UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

BLAS MELENDEZ CARABALLO

# Pré-duais de espaços de funções holomorfas e dinâmica linear dos operadores de convolução sobre certos espaços de funções inteiras

Campinas

2019

Blas Melendez Caraballo

# Pré-duais de espaços de funções holomorfas e dinâmica linear dos operadores de convolução sobre certos espaços de funções inteiras

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Mahendra Prasad Panthee

Coorientador: Vinícius Vieira Fávaro

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Blas Melendez Caraballo e orientada pelo Prof. Dr. Mahendra Prasad Panthee.

Campinas

2019

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** CNPq, 155045/2016-4; CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M483p

Melendez Caraballo, Blas, 1988-
Pré-duais de espaços de funções holomorfas e dinâmica linear dos operadores de convolução sobre certos espaços de funcões inteiras / Blas Melendez Caraballo. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Mahendra Prasad Panthee.
Coorientador: Vinícius Vieira Fávaro.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Espaços localmente convexos. 2. Funções holomorfas. 3. Operadores de convolução. 4. Operadores hipercíclicos. 5. Li-Yorke, Operadores de. I. Panthee, Mahendra Prasad, 1966-. II. Fávaro, Vinícius Vieira. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Preduals of spaces of holomorphic functions and linear dynamics of convolution operators on certain spaces of entire functions
**Palavras-chave em inglês:**
Locally convex spaces
Holomorphic functions
Convolution operators
Hypercyclic operators
Li-Yorke operators
**Área de concentração:** Matemática
**Titulação:** Doutor em Matemática
**Banca examinadora:**
Vinícius Vieira Fávaro [Coorientador]
Geraldo Márcio de Azevedo Botelho
Sahibzada Waleed Noor
Nilson da Costa Bernardes Junior
Ariosvaldo Marques Jatobá
**Data de defesa:** 17-01-2019
**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Tese de Doutorado defendida em 17 de janeiro de 2019 e aprovada**

**pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). VINÍCIUS VIEIRA FÁVARO**

**Prof(a). Dr(a). GERALDO MÁRCIO DE AZEVEDO BOTELHO**

**Prof(a). Dr(a). SAHIBZADA WALEED NOOR**

**Prof(a). Dr(a). NILSON DA COSTA BERNARDES JUNIOR**

**Prof(a). Dr(a). ARIOSVALDO MARQUES JATOBÁ**

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*À memória dos meus pais Blas e Delfina...*

# Agradecimentos

Primeiro de tudo, gostaria de agradecer a Jeová Deus por me encorajar, guiar e me proteger nesta longa jornada. Sabia que não ia ser fácil, mas ele colocou ao meu lado pessoas valiosas que me ajudaram a seguir em frente com meus objetivos e não desanimar com as dificuldades. Também, agradeço a Ele por manter a minha Filha e Esposa comigo.

Agradeço à minha Filha Isabella e Esposa Dargin, com quem passamos por muitos momentos de felicidades, e que apesar das dificuldades, elas sempre estiveram ali para me acalmar e dar amor e esperança. Ainda, quanto à família, quero agradecer aos meus irmãos Ronald e Javier, cunhados Reynaldo, Karen e sogra Ivis, pela motivação para continuar meus estudos.

Agradeço ao professor Jorge Mujica (Q.E.P.D), que para mim será um exemplo de vida, que foi uma boa pessoa, um excelente professor e orientador. Agradeço a Deus por me conceder a honra de ser um de seus alunos. Ele orientou minha dissertação de mestrado e dirigiu este projeto durante os primeiros dois anos de trabalho, cujas contribuições enriqueceram não apenas esses trabalhos mas também a minha vida acadêmica.

Agradeço ao professor Vinícius Vieira Fávaro, que, nesses momentos de angústias, me ofereceu a oportunidade de continuar com a minha pesquisa e encaminhou o rumo deste projeto. Embora nossa forma de trabalho, na sua maioria, tivesse sido através de ferramentas tecnológicas, só posso dizer com muita satisfação que trabalhamos em equipe e conseguimos os nossos objetivos. Também, agradeço a ele por todas as oportunidades acadêmicas que me proporcionou durante esses dois anos trabalhados, em que pude aprimorar o meu conhecimento, fortalecer minha formação acadêmica e crescer profissionalmente.

Agradeço ao professor Mahendra Prasad, que não teve reparo em aceitar ser meu orientador depois do falecimento do professor Mujica, mesmo ele não tendo participado na parte matemática deste trabalho, ele tem sido muito importante na gestão dentro do programa de matemática.

Agradeço aos professores da banca examinadora, Geraldo Botelho, Sahibzada Waleed, Nilson Bernardes e Ariosvaldo Jatobá por suas acertadas sugestões e críticas construtivas. As quais, ajudaram a organizar e escrever melhor este trabalho.

Agradeço aos professores do PPG, em especial àqueles que me passaram conhecimento desde o mestrado, os quais foram, são e serão muito importantes para mim e para a minha vida profissional, assim como também agradeço aos funcionários, que fazem com que tudo funcione da melhor maneira possível.

Agradeço a todos os colegas de doutorado, alguns desde o mestrado, que vivenciamos momentos de estudo e tensão, como a memorável prova de qualificação, no decorrer desta difícil jornada. Em especial, Osmar, Valter, Leonardo, Deimer e Thiago. Aos colegas do IMECC, especialmente, Sergio Pérez, Sergio Córdoba, Robert, Fabián, Juan, Miquéias, Carlos, Mario, Jaime e Hugo, por seu apoio incondicional durante este tempo.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-Brasil (CNPq), cujo apoio financeiro tornou possível a realização e apresentação deste trabalho em eventos e congressos.

Para terminar, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

# Resumo

Neste trabalho nós investigamos condições necessárias e suficientes para que o pré-dual do espaço das funções holomorfas sobre espaços de Banach de dimensão infinita possua a propriedade de aproximação. Também, exploramos diversas noções da dinâmica linear para os operadores de convolução sobre algumas classes importantes de espaços de funções inteiras.

**Palavras-chave**: Espaços localmente convexos, funções holomorfas, operadores de convolução, operadores hipercíclicos e frequentemente hipercíclicos, operadores Li–Yorke caóticos.

# Abstract

In this work we investigate necessary and sufficient conditions for the predual of the space of holomorphic functions on infinite dimensional Banach spaces to have the approximation property. Also, we explore several notions of linear dynamics for convolution operators on some important classes of spaces of entire functions.

**Keywords**: Locally convex spaces, holomorphic functions, convolution operators, hypercyclic and frequently hypercyclic operators, Li–Yorke chaotic operators.

# Lista de símbolos

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$: | Conjunto dos números inteiros positivos; |
| $\mathbb{N}_0$: | $\mathbb{N} \cup \{0\}$; |
| $\mathbb{R}$: | Conjunto dos números reais; |
| $\mathbb{R}_+$: | Conjunto dos números reais positivos; |
| $\mathbb{C}$: | Conjunto dos números complexos; |
| $\mathbb{K}$: | Conjunto dos números reais ou complexos; |
| $\mathbb{T}$: | Esfera unitária em $\mathbb{C}$; |
| $\mathbb{D}$: | Disco unitário e aberto em $\mathbb{C}$; |
| $\mathbb{C}^n$: | Produto de $n$-cópias de $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$; |
| $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$: | Espaço vetorial de todas as sequências reais ou complexas; |
| $\pi_n$: | Projeção canônica de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sobre suas primeiras $n$ coordenadas; |
| $J_n$: | Inclusão canônica de $\mathbb{K}^n$ em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$; |
| $\mathcal{L}(E;F)$: | Espaço vetorial de todas as aplicações lineares e contínuas de $E$ em $F$; |
| $E'$: | O espaço $\mathcal{L}(E;\mathbb{C})$; |
| $\mathcal{L}_c(E;F)$: | O espaço $\mathcal{L}(E;F)$ com a topologia da convergência uniforme sobre todos os conjuntos convexos, equilibrados e compactos de $E$; |
| $E'_c$: | O espaço $\mathcal{L}_c(E;\mathbb{C})$; |
| $sc(E)$: | O conjunto das seminormas contínuas em $E$; |
| $\mathcal{H}(U;F)$: | Espaço vetorial de todas as funções holomorfas de $U$ em $F$; |
| $\mathcal{H}(U)$: | O espaço $\mathcal{H}(U;\mathbb{C})$; |
| $G(U)$: | O espaço pré-dual de $\mathcal{H}(U)$; |

| | |
|---|---|
| $\tau_0$: | Topologia compacto-aberta em $\mathcal{H}(U;F)$; |
| $\tau_\delta$: | Topologia em $\mathcal{H}(U;F)$, gerada pelas coberturas abertas de $U$ ; |
| $\mathcal{P}(^nE;F)$: | Espaço vetorial de todos os polinômios $n$-homogêneos e contínuos de $E$ em $F$; |
| $\mathcal{P}(^nE)$: | O espaço $\mathcal{P}(^nE;\mathbb{C})$; |
| $\mathcal{P}_f(^nE;F)$: | Subespaço de $\mathcal{P}(^nE;F)$ dos polinômios de tipo finito; |
| $\mathcal{P}_f(^nE)$: | O espaço $\mathcal{P}_f(^nE;\mathbb{C})$; |
| $x^my^n$: | $(\underbrace{x,\ldots,x}_{m-\text{vezes}},\underbrace{y,\ldots,y}_{n-\text{vezes}})$ para cada $m,n\in\mathbb{N}$; |
| $d^nf(a)$: | $n$-ésima derivada de Fréchet de $f\in\mathcal{H}(U;F)$ em $a\in U$; |
| $\widehat{d}^nf(a)$: | Polinômio $n$-homogêneo e contínuo associado a $d^nf(a)$; |
| $\Theta$: | Tipo de holomorfia; |
| $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$: | Subespaço vetorial de $\mathcal{H}(E;F)$ das funções $\Theta$-tipo limitadas; |
| $Exp^k_{\Theta,0,A}(E)$: | Subespaço vetorial de $\mathcal{H}(E)$ das funções de ordem $k$ e $\Theta$-tipo exponencial menor ou igual que $A$; |
| $\mathcal{F}$: | Transformada de Fourier-Borel sobre $[Exp^k_{\Theta,0,A}(E)]'$, com $k\geqslant 1$; |
| $\text{proj}_{i\in I}E_i$: | Limite projetivo da família $\{E_i : i\in I\}$; |
| $\text{ind}_{i\in I}E_i$: | Limite indutivo da família $\{E_i : i\in I\}$; |
| $\text{orb}_T(V)$: | Órbita de $V$ sob $T\in\mathcal{L}(E;E)$, em que $V\subset E$; |
| $\text{orb}(x,T)$: | Órbita de $x$ sob $T\in\mathcal{L}(E;E)$, em que $x\in E$; |

# Sumário

# Introdução

Seja $E$ um espaço localmente convexo complexo de Hausdorff e com dimensão infinita. Um dos principais objetos de estudo da holomorfia em dimensão infinita é o espaço $\mathcal{H}(U)$ de todas as funções holomorfas complexas definidas em um aberto $U \subset E$, assim como as diversas topologias localmente convexas definidas sobre $\mathcal{H}(U)$. Dentre as topologias mais usuais encontramos a topologia compacto-aberta $\tau_0$ e a topologia bornológica $\tau_\delta$. Com respeito a essas topologias, têm sido exploradas inúmeras propriedades topológicas para o espaço $\mathcal{H}(U)$, sendo a propriedade da aproximação a que recebe mais atenção e em contínuo estudo por vários pesquisadores da área. Destacam-se trabalhos notáveis, tais como,[3, 31, 32, 33]. Tal propriedade afirma que, sob condições adequadas, operadores lineares contínuos podem ser aproximados por operadores contínuos de posto finito. A propriedade de aproximação no espaço $\mathcal{H}(U)$ foi inicialmente estudada por Aron e Schottenloher em [3] onde provaram, entre outras coisas, o seguinte resultado importante:

Se $U$ é subconjunto aberto e equilibrado de um espaço de Banach $E$, então $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ tem a propriedade de aproximação se e somente se $E$ tem a propriedade de aproximação.

Eles chegaram a esse resultado usando propriedades derivadas da teoria do espaço $\epsilon$-produto de Laurent Schwartz. Essa metodologia era bastante comum para estudar a propriedade de aproximação em espaços de funções holomorfas a valores complexos ou até mesmo vetoriais. Em 1984, Mazet [59, Definition 3.4 – Theorem 3.10] construiu o pré-dual $G(U)$ do espaço $\mathcal{H}(U)$ fornecendo assim uma outra técnica (ou maneira) para estudar propriedades algébricas em $\mathcal{H}(U)$ através do isomorfismo algébrico entre $\mathcal{H}(U)$ e o dual topológico $G(U)'$ de $G(U)$. Anos seguintes ao trabalho de Mazet, Mujica e Nachbin [61, Theorem 2.1] apresentaram mais uma demonstração do Teorema de Mazet dando outra representação ao espaço $G(U)$ e obtendo como melhoria notória o isomorfismo topológico entre $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ e $G(U)'$ munido com uma topologia conveniente. A partir dessa construção, diferentes autores têm estudado propriedades topológicas do espaço $G(U)$ (veja [17, 18, 19, 25, 26, 44, 61], apenas por citar alguns). Por exemplo, em [19, Theorem 14], Boyd provou que se $U$ é um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço Fréchet–Montel $E$ tal que $G(E)$ é Montel, então $E$ tem a propriedade de aproximação se e somente se $G(U)$ tem a propriedade de aproximação. Um outro resultado nessa direção é devido a Çaliskan [26, Proposition 6.6], que provou que se $U$ é um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço de Fréchet $E$, então $E$ tem a propriedade de aproximação compacta se e somente se $G(U)$ tem a propriedade de aproximação compacta.

Nós também trabalhamos com tal representação dada por Mujica e Nachbin para o espaço $G(U)$, e reescrevemos esse espaço como um limite projetivo reduzido de pré-duais de uma classe de funções holomorfas a valores complexos. Como aplicação deste resultado, nós provamos que se $U$ é um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço de Banach $E$, então $E$ tem a propriedade de aproximação se e somente se $G(U)$ tem a propriedade de aproximação. Ainda mais, uma consequência direta deste último resultado dá uma nova demonstração para o resultado de Aron e Schottenloher mencionado acima.

Gostaríamos de salientar que, um espaço de Banach é Montel se e somente se tem dimensão finita. Em consequência, a classe de espaços estudados por Boyd e a classe de espaços sob nosso estudo são, em geral, diferentes. Também, sabemos que a propriedade de aproximação implica a propriedade de aproximação compacta, mas a recíproca em geral é falsa (veja [75], por exemplo).

Uma outra linha de investigação envolvendo espaços de funções holomorfas é o estudo de *operadores* de *convolução* sobre tais espaços, isto é, operadores lineares contínuos que comutam com todas as translações. Aqui estudamos a dinâmica linear desses operadores sobre diferentes classes de espaços de funções inteiras. Exploramos algumas noções clássicas da dinâmica para operadores lineares contínuos, incluindo hiperciclicidade frequente, hiperciclicidade, mistura, transitividade topológica, $n$-superciclicidade e ciclicidade. O seguinte diagrama traz um resumo acerca da relação entre essas noções:

$$\begin{tikzcd}
\text{Hiperciclicidade frequente} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Hiperciclicidade} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Superciclicidade} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Ciclicidade} \\
\text{Mistura} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Transitividade} & n\text{-Superciclicidade} &
\end{tikzcd}$$

Na dinâmica linear os sistemas dinâmicos são definidos por operadores lineares contínuos geralmente definidos sobre espaços de Fréchet. A razão principal de preferir espaços de Fréchet (ou até mesmo $F$-espaços) ao invés de espaços vetoriais topológicos mais gerais é o Teorema da categoria de Baire, o qual é uma ferramenta básica para estudar hiperciclicidade e caos. Mas vários operadores naturais e interessantes são também definidos sobre espaços vetoriais topológicos que não são Fréchet. Por exemplo, operadores de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, operadores backward shift sobre $c_{00}$, e outros são definidos sobre limites indutivos ou projetivos de espaços de Banach, ou somas algébricas enumeráveis de espaços de Fréchet, apenas por mencionar alguns. Nos últimos 30 anos, o estudo da dinâmica de operadores lineares contínuos sobre espaços vetoriais topológicos tem sido intensamente explorado por diversos autores, dando maior atenção à hiperciclicidade. Lembramos que um operador linear contínuo $T : E \to E$ sobre um espaço vetorial topológico $E$ é dito *hipercíclico* se existe algum $x \in E$ cuja *órbita* $\{x, Tx, T^2x, \ldots\}$ é densa em $E$. Dentre as outras noções mencionadas acima destacamos a hiperciclicidade frequente, a qual é mais recente e mais forte do que hiperciclicidade. As referências [10, 46] fornecem uma visão profunda e detalhada da teoria. Neste contexto de dinâmica linear, nossa pesquisa foi motivada pelos seguintes resultados:

(1) **Godefroy-Shapiro** [45]**:** Todo operador de convolução não trivial sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ é hipercíclico.

(2) **Bonilla e Grosse-Erdmann** [16]**:** Todo operador de convolução não trivial sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ é frequentemente hipercíclico.

(3) **Muro *et al*** [66]**:** Todo operador de convolução não trivial sobre uma certa classe de espaços de funções inteiras sobre espaços de Banach de dimensão (finita ou infinita) é frequentemente hipercíclico.

(4) **Fávaro-Mujica** [39]**:** Nenhum operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ é hipercíclico.

Note ainda que, o resultado em (3) estende os resultados em (1) e (2), enquanto o resultado em (4) difere notoriamente dos outros. Perceba então que esses resultados instigam duas direções para se trabalhar. Uma é seguir os passos de Muro *et al* para provar que todo operador de convolução não trivial segue sendo frequentemente hipercíclico mesmo sobre uma classe maior de espaços de funções inteiras. A outra nos depara com a seguinte questão natural:

Os operadores de convolução não triviais sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ satisfazem alguma noção da dinâmica linear mais fraca do que hiperciclicidade?

Neste trabalho procuramos, por um lado, dar uma resposta positiva a essa questão, e por outro lado, obtemos um resultado que engloba aquele de Muro *et al.* Mais precisamente, no Capítulo 3, usando um critério de Bayart e Matheron [11], provaremos que sob condições adequadas, os operadores de convolução não triviais sobre certos espaços de funções inteiras do tipo zero e uma dada ordem $k \in [1, +\infty]$, denotados por $Exp^k_{\Theta,0}(E)$, são fortemente misturadores no sentido gaussiano, em particular frequentemente hipercíclicos. Como casos muito particulares, recuperamos os três primeiros resultados listados acima.

Por outra parte, no Capítulo 4 mostraremos que nenhum operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ pode ser cíclico nem $n$-supercíclico para qualquer inteiro positivo $n$, mas sim, todo operador de convolução não trivial sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ é misturador e Li–Yorke caótico. Esse resultado, em particular, fornece novos exemplos de operadores contínuos sobre um espaço localmente convexo não-metrizável, completo e separável que são misturadores mas não hipercíclicos. Para outros exemplos, sugerimos [15, 74].

A noção clássica do caos de Li–Yorke foi introduzida para funções contínuas definidas sobre espaços métricos. Por [12, Theorem 9], operadores lineares hipercíclicos sobre espaços de Fréchet são Li–Yorke caóticos. Como $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ é um espaço localmente convexo não-metrizável, a noção clássica do caos de Li–Yorke não faz sentido para os operadores lineares contínuos sobre ele. Recentemente, Arai [2] introduziu a noção do caos de Li–Yorke para uma ação de um grupo sobre um espaço uniforme. Como sabemos, todo espaço vetorial topológico é um espaço uniforme, de modo que adotaremos a definição de Arai para estudar tal noção para os operadores de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$. Com efeito, usando essa definição, provaremos que todo operador de convolução não trivial sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ é Li–Yorke caótico. Ainda mais, adaptando um resultado em [12] provaremos que, neste caso, operadores hipercíclicos são também Li–Yorke caóticos. Assim, damos uma resposta positiva à questão levantada acima.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: o primeiro capítulo traz alguns resultados preliminares de espaços vetoriais topológicos (focando em espaços de funções holomorfas) e dinâmica linear, com o intuito de facilitar o acompanhamento do leitor. No segundo, exibimos nosso resultado acerca dos espaços pré-duais de espaços de funções holomorfas. No terceiro capítulo, estudamos certos espaços de funções inteiras de um dado tipo $A \in [0, +\infty)$ e uma dada ordem $k \in [1, +\infty]$, denotados por $Exp^{k}_{\Theta,0,A}(E)$ e que foram introduzidos em [37], na busca de estender resultados em relação às equações de convolução sobre espaços de funções inteiras definidas sobre um espaço de Banach complexo de dimensão infinita $E$, de um dado tipo e uma dada ordem. Nesse estudo estabeleceremos relações chaves entre os espaços $Exp^{1}_{\Theta,0,A}(E)$ e $Exp^{k}_{\Theta,0}(E)$ que nos permitirão garantir existência de funções inteiras frequentemente hiperíclicas de tipo exponencial para operadores de convolução não triviais sobre $Exp^{k}_{\Theta,0}(E)$. De igual forma, ainda neste capítulo, provaremos a existência de subespaços vetoriais fechados de dimensão infinita de $Exp^{k}_{\Theta,0}(E)$ formados, exceto pela função nula, por funções frequentemente hipercíclicas. Esses resultados também generalizam resultados do mesmo tipo obtidos em [16, 66]. Por fim, no quarto e último capítulo, apresentaremos as noções da dinâmica linear estudadas para os operadores de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$.

Esta tese gerou 3 artigos científicos, um que já está publicado e dois que estão submetidos (veja [22, 23, 24]).

# Capítulo 1

# Preliminares

O propósito principal deste capítulo é familiarizar o leitor com alguns resultados básicos da teoria de espaços vetoriais topológicos e a propriedade de aproximação, os quais serão fundamentais no desenvolvimento deste trabalho e por sua vez facilitará a sua compreensão. A maioria dos resultados das seções 1.1 e 1.1.1 aparecem nas notas de aula de Mujica [65], mas também encontram-se em qualquer livro de espaços vetoriais topológicos. Por exemplo, [50, Chapter 2], [52, Chapters 2 e 4] e [70, Chapters 4 e 5]. Neste capítulo nós não enfatizamos as demonstrações, o leitor interessado nos detalhes pode consultar as referências antes mencionadas. Outros resultados clássicos e/ou avançados que possam distrair a atenção dos leitores aparecerão no Apêndice.

## 1.1 Espaços vetoriais topológicos

Todos os espaços vetoriais aqui serão espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ denotará o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

**Definição 1.1.1.** *Diremos que $E$ é um* espaço vetorial topológico *(abreviado, evt) se $E$ é um espaço vetorial munido de uma topologia $\tau$ tal que as seguintes aplicações são contínuas:*

$$(x, y) \in E \times E \to x + y \in E,$$

$$(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \to \lambda x \in E.$$

Neste caso diremos que $\tau$ é uma *topologia vetorial.* Ainda mais, se $\tau$ é uma topologia de Hausdorff, como é usual, dizemos que $E$ é um *espaço vetorial topológico de Hausdorff.* Como exemplos clássicos de evt's de Hausdorff temos os espaços normados.

**Definição 1.1.2.** *Um subconjunto $A$ de um espaço vetorial $E$ é dito* equilibrado *se $\lambda x \in A$ para todo $x \in A$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, com $|\lambda| \leqslant 1$.*

**Definição 1.1.3.** *Diremos que $E$ é um* espaço localmente convexo *(abreviado, elc) se $E$ é um espaço vetorial topológico tal que cada vizinhança de zero contém uma vizinhança convexa de zero. Neste caso diremos que a topologia de $E$ é uma* topologia localmente convexa.

Todo espaço normado é um espaço localmente convexo.

**Definição 1.1.4.** *Seja $E$ um espaço vetorial. Uma função $p : E \to \mathbb{R}$ é chamada de* seminorma *se verifica as seguintes condições:*

(a) $p(x) \geqslant 0$ *para todo* $x \in E$*;*

(b) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *para todo* $x \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$*;*

(c) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ *para todo* $x, y \in E$*.*

*Uma seminorma $p$ é chamada de* norma *se $p(x) = 0$ implica $x = 0$. Quando $E$ for um evt denotaremos por $sc(E)$ o conjunto das seminormas contínuas em $E$.*

Toda topologia localmente convexa é gerada por uma família de seminormas (veja [65, Corolário 4.8]). A seguir, listamos dois exemplos concretos de espaços vetoriais localmente convexos.

**Exemplo 1.1.5.** (a) ***O espaço produto*** $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*. Seja $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots$ o espaço vetorial de todas as sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ (reais ou complexas). A* topologia produto *em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ coincide com a topologia localmente convexa em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ definida pela família dirigida de seminormas $p_n : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, definidas por*

$$p_n(x) = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|, \quad x = (x_j)_{j=1}^{\infty},$$

*com $n \in \mathbb{N}$.*

(b) ***Espaços de funções holomorfas****. Sejam $\Omega$ um aberto de $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, e $\mathcal{H}(\Omega)$ o espaço vetorial complexo de todas as funções holomorfas $f : \Omega \to \mathbb{C}$. A* topologia compacto-aberta *em $\mathcal{H}(\Omega)$, a qual denotaremos por $\tau_0$, é a topologia localmente convexa em $\mathcal{H}(\Omega)$ definida pela família dirigida de seminormas $p_K : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definidas por*

$$p_K(f) = \sup_{z \in K} |f(z)|,$$

*com $K \subset \Omega$ compacto.*

A topologia $\tau_0$ é também conhecida como a *topologia da convergência uniforme sobre os compactos*. Na Seção 1.2 vamos estudar funções holomorfas definidas sobre elc's de dimensão infinita.

**Definição 1.1.6.** *Um evt $E$ é dito um $F$-*espaço *se sua topologia é induzida por uma métrica completa. Ainda mais, se $E$ é também um elc, dizemos que $E$ é um* espaço de Fréchet*.*

Como espaços de Fréchet clássicos temos $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ e $\mathcal{H}(\Omega)$.

**Proposição 1.1.7.** *(Vide [65, Proposição 6.2]) Sejam $E$ e $F$ dois elc's, $P$ e $Q$ famílias dirigidas de seminormas que definem as topologias de $E$ e $F$, respectivamente. Então, uma aplicação linear $T : E \to F$ é contínua se e somente se, dada $q \in Q$ existem $p \in P$ e $c > 0$ tais que*

$$q(Tx) \leqslant cp(x) \quad \text{para todo} \quad x \in E.$$

Usualmente escrevemos *operador* ao invés de aplicação linear.

**Notação 1.1.8.** *Sejam $E$ e $F$ dois evt's. Denotaremos por $\mathcal{L}(E;F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações lineares (todos os operadores) $T : E \to F$ que são contínuas (contínuos). Escreveremos $E'$ em lugar de $\mathcal{L}(E;\mathbb{K})$. Diremos que $E'$ é o* dual topológico*, ou simplesmente o* dual *de $E$.*

**Exemplo 1.1.9.** (a) *Seja $a \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. O* operador translação *por $a$, $\tau_a : \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ é definido por*

$$\tau_a f(y) = f(y - a)$$

*para todo $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ e $y \in \mathbb{C}^n$. Claramente $\tau_a$ é uma aplicação linear e contínua sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$.*

(b) *Um* operador de convolução *$L$ sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ é uma aplicação linear e contínua*

$$L : \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$$

*tal que $L(\tau_a f) = \tau_a(Lf)$ para todo $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ e $a \in \mathbb{C}^n$.*

Da mesma maneira definimos os operadores translação e de convolução sobre o espaço de funções inteiras definidas sobre elc's de dimensão infinita. Nós estudaremos a dinâmica linear desses operadores num contexto mais geral nos Capítulos 3 e 4.

### 1.1.1 Topologias projetivas e indutivas

Nesta seção incluiremos as definições de topologia projetiva e indutiva, limites projetivo e indutivo, como também alguns resultados básicos que serão frequentemente usados no decorrer deste trabalho. Cabe ressaltar que, muitos elc's clássicos na análise funcional são equipados com essas topologias.

**Proposição 1.1.10.** *(Vide [65, p. 98]) Sejam $\{X_i : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos e $X$ um espaço topológico munido com a* topologia projetiva *com relação à família de funções $\pi_i : X \to X_i$ (isto é, a topologia mais fraca em $X$ tal que cada $\pi_i$ é contínua). Se $Y$ é um espaço topológico, então uma função $f : Y \to X$ é contínua se e somente se $\pi_i \circ f : Y \to X_i$ é contínua para cada $i \in I$.*

**Definição 1.1.11.** ***(Limite projetivo).*** *Seja $\{E_i : i \in I\}$ uma família de evt's indexada por um conjunto dirigido $I$. Suponhamos que para cada par de índices $i, j \in I$, com $i \leqslant j$, exista uma aplicação $\pi_{ij} \in \mathcal{L}(E_j; E_i)$ com as seguintes propriedades:*

(a) *$\pi_{ii}$ é a identidade em $E_i$ para cada $i \in I$,*

(b) *$\pi_{ij} \circ \pi_{jk} = \pi_{jk}$ sempre que $i \leqslant j \leqslant k$.*

*Então diremos que a coleção $\{E_i, \pi_{ij} : i, j \in I,\ i \leqslant j\}$ é um* sistema projetivo *de evt's. O conjunto*

$$E = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i : \pi_{ij}(x_j) = x_i \quad \textit{sempre que} \quad i \leqslant j\}$$

*é um subespaço vetorial do produto cartesiano $\prod_{i\in I} E_i$. O subespaço $E$, munido da topologia induzida pela topologia produto, é chamado de* limite projetivo *da família $\{E_i : i \in I\}$ e é denotado por $\mathrm{proj}_{i\in I} E_i$. O limite projetivo $\mathrm{proj}_{i\in I} E_i$ é dito* reduzido *se, para cada $j \in I$, a projeção canônica de $\mathrm{proj}_{i\in I} E_i$ sobre sua $j$-ésima coordenada tem imagem densa.*

Através da topologia projetiva nós podemos obter propriedades topológicas de uma maneira mais fácil. Por exemplo, se $E = \mathrm{proj}_{i\in I} E_i$ é o limite projetivo de um sistema projetivo de evt's de Hausdorff e cada $E_i$ é completo, então $E$ também é completo.

**Proposição 1.1.12.** *(Vide [65, Proposição 27.3]) Sejam $\{E_i : i \in I\}$ uma família de elc's e $E$ um espaço vetorial munido com a* topologia indutiva *com relação à família de aplicações $\pi_i : E_i \to E$ (isto é, a topologia localmente convexa mais fina em $E$ tal que cada $\pi_i$ é contínua). Se $F$ é um elc, então uma aplicação linear $T : E \to F$ é contínua se e só se $T \circ \pi_i : E_i \to F$ é contínua para cada $i \in I$.*

**Definição 1.1.13.** ***(Limite indutivo).*** *Seja $\{E_i : i \in I\}$ uma família de elc's dirigida sob a relação de inclusão "$\leqslant$". Então, o* limite indutivo *da família de espaços $\{E_i : i \in I\}$, denotado por $\mathrm{ind}_{i\in I} E_i$, é o espaço vetorial*

$$\bigcup_{i\in I} E_i$$

*munido com a topologia indutiva em relação às aplicações de inclusão $\pi_i : E_i \hookrightarrow E$. O limite indutivo $\mathrm{ind}_{i\in I} E_i$ é dito* estrito *se $E_i$ tem a topologia induzida por $E_j$ sempre que $i \leqslant j$.*

Uma diferença notória entre limite projetivo e limite indutivo é que, o limite indutivo de elc's completos não é necessariamente completo (vide [50] ou [65, Corolário 27.16]). Mas quando o limite indutivo é estrito, o seguinte teorema garante a completude.

**Teorema 1.1.14.** *(Vide [65, Teorema 28.5]) Seja* $E = \mathrm{ind}_{n\in\mathbb{N}} E_n$ *o limite indutivo estrito de uma sequência crescente de subespaços* $E_n$. *Se cada* $E_n$ *é completo, então* $E$ *é completo.*

### 1.1.2 A propriedade de aproximação

Nesta seção incluiremos a definição da propriedade de aproximação e alguns resultados de estabilidade da mesma.

**Definição 1.1.15.** *Um elc de Hausdorff* $E$ *tem a* propriedade de aproximação *se para cada subconjunto convexo, equilibrado e compacto* $K$ *de* $E$ *e para cada vizinhança de zero* $U$ *em* $E$ *existe um operador contínuo de posto finito* $T$ *de* $E$ *em* $E$ *tal que,* $Tx - x \in U$ *para todo* $x \in K$.

Um subespaço vetorial $M$ de $E$ é dito *complementado* se existe $T \in \mathcal{L}(E;E)$ tal que $T^2 = T$ e $T(E) = M$. Se $E$ é também de Hausdorff então, cada subespaço complementado de $E$ é fechado em $E$.

**Proposição 1.1.16.** *(Vide [52, Proposition 3, p. 401]) Seja* $E$ *um elc de Hausdorff.*

(a) *Se* $E$ *tem a propriedade de aproximação, então todo subespaço complementado de* $E$ *também tem a propriedade de aproximação.*

(b) *Seja* $E'_c$ *o espaço* $E'$ *munido com a topologia da convergência uniforme sobre todos os conjuntos convexos, equilibrados e compactos de* $E$. *Se* $E'_c$ *tem a propriedade de aproximação, então* $E$ *também tem a propriedade de aproximação.*

(c) *Se* $\widetilde{E}$ *denota o completamento de* $E$ *e* $\widetilde{E}$ *tem a propriedade de aproximação, então* $E$ *também tem a propriedade de aproximação.*

A seguinte proposição é de grande ajuda no momento de provar existência de subespaços complementados.

**Proposição 1.1.17.** *Sejam* $E$ *e* $F$ *dois evt's,* $S \in \mathcal{L}(E;F)$ *e* $T \in \mathcal{L}(F;E)$ *tais que* $T \circ S(x) = x$ *para todo* $x \in E$. *Então,* $E$ *é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de* $F$.

O seguinte teorema é chave para provar um dos nossos resultados principais.

**Teorema 1.1.18.** *(Vide [52, Proposition 1, p. 401]) Seja* $E = \mathrm{proj}_{i\in I} E_i$ *um limite projetivo reduzido de elc's de Hausdorff* $E_i$. *Se cada* $E_i$ *tem a propriedade de aproximação, então* $E$ *também tem a propriedade de aproximação.*

Para um estudo mais profundo e detalhado acerca da propriedade de aproximação (e outras variantes, tais como: propriedade de aproximação compacta, propriedade de aproximação limitada e propriedade de aproximação métrica), sugerimos os livros [47, 52, 56, 73] e as notas de aula [63].

## 1.2 Funções holomorfas entre elc's

Como mencionamos na seção anterior, esta seção é dedicada a conceitos e resultados básicos da teoria de holomorfia em dimensão infinita. Esses resultados podem ser vistos, na grande maioria, nos livros clássicos [30, 64]. Aqui consideramos elc's complexos de Hausdorff.

### 1.2.1 Polinômios

Sejam $E$ e $F$ dois elc's e $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{L}(^nE;F)$ denotará o espaço vetorial de todas as aplicações $n$-lineares (isto é, linear em cada entrada enquanto as outras $(n-1)$ permanecem fixas) de $E$ em $F$ que são contínuas. $\mathcal{L}(^0E;F)$ será o espaço vetorial das funções constantes de $E$ em $F$, o qual é identificado canonicamente com o $F$, e obviamente $\mathcal{L}(^1E;F) = \mathcal{L}(E;F)$. Já $\mathcal{L}^s(^nE;F)$ denotará o espaço vetorial de todas as aplicações $n$-lineares de $E$ em $F$ que são simétricas e contínuas. Se $x, y \in E$ usaremos a notação $x^m y^n$ ao invés de $(\underbrace{x,\ldots,x}_{m-\text{vezes}}, \underbrace{y,\ldots,y}_{n-\text{vezes}})$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$.

**Definição 1.2.1.** *Sejam $E$ e $F$ espaços vetoriais complexos e $n \in \mathbb{N}_0$. Uma função $P : E \to F$ é dita* polinômio $n$-homogêneo *se existe alguma aplicação $n$-linear $A$ de $E$ em $F$ tal que $P(x) = Ax^n := A(\underbrace{x,\ldots,x}_{n-\text{vezes}})$ para todo $x \in E$.*

Se $E$ e $F$ são elc's e $A \in \mathcal{L}(^nE;F)$ então a função $P(x) = Ax^n$, $x \in E$, é um polinômio $n$-homogêneo e contínuo. Neste caso, denotamos por $\mathcal{P}(^nE;F)$ o espaço vetorial dos polinômios $n$-homogêneos e contínuos de $E$ em $F$.

**Exemplo 1.2.2.** *Sejam $E$ e $F$ elc's, $n \in \mathbb{N}_0$, $\varphi \in E'$ e $b \in F$.*

(a) *$\varphi^n : E \to \mathbb{C}$ denota o polinômio $n$-homogêneo e contínuo $\varphi^n(x) := \underbrace{\varphi(x)\cdots\varphi(x)}_{n-\text{vezes}}$, $x \in E$.*

(b) *$\varphi^n \cdot b : E \to F$ denota o polinômio $n$-homogêneo e contínuo $\varphi^n \cdot b(x) := \varphi^n(x)b$, $x \in E$.*

(c) *Uma classe importante de polinômios $n$-homogêneos é a classe dos polinômios de* tipo finito *denotada por $\mathcal{P}_f(^nE;F)$. Este espaço vetorial consiste dos polinômios $n$-homogêneos e contínuos $P$ que podem ser escritos na seguinte maneira:*

$$P = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^n \cdot c_j$$

*para algum* $m \in \mathbb{N}$, *onde* $c_j \in F$ *e* $\varphi_j \in E'$ *para todo* $j = 1, \ldots, m$.

Se $E$ e $F$ são espaços de Banach, define-se a norma de $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ como $\|P\| := \sup\{\|P(x)\| : \ x \in E, \ \ \|x\| \leqslant 1\}$. Com esta norma $\mathcal{P}(^nE; F)$ se torna um espaço de Banach.

**Proposição 1.2.3.** *(Vide [30, p. 12]) Sejam* $E$ *e* $F$ *elc's e* $n \in \mathbb{N}$. *A aplicação*

$$\widehat{\cdot} : \mathcal{L}^s(^nE; F) \to \mathcal{P}(^nE; F), \quad \widehat{A}(x) := Ax^n$$

*para todo* $A \in \mathcal{L}^s(^nE; F)$ *e* $x \in E$ *é um isomorfismo algébrico. Denotamos a inversa dessa aplicação por* $\check{(\cdot)}$.

### 1.2.2 Funções holomorfas

Aqui mantemos a notação clássica do livro [30].

**Notação 1.2.4.** *Seja* $U$ *um subconjunto aberto de um elc* $E$. *Para cada* $a \in U$ *definimos o conjunto*

$$B_a := \{b \in E : a + \lambda b \in U, \ |\lambda| \leqslant 1\}.$$

$B_a$ *é o conjunto maximal na família de conjuntos* $\{A \subset E : A \text{ é equilibrado}, \ a + A \subset U\}$. *Em particular,* $U$ *é equilibrado se e só se* $U = B_0$.

**Definição 1.2.5.** *(Vide [30, Proposition 3.2 e Definition 3.6]) Sejam* $U$ *um subconjunto aberto de um elc* $E$ *e* $F$ *um elc completo. Uma função* $f : U \to F$ *é dita* holomorfa *se para cada* $a \in U$ *existe uma única sequência de polinômios contínuos* $(P_{j,a,f})_{j=0}^{\infty}$, $P_{j,a,f} \in \mathcal{P}(^jE; F)$, $j \in \mathbb{N}_0$, *tal que*

$$f(a + x) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{j,a,f}(x)$$

*para todo* $x \in B_a$. *Denotamos por* $\mathcal{H}(U; F)$ *o espaço vetorial de todas as funções holomorfas de* $U$ *em* $F$. *Se* $f$ *é holomorfa em todo* $E$ *dizemos que ela é uma função* inteira, *neste caso denotamos por* $\mathcal{H}(E; F)$ *o espaço vetorial de todas as funções* inteiras *de* $E$ *em* $F$. *Escreveremos* $\mathcal{H}(U)$ *ao invés de* $\mathcal{H}(U; \mathbb{C})$.

Usualmente, escrevemos $d^j f(a) = j!\check{P}_{j,a,f}$ e $\widehat{d}^j f(a) := \widehat{d^j f(a)} = j! P_{j,a,f}$ para todo $a \in U$ e $j \in \mathbb{N}_0$. Dizemos que $d^j f(a)$ é a *j-ésima derivada de Fréchet* de $f$ em $a$ e $\widehat{d}^j f(a)$ é seu polinômio $j$-homogêneo contínuo associado. A série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \widehat{d}^j f(a)(x) \tag{1.2.1}$$

é chamada de *série de Taylor* de $f$ em torno de $a$.

**Exemplo 1.2.6.** *Sejam $E$ e $F$ elc's com $F$ completo. Se $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$, não é difícil verificar que*

$$\frac{1}{j!}\widehat{d}^jP(a) = \begin{cases} P & \text{se } j = n \\ \binom{n}{j}\check{P}a^{n-j}(\cdot)^j & \text{se } j < n \\ 0 & \text{se } j > n \end{cases}$$

*para cada $a \in E$. Em particular, $\widehat{d}^jP(0) = 0$ sempre que $j \neq n$.*

**Exemplo 1.2.7.** *Sejam $E$ um elc e $\varphi \in E'$. Se $a \in E$ então*

$$e^{\varphi}(a+x) := e^{\varphi(a+x)} = e^{\varphi(a)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\varphi^j(x)}{j!}$$

*uniformemente para $x \in E$. Pela unicidade da expansão da série de Taylor obtemos*

$$\widehat{d}^je^{\varphi}(a) = e^{\varphi(a)}\varphi^j$$

*para todo $a \in E$ e $j \in \mathbb{N}_0$.*

### 1.2.3 Topologias sobre $\mathcal{H}(U;F)$

Nesta seção apresentaremos alguns resultados básicos acerca de algumas topologias usuais sobre $\mathcal{H}(U;F)$ que serão utilizados ao longo deste trabalho.

Se $\beta \in sc(F)$, $A \subset U$ e $f : U \to F$, definimos

$$\|f\|_{\beta,A} := \sup_{x\in A}\beta(f(x)).$$

Se $F$ é um espaço normado, então

$$\|f\|_A := \sup_{x\in A}\|f(x)\|.$$

**Definição 1.2.8.** *Sejam $U$ um subconjunto aberto de um elc $E$ e $F$ um elc completo.*

(a) *A* topologia compacto-aberta *(ou* topologia da convergência uniforme sobre os compactos de *$U$) sobre $\mathcal{H}(U;F)$, denotada por $\tau_0$, é a topologia localmente convexa gerada pelas seminormas $\|\cdot\|_{\beta,K}$, com $K \subset U$ compacto e $\beta \in sc(F)$.*

(b) *Assuma $F$ espaço de Banach. Uma seminorma $p$ sobre $\mathcal{H}(U;F)$ é $\tau_\delta$* contínua *se, para cada cobertura aberta e crescente $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ de $U$ existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $c > 0$ tais que*

$$p(f) \leqslant c\|f\|_{U_{n_0}}$$

*para toda $f \in \mathcal{H}(U;F)$. A topologia $\tau_\delta$ sobre $\mathcal{H}(U;F)$ é a topologia localmente convexa gerada pelas seminormas $\tau_\delta$ contínuas.*

Note que $\tau_0 \leqslant \tau_\delta$ (veja [30, Lemma 3.17]). Por outro lado, se $U$ é um subconjunto aberto e equilibrado de um elc $E$ e $f \in \mathcal{H}(U;F)$ então, a série de Taylor de $f$ em torno de 0 converge a $f$ uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $U$, ou seja

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!} = f \tag{1.2.2}$$

na topologia $\tau_0$.

A seguir, listamos alguns espaços de funções holomorfas importantes.

**Exemplo 1.2.9.** (a) ***Funções holomorfas limitadas.*** *Sejam $E$, $F$ espaços de Banach e $U$ um subconjunto aberto de $E$. O espaço vetorial $\mathcal{H}^\infty(U;F)$ de todas as funções $f \in \mathcal{H}(U;F)$ que são limitadas, é um espaço de Banach com a norma do supremo.*

(b) ***Funções holomorfas de tipo limitado.*** *Sejam $E$, $F$ elc's com $F$ completo e $U$ um subconjunto aberto de $E$. Se $\mathcal{U} = (U_n)_{n=1}^\infty$ é uma cobertura aberta e crescente de $U$, $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ denota o elc*

$$\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F) = \{f \in \mathcal{H}(U;F) : f(U_n) \text{ é limitado em } F \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$$

*munido com a topologia da convergência uniforme sobre cada $U_n$. Isto é, as seminormas*

$$f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F) \to \sup_{x\in U_n} \beta(f(x)) \in \mathbb{R}$$

*com $n \in \mathbb{N}$ e $\beta \in sc(F)$, definem a topologia de $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$. Se $F$ é um espaço de Banach então $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ se torna um espaço de Fréchet, agora com seminormas*

$$\|f\|_{U_n} = \sup_{x\in U_n} \|f(x)\|, \quad (f \in \mathcal{H}(U;F) \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N}).$$

*Ainda mais, se $E$ e $F$ são espaços de Banach e*

$$U_n = \{x \in U : \|x\| < 1/n \quad \text{e} \quad d_U(x) > 2^{-n}\}, \qquad (n \in \mathbb{N})$$

*onde $d_U(x)$ é a* distância de $x$ ao bordo de $U$, *então $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ é conhecido como o espaço das* funções holomorfas de tipo limitado *e é denotado por $\mathcal{H}_b(U;F)$. Os elementos de $\mathcal{H}_b(E;F)$ são funções inteiras limitadas sobre conjuntos limitados. Não é difícil ver que $f \in \mathcal{H}_b(E;F)$ se e só se*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n!}\left\|\widehat{d}^n f(0)\right\|\right)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Finalizamos esta seção com mais uma descrição para a topologia $\tau_\delta$.

**Proposição 1.2.10.** *(Vide [30, Proposition 3.18]) Sejam $U$ um subconjunto aberto de um elc $E$ e $F$ um espaço de Banach. Então a topologia $\tau_\delta$ coincide com a topologia limite indutivo em relação às aplicações inclusões $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F) \hookrightarrow \mathcal{H}(U;F)$. Isto é,*

$$(\mathcal{H}(U;F), \tau_\delta) = \text{ind}_{\mathcal{U}} \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$$

*topologicamente, onde $\mathcal{U}$ varia entre todas as coberturas enumeráveis, abertas e crescentes de $U$.*

### 1.2.4 Pré-duais de funções holomorfas

Começamos esta seção com o Teorema de linearização de Mazet [59, Theorem 3.10], o qual nos permite associar cada função holomorfa com um único operador contínuo satisfazendo uma certa propriedade universal.

**Teorema 1.2.11.** ***(Teorema de linearização de Mazet).*** *Para cada conjunto aberto $U$ de um elc $E$ existem um elc completo $G(U)$ e uma função holomorfa $\delta_U : U \to G(U)$ com a seguinte propriedade universal: para cada elc completo $F$ e cada função holomorfa $f : U \to F$, existe uma única aplicação linear contínua $T_f : G(U) \to F$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_U"'] & F \\ G(U) \arrow[ur, dashed, "\exists! T_f"'] & \end{tikzcd}$$

*A aplicação*

$$f \in \mathcal{H}(U; F) \to T_f \in \mathcal{L}(G(U); F) \tag{1.2.3}$$

*é um isomorfismo algébrico. Com essa propriedade o espaço $G(U)$ é único a menos de isomorfismo topológico.*

Decorre de (1.2.3) que $G(U)'$ e $\mathcal{H}(U)$ são algebricamente isomorfos, daí que $G(U)$ é dito o *pré-dual* de $\mathcal{H}(U)$. Em [61, Theorem 2.1] Mujica e Nachbin, motivados por uma generalização do Teorema de Ng [69], deram uma outra demonstração ao Teorema de Mazet e construiram o espaço $G(U)$ como segue:

Se $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de números positivos e $\mathcal{U} = (U_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma cobertura aberta e crescente de $U$, define-se o conjunto

$$B_{\mathcal{U}}^{\alpha} = \{f \in \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U}) : \sup_{x \in U_n} |f(x)| \leqslant \alpha_n \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Então

$$G(U) := \{u \in \mathcal{H}(U)^* : \text{a restrição } u|_{B_{\mathcal{U}}^{\alpha}} \text{ é } \tau_0\text{-contínua para cada } \ \alpha \text{ e } \ \mathcal{U}\},$$

munido com a topologia da convergência uniforme sobre cada conjunto $B_{\mathcal{U}}^{\alpha}$, aqui $\alpha$ varia entre todas as sequências de números positivos e $\mathcal{U}$ varia entre todas as coberturas enumeráveis, abertas e crescentes de $U$. Também podemos enxergar o espaço $G(U)$ como

$$G(U) = \{u \in \mathcal{H}(U)^* : u \text{ é } \tau_0\text{-contínuo sobre os subconjuntos localmente limitados de } \mathcal{H}(U)\},$$

munido com a topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos localmente limitados de $\mathcal{H}(U)$. As seguintes inclusões seguem diretamente da definição de $G(U)$:

$$(\mathcal{H}(U), \tau_0)' \subset G(U) \subset (\mathcal{H}(U), \tau_\delta)'. \tag{1.2.4}$$

Por outro lado, definimos a função $\delta_U$ como sendo a aplicação avaliação

$$\delta_U : x \in U \to \delta_x \in G(U),$$

isto é, $\delta_x(f) := f(x)$ para todo $f \in \mathcal{H}(U)$ e $x \in U$. Não é difícil ver que $\delta_U \in \mathcal{H}(U; G(U))$.

**Teorema 1.2.12.** ***(Linearização de funções holomorfas de tipo limitada [62]).*** *Sejam $U$ um subconjunto aberto de um elc $E$ e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta enumerável crescente de $U$. Então, existem um espaço (DF e tonelado[1]) completo $G^\infty(\mathcal{U})$, e uma função $\delta_{\mathcal{U}} \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; G^\infty(\mathcal{U}))$ com a seguinte propriedade universal: para cada elc completo $F$ e cada função $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$, existe uma única aplicação $T_f \in \mathcal{L}(G^\infty(\mathcal{U}); F)$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_{\mathcal{U}}"'] & F \\ G^\infty(\mathcal{U}) \arrow[ur, dashed, "\exists! T_f"'] & \end{tikzcd}$$

*A aplicação*

$$f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F) \to T_f \in \mathcal{L}(G^\infty(\mathcal{U}); F)$$

*é um isomorfismo topológico quando munimos $\mathcal{L}(G^\infty(\mathcal{U}); F)$ com a topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos limitados de $G^\infty(\mathcal{U})$. Com essas propriedades o espaço $G^\infty(\mathcal{U})$ é único a menos de isomorfismo topológico.*

Neste caso, em [62, Theorem 2.1], Mujica também construiu o pré-dual $G^\infty(\mathcal{U})$ do espaço $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e a função $\delta_{\mathcal{U}} \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; G(\mathcal{U}))$ como segue:

$$G^\infty(\mathcal{U}) = \{u \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})' : \text{a restrição } u|_{B^\alpha_{\mathcal{U}}} \text{ é } \tau_0\text{-contínua para todo } \alpha\}$$

munido com a topologia da convergência uniforme sobre cada $B^\alpha_{\mathcal{U}}$, onde $\alpha$ varia entre todas as sequências de números positivos. Mais uma vez a função $\delta_{\mathcal{U}}$ é a aplicação avaliação

$$\delta_{\mathcal{U}} : x \in U \to \delta_x \in G^\infty(\mathcal{U}).$$

**Teorema 1.2.13.** ***(Linearização de funções holomorfas limitadas [60]).*** *Seja $U$ um subconjunto aberto de um espaço de Banach $E$. Então, existem um espaço de Banach $G^\infty(U)$ e uma aplicação $\delta_U \in \mathcal{H}^\infty(U; G^\infty(U))$ com a seguinte propriedade universal: para cada espaço de Banach $F$ e cada função $f \in \mathcal{H}^\infty(U; F)$, existe uma única aplicação $T_f \in \mathcal{L}(G^\infty(U); F)$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_U"'] & F \\ G^\infty(U) \arrow[ur, dashed, "\exists! T_f"'] & \end{tikzcd}$$

*A aplicação*

$$f \in \mathcal{H}^\infty(U; F) \to T_f \in \mathcal{L}(G^\infty(U); F)$$

[1] Neste trabalho não abordaremos esses conceitos, para o leitor interessado sugerimos [50, 52].

*é um isomorfismo isométrico. Com essas propriedades o espaço $G^\infty(U)$ é único a menos de isomorfismo isométrico.*

A construção do espaço $G^\infty(U)$ e da função $\delta_U$ tem o mesmo espírito das outras construções. Aliás, na verdade este foi o primeiro teorema de linearização de Mujica [60, Theorem 2.1].

**Observação 1.2.14.** *Dos teoremas anteriores tem-se os seguintes isomorfismos topológicos*

$$G(U)'_i = (\mathcal{H}(U), \tau_\delta), \quad G^\infty(\mathcal{U})'_b = \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \ \text{ e } \ G^\infty(U)' = \mathcal{H}^\infty(U). \tag{1.2.5}$$

*Aqui $G^\infty(\mathcal{U})'_b$ denota o* dual forte *de $G^\infty(\mathcal{U})$, isto é, o dual $G^\infty(\mathcal{U})'$ munido com a topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos limitados de $G^\infty(\mathcal{U})$, e $G(U)'_i$ o dual indutivo de $G(U)$ (veja [14, 42]). Por essa razão os espaços $G(U)$, $G^\infty(\mathcal{U})$ e $G^\infty(U)$ são também conhecidos como* pré-duais topológicos *ou simplesmente* pré-duais *de $\mathcal{H}(U)$, $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $\mathcal{H}^\infty(U)$, respectivamente. Para outras propriedades topológicas desses espaços sugerimos [17, 18, 19, 26, 27, 28, 60, 61, 62].*

Por meio dos isomorfismos em (1.2.5), podemos derivar propriedades topológicas para espaços de funções holomorfas a partir das propriedades de seus respectivos pré-duais.

### 1.2.5 Funções inteiras de um dado tipo e uma dada ordem

Nesta seção vamos trabalhar com espaços de Banach complexos, a maioria dos conceitos e resultados desta seção aparecem em [36, 37] ou, se preferir, ao invés de [36] veja [53].

**Definição 1.2.15.** *(Nachbin [68]) Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach. Um* tipo de holomorfia *$\Theta$ de $E$ para $F$ é uma sequência de espaços de Banach $(P_\Theta(^jE;F))_{j=0}^\infty$, a norma sobre cada um deles será denotada por $\|\cdot\|_\Theta$, tais que as seguintes condições são verificadas:*

(1) *Cada $P_\Theta(^jE;F)$ é um subespaço vetorial de $P(^jE;F)$ e $P_\Theta(^0E;F)$ coincide com $F$ como espaço vetorial normado;*

(2) *existe um número real $\sigma \geqslant 1$ para o qual o seguinte se verifica: dados quaisquer $n \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{N}_0$, $n \leqslant j$, $a \in E$, e $P \in \mathcal{P}_\Theta(^jE;F)$, temos $\hat{d}^nP(a) \in \mathcal{P}_\Theta(^nE;F)$ e*

$$\left\| \frac{1}{n!}\hat{d}^nP(a)\right\|_\Theta \leqslant \sigma^j \|P\|_\Theta \|a\|^{j-n}.$$

*Usaremos a notação $P_\Theta(^jE)$ em vez de $P_\Theta(^jE;\mathbb{C})$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$.*

Conforme o Exemplo 1.2.6, para cada $n \leqslant j$ e $P \in \mathcal{P}_\Theta(^jE;F)$ temos

$$\widehat{\check{P}a^{j-n}} = \frac{(j-n)!}{j!}\hat{d}^nP(a) \in \mathcal{P}_\Theta(^jE;F),$$

e então
$$\left\|\widehat{\check{P}a^{j-n}}\right\|_\Theta \leqslant \frac{\sigma^j(j-n)!n!}{j!}\|P\|_\Theta\|a\|^{j-n}. \tag{1.2.6}$$

**Exemplo 1.2.16.** *Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach.*

(a) *Claramente $(\mathcal{P}(^jE;F),\|\cdot\|)_{j=0}^\infty$ é um tipo de holomorfia e*
$$\left\|\frac{1}{n!}\widehat{d}^nP(a)\right\| \leqslant \frac{j!}{n!(j-n)!}\|P\|\|a\|^{j-n},$$
*para todo $a\in E$, $n\leqslant j$ e $P\in\mathcal{P}(^jE;F)$. Faremos menção deste tipo de holomorfia como* tipo de holomorfia usual.

(b) *A sequência de polinômios nucleares $(\mathcal{P}_N(^jE;F),\|\cdot\|_N)_{j=0}^\infty$ é um tipo de holomorfia e*
$$\left\|\frac{1}{n!}\widehat{d}^nP(a)\right\|_N \leqslant \frac{j!}{n!(j-n)!}\|P\|_N\|a\|^{j-n}\leqslant 2^j\|P\|_N\|a\|^{j-n},$$
*para todo $a\in E$, $n\leqslant j$ e $P\in\mathcal{P}_N(^jE;F)$.*

(c) *Um polinômio contínuo $P\in\mathcal{P}(^jE;F)$ é dito* aproximável *se $P\in\overline{\mathcal{P}_f(^jE;F)}^{\|\cdot\|}$. A sequência de polinômios homogêneos contínuos aproximáveis $(\mathcal{P}_A(^jE;F),\|\cdot\|)_{j=0}^\infty$ é um tipo de holomorfia e*
$$\left\|\frac{1}{n!}\widehat{d}^nP(a)\right\| \leqslant (2e)^j\|P\|\|a\|^{j-n},$$
*para todo $a\in E$, $n\leqslant j$ e $P\in\mathcal{P}_A(^jE;F)$.*

Quando $\Theta$ é um dos tipos de holomorfia $(\mathcal{P}(^jE;F),\|\cdot\|)_{j=0}^\infty$ ou $(\mathcal{P}_N(^jE;F),\|\cdot\|_N)_{j=0}^\infty$, é possível melhorar a estimativa em (1.2.6) por
$$\left\|\widehat{\check{P}a^{j-n}}\right\|_\Theta = \frac{(j-n)!n!}{j!}\left\|\frac{1}{n!}\widehat{d}^nP(a)\right\|_\Theta \leqslant \|P\|_\Theta\|a\|^{j-n}. \tag{1.2.7}$$

Como era de esperar, a noção de tipo de holomorfia $\Theta$ induz um conceito de funções holomorfas de $\Theta$-tipo limitado.

**Definição 1.2.17.** ***(Funções inteiras de $\Theta$-tipo limitado).*** *Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e $(\mathcal{P}_\Theta(^jE;F))_{j=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de $E$ para $F$. Uma função $f\in\mathcal{H}(E;F)$ é dita de* $\Theta$-tipo limitado *se $\hat{d}^jf(0)\in\mathcal{P}_\Theta(^jE;F)$ para todo $j\in\mathbb{N}_0$ e*
$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{1}{j!}\left\|\widehat{d}^jf(0)\right\|_\Theta\right)^{\frac{1}{j}}=0.$$
*Neste caso denotamos por $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{H}(E;F)$ de todas as funções inteiras de $\Theta$-tipo limitado.*

Observe que $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ nada mais é que $\mathcal{H}_b(E;F)$ quando consideramos o tipo de holomorfia usual.

**Definição 1.2.18.** *Sejam $E$ um espaço de Banach e $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$. Para cada $\rho > 0$ e $k \geqslant 1$, denotamos por $\mathcal{B}^k_{\Theta,\rho}(E)$ o espaço de Banach complexo de todas as funções $f \in \mathcal{H}(E)$ tais que $\widehat{d}^j f(0) \in \mathcal{P}_\Theta(^jE)$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$ e*

$$\|f\|_{\Theta,k,\rho} := \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d}^j f(0) \right\|_\Theta < +\infty,$$

*com a norma dada por $\|\cdot\|_{\Theta,k,\rho}$ (veja [37, Proposition 2.3]).*

Segue a partir da definição do espaço $\mathcal{B}^k_{\Theta,\rho}(E)$ que,

$$\mathcal{P}_\Theta(^jE) \subset \mathcal{B}^k_{\Theta,\rho}(E) \subset \mathcal{B}^k_{\Theta,\gamma}(E)$$

sempre que $\rho \leqslant \gamma$ e $j \in \mathbb{N}_0$. Com isso em mente, lembramos a definição de função inteira de um tipo $A \geqslant 0$ e ordem finita $k \geqslant 1$.

**Definição 1.2.19.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$, $A \geqslant 0$ e $k \geqslant 1$. Denotamos por $Exp^k_{\Theta,0,A}(E)$ o espaço de Fréchet*

$$\bigcap_{\rho > A} \mathcal{B}^k_{\Theta,\rho}(E)$$

*munido com a topologia limite projetivo em relação às aplicações de inclusão $Exp^k_{\Theta,0,A}(E) \hookrightarrow \mathcal{B}^k_{\Theta,\rho}(E)$, $\rho > A$ (veja [37, Proposition 2.7]). Tal topologia é gerada pela família de normas $\{\|\cdot\|_{\Theta,k,\rho}\}_{\rho>A}$. Escrevemos $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ em vez de $Exp^k_{\Theta,0,0}(E) = \bigcap_{\rho>0} \mathcal{B}^k_{\Theta,\rho}(E)$.*

Na Proposição 2.7(b) de [37] foi provado que o espaço $Exp^k_{\Theta,0,A}(E)$ com $k > 1$ e $A \geqslant 0$ é de Fréchet, mas essa mesma demonstração funciona bem para o caso $k = 1$. Os elementos de $Exp^k_{\Theta,0,A}(E)$ são ditos *funções inteiras de ordem $k$* e *$\Theta$-tipo exponencial menor ou igual que $A$*. Usualmente escrevemos $Exp^k_{0,A}(E)$ ao invés de $Exp^k_{\Theta,0,A}(E)$ quando consideramos o tipo de holomorfia usual.

**Proposição 1.2.20.** *(Vide [37, Proposition 2.5]) Sejam $E$ um espaço de Banach, $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$ e $k \geqslant 1$. Seja $f \in \mathcal{H}(E)$ tal que $\widehat{d}^j f(0) \in \mathcal{P}_\Theta(^jE)$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Então, para cada $A \geqslant 0$, $f \in Exp^k_{\Theta,0,A}(E)$ se e somente se*

$$\limsup_{j\to+\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d}^j f(0) \right\|_\Theta^{\frac{1}{j}} \leqslant A.$$

Como $\lim_{j\to+\infty} \frac{j}{e\sqrt[j]{j!}} = 1$, segue dessa proposição que $f \in Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ se e somente se $\limsup_{j\to+\infty} \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_\Theta^{\frac{1}{j}} \leqslant A$.

**Exemplo 1.2.21.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A > 0$. Todo elemento de $Exp^1_{0,A}(\mathbb{C}^n)$ é uma função inteira sobre $\mathbb{C}^n$ que satisfaz uma condição de crescimento exponencial. De fato, seja $f \in Exp^1_{0,A}(\mathbb{C}^n)$. Se*

$$f(w) = \sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0) w^\alpha$$

*é a representação em série de Taylor de $f$ em torno de $0$ (na notação clássica da análise em varias variáveis complexas), então*

$$\limsup_{|\alpha| \to +\infty} |D^\alpha f(0)|^{\frac{1}{|\alpha|}} \leqslant A.$$

*Daí, para cada $\epsilon > 0$ existe $C(\epsilon) > 0$ tal que*

$$|D^\alpha f(0)| \leqslant C(\epsilon)(A + \epsilon)^{|\alpha|}$$

*para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Logo*

$$|f(w)| \leqslant C(\epsilon) \sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{(A+\epsilon)^{|\alpha|}}{\alpha!} |w_1|^{\alpha_1} \cdots |w_n|^{\alpha_n} \leqslant C(\epsilon) e^{(A+\epsilon)\|w\|}$$

*para todo $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$.*

Vamos agora estudar as funções inteiras de ordem infinita.

**Definição 1.2.22.** *(Vide [37, Definition 2.8 e Proposition 2.9]) Sejam $E$ um espaço de Banach, $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$ e $A \geqslant 0$. Denotamos por $Exp^\infty_{\Theta,0,A}(E)$ o espaço de Fréchet de todas as $f \in \mathcal{H}(B(0; 1/A))$ tais que $\widehat{d}^j f(0) \in \mathcal{P}_\Theta(^jE)$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$ e*

$$\limsup_{j \to +\infty} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d}^j f(0) \right\|_\Theta^{\frac{1}{j}} \leqslant A,$$

*munido com a topologia localmente convexa gerada pela família de normas $\left(p^\infty_{\Theta,\rho}\right)_{\rho > A}$, onde*

$$p^\infty_{\Theta,\rho}(f) := \sum_{j=0}^\infty \rho^{-j} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d}^j f(0) \right\|_\Theta.$$

Na definição anterior $B(0; 1/A)$ denota a bola aberta em $E$ de centro $0$ e raio $1/A$, e por convenção $B(0; 1/0) := E$. Usualmente escrevemos $Exp^\infty_{\Theta,0}(E)$ em vez de $Exp^\infty_{\Theta,0,0}(E)$.

**Observação 1.2.23.** *Note que o espaço $Exp^\infty_{\Theta,0}(E)$ coincide com o espaço $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Em particular, $Exp^\infty_0(\mathbb{C}^n) = \mathcal{H}_b(\mathbb{C}^n) = \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

**Definição 1.2.24.** *Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach. Um tipo de holomorfia $(\mathcal{P}_\Theta(^jE; F))_{j=0}^\infty$ de $E$ para $F$ é dito um $\pi_1$-*tipo de holomorfia *se satisfaz as seguintes condições:*

(1) $P_f({}^jE;F) \subset \mathcal{P}_\Theta({}^jE;F)$ *e existe* $M > 0$ *tais que* $\|\varphi^j \cdot b\|_\Theta \leqslant M^j\|\varphi\|^j\|b\|$ *para todo* $\varphi \in E'$, $b \in F$ *e* $j \in \mathbb{N}_0$*;*

(2) *para cada* $j \in \mathbb{N}_0$, $P_f({}^jE;F)$ *é denso em* $(\mathcal{P}_\Theta({}^jE;F), \|\cdot\|_\Theta)$*.*

Os tipos de holomorfia do Exemplo 1.2.16(b-c) são mesmo um $\pi_1$-tipo de holomorfia, $(\mathcal{P}({}^j\mathbb{C}^n))_{j=0}^\infty$ é também um $\pi_1$-tipo de holomorfia. De outra parte, para cada $n \leqslant j$, um polinômio $P \in \mathcal{P}_\Theta({}^jE;F)$ induz um outro polinômio $\widehat{\check{P}(\cdot)^n} \in \mathcal{P}_\Theta({}^{j-n}E;\mathcal{P}_\Theta({}^nE))$ dado por

$$\widehat{\check{P}(\cdot)^n}(y) := \check{P}(\cdot)^n y^{j-n} = \widehat{\check{P}y^{j-n}}$$

para todo $y \in E$. Dado um funcional $T \in \left[Exp^k_{\Theta,0,A}(E)\right]'$, por um lado $T \circ \widehat{\check{P}(\cdot)^n} \in \mathcal{P}({}^{j-n}E)$ e por outro lado, existem constantes $C > 0$ e $\rho > A$ tais que

$$\left|T\left(\widehat{\check{P}y^{j-n}}\right)\right| \leqslant C\left\|\widehat{\check{P}y^{j-n}}\right\|_{\Theta,k,\rho} = C\rho^{-n}\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}}\left\|\widehat{\check{P}y^{j-n}}\right\|_\Theta$$

para todo $y \in E$. Se $\Theta$ é o tipo de holomorfia usual, aplicando (1.2.7) obtemos

$$\begin{aligned}\left\|T \circ \widehat{\check{P}(\cdot)^n}\right\| &= \sup_{\|y\|\leqslant 1}\left|T\left(\widehat{\check{P}y^{j-n}}\right)\right| \leqslant C\rho^{-n}\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}}\sup_{\|y\|\leqslant 1}\left\|\widehat{\check{P}y^{j-n}}\right\| \\ &\leqslant C\rho^{-n}\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}}\|P\|\sup_{\|y\|\leqslant 1}\|y\|^{j-n} = C\rho^{-n}\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}}\|P\|.\end{aligned}$$

Aqui nós consideramos $k \in [1,+\infty)$, mas tudo isso é também válido no caso $k = +\infty$. Nesse caso,

$$\left\|T \circ \widehat{\check{P}(\cdot)^n}\right\| \leqslant C\rho^{-n}\|P\|.$$

O tipo de holomorfia dos polinômios nucleares também satisfaz

$$\left\|T \circ \widehat{\check{P}(\cdot)^n}\right\|_N \leqslant C\rho^{-n}\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}}\|P\|_N \quad \text{e} \quad \left\|T \circ \widehat{\check{P}(\cdot)^n}\right\|_N \leqslant C\rho^{-n}\|P\|_N.$$

Tudo isso motiva a seguinte definição.

**Definição 1.2.25.** *Sejam* $E$ *um espaço de Banach,* $k \in [1,+\infty]$ *e* $A \geqslant 0$*. Um tipo de holomorfia* $(\mathcal{P}_\Theta({}^jE))_{j=0}^\infty$ *de* $E$ *para* $\mathbb{C}$ *é dito um* $\pi_{2,k}$-tipo de holomorfia *se, para cada* $T \in \left[Exp^k_{\Theta,0,A}(E)\right]'$*, as seguintes condições são verificadas:*

(1) *para cada* $j \in \mathbb{N}_0$ *e* $n \in \mathbb{N}_0$, $n \leqslant j$, *se* $P \in \mathcal{P}_\Theta({}^jE)$ *e* $B \in \mathcal{L}^s({}^jE)$ *é tal que* $P = \widehat{B}$*, então o polinômio*

$$\begin{aligned}T\left(\widehat{B(\cdot)^n}\right) : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto T\left(B(\cdot)^n y^{j-n}\right)\end{aligned}$$

*pertence ao espaço* $\mathcal{P}_\Theta({}^{j-n}E)$*;*

(2) *existem constantes $C > 0$ e $\rho > A$ tais que*

$$|Tf| \leqslant C \|f\|_{\Theta,k,\rho}, \quad \text{se } k \in [1, +\infty),$$

*e*

$$|Tf| \leqslant Cp^{\infty}_{\Theta,\rho}(f), \quad \text{se } k = +\infty,$$

*para toda $f \in Exp^{k}_{\Theta,0,A}(E)$ e, para todo $\epsilon > 0$ existe $D(\epsilon) > 0$ tal que*

$$\left\| T\left(\widehat{B(\cdot)^n}\right)\right\|_{\Theta} \leqslant CD(\epsilon)(1+\epsilon)^j \rho^{-n}\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \|P\|_{\Theta}, \quad \text{se } k \in [1, +\infty),$$

*e*

$$\left\| T\left(\widehat{B(\cdot)^n}\right)\right\|_{\Theta} \leqslant CD(\epsilon)(1+\epsilon)^j \rho^{-n} \|P\|_{\Theta}, \quad \text{se } k = +\infty.$$

*para todo $P \in \mathcal{P}_{\Theta}({}^{j}E)$, $j \in \mathbb{N}_0$ e $n \in \mathbb{N}_0$, $n \leqslant j$.*

**Observação 1.2.26.** (i) *A condição (2) da definição de $\pi_{2,k}$-tipo de holomorfia tem uma ligeira diferença com a definição original introduzida em [38, Definition 3.7]. Na definição original a condição (2) é substituída por:*

(2′) *Existem constantes $C > 0$ e $\rho > A$ tais que*

$$|Tf| \leqslant C \|f\|_{\Theta,k,\rho}, \quad \text{se } k \in [1, +\infty),$$

*e*

$$|Tf| \leqslant Cp^{\infty}_{\Theta,\rho}(f), \quad \text{se } k = +\infty,$$

*para toda $f \in Exp^{k}_{\Theta,0,A}(E)$ e, uma constante $M > 0$ tal que*

$$\left\| T\left(\widehat{B(\cdot)^n}\right)\right\|_{\Theta} \leqslant CM^j \rho^{-n}\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \|P\|_{\Theta}, \quad \text{se } k \in [1, +\infty),$$

*e*

$$\left\| T\left(\widehat{B(\cdot)^n}\right)\right\|_{\Theta} \leqslant CM^j \rho^{-n} \|P\|_{\Theta}, \quad \text{se } k = +\infty.$$

*para todo $P \in \mathcal{P}_{\Theta}({}^{j}E)$, $j \in \mathbb{N}_0$ e $n \in \mathbb{N}_0$, $n \leqslant j$.*

*Entretanto, todos os resultados deste trabalho em que se exige a condição de $\pi_{2,k}$-tipo de holomorfia na hipótese, valem tanto com a condição* (2′) *quanto com a condição* (2)*, exceto a Proposição 3.2.5, e portanto suas consequências, que são: o Corolário 3.2.6, o Teorema 3.2.9, o Corolário 3.2.10* e *o Corolário 3.2.11. Para estes resultados, foi necessário usar a condição* (2) *e foi por isso que preferimos usar essa definição. Mas cabe ressaltar que todos os exemplos conhecidos de $\pi_{2,k}$-tipo de holomorfia (polinômios nucleares, aproximáveis e usuais) satisfazem a condição com constante $M = 1$.*

(ii) *Quando $k = +\infty$ e $A = 0$, os conceitos de $\pi_{2,\infty}$-tipo de holomorfia e* $\pi_2$-tipo de holomorfia *(veja [36]) coincidem, e por isso escrevemos $\pi_{2,\infty} = \pi_2$. Se utilizarmos a condição* (2′) *ao invés de* (2) *a noção de $\pi_{2,\infty}$-tipo de holomorfia coincide com a noção de $\pi_2$-tipo de holomorfia dada em [13, Definition 2.5], que nada mais é do que um refinamento da noção de $\pi_2$-tipo de holomorfia de [36], em que aparece a referida constante $M$.*

Depois de toda essa terminologia, vamos agora apresentar alguns resultados básicos relacionados com a transformada de Fourier-Borel e os operadores de convolução, que serão usados no Capítulo 3.

**Teorema 1.2.27.** *(Vide [37, Definition 4.4, Theorems 4.6 and 4.9]) Sejam $E$ um espaço de Banach, $k \in (1, +\infty]$, $A \geqslant 0$ e $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um $\pi_1$-tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$. Então a* transformada de Fourier-Borel, *que denotamos por $\mathcal{F}$:*

(i)
$$\mathcal{F}\colon \left[Exp^k_{\Theta,0,A}\left(E\right)\right]' \longrightarrow \mathcal{H}(E'),$$
*dada por $\mathcal{F}T\left(\varphi\right) = T\left(e^\varphi\right)$ para todo $T \in \left[Exp^k_{\Theta,0,A}\left(E\right)\right]'$ e $\varphi \in E'$,*

(ii)
$$\mathcal{F}\colon \left[Exp^1_{\Theta,0,A}\left(E\right)\right]' \longrightarrow \mathcal{H}(B_{E'}(0;A)),$$
*dada por $\mathcal{F}T\left(\varphi\right) = T\left(e^\varphi\right)$ para todo $T \in \left[Exp^1_{\Theta,0,A}\left(E\right)\right]'$ e $\varphi \in E'$ com $\|\varphi\| < A$ e $A > 0$,*

*é um operador injetivo.*

Essa definição da transformada de Fourier-Borel sobre $\left[Exp^1_{\Theta,0,A}\left(E\right)\right]'$ é natural, mas em [37, Definition 4.7] os autores introduziram uma outra definição com o intuito de estabelecer um isomorfismo algébrico entre $\left[Exp^1_{\Theta,0,A}\left(E\right)\right]'$ e um outro espaço.

**Proposição 1.2.28.** *Sejam $E$ um espaço de Banach com dual separável, $k \in (1, +\infty]$, $A > 0$ e $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um $\pi_1$-tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$. Então os espaços $Exp^k_{\Theta,0}\left(E\right)$ e $Exp^1_{\Theta,0,A}\left(E\right)$ são separáveis.*

*Demonstração.* Primeiro provaremos que $Exp^k_{\Theta,0}\left(E\right)$ é separável. Para isso, seja $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso em $E'$. Afirmamos que $\text{span}\{e^{\varphi_n} : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $Exp^k_{\Theta,0}\left(E\right)$. De fato, pelo Teorema de Hahn-Banach é suficiente provar que se um funcional $T \in [Exp^k_{\Theta,0}(E)]'$ é nulo sobre $\text{span}\{e^{\varphi_n} : n \in \mathbb{N}\}$, então $T$ é identicamente zero. Como a transformada de Fourier-Borel é um operador injetivo, basta mostrar que $\mathcal{F}T = 0$. Pela suposição
$$\mathcal{F}T(\varphi_n) = T(e^{\varphi_n}) = 0$$
para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $E'$ e $\mathcal{F}T$ é uma função contínua, segue que $\mathcal{F}T = 0$. Portanto, $Exp^k_{\Theta,0}\left(E\right)$ é separável.

Para provar que $Exp^1_{\Theta,0,A}\left(E\right)$ é separável procedemos como antes, pois a bola aberta em $E'$ de centro zero e raio $A$ é também separável (com a topologia induzida de $E'$), e a transformada de Fourier-Borel sobre $Exp^1_{\Theta,0,A}\left(E\right)$ é um operador injetivo. $\square$

Os dois resultados seguintes aparecem em [38, Propositions 3.1 and 3.3], respectivamente, trabalho este que está atualmente submetido para publicação. Embora tenhamos tudo para justificar tais resultados agora, por questão de objetividade preferimos incluir as demonstrações desses fatos no Apêndice.

**Proposição 1.2.29.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$, $k \in [1, +\infty]$ e $A \geqslant 0$. Se $f \in Exp_{\Theta,0,A}^k(E)$ e $a \in E$, então $\widehat{d}^n f(\cdot)a \in Exp_{\Theta,0,\sigma A}^k(E)$ para qualquer constante $\sigma$ satisfazendo a condição (3) da Definição 1.2.15. Além disso,*

$$\widehat{d}^n f(\cdot)a = \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!}\widehat{d^{j+n}f(0)(\cdot)^j}(a), \tag{1.2.8}$$

*na topologia de $Exp_{\Theta,0,\sigma A}^k(E)$.*

Lembramos que $\tau_a f = f(\cdot - a)$ representa o operador translação por $a$.

**Proposição 1.2.30.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$ e $k \in [1, +\infty]$. Se $f \in Exp_{\Theta,0}^k(E)$ e $a \in E$, então $\tau_{-a}f \in Exp_{\Theta,0}^k(E)$ e*

$$\tau_{-a}f = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\widehat{d}^n f(\cdot)a,$$

*na topologia de $Exp_{\Theta,0}^k(E)$.*

Essa última proposição garante que todo operador translação sobre $Exp_{\Theta,0}^k(E)$ está bem definido e é contínuo. Sendo assim, podemos definir os operadores de convolução sobre $Exp_{\Theta,0}^k(E)$ como antes, ou seja, operadores contínuos que comutam com todas as translações. Denotamos o conjunto de todos os operadores de convolução sobre $Exp_{\Theta,0}^k(E)$ por $\mathcal{A}_{\Theta,0}^k$ e por $\gamma_{\Theta,0}^k$ a aplicação linear

$$\gamma_{\Theta,0}^k \colon \mathcal{A}_{\Theta,0}^k \longrightarrow \left[Exp_{\Theta,0}^k(E)\right]'$$

dada por $\gamma_{\Theta,0}^k(L)(f) = (Lf)(0)$, para toda $f \in Exp_{\Theta,0}^k(E)$ e todo $L \in \mathcal{A}_{\Theta,0}^k$.

## 1.3 Dinâmica Linear

Os conceitos introdutórios apresentados nesta seção ajudarão o leitor a compreender e avaliar melhor os resultados dos Capítulos 3 e 4. Grande parte dos conceitos e resultados aqui discutidos estão registrados no livro clássico de Grosse-Erdmann e Peris [46, Chapters 9 e 12]. Nesta seção trabalharemos com evt's complexos de Hausdorff.

**Definição 1.3.1.** *Um* sistema dinâmico linear *é um par $(E, T)$ consistindo de um evt $E$ e um operador contínuo $T : E \to E$.*

Usualmente dizemos que $T$ ou $T : E \to E$ é um sistema dinâmico linear.

**Definição 1.3.2.** *Um sistema dinâmico $T : E \to E$ é dito* topologicamente transitivo *se, para qualquer par $U, V$ de subconjuntos abertos não vazios de $E$, existe algum $n \geqslant 0$ tal que*

$$T^n(U) \cap V \neq \varnothing.$$

Em outras palavras, dados $U, V$ abertos e não vazios de $E$ sempre existe uma potência de $T$ que leva algum ponto de $U$ para $V$.

**Definição 1.3.3.** *Um sistema dinâmico $T : E \to E$ é dito* misturador *(em Inglês,* mixing*) se, para qualquer par $U, V$ de subconjuntos abertos não vazios de $E$, existe algum $N \geqslant 0$ tal que*

$$T^n(U) \cap V \neq \varnothing$$

*para todo $n \geqslant N$.*

Obviamente, mistura é uma noção mais forte que transitividade topológica. Num sistema dinâmico $T : E \to E$, um vetor $x \in E$ é dito *vetor periódico* de $T$ se existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x = x$.

**Definição 1.3.4. *(Caos linear).*** *Um operador contínuo $T$ sobre um evt $E$ é dito* caótico *se satisfaz as seguintes condições:*

(i) *$T$ é topologicamente transitivo;*

(ii) *$T$ tem um conjunto denso de vetores periódicos.*

Essa definição de caos em evt's foi proposta por Bonet em [15], que adotou a definição original do caos de Devaney. Para $V \subset E$ chamamos de *órbita* de $V$ sob $T$, denotado por $\operatorname{orb}_T(V)$, o conjunto

$$\operatorname{orb}_T(V) = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(V).$$

Outros autores também denotam a órbita de $V$ sob $T$ como $\operatorname{orb}(V, T)$, ou $\mathcal{O}(V, T)$, ou $O(T, V)$. Quando $V$ é um conjunto unitário, o estudo dessa órbita tem tido bastante agitação nas últimas duas décadas.

### 1.3.1 Hiperciclicidade e $n$-superciclicidade

Começaremos estudando o comportamento das órbitas de conjuntos unitários.

**Definição 1.3.5.** *Um operador contínuo $T$ sobre um evt $E$ é dito* hipercíclico *se existe algum $x \in E$ cuja órbita sob $T$ (isto é, $\operatorname{orb}(x, T) = \{T^n x : n \in \mathbb{N}_0\}$) é densa em $E$. Em tal caso, $x$ é dito um* vetor hipercíclico *para $T$.*

O estudo de operadores hipercíclicos exige que o espaço em questão seja separável.

**Exemplo 1.3.6. *(Godefroy-Shapiro [45]).*** *Todo operador de convolução não trivial (isto é, um operador de convolução que não é um múltiplo escalar da identidade) sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, é hipercíclico e caótico.*

Faremos menção a esse exemplo algumas vezes ao longo do texto com o propósito de refletir acerca dos operadores de convolução.

**Proposição 1.3.7.** *(Vide [46, Proposition 1.15]) Todo operador hipercíclico sobre um evt é topologicamente transitivo.*

A recíproca dessa proposição deixa de ser verdadeira no contexto geral de evt's, mas quando consideramos operadores contínuos sobre espaços de Fréchet, o Teorema da transitividade de Birkhoff garante a volta. A referência clássica onde encontramos um resultado que contradiz a recíproca de tal proposição é [15, Example 1], ou se preferir, veja [46, Example 12.9]. Tal resultado é devido a Bonet, que considerou um operador de Rolewicz sobre um espaço normado de dimensão infinita, de fato enumerável, e portanto incompleto.

Um dos nossos resultados principais também contradiz a volta da Proposição 1.3.7, só que desta vez consideramos um elc não metrizável de dimensão infinita e completo. Mais precisamente, no Teorema 4.2.2 provamos que todo operador de convolução não trivial sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ é topologicamente transitivo, de fato, eles são mesmo misturadores. Como sabemos de [39], esses operadores não são hipercíclicos.

**Definição 1.3.8.** *Um operador contínuo $T$ sobre um evt $E$ é dito* cíclico *se existe algum $x \in E$ tal que o espaço gerado por* $\mathrm{orb}(x, T)$, $\mathrm{span}\{T^n x : n \in \mathbb{N}_0\}$, *é denso em $E$. Em tal caso, $x$ é dito um* vetor cíclico *para $T$.*

O estudo de vetores cíclicos está fortemente relacionado com o Problema do Subespaço Invariante, o qual permanece em aberto para o caso em que o espaço de Banach é um espaço de Hilbert. A ponte que une essas duas teorias é que o menor subespaço fechado $T$-invariante de $E$ que contém $x$ é o fecho do espaço gerado por $\mathrm{orb}(x, T)$.

**Definição 1.3.9.** *Um operador contínuo $T$ sobre um evt $E$ é dito $n$-*supercíclico, *$n \in \mathbb{N}$, se existe algum subespaço $V$ de $E$ de dimensão $n$ tal que o espaço gerado por* $\mathrm{orb}_T(V)$ *é denso em $E$. Em tal caso, $V$ é dito um* subespaço supercíclico *para $T$. Um operador* 1*-supercíclico é geralmente conhecido como um operador* supercíclico.

Então vale o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hiperciclicidade} & \Longrightarrow & \text{Superciclicidade} & \Longrightarrow & \text{Ciclicidade} \\ & & \Downarrow & & \\ & & n\text{-Superciclicidade} & & \end{array}$$

Neste trabalho provamos que os operadores de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ não são cíclicos nem $n$-supercíclicos, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, melhorando um resultado de [39], vide Capítulo 4.

### 1.3.2 Operadores frequentemente hipercíclicos

O célebre Teorema Ergódico de Birkhoff (veja Teorema 1.3.13 abaixo) sugere uma variante mais forte que hiperciclicidade, chamada de hiperciclicidade frequentemente.

A *densidade inferior* de um subconjunto $A \subset \mathbb{N}_0$ é definida por

$$\underline{\text{dens}}(A) = \liminf_{N \to +\infty} \frac{\text{card}\{0 \leqslant n \leqslant N : n \in A\}}{N+1}.$$

**Definição 1.3.10.** *(Vide [8, 9]) Um operador contínuo $T$ sobre um espaço de Fréchet $E$ é dito* frequentemente hipercíclico *se existe algum $x \in E$ tal que, para qualquer subconjunto aberto não vazio $U$ de $E$, $\underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N}_0 : T^n x \in U\}$ é positiva. Neste caso, $x$ é dito um* vetor frequentemente hipercíclico *para $T$. O conjunto dos vetores frequentemente hipercíclicos para $T$ é denotado por $FHC(T)$.*

Hiperciclicidade frequente é uma noção mais forte que hiperciclicidade (veja [46, Proposition 9.3]). Mas, essas noções não coincidem, veja [9, Example 2.9] ou [46, Example 9.18].

**Exemplo 1.3.11.** ***(Bonilla e Grosse-Erdmann).*** *Em [16] Bonilla e Grosse-Erdmann estenderam o resultado de Godefroy e Shapiro (Exemplo 1.3.6), provando que os operadores de convolução não triviais sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, são de fato, frequentemente hipercíclicos.*

Como essa noção foi inspirada pela teoria ergódica, cabe a nós lembrar, pelo menos, alguns conceitos básicos da teoria da medida.

**Definição 1.3.12.** *Sejam $T$ um operador contínuo sobre um evt $E$ e $\mu$ uma medida de probabilidade de Borel sobre $E$.*

(i) *$\mu$ é dita $T$-*invariante *(ou se preferir, $T$ é dito $\mu$-*invariante*) se $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo conjunto de Borel $A \subset E$.*

(ii) *$\mu$ tem* suporte completo *se $\mu(U) > 0$ para todo subconjunto aberto não vazio $U \subset E$.*

(iii) *$T$ é dito* fortemente misturador *em relação a $\mu$ se para quaisquer dois conjuntos de Borel $A, B \subset E$ tem-se*

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A \cap T^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B).$$

(iv) *$T$ é dito* ergódico *em relação a $\mu$ se, para quaisquer dois conjuntos de Borel $A$ e $B$ com $\mu(A) > 0$ e $\mu(B) > 0$, existe algum $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $\mu(A \cap T^{-n}(B)) > 0$.*

Note que se $T$ é fortemente misturador em relação a $\mu$, então $T$ é ergódico em relação a $\mu$. Se $T$ é ergódico em relação a $\mu$ e $\mu$ tem suporte completo então $T$ é topologicamente transitivo. Finalmente, se $T$ é fortemente misturador em relação a $\mu$ e $\mu$ tem suporte completo, então $T$ é misturador.

**Teorema 1.3.13.** ***(Teorema ergódico de Birkhoff [10, Theorem 5.3]).*** *Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T$ uma função mensurável sobre $X$. Suponha ainda que, $\mu$ é $T$-invariante e $T$ é ergódico em relação a $\mu$. Então, para toda $f \in L_1(X, \mu)$,*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) \xrightarrow{N\to+\infty} \int_X f d\mu \qquad \mu - \text{qtp}.$$

**Observação 1.3.14.** *Sejam $T$ um operador contínuo sobre um espaço de Fréchet separável $E$ e $\mu$ uma medida de probabilidade de Borel sobre $E$, $T$-invariante com suporte completo. Então, por uma aplicação do Teorema ergódico de Birkhoff temos que, se $T$ é ergódico em relação a $\mu$ então $T$ é frequentemente hipercíclico e $\mu(FHC(T)) = 1$. Isto é, $FHC(T) = E$ $\mu$-qtp, vide [10, Corollary 5.5] ou [46, p. 236].*

### 1.3.3 Caos de Li–Yorke em evt's

A noção de caos é uma das ideias mais importantes no estudo de sistemas dinâmicos. A definição de caos de melhor aceitação no contexto linear é aquela introduzida por Devaney em [29], a qual descreve três propriedades específicas do caos determinístico, a saber: transitividade topológica, dependência sensitiva sobre condições iniciais (mais conhecido como o efeito borboleta) e a tal periodicidade. Uma outra noção importante de caos na dinâmica topológica é aquela introduzida em 1975 por Li e Yorke em [55], essa foi a primeira definição matemática de caos que atualmente é conhecida como caos de Li–Yorke. A noção de caos de Li–Yorke no contexto linear foi desenvolvida inicialmente para operadores contínuos sobre espaços de Banach, mas recentemente Bernardes *et al* [12] estudaram a noção de caos no sentido de Li–Yorke e suas variantes no contexto de espaços de Fréchet, resgatando muitos dos resultados válidos em espaços de Banach.

**Observação 1.3.15.** *Sejam $(X, d)$ um espaço métrico e $f : X \to X$ uma função contínua. Um par $(x, y) \in X \times X$ é dito* par Li–Yorke *para $f$ se*

$$\liminf_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \qquad \text{e} \qquad \limsup_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

*Um* conjunto misturado *(em Inglês,* scrambled*) para $f$ é um subconjunto $S$ de $X$ tal que $(x, y)$ é um par Li-Yorke para $f$ sempre e quando $x$ e $y$ sejam pontos distintos de $S$. Uma função $f$ é dita* Li–Yorke caótica *se ela admite um conjunto misturado não enumerável. Por [12, Theorem 9], todo operador hipercíclico é Li–Yorke caótico.*

Passando a situações mais gerais, recentemente, em [2] Arai introduziu uma definição matemática de caos no sentido Li–Yorke para uma ação de um grupo sobre espaços uniformes. Nesse trabalho ele prova que, sob condições adequadas, caos no sentido de Devaney também implica caos de Li–Yorke. Como todo evt é trivialmente um espaço uniforme, aqui vamos adotar e adaptar essa definição de caos.

**Definição 1.3.16.** ***(Par Li–Yorke em evt).*** *Num sistema dinâmico $T : E \to E$ sobre um evt $E$, um par $(x, y) \in E \times E$ é dito* par Li–Yorke *para $T$ se a sequência $\{T^n(x-y)\}_{n=1}^{\infty}$ não converge a zero, mas contém uma subrede que converge a zero.*

**Observação 1.3.17.** *Notemos que a definição de par Li–Yorke para um operador contínuo sobre um evt é consistente com a definição de par Li–Yorke para um operador contínuo sobre um evt metrizável. De fato, sejam $(X, d)$ um evt metrizável com métrica invariante sob translações e $T : X \to X$ um operador contínuo. Se $(x, y)$ é um par Li–Yorke para $T$ no sentido de evt's, então a sequência $\{d(T^n(x-y), 0)\}_{n=1}^{\infty}$ não converge a zero, mas contém uma subsequência que converge a zero, isto é,*

$$\liminf_{n\to+\infty} d(T^n(x), T^n(y)) = \liminf_{n\to+\infty} d(T^n(x-y), 0) = 0$$

*e*

$$\limsup_{n\to+\infty} d(T^n(x), T^n(y)) = \limsup_{n\to+\infty} d(T^n(x-y), 0) > 0,$$

*ou seja, $(x, y)$ é um par Li–Yorke no sentido de espaços métricos.*

O conceito de conjunto misturado para um operador contínuo sobre um evt é análogo ao conceito em espaços métricos.

**Definição 1.3.18.** *Um operador contínuo $T$ sobre um evt $E$ é dito* Li–Yorke caótico *se ele admite um conjunto misturado não enumerável.*

No Capítulo 4 veremos um dos nossos resultados principais, a saber; todo operador de convolução não trivial sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ (elc não metrizável) é Li–Yorke caótico. Em [12] os autores provaram várias propriedades sobre caos de Li–Yorke para operadores contínuos sobre espaços de Fréchet. Baseado nesses resultados, neste trabalho estendemos muitos desses resultados para operadores contínuos sobre evt's. Os seguintes conceitos são uma generalização para evt's daqueles conceitos que aparecem em [12] para espaços de Fréchet.

**Definição 1.3.19.** *Seja $T : E \to E$ um operador linear contínuo sobre um evt $E$. Um vetor $x \in E$ é dito* vetor semi-irregular *para $T$ se a sequência $(T^n x)_{n=1}^{\infty}$ não converge a zero, mas contém uma subrede convergindo para zero.*

Conforme foi observado em [12], essa noção de vetor semi-irregular faz sentido só em ambientes de dimensão infinita, pois aplicando a forma de Jordan pode-se mostrar que nenhum operador sobre um espaço de dimensão finita possui vetor semi-irregular. Note também que $(x, y) \in E \times E$ é um par Li–Yorke para $T$ se, e só se, $x - y$ é um vetor semi-irregular para $T$. O seguinte teorema, embora seja simples de provar, é extremamente útil para conseguirmos nosso resultado acerca de caos de Li–Yorke. Ele será frequentemente citado ao longo deste trabalho.

**Teorema 1.3.20.** *Seja $T : E \to E$ um operador contínuo sobre um evt $E$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *$T$ é Li–Yorke caótico,*

(ii) *$T$ admite um par Li–Yorke,*

(iii) *$T$ admite um vetor semi-irregular.*

*Demonstração.* As implicações (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) são imediatas.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja $x$ um vetor semi-irregular para $T$. Então para todo $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ com $\alpha \neq \lambda$, a sequência $\{T^n(\alpha x - \lambda x)\}_{n=1}^{\infty}$ não converge a zero, mas contém uma subrede convergindo para zero. Segue então que $\operatorname{span}\{x\}$ é um conjunto misturado não enumerável para $T$ e consequentemente $T$ é Li–Yorke caótico. □

Perceba então o quanto esse teorema é poderoso: Já não é preciso estudar o caos de Li–Yorke num contexto "global" senão apenas num contexto "pontual". Aplicando este teorema obtemos rapidamente o seguinte corolário.

**Corolário 1.3.21.** *Seja $T : E \to E$ um operador contínuo sobre um evt $E$. Se $T$ é hipercíclico então é Li–Yorke caótico.*

A recíproca deste corolário é falsa, veja o Teorema 4.2.4.

**Definição 1.3.22.** *Seja $T : E \to E$ um operador contínuo sobre um evt $E$.*

($a$) *$T$ é dito* densamente Li–Yorke caótico *se ele admite um conjunto misturado denso não enumerável.*

($b$) *$T$ é dito* densamente fraco Li–Yorke caótico *(abreviado,* densamente $w$-Li–Yorke caótico*) se o conjunto de todos os pares Li–Yorke para $T$ é denso em $E \times E$.*

Note que o seguinte diagrama é válido:

Densamente Li–Yorke caótico $\Longrightarrow$ Densamente $w$-Li–Yorke caótico $\Longrightarrow$ Li–Yorke caótico

No entanto, Li–Yorke caótico não necessariamente implica densamente Li–Yorke caótico, veja [71, Remark 2.3], por exemplo.

**Teorema 1.3.23.** *Seja $T : E \to E$ um operador contínuo sobre um evt $E$. Considere as seguintes condições:*

(i) *$T$ é densamente Li–Yorke caótico.*

(ii) *$T$ é densamente $w$-Li–Yorke caótico.*

(iii) *$T$ admite um conjunto denso de vetores semi-irregulares.*

*Então* (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii)*.*

*Demonstração.* A implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) é imediata.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sejam $x \in E$ e $V$ uma vizinhança de zero em $E$. Então $x + V$ é uma vizinhança de $x$. Vamos provar que $x + V$ contém um vetor semi-irregular para $T$. De fato, seja $U$ uma vizinhança de zero equilibrada em $E$ tal que $U + U \subset V$. Por hipótese, existe um par Li–Yorke $(a, b)$ para $T$ tal que $(a, b) \in (x, 0) + (U \times U)$, segue que $a - x, b \in U$ e por sua vez

$$a - x - b \in U - U \subset U + U \subset V.$$

Portanto, $y := a - b$ é um vetor semi-irregular para $T$ que pertence a $x + V$. □

Em [12], os autores mostraram que essas afirmações são mesmo equivalentes para operadores contínuos sobre espaços de Fréchet separáveis. Eles usaram fortemente o fato de ser espaço métrico completo, sendo o Teorema de Baire a ferramenta chave. Nós não sabemos se pelo menos duas dessas afirmações são equivalentes para operadores contínuos sobre evt's separáveis.

**Proposição 1.3.24.** *Sejam $E$ um elc, $T : E \to E$ um operador contínuo e $T^*$ o operador adjunto de $T$. Se $T^*$ possui um autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| \geqslant 1$, então $T$ não é densamente $w$-Li–Yorke caótico.*

*Demonstração.* Sejam $\lambda$ um autovalor de $T^*$ e $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$, tais que $T^*\varphi = \lambda\varphi$. Logo

$$\varphi(T^n x) = ((T^*)^n \varphi)(x) = \lambda^n \varphi(x)$$

para todo $x \in E$. Agora suponha que $T$ seja densamente $w$-Li–Yorke caótico. Em seguida, pelo teorema anterior, $T$ admite um conjunto denso de vetores semi-irregulares. De modo que existe $x \in E$ vetor semi-irregular para $T$ tal $\varphi(x) \neq 0$. Seja $(T^{\phi(\gamma)}x)_{\gamma \in \Lambda}$ uma subrede de $(T^n x)_{n=1}^{\infty}$ que converge a zero. Então

$$\lambda^{\phi(\gamma)} \varphi(x) = \varphi(T^{\phi(\gamma)} x) \to 0,$$

isso implica que $|\lambda| < 1$. □

O seguinte resultado foi provado em [51, Proposition 2.8] no caso em que $E$ é um espaço de Banach, nós adaptamos essa demonstração para espaços localmente convexos.

**Proposição 1.3.25.** *Seja $T : E \to E$ um operador contínuo sobre um elc $E$. Se o espaço vetorial gerado pelos $\varphi \in E'$ tais que $T^*\varphi = \lambda\varphi$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| \geqslant 1$ é fracamente denso em $E'$, então $T$ não é Li–Yorke caótico.*

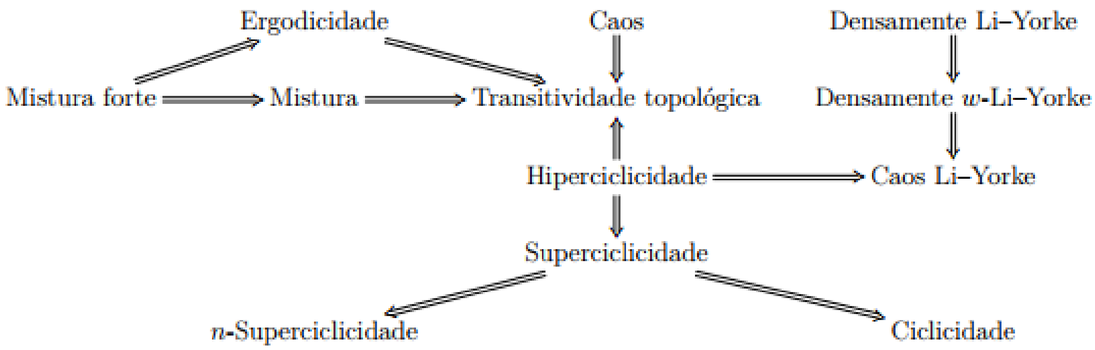
*Demonstração.* Seja $0 \neq x \in E$. Claramente a aplicação avaliação $\delta_x$ sobre $E'$, definida por, $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$, é fracamente contínua e diferente de zero. Pela hipótese existe $\varphi_0 \in E'$ tal que $T^*\varphi_0 = \lambda\varphi_0$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| \geqslant 1$ e $\delta_x(\varphi_0) \neq 0$. Logo

$$|\varphi_0(T^n x)| = |(T^*)^n \varphi_0(x)| = |\lambda^n \varphi_0(x)| \geqslant |\varphi_0(x)| > 0,$$

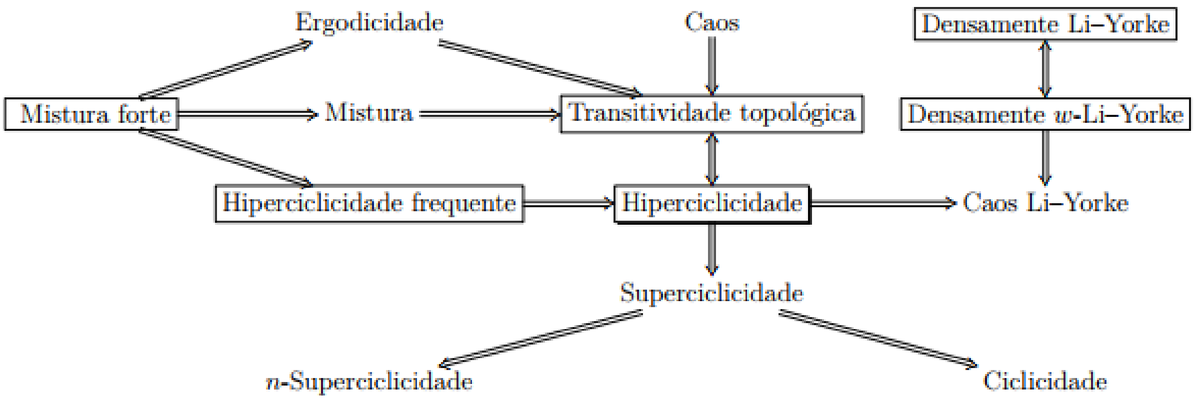
para todo $n \in \mathbb{N}$. De modo que não existe subrede de $(T^n x)_{n=1}^{\infty}$ que converge a zero. Assim $T$ não possui vetor semi-irregular e então (pelo Teorema 1.3.20) não pode ser Li–Yorke caótico. □

Os seguintes diagramas ilustram, em dois contextos diferentes, a relação entre as diversas propriedades dinâmicas estudas neste trabalho.

**Caso evt geral:**




**Caso Fréchet:**



# Capítulo 2

# Pré-duais de espaços de funções holomorfas e a propriedade de aproximação

Diversos autores têm estudado propriedades topológicas do espaço $G(U)$ (veja [17, 18, 19, 25, 26, 44, 61], apenas por citar alguns). Por exemplo, em [19, Theorem 14], Boyd provou que se $U$ é um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço Fréchet–Montel $E$ tal que $G(E)$ é Montel[2], então $E$ tem a propriedade de aproximação se e somente se $G(U)$ tem a propriedade de aproximação. Um outro resultado nessa direção é devido a Çaliskan [26, Proposition 6.6], que provou que se $U$ é um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço de Fréchet $E$, então $E$ tem a propriedade de aproximação compacta se e somente se $G(U)$ tem a propriedade de aproximação compacta.

Neste capítulo representamos o pré-dual $G(U)$ do espaço das funções holomorfas como o limite projetivo dos espaços $G^\infty(\mathcal{U})$ (veja Teorema 2.1.5), onde $\mathcal{U}$ varia entre todas as coberturas enumeráveis, abertas e crescentes de $U$. Como aplicação deste resultado, provamos que se $U$ é um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço de Banach $E$, então $E$ tem a propriedade de aproximação se e somente se $G(U)$ tem a propriedade de aproximação. Nós também fornecemos uma outra demonstração para um resultado de Aron e Schottenloher [3, Theorem 2.2], o qual afirma que se $U$ é um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço de Banach $E$ e $E$ tem a propriedade de aproximação, então $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ tem a propriedade de aproximação.

Vale ressaltar que, um espaço de Banach é Montel se e somente se ele tem dimensão finita. Em consequência, a classe de espaços estudados por Boyd [19, Theorem 14] e a classe de espaços sob nosso estudo são, em geral, diferentes. Por outro lado, sabemos que a propriedade de aproximação implica a propriedade de aproximação compacta, mas

---

[2] Um elc de Hausdorff é dito de *Montel* se ele é reflexivo e todo subconjunto limitado é relativamente compacto. Enquanto *Fréchet–Montel* é um elc que é Fréchet e Montel.

a recíproca em geral é falsa (veja [75]).

Os resultados deste capítulo estão publicados em [22].

## 2.1 Uma descrição de $G(U)$ como um limite projetivo

Em [62] Mujica estudou a relação entre os pré-duais $G^\infty(\mathcal{U})$ e $G^\infty(U)$ obtendo, em particular, o seguinte resultado.

**Teorema 2.1.1.** *Sejam $U$ um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço de Banach $E$ e $\mathcal{U} = (U_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência crescente de subconjuntos abertos, equilibrados e limitados de $U$ tal que $U = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ e $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$, com $\rho_n > 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então*

(a) $G^\infty(\mathcal{U}) = \mathrm{ind}_{n\in\mathbb{N}} G^\infty(U)$ *topologicamente.*

(b) $G^\infty(\mathcal{U})$ *tem a propriedade de aproximação se e somente se $E$ tem a propriedade de aproximação.*

Motivados por este teorema, estudamos a relação entre os pré-duais $G(U)$ e $G^\infty(\mathcal{U})$ e investigamos condições suficientes e necessárias para que $G(U)$ tenha a propriedade de aproximação. Mais especificamente, no Corolário 2.1.16 provaremos que

$$G(U) = \mathrm{proj}_{\mathcal{U}} G^\infty(\mathcal{U})$$

topologicamente, onde $\mathcal{U}$ varia entre todas as coberturas de $U$ que satisfazem as condições do teorema anterior. Depois, como aplicação direta dessa representação, provamos no Teorema 2.2.4 que se $E$ tem a propriedade de aproximação, então $G(U)$ também tem tal propriedade. Antes disso, introduzimos algumas notações que iremos usar no decorrer deste capítulo e preparamos o caminho para construir o limite projetivo dos pré-duais $G^\infty(\mathcal{U})$.

**Notação 2.1.2.** *Seja $U$ um subconjunto aberto de um elc $E$ (sempre complexo e de Hausdorff). Denotaremos por $\mathcal{A}(U)$ a família de todas as coberturas enumeráveis, abertas e crescentes $\mathcal{U}$ de $U$. Se não houver confusão com o conjunto $U$, escreveremos $\mathcal{A}$ em vez de $\mathcal{A}(U)$. Definimos a relação inclusão $\leqslant$ em $\mathcal{A}$ como segue: se $\mathcal{U} = (U_n)_{n=1}^\infty$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n=1}^\infty$ são coberturas abertas e crescentes de $U$ então,*

$$\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V} \quad \text{se e somente se} \quad V_n \subset U_n \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1.1}$$

*O conjunto $\mathcal{A}$ é dirigido sob a relação inclusão $\leqslant$. De fato, dadas $\mathcal{U} = (U_n)_{n=1}^\infty$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{A}(U)$, considere*

$$\mathcal{W} = (U_n \cap V_n)_{n=1}^\infty.$$

*Então $\mathcal{W}$ é uma sequência crescente de conjuntos abertos tal que $\mathcal{W} \geqslant \mathcal{U}$ e $\mathcal{W} \geqslant \mathcal{V}$ e, não é difícil verificar que,*

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \cap V_n).$$

*Segue que $\mathcal{W} \in \mathcal{A}(U)$, e assim a família é dirigida sob a relação $\leqslant$.*

Sejam $\mathcal{U} = (U_n)_{n=1}^{\infty}$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ então

$$\|f\|_{V_n} \leqslant \|f\|_{U_n} \tag{2.1.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U})$. De modo que $\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{V})$ e a aplicação inclusão $\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U}) \hookrightarrow \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{V})$ é contínua. Claramente

$$\mathcal{H}(U) = \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathcal{A}} \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U}),$$

pois toda função contínua é localmente limitada. Lembramos a Proposição 1.2.10

$$(\mathcal{H}(U), \tau_\delta) = \mathrm{ind}_{\mathcal{U} \in \mathcal{A}} \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U})$$

topologicamente. Isto é, a topologia $\tau_\delta$ sobre $\mathcal{H}(U)$ coincide com a topologia indutiva em relação às aplicações inclusões $\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U}) \hookrightarrow \mathcal{H}(U)$. Também não podemos esquecer que

$$(\mathcal{H}(U), \tau_0)' \subset G(U) \subset (\mathcal{H}(U), \tau_\delta)'.$$

**Lema 2.1.3.** *Sejam $U$ um subconjunto aberto de um elc $E$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$. Então a aplicação restrição*

$$R_{\mathcal{U}} : G(U) \to G^{\infty}(\mathcal{U}), \quad R_{\mathcal{U}}\varphi := \varphi|_{\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U})}, \quad \varphi \in G(U)$$

*é linear e contínua.*

*Demonstração.* Antes de tudo, vamos provar que $R_{\mathcal{U}}$ está bem definida. Para isso, consideremos $\varphi \in G(U)$ e verifiquemos que a restrição $\varphi|_{\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U})} \in G^{\infty}(\mathcal{U})$, ou seja, $\varphi|_{\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U})} \in \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U})'$ e $\varphi|_{B_{\mathcal{U}}^{\alpha}}$ é $\tau_0$-contínua para toda sequência $\alpha$ de números positivos. Primeiramente, é claro que $\varphi|_{\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U})}$ é linear, pois $\varphi \in \mathcal{H}(U)^*$. Como a inclusão $\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U}) \hookrightarrow (\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ é contínua, segue que a aplicação $\varphi|_{\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U})} : \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U}) \to \mathbb{C}$ é contínua, uma vez que a função composta

$$\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U}) \hookrightarrow (\mathcal{H}(U), \tau_\delta) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$$

é contínua. De outra parte, por $\varphi \in G(U)$ temos que $\varphi|_{B_{\mathcal{U}}^{\alpha}}$ é $\tau_0$-contínua para cada $B_{\mathcal{U}}^{\alpha} \subset \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U})$ e, portanto, $R_{\mathcal{U}}$ está bem definida.

Naturalmente $R_{\mathcal{U}}$ é uma aplicação linear. Agora, para provar que $R_{\mathcal{U}}$ é contínua, seja $\alpha$ uma sequência de números positivos. Então

$$\sup_{f \in B_{\mathcal{U}}^{\alpha}} |(R_{\mathcal{U}}\varphi)(f)| = \sup_{f \in B_{\mathcal{U}}^{\alpha}} |(\varphi|_{\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U})})(f)| = \sup_{f \in B_{\mathcal{U}}^{\alpha}} |\varphi(f)|.$$

Por um lado, a topologia de $G^\infty(\mathcal{U})$ é gerada pelas seminormas

$$p_\alpha(\psi) := \sup\{|\psi(f)| : f \in B^\alpha_{\mathcal{U}}\}, \text{ para todo } \psi \in G^\infty(\mathcal{U}),$$

onde $\alpha$ varia entre todas as sequências de números positivos e, por outro lado, a topologia de $G(U)$ é gerada pelas seminormas

$$p^\alpha_{\mathcal{V}}(\varphi) := \sup\{|\varphi(f)| : f \in B^\alpha_{\mathcal{V}}\}, \text{ para todo } \varphi \in G(U),$$

onde $\alpha$ varia entre todas as sequências de números positivos e $\mathcal{V} \in \mathcal{A}$. Nesta terminologia temos

$$p_\alpha(R_{\mathcal{U}}\varphi) = p^\alpha_{\mathcal{U}}(\varphi)$$

para todo $\varphi \in G(U)$ e toda sequência $\alpha$ de números positivos. Portanto, $R_{\mathcal{U}}$ é contínua. □

Não é difícil verificar que $R_{\mathcal{U}} \circ \delta_U = \delta_{\mathcal{U}}$. Segue do Teorema de linearização de Mazet que $R_{\mathcal{U}}$ é a linearização da função holomorfa $\delta_{\mathcal{U}} \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}, G^\infty(\mathcal{U}))$.

**Lema 2.1.4.** *Seja $U$ um subconjunto aberto de um elc $E$. A família $\{G^\infty(\mathcal{U}),\ \Pi_{\mathcal{U}\mathcal{V}} : \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{A}\ \text{ e }\ \mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}\}$ onde*

$$\Pi_{\mathcal{U}\mathcal{V}} : G^\infty(\mathcal{V}) \to G^\infty(\mathcal{U}), \quad \Pi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}\psi := \psi|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})} \text{ para todo } \psi \in G^\infty(\mathcal{V}),$$

*é um sistema projetivo.*

*Demonstração.* Primeiro de tudo, vamos provar que $\Pi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$, $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$, está bem definido. Para isso, consideremos $\psi \in G^\infty(\mathcal{V})$ e verifiquemos que a restrição $\psi|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})} \in G^\infty(\mathcal{U})$, ou seja, $\psi|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})} \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})'$ e $(\psi|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})})|_{B^\alpha_{\mathcal{U}}}$ é $\tau_0$-contínua para toda sequência $\alpha$ de números positivos. Para começar, como a inclusão $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \hookrightarrow \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ é contínua, segue que $\psi|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})} \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})'$. Agora, seja $\alpha$ uma sequência de números positivos. Por (2.1.2)

$$B^\alpha_{\mathcal{U}} \subset B^\alpha_{\mathcal{V}}, \tag{2.1.3}$$

como $\psi|_{B^\alpha_{\mathcal{V}}}$ é $\tau_0$-contínua (por hipótese) e $B^\alpha_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, segue que $(\psi|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})})|_{B^\alpha_{\mathcal{U}}} = \psi|_{B^\alpha_{\mathcal{U}}}$ é $\tau_0$-contínua. E assim $\Pi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ está bem definido.

Certamente $\Pi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ é um operador linear e por (2.1.3),

$$p^\alpha_{\mathcal{U}}(\Pi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}\psi) \leqslant p^\alpha_{\mathcal{V}}(\psi)$$

para todo $\psi \in G^\infty(\mathcal{V})$ e toda sequência $\alpha$ de números positivos. Isso implica que $\Pi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ é contínuo. Para terminar, note que:

(i) $\Pi_{\mathcal{U}\mathcal{U}}\psi = \psi|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})} = \psi$ para todo $\psi \in G^\infty(\mathcal{U})$.

(ii) Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ em $\mathcal{A}$ tais que $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{W}$. Então

$$\Pi_{\mathcal{U}\mathcal{V}} \circ \Pi_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(\psi) = \Pi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(\psi|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})}) = \left(\psi|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})}\right)|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})} = \psi|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})},$$

para todo $\psi \in G^\infty(\mathcal{W})$. Em outras palavras,

$$\Pi_{\mathcal{U}\mathcal{U}} = \mathrm{Id}_{G^\infty(\mathcal{U})} \quad \text{e} \quad \Pi_{\mathcal{U}\mathcal{V}} \circ \Pi_{\mathcal{V}\mathcal{W}} = \Pi_{\mathcal{U}\mathcal{W}}, \quad \text{sempre que} \quad \mathcal{U} \leqslant \mathcal{V} \;\text{ e }\; \mathcal{V} \leqslant \mathcal{W}.$$

□

Segue deste lema que o limite projetivo $\mathrm{proj}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} G^\infty(\mathcal{U})$ é o espaço localmente convexo e completo

$$\left\{(\psi_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} \in \prod_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} G^\infty(\mathcal{U}) : \Pi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(\psi_{\mathcal{V}}) = \psi_{\mathcal{U}}, \quad \text{sempre que} \;\; \mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}\right\},$$

munido com a topologia projetiva em relação as aplicações projeção de $\mathrm{proj}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} G^\infty(\mathcal{U})$ em $G^\infty(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$.

**Teorema 2.1.5.** *Seja $U$ um subconjunto aberto de um elc $E$. Então a aplicação canônica*

$$\Phi : G(U) \to \mathrm{proj}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} G^\infty(\mathcal{U}), \quad \Phi\varphi := (R_{\mathcal{U}}\varphi)_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} \quad \text{para todo} \quad \varphi \in G(U),$$

*é um isomorfismo topológico. Isto é,*

$$G(U) = \mathrm{proj}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} G^\infty(\mathcal{U})$$

*topologicamente.*

*Demonstração.* A aplicação $\Phi$ fica bem definida se, dados $\varphi \in G(U)$ e $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{A}$ com $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$, verifica-se $\Pi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(R_{\mathcal{V}}\varphi) = R_{\mathcal{U}}\varphi$. Mas isso é imediato, pois

$$\Pi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(R_{\mathcal{V}}\varphi) = (R_{\mathcal{V}}\varphi)|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})} = \left(\varphi|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})}\right)|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})} = \varphi|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})} = R_{\mathcal{U}}\varphi,$$

de forma que $\Phi$ está bem definida. Pela linearidade da aplicação restrição podemos ver que $\Phi$ é indubitavelmente linear.

**$\Phi$ é injetiva:** Em vista de

$$\mathcal{H}(U) = \bigcup_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}),$$

temos que $\Phi$ é injetiva. De fato, seja $\varphi \in G(U)$ tal que $\Phi\varphi = 0$. Então $R_{\mathcal{U}}\varphi = 0$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$, de modo que $\varphi|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})} = 0$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$. Daí $\varphi = 0$.

**$\Phi$ é sobrejetiva:** Seja $(\psi_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} \in \mathrm{proj}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} G^\infty(\mathcal{U})$. Defina a função $\varphi$ sobre $\mathcal{H}(U)$ por

$$\varphi(f) := \psi_{\mathcal{U}}(f) \tag{2.1.4}$$

quando $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$. Vejamos que $\varphi$ é de fato bem definida, quer dizer, o valor de $f$ sob $\varphi$ não depende do espaço $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ no qual esteja $f$. Para tal propósito, considere $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \cap \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ com $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ em $\mathcal{A}$ arbitrários. Conforme a definição de $\varphi$,

$$\varphi(f) := \psi_{\mathcal{U}}(f) \quad \text{e} \quad \varphi(f) := \psi_{\mathcal{V}}(f),$$

de modo que precisamos garantir que $\psi_{\mathcal{U}}(f) = \psi_{\mathcal{V}}(f)$. Dado que $\mathcal{A}$ é um conjunto dirigido, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{U}, \mathcal{V} \leqslant \mathcal{W}$. Logo $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \subset \mathcal{H}^\infty(\mathcal{W})$ e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}) \subset \mathcal{H}^\infty(\mathcal{W})$. Pela definição de limite projetivo, obtemos

$$\psi_{\mathcal{U}} = \Pi_{\mathcal{U}\mathcal{W}}(\psi_{\mathcal{W}}) = \psi_{\mathcal{W}}|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})} \quad \text{e} \quad \psi_{\mathcal{V}} = \Pi_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(\psi_{\mathcal{W}}) = \psi_{\mathcal{W}}|_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})}.$$

De onde segue que $\psi_{\mathcal{U}}(f) = \psi_{\mathcal{W}}(f) = \psi_{\mathcal{V}}(f)$, e portanto $\varphi$ está bem definida.

A função $\varphi$ é a nossa candidata natural para ser a pré-imagem do elemento $(\psi_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}}$ sob a aplicação $\Phi$, pois $\Phi\varphi = (R_{\mathcal{U}}\varphi)_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} = (\psi_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}}$. No entanto, ainda falta provar que $\varphi \in G(U)$, ou melhor ainda, falta constatar que $\varphi \in \mathcal{H}(U)^*$ e a restrição $\varphi|_{B^\alpha_{\mathcal{U}}}$ é $\tau_0$-contínua para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$ e cada sequência $\alpha$ de números positivos. A fim de provar que $\varphi$ é linear, sejam $f, g \in \mathcal{H}(U)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Sejam $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ coberturas em $\mathcal{A}$ tais que $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, $g \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ e $\mathcal{W} \geqslant \mathcal{U}, \mathcal{V}$. Disso tudo, segue que $f, g, f + \lambda g \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{W})$ e

$$\varphi(f + \lambda g) = \psi_{\mathcal{W}}(f + \lambda g) = \psi_{\mathcal{W}}(f) + \lambda\psi_{\mathcal{W}}(g) = \varphi(f) + \lambda\varphi(g).$$

Portanto $\varphi$ é uma aplicação linear. Seja agora $B^\alpha_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{H}(U)$ com $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$ e $\alpha$ sequência de números positivos. Então $B^\alpha_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $\varphi|_{B^\alpha_{\mathcal{U}}} = \psi_{\mathcal{U}}|_{B^\alpha_{\mathcal{U}}}$ é $\tau_0$-contínua, pois $\psi_{\mathcal{U}} \in G^\infty(\mathcal{U})$. Enfim $\varphi \in G(U)$, e portanto $\Phi$ é sobrejetiva.

**$\Phi$ é um homeomorfismo:** Se $\Pi_{\mathcal{V}} : (\psi_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} \in \mathrm{proj}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} G^\infty(\mathcal{U}) \to \psi_{\mathcal{V}} \in G^\infty(\mathcal{V})$ denota a projeção canônica sobre a coordenada $\mathcal{V}$, então $\Pi_{\mathcal{V}} \circ \Phi = R_{\mathcal{V}}$ é contínua para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{A}$. Decorre então da Proposição 1.1.10 que $\Phi$ é contínua.

Por último, para provar que $\Phi^{-1}$ é contínua, seja $B^\alpha_{\mathcal{V}} \subset \mathcal{H}(U)$ com $\mathcal{V} \in \mathcal{A}$ e $\alpha$ sequência de números positivos. Como

$$p_\alpha(\psi) = \sup_{f \in B^\alpha_{\mathcal{V}}} |\psi(f)| \quad \text{para todo} \quad \psi \in G^\infty(\mathcal{V}),$$

é uma seminorma contínua sobre $G^\infty(\mathcal{V})$, temos que $p_\alpha \circ \Pi_{\mathcal{V}}$ é uma seminorma contínua sobre $\mathrm{proj}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} G^\infty(\mathcal{U})$ e

$$\begin{aligned} p^\alpha_{\mathcal{V}}[\Phi^{-1}((\psi_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}})] &= \sup_{f \in B^\alpha_{\mathcal{V}}} |(\Phi^{-1}((\psi_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}}))(f)| = \sup_{f \in B^\alpha_{\mathcal{V}}} |\varphi(f)| = \sup_{f \in B^\alpha_{\mathcal{V}}} |\psi_{\mathcal{V}}(f)| \\ &= p_\alpha \circ \Pi_{\mathcal{V}}((\psi_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}}), \end{aligned}$$

observe que $\Phi^{-1}$ vem dada como em (2.1.4), daí $\Phi^{-1}$ é contínua. Assim, a demonstração do teorema está completa. □

Repare que na demonstração anterior usamos argumentos meramente da teoria de evt's.

**Proposição 2.1.6.** *O limite projetivo* $\mathrm{proj}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} G^\infty(\mathcal{U})$ *é reduzido.*

*Demonstração.* Primeiro notemos que, para cada cobertura $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$, $R_\mathcal{U}(G(U))$ é denso em $G^\infty(\mathcal{U})$. De fato, suponha que isso não aconteça para algum $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe um funcional não nulo $T \in G^\infty(\mathcal{U})'$ tal que $T\big|_{R_\mathcal{U}(G(U))} = 0$. Agora, considere o isomorfismo algébrico canônico

$$f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \to \widehat{f} \in G^\infty(\mathcal{U})',$$

onde $\widehat{f}(\psi) = \psi(f)$ para todo $\psi \in G^\infty(\mathcal{U})$. Como $T \neq 0$ existe $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, $f \neq 0$, tal que $T = \widehat{f}$. Logo

$$0 = T(R_\mathcal{U}(\varphi)) = \hat{f}(R_\mathcal{U}\varphi) = (R_\mathcal{U}\varphi)(f) = \varphi(f),$$

para todo $\varphi \in G(U)$. Em particular, $0 = \delta_x(f) = f(x)$ para todo $x \in U$, o que é impossível. Portanto $R_\mathcal{U}(G(U))$ tem que ser denso em $G^\infty(\mathcal{U})$. Por outro lado, a partir do seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{proj}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} G^\infty(\mathcal{U}) \arrow[r, "\Phi^{-1}"] \arrow[dr, "\Pi_\mathcal{U}"'] & G(U) \arrow[d, "R_\mathcal{U}"] \\ & G^\infty(\mathcal{U}) \end{tikzcd}$$

podemos concluir que $\Pi_\mathcal{U}$ tem imagem densa para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$, pois o operador $\Phi^{-1}$ é sobrejetivo. Portanto, $\mathrm{proj}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} G^\infty(\mathcal{U})$ é um limite projetivo reduzido. □

**Observação 2.1.7.** *Em [62, Theorem 2.1], Mujica provou que o dual indutivo de* $G^\infty(\mathcal{U})$, $G^\infty(\mathcal{U})'_i$, *é topologicamente isomorfo ao espaço* $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$. *Como consequência do Teorema 2.1.5 e da Proposição 1.2.10 obtemos os seguintes isomorfismos topológicos:*

$$(\mathrm{proj}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} G^\infty(\mathcal{U}))'_i \overset{2.1.5}{=} G(U)'_i = (\mathcal{H}(U), \tau_\delta) \overset{1.2.10}{=} \mathrm{ind}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) = \mathrm{ind}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} G^\infty(\mathcal{U})'_i.$$

Através dessa descrição do pré-dual $G(U)$ nós podemos ganhar qualquer propriedade topológica estável sob limites projetivos dos espaços $G^\infty(\mathcal{U})$ para o espaço $G(U)$ e vice-versa. Como a propriedade de aproximação é uma dessas propriedades topológicas importantes que se preserva sob limites projetivos (veja a Proposição 1.1.18), manifesta-se aqui o interesse em estudar a propriedade de aproximação para dito espaço. Por tal motivo o Teorema 2.1.1, ou se preferir [62, Theorem 4.2], aparece como veículo essencial para investigar as condições necessárias e suficientes para que $G(U)$ tenha a propriedade de aproximação.

Com essa ideia em mente, vamos "refinar" o Teorema 2.1.5, aliás, vamos provar que tal isomorfismo topológico é ainda válido para aquela subclasse de coberturas que aparece no Teorema 2.1.1. Mais precisamente, no Corolário 2.1.16 provaremos que

$$G(U) = \mathrm{proj}_{\mathcal{U}\in\mathcal{B}} G^{\infty}(\mathcal{U})$$

topologicamente, onde $\mathcal{B}$ (ou $\mathcal{B}(U)$, aqui $U$ é um subconjunto aberto e equilibrado de um elc $E$) denota a família de todas as coberturas abertas e crescentes $\mathcal{U} = (U_n)_{n=1}^{\infty}$ de $U$ tais que:

(i) $U_n$ é equilibrado e limitado para todo $n \in \mathbb{N}$,

(ii) existe uma sequência $(\rho_n)_{n=1}^{\infty}$ de números estritamente maiores que 1 tal que $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Essa família é também dirigida sob a relação $\leqslant$ definida em (2.1.1). De fato, sejam $\mathcal{U} = (U_n)_{n=1}^{\infty}$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{B}$, $(\rho_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências de números estritamente maiores que 1 tais que $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$ e $\gamma_n V_n \subset V_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\lambda_n = \min\{\rho_n, \gamma_n\}$, então não é difícil ver que

$$\lambda_n (U_n \cap V_n) \subset (U_{n+1} \cap V_{n+1})$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, de onde segue que $\mathcal{W} := (U_n \cap V_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{B}$, e claro $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{W}$ e $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{W}$. Neste caso,

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{U}\in\mathcal{B}} G^{\infty}(\mathcal{U}) = \left\{ (\psi_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}\in\mathcal{B}} \in \prod_{\mathcal{U}\in\mathcal{B}} G^{\infty}(\mathcal{U}) : \Pi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(\psi_{\mathcal{V}}) = \psi_{\mathcal{U}}, \quad \text{sempre que } \ \mathcal{U} \leqslant \mathcal{V} \right\}.$$

Examinado a demonstração do teorema anterior, notamos que tal “refinamento” é possível sempre que

$$\mathcal{H}(U) = \bigcup_{\mathcal{U}\in\mathcal{B}} \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U}) \tag{2.1.5}$$

algebricamente e também que, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$ exista alguma $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$. Na segunda condição podemos dizer que a “família $\mathcal{B}$ domina a família $\mathcal{A}$”.

Mas antes disso, precisamos dos seguintes resultados preparatórios.

**Proposição 2.1.8.** *Sejam $U$ um subconjunto aberto e equilibrado de um elc $E$ e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Então, para cada $x \in U$ existe uma vizinhança aberta e equilibrada $V_x$ de $x$, com $V_x \subset U$, tal que $f(V_x)$ é limitado.*

*Demonstração.* Fixe $x \in U$ e escreva $K = \{0, x\} \subset U$. Considere a envoltória equilibrada de $K$

$$\mathrm{eq}(K) := \{\lambda y : \ y \in K, \ \lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| \leqslant 1\}.$$

Por ser $U$ um conjunto equilibrado, $\mathrm{eq}(K) \subset U$. Dado que $\mathrm{eq}(K)$ é também compacta, $f(\mathrm{eq}(K))$ é limitado e consequentemente existe $R > 0$ tal que

$$\mathrm{eq}(K) \subset f^{-1}(R\mathbb{D}).$$

Por outro lado, como a função $g : (\lambda, y) \in \mathbb{C} \times E \to \lambda y \in E$ é contínua, $\overline{\mathbb{D}} \times K$ é compacto e $g(\overline{\mathbb{D}} \times K) = \mathrm{eq}(K)$, podemos achar $r > 1$ e $V \subset U$ aberto contendo $K$ tal que

$$\overline{\mathbb{D}} \times K \subset r\overline{\mathbb{D}} \times V \subset g^{-1}(f^{-1}(R\mathbb{D})).$$

Segue de tudo isso que

$$g(r\overline{\mathbb{D}} \times V) = \{\lambda y : \; y \in V, \; \lambda \in \mathbb{C}, \; |\lambda| \leqslant r\} \subset U$$

e $f\left(g(r\overline{\mathbb{D}} \times V)\right)$ é limitado. Ainda mais, note que

$$g(r\overline{\mathbb{D}} \times V) \supset \{\lambda y : \; y \in V, \; \lambda \in \mathbb{C}, \; |\lambda| \leqslant 1\} = \mathrm{eq}(V) \supset \mathrm{int}(\mathrm{eq}(V)) \supset V \ni 0.$$

Segue que $\mathrm{int}(eq(V))$ é equilibrado (já que $0 \in \mathrm{int}(\mathrm{eq}(V))$) e obviamente $f\,(\mathrm{int}(\mathrm{eq}(V)))$ é limitado. Tomando $V_x := \mathrm{int}(\mathrm{eq}(V))$ completamos a demonstração. $\square$

**Observação 2.1.9.** *Se $E$ é um espaço normado então, na proposição anterior podemos escolher tal vizinhança aberta e equilibrada, ainda limitada. De fato, se $x$ e $V_x$ são como na proposição acima então $x \in V_x \cap B(0;n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e, como sabemos, $V_x \cap B(0;n)$ é um subconjunto aberto, equilibrado e limitado de $E$ contido em $U$ tal que $f(V_x \cap B(0;n)) \subset f(V_x)$ é limitado. Dessa vez, $V_x \cap B(0;n)$ será a vizinhança a ser escolhida.*

**Lema 2.1.10.** *Seja $U$ um subconjunto aberto e equilibrado de um elc $E$. Se $\mathcal{U} = (U_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma cobertura aberta e crescente de $U$ tal que $U_n$ é equilibrado para todo $n \in \mathbb{N}$, então*

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\theta_n U_n),$$

*para qualquer sequência estritamente crescente $(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $0 < \theta_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\theta_n \to 1$.*

*Demonstração.* Sejam $x \in U$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que $x \in U_N$. Como $U_N$ é aberto existe $r > 1$ tal que $rx \in U_N$. Como $\theta_n \to 1$ existe $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant N$, tal que $\frac{1}{r} \leqslant \theta_k$. Logo, como $U_N$ é equilibrado

$$x \in \frac{1}{r} U_N \subset \theta_k U_N \subset \theta_k U_k.$$

Assim,

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\theta_n U_n).$$

$\square$

Já temos tudo para provar (2.1.5).

**Proposição 2.1.11.** *Seja $U$ um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço normado $E$. Então*

$$\mathcal{H}(U) = \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathcal{B}} \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U}).$$

*Demonstração.* Seja $f \in \mathcal{H}(U)$. Segue da Proposição 2.1.8 e da Observação 2.1.9 que, para cada $x \in U$ existe $V_x \subset U$ aberto, equilibrado e limitado tal que $f(V_x)$ é limitado. Certamente a família $\{V_x : x \in U\}$ cobre $U$. A fim de construirmos uma sequência de abertos com as características da família $\mathcal{B}$, vamos recorrer a um argumento muito comum na teoria de evt's, a saber; sejam $c_x, d_x > 0$ tais que $|f(y)| \leqslant c_x$ e $\|y\| \leqslant d_x$ para todo $y \in V_x$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$U_n = \bigcup_{c_x, d_x \leqslant n} V_x.$$

Então por toda essa construção não é difícil ver que:

(i) Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \neq \varnothing$ para todo $n \geqslant N$.

(ii) $U_n$ é aberto, equilibrado e limitado para todo $n \geqslant N$.

(iii) $\|f\|_{U_n} \leqslant n$ para todo $n \geqslant N$.

(iv) $U_n \subset U_{n+1}$ para todo $n \geqslant N$ e

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Agora, seja $(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência estritamente crescente com $0 < \theta_n < 1$ e $\theta_n \to 1$. Pelo Lema 2.1.10, a cobertura $\mathcal{U} = (\theta_n U_n)_{n=1}^{\infty}$ (pense em $U_n$ como se fosse $U_{N+n-1}$ para todo $n \geqslant 1$) cobre todo $U$. Fazendo $\rho_n := \frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\rho_n(\theta_n U_n) \subset \theta_{n+1} U_n \subset \theta_{n+1} U_{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ e obviamente $f \in \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U})$, provando assim, a inclusão não trivial da proposição. □

Para provarmos a segunda condição, aquela que diz que "$\mathcal{B}$ domina $\mathcal{A}$", precisamos de mais preparatórios para chegar lá, por isso vamos começar com a seguinte definição (veja [50, pp. 80-81]).

**Definição 2.1.12.** *Seja $A$ um subconjunto de um espaço vetorial $X$. O* centro equilibrado *de $A$ (em Inglês,* balanced core *of $A$), denotado por* ce$(A)$, *é o maior conjunto equilibrado contido em $A$.*

O conjunto centro equilibrado goza das seguintes propriedades que podem ser verificadas rapidamente a partir da definição:

(i) $ce(A) \neq \varnothing$ se $A$ contém a origem.

(ii) $ce(A)$ é a união de todos os subconjuntos equilibrados contidos em $A$.

(iii) Se $A \subset B$ então $ce(A) \subset ce(B)$.

(iv) $ce(A) = \{x \in A : \ \lambda x \in A, \ \lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| \leqslant 1\}$.

**Proposição 2.1.13.** *Seja $U$ um subconjunto aberto de um elc $E$. Se $0 \in U$ então $\mathrm{ce}(U)$ é aberto.*

*Demonstração.* Sejam $0 \neq x \in \mathrm{ce}(U)$ e $K = \{0, x\}$. Então

$$\mathrm{eq}(K) \subset \mathrm{ce}(U) \subset U,$$

como $U$ é aberto e, $K$ e $\overline{\mathbb{D}}$ são compactos, seguindo um raciocínio análogo à demonstração da Proposição 2.1.8 podemos então achar $r > 1$ e um subconjunto aberto $V \subset U$ contendo $K$ tal que o conjunto

$$\{\lambda y \in E : \ y \in V, \ \lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| \leqslant r\}$$

esteja contido em $U$. Segue imediatamente que $V \subset \mathrm{ce}(U)$, e portanto todo ponto de $\mathrm{ce}(U)$ é um ponto interior. Assim, $\mathrm{ce}(U)$ é um subconjunto aberto de $E$. □

**Observação 2.1.14.** *Observamos que se $U$ é um subconjunto aberto de um espaço normado $E$ e $\mathcal{U} = (U_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$, então existe $\mathcal{V} = (V_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ tal que $V_n \subset U_n$ e $V_n$ é limitado para todo $n \in \mathbb{N}$. Para certificar-se disso, basta fazer $V_n := U_n \cap B(0; n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Essa observação, junto com as propriedades do conjunto centro equilibrado nos mostram o caminho para provarmos a segunda condição restante, cujo resultado aparece no seguinte lema.

**Lema 2.1.15.** *Seja $U$ um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço normado $E$. Seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$. Então existem $N \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n=N}^{\infty} \in \mathcal{B}$ tais que $V_n \subset U_n$ para todo $n \geqslant N$. Isto é, $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$.*

*Demonstração.* Pela Observação 2.1.14 podemos supor, sem perda de generalidade, que $U_n$ é limitado para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \in U_n$. Sejam $N := \min\{n \in \mathbb{N} : \ 0 \in U_n\}$ e $(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência estritamente crescente com $0 < \theta_n < 1$ e $\theta_n \to 1$. Afirmamos que a sequência crescente $\mathcal{V} = (V_n)_{n=N}^{\infty}$ de subconjuntos abertos, equilibrados e limitados $V_n := \theta_n \mathrm{ce}(U_n)$ pertence à família $\mathcal{B}$ e, obviamente $V_n \subset U_n$ para todo $n \geqslant N$. Com efeito, primeiro de tudo, repare que de fato (pelas propriedades de $\mathrm{ce}(A)$ e a Proposição 2.1.13) tal sequência é crescente, os conjuntos $V_n$ são abertos, equilibrados e limitados e, se fazemos $\rho_n := \frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} > 1$ então $\rho_n V_n \subset V_{n+1}$ para todo $n \geqslant N$. Resta então provar que $\mathcal{V}$ cobre todo $U$. Para tal propósito seja $0 \neq x \in U$. Como a envoltória equilibrada de $x$ está contida em $U$ e é também compacta, existe $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant N$, tal que

$$\{\lambda x \in E : \ \lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| \leqslant 1\} \subset \bigcup_{n=1}^{m} U_n = U_m,$$

de modo que $x \in ce(U_m)$. Isso prova o desejado. □

Por fim, usando a Proposição 2.1.11, o Lema 2.1.15 e seguindo raciocínio da demonstração do Teorema 2.1.5, obtemos como corolário o seguinte resultado.

**Corolário 2.1.16.** *Seja $U$ um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço normado $E$. Então a aplicação canônica*

$$\Phi : \varphi \in G(U) \to (R_{\mathcal{V}}\varphi)_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}} \in \text{proj}_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}} G^{\infty}(\mathcal{V})$$

*é um isomorfismo topológico. Isto é,*

$$G(U) = \text{proj}_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}} G^{\infty}(\mathcal{V})$$

*topologicamente.*

*Demonstração.* Certamente a aplicação $\Phi$ é linear e, pela Proposição 2.1.11, é também injetiva.

**$\Phi$ é sobrejetiva:** Seja $(\psi_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}} \in \text{proj}_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}} G^{\infty}(\mathcal{V})$ e defina a função $\varphi$ sobre $\mathcal{H}(U)$ como em (2.1.4). Então $\varphi$ é uma aplicação linear. Para completar a demonstração dessa parte, resta provar que a restrição $\varphi|_{B^{\alpha}_{\mathcal{U}}}$ é $\tau_0$-contínua para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$ e cada sequência $\alpha$ de números positivos. Para tal propósito, seja $B^{\alpha}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{H}(U)$ com $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$ e $\alpha$ sequência de números positivos. Pelo Lema 2.1.15 existe $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ e por consequência,

$$B^{\alpha}_{\mathcal{U}} \subset B^{\alpha}_{\mathcal{V}} \subset \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{V}).$$

Agora, pela hipótese a restrição $\psi_{\mathcal{V}}|_{B^{\alpha}_{\mathcal{V}}}$ é $\tau_0$-contínua, segue-se que a restrição $\psi_{\mathcal{V}}|_{B^{\alpha}_{\mathcal{U}}}$ é $\tau_0$-contínua. Portanto, $\varphi|_{B^{\alpha}_{\mathcal{U}}} = \psi_{\mathcal{V}}|_{B^{\alpha}_{\mathcal{U}}}$ é $\tau_0$-contínua (lembre que $\varphi|_{\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{V})} = \psi_{\mathcal{V}}$).

**$\Phi$ é um homeomorfismo:** Se $\Pi_{\mathcal{W}} : (\psi_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}} \in \text{proj}_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}} G^{\infty}(\mathcal{V}) \to \psi_{\mathcal{W}} \in G^{\infty}(\mathcal{W})$ denota a projeção canônica sobre a coordenada $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$, então $\Pi_{\mathcal{W}} \circ \Phi = R_{\mathcal{W}}$ é contínua para cada $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$. Portanto, $\Phi$ é contínua.

Por último, para provar que $\Phi^{-1}$ é contínua, seja $B^{\alpha}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{H}(U)$ com $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$ e $\alpha$ sequência de números positivos. Mais uma vez, pelo Lema 2.1.15 existe $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{W}$. Dado que

$$p_{\alpha}(\psi) = \sup_{f\in B^{\alpha}_{\mathcal{W}}} |\psi(f)|, \quad \text{para todo} \quad \psi \in G^{\infty}(\mathcal{W}),$$

é uma seminorma contínua sobre $G^{\infty}(\mathcal{W})$, segue que $p_{\alpha} \circ \Pi_{\mathcal{W}}$ é uma seminorma contínua sobre $\text{proj}_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}} G^{\infty}(\mathcal{V})$ e

$$\begin{aligned} p^{\alpha}_{\mathcal{U}}[\Phi^{-1}((\psi_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}})] &= \sup_{f\in B^{\alpha}_{\mathcal{U}}} |(\Phi^{-1}((\psi_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}}))(f)| = \sup_{f\in B^{\alpha}_{\mathcal{U}}} |\varphi(f)| = \sup_{f\in B^{\alpha}_{\mathcal{U}}} |\psi_{\mathcal{W}}(f)| \\ &\leqslant \sup_{f\in B^{\alpha}_{\mathcal{W}}} |\psi_{\mathcal{W}}(f)| = p_{\alpha} \circ \Pi_{\mathcal{W}}((\psi_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}}). \end{aligned}$$

Daí $\Phi^{-1}$ é contínua. Assim o resultado segue. □

## 2.2 Aplicações

Vamos derivar alguns resultados a partir do Teorema 2.1.5, da Proposição 2.1.11, do Lema 2.1.15 e o Corolário 2.1.16

### 2.2.1 Outra descrição para a topologia $\tau_\delta$

Como foi mencionado no Capítulo 1.2, a topologia $\tau_\delta$ sobre $\mathcal{H}(U)$ é gerada pelas coberturas enumeráveis, abertas e crescentes de $U$. Como uma outra consequência da Proposição 2.1.11 e o Lema 2.1.15, provamos que, sob condições adequadas para o espaço $E$ e o subconjunto $U$, essa topologia é gerada apenas pelas coberturas em $\mathcal{B}$.

**Teorema 2.2.1.** *Seja $U$ um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço normado $E$. Então*

$$(\mathcal{H}(U), \tau_\delta) = \text{ind}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}}\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) = \text{ind}_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}}\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$$

*topologicamente.*

*Demonstração.* Da Proposição 2.1.11 temos

$$\text{ind}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}}\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) = \bigcup_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}}\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) = \mathcal{H}(U) = \bigcup_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}}\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}) = \text{ind}_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}}\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$$

algebricamente. Provaremos que o operador identidade

$$Id : \text{ind}_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}}\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}) \to \text{ind}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}}\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$$

é um isomorfismo topológico. Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, a aplicação inclusão $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}) \hookrightarrow \text{ind}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}}\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ é contínua para todo $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$, já que o espaço $\text{ind}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}}\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ tem a topologia indutiva em relação a essas aplicações. Segue da Proposição 1.1.12 que o operador identidade é contínuo. Agora considere o operador inverso da identidade

$$(Id)^{-1} : \text{ind}_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}}\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \to \text{ind}_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}}\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}).$$

Mais uma vez pela Proposição 1.1.12, $(Id)^{-1}$ é contínuo se a aplicação inclusão $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \hookrightarrow \text{ind}_{\mathcal{U}\in\mathcal{B}}\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ é contínua para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$. Pelo Lema 2.1.15, dado $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$ existe $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{W}$. Isso implica que a aplicação inclusão

$$\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \hookrightarrow \mathcal{H}^\infty(\mathcal{W})$$

é contínua. Como a aplicação inclusão

$$\mathcal{H}^\infty(\mathcal{W}) \hookrightarrow \text{ind}_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}}\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$$

é contínua (pela topologia indutiva), segue que a aplicação inclusão

$$\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \hookrightarrow \text{ind}_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}}\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$$

é contínua. Como $\mathcal{U}$ foi escolhido arbitrariamente, provamos que $(Id)^{-1}$ é mesmo contínuo. $\square$

### 2.2.2 A propriedade de aproximação

Durante muito tempo, um dos principais problemas em aberto na teoria de espaços de Banach, foi o *problema de aproximação*, o qual perguntava se todo espaço de Banach tinha a propriedade de aproximação. Este foi finalmente resolvido pela negativa em 1973 por Per Enflo [34], que numa construção artificial criou um espaço de Banach de dimensão infinita, reflexivo e separável, que não tem a propriedade de aproximação. A partir do Corolário 2.1.16 junto com o Teorema [62, Theorem 4.2] (o qual rescreveremos nesta seção em pró do leitor) nós obtemos nossos resultados principais desta seção, a saber; o Teorema 2.2.4 e Corolário 2.2.6 abaixo.

**Teorema 2.2.2.** *(Vide [62, Theorem 4.2]) Sejam $U$ um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço de Banach $E$ e $\mathcal{U} = (U_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência crescente de subconjuntos abertos, equilibrados e limitados de $U$ tal que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ e $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$, com $\rho_n > 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então, $E$ tem a propriedade de aproximação se e somente se $G^{\infty}(\mathcal{U})$ tem a propriedade de aproximação.*

Em vista da Proposição 1.1.18, se queremos ganhar a propriedade de aproximação para $G(U)$, resta provar o seguinte resultado.

**Proposição 2.2.3.** *O limite projetivo $\operatorname{proj}_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}} G^{\infty}(\mathcal{U})$ é reduzido.*

*Demonstração.* Veja que na demonstração da Proposição 2.1.6 a família de coberturas não é indispensável, na verdade só precisamos de dois fatos: $R_{\mathcal{U}}(G(U))$ ser denso em $G^{\infty}(\mathcal{U})$ e $\Pi_{\mathcal{U}} = R_{\mathcal{U}} \circ \Phi^{-1}$. Certamente esses fatos também acontecem se trabalhamos com a família de coberturas $\mathcal{B}$ em vez de $\mathcal{A}$. Portanto, $\operatorname{proj}_{\mathcal{V}\in\mathcal{B}} G^{\infty}(\mathcal{V})$ é um limite projetivo reduzido. □

Uma outra aplicação do Corolário 2.1.16 é o seguinte teorema.

**Teorema 2.2.4.** *Seja $U$ um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço de Banach $E$. Então, $G(U)$ tem a propriedade de aproximação se e somente se $E$ tem a propriedade de aproximação.*

A prova do Teorema 2.2.4 usa o Corolário 2.1.16, Proposição 2.2.3, o Teorema 2.2.2 e o seguinte resultado.

**Proposição 2.2.5.** *(Vide [61, Proposition 2.6]) Seja $U$ um subconjunto aberto e equilibrado de um elc completo $E$. Então $E$ é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de $G(U)$.*

***Demonstração do Teorema 2.2.4.*** Suponha que $G(U)$ tenha a propriedade de aproximação. Pelas Proposições 2.2.5 e 1.1.16(a) o espaço $E$ tem a propriedade de aproximação.

Reciprocamente, suponha que $E$ tenha a propriedade de aproximação. Pelo Teorema 2.1.1, $G^\infty(\mathcal{U})$ tem a propriedade de aproximação para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$. Segue das Proposições 1.1.18, 2.2.3 e do Corolário 2.1.16 que $G(U)$ tem a propriedade de aproximação. $\square$

O seguinte resultado foi inicialmente provado por Aron e Schottenhloher [3], que usaram a noção de espaço $\epsilon$-produto introduzido por Schwartz em [73]. Dessa vez, daremos uma demonstração direta desse resultado como uma consequência fácil do Teorema 2.2.4.

**Corolário 2.2.6.** *Seja $U$ um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço de Banach $E$. Se $E$ tem a propriedade de aproximação então $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ tem a propriedade de aproximação.*

*Demonstração.* Suponha que $E$ tenha a propriedade de aproximação. Pelo Teorema 2.2.4 $G(U)$ tem a propriedade de aproximação. Como $G(U)$ é o completamento do espaço $(\mathcal{H}(U), \tau_0)'_c$ (veja [61, Theorem 3.1] ou [63, Remark 2.3]), segue que $(\mathcal{H}(U), \tau_0)'_c$ tem a propriedade de aproximação e por sua vez $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ tem a propriedade de aproximação (veja a Proposição 1.1.16(c)). Lembre-se que aqui $(\mathcal{H}(U), \tau_0)'_c$ denota o elc $(\mathcal{H}(U), \tau_0)'$ equipado com a topologia da convergência uniforme sobre todos os subconjuntos convexos, equilibrados e compactos de $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$. $\square$

# Capítulo 3

# Operadores de convolução frequentemente hipercíclicos sobre espaços de funções inteiras de um dado tipo e uma dada ordem

Motivado pelos resultados clássicos de Malgrange [57] para equações de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, Martineau [58] em 1967 provou teoremas de existência e aproximação para soluções de equações de convolução sobre espaços de funções inteiras sobre $\mathbb{C}^n$ de um dado tipo e uma dada ordem. Esses espaços abrangem a noção clássica de função de tipo exponencial, que foi extensivamente estudada no século passado, tanto por suas aplicações quanto pelo próprio fim. Lembramos que uma função inteira $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dita de *tipo exponencial* se existe uma constante não negativa $c$ tal que para todo $\epsilon$ positivo existe alguma constante positiva $A(\varepsilon)$ satisfazendo

$$|f(z)| < A(\varepsilon)e^{(c+\varepsilon)|z|}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Na procura de generalizar os resultados de Martineau para funções inteiras sobre um espaço de Banach complexo de dimensão infinita, em [37] os autores introduziram os espaços $Exp^k_{\Theta,0,A}(E)$, os quais recuperam $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ e as funções de tipo exponencial como casos muito particulares, veja a Observação 1.2.23 e o Exemplo 1.2.21, respectivamente.

Um caminho alternativo a esta linha de investigação é a consideração de operadores de convolução sobre espaços de funções inteiras definidas sobre um espaço de Banach complexo. Neste sentido, aqui mostraremos que sob condições adequadas, operadores de convolução não triviais sobre $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ são fortemente misturadores no sentido gaussiano, em particular frequentemente hipercíclicos. Em especial, recuperamos resultados do mesmo tipo obtidos em [16, 66]. Este resultado também generaliza alguns resultados de hiperciclicidade obtidos em [13, 45]. Inspirados pelos resultados e técnicas de Bonilla e Grosse-Erdmann [16] e Muro *et al* [66], também provamos a existência de funções inteiras de tipo exponencial frequentemente hipercíclicas associadas a esses operadores. Mais ainda, mostramos a existência de subespaços vetoriais fechados de dimensão infinita de $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ formados, exceto pela função nula, por funções frequentemente hipercíclicas. Esses resultados também generalizam resultados do mesmo tipo obtidos em [16, 66]. Neste capítulo $E$ denotará um espaço de Banach sempre complexo.

## 3.1 Operadores de convolução frequentemente hipercíclicos

Um resultado importante devido a Bayart e Matheron [11, Theorem 1.1] estabelece condições suficientes para que um operador contínuo sobre um espaço de Fréchet separável seja, em particular, frequentemente hipercíclico. Nós aplicaremos esse teorema para provar nosso resultado principal desta seção (Teorema 3.1.2), o qual generaliza o resultado de Bonilla e Grosse-Erdmann (Exemplo 1.3.11) e inclui os resultados de Fávaro e Mujica [40, Theorem 2.11] e Muro *et al* [66]. Seguindo a notação clássica usada em análise complexa, denotamos por $\mathbb{T}$ a esfera unitária complexa,

$$\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

**Teorema 3.1.1.** ***(Bayart-Matheron).*** *Seja $T : E \to E$ um operador contínuo sobre um espaço de Fréchet separável $E$. Suponha que para qualquer $D \subset \mathbb{T}$ tal que $\mathbb{T} \setminus D$ é denso em $\mathbb{T}$, o espaço vetorial gerado por $\bigcup_{\lambda\in\mathbb{T}\setminus D} \ker(T - \lambda I)$ é denso em $E$. Então $T$ é fortemente misturador em relação a uma medida de Borel de probabilidade $\mu$, $T$-invariante sobre $E$ com suporte completo. Em particular, $T$ é misturador e $FHC(T) = E$ $\mu$-qtp.*

Este teorema é mais um critério robusto que determina a dinâmica de um operador contínuo através dos autovetores associados aos autovalores de módulo um. Em vista do fato que os operadores de convolução são ricos em autovetores com essa característica, é natural a aplicação deste teorema no estudo de tal propriedade ergódica para os operadores de convolução. Provaremos o seguinte resultado:

**Teorema 3.1.2.** *Sejam $E$ um espaço de Banach com dual separável, $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um $\pi_1$-tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$ e $k \in (1, +\infty]$. Se $L$ é um operador de convolução não trivial sobre $Exp^k_{\Theta,0}(E)$, então $L$ é fortemente misturador em relação a uma medida de Borel de probabilidade $\mu$ sobre $Exp^k_{\Theta,0}(E)$, $L$-invariante com suporte completo. Em particular, $L$ é misturador e $FHC(L) = Exp^k_{\Theta,0}(E)$ $\mu$-qtp.*

Ainda precisamos dos seguintes resultados para provarmos o Teorema 3.1.2.

**Lema 3.1.3.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um $\pi_1$-tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$ e $k \in (1, +\infty]$. Sejam $f \in \mathcal{H}(E')$ uma função não constante e $B \subset \mathbb{C}$. Suponha que* *exista $\varphi_0 \in E'$ tal que $f(\varphi_0)$ é um ponto de acumulação de $B$. Então* $\text{span}\{e^{\varphi} : f(\varphi) \in B\}$ *é denso em $Exp^k_{\Theta,0}(E)$.*

*Demonstração.* Pelo Teorema de Hahn-Banach é suficiente provar que se um funcional $T \in [Exp^k_{\Theta,0}(E)]'$ é nulo sobre $\text{span}\{e^{\varphi} : f(\varphi) \in B\}$, então $T$ é identicamente zero. Como a transformada de Fourier-Borel $\mathcal{F} : [Exp^k_{\Theta,0}(E)]' \to \mathcal{H}(E')$ é um operador injetivo, basta mostrar que $\mathcal{F}T = 0$. Por outro lado, seja $\{U_i : i \in I\}$ uma base para os conjuntos abertos de $E'$. Como $f$ é uma função inteira não constante, para cada $i \in I$ existe $\varphi_i \in U_i$ tal que $f(\varphi_0) \neq f(\varphi_i)$. Agora, se $L_i := \{\varphi_0 + z(\varphi_i - \varphi_0) : z \in \mathbb{C}\}$, $i \in I$, representa a reta complexa que passa por $\varphi_0$ e atravessa $U_i$ em $\varphi_i$, então $f$ não é constante sobre $L_i$ com $i \in I$, e $\bigcup_{i \in I} L_i$ é denso em $E'$. Se $f|_{L_i}$ denota a restrição de $f$ a $L_i$,

$$f|_{L_i} : z \in \mathbb{C} \to f(\varphi_0 + z(\varphi_i - \varphi_0)) \in \mathbb{C},$$

então $f|_{L_i}$ é uma função aberta (já que ela é uma função holomorfa e não constante) e como $(f|_{L_i})(0) = f(\varphi_0)$ é um ponto de acumulação de $B$, segue que $0$ é um ponto de acumulação de $(f|_{L_i})^{-1}(B)$. Pela suposição,

$$(\mathcal{F}T)(\varphi) = T(e^{\varphi}) = 0$$

para todo $\varphi \in f^{-1}(B)$, em particular, $(\mathcal{F}T)(\varphi_0 + z(\varphi_i - \varphi_0)) = 0$ para todo $z \in (f|_{L_i})^{-1}(B)$. Portanto, o conjunto dos zeros da função inteira $z \in \mathbb{C} \to (\mathcal{F}T)(\varphi_0 + z(\varphi_i - \varphi_0)) \in \mathbb{C}$ tem um ponto de acumulação. Isso, por sua vez, implica que $\mathcal{F}T = 0$ para cada $L_i$ com $i \in I$, e portanto é nulo sobre $\bigcup_{i \in I} L_i$. Pela densidade de $\bigcup_{i \in I} L_i$ em $E'$, obtemos que $\mathcal{F}T = 0$ sobre $E'$. □

O seguinte lema foi provado em [38, Lemma 4.4] e será muito útil na demonstração do Teorema 3.1.2. Ele diz, entre outras coisas, que os operadores de convolução sobre essa classe de espaços de funções inteiras são também ricos em autovetores.

**Lema 3.1.4.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $(\mathcal{P}_{\Theta}(^jE))_{j=0}^{\infty}$ um $\pi_1$-tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$, $k \in (1, +\infty]$ e $L$ um operador de convolução sobre $Exp^k_{\Theta,0}(E)$. Então:*

(a) *$L(e^{\varphi}) = \mathcal{F}_k(\varphi)e^{\varphi}$ para todo $\varphi \in E'$. Aqui $\mathcal{F}_k$ é a função inteira de $E'$ em $\mathbb{C}$ definida por $\mathcal{F}_k(\varphi) := \mathcal{F}[\gamma^k_{\Theta,0}(L)](\varphi) = L(e^{\varphi})(0)$ para todo $\varphi \in E'$.*

(b) *$L$ é um múltiplo escalar da identidade se e somente se a função inteira $\mathcal{F}_k : E' \to \mathbb{C}$ é constante.*

*Demonstração do Teorema 3.1.2.* Como $L$ é um operador de convolução que não é um múltiplo escalar da identidade, segue desse último lema que a função inteira $\mathcal{F}_k$ não é constante. Considere os conjuntos

$$V = \{\varphi \in E' : |\mathcal{F}_k(\varphi)| < 1\} = (\mathcal{F}_k)^{-1}(\mathbb{D})$$

e

$$W = \{\varphi \in E' : |\mathcal{F}_k(\varphi)| > 1\} = (\mathcal{F}_k)^{-1} (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}).$$

Note que ambos os conjuntos $V$ e $W$ são não vazios, pois se $W = \varnothing$ então $\mathcal{F}_k$ é limitada sobre todo $E'$ e pelo Teorema de Liouville, $\mathcal{F}_k$ teria que ser uma função constante, o que é falso. O mesmo aconteceria com a função inteira $1/\mathcal{F}_k$ se, neste caso, $V$ fosse um subconjunto vazio. Certamente, $V$ e $W$ são subconjuntos disjuntos e abertos de $E'$. De outro lado, dado que $E'$ é conexo existe $\varphi_0 \in E'$ tal que $\varphi_0 \notin V \cup W$, isto é, $|\mathcal{F}_k(\varphi_0)| = 1$. Agora, seja $D \subset \mathbb{T}$ tal que $\mathbb{T} \setminus D$ é denso em $\mathbb{T}$. Então $\mathcal{F}_k(\varphi_0)$ é um ponto de acumulação de $\mathbb{T} \setminus D$, uma vez que $\mathbb{T}$ é um espaço métrico (métrica induzida por $\mathbb{C}$) sem pontos isolados. Portanto, segue do Lema 3.1.3 que $\operatorname{span}\{e^{\varphi} : \mathcal{F}_k(\varphi) \in \mathbb{T} \setminus D\}$ é denso em $Exp^k_{\Theta,0}(E)$. Pelo Lema 3.1.4(a) temos

$$\begin{aligned} \{e^{\varphi} : \mathcal{F}_k(\varphi) \in \mathbb{T} \setminus D\} &\subset \{f \in \mathcal{H}(E) : Lf = \lambda f \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{T} \setminus D\} \\ &= \bigcup_{\lambda \in \mathbb{T} \setminus D} \ker(L - \lambda I). \end{aligned}$$

Consequentemente, o espaço gerado por $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{T} \setminus D} \ker(L - \lambda I)$ é também denso em $Exp^k_{\Theta,0}(E)$. Finalmente, como $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ é um espaço de Fréchet separável (já que $E'$ é separável e $\Theta$ um $\pi_1$-tipo de holomorfia, veja a Proposição 1.2.28), segue a partir do Teorema do Bayart-Matheron 3.1.1 que $L$ é fortemente misturador em relação a uma medida de Borel de probabilidade $\mu$ sobre $Exp^k_{\Theta,0}(E)$, $L$-invariante com suporte completo. □

## 3.2 Condição de crescimento exponencial para funções frequentemente hipercíclicas

O problema de determinar taxas de crescimento de funções inteiras frequentemente hipercíclica para operadores de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ foi inicialmente estudado por Bonilla e Gross-Erdmann [16]. Para alguns espaços de funções inteiras sobre espaços de Banach de dimensão infinita, o mesmo tipo de crescimento foi explorado por Muro *et al* [66]. Nesta seção, estudamos a taxa de crescimento de funções inteiras frequentemente hiperíclicas para operadores de convolução sobre $Exp^k_{\Theta,0}(E)$.

**Definição 3.2.1.** *(Nachbin [67, p. 226]) Sejam $E$ um espaço de Banach e $A \geqslant 0$. Uma função $f \in \mathcal{H}(E)$ é dita de* tipo exponencial estritamente menor que $A$ *se, para cada $\epsilon > 0$ existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant ce^{(A+\epsilon)\|x\|}$ para todo $x \in E$.*

Nachbin deu a seguinte caracterização para as funções de tipo exponencial estritamente menor que $A$: uma função $f \in \mathcal{H}(E)$ é de tipo exponencial estritamente menor que $A$ se e somente se $\limsup_{j \to \infty} \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|^{\frac{1}{j}} \leqslant A$. Devido a essa terminologia de Nachbin e à Proposição 1.2.20, denotamos por $Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ o espaço das funções $\Theta$-*tipo exponencial* *estritamente menor* que $A$. A fim de obter resultados análogos aos obtidos por Muro *et al* [66, Theorem 2.9], vamos estudar a relação entre os espaços $Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ e $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ para $A > 0$ e $k \in (1, +\infty]$. Antes disso, lembramos que a topologia de $Exp^k_{\Theta,0,A}(E)$ é gerada pela família de normas $\{\| \cdot \|_{\Theta,k,\rho}\}_{\rho > A}$:

$$\|f\|_{\Theta,k,\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\|\tfrac{1}{j!}\hat{d}^j f(0)\right\|_{\Theta}, \quad \text{se} \quad 1 \leqslant k < +\infty$$

e

$$p^{\infty}_{\Theta,\rho}(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\|\tfrac{1}{j!}\hat{d}^j f(0)\right\|_{\Theta}, \quad \text{se} \quad k = +\infty.$$

**Proposição 3.2.2.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $(\mathcal{P}_\Theta({}^jE))_{j=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$, $A > 0$ e $k \in (1, +\infty]$. Então:*

(a) $Exp^1_{\Theta,0,A}(E) \subset Exp^k_{\Theta,0}(E)$.

(b) *A aplicação inclusão $Exp^1_{\Theta,0,A}(E) \hookrightarrow Exp^k_{\Theta,0}(E)$ é contínua.*

(c) *Se $\Theta$ é um $\pi_1$-tipo de holomorfia então $Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ é denso $Exp^k_{\Theta,0}(E)$.*

*Demonstração.* (a) Seja $f \in Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ e considere $k \in (1, +\infty)$. Então $f \in \mathcal{H}(E)$ com $\hat{d}^j f(0) \in \mathcal{P}_\Theta({}^jE)$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$ e

$$\limsup_{j \to +\infty} \frac{j}{e} \left\|\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(0)\right\|_{\Theta}^{\frac{1}{j}} \leqslant A. \tag{3.2.1}$$

Para provar que $f \in Exp^k_{\Theta,0}(E)$, basta mostrar que

$$\limsup_{j \to +\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\|\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(0)\right\|_{\Theta}^{\frac{1}{j}} = 0.$$

Como

$$\lim_{j \to +\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{e}{j}\right) = \lim_{j \to +\infty} j^{\frac{1}{k}-1} \frac{e}{\sqrt[k]{ke}} = 0 \tag{3.2.2}$$

sempre que $k > 1$, segue de (3.2.1) e (3.2.2) que

$$\limsup_{j \to +\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\|\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(0)\right\|_{\Theta}^{\frac{1}{j}} = \limsup_{j \to +\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{e}{j}\right) \left(\frac{j}{e}\right) \left\|\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(0)\right\|_{\Theta}^{\frac{1}{j}} = 0.$$

Agora considere $k = +\infty$. Neste caso, $f \in Exp^\infty_{\Theta,0}(E)$ sempre que

$$\limsup_{j \to +\infty} \left\|\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(0)\right\|_{\Theta}^{\frac{1}{j}} = 0.$$

Mas isso segue rapidamente uma vez que $f$ é $\Theta$-tipo exponencial estritamente menor que $A$, ou seja,

$$\limsup_{j \to +\infty} \left\|\hat{d}^j f(0)\right\|_{\Theta}^{\frac{1}{j}} \leqslant A$$

e

$$\lim_{j\to+\infty}\left(\frac{1}{j!}\right)^{\frac{1}{j}}=0.$$

(b) Fixe $k \in (1,+\infty)$ e $A>0$. Nós precisamos provar que, para cada $\rho>0$ existem $\gamma>A$ e $C>0$ tais que

$$\|f\|_{\Theta,k,\rho}\leqslant C\|f\|_{\Theta,1,\gamma} \ \text{ para toda } \ f\in Exp^1_{\Theta,0,A}(E).$$

Primeiro, note que a partir de (3.2.2), para cada $\epsilon>0$ podemos achar $C(\epsilon)>0$ tal que

$$\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left(\frac{e}{j}\right)^{j}\leqslant C(\epsilon)\epsilon^j$$

para todo $j\in\mathbb{N}_0$. Agora sim, dado $\rho>0$ tomamos $\epsilon>0$ tal que $\frac{\epsilon}{\rho}<\frac{1}{A}$ e consequentemente, achamos $\gamma>A$ tal que $\frac{\epsilon}{\rho}<\frac{1}{\gamma}<\frac{1}{A}$. Aplicando essas estimativas obtemos

$$\begin{aligned}\|f\|_{\Theta,k,\rho}&=\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^jf(0)\right\|_{\Theta}\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}C(\epsilon)\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{j}\left(\frac{j}{e}\right)^{j}\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^jf(0)\right\|_{\Theta}\\&\leqslant C(\epsilon)\sum_{j=0}^{\infty}\gamma^{-j}\left(\frac{j}{e}\right)^{j}\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^jf(0)\right\|_{\Theta}=C(\epsilon)\|f\|_{\Theta,1,\gamma},\end{aligned}$$

para toda $f\in Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$, provando a primeira parte do resultado.

O caso $k=+\infty$ decorre analogamente. De fato, como antes, note que

$$\lim_{j\to\infty}\frac{e}{j}=0,$$

de maneira que se $\rho>0$, então podemos achar $\epsilon>0$, $C(\epsilon)>0$ e $\gamma>A$ tais que

$$\frac{\epsilon}{\rho}<\frac{1}{\gamma}<\frac{1}{A}\quad\text{e}\quad\left(\frac{e}{j}\right)^{j}\leqslant C(\epsilon)\epsilon^j,$$

para todo $j\in\mathbb{N}_0$. Segue então que

$$\begin{aligned}p^{\infty}_{\Theta,\rho}(f)&=\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j}\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^jf(0)\right\|_{\Theta}=\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j}\left(\frac{e}{j}\right)^{j}\left(\frac{j}{e}\right)^{j}\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^jf(0)\right\|_{\Theta}\\&\leqslant C(\epsilon)\sum_{j=0}^{\infty}\gamma^{-j}\left(\frac{j}{e}\right)^{j}\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^jf(0)\right\|_{\Theta}=C(\epsilon)\|f\|_{\theta,1,\gamma},\end{aligned}$$

para toda $f\in Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$. Portanto a aplicação inclusão é contínua.

(c) Como $\text{span}\{e^{\varphi}:\varphi\in E' \ \text{ com } \ \|\varphi\|\leqslant A\}$ está contido em $Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ e ele é mesmo um subespaço denso de $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ (veja [37, Proposition 2.15] e [38, Proposition 4.3]) o resultado segue. □

Para facilitar o acompanhamento do leitor, vamos listar algumas propriedades dos espaços $Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$, já provadas neste trabalho, que serão importantes para nossos resultados principais.

**Observação 3.2.3.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$ e $A > 0$. Então:*

(a) *Uma função $f \in \mathcal{H}(E)$ pertence a $Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ se e somente se $\widehat{d}^j f(0) \in \mathcal{P}_\theta(^jE)$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$ e*

$$\limsup_{j\to+\infty} \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_\Theta^{\frac{1}{j}} \leqslant A. \tag{3.2.3}$$

(b) *O espaço $\left(Exp^1_{\Theta,0,A}(E), \{\|\cdot\|_{\theta,1,\rho}\}_{\rho>A}\right)$ é um espaço de Fréchet, mergulhado continuamente em $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ para todo $k \in (1,+\infty]$. Ainda mais, se $\Theta$ é também um $\pi_1$-tipo de holomorfia então $Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ é denso em $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ para todo $k \in (1,+\infty]$.*

(c) *Se $E'$ é separável e $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ é um $\pi_1$-tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$, então $Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ é também separável, veja a Proposição 1.2.28.*

(d) *Toda função $f$ em $Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ satisfaz a seguinte condição de crescimento: para cada $\epsilon > 0$ existe $C(\epsilon) > 0$ tal que*

$$|f(x)| \leqslant C(\epsilon)e^{(A+\epsilon)\|x\|}$$

*para todo $x \in E$.*

Para cada $\rho > A$, (3.2.3) garante que a aplicação

$$f \in Exp^1_{\Theta,0,A}(E) \longmapsto p_{\Theta,\rho}(f) = \sum_{j=0}^\infty \rho^{-j} \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_\Theta$$

é uma seminorma bem definida sobre $Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$. Como $\lim_{j\to+\infty} \frac{j}{e\sqrt[j]{j!}} = 1$, para cada $\rho > A$ existem $\rho', \rho^+ > A$ e $c, C > 0$ tais que

$$\|f\|_{\Theta,1,\rho} \leqslant c p_{\Theta,\rho'}(f) \quad \text{e} \quad p_{\Theta,\rho}(f) \leqslant C\|f\|_{\Theta,1,\rho+} \tag{3.2.4}$$

para toda $f \in Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$.

A seguir, provaremos que, sob condições adequadas, a restrição de um operador de convolução sobre $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ a $Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ é também um operador de convolução. Antes disso, lembramos o conceito de produto convolução.

**Definição 3.2.4.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$, $k \in [1,+\infty]$, $T \in [Exp^k_{\Theta,0}(E)]'$ e $f \in Exp^k_{\Theta,0}(E)$.* O produto convolução de $T$ e *$f$, denotado por $T * f$, é dado por,*

$$(T * f)(x) = T(\tau_{-x}f)$$

*para todo $x \in E$.*

**Proposição 3.2.5.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $A > 0$, $k \in (1, +\infty]$ e $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um $\pi_{2,k}$-tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$. Então*

$$L(Exp^1_{\Theta,0,A}(E)) \subset Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$$

*para cada operador de convolução $L$ sobre $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ e a restrição*

$$L\Big|_{Exp^1_{\Theta,0,A}(E)} : Exp^1_{\Theta,0,A}(E) \to Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$$

*é contínua.*

*Demonstração.* Por [38, Theorem 3.11] existe $T \in [Exp^k_{\Theta,0}(E)]'$ tal que

$$Lf = T * f,$$

para toda $f \in Exp^k_{\Theta,0}(E)$. Provar que $Lf \in Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ para toda $f \in Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ equivale provar que

$$\|Lf\|_{\Theta,1,\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{-n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left\| \frac{1}{n!}\hat{d}^n(T * f)(0) \right\|_\Theta < +\infty$$

para toda $f \in Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ e $\gamma > A$. Para isso, precisamos de uma representação fácil de manusear para a função $T * f$. Começamos observando que por meio das Proposições 1.2.29 e 1.2.30, a linearidade e continuidade de $T$ temos

$$\begin{aligned} T * f(x) = T(\tau_{-x}f) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T\left(\hat{d}^n f(\cdot)(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T\left(\widehat{(d^{j+n} f(0))(\cdot)^j(x)}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{(j-n)!} T\left(\widehat{(d^j f(0))(\cdot)^{j-n}(x)}\right) \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

para toda $f \in Exp^k_{\Theta,0}(E)$ e $x \in E$.

**Caso $k = +\infty$:** Como $\Theta$ é um $\pi_{2,\infty}$-tipo de holomorfia, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $f \in Exp^\infty_{\Theta,0}(E) = \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ a aplicação

$$x \in E \longmapsto T\left(\widehat{(d^j f(0))(\cdot)^{j-n}}\right) \in \mathbb{C}$$

pertence ao espaço $\mathcal{P}_\Theta(^nE)$ e, para cada $\epsilon > 0$ existe $M(\epsilon) > 0$ tal que

$$\left\| T\left(\widehat{(d^j f(0))(\cdot)^{j-n}}\right) \right\|_\Theta \leqslant CM(\epsilon)(1+\epsilon)^j \rho^{n-j} \left\| \hat{d}^j f(0) \right\|_\Theta$$

para algumas constantes $C, \rho > 0$ conforme a Definição 1.2.25. Levando isto em conta, olhamos para a expressão em (3.2.5) e percebemos que, se

$$\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{(j-n)!} T\left(\widehat{(d^j f(0))(\cdot)^{j-n}}\right)$$

for um polinômio em $\mathcal{P}_\Theta(^nE)$, teremos uma descrição em série de Taylor para $T * f$ ao redor de zero. Como $\mathcal{P}_\Theta(^nE)$ é um espaço de Banach, basta provar que

$$\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{(j-n)!} \left\| T\left( \widehat{(d^j f(0))(\cdot)^{j-n}} \right) \right\|_\Theta \leqslant CM(\epsilon) \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{(j-n)!} (1+\epsilon)^j \rho^{n-j} \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_\Theta < +\infty.$$

Seja $f \in Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$. Por (3.2.3) existe $D(\epsilon) > 0$ tal que

$$\left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_\Theta \leqslant D(\epsilon)(A+\epsilon)^j$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Segue que

$$\begin{aligned} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{(j-n)!} \left\| T\left( \widehat{(d^j f(0))(\cdot)^{j-n}} \right) \right\|_\Theta &\leqslant CM(\epsilon) \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{(j-n)!} (1+\epsilon)^j \rho^{n-j} \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_\Theta \\ &\leqslant CM(\epsilon) D(\epsilon) [(1+\epsilon)(A+\epsilon)]^n \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\left( \frac{(1+\epsilon)(A+\epsilon)}{\rho} \right)^{j-n}}{(j-n)!} < +\infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\widehat{d}^n (T * f)(0) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{(j-n)!} T\left( \widehat{(d^j f(0))(\cdot)^{j-n}} \right)$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e toda $f \in Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$. Por outro lado, sejam $f \in Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ e $\gamma > A$. Por (3.2.4) existem constantes $B_\gamma > 0$ e $\gamma' > A$ tais que

$$\begin{aligned} \|Lf\|_{\Theta,1,\gamma} &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{-n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \left\| \frac{1}{n!} \widehat{d}^n (T * f)(0) \right\|_\Theta \overset{(3.2.4)}{\leqslant} B_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma')^{-n} \left\| \widehat{d}^n (T * f)(0) \right\|_\Theta \\ &\leqslant B_\gamma CM(\epsilon) \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma')^{-n} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{(j-n)!} (1+\epsilon)^j \rho^{n-j} \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_\Theta \\ &= B_\gamma CM(\epsilon) \sum_{j=0}^{\infty} (1+\epsilon)^j \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_\Theta \sum_{n=0}^{j} (\gamma')^{-n} \frac{\rho^{n-j}}{(j-n)!} \\ &= B_\gamma CM(\epsilon) \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1+\epsilon}{\gamma'} \right)^j \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_\Theta \sum_{n=0}^{j} \frac{\left( \frac{\gamma'}{\rho} \right)^{j-n}}{(j-n)!} \\ &\leqslant B_\gamma CM(\epsilon) e^{(\gamma'/\rho)} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1+\epsilon}{\gamma'} \right)^j \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_\Theta . \end{aligned}$$

Escolhendo $0 < \epsilon < \frac{\gamma'}{A} - 1$ obtemos

$$\|Lf\|_{\Theta,1,\gamma} \leqslant B_\gamma CM(\epsilon) e^{(\gamma'/\rho)} p_{\Theta, \frac{\gamma'}{1+\epsilon}}(f).$$

Mais uma vez por (3.2.4) existem constantes $K_\gamma > 0$ e $\gamma^+ > A$ tais que

$$\|Lf\|_{\Theta,1,\gamma} \leqslant K_\gamma B_\gamma CM(\epsilon) e^{(\gamma'/\rho)} \|f\|_{\Theta,1,\gamma^+}. \tag{3.2.6}$$

Ainda mais, (3.2.6) nos diz que a restrição

$$L\Big|_{Exp^1_{\Theta,0,A}(E)} : Exp^1_{\Theta,0,A}(E) \to Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$$

é contínua.

**Caso $k > 1$:** Como $\Theta$ é um $\pi_{2,k}$-tipo de holomorfia, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $f \in Exp^k_{\Theta,0}(E)$, a aplicação

$$x \in E \longmapsto T\left(\widehat{(d^{j+n}f(0))(\cdot)^j}(x)\right) \in \mathbb{C}$$

pertence ao espaço $\mathcal{P}_\Theta({}^nE)$ e, para cada $\epsilon > 0$ existe $M(\epsilon) > 0$ tal que

$$\left\|T\left(\widehat{(d^{j+n}f(0))(\cdot)^j}\right)\right\|_\Theta \leqslant CM(\epsilon)(1+\epsilon)^{j+n}\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left\|\widehat{d}^{j+n}f(0)\right\|_\Theta$$

para algumas constantes $C, \rho > 0$ conforme a Definição 1.2.25. Tal como no caso anterior, primeiro provaremos que

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left\|T\left(\widehat{(d^{j+n}f(0))(\cdot)^j}\right)\right\|_\Theta < +\infty.$$

Como $k > 1$,

$$\lim_{j\to+\infty}\left(\frac{j}{ke}\right)\left(\frac{1}{j!}\right)^{\frac{k}{j}} = \lim_{j\to\infty}\left(\frac{j}{ke\sqrt[j]{j!}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[j]{j!}}\right)^h = \left(\frac{1}{k}\right)\cdot 0 = 0, \qquad h := k-1 > 0.$$

Então, para todo $\delta > 0$ existe $c_\delta > 0$ tal que

$$\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\frac{1}{j!} \leqslant c_\delta\delta^{\frac{j}{k}}$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Seja $f \in Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$. Por (3.2.3) existe $D(\epsilon) > 0$ tal que

$$\left\|\widehat{d}^j f(0)\right\|_\Theta \leqslant D(\epsilon)(A+\epsilon)^j$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left\|T\left(\widehat{(d^{j+n}f(0))(\cdot)^j}\right)\right\|_\Theta &\leqslant CM(\epsilon)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(1+\epsilon)^{j+n}\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left\|\widehat{d}^{j+n}f(0)\right\|_\Theta \\
\leqslant CM(\epsilon)c_\delta\sum_{j=0}^{\infty}(1+\epsilon)^{j+n}\delta^{\frac{j}{k}}\rho^{-j}\left\|\widehat{d}^{j+n}f(0)\right\|_\Theta &= CM(\epsilon)c_\delta\sum_{j=n}^{\infty}(1+\epsilon)^j\left(\frac{\delta^{\frac{1}{k}}}{\rho}\right)^{j-n}\left\|\widehat{d}^j f(0)\right\|_\Theta \\
\leqslant CM(\epsilon)c_\delta\left(\frac{\delta^{\frac{1}{k}}}{\rho}\right)^{-n}D(\epsilon)\sum_{j=n}^{\infty}\left(\frac{(1+\epsilon)(A+\epsilon)\delta^{\frac{1}{k}}}{\rho}\right)^j.
\end{aligned}$$

Escolhendo $0 < \delta < \left(\frac{\rho}{(1+\epsilon)(A+\epsilon)}\right)^k$ obtemos

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left\|T\left(\widehat{(d^{j+n}f(0))(\cdot)^j}\right)\right\|_\Theta \leqslant CM(\epsilon)c_\delta\left(\frac{\delta^{\frac{1}{k}}}{\rho}\right)^{-n}D(\epsilon)\sum_{j=n}^{\infty}\left(\frac{(1+\epsilon)(A+\epsilon)\delta^{\frac{1}{k}}}{\rho}\right)^j < +\infty$$

Portanto,

$$\widehat{d}^n(T*f)(0) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}T\left(\widehat{(d^{j+n}f(0))(\cdot)^j}\right)$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e toda $f \in Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$. Por outro lado, sejam $f \in Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ e $\gamma > A$. Por (3.2.4) existem constantes $B_\gamma > 0$ e $\gamma' > A$ tais que

$$\begin{aligned}
\|Lf\|_{\Theta,1,\gamma} &= \sum_{n=0}^{\infty}\gamma^{-n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left\|\frac{1}{n!}\widehat{d}^n(T*f)(0)\right\|_\Theta \overset{(3.2.4)}{\leqslant} B_\gamma\sum_{n=0}^{\infty}(\gamma')^{-n}\left\|\widehat{d}^n(T*f)(0)\right\|_\Theta\\
&\leqslant B_\gamma CM(\epsilon)\sum_{n=0}^{\infty}(\gamma')^{-n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(1+\epsilon)^{j+n}\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left\|\widehat{d}^{j+n}f(0)\right\|_\Theta\\
&\leqslant B_\gamma CM(\epsilon)c_\delta\sum_{n=0}^{\infty}(\gamma')^{-n}\sum_{j=0}^{\infty}(1+\epsilon)^{j+n}\left(\frac{\delta^{\frac{1}{k}}}{\rho}\right)^j\left\|\widehat{d}^{j+n}f(0)\right\|_\Theta\\
&= B_\gamma CM(\epsilon)c_\delta\sum_{n=0}^{\infty}(\gamma')^{-n}\sum_{j=n}^{\infty}(1+\epsilon)^{j}\left(\frac{\delta^{\frac{1}{k}}}{\rho}\right)^{j-n}\left\|\widehat{d}^{j}f(0)\right\|_\Theta\\
&= B_\gamma CM(\epsilon)c_\delta\sum_{j=0}^{\infty}(1+\epsilon)^{j}\left\|\widehat{d}^{j}f(0)\right\|_\Theta\sum_{n=0}^{j}(\gamma')^{-n}\left(\frac{\delta^{\frac{1}{k}}}{\rho}\right)^{j-n}\\
&= B_\gamma CM(\epsilon)c_\delta\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1+\epsilon}{\gamma'}\right)^{j}\left\|\widehat{d}^{j}f(0)\right\|_\Theta\sum_{n=0}^{j}\left(\frac{\gamma'\delta^{\frac{1}{k}}}{\rho}\right)^{j-n}.
\end{aligned}$$

Escolhendo $0 < \epsilon < \frac{\gamma'}{A} - 1$ e $0 < \delta < \left(\frac{\rho}{\gamma'}\right)^k$ obtemos

$$\|Lf\|_{\Theta,1,\gamma} \leqslant B_\gamma CM(\epsilon)c_\delta\frac{\rho}{\rho-\gamma'\delta^{\frac{1}{k}}}p_{\Theta,\frac{\gamma'}{1+\epsilon}}(f).$$

Mais uma vez por (3.2.4) existem constantes $K_\gamma > 0$ e $\gamma^+ > A$ tais que

$$\|Lf\|_{\Theta,1,\gamma} \leqslant K_\gamma B_\gamma CM(\epsilon)c_\delta\frac{\rho}{\rho-\gamma'\delta^{\frac{1}{k}}}\|f\|_{\Theta,1,\gamma^+}. \tag{3.2.7}$$

Ainda mais, (3.2.7) nos diz que a restrição

$$L\Big|_{Exp^1_{\Theta,0,A}(E)} : Exp^1_{\Theta,0,A}(E) \to Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$$

é contínua. Assim completamos a demonstração. □

Como aplicação direta da proposição anterior temos o seguinte corolário.

**Corolário 3.2.6.** *Sejam $A > 0$, $k \in (1,+\infty]$ e $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um $\pi_{2,k}$-tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$. Então todo operador de convolução $L$ sobre $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ restrito ao espaço $Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ é ainda um operador de convolução.*

*Demonstração.* Vamos denotar por $L_A$ o operador restrição $L\Big|_{Exp^1_{\Theta,0,A}(E)} : Exp^1_{\Theta,0,A}(E) \to Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$, o qual, pela Proposição 3.2.5 é um operador contínuo e, para cada $x \in E$, $\tau_{-x}(Exp^1_{\Theta,0,A}(E)) \subset Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$. Logo,

$$\tau_{-x} \circ L_A(f) = \tau_{-x} \circ L(f) = L(\tau_{-x}f) = L_A(\tau_{-x}f) = L_A \circ \tau_{-x}(f)$$

para toda $f \in Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ e $x \in E$. Portanto $L_A$ é de fato um operador de convolução. □

Relembramos que a transformada de Fourier-Borel

$$\mathcal{F} : [Exp^1_{\Theta,0,A}(E)]' \to \mathcal{H}(B_{E'}(0; A)),$$

definida por $\mathcal{F}T(\varphi) = T(e^\varphi)$ para todo $T \in [Exp^1_{\Theta,0,A}(E)]'$ e todo $\varphi \in E'$ com $\|\varphi\| < A$, é um operador linear injetivo. Com isso em mente, notamos que a demonstração do seguinte lema segue as mesmas linhas que a demonstração do Lema 3.1.3.

**Lema 3.2.7.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um $\pi_1$-tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$ e $A > 0$. Sejam $f \in \mathcal{H}(B_{E'}(0; A))$ não constante e $B \subset \mathbb{C}$. Suponha que exista $\varphi_0 \in B_{E'}(0; A)$ tal que $f(\varphi_0)$ é um ponto de acumulação de $B$. Então* $\operatorname{span}\{e^\varphi : \|\varphi\| < A,\ f(\varphi) \in B\}$ *é denso em $Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$.*

Para o próximo resultado precisamos relembrar o conceito de sistema quase conjugado. Um sistema dinâmico $T : E \to E$ é dito *quase conjugado* a outro sistema dinâmico $S : X \to X$ se existe uma função contínua $\phi : X \to E$ com imagem densa tal que $T \circ \phi = \phi \circ S$.

**Teorema 3.2.8.** ***(Princípio de comparação hipercíclico [46, p. 338]).*** *Sejam $T : E \to E$ um operador contínuo sobre um evt $E$ e $Y \subset E$ um subespaço $T$-invariante denso de $E$. Além disso, suponha que $Y$ tenha sua própria topologia vetorial (não necessariamente a induzida) tal que a inclusão $Y \hookrightarrow E$ e a restrição de $T$ a $Y$, $T|_Y : Y \to Y$, sejam contínuas. Então $T$ é quase conjugado a $T|_Y$. Em particular, se $T|_Y$ é frequentemente hipercíclico então $T$ também é, e $T$ tem um vetor frequentemente hipercíclico em $Y$.*

Dado um operador de convolução não trivial $L$ sobre $Exp^k_{\Theta,0}(E)$, sempre existe $\varphi \in E'$ tal que $|L(e^\varphi)(0)| = 1$ (veja demonstração do Teorema 3.1.2). Definimos o número não negativo

$$\alpha_L := \inf\{\|\varphi\| : \varphi \in E' \ \text{ e } \ |L(e^\varphi)(0)| = 1\}.$$

O seguinte teorema contém o resultado de Muro *et al* [66, Teorema 3.11] e a demonstração é semelhante à demonstração em [66].

**Teorema 3.2.9.** *Sejam $E$ um espaço de Banach com dual separável, $k \in (1, +\infty]$, $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um $\pi_1$-$\pi_{2,k}$-tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$ e $L$ um operador de convolução* *não trivial sobre $Exp^k_{\Theta,0}(E)$. Então, para cada $\epsilon > 0$, $L$ admite uma função frequentemente hipercíclica $f \in Exp^k_{\Theta,0}(E)$ que satisfaz a seguinte condição de crescimento: dado $\delta > 0$ existe $C_\delta > 0$ tal que*

$$|f(x)| \leqslant C_\delta e^{(\alpha_L+\epsilon+\delta)\|x\|}$$

*para todo $x \in E$.*

*Demonstração.* Dado $\epsilon > 0$ fixamos $\varphi_0 \in E'$ tal que

$$\alpha_L \leqslant \|\varphi_0\| < \alpha_L + \epsilon \quad \text{e} \quad |L(e^{\varphi_0})(0)| = 1.$$

Escreva $A = \alpha_L + \epsilon$, uma vez que $Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$ é denso em $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ e a inclusão é contínua, o princípio de comparação hipercíclico garante a veracidade deste teorema, apenas provando que a restrição

$$L\Big|_{Exp^1_{\Theta,0,A}(E)} : Exp^1_{\Theta,0,A}(E) \to Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$$

é frequentemente hipercíclica. Por outro lado, seja $T \in [Exp^k_{\Theta,0}(E)]'$ tal que $Lf = T * f$ para toda $f \in Exp^k_{\Theta,0}(E)$. Denotemos por $T_A$ e $L_A$ as restrições $T\Big|_{[Exp^1_{\Theta,0,A}(E)]'}$ e $L\Big|_{Exp^1_{\Theta,0,A}(E)}$, respectivamente. Então

$$L_A(e^\varphi)(0) = L(e^\varphi)(0) = (T * e^\varphi)(0) = T(\tau_0 e^\varphi) = T(e^\varphi) = T_A(e^\varphi) = \mathcal{F}T_A(\varphi),$$

e pelo Lema 3.1.4(a),

$$L_A(e^\varphi) = L(e^\varphi) = [L(e^\varphi)(0)]e^\varphi = [L_A(e^\varphi)(0)]e^\varphi = [\mathcal{F}T_A(\varphi)]e^\varphi \tag{3.2.8}$$

para todo $\varphi \in E'$ com $\|\varphi\| < A$. Como $L$ é um operador de convolução não trivial, segue do Lema 3.1.4(b) que a função holomorfa $\mathcal{F}T_A \in \mathcal{H}(B_{E'}(0; A))$ não é constante (observe que $\mathcal{F}T_A$ é apenas a restrição de $\mathcal{F}T$ à bola $B_{E'}(0; A)$). Agora vamos aplicar mais uma vez o Teorema de Bayart-Matheron 3.1.1 para completar a demonstração. Seja $D$ um subconjunto de Borel de $\mathbb{T}$ tal que $\mathbb{T} \setminus D$ é denso em $\mathbb{T}$. Como $\mathcal{F}T_A(\varphi_0) = L(e^{\varphi_0})(0) \in \mathbb{T}$, temos que $\mathcal{F}T_A(\varphi_0)$ é um ponto de acumulação para $\mathbb{T} \setminus D$. Segue do Lema 3.2.7 que

$$\operatorname{span}\{e^\varphi : \ \|\varphi\| < A, \ \mathcal{F}T_A(\varphi) \in \mathbb{T} \setminus D\}$$

é denso em $Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$, e por (3.2.8),

$$\begin{aligned}\{e^\varphi : \ \|\varphi\| < A, \ \mathcal{F}T_A(\varphi) \in \mathbb{T} \setminus D\} \subset \{f \in \mathcal{H}(E) : L_A f = \lambda f \ \text{ para algum } \ \lambda \in \mathbb{T} \setminus D\} \\ = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{T} \setminus D} \ker(L_A - \lambda I).\end{aligned}$$

Segue que o espaço gerado por $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{T} \setminus D} \ker(L_A - \lambda I)$ é também denso em $Exp^1_{\Theta,0,A}(E)$. Finalmente, segue do Teorema do Bayart-Matheron 3.1.1 que $L_A$ é, em particular, frequentemente hipercíclica. □

Note que, fazendo $k = +\infty$ no teorema anterior, recuperamos o resultado de Muro *et al* [66], o qual escreveremos no seguinte corolário.

**Corolário 3.2.10.** *Sejam $E$ um espaço de Banach com dual separável, $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um $\pi_1$-$\pi_2$-tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$ e $L$ um operador de convolução não trivial sobre $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Então, para cada $\epsilon > 0$, $L$ admite uma função frequentemente hipercíclica $f \in Exp^1_{\Theta,0,\alpha_L+\epsilon}(E)$.*

Como uma aplicação imediata do Teorema 3.2.9, obtemos uma melhor condição de crescimento para os operadores translação sobre $Exp^k_{\Theta,0}(E)$.

**Corolário 3.2.11.** *Sejam $E$ um espaço de Banach com dual separável, $k \in (1, +\infty]$, $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um $\pi_1$-$\pi_{2,k}$-tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$ e $\tau_a$ o operador translação pelo vetor $a \in E$, $a \neq 0$, sobre $Exp^k_{\Theta,0}(E)$. Então:*

(a) *Dado $\epsilon > 0$ existem $C > 0$ e uma função inteira frequentemente hipercíclica $f \in Exp^k_{\Theta,0}(E)$ para $\tau_a$ satisfazendo*

$$|f(x)| \leqslant Ce^{\epsilon\|x\|} \quad \text{para todo} \quad x \in E.$$

(b) *Sejam $\epsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ uma função tal que $\liminf_{r\to\infty} \epsilon(r) = 0$ e $C > 0$. Então, não existe função inteira frequentemente hipercíclica $f \in Exp^k_{\Theta,0}(E)$ para $\tau_a$ satisfazendo*

$$|f(x)| \leqslant Ce^{\epsilon(\|x\|)\|x\|} \quad \text{para todo} \quad x \in E.$$

*Demonstração.* (a) Repare que $\tau_a(e^\varphi)(0) = e^{\varphi(0-a)} = e^{-\varphi(a)}$ para todo $\varphi \in E'$. Em particular, $|\tau_a(e^\varphi)(0)| = 1$ quando $\varphi = 0$. Assim, $\alpha_{\tau_a} = 0$. Por outro lado, como $\tau_a$ é um operador de convolução não trivial, já que $a \neq 0$, segue do Teorema 3.2.9 que para cada $\epsilon > 0$ existe uma função frequentemente hipercíclica $f \in Exp^k_{\Theta,0}(E)$ para $\tau_a$ que satisfaz a seguinte condição de crescimento: dado $\delta > 0$ existe $C_\delta > 0$ tal que

$$|f(x)| \leqslant C_\delta e^{(\alpha_{\tau_a}+\frac{\epsilon}{2}+\delta)\|x\|}$$

para todo $x \in E$. De modo que tomando $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ o resultado segue.

(b) Vamos transladar este problema ao caso de dimensão finita com o intuito de aplicar [46, Theorem 23] e o princípio de comparação hipercíclico. Considere a reta complexa $L := \{za : z \in \mathbb{C}\}$ e o operador restrição $R_L : Exp^k_{\Theta,0}(E) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ dado por

$$R_L(g)(z) := g\,|_L(z) = g(za),$$

para todo $g \in Exp^k_{\Theta,0}(E)$ e $z \in \mathbb{C}$. Em particular,

$$R_L(\tau_a g)(z) = \tau_a g(za) = g((z-1)a) = R_L(g)(z-1) = \tau_1(R_L(g))(z)$$

para todo $g \in Exp^k_{\Theta,0}(E)$ e $z \in \mathbb{C}$. De onde temos a comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} Exp^k_{\Theta,0}(E) \arrow[r, "\tau_a"] \arrow[d, "R_L"'] & Exp^k_{\Theta,0}(E) \arrow[d, "R_L"'] \\ \mathcal{H}(\mathbb{C}) \arrow[r, "\tau_1"'] & \mathcal{H}(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Como $R_L(\varphi^n)(z) = \varphi^n(za) = \varphi^n(a)z^n$ para todo $\varphi \in E'$, $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$, segue que $R_L(\varphi^n) = \varphi^n(a)(\cdot)^n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Portanto, $R_L$ tem imagem densa. Agora, suponha que o resultado seja falso, isto é, existe uma função inteira frequentemente hipercíclica $f$ para $\tau_a$ tal que $|f(x)| \leqslant Ce^{\epsilon(\|x\|)\|x\|}$ para todo $x \in E$. Aplicando o princípio de comparação hipercíclico, $R_L(f)$ é uma função inteira frequentemente hipercíclica para $\tau_1$ satisfazendo

$$|R_L(f)(z)| = |f(za)| \leqslant Ce^{\epsilon(\|za\|)\|za\|}, \tag{3.2.9}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Isso, porém, contradiz [46, Theorem 23], pois lá foi provado que não existe função frequentemente hipercíclica para os operadores translação sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ satisfazendo (3.2.9). □

## 3.3 Subespaços frequentemente hipercíclicos

Nesta seção provaremos a existência de um *subespaço frequentemente hipercíclico* de $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ para um dado operador de convolução não trivial, isto é, um subespaço fechado de dimensão infinita de $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ formado, exceto pela função nula, por funções frequentemente hiperíclicas para o operador de convolução dado.

Como é usual, uma função $f : \mathbb{T} \to E$ é dita de *classe* $C^2$ se sua segunda derivada no sentido real existe e é contínua.

**Lema 3.3.1.** *(Vide [46, Lemma 9.23]) Sejam $X$ um espaço de Fréchet complexo e $f : [0, 2\pi] \to X$ uma função contínua.*

(a) ***(Lema de Riemann-Lebesgue)*** *$\int_0^{2\pi} e^{int}f(t)dt \to 0$ quando $n \to \pm\infty$.*

(b) *Se $f$ é de classe $C^2$ com $f(0) = f(2\pi)$ e $f'(0) = f'(2\pi)$ então $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{int}f(t)dt$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-int}f(t)dt$ convergem incondicionalmente.*

**Lema 3.3.2.** *Sejam $E$ um espaço de Banach com dual separável, $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um $\pi_1$-tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$, $k \in (1, +\infty]$ e $L$ um operador de convolução não trivial sobre $Exp^k_{\Theta,0}(E)$. Então:*

(a) *Existem funções $E_n : \mathbb{T} \to Exp^k_{\Theta,0}(E)$ de classe $C^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tais que*

$$L(E_n(\lambda)) = \lambda E_n(\lambda) \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \mathbb{T} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) *Se $B \subset \mathbb{T}$ é um conjunto de Borel com medida de Lebesgue total em $\mathbb{T}$, então*

$$\operatorname{span}\{E_n(\lambda) : \lambda \in B, n \in \mathbb{N}\}$$

*é denso em $Exp^k_{\Theta,0}(E)$.*

(c) *Se para cada $j \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos*

$$x_{n,j} := \int_{\mathbb{T}} \lambda^j E_n(\lambda) d\lambda,$$

*onde a integral é no sentido de Riemann, então o espaço*

$$X_0 := \operatorname{span}\{x_{n,j} : n \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{Z}\}$$

*é denso em $Exp^k_{\Theta,0}(E)$.*

(d) *Se para cada $x = \sum_{l=1}^{p} a_l x_{n_l,j_l} \in X_0$ e cada $m \in \mathbb{N}_0$ definimos*

$$u_m(x) = \sum_{l=1}^{p} a_l x_{n_l,j_l-m},$$

*então as séries*

$$\sum_{m=0}^{\infty} L^m x \quad \text{e} \quad \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x)$$

*convergem incondicionalmente para todo $x \in X_0$.*

*Demonstração.* (a) Fixe $\varphi_0 \in E'$ tal que $|\mathcal{F}_k(\varphi_0)| = 1$. Como $\mathcal{F}_k$ é uma função inteira não constante sobre $E'$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar uma reta complexa $L_n$ passando através de $\varphi_0$ tal que $\mathcal{F}_k$ não seja constante em nenhuma delas e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ seja denso em $E'$ (a construção de tais retas complexas é feita da mesma maneira como na demonstração do Lema 3.1.3, só que desta vez podemos escolher uma quantidade enumerável porque $E'$ satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade). Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, a restrição $\mathcal{F}_k|_{L_n}$ pertence a $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ e é uma função aberta. Escrevendo as retas complexas $L_n := \{\varphi_0 + z\varphi_n : z \in \mathbb{C}\}$, $\varphi_n \in E'$, para cada $n \in \mathbb{N}$, a restrição $\mathcal{F}_k|_{L_n}$ é dada por

$$\mathcal{F}_k|_{L_n}(z) = \mathcal{F}_k(\varphi_0 + z\varphi_n)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Faremos o resto da demonstração em duas etapas:

(1) **Construção de sub-arcos abertos não vazios $\beta_n$ de $\mathbb{T}$ e funções $\psi_n : \beta_n \to L_n$ de classe $C^2$ tais que**

$$\mathcal{F}_k(\psi_n(\lambda)) = \lambda \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \beta_n. \tag{3.3.1}$$

Como

$$H_n := (\mathcal{F}_k|_{L_n})(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T}$$

é um subconjunto não vazio e aberto de $\mathbb{T}$, temos que $\mathcal{F}_k|_{L_n}(0)$ é um ponto de acumulação de $H_n$ e, consequentemente, $0$ é um ponto de acumulação de $(\mathcal{F}_k|_{L_n})^{-1}(H_n)$. Como o conjunto dos zeros da função derivada $(\mathcal{F}_k|_{L_n})'$ é discreto, isso último implica que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in \mathbb{C}$ tal que

$$\mathcal{F}_k|_{L_n}(z_n) \in \mathbb{T} \quad \text{e} \quad (\mathcal{F}_k|_{L_n})'(z_n) \neq 0.$$

Aplicando o teorema da função inversa existem $U_n$ e $V_n$ subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$ com $z_n \in U_n$ e $\mathcal{F}_k|_{L_n}(z_n) \in V_n$ tais que $\mathcal{F}_k|_{L_n} : U_n \to V_n$ é biholomorfa. Agora, escolha sub-arcos abertos não vazios $\beta_n$ de $\mathbb{T}$ com $\beta_n \subset V_n$ e defina as funções

$$\psi_n : \beta_n \to L_n, \quad \psi_n(\lambda) := \varphi_0 + (\mathcal{F}_k|_{L_n})^{-1}(\lambda)\varphi_n$$

para todo $\lambda \in \beta_n$. Como a função inversa $(\mathcal{F}_k|_{L_n})^{-1}$ é holomorfa, segue que $\psi_n$ é infinitamente diferenciável no sentido real, em particular, é de classe $C^2$. Ainda mais,

$$\begin{aligned} \lambda &= \mathcal{F}_k|_{L_n}\left((\mathcal{F}_k|_{L_n})^{-1}(\lambda)\right) \\ &= \mathcal{F}_k\left(\varphi_0 + (\mathcal{F}_k|_{L_n})^{-1}(\lambda)\varphi_n\right) = \mathcal{F}_k(\psi_n(\lambda)) \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in \beta_n$ e $n \in \mathbb{N}$.

(2) **Construção das funções $E_n : \mathbb{T} \to Exp^k_{\Theta,0}(E)$:**

Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escolher um sub-arco $\tilde{\beta}_n$ aberto e não vazio de $\beta_n$ e uma função $f_n : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ de classe $C^2$ diferente de zero em todo $\tilde{\beta}_n$ e zero fora de $\tilde{\beta}_n$ (isso é possível graças ao Lema de Urysohn versão suave [43, Lemma 8.18]). Agora defina $E_n : \mathbb{T} \to Exp^k_{\Theta,0}(E)$ por

$$E_n(\lambda) = f_n(\lambda)e^{\psi_n(\lambda)} \quad \text{se} \quad \lambda \in \beta_n$$

e

$$E_n(\lambda) = 0 \quad \text{se} \quad \lambda \notin \beta_n.$$

Afirmamos que $E_n$ é de classe $C^2$. De fato, primeiro vamos provar que a função composta

$$e^{\psi_n} : \beta_n \to L_n \to Exp^k_{\Theta,0}(E)$$

é de classe $C^2$. Para isso, basta mostrar que a função

$$\lambda \in \mathbb{C} \to e^{\lambda\varphi} \in Exp^k_{\Theta,0}(E),$$

com $\varphi \in E'$ fixo, é holomorfa, pois $e^{\psi_n}$ é um múltiplo escalar dessa função, composta com uma função de classe $C^2$ sobre $\beta_n$. Mais precisamente,

$$e^{\psi_n} = e^{\varphi_0}e^{(\cdot)\varphi_n} \circ (\mathcal{F}_k|_{L_n})^{-1}.$$

Como $e^{\varphi} \in Exp^k_{\Theta,0}(E)$ e $\widehat{d}^j(e^{\varphi})(0) = \varphi^j$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$, temos

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}\varphi^j \to e^{\varphi} \text{ na topologia de } Exp^k_{\Theta,0}(E). \tag{3.3.2}$$

Vamos fazer o caso $k \in (1, +\infty)$. É fácil ver que o caso $k = +\infty$ segue de maneira semelhante. Temos

$$\limsup_{j\to 0} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\|\frac{1}{j!}\varphi^j\right\|_{\theta}^{\frac{1}{j}} = 0.$$

Segue que a série de potências

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\|\frac{1}{j!}\varphi^j\right\|_{\Theta} \lambda^j \tag{3.3.3}$$

converge absolutamente em $\mathbb{C}$, e portanto, uniformemente sobre conjuntos compactos de $\mathbb{C}$. De (3.3.2) temos

$$\frac{e^{\lambda\varphi} - e^{\lambda_0\varphi}}{\lambda - \lambda_0} - \varphi e^{\lambda_0\varphi} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!}(\lambda - \lambda_0)^{j-1}\varphi^j \text{ na topologia de } Exp^k_{\Theta,0}(E),$$

para todo $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C}$ com $\lambda \neq \lambda_0$. Sejam $\rho > 0$ e $m \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j!}(\lambda - \lambda_0)^{j-1}\varphi^j\right\|_{\Theta,k,\rho} &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \left\|\frac{1}{n!}\widehat{d}^n \left(\sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j!}(\lambda - \lambda_0)^{j-1}\varphi^j\right)(0)\right\|_{\Theta} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \left\|\sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j!}(\lambda - \lambda_0)^{j-1}\frac{1}{n!}\widehat{d}^n\varphi^j(0)\right\|_{\Theta} \\
&= \sum_{n=2}^{m} \rho^{-n} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \left\|\frac{1}{n!}(\lambda - \lambda_0)^{n-1}\varphi^n\right\|_{\Theta} \\
&= \sum_{n=2}^{m} \rho^{-n} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \left\|\frac{1}{n!}\varphi^n\right\|_{\Theta} |\lambda - \lambda_0|^{n-1}.
\end{aligned}$$

Fazendo $m \to \infty$ temos

$$\left\|\frac{e^{\lambda\varphi} - e^{\lambda_0\varphi}}{\lambda - \lambda_0} - \varphi e^{\lambda_0\varphi}\right\|_{\Theta,k,\rho} = \sum_{n=2}^{\infty} \rho^{-n} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \left\|\frac{1}{n!}\varphi^n\right\|_{\Theta} |\lambda - \lambda_0|^{n-1}.$$

Como a série em (3.3.3) converge uniformemente sobre compactos, basta tomar uma bola centrada em $\lambda_0$, e fazendo $\lambda \to \lambda_0$ dentro dessa última série obtemos

$$\frac{e^{\lambda\varphi} - e^{\lambda_0\varphi}}{\lambda - \lambda_0} \to \varphi e^{\lambda_0\varphi}$$

na topologia de $Exp^k_{\Theta,0}(E)$. Em outras palavras, a função $\lambda \in \mathbb{C} \to e^{\lambda\varphi} \in Exp^k_{\Theta,0}(E)$ com $\varphi \in E'$ fixo, é holomorfa. Agora somos capazes de provar nossa afirmação: se $\lambda \in \beta_n$ então $E_n(\lambda) = f_n(\lambda)e^{\psi_n(\lambda)}$ é um produto de duas funções de classe $C^2$, de modo que $E_n$ é de classe $C^2$. Se $\lambda \in \text{int}(\mathbb{T} \setminus \beta_n)$ então $E_n$ é trivialmente de classe $C^2$. Por último, se $\lambda$

pertence a $(\mathbb{T} \setminus \beta_n) \cap \overline{\beta_n}$, então podemos encontrar um subconjunto aberto de $\mathbb{T}$ contendo $(\mathbb{T} \setminus \beta_n) \cap \overline{\beta_n}$ e disjunto com $\tilde{\beta}_n$. Neste caso $E_n = 0$ (pois $f = 0$ fora $\tilde{\beta}_n$) em tal conjunto, e portanto de classe $C^2$ sobre ele. Assim, cada $E_n$ é uma função de classe $C^2$ sobre $\mathbb{T}$. De outro lado, vejamos que $E_n(\lambda)$ é autovetor para $L$, se $\lambda \in \beta_n$ então por (3.3.1) temos

$$\begin{aligned} L(E_n(\lambda)) &= L(f_n(\lambda)e^{\psi_n(\lambda)}) = f_n(\lambda)L(e^{\psi_n(\lambda)}) \\ &= f_n(\lambda)\left(\mathcal{F}_k(\psi_n(\lambda))\right)e^{\psi_n(\lambda)} = \lambda E_n(\lambda). \end{aligned}$$

Se $\lambda \notin \beta_n$ então $L(E_n(\lambda)) = 0 = \lambda E_n(\lambda)$. Portanto

$$L(E_n(\lambda)) = \lambda E_n(\lambda) \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \mathbb{T} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Antes de tudo observe que,

$$\operatorname{span}\{E_n(\lambda) : \lambda \in B, n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{span}\{e^{\varphi} : \varphi \in \psi_n(\tilde{\beta}_n \cap B), n \in \mathbb{N}\}.$$

De fato, primeiro note que, como a medida de Lebesgue de $\tilde{\beta}_n$ é positiva e $B$ tem medida de Lebesgue total (isto é, seu complemento tem medida nula), tem-se que $\tilde{\beta}_n \cap B$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{T}$, pois caso contrário, $B \setminus (\tilde{\beta}_n \cap B)$ teria medida de Lebesgue total e então $[B \setminus (\tilde{\beta}_n \cap B)] \cap \tilde{\beta}_n \neq \varnothing$, o que é impossível. Por outro lado, como $E_n(\lambda)$ é igual a $f(\lambda)e^{\psi_n(\lambda)}$ para todo $\lambda \in B \cap \tilde{\beta}_n$ e zero para $\lambda \in B \cap (\mathbb{T} \setminus \tilde{\beta}_n)$ segue que

$$\{E_n(\lambda) : \lambda \in B, n \in \mathbb{N}\} \subset \operatorname{span}\{e^{\varphi} : \varphi \in \psi_n(\tilde{\beta}_n \cap B), n \in \mathbb{N}\}.$$

Seja agora $ze^{\psi_n(\lambda)}$ com $\lambda \in B \cap \tilde{\beta}_n$ e $z \in \mathbb{C}$ diferente de zero. Segue que $ze^{\psi_n(\lambda)} = \frac{z}{f(\lambda)}E_n(\lambda)$, e então

$$\operatorname{span}\{E_n(\lambda) : \lambda \in B, n \in \mathbb{N}\} \supset \operatorname{span}\{e^{\varphi} : \varphi \in \psi_n(\tilde{\beta}_n \cap B), n \in \mathbb{N}\}.$$

Por outro lado, pelo Teorema de Hahn-Banach é suficiente provar que se um funcional $T \in [Exp^k_{\Theta,0}(E)]'$ é nulo sobre $\operatorname{span}\{e^{\varphi} : \varphi \in \psi_n(\tilde{\beta}_n \cap B), n \in \mathbb{N}\}$, então $T$ é identicamente zero. Como a transformada de Fourier-Borel $\mathcal{F} : [Exp^k_{\Theta,0}(E)]' \to \mathcal{H}(E')$ é um operador injetivo, basta mostrar que $\mathcal{F}T = 0$. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass $\tilde{\beta}_n \cap B$ tem pelo menos um ponto de acumulação, por conseguinte,

$$\left(\mathcal{F}_k\,|_{L_n}\right)^{-1}(\tilde{\beta}_n \cap B)$$

tem pelo menos um ponto de acumulação. Nossa suposição acerca de $T$ implica que $[\mathcal{F}T](\varphi) = T(e^{\varphi}) = 0$ para todo $\varphi \in \psi_n(\tilde{\beta}_n \cap B)$ e $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $[\mathcal{F}T](\psi_n(\lambda)) = 0$ para todo $\lambda \in \tilde{\beta}_n \cap B$ e $n \in \mathbb{N}$. Melhor ainda,

$$[\mathcal{F}T]\left(\varphi_0 + \left(\mathcal{F}_k\,|_{L_n}\right)^{-1}(\lambda)\varphi_n\right) = 0$$

para todo $\lambda \in \tilde{\beta}_n \cap B$. Isso implica que o conjunto dos zeros da função inteira

$$[\mathcal{F}T]\,|_{L_n} : z \in \mathbb{C} \to [\mathcal{F}T](\varphi_0 + z\varphi_n) \in \mathbb{C}$$

contém $\left(\mathcal{F}_k\,|_{L_n}\right)^{-1}(\tilde{\beta}_n \cap B)$. De onde segue que $[\mathcal{F}T]\,|_{L_n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela densidade de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ em $E'$ obtemos $\mathcal{F}T = 0$.

(c) Novamente vamos usar o Teorema de Hahn-Banach. Seja $T \in [Exp^k_{\Theta,0}(E)]'$ tal que $Tx_{n,j} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{Z}$. Pela linearidade e continuidade de $T$ temos

$$0 = Tx_{n,j} = \int_{\mathbb{T}} \lambda^j TE_n(\lambda)d\lambda = \int_0^{2\pi} e^{itj}TE_n(e^{it})dt. \tag{3.3.4}$$

Por outro lado, sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, a funcão $t \in [0, 2\pi] \to TE_n(e^{it}) \in \mathbb{C}$ é contínua, e portanto pertence ao espaço de Hilbert $L^2[0, 2\pi]$ munido com o produto interno usual $< \cdot, \cdot >$. Então (3.3.4) garante que

$$< e^{itj}, TE_n(e^{it}) >= 0 \tag{3.3.5}$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$. Como o conjunto $\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{itj} : j \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para $L^2[0, 2\pi]$, segue de (3.3.5) que as funcões $t \in [0, 2\pi] \to TE_n(e^{it}) \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, são identicamente nulas. Isto é,

$$TE_n(e^{it}) = 0$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$ e $n \in \mathbb{N}$, ou melhor ainda, o operador $T$ é nulo sobre $\text{span}\{E_n(\lambda) : \lambda \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{N}\}$ que é denso em $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ (pela parte (b)). Assim, $T$ é identicamente zero e portanto $X_0$ é um subespaço denso em $Exp^k_{\Theta,0}(E)$.

(d) Pelo Lema de Riemann-Lebesgue 3.3.1, as séries

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i(j+m)}E_n(e^{it})dt \quad \text{e} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i(j-m)}E_n(e^{it})dt \tag{3.3.6}$$

convergem incondicionalmente para todo $n \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{Z}$, já que as funções

$$g_n : [0, 2\pi] \to Exp^k_{\Theta,0}(E), \quad g_n(t) := E_n(e^{it}) \text{ para todo } t \in [0, 2\pi],$$

são de classe $C^2$ e satisfazem $g_n(0) = E_n(e^0) = E_n(e^{2\pi i}) = g_n(2\pi)$ e

$$g_n'(2\pi) = \lim_{t\to 0} \frac{g_n(t + 2\pi) - g_n(2\pi)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{E_n(e^{it}) - g_n(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g_n(t) - g_n(0)}{t} = g_n'(0).$$

Por outro lado, como $L(E_n(\lambda)) = \lambda E_n(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{T}$,

$$L^m x_{n,j} = \int_0^{2\pi} e^{i(j+m)}E_n(e^{it})dt \quad \text{e} \quad u_m(x_{n,j}) = x_{n,j-m} = \int_0^{2\pi} e^{i(j-m)}E_n(e^{it})dt$$

para todo $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{Z}$. Segue de (3.3.6) que as séries

$$\sum_{m=0}^{\infty} L^m x_{n,j} \quad \text{e} \quad \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x_{n,j})$$

convergem incondicionalmente para todo $n \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{Z}$. Pela linearidade de $L^m$ e pela definição de $u_m$, temos que as séries $\sum\limits_{m=0}^{\infty} L^m x$ e $\sum\limits_{m=0}^{\infty} u_m(x)$ convergem incondicionalmente para todo $x \in X_0$.

□

**Proposição 3.3.3.** *(Vide [46, Remark 9.10]) Seja $T$ um operador linear contínuo sobre um $F$-espaço separável $X$. Suponha que exista um subconjunto denso $X_0$ de $X$, e para cada $x \in X_0$ exista uma sequência $(u_m(x))_{m=0}^{\infty}$ em $X$ tal que,*

(i) $\sum_{m=1}^{\infty} T^m x$ *converge incondicionalmente,*

(ii) $\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)$ *converge incondicionalmente,*

(iii) $u_0(x) = x$ *e* $T^q u_m(x) = u_{m-q}(x)$ *para todo* $q \leqslant m$.

*Então $T$ é um operador frequentemente hipercíclico.*

Vejamos que os operadores de convolução sobre $Exp_{\Theta,0}^{k}(E)$ satisfazem as hipóteses dessa proposição.

**Proposição 3.3.4.** *Sejam $E$ um espaço de Banach com dual separável, $(\mathcal{P}_{\Theta}({}^{j}E))_{j=0}^{\infty}$ um $\pi_1$-tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$ e $k \in (1, +\infty]$. Então, todo operador de convolução não trivial $L$ sobre $Exp_{\Theta,0}^{k}(E)$, satisfaz as hipóteses da Proposição 3.3.3.*

*Demonstração.* Sabemos que $Exp_{\Theta,0}^{k}(E)$ é um espaço de Fréchet, em particular um $F$-espaço. Como $E'$ é separável e $(\mathcal{P}_{\Theta}({}^{j}E))_{j=0}^{\infty}$ é um $\pi_1$-tipo de holomorfia, $Exp_{\Theta,0}^{k}(E)$ é também separável (veja a Proposição 1.2.28). Considere agora

$$X_0 := \operatorname{span}\{x_{n,j} : n \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{Z}\}$$

como no Lema 3.3.2, e para cada $x = \sum_{l=1}^{p} a_l x_{n_l,j_l} \in X_0$ e cada $m \in \mathbb{N}_0$ faça

$$u_m(x) := \sum_{l=1}^{p} a_l x_{n_l,j_l-m} \in X_0$$

tal qual no Lema 3.3.2. Então

$$u_0(x) = \sum_{l=1}^{p} a_l x_{n_l,j_l} = x.$$

Como $L^q x_{n,j} = x_{n,j+q}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ e $q, n \in \mathbb{N}$, segue-se

$$L^q u_m(x) = \sum_{l=1}^{p} a_l L^q x_{n_l,j_l-m} = \sum_{l=1}^{p} a_l x_{n_l,j_l-(m-q)} = u_{m-q}(x),$$

para todo $q \leqslant m$ e todo $x \in X_0$. Pelo Lema 3.3.2 as séries

$$\sum_{m=0}^{\infty} L^m x \quad \text{e} \quad \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x)$$

convergem incondicionalmente para todo $x \in X_0$. $\square$

**Teorema 3.3.5.** *(Vide [66, Theorem 4.3]) Sejam $X$ um $F$-espaço separável com uma norma contínua, $T$ um operador contínuo sobre $X$ que satisfaz as hipóteses da Proposição 3.3.3 e $I$ o operador identidade sobre $X$. Se $\dim \ker(T - \lambda I) = +\infty$ para algum escalar $\lambda$ com $|\lambda| < 1$, então $T$ possui um subespaço frequentemente hipercíclico.*

A seguir, enunciaremos o resultado principal desta seção cuja demonstração usa o teorema anterior.

**Teorema 3.3.6.** *Sejam $E$ um espaço de Banach com dual separável e $\dim E > 1$, $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um $\pi_1$-tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$ e $k \in (1, +\infty]$. Então, todo operador de convolução não trivial $L$ sobre $Exp_{\Theta,0}^k(E)$ possui um subespaço frequentemente hipercíclico.*

*Demonstração.* Vamos aplicar o Teorema 3.3.5. Sabemos da Proposição 3.3.4 que $Exp_{\Theta,0}^k(E)$ satisfaz as hipóteses da Proposição 3.3.3. Também lembramos que as normas $\|f\|_{\Theta,k,\rho}$ para toda $f \in Exp_{\Theta,0}^k(E)$, $k$ finito, e $p_{\Theta,\rho}^\infty(f)$ para toda $f \in Exp_{\Theta,0}^\infty(E)$ são contínuas. Então resta verificar que

$$\dim \ker(L - \lambda I) = +\infty$$

para algum escalar $\lambda$ com $|\lambda| < 1$. Para tal fim, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ denotamos, como é usual, o conjunto dos zeros da função inteira $\mathcal{F}_k - \lambda$ por

$$Z(\mathcal{F}_k - \lambda) := \{\varphi \in E' : \mathcal{F}_k(\varphi) - \lambda = 0\}.$$

Como $L(e^\varphi) = \mathcal{F}_k(\varphi)e^\varphi$ para todo $\varphi \in E'$, segue que

$$\ker(L - \lambda I) \supset \{e^\varphi : \ \varphi \in Z(\mathcal{F}_k - \lambda)\}.$$

Uma vez que $\{e^\varphi : \varphi \in E'\}$ é um subconjunto linearmente independente em $Exp_{\Theta,0}^k(E)$ (veja [38, Proposition 4.5]), para provar que $\dim \ker(L - \lambda I) = +\infty$ para algum escalar $\lambda$ com $|\lambda| < 1$, é suficiente provar que $Z(\mathcal{F}_k - \lambda)$ é um subconjunto infinito para algum escalar $\lambda \in \mathbb{D}$. Por um lado, como $L$ é um operador de convolução não trivial, a função inteira $\mathcal{F}_k$ não é constante. Decorre do Teorema de Liouville

$$(\mathcal{F}_k)^{-1}(\mathbb{D}) = \{\varphi \in E' : \ |\mathcal{F}_k(\varphi)| < 1\} \neq \varnothing.$$

Seja então $\varphi_0 \in E'$ tal que $|\mathcal{F}_k(\varphi_0)| < 1$. Denotemos por $\lambda_0 := \mathcal{F}_k(\varphi_0)$. Por outro lado, como $\dim E > 1$ (implica $\dim E' > 1$) e $\varphi_0 \in Z(\mathcal{F}_k - \lambda_0)$, seque que $Z(\mathcal{F}_k - \lambda_0)$ é um subconjunto infinito, já que o conjunto dos zeros de uma função inteira sobre um espaço de dimensão maior que 1 ou é vazio ou é infinito (veja [72, Corollary 3.3]). □

# Capítulo 4

# Comportamento caótico dos operadores de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$

Hiperciclicidade é um dos conceito mais importante na dinâmica linear e tem recebido considerável atenção nos últimos 25 anos. Referências como [10, 46] fornecem informações detalhadas e profundas acerca da teoria. Um resultado clássico devido a Godefroy e Shapiro afirma que todo operador de convolução não trivial sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ é hipercíclico. Além disso, Bonilla e K.-G. Grosse-Erdmann mostraram que esses operadores de convolução são, de fato, frequentemente hipercíclicos, que como sabemos, é uma noção mais forte do que hiperciclicidade. Em contraste notório com esses resultados, Fávaro e Mujica [39] provaram que nenhum operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ pode ser hipercíclico. À primeira vista, este resultado pode parecer surpreendente, pois é bem conhecido que cada $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ depende apenas de uma quantidade finita de variáveis (veja [4, Corolário 38] ou [30, p. 162]). Baseado nesses fatos, levantamos a seguinte questão:

Os operadores de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ satisfazem alguma noção da dinâmica linear mais fraca que a hiperciclicidade?

Lembramos que 1-superciclicidade e superciclicidade são conceitos equivalentes e que vale o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\text{Caos de Li–Yorke} & \boxed{\text{Hiperciclicidade}} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Superciclicidade} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Ciclicidade} \\
\text{Mistura} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Transitividade} & n\text{-Superciclicidade} &
\end{tikzcd}$$

Um operador $n$-supercíclico ($n \geqslant 2$) não necessariamente tem que ser cíclico (para um exemplo em dimensão infinita veja [21]). Nessa mesma referência os autores provaram que não existe operador $(n-1)$-supercíclico sobre $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Portanto, $n$-

superciclicidade não implica superciclicidade em geral. Para mais propriedades e resultados sobre superciclicidade e $n$ -superciclicidade, nós sugerimos [21, 35, 41, 48, 49].

Em contraste com o resultado já mencionado de Godefroy e Shapiro, mostraremos que nenhum operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ pode ser cíclico nem $n$-supercíclico para qualquer inteiro positivo $n$ (Teorema 4.2.1), mas todo operador de convolução não trivial sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ é misturador (Teorema 4.2.2) e Li–Yorke caótico (Teorema 4.2.4).

Vale a pena mencionar que a maioria dos critérios que aparecem na literatura para provar que um operador satisfaz (ou não) algum tipo de caos linear são, em geral, para operadores definidos sobre $F$-espaços. Como $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ não é um espaço métrico, não é possível usar nenhum desses critérios para provar nossos resultados (Teoremas 4.2.1 e 4.2.2). No entanto, para provar o Teorema 4.2.4, nós adaptamos um critério obtido por Bernardes *et al* [12] no contexto de espaços de Fréchet para operadores sobre espaços vetoriais topológicos de Hausdorff. Esse critério é a chave da prova.

## 4.1 Funções inteiras de infinitas variáveis complexas

Nesta seção destacamos alguns resultados técnicos e úteis para o desenvolvimento do nosso trabalho. Em particular, apresentaremos um resultado de Barroso [4] que afirma que toda função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ depende apenas de um número finito de variáveis.

**Notação 4.1.1.** *Usamos $\nu$ para denotar a sequência $(\nu_1, \nu_2, \dots)$ de números inteiros não negativos e escrevemos*

$$\nu! := \nu_1!\nu_2!\cdots, \qquad |\nu| := \nu_1 + \nu_2 + \dots, \qquad \xi^\nu := \xi_1^{\nu_1}\xi_2^{\nu_2}\cdots, \qquad (\text{onde } \ \xi = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}).$$

*Seguindo a notação padrão de [1], representamos por $\mathfrak{U}$ o conjunto de todas as sequências $\nu$ tais que $\nu_j \neq 0$ apenas para uma quantidade finita de índices. De maneira análoga, se $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{U}_n$ representará o subconjunto de $\mathfrak{U}$ formado pelas sequências $\nu$ tais que $\nu_j = 0$ para todo $j > n$. Claramente, nós podemos identificar $\mathfrak{U}_n$ com o produto finito $\mathbb{N}_0^n$ e consequentemente, $\mathfrak{U}$ com $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}_0^n$. Por último, denotamos as derivadas parciais complexas de uma função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ por,*

$$D_j := \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \qquad D^\nu := D_1^{\nu_1}\cdots D_n^{\nu_n} = \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n}}{\partial\xi_1^{\nu_1}\ldots\partial\xi_n^{\nu_n}}, \quad \text{para todo } \nu \in \mathfrak{U}_n,$$

*onde $D_j^0 f := f$ para qualquer $j \in \mathbb{N}$.*

Com essa terminologia, a série de Taylor (1.2.1) para uma função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ em torno de $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tem uma representação mais simples.

**Proposição 4.1.2.** ***(Série de Taylor).*** *Se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ então*

$$f(\xi) = \sum_{\nu\in\mathfrak{U}} \frac{1}{\nu!} D^\nu f(a)(\xi - a)^\nu$$

*para todo $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e uniformemente numa vizinhança de $a$ em $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*

**Definição 4.1.3.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $U$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $f$ uma função de $U$ em $\mathbb{C}$. Diz-se que $f$ depende apenas das primeiras $n$ variáveis em $U$ se $f(\xi) = f(\xi')$ para todo par $\xi, \xi' \in U$ tal que $\xi_j = \xi'_j$ para $j = 1, \ldots, n$.*

Dado $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\pi_n \colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^n$ a projeção canônica de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sobre suas primeiras $n$ coordenadas. Ou seja,

$$\pi_n((\xi_j)_{j=1}^{\infty}) = (\xi_j)_{j=1}^{n} \text{ para todo } (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Então uma função $f : U \to \mathbb{C}$ depende das primeiras $n$ variáveis em $U$ se $f(\xi) = f(\xi')$ para todo par $\xi, \xi' \in U$ tal que $\pi_n(\xi) = \pi_n(\xi')$. Também, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos a inclusão canônica $J_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definida por

$$J_n((z_1, \ldots, z_n)) = (z_1, \ldots, z_n, 0, 0, \ldots)$$

para todo $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Como os operadores $J_n$ e $\pi_n$ são contínuos, eles induzem os seguintes operadores

$$J_n^* : f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \to f \circ J_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \quad \text{e} \quad \pi_n^* : f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \to f_n \circ \pi_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}),$$

respectivamente. Note que

$$\pi_n \circ J_n((z_1, \ldots, z_n)) = \pi_n((z_1, \ldots, z_n, 0, 0, \ldots)) = (z_1, \ldots, z_n)$$

para todo $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Isto é, $\pi_n \circ J_n = Id_{\mathbb{C}^n}$, segue que

$$J_n^* \circ \pi_n^* = Id_{\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)}. \tag{4.1.1}$$

Então podemos enxergar cada $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ como um subespaço vetorial de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ através do operador injetivo $\pi_n^*$. Em outras palavras, identificamos $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ com $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$. Mais precisamente, $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ é visto em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ como o subespaço vetorial de todas as funções inteiras sobre $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ que dependem das primeiras $n$ variáveis em $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Por outro lado, a sequência de espaços $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ é crescente, isto é,

$$\pi_1^*(\mathcal{H}(\mathbb{C})) \subset \pi_2^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^2)) \subset \cdots \subset \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)) \subset \cdots \subset \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}). \tag{4.1.2}$$

De fato, sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \geqslant n$ e $f \in \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$. Então existe uma única $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ tal que $f = \pi_n^*(f_n) = f_n \circ \pi_n$. Se $\pi_{mn}$ denota a projeção canônica de $\mathbb{C}^m$ sobre $\mathbb{C}^n$ então $\pi_n = \pi_{mn} \circ \pi_m$ e

$$f = f_n \circ \pi_n = f_n \circ \pi_{mn} \circ \pi_m = f_m \circ \pi_m,$$

onde a função $f_m := f_n \circ \pi_{mn} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ é claramente inteira. Portanto, $f \in \pi_m^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^m))$.

**Observação 4.1.4.** *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \geqslant n$ e $f = f_n \circ \pi_n \in \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$. Então $f_n \circ \pi_{mn}$ é a única função em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^m)$ tal que $f = (f_n \circ \pi_{mn}) \circ \pi_m$.*

A seguir enunciaremos um resultado que será extremamente útil para provarmos os resultados deste capítulo. Tal resultado basicamente diz que toda função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ depende apenas de um número finito de variáveis.

**Proposição 4.1.5.** *([4, Corolário 38] ou [30, p. 162]) Para cada função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f$ depende apenas das primeiras $n$ variáveis em $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Isto é,*

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n \circ \pi_n : f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)).$$

**Observação 4.1.6.** *Se $f = f_n \circ \pi_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ e $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, então*

$$f(\xi) = \sum_{\nu \in \mathfrak{U}} \frac{1}{\nu!} D^{\nu} f(a)(\xi - a)^{\nu}$$

*para todo $\xi \in \mathbb{C}$, onde $D^{\nu} f(a) = 0$ para todo $\nu \notin \mathfrak{U}_n$.*

### 4.1.1 Algumas propriedades topológicas sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$

Nesta seção listaremos algumas propriedades topológicas clássicas sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ que serão usadas no decorrer deste trabalho. Para outras propriedades topológicas de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, ou até mesmo $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{I})$ com $I$ subconjunto não enumerável de números reais, sugerimos as seguintes referências [1, 4, 6, 7, 17, 20, 30].

**Proposição 4.1.7.** *(Vide [4]) As topologias $\tau_0$ e $\tau_w$ coincidem em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$. Aqui $\tau_\omega$ é a topologia localmente convexa gerada pelas seminormas portadas pelos subconjuntos compactos de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, veja [30].*

Só para relembrar um pouco, essa proposição diz que as únicas topologias localmente convexas usuais sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ são: a topologia compacto aberta $\tau_0$ e sua topologia bornológica associada $\tau_\delta$.

Em [1], Ansemil deu uma outra descrição para a topologia $\tau_\delta$ em termos das topologias $\tau_0$ dos espaços $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, a qual a torna mais fácil de manusear.

**Proposição 4.1.8.** *(Vide [1, Proposition 1.3]) $\tau_\delta$ coincide com a topologia limite indutivo de todos os espaços $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ na categoria de espaços localmente convexos, isto é,*

$$(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau_\delta) = \mathrm{ind}_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \tag{4.1.3}$$

*topologicamente, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ é sempre considerado com sua topologia natural, a topologia compacto aberta. Mais precisamente, $\tau_\delta$ é a topologia localmente convexa mais fina sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ que torna os operadores $\pi_n^*$ contínuos. Ainda mais, tal limite indutivo é estrito.*

**Proposição 4.1.9.** *Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $\tau$ representa a topologia $\tau_0$ ou $\tau_\delta$ sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ então os operadores*

$$J_n^* : f \in (\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau) \to f \circ J_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \quad \text{e} \quad \pi_n^* : f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \to f_n \circ \pi_n \in (\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$$

*são contínuos.*

*Demonstração.* Como funções contínuas levam conjuntos compactos em compactos, não é difícil ver que os operadores

$$J_n^* : f \in (\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau_0) \to f \circ J_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \quad \text{e} \quad \pi_n^* : f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \to f_n \circ \pi_n \in (\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau_0)$$

são contínuos. Pela Proposição 4.1.8, $\pi_n^* : \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \to (\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau_\delta)$ é contínuo. Em vista de que $\tau_\delta$ coincide com a topologia limite indutivo em relação aos operadores $\pi_m^*$, $m \in \mathbb{N}$, o operador $J_n^* : (\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau_\delta) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ será contínuo sempre que o operador

$$J_n^* \circ \pi_m^* : f_m \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^m) \to f_m \circ \pi_m \circ J_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$$

seja contínuo para todo $m \in \mathbb{N}$. Para isso, seja $K \subset \mathbb{C}^n$ compacto. Como $\pi_m \circ J_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ é contínuo, segue que $\pi_m \circ J_n(K)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{C}^m$. De modo que,

$$\sup\{|(J_n^* \circ \pi_m^*(f_m))(x)| : x \in K\} = \sup\{|f_m(y)| : y \in \pi_m \circ J_n(K)\}$$

para toda $f_m \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^m)$. Sendo assim, $J_n^* : (\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau_\delta) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ é também contínuo. □

**Observação 4.1.10.** *Decorre de (4.1.1) e da Proposição 1.1.17 que $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$. Em particular, $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$, $n \in \mathbb{N}$, é um subespaço vetorial próprio e fechado de $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$.*

Lembramos que o operador translação por $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ é representado por $\tau_\xi$.

**Observação 4.1.11.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tais que $\pi_n(\xi) = 0$. Então $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$ é um subespaço próprio fechado de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ e $\tau_\xi$-invariante.*

**Proposição 4.1.12.** *Para cada uma das topologias $\tau_0$ ou $\tau_\delta$, $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ satisfaz as seguintes propriedades topológicas:*

(a) *É completo.*

(b) *É separável.*

(c) *Não é metrizável.*

*Demonstração.* (a) Como $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ é um espaço metrizável, o espaço $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau_0)$ é completo (veja [5, Remark 30.4]). Por outro lado, segue do Teorema 1.1.14 e da Proposição 4.1.8 que $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau_\delta)$ é também completo, ou se preferir, como $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ é um espaço de Fréchet, o espaço $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau_\delta)$ é completo (veja [30, Corollary 3.53]).

(b) Como a série de Taylor de uma função inteira $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto, os polinômios formam um subconjunto denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$. Assim, considerando os polinômios com coeficientes em $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (veja a Proposição 4.1.2), vemos que $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau_0)$ é separável. Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $D_n$ um subconjunto enumerável e denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Então o conjunto enumerável

$$D := \bigcup_{n=1}^{\infty} \pi_n^*(D_n)$$

é denso em $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau_\delta)$. De fato, seja $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$. Pela Proposição 4.1.5 existe $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ tal que $f = f_n \circ \pi_n$. Seja $(g_m)_{m=1}^{\infty}$ uma sequência em $D_n$ tal que $g_m \to f_n$ quando $m \to +\infty$ em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Como $\pi_n^*$ é $\tau_\delta$-contínuo, segue que $\pi_n^*(g_m) \to \pi_n^*(f_n)$ quando $m \to +\infty$ em $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau_\delta)$. Isto é, encontramos uma sequência em $D$ que converge a $f$ na topologia de $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau_\delta)$. Portanto, o resultado segue.

(c) Se $\tau$ representa a topologia $\tau_0$ ou $\tau_\delta$ sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, então pela Observação 4.1.10, $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$ é um subespaço vetorial próprio e fechado de $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$ é completo e

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)),$$

segue do Teorema de Baire que $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$ não é metrizável, pois caso contrário um desses subespaços próprios $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$ de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ teria interior não vazio, o que seria uma contradição!

□

### 4.1.2 Operadores de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$

Nesta seção nós caracterizaremos a órbita de uma função em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ sob um operador de convolução. Esses resultados técnicos são de muita importância para provar nossos resultados principais.

**Lema 4.1.13.** *Dados $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, $k \in \mathbb{N}$ e $T$ operador sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^i f = \pi_N^*((T^i f) \circ J_N)$ para todo $i = 0, \cdots, k$. Ainda mais, se $f = f_n \circ \pi_n$ com $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $L$ é um operador sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ que comuta com todas as translações (em particular operadores de convolução), então*

$$L^k f = \pi_n^*((L^k f) \circ J_n) = \pi_n^* \circ J_n^*(L^k f)$$

*para todo $k \in \mathbb{N}_0$.*

*Demonstração.* Pela Proposição 4.1.5 podemos escrever

$$f = f_{n_0} \circ \pi_{n_0}, Tf = f_{n_1} \circ \pi_{n_1}, \cdots, T^k f = f_{n_k} \circ \pi_{n_k},$$

com $f_{n_i} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{n_i})$ para todo $i = 0, \cdots, k$. Chame $N = \max\{n_i : i = 0, \cdots, k\}$ e seja $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tal que $\pi_N(\xi) = 0$. Então $\pi_{n_i}(\xi) = 0$ para todo $i = 0, \cdots, k$ e

$$\tau_\xi(T^i f)(x) = T^i f(x - \xi) = f_{n_i} \circ \pi_{n_i}(x - \xi) = f_{n_i}(\pi_{n_i}(x) - \pi_{n_i}(\xi)) = f_{n_i}(\pi_{n_i}(x)) = T^i f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e todo $i = 0, \cdots, k$. Seja $x = (x_j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Tomando $\xi = (0, \cdots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ temos

$$\begin{aligned}(T^i f)(x) &= \tau_\xi(T^i f)(x) = T^i f(x - \xi) = T^i f(x_1, \cdots, x_N, 0, 0, \cdots) = T^i f(J_N \circ \pi_N(x)) \\ &= (T^i f) \circ J_N \circ \pi_N(x),\end{aligned}$$

e segue que $T^i f = \pi_N^*((T^i f) \circ J_N)$ para todo $i = 0, \ldots, k$.

Agora, suponha que $f = f_n \circ \pi_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ e $L$ seja um operador sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ que comuta com todos os operadores translação. Escolhendo $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tal que $\pi_n(\xi) = 0$ obtemos

$$\tau_\xi(f) = f, \quad \tau_\xi(Lf) = L(\tau_\xi f) = Lf, \ldots, \tau_\xi(L^k f) = L(\tau_\xi(L^{k-1} f)) = L^k f$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Seguindo o mesmo raciocínio da primeira parte da demonstração obtemos

$$L^k f = \pi_n^*((T^k f) \circ J_n)$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$. □

Este lema diz que o operador $\pi_n^* \circ J_n^*$ age como o operador identidade sobre $\mathrm{orb}_L(f)$ sempre que $f = f_n \circ \pi_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ e $L$ seja um operador de convolução.

A seguinte observação, que embora serviu de inspiração para provarmos o Lema 4.1.15, é agora um caso particular do resultado principal desta seção (Lema 4.1.15).

**Observação 4.1.14.** *Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $f = f_n \circ \pi_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ e $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, então $\tau_\xi f = (\tau_{\xi'} f_n) \circ \pi_n$ com $\xi' = \pi_n(\xi) \in \mathbb{C}^n$. De fato,*

$$\tau_\xi f(x) = f_n \circ \pi_n(x - \xi) = f_n(\pi_n(x) - \pi_n(\xi)) = \tau_{\xi'} f_n(\pi_n(x)) = (\tau_{\xi'} f_n) \circ \pi_n(x)$$

*para todo $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*

É nesse sentido que surgiu a seguinte questão natural: todo operador de convolução $L$ sobre $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$ satisfaz $L(f_n \circ \pi_n) = (L_n f_n) \circ \pi_n$, onde $L_n$ é um operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$?

Essa questão tem resposta positiva no seguinte lema.

**Lema 4.1.15.** *Seja $L$ um operador de convolução sobre $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$. Então:*

(a) *O operador contínuo $L_n := J_n^* \circ L \circ \pi_n^* : \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, é um operador de convolução. Dizemos que $L_n$ é o* operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ associado a $L$.

(b)
$$L(f_n \circ \pi_n) = (L_n f_n) \circ \pi_n \quad \text{para todo} \quad f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

(c) *$L$ é um múltiplo escalar da identidade sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ se e somente se $L_n$ é um múltiplo escalar da identidade sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*Demonstração.* (a) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Então

$$L_n f_n = J_n^* \circ L \circ \pi_n^*(f_n) = J_n^* \circ L(f) = Lf \circ J_n, \quad \text{onde} \quad f := f_n \circ \pi_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}). \tag{4.1.4}$$

Seja $a \in \mathbb{C}^n$. Queremos provar que $\tau_a \circ L_n = L_n \circ \tau_a$. Usando (4.1.4) temos

$$\begin{aligned}[\tau_a \circ L_n](f_n)(y) &= \tau_a(L_n(f_n))(y) = L_n(f_n)(y-a) = [Lf \circ J_n](y-a) \\ &= Lf(J_n(y) - J_n(a)) = [\tau_{J_n(a)}(Lf)](J_n(y)),\end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{C}^n$. Isso implica que $[\tau_a \circ L_n](f_n) = [\tau_{J_n(a)}(Lf)] \circ J_n$, por sua vez, como $L$ é um operador de convolução temos

$$\begin{aligned}[\tau_a \circ L_n](f_n) &= [L(\tau_{J_n(a)} f)] \circ J_n = [L((\tau_a f_n) \circ \pi_n)] \circ J_n = [L \circ \pi_n^*(\tau_a f_n)] \circ J_n \\ &= J_n^* \circ L \circ \pi_n^*(\tau_a f_n) = [L_n \circ \tau_a](f_n).\end{aligned}$$

Isso prova o desejado.

(b) Seja $n \in \mathbb{N}$. Aplicando o Lema 4.1.13 à função inteira $f_n \circ \pi_n$ com $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, e usando (4.1.4) obtemos

$$L(f_n \circ \pi_n) = \pi_n^*((L(f_n \circ \pi_n)) \circ J_n) = \pi_n^*(L_n f_n) = (L_n f_n) \circ \pi_n. \tag{4.1.5}$$

(c) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Lf = \lambda f$ para toda $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$. Fixado $n \in \mathbb{N}$, dada qualquer $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ escrevemos $f = f_n \circ \pi_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, e obtemos

$$(L_n f_n) \circ \pi_n = Lf = \lambda f = (\lambda f_n) \circ \pi_n.$$

Como $\pi_n^*$ é injetivo, segue que $L_n f_n = \lambda f_n$. Isto é, $L_n$ é um múltiplo escalar da identidade sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$.

Reciprocamente, suponha que, para cada $n \in \mathbb{N}$ exista $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tal que $L_n f_n = \lambda_n f_n$ para toda $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Seja $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$. Se $f \in \pi_m^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^m))$ para algum $m \in \mathbb{N}$, então $Lf = \lambda_m f$. De fato, escreva $f = f_m \circ \pi_m$, por (4.1.5) temos

$$Lf = (L_m f_m) \circ \pi_m = (\lambda_m f_m) \circ \pi_m = \pi_m^*(\lambda_m f_m) = \lambda_m \pi_m^*(f_m) = \lambda_m f.$$

Note que para provar a afirmação recíproca é suficiente mostrar que $\lambda_n = \lambda_m$ para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$. Sendo assim, sejam $n, m \in \mathbb{N}$ com $n \leqslant m$. Por (4.1.2) podemos escolher $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ tal que $g \neq 0$ e $g \in \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)) \subset \pi_m^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^m))$. Portanto $\lambda_n g = Lg = \lambda_m g$, e como $g \neq 0$ segue que $\lambda_n = \lambda_m$. □

A seguir, listamos algumas observações sobre o lema anterior.

**Observação 4.1.16.** (1) *Para $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos $(\tau_\xi)_n = \tau_{\pi_n(\xi)}$.*

(2) *O fato de $L$ ser um operador que comuta com todos os operadores translação é necessário para provar o item* (b) *do lema anterior. De fato, caso contrário, se $L$ fosse um operador sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ que não comuta com algum operador translação e $f = f_n \circ \pi_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então pelo Lema 4.1.13 existiria $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant n$, tal que $f = f_N \circ \pi_N$ e $Lf = \pi_N^*((Lf) \circ J_N)$. Logo, usando* (4.1.4) *teríamos $Lf = (L_N f_N) \circ \pi_N$. Portanto, não poderíamos garantir a fatoração para $Lf$ na forma $Lf = (L_n f_n) \circ \pi_n$.*

(3) *O item* (b) *nos permite escrever a órbita $orb_L(f)$ em termos de operadores de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Isto é, se $f = f_n \circ \pi_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ e $L$ é um operador de convolução sobre $\in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, então*

$$Lf = (L_n f_n) \circ \pi_n, \quad L^2 f = L((L_n f_n) \circ \pi_n) = L_n(L_n f_n) \circ \pi_n = (L_n^2 f_n) \circ \pi_n.$$

*Procedendo por indução segue que*

$$L^k f = (L_n^k f_n) \circ \pi_n$$

*para todo $k \in \mathbb{N}_0$.*

(4) *Examinando a parte* (c) *bem de perto, notamos que ela pode ser escrita na seguinte forma: $L$ é um múltiplo escalar da identidade sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ se e somente se $L_n$ é um múltiplo escalar da identidade sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$.*

## 4.2 Dinâmica linear dos operadores de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$

Nesta seção estudaremos a dinâmica linear dos operadores de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$. Começamos provando que nenhum operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ é cíclico nem $n$-supercíclico para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Este resultado melhora um resultado de Fávaro e Mujica [39], o qual afirma que nenhum operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ é hipercíclico. Depois, provamos que todo operador de convolução não trivial sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ é misturador.

**Teorema 4.2.1.** (a) *Nenhum operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ é cíclico.*

(b) *Nenhum operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ é $n$-supercíclico para qualquer $n \in \mathbb{N}$.*

*Demonstração.* (a) Se $L$ é um operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ e $f = f_n \circ \pi_n$ com $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então pelo Lema 4.1.13 a órbita de $f$ sob $L$ é

$$\mathrm{orb}_L(f) = \{L^k f : k \in \mathbb{N}_0\} = \{\pi_n^*((L^k f) \circ J_n) : k \in \mathbb{N}_0\} \subset \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)).$$

Como $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$ é um subespaço fechado e próprio de $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$, o conjunto

$$\overline{\text{span orb}_L(f)}^{\tau}$$

está contido em $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$, e portanto o espaço span $\text{orb}_L(f)$ não é denso em $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$. De modo que não pode existir função inteira cíclica para nenhum operador de convolução definido sobre $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$.

(b) Sejam $L$ um operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ e $V$ um subespaço de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ de dimesão finita $n \in \mathbb{N}$ com geradores $f_1, \cdots, f_n$. Então $L^k(V)$ é um subespaço vetorial de dimensão menor ou igual a $n$ com geradores $L^k f_1, \cdots, L^k f_n$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Se $f_1 = f_{m_1} \circ \pi_{m_1}, \cdots, f_n = f_{m_n} \circ \pi_{m_n}$ com $f_{m_i} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{m_i})$, para $i = 1, \cdots, n$, então

$$L^k(V) \subset \pi_{m_1}^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{m_1})) + \cdots + \pi_{m_n}^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{m_n})) \subset \pi_m^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^m))$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$, onde $m := \max\{m_i : i = 1, \cdots, n\}$. Segue que

$$\text{orb}_L(V) = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k(V) \subset \pi_m^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^m)),$$

e portanto $\text{orb}_L(V)$ não é densa em $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$. Assim, nenhum subespaço de dimensão finita de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ pode ser supercíclico para $L$.

□

No seguinte teorema apresentamos mais um resultado que comprova que as noções de hiperciclicidade e transitividade topológica não coincidem em evt's gerais, neste caso particular, num elc completo não metrizável.

**Teorema 4.2.2.** *Todo operador de convolução não trivial sobre $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$ é misturador.*

*Demonstração.* Sejam $U$ e $V$ subconjuntos abertos não vazios de $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$. Como

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)) \quad \text{e} \quad \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)) \subset \pi_m^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^m)), \quad n \leqslant m,$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)) \neq \varnothing$ e $V \cap \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)) \neq \varnothing$ para todo $n \geqslant n_0$. Como $L$ é um operador de convolução não trivial sobre $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$, segue da Observação 4.1.16(4) que existe algum $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, tal que $L_n$ é também um operador de convolução não trivial sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, o qual já sabemos que é misturador. Por outro lado, como $(\pi_n^*)^{-1}(U)$ e $(\pi_n^*)^{-1}(V)$ são subconjuntos abertos não vazios de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$L_n^k\left((\pi_n^*)^{-1}(U)\right) \cap (\pi_n^*)^{-1}(V) \neq \varnothing$$

para todo $k \geqslant N$. Afirmamos que $L^k(U) \cap V \neq \varnothing$ para todo $k \geqslant N$. De fato, seja $k \in \mathbb{N}$ com $k \geqslant N$. Escolha $f_{nk} \in (\pi_n^*)^{-1}(U)$ tal que $L_n^k f_{nk} \in (\pi_n^*)^{-1}(V)$. Então $f_{nk} \circ \pi_n \in U$, e segue da Observação 4.1.16(3) que

$$L^k(f_{nk} \circ \pi_n) = (L_n^k f_{nk}) \circ \pi_n = \pi_n^*(L_n^k f_{nk}) \in V.$$

Portanto $L^k(f_{nk} \circ \pi_n) \in L^k(U) \cap V$. □

### 4.2.1 Operadores de convolução Li–Yorke caóticos

O resultado principal desta seção é o Teorema 4.2.4, cuja demonstração está baseada no Teorema 1.3.20 da Seção 1.3.3. Para facilitar o acompanhamento do leitor, vamos enunciar novamente tal teorema.

**Teorema 4.2.3.** *Sejam $E$ um espaço vetorial topológico de Hausdorff e $T : E \to E$ um operador linear contínuo. As seguintes condições são equivalentes:*

*(i) $T$ é Li–Yorke caótico ,*

*(ii) $T$ admite um par Li–Yorke,*

*(iii) $T$ admite um vetor semi-irregular.*

**Teorema 4.2.4.** *Todo operador de convolução não trivial sobre $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$ é Li–Yorke caótico.*

*Demonstração.* Seja $L$ um operador de convolução não trivial sobre $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$. Vamos provar que $L$ possui uma função inteira semi-irregular. Pelo Lema 4.1.15(c) existe um operador de convolução não trivial $L_n$ associado a $L$. Como $L_n$ é um operador de convolução não trivial sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, segue do resultado clássico de Godefroy e Shapiro que $L_n$ é hipercíclico. Em particular existe uma função $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ semi-irregular para $L_n$. Chame $f := f_n \circ \pi_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$. Então $f$ é uma função semi-irregular para $L$. De fato, como

$$L^k f = (L_n^k f_n) \circ \pi_n = \pi_n^* \left(L_n^k f_n\right) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}_0, \tag{4.2.1}$$

segue diretamente de (4.2.1) que a sequência $(L^k f)_{k=0}^{\infty}$ possui uma subsequência que converge a zero. Por outro lado, se $L^k f \to 0$ na topologia de $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$, então

$$L_n^k f_n = J_n^* \circ \pi_n^* \left(L_n^k f_n\right) = J_n^*(L^k f) \to 0 \text{ em } \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$$

quando $k \to +\infty$. Mas isso contradiz o fato de $f_n$ ser semi-irregular para $L_n$. Portanto $(L^k f)_{k=0}^{\infty}$ não converge a zero, e $f$ é uma função semi-irregular para $L$. Aplicando o Teorema 4.2.3 obtemos o desejado. $\square$

# Referências

[1] J. M. Ansemil, *Topological duality on the function space* $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 188–197.

[2] T. Arai, *Devaney's and Li-Yorke's chaos in uniform spaces*, J. Dyn. Control Syst. **24** (2018), 93–100.

[3] R. M. Aron and M. Schottenloher, *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property*, J. Funct. Anal. **21** (1976), 7-30.

[4] J. A. Barroso, *Topologia nos espaços de aplicações holomorfas entre espaços localmente convexos*, An. Acad. Brasil. Ciênc. **43** (1971), 527–546.

[5] J. A. Barroso, *Introduction to Holomorphy*, North-Holland Math. Stud. 106, Amsterdam, 1985.

[6] J. A. Barroso and S. Dineen, *Holomorphic functions on* $\mathbb{C}^{(I)}$*, I uncountable*, Note Mat. **10** (1990), suppl. 1, 65–71.

[7] J. A. Barroso and L. Nachbin, *Some topological properties of spaces of holomorphic mappings in infinitely many variables*, North-Holland Math. Stud. 34, North-Holland, 1979, 67–91.

[8] F. Bayart, and S. Grivaux, *Hypercyclicity: the role of the unimodular point spectrum*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **338**(2004), 703–708.

[9] F. Bayart, and S. Grivaux, *Frequently hypercyclic operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 5083–5117.

[10] F. Bayart, É. Matheron, *Dynamics of Linear Operators*, Cambridge Tracts in Mathematics, 179. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[11] F. Bayart, É Matheron, *Mixing operators and small subsets of the circle*, J. Reine Angew. Math. **715** (2016), 75–123

[12] N. C. Bernardes Jr, A. Bonilla, V. Muller and A. Peris, *Li-Yorke chaos in linear dynamics*, Ergod. Theory Dyn. Syst. **35** (2015), 1723–1745.

[13] F. J. Bertoloto, G. Botelho, V. V. Fávaro, A. M. Jatobá, *Hypercyclicity of convolution operators on spaces of entire functions*, Ann. Inst. Fourier **63** (2013), 1263-1283.

[14] K.-D. Bierstedt, *An Introduction to Locally Convex Inductive Limits*, In Hogbe Nlend (ed.), Functional Analysis and its Applications, World Scientific Publ. Co., Singapore/New Jersey/Hong Kong 1988, 35-133.

[15] J. Bonet, *Hypercyclic and chaotic convolution operators*, J. London Math. Soc. **62** (2000), 253–262.

[16] A. Bonilla and K.-G. Gross-Erdmann, *On a theorem of Godefroy and Shapiro*, Integral Equ. Oper. Theory **56** (2006), 151–162.

[17] C. Boyd, *Montel and reflexive preduals of spaces of holomorphic functions on Fréchet spaces*, Studia Math. **107** (1993), 305–315.

[18] C. Boyd, *Distinguished preduals of the space of holomorphic functions*, Rev. Mat. Complut. Madrid **6** (1993), 221–231.

[19] C. Boyd, *Some topological properties of preduals of spaces of holomorphic functions*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **94** (1994), 167–178.

[20] C. Boyd, *Holomorphic mappings on* $\mathbb{C}^{(I)}$*, $I$ uncountable*, Results Math. **36** (1999), 21–25.

[21] P S. Bourdon, N. S. Feldman, and J. H. Shaphiro, *Some properties of $N$-supercyclic operators*, Studia Math. **165** (2004), 135–157.

[22] B. M. Caraballo and V. V. Fávaro, *Preduals of spaces of holomorphic functions and the approximation property*, J. Math. Anal. Appl. **462** (2018), 957–966.

[23] B. M. Caraballo, V. V. Fávaro, *Chaos for convolution operators on the space of entire functions of infinitely many complex variables*. Submittted, 2018.

[24] B. M. Caraballo, V. V. Fávaro, *Strongly mixing convolution operators on spaces of entire functions of a given type and order*. Submittted, 2019.

[25] E. Çaliskan, *Aproximação de funções holomorfas em espaços de dimensão infinita*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2003.

[26] E. Çaliskan, *Approximation of holomorphic mappings on infinite dimensional spaces*, Rev. Mat. Complut. Madrid **17** (2004), 411–434.

[27] E. Çaliskan, *Bounded holomorphic mappings and the compact approximation property in Banach spaces*, Port. Math.(NS) **61** (2004), 25–33.

[28] E. Çaliskan, *The bounded approximation property for spaces of holomorphic mappings on infinite dimensional spaces*, Math. Nach. **279** (2006), 705–715.

[29] L. R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, 1989.

[30] S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer, London, 1999.

[31] S. Dineen and J. Mujica, *The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite-dimensional spaces I*, J. Approx. Theory **126** (2004), 141–156.

[32] S. Dineen and J. Mujica, *The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite dimensional spaces II*, J. Funct. Anal. **259** (2010), 545–560.

[33] S. Dineen and J. Mujica, *The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite dimensional spaces III*, RACSAM **106** (2012), 457–469.

[34] P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. **130** (1973), 309–317.

[35] R. Ernst, *$n$-supercyclic and strongly $n$-supercyclic operators in finite dimensions*, Studia Math. **220** (2014), 15–53.

[36] V. V. Fávaro and A. M. Jatobá, *Holomorphy types and spaces of entire functions of bounded type on Banach spaces*, Czechoslovak Math. J. **59** (2009), 909–927.

[37] V. V. Fávaro, A. M. Jatobá, *Holomorphy types and the Fourier-Borel transform between spaces of entire functions of a given type and order defined on Banach spaces*, Math. Scand. **110** (2012), 111-139.

[38] V. V. Fávaro and A. M. Jatobá, *Hypercyclicity, existence and approximation results for convolution operators on spaces of entire functions*, arXiv:1805.10316 (2018).

[39] V. V. Fávaro and J. Mujica, *Hypercyclic convolution operators on spaces of entire functions*, J. Operator Theory **76** (2016), 141–158.

[40] V. V. Fávaro and J. Mujica, *Convolution operators on spaces of entire functions*, Math. Nachr. **291** (2018), 41–54.

[41] N. S. Feldman, *$N$-supercyclic operators*, Studia Math. **151** (2002), 141–159.

[42] K. Floret, *Über den Dualraum eines lokalkonvexen Unterraumes*, Arch. Math. Basel **25** (1974), 646–648.

[43] G. B. Folland, *Real analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Wiley, 1999.

[44] D. García and J. Mujica, *Quasi-normable preduals of spaces of holomorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. **208** (1997), 171–180.

[45] G. Godefroy and J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (1991), 229–269.

[46] K.-G. Grosse-Erdmann, A. Peris Manguillot, *Linear Chaos*, Springer, Berlin, 2011.

[47] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16**, 1955.

[48] D. A. Herrero, *Limits of hypercyclic and supercyclic operators*, J. Funct. Anal. **99** (1991), 179–190.

[49] H. M. Hilden and L. J. Wallen, *Some cyclic and non-cyclic vectors of certain operators*, Indiana Univ. Math. J. **23** (1974), 557–565.

[50] J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions*, vol. I, Addison-Wesley, Reading, 1966.

[51] B. Hou and L. Luo, *Li–Yorke chaos translation set for linear operators*, Arch. Math. Basel **111** (2018), 267–278.

[52] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1981.

[53] A. M. Jatobá, *Tipos de Holomorfia em Espaços de Banach*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2008.

[54] C. Kitai, *Invariant closed sets for linear operators*, Thesis, University of Toronto, Toronto, 1982.

[55] T. Li and J. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Mon. **82** (1975), 985–992.

[56] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I and II*, Springer, Berlin, 1979.

[57] B. Malgrange, *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations des convolution*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **VI** (1955/56), 271-355.

[58] A. Martineau, *Équations différentielles d'ordre infini.* Bull. Soc. Math. France **95** (1967), 109-154.

[59] P. Mazet, *Analytic Sets in Locally Convex Spaces*, North-Holland Math. Stud., vol. 89, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[60] J. Mujica, *Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **324** (1991), 867–887.

[61] J. Mujica and L. Nachbin, *Linearization of holomorphic mappings on locally convex spaces*, J. Math. Pures Appl. **71** (1992), 543–560.

[62] J. Mujica, *Linearization of holomorphic mappings of bounded type*, in: Progress in Functional Analysis, pp. 149-162, North-Holland Math. Stud. 170, North-Holland, Amsterdam, 1992.

[63] J. Mujica, *Graduate Lectures Notes of Spaces of Holomorphic Functions and the Approximation Property*, IMI-UCM, 2009.

[64] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, Dover, New York, 2010.

[65] J. Mujica, *Notas de Espaços Vetoriais Topológicos*, IMECC-UNICAMP, 2015.

[66] S. Muro, D. Pinasco, M. Savransky, *Strongly mixing convolution operators on Fréchet spaces of holomorphic functions*, Integr. Equ. Oper. Theory **80** (2014), 453–468.

[67] L. Nachbin, *Lectures on the theory of distributions*, Universidade de Recife, 1964.

[68] L. Nachbin, *Topology on Spaces of Holomorphic Mappings*. Springer, New York, 1969.

[69] K. F. Ng, *On a Theorem of Dixmier*, Math. Scand. **29** (1971), 279–280.

[70] L. Narici and E. Beckenstein, *Topological Vector Spaces*, CRC Press, 2010.

[71] G. T. Prăjitură, *Irregular vectors of Hilbert space operators*, J. Math. Anal. Appl. **354** (2009), 689–697.

[72] R. M. Range, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Springer, Berlin, 2013.

[73] L. Schwartz, *Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques, Espaces vectoriels topologiques nucléaires*, Applications, Séminaire Schwartz 1953–1954.

[74] S. Shkarin, *Existence theorems in linear chaos*, J. Gen. Lie Theory Appl. **9** (2015), no S1. Art. ID S1-009, 34 pp.

[75] G. Willis, *The compact approximation property does not imply the approximation property*, Studia Math. **103** (1992), 99–108.

# Apêndice

Por questão de organização, nós coletamos aqui alguns resultados, que apesar de serem importantes para nosso trabalho, são muito técnicos, dificultando então a leitura dos mesmos.

**Proposição 4.2.5.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $(\mathcal{P}_\Theta({}^jE))_{j=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$, $k \in [1, +\infty]$ e $A \geqslant 0$. Se $f \in Exp^k_{\Theta,0,A}(E)$ e $a \in E$, então $\widehat{d}^n f(\cdot)a \in Exp^k_{\Theta,0,\sigma A}(E)$ para qualquer constante $\sigma$ satisfazendo a condição (3) da Definição 1.2.15. Além disso,*

$$\widehat{d}^n f(\cdot)a = \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!}\widehat{d^{j+n} f(0)(\cdot)^j}(a) \tag{4.2.2}$$

*na topologia de $Exp^k_{\Theta,0,\sigma A}(E)$.*

*Demonstração.* Sabemos que (veja [68, p. 29]), para $j \in \mathbb{N}_0$ fixado,

$$\widehat{d}^j f(x)a = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\widehat{d^{j+n} f(0)x^n}(a) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\widehat{d^{j+n} f(0)a^j}(x) \tag{4.2.3}$$

para todo $x \in E$. Como $\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_\Theta({}^mE)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$, segue que $\widehat{d^{j+n}f(0)a^j} \in \mathcal{P}_\Theta({}^nE)$ e

$$\left\|\widehat{d^{j+n}f(0)a^j}\right\|_\Theta \leqslant \frac{n!j!\sigma^{j+n}}{(j+n)!}\left\|\hat{d}^{j+n}f(0)\right\|_\Theta \|a\|^j \tag{4.2.4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. De fato, seja $P$ o polinômio $(n+j)$-homogêneo $\widehat{d}^{j+n}f(0)$. Então $\check{P} = d^{j+n}f(0)$, e segue do Exemplo 1.2.6 que

$$\widehat{d^{j+n}f(0)a^j} = \widehat{\check{P}a^j} = \frac{j!}{(n+j)!}\widehat{d}^n P(a).$$

Usando a condição (3) da Definição 1.2.15 obtemos

$$\left\|\widehat{d^{j+n}f(0)a^j}\right\|_\Theta = \frac{j!}{(n+j)!}\left\|\hat{d}^n P(a)\right\|_\Theta \leqslant \frac{n!j!\sigma^{j+n}}{(j+n)!}\|P\|_\Theta \|a\|^j = \frac{n!j!\sigma^{j+n}}{(j+n)!}\left\|\hat{d}^{j+n}f(0)\right\|_\Theta \|a\|^j.$$

Para $k \in [1, +\infty)$, seja

$$N = \limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{n+j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}}\left\|\frac{\widehat{d}^{n+j}f(0)}{(n+j)!}\right\|_\Theta^{\frac{1}{n+j}}.$$

Pela Proposição 1.2.20 temos que $N \leqslant A < +\infty$. Então, para cada $\varepsilon > 0$ existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left(\frac{n+j}{ke}\right)^{\frac{n+j}{k}} \left\| \frac{\widehat{d}^{n+j} f(0)}{(n+j)!} \right\|_\Theta \leqslant C(\varepsilon)(N+\varepsilon)^{n+j} \tag{4.2.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Portanto

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \frac{1}{n!} \left\| \widehat{d^{j+n} f(0) a^j} \right\|_\Theta &\overset{(4.2.4)}{\leqslant} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \frac{j!\sigma^{j+n}}{(j+n)!} \left\| \widehat{d}^{n+j} f(0) \right\|_\Theta \|a\|^j \\ = j!\sigma^{j+n} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \left\| \frac{\widehat{d}^{n+j} f(0)}{(n+j)!} \right\|_\Theta \|a\|^j &\overset{(4.2.5)}{\leqslant} j!\sigma^{j+n} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{n+j}{k}} C(\varepsilon)(N+\varepsilon)^{n+j} \|a\|^j \\ = j!\sigma^{j+n} \left(\frac{n}{n+j}\right)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{j}{k}} C(\varepsilon)(N+\varepsilon)^{n+j} \|a\|^j. \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Como

$$\lim_{n \to +\infty} (j!)^{\frac{1}{n}} \sigma^{\frac{j}{n}+1} \left(\frac{n}{n+j}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{j}{kn}} = \sigma,$$

existe $D(\varepsilon) > 0$ tal que

$$j!\sigma^{j+n} \left(\frac{n}{n+j}\right)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{j}{k}} \leqslant D(\varepsilon)(\sigma+\varepsilon)^n \tag{4.2.7}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Por (4.2.6) e (4.2.7) obtemos

$$\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \frac{1}{n!} \left\| \widehat{d^{j+n} f(0) a^j} \right\|_\Theta \leqslant C(\varepsilon) D(\varepsilon) \|a\|^j (N+\varepsilon)^j [(\sigma+\varepsilon)(N+\varepsilon)]^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e $\varepsilon > 0$. Portanto

$$\limsup_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{\widehat{d^{j+n} f(0) a^j}}{n!} \right\|_\Theta^{\frac{1}{n}} \leqslant (\sigma+\varepsilon)(N+\varepsilon)$$

para todo $\varepsilon > 0$. Isso implica que

$$\limsup_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{\widehat{d^{j+n} f(0) a^j}}{n!} \right\|_\Theta^{\frac{1}{n}} \leqslant \sigma N.$$

Como $N \leqslant A$, segue que $\sigma N \leqslant \sigma A$, e então $\widehat{d}^n f(\cdot) a \in Exp^k_{\Theta,0,\sigma A}(E)$.
Agora consideremos $k = +\infty$. Se $A = 0$, então $Exp^\infty_{\Theta,0}(E)$ coincide com $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ e este caso já foi provado em [36, Proposition 3.1 (i)]. Se $A \neq 0$ então, para $f \in Exp^\infty_{\Theta,0,A}(E) = \mathcal{H}_{\Theta b}(B(0;1/A))$ temos que

$$\limsup_{n \to +\infty} \left\| \frac{\widehat{d}^{n+j} f(0)}{(n+j)!} \right\|_\Theta^{\frac{1}{n+j}} \leqslant A,$$

e como antes

$$\limsup_{n \to +\infty} \left\| \frac{\widehat{d^{j+n} f(0) a^j}}{n!} \right\|_\Theta^{\frac{1}{n}} \leqslant \sigma A.$$

Assim $\widehat{d}^n f(\cdot)\, a \in \mathcal{H}_{\Theta b}(B(0;1/\sigma A)) = Exp^{\infty}_{\Theta,0,\sigma A}(E)$.

Agora só resta provarmos a convergência da série em (4.2.2) na topologia de $Exp^{k}_{\Theta,0,\sigma A}(E)$. Se $f \in \mathcal{B}^{k}_{\Theta,\rho}(E)$ para algum $\rho > 0$ com $k \in [1,+\infty)$, repetindo o argumento acima com $\rho$ em vez de $A$ nós ganhamos constantes $C_1(\varepsilon) > 0$ e $D_1(\varepsilon) > 0$ tais que

$$\left\| \widehat{d}^j f(\cdot)\, a - \sum_{n=0}^{v} (n!)^{-1} \widehat{d^{j+n} f(0)(\cdot)^n}(a) \right\|_{\Theta,k,\rho_0} \leqslant \sum_{n=v+1}^{\infty} \rho_0^{-n} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\|(n!)^{-1} \widehat{d}^{j+n} f(0)\right\|_{\Theta} \|a\|^j \sigma^{n+j}$$

$$\leqslant C_1(\varepsilon) D_1(\varepsilon) \|a\|^j (\rho+\varepsilon)^j \sum_{n=v+1}^{\infty} \left[\rho_0^{-1}(\rho+\varepsilon)(\sigma+\varepsilon)\right]^n,$$

isso tende a zero quando $v \to +\infty$, para $\rho_0 > \rho$ e $\varepsilon > 0$ tais que $(\rho+\varepsilon)(\sigma+\varepsilon) < \rho_0$. Portanto $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \widehat{d^{j+n} f(0)(\cdot)^j}(a)$ converge a $\widehat{d}^n f(\cdot)\, a$ na topologia de $Exp^{k}_{\Theta,0,\sigma A}(E)$. O caso $k = +\infty$ segue de maneira análoga. □

**Proposição 4.2.6.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^{\infty}$ um tipo de holomorfia de $E$ para $\mathbb{C}$ e $k \in [1,+\infty]$. Se $f \in Exp^{k}_{\Theta,0}(E)$ e $a \in E$, então $\tau_{-a} f \in Exp^{k}_{\Theta,0}(E)$ e*

$$\tau_{-a} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \widehat{d}^n f(\cdot)\, a \tag{4.2.8}$$

*na topologia de $Exp^{k}_{\Theta,0}(E)$.*

*Demonstração.* O caso $k = +\infty$ foi provado em [36, Proposition 3.1(ii)]. Para $k \in [1,+\infty)$ e $f \in Exp^{k}_{\Theta,0}(E)$ temos que

$$\limsup_{j \to +\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!} \right\|_{\Theta}^{\frac{1}{j}} = 0.$$

Portanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!} \right\|_{\Theta} \leqslant C(\varepsilon)\, \varepsilon^j \tag{4.2.9}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{d}^n(\tau_{-a} f)(0) = \widehat{d}^n f(a)$, então

$$\left\|\widehat{d}^n(\tau_{-a} f)(0)\right\|_{\Theta} = \left\|\widehat{d}^n f(a)\right\|_{\Theta} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left\| \widehat{d^{n+j} f(0)\, a^j} \right\|_{\Theta} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n! \cdot \sigma^{n+j}}{(n+j)!} \left\|\widehat{d}^{n+j} f(0)\right\|_{\Theta} \|a\|^j$$

e

$$\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \frac{1}{n!} \left\|\widehat{d}^n(\tau_{-a} f)(0)\right\|_{\Theta} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \frac{\sigma^{n+j}}{(n+j)!} \left\|\widehat{d}^{n+j} f(0)\right\|_{\Theta} \|a\|^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{n+j}{k}} \left(\frac{n+j}{ke}\right)^{\frac{n+j}{k}} \frac{\sigma^{n+j}}{(n+j)!} \left\|\widehat{d}^{n+j} f(0)\right\|_{\Theta} \|a\|^j$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}} \sigma^{n+j} \|a\|^j \left(\frac{n+j}{ke}\right)^{\frac{n+j}{k}} \frac{1}{(n+j)!} \left\|\widehat{d}^{n+j} f(0)\right\|_{\Theta}.$$

Como $\lim_{j\to+\infty}\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{1}{k}}=0$, para cada $\varepsilon>0$ existe $D(\varepsilon)>0$ tal que

$$\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}\leqslant D(\varepsilon)\,\varepsilon^{j}$$

para todo $j\in\mathbb{N}$. Escolhendo $\varepsilon>0$ tal que $\sigma\varepsilon^{2}\|a\|<1$ e usando (4.2.9), obtemos

$$\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}}\frac{1}{n!}\left\|\widehat{d}^{n}(\tau_{-a}f)(0)\right\|_{\Theta}\leqslant C(\varepsilon)\,D(\varepsilon)\,\sigma^{n}\varepsilon^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\sigma^{j}\varepsilon^{2j}\|a\|^{j}=C(\varepsilon)\,D(\varepsilon)\,\sigma^{n}\varepsilon^{n}\frac{1}{1-\sigma\varepsilon^{2}\|a\|}.$$

Portanto

$$\limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{1}{k}}\left\|\frac{\widehat{d}^{n}(\tau_{-a}f)(0)}{n!}\right\|_{\Theta}^{\frac{1}{n}}=0,$$

e assim $\tau_{-a}f\in Exp_{\Theta,0}^{k}(E)$. Para provar a convergência em (4.2.8), sejam $f\in Exp_{\Theta,0}^{k}(E)$ e $\rho>0$. Então

$$\begin{aligned}
&\left\|\tau_{-a}f-\sum_{n=0}^{v}\frac{1}{n!}\widehat{d}^{n}f(\cdot)\,a\right\|_{\Theta,k,\rho}\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\sum_{n=v+1}^{\infty}\frac{1}{j!n!}\left\|\widehat{d}^{j}\left(\widehat{d}^{n}f(\cdot)\,a\right)(0)\right\|_{\Theta}\\
&\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\sum_{n=v+1}^{\infty}\frac{\sigma^{n+j}}{(n+j)!}\left\|\widehat{d}^{n+j}f(0)\right\|_{\Theta}\|a\|^{n}\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=v+1}^{\infty}\rho^{-j}\left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{n}{k}}\sigma^{n+j}\left(\frac{n+j}{ke}\right)^{\frac{n+j}{k}}\left\|\frac{\widehat{d}^{n+j}f(0)}{(n+j)!}\right\|_{\Theta}\|a\|^{n}\\
&\leqslant C(\varepsilon)\,D(\varepsilon)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=v+1}^{\infty}\rho^{-j}\varepsilon^{n}\varepsilon^{n+j}\sigma^{n+j}\|a\|^{n}\\
&\leqslant C(\varepsilon)\,D(\varepsilon)\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j}\varepsilon^{j}\sigma^{j}\sum_{n=v+1}^{\infty}\varepsilon^{2n}\sigma^{n}\|a\|^{n}.
\end{aligned}$$

Agora, se para cada $\rho>0$ escolhemos $\varepsilon>0$ tal que $\varepsilon<\frac{\rho}{\sigma}$ e $\varepsilon^{2}\sigma\|a\|<1$, então

$$\lim_{v\to+\infty}\left\|\tau_{-a}f-\sum_{n=0}^{v}\frac{1}{n!}\widehat{d}^{n}f(\cdot)\,a\right\|_{\Theta,\rho}=0,$$

e a convergência segue da definição da topologia. □