

# Do Teorema de Cauchy ao Método de Cagniard

por

Rubens de Figueiredo Camargo

IMECC UNICAMP

2005

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues - CRB8a. / 2116

Camargo, Rubens de Figueiredo

C14t Do teorema de Cauchy ao método de Cagniard / Rubens de Figueiredo

Camargo - - Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientador : Edmundo Capelas de Oliveira.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cauchy, Augustin Louis, Baron, 1789-1859. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Funções de variáveis complexas. 4. Transformadas integrais.

I. Oliveira, Edmundo Capelas de. II. Universidade Estadual de Campinas.

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em Inglês: From Cauchy's theorem to Cagniard's method

Palavras-chave em Inglês (Keywords): 1. Cauchy, Augustin Louis, Baron, 1789-1859, 2. Differential partial equations, 3. Function of complex variable, 4. integral transform.

Área de concentração: Análise complexa.

Titulação: Mestre em Matemática.

Banca examinadora: Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (UNICAMP)  
. Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio (UNICAMP)  
. Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar (UNESP)

Data da defesa: 22/02/2005.

# Do Teorema de Cauchy ao Método de Cagniard

por **Rubens de Figueiredo Camargo**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Dissertação defendida em 22 de Fevereiro de 2005 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.:



---

**Prof (a). Dr (a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA**



---

**Prof (a). Dr (a). BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR**



---

**Prof (a). Dr (a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO**

*“-Este nosso rapazinho tem a vista curta. Espera aí, Miguilim...  
E o Senhor tirava os óculos e punha-os em Miguilim, com todo o jeito.  
-Olha, agora!  
Miguilim olhou. Nem podia acreditar! Tudo era uma claridade, tudo novo e lindo e diferente...”*

*De João Guimarães Rosa, MANUELZÃO E MIGUILIM.*

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que contribuíram direta e indiretamente para a elaboração deste trabalho, em especial:

- Ao meu orientador Edmundo, com quem divido os méritos deste trabalho, pela amizade, dedicação, paciência e exemplo.
- Ao professor Ary pelo excepcional curso ministrado em variáveis complexas, fonte de inspiração para o primeiro capítulo deste trabalho.
- Ao CNPq por ter financiado este projeto.
- À minha mãe e minha irmã por terem sido sempre meu porto seguro de carinho e amor.
- À minha namorada Claudia pelo carinho, auxílio e compreensão.
- Aos meus familiares pelos incentivos e pela confiança, em particular ao meu tio Imail por ter sido muito mais que um tio.
- A todos meus irmãos de Canil, pelos seis maravilhosos anos de convivência dos quais sempre me lembrarei com saudade.
- Aos amigos Cairo, Luís Andre e Tiago por terem sido uma extensão de minha família.
- A todos meus amores e amigos de treino da *UNICAMP Swimming Society Reloaded* por terem cuidado da saúde do meu corpo e da minha mente.
- A todos colegas de curso e amigos que fiz durante esses seis anos de UNICAMP, em particular agradeço ao Sid e ao Murilo pela amizade e convívio.
- Acima de tudo agradeço a Deus por ter me concedido a dádiva de conviver com todas estas pessoas maravilhosas.

## Resumo

Este trabalho versa sobre variáveis complexas, em particular sobre o teorema integral de Cauchy, suas conseqüências e aplicações.

Como conseqüência do teorema integral de Cauchy temos o teorema dos resíduos, peça chave para o desenvolvimento deste trabalho.

Nas aplicações nos concentramos no estudo das transformadas integrais como metodologia na resolução de equações diferenciais parciais, em particular no cálculo da inversão das transformadas de Laplace, Fourier e Hankel, bem como na justaposição das transformadas.

Para inversão da justaposição das transformadas nos concentramos no método de Cagniard e algumas de suas variações.

## Abstract

This work is about complex variables, in particular about Cauchy's integral theorem and its consequences and applications.

We have, as consequences of Cauchy's integral theorem, Cauchy's theorem and the residue theorem, a keynote to the development of this work.

As for the applications, our main objective was to study the integral transforms as a method to solve partial differential equations and, specifically, the inversion of the Laplace, Fourier and Hankel transforms, in the same way, the juxtaposition of transforms.

In order to invert the juxtaposition of transforms our main concern was to study Cagniard's method and some of its variations.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Teorema de Cauchy</b>	<b>3</b>
1.1 Integração no plano complexo . . . . .	3
1.1.1 Caso particular da fórmula integral de Cauchy . . . . .	5
1.2 Fórmula integral de Cauchy . . . . .	6
1.2.1 Fórmula integral de Cauchy (Primeira versão) . . . . .	10
1.2.2 Fórmula integral de Cauchy (Segunda versão) . . . . .	12
1.2.3 Fórmula integral de Cauchy (Terceira versão) . . . . .	13
1.3 O teorema de Cauchy . . . . .	14
1.3.1 Teorema de Cauchy-Goursat . . . . .	14
1.4 Resíduos . . . . .	15
1.4.1 Singularidades . . . . .	15
1.4.2 Série de Laurent . . . . .	16
1.4.3 Teorema dos resíduos . . . . .	18
1.4.4 Cálculo dos resíduos . . . . .	19
1.4.5 Lema de Jordan . . . . .	21
1.5 Valor principal de Cauchy . . . . .	22
<b>2 Transformadas integrais</b>	<b>26</b>
2.1 Transformada de Laplace . . . . .	26



2.1.1	Linearidade . . . . .	27
2.1.2	Convolução . . . . .	28
2.2	Transformada de Laplace inversa . . . . .	29
2.2.1	Cálculo da transformada . . . . .	31
2.2.2	Ponto de ramificação e a transformada de Laplace inversa . . . . .	31
2.3	Série de Fourier . . . . .	32
2.3.1	Fórmula integral de Fourier . . . . .	34
2.4	Transformada de Fourier direta e inversa . . . . .	35
2.4.1	Convolução . . . . .	36
2.4.2	Transformada de Fourier dupla . . . . .	37
2.5	Transformadas de Bessel . . . . .	37
2.6	Transformada de Hankel direta e inversa . . . . .	38
2.6.1	Propriedades da transformada de Hankel . . . . .	39
2.7	Justaposição das transformadas . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Equações diferenciais parciais</b>	<b>40</b>
3.1	Equação diferencial parcial de segunda ordem . . . . .	41
3.2	Classificação de uma EDP de segunda ordem . . . . .	43
3.2.1	EDP de segunda ordem com duas variáveis independentes . . . . .	43
3.2.2	Classificação . . . . .	44
3.3	Metodologia de resolução . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Integral de Carson e o método de Cagniard</b>	<b>47</b>
4.1	Equações de propagação, condições iniciais e de contorno . . . . .	48
4.1.1	Notação . . . . .	48
4.1.2	Equações de propagação . . . . .	49
4.1.3	Equações de Navier . . . . .	49

4.1.4	Equações de movimento . . . . .	51
4.2	Hipóteses para a integral de Carson . . . . .	54
4.3	Construção da solução . . . . .	54
4.4	Verificação da solução . . . . .	58
4.5	Discussão do método . . . . .	58
4.6	O método de Cagniard-de Hoop . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Aplicações</b>	<b>61</b>
5.1	Contornos de integração . . . . .	62
5.1.1	Uma classe de integrais reais . . . . .	62
5.1.2	Uma função particular . . . . .	63
5.1.3	Outro contorno . . . . .	68
5.1.4	Resultado principal e casos particulares . . . . .	69
5.2	Transformada de Hankel: Uma aplicação . . . . .	71
5.2.1	Formulação do problema . . . . .	71
5.2.2	Equações e resolução . . . . .	71
5.3	Método de Cagniard para problemas de pulso sísmico . . . . .	77
5.3.1	Formulação do problema . . . . .	77
5.3.2	Transformadas diretas . . . . .	78
5.3.3	Inversão . . . . .	79
5.4	Difusão eletromagnética . . . . .	83
5.4.1	Descrição do problema . . . . .	83
5.4.2	Equações de campo . . . . .	84
5.4.3	Transformadas diretas . . . . .	84
5.4.4	Inversão . . . . .	86
5.5	Equação de onda anisotrópica gerada por uma função impulso . . . . .	90
5.5.1	Transformadas diretas . . . . .	90

5.5.2	Inversão . . . . .	92
5.6	Efeitos de uma explosão em um fluido . . . . .	96
5.6.1	Formulação do problema e notação . . . . .	96
5.6.2	Justaposição das transformadas . . . . .	97
5.6.3	Inversão da justaposição . . . . .	98
<b>A</b>	<b><i>Função delta de Dirac</i></b>	<b>106</b>
A.1	Propriedade de filtragem . . . . .	107
A.2	Convolução . . . . .	108
A.3	Transformada de Fourier e <i>função delta de Dirac</i> . . . . .	108
<b>B</b>	<b>Laplaciano em coordenadas cilíndricas e esféricas</b>	<b>109</b>
B.1	Coordenadas cilíndricas . . . . .	109
B.2	Coordenadas esféricas . . . . .	110
	<b>Conclusões</b>	<b>111</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>114</b>

# Introdução

O teorema dos resíduos é um dos mais belos e poderosos resultados da análise complexa. É uma consequência da chamada fórmula integral de Cauchy [1789 – Augustin Louis Cauchy – 1827] que, tem como outra consequência o teorema de Cauchy, também conhecido como teorema de Cauchy - Goursat [1858 – Edouard Goursat – 1936] visto que este último provou o teorema enfraquecendo as hipóteses.

O referido teorema, dentre outras aplicações, é uma importante ferramenta no cálculo de integrais reais via variáveis complexas. Em particular, na inversão das transformadas<sup>1</sup> integrais, dentre elas as transformadas de Laplace [1749 – Pierre Simon de Laplace – 1827] e Fourier [1768 – Jean-Baptiste Joseph Fourier – 1830], isto é, para recuperar a solução do problema de partida deve-se efetuar uma integração no plano complexo, que, no caso específico da transformada de Laplace é feito mediante os contornos de Bromwich [1875 – Thomas John Ianson Bromwich – 1929].

Por outro lado, uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem, tendo domínio espacial infinito ou semi-infinito e condições de contorno especificadas pode ser resolvida através da metodologia das transformadas de Fourier e Hankel [1839 – Hermann Hankel – 1873] na parte espacial e Laplace, para eliminar a dependência temporal, o chamado método da justaposição de transformadas. Este belo e poderoso método nos conduz, em geral, a equações algébricas, cujas soluções são, na maioria dos casos, mais simples de serem obtidas. Neste ponto, para recuperar a solução do problema de partida, deve-se calcular as transformadas inversas. A ordem de inversão das transformadas, em geral, depende do problema em consideração.

No caso da justaposição menciona-se o método proposto por Cagniard [1900 – Louis Paul Emile Cagniard – 1971] [1], que reduz o problema de inversão da transformada numa integral conhecida a qual é obtida por inspeção. Outros métodos aparecem na literatura como modificações do método de Cagniard, em particular cita-se o método de de Hoop [2] que modifica o método para problemas envolvendo pulsos sísmicos, Gakenheimer-Miklowitz [3] que adaptaram o método para o estudo de propagação de ondas transientes, num meio homogêneo e isotrópico e Murrel-Ungar [4] que retomam o problema de pulsos sísmicos propondo o método das transformadas diferenciais.

---

<sup>1</sup>A metodologia das transformadas supõe que o problema auxiliar(transformado) é, em geral, mais simples de ser solucionado, ou seja, transfere a dificuldade do problema de partida para o cálculo da transformada inversa, ou ainda na recuperação da solução do problema de partida.

Este trabalho está disposto da seguinte maneira: após uma abordagem detalhada da teoria básica de funções de uma variável complexa, apresentada no primeiro capítulo, conclui-se com o importante teorema dos resíduos. No segundo capítulo passa-se ao estudo da metodologia das transformadas integrais, em particular, as transformadas de Laplace, Hankel e Fourier. O terceiro capítulo é todo dedicado ao estudo das equações diferenciais parciais, lineares e de segunda ordem. A classificação de uma equação diferencial parcial e de segunda ordem é apresentada e estudada.

O objetivo do quarto capítulo é a apresentação do método de Cagniard que originalmente foi proposto para resolver equações diferenciais parciais advindas de problemas de propagação de pulsos sísmicos. O capítulo é concluído com o método proposto por de Hoop, isto é, uma conveniente mudança no método de Cagniard. O capítulo cinco apresenta uma série de aplicações envolvendo a metodologia anteriormente estudada, em particular estuda-se uma equação de onda anisotrópica gerada por uma função do tipo impulso.

Devido a esta função impulso apresenta-se, como um apêndice, um breve estudo da função delta de Dirac. Num outro apêndice apresenta-se o laplaciano em coordenadas cilíndricas e esféricas. Finaliza-se o trabalho com as conclusões.

# Capítulo 1

## Teorema de Cauchy

Neste primeiro capítulo vamos introduzir os conceitos, relativos à análise complexa, necessários para a apresentação do teorema dos resíduos que, dentre outras aplicações, é de fundamental importância no cálculo de integrais reais e, em particular, no cálculo da transformada inversa, isto é, recuperamos a função transformada ou mesmo a solução de um problema de valores no contorno ou de um problema de valor inicial.

São apresentadas algumas definições e resultados preliminares a fim de que possamos enunciar e demonstrar três versões da fórmula integral de Cauchy. A partir da terceira versão da fórmula integral de Cauchy apresentamos a versão mais geral do teorema de Cauchy, o assim chamado teorema de Cauchy-Goursat.

Concluimos o capítulo com a introdução do conceito de resíduo e do teorema dos resíduos que, junto ao lema de Jordan, se constitui numa das ferramentas fundamentais para, por exemplo, calcular integrais reais via variáveis complexas, mais precisamente, funções analíticas.

### 1.1 Integração no plano complexo

#### Definições

**1.1** Seja  $G \subseteq \mathbb{C}$  um domínio. Uma função  $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma *curva* se for contínua.

**1.2** Uma curva  $\gamma(t)$  é dita *regular* se sua derivada  $\gamma'(t)$  existe e é contínua  $\forall t \in [a, b]$ .

**1.3** Uma curva  $\gamma$  é dita *regular por partes* se existir uma partição de  $[a, b]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  tal que  $\gamma$  é regular em cada  $[t_{i-1}, t_i]$  para  $1 \leq i \leq n$ .

**1.4** Sejam  $G \subseteq \mathbb{C}$  um *domínio* (região aberta e conexa),  $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$  uma curva regular por partes e  $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$  contínua. Indicando a derivada de  $\gamma(t)$  por  $\gamma'(t)$  definimos a integral de  $f$  sobre  $\gamma$  por:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t)dt.$$

**Lema 1.1 Regra de Leibniz** (1646 – Gottfried Wilhelm Leibniz – 1716)

Sejam  $\varphi(s, t) : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua e  $g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$  definida por  $g(t) = \int_a^b \varphi(s, t)ds$ . Então  $g$  é contínua. Além disso, se  $\frac{\partial}{\partial t}\varphi : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$  existe e é contínua então  $g$  é continuamente diferenciável e  $g'(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\varphi(s, t)ds$ .

**Demonstração:** Claramente  $g$  é contínua, uma vez que  $\varphi$  o é. Observemos que se provarmos que  $g$  é diferenciável, com  $g'$  como acima, então seguirá da primeira parte e da continuidade de  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  que  $g'$  é contínua. Sendo assim, devemos apenas verificar que  $g'(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\varphi(s, t)ds$ . Fixemos um ponto  $t_0 \in [c, d]$ . Seja  $\varepsilon > 0$  e denotemos  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  por  $\varphi_2$ .

Desta forma,  $\varphi_2$  é uniformemente contínua em  $[a, b] \times [c, d]$ , ou seja, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que:  $|\varphi_2(s', t') - \varphi_2(s, t)| < \varepsilon$  se  $(s - s')^2 + (t - t')^2 < \delta^2$ . Em particular  $|\varphi_2(s, t) - \varphi_2(s, t_0)| < \varepsilon$  se  $|t - t_0| < \delta$  e  $a \leq s \leq b$ .

As condições acima implicam que para  $|t - t_0| < \delta$  e  $a \leq s \leq b$ ,

$$\left| \int_{t_0}^t [\varphi_2(s, u) - \varphi_2(s, t_0)]du \right| \leq \varepsilon |t - t_0|.$$

Mas para  $s$  fixo em  $[a, b]$ ,  $\Phi(t) = \varphi(s, t) - \varphi(s, t_0)$  é uma primitiva de  $\varphi_2(s, t_0)$ . Aplicando o teorema fundamental do cálculo na desigualdade acima temos:

$$|\varphi(s, t) - \varphi(s, t_0) - (t - t_0)\varphi_2(s, t_0)| \leq \varepsilon |t - t_0| \quad \forall s, \quad \text{se } |t - t_0| < \delta.$$

Pela definição de  $g$  temos que:

$$\left| \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} - \int_a^b \varphi_2(s, t)ds \right| \leq \varepsilon (b - a) \quad \text{se } 0 < |t - t_0| < \delta,$$

o que mostra o resultado desejado ■

**Corolário 1.1:** Se  $|z| < 1$  então

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} ds = 2\pi.$$

**Demonstração:** Seja  $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\varphi(s, t) = \frac{e^{is}}{e^{is} - tz}$  com  $z \in \mathbb{C}$  fixo e tal que,  $|z| < 1$ . Sendo assim,  $\varphi$  tem derivada parcial contínua em relação a  $t$  e vale

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{e^{is}(-z)}{(e^{is} - tz)^2}.$$

Pela regra de Leibniz  $g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s, t) ds$  é contínua, diferenciável e

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{ze^{is}}{(e^{is} - tz)^2} ds.$$

Para  $t$  fixo temos que a função  $\phi(s) = \frac{zi}{e^{is} - tz}$  é tal que  $\phi'(s) = \frac{-zie^{is}i}{(e^{is} - tz)^2} = \frac{ze^{is}}{(e^{is} - tz)^2}$ ,

de onde segue-se que  $g'(t) = \phi(2\pi) - \phi(0) = 0 \Rightarrow g$  é constante. Como  $g(0) = 2\pi$  temos que  $g(1) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} ds = 2\pi$  que é justamente o que queríamos demonstrar ■

Tendo em vista o resultado do Corolário 1.1 bem como o Lema 1.1 vamos, através de um caso particular, introduzir a fórmula integral de Cauchy, que será o resultado mais importante desta seção.

### 1.1.1 Caso particular da fórmula integral de Cauchy

**Proposição:** Sejam  $G$  um domínio,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analítica, isto é, dado  $a \in G$   $f$  tem derivadas de todas as ordens em  $a$ , e  $B(a, r) \subseteq G$  ( $r > 0$ ) a bola de centro  $a$  e raio  $r$ . Se  $\gamma(t) = a + re^{it}$  para  $0 \leq t \leq 2\pi$ , então

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

para  $|z - a| < r$ .

**Demonstração:** Consideremos inicialmente o caso particular<sup>1</sup>  $a = 0$  e  $r = 1$ .

<sup>1</sup>O caso geral se reduz a esse se tomarmos  $G_1 = \{\frac{1}{r}(z - a), z \in G\}$  e  $g(z) = f(a + rz)$ .



Seja  $z$  fixo tal que  $|z| < 1$  de onde

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is})}{e^{is}-z} ie^{is} ds \iff \quad (1.1)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is})}{e^{is}-z} e^{is} ds - 2\pi f(z) = 0 \iff \int_0^{2\pi} \left[ \frac{f(e^{is})}{e^{is}-z} e^{is} - f(z) \right] ds = 0. \quad (1.2)$$

Utilizamos a regra de Leibniz para a função  $\varphi(s, t) = \frac{f[z+t(e^{is}-z)]e^{is}}{e^{is}-z} - f(z)$   $t \in [0, 1]$  e  $s \in [0, 2\pi]$ . Como  $|z+t(e^{is}-z)| = |z(1-t)+te^{is}| \leq |z|(1-t)+t < 1-t+t = 1$ , segue-se que  $\varphi$  está bem definida. Sendo assim,  $g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s, t) ds$  tem derivada contínua e  $g'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} ds$ . Além disso, pela definição de  $\varphi$  temos que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{e^{is}}{e^{is}-z} f'[z+t(e^{is}-z)](e^{is}-z) = e^{is} f'[z+t(e^{is}-z)].$$

Seja  $\phi(s) = -\frac{i}{t} f[z+t(e^{is}-z)]$  com  $t \in (0, 1]$ . Então  $\phi'(s) = -\frac{i}{t} f'[z+t(e^{is}-z)](ite^{is}) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . Sendo assim, podemos escrever, pelas definições de  $\phi$  e de  $g$ , que

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} ds = \int_0^{2\pi} \phi'(s) ds = \phi(2\pi) - \phi(0) = 0.$$

Sendo assim,  $g'(t)$  é contínua e  $g(t)$  é constante. Como  $g(0) = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{f(z)e^{is}}{e^{is}-z} - f(z) \right] ds = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-z} ds - 2\pi f(z)$  e pelo Corolário 1.1 temos que  $\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-z} ds = 2\pi$ , sendo assim, concluímos que  $g(0) = 0$  e conseqüentemente  $g(1) = 0$ .

Pela definição de  $g(t)$  temos que,  $\varphi(s, 1) = 0$ , ou seja,  $\frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is}-z} - f(z) = 0$ . Pelas equações (1.1) e (1.2) concluímos que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

o que conclui a demonstração ■

## 1.2 Fórmula integral de Cauchy

De modo a mostrarmos nosso resultado fundamental, isto é, o teorema de Cauchy optamos pelo caminho: a partir do conceito de índice de uma curva e de algumas propriedades a ele relacionadas, bem como de dois lemas, vamos enunciar e demonstrar nossas três

versões da fórmula integral de Cauchy. A primeira versão envolve propriedades associadas a uma função analítica com respeito ao interior de uma curva fechada, a segunda envolve as mesmas propriedades da primeira para uma família de curvas fechadas e pode ser vista como um lema para a terceira e mais completa versão, que envolve as derivadas da função e a partir da qual vamos demonstrar o teorema dos resíduos. As três versões da fórmula integral de Cauchy vêm dadas em termos de teoremas.

**Definição 1.5: (Índice de uma curva)** Seja  $\gamma : [b, c] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva regular por partes<sup>2</sup> e fechada, *i.e.*,  $\gamma(b) = \gamma(c)$ . Então, para todo  $a$  não pertencente à imagem da curva  $\gamma$ , que denotamos por  $\{\gamma\}$ , o índice de  $\gamma$  com respeito a  $a$ , denotado por  $n(\gamma; a)$ , é definido através da integral:

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}.$$

**Proposição:** O índice de uma curva é um número inteiro.<sup>3</sup>

**Demonstração:** Seja  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  definida por:

$$g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} ds.$$

Pela definição de  $g$  temos,  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}$  e  $g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}$ . Sendo  $f(t) = e^{-g(t)}[\gamma(t) - a]$  temos

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} e^{-g}(\gamma - a) = e^{-g} \gamma' - g' e^{-g}(\gamma - a) = e^{-g}[\gamma' - \gamma'(\gamma - a)^{-1}(\gamma - a)] = 0.$$

Sendo assim,  $f$  é uma função constante e conseqüentemente  $f(0) = f(1)$ , ou seja, podemos escrever

$$e^{-g(0)}[\gamma(0) - a] = e^{-g(1)}[\gamma(1) - a].$$

Visto que,  $\gamma(0) = \gamma(1)$  e  $g(0) = 0$  temos que  $1 = e^{-g(1)}$  de onde segue-se  $-g(1) = 2k\pi i$  com  $k \in \mathbb{Z}$ . Portanto, para algum  $k_1 \in \mathbb{Z}$ , temos

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = 2k_1\pi i$$

de onde concluímos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} \in \mathbb{Z}$$

o que demonstra a proposição ■

<sup>2</sup>Nas demonstrações seguintes utilizamos, sem perda de generalidade,  $\gamma$  definida no intervalo  $[0, 1]$ .

<sup>3</sup>O índice de  $\gamma$  em relação a  $a$  mede o “número líquido” de voltas de  $\gamma$  ao redor do ponto  $z = a$ .

**Lema 1.2** Sejam  $\gamma : [b, c] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva regular por partes e  $\phi$  definida e contínua sobre  $\gamma$ . Para cada  $m \in \mathbb{N}$  seja

$$F_m(z) = \int_{\gamma} \frac{\phi(w)}{(w-z)^m} dw \quad \text{com } z \notin \{\gamma\}.$$

Então, cada  $F_m$  é analítica em  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \{\gamma\}\}$  e  $F'_m(z) = m F_{m+1}(z)$ .

**Demonstração:** Mostremos primeiramente que  $F_m$  é contínua. Uma vez que,  $\{\gamma\}$  é um subconjunto compacto<sup>4</sup> de  $\mathbb{C}$  e  $\phi$  é contínua em  $\{\gamma\}$ ,  $\phi$  é limitada em  $\{\gamma\}$ <sup>5</sup>, i.e.,  $\exists M > 0$  tal que:  $|\phi(w)| \leq M \quad \forall w \in \{\gamma\}$ .

A partir da expressão

$$\begin{aligned} \frac{1}{(w-z)^m} - \frac{1}{(w-a)^m} &= \left[ \frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-a} \right] \sum_{k=1}^m \frac{1}{(w-z)^{m-k}} \frac{1}{(w-a)^{k-1}} \\ &= (z-a) \left[ \frac{1}{(w-z)^m(w-a)} + \frac{1}{(w-z)^{m-1}(w-a)^2} + \cdots + \frac{1}{(w-z)(w-a)^m} \right]. \end{aligned}$$

segue-se

$$\begin{aligned} \frac{\phi(w)}{(w-z)^m} - \frac{\phi(w)}{(w-a)^m} &= \\ &= (z-a) \left[ \frac{\phi(w)}{(w-z)^m(w-a)} + \frac{\phi(w)}{(w-z)^{m-1}(w-a)^2} + \cdots + \frac{\phi(w)}{(w-z)(w-a)^m} \right]. \end{aligned}$$

ou ainda, após a integração, a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\phi(w)}{(w-z)^m} dw - \int_{\gamma} \frac{\phi(w)}{(w-a)^m} dw &= (z-a) \left[ \int_{\gamma} \frac{\phi(w)dw}{(w-z)^m(w-a)} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \int_{\gamma} \frac{\phi(w)dw}{(w-z)(w-a)^m} \right], \end{aligned} \tag{1.3}$$

de onde concluímos que

---

<sup>4</sup>Por definição um subconjunto  $A$  é dito compacto se dada uma cobertura aberta  $M$  de  $A$  podemos extrair de  $M$  uma subcobertura finita, mas como todo subconjunto fechado e limitado de  $\mathbb{C}$  é completo e totalmente limitado, temos que em  $\mathbb{C}$  um subconjunto ser compacto equivale a ser fechado e limitado. Os detalhes destes fatos podem ser encontrados na referência [5].

<sup>5</sup>Os detalhes deste fato podem ser encontrados na referência [5].

$$|F_m(z) - F_m(a)| \leq |z - a|M \left[ \int_{\gamma} \frac{|dw|}{|w - z|^m |w - a|} + \dots + \int_{\gamma} \frac{|dw|}{|w - z| |w - a|^m} \right].$$

Por outro lado, seja  $r = d(a, \{\gamma\})$ . Se  $|z - a| < \delta < \frac{r}{2}$  então:

$$|F_m(z) - F_m(a)| \leq \delta M \left[ \int_{\gamma} \frac{|dw|}{|w - z|^m |w - a|} + \dots + \int_{\gamma} \frac{|dw|}{|w - z| |w - a|^m} \right].$$

Como  $z \notin \{\gamma\}$ ,  $|w - z| > \frac{r}{2}$ ,  $|w - a| > \frac{r}{2}$  e sendo  $L(\gamma)$  o comprimento de  $\{\gamma\}$  temos:

$$|F_m(z) - F_m(a)| \leq \delta M \left[ \frac{2^{m+1}L(\gamma)}{r^m r} + \dots + \frac{2^{m+1}L(\gamma)}{r r^m} \right] = \frac{\delta M m 2^{m+1}L(\gamma)}{r^{m+1}}.$$

Dado  $\varepsilon > 0$  se tomarmos  $\delta = \min \left[ \frac{r}{2}; \frac{r^{m+1}\varepsilon}{M 2^{m+1}mL(\gamma)} \right]$  então  $F_m$  será contínua.

Vamos mostrar agora que  $F_m$  é analítica em  $A$ . Para isso, consideremos  $a$  e  $z \in A$  com  $a \neq z$ . Pelo resultado da equação (1.3) temos:

$$\frac{F_m(z) - F_m(a)}{z - a} = \int_{\gamma} \frac{\phi(w)(w - a)^{-1}}{(w - z)^m} dw + \dots + \int_{\gamma} \frac{\phi(w)(w - a)^{-m}}{w - z} dw. \quad (1.4)$$

Como  $a \notin \{\gamma\}$  a função  $\phi(w)(w - a)^k$  é contínua em  $\{\gamma\} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Temos, em decorrência da primeira parte da prova deste lema, que cada uma das integrais acima é uma função contínua para qualquer valor de  $z \in A$ . Tomado o limite  $z \rightarrow a$  na equação (1.4) podemos escrever, pela definição de  $F(m + 1)$ , que:

$$F'_m(a) = \int_{\gamma} \frac{\phi(w)}{(w - a)^{m+1}} dw + \dots + \int_{\gamma} \frac{\phi(w)}{(w - a)^{m+1}} dw = mF_{m+1}(a).$$

o que completa a demonstração ■

**Lema 1.3** Sejam  $G \subseteq \mathbb{C}$  um domínio,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica e  $\phi : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$  definida por:

$$\phi(z, w) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \quad \text{se } z \neq w \quad \text{e} \quad \phi(z, z) = f'(z).$$

Então  $\phi$  é contínua e para cada  $w \in G$  fixado, a função  $g(z) = \phi(z, w)$  é analítica em  $G$ .

**Demonstração:** Uma vez que  $z \neq w$ , a continuidade de  $\phi$  é imediata. Sejam  $z_0 \in G$ ,  $z_0 \neq w$  e  $\delta < \frac{d(z_0, w)}{2}$ . A definição de  $\delta$  implica que  $B(z_0, \delta)$ , está contida em  $G$ .

Tomemos  $z \in B(z_0, \delta)$ . Vamos escrever o quociente  $\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$  na seguinte forma

$$\begin{aligned}
\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} &= \frac{\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - \frac{f(z_0)-f(w)}{z_0-w}}{z - z_0} \\
&= \frac{f(z)z_0 - f(z)w - f(w)z_0 + f(w)w - f(z_0)z + f(z_0)w + f(w)z - f(w)w}{(z - z_0)(z - w)(z_0 - w)} \\
&= \frac{f(w)(z - z_0) - [f(z) - f(z_0)]w + f(z)z_0 - f(z_0)z}{(z - z_0)(z - w)(z_0 - w)} \\
&= \frac{f(w)(z - z_0) - [f(z) - f(z_0)]w + f(z)z_0 - f(z_0)z_0 + f(z_0)z_0 - f(z_0)z}{(z - z_0)(z - w)(z_0 - w)}.
\end{aligned}$$

Enfim, simplificando temos

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(w)}{(z - w)(z_0 - w)} - \frac{w + z_0}{(z - w)(z_0 - w)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{f(z_0)}{(z - w)(z_0 - w)}.$$

Como as equações acima são válidas para qualquer valor de  $z \in B(z_0, \delta)$  podemos tomar o limite  $z \rightarrow z_0$  na equação acima, logo

$$g'(z_0) = \frac{f(w)}{(z_0 - w)^2} - \frac{w + z_0}{(z_0 - w)^2} f'(z_0) - \frac{f(z_0)}{(z_0 - w)} \quad \forall \quad z_0 \in G, \quad z_0 \neq w.$$

Consideremos agora o caso em que  $z_0 = w$ , de onde segue-se, para o mesmo quociente,

$$\frac{g(z) - g(w)}{z - w} = \frac{\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(w)}{z - w} = \frac{f(z) - f(w) - f'(w)(z - w)}{(z - w)^2}.$$

Novamente tomando o limite  $z \rightarrow w$  e utilizando a regra de L'Hôpital [1661 – Guillaume François Antoine de L'Hôpital – 1704] temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow w} \frac{g(z) - g(w)}{z - w} &= \lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w) - f'(w)(z - w)}{(z - w)^2} \\
&= \lim_{z \rightarrow w} \frac{f'(z) - f'(w)}{2(z - w)} = \lim_{z \rightarrow w} \frac{f''(z)}{2} = \frac{f''(w)}{2}
\end{aligned}$$

e, como por hipótese,  $f$  é analítica,  $g(z)$  também o é, o que conclui a demonstração ■

### 1.2.1 Fórmula integral de Cauchy (Primeira versão)

A partir dos conceitos anteriormente apresentados passamos ao estudo da fórmula integral de Cauchy. Neste trabalho, vamos discutir três versões da fórmula e suas respectivas demonstrações.

**Teorema:** Sejam  $G$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$  e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica. Se  $\gamma$  é uma curva fechada e regular por partes em  $G$  tal que  $n(\gamma; w) = 0$  para  $w \in \mathbb{C} - G$  então, para  $a \in G - \{\gamma\}$  temos

$$n(\gamma; a)f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

**Demonstração:** Defina  $\phi : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$  por:

$$\phi(z, w) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{se } z \neq w \\ f'(z) & \text{se } z = w. \end{cases}$$

Segue do Lema 1.2 que  $\phi$  é contínua e para cada  $w \in G$ ,  $z \mapsto \phi(z, w)$  é analítica. Seja  $H = \{w \in \mathbb{C} \mid n(\gamma; w) = 0\}$ . Como  $n(\gamma; \cdot)$  é contínua,  $H$  é aberto e além disso, pela hipótese,  $H \cup G = \mathbb{C}$ . Definamos  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , através da expressão

$$g(z) = \begin{cases} \int_{\gamma} \phi(z, w) dw & \text{se } z \in G \\ \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw & \text{se } z \in H. \end{cases}$$

Primeiramente vamos mostrar que  $g$  está bem definida. Considere  $z \in G \cap H$ , então:

$$\int_{\gamma} \phi(z, w) dw = \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z}.$$

Como  $z \in H$  temos, por hipótese, que  $n(\gamma; z) = 0$ , ou seja,  $\int_{\gamma} \frac{dw}{w - z} = 0$  logo:

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{\gamma} \phi(z, w) dw, \text{ se } z \in H.$$

Sendo assim,  $g$  está bem definida. Pelo Lema 1.2,  $g$  é analítica em todo  $\mathbb{C}$ , isto é,  $g$  é *inteira* e podemos considerar o limite abaixo

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0.$$

A última igualdade se deve aos fatos de  $f$  ser limitada em  $\{\gamma\}$  e  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{w - z} = 0$ .

Em particular,  $\exists R > 0$  tal que  $|g(z)| \leq 1$  se  $|z| \geq R$ . Como  $g$  é limitada em  $B(0, R)$  segue, do Teorema de Liouville<sup>6</sup> [1809 – Joseph Liouville – 1882] que  $g$  é constante. Pela equação acima temos que  $g \equiv 0$ .

Se  $a \in G - \{\gamma\}$  temos:

$$0 = g(a) = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz - f(a) \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} dz.$$

Pela definição de índice de uma curva temos que  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} dz = 2\pi i n(\gamma; a)$ , de onde segue-se:

$$n(\gamma; a)f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

que é o resultado desejado ■

## 1.2.2 Fórmula integral de Cauchy (Segunda versão)

**Teorema:** Sejam  $G$  um aberto de  $\mathbb{C}$  e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analítica. Sejam  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  curvas fechadas e regulares por partes, em  $G$ , tais que:

$$n(\gamma_1; w) + \dots + n(\gamma_m; w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus G.$$

Então para todo  $a \in G$  tal que  $a \notin \{\gamma_1\} \cup \dots \cup \{\gamma_m\}$  temos:

$$f(a) \sum_{k=1}^m n(\gamma_k; a) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

**Demonstração:** Procedemos de maneira análoga à demonstração anterior definindo  $\phi : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$  por:

$$\phi(z, w) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{se } z \neq w \\ f'(z) & \text{se } z = w. \end{cases}$$

Seja  $H = \{w \in \mathbb{C} \mid n(\gamma_1; w) + \dots + n(\gamma_m; w) = 0\}$ . Como  $n(\gamma_1; w) + \dots + n(\gamma_m; w) = 0$ ,  $f$  é contínua,  $H$  é aberto e por hipótese,  $\mathbb{C} = G \cup H$ . Defina  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  por:

---

<sup>6</sup>Se  $f$  é uma função inteira e limitada então  $f$  é constante. A demonstração do teorema pode ser encontrada na referência [6].

$$g(z) = \begin{cases} \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} \phi(z, w) dw & \text{se } z \in G \\ \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z} & \text{se } z \in H. \end{cases}$$

Cálculos análogos aos da demonstração anterior mostram que  $g$  está bem definida, é inteira e limitada, ou seja,  $g$  é constante. Novamente tomando o limite  $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z)$  concluímos que  $g \equiv 0$ . Se  $a \in G - \{\{\gamma_1\} \cup \dots \cup \{\gamma_m\}\}$  então:

$$0 = g(a) = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz - f(a) \sum_{k=1}^m \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} dz.$$

Pela definição de índice temos que:

$$f(a) \sum_{k=1}^m n(\gamma_k; a) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

que é o resultado desejado. ■

### 1.2.3 Fórmula integral de Cauchy (Terceira versão)

**Teorema:** Sejam  $G$  um domínio de  $\mathbb{C}$ ,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analítica e  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  curvas fechadas e regulares por partes, em  $G$ , tais que:

$$n(\gamma_1; w) + \dots + n(\gamma_m; w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus G.$$

Então para todo  $a \in G$  tal que  $a \notin \{\gamma_1\} \cup \dots \cup \{\gamma_m\}$  temos:

$$f^{(k)}(a) \sum_{j=1}^m n(\gamma_j; a) = k! \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz.$$

**Demonstração:** O resultado desejado seguirá de uma combinação do Lema 1.2 com a segunda versão da fórmula integral de Cauchy.

Consideremos a função  $F_n(z) = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} \frac{f(w)}{(w - z)^n} dw$ . Pela segunda versão da fórmula integral de Cauchy, temos:

$$f(a) \sum_{j=1}^m n(\gamma_j; a) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi i} F_1(a).$$



Temos, pelo resultado do Lema 1.2, que  $F'_m(z) = m F_{m+1}(z)$  sendo assim, derivando  $k$  vezes a expressão acima em relação a  $a$ , temos:

$$f^{(k)}(a) \sum_{j=1}^m n(\gamma_j; a) = \frac{1}{2\pi i} k! F_{k+1}(a) = k! \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz.$$

o que demonstra o resultado<sup>7</sup> ■

## 1.3 O teorema de Cauchy

A seguir encontra-se o teorema de Cauchy, que foi originalmente demonstrado pelo mesmo utilizando-se como hipótese uma função analítica com primeira derivada contínua. Sua demonstração foi obtida através do teorema de Green e das condições de Cauchy-Riemann[7].

Goursat provou o teorema sem impor a continuidade da derivada primeira, por esta razão, o teorema a seguir é também conhecido como teorema de Cauchy-Goursat. A demonstração proposta por Goursat [8] é feita inicialmente para curvas triangulares e fechadas e depois estendida para quaisquer curvas fechadas e regulares por partes.

Neste trabalho a demonstração que será dada para o referido teorema [6] seguirá da segunda versão da fórmula integral de Cauchy. Esta demonstração foi escolhida por ser mais simples e direta que a demonstração original.

### 1.3.1 Teorema de Cauchy-Goursat

**Teorema:** Sejam  $G \subset \mathbb{C}$  um domínio,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica e  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  curvas fechadas e regulares por partes tais que:

$$\sum_{k=1}^m n(\gamma_k; w) = 0 \quad \forall w \notin G, \quad \text{então} \quad \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(z) dz = 0.$$

**Demonstração:** Consideremos a função  $g(z) = f(z)(z-a)$ . Como  $f$  é analítica  $g$  também o é, além disso,  $\sum_{k=1}^m n(\gamma_k; w) = 0$ , sendo assim, podemos aplicar a segunda versão da fórmula integral de Cauchy para  $g(z)$ :

---

<sup>7</sup>Note que para  $k = 0$  recuperamos o resultado da segunda fórmula integral de Cauchy.

$$\sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} \frac{g(z)}{z-a} dz =$$

$$2\pi i g(a) \sum_{k=1}^m n(\gamma_k; w) = 2\pi i f(a)(a-a) \sum_{k=1}^m n(\gamma_k; w) = 0,$$

que mostra, de maneira mais imediata, o resultado desejado ■

## 1.4 Resíduos

Para que possamos passar ao resultado de maior aplicabilidade desta seção, a partir do qual podemos calcular integrais reais via variáveis complexas, que será um conceito vital para o cálculo das transformadas inversas<sup>8</sup>, devemos primeiramente introduzir os conceitos de ponto singular, série de Laurent (1813 – Pierre Alphonse Laurent – 1854) bem como o conceito de resíduo. Enfim, concluímos a seção com o lema de Jordan.

### 1.4.1 Singularidades

Nesta seção são estudadas funções analíticas em um *disco furado*, isto é, um disco cujo centro foi removido. Através do comportamento da função nas vizinhanças do centro do disco alguns resultados úteis e interessantes são obtidos. Em particular, utilizamos estes resultados para calcular algumas integrais reais. Passemos a definição e classificação de um ponto singular.

**Definição 1.6:** Dizemos que uma função  $f$  tem uma *singularidade isolada* em  $a$  se  $f$  não é analítica em  $a$ , mas existe  $R > 0$  tal que  $f$  é analítica em  $B(a, R) \setminus \{a\}$ .

Vamos ver, na Seção 1.4.4, que o cálculo do resíduo de uma função está diretamente relacionado com a classificação de pontos singulares, por esta razão passamos agora à classificação de pontos singulares isolados.

**Definição 1.7** Dizemos que um ponto singular  $a$  é uma *singularidade removível* se existe uma função analítica  $g$  em  $B(a, R)$  tal que  $g(z) = f(z)$  para  $0 < |z - a| < R$ .

**Definição 1.8** Dizemos que um ponto singular isolado  $a$  é um *pólo* de  $f$  se  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$ , ou seja,  $\forall M > 0 \exists \delta > 0$  tal que, se  $0 < |z - a| < \delta$  então  $|f(z)| > M$ . O menor inteiro  $m$  tal que a função  $(z - a)^m f(z)$  tem uma singularidade removível em  $a$  é chamado *ordem do pólo*. Neste caso dizemos que  $a$  é um *pólo de ordem  $m$* .

**Definição 1.9** No caso em que o ponto singular isolado  $a$  não é uma singularidade removível nem um pólo dizemos que  $a$  é uma *singularidade essencial* de  $f$ .

<sup>8</sup>Ver seções 2.2, 2.4, 2.5 e 2.6 do Capítulo 2.

## 1.4.2 Série de Laurent

Além de ser uma peça fundamental para uma demonstração do teorema dos resíduos, o chamado desenvolvimento em série de Laurent nos permite analisar o comportamento de uma função nas vizinhanças de um ponto singular. Tal série é obtida através do seguinte teorema:

**Teorema:** Seja  $f(z)$  analítica no anel  $ann(a; R_1, R_2)$ .<sup>9</sup> Então<sup>10</sup>

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad (1.5)$$

na qual a convergência é absoluta e uniforme sob o  $ann(a; r_1, r_2)$  se  $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ . Além disso, sendo  $R_1 < r < R_2$  e o círculo  $|z-a| < r$ , os coeficientes  $a_n$  são dados por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz. \quad (1.6)$$

onde  $\gamma$  é uma curva fechada, regular por partes e contida em  $|z-a| < r$ .

**Demonstração:** Sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  respectivamente as curvas  $|z-a| = r_1$  e  $|z-a| = r_2$  com  $r_1 < r_2$ . Pelo teorema de Cauchy-Goursat temos que para qualquer função  $g$  analítica em  $ann(a; R_1, R_2)$  temos  $\int_{\gamma_1} g = \int_{\gamma_2} g$ . Em particular a integral da equação (1.6) independe de  $r$  sendo assim, para cada inteiro  $n$ ,  $a_n$  é uma constante. Desta forma, a função  $f_2 : B(a, R_2) \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r_2} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

onde  $|z-a| < r_2$ ,  $R_1 < r_2 < R_2$ , está bem definida e é analítica em  $B(a, R_2)$ . De maneira análoga, se  $G = \{z : |z-a| > R_1\}$  então a função  $f_1 : G \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r_1} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

onde  $|z-a| < r_2$ ,  $R_1 < r_1 < R_2$ , é analítica em  $\mathbb{C}$ .

Seja  $R_1 < |z-a| < R_2$  tomemos  $r_1$  e  $r_2$  de tal forma que  $R_1 < r_1 < |z-a| < r_2 < R_2$ . Sejam  $\gamma_1(t) = a + r_1 e^{it}$  e  $\gamma_2(t) = a + r_2 e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Consideremos um segmento de reta  $\lambda$  unindo um ponto de  $\gamma_2$  a um ponto de  $\gamma_1$ , pertencente ao mesmo raio, como nos mostra a Figura 1.1. Para qualquer ponto  $z$  pertencente à região delimitada por  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  temos que  $n(\gamma_2; z) = 1$  e  $n(\gamma_1; z) = 0$ .

<sup>9</sup> $ann(a; R_1, R_2)$  é o anel de centro  $a$  e raios  $R_1$  e  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ).

<sup>10</sup>Esta série é única.

Sendo  $\gamma = \gamma_2 + \lambda - \gamma_1 - \lambda$  temos, pela fórmula integral de Cauchy, que

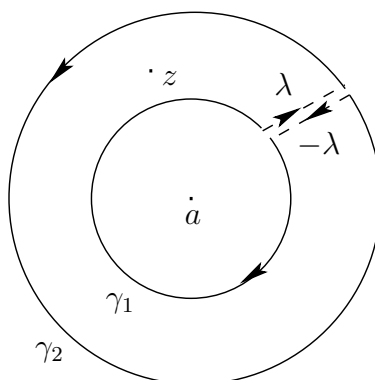


Figura 1.1: Definição da curva  $\gamma$ .

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = f_2(z) + f_1(z). \quad (1.7)$$

Vamos expandir  $f_1$  e  $f_2$  em séries de potências,  $f_2$  tendo potências positivas de  $(z-a)$  e  $f_1$  negativas. A assim chamada série de Laurent virá como consequência do desenvolvimento em série da equação acima. Como  $f_2$  é analítica no disco  $B(a, R_2)$  esta possui série de Taylor em torno de  $a$  e vale

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

cujos coeficientes  $a_n$  são dados pela equação (1.6).

Definamos  $g(z)$ , para  $0 < |z| < \frac{1}{R_1}$ , por:  $g(z) = f_1\left(a + \frac{1}{z}\right)$ ; desta forma, 0 é uma singularidade isolada<sup>11</sup> de  $g(z)$ . Mostremos que  $z = 0$  é uma singularidade removível. De fato, sejam  $r > R_1$ ,  $u(z) = d(z, C)$  onde  $C$  é a circunferência  $\{w : |w-a| = r\}$  e  $M = \max\{|f(w)| : w \in C\}$ . Então para  $|z-a| > r$  temos

$$|f(z)| \leq \frac{Mr}{u(z)}.$$

Como  $\lim_{z \rightarrow \infty} u(z) = \infty$  temos

$$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f_1\left(a + \frac{1}{z}\right) = 0.$$

---

<sup>11</sup>Ver Seção 1.4.1.

Sendo assim, se definirmos  $g(0) = 0$  então  $g$  é analítica em  $B(0, \frac{1}{R_1})$ , de onde podemos tomar a série de Maclaurin de  $g(z)$ , dada por:

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n \Rightarrow f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n};$$

com coeficientes  $a_{-n}$  dados pela equação (1.6). A partir da segunda igualdade da equação (1.7) podemos escrever:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Como a convergência de  $f_1$  e  $f_2$  é absoluta e uniforme<sup>12</sup> em algum anel contido no  $\text{ann}(a; R_1, R_2)$ , o mesmo pode-se dizer da convergência da série  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ .

A partir da convergência absoluta e uniforme de  $f$ , temos a unicidade da série de Laurent, pois se  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$  e a convergência é absoluta e uniforme, então os coeficientes  $a_n$  devem ser dados pela equação (1.6) ■

**Definição 1.10:** Sejam  $f$  uma função com uma singularidade isolada em  $z = a$  e

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

sua expansão em série de Laurent em torno de  $z = a$ . Definimos o *resíduo* de  $f$  em  $z = a$ , denotado por  $\text{Res}(f; a)$ , como sendo o coeficiente  $a_{-1}$  da série de Laurent.

A importância do resíduo fica clara ao observarmos que, para  $n = -1$  a equação (1.6) implica em  $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$ . A generalização deste conceito é dada pela definição e pelo teorema que se seguem.

**Definição 1.11:** Sejam  $G$  um conjunto aberto e  $\gamma$  uma curva fechada e regular por partes em  $G$ . Dizemos que uma curva  $\gamma$  é homotópica a zero e denotamos por  $\gamma \approx 0$ , se  $n(\gamma; w) = 0$  para todo  $w$  em  $\mathbb{C} - G$ .

### 1.4.3 Teorema dos resíduos

Sejam  $G$  um domínio e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analítica exceto nas singularidades isoladas  $a_1, \dots, a_m$ . Se  $\gamma$  é uma curva fechada e regular por partes em  $G$  tal que,  $a_1, \dots, a_m \notin \{\gamma\}$  e  $\gamma \approx 0$  então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m n(\gamma; a_k) \text{Res}(f; a_k). \quad (1.8)$$

---

<sup>12</sup>Os detalhes da demonstração deste fato podem ser encontrados na referência [6].

**Demonstração:** Sejam  $m_k = n(\gamma; a_k)$  para  $1 \leq k \leq m$ . Como as singularidades são isoladas existem números positivos  $r_1, \dots, r_m$  tais que  $B(a_i, r_i) \cap B(a_j, r_j) = \emptyset$  e  $B(a_i, r_i) \cap \{\gamma\} = \emptyset \quad \forall \quad 1 \leq i, j \leq m$  tal que  $i \neq j$ . Definamos  $\gamma_k(t) = a_k + r_k \exp(-2\pi i m_k t)$  para  $0 \leq t \leq 1$ . Então para  $1 \leq p \leq m$  temos<sup>13</sup>

$$n(\gamma; a_p) + \sum_{k=1}^m n(\gamma_k; a_p) = 0.$$

Como  $\gamma \approx 0$  e  $B(a_k, r_k) \subset G$ , segue-se

$$n(\gamma; a) + \sum_{k=1}^m n(\gamma_k; a) = 0$$

para todo  $a \notin G - \{a_1, \dots, a_m\}$ . Como  $f$  é analítica em  $G - \{a_1, \dots, a_m\}$  temos, pelo teorema de Cauchy-Goursat, que:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(z) dz. \quad (1.9)$$

Seja  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z - a_k)^n$  a série de Laurent em torno de  $a_k$  então esta série converge

uniformemente em  $\{B(a_k, r_k)\}$  e conseqüentemente  $\int_{\gamma_k} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \int_{\gamma_k} (z - a_k)^n$ .

Uma vez que,  $(z - a_k)^n$  tem primitiva para todo  $n \neq -1$  temos que,  $\int_{\gamma_k} (z - a_k)^n dz = 0$  se  $n \neq -1$ . Além disso,  $\int_{\gamma_1} (z - a_k)^{-1} dz = 2\pi i n(\gamma_k; a_k) Res(f; a_k)$ . Pela equação (1.9) temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m n(\gamma; a_k) Res(f; a_k).$$

que é o resultado desejado ■

#### 1.4.4 Cálculo dos resíduos

Consideremos o seguinte problema: calcular  $\int_{\gamma} f(z) dz$  sendo  $G$  um domínio,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analítica, exceto nas singularidade isoladas  $a_1, \dots, a_n$  e  $\gamma$  uma curva fechada e regular por partes em  $G$  tal que  $a_1, \dots, a_n \notin \{\gamma\}$ .

Pelo teorema dos resíduos o problema estará solucionado se tivermos o valor do resíduo de  $f$  em cada uma das singularidades. A equação (1.6) nos fornece uma forma de calcular os termos da série de Laurent, em particular o resíduo mas, uma vez que

---

<sup>13</sup>Note que assumimos que  $\gamma$  e  $\gamma_k, \forall 1 \leq k \leq m$ , são orientadas em sentido contrário.

os termos da série podem ser obtidos por outros métodos, podemos utilizar a referida equação para calcular a integral. Nesta seção discutimos alguns destes outros métodos.

Vemos a seguir que no caso em que as singularidades são pólos<sup>14</sup> não será necessário expandir a série para obtermos o resíduo.<sup>15</sup>

**Teorema:** Sejam  $G$  um domínio e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  tal que,  $f = \frac{p(z)}{q(z)}$  com  $p$  e  $q$  analíticas, tais que  $p(a) \neq 0$  e  $q$  tem um zero de ordem 1 em  $z = a$ .<sup>16</sup> Então

$$\text{Res}(f; a) = \frac{p(a)}{q'(a)}.$$

**Demonstração:** Como  $a$  é um pólo simples a série de Laurent em torno de  $z = a$  é dada por:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$$

ou ainda, na seguinte forma

$$\Rightarrow (z-a)f(z) = a_{-1} + (z-a)[a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots].$$

Tomando o limite  $z \rightarrow a$  na equação anterior temos que

$$\text{Res}(f; a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z). \quad (1.10)$$

Pela definição de zero simples temos que  $q(z)$  admite uma série de Taylor do tipo:

$$q(z) = (z-a)q'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!}q''(a) + \dots$$

Agora substituímos esta expressão para  $f = \frac{p}{q}$  na equação (1.10) e obtemos

$$\text{Res}(f; a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)p(z)}{(z-a) \left[ q'(a) + \frac{z-a}{2}q''(a) + \dots \right]} = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

que é a expressão para o resíduo no caso em que o pólo é simples ■

Uma extensão da equação (1.10) para um pólo de ordem  $k$  é dada pelo próximo teorema.

<sup>14</sup>Ver referência [7].

<sup>15</sup>No caso em que a singularidade da função não for um pólo devemos calcular explicitamente a série de Laurent de modo a termos o coeficiente  $a_{-1}$ , isto é, o resíduo.

<sup>16</sup>Ou seja,  $a$  é um pólo simples de  $f$ .

**Teorema:** Sejam  $G$  um domínio e  $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica exceto por um pólo de ordem  $k > 1$  no ponto  $z = a$ . Então

$$Res(f; a) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)^k f(z)] \right\}. \quad (1.11)$$

**Demonstração:** Como  $a$  é um pólo de ordem  $k$  a sua série de Laurent é dada por:

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

na qual  $a_{-k} \neq 0$ . Multiplicando-se ambos os membros por  $(z-a)^k$  obtemos

$$(z-a)^k f(z) = a_{-k} + \cdots + a_{-1}(z-a)^{k-1} + a_0(z-a)^k + a_1(z-a)^{k+1} + \cdots$$

de onde vemos que o resíduo,  $a_{-1}$ , de  $f$  em  $z = a$  é agora o coeficiente da potência  $(z-a)^{k-1}$  na série de Taylor da função  $g(z) = (z-a)^k f(z)$  em torno de  $z = a$ . Assim pelo teorema da expansão de Taylor[7] o coeficiente  $a_{-1}$  é dado por

$$a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(a) \Rightarrow Res(f; a) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)^k f(z)] \right\}$$

que é o resultado desejado ■

Enfim, a outra ferramenta, junto ao teorema dos resíduos, para o cálculo de integrais reais, via variáveis complexas, é dada pelo lema que se segue.

### 1.4.5 Lema de Jordan

Sejam  $C_R$  uma semicircunferência de raio  $R$  no semiplano superior e centrada na origem,  $f(z)$  uma função que tende uniformemente a zero mais rápido que  $\frac{1}{|z|}$  para  $\arg(z) \in [0, \pi]$  quando  $|z| \rightarrow \infty$  e  $\alpha$  um número real não-negativo, então

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0.$$

**Demonstração:** Para  $z \in C_R$  podemos escrever

$$z = Re^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad dz = iRe^{i\theta} d\theta$$

bem como

$$i\alpha z = i\alpha(R\cos\theta + iR\sin\theta) = i\alpha R\cos\theta - \alpha R\sin\theta.$$

Assim, tomando o módulo de  $I_R$ , podemos escrever



$$|I_R| = \left| \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |e^{i\alpha z}| |f(z)| |dz| = \int_0^\pi |e^{i\alpha R \cos \theta - \alpha R \sin \theta}| |f(Re^{i\theta})| R d\theta = \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} R |f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

Supondo que  $R|f(Re^{i\theta})| < \varepsilon(R)$  é independente de  $\theta$ , onde  $\varepsilon(R)$  é um parâmetro positivo e arbitrário que tende a zero quando  $R \rightarrow \infty$ , então

$$|I_R| < \varepsilon(R) \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta = 2\varepsilon(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta.$$

Ainda mais, para  $\theta$  no intervalo  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  temos que

$$\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi} \implies e^{-\alpha R \sin \theta} \leq e^{-\frac{2\alpha R}{\pi} \theta}$$

de onde concluímos que

$$|I_R| < 2\varepsilon(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\alpha R}{\pi} \theta} d\theta = \frac{\pi \varepsilon(R)}{\alpha R} (1 - e^{-\alpha R}).$$

Se  $R \rightarrow \infty$  temos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0.$$

É de se notar que o lema de Jordan também se aplica para  $\alpha = 0$  visto que

$$(1 - e^{-\alpha R}) \rightarrow 0$$

quando  $\alpha \rightarrow 0$ .<sup>17</sup> Enfim, se  $\alpha < 0$  o lema de Jordan permanece válido se a semi-circunferência  $C_R$  for tomada no semiplano inferior e  $f(z)$  for uniformemente a zero para  $\pi \leq \arg(z)$  ■

## 1.5 Valor principal de Cauchy

Vamos concluir este capítulo apresentando o chamado valor principal de Cauchy<sup>18</sup> que também pode ser considerado como consequência do teorema de Cauchy.

Seja  $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ , então temos, por definição, que

<sup>17</sup>Usamos aqui a regra de L'Hôpital.

<sup>18</sup>Este resultado é de grande importância, por exemplo, no estudo das chamadas relações de dispersão[9].

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x)dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x)dx.$$

No caso em que os limites da equação anterior existem temos

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x)dx$$

definimos o valor principal de Cauchy como sendo o valor do limite acima. Este conceito será de grande utilidade no cálculo de algumas integrais como vamos ver a seguir.

Seja  $f(z)$  uma função complexa, racional, cujo denominador é não nulo para todo  $x \in \mathbb{R}$  e que satisfaz as hipóteses do lema de Jordan. Consideremos  $C_R$  uma semicircunferência de raio  $R$  no semiplano superior e centrada na origem, e  $\gamma$  a curva obtida pela união do segmento de reta  $(-R, R)$  com  $C_R$ , orientada no sentido anti-horário. Supondo que nenhuma das  $n$  singularidades de  $f(z)$ , denotadas por  $z_j$ , está no eixo real, podemos tomar  $R$  tal que, as singularidades de  $f$  no semiplano superior estejam no interior de  $\gamma$  como nos mostra a Figura 1.2.

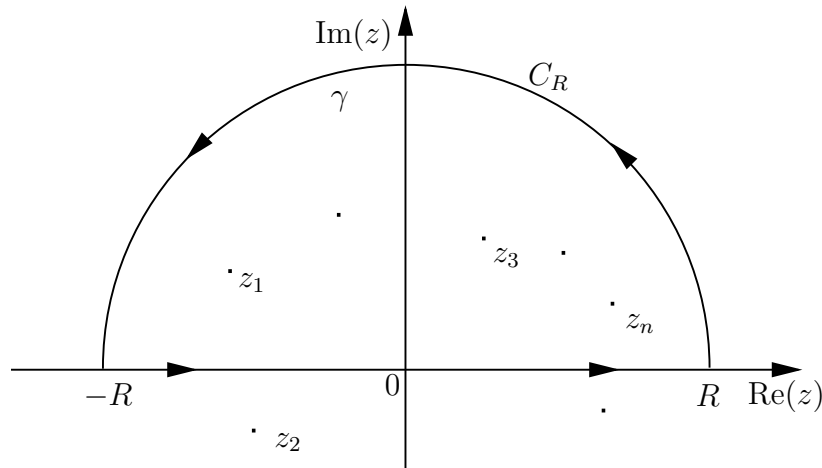


Figura 1.2: Contorno para o cálculo da integral de  $f(x)$ .

Utilizando o teorema dos resíduos, podemos escrever:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^R f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j)n(\gamma; z_j).$$

Tomando o limite  $R \rightarrow \infty$  na equação acima temos, pelo lema de Jordan, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j)n(\gamma; z_j).$$

Analiseemos novamente o caso anterior, porém agora tomemos  $f(z)$  tendo uma de suas  $n$  singularidades no eixo real, mais precisamente em  $z = 0$ <sup>19</sup>, que sem perda de generalidade, tomamos como sendo a primeira, isto é,  $z_1 = 0$ .

Afim de calcular a integral  $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  procedendo de maneira análoga ao que fizemos anteriormente, ou seja, utilizando o teorema dos resíduos, temos que tomar o contorno  $\gamma$  como sendo tal que,  $z = 0 \notin \{\gamma\}$ . O contorno  $\gamma$  escolhido está ilustrado na Figura 1.3, a seguir.

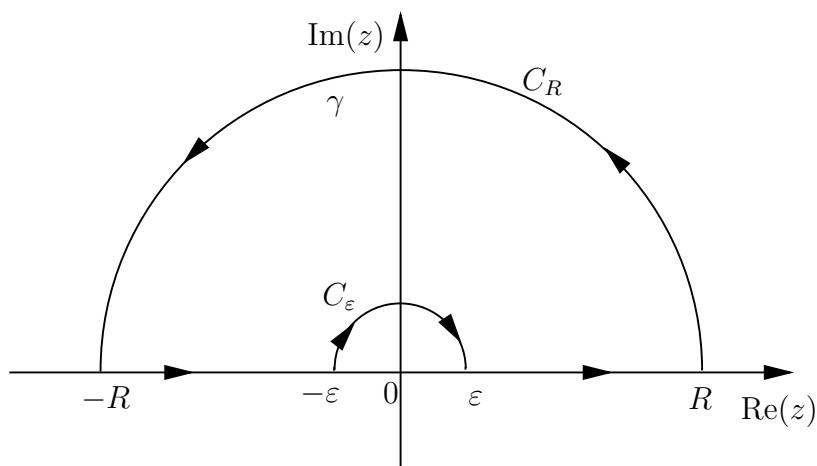


Figura 1.3: Contorno  $\gamma$  que exclui a singularidade  $z = 0$ .

Neste contorno  $C_\epsilon$  é a semicircunferência de raio  $\epsilon$  no semiplano superior<sup>20</sup>, centrada na origem e orientada no sentido horário.

Dividindo o contorno  $\gamma$  temos

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{-\epsilon} f(x)dx + \int_{C_\epsilon} f(z)dz + \int_{\epsilon}^R f(x)dx,$$

e uma vez que,  $z_1 = 0 \notin \{\gamma\}$  utilizando o teorema dos resíduos e a equação anterior podemos escrever

$$\int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{-\epsilon} f(x)dx + \int_{C_\epsilon} f(z)dz + \int_{\epsilon}^R f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=2}^n \text{Res}(f, z_j)n(\gamma; z_j). \quad (1.12)$$

Tomando o limite  $R \rightarrow \infty$  na equação (1.12) e utilizando o lema de Jordan temos

<sup>19</sup>Os casos mais gerais em que a singularidade não está em  $z = 0$  bem como o caso em que  $f(z)$  tem mais de uma singularidade no eixo real são conseqüências deste particular caso.

<sup>20</sup>Também poderíamos considerá-la no semiplano inferior. Note que neste caso  $z = 0$  contribuiria para a integral.

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^R f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=2}^n \text{Res}(f, z_j)n(\gamma; z_j) - \int_{C_{\varepsilon}} f(z)dz.$$

Uma vez que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^R f(x)dx$$

tomado o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  na equação (1.12) obtemos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=2}^n \text{Res}(f, z_j)n(\gamma; z_j) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_{\varepsilon}} f(z)dz.$$

Em geral, para resolver a integral  $\int_{C_{\varepsilon}} f(z)dz$  escrevemos  $z$  na forma polar, ou seja, escrevemos  $z = \varepsilon e^{i\theta}$  com  $0 < \theta < \pi$  e conseqüentemente  $dz = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$  e utilizamos a Definição 1.4.

Outras aplicações do Lema de Jordan e do valor principal de Cauchy vão ser apresentadas e discutidas no Capítulo 5.

# Capítulo 2

## Transformadas integrais

Este capítulo é constituído de um estudo do método das transformadas, o qual se baseia em transformar o problema original em um problema auxiliar (transformado), em geral, mais simples de ser solucionado, ou seja, transfere a dificuldade do problema de partida para o cálculo da transformada inversa, ou ainda na recuperação da solução do problema de partida.

Efetuamos aqui, um estudo das transformadas de Laplace, Fourier e Hankel com o objetivo de posteriormente utilizá-las como ferramentas para a resolução de equações diferenciais parciais, lineares e de segunda ordem. O método consiste em transformar uma equação diferencial parcial em uma outra equação diferencial parcial ou ordinária ou mesmo numa equação algébrica, resolver esta equação e através da transformada inversa<sup>1</sup> obter a resolução do problema original.

Mais precisamente, utilizamos o assim denominado método da justaposição de transformadas, que em nosso caso, se baseia em utilizar a transformada de Laplace para eliminar a dependência temporal e as transformadas de Fourier ou Hankel para a parte espacial, como vamos ver no Capítulo 5.

### 2.1 Transformada de Laplace

Seja  $f(t)$  uma função definida no intervalo  $0 \leq t < \infty$ . Definimos a transformada de Laplace de  $f(t)$ , denotada por  $F(s)$  ou por  $\mathcal{L}[f(t)]$ , como sendo a integral<sup>2</sup>

$$F(s) \equiv \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

na qual  $s$ , chamada *variável transformada*, é tal que  $\text{Re}(s) > 0$ .

---

<sup>1</sup>Neste ponto são utilizados os conceitos desenvolvidos no Capítulo 1.

<sup>2</sup>Também denotamos, no quinto capítulo, a transformada de Laplace de  $u(t)$  por  $\bar{u}(s)$ .

A convergência da integral acima, numa região do plano complexo, pode ser garantida por uma classe bastante ampla de funções chamadas *admissíveis*.

**Definição 2.1:** Uma função  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada admissível ou de ordem exponencial se as condições abaixo são satisfeitas:

a) A função  $f$  for contínua por partes em  $[0, \infty)$ .

b) Existirem duas constantes positivas  $M$  e  $\mu$  tais que para todo  $t \in [0, \infty)$  vale a desigualdade

$$|f(t)| < Me^{\mu t}.$$

Neste caso também dizemos que  $f(t)$  é de ordem exponencial  $\mu$ .

A prova de que a transformada de Laplace de uma função admissível existe é dada pelo teorema que se segue.

**Teorema:** Seja  $f(t)$  uma função de ordem exponencial  $\mu$  no intervalo  $[0, \infty)$ . Então, sua transformada de Laplace  $F(s)$ , existe para todos os pontos da região do plano complexo tais que  $\text{Re}(s) > \mu$ .

**Demonstração:** Por hipótese temos que  $|f(t)| < Me^{\mu t}$  logo, pela definição da transformada de Laplace, podemos escrever

$$\mathcal{L}[f(t)] \leq \int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt < \int_0^\infty Me^{\mu t - st} dt = M \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t(s-\mu)}}{-(s-\mu)} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t(s-\mu)}}{-(s-\mu)} \right],$$

como  $|e^{-t(s-\mu)}| = |e^{-t\text{Re}(s-\mu)}|$  para que o primeiro limite da equação acima exista devemos ter que  $\text{Re}(s - \mu) > 0$ , ou seja,  $\text{Re}(s) > \mu$ , que é o resultado desejado ■

### 2.1.1 Linearidade

Mostremos agora uma importante propriedade da transformada de Laplace, a linearidade<sup>3</sup>.

**Teorema:** Sejam  $f(t)$  e  $g(t)$  funções de ordem exponencial  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente e ambas definidas no intervalo  $[0, \infty)$ . Então, para quaisquer constantes A e B a combinação linear  $h(t) = A f(t) + B g(t)$  é de ordem exponencial maior que ou igual a  $\gamma = \max \{\alpha, \beta\}$  e além disso temos:

$$\mathcal{L}[h(t)] = A \mathcal{L}[f(t)] + B \mathcal{L}[g(t)].$$

---

<sup>3</sup>A linearidade da transformada de Laplace, bem como a linearidade das transformadas de Fourier e Hankel, vem do fato das transformadas estarem definidas em termos de integrais, que são operadores lineares.

**Demonstração:** Temos, por definição, que  $\mathcal{L}[h(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st}h(t)dt$ , ou seja

$$\mathcal{L}[h(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st}[Af(t) + Bg(t)]dt,$$

em decorrência da linearidade da aplicação integral temos

$$\mathcal{L}[h(t)] = A \mathcal{L}[f(t)] + B \mathcal{L}[g(t)],$$

ou seja, a transformada de Laplace é linear ■

## 2.1.2 Convolução

Em geral, a transformada de Laplace do produto de duas funções não é o produto das transformadas, porém introduzimos a seguir o conceito de produto de convolução, que é um produto conveniente no sentido em que esta propriedade seja válida, isto é, a transformada do produto de convolução é o produto das transformadas.

**Definição 2.2:** Sejam  $f(t)$  e  $g(t)$  duas funções de ordem exponencial  $\alpha$  e  $\beta$  e com transformadas de Laplace  $F(s)$  e  $G(s)$ , respectivamente, no intervalo  $[0, \infty)$ . Definimos a convolução de  $f(t)$  e  $g(t)$ , denotada por  $(f * g)(t)$  como sendo

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

Calculemos a transformada de Laplace de um produto de convolução, isto é,

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

Introduzindo a mudança de variável  $t - \tau = \tau'$  podemos escrever

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \int_{-\tau}^{\infty} d\tau \int_0^t e^{-s(\tau+\tau')} f(\tau)g(\tau') d\tau.$$

Definindo-se  $g(t) = 0$  para  $t < 0$ , o limite superior em vez de  $t$  pode ser tomado  $\infty$ , logo

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \int_0^{\infty} g(\tau')e^{-s\tau'} d\tau' \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = F(s)G(s),$$

ou seja, a transformada de Laplace do produto de convolução é o produto das transformadas.

## 2.2 Transformada de Laplace inversa

Tendo utilizado a transformada de Laplace, para que possamos recuperar a equação original, ou ainda, a solução da equação associada ao problema de partida devemos introduzir o conceito de transformada de Laplace inversa o qual é dado pelo teorema que se segue.

**Teorema:** Seja  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  a transformada de Laplace da função  $f(t)$ . Então  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$  é dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

onde a integração deve ser efetuada ao longo de uma reta  $s = \gamma$  no plano complexo, com  $s = x + iy$ . O número complexo  $\gamma$  deve ser escolhido de tal forma que todas as singularidades do integrando estejam à sua esquerda, isto é,  $\text{Re}(s) > \gamma$ . No caso em que nenhuma das singularidades é ponto de ramificação podemos utilizar o chamado *contorno de Bromwich* que é dado pela Figura 2.1.

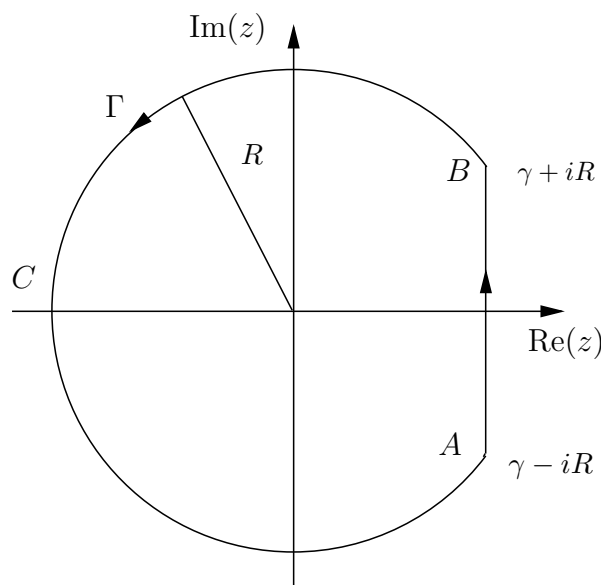


Figura 2.1: Contorno de Bromwich.

**Demonstração:** Sendo  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds$ , calculemos o valor da expressão para o caso em que  $[F(s)]$  é a transformada de Laplace de  $f(t)$ , isto é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} ds \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iw}^{\gamma+iw} e^{st} ds \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \right\}. \end{aligned}$$



Calculamos a integral em função de  $w$  e depois consideramos o limite  $w \rightarrow \infty$ . Como por hipótese  $\text{Re}(s) > \gamma$  temos que  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$  converge absolutamente e uniformemente neste subespaço<sup>4</sup> e desta forma podemos comutar as integrais da equação acima, ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \lim_{w \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty f(u) du \int_{\gamma-iw}^{\gamma+iw} e^{s(t-u)} ds \right\}.$$

Temos que

$$\frac{1}{2i} \int_{\gamma-iw}^{\gamma+iw} e^{s(t-u)} ds = \frac{1}{2i} \frac{e^{s(t-u)}}{t-u} \Big|_{\gamma-iw}^{\gamma+iw} = \frac{\text{sen}[w(t-u)]}{t-u} e^{\gamma(t-u)}$$

De onde temos

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \lim_{w \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(u) e^{\gamma(t-u)} \frac{\text{sen}[w(t-u)]}{t-u} du \right\}$$

Introduzindo a mudança de variável  $v = u - t$  e a notação  $g(v) = e^{-\gamma v} f(t+v)$  podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \lim_{w \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-t}^\infty g(v) \frac{\text{sen}(wv)}{v} dv \right\} \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty g(v) \frac{\text{sen}(wv)}{v} dv + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty g(-v) \frac{\text{sen}(wv)}{v} dv \right\} \end{aligned}$$

Pela fórmula integral de Dirichlet[10] temos que, para uma função contínua por partes

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^a f(t) \frac{\text{sen}(\lambda t)}{t} dt = \frac{1}{2} \pi f(0^+),$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^a f(x+t) \frac{\text{sen}(\lambda t)}{x+t} dt &= \frac{1}{2} \pi f(x^+) \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^a f(x-t) \frac{\text{sen}(\lambda t)}{t} dt &= \frac{1}{2} \pi f(x^-). \end{aligned}$$

Desta forma temos

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2} f(t^+) + \frac{1}{2} f(t^-),$$

e no caso em que  $f(t)$  é contínua temos

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

que é o resultado desejado ■

---

<sup>4</sup>Ver referência [10].

## 2.2.1 Cálculo da transformada

No caso em que o integrando não possui pontos de ramificação o cálculo da transformada de Laplace inversa basicamente se reduz ao cálculo dos resíduos de  $e^{st}F(s)$ , pois tomando  $R$  do contorno de Bromwich tal que todas as  $n$  singularidades de  $e^{st}F(s)$ , denotadas por  $z_j$ , estejam no interior de  $\Gamma$ , temos pelo teorema dos resíduos

$$\int_{\Gamma} F(s)e^{st} ds = \int_{B-C} F(s)e^{st} ds + \int_{C-A} F(s)e^{st} ds + \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \text{Res}(e^{st}F(s); z_j),$$

onde  $B - C$  e  $C - A$  são os arcos de circunferência de raio  $R$ , orientados no sentido anti-horário, que unem os pontos  $B$  e  $C$  e os pontos  $C$  e  $A$ , respectivamente, como nos mostra a Figura 2.1.

Tomando o limite  $R \rightarrow \infty$  na equação acima, utilizando a definição de  $f(t)$  e aplicando o lema de Jordan temos que as integrais sobre  $B - C$  e  $C - A$  tendem a zero, ou seja

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds = \sum_{j=1}^n \text{Res}(e^{st}F(s); z_j). \quad (2.1)$$

## 2.2.2 Ponto de ramificação e a transformada de Laplace inversa

Passemos agora ao caso em que  $z = 0$  é uma das  $n$  singularidades de  $F(s)e^{st}$  e que esta seja um ponto de ramificação, que sem perda de generalidade consideramos como sendo a primeira, isto é,  $z_1 = 0^5$ . Neste caso, devemos considerar o contorno  $\Gamma$  como sendo o chamado contorno de *Bromwich modificado*, ilustrado pela Figura 2.2, de modo a calcular a integral:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds = f(t)$$

Sendo  $u = F(s)e^{st}$  e  $X - Y$  o segmento de reta ou arco de circunferência que liga o ponto  $X$  ao ponto  $Y$  conforme mostra a figura e percorrendo o contorno  $\Gamma$  no sentido anti-horário obtemos:

$$\int_{\Gamma} u ds = \int_{A-B} u ds + \int_{B-D} u ds + \int_{D-E} u ds + \int_{E-H} u ds + \int_{H-L} u ds + \int_{L-A} u ds.$$

---

<sup>5</sup>Os casos em que o ponto de ramificação de  $f$  não é  $z = 0$  e o caso em que  $f$  tem mais de um ponto de ramificação seguem como conseqüência deste caso particular.

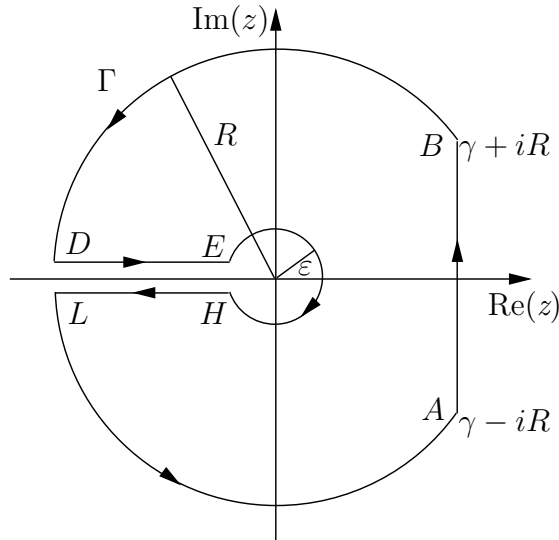


Figura 2.2: Contorno de Bromwich modificado.

Tomando o limite  $R \rightarrow \infty$  na equação acima temos, utilizando o lema de Jordan, que as integrais  $\int_{B-D} u ds$  e  $\int_{L-A} u ds$  tendem a zero e pelo o teorema dos resíduos podemos escrever

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} u ds = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{D-E} u ds + \int_{E-H} u ds + \int_{H-L} u ds \right\} + \sum_{j=2}^n \text{Res}(f; z_j).$$

Em geral, para resolver  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E-H} u ds$  escrevemos  $z$  na forma polar, ou seja,  $z = \varepsilon e^{i\theta}$  e conseqüentemente  $dz = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$  e com isso a variável de integração não dependerá de  $\varepsilon$ , logo podemos comutar o limite com a integral e utilizar a Definição 1.4 para calculá-la.

## 2.3 Série de Fourier

Antes de introduzirmos o conceito de transformada de Fourier destacamos alguns resultados a respeito das série e fórmula integral de Fourier[11], que são de grande utilidade tanto para definir quanto para extrair propriedades da transformada de Fourier, bem como de sua inversa.

Uma função  $f(t)$ , periódica, com período  $2\pi$  e integrável pode ser representada por uma série infinita da forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \text{sen } nt),$$

onde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.3)$$

sendo os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  chamados de coeficientes de Fourier.

Uma vez que todos os termos da série de  $f(t)$  são periódicos com período  $T = 2\pi$ , podemos restringir nosso estudo a um intervalo de comprimento<sup>6</sup>  $2\pi$ .

**Teorema de Riemann-Lebesgue:** Seja  $f(t)$  uma função absolutamente integrável em um intervalo  $(a, b)$ . Então tomando o limite  $\lambda \rightarrow \infty$  temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) \, dt = 0 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \operatorname{sen}(\lambda t) \, dt. \quad (2.4)$$

**Demonstração:** Seja  $\varepsilon$  um número positivo qualquer. Sabemos que<sup>7</sup> existe uma função  $g(x)$ , suave por partes tal que:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.5)$$

Temos que

$$\left| \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) \, dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] \cos(\lambda x) \, dx + \int_a^b g(x) \cos(\lambda x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx + \left| \int_a^b g(x) \cos(\lambda x) \, dx \right|.$$

Temos, integrando por partes, que

$$\int_a^b g(x) \cos(\lambda x) \, dx = \frac{1}{\lambda} [g(x) \operatorname{sen}(\lambda x)]_{x=a}^{x=b} - \frac{1}{\lambda} \int_a^b g'(x) \operatorname{sen}(\lambda x) \, dx.$$

Claramente, o lado direito da equação acima é limitado. Desta forma para  $\lambda$  suficientemente grande podemos escrever

$$\left| \int_a^b g(x) \cos(\lambda x) \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

---

<sup>6</sup>De maneira análoga poderíamos estudar o caso de um intervalo com comprimento arbitrário  $2l$ , para isso basta trocar  $\pi$  por  $l$  e  $n$  por  $\frac{n\pi}{l}$  nas equações dadas.

<sup>7</sup>A demonstração deste fato pode ser encontrada na referência [11].

Da equação (2.5) e da equação anterior temos o resultado desejado, ou seja,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0.$$

De maneira análoga demonstra-se que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$  ■

Neste trabalho, a maior utilidade do teorema de Riemann-Lebesgue é dada pelos corolários que se seguem:

**Corolário 2.1** Os coeficientes de Fourier de qualquer função integrável tendem a zero, quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Corolário 2.2** O comportamento de uma série de Fourier num ponto  $t$  depende somente do comportamento da função em uma vizinhança deste ponto.

### 2.3.1 Fórmula integral de Fourier

Seja  $f(t)$  uma função de período  $2l$ . Substituindo o resultado das equações (2.1) e (2.2) na definição da série de Fourier podemos escrever

$$f(t) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \cos \left[ \frac{n\pi}{l}(\tau - t) \right] d\tau.$$

Tomando a mudança de variável  $\frac{n\pi}{l} = \lambda$ ,  $\frac{\pi}{l} = \Delta\lambda$  e formalmente tomando o limite  $l \rightarrow \infty$ , o somatório da equação acima passa a ser uma integral e temos a fórmula integral de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \lambda(\tau - t) d\tau. \quad (2.6)$$

Esta expressa uma função definida no intervalo  $-\infty < t < \infty$  de maneira análoga a que a série de Fourier representa uma função de período limitado. Podemos reescrever a equação (2.6) das seguintes formas

$$f(t) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l e^{it\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} f(\tau) d\tau d\lambda \quad (2.7)$$

ou ainda

$$f(t) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } l(t - \tau)}{t - \tau} f(\tau) d\tau. \quad (2.8)$$

As equações (2.6), (2.7) e (2.8) são conhecidas, respectivamente, como *fórmula integral de Fourier dupla*, *fórmula integral de Fourier complexa* e *fórmula integral de Fourier simples*.

Passemos agora ao teorema que estabelece as condições para que as equações acima sejam válidas.

Consideremos  $f(t)$  como sendo uma função integrável no intervalo  $-\infty < t < \infty$  e limitada em qualquer intervalo finito. Então as equações (2.6), (2.7) e (2.8) são válidas se trocarmos  $f(t)$  por  $\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)]$  nos pontos onde  $f(t)$  é descontínua<sup>8</sup>. Além disso estas equações podem ser reescritas da seguinte forma[11]

$$f(t) = \int_0^\infty [a(u) \cos tu + b(u) \sin tu] du, \quad (2.9)$$

onde

$$a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos ut dt, \quad b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin ut dt. \quad (2.10)$$

No caso em que  $f(t)$  é uma função par podemos escrever, a partir das equações (2.8) e (2.9), que

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos tu du \int_0^\infty f(\tau) \cos u\tau d\tau. \quad (2.11)$$

que é conhecida como fórmula integral de Fourier em co-senos.

De maneira análoga, quando  $f(t)$  é uma função ímpar temos a fórmula integral de Fourier em senos, dada por

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin tu du \int_0^\infty f(\tau) \sin u\tau d\tau. \quad (2.12)$$

## 2.4 Transformada de Fourier direta e inversa

De posse dos resultados da seção anterior passemos ao estudo da transformada de Fourier.

Dada uma função real  $f(t)$  definida em toda reta  $-\infty < x < \infty$  definimos a sua transformada de Fourier, denotada por  $F(u)$  ou por  $\mathcal{F}[f(t)]$ , como sendo a integral

$$F(u) \equiv \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-ikt} dt, \quad (2.13)$$

desde que a integral exista. Pela fórmula (2.7) podemos escrever<sup>9</sup>

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty F(u) e^{iku} du. \quad (2.14)$$

Se  $f(t)$  é integrável no intervalo  $-\infty < t < \infty$ , a função  $F(u)$  existe para todo  $t$ . As funções  $f(t)$  e  $F(u)$  são a transformada de Fourier uma da outra.  $F(u)$  é a chamada transformada de Fourier direta enquanto que  $f(t)$  é a chamada transformada de Fourier inversa.

<sup>8</sup> $f(t^+)$  é notação para  $\lim_{x \rightarrow t^+} f(x)$  e de maneira análoga para  $f(t^-)$ .

<sup>9</sup>Optamos por introduzir o fator  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  de modo que tanto a transformada direta quanto a inversa contenham tal fator.

Definamos  $F_c(u)$  como sendo a integral

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt, \quad (2.15)$$

pela equação (2.10) temos

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(u) \cos tu \, du. \quad (2.16)$$

As equações (2.15) e (2.16) são conhecidas como par de transformadas de Fourier em co-senos.

De maneira similar, temos o par de transformadas de Fourier em senos, isto é

$$F_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen} ut \, dt, \quad (2.17)$$

pela equação (2.11) temos

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(u) \operatorname{sen} tu \, du. \quad (2.18)$$

A aplicabilidade das equações acima está diretamente ligada aos seguintes fatos:

Se  $f(t)$  é uma função par, então, utilizando a equação (2.13) temos

$$F(u) = F_c(u);$$

e se  $f(t)$  é uma função ímpar, então

$$F(u) = iF_s(u).$$

### 2.4.1 Convolução

Em analogia ao que foi feito para a transformada de Laplace vamos definir o produto de convolução para o caso em que as funções estejam definidas em toda a reta.

Dadas duas funções  $f(t)$  e  $g(t)$  definidas em  $-\infty < t < \infty$  definimos a convolução destas pela integral

$$(g * f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) \, d\tau,$$

desde que a integral exista.

**Teorema:** Sejam  $F(u)$  e  $G(u)$  as transformadas de Fourier das funções  $f(t)$  e  $g(t)$ , respectivamente, então  $(g * f)(t)$  e  $F(u)G(u)$  são um par de transformadas de Fourier, ou seja, a transformada de Fourier do produto de convolução é o produto das transformadas.

**Demonstração:** Calculemos a transformada de Fourier de  $F(u)G(u)$  e mostremos que esta é igual a  $(g * f)(t)$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u)G(u)e^{-itu} du &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{-itu} du \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{i\tau t} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{-iu(t-\tau)} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau) d\tau, \end{aligned}$$

ou seja,  $(g * f)(t)$  e  $F(u)G(u)$  são um par de transformadas de Fourier, o que demonstra o teorema ■

## 2.4.2 Transformada de Fourier dupla

Em analogia ao que foi feito para funções de uma variável consideramos o caso em que temos uma função  $f$  dependendo de duas variáveis, ou seja,  $f = f(x, y)$ . Definimos a transformada de Fourier dupla de  $f$  por:

$$F(\xi, \eta) = \mathcal{F}[f(x, y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi x + \eta y)} f(x, y) dx dy.$$

Demonstra-se, de maneira similar à que foi feita para funções de uma variável, que a inversa da transformada de Fourier dupla é dada por

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[F(\xi, \eta)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi x + \eta y)} F(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

## 2.5 Transformadas de Bessel

Transformadas integrais da forma

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t)K(\lambda t) dt,$$

onde  $K(z)$  é uma função de Bessel, são conhecidas como transformadas de Bessel.<sup>10</sup> Vamos considerar agora um caso particular desta classe de transformadas conhecida como transformada de Hankel.

---

<sup>10</sup>Ver Definição 2.3.



Primeiramente vamos introduzir o conceito de integral de Fourier-Bessel que, assim como as fórmulas integrais de Fourier<sup>11</sup>, são de grande importância em inúmeros problemas de Física e Matemática, e em nosso estudo nos auxiliarão na definição da transformada de Hankel, bem como na definição de sua inversa.

**Definição 2.3:** Sejam  $\nu > -\frac{1}{2}$  e  $J_\nu(x)$  uma função de Bessel de ordem  $\nu$ , isto é,<sup>12</sup>

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Definimos, para  $0 < x < \infty$ , a integral de Fourier-Bessel por

$$f(x) = \int_0^\infty J_\nu(xu)u \, du \int_0^\infty f(t)J_\nu(ut)t \, dt. \quad (2.19)$$

A convergência da integral acima é garantida no caso em que  $f(x)$  é uma função limitada em qualquer intervalo da forma  $(0, R)$  e que satisfaça a condição

$$\int_0^\infty |f(x)|\sqrt{x} \, dx < \infty.$$

Além disso, sendo  $\nu > -\frac{1}{2}$ , a equação (2.19) é válida nos pontos onde  $f$  é contínua e nos pontos de descontinuidade podemos escrever<sup>13</sup>

$$\frac{1}{2}[f^+(x) + f^-(x)] = \int_0^\infty J_\nu(xu) \, du \int_0^\infty f(t)J_\nu(ut) \, dt.$$

## 2.6 Transformada de Hankel direta e inversa

Sejam  $f(t)$  uma função definida e  $\nu$  como na Definição 2.3. Definimos a transformada de Hankel de  $f(t)$ , denotada por  $F_\nu(u)$  ou  $\mathcal{H}_\nu[f(t)]$ , como sendo a integral

$$F_\nu(u) \equiv \mathcal{H}_\nu[f(t)] = \int_0^\infty f(t)tJ_\nu(ut) \, dt.$$

A partir da equação (2.19) podemos escrever a inversa da transformada de Hankel, dada por

$$f(t) = \mathcal{H}_\nu^{-1}[F_\nu(u)] = \int_0^\infty F_\nu(u)J_\nu(ut)u \, du.$$

<sup>11</sup>Dadas pela fórmulas (2.6), (2.7) e (2.8).

<sup>12</sup>Utilizamos aqui a definição da função gama devida a Euler, isto é,  $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$  com  $\text{Re}(z) > 0$ . Note que para  $z = n$  inteiro positivo temos que  $\Gamma(n+1) = n!$ .

<sup>13</sup>A demonstração deste fato pode ser encontrada na referência [10].

## 2.6.1 Propriedades da transformada de Hankel

A seguir vamos considerar algumas propriedades da transformada de Hankel que serão de grande utilidade nos capítulos seguintes.

**Propriedade 2.1** Seja  $F_\nu(u)$  a transformada de Hankel da função  $f(t)$ . Então

$$\mathcal{H}_\nu[f(at)] = \frac{1}{a^2} F_\nu\left(\frac{u}{a}\right).$$

**Propriedade 2.2** Seja  $f(t)$  uma função definida para  $0 < x < \infty$  e que satisfaça as condições abaixo

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{\nu+1} \frac{df}{dt} = 0 = \lim_{t \rightarrow 0} t^\nu f(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} \frac{df}{dt} = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} f(t).$$

Então<sup>14</sup>

$$\mathcal{H}_\nu \left[ \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{df}{dt} - \frac{\nu^2}{t^2} f \right] = -u^2 \mathcal{H}_\nu[f(t)].$$

## 2.7 Justaposição das transformadas

Vamos estudar agora a metodologia da justaposição de transformadas, com o objetivo de utilizá-la como ferramenta, por exemplo, na resolução de uma equação diferencial parcial do tipo hiperbólico, isto é, aquela associada a um problema de propagação.

Consideramos uma equação diferencial parcial tendo domínio espacial infinito ou semi-infinito e condições de contorno especificadas. Podemos resolvê-la através do assim chamado método da justaposição de transformadas, isto é, aplicar a transformada de Fourier ou Hankel na parte espacial e utilizar a transformada de Laplace para eliminar a dependência temporal, conhecida a condição inicial.

Este poderoso método nos conduz, em geral, a uma equação algébrica, cuja solução é mais simples de ser obtida. Neste ponto, para recuperarmos a solução para o problema de partida, devemos calcular as transformadas inversas apresentadas neste segundo capítulo. Para isso, propomos estudar o método de Cagniard e algumas variações do mesmo. Os resultados deste estudo são material a ser discutido no Capítulo 4.

---

<sup>14</sup>A demonstração deste fato vem da definição da transformada de Hankel e pode ser encontrada na referência [10].

# Capítulo 3

## Equações diferenciais parciais

O estudo da propagação de ondas basicamente consiste em encontrar a solução<sup>1</sup> de uma equação diferencial parcial<sup>2</sup> (ou um sistema de equações diferenciais parciais) do tipo hiperbólico, sujeita a certas condições tanto de contorno quanto iniciais. Exemplos deste tipo de estudo são: propagação de ondas eletromagnéticas, tais como a luz e propagação do som. Neste trabalho particularmente vamos estudar a propagação de pulsos sísmicos<sup>3</sup>, isto é, estudo da propagação de ondas progressivas<sup>4</sup> elásticas.

Com o intuito de caracterizar a equação que estamos interessados em estudar definimos o que é uma equação diferencial parcial, em sua forma mais geral, e através de algumas restrições reduzimos ao caso de maior interesse neste trabalho, isto é, uma equação diferencial parcial, linear, de segunda ordem e do tipo hiperbólico.

**Definição 3.1** Chama-se *equação diferencial parcial* a toda equação que apresenta uma ou mais derivadas parciais da variável dependente

$$f\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1} \partial x_n}, \dots\right) = 0$$

na qual  $(x_1, x_2, \dots)$  são as variáveis independentes e  $u(x_1, x_2, \dots)$  é a variável dependente chamada função *função incógnita*<sup>5</sup> definida num domínio  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ .

---

<sup>1</sup>Vamos discutir apenas soluções analíticas, isto é, metodologias para a obtenção de soluções analíticas. Possíveis soluções numéricas não serão abordadas.

<sup>2</sup>Com o intuito de tornar tanto a leitura quanto a escrita mais simples utilizamos a notação EDP para nos referirmos a uma equação diferencial parcial.

<sup>3</sup>Ondulações e abalos no solo, nos tremores de terra.

<sup>4</sup>Também conhecida como caminhante, é aquela em que não existem frentes de onda estacionárias. Uma onda estacionária é aquela que, em um meio, determina a existência de perturbações nulas em pontos fixos e não provoca um transporte de energia ao longo desse meio.

<sup>5</sup>Note que  $u$  deve ser função de pelo menos duas variáveis independentes, caso contrário temos uma equação diferencial ordinária.

**Definição 3.2** Definimos a *ordem* de uma EDP como sendo a mais alta ordem da derivada parcial que aparece na EDP.

**Definição 3.3** Uma EDP é dita *linear* quando a função desconhecida  $u$  e todas suas derivadas têm coeficientes dependendo apenas das variáveis independentes, caso contrário a EDP é dita *não linear*.

### 3.1 Equação diferencial parcial de segunda ordem

Passemos a estudar o caso particular de maior interesse para nós, isto é, estudar equações diferenciais parciais, lineares e de segunda ordem. Pela Definição 3.1 temos que a forma mais geral de uma equação diferencial parcial de segunda ordem dependendo de  $n$  variáveis independentes é dada por<sup>6</sup>

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{kj}^{(x)} \frac{\partial u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^n B_j^{(x)} \frac{\partial u}{\partial x_j} + C^{(x)}u + G^{(x)} = 0 \quad (3.1)$$

onde  $A_{kj}^{(x)}$ ,  $B_j^{(x)}$ ,  $C^{(x)}$ ,  $G^{(x)}$  e  $u$  são funções de  $x = x_1, \dots, x_n$  e  $A_{kj}^{(x)}$  é tomado como sendo uma matriz real simétrica em  $k, j$ <sup>7</sup>.

Seja a mudança de variável

$$y_k = \sum_{l=1}^n R_{kl}x_l$$

onde  $k = 0, 1, \dots, n$  e  $R$  uma matriz constante em relação a  $x_l$ . Derivando a equação acima podemos escrever

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_l} = R_{kl} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_m \partial x_l} = 0.$$

Definamos as matrizes

$$U_{mn}^{(x)} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_n} \quad \text{e} \quad U_{kj}^{(y)} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j}$$

e utilizando a regra da cadeia podemos escrever

$$U_{mn}^{(x)} = U_{kj}^{(y)} \frac{\partial y_k}{\partial x_m} \frac{\partial y_j}{\partial x_n} = U_{kj}^{(y)} R_{km} R_{jn} = (R^t U^{(y)} R)_{mn} \quad (3.2)$$

onde  $R^t$  denota a matriz transposta de  $R$  e os índices repetidos interpretam-se como uma soma.

---

<sup>6</sup>Estamos considerando tanto  $u$  quanto os coeficientes da equação como sendo duas vezes continuamente diferenciáveis.

<sup>7</sup>Caso  $A_{kj}^{(x)}$  não seja uma matriz simétrica escrevemos  $\frac{1}{2}[A_{kj}^{(x)} + A_{jk}^{(x)}]$ .

Considerando somente o termo quadrático da equação (3.1), uma vez que é o único que vai caracterizar o tipo de EDP e sendo  $tr[A]$  o traço da matriz  $A$  temos

$$Q = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{kj}^{(x)} U_{jk}^{(x)} = \sum_{k=1}^n (A^{(x)} U^{(x)})_{kk} = tr[A^{(x)} U^{(x)}]$$

que pode ser reescrito, em termos de  $y$ , como

$$Q = tr[A^{(x)} R^t U^{(y)} R] = tr[RA^{(x)} R^t U^{(y)}].$$

Em um ponto  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ , os elementos da matriz  $A^{(x)}$  são números reais.

Desde que a matriz  $A$  seja real e simétrica, ela pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal. Seja  $R$  a matriz que diagonaliza  $A^{(x)}$ , ou seja, a matriz

$$RA^{(x)} R^{-1} = RA^{(x)} R^t$$

é diagonal, cujos elementos da diagonal são os autovalores de  $A^{(x)}$ . Logo, sendo  $\delta_{ij}$  a função delta de Kronecker dada por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

podemos escrever

$$[RA^{(x_0)} R^t]_{jk} \equiv b_j^{(x_0)} \delta_{jk} = a_j^{(y_0)} \delta_{jk}$$

na qual  $x_0$  foi substituído por  $y_0$  através da mudança de variável  $y_k = \sum_{l=1}^n R_{kl} x_l$  e  $b_j$  é o  $j$ -ésimo autovalor de  $A$ . Então em um ponto  $x_0$  temos

$$Q = tr[RA^{(x_0)} R^t U^{(y_0)}] = \sum_{j,k=1}^n [RA^{(x_0)} R^t]_{jk} U_{kj} = \sum_{j,k=1}^n a_j^{(y_0)} \delta_{jk} U_{kj} = \sum_{j=1}^n a_j^{(y_0)} U_{jj}^{(y_0)}$$

ou ainda

$$Q = \sum_{j=1}^n a_j^{(y_0)} \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}.$$

Desta forma, podemos transformar a equação (3.1), que contém termos de derivada mista, na equação abaixo

$$\sum_{j=1}^n a_j^{(y_0)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} \right)_{y=y_0} + F \left[ y_0, u, \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=y_0} \right] = 0 \quad (3.3)$$

que não contém termos de derivada mista, sendo

$$y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n}) \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=y_0} \equiv \left[ \frac{\partial u}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_n} \right]_{y=y_0}.$$

## 3.2 Classificação de uma EDP de segunda ordem

A classificação de uma EDP está baseada na possibilidade de reduzi-la, por meio de uma conveniente transformação de coordenadas[12], na *forma canônica*<sup>8</sup>, em um ponto. A equação (3.3) é classificada quanto ao tipo, em um ponto  $x_0$  de um domínio  $D$ , em função dos coeficientes  $a_i^{(y_0)}$  da seguinte forma:

**Equação do tipo elíptico** Se os coeficientes  $a_i^{(y_0)}$  forem todos não-nulos e tiverem o mesmo sinal.

**Equação do tipo ultra-hiperbólico** Se os coeficientes  $a_i^{(y_0)}$  forem todos não nulos e não tiverem o mesmo sinal.

**Equação do tipo hiperbólico** Se os coeficientes  $a_i^{(y_0)}$  forem todos não nulos e apenas um dos coeficientes tem sinal oposto aos demais.

**Equação do tipo parabólico** Se pelo menos um dos coeficientes  $a_i^{(y_0)}$  for nulo.

Notemos que se os coeficientes  $a_i^{(y_0)}$  de uma equação diferencial parcial forem todos constantes, ela será invariante quanto ao tipo. Neste caso dizemos que ela é do tipo elíptico, parabólico ou ultra-hiperbólico em todo seu domínio. Por outro lado, se os coeficientes tiverem dependência nas variáveis independentes, as equações poderão mudar de tipo de um ponto para outro, estas equações são conhecidas com **Equações do tipo misto**. Neste caso, podemos estender a classificação introduzindo os seguintes tipos:

**Equação do tipo elíptico-parabólico** Se em todo domínio  $D$  os coeficientes  $a_i^{(y_0)}$  tiverem apenas duas possibilidades: todos não-nulos e de mesmo sinal; ou pelo menos um deles seja nulo sendo arbitrário o sinal dos demais.

**Equação do tipo hiperbólico-parabólico** Se em todo domínio  $D$  os coeficientes  $a_i^{(y_0)}$  tiverem apenas duas possibilidades: todos não-nulos, não sendo de mesmo sinal; ou pelo menos um deles seja nulo sendo arbitrário o sinal dos demais.

**Equação do tipo elíptico-hiperbólico** Se em todo domínio  $D$  os coeficientes  $a_i^{(y_0)}$  tiverem apenas duas possibilidades: todos não-nulos e de mesmo sinal; ou todos não-nulos, não sendo de mesmo sinal.

### 3.2.1 EDP de segunda ordem com duas variáveis independentes

Passemos a estudar um caso especial que nos é de particular interesse. Pela Definição 3.1 temos que a forma mais geral de uma EDP de segunda ordem dependendo de apenas

---

<sup>8</sup>A forma canônica é a forma mais conhecida de um determinado tipo de equação, em geral, obtida através de uma transformação de coordenadas que exclua o termo envolvendo a derivada mista, como foi visto na seção anterior.

duas variáveis independentes é dada por:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u = G. \quad (3.4)$$

Temos que se os coeficientes da equação acima são constantes, ou funções de  $x$  e  $y$ , a equação acima é linear e se algum dos coeficientes for função de  $u$  então a equação é não linear. Além disso, se  $G = 0$  a equação é dita homogênea e se  $G \neq 0$  a equação é dita não-homogênea.

### 3.2.2 Classificação

A classificação de uma EDP linear de segunda ordem dependendo de duas variáveis pode ser feita de maneira mais direta que a que foi anteriormente apresentada, a partir da introdução do conceito de discriminante como se segue.

**Definição 3.4** Sejam  $D$  o domínio onde os coeficientes da equação (3.4) estão definidos e  $(x_0, y_0)$  um ponto pertencente a  $D$ , definimos o discriminante associado à equação (3.1) no ponto  $(x_0, y_0)$ , denotado por  $\Delta(x_0, y_0)$ , como sendo:

$$\Delta(x_0, y_0) = B^2(x_0, y_0) - A(x_0, y_0)C(x_0, y_0)$$

**Definição 3.5** Tendo em vista a Definição 3.4 classificamos uma EDP, linear e de segunda ordem num ponto  $(x_0, y_0)$  da seguinte forma:

Se  $\Delta(x_0, y_0) > 0$  então A EDP é do tipo *hiperbólico*  
 Se  $\Delta(x_0, y_0) = 0$  então A EDP é do tipo *parabólico*  
 Se  $\Delta(x_0, y_0) < 0$  então A EDP é do tipo *elíptico*.

No caso em que  $\Delta(x_0, y_0)$  é positivo, nulo ou negativo em todo domínio, dizemos que a EDP é do tipo hiperbólico, parabólico ou elíptico, respectivamente<sup>9</sup>.

Vamos deduzir, no capítulo que se segue, que a EDP<sup>10</sup>

$$-\nabla^2 u(x, y, t) + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, y, t) = f(x, y, t), \quad (3.5)$$

satisfazendo a certas condições iniciais e de contorno, é a equação diferencial associada a problemas de propagação de sinais.<sup>11</sup>

<sup>9</sup>No caso em que o discriminante muda de sinal dizemos que a EDP é do tipo *misto*.

<sup>10</sup>O símbolo  $\nabla^2 f(x, y, z, t)$  é o chamado *laplaciano* de  $f$  e é tal que  $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ .

<sup>11</sup>Claramente a EDP é linear, de segunda ordem e do tipo hiperbólico.

### 3.3 Metodologia de resolução

Existem vários métodos para obtermos a solução de uma equação diferencial parcial do tipo hiperbólico satisfazendo certas condições de contorno e iniciais. Dentre eles vamos citar os seguintes:

(a)**Separação de variáveis**[13]. Talvez o mais simples e aplicável somente quando a EDP é homogênea. Impõe-se que a solução pode ser procurada na forma de um produto de funções, cada uma delas sendo função de apenas uma variável independente. Emergem constantes de separação que devem ser determinadas através das condições do problema.

(b)**Transformadas integrais**[10]. Converte o problema de partida num outro (problema transformado) aparentemente mais simples de ser resolvido, resolve-se o problema transformado e recupera-se a solução do problema de partida através da respectiva transformada inversa. As transformadas integrais mais utilizadas são as transformadas de Laplace, de Fourier e de Hankel.

(c)**Função de Green**[13]. Particularmente importante em problemas não-homogêneos, isto é, com EDP não-homogênea. Fornece uma solução na forma de uma integral ou uma série infinita. Determina-se a solução da EDP com o termo não-homogêneo sendo uma fonte pontual. Usando o *princípio da superposição*<sup>12</sup>, o termo forçante é tratado como uma ‘coleção’ de fontes pontuais.

(d)**Princípio de Duhamel**[12]. Fornece uma representação integral em termos da solução de uma EDP mais simples. Uma EDP com termo fonte (termo de não-homogeneidade) variando no tempo e condições de contorno também variando no tempo fica determinada através de uma representação integral envolvendo a solução de uma EDP com termo forçante constante e condições de contorno constantes.

Convém ressaltar que para uma EDP, linear, de segunda ordem, com duas variáveis independentes temos, também, o chamado **Método de Riemann**. Este método fornece uma solução em termos da solução da respectiva equação adjunta.

Neste trabalho, vamos discutir um outro método para obtenção da solução, isto é, o chamado **Método da Justaposição das transformadas**,<sup>13</sup> algumas vezes conhecido como **Método de Cagniard-de Hoop**. O método de Cagniard-de Hoop é o método de Cagniard[1] com a modificação proposta por de Hoop[2]. A diferença básica é que o método de Cagniard propriamente dito reduz o problema em questão ao cálculo de uma integral que pode ser efetuada por inspeção enquanto que no caso da justaposição propriamente dita devemos efetuar o cálculo explícito das transformadas inversa.

Em resumo temos: (i)**Justaposição**. Método para resolver uma EDP, linear

---

<sup>12</sup>Pelo princípio da superposição temos que se cada uma das  $n$  funções  $u_1, \dots, u_n$  satisfaz a uma EDP linear e homogênea então qualquer combinação linear destas funções também é uma solução.

<sup>13</sup>O objetivo final é utilizar o teorema dos resíduos para o cálculo das transformadas inversas, ou seja, vamos encarar o método como sendo uma aplicação propriamente dita.



cujo domínio espacial é infinito ou semi-infinito com condições iniciais especificadas. O procedimento geral é: usar a transformada de Laplace para eliminar a dependência temporal e a transformada de Fourier ou Hankel na parte espacial. O resultado é uma equação diferencial ou mesmo uma equação algébrica, supostamente mais simples de ser resolvida, cuja solução é a transformada justaposta. Para recuperar a solução do problema de partida devemos proceder com as respectivas transformadas inversas, sendo a ordem delas determinada pelo problema em questão. (ii) **Método de Cagniard**. Através de uma série de transformações converte a justaposição da transformada de Laplace de onde segue-se que a solução do problema de partida é obtido por inspeção. (iii) **Método de de Hoop**. Substitui a transformada de Laplace no método de Cagniard pela transformada de Fourier.

# Capítulo 4

## Integral de Carson e o método de Cagniard

Neste capítulo é estudado o método proposto por Cagniard[1] para o cálculo da inversão da justaposição de transformadas e este é comparado ao método proposto por de Hoop[2] ambos para o problema de pulsos sísmicos.

O assim chamado método da integral de Carson[1] permite soluções bastante elegantes para problemas relacionados com fenômenos transitórios, os quais são governados por equações diferenciais lineares<sup>1</sup>. Mesmo que restrinjamos nosso interesse puramente na parte matemática vemos que o método de Carson é perfeitamente adaptável a problemas do tipo considerados neste trabalho,<sup>2</sup> nos quais devemos calcular certas integrais num sistema de equações diferenciais parciais satisfazendo às condições iniciais e expressá-las em termos de uma “função de excitação” arbitrária  $F(t)$ .

O método de Cagniard consiste em através de minuciosos cálculos, envolvendo a transformada de Laplace, utilizar o método de Carson e assim transformar o problema de resolver as equações de propagação em resolver as chamadas integrais de Duhamel.<sup>3</sup>

Inicialmente, deduzimos as equações de propagação para um meio elástico, homogêneo e isotrópico e em seguida mostramos que considerando um grupo adequado de hipóteses sobre a forma da solução da equação podemos concluir que o método da integral de Carson provavelmente irá nos conduzir à solução. Em seguida, é enunciado um teorema que, em geral, nos possibilita fazer a verificação de que as funções obtidas por este método são de fato as soluções do problema.

---

<sup>1</sup>Ver Capítulo 3.

<sup>2</sup>Isto é, problemas de propagação de onda em meios semi-infinitos.

<sup>3</sup>Como vamos ver na Seção 4.3

## 4.1 Equações de propagação, condições iniciais e de contorno

Consideremos dois meios semi-infinitos, homogêneos, isotrópicos e perfeitamente elásticos. Tomemos, no sistema de coordenadas  $x, y, z$ , o plano de interface dos dois meios como sendo o plano  $xy$ , como nos mostra a Figura 4.1. No instante  $t = 0$ , os dois meios estão

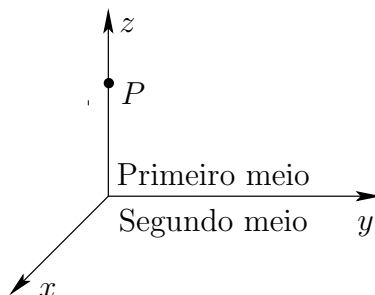


Figura 4.1: Plano  $xy$  separando os dois meios.

em repouso e uma fonte pontual  $P$  de coordenadas  $(0, 0, h)$  com  $h > 0$ , começa a vibrar de tal forma que o deslocamento da onda produzida é radial e isotrópico. Consideramos a fonte como sendo uma esfera de raio arbitrariamente pequeno e o deslocamento como sendo uma função arbitrária do tempo.

Neste capítulo nos propomos a estudar o método proposto por Cagniard para equacionar as ondas elásticas provenientes da situação descrita acima. Este é o problema geral de reflexão de uma onda sísmica de compressão<sup>4</sup>, considerada esférica e isotrópica por uma superfície plana.

### 4.1.1 Notação

Denominamos por “primeiro meio” o meio que contém a fonte  $P$  e por “segundo meio” o outro. Para designar os parâmetros que caracterizam os dois meios usamos as mesmas letras porém, sempre que necessário, especificamos a qual meio estamos nos referindo. Além disso, utilizamos as notações:

$$\begin{aligned}\rho &= \text{densidade} \\ c_L &= \text{velocidade de fase de ondas planas harmônicas de compressão} \\ c_T &= \text{velocidade de fase de ondas de cisalhamento} \\ S &= \text{lentidão de propagação de ondas de compressão, isto é, } S = \frac{1}{c_L} \\ s &= \text{lentidão de propagação de ondas de cisalhamento, isto é, } s = \frac{1}{c_T} \\ \lambda, \mu &= \text{constantes de Lamé.}\end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Ondas formadas pelo aumento da pressão no sistema ocasionado pela ação de agentes externos.

Em meios acústicos<sup>5</sup> as partículas não possuem ligação química, portanto o deslocamento de uma partícula só pode ser transferido para outra se esta estiver no caminho do deslocamento. Desta forma a propagação da onda só pode ocorrer na direção do deslocamento, ou seja, em meios acústicos só se propagam ondas longitudinais (ou ondas de compressão)<sup>6</sup>. Denominamos tais ondas por  $\Psi$ .

No caso em que um dos meios não for acústico, isto é, no caso em que um dos meios for sólido, as partículas possuirão ligações químicas. Assim, um deslocamento de uma delas também afeta partículas nas direções perpendiculares ao deslocamento. Desta forma uma onda pode ser gerada com direção de deslocamento perpendicular à direção de propagação, tais ondas são conhecidas como ondas transversais<sup>7</sup> (ou ondas de distorção). Denominamos tais ondas por  $U$ .

## 4.1.2 Equações de propagação

Nas primeiras seções deste capítulo introduzimos o problema geral que nos propusemos a estudar e introduzimos as notações que serão utilizadas. De posse de tais conceitos, nesta seção, introduzimos as chamadas equações de Navier e a partir delas deduzimos as equações de propagação.

## 4.1.3 Equações de Navier

Um corpo elástico possui um único estado natural, ao qual retorna quando não há forças externas atuando sobre ele. Após medir todas as forças e deslocamentos deste estado consideramos estes como sendo os estados iniciais.

Existem duas maneiras de descrever um corpo deformado[14] a saber: pelo material e pelas condições espaciais. Consideramos a descrição pelas condições espaciais. O movimento de um *continuum* é descrito em termos do campo de velocidades instantâneo  $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ . Para descrever a força aplicada no corpo utilizamos um campo de deslocamentos  $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$  que descreve o deslocamento de uma partícula em função do tempo  $t$ . Existem várias formas de medir o campo de deslocamento. Utilizamos aqui o tensor de força de Almansi[14] que é expresso em termos de  $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$  pela equação<sup>8</sup>

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right]. \quad (4.1)$$

---

<sup>5</sup>Gases e líquidos.

<sup>6</sup>Também conhecidas, na sismologia, como ondas P, abreviação de ondas primárias, uma vez que, num registro sísmico em uma estação distante são elas que dão o primeiro sinal de um terremoto.

<sup>7</sup>Também conhecidas como ondas S, abreviação de ondas secundárias. Em casos de terremoto este tipo de onda é o que costuma causar os maiores danos.

<sup>8</sup>A notação  $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$  indica que estamos considerando todas as combinações para os índices  $k = 1, 2$  e  $3$  e  $i = 1, 2$  e  $3$ .

Temos que cada  $u_i$  é função do tempo e da posição da partícula. A velocidade da partícula é dada pela derivada do deslocamento em relação ao tempo, ou seja<sup>9</sup>

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (4.2)$$

De maneira análoga a aceleração da partícula é dada pela derivada da velocidade em relação ao tempo, logo

$$\alpha_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (4.3)$$

O deslocamento do corpo deve satisfazer a *lei de conservação de massa*[14] a qual dá origem a equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (4.4)$$

onde  $\rho = \rho(x, t)$  é o campo de densidade. Também temos que o deslocamento do corpo deve satisfazer a *equação de movimento de Euler* [14], isto é

$$\rho \alpha_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \quad (4.5)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o elemento da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna do tensor e  $X_i = (x_1, x_2, x_3)$ .

Além disso, para as equações (4.4) e (4.5) a teoria da elasticidade linear está baseada na lei de Hooke[14], que para um material isotrópico e homogêneo nos permite escrever

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (4.6)$$

na qual  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé que independem das coordenadas espaciais.

Para que possamos progredir com nossa análise, isto é, chegar às equações de Navier devemos linearizar o problema, ou seja, considerar o deslocamento e a velocidade como sendo suficientemente pequenos para que possamos desconsiderar termos não lineares<sup>10</sup> nas equações (4.1), (4.2) e (4.3). Com estas hipóteses podemos escrever

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \\ v_i &= \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \alpha_i = \frac{\partial v_i}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

O sistema de equações de (4.1) – (4.6), bem como o sistema de equações de (4.4) – (4.7), somam 22 equações e 22 incógnitas  $\rho, u_i, v_i, e_{ij}, \sigma_{ij}$  substituindo a equação

---

<sup>9</sup>Os detalhes para obtenção das equações que se seguem fogem do objetivo deste texto e podem ser encontrados na referência [14].

<sup>10</sup>Estas considerações não restringem muito o problema, uma vez que se utilizam em uma boa parte das aplicações nas quais estamos interessados.

(4.6) na equação (4.5) e utilizando a primeira das equações (4.7) chegamos às assim chamadas equações de Navier<sup>11</sup>

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (4.8)$$

que também podem ser escritas na forma

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) e_{,i} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (4.9)$$

onde  $e$  é o divergente associado ao vetor de deslocamento  $u_i$ , isto é,<sup>12</sup>

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Love[15] reescreveu a equação (4.9) da seguinte forma

$$\mu \nabla^2 (u, v, w) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right) e + (X, Y, Z) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u, v, w),$$

a qual pode ser escrita na forma mais simplificada

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (4.10)$$

#### 4.1.4 Equações de movimento

Consideremos o vetor campo de deslocamento  $u_1, u_2, u_3$  como sendo representado por um potencial escalar  $\Psi(x_1, x_2, x_3, t)$  e por uma tripla de vetores potenciais  $\varphi_i(x_1, x_2, x_3, t)$ , tal que, para  $i = 1, 2, 3$  e para força volumétrica nula tenhamos<sup>13</sup>

$$u_i = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + e_{ijk} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{ij}} \quad \text{e} \quad \varphi_{i,i} = 0. \quad (4.11)$$

Temos, pela equação de Navier, para um corpo homogêneo e isotrópico, que

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji}, \quad (4.12)$$

de onde segue<sup>14</sup>

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right) + \rho e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2} \right) = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla^2 \Psi + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla^2 \Psi + \mu e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \nabla^2 \varphi_k. \quad (4.13)$$

<sup>11</sup>A notação  $u_{j,ij}$  indica que estamos considerando  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j}$  para todos os valores de  $i$  e de  $j$ .

<sup>12</sup>Note que pelas hipóteses temos que  $\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial u_i}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ .

<sup>13</sup>Sendo  $e_{ijk}$  o tensor de permutação[14].

<sup>14</sup>Utilizamos nesta passagem o fato que  $\varphi_{i,i} = 0$ .

Considerando o deslocamento como sendo infinitesimal, qualquer mudança na densidade  $\rho$  também será infinitesimal. Na equação (4.12)  $\rho$  é multiplicado por quantidades pequenas, tomamos  $\rho$  suficientemente pequeno para que possamos considerar cada  $u_i$  como sendo constante. Tomando estas considerações temos que a equação (4.13) será satisfeita se as funções  $\Psi$  e  $\varphi_i$  forem soluções das equações:

$$\begin{aligned}\nabla^2\Psi &= \frac{1}{c_L^2}\frac{\partial\Psi}{\partial t^2} \\ \nabla^2\varphi_k &= \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial t^2}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

As equações acima são as equações de onda. Elas indicam que podemos ter dois tipos de perturbações com velocidades  $c_L$  e  $c_T$ , dadas por[14]

$$c_L = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{1/2} \quad \text{e} \quad c_T = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}.\tag{4.15}$$

De fato,  $c_L$  e  $c_t$  são as velocidades de propagação de ondas longitudinais e transversais, respectivamente.

Em boa parte das aplicações presentes nos próximos capítulos são estudadas ondas esféricas geradas por fontes pontuais. A simetria esférica não é mantida durante a propagação em meios sólidos, entretanto em muitos casos a simetria axial é mantida, nestes casos é bastante útil o uso de coordenadas cilíndricas<sup>15</sup>. Consideremos  $r, \phi, z$  como definidos na equação (B.1)<sup>16</sup>,  $z$  como sendo um eixo de simetria e sejam  $l_r, l_z$  e  $l_\phi$  os deslocamentos nas direções  $r, z$  e  $\phi$ , respectivamente, como nos mostra a Figura 4.2.

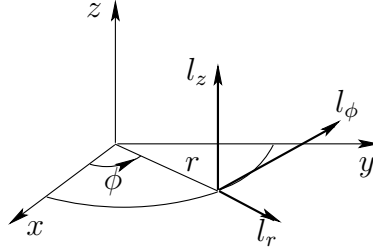


Figura 4.2: Coordenadas cilíndricas e direções de deslocamento.

Temos que as equações de movimento nas direções  $r$  e  $z$  são respectivamente dadas por[16]

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^2 l_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial l_r}{\partial r} - \frac{l_r}{r^2} + \frac{\partial^2 l_z}{\partial z \partial r} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 l_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 l_z}{\partial z \partial r} \right) &= \rho \frac{\partial^2 l_r}{\partial t^2}, \\ (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^2 l_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial l_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 l_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\mu}{r} \left( \frac{\partial l_r}{\partial z} - \frac{\partial l_z}{\partial r} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 l_r}{\partial z \partial r} - \frac{\partial^2 l_z}{\partial r^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 l_z}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{4.16}$$

<sup>15</sup>Ver Apêndice B.1.

<sup>16</sup>Ver Apêndice B.1.

Note que as equações acima não possuem dependência angular ( $\phi$ ) pois o eixo  $z$  é de simetria. Utilizando a definição de potencial[16]

$$l_r = \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial z} \quad l_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial(rU)}{r \partial r} \quad (4.17)$$

e substituindo as equações (4.17) nas equações (4.16) mostra-se que as equações (4.16) são satisfeitas se as funções  $\Psi$  e  $U$  forem soluções das equações<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \\ \nabla^2 U - \frac{1}{r^2} U &= \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Utilizando a notação introduzida no início desta seção podemos reescrever as equações (4.18) na seguinte forma

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= S^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \\ \nabla^2 U - \frac{1}{r^2} U &= s^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \end{aligned}$$

que em coordenadas cilíndricas podem ser escritas, utilizando as simetrias do problema, como<sup>18</sup>

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = S^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad (4.19)$$

de maneira análoga,  $U$  satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} = s^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (4.20)$$

Notemos que a equação (4.19) é a equação de uma onda escrita na sua forma mais conhecida, ao passo que a equação (4.20) somente tem esta forma mais conhecida se considerarmos  $U$  da seguinte forma

$$U = -\frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

pois neste caso se  $\varphi$  for solução da equação

$$\nabla^2 \varphi = s^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

então  $U$  satisfará a equação (4.20).

<sup>17</sup>Mais uma vez utilizamos o fato de o eixo  $z$  ser de simetria, ou seja,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

<sup>18</sup>Note que as equações que se seguem devem ser satisfeitas no interior de ambos os meios. No segundo meio  $U$ ,  $S$  e  $s$  devem ser substituídos por  $U'$ ,  $S'$  e  $s'$ , respectivamente.



## 4.2 Hipóteses para a integral de Carson

Suponhamos que as funções  $\Psi(t, r, z)$  e  $U(t, r, z)$  sejam as soluções das equações (4.19) e (4.20), respectivamente e que satisfaçam as seguintes condições:

I)-  $\Psi$  e  $U$ , e todas suas derivadas são nulas para todo  $r$  e  $z$  quando  $t = 0$ .

II)-  $\Psi$  e  $U$  são contínuas, limitadas e de classe  $C^\infty$  em cada um dos pontos de seus domínios, com exceção da fonte  $P$  e da fronteira  $z = 0$ .

III)-  $\Psi$  e  $U$  tendem a um limite finito à medida que se aproximam da fronteira  $z = 0$ , independentemente do meio pelo qual se aproximam, entretanto não necessariamente os valores obtidos para os limites devem coincidir.

IV)- No ponto  $P$ ,  $U$  é limitada e infinitamente diferenciável. O mesmo é válido para a função<sup>19</sup>  $G = \Psi - F(t - RS)/R$ , onde  $F(t)$  é uma função dada, infinitamente diferenciável para todo  $t$ , nula e com derivadas nulas para  $t \leq 0$ .

V)- Para todos valores finitos de  $t$ , pontos de ambos os meios que estejam em movimento ou começando a se mover estão a uma distância finita da fonte  $P$ . Por esta razão em problemas deste tipo dizemos que *não há condições no infinito*.

VI)-  $\Psi$  e  $U$  satisfazem as equações de propagação e no limite  $z \rightarrow 0$ , as condições de fronteira  $z = 0$  são satisfeitas, isto é,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{z} = \frac{\partial \Psi'}{\partial z} + \frac{\partial U'}{\partial r} + \frac{U'}{z}$$

e

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial \Psi'}{\partial r} - \frac{\partial U'}{\partial z}.$$

## 4.3 Construção da solução

Vamos agora, em oito etapas, construir a solução para o nosso problema inicial<sup>20</sup>:

1- Suponhamos conhecidas as soluções para as equações de propagação, isto é,  $\Psi(t, r, z)$  e  $U(t, r, z)$ . Sendo  $u$  um parâmetro qualquer, temos que as funções

$$\Psi(t + u, r, z)$$

$$U(t + u, r, z)$$

<sup>19</sup>Lembremos que  $R$  é a distância do ponto em questão à fonte.

<sup>20</sup>Note que com os passos que se seguem não estamos propriamente deduzindo a solução do problema e sim tentando construí-la.

também constituem uma solução para o nosso sistema de equações diferenciais parciais, isto é, satisfazem as condições de propagação e condições na fronteira  $z = 0$ , ignoradas as condições iniciais.

2- Seja  $p$  um número real positivo. Supomos que as integrais

$$\Psi_1 = \int_{-t}^{\infty} e^{-pu} \Psi(t+u, r, z) du$$

$$U_1 = \int_{-t}^{\infty} e^{-pu} U(t+u, r, z) du$$

converjam, apesar de  $\Psi$  e  $U$ , não serem necessariamente limitadas quando  $u$  tende ao infinito.<sup>21</sup>

Uma vez que, temos o fator  $e^{-pu}$  na integral,  $\Psi$  e  $U$ , bem como todas suas derivadas são contínuas e todas derivadas de  $\Psi$  e  $U$  com respeito a  $u$  são nulas para  $u = -t$ , podemos concluir que as derivadas de  $\Psi_1$  e  $U_1$  podem ser obtidas diretamente pela diferenciação de  $\Psi$  e  $U$  de acordo com o sinal da integral.

Conseqüentemente, tomamos como hipótese o fato que  $\Psi_1$  e  $U_1$ , satisfazem as equações de propagação e as condições de fronteira em  $z = 0$ .

3- Introduzindo a mudança de variável

$$\tau = t + u$$

na definição das funções  $\Psi_1$  e  $U_1$ , podemos escrever

$$\Psi_1 = e^{pt} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \Psi(\tau, r, z) d\tau = e^{pt} x_p(p, r, z)$$

$$U_1 = e^{pt} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} U(\tau, r, z) d\tau = e^{pt} y_p(p, r, z),$$

e desta forma definir as funções  $e^{pt} x_p(p, r, z)$  e  $e^{pt} y_p(p, r, z)$  como sendo

$$x_p(p, r, z) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \Psi(\tau, r, z) d\tau \quad (4.21)$$

$$y_p(p, r, z) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} U(\tau, r, z) d\tau. \quad (4.22)$$

4- Pela hipótese IV) na fonte  $P$  temos que  $U$  é limitada e conseqüentemente  $e^{pt} y_p(p, r, z)$  também o é. Também pela hipótese IV) temos que  $G = \Psi - F(t - RS)/R$  é uma função limitada, ou seja,  $\Psi = G + F(t - RS)/R$ . Da linearidade da integral temos que  $x_p$  é a soma de uma função limitada com a função<sup>22</sup>

$$\int_0^{\infty} e^{-p\tau} \frac{1}{R} F(\tau - RS) d\tau = \frac{1}{R} e^{-pRS} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} F(\tau) d\tau.$$

<sup>21</sup>De fato, em geral, neste tipo de problema  $\Psi$  e  $U$  divergem quando  $u$  tende ao infinito.

<sup>22</sup>Introduzindo as mudanças de variável  $\tau - RS = h$  e depois  $\tau = h$ .

5- Seja  $M(r, z)$  um ponto que se afasta uniformemente da fonte  $P$ , neste caso, as funções  $\Psi$  e  $U$  são nulas para  $t = 0$  e permanecem nulas com o decorrer do tempo. Por esta razão, não é necessário manter os limites inferiores das integrais (4.21) e (4.22) como sendo zero, podemos escolher um limite menor e que cresce à medida que o ponto  $M(r, z)$  se afasta da fonte  $P$ . Este fato torna provável o decaimento exponencial de  $x_p$  e  $y_p$ , vistas como funções de  $r$  e  $z$ .

6- Tendo em vista os passos anteriores, estamos aptos a tentar diretamente determinar uma solução para as equações de propagação, que devem ter a seguinte forma,

$$\psi_p = e^{pt} X_p(p, r, z)$$

$$u_p = e^{pt} Y_p(p, r, z)$$

na qual  $p$  é um número real positivo e as funções  $X_p$  e  $Y_p$  são tais que, ambas decaem exponencialmente à medida que  $r$  e  $z$  tendem ao infinito e permanecem limitadas para todo espaço com a exceção da fonte  $P$ , onde  $X_p$ , com um termo de limitação, deve tender a  $\frac{1}{R}$ .

Uma vez que as equações acima não têm dependência temporal, encontrar uma solução para o problema acima é notavelmente mais simples que encontrar uma solução para o problema inicial. Além disso, se existirem  $X_p$  e  $Y_p$  que satisfazem as equações acima, então estes serão únicos.

7- Suponhamos agora que  $X_p$  e  $Y_p$  sejam conhecidos. Levando em conta o comportamento que impusemos para as soluções no ponto  $P$ , temos que  $x_p$  e  $y_p$  são proporcionais a  $X_p$  e  $Y_p$ , com fator de proporcionalidade dado por  $\int_0^\infty e^{-p\tau} F(\tau) d\tau$ , isto é,

$$x_p = X_p \int_0^\infty e^{-p\tau} F(\tau) d\tau \quad (4.23)$$

bem como

$$y_p = Y_p \int_0^\infty e^{-p\tau} F(\tau) d\tau. \quad (4.24)$$

De fato, podemos concluir que  $X_p$  e  $Y_p$ , que denominamos por “coeficientes exponenciais”, são as transformadas de Laplace<sup>23</sup> da solução da função fonte degrau<sup>24</sup> e  $x_p$  e  $y_p$  são as transformadas de Laplace da resposta associada à função fonte  $F(t)$  e as equações (4.23) e (4.24) expressando o princípio da superposição.

De posse das equações (4.23) e (4.24) podemos escrever, pelas definições de  $x_p$  e  $y_p$ , que

$$\int_0^\infty e^{-p\tau} \Psi(\tau, r, z) d\tau = X_p \int_0^\infty e^{-p\tau} F(\tau) d\tau \quad (4.25)$$

$$\int_0^\infty e^{-p\tau} U(\tau, r, z) d\tau = Y_p \int_0^\infty e^{-p\tau} F(\tau) d\tau. \quad (4.26)$$

---

<sup>23</sup>Ver Capítulo 2.

<sup>24</sup>Ver footnote 31.

Sejam  $A(\tau, r, z)$  e  $B(\tau, r, z)$ , que denominamos por “fatores de transmissão”, as respectivas transformadas inversas de  $p^{-1}X_p$  e  $p^{-1}Y_p$ , ou seja,

$$\frac{X_p(p, r, z)}{p} = \int_0^\infty e^{-p\tau} A(\tau, r, z) d\tau \quad (4.27)$$

$$\frac{Y_p(p, r, z)}{p} = \int_0^\infty e^{-p\tau} B(\tau, r, z) d\tau. \quad (4.28)$$

Então, as funções  $A$ ,  $B$ ,  $F$ ,  $\Psi$  e  $U$  estão relacionadas pelas equações,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-pu} \Psi(u, r, z) du &= p \left[ \int_0^\infty e^{-p\tau} A(\tau, r, z) d\tau \right] \left[ \int_0^\infty e^{-pu} F(u) du \right] \\ \int_0^\infty e^{-pu} U(u, r, z) du &= p \left[ \int_0^\infty e^{-p\tau} B(\tau, r, z) d\tau \right] \left[ \int_0^\infty e^{-pu} F(u) du \right]. \end{aligned}$$

8- Nas definições de  $\Psi_1$  e  $U_1$ <sup>25</sup> transformamos o lado direito das equações em uma integral dupla, como a que se segue para  $\Psi_1$

$$\int_0^\infty e^{-pu} \Psi(u) du = p \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(\xi+\eta)} A(\xi) F(\eta) d\xi d\eta.$$

Introduzindo a mudança de variável  $\xi + \eta = u$ , podemos escrever

$$\int_0^\infty e^{-pu} \Psi(u) du = p \int_0^\infty e^{-pu} du \int_0^u A(\xi) F(u - \xi) d\xi. \quad (4.29)$$

Integrando, por partes, o lado esquerdo da equação acima temos

$$\int_0^\infty e^{-pu} \Psi(u) du = \left[ e^{-pu} \int_0^u \Psi(u) du \right]_0^\infty - p \int_0^\infty e^{-pu} \left[ \int_0^u \Psi(\mu) d\mu \right] du.$$

Levando em consideração as hipóteses feitas no início deste capítulo temos que a integral

$$e^{-pu} \int_0^u \Psi(\mu) d\mu$$

é nula tanto para  $u = 0$  quanto para  $u$  tendendo ao infinito. Por esta razão podemos escrever

$$\int_0^\infty e^{-pu} \Psi(u) du = -p \int_0^\infty e^{-pu} \left[ \int_0^u \Psi(\mu) d\mu \right] du.$$

Substituindo o resultado acima na equação (4.11) obtemos

$$p \int_0^\infty e^{-pu} \left[ \int_0^u \Psi(\mu) d\mu \right] du = p \int_0^\infty e^{-pu} \left[ \int_0^u A(\xi) F(u - \xi) d\xi \right] du,$$

de onde concluímos que

$$\int_0^u \Psi(\mu) d\mu = \int_0^u A(\xi) F(u - \xi) d\xi.$$

---

<sup>25</sup>Ver passo 3.

Rearranjando a equação acima e utilizando as hipóteses sobre a natureza da função  $F$  temos

$$\Psi(t, r, z) = \frac{d}{dt} \int_0^t F(t - \tau)A(\tau, r, z)d\tau = \int_0^t F'(t - \tau)A(\tau, r, z) d\tau.$$

Inserindo as mudanças de variável  $l = t - \tau$  e depois  $l = \tau$  podemos escrever

$$\Psi(t, r, z) = \int_0^t F'(\tau)A(t - \tau, r, z)d\tau. \quad (4.30)$$

Utilizando o mesmo procedimento, ou seja, refazendo os oito passos para  $U$  concluímos que<sup>26</sup>

$$U(t, r, z) = \int_0^t F'(\tau)B(t - \tau, r, z)d\tau. \quad (4.31)$$

## 4.4 Verificação da solução

Como vimos na seção anterior, o método para obtenção das equações de propagação se baseia em obter diretamente os coeficientes exponenciais  $X_p$ ,  $Y_p$  e de posse destes, através da resolução das equações integrais de Carson, obter os fatores de transmissão  $A$  e  $B$ . Uma vez determinados  $A$  e  $B$  obtemos, pelas equações (4.30) e (4.31),  $\Psi$  e  $U$ . Estas equações estão separadas em duas partes da seguinte forma: a primeira parte depende apenas das características físicas e geométricas do meio<sup>27</sup> e a segunda dependendo apenas de uma função de excitação<sup>28</sup>.

Devemos ainda mostrar que as funções encontradas  $\Psi$  e  $U$  são de fato as soluções do problema. Para isso, não é suficiente mostrar que  $\Psi$  e  $U$  satisfazem as hipóteses do início da Seção 4.3, além disso, devemos mostrar que  $\Psi$  e  $U$  satisfazem as condições do início da Seção 4.2.

Claramente, as funções obtidas satisfazem as cinco primeiras condições da Seção 4.2, desta forma, devemos apenas mostrar que as funções satisfazem as equações de propagação e as condições de fronteira, isto é, a condição seis da referida seção.

## 4.5 Discussão do método

Fazemos nesta seção uma breve discussão do método proposto na Seção 4.2 para obter a resolução das equações de propagação.

Sejam  $\Psi(t, r, z)$  e  $U(t, r, z)$  as soluções para nosso problema e  $F(t)$  nossa função de excitação. Para um número real positivo  $p$  definimos, a partir das transformadas de

---

<sup>26</sup>As equações (4.30) e (4.31) são conhecidas como integrais de Duhamel.

<sup>27</sup>Que são expressas pelos fatores de transmissão  $A$  e  $B$ .

<sup>28</sup>Que são expressas por  $F(t)$ .

Laplace<sup>29</sup> de  $\Psi(t, r, z)$ ,  $U(t, r, z)$  e  $F(t)$ , as funções  $\bar{\Psi}$ ,  $\bar{U}$  e  $\bar{F}$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}(p, r, z) &= p \int_0^{\infty} \Psi(t, r, z) e^{-pt} dt, \\ \bar{U}(p, r, z) &= p \int_0^{\infty} U(t, r, z) e^{-pt} dt, \\ \bar{F}(p) &= p \int_0^{\infty} F(t) e^{-pt} dt.\end{aligned}\tag{4.32}$$

De posse das equações acima definimos  $X_p$  e  $Y_p$  como sendo tais que

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}(p, r, z) &= X_p(p, r, z) \bar{F}(p) \\ \bar{U}(p, r, z) &= Y_p(p, r, z) \bar{F}(p).\end{aligned}\tag{4.33}$$

Para valores fixos de  $p$ , temos que  $\bar{\Psi}$  e  $\bar{U}$  satisfazem, respectivamente, as transformadas de Laplace das equações (4.19) e (4.20). Uma vez que  $\bar{F}(p)$  não depende de  $r$  e  $z$ , as equações (4.33) nos mostram que  $X_p$  e  $Y_p$  também satisfazem as transformadas de Laplace das equações (4.19) e (4.20).

Utilizamos as equações (4.27) e (4.28) como definições de  $A(t, r, z)$  e  $B(t, r, z)$ . Utilizando as propriedades do produto de convolução da transformada de Laplace<sup>30</sup> podemos inverter as equações (4.33) e chegar as equações (4.30) e (4.31).

Ressaltamos novamente, que os passos anteriores não se constituem propriamente em uma dedução da resposta e sim em uma tentativa de obtê-la. Desta forma, as equações (4.30) e (4.31) são as soluções, que obtivemos por tentativa, para uma função entrada  $\Psi$  na fonte de  $F(t - SR)/R$ . Sendo assim, se encontrarmos a resposta para uma entrada  $\Psi = \theta(t - SR)/R$ , onde  $\theta(t')$  é a função degrau unitária, conhecida como função de Heaviside,<sup>31</sup> as soluções serão denotadas por  $A(t, r, z)$  e  $B(t, r, z)$ . O procedimento anterior sugere que devemos iniciar com uma entrada tipo degrau  $\Psi$ .

A principal vantagem que temos ao proceder desta forma é que há um ganho em termos de simplicidade no processo de construção da solução. Tal procedimento usualmente introduz “funções” do tipo impulso, que requerem um cuidadoso estudo para que possam ser utilizadas em cálculos mais rigorosos. Um esboço de tal estudo pode ser visto no Apêndice A.

Outra vantagem de trabalhar com funções degrau aparece quando temos de diferenciar tais funções em relação ao tempo, uma vez que, diferenciá-las praticamente equivale a multiplicar por  $p$ , pois

$$p \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = p \left[ p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right] - pf(0)$$

sempre que a integral fizer sentido.

---

<sup>29</sup>Ver Capítulo 2.

<sup>30</sup>Ver Subseção 2.1.2.

<sup>31</sup> $\theta(t') = 1$  se  $t' > 0$  e zero caso contrário.

De posse destes conceitos utilizamos  $\theta(t)$  no lugar de  $F(t)$ . Desta forma  $A(t, r, z)$  e  $B(t, r, z)$  são as respostas para uma entrada  $\Psi \equiv \theta(t - SR)/R$  e  $U \equiv 0$ .

Para calcular  $A(t, r, z)$  e  $B(t, r, z)$  inicialmente calculamos  $X_p$  e  $Y_p$  aplicando a transformada de Laplace nas equações diferenciais parciais envolvendo  $\Psi$  e  $U$ , assim como nas condições e utilizando os passos descritos na Seção 4.3. De posse de  $X_p$  e  $Y_p$  invertemos as equações (4.27) e (4.28) e assim obtemos  $A$  e  $B$ . Finalmente, a partir das equações de Duhamel (4.30) e (4.31) obtemos  $\Psi$  e  $U$  em termos da função de excitação  $F(t)$ .

Em suma, o método de Cagniard consiste em através de minuciosos cálculos, envolvendo a transformada de Laplace, utilizar o método de Carson e assim transformar o problema de resolver as equações de propagação em resolver as chamadas integrais de Duhamel.

## 4.6 O método de Cagniard-de Hoop

Ao aplicar o método proposto por Cagniard com o intuito de obter a solução exata para problemas tridimensionais envolvendo pulsos sísmicos é comum nos depararmos com expressões bastante complicadas para as componentes do vetor de deslocamento.

O método de Cagniard utiliza a transformada de Laplace tanto para eliminar a dependência temporal quanto para a parte espacial. de Hoop propôs a seguinte mudança: considerar na parte espacial ora a transformada de Fourier e ora a transformada de Hankel, dependendo das condições do problema. Tal método é também conhecido por método de Cagniard-de Hoop e como vamos ver, no capítulo que se segue, tal procedimento, em geral, conduz a expressões bem mais simples.

# Capítulo 5

## Aplicações

No primeiro capítulo deste trabalho desenvolvemos a teoria básica, referente à análise complexa, para que pudéssemos chegar ao teorema de Cauchy-Goursat e ao teorema dos resíduos e conseqüentemente estarmos aptos a calcular integrais reais via variáveis complexas. No Capítulo 2, utilizamos os conceitos desenvolvidos no primeiro capítulo para discutir as transformadas de Laplace, Fourier e Hankel bem como suas respectivas inversas e a justaposição das transformadas. O terceiro capítulo foi destinado à caracterização de equações diferenciais parciais e a discussão das possíveis formas de resolução de uma equação diferencial parcial de segunda ordem do tipo hiperbólico. Por fim, no capítulo anterior foi introduzido e discutido o método de Cagniard e este foi comparado com a modificação do mesmo proposta por de Hoop.

Neste capítulo são estudadas aplicações da teoria desenvolvida nos capítulos anteriores. Iniciamos com um estudo do cálculo de uma integral real[17] que envolve basicamente a teoria desenvolvida no primeiro capítulo. Em seguida um estudo feito por Paul e Banerjee[18] no qual os autores fazem um interessante uso da transformada de Hankel para o estudo do potencial elétrico devido a uma fonte pontual.

Na terceira aplicação, em analogia ao trabalho de Dix[19] resolvemos, via método de Cagniard um problema bastante simples de propagação de pulsos sísmicos.

Nas duas últimas aplicações utilizamos o método de Cagniard-de Hoop primeiramente para determinar as equações de propagação de uma onda anisotrópica gerada por uma função impulso e em seguida para equacionar os efeitos de uma explosão em fluido a uma profundidade  $h$ .



## 5.1 Contornos de integração

Como já citamos anteriormente, uma das grandes vantagens da teoria das funções de variáveis complexas é permitir em muitos casos o cálculo de integrais reais utilizando-se convenientemente o teorema dos resíduos. Nesta seção, seguindo a referência[17], utilizamos dois contornos convenientes para calcular uma integral real dependendo de dois parâmetros. Alguns casos particulares são discutidos. Como uma outra aplicação determinamos, em uma forma fechada, uma soma envolvendo um produto de funções trigonométricas e hiperbólicas.

### 5.1.1 Uma classe de integrais reais

Consideramos a função real  $F_j(x)$  definida por

$$F_j(x) = \frac{f(x, \mu_j)}{\cosh x}$$

na qual  $j = 0, 1, 2, \dots$  e  $\mu_j$  são parâmetros e  $f(x, \mu_j)$  é uma outra função real. Vamos discutir a classe de integrais reais do tipo

$$J(\mu_j) = \int_0^\infty \frac{f(x, \mu_j)}{\cosh x} dx.$$

Para calcular a integral acima consideramos a seguinte integral no plano complexo

$$\int_{\Gamma_1} \frac{f(z, \mu_j)}{\cosh z} dz$$

onde  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  e o contorno de integração  $\Gamma_1$  é dado pela Figura 5.1.

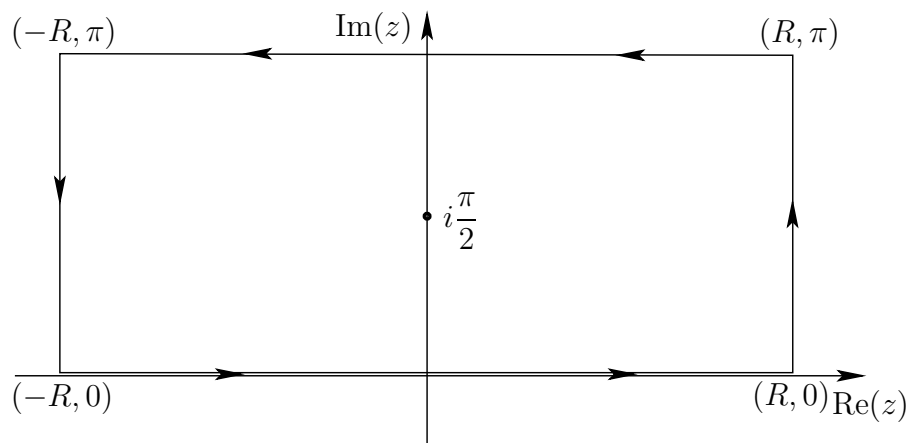


Figura 5.1: Definição do contorno  $\Gamma_1$ .

onde  $R$  é tal que apenas a singularidade (pólo simples)  $z = i\frac{\pi}{2}$  está no interior de  $\Gamma_1$ .

Além disso, supomos que

$$\lim_{R \rightarrow \pm\infty} f(R + iy, \mu_j) \rightarrow 0 \quad (5.1)$$

e que  $f(z, \mu_j)$  é uma função que não tem singularidades no interior de  $\Gamma_1$ . Percorrendo o contorno no sentido anti-horário a partir do ponto  $z = -R$  temos, pelo teorema dos resíduos<sup>1</sup>, que

$$\int_{\Gamma_1} \frac{f(z, \mu_j)}{\cosh z} dz = 2\pi i \left[ \frac{f(i\frac{\pi}{2}, \mu_j)}{\sinh(i\frac{\pi}{2})} \right] = 2\pi f\left(i\frac{\pi}{2}, \mu_j\right). \quad (5.2)$$

Percorrendo o caminho no sentido anti-horário podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \frac{f(z, \mu_j)}{\cosh z} dz &= \int_{-R}^R \frac{f(x, \mu_j)}{\cosh x} dx + \int_R^{R+i\pi} \frac{f(z, \mu_j)}{\cosh z} dz + \\ &+ \int_{R+i\pi}^{-R+i\pi} \frac{f(z, \mu_j)}{\cosh z} dz + \int_{-R+i\pi}^{-R} \frac{f(z, \mu_j)}{\cosh z} dz. \end{aligned}$$

Tomando o limite  $R \rightarrow \infty$  e utilizando as equações (5.1) e (5.2) podemos escrever<sup>2</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, \mu_j) + f(x + i\pi, \mu_j)}{\cosh x} dx = 2\pi f\left(i\frac{\pi}{2}, \mu_j\right) \quad (5.3)$$

onde  $z = i\frac{\pi}{2}$  não é uma raiz da equação  $f(z, \mu_j) = 0$ .

Por outro lado, utilizando os mesmos argumentos e hipóteses anteriores, substituindo  $\cosh x$  por  $\sinh x$  na definição de  $F_j(x)$  e utilizando o contorno dado pela Figura 5.2 obtemos[20]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, \mu_j) + f(x + i\pi, \mu_j)}{\sinh x} dx = i\pi[f(0, \mu_j) - f(i\pi, \mu_j)] \quad (5.4)$$

na qual  $z = 0$  e  $z = i\pi$  não são raízes da equação  $f(z, \mu_j) = 0$ .

### 5.1.2 Uma função particular

Utilizando a metodologia da transformada de Fourier para resolver a equação diferencial parcial associada ao potencial eletrostático entre quatro chapas condutoras<sup>3</sup> com condições de contorno conveniente nos deparamos, ao aplicar a transformada de Fourier inversa, com a seguinte integral

$$\varphi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cosh ky}{\cosh ka} \frac{\sin kx}{k} dk$$

<sup>1</sup>Ver Seção 1.4.

<sup>2</sup>Tomando a seguinte mudança de variável  $z = x + i\pi$  na terceira integral do lado direito e utilizando o fato que a segunda e quarta integrais tendem a zero, pela equação (5.1), quando  $R$  tende a infinito.

<sup>3</sup>Equação diferencial parcial de Laplace bidimensional.

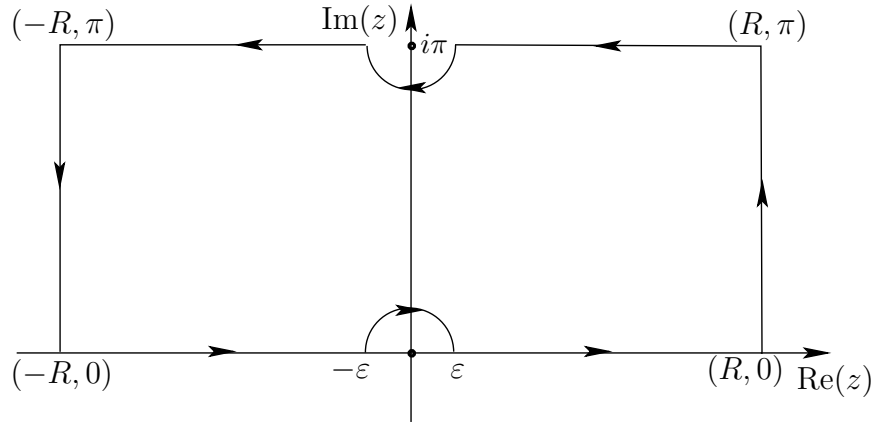


Figura 5.2: Contorno para o cálculo da integral (5.4).

na qual  $2a$  é a separação entre as chapas e  $V$  é uma constante[21].

Calculamos aqui a seguinte integral

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{\cosh \alpha t}{\cosh t} \frac{\operatorname{sen} \beta t}{t} dt$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros reais tais que  $|\alpha| < 1$  e  $\beta > 0$ .

Afim de calcular a integral da equação acima simulamos uma derivada em relação ao parâmetro  $\beta$ , isto é,

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \beta} = \int_0^{\infty} \frac{\cosh \alpha t}{\cosh t} \cos \beta t dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \alpha t}{\cosh t} \cos \beta t dt \equiv \frac{\Omega_1}{2} \quad (5.5)$$

na qual a segunda igualdade é devida ao fato do integrando ser uma função par.

Para calcular  $\Omega_1$  consideremos a seguinte função real

$$f_1(t, \alpha, \beta) = \cosh \alpha t \cos \beta t.$$

Substituindo  $f$  por  $f_1$  na equação (5.3) temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \alpha t \cos \beta t + \cosh \alpha(t + i\pi) \cos \beta(t + i\pi)}{\cosh t} dt = 2\pi \cosh \left( i \frac{\alpha\pi}{2} \right) \cos \left( i \frac{\beta\pi}{2} \right)$$

ou ainda

$$\Omega_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \alpha(t + i\pi) \cos \beta(t + i\pi)}{\cosh t} dt = 2\pi \cosh \left( i \frac{\alpha\pi}{2} \right) \cos \left( i \frac{\beta\pi}{2} \right). \quad (5.6)$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} \cosh \alpha(t + i\pi) \cos \beta(t + i\pi) &= \\ &= (\cosh \alpha t \cosh \alpha i\pi + \operatorname{senh} \alpha t \operatorname{senh} \alpha i\pi)(\cos \beta t \cos \beta i\pi - \operatorname{sen} \beta t \operatorname{sen} \beta i\pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\cosh \alpha t \cos \alpha \pi + i \sinh \alpha t \sin \alpha \pi)(\cos \beta t \cosh \beta \pi - i \sin \beta t \sinh \beta \pi) \\
&= \cosh \alpha t \cos \beta t \cos \alpha \pi \cosh \beta \pi - i \cosh \alpha t \sin \beta t \cos \alpha \pi \sinh \beta \pi + \\
&\quad + i \cosh \alpha t \sin \beta t \cos \alpha \pi \sinh \beta \pi + \sinh \alpha t \sin \beta t \sin \alpha \pi \sinh \beta \pi
\end{aligned}$$

ou ainda

$\cosh(t + i\pi) \cos \beta(t + i\pi) = \cosh \alpha t \cos \beta t \cos \alpha \pi \cosh \beta \pi + \sinh \alpha t \sin \beta t \sin \alpha \pi \sinh \beta \pi$ ,  
e substituindo na equação (5.6) podemos escrever

$$\Omega_1 + \cos \alpha \pi \cosh \beta \pi \Omega_1 + \sin \alpha \pi \sinh \beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh \alpha t \sin \beta t}{\cosh t} dt = 2\pi \cos \left( \frac{\alpha \pi}{2} \right) \cosh \left( \frac{\beta \pi}{2} \right).$$

Rearranjando os termos da equação acima temos

$$(1 + \cos \alpha \pi \cosh \beta \pi) \Omega_1 + \sin \alpha \pi \sinh \beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh \alpha t \sin \beta t}{\cosh t} dt = 2\pi \cos \left( \frac{\alpha \pi}{2} \right) \cosh \left( \frac{\beta \pi}{2} \right).$$

Introduzindo a notação

$$\Omega_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh \alpha t}{\cosh t} \sin \beta t dt$$

temos que

$$(1 + \cos \alpha \pi \cosh \beta \pi) \Omega_1 + \sin \alpha \pi \sinh \beta \Omega_2 = 2\pi \cos \left( \frac{\alpha \pi}{2} \right) \cosh \left( \frac{\beta \pi}{2} \right). \quad (5.7)$$

Consideremos agora a seguinte função

$$f_2(t, \alpha, \beta) = \sinh \alpha t \sin \beta t.$$

Substituindo  $f$  por  $f_2$  na equação (5.3) temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh \alpha t \sin \beta t + \sinh \alpha(t + i\pi) \sin \beta(t + i\pi)}{\cosh t} dt = 2\pi \sinh \left( i \frac{\alpha \pi}{2} \right) \sin \left( i \frac{\beta \pi}{2} \right)$$

Pela definição de  $\Omega_2$ , podemos escrever

$$\Omega_2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh \alpha(t + i\pi) \sin \beta(t + i\pi)}{\cosh t} dt = 2\pi i \sin \left( \frac{\alpha \pi}{2} \right) i \sinh \left( \frac{\beta \pi}{2} \right) \quad (5.8)$$

Em analogia ao que fizemos anteriormente temos que

$$\begin{aligned}
\sinh \alpha(t + i\pi) \sin \beta(t + i\pi) &= \\
&= (\sinh \alpha t \cosh \alpha i\pi + \sinh \alpha i\pi \cosh \alpha t)(\sin \beta t \cos \beta i\pi + \sin \beta i\pi \cos \beta t) \\
&= (\sinh \alpha t \cos \alpha \pi + i \sin \alpha \pi \cosh \alpha t)(\sin \beta t \cosh \beta \pi + i \sinh \beta \pi \cos \beta t) \\
&= \sinh \alpha t \sin \beta t \cos \alpha \pi \cosh \beta \pi + i \sinh \alpha t \cos \beta t \cos \alpha \pi \sinh \beta \pi + \\
&\quad + i \cosh \alpha t \sin \beta t \sin \alpha \pi \cosh \beta \pi - \cosh \alpha t \cos \beta t \sin \alpha \pi \sinh \beta \pi.
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado da equação acima na equação (5.8) podemos escrever

$$\sin \alpha \pi \sinh \beta \pi \Omega_1 - (1 + \cos \alpha \pi \cosh \beta \pi) \Omega_2 = 2\pi \sin \left( \frac{\alpha \pi}{2} \right) \sinh \left( \frac{\beta \pi}{2} \right). \quad (5.9)$$

Das equações (5.7) e (5.9) temos o sistema

$$\begin{cases} (1 + \cos \alpha\pi \cosh \beta\pi)\Omega_1 + \operatorname{sen} \alpha\pi \operatorname{senh} \beta\Omega_2 = 2\pi \cos \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh \left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \\ \operatorname{sen} \alpha\pi \operatorname{senh} \beta\pi\Omega_1 - (1 + \cos \alpha\pi \cosh \beta\pi)\Omega_2 = 2\pi \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \operatorname{senh} \left(\frac{\beta\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Sendo  $\Delta$  o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1 + \cos \alpha\pi \cosh \beta\pi) & \operatorname{sen} \alpha\pi \operatorname{senh} \beta\pi \\ \operatorname{sen} \alpha\pi \operatorname{senh} \beta\pi & - (1 + \cos \alpha\pi \cosh \beta\pi) \end{vmatrix},$$

temos que

$$\Delta = -1 - 2 \cos \alpha\pi \cosh \beta\pi - \cos^2 \alpha\pi \cosh^2 \beta\pi - (1 - \cos^2 \alpha\pi)(\cosh^2 \beta\pi - 1)$$

$$\Delta = -1 - 2 \cos \alpha\pi \cosh \beta\pi - \cos^2 \alpha\pi \cosh^2 \beta\pi - \cosh^2 \beta\pi + 1 + \cos^2 \alpha\pi \cosh^2 \beta\pi - \cos^2 \alpha\pi$$

$$\Delta = -(\cosh \beta\pi + 2 \cosh \beta\pi \cos \alpha\pi + \cos^2 \alpha\pi),$$

de onde podemos escrever

$$\Delta = -(\cosh \beta\pi + \cos \alpha\pi)^2. \quad (5.10)$$

Calculemos agora o determinante  $\Delta_{\Omega_1}$  dado por

$$\Delta_{\Omega_1} = \begin{vmatrix} 2\pi \cos \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh \left(\frac{\beta\pi}{2}\right) & \operatorname{sen} \alpha\pi \operatorname{senh} \beta\pi \\ 2\pi \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \operatorname{senh} \left(\frac{\beta\pi}{2}\right) & - (1 + \cos \alpha\pi \cosh \beta\pi) \end{vmatrix},$$

ou seja,

$$\frac{\Delta_{\Omega_1}}{2\pi} = -\cos \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh \left(\frac{\beta\pi}{2}\right) (1 + \cos \alpha\pi \cosh \beta\pi) - \operatorname{sen} \alpha\pi \operatorname{senh} \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \operatorname{senh} \left(\frac{\beta\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta_{\Omega_1}}{2\pi} = -\cos \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh \left(\frac{\beta\pi}{2}\right) (1 + \cos \alpha\pi \cosh \beta\pi)$$

$$-4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \operatorname{senh}^2 \left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \cos \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh \left(\frac{\beta\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta_{\Omega_1}}{2\pi} = -\cos \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh \left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \left[ 1 + \cos \alpha\pi \cosh \beta\pi + 4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \operatorname{senh}^2 \left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right].$$

Uma vez que

$$\operatorname{senh}^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cosh \theta - 1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

podemos escrever

$$\frac{\Delta_{\Omega_1}}{2\pi} = -\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) [1 + \cos\alpha\pi \cosh\beta\pi + (\cosh\beta\pi - 1)(1 - \cos\alpha\pi)]$$

$$\frac{\Delta_{\Omega_1}}{2\pi} = -\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) (1 + \cos\alpha\pi \cosh\beta\pi + \cosh\beta\pi - \cosh\beta\pi \cos\alpha\pi - 1 + \cos\alpha\pi).$$

Finalmente, obtemos

$$\Delta_{\Omega_1} = -2\pi \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) (\cosh\beta\pi + \cos\alpha\pi). \quad (5.11)$$

Como

$$\Omega_1 = \frac{\Delta_{\Omega_1}}{\Delta} = \frac{-2\pi \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) (\cosh\beta\pi + \cos\alpha\pi)}{-(\cosh\beta\pi + \cos\alpha\pi)^2},$$

podemos escrever, pela equação (5.5), que

$$\Omega_1 = \frac{\Delta_{\Omega_1}}{\Delta} = 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \beta} = \frac{2\pi \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\cosh\beta\pi + \cos\alpha\pi}. \quad (5.12)$$

Cálculos similares mostram que<sup>4</sup>

$$\Omega_2 = \frac{2\pi \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\cosh\beta\pi + \cos\alpha\pi}. \quad (5.13)$$

Lembrando que  $\cosh x = 1 + 2 \operatorname{senh}^2(x/2)$  equação (5.12) temos que

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \pi \cos(\alpha\pi/2) \int_0^\beta \frac{\cosh(x\pi/2)}{\cos\alpha\pi + 1 + 2 + \operatorname{senh}^2(x\pi/2)} dx.$$

Sendo  $\operatorname{senh}(x\pi/2) = y$  temos que  $\frac{\pi}{2} \cosh(x\pi/2) dx = dy$  e substituindo na equação acima temos

$$\begin{aligned} \Lambda(\alpha, \beta) &= \pi \cos(\alpha\pi/2) \int_0^{\operatorname{senh}(\beta\pi/2)} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + \cos\alpha\pi + 2y^2} dy \\ &= \cos(\alpha\pi/2) \int_0^{\operatorname{senh}(\beta\pi/2)} \frac{dy}{y^2 + \frac{1+\cos\alpha\pi}{2}} \end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de variável  $\mu^2 = \frac{1 + \cos\alpha\pi}{2} = \cos^2(\alpha\pi/2)$  na equação acima podemos escrever

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \cos(\alpha\pi/2) \int_0^{\operatorname{senh}(\beta\pi/2)} \frac{dy}{y^2 + \mu^2}$$

---

<sup>4</sup>Para os objetivos deste trabalho estamos interessados apenas em  $\Omega_1$ .

Finalmente, sendo  $y = \mu \tan \theta$  temos que  $\sinh(\beta\pi/2) = \mu \tan \theta$  e  $dy = \mu \sec^2 \theta$  de onde podemos escrever

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \frac{1}{\mu} \cos(\alpha\pi/2) \int_0^{\arctan[\frac{1}{\mu} \sinh(\beta\pi/2)]} d\theta = \frac{1}{\mu} \cos(\alpha\pi/2) \arctan \left[ \frac{1}{\mu} \sinh(\beta\pi/2) \right]$$

ou ainda

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \frac{1}{\cos(\alpha\pi/2)} \cos(\alpha\pi/2) \arctan \left[ \frac{\sinh(\beta\pi/2)}{\cos \alpha\pi/2} \right].$$

Sendo assim, podemos escrever

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\cosh \alpha t}{\cosh t} \frac{\sen \beta t}{t} dt = \arctan \left[ \frac{\sinh(\beta\pi/2)}{\cos \alpha\pi/2} \right] \quad (5.14)$$

na qual  $|\alpha| < 1$  e  $\beta > 0$ .

Uma vez que sabemos o valor de  $\Omega_2$  podemos calcular várias integrais simulando derivadas em relação aos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .

Note que para determinar a solução do problema inicial desta seção, isto é, calcular a integral associada ao problema eletrostático, devemos introduzir as seguintes mudanças de variável na equação (5.14):  $t = ak$  e definir os parâmetros  $\alpha = y/a$  e  $\beta = x/a$ .

### 5.1.3 Outro contorno

Nesta seção obtemos o valor de  $\Lambda(\alpha, \beta)$  a partir do cálculo da seguinte integral no plano complexo

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\cosh \alpha z}{\cosh z} \frac{e^{i\beta z}}{z} dz$$

onde  $z$  é uma variável complexa,  $\Gamma_2$  é contorno orientado no sentido anti-horário, dado pela Figura 5.3, e  $|\varepsilon| < \frac{\pi}{2}$ .

Seja  $C_\varepsilon$  a semi-circunferência centrada na origem, de raio  $\varepsilon$  e orientada no sentido horário. Calculamos o limite

$$L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{\cosh \alpha z}{\cosh z} \frac{e^{i\beta z}}{z} dz,$$

introduzindo a mudança de variável,  $z = \varepsilon e^{i\theta}$  na integral acima temos

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\pi^0 \frac{\cosh \alpha \varepsilon e^{i\theta}}{\cosh \varepsilon e^{i\theta}} \frac{e^{\beta \varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} (i \varepsilon e^{i\theta} d\theta) \\ &= i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\pi^0 \frac{\cosh \alpha \varepsilon e^{i\theta}}{\cosh \varepsilon e^{i\theta}} e^{\beta \varepsilon e^{i\theta}} d\theta \end{aligned}$$

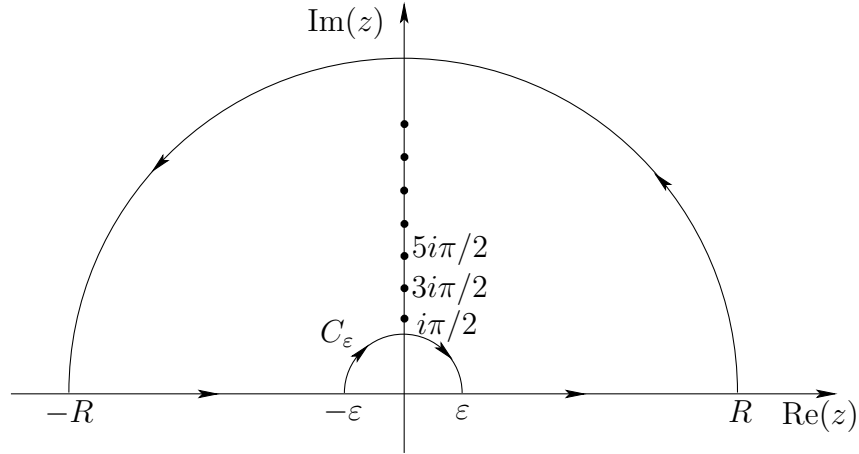


Figura 5.3: Definição dos contornos  $\Gamma_2$  e  $C_\varepsilon$ .

Visto que na equação acima estamos integrando em  $\theta$ , podemos comutar o limite e a integral de onde segue que

$$L = -i\pi.$$

Percorrendo o contorno  $\Gamma_2$  no sentido anti-horário, tomando os limites  $R \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , utilizando o Lema de Jordan e o teorema dos resíduos, podemos escrever, tomando a parte imaginária, que

$$\int_0^\infty \frac{\cosh \alpha t}{\cosh t} \frac{\operatorname{sen} \beta t}{t} dt = \frac{\pi}{2} + \pi \sum_{l=0}^{\infty} \operatorname{Res}(f, a_l)$$

na qual  $a_l$  é a singularidade  $z = \frac{(2l+1)i\pi}{2} = (l+1/2)i\pi$  de  $f(z) = \frac{\cosh \alpha z}{\cosh z} \frac{e^{i\beta z}}{z}$ .

Uma vez que as singularidades de  $f$  são pólos simples podemos escrever

$$\operatorname{Res}(f, a_l) = \frac{(\cosh \alpha a_l) e^{i\beta a_l}}{\cosh a_l + (\operatorname{senh} a_l) a_l} = \frac{[\cosh \alpha(l+1/2)i\pi] e^{i\beta(l+1/2)i\pi}}{\cosh(l+1/2)i\pi + [\operatorname{senh}(l+1/2)i\pi] (l+1/2)i\pi}.$$

Substituindo o valor de  $a_l$  podemos escrever<sup>5</sup>

$$\int_0^\infty \frac{\cosh \alpha t}{\cosh t} \frac{\operatorname{sen} \beta t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+1/2} \cos[\alpha\pi(l+1/2)] e^{-\beta\pi(l+1/2)}. \quad (5.15)$$

### 5.1.4 Resultado principal e casos particulares

Nesta seção consideramos a última equação de cada uma das seções anteriores e recuperamos vários resultados envolvendo integrais e séries reais.

<sup>5</sup>Lembrando que  $\cosh(i\theta) = \cos \theta$  e que  $\operatorname{senh}(i\theta) = i \operatorname{sen} \theta$ .



Utilizando as equações (5.14) e (5.15) podemos escrever

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+1/2} \cos[\alpha\pi(l+1/2)] e^{-\beta\pi(l+1/2)} = \frac{\pi}{2} - \arctan \left[ \frac{\sinh(\beta\pi/2)}{\cos \alpha\pi/2} \right].$$

De onde segue o principal resultado desta seção, isto é, cálculo de uma soma através do teorema dos resíduos, que é dado por

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+1/2} \cos[\alpha\pi(l+1/2)] e^{-\beta\pi(l+1/2)} = \operatorname{arccotan} \left[ \frac{\sinh(\beta\pi/2)}{\cos \alpha\pi/2} \right] \quad (5.16)$$

e válido para  $|\alpha| < 1$  e  $\beta > 0$ .

Utilizando as equações (5.14), (5.15) e (5.16) podemos recuperar alguns resultados conhecidos. Por exemplo, substituindo  $\alpha = 0$  na equação (5.16) obtemos as expressões

$$\begin{aligned} \arctan [\sinh(\beta\pi/2)] &= \frac{\pi}{2} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+1/2} e^{-\beta\pi(l+1/2)} \\ \operatorname{arccotan} [\sinh(\beta\pi/2)] &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+1/2} e^{-\beta\pi(l+1/2)}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Como um segundo e último exemplo tomamos  $\beta = 0$  na equação (5.16) e obtemos

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+1/2} \cos[\alpha\pi(l+1/2)] = \frac{\pi}{2}.$$

Um vez que o lado direito da equação acima não depende de  $\alpha$  podemos escolher qualquer valor para  $\alpha$  desde que  $-1 < \alpha < 1$ . Tomando  $\alpha = 0$  obtemos a famosa representação de  $\pi$  atribuída a Leibniz, isto é

$$4 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \dots \right) = \pi. \quad (5.18)$$

É importante ressaltar que, podemos obter valores para séries através do cálculo da série de Fourier de funções adequadas em pontos convenientes.

## 5.2 Transformada de Hankel: Uma aplicação

O nome Buddhadeb Banerjee é bastante conhecido pelos estudantes de engenharia uma vez que ele é um dos criadores do assim chamado *Método de elementos de contorno*, que é um método bastante prático para resolver equações diferenciais associadas a problemas de mecânica de fratura, acústica e transferência de calor. Seguimos aqui um estudo feito por Banerjee em parceria com K. Paul[18] no qual os autores obtêm as expressões para o potencial elétrico devido a uma fonte pontual constante em um ponto na superfície livre de um semi-espaço.

Para nós, o referido estudo é de particular interesse uma vez que para obter as expressões para o potencial elétrico além de serem utilizadas coordenadas cilíndricas<sup>6</sup> também é feito um interessante uso da transformada de Hankel.

### 5.2.1 Formulação do problema

Seja  $z = 0$  a superfície livre não perturbada do semi-espaço  $z > 0$  onde  $z$  é medido na direção normal à superfície para o interior do semi-espaço.

Tomemos  $\sigma(z)$  como sendo a condutividade a uma profundidade  $z$  e dada por

$$\sigma(z) = \sigma_0 e^{\nu z}, \quad (5.19)$$

com  $\nu$  uma constante. Suponhamos que na origem do nosso sistema de coordenadas tenhamos uma corrente de magnitude  $I$ . Uma vez que para esse tipo de problema temos uma simetria circular em torno do eixo  $z$  é bastante conveniente introduzir as coordenadas cilíndricas e desta forma o potencial elétrico do meio pode ser definido em um ponto qualquer por

$$v(x, y, z) \equiv v(r, \phi, z) \equiv v(r, z). \quad (5.20)$$

### 5.2.2 Equações e resolução

Pela seção anterior,  $v(r, z)$  deve satisfazer a EDP<sup>7</sup> [18]:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} = -2I\rho_0 \delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (5.21)$$

Substituindo o resultado da equação (5.19) na equação (5.21), podemos escrever

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial v}{\partial z} = -2I\rho_0 \delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (5.22)$$

---

<sup>6</sup>Ver Apêndice B.1.

<sup>7</sup>Utilizamos o fato do eixo  $z$  ser um eixo de simetria e escrevemos o Laplaciano em coordenadas cilíndricas como no Apêndice B.1.

Seja

$$v(r, z) = \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda z, r) c(\lambda, z) d\lambda.$$

Substituindo esta equação na equação (5.22) podemos escrever

$$\int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) \left( \frac{d^2 c}{dz^2} + \nu \frac{dc}{dz} - \lambda^2 c \right) d\lambda = -2I\rho_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad (5.23)$$

a qual invertida, com o auxílio da integral de Fourier Bessel e da transformada de Hankel,<sup>8</sup> fornece

$$\begin{aligned} \frac{d^2 c}{dz^2} + \nu \frac{dc}{dz} - \lambda^2 c &= -2I\rho_0 \delta(z) \int_0^\infty \delta(x) \delta(y) r J_0(\lambda r) dr \\ &= -\frac{I\rho_0}{\pi} \delta(z) \int_{-\infty}^\infty \delta(x) dx \int_{-\infty}^\infty \delta(y) J_0(\lambda \sqrt{x^2 + y^2}) dy \\ &= -\frac{I\rho_0}{\pi} \delta(z) \int_{-\infty}^\infty \delta(x) J_0(\lambda x) dx \\ &= -\frac{I\rho_0}{\pi} \delta(z), \end{aligned} \quad (5.24)$$

na qual as duas últimas igualdades são devida a propriedade de filtragem da função delta de Dirac.<sup>9</sup>

Tomemos agora  $c$  como sendo

$$c(\lambda, z) = \int_{-\infty}^\infty A(\lambda, t) e^{itz} dt, \quad (5.25)$$

onde  $A(\lambda, t)$  deve ser determinado.

Substituindo a equação acima na equação (5.24) obtemos

$$\int_{-\infty}^\infty (-t^2 + i\nu t - \lambda^2) A(\lambda, t) e^{itz} dt = -\frac{I\rho_0}{\pi} \delta(z).$$

A transformada de Fourier de uma função delta de Dirac é sempre igual a 1, desta forma, tomando a transformada inversa temos que<sup>10</sup>

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{itz} dt. \quad (5.26)$$

Pelos resultados das duas equações acima podemos escrever

$$\int_{-\infty}^\infty [(-t^2 + i\nu t - \lambda^2) A(\lambda, t)] e^{itz} dt = \int_{-\infty}^\infty \left[ \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{I\rho_0}{\pi} \right) \right] e^{itz} dt$$

Da equação acima concluímos que

$$A(\lambda, t) = \frac{I\rho_0}{2\pi^2} \frac{1}{t^2 - i\nu t + \lambda^2}, \quad (5.27)$$

<sup>8</sup>Para maiores detalhes sobre a integral de Fourier-Bessel veja Seção 2.5 e referência[11].

<sup>9</sup>Ver Apêndice A.

<sup>10</sup>Os detalhes deste fato, bem como sua demonstração podem ser encontrados no Apêndice A.3.

e conseqüentemente

$$c(\lambda, z) = \frac{I\rho_0}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itz}}{t^2 - i\nu t + \lambda^2} dt$$

ou ainda

$$c(\lambda, z) = \frac{I\rho_0}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itz}}{\left[t - i\left(\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}{2}\right)\right] \left[t - i\left(\frac{\nu - \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}{2}\right)\right]} dt. \quad (5.28)$$

Para calcular a integral acima consideremos a seguinte função

$$f(\xi) = \frac{e^{i\xi z}}{[\xi - iP][\xi - iQ]}$$

onde  $\xi = t + i\alpha$  é uma variável complexa,  $P = \left(\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}{2}\right)$  e  $Q = \left(\frac{\nu - \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}{2}\right)$ .

Sendo  $\gamma$  o contorno descrito pela Figura 5.4, podemos escrever, pelo teorema dos resíduos e pelo fato de apenas a singularidade (pólo simples)  $\xi = iP$  pertencer ao interior do contorno<sup>11</sup>, que

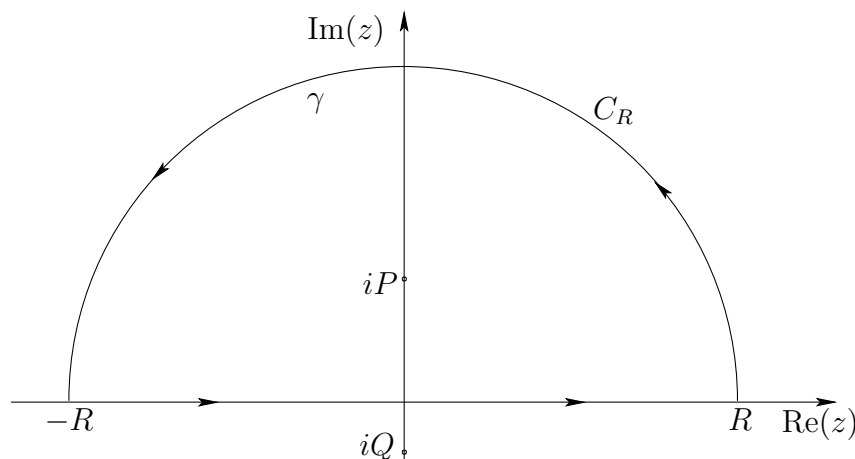


Figura 5.4: Definição do contorno  $\gamma$ .

$$\int_{\gamma} f(\xi) d\xi = 2\pi i \text{Res}(f; iP).$$

Uma vez que  $\xi = iP$  é um pólo simples temos que

$$\text{Res}(f; iP) = \lim_{\xi \rightarrow iP} (\xi - iP) \frac{e^{i\xi z}}{(\xi - iP)(\xi - iQ)} = \frac{e^{i\left[i\left(\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}{2}\right)\right]z}}{i\sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}},$$

ou seja,

$$\int_{\gamma} f(\xi) d\xi = 2\pi i \text{Res}(f; iP) = 2\pi \frac{e^{-\left(\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}{2}\right)z}}{\sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}} \quad (5.29)$$

<sup>11</sup>Note que  $P, Q \in \mathbb{R}$  e que  $P > 0$  e  $Q < 0$ .

Percorrendo o contorno  $\gamma$  descrito pela Figura 5.4, no sentido anti-horário temos

$$\int_{\gamma} f(\xi) d\xi = \int_{-R}^R f(t) dt + \int_{C_R} f(z) dz$$

onde  $C_R$  é uma semi-circunferência de raio  $R$ , no semi-plano superior e orientada no sentido anti-horário, como nos mostra a Figura 5.4.

Tomando o limite  $R \rightarrow \infty$  na equação acima, utilizando o Lema de Jordan e a equação (5.29) podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 2\pi \frac{e^{-\left(\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}{2}\right)z}}{\sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}.$$

Pela equação (5.28) temos que

$$c(\lambda, z) = \frac{I\rho_0}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \frac{I\rho_0}{\pi} \frac{e^{-\left(\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}{2}\right)z}}{\sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}. \quad (5.30)$$

A equação (5.30) é uma solução particular da equação (5.24). Para obtermos a solução geral devemos resolver a equação homogênea associada à equação (5.24), isto é

$$\frac{d^2c}{dz^2} + \nu \frac{dc}{dz} - \lambda^2 c = 0$$

cujas soluções são dadas por<sup>12</sup>

$$\frac{I\rho_0}{\pi} \left[ B(\lambda) e^{\left(\frac{-\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}{2}\right)z} + C(\lambda) e^{-\left(\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}{2}\right)z} \right], \quad (5.31)$$

onde  $B$  e  $C$  são funções arbitrárias de  $\lambda$  e devem ser determinadas pelas condições de contorno.

Pelas equações (5.30) e (5.31) temos que

$$c(\lambda, z) = \frac{I\rho_0}{\pi} \left[ \frac{e^{-\left(\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}{2}\right)z}}{\sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}} + B(\lambda) e^{\left(\frac{-\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}{2}\right)z} + C(\lambda) e^{-\left(\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}{2}\right)z} \right]. \quad (5.32)$$

Lembrando que  $v(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda z, r) c(\lambda, z) d\lambda$  temos, pela equação (5.32), que

$$\begin{aligned} v(r, z) = & \frac{I\rho_0}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{e^{-\left(\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}{2}\right)z}}{\sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}} + B(\lambda) e^{\left(\frac{-\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}{2}\right)z} + \right. \\ & \left. + C(\lambda) e^{-\left(\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}{2}\right)z} \right] \lambda J_0(\lambda r) d\lambda. \end{aligned} \quad (5.33)$$

---

<sup>12</sup>O fator  $\frac{I\rho_0}{\pi}$  é uma constante e foi inserido por conveniência.

A primeira integral do lado direito da equação (5.33) pode ser calculada com o auxílio da integral de Sommerfeld<sup>13</sup>, a qual fornece

$$\int_0^\infty f(\lambda) J_0(\lambda r) (\lambda r)^{1/2} d\lambda = \frac{r^{1/2} e^{-\beta\sqrt{r^2+\alpha^2}}}{\sqrt{r^2+\alpha^2}},$$

para  $f(\lambda) = \frac{\lambda^{1/2} e^{-\alpha\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}$ . Sendo assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-\left(\frac{\sqrt{\nu^2+4\lambda^2}}{2}\right)z}}{\sqrt{\nu^2+4\lambda^2}} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda &= \frac{1}{2r^{1/2}} \int_0^\infty \left( \frac{\lambda^{1/2} e^{z\sqrt{\lambda^2+\nu^2/4}}}{\sqrt{\lambda^2+\nu^2/4}} \right) J_0(\lambda r) (\lambda r)^{1/2} d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-\nu/2\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}}. \end{aligned}$$

Substituindo o resultado da equação acima na equação (5.33) podemos escrever

$$\begin{aligned} v(r, z) &= \frac{I\rho_0}{2\pi} \left[ \frac{e^{-\nu\sqrt{\lambda^2+\nu^2}/2}}{\sqrt{r^2+z^2}} + 2 \int_0^\infty \lambda B(\lambda) e^{\left(\frac{-\nu+\sqrt{\nu^2+4\lambda^2}}{2}\right)z} J_0(\lambda r) d\lambda + \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^\infty \lambda C(\lambda) e^{-\left(\frac{\nu+\sqrt{\nu^2+4\lambda^2}}{2}\right)z} J_0(\lambda r) d\lambda \right]. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Para determinar as constantes  $B(\lambda)$  e  $C(\lambda)$  impomos as condições de contorno<sup>14</sup>

- 1)  $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$  para  $z = 0$
- 2)  $\lim_{z \rightarrow \infty} v = 0$

As condições 2) e 1) aplicadas a equação (5.34) implica, respectivamente, que

$$B(\lambda) = 0 \quad (5.35)$$

$$\int_0^\infty \lambda C(\lambda) (\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}) J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{-\nu}{2r} e^{-\nu r/2},$$

ou seja,<sup>15</sup>

$$C(\lambda) (\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}) = \int_0^\infty J_0(\lambda r) r \left( \frac{-\nu}{2r} e^{-\nu r/2} \right) dr = \frac{-\nu}{2} \int_0^\infty e^{-\nu r/2} J_0(\lambda r) dr.$$

Pela equação acima ao obter o valor de  $\int_0^\infty e^{-\nu r/2} J_0(\lambda r) dr$  obtemos também o valor de  $C(\lambda)$ . Também pela referência<sup>16</sup> temos que

$$\int_0^\infty f(r) J_0(\lambda r) (\lambda r)^{1/2} dr = \lambda^{1/2} (\lambda^2 + a^2)^{-1/2},$$

<sup>13</sup>Ver referência [22] página 9 equação (24).

<sup>14</sup>A condição 1) significa que na superfície o potencial elétrico é constante, ao passo que a condição 2) implica que a uma profundidade suficientemente grande o potencial elétrico é nulo.

<sup>15</sup>Esta passagem é devida a transformada de Hankel inversa.

<sup>16</sup>Ver referência [22] página 9 equação (18).

para  $f(r) = \frac{e^{-ar}}{r^{1/2}}$ . Concluimos que

$$\int_0^\infty e^{-\nu r/2} J_0(\lambda r) dr = \frac{1}{\lambda^{1/2}} \int_0^\infty \left( \frac{e^{(-\nu/2)r}}{r^{1/2}} \right) J_0(\lambda r) (\lambda r)^{1/2} dr = (\lambda^2 + \nu^2/4)^{-1/2},$$

de onde temos que

$$C(\lambda) = - \frac{\nu}{(\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}) \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}}. \quad (5.36)$$

Substituindo as equações (5.35) e (5.36) na equação (5.34) podemos escrever

$$v(r, z) = \frac{I\rho_0}{2\pi} \left[ \frac{e^{-\nu\sqrt{\lambda^2+\nu^2}/2}}{\sqrt{r^2+z^2}} - 2\nu \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-z\left(\frac{\nu+\sqrt{\nu^2+4\lambda^2}}{2}\right)} J_0(\lambda r) d\lambda}{(\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}) \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}} \right]. \quad (5.37)$$

Sendo assim, para obter o valor de  $v(r, z)$  devemos apenas obter o valor de

$$f(z) = -2\nu \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-z\left(\frac{\nu+\sqrt{\nu^2+4\lambda^2}}{2}\right)} J_0(\lambda r)}{(\nu + \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}) \sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}} d\lambda,$$

de onde<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \nu \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-z\left(\frac{\nu+\sqrt{\nu^2+4\lambda^2}}{2}\right)} J_0(\lambda r)}{\sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}} d\lambda \\ &= \frac{\nu}{2} \frac{e^{-\nu(z+\sqrt{r^2+z^2})/2}}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$f(z) = -\frac{\nu}{2} \int_z^\infty \frac{e^{-\nu(z+\sqrt{r^2+z^2})/2}}{\sqrt{r^2 + z^2}} dz$$

Introduzindo a mudança de variável,  $p = \nu(z + \sqrt{r^2 + z^2})/2$  podemos escrever

$$f(z) = -\frac{\nu}{2} \int_p^\infty \frac{e^{-p}}{p} dp$$

Sendo  $Ei(p) = \int_p^\infty \frac{e^p}{p} dp$ , a exponencial integral, temos que

$$f(z) = \frac{\nu}{2} Ei \left[ -\frac{\nu}{2} (z + \sqrt{r^2 + z^2}) \right].$$

Substituindo a equação acima na equação (5.37) podemos escrever

$$v(r, z) = \frac{I\rho_0}{2\pi} \left\{ \frac{e^{-\nu(z+\sqrt{r^2+z^2})/2}}{\sqrt{r^2+z^2}} + \frac{\nu}{2} Ei \left[ -\frac{\nu}{2} (z + \sqrt{r^2 + z^2}) \right] \right\}. \quad (5.38)$$

que é a solução para o problema eletrostático neste caso.

<sup>17</sup>A segunda igualdade também é devida a integral de Sommerfeld.

## 5.3 Método de Cagniard para problemas de pulso sísmico

Em um notável livro[1], L. Cagniard aprimorou de maneira formidável o estudo da propagação de pulsos sísmicos em dois meios homogêneos separados por um plano de interface. Porém, os artifícios matemáticos utilizados neste livro são, em várias instâncias, tão complexos que tornam o livro inacessível a uma grande gama de leitores que necessitam de conceitos nele contidos. Por esta razão, vários geofísicos envolvidos no estudo de propagação de pulsos sísmicos solicitaram que C. Hewitt Dix[19] redigisse uma exposição mais simples do referido método.

Dix atendeu às solicitações dos geofísicos e resolveu, via método de Cagniard e sem entrar muito a fundo nos detalhes matemáticos, o caso em que temos uma fonte pontual em um meio infinito. Seguimos, nesta aplicação, o trabalho feito por Dix com o intuito de dar uma visão mais clara do método de Cagniard e para que possamos posteriormente compará-lo ao assim chamado método de Cagniard-de Hoop.

### 5.3.1 Formulação do problema

Seguindo os passos efetuados no Capítulo 4 devemos encontrar<sup>18</sup>  $\psi = \psi(\rho, z, t)$  em função da fonte de excitação, que no caso desta Seção será uma fonte pontual. Devemos resolver a seguinte equação

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

impondo as condições iniciais e de contorno definidas na Seção 4.2, a saber:

I)-  $\psi$  e  $U$  e todas suas derivadas são nulas para quaisquer  $r$  e  $z$  em  $t = 0$ .

II)-  $\psi$  e  $U$  são contínuas, limitadas e de classe  $C^\infty$  em cada um dos pontos de seus domínios, com exceção da fonte  $P$  e da fronteira  $z = 0$ .

III)-  $\psi$  e  $U$  tendem a um limite finito à medida que se aproximam da fronteira  $z = 0$ , independentemente do meio pelo qual se aproximam, entretanto não necessariamente os valores obtidos para os limites devem coincidir.

IV)- No ponto  $P$ ,  $U$  é limitada e infinitamente diferenciável. O mesmo é válido para a função<sup>19</sup>  $G = \Psi - F(t - rS)/R$ , onde  $F(t)$  é uma função dada, infinitamente diferenciável para todo  $t$  e nula e com derivadas nulas para  $t \leq 0$ .

V)- Para todos valores finitos de  $t$ , pontos de ambos os meios que estejam em movimento ou começando a se mover estão a uma distância finita da fonte  $P$ .

---

<sup>18</sup>Nas aplicações, em geral, salvo menção em contrário,  $z$  denota uma coordenada e não deve ser confundido com a variável complexa  $z = x + iy$ .

<sup>19</sup>Lembremos que  $r$  é a distância do ponto em questão à fonte.



### 5.3.2 Transformadas diretas

Resolvemos a equação pelo método de Cagniard, para isso iniciamos introduzindo a transformada de Laplace,  $\bar{\psi}(\rho, z, s) = \int_0^\infty e^{-st}\psi(\rho, z, t) dt$ , de onde podemos escrever

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} - \frac{s^2}{V^2} \bar{\psi} = 0.$$

Visto que a equação acima é homogênea podemos resolvê-la pelo assim chamado método de separação de variáveis<sup>20</sup>, ou seja, supomos que  $\bar{\psi}(\rho, z, s) = R(\rho)Z(z)$ , substituímos na equação acima e dividimos a equação por  $RZ$  de onde obtemos

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} + \frac{s^2}{V^2}$$

Visto que o lado esquerdo da equação acima não depende de  $Z$  e que o lado direito não depende de  $R$ , podemos considerar que ambos os lados da equação acima são iguais a uma constante<sup>21</sup>, que por conveniência tomamos como sendo  $-\lambda^2$ , de onde

$$\begin{aligned} \rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda\rho)^2 R &= 0 \\ Z'' &= (\lambda^2 + s^2/V^2)Z. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Segue que as soluções são tais que

$$R(\rho) = J_0(\lambda\rho) \quad \text{e} \quad Z(z) = e^{\pm z(\lambda^2 + s^2/V^2)^{1/2}} \tag{5.40}$$

na qual desconsideramos a função de Bessel de segunda espécie,  $Y_0$ , utilizando a condição III) e o fato de  $Y_0$  ser infinita ao longo do eixo  $\rho = 0$ .

Uma vez que as equações (5.39) são lineares podemos utilizar o *princípio da superposição*, isto é, como a soma de quaisquer duas soluções é uma nova solução generalizamos este conceito e escrevemos uma integral a fim de representar nossa simetria esférica em coordenadas cilíndricas e o fato de nossa fonte de excitação ser do tipo Heaviside, ou seja,

$$\int_0^\infty \frac{\theta(t - r/V)}{r} e^{-st} dt = \frac{e^{-sr/V}}{sr} = \int_0^\infty F(\lambda) J_0(\lambda\rho) e^{-z(\lambda^2 + s^2/V^2)^{1/2}} d\lambda, \tag{5.41}$$

na qual  $\theta$  é a função de Heaviside, a origem se encontra no centro da fonte,  $z$  é tomado como sendo positivo e  $F(\lambda)$  deve ser determinada.

Para obter  $F(\lambda)$  procedemos de maneira análoga ao que fizemos na aplicação anterior<sup>22</sup>. Utilizando a transformada de Hankel inversa podemos escrever

$$\frac{1}{\lambda} F(\lambda) e^{-z(\lambda^2 + s^2/V^2)^{1/2}} = \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-sr/V}}{sr} \right] J_0(\lambda\rho) \rho d\rho.$$

<sup>20</sup>Ver Seção 3.3 ou referência [13].

<sup>21</sup>Conhecida como constante de separação.

<sup>22</sup>Ver Seção 5.2.2.

Lembrando que por definição  $x^2 + y^2 = \rho^2$  e que  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  temos que  $\rho^2 + z^2 = r^2$ , substituindo este resultado na equação acima podemos escrever

$$\int_0^\infty \left[ \frac{e^{-sr/V}}{sr} \right] J_0(\lambda \rho) \rho d\rho = \frac{1}{s} \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-s(\rho^2+z^2)^{1/2}/V}}{(\rho^2+z^2)^{1/2}} \right] J_0(\lambda \rho) \rho d\rho.$$

A Integral do lado direito da equação acima pode ser calculada com o auxílio da integral de Sommerfeld<sup>23</sup>, a qual diz que

$$\int_0^\infty f(\lambda) J_0(\lambda \rho) (\lambda \rho)^{1/2} d\lambda = \frac{\rho^{1/2} e^{-\beta \sqrt{\rho^2 + \alpha^2}}}{\sqrt{\rho^2 + \alpha^2}},$$

para  $f(\lambda) = \frac{\lambda^{1/2} e^{-\alpha \sqrt{\lambda^2 + \beta^2}}}{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}}$ . Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-s(\rho^2+z^2)^{1/2}/V}}{(\rho^2+z^2)^{1/2}} \right] J_0(\lambda \rho) \rho d\rho &= \frac{1}{s\lambda^{1/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{\rho^{1/2} e^{-s/V \sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \right] J_0(\lambda \rho) (\lambda \rho)^{1/2} d\rho \\ &= \frac{1}{s} \frac{e^{-z \sqrt{\lambda^2 + s^2/V^2}}}{\sqrt{\lambda^2 + s^2/V^2}}, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$F(\lambda) = \frac{\lambda}{s \sqrt{\lambda^2 + s^2/V^2}}. \quad (5.42)$$

Uma vez que obtemos  $F(\lambda)$  estamos aptos a iniciar o processo de inversão.

### 5.3.3 Inversão

Utilizando as equações (5.42) e (5.41) podemos escrever<sup>24</sup>, tomando a mudança de variável  $\lambda = su$ , que

$$\frac{e^{-sr/V}}{sr} = \int_0^\infty \frac{u J_0(s u \rho) e^{-s z (u^2 + 1/V^2)^{1/2}}}{(u^2 + 1/V^2)^{1/2}} du = \int_0^\infty e^{-st} A(\rho, z, t) dt. \quad (5.43)$$

Expandindo a função exponencial em série de potências em torno de  $iz \cos \omega$  e integrando termo a termo obtemos[11]

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-iz \cos \omega} d\omega.$$

A fim de facilitar os cálculos reescrevemos a equação acima, em analogia ao que foi feito na referência[1], da seguinte maneira

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \cos \omega) d\omega - \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \sen(z \cos \omega) d\omega. \quad (5.44)$$

<sup>23</sup>Ver referência [22] página 9 equação (24).

<sup>24</sup>Esta equação corresponde a primeira equação do quinto capítulo da referência[1].

As Figuras 5.4 nos mostram, respectivamente, o primeiro e segundo integrandos da equação acima, o primeiro para a parte real e o segundo para a parte imaginária.

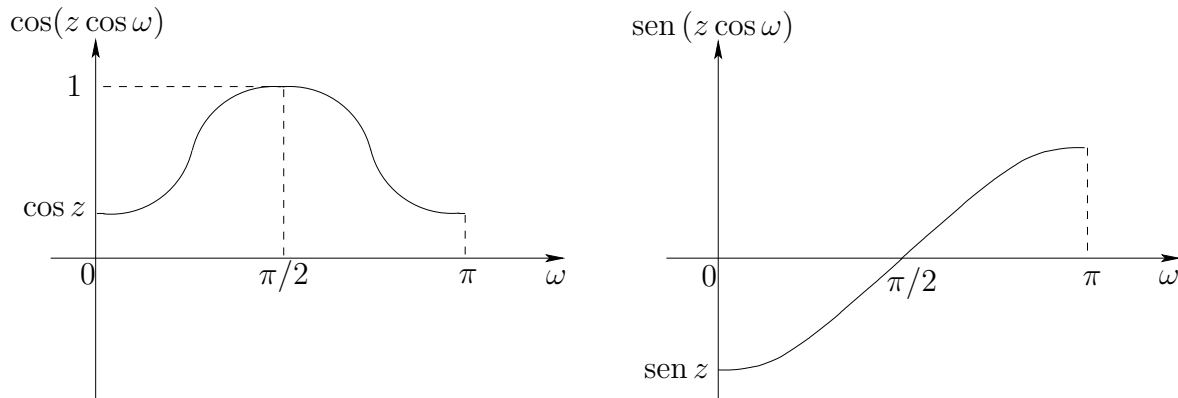


Figura 5.5: Representação gráfica dos integrandos da equação (5.44).

Claramente a integral da parte imaginária é zero e utilizando a simetria, em relação à reta  $\omega = \pi/2$ , do gráfico para a parte real podemos escrever

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{Re} [e^{-iz \cos \omega}] d\omega.$$

Substituindo a equação acima na equação (5.43) e tomando  $a = (u^2 + 1/V^2)^{1/2}$  podemos escrever

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \operatorname{Re} [e^{-s(az+iu\rho \cos \omega)}] dw \frac{u du}{a} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty e^{-s(az+iu\rho \cos \omega)} \frac{u du}{a} \right] d\omega. \quad (5.45)$$

Notemos que ao tomar a mudança de variável

$$t' = az + iu\rho \cos \omega, \quad (5.46)$$

temos a chance de deixar a integral da equação (5.45) numa forma similar ao lado direito da equação (5.43), isto é, como a transformada de Laplace de uma função  $A$  e neste momento este é o nosso objetivo. Tomando a mudança de variável dada pela equação (5.46) na equação (5.45) obtemos<sup>25</sup>

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\pi/2} d\omega \int_{H_\omega} e^{-pt'} \frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial t'} dt' \right\}, \quad (5.47)$$

onde  $H_\omega$  é o caminho dado pela equação (5.46) quando  $u$  varia entre 0 e  $\infty$  e também pela equação (5.46)<sup>26</sup>

$$\frac{du}{dt'} = \frac{1}{i\rho \cos \omega + uz/a}.$$

<sup>25</sup>Os detalhes desta passagem podem ser encontrados na referência[1], página 61, equação (15).

<sup>26</sup>Note que  $a$  é função de  $u$ .

Além disso, resolvendo a equação (5.46) em  $u$  obtemos<sup>27</sup>

$$t' - i \rho u \cos \omega = (u^2 + 1/V^2)z.$$

Elevando ambos os lados da equação acima ao quadrado e rearranjando obtemos

$$u = \frac{-i t' \rho \cos \omega \pm z \sqrt{t'^2 - 1/V^2(z^2 + \rho \cos^2 \omega)}}{z^2 + \rho \cos^2 \omega}.$$

Neste momento, a única complicação para resolução do nosso problema é que o caminho de integração da equação (5.47),  $H_\omega$ , é um caminho hiperbólico, como nos mostra a Figura 5.6. Uma vez que  $H_\omega$  depende de  $\omega$ , uma pequena mudança é necessária. Afim de

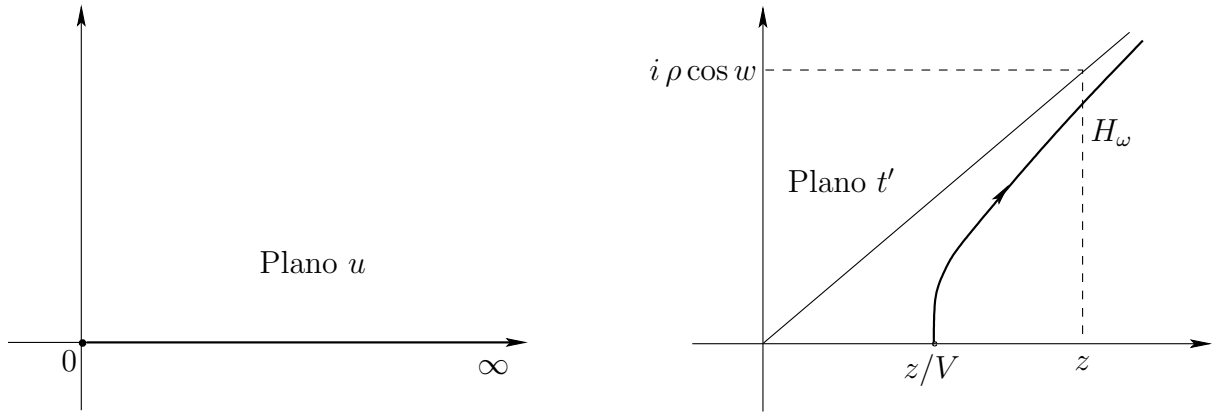


Figura 5.6: Representação da transformação dada pela equação (5.46).

obter a solução da equação (5.47) tomamos o contorno formado pelo caminho  $H_\omega$  unido ao eixo real por um arco no infinito e voltando, pelo eixo real e contornando o ponto<sup>28</sup>

$t' = P = \frac{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \omega + z^2}}{V}$  ao ponto  $z/V$  como nos mostra a Figura 5.7. Tal contorno é conhecido como contorno de Cagniard.

Uma vez que o integrando não tem singularidades no interior do referido contorno e que, pelo lema de Jordan, a integral ao longo do arco infinito é nula podemos reescrever a equação (5.47), pelo teorema de Cauchy<sup>29</sup>, da seguinte maneira

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\pi/2} d\omega \int_{z/V}^{\infty} e^{-pt'} \left( \frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial t'} \right) dt' \right\}. \quad (5.48)$$

Pela definição de  $\frac{\partial u}{\partial t'}$  temos que, além do ponto  $P$  o integrando tem singularidade nos pontos onde

$$i \rho \cos \omega = -\frac{uz}{a},$$

<sup>27</sup>Lembrando que  $a = z(u^2 + 1/V^2)^{1/2}$ .

<sup>28</sup>Note que pela definição de  $u$  em relação a  $t'$  que o ponto  $P$  é um ponto de ramificação.

<sup>29</sup>Ver Capítulo 1.

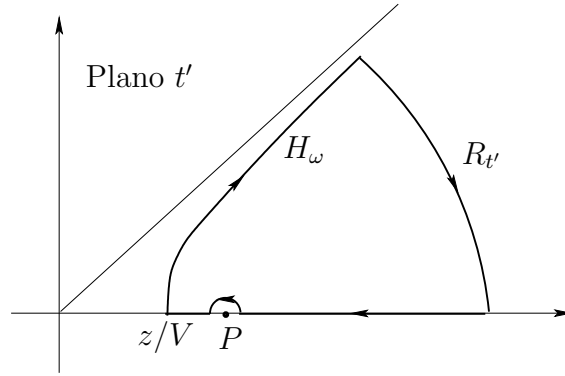


Figura 5.7: Representação do contorno de Cagniard.

lembrando que  $a = (u^2 + 1/V^2)^{1/2}$ , elevando ambos os lados da equação acima ao quadrado e isolando  $u$  temos que o integrando tem singularidades nos pontos

$$u = u_0 = \pm \frac{i \rho \cos \omega}{V(\rho^2 \cos^2 \omega + z^2)^{1/2}}$$

A Figura 5.8 mostra o contorno da Figura 5.7 quando voltamos ao plano  $u$ .

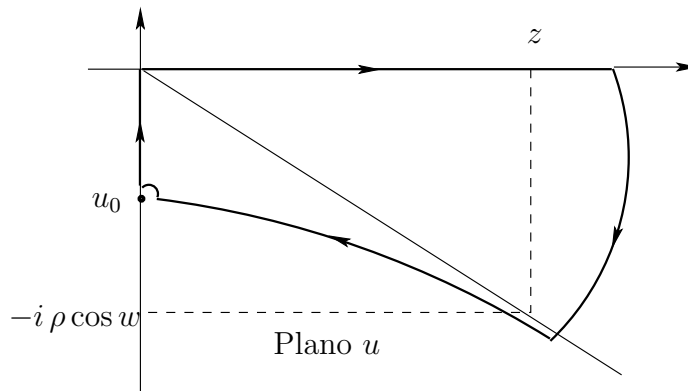


Figura 5.8: Representação do contorno de Cagniard no plano  $u$ .

Note que ao fazer as mudanças anteriores e aplicar o teorema de Cauchy passamos do caminho  $H_\omega$  para um caminho que praticamente independe de  $\omega$  como nos mostra a equação (5.48).

Nosso próximo passo consiste em mudar a ordem de integração da equação (5.48), isto é,

$$\int_{z/V}^{\infty} e^{-pt'} \left[ \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial t'} d\omega \right\} \right] dt'.$$

Sendo assim, segue por inspeção e pela equação (5.43) que

$$A(\rho, z, t') = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial t'} d\omega \right\} \quad \text{para} \quad t' > z/V, \quad (5.49)$$

e  $A(\rho, z, t') = 0$  para  $t' < z/V$ . Desta forma obtemos a solução para o nosso problema.

## 5.4 Difusão eletromagnética

Nesta seção é apresentado um estudo, originalmente feito por de Hoop e Oristaglio[23], para problemas de difusão eletromagnética aqui ilustrado por um exemplo bidimensional de dois meios semi-infinitos com diferentes condutividades elétricas, excitados por uma fonte linear de corrente elétrica, situada na interface dos dois meios. As equações de campo são resolvidas através do método de Cagniard-de Hoop, isto é, aplicamos a transformada de Laplace na parte temporal das equações de campo e a transformada de Fourier na parte espacial. Através de uma deformação no contorno de integração para o cálculo da transformada de Fourier inversa obtemos a inversa da transformada de Laplace por inspeção.

### 5.4.1 Descrição do problema

Consideramos um espaço com dois campos eletromagnéticos transitórios separados por um plano de interface, como nos mostra a Figura 5.9. Consideramos o plano de interface como sendo  $z = 0$ , cada semi-espaço homogêneo e isotrópico, com constante de condutividade<sup>30</sup>  $\sigma$  e de permeabilidade  $\mu$ .

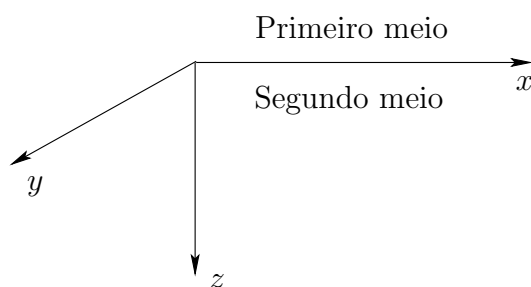


Figura 5.9: Geometria do problema.

Além disso, consideramos que o deslocamento da corrente não influencia o campo eletromagnético, sendo assim desconsideramos a constante de permissividade  $\epsilon$  de cada um dos meios. Tomamos o deslocamento da corrente com sendo ao longo do eixo  $y$  e a magnitude da corrente como sendo independente de  $y$ .<sup>31</sup>

A coordenada temporal é denotada por  $t$  e consideramos que no instante  $t = 0$  a fonte está em repouso.

---

<sup>30</sup>Os índices 1 e 2 denotam, respectivamente, grandezas no primeiro e segundo meio.

<sup>31</sup>Desta forma temos um problema bidimensional.

## 5.4.2 Equações de campo

Em um meio homogêneo, isotrópico, o campo eletromagnético bidimensional pode ser gerado por uma fonte do tipo linha de corrente com densidade volumétrica  $\mathbf{J} = (0, J_y, 0)$ . Neste caso, o campo elétrico é dado por

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$$

e o campo magnético por

$$\mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)$$

onde  $E_y$ ,  $H_x$  e  $H_z$  são funções de  $x, z$  e  $t$ . Considerando a aproximação de difusão[23] (desprezando deslocamentos de corrente), as equações que regem o campo são dadas por

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} - \sigma E_y = J_y, \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0, \quad (5.51)$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0. \quad (5.52)$$

Por conveniência, consideramos a fonte situada na origem do sistema de coordenadas e que

$$J_y = I(t)\delta(x)\delta(z)$$

na qual  $I(t)$  é a corrente na fonte e  $\delta$  é a função delta de Dirac. As condições de fronteira podem ser obtidas introduzindo a equação acima nas equações (5.50) e (5.52) e integrando-se, em relação a  $z$  num intervalo arbitrariamente pequeno, de onde podemos escrever<sup>32</sup>

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} H_x - \lim_{z \rightarrow 0^-} H_x = I(x)\delta(x), \quad (5.53)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} E_y - \lim_{z \rightarrow 0^-} E_y = 0. \quad (5.54)$$

onde a primeira igualdade é devida a propriedade da filtragem da função delta de Dirac.<sup>33</sup>

## 5.4.3 Transformadas diretas

A fim de obter as soluções das equações de campo inicialmente eliminamos a dependência temporal das equações através da transformada de Laplace em relação ao tempo, com um parâmetro real e positivo  $s$ . Em seguida introduzimos a transformada de Fourier em relação a variável espacial  $x$ , com parâmetro de integração  $s^{1/2}\alpha$ . A escolha atípica do

<sup>32</sup>As notações  $\lim_{z \rightarrow 0^+}$  e  $\lim_{z \rightarrow 0^-}$  denotam, respectivamente, o limite  $z$  tendendo a zero por valores positivos e por valores negativos.

<sup>33</sup>Ver Apêndice A.1.

parâmetro na transformada de Fourier tem por objetivo facilitar o cálculo das transformadas inversas através do método de Cagniard-de Hoop. Denotamos a transformada de Laplace de  $E_y$  por<sup>34</sup>

$$\bar{E}_y(x, z, s) = \int_0^\infty e^{-st} E_y(x, z, t) dt$$

e a justaposição das transformadas por

$$\hat{E}_y(\alpha, z, s) = \int_{-\infty}^\infty e^{(is^{1/2}\alpha x)} \bar{E}_y(x, z, s) dx.$$

Através da transformada de Fourier inversa<sup>35</sup> temos

$$\bar{E}_y(x, z, s) = \frac{s^{1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{(-is^{1/2}\alpha x)} \hat{E}_y(\alpha, z, s) d\alpha.$$

Aplicando a transformada de Laplace e em seguida a transformada de Fourier nas equações de campo (5.50)-(5.52) podemos escrever

$$i s^{1/2} \alpha \hat{H}_z + \frac{\partial \hat{H}_x}{\partial z} - \sigma \hat{E}_y = 0,$$

$$-i s^{1/2} \alpha \hat{E}_y + s \mu \hat{H}_z = 0,$$

$$-\frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} + s \mu \hat{H}_x = 0.$$

Isolando  $\hat{H}_z$  na segunda das equações acima e substituindo na primeira obtemos o seguinte sistema

$$\frac{\partial \hat{H}_x}{\partial z} = \mu^{-1}(\alpha^2 + D^{-1}) \hat{E}_y, \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} = s \mu \hat{H}_x \quad (5.56)$$

na qual  $D = (\sigma\mu)^{-1}$  é o assim chamado coeficiente de difusão. Além disso, aplicando a transformada de Laplace e em seguida a de Fourier nas condições de contorno (5.53) e (5.54) obtemos

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \hat{H}_x - \lim_{z \rightarrow 0^-} \hat{H}_x = \bar{I}(s), \quad (5.57)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \hat{E}_y - \lim_{z \rightarrow 0^-} \hat{E}_y = 0, \quad (5.58)$$

na qual  $\bar{I}$  é a transformada de Laplace da fonte  $I$ .

Deste ponto em diante a distinção entre grandezas em cada um dos semi-espacos será feita através dos índices (1) e (2) para grandezas, respectivamente, no primeiro e no segundo semi-espacos.

---

<sup>34</sup>Denotamos a transformada de Laplace, bem como a justaposição das transformadas, das demais funções de maneira análoga a que fizemos para  $E_y$ .

<sup>35</sup>Ver Seção 2.4.



Pelas equações (5.55) e (5.56) temos que as soluções no primeiro meio devem ser limitadas quando  $z \rightarrow -\infty$ . Derivando a equação (5.55) em relação a  $z$ , e substituindo o resultado na equação (5.56) podemos escrever

$$\frac{\partial^2 \widehat{H}_x}{\partial z^2} = \mu^{-1}(\alpha^2 + D^{-1}) \frac{\partial \widehat{E}_y}{\partial z} = s \mu \mu^{-1}(\alpha^2 + D^{-1}) \widehat{H}_x.$$

Resolvendo a equação acima e impondo a limitação para  $z \rightarrow -\infty$  podemos escrever para o primeiro meio<sup>36</sup>

$$\widehat{H}_x^{(1)} = -\frac{\gamma_1}{\mu_1} \bar{I} A_1 e^{\gamma_1 s^{1/2} z} \quad (5.59)$$

onde  $\gamma_1 = \sqrt{\alpha^2 + D_1^{-1}} > 0$ . Substituindo o resultado da equação acima na equação (5.55) podemos escrever

$$\widehat{E}_y^{(1)} = -s^{1/2} \bar{I} A_1 e^{\gamma_1 s^{1/2} z}. \quad (5.60)$$

Procedendo de maneira análoga para o segundo meio podemos escrever<sup>37</sup>

$$\widehat{H}_x^{(2)} = \frac{\gamma_2}{\mu_2} \bar{I} A_2 e^{-\gamma_2 s^{1/2} z}, \quad (5.61)$$

onde  $\gamma_2 = \sqrt{\alpha^2 + D_2^{-1}} > 0$ . Novamente utilizando a equação (5.44) temos

$$\widehat{E}_y^{(2)} = -s^{1/2} \bar{I} A_2 e^{\gamma_2 s^{1/2} z}. \quad (5.62)$$

As constantes  $A_1$  e  $A_2$  são determinadas através das condições (5.57) e (5.58). A partir da equação (5.58) temos que  $A_1 = A_2$  e pela condição (5.57) podemos escrever

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{\gamma_1/\mu_1 + \gamma_2/\mu_2} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1} \equiv A \quad (5.63)$$

#### 5.4.4 Inversão

Para obter a solução do nosso problema devemos inverter as transformadas de Fourier e Laplace, isto é, voltar ao nosso sistema espaço-tempo inicial. Como nosso objetivo é mostrar a aplicabilidade do método de Cagniard-de Hoop para resolver o problema em questão, vamos efetuar aqui apenas os cálculos para obter a componente  $E_y$ , pois o cálculo para as demais componentes é completamente análogo.

Como já mencionamos anteriormente a essência do método de Cagniard-de Hoop é através de modificações no caminho de integração da transformada de Fourier inversa transformá-la de tal forma que esta possa ser reconhecida como sendo a transformada de Laplace de alguma função conhecida e desta forma obter a solução para o problema de partida, no nosso caso  $E_y$ , por inspeção. Começemos por supor que

$$\sigma_1 \mu_1 < \sigma_2 \mu_2 \quad \text{e} \quad D_1 > D_2.$$

<sup>36</sup>A constante de integração foi tomada como sendo  $-\frac{\gamma_1}{\mu_1} \bar{I} A_1$  para facilitar os cálculos.

<sup>37</sup>Note que agora as soluções devem ser limitadas para  $z \rightarrow \infty$ .

O caso em que não temos condutividade em um dos meios, por exemplo quando temos ar acima de um semi-espaco condutor, é obtido tomando o limite quando a condutividade tende a zero por valores positivos. Calculamos a solução para o caso em que a fonte é uma função degrau,<sup>38</sup> ou seja,

$$\bar{I} = \frac{1}{s}. \quad (5.64)$$

Consideramos inicialmente o domínio mais difusivo como sendo  $\mathcal{D}_1$ . Através da fórmula para a inversa da transformada de Fourier,

$$\bar{E}_y^{(1)}(x, z, s) = \frac{s^{1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-i s^{1/2} \alpha x)} \hat{E}_y^{(1)}(\alpha, z, s) d\alpha,$$

bem com pela equações (5.49) e (5.53) podemos escrever

$$\bar{E}_y^{(1)}(x, z, s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^{1/2}(i\alpha x + \tilde{\gamma}_1 |z|)} A(\alpha) d\alpha,$$

onde  $A$  é dado pela equação (5.63). Devemos considerar mudanças no caminho de integração da equação acima de tal forma que possamos reconhecer a integral acima como a transformada de Laplace de uma função conhecida pois assim obtemos, por inspeção, o valor de  $E_y$ . Iniciemos pela mudança  $p = i\alpha$ , de onde temos

$$\bar{E}_y^{(1)}(x, z, s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-s^{1/2}(px + \tilde{\gamma}_1 |z|)} \tilde{A}(p) dp,$$

onde  $\tilde{\gamma}_1$  e  $\tilde{A}$  denotam, respectivamente,  $\gamma$  e  $A$  após a mudança  $p = i\alpha$ .<sup>39</sup> Notemos que o integrando acima é continuamente analítico em todo plano complexo  $p$ . Consideremos agora a mudança

$$px + \tilde{\gamma}_1 |z| = k \quad (5.65)$$

com  $k$  real e positivo. Neste processo, mantemos  $\text{Re}(\tilde{\gamma}_1) > 0$  e  $\text{Re}(\tilde{\gamma}_2) > 0$ . Para isso, uma vez que  $\tilde{\gamma}_j = (\alpha^2 + D_j^{-1})^{1/2}$  para  $j = 1, 2$ , introduzimos os ramos de corte

$$\text{Im}(p) = 0 \quad D_1^{-1/2} < |\text{Re}(p)| < \infty \quad e$$

$$\text{Im}(p) = 0 \quad D_2^{-1/2} < |\text{Re}(p)| < \infty.$$

Para valores não pertencentes aos ramos definidos acima o integrando é bem definido. Além disso, o integrando é real quando  $\text{Im}(p)=0$  e  $-D_1^{-1/2} < \text{Re}(p) < D_1^{-1/2}$ .

Com as condições acima temos, pelo *Princípio de Reflexão de Schwarz*<sup>40</sup> aplicado ao integrando, que existe uma continuação unívoca do integrando,  $f$ , no semi-espaco  $\text{Re}(p) < 0$  tal que o valor do integrando em  $a + ib$  é igual ao conjugado de  $f(a - ib)$ .

<sup>38</sup>Note que apesar de estar calculando a resposta para uma função degrau continuamos denotando, para facilitar a notação, as funções pelas mesmas letras.

<sup>39</sup>Por exemplo,  $\tilde{\gamma}_1 = (D_1^{-1} - p^2)^{1/2}$ .

<sup>40</sup>Para maiores detalhes consulte a referência [7].

Nos problemas de propagação de ondas, contornos que satisfazem a equação (5.65) como uma deformação contínua do eixo imaginário do plano  $p$  são conhecidos como “Caminhos de Cagniard-de Hoop”. Resolvendo em  $p$  a equação (5.65) encontramos o referido contorno que será dado por dois ramos conjugados  $p = p_1$  e  $p = p_1^*$  como nos mostra a Figura 5.10. Podemos escrever:

$$k = px + \tilde{\gamma}_1|z| = px + (D_1^{-1} - p^2)^{1/2}|z|,$$

ou seja,

$$x^2p^2 + z^2p^2 - 2kxp + k^2 - z^2/D_1 = 0.$$

Sendo  $r^2 = x^2 + z^2$  temos

$$p = \frac{2kx \pm \sqrt{4k^2x^2 - 4r^2(k^2 - z^2/D_1)}}{2r^2},$$

ou ainda,

$$p = k \frac{x}{r^2} \pm \frac{|z|}{r^2} \sqrt{\frac{k^2}{z^2}(x^2 - r^2) + \frac{r^2}{D_1}}.$$

Por fim, sendo  $k_1 = r/D_1^{1/2}$  podemos escrever para  $p_1$  e  $p_1^*$

$$p_1 = k \frac{x}{r^2} + i \frac{|z|}{r^2} \sqrt{k^2 - k_1^2} \quad \text{com} \quad k_1 < k < \infty \quad (5.66)$$

$$p_1^* = k \frac{x}{r^2} - i \frac{|z|}{r^2} \sqrt{k^2 - k_1^2} \quad \text{com} \quad k_1 < k < \infty.$$

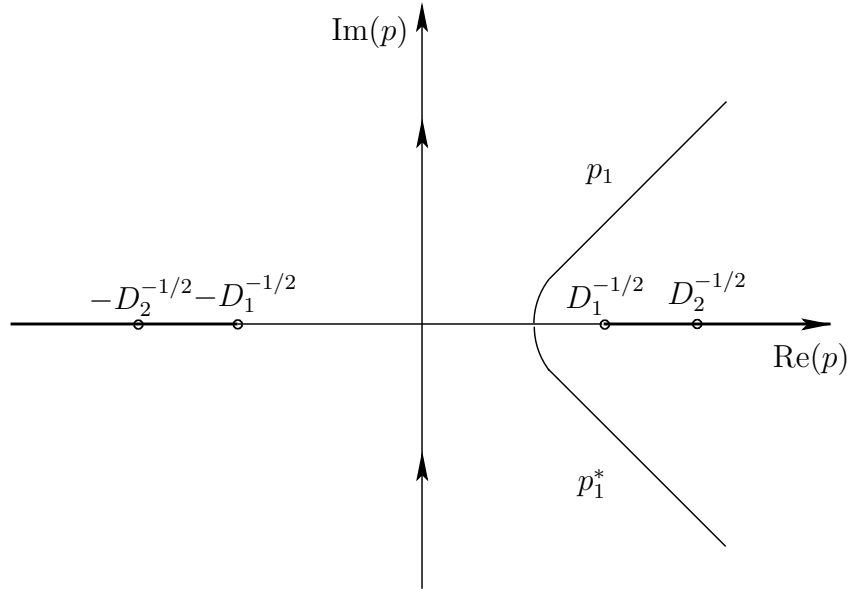


Figura 5.10: Caminho de Cagniard-de Hoop.

O caminho hiperbólico formado por  $p_1$  e  $p_1^*$  é obviamente simétrico em relação ao eixo real do plano  $p$ . Além disso, a intersecção com o eixo real se dá quando  $k = k_1$ ,

isto é, no ponto  $p = x/rD_1^{1/2}$  que está entre os pontos de ramificação  $-D_1^{1/2}$  e  $D_1^{1/2}$ , como nos mostra a Figura 5.10.

Tomamos agora o contorno de integração como sendo o caminho original, ao longo do eixo imaginário, unido ao caminho dado pela união de  $p_1$  e  $p_1^*$  por arcos no infinito. Temos, pelo Lema de Jordan<sup>41</sup>, que os arcos no infinito não contribuem para o cálculo da integral pois<sup>42</sup>

$$\left| \tilde{A} e^{-s^{1/2}\tilde{\gamma}_1|z|} \right| \quad \text{quando} \quad p \rightarrow \infty.$$

Pelo teorema de Cauchy temos que a expressão para  $\bar{E}_y^{(1)}$  pode ser escrita como

$$\bar{E}_y^{(1)} = -\frac{1}{\pi} \int_{k_1}^{\infty} e^{(-s^{1/2}k)} \text{Im} \left( \tilde{A} \frac{\partial p_1}{\partial k} \right) dk, \quad (5.67)$$

onde é utilizada a mudança na variável de integração de  $p$  para  $k$  dada pelas equações (5.65) e (5.66). Foram utilizados os fatos de  $k$  e  $s$  serem reais e que em pontos no caminho  $p = p_1^*$  o integrando da equação para  $\bar{E}_y^{(1)}$  têm valores complexo conjugados a valores correspondentes no caminho  $p = p_1$ <sup>43</sup>. Ao longo do caminho de integração da equação (5.67) temos

$$\tilde{\gamma}_1 = k \frac{|z|}{r^2} - i \frac{x}{r^2} (k^2 - k_1^2)^{1/2} \quad \text{com} \quad k_1 < k < \infty,$$

ao passo que

$$\frac{\partial p_1}{\partial k} = \frac{i\tilde{\gamma}_1}{(k^2 - k_1^2)^{1/2}}.$$

Desta forma, a transformada de Fourier inversa tem a forma de uma transformada de Laplace. Como, por definição<sup>44</sup>,  $E_1^{(1)}(x, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \bar{E}_y^{(1)}(x, z, s) ds$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} E_1^{(1)}(x, z, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{k_1}^{\infty} e^{(-s^{1/2}k)} \text{Im} \left( \tilde{A} \frac{\partial p_1}{\partial k} \right) dk \right\} ds \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{k_1}^{\infty} \text{Im} \left( \tilde{A} \frac{\partial p_1}{\partial k} \right) dk \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} e^{(-s^{1/2}k)} ds \right\} \end{aligned}$$

Sendo  $H(t)$  a função de Heaviside e  $k > 0$  temos que a transformada de Laplace<sup>45</sup> da função  $G(t, k) = H(t) \frac{k}{(4\pi t^3)^{1/2}} e^{(-k^2/4t)}$  é  $e^{-s^{1/2}k}$ , sendo assim, podemos escrever

$$E_1^{(1)}(x, z, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{k_1}^{\infty} G(t, k) \text{Im} \left( \tilde{A} \frac{\partial p_1}{\partial k} \right) dk$$

que é a solução para o nosso problema inicial.

<sup>41</sup>Ver Seção 1.4.5.

<sup>42</sup>Note que  $s$  é real e positivo e que a parte real de  $\tilde{\gamma}_1$  foi mantida positiva pela escolha dos ramos de corte.

<sup>43</sup>Desta forma, podemos combinar os caminhos de em  $p = p_1^*$  e  $p = p_1$  e escrever a equação (5.67).

<sup>44</sup>Ver Seção 2.2.

<sup>45</sup>Ver referência [22].

## 5.5 Equação de onda anisotrópica gerada por uma função impulso

Como já citamos anteriormente, o método de Cagniard foi desenvolvido para resolução de problemas envolvendo propagação de pulsos sísmicos em meios homogêneos e isotrópicos. Nesta seção seguimos um estudo feito por Y. Sakai e I. Kawasaki[24] no qual os autores mostram que introduzindo uma modificação no método de Cagniard, isto é, fazendo uso do método Cagniard-de Hoop o referido método passa a ser perfeitamente adaptável para obter a solução exata para a propagação de uma onda anisotrópica gerada por uma função impulso.

### 5.5.1 Transformadas diretas

Como outra aplicação utilizamos o método de Cagniard-de Hoop para resolver a equação diferencial associada à propagação de uma onda anisotrópica  $qSH$ <sup>46</sup> em um meio não-homogêneo, isto é

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = N \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5.68)$$

onde  $u = u(x, z, t)$  e  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < z < \infty$ ,  $t > 0$ ,  $\rho$ ,  $N$  e  $L$  são constantes e o eixo  $z$  foi considerado como sendo o eixo vertical e de simetria como nos mostra a Figura 5.11<sup>47</sup>

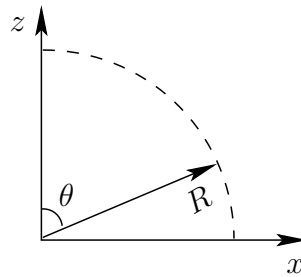


Figura 5.11: Sistema de coordenadas.

Além disso, consideramos que o sistema está inicialmente em repouso, ou seja,

$$u(x, z, 0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, z, t)|_{t=0} = 0.$$

Tomando a transformada de Laplace,  $\bar{u}(x, z, s) = \int_0^\infty u(x, z, t)e^{-st} dt$ , na parte temporal

<sup>46</sup>As notações  $qSH$  e  $qSV$  vêm do Inglês quasi-shear waves [24].

<sup>47</sup>Consideramos que a propagação se dá na direção de  $R$ .

da equação (5.68) e utilizando a condição acima temos<sup>48</sup>

$$\rho s^2 \bar{u} = N \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \quad (5.69)$$

onde  $\bar{u}$  denota a transformada de Laplace de  $u$  na parte temporal, logo  $\bar{u} = \bar{u}(x, z, s)$ . Seguindo o método de Hoop, aplicamos a transformada de Fourier,

$$\hat{u}(k, z, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(x, z, s) e^{-ikx} dx,$$

na parte espacial da equação acima e obtemos

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dz^2} = \frac{\rho s^2 + k^2 N}{L} \hat{u}, \quad (5.70)$$

onde  $\hat{u}$  denota a transformada de Fourier de  $\bar{u}$ , com respeito a variável  $x$ , logo  $\hat{u} = \hat{u}(k, z, s)$ . A solução da equação (5.70) é dada em função das constantes arbitrárias  $a_{\pm}$  por

$$\hat{u}(k, z, s) = \begin{cases} a_+ e^{\beta z} & \text{se } z \leq 0 \\ a_- e^{-\beta z} & \text{se } z > 0, \end{cases} \quad (5.71)$$

na qual

$$\beta = \left( \frac{\rho s^2 + k^2 N}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \text{Re}(\beta) > 0.$$

Além disso,  $k$  é o número de onda. Os índices na equação (5.71) indicam, respectivamente, quantidades definidas no semi-espaco  $z > 0$  e no semi-espaco  $z < 0$ . Vamos considerar que na interface  $z = 0$  temos as seguintes condições de contorno: uma descontinuidade tipo delta de Dirac ao longo do eixo  $y$  e com magnitude  $[\sigma_{y_0}]$  e que no limite para  $z$  tendendo a zero, tanto pela esquerda quanto para direita  $u(x, z, t)$  seja nulo, isto é<sup>49</sup>

$$\begin{aligned} u(x, 0^+, t) &= 0 = u(x, 0^-, t) \\ L \frac{\partial}{\partial z} u(x, z, t)|_{z=0^+} - L \frac{\partial}{\partial z} u(x, z, t)|_{z=0^-} &= [\sigma_{y_0}] \delta(t) \delta(x). \end{aligned} \quad (5.72)$$

Tomando as transformadas de Laplace e Fourier nas equações (5.72), de maneira similar àquela efetuada na equação (5.68), podemos escrever<sup>50</sup>

$$\hat{u}(k, 0^+, s) = 0 = \hat{u}(k, 0^-, s)$$

$$L \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}(k, 0, s)|_{z=0^+} - L \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}(k, 0, s)|_{z=0^-} = [\sigma_{y_0}].$$

Concluimos, pela equação (5.71) que

$$a_+ = a_- = -[\sigma_{y_0}]/(2L\beta). \quad (5.73)$$

<sup>48</sup>Note que a dependência temporal foi eliminada.

<sup>49</sup> $x^+$  e  $x^-$  denotam, respectivamente, o limite à direita e à esquerda de  $x$ .

<sup>50</sup>Para a igualdade da segunda equação utilizamos a propriedade de filtragem da função delta de Dirac demonstrada no Apêndice A.1.

## 5.5.2 Inversão

Para obter a solução do problema utilizamos o método de Cagniard-de Hoop. Iniciamos as inversões com a transformada de Fourier inversa,  $\bar{u}(x, z, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, z, s) e^{ikx} dk$ , da equação (5.71) e nela substituindo o resultado da equação (5.73) podemos escrever<sup>51</sup>

$$\bar{u}(k, z, s) = \begin{cases} -\frac{[\sigma_{y_0}]}{4\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta}\right) e^{-\beta z} e^{+ikx} dk & \text{se } z > 0 \\ -\frac{[\sigma_{y_0}]}{4\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta}\right) e^{\beta z} e^{+ikx} dk & \text{se } z < 0. \end{cases} \quad (5.74)$$

Como estamos lidando apenas com deslocamentos elásticos, consideramos apenas o semi-espaço  $z > 0$  pois para o semi-espaço  $z < 0$  os resultados serão análogos.

Com o intuito de utilizar o método de Cagniard para resolver as integrais da equação (5.74) devemos reescrevê-la de tal forma que ela possa ser vista como a transformada de Laplace de uma função. Para isso, consideremos a mudança na variável de integração de  $k$  para  $p$ , bem como as seguintes mudanças

$$k = -\frac{ps}{V_{SH}}, \quad \nu = \sqrt{1+p^2}, \quad V_{SH} = \sqrt{N/\rho} \quad \text{e} \quad V_{SV} = \sqrt{L/\rho}.$$

Substituindo a equação acima na definição de  $\beta$  podemos escrever

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{\rho s^2 + Nk^2}{L} = \frac{s^2 + (N/\rho)k^2}{L/\rho} = \frac{s^2 + V_{SH}^2 k^2}{V_{SV}^2} = \\ &= \frac{s^2 + s^2 p^2}{V_{SV}^2} = \frac{s^2(1+p^2)}{V_{SH}^2} = \frac{s^2 \nu^2}{V_{SV}^2} \Rightarrow \beta = \frac{s\nu}{V_{SV}}. \end{aligned}$$

Introduzindo o parâmetro de anisotropia  $\zeta = (L/N)^{1/2} = V_{SV}/V_{SH}$  temos, pela equação (5.74), que<sup>52</sup>

$$\bar{u}(x, z, s) = -\frac{[\sigma_{y_0}]\zeta}{4\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu}\right) e^{-s\left(\frac{\nu z + i\zeta p x}{V_{SV}}\right)} dp. \quad (5.75)$$

Uma vez que o integrando numa região onde  $p < 0$ , é o conjugado do integrando na região onde  $p > 0$ , podemos escrever

$$\bar{u}(x, z, s) = -\frac{[\sigma_{y_0}]\zeta}{2\pi L} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\nu}\right) e^{-s\left(\frac{\nu z + i\zeta p x}{V_{SV}}\right)} dp \right\}. \quad (5.76)$$

Consideremos agora outra mudança na variável de integração, desta vez de  $p$  para  $w$  da seguinte forma:

$$w = \frac{\nu z + i\zeta p x}{V_{SV}}. \quad (5.77)$$

<sup>51</sup>Note que  $\beta$  depende de  $k$ .

<sup>52</sup>Como  $k = -\frac{ps}{V_{SH}}$ , temos que  $dk = -\frac{s}{V_{SH}} dp$ .

Resolvendo a equação (5.77) com relação a  $p$  temos

$$\begin{aligned} wV_{SV} - i\zeta xp &= z\sqrt{1+p^2} \\ w^2V_{SV}^2 - 2i\zeta xwV_{SV}p - \zeta^2x^2p^2 &= z^2 + z^2p^2 \end{aligned}$$

ou ainda, rearranjando a equação acima

$$(z^2 + \zeta^2x^2)p^2 + 2i\zeta xwV_{SV}p + z^2 - w^2V_{SV}^2 = 0$$

de onde

$$p = \frac{-i\zeta xwV_{SV} \pm z\sqrt{V_{SV}^2w^2 - (\zeta^2x^2 + z^2)}}{\zeta^2x^2 + z^2}.$$

Uma das duas raízes corresponde à propagação de uma onda no semi-plano superior  $z > 0$ . A outra raiz não é de fato uma solução da equação (5.77) e é desprovida de sentido físico. A partir da expressão que fornece  $\bar{u}(x, z, s)$  só nos interessa o sinal positivo, de onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial w} &= \frac{1}{z^2 + \zeta^2x^2} \frac{\partial}{\partial w} (-i\zeta xwV_{SV} + z\sqrt{w^2V_{SV}^2 - \zeta^2x^2 - z^2}) \\ &= \frac{1}{z^2 + \zeta^2x^2} \left( -i\zeta xV_{SV} + \frac{z}{2} \frac{2wV_{SV}^2}{\sqrt{w^2V_{SV}^2 - \zeta^2x^2 - z^2}} \right) \\ &= \frac{V_{SV}}{z^2 + \zeta^2x^2} \left( -i\zeta x + \frac{z\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \frac{\zeta^2x^2 + z^2}{V_{SV}^2}}} \right). \end{aligned}$$

Pela equação (5.77) podemos escrever

$$wV_{SV} = z\sqrt{1+p^2} + i\zeta xp.$$

Derivando a equação acima em relação a  $w$  temos<sup>53</sup>

$$V_{SV} = \frac{zp}{\sqrt{1+p^2}} \left( \frac{\partial p}{\partial w} \right) + i\zeta x \frac{\partial p}{\partial w} = \left( \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right) \frac{\partial p}{\partial w} (zp + i\zeta x\sqrt{1+p^2}).$$

Lembrando que  $\nu = \sqrt{1+p^2}$  podemos escrever

$$\left( \frac{1}{\nu} \right) \frac{\partial p}{\partial w} = \frac{V_{SV}}{zp + i\zeta x\nu}.$$

Além disso, sendo  $t_{SH}^2 = (\zeta^2x^2 + z^2)/V_{SV}^2$  temos

$$(pz + i\zeta x\nu)^2 = V_{SV}^2w^2 - V_{SV}^2t_{SH}^2,$$

de onde<sup>54</sup>

<sup>53</sup>Note, pela equação (5.77), que  $p$  é função de  $w$ .

<sup>54</sup>O sinal negativo na equação (5.78) é escolhido em coerência com o semi-espaco no qual estamos trabalhando.



$$\left(\frac{1}{\nu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial w}\right) = -\frac{1}{\sqrt{w^2 - t_{SH}^2}}. \quad (5.78)$$

Quando  $p$  varia de 0 até  $\infty$ ,  $w$  varia de  $z/V_{SH}$  até  $\infty + i\infty$ , ao longo do caminho  $AB$  no primeiro quadrante do plano complexo  $w$ , como nos mostra a Figura 5.12.<sup>55</sup>

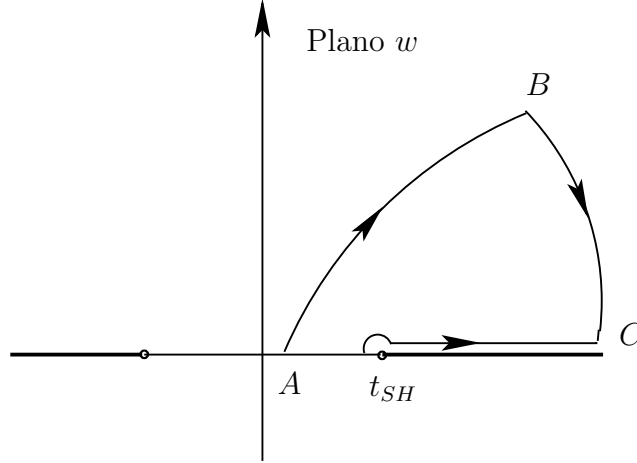


Figura 5.12: Representação do contorno ABCA.

Os dois pontos destacados na Figura 5.12 representam os dois pontos de ramificação  $w = -t_{SH}$  e  $w = t_{SH}$ . Pela equação (5.76) temos

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, z, s) &= -\frac{[\sigma_{y_0}]\zeta}{2\pi L} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{1}{\nu}\right) e^{-s\left(\frac{\nu z + i\zeta p x}{V_{SV}}\right)} dp \right\} \\ &= -\frac{[\sigma_{y_0}]\zeta}{2\pi L} \operatorname{Re} \left\{ \int_{z/V_{SV}}^{\infty + i\infty} \left(\frac{1}{\nu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial w}\right) e^{-sw} dw \right\}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Uma vez que não há singularidades na região interna delimitada por ABCA, podemos transformar o contorno de integração<sup>56</sup>  $AB$  em  $CA$ , contanto que o ponto de ramificação  $w = t_{SH}$  não pertença nem ao interior do contorno nem ao seu bordo, ao longo do eixo real no plano  $w$ . Então

$$\bar{u}(x, z, s) = -\frac{[\sigma_{y_0}]\zeta}{2\pi L} \operatorname{Re} \left\{ \int_{z/V_{SV}}^\infty \left(\frac{1}{\nu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial w}\right) e^{-sw} dw \right\}. \quad (5.80)$$

<sup>55</sup>Note que iremos deformar o caminho  $AB$  no caminho  $CD$ , por esta razão tomamos a orientação dada pela Figura 5.12.

<sup>56</sup>Ver Capítulo 1, curvas homotópicas.

Desta forma, os dois pontos de ramificação do eixo real não têm influência no cálculo das integrais. A integral ao longo do arco  $BC$  é nula para um raio infinito, pelo lema de Jordan.

Uma vez que para  $w < t_{SH}$  a equação (5.78) nos diz que o integrando é um imaginário puro podemos escrever, a partir da expressão acima

$$\bar{u}(x, z, s) \equiv \int_0^\infty u(x, z, t) e^{-st} dt = -\frac{[\sigma_{y_0}]\zeta}{2\pi L} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{1}{\nu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial w}\right) e^{-sw} dw \right\}. \quad (5.81)$$

Conseqüentemente, por inspeção e utilizando a equação (5.78), temos

$$u(x, z, t) = \frac{[\sigma_{y_0}]\zeta}{2\pi L} \frac{H(t - t_{SH})}{\sqrt{t^2 - t_{SH}^2}} \quad (5.82)$$

onde

$$\begin{aligned} t_{SH} &= [(\zeta^2 x^2 + z^2)/V_{SH}^2]^{1/2} \\ &= \left[ \frac{\rho(N \cos^2 \theta + L \sin^2 \theta)}{NL} \right]^{1/2} r \end{aligned} \quad (5.83)$$

na qual  $r = (x^2 + z^2)^{1/2}$ ,  $\tan \theta = x/z$  e  $H(t)$  é a função de Heaviside.

## 5.6 Efeitos de uma explosão em um fluido

Nesta seção é estudado um importante problema envolvendo ondas gravitacionais na superfície de um fluido: equacionar ondas produzidas em um fluido semi-infinito, não viscoso e incompressível sob efeito da gravidade que encontra-se inicialmente em repouso quando num determinado instante ocorre um distúrbio num ponto da superfície; fisicamente, este problema corresponde a uma pedra sendo lançada num lago cuja água se encontra em repouso. Muitos estudos deste problema foram feitos, sendo as primeiras análises atribuídas a Cauchy e Poisson.

Um problema consideravelmente mais difícil é estudar ondas no caso em que o fluido é compressível. Nesta seção o método de Cagniard-de Hoop é utilizado para obtenção da solução exata do problema dos efeitos de uma explosão em qualquer profundidade de um fluido compressível.

### 5.6.1 Formulação do problema e notação

Consideramos  $z = \xi(x, t)$  a superfície do fluido ( $z = 0$ ). Consideramos o plano  $xy$  como sendo a superfície livre não perturbada, e o eixo  $z$  na direção da superfície para o interior do fluido como nos mostra a Figura 5.13

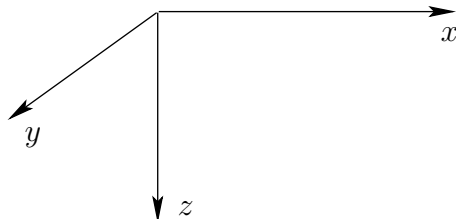


Figura 5.13: Sistema de coordenadas.

Uma vez que a explosão se dá na forma de uma fonte do tipo linha na direção do eixo  $y$ , a coordenada  $y$  de todas as grandezas mencionadas será desconsiderada.

Além disso, consideramos a seguinte notação:

- $v$  = Velocidade do fluido
- $g$  = Constante gravitacional
- $c$  = Velocidade do som
- $\Omega$  = Potencial de todas as forças externas atuando sobre o fluido
- $h$  = Profundidade em que ocorre a explosão.

Além disso, denominamos o potencial velocidade por

$$\phi = \phi(x, z, t)$$

com  $-\infty < x, z < \infty$  e  $t > 0$ . Desta forma  $v = -\nabla\phi$ .

Louquent-Higgins[25] mostraram que

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\phi - g\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - v.\nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -\frac{\partial\Omega}{\partial t}. \quad (5.84)$$

No caso em que  $v$  é tão pequeno que  $v^2$  pode ser desconsiderado temos

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\phi - g\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{\partial\Omega}{\partial t}. \quad (5.85)$$

Utilizando o mesmo tipo de aproximação feito para a equação acima obtemos, para a fronteira  $z = 0$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = g\frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad (5.86)$$

assim como o deslocamento na superfície é dada por

$$\xi = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=0}. \quad (5.87)$$

Sendo assim, tomando uma escolha apropriada de  $\frac{\partial\Omega}{\partial t}$ , isto é, uma escolha que represente uma explosão a uma profundidade<sup>57</sup>  $z = h$ ,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = c^2\delta(x)\delta(z-h)\delta(t). \quad (5.88)$$

Nosso problema se reduz a resolver a equação (5.85) impondo a condição dada pelas equações (5.86) e (5.88) bem como as condições iniciais

$$\phi(x, z, t)|_{t=0} = 0 = \frac{\partial\phi}{\partial t}|_{t=0}. \quad (5.89)$$

## 5.6.2 Justaposição das transformadas

Introduzindo a transformada de Laplace,  $\bar{\phi}(x, z, s) = \int_0^\infty e^{-st}\phi(x, z, t)dt$ , na equação (5.85) e utilizando a equação (5.88), podemos escrever<sup>58</sup>

$$s^2\bar{\phi}(x, z, s) - c^2\nabla^2\bar{\phi} - g\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z} = c^2\delta(x)\delta(z-h). \quad (5.90)$$

Tomemos agora a transformada de Fourier dupla,<sup>59</sup>

$$\bar{\bar{\phi}}(\xi, \eta, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta(z-h)} \bar{\phi}(x, z, s) dz,$$

para cada um dos termos da equação (5.90) temos

<sup>57</sup>Isto corresponde a um impulso radial no ponto  $(x, z) = (0, h)$  no instante  $t = 0$  com magnitude  $c^2$ .

<sup>58</sup>O lado direito da igualdade é devido à propriedade de filtragem da função delta de Dirac.

<sup>59</sup>O deslocamento de  $-h$  na variável  $z$  foi tomado por conveniência.

$$\begin{aligned}
s^2 \bar{\phi}(x, z, s) &\rightarrow s^2 \bar{\phi}(\xi, \eta, s) \\
-c^2 \nabla^2 \bar{\phi}(x, z, s) &\rightarrow \left( \frac{c^2 \xi^2}{2pi} + \frac{c^2 \eta^2}{2pi} \right) \bar{\phi}(\xi, \eta, s) \\
-g \frac{\partial}{\partial z} \bar{\phi}(x, z, s) &\rightarrow \frac{-ig\eta}{2\pi} \bar{\phi}(\xi, \eta, s) \\
c^2 \delta(x) \delta(z-h) &\rightarrow c^2.
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos acima podemos escrever

$$\bar{\phi}(\xi, \eta, s) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\xi^2 + \eta^2 + \frac{s^2}{c^2} - \frac{ig}{c^2} \eta} \right), \quad (5.91)$$

que representa a solução do problema transformado.

### 5.6.3 Inversão da justaposição

Seguindo o método de Cagniard-de Hoop iniciamos o processo de inversão da justaposição aplicando a inversa da transformada de Fourier dupla,

$$\bar{\phi}(x, z, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta(z-h)} \bar{\phi}(\xi, \eta, s) d\eta,$$

na equação (5.91), ou seja

$$\bar{\phi}(x, z, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta(z-h)} \left( \frac{1}{\xi^2 + \eta^2 + \frac{s^2}{c^2} - \frac{ig}{c^2} \eta} \right) d\eta,$$

Calculamos inicialmente a integral na variável  $\eta$ , ou seja,<sup>60</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i\eta(z-h)]}{\xi^2 + \eta^2 + \frac{s^2}{c^2} - \frac{ig}{c^2} \eta} d\eta. \quad (5.92)$$

Para tanto, consideremos as seguintes mudanças de variável

$$A^2 = \xi^2 + \frac{s^2}{c^2}, \quad 2B = \frac{ig}{c^2} \quad \text{e} \quad \lambda^2 = A^2 - B^2$$

$$\Rightarrow \xi^2 + \eta^2 + \frac{s^2}{c^2} - \frac{ig}{c^2} \eta = A^2 + \eta^2 - 2B\eta = (\eta^2 - 2B\eta + B^2) - B^2 + A^2 = (\eta - B)^2 + \lambda^2.$$

Além disso, sendo  $v = \eta - B$  podemos reescrever a integral 5.92 na seguinte maneira

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i(B+v)(z-h)]}{v^2 + \lambda^2} dv = \exp[iB(z-h)] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[iv(z-h)]}{v^2 + \lambda^2} dv.$$

---

<sup>60</sup>Para facilitar a escrita e a visualização utilizamos a notação  $\exp(x) = e^x$ .

Seja  $u = v + ia$  uma variável complexa,  $\gamma$  o contorno dado pela Figura 5.14 e  $f(u) = \frac{\exp[iu(z-h)]}{u^2 + \lambda^2}$ , calculamos

$$\int_{\gamma} f(u)du = \int_{C_R} f(u)du + \int_{-R}^R f(v)dv. \quad (5.93)$$

Uma vez que as singularidades de  $f(u)$  são os pólos  $i\lambda$  e  $-i\lambda$ , e a única singularidade de

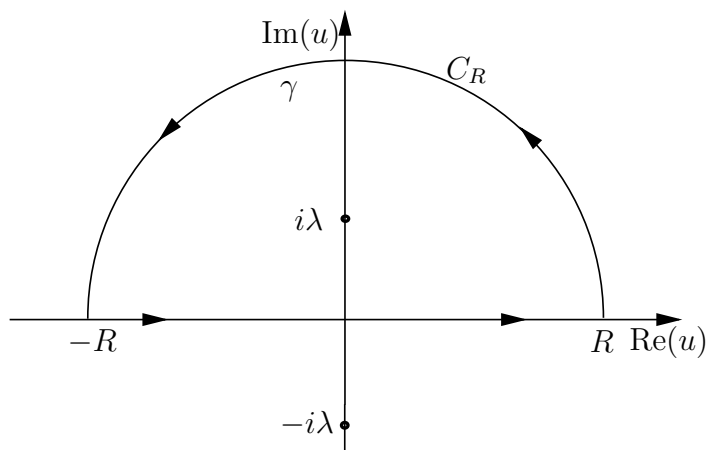


Figura 5.14: Contorno para o cálculo da integral de  $f(v)$ .

$f(u)$  no interior de  $\gamma$  é  $i\lambda$  podemos escrever, pelo teorema dos resíduos<sup>61</sup>, que

$$\int_{\gamma} f(u)du = 2\pi i \text{Res}(f; i\lambda) = 2\pi i \lim_{u \rightarrow i\lambda} (u - i\lambda)f(u) = 2\pi i \frac{\exp[-\lambda(z-h)]}{2i\lambda},$$

de onde obtemos

$$\int_{\gamma} f(u)du = \int_{C_R} f(u)du + \int_{-R}^R f(v)dv = \frac{\pi}{\lambda} \exp[-\lambda(z-h)]. \quad (5.94)$$

Tomando o limite  $R \rightarrow \infty$  na equação acima temos, pelo Lema de Jordan, que  $\int_{C_R} f(u)du$  tende a zero de onde podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i\eta(z-h)]}{\xi^2 + \eta^2 + \frac{s^2}{c^2} - \frac{ig}{c^2}\eta} d\eta = \exp[iB(z-h)] \left\{ \frac{\pi}{\lambda} \exp[-\lambda(z-h)] \right\}.$$

Substituindo o valor de  $B$ ,  $B = \frac{ig}{2c^2}$ , na equação acima e substituindo a equação acima na definição da inversa da transformada de Fourier dupla podemos escrever

$$\bar{\phi}(x, z, s) = \frac{1}{4\pi} \exp\left[-g \frac{z-h}{2c^2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i\xi x - |z-h|\lambda]}{\lambda} d\xi \quad (5.95)$$

<sup>61</sup>Ver Seção 1.4.3.

na qual

$$\lambda = \sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{\xi^2 + \frac{s^2}{c^2} + \frac{g^2}{4c^4}}.$$

Em analogia ao que fizemos na aplicação anterior<sup>62</sup>, devemos destacar duas regiões do plano complexo  $\xi$  a partir dos pontos de ramificação do integrando da equação (5.95), isto é, a partir dos pontos

$$\xi = \pm i \xi_1 \quad \text{onde} \quad \xi_1 = \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \frac{g^2}{4c^4}} \in \mathbb{R}.$$

Tomamos os ramos de corte como sendo os segmentos a partir dos pontos de ramificação  $\xi = i \xi_1$  e  $\xi = -i \xi_1$  até  $\infty$  e  $-\infty$ , respectivamente, ao longo do eixo imaginário do plano complexo  $\xi$ , como nos mostra a Figura 5.15. Na região onde  $-\xi_1 < \text{Im}(\xi) < \xi_1$

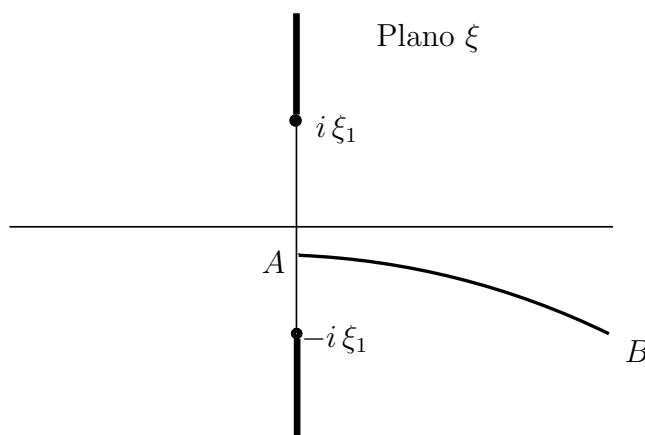


Figura 5.15: Plano  $\xi$  e representação do caminho de integração sendo os pontos  $A$  e  $B$  os correspondentes aos valores  $p = 0$  e  $p = \infty$ , respectivamente.

temos que  $\text{Re}(\lambda) > 0$  e desta forma a integral da equação (5.92) converge. A integral da equação (5.92) é uma solução particular da equação (5.90). Para obtermos a solução geral, calculamos a solução geral do problema homogêneo,  $\bar{\phi}_H(x, z, s)$ , e somamos com uma solução particular da equação não-homogênea, anteriormente obtida.

Pela equação (5.90) temos que a equação homogênea é dada por

$$s^2 \bar{\phi}_H(x, z, s) - c^2 \nabla^2 \bar{\phi}_H - g \frac{\partial \bar{\phi}_H}{\partial z} = 0.$$

Introduzindo, na equação acima, a transformada de Fourier na variável  $x$ ,  $\hat{\phi}(\xi, z, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i \xi x] \bar{\phi}_H(x, z, s) dx$ , temos

$$-c^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z^2} - g \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} + (s^2 + c^2 \xi^2) \hat{\phi} = 0.$$

<sup>62</sup>Ver seção 5.5.

Como a equação acima é uma equação diferencial ordinária em  $z$  consideramos que  $\hat{\phi} = e^{pz}$  e substituímos na equação acima, de onde obtemos

$$-c^2 p^2 - gp + (s^2 + c^2 \xi^2) = 0,$$

com soluções dadas por

$$p = \frac{-g}{2c^2} \pm \sqrt{\xi^2 + \frac{s^2}{c^2} + \frac{g^2}{4c^2}}.$$

A partir da definição de  $\lambda$  podemos escrever

$$p = \frac{-g}{2c^2} \pm \lambda,$$

de onde segue que<sup>63</sup>

$$\hat{\phi}(\xi, z, s) = \frac{1}{2}a(\xi)\exp\left[\frac{-gz}{2c^2} - \lambda z\right] + \frac{1}{2}b(\xi)\exp\left[\frac{-gz}{2c^2} + \lambda z\right].$$

Como, por hipótese,  $\phi$  deve ser limitada no infinito temos que  $b(\xi) = 0$ . Introduzindo a transformada de Fourier inversa na variável  $\xi$ ,  $\bar{\phi}_H(\xi, z, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ix\xi]\hat{\phi}(x, z, s)dx$ , podemos escrever a expressão geral para  $\bar{\phi}(x, z, s)$  satisfazendo a condição de limitação no infinito, isto é

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x, z, s) = & \frac{1}{4\pi} \exp\left[-g\frac{z-h}{2c^2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i\xi x - |z-h|\lambda]}{\lambda} d\xi + \\ & + \frac{\exp[-gz/2c^2]}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi x - \lambda z)a(\xi)d\xi, \end{aligned} \quad (5.96)$$

onde  $a(\xi)$  é uma função arbitrária de  $\xi$ . Aplicando a transformada de Laplace na condição (5.86) podemos escrever

$$s^2 \bar{\phi}(x, z, s) = g \frac{\partial \bar{\phi}(x, z, s)}{\partial z} \quad \text{para } z = 0. \quad (5.97)$$

Temos, pela equação (5.96), que:

$$\begin{aligned} 4\pi \frac{\partial \bar{\phi}(x, z, s)}{\partial z} \Big|_{z=0} = & \left[\frac{-g}{2c^2}\right] \exp\left[\frac{gh}{2c^2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i\xi x - h\lambda]}{\lambda} d\xi \\ & + \exp\left[\frac{gh}{2c^2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i\xi x - h\lambda]}{\lambda} (\lambda) d\xi \\ & + \left[\frac{-g}{2c^2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\xi x]a(\xi)d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\xi x](-\lambda)a(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Além disso, podemos escrever

$$4\pi \frac{s^2}{g} \phi(x, 0, s) = \frac{s^2}{g} \exp\left[\frac{gh}{2c^2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i\xi x - h\lambda]}{\lambda} d\xi + \frac{s^2}{g} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\xi x]a(\xi)d\xi \quad (5.99)$$

---

<sup>63</sup>O fator 1/2 foi introduzido nas funções  $a(\xi)$  e  $b(\xi)$  por conveniência.



Igualando o lado direito das equações (5.98) e (5.99), agrupando as duas primeiras integrais da equação (5.98) e a primeira integral da equação (5.99) e agrupando as duas últimas integrais da equação (5.98) e a última integral da equação (5.99), podemos escrever

$$\exp\left[\frac{gh}{2c^2}\right] \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\xi x - h\lambda] \left[ \frac{s^2}{g\lambda} + \frac{g}{2c^2} \frac{1}{\lambda} - 1 \right] d\xi \right\} + \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\xi x] a(\xi) \left[ \frac{s^2}{g} + \frac{g}{2c^2} + \lambda \right] d\xi \right\} = 0,$$

ou ainda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\xi x] \left\{ a(\xi) \left[ \frac{s^2}{g} + \frac{g}{2c^2} + \lambda \right] + \frac{1}{\lambda} \exp\left[\frac{gh}{2c^2} - \lambda h\right] \left[ \frac{s^2}{g} + \frac{g}{2c^2} - \lambda \right] \right\} d\xi = 0,$$

de onde segue que

$$a(\xi) = -\frac{1}{\lambda} \exp\left[\frac{gh}{2c^2} - \lambda h\right] \left\{ 1 - \frac{2\lambda}{\frac{s^2}{g} + \frac{g}{2c^2} + \lambda} \right\}. \quad (5.100)$$

Substituindo o valor de  $a(\xi)$  na equação (5.96) e separando a parte real podemos escrever

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x, z, s) = & \frac{1}{2\pi} \exp\left[-g\frac{z-h}{2c^2}\right] \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\exp[i\xi x - |z-h|\lambda]}{\lambda} d\xi \right\} \\ & - \frac{1}{2\pi} \exp\left[-g\frac{z-h}{2c^2}\right] \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\exp[i\xi x - (z+h)\lambda]}{\lambda} d\xi \right\} \\ & + \frac{1}{\pi} \exp\left[-g\frac{z-h}{2c^2}\right] \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\exp[i\xi x - (z+h)\lambda]}{\frac{s^2}{g} + \frac{g}{2c^2} + \lambda} d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Segundo o método de Cagniard, para obter o valor de  $\phi(x, z, t)$  devemos reescrever o lado direito da equação acima como a transformada de Laplace de alguma função, ou seja,  $\bar{\phi} = \int_0^{\infty} \exp[-st]\tau(t)dt$ , pois desta forma seguirá, por inspeção, que  $\phi = \tau$ . Para tanto, iniciamos por procurar  $\alpha$  tal que<sup>64</sup>

$$i\xi x - \beta\lambda = -st + i\alpha \quad (5.102)$$

onde,  $\beta$  será ora  $(z-h)$  e ora  $|z-h|$ . Isolando  $a\lambda$ , introduzindo a definição de  $\lambda$  e elevando os dois lados da igualdade ao quadrado temos

$$\left[ \beta \left( \xi^2 + \frac{s^2}{c^2} + \frac{g^2}{4c^4} \right)^{1/2} \right]^2 = [-st - i(\xi x - \alpha)]^2,$$

de onde

$$\xi^2(\beta^2 + x^2) - 2\xi x(\alpha + ist)^2 + \frac{\beta^2 s^2}{c^2} + \frac{\beta^2 g^2}{4c^4} - s^2 t^2 + \alpha^2 + 2ist\alpha = 0.$$

---

<sup>64</sup>Note, pela equação (5.101), que tal  $\alpha$  é conveniente.

Resolvendo a equação acima em  $\xi$  podemos escrever

$$\xi = \frac{2x(\alpha + ist) \pm \sqrt{4 \left[ x^2(\alpha + ist)^2 - (\beta^2 + x^2) \left( \frac{\beta^2 s^2}{c^2} + \frac{\beta^2 g^2}{4c^4} - s^2 t^2 + \alpha^2 + 2ist\alpha \right) \right]}}{2(\beta^2 + x^2)}. \quad (5.103)$$

Sendo  $\Delta$  o termo no interior da raiz quadrada temos que

$$\Delta = (x^2 \alpha^2 - x^2 s^2 t^2 + 2ix^2 s t \alpha) - \frac{\beta^4 s^2}{c^2} - \frac{\beta^4 g^2}{4c^4} + \beta^2 s^2 t^2 - \beta^2 \alpha^2 - 2i\beta^2 s t \alpha - \frac{x^2 \beta^2 s^2}{c^2} - \frac{x^2 \beta^2 g^2}{4c^4} + (x^2 s^2 t^2 - x^2 \alpha^2 - 2ix^2 s t \alpha).$$

Como os termos entre parênteses se anulam rearranjando a equação acima podemos escrever

$$\Delta = -\frac{\beta^2 s^2}{c^2}(x^2 + \beta^2) - \frac{\beta^2 g^2}{4c^4}(x^2 + \beta^2) + \beta^2(s^2 t^2 - \alpha^2) - 2i\beta^2 s t \alpha.$$

Mostremos que ao escolher  $\alpha = \frac{g}{2c} \sqrt{t^2 - \frac{1}{c^2}(\beta^2 + x^2)}$  podemos escrever  $\Delta$  como um quadrado perfeito.

$$\Delta = -\frac{\beta^2 s^2}{c^2}(x^2 + \beta^2) - \frac{\beta^2 g^2}{4c^4}(x^2 + \beta^2) + \beta^2 \left\{ s^2 t^2 - \frac{g^2}{4c^2} \left[ t^2 - \frac{1}{c^2}(\beta^2 + x^2) \right] \right\} - 2i\beta^2 s t \frac{g}{2c} \sqrt{t^2 - \frac{1}{c^2}(\beta^2 + x^2)},$$

de onde segue que

$$\frac{\Delta}{\beta^2} = -\frac{s^2}{c^2}(x^2 + \beta^2) + s^2 t^2 - \frac{g^2 t^2}{4c^2} - \frac{itgs}{c} \sqrt{t^2 - \frac{1}{c^2}(\beta^2 + x^2)}$$

ou ainda

$$\Delta = \beta^2 \left[ s \sqrt{t^2 - \frac{1}{c^2}(\beta^2 + x^2)} - \frac{itg}{2c} \right]^2.$$

Substituindo o valor de  $\Delta$  e de  $\alpha$  na equação (5.103) obtemos

$$\xi = \frac{\frac{gx}{2c} \sqrt{t^2 - \frac{1}{c^2}(\beta^2 + x^2)} + xist \pm \sqrt{\beta^2 \left[ s \sqrt{t^2 - \frac{1}{c^2}(\beta^2 + x^2)} - \frac{itg}{2c} \right]^2}}{(\beta^2 + x^2)}.$$

Tomando apenas o valor negativo da raiz quadrada e substituindo  $\beta = (z + h)$  podemos escrever

$$\xi = \frac{\left[ \frac{gx}{2c^2} - (z + h) \frac{s}{c} \right] \sqrt{c^2 t^2 - x^2 - (z + h)^2} + it \left[ \frac{g}{2c}(z + h) + xs \right]}{x^2 + (z + h)^2} \quad (5.104)$$

na qual  $t$  é um parâmetro real que varia de zero a infinito, como nos mostra o caminho  $AB$  destacado na Figura 5.15. Para a primeira integral substituímos  $z+h$  por  $|z-h|$ . As deformações nos caminhos de integração dadas pela equação (5.103) são possíveis uma vez que pelo teorema de Cauchy e pelo Lema de Jordan não existem contribuições dos pólos e os arcos no infinito vão a zero. Visto que para  $t=0$  temos

$$A = \frac{i \left[ \frac{gx}{2c^2} - (z+h) \frac{s}{c} \right]}{[x^2 + (z+h)^2]^{-\frac{1}{2}}},$$

uma parte do novo caminho de integração se dá ao longo da parte negativa do eixo imaginário. Entretanto, ao longo do eixo imaginário os integrandos são imaginários puros e sendo assim, não contribuem para o cálculo das integrais.

Desta forma, podemos escrever as duas primeiras integrais da equação (5.101) em termos da variável  $t$ , isto é<sup>65</sup>

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \exp \left[ -g \frac{z-h}{2c^2} \right] \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty \frac{\exp \left[ -st + \frac{gi}{2c} (t^2 - k_1^2)^{1/2} \right]}{(t^2 - k_1^2)^{1/2}} dt \right\} \\ & - \frac{1}{2\pi} \exp \left[ -g \frac{z-h}{2c^2} \right] \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty \frac{\exp \left[ -st + \frac{gi}{2c} (t^2 - k_2^2)^{1/2} \right]}{(t^2 - k_2^2)^{1/2}} dt \right\} \end{aligned} \quad (5.105)$$

onde

$$k_1 = \frac{1}{c} [x^2 + (z+h)^2]^{1/2} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{1}{c} [x^2 + (z-h)^2]^{1/2}.$$

Claramente a primeira integral da equação (5.105) é nula para  $0 < p < k_1$ , e a segunda é nula para  $0 < p < k_2$ . Sendo assim, por inspeção, temos que a contribuição da primeira e segunda integrais da equação (5.101) para o valor de  $\phi(x, z, t)$  é dada por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \frac{\exp \left[ -g \frac{z-h}{2c^2} \right] \cos \left[ \frac{g}{2c} (t^2 - k_1^2)^{1/2} \right] H(t - k_1)}{(t^2 - k_1^2)^{1/2}} \\ & - \frac{1}{2\pi} \frac{\exp \left[ -g \frac{z-h}{2c^2} \right] \cos \left[ \frac{g}{2c} (t^2 - k_2^2)^{1/2} \right] H(t - k_2)}{(t^2 - k_2^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (5.106)$$

na qual  $H(t)$  é a função de Heaviside.

Passemos agora ao cálculo da terceira integral da equação (5.101). Introduzindo a mudança de variável de  $\xi$  para  $t$  temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \exp \left[ -g \frac{z-h}{2c^2} \right] \operatorname{Re} \left\{ \int_{k_1}^\infty \frac{F_1(t) \exp \left[ -st + \frac{gi}{2c} (t^2 - k_1^2)^{1/2} \right]}{[s + G_1(t)] (t^2 - k_1^2)^{1/2}} dt \right\} \\ & - \frac{1}{2\pi} \exp \left[ -g \frac{z-h}{2c^2} \right] \operatorname{Re} \left\{ \int_{k_1}^\infty \frac{F_2(t) \exp \left[ -st + \frac{gi}{2c} (t^2 - k_1^2)^{1/2} \right]}{[s + G_2(t)] (t^2 - k_1^2)^{1/2}} dt \right\} \end{aligned} \quad (5.107)$$

---

<sup>65</sup>Observe que para obter estas integrais utilizamos a equação (5.102), com as definições de  $\alpha$  e  $\beta$ , sendo  $\beta = z+h$  na primeira integral e  $\beta = z-h$  para a segunda.

na qual

$$\begin{aligned}
F_{1,2}(p) &= \frac{1}{2} \left[ \left( w^2 + \frac{1}{c^2} \right)^{1/2} \pm \frac{w^2 + \frac{1}{c^2} - \frac{iw}{c}}{w - \frac{i}{c}} \right], \\
G_{1,2}(p) &= \frac{g}{2} \left[ \left( w^2 + \frac{1}{c^2} \right)^{1/2} \pm \left( w - \frac{i}{c} \right) \right], \\
w &= \frac{ixs - (z+h)(s^2 - k_1^2)^{1/2}}{c^2 k_1^2}.
\end{aligned} \tag{5.108}$$

A partir da expressão dada pela equação (5.107) e lembrando que

$$\frac{e^{-sp}}{s + G_{1,2}(p)} = \int_p^\infty e^{-st} e^{-G_{1,2}(p)(t-p)} dt$$

podemos reconhecer a integral como a transformada de Laplace de alguma função e conseqüentemente encontrar a contribuição da terceira integral da equação (5.101) para  $\phi(x, z, t)$ , isto é

$$\begin{aligned}
& -\frac{g}{\pi} \exp \left[ -g \frac{z-h}{2c^2} \right] H(t - k_1) \operatorname{Re} \left\{ \int_{k_1}^t F_1(p) (p^2 - k_1^2)^{-1/2} \right. \\
& \quad \left. \exp \left[ \frac{gi}{2c} (p^2 - k_1^2)^{1/2} - (t-p)G_1(p) \right] dp \right\} \\
& -\frac{g}{\pi} \exp \left[ -g \frac{z-h}{2c^2} \right] H(t - k_1) \operatorname{Re} \left\{ \int_{k_1}^t F_2(p) (p^2 - k_1^2)^{-1/2} \right. \\
& \quad \left. \exp \left[ \frac{gi}{2c} (p^2 - k_1^2)^{1/2} - (t-p)G_2(p) \right] dp \right\}
\end{aligned} \tag{5.109}$$

Finalmente, das equações (5.98) e (5.101) temos que<sup>66</sup>

$$\begin{aligned}
\phi(x, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\exp \left[ -g \frac{z-h}{2c^2} \right] \cos \left[ \frac{g}{2c} (t^2 - k_1^2)^{1/2} \right] H(t - k_1)}{(t^2 - k_1^2)^{1/2}} \\
& \quad - \frac{1}{2\pi} \frac{\exp \left[ -g \frac{z-h}{2c^2} \right] \cos \left[ \frac{g}{2c} (t^2 - k_2^2)^{1/2} \right] H(t - k_2)}{(t^2 - k_2^2)^{1/2}} \\
& -\frac{g}{\pi} \exp \left[ -g \frac{z-h}{2c^2} \right] H(t - k_1) \operatorname{Re} \left\{ \int_{k_1}^t F_1(p) (p^2 - k_1^2)^{-1/2} \right. \\
& \quad \left. \exp \left[ \frac{gi}{2c} (p^2 - k_1^2)^{1/2} - (t-p)G_1(p) \right] dp \right\} \\
& -\frac{g}{\pi} \exp \left[ -g \frac{z-h}{2c^2} \right] H(t - k_1) \operatorname{Re} \left\{ \int_{k_1}^t F_2(p) (p^2 - k_1^2)^{-1/2} \right. \\
& \quad \left. \exp \left[ \frac{gi}{2c} (p^2 - k_1^2)^{1/2} - (t-p)G_2(p) \right] dp \right\}
\end{aligned} \tag{5.110}$$

que é a solução do problema de partida.

---

<sup>66</sup>Note que  $k_1$  depende de  $x$ .

# Apêndice A

## Função delta de Dirac

Na mecânica o impulso de uma força  $f(t)$  atuando no intervalo de tempo  $a \leq t \leq a + \varepsilon$  é definido por uma integral de  $f(t)$  de  $a$  até  $a + \varepsilon$ . O caso em que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ou seja, o impulso de uma força atuando somente por um instante, é de particular interesse prático.

Vamos considerar a função:

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{se } a \leq t \leq a + \varepsilon \\ 0 & \text{se } t < a \text{ ou } t > a + \varepsilon. \end{cases}$$

Da definição de  $f_\varepsilon(t)$  concluímos que a área abaixo da curva é unitária, isto é, o impulso é unitário, ou seja, a integral:

$$I_\varepsilon = \int_a^{a+\varepsilon} f_\varepsilon(t) dt = \int_a^{a+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt = 1.$$

Agora representamos  $f_\varepsilon(t)$  em termos de duas funções degrau

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} u(t - a) - u[t - (a + \varepsilon)].$$

Tomando a transformada de Laplace temos

$$\mathcal{L}[f_\varepsilon(t)] = \int_0^\infty f_\varepsilon(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon} u(t - a) - u[t - (a + \varepsilon)] e^{-st} dt = e^{-as} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$$

O limite de  $f_\varepsilon(t)$  para  $\varepsilon \rightarrow 0$ , denotado por  $\delta(t - a)$ , é chamado “função” delta de Dirac. Utilizando a regra de L'Hôpital para calcular o limite temos:

$$\mathcal{L}[\delta(t - a)] = e^{-as}$$

que, para  $a = 0$  fornece  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ .

A definição de  $\delta(t - a)$  implica que esta não é uma função no sentido ordinário do cálculo, mas uma função generalizada, isto é, uma distribuição, uma vez que, a partir de  $f_\varepsilon(t)$  temos, para  $\varepsilon \rightarrow 0$ , que

$$\delta(t - a) = \begin{cases} \infty & \text{se } t = a \\ 0 & \text{se } t \neq a. \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \delta(t - a) dt = 1.$$

## A.1 Propriedade de filtragem

A função delta de Dirac tem uma importante propriedade conhecida como filtragem, isto é<sup>1</sup>,  $\int_{-\infty}^\infty \delta(x)f(x)dx = f(0)$ . Para que possamos verificar essa propriedade calculemos a seguinte integral:

$$\int_{-\infty}^\infty \delta(x)f(x)dx$$

na qual  $f$  é uma função contínua.

Vimos que  $\delta(x)$  é nula para  $x \neq 0$ , logo os limites de integração podem ser substituídos por  $-\varepsilon$  e  $\varepsilon$ . Ainda mais, como  $f(x)$  é contínua em  $x = 0$ , seus valores no intervalo  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , para  $\varepsilon$  pequeno, não serão muito diferentes de  $f(0)$ . Desta forma podemos escrever<sup>2</sup>:

$$\int_{-\infty}^\infty \delta(x)f(x)dx = \int_{-\varepsilon}^\varepsilon \delta(x)f(x)dx \cong f(0) \int_{-\varepsilon}^\varepsilon \delta(x)dx.$$

Como  $\delta(x)=0$  para todo  $x \neq 0$  e  $\delta(x)$  é normalizada a unidade, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^\infty \delta(x)f(x)dx = f(0).$$

---

<sup>1</sup>De maneira mais geral podemos escrever  $\int_{-\infty}^\infty \delta(x - a)f(x) dx = f(a)$ .

<sup>2</sup>Esta aproximação melhora à medida em que  $\varepsilon$  se aproxima de zero.

## A.2 Convolução

Em conseqüência da propriedade de filtragem temos que a função delta de Dirac é a função unitária da convolução, ou seja,

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau - t) d\tau = f(t).$$

## A.3 Transformada de Fourier e função delta de Dirac

Outra interessante e útil propriedade da função delta de Dirac é que sua transformada de Fourier é bastante simples de ser calculada. Temos que

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-ikt} dt = e^{-ik0} = 1.$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa na equação acima podemos escrever

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} dk.$$

Uma interessante utilização desta representação para a função delta pode ser encontrada na aplicação 5.2.

# Apêndice B

## Laplaciano em coordenadas cilíndricas e esféricas

### B.1 Coordenadas cilíndricas

Com o intuito de facilitar a resolução da equação (3.2), bem como explorar as simetrias do problema em questão costuma ser de grande utilidade escrever o Laplaciano num conveniente sistema de coordenadas, em particular, aqui em coordenadas cilíndricas, como nos mostra a Figura B.1, isto é

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \\y &= r \sin \phi \\z &= z,\end{aligned}\tag{B.1}$$

onde  $-\infty < x, y, z < \infty$ ,  $r > 0$  e  $0 < \phi < 2\pi$ .

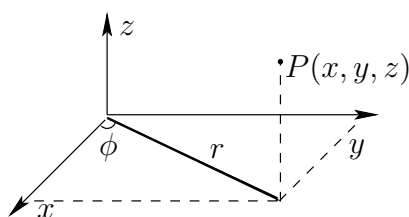


Figura B.1: Relações entre coordenadas cartesianas e cilíndricas.

Visto que o Jacobiano da transformação é diferente de zero podemos escrever os inversos, ou seja

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad \text{e} \quad \tan \phi = \frac{y}{x}.\tag{B.2}$$

Pela regra da cadeia podemos escrever



$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}$$

Utilizando as equações acima, bem como as equações (B.1) e (B.2), podemos escrever o laplaciano em coordenadas cilíndricas, isto é<sup>1</sup>

$$\nabla^2 u(r, \phi, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (\text{B.3})$$

## B.2 Coordenadas esféricas

Consideremos agora as coordenadas esféricas como nos mostra a Figura B.2, ou seja

$$\begin{aligned}x &= r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ z &= z \cos \theta,\end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

onde  $-\infty < x, y, z < \infty$ ,  $r > 0$ ,  $0 < \phi < 2\pi$  e  $0 < \theta < \pi$ .

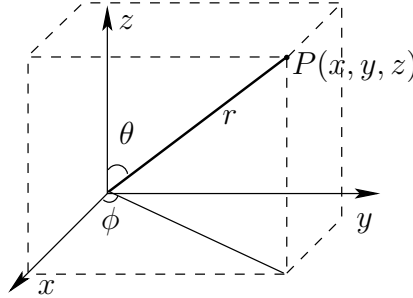


Figura B.2: Relações entre coordenadas cartesianas e esféricas.

Efetuando cálculos similares aos da seção anterior, porém agora utilizando a equação (B.4) ao invés da equação (B.1), temos que o laplaciano em coordenadas esféricas é dado por

$$\nabla^2 u(r, \phi, \theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}. \quad (\text{B.5})$$

---

<sup>1</sup>Lembrando que  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

# Conclusões

Os números complexos têm sua primeira aparição na literatura no livro *Ars Magna*, de G. Cardano, publicado em 1545 onde foram utilizados como uma ferramenta para a resolução de equações de terceiro grau, entretanto a teoria de números complexos ganhou importância apenas dois séculos e meio mais tarde, em 1806, quando J. R. Argand traduziu, para o francês, o texto de C. Wessel, originalmente escrito em norueguês, no qual se faz uma associação entre um número complexo e um ponto no plano.

A importância dos números complexos ficou evidente no século XVIII com o surgimento da teoria de funções de variáveis complexas, uma das mais notáveis e apaixonantes descobertas da matemática. Da contribuição dada por Gauss, Euler, Cauchy, Riemann, Weierstrass, entre outros, a teoria se desenvolveu e encontrou aplicações em vários campos da matemática como, por exemplo, na teoria dos números, na geometria e na topologia algébrica.

Neste trabalho, a teoria de funções de uma variável complexa é estudada. Tal teoria tem aplicações em diversos ramos do conhecimento que dependem de formulações matemáticas como, por exemplo, a Física Teórica e diversos problemas em Engenharia, principalmente os descritos por equações diferenciais. Nestes casos, o conceito de transformadas integrais é de fundamental importância. Com seu auxílio pode-se transformar uma equação diferencial dada em uma outra equação, mais simples de ser resolvida, recuperando-se a solução da equação original através da transformada inversa. É no cálculo das transformadas inversas que se faz uso da teoria de variáveis complexas, em particular, do teorema dos resíduos.

Além do interesse de estudar mais a fundo a teoria de variáveis complexas, tínhamos neste trabalho o intuito de resolver problemas de propagação de ondas, em particular, pulsos sísmicos. Por estas razões, no primeiro capítulo desenvolvemos a teoria necessária para obter o teorema dos resíduos e no segundo capítulo fizemos um estudo das transformadas de Fourier, Laplace e Hankel.

Em geral, problemas de propagação de pulsos sísmicos são descritos por equações diferenciais parciais de segunda ordem do tipo hiperbólico, tendo domínio espacial infinito ou semi-infinito e condições de contorno especificadas. Tais equações podem ser resolvidas através da metodologia das transformadas de Fourier e Hankel na parte espacial e Laplace, para eliminar a dependência temporal, o chamado método da justaposição de

transformadas. Este belo e poderoso método nos conduz, em geral, a equações algébricas, cujas soluções são, na maioria dos casos, mais simples de serem obtidas. Neste ponto, para recuperar a solução do problema de partida, devemos calcular as transformadas inversas. A ordem de inversão das transformadas, em geral, depende do problema em consideração.

No quarto capítulo deste trabalho nos dedicamos ao estudo do método proposto pelo famoso matemático francês L. Cagniard, bem como uma de suas modificações, proposta por de Hoop, para o cálculo de inversão da justaposição de transformadas.

No quinto capítulo foi dado um sentido prático aos conceitos anteriormente desenvolvidos, na seção 5.1 é feito um interessante uso de contornos de integração no plano complexo, através do qual obtemos importantes relações entre funções hiperbólicas além de uma representação para o número irracional  $\pi$  historicamente atribuída a Leibniz ao passo que na Seção 5.2 foi utilizado um princípio análogo ao do método de Cagniard envolvendo a transformada de Hankel para a resolução de um problema de cálculo do potencial elétrico. Além disso, no quinto capítulo pudemos comparar o método de Cagniard com o método de Cagniard-de Hoop, uma vez que resolvemos uma série de problemas práticos utilizando, ora o método de Cagniard e ora o método de Cagniard-de Hoop.

Após o desenvolvimento do quarto capítulo ficou nítido o porquê da solicitação de alguns geofísicos junto com C. Hewitt Dix para que este publicasse um estudo sobre o método de Cagniard evitando os detalhes matemáticos utilizados. O método de Cagniard-de Hoop além de ser mais simples de ser compreendido nos possibilita resolver uma gama maior de problemas como pode ser visto nas seções 5.4, 5.5 e 5.6. Além disso, ao utilizar o método de Cagniard para resolver problemas de pulsos sísmicos é comum encontrar expressões bastante complicadas, as quais são, em boa parte dos casos, evitadas ao utilizar o método de Cagniard-de Hoop.

Sendo assim, concluímos que, apesar de o método de Cagniard ser uma excelente ferramenta para o cálculo da transformada inversa na justaposição das transformadas, o método de Cagniard-de Hoop se mostra mais eficiente e aplicável.

Convém ressaltar, ainda, a evolução da teoria de variáveis complexas bem como sua contribuição tecnológica que passou de um estudo de raízes de equações cúbicas para uma contribuição no entendimento de fenômenos ondulatórios como a propagação de terremotos, maremotos e transmissão de dados por satélites.

Um continuação natural deste trabalho é atacar problemas um pouco mais complicados (talvez um pouco mais reais) onde as chamadas funções especiais desempenham papel importante. Em particular citamos os trabalhos de Moshinskii[26] onde as funções de Legendre de segunda espécie se constituem na solução e Nikoskinen-Lindell[27] onde agora as funções de Bessel fornecem a solução. Por outro lado, Duffy[28] utilizando a transformada de Hankel, conduz um problema envolvendo ondas advindas de explosões vulcânicas, num outro problema cuja solução também é dada em termos de funções de Bessel.

Uma outra abordagem pode ser o estudo de variações mais eficientes do método de Cagniard conforme a proposta de Murrel e Ungar[4]. Enfim, como um outro tipo de aplicação podemos citar o estudo das relações de dispersão[9] onde o teorema dos resíduos e o valor principal de Cauchy desempenham um papel crucial.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Convém resaltar que devemos preparar uma nova versão do trabalho[17] a fim de submetê-lo a publicação.

# Referências Bibliográficas

- [1] L. P. E Cagniard, E. A Flinn and C. H. Dix, *Reflection and refraction of progressive seismic waves*, McGraw-Hill, New York, (1962).

Referência fundamental para a elaboração deste trabalho, bem como para a maioria dos estudos envolvendo equações de propagação de pulsos sísmicos. Este belo livro traz uma descrição completa do método proposto por Cagniard para a inversão da justaposição de transformadas integrais. Provavelmente por ser um livro bastante profundo, sua leitura é bem pouco direta.

- [2] A. T. Hoop, *A modification of Cagniard's method for seismic pulse problem*, Appl. Sci. Res., **B8**, 349-356(1960).

A aplicação do método de Cagniard para problemas tridimensionais envolvendo pulsos sísmicos costuma conduzir a expressões bastante complicadas. Neste trabalho, de Hoop propõe, com o intuito de simplificar os cálculos e de maneira extremamente clara e didática, uma modificação no método proposto por Cagniard, através da substituição de uma das transformada de Laplace do método original, por uma de Fourier.

- [3] D. C. Gakenheimer and J. Miklowitz, *Transient excitation of elastic half-space by a point load travelling on the surface*, J. Appl. Mech., **36**, 505-515, (1969).

Neste artigo o método de Cagniard-de Hoop é utilizado para resolver um problema de propagação de uma onda em um semi-espaco homogêneo e isotrópico. É notável a simplicidade e didática como que os autores formulam e resolvem o problema. Além disso, esta é uma boa opção para se ter uma visão mais clara da utilização do método de Cagniard-de Hoop.

- [4] H. C. Murrel and A. Ungar, *From Cagniard's method for solving seismic pulse problems to the method of the differential transform*, Comp. Maths. Appls., **8**, 103-118, (1982).

Ao aplicar o método de Cagniard fazemos, em geral, o uso de deformação de caminhos de integração, integrações no plano complexo e, em alguns caso, ramos de corte. O método proposto neste artigo faz uso do assim chamado método das transformadas diferenciais, que é uma variação do método de Cagniard e evita algumas complicações comumente encontradas ao utilizar o método original. Além disso, afim de comparar o método original com o método modificado, um problema de propagação é resolvido utilizando ambos os métodos.

- [5] E. Lages Lima, *Espaços Métricos*, Coleção IMPA, Vol.1, Rio de Janeiro (1993).  
Este é um dos mais premiados e bem conceituados livros introdutórios em espaços métricos, sua leitura é bastante simples e direta. A definição de subconjunto compacto e propriedades associadas à esta definição, constantes neste trabalho, foram extraídas deste livro.
- [6] J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer-Verlag, New York, (1978).  
Por ser bastante claro e profundo, este é uma ótima opção de livro texto para disciplinas de pós-graduação. As demonstrações para nossas três versões da fórmula integral de Cauchy, bem como a demonstração do teorema de Cauchy-Goursat foram baseadas nas demonstrações dadas neste livro.
- [7] E. Capelas de Oliveira e W. A. Rodrigues Jr., *Introdução às variáveis complexas e aplicações*, Coleção IMECC, Vol.1, Campinas (2000).  
Além de ser um ótimo guia para estudos mais profundos, este é sem dúvida uma excelente opção de livro texto para disciplinas introdutórias em variáveis complexas. Este livro foi essencial para elaboração do primeiro capítulo deste trabalho uma vez que, boa parte das definições e teoremas foram extraídos do mesmo.
- [8] E. T. Copson, *An introduction to the theory of functions of a complex variable*, Lowe and Brydone, Printers, LTD, London (1957).  
Apesar de sua leitura não ser muito direta, possivelmente por ser um pouco antigo, este livro é bastante completo e rigoroso. Nele pudemos encontrar as demonstrações originais para os teoremas de Cauchy e Cauchy-Goursat.
- [9] H. M. Nussenzveig, *Casuality and dispersion relations*, Academic Press, New York, (1972).  
Importante referência para uma continuação do presente trabalho. Neste livro encontramos os aspectos primordiais do estudo das relações de dispersão além de outras aplicações da teoria de funções de variáveis complexas.
- [10] V.A. Ditkin and A.P. Prudnikov, traduzido por I. N. Sneddon, *Integral Transforms and Operational Calculus*, Pergamon Press Ltd., Headington Hill Hall, Oxford, (1995).  
Também essencial para a construção do segundo capítulo deste trabalho, apesar de ser pouco detalhista, encontramos neste livro a demonstração para a fórmula da transformada de Laplace inversa, bem como propriedades associadas a transformada de Laplace, Fourier e Hankel.
- [11] G. P. Tolstov, traduzido por R. A. Silverman, *Fourier Series*, Dover Publications, Inc., New York, (1976).  
Bastante direto e completo este livro foi fundamental para a elaboração do segundo capítulo deste trabalho. Além de resultados sobre a série e transformada de Fourier, nele obtivemos também a fórmula de Fourier-Bessel, peça chave para demonstrar a fórmula da transformada de Hankel inversa.

- [12] P. R. Garabedian, *Partial differential equations*, AMS Chelsea Publishing, Rhode Island, (1998).

Bastante completo e detalhista este livro foi fundamental para a elaboração da Seção 3.1, onde estudamos equações diferenciais parciais de segunda ordem.

- [13] E. Capelas de Oliveira e J. Emílio Maiorino *Introdução aos Métodos de Matemática Aplicada*, Coleção Livro-texto, IMECC, Vol.1, segunda edição, Campinas (2003).

Por ser um livro bastante claro e direto, além de ser repleto de exercícios resolvidos e de figuras este é um ótimo guia bem como um ótimo livro de resumo para o estudo de equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais. Os métodos de separação de variáveis e função de Green foram extraídos deste livro.

- [14] Y. C. Fung, *Fundamentals of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliff, N.J., (1965).

Além de ser referência obrigatória para estudos envolvendo equações de movimento em meios elásticos, este livro desenvolve o importante papel de elo entre livros elementares e avançados no estudo de mecânica dos sólidos. A dedução das equações de propagação presentes no Capítulo 4 foram encontradas nele.

- [15] A. E. H. Love *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, New York, (1944).

Constantemente citado em artigos envolvendo meios elásticos, este livros faz, entre outros, um estudo minucioso da lei de Hook, suas conseqüências e aplicações. Neste trabalho, este livro foi utilizado como um guia para o livro de Y. C. Fung, tendo assim contribuído para a dedução das equações de propagação presentes no Capítulo 4.

- [16] Ewing. W. M., W. S. Jardetzky, and F. Press, *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, (1977).

Também utilizado como um guia para o entendimento do livro de Y. C. Fung este foi de particular utilidade para a dedução das equações diferenciais parciais que regem eventos ondulatórios em meios elásticos.

- [17] E. Capelas de Oliveira, Ary O. Chiacchio and R. de Figueiredo Camargo *On a real integral: Particular case*, Relatório de Pesquisa RP43/03 - Setembro de 2003.

Neste relatório tive o enorme prazer de trabalhar com os professores Ary e Edmundo. Utilizando dois convenientes contornos de integração no plano complexo calculamos uma integral real dependendo de dois parâmetros e a partir destes dois cálculos obtivemos uma interessante relação entre funções trigonométricas e hiperbólicas. Vários casos particulares foram discutidos, entre eles uma famosa representação para o número irracional  $\pi$  historicamente atribuída a Leibniz.

- [18] Mrinal K. Paul and Buddhadeb Banerjee *Electrical Potentials to a Point Source upon Models of Continuously Conductivity*, Pure and Applied Geophysics, **80**, 218-237 (1970).

Utilizando um método bastante parecido ao de Cagniard, Paul e Banerjee fazem um interessante uso da transformada de Hankel para resolver um problema envolvendo um potencial elétrico. Além da transformada de Hankel, a teoria de variáveis complexas desenvolvida no primeiro capítulo é intensamente utilizada.

- [19] C. Hewitt Dix, *The Method of Cagniard in Seismic Pulse Problems* Geophysics, Vol XIX, No. 4 (october, 1954), pages 722-738.

Na Seção 5.3 do presente trabalho seguimos este primoroso estudo do método de Cagniard feito por Dix. Com o intuito de dar uma visão mais clara do referido método Dix considerou um caso particular bastante simples. Utilizando este caso particular o cálculo de algumas expressões algébricas bastante complicadas são evitadas e uma visão bastante satisfatória do método de Cagniard é feita. Uma vez que Dix não investiga muito a fundo os detalhes matemáticos é recomendável que se leia este artigo junto com a referência [1].

- [20] E. Capelas de Oliveira and Ary O. Chiacchio *A real integral by means of complex integration*, Int. J. Math. Educ. Scien. Technol. **8**, 596-601, (2004).

Neste artigo é apresentada e discutida, através de integrações no plano complexo, uma classe de integrais reais envolvendo funções hiperbólicas, uma representação integral bastante presente em problemas de Física é obtida. Este artigo nos foi de particular interesse para construção de alguns contornos de integração presentes no Capítulo 5.

- [21] E. Butkov, *Mathematical Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New York, (1968).

Utilizando a metodologia da transformada de Fourier para resolver a equação diferencial parcial associada ao potencial eletrostático entre quatro chapas condutoras com condições de contorno conveniente nos deparamos, ao aplicar a transformada de Fourier inversa, com uma integral bastante complicada. Tal integral foi extraída do presente livro e resolvê-la foi um dos objetivos do trabalho que fiz em parceria com os professores Ary e Edmundo.

- [22] H. Bateman, *Tables of Integral Transforms*, Vol. II, McGraw Hill Book Company, Inc., (1954).

A assim chamada integral de Sommerfeld é uma classe de integrais bastante complexas que envolvem funções de Bessel em integrais impróprias. O valor de tais integrais é necessário para a resolução de inúmeros problemas, como por exemplo os problemas das Seções 5.2 e 5.3. Nesta referência encontramos ferramentas para calcular a referida integral.

- [23] A. T. de Hoop and M. L. Oristaglio, *Application of the modified Cagniard technique to transient electromagnetic diffusion problems*, Geophysical Journal, Vol 94, pages 387-397, (1988).

O método de Cagniard foi desenvolvido para resolver problemas de propagação de



pulsos sísmicos. Neste trabalho de Hoop e Oristaglio mostram que com a modificação proposta o método de Cagniard é perfeitamente adaptado para resolução de problemas de difusão eletromagnética em dois meios semi-infinitos com diferentes condutividades elétricas. Como de costume, de Hoop escreveu este artigo de maneira bastante clara e didática o que o torna bastante acessível.

- [24] Y. Sakai and I. Kawasaki, *Analytic Waveforms for a Line Source in a Transversely Isotropic Medium*, Journal of Geophysical Research. Vol. 95, no. b7, pages 11333-11344, July 10, 1990.

Como já citamos anteriormente, o método Cagniard foi desenvolvido para resolver problemas de propagação de pulsos sísmicos em meios homogêneos e isotrópicos. Este trabalho foi de particular interesse uma vez que foi mostrado que o método de Cagniard-de Hoop também é perfeitamente adaptável para problemas envolvendo ondas anisotrópicas geradas por um função impulso, como podemos ver na Seção 5.7.

- [25] R. A. Ross *The effect of an explosion in a compressible fluid under gravity*, Canadian Journal of Physics 39 (9): 1330-1346, (1961).

Apesar das expressões demasiadamente extensas, esta foi uma das mais interessantes aplicações uma vez que para o desenvolvimento dos cálculos foram necessários os principais conceitos desenvolvidos nos capítulos precedentes. Após a formulação do problema obtivemos uma EDP linear de segunda ordem do tipo hiperbólico (Capítulo 3), para resolver esta equação utilizamos a justaposição das transformadas de Fourier e de Laplace (Capítulo 2) e para inverter a justaposição das transformadas utilizamos o teorema dos resíduos (Capítulo 1) associado ao método de Cagniard (Capítulo 4).

- [26] A. I. Moshinskii, *Effective diffusion of a dynamically passive impurity in narrow channels*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **28**, 374-382, (1987).

- [27] K. I. Nikoskinen and I. V. Lindell, *Time-domain analysis of the Sommerfeld VMD problem based on the exact image theory*, IEEE Trans. Antennas Propagat. **AP-38**, 241-250, (1990).

- [28] D. G. Duffy, *On the generation of oceanic surface waves by underwater volcanic explosions*, J. Volcanol. Geotherm. Kes., **50**, 323-344 (1992).