Sejam $\mathcal{A}$ um ideal de operadores fechado, $m \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{Q}_m, \|.\|_{\mathcal{Q}_m})$ um ideal Banach de polinômios m-homogêneos que contém os polinômios de posto finito fortemente. Sejam também E, F, E_1, F_1 espaços de Banach, $R \in \mathcal{A}(E;F)$, $B \in \Delta_m^1\mathcal{A}(E_1;F_1)$. Se R é aproximável ou se B é aproximável e $\mathcal{Q}_m$ é P-simétrico, então o operador*

$$S_{RB} \colon \mathcal{Q}(^mF_1;E) \longrightarrow \mathcal{Q}(^mE_1;F)\ ,\ S_{RB}(P) = R \circ P \circ B,$$

pertence ao ideal $\mathcal{A}$.

Demonstração. Suponhamos que R seja aproximável. Como $\mathcal{A}^{comp}_{m,left}$ é um ideal de operadores fechado (Proposição 5.6), então $\overline{\mathcal{F}(E;F)} \subseteq \mathcal{A}^{comp}_{m,left}(E;F)$. Como R é aproximável segue que $R \in \mathcal{A}^{comp}_{m,left}(E;F)$, isto é, o operador S_{RB} pertence a $\mathcal{A}$.

Suponhamos agora que B seja aproximável e $\mathcal{Q}_m$ seja P-simétrico. Da Proposição 5.16 sabemos que $\mathcal{A}^{comp}_{m,right}$ é um germe fechado de operadores, logo $\overline{\mathcal{F}(E;F)} \subseteq \mathcal{A}^{comp}_{m,right}(E;F)$. Como B é aproximável, $B \in \mathcal{A}^{comp}_{m,right}(E;F)$, isto é, S_{RB} pertence ao ideal $\mathcal{A}$. $\square$

Corolário 5.18. *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{Q}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}_m})$ um ideal Banach de polinômios m-homogêneos P-simétrico que contém os polinômios de posto finito fortemente. Sejam E, F, E_1, F_1 espaços de Banach tais que ao menos um dos espaços E^*, E_1^*, F, F_1 tem a propriedade da aproximação. Se $R \in \mathcal{L}(E;F)$ e $B \in \mathcal{L}(E_1;F_1)$ são operadores não nulos, então R e B são compactos se, e somente se, o operador*

$$S_{RB} \colon \mathcal{Q}(^mF_1;E) \longrightarrow \mathcal{Q}(^mE_1;F),\ S_{RB}(P) = R \circ P \circ B,$$

é compacto.

Demonstração. Sabemos que o ideal de operadores compactos $\mathcal{K}$ é um ideal fechado e ademais $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{dual}$. Suponhamos que R e B sejam compactos. Como ao menos um dos espaços E^*, E_1^*, F, F_1 tem a propriedade de aproximação, por [35, Proposition 10.1.3, 10.1.4] é verdade que

$$\overline{\mathcal{F}(E;F)} = \mathcal{K}(E;F) \quad \text{ou} \quad \overline{\mathcal{F}(E_1;F_1)} = \mathcal{K}(E_1;F_1).$$

Segue que $R \in \overline{\mathcal{F}(E;F)}$ ou $B \in \overline{\mathcal{F}(E_1;F_1)}$, e a compacidade do operador S_{RB} segue da Proposição 5.17. A recíproca é consequência do Teorema 5.2 e do Corolário 3.40. $\square$

Proposição 5.19. *Sejam $\mathcal{A}$ um ideal de operadores fechado e injetivo, $m \in \mathbb{N}$ e $(\mathcal{Q}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}_m})$ um ideal Banach de polinômios m-homogêneos que contém os polinômios de posto finito fortemente. Sejam também E, F, E_1, F_1 espaços de Banach, $R \in \mathcal{A}(E;F)$ e $B \in \Delta^1_m\mathcal{A}(E_1;F_1)$. Se (i) $(\mathcal{Q}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}_m})$ é injetivo e R é compacto, ou (ii) $(\mathcal{Q}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}_m})$ é super-injetivo e P-simétrico e B é compacto, então o operador*

$$S_{RB}\colon \mathcal{Q}(^mF_1;E) \longrightarrow \mathcal{Q}(^mE_1;F)\ ,\ S_{RB}(P) = R \circ P \circ B,$$

pertence a $\mathcal{A}$.

Demonstração. Denotando o ideal dos operadores aproximáveis por $\overline{\mathcal{F}}$, de [28, Proposition 19.2.3] sabemos que $\left(\overline{\mathcal{F}}\right)^{inj} = \left(\overline{\mathcal{F}}\right)^{sur} = \mathcal{K}$.

(i) Da Proposição 5.6, $\mathcal{A}^{comp}_{m,left}$ é um ideal de operadores fechado e injetivo, logo $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{A}^{comp}_{m,left}$, e portanto

$$\mathcal{K} = \left(\overline{\mathcal{F}}\right)^{inj} \subseteq \left(\mathcal{A}^{comp}_{m,left}\right)^{inj} = \mathcal{A}^{comp}_{m,left}.$$

Assim $R \in \mathcal{A}^{comp}_{m,left}(E;F)$, ou seja, S_{RB} pertence ao ideal $\mathcal{A}$.

(ii) Da Proposição 5.16, $\mathcal{A}^{comp}_{m,right}$ é um germe de ideal de operadores fechado e sobrejetivo, logo $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{A}^{comp}_{m,right}$, e portanto

$$\mathcal{K} = \left(\overline{\mathcal{F}}\right)^{sur} \subseteq \left(\mathcal{A}^{comp}_{m,right}\right)^{sur} = \mathcal{A}^{comp}_{m,right}.$$

Assim, $B \in \mathcal{A}^{comp}_{m,right}(E_1;F_1)$, ou seja, S_{RB} pertence ao ideal $\mathcal{A}$. $\square$

Corolário 5.20. *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{Q}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}_m})$ um ideal Banach de polinômios m-homogêneos que contém os polinômios de posto finito fortemente e injetivo. Sejam também E, F, E_1, F_1 espaços de Banach, $R \in \mathcal{L}(E;F)$ e $B \in \mathcal{L}(E_1;F_1)$ operadores nao nulos. Então R e B são compactos se, e somente se, o operador*

$$S_{RB}\colon \mathcal{Q}(^mF_1;E) \longrightarrow \mathcal{Q}(^mE_1;F)\ ,\ S_{RB}(P) = R \circ P \circ B,$$

é compacto.

Demonstração. Supondo R e B compactos e considerando o ideal de operadores compactos $\mathcal{K}$ na Proposição 5.19, segue que S_{RB} é compacto. A recíproca é consequência do Teoremas 5.2 e do Corolário 3.40. $\square$

Lema 5.21. *Sejam E, F, G espaços de Banach, em que E é isomorfo a F.*

(*a*) *Se E é um espaço de Asplund, então F também é um espaço de Asplund.*

(*b*) *Se E não contém uma cópia isomorfa de G, então F também não contém uma cópia isomorfa de G.*

Demonstração. (a) Lembremos que F é um espaço Asplund, se e somente se, todo subespaço separável de F tem dual separável. Suponhamos que W seja um subespaço separável de F e consideremos um isomorfismo $\Phi\colon F \longrightarrow E$. Como a imagem de um espaço separável por função contínua é também separável (veja, por exemplo, [30, Exercicio 9.1.4]), $\Phi(W)$ é um subespaço separável de E. Como E é Asplund, $[\Phi(W)]^*$ é separável. Por outro lado, como

$$\widetilde{\Phi}\colon W \longrightarrow \Phi(W),\ \widetilde{\Phi}(x) = \Phi(x),$$

é um isomorfismo, temos que $(\widetilde{\Phi})^*\colon [\Phi(W)]^* \longrightarrow W^*$ também é um isomorfismo. Pelo mesmo resultado topológico usado anteriormente segue que W^* é separável.

Omitimos a demonstração de (b), que segue facilmente por absurdo. □

Proposição 5.22. *Sejam E, F espaços de Banach. Então:*

(*a*) *Se $\left(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E\right)^*$ é um espaço Asplund e F não contém uma cópia isomorfa de ℓ_1, então $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^m E; F)$ também não contém cópia isomorfa de ℓ_1.*

(*b*) *$\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^m E; F)$ é um espaço Asplund se, e somente se, $\left(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E\right)^*$ e F são espaços Asplund.*

Demonstração. (a) De [31, Corollary 2.11] sabemos que $\mathcal{K}(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E; F)$ não contém cópia isomorfa de ℓ_1. Como os espaços $\mathcal{K}(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E; F)$ e $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^m E; F)$ são isomorfos [15, Proposition 3.2, 3.7], o resultado segue do item (b) do lema acima.

(b) Da mesma forma, de [31, Corollary 2.11] sabemos que $\mathcal{K}(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E; F)$ é um espaço de Asplund se, e somente se, $\left(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E\right)^*$ e F são espaços Asplund. Assim $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^m E; F)$ é Asplund se, e somente se, $\left(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E\right)^*$ e F são espaços Asplund. O resultado segue como no item (a). □

Relembre que $\mathcal{R}$ denota o ideal dos operadores de Rosenthal e $\mathcal{D}_\infty$ denota o ideal dos operadores de Asplund.

Corolário 5.23. *Sejam E,F, E_1, F_1 espaços de Banach tais que $\mathcal{P}(^m E_1)$ é um espaço de Asplund e o operador*

$$S_{RB}\colon \mathcal{P}(^m F_1; E) \longrightarrow \mathcal{P}(^m E_1; F)\ ,\ S_{RB}(P) = R \circ P \circ B,$$

satisfaz $S_{RB}\left(\mathcal{P}(^m F_1; E)\right) \subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^m E_1; F)$. Então:

(a) Se $R \in \mathcal{R}(E;F)$, $B \in \Delta^1_m\mathcal{R}(E_1;F_1)$ e F não contém cópia isomorfa de ℓ_1, então S_{RB} é um operador de Rosenthal.

(b) Se $R \in \mathcal{D}_\infty(E;F)$, $B \in \Delta^1_m\mathcal{D}_\infty(E_1;F_1)$ e F é um espaço de Asplund, então S_{RB} é um operador de Asplund.

Demonstração. Como $\mathcal{P}(^mE_1)$ é um espaço de Asplund isomorfo a $\left(\widehat{\otimes}^{m,s}_\pi E_1\right)^*$, pelo item (a) do lema acima decorre que $\left(\widehat{\otimes}^{m,s}_\pi E_1\right)^*$ é um espaço de Asplund. Considerando os operadores lineares e contínuos

$$u\colon \mathcal{P}(^mF_1;E) \longrightarrow \mathcal{P}_\mathcal{K}(^mE_1;F)\ ,\ u(P) = R \circ P \circ B,$$

$$i\colon \mathcal{P}_\mathcal{K}(^mE_1;F) \longrightarrow \mathcal{P}(^mE_1;F)\ ,\ i(Q) = Q,$$

e o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(^mF_1;E) \arrow[r, "S_{RB}"] \arrow[d, "u"'] & \mathcal{P}(^mE_1;F) \\ \mathcal{P}_\mathcal{K}(^mE_1;F) \arrow[ur, "i"] & \end{tikzcd}$$

concluímos que S_{RB} se fatora através de um espaço que não contém uma cópia de ℓ_1 no caso (a), e se fatora através de um espaço de Asplund no caso (b). Portanto, S_{RB} é um operador de Rosenthal no caso (a) e um operador de Asplund no caso (b). $\square$

REFERÊNCIAS

[1] R. Alencar e K. Floret, *Weak-Strong continuity of multilinear mappings and the Pelczynski-Pitt Theorem*, J. Math. Anal. Appl. **206** (1997), 532-546.

[2] T. R. Alves, *Polinômios dominados entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2011.

[3] A. Arias e J. Farmer, *On the structure of tensor products of ℓ_p-spaces*, Pacific J. Math. **175** (1996), no. 1, 13-17.

[4] R. M. Aron e M. Schottenloher, *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property*, J. Funct. Anal. **21** (1976), 7–30.

[5] R. G. Bartle, D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, Wiley, New York, 2011.

[6] B. Beauzamy, *Operators de type Rademacher entre espaces de Banach*, Seminaire Maurey-Schwartz, 1975-1976, exposes VI-VII.

[7] C. Berge, *Principles of Combinatorics*, Academic Press, 1971.

[8] S. Berrios e G. Botelho, *Approximation properties determined by operator ideals and approximability of homogeneous polynomials and holomorphic functions*, Studia Math. **208** (2012), no. 2, 97–116.

[9] S. Berrios e G. Botelho, *Ideal topologies and corresponding approximation properties.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **41** (2016), no. 1, 265–285.

[10] S. Berrios, G. Botelho, P. Rueda, *The surjective hull of a polynomial ideal*, Math. Nachr, **290** (2017), no. 5-6, 687–698.

[11] F. Blasco, *Complementation in spaces of symmetric tensor products and polynomials*, Studia Math. **123** (1997), 165-173.

[12] G. Botelho, *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note di Matematica 25. no. 1, (2005/2006), 69-102.

[13] G. Botelho, J. Campos e J. Santos, *Operator ideals related to absolutely summing and Cohen strongly summing operators*, Pacific J. Math. **287** (2017), no. 1, 1–17.

[14] G. Botelho, E. Çalişkan e G. Moraes, *The polynomial dual of an operator ideal*, Monatsh. Math. **173** (2014), 161-174.

[15] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, *On composition ideals of multilinear operators and homogeneous polynomials*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), pp. 1139-1155.

[16] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, 2a. Edição, Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

[17] G. Botelho e L. Polac, *A polynomial Hutton theorem and applications*, J. Math. Anal. Appl., **415** (2014), 294–301.

[18] G. Botelho e E. R. Torres, *Two-sided polynomial ideals on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **462** (2018), 900–914.

[19] E. Çalişkan e P. Rueda, *Compactness and s-numbers for polynomials*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. **29** (2018), 93–107.

[20] A. Defant e K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland, 1993.

[21] J. Diestel, H. Jarchow e A. Pietsch, *Operator ideals*, Handbook of the Geometry of Banach spaces, Vol. I, 437–496, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[22] S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer, 1999.

[23] A. A. Fernandes da Silva, *Extensões ideais de classes de operadores multilineares e polinômios homogêneos entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2018.

[24] K. Floret, *Natural norms on symmetric tensor product of normed spaces*, Note di Matematica. **17** (1997), 153-188 (1999).

[25] K. Floret e S. Hunfeld, *Ultrastability of ideals of homogeneous polynomials and multilinear mappings on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 1425–1435.

[26] Haskell P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing ℓ_1*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United State of America 71 (1974), 2411-2413.

[27] S. Heinrich, *Closed operator ideals and interpolation*, J. Funct. Anal. 35 (1980), 397-411.

[28] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces*, BG Teubner, Stuttgart, 1981.

[29] S. Lassalle e P. Turco, *Polynomials and holomorphic functions on $\mathcal{A}$-compact sets in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **463** (2018), no. 2, 1092-–1108.

[30] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2007 (Projeto Euclides).

[31] M. Lindström e G. Schlüchtermann, *Composition of operator ideals*, Math. Scand., **84** (1999), 284–296.

[32] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, North Holland Mathematics Studies, 1986.

[33] J. Mujica, *Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **324** (1991), 867–887.

[34] L. Nachbin, *Topology on Spaces of Holomorphic Mappings*, Springer-Verlag, 1969.

[35] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.

[36] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals (designs of a theory)*, Proceedings of the second international conference on operator algebras, ideals, and their applications in theoretical physics (Leipzig, 1983), 185–199, Teubner-Texte Math., 67, Teubner, Leipzig, 1984.

[37] L. G. Polac, *O adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2013.

[38] O. Reĭnov, *RN-sets in Banach spaces*, Funktsional Anal. i Prilozhen, **12** (1978), 80–81.

[39] R. Ryan, *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy*, Thesis - Trinity College, 1980.

[40] R. Ryan, *Introduction to tensor products of Banach spaces*, Springer, London, 2002.

[41] C. Stegall, *The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces. II*, Trans. Amer. Math. Soc. 264(1981), 507-519.

[42] L. A. Torres, *Tipos de holomorfia em espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2014.

[43] E. R. Torres, *Hiper-ideais de Operadores multilineares e polinômios homogêneos em espaços de Banach*, Tese de doutorado, USP, 2015.

[44] P. Turco, *$\mathcal{A}$-compact mappings*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **110** (2016), 863-–880.

APÊNDICE

Conforme já dissemos, provaremos neste apêndice a associatividade do produto tensorial projetivo e uma espécie de associatividade parcial do produto tensorial projetivo simétrico. Este último resultado foi usado durante a tese, e como não o encontramos na literatura, optamos por demonstrá-lo neste apêndice.

.1 A associatividade do produto tensorial projetivo

Proposição A.1. *Sejam X, Y e Z espaços normados. Então os espaços $\left(X\widehat{\otimes}_\pi Y\right)\widehat{\otimes}_\pi Z$, $X\widehat{\otimes}_\pi Y\widehat{\otimes}_\pi Z$ e $X\widehat{\otimes}_\pi\left(Y\widehat{\otimes}_\pi Z\right)$ são isomorfos isometricamente por meio de isomorfismos que colocam em correspondência os tensores elementares $(x\otimes y)\otimes z$, $x\otimes y\otimes z$ e $x\otimes(y\otimes z)$.*

Demonstração. De [40, Exercise 2.3] sabemos que os espaços $\left(X\widehat{\otimes}_\pi Y\right)\widehat{\otimes}_\pi Z$ e $X\widehat{\otimes}_\pi\left(Y\widehat{\otimes}_\pi Z\right)$ são isomorfos isometricamente por meio de um isomorfismo que preserva os tensores elementares. Portanto só resta mostrar o mesmo para os espaços $\left(X\widehat{\otimes}_\pi Y\right)\widehat{\otimes}_\pi Z$ e $X\widehat{\otimes}_\pi Y\widehat{\otimes}_\pi Z$. Para isso, fixamos um vetor $z\in Z$ e definimos

$$A^z\colon X\times Y\longrightarrow X\widehat{\otimes}_\pi Y\widehat{\otimes}_\pi Z\ ,\ A^z(x,y)=x\otimes y\otimes z.$$

É claro que A^z está bem definida e é um operador bilinear, cuja continuidade segue de

$$\|A^z(x,y)\|_\pi=\|x\otimes y\otimes z\|_\pi=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\|z\|$$

para todos $x\in X$ e $y\in Y$. Usando a propriedade universal do produto tensorial projetivo (Proposição 1.52), existe um único operador linear contínuo $A_L^z\colon X\widehat{\otimes}_\pi Y\longrightarrow X\widehat{\otimes}_\pi Y\widehat{\otimes}_\pi Z$ tal que $A_L^z(x\otimes y)=x\otimes y\otimes z$ para todos $x\in X$ e $y\in Y$. Agora podemos definir

$$B\colon\ \left(X\widehat{\otimes}_\pi Y\right)\times Z\longrightarrow X\widehat{\otimes}_\pi Y\widehat{\otimes}_\pi Z\ ,\ B(w,z)=A_L^z(w).$$

A linearidade de B na primeira coordenada segue da linearidade de A_L^z para cada z fixado. Uma conta elementar mostra que $A^{z_1+\lambda z_2} = A^{z_1} + \lambda A^{z_2}$, e daí segue, novamente pela Proposição 1.52, que $(A^{z_1+\lambda z_2})_L = A_L^{z_1} + \lambda A_L^{z_2}$. Disso decorre a linearidade de B na segunda coordenada, e portanto B é um operador bilinear. Para verificar sua continuidade, dados $w \in X\widehat{\otimes}_\pi Y$ e $z \in Z$, para todo $\varepsilon > 0$ por [40, Proposition 2.8] existem sequências $(x_i)_i$ em X e $(y_i)_i$ em Y tais que

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \cdot \|y_i\| < \|w\|_\pi + \varepsilon.$$

Como A_L^z é um operador linear contínuo, temos

$$\begin{aligned}\|B(w,z)\|_\pi = \|A_L^z(w)\|_\pi &= \left\| A_L^z \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \right) \right\|_\pi = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} A_L^z(x_i \otimes y_i) \right\|_\pi \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|A_L^z(x_i \otimes y_i)\|_\pi = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i \otimes y_i \otimes z\|_\pi = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \cdot \|y_i\| \cdot \|z\| \\ &= \|z\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \cdot \|y_i\| \right) < \|z\|(\|w\|_\pi + \varepsilon).\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ obtemos $\|B(w,z)\|_\pi \leqslant \|z\| \cdot \|w\|_\pi$, o que prova a continuidade de B. Pela Proposição 1.52 existe um único operador linear contínuo

$$B_L : \left(X\widehat{\otimes}_\pi Y\right)\widehat{\otimes}_\pi Z \longrightarrow X\widehat{\otimes}_\pi Y\widehat{\otimes}_\pi Z \;\text{ tal que } B_L(w \otimes z) = A_L^z(w).$$

Por outro lado, é imediato que

$$C\colon X \times Y \times Z \longrightarrow \left(X\widehat{\otimes}_\pi Y\right)\widehat{\otimes}_\pi Z \;,\; C(x,y,z) = (x \otimes y) \otimes z,$$

é um operador trilinear cuja continuidade segue de

$$\|C(x,y,z)\|_\pi = \|(x \otimes y) \otimes z\|_\pi = \|x \otimes y\|_\pi \cdot \|z\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \|z\|.$$

Logo existe um único operador linear contínuo

$$C_L\colon X\widehat{\otimes}_\pi Y\widehat{\otimes}_\pi Z \longrightarrow \left(X\widehat{\otimes}_\pi Y\right)\widehat{\otimes}_\pi Z \;\text{ tal que } C_L(x \otimes y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z.$$

Para todos $x \in X, y \in Y$ e $z \in Z$,

$$(B_L \circ C_L)(x \otimes y \otimes z) = B_L((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes y \otimes z$$

e

$$(C_L \circ B_L)((x \otimes y) \otimes z) = C_L(x \otimes y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z.$$

Usando a linearidade e continuidade dos operadores $B_L \circ C_L$ e $C_L \circ B_L$ segue que

$$B_L \circ C_L = id_{X\widehat{\otimes}_\pi Y\widehat{\otimes}_\pi Z} \;\text{ e }\; C_L \circ B_L = id_{\left(X\widehat{\otimes}_\pi Y\right)\widehat{\otimes}_\pi Z}.$$

Isso mostra que $C_L = (B_L)^{-1}$, e, em particular, B_L é um isomorfismo. Para provar que é uma isometria, lembremos que $\|B_L\| = \|B\| \leqslant 1$, $\|C_L\| = \|C\| \leqslant 1$. Para cada $\theta \in \left(X\widehat{\otimes}_\pi Y\right)\widehat{\otimes}_\pi Z$ existe um único $\xi \in X\widehat{\otimes}_\pi Y\widehat{\otimes}_\pi Z$ tal que $\theta = C_L(\xi)$, e assim

$$\|B_L(\theta)\|_\pi \leqslant \|\theta\|_\pi = \|C_L(\xi)\|_\pi \leqslant \|\xi\|_\pi = \|B_L(\theta)\|_\pi.$$

□

Faremos agora uma adaptação da demonstração acima para o caso do produto tensorial projetivo de n espaços. Fizemos o caso $n = 3$ primeiro para que o caso geral fique mais fácil de ser compreendido.

Proposição A.2. *Dados $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \dots X_n$, X_{n+1} espaços normados, existe um isomorfismo isométrico*

$$R : X_1\widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_{n+1} \longrightarrow \left(X_1\widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n\right)\widehat{\otimes}_\pi X_{n+1},$$

tal que, para todos $x_j \in X_j$, $j = 1, \dots, n+1$,

$$R(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \otimes x_{n+1}.$$

Demonstração. Evitaremos repetir os detalhes que são adaptações diretas da demonstração anterior. Para cada $z \in X_{n+1}$ fixado, definimos

$$A^z \colon X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_1\widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n\widehat{\otimes}_\pi X_{n+1}\ ,\ A^z(x_1, \dots, x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes z.$$

Assim como antes, A^z é um operador multilinear contínuo e

$$\|A^z(x_1, \dots x_n)\|_\pi = \|x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes z\|_\pi = \|x_1\| \cdots \|x_n\| \cdot \|z\|.$$

Existe um único operador linear contínuo

$$A^z_L \colon X_1\widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n \longrightarrow X_1\widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_{n+1}$$

tal que

$$A^z_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes z.$$

Também como antes, o operador

$$B : \left(X\widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n\right) \times X_{n+1} \longrightarrow X_1\widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_{n+1};\ B(w, z) = A^z_L(w),$$

é bilinear continuo e

$$\|B(w, z)\|_\pi \leqslant \|z\| \cdot \|w\|_\pi.$$

Essa desigualdade segue, como antes, do fato de que para todo $\varepsilon > 0$, existem sequências $(x^j_i)_i$ em X_j, $j = 1, \dots, n$, tais que

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} x^1_i \otimes \cdots \otimes x^n_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|x^1_i\| \cdots \|x^n_i\| < \|w\|_\pi + \varepsilon.$$

Existe então um único operador linear contínuo

$$B_L\colon \left(X_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi X_n\right)\widehat{\otimes}_\pi X_{n+1} \longrightarrow X_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi X_{n+1} \text{ tal que } B_L(w\otimes z) = A_L^z(w).$$

E o operador

$$C\colon X_1\times\cdots X_n\times X_{n+1} \longrightarrow \left(X_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi X_n\right)\widehat{\otimes}_\pi X_{n+1},$$

$$C(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = (x_1\otimes\cdots\otimes x_n)\otimes x_{n+1},$$

é multilinear contínuo e

$$\|C(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})\|_\pi = \|x_1\|\cdots\|x_n\|\cdot\|x_{n+1}\|.$$

Logo existe um único operador linear contínuo

$$R := C_L\colon X_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi X_{n+1} \longrightarrow \left(X_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi X_n\right)\widehat{\otimes}_\pi X_{n+1}$$

tal que

$$C_L(x_1\otimes\cdots\otimes x_n\otimes x_{n+1}) = (x_1\otimes\cdots\otimes x_n)\otimes x_{n+1}.$$

Contas idênticas às da demonstração anterior provam que C_L é o operador inverso de B_L e que B_L é uma isometria. $\square$

Da mesma forma é possível mostrar que

Proposição A.3. *Dados $n\in\mathbb{N}$, $X_1,\ldots X_n$, X_{n+1} espaços normados, existe um isomorfismo isométrico*

$$L : X_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi X_{n+1} \longrightarrow X_1\widehat{\otimes}_\pi\left(X_2\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi X_{n+1}\right),$$

tal que $L(x_1\otimes\cdots\otimes x_{n+1}) = x_1\otimes(x_2\otimes\cdots\otimes x_{n+1})$.

Lema A.4. *Sejam $m,n\in\mathbb{N}$, X, Y, $Z_1,\ldots,Z_n$, $W_1,\ldots,W_m$ espaços normados. Se $u\colon X\longrightarrow Y$ é um isomorfismo, então existe um isomorfismo*

$$M(u) : W_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi W_m\widehat{\otimes}_\pi X\widehat{\otimes}_\pi Z_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi Z_n \longrightarrow W_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi W_m\widehat{\otimes}_\pi Y\widehat{\otimes}_\pi Z_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi Z_n,$$

tal que $M(u)(w_1\otimes\cdots\otimes w_m\otimes x\otimes z_1\otimes\cdots\otimes z_n) = w_1\otimes\cdots\otimes w_m\otimes u(x)\otimes z_1\otimes\cdots\otimes z_n$.

Demonstração. Definindo

$$A\colon W_1\times\cdots\times W_m\times X\times Z_1\times\cdots\times Z_n \longrightarrow W_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi W_m\widehat{\otimes}_\pi Y\widehat{\otimes}_\pi Z_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi Z_n,$$

$$A(w_1,\ldots,w_m,x,z_1,\ldots,z_n) = w_1\otimes\cdots\otimes w_m\otimes u(x)\otimes z_1\otimes\ldots\otimes z_n,$$

obtemos um operador multilinear contínuo, e portanto existe um único operador linear contínuo

$$A_L\colon W_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi W_m\widehat{\otimes}_\pi X\widehat{\otimes}_\pi Z_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi Z_n \longrightarrow W_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi W_m\widehat{\otimes}_\pi Y\widehat{\otimes}_\pi Z_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi Z_n$$

tal que $A_L(w_1\otimes\cdots\otimes w_m\otimes x\otimes z_1\otimes\cdots\otimes z_n) = w_1\otimes\cdots\otimes w_m\otimes u(x)\otimes z_1\otimes\ldots\otimes z_n$. Analogamente, para a operador multilinear continuo

$$B\colon W_1\times\cdots\times W_m\times Y\times Z_1\times\cdots\times Z_n \longrightarrow W_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi W_m\widehat{\otimes}_\pi X\widehat{\otimes}_\pi Z_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi Z_n,$$

$$B(w_1,\ldots,w_m,y,z_1,\ldots,z_n) = w_1\otimes\cdots\otimes w_m\otimes u^{-1}(y)\otimes z_1\otimes\ldots\otimes z_n,$$

existe um único operador linear contínuo

$$B_L\colon W_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi W_m\widehat{\otimes}_\pi Y\widehat{\otimes}_\pi Z_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi Z_n \longrightarrow W_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi W_m\widehat{\otimes}_\pi X\widehat{\otimes}_\pi Z_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi Z_n$$

tal que $B_L(w_1\otimes\cdots\otimes w_m\otimes y\otimes z_1\otimes\cdots\otimes z_n) = w_1\otimes\cdots\otimes w_m\otimes u^{-1}(y)\otimes z_1\otimes\ldots\otimes z_n$. Da linearidade e da continuidade desses operadores segue que $A_L\circ B_L = id_{W_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi W_m\widehat{\otimes}_\pi Y\widehat{\otimes}_\pi Z_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi Z_n}$ e $B_L\circ A_L = id_{W_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi W_m\widehat{\otimes}_\pi X\widehat{\otimes}_\pi Z_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi Z_n}$. Isso prova que um é o isomorfismo inverso do outro. □

Por fim obtemos a associatividade do produto tensorial projetivo na forma em que necessitaremos.

Proposição A.5. *Sejam m, $k\in\mathbb{N}$ e X um espaço normado. Então existe um isomorfismo isométrico*

$$J_{k,m}\colon \widehat{\otimes}_\pi^{km}X \longrightarrow \widehat{\otimes}_\pi^{k}\left(\widehat{\otimes}_\pi^{m}X\right)$$

tal que

$$J_{k,m}(x_1\otimes\cdots\otimes x_{km}) = (x_1\otimes\cdots\otimes x_m)\otimes\cdots\otimes(x_{(k-1)m+1}\otimes\cdots\otimes x_{km})$$

para todos $x_j\in X, j=1,\ldots,km$.

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre k. Para $k=1$ a proposição é trivialmente satisfeita. Suponhamos que o resultado seja válido para $k=n$. A seguinte cadeia de isomorfismos isométricos, em que R designa o isomorfismo da Proposição A.2, $M(\cdot)$ designa o isomorfismo do Lema A.4 e P.A.1 designa o isomorfismo da Proposição A.1, comprova o resultado para o caso $k=n+1$:

$$\widehat{\otimes}_\pi^{km}X \xrightarrow{R} \left(\widehat{\otimes}_\pi^{km-1}X\right)\widehat{\otimes}_\pi X \xrightarrow{M(R)} \left[\left(\widehat{\otimes}_\pi^{km-2}X\right)\widehat{\otimes}_\pi X\right]\widehat{\otimes}_\pi X \xrightarrow{P.A.1}$$

$$\longrightarrow \left(\widehat{\otimes}_\pi^{km-2}X\right)\widehat{\otimes}_\pi\left(\widehat{\otimes}_\pi^{2}X\right) \xrightarrow{M(R)} \left[\left(\widehat{\otimes}_\pi^{km-3}X\right)\widehat{\otimes}_\pi X\right]\widehat{\otimes}_\pi\left(\widehat{\otimes}_\pi^{2}X\right) \xrightarrow{P.A.1}.$$

$$\longrightarrow \left(\widehat{\otimes}_\pi^{km-3}X\right)\widehat{\otimes}_\pi\left[X\widehat{\otimes}_\pi\left(\widehat{\otimes}_\pi^{2}X\right)\right] \xrightarrow{M(L^{-1})} \left(\widehat{\otimes}_\pi^{km-3}X\right)\widehat{\otimes}_\pi\left(\widehat{\otimes}_\pi^{3}X\right) \xrightarrow{M(R)}$$

$$\longrightarrow \left[\left(\widehat{\otimes}_\pi^{km-4} X\right)\widehat{\otimes}_\pi X\right]\widehat{\otimes}_\pi \left(\widehat{\otimes}_\pi^{3} X\right) \xrightarrow{P.A.1} \left(\widehat{\otimes}_\pi^{km-4} X\right)\widehat{\otimes}_\pi \left[X\widehat{\otimes}_\pi(\widehat{\otimes}_\pi^{3} X)\right] \xrightarrow{M(L^{-1})}$$

$$\longrightarrow \left(\widehat{\otimes}_\pi^{km-4} X\right)\widehat{\otimes}_\pi \left(\widehat{\otimes}_\pi^{4} X\right) \xrightarrow{M(R)} \cdots \xrightarrow{M(L^{-1})} \left(\widehat{\otimes}_\pi^{(k-1)m} X\right)\widehat{\otimes}_\pi \left(\widehat{\otimes}_\pi^{m} X\right) \xrightarrow{M(J_{k-1,m})}$$

$$\longrightarrow \left[\widehat{\otimes}_\pi^{k-1}\left(\widehat{\otimes}_\pi^{m} X\right)\right]\widehat{\otimes}_\pi \left(\widehat{\otimes}_\pi^{m} X\right) \xrightarrow{R^{-1}} \widehat{\otimes}_\pi^{k}\left(\widehat{\otimes}_\pi^{m} X\right).$$

□

.2 A associatividade da norma projetiva no produto tensorial simétrico

Nesta seção provaremos o resultado que usamos na Seção 3.4. Precisamos de dois lemas preparatórios. Por $\widehat{E}$ denotamos o (um) completamento do espaço normado E.

Lema A.6. *Seja E um subespaço vetorial do espaço normado F. Então:*

(*i*) *$\widehat{F}$ contém um subespaço isomorfo isometricamente a $\widehat{E}$.*

(*ii*) *Se E é denso em F, então E é denso em $\widehat{F}$.*

(*iii*) *Se F é um espaço de Banach, então $\widehat{E}$ é isomorfo isometricamente ao fecho de E em F.*

Demonstração. (i) Se X é um espaço normado, então $\overline{J_X(X)}$ é um completamento de X. Como $E \subseteq F$, então $J_F(E) \subseteq J_F(F)$. Logo $\widehat{E} \equiv \overline{J_F(E)} \subseteq \overline{J_F(F)} \equiv \widehat{F}$, em que $\equiv$ significa ser isometricamente isomorfo.

(ii) Isso é imediato pois E é denso em F e F é isomorfo isometricamente a um subespaço denso de $\widehat{F}$.

(iii) Como F é Banach, o fecho de E em F é um espaço de Banach no qual E é denso. O resultado segue. □

Lema A.7. *Seja Z um subespaço vetorial do espaço normado X. Se Z é denso em X, então $Z \otimes_\pi^s Z$ é um subespaço denso de $X \otimes_\pi^s X$.*

Demonstração. De [20, Proposition 3.9], $Z \otimes_\pi Z$ é um subespaço vetorial normado de $X \otimes_\pi X$. Por outro lado, $Z \otimes_\pi^s Z$ é um subespaço normado de $Z \otimes_\pi Z$ contido em $X \otimes_\pi^s X$. Portanto $Z \otimes_\pi^s Z$ é um subespaço normado de $X \otimes_\pi^s X$.

A seguir mostraremos que $\overline{(Z \otimes_\pi^s Z)}^\pi = X \otimes_\pi^s X$. Seja $x \otimes x \in X \otimes_\pi^s X$, onde $x \in X$. Como $\overline{Z} = X$ existe uma sequência $(x_n)_n \subseteq Z$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$(x_n \otimes x_n) \in Z \otimes_\pi^s Z$ e $(x_n \otimes x_n) \longrightarrow x \otimes x$, pois

$$\begin{aligned}\pi(x_n \otimes x_n - x \otimes x) &= \pi(x_n \otimes x_n - x \otimes x - x \otimes x_n + x \otimes x_n)\\ &= \pi((x_n - x) \otimes x_n + x \otimes (x_n - x))\\ &\leqslant \pi((x_n - x) \otimes x_n) + \pi(x \otimes (x_n - x))\\ &= \|x_n - x\| \cdot \|x_n\| + \|x\| \cdot \|x_n - x\|.\end{aligned}$$

Portanto, $x \otimes x \in \overline{(Z \otimes_\pi^s Z)}^\pi$ para todo $x \in X$. Como $\overline{(Z \otimes_\pi^s Z)}^\pi$ é um subespaço fechado e todo tensor $\theta \in X \otimes_\pi^s X$ tem uma representação $\theta = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i \otimes x_i)$, segue que $\theta \in \overline{(Z \otimes_\pi^s Z)}^\pi$.
□

Proposição A.8. *Sejam $m, k \in \mathbb{N}$ e E um espaço de Banach. Existe um operador*

$$I_{k,m} \colon \widehat{\otimes}_\pi^{km,s} E \longrightarrow \widehat{\otimes}_\pi^{k,s} \left(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E\right),$$

que é um isomorfismo sobre sua imagem e

$$I_{k,m}(\otimes^{km} x) = \otimes^k (\otimes^m x) \text{ para todo } x \in E.$$

Demonstração. Seja $J_{k,m} \colon \widehat{\otimes}_\pi^{km} E \longrightarrow \widehat{\otimes}_\pi^{k} \left(\widehat{\otimes}_\pi^{m} E\right)$ o isomorfismo da Proposição A.5. Provemos que

$$\overline{\otimes_\pi^{k,s} \left(\otimes_\pi^{m,s} E\right)}^{\widehat{\otimes}_\pi^k (\widehat{\otimes}_\pi^m E)} = \widehat{\otimes}_\pi^{k,s} \left(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E\right). \tag{A.1}$$

De fato, sabemos que $\otimes_\pi^{m,s} E$ é denso em $\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E$, portanto do Lema A.7 segue que

$$\overline{\otimes_\pi^{k,s} \left(\otimes_\pi^{m,s} E\right)}^{\otimes_\pi^k (\widehat{\otimes}_\pi^m E)} = \otimes_\pi^{k,s} \left(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E\right).$$

Agora (A.1) segue do Lema A.6(ii).

Vejamos que

$$J_{k,m}\left(\widehat{\otimes}_\pi^{km,s} E\right) \subseteq \widehat{\otimes}_\pi^{k,s} \left(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E\right). \tag{A.2}$$

Como $\otimes_\pi^{km,s} E \subseteq \otimes_\pi^{km} E \subseteq \widehat{\otimes}_\pi^{km} E$, do Lema A.6(iii) segue que

$$\widehat{\otimes}_\pi^{km,s} E = \overline{\otimes_\pi^{km,s} E}^{\widehat{\otimes}_\pi^{km} E}. \tag{A.3}$$

E para todo $x \in E$, $J_{k,m}(\otimes^{km} x) = \otimes^k (\otimes^m x) \in \otimes_\pi^{k,s} (\otimes_\pi^{m,s} E)$, e por linearidade concluímos que

$$J_{k,m}\left(\otimes_\pi^{km,s} E\right) \subseteq \otimes_\pi^{k,s} \left(\otimes_\pi^{m,s} E\right). \tag{A.4}$$

Usando a continuidade de $J_{k,m}$ temos

$$\begin{aligned}J_{k,m}\left(\widehat{\otimes}_\pi^{km,s} E\right) &\overset{(A.3)}{=} J_{k,m}\left(\overline{\otimes_\pi^{km,s} E}^{\widehat{\otimes}_\pi^{km} E}\right) \subseteq \overline{J_{k,m}\left(\otimes_\pi^{km,s} E\right)}^{\widehat{\otimes}_\pi^{k} (\widehat{\otimes}_\pi^{m} E)}\\ &\overset{(A.4)}{\subseteq} \overline{\otimes_\pi^{k,s} \left(\otimes_\pi^{m,s} E\right)}^{\widehat{\otimes}_\pi^{k} (\widehat{\otimes}_\pi^{m} E)} \overset{(A.1)}{=} \widehat{\otimes}_\pi^{k,s} \left(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E\right).\end{aligned}$$

Finalmente, uma vez estabelecida (A.2) basta definir $I_{k,m} := J_{k,m}\big|_{\widehat{\otimes}_\pi^{km,s} E}$. □