



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

RAFAELA FERNANDES DO PRADO

ASPECTOS VARIACIONAIS DE GEODÉSICAS HOMOGÊNEAS
EM VARIEDADES FLAG E ESTABILIDADE DE APLICAÇÕES
HARMÔNICAS PELO FLUXO DE RICCI

CAMPINAS

2017

RAFAELA FERNANDES DO PRADO

ASPECTOS VARIACIONAIS DE GEODÉSICAS HOMOGÊNEAS
EM VARIEDADES FLAG E ESTABILIDADE DE APLICAÇÕES
HARMÔNICAS PELO FLUXO DE RICCI

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em matemática.

Supervisor/Orientador: Lino Anderson da Silva Grama

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA PELA ALUNA RAFAELA FER-
NANDES DO PRADO, E ORIENTADA PELO PROF.
DR. LINO ANDERSON DA SILVA GRAMA.

CAMPINAS

2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 142259/2015-2; CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P882a Prado, Rafaela Fernandes do, 1986-
Aspectos variacionais de geodésicas homogêneas em variedades flag e estabilidade de aplicações harmônicas pelo fluxo de Ricci / Rafaela Fernandes do Prado. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Lino Anderson da Silva Grama.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Lie, Teoria de. 2. Espaços homogêneos. 3. Fluxo de Ricci. 4. Geodésica (Matemática). I. Grama, Lino Anderson da Silva, 1981-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Aspectos variacionais de geodésicas homogêneas em variedades flag e estabilidade de aplicações harmônicas pelo fluxo de Ricci

Palavras-chave em inglês:

Lie theory

Homogeneous spaces

Ricci flow

Geodesics (Mathematics)

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora:

Lino Anderson da Silva Grama [Orientador]

Luiz Antonio Barrera San Martin

Caio José Colletti Negreiros

Paolo Piccione

Ivaldo Paz Nunes

Data de defesa: 19-05-2017

Programa de Pós-Graduação: Matemática

**Tese de Doutorado defendida em 19 de maio de 2017 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). LINO ANDERSON DA SILVA GRAMA

Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof(a). Dr(a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS

Prof(a). Dr(a). PAOLO PICCIONE

Prof(a). Dr(a). IVALDO PAZ NUNES

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros
encontra-se no processo de vida acadêmica da aluna.

*Aos meus pais e ao Matheus, por todo amor
e suporte.*

Agradecimentos

À Deus, pela vida e por mais esta conquista.

À minha família, em especial aos meus pais, Maria Goretti Fernandes de Alencar e Elias Araújo do Prado, por acreditarem em mim e sempre me apoiarem, por mais difícil que fosse.

Ao Matheus, pela paz nos momentos de tormenta, pelo companheirismo, pelo apoio e pelo amor.

Ao meu orientador, Professor Lino Grama, por confiar em mim mesmo quando eu não confiava, pelo conhecimento compartilhado, por me ajudar a encarar certos medos, pela paciência e pela amizade.

Aos Professores Caio José Colletti Negreiros e Luiz Antonio Barrera San Martin, pelas sugestões e pelos valiosos conselhos ao longo desses anos.

Aos Professores membros da Banca Examinadora, por terem aceitado o convite para avaliar este trabalho e pelas sugestões.

Aos meus amigos, Anna, Anny, César, Charles, Cristyan, Jhony, Matheus e Victor, por todo apoio durante essa jornada, pelos finais de semana de estudos, pelas noites mal dormidas, pela pizza mais, pelas viagens, pelos dedos roxos, pelo amigo oculto, pelas festas surpresas, pelas confraternizações e pela "ceia de natal" às vésperas da qualificação.

À Paula e ao Yuri, pela amizade, por terem encontrado um lugar para morarmos, pelos bolos, pelo abraço após a qualificação de álgebra e pelo apoio que sempre nos deram nos momentos difíceis. Sinto falta de vocês por aqui.

À Aline e ao Rondinei, pela presença, pelas conversas, pelos conselhos, pelas risadas e pela amizade.

Ao Wanderley, pelas corridas, pelas risadas, pelo companheirismo, pelas confidências, pelo apoio e pela amizade.

Ao Victor, pela irmandade, pelos choros, pelos desabafos, pelos jogos do fla-

mengo, pelas viagens e por ter tornado a vida aqui um pouco menos complicada. Agradeço, de coração, por você ter aparecido em nossas vidas.

Aos amigos do MAT/UnB e agregados, Gabi, Luís, Henrique, Tatita, Thiago, Brunão, Raíza e Jorge. Sem o apoio de vocês eu não estaria aqui.

Às irmãs que eu escolhi, Camila, Letícia e Paola, e ao irmão que escolhi, Desc, que mesmo à distância sempre estiveram presentes em minha vida.

À cinética fitness, em particular à Professora Maria, que fez com que eu recuperasse minha saúde mental por meio de suas aulas de bodybalance.

Aos professores e funcionários do IMECC.

Ao CNPq/CAPES, pelo apoio financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

*“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu,
mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo
que todo mundo vê.”*

(Arthur Schopenhauer)

Resumo

Na primeira parte deste trabalho, estudamos pontos conjugados ao longo de geodésicas homogêneas em variedades flag generalizadas. Esse estudo é feito a partir do Teorema do Índice de Morse. Também mostramos como o fluxo de Ricci homogêneo pode gerar pontos conjugados em $\mathbb{C}P^{2n+1} = \mathrm{Sp}(n+1)/(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sp}(n))$.

Na segunda parte deste trabalho, estudamos propriedades de estabilidade de aplicações harmônicas pelo fluxo de Ricci homogêneo. Damos exemplos de quando a estabilidade (não estabilidade) é preservada pelo fluxo de Ricci, assim como um exemplo de quando o fluxo de Ricci não preserva a estabilidade de uma aplicação harmônica.

Palavras-chave: Teoria de Lie, pontos conjugados, geodésicas homogêneas, equigeodésicas, índice de Morse, fluxo de Ricci, variedades flag.

Abstract

At the first part of this work, we study conjugate points along homogeneous geodesics in generalized flag manifolds. This study is done by the Morse Index Theorem. We also show how the homogeneous Ricci flow can evolve in such a way to produce conjugate points in the projective complex space $\mathbb{C}P^{2n+1} = \mathrm{Sp}(n+1)/(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sp}(n))$.

At the second part of this work, we study properties about stability of harmonic maps under the homogeneous Ricci flow. We give examples where the stability (non stability) is preserved under the Ricci flow and an example where the Ricci flow does not preserve the stability of an harmonic map.

Keywords: Lie Theory, conjugate points, homogeneous geodesics, equigeodesics, Morse index, Ricci flow, flag manifolds.

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Introdução | 13 |
| 1 Preliminares | 19 |
| 1.1 Variedades Flag Generalizadas | 19 |
| 1.1.1 Representação de Isotropia | 21 |
| 1.1.2 Métricas Invariantes | 24 |
| 1.1.3 Estruturas Quase Complexas | 25 |
| 1.2 Geodésicas Homogêneas e Equigeodésicas | 26 |
| 1.2.1 Geodésicas Homogêneas | 26 |
| 1.2.2 Equigeodésicas em Variedades Flag | 28 |
| 2 Aspectos Variacionais de Geodésicas Homogêneas | 30 |
| 2.1 Variações da Energia | 30 |
| 2.2 Lema de Perturbação | 36 |
| 2.3 Pontos Conjugados em $\mathbb{C}P^{2n+1}$ | 38 |
| 2.3.1 Geometria de $\mathbb{C}P^{2n+1} = \text{Sp}(n+1)/(\text{U}(1) \times \text{Sp}(n))$ | 39 |
| 2.3.2 Fluxo de Ricci Homogêneo | 44 |
| 2.4 Critério Algébrico | 50 |
| 3 Estabilidade de Aplicações Harmônicas pelo Fluxo de Ricci | 55 |
| 3.1 Estabilidade de Aplicações Equiharmônicas em Variedades Flag | 56 |
| 3.1.1 Curvas J -holomorfas em \mathbb{F}_Θ | 56 |
| 3.1.2 Estabilidade de Aplicações Equiharmônicas em \mathbb{F}_Θ | 56 |
| 3.2 Estabilidade em \mathbb{F}_Θ pelo Fluxo de Ricci | 58 |
| 3.2.1 Fluxo de Ricci Homogêneo em $\text{SU}(3)/T^2$ | 58 |

3.2.2 Estabilidade em $SO(2n + 1)/(U(k) \times SO(2m + 1))$, $Sp(n)/(U(m) \times Sp(k))$ e $SU(3)/T^2$ pelo fluxo de Ricci homogêneo 60

Referências Bibliográficas **63**

Introdução

Uma variedade flag generalizada é um espaço homogêneo G/P , em que G é um grupo de Lie conexo, complexo e simples e P é um subgrupo parabólico de G . Neste caso, se U for a forma real compacta de G e $K = U \cap P$, podemos identificar G/P com U/K e K é o centralizador de um toro em U . Se K for um toro maximal, ele é denotado por T e a variedade flag generalizada correspondente, U/T , é chamada de variedade flag maximal.

As variedades flag generalizadas são espaços favoráveis ao estudo de geometria invariante devido à sua boa descrição em termos das estruturas de grupos de Lie e de álgebras de Lie, como podemos ver, por exemplo, em [2], [11], [19], [27], [30], [32].

Na primeira parte do nosso trabalho, estudamos um tipo específico de geodésicas em variedades Riemannianas homogêneas G/H , as chamadas *geodésicas homogêneas*. Uma geodésica γ em G/H é dita homogênea se ela é a órbita de um subgrupo a 1-parâmetro de G , isto é,

$$\gamma(t) = \exp tX \cdot o,$$

em que $o = eH$ é a origem de G/H (classe lateral trivial) e X é um elemento da álgebra de Lie de G . Quando isso acontece, dizemos que X é um vetor geodésico. Em [22], Kowalski e Vanhecke encontraram um critério puramente algébrico para determinar se um vetor na álgebra de Lie de G é geodésico. Em [21], Kowalski e Szenthe mostraram que toda variedade Riemanniana homogênea admite geodésicas desse tipo. Se todas as geodésicas de uma variedade Riemanniana homogênea forem homogêneas, esse espaço é chamado de *g.o. space (geodesic orbit space)*. Exemplos deste tipo de espaço são os espaços homogêneos normais [10] e naturalmente redutíveis [20]. Além disso, em [2], Arvaniteryegos e Alekseevsky classificaram as variedades flag generalizadas que são *g.o. spaces* munidas de métricas não homotéticas à métrica normal.

Em [11], uma nova classe de geodésicas homogêneas em variedades flag ge-

neralizadas foi introduzida, as chamadas *equigeodésicas*. As equigeodésicas são curvas homogêneas que são geodésicas com respeito a qualquer métrica invariante considerada. Um vetor geodésico, nesse caso, é chamado de vetor equigeodésico. Nesse mesmo trabalho, foi provada a existência de equigeodésicas em qualquer variedade flag generalizada, assim como foi dado um critério algébrico para determinação de vetores equigeodésicos.

Estamos interessados nas propriedades minimizantes de geodésicas homogêneas, mais especificamente nos pontos conjugados dessas geodésicas. Uma maneira de realizar esse estudo é via campos de Jacobi e estudos a respeito disto foram feitos por Chavel [9] e Ziller [31] (no caso de espaços homogêneos naturalmente redutíveis) e por González-Dávila e Naveira [13] (no caso de espaços homogêneos normais de posto um). No nosso trabalho, esse estudo será feito via Teorema do Índice de Morse [10]. Esta ideia surgiu a partir de [27], em que uma análise similar à que faremos aqui foi feita no contexto de aplicações harmônicas.

Nosso primeiro resultado compara os índices de Morse de uma curva homogênea γ que é geodésica com respeito a duas métricas distintas, digamos g_1 e g_2 , em que g_2 é obtida por um tipo específico de perturbação de g_1 , chamada de \mathcal{P} -perturbação (ver Capítulo 2 para maiores detalhes e notações).

Teorema A *Seja U/K uma variedade flag generalizada e seja $\gamma : [0, a] \rightarrow U/K$ uma curva homogênea. Suponha que γ seja geodésica com respeito às métricas invariantes g_1 e g_2 , em que g_2 é uma \mathcal{P} -perturbação de g_1 . Então*

$$I_{g_2}^\gamma = I_{g_1}^\gamma + \mathcal{A},$$

em que $I_{g_i}^\gamma$, $i = 1, 2$, é o índice de Morse de γ com respeito à métrica g_i e \mathcal{A} é um valor que depende da \mathcal{P} -perturbação considerada e das componentes do vetor $\text{Ad}(\exp -tX)q'(t)$ (q é a variação considerada) no espaço tangente de U/K com respeito a uma base especificada.

Para aplicar o Teorema A, precisamos trabalhar com uma curva homogênea que seja uma geodésica com respeito às métricas invariantes consideradas. Neste caso, se torna natural trabalharmos com equigeodésicas.

A partir disso, utilizamos o Teorema A para estudar o caso do espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^{2n+1}$ visto como uma $\text{Sp}(n+1)$ -variedade Riemanniana homogênea. Neste caso, o espaço tangente na origem de $\mathbb{C}P^{2n+1}$ é decomposto em duas componentes irredu-

tíveis pela representação de isotropia, de dimensões $4n$ e 2 , que chamaremos de \mathfrak{m}_1 e \mathfrak{m}_2 , respectivamente. O *cut locus* de uma geodésica homogênea γ em $\mathbb{C}P^{2n+1}$ com respeito à métrica normal é conhecido (ver [31] e [13]). Nosso segundo resultado mostra que, se t_0 for um número real tal que $\gamma(t_0)$ é o primeiro ponto conjugado a $\gamma(0)$ com respeito à métrica normal, então conseguimos perturbar esta métrica de modo a obter $t_1 \in \mathbb{R}$, $0 < t_1 < t_0$, de tal forma que $\gamma(t_1)$ é conjugado a $\gamma(0)$ com respeito a essa nova métrica. De fato, temos o resultado a seguir.

Teorema B *Considere o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^{2n+1} = \text{Sp}(n+1)/(\text{U}(1) \times \text{Sp}(n))$ equipado com a métrica normal, que denotaremos por g_{normal} . Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}P^{2n+1}$ uma equigeodésica com vetor equigeodésico X , em que X é um vetor da base considerada de $\mathfrak{m}_2 \subset \mathfrak{sp}(n+1)$. Fixe $b \in \mathbb{R}$ tal que $0 < b < \pi\sqrt{2n+4}/2$. Então existe uma \mathcal{P} -perturbação de g_{normal} e $c \in \mathbb{R}$, $0 < c \leq b$, tal que $\gamma(c)$ é conjugado a $\gamma(0)$ com respeito a essa perturbação.*

Depois foi natural nos perguntarmos se a perturbação da métrica normal usada no Teorema B poderia ser obtida a partir de um fluxo geométrico, ainda no caso de $\mathbb{C}P^{2n+1}$. No caso do fluxo de Ricci homogêneo, a resposta foi positiva para $n \geq 10$. O *fluxo de Ricci* é uma família a 1-parâmetro de métricas $g(t)$ no espaço homogêneo considerado que satisfaz à equação do fluxo de Ricci

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2\text{Ric}(g(t)).$$

Como o tensor de Ricci é invariante por difeomorfismos da variedade considerada, temos que ele preserva simetrias da métrica inicial. Desta forma, é natural estudar o fluxo de Ricci em variedades flag U/K , assim como considerar métricas U -invariantes, pois essa propriedade também é preservada.

Tendo isso em mente, obtivemos o seguinte resultado:

Teorema C *Considere $\mathbb{C}P^{2n+1} = \text{Sp}(n+1)/(\text{U}(1) \times \text{Sp}(n))$ com $n \geq 10$ e fixe $b \in \mathbb{R}$, $8\pi\sqrt{6}\sqrt{2n+4}/3(4n+3) < b < \pi\sqrt{2n+4}/2$. Seja γ uma equigeodésica com vetor equigeodésico X , em que X é um vetor da base considerada de \mathfrak{m}_2 . Então o fluxo de Ricci homogêneo $g(t)$ com condição inicial $g(0) = g_{\text{normal}}$ evolui de tal forma que existe $t_0 < \infty$ e $c \in \mathbb{R}$, $0 < c \leq b$, tais que $\gamma(c)$ é conjugado a $\gamma(0)$ com respeito à métrica $g(t_0)$.*

O Teorema C nos dá um exemplo de como o fluxo de Ricci pode evoluir de forma a produzir pontos conjugados. Existem vários artigos recentes com resultados importantes a respeito do fluxo de Ricci, como, por exemplo, [1], [14], [15], [23], [24].

Finalizando a primeira parte do trabalho, generalizamos o Teorema B para uma variedade flag generalizada satisfazendo algumas condições. Aqui nós introduzimos um conceito algébrico chamado de *par de perturbação com respeito a uma raiz α* . Tal par de perturbação consiste em duas raízes de uma subálgebra de Cartan da álgebra de Lie de G satisfazendo determinadas propriedades (ver definição 2.3 para maiores detalhes). Assim, obtivemos o resultado a seguir.

Teorema D *Seja U/K uma variedade flag generalizada equipada com a métrica normal g_{normal} . Seja $\alpha \in \sigma_0 \in \Pi(\Theta)$ e considere a equigeodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow U/K$ dada por*

$$\gamma(t) = \exp tA_\alpha \cdot o.$$

Suponha que exista $a \in \mathbb{R}$ de tal forma que $\gamma(a)$ é o primeiro ponto conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de γ com respeito à métrica g_{normal} . Se $\{\beta, \delta\}$ for um par de perturbação com respeito a α , então existem dois números reais, x, b , $0 < x \leq b < a$, e uma métrica invariante g , obtida por uma \mathcal{P} -perturbação de g_{normal} , de tal forma que $\gamma(x)$ é conjugado a $\gamma(0)$ com respeito à métrica g .

Como exemplo, além de $\mathbb{C}P^{2n+1}$, obtivemos uma \mathcal{P} -perturbação da métrica normal na variedade flag maximal $SU(3)/T^2$ e produzimos pontos conjugados ao longo da equigeodésica considerada no Teorema D.

Na segunda parte do nosso trabalho, estudamos a estabilidade de aplicações harmônicas pelo fluxo de Ricci homogêneo. Mais especificamente, gostaríamos de descobrir se o fluxo de Ricci preserva a estabilidade de uma classe de aplicações harmônicas de uma superfície de Riemann em uma variedade flag generalizada. Dizemos que uma aplicação harmônica é estável se a segunda variação da energia dessa aplicação for não negativa com respeito a qualquer variação.

As aplicações harmônicas que consideraremos são as chamadas *aplicações holomorfas-horizontais generalizadas*. Elas foram introduzidas por Bryant em [7]. Essas aplicações são equiharmônicas, isto é, são harmônicas com respeito a qualquer métrica

invariante. O conceito de aplicações equiharmônicas foi dado por Negreiros em [26] e vários resultados a respeito da estabilidade dessas aplicações foram provados em [27].

Em [14] e [15], Grama e Martins estudaram o comportamento do fluxo de Ricci de métricas invariantes em três classes de variedades homogêneas, a saber,

$$\mathrm{SO}(2n + 1)/(\mathrm{U}(k) \times \mathrm{SO}(2m + 1)),$$

$$\mathrm{Sp}(n)/(\mathrm{U}(m) \times \mathrm{Sp}(k)),$$

e

$$\mathrm{SU}(3)/T^2,$$

por meio de sistemas dinâmicos. Estamos interessados em estudar a estabilidade de aplicações holomorfa-horizontais nessas três classes de variedades homogêneas.

Ao combinar a dinâmica do fluxo de Ricci homogêneo obtida em [14] e [15] com os resultados a respeito da estabilidade de aplicações equiharmônicas obtidos em [27], provamos os resultados a seguir.

Teorema E O fluxo de Ricci homogêneo preserva a estabilidade (não estabilidade) de uma aplicação holomorfa-horizantal nos espaços homogêneos $\mathrm{SO}(2n + 1)/(\mathrm{U}(k) \times \mathrm{SO}(2m + 1))$ e $\mathrm{Sp}(n)/(\mathrm{U}(m) \times \mathrm{Sp}(k))$.

Teorema F O fluxo de Ricci homogêneo não preserva a estabilidade de uma aplicação holomorfa-horizantal no espaço homogêneo $\mathrm{SU}(3)/T^2$.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

No Capítulo 1, apresentamos alguns conceitos, definições e resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho. O objetivo principal é fixar algumas notações. Nenhum dos resultados apresentados neste capítulo é novo e a maioria será dada sem demonstração, mas com referências.

No Capítulo 2, falamos sobre a primeira parte do nosso trabalho. Encontramos expressões para a primeira e a segunda variações da energia de uma geodésica homogênea, relembremos a geometria $\mathrm{Sp}(n + 1)$ -invariante de $\mathbb{C}P^{2n+1}$ e o fluxo de Ricci homogêneo em $\mathrm{SO}(2n + 1)/(\mathrm{U}(k) \times \mathrm{SO}(2m + 1))$ e $\mathrm{Sp}(n)/(\mathrm{U}(m) \times \mathrm{Sp}(k))$ e provaremos os Teoremas A, B, C e D.

No Capítulo 3, falamos sobre a segunda parte do nosso trabalho. Relembramos os resultados a respeito da estabilidade de aplicações holomorfas-horizontais, fluxo de Ricci homogêneo em $SU(3)/T^2$ e provamos os Teoremas E e F.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Variedades Flag Generalizadas

Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie complexa e simples e G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Dada uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , seja Π um sistema de raízes de \mathfrak{g} relativo a \mathfrak{h} . Podemos decompor \mathfrak{g} como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

em que $\mathfrak{g}_{\alpha} = \{X \in \mathfrak{g}; [H, X] = \alpha(H)X \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}\}$ é um espaço de raízes de dimensão complexa 1.

Denote por (\cdot, \cdot) a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} . Temos definida uma base de Weyl de \mathfrak{g} , que é composta por uma base de \mathfrak{h} e por elementos $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ tais que $(X_{\alpha}, X_{-\alpha}) = 1$ e $[X_{\alpha}, X_{\beta}] = m_{\alpha, \beta} X_{\alpha + \beta}$, com $m_{\alpha, \beta} \in \mathbb{R}$, $m_{-\alpha, -\beta} = -m_{\alpha, \beta}$ e $m_{\alpha, \beta} = 0$ se $\alpha + \beta$ não for raiz (ver [29]).

Dado $\alpha \in \Pi$, seja H_{α} definido por $\alpha(\cdot) = (H_{\alpha}, \cdot)$. O espaço vetorial real gerado pelos H_{α} , $\alpha \in \Pi$, será denotado por $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

Seja Σ um conjunto de raízes simples de Π e Π^{+} o conjunto das raízes positivas de Π com relação a Σ . Temos as seguintes definições:

Definição 1.1. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie simples. A subálgebra de Borel \mathfrak{b} é a subálgebra solúvel maximal de \mathfrak{g} definida por*

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^{+}} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Definição 1.2. *Uma subálgebra \mathfrak{p} de \mathfrak{g} é dita parabólica se \mathfrak{p} contém a subálgebra de Borel \mathfrak{b} .*

Agora seja Θ um subconjunto de Σ . Denotamos por $\langle \Theta \rangle$ o conjunto de raízes gerado por Θ e $\langle \Theta \rangle^\pm = \langle \Theta \rangle \cap \Pi^\pm$. Então,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_\beta \oplus \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_{-\beta}.$$

Seja

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Como $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}_\Theta$, \mathfrak{p}_Θ é uma subálgebra parabólica gerada por $\langle \Theta \rangle$. Definimos

$$\mathfrak{q}_\Theta = \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_{-\beta}.$$

Assim, $\mathfrak{g} = \mathfrak{q}_\Theta \oplus \mathfrak{p}_\Theta$.

Definição 1.3. A variedade flag generalizada \mathbb{F}_Θ associada a \mathfrak{p}_Θ é definida como o espaço homogêneo

$$\mathbb{F}_\Theta = \frac{G}{P_\Theta},$$

em que P_Θ é o normalizador de \mathfrak{p}_Θ em G .

Considere agora a forma real compacta de \mathfrak{g} , a saber, a subálgebra real

$$\mathfrak{u} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}, A_\alpha, S_\alpha; \alpha \in \Pi^+\}, \quad (1.1.1)$$

em que $A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$ e $\sqrt{-1}(X_\alpha + X_{-\alpha})$. Observe que os vetores A_α , S_α e $\sqrt{-1}H_\beta$ formam uma base de \mathfrak{u} , em que $\alpha \in \Pi^+$ e $\beta \in \Sigma$. Denote por $U = \exp \mathfrak{u}$ a correspondente forma real compacta de G e defina $K_\Theta = P_\Theta \cap U$. O grupo de Lie U age transitivamente em F_Θ com subgrupo de isotropia K_Θ e, portanto, temos a identificação

$$F_\Theta = \frac{U}{K_\Theta}.$$

Seja \mathfrak{k}_Θ a álgebra de Lie de K_Θ . Então $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{p}_\Theta \cap \mathfrak{u}$ e, se denotarmos sua complexificação por $\mathfrak{k}_\Theta^{\mathbb{C}}$,

$$\mathfrak{k}_\Theta^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Além disso, o espaço tangente $T_o\mathbb{F}_\Theta$ de \mathbb{F}_Θ na origem $o = eK$ (e é o elemento neutro de U) pode ser identificado com o complemento ortogonal de \mathfrak{k}_Θ em \mathfrak{u} (com respeito à forma de Cartan-Killing de \mathfrak{u}), que vamos denotar por \mathfrak{m}_Θ , ou seja,

$$T_o\mathbb{F}_\Theta \simeq \mathfrak{m}_\Theta = \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_\alpha, S_\alpha; \alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle\} = \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{u}_\alpha,$$

em que $\mathfrak{u}_\alpha = (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{u} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_\alpha, S_\alpha\}$.

Com relação ao espaço tangente complexificado $T_o^{\mathbb{C}}\mathbb{F}_\Theta$, este pode ser identificado com o complexificado $\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}}$ de \mathfrak{m}_Θ , que é dado por

$$\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}} = \sum_{\beta \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_\beta.$$

Ao longo deste trabalho, utilizaremos com frequência e estrutura de álgebra de Lie de \mathfrak{u} para compreender o comportamento dos vetores de \mathfrak{m}_Θ . O Lema abaixo nos fornece as constantes de estrutura da base de \mathfrak{u} dada por 1.1.1.

Lema 1.1. *O colchete de Lie entre os elementos da base 1.1.1 de \mathfrak{u} são dados por*

$$\begin{aligned} [\sqrt{-1}H_\alpha, A_\beta] &= \beta(H_\alpha)S_\beta & [A_\alpha, A_\beta] &= m_{\alpha,\beta}A_{\alpha+\beta} + m_{-\alpha,\beta}A_{\alpha-\beta} \\ [\sqrt{-1}H_\alpha, S_\beta] &= -\beta(H_\alpha)A_\beta & [S_\alpha, S_\beta] &= -m_{\alpha,\beta}A_{\alpha+\beta} - m_{\alpha,-\beta}A_{\alpha-\beta} \\ [A_\alpha, S_\alpha] &= 2\sqrt{-1}H_\alpha & [A_\alpha, S_\beta] &= m_{\alpha,\beta}S_{\alpha+\beta} + m_{\alpha,-\beta}S_{\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

1.1.1 Representação de Isotropia

Seja $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ uma variedade flag generalizada e seja $\phi : U \times \mathbb{F}_\Theta \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ a ação à esquerda de U em \mathbb{F}_Θ , isto é, $\phi(g, x) = gx$, $g \in U$, $x \in \mathbb{F}_\Theta$. Dados $g \in U$ e $x \in \mathbb{F}_\Theta$, temos definidas duas aplicações parciais, $\phi_g : \mathbb{F}_\Theta \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ e $\phi_x : U \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$, dadas por $\phi_g(y) = \phi(g, y) = gy$ e $\phi_x(h) = \phi(h, x) = hx$, $h \in U$, $y \in \mathbb{F}_\Theta$. A decomposição $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{m}_\Theta$ satisfaz $\text{Ad}(K_\Theta)\mathfrak{m}_\Theta \subset \mathfrak{m}_\Theta$. Logo, \mathbb{F}_Θ é um espaço homogêneo redutível. A *representação de isotropia* ρ de K_Θ em $T_o\mathbb{F}_\Theta$ é o homomorfismo $g \in K_\Theta \mapsto (d\phi_g)_o \in \text{Aut}(T_o\mathbb{F}_\Theta)$ e é equivalente à restrição da representação adjunta Ad de K_Θ em \mathfrak{m}_Θ . Esta representação é completamente redutível, donde podemos decompor \mathfrak{m}_Θ como

$$\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_n,$$

em que cada \mathfrak{m}_i é uma componente irredutível da representação de isotropia, $i = 1, \dots, n$.

De maneira análoga, $\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}}$ é invariante pela representação adjunta de $K_\Theta^{\mathbb{C}}$ e podemos definir a complexificação da representação de isotropia $\rho^{\mathbb{C}} : K_\Theta^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Aut}(T_o^{\mathbb{C}}\mathbb{F}_\Theta)$.

As componentes irredutíveis da representação de isotropia complexa (e, assim, da representação de isotropia real) foram completamente descritas em [3] e [4]. De fato, considere a relação de equivalência

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + \sum_i n_i \alpha_i,$$

$\alpha_i \in \Theta$, $n_i \in \mathbb{Z}$, e denote por $\pi : \Pi \rightarrow \Pi/\sim$ a projeção canônica. Seja $\Pi(\Theta)$ o conjunto $\pi(\Pi \setminus \langle \Theta \rangle)$. Podemos então identificar os elementos de $\Pi(\Theta)$ com as componentes irreduzíveis da representação de isotropia complexa. Esta relação é dada pelo Teorema a seguir, que foi provado em [3] e em [4].

Teorema 1.1. ([3],[4]) *Existe uma bijeção entre os elementos de $\Pi(\Theta)$ e as componentes irreduzíveis da representação de isotropia complexa. Esta bijeção é dada por*

$$\Pi(\Theta) \ni \sigma \longleftrightarrow \mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}} = \sum_{\pi(\alpha)=\sigma} \mathfrak{g}_\alpha$$

e estas componentes são não equivalentes como sub-representações.

Dessa forma, o espaço tangente complexificado de \mathbb{F}_Θ pode ser escrito como

$$\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}} = \sum_{\sigma \in \Pi(\Theta)} \mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}.$$

Além disso, como $\text{Ad}(K_\Theta)(\mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}$ para todo $\sigma \in \Pi(\Theta)$, temos uma distribuição complexa em \mathbb{F}_Θ bem definida dada por

$$E_\sigma(k \cdot o) = k_*(\mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}})$$

e, para qualquer $x \in \mathbb{F}_\Theta$, temos

$$T_x^{\mathbb{C}}\mathbb{F}_\Theta = \sum_{\alpha \in \Pi(\Theta)} E_\alpha(x).$$

Com esta descrição, as componentes irreduzíveis da representação de isotropia real são dadas por $\mathfrak{m}_\sigma = (\mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}_{-\sigma}^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{u}$. Observe que as raízes que aparecem em cada componente irreduzível são todas positivas ou todas negativas. Nesse sentido, denotamos por $\Pi(\Theta)^+$ e $\Pi(\Theta)^-$ o conjunto das componentes irreduzíveis que contém apenas raízes positivas ou negativas, respectivamente.

Por fim, denote por $\Sigma(\Theta)$ o conjunto das raízes que tem altura 1 módulo $\langle \Theta \rangle$, isto é,

$$\Sigma(\Theta) = \{\sigma \in \Pi(\Theta); \text{ a altura de } \sigma \text{ em } \Pi(\Theta) \text{ é } 1\}.$$

Ao longo deste trabalho, usaremos com frequência a estrutura da álgebra de Lie de $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$, que descreveremos nos próximos exemplos.

Exemplo 1.2. *(Estrutura da álgebra de Lie de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$)*

Temos que

$$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : XJ + JX^T = 0\},$$

em que J é escrito como

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

com 0 representando a matriz nula $n \times n$ e 1 representando a matriz identidade $n \times n$.

Considere a subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ dada pela subálgebra das matrizes diagonais e, dado $j \in \{1, \dots, 2n\}$, defina o funcional $\varepsilon_j : \text{diag}(a_1, \dots, a_{2n}) \mapsto a_j$. Então as raízes de \mathfrak{h} com seus respectivos espaços de raízes são dados por:

- $\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j, 1 \leq i \neq j \leq n;$
 $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{E_{ij} - E_{n+j, n+i}\}.$
- $\alpha_{ij}^+ = \varepsilon_i + \varepsilon_j, 1 \leq i \neq j \leq n;$
 $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}^+} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{E_{i, n+j} - E_{j, n+i}\}.$
- $-\alpha_{ij}^+ = -(\varepsilon_i + \varepsilon_j), 1 \leq i \neq j \leq n;$
 $\mathfrak{g}_{-\alpha_{ij}^+} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{E_{n+i, j} - E_{n+j, i}\}.$
- $\alpha_{ii} = 2\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n;$
 $\mathfrak{g}_{\alpha_{ii}} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{E_{i, n+i}\}.$
- $-\alpha_{ii} = -2\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n;$
 $\mathfrak{g}_{-\alpha_{ii}} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{E_{n+i, i}\}.$

O sistema simples de raízes é dado por

$$\Sigma = \{\alpha_{ij}, \alpha_{ij}^+, \alpha_{nn}; 1 \leq i < n, j = i + 1\}$$

e as raízes positivas são

$$\Pi^+ = \{\alpha_{ij}, \alpha_{ij}^+, \alpha_{jj}, \alpha_{11}; 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Além disso, uma forma real compacta de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ é a subálgebra das matrizes anti-hermitianas $\mathfrak{sp}(n)$.

Exemplo 1.3. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(6, \mathbb{C})$. Utilizando o sistema de raízes definido no exemplo 1.2, temos que $\Sigma = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{33}\}$ e $\Pi^+ = \{\alpha_{12}, \alpha_{12}^+, \alpha_{13}, \alpha_{13}^+, \alpha_{23}, \alpha_{23}^+, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}\}$. Tomando $\Theta = \{\alpha_{23}, \alpha_{33}\} \subset \Sigma$, obtemos a variedade flag $\mathbb{C}P^5 = \mathrm{Sp}(3)/(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sp}(2))$.

Temos $\Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle = \{\alpha_{12}, \alpha_{12}^+, \alpha_{13}, \alpha_{13}^+, \alpha_{11}\}$ e os elementos desse conjunto são escritos, a partir das raízes simples, como

$$\begin{aligned} \alpha_{12} & \\ \alpha_{12}^+ &= \alpha_{12} + 2\alpha_{23} + \alpha_{33} \\ \alpha_{13} &= \alpha_{12} + \alpha_{23} \\ \alpha_{13}^+ &= \alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{33} \\ \alpha_{11} &= 2\alpha_{12} + 2\alpha_{23} + \alpha_{33} \end{aligned}$$

Logo, $\Pi(\Theta) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, em que $\sigma_1 = \bar{\alpha}_{12} = \{\alpha_{12}, \alpha_{12}^+, \alpha_{13}, \alpha_{13}^+\}$ e $\sigma_2 = \bar{\alpha}_{11} = \{\alpha_{11}\}$. Observe que $\alpha_{11} \notin \sigma_1$, pois $\alpha_{11} = \alpha_{12} + (\alpha_{12} + 2\alpha_{23} + \alpha_{33})$ e $\alpha_{12} \notin \Theta$.

Outro exemplo que usaremos neste trabalho é o de uma variedade flag maximal, que nada mais é que um variedade flag generalizada em que $\Theta = \emptyset$.

Exemplo 1.4. Seja $\mathbb{F}_\Theta = U/T$ uma variedade flag maximal, isto é, $\Theta = \emptyset$. Neste caso, cada \mathfrak{u}_α é uma componente irredutível da representação de isotropia, $\alpha \in \Pi^+$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $\Pi^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$. Então

$$\sigma_i = \bar{\alpha}_i = \{\alpha_i\}$$

e $\Pi(\Theta)$ pode ser identificado com Π^+ .

1.1.2 Métricas Invariantes

Dizemos que uma métrica Riemanniana em $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ é invariante à esquerda (ou U -invariante) se o difeomorfismo $\phi_g : \mathbb{F}_\Theta \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ dado por $\phi_g(hK_\Theta) = \phi(g, hK_\Theta) = ghK_\Theta$ for uma isometria para todo $g \in U$. Como \mathbb{F}_Θ é um espaço homogêneo redutível, existe uma correspondência 1 – 1 entre as métricas U -invariantes em \mathbb{F}_Θ e os produtos escalares B $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$ -invariantes em \mathfrak{m}_Θ (veja, por exemplo, [20]). Qualquer B pode ser escrito como

$$B(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle_\Lambda = -(\Lambda \cdot, \cdot),$$

em que (\cdot, \cdot) é a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{u} e $\Lambda, \Lambda : \mathfrak{m}_\Theta \rightarrow \mathfrak{m}_\Theta$, é um operador simétrico e positivo definido com respeito à forma de Cartan-Killing. Tal B admite uma extensão natural a uma forma simétrica e bilinear em $\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}}$. Usaremos a mesma notação para esta extensão.

Vimos que podemos decompor \mathfrak{m}_Θ como $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_n$, em que cada \mathfrak{m}_i é irredutível pela representação de isotropia, $i = 1 \dots n$. Pelo Lema de Schur, temos que

$$\Lambda|_{\mathfrak{m}_i} = \lambda_i \cdot \text{Id}|_{\mathfrak{m}_i}, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Logo, qualquer produto escalar $\text{Ad}(K_\Theta)$ -invariante pode ser escrito da forma

$$B(X, Y) = -(\lambda_1 \cdot (X, Y)|_{\mathfrak{m}_1} \oplus \dots \oplus \lambda_n \cdot (X, Y)|_{\mathfrak{m}_n}),$$

$X, Y \in \mathfrak{m}_\Theta$. Portanto, o conjunto das métricas invariantes em \mathbb{F}_Θ pode ser parametrizado por

$$\mathcal{M}^u = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n; \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0\}.$$

De forma análoga, em cada componente irredutível $\mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}}$, temos $\Lambda|_{\mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}} = \lambda_\sigma \cdot \text{Id}|_{\mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}}$, com $\lambda_\sigma = \lambda_{-\sigma}$.

Observação. Ao longo deste trabalho abusaremos da notação e diremos que $\Lambda = (\lambda_\sigma)_{\sigma \in \Pi(\Theta)}$ é uma métrica invariante em \mathbb{F}_Θ .

1.1.3 Estruturas Quase Complexas

Uma estrutura quase complexa U -invariante em uma variedade flag generalizada $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ é um tensor J invariante pela ação de U tal que, dado $x \in \mathbb{F}_\Theta$, o valor J_x em x é uma aplicação linear $J_x : T_x \mathbb{F}_\Theta \rightarrow T_x \mathbb{F}_\Theta$ satisfazendo $J_x^2 = -\text{Id}$. Este tensor é completamente determinado pelo seu valor na origem de \mathbb{F}_Θ , isto é, por $J_o : \mathfrak{m}_\Theta \rightarrow \mathfrak{m}_\Theta$, e ele comuta com a representação adjunta de K_Θ em \mathfrak{m}_Θ . Também vamos denotar por J a complexificação desta aplicação a $\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}}$.

Como J é invariante, temos $J(\mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}$ para todo $\sigma \in \Pi(\Theta)$. Seus autovalores são $\pm\sqrt{-1}$ e seu autovetores em $\mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}$ são X_α , $\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$. Assim, em cada componente irredutível, temos $J = \sqrt{-1}\epsilon_\sigma \text{Id}$, com $\epsilon = \pm 1$ e $\epsilon_{-\sigma} = -\epsilon_\sigma$. Portanto, uma estrutura quase complexa U -invariante J é completamente determinada por um conjunto de sinais $\{\epsilon_\sigma\}_{\sigma \in \Pi(\Theta)}$ com $\epsilon_{-\sigma} = -\epsilon_\sigma$.

Usualmente, os vetores associados a $\sqrt{-1}$ são ditos do tipo $(1, 0)$ e os vetores associados a $-\sqrt{-1}$ são ditos do tipo $(0, 1)$. Logo, os vetores do tipo $(1, 0)$ são múltiplos de X_α , $\epsilon_\sigma = 1$, e os vetores do tipo $(0, 1)$ também são múltiplos de X_α , $\epsilon_\sigma = -1$, $\alpha \in \sigma$. Além disso,

$$T_x^{\mathbb{C}}\mathbb{F}_\Theta^{(1,0)} = \sum_{\sigma \in \Pi(\Theta)^+} E_{\epsilon_\sigma \sigma}, \quad T_x^{\mathbb{C}}\mathbb{F}_\Theta^{(0,1)} = \sum_{\sigma \in \Pi(\Theta)^+} E_{\epsilon_{-\sigma} \sigma}. \quad (1.1.2)$$

A variedade flag \mathbb{F}_Θ possui uma estrutura natural de variedade complexa, pois é o espaço homogêneo de um grupo de Lie complexo G . Sua estrutura quase complexa integrável associada J_c é dada por $\epsilon_\sigma = 1$, se $\sigma \in \Pi(\Theta)^-$. A estrutura complexa conjugada $-J_c$ é também integrável.

1.2 Geodésicas Homogêneas e Equigeodésicas

1.2.1 Geodésicas Homogêneas

Seja $(G/H, g)$ uma variedade Riemanniana homogênea redutível, isto é, podemos decompor a álgebra de Lie de G , \mathfrak{g} , como $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, com $\text{Ad}(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, em que \mathfrak{h} é a álgebra de Lie de H . Então \mathfrak{m} é identificado com o espaço tangente $T_o(G/H)$ na origem $o = eH$ de G/H , em que e é o elemento neutro de G . Seja $B(\cdot, \cdot)$ o produto escalar em \mathfrak{m} associado a g .

Definição 1.4. *Dizemos que uma geodésica $\gamma(t) \subset G/H$ é uma geodésica homogênea se $\gamma(t)$ é a órbita de um subgrupo a 1-parâmetro de G , isto é, se*

$$\gamma(t) = \exp tX \cdot o$$

para algum $X \in \mathfrak{g}$. Neste caso, dizemos que X é um vetor geodésico.

Em [22], Kowalski e Vanhecke caracterizaram os vetores geodésicos de um espaço homogêneo a partir da estrutura de \mathfrak{g} . Essa caracterização é dada pelo Teorema a seguir.

Teorema 1.5. ([22]) *Seja G/H uma variedade homogênea com métrica G -invariante g . Um vetor não nulo $X \in \mathfrak{g}$ é um vetor geodésico se, e somente se,*

$$B(X_{\mathfrak{m}}, [X, Y]_{\mathfrak{m}}) = 0$$

para todo $Y \in \mathfrak{g}$, em que B é o produto escalar $\text{Ad}(H)$ -invariante associado a g .

Demonstração: Dado $A \in \mathfrak{g}$ e $x \in G/H$, defina

$$A^* := \left. \frac{d}{dt} \exp tA \cdot x \right|_{t=0}.$$

Observe que A^* é um campo de Killing, pois g é uma métrica G -invariante.

Logo, dados X, Y e $Z \in \mathfrak{g}$,

$$2g(\nabla_{X^*} Y^*, Z^*) = g([X^*, Y^*], Z^*) + g([X^*, Z^*], Y^*) + g(X^*, [Y^*, Z^*]),$$

donde

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{X^*} X^*, Z^*) &= g([X^*, X^*], Z^*) + g([X^*, Z^*], X^*) + g(X^*, [X^*, Z^*]) \\ &= 2g(X^*, [X^*, Z^*]) \\ &= -2g(X^*, [X, Z]^*). \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Suponha que X seja um vetor geodésico. Então

$$g_o(X^*(o), [X, Z]^*(o)) = B(X_{\mathfrak{m}}, [X, Z]_{\mathfrak{m}}) = 0.$$

Por outro lado, se $B(X_{\mathfrak{m}}, [X, Z]_{\mathfrak{m}}) = 0$ e $\gamma(t) = \exp tX \cdot o$, então

$$\begin{aligned} g_{\gamma(t)}(X^*(\gamma(t)), [X, Z]^*(\gamma(t))) &= g_{\gamma(t)}((d \exp tX)_o(X^*(o)), (d \exp tX)_o([X, Z]^*(o))) \\ &= g_o(X^*(o), [X, Z]^*(o)) \\ &= B(X_{\mathfrak{m}}, [X, Z]_{\mathfrak{m}}^*) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo $Z \in \mathfrak{g}$. Daí, por (1.2.1), temos que $\nabla_{X^*} X^* = 0$, donde $\gamma(t)$ é uma geodésica. \square

Corolário 1.1. *Seja G/H uma variedade homogênea com métrica G -invariante g . Um vetor não nulo $X \in \mathfrak{g}$ é um vetor geodésico se, e somente se,*

$$B(X_{\mathfrak{m}}, [X, Y]_{\mathfrak{m}}) = 0$$

para todo $Y \in \mathfrak{m}$, em que B é o produto escalar $\text{Ad}(H)$ -invariante associado a g .

Diante disso, é natural nos perguntamos sobre a existência de geodésicas homogêneas. De fato, Kowalski e Szente ([21]) provaram que toda variedade Riemanniana homogênea admite pelo menos uma geodésica desse tipo passando por cada ponto da variedade. Além disso, para o caso em G é semissimples, eles obtiveram o seguinte resultado:

Teorema 1.6. ([21]) *Se $\dim M = n$ e G é um grupo de Lie semissimples, então M admite n geodésicas homogêneas mutuamente ortogonais partindo da origem.*

Outra pergunta natural é se, dada uma variedade homogênea M , conseguimos uma métrica Riemanniana invariante g de tal forma que todas as geodésicas de M sejam homogêneas. Um exemplo de variedade em que isso acontece são as variedades homogêneas naturalmente redutíveis. Em [22] essas variedades são denominadas *g.o. spaces* (geodesic orbit). Nesse mesmo artigo todos os g.o. spaces de dimensão menor ou igual a 5 estão classificados.

1.2.2 Equigeodésicas em Variedades Flag

Vamos agora considerar as variedades flag generalizadas $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$. Como visto no capítulo 1.1, a decomposição $\mathfrak{u} = \mathfrak{m}_\Theta \oplus \mathfrak{k}_\Theta$ é tal que $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta^\perp$ (com respeito à forma de Cartan-Killing de \mathfrak{u}) e $\text{Ad}(K_\Theta)\mathfrak{m}_\Theta \subset \mathfrak{m}_\Theta$.

Seja Λ uma métrica U -invariante em \mathbb{F}_Θ e $B(\cdot, \cdot) = -(\Lambda \cdot, \cdot)$ o produto escalar Ad-invariante associado a Λ .

Devido à invariância de B , temos que A_α e S_α são autovetores de Λ associados ao mesmo autovalor λ_α . Observe então que, para todo $Y \in \mathfrak{u}$,

$$\begin{aligned}
 B(A_\alpha, [A_\alpha, Y]_{\mathfrak{m}_\Theta}) &= -(\Lambda A_\alpha, [A_\alpha, Y]_{\mathfrak{m}_\Theta}) \\
 &= -\alpha(A_\alpha, [A_\alpha, Y]_{\mathfrak{m}_\Theta} + [A_\alpha, Y]_{\mathfrak{k}_\Theta}) \\
 &= -(A_\alpha, [A_\alpha, Y]) \\
 &= ([A_\alpha, A_\alpha], Y) \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

donde concluímos que A_α é um vetor geodésico. Analogamente, concluímos que S_α também é um vetor geodésico. Como para toda métrica invariante temos associado um operador Λ e como A_α e S_α são autovetores para todo Λ , obtemos que A_α e S_α são vetores geodésicos com respeito a qualquer métrica invariante em \mathbb{F}_Θ . O estudo dessa classe de geodésicas começou em [11], em que foi dado um nome específico para esse tipo de curvas.

Definição 1.5. *Dizemos que uma curva γ em uma variedade flag é uma equigeodésica se*

γ for uma geodésica com respeito a toda métrica invariante em \mathbb{F}_Θ . Se γ for da forma

$$\gamma(t) = \exp tX \cdot o,$$

dizemos que γ é uma equigeodésica homogênea e o vetor X é chamado de vetor equigeodésico.

Observação. Sempre que nos referirmos a equigeodésicas, estaremos considerando as equigeodésicas homogêneas.

Observação. A existência de equigeodésicas em variedades flag foi mostrada no início da seção.

Assim como no caso dos vetores geodésicos, os vetores equigeodésicos foram caracterizados em [11]. Essa caracterização é dada pelo Teorema a seguir.

Teorema 1.7. ([11]) *Um vetor $X \in \mathfrak{m}_\Theta$ é um vetor equigeodésico se, e somente se,*

$$[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}_\Theta} = 0 \tag{1.2.3}$$

para toda métrica invariante Λ .

Demonstração: Sejam $X, Y \in \mathfrak{m}_\Theta$. Então

$$\begin{aligned} B(X, [X, Y]_{\mathfrak{m}_\Theta}) &= -\langle \Lambda X, [X, Y]_{\mathfrak{m}_\Theta} \rangle \\ &= -(\Lambda X, [X, Y]_{\mathfrak{m}_\Theta} + [X, Y]_{\mathfrak{k}_\Theta}) \\ &= -(\Lambda X, [X, Y]) \\ &= ([X, \Lambda X], Y) \\ &= ([X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}_\Theta}, Y), \end{aligned}$$

donde segue o resultado. □

Exemplo 1.8. Seja $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ uma variedade flag generalizada e sejam \mathfrak{m}_i , $i = 1, \dots, n$, as componentes irredutíveis da representação de isotropia. Se $X \in \mathfrak{m}_i$, então a equação 1.2.3 é satisfeita. Um vetor desse tipo é chamado de vetor equigeodésico trivial.

Capítulo 2

Aspectos Variacionais de Geodésicas Homogêneas

Nosso objetivo neste capítulo é estudar pontos conjugados ao longo de geodésicas homogêneas em uma variedade flag generalizada. Mais precisamente, queremos entender como esses pontos se comportam ao perturbarmos a métrica invariante considerada em determinadas direções. Esse estudo será feito a partir da análise do sinal da segunda variação da energia da geodésica e daremos um critério algébrico para que possamos gerar pontos conjugados na variedade flag. Também daremos um exemplo de como o fluxo de Ricci homogêneo pode gerar pontos conjugados no espaço projetivo complexo.

A ideia dessa abordagem surgiu de [27], em que uma análise similar foi feita para o caso de aplicações harmônicas. Nesse artigo, um Lema importante foi provado, chamado *Lema da perturbação*, que consegue comparar as segundas variações da energia quando consideramos uma métrica invariante e uma perturbação específica dela. Aqui, adaptaremos esse Lema para o caso de geodésicas. Ele será de extrema importância.

2.1 Variações da Energia

Nesta seção, estudaremos as variações da energia de uma geodésica homogênea em uma variedade flag generalizada. Vamos encontrar expressões para essas variações a partir da estrutura de \mathfrak{m}_Θ .

Seja $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ uma variedade flag generalizada com decomposição reductível $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{m}_\Theta$ e seja $\Lambda = (\lambda_\sigma)_{\sigma \in \Pi(\Theta)}$ uma métrica invariante em \mathbb{F}_Θ

Dado $A \in \mathfrak{m}_\Theta$, denotaremos por A^* o campo vetorial em \mathbb{F}_Θ dado por

$$A^*(x) = \left. \frac{d}{dt} \exp tA \cdot x \right|_{t=0} = (d\phi_x)_e(A), \quad x \in \mathbb{F}_\Theta,$$

em que $\phi : U \times \mathbb{F}_\Theta \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ é a ação à esquerda de U em \mathbb{F}_Θ e ϕ_x e ϕ_g são as aplicações parciais induzidas por essa ação.

Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ uma curva diferenciável homogênea dada por

$$\gamma(t) = \exp tX \cdot o,$$

$X \in \mathfrak{m}_\Theta$. Como visto no capítulo 1, temos definida uma base para \mathfrak{m}_Θ dada por A_α e S_α , com $\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$. Logo, podemos escrever X como

$$X = \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} (a_\alpha A_\alpha + b_\alpha S_\alpha),$$

com $a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, a *energia* de γ será dada por

$$\begin{aligned} E(\gamma) &= \int_0^a |\gamma'(t)|_\Lambda^2 dt \\ &= \int_0^a \langle X^*(\gamma(t)), X^*(\gamma(t)) \rangle_\Lambda dt \\ &= \int_0^a \langle (d\phi_{\exp tX})_o(X^*(o)), (d\phi_{\exp tX})_o(X^*(o)) \rangle_\Lambda dt \\ &= \int_0^a \langle X^*(o), X^*(o) \rangle_\Lambda dt \\ &= \int_0^a B(X, X) dt \\ &= -a(\Lambda X, X) \\ &= -a \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} \lambda_\alpha (a_\alpha^2 (A_\alpha, A_\alpha) + b_\alpha^2 (S_\alpha, S_\alpha)) \\ &= 2a \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} \lambda_\alpha (a_\alpha^2 + b_\alpha^2), \end{aligned}$$

em que B_Λ é o produto escalar em \mathfrak{m}_Θ associado a Λ e $\lambda_\alpha = \lambda_\sigma$ se $\alpha \in \sigma \in \Pi(\Theta)$.

Dada uma aplicação diferenciável $q : [0, a] \rightarrow \mathfrak{u}$, considere a aplicação $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ dada por $f(s, t) = \exp sq(t) \cdot \gamma(t)$. Observe que f é uma variação diferenciável de γ . A variação será própria se, e somente se, $q(0), \text{Ad}(\exp -aX)q(a) \in \mathfrak{k}_\Theta$. Além disso, o campo variacional de f será dado por

$$V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = (d\phi_{\gamma(t)})_e(q(t)).$$

Denotaremos por $E(s)$ a energia de uma variação de γ dada por f . Nosso primeiro resultado exhibe uma fórmula para $E(s)$ em termos da geometria invariante de \mathbb{F}_Θ . Para isso, precisaremos de alguns resultados auxiliares apresentados a seguir.

Lema 2.1. ([18], p. 95) *Seja $X \in \mathfrak{u}$. A diferencial da aplicação exponencial de \mathfrak{u} em U em X é dada por*

$$d \exp_X = (dL_{\exp X})_e \circ T_X,$$

em que

$$T_X = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)!} \text{ad}(X)^n = \frac{e^{\text{ad}(X)} - I}{\text{ad}(X)}.$$

Lema 2.2. *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ uma curva diferenciável dada por $\gamma(t) = \exp tX \cdot o$, $X \in \mathfrak{m}_\Theta$. Dada uma aplicação diferenciável $q : [0, a] \rightarrow \mathfrak{u}$, considere uma variação $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a]$ de γ dada por $f(s, t) = \exp sq(t) \cdot \gamma(t)$. Então,*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(s, t) = (d\phi_{\exp sq(t)})_{\gamma(t)}(C_s^*(\gamma(t)) + \gamma'(t)),$$

em que $C_s = T_{sq(t)}(sq'(t))$.

Demonstração: Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(s, t) = (d\phi_{\gamma(t)})_{\exp sq(t)}(d \exp)_{sq(t)}(sq'(t)) + (d\phi_{\exp sq(t)})_{\gamma(t)}(\gamma'(t)).$$

Pelo Lema 2.1,

$$\begin{aligned} (d\phi_{\gamma(t)})_{\exp sq(t)}(d \exp)_{sq(t)}(sq'(t)) &= (d\phi_{\gamma(t)})_{\exp sq(t)}(dL_{\exp sq(t)})_e(T_{sq(t)}(sq'(t))) \\ &= d(\phi_{\gamma(t)} \circ L_{\exp sq(t)})_e(C_s) \\ &= \left. \frac{d}{dr} \phi_{\gamma(t)} \circ L_{\exp sq(t)}(\exp rC_s) \right|_{r=0} \\ &= \left. \frac{d}{dr} \phi_{\gamma(t)}(\exp sq(t) \exp rC_s) \right|_{r=0} \\ &= \left. \frac{d}{dr} \exp sq(t) \exp rC_s \cdot \gamma(t) \right|_{r=0} \\ &= \left. \frac{d}{dr} \phi_{\exp sq(t)}(\exp rC_s \cdot \gamma(t)) \right|_{r=0} \\ &= (d\phi_{\exp sq(t)})_{\gamma(t)}(da_{\gamma(t)})_e(C_s) \\ &= (d\phi_{\exp sq(t)})_{\gamma(t)}(C_s^*(\gamma(t))). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(s, t) = (d\phi_{\exp sq(t)})_{\gamma(t)}(C_s^*(\gamma(t)) + \gamma'(t)).$$

□

Lema 2.3. *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ uma curva diferenciável dada por $\gamma(t) = \exp tX \cdot o$, $X \in \mathfrak{m}_\Theta$. Se $A \in \mathfrak{u}$, então*

$$A^*(\gamma(t)) = (d\phi_{\exp tX})_o((\text{Ad}(\exp -tX)A)^*(o)).$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} A^*(\gamma(t)) &= \frac{d}{ds} \exp sA \cdot \gamma(t)|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} (\exp tX \exp -tX \exp sA \exp tX) \cdot o \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} \phi_{\exp tX} (\exp (s \text{Ad}(\exp -tX)A) \cdot o) \Big|_{s=0} \\ &= (d\phi_{\exp tX})_o((\text{Ad}(\exp -tX)A)^*(o)). \end{aligned}$$

□

Agora estamos prontos para calcular a energia $E(s)$ de uma variação de γ dada por f , assim como a primeira e a segunda variações da energia de uma geodésica homogênea em \mathbb{F}_Θ .

Proposição 2.1. *Sejam $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ uma curva diferenciável dada por $\gamma(t) = \exp tX \cdot o$, $X \in \mathfrak{m}_\Theta$. Dada uma aplicação diferenciável $q : [0, a] \rightarrow \mathfrak{u}$, considere uma variação $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a]$ de γ dada por $f(s, t) = \exp sq(t) \cdot \gamma(t)$. Se $E : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é a energia de f , então*

$$E(s) = E(\gamma) + \int_0^a B_\Lambda((\text{Ad}(\exp -tX)C_s)_{\mathfrak{m}_\Theta}, (\text{Ad}(\exp -tX)C_s)_{\mathfrak{m}_\Theta} + 2X) dt,$$

em que B_Λ é o produto escalar em \mathfrak{m}_Θ associado a Λ .

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} E(s) &= \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right|_\Lambda^2 dt \\ &= \int_0^a |(d\phi_{\exp sq(t)})_{\gamma(t)}(C_s^*(\gamma(t)) + \gamma'(t))|_\Lambda^2 dt \\ &= \int_0^a |C_s^*(\gamma(t)) + \gamma'(t)|_\Lambda^2 dt \\ &= E(\gamma) + \int_0^a |C_s^*(\gamma(t))|_\Lambda^2 dt + 2 \int_0^a \langle C_s^*(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle_\Lambda dt \\ &= E(\gamma) + \int_0^a \langle C_s^*(\gamma(t)), C_s^*(\gamma(t)) + 2X^*(\gamma(t)) \rangle_\Lambda dt \\ &= E(\gamma) + \int_0^a B_\Lambda((\text{Ad}(\exp -tX)C_s)_{\mathfrak{m}_\Theta}, (\text{Ad}(\exp -tX)C_s)_{\mathfrak{m}_\Theta} + 2X) dt, \end{aligned}$$

em que a segunda igualdade segue do Lema 2.2 e a última igualdade segue do Lema 2.3. □

Proposição 2.2. *A primeira variação da energia de γ é dada por*

$$E'(0) = 2 \int_0^a B_\Lambda((\text{Ad}(\exp -tX)q'(t))_{\mathfrak{m}_\Theta}, X) dt,$$

em que B_Λ é o produto escalar em \mathfrak{m}_Θ associado a Λ .

Demonstração: Temos que

$$E'(0) = 2 \int_0^a B_\Lambda \left(\left. \frac{\partial}{\partial s} (\text{Ad}(\exp -tX)C_s)_{\mathfrak{m}_\Theta} \right|_{s=0}, X \right) dt.$$

Mas

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial s} \text{Ad}(\exp -tX)C_s \right|_{s=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial s} \exp \text{ad}(tX)C_s \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial s} \sum_{n \geq 0} \frac{t^n \text{ad}(X)^n}{n!} C_s \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial s} \sum_{n \geq 0} \frac{t^n \text{ad}(X)^n}{n!} \sum_{k \geq 0} \frac{s^{k+1} \text{ad}(q(t))^k}{(k+1)!} (q'(t)) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial s} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{t^n \text{ad}(X)^n}{n!} s q'(t) + O(s^2) \right) \right|_{s=0} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n \text{ad}(X)^n}{n!} q'(t) \\ &= \text{Ad}(\exp -tX)q'(t). \end{aligned}$$

Observe que usamos a igualdade $\text{Ad}(\exp -tX)C_s = \exp \text{ad}(tX)C_s$ pois a ação de U em \mathbb{F}_Θ considerada é uma ação à esquerda, donde \mathfrak{u} é a álgebra de Lie dos campos invariantes à direita em U . Portanto,

$$E'(0) = 2 \int_0^a B_\Lambda((\text{Ad}(\exp -tX)q'(t))_{\mathfrak{m}_\Theta}, X) dt.$$

□

Sabemos que, se a curva γ for uma geodésica com respeito a Λ e a variação f for própria, então $E'(0) = 0$. Para verificar isso, usaremos o Lema a seguir.

Lema 2.4. *Seja $A \in \mathfrak{u}$. Se $X \in \mathfrak{u}$ for um vetor geodésico com respeito a Λ , então*

$$B_\Lambda((\text{Ad}(\exp -tX)A)_{\mathfrak{m}_\Theta}, X_{\mathfrak{m}_\Theta}) = B_\Lambda(A_{\mathfrak{m}_\Theta}, X_{\mathfrak{m}_\Theta}).$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} (\text{Ad}(\exp -tX)A)_{\mathfrak{m}_\Theta} &= (\exp t \text{ad}(X)A)_{\mathfrak{m}_\Theta} \\ &= \left(\sum_{n \geq 0} \frac{t^n \text{ad}(X)^n A}{n!} \right)_{\mathfrak{m}_\Theta} \\ &= A_{\mathfrak{m}_\Theta} + \left[X, \sum_{n \geq 1} \frac{t^n \text{ad}(X)^{n-1} A}{n!} \right]_{\mathfrak{m}_\Theta}. \end{aligned}$$

Como X é vetor geodésico com respeito a Λ , $B_\Lambda(X_{\mathfrak{m}_\Theta}, [X, Y]_{\mathfrak{m}_\Theta})_{\mathfrak{m}_\Theta} = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{u}$ (conf. Teorema 1.5), donde

$$B_\Lambda \left(\left[X, \sum_{n \geq 1} \frac{t^n \text{ad}(X)^{n-1} A}{n!} \right]_{\mathfrak{m}_\Theta}, X_{\mathfrak{m}_\Theta} \right) = 0.$$

Portanto,

$$B_\Lambda((\text{Ad}(\exp -tX)A)_{\mathfrak{m}_\Theta}, X_{\mathfrak{m}_\Theta}) = B_\Lambda(A_{\mathfrak{m}_\Theta}, X_{\mathfrak{m}_\Theta}).$$

□

Observação. Pelo Lema 2.4 é possível concluir que, se X for um vetor geodésico com respeito a Λ e f for uma variação própria, então

$$\begin{aligned} \int_0^a B_\Lambda((\text{Ad}(\exp -tX)q'(t))_{\mathfrak{m}_\Theta}, X) dt &= \int_0^a B_\Lambda(q'(t)_{\mathfrak{m}_\Theta}, X) dt \\ &= B_\Lambda(q(t)_{\mathfrak{m}_\Theta}, X)|_0^a \\ &= B_\Lambda(q(a)_{\mathfrak{m}_\Theta}, X) - B_\Lambda(q(0)_{\mathfrak{m}_\Theta}, X) \\ &= B_\Lambda((\text{Ad}(\exp -aX)q(a))_{\mathfrak{m}_\Theta}, X) - B_\Lambda(q(0)_{\mathfrak{m}_\Theta}, X) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $q(0)$ e $\text{Ad}(\exp -aX)q(a) \in \mathfrak{k}_\Theta$.

Agora estamos prontos para obter a fórmula da segunda variação da energia de uma geodésica homogênea γ .

Proposição 2.3. *Se X for um vetor geodésico com respeito a Λ , a segunda variação da energia de γ é dada por*

$$\begin{aligned} I_\Lambda^\gamma(q) = E''(0) &= 2 \int_0^a B_\Lambda([q(t), q'(t)]_{\mathfrak{m}_\Theta}, X) dt \\ &\quad + 2 \int_0^a B_\Lambda((\text{Ad}(\exp -tX)q'(t))_{\mathfrak{m}_\Theta}, (\text{Ad}(\exp -tX)q'(t))_{\mathfrak{m}_\Theta}) dt \end{aligned}$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} E'(s) = E'(\gamma^s) &= \int_0^a B_\Lambda \left(\frac{\partial}{\partial s} (\text{Ad}(\exp -tX)C_s)_{\mathfrak{m}_\Theta}, (\text{Ad}(\exp -tX)C_s)_{\mathfrak{m}_\Theta} + 2X \right) dt \\ &\quad + \int_0^a B_\Lambda \left((\text{Ad}(\exp -tX)C_s)_{\mathfrak{m}_\Theta}, \frac{\partial}{\partial s} (\text{Ad}(\exp -tX)C_s)_{\mathfrak{m}_\Theta} \right) dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} E''(0) &= 2 \int_0^a B_\Lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} (\text{Ad}(\exp -tX)C_s)_{\mathfrak{m}_\Theta} \Big|_{s=0}, X \right) dt \\ &\quad + 2 \int_0^a B_\Lambda ((\text{Ad}(\exp -tX)q'(t))_{\mathfrak{m}_\Theta}, (\text{Ad}(\exp -tX)q'(t))_{\mathfrak{m}_\Theta}) dt. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial s^2} \text{Ad}(\exp -tX)C_s \Big|_{s=0} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{t^n \text{ad}(X)^n}{n!} s q'(t) + \sum_{n \geq 0} \frac{t^n \text{ad}(X)^n}{n!} \frac{s^2 [q(t), q'(t)]}{2} + O(s^3) \right) \Big|_{s=0} \\ &= \text{Ad}(\exp -tX)[q(t), q'(t)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E''(0) &= 2 \int_0^a B_\Lambda ((\text{Ad}(\exp -tX)[q(t), q'(t)])_{\mathfrak{m}_\Theta}, X) dt \\ &\quad + 2 \int_0^a B_\Lambda ((\text{Ad}(\exp -tX)q'(t))_{\mathfrak{m}_\Theta}, (\text{Ad}(\exp -tX)q'(t))_{\mathfrak{m}_\Theta}) dt \\ &= 2 \int_0^a B_\Lambda ([q(t), q'(t)]_{\mathfrak{m}_\Theta}, X) dt \\ &\quad + 2 \int_0^a B_\Lambda ((\text{Ad}(\exp -tX)q'(t))_{\mathfrak{m}_\Theta}, (\text{Ad}(\exp -tX)q'(t))_{\mathfrak{m}_\Theta}) dt, \end{aligned}$$

pois X é vetor geodésico com respeito a Λ . □

2.2 Lema de Perturbação

Nesta seção, provaremos um Lema que mostra o comportamento da segunda variação da energia de γ quando perturbamos uma métrica invariante de \mathbb{F}_Θ em algumas direções. Um resultado similar foi provado em [27] para aplicações harmônicas.

Seja Λ uma métrica invariante em \mathbb{F}_Θ definida por $\Lambda = (\lambda_\sigma)_{\sigma \in \Pi(\Theta)}$ e seja \mathcal{P} um subconjunto de $\Pi(\Theta)$.

Definição 2.1. Dizemos que uma métrica $\Lambda^\# = (\lambda_\sigma^\#)_{\sigma \in \Pi(\Theta)}$ é uma \mathcal{P} -perturbação de Λ se as condições abaixo são satisfeitas:

1. $\lambda_\sigma^\# = \lambda_\sigma$ para todo $\sigma \in \mathcal{P}$;
2. $\lambda_\sigma^\# = \lambda_\sigma + \xi_\sigma > 0$, $\xi_\sigma \in \mathbb{R}$, para todo $\sigma \in \Pi(\Theta) \setminus \mathcal{P}$.

Seja $\gamma(t) = \exp tX \cdot o$ uma curva homogênea em \mathbb{F}_Θ , com $X \in \mathfrak{m}_\Theta$. Como U age em \mathbb{F}_Θ por isometrias e $\{A_\alpha, S_\alpha\}_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle}$ é uma base de $\mathfrak{m}_\Theta \simeq T_o\mathbb{F}_\Theta$, temos que

$$\{(d\phi_{\exp tX})_o(A_\alpha), (d\phi_{\exp tX})_o(S_\alpha)\}_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle}$$

forma um referencial ortogonal ao longo de $\gamma(t)$. Daí, dada uma aplicação diferenciável $\psi : I \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$, existem aplicações diferenciáveis $f_\alpha, g_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$, tais que

$$\psi'(t) = \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} (f_\alpha(t)(d\phi_{\exp tX})_o(A_\alpha) + g_\alpha(t)(d\phi_{\exp tX})_o(S_\alpha)).$$

Defina $\psi_\alpha(t) := f_\alpha(t)(d\phi_{\exp tX})_o(A_\alpha) + g_\alpha(t)(d\phi_{\exp tX})_o(S_\alpha)$. Com isso, temos a seguinte definição.

Definição 2.2. Uma aplicação $\psi : I \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ é dita subordinada a \mathcal{P} se $\psi_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in \sigma \in \Pi(\Theta) \setminus \mathcal{P}$.

Em outras palavras, dizemos que ψ é subordinada a \mathcal{P} se a imagem de ψ for tangente à distribuição gerada por \mathcal{P} .

O Lema abaixo relaciona a segunda forma da variação da energia de uma equigeodésica γ subordinada a \mathcal{P} quando calculada com respeito a uma métrica Λ e uma \mathcal{P} -perturbação desta métrica. Ele será chamado de *lema da perturbação*.

Lema 2.5. Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ uma aplicação subordinada a \mathcal{P} e $\Lambda^\# = (\lambda_\sigma^\#)_{\sigma \in \Pi(\Theta)}$ uma \mathcal{P} -perturbação de $\Lambda = (\lambda_\sigma)_{\sigma \in \Pi(\Theta)}$. Suponha que γ é geodésica homogênea com respeito a Λ e $\Lambda^\#$ com vetor geodésico $X \in \mathfrak{m}_\Theta$. Então

$$I_{\Lambda^\#}^\gamma(q) = I_\Lambda^\gamma(q) + 4 \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\sigma \in \Pi(\Theta) \setminus \mathcal{P}} \xi_\sigma \int_0^a (\tilde{f}_\alpha^2(t) + \tilde{g}_\alpha^2(t)) dt,$$

em que $\tilde{f}_\alpha(t)$ e $\tilde{g}_\alpha(t)$ são funções diferenciáveis dadas por

$$(\text{Ad}(\exp -tX)q'(t))_{\mathfrak{m}_\Theta} = \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} (\tilde{f}_\alpha(t)A_\alpha + \tilde{g}_\alpha(t)S_\alpha).$$

Demonstração: Como $[q(t), q'(t)]$, $X \in \mathfrak{m}_\Theta$ e A_α, S_α , $\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$, temos que, para todo $\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$, existem funções diferenciáveis \hat{f}_α e \hat{g}_α e constantes reais a_α e b_α tais que

$$[q(t), q'(t)]_{\mathfrak{m}_\Theta} = \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} (\hat{f}_\alpha(t)A_\alpha + \hat{g}_\alpha(t)S_\alpha)$$

e

$$X = \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} (a_\alpha A_\alpha + b_\alpha S_\alpha).$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_{\Lambda^\#}^\gamma(q) &= 2 \int_0^a B_{\Lambda^\#}((\text{Ad}(\exp -tX)q'(t))_{\mathfrak{m}_\Theta}, (\text{Ad}(\exp -tX)q'(t))_{\mathfrak{m}_\Theta}) dt \\ &\quad + 2 \int_0^a B_{\Lambda^\#}([q(t), q'(t)]_{\mathfrak{m}_\Theta}, X) dt \\ &= 4 \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\sigma \in \Pi(\Theta)} \lambda_\sigma^\# \int_0^a (\tilde{f}_\alpha^2(t) + \tilde{g}_\alpha^2(t)) dt + 4 \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\sigma \in \Pi(\Theta)} \lambda_\sigma^\# \int_0^a (a_\alpha \hat{f}_\alpha(t) + b_\alpha \hat{g}_\alpha(t)) dt. \end{aligned}$$

Mas observe que, se $\alpha \in \sigma \in \Pi(\Theta) \setminus \mathcal{P}$, então $a_\alpha = 0 = b_\alpha$, donde

$$\begin{aligned} I_{\Lambda^\#}^\gamma(q) &= 4 \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\sigma \in \Pi(\Theta) \setminus \mathcal{P}} \lambda_\sigma^\# \int_0^a (\tilde{f}_\alpha^2(t) + \tilde{g}_\alpha^2(t)) dt + 4 \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} \lambda_\sigma^\# \int_0^a (\tilde{f}_\alpha^2(t) + \tilde{g}_\alpha^2(t)) dt \\ &\quad + 4 \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} \lambda_\sigma^\# \int_0^a (a_\alpha \hat{f}_\alpha(t) + b_\alpha \hat{g}_\alpha(t)) dt. \\ &= 4 \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\sigma \in \Pi(\Theta) \setminus \mathcal{P}} (\lambda_\sigma + \xi_\sigma) \int_0^a (\tilde{f}_\alpha^2(t) + \tilde{g}_\alpha^2(t)) dt + 4 \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} \lambda_\sigma \int_0^a (\tilde{f}_\alpha^2(t) + \tilde{g}_\alpha^2(t)) dt \\ &\quad + 4 \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} \lambda_\sigma \int_0^a (a_\alpha \hat{f}_\alpha(t) + b_\alpha \hat{g}_\alpha(t)) dt. \\ &= 4 \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\sigma \in \Pi(\Theta) \setminus \mathcal{P}} (\lambda_\sigma + \xi_\sigma) \int_0^a (\tilde{f}_\alpha^2(t) + \tilde{g}_\alpha^2(t)) dt + 4 \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} \lambda_\sigma \int_0^a (\tilde{f}_\alpha^2(t) + \tilde{g}_\alpha^2(t)) dt \\ &\quad + 4 \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\sigma \in \Pi(\Theta)} \lambda_\sigma \int_0^a (a_\alpha \hat{f}_\alpha(t) + b_\alpha \hat{g}_\alpha(t)) dt. \\ &= I_\Lambda^\gamma(q) + 4 \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\sigma \in \Pi(\Theta) \setminus \mathcal{P}} \xi_\sigma \int_0^a (\tilde{f}_\alpha^2(t) + \tilde{g}_\alpha^2(t)) dt. \end{aligned}$$

□

Observação. A hipótese de γ ser geodésica com respeito a ambas métricas Λ e $\Lambda^\#$ é essencial para os cálculos do Lema. As equigeodésicas homogêneas são um exemplo de curvas que satisfazem essa hipótese.

2.3 Pontos Conjugados em $\mathbb{C}P^{2n+1}$

Nesta seção, analisaremos o comportamento dos pontos conjugados em $\mathbb{C}P^{2n+1} = \text{Sp}(n+1)/(\text{U}(1) \times \text{Sp}(n))$ ao considerarmos uma \mathcal{P} -perturbação da métrica normal Λ_{NR} . Essa análise será feita inicialmente pelo Lema da perturbação e depois pelo fluxo de Ricci homogêneo.

2.3.1 Geometria de $\mathbb{C}P^{2n+1} = \mathrm{Sp}(n+1)/(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sp}(n))$

Vamos começar relembrando alguns fatos a respeito da geometria de $\mathbb{C}P^{2n+1}$.

Seja $\mathfrak{sp}(n+1)$ a álgebra de Lie do grupo de Lie $\mathrm{Sp}(n+1)$ e seja \mathfrak{k}_Θ a álgebra de Lie do subgrupo de isotropia $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$ da ação de $\mathrm{Sp}(n+1)$ em $\mathbb{C}P^{2n+1}$. Temos uma decomposição redutível de $\mathfrak{sp}(n+1)$ dada por

$$\mathfrak{sp}(n+1) = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{m}_\Theta,$$

em que $\mathrm{Ad}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sp}(n))\mathfrak{m}_\Theta \subset \mathfrak{m}_\Theta$ e identificamos \mathfrak{m}_Θ com o espaço tangente de $\mathbb{C}P^{2n+1}$ na origem (classe lateral trivial).

A representação de isotropia de $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$ decompõe \mathfrak{m}_Θ em duas componentes irredutíveis, a saber,

$$\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2,$$

em que $\dim \mathfrak{m}_1 = 4n$ e $\dim \mathfrak{m}_2 = 2$. Além disso, a decomposição $\mathfrak{sp}(n+1) = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ satisfaz as seguintes relações:

$$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_1, \quad [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{k}_\Theta, \quad [\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{k}_\Theta. \quad (2.3.1)$$

Se definirmos a subálgebra $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{m}_2$, então, por 2.3.1,

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_1, \quad [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{h}.$$

Logo, $(\mathfrak{sp}(n+1), \mathfrak{h})$ é um par simétrico e o espaço simétrico correspondente é $\mathrm{Sp}(n+1)/(\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n))$.

Como $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{Sp}(n+1)$, temos a seguinte fibração (ver [8])

$$\mathrm{Sp}(1)/\mathrm{U}(1) \dots \mathrm{Sp}(n+1)/(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sp}(n)) \rightarrow \mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n),$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbb{S}^2 \dots \mathbb{C}P^{2n+1} \rightarrow \mathbb{H}P^n.$$

A seguir, vamos descrever a estrutura de álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(n+1)$. Note que a base de $\mathfrak{sp}(n+1)$ que usaremos é diferente da base quaterniônica usual usada.

Seja E_{ij} ($1 \leq i, j \leq 2n+2$) a matriz $(2n+2) \times (2n+2)$ com entrada 1 na posição ij e zero nas demais. Tome $m = \sqrt{2n+4}/(2n+4)$ e defina

$$\begin{aligned} X_{ij} &:= \frac{\sqrt{2}m}{2}(E_{ij} - E_{n+1+j, n+1+i}), \\ X_{-ij} &:= \frac{\sqrt{2}m}{2}(E_{ji} - E_{n+1+i, n+1+j}), \\ X_{ij}^+ &:= \frac{\sqrt{2}m}{2}(E_{i, n+1+j} + E_{j, n+1+i}), \\ X_{-ij}^+ &:= \frac{\sqrt{2}m}{2}(E_{n+1+i, j} + E_{n+1+j, i}), \end{aligned}$$

$1 \leq i < j \leq n+1$, e

$$\begin{aligned} X_{ii} &:= m(E_{i, n+1+i}) \\ X_{-ii} &:= m(E_{n+1+i, i}), \end{aligned}$$

$1 \leq i \leq n+1$.

Tais elementos são elementos de uma base de Weyl de $\mathfrak{sp}(2n+2, \mathbb{C})$ associada à subálgebra de Cartan das matrizes diagonais.

Defina

$$A_{ij} = X_{ij} - X_{-ij}, \quad S_{ij} = i(X_{ij} + X_{-ij}),$$

$1 \leq i \leq j \leq n+1$,

$$A_{ij}^+ = X_{ij}^+ - X_{-ij}^+, \quad S_{ij}^+ = i(X_{ij}^+ + X_{-ij}^+),$$

$1 \leq i < j \leq n+1$, e

$$H_{i, i+1} = [X_{i, i+1}, X_{-(i, i+1)}], \quad H_{n+1, n+1} = [X_{n+1, n+1}, X_{-(n+1, n+1)}],$$

$1 \leq i \leq n$. Então uma base de $\mathfrak{sp}(n+1)$ é dada pelo conjunto

$$\{A_{11}, S_{11}, A_{jj}, S_{jj}, A_{ij}, S_{ij}, A_{ij}^+, S_{ij}^+, iH_{i, i+1}, iH_{n+1, n+1}; 1 \leq i < j \leq n+1\}.$$

Podemos decompor $\mathfrak{sp}(n+1)$ como $\mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{m}_\Theta$, em que

$$\mathfrak{k}_\Theta = \text{sp}_{\mathbb{R}}\{A_{22}, S_{22}, A_{jj}, S_{jj}, A_{ij}, S_{ij}, A_{ij}^+, S_{ij}^+, iH_{i, i+1}, iH_{n+1, n+1}, iH_{12}; 2 \leq i < j \leq n+1\}$$

e

$$\mathfrak{m}_\Theta = \text{sp}_{\mathbb{R}}\{A_{11}, S_{11}, A_{1j}, S_{1j}, A_{1j}^+, S_{1j}^+; 2 \leq j \leq n+1\}.$$

Além disso, $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, em que

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_1 &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_{1j}, S_{1j}, A_{1j}^+, S_{1j}^+; 2 \leq j \leq n+1\} \\ \mathfrak{m}_2 &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_{11}, S_{11}\}\end{aligned}$$

são as componentes irredutíveis da representação de isotropia.

Exemplo 2.1. Quando $n = 1$, a base de $\mathfrak{sp}(2)$ que estamos considerando é a dada por

$$\begin{aligned}A_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}i}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}i}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{22} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}i}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}i}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}i}{6} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}i}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}i}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}i}{6} & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{12}^+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{12}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}i}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}i}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}i}{6} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}i}{6} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ iH_{12} &= \begin{pmatrix} \frac{i}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i}{12} \end{pmatrix}, \quad iH_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{6} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nesse caso, o espaço projetivo considerado é $\mathbb{C}P^3 = \frac{\text{Sp}(2)}{\text{U}(1) \times \text{Sp}(1)}$, a subálgebra de isotropia é

$$\mathfrak{k}_\Theta = \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_{22}, S_{22}, iH_{12}, iH_{22}\},$$

o espaço tangente à origem é identificado com o espaço vetorial

$$\mathfrak{m}_\Theta = \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_{11}, S_{11}, A_{12}, S_{12}, A_{12}^+, S_{12}^+\} \quad (2.3.2)$$

e as componentes irredutíveis da representação de isotropia são

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_1 &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_{12}, S_{12}, A_{12}^+, S_{12}^+\}, \\ \mathfrak{m}_2 &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_{11}, S_{11}\}.\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

□

Como \mathfrak{m}_{Θ} se decompõe em dois somandos isotrópicos, cada métrica $\text{Sp}(n+1)$ -invariante em $\mathbb{C}P^{2n+1}$ será determinada por dois números reais positivos, λ_1, λ_2 , ou seja, $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$. A métrica Riemanniana homogênea *normal* é dada por $\Lambda_{NR} = (1, 1)$ e essa métrica é naturalmente redutível.

A classificação das métricas de Einstein $\text{Sp}(n+1)$ -invariantes foi dada por Ziller em [32]. De fato, ele provou o seguinte resultado.

Teorema 2.2. [32] *O espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^{2n+1}$ possui duas métricas de Einstein $\text{Sp}(n+1)$ -invariantes (a menos de homotetia).*

O *cut locus* de um espaço homogêneo naturalmente redutível foi descrito por Ziller em [31] (ver também [13]). No caso de $\mathbb{C}P^{2n+1}$ equipado com a métrica normal, podemos descrever o *cut locus* da seguinte maneira: seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}P^{2n+1}$ uma geodésica homogênea dada por $\gamma(t) = \exp tX \cdot o$, em que X é um elemento da base de \mathfrak{m}_{Θ} definida em 2.3.2. Então, o primeiro ponto conjugado de $\gamma(0)$ com respeito à métrica normal é $\gamma(\pi/2m)$, em que $m = \sqrt{2n+4}/(2n+4)$.

Agora vamos utilizar o *lema da perturbação* para mostrar nosso primeiro resultado dessa seção, que afirma que podemos produzir pontos conjugados ao longo de uma equigeodésica deformando a métrica normal em $\mathbb{C}P^{2n+1}$ por uma \mathcal{P} -perturbação.

Teorema 2.3. *Considere o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^{2n+1} = \text{Sp}(n+1)/(\text{U}(1) \times \text{Sp}(n))$ equipado com a métrica normal $\Lambda_{NR} = (1, 1)$ e seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}P^{2n+1}$ equigeodésica homogênea com vetor equigeodésico X tal que X é um elemento da base de \mathfrak{m}_2 definida em 2.3.3 (isto é, $X = A_{11}$ ou $X = S_{11}$). Fixe $b \in \mathbb{R}$, $0 < b < \pi/2m$, em que $m = \sqrt{2n+4}/(2n+4)$. Então existem uma \mathcal{P} -perturbação $\Lambda^{\#}$ da métrica Λ_{NR} e $c \in \mathbb{R}$, $0 < c \leq b$, tais que $\gamma(0)$ e $\gamma(c)$ são conjugados com respeito à métrica $\Lambda^{\#}$.*

Demonstração: Vamos começar demonstrando o caso $X = A_{11}$.

Considere o intervalo $[0, b]$. Então

$$I_{\Lambda_{NR}}^{\gamma}(q) \geq 0$$

para toda variação diferenciável $q : [0, b] \rightarrow \mathfrak{sp}(n+1)$ tal que $q(0), \text{Ad}(\exp -tA_{11})q(b) \in \mathfrak{k}_\Theta$.

Defina $q_0 : [0, b] \rightarrow \mathfrak{sp}(n+1)$ por

$$q_0(t) = k \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{b} \right) A_{12} + \frac{1}{k} t(t-b) A_{12}^+,$$

em que k é uma constante real não nula. A derivada de q é dada por

$$q_0'(t) = \left(\frac{2\pi k}{b} \cos \left(\frac{2\pi t}{b} \right) \right) A_{12} + \frac{1}{k} (2t-b) A_{12}^+,$$

donde

$$\begin{aligned} (\text{Ad}(\exp -tA_{11})q_0'(t))_{\mathfrak{m}_\Theta} &= \left(\frac{2\pi k}{b} \cos \left(\frac{2\pi t}{b} \right) \cos(mt) - \frac{1}{k} (2t-b) \operatorname{sen}(mt) \right) A_{12} \\ &\quad + \left(\frac{2\pi k}{b} \cos \left(\frac{2\pi t}{b} \right) \operatorname{sen}(mt) + \frac{1}{k} (2t-b) \cos(mt) \right) A_{12}^+ \end{aligned}$$

e

$$[q_0(t), q_0'(t)]_{\mathfrak{m}_\Theta} = m \left((2t-b) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{b} \right) - \frac{2\pi t(t-b)}{b} \cos \left(\frac{2\pi t}{b} \right) \right) A_{11}.$$

Seja $M = I_{\Lambda_{NR}}^\gamma$ definida no intervalo $[0, b]$. Então, pela Proposição 2.3,

$$\begin{aligned} M &= 4m \int_0^b \left((2t-b) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{b} \right) - \frac{2\pi t(t-b)}{b} \cos \left(\frac{2\pi t}{b} \right) \right) dt \\ &\quad + 4 \int_0^b \left\{ \left(\frac{2\pi k}{b} \cos \left(\frac{2\pi t}{b} \right) \right)^2 + \left(\frac{1}{k} (2t-b) \right)^2 \right\} dt. \end{aligned}$$

Tome

$$N = \int_0^b \left\{ \left(\frac{2\pi k}{b} \cos \left(\frac{2\pi t}{b} \right) \right)^2 + \left(\frac{1}{k} (2t-b) \right)^2 \right\} dt.$$

Então,

$$N = \frac{b^4 + 6\pi^2 k^4}{3k^2 b} > 0$$

e

$$M - 4N = -\frac{8mb^2}{\pi} < 0.$$

Agora seja $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $-1 < \xi < -M/4N$ e considere $\Lambda^\# = (1 + \xi, 1)$ uma perturbação de Λ . Pelo Lema da Perturbação,

$$I_{\Lambda^\#}^\gamma(q_0) = M + 4\xi N < M + 4 \left(-\frac{M}{4N} \right) N = 0.$$

Portanto, existe $c \in \mathbb{R}$, $0 < c \leq b$ tal que $\gamma(c)$ é conjugado a $\gamma(0)$ na métrica $\Lambda^\#$.

O caso em que $X = S_{11}$ é análogo, bastando apenas considerar $q_0(t) = k \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{b} \right) S_{12} + \frac{1}{k} (2t-b) S_{12}^+$.

□

Observação. Na demonstração do Teorema 2.3 (caso $X = A_{11}$), ao invés de tomar A_{12} e A_{12}^+ na definição de q_0 , poderíamos ter tomado A_{1j} e A_{1j}^+ , respectivamente, com $1 < j \leq n + 1$. Isso vale também para o vetor equigeodésico S_{11} , bastando substituir A_{1j}^+ por S_{1j}^+ .

Uma pergunta que surgiu após demonstrarmos o Teorema 2.3 foi se conseguiríamos um resultado análogo perturbando a métrica normal de $\mathbb{C}P^{2n+1}$ a partir de um fluxo geométrico. A resposta foi positiva ao considerarmos o fluxo de Ricci homogêneo em $\mathbb{C}P^{2n+1} = \text{Sp}(n + 1)/(\text{U}(1) \times \text{Sp}(n))$ e é a respeito disso que falaremos agora.

2.3.2 Fluxo de Ricci Homogêneo

Nesta seção, mostraremos como o fluxo de Ricci homogêneo pode produzir pontos conjugados em $\mathbb{C}P^{2n+1}$ para $n \geq 10$. Para isso, utilizaremos a análise global do fluxo de Ricci nas famílias de variedades flag $\text{SO}(2n + 1)/(\text{U}(k) \times \text{SO}(2m + 1))$ e $\text{Sp}(n)/(\text{U}(m) \times \text{Sp}(k))$ feita em [15]. Observe que $\mathbb{C}P^{2l+1}$ é a variedade flag $\text{Sp}(n)/(\text{U}(m) \times \text{Sp}(k))$ com $n = l + 1$, $m = 1$ e $k = n$.

Vamos começar relembrando alguns fatos a respeito do comportamento global do fluxo de Ricci em $\text{SO}(2n + 1)/(\text{U}(k) \times \text{SO}(2m + 1))$ e $\text{Sp}(n)/(\text{U}(m) \times \text{Sp}(k))$. Falaremos sobre essas duas famílias de flag ao invés de nos restringirmos a $\mathbb{C}P^{2n+1}$ porque utilizaremos a análise geral no próximo capítulo. Para maiores detalhes, ver [15].

A representação de isotropia das família $\text{SO}(2n + 1)/(\text{U}(k) \times \text{SO}(2m + 1))$ e $\text{Sp}(n)/(\text{U}(m) \times \text{Sp}(k))$ decompõe \mathfrak{m}_Θ em duas componentes irredutíveis não equivalentes, isto é, $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$. Vamos manter a notação usada anteriormente e denotar uma métrica invariante por $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$. O tensor de Ricci de uma métrica invariante é também um tensor invariante sendo, assim, completamente determinado por seu valor na origem do espaço homogêneo e constante em cada componente irredutível da representação de isotropia. No caso de $\text{SO}(2n + 1)/(\text{U}(k) \times \text{SO}(2m + 1))$ e $\text{Sp}(n)/(\text{U}(m) \times \text{Sp}(k))$, as componentes do tensor de Ricci são dadas, respectivamente, por

$$\begin{cases} r_1 = -\frac{2(m-1)}{2n-1} - \frac{1+2k}{2(2n-1)} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}, \\ r_2 = -\frac{n+k}{2n-1} - \frac{m-1}{2(2n-1)} \frac{(\lambda_2^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2)}{\lambda_1 \lambda_2}, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} r_1 = -\frac{2+2m}{2n+2} - \frac{2k}{4n+4} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}, \\ r_2 = -\frac{4m+4k+3}{4n+4} + \frac{4m+2}{16n+16} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \end{cases}$$

A equação do fluxo de Ricci é dada por

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t)),$$

em que $Ric(g(t))$ é o tensor de Ricci da métrica g . A solução dessa equação, chamada de *fluxo de Ricci*, é uma família a 1-parâmetro de métricas $g(t)$ em M .

A equação do fluxo de Ricci homogêneo para métricas invariantes é dada pelos seguintes sistemas de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{2(m-1)}{2n-1} + \frac{1+2k}{2(2n-1)} \frac{x^2}{y^2}, \\ \dot{y} = \frac{n+k}{2n-1} + \frac{m-1}{2(2n-1)} \frac{(y^2 - (x-y)^2)}{xy}, \end{cases} \quad (2.3.4)$$

para

$$\frac{\mathrm{SO}(2n+1)}{\mathrm{U}(k) \times \mathrm{SO}(2m+1)}, \quad n = m+k, \quad m > 1 \text{ e } k \neq 1,$$

e

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{2m+2}{2n+2} + \frac{2k}{4n+4} \frac{x^2}{y^2}, \\ \dot{y} = \frac{4m+4k+3}{4n+4} - \frac{4m+2}{16n+16} \frac{x}{y}. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

para

$$\frac{\mathrm{Sp}(n)}{\mathrm{U}(m) \times \mathrm{Sp}(k)}, \quad n = m+k, \quad m \geq 1 \text{ e } k \geq 1.$$

Em [15], usando a compactificação de Poincaré no espaço das métricas Riemannianas invariantes, da dinâmica de 2.3.4 e 2.3.5 foram descritas completamente e as retas invariantes desses sistemas são dadas, respectivamente, por

$$\gamma_1(t) = \left(\frac{2(m-1)}{m+2k} t, t \right), \quad \gamma_2(t) = (2t, t), \quad \text{no caso 2.3.4}$$

e

$$\gamma_1(t) = \left(t, \frac{1}{4} \frac{4k+2m+1}{m+1} t \right), \quad \gamma_2(t) = \left(t, \frac{1}{2} t \right), \quad \text{no caso 2.3.5.}$$

O comportamento global do fluxo de Ricci em $SO(2n+1)/(U(k) \times SO(2m+1))$ e em $Sp(n)/(U(m) \times Sp(k))$ é descrito usando seu retrato de fase, que está representado na figura a seguir, em que $\gamma_3(t) = (t, 0)$.

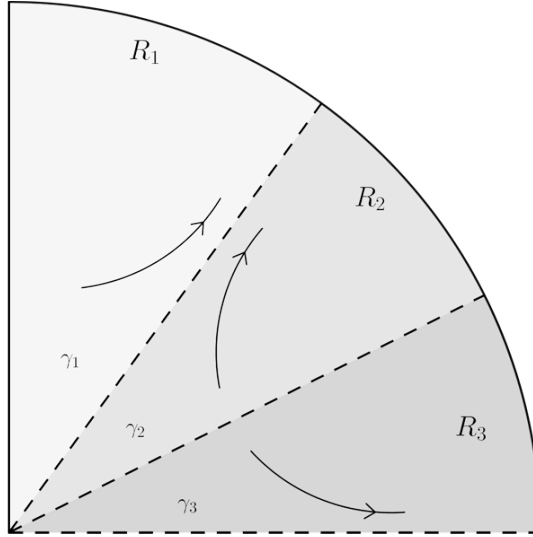


Figura 2.1: Retrato de fase do fluxo de Ricci em $SO(2n+1)/(U(k) \times SO(2m+1))$ e em $Sp(n)/(U(m) \times Sp(k))$

Podemos descrever precisamente o comportamento assintótico do fluxo de Ricci. Seja g_0 uma métrica invariante e $g(t)$ o fluxo de Ricci com condição inicial g_0 . Vamos denotar por γ_∞ o limite $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$.

Teorema 2.4. [15] *Seja g_0 uma métrica invariante em $\mathbb{C}P^{2n+1}$. Se R_1, R_2, R_3, γ_1 e γ_2 são as descritas na figura 2.1, temos:*

- a) *se $g_0 \in R_1 \cup R_2 \cup \gamma_1$, então g_∞ é a métrica de Einstein (não-Kähler);*
- b) *se $g_0 \in \gamma_2$, então g_∞ é a métrica Kähler-Einstein.*
- c) *se $g_0 \in R_3$, considere a fibração de uma variedade flag em um espaço simétrico $G/K \rightarrow G/H$. Então o fluxo de Ricci $g(t)$ com $g(0) = g_0$ evolui de tal forma que o diâmetro da base converge a zero quando $t \rightarrow \infty$.*

Vamos agora retornar para o caso de $\mathbb{C}P^{2n+1}$. Dada uma equigeodésica homogênea $\gamma(t) \subset \mathbb{C}P^{2n+1} = Sp(n+1)/(U(1) \times Sp(n))$ com $\gamma(0) = o$ e vetor equigeodésico X tal que X é elemento da base de \mathfrak{m}_Θ definida em 2.3.2, estamos interessados em descobrir se é possível produzir pontos conjugados ao longo de γ deformando a métrica normal $g_0 = \Lambda_{NR} = (1, 1)$ por meio do fluxo de Ricci.

Ao considerar a métrica g_0 , o primeiro ponto conjugado a $\gamma(0)$ é o ponto $\gamma(\pi/2m)$. Por "produzir pontos conjugados", queremos dizer se é possível encontrar $t_0 < 0$ e $c \in \mathbb{R}$, $0 < c < \pi/2m$, tais que $\gamma(0)$ e $\gamma(c)$ sejam conjugados com respeito à métrica $g(t_0)$, em que $g(t)$ é o fluxo de Ricci com condição inicial g_0 .

Observe que $g_0 \in R_2$. Se X é elemento da base de \mathfrak{m}_2 dada por 2.3.3 e usando a notação e a demonstração e do Teorema 2.3, temos que, se $\Lambda^\# = (\lambda_1^\#, 1)$, com $\lambda_1^\# \in (0, 1 - M/4N)$, então existe $c \in \mathbb{R}$, $0 < c < \pi/2m$, tal que $\gamma(0)$ e $\gamma(c)$ são conjugados com respeito a $\Lambda^\#$. Se conseguirmos garantir que $\Lambda^\# \in R_2$ (isto é, que $1 - M/4N > 8/(4n+3)$), o Teorema do Valor Intermediário consegue garantir a existência da métrica desejada.

Vamos começar então demonstrando um Lema que mostra a existência de variações q tais que $1 - M/4N < 8/(4n+3)$ para $n \geq 10$.

Lema 2.6. *Considere $\mathbb{C}P^{2n+1} = Sp(n+1)/(U \times Sp(n))$ com $n \geq 10$ e seja $\gamma(t) = \exp tX \cdot o$ equigeodésica com $X = A_{11} \in \mathfrak{m}_2$. Se $f(s, t)$ for uma variação geodésica de γ dada por*

$$f(s, t) = \exp sq(t) \cdot \gamma(t),$$

com $q : [0, b] \rightarrow \mathfrak{sp}(n+1)$ definida por

$$q(t) = k \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{b} \right) A_{12} + \frac{1}{k} t(t-b) A_{12}^+$$

e $b \in \left(\frac{8\pi^2\sqrt{6}}{3m(4n+3)}, \frac{\pi}{2m} \right)$, em que $m = \sqrt{2n+4}/(2n+4)$, então existe k tal que

$$1 - \frac{M}{4N} > \frac{8}{4n+3}.$$

Demonstração: Usando a notação e os cálculos feitos na demonstração do Teorema 2.3, temos que

$$1 - \frac{M}{4N} \frac{4N - M}{4N} = \frac{2b^2m}{\pi} \frac{3k^2b}{b^4 + 6\pi^2k^4} = \frac{6k^2b^3m}{\pi(b^4 + 6\pi^2k^4)}.$$

Logo, podemos olhar $1 - M/4N$ como sendo uma função par e diferenciável na variável k com domínio dado por $\mathbb{D} = \{k \in \mathbb{R}; k \neq 0\}$. Vamos chamar essa função de w .

Temos que w assume valor máximo em $k = b/\sqrt[4]{6}\sqrt{\pi}$ e $k = -b/\sqrt[4]{6}\sqrt{\pi}$, sendo este valor igual a $bm\sqrt{6}/2\pi^2$. Como queremos que $8/(4n+3) < w(k)$ e sabemos que $w(k) \leq bm\sqrt{6}/2\pi^2$, precisamos primeiramente garantir que

$$\frac{bm\sqrt{6}}{2\pi^2} > \frac{8}{4n+3},$$

o que equivale a

$$b > \frac{8\pi^2\sqrt{6}}{3m(4n+3)}.$$

Mas $b < \pi/2m$. Logo, devemos ter

$$\frac{8\pi^2\sqrt{6}}{3m(4n+3)} < \frac{\pi}{2m},$$

o que acontece se, e somente se, $n \geq 10$.

Daí, basta considerar, q dada por k tal que

$$w(k) > \frac{8}{4n+3}.$$

A existência de tais k é garantida pelo Teorema do Valor Intermediário, pois $w(k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ e $k \rightarrow -\infty$. Em particular, podemos tomar $k = b/\sqrt[4]{6}\sqrt{\pi}$ ou $k = -b/\sqrt[4]{6}\sqrt{\pi}$. \square

Observação. Dado j tal que $1 < j \leq n+1$, poderíamos ter utilizado A_{1j} e A_{1j}^+ ao invés de A_{12} e A_{12}^+ , respectivamente, na escolha de $q(t)$.

Observação. A análise para $X = S_{11} \in \mathfrak{m}_2$ é análoga, bastando tomar S_{1j} e S_{1j}^+ no lugar de A_{1j} e A_{1j}^+ , respectivamente, com $1 < j \leq n+1$.

Agora vamos provar a existência da métrica desejada.

Teorema 2.5. *Considere $\mathbb{C}P^{2n+1} = \text{Sp}(n+1)/(\text{U}(1) \times \text{Sp}(n))$ com $n \geq 10$ e seja γ uma equigeodésica homogênea com vetor equigeodésico X , em que X é um elemento da base de \mathfrak{m}_2 dada por 2.3.3. Então o fluxo de Ricci homogêneo $g(t)$ com $g(0) = \Lambda_{NR} = (1, 1)$ evolui de tal forma que existe $t_0 < 0$ e $c \in \mathbb{R}$, $0 < c < \pi/2m$, tais que $\gamma(0)$ e $\gamma(b)$ são conjugados com respeito à métrica invariante $g(t_0)$.*

Demonstração: Considere $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$b \in \left(\frac{8\pi^2\sqrt{6}}{3m(4n+3)}, \frac{\pi}{2m} \right).$$

Pelo Lema 2.6, existe k real não nulo tal que, se

$$q(t) = k \sin\left(\frac{2\pi t}{b}\right) A_{12} + \frac{1}{k} t(t-b) A_{12}^+,$$

então $1 - M/4N > 8/(4n+3)$. Além disso, pela demonstração do Teorema 2.3, se $\zeta \in (8/(4n+3), 1 - M/4N)$, então

$$I_{(\zeta,1)}^\gamma(q) < 0$$

no intervalo $[0, b]$, e $(\zeta, 1) \in R_2$.

Agora considere as homotetias da métrica $(\zeta, 1)$ dadas pela reta

$$\ell(r) = r(\zeta, 1) = (r\zeta, r),$$

$r > 0$. Essa reta está contida inteiramente na região R_2 e, como $g(t)$ converge assintoticamente para a reta γ_1 quando $t \rightarrow \infty$, o Teorema do Valor Intermediário garante a existência de r_0 e t_0 tais que

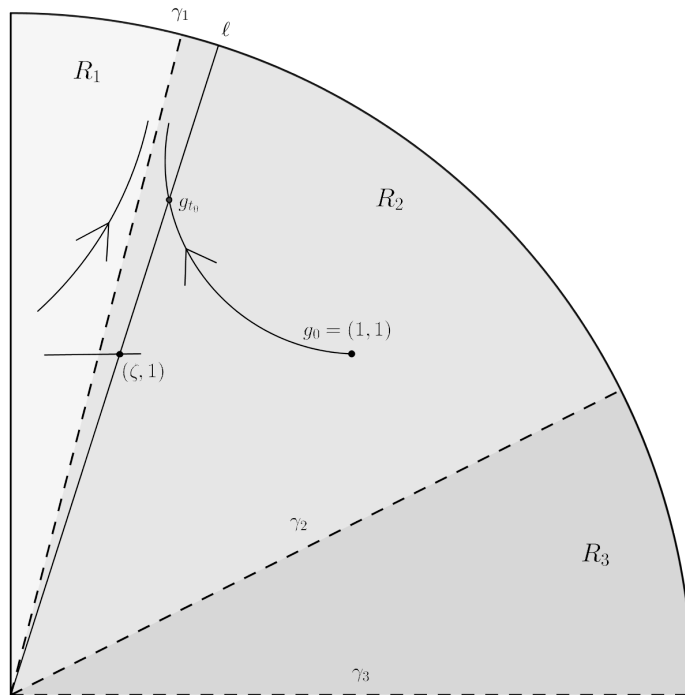
$$g(t_0) = \ell(r_0) = (r_0\zeta, r_0).$$

Daí,

$$I_{g(t_0)}^\gamma(q) = r_0 I_{(\zeta, 1)}^\gamma(q) < 0,$$

pois $r_0 > 0$ e $I_{(\zeta, 1)}^\gamma(q) < 0$. Portanto, existe $c \in \mathbb{R}$, $0 < c < b < \pi/2m$ tal que $\gamma(0)$ e $\gamma(c)$ são conjugados com respeito à métrica $g(t_0)$.

Exemplo 2.6. A figura abaixo ilustra o que acontece no caso do $\mathbb{C}P^{21}$, isto é, para $n = 10$. Aqui, $\gamma_1 = (t, 43t/8)$, g_0 é a métrica normal, $(\zeta, 1)$ é uma \mathcal{P} -perturbação de g_0 tal que $I_{(\zeta, 1)}^\gamma(q) < 0$, ℓ é a reta das homotetias da métrica $(\zeta, 1)$ e g_{t_0} é a métrica dada pelo fluxo de Ricci tal que $I_{g(t_0)}^\gamma(q) < 0$.



2.4 Critério Algébrico

Provamos anteriormente que, se considerarmos a variedade flag $\mathbb{C}P^{2n+1} = \mathrm{Sp}(n+1)/(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sp}(n))$, conseguimos produzir pontos conjugados ao longo de um equigeodésica específica perturbando a métrica normal $(1, 1)$ via \mathcal{P} -perturbação. Nesta seção provaremos um resultado análogo válido para qualquer variedade flag generalizada \mathbb{F}_Θ que satisfaça algumas propriedades que falaremos adiante. Isso será feito produzindo uma \mathcal{P} -perturbação específica, que será caracterizada usando a descrição por meio de sistema de raízes de \mathbb{F}_Θ .

Definição 2.3. *Seja $\sigma_0 \in \Pi(\Theta)$ e seja $\alpha \in \sigma_0$. Um par de raízes $\{\beta, \delta\}$ é chamado de perturbação com respeito a α , se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. $\beta, \delta \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$;
2. $\beta, \delta \notin \sigma_0$;
3. $\alpha = \beta + \delta$;
4. $\alpha + \beta, \alpha + \delta \notin \Pi$;
5. $\beta - \delta \notin \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$.

O próximo Lema é bem conhecido e será utilizado na demonstração do resultado principal dessa seção.

Lema 2.7. ([18], p. 171) *Sejam α, β e δ raízes e suponha que $\alpha + \beta + \delta = 0$. Então,*

$$m_{\alpha, \beta} = m_{\beta, \delta} = m_{\delta, \alpha}.$$

Agora estamos prontos para demonstrar a generalização do procedimento para produzir pontos conjugados em $\mathbb{C}P^{2n+1}$.

Teorema 2.7. *Seja $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ uma variedade flag generalizada com métrica normal Λ_{NR} . Sejam $\sigma_o \in \Pi(\Theta)$ e $\alpha \in \sigma_o$. Considere a equigeodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ dada por*

$$\gamma(t) = \exp tA_\alpha \cdot o$$

e suponha que exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(a)$ é o primeiro ponto conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de γ com respeito à métrica Λ_{NR} . Se $\{\beta, \delta\}$ for uma perturbação com respeito a α , então existe uma aplicação diferenciável $q_0 : [0, b] \rightarrow \mathfrak{u}$ e uma \mathcal{P} -perturbação $\Lambda^\#$ de Λ tal que $I_{\Lambda^\#}^\gamma(q_0) < 0$, com $0 < b < a$.

Demonstração: Como $\gamma(a)$ é o primeiro ponto conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de γ , temos que, no intervalo $[0, b]$, $I_\lambda^\gamma(q) \geq 0$ para qualquer $q : [0, b] \rightarrow \mathfrak{u}$ diferenciável e tal que $q(0)$ e $\text{Ad}(\exp -tA_\alpha)q(b) \in \mathfrak{k}_\Theta$. Observe que

$$\begin{aligned} [A_\alpha, A_\beta] &= m_{-\alpha, \beta} A_\delta \\ [A_\alpha, A_\delta] &= -m_{-\alpha, \beta} A_\beta \\ [A_\beta, A_\delta] &= m_{-\alpha, \beta} A_\alpha + m_{-\beta, \delta} A_{\beta-\delta}, \end{aligned}$$

pelos Lemas 1.1 e 2.7.

Vamos dividir a demonstração em dois casos:

- *Caso 1:* $m_{-\alpha, \beta} > 0$

Defina $q_0 : [0, b] \rightarrow \mathfrak{u}$ por

$$q_0(t) = k \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{b} \right) A_\beta + \frac{1}{k} t(t-b) A_\delta,$$

em que k é uma constante real não nula. Daí,

$$q_0'(t) = \left(\frac{2\pi k}{b} \cos \left(\frac{2\pi t}{b} \right) \right) A_\beta + \frac{1}{k} (2t-b) A_\delta,$$

donde

$$\begin{aligned} (\text{Ad}(\exp -tA_\alpha)q_0'(t))_{\mathfrak{m}_\Theta} &= \left(\frac{2\pi k}{b} \cos \left(\frac{2\pi t}{b} \right) \cos(m_{-\alpha, \beta} t) - \frac{1}{k} (2t-b) \operatorname{sen}(m_{-\alpha, \beta} t) \right) A_\beta \\ &\quad + \left(\frac{2\pi k}{b} \cos \left(\frac{2\pi t}{b} \right) \operatorname{sen}(m_{-\alpha, \beta} t) + \frac{1}{k} (2t-b) \cos(m_{-\alpha, \beta} t) \right) A_\delta \end{aligned}$$

e

$$[q_0(t), q_0'(t)]_{\mathfrak{m}_\Theta} = m_{-\alpha, \beta} \left((2t-b) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{b} \right) - \frac{2\pi t(t-b)}{b} \cos \left(\frac{2\pi t}{b} \right) \right) A_\alpha.$$

Seja $M = I_\lambda^\gamma(q_0)$ no intervalo $[0, b]$. Então, pela Proposição 2.3,

$$\begin{aligned} M &= 4m_{-\alpha, \beta} \int_0^b \left((2t-b) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{b} \right) - \frac{2\pi t(t-b)}{b} \cos \left(\frac{2\pi t}{b} \right) \right) dt \\ &\quad + 4 \int_0^b \left\{ \left(\frac{2\pi k}{b} \cos \left(\frac{2\pi t}{b} \right) \right)^2 + \left(\frac{1}{k} (2t-b) \right)^2 \right\} dt. \end{aligned}$$

Tome

$$N = \int_0^b \left\{ \left(\frac{2\pi k}{b} \cos \left(\frac{2\pi t}{b} \right) \right)^2 + \left(\frac{1}{k} (2t-b) \right)^2 \right\} dt.$$

Então,

$$N = \frac{b^4 + 6\pi^2 k^4}{3k^2 b} > 0$$

e

$$M - 4N = -\frac{8m_{-\alpha,\beta} b^2}{\pi} < 0.$$

Temos que existem $\sigma_1, \sigma_2 \in \Pi(\Theta)$, $\sigma_0 \neq \sigma_1, \sigma_2$, tais que $\beta \in \sigma_1$ e $\delta \in \sigma_2$ (σ_1 e σ_2 podem ser iguais). Seja $\mathcal{P} = \{\sigma_0\}$ e considere uma \mathcal{P} -perturbação $\Lambda^\# = (\lambda_\sigma^\#)_{\sigma \in \Pi(\Theta)}$ de Λ dada por:

1. $\lambda_{\sigma_0}^\# = 1$;
2. $\lambda_{\sigma_1}^\# = 1 + \xi$;
3. $\lambda_{\sigma_2}^\# = 1 + \xi$;
4. $\lambda_\sigma^\# = 1 + \xi_\sigma > 0$, $\xi_\sigma \in \mathbb{R}$, para todo $\sigma \in \Pi(\Theta) \setminus \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$,

em que $1 < \xi < -M/4N$. Então, pelo Lema da Perturbação,

$$I_{\Lambda^\#}^\gamma(q_0) = M + 4\xi N < M + 4\left(-\frac{M}{4N}\right)N = 0.$$

- *Caso 2: $m_{-\alpha,\beta} < 0$*

Nesse caso, definimos $q_0 : [0, b] \rightarrow \mathfrak{u}$ por

$$q_0(t) = k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{b}\right) A_\delta + \frac{1}{k} t(t-b) A_\beta.$$

Procedendo de maneira análoga ao caso 1, concluímos que

$$M - 4N = \frac{8m_{-\alpha,\beta} b^2}{\pi} < 0,$$

bastando tomar a mesma \mathcal{P} -perturbação do caso 1. □

Observação. O Teorema continua válido se consideramos a equigeodésica $\gamma(t) = \exp tS_\alpha \cdot o$, bastando substituir A_δ por S_δ e invertendo as q_0 's definidas em cada caso da demonstração.

Exemplo 2.8. Vamos ver como podemos aplicar o Teorema a $SU(3)/T^2$ com métrica normal $(1, 1, 1)$.

A complexificação de $\mathfrak{su}(3)$ é a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. A estrutura dos sistemas de raízes de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ é dada da seguinte maneira. Considere a subálgebra de Cartan \mathfrak{h} dada

pelas matrizes diagonais de traço zero. Então o conjunto de raízes de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ relativo a \mathfrak{h} é formado por $\alpha_{ij} := \varepsilon_i - \varepsilon_j$, $1 \leq i \neq j \leq 3$, em que ε_i é o funcional dado por $\varepsilon_i : \text{diag}\{a_1, a_2, a_3\} \rightarrow a_i$.

Um sistema simples de raízes é

$$\Sigma = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}$$

e as raízes positivas em relação a esse sistema simples são

$$\Pi^+ = \{\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}\}.$$

A base de Weyl de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ associada à subálgebra de Cartan \mathfrak{h} é formada por

$$X_{ij} = X_{\alpha_{ij}} = \frac{\sqrt{2n}E_{ij}}{2n}$$

e

$$H_{i,i+1} = H_{\alpha_{i,i+1}} = \frac{E_{ii} - E_{i+1,i+1}}{2n},$$

$1 \leq i \neq j \leq 3$, em E_{ij} é a matriz $n \times n$ com entrada 1 na posição ij e 0 nas demais. Logo, os vetores $A_{ij} = X_{ij} - X_{ji}$, $S_{ij} = \sqrt{-1}(X_{ij} + X_{ji})$ e $\sqrt{-1}H_{i,i+1}$, $1 \leq i < j \leq 3$, formam uma base da forma real compacta $\mathfrak{su}(n)$ de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

No caso da variedade flag $SU(3)/T^2$, temos que $\Theta = \emptyset$ e \mathfrak{u}_{12} , \mathfrak{u}_{13} e \mathfrak{u}_{23} são as componentes irredutíveis da representação de isotropia, em que

$$\mathfrak{u}_{ij} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_{ij}, S_{ij}; 1 \leq i < j \leq 3\}.$$

Isto é,

$$\mathfrak{m}_{\Theta} = \mathfrak{u}_{12} \oplus \mathfrak{u}_{13} \oplus \mathfrak{u}_{23}.$$

Agora considere a equigeodésica dada por $\gamma(t) = \exp tA_{13} \cdot o$. Temos que $\alpha_{13} = \alpha_{12} + \alpha_{23}$. Observe que $\alpha_{12} - \alpha_{23}$, $\alpha_{13} + \alpha_{12}$ e $\alpha_{13} + \alpha_{23}$ não são raízes.

O primeiro ponto conjugado a $\gamma(0)$ com respeito à métrica normal $(1, 1, 1)$ é $\gamma(\pi\sqrt{6}/2)$. Seja $b \in \mathbb{R}$ tal que $0 < b < \pi\sqrt{6}/2$. Então, pelo Teorema 2.7, existe uma aplicação diferenciável $q_0 : [0, b] \rightarrow \mathfrak{su}(3)$ e uma perturbação $\Lambda^{\#}$ de Λ tal que $I_{\Lambda^{\#}}^{\gamma}(q_0) < 0$. De fato, basta definir q_0 como

$$q_0(t) = k \sin\left(\frac{2\pi t}{b}\right) A_{12} + \frac{1}{k} t(t-b) A_{23}$$

e considerar a perturbação $\Lambda^{\#} = (\lambda_{12}^{\#}, \lambda_{13}^{\#}, \lambda_{23}^{\#})$ dada por:

1. $\lambda_{12}^{\#} = \lambda_{23}^{\#} = 1 + \xi;$

2. $\lambda_{13}^{\#} = 1,$

em que

$$-1 < \xi < \frac{\sqrt{6}b^3k^2 - \pi b^4 - 6k^4\pi^3}{\pi(b^4 + 6k^4\pi^2)}.$$

Capítulo 3

Estabilidade de Aplicações

Harmônicas pelo Fluxo de Ricci

O fluxo de Ricci foi introduzido em 1982 por Hamilton [16] baseado no trabalho de Eells e Sampson [12]. A ideia era estudar variedades compactas tridimensionais com curvatura de Ricci positiva, no sentido de tentar melhorar a métrica inicial por meio de uma equação do calor, de maneira similar ao método usado por Eells e Sampson em [12] no contexto de aplicações harmônicas. Hamilton provou que, nesse caso, o fluxo de Ricci preserva curvatura de Ricci positiva. Em [17], Hamilton provou que o mesmo vale para curvatura isotrópica positiva em variedades compactas de dimensão 4. Entretanto, algumas condições a respeito de curvaturas podem não ser preservadas pelo fluxo de Ricci. Por exemplo, Ni provou em [28] que em algumas variedades Riemannianas não compactas com curvatura seccional não negativa e limitada, o fluxo de Ricci não preserva a não negatividade. Além disso, Abiev e Nikorov [1] provaram que o fluxo de Ricci normalizado não preserva o sinal da curvatura seccional em espaços de Wallach e, mais recentemente, Bettiol e Krishnan provaram, em [5], que o fluxo de Ricci não preserva curvatura seccional não negativa em variedades compactas de dimensão maior ou igual a 4.

Nosso objetivo neste capítulo é estudar propriedades de estabilidade de aplicações harmônicas pelo fluxo de Ricci. A ideia é análoga à utilizada no capítulo 2. Para isso, usaremos os resultados a respeito da estabilidade de aplicações harmônicas provados em [27].

3.1 Estabilidade de Aplicações Equiharmônicas em Variedades Flag

Vamos começar relembrando alguns conceitos e resultados preliminares.

3.1.1 Curvas J -holomorfas em \mathbb{F}_Θ

Seja \mathbb{F}_Θ uma variedade flag generalizada e J uma estrutura complexa em \mathbb{F}_Θ . Se $M = M^2$ for uma superfície de Riemann e $\Phi : M \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ uma aplicação diferenciável, denotamos por $d^{\mathbb{C}}\Phi$ a complexificação da diferencial de Φ . Então podemos decompor $d^{\mathbb{C}}\Phi$ em componentes

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} : TM^{(1,0)} \rightarrow T\mathbb{F}_\Theta^{(1,0)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial \bar{z}} : TM^{(0,1)} \rightarrow T\mathbb{F}_\Theta^{(0,1)},$$

que são identificadas com vetores no espaço tangente complexo. Por 1.1.2,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \sum_{\sigma \in \Pi(\Theta)^+} \Phi_{\epsilon_\sigma \sigma}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial \bar{z}} = \sum_{\sigma \in \Pi(\Theta)^+} \Phi_{\epsilon_{-\sigma} \sigma},$$

em que, dado $\sigma \in \Pi(\Theta)$, $\Phi_\sigma : M^2 \rightarrow E_\sigma$ assume valores em $E_\sigma(\Phi(p))$, $p \in M$.

Definição 3.1. Dizemos que uma aplicação $\Phi : M \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ é J -holomorfa se, para todo $p \in M$,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial \bar{z}} = \sum_{\sigma \in \Pi(\Theta)^+} \Phi_{\epsilon_{-\sigma} \sigma} = 0.$$

3.1.2 Estabilidade de Aplicações Equiharmônicas em \mathbb{F}_Θ

Em [27], foram provados vários resultados a respeito de estabilidade e não estabilidade de aplicações equiharmônicas (aplicações que são harmônicas com respeito a qualquer métrica invariante) em uma variedade flag \mathbb{F}_Θ . Vamos relembrar alguns desses resultados.

Seja (M^2, g) uma superfície de Riemann compacta e seja (N, h) uma superfície Riemanniana compacta. Se $\Phi : (M^2, g) \rightarrow (N, h)$ for uma aplicação diferenciável, então a *energia* de Φ é dada por

$$E(\Phi) = \frac{1}{2} \int_M |d\Phi|^2 \omega_g,$$

em que ω_g é a medida volume definida pela métrica g e $|d\phi|$ é a norma de Hilbert-Schmidt de $d\phi$. A aplicação Φ é dita *harmônica* se ela for o ponto crítico do funcional energia.

Vamos nos restringir a aplicações harmônicas de uma superfície de Riemann M em uma variedade flag generalizada \mathbb{F}_Θ .

Dada uma aplicação harmônica $\Phi : (M^2, g) \rightarrow (\mathbb{F}_\Theta, \Lambda)$, considere perturbações de Φ dadas por

$$\Phi^t = \exp(tq(p)) \cdot \Phi(p),$$

em que $q : M \rightarrow \mathfrak{u}$ é uma aplicação diferenciável. A segunda variação da energia de Φ , denotada por $I_\Lambda^\Phi(q)$, é dada por

$$I_\Lambda^\Phi(q) = \left. \frac{d^2}{dt^2} E(\Phi^t) \right|_{t=0}.$$

Estamos interessados no estudo da estabilidade de aplicações equiharmônicas, em que o conceito de estabilidade é dado pela definição a seguir.

Definição 3.2. *Seja $\Phi : (M^2, g) \rightarrow (\mathbb{F}_\Theta, \Lambda)$ uma aplicação harmônica arbitrária. Dizemos que Φ é estável se $I_\Lambda^\Phi(q) \geq 0$ para qualquer variação $q : M^2 \rightarrow \mathfrak{u}$. Caso contrário, dizemos que ela é não estável.*

Uma classe de aplicações que trabalharemos aqui são as chamadas aplicações subordinadas a $\mathcal{P} \subset \Pi(\Theta)$, cuja definição é análoga à definição 2.2.

Definição 3.3. *Uma aplicação $\Phi : M^2 \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ é dita subordinada a \mathcal{P} se $\Phi_\sigma = 0$ para todo $\sigma \in \Pi(\Theta) \setminus \mathcal{P}$, em que Φ_σ é a E_σ -componente da derivada de Φ .*

A análise da estabilidade de aplicações harmônicas foi feita utilizando o *Lema da Perturbação* para aplicações harmônicas subordinadas a $\mathcal{P} \subset \Pi(\Theta)$. Como este Lema compara os índices de uma aplicação que é harmônica com respeito a uma métrica invariante e uma \mathcal{P} -perturbação dessa métrica, a ideia é aplicar o Lema a aplicações que sejam equiharmônicas. Observe que a definição de \mathcal{P} -perturbação nesse contexto é a mesma da definição 2.1.

Um exemplo de aplicações equiharmônicas é dado pelas aplicações holomorfas-horizontais generalizadas, cuja definição daremos a seguir.

Definição 3.4. *Uma aplicação $\Phi : M^2 \rightarrow (\mathbb{F}_\Theta, J)$ é dita holomorfa-horizantal generalizada se ela é J -holomorfa e se satisfaz $\Phi_\sigma = 0$ se $\sigma \in \Pi(\Theta) \setminus \Sigma(\Theta)$.*

Observação. Aqui usamos a mesma notação usada por Bryant em [7]. Em [8], essas aplicações são chamadas de *super-horizontais*.

Observe que uma aplicação holomorfa-horizontal é simplesmente uma aplicação J -holomorfa subordinada a $\mathcal{P} = \Sigma(\Theta)$. O Teorema a seguir foi provado em [27] e mostra que essas aplicações são, de fato, equiharmônicas.

Teorema 3.1. ([27]) *Se Φ é uma aplicação holomorfa-horizontal, então Φ é equiharmônica.*

Os próximos Teoremas serão essenciais no estudo da estabilidade de aplicações holomorfas-horizontais generalizadas pelo fluxo de Ricci de uma métrica invariante perturbada. Começamos com um resultado clássico devido a Lichnerowicz:

Teorema 3.2. ([25]) *Seja $\Phi : M^2 \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ uma aplicação J -holomorfa e seja $(\mathbb{F}_\Theta, J, \Lambda)$ uma estrutura Kähler. Então, Φ é harmônica e estável.*

Agora vamos considerar alguns tipos especiais de \mathcal{P} -perturbações de uma estrutura invariante Kähler em \mathbb{F}_Θ a fim de construir exemplos de aplicações harmônicas estáveis e não estáveis.

Teorema 3.3. ([27]) *Seja $\Phi : M^2 \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ uma aplicação holomorfa-horizontal generalizada e seja $(\mathbb{F}_\Theta, J, \Lambda)$ uma estrutura Kähler, em que $\Lambda = (\lambda_\sigma)_{\sigma \in \Pi(\Theta)}$. Considere uma \mathcal{P} -perturbação $\Lambda^\#$ dessa métrica com $\xi_\sigma \geq 0$ para todo $\sigma \in \Pi(\Theta)$. Então $\Phi : (M^2, g) \rightarrow (\mathbb{F}_\Theta, \Lambda^\#)$ é estável.*

Teorema 3.4. ([27]) *Seja $\Phi : M^2 \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ uma aplicação holomorfa-horizontal generalizada e seja $(\mathbb{F}_\Theta, J, \Lambda)$ uma estrutura Kähler, em que $\Lambda = (\lambda_\sigma)_{\sigma \in \Pi(\Theta)}$. Considere uma \mathcal{P} -perturbação $\Lambda^\#$ dessa métrica com $\xi_{\sigma_0} = \lambda_{\sigma_0}^\# - \lambda_{\sigma_0} < 0$ para algum $\sigma_0 \in \Pi(\Theta) \setminus \Sigma(\Theta)$. Então $\Phi : (M^2, g) \rightarrow (\mathbb{F}_\Theta, \Lambda^\#)$ é não estável.*

3.2 Estabilidade em \mathbb{F}_Θ pelo Fluxo de Ricci

3.2.1 Fluxo de Ricci Homogêneo em $SU(3)/T^2$

A representação de isotropia do espaço homogêneo $SU(3)/T^2$ decompõe \mathfrak{m}_Θ em 3 componentes irredutíveis não equivalentes, isto é,

$$\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3.$$

Logo, mantendo a notação utilizada ao longo deste trabalho, denotaremos uma métrica invariante nesse espaço por $\Lambda = (\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23})$.

No caso de $SU(3)/T^2$, as componentes do tensor de Ricci são dadas por

$$\begin{cases} r_{12} = \frac{1}{2\lambda_{12}} + \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{13}\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}\lambda_{13}} \right), \\ r_{13} = \frac{1}{2\lambda_{13}} + \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{13}\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}\lambda_{13}} \right), \\ r_{23} = \frac{1}{2\lambda_{23}} + \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}\lambda_{13}} - \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{23}\lambda_{12}} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}\lambda_{13}} \right). \end{cases} \quad (3.2.1)$$

A equação do fluxo de Ricci para uma métrica invariante em $SU(3)/T^2$ é dada por

$$\dot{\lambda}_{ij} = -2r_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq 3. \quad (3.2.2)$$

As retas invariantes de (3.2.2) podem ser descritas da seguinte maneira: defina $\gamma_j(t) := tp'_j$, em que

$$\begin{aligned} p'_1 &= (1/\rho_1, (1/\rho_1)(2 + 2\sqrt{2}), 1/\rho_1), \\ p'_2 &= (1/\rho_2, 1/\rho_2, 1/\rho_2), \\ p'_3 &= (\rho_3(-1/2 + \sqrt{2}/2), \rho_3(-1/2 + \sqrt{2}/2), \rho_3), \\ p'_4 &= ((1/\rho_1)(2 + 2\sqrt{2}), 1/\rho_1, 1/\rho_1), \\ 1/\rho_3 &= \sqrt{1 + 2(-1/2 + 1/2\sqrt{2})^2}, \rho_1 = \sqrt{2 + (2 + \sqrt{2})^2} \text{ e } \rho_2 = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Temos que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e γ_4 são soluções de (3.2.1). A variedade flag $SU(3)/T^2$ admite quatro métricas de Einstein invariantes. Três são Kähler-Einstein, representadas por γ_1, γ_3 e γ_4 , e a outra é a métrica de Einstein normal (não Kähler), representada por γ_2 .

Usando técnicas de sistemas dinâmicos (compactificação de Poincaré e expoentes de Lyapunov), o comportamento do fluxo de Ricci próximo à métrica de Einstein normal é descrito pelo Teorema a seguir.

Teorema 3.5. ([14]) *Considere $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\Lambda = (\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23})$, com $\lambda_{ij} > 0$, $\|\Lambda\| > \delta$ para $\delta > 1/2$ e $d(\Lambda, \gamma_2) < \varepsilon$. Seja g_t o fluxo de Ricci com condição inicial $g_0 = (\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23})$. Então g_∞ é a métrica de Einstein normal. Em particular, se $\Lambda \notin \gamma_2$, então g_0 é invariante e g_∞ é bi-invariante.*

3.2.2 Estabilidade em $\mathrm{SO}(2n+1)/(\mathrm{U}(k) \times \mathrm{SO}(2m+1))$, $\mathrm{Sp}(n)/(\mathrm{U}(m) \times \mathrm{Sp}(k))$ e $\mathrm{SU}(3)/T^2$ pelo fluxo de Ricci homogêneo

Nosso primeiro resultado mostra como a estabilidade de uma aplicação holomorfa-horizontal generalizada Φ se comporta pelo fluxo de Ricci de uma métrica invariante perturbada em $\mathrm{SO}(2n+1)/(\mathrm{U}(k) \times \mathrm{SO}(2m+1))$ e $\mathrm{Sp}(n)/(\mathrm{U}(m) \times \mathrm{Sp}(k))$.

Teorema 3.6. *Seja $\Phi : M^2 \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ uma aplicação holomorfa-horizontal generalizada e seja $(\mathbb{F}_\Theta, J, g_0)$ uma estrutura Kähler com $g_0 = \Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$. Seja $g_0^\# = \Lambda^\# = (\lambda_1, \lambda_2^\#)$ uma $\Sigma(\Theta)$ -perturbação de Λ . Então,*

1. *se $0 < \lambda_2^\# < \lambda_2$, Φ é não estável com respeito a $g_0^\#$ e continua não estável pelo fluxo de Ricci com condição inicial $g_0^\#$;*
2. *se $0 < \lambda_2 < \lambda_2^\#$, Φ é estável com respeito a $g_0^\#$ e continua estável pelo fluxo de Ricci, $g_t^\#$, com condição inicial $g_0^\#$, para $t < \infty$.*

Demonstração: Em [6], Borel descreveu as estruturas Kähler em uma variedade flag generalizada \mathbb{F}_Θ . De fato, $(\mathbb{F}_\Theta, J, g_0)$ é Kähler se, e somente se, J for integrável e, se $\sigma \in \Pi(\Theta)$ puder ser escrito como

$$\sigma = \sum_i n_i \sigma_i,$$

com $\sigma_i \in \Sigma(\Theta)$, então $\lambda_\sigma = \sum_i n_i \lambda_{\sigma_i}$, em que $n_i \geq 0$ se σ for composto apenas de raízes positivas.

Em nosso caso, tanto $\mathrm{SO}(2n+1)/(\mathrm{U}(k) \times \mathrm{SO}(2m+1))$ quanto $\mathrm{Sp}(n)/(\mathrm{U}(m) \times \mathrm{Sp}(k))$ possuem apenas dois somandos isotrópicos, isto é, $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ e $\Pi(\Theta) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, em que $\sigma_1 = \Sigma(\Theta)$ e σ_2 é o conjunto das raízes com altura 2. Logo, se $\alpha \in \sigma_2$, então α pode ser escrito como

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,$$

com $\alpha_1, \alpha_2 \in \sigma_1$. Assim, como $(\mathbb{F}_\Theta, J, g_0)$ é uma estrutura Kähler, devemos ter $\lambda_2 = \lambda_{\sigma_2} = 2\lambda_{\sigma_1} = 2\lambda_1$, isto é, $g_0 = (\lambda_1, 2\lambda_1)$.

Pelo Teorema 3.2, temos que Φ é estável com respeito a g_0 . Logo, Φ também é estável com respeito à $\Sigma(\Theta)$ -perturbação $g_{0,1}^\# = (\lambda_1, 2\lambda_1 + \xi_1)$ de $g_0^\#$ com $\xi_1 \geq 0$, pelo Teorema 3.3. Por outro lado, se considerarmos uma $\Sigma(\Theta)$ -perturbação de $g_0^\#$ dada por $g_{0,2}^\# = (\lambda_1, 2\lambda_1 + \xi_2)$, com $\xi_2 < 0$ e $2\lambda_1 + \xi_2 > 0$, então Φ é instável com respeito a $g_{0,2}^\#$, pelo Teorema 3.4.

De acordo com a figura 2.1, $g_{0,1}^\# \in R_3 \cup \gamma_2$ e $g_{0,2}^\# \in R_1 \cup R_2 \cup \gamma_1$. Portanto, se $g_{t,1}^\#$ e $g_{t,2}^\#$ forem os fluxos de Ricci de $g_{0,1}^\#$ e $g_{0,2}^\#$, respectivamente, então Φ é estável com respeito a $g_{t,2}^\#$ para $t < \infty$ e é não estável com respeito a $g_{t,1}^\#$ para todo t .

□

Corolário 3.1. *O fluxo de Ricci homogêneo preserva estabilidade (não estabilidade) de uma aplicação holomorfa-horizontal generalizada nos espaços homogêneos $SO(2n+1)/(U(k) \times SO(2m+1))$ e $Sp(n)/(U(m) \times Sp(k))$.*

Agora vamos considerar o espaço homogêneo $SU(3)/T^2$. Nosso segundo resultado mostra que o fluxo de Ricci não preserva a estabilidade nesse espaço. Para isso, vamos precisar do Lema abaixo, que nos fala a respeito da estabilidade da métrica normal em $SU(3)/T^2$.

Lema 3.1. ([27]) *Considere a variedade flag maximal $SU(3)/T^2$ equipada com a métrica normal g . Seja $\Phi : M^2 \rightarrow SU(3)/T^2$ uma aplicação holomorfa-horizontal generalizada. Então Φ é instável com respeito a g .*

As métricas de Einstein em $SU(3)/T^2$ são dadas por (a menos de homotetia) $\Lambda_1 = (1, 1, 2)$, $\Lambda_2 = (1, 2, 1)$ e $\Lambda_3 = (2, 1, 1)$, que são as métricas Kähler-Einstein, e por $\Lambda_4 = (1, 1, 1)$, que é a métrica de Einstein normal (não Kähler).

No Teorema abaixo mostramos que, ao escolher $\mathcal{P} = \{\alpha_{12}\}$, o fluxo de Ricci não preserva a estabilidade da esfera equiharmônica $\Phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow SU(3)/T^2$ subordinada a \mathcal{P} (para maiores detalhes sobre a estrutura de álgebra de Lie de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ por sistemas de raízes, ver exemplo 2.8).

Teorema 3.7. *Seja $\Phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow SU(3)/T^2$ uma aplicação J -holomorfa subordinada a $\mathcal{P} = \{\alpha_{12}\}$ e seja $(SU(3)/T^2, J, g_0)$ uma estrutura Kähler-Einstein com $g_0 = (2, 1, 1)$. Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e seja $g_0^\#$ uma \mathcal{P} -perturbação de g_0 dada por $g_0^\# = (2, 2 - \varepsilon, 2 - \varepsilon)$, $2 - \varepsilon > 1$. Denote por $g_t^\#$ o fluxo de Ricci com condição inicial $g_0^\#$. Então Φ é estável com respeito a $g_0^\#$ e não estável com respeito a $g_\infty^\#$.*

Demonstração: Como g_0 é uma métrica Kähler-Einstein, temos que g_0 é estável, pelo Teorema 3.2. Observe que, de acordo com o Teorema 3.3, $g_0^\#$ também é estável, pois $2 - \varepsilon > 1$.

A reta invariante representada pela métrica normal no retrato de fase do fluxo de Ricci é dada por

$$\gamma_2 = \left(\frac{t}{\sqrt{3}}, \frac{t}{\sqrt{3}}, \frac{t}{\sqrt{3}} \right).$$

Logo,

$$d(g_0^\#, \gamma_2) < \epsilon.$$

Além disso, $\|g_0^\#\| > 1/2$. Logo, $g_\infty^\#$ é a métrica de Einstein normal, pelo Teorema 3.5.

Por fim, como a aplicação Φ é subordinada a $\mathcal{P} = \{\alpha_{12}\} \subset \Sigma(\Theta)$, ela é, em particular, holomorfa-horizontal generalizada. Portanto, o resultado segue do Teorema 3.1. □

Referências Bibliográficas

- [1] N. A. Abiev and Y. G. Nikonorov, *The evolution of positively curved invariant riemannian metrics on the wallach spaces under the ricci flow*, Annals of Global Analysis and Geometry **50** (2016), no. 1, 65–84.
- [2] D. Alekseevsky and A. Arvanitoyeorgos, *Riemannian flag manifolds with homogeneous geodesics*, Transactions of the American Mathematical Society **359** (2007), no. 8, 3769–3789.
- [3] D. V. Alekseevsky, *Isotropy representation of flag manifolds*, Proceedings of the 17th Winter School "Geometry and Physics" (1998), 13–24.
- [4] A. Arvanitoyeorgos, *Geometry of flag manifolds*, International Journal of geometric methods in modern physics **3** (2006), no. 05n06, 957–974.
- [5] R. G. Bettiol and A. M. Krishnan, *Four-dimensional cohomogeneity one ricci flow and nonnegative sectional curvature*, arXiv preprint arXiv:1606.00778 (2016).
- [6] A. Borel, *Kählerian coset spaces of semisimple lie groups*, Proceedings of the National Academy of Sciences **40** (1954), no. 12, 1147–1151.
- [7] R. L. Bryant, *Lie groups and twistor spaces*, Duke Math. J **52** (1985), no. 1, 223–261.
- [8] F. E. Burstall and J. H. Rawnsley, *Twistor theory for riemannian symmetric spaces*, vol. Lecture Notes in Mathematics: 1424, Springer, 1990.
- [9] I. Chavel, *Isotropic jacobi fields, and jacobi's equations on riemannian homogeneous spaces*, Commentarii Mathematici Helvetici **42** (1967), no. 1, 237–248.
- [10] J. Cheeger and D. G. Ebin, *Comparison theorems in riemannian geometry*, vol. 9, North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1975.

-
- [11] N. Cohen, L. Grama, and C. J. C. Negreiros, *Equigeodesics on flag manifolds*, Houston journal of mathematics **37** (2011), no. 1, 113–125.
- [12] J. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of riemannian manifolds*, American journal of mathematics **86** (1964), no. 1, 109–160.
- [13] J. C. González-Dávila and A. M. Naveira, *Existence of non-isotropic conjugate points on rank one normal homogeneous spaces*, Annals of Global Analysis and Geometry **45** (2014), no. 3, 211–231.
- [14] L. Grama and R. M. Martins, *The ricci flow of left-invariant metrics on full flag manifold $su(3)/t$ from a dynamical systems point of view*, Bulletin des sciences mathématiques **133** (2009), no. 5, 463–469.
- [15] ———, *Global behavior of the ricci flow on generalized flag manifolds with two isotropy summands*, Indagationes Mathematicae **23** (2012), no. 1, 95–104.
- [16] R. Hamilton, *Three manifolds with positive ricci curvature*, J. Differential Geom. **17** (1982), 255–306.
- [17] ———, *Four-manifolds with positive isotropic curvature*, Communications in Analysis and Geometry **5** (1997), 1–92.
- [18] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, vol. 12, Academic press, 1962.
- [19] M. Itoh, *On curvature properties of kähler c -spaces*, Journal of the Mathematical Society of Japan **30** (1978), no. 1, 39–71.
- [20] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. 2, Wiley New York, 1969.
- [21] O. Kowalski and J. Szenthe, *On the existence of homogeneous geodesics in homogeneous riemannian manifolds*, Geometriae Dedicata **81** (2000), no. 1, 209–214.
- [22] O. Kowalski and L. Vanhecke, *Riemannian manifolds with homogeneous geodesics*, Bollettino della unione matematica italiana **5** (1991), no. 1, 189–246.

- [23] R. Lafuente and J. Lauret, *Structure of homogeneous ricci solitons and the aleksevskii conjecture*, Journal of Differential Geometry **98** (2014), no. 2, 315–347.
- [24] J. Lauret, *Curvature flows for almost-hermitian lie groups*, Transactions of the American Mathematical Society **367** (2015), no. 10, 7453–7480.
- [25] A. Lichnerowicz, *Applications harmoniques et variétés kähleriennes*, Milan Journal of Mathematics **39** (1969), no. 1, 186–195.
- [26] C. J. C. Negreiros, *Some remarks about harmonic maps into flag manifolds*, Indiana University Mathematics Journal **37** (1988), no. 3, 617–636.
- [27] C. J. C. Negreiros, L. Grama, and L. A. B. San Martin, *Invariant hermitian structures and variational aspects of a family of holomorphic curves on flag manifolds*, Annals of Global Analysis and Geometry **40** (2011), no. 1, 105–123.
- [28] L. Ni, *Ricci flow and nonnegativity of sectional curvature*, Math. Res. Lett **11** (2004), 883–904.
- [29] L. A. B. San Martin, *Algebras de lie*, Unicamp, 2010.
- [30] L. A. B. San Martin and C. J. C. Negreiros, *Invariant almost hermitian structures on flag manifolds*, Advances in Mathematics **178** (2003), no. 2, 277–310.
- [31] W. Ziller, *The jacobi equation on naturally reductive compact riemannian homogeneous spaces*, Commentarii Mathematici Helvetici **52** (1977), no. 1, 573–590.
- [32] ———, *Homogeneous einstein metrics on spheres and projective spaces*, Mathematische Annalen **259** (1982), no. 3, 351–358.