Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Luis Augusto de Mendonça

Propriedades Homológicas de Produtos Entrelaçados

CAMPINAS
2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

LUIS AUGUSTO DE MENDONÇA

PROPRIEDADES HOMOLÓGICAS DE PRODUTOS ENTRELAÇADOS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientadora: Dessislava Hristova Kochloukova

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO LUIS AUGUSTO DE MENDONÇA, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA.

Assinatura da Orientadora

CAMPINAS
2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M523p

Mendonça, Luís Augusto de, 1991-
Propriedades homológicas de produtos entrelaçados / Luís Augusto de Mendonça. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Dessislava Hristova Kochloukova.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria dos grupos. 2. Álgebra homológica. 3. Invariantes geométricos. I. Kochloukova, Dessislava Hristova,1970-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Homological properties of wreath products
Palavras-chave em inglês:
Group theory
Homological algebra
Geometric invariants
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Dessislava Hristova Kochloukova [Orientador]
Said Najati Sidki
Francesco Matucci
Data de defesa: 29-02-2016
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 29 de fevereiro de 2016 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA

Prof.(a). Dr(a). SAID NAJATI SIDKI

Prof.(a). Dr(a). FRANCESCO MATUCCI

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros
encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Dedico este trabalho à minha família e aos meus amigos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha orientadora, professora Dessislava Kochloukova, pela paciência, disposição e entusiasmo durante todo o trabalho. Agradeço também aos membros da banca, professsores Francesco Matucci e Said Sidki, pelos comentários valiosos e pelas correções sugeridas. Gostaria também de agradecer aos professores Paulo Brumatti e Paulo Ruffino, além dos já citados Dessislava e Francesco, pelo excelente trabalho como docentes: ensinaram, instigaram e inspiraram.

Reconheço ainda a importância de todo o ambiente da Universidade e do instituto de Matemática no desenvolvimento das minhas atividades. Nisso incluo não só a estrutura física, mas os funcionários, que trabalham para que isso seja possível, e os colegas, com os quais descubro algumas das coisas mais interessantes da Matemática.

Agradeço à minha família e aos meus amigos pessoais pelo apoio às minhas escolhas, ainda que isso signifique estar quase sempre distante.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Estudamos nesta dissertação propriedades homológicas de finitude de produtos entrelaçados (restritos e permutacionais) $\Gamma = H \wr_X G$, seguindo principalmente o trabalho de L. Bartholdi, Y. de Cornulier e D. H. Kochloukova. No caso em que H tem abelianização infinita, descrevemos condições necessárias e suficientes para que Γ seja de tipo FP_m: H e G devem ser de tipo FP_m e G deve agir (diagonalmente) em X^i com um número finito de órbitas e estabilizadores de tipo FP_{m-i} para todo $1 \leq i \leq m$.

No caso em que H é o grupo cíclico de ordem n, obtemos condições semelhantes para que o $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo trivial $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ seja de tipo FP_m. A saber, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ deve ser de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G$-módulo e G deve agir (diagonalmente) em X^i com um número finito de órbitas e estabilizadores G_α tais que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}G_\alpha$-módulo, para todo $1 \leq i \leq m$.

Por fim, descrevemos condições suficientes para que caracteres de Γ representem elementos dos Σ-invariantes homológicos com coeficientes em $\mathbb{Z}$ (se H tem abelianização infinita) ou em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, se H é cíclico de ordem n.

Palavras-chave: Teoria dos grupos, álgebra homológica, invariantes geométricos.

Abstract

In this Master's thesis we study some homological finiteness properties of the wreath products (restricted and permutational) $\Gamma = H \wr_X G$, following mainly the work by L. Bartholdi, Y. de Cornulier and D. H. Kochloukova. When the abelianization of H is infinite, we describe necessary and sufficient conditions for Γ to be of type FP_m: H and G must be of type FP_m e G must act (diagonally) on X^i with finitely many orbits and stabilizers of type FP_{m-i} for all $1 \leq i \leq m$.

Under the assumption that H is the cyclic group of order n we obtain similar conditions for the trivial $\mathbb{Z}\Gamma$-module $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ to be of type FP_m. Specifically, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ must be of type FP_m as a $\mathbb{Z}G$-module and G must act (diagonally) on X^i with finitely many orbits and stabilizers G_α such that $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ is of type FP_{m-i} as a $\mathbb{Z}G_\alpha$-module for all $1 \leq i \leq m$.

Finally we describe sufficient conditions for a character of the group Γ to represent an element of the homological Σ-invariant with coefficients on $\mathbb{Z}$ (when H has infinite abelianization) or $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, if H is cyclic of order n.

Keywords: Group theory, homological algebra, geometric invariants.

Sumário

Introdução

O estudo das *propriedades de finitude* é um tópico central na teoria de grupos infinitos. Nesta linha de raciocínio, procura-se propriedades de grupos que sejam compartilhadas por todos os grupos finitos, isto é, que sejam de alguma forma extensões do conceito de finitude, e busca-se classificar quais grupos, dentre os infinitos, satisfazem tais propriedades.

Podemos analisar, por exemplo, os grupos que são *finitamente gerados*, ou seja, grupos Γ para os quais existe um subconjunto finito $X \subseteq \Gamma$ tal que qualquer elemento de Γ pode ser escrito como produto de elementos de X e seus inversos (neste caso dizemos que X gera Γ). Equivalentemente, Γ é finitamente gerado pelo subconjunto (finito) X se existe um homomorfismo sobrejetivo $\varphi : F(X) \to \Gamma$, sendo $F(X)$ o grupo livre com base X. Claramente, se Γ é finito podemos tomar $X = \Gamma$. Muitos grupos infinitos, no entanto, também satisfazem essa propriedade: para o grupo aditivo $\mathbb{Z}$, por exemplo, podemos escolher $X = \{1\}$.

Também podemos considerar os chamados grupos *finitamente apresentáveis*. Estes consistem nos grupos Γ para os quais existe um conjunto finito X e um homomorfismo sobrejetivo $\varphi : F(X) \to \Gamma$ cujo núcleo é finitamente gerado como subgrupo normal de $F(X)$. É fácil ver que tanto grupos finitos como $\mathbb{Z}$ são também finitamente apresentáveis. Então "ser finitamente apresentável" e "ser finitamente gerado" são propriedades de finitude que podem ser definidas somente por conceitos elementares da teoria de grupos.

Outra forma de se definir propriedades de finitude é considerar conexões entre teoria de grupos e topologia. Dado m inteiro maior ou igual a zero, um grupo Γ é *de tipo* F_m se existe um CW-complexo Y conexo satisfazendo:

- $\pi_1(Y, *) \simeq \Gamma$;
- O recobrimento universal de Y é contrátil;
- O esqueleto m-dimensional $Y^{(m)}$ de Y tem um número finito de células.

É possível mostrar que todo grupo é de tipo F_0, que um grupo é de tipo F_1 se e somente se é finitamente gerado e que a propriedade F_2 é equivalente a "ser finitamente apresentável". As demais propriedades F_m, para $m \geq 3$, são aproximações sucessivas para o conceito de finitude, já que F_m implica F_n para todo $m \geq n$.

Por analogia aos conceitos topológicos acima, podemos definir propriedades *homológicas* de finitude para grupos. Formalmente, um grupo Γ é *de tipo* FP_m se existe uma resolução projetiva $\mathscr{P}$ de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo

$$\mathscr{P} : ... \to P_i \to P_{i-1} \to ... \to P_1 \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0,$$

com P_i finitamente gerado para todo $i \leq m$. A exatidão do complexo acima pode ser visto como a versão homológica de "O recobrimento universal de Y é contrátil", enquanto exigir que P_i seja finitamente gerado para $i \leq m$ seria como impor uma condição de finitude ao m-ésimo esqueleto de $\mathscr{P}$.

Pode-se mostrar que as propriedades FP_m coincidem com as propriedades F_m se $m = 0$ ou $m = 1$, isto é, todo grupo é de tipo FP_0 e um grupo é de tipo FP_1 se e somente se é finitamente gerado. Para $m \geq 2$, no entanto, ser de tipo FP_m é estritamente mais fraco do que ser de tipo F_m, como mostrado no artigo [4]. Para mais informações sobre grupos de tipo FP_m, a referência padrão é o livro de R. Bieri [5].

A propriedade FP_m em geral não é herdada por subgrupos, mas em casos mais específicos existem resultados interessantes. Temos por exemplo os *invariantes homológicos* $\Sigma^m(\Gamma;\mathbb{Z})$ definidos por R. Bieri e B. Renz [6], que decidem quais subgrupos de Γ, dentre os que contêm o comutador $[\Gamma,\Gamma]$, são de tipo FP_m. Tais invariantes consistem em subconjuntos de uma esfera $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ associada ao grupo Γ, onde n é a dimensão de $Hom(\Gamma,\mathbb{R})$ como $\mathbb{R}$-espaço vetorial, e possuem outras propriedades interessantes que nos permitem estudar os grupos de um ponto de vista mais geométrico.

Nesta dissertação nos concentramos em estudar as propriedades *homológicas* (isto é, o tipo FP_m e os invariantes $\Sigma^m(\Gamma;\mathbb{Z})$) para uma classe específica de grupos, os chamados *produtos entrelaçados*. Estes são definidos da seguinte forma: se H e G são grupos e X é um G-conjunto, o *produto entrelaçado* $H \wr_X G$ é o produto semidireto $H^{(X)} \rtimes G$, onde $H^{(X)}$ é a soma direta de cópias de H indexadas por X e G age em $H^{(X)}$ permutando as cópias de H, de acordo com a ação de G em X.

Os produtos entrelaçados aparecem frequentemente em diversos aspectos da teoria de grupos, sendo interessantes especialmente no estudo de extensões de grupos. Isto se deve ao teorema de Kaloujnine e Krasner, que diz que se G é um grupo finito, então $H \wr_G G$ (com ação de G em si mesmo por multiplicação à esquerda) contém cópias de qualquer extensão H por G (veja o livro de J.J. Rotman [19], teorema 7.37).

As propriedades de finitude de produtos entrelaçados foram consideradas recentemente nos trabalhos de Y. de Cornulier [13] e de L. Bartholdi, Y. de Cornulier e D. H. Kochloukova [3]. Nestes dois artigos foram estudadas as propriedades FP_m, F_m e os invariantes homológicos Σ^m de tais grupos, e alguns dos resultados serão descritos nesta dissertação.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no capítulo 1 introduzimos os conceitos básicos de álgebra homológica, com objetivo de definir e estabelecer as primeiras propriedades da cohomologia de grupos. Com isso, podemos desenvolver a teoria básica da propriedade FP_m para grupos e dos Σ-invariantes; isto é feito no capítulo 2. A partir do terceiro capítulo, especializamo-nos em produtos entrelaçados, expondo os resultados dos dois artigos acima citados. Por fim, no capítulo 4 trabalhamos o caso específico do produto entrelaçado $C_n \wr_X G$ (onde C_n é grupo cíclico com n elementos), buscando estudar casos não considerados por L. Bartholdi, Y. de Cornulier e D. H. Kochloukova. O capítulo 5 discute a conexão entre os dois capítulos precedentes e indica caminhos naturais de continuação deste trabalho.

Capítulo 1

Álgebra Homológica Básica

Neste capítulo desenvolvemos as noções da álgebra homológica necessárias para os nossos estudos. Começamos com o básico de categorias e funtores para logo em seguida nos especializarmos na categoria de módulos sobre um anel associativo unitário. Posteriormente estudamos as principais propriedades dos funtores Hom e $\otimes$, os complexos de módulos e, finalmente, os funtores derivados Tor e Ext. Com tal teoria bem fundamentada, podemos definir e entender a homologia e a cohomologia de grupos, o objetivo maior deste capítulo. A referência base para todos os assuntos citados acima é o livro de J. J. Rotman [18], que contém as demonstrações de todos os resultados aqui citados.

Assumimos conhecidos os conceitos básicos da álgebra abstrata (grupos, anéis, módulos, homomorfismos e quocientes), assim como os resultados mais básicos relacionados a tais conceitos.

1.1 Categorias e funtores

Faremos uma exposição breve sobre categorias e funtores, na medida do necessário, já que este não é o foco deste trabalho.

Definição 1.1.1. Uma **categoria** $\mathscr{A}$ consiste em: uma classe $obj(\mathscr{A})$ de **objetos**, um conjunto $Hom_{\mathscr{A}}(A,B)$ de **morfismos** para cada par (A,B) de objetos e **leis de composição** $Hom_{\mathscr{A}}(A,B) \times Hom_{\mathscr{A}}(B,C) \to Hom_{\mathscr{A}}(A,C)$, que denotamos por $(f,g) \mapsto g \circ f$, para cada terna ordenada (A,B,C) de objetos. Além disso, exigimos que as seguintes propriedades se verifiquem:

1. Os conjuntos $Hom_{\mathscr{A}}(A,B)$ são disjuntos dois a dois, isto é, se A, B, C e D são objetos, então $Hom_{\mathscr{A}}(A,B) \cap Hom_{\mathscr{A}}(C,D) \neq \emptyset$ se e somente se $A = C$ e $B = D$;

2. Para todo objeto A, existe $id_A \in Hom_{\mathscr{A}}(A,A)$, com a propriedade que $f \circ id_A = f$ e $id_A \circ g = g$ para quaisquer $f \in Hom_{\mathscr{A}}(A,B)$ e $g \in Hom_{\mathscr{A}}(C,A)$, sendo B e C objetos quaisquer em $\mathscr{A}$;

3. A composição é associativa, ou seja, se $f \in Hom_{\mathscr{A}}(A, B)$, $g \in Hom_{\mathscr{A}}(B, C)$ e $h \in Hom_{\mathscr{A}}(C, D)$, então $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Em geral, se $\mathscr{A}$ é uma categoria e $A \in obj(\mathscr{A})$, abusaremos da notação escrevendo $A \in \mathscr{A}$. Se $A, B \in \mathscr{A}$ e $f \in Hom_{\mathscr{A}}(A, B)$, escreveremos $f : A \to B$.

Alguns exemplos de categorias já nos são bastante familiares. Podemos por exemplo formar a categoria dos **Conjuntos**, sendo a classe de objetos todos os conjuntos e $Hom(X, Y)$ o conjunto de todas as funções $X \to Y$, junto com a composição usual de funções. De maneira similar, a categoria dos **Grupos**, tem como classe de objetos todos os grupos e $Hom(G_1, G_2)$ como o conjunto dos homomorfismos de grupos $G_1 \to G_2$, junto com a composição usual dos homomorfismos.

Seja R um anel associativo unitário. A categoria ${}_RMod$ dos **R-módulos à esquerda** tem como objetos todos os R-módulos à esquerda e $Hom_{{}_RMod}(M, N)$ como o conjunto de todos os homomorfismos $M \to N$ de R-módulos à esquerda, para quaisquer $M, N \in {}_RMod$. A composição é mais uma vez a composição usual de homomorfismos. De forma semelhante construímos a categoria Mod_R dos **R-módulos à direita**. Para simplificar a notação, escreveremos $Hom_R(M, N)$ para denotar os homomorfismos de M em N, sejam M e N R-módulos à esquerda ou à direita.

Categorias diferentes se relacionam por meio dos chamados *funtores*.

Definição 1.1.2. Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias. Um **funtor covariante** $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é uma regra que associa a cada objeto $C \in \mathscr{C}$ um objeto $T(C) \in \mathscr{D}$ e a cada morfismo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(C_1, C_2)$ um morfismo $T(f) \in Hom_{\mathscr{D}}(T(C_1), T(C_2))$, sendo $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$ objetos quaisquer. Além disso, exigimos que T satisfaça:

1. $T(id_C) = id_{T(C)}$ para todo $C \in \mathscr{C}$;

2. $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ para quaisquer $f : C_1 \to C_2$, $g : C_2 \to C_3$ e C_1, C_2 e C_3 objetos de $\mathscr{C}$.

Um **funtor contravariante** $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ associa a cada objeto $C \in \mathscr{C}$ um objeto $S(C)$ de $\mathscr{D}$ e a cada morfismo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(C_1, C_2)$ um morfismo $S(f) \in Hom_{\mathscr{D}}(S(C_2), S(C_1))$, satisfazendo:

1. $S(id_C) = id_{S(C)}$ para todo $C \in \mathscr{C}$;

2. $S(g \circ f) = S(f) \circ S(g)$ para quaisquer $f : C_1 \to C_2$, $g : C_2 \to C_3$ e C_1, C_2 e C_3 objetos de $\mathscr{C}$.

Dado um grupo $(G, \cdot)$, denote por G_0 o seu conjunto subjacente. Da mesma forma, para cada homomorfismo de grupos $f : G \to H$, indique por f_0 a função óbvia de G_0 em H_0. Podemos definir um funtor covariante T da categoria dos grupos na categoria dos conjuntos por $T(G) = G_0$ e $T(f) = f_0$. É claro que as propriedades 1 e 2 da definição são satisfeitas.

Seja $\mathscr{C}$ uma categoria qualquer e $B \in \mathscr{C}$ um objeto. Definimos o funtor contravariante $Hom_{\mathscr{C}}(-, B)$ de $\mathscr{C}$ na categoria dos conjuntos por

$$Hom_{\mathscr{C}}(-, B)(A) := Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$$

e

$$(Hom_{\mathscr{C}}(-, B)(f))(h) := h \circ f,$$

para todos $f : A_1 \to A_2$, $h : A_2 \to B$ e $A_1, A_2 \in \mathscr{C}$. Encontraremos mais adiante exemplos mais interessantes de funtores nas categorias de módulos, mas por ora os dados acima ilustram bem as definições.

Antes de seguir, façamos mais uma convenção de notação. Se $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ são categorias, $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é um funtor covariante e $f : C_1 \to C_2$ é um morfismo em $\mathscr{C}$, denotaremos por vezes o morfismo $T(f) : T(C_1) \to T(C_2)$ por f_*. Da mesma forma, se $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ for contravariante, escrevermos f^* no lugar de $F(f)$. Diremos que f_* e f^* são **morfismos induzidos**.

Analisemos melhor dois dos exemplos de categorias dados: ${}_R Mod$ e **Grupos**. Uma diferença básica entre as duas é o fato de que os conjuntos $Hom_R(M, N)$, para quaisquer $M, N \in {}_R Mod$, têm mais estrutura do que um conjunto do tipo $Hom(G_1, G_2)$, sendo G_1 e G_2 grupos. De fato, dados $f, g : M \to N$, podemos definir a soma $f + g$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, de forma que $f + g \in Hom_R(M, N)$. Isto motiva as definições a seguir.

Definição 1.1.3. Uma categoria $\mathscr{C}$ é **pré-aditiva** se cada $Hom_{\mathscr{C}}(C_1, C_2)$ é um grupo abeliano com repeito a uma operação $+$ e se vale a distributividade: se $f, g : C_1 \to C_2$ e $h, k : C_2 \to C_3$ são morfismos, então $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$ e $(h + k) \circ f = h \circ f + k \circ f$. Um funtor $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ entre duas categorias pré-aditivas é **aditivo** se $T(f + g) = T(f) + T(g)$, para quaisquer f e g morfismos em $\mathscr{C}$.

Note que se $\mathscr{C}$ é uma categoria pré-aditiva e $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$, então existe um elemento neutro $0 \in Hom_{\mathscr{C}}(C_1, C_2)$, já que este é grupo abeliano. Segue que:

$$T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0) \Rightarrow T(0) = 0,$$

para qualquer funtor aditivo T definido em $\mathscr{C}$.

Como sugerido anteriormente, a categoria ${}_R Mod$ é pré-aditiva, em oposição a **Grupos**. Exemplos de funtores aditivos aparecerão naturalmente na próxima seção, cujo foco são os R-módulos.

1.2 As categorias de módulos

Fixemos um anel unitário R. Já definimos anteriormente duas categorias de módulos sobre R: ${}_RMod$ e Mod_R, de R-módulos à esquerda e à direita, respectivamente. O conjunto de homomorfismos de M em N é denotado por $Hom_R(M,N)$ e, conforme observado na seção anterior, tem uma estrutura grupo abeliano com respeito à soma: se $f,g \in Hom_R(M,N)$, então $f+g \in Hom_R(M,N)$. Além disso, é claro que as leis de distributividade da definição 1.1.3 valem, e logo ${}_RMod$ e Mod_R são categorias pré-aditivas.

Geralmente as teorias construídas em ${}_RMod$ valem também em Mod_R e vice-versa. Escolheremos sempre que possível trabalhar com R-módulos à esquerda, mencionando os casos em que a diferença entre as duas categorias for relevante.

Seja M um R-módulo. Podemos definir dois funtores $T_1, T_2 : {}_RMod \to {}_{\mathbb{Z}}Mod$ da seguinte forma: se N é um R-módulo, então

$$T_1(N) := Hom_R(M,N), \quad T_2(N) := Hom_R(N,M).$$

Se $N' \in {}_RMod$ e $f : N \to N'$, definimos $T_1(f)(h) = f \circ h$ e $T_2(f)(k) = k \circ f$, para quaisquer $h \in Hom_R(M,N)$ e $k \in Hom_R(N',M)$.

Teorema 1.2.1. *Mantendo as notações acima, temos que T_1 é um funtor covariante aditivo e T_2 é um funtor contravariante aditivo.*

Utilizaremos daqui por diante a notação usual para os dois funtores considerados acima: $T_1 = Hom_R(M,-)$ e $T_2 = Hom_R(-,M)$. Tais funtores geralmente são chamados de funtores **Hom**, e constituem uma das mais importantes classes de funtores em categorias de módulos. Outro funtor fundamental é o **produto tensorial**, que definimos a seguir.

Definição 1.2.2. Sejam A um R-módulo à direita, B um R-módulo à esquerda e N um $\mathbb{Z}$-módulo. Uma função $f : A \times B \to N$ é dita R-**biaditiva** se :

1. $f(a_1 + a_2, b_1) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_1)$;
2. $f(a_1, b_1 + b_2) = f(a_1, b_1) + f(a_1, b_2)$;
3. $f(a_1 r, b_1) = f(a_1, r b_1)$,

para todos $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ e $r \in R$.

Um **produto tensorial** de A por B (sobre R) é um par (T, i), onde T é um $\mathbb{Z}$-módulo e $i : A \times B \to T$ é uma função R-biaditiva com a seguinte propriedade:

- Para todo $\mathbb{Z}$-módulo N e para toda função R-biaditiva $f : A \times B \to N$, existe um único homomorfismo $\phi : T \to N$ de $\mathbb{Z}$-módulos tal que $\phi \circ i = f$, como ilustrado pelo diagrama a seguir:

$$
\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & N \\
T \arrow[ur, "\exists! \phi"'] &
\end{tikzcd}
$$

Para construir um produto tensorial de A por B sobre R, tomamos o $\mathbb{Z}$-módulo livre F com base $A \times B$ e S o submódulo de F gerado por todos os elementos dos tipos:

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b),$$

$$(a, b + b') - (a, b) - (a, b'),$$

$$(a \cdot r, b) - (a, r \cdot b),$$

com $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ e $r \in R$. Defina $T = F/S$ e $i : A \times B \to T$ por $i((a, b)) = (a, b) + S$. Não é difícil verificar que T é de fato um produto tensorial de A por B sobre R.

Teorema 1.2.3. *Para quaisquer $A \in Mod_R$ e $B \in {}_RMod$, existe um produto tensorial de A por B sobre R, sendo único a menos de isomorfismo.*

A unicidade citada acima é consequência direta da definição de produto tensorial pela propriedade universal. Com isso podemos deixar de falar “um produto tensorial” para falar “o produto tensorial”. Podemos ainda fixar uma notação: se $A \in Mod_R$ e $B \in {}_RMod$, denotaremos o produto tensorial de A por B sobre R por $(A \otimes_R B, i)$. Escreveremos ainda $a \otimes b$ no lugar de $i(a, b)$ (estes elementos geram $A \otimes_R B$ como $\mathbb{Z}$-módulo!) e diremos apenas que $A \otimes_R B$ é o produto tensorial de A por B sobre R, sem menção à função i. Finalmente, se A e B são $\mathbb{Z}$-módulos, denotaremos por $A \otimes B$ o produto tensorial de A por B sobre $\mathbb{Z}$, isto é, convencionamos que $\otimes_{\mathbb{Z}} = \otimes$.

Seja S um outro anel. Um (R, S)**-bimódulo** M é um grupo abeliano M que é simultaneamente um R-módulo à esquerda e um S-módulo à direita. Além disso, exigimos que M satisfaça:

$$r \cdot (m \cdot s) = (r \cdot m) \cdot s,$$

para quaisquer $r \in R$, $s \in S$ e $m \in M$.

Os bimódulos são interessantes no sentido em que dão uma estrutura adicional ao produto tensorial. Formalmente, se M é um (R, S)-bimódulo e N é um R-módulo à direita, então $N \otimes_R M$ tem estrutura de S-módulo à direita dada por:

$$(n \otimes m) \cdot s = n \otimes (m \cdot s).$$

Da mesma forma, se M é (R, S)-bimódulo e se N é R-módulo à esquerda, então $Hom_R(N, M)$ pode ser visto como S-módulo à direita se definimos $(f \cdot s)(x) = f(x) \cdot s$ para $f \in Hom_R(N, M)$ e $s \in S$. O grupo abeliano $Hom_R(M, N)$, por sua vez, é S-módulo à esquerda se definimos $(s \cdot g)(x) = g(x \cdot s)$ para $g \in Hom_R(M, N)$ e $s \in S$.

Compilamos a seguir algumas das propriedades principais dos produtos tensoriais.

Proposição 1.2.4. *Sejam R e S anéis, M_1 e M_2 R-módulos à direita, M' e M'' R-módulos à esquerda, P um S-módulo à esquerda e N um (R,S)-bimódulo. Então:*

1. $M_1 \otimes_R R \simeq M_1$ *e* $R \otimes_R M' \simeq M'$;
2. $(M_1 \otimes_R N) \otimes_S P \simeq M_1 \otimes_R (N \otimes_S P)$;
3. $M_1 \otimes_R (M' \oplus M'') \simeq (M_1 \otimes_R M') \oplus (M_1 \otimes_R M'')$;
4. $(M_1 \oplus M_2) \otimes_R M' \simeq (M_1 \otimes_R M') \oplus (M_2 \otimes_R M')$.

Vejamos as propriedades funtoriais do produto tensorial. Fixado $A \in Mod_R$, definimos um funtor $F_A : {}_RMod \to {}_{\mathbb{Z}}Mod$ da seguinte forma: se $B \in {}_RMod$, então $F_A(B) = A \otimes_R B$, e se $g \in Hom_R(B, B')$, então $F_A(g) : A \otimes_R B \to A \otimes_R B'$ é definida nos geradores por $F_A(g)(a \otimes b) = a \otimes g(b)$.

Teorema 1.2.5. *F_A é um funtor covariante aditivo.*

Existe um funtor análogo para R-módulos à direita. Fixado $B \in {}_RMod$, definimos $G_B : Mod_R \to Mod_{\mathbb{Z}}$ por $G_B(A) = A \otimes_R B$ para todo $A \in Mod_R$, e se $h : A \to A'$ é um homomorfismo de R-módulos à direita, então $G_A(h) : A \otimes_R B \to A' \otimes_R B$ pode ser definido por $G_B(h)(a \otimes b) = h(a) \otimes b$. Novamente G_B é um funtor covariante aditivo.

Denotaremos os funtores acima por $F_A(-) = A \otimes_R -$ e $G_B(-) = - \otimes_R B$; este são os funtores do tipo **produto tensorial**. Veremos adiante que os funtores Hom e produto tensorial têm uma ligação especial, formando um “par adjunto de funtores”, como segue.

Definição 1.2.6. Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtores. Dizemos que (F, G) é um **par adjunto de funtores** se existe um conjunto de bijeções

$$\{\tau_{C,D} : Hom_{\mathscr{D}}(FC, D) \to Hom_{\mathscr{C}}(C, GD) |\ C \in \mathscr{C}, D \in \mathscr{D}\}$$

tal que:

- Se $f \in Hom_{\mathscr{C}}(C_1, C_2)$, então o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{D}}(FC_1, D) \arrow[r, "\tau_{C_1,D}"] & Hom_{\mathscr{C}}(C_1, GD) \\
Hom_{\mathscr{D}}(FC_2, D) \arrow[r, "\tau_{C_2,D}"] \arrow[u, "(Ff)^*"] & Hom_{\mathscr{C}}(C_2, GD) \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

- Se $g \in Hom_{\mathscr{D}}(D_1, D_2)$, então o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{D}}(FC, D_1) \arrow[r, "\tau_{C,D_1}"] \arrow[d, "g_*"'] & Hom_{\mathscr{C}}(C, GD_1) \arrow[d, "(Gg)_*"] \\ Hom_{\mathscr{D}}(FC, D_2) \arrow[r, "\tau_{C,D_2}"] & Hom_{\mathscr{C}}(C, GD_2) \end{tikzcd}$$

Teorema 1.2.7. *Sejam R e S anéis, A um R-módulo à direita, B um (R,S)-bimódulo e C um S-módulo à direita. Então existe um isomorfismo canônico de $\mathbb{Z}$-módulos:*

$$\tau_{A,C} : Hom_S(A \otimes_R B, C) \to Hom_R(A, Hom_S(B, C)).$$

De maneira similar, se A é um R-módulo à esquerda, B um (S,R)-bimódulo e C um S-módulo à esquerda, então existe um isomorfismo canônico de $\mathbb{Z}$-módulos:

$$\theta_{A,C} : Hom_R(B \otimes_R A, C) \to Hom_R(A, Hom_S(B, C)).$$

Demonstração. Se $\sigma \in Hom_S(A \otimes_R B, C)$ e $a \in A$, $f := \tau_{A,C}(\sigma)(a)$ é definido por:

$$f(b) = \sigma(a \otimes b).$$

Da mesma forma, se $\eta \in Hom_R(B \otimes_R A, C)$ e $a \in A$, então $g := \theta_{A,C}(\eta)(a)$ é definido por:

$$g(b) = \eta(b \otimes a).$$

Para mais detalhes, veja [18]. □

Seja B um (S,R)-bimódulo. Neste caso podemos considerar $B \otimes_R -$ como funtor da categoria de R-módulos à esquerda na categoria de S-módulos à esquerda. Da mesma forma, $Hom_S(B, -)$ pode ser visto como um funtor da categoria de S-módulos à esquerda na categoria de R-módulos à esquerda.

Corolário 1.2.8. *Seja A um (S,R)-bimódulo. Então $(A \otimes_R -, Hom_S(A, -))$ é um par adjunto de funtores.*

Demonstração. Basta utilizar os isomorfismos do teorema 1.2.7 como as bijeções da definição de par adjunto de funtores. A naturalidade de tais isomorfismos garante a comutatividade dos diagramas de tal definição. □

Observe que o teorema acima pode ser aplicado sem que tenhamos inicialmente um bimódulo. Lembre-se que qualquer módulo é, em particular, um $\mathbb{Z}$-módulo à direita e a esquerda. Assim, um R-módulo à direita A, por exemplo, pode ser visto como um $(\mathbb{Z}, R)$-bimódulo, e logo $(A \otimes_R -, Hom_{\mathbb{Z}}(A, -))$ é um par adjunto de funtores.

A importância da existência do conceito de par adjunto (especialmente o fato de $(A \otimes_R -, Hom_{\mathbb{Z}}(A, -))$ ser um par adjunto) será esclarecida na próxima seção.

1.3 Sequências exatas

Introduziremos agora as *sequências exata de módulos*, um conceito absolutamente essencial na álgebra homológica.

Definição 1.3.1. Seja

$$... \longrightarrow A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_{i-2} \longrightarrow ...$$

uma sequência de R-módulos e homomorfismos de R-módulos. Dizemos que tal sequência é **exata em $\boldsymbol{A_i}$** se $Imf_{i+1} = kerf_i$. Dizemos também que a sequência é **exata** se for exata em A_i para todo i. Uma **sequência exata curta** de R-módulos é uma sequência exata do tipo

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0\ . \tag{1.3.1}$$

Finalmente, dizemos que uma sequência exata curta como (1.3.1) é **cindida** se existe um homomorfismo $h : A'' \to A$ tal que $g \circ h = id_{A''}$.

Mais adiante vários exemplos de sequências exatas surgirão naturalmente, portanto contentaremo-nos agora em comentar apenas o caso mais comum. Se $f : A \to B$ é homomorfismo de R-módulos, é direto que a seguinte sequência é exata:

$$0 \to ker(f) \to A \to Im(f) \to 0.$$

Em particular, se f for a projeção canônica de A sobre um quociente A/A', obteremos

$$0 \to A' \to A \to A/A' \to 0,$$

uma sequência exata curta.

Lema 1.3.2. *Seja*

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de módulos. As afirmações seguintes são equivalentes:

1. *Existe um homomorfismo $h : A'' \to A$ tal que $g \circ h = id_{A''}$;*

2. *Existe um homomorfismo $j : A \to A'$ tal que $j \circ f = id_{A'}$;*

Além disso, se a condição (1) é verificada (isto é, a sequência dada é cindida), então $A \simeq ker(g) \oplus Im(h)$.

Demonstração. Note que se a condição (1) se verifica, então a decomposição de A como a soma direta anunciada é imediata. De fato, dado $a \in A$, podemos escrever

$$a = (a - h \circ g(a)) + h \circ g(a) \in ker(g) \oplus Im(h),$$

e a soma é direta pois se $h(x) \in ker(g) \cap Im(h)$, então $0 = g \circ h(x) = x$. Tendo a decomposição $A = ker(g) \oplus Im(h)$ estabelecida, fica fácil definir j. Sendo $ker(g) = Im(f)$, definimos $j(f(a')) = a'$ para todo $a' \in A'$, e se $a \in Im(h)$, colocamos $j(a) = 0$.

A recíproca é semelhante: começamos mostrando que $A = ker(g) \oplus ker(j)$ e usamos esta decomposição para definir h em $A'' = g(A) \simeq ker(j)$. □

Sejam

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de R-módulos e $F : {}_RMod \to {}_SMod$ um funtor aditivo. Aplicando F obtemos uma nova sequência:

$$0 \longrightarrow F(A') \xrightarrow{f_*} F(A) \xrightarrow{g_*} F(A'') \longrightarrow 0, \tag{1.3.2}$$

sendo esta de S-módulos. É natural investigar sob quais condições a sequência (1.3.2) é também exata. Se tomamos, por exemplo, a sequência dada por:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ ,$$

onde μ é a multiplicação por 3 e π a projeção natural, e aplicamos o funtor $F = - \otimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, obtemos:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \xrightarrow{\mu_*} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_*} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ . \tag{1.3.3}$$

Agora o homomorfismo μ_* é definido por: $\mu_*(a \otimes b) = \mu(a) \otimes b = 3a \otimes b$. Pelas propriedades do produto tensorial, temos que $3a \otimes b = a \otimes 3a = a \otimes 0 = 0$, logo $Im(\mu_*) = 0$. Então μ_* não pode ser injetiva (já que $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \neq 0$), e logo (1.3.3) não pode ser exata.

É possível verificar, no entanto, que esta é única condição que falta para a exatidão de (1.3.3), isto é, $Im(\mu_*) = ker(\pi_*)$ e π_* é sobrejetiva. Situações deste tipo levam às seguintes definições:

Definição 1.3.3. Sejam R e S anéis e $F : {}_RMod \to {}_SMod$ um funtor covariante aditivo. Dizemos que F é **exato à direita** se para toda sequência exata de R-módulos do tipo $A'' \to A \to A' \to 0$, a sequência de S-módulos $F(A'') \to F(A) \to F(A') \to 0$ é exata. Da mesma forma, se $0 \to F(A'') \to F(A) \to F(A')$ for exata sempre que $0 \to A'' \to A \to A'$ o for, dizemos que F é **exato à esquerda**.

Se F for um funtor contravariante, dizemos que F é **exato à direita** se para toda sequência exata de R-módulos do tipo $0 \to A'' \to A \to A'$, a sequência de S-módulos $F(A') \to F(A) \to F(A'') \to 0$ é exata. Da mesma forma, se $0 \to F(A') \to F(A) \to F(A'')$ for exata sempre que $A'' \to A \to A' \to 0$ o for, dizemos que F é **exato à esquerda**.

É neste contexto que o conceito de par adjunto de funtores mostra sua importância, por conta do seguinte teorema:

Teorema 1.3.4. *Sejam R e S anéis e $F : {}_RMod \to {}_SMod$ e $G : {}_SMod \to {}_RMod$ funtores aditivos. Suponha que (F, G) seja um par adjunto de funtores. Então F é exato à direita e G é exato à esquerda. Em particular, se A é um R-módulo à direita, então $A \otimes_R - : {}_RMod \to {}_{\mathbb{Z}}Mod$ é exato à direita e se B um R-módulo à esquerda, então $Hom_R(B, -) : {}_RMod \to {}_{\mathbb{Z}}Mod$ é exato à esquerda.*

Demonstração. Para a primeira parte, veja [21], teorema 2.6.1. Quanto aos casos particulares, basta ver A como $(\mathbb{Z}, R)$-bimódulo, B como $(R, \mathbb{Z})$-bimódulo e aplicar o corolário 1.2.8. □

Por fim enunciamos o chamado *lema dos cinco*, que relaciona duas sequências exatas conectadas por homomorfismos:

Lema 1.3.5 (Lema dos Cinco)**.** *Suponha que o diagrama de R-módulos abaixo seja comutativo e tenha linhas exatas:*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & A_5 \arrow[d, "\epsilon"] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

Então:

1. *Se β e δ são sobrejetivos e ϵ é injetivo, então γ é sobrejetivo.*

2. *Se β e δ são injetivos e α é sobrejetivo, então γ é injetivo.*

3. *Se α, β, δ e ϵ são isomorfismos, então γ é isomorfismo.*

1.4 Limites diretos e inversos

Seja $\{A_i\}$ uma família de R-módulos indexada por um conjunto I de índices. Independentemente da estrutura de I, podemos formar novos R-módulos a partir de tal família, como o *produto direto* $\prod_{i \in I} A_i$ ou a *soma direta* $\oplus_{i \in I} A_i$. Nesta seção introduziremos novas construções que generalizam o produto e a soma direta, os chamados *limites* *diretos e inversos.* Será necessário colocar mais estrutura no conjunto I (uma ordem parcial, a saber) e relacionar os módulos A_i por meio de homomorfismos.

Começamos com as definições em categorias quaisquer, mas em breve voltaremos o foco aos módulos.

Definição 1.4.1. Sejam I um conjunto parcialmente ordenado e $\mathscr{C}$ uma categoria. Um **sistema direto** em $\mathscr{C}$ sobre o conjunto de índices I é uma família $\{A_i\}_{i \in I}$ de objetos de $\mathscr{C}$, junto com uma coleção de morfismos $\{\varphi^i_j : A_i \to A_j\}_{i \leq j}$ satisfazendo:

1. $\varphi^i_i = id_{A_i}$ para todo $i \in I$;

2. Se $i \leq j \leq k$, então $\varphi^i_k = \varphi^j_k \circ \varphi^i_j$.

Em geral denotamos um sistema direto por $(A_i, \varphi^i_j)_{i \leq j}$, desde que não haja risco de confusão com o conjunto de índices I.

Definição 1.4.2. Seja $(A_i, \varphi^i_j)_{i \leq j}$ um sistema direto em $\mathscr{C}$ sobre o conjunto de índices I. Um **limite direto** para tal sistema direto é um objeto $\varinjlim A_i \in \mathscr{C}$, junto com uma coleção de homomorfismos $\{\alpha_j : A_j \to \varinjlim A_i\}_{j \in I}$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: para todo $B \in \mathscr{C}$ e para toda família $\{\beta_j : A_j \to B\}_{j \in I}$ de morfismos de $\mathscr{C}$ satisfazendo $\beta_j \circ \varphi^i_j = \beta_i$ para todos $i \leq j$ em I, existe um único morfismo $\phi : \varinjlim A_i \to B$ tal que $\phi \circ \alpha_i = \beta_i$ para todo $i \in I$.

Tal propriedade é ilustrada pelo seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim A_i \arrow[rr, "\phi"] & & B \\
& A_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "\beta_i"] \arrow[d, "\varphi^i_j"] & \\
& A_j, \arrow[uul, bend left, "\alpha_j"] \arrow[uur, bend right, "\beta_j"'] &
\end{tikzcd}$$

para todo $i \leq j$.

O limite direto de um sistema direto, quando existe, é único a menos de isomorfismo como em geral acontece com objetos definidos por propriedades universais. Não é razoável no entanto assumir que limites diretos sempre existam numa categoria arbitrária $\mathscr{C}$, mas felizmente esse é o caso para algumas das categorias que examinamos aqui.

Teorema 1.4.3. *Se R é um anel, I um conjunto parcialmente ordenado e $(A_i, \varphi^i_j)_{i \leq j}$ um sistema direto de R-módulos (à esquerda ou à direita) sobre I, então existe um limite direto $\varinjlim A_i$.*

Demonstração. Basta tomar:

$$\varinjlim A_i = \frac{\oplus_i A_i}{S},$$

onde S é o submódulo gerado pelo conjunto $\{\lambda_i(a_i) - \lambda_j \circ \varphi_j^i(a_i) \mid i \leq j, a_i \in A_i\}$, sendo $\lambda_j : A_j \hookrightarrow \oplus_i A_i$ a inclusão para todo $j \in I$. □

Tendo já restringido a atenção às categorias de módulos, precisamos ainda restringir um pouco mais nosso universo se quisermos uma descrição mais concreta de limites diretos. Uma restrição não muito forte e que traz bons resultados é utilizar *conjuntos direcionados*.

Definição 1.4.4. Seja I um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que I é **direcionado** se para todo $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ e $j \leq k$.

Um exemplo típico de conjunto direcionado é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais com a ordem usual, assim como qualquer conjunto totalmente ordenado. Por outro lado, o conjunto $T = \{a, b, c\}$ com a ordem parcial definida por $a \leq b$ e $a \leq c$ (as únicas relações, a menos das reflexivas) não é direcionado, pois não existe $t \in T$ tal que $b \leq t$ e $c \leq t$.

Lema 1.4.5. *Sejam I um conjunto parcialmente ordenado direcionado, $(A_i, \varphi_j^i)_{i \leq j}$ um sistema direto de R-módulos sobre I e $\alpha_i : A_i \to \varinjlim A_i$ os homomorfismos dados pela definição de limite direto, para cada $i \in I$. Então:*

1. $\varinjlim A_i = \{\lambda_i(a_i) + S \mid i \in I, a_i \in A_i\}$;
2. *Se $a_i \in A_i$, então $\alpha_i(a_i) = 0$ se e somente se existe $t \in I$, com $i \leq t$, tal que $\varphi_t^i(a_i) = 0$.*

A parte mais interessante do lema acima é o item 1. Por vezes, quando precisamos trabalhar com elementos arbitrários de um limite direto, será muito mais conveniente começar com algo da forma "$\lambda_i(a_i) + S$", no lugar de uma classe qualquer em $\oplus_i A_i / S$.

Definição 1.4.6. Sejam I um conjunto parcialmente ordenado e $(A_i, \varphi_j^i)_{i \leq j}$ e $(B_i, \sigma_j^i)_{i \leq j}$ sistemas diretos de R-módulos sobre I. Um **morfismo**

$$t : (A_i, \varphi_j^i)_{i \leq j} \to (B_i, \sigma_j^i)_{i \leq j}$$

é uma coleção $t = \{t_i : A_i \to B_i \mid i \in I\}$ de homomorfismos de R-módulos que satisfazem $t_j \circ \varphi_j^i = \sigma_j^i \circ t_i$ para todo $i \leq j$:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\varphi_j^i"] \arrow[d, "t_i"'] & A_j \arrow[d, "t_j"] \\ B_i \arrow[r, "\sigma_j^i"'] & B_j \end{tikzcd}$$

A classe de todos os sistemas diretos de R-módulos sobre I, junto com os morfismos acima, define a categoria dos sistemas diretos de R-módulos sobre I, que denotaremos por $Dir(I)$.

Note que se $t : (A_i, \varphi_j^i) \to (B_i, \sigma_j^i)$ é um morfismo em $Dir(I)$, então existe uma aplicação $t_* : \varinjlim A_i \to \varinjlim B_i$ induzida por t:

$$t_*(\sum_i a_i + S) = (\sum_i t_i(a_i)) + \tilde{S},$$

onde $\varinjlim A_i = \oplus_i A_i/S$ e $\varinjlim B_i = \oplus_i B_i/\tilde{S}$. É fácil verificar que t_* tem propriedades funtoriais: $id_* = id$ e $(t \circ v)_* = t_* \circ v_*$ se t e v são morfismos em $Dir(I)$.

Corolário 1.4.7. $\varinjlim : Dir(I) \to {}_RMod$ *é um funtor covariante.*

Note que sempre existe o sistema direto nulo: $A_i = 0$ e $\varphi_j^i = 0$ para todos $i \leq j \in I$. Além disso, podemos definir sequências exatas em $Dir(I)$ exatamente da mesma forma como definimos para módulos: $(A_i, \varphi_j^i) \xrightarrow{t} (B_i, \sigma_j^i) \xrightarrow{v} (C_i, \theta_j^i)$ é exata em (B_i, σ_j^i) se $Im(t) = ker(v)$, isto é, se $Im(t_i) = ker(v_i)$ para todo $i \in I$.

Com a caracterização do lema 1.4.5, podemos obter o seguinte resultado:

Proposição 1.4.8. *Se I é um conjunto direcionado, então* $\varinjlim : Dir(I) \to {}_RMod$ *é um funtor exato.*

Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um funtor. Se (A_i, φ_j^i) é um sistema direto em $\mathscr{C}$ sobre o conjunto de índices I, então as propriedades funtoriais de F garantem que $(F(A_i), F(\varphi_j^i))$ é um sistema direto em $\mathscr{D}$ sobre o mesmo conjunto de índices I. Em certas situações podemos obter o limite direto $(F(A_i), F(\varphi_j^i))$ a partir do limite direto de (A_i, φ_j^i), como veremos no teorema a seguir.

Teorema 1.4.9. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtores tais que (F, G) é par adjunto. Suponha que limites diretos sempre existam nas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$. Então F comuta com limites diretos, isto é, se (A_i, φ_j^i) é sistema direto em $\mathscr{C}$ sobre o conjunto de índices I, então $F(\varinjlim A_i) \simeq \varinjlim F(A_i)$. Em particular, se $B \in Mod_R$, então $\varinjlim(B \otimes_R A_i) \simeq B \otimes_R (\varinjlim A_i)$ para qualquer sistema (A_i, φ_j^i) de R-módulos à esquerda.*

Um outro caso particular do teorema acima é o fato de que limites diretos (de módulos) comutam com outros limites diretos. Para tanto, basta considerar os funtores $\varinjlim : Dir(I) \to {}_RMod$ e $|.| : {}_RMod \to Dir(I)$, onde a imagem de $A \in {}_RMod$ por $|.|$ é o sistema direto (A_i, φ_j^i) em I com $A_i = A$ e $\varphi_j^i = id_A$ para quaisquer $i, j \in I$. Podemos mostrar que $(|.|, \varinjlim)$ é um par adjunto de funtores e assim limites diretos de módulos sobre quaisquer conjuntos de índices comutam entre si.

Passamos agora ao conceito dual de limite direto: o limite inverso.

Definição 1.4.10. Sejam I um conjunto parcialmente ordenado e $\mathscr{C}$ uma categoria. Um **sistema inverso** em $\mathscr{C}$ sobre o conjunto de índices I é uma coleção de objetos $\{B_i \in \mathscr{C}\}_{i\in I}$, junto com uma coleção de morfismos $\{\psi_i^j : B_j \to B_i\}_{i\leq j}$ satisfazendo:

1. $\psi_i^i = id_{B_i}$ para todo $i \in I$;

2. Se $i \leq j \leq k$, então $\psi_i^k = \psi_i^j \circ \psi_j^k$.

Um **limite inverso** para o sistema inverso $(B_i, \psi_i^j)_{i\leq j}$ é um objeto $\varprojlim B_i \in \mathscr{C}$, junto com morfismos $\beta_j : \varprojlim B_i \to B_j$ para todo $j \in I$, satisfazendo a seguinte propriedade universal: dados um objeto $C \in \mathscr{C}$ e morfismos $f_i : C \to B_i$ satisfazendo $\psi_i^j \circ f_j = f_i$ para todo $i \leq j$, existe um único morfismo $\Psi : C \to \varprojlim B_i$ tal que $\beta_i \circ \Psi = f_i$ para todo $i \in I$.

Tal propriedade corresponde à comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim B_i \arrow[dr, "\beta_i"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_j"'] & & C \arrow[ll, "\Psi"'] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, bend left, "f_j"] \\
& B_i & \\
& B_j, \arrow[u, "\psi_i^j"] &
\end{tikzcd}$$

para todo $i \leq j$.

Exemplo 1.4.11. Dado um conjunto I qualquer, defina uma ordem parcial em I por $i \leq j$ se e somente se $i = j$. Então qualquer sistema inverso (M_i, ψ_i^j) sobre o I tem como limite inverso o produto $\prod_{i\in I} M_i$.

Novamente, se um limite inverso existe, então é único a menos de isomorfismo. Outras propriedades semelhantes às dos limites diretos também valem: sempre existem limites inversos nas categorias de módulos, os sistemas inversos $Inv(I)$ de R-módulos sobre um conjunto de índices fixo formam uma categoria e existe um funtor $|.| : {}_RMod \to Inv(I)$ (definido analogamente) tal que $(|.|, \varprojlim)$ é um par adjunto de funtores. O teorema 1.4.9 também tem a sua versão dual:

Teorema 1.4.12. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtores tais que (F, G) é par adjunto. Suponha que limites inversos sempre existam nas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$. Então G comuta com limites inversos, isto é, se (B_i, ψ_i^j) é sistema inverso em $\mathscr{D}$ sobre o conjunto de índices I, então $G(\varprojlim B_i) \simeq \varprojlim G(B_i)$.*

Em particular:

1. *Limites inversos comutam entre si;*

2. *Se $A \in {}_RMod$, então $Hom_R(A, -)$ comuta com limites inversos.*

1.5 Módulos livres e projetivos

Continuamos com um anel R fixo. Nesta seção trataremos de módulos sobre R, sendo à direita ou à esquerda, e tal distinção só será feita quando precisarmos.

Definição 1.5.1. Sejam M um R-módulo e $X \subseteq M$ um subconjunto. Dizemos que M é **livre** em X se para todo R-módulo N e para toda função $f : X \to N$, existe um único homomorfismo $\varphi : M \to N$ de R-módulos tal que $\varphi|_X = f$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "inc"'] & N . \\ M \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Por vezes diremos que M é livre com base X ou que X é base livre de M; diremos simplesmente que M é livre se existir um subconjunto $X \subseteq M$ que é base livre para M.

Se X é um conjunto qualquer, é claro que o R-módulo $M = \oplus_{x \in X} R_x$, onde $R_x \simeq R$ para todo $x \in X$, é livre em X. Além disso, se M e M' são livres com base X, é claro que $M \simeq M'$.

Lema 1.5.2. *Todo R-módulo é quociente de um R-módulo livre.*

Demonstração. Seja N é um R-módulo. Vendo N como conjunto, existe um único homomorfismo $\varphi : M = \oplus_{n \in N} R_n \to N$ (com $R_n \simeq R$ para todo $n \in N$) tal que $\varphi(1_{R_n}) = n$ pela propriedade universal dos módulos livres. É claro que tal homomorfismo é sobrejetivo, donde $N \simeq M/ker(\varphi)$, sendo M um R-módulo livre. □

Definição 1.5.3. Dizemos que um R-módulo P é **projetivo** se satisfaz a seguinte propriedade universal: se $\alpha : A \to B$ e $\beta : P \to B$ são homomorfismos de R-módulos, sendo α sobrejetivo, então existe um homomorfismo $f : P \to A$ tal que $\alpha \circ f = \beta$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\beta"] & \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Note que o homomorfismo f não é necessariamente único, como geralmente pedem as propriedades universais.

Existem diversas formas de se caracterizar um módulo projetivo; citaremos algumas delas a seguir.

Lema 1.5.4. *Seja P um R-módulo. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *P é projetivo;*

2. *Existe um R-módulo livre F tal que $F \simeq P \oplus P'$ para algum R-módulo P';*

3. *$Hom_R(P, -)$ é um funtor exato;*

4. *Toda sequência exata do tipo $0 \to A \to B \to P \to 0$ é cindida.*

Em particular, todo módulo livre é projetivo e somas arbitrárias de módulos projetivos também são módulos projetivos.

Se F e P são R-módulos satisfazendo a condição (2) acima, dizemos que P é **somando direto** de F.

Invertendo as setas da definição de módulo projetivo, obtemos um outro tipo especial de módulos: os injetivos.

Definição 1.5.5. Um R-módulo E é **injetivo** se satisfaz a seguinte propriedade universal: se $\alpha : B \to A$ e $\beta : B \to E$ são homomorfismos de R-módulos, sendo α injetivo, então existe existe um homomorfismo $g : A \to E$ tal que $g \circ \alpha = \beta$:

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"'] & A \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

Novamente não exigimos que g seja único.

No caso dos projetivos, os exemplos são imediatos: todo módulo livre é projetivo, e encontrar módulos livres é fácil. Para os injetivos não existe um resultado análogo, mas é possível mostrar que se M é R-módulo, então existe um R-módulo injetivo E e um homomorfismo injetivo $\eta : M \to E$ (veja [18], teorema 3.38).

A caracterização dos módulos injetivos é a que segue:

Lema 1.5.6. *Seja E um R-módulo. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *E é injetivo;*

2. *$Hom_R(-, E)$ é um funtor contravariante exato;*

3. *Toda sequência exata do tipo $0 \to E \to B \to A \to 0$ é cindida.*

Além disso, produtos diretos arbitrários de módulos injetivos também são injetivos.

Definição 1.5.7. Seja M um R-módulo. Uma **resolução projetiva (livre, respectivamente)** de M é uma sequência exata do tipo:

$$\mathscr{P} : \ldots \to P_i \to P_{i-1} \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

sendo cada P_i um R-módulo projetivo (livre, respectivamente).

Uma **resolução injetiva** de M é uma sequência exata do tipo:

$$\mathscr{E} : 0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \ldots \to E^i \to E^{i+1} \to \ldots,$$

sendo cada E^i um R-módulo injetivo.

Observação 1.5.8. Convencionamos que, daqui por diante, sempre que for dito "$\mathscr{P}$ é resolução projetiva do módulo M", $\mathscr{P}$ terá P_i como i-ésimo termo e homomorfismos denotados por $d_i : P_i \to P_{i-1}$:

$$\mathscr{P} : \ ... \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

Da mesma forma, uma resolução livre $\mathscr{F}$ de M terá F_i como i-ésimo termo e homomorfismos $d_i : F_i \to F_{i-1}$, salvo menção contrária.

Uma consequência do lema 1.5.2 é que todo R-módulo possui uma resolução projetiva. Com efeito, se M é um R-módulo, existe um R-módulo livre F_0 e um homomorfismo sobrejetivo $d_0 : F_0 \to M$. Agora podemos tomar um outro R-módulo livre F_1 e um homomorfismo sobrejetivo $d_1 : F_1 \to ker(d_0)$. Segue daí que a sequência $F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_1} M \longrightarrow 0$ é exata. Iterando tal construção, obtemos um resolução livre de M, que obviamente também é uma resolução projetiva.

Com o argumento acima podemos também estender resoluções projetivas. Mais precisamente, se temos uma sequência exata de R-módulos do tipo

$$P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0 \ ,$$

com P_j projetivo para todo j, então podemos tomar um R-módulo livre F_{n+1} de tal modo que a sequência a seguir continue exata:

$$F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0 \ .$$

Para tanto, basta tomar um módulo livre F_{n+1} para o qual exista um homomorfismo sobrejetivo $\alpha : F_{n+1} \twoheadrightarrow ker(d_n)$ e definir $d_{n+1} = \iota \circ \alpha$ (sendo $\iota : ker(d_n) \hookrightarrow P_n$ a inclusão). Para completar a resolução, basta iterar tal procedimento.

Da mesma forma, usando que para todo R-módulo M existe um R-módulo injetivo E e um homomorfismo injetivo $\eta : M \to E$, sempre podemos construir uma resolução injetiva para um R-módulo qualquer.

1.6 Complexos e homologia

Definição 1.6.1. Um **complexo** de R-módulos é uma sequência de R-módulos e homomorfismos:

$$\mathscr{A} : \ ... \longrightarrow A_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} A_i \xrightarrow{d_i} A_{i-1} \longrightarrow ...$$

tal que $d_i \circ d_{i+1} = 0$ para todo i. Denotaremos um complexo como acima por $(\mathscr{A}, d)$ e diremos que os homomorfismos d_i são os **diferenciais** de $\mathscr{A}$. Se $x \in A_p$, denotaremos

$p = deg(x)$.

Definição 1.6.2. Se $(\mathscr{A}, d)$ e $(\mathscr{B}, \partial)$ são complexos de R-módulos, um **morfismo de complexos** $f : (\mathscr{A}, d) \to (\mathscr{B}, \partial)$ é uma família de homomorfismos $f_i : A_i \to B_i$ de R-módulos satisfazendo $\partial_i \circ f_i = f_{i-1} \circ d_i$ para todo i. Podemos assim considerar a categoria $Comp(R)$ dos complexos de R-módulos.

Um **subcomplexo** $(\mathscr{A}', d')$ de $(\mathscr{A}, d)$ é um complexo tal que A'_i é submódulo de A_i e $d'_i = d_i|_{A'_i}$ para todo i. A **imagem** de um morfismo $f : (\mathscr{A}, d) \to (\mathscr{B}, \partial)$ de complexos é o complexo $Im(d)$ cujo i-ésimo módulo é $Im(d_{i+1})$ e os diferenciais são a restrição dos diferenciais de $\mathscr{B}$. Da mesma forma, o **núcleo** de f é o complexo $ker(d)$ cujo i-ésimo módulo é $ker(d_i)$ e cujos diferenciais são a restrição dos diferenciais de $(\mathscr{A}, d)$. Claramente $Im(d)$ e $ker(d)$ são subcomplexos de $(\mathscr{A}, d)$ e $(\mathscr{B}, \partial)$, respectivamente.

Se $(\mathscr{A}', d')$ é um subcomplexo de $(\mathscr{A}, d)$, definimos o **complexo quociente** $\mathscr{A}/\mathscr{A}'$ por:

$$\mathscr{A}/\mathscr{A}' : \ \ldots \longrightarrow \frac{A_{i+1}}{A'_{i+1}} \xrightarrow{\bar{d}_{i+1}} \frac{A_i}{A'_i} \xrightarrow{\bar{d}_i} \frac{A_{i-1}}{A'_{i-1}} \longrightarrow \ldots ,$$

onde:

$$\bar{d}_i(a_i + A'_i) = d_i(a_i) + A'_{i-1},$$

para todo i.

Se $f : (\mathscr{A}, d) \to (\mathscr{B}, \partial)$ e $g : (\mathscr{B}, \partial) \to (\mathscr{C}, \delta)$ são morfismos de complexos, a composição $g \circ f : (\mathscr{A}, d) \to (\mathscr{C}, \delta)$ é definida por: $(g \circ f)_i = g_i \circ f_i$. Dois complexos $(\mathscr{A}, d)$ e $(\mathscr{B}, \partial)$ são **isomorfos** se existem morfismos $f : (\mathscr{A}, d) \to (\mathscr{B}, \partial)$ e $g : (\mathscr{B}, \partial) \to (\mathscr{A}, d)$ tais que $f \circ g = id_{\mathscr{B}}$ e $g \circ f = id_{\mathscr{A}}$.

Outra operação que podemos considerar em morfismos de complexos é a soma, que também é definida a partir da soma de homomorfismos de módulos. Precisamente, se f e f' são morfismos de $(\mathscr{A}, d)$ em $(\mathscr{B}, \partial)$, definimos a soma $f + f'$ em cada módulo componente por $(f + f')_i = f_i \circ f'_i$.

Segue que $Comp(R)$ é uma categoria pré-aditiva, que, em particular, possui um objeto nulo (o complexo tal que todos os módulos são nulos).

Uma **sequência exata curta de complexos** de R-módulos é uma sequência do tipo:

$$0 \longrightarrow \mathscr{A} \xrightarrow{f} \mathscr{B} \xrightarrow{g} \mathscr{C} \longrightarrow 0 ,$$

onde $ker(f)$ é o complexo nulo, $Im(f) = ker(g)$ e $Im(g) = \mathscr{C}$.

Observação 1.6.3. Várias das propriedades das categorias de R-módulos valem também em $Comp(R)$, em uma adaptação direta. Dentre tais propriedades destacamos que limites diretos em $Comp(R)$ sobre qualquer conjunto parcialmente ordenado sempre existem, e isto será utilizado no capítulo 4.

Por fim, podemos considerar o *produto tensorial* de complexos.

Definição 1.6.4. Sejam $(\mathscr{A}, d)$ um complexo de R-módulos à direita e $(\mathscr{B}, \partial)$ um complexo de R-módulos à esquerda. O **produto tensorial** de $\mathscr{A}$ por $\mathscr{B}$ sobre R é o complexo $\mathscr{A} \otimes_R \mathscr{B}$ de $\mathbb{Z}$-módulos cujo n-ésimo módulo é $\bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes_R B_j$, com diferencial δ definido por:

$$\delta(a \otimes b) = (-1)^i d(a) \otimes b + (-1)^{i+j} a \otimes \partial(b),$$

para quaisquer $a \in \mathscr{A}_i$ e $b \in \mathscr{B}_j$.

É fácil verificar que o homomorfismo δ é de fato bem definido e que $(\mathscr{A} \otimes_R \mathscr{B}, \delta)$ é de fato um complexo. Iterando a construção da definição 1.6.4, é claro que podemos definir o produto tensorial de um número finito de complexos.

Passamos agora a considerar *homologias* de complexos.

Definição 1.6.5. Seja $(\mathscr{A}, d)$ um complexo de R-módulos. A n-ésima **homologia** de $(\mathscr{A}, d)$ é o R-módulo dado por:

$$H_n(\mathscr{A}) := \frac{ker(d_n)}{Im(d_{n+1})}.$$

Note que o quociente acima é bem definido, visto que $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Se $f : (\mathscr{A}, d) \to (\mathscr{B}, \partial)$ é um morfismo de complexos, definimos

$$H_n(f)(a + Im(d_{n+1})) = f_n(a) + Im(\partial_{n+1}),$$

para qualquer $a + Im(d_{n+1}) \in H_n(\mathscr{A})$. Podemos mostrar que $H_n(f) : H_n(\mathscr{A}) \to H_n(\mathscr{B})$ é um homomorfismo de R-módulos bem definido. Além disso, se $f, g : (\mathscr{A}, d) \to (\mathscr{B}, \partial)$ são morfismos, então $H_n(f + g) = H_n(f) + H_n(g)$, e portanto $H_n : Comp(R) \to {}_RMod$ é um funtor covariante aditivo para cada inteiro n.

Observação 1.6.6. Se $(\mathscr{A}, d)$ for um complexo da forma:

$$\mathscr{A} : 0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{d_0} A_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} A_{-2} \xrightarrow{d_{-2}} A_{-3} \longrightarrow ...,$$

é de costume trocar a notação para obter índices positivos e sobrescritos, isto é, reescrever $\mathscr{A}$ como:

$$\mathscr{A} : 0 \longrightarrow A^0 \xrightarrow{d^0} A^1 \xrightarrow{d^1} A^2 \xrightarrow{d^2} A^3 \longrightarrow ...,$$

onde $A^i = A_{-i}$ e $d^i = d_{-i}$ para todo i. Neste caso, diremos que $\mathscr{A}$ é um **cocomplexo** e os quocientes $\frac{ker(d^n)}{Im(d^{n-1})}$ são **cohomologias** de $\mathscr{A}$, denotadas por $H^n(\mathscr{A})$.

Definição 1.6.7. Sejam $(\mathscr{A}, d)$ e $(\mathscr{B}, \partial)$ complexos de R-módulos e $f : (\mathscr{A}, d) \to (\mathscr{B}, \partial)$ um morfismo. Dizemos que f é **homotópico a zero** se para cada i existe $s_i : A_i \to B_{i+1}$, homomorfismo de R-módulos, tal que $f_i = \partial_{i+1} \circ s_i - s_{i-1} \circ d_i$. Dizemos que dois morfismos $f, g : (\mathscr{A}, d) \to (\mathscr{B}, \partial)$ são **homotópicos** se $f - g$ for homotópico a zero.

Pode-se verificar que a homotopia de complexos é uma relação de equivalência. Tal definição aparenta ser artificial, mas é na verdade bastante significativa: ela nos fornece uma condição suficiente para que os homomorfismos de módulos induzidos nas homologias de complexos sejam iguais. Mais precisamente, se $f, g : (\mathscr{A}, d) \to (\mathscr{B}, \partial)$ são morfismos homotópicos, então $H_n(f) = H_n(g)$ para todo n.

O objetivo final desta seção é descrever a relação entre as homologias de complexos que estão relacionados por morfismos. Por exemplo: se um complexo $(\mathscr{B}, \partial)$ é imagem de outro complexo $(\mathscr{A}, d)$ por um morfismo f, e já conhecemos as homologias de $(\mathscr{A}, d)$, o que podemos dizer sobre as homologias de $(\mathscr{B}, \partial)$? As ferramentas conhecidas que fazem tal relação são as chamadas *sequências exatas longas em homologia*, que definimos agora.

Teorema 1.6.8. *Seja*

$$0 \longrightarrow (\mathscr{A}', d') \xrightarrow{f} (\mathscr{A}, d) \xrightarrow{g} (\mathscr{A}'', d'') \longrightarrow 0 \tag{1.6.1}$$

uma sequência exata curta de complexos de R-módulos. Então existe uma sequência exata de R-módulos do tipo:

$$\ldots \longrightarrow H_{n+1}(\mathscr{A}'') \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(\mathscr{A}') \xrightarrow{H_n(f)} H_n(\mathscr{A}) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(\mathscr{A}'') \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\mathscr{A}') \longrightarrow \ldots$$

Os homomorfismos ∂_n são definidos como segue: dado $z + Im(d''_{n+1}) \in H_n(\mathscr{A}'')$, escolhemos $y \in A_n$ tal que $g_n(y) = z$ e em seguida escolhemos $x \in A'_{n-1}$ tal que $f_{n-1}(x) = d_n(y)$. Definimos $\partial(z + Im(d''_{n+1})) = x + Im(d'_n)$.

A sequência obtida acima é chamada **sequência longa exata em homologia** relacionada à sequência exata (1.6.1) e os homomorfismos ∂_n são denominados **homomorfismos de conexão**.

Com o teorema 1.6.8 podemos obter informações sobre as homologias de subcomplexos, complexos quocientes, imagens e núcleos a partir da homologia do complexo original (apesar de que, em geral, não poderemos realmente *calculá-las*). Outra forma que introduzimos para construir novos complexos a partir de outros já conhecidos é o produto tensorial. A ferramenta que temos à nossa disposição para o estudar as homologias de um produto tensorial de complexos é a *fórmula de Künneth*, mas antes de enunciá-la precisamos dos *funtores derivados*, assunto da próxima seção.

1.7 Tor e Ext

Todo o trabalho deste capítulo culmina nas definições dos funtores *Tor* e *Ext*, que são obtidos a partir dos já conhecidos produto tensorial e Hom por meio de uma construção conhecida como *funtor derivado*. Tendo Tor e Ext definidos, poderemos finalmente trabalhar os conceitos de *homologia e cohomologia de grupos*, que fazem a conexão entre a teoria de grupos e a álgebra homológica.

No que segue enunciamos o teorema da comparação, que será usado para garantir a boa definição de Ext e Tor.

Teorema 1.7.1 (da Comparação, versão projetiva). *Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de R-módulos. Sejam $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ complexos de R-módulos, conforme o diagrama a seguir:*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P} : ... \arrow[r] & P_i \arrow[r, "d_i"] & P_{i-1} \arrow[r] & ... \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\mathscr{Q} : ... \arrow[r] & Q_i \arrow[r, "d'_i"'] & Q_{i-1} \arrow[r] & ... \arrow[r] & Q_0 \arrow[r, "d'_0"'] & B \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Suponha que cada P_i seja um R-módulo projetivo e que $\mathscr{Q}$ seja um complexo exato. Então:

1. *Existe um morfismo $F : \mathscr{P} \to \mathscr{Q}$ de complexos que estende f, isto é, se denotamos $A = P_{-1}$ e $B = Q_{-1}$, então $F_{-1} = f$;*

2. *Se $G : \mathscr{P} \to \mathscr{Q}$ é um morfismo de complexos tal que $G_{-1} = f$, então G e F são homotópicos.*

Teorema 1.7.2 (da Comparação, versão injetiva). *Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de R-módulos. Sejam $\mathscr{Q}$ e $\mathscr{E}$ complexos de R-módulos, conforme o diagrama abaixo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{Q} : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\epsilon'"] \arrow[d, "f"] & Q^0 \arrow[r, "d'^0"] & ... \arrow[r] & Q^i \arrow[r, "d'^i"] & Q^{i+1} \arrow[r, "d'^{i+1}"] & ... \\
\mathscr{E} : 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\epsilon"] & E^0 \arrow[r, "d^0"] & ... \arrow[r] & E^i \arrow[r, "d^i"] & E^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] & ...
\end{tikzcd}$$

Suponha que cada E^i seja um R-módulo injetivo e que $\mathscr{Q}$ seja um complexo exato. Então:

1. *Existe um morfismo $F : \mathscr{Q} \to \mathscr{E}$ de complexos que estende f, isto é, se denotamos $A = Q^{-1}$ e $B = E^{-1}$, então $F^{-1} = f$;*

2. *Se $G : \mathscr{Q} \to \mathscr{E}$ é um morfismo satisfazendo $G^{-1} = f$, então G e F são homotópicos.*

Seja $T : {}_R Mod \to {}_S Mod$ um funtor covariante aditivo. Para cada R-módulo à esquerda A, escolha uma resolução projetiva $\mathscr{P}$ de A:

$$\mathscr{P} : ... \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0.$$

Denote por $\mathscr{P}_A$ o complexo obtido pela omissão de A em $\mathscr{P}$, isto é:

$$\mathscr{P}_A : ... \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0.$$

Dizemos que $\mathscr{P}_A$ é uma **resolução apagada** de A. Apliquemos o funtor T a $\mathscr{P}_A$:

$$T(\mathscr{P}_A) : ... \longrightarrow T(P_i) \xrightarrow{T(d_i)} T(P_{i-1}) \longrightarrow ... \longrightarrow T(P_1) \xrightarrow{T(d_1)} T(P_0) \longrightarrow 0.$$

Note que o último módulo acima é de fato 0, já que T é um funtor aditivo. Além disso, $T(\mathscr{P}_A)$ é um complexo. De fato, $\mathscr{P}_A$ é um complexo por definição, donde $d_i \circ d_{i+1} = 0$ para todo $i \geq 0$. Aplicando T, temos: $T(d_i) \circ T(d_{i+1}) = T(d_i \circ d_{i+1}) = T(0) = 0$, novamente porque T é aditivo. Então podemos calcular as homologias de $T(\mathscr{P}_A)$.

Definição 1.7.3. Mantendo a notação do parágrafo precedente, o n-ésimo **funtor derivado à esquerda** de T é o funtor $L_n(T) : {}_R Mod \to {}_S Mod$ definido por:

$$L_n(T)(A) = H_n(T(\mathscr{P}_A)).$$

Se $f : A \to A'$ é um homomorfismo de R-módulos à esquerda e $\mathscr{P}'$ é uma resolução projetiva de A', então pelo teorema 1.7.1 existe um morfismo de complexos $F : \mathscr{P} \to \mathscr{P}'$ que estende f. Definimos então $L_n(T)(f)$ como o homomorfismo induzido na homologia $H_n(T(F)) : H_n(\mathscr{P}_A) \to H_n(\mathscr{P}'_{A'})$.

Note que, como T e H_n são funtores aditivos, $L_n(T)$ também o é, desde que bem definido. O lema a seguir nos diz que a construção do funtor derivado à esquerda é, a menos de isomorfismo, independente da escolha das resoluções projetivas.

Lema 1.7.4. *Sejam $L_n(T)$ o funtor construído acima e $\mathscr{L}_n(T)$ o funtor obtida pela mesma construção, mas usando uma outra família de resoluções projetivas. Então para cada R-módulo A existe um isomorfismo $\tau_A : L_n(T)(A) \to \mathscr{L}_n(T)(A)$ de modo que os diagramas a seguir são comutativos para todo homomorfismo $f : A \to B$ de R-módulos:*

$$\begin{tikzcd}
L_n(T)(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "L_n(T)(f)"'] & \mathscr{L}_n(T)(A) \arrow[d, "\mathscr{L}_n(T)(f)"] \\
L_n(T)(B) \arrow[r, "\tau_B"'] & \mathscr{L}_n(T)(B)
\end{tikzcd}$$

É claro que tudo o que foi feito acima pode ser repetido para um funtor entre categorias de módulos à direita. Claramente o funtor derivado resultante também será entre categorias de módulos à direita.

Exemplo 1.7.5. Sejam B um R-módulo à esquerda e $T = - \otimes_R B$. Então T é um funtor covariante aditivo de Mod_R em $Mod_{\mathbb{Z}}$. Denotamos por $Tor_n^R(-, B)$ o funtor derivado $L_n(T)$.

Exemplo 1.7.6. Sejam A um R-módulo à direita e $G = A \otimes_R -$. Então G é um funtor covariante aditivo de ${}_RMod$ em ${}_{\mathbb{Z}}Mod$. Denotamos por $tor_n^R(A, -)$ o funtor derivado $L_n(G)$.

Com o uso de resoluções injetivas ao invés de projetivas, podemos definir os *funtores derivados à direita*, por um processo análogo.

Sejam $T : {}_RMod \to {}_SMod$ um funtor covariante aditivo e A um R-módulo à esquerda. Seja $\mathscr{E}$ uma resolução injetiva de A:

$$\mathscr{E} : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\epsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E^i \xrightarrow{d^i} E^{i+1} \longrightarrow \ldots$$

Omitindo o módulo A, obtemos a *resolução injetiva apagada* $\mathscr{E}_A$. Novamente, aplicamos o funtor T no complexo $\mathscr{E}_A$ e obtemos um outro complexo, e calculamos suas homologias.

Definição 1.7.7. Na notação acima, o n-ésimo **funtor derivado à direita** de T é o funtor $R^n(T) : {}_RMod \to {}_SMod$ definido por:

$$R^n(T)(A) = H^n(T(\mathscr{E}_A)).$$

Se $f : A \to A'$ é um homomorfismo de R-módulos e $\mathscr{R}$ é uma resolução injetiva de A', então $R^n(T)(f) = H^n(T(F))$ onde $F : \mathscr{E} \to \mathscr{R}$ é o morfismo de complexos que estende f obtido no teorema 1.7.2.

Por argumentos semelhantes (ou duais) aos anteriores, temos que $R^n(T)$ é um funtor covariante aditivo bem definido, isto é, independente da resolução injetiva.

Exemplo 1.7.8. Se A é um (R, S)-bimódulo e $T = Hom_R(A, -)$, então $R^n(T)$ é denotado por $Ext_R^n(A, -)$.

Se $T : {}_RMod \to {}_SMod$ é um funtor contravariante aditivo, ainda podemos definir o funtor derivado à direita. Neste caso, dado um R-módulo A, tomamos uma resolução projetiva $\mathscr{P}$ e definimos: $R^n(T)(A) = H^n(T(\mathscr{P}_A))$. A ação de $R^n(T)$ em homomorfismos de módulos é definida usando o morfismo induzido do teorema da comparação em sua versão projetiva, como anteriormente. O funtor resultante $R^n(T) : {}_RMod \to {}_SMod$ é contravariante, aditivo e independente da resolução, mais uma vez.

Exemplo 1.7.9. Se B é um (R, S)-bimódulo e $T = Hom_R(-, B)$, então $R^n(T)$ é denotado por $ext_R^n(-, B)$.

Lema 1.7.10 (Horseshoe)**.** *Seja*

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de R-módulos e sejam $\mathscr{P}'$ e $\mathscr{P}''$ resoluções projetivas de A' e A, respectivamente. Então existe uma sequência exata curta de complexos

$$0 \longrightarrow \mathscr{P}' \xrightarrow{F} \mathscr{P} \xrightarrow{G} \mathscr{P}'' \longrightarrow 0\ , \tag{1.7.1}$$

onde $\mathscr{P}$ é uma resolução projetiva de A tal que $P_i = P_i' \oplus P_i''$ para todo i e o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
... \arrow[r] & P_2' \arrow[r] \arrow[d, "F_2"] & P_1' \arrow[r] \arrow[d, "F_1"] & P_0' \arrow[r] \arrow[d, "F_0"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
... \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "G_2"] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "G_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "G_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
... \arrow[r] & P_2'' \arrow[r] & P_1'' \arrow[r] & P_0'' \arrow[r] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Observação 1.7.11. A sequência exata curta (1.7.1) em geral *não* é cindida.

Teorema 1.7.12. *Seja*

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de R-módulos.

1. *Se $T : {}_R Mod \to {}_S Mod$ é um funtor covariante aditivo, existem duas sequências exatas longas:*

$$... \to (L_nT)A' \xrightarrow{f_*} (L_nT)A \xrightarrow{g_*} (L_nT)A'' \xrightarrow{\partial} (L_{n-1}T)A' \to ... \to (L_0T)A'' \to 0$$

e

$$0 \to (R^0T)A' \to ... \to (R^nT)A' \xrightarrow{f_*} (R^nT)A \xrightarrow{g_*} (R^nT)A'' \xrightarrow{\partial} (R^{n+1}T)A' \to ...$$

2. *Se $T : {}_R Mod \to {}_S Mod$ é um funtor contravariante aditivo, existe uma sequência exata longa:*

$$0 \to (R^0T)A'' \to ... \to (R^nT)A'' \xrightarrow{g^*} (R^nT)A \xrightarrow{f^*} (R^nT)A' \xrightarrow{\partial} (R^{n+1}T)A' \to ...$$

Para demonstrar o teorema acima, tomamos resoluções projetivas (injetivas, respectivamente) de A' e A'', fabricamos uma resolução de A pelo lema Horseshoe e obtemos as sequências longas em homologia (como no teorema 1.6.8).

O teorema a seguir resume as principais propriedades de ext e Ext.

Teorema 1.7.13. *Sejam A e B dois R-módulos. Então:*

1. *Existem isomorfismos naturais*

$$Ext_R^0(A,-) \simeq Hom_R(A,-)$$

e

$$ext_R^0(-,B) \simeq Hom_R(-,B);$$

2. *Se $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ é uma sequência exata curta, então existe uma sequência exata longa:*

$$0 \to Hom_R(A'',B) \to Hom_R(A,B) \to Hom_R(A',B) \to ext_R^1(A'',B) \to ...$$

3. *Se $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ é uma sequência exata curta, então existe uma sequência exata longa:*

$$0 \to Hom_R(A,B') \to Hom_R(A,B) \to Hom_R(A,B'') \to Ext_R^1(A,B') \to ...$$

4. *Se E é um R-módulo injetivo, então $Ext_R^n(A,E) = 0$ para todo $n \geq 1$;*

5. *Se P é um R-módulo projetivo, então $ext_R^n(P,B) = 0$ para todo $n \geq 1$;*

6. *$Ext_R^n(A,B) \simeq ext_R^n(A,B)$ para todo n.*

O item 6 do teorema acima nos permite abandonar a distinção entre ext e Ext. Sendo assim, escolhemos denotar sempre por Ext, seja este calculado por meio de uma resolução injetiva do módulo no segundo argumento ou uma resolução projetiva do módulo no primeiro argumento. Outro aspecto importante de Ext é o seu comportamento com respeito a somas e produtos diretos:

Lema 1.7.14. *Seja $\{A_\lambda\}$ uma família qualquer de R-módulos. Então para todo R-módulo B existem isomorfismos naturais:*

1. *$Ext_R^n(\bigoplus_\lambda A_\lambda, B) \simeq \prod_\lambda Ext_R^n(A_\lambda, B)$;*

2. *$Ext_R^n(B, \prod_\lambda A_\lambda) \simeq \prod_\lambda Ext_R^n(B, A_\lambda)$.*

As propriedades de Tor são as seguintes:

Teorema 1.7.15. *Sejam A um R-módulo à direita e B um R-módulo à esquerda. Então:*

1. *Existem isomorfismos naturais* $tor_0^R(A,-) \simeq A \otimes_R -$ *e* $Tor_0^R(-,B) \simeq - \otimes_R B$ *;*

2. *Se* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *é uma sequência exata curta, então existe uma sequência exata longa:*

$$... \longrightarrow Tor_1^R(A,B) \longrightarrow Tor_1^R(A'',B) \longrightarrow A' \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B \longrightarrow A'' \otimes_R B \longrightarrow 0$$

3. *Se* $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ *é uma sequência exata curta, então existe uma sequência exata longa:*

$$... \longrightarrow tor_1^R(A,B) \longrightarrow tor_1^R(A,B'') \longrightarrow A \otimes_R B' \longrightarrow A \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B'' \longrightarrow 0$$

4. $Tor_n^R(A,B) \simeq tor_n^R(A,B)$ *para todo* n.

Da mesma forma que com o funtor Ext, abandonamos aqui a notação "tor", denotando $tor_n^R(A,B)$ sempre por $Tor_n^R(A,B)$.

A ausência de análogos para os itens 4 e 5 do teorema 1.7.13 no teorema acima se dá porque o conceito apropriado ainda não foi definido. Note que a hipótese sobre A para que $Ext_R^n(A,B')$ seja nulo para todo B' e $n \geq 1$ é equivalente a $Hom_R(A,-)$ ser exato, e, da mesmo forma, $Ext_R^n(A',B)$ é nulo para todo A' e $n \geq 1$ se $Hom_R(-,B)$ for exato. Isso motiva a definição:

Definição 1.7.16. Um R-módulo à direita A é dito **plano** se o funtor $A \otimes_R -$ for exato. Analogamente, um R-módulo à esquerda B é dito **plano** se o funtor $- \otimes_R B$ for exato.

É possível mostrar que todo módulo projetivo é plano. Em particular, temos que os módulos livres são planos.

Proposição 1.7.17. *Sejam A e B R-módulos à direita e à esquerda, respectivamente. Se A ou B for plano, então* $Tor_n^R(A,B) = 0$ *para todo* $n \geq 1$.

De maneira análoga ao lema 1.7.14, podemos estabeler boas propriedades de Tor com respeito a somas e limites diretos.

Lema 1.7.18. *Seja $(M_i)_i$ um sistema direto de R-módulos à direita sobre um conjunto de índices direcionado. Então para todo R-módulo à esquerda B existe um isomorfismo natural:*

$$Tor_n^R(\varinjlim M_i, B) \simeq \varinjlim Tor_n^R(M_i,B).$$

Em particular, para qualquer família $\{A_\lambda\}_\lambda$ de R-módulos à direita e para qualquer R-módulo à esquerda, temos que:

$$Tor_n^R(\bigoplus_\lambda A_\lambda, B) \simeq \bigoplus_\lambda Tor_n^R(A_\lambda, B),$$

sendo tal isomorfismo também natural.

Por fim, veremos como Tor e Ext se comportam com respeito a mudanças de anéis sobre os quais os módulos são tomados. Seja $\gamma : R \to S$ um homomorfismo de anéis. Por meio de γ, qualquer S-módulo à esquerda M é também um R-módulo à esquerda se definimos:

$$r \cdot m = \gamma(r)m$$

para quaisquer $r \in R$ e $m \in M$.

Teorema 1.7.19. *Seja $\gamma : R \to S$ um homomorfismo de anéis.*

1. *Sejam B um S-módulo à direita e C um R-módulo à esquerda. Se S é plano como R-módulo (via γ), então para cada $k \geq 0$ existe um isomorfismo natural:*

$$Tor_k^R(B, C) \simeq Tor_k^S(B, S \otimes_R C);$$

2. *Sejam B um R-módulo à direita e C um S-módulo à esquerda. Se S é plano como R-módulo (via γ), então para cada $k \geq 0$ existe um isomorfismo natural:*

$$Tor_k^R(B, C) \simeq Tor_k^S(B \otimes_R S, C);$$

3. *Sejam A um S-módulo à esquerda e C um R-módulo à esquerda. Se S é plano como R-módulo (via γ), então para cada $k \geq 0$ existe um isomorfismo natural:*

$$Ext_R^k(C, A) \simeq Ext_S^k(S \otimes_R C, A);$$

4. *Sejam A um R-módulo à esquerda e C um S-módulo à esquerda. Se S é projetivo como R-módulo (via γ), então para cada $k \geq 0$ existe um isomorfismo natural:*

$$Ext_R^k(C, A) \simeq Ext_S^k(C, Hom_R(S, A)).$$

Demonstração. Ver Bieri [5]. □

Finalmente podemos enunciar a *fórmula de Künneth.*

Teorema 1.7.20 (Fórmula de Künneth)**.** *Suponha que R seja um anel com a seguinte condição:*

- *Se P é R-módulo projetivo e $Q \subseteq P$ é um R-submódulo de P, então Q também é um R-módulo projetivo.*

Sejam $\mathscr{A}$ um complexo de R-módulos à direita projetivos e $\mathscr{C}$ um complexo de R-módulos à esquerda. Então para todo $n \geq 0$ existe uma sequência exata de $\mathbb{Z}$-módulos:

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(\mathscr{A}) \otimes_R H_q(\mathscr{C}) \to H_n(\mathscr{A} \otimes \mathscr{C}) \to \bigoplus_{p+q=n-1} Tor_1^R(H_p(\mathscr{A}), H_q(\mathscr{C})) \to 0.$$

Demonstração. Ver [18], corolário 10.82. □

1.8 Cohomologia de grupos e sequências espectrais

Conhecendo bem os funtores Tor e Ext, assim como suas principais propriedades, estamos preparados para estudar a chamada *cohomologia de grupos*. Este é o nome dado ao conjunto de técnicas de homologia aplicadas ao estudo de grupos.

Sejam G um grupo e R um anel comutativo. Seja RG o R-módulo livre com base G. Os elementos de RG são somas formais finitas de elementos de G com coeficientes em R, isto é, elementos do tipo:

$$\sum_{g \in G} r_g g,$$

com $r_g \in R$ para todo $g \in G$ e tal que $r_g \neq 0$ apenas para um subconjunto finito de G. Além disso, a soma é feita da seguinte forma:

$$\sum_{g \in G} r_g g + \sum_{g \in G} s_g g = \sum_{g \in G} (r_g + s_g) g.$$

Agora a estrutura multiplicativa de G nos permite definir uma multiplicação em RG:

$$(\sum_{g \in G} r_g g)(\sum_{g \in G} s_g g) = \sum_{g,h \in G} (r_g s_h) gh.$$

É claro que RG com a soma e a multiplicação definidas acima é um anel, o qual denominamos **anel de grupo** de G sobre R. O interesse por tal definição reside no fato que o anel RG nos dá uma conexão entre a álgebra homológica e a teoria de grupos: para obter informações sobre o grupo G, estudamos os Ext e Tor com módulos sobre o anel RG.

Comecemos pelo RG-módulo mais simples possível: R é RG-módulo com ação (à direita) trivial:

$$s \cdot (\sum_{g \in G} r_g g) = \sum_{g \in G} s r_g \in R,$$

para quaisquer $s \in R$ e $\sum_g r_g g \in RG$. Dizemos neste caso que R é um RG-**módulo trivial**.

Definição 1.8.1. Sejam G um grupo e R um anel comutativo. A aplicação $\epsilon : RG \to R$ definida por $\epsilon(\sum_g r_g g) = \sum_g r_g$ é um homomorfismo de anéis e é denominada **aplicação de aumento**. Seu núcleo é denotado por $Aug(\epsilon)$ e denominado **ideal de aumento de** $\boldsymbol{RG}$.

Observe que, vendo R como RG-módulo trivial, ϵ é também um homomorfismo de RG-módulos.

Definição 1.8.2. Sejam G um grupo e A um RG-módulo. Considere R como RG-módulo trivial. A n-ésima **cohomologia** de G sobre R com coeficientes em A é:

$$H^n(G; A) = Ext^n_{RG}(R, A).$$

Analogamente, a n-ésima **homologia** de G sobre R com coeficientes em A é:

$$H_n(G; A) = Tor^{RG}_n(R, A).$$

Quando não fizermos referência ao anel sobre o qual a homologia (ou a cohomologia) é tomada, estaremos falando de $R = \mathbb{Z}$, que é a situação de maior interesse.

Para valores pequenos de n, a homologia de um grupo com coeficientes no próprio módulo trivial tem interpretações simples:

Proposição 1.8.3. *Seja G um grupo. Então $H_0(G; R) \simeq R$ e $H_1(G; R) \simeq R \otimes G/[G, G]$. Em particular, $H_1(G; \mathbb{Z})$ é a abelianização de G.*

O lema a seguir relaciona as (co)homologias de grupos com subgrupos de índice finito.

Lema 1.8.4 (Shapiro)**.** *Sejam G um grupo e $N \leq G$ um subgrupo de índice finito. Para cada RN-módulo A, temos:*

$$H_k(N; A) \simeq H_k(G; RG \otimes_{RN} A)$$

e

$$H^k(N; A) \simeq H^k(G; Hom_{RN}(RG, A))$$

para todo $k \geq 0$.

Demonstração. Aplique o teorema 1.7.19. □

A menos das dimensões baixas (como no lema 1.8.3), as homologias de um grupo são difíceis de se calcular. Existe, no entanto, uma ferramenta que pode ser vista como um método de aproximações sucessivas para certas homologias; são as chamadas *sequências espectrais.* Na sequência faremos um tratamento breve de tal ferramental, como foco na chamada *sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre.*

Definição 1.8.5. Um **módulo graduado** é uma sequência $H = \{H_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de R-módulos. Um **submódulo graduado** T de H é um módulo graduado tal que T_n é submódulo de H_n para todo n.

Um **módulo bigraduado** $\mathscr{M}$ é uma família $\{M_{p,q}\}_{p,q}$ de R-módulos indexados por $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Um **homomorfismo** $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ de módulos bigraduados é uma família $\{f_{p,q} : M_{p,q} \to N_{p+a,q+b}\}$ de homomorfismos de R-módulos para um par $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fixo, que denominamos **bigrau** de f.

As noções de *submódulo*, *quociente*, *imagem* e *núcleo* de um homomorfismo se estendem naturalmente para o contexto de módulos bigraduados:

- $\mathscr{N}$ é **submódulo bigraduado** de $\mathscr{M}$ se $N_{p,q}$ é submódulo de $M_{p,q}$ para todo $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
- O **quociente** $\mathscr{M}/\mathscr{N}$ é o módulo bigraduado $\mathscr{W}$, onde $W_{p,q} = M_{p,q}/N_{p,q}$;
- A **imagem** de um homomorfismo $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ é um módulo bigraduado $Im(f)$, onde $(Im(f))_{p,q} = Im(f_{p-a,q-b})$ e (a,b) é o bigrau de f. É claro que $Im(f)$ é submódulo bigraduado de $\mathscr{N}$;
- O **núcleo** de um homomorfismo $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ é um módulo bigraduado $ker(f)$ tal que $(ker(f))_{p,q} = ker(f_{p,q})$. Novamente, $ker(f)$ é submódulo graduado de $\mathscr{M}$.

É claro que vale o teorema do isomorfismo: se $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ é um homomorfismo de módulos bigraduados, então $Im(f) \simeq \mathscr{M}/ker(f)$. Além disso, a noção de sequência exata também existe: $\mathscr{M} \xrightarrow{f} \mathscr{N} \xrightarrow{g} \mathscr{K}$ é exata em $\mathscr{N}$ se $Im(f) = ker(g)$.

Definição 1.8.6. Um **módulo bigraduado diferencial** é um par $(\mathscr{M}, d)$, onde $\mathscr{M}$ é um módulo bigraduado e $d : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ é um homomorfismo de módulos bigraduados tal que $d \circ d = 0$. A **homologia** de $(\mathscr{M}, d)$ é o módulo bigraduado definido por:

$$H_{p,q}((\mathscr{M}, d)) = \frac{ker(d_{p,q})}{Im(d_{p-a,q-b})},$$

onde (a,b) é o bigrau de d.

Definição 1.8.7. Uma **filtração** $\{\phi^p(H)\}$ de um R-módulo graduado H é uma sequência crescente de submódulos graduados de H:

$$... \subseteq \phi^{p-1}(H) \subseteq \phi^p(H) \subseteq \phi^{p+1}(H) \subseteq \phi^{p+2}(H) \subseteq ...$$

Dizemos que a filtração $\{\phi^p(H)\}$ de H é **limitada** se existem inteiros s e t tais que $\phi^s(H) = 0$ e $\phi^t(H) = H$.

Definição 1.8.8. Uma **sequência espectral** é uma sequência $\{E^r, d^r\}_{r \geq 1}$ de módulos bigraduados diferenciais tal que E^{r+1} é a homologia de (E^r, d^r) para todo $r \geq 1$.

Seja $\{E^r, d^r\}_{r \geq 1}$ uma sequência espectral. Denote os módulos $ker(d^r_{p,q})$ e $Im(d^r_{p-a,q-b})$ por $Z^r_{p,q}$ e $B^r_{p,q}$, respectivamente, para cada $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $r \geq 1$. Nessa notação, $E^{r+1}_{p,q} = Z^r_{p,q}/B^r_{p,q}$.

Foquemos primeiramente no índice $r = 1$. Temos que $E^2_{p,q} = Z^1_{p,q}/B^1_{p,q}$ e $B^1_{p,q}$ e $Z^1_{p,q}$ são submódulos de $E^1_{p,q}$ satisfazendo:

$$0 \subseteq B^1_{p,q} \subseteq Z^1_{p,q} \subseteq E^1_{p,q}.$$

Aplicando o mesmo raciocínio com $r = 2$, temos:

$$0 \subseteq B^2_{p,q} \subseteq Z^2_{p,q} \subseteq E^2_{p,q}.$$

Mas $E^2_{p,q}$ é o quociente $Z^1_{p,q}/B^1_{p,q}$, logo $B^2_{p,q}$ e $Z^2_{p,q}$ correspondem a submódulos de $Z^1_{p,q}$ contendo $B^1_{p,q}$, de modo que podemos escrever:

$$0 \subseteq B^1_{p,q} \subseteq B^2_{p,q} \subseteq Z^2_{p,q} \subseteq Z^1_{p,q} \subseteq E^1_{p,q}.$$

Iterando tal raciocínio, temos:

$$0 \subseteq B^1_{p,q} \subseteq B^2_{p,q} \subseteq B^3_{p,q} \subseteq ... \subseteq Z^3_{p,q} \subseteq Z^2_{p,q} \subseteq Z^1_{p,q} \subseteq E^1_{p,q}.$$

Assim, faz sentido definir os chamados **termos limites** da sequência espectral $\{E^r, d^r\}_{r\geq 1}$: $B^\infty_{p,q} := \cup_n B^n_{p,q}$, $Z^\infty_{p,q} := \cap_n Z^n_{p,q}$ e $E^\infty_{p,q} := Z^\infty_{p,q}/B^\infty_{p,q}$.

Definição 1.8.9. Seja $\{E^r, d^r\}_{r\geq 1}$ uma sequência espectral. Dizemos que tal sequência **converge** ao módulo graduado $H = \{H_n\}_n$ se existe uma filtração limitada $\{\phi^p(H)\}$ de H tal que:

$$E^\infty_{p,q} \simeq \frac{\phi^p(H_{p+q})}{\phi^{p-1}(H_{p+q})}$$

para todo $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Em geral, escrevemos $n = p + q$ e a propriedade acima fica: $E^\infty_{p,q} \simeq \frac{\phi^p(H_n)}{\phi^{p-1}(H_n)}$. Denotamos ainda $E^2_{p,q} \underset{p}{\Rightarrow} H_n$ para indicar que $\{E^r, d^r\}_{r\geq 1}$ converge a H.

A única sequência espectral que utilizaremos aqui é a sequência de Lyndon-Hochschild-Serre, que trata da homologia de grupos e seus quocientes:

Teorema 1.8.10 (Lyndon-Hochschild-Serre)**.** *Sejam G um grupo, $N \lhd G$ um subgrupo normal e A um $\mathbb{Z}G$-módulo. Então:*

1. *(Versão homológica) Existe uma sequência espectral*

$$E^2_{p,q} = H_p(G/N; H_q(N; A)) \underset{p}{\Rightarrow} H_n(G; A)\ ;$$

2. *(Versão cohomológica) Existe uma sequência espectral*

$$E_2^{p,q} = H^p(G/N; H^q(N; A)) \underset{p}{\Rightarrow} H^n(G; A)\ .$$

Observe que a mudança na posição dos índices do termo geral da sequência espectral do item 2 é mais uma vez apenas uma convenção, como em geral fazemos na mudança de teorias de homologia para teorias de cohomologia.

O teorema 1.8.10 será utilizado futuramente para obter informações sobre a *propriedade* FP_m de grupos e seus quocientes, assunto tratado no próximo capítulo.

Capítulo 2

Propriedades Homológicas de Grupos

Nosso propósito agora é aplicar os conceitos de álgebra homológica ao estudo de grupos. A conexão entre estas duas áreas é feita por meio da cohomologia de grupos, em particular com o conceito de anel de grupo, como na seção 1.8. As referências principais para este capítulo são os livros de R. Bieri [5] e de K. S. Brown [8].

2.1 Módulos de tipo FP_m

Fixamos um anel associativo R, com $1_R \neq 0$. No que segue trabalharemos com R-módulos à esquerda, salvo menção contrária.

Lembramos que um R-módulo A é **finitamente gerado** se existe um R-módulo livre F com base $X \subseteq F$ finita e um homomorfismo sobrejetivo de R-módulos $\alpha : F \twoheadrightarrow A$. Se $ker(\alpha)$ também for finitamente gerado, dizemos que A é **finitamente apresentável**. Estas propriedades generalizam a noção de um módulo "ser finito", pois qualquer módulo finito é finitamente gerado e finitamente apresentável. A seguir definimos as *propriedades* FP_m, que seguem na mesma linha e generalizam ainda mais os conceitos acima.

Definição 2.1.1. Sejam A um R-módulo e $m \geq 0$ um inteiro. Dizemos que A é **de tipo** FP_m se existe uma resolução projetiva $\mathscr{P}$ de A:

$$\mathscr{P} : ... \to P_i \to P_{i-1} \to ... \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

com P_i finitamente gerado para todo $0 \leq i \leq m$. Se A é de tipo FP_m para todo $m \geq 0$, dizemos que A é **de tipo** FP_∞.

Observe que qualquer módulo de tipo FP_m é também de tipo FP_k para qualquer $k \leq m$. Antes de estabelecer qualquer propriedade de módulos de tipo FP_m, mostremos que podemos sempre trabalhar com resoluções livres, o que pode se mostrar bastante útil.

Lema 2.1.2. *Sejam A um R-módulo e $m \geq 0$ um inteiro. Se A de tipo FP_m, então existe uma resolução livre $\mathscr{F}$ de A com F_i finitamente gerado para todo $0 \leq i \leq m$.*

Demonstração. Seja $\mathscr{P}$ uma resolução projetiva de A com P_i finitamente gerado para todo $0 \leq i \leq m$ e denote por d_j os diferenciais de $\mathscr{P}$. Como P_0 é finitamente gerado, existe um R-módulo livre finitamente gerado F_0 e um epimorfismo $\alpha : F_0 \twoheadrightarrow P_0$. Segue que $F_0 \simeq ker(\alpha) \oplus P_0$. Note que $ker(\alpha)$ é projetivo, pois é somando direto de F_0, e é finitamente gerado, pois é quociente de F_0. Reescrevemos então:

$$\mathscr{P}' : \; ... \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2} ker(\alpha) \oplus P_1 \xrightarrow{\partial_1} ker(\alpha) \oplus P_0 \xrightarrow{\partial_0} A \longrightarrow 0,$$

onde $\partial_0 = 0 \oplus d_0$, $\partial_1 = id_{ker(\alpha)} \oplus d_1$ e $\partial_j = d_j$ para todo $j > 1$. Desta forma, $\mathscr{P}'$ é exato por construção. Mais do que isso, $\mathscr{P}'$ ainda é resolução projetiva, pois $ker(\alpha) \oplus P_0$ é livre e $ker(\alpha) \oplus P_1$ é soma direta de módulos projetivos, logo é projetivo também.

Note agora que $\mathscr{P}'$ é livre e finitamente gerada em dimensão 0 e continua sendo finitamente gerada em dimensão entre 1 e m, pois $ker(\alpha)$ e P_i o são para todo $1 \leq i \leq m$.

Se $m = 0$, o resultado está demonstrado. Se $m > 0$, podemos refazer o processo acima em dimensão 1, e assim por diante. Note que tal construção não modifica os módulos em dimensão menor, podendo então ser iterado até obtermos uma resolução livre e finitamente gerada em dimensão menor ou igual a m. Bastará então completar para uma resolução livre de A, que já sabemos que pode ser feito. □

Vejamos agora que as propriedades FP_m de fato generalizam "ser finitamente gerado" e "ser finitamente apresentável" para R-módulos.

Lema 2.1.3. *Seja A um R-módulo. Então A é de tipo FP_0 se e somente se A é finitamente gerado.*

Demonstração. Suponha que A seja de tipo FP_0. Pelo lema 2.1.2, existe uma resolução livre $\mathscr{F}$ de A com F_0 finitamente gerado. Mas então $d_0 : F_0 \twoheadrightarrow A$ é sobrejetivo, donde A é finitamente gerado.

Reciprocamente, se A é finitamente gerado, existe um R-módulo livre finitamente gerado F e um epimorfismo $d_0 : F \twoheadrightarrow A$. Basta então seguir a construção seguinte à definição 1.5.7 para construir uma resolução livre (e portanto projetiva) de A que começa com F, donde A é de tipo FP_0. □

Lema 2.1.4. *Seja A um R-módulo. Então A é de tipo FP_1 se e somente se for finitamente apresentável.*

Demonstração. Suponha que A seja de tipo FP_1. Pelo lema 2.1.2, existe uma resolução livre $\mathscr{F}$ de A com F_0 e F_1 finitamente gerados. Mas então $d_1 : F_1 \twoheadrightarrow Im(d_1) = ker(d_0)$ é sobrejetivo, logo $ker(d_0)$ é finitamente gerado, isto é, A é finitamente apresentável.

Reciprocamente, se A é finitamente apresentável, existem um R-módulo livre finitamente gerado F e um epimorfismo $d_0 : F \to A$ tal que $ker(d_0)$ também é finitamente gerado. Tomando F_1 livre e finitamente gerado, com epimorfismo $d_1 : F_1 \to ker(d_0)$, podemos construir uma resolução livre $\mathscr{F}$ de A, começando por F_0 e F_1 (finitamente gerados). Então A é de tipo FP_1. $\square$

A propriedade mais interessante de módulos de tipo FP_m é o seu comportamento com respeito aos funtores Tor, Ext, limite direto e limite inverso, o que será explorado a seguir.

Sejam A um R-módulo e (M_i, φ^i_j) um sistema direto de R-módulos sobre um conjunto de índices I. Para cada $i \in I$ existe um homomorfismo $\alpha_i : M_i \to \varinjlim M_i$ tal que $\alpha_i = \alpha_j \circ \varphi^i_j$ para todo $i \leq j$, pela definição do limite direto. Aplicando $Ext^k_R(A, -)$, obtemos homomorfismos $(\alpha_i)_* : Ext^k_R(A, M_i) \to Ext^k_R(A, \varinjlim M_i)$ para cada $i \in I$ e $k \geq 0$. Por fim, pela propriedade universal do limite direto, existe um único homomorfismo

$$\sigma : \varinjlim(Ext^k_R(A, M_i)) \to Ext^k_R(A, \varinjlim M_i)$$

tal que $\sigma \circ \tau_i = (\alpha_i)_*$ para todo $i \in I$, sendo $\tau_i : Ext^k_R(A, M_i) \to \varinjlim Ext^k_R(A, M_i)$ o homomorfismo dado pela definição de limite direto. Pela unicidade dos homomorfismos obtidos, σ é um homomorfismo *natural* em A. O diagrama comutativo obtido é o seguir:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim(Ext^k_R(A, M_i)) \arrow[rr, "\exists ! \sigma"] & & Ext^k_R(A, \varinjlim M_i) \\
& Ext^k_R(A, M_i) \arrow[ul, "\tau_i"'] \arrow[ur, "(\alpha_i)_*"] \arrow[d, "(\varphi^i_j)_*"] & \\
& Ext^k_R(A, M_j) \arrow[uul, bend left, "\tau_j"] \arrow[uur, bend right, "(\alpha_j)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

De maneira semelhante, se (M_i, ψ^j_i) é um sistema inverso do R-módulos sobre I, podemos obter um homomorfismo natural

$$\theta : Tor^R_k(\varprojlim M_i, A) \to \varprojlim(Tor^R_k(M_i, A))$$

aplicando as propriedades do limite inverso.

Proposição 2.1.5. *Sejam m um inteiro não negativo e A um R-módulo de tipo FP_m. Sejam ainda I e J conjuntos de índices parcialmente ordenados sobre os quais $\varinjlim$ e $\varprojlim$,* *respectivamente, são funtores exatos. Então:*

1. *Se $(M_j)_{j\in J}$ é um sistema inverso, então o homomorfismo natural*

$$\theta : Tor_k^R(\varprojlim M_j, A) \to \varprojlim(Tor_k^R(M_j, A))$$

   é um isomorfismo para todo $k < m$ e é um epimorfismo se $k = m$.

2. *Se $(M_i)_{i\in I}$ é um sistema direto, então o homomorfismo natural*

$$\sigma : \varinjlim(Ext_R^k(A, M_i)) \to Ext_R^k(A, \varinjlim M_i)$$

   é um isomorfismo para todo $k < m$ e é um monomorfismo se $k = m$.

Demonstração. Os itens têm demonstrações análogas; façamos apenas o segundo.

Seja $\mathscr{F}$ uma resolução livre de A com F_k finitamente gerado para todo $k \leq m$. Para cada $k \leq m$, podemos escrever $F_k = \oplus_{j=1}^{n_k} R$, para algum $n_k > 0$. Usando que $\varinjlim$ é um funtor aditivo (portanto comuta com somas diretas finitas) e que $Hom_R(R, M) \simeq M$ para todo R-módulo M, temos o seguinte isomorfismo natural:

$$\varinjlim Hom(\oplus_{j=1}^{n_k} R, M_i) \simeq Hom(\oplus_{j=1}^{n_k} R, \varinjlim M_i),$$

para todo $k \leq m$.

Aplicando os funtores $\varinjlim Hom(-, M_i)$ e $Hom(-, \varinjlim M_i)$ em $\mathscr{F}$, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \varinjlim Hom(F_{k-1}, M_i) \arrow[r, "d^{k-1}"] \arrow[d, "\simeq"'] & \varinjlim Hom(F_k, M_i) \arrow[r, "d^k"] \arrow[d, "\simeq"'] & \varinjlim Hom(F_{k+1}, M_i) \arrow[r] \arrow[d, "\tau"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & Hom(F_{k-1}, \varinjlim M_i) \arrow[r, "\partial^{k-1}"] & Hom(F_k, \varinjlim M_i) \arrow[r, "\partial^k"] & Hom(F_{k+1}, \varinjlim M_i) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Se $k < m$, τ é também isomorfismo. Como $\varinjlim$ é funtor exato, este comuta com a cohomologia, logo a k-ésima cohomologia do complexo da primeira linha acima é exatamente $\varinjlim Ext_R^k(A, M_i)$, enquanto na segunda linha é $Ext_R^k(A, \varinjlim M_i)$.

A comutatividade do diagrama, junto com os isomorfismos nas verticais, nos dá que a imagem de $ker(d^k)$ ($Im(d^k)$, respectivamente) em $Hom(F_k, \varinjlim M_i)$ é exatamente $ker(\partial^k)$ ($Im(\partial^k)$, respectivamente) para todo $k < m$, logo os complexos têm a mesma cohomologia em dimensão menor que m, isto é, $\sigma : \varinjlim(Ext_R^k(A, M_i)) \to Ext_R^k(A, \varinjlim M_i)$ é isomorfismo para $k < m$.

No caso em que $k = m$, a imagem de $ker(d^m)$ ainda está contida em $ker(\partial^m)$, mas não é necessariamente igual. Então só podemos garantir que o homomorfismo $\sigma : \varinjlim(Ext_R^m(A, M_i)) \to Ext_R^m(A, \varinjlim M_i)$ é injetivo. □

Quando o homomorfismo θ acima é um isomorfismo para algum inteiro k, dizemos que o funtor $Tor_k^R(-,A)$ **comuta com limites inversos** (exatos), e, analogamente, $Ext_R^k(A,-)$ **comuta com limites diretos** (exatos) se σ é isomorfismo. Observe que exigimos especificamente que os homomorfismos naturais θ ou σ sejam isomorfismos, e não que exista qualquer isomorfismo de $Tor_k^R(\varprojlim M_j, A)$ em $\varprojlim(Tor_k^R(M_j,A))$ (ou de $\varinjlim(Ext_R^k(A,M_i))$ em $Ext_R^k(A,\varinjlim M_i)$).

Veremos que, na verdade, os módulos de tipo FP_m são *exatamente* aqueles para os quais os funtores Tor e Ext como acima comutam com limites inversos e diretos, respectivamente.

Teorema 2.1.6. *Sejam A um R-módulo e $m \geq 0$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *A é de tipo FP_m;*

2. *Se J é um conjunto de índices parcialmente ordenado sobre o qual $\varprojlim$ é um funtor exato e se $(M_j)_{j\in J}$ é um sistema inverso, então o homomorfismo natural*

$$Tor_k^R(\varprojlim M_j, A) \to \varprojlim(Tor_k^R(M_j,A))$$

   é um isomorfismo para todo $k < m$ e é um epimorfismo se $k = m$;

3. *Se I é um conjunto de índices parcialmente ordenado sobre o qual $\varinjlim$ é um funtor exato e se $(M_i)_{i\in I}$ é um sistema direto, então o homomorfismo natural*

$$\varinjlim(Ext_R^k(A,M_i)) \to Ext_R^k(A,\varinjlim M_i)$$

   é um isomorfismo para todo $k < m$ e é um monomorfismo se $k = m$;

4. *Para qualquer produto direto $\prod_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ de cópias de R, o homomorfismo natural*

$$Tor_k^R(\prod_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda, A) \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Tor_k^R(R_\lambda, A)$$

   é um isomorfismo para todo $k < m$ e um epimorfismo se $k = m$;

5. *Se I é um conjunto direcionado e se (M_i) é um sistema direto tal que $\varinjlim M_i = \{0\}$, então $\varinjlim Ext_R^k(A,M_i) = \{0\}$, para todo $k \leq m$.*

Demonstração. Pela proposição anterior, valem as implicações (1) $\Rightarrow$ (2) e (1) $\Rightarrow$ (3). Além disso, é claro que (4) e (5) são casos particulares de (2) e (3), respectivamente. Basta então mostrar que (4) $\Rightarrow$ (1) e (5) $\Rightarrow$ (1).

Suponha que (4) seja verdadeira. Façamos por indução em m. Considere o produto $\prod_{a\in A} R_a$, onde $R_a \simeq R$ para todo $a \in A$. Por hipótese, a aplicação natural

$$\mu : (\prod_a R_a) \otimes A \to \prod_a A$$

é um epimorfismo. Em particular, existe $c \in (\prod_a R_a) \otimes A$ tal que $\mu(c) = (a)_{a\in A}$ (elemento diagonal). Como elemento de $(\prod_a R_a) \otimes A$, c é da forma:

$$c = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_{i,a})_{a\in A} \otimes a_i,$$

com $\lambda_{i,a} \in R$ e $a_i \in A$, para todos i e a. Então:

$$(a)_{a\in A} = \mu(c) = (\sum_{i=1}^{r} \lambda_{i,a} a_i)_{a\in A}.$$

Segue que cada $a \in A$ pode ser escrito como $a = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{i,a} a_i$, e logo A é gerado por $\{a_i | 1 \leq i \leq r\}$. Portanto A é finitamente gerado, isto é, de tipo FP_0.

Suponha agora que $m > 1$ e que a implicação valha para valores menores de m. Pelo caso acima, já sabemos que A é finitamente gerado. Tome uma sequência exata curta do tipo:

$$0 \to K \to F \to A \to 0 \tag{2.1.1}$$

com F livre e finitamente gerado. Considere a sequência exata longa em $Tor^R_*(\prod R, -)$ relacionada à sequência exata curta acima e as aplicações naturais que tornam o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
Tor^R_k(\prod R, F) & \to & Tor^R_k(\prod R, A) & \to & Tor^R_{k-1}(\prod R, K) & \to & Tor^R_{k-1}(\prod R, F) & \to & Tor^R_{k-1}(\prod R, A) \\
\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\epsilon} \\
\prod Tor^R_k(R, F) & \to & \prod Tor^R_k(R, A) & \to & \prod Tor^R_{k-1}(R, K) & \to & \prod Tor^R_{k-1}(R, F) & \to & \prod Tor^R_{k-1}(R, A)
\end{array}$$

Como F é livre, α e δ são isomorfismos. Ainda, como assumimos (4), β é epimorfismo e ϵ é isomorfismo. Então, pelo lema 1.3.5, γ é isomorfismo se $k < m - 1$ e epimorfismo se $k = m$. Pela hipótese de indução, K é de tipo FP_{m-1}, e portanto A é de tipo FP_m (complete (2.1.1) para uma resolução livre A usando uma resolução livre de K).

Suponha agora que (5) seja verdadeira. Façamos novamente por indução em m.

Seja $\mathscr{A}$ o conjunto de submódulos finitamente gerados de A e para cada $A' \in \mathscr{A}$ denote $A_{A'} = A/A'$. Então $(A_{A'})$ é um sistema direto em $\mathscr{A}$, com os homomorfismos $\varphi^{A'}_{A''} : A_{A'} \to A_{A''}$ óbvios para todo $A' \subseteq A''$. É claro que $\mathscr{A}$ é direcionado, pois o índice $A' + A''$ é uma cota superior para A' e A'' em $\mathscr{A}$, e é fácil ver que $\varinjlim A_{A'} = \{0\}$. Então $\varinjlim Hom_R(A, A_{A'}) = \{0\}$ por hipótese. Em particular, com $A' = \{0\}$, temos que a imagem de $id_A : A \to A/A' = A$ em $\varinjlim Hom_R(A, A_{A'})$ é zero, e pelo lema 1.4.5 existe $A'' \in \mathscr{A}$ tal que $(\varphi^{A'}_{A''})_*(id_A) = 0$. Mas $(\varphi^{A'}_{A''})_*(id_A)$ é a projeção $A \twoheadrightarrow A/A''$, logo $A = A''$, que é finitamente gerado.

Seja agora $m \geq 1$. Pelo parágrafo acima, A é finitamente gerado. Podemos então tomar uma sequência exata curta do tipo:

$$0 \to K \to F \to A \to 0,$$

com F livre e finitamente gerado. Seja (M_i) um sistema direto sobre um conjunto direcionado I, com $\varinjlim M_i = \{0\}$, e considere a sequência exata longa em $Ext_R^*(-, M_i)$ para cada i:

$$... \to Ext_R^k(F, M_i) \to Ext_R^k(K, M_i) \to Ext_R^{k+1}(A, M_i) \to ...$$

Aplicando $\varinjlim$ (que é funtor exato), obtemos mais uma sequência exata longa:

$$... \to \varinjlim Ext_R^k(F, M_i) \to \varinjlim Ext_R^k(K, M_i) \to \varinjlim Ext_R^{k+1}(A, M_i) \to ...$$

Mas o primeiro módulo e o último módulos acima são sempre nulos, pois F é livre finitamente gerado e pela hipótese sobre A, logo $\varinjlim Ext_R^k(K, M_i) = \{0\}$ para todo $k \leq m - 1$. Pela hipótese de indução, K é de tipo FP_{m-1}, portanto A é de tipo FP_m. $\square$

Aplicando o teorema 2.1.6 para todo inteiro não negativo m, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 2.1.7. *As seguintes condições são equivalentes para um R-módulo A:*

1. *A é de tipo FP_∞;*

2. *Se I é um conjunto de índices parcialmente ordenado sobre o qual $\varprojlim$ é um funtor exato, então o funtor $Tor_k^R(-, A)$ comuta com limites inversos sobre I;*

3. *Se I é um conjunto de índices parcialmente ordenado sobre o qual $\varinjlim$ é um funtor exato, então o funtor $Ext_R^k(A, -)$ comuta com limites diretos sobre I;*

4. *$Tor_k^R(\prod_\Lambda R, A) = \{0\}$ para todo $k \geq 1$ e a aplicação natural $\mu : (\prod_\Lambda R) \otimes A \to \prod_\Lambda A$ é um isomorfismo para qualquer conjunto de índices Λ;*

5. *Se I é um conjunto direcionado e $\{M_i\}_{i \in I}$ um sistema direto tal que $\varinjlim M_i = \{0\}$, então $\varinjlim Ext_R^k(A, M_i) = \{0\}$ para todo $k \geq 0$.*

Os últimos resultados são interessantes porque caracterizam completamente os módulos de tipo FP_m por Tor e Ext, que têm boas propriedades (funtoriais). Em particular, existem as sequências longas exatas em Tor e Ext para cada sequência exata curta de módulos. Com elas poderemos obter critérios mais aplicáveis para decidir se um módulo tem tipo FP_m, desde que conheçamos melhor outros módulos que se encaixem numa sequência exata curta com o primeiro. As proposições 2.1.8 e 2.1.10 e o lema 2.1.11 são resultados seguindo essa linha de raciocínio.

Proposição 2.1.8. *Seja* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *uma sequência exata curta de* R*-módulos. Então:*

1. *Se* A' *é de tipo* FP_{m-1} *e* A *é de tipo* FP_m*, então* A'' *é de tipo* FP_m*.*

2. *Se* A *é de tipo* FP_{m-1} *e* A'' *é de tipo* FP_m*, então* A' *é de tipo* FP_{m-1}*.*

3. *Se* A' *e* A'' *são de tipo* FP_m*, então* A *é de tipo* FP_m*.*

Demonstração. Os três itens são aplicações semelhantes do teorema anterior e da sequência longa exata em Ext (ou Tor). Façamos apenas o item (1).

Se A é de tipo FP_0, isto é, finitamente gerado, é claro que A'' é também finitamente gerado, pois é um quociente de A.

Suponha que $m \geq 1$ e seja $\{M_i\}_i$ um sistema direto sobre o conjunto direcionado I tal que $\varinjlim M_i = \{0\}$. Para cada $i \in I$ e $1 \leq k \leq m$, consideremos o seguinte trecho da sequência exata em Ext:

$$... \to Ext_R^{k-1}(A', M_i) \to Ext_R^k(A'', M_i) \to Ext_R^k(A, M_i) \to ...$$

Como I é direcionado, $\varinjlim$ é funtor exato. Aplicando-o nas sequências acima, obtemos o seguinte trecho de sequência exata:

$$\varinjlim Ext_R^{k-1}(A', M_i) \to \varinjlim Ext_R^k(A'', M_i) \to \varinjlim Ext_R^k(A, M_i)$$

Pelo teorema 2.1.6, o primeiro e o terceiro módulos da sequência acima são nulos, pois A' e A são de tipo FP_{m-1} e FP_m, respectivamente. Segue que $\varinjlim Ext_R^k(A'', M_i) = \{0\}$ para todo $1 \leq k \leq m$. Se $k = 0$, o trecho da sequência exata é na verdade o seu início:

$$0 \to \varinjlim Ext_R^0(A'', M_i) \to \varinjlim Ext_R^0(A, M_i).$$

Como A é R-módulo de tipo FP_m, temos também que $\varinjlim Ext_R^0(A, M_i) = \{0\}$, e portanto $\varinjlim Ext_R^0(A'', M_i) = \{0\}$. Então, novamente pelo teorema 2.1.6, A'' é de tipo FP_m. $\square$

Exemplo 2.1.9. Seja P um R-módulo projetivo finitamente gerado. Considere a seguinte sequência exata:

$$... \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P \xrightarrow{id_P} P \longrightarrow 0$$

Esta é uma resolução projetiva de P com todos os módulos finitamente gerados. Segue que P é de tipo FP_∞.

A próxima proposição garante que, dado o início de uma resolução projetiva de um módulo de tipo FP_m, com módulos finitamente gerados, podemos completá-la para uma resolução projetiva finitamente gerada até dimensão m.

Proposição 2.1.10. *Seja A um R-módulo de tipo FP_m. Suponha que exista uma sequência exata da forma:*

$$P_{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} P_{m-2} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0,$$

com cada P_i projetivo e finitamente gerado. Então $ker(d_{m-1})$ também é finitamente gerado.

Demonstração. Mostraremos por indução em r que se A é de tipo FP_m e $0 \leq r \leq m-1$, então $ker(d_r)$ é de tipo FP_{m-r-1}.

Se $r = 0$, basta considerar a seguinte sequência exata curta:

$$0 \to ker(d_0) \to P_0 \to A \to 0.$$

Como A é de tipo FP_m e P_0 é projetivo e finitamente gerado (portanto de tipo FP_∞), segue da proposição 2.1.8 que $ker(d_0)$ é de tipo FP_{m-1}.

Suponha agora que $r > 1$ e que $ker(d_{r-1})$ seja de tipo FP_{m-r}. Note que a seguinte sequência é exata:

$$0 \to ker(d_r) \to P_r \to Im(d_r) = ker(d_{r-1}) \to 0.$$

Como P_r é projetivo e finitamente gerado (portanto de tipo FP_∞), segue da proposição 2.1.8 que $ker(d_r)$ é de tipo FP_{m-r-1}, como queríamos. □

Lema 2.1.11. *Seja*

$$\mathscr{Q} : \ldots \to Q_i \to Q_{i-1} \to \ldots \to Q_0 \to V \to 0$$

um complexo de R-módulos.

1. *Se $\mathscr{Q}$ é exato e Q_i é de tipo FP_{m-i} para todo $i \leq m$, então V é de tipo FP_m.*
2. *Se $0 \leq k \leq m$, Q_i é de tipo FP_{m-i} para todo $i < k$ e V é de tipo FP_m, então $Im(Q_k \to Q_{k-1})$ é de tipo FP_{m-k}.*
3. *Se Q_i é de tipo FP_{m-i} para todo $0 \leq i \leq m$ e $H_i(\mathscr{Q})$ de tipo FP_{m-i-1} para todo $0 \leq i \leq m-1$, então V é de tipo FP_m.*

Demonstração. Este lema pode ser encontrado em [3] (lemas 2.2, 2.3 e 2.4), e todos os itens podem ser demonstrados desmembrando o complexo $\mathscr{Q}$ nas sequências exatas curtas

$$0 \to ker(d_j) \to Q_j \to Im(d_j) \to 0$$

para $0 \leq j \leq m$ e aplicando o lema 2.1.8. Façamos apenas o item 1.

Suponha então que $\mathscr{Q}$ seja exato e que Q_i seja de tipo FP_{m-i} para todo $i \leq m$. Considere a seguinte sequência exata:

$$0 \to ker(d_m) \to Q_m \to Im(d_m) \to 0.$$

Por hipótese Q_m é de tipo FP_0, e logo $Im(d_m)$ também é, pelo lema 2.1.8. Como $\mathscr{Q}$ é exato, temos que $Im(d_m) = ker(d_{m-1})$, donde $ker(d_{m-1})$ é de tipo FP_0. Agora assuma indutivamente que $ker(d_{m-j})$ é de tipo FP_{j-1} para $1 \leq j < m$ e considere a sequência exata curta dada por:

$$0 \to ker(d_{m-j}) \to Q_{m-j} \to ker(d_{m-(j+1)}) \to 0.$$

Como Q_{m-j} é de tipo FP_j por hipótese, temos mais uma vez pelo lema 2.1.8 que $ker(d_{m-(j+1)})$ é de tipo FP_j. Por indução finita, $ker(d_0)$ é de tipo FP_{m-1}. Finalmente, como

$$0 \to ker(d_0) \to Q_0 \to V \to 0$$

é exata e Q_0 é de tipo FP_m, o lema 2.1.8 garante que V é de tipo FP_m. □

Até agora só vimos resultados que comparam o tipo FP_m de módulos sobre um mesmo anel, considerando as construções de sequências exatas, limites diretos e inversos. Vejamos o que pode ser dito quando comparamos módulos sobre anéis diferentes, no contexto de extensão de escalares.

Lema 2.1.12. *Sejam R e S anéis, com $S \subseteq R$, e M um S-módulo à esquerda. Suponha que R seja plano como S-módulo e que exista um homomorfismo de S-módulos $\alpha : R \to S$ tal que que $\alpha(s) = s$ para todo $s \in S$. Então:*

$$M \text{ é } S\text{-módulo de tipo } FP_m \Leftrightarrow R \otimes_S M \text{ é } R\text{-módulo de tipo } FP_m.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja:

$$\mathscr{F} : ... \to F_i \to F_{i-1} \to ... \to F_0 \to M \to 0$$

uma resolução livre de M como S-módulo, com F_i finitamente gerado para todo $i \leq m$. Como R é S-módulo plano, o funtor $R \otimes_S -$ é exato, logo o complexo a seguir também é exato:

$$\mathscr{P} : ... \to R \otimes_S F_i \to R \otimes_S F_{i-1} \to ... \to R \otimes_S F_0 \to R \otimes_S M \to 0 \tag{2.1.2}$$

Em geral, se $F = \oplus_j S$ é um S-módulo livre, então

$$R \otimes_S F = R \otimes_S (\oplus_j S) \simeq \oplus_j (R \otimes_S S) \simeq \oplus_j R,$$

portanto $R \otimes_S F$ é também livre como R-módulo. Fica claro também pelo raciocínio acima que $R \otimes_S F$ é R-módulo finitamente gerado se F o for como S-módulo. Então (2.1.2) é resolução livre de $R \otimes_S M$ como R-módulo e tal que os módulos são finitamente gerados até em dimensão m, donde $R \otimes_S M$ é de tipo FP_m.

($\Leftarrow$) Suponha agora que $R \otimes_S M$ seja um R-módulo de tipo FP_m. Mostremos por indução em m que M é de tipo FP_m como S-módulo.

Para tratar o caso $m = 0$, seja $X = \{a_i = \sum_j r_{i,j} \otimes m_{i,j}\}_i$ um conjunto gerador finito de $R \otimes_S M$. Seja $M_0 \subseteq M$ o S-submódulo de M gerado por $Y = \{m_{i,j}\}_{i,j}$. Como X é finito, é claro que Y também é. Considere então a sequência exata de S-módulos dada por:

$$0 \to M_0 \to M \to \frac{M}{M_0} \to 0$$

Como $R \otimes_S -$ é exato, a seguinte sequência também é exata:

$$0 \to R \otimes_S M_0 \to R \otimes_S M \to R \otimes_S \frac{M}{M_0} \to 0$$

Pela escolha do conjunto Y, o homomorfismo $R \otimes_S M_0 \to R \otimes_S M$ é sobrejetivo, e logo $R \otimes_S \frac{M}{M_0} = 0$.

Mostremos agora que se A é um S-módulo à esquerda e $R \otimes_S A = 0$, então $A = 0$. O homomorfismo de S-módulos $\alpha : R \to S$ induz um homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\alpha_* : R \otimes_S A \to S \otimes_S A$ definido por $\alpha_*(r \otimes a) = \alpha(r) \otimes a$ para quaisquer $r \in R$ e $a \in A$. Agora $S \otimes_S A$ e A são canonicamente isomorfos via $\sigma : S \otimes_S A \to A$, $\sigma(s \otimes a) = s \cdot a$ para quaisquer $s \in S$ e $a \in A$. Mas então se $a \in A$, temos que $a = \sigma \circ \alpha_*(1_S \otimes a) = \sigma \circ \alpha_*(0) = 0$, pois $1_S \otimes a \in R \otimes_S A = 0$. Portanto $A = 0$.

Assim, de $R \otimes_S \frac{M}{M_0} = 0$ obtemos que $\frac{M}{M_0} = 0$, donde $M = M_0$, que é finitamente gerado, isto é, de tipo FP_0.

Suponha agora que $m > 0$ e que M seja de tipo FP_{m-1}. Seja $(\mathscr{F}, d)$ uma resolução livre de M com módulos finitamente gerados até em dimensão $m - 1$. De $\mathscr{F}$ obtemos o seguinte complexo:

$$\mathscr{F}' : 0 \to A = ker(d_{m-1}) \to F_{m-1} \to F_{m-2} \to ... \to F_0 \to M \to 0$$

Novamente, aplicamos $R \otimes_S -$ e obtemos um complexo exato:

$$R \otimes_S \mathscr{F}' : 0 \to R \otimes_S A \to R \otimes_S F_{m-1} \to ... \to R \otimes_S F_0 \to R \otimes_S M \to 0.$$

É claro pelo mesmo argumento utilizado acima que $R \otimes_S F_i$ é livre e finitamente gerado como R-módulo sempre que $i \leq m - 1$. Como $R \otimes_S M$ é de tipo FP_m como R-módulo, segue do lema 2.1.11 parte 2, que $R \otimes_S A$ é finitamente gerado como R-módulo. Pelo caso $m = 0$, segue que A é finitamente gerado como S-módulo, e então o lema 2.1.11

parte 1 aplicado ao complexo $\mathscr{F}'$ conclui o resultado. □

2.2 Grupos de tipo FP_m

Antes de introduzir os grupos de tipo FP_m à discussão, relembremos as noções de teoria de grupos que motivam tal definição. Dizemos que um grupo F é **livre** no conjunto X se existe uma função $i : X \to F$ para a qual vale a seguinte propriedade universal: para qualquer grupo H e qualquer função $f : X \to H$, existe um único homomorfismo de grupos $\varphi : F \to H$ tal que $\varphi \circ i = f$. Isto é ilustrado pelo seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & H \\ F \arrow[ur, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Pode-se mostrar que para cada conjunto X existe um grupo F que é livre em X. Além disso, quaisquer dois grupos livres em um mesmo conjunto são isomorfos, por isso denotamos de uma vez por todas $F(X)$ como o grupo livre em X. Podemos enxergar $F(X)$ como o conjunto de classes de equivalência de palavras com letras em $X \cup X^{-1}$, sendo duas palavras equivalentes se uma pode ser obtida da outra por inclusão ou remoção de um número finito de subpalavras da forma xx^{-1} ou $x^{-1}x$, com $x \in X$. O elemento neutro é a palavra vazia e o produto é a concatenação de palavras. Para mais informações, veja o livro de D. E. Cohen [12].

Um grupo G é dito **finitamente gerado** se existem um conjunto *finito* X e um homomorfismo sobrejetivo $\varphi : F(X) \twoheadrightarrow G$. Diremos que G é **finitamente apresentável** se existem um conjunto X finito e um homomorfismo sobrejetivo $\varphi : F(X) \twoheadrightarrow G$, tal que $ker(\varphi)$ é finitamente gerado como subgrupo normal de $F(X)$, isto é, existe um subconjunto finito $S \subseteq ker(\varphi)$ tal que $ker(\varphi)$ é o menor subgrupo normal de $F(X)$ contendo S.

Fixemos agora um anel *comutativo* R com $1_R \neq 0$, para entrar no contexto que introduzimos na seção sobre cohomologia de grupos (1.8). Nela definimos os conceitos de *anel de grupo* RG, R como RG-módulo trivial e a *aplicação de aumento* $\epsilon : RG \to R$, que são os principais elos entre as noções de teoria de módulos que trabalhamos até agora e a teoria de grupos.

Definição 2.2.1. Sejam G um grupo e m um inteiro não negativo. Dizemos G é **de tipo $\mathbf{FP_m}$ sobre $\mathbf{R}$** se R, como RG-módulo trivial, é de tipo FP_m. Se G for de tipo FP_m sobre R para todo $m \geq 0$, dizemos que G é **de tipo $\mathbf{FP_\infty}$ sobre $\mathbf{R}$**. Diremos simplesmente que G é **de tipo $\mathbf{FP_m}$** se for de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}$.

Mais uma vez, o caso mais interessante é quando $R = \mathbb{Z}$. Uma boa razão para isto é que se um grupo G é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}$, podemos mostrar que G é de tipo

FP_m sobre R para qualquer anel comutativo R, já que $Ext^k_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, -)$ e $Ext^k_{RG}(R, -)$ são naturalmente isomorfos para todo $k \geq 0$. De fato, se

$$\mathscr{P} : ... \to P_i \to P_{i-i} \to ... \to P_1 \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial, então

$$R \otimes \mathscr{P} : ... \to R \otimes P_i \to R \otimes P_{i-i} \to ... \to R \otimes P_1 \to R \otimes P_0 \to R \to 0$$

é uma resolução projetiva de R como RG-módulo trivial. Agora existem ismorfismos naturais

$$\psi_A : Hom_{RG}(R \otimes P_i, A) \to Hom_{\mathbb{Z}G}(P_i, A)$$

para quaisquer RG-módulo à esquerda A e $i \geq 0$, dados por: $\psi_A(f)(p) = f(1_R \otimes p)$, para $f \in Hom_{RG}(R \otimes P_i, A)$ e $p \in P_i$. Calculando $Ext^k_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, -)$ e $Ext^k_{RG}(R, -)$ com as resoluções projetivas $\mathscr{P}$ e $R \otimes \mathscr{P}$, respectivamente, e usando os isomorfismos ψ_A, obtemos o isomorfismo natural anunciado. Por fim, pela caracterização de módulos de tipo FP_m por Ext (teorema 2.1.6), obtemos que se $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}G$, então R é de tipo FP_m sobre RG.

Observe que a recíproca da afirmação acima não pode ser estabelecida por meio de tal isomorfismo, já que começamos inicialmente construindo os isomorfismos ψ_A para um RG-módulo A, que também tem estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo. Um $\mathbb{Z}G$-módulo qualquer não terá, em geral, estrutura de RG-módulo para qualquer anel comutativo R.

Exemplo 2.2.2. Seja G um grupo cíclico infinito. O anel de grupo $\mathbb{Z}G$ é um anel comutativo *noetheriano*, já que pode ser escrito como quociente de um anel de polinômios $\mathbb{Z}[X, Y]$ em duas variáveis (veja [2], por exemplo). Então o ideal de aumento $Aug(\mathbb{Z}G)$ é finitamente gerado. Agora se F_1 é $\mathbb{Z}G$-módulo livre finitamente gerado e se existe um epimorfismo $\alpha : F_1 \twoheadrightarrow Aug(\mathbb{Z}G)$ de $\mathbb{Z}G$-módulos, então $ker(\alpha)$ também é finitamente gerado, pois F_1 é noetheriano como $\mathbb{Z}G$-módulo. Tomando F_2 finitamente gerado e um epimorfismo $\beta : F_2 \to ker(\alpha)$, obtemos o início de uma resolução livre:

$$F_2 \xrightarrow{\beta} F_1 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Novamente $ker(\beta)$ será finitamente gerado, então podemos iterar o processo e obter uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo tal que F_i é finitamente gerado para todo i. Então $G(\simeq \mathbb{Z})$ é grupo de tipo FP_∞.

Exemplo 2.2.3. Um grupo G é dito **políciclico** se existe uma sequência finita

$$\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq ... \subseteq G_{n-1} \subseteq G_n = G$$

de subgrupos de G tal que $G_i \lhd G_{i+1}$ e G_{i+1}/G_i é um grupo cíclico para todo $i = 0, ..., n-1$. A classe dos grupos policíclicos contém todos os grupos nilpotentes finitamente gerados e está contida na classe dos grupos finitamente apresentáveis.

É possível mostrar que se G é políciclico, então $\mathbb{Z}G$ é um anel noetheriano (à esquerda e à direita) (veja [15], 4.2.3). Assim, o argumento do exemplo 2.2.2 se generaliza: $\mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}G$-módulo de tipo FP_∞, ou seja, G é grupo de tipo FP_∞.

Na seção anterior mostramos que a propriedade FP_m para módulos, com $m = 0$ ou $m = 1$, coincide com propriedades de finitude já conhecidas, isto é, um R-módulo é de tipo FP_0 se e somente se é finitamente gerado e é de tipo FP_1 se e somente se é finitamente apresentável. Vejamos se é possível estabelecer resultados parecidos para grupos.

A propriedade FP_0 para grupos não é relevante: todo grupo é de tipo FP_0 sobre qualquer anel comutativo R. De fato, dado um grupo G, R é gerado por $\{1_R\}$ como RG-módulo, portanto é finitamente gerado, isto é, de tipo FP_0. Então G é de tipo FP_0 sobre R.

Proposição 2.2.4. *Um grupo G é de tipo FP_1 sobre R se e somente se é finitamente gerado.*

Demonstração. Suponha que G seja finitamente gerado e seja $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq G$ um conjunto gerador. Seja $\epsilon : RG \to G$ a aplicação de aumento.

Mostremos que o ideal de aumento $Aug(RG) = ker(\epsilon)$ é gerado como RG-módulo pelo conjunto $Y = \{x_i^\epsilon - 1 \mid \epsilon = \pm 1, i = 1, ..., n\}$. A inclusão $\langle Y \rangle \subseteq ker(\epsilon)$ é clara, mostremos que vale a oposta. Seja $y = \sum_g r_g g \in Aug(RG)$. Então $\sum_g r_g = 0$, e logo $y = y - \sum_g r_g 1_G = \sum_g r_g(g - 1_G)$. Basta então mostrar que $g - 1 \in \langle Y \rangle$, para cada $g \in G$. Se $g = 1$, o resultado é claro. Caso contrário escrevemos $g = x_{j_1}^{\epsilon_1} ... x_{j_m}^{\epsilon_m}$, com $\epsilon_1, ..., \epsilon_m = \pm 1$, e argumentamos por indução em m:

- Se $m = 1$, $g - 1 = x_{j_1}^{\epsilon_1} - 1 \in \langle Y \rangle$ por definição;
- Se $m > 1$, temos que $g - 1 = (x_{j_1}^{\epsilon_1} - 1)x_{j_2}^{\epsilon_2} ... x_{j_m}^{\epsilon_m} + x_{j_2}^{\epsilon_2} ... x_{j_m}^{\epsilon_m} - 1$. O primeiro termo desta soma é obviamente um elemento do ideal gerado por Y. Por hipótese de indução, $x_{j_2}^{\epsilon_2} ... x_{j_m}^{\epsilon_m} - 1$ também é um elemento de tal ideal, e portanto $g - 1 \in \langle Y \rangle$.

Assim, $Aug(RG)$ é gerado por Y como RG-módulo, portanto é finitamente gerado. Então R é um RG-módulo finitamente apresentável, isto é, de tipo FP_1, donde G é de tipo FP_1 sobre R.

Reciprocamente, suponha que G seja de tipo FP_1 sobre R. Pela proposição 2.1.10 $Aug(RG)$ é finitamente gerado e, pelo argumento acima, podemos tomar um conjunto gerador finito do tipo $B = \{x_i - 1 \mid i = 1, ..., m\}$, com $x_i \in G$ para todo i. Seja H o subgrupo de G gerado pelo conjunto $\{x_i \mid i = 1, ..., m\}$ e considere a seguinte sequência exata curta de RH-módulos:

$$0 \to Aug(RH) \to RH \to R \to 0.$$

Aplicando o funtor $RG \otimes_{RH} -$, que é exato pois RG é RH-módulo livre (qualquer transversal T de H em G fornece uma base), a seguinte sequência também é exata:

$$0 \to RG \otimes_{RH} Aug(RH) \to RG \otimes_{RH} RH \to RG \otimes_{RH} R \to 0. \tag{2.2.1}$$

Agora existem isomorfismos:

1. $\varphi : RG \otimes_{RH} Aug(RH) \to RG(Aug(RH)) = Aug(RG)$;

2. $\psi : RG \otimes_{RH} R \to R(G/H)$,

sendo G/H o conjunto de classes laterais à esquerda de H em G. De fato, o isomorfismo em (1) se dá pela multiplicação dentro de RG: $\varphi(y \otimes w) = yw$ para quaisquer $y \in RG$ e $w \in Aug(RH)$. Já a igualdade $RG(Aug(RH)) = Aug(RG)$ é consequência da escolha de B. É claro que $RG(Aug(RH)) \subseteq Aug(RG)$ e, reciprocamente, elementos da forma $g - 1$, com $g \in G$, podem ser escritos como

$$g - 1 = y_1(x_1 - 1) + ... + y_n(x_n - 1)$$

com $y_i \in RG$, pois B gera $Aug(RG)$. Mas cada x_i é elemento de H, então $g - 1 \in RG(Aug(RH))$, donde $Aug(RG) \subseteq RG(Aug(RH))$. Quanto ao item (2), podemos definir ψ como $\psi(r_1 g \otimes r_2) = r_1 r_2(gH)$, para quaisquer $r_1, r_2 \in R$ e $g \in G$.

Assim, a sequência (2.2.1) escreve-se como:

$$0 \to Aug(RG) \to RG \to R(G/H) \to 0.$$

Mas isso só acontece se $R(G/H) \simeq R$, isto é, se só existe uma classe lateral de H em G. Então $G = H$, que é finitamente gerado. □

Vendo o resultado acima, é razoável esperar que a condição "G é de tipo FP_2" seja equivalente a "G é finitamente apresentável". Na realidade a primeira condição é um pouco mais fraca do que a segunda.

Definição 2.2.5. Um grupo G é **quase finitamente apresentável** sobre R se existe uma sequência exata curta de grupos $1 \to K \to F \to G \to 1$, com F livre e finitamente gerado e tal que $R \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{K}{[K,K]}$ é finitamente gerado como RG-módulo, com G agindo por conjugação. Identificando K com sua imagem em F e G com o respectivo quociente, podemos definir tal ação por:

$$r_1 g \cdot (r_2 \otimes k[K,K]) = r_1 r_2 \otimes (f_g k f_g^{-1})[K,K],$$

para $r_1, r_2 \in R$, $g \in G$ e $k \in K$, sendo f_g uma pré-imagem de g em F.

Agora podemos enunciar a caracterização dos grupo de tipo FP_2.

Proposição 2.2.6. *Seja G um grupo. Então G é de tipo FP_2 sobre R se e somente se G é quase finitamente apresentável sobre R.*

Demonstração. Suponha que F seja um grupo livre finitamente gerado tal que exista um epimorfismo $F \twoheadrightarrow G$, com núcleo K. Considere a sequência exata curta dada por:

$$0 \longrightarrow Aug(RF) \longrightarrow RF \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0$$

sendo ϵ a aplicação de aumento. Pela sequência exata longa em $Tor_*^{RF}(RG, -)$, usando que $Tor_1^{RF}(RG, RF) = \{0\}$, temos que

$$0 \to Tor_1^{RF}(RG, R) \to RG \otimes_{RF} Aug(RF) \to RG \otimes_{RF} RF \to RG \otimes_{RF} R \to 0 \quad (2.2.2)$$

é sequência exata. Além disso:

$$Tor_1^{RF}(RG, R) \simeq Tor_1^{RF}(R \otimes_{RK} RF, R) \simeq Tor_1^{RK}(R, R) = R \otimes \frac{K}{[K, K]}. \quad (2.2.3)$$

Utilizamos acima, sucessivamente, os seguintes resultados:

1. $R \otimes_{RK} RF \simeq RG$;
2. Teorema 1.7.19;
3. Proposição 1.8.3.

Assim, a exatidão da sequência (2.2.2), junto com o isomorfismo (2.2.3), nos dá a exatidão da sequência abaixo:

$$0 \to R \otimes \frac{K}{[K, K]} \to RG \otimes_{RF} Aug(RF) \to RG \to R \to 0$$

Agora não é difícil verificar que $Aug(RF)$ é RF-módulo livre com base dada por $\{x_i - 1 \mid i = 1, ..., n\}$, onde $\{x_i \mid i = 1, ..., n\}$ é base para F como grupo livre. Segue disso que $RG \otimes_{RF} Aug(RF)$ é RG-módulo livre com base $\{1 \otimes (x_i - 1) \mid i = 1, ..., n\}$. Assim, se G é de tipo FP_2 sobre R, $R \otimes \frac{K}{[K,K]}$ é finitamente gerado pela proposição 2.1.10.

Reciprocamente, se $R \otimes \frac{K}{[K,K]}$ é finitamente gerado, podemos obter um RG-módulo livre P finitamente gerado tal que $P \twoheadrightarrow R \otimes \frac{K}{[K,K]}$, e portanto existe uma resolução livre de R começando por $P \to RG \otimes_{RF} Aug(RF) \to RG \to R \to 0$, logo G é de tipo FP_2 sobre R. □

Exemplo 2.2.7. Como já sugere o nome, todo grupo finitamente apresentável é quase finitamente apresentável. De fato se G é finitamente apresentável, existe uma sequência exata curta de grupos $1 \to K \hookrightarrow F \to G \to 1$ com F livre finitamente gerado e tal que K é finitamente gerado como subgrupo *normal* de F (isto é, existe $S \subseteq K$ finito tal que K é o menor subgrupo normal de F contendo S). Segue que o grupo abeliano $K/[K,K]$ é também finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo, onde G age por conjugação (a imagem de S em $K/[K,K]$ o gera como $\mathbb{Z}G$-módulo). Então $R \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{K}{[K,K]}$ é finitamente gerado como RG-módulo.

Por muito tempo foi um problema aberto decidir se as propriedades FP_2 e "ser finitamente apresentável" coincidiam para todos os grupos. Hoje já existem exemplos de grupos até de tipo FP_∞, mas que não são finitamente apresentáveis (veja o artigo de Bestvina e Brady [4]).

Na seção anterior, caracterizamos cada R-módulo A de tipo FP_m analisando o comportamento dos funtores derivados $Tor_*^R(-,A)$ e $Ext_R^*(A,-)$ com respeito a limites inversos e diretos, respectivamente. Com a homologia e cohomologia de grupos fazendo o papel de Tor e Ext, podemos adaptar os resultados já obtidos para caracterizar também os grupos de tipo FP_m, como veremos a seguir.

Proposição 2.2.8. *Sejam G um grupo e $m \geq 1$. Então G é de tipo FP_m sobre R se e somente se G é finitamente gerado e $H_k(G; \prod_{\lambda\in\Lambda}(RG)_\lambda) = \{0\}$, para todo $1 \leq k < m$ e para todo conjunto de índices Λ.*

Demonstração. Basta usar que $H_k(G; \prod_{\lambda\in\Lambda}(RG)_\lambda) = Tor_k^{RG}(R, \prod_{\lambda\in\Lambda}(RG)_\lambda)$ e aplicar o teorema 2.1.6 e a proposição 2.2.4. $\square$

É claro que a proposição acima vale na sua versão análoga para grupos de tipo FP_∞; basta aplicar o resultado já obtido para todo $m \geq 1$. Os grupos de tipo FP_∞ ainda podem ser totalmente caracterizados por suas homologias e cohomologias:

Proposição 2.2.9. *Para um grupo G, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *G é de tipo FP_∞ sobre R;*

2. *$H_k(G;-)$ comuta com produtos diretos de RG-módulos para todo $k \geq 0$;*

3. *$H^k(G;-)$ comuta com limites diretos de RG-módulos sobre conjuntos direcionados, para todo $k \geq 0$.*

Demonstração. Novamente, basta usar a definição de $H_k(G;-)$ e $H^k(G;-)$ a partir de Tor e Ext e aplicar o teorema 2.1.6. $\square$

Encontrar grupos que sejam de tipo FP_m para certo m é relativamente fácil. As caracterizações acima nos permitem tomar grupos finitamente gerados e finitamente apresentáveis como exemplo de grupos de tipo FP_1 e FP_2, respectivamente. Além disso, qualquer grupo finito é exemplo de grupo de tipo FP_m para qualquer m, como veremos a seguir no exemplo 2.2.13. Uma tarefa mais complicada é *distinguir* as propriedades FP_m e FP_n, com $m < n$, isto é, encontrar grupos de tipo FP_m, mas que não sejam de tipo FP_n. O exemplo a seguir serve a este propósito, mas não faremos aqui as demonstrações.

Exemplo 2.2.10. Dado $n \geq 1$, seja $X_n := \mathbb{N} \times \{1, ..., n\}$. Seja H_n o subgrupo do grupo de permutações de X_n contendo exatamente todos os elementos h que satisfaçam a seguinte propriedade:

- Existem $(m_1, ..., m_n) \in \mathbb{Z}^n$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que $h \cdot (x, i) = (x + m_i, i)$ para todo $i = 1, ..., n$ e $x > N$.

O grupo H_n definido acima é o chamado n-ésimo *grupo de Houghton*. Se $n = 1$, $X_n \approx \mathbb{N}$, portanto H_1 é o grupo de permutações de $\mathbb{N}$ com suporte finito, que claramente não é finitamente gerado. Para $n = 2$, podemos mostrar que H_2 é gerado pelos elementos h_1 e h_2 definidos por:

$$h_1 \cdot (x, i) = \begin{cases} (x+1, 0) & \text{se } i = 0, \\ (x-1, 1) & \text{se } i = 1 \text{ e } x \neq 1, \\ (1, 0) & \text{se } (x, i) = (0, 2), \end{cases}$$

e

$$h_2 \cdot (x, i) = \begin{cases} (1, 2) & \text{se } (x, i) = (1, 1), \\ (1, 1) & \text{se } (x, i) = (1, 2), \\ (x, i) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É possível mostrar que o grupo H_2 não é, no entanto, de tipo FP_2, e tal comportamento se repete: para cada $n \geq 1$, H_n é de tipo FP_{n-1}, mas não é tipo FP_n (veja o artigo de K. Brown [9]).

Tendo a propriedade FP_m para grupos bem definida e caracterizada, podemos proceder como é de rotina em teoria de grupos: perguntamo-nos como esta propriedade se relaciona com subgrupos, quocientes e demais estruturas. A primeira resposta é óbvia: subgrupos de grupos de tipo FP_m não são necessariamente de tipo FP_m. Isto pode ser visto já com $m = 1$, já que os subgrupos de um grupo finitamente gerado não são, em geral, finitamente gerados. Tome, por exemplo, o grupo livre F com dois geradores x e y e o subgrupo gerado por $\{x^i y x^{-i} \mid i \in \mathbb{Z}\}$, que não pode ser finitamente gerado (detalhes em Cohen [12]).

A propriedade FP_m para grupos é, no entanto, herdada por subgrupos de *índice finito*, como consequência do isomorfismo que estabeleceremos no próximo lema.

Lema 2.2.11. *Sejam G um grupo, $N \leq G$ um subgrupo de índice finito e A um RN-módulo à esquerda. Então existe um isomorfismo natural de RG-módulos:*

$$Hom_{RN}(RG, A) \simeq RG \otimes_{RN} A.$$

Demonstração. Seja $\{t_1, .., t_n\}$ uma transversal à direita de N em G e defina uma aplicação $\theta : Hom_{RN}(RG, A) \to RG \otimes_{RN} A$ por $\theta(f) = \sum_{i=1}^{n} t_i^{-1} \otimes f(t_i)$. É possível verificar diretamente que θ não depende da escolha da transversal e que θ é um homomorfismo de RG-módulos. Para ver que θ é bijetivo basta enxergá-lo como um isomorfismo de RN-módulos, fazendo as identificações óbvias de $Hom_{RN}(RG, A) \simeq \oplus_{i=1}^{n} A \simeq RG \otimes_{RN} A$ (como RN-módulos). □

Proposição 2.2.12. *Sejam G um grupo, $N \leq G$ um subgrupo de índice finito e $m \geq 1$ um inteiro. Então G é de tipo FP_m (FP_∞, respectivamente) sobre R se e somente se N é de tipo FP_m (FP_∞, respectivamente) sobre R.*

Demonstração. Para todo $k \geq 0$, temos pelo lema de Shapiro (1.8.4):

$$H_k(N; \prod_\lambda (RN)_\lambda) \simeq H_k(G; RG \otimes_{RN} \prod_\lambda (RN)_\lambda),$$

com λ percorrendo um conjunto Λ arbitrário. Aplicando o lema 2.2.11 ao segundo módulo acima, temos:

$$H_k(G; RG \otimes_{RN} \prod_\lambda (RN)_\lambda) \simeq H_k(G; Hom_{RN}(RG, \prod_\lambda (RN)_\lambda)).$$

Usando que Hom comuta com produtos diretos e aplicando mais uma vez o lema 2.2.11, temos que:

$$H_k(N; \prod_{\lambda\in\Lambda} (RN)_\lambda) \simeq H_k(G; \prod_{\lambda\in\Lambda} (RG \otimes_{RN} (RN))_\lambda) \simeq H_k(G; \prod_{\lambda\in\Lambda} (RG)_\lambda).$$

Assim, $H_k(N; \prod_{\lambda\in\Lambda}(RN)_\lambda) = 0$ se e somente se $H_k(G; \prod_{\lambda\in\Lambda}(RG)_\lambda) = 0$. Além disso, como $[G : N] < \infty$, G é finitamente gerado se e somente se N é finitamente gerado, então, pela proposição 2.2.8, G é de tipo FP_m sobre R se e somente se N é de tipo FP_m sobre R. Por fim, como o resultado vale para cada $m \geq 0$, é claro que vale também para a propriedade FP_∞. □

Exemplo 2.2.13. É claro que o grupo trivial é de tipo FP_∞. De fato, se $G = \{1\}$, temos que $\mathbb{Z}G$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$ como anel, donde $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo projetivo finitamente gerado, portanto de tipo FP_∞ pelo exemplo 2.1.9. Segue então do lema acima que se H é um grupo finito, então H é de tipo FP_∞. Isto justifica dizermos que as propriedades FP_m generalizarem a noção de "ser finito".

A proposição 2.2.12 vale em particular se N é subgrupo *normal* de G com quociente G/N finito. É natural perguntar se podemos obter um resultado parecido no outro sentido: impondo alguma condição de finitude em N podemos dizer algo sobre os tipos homológicos de G e G/N? A resposta é afirmativa se assumimos que N é de tipo

FP_∞, a demonstração no entanto exige a utilização de *sequências espectrais*, ferramenta à qual ainda não havíamos recorrido, mas que foi descrita na seção 1.8.

Proposição 2.2.14. *Sejam G um grupo, $N \lhd G$ um subgrupo normal e Q o quociente G/N. Suponha que N seja de tipo FP_∞ sobre R. Então:*

$$G \text{ é de tipo } FP_m \text{ sobre } R \Leftrightarrow Q \text{ é de tipo } FP_m \text{ sobre } R.$$

Demonstração. Primeiramente, note que N é finitamente gerado, pois é de tipo FP_∞, logo G é finitamente gerado se e somente se Q é finitamente gerado. Pelo teorema 2.2.8, resta mostrar que, se Λ é um conjunto de índices, então:

$$H_k(G; \textstyle\prod_\lambda RG) = \{0\} \Leftrightarrow H_k(Q; \prod_\lambda RQ) = \{0\}$$

para todo $1 \leq k \leq m$.

Considere a sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre (teorema 1.8.10, versão homológica) com coeficientes num produto direto $\prod_\lambda (RG)_\lambda$:

$$E^2_{p,q} = H_p(Q; H_q(N; \textstyle\prod_\lambda (RG)_\lambda)) \underset{p}{\Longrightarrow} H_{p+q}(G; \prod_\lambda (RG)_\lambda))\ .$$

Como N é de tipo FP_∞, $H_q(N; \prod_\lambda (RG)_\lambda)) \simeq \prod_\lambda H_q(N; RG) = \{0\}$ para todo $q \geq 1$, pois RG é RN-módulo livre. No caso $q = 0$ temos:

$$H_0(N; \prod_\lambda (RG)_\lambda) = \prod_\lambda RG \otimes_{RN} R \simeq \prod_\lambda (\bigoplus_{q \in Q} (RN)_q) \otimes_{RN} R \simeq \prod_\lambda RQ$$

Então:

$$E^2_{p,q} = \begin{cases} H_p(Q; \prod_\lambda RQ), & \text{se } q = 0 \\ 0, & \text{se } q \neq 0. \end{cases}$$

Pela construção da sequência espectral, o bigrau de $d^2 : E^2 \to E^2$ é $(-2, 1)$ (veja [18]). Se $q \neq 0$, o homomorfismo $d_{p,q} : E^2_{p,q} \to E^2_{p-2,q+1}$ parte de um módulo nulo, logo:

$$E^3_{p,q} = \frac{ker(d^2_{p,q})}{Im(d^2_{p+2,q-1})} = \{0\} = E^2_{p,q}.$$

No caso $q = 0$, temos:

$$E^3_{p,0} = \frac{ker(d^2_{p,0})}{Im(d^2_{p+2,-1})} = ker(d^2_{p,0}) = E^2_{p,0},$$

pois $d^2_{p+2,-1}$ está definido em um módulo nulo e $d^2_{p,0}$ toma valores em um módulo também nulo.

Então $E^2_{p,q} = E^3_{p,q}$ para todo $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Continuando usando o fato de que o bigrau dos diferenciais $d^i : E^i \to E^i$ é $(-i, i-1)$ para $i \geq 3$ (novamente, veja [18]), vemos que $d^i_{p,q}$ parte de um módulo nulo ou assume valores em um módulo nulo para quaisquer p, q e $i \geq 3$, de modo que $E^{i+1}_{p,q} = H_{p,q}(E^i) = E^i_{p,q}$, para todo $i \geq 3$. Assim, $E^2_{p,q} = E^\infty_{p,q}$.

Finalmente, utilizemos a convergência da sequência espectral. Por definição, existe uma filtração limitada $\{\phi^p(H_n)\}$ do módulo graduado $H_n = H_n(G; \prod_\lambda (RG)_\lambda))$ tal que:

$$\phi^p(H_n)/\phi^{p-1}(H_n) \simeq E^\infty_{p,q}$$

para todo $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, com $n = p+q$. Se $H_k(G; \prod_\lambda RG) = \{0\}$, então com $p = k$ e $q = 0$, temos:

$$H_k(Q; \prod_\lambda RQ) \simeq E^\infty_{k,0} \simeq \phi^k(H_k)/\phi^{k-1}(H_k).$$

Mas $\phi^k(H_k) \subseteq H_k = H_k(G; \prod_\lambda RG) = \{0\}$, donde $H_k(Q; \prod_\lambda RQ) = \{0\}$.

Reciprocamente, se $H_k(Q; \prod_\lambda RQ) = \{0\}$, então $E^\infty_{p,q} = \{0\}$ para qualquer par $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Como $\{\phi^j(H_k)\}$ é filtração limitada de $H_n = H_n(G; \prod_\lambda (RG)_\lambda)$, existem inteiros $s \leq t$ tais que:

$$\{0\} = \phi^s(H_k) \subseteq \phi^{s+1}(H_k) \subseteq ... \subseteq \phi^t(H_k) = H_k.$$

Mas então: $\{0\} = E^\infty_{k,0} \simeq \phi^{s+1}(H_k)/\phi^s(H_k) \simeq \phi^{s+1}(H_k)$. Iterando o argumento, obtemos que $\phi^{s+i}(H_k) = \{0\}$ para todo $i \geq 0$ e, em particular:

$$H_k(G; \prod_\lambda (RG)_\lambda) = H_k = \phi^t(H_k) = \{0\},$$

como queríamos. □

Na demonstração acima ocorreu que a sequência espectral, já no seu segundo termo, se concentra em apenas uma linha (definida por $q = 0$, no caso), já que $E^2_{p,q} = 0$ sempre que $q \neq 0$. Neste tipo de situação (ou quando a sequência espectral se concentra em apenas uma coluna), sempre teremos que $E^2_{p,q} = E^\infty_{p,q}$, pelo argumento usado acima. Dizemos neste caso que a sequência espectral *colapsa*.

2.3 Os Σ-invariantes

Na seção anterior introduzimos a *propriedade* FP_m para grupos. Investigando seu comportamento com respeito a subgrupos e quocientes, obtivemos dois resultados: a proposição 2.2.12 diz que a propriedade FP_m passa a subgrupos de índice finito e proposição 2.2.14 nos diz algo sobre relaciona o tipo FP_m de um grupo com um quociente, no caso em que o subgrupo normal associado é de tipo FP_∞. Além disso, já sabemos que a propriedade FP_m em geral *não* é herdada por subgrupos.

Outra direção para este tipo de investigação é, dado um grupo G de tipo FP_m, considerar subgrupos normais $N \lhd G$ para os quais o quociente G/N é *abeliano*.

Claramente cada um destes subgrupos contêm o subgrupo comutador G'. Reciprocamente, se N é um subgrupo de G que contém G', então $N \lhd G$. De fato, pelo teorema de isomorfismos os subgrupos N de G que contêm G' correspondem a subgrupos de G/G', e estes são normais, já que G/G' é abeliano. Pela correspondência, N também é subgrupo normal de G.

No contexto deste tipo de análise surgem os chamados Σ-*invariantes*. Buscando entender o tipo FP_m para os subgrupos N, com $G' \subseteq N \subseteq G$, definimos objetos geométricos relacionados ao grupo original G, e estes nos permitem estudar propriedades homológicas de G por outro ponto de vista. Estudaremos a seguir tais invariantes seguindo a exposição original de R. Bieri e B. Renz [6].

Seja G um grupo finitamente gerado. Um **caractere** de G é um homomorfismo de grupos $\chi : G \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ como grupo aditivo). Dizemos que dois caracteres $\chi_1, \chi_2 : G \to \mathbb{R}$ são **equivalentes** se existe $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, tal que $\chi_2 = r\chi_1$, e isto claramente define uma relação de equivalência no conjunto $Hom(G, \mathbb{R})$ de caracteres de G. Denotaremos por $[\chi]$ a classe de equivalência de χ com respeito a tal relação.

Note agora que como $\mathbb{R}$ é um grupo abeliano, qualquer caractere $\chi : G \to \mathbb{R}$ define um único caractere $\bar{\chi} : G/G' \to \mathbb{R}$ que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \\ G/G' \arrow[ur, "\bar{\chi}"'] & \end{tikzcd}$$

Tal correspondência define um isomorfismo $Hom(G, \mathbb{R}) \simeq Hom(G/G', \mathbb{R})$. Agora G/G' é um grupo abeliano finitamente gerado, logo $G/G' \simeq \mathbb{Z}^n \oplus T$, para certo $n \geq 0$ e T um grupo abeliano finito. Mas se $\bar{\chi} : \mathbb{Z}^n \oplus T \to \mathbb{R}$ é um caractere, então $\bar{\chi}(T) = 0$, pois $\mathbb{R}$ é livre de torção. Portanto:

$$Hom(G, \mathbb{R}) \simeq Hom(G/G', \mathbb{R}) \simeq Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}).$$

Finalmente, $Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}) \simeq Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{R})^n \simeq \mathbb{R}^n$ e não é difícil ver que dois caracteres não nulos $\chi_1, \chi_2 : G \to \mathbb{R}$ são equivalentes se e somente se correspondem a pontos de $\mathbb{R}^n$ que se encontram num mesmo raio partindo de 0.

Definição 2.3.1. Seja G um grupo finitamente gerado. A **esfera de caracteres** $S(G)$ de G é o conjunto de classes de equivalência de caracteres não nulos $\chi : G \to \mathbb{R}$ com respeito à relação definida por $\chi_1 \sim \chi_2$ se e somente se existe $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, tal que $\chi_2 = r\chi_1$.

Pelas observações acima, $S(G)$ é de fato uma esfera: $Hom(G, \mathbb{R}) \smallsetminus \{0\}$ está em bijeção com $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$, e tomando as classes de equivalência, temos que $S(G)$ está em bijeção com a esfera $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. Tal bijeção nos permite trazer a topologia de S^{n-1} para $S(G)$, e é esta a conexão que nos permite estudar grupos de forma mais geométrica, como havíamos anunciado.

Observação 2.3.2. A topologia de $S(G)$ pode ser definida diretamente pela estrutura de $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita de $Hom(G, \mathbb{R})$, sem deixar qualquer ambiguidade em relação à bijeção entre S^{n-1} e $S(G)$.

Se $\chi : G \to \mathbb{R}$ é um caractere não nulo, podemos definir um submonoide (um subconjunto que contém 1_G e que é fechado com respeito ao produto de G) de G da seguinte forma:

$$G_\chi = \{g \in G \mid \chi(g) \geq 0\}.$$

Note que χ_1 e χ_2 são equivalentes se e somente se $G_{\chi_1} = G_{\chi_2}$.

Consideremos agora o anel $\mathbb{Z}G_\chi$. Este é definido da mesma forma que o anel de grupo que introduzimos anteriormente: tomamos o $\mathbb{Z}$-módulo livre com base G_χ e definimos o produto a partir do produto de G_χ. Observe que $\mathbb{Z}G_\chi$ é subanel de $\mathbb{Z}G$, portanto todo $\mathbb{Z}G$-módulo é também um $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo. Podemos agora definir os Σ-invariantes.

Definição 2.3.3. Sejam G um grupo finitamente gerado, A um $\mathbb{Z}G$-módulo e $m \geq 0$ um inteiro. Definimos o m-ésimo **invariante homológico** de G com coeficientes em A por:

$$\Sigma^m(G; A) = \{[\chi] \in S(G) \mid A \text{ é de tipo } FP_m \text{ como } \mathbb{Z}G_\chi\text{-módulo}\}.$$

A definição acima é uma espécie de generalização da propriedade FP_m para submonoides (da forma G_χ) de um grupo G. Se consideramos, por exemplo, $A = \mathbb{Z}$ como o $\mathbb{Z}G$-módulo trivial, então $[\chi] \in \Sigma^m(G; \mathbb{Z})$ se e somente se $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo, que podemos interpretar como "G_χ é um monoide de tipo FP_m", estendendo a definição 2.2.1.

É direto da definição que os Σ-invariantes estão encadeados, isto é:

$$\Sigma^m(G; A) \subseteq \Sigma^{m-1}(G; A) \subseteq ... \subseteq \Sigma^1(G; A) \subseteq \Sigma^0(G; A) \subseteq S(G),$$

para qualquer grupo G de tipo FP_m e para qualquer $\mathbb{Z}G$-módulo A.

Voltemos agora às considerações geométricas. Como dissemos, $S(G)$ tem a topologia de uma esfera $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. Faz sentido então analisar os subconjuntos $\Sigma^m(G; A) \subseteq S(G)$ nesta topologia, e é isto que foi feito por Bieri e Renz no seguinte teorema:

Teorema 2.3.4. *Se G é um grupo finitamente gerado e A é um $\mathbb{Z}G$-módulo, então $\Sigma^m(G; A)$ é um subconjunto aberto de $S(G)$.*

Demonstração. Ver [6], Teorema A. □

É importante notar que o teorema acima não diz nada sobre a existência de elementos em $\Sigma^m(G;A)$, já que o conjunto vazio é um conjunto aberto em qualquer topologia.

O resultado obtido nos estudos da propriedade FP_m para subgrupos que contêm o comutador do grupo original é o seguinte:

Teorema 2.3.5. *Sejam G um grupo finitamente gerado, N um subgrupo de G tal que $G' \subseteq N$ e A um $\mathbb{Z}G$-módulo. Então A é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}N$-módulo se e somente se $\Sigma^m(G;A)$ contém $S(G,N) = \{[\chi] \in S(G) \mid \chi(N) = 0\}$.*

Demonstração. Ver [6], Teorema B. □

Exemplo 2.3.6. Seja G um grupo abeliano finitamente gerado. Como o subgrupo comutador $G' = 1$ é de tipo FP_m para todo m, temos pelo teorema 2.3.5 que $\Sigma^m(G;\mathbb{Z}) = S(G)$ para todo m.

Exemplo 2.3.7. No outro extremo temos os produtos livres $G * H$, com $G \neq 1$ e $H \neq 1$. É possível mostrar que $\Sigma^1(G*H;\mathbb{Z}) = \emptyset$, e logo $\Sigma^m(G*H;\mathbb{Z}) = \emptyset$ para todo $m \geq 1$ (para uma demonstração veja as notas de Strebel [20]).

Muitos dos argumentos utilizados nos estudos de grupos de tipo FP_m são adaptáveis à análise seus Σ-invariantes. Algumas propriedades, no entanto, exigem um trabalho um pouco mais cuidadoso, e os dois próximos lemas compilam algumas delas. Ambos os resultados podem ser encontrados no artigo de Meier, Meinert e VanWyk [16], mas vamos detalhar aqui alguns argumentos.

Lema 2.3.8. *Sejam G um grupo, $H \subseteq G$ um subgrupo e $\chi : G \to \mathbb{R}$ um caractere não nulo. Denote por χ_0 a restrição de χ a H. Então:*

1. *$\mathbb{Z}G_\chi$ é plano como $\mathbb{Z}H_{\chi_0}$-módulo e a inclusão $\mathbb{Z}H_{\chi_0} \hookrightarrow \mathbb{Z}G_\chi$ é cindida como homomorfismo de $\mathbb{Z}H_{\chi_0}$-módulos;*

2. *Se $\chi_0 \neq 0$, então para todo $\mathbb{Z}H$-módulo V os $\mathbb{Z}G_\chi$-módulos $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} V$ e $\mathbb{Z}G_\chi \otimes_{\mathbb{Z}H_{\chi_0}} V$ são isomorfos;*

3. *Se $\chi_0 \neq 0$, então para todo $\mathbb{Z}H$-módulo V temos que $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} V$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo se e somente se V é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}H_{\chi_0}$-módulo;*

Demonstração. 1) Escolha uma transversal $T \subseteq G$ para as classes laterais à direita de H em G. Temos que $\mathbb{Z}G_\chi \simeq \oplus_{t\in T}\mathbb{Z}[Ht \cap G_\chi]$, então basta mostrar que cada $\mathbb{Z}[Ht \cap G_\chi]$ é plano como $\mathbb{Z}H_{\chi_0}$-módulo. Como $\chi(g) \geq 0$ para todo $g \in Ht \cap G_\chi$, podemos escolher uma sequência $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq Ht \cap G_\chi$ tal que:

$$\chi(g_j) \geq \chi(g_{j+1}) \text{ e } \chi(Ht \cap G_\chi) \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} [\chi(g_j), \infty).$$

Então $\mathbb{Z}[Ht \cap G_\chi]$ é união ascendente dos $\mathbb{Z}H_{\chi_0}$-módulos livres $\mathbb{Z}[H_{\chi_0} g_j]$, e disso segue que $\mathbb{Z}[Ht \cap G_\chi]$ é plano. De fato, $\mathbb{Z}[Ht \cap G_\chi]$ é limite direto sob o conjunto direcionado $\mathbb{N}$ (lembre-se que neste caso $\varinjlim$ é funtor exato) de um sistema direto de módulos livres, então sendo $- \otimes_{\mathbb{Z}H_{\chi_0}} \mathbb{Z}[H_{\chi_0} g_j]$ funtor exato para todo $j \in \mathbb{N}$, temos que $- \otimes_{\mathbb{Z}H_{\chi_0}} \mathbb{Z}[Ht \cap G_\chi]$ também o é. Além disso, se escolhermos inicialmente a transversal T contendo o elemento neutro, não é difícil ver que a inclusão $\mathbb{Z}H_{\chi_0} \hookrightarrow \mathbb{Z}G_\chi$ é cindida.

2) As inclusões $\mathbb{Z}H_{\chi_0} \hookrightarrow \mathbb{Z}H$ e $\mathbb{Z}G_\chi \hookrightarrow \mathbb{Z}G$ induzem um homomorfismo óbvio de $\mathbb{Z}H_{\chi_0}$-módulos

$$\varphi : \mathbb{Z}G_\chi \otimes_{\mathbb{Z}H_{\chi_0}} V \to \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} V$$

satisfazendo $\varphi(y \otimes v) = y \otimes v$ para quaisquer $y \in \mathbb{Z}G_\chi$ e $v \in V$. Por outro lado, como $\chi_0 \neq 0$, dados $z \in \mathbb{Z}G$ e $w \in V$, existe $h \in H_{\chi_0}$ tal que $\chi(zh) \geq 0$, logo podemos definir:

$$\psi : \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} V \to \mathbb{Z}G_\chi \otimes_{\mathbb{Z}H_{\chi_0}} V \ , \ \psi(z \otimes w) := zh \otimes h^{-1}w.$$

Para ver que ψ é bem definida, sejam $z \in \mathbb{Z}G$ e $h_1, h_2 \in H_{\chi_0}$ tais que $\chi(zh_1) \geq 0$ e $\chi(zh_2) \geq 0$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\chi(h_2^{-1}h_1) \geq 0$ (trocando por $h_1^{-1}h_2$, se necessário), e neste caso temos que:

$$zh_1 \otimes h_1^{-1}w = z(h_2h_2^{-1})h_1 \otimes h_1^{-1}w = zh_2 \otimes h_2^{-1}(h_1h_1^{-1})w = zh_2 \otimes h_2^{-1}w$$

para todo $w \in V$. É fácil verificar também que ψ é uma inversa para φ, e portanto φ é o isomorfismo que queremos.

3) Pelas partes 1 e 2, se $\mathscr{R}$ é resolução livre de V como $\mathbb{Z}H_{\chi_0}$-módulo, finitamente gerada em dimensão menor ou igual a m, então $\mathbb{Z}G_\chi \otimes_{\mathbb{Z}H_{\chi_0}} \mathscr{R}$ é resolução livre do $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo $\mathbb{Z}G_\chi \otimes_{\mathbb{Z}H_{\chi_0}} V \simeq \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} V$, sendo finitamente gerada em dimensão menor ou igual a m. Para a recíproca observe que

$$Tor_k^{\mathbb{Z}H_{\chi_0}}(\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Z}G_\chi, V) \simeq Tor_k^{\mathbb{Z}G_\chi}(\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Z}G_\chi, \mathbb{Z}G_\chi \otimes_{\mathbb{Z}H_{\chi_0}} V) \simeq Tor_k^{\mathbb{Z}G_\chi}(\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Z}G_\chi, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} V)$$

para qualquer conjunto de índices Λ, pois $\mathbb{Z}G_\chi$ é plano como $\mathbb{Z}H_{\chi_0}$-módulo. Além disso, a inclusão $i : \mathbb{Z}H_{\chi_0} \hookrightarrow \mathbb{Z}G_\chi$ e o homomorfismo $p : \mathbb{Z}G_\chi \to \mathbb{Z}H_{\chi_0}$ tal que $p \circ i = id$ induzem homomorfismos que tornam o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
Tor_k^{\mathbb{Z}H_{\chi_0}}(\prod_\lambda \mathbb{Z}H_{\chi_0}, V) \arrow[r] \arrow[d, shift right] & \prod_\lambda Tor_k^{\mathbb{Z}H_{\chi_0}}(\mathbb{Z}H_{\chi_0}, V) \arrow[d, shift right] \\
Tor_k^{\mathbb{Z}H_{\chi_0}}(\prod_\lambda \mathbb{Z}G_\chi, V) \arrow[r] \arrow[u, shift right] & \prod_\lambda Tor_k^{\mathbb{Z}H_{\chi_0}}(\mathbb{Z}G_\chi, V) \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

O resultado segue então do teorema 2.1.6. □

Lema 2.3.9. *Se H é um subgrupo de índice finito de G e se $\chi : G \to \mathbb{R}$ é um homomor-*

fismo tal que $\chi_0 = \chi|_H \neq 0$*, então*

$$[\chi_0] \in \Sigma^m(H;V) \Leftrightarrow [\chi] \in \Sigma^m(G;V)$$

para quaisquer $\mathbb{Z}G$*-módulo* V *e* $m \geq 0$*.*

Demonstração. Pelo lema 2.3.8, V é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}H_{\chi_0}$-módulo se e somente se $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} V$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo. Agora note que $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} V \simeq \mathbb{Z}[G/H] \otimes V$ (este último com ação diagonal de G_χ, isto é, do tipo $g(x \otimes y) = gx \otimes gy$) como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulos, onde G/H é o conjunto de classes laterais à esquerda de H em G. De fato, podemos definir $\varphi : \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} V \to \mathbb{Z}[G/H] \otimes V$ por

$$\varphi(g \otimes v) = gH \otimes gv$$

e $\psi : \mathbb{Z}[G/H] \otimes V \to \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} V$ por

$$\psi(gH \otimes v) = g \otimes g^{-1}v$$

para quaisquer $g \in G$ e $v \in V$, e não é difícil verificar que φ e ψ são homomorfismos bem definidos e tais que $\psi = \varphi^{-1}$.

Então a afirmação que queremos mostrar é equivalente a "V é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo se e somente se $\mathbb{Z}[G/H] \otimes V$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo, via ação diagonal".

Suponha primeiramente que V seja de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo e seja $\mathscr{F}$ seja uma resolução livre de V como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo, finitamente gerada até em dimensão m. Então $\mathbb{Z}[G/H] \otimes \mathscr{F}$ é resolução livre de $\mathbb{Z}[G/H] \otimes V$, com cada módulo isomorfo a uma soma direta (finita em dimensão $\leq m$, já que $[G : H] < \infty$) de módulos do tipo $\mathbb{Z}[G/H] \otimes \mathbb{Z}G_\chi$. Mas $\mathbb{Z}[G/H] \otimes \mathbb{Z}G_\chi$ com a ação diagonal é isomorfo a $\mathbb{Z}[G/H] \otimes \mathbb{Z}G_\chi$ com a ação na componente à direita, com isomorfismo dado por:

$$\lambda \otimes g \mapsto g^{-1}\lambda \otimes g,$$

para quaisquer $\lambda \in \mathbb{Z}[G/H]$ e $g \in G_\chi$. Então os módulos de $\mathbb{Z}[G/H] \otimes \mathscr{F}$ são finitamente gerados até dimensão m, isto é, $\mathbb{Z}[G/H] \otimes V$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo.

Para a recíproca, podemos assumir que H é subgrupo *normal* de G, já que cada subgrupo de índice finito de G contém um subgrupo normal de índice finito (considere a ação de G em G/H por multiplicação à esquerda e tome o núcleo do homomorfismo $G \to S_n$ associado, onde $n = [G : H]$). Neste caso, sendo o grupo G/H de tipo FP_∞, existe uma resolução livre $\mathscr{P}$ de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[G/H]$-módulo, com todos os módulos finitamente gerados. Neste caso, $\mathscr{R} = \mathscr{P} \otimes V$ é um complexo exato da forma:

$$\mathscr{R} : .... \to \oplus_i(\mathbb{Z}[G/H] \otimes V) \to \oplus_j(\mathbb{Z}[G/H] \otimes V) \to V \to 0,$$

sendo todas as somas finitas. Mas, por hipótese, $\mathbb{Z}[G/H] \otimes V$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo, e o mesmo vale para cada soma $\oplus_i(\mathbb{Z}[G/H])$ sob um conjunto de índices finito. Pelo lema 2.1.11, V é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo. $\square$

Como é de se esperar, a tarefa de calcular os Σ-invariantes para grupos arbitrários não é nada simples, dada a quantidade de informação que tais conjuntos carregam.

Aqui termina a parte generalista desta dissertação. Já introduzimos todos os conceitos necessários de álgebra homológica e suas relações com a teoria de grupos, e agora podemos partir para o estudo específico dos grupos chamados *produtos entrelaçados*, com os quais começamos o próximo capítulo. Nosso objetivo é analisá-los do ponto de vista homológico: vamos obter informações sobre o tipo FP_m e sobre os Σ-invariantes de tais grupos.

Capítulo 3

Produtos Entrelaçados

Especializaremo-nos agora nos grupos chamados *produtos entrelaçados*, cuja definição abre este capítulo. O objetivo aqui é descrever os resultados de Y. de Cornulier [13] e L. Bartholdi, Y. de Cornulier e D. H. Kochloukova [3], introduzindo o tema principal desta dissertação.

3.1 Definições

Sejam H um grupo e X um conjunto não vazio. Para cada $x \in X$, seja H_x uma cópia de H, e considere a *soma direta* $H^{(X)}$ destes grupos: $H^{(X)}$ é o subgrupo de $\prod_{x \in X} H_x$ cujos elementos são as famílias $(h_x)_{x \in X}$ tais que $h_x \neq 1_{H_x}$ apenas para um número finito de índices $x \in X$.

Observação 3.1.1. Por vezes denotaremos $H^{(X)}$ por $\oplus_{x \in X} H_x$, quando não houver risco de confusão com uma soma direta de módulos, por exemplo. Note que a soma direta de grupos definida acima e a soma direta de módulos *não* são objetos semelhantes do ponto de vista da teoria de categorias: uma soma direta $\oplus_{i \in I} M_i$ de R-módulos é caracterizada pelos isomorfismos naturais

$$Hom_R(\oplus_i M_i, A) \simeq \prod_i Hom_R(M_i, A)$$

para cada R-módulo A, e os objetos da categoria de grupos que têm uma propriedade análoga são os *produtos livres*. Por este motivo, alguns autores denominam $H^{(X)}$ de *produto direto restrito*.

Suponha agora que um grupo G aja sobre o conjunto X. A partir de tal ação podemos construir uma ação de G em $H^{(X)}$ da seguinte forma:

$$g \cdot (h_x)_{x \in X} = (a_x)_{x \in X}, \ a_x = h_{g^{-1} \cdot x}, \tag{3.1.1}$$

para quaisquer $g \in G$ e $(h_x)_{x\in X} \in H^{(X)}$. Intuitivamente, tal ação consiste em permutar as cópias de H na soma $H^{(X)}$. Tendo uma ação de grupo sobre grupo definida, podemos considerar o produto semidireto, o que nos dará a definição de produto entrelaçado.

Definição 3.1.2. Sejam G e H grupos e X um G-conjunto. O **produto entrelaçado** $H \wr_X G$ é o produto semidireto $H^{(X)} \rtimes G$, com respeito à ação de G em $H^{(X)}$ definida em (3.1.1).

O grupo definido acima é, mais especificamente, um *produto entrelaçado permutacional restrito*. O adjetivo "permutacional" indica a ação de G por permutações de X, enquanto "restrito" faz menção ao produto direto restrito $H^{(X)}$, de modo que trocando $H^{(X)}$ por $\prod_{x\in X} H_x$ na definição 3.1.2 obtemos o que é chamado de *produto entrelaçado irrestrito*.

Podemos encontrar em textos em português referências a $H \wr_X G$ como *produto orlado* ou *produto wreath*, esta última mantendo o termo em inglês. Utilizaremos apenas o nome *produto entrelaçado*, indicando sempre o grupo da definição 3.1.2.

Exemplo 3.1.3. Cada grupo G age sobre si mesmo por multiplicação à esquerda. O produto entrelaçado $H \wr_G G$ definido a partir de tal ação é denotado por $H \wr G$ e denominado *produto entrelaçado regular*.

Exemplo 3.1.4. O grupo *Lamplighter* é o produto entrelaçado $C_2 \wr \mathbb{Z}$, onde C_2 é o grupo cíclico com 2 elementos. A ação de $\mathbb{Z}$ em $C_2^{(\mathbb{Z})}$ pode ser visualizada da seguinte forma: identifique o conjunto $\mathbb{Z}$ como uma sequência de lâmpadas, e para cada uma delas existem os estados "acesa" ou "apagada", correspondendo aos dois elementos de C_2. O grupo $\mathbb{Z}$ age permutando as lâmpadas, mas sem acendê-las ou apagá-las. Tal interpretação é o que dá o nome de *Lamplighter*.

O exemplo acima ilustra a existência de simetrias interessantes em grupos definidos como produtos entrelaçados, e tal fato já é suficiente para motivar os estudos dos mesmos. Outra razão, mais formal, é o teorema de Kaloujnine e Krasner citado na introdução:

Teorema 3.1.5. *Sejam H um grupo qualquer e G um grupo finito. Suponha que E seja uma extensão de H por G, isto é, que exista uma sequência exata de grupos do tipo:*

$$1 \to H \to E \to G \to 1.$$

Então existe um subgrupo L de $H \wr G$ tal que $E \simeq L$.

Assim, estudar $H \wr G$ pode ser importante na classificação das extensões de H por G. Para uma demonstração do teorema acima, indicamos o livro de J. J. Rotman [19].

Nesta dissertação concentraremo-nos na investigação das propriedades homológicas de produtos entrelaçados, procurando entender o tipo FP_m e os Σ-invariantes de tais grupos.

3.2 Produtos entrelaçados finitamente apresentáveis

O ponto de partida é o trabalho de Y. de Cornulier [13]. Neste são classificados os produtos entrelaçados finitamente gerados e finitamente apresentáveis. Antes de ver quais foram os resultados obtidos, precisamos de uma definição.

Definição 3.2.1. Sejam G um grupo, X um G-conjunto e $n \geq 1$ um inteiro. A **ação diagonal** de G no produto cartesiano X^n é definida por:

$$g \cdot (x_1, ..., x_n) = (g \cdot x_1, ..., g \cdot x_n),$$

para quaisquer $g \in G$ e $(x_1, ..., x_n) \in X^n$.

Resumimos os resultados que nos interessam do artigo citado no seguinte teorema:

Teorema 3.2.2 (de Cornulier). *Sejam G e $H \neq 1$ grupos e X um G-conjunto não vazio. Denote $\Gamma = H \wr_X G$.*

1. *Γ é finitamente gerado se e somente se as seguintes condições se verificam:*
   - *(a) G e H são finitamente gerados;*
   - *(b) A ação de G em X possui apenas um número finito de órbitas.*
2. *Γ é finitamente apresentável se e somente se as seguintes condições se verificam:*
   - *(a) G e H são finitamente apresentáveis;*
   - *(b) A ação diagonal de G em X^2 possui apenas um número finito de órbitas;*
   - *(c) Os estabilizadores da ação de G em X são finitamente gerados.*

Não demonstraremos aqui tal teorema porque os métodos utilizados não se assemelham com aqueles que empregaremos na sequência. Aos que se interessam indicamos o artigo já citado [13] ou a dissertação [1], na qual os detalhes das demonstrações são esmiuçados.

No próximo capítulo estudaremos uma generalização parcial da parte 1 do teorema 3.2.2 para as propriedades FP_m (lembre-se que um grupo é finitamente gerado se e somente se é de tipo FP_1). Convém antes reescrever a parte 2 do teorema de uma forma mais parecida com o que aparecerá futuramente.

O item (c) claramente pode ser colocado somente em termos da propriedade FP_1 para os subgrupos estabilizadores. Quanto ao item (b), note que a condição dada implica que a ação de G em X também possui apenas um número finito de órbitas. De fato, se $G\backslash X$ e $G\backslash X^2$ são os conjuntos de órbitas das respectivas ações, considere a aplicação $\varphi : G\backslash X \to G\backslash X^2$ definida por: $\varphi([x_0]) = [(x_0, x_0)]$ ($[x_0]$ denota a órbita de $x \in X$ por G e $[(x_0, x_1)]$ denota a órbita de $(x_0, x_1) \in X^2$ pela ação diagonal de G).

É claro que φ é bem definida, pois $g \cdot x_0 = y_0$ implica $g \cdot (x_0, x_0) = (y_0, y_0)$, isto é, $\varphi([x_0])$ não depende da escolha do representante x_0 da classe $[x_0]$. Além disso, φ é injetiva. De fato, se $\varphi([x]) = \varphi([y])$, isto é, se $[(x, x)] = [(y, y)]$, então existe $g \in G$ tal que $(g \cdot x, g \cdot x) = g \cdot (x, x) = (y, y)$. Mas neste caso $g \cdot x = y$, logo $[x] = [y]$.

Em particular, se $G\backslash X^2$ é finito, então $G\backslash X$ também é. Recordamos também que todo grupo é de tipo FP_0. Assim podemos reescrever a parte 2 do teorema 3.2.2 como:

Teorema 3.2.3. *Sejam G e $H \neq 1$ grupos e X um G-conjunto não vazio. Denote $\Gamma = H \wr_X G$. Então Γ é finitamente apresentável se e somente se as seguintes condições se verificam:*

1. *G e H são finitamente apresentáveis;*
2. *A ação diagonal de G em X^i possui apenas um número finito de órbitas para $i = 1, 2$;*
3. *Os estabilizadores da ação de G em X^i são de tipo FP_{2-i} para $i = 1, 2$.*

Os resultados acima motivam a busca por uma caracterização de produtos entrelaçados de tipo FP_m, dado que estas propriedades generalizam "ser finitamente gerado". Seja $\Gamma = H \wr_X G$ um produto entrelaçado. É razoável esperar que G e H serem de tipo FP_m são condições necessárias para que Γ também o seja, mas obviamente não é condição suficiente (nem ao menos com $m = 1$, como já vimos). Os teoremas 3.2.2 e 3.2.3 sugerem que procuremos condições de finitude nas ações de G sobre os produtos X^i, em especial no espaço de órbitas e nos subgrupos estabilizadores.

Um resultado deste tipo é o que foi feito por Bartholdi, de Cornulier e Kochloukova [3], mas com uma certa restrição ao grupo H. Enunciemos o teorema principal de tal artigo:

Teorema 3.2.4 (Bartholdi, de Cornulier, Kochloukova)**.** *Sejam $H \neq 1$ e G grupos, X um G-conjunto não vazio, m um inteiro maior ou igual a 2 e denote $\Gamma = H \wr_X G$.*

1. *Suponha que as condições a seguir se verifiquem:*
   (a) *H e G são de tipo FP_m;*
   (b) *A ação diagonal de G em X^i possui apenas um número finito de órbitas e estabilizadores de tipo FP_{m-i}, para todo $1 \leq i \leq m$.*

Então Γ *é de tipo* FP_m.

2. *A recíproca do item 1 vale nos seguintes casos:* $m = 2$ *ou então* $m > 2$ *e* $\frac{H}{[H,H]}$ *é um grupo infinito.*

O item (b) da parte 1 mostra porque a formulação do teorema 3.2.3 é mais interessante: fixado $m \geq 1$, para estudar o tipo FP_m para Γ devemos analisar a ação de G em X^i para $1 \leq i \leq m$, e não apenas em X^m.

A restrição "$\frac{H}{[H,H]}$ é um grupo infinito" surge quando estudamos o caso particular $H = \mathbb{Z}$, isto é, analisando o produto entrelaçado $\Gamma = \mathbb{Z} \wr_X G$. Podemos a partir dos resultados sobre este grupo obter informações sobre $H \wr_X G$ sempre que $\frac{H}{[H,H]}$ for infinito, como veremos na sequência. Tal abordagem sugere estudar também os grupos do tipo $C_n \wr_X G$ (C_n é o grupo cíclico com n elementos) numa tentativa de estender o resultado, e este é assunto do capítulo 4.

Na próxima seçao daremos uma visão geral do caminho percorrido para a demonstração do teorema 3.2.4. Mostraremos os resultados cujos argumentos podem ser aproveitados no estudo de $C_n \wr_X G$; para os demais explicamos porque isso não acontece.

3.3 Produtos entrelaçados de tipo FP_m

Comecemos estudando produtos semidiretos de maneira geral. Dados um grupo Γ e um subgrupo $G \leq \Gamma$, dizemos que G é um **retrato** de Γ se existe um subgrupo normal $M \lhd \Gamma$ tal que $\Gamma = M \rtimes G$.

Lema 3.3.1. *Sejam* M *e* G *grupos e* $m \geq 1$ *um inteiro. Se* $\Gamma = M \rtimes G$ *é de tipo* FP_m, *então* G *também é de tipo* FP_m.

Demonstração. Pelo teorema 2.1.6, temos que $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo (isto é, Γ é de tipo FP_m) se e somente se $\mathbb{Z}$ é finitamente apresentável como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo e $Tor_i^{\mathbb{Z}\Gamma}(\prod_\lambda \mathbb{Z}\Gamma, \mathbb{Z}) = 0$ para todo $1 \leq i \leq m-1$ e para qualquer conjunto de índices que λ percorra.

Sabemos que $\mathbb{Z}$ é finitamente apresentável como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo se e somente se Γ é de tipo FP_1, ou seja, finitamente gerado. Mas G é um quociente de Γ, então é também finitamente gerado, isto é, $\mathbb{Z}$ é finitamente apresentável como $\mathbb{Z}G$-módulo.

Sejam agora $\prod_\lambda \mathbb{Z}\Gamma$ e $\prod_\lambda \mathbb{Z}G$ produtos diretos sobre um mesmo conjunto de índices. Os homomorfismos de grupos $G \hookrightarrow \Gamma$ (inclusão) e $\Gamma \twoheadrightarrow G$ (projeção canônica) induzem homomorfismos de $\mathbb{Z}G$-módulos $\sigma : \prod_\lambda \mathbb{Z}G \to \prod_\lambda \mathbb{Z}\Gamma$ e $\theta : \prod_\lambda \mathbb{Z}\Gamma \to \prod_\lambda \mathbb{Z}G$, respectivamente. É claro que $\theta \circ \sigma = id$.

Pela funtorialidade de Tor, os homomorfismos σ e θ, por sua vez, induzem:

$$\sigma_* : Tor_j^{\mathbb{Z}G}(\prod_\lambda \mathbb{Z}G, \mathbb{Z}) \to Tor_j^{\mathbb{Z}\Gamma}(\prod_\lambda \mathbb{Z}\Gamma, \mathbb{Z})$$

e

$$\theta_* : Tor_j^{\mathbb{Z}\Gamma}(\prod_\lambda \mathbb{Z}\Gamma, \mathbb{Z}) \to Tor_j^{\mathbb{Z}G}(\prod_\lambda \mathbb{Z}G, \mathbb{Z}),$$

e novamente temos $\theta_* \circ \sigma_* = id$. Assim, $Tor_j^{\mathbb{Z}G}(\prod_\lambda \mathbb{Z}G, \mathbb{Z})$ é um retrato do grupo abeliano $Tor_j^{\mathbb{Z}\Gamma}(\prod_\lambda \mathbb{Z}\Gamma, \mathbb{Z})$ para todo j. Então:

$$Tor_i^{\mathbb{Z}\Gamma}(\prod_\lambda \mathbb{Z}\Gamma, \mathbb{Z}) = 0 \quad \Rightarrow \quad Tor_i^{\mathbb{Z}G}(\prod_\lambda \mathbb{Z}G, \mathbb{Z}) = 0,$$

para todo $1 \leq i \leq m-1$.

Novamente pelo teorema 2.1.6, $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G$-módulo, isto é, G é de tipo FP_m. □

Precisamos encontrar uma forma de relacionar o tipo FP_m de $\mathbb{Z}\Gamma$-módulos com módulos sobre $\mathbb{Z}G$ e $\mathbb{Z}M$. Uma forma de fazer isto é aplicar o lema 2.1.12, que trata de extensões de anéis, para este caso específico.

Corolário 3.3.2. *Sejam G_1 um grupo, $G_2 \leq G_1$ um subgrupo e A um $\mathbb{Z}G_2$-módulo à esquerda. Então A é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G_2$-módulo se e somente se $\mathbb{Z}G_1 \otimes_{\mathbb{Z}G_2} A$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G_1$-módulo.*

Demonstração. Escolha uma transversal T à direita de G_2 em G_1 contendo $1 \in G_1$. Segue que $\mathbb{Z}G_1 = \oplus_{t\in T}\mathbb{Z}G_2 \cdot t$, portanto $\mathbb{Z}G_1$ é $\mathbb{Z}G_2$-módulo livre, logo plano. Defina $\sigma : \mathbb{Z}G_1 \to \mathbb{Z}G_2$ por $\sigma(\sum_t y_t \cdot t) = \sum_t y_t$, para $\sum_t y_t \cdot t \in \oplus_{t\in T}\mathbb{Z}G_2 \cdot t = \mathbb{Z}G_1$, com $y_t \in \mathbb{Z}G_2$ para todo $t \in T$. É claro que σ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}G_2$-módulos satisfazendo $\sigma(y) = y$ para todo $y \in \mathbb{Z}G_2 \cdot 1$. Então o lema 2.1.12 se aplica. □

Combinando os resultados acima, podemos dizer o que significa para um produto semidireto $\Gamma = M \rtimes G$ ser de tipo FP_m em função de M e G. Note que neste caso $\mathbb{Z}M$ pode ser visto como um $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo: G age em M por conjugação e M age sobre si mesmo por multiplicação à esquerda. Claramente $Aug(\mathbb{Z}M)$ é $\mathbb{Z}\Gamma$-submódulo de $\mathbb{Z}M$. Com esta ação, temos:

Lema 3.3.3. *Sejam $m \geq 1$ e $\Gamma = M \rtimes G$ um produto semidireto. Então Γ é de tipo FP_m se e somente se G é de tipo FP_m e $Aug(\mathbb{Z}M)$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo.*

Demonstração. Se Γ é de tipo FP_m, então G é de tipo FP_m pelo lema 3.3.1, isto é, $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G$-módulo. Pela sequência exata curta dada por

$$0 \to Aug(\mathbb{Z}G) \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0,$$

temos que $Aug(\mathbb{Z}G)$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}G$-módulo, pelo lema 2.1.8. Note agora que $\mathbb{Z}\Gamma(Aug(\mathbb{Z}G)) \simeq \mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}G} Aug(\mathbb{Z}G)$ como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo, então pelo lema 2.1.12 temos que

$\mathbb{Z}\Gamma(Aug(\mathbb{Z}G))$ é $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo de tipo FP_{m-1} se e somente se $Aug(\mathbb{Z}G)$ é $\mathbb{Z}G$-módulo de tipo FP_{m-1}. Mas então aplicando novamente o lema 2.1.8 à sequência exata

$$0 \to \mathbb{Z}\Gamma(Aug(\mathbb{Z}G)) \to Aug(\mathbb{Z}\Gamma) \to Aug(\mathbb{Z}M) \to 0 \tag{3.3.1}$$

obtemos também que $Aug(\mathbb{Z}M)$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo, observando que $Aug(\mathbb{Z}\Gamma)$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo.

Reciprocamente, se G é de tipo FP_m e $Aug(\mathbb{Z}M)$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo, então a exatidão de (3.3.1), junto com o lema 2.1.8, nos dá que $Aug(\mathbb{Z}\Gamma)$ é $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo de tipo FP_{m-1}. Aplicando mais uma vez o lema 2.1.8 à sequência dada por:

$$0 \to Aug(\mathbb{Z}\Gamma) \to \mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z} \to 0,$$

obtemos que $\mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo de tipo FP_m, isto é, Γ é de tipo FP_m. □

Antes de aplicar os resultados acima ao caso específico de produtos entrelaçados, definiremos duas classes específicas de $\mathbb{Z}G$-módulos que precisaremos na sequência.

Seja S um $\mathbb{Z}$-módulo livre com base X e suponha que um grupo G aja sobre X. Então S tem uma estrutura natural de $\mathbb{Z}G$-módulo, definida por:

$$g \cdot (\sum_{x \in X} a_x x) = \sum_{x \in X} a_x (g \cdot x), \tag{3.3.2}$$

onde $a_x \in \mathbb{Z}$, $x \in X$ e $g \in G$. Neste caso diremos que S é um $\mathbb{Z}G$-módulo **induzido** e denotaremos $S = \mathbb{Z}X$.

Seja agora V um $\mathbb{Z}$-módulo livre com base Y e denote por $-Y$ o conjunto dos elementos de Y com sinal invertido em V, isto é:

$$-Y = \{-y = (-1)y \in V \mid y \in Y\}.$$

Suponha que um grupo G tenha uma ação definida na união $Y \cup (-Y)$, satisfazendo $g \cdot (-y) = -g \cdot y$ para todos $g \in G$ e $y \in Y$. É claro que cada elemento de V pode ser escrito como $v = \sum_y a_y y$, onde cada a_y é um inteiro *não-negativo* e $y \in Y \cup (-Y)$. Podemos então dar uma estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo a V por:

$$g \cdot v = \sum_y a_y (g \cdot y).$$

Neste caso diremos que V é um $\mathbb{Z}G$-módulo **semi-induzido** e utilizaremos a notação $V = \mathbb{Z}_t Y$. A letra "t" subescrita deve ser entendida como "$\mathbb{Z}$ *torcido*" (do inglês "twisted", originalmente), portanto $\mathbb{Z}_t$ *não* denota $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$.

Observe que todo módulo induzido é, em particular, semi-induzido. De fato, uma ação de G num conjunto X pode ser estendida a uma ação em $X \cup (-X)$ colocando

$g\cdot(-x) = -g\cdot x$ para todo $g \in G$ e $x \in X$. Assim a ação definida em (3.3.2) num $\mathbb{Z}$-módulo livre com base X coincide com àquela dada pela estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo semi-induzido.

Exemplo 3.3.4 (A potência tensorial). Sejam M um $\mathbb{Z}$-módulo livre com base X e $T^k(M)$ sua k-ésima potência tensorial, isto é: $T^1(M) = M$ e $T^k(M) = M \otimes T^{k-1}(M)$ para todo $k > 1$. Sabemos que $T^k(M)$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre cuja base é composta por elementos da forma:

$$t = x_1 \otimes ... \otimes x_k,$$

com $x_j \in X$ para $j = 1, ..., k$. Suponha agora que um grupo G aja em X. Para cada $g \in G$, definimos:

$$g \cdot t = g \cdot (x_1 \otimes ... \otimes x_k) = (g \cdot x_1) \otimes ... \otimes (g \cdot x_k).$$

Como $g \cdot x_j \in X$ para todo j, $T^k(M)$ possui uma estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo induzido: $T^k(M) \simeq \mathbb{Z}(X^k)$, sendo X^k um G-conjunto via ação diagonal.

Exemplo 3.3.5 (A potência exterior). Novamente considere o $\mathbb{Z}$-módulo livre M cuja base X é um G-conjunto. Denote por $\Lambda^k(M)$ a k-ésima potência exterior de M. Como $\mathbb{Z}$-módulo, $\Lambda^k(M)$ é gerado pelos elementos da forma:

$$w = x_1 \wedge ... \wedge x_k, \tag{3.3.3}$$

com $x_j \in X$ para $j = 1, ..., k$.

Fixe uma ordem total $<$ em X. Para cada subconjunto $\{x_1, ..., x_k\} \subseteq X$ e para cada permutação $\sigma \in S_k$, os elementos $w' = x_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(k)}$ e w geram o mesmo $\mathbb{Z}$-submódulo de $\Lambda^k(M)$, já que $x_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(k)} = (sgn(\sigma))(x_1 \wedge ... \wedge x_k)$, sendo $sgn(\sigma)$ o sinal da permutação σ. Seja $Y \subseteq \Lambda^k(M)$ o conjunto de elementos da forma (3.3.3), com $x_1 < ... < x_k$. Pelo raciocínio acima, Y é base para $\Lambda^k(M)$ como $\mathbb{Z}$-módulo livre e, a partir da ação de G em X, podemos definir:

$$g \cdot w = g \cdot (x_1 \wedge ... \wedge x_k) = (g \cdot x_1) \wedge ... \wedge (g \cdot x_k),$$

para cada $g \in G$ e $w = x_1 \wedge ... \wedge x_k \in Y$. Segue que $g \cdot w \in Y \cup (-Y)$, isto é, G age em $Y \cup (-Y)$, munindo $\Lambda^k(M)$ de uma estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo semi-induzido: $\Lambda^k(M) = \mathbb{Z}_t Y$.

O tipo FP_m para módulos semi-induzidos finitamente gerados é completamente caracterizado pelo lema a seguir:

Lema 3.3.6. *Seja $S = \mathbb{Z}_t X$ um $\mathbb{Z}G$-módulo semi-induzido finitamente gerado. Então:*

1. *Existe um conjunto finito I tal que $S \simeq \oplus_{i \in I}(\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_i} V_i)$ como $\mathbb{Z}G$-módulo e para cada $i \in I$ existe $x_i \in X$ com estabilizador G_i pela ação de G tal que $G_i \leq K_i \leq G$*

e $[K_i : G_i] = d_i \in \{1, 2\}$. *Além disso, cada* $V_i \simeq \mathbb{Z}$ *como grupo abeliano,* G_i *age trivialmente em* V_i *e* K_i *age não trivialmente em* V_i *exatamente quando* $d_i = 2$.

2. S *é de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}G$*-módulo* $\Leftrightarrow$ G_i *é de tipo* FP_m *para todo* $i \in I$.

Demonstração. (1) Pela definição de módulo semi-induzido, S é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo se e somente se $X \cup (-X)$ tem apenas um número finito de órbitas pela ação de G. Seja $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X \cup (-X)$ um conjunto de representantes destas órbitas. Como $\mathbb{Z}_t(G \cdot x_i) = \mathbb{Z}_t(G \cdot (-x_i))$, podemos sempre supor que $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$, e neste caso temos que $S \simeq \oplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_t(G \cdot x_i)$. Assim basta mostrar que os itens 1 e 2 valem para cada um dos somandos $\mathbb{Z}_t(G \cdot x_i)$ e o resultado seguirá para o caso geral, pois a soma é finita.

Suponha então que $S = \mathbb{Z}_t X$ seja gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo por um único elemento $x \in X$. Se $G \cdot x \subseteq X$, então S é na verdade um $\mathbb{Z}G$-módulo induzido, logo $S = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G_x} V$, onde V é o grupo abeliano livre gerado por x e o estabilizador de x pela ação de G, G_x, age trivialmente em V. Então o lema vale neste caso.

Assuma agora que $G \cdot x \nsubseteq X$. Então existe $g_1 \in G$ tal que $g_1 \cdot x \notin X$, e logo $g_1 \cdot x = -g_2 \cdot x$ para algum $g_2 \in G$. Tomando $t = g_2^{-1} g_1 \in G$, temos que $t \cdot x = -x$. Segue que:

$$t^2 \cdot x = t \cdot (-x) = -(t \cdot x) = -(-x) = x.$$

Portanto $t^2 \in G_x$. Além disso, se $g \in G_x$, temos:

$$(gt) \cdot x = g \cdot (-x) = -(g \cdot x) = -x = t \cdot x,$$

logo $t^{-1} g t \in G_x$. Definimos então K_x como o subgrupo de G gerado por G_x e t. É claro que G_x é subgrupo normal de índice 2 de K_x.

Considere agora $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G_x$-módulo trivial e defina uma aplicação φ de $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G_x} \mathbb{Z}$ em S por $\varphi(g \otimes 1) = g \cdot x$. Não é difícil ver que φ é bem definida e que é homomorfismo sobrejetivo de $\mathbb{Z}G$-módulos, pois x gera S como $\mathbb{Z}G$-módulo.

Por um lado, temos que $(1 + t) \otimes 1 \in ker(\varphi)$, pois $t \cdot x + x = 0$. Por outro, qualquer relação do tipo $h_1 \cdot x = -h_2 \cdot x$ em S é consequência da relação $t \cdot x = -x$, pois neste caso $(h_2^{-1} h_1)^{-1} t \in G_x$. Então $(1 + t) \otimes 1$ gera $ker(\varphi)$ e $S \simeq \frac{\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G_x} \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}G(1+t) \otimes_{\mathbb{Z}G_x} \mathbb{Z}}$. Reescrevemos

$$\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G_x} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_x} \mathbb{Z}K_x \otimes_{\mathbb{Z}G_x} \mathbb{Z}$$

e

$$\mathbb{Z}G(1 + t) \otimes_{\mathbb{Z}G_x} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_x} \mathbb{Z}K_x(1 + t) \otimes_{\mathbb{Z}G_x} \mathbb{Z}$$

Agora $(\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_x} -)$ é funtor exato, então se A e A' são $\mathbb{Z}K_x$-módulos à esquerda, com $A' \subseteq A$, temos

$$\frac{\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_x} A}{\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_x} A'} \simeq \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_x} (A/A'),$$

logo:

$$\frac{\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_x} \mathbb{Z}K_x \otimes_{\mathbb{Z}G_x} \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_x} \mathbb{Z}K_x(1+t) \otimes_{\mathbb{Z}G_x} \mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_x} (\frac{\mathbb{Z}K_x \otimes_{\mathbb{Z}G_x} \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}K_x(t+1) \otimes_{\mathbb{Z}G_x} \mathbb{Z}}).$$

Basta então definir

$$V_x = \frac{\mathbb{Z}K_x \otimes_{\mathbb{Z}G_x} \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}K_x(t+1) \otimes_{\mathbb{Z}G_x} \mathbb{Z}}$$

e observar que $\mathbb{Z}K_x \otimes_{\mathbb{Z}G_x} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (pois G_x é um subgrupo de índice 2 de K_x) e $\mathbb{Z}K_x(t+1) \otimes_{\mathbb{Z}G_x} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}(1,1) \subseteq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, e assim

$$V_x \simeq \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}(1,1)} \simeq \mathbb{Z},$$

com t agindo via multiplicação por -1.

(2) Seja $S \simeq \oplus_{i\in I}(\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_i} V_i)$, como no item (1). Como o conjunto I é finito, temos que S é de tipo FP_m se e somente se cada $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_i} V_i$ é de tipo FP_m. Pelo lema 2.1.12, $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_i} V_i$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G$-módulo se e somente se V_i é $\mathbb{Z}K_i$-módulo (trivial) de tipo FP_m, isto é, K_i é grupo de tipo FP_m. Como o índice de G_i em K_i é 1 ou 2 (em particular, finito), segue que K_i é grupo de tipo FP_m se e somente se G_i é grupo de tipo FP_m (proposição 2.2.12) e o resultado está demonstrado. □

O resultado acima reduz a tarefa de estudar módulos semi-induzidos de tipo FP_m (reconhecidamente complicada, vide parte (1) do último lema) à análise dos estabilizadores da ação do grupo original. Neste contexto podemos usar algumas ferramentas não disponíveis para módulos, como por exemplo a passagem da propriedade FP_m para subgrupos de índice finito, como foi feito com os grupos G_i e K_i acima. Vamos agora aplicar argumentos deste tipo para estudar o tipo FP_m das potências tensorial e exterior de um $\mathbb{Z}G$-módulo induzido.

Sejam $M = \mathbb{Z}X$ um $\mathbb{Z}G$-módulo induzido e $i \geq 1$ um inteiro. Pelas observações no exemplo 3.3.4, $T^i(M)$ é $\mathbb{Z}G$-módulo induzido com respeito ao G-conjunto X^i (com ação diagonal).

Agora fixe uma ordem total $<$ em X. Se $C = \{x_1, ..., x_i\}$ é um subconjunto de X com exatamente i elementos e tal que $x_1 < ... < x_i$, então para cada $g \in G$ temos que $g \cdot C = \{g \cdot x_1, ..., g \cdot x_i\}$ também é um subconjunto de X com i elementos, mas não é necessariamente verdade que $g \cdot x_1 < ... < g \cdot x_i$. Existe, no entanto, uma permutação $\sigma \in S_i$ tal que $g \cdot x_{\sigma(1)} < ... < g \cdot x_{\sigma(i)}$. Se definirmos

$$g \cdot C = g \cdot \{x_1, ..., x_i\} := (sgn\sigma)\{g \cdot x_{\sigma(1)}, ..., g \cdot x_{\sigma(i)}\},$$

obteremos uma ação de G em $Y_i \cup (-Y_i)$, onde Y_i é o conjunto de subconjuntos ordenados de X com i elementos. É claro agora pelas observações do exemplo 3.3.5 que Y_i pode ser identificado com o conjunto de geradores de $\Lambda^i(M)$, e de modo que $\Lambda^i(M) \simeq \mathbb{Z}_t Y_i$.

Proposição 3.3.7. *Sejam G um grupo, X um G-conjunto, $M = \mathbb{Z}X$ o $\mathbb{Z}G$-módulo induzido e $m \geq 1$ um inteiro. As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. *$\Lambda^i(M)$ é de tipo FP_{m-i} para todo $1 \leq i \leq m$;*

2. *$T^i(M)$ é de tipo FP_{m-i} para todo $1 \leq i \leq m$;*

3. *Todos os estabilizadores da ação diagonal de G em X^i são de tipo FP_{m-i} e $T^i(M)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo, para todo $1 \leq i \leq m$;*

4. *Todos os estabilizadores de subconjuntos de X com i elementos são de tipo FP_{m-i} e $\Lambda^i(M)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo para todo $1 \leq i \leq m$;*

5. *Todos os estabilizadores da ação diagonal de G em X^i são de tipo FP_{m-i} e $G\backslash X^i$ é finito para todo $1 \leq i \leq m$.*

Demonstração. Seja Y_i o conjunto de subconjuntos ordenados de X com i elementos. Como observado acima, $\Lambda^i(M) \simeq \mathbb{Z}_t Y_i$. Assim, pelo lema 3.3.6, $\Lambda^i(M)$ é de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}G$-módulo se e somente se é finitamente gerado e se todos os estabilizadores de elementos de Y_i pela ação de G são de tipo FP_{m-i}. Então (1) é equivalente a (4).

Da mesma forma, já vimos acima que $T^i(M)$ é o $\mathbb{Z}G$-módulo induzido $\mathbb{Z}X^i$, com a ação diagonal de G em X^i. O lema 3.3.6 novamente nos dá que $T^i(M)$ é $\mathbb{Z}G$-módulo de tipo FP_{m-i} se e somente se é finitamente gerado e se todos os estabilizadores de elementos de X^i pela ação de G são de tipo FP_{m-i}, donde (2) e (3) são equivalentes. Agora como $T^i(M) \simeq \mathbb{Z}X^i$ e X^i é base para $T^i(M)$ como $\mathbb{Z}$-módulo, é claro que $T^i(M)$ é $\mathbb{Z}G$-módulo finitamente gerado se e somente se X^i tem somente um número finito de órbitas pela ação de G, isto é, $G\backslash X^i$ é finito. Então (3) e (5) são equivalentes.

Finalmente, o estabilizador G_C de um elemento $C = \{x_1, ..., x_i\} \in Y_i$ pela ação de G consiste em todos os elementos $g \in G$ para os quais $\{g \cdot x_1, ..., g \cdot x_i\}$ é uma permutação par de $\{x_1, ..., x_i\}$. É claro então que tal grupo é subgrupo de índice finito do subgrupo estabilizador G_B do elemento $B = (x_1, ..., x_i) \in X^i$. Assim, pela proposição 2.2.12 temos que G_C é de tipo FP_{m-i} se e somente se G_B é de tipo FP_{m-i}. Além disso, a cada órbita $G \cdot (x_1, ..., x_i)$ em de G em X^i corresponde um número finito de órbitas de $G \cdot \{x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(i)}\}$ de G em Y_i, referentes a um conjunto de permutações $\sigma \in S_i$ para as quais $\{G \cdot \{x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(i)}\}\}_\sigma$ forma um conjunto de órbitas distintas. Mas então $G\backslash X^i$ é finito se e somente se $G\backslash(Y_i \cup -Y_i)$ é finito, isto é, $\Lambda^i(M)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo. Então (5) é equivalente a (4). □

Por fim, antes de partir para a demonstração do teorema 3.2.4, precisamos escrever as suas hipóteses de forma mais conveniente. Dados um conjunto X e $s \geq 1$, seja

$X^{(i_1,...,i_s)}$ o conjunto de s-uplas $(X_1, ..., X_s)$ de subconjuntos de X, disjuntos dois a dois, tais que X_j tem exatamente i_j elementos para todo $1 \leq j \leq s$. Se X possui uma ação por um grupo G, podemos definir uma ação de G em cada $X^{(i_1,...,i_s)}$ também. De fato, se $X_j \cap X_k = \emptyset$, então $g \cdot X_j \cap g \cdot X_k = \emptyset$ também, já que $x \mapsto g \cdot x$ é bijeção de X para todo $g \in G$. Logo tal ação pode ser definida por:

$$g \cdot (X_1, ..., X_s) = (g \cdot X_1, ..., g \cdot X_s).$$

O lema a seguir relaciona tais ações com as ações de G nos conjuntos X^i:

Lema 3.3.8. *Sejam G um grupo e X um G-conjunto. Suponha que a ação de G sobre X^i tenha um número finito de órbitas e estabilizadores de tipo FP_{m-i} para todo $1 \leq i \leq m$. Sejam $s \geq 1$, $i_1, i_2, ..., i_s$ inteiros não-negativos tais que $i_1 + ... + i_s = r \leq m$ e $X^{(i_1,...,i_s)}$ o conjunto definido acima. Então $\mathbb{Z}X^{(i_1,...,i_s)}$ é de tipo FP_{m-r} como $\mathbb{Z}G$-módulo.*

Demonstração. Seja $B \leqslant G$ o estabilizador de $(X_1, ..., X_s) \in X^{(i_1,...,i_s)}$, isto é;

$$B = \{g \in G \mid g \cdot X_j = X_j, 1 \leq j \leq s\}.$$

Seja também $D \leqslant G$ o subgrupo definido por:

$$D = \{g \in G \mid g \cdot (\cup_{j=1}^{s} X_j) = \cup_{j=1}^{s} X_j\}.$$

Como cada X_j é finito, B é subgrupo de índice finito de D. De fato, se $A = \cup_{j=1}^{s} X_j$, então D age diagonalmente em $(\mathscr{P}(A))^s$ e B é exatamente o estabilizador de $(X_1, ..., X_s)$, logo:

$$[D : B] = |D \cdot (X_1, ..., X_s)| \leq |\mathscr{P}(A)|^s < \infty.$$

Considere também o grupo:

$$C = \{g \in G \mid g \cdot x = x \ \forall x \in \cup_{j=1}^{s} X_j\}.$$

Temos que $D \leqslant C$ e o índice $[C : D]$ é novamente finito (já que $\cup_{j=1}^{s} X_j$ é finito), e portanto $[C : B]$ é finito.

Como $| \cup_{j=1}^{s} X_j| = i_1 + ... + i_s = r$, segue que C é o estabilizador do elemento $y = (x)_{x \in \cup X_j} \in X^r$, onde escolhemos uma ordem total em $\cup_{j=1}^{s} X_j$. Temos então por hipótese que C é grupo de tipo FP_{m-r}. Pela proposição 2.2.12, segue que B é de tipo FP_{m-r}.

Observe ainda que $|G \backslash X^r| < \infty$ implica $|G \backslash X^{(i_1,...,i_s)}| < \infty$, donde $\mathbb{Z}X^{(i_1,...,i_s)}$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo. Portanto, pelo lema 3.3.6, $\mathbb{Z}X^{(i_1,...,i_s)}$ é de tipo FP_{m-r} como $\mathbb{Z}G$-módulo. □

Uma das direções do teorema 3.2.4 se resume à seguinte proposição:

Proposição 3.3.9. *Seja* $\Gamma = H \wr_X G$ *um produto entrelaçado e suponha que* H *e* G *sejam de tipo* FP_m *e que* G *aja diagonalmente em* X^i *com um número finito de órbitas e estabilizadores de tipo* FP_{m-i}*, para todo* $1 \leq i \leq m$*. Então* Γ *é de tipo* FP_m*.*

A estratégia para a demonstração da proposição acima é construir uma resolução livre para $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}M$-módulo (onde $\Gamma = M \rtimes G$) a partir de uma resolução livre para $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}H$-módulo (finitamente gerada até dimensão n). Com as hipóteses sobre a ação de G em cada X^i, combinado com o lema 3.3.8, podemos usar tal resolução para estudar $Aug(\mathbb{Z}M)$ como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo, e assim concluir o resultado usando o lema 3.3.3. Optamos por não expor os pormenores aqui porque demonstraremos um resultado análogo posteriormente (na seção 4.1, a saber), quando explicaremos detalhadamente o argumento.

Vejamos como a teoria desenvolvida até aqui pode ser usada para estabelecer as afirmações na direção recíproca. Para tanto, consideremos agora o produto entrelaçado $\Gamma = \mathbb{Z} \wr_X G = M \rtimes G$. Note que a ação de G em X faz de $M = \mathbb{Z}[X]$ um $\mathbb{Z}G$-módulo induzido. Além disso, M é um grupo abeliano livre de torção, e tal informação será de fato essencial, pela existência do seguinte resultado:

Teorema 3.3.10. *Seja* M *um grupo abeliano livre de torção. Então para todo* $i \geq 1$ *existe um isomorfismo natural:*

$$H_i(M; \mathbb{Z}) \simeq \Lambda^i(M).$$

Demonstração. Veja [8], teorema 6.4. □

O resultado acima nos permite relacionar, via proposição 3.3.7, o estudo da ação de G sobre as potências X^i de X com as potências exteriores $\Lambda^i(M)$, que são exatamente as homologias de M com coeficientes em $\mathbb{Z}$ pelo teorema. Obviamente estas últimas aparecem naturalmente no estudo do tipo FP_m de grupos, como visto no capítulo anterior. A utilidade de tal conexão fica evidente quando olhamos os *Complexos de Koszul*. Se M é um grupo abeliano livre de torção, então existe um complexo exato da forma:

$$\mathscr{C} : ... \to \mathbb{Z}M \otimes \Lambda^k(M) \to \mathbb{Z}M \otimes \Lambda^{k-1}(M) \to ... \to \mathbb{Z}M \otimes M \to \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z} \to 0,$$

sendo o diferencial dado por:

$$d(1 \otimes (m_1 \wedge ... \wedge m_k)) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} (1 - m_j) \otimes (m_1 \wedge ... \wedge \widehat{m_j} \wedge ... \wedge m_k).$$

Denominamos $(\mathscr{C}, d)$ o **complexo de Koszul** de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}M$-módulo (para uma demonstração da exatidão de $\mathscr{C}$ e outras propriedades, veja [21]).

Tal complexo pode ser visto também como complexo de $\mathbb{Z}\Gamma$-módulos, por meio dos isomorfismos

$$\mathbb{Z}M \otimes A \simeq \mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}G} A$$

para qualquer $\mathbb{Z}G$-módulo A. Por esse ponto de vista, e usando a estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo semi-induzido de cada $\Lambda^i(M)$, podemos utilizar $\mathscr{C}$ para obter informações sobre $Aug(\mathbb{Z}M)$ como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo, e assim estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 3.3.11. *Sejam M um $\mathbb{Z}G$-módulo induzido finitamente gerado e $\Gamma = M \rtimes G$. Então Γ é de tipo FP_m se e somente se G é de tipo FP_m e $\Lambda^i(M)$ é de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}G$-módulo (via ação diagonal de G) para todo $1 \leq i \leq m$.*

Demonstração. Ver [3]. □

Observe que este resultado é o teorema 3.2.4 no caso $H = \mathbb{Z}$. De fato, se $\Gamma = \mathbb{Z} \wr_X G$ é finitamente gerado, então $\Gamma = M \rtimes G$ com $M = \mathbb{Z}X$, que é $\mathbb{Z}G$-módulo induzido finitamente gerado (já que $G \backslash X$ é finito). Usando a proposição 3.3.7, além do fato de que $\mathbb{Z}$ é grupo de tipo FP_∞, o teorema foi estabelecido.

Vejamos agora como o teorema 3.3.11 pode ser usado para demonstrar a recíproca do teorema 3.2.4. Lembramos que o queremos é mostrar que H é de tipo FP_m e que a ação diagonal de G em X^i tem um número finito de órbitas e estabilizadores de tipo FP_{m-i} para todo $1 \leq i \leq m$, assumindo que $\Gamma = H \wr_X G$ é de tipo FP_m e que uma das seguintes condições se verifica:

(a) $m = 2$;

(b) $m > 2$ e $\frac{H}{[H,H]}$ é um grupo infinito.

O resultado assumindo o item (a) é demonstrado independentemente e é consequência na verdade de outro trabalho:

Lema 3.3.12. *Seja $\Gamma = H \wr_X G$ um grupo com $H \neq 1$ e $X \neq \emptyset$. Então Γ é de tipo FP_2 se e somente se H e G são de tipo FP_2 e G age diagonalmente em X^i com um número finito de órbitas e com estabilizadores de tipo FP_{2-i}, para $i = 1, 2$.*

Demonstração. Pelo que já foi feito, resta mostrar que se Γ é de tipo FP_2 então todas as outras condições se verificam. Isto segue do argumento da proposição 4.9 de [7]. □

Sejam agora $m > 2$ e $H_{ab} := \frac{H}{[H,H]}$ um grupo infinito e suponha que $\Gamma = H \wr_X G$ seja de tipo FP_m. Em particular, Γ é finitamente gerado, e pelo teorema 3.2.2, H também é. Então H_{ab} é do tipo $H_{ab} \simeq \mathbb{Z}^r \times T$, para um grupo finito T e $r > 0$. Segue que existe um epimorfismo $\psi : H \to \mathbb{Z}$ (basta tomar o epimorfismo canônico $H \twoheadrightarrow H_{ab}$ e compor com a projeção em uma das componentes cíclicas infinitas de $\mathbb{Z}^r \times T$).

Claramente a seguinte sequência de grupos é exata:

$$1 \to ker(\psi) \to H \to \mathbb{Z} \to 1.$$

Além disso, tal sequência é cindida, pois $\mathbb{Z}$ é grupo livre. Então $\mathbb{Z}$ é retrato de H, e logo $\mathbb{Z} \wr_X G$ é retrato de $H \wr_X G$. Agora pelo lema 3.3.1, $\mathbb{Z} \wr_X G$ é também de tipo FP_m, e pelo teorema 3.3.11, $\Lambda^i(M)$ é de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}G$-módulo (via ação diagonal de G) para todo $1 \leq i \leq m$. Aplicando a proposição 3.3.7, obtemos a seguinte proposição:

Proposição 3.3.13. *Sejam $m > 2$ e $\Gamma = H \wr_X G$ um produto entrelaçado de tipo FP_m. Suponha que H_{ab} seja infinito. Então G age diagonalmente em X^i com estabilizadores de tipo FP_{m-i} e com um número finito de órbitas para todo $1 \leq i \leq m$.*

E por fim:

Proposição 3.3.14. *Sejam $m \geq 1$ e $\Gamma = H \wr_X G$ um grupo de tipo FP_m, com $H \neq 1$, $X \neq \emptyset$ e H de tipo FP_{m-1}. Suponha ainda que a ação de G em X^i tenha estabilizadores de tipo FP_{m-i} e um número finito de órbitas para $1 \leq i \leq m$. Então H é de tipo FP_m.*

Demonstração. Ver [3], proposição 5.2. □

Finalmente, suponha que $m \geq 2$ e que Γ é de tipo FP_m. Se $m = 2$, já temos pelo lema 3.3.12 que H e G são de tipo FP_2 e que G age diagonalmente em X^i com um número finito de órbitas e com estabilizadores de tipo FP_{2-i}, para $i = 1, 2$.

Suponha agora que $m > 2$ e que H_{ab} é um grupo infinito. Assuma indutivamente que o item 2 do teorema 3.2.4 seja verdadeiro para valores menores de m. Pelo lema 3.3.1, já sabemos que G é de tipo FP_m. Além disso, a proposição 3.3.13 nos diz que G age diagonalmente em X^i com estabilizadores de tipo FP_{m-i} e com um número finito de órbitas para todo $1 \leq i \leq m$. Agora como Γ é de tipo FP_m, logo de tipo FP_{m-1}, temos pela hipótese de indução que H é de tipo FP_{m-1}. Mas então pela proposição 3.3.14 temos que H é de tipo FP_m, o que demonstra o item 2 do teorema 3.2.4.

3.4 Exemplos

O teorema 3.2.4 estabelece condições suficientes para que um produto entrelaçado $H \wr_X G$ seja de tipo FP_m, o que nos dá um método de construir novos grupos de tipo FP_m a partir de outros que já conhecemos. Tal tarefa esbarra, no entanto, na dificuldade de se encontrar grupos G, junto com G-conjuntos X, que satisfaçam as hipóteses do teorema. Relembrando, precisamos de um grupo G e de um G-conjunto X tais que:

1. G é de tipo FP_m;

2. A ação diagonal de G em X^i tem um número finito de órbitas e estabilizadores de tipo FP_{m-i}, para todo $1 \leq i \leq m$.

Sob estas condições, $H \wr_X G$ é de tipo FP_m para qualquer grupo H de tipo FP_m. Definiremos a seguir o *Grupo F de Thompson*, que nos dará um exemplo onde a situação acima ocorre.

Seja D o subconjunto do intervalo unitário $[0,1]$ composto por todos os elementos da forma $\frac{p}{2^q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Cada elemento desta forma é chamado um **racional diádico** de $[0,1]$. Seja F o conjunto de homeomorfismos $f : [0,1] \to [0,1]$ satisfazendo as seguintes condições:

1. $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$;

2. Existem elementos $d_0, d_1, ..., d_n \in D$, com $0 = d_0 < d_1 < ... < d_n = 1$, tais que $f|_{[d_i,d_{i+1}]}$ é uma função afim e tem como inclinação uma potência de 2 (isto é, existem $a_i \in \mathbb{Z}$ e $b_i \in \mathbb{Q}$ tais que $f|_{[d_i,d_{i+1}]}(x) = (2^{a_i})x + b_i$, para cada i).

Aplicando uma função f como acima nos pontos $d_0, d_1, ..., d_n$, é fácil ver que os racionais b_i devem ser também elementos de D. Além disso, a condição 2 pode ser reinterpretada da seguinte forma: f é diferenciável em $(0,1)$ a menos do conjunto $\{d_1, ..., d_{n-1}\}$, e nos intervalos $[d_i, d_{i+1}]$, f tem derivada constante e igual a uma potência de 2.

Lema 3.4.1. *O conjunto F definido acima é um grupo sob a operação de composição de funções.*

Demonstração. Se $f, g \in F$, é claro que $f \circ g(0) = 0$ e $f \circ g(1) = 1$. Além disso, se f e g são diferenciáveis em $(0,1)$ a menos de subconjuntos finitos de D, então o mesmo pode ser dito de $f \circ g$ pela regra da cadeia, que também nos dá a condição sobre a derivada de $f \circ g$ nos intervalos de definição, logo $f \circ g \in F$.

É claro que se $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, então $f^{-1}(0) = 0$ e $f^{-1}(1) = 1$. Se f é diferenciável em $(0,1)$ a menos de $\{d_1, ..., d_{n-1}\}$, então f^{-1} só deixa de ser diferenciável em $\{f(d_1), ..., f(d_{n-1})\}$ (que também é um conjunto de racionais diádicos!), e suas derivadas, onde definidas, são o inverso de derivadas de f, logo também são potências de 2. Portanto $f^{-1} \in F$. $\square$

Definição 3.4.2. O grupo definido acima é o chamado **Grupo F de Thompson**.

Note que a definição de F automaticamente nos dá uma ação deste grupo sobre o conjunto D. De fato, se $d = \frac{p}{2^q} \in D$ e $f \in F$, então existem $a \in \mathbb{Z}$ e $b = \frac{p'}{2^{q'}} \in D$ tais que:

$$f(d) = 2^a(\frac{p}{2^q}) + \frac{p'}{2^{q'}} = \frac{2^{q'}p + 2^{q-a}p'}{2^{q+q'-a}} \in D,$$

então $f(D) \subseteq D$. Aplicando o mesmo raciocínio a f^{-1}, segue que $D \subseteq f(D)$, logo $f(D) = D$. Então F é um grupo de bijeções de D.

É possível mostrar que F é um grupo gerado por dois elementos A e B, definidos como a seguir:

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{4} & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 2x - 1 & \text{se } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

e

$$B(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4} & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ x - \frac{1}{8} & \text{se } \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{8} \\ 2x - 1 & \text{se } \frac{7}{8} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Então F é finitamente gerado, isto é, de tipo FP_1. Na verdade podemos mostrar que F é um grupo de tipo FP_∞, como feito por K. Brown e R. Geoghegan [10].

Agora dado $i \geq 1$, a ação diagonal de F em D^i tem um número finito de órbitas. De fato, dois elementos $(d_1, ..., d_i)$ e $(c_1, ..., c_i)$ de D^i estão em uma mesma órbita por F se e somente se existe uma permutação σ do conjunto $\{1, ..., i\}$ tal que $d_{\sigma(1)} \leq ... \leq d_{\sigma(i)}$, $c_{\sigma(1)} \leq ... \leq c_{\sigma(i)}$ e $d_{\sigma(j)} = d_{\sigma(j+1)}$ se e somente se $c_{\sigma(j)} = c_{\sigma(j+1)}$, para cada j. Claramente isto se reduz ao um número finito de combinações, donde $F \backslash D^i$ é finito.

Consideremos agora os estabilizadores da ação. Dado $w = (d_1, ..., d_i) \in D^i$, sejam $d_{j_1} < ... < d_{j_k}$ os elementos distintos que aparecem na i-upla w. Então o subgrupo estabilizador F_w é isomorfo a F^{k+1}. De fato, os elementos de F_w podem ser vistos como a justaposição de $k+1$ elementos de F com domínio e imagem comprimidos nos intervalos $[0, d_{j_1}]$, $[d_{j_t}, d_{j_{t+1}}]$ e $[d_{j_k}, 1]$, para $t = 1, ..., k-1$. Segue que todos os estabilizadores são de tipo FP_∞: como F é de tipo FP_∞, F^2 também é pela proposição 2.2.14, e o mesmo ainda vale para qualquer F^{k+1} por indução finita.

Por todas as considerações acima e pelo teorema 3.2.4, um produto entrelaçado da forma $H \wr_D F$ é de tipo FP_m se e somente se H é de tipo FP_m. Observe que não precisamos fazer a hipótese sobre a abelianização de H, pois já conhecemos a ação de F em D^i, logo a proposição 3.3.14 se aplica. Podemos ainda combinar isto com o exemplo 2.2.10: se H_n é o n-ésimo grupo de Houghton, então $H_n \wr_D F$ é de tipo FP_{n-1}, mas não é de tipo FP_n.

O grupo F de Thompson é fonte rica de exemplos e contra-exemplos em teoria de grupos em suas diversas abordagens, como ilustrado acima. Ao leitor interessado em outras particularidades de F indicamos as notas de Cannon, Floyd e Parry [11].

3.5 Outras considerações

A demonstração da recíproca do teorema 3.2.4, como esboçada na seção 3.3, depende diretamente do seguinte fato: quando H_{ab} é um grupo infinito, $\mathbb{Z} \wr_X G$ é um retrato de $H \wr_X G$. Com isso, podemos passar informações de $\mathbb{Z} \wr_X G$ (que pode ser estudado separadamente) para $H \wr_X G$, e isso é o que nos permite completar a demonstração.

Tal abordagem sugere considerar também separadamente produtos entrelaçados do tipo $C_n \wr_X G$, onde C_n é o grupo cíclico com n elementos. Idealmente obteríamos um resultado semelhante ao teorema 3.3.11, e poderíamos usar isto no estudo de grupos da forma $H \wr_X G$, sendo C_n um retrato de H. Tal tentativa esbarra na ausência de um teorema como 3.3.10 para este caso: não conhecemos bem as homologias $H_i(C_n[X];\mathbb{Z})$, em contraste a $H_i(\mathbb{Z}X;\mathbb{Z})$.

No capítulo que segue tratamos o problema colocado acima, obtendo resultados levemente distintos do que esperávamos, pois os caminhos naturais nos levaram a considerar a propriedade FP_m para o módulo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (ao invés de $\mathbb{Z}$), assim como as homologias de grupo com coeficientes em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Capítulo 4

Propriedades Homológicas de $\Gamma = C_n \wr_X G$

Este capítulo é a parte principal desta dissertação. Como anunciado, estudaremos propriedades homológicas de grupos da forma $C_n \wr_X G$, começando com o tipo FP_m. Naturalmente aqui o texto se torna mais técnico, em oposição à abordagem panorâmica do capítulo anterior.

4.1 Tipo FP_m

Seja n um inteiro positivo. Denotaremos por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ o anel dos inteiros módulo n. Se Q é um grupo qualquer, diremos "$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}Q$-módulo" e ficará implícito que a ação de Q em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é trivial.

O resultado a seguir pode ser adaptado diretamente do lema 3.3.1, trocando-se $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Repetimos o argumento para enfatizar os cuidados necessários na adaptação.

Lema 4.1.1. *Seja $\Gamma = M \rtimes G$ um produto semidireto. Se $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo, então $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G$-módulo.*

Demonstração. Pelo teorema 2.1.6, temos que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo se e somente se $Tor_i^{\mathbb{Z}\Gamma}(\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{Z}\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ para qualquer conjunto de índices Λ e para todo $1 \leq i \leq m-1$ e se $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é finitamente apresentável como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo.

Seja

$$F_1 \to F_0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

uma resolução livre parcial (isto é, o início de uma resolução livre) de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo, com F_0 e F_1 finitamente gerados. Aplicando o funtor $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} -$ (que é exato à direita) obtemos uma resolução livre parcial finitamente gerada de $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo, que portanto é finitamente apresentável. Mas $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulos, já que Γ e G agem trivialmente em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Então $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é finitamente apresentável como $\mathbb{Z}G$-módulo.

Sejam agora $\prod_\lambda \mathbb{Z}\Gamma$ e $\prod_\lambda \mathbb{Z}G$ produtos diretos sobre um mesmo conjunto de índices. Os homomorfismos de grupos $G \hookrightarrow \Gamma$ (inclusão) e $\Gamma \twoheadrightarrow G$ (projeção canônica) induzem homomorfismos de $\mathbb{Z}G$-módulos $\sigma : \prod_\lambda \mathbb{Z}G \to \prod_\lambda \mathbb{Z}\Gamma$ e $\theta : \prod_\lambda \mathbb{Z}\Gamma \to \prod_\lambda \mathbb{Z}G$, respectivamente, com $\theta \circ \sigma = id$. Pela funtorialidade de Tor, os homomorfismos σ e θ, por sua vez, induzem:

$$\sigma_* : Tor_j^{\mathbb{Z}G}(\prod_\lambda \mathbb{Z}G, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to Tor_j^{\mathbb{Z}\Gamma}(\prod_\lambda \mathbb{Z}\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

e

$$\theta_* : Tor_j^{\mathbb{Z}\Gamma}(\prod_\lambda \mathbb{Z}\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to Tor_j^{\mathbb{Z}G}(\prod_\lambda \mathbb{Z}G, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

e mais uma vez $\theta_* \circ \sigma_* = id$. Então:

$$Tor_i^{\mathbb{Z}\Gamma}(\prod_\lambda \mathbb{Z}\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0 \quad \Rightarrow \quad Tor_i^{\mathbb{Z}G}(\prod_\lambda \mathbb{Z}G, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0,$$

para todo $1 \leq i \leq m-1$. Pelo teorema 2.1.6, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G$-módulo. $\square$

Na sequência utilizaremos com frequência o truque de aplicar o funtor $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes -$ a um complexo exato de $\mathbb{Z}$-módulos, então vejamos um fato geral. Suponha que

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

seja uma sequência exata de $\mathbb{Z}$-módulos, e que C seja um $\mathbb{Z}$-módulo *livre* (portanto *plano*, em particular). Tomando a sequência exata longa em $Tor_*^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, -)$, obtemos:

$$... \to Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, C) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes A \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes B \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes C \to 0.$$

Mas $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, C) = 0$ pelo lema 1.7.17, então a sequência

$$0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes A \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes B \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes C \to 0$$

é também exata. Assim, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes -$ preserva sequências exatas curtas, desde que o último módulo seja livre (ou, de forma mais geral, plano).

Consideremos agora, como no capítulo anterior, a ação de $\Gamma = M \rtimes G$ em $\mathbb{Z}M$. Lembramos que G age sobre M por conjugação, enquanto M age sobre si mesmo por multiplicação à esquerda. Novamente, $Aug(\mathbb{Z}M)$ é $\mathbb{Z}\Gamma$-submódulo de $\mathbb{Z}M$. A partir desta ação poderemos ver o produto tensorial $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes Aug(\mathbb{Z}M)$ como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo, onde Γ age na componente de $Aug(\mathbb{Z}M)$ dos elementos geradores:

$$\gamma \cdot (\bar{k} \otimes y) = \bar{k} \otimes (\gamma \cdot y),$$

para quaisquer $\bar{k} \otimes y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes Aug(\mathbb{Z}M)$ e $\gamma \in \Gamma$. Tal ação é a que aparece naturalmente no lema a seguir.

Lema 4.1.2. *Sejam* $\Gamma = M \rtimes G$ *um produto semidireto e* n *um inteiro positivo. Então* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}\Gamma$*-módulo se e somente se* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}G$*-módulo e* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}M)$ *é de tipo* FP_{m-1} *como* $\mathbb{Z}\Gamma$*-módulo.*

Demonstração. Suponha que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ seja de tipo FP_m como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo. Pelo lema 4.1.1, já sabemos que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G$-módulo. Considere a sequência exata de $\mathbb{Z}\Gamma$-módulos dada por

$$0 \to Aug(\mathbb{Z}\Gamma) \to \mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Aplicando $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes -$, obtemos uma nova sequência exata:

$$0 \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}\Gamma) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0. \tag{4.1.1}$$

Note agora que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}\Gamma$ é de tipo FP_∞ como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo. De fato, basta tomar a sequência exata

$$0 \to \mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z}\Gamma \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}\Gamma \to 0$$

de $\mathbb{Z}\Gamma$-módulos (o homomorfismo $\mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z}\Gamma$ é a multiplicação por n) e aplicar o lema 2.1.8. Segue então também pelo lema 2.1.8, aplicado à sequência (4.1.1), que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo se e somente se $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}\Gamma)$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo.

Agora da inclusão $\mathbb{Z}\Gamma Aug(\mathbb{Z}G) \hookrightarrow Aug(\mathbb{Z}\Gamma)$, obtemos uma sequência exata de $\mathbb{Z}\Gamma$-módulos:

$$0 \to \mathbb{Z}\Gamma Aug(\mathbb{Z}G) \to Aug(\mathbb{Z}\Gamma) \to Aug(\mathbb{Z}M) \to 0.$$

Note que $Aug(\mathbb{Z}M)$ é livre como $\mathbb{Z}$-módulo, então a seguinte sequência também é exata:

$$0 \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}\Gamma Aug(\mathbb{Z}G) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}\Gamma) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}M) \to 0. \tag{4.1.2}$$

Agora:

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}\Gamma Aug(\mathbb{Z}G) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}G} Aug(\mathbb{Z}G)) \simeq \mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}G} ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}G))$$

como $\mathbb{Z}G$-módulos. Como já sabemos pelo lema 4.1.1, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G$-módulo, logo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}G)$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}G$-módulo, pelo mesmo raciocínio aplicado acima ao grupo Γ. Segue que $\mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}G} ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}G))$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo. Por fim, lembrando que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}\Gamma)$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo, aplicando o lema 2.1.8 na sequência (4.1.2) obtemos que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}M)$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo.

Reciprocamente, se $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G$-módulo, então o $\mathbb{Z}G$-módulo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}G)$ é de tipo FP_{m-1}, e logo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}\Gamma Aug(\mathbb{Z}G)$ é de tipo FP_{m-1} como

$\mathbb{Z}\Gamma$-módulo. Como $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}M)$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo também por hipótese, aplicando novamente o lema 2.1.8 à sequência (4.1.2), temos que o $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}\Gamma)$ é de tipo FP_{m-1}, donde $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo. $\square$

Os dois resultados acima são aplicáveis em particular a $\Gamma = C_n \wr_X G$, nosso objeto de estudo. Neste caso, $\Gamma = M \rtimes G$, onde $M = \oplus_{x \in X} C_n$. Os lemas indicam que devemos estudar a ação do grupo Γ em $Aug(\mathbb{Z}M)$ ou, mais especificamente, em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes Aug(\mathbb{Z}M)$. Para tanto, precisamos de uma resolução projetiva de tal módulo, que será obtida a partir de uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[C_n]$-módulo.

Para simplificar a escrita, denote C_n por H e seja $h_0 \in H$ um gerador. Existe uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}H$-módulo com exatamente um gerador em cada dimensão:

$$\mathscr{R} : ... \to \mathbb{Z}H \otimes \mathbb{Z}Y_i \to \mathbb{Z}H \otimes \mathbb{Z}Y_{i-1} \to ... \to \mathbb{Z}H \otimes \mathbb{Z}Y_1 \to \mathbb{Z}H \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Cada Y_i é um conjunto unitário, digamos $Y_i = \{t_i\}$. Os diferenciais são definidos nos geradores da seguinte forma:

1. $d_0 : \mathbb{Z}H \to \mathbb{Z}$ é a aplicação de aumento;
2. $d_1(1 \otimes t_1) = h_0 - 1$;
3. $d_{2j}(1 \otimes t_{2j}) = (1 + h_0 + ... + h_0^{n-1}) \otimes t_{2j-1}$ se $j > 0$;
4. $d_{2j+1}(1 \otimes t_{2j+1}) = (h_0 - 1) \otimes t_{2j}$ se $j > 0$.

Uma demonstração da exatidão de $\mathscr{R}$ pode ser encontrada no livro de J. J. Rotman [18], lema 9.26.

Na sequência utilizaremos tal resolução para construir uma resolução livre para $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}M$-módulo, e então obter informações sobre as homologias de M com coeficientes em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Note que esta é a nossa alternativa ao complexo de Koszul, que, conforme descrito no capítulo anterior, é utilizado para estudar as homologias de M com coeficientes em $\mathbb{Z}$ no caso em que M é livre de torção.

Lema 4.1.3. *Seja $\mathscr{R}$ a resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}H$-módulo definida acima. Então existe uma resolução livre $\mathscr{F}$ de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}M$-módulo da forma*

$$\mathscr{F} : ... \to \mathbb{Z}M \otimes W_i \to \mathbb{Z}M \otimes W_{i-1} \to ... \to \mathbb{Z}M \otimes W_1 \to \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Cada W_i é o $\mathbb{Z}$-módulo livre com base Z_i definida por:

$$Z_i = \bigcup_s (Y_1^{i_1}) \times ... \times (Y_s^{i_s}) \times X^{(i_1, ..., i_s)},$$

sendo a união tomada sob o conjunto de todos os números inteiros $s \geq 1$ *e* $i_1, ..., i_s \geq 0$ *tais que* $i_1 + 2i_2 + ... + si_s = i$*. O conjunto* $X^{(i_1,...,i_s)}$ *consiste em todas as* s*-uplas* $(X_1, ..., X_s)$ *de subconjuntos de* X*, disjuntos dois a dois, tais que* X_j *tem exatamente* i_j *elementos para cada* $1 \leq j \leq s$*.*

Demonstração. A construção a seguir é encontrada no artigo [3], proposição 5.1.

Seja $\mathscr{R}$ a resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}H$-módulo descrita antes do lema. Para cada $x \in X$, denote por $\mathscr{R}_x$ uma cópia de $\mathscr{R}$ (que é vista como resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}H_x$-módulo, para uma cópia H_x de H), e seja $\mathscr{R}_x^{del}$ a resolução apagada respectiva.

Considere uma ordem total $<$ definida no conjunto X. Para cada subconjunto finito $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$, com $x_1 < x_2 < ... < x_n$, o produto tensorial $\mathscr{R}_{x_1}^{del} \otimes ... \otimes \mathscr{R}_{x_n}^{del}$ é bem definido (note que a ordem dos elementos x_j foi mantida). Agora o conjunto dos subconjuntos finitos de X é parcialmente ordenado pela inclusão, e desta forma a associação $\{x_1, ..., x_n\} \mapsto \mathscr{R}_{x_1}^{del} \otimes ... \otimes \mathscr{R}_{x_n}^{del}$ nos dá um sistema direto de complexos de $\mathbb{Z}$-módulos.

Seja $\tilde{\mathscr{F}}$ o limite direto de tal sistema direto. Pelas definições de produto tensorial de complexos e de limite direto, $\tilde{\mathscr{F}}$ é do tipo:

$$\tilde{\mathscr{F}} : ... \to \mathbb{Z}M \otimes W_i \to \mathbb{Z}M \otimes W_{i-1} \to ... \to \mathbb{Z}M \otimes W_1 \to \mathbb{Z}M \to 0.$$

Cada W_i é o $\mathbb{Z}$-módulo livre com base Z_i definida por:

$$Z_i = \bigcup_s (Y_i^{i_1}) \times ... \times (Y_s^{i_s}) \times X^{(i_1,...,i_s)},$$

sendo a união tomada sob o conjunto de todos os números inteiros $s \geq 1$ e $i_1, ..., i_s \geq 0$ tais que $i_1 + 2i_2 + ... + si_s = i$. O conjunto $X^{(i_1,...,i_s)}$ é composto por todas as s-uplas $(X_1, ..., X_s)$ de subconjuntos de X, disjuntos dois a dois, tais que X_j tem exatamente i_j elementos para todo $1 \leq j \leq s$.

Agora a imagem de $\mathbb{Z}M \otimes W_1 \to \mathbb{Z}M$ é exatamente o ideal $Aug(\mathbb{Z}M)$; basta ver a definição do diferencial de um produto tensorial de complexos (e esta nos dá a definição do diferencial no limite direto) e notar que em cada uma das cópias $\mathscr{R}_x^{del}$ o homomorfismo $\mathbb{Z}H_x \otimes \mathbb{Z}Y_1 \to \mathbb{Z}H_x$ tem como imagem o ideal $Aug(\mathbb{Z}H_x)$. Além disso, pela fórmula de Künneth e usando que $\varinjlim$ neste caso é funtor exato, $\tilde{\mathscr{F}}$ é exato em $\mathbb{Z}M \otimes W_i$ para todo $i \geq 1$. Assim, acrescentando o $\mathbb{Z}M$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ ao final do complexo, obtemos uma resolução livre do mesmo:

$$\mathscr{F} : ... \to \mathbb{Z}M \otimes W_i \to \mathbb{Z}M \otimes W_{i-1} \to ... \to \mathbb{Z}M \otimes W_1 \to \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z} \to 0, \qquad (4.1.3)$$

como queríamos. □

Introduziremos uma nova notação para ver o que são os diferenciais de $\mathscr{F}$.

Um **produto geral** é um elemento da forma $y_1...y_jx_1...x_j$, com $x_1 < ... < x_j$ elementos de X e $y_k \in \cup_i Y_i$. Existe uma bijeção entre o conjunto de todos estes elementos e $\cup_i Z_i$. O produto geral $y_1...y_jx_1...x_j$ corresponde ao elemento $B_1 \times ... \times B_s \times (X_1, ..., X_s) \in Z_i$, onde $X_r = \{x_t \in X \mid y_t \in Y_r\}$, e se $X_r = \{x_{i_1}, ..., x_{i_r}\}$, com $x_{i_1} < ... < x_{i_r}$, então $B_r = (y_{i_1}, ..., y_{i_r}) \in Y_r^{i_r}$.

Intuitivamente, $y_1...y_jx_1...x_j$ representa um produto tensorial dos elementos $y_1, ..., y_j$ tirados dos Y_k (bases dos módulos de $\mathscr{R}$), e os $x_1, ..., x_j$ indicam de qual cópia $\mathscr{R}_x$ de $\mathscr{R}$ o y_k respectivo foi tirado.

Será conveniente considerar elementos da forma $y_1...y_jx_1...x_j$, sem a imposição de que $x_1 < ... < x_j$. Para tanto definimos:

$$y_1...y_jx_1...x_j = (-1)^{deg(y_i)deg(y_{i+1})}y_1...y_{i+1}y_i...y_jx_1...x_{i+1}x_i...x_j.$$

Sejam $x \in X$ e ∂_x o diferencial de $\mathscr{R}_x$. Lembre-se que cada produto tensorial da forma $\mathscr{R}_{x_1}^{del} \otimes ... \otimes \mathscr{R}_{x_n}^{del}$ tem diferencial dado (veja a definição 1.6.4) por:

$$d(r_1 \otimes ... \otimes r_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{deg(r_1)+...+deg(r_j)} r_1 \otimes ... \otimes \partial_{x_j}(r_j) \otimes ... \otimes r_n,$$

para todo $r_1 \otimes ... \otimes r_n \in \mathscr{R}_{x_1}^{del} \otimes ... \otimes \mathscr{R}_{x_n}^{del}$. Com as observações acima, não é difícil ver que os diferenciais de $\mathscr{F}$, definidos nos produtos gerais, são:

$$\begin{aligned} d(y_1...y_jx_1...x_j) = &\sum_{deg(y_i)=1} (-1)^{deg(y_1)+...+deg(y_i)} y_1...\partial_{x_i}(y_i)...y_jx_1...\hat{x}_i...x_j \\ &+ \sum_{deg(y_i)\geq 2} (-1)^{deg(y_1)+...+deg(y_i)} y_1...\partial_{x_i}(y_i)....y_jx_1...x_i...x_j. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Conhecendo os diferenciais do complexo $\mathscr{F}$, podemos finalmente utilizá-lo para estudar as homologias de M com coeficientes em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Lema 4.1.4. *Sejam* $n \geq 1$, $\Gamma = C_n \wr_X G$ *e* $M = \oplus_{x \in X} C_n \subseteq \Gamma$. *Então*

$$H_i(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes W_i$$

para todo $i \geq 1$, *sendo* W_i *o* $\mathbb{Z}$*-módulo definido no lema 4.1.3.*

Demonstração. Seja $\mathscr{F}$ a resolução do lema 4.1.3. Note que o complexo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathscr{F}$ tem diferenciais nulos. De fato, pelas definições dos diferenciais ∂_x, a imagem de um produto geral pelo diferencial de $\mathscr{F}$ é soma de elementos da forma $(h_{0,x} - 1) \otimes w$ ou $(1 + h_{0,x} + ... + h_{0,x}^{n-1}) \otimes w$, com $w \in W_j$ ($h_{0,x}$ é um gerador da cópia $H_x \simeq C_n$). Aplicando $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}M} -$ o coeficiente $h_{0,x} - 1$ se anula, pois:

$$\bar{m} \otimes_{\mathbb{Z}M} (h_{0,x} - 1) \otimes w = (h_{0,x} - 1) \cdot \bar{m} \otimes_{\mathbb{Z}M} 1 \otimes w = 0,$$

para todo $\bar{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e $w \in W_j$, já que $(h_0 - 1) \cdot \bar{m} = 0$ (a ação de M em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é trivial). Da mesma forma, temos:

$$\bar{m} \otimes_{\mathbb{Z}M} (1 + h_{0,x} + ... + h_{0,x}^{n-1}) \otimes w = (1 + h_{0,x} + ... + h_{0,x}^{n-1}) \cdot \bar{m} \otimes_{\mathbb{Z}M} 1 \otimes w = 0,$$

pois $(1 + h_{0,x} + ... + h_{0,x}^{n-1}) \cdot \bar{m} = n\bar{m} = 0$ em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Então $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathscr{F}$ tem diferenciais nulos. Segue que:

$$H_i(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq Tor_i^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = H_i((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathscr{F}^{del}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i,$$

como queríamos. □

O resultado do lema acima evidencia a existência de uma estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo em cada $H_i(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, com $i \geq 1$. De fato, a ação de G em X define uma ação de G no conjunto $Z_i \cup -Z_i$ de produtos gerais:

$$g \cdot (y_1 ... y_j x_1 ... x_j) = y_1 ... y_j (g \cdot x_1) ... (g \cdot x_j),$$

para todo $g \in G$, $x_j \in X$ e $y_j \in \cup_i Y_i$. Intuitivamente, G permuta os complexos dos quais cada um dos geradores y_k vem. Como Z_i é uma base de W_i como $\mathbb{Z}$-módulo, isto define em W_i uma estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo semi-induzido, como definido no capítulo anterior. Assim, $H_i(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i$ é $\mathbb{Z}G$-módulo se definimos:

$$g \cdot (\bar{k} \otimes w) = \bar{k} \otimes g \cdot w$$

para todo $g \in G$, $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e $w \in W_i$.

Estudar as propriedades homológicas de $H_i(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ como $\mathbb{Z}G$-módulo é o caminho para obter informações sobre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes Aug(\mathbb{Z}M)$. Começaremos no lema a seguir com a propriedade FP_m para $H_1(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ que servirá como base para indução finita na sequência. Note que:

$$H_1(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes H_1(M; \mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes M.$$

Agora como M é abeliano, se $\Omega = Aug(\mathbb{Z}M)$, então $M \simeq \Omega/\Omega^2 \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \Omega$, logo:

$$H_1(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \Omega \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}M} \Omega.$$

Os argumentos acima nos permitem trabalhar com $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \Omega$, o que se mostra mais conveniente, como veremos.

Lema 4.1.5. *Sejam $\Gamma = C_n \wr_X G$ e $M = \oplus_{x \in X} C_n \subseteq \Gamma$ e suponha que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ seja de tipo FP_m como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo. Suponha ainda que $H_j(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ seja de tipo FP_{m-j-1} como*

$\mathbb{Z}G$-módulo, para todo $1 \leq j \leq m-1$. Então $H_1(M;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}G$-módulo.

Demonstração. Continuemos denotando $Aug(\mathbb{Z}M)$ por Ω. Como $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo, sabemos que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \Omega$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo pelo lema 4.1.2. Seja

$$\mathscr{P} : ... \to F_i \to F_{i-1} \to ... \to F_0 \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \Omega \to 0$$

uma resolução livre de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \Omega$ como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo, com F_i finitamente gerado para $0 \leq i \leq m-1$. Seja $\mathscr{R} = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathscr{P}$:

$$\mathscr{R} : ... \to R_i \to R_{i-1} \to ... \to R_0 \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}M} \Omega \to 0.$$

Note que $\mathscr{R}$ é complexo de $\mathbb{Z}G$-módulos livres, em vista do isomorfismo $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathbb{Z}\Gamma \simeq \mathbb{Z}G$. Além disso, se $0 \leq i \leq m-1$, então R_i é finitamente gerado, logo de tipo FP_∞ como $\mathbb{Z}G$-módulo.

Agora se $j \geq 1$, temos:

$$H_j(\mathscr{R}^{del}) = Tor_j^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \Omega). \tag{4.1.5}$$

Se $j > 0$, temos que $Tor_j^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}M) = 0$. De fato, considere a sequência exata dada por:

$$0 \to \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}M \to 0,$$

sendo $\mathbb{Z}M \to \mathbb{Z}M$ a multiplicação por n. Considere o seguinte trecho da sequência longa exata em $Tor_*^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}, -)$:

$$... \to Tor_j^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}M) \to Tor_j^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}M) \to Tor_{j-1}^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}M) \to ...$$

Como $\mathbb{Z}M$ é $\mathbb{Z}M$-módulo projetivo, temos que $Tor_j^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}M) = 0$ se $j > 0$ pela proposição 1.7.17. Então a sequência $0 \to Tor_j^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}M) \to 0$ é exata se $j > 1$, donde $Tor_j^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}M) = 0$ se $j > 1$. Se $j = 1$, temos

$$0 \to Tor_1^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}M) \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathbb{Z}M \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathbb{Z}M \to 0.$$

Usando o isomorfismo $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathbb{Z}M \simeq \mathbb{Z}$, vemos que α se identifica à multiplicação por n de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, logo $ker(\alpha) = 0$, portanto:

$$Tor_1^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}M) \simeq ker(\alpha) = 0.$$

Pela sequência longa exata em $Tor_*^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}, -)$ que obtemos da sequência exata

$$0 \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \Omega \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0,$$

e usando o isomorfismo (4.1.5), temos que:

$$H_j(\mathscr{R}^{del}) = Tor_j^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \Omega) \simeq Tor_{j+1}^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = H_{j+1}(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

sendo tal isomorfismo válido para todo $j \geq 1$.

Assim, as hipóteses do lema dizem que $H_j(\mathscr{R})$ é de tipo FP_{m-j-2} como $\mathbb{Z}G$-módulo para todo $j \leq m-2$. Pelo lema 2.1.11 parte 3, segue que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}M} \Omega$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}G$-módulo. □

Proposição 4.1.6. *Sejam* $\Gamma = C_n \wr_X G$ *e* $M = \oplus_{x \in X} C_n \subseteq \Gamma$ *e suponha que* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *seja de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}\Gamma$*-módulo. Então* $H_i(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ *é de tipo* FP_{m-i} *como* $\mathbb{Z}G$*-módulo, para todo* $1 \leq i \leq m$.

Demonstração. Seja $H = \langle h_0 \rangle = C_n$, de modo que $\Gamma = H \wr_X G$. Provaremos a proposição por indução em m. Supondo o resultado válido para valores menores de m, temos em particular que $H_i(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ é de tipo FP_{m-i-1} como $\mathbb{Z}G$-módulo, para todo $1 \leq i \leq m-1$.

Pelo lema 4.1.5, $H_1(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}M} \Omega$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}G$-módulo, logo a proposição vale para $i = 1$. Procedemos então por indução em i, assumindo que $H_j(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ é de tipo FP_{m-j} como $\mathbb{Z}G$-módulo para todo $1 \leq j \leq i-1$.

Seja $\mathscr{F}$ a resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}M$-módulo dada em (4.1.3) e considere o complexo $\mathscr{C} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathscr{F}'$, onde $\mathscr{F}'$ é a versão modificada de $\mathscr{F}$:

$$\mathscr{F}' : ... \to \mathbb{Z}M \otimes W_i \to \mathbb{Z}M \otimes W_{i-1} \to ... \to \mathbb{Z}M \otimes W_1 \to Aug(\mathbb{Z}M) \to 0,$$

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathscr{F}' = \mathscr{C} : ... \to \mathbb{Z}M \otimes ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i) \to ... \to ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}M)) \to 0.$$

Note que $\mathscr{C}$ também é um complexo exato de $\mathbb{Z}M$-módulos. De fato, se denotamos por ∂_i os diferenciais de $\mathscr{F}'$, então tal complexo é decomposto em sequências exatas curtas das formas:

$$\mathscr{D}_1 : 0 \to ker(\partial_1) \to \mathbb{Z}M \otimes W_1 \to Aug(\mathbb{Z}M) \to 0$$

ou se $i > 1$:

$$\mathscr{D}_i : 0 \to ker(\partial_i) \to \mathbb{Z}M \otimes W_i \to ker(\partial_{i-1}) \to 0.$$

Pelo argumento imediatamente posterior ao lema 4.1.1, as sequências $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathscr{D}_i$ são também exatas, pois $Aug(\mathbb{Z}M)$ e $ker(\partial_i)$ são livres como $\mathbb{Z}$-módulos para todo i, já que, por indução em i, cada sequência exata curta $\mathscr{D}_i$ é cindida. Mas o complexo $\mathscr{C}$ pode ser reconstruído a partir destas sequências curtas, e a sua exatidão é equivalente a exatidão de cada uma delas.

Agora vendo a ação de G nos produtos gerais, podemos concluir que a ação de G em W_i comuta com os diferenciais, logo $\mathscr{C}$ é um complexo de $\mathbb{Z}\Gamma$-módulos (novamente por meio dos isomorfismos $\mathbb{Z}M \otimes A \simeq \mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}G} A$, para qualquer $\mathbb{Z}G$-módulo A). Além disso, como $H_j(M;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_j$ é de tipo FP_{m-j} como $\mathbb{Z}G$-módulo para todo $j \leq i-1$, temos que $\mathbb{Z}M \otimes ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_j)$ é de tipo FP_{m-j} como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo se $j \leq i-1$.

Pelo lema 4.1.2, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}M)$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo. Assim, segue do lema 2.1.11 parte 2 que a imagem de $\mathbb{Z}M \otimes ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i)$ pelo diferencial de $\mathscr{C}$ é de tipo $FP_{m-1-(i-1)}$ como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo.

Denote por $d_i : \mathbb{Z}M \otimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes W_i) \to \mathbb{Z}M \otimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes W_{i-1})$ o diferencial de $\mathscr{C}$ e seja

$$V := Im(d_i) \simeq \frac{\mathbb{Z}M \otimes ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i)}{ker(d_i)} \simeq \frac{\mathbb{Z}M \otimes ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i)}{Im(d_{i+1})}.$$

Sabemos então que V é de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo. Seja $W = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} V$. Como $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} -$ é exato à direita, a seguinte sequência é exata:

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} Im(d_{i+1}) \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} (\mathbb{Z}M \otimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i) \to W \to 0.$$

Além disso, novamente o primeiro homomorfismo acima é nulo pela definição dos diferenciais em $\mathscr{F}$, logo $W \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} (\mathbb{Z}M \otimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i$. Observamos que:

$$H_i(M;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq H_i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathscr{F}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes W_i. \tag{4.1.6}$$

Assim, basta mostrar que W é de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}G$-módulo e a proposição estará demonstrada.

Seja então

$$\mathscr{P} : ... \to P_k \to P_{k-1} \to ... \to P_0 \to V \to 0$$

uma resolução livre de V como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo, com P_j finitamente gerado se $0 \leq j \leq m-i$. Aplicando $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} -$, temos:

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathscr{P} : ... \to R_k \to R_{k-1} \to ... \to R_0 \to W \to 0,$$

sendo cada R_j um $\mathbb{Z}G$-módulo livre e, se $0 \leq j \leq m-1$, então R_j é finitamente gerado. Além disso:

$$H_j(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathscr{P}^{del}) = Tor_j^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}, V). \tag{4.1.7}$$

Por outro lado, do complexo $\mathscr{C}$ obtemos o complexo exato $\mathscr{C}'$:

$$\mathscr{C}' : ... \to \mathbb{Z}M \otimes ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_k) \to ... \to \mathbb{Z}M \otimes ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i) \to V \to 0.$$

Aplicando $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}M}$ temos:

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathscr{C}' : ... \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_k \to ... \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i \to W \to 0,$$

que tem os diferenciais $id \otimes d_k : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_k \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_{k-1}$ nulos para todo $k > i$, e portanto para $j \geq 0$:

$$Tor_j^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z}, V) = H_j(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} (\mathscr{C}')^{del}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_{i+j} = H_{i+j}(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}). \tag{4.1.8}$$

Pelo lema 2.1.11 parte 3 aplicado ao complexo $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}M} \mathscr{P}$, W será de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}G$-módulo se $H_j(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathscr{P}^{del})$ for de tipo $FP_{m-i-j-1}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo para todo $1 \leq j \leq m - i - 1$. Mas, por (4.1.7) e (4.1.8), $H_j(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathscr{P}^{del}) \simeq H_{i+j}(M, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Então tal com $k = i + j$, tal condição é equivalente a:

$$H_k(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \text{ é de tipo } FP_{m-k-1} \text{ como } \mathbb{Z}G\text{-módulo para } k \leq m - 1,$$

que é a nossa hipótese de indução. □

Proposição 4.1.7. *Seja* $\Gamma = C_n \wr_X G$ *um produto entrelaçado e seja* $M = \oplus_{x\in X} C_n \subseteq \Gamma$. *Suponha que* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *seja de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}G$*-módulo e que* $H_i(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ *seja de tipo* FP_{m-i} *como* $\mathbb{Z}G$*-módulo, para todo* $1 \leq i \leq m$*. Então* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}\Gamma$*-módulo.*

Demonstração. Considere a resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}M$-módulo dada no lema 4.1.3:

$$\mathscr{F} : ... \to \mathbb{Z}M \otimes W_i \to \mathbb{Z}M \otimes W_{i-1} \to ... \to \mathbb{Z}M \otimes W_1 \to \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Claramente, o complexo a seguir é também exato:

$$\mathscr{F}' : ... \to \mathbb{Z}M \otimes W_i \to \mathbb{Z}M \otimes W_{i-1} \to ... \to \mathbb{Z}M \otimes W_1 \to Aug(\mathbb{Z}M) \to 0.$$

Além disso, tal complexo é composto por $\mathbb{Z}$-módulos livres, de modo que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathscr{F}'$ ainda é exato:

$$... \to \mathbb{Z}M \otimes ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i) \to ... \to \mathbb{Z}M \otimes ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_1) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}M) \to 0.$$

Agora $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i \simeq H_i(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (veja (4.1.6)), portanto é de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}G$-módulo para todo $1 \leq i \leq m$. Segue que o $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo

$$\mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}G} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i \simeq \mathbb{Z}M \otimes ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i)$$

é de tipo FP_{m-i}, para todo $1 \leq i \leq m$.

Aplicando a parte 1 do lema 2.1.11 ao complexo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathscr{F}'$, obtemos que o $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}M)$ é de tipo FP_{m-1}, e pelo lema 4.1.2 segue que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo, já que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G$-módulo por hipótese. □

Teorema 4.1.8. *Seja* $\Gamma = C_n \wr_X G$ *um produto entrelaçado e seja* $M = \oplus_{x\in X} C_n \subseteq \Gamma$. *Então* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}\Gamma$*-módulo se e somente se* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}G$*-módulo e* $H_i(M;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ *é de tipo* FP_{m-i} *como* $\mathbb{Z}G$*-módulo para todo* $1 \leq i \leq m$.

Demonstração. Basta combinar o lema 4.1.2 e as proposições 4.1.6 e 4.1.7. □

4.2 Observações

No lema 4.1.4 encontramos:

$$H_i(M;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i,$$

sendo W_i o $\mathbb{Z}$-módulo livre com base $Z_i = \bigcup_s Y_1^{i_1} \times ... \times Y_s^{i_s} \times X^{(i_1,...,i_s)}$, com a união tomada sob todos $s \geq 1$ e $i_1, ..., i_s \geq 0$ tais que $i_1 + 2i_2 + ... + si_s = i$. Agora os conjuntos Y_j são unitários, logo podemos identificar Z_i com $\cup_s X^{(i_1,...,i_s)}$ por

$$B_1 \times ... \times B_s \times (X_1, ...X_s) \mapsto (X_1, ..., X_s).$$

Note que tal identificação respeita a ação de G:

$$\begin{aligned} g \cdot (B_1 \times ... \times B_s \times (X_1, ..., X_s)) = B_1 \times ... \times B_s \times (g \cdot X_1, ...g \cdot X_s) \\ \mapsto (g \cdot X_1, ...g \cdot X_s) = g \cdot (X_1, ..., X_s). \end{aligned}$$

Denote $\bigcup_s X^{(i_1,...,i_s)}$ por Δ_i, de modo que $W_i \simeq \mathbb{Z}[\Delta_i]$.

Lembre-se que a estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo de W_i é obtida pela ação de G sobre $\Delta_i \cup -\Delta_i$ (fazendo dele um $\mathbb{Z}G$-módulo semi-induzido), que por sua vez é induzida pela ação de G sobre X. Assim, se $J_i \subseteq \Delta_i \cup -\Delta_i$ é um conjunto de representantes das órbitas de tal ação e $\{G_{i,j}\}_{j\in J_i}$ é um conjunto de representantes dos subgrupos estabilizadores, então pela parte 1 do lema 3.3.6 temos:

$$W_i \simeq \oplus_{j\in J_i} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_{i,j}} V_j,$$

onde cada $K_{i,j}$ é um subgrupo de G contendo $G_{i,j}$ tal que $[K_{i,j} : G_{i,j}] \in \{1, 2\}$ e $V_j \simeq \mathbb{Z}$ como grupo abeliano, tendo ação trivial de $G_{i,j}$.

Segue que $H_i(M;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes W_i \simeq \oplus_{j\in J_i} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_{i,j}} T_j$, onde $T_j \simeq C_n$ como grupo abeliano e a ação de G_j sobre T_j é trivial para todo j.

Pela parte 2 do lema 3.3.6 temos que, se $\Delta_i \cup -\Delta_i$ tem um número finito de órbitas pela ação de G, então $H_i(M;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ é de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}G$-módulo se e somente se $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}[G_{i,j}]$-módulo para todo $j \in J_i$.

Observe ainda que se $(X_1, ..., X_s) \in X^{(i_1,...,i_s)}$, então a órbita $G \cdot (X_1, ..., X_s)$ está contida em $X^{(i_1,...,i_s)}$. Assim, a ação G em Δ_i é composta por ações nos subconjuntos menores $X^{(i_1,...,i_s)}$. Em particular o conjunto de órbitas $G\backslash\Delta_i$ é finito se e somente se cada $G\backslash X^{(i_1,...,i_s)}$ é finito. Portanto o teorema 4.1.8 pode ser reescrito como:

Teorema 4.2.1. *Seja* $\Gamma = C_n \wr_X G$ *um produto entrelaçado e seja* $M = \oplus_{x\in X} C_n \subseteq \Gamma$. *Então* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}\Gamma$*-módulo se e somente se as seguintes condições se verificam:*

1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}G$*-módulo;*

2. *Para quaisquer* $1 \leq i \leq m$, $s \geq 1$ *e* $i_1, ..., i_s \geq 0$ *tais que* $i_1 + 2i_2 + ... + si_s = i$, G *age sobre* $X^{(i_1,...,i_s)}$ *com um número finito de órbitas e estabilizadores* G_α *tais que* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_{m-i} *como* $\mathbb{Z}G_\alpha$*-módulo.*

Por fim, para deixar o teorema acima com enunciado mais próximo ao teorema 3.2.4, vejamos o seguinte lema:

Lema 4.2.2. *Se* X *é um* G*-conjunto, então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Para quaisquer* $1 \leq i \leq m$, $s \geq 1$ *e* $i_1, ..., i_s \geq 0$ *tais que* $i_1 + 2i_2 + ... + si_s = i$, G *age em* $X^{(i_1,...,i_s)}$ *com um número finito de órbitas e estabilizadores* G_α *tais que* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_{m-i} *como* $\mathbb{Z}G_\alpha$*-módulo;*

2. *Para todo* $1 \leq i \leq m$, G *age diagonalmente em* X^i *com um número finito de órbitas e estabilizadores* Q_β *tais que* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_{m-i} *como* $\mathbb{Z}Q_\beta$*-módulo.*

Demonstração. Em vista do lema 3.3.6, a implicação (2) $\Rightarrow$ (1) é uma adaptação direta do lema 3.3.8, apenas trocando o módulo de coeficientes de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Consideremos então a direção (1) $\Rightarrow$ (2). Sejam $i \leq m$, $Z = (x_1, ..., x_i) \in X^i$ e $Y = \{x_k \mid 1 \leq k \leq i\} \in X^{(j)}$ (para algum $j \leq i$), e considere os subgrupos estabilizadores respectivos:

$$G_Z = \{g \in G \mid g \cdot x_k = x_k, 1 \leq k \leq i\}$$

e

$$G_Y = \{g \in G \mid g \cdot Y = Y\}.$$

Pelo que vimos no lema 3.3.8, G_Z é subgrupo de índice finito de G_Y. Adaptando a proposição 2.2.12 para coeficientes em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (basta utilizar o teorema 1.7.19 para obter uma versão do lema 1.8.4 com $Tor_*^{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, -)$ no lugar de $H_*(N; -)$), temos que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_k como $\mathbb{Z}G_Y$-módulo se e somente se $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_k como $\mathbb{Z}G_Z$-módulo, para qualquer k. Como $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_{m-j} como $\mathbb{Z}G_Y$-módulo por hipótese e $m - j \geq m - i$, segue que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}G_Z$-módulo.

Agora observe que a cada órbita de G em $X^{(j)}$ corresponde um número finito de órbitas de G em X^i, para cada $j \leq i$. De fato, cada elemento de $X^{(j)}$ tem um número finito de pré-imagens pela aplicação $X^i \to \cup_{j=1}^{i} X^{(j)}$ definida por:

$$(x_1, ..., x_i) \mapsto \{x_k \mid k = 1, ..., i\},$$

e o mesmo vale para representantes das órbitas pela ação de G. Mas por hipótese $G \backslash X^{(j)}$ é finito para todo $j \leq i$, donde segue que $G \backslash X^i$ é finito. Então (1) $\Rightarrow$ (2). $\square$

Assim, reescrevemos:

Teorema 4.2.3. *Seja* $\Gamma = C_n \wr_X G$ *um produto entrelaçado e seja* $M = \oplus_{x \in X} C_n \subseteq \Gamma$. *Então* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}\Gamma$*-módulo se e somente se as seguintes condições se verificam:*

1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}G$*-módulo;*

2. *A ação diagonal de* G *em* X^i *possui apenas um número finito de órbitas e estabilizadores* G_α *tais que* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_{m-i} *como* $\mathbb{Z}G_\alpha$*-módulo.*

Seja agora H um grupo qualquer e suponha que C_n seja um retrato de H. Então $C_n \wr_X G$ é um retrato de $H \wr_X G$. De fato, se $\sigma : C_n \to H$ e $\tau : H \to C_n$ são homomorfismos de grupos tais que $\tau \circ \sigma = id_{C_n}$, então existem homomorfismos unicamente definidos $\tilde{\sigma} : C_n \wr_X G \to H \wr_X G$ e $\tilde{\tau} : H \wr_X G \to C_n \wr_X G$ que são a identidade em G e coincidem com σ e τ na cópias de C_n e H, respectivamente. Além disso, é claro que $\tilde{\tau} \circ \tilde{\sigma} = id_{C_n \wr_X G}$.

Do lema 4.1.2, temos que se $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}[H \wr_X G]$-módulo, então $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}[C_n \wr_X G]$-módulo. Aplicando o teorema 4.2.3, chegamos a:

Corolário 4.2.4. *Suponha que* C_n *seja um retrato do grupo* H. *Se* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}[H \wr_X G]$*-módulo, então* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}G$*-módulo e a ação diagonal de* G *em* X^i *possui apenas um número finito de órbitas e estabilizadores* G_α *tais que* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_{m-i} *como* $\mathbb{Z}G_\alpha$*-módulo, para cada* $1 \leq i \leq m$.

Tal corolário é aplicável em particular na seguinte situação: se H é um grupo abeliano finito, então existe uma decomposição do tipo:

$$H \simeq C_{p_1^{k_1}} \oplus .. \oplus C_{p_r^{k_r}}.$$

Note que $C_{p_t^{k_t}}$ é um retrato de H, para todo $t = 1, ..., r$. Aplicando o corolário 4.2.4, temos que se $\mathbb{Z}/p_t^{k_t}\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}[H \wr_X G]$-módulo, então $\mathbb{Z}/p_t^{k_t}\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G$-módulo e a ação diagonal de G em X^i possui apenas um número finito de órbitas e estabilizadores G_α tais que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}G_\alpha$-módulo, para $1 \leq i \leq m$.

4.3 Σ-Invariantes

Lembramos que se Γ é um grupo finitamente gerado, então a *esfera de caracteres* $S(\Gamma)$ de Γ é o conjunto das classes de equivalência de homomorfismos não nulos $\chi : \Gamma \to \mathbb{R}$ com respeito à relação de equivalência definida por: $\chi_1 \sim \chi_2$ se e somente se existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\chi_2 = r\chi_1$. Para cada $m \geq 0$ e para cada $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo A, os Σ-*invariantes* (homológicos) de Γ com coeficientes em A são definidos por:

$$\Sigma^m(\Gamma; A) = \{[\chi] \in S(\Gamma) \mid A \text{ é de tipo } FP_m \text{ como } \mathbb{Z}\Gamma_\chi\text{-módulo}\},$$

onde $\Gamma_\chi = \{\gamma \in \Gamma \mid \chi(\gamma) \geq 0\}$.

Uma adaptação quase que direta dos resultados descritos no capítulo 3 nos dão uma classificação parcial dos Σ-invariantes de produtos entrelaçados:

Teorema 4.3.1. *Sejam $\Gamma = H \wr_X G$ um grupo de tipo FP_m e $M = \oplus_{x \in X} C_n \subseteq \Gamma$. Suponha que $X \neq \emptyset$ e que H tenha abelianização infinita. Seja $\chi : \Gamma \to \mathbb{R}$ um homomorfismo não nulo tal que $\chi|_M = 0$. Então as condições a seguir são equivalentes:*

1. $[\chi] \in \Sigma^m(\Gamma; \mathbb{Z})$;
2. $[\chi|_G] \in \Sigma^m(G; \mathbb{Z})$ *e se* $\{G_{i,1}, ..., G_{i,s_i}\}$ *é um conjunto de representantes para os estabilizadores da ação diagonal de* G *em* X^i*, então a restrição* $\chi_{i,j}$ *de* χ *a* $G_{i,j}$ *é não nula e* $[\chi_{i,j}] \in \Sigma^{m-i}(G_{i,j}; \mathbb{Z})$ *para quaisquer* $1 \leq i \leq m$ *e* $1 \leq j \leq s_i$.

Demonstração. Veja [3], teorema 8.1. □

Em vez de descrevermos a demonstração do teorema acima, vamos direto ao caso $C_n \wr_X G$, foco deste capítulo. Naturalmente, as técnicas serão as mesmas, obtidas por adaptações dos métodos do capítulo 3.

Na sequência, continuaremos fixando n um inteiro positivo.

Lema 4.3.2. *Sejam $m \geq 1$ um inteiro, $\Gamma = M \rtimes G$ um grupo finitamente gerado e $[\chi] \in \Sigma^m(\Gamma; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ tal que $\chi(M) = 0$. Denote por χ_0 a restrição de χ a G. Então $[\chi_0] \in \Sigma^m(G; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.*

Demonstração. Pelo teorema 2.1.6, temos que $[\chi] \in \Sigma^m(\Gamma; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ se e somente se $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é finitamente apresentável como $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo e

$$Tor_i^{\mathbb{Z}\Gamma_\chi}(\prod_{\lambda \in \Lambda}(\mathbb{Z}\Gamma_\chi), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$$

para todo $1 \leq i \leq m-1$ e para todo conjunto de índices Λ. Pelo mesmo argumento do lema 4.1.1, se $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é finitamente apresentável como $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo, então também o é como $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$-módulo. Agora pela funtorialidade de $Tor_i^{\mathbb{Z}S}(\prod_\lambda \mathbb{Z}S, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ com respeito a S, sendo $S \in \{\Gamma_\chi, G_{\chi_0}\}$, junto com o fato que $\Gamma_\chi = M \rtimes G_{\chi_0}$, segue que

$$Tor_i^{\mathbb{Z}\Gamma_\chi}(\prod_\lambda \mathbb{Z}\Gamma_\chi, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0 \Rightarrow Tor_i^{\mathbb{Z}G_{\chi_0}}(\prod_\lambda \mathbb{Z}G_{\chi_0}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0,$$

para todo $1 \leq i \leq m-1$. Então $[\chi_0] \in \Sigma^m(G; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. □

Veja que o lema acima é uma versão monoidal do lema 4.1.1. Note que a hipótese "$\chi(M) = 0$" é essencial para escrevermos $\Gamma_\chi = M \rtimes G_{\chi_0}$, e isto é o que garante um boa relação entre os módulos $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$ e $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$ (isto é, a funtorialidade usada acima). Naturalmente, a continuação dos argumentos da seção anterior (o lema 4.1.2, a saber) também tem a sua versão. Continuaremos denotando por $Aug(\mathbb{Z}S)$ o núcleo do homomorfismo de anéis $\epsilon : \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}$ definido por $\epsilon(s) = 1$ para todo $s \in S$, ainda que S seja só um monoide (e não um grupo).

Lema 4.3.3. *Sejam $m \geq 1$ um inteiro, $\Gamma = M \rtimes G$ um grupo finitamente gerado e $\chi : \Gamma \to \mathbb{R}$ um homomorfismo não nulo tal que $\chi(M) = 0$. Denote por χ_0 a restrição de χ a G. Então $[\chi] \in \Sigma^m(\Gamma; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ se e somente se $[\chi_0] \in \Sigma^m(G; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ e $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}M)$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo.*

Demonstração. É claro que a sequência

$$0 \to Aug(\mathbb{Z}\Gamma_\chi) \to \mathbb{Z}\Gamma_\chi \to \mathbb{Z} \to 0$$

é exata, assim como

$$0 \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}\Gamma_\chi) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}\Gamma_\chi \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0,$$

por argumentos anteriores. Novamente $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}\Gamma_\chi$ é $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo de tipo FP_∞, então $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo se e somente se $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes Aug(\mathbb{Z}\Gamma_\chi)$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo pelo lema 2.1.8.

Agora considere a seguinte sequência exata curta:

$$0 \to \mathbb{Z}\Gamma_\chi Aug(\mathbb{Z}G_{\chi_0}) \to Aug(\mathbb{Z}\Gamma_\chi) \to Aug(\mathbb{Z}M) \to 0,$$

sendo o primeiro homomorfismo a inclusão. Aplicando $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes -$, obtemos outra sequência exata:

$$0 \to \mathbb{Z}\Gamma_\chi \otimes_{\mathbb{Z}G_{\chi_0}} ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}G_{\chi_0})) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}\Gamma_\chi) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}M) \to 0. \tag{4.3.1}$$

Se $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo, então $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$-módulo pelo lema 4.3.2, e logo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes Aug(\mathbb{Z}G_{\chi_0})$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$-

módulo. Segue que o módulo induzido $\mathbb{Z}\Gamma_\chi \otimes_{\mathbb{Z}G_{\chi_0}} ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}G_{\chi_0}))$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo. Além disso, é claro que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}\Gamma_\chi)$ também é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo, já que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo (isto é, $[\chi] \in \Sigma^m(\Gamma; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$). Pelo lema 2.1.8 aplicado à sequência exata curta (4.3.1), segue que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}M)$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo.

Reciprocamente, se $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$-módulo e se o $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}M)$ é de tipo FP_{m-1}, então aplicando o lema 2.1.8 à sequência (4.3.1) obtemos que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}\Gamma_\chi)$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo, e logo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo. $\square$

Seja agora $\Gamma = C_n \wr_X G$ finitamente gerado e seja $M = \oplus_{x \in X} C_n \subseteq \Gamma$. Usando os lemas 2.3.8 e 2.3.9, podemos começar a estudar as condições que são impostas às homologias $H_i(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ quando supomos $[\chi] \in \Sigma^m(\Gamma; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Novamente consideramos primeiramente a homologia de dimensão 1, para usar como base para indução finita. Mais uma vez denote $\Omega = Aug(\mathbb{Z}M)$.

Lema 4.3.4. *Sejam* $\Gamma = C_n \wr_X G$ *um grupo finitamente gerado,* $M = \oplus_{x \in X} C_n \subseteq \Gamma$ *e* $\chi : \Gamma \to \mathbb{R}$ *um caractere não nulo com* $\chi(M) = 0$*. Denote ainda* $\chi_0 = \chi|_G$*. Suponha que* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *seja de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$*-módulo e que* $H_j(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ *seja de tipo* FP_{m-j-1} *como* $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$*-módulo, para todo* $1 \leq j \leq m-1$*. Então* $H_1(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}M} \Omega$ *é de tipo* FP_{m-1} *como* $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$*-módulo.*

Demonstração. Basta repetir o argumento do lema 4.1.5, trocando Γ por Γ_χ e G por G_{χ_0}. O único cuidado a ser tomado é que se

$$\mathscr{P} : ... \to F_i \to F_{i-1} \to ... \to F_0 \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \Omega \to 0$$

é resolução livre de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \Omega$ como $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo então $\mathscr{R} = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathscr{P}$ é resolução livre de $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \Omega$ como $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$-módulo, mas isso é garantido pela hipótese $\chi(M) = 0$. De fato, se $\chi|_M = 0$ então $\Gamma_\chi = M \rtimes G_{\chi_0}$, e logo:

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathbb{Z}\Gamma_\chi \simeq \mathbb{Z}G_{\chi_0}$$

e o isomorfismo acima aplicado a somas finitas de cópias de $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$ nos dá o que queremos. $\square$

Proposição 4.3.5. *Sejam* $\Gamma = C_n \wr_X G$ *finitamente gerado,*$M = \oplus_{x \in X} C_n \subseteq \Gamma$ *e* $\chi : \Gamma \to \mathbb{R}$ *um caractere não nulo com* $\chi(M) = 0$*. Denote ainda* $\chi_0 = \chi|_G$*. Suponha que* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *seja de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$*-módulo. Então* $H_i(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ *é de tipo* FP_{m-i} *como* $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$*-módulo, para todo* $1 \leq i \leq m$*.*

Demonstração. Neste caso basta imitar a demonstração da proposição 4.1.6, com Γ_χ no lugar de Γ e G_{χ_0} em vez de G. As observações da demonstração do lema 4.3.4 sobre a aplicação de $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}M} -$ em complexos de $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulos livres continuam pertinentes. Além disso, no lema 4.1.6 utilizamos um complexo de $\mathbb{Z}M$-módulos da forma:

$$\mathscr{C} : ... \to \mathbb{Z}M\otimes((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\otimes W_i) \to ... \to \mathbb{Z}M\otimes((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\otimes W_1) \to ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\otimes Aug(\mathbb{Z}M)) \to 0.$$

para estudar $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}M))$, e naquele caso observamos que a ação de G em W_i comuta com o diferencial de $\mathscr{C}$. Na presente situação isto deve ser entendido como "os diferenciais de $\mathscr{C}$ são homomorfismos de $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulos", isto é, comutam com a ação de escalares de $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$ (além de serem homomorfismos de $\mathbb{Z}M$-módulos). □

Juntando o lema 4.3.2 e a proposição 4.3.5 obtemos um conjunto de condições necessárias para que $[\chi] \in \Sigma^m(C_n \wr_X G; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Estas são, na verdade, condições suficientes, e a demonstração é consideravelmente mais simples.

Proposição 4.3.6. *Sejam $\Gamma = C_n \wr_X G$ finitamente gerado, $M = \oplus_{x\in X} C_n \subseteq \Gamma$ e seja $\chi : \Gamma \to \mathbb{R}$ um caractere não nulo com $\chi(M) = 0$. Denote ainda $\chi_0 = \chi|_G$. Suponha que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ seja de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$-módulo e que $H_i(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ seja de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$-módulo para todo $1 \le i \le m$. Então $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo.*

Demonstração. Considere a resolução livre $\mathscr{F}$ de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}M$-módulo dada pelo lema 4.1.3:

$$\mathscr{F} : ... \to \mathbb{Z}M \otimes W_i \to \mathbb{Z}M \otimes W_{i-1} \to ... \to \mathbb{Z}M \otimes W_1 \to \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Como já argumentamos anteriormente, o complexo a seguir é também exato:

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes \mathscr{F}' : ... \to \mathbb{Z}M \otimes ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i) \to ... \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes Aug(\mathbb{Z}M) \to 0.$$

Agora $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\otimes W_i \simeq H_i(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ é de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$-módulo para todo $i \le m$ por hipótese, portanto do lema 2.3.8 temos que o módulo

$$\mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}G} ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i) \simeq \mathbb{Z}M \otimes ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes W_i)$$

é de tipo FP_{m-i} sobre $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$, para todo $i \le m$.

Aplicando o lema 2.1.11, temos que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\otimes Aug(\mathbb{Z}M)$ é de tipo FP_{m-1} como $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo, e, pelo lema 4.3.3, segue que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}\Gamma_\chi$-módulo, já que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$-módulo por hipótese. □

Teorema 4.3.7. *Seja $\Gamma = C_n \wr_X G$ um produto entrelaçado finitamente gerado tal que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m como $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo. Sejam ainda $M = \oplus_{x\in X} C_n \subseteq \Gamma$ e $\chi : \Gamma \to \mathbb{R}$ um caractere não nulo com $\chi(M) = 0$. Denote $\chi_0 = \chi|_G$. Então $[\chi] \in \Sigma^m(\Gamma; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ se e somente se $[\chi_0] \in \Sigma^m(G; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ e $H_i(M; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ é de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$-módulo para todo $1 \le i \le m$.*

Demonstração. Combine as proposições 4.3.5 e 4.3.6. □

Por fim, vamos reinterpretar o teorema acima olhando para os estabilizadores da ação de G. Lembramos que, nas notações da seção 4.2, $H_i(M;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes W_i$, onde W_i é $\mathbb{Z}$-módulo livre com base $\Delta_i := \bigcup_s X^{(i_1,\dots,i_s)}$. Fixamos ainda um conjunto de representantes das órbitas J_i de G em $\Delta_i \cup -\Delta_i$, um representante dos subgrupos estabilizadores respectivos $G_{i,j}$ para cada $j \in J_i$ e denotamos $\chi_{i,j} := \chi|_{G_{i,j}}$.

Teorema 4.3.8. *Seja* $\Gamma = C_n \wr_X G$ *um produto entrelaçado finitamente gerado tal que* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *é de tipo* FP_m *como* $\mathbb{Z}\Gamma$*-módulo. Sejam ainda* $M = \oplus_{x\in X} C_n \subseteq \Gamma$ *e* $\chi : \Gamma \to \mathbb{R}$ *um caractere não nulo com* $\chi(M) = 0$*. Denote* $\chi_0 = \chi|_G$*. Então as condições a seguir são equivalentes:*

1. $[\chi] \in \Sigma^m(\Gamma;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$;

2. $[\chi_0] \in \Sigma^m(G;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ *e para quaisquer* $j \in J_i$ *e* $1 \le i \le m$*, temos que* $\chi_{i,j} \neq 0$ *e* $[\chi_{i,j}] \in \Sigma^{m-i}(G_{i,j};\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Demonstração. Nas notações acima, temos:

$$H_i(M;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \oplus_{j\in J_i} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_{i,j}} T_{i,j},$$

onde cada $K_{i,j}$ contém um subgrupo estabilizador $G_{i,j}$ como subgrupo de índice 1 ou 2 e $T_{i,j} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo, tendo ação trivial de $G_{i,j}$.

Agora $H_i(M;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$-módulo se e somente se $\chi_{i,j} \neq 0$ para todo $j \in J_i$. De fato, se $H_i(M;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G_{\chi_0}$-módulo, então cada componente $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K_{i,j}} T_{i,j}$ também o é. Segue que a órbita por G do elemento $w_{i,j} \in \Delta_i \cup -\Delta_i$ correspondente pode ser gerada um número finito de G_{χ_0}-órbitas, isto é:

$$G \cdot w_{i,j} = \bigcup_{k=1}^{r} G_{\chi_0}(g_k \cdot w_{i,j}),$$

para certos $g_k \in G$.

Agora tome $g \in G$ tal que $\chi(g) < \chi(g_k)$ para todo k. Segue que existem $h \in G_{\chi_0}$ e $k \in \{1,\dots,r\}$ tais que $g \cdot w_{i,j} = (hg_k) \cdot w_{i,j}$. Então $g^{-1}hg_k \in G_{i,j}$, com $\chi(g^{-1}hg_k) > 0$, donde $\chi_{i,j} \neq 0$. A recíproca é clara pelo lema 2.3.8.

Assim, em vista dos lemas 2.3.8 e 2.3.9, $H_i(M;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ é de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo se e somente se $T_{i,j}$ (que é isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) é de tipo FP_{m-i} como $\mathbb{Z}G_{\chi_{i,j}}$-módulo para todo $j \in J_i$, isto é, se $[\chi_{i,j}] \in \Sigma^{m-i}(G_{i,j};\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ para todo $j \in J_i$. Então os enunciados deste teorema e do teorema 4.3.7 são equivalentes. □

Capítulo 5

Conclusão

Os resultados expostos nos dois últimos capítulos nos ajudam a entender os produtos entrelaçados sob o ponto de vista homológico, mas não fornecem classificações completas. O teorema 3.2.4, por exemplo, nos dá condições necessárias e suficientes para que o grupo $H \wr_X G$ seja de tipo FP_m, mas com restrição ao caso em que H tem abelianização infinita. No caso geral, temos apenas uma condição suficiente.

Em busca de acabar com tal restrição (ou pelo menos diminuí-la), estudamos produtos entrelaçados da forma $\Gamma = C_n \wr_X G$, onde C_n é o grupo cíclico de ordem n. Aplicando as técnicas do artigo [3], obtivemos no capítulo 4 informações sobre o tipo homológico do $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo trivial $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e, a partir disso, pudemos dizer algo sobre grupos $H \wr_X G$ para os quais C_n é retrato de H (ver corolário 4.2.4). Assim, tais resultados não completam o teorema 3.2.4, mas nos dão informações homológicas sobre produtos entrelaçados, ainda que de outra forma.

É possível, no entanto, que este tipo de análise seja o máximo que conseguiremos neste sentido, isto é, que o estudo da propriedade FP_m para produtos entrelaçados da forma $H \wr_X G$ só seja frutífero quando consideramos cada um dos grupos cíclicos ($\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) que são retratos de H. Uma observação neste sentido foi feita por P. H. Kropholler e A. Martino [14]. Neste artigo são considerados os chamados *produtos grafo-entrelaçados*, uma classe de grupos que estende a classe dos produtos entrelaçados. Precisamente, se H e G são grupos e K é um grafo com ação de G, o produto grafo-entrelaçado $H \wr_K G$ é definido como o produto semidireto $M_K \rtimes G$, onde M_K é o quociente do produto livre $*_{x \in V(K)} H_x$ ($V(K)$ é o conjunto de vértices de K) pelo subgrupo normal gerado pelas relações do tipo $[h_x, h_y]$ para quaisquer $h_x \in H_x$ e $h_y \in H_y$ tais que $\{x, y\}$ é aresta de K. Novamente a ação de G em M_K é dada pela permutação das componentes de H, como no produto entrelaçado. Observe que se K é um grafo no qual cada dois vértices são conectados por uma aresta, então $H \wr_K G$ se reduz a $H \wr_X G$, para $X = V(K)$.

No artigo citado [14], Kropholler e Martino estudam as propriedades topológicas F_m para a classe de grupos definida acima, e obtêm condições necessárias e suficientes para que $H \wr_K G$ seja de tipo F_m no caso em que H tem abelianização infinita (observamos que o trabalho [14] é posterior ao artigo [3], e inclusive o cita como fonte para os métodos homológicos aplicados). Uma das condições envolve a propriedade FP_m para certos subgrupos estabilizadores relacionados à ação de G em K. Observa-se, então, que é plausível a existência de um grupo A, de abelianização finita, para o qual $H \wr_K G$ seja de tipo F_m, mas que tais subgrupos estabilizadores satisfaçam algum outro tipo de propriedade homológica, como FP_m sobre um anel do tipo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, por exemplo. Encontrar um exemplo esbarra na dificuldade em se encontrar grupos que sejam de tipo FP_m sobre algum anel $R \neq \mathbb{Z}$, mas não de tipo FP_m (sobre $\mathbb{Z}$).

Tais observações se estendem ao estudo dos Σ-invariantes, no sentido em que conseguimos entender os invariantes de $C_n \wr_X G$ com coeficientes em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, mas não em $\mathbb{Z}$, e tal restrição aparentemente não pode ser contornada com os métodos aqui utilizados.

Referências

[1] P.M.L. de Araujo. "Produtos entrelaçados finitamente apresentáveis". Diss. de mestrado. Universidade Estadual de Campinas, 2014.

[2] M. Atiyah e I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley series in mathematics. Reading, Mass. Addison-Wesley, 1969.

[3] L. Bartholdi, Y. de Cornulier e D.H. Kochloukova. "Homological Finiteness Properties of Wreath Products". Em: *The Quarterly Journal of Mathematics* 66.2 (2015), pp. 437–457.

[4] M. Bestvina e N. Brady. "Morse theory and finiteness properties of groups". Em: *Inventiones mathematicae* 129.3 (1997), pp. 445–470.

[5] R. Bieri. *Homological dimension of discrete groups*. Queen Mary College mathematics notes. Mathematics Dept., Queen Mary College, University of London, 1981.

[6] R. Bieri e B. Renz. "Valuations on free resolutions and higher geometric invariants of groups". Em: *Commentarii Mathematici Helvetici* 63.1 (1988), pp. 464–497.

[7] R. Bieri et al. "Infinite presentability of groups and condensation". Em: *ArXiv e-prints* (2010). arXiv: `1010.0271v2 [math.GR]`.

[8] K.S. Brown. *Cohomology of Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1982.

[9] K.S. Brown. "Finiteness properties of groups". Em: *Journal of Pure and Applied Algebra* 44.1 (1987), pp. 45–75.

[10] K.S. Brown e R. Geoghegan. "An infinite-dimensional torsion-free FP_∞ group". Em: *Inventiones mathematicae* 77.2 (1984), pp. 367–381.

[11] J.W. Cannon, W.J. Floyd. e W.R. Parry. "Introductory notes on Richard Thompson's group". Em: *Enseign. Math* (1996).

[12] D.E. Cohen. *Combinatorial Group Theory: A Topological Approach*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1989.

[13] Y. de Cornulier. "Finitely Presented Wreath Products and Double Coset Decompositions". Em: *Geometriae Dedicata* 122.1 (2006), pp. 89–108.

[14] P.H. Kropholler e A. Martino. "Graph-wreath products and finiteness conditions". Em: *Journal of Pure and Applied Algebra* 220.1 (2016), pp. 422–434.

[15] J.C. Lennox e D.J.S. Robinson. *The Theory of Infinite Soluble Groups*. Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, 2004.

[16] J. Meier, H. Meinert e L. VanWyk. "Higher generation subgroup sets and the Σ-invariants of graph groups". Em: *Commentarii Mathematici Helvetici* 73.1 (1998), pp. 22–44.

[17] H. Meinert. "Actions on 2-complexes and the homotopical invariant Σ^2 of a group". Em: *Journal of Pure and Applied Algebra* 119.3 (1997), pp. 297–317.

[18] J.J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Universitext. Springer New York, 2008.

[19] J.J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1999.

[20] R. Strebel. "Notes on the Sigma invariants". Em: *ArXiv e-prints* (2012). arXiv: `1204.0214 [math.GR]`.

[21] C.A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995.