UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

EVER ADOLFO TICONA CAYTE

NÚMEROS VIRTUAIS RACIONAIS DE BETTI DE GRUPOS METABELIANOS

Campinas

2018

EVER ADOLFO TICONA CAYTE

NÚMEROS VIRTUAIS RACIONAIS DE BETTI DE GRUPOS METABELIANOS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra Dessislava H. Kochloukova

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno EVER ADOLFO TICONA CAYTE e orientada pela Profa. Dra. Profa. Dra Dessislava H. Kochloukova.

Campinas

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

T437n
Ticona Cayte, Ever Adolfo, 1989-
Números virtuais racionais de Betti de grupos metabelianos / Ever Adolfo Ticona Cayte. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Dessislava Hristova Kouchloukova.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Homologia de módulos. 2. Grupos metabelianos. 3. Betti, Números racionais virtuais de. 4. Módulos projetivos (Álgebra). I. Kouchloukova, Dessislava Hristova, 1970-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Virtual rational Betti numbers of metabelian groups
Palavras-chave em inglês:
Homology of modules
Metabelian groups
Betti, Virtual rational numbers of
Projective modules (Algebra)
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Dessislava Hristova Kouchloukova [Orientador]
Mikhailo Dokuchaev
Marcelo Muniz Silva Alves
Data de defesa: 28-02-2018
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de fevereiro de 2018 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA

Prof(a). Dr(a). MIKHAILO DOKUCHAEV

Prof(a). Dr(a). MARCELO MUNIZ SILVA ALVES

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

A Deus por ter me ajudado ...

A minha família ...

A minha amiga Diana ...

Agradecimentos

Agradeço ao Profa. Dra. Dessislava, pela orientação acadêmica em temas tão interessantes da matemática. Também estou profundamente agradecido com a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) por ter financiado este projeto. A UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas) e ao IMECC (Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica) pela oportunidade de estar aqui. Finalmente, a meus pais e irmãos, dos quais recebo um imenso apoio e carinho apesar da distância

Resumo

Estudamos os números virtuais racionais de Betti dos grupos metabelianos de tipo FP_{2m}, seguindo um artigo de Kochloukova e Mokari. Os números virtuais racionais de Betti de um grupo finitamente gerado estudam o crescimento dos números de Betti do grupo como passamos sobre subgrupos de índice finito.

O n-ésimo número virtual racional de Betti de um grupo finitamente gerado G é definido por

$$vb_n(G) = \sup_{M \in \mathcal{A}_G} \dim_{\mathbb{Q}} H_n(M, \mathbb{Q})$$

onde $\mathcal{A}_G$ é o conjunto de todos os subgrupos M de indice finito em G. Podemos encontrar exemplos de grupos metabelianos, nos quais alguns números virtuais racionais de Betti são infinitos.

O resultado principal é que grupos metabelianos de tipo FP_{2n} para $n \geq 2$ tem números virtuais racionais de Betti finitos em dimensão $\leq n$.

Para provar estes resultados, utilizamos muitos resultados da Teoria de módulos e da Álgebra Homológica. Os principais resultados desta dissertação são concentrados no capítulo 3, os capítulos 1 e 2 tem papel introdutório, com resultados que coletamos alguns resultados da Álgebra Homológica e que são necessários no capitulo 3.

Palavras-chave: Homologia de módulos, grupos metabelianos, os números virtuais racionais de Betti.

Abstract

We study the virtual rational Betti numbers of metabelian groups of type FP_{2m}, following an article by Kochloukova and Mokari. The virtual rational Betti numbers of a finitely generated group study the growth of the Betti numbers of a group as one passes to subgroups of finite index.

The n-th virtual rational Betti number of a finitrly generated group G is defines as

$$vb_n(G) = \sup_{M \in \mathcal{A}_G} \dim_{\mathbb{Q}} H_n(M, \mathbb{Q})$$

where $\mathcal{A}_G$ is the set of all subgroups of finite index in G. We can find examples of metabelian groups, where some of their virtual rational Betti numbers are infinite.

The main result is that metabelian groups of type FP_{2n} for $n \geq 2$ have finite virtual rational Betti numbers in dimension $\leq$ n.

To prove these results we use many from Module Theory and Homological Algebra. The main results of this thesis are concentrated in chapter 3. Chapters 1 and 2 are of introductory nature and we gather some results from homological algebra that are needed in the chapter 3.

Keywords: Homology of modules, metabelian groups, virtual rational Betti numbers.

Sumário

Introdução

Nesta dissertação estudamos crescimento de grupos homológicos de subgrupos de índice finito em grupos metabelianos.

No primeiro e segundo capitulo desenvolvemos a teoria de homologia algébrica seguindo o livro de Rotman, começando com assuntos básicos como funtores e produto tensorial e terminamos com propriedades de funtor derivado Tor. Para desenvolver a teoria estudamos conceitos básicos como limites diretos e inversos, módulos livres, projetivos e injetivos.

A parte principal da dissertação é o Capitulo 3 onde estudamos o artigo "Virtual rational Betti numbers of abelian by - polycyclic groups"[6] . O artigo [6] trata grupos abelianos-por-policiclicos. Na dissertação simplificamos e consideramos o caso de grupos metabelianos. Os principais resultados abordados na dissertação são:

Teorema A Seja $n \geq 2$ um número natural e $1 \to A \to G \to Q \to 1$ uma sequência exata de grupos, onde A e Q são abelianos e $\otimes_{\mathbb{Q}}^{k}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Q}Q - modulo$ via a Q-ação diagonal para todo $k \leq 2n$ então

$$\sup_{U \in \mathcal{A}} \dim_{\mathbb{Q}} H_i(U, \mathbb{Q}) < \infty \text{ para todo } 0 \leq i \leq n$$

onde $\mathcal{A}$ é o conjunto de todos os subgrupos de índice finito em G.

Corolario B Seja $n \geq 2$ um número natural e G um grupo metabeliano de tipo FP_{2n}, então

$$\sup_{U \in \mathcal{A}} \dim_{\mathbb{Q}} H_i(U, \mathbb{Q}) < \infty \text{ para } 0 \leq i \leq n$$

onde $\mathcal{A}$ é o conjunto de todos os subgrupos de índice finito em G.

A demonstração do teorema A pode ser encontrada na seção 3.4 "Números virtuais racionais de Betti de grupos Metabelianos "e a demonstração do corolário B pode ser encotrada na mesma seção. A maioria dos resultados que usamos do [6] foram provados mas algumas foram somente citados (demonstração completa pode ser encontrada no artigo).

1 Categorias e Funtores

1.1 Categorias e Funtores

Neste capitulo usaremos resultados do livro [10].

Definição 1.1.1. Uma categoria consiste de: uma classe de objetos, obj$\mathfrak{C}$; conjuntos distintos de morfismos disjuntos dois a dois $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ para cada par ordenado de objetos A, B e composições $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, C)$, denotado por $(f, g) \to gf$, satisfazendo os seguintes axiomas:

i) Para cada objeto A, existe um morfismo identidade $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, A)$ tal que $f1_A = f$ para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ e $1_A g = g$ para todo $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, A)$.

ii) A associatividade da composição: se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, C)$ e $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, D)$ então $h(gf) = (hg)f$.

Exemplo 1.1.2. Seja $\mathfrak{C} = {}_R\mathfrak{M}$ onde R é um anel (associativo com unidade 1), os objetos são R-módulos a esquerda, os morfismos são R-aplicações (R-homomorfismos) e composição usual. Lembremos que um R-módulo a esquerda é um grupo abeliano aditivo M equipado com uma ação de R isto é uma função $R \times M \to M$ denotado por $(r, m) \longmapsto rm$ que satisfaz:

i) r$(m + m') = rm + rm'$,

ii) $(r + r')$m $= rm + r'm$,

iii) (rr')m $= r(r'm)$,

iv) 1m=m,

onde $m, m' \in M$ e $1, r, r' \in R$.

Uma função $f : M \to N$ entre dois R-módulos a esquerda M e N é uma R-aplicação se:

$$f(m + m') = f(m) + f(m') \quad e \quad f(rm) = rf(m) \text{ para cada } m, m' \in M \ , \ r \in R$$

Se $M \in \mathrm{obj}_R\mathfrak{M}$ escrevemos M_R no lugar de M.

Definição 1.1.3. Seja $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorias. Um funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ é uma função que satisfaz:

i) Se $A \in \mathrm{obj}\mathfrak{C}$ então $F(A) \in \mathrm{obj}\mathfrak{D}$,

ii) Se $f : A \to B$ é um morfismo em $\mathfrak{C}$ então $F(f) : FA \to FB$ é um morfismo em $\mathfrak{D}$,

iii) Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são morfismos em $\mathfrak{C}$ então $F(gf) = FgFf$,

iv) Para todo $A \in \text{obj}\mathfrak{C}$ tem-se $F(1_A) = 1_{FA}$.

Exemplo 1.1.4. Sejam ${}_R\mathfrak{M}$ = categoria de R-módulos e Ab = categoria de grupos abelianos e $A \in {}_R\mathfrak{M}$ fixo, então o funtor $F = \text{Hom}_R(A, -) : {}_R\mathfrak{M} \to \text{Ab}$ tal que para $B \in {}_R\mathfrak{M}$, $F(B) = \text{Hom}_R(A, B) = \{$ todas R-aplicações $\phi : A \to B\} \in Ab$, se $g, h \in F(B)$ definimos $g + h$ por $a \longmapsto g(a) + h(a)$. Além disso dado f um morfismo em ${}_R\mathfrak{M}$ com $f : B \to C$ então $F(f) : \text{Hom}_R(A, B) \to \text{Hom}_R(A, C)$ é um homomorfismo de grupos abelianos definido como $(Ff)(g) = fg$.

Definição 1.1.5. Seja $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorias. Um funtor contravariante $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ é uma função que satisfaz:

i) Se $A \in \text{obj}\mathfrak{C}$ então $F(A) \in \text{obj}\mathfrak{D}$,

ii) Se $f : A \to B$ é um morfismo em $\mathfrak{C}$ então $F(f) : FB \to FA$ é um morfismo em $\mathfrak{D}$,

iii) Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são morfismos em $\mathfrak{C}$ então $F(gf) = (Ff)(Fg)$,

iv) Para cada $A \in \text{obj}\mathfrak{C}$ temos que $F(1_A) = 1_{FA}$.

Definição 1.1.6. Uma categoria $\mathfrak{C}$ é pre-aditiva se cada $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ é um grupo abeliano com uma operação de $+$ e satisfaz:

i) Sejam $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ e $g, h \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, C)$ então $(g + h)f = gf + hf$

ii) Sejam $g, h \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ e $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, C)$ então $f(g + h) = fg + fh$

Definição 1.1.7. Sejam $\mathfrak{C}, \mathfrak{U}$ categorias pre-aditivas. Dizemos que um funtor $f : \mathfrak{C} \to \mathfrak{U}$ é aditivo se $F(f + g) = Ff + Fg$ para cada par f, $g : A \to B$ de morfismos com $A \in \text{obj}\mathfrak{C}$ e $B \in \text{obj}\mathfrak{U}$.

1.2 Produto Tensorial

Definição 1.2.1. Seja G um grupo abeliano com subconjunto X; dizemos que G é um grupo abeliano livre com base X, se para cada $g \in G$ tem uma única expressão da forma

$$g = \sum_{x \in X} m_x x,$$

onde $m_x \in \mathbb{Z}$ e quase todo $m_x = 0$.

Teorema 1.2.2. *Seja G un grupo abeliano livre com base X, seja H um grupo abeliano e $f : X \to H$ uma função. Então existe um único homomorfismo de grupos abelianos $\overline{f} : G \to H$ com $\overline{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.*

Teorema 1.2.3. *Dado um conjunto X, existe um grupo abeliano livre G tendo a X como base.*

Definição 1.2.4. Seja R um anel associativo com unidade 1. Se $A \in \mathfrak{M}_R$, $B \in {}_R\mathfrak{M}$ e G um $\mathbb{Z}$-módulo. Uma aplicação $f : A \times B \longrightarrow G$ e dita $R-$ *biaditiva* se:

i) $f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$,

ii) $f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b')$,

iii) $f(ar, b) = f(a, rb)$,

onde $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ e $r \in R$.

Definição 1.2.5. Sejam $A \in \mathfrak{M}_\mathrm{R}$ e $B \in {}_\mathrm{R}\mathfrak{M}$. O produto tensorial $A \otimes_R B$ é um $\mathbb{Z}$-módulo junto com a aplicação R-biaditiva $i : A \times B \longrightarrow A \otimes_R B$ que satizfaz a seguinte propriedade universal:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & G \\
A \otimes_R B \arrow[ur, dashed, "\phi"] &
\end{tikzcd}$$

Para todo grupo abeliano G e f uma aplicação R-biaditiva existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$ -módulos (grupos abelianos) ϕ que faz com que o diagrama comute.

Teorema 1.2.6. *O produto tensorial $A \otimes_\mathrm{R} B$ de um R-módulo a direita A e um R-módulo a esquerda B existe.*

Demonstração. Seja F um grupo abeliano livre com base $A \times B$ i.e para todo $\alpha \in F$ existe uma única combinação $\alpha = \displaystyle\sum_{x \in A \times B} z_x x$ com $z_x \in \mathbb{Z}$ quase todos $z_x = 0$. Defina S como o subgrupo de F gerado por todos os elementos $(a + a', b) - (a, b) - (a', b); (a, b + b') - (a, b) - (a, b'); (ar, b) - (a, rb)$, onde $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ e $r \in R$. Então para todo $s \in S$ temos que $s = \displaystyle\sum_{\delta \in \Delta} z_\delta \delta$ onde $z_\delta \in \mathbb{Z}$ e quase todos $z_\delta = 0$.

Defina $A \otimes_R B = F/S$. Nós denotamos o conjunto $\{(a, b) + S\}$ por $a \otimes b$, é fácil ver que $h : A \times B \to A \otimes_R B$ definido por $(a, b) \longmapsto a \otimes b$ é R-biaditiva.

Tome G um $\mathbb{Z}$-módulo e temos o diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & G \\ A \otimes_R B \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

onde f é R-biaditiva. Como F é $\mathbb{Z}$- módulo livre com base $A \times B$ existe um único homomorfismo $\varphi : F \to G$ com $\varphi((a,b)) = f(a,b)$. Além disso como f é R-biaditiva então $S \subseteq \ker\varphi$, segue que φ induz um único homomorfismo $\widetilde{f} : a \otimes b \longmapsto f(a,b)$ com $\widetilde{f}h = f$.

□

Teorema 1.2.7. *Seja $f : A \to A'$ uma R-aplicação de R-módulos a direita e $g : B \to B'$ uma R-aplicação de R-módulos a esquerda. Existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\theta : A \otimes_R B \to A' \otimes_R B'$ com $a \otimes b \longmapsto f(a) \otimes g(b)$.*

Demonstração. A função $A \times B \to A' \otimes_R B'$ dado por $(a,b) \longmapsto f(a) \otimes g(b)$ é R-biaditiva. Usando a propriedade universal existe um homomorfismo θ tal que $\theta(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$.

□

Definição 1.2.8. A aplicação $A \otimes_R B \to A' \otimes_R B'$ que envia $a \otimes b \longmapsto f(a) \otimes g(b)$ é denotado por $f \otimes g$.

Teorema 1.2.9. *Sejam $f : A \to A'$ e $\widetilde{f} : A' \to A''$ R-aplicações de R-módulos a direita e sejam $g : B \to B'$ e $\widetilde{g} : B' \to B''$ R-aplicações de R-módulos a esquerda. Então*

$$(\widetilde{g} \otimes \widetilde{f})(g \otimes f) = (\widetilde{g}g) \otimes (\widetilde{f}f).$$

Corolário 1.2.10. *Se $A \in \mathfrak{M}_R$ então existe um funtor aditivo $F : {}_R\mathfrak{M} \to Ab = {}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ definido por:*

$$F(B) = A \otimes_R B.$$

Se $f : B \to B'$ é uma R-aplicação entre os R-módulos a esquerda B e B' , $Ff = 1_A \otimes f$. Similarmente, para $B \in {}_R\mathfrak{M}$ fixo existe um funtor $G : \mathfrak{M}_R \longrightarrow$ Ab dado com $G(A) = A \otimes_R B$ e $Gg = g \otimes 1_B$, onde $g : A \longrightarrow A'$ é uma R- aplicação.

Definição 1.2.11. Sejam R e S anéis. Um grupo abeliano B é um (R S)-bimódulo denotado ${}_RB_S$ se B é um R-módulo a esquerda e um S-módulo a direita e as duas ações são relacionadas pela lei associativa: $r(bs) = (rb)s$, para todo $r \in R, b \in B$ e $s \in S$.

Teorema 1.2.12. *Se A é um R-módulo a direita e B é um (RS)- bimódulo então $A \otimes_R B$ é um S-módulo a direita, onde $(a \otimes b)s = a \otimes (bs)$ para cada $a \in A, b \in B, s \in S$.*

Similarmente se ${}_SA_R$ é um (SR)-bimódulo e ${}_RB$ então $A \otimes_R B$ é um S-módulo a esquerda, onde $s(a \otimes b) = (sa) \otimes b$ para cada $a \in A, b \in B, s \in S$.

Teorema 1.2.13. *Sejam R e S anéis associativos com unidade então*

i) *Sejam ${}_RA_S$ e ${}_RB$ então $\mathrm{Hom_R}(A, B)$ é um S-módulo a esquerda com $(sf)(a) = f(as)$;*

ii) *Sejam ${}_RA_S$ e B_S então $\mathrm{Hom_S}(A, B)$ é um R-módulo a direita com $(fr)(a) = f(ra)$;*

iii) *Sejam A_R e ${}_SB_R$ então $\mathrm{Hom_R}(A, B)$ é um S-módulo a esquerda com $(sf)(a) = s(f(a))$;*

iv) *Sejam ${}_SA$ e ${}_SB_R$ então $\mathrm{Hom_S}(A, B)$ é um R-módulo a direita com $(fr(a)) = f(a)r$.*

1.3 Módulos

Definição 1.3.1. Se M é um R-módulo então um submódulo S de M é um subgrupo aditivo que é fechado por multiplicação com elementos de R.

Exemplo 1.3.2.

1. 0 e M são submódulos de M e qualquer submódulo $S \neq M$ é chamado próprio.

2. Seja $f : M \to N$ uma R-aplicação. Então o $\ker(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$ é um submódulo de M e a $\mathrm{im}(f) = \{n \in N : n = f(m) \text{ para algum } m \in M\}$ é um submódulo de N.

Definição 1.3.3. Seja X um subconjunto de um módulo M. O submódulo gerado por X é $\bigcap_{j \in J} \{S_j : j \in J\}$, onde $\{S_j : j \in J\}$ é a família de todos os submódulos de M que contém a X. Denotaremos este submódulo por $\langle X \rangle$.

Teorema 1.3.4. *Seja X um subconjunto de M. Se $X = \varnothing$ então $\langle X \rangle = 0$ e se $X \neq \varnothing$ então $\langle X \rangle = \{\sum r_i x_i : r_i \in R, x_i \in X\}$.*

Definição 1.3.5. Um módulo M é finitamente gerado se existe um subconjunto $\{x_1, ..., x_n\}$ de M com $M = \langle x_1, ..., x_n \rangle$. Um módulo M é cíclico se existe um único elemento $x \in M$ com $M = \langle x \rangle$.

Definição 1.3.6. Seja $f : M \to N$ uma R-aplicação. Dizemos que f é monomorfismo se f e injetiva e dizemos que f é um epimorfismo se f é sobrejetiva.

Definição 1.3.7. Se S é um submódulo de M o modulo quociente M/S é o grupo quociente M/S com ação dada por $r(m + S) = rm + S$.

Exemplo 1.3.8.

i) (Primeiro Teorema de isomorfismo) Se $f : M \to N$ então a aplicação $M/\ker(f) \to \mathrm{im}(f)$ definida por $m + \ker(f) \longmapsto f(m)$ é um isomorfismo.

ii) (Segundo Teorema de isomorfismo) Sejam M_1 e M_2 submódulos de M então a aplicação $\phi : m_1 + M_1 \cap M_2 \longmapsto m_1 + M_2$ é um isomorfismo e $M_1/(M_1 \cap M_2) \simeq (M_1 \cap M_2)/M_2$

Teorema 1.3.9. *Um R-módulo M é cíclico se e somente se $M \simeq R/I$ para algum ideal a esquerda I. Além disso, se $M = \langle x \rangle$ então $I = \{r \in R : rx = 0\}$.*

Demonstração. Observe que R/I é cíclico com gerador $1 + I$ e se $f : R/I \to M$ é um isomorfismo de R-módulos então $M = \langle x \rangle$ donde $x = f(1 + I)$. Reciprocamente, supor $M = \langle x \rangle$. Defina $f : R \to M$ por $f(r) = rx$. Como f é um epimorfismo, $M \simeq R/\ker(f)$. Mais $\ker(f)$ é um submódulo de R, que é um ideal à esquerda. De fato, $\ker(f) = \{r \in R : rx = 0\}$.

□

Definição 1.3.10. Sejam f e g duas R-aplicações

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

Dizemos que são exatas em M se $\mathrm{im} f = \ker g$. Uma sequência de R-aplicações

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

é exata se cada par adjacente de aplicações é exata.

1.4 Soma e Produto

Se não for dito o contrario escreveremos módulo para R-módulo a esquerda e homomorfismo para homomorfismo de R- módulos.

Definição 1.4.1. Seja $\{A_j : j \in J\}$ uma família de módulos. Seu produto é denotado $\prod_{j \in J} A_j$, cujo conjunto subjacente é o produto cartesiano dos A_j i.e. todos $a = (a_j)$ onde $a_j \in A_j$, e com operações definidas por :

$$(a_j) + (b_j) = (a_j + b_j)$$

$$r(a_j) = (ra_j)$$

Definição 1.4.2. A soma direta dos A_j, denotado por $\bigoplus_{j\in J} A_j = \{(a_j)_{j\in J} : a_j \in A_j$ quasi todo $a_j = 0\}$ é um submódulo de $\prod_{j\in J} A_j$.

Teorema 1.4.3. *Sejam A e $\{A_j : j \in J\}$ R-módulos. Então $A \simeq \bigoplus_{j\in J} A_j$ se e somente se existem homomorfismos $\lambda_j : A_j \to A$ com temos a seguinte propriedade universal.*

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\lambda_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & A \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

dados qualquer módulo B e quaisquer homomorfismos $f_j : A_j \to B$, existe um único homomorfismo $\varphi : A \to B$ com $\varphi\lambda_j = f_j$ para todo $j \in J$.

Demonstração. Veja a demonstração em [10] □

Teorema 1.4.4. *Se $\lambda_j : A_j \to \bigoplus_{j\in J} A_j$ é a inclusão na j-esima coordenada e se B é um módulo, então a aplicação*

$$\theta : \mathrm{Hom_R}(\bigoplus_{j\in J} A_j, B) \to \prod_{j\in J} \mathrm{Hom_R}(A_j, B)$$

definida por $\varphi \longmapsto (\varphi\lambda_j)$ é um isomorfismo

Teorema 1.4.5. *Sejam $\{A_j : j \in J\}$ R-módulos e A um R-módulo. Então $A \simeq \prod_{j\in J} A_j$ se e só se existem homomorfismos $p_j : A \to A_j$ tais que dado qualquer módulo X e quaisquer homomorfismos $f_j : X \to A$ existe um único homomorfismo $\varphi : X \to A$ com $p_j\varphi = f_j$ para todo $j \in J$, que satisfaz a seguinte propriedade universal:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "\varphi"'] & A_j \\ A \arrow[ur, "p_j"] & \end{tikzcd}$$

Teorema 1.4.6. *Se $p_j : \prod_{j\in J} A_j \to A$ é a j-esima projeção e se B é um módulo, então a aplicação*

$$\theta : Hom_R(B, \prod_{j\in J} A_j) \to \prod Hom_R(B, A_j)$$

definida por $\varphi \to (p_j\varphi)$ é um isomorfismo.

Teorema 1.4.7. *Dado A e B com $i : A \to B$ monomorfismo, então existe um R-submódulo C de B tal que $B = iA \oplus C$ e somente se existe um homomorfismo $p : B \to A$ com $pi = 1_A$.*

Definição 1.4.8. Uma sequência curta de módulos

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$$

cinde se existe um homomorfismo $j : C \to B$ com $pj = 1_C$.

Observação 1.4.9. A condição da definição 1.4.8 acontece exatamente quando a condição do teorema 1.4.7 é valida.

Teorema 1.4.10. *Seja A um R-módulo a direita e sejam $\{B_j : j \in J\}$ R-módulos. A aplicação*

$$\theta : A \otimes_R \bigoplus_{j\in J}(B_j) \to \bigoplus_{j\in J}(A \otimes_R B_j)$$

definida por $a \otimes (b_j) \longmapsto (a \otimes b_j)$ é um isomorfismo.

1.5 Exatidão

Definição 1.5.1. Um funtor F é exato á esquerda, se exatidão de

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \text{ implica exatidão de } 0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC\ ,$$

Similarmente um funtor F é exato a direita, se exatidão de

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0 \text{ implica exatidão de } FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC \longrightarrow 0\ .$$

Definição 1.5.2. Um funtor contravariante F é exato a esquerda, se exatidão de

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0 \text{ implica exatidão de } 0 \longrightarrow FC \xrightarrow{F\beta} FB \xrightarrow{F\alpha} FA\ ,$$

Similarmente um funtor contravariante F é exato a direita, se exatidão de

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \text{ implica exatidão de } FC \xrightarrow{F\beta} FB \xrightarrow{F\alpha} FA \longrightarrow 0\ .$$

Definição 1.5.3. Um funtor é exato se ele é exato a direita e exato a esquerda.

Observação 1.5.4. Um funtor F exato a esquerda que preserva epimorfismos é exato. Também um funtor exato a direita que preserva monomorfismos é exato.

Teorema 1.5.5. $\mathrm{Hom_R}(M,-)$ *é um funtor exato a esquerda e* $\mathrm{Hom_R}(-,M)$ *é um funtor contravariante exato a esquerda para todo módulo M.*

Demonstração. Vejamos que $F = \mathrm{Hom_R}(M,-)$ é funtor exato a esquerda, para $M \in \mathfrak{M}_R$ fixo. Isto é a exatidão de:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom_R}(M,A) \xrightarrow{F\alpha} \mathrm{Hom_R}(M,B) \xrightarrow{F\beta} \mathrm{Hom_R}(M,C)$$

para sequência exata $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$

i) $F\alpha$ é monomorfismo: seja $f \in \ker(F\alpha)$ então $(F\alpha)f = 0$ logo $\alpha f = 0$ e $\alpha f(a) = 0$ para todo $a \in A$ como α é injetivo tem-se $f(a) = 0$ para todo $a \in A$, portanto $f = 0$.

ii) $\mathrm{im}(F\alpha) = \ker(F\beta)$

$\mathrm{im}F\alpha \subseteq \ker F\beta$: Tome $g \in \mathrm{im}F\alpha$ então $g = \alpha f$ para algum $f \in \mathrm{Hom}_R(M,A)$ então $(F\beta)g = \beta g = \beta(\alpha f) = 0$, pois $\beta\alpha = 0$, dai $g \in \ker(F\beta)$.

$\ker(F\beta) \subseteq \mathrm{im}(F\alpha)$: Tome $g \in \mathrm{Hom}_R(M,B)$ tal que $\beta g = 0$. Se $m \in M$ então $(\beta g)(m) = 0$ e $g(m) \in \ker(\beta) = \mathrm{im}(\alpha)$ daí existe um único $a \in A$ com $\alpha(a) = g(m)$ pois α é injetivo. Definimos $f : M \to A$ por $f(m) = a = \alpha^{-1}g(m)$ logo $\alpha f = g$.

□

Exemplo 1.5.6. Seja $R = \mathbb{Z}$ e considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

o funtor $F = \mathrm{Hom}_R(M,-)$ não precisa ser exato a direita. Em efeito, seja $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Note que $\mathrm{Hom}_R(M,\mathbb{Q}) = 0$ e $\mathrm{Hom}_R(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$ então $F\beta : \mathrm{Hom}_R(M,\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}_R(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ não pode ser um epimorfismo.

Teorema 1.5.7. *Os funtores* $M \otimes_R -$ *e* ${}_R \otimes N-$ *são funtores exatos a direita.*

Demonstração. Mostraremos o que acontece para $F = M \otimes_R -$, a outra prova é similar. Seja $A \to B \to C \to 0$ uma sequência exata, vejamos que

$$M \otimes_R A \xrightarrow{1\otimes\alpha} M \otimes_R B \xrightarrow{1\otimes\beta} M \otimes_R C \longrightarrow 0$$

é exata a direita. Onde 1 denota $\mathrm{id_M}$

i) $\operatorname{im}(1 \otimes \alpha) \subseteq \ker(1 \otimes \beta)$, é só provar que $(1 \otimes \beta)(1 \otimes \alpha) = 0$. Mais $(1 \otimes \beta)(1 \otimes \alpha) = 1 \otimes (\beta\alpha) = 1 \otimes 0 = 0$.

ii) $\ker(1 \otimes \beta) \subseteq \operatorname{im}(1 \otimes \alpha)$. Para detalhes ver [10], pagina 36.

iii) $1 \otimes \beta$ é epimorfismo. Seja $\sum m_i \otimes c_i \in M \otimes_R C$. Como β é epimorfismo, existe $b_i \in B$ com $\beta b_i = c_i$ para todo i. Daqui $(1 \otimes \beta)(\sum m_i \otimes b_i) = \sum m_i \otimes c_i$.

□

Exemplo 1.5.8. O funtor $M \otimes_R -$ não precisa ser exato a esquerda. De fato, seja $R = \mathbb{Z}$ e $M = \langle x \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Exatidão de

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

não implica na exatidão de $0 \longrightarrow M \otimes_R \mathbb{Z} \longrightarrow M \otimes_R \mathbb{Q}$.

Pois $M \otimes_R \mathbb{Z} \simeq M \neq 0$ enquanto $M \otimes_R \mathbb{Q} = 0$.

1.6 Adjuntas

Definição 1.6.1. Sejam $F : \mathfrak{U} \to \mathfrak{C}$ e $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{U}$ funtores. O par ordenado (F,G) é um *par adjunto* se, para cada $A \in \operatorname{obj} \mathfrak{U}$ e $C \in \operatorname{obj} \mathfrak{C}$ existe uma bijeção:

$$\tau = \tau_{A,C} : \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(FA, C) \to \operatorname{Hom}_{\mathfrak{U}}(A, GC)$$

natural em cada variável, isto é, as bijeções $\tau_{A,C}$ satisfazem os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(FA, C) \arrow[r, "(Ff)^*"] \arrow[d, "\tau"'] & \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(FA', C) \arrow[d, "\tau"'] \\
\operatorname{Hom}_{\mathfrak{U}}(A, GC) \arrow[r, "f^*"] & \operatorname{Hom}_{\mathfrak{U}}(A', GC)
\end{tikzcd}$$

para todo $f : A' \to A$ in $\mathfrak{U}$,

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(FA, C) \arrow[r, "(g)^*"] \arrow[d, "\tau"'] & \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(FA, C') \arrow[d, "\tau"'] \\
\operatorname{Hom}_{\mathfrak{U}}(A, GC) \arrow[r, "(Gg)^*"] & \operatorname{Hom}_{\mathfrak{U}}(A, GC')
\end{tikzcd}$$

para todo $g : C \to C'$ in $\mathfrak{C}$.

Teorema 1.6.2. (Isomorfismo de Adjunção) *Sejam $B \in_S \mathfrak{M}_R$ então existe um isomorfismo*

$$\tau : Hom_S(B \otimes_R A, C) \to \mathrm{Hom_R}(A, \mathrm{Hom_S}(B, C))$$

para cada $A \in {}_R\mathfrak{M}$ e $C \in {}_S\mathfrak{M}$.

Teorema 1.6.3. *Se $B \in {}_S\mathfrak{M}_R$ é um bimódulo então $(B \otimes_R, \mathrm{Hom_S}(B, -))$ é um par adjunto.*

Demonstração. Para cada $A \in {}_R\mathfrak{M}$ e $C \in {}_S\mathfrak{M}$, consideremos o isomorfismo $\tau_{A,C} = \tau$ e pelo teorema 1.6.2 temos o resultado.

□

Lema 1.6.4. *Seja $B' \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} B'' \longrightarrow 0$ uma sequência de homomorfismos de R-módulos. Se para cada módulo M, temos que:*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(B'', M) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_R(B', M) \quad \textit{é exata}$$

então a sequência $B' \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} B'' \longrightarrow 0$ é exata.

Teorema 1.6.5. *Sejam $F : {}_R\mathfrak{M} \to {}_S\mathfrak{M}$ e $G : {}_S\mathfrak{M} \to {}_R\mathfrak{M}$ dois funtores. Se (F, G) é um par adjunto de funtores então F é exata a direita e G é exata a esquerda.*

Corolário 1.6.6. *$B \otimes_R -$ é exata a direita para qualquer R-módulo B a direita.*

Demonstração. Consideremos B um R-módulo a direita, como um bimódulo ${}_{\mathbb{Z}}B_R$ i.e que $(B \otimes_R -, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, -))$ é um par adjunto de funtores pelo teorema 1.6.5 $B \otimes_R -$ é um funtor exato a direita.

□

1.7 Limites Diretos e Inversos

Definição 1.7.1. Seja I um conjunto quase ordenado e $\mathfrak{C}$ uma categoria. Um sistema direto em $\mathfrak{C}$ com conjunto de índices I é um funtor $F : I \to \mathfrak{C}$, tal que para cada $i \in I$ existe um objeto F_i e sempre que $i, j \in I$ satisfazem $i \leq j$ existe um morfismo $\varphi_j^i : F_i \to F_j$ que satisfaz:

i) $\varphi_i^i : F_i \to F_i$ é a identidade id_{F_i} para todo $i \in I$,

ii) Se $i \leq j \leq k$ existe um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[rr, "\varphi_k^i"] \arrow[dr, "\varphi_j^i"'] & & F_k \\ & F_j \arrow[ur, "\varphi_k^j"'] & \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.7.2. Todo módulo é o limite direto de seus submódulos finitamente gerados.

Exemplo 1.7.3. Para qualquer I, fixamos um módulo A e o conjunto $A_i = A$ para todo $i \in I$ e $\varphi_j^i = 1_A$ para todo $i \leq j$, este é o sistema direto constante com conjunto de índices I, denotado por $|A|$.

Exemplo 1.7.4. A soma direta é um limite direto, se consideramos a quase-ordem trivial no conjunto de indices ($i \leq j$ see $i = j$)

Definição 1.7.5. Seja $F = \{A_i, \varphi_j^i\}$ um sistema direto em $\mathfrak{C}$. O limite direto deste sistema, denotado por $\varinjlim A_i \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ é um objeto e uma família de morfismos $\alpha_i : A_i \to \varinjlim A_i$ tais que $\alpha_i = \alpha_j \varphi_j^i$ onde $i \leq j$, satisfaz a seguinte propriedade universal:

$$\begin{tikzcd} \varinjlim A_i \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & X \\ & A_i \arrow[ul, "\alpha_i"] \arrow[ur, "f_i"'] \arrow[d, "\varphi_j^i"'] & \\ & A_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

para todo $X \in \mathrm{Obj}\mathfrak{C}$ e $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_i, X)$ com $f_i = f_j \varphi_j^i$ quando $i \leq j$, existe um único morfismo $\beta : \varinjlim A_i \to X$ com $\beta \alpha_i = f_i$ para todo $i \in I$.

Observação 1.7.6. Na teoria de categorias, limite direto é chamado colimite.

Teorema 1.7.7. *Para cada sistema direto de módulos $\{A_i, \varphi_j^i\}$ em categorias de R-módulos existe o limite direto.*

Demonstração. Para cada $i \in I$ seja $\lambda_i : A_i \to \bigoplus A_i$ a aplicação injetiva na soma. Defina

$$\varinjlim A_i = \bigoplus A_i / S$$

onde S é o submódulo gerado por todos os elementos da forma $\lambda_j \varphi_j^i a_i - \lambda_i a_i$ onde $a_i \in A_i$ e $i \leq j$. Defina $\alpha_i : A_i \to \varinjlim A_i$ por $a_i \longmapsto \lambda_i a_i + S$, não é complicado ver que temos uma solução ao problema universal.

$\square$

Exemplo 1.7.8. O limite direto de sistema direto constante $|A|$ é $\varinjlim A_i = A$.

Definição 1.7.9. Podemos considerar os sistemas diretos numa categoria denotada por Dir (I) onde cada objeto de Dir (I) é um sistema direto e um morfismo $t = \{t_i\}_{i \in I}$: $\{A_i, \varphi_j^i\}_{i \in J} \to \{B_i, \psi_j^i\}_{i \in I}$, satisfaz o seguinte diagrama comutativo para cada $i \geq j$:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "t_i"] \arrow[d, "\varphi_j^i"'] & B_i \arrow[d, "\varphi_j^i"] \\ A_j \arrow[r, "t_j"] & A_j \end{tikzcd}$$

Definição 1.7.10. Um conjunto I quase ordenado é dirigido se para cada $i, j \in I$, existe $k \in I$ com $i \leq k$ e $j \leq k$.

Teorema 1.7.11. *Sejam $(I, \leq)$ um conjunto dirigido e $\{A_i, \varphi_j^i\}$ um sistema direto de R-módulos. Denotamos λ_i o monomorfismo $\lambda_i : A_i \to \bigoplus_{i \in I} A_i$ e seja $\varinjlim A_i = (\bigoplus_{i \in I} A_i)/S$.*

i) $\varinjlim A_i = \{\lambda_i(a_i) + S : a_i \in A_i, i \in I\}$,

ii) $\lambda_i a_i + S = 0$ *se e só se existe* $t \in I$ *tal que* $\varphi_t^i(a_i) = 0$ *para algum* $t \geq i$.

Demonstração. i) Pelo teorema 1.7.7 o $\varinjlim A_i$ consiste de todos os elementos da forma $x = \sum \lambda_i a_i + S$. Como I é um conjunto direcionado, existe um índice $j \geq i$ para todo i, tal que $a_i \neq 0$. Definimos $b^i = \varphi_j^i a_i \in A_j$ tal que $b = \sum b^i \in A_j$. Segue que

$$\sum \lambda_i a_i - \lambda_j b = \sum(\lambda_i a_i - \lambda_j b^i) = \sum(\lambda_i a_i - \lambda_j \varphi_j^i a_i) \in S,$$

isto é $x = \sum \lambda_i a_i + S = \lambda_j b + S$ .Logo $\varinjlim A_i$ consiste de todos os $\lambda_i a_i + S$.

ii) Se $\varphi_j^i a_i = 0$ então $\lambda_i a_i = \lambda_i a_i - \lambda_j(\varphi_j^i a_i) \in S$ isto é $\lambda_i a_i + S = 0$. Para o inverso, suponhamos $\lambda_i a_i + S = 0$. Pela parte i) temos que $\lambda_i a_i \in \varinjlim A$ logo $\lambda_i a_i \in S$. Como qualquer múltiplo escalar de $\lambda_k(\varphi_k^j a_j) - \lambda_j a_j$ onde $j \leq k$ tem a mesma forma, existe uma expressão

$$\lambda_i a_i = \sum_j (\lambda_k(\varphi_k^j a_j) - \lambda_j a_j) \in S,$$

onde k é função de j.

Podemos escolher um índice $t \in I$ maior que todos os índices na expressão. É claro que $\lambda_t(\varphi_t^i a_i) = (\lambda_t(\varphi_t^i a_i) - \lambda_i a_i) + \lambda_i a_i = (\lambda_t(\varphi_t^i a_i) - \lambda_i a_i) + \sum(\lambda_k(\varphi_k^j a_j) - \lambda_j a_j)$ então reescrevemos cada um dos termos do lado direito como:

$$\lambda_k(\varphi_k^j a_j) - \lambda_j a_j = (\lambda_t(\varphi_t^j a_j) - \lambda_j a_j) + [\lambda_t \varphi_t^k(-\varphi_k^j a_j) - \lambda_k(-\varphi_k^j a_j)],$$

onde usamos $\varphi_t^k \varphi_k^j = \varphi_t^j$ pela definição de sistema direto. Mais ainda, podemos escrever $\lambda_t(\varphi_t^i a_i) = \sum\limits_{j \neq t}(\lambda_t(\varphi_t^j a_j) - \lambda_j a_j)$.

Se $j \neq t$ temos que $\lambda_j a_j = 0$ então $a_j = 0$, para cada elemento $\lambda_t(\varphi_t^i a_i)$ tem j-esima coordenada 0. Se $j = t$ então $\lambda_t(\varphi_t^t a_t) - \lambda_t a_t = 0$ porque φ_t^t é a identidade. Assim cada termino no lado direito é 0, isto é $\lambda_t(\varphi_t^i a_i) = 0$ assim $\varphi_t^i a_i = 0$.

$\square$

Definição 1.7.12. Seja I um conjunto dirigido e seja $\{A_i, \phi_j^i\}$ um sistema direto sobre I. Se X é a união disjunta $\uplus A_i$, defina-se a relação de equivalência em X por:

$$a_i \sim a_j, \quad a_i \in A_i, a_j \in A_j$$

se existe um índice $k \geq i, j$ com $\phi_k^i a_i = \phi_k^j a_j$. A classe de equivalência de a_i é denotada por $[a_i]$.

Observação 1.7.13. Se $\{A_i, \phi_j^i\}$ é um sistema direto sobre um conjunto dirigido I, defina-se um R-módulo L como segue. Os elementos de L são as classes de equivalência de $[a_i]$ com as operações:

$$r[a_i] = [ra_i], [a_i] + [a_j'] = [a_k + a_k'],$$

onde $r \in R$, $k \geq i, j, a_k = \phi_k^i a_i$ e $a_k' = \phi_k^i a_j'$

Pelo 1.7.11 temos que o conjunto de índices I é direcionado, a aplicação $\varinjlim A_i \to L$ definida por $\lambda_i a_i + S \to [a_i]$ é um isomorfismo.

Teorema 1.7.14. *Seja I um conjunto dirigido quase-ordenado. Suponha que exista morfismos de sistemas diretos sobre I.*

$$\{A_i, \phi_j^i\} \xrightarrow{t} \{B_i, \psi_j^i\} \xrightarrow{s} \{C_i, \theta_j^i\}$$

tais que $0 \to A_i \xrightarrow{t_i} B_i \xrightarrow{s_i} C_i \to 0$ *é exata para todo $i \in I$. Então existe uma sequência exata de módulos* $0 \to \varinjlim A_i \xrightarrow{\vec{t}} \varinjlim B_i \xrightarrow{\vec{s}} \varinjlim C_i \to 0$.

Observação 1.7.15. Ainda sem a condição que I é dirigido temos que $\varinjlim$ é funtor exato a direita.

Demonstração. Vejamos que $\overrightarrow{t}$ é injetivo . Sejam $x \in \varinjlim A_i$ e $\overrightarrow{t}x = 0$ em $\varinjlim B_i$, como $\varinjlim A_i = (\bigoplus\limits_{i\in I} A_i)/S$ e $\lambda_i : A_i \to \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ analogamente $\varinjlim B_i = (\bigoplus\limits_{i\in I} B_i)/T$ e $\mu_i : B_i \to \bigoplus\limits_{i\in I} B_i$, onde λ_i e μ_i são as óbvias inclusões. Assim $x = \lambda_i a_i + S$, pelo teorema 1.7.11 i) e $\overrightarrow{t}x = \mu_i t_i a_i + T$. Como $\overrightarrow{t}x = 0$ e pelo teorema 1.7.11 ii) diz-se que existe $j \geq i$ com $\psi^i_j t_i a_i = 0$. Como t é um morfismo entre sistemas diretos, temos que $t_j \phi^i_j a_i = 0$, mais ainda t_j é injetivo, então $\phi^i_j a_i = 0$ então pelo 1.7.11 $x = \lambda_i a_i + S = 0$.

□

Teorema 1.7.16. *Sejam $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{C}$ categorias e sejam $F : \mathfrak{U} \to \mathfrak{C}$, $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{U}$ funtores. Se (F,G) é um par adjunto, então F preserva os limites diretos (com qualquer, não necessariamente conjunto de índices dirigido).*

Demonstração. Se I é um conjunto quase-ordenado e $\{A_i, \phi^i_j\}$ é um sistema direto em $\mathfrak{U}$ com conjunto de índices I, então note que $\{FA_i, F\phi^i_j\}$ é um sistema direto em $\mathfrak{C}$ com conjunto de índices I. Considere o diagrama comutativo em $\mathfrak{C}$:

$$\begin{tikzcd}
F(\varinjlim A_i) \arrow[rr, dashed, "\gamma"] & & X \\
& FA_i \arrow[ul, "F\alpha_i"'] \arrow[ur, "g_i"] \arrow[d, "F\varphi^i_j"] & \\
& FA_j \arrow[uul, "F\alpha_j"] \arrow[uur, "g_j"'] &
\end{tikzcd}$$

onde $\alpha_i : A_i \to \varinjlim A_i$ são dados pela definição de $\varinjlim$. Precisamos de um único morfismo $\gamma : F(\varinjlim A_i) \to X$ que faça comutar todo o diagrama. Como (F, G) é um par adjunto, existe uma bijeção natural $\tau : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(F\varinjlim A_i, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{U}}(\varinjlim A_i, GX)$.

Considere o diagrama comutativo em $\mathfrak{U}$:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim A_i \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & GX \\
& A_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "\tau g_i"] \arrow[d, "\varphi^i_j"'] & \\
& A_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "\tau g_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Pela definição de $\varinjlim$, existe um único $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{U}}(\varinjlim A_i, GX)$ que faz comutar o diagrama. Defina-se $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(F\varinjlim A_i, X)$ por $\gamma = \tau^{-1}(\beta)$, como τ é natural, γ faz que o primeiro diagrama comutar. Finalmente γ tem que ser único. Supor que existe γ' outro morfismo, então $\tau(\gamma')$ seria outro morfismo $\varinjlim A_i \to GX$ contradizendo a unicidade de β. Assim $F(\varinjlim A_i)$ e $\varinjlim FA_i$ satisfazem a propriedade universal de $\varinjlim FA_i$ portanto $F(\varinjlim A_i) \simeq \varinjlim FA_i$.

□

Corolário 1.7.17. *Para qualquer R-módulo á direita B, o funtor $B \otimes_R -$ preserva limites diretos.*

Demonstração. Pelo corolário 1.6.6 temos que $(B \otimes_R -, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{B}, -))$ é um par adjunto, então $B \otimes_R \varinjlim A_i \simeq \varinjlim B \otimes_R A_i$

□

Teorema 1.7.18. *Qualquer par de limites diretos (pode ser com conjunto de índices distintos) comuta.*

Demonstração. Note que $(\varinjlim, |\cdot|)$ é um par adjunto de funtores pelo teorema 1.7.16 temos que $\varinjlim$ preserva limites diretos.

□

Definição 1.7.19. Seja I um conjunto quase-ordenado e $\mathfrak{C}$ uma categoria. Um sistema inverso em $\mathfrak{C}$ com conjunto de índices I é um funtor contravariante $F : I \to \mathfrak{C}$. Isto é para cada $i \in I$ existe um objeto F_i tal que para $j \geq i$ existe um morfismo $\phi_i^j : F_i \to F_j$ tal que:

i) $\phi_i^i : F_i \to F_i$ e a identidade para cada $i \in I$,

ii) Se $i \leq j \leq k$ existe um diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
F_k \arrow[rr, "\psi_i^k"] \arrow[dr, "\psi_j^k"'] & & F_i \\
& F_j \arrow[ur, "\psi_i^j"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 1.7.20. Seja $\mathfrak{C}$ a categoria de módulos, para qualquer I, o sistema direto constante $|A|$ com conjunto de índices I (onde A é um módulo), onde para todo $i, j \in I$ $A_i = A_j = A$ e $\psi_i^j = id_A$ para cada $i \leq j$, é também um sistema inverso com conjunto de índices I.

Exemplo 1.7.21. Seja I um conjunto que tem o quase-ordem trivial e $\{F_i\}_{i\in I}$ uma familia de módulos então $\varprojlim F_i = \prod\limits_{i\in I} F_i$

Definição 1.7.22. Seja $F = \{F_i, \psi_i^j\}$ um sistema inverso em $\mathfrak{C}$. O limite inverso de este sistema, denotado por $\varprojlim F_i \in \text{obj}(\mathfrak{C})$ e uma família de morfismos $\alpha_i : \varprojlim F_i \to F_i$ com $\alpha_i = \psi_i^j \alpha_j$ onde $i \leq j$, satisfazendo a seguinte propriedade universal:

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim F_i \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, "\alpha_j"'] & & X \arrow[ll, dashed, "\beta"'] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, "f_j"] \\
& F_i & \\
& F_j \arrow[u, "\psi_i^j"] &
\end{tikzcd}$$

para cada $X \in \text{obj}(\mathfrak{C})$ e $f_i : X \to F_i$ morfismos tais que o diagrama comute para $i \leq j$, existe um único morfismo $\beta : X \to \varprojlim F_i$ fazendo o diagrama comutar. O $\varprojlim F_i$ é único a menos de isomorfismos.

Observação 1.7.23. Na teoria de categorias, limite inverso é chamado limite.

Teorema 1.7.24. *O limite inverso $\varprojlim F_i$ de um sistema inverso de módulos $\{F_i, \psi_i^j\}$ existe.*

Demonstração. Para cada $i \in I$, seja p_i a i-ésima projeção $p_i : \prod F_i \to F_i$. Definimos

$$\varprojlim F_i = \{(a_i) \in \prod F_i : a_i = \psi_i^j(p_j(a_i)), i \leq j\} \subseteq \prod F_i$$

e $\alpha_i : \varprojlim F_i \to F_i$ como a restrição de $p_i \mid_{\varprojlim F_i}$ então eles satisfazem a propriedade universal.

$\square$

Exemplo 1.7.25. O limite inverso de um sistema constante $|A|$, com $A_i = A_j = A \; \forall i \in I$ e para $i \leq j$ definimos $\varphi_i^j = id_A$ assim $\varprojlim A_i = A$.

Definição 1.7.26. Seja I um conjunto quase-ordenado, um morfismo $t : \{F_i, \psi_i^j\} \to \{G_i, \phi_i^j\}$ entre sistemas inversos sobre I é uma família de homomorfismos $t_i : F_i \to G_i$ fazendo o diagrama comutar para $i \leq j$

$$\begin{tikzcd}
F_j \arrow[r, "t_j"] \arrow[d, "\psi_i^j"'] & G_j \arrow[d, "\varphi_i^j"] \\
F_i \arrow[r, "t_i"] & G_i
\end{tikzcd}$$

Observação 1.7.27. Note que todos os sistemas inversos com conjunto de índices I e seus morfismos formam uma categoria, denotaremos ela por $\mathrm{Inv}(I)$. Afirmamos que $\varprojlim : \mathrm{Inv}(I) \to_R \mathfrak{M}$ é um funtor. Só resta definir $\overleftarrow{t} : \varprojlim F_i \to \varprojlim G_i$ como um morfismo $t : \{F_i, \psi_i^j\} \to \{G_j, \phi_i^j\}$ dado por:

$$\overleftarrow{t} : (a_i) \longmapsto (t_i a_i)$$

Podemos considerar $|\cdot| :_R M \to \mathrm{Inv}(I)$ para o sistema constante.

Teorema 1.7.28. $(|\cdot|, \varprojlim)$ *é um par adjunto de funtores.*

Demonstração. É o dual do argumento que mostra $(\varinjlim, |\cdot|)$ é um par adjunto. $\square$

Teorema 1.7.29. *Sejam $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{C}$ categorias, $F : \mathfrak{U} \to \mathfrak{C}$ e $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{U}$ funtores. Se (F,G) é um par adjunto, então G comuta com $\varprojlim$. Isto é $G(\varprojlim A_i) \simeq \varprojlim G(A_i)$.*

Demonstração. É o dual do teorema 1.7.16. $\square$

Corolário 1.7.30. *Se B é um R-módulo, então $\mathrm{Hom}_R(B, -)$ preserva limites inversos.*

Demonstração. Considerar B como um bimódulo ${}_R B_{\mathbb{Z}}$. Pelo teorema 1.6.3 $(B \otimes_{\mathbb{Z}} -, \mathrm{Hom}_R(B, -))$ é um par adjunto. Então pelo teorema 1.7.29 temos que $\mathrm{Hom}_R(B, \varprojlim A_i) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_R(B, A_i)$.

$\square$

Teorema 1.7.31. *Qualquer dois limites inversos comutam, isto é*

$$\varprojlim_{j \in J} \varprojlim_{i \in I} A_{i,j} = \varprojlim_{i \in I} \varprojlim_{j \in J} A_{i,j}$$

.

Demonstração. Defina $F = |\cdot|$ e $G = \varprojlim_{j\in J}$ onde (F, G) é um par adjunto então pelo teorema 1.7.29 temos o resultado.

$\square$

Teorema 1.7.32. *Para qualquer modulo B,* $\mathrm{Hom}_R(\varprojlim A_j, B) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_R(A_j, B)$.

1.8 Módulos livres, Projetivos e Injetivos

Definição 1.8.1. Seja X conjunto e R um anel associativo. Dizemos que A é um R-módulo livre a esquerda com base X, se $A = \bigoplus\limits_{x\in X} Rx$ onde $Rx \simeq R$.

Teorema 1.8.2. *Seja $X = \{a_i : i \in I\}$ uma base de um módulo livre A. Sejam $B \in {}_R\mathfrak{M}$ e qualquer função $f : X \to B$ existe um único homomorfismo $\widetilde{f} : A \to B$ que é uma extensão de f.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "\widetilde{f}"] & \\
X \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

onde μ é a inclusão.

Demonstração. Seja $i \in I$ fixo, definimos $f_i : Ra_i \to B$ dada por $ra_i \longmapsto rf(a_i)$. Como $A = \bigoplus\limits_{i\in I} Ra_i$, pelo teorema 1.4.3 existe um único homomorfismo $\widetilde{f} : A \to B$ dado por $\widetilde{f}(a_i) = f_i(a_i) = f(a_i)$ para todo i.

$\square$

Observação 1.8.3. Note que $\widetilde{f}(\sum\limits_{i\in I} r_i a_i) = \sum\limits_{i\in I} r_i f(a_i)$.

Teorema 1.8.4. *Dado X um conjunto então existe um módulo livre A com base X.*

Teorema 1.8.5. *Todo R-módulo M é um quociente de um módulo livre.*

Demonstração. Seja UM o conjunto subjacente de M. Pelo teorema 1.8.4 existe um módulo livre com base UM. Definamos $f : UM \to M$ por $m \longmapsto m$. Pelo teorema 1.8.2 existe uma único homomorfismo $\widetilde{f} : A \to M$ que é uma extensão de f. Note que $\widetilde{f}$ é sobrejetivo pois f é sobrejetivo então $A/\ker\widetilde{f} \simeq \mathrm{im}\widetilde{f} = M$.

$\square$

Definição 1.8.6. Uma resolução livre de um R- módulo M é uma sequencia exata

$$\cdots \to F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} M \to 0$$

onde cada F_n é um módulo livre e $\mathrm{im}\partial_{n+1} = \ker\partial_n$

Teorema 1.8.7. *Todo R-módulo M tem resolução livre.*

Demonstração. Pelo teorema 1.8.4 existe um módulo livre F_0 e uma sequência exata $0 \to S_0 \to F_0 \to M \to 0$. Analogamente para F_0 existe um módulo livre F_1 e uma sequencia exata $0 \to S_1 \to F_1 \to S_0 \to 0$. Por indução temos um módulo livre F_n e uma sequência exata $0 \to S_n \to F_n \to S_{n-1} \to 0$ unindo todas estas sequencias, obtemos o diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_3 \arrow[rr, "d_3"] \arrow[dr] & & F_2 \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr] & & F_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr] & & F_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \to 0 \\
& & S_2 \arrow[ur] & & S_1 \arrow[ur] & & S_0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

onde as aplicações d_n são as composições indicadas. Para todo n temos que $\ker(d_n) = S_n$ e $\mathrm{im}(d_{n+1}) = \ker(d_n)$ portanto é uma sequência exata.

□

Teorema 1.8.8. *Seja o diagrama com β sobrejetiva:*

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\
B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Se F é livre e dado $\alpha : F \to C$ então existe $\gamma : F \to B$ com $\alpha = \beta\gamma$

Demonstração. Seja $X = \{x_i : i \in F\}$ uma base de F. Como β é sobrejetiva, cada αx_i pode ser levantado, então existe um elemento $b_i \in B$ com $\beta(b_i) = \alpha(x_i)$. Pelo axioma de escolha existe uma função $\phi : X \to B$ com $\phi x_i = b_i$ para todo $i \in I$. Pelo teorema 1.8.2 existe um homomorfismo $\gamma : F \to B$ com $\gamma(x_i) = \phi(x_i)$ para todo $i \in I$. Note que $\alpha = \beta\gamma$, de fato para $x_i \in X$ temos que $\beta\gamma(x_i) = \beta\phi(x_i) = \beta(b_i) = \alpha x_i$.

□

Corolário 1.8.9. *Se F é livre então o funtor* $\operatorname{Hom}(F,-)$ *é exato.*

Definição 1.8.10. Seja P um R-módulo dizemos que P é projetivo se

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

para cada $f \in \operatorname{Hom}_R(P,C)$ e β sobrejetiva existe um $g \in \operatorname{Hom}_R(P,B)$ tal que $\beta g = f$.

Teorema 1.8.11. *Um R-módulo P é projetivo se e só se* $\operatorname{Hom}_R(P,-)$ *é exato.*

Demonstração. Supor que $\operatorname{Hom}_R(P,-)$ é exato e considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como $\beta_* : \operatorname{Hom}_R(P,B) \to \operatorname{Hom}_R(P,C)$ é sobrejetivo então existe $g \in \operatorname{Hom}_R(P,B)$ com $f = \beta_*(g) = \beta g$ portanto P é projetivo.

Para a volta observe que $\operatorname{Hom}_R(P,-)$ é exato a esquerda, portanto $\operatorname{Hom}_R(P,-)$ é exato se e somente se β_* é sobrejetivo. O ultimo é equivalente com a definição de módulo projetivo.

□

Teorema 1.8.12. *Se P é projetivo e $\beta : B \to P$ é epimorfismo, então $B = \ker(\beta) \oplus P'$, onde $P' \simeq P$.*

Demonstração. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "1_P"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como P é projetivo então existe uma aplicação $\gamma : P \to B$ com $\beta\gamma = 1_P$, note que γ é injetiva e pelo teorema 1.4.7, $B = \ker\beta \oplus P'$, onde $P' \sim P$.

□

Teorema 1.8.13. *Um R-módulo P é projetivo se e só se é um somando de módulo livre. Mais ainda cada somando de um projetivo é projetivo.*

Teorema 1.8.14. *Um R-módulo A é projetivo se e só se existem uma familia $\{a_k \mid k \in K\} \subset A$ de elementos de A e uma familia $\{\varphi_k : A \to R,\, k \in K\}$ de R- aplicações tais que:*

i) *Se $x \in A$ então $\varphi_k(x) = 0$ para quase todo $k \in K$,*

ii) *Se $x \in A$ então $x = \sum_{k \in K} \varphi_k(x) a_k$*

Mais ainda, A é gerado pelo conjunto $\{a_k,\, k \in K\}$.

Demonstração. Supor que A é projetivo, e seja $\psi : F \to A$ um epimorfismo de algum R-módulo livre F. Então existe $\varphi : A \to F$ com $\psi\varphi = 1_A$. Seja $\{e_k : k \in K\}$ uma base de F. Se $x \in A$ então $\varphi(x)$ tem uma única expressão $\varphi(x) = \sum r_k e_k$, onde $r_k \in R$ e quase todos $r_k = 0$. Definamos $\varphi_k : A \to R$ por $\varphi_k(x) = r_k$. Note que $\varphi_k(x) = 0$ para quase todo k. Seja $a_k = \psi e_k$, então como ψ é epimorfismo temos que $\{a_k \mid k \in K\}$ gera A como R-módulo. Mais ainda, se $x \in A$ então

$$x = \psi\varphi(x) = \psi(\sum r_k e_k) = \sum r_k \psi(e_k) = \sum \varphi_k(x)\psi(e_k) = \sum \varphi_k(x) a_k.$$

Agora, supor que existem $\{a_k \mid k \in K\}$ e $\{\varphi_k : A \to R \mid k \in K\}$.Seja F um R-módulo livre com base $\{e_k \mid k \in K\}$ e considere homomorfismo $\psi : F \to A$ dado por $e_k \longmapsto a_k$. É suficiente mostrar que existe um homomorfismo $\varphi : A \to F$ tal que $\psi\varphi = 1_A$. Definamos $\varphi : A \to F$ como $x \longmapsto \sum \varphi_k(x) e_k$. Note que esta soma é finita, pela condição i) , e φ esta bem definida pela condição ii), além disso $\psi\varphi(x) = \psi \sum \varphi_k(x) e_k = \sum \varphi_k(x)\psi(e_k) = \sum(\varphi_k x) a_k = x$. Assim $\psi\varphi = 1_A$ e P é projetivo.

□

Definição 1.8.15. Um R-módulo E é injetivo se, para cada R-módulo B e para cada submódulo A de B, dado $f \in \mathrm{Hom}_R(A, E)$ existe um homomorfismo $g : B \to E$ que faz o diagrama comutar

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[ul, dashed, "g"']
\end{tikzcd}$$

onde $g\alpha = f$.

Teorema 1.8.16. *Um R-módulo E é injetivo se e só se o funtor contravariante* $\mathrm{Hom}_R(-,E)$ *é exato.*

Demonstração. Supor que E é injetivo. Como $\mathrm{Hom}_R(-,E)$ é contravariante e exato a esquerda, é suficiente ver que leva monomorfismos a epimorfismos. De fato, seja $\alpha : A \to B$ injetivo, tome $f \in \mathrm{Hom}_R(A,E)$ como E é injetivo existe uma extensão $g \in \mathrm{Hom}_R(B,E)$. Note que $f = g\alpha = \alpha^*(g)$, onde $\alpha^* : \mathrm{Hom}_R(B,E) \to \mathrm{Hom}_R(A,E)$ é induzido por α. Então α^* é sobrejetiva. Dai $\mathrm{Hom}_R(-,E)$ é exato.

□

Teorema 1.8.17. *Um R-módulo E é injetivo se e somente se cada sequência exata curta* $0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *cinde. Em particular, E é um somando direto de B.*

Demonstração. Supor que E é injetivo, considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[u, "1_A"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

então existe um homomorfismo $g : B \to E$ com $gi = 1_E$, assim a sequência cinde.

Agora vejamos que E é injetivo, considere o diagrama com α monomorfismo

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & M \end{tikzcd}$$

Construindo o diagrama pushout (veja [10], pagina 41).

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[r, "\alpha'"] & P \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & M \arrow[u, "f'"'] \end{tikzcd}$$

pelo exercício 2.30 em [10] temos que $\alpha^{'} : E \to P$ é um monomorfismo. Pela hipotese existe $\beta : P \to E$ com $\beta\alpha^{'} = 1_E$. Seja $g : M \to E$ o homomorfismo dado por $g = \beta f'$, então $g\alpha = \beta f'\alpha = \beta\alpha^{'} f = 1_E f = f$. Portanto E é injetivo.

$\square$

Teorema 1.8.18. ***(Criterio de Baer)*** *Um R-módulo E é injetivo se e só se para todo homomorfismo $f : I \to E$, onde I é um ideal á esquerda de R, pode ser estendido a R.*

Demonstração. Ver [10], pagina 68.

$\square$

Definição 1.8.19. Seja $M \in_R \mathfrak{M}$, $m \in M$ e $r \in R \setminus \{0\}$ e r não é divisor de 0. Dizemos que m é divisível por r se $m = rm'$ para algum $m' \in M$. Dizemos que o módulo M é divisível se cada $m \in M$ é divisível para todo $r \in R$ que não é divisor à esquerda 0 (isto é, não existem $s \in R$ com $s \neq 0$ e $sr = 0$).

Lema 1.8.20. *Cada módulo injetivo E é divisível.*

Demonstração. Seja $m \in E$ e $r \in R \setminus \{0\}$ e não é divisor de zero. Definamos $Rr = \{sr \mid s \in R\}$ e $f : Rr \to E$ por $f(sr) = sm$, note que f é bem definida pois r não é divisor à esquerda 0. Como E é injetivo existe um homomorfismo $g : R \to E$ que é uma extensão de f. Em particular

$$m = f(r) = g(r) = rg(1_R)$$

Dai m é divisível por r, então E é divisível.

$\square$

Teorema 1.8.21. *Se R é um domínio de ideais principais então um R-módulo D é divisível se e só se é injetivo.*

Demonstração. Se D é injetivo pelo lema 1.8.20 temos que D é divisivel. Agora se D é divisível, seja $I \lhd R$ com $I \neq 0$. Como D é dominio de ideais principais, então $I = Rr$ com $r \neq 0$. Definimos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & D & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"] & R \arrow[ul, dashed, "g"']
\end{tikzcd}$$

onde, $f(r) = m \in D \Rightarrow m = rm'$ para algúm $m' \in D$ pois D é divisível, e definimos $g(s) = sm'$. Assim $g\mid_I = f$ e pelo teorema 1.8.18 D é injetivo. $\square$

Lema 1.8.22. *Todo grupo abeliano G pode ser mergulhado num grupo abeliano injetivo.*

Teorema 1.8.23. *Se D é um grupo abeliano divisível então* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D) \in {}_R\mathfrak{M}$ *é injetivo.*

Teorema 1.8.24. *Se $M \in {}_R\mathfrak{M}$ então M pode ser mergulhado num módulo injetivo.*

Demonstração. Consideremos M como um grupo abeliano. Pelo lema 1.8.22 M é mergulhado num grupo abeliano injetivo D, para algum grupo D divisível. Isto é existe monomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} D$. Se $m \in M$ definamos $f_m : R \to M$ por $f(r) = rm$. Note que $\phi : M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ dada por $\phi(m) = if_m$ é uma R-aplicação injetiva, então $M \cong \mathrm{im}\phi \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$.

□

Definição 1.8.25. Uma resolução injetiva de um R-módulo M é um sequência exata

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \ldots \to E^n \to E^{n+1} \to \ldots$$

Onde cada E^n é um R-módulo injetivo.

Teorema 1.8.26. *Para cada R-módulo M existe uma resolução injetiva.*

Demonstração. A prova é o dual do teorema 1.8.7 usando o teorema 1.8.24.

□

2 Homología de Módulos

Neste capitulo usaremos resultados do livro [10].

2.1 Homología de Funtores

Definição 2.1.1. Um complexo A é uma sequência de módulos e morfismos

$$A = \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

para $n \in \mathbb{Z}$ com $d_n d_{n+1} = 0$ para todo n. Denotamos um complexo A com (A, d).

Exemplo 2.1.2. Sejam A um complexo e F um funtor covariante então

$$FA = \cdots \longrightarrow F(A_n) \xrightarrow{Fd_n} F(A_{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

é também um complexo. Em particular se A é uma sequência exata então $F(A)$ é um complexo, não precisa ser exata.

Definição 2.1.3. Se A e A' são complexos, um morfismo ou morfismo de cadeias $f : A \to A'$ é uma sequência de homomorfismos $f_n : A_n \to A'_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & A'_n \arrow[r, "d'_n"'] & A'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Lema 2.1.4. *Seja Comp com objetos os complexos de R-módulos e morfismos definidos acima. Comp é uma categoria preaditiva.*

Definição 2.1.5. Se (A, d) é um complexo então o n-módulo homológico é

$$H_n = \ker(d_n)/\mathrm{im}(d_{n+1})$$

Como $d_n d_{n+1} = 0$ então $\mathrm{im} d_{n+1} \subseteq \ker d_n$ assim o módulo quociente é bem definido.

Definição 2.1.6. Os elementos de A_n são chamados $n - cadeias$, os elementos de $\ker(d_n)$ são chamados $n - ciclos$ e os elementos da $\mathrm{im}(d_{n+1})$ são chamados $n - bordos$.

Usamos a seguinte notação

$$\ker(d_n) = Z_n(A) = Z_n \text{ e } \mathrm{im}(d_{n+1}) = B_n(A) = B_n$$

Assim podemos escrever $H_n(A) = Z_n(A)/B_n(A)$.

Definição 2.1.7. Seja $f : A \to A'$ um morfismo de cadeias, definimos

$$H_n(f) : H_n(A) \to H_n(A')$$

como $H_n(f)(z_n + B_n(A)) = f_n(z_n) + B_n(A')$, então $H_n(f)$ é um homomorfismo de R-módulos bem definida. $H_n(f)$ é chamada aplicação induzida por f, denotaremos ela por f_*

Vejamos que $f_* = H_n(f)$ é bem definida. Dada uma cadeia de aplicações (suprimindo os índices) temos que $fd = d'f$. Seja z_n um n-ciclo então $dz_n = 0$. Dai temos $d'f(z_n) = fd(z_n) = 0$ então $f(z_n)$ é um n-ciclo. Além disso seja $b_n \in B_n(A)$ então $b_n = da$ para algum a. Daí $fb_n = fda = d'fa \in B_n(A')$. Como f_* preserva ciclos e bordos, segue que a formula para f_* é bem definida.

Teorema 2.1.8. *Para cada n, $H_n : Comp \to {}_R\mathfrak{M}$ é um funtor aditivo.*

Definição 2.1.9. Um complexo (A, d) é exato se $H_n(A) = 0$ para todo n.

Exemplo 2.1.10. ***(complexo exato de Koszul)*** Seja Q um grupo abeliano livre, finitamente gerado, com base $q_1, ..., q_n$. Então , definimos $Q^m := \{q^m \mid q \in Q\}$ é um grupo abeliano livre com base $q_1^m, ..., q_n^m$. Consideramos o complexo exato de Koszul.

$$P_{\bullet,m} : \cdots \to P_{k,m} \xrightarrow{\partial_{k,m}} P_{k-1,m} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{1,m} \xrightarrow{\partial_{1,m}} P_{0,m} \xrightarrow{\partial_{0,m}} \mathbb{Z} \to 0$$

onde $P_{0,m} = \mathbb{Z}[Q^m]$, $\quad P_{k,m} = \oplus_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\mathbb{Z}[Q^m]e_{i_1}\cdots e_{i_k}$ para $k \geq 1$ e $\partial_{0,m}$ é a aplicação de aumento. O diferencial $\partial_{k,m} : P_{k,m} \to P_{k-1,m}$, para $k \geq 1$ e $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ é definido por

$$\partial_{k,m}(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) = \sum_{1\le j\le k} (-1)^j (q_{i_j}^m - 1) e_{i_1} ... \widehat{e_{i_j}} ... e_{i_k}$$

para alguns inteiros $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ e para δ uma permutação de $\{1, ..., k\}$ definimos $e_{i_{\delta(1)}} e_{i_{\delta(2)}} ... e_{i_{\delta(k)}} := (-1)^\delta e_{i_1} e_{i_2} ... e_{i_k}$.

Observação 2.1.11. Seja $A : \cdots \longrightarrow A_i \xrightarrow{d_i} A_{i-1} \longrightarrow \cdots$, um complexo exato de módulos e F um funtor exato e aditivo então

$$FA : \cdots \longrightarrow FA_i \xrightarrow{d_i} FA_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

é um complexo exato pois o complexo A quebra em sequências exatas curtas

$$0 \longrightarrow \ker d_i \longrightarrow A_i \longrightarrow imd_i \longrightarrow 0$$

e portanto $0 \longrightarrow F(\ker d_i) \longrightarrow FA_i \longrightarrow F(\mathrm{im} d_i) \longrightarrow 0$ é uma sequência exata.

É facil ver neste caso que $F(\mathrm{im} d_i) = F(\ker d_{i-1}) = \mathrm{im}(Fd_i) = \ker(Fd_{i-1})$.

Definição 2.1.12. Um complexo (A, d) é um subcomplexo de (A', d') se todo A_n é um submódulo de A'_n e $d_n = d'_n|_{A_n}$ para todo n. Definimos o complexo quociente

$$A'/A = \cdots \longrightarrow A'_n/A_n \xrightarrow{\overline{d'}_n} A'_{n-1}/A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

onde $\overline{d'}_n(a'_n + A_n) = d'_n(a'_n) + A_{n-1}$ são os morfismos.

Definição 2.1.13. Sejam $(A, d), (A', d')$ e (A'', d'') complexos. Então, dizemos que

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de complexos, se $0 \longrightarrow A'_n \xrightarrow{i_n} A_n \xrightarrow{p_n} A''_n \longrightarrow 0$ é exata, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.1.14. ***(Homomorfismo de conexão)*** *.Seja* $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$ *uma sequência exata de complexos. Para cada n, existe um homomorfismo*

$$\partial_n : H_n(A'') \to H_{n-1}(A')$$

definido por

$$z'' + B_n(A'') \longmapsto i_{n-1}^{-1} d_n p_n^{-1}(z'') + B_{n-1}(A')$$

Demonstração. Considere o diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A'_n \arrow[r] \arrow[d, "d'_n"] & A_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "d_n"] & A''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] & A_{n-1} \arrow[r, "j_{n-1}"] & A''_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Supor $z'' \in A''_n$ com $d''_n(z'') = 0$, como p_n é sobrejetiva, podemos levantar z'' para $a_n \in A_n$ e depois levar para abaixo para $d_n(a_n) \in A_{n-1}$, pela comutatividade $d_n(a_n) \in \ker(j_{n-1}) = \mathrm{im}(i_{n-1})$. Dai segue que $d_n i_{n-1}^{-1} d_n(a_n)$ é bem definido. Como i_{n-1} é injetivo existe um único $a'_{n-1} \in A'_{n-1}$ com $i_{n-1}(a'_{n-1}) = d_n(a_n)$.

$\square$

Definição 2.1.15. Os morfismos $\partial_n : H_n(A'') \to H_{n-1}(A')$ são chamados homomorfismos de conexão.

Teorema 2.1.16. ***(Sequencia exata longa)*** *Se* $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$ *é uma sequência exata de complexos, então existe uma sequencia exata longa de R-módulos*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A') \xrightarrow{i_*} H_n(A) \xrightarrow{p_*} H_n(A'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A') \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Demonstração.

(1) Exatidão em $H_{n-1}(A)$ se e só se im $i_* = \ker\, p_*$

Primeiro im $(i_*) \subset \ker\, (p_*)$, pois $p_* i_* = (pi)_* = 0_* = 0$.

Agora vamos mostrar ker $(p_*) \subset$ im (i_*). Se $p_*(z+B) = p(z)+B'' = B''$ então $p(z) = d''(a'')$. Como p é sobrejetora existe a com $a'' = pa$, então $p(z) = d''p(a) = pd(a)$ e $p(z-d(a)) = 0$. Pela exatidão existe a' com $i(a') = z - d(a)$, logo $id'(a') = di(a') = d(z) - dd(a) = 0$ pois z é um ciclo. Como i é injetivo temos que $d'(a') = 0$ portanto $a' \in Z'$. Daí $i_*(a' + B') = i(a') + B = z - d(a) + B = z + B$.

(2) Exatidão em $H_{n-1}(A'')$ se e só se im $p_* = \ker\, \partial$.

Primeiro vamos mostrar im $(p_*) \subset \ker\, (\partial)$. Considere $\partial p_*(z+B) = \partial(p(z)+B'') = x'+B'$, onde $i(x') = dp^{-1}p(z) = d(z) = 0$, como i e injetivo então $x' = 0$ e $\partial p_* = 0$.

Agora vejamos que ker $\partial \subset$ im p_*. Se $\partial(z'' + B'') = B'$ então $x' = i^{-1}dp^{-1}(z'') \in B'$ então $x' = d'(a')$. Logo $i(x') = id'(a') = di(a') = dp^{-1}(z'')$, então $d(p^{-1}(z'') - i(a')) = 0$ e $p^{-1}(z'') - i(a') \in Z$. Dai $p_*(p^{-1}(z'') - i(a') + B) = pp^{-1}(z'') - pi(a') + B'' = z'' + B''$.

(3) Exatidão em $H_{n-1}(A'')$ se e só se im $(\partial) = \ker\, (i_*)$

Primeiro im $(\partial) \subset \ker\, (i_*)$, como $i_*\partial(z'' + B'') = i(x') + B$, onde $i(x') = dp^{-1}(z'') \in B$.

Agora vamos mostrar que ker $(i_*) \subset$ im (∂). Supor que $i_*(z' + B') = i(z') + B = B$, então $i(z') = d(a)$, logo $d''p(a) = pd(a) = pi(z') = 0$ e $p(a) \in Z''$. Mas $\partial(p(a)+B'') = x'+B'$, onde $i(x') = dp^{-1}p(a) = d(a) = i(z')$, como i é injetivo então $x' = z'$ e $\partial(p(a) + B'') = z' + B'$.

$\square$

Observação 2.1.17. O teorema anterior é chamado o Triângulo Exato

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] H(A') \arrow[rr, "i_*"] \arrow[dr, "p_*"'] & & H(A) \\ & H(A'') \arrow[ur, "\partial"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema 2.1.18. ***(Naturalidade)*** *Considere o diagrama comutativo de complexos com linhas exatas:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "j"'] & C \arrow[r, "q"] & C'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Então existe um diagrama comutativo de módulos com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_n(A') \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(A) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "g_*"'] & H_n(A'') \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h_*"'] & H_{n-1}(A') \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_n(C') \arrow[r, "j_*"'] & H_n(C) \arrow[r, "q_*"'] & H_n(C'') \arrow[r, "\partial'"'] & H_{n-1}(C') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Demonstração. A exatidão das linhas segue pelo teorema 2.1.16. Os primeiros dois quadrados comutam porque H_n é um funtor. A definição dos homomorfismos de conexão ∂ e ∂' implica na comutatividade do 3° quadrado.

□

Definição 2.1.19. Seja $f : A \to A'$ uma cadeia de morfismos. Dizemos que f é homotópicamente nula, se existem homomorfismos $s_n : A_n \to A'_{n+1}$ tais que para todo n:

$$f_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[d, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & A'_n \arrow[r, "d'_n"'] & A'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Se f e g são dois morfismos de cadeias de A em A', então dizemos que f é homotópica a g se $f - g$ é homotópicamente nula. As aplicações $\{s_n : n \in \mathbb{Z}\}$ formam uma homotópia.

Observação 2.1.20. A homotópia é uma relação de equivalência em $\mathrm{Hom}_{Comp}(A, A')$.

Teorema 2.1.21. *Sejam f , $g : A \to A'$ morfismos de complexos, então*

$$f_* = g_* : H_n(A) \to H_n(A')$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Seja z um $n - ciclo$ então $fz - gz = d'sz + sdz$, como $dz = 0$ temos que $fz - gz \in B_n(A')$ então $f_* = g_*$.

□

2.2 Funtores Derivados

Definição 2.2.1. Seja X um complexo de R-módulos, dado por

$$X : \cdots \longrightarrow X_i \xrightarrow{d_i} X_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

Definimos o complexo apagado de X como

$$X_M : \cdots \longrightarrow X_i \xrightarrow{d_i} X_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} X_0 \longrightarrow 0$$

Seja Y um complexo de R-módulos, dado por

$$Y : 0 \longrightarrow N \longrightarrow Y^0 \xrightarrow{\partial^0} Y^1 \xrightarrow{\partial^1} Y^2 \longrightarrow \cdots$$

Definimos o complexo apagado de Y como

$$Y_N : 0 \longrightarrow Y^0 \xrightarrow{\partial^0} Y^1 \xrightarrow{\partial^1} Y^2 \longrightarrow \cdots$$

Definição 2.2.2. Se $\overline{f} : X_A \to X_{A'}$ é um morfismo de cadeias tal que $f\varepsilon = \varepsilon' \overline{f}_0$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed] & X_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed] & X_0 \arrow[r, "\varepsilon = d_0"] \arrow[d, dashed, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X_2' \arrow[r, "d_2'"'] & X_1' \arrow[r, "d_1'"'] & X_0' \arrow[r, "\varepsilon' = d_0'"'] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

então dizemos que $\overline{f}$ é um morfismo de cadeias sobre f.

Teorema 2.2.3. ***(Teorema de Comparação)*** *Considere o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed] & X_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed] & X_0 \arrow[r, "\varepsilon = d_0"] \arrow[d, dashed, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X_2' \arrow[r, "d_2'"'] & X_1' \arrow[r, "d_1'"'] & X_0' \arrow[r, "\varepsilon' = d_0'"'] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde as linhas são complexos de R-módulos. Se X_n é projetivo para todo $n \geq 0$ e a segunda linha é exata, então existe um morfismo de complexos $\overline{f} : X_A \to X'_{A'}$ tal que $d_0'\overline{f}_0 = fd_0$. Ainda mais se existe outro morfismo de complexos $h : X_A \to X_B$ que estende f então $\overline{f} \sim h$.

Demonstração.

(i) A existência de $\overline{f}$ é feita usando usando indução em n. Se $n = 0$ temos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X_0 \arrow[dl, dashed, "\overline{f}_0"'] \arrow[d, "f\varepsilon"] & \\
X_0' \arrow[r, "\varepsilon'"] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como ε' é sobrejetiva e X_0 é projetivo, existe um homomorfismo $\overline{f}_0 : X_0 \to X_0'$ com $\varepsilon'\overline{f}_0 = f\varepsilon$.

Supor que ja construimos $\overline{f}_0, \cdots, \overline{f}_n$ morfismos. Note que im $(\overline{f}_n d_{n+1}) \subset$ im $(d'_{n+1}) =$ $\ker(d_n')$ pois $d_n'\overline{f}_n d_{n+1} = \overline{f}_{n-1} d_n d_{n+1} = \overline{f}_{n-1} 0 = 0$. Então temos o diagrama

$$\begin{tikzcd} & X_{n+1} \arrow[dl, dashed, "\overline{f}_{n+1}"'] \arrow[d, "\overline{f}_n d_{n+1}"] & \\ X'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & \mathrm{im} d'_{n+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como X_{n+1} é projetivo existe um homomorfismo $\overline{f}_{n+1} : X_{n+1} \to X'_{n+1}$ com $d'_{n+1}\overline{f}_{n+1} = \overline{f}_n d_{n+1}$.

(ii) Unicidade de $\overline{f}$ por homotopia. Supor que existe $h : X_A \to X'_{A'}$ outro morfismo de cadeias satisfazendo $\varepsilon' h_0 = f\varepsilon$. Construimos uma homotopia s por indução.

Definamos $s_{-1} : 0 \to X'_0$ como $s_{-1} = 0$. Para o passo indutivo e também para s_0, provaremos que im $(h_{n+1} - \overline{f}_{n+1} - s_n d_{n+1}) \subset$ im d'_{n+2} assim temos o diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X_{n+1} \arrow[dl, dashed, "s_{n+1}"'] \arrow[d, "h_{n+1}-\overline{f}_{n+1}-s_n d_{n+1}"] & \\ X'_{n+2} \arrow[r, "d'_{n+2}"] & \mathrm{im} d'_{n+2} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como X_{n+1} é projetivo existe um homomorfismo $s_{n+1} : X_{n+1} \to X'_{n+2}$ satisfazendo a equação que queremos. Para verificar a inclusão, pela exatidão da linha inferior no diagrama original temos que im $(d'_{n+2}) =$ ker (d'_{n+1}) é suficiente mostrar $d'_{n+1}(h_{n+1} - \overline{f}_{n+1} - s_n d_{n+1}) = 0$.

De fato

$$\begin{aligned} d'_{n+1}(h_{n+1} - \overline{f}_{n+1} - s_n d_{n+1}) &= d'_{n+1}(h_{n+1} - \overline{f}_{n+1}) - (h_n - \overline{f}_n - s_{n-1} d_n) d_{n+1} \\ &= d'_{n+1}(h_{n+1} - \overline{f}_{n+1}) - (h_n - \overline{f}_n) d_{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois h e $\overline{f}$ são morfismos de cadeias.

□

Definição 2.2.4. Seja $F : {}_R\mathfrak{M} \to {}_S\mathfrak{M}$, um funtor aditivo. Para cada $A \in_R \mathfrak{M}$ fixamos uma resolução projetiva:

$$P : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

Denotemos com L_nF o n-esimo funtor derivado de F definido por $L_nF : {}_R\mathfrak{M} \to {}_S\mathfrak{M}$ como $(L_nF)(A) = H_n(F(P_A)) = \ker Fd_n/\text{im } Fd_{n+1}$. Para completar a definição de L_nF vejamos como age em $f : A \to B$ um homomorfismo de R-módulos. Pelo teorema de comparação existe um morfismo de cadeias $\overline{f} : P_A \to P_B$ que extende f. Definamos:

$$(L_nF)f : (L_nF)A \to (L_nF)B$$

por $(L_nF)f = H_n(F\overline{f})$, então $(L_nF)f : z_n + \text{im } Fd_{n+1} \longmapsto (F\overline{f})z_n + \text{im } Fd'_{n+1}$

Observação 2.2.5. $(L_nF)f$ não depende de $\overline{f}$, se $h : P_A \to P_B$ outro morfismo de cadeias que extende f então pelo teorema 2.2.3 $h \sim f \Rightarrow F(h) \sim F(\overline{f})$ então pelo teorema 2.1.21 temos que $H_n(Fh) = H_n(F\overline{f})$.

Teorema 2.2.6. *Dado um funtor F, então L_nF é um funtor aditivo para todo n.*

Seja $\widehat{P} : \cdots \longrightarrow \widehat{P}_2 \xrightarrow{\widehat{d_2}} \widehat{P}_1 \xrightarrow{\widehat{d_1}} \widehat{P}_0 \xrightarrow{\widehat{d_0}} A \longrightarrow 0$ uma outra resolução projetiva fixa de A então usando $\widehat{P}$ construimos o funtor derivado $(\widehat{L}_nT)(A) = H_n(T(\widehat{P}_A))$.

Teorema 2.2.7. *Para qualquer funtor aditivo T, o funtor derivado L_nT e $\widehat{L}_nT$ são naturalmente equivalentes. Em particular, para cada A, $(L_nT)A \cong (\widehat{L}_nT)A$. Isto é, que estes módulos são independentes da escolha da resolução projetiva de A.*

Demonstração. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \widehat{P}_2 \arrow[r] & \widehat{P}_1 \arrow[r] & \widehat{P}_0 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde a linha superior é a resolução projetiva escolhida de A usada para definir L_nT e a linha inferior é usada para definir $\widehat{L}_nT$. Pelo teorema 2.2.3, existe um morfismo de cadeias $i : P_A \to \widehat{P}_A$ que estende a 1_A, único por homotopia e aplicando T obtemos um morfismo de cadeias $Ti : TP_A \to T\widehat{P}_A$ sobre 1_{TA} esta ultima induz homomorfismos

$$\tau_A = H_n(T(i)) : (L_nT)A \to (\widehat{L}_nT)A.$$

Afirmamos que τ_A é um isomorfismo. Trocando P com $\widehat{P}$ obtemos a inversa de τ_A, pelo teorema 2.2.3 existe um morfismo de cadeias $j : \widehat{P} \to P_A$ que estende a 1_A então o homomorfismo

$$H_n(T(j)) : (\widehat{L}_n T)A \to (L_n T)A$$

é a inversa de τ_A, de fato como $ji : P_A \to P_A$ é também um morfismo de cadeias que estende a 1_A, como $1_{P_A} : P_A \to P_A$ é um morfismo de cadeias que estende 1_A então o teorema 2.2.3 diz que $ji \sim 1_{P_A}$ então $T(1_{P_A}) \sim T(ji)$. Assim $1_{H_n(T(P_A))} = H_n(T(1_{P_A})) = H_n(T(ji))) = H_n(T(j)T(i)) = H_n(T(j))H_n(T(i)) = H_n(T(j))\tau_A$. Por semelhança $H_n(T(i))H_n(T(j)) = 1_{H_n(T(\widehat{P}_A))}$. Portanto τ_A é um isomorfismo.

□

Corolário 2.2.8. *Seja* $P : \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$

uma resolução projetiva e defina $K_0 = \ker\,(\varepsilon)$ *e* $K_n = \ker\,(d_n)$ *para todo* $n \geq 1$. *Então, se* T *é covariante*

$$(L_{n+1}T)A \cong (L_nT)K_0 \cong (L_{n-1}T)K_1 \cong \cdots \cong (L_1T)K_{n-1}$$

Demonstração. Notemos que $\cdots \to P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} K_0 \longrightarrow 0$ é uma resolução projetiva de K_0. Definamos $Q_{n-1} = P_n$ e $\Delta_{n-1} = d_n$ para $n \geq 1$. Assim a resolução fica

$$Q : \cdots \to Q_2 \xrightarrow{\Delta_2} Q_1 \xrightarrow{\Delta_1} Q_0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0$$

Por definição temos que

$$\begin{aligned}(L_nT)K_0 \cong H_n(TQ_{K_0}) &= \ker(T\Delta_n)/\mathrm{im}(T\Delta_{n+1}) = \ker(Td_{n+1})/\mathrm{im}(Td_{n+2}) = H_{n+1}(TP_A)\\ &= (L_{n+1}T)A\end{aligned}$$

□

Lema 2.2.9. ***(Lema de Ferradura)*** *Considere o diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "d_2'"] & & {} \arrow[d, "d_2''"] & \\
 & P_1' \arrow[d, "d_1'"] & & P_1'' \arrow[d, "d_1''"] & \\
 & P_0' \arrow[d, "\varepsilon'"] & & P_0'' \arrow[d, "\varepsilon''"] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"'] \arrow[d] & A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

onde as colunas são resoluções projetivas e a linha é exata. Então existe uma resolução projetiva de A e uma cadeia de morfismos tal que as colunas formam uma sequência exata de complexos

Demonstração. Por indução, é suficiente completar o diagrama 3x3:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] & \\
0 \arrow[r, dashed] & K_0' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & K_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & K_0'' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & P_0' \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\varepsilon'"] & P_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & P_0'' \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"'] \arrow[d] & A \arrow[r, "p"'] \arrow[d, dashed] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

onde as linhas e colunas são exatas, P_0', P_0'' são projetivos e $K_0' = \ker\,(\varepsilon')$, $K_0'' = \ker\,(\varepsilon'')$. Definamos $P_0 = P_0' \oplus P_0''$ e $i_0 : P_0' \to P_0$ por $x' \longmapsto (x', 0)$ e $p_0 : P_0 \to P_0''$ por $(x', x'') \longmapsto x''$. É claro que P_0 é projetivo e que $0 \longrightarrow P_0' \xrightarrow{i_0} P_0 \xrightarrow{p_0} P_0'' \longrightarrow 0$ é exata. Como P_0'' é projetivo, existe um homomorfismo $\sigma : P_0'' \to A$ com $p\sigma = \varepsilon''$. Definamos $\varepsilon : P_0 \to A$ por $\varepsilon(x', x'') = i\varepsilon'(x') + \sigma(x'')$. Note que se $K_0 = \ker\,(\varepsilon)$ o diagrama 3x3 comuta. A linha superior é exata pelo **lema** 3×3 (ver [10], pagina 175).

□

Teorema 2.2.10. *Seja $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ uma sequência de módulos. Se T é um funtor aditivo covariante, existe uma sequência*

$$\cdots \longrightarrow L_nTA' \longrightarrow L_nTA \longrightarrow L_nTA'' \xrightarrow{\partial} L_{n-1}TA' \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow L_0TA' \longrightarrow L_0TA \longrightarrow L_0TA'' \longrightarrow 0$$

Demonstração. Sejam $\cdots \to P_1' \to P_0' \to A' \to 0$ e $\cdots \to P_1'' \to P_0'' \to A'' \to 0$ resoluções projetivas de A' e de A''. Pelo Lema de 2.2.9 existe uma resolução projetiva de A isto é, $\cdots \to \widehat{P}_1 \to \widehat{P}_0 \to A \to 0$. Observamos que cada linha $0 \to P_i' \to \widehat{P}_i \to P_i'' \to 0$ exata é cindida, pois P_i'' é projetivo. Como T é um funtor aditivo $0 \to TP_i' \to T\widehat{P}_i \to TP_i'' \to 0$ é exata também (embora T não é um funtor exato) e pelo Teorema 2.1.16 existe uma sequência exata longa

$$\cdots \to H_n(TP'_{A'}) \to H_n(T\widehat{P}_A) \to H_n(TP''_{A''}) \to H_{n-1}(TP'_{A'}) \to \cdots$$

Isto é , existe uma sequência

$$\cdots \to L_nT(A') \to \widehat{L}_nT(A) \to L_nT(A'') \to L_{n-1}T(A') \to \cdots$$

Pelo Teorema 2.2.7 $L_nT(A) \cong \widehat{L}_nT(A)$ são naturalmente equivalentes então obtemos uma sequência exata longa

$$\cdots \to L_nT(A') \to L_nT(A) \to L_nT(A'') \to L_{n-1}T(A') \to \cdots$$

Note que $L_nT = 0$ para $n < 0$ pois $P_n = 0$ para todo $n < 0$ então $TP_n = 0$ para todo $n < 0$.

□

Corolário 2.2.11. *Para cada funtor covariante T, o funtor derivado L_0T é exato a direita.*

Teorema 2.2.12. *Os homomorfismos de conexão são naturais isto é, dado um diagrama comutativo com linhas exatas*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Então o seguinte diagrama comuta para todo $n \geq 1$

$$\begin{tikzcd}
L_nT(A'') \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "(L_nT)f''"'] & L_{n-1}T(A') \arrow[d, "(L_{n-1}T)f'"] \\
L_nT(B'') \arrow[r, "\widehat{\partial}"] & L_{n-1}T(B')
\end{tikzcd}$$

onde ∂ e $\widehat{\partial}$ são os homomorfismos de conexão.

Demonstração. Sejam P',P'', Q' e Q'' são resoluções projetivas de A' , A'', B' e B'' respetivamente. Pelo teorema 2.2.3 construimos um morfismo de cadeias $F' : P'_{A'} \to Q'_{B'}$ sobre f' e $F'' : P''_{A''} \to Q''_{B''}$ sobre f''. Pelo lema 6.24 de [10] existem resoluções projetivas $\widehat{P}$ de A e $\widehat{Q}$ de B e um morfismo de cadeias $F : \widehat{P}_A \to \widehat{Q}_B$ sobre f, assim obtemos um diagrama comutativo de complexos com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P'_{A'} \arrow[r] \arrow[d, "F'"] & \widehat{P}_A \arrow[r] \arrow[d, "F"] & P''_{A} \arrow[r] \arrow[d, "F''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q'_{B'} \arrow[r] & \widehat{Q}_B \arrow[r] & Q''_{B''} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Note que este diagrama permanece comutativo e com linhas exatas depois de aplicar T. O resultado segue do teorema 2.1.18.

$\square$

2.3 Funtor Tor

Definição 2.3.1. Se $T = - \otimes_R B$, então definimos $L_n T = \mathrm{Tor}_n^R(-, B)$. Em particular, $\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = \ker\,(d_n \otimes 1)/\mathrm{im}\,(d_{n+1} \otimes 1)$, onde

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

é qualquer resolução projetiva de A.

Teorema 2.3.2. *A definição de $\mathrm{Tor}_n^R(A, B)$ é independente da escolha da resolução projetiva de A.*

Demonstração. Pelo teorema 2.2.7 temos o resultado.

$\square$

Teorema 2.3.3. *Sejam $A \in \mathfrak{M}_R$ e $B \in {}_R\mathfrak{M}$,*

$$P : \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

$$Q : \cdots \longrightarrow Q_2 \xrightarrow{\partial_2} Q_1 \xrightarrow{\partial_1} Q_0 \xrightarrow{\partial_0} B \longrightarrow 0$$

resoluções projetivas, então $H_n(P_A \otimes_R B) \simeq H_n(A \otimes_R Q_B)$.

Observação 2.3.4. Sejam $A \in \mathfrak{M}_R$ e $B \in {}_R\mathfrak{M}$ então

$$\operatorname{Tor}_n^R(A,B) = H_n(P_A \otimes_R B) = H_n(A \otimes_R Q_B)$$

onde P_A e Q_B são resoluções projetivas.

Teorema 2.3.5. *Se n é negativo então $\operatorname{Tor}_n^R(A,B) = 0$ para todo A, B.*

Demonstração. Seja $Q_B =: \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to 0$ para todo A, B. Então $A \otimes_R B$ só tem zeros a direita de $A \otimes_R Q_0$, daí $\operatorname{Tor}_n^R(A,B) = 0$ para todo A , B e $n < 0$.

□

Teorema 2.3.6. *Tor_0^R e $A \otimes_R -$ são naturalmente equivalentes. Também $\operatorname{Tor}_0^R(-,B)$ e $- \otimes_R B$ são naturalmente equivalentes.*

Demonstração. Seja a resolução apagada $Q_B : \cdots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{d_1} Q_0 \xrightarrow{d_0} 0$ então temos que $\operatorname{Tor}_0^R(A,B) = \ker\,(1 \otimes d_0)/\mathrm{im}\,(1 \otimes d_1)$. Note que a resolução projetiva dada por $\cdots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{d_1} Q_0 \xrightarrow{\varepsilon} B \longrightarrow 0$ é exata então aplicamos o funtor $A \otimes_R -$ temos:

$$A \otimes Q_1 \xrightarrow{1\otimes d_1} A \otimes Q_0 \xrightarrow{1\otimes\varepsilon} A \otimes_R B \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata. Então como $\ker(1 \otimes \varepsilon) = \mathrm{im}\,(1 \otimes d_1)$ a aplicação $1 \otimes \varepsilon$ induz um isomorfismo $\varphi : \ker\,(1 \otimes d_0)/\mathrm{im}\,(1 \otimes d_1) \to A \otimes_R B$.

□

Observação 2.3.7. Se T é um funtor exato á direita então $L_0T \cong T$.

Teorema 2.3.8. *Se $0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$ é uma sequência exata de R-módulos a esquerda então existe uma sequência exata longa*

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(A,B'') \xrightarrow{\partial} A \otimes_R B' \longrightarrow A \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B'' \longrightarrow 0$$

com ∂ o homomorfismo de conexão, e analogamente na outra variável.

Demonstração. Pelos teoremas 2.2.10 e 2.3.6 obtemos o resultado.

□

Teorema 2.3.9. *$\operatorname{Tor}_n^R(A,B) = 0$ se $n \geq 1$ e A ou B é projetivo*

Demonstração. Suponha que A é projetivo e como a definição de Tor não depende da escolha da resolução projetiva então seja $P : 0 \longrightarrow P_0 = A \xrightarrow{1_A} A \longrightarrow 0$ com $P_i = 0$

para todo $i \geq 1$. Então $\mathrm{Tor}_n^R(A,B) = H_n(P_A \otimes_R B) = 0$ se $n \geq 1$. O caso quando B é projetivo é análogo.

$\square$

Definição 2.3.10. Seja R um anel associativo. O anel oposto R^{op} é o anel com mesma estrutura aditiva $(R,+)$ mas o produto $r_1 * r_2 = r_2.r_1$ onde $\cdot$ é o produto em R.

Se $A \in \mathfrak{M}_R$ então $A \in {}_{R^{op}}\mathfrak{M}$.

Exemplo 2.3.11. Seja $A \in \mathfrak{M}_R$ e $B \in {}_R\mathfrak{M} \Rightarrow A \in {}_{R^{op}}\mathfrak{M}$ e $B \in \mathfrak{M}_{R^{op}}$ e $A \otimes_R B \simeq B \otimes_{R^{op}} A$.

Teorema 2.3.12. *Sejam $A, B \in {}_R\mathfrak{M}$, então*

$$\mathrm{Tor}_n^R(A,B) \simeq \mathrm{Tor}_n^{R^{op}}(B,A)$$

para todo $n \geq 0$.

Demonstração. Seja $P_A : \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$ uma resolução projetiva apagada de A. Então pelo exemplo 2.3.11

$$\mathrm{Tor}_n^R(A,B) = H_n(P_A \otimes_R B) \simeq H_n(B \otimes_{R^{op}} P_A).$$

Como P_i é um R-módulo a direita projetivo então P_i é um $R^{op} - módulo$ a esquerda projetivo, assim $H_n(B \otimes_{R^{op}} P_A) = Tor_n^{R^{op}}(A,B)$, para todo $n \geq 0$.

$\square$

Corolário 2.3.13. *Se R é comutativo então*

$$Tor_n^R(A,B) \simeq Tor_n^R(B,A)$$

Para todo $n \geq 0$ e todo A, B.

Definição 2.3.14. Dizemos que é $A \in \mathfrak{M}_R$ é plano se $A \otimes_R -$ é um funtor exato.

Teorema 2.3.15. *Se F é plano então $Tor_n^R(F,B) = 0$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. $\square$

Observação 2.3.16. Se $0 \to K \to P \to B \to 0$ é uma sequência exata curta de módulos, temos sequências exatas longas em Ext e Tor. Uma demonstração do resultado sobre Tor_i e Ext^i usando mudança de dimensão é uma demonstração indutiva sobre i usando a sequência longa exata.

Teorema 2.3.17. *Se $\mathrm{Tor}_1^R(F,B) = 0$ para todo B, então F é plano.*

Demonstração. Se $0 \longrightarrow B' \xrightarrow{i} B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$ é exata, então

$$\mathrm{Tor}_1^R(F, B'') \longrightarrow F \otimes B' \xrightarrow{1 \otimes i} F \otimes B ,$$

é parte de sequência exata. Como $\mathrm{Tor}_1^R(F, B'') = 0$ segue que $1 \otimes i$ é injetivo, daqui F é plano.

□

Teorema 2.3.18. $\mathrm{Tor}_n^R(\bigoplus_k A_k, B) \simeq \bigoplus_k \mathrm{Tor}_n^R(A_k, B)$ *para todo* $n \geq 0$.

Demonstração. Use mudança de dimensão e o teorema 1.4.10.

□

Teorema 2.3.19. *Seja I o conjunto direcionado então* $\mathrm{Tor}_n^R(\varinjlim_{i \in I} A_k, B) \simeq \varinjlim_{i \in I} \mathrm{Tor}_n^R(A_k, B)$ *para todo* $n \geq 0$

Demonstração. Use mudança de dimensão e o teorema 1.7.14.

□

Teorema 2.3.20. *Se R é comutativo, então* $\mathrm{Tor}_n^R(A, B)$ *é um R-modulo.*

Teorema 2.3.21. *Se $r \in Z(R)$ o centro de R e $\mu : A \to A$ é a multiplicação por r, então $\mu_* : Tor_n^R(A, B) \to Tor_n^R(A, B)$ é multiplicação com z.*

Demonstração. Semelhante á prova do teorema 7.16 de [10].

□

2.4 Tor e Torção

Seja R um domínio e Q o corpo de frações de R. K denota o módulo $K = Q/R$. O submódulo de torção tA de um módulo A é definido como:

$$tA = \{a \in A : ra = 0 \text{ para algum } r \in R \setminus \{0\}\ \}.$$

Definição 2.4.1. Dizemos que um módulo A é módulo de torção se $tA = A$, também um módulo A é livre de torção se $tA = 0$.

Lema 2.4.2. *Existe um isomorfismo natural* $\mathrm{Tor}_1^R(K, A) \cong A$ *para todo módulo de torção A.*

Demonstração. Pela exatidão de $0 \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 0$ obtemos a exatidão de

$$\mathrm{Tor}_1^R(Q,A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(K,A) \xrightarrow{\partial} R \otimes_R A \longrightarrow Q \otimes_R A = 0$$

como Q é módulo plano, pelo corolário 2.3.15 $\mathrm{Tor}_1^R(Q,A) = 0$ além disso $Q \otimes_R A = 0$ pois A é torção. Segue que $\partial = \partial_A$ é um isomorfismo. Se B é torção e $f : A \to B$ é homomorfismo, da naturalidade do homomorfismo de conexão temos que o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_1^R(Q,A) \arrow[r, "\partial=\partial_A"] \arrow[d, "f_*"'] & A \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{Tor}_1^R(K,B) \arrow[r, "\partial_B"] & B
\end{tikzcd}$$

□

Lema 2.4.3. $\mathrm{Tor}_n^R(K,A) = 0$ *para todo* A *e todo* $n \geq 2$.

Demonstração. A sequência exata curta $0 \to R \to Q \to K \to 0$ gera sequência exata longa em $\mathrm{Tor}_*^R(-,A)$ portanto $\mathrm{Tor}_n^R(Q,A) \to \mathrm{Tor}_n^R(K,A) \to \mathrm{Tor}_{n-1}^R(R,A)$ é exata. Como Q e R são planos então $\mathrm{Tor}_n^R(Q,A) = 0 = \mathrm{Tor}_{n-1}^R(R,A)$ para $n-1 \geq 1$. Portanto $\mathrm{Tor}_n^R(K,A) = 0$ para todo $n \geq 2$.

□

Lema 2.4.4. *Se* A *é livre de torção então* $\mathrm{Tor}_1^R(K,A) = 0$.

Demonstração. Como A é livre de torção pode ser mergulhado em um espaço vetorial E sobre Q. Como $E = \oplus Q$, Q é plano como R-módulo livre então E é plano como R-módulo. Como Q é plano como R-módulo $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow E/A \longrightarrow 0$ é exata então

$$\mathrm{Tor}_2^R(K,E/A) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Tor}_1^R(K,A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(K,E)\ ,$$

é exata. Além disso $\mathrm{Tor}_1^R(K,E) = 0$ pois E é plano e pelo lema 2.4.3 temos que $\mathrm{Tor}_2^R(K,E/A) = 0$.

□

Teorema 2.4.5. *Os funtores* $Tor_1(K,-)$ *e* t *são naturalmente equivalentes.*

Demonstração. Pela exatidão de $0 \longrightarrow tA \xrightarrow{i} A \longrightarrow A/tA \longrightarrow 0$ obtemos a exatidão de $\mathrm{Tor}_2^R(K, A/tA) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(K, tA) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Tor}_1^R(K, A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(K, A/tA)$. Pelo lema 2.4.3 $\mathrm{Tor}_2^R(K, A/tA) = 0$. Pelo lema 2.4.4 $\mathrm{Tor}_1^R(K, A/tA) = 0$. Daí segue que i_* é um isomorfismo, como tA é módulo de torção, então pelo teorema 2.4.2 $\mathrm{Tor}_1^R(K, tA) \simeq tA$.

□

Corolário 2.4.6. *Para todo R-módulo A, existe uma sequência exata de módulos*

$$0 \longrightarrow tA \longrightarrow A \longrightarrow Q \otimes_R A \longrightarrow K \otimes_R A \longrightarrow 0\,.$$

Demonstração. Como $0 \longrightarrow R \longrightarrow Q \longrightarrow K \longrightarrow 0$ é exata temos que a sequência $\mathrm{Tor}_1^R(Q, A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(K, A) \longrightarrow R \otimes_R A \longrightarrow Q \otimes_R A \longrightarrow K \otimes_R A \longrightarrow 0$ é exata. Observamos que $R \otimes_R A \simeq A$. Como Q é plano como R-módulo então $\mathrm{Tor}_1^R(Q, A) = 0$ e o teorema 2.4.5 disse que $\mathrm{Tor}_1^R(K, A) = tA$.

□

Corolário 2.4.7. *Um módulo A é módulo de torção se e somente se $Q \otimes_R A = 0$.*

Demonstração. Se A é módulo de torção então $Q \otimes_R A = 0$. Agora se $Q \otimes_R A = 0$ então pelo corolario 2.4.6 temos que $A = tA$ é módulo de torção.

□

Lema 2.4.8. *Se B é R-módulo de torção então $Tor_n^R(A, B)$ é torção para todo A e para todo $n \geq 0$.*

Demonstração. Fazemos mudança de dimensão. Se $n = 0$, cada gerador $a \otimes b$ é de torção assim $\mathrm{Tor}_0^R(A, B) = A \otimes_R B$ é módulo de torção. Se n = 1, existe uma sequência exata $0 \to N \to P \to A \to 0$ com P projetivo, então a sequência $0 = \mathrm{Tor}_1^R(P, B) \to \mathrm{Tor}_1^R(A, B) \to N \otimes_R B$ é exata. Como $N \otimes_R B$ é módulo de torção, pelo caso $n = 0$, então o submódulo $\mathrm{Tor}_1^R(A, B)$ é módulo de torção. Para o passo indutivo supor que $\mathrm{Tor}_n^R(A, B)$ é módulo de torção então pela a exatidão de

$$0 = \mathrm{Tor}_{n+1}^R(P, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(A, B) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Tor}_n^R(N, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(P, B) = 0\,,$$

temos $\mathrm{Tor}_n^R(N, B) \simeq \mathrm{Tor}_{n+1}^R(A, B)$ .Portanto $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A, B)$ é módulo de torção.

□

Teorema 2.4.9. *$Tor_n^R(A, B)$ é módulo de torção para todo A, B e todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Seja $n = 0$ consideremos o caso quando B é módulo livre de torção. Pelo corolário 2.4.6 existe uma sequência exata $0 \to B \to E \to X \to 0$ onde E é um espaço vetorial sobre Q e $X = E/B$ é módulo de torção. Então a sequência $\mathrm{Tor}_2^R(A, X) \to \mathrm{Tor}_1^R(A, B) \to \mathrm{Tor}_1^R(A, E)$ é exata. Agora pelo lema 2.4.8 temos que $\mathrm{Tor}_2^R(A, X)$ é módulo de torção, também $\mathrm{Tor}_1^R(A, E) = 0$ pois E é plano. Assim, $\mathrm{Tor}_1^R(A, B)$ é um quociente de um módulo de torção, portanto é módulo de torção.

Agora, seja B arbitrário. Como a sequência $0 \to tB \to B \to B/tB \to 0$ é exata, então $\mathrm{Tor}_1^R(A, tB) \to \mathrm{Tor}_1^R(A, B) \to \mathrm{Tor}_1^R(A, B/tB)$ é exata. Note que $\mathrm{Tor}_1^R(A, tB)$ e $\mathrm{Tor}_1^R(A, B/tB)$ são módulos de torção pois tB é módulo de torção e B/tB é módulo livre de torção. Logo temos que $\mathrm{Tor}_1^R(A, B)$ é módulo de torção. Usamos mudança de dimensão para completar a demonstração.

$\square$

3 Números Virtuais Racionais de Betti de Grupos Metabelianos

3.1 Apresentações de grupos

Definição 3.1.1. Seja X um conjunto. Um grupo F é dito livre com base X, se existe uma aplicação $\varepsilon : X \to F$ de modo que para qualquer grupo G e qualquer aplicação $f : X \to G$ existe um único homomorfismo $\mu : F \to G$ tal que $f = \mu\varepsilon$.

Uma apresentação livre de G é um epimorfismo $\pi : F \to G$ onde F é grupo livre. Assim $R = \ker(\pi)$ é um subgrupo normal em F e $F/R \simeq G$, os elementos de R são chamados as relações da apresentação.

Supor que $\pi : F \to G$ é uma apresentação de G, com X o conjunto dos geradores livres de F. Escolha $M \subseteq F$ tal que gera o $\ker(\pi)$ como subgrupo normal. Então $\ker(\pi) := \langle M^F \rangle = \langle m^f := fmf^{-1} \mid m \in M, f \in F \rangle$.

Note que $L = \pi(X)$ gera G. Assim, $r \in F$ é uma relação de π se, e somente se, r pode se escrever como $(m_1^{\mu_1})^{f_1} \cdots (m_n^{\mu_n})^{f_n}$, onde $m_j \in M, \mu_j = \pm 1, f_j \in F$. A apresentação π junto com a escolha de X e M, determina um conjunto dos geradores para G e escrevemos $G = \langle X | M \rangle$.

Definição 3.1.2. Um grupo G é finitamente apresentado se ele tem uma apresentação $\langle X | R_0 \rangle$, onde conjuntos X e R_0 são finitos. Esta definição é independente da apresentação.

Definição 3.1.3. Seja G um grupo, dizemos que G é metabeliano se existe um subgrupo normal $A \triangleleft G$ e uma sequência exata curta de grupos

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$

com A e $Q = G/A$ abelianos e π a projeção.

Observação 3.1.4. A é um $\mathbb{Z}Q$-módulo a direita.

(1) A operação soma em A é restrição da operação produto em G.

(2) Para todo $q \in Q$ a ação de q sobre $a \in A$ é dado por $a \cdot q = g^{-1}ag$, onde $g \in \pi^{-1}(q)$ é chamada ação por conjugação e está bem definida. Em efeito, sejam $g_1, g_2 \in \pi^{-1}(q)$ então temos que $g_1^{-1}g_2 \in \ker \pi = A$, logo existe $b \in A$ tal que $g_1 = bg_2$ daí $g_1^{-1}ag_1 = (bg_2)^{-1}a(bg_2) = g_2^{-1}(b^{-1}ab)g_2 = g_2^{-1}(a)g_2$, pois $b, a \in A$ é abeliano.

Teorema 3.1.5. *Seja* $1 \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} K \longrightarrow 1$ *uma sequência exata curta de grupos com* A *abeliano e* π *a projeção. Se* G *é finitamente gerado e* K *finitamente apresentado então* A *é finitamente gerado como um* $\mathbb{Z}$K*-módulo.*

Demonstração. Como G é finitamente gerado então existem $g_1, ..., g_k$ elementos de G tais que $G = \langle g_1, g_2, ..., g_k\rangle$. Então existe um epimorfismo $\varepsilon : F \to G$, onde F e grupo livre com base $a_1, ..., a_k$ tal que $a_i \longmapsto g_i$ para todo $1 \leq i \leq k$. Observe que $\varphi = \pi\varepsilon$ é sobrejetivo, pois π e ε são sobrejetivos. Como K é finitamente apresentado, pelo teorema 2.2.3 [9] existem $b_1, ..., b_p \in F$ que geram o ker φ como subgrupo normal, i.e ker $\varphi = \langle b^{-1}b_1b, ..., b^{-1}b_pb \mid b \in F\rangle$. Note que $\varepsilon(\ker\varphi) = \ker\pi = A$, e sejam $c_i = \varepsilon(b_i) \in A$. Para todo $1 \leq i \leq p$ e todo $b \in F$ temos que $\varepsilon(b^{-1}b_ib) = \varepsilon(b)^{-1}\varepsilon(b_i)\varepsilon(b)$. Como ε é sobrejetivo, temos que $\varepsilon(F) = G$ então

$$\begin{aligned} A &= \varepsilon(\ker\varphi) \\ &= \langle \varepsilon(b^{-1}b_1b), ..., \varepsilon(b^{-1}b_pb) : b \in F\rangle \\ &= \langle g^{-1}\varepsilon(b_1)g, ..., g^{-1}\varepsilon(b_p)g : g \in \varepsilon(F) = G\rangle, \end{aligned}$$

então $A = c_1\mathbb{Z}\mathrm{K} + ... + c_p\mathbb{Z}\mathrm{K}$. Em efeito , seja K gerado por $q_1, ..., q_n$ e como $c_1, ..., c_p \in A$, para $1 \leq i \leq n$, seja $g_i \in G$ com $\pi(g_i) = q_i$ e supor que $Q = \langle g_1, ..., g_k, c_1, ..., c_p\rangle \subseteq G$. Definimos $m_i = \sum_{j=1}^{p_i} n_{q_{i_j}} q_{i_j} = \sum_{j=1}^{p_i} n_\pi(g_{i_j}\pi(g_{i_j})) \in \mathbb{Z}\mathrm{K}$, logo

$$\prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{p_i}(g_{i_j}^{-1}c_ig_{i_j})^{n_{\pi(g_{i_j})}} = \sum_{i=1}^{p}(\sum_{j=1}^{p_i} n_{\pi(g_{i_j})}c_i\pi(g_{i_j})) = \sum_{i=1}^{p} c_i(\sum_{j=1}^{p_i} n_{\pi(g_{i_j})}\pi(g_{i_j})) = \sum_{i=1}^{p} c_im_i$$

□

Corolário 3.1.6. *Seja* $1 \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} K \longrightarrow 1$ *uma sequência exata curta de grupos onde* A *e* K *são abelianos e* π *a projeção. Se* G *é finitamente gerado então* K *é finitamente gerado e* A *como um* $\mathbb{Z}K$*-módulo é finitamente gerado.*

Demonstração. Como os grupos abelianos finitamente gerados são finitamente apresentados então pelo teorema 3.1.5 temos o resultado.

□

Definição 3.1.7. Seja G um grupo. Dizemos que G é do tipo $\mathrm{FP_m}$ sobre $\mathbb{Z}$, se existe uma resolução projetiva $P : \cdots \to P_i \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$, onde P_i é um $\mathbb{Z}$G -módulo finitamente gerado para todo $0 \leq i \leq m$ e $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}G$-módulo trivial i.e. G age como 1.

Teorema 3.1.8. *Seja* G *um grupo. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe resolução parcial* $F_n \to \cdots \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ *com cada* F_i $\mathbb{Z}G$*-módulo livre finitamente gerado,* $i \leq n$*.*

2. G *tem tipo* FP_n

3. *Para cada resolução parcial projetiva* $P_k \xrightarrow{d_k} \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ *de* $\mathbb{Z}G$*-módulos, onde cada* P_i *é finitamente gerado,* $i \leq k$*, temos que* $\ker(d_k)$ *é finitamente gerado.*

Demonstração. Ver Prop 4.3 de [5] □

Exemplo 3.1.9. Todo grupo G é um grupo de tipo FP_0

Lema 3.1.10. G *é* FP_1 *sobre* $\mathbb{Z}$*, se e somente se, é finitamente gerado*

Demonstração. Seja G grupo de tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}$ então existe uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$G -módulo,

$$P : \cdots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

tal que $P_0 = \mathbb{Z}\mathrm{G}$, P_1 é finitamente gerado e ε é a aplicação de aumento. Além disso o homomorfismo $d_1 : P_1 \to \ker(\varepsilon) = \Delta_G$ é sobrejetivo, e Δ_G é chamado o ideal augmentado de $\mathbb{Z}G$. Então Δ_G é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo. Supor que Δ_G é gerado por $\{a_i - 1 \mid a_i \in G, i = 1, ..., n\}$ (veja [11] Lema 9.4 e [5] ex. 1, 3, cap. I) e seja K o subgrupo finitamente gerado de G por $\{a_1, ..., a_n\}$ e seja Δ_K ideal augmentado de K. Note que $\mathbb{Z}\mathrm{G} \cdot \Delta_K = \Delta_G$, de fato pois eles são ideais de $\mathbb{Z}$G gerados por $\{a_i - 1 : 1 \leq i \leq n\}$. Logo aplicamos o funtor exato $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K} -$ á sequência exata curta

$$0 \to \Delta_K \to \mathbb{Z}K \to \mathbb{Z} \to 0$$

obtemos

$$0 \to \mathbb{Z}G.\Delta_K \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}(G/K) \to 0$$

sequência exata curta, pois $\mathbb{Z}$G é um $\mathbb{Z}K$ - módulo livre e portanto $\mathbb{Z}(G/K) = \mathbb{Z}\mathrm{G}/\mathbb{Z}\mathrm{G}.\Delta_K = \mathbb{Z}G/\Delta_G = \mathbb{Z}$, portanto $G = K$.

Reciprocamente, seja G um grupo finitamente gerado então o ideal augmentado Δ_G é finitamente gerado (veja [11] lema 9.4 e [5] ex. 1, 3, cap. I). Suponhamos $\Delta_G = (b_1, ..., b_n)$, seja $i_1 : \Delta_G \to \mathbb{Z}\mathrm{G}$ a inclusão e $\tau_1 : \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\mathrm{G} \to \Delta_G$ homomorfismo sobrejetivo dado por $\tau_1(e_i) = b_i$. Definimos $d_1 = i_1\tau_1 : \oplus_1^n \mathbb{Z}\mathrm{G} \to \mathbb{Z}\mathrm{G}$, logo vemos que a sequência

$$\oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\mathrm{G} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\mathrm{G} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é exata. Então estendendo esta sequência para uma resolução livre de $\mathbb{Z}G$ -módulos temos que G é FP_1.

□

Teorema 3.1.11. *Seja K um subgrupo de indice finito de G. Então G é de tipo* $\mathrm{FP_m}$ *sobre $\mathbb{Z}$ se, e somente se, K é de tipo* $\mathrm{FP_m}$ *sobre $\mathbb{Z}$.*

Demonstração. Veja [5], proposição 5.1.

□

Teorema 3.1.12. *Se G é um grupo de tipo* $\mathrm{FP_m}$ *sobre $\mathbb{Z}$ então $H_i(G,\mathbb{Z})$ é um grupo abeliano finitamente gerado para qualquer $0 \leq i \leq m$.*

Demonstração. Seja G um grupo de tipo $\mathrm{FP_m}$ sobre $\mathbb{Z}$ então existe uma resolução livre $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ de modo que P_i é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre de posto finito e cada P_i é finitamente gerado para $i \leq m$. Se aplicamos o funtor $-\otimes_{\mathbb{Z}G}\mathbb{Z}$ ao complexo $P_\bullet$ temos o complexo

$$P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} : \cdots \to P_m \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \to P_{m-1} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \to \cdots \to P_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \to 0,$$

daí

$$H_i(G,\mathbb{Z}) = H_i(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) = \ker(d_i \otimes id_{\mathbb{Z}})/\mathrm{im}(d_{i+1} \otimes id_{\mathbb{Z}}).$$

Além disso $P_i \simeq (\mathbb{Z}G)^{m_i}$ para algum $m_i < \infty$ se $i \leq m$, então

$$P_i \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z})^{m_i} \simeq \mathbb{Z}^{m_i}.$$

Assim $\ker(d_k \otimes id_{\mathbb{Z}}) \subseteq P_i \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}$ tem posto finito. Portanto $H_i(G,\mathbb{Z})$ tem posto finito para $0 \leq i \leq m$.

□

3.2 O Invariante geométrico de Bieri-Strebel

Seja K um grupo abeliano finitamente gerado. Definimos um caracter de K como um homomorfismo de grupos

$$\varepsilon : K \to \mathbb{R}$$

onde $\mathbb{R}$ é o grupo dos números reais com a operação de adição.

Se o posto livre de torção de K é $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ isto é, $K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = (\mathbb{Z}^n \oplus finito) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = (\mathbb{Z}^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \oplus (finito \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = (\oplus_n \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \oplus_n (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}^n$, então

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n.$$

Denotaremos o grupo dos caracteres por $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, \mathbb{R})$, ele pode ser considerado como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Podemos estender um caracter ε de K para uma função $\varepsilon : \mathbb{Z}K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \min\{\varepsilon(q) : q \in K \quad e \quad l_q \neq 0\} & se \quad x = \sum_{q \in K} l_q q \neq 0 \\ \\ \infty & se \qquad x = 0 \end{cases}$$

Além disso, para todo $r, s \in \mathbb{Z}K$

$$\varepsilon(r+s) \geq \min\{\varepsilon(r), \varepsilon(s)\} \quad \text{ e } \quad \varepsilon(rs) \geq \varepsilon(r) + \varepsilon(s).$$

Dizemos que dois caracteres ε e ε' são equivalentes se $\varepsilon^{'} = b\varepsilon$ onde $b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$. Note que esta relação é uma relação de equivalencia em $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, \mathbb{R})$. Seja $[\varepsilon]$ a classe de equivalência de ε. Denotaremos $S(K)$ o conjunto de todas as classes de equivalência

$$S(K) = \{[\varepsilon] \mid \varepsilon \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, \mathbb{R}) \backslash \{0\}\}$$

$S(K)$ é conhecido como a esfera de caracteres e podemos identificar com a esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ onde n é o posto de K. Note que $S(K)$ é vazio quando n=0, isto é quando K é um grupo finito. Para todo caracter ε de K , definimos

$$K_\varepsilon := \{q \in K \mid \varepsilon(q) \geq 0\} \subseteq K$$

Observe que K_ε é um submonoide de K, então $\mathbb{Z}K_\varepsilon$ é o anel de monoide, que é um subanel de $\mathbb{Z}K$.

Definição 3.2.1. O invariante de Bieri-Strebel de um $\mathbb{Z}K - m\acute{o}dulo$ finitamente gerado N é o seguinte subconjunto de $S(K)$:

$$\Sigma_N(K) = \{[\varepsilon] \in S(K) \mid \text{N é finitamente gerado como } \mathbb{Z}K_\varepsilon \text{ -módulo } \}$$

Outra maneira de definir $\Sigma_N(K)$ em termos do centralizador de N em $\mathbb{Z}K$ é

$$C(N) := \{h \in \mathbb{Z}K : ah = a, \text{ para todo } a \in N\} = 1 + Ann_{\mathbb{Z}K}(N)\}$$

onde $Ann_{\mathbb{Z}\mathrm{K}}(N) = \{\lambda \in \mathbb{Z}\mathrm{K} : \quad N\lambda = 0\}$. O invariante $\Sigma_N(K)$ e $C(N)$ são relacionados pelo seguinte teorema.

Teorema 3.2.2. *Sejam K um grupo abeliano finitamente gerado e N um $\mathbb{Z}K$-módulo finitamente gerado. Seja ε um caracter não trivial de K. Então N é um $\mathbb{Z}K_\varepsilon$-módulo finitamente gerado se, e somente se, $C(N)$ contem um elemento b tal que $\varepsilon(b) > 0$.*

Demonstração. Veja [3], proposição 2.1.

□

Corolário 3.2.3. *Sejam K um grupo abeliano finitamente gerado e N um $\mathbb{Z}K$ -módulo finitamente gerado. Então*

$$\Sigma_N(K) = \cup_{b \in C(N)}\{[\varepsilon] \mid 0 \neq \varepsilon \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, \mathbb{R}), \quad \varepsilon(b) > 0\}$$

Além disso, $\Sigma_N(K)$ é um subconjunto aberto de $S(K)$.

Demonstração. Note que é consequência imediata do teorema 3.2.2. Agora se $b \in C(N)$ o conjunto $\{[\varepsilon] : \quad \varepsilon(b) > 0\}$ é aberto, pois é a interseção de um número finito dos conjuntos abertos $\{[\varepsilon] : \varepsilon(q) > 0\}$, onde $q \in K$ com $b = \sum n_q q$, $n_q \neq 0$. Portanto $\Sigma_N(K)$ é aberto.

□

Definição 3.2.4. Seja N um $\mathbb{Z}K$-módulo dizemos que N é manso, se é finitamente gerado e

$$S(K) = \Sigma_N(K) \cup -\Sigma_N(K)$$

onde o ponto antípoda de $[\varepsilon] \in S(K)$ e definido por $-[\varepsilon] = [-\varepsilon]$.

Bieri e Strebel mostraram que, dada uma sequência exata curta de grupos $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow K$ podemos escrever a condição de que G seja finitamente apresentado em termos de $\Sigma_N(K)$

Teorema 3.2.5. ***(Bieri-Strebel)*** *Seja N um subgrupo normal abeliano de um grupo metabeliano G de modo que $K = G/N$ é abeliano. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

i) *N é manso como $\mathbb{Z}K$-módulo,*

ii) *G é finitamente apresentado,*

iii) *G é de tipo* FP_2 *sobre* $\mathbb{Z}$.

Demonstração. Veja [3], teoremas 3.1 e 4.1.

□

Teorema 3.2.6. ***(Bieri-Strebel)*** *Sejam K um grupo abeliano finitamente gerado e N um K-módulo manso. Então toda extensão de N por K é um grupo finitamente apresentado.*

Demonstração. Veja [3], teorema 3.1.

□

Definição 3.2.7. Seja G um grupo e N um subgrupo de G. Definimos a ação diagonal a esquerda de G sobre $\otimes_R^n N$ por

$$g(a_1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_n) = ga_1 \otimes ga_2 \otimes ... \otimes ga_n,$$

onde $a_i \in N$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Definição 3.2.8. Um $RK-$ *módulo* N, finitamente gerado é dito $n-$ *manso* se dados $v_1, v_2, ..., v_n$ são elementos de $Hom_{\mathbb{Z}}(K, \mathbb{R})\backslash\{0\}$ tais que

$$v_1 + v_2 + ... + v_n = 0$$

então $[v_i] \in \Sigma_N(K)$ para algum $1 \leq i \leq n$

Definição 3.2.9. Seja N um R-módulo, definimos o produto exterior como

$$\wedge_R^n N = \otimes_R^n N/W$$

onde W é gerado pelo conjunto $\{a_1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_n + (-1)^{\sigma} a_{\sigma(1)} \otimes a_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes a_{\sigma(n)}\}$

Teorema 3.2.10. *Sejam K um grupo abeliano finitamente gerado, R um corpo, N um RK-módulo finitamente gerado e $n \geq 2$ um inteiro. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *N é n-manso como RK-módulo,*

ii) *$\otimes_R^n N$ é finitamente gerado como RK-módulo via K-ação diagonal,*

iii) *$\wedge_R^i N$ são finitamente gerados como RK-módulos via K-ação diagonal para $i \leq n$,*

iv) *$\wedge_R^n N$ é finitamente gerado como RK-módulo via K-ação diagonal.*

Demonstração. Veja [2] Teorema C e [7], corolario B

□

Teorema 3.2.11. *Seja $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow K$ uma sequência exata de grupos, onde N e K são abelianos e G é finitamente gerado. Se G é de tipo* FP_2 *então $N \otimes_{\mathbb{Z}} F$ é manso como um FK - módulo para qualquer corpo F.*

Demonstração. Veja [2], teorema D □

3.3 Homología de grupos abelianos finitamente gerados

Todos os resultados descritos na seção 3.3 e 3.4 são casos particulares do artigo [6].

Definição 3.3.1. Seja R um anel comutativo, dizemos que R é Noetheriano se toda cadeia ascendente $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq ...$ de ideais de R é finita, isto é, existe $r \geq 1$ tal que $I_r = I_{r+1} = I_{r+2} = ...$

Definição 3.3.2. Seja R um anel comutativo, dizemos que R é Artiniano se toda cadeia descendente $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq ...$ de ideais de R estabiliza, isto é, existe $i \geq 1$ tal que $I_i = I_{i+1} = I_{i+2} = ...$

Seja R um anel comutativo Artiniano com unidade 1, assim R é um anel Noeteriano. Lembre-se que um R-módulo V tem comprimento finito d se existe uma filtração de submodulos $0 = V_d \subseteq V_{d-1} \subseteq \cdots \subseteq V_2 \subseteq V_1 \subseteq V_0 = V$ onde cada quociente V_i/V_{i+1} é um R -módulo simples não trivial. Todo R-módulo finitamente gerado tem comprimento finito ([1], Proposição 6.8). Denotamos isto por $l_R(V)$ para o comprimento d.

Definição 3.3.3. ***(Dimensão de Krull)*** Seja M um anel comutativo a dimensão de Krull de M é k, se k é o número maximal tal que existe uma cadeia de ideais primos

$$P_0 \leq P_1 \leq ... \leq P_k, \text{ em } M.$$

Exemplo 3.3.4. Seja $\mathbb{Z}$ o anel dos inteiros então a dim de Krull de $\mathbb{Z}$ é 1.

Exemplo 3.3.5. Seja k um corpo então a dim de Krull de $k[x]$ é 1.

Lema 3.3.6. *Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado com base $q_1, ..., q_n$ e I um ideal de $\mathbb{Q}Q$. Seja $B := \mathbb{Q}Q/I$ e B_m um ideal de B gerado pela imagem do conjunto $\{q_1^m - 1, ..., q_n^m - 1\}$. Então*

(i) B/B_m é um anel Artiniano.

(ii) Se $\sup_{m \geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} B/B_m < \infty$, então $\cup_{m\geq 1}\mathcal{B}_m$ é finito, onde $\mathcal{B}_m$ é o conjunto de todas as classes de isomorfismos de B/B_m- módulos simples.

(iii) Seja d_0 um número natural. Para todo número natural $m \geq 1$, sejam V_m e W_m B/B_m-módulos de comprimento finito, no máximo d_0. Se $\sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} B/B_m < \infty$ então para todo $j \geq 0$,

$$\sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(V_m, W_m) < \infty$$

Demonstração.

(i) Segue diretamente do fato que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\,[Q/Q_m] < \infty$. Note que B/B_m tem dimensão Krull 0, daí todo ideal primo de B/B_m é máximal e o conjunto $\operatorname{Max}(B/B_m)$ dos ideais maximais do anel B/B_m é finito.

(ii) Seja $F := (B/B_m)/J$ um B/B_m - módulo simples,daí F é um corpo. Supor que $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq \mathbb{C}$. A imagem $\overline{Q}$ de Q em F é um quociente de um grupo finito Q/Q^m. Então $\overline{Q} = Q/H$ é um subgrupo finito de $\mathbb{C}^*$, daí é um grupo cíclico finito dizemos de ordem s, então por [8], Teorema 3.1,Cap. VI. Temos que $\varphi(s) = \dim_{\mathbb{Q}} F \leq \sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} B/B_m < \infty$ onde φ é a função de Euler. Assím existe um limite superior para s. Como Q é finitamente gerado, o número de subgrupos H de índices s em Q é finito. Assim F é quociente de $\mathbb{Q}[Q/H]$ e pode ser um $\mathbb{Q}Q$-módulo só de um numero finito de maneiras.

(iii) Se $l_{B/B_m}(V_m) = s \leq d_0$ e $l_{B/B_m}(W_m) = s' \leq d_0$ então temos filtrações

$$0 = F_{0,m} \subset F_{1,m} \subset \cdots \subset F_{s-1,m} \subset F_{s,m} = V_m$$
$$0 = E_{0,m} \subset E_{1,m} \subset \cdots \subset E_{s'-1,m} \subset E_{s',m} = W_m$$

de V_m e W_m, respetivamente, tais que os quocientes $V_{t,m}; = F_{t,m}/F_{t-1,m}$ e $W_{t',m} := E_{t',m}/E_{t'-1,m}$ são B/B_m-módulos simples não-triviais. Assim $V_{t,m} \simeq (B/B_m)/J_t$ e $W_{t',m} \simeq (B/B_m)/\overline{J}_t$ para alguns $J_t, \overline{J} \in \operatorname{Max}(B/B_m)$.

Por indução sobre s, temos que

$$\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(V_m, W_m) \leq \sum_{1\leq t\leq s} \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(V_{t,m}, W_m) \tag{3.1}$$

de (3.1), obtemos que

$$\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(V_m, W_m) \leq s. \max_{1\leq t\leq s} \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(V_{t,m}, W_m).$$

De forma análoga, fazendo indução sobre s' , temos que

$$\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(V_{t,m}, W_m) \quad \leq s'. \max_{1\leq t'\leq s'} \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(V_{t,m}, W_{t',m})$$

Então

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(V_m, W_m) &\leq ss'. \max_{1\leq t\leq s} \max_{1\leq t'\leq s'} \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(V_{t,m}, W_{t',m}) \\ &\leq d_0^2. \max_{1\leq t\leq s} \max_{1\leq t'\leq s'} \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(V_{t,m}, W_{t',m})\end{aligned}$$

Como $V_{t,m}, W_{t',m} \in \{(B/B_m)/J \mid J \in \operatorname{Max}(B/B_m), m \geq 1\}$ pelo item (ii) temos que $\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(V_m, W_m) \leq d_0^2. \max_{\substack{1\leq t\leq s\\ 1\leq t'\leq s'}} \{\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(V_{t,m}, W_{t',m}) \mid V_{t,m}, W_{t',m} \in \cup_{m\geq 1}\mathcal{B}_m\} < \infty$

□

Seja Q um grupo abeliano livre, finitamente gerado, com base $q_1, ..., q_n$. Então , definimos $Q^m := \{q^m \mid q \in Q\}$ é um grupo abeliano livre com base $q_1^m, ..., q_n^m$. Consideramos o complexo exato de Koszul (veja [12], corolario 4.5.5).

$$P_{\bullet,m} : \cdots \to P_{k,m} \xrightarrow{\partial_{k,m}} P_{k-1,m} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{1,m} \xrightarrow{\partial_{1,m}} P_{0,m} \xrightarrow{\partial_{0,m}} \mathbb{Z} \to 0$$

onde $P_{0,m} = \mathbb{Z}[Q^m]$, $\quad P_{k,m} = \oplus_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbb{Z}[Q^m]e_{i_1}\cdots e_{i_k}$ para $k \geq 1$ e $\partial_{0,m}$ é a aplicação de aumento. O diferencial $\partial_{k,m} : P_{k,m} \to P_{k-1,m}$, para $k \geq 1$ e $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ é definido por

$$\partial_{k,m}(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) = \sum_{1\leq j\leq k} (-1)^j (q_{i_j}^m - 1) e_{i_1}...\widehat{e_{i_j}}...e_{i_k}$$

para alguns inteiros $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ e para δ uma permutação de $\{1, ..., k\}$ definimos $e_{i_{\delta(1)}} e_{i_{\delta(2)}} ... e_{i_{\delta(k)}} := (-1)^{\delta} e_{i_1} e_{i_2} ... e_{i_k}$.

Seja A um $\mathbb{Z}[Q^m]$-módulo a direita. Aplicando o funtor $(A \otimes_{\mathbb{Z}[Q^m]} -)$ ao complexo $P_{\bullet,m}$ obtemos um novo complexo

$$S'_{\bullet,m} := A \otimes_{\mathbb{Z}[Q^m]} P_{\bullet,m} : \cdots \to S'_{k,m} \xrightarrow{\partial'_{k,m}} S'_{k-1,m} \to \cdots \to S'_{0,m} \xrightarrow{\partial'_{0,m}} A \otimes_{\mathbb{Z}[Q^m]} \mathbb{Z} \to 0$$

onde o diferencial $\partial'_{k,m} := \mathrm{id}_A \otimes \partial_{k,m}$, $S'_{0,m} = A \quad$ e $\quad S'_{k,m} = \oplus_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} A e_{i_1}...e_{i_k}$, para $k \geq 1$.

Lema 3.3.7. *Seja Q um grupo abeliano livre, finitamente gerado, com base $q_1, ..., q_n$ e $A = \mathbb{Z}Q/I$ anel, onde I é um ideal de $\mathbb{Z}Q$. Seja A_m um ideal de A,gerado pela imagem do conjunto $\{q_1^m - 1, ..., q_n^m - 1\}$. Então*

$$A_m \ker(\partial'_{k,m}) \subseteq \operatorname{im}(\partial'_{k+1,m})$$

em particular, para algum $j \geq 0$, $H_j(Q^m, A)$ é um A/A_m-módulo finitamente gerado.

Demonstração. É suficiente mostrar que $\overline{(q_i^m - 1)}\ker(\partial'_{k,m}) \subseteq \mathrm{im}(\partial'_{k+1,m})$ para $1 \leq i \leq n$, onde $\overline{(q_i^m - 1)}$ é a imagem de $q_i^m - 1$ em A. Seja $\lambda = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} a_{i_1,\ldots,i_k} e_{i_1} \ldots e_{i_k} \in \ker(\partial'_{k,m})$

Então

$$\begin{aligned} 0 = \partial'_{k,m}(\lambda) &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} a_{i_1,\ldots,i_k} \partial'_{k,m}(e_{i_1} \ldots e_{i_k}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} (-1)^j a_{i_1,\ldots,i_k} \overline{(q_{i_j}^m - 1)} e_{i_1} \ldots \widehat{e_{i_j}} \ldots e_{i_k} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Note que

$$a_{i_1,\ldots,i_k} \overline{(q_i^m - 1)} e_{i_1} \ldots e_{i_k} - \sum_{1 \leq j \leq k} (-1)^{j-k} a_{i_1,\ldots,i_k} \overline{(q_{i_j}^m - 1)} e_{i_1} \ldots \widehat{e_{i_j}} \ldots e_{i_k} e_i \tag{3.3}$$

$$= \partial'_{k+1,m}((-1)^{k+1} a_{i_1,\ldots,i_k} e_{i_1} \ldots e_{i_k} e_i) \in \mathrm{im}(\partial'_{k+1,m}).$$

Então de (3.2) e (3.3) existe $y' \in \mathrm{im}(\partial'_{k+1,m})$ tal que

$$\begin{aligned} \overline{(q_i^m - 1)}\lambda &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \overline{(q_i^m - 1)} a_{i_1,\ldots,i_k} e_{i_1} \ldots e_{i_k} \\ &= \Big(\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} (-1)^j a_{i_1,\ldots,i_k} \overline{(q_{i_j}^m - 1)} e_{i_1} \ldots \widehat{e_{i_j}} \ldots e_{i_k} \Big) e_i + y' \\ &= 0 e_i + y' = y' \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3.3.8. *Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado e A um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado tal que $\sup_{m \geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} A \otimes_{\mathbb{Z}[Q^m]} \mathbb{Q} < \infty$. Então*

$$\sup_{m \geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} H_i(Q^m, A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} < \infty \text{ para todo } i \geq 0$$

Demonstração.

Fato 1. Podemos supor que Q é grupo livre de torção (veja [6], Teorema 2.4).

Fato 2. Se o teorema é valido para $\mathbb{Z}Q$-módulo A ciclico então ele é valido para $\mathbb{Z}Q$-módulo A finitamente gerado (veja [6], Teorema 2.4).

Pelos fatos 1 e 2 , temos que Q é livre de torção com base $q_1, \ldots, q_n$ e A é um $\mathbb{Z}Q$-módulo cíclico não trivial, então $A = \mathbb{Z}Q/I$ para algum ideal I de $\mathbb{Z}Q$. Seja $B = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}Q/I$ e B_m o ideal de B gerado pela imagem do conjunto $\{q_1^m, \ldots, q_n^m\}$. Seja

$$S_{\bullet,m} := S'_{\bullet,m} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \text{ , } \widetilde{\delta}_{i,m} = \delta'_{i,m} \otimes id_{\mathbb{Q}}$$

onde $S'_{\bullet,m}$ é o complexo definido antes do lema 3.3.7, então temos que

$$H_i(Q^m, B) \simeq \begin{cases} B/B_m & se \quad i = 0 \\ \\ H_i(S_{\bullet,m}) & se \quad i \geq 1 \end{cases}$$

Note que $H_i(Q^m, B) \simeq H_i(Q^m, A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é um $B/B_m - módulo$ finitamente gerado.

Fato 3. Para cada $j \geq 0$ e $i \geq 0$ temos que

$$\sup_{m \geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(B/B_m, \ker(\widetilde{\delta}_{i,m})) < \infty \tag{3.4}$$

isto implica que para todo $i \geq 0$

$$\sup_{m \geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} H_i(S_{\bullet,m}) < \infty \tag{3.5}$$

1. Primeiro mostremos que (3.4) implica (3.5). Definamos

$$M_{i,m} := ker(\widetilde{\delta}_{i,m}) \text{ e } N_{i,m} := im(\widetilde{\delta}_{i,m})$$

Por [6], observação 2.3 temos que $B_m M_{i,m} \subseteq N_{i+1,m}$ daí existe um epimorfismo

$$\operatorname{Tor}_0^B(B/B_m, M_{i,m}) = M_{i,m}/B_m M_{i,m} \to M_{i,m}/N_{i+1,m} = H_i(S_{\bullet,m})$$

Logo temos que $\dim_{\mathbb{Q}} H_i(S_{\bullet,m}) \leq \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_0^B(B/B_m, M_{i,m})$. Então por (3.4)

$$\sup_{m \geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} H_i(S_{\bullet,m}) \leq \sup_{m \geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(B/B_m, M_{i,m}) < \infty$$

2. Provemos (3.4) por indução sobre i

2.1 Se $i = 0$ então $\ker(\widetilde{\delta}_{0,m}) = B_m$. Da sequência exata curta $0 \to B_m \to B \to B/B_m \to 0$ obtemos a sequência exata longa

$$\cdots \to \operatorname{Tor}_{j+1}^B(B/B_m, B) \to \operatorname{Tor}_{j+1}^B(B/B_m, B/B_m) \to \operatorname{Tor}_j^B(B/B_m, B_m) \to \cdots$$

Como $\operatorname{Tor}_j^B(B/B_m, B) = 0$ para $j \geq 1$ temos que

$$\operatorname{Tor}_{j+1}^B(B/B_m, \ker(\widetilde{\delta}_{0,m})) = \operatorname{Tor}_j^B(B/B_m, B_m) \simeq \operatorname{Tor}_{j+1}^B(B/B_m, B/B_m)$$

Note que o comprimento de B/B_m como B/B_m-módulo é no máximo $\dim_{\mathbb{Q}} B/B_m$ e

$$\sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} B/B_m < \infty$$

Pelo lema 3.3.6 (iii), para $j \geq 1$ temos que

$$\sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(B/B_m, \ker(\widetilde{\delta}_{0,m})) = \sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(B/B_m, B/B_m) < \infty$$

Finalmente desde que B_m/B_m^2 como B/B_m-módulo é gerado pelas imagens do conjunto $\{q_1^m - 1, ..., q_n^m - 1\}$. Temos $\operatorname{Tor}_0^B(B/B_m, B_m) \simeq B/B_m \otimes_B B_m \simeq B_m/B_m^2$ e portanto

$$\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_0^B(B/B_m, B_m) = \dim_{\mathbb{Q}} B/B_m^2 \leq n \dim_{\mathbb{Q}} B/B_m.$$

Daqui

$$\sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_0^B(B/B_m, B_m) = \sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} B/B_m^2 \leq n \sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} B/B_m < \infty$$

2.2 Agora pela hipotesis de indução, supor que para algum $j \geq 0$

$$\sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(B/B_m, M_{i-1,m}) < \infty \tag{3.6}$$

Precisamos mostrar que $\sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_j^B(B/B_m, M_{i,m}) < \infty$

Por (2.1) e (3.6) temos que

$$\sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} H_{i-1}(S_{\bullet,m}) < \infty \tag{3.7}$$

Seja $M_i := B^n = \oplus_{1\leq j_1 < ... < j_i \leq n} Be_{j_1}...e_{j_i}$. Da sequência exata $0 \to M_{i,m} \to M_i \to N_{i,m} \to 0$ nós obtemos a sequência exata longa

$$\begin{aligned} \cdots \to \operatorname{Tor}_j^B(B/B_m, M_i) \to \operatorname{Tor}_j^B(B/B_m, N_{i,m}) \to \operatorname{Tor}_{j-1}^B(B/B_m, M_{i,m}) \\ \to \operatorname{Tor}_{j-1}^B(B/B_m, M_i) \to \cdots \to \operatorname{Tor}_0^B(B/B_m, N_{i,m}) \to 0, \end{aligned}$$

como $\operatorname{Tor}_j^B(B/B_m, M_i) = 0$ para $j \geq 1$, obtemos os isomorfismos

$$\operatorname{Tor}_{j-1}^B(B/B_m, M_{i,m}) \simeq \operatorname{Tor}_j^B(B/B_m, N_{i,m}), \text{ para } j \geq 2$$

e a sequência exata

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^B(B/B_m, N_{i,m}) \to \operatorname{Tor}_0^B(B/B_m, M_{i,m}) \to \operatorname{Tor}_0^B(B/B_m, M_i) \to \operatorname{Tor}_0^B(B/B_m, N_{i,m}) \to 0.$$

Assim temos que

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Tor}^B_{j-1}(B/B_m, M_{i,m}) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Tor}^B_j(B/B_m, N_{i,m}) \quad \textit{para} \quad j \geq 2 \tag{3.8}$$

$$e \quad \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Tor}^B_0(B/B_m, M_{i,m}) \leq \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Tor}^B_1(B/B_m, N_{i,m}) + \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Tor}^B_0(B/B_m, M_i) \tag{3.9}$$

Como $\sup\limits_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} B/B_m < \infty$ temos que

$$\sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Tor}^B_0(B/B_m, M_i) < \infty \tag{3.10}$$

Segue de (3.8), (3.9) e (3.10) que para completar a prova de (3.4) é suficiente mostrar que para algum $j \geq 1$

$$\sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Tor}^B_j(B/B_m, N_{i.m}) < \infty \tag{3.11}$$

Note que o comprimento de $H_{i-1}(S_{\bullet,m})$ como B/B_m - módulo é no máximo $\dim_{\mathbb{Q}} H_{i-1}(S_{\bullet,m})$ então por (3.7) e pelo lema 3.3.6 (iii) temos

$$\sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Tor}^B_j(B/B_m, H_{i-1}(S_{\bullet,m})) < \infty \tag{3.12}$$

Finalmente da sequência exata curta $0 \to N_{i,m} \to M_{i-1,m} \to H_{i-1}(S_{\bullet,m}) \to 0$ obtemos a sequência exata longa

$$\begin{gathered} \cdots \to \mathrm{Tor}^B_{j+1}(B/B_m, H_{i-1}(S_{\bullet,m})) \to \mathrm{Tor}^B_j(B/B_m, N_{i,m}) \\ \to \mathrm{Tor}^B_j(B/B_m, M_{i-1,m}) \to \mathrm{Tor}^B_j(B/B_m, H_{i-1}(S_{\bullet,m})) \to \cdots \end{gathered}$$

Daí pela hipotesis de indução , (3.6) e (3.12)

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Tor}^B_j(B/B_m, N_{i,m}) &\leq \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Tor}^B_j(B/B_m, M_{i-1,m}) \\ &+ \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Tor}^B_{j+1}(B/B_m, H_{i-1}(S_{\bullet,m})) < \infty \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Tor}^B_j(B/B_m, N_{i,m}) &\leq \sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Tor}^B_j(B/B_m, M_{i-1,m}) \\ &+ \sup_{m\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Tor}^B_{j+1}(B/B_m, H_{i-1}(S_{\bullet,m})) < \infty \end{aligned}$$

então (3.11) vale.

□

3.4 Números virtuais racionais de Betti de grupos Metabelianos

Definição 3.4.1. Seja G um grupo, o n-ésimo número racional de Betti de G é

$$vb_n(G) = \sup_{M \in \mathcal{A}_G} \dim_{\mathbb{Q}} H_n(M, \mathbb{Q})$$

onde $\mathcal{A}_G$ é o conjunto de todos os subgrupos M de indice finito em G.

Teorema 3.4.2. ***(Sequência Espectral)*** *Seja $A \to G \to Q$ sequência exata curta de grupos. Pelo Teorema 11.46 de [10] .Para todo G-módulo V existe uma sequência espectral (chamada de Lyndon - Hochschild - Serre)*

$$E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(A, V)) \Rightarrow H_{p+q}(G, V)$$

Isto é, que existem $(E^s_{i,j}, d^s_{i,j})_s$ onde o diferencial $d^s_{i,j} : E^s_{i,j} \to E^s_{i-s,j+s-1}$ e $E^{s+1} = H(E^s, d^s)$ com

$$E^{s+1}_{i,j} = \ker(d^s_{i,j})/\mathrm{im}(d^s_{i+s,j-s+1})$$

Note que $E^{s+1}_{i,j}$ é sub-quociente de $E^s_{i,j}$, então existem

$$E^2_{i,j} \supseteq \cdots A^s_{i,j} \supseteq A^{s+1}_{i,j} \supseteq A^{s+2}_{i,j} \supseteq \cdots \supseteq \cap_s A^s_{i,j} = A^\infty_{i,j}$$

$$B^s_{i,j} \subseteq B^{s+1}_{i,j} \subseteq B^{s+2}_{i,j} \subseteq \cdots \subseteq \cup_s B^s_{i,j} = B^\infty_{i,j} \subseteq E^2_{i,j}$$

com $E^s_{i,j} \simeq A^s_{i,j}/B^s_{i,j}$, $E^\infty_{i,j} = A^\infty_{i,j}/B^\infty_{i,j}$.

Lema 3.4.3. *Seja G um grupo e H um subgrupo de índice finito em G. Então*

a) Se H é normal em G e L é qualquer $\mathbb{Q}G$-módulo então $H_n(G, L) \simeq H_n(H, L)_{G/H}$

b) $\sup_{G_0 \in \mathcal{A}} \dim_{\mathbb{Q}} H_n(G_0, \mathbb{Q}) < \infty$ se , e somente se $\sup_{H_0 \in \mathcal{B}} \dim_{\mathbb{Q}} H_n(H_0, \mathbb{Q}) < \infty$ onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são os conjuntos de todos os subgrupos de índice finito em G e H respetivamente.

Demonstração. Veja [6], Lema 3.1. □

Definição 3.4.4. Dizemos que G é policíclico se existe cadeia de subgrupos $1 = G_m \subseteq \cdots \subseteq G_{i+1} \subseteq G_i \subseteq \cdots \subseteq G_0 = G$ talque $G_{i+1} \triangleleft G_i$, G_i/G_{i+1} é grupo cíclico. O comprimento de Hirsh de G é o número fatores acima isomorfos a $\mathbb{Z}$.

Lema 3.4.5. *Seja a um número inteiro positivo. Então para todo grupo policíclico G temos que* $\dim_{\mathbb{Q}} H_a(G,\mathbb{Q}) \leq \binom{h(G)}{a}$ *onde h(G) é o comprimento de Hirsh de G. Mais ainda esta cota superior pode ser atingida em casos particulares.*

Demonstração. Veja [6], Lema 3.2.

□

Teorema 3.4.6. *Seja $n \geq 2$ um número natural e $1 \to A \to G \to Q \to 1$ uma sequência exata de grupos, onde A e Q são abelianos e $\otimes^k_{\mathbb{Q}}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Q}Q$-módulo via a Q-ação diagonal para todo $k \leq 2n$ então*

$$\sup_{U \in \mathcal{A}} \dim_{\mathbb{Q}} H_i(U,\mathbb{Q}) < \infty \textit{ para todo } 0 \leq i \leq n,$$

onde $\mathcal{A}$ é o conjunto de todos os subgrupos de índice finito em G.

Demonstração. Seja G_1 um subgrupo de índice finito de G então

$$1 \to A \cap G_1 \to G_1 \to Q_1 \to 1,$$

é a sequência exata curta onde $Q_1 = \pi(G_1)$. Pela sequência espectral de Lyndon - Hochschild - Serre

$$E^2_{p,q} = H_p(Q_1, H_q(A_1,\mathbb{Q})) \Rightarrow H_{p+q}(G_1,\mathbb{Q})$$

Assim os grupos de homología $H_j(G_1,\mathbb{Q})$ tem filtração, onde os quocientes são isomorfos a $\{E^\infty_{p,q}\}_{p+q=j}$. Então

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_j(G_1,\mathbb{Q}) = \sum_{p+q=j} \dim_{\mathbb{Q}} E^\infty_{p,q} \leq \sum_{p+q=j} \dim_{\mathbb{Q}} E^2_{p,q}$$

onde $E^2_{p,q} = H_p(Q_1, H_q(A_1,\mathbb{Q}))$. Além disso $H_q(B,\mathbb{Q}) \simeq \wedge^q(B \otimes_Z \mathbb{Q})$ para qualquer grupo abeliano B (veja [5]). Então como $\mathbb{Q}$ é corpo temos que $E^2_{p,q} = H_p(Q_1, \wedge^q(A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}))$. Como $[Q : Q_1] < \infty$ existe um inteiro positivo s tal que $Q^s \leq Q_1 \leq Q$. Então pelo lema 3.4.3 parte a) $H_p(Q_1, \wedge^q(A_1 \otimes_Z \mathbb{Q})) \simeq H_p(Q^s, \wedge^q(A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}))_{Q_1/Q^s}$, onde para um $\mathbb{Z}H$-módulo V definimos $V_H = V \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}$. Então

$$\dim_Q H_p(Q_1, \wedge^q(A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})) \leq \dim_Q H_p(Q^s, \wedge^q(A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}))$$

Logo

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_j(G_1,\mathbb{Q}) \leq \sum_{p+q=j} \dim_{\mathbb{Q}} H_p(Q^s, \wedge^q(A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})).$$

Considere $0 \to A_1 \to A \to A/A_1 \to 0$ uma sequência curta. Como $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo plano então $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é um funtor exato. Daí

$$0 \to A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to A \otimes_Z \mathbb{Q} \to (A/A_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to 0$$

é uma sequência exata curta. Note que como A/A_1 é finito, então $(A/A_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$. Assim $A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq A \otimes_Z \mathbb{Q}$, logo $\wedge^q(A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \simeq \wedge^q(A \otimes_Z \mathbb{Q})$ também

$$H_p(Q^s, \wedge^q(A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})) \simeq H_p(Q^s, \wedge^q(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})).$$

Daí

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_j(G_1, \mathbb{Q}) \leq \sum_{p+q=j} \dim_{\mathbb{Q}} H_p(Q^s, \wedge^q(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})))$$

onde s depende de G_1.

Agora para completar a prova do teorema, vejamos que

$$\sup_{s \geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} H_p(Q^s, \wedge^q(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})) < \infty \text{ , para } p + q = j \leq m.$$

Em efeito, seja

$$\otimes^q_{\mathbb{Q}}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \twoheadrightarrow \wedge^q(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to 0$$

Aplicando o funtor $- \otimes_{\mathbb{Z}[Q^s]} \mathbb{Q}$ temos sequência exata

$$(\otimes^q_{\mathbb{Q}}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Z}[Q^s]} \mathbb{Q} \twoheadrightarrow (\wedge^q(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})) \to 0$$

Como $2q \leq 2m$ definamos $W = \otimes^q_{\mathbb{Q}}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ então pela hipotesis temos que $\otimes^2_{\mathbb{Q}} W = \otimes^{2q}_{\mathbb{Q}}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Q}Q$-módulo para todo q. Então por [4], temos que $\sup_{s \geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} W \otimes_{\mathbb{Z}[Q^s]} \mathbb{Q} < \infty$. Logo

$$\sup_{s \geq 1} \dim_{\mathbb{Q}}(\wedge^q(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Z}[Q^s]} \mathbb{Q} \leq \infty$$

Portanto pelo teorema 3.3.8 tem-se o resultado.

□

Corolário 3.4.7. *Seja $n \geq 2$ um número natural e G um grupo metabeliano de tipo* FP_{2n}. *Então*

$$\sup_{U \in \mathcal{A}} \dim_{\mathbb{Q}} H_i(U, \mathbb{Q}) < \infty \textit{ para } 0 \leq i \leq n,$$

onde $\mathcal{A}$ é o conjunto de todos os subgrupos de índice finito em G.

Demonstração. Seja $P : ... \to P_i \to P_{i-1} \to ... \to P_0 = \mathbb{Z}\mathrm{G} \to \mathbb{Z} \to 0$ uma resolução livre de $\mathbb{Z}\mathrm{G}$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ com P_i finitamente gerado para todo $i \leq 2n$. Aplicamos sobre P o funtor $- \otimes_{\mathbb{Z}\mathrm{A}} \mathbb{Q}$ onde A age trivialmente sobre $\mathbb{Q}$. Como $P_i = \oplus \mathbb{Z}\mathrm{G}$ então $P_i \otimes_{\mathbb{Z}\mathrm{A}} \mathbb{Q} = (\oplus \mathbb{Z}\mathrm{G}) \otimes_{\mathbb{Z}\mathrm{A}} \mathbb{Q} \simeq \oplus(\mathbb{Z}\mathrm{G} \otimes_{\mathbb{Z}\mathrm{A}} \mathbb{Q}) \simeq \oplus \mathbb{Q}[G/A] = \oplus \mathbb{Q}Q$. Portanto $P_i \otimes_{\mathbb{Z}\mathrm{A}} \mathbb{Q}$ é $\mathbb{Q}\mathrm{Q}$ finitamente gerado para todo $i \leq 2n$. Como Q é um grupo abeliano finitamente gerado então $\mathbb{Z}\mathrm{Q}$ é um anel Noetheriano. Sejam $d_i : P_i \otimes_{\mathbb{Z}\mathrm{A}} \mathbb{Q} \to P_{i-1} \otimes_{\mathbb{Z}\mathrm{A}} \mathbb{Q}$ os diferenciais do complexo $P \otimes_{\mathbb{Z}\mathrm{A}} \mathbb{Q}$. Como o ker d_i é $\mathbb{Q}\mathrm{Q}$-submódulo de $P_i \otimes_{\mathbb{Z}\mathrm{A}} \mathbb{Q}$ então se $i \leq 2n$, $P_i \otimes_{\mathbb{Z}\mathrm{A}} \mathbb{Q}$ é $\mathbb{Q}\mathrm{Q}$-módulo Noetheriano então ker d_i é finitamente gerado como $\mathbb{Q}\mathrm{Q}$-módulo.

Em particular

$$H_i(P \otimes_{\mathbb{Z}\mathrm{A}} \mathbb{Q}) = \ker(d_i)/\mathrm{im}(d_{i+1})$$

é finitamente gerado como $\mathbb{Q}\mathrm{Q}$-módulo se $i \leq 2n$. Pela definição de Tor então

$$H_i(A, \mathbb{Q}) = \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}\mathrm{A}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = H_i(P \otimes_{\mathbb{Z}\mathrm{A}} \mathbb{Q})$$

é finitamente gerado como $\mathbb{Q}\mathrm{Q}$-módulo. Então temos que $\wedge_{\mathbb{Q}}^i(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Q}\mathrm{Q}$-módulo para $i \leq 2n$. Pelo um teorema de Bieri e Groves (ver teorema 3.2.10), $\otimes_{\mathbb{Q}}^i(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Q}Q$-módulo para $i \leq 2n$. Pelo teorema 3.4.6 $\sup\limits_{U \in \mathcal{A}} \dim_{\mathbb{Q}} H_i(U, \mathbb{Q}) < \infty$ para $0 \leq i \leq n$

□

Referências

[1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. Introduction to commutative algebra. Westview press, 1994.

[2] R. Bieri and J. Groves. Metabelian groups of type (FP_∞) are virtually of type (FP). Proceedings of the London Mathematical Society, 3(2):365–384, 1982.

[3] R. Bieri and R. Strebel. Valuations and finitely presented metabelian groups. Proceedings of the London Mathematical Society, 3(3):439–464, 1980.

[4] M. Bridson and D. Kochloukova. The virtual first betti number of soluble groups. Pacific Journal of Mathematics, 274(2):497–510, 2015.

[5] K. S. Brown. Cohomology of groups, corrected reprint of the 1982 original. Graduate Texts in Mathematics, 1994.

[6] D. Kochloukova and F. Mokari. Virtual rational betti numbers of abelian-by-polycyclic groups. Journal of Algebra, 443:75–98, 2015.

[7] D. H. Kochloukova. Finite generation of exterior and symmetric powers. In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, volume 125, pages 21–29. Cambridge University Press, 1999.

[8] S. Lang. Algebra, revised 3rd ed. Graduate Texts in Mathematics, 211, 2002.

[9] D. J. Robinson. A course in the theory of groups, volume 80 of graduate texts in mathematics, 1996.

[10] J. J. Rotman. An introduction to homological algebra, Academic Press 1979.

[11] J. J. Rotman. An introduction to homological algebra. Universitext, Second Edition, Springer, 2009.

[12] C. A. Weibel. An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics,1994.